

50376
1981
216-1

N° d'ordre : 284 50376
1981
216-1

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

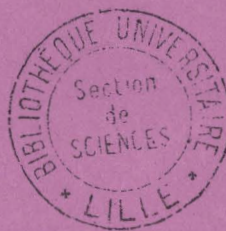
EN MECANIQUE

PAR

Jean-Marie CASTELAIN

ETUDE DU COMPORTEMENT

D'UN PEIGNE BATTANT DE MACHINE TEXTILE



Soutenue le 10 Décembre 1981.

15 ex

JURY

MM. FLAMME J.M.	ENSI Valenciennes	Président
HENRY J.P.	UST Lille	Rapporteur
AVEROUS M.	CERMAT Mulhouse	Examineur
DESMET B.	ENSAM Lille	Examineur
PARSY F.	UST Lille	Examineur
POLO J.	Ets THIBEAU Tourcoing	Examineur

SCD LILLE 1



D 030 294315 2

A Fabienne

A Sophie

A Antoine

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit ici permis de remercier vivement tous ceux qui m'ont apporté leur concours pour réaliser ce travail et en particulier :

Monsieur AVEROUS, Directeur du CERMAT (Centre de Recherche Mécanique Appliquée au Textile), Délégué régional à Mulhouse du CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques), qui m'a sensibilisé aux problèmes des mécanismes textiles ;

Monsieur PELISSON, Directeur des Etablissements Thibeau de Tourcoing, qui a bien voulu me confier l'étude du peigne vibrant détacheur de voile de carte développée dans cette thèse ; que Messieurs FAUCQUEZ, Chef du service technique, DELDIQUE, Chef du service électricité, POLO, Chef adjoint du Bureau d'études et COLOTTE, Chef du service essais, trouvent ici l'expression de ma profonde considération pour la disponibilité dont ils ont fait preuve à mon égard ;

Monsieur le Professeur FLAMME qui a accepté de diriger cette thèse et qui m'a toujours apporté une aide précieuse.

Ce mémoire est la première expression de recherche du laboratoire de mécanique de l'ENSAIT (Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles de Roubaix). Je suis reconnaissant à Monsieur PIGACHE, Directeur de cet établissement, de m'avoir donné les possibilités de créer ce laboratoire et de m'avoir encouragé dans la voie de la recherche.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur OUZIAUX, Directeur du Centre régional de Lille de l'ENSAM (Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers) qui m'a autorisé à venir travailler dans son laboratoire de mécanique.

Je remercie également Monsieur le Professeur HENRY qui a accepté la mission de rapporteur.

L'existence de cette thèse n'aurait pu être telle sans la collaboration de nombreuses personnes à qui je tiens à rendre hommage et tout particulièrement :

Monsieur le Professeur PARSY, pour les conversations fructueuses que j'ai entretenues avec lui me permettant d'éclaircir certains points de ce travail ;

Monsieur DESMET, qui m'a accueilli au laboratoire de mécanique de l'ENSAM et initié à l'utilisation de l'analyseur dynamique de structures appartenant à l'ADEIR (Association des Directeurs des Ecoles d'Ingénieurs de la région Nord-Pas-de-Calais) ;

Monsieur VERVOORT, de la Société Bruel et Kjaer France, pour l'aide qu'il m'a apportée à la réalisation de certaines mesures ;

Monsieur ZAKRZEWSKI de l'ENSTIMD (Ecole Nationale Supérieure des Techniques Industrielles et des Mines de Douai) qui m'a fait bénéficier de ses connaissances en collage extensométrique ;

Mes collègues de l'ENSAIT, Monsieur HUET, Madame BELLIER et Monsieur FOURNIER, pour les critiques du manuscrit et les nombreuses discussions et suggestions ayant abouti à la rédaction finale, mais surtout pour l'amitié et le soutien qu'ils m'ont apportés dans le cheminement de cette étude ;

Madame LALOUX, pour la mise en page dactylographique, dont la gentillesse et la patience m'ont facilité la tâche de façon considérable.

Avertissement :

L'un des objets de cette thèse est de fournir au constructeur un outil de travail directement exploitable en bureau d'études.

Nous avons par conséquent développé de manière très précise des notions théoriques (oscillateur à un degré de liberté, chapitre II) et décrit les chaînes de mesures utilisées dans les études expérimentales.

I - INTRODUCTION

Les Etablissements A. Thibeau et Cie, constructeur de machines textiles, en particulier de cardes, et situés à TOURCOING, ont déposé en France, et dans la plupart des pays d'Europe ainsi qu'aux Etats-Unis, un brevet intitulé : "Dispositif électromagnétique à oscillations entretenues utilisable, notamment, à la commande des peignes battants de machines textiles".

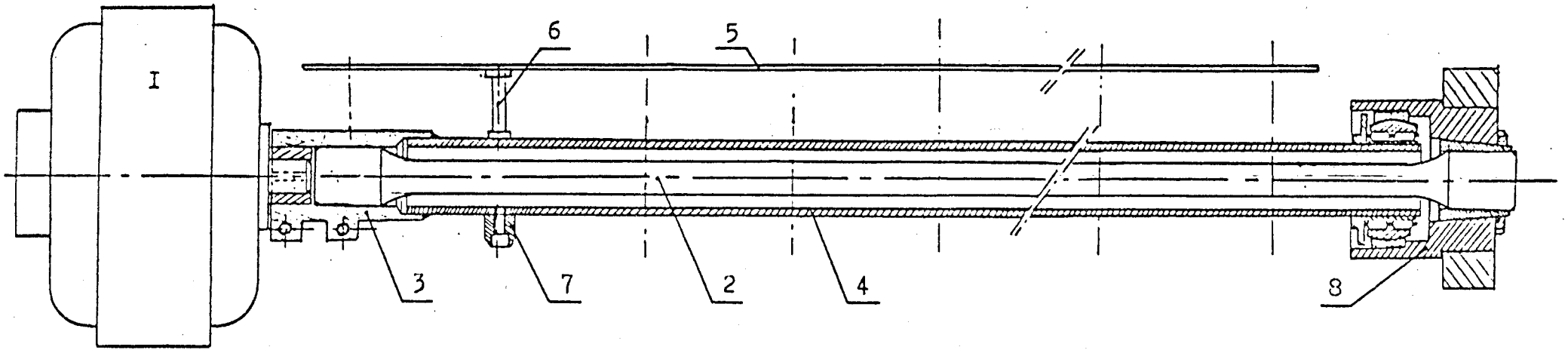
Ce mécanisme est l'élément final de la cardé ; il détache le voile formé sur le peigneur (dernier rouleau de la cardé).

Le système se compose d'un moteur électrique asynchrone monophasé (voir figure 1) dont le rotor est accouplé à l'extrémité de la barre de torsion cylindrique par un manchon. L'autre extrémité de la barre de torsion est encastree dans le bâti par l'intermédiaire d'une bague conique et d'un boîtier.

Un tube solidaire du manchon porte la monture composée de colonnettes, de la lame du peigne et des contre-poids. Un roulement à aiguilles assure une liaison rotule entre l'extrémité du tube et le bâti.

Les conditions d'auto-démarrage et les caractéristiques électrotechniques de fonctionnement du système sont décrites dans le brevet joint en annexe V.

Figure 1



_Schéma de principe du peigne battant électrique D.U.R
(brevet THIBEAU)

_Principle of running of flying doffing comb D.U.R
(THIBEAU'S patent)

_Grundsatzsplan des Ultra_schnellen Hackerkammes
D.U.R (Patent von THIBEAU)



Le régime de fonctionnement du peigne conditionne la production de la carde. La fréquence de battement des peignes vibrants des Etablissements THIBEAU est actuellement de 3 200 coups par minute, permettant de sortir un voile de la carde jusqu'à une vitesse de 85m/minute.

La recherche constante de la rentabilité de la carde nécessite un accroissement de la vitesse de fonctionnement du système qui détache le voile. L'amélioration des performances du mécanisme étudié passe par la modélisation et l'expérimentation du système existant, et ceci constitue l'objet de notre travail.

Messieurs B. COMTE, P. DELEPORTE, P. LACHIEZE-REY et C. SENECHAL, élèves ingénieurs à l'Institut Industriel du NORD ont abordé, en 1977, dans le cadre de leur mémoire de fin d'étude la schématisation du peigne oscillant que nous avons développée et analysée dans le second chapitre.

Cette mise en équation nécessitant trop d'hypothèses simplificatrices, nous avons été conduit à mener une campagne de mesures extensométriques tridirectionnelles et dynamiques sur l'arbre de torsion. Ces mesures ont nécessité le remplacement de la monture du peigne par un disque de moment d'inertie équivalent (moment exprimé par rapport à l'axe d'oscillation). La validité de cette substitution justifiée, les essais correspondants développés dans le chapitre III, ont permis de préciser le comportement de l'arbre lors du fonctionnement du mécanisme vibrant.

L'analyse vibratoire des résonances de flexion du peigne exposée dans le chapitre IV, nous a amené à négliger les phénomènes de flexion dans la modélisation du peigne détacheur de carde.

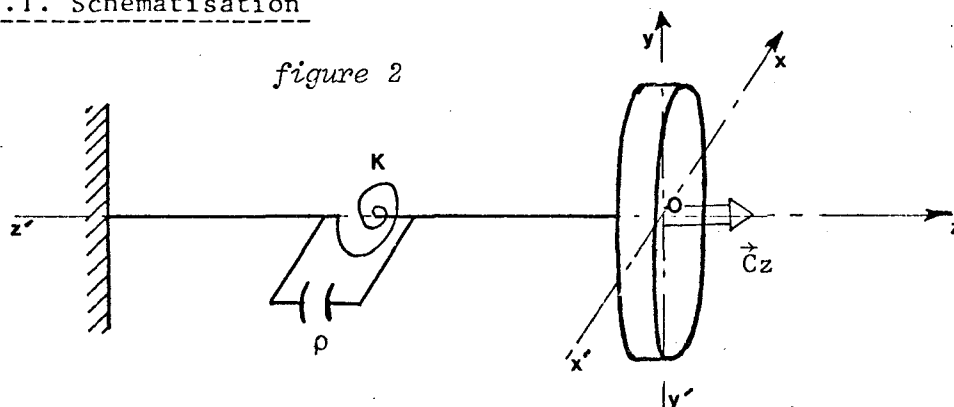
Nous avons effectué les études expérimentales à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles où Messieurs B. BERTRAND et C. POLLET VILLARD, élèves ingénieurs, ont étudié, sous notre direction, l'équilibrage dynamique de la monture du peigne et implanté le banc d'essais.

La connaissance du comportement de l'arbre de torsion ainsi que du système industriel, nous a conduit à proposer finalement, dans le chapitre V, une modélisation plus fine dont l'exploitation numérique sera effectuée ultérieurement dans le cadre d'une étude complémentaire.

II - SCHEMATISATION DU PEIGNE EN UN
OSCILLATEUR A UN DEGRE DE LIBERTE

II - 1°) CALCUL DES CARACTERISTIQUES MECANQUES DU SYSTEME, EQUATION
DU MOUVEMENT D'OSCILLATION.

II - 1.1. Schématisation



Le peigne est assimilé à un oscillateur à un degré de liberté : seul paramètre de mouvement, la rotation suivant $z'z$: $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}$

L'oscillateur comprend :

- Une masse pure, dont le moment d'inertie par rapport à l'axe $z'z$ est $Jz'z$. La masse est supposée symétrique, les produits d'inertie Jxz et Jyz sont donc nuls.
- Un ressort de torsion de raideur K
- Un amortisseur de torsion, de caractéristique ρ .

L'oscillateur est soumis à un couple moteur \vec{Cz} .

II - 1.2. Détermination du moment d'inertie du système par rapport à l'axe d'oscillation $z'z$.

Les calculs numériques sont effectués en annexe 1.

Les éléments du mécanisme qui possèdent un mouvement de rotation par rapport à l'axe $z'z$ sont :

- Le peigne $J_{\text{peigne}/z'z} = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
- Les colonnettes $J_{\text{colonnettes}/z'z} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
- Les contrepoids $J_{\text{contrepoids}/z'z} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
- Le tube support du peigne $J_{\text{tube}/z'z} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
- Le manchon d'accouplement $J_{\text{manchon}/z'z} = 2,86 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
- L'arbre de torsion :

Nous supposons que l'angle relatif de pivotement de deux sec-

tions est proportionnel à la distance des sections. L'arbre de torsion est encasté à une extrémité, et libre en rotation (axe $z'z$) à l'autre extrémité.

Hypothèse de calcul : le moment d'inertie de la barre de torsion sera divisé par deux.

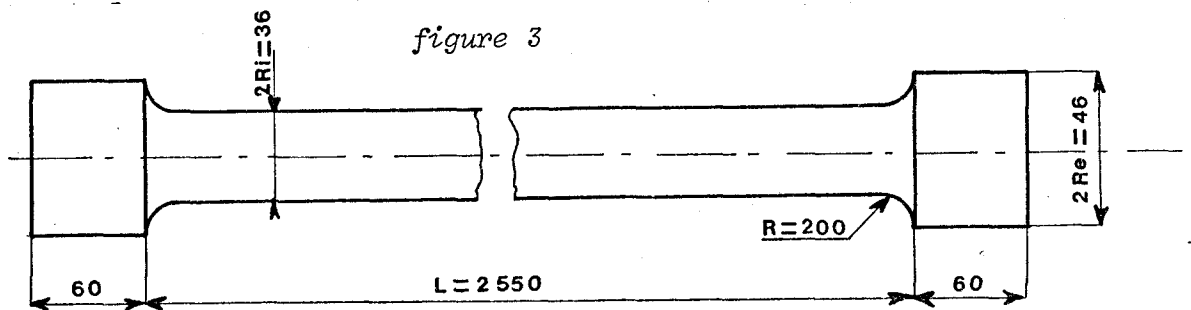
$$J \text{ arbre de torsion} = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$\text{- Le rotor moteur } J \text{ rotor}/z'z = 18,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Le moment d'inertie du peigne industriel par rapport à son axe d'oscillation est par conséquent :

$$J z'z = 5,26 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

II - 1.3. Détermination de la raideur K de l'arbre de torsion

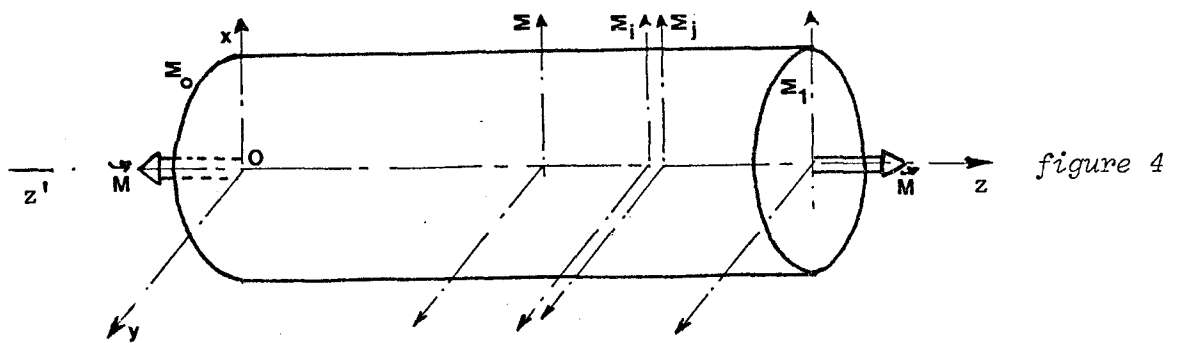


L'arbre de torsion est un arbre cylindrique comportant deux changements de section. Il est le siège, en ses deux extrémités, de concentrations de contraintes. Nous pouvons remarquer que :

- . Le rayon de courbure du congé $R = 200 \gg R_e$
- . Le rapport $\frac{R_e}{R_i} = 1,28$ est proche de l'unité.
- . La longueur de l'arbre soumise à la torsion $L = 2550\text{mm}$ est très peu différente de la longueur totale $L' = 2670\text{mm}$.

Nous admettrons en première approximation que l'arbre de torsion est entièrement cylindrique, de longueur L et de diamètre $2 R_i$.

II - 1.3.1. Torsion d'un arbre de section circulaire.



$$\text{Le solide est défini par } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 \leq z \leq L \end{cases}$$

Hypothèses :

- Deux sections perpendiculaires à l'axe z effectuent une rotation d'axe z sous l'effet du moment M_z^{\rightarrow}
- La déformation résulte donc en un glissement relatif entre deux sections voisines.
- La variation angulaire de rotation de section est linéaire.
 $\alpha = \frac{d\theta}{dz}$, α est l'angle de torsion par unité de longueur
 $\theta = \alpha z$.

Etude du champ de déplacement

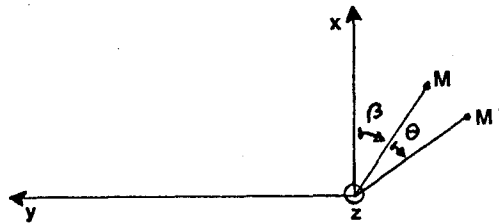


figure 5

Soit un point M dans une section droite Σ . Après application du moment de torsion, le point M se déplace en M' :

$$\left\{ \begin{array}{l} M' \in \Sigma \\ OM = OM' = r \\ \widehat{MOM'} = \theta \end{array} \right.$$

Soient u et v, variables caractérisant ce déplacement dans le repère x, y, z.

$$M \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad M' \begin{cases} x + u \\ y + v \\ z \end{cases}$$

Dans le plan x o y : section Σ .

$$M \begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases} \quad M' \begin{cases} x + u = r \cos (\beta + \theta) \\ y + v = r \sin (\beta + \theta) \end{cases}$$

donc, $u = r \cos (\beta + \theta) - r \cos \beta = r [\cos \beta (\cos \theta - 1) - \sin \beta \sin \theta]$

$v = r \sin (\beta + \theta) - r \sin \beta = r [\cos \beta \sin \theta + \sin \beta (\cos \theta - 1)]$

ainsi, $u = x (\cos \theta - 1) - y \sin \theta$

$v = x \sin \theta + y (\cos \theta - 1)$

Nous nous plaçons dans le cas des petites déformations :

$$\sin \theta \approx \theta \text{ et } \cos \theta \approx 1.$$

alors, $u = -y \theta$

$$v = x \theta$$

en outre, si $\theta = \alpha z$, le champ de déformation peut s'écrire :

$$\begin{cases} u = -\alpha y z \\ v = \alpha x z \\ w = 0. \end{cases}$$

Tenseur des déformations

$$[\vec{\epsilon}] = \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$[\vec{\epsilon}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} y \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} x \\ -\frac{\alpha}{2} y & \frac{\alpha}{2} x & 0 \end{pmatrix}$$

Les relations de Lamé permettent d'écrire :

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \epsilon_{ij} + \lambda (\text{trace } \vec{\epsilon}) \delta_{ij}$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé

δ_{ij} l'indice de Krôncker

Tenseur des contraintes

en appliquant les relations de Lamé :

$$\sigma_{ij} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha y \\ 0 & 0 & \alpha x \\ -\alpha y & \alpha x & 0 \end{pmatrix}$$

Recherchons la contrainte appliquée une section Σ

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \vec{n}$$

\vec{n} est un vecteur normal à Σ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{xyz}$

$$\vec{T}_z = \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mu \alpha y \vec{x} + \mu \alpha x \vec{y}$$

II - 1.3.2. Constante de rappel élastique de l'arbre

Isolons un élément de cylindre compris entre les sections droites Σ_i et Σ_j

Le torseur des forces extérieures appliqué à l'élément de cylindre est, en régime statique, un torseur nul.

Soit :
$$\vec{M}_z^t - \iint_{\Sigma} (\vec{OM} \wedge \vec{T}_z) ds = 0$$

\vec{M}_z^t est le moment des forces de gauche appliqué à la section Σ_i

\vec{T}_z est la contrainte appliquée au point M de la section Σ_j

$$\vec{OM} \wedge \vec{T}_z = \begin{vmatrix} x & -\mu \alpha y \\ y & +\mu \alpha x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu \alpha (x^2 + y^2) \vec{z}$$

$$\text{donc } \vec{M}_z = \left[\iiint_{\Sigma} \mu \alpha (x^2 + y^2) dx dy \right] \vec{z}$$

soit en coordonnées polaires

$$\vec{M}_z = \left[\mu \alpha \iint_{\Sigma} r^2 r dr d\theta \right] \vec{z}$$

$$\vec{M}_z = \left[\mu \alpha \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \right] \vec{z}$$

$$\vec{M}_z = \left[\mu \alpha \frac{R^4}{4} \times 2\pi \right] \vec{z}$$

$$\vec{M}_z = \left(G \frac{\pi R^4}{2} \alpha \right) \vec{z}$$

θ est la position angulaire de la section en bout d'arbre, après application du moment de torsion ; par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\vec{M}_z = G \frac{\pi R^4}{2} \frac{\theta}{L} \vec{z}$$

Le moment de rappel élastique est $K \theta$ avec

$$K = G \frac{\pi R^4}{2L}$$

L'acier composant l'arbre de torsion a pour caractéristiques :

$$G = 79850 \text{ N/mm}^2$$

$$L = 2550\text{mm} \quad R = 18\text{mm}$$

d'où il résulte :

$$K = \frac{79850 \cdot 10^6 \cdot (18 \cdot 10^{-3})^4}{2 \times 2,55} = 5164\text{Nm}$$

$K = 5164\text{Nm}$

II - 1.4. Equation du mouvement d'oscillation du système :

Dans la schématisation proposée (voir figure 2), le rotor est assimilé à une masse pure (non élastique, non visqueuse), répartie en un cylindre d'axe de révolution $z'z$, de centre de gravité O.

en 0, le torseur dynamique peut s'écrire :

$$\left. \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Jz'z \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} - 9 - \\ 0, x, y, z \end{array}$$

en 0, le torseur des forces extérieures
peut s'écrire :

$$\left. \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C - K\theta - \rho \frac{d\theta}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0, x, y, z \end{array}$$

où C est le couple moteur

K θ le moment exercé par le ressort sur la masse

$\rho \frac{d\theta}{dt}$ le moment exercé par l'amortisseur sur la masse.

Egalons les deux torseurs :

$$Jz'z \frac{d^2\theta}{dt^2} = C(t) - K\theta - \rho \frac{d\theta}{dt}$$

d'où l'équation différentielle :

$$Jz'z \frac{d^2\theta}{dt^2} + \rho \frac{d\theta}{dt} + K\theta = C(t),$$

en posant $2\delta = \frac{\rho}{Jz'z}$ et $\omega_0^2 = \frac{K}{Jz'z}$, il vient :

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{C(t)}{Jz'z}}$$

Dans le brevet d'invention se rapportant au système objet de notre étude, on affirme que le couple moteur est sinusoïdal (voir chapitre I), de pulsation Ω .

$$C(t) = C_0 \sin \Omega t$$

Nous devons donc résoudre l'équation différentielle classique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{C_0}{Jz'z} \sin \Omega t$$

+ Etude de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

l'équation caractéristique s'écrit : $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$

son déterminant $\Delta = \delta^2 - \omega_0^2$

on affirme également que l'amortissement du système est très faible. Nous supposons donc $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$. Si le développement des équations amené par cette hypothèse et le calcul de δ et ω_0 infirment cette supposition, nous recommencerons les calculs avec la relation $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$.

La solution générale peut donc s'écrire :

$$\theta = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi)$$

où $\omega = (\omega_0^2 - Jz'z^2)^{1/2}$

A et ϕ sont donnés par les conditions initiales.

+ Equation avec second membre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{C_0}{Jz'z} \sin \Omega t \quad (1)$$

en se plaçant dans le plan complexe :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{C_0}{Jz'z} e^{j\Omega t}$$

Déterminons une solution particulière de la forme $e^{j(\Omega t + \phi)}$

$$\theta = \theta_0 e^{j(\Omega t + \phi)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = j\Omega \theta_0 e^{j(\Omega t + \phi)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\Omega^2 \theta_0 e^{j(\Omega t + \phi)}$$

l'équation (1) s'écrit donc :

$$-\Omega^2 \theta_0 e^{j(\Omega t + \phi)} + 2\delta j\Omega \theta_0 e^{j(\Omega t + \phi)} + \omega_0^2 \theta_0 e^{j(\Omega t + \phi)} = \frac{C_0}{Jz'z} e^{j\Omega t}$$

$$\theta_0 e^{j\phi} (\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\delta\Omega) = \frac{C_0}{Jz'z}$$

$$\theta_0 e^{j\phi} = \frac{C_0}{Jz'z [(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2j\delta\Omega]}$$

$$\theta_0 e^{j\phi} = \frac{C_0}{Jz'z} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2j\delta\Omega}$$

nous obtenons :

$$\Theta_0 = \frac{C_0}{Jz'z} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \delta^2 \Omega^2}}$$

$$\phi = \text{Arctg} \frac{-2 \delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Nous pouvons donc écrire l'équation du mouvement d'oscillation du système :

$$\Theta = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi) + \Theta_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad (2)$$

Si $\delta t \gg 1$, le premier terme devient négligeable par rapport au second. Le système oscille donc à la fréquence Ω .

II - 1.5. Détermination du coefficient d'amortissement ρ du peigne vibrant.

L'amortissement caractérisé par le coefficient ρ se manifeste par une absorption de puissance lors du fonctionnement du peigne qui est due

- frottement interne des matériaux
- aux frottements mécaniques : - frottement des paliers
- frottement de la monture du peigne dans l'air.

La totalité de la puissance absorbée par les pertes inclut

- pertes par hystérésis et courants de Foucault

- les pertes électriques :
- perte par effet Joule dans les conducteurs

En régime permanent, le moteur électrique entretient le système mécanique en compensant l'énergie perdue par les divers frottements

{(puissance consommée par le moteur) - (Σ pertes électriques)} x 1 période = Energie mécanique dissipée par frottement sur une période.

L'énergie mécanique dissipée sur une période est égale au travail du moment des forces de frottement sur une période

$$\Delta w = \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t + \Gamma)} M f d\theta = \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t + \Gamma)} \rho \frac{d\theta}{dt} d\theta$$

où Γ est la période d'oscillation.

En supposant que ρ est constant et en prenant pour variable le temps,

$$\Delta W = \int_t^{t+\Gamma} \rho \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} dt = \rho \int_t^{t+\Gamma} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt$$

L'équation (2) permet d'exprimer le mouvement d'oscillation du peigne en régime permanent :

$$\theta = \theta_0 \sin (\Omega t + \phi)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \Omega \cos (\Omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \rho \int_t^{t+\Gamma} [\Omega \theta_0 \cos (\Omega t + \phi)]^2 dt \\ &= \rho \Omega^2 \theta_0^2 \int_t^{t+\Gamma} \frac{1 + \cos 2 (\Omega t + \phi)}{2} dt \\ &= \rho \Omega^2 \theta_0^2 \frac{\Gamma}{2} \quad \text{or} \quad \Gamma = \frac{2\tau}{\Omega} \end{aligned}$$

ainsi, $\Delta W = \rho \theta_0^2 \tau \Omega$

$$\rho \theta_0^2 \tau \Omega = \Gamma \times [\text{Puissance consommée} - \Sigma \text{ puissance dissipée par pertes électriques}] \quad (3)$$

Les pertes "fer" et "hystérésis" d'un moteur asynchrone monophasé sont difficilement chiffrables. Nous voulons montrer que la quantité $\delta^2 - \omega_0^2$ est négative.

La relation (3) permet d'écrire l'inéquation :

$$\rho \theta_0^2 \tau \Omega \leq \Gamma \times [\text{Puissance consommée}]$$

d'où

$$\rho \leq \frac{2 \times \text{Puissance consommée}}{\theta_0^2 \Omega^2}$$

les mesures électriques réalisées sur le moteur du peigne nous donnent :

$$\begin{aligned} \text{Puissance consommée} &= U \times I \times \cos \phi \\ &= 175 \text{ V} \times 6 \text{ A} \times 0,283 \end{aligned}$$

d'autre part $2\theta_0 = 0,36 \text{ rd.}$

$$\Omega = 335 \text{ rd s}^{-1}$$

d'où l'inéquation :

$$\rho \leq 0,1652 \text{ N.m.s}$$

$$\text{or } \delta = \frac{\rho}{2 Jz'z}$$

$$\text{donc } \delta \leq 1,57 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{et } \delta^2 - \omega_0^2 \leq 1,57^2 \text{ s}^{-2} - \omega_0^2$$

$$\leq 1,57^2 \text{ s}^{-2} - \frac{K}{Jz'z}$$

$$\leq \left(1,57^2 - \frac{5164}{5,26 \cdot 10^{-2}} \right) \text{ s}^{-2}$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 \leq - 98172 \text{ s}^{-2}$$

L'hypothèse de calcul initiale est bien vérifiée : $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$

L'équation d'oscillation du mouvement s'écrit :

$$\theta(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi) + \frac{C_0}{Jz'z} \times \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi)$$

où A et ϕ sont deux constantes dépendant des conditions initiales

C_0 est l'amplitude du couple moteur

Ω est la pulsation du couple moteur.

$$\phi = \text{Arctg} \frac{-2 \Omega \delta}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$Jz'z = 5,26 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{Jz'z} = \frac{5164}{5,26 \cdot 10^{-2}} = 98175 \text{ (rd/s)}^2, \omega_0 = 313,3 \text{ rd/s.}$$

$$\Omega = 335,10 \text{ rd/s}$$

$$\delta \leq 1,57 \text{ s}^{-1}$$

II - 2. ANALYSE DE LA SCHEMATISATION

II - 2. 1. Validité de la mise en équation :

Comparons les résultats théoriques obtenus avec les affirmations décrites dans le brevet : le peigne fonctionne à la fréquence propre du système oscillant.

La fréquence propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{Jz'z}} = 313 \text{ rd/s.}$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 49,86 \text{ Hz.}$$

Sur le système réel, nous avons mesuré une pulsation de fonctionnement

$$f = 52\text{Hz.}$$

Nous remarquons que ω_0 est proche de la pulsation $\Omega = 327\text{rd/s}$ du peigne ; ainsi, θ_0 , amplitude angulaire du mouvement en régime permanent atteint une valeur suffisante pour assurer le bon fonctionnement du peigne.

Cette formulation est donc satisfaisante pour un calcul de prédétermination d'arbre de torsion.

II - 2.2. Limites de cette méthode.

II - 2.2.1. Hypothèses de calcul.

La mise en équation du peigne a nécessité plusieurs hypothèses simplificatrices.

- + Nous supposons que la variation du couple moteur dans le temps est sinusoïdale ce qui ne peut être vérifié qu'expérimentalement.
- + La schématisation du peigne en un système à un degré de liberté ne tient pas compte complètement de la géométrie réelle du système, et en particulier de la dissymétrie par rapport à l'axe d'oscillation $z'z$ qui peut amener des phénomènes de flexion.
- + La raideur de l'arbre de torsion a été calculée selon les hypothèses de Barré Saint-Venant dans le cadre de la statique, ce qui est en contradiction avec l'utilisation de ce coefficient dans une équation différentielle traduisant le comportement dynamique d'un système.

II - 2.2.2. Exploitation des résultats

La schématisation ne fournit aucun renseignement sur la valeur et la répartition des contraintes que subit l'arbre de torsion lors du fonctionnement du peigne.

III - ETUDE EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT DE L'ARBRE DE TORSION.

III - 1°) INTRODUCTION

Modéliser le peigne en un oscillateur à un degré de liberté est insuffisant. Une meilleure approche mathématique du système nécessite la connaissance du champ de déformations existant à la surface de l'arbre de torsion lors du fonctionnement du peigne.

Des mesures extensométriques permettent une telle détermination. Dans le mécanisme industriel, l'arbre de torsion est logé dans un tube sur lequel est fixé le peigne. L'accès direct à cet arbre est donc difficile.

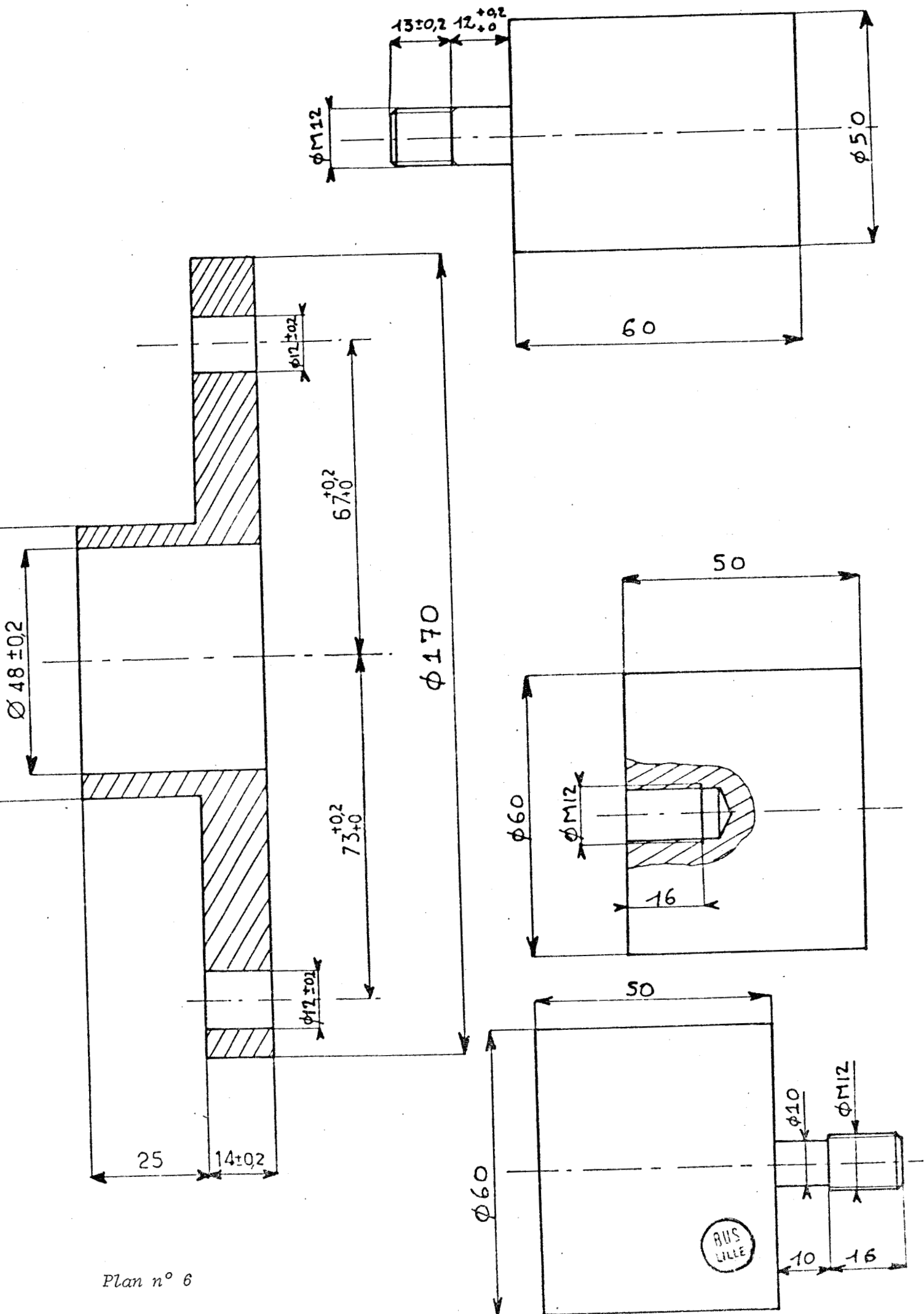
Nous avons remplacé le tube et le peigne par un disque dont le moment d'inertie par rapport à l'axe longitudinal d'oscillations est équivalent au moment d'inertie de la monture complète. Ce disque est installé sur un manchon d'accouplement reliant l'arbre moteur à l'extrémité libre de la barre de torsion.

III - 2°) REMPLACEMENT DE LA MONTURE DU PEIGNE PAR UN DISQUE D'INERTIE EQUIVALENTE

III - 2.1. Calcul des dimensions du disque.

III - 2.1.1. Inertie de la monture.

Tous les moments d'inertie cités dans ce paragraphe sont exprimés par rapport à l'axe longitudinal d'oscillation du système ($z'z$). Les calculs de ces moments d'inertie sont réalisés en annexe 1



Plan n° 6

La monture comprend :

. Le peigne J peigne = $6,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

. Les colonnettes

- pied de colonnette J pied = $2,53 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

- tête de colonnette J tête = $1,33 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

Le moment d'inertie des 14 colonnettes est $J_c = 5,41 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

. Les contrepoids Jcp = $4,44 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

. Le tube J tube = $9,51 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

. Le manchon J manchon = $2,94 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

III - 2.1.2. Disque de moment d'inertie équivalent

Le manchon d'accouplement de l'arbre moteur et de l'arbre de torsion support du disque est identique au manchon initial.

Pour respecter la dissymétrie de la monture, nous remplacerons le tube par un disque, le peigne et les colonnettes par un balourd, les contrepoids par un second balourd diamétralement opposé. (voir plan 6)

Les calculs des dimensions du disque et des balourds se trouvent en annexe 1

Il faut maintenant vérifier la validité de la substitution du peigne au disque d'inertie équivalente.

III - 3°) VERIFICATION EXPERIMENTALE DE LA SUBSTITUTION DU PEIGNE AU DISQUE D'INERTIE EQUIVALENTE

Cette vérification va être réalisée par comparaison des spectres de fréquence des signaux vibratoires mesurés sur les paliers de guidage.

Une série de mesures est réalisée pour le peigne complet, une autre pour l'arbre de torsion et le disque.

Les phénomènes mesurés sont en fait les vibrations, dues au fonctionnement des mécanismes étudiés et transmises par les paliers de guidage. Il y a donc modification du signal vibratoire initial par la fonction de transfert des paliers.

Pour réaliser les deux séries de mesures, nous avons utilisé les mêmes paliers et les mêmes conditions de serrage de l'arbre de torsion sur l'encastrement. Les fonctions de transfert des paliers étant alors identiques, nous avons comparé les différents spectres obtenus.

III - 3.1. Chaîne de mesure (figure 7)

III - 3.1.1. Un accéléromètre piézoélectrique est fixé rigidement sur le palier encastrement ou sur le palier moteur.

- sa masse de 13 grammes ne modifie pas les caractéristiques de la structure étudiée
- la gamme de linéarité en fréquence du capteur est très large (fréquence maximum = 20kHz).
- la gamme dynamique est élevée : accélération maximum : 10 000g.
- la fiche d'étalonnage est jointe en annexe 2

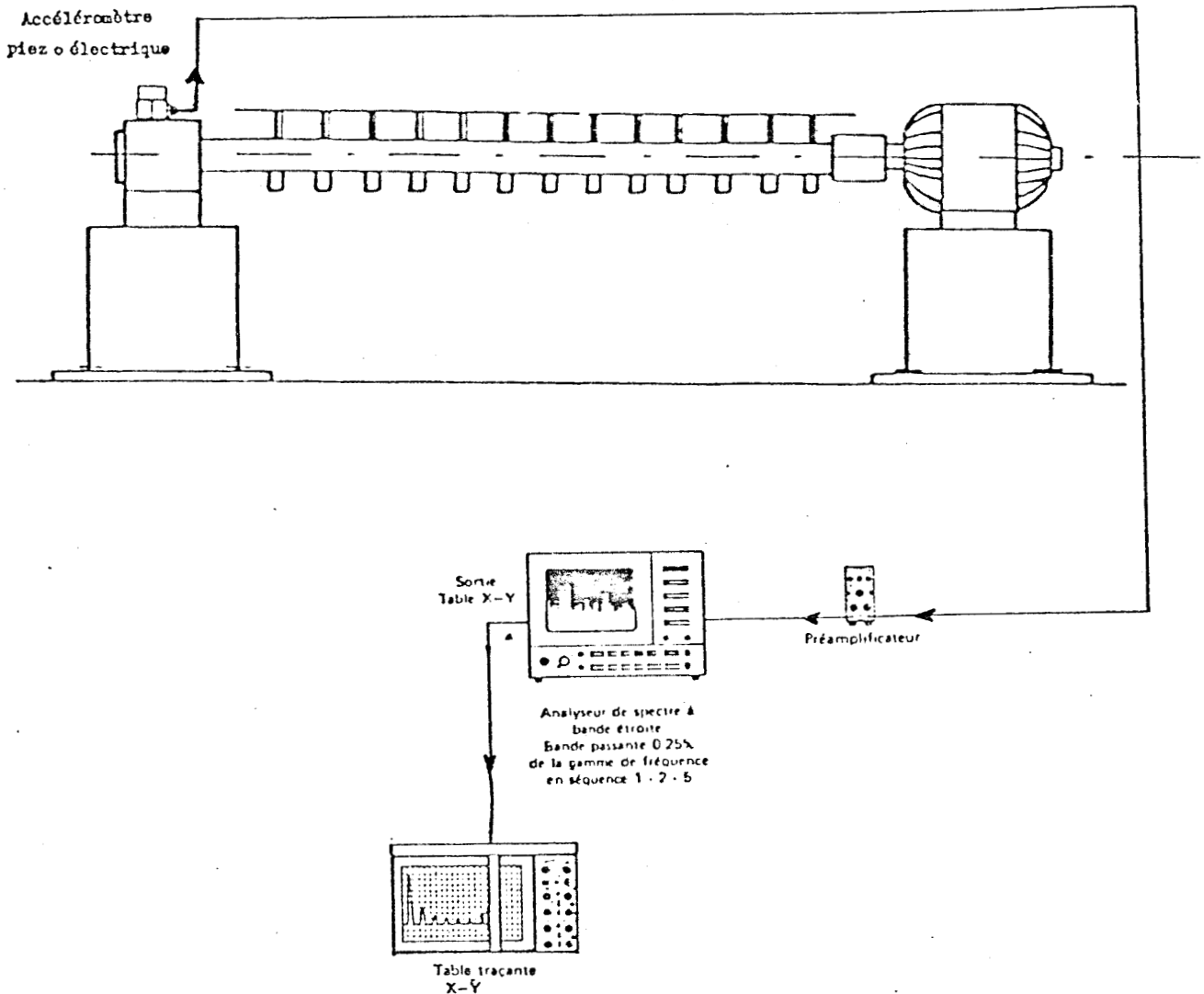


figure 7 : chaîne de mesure



III - 3.1.2. Un préamplificateur de charge.

Le capteur piézoélectrique possède une impédance de sortie très élevée (environ 20 000M Ω). Il est nécessaire d'utiliser un préamplificateur de charge pour améliorer la sensibilité du signal électrique analogique à la vibration mesurée.

Le préamplificateur possède :

- un intégrateur incorporé pour les mesures de vitesse et de déplacement
- un filtre passe bas de fréquence de coupure 20kHz.

Le préamplificateur de charge a une bande passante très large : de 0,1Hz à 200kHz.

III - 3.1.3. Un analyseur de spectre à bande étroite.

C'est un analyseur numérique qui analyse un signal et visualise son spectre en 400 bandes de largeur constante sur onze gammes de fréquence 0-10Hz à 0-20kHz avec une dynamique de 70 dB

Il permet d'analyser des signaux permanents et impulsionnels (fenêtres temporelles rectangulaires ou de Hanning). Il calcule les moyennes des spectres selon un mode exponentiel ou linéaire. Il peut ainsi traiter de 2 à 1024 spectres.

Une programmation interne à l'analyseur permet de tracer le spectre obtenu sur table traçante analogique.

III - 3.2. Mesures effectuées.

III - 3.2.1. Deux séries de mesures sont réalisées :

- sur le système industriel
- sur l'arbre avec le disque d'inertie

Chaque série de mesures comprend la mesure d'un signal vibratoire le calcul et le tracé du paramètre vitesse sur

- le palier encastrement . en un plan horizontal
. en un plan vertical
- le palier moteur . en un plan horizontal
. en un plan vertical

III - 3.2.2. Processus expérimental :

Le régime de fonctionnement du peigne indiqué par le constructeur est de 3 200 coups par minute, soit une fréquence d'oscillation de 53,33Hz.

Afin d'obtenir la meilleure dynamique, nous avons étudié le signal vitesse : les harmoniques de la fondamentale d'oscillation du système se situant en moyenne fréquence.

La résolution en fréquence de l'analyseur de spectre est égale au rapport de la gamme de fréquence au nombre de canaux dans cette gamme.

Le nombre de canaux (400) est indépendant de la fenêtre d'étude. Nous avons réalisé plusieurs analyses en fréquence en augmentant la fenêtre d'étude, ce qui a amélioré la précision des mesures en basses fréquences.

La variation dans le domaine des fréquences des signaux étudiés est donc reportée sur plusieurs graphes dont les étendues en fréquence sont :

Fenêtre de fréquence	Résolution
0-50 Hz	0,125 Hz
0-100 Hz	0,25 Hz
0-200 Hz	0,5 Hz
0-500 Hz	1,25 Hz
0-1000 Hz	2,5 Hz
0-2000 Hz	5 Hz
0-5000 Hz	12,5 Hz
0-20000 Hz	50 Hz

Time Function Start

seconds

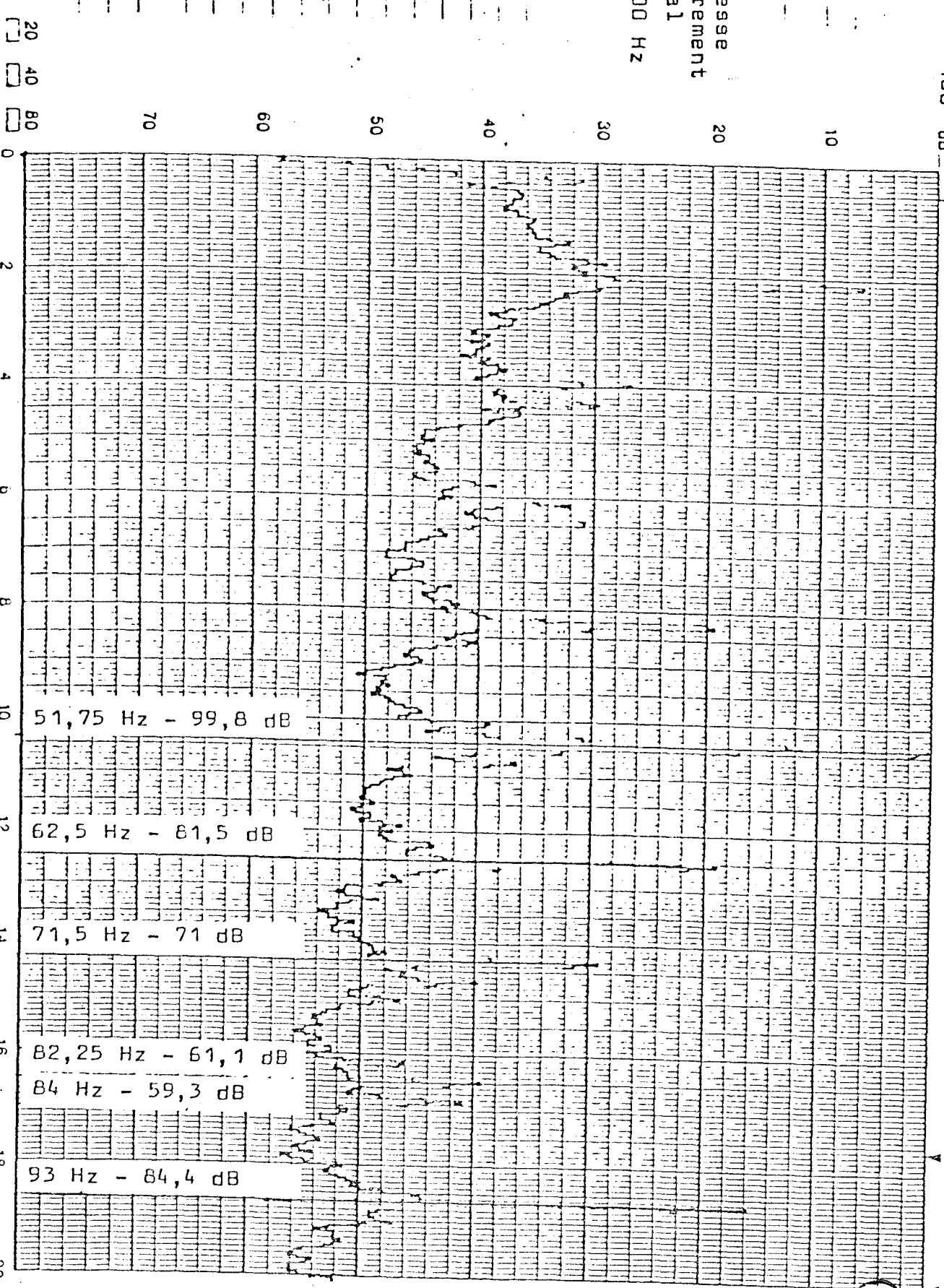
End

seconds

Not Expanded: [] Expanded: []

100 dB

mesure en vitesse
valier encastrement
plan horizontal
fenêtre de 100 Hz



Grappe 8

Time Function Start: 100

seconds

End:

seconds

Not Expanded: Expanded:



100 dB

dB Scale Level

S Frequency

Frequency

of Spectra

Comments

mesure en vitesse

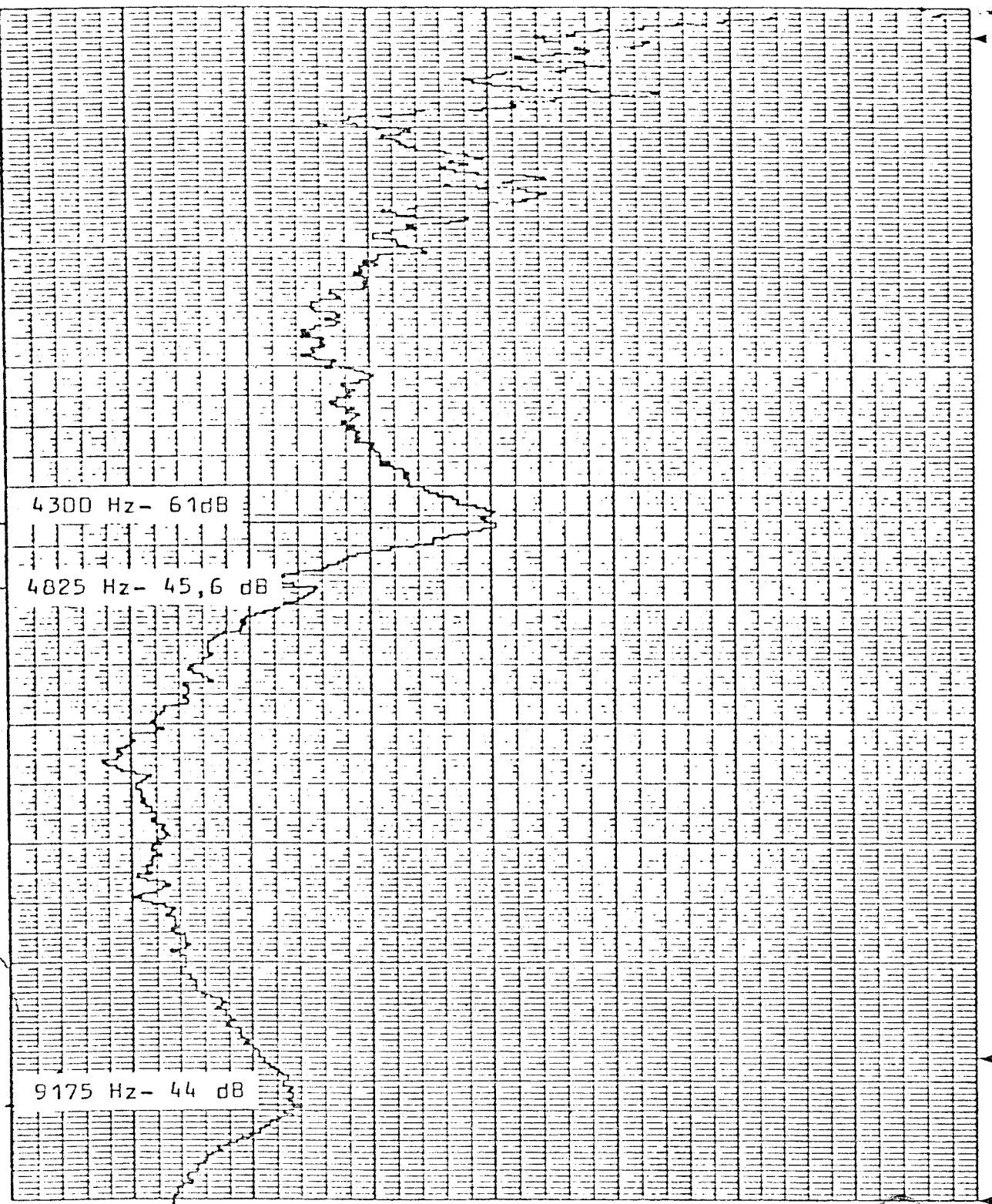
Plan horizontal

Palier Encastrement

Fenêtre de 10 K.Hz

20 40 80

70 60 50 40 30 20 10



Graphe 9

f.

Unit: 3 KHz

Time Function Start: seconds

End: seconds

Not Expanded: [] Expanded: []

130 dB

50 Hz

75.25 Hz

83 Hz

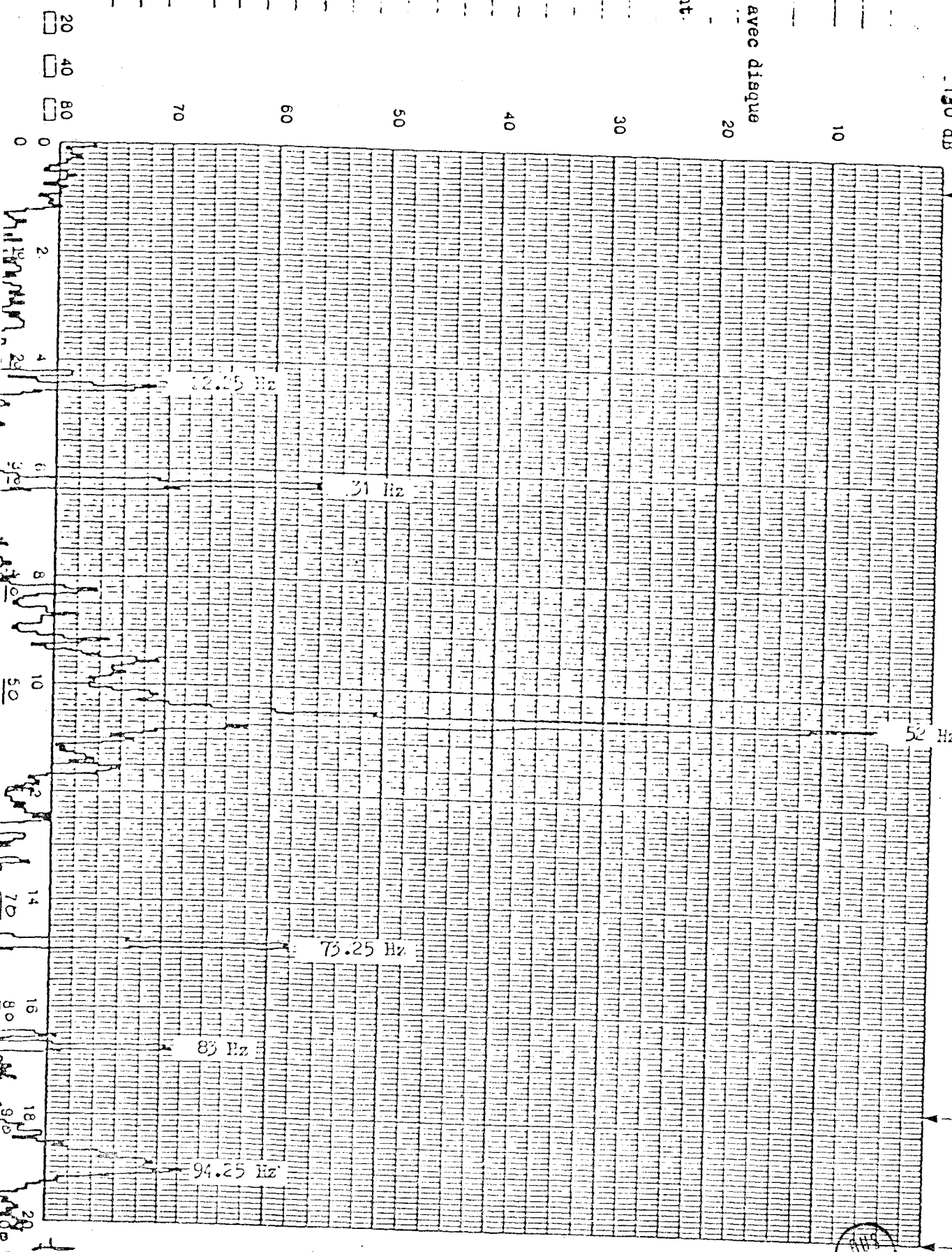
94.25 Hz

20 Hz

Form Scale Level: _____
R/S Frequency: _____
Weighting: _____
Average Mode: _____
No of Spectra: _____
Comments: _____

Mesure de vitesse avec disque
Plan horizontal
Palier encastrement
Penètre de 100 Hz

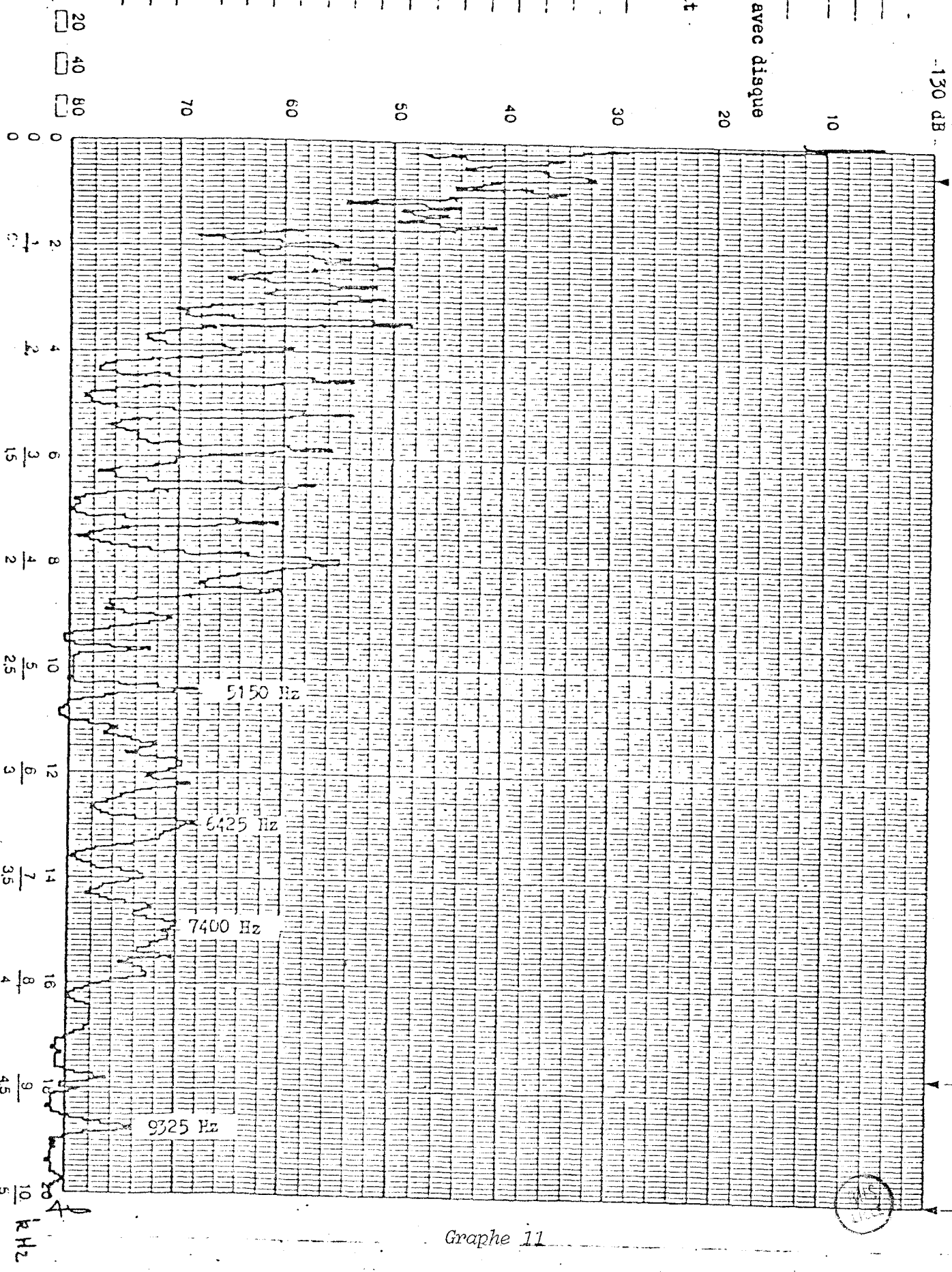
Record No.: _____
Date: _____
S. No.: _____



Graphe 10

Time Function Start: seconds End: seconds Not Expanded: Expanded:

Run Scale Level:
 F S Frequency:
 Weighting:
 Average Mode:
 No of Spectra:
 Comments:
 Mesure de vitesse avec disque
 Plan horizontal
 Palier encastrement
 largeur de 10 kHz
 Niveau:
 Unité:
 Niveau NO:
 Sign:



Graphe 11

+ fréquences comprises entre 0Hz et 100Hz : graphe 10

+ fréquences comprises entre 0Hz et 10kHz : graphe 11

Nous avons reporté dans un tableau les différentes fréquences des maxima relevés dans le cas précédemment cité, pour le système réel et l'arbre de torsion avec le disque.

Les fréquences reliées par une flèche indiquent que, compte tenu de la résolution, on peut affirmer qu'elles sont provoquées par une même cause.

Résolution Hz	Système réel Hz	Arbre de torsion et disque Hz
0,125	1,6 10,75 19,75 21,375 23,125 28,75 30,5 32,125 41,125	21,125 22,375 30,875
0,25	51,75 62,5 71,5 82,25 84 93	52 73,25 83 94,25
0,5	103,75 114,5 123,5 145 155,5 166,5 175,15 187,5 197	104 156 187

1,25	207 250 258,75 281,25 311,25 362,5 375 393,75 466,25 497,5	← → 207,5 ← → 312,5 ← → 363,75 416,25
2,5	520 570 622,5 643 725 777,5 830 985	 645 ← → 832,5
5	1240 1430 1555 1750	1215 1405 1510 ← → 1745
12,5	2000 3012,5 4175 4300 4825	← → 2012 2300 2600 2925 3250 3600 3962 4225 4475



25	9175	5150 6425 7400 9325
----	------	------------------------------

Une telle méthode n'est valable que si le signal n'est pas aléatoire ce qui est le cas ici.

Un protocole de mesure (choix du mode de calcul des moyennes, nombre de spectres) a été déterminé pour que l'erreur commise dans le calcul du niveau de chaque canal soit inférieure à 0,25dB (soit 2,92%).

Les fréquences des différents maxima sont reportées sur les graphes. Plus la gamme de fréquence est étendue, moins la résolution en fréquence est bonne. Nous n'avons donc reporté sur les graphes que les valeurs des maxima qui n'appartenaient pas au graphe de gamme de fréquence inférieure. (Notons que la superposition des maxima sur les graphes de différentes gammes de fréquences vérifie le caractère déterministe du signal étudié).

III - 3.2.3. Analyse des résultats.

Les différentes courbes obtenues sont assemblées en annexe 2. Nous n'avons joint dans ce paragraphe que quatre graphes caractéristiques.

Sur palier encastrement, plan horizontal

. Système réel :

+ fréquences comprises entre 0Hz et 100Hz : graphe 8

+ fréquences comprises entre 0Hz et 10kHz : graphe 9

. Arbre de torsion et disque :

+ fréquences comprises entre 0Hz et 100Hz : graphe 10

+ fréquences comprises entre 0Hz et 10kHz : graphe 11

III - 3.2.4. Conclusions expérimentales

- Les niveaux vibratoires sont très comparables. La principale source de vibration est l'arbre de torsion, élément commun aux deux séries d'essais.

- Le niveau le plus important est obtenu dans les deux cas pour la fréquence de 52Hz qui correspond aux données du constructeur.

Pour le comportement en torsion de l'arbre, la substitution est donc vérifiée.

- Le spectre de fréquence de l'ensemble arbre de torsion et disque présente moins de pics en basse et en moyenne fréquence. Une très grande partie des maxima de ce spectre se retrouve dans le spectre du système réel.

De ces remarques, nous pouvons déduire que la substitution du disque à la monture du peigne est justifiée en ce qui concerne les phénomènes de torsion. La différence des spectres en haute fréquence provient du fait que le roulement à aiguilles qui guide le tube sur le palier d'encastrement de l'arbre de torsion ne fonctionne plus et qu'il ne produit donc plus de vibrations.

Nous pouvons affirmer que des phénomènes de flexion se produisent : existence de pics en basse fréquence, non harmoniques du fondamental d'oscillations. Ces phénomènes seront étudiés ultérieurement par une détermination expérimentale des fréquences de résonance de flexion du système réel et de l'ensemble arbre et disque.

III - 4. ETUDE EXTENSOMETRIQUE DE L'ARBRE DE TORSION.

Deux séries de huit jauges de contrainte sont collées à intervalles réguliers le long de l'arbre de torsion (voir annexe 3). L'une est placée suivant un plan tangent horizontal (numérotation impaire), l'autre suivant un plan tangent vertical (numérotation paire).

Les jauges sont tridirectionnelles. Lors de l'étude d'un point, une jauge à rosette est reliée à un pont de mesure dynamique à trois voies indépendantes. A la sortie du pont, les signaux amplifiés sont enregistrés sur bande magnétique

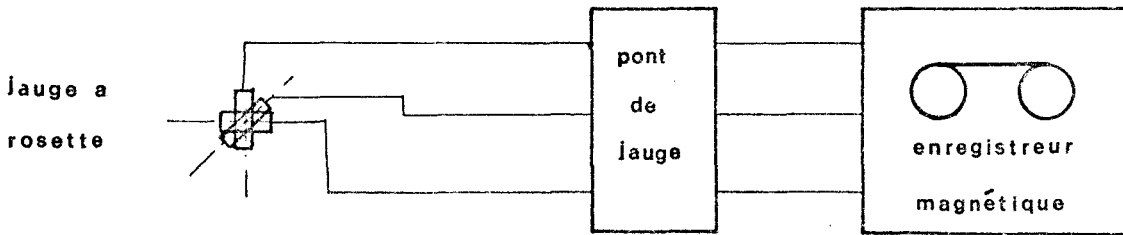


Figure 12

Nous avons donc enregistré simultanément 3 signaux analogiques proportionnels aux déformations relatives subies par une jauge à rosette suivant ses directions de mesure lors du mouvement de l'arbre de torsion. Nous avons alors numérisé simultanément ces trois signaux analogiques, par l'intermédiaire des mémoires numériques d'un analyseur de déformations dynamiques de structure. L'analyseur étant relié à un micro ordinateur, nous avons calculé la variation des déformations relatives principales et des contraintes principales.

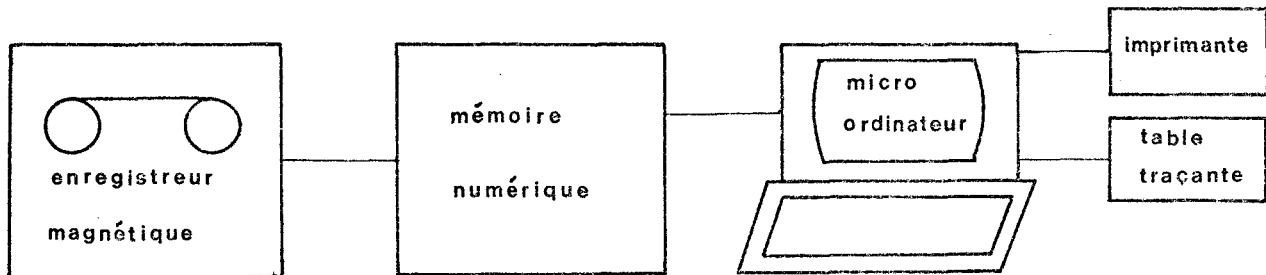


Figure 13

Nous avons reporté les résultats sur tableau ou sur graphe grâce à une table traçante numérique et une imprimante reliées au micro ordinateur.

III - 4.1. Chaîne de mesure analogique

III - 4.1.1. Les jauges de contrainte

Les jauges sont tridirectionnelles à 45°. Nous les avons orientées comme suit :

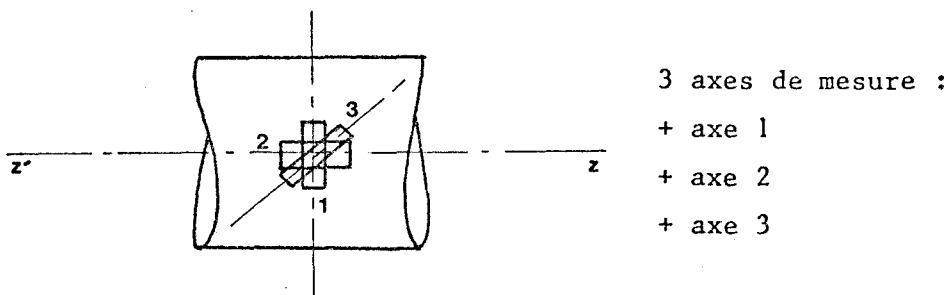


Figure 14

Chaque grille de jauge a une longueur utile de 3mm, nous pouvons donc négliger les dimensions des jauges devant celles de l'arbre. Le coefficient k des jauges employées est de 2,03. Les jauges sont thermiquement autocompensées.

III - 4.1.2. Pont de mesure.

Le pont de jauge utilisé est un pont dynamique à trois voies indépendantes.

- chaque voie a une excitation indépendante et réglée
- le gain est ajustable par réglage continu pour chacune des voies
- un réseau de conditionnement permet de brancher les jauges en quart de pont. Les jauges sont reliées au pont suivant un branchement à trois fils ce qui permet d'éliminer l'influence de la dérive thermique dans les conducteurs.
- l'excitation de la jauge se fait en courant continu.
- la bande passante de l'amplificateur de mesure est : 0Hz - 5k Hz avec une distorsion de $\pm 0,5$ dB. (Soit $\pm 5\%$).
- le pont de jauge délivre en sortie des signaux amplifiés proportionnels aux variations de longueur subies par la jauge.

III - 4.1.3. Enregistreur magnétique analogique.

Les trois voies de sortie du pont de jauge dynamique sont connectées à un enregistreur magnétique de caractéristiques :

- 4 voies
- enregistrement et reproduction en modulation de fréquence
- sensibilité d'entrée $\pm 0,1V$ à $\pm 10V$
- gamme de fréquence, rapport signal-bruit pour une vitesse

de bande de 7,5"/sec
0Hz < f < 5000Hz
signal/bruit = 40 dB
temps de montée = 75 µs.

III - 4.2. Mesures effectuées.

III - 4.2.1. Description.

Lors du fonctionnement de l'arbre de torsion, nous avons enregistré en différentes séquences, sur cassette magnétique, les signaux traduisant les variations relatives de longueur subies par les trois jauges de la rosette étudiée. Ces séquences sont au nombre de 16, elles sont repérées : 1, 2 ... 16 (voir annexe 3).

Nous avons aussi enregistré les déformations relatives de différentes jauges placées sur l'arbre suivant une orientation identique (aux incertitudes de collage près). Nous avons ainsi enregistré des signaux fournis par les jauges 1, 9, 15 et 2; 10, 16 et ce, pour les axes de mesure 1, 2, 3. Ces enregistrements permettront d'analyser un éventuel déphasage entre la variation des déformations relatives en différents points selon une même direction. Il y a 6 séquences de ce type.

III - 4.2.2. Processus expérimental.

Sur les rapports de mesure joints en annexe 3, nous avons reporté :
+ l'indice du point mesuré, et la voie étudiée :

5,2 point n° 5, voie 2.

+ le gain du pont

les déformations relatives subies par les jauges appartenant à la même rosette ont des valeurs très différentes. Pour obtenir un rapport signal/bruit le plus faible possible, nous avons réglé le gain du pont en fonction de l'amplitude de chaque phénomène étudié.

+ le gain de l'enregistreur

Remarques identiques à celles formulées ci-dessus

+ stabilité

le courant d'excitation des jauges est continu, les effets de thermo couple peuvent intervenir dans les mesures. De plus, le montage des jauges est en 1/4 de pont, une variation de résis-

tance provenant d'un effet thermique peut influencer également sur les mesures. Après avoir branché la jauge et alimenté le circuit, nous l'avons équilibré. Puis, les mesures étant réalisées, nous avons vérifié l'équilibrage. La mention "stable" signifie que celui-ci n'a pas été modifié.

+ repérage de la séquence de mesure.

Nous avons indiqué le numéro de la cassette d'enregistrement et le repérage au compteur de l'enregistreur.

+ sensibilité en $\mu \epsilon$ /Volt.

Compte tenu des différents gains et du coefficient de jauge, la sensibilité est :

$$S (\mu \epsilon/\text{Volt}) = 10^3 \times \text{gain enregistrement} \times \frac{k \text{ jauge}}{2} \times \frac{1000 \mu \epsilon}{\text{gain pont}}$$

Exemple de rapport : Point N° 1 :

Jauge	gain pont	gain en- registreur	N° cas- sette	N° compteur	Sensibilité $\mu \epsilon/V$
1,1	+ 2200	1	1	000-050	46,1
1,2	+ 2200	0,1	1	000-050	46,1
1,3	+ 2100	1	1	000-050	483,3

III - 4.3. Chaîne de traitement numérique.

III - 4.3.1. L'enregistreur magnétique analogique

Nous l'avons décrit au § III 3.1.3.

III - 4.3.2. L'analyseur de déformations dynamiques des structures.

L'analyseur est un calculateur de signal très performant. Nous n'avons pas utilisé toutes ses capacités. Aussi dans sa description, nous ne détaillons que les possibilités de l'appareil dont nous nous sommes servi.

L'analyseur possède deux mémoires numériques indépendantes permettant l'acquisition de 512 points pour chaque canal. La cadence d'acquisition est réglable.

Dans le domaine du temps, l'appareil calcule les moyennes temporelles. Dans le domaine des fréquences, il calcule les spectres des signaux sur différentes gammes de fréquence réglables. Il calcule les moyennes de ces spectres.

Un facteur d'étalonnage correspondant à la sensibilité calculée au § III - 3.2.2. peut être introduit pour chaque canal. Les résultats sont alors affichés en micro epsilon.

Le déclenchement de l'acquisition de données, simultanément pour les deux canaux, peut se faire de façon interne à partir d'un des signaux d'entrée. Le critère de déclenchement est alors le niveau du signal avec pente positive ou négative.

La dynamique de l'analyseur est de 75 dB.

Un écran cathodique permet de visualiser les différents signaux dans le domaine du temps ou des fréquences. Une programmation interne permet de tracer ces graphes sur une table traçante numérique. L'appareil est connecté par interface à un micro ordinateur, et peut envoyer en mémoire centrale de l'ordinateur, pour chacune des deux voies, les valeurs des 512 points du signal qu'il a numérisé. A l'inverse, l'ordinateur peut envoyer dans les deux mémoires numériques des fichiers de 512 valeurs.

III - 4.3.3. Micro-ordinateur

Le micro ordinateur possède une mémoire centrale de 50 Koctets. Une mémoire de masse, cassette magnétique, augmente ses capacités. Son langage de programmation est le basic. Une table traçante et une imprimante y sont connectées en périphériques de sortie.

III - 4.4. Calcul de l'état de déformation et de l'état de contrainte en différents points de l'arbre de torsion.

III - 4.4.1. Numérisation des signaux.

L'analyseur ne peut numériser simultanément que deux signaux. En utilisant le mode de déclenchement interne, nous avons pris un des 3 signaux analysés pour référence commune.

La visualisation (sur oscilloscope à trois voies) des signaux enregistrés sur cassette analogique montre qu'ils sont périodiques et que le signal, correspondant à la variation relative de longueur suivant l'axe de mesure 3 : $\text{Epsilon } 3(t)$, est quasi sinusoïdal, quel que soit le point de mesure considéré. Nous avons donc utilisé ce signal pour déclencher l'acquisition de données dans l'analyseur.

La numérisation des trois voies se fait donc en deux étapes :

- 1°) Deux canaux de sortie de l'enregistreur numérique analogique sont branchés sur l'analyseur : ils correspondent aux variations relatives de longueur $\text{Epsilon } 3(t)$ et $\text{Epsilon } 2(t)$. Lorsque l'acquisition de données est réalisée, l'analyseur transfère les différents points en mémoire centrale d'ordinateur dans deux tableaux $\text{Eps } 3(I)$ et $\text{Eps } 2(I)$.

2°) Les voies correspondant aux variations relatives de longueur Epsilon 3(t) et Epsilon 1(t) sont alors branchées sur l'analyseur. Lorsque l'acquisition de données est réalisée, l'analyseur transfère les différents points en mémoire centrale de l'ordinateur dans un tableau Eps 1(I).

L'ordinateur crée alors sur une cassette magnétique un fichier des trois tableaux Eps 1(I), Eps 2(I) et Eps 3(I) correspondant au point analysé.

Cette méthode assure la numérisation synchronisée de deux voies seulement. Le signal de référence utilisé pour le déclenchement interne étant quasi-sinusoïdal, le démarrage de l'acquisition de données se fait à une ou plusieurs périodes près. Pour éviter toute erreur singulière due au fait que les fichiers Eps 1(t), Eps 2(t), Eps 3(t) traduisent des phénomènes qui peuvent ne pas s'être passés en même temps si l'on ne fait qu'une saisie de donnée, les signaux traités étant tous périodiques, nous en avons calculé la moyenne temporelle sur dix acquisitions.

Pour réaliser toutes ces opérations, l'analyseur est piloté par le calculateur suivant le programme ANADIG (analogique → digital) dont l'organigramme suit :

Opérateur :

brancher Eps 3 sur voie 1

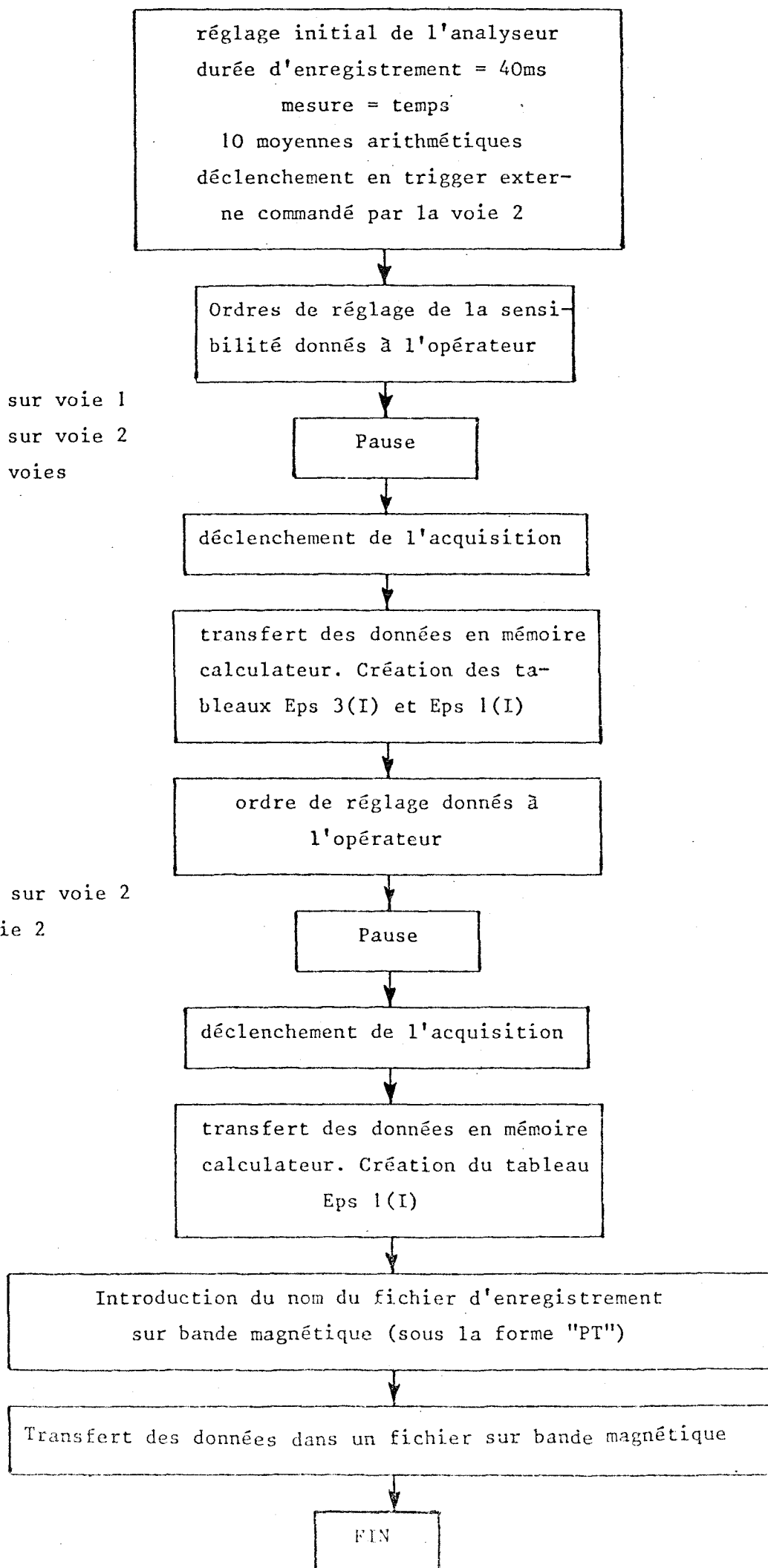
brancher Eps 1 sur voie 2

calibrer les 2 voies

Opérateur :

brancher Eps 2 sur voie 2

calibrer la voie 2



BUS
0111

Le listing du programme ANADIG (analogique → digital) est en annexe III. Les fichiers de données correspondant aux points de mesure 1, 2 ... 16 sont appelés "PT 1", "PT 2" ... "PT 16".

III - 4.4.2. Tracé des graphes de variation des déformations relatives Epsilon 1, Epsilon 2, Epsilon 3 en fonction du temps.

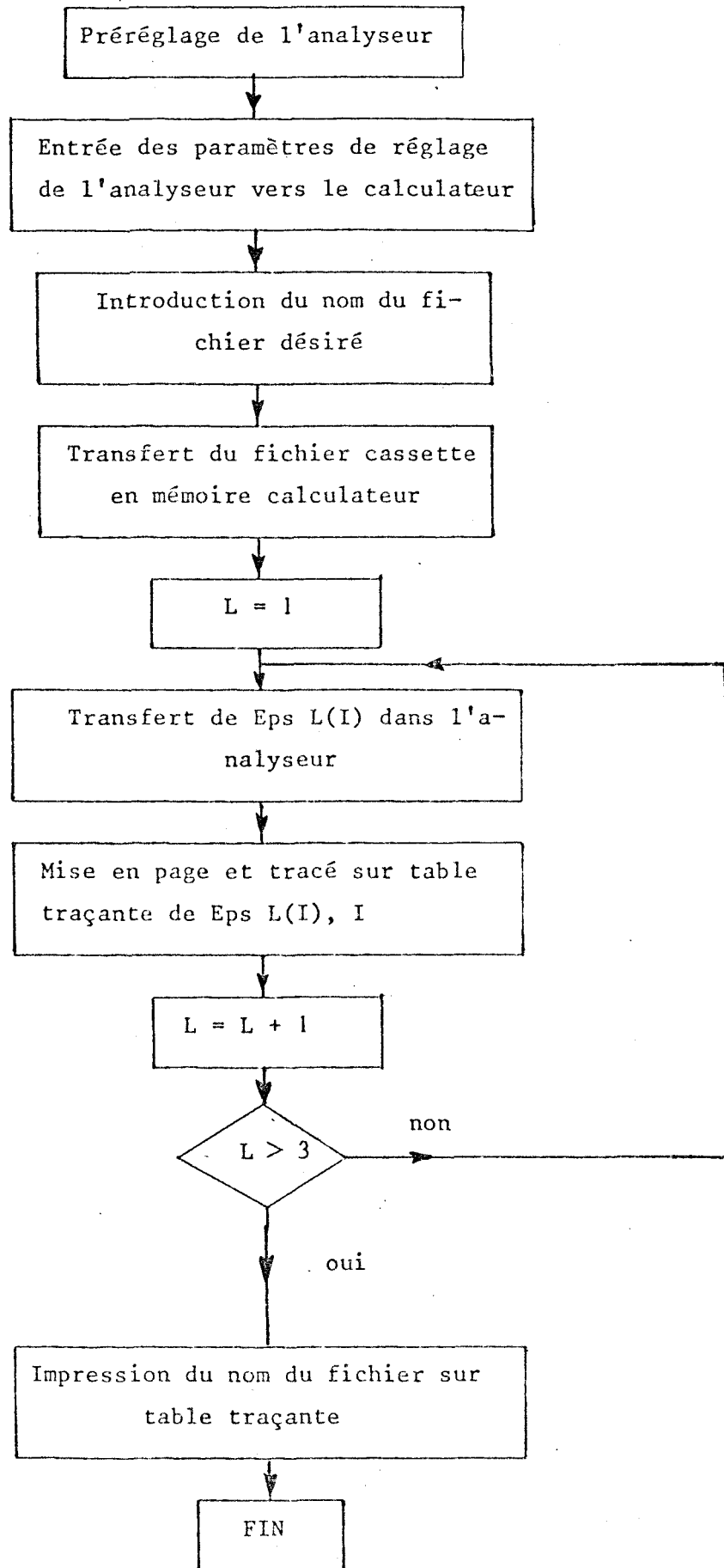
Nous avons tracé les variations des déformations relatives en différents points suivant les axes de mesure des jauges.

Nous avons utilisé la programmation interne de l'analyseur pour le tracé de ces courbes sur table traçante numérique. Nous avons transféré les différents points du tableau Eps 1(I) d'un fichier "PT n" de l'ordinateur dans la mémoire numérique de l'analyseur. La table traçante branchée en périphérique de sortie sur l'analyseur a réalisé le tracé du graphe {Eps 1(I), I}.

La programmation interne de l'analyseur nous a permis de positionner en format le tracé du graphe, de reporter directement les échelles et de repérer par caractères alphanumériques la courbe tracée.

Le graphe {Eps 1(I), I} étant reporté, nous avons recommencé ces opérations pour les 2 autres tableaux Eps 2(I) et Eps 3(I) appartenant au même fichier. L'indice du point étudié est reporté en bas des trois courbes.

Pour réaliser ces opérations, l'analyseur est piloté par le calculateur suivant le programme CALANA (calculateur → analyseur). Le listing du programme est joint en annexe III, en voici l'organigramme : Les graphes sont en annexe III.



III - 4.4.3. - Calcul des directions, des déformations relatives et des contraintes principales - Calcul du cisaillement maximum.

Les jauges sont collées à la surface de l'arbre de torsion.

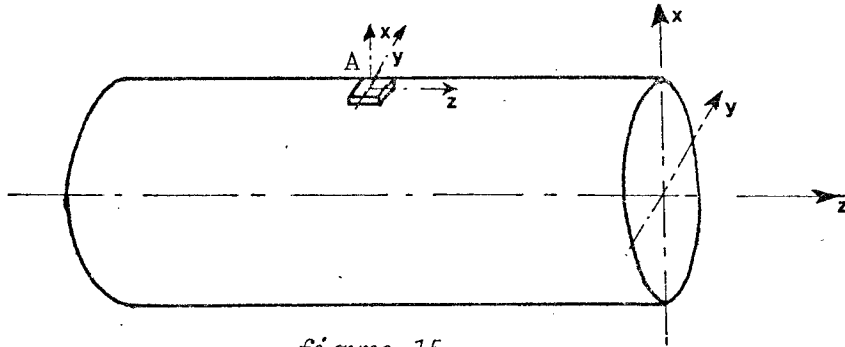


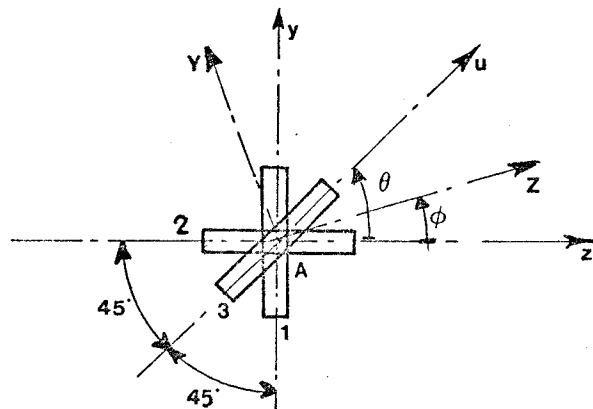
figure 15

Cette surface est libre de toute contrainte de cisaillement τ_{xy} et τ_{xz} . L'état de contrainte en A est donc principal par rapport à l'axe x. Aucune contrainte normale n'est appliquée sur l'arbre au point de mesure, l'état de contrainte considéré est donc plan et en A, la matrice des contraintes peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad [1]$$

Déformations relatives principales et directions principales

Une jauge de contrainte tri-directionnelle à 45° est collée en A point de la surface de l'arbre de torsion.



au point A, la matrice des déformations s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_z & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{yz} & \epsilon_y \end{pmatrix}$$

La jauge 1 mesure ϵ_y . Cette mesure est numérisée dans le tableau Eps1(I) des fichiers. (voir § III - 3.3.1)

La jauge 2 mesure ϵ_z . Cette mesure est numérisée dans le tableau Eps 2(I).

La jauge 3 mesure la déformation relative suivant son axe de mesure, u, soit ϵ_u . Cette mesure est numérisée dans le tableau Eps 3(I). Soit l'axe u, tel que $\widehat{zAu} = \theta$, alors, les équations de l'élasticité permettent d'écrire :

$$\epsilon_u = \frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_z - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{yz} \sin 2\theta$$

La géométrie de la rosette impose $\theta = 45^\circ$, donc,

$$\epsilon_u = \frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2} + \epsilon_{yz}$$

par conséquent

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_u - \frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2}$$

en A, la matrice des déformations est définie par la mesure de ϵ_z , ϵ_y et ϵ_u .

+ Déformations principales :

Ce sont les valeurs propres de la matrice des déformations précédemment définie.

$$\text{soit } \begin{vmatrix} \epsilon_z - \lambda & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{zy} & \epsilon_y - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d'où } (\epsilon_z - \lambda) (\epsilon_y - \lambda) - \epsilon_{zy}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (\epsilon_z + \epsilon_y) \lambda + (\epsilon_z \epsilon_y - \epsilon_{zy}^2) = 0$$

Les déformations relatives principales ϵ_1 et ϵ_2 s'écrivent donc :

$$\epsilon_I = \frac{1}{2} \{ (\epsilon_z + \epsilon_y) + [(\epsilon_z + \epsilon_y)^2 - 4 (\epsilon_z \epsilon_y - \epsilon_{zy}^2)]^{1/2} \} \quad (4)$$

$$\epsilon_{II} = \frac{1}{2} \{ (\epsilon_z + \epsilon_y) - [(\epsilon_z + \epsilon_y)^2 - 4 (\epsilon_z \epsilon_y - \epsilon_{zy}^2)]^{1/2} \} \quad (5)$$

+ Directions principales.

Soit $\vec{n} \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \end{vmatrix}$ vecteur unitaire porté par la direction principale

\vec{AZ} , il satisfait la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_z - \epsilon_I & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{zy} & \epsilon_y - \epsilon_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $(\epsilon_z - \epsilon_I) n_1 + \epsilon_{zy} n_2 = 0$.

\vec{n} étant porté par l'axe \vec{AZ} , dans le repère yAz ,

$$\frac{n_2}{n_1} = \text{tg } \phi = \frac{\epsilon_I - \epsilon_z}{\epsilon_{zy}}$$

+ Relations contraintes principales, déformations principales
la théorie de l'élasticité nous permet d'écrire :

$$\sigma_I = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_I + \nu \epsilon_{II})$$

$$\sigma_{II} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{II} + \nu \epsilon_I)$$

+ Calcul du cisaillement maximum

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

III - 4.4.4. Programme de calcul des directions, déformations relatives et des contraintes principales.

+ Calcul des déformations relatives principales.

Nous utilisons les équations 4 et 5 qui définissent ϵ_I et ϵ_{II} .
La quantité $[(\epsilon_z + \epsilon_y)^2 - 4(\epsilon_z \epsilon_y - \epsilon_{zy}^2)]^{1/2}$ est toujours positive.
On a donc l'inéquation : $\epsilon_I > \epsilon_{II}$

ϵ_I est la déformation relative principale maximale

ϵ_{II} est la déformation relative principale minimale.

L'arbre de torsion étudié est soumis à un moment moteur dont le signe varie dans le temps. Il est en un premier temps positif puis négatif.

Pour une même direction principale Z, la déformation relative principale ϵ_z va donc lors d'un cycle changer de signe.

ϵ_I étant toujours supérieur à ϵ_{II} , il ne représente donc pas

la variation des déformations relatives principales dans le temps suivant une même direction.

Les calculs de directions principales montrent que lorsque

$$\phi > 0 \quad , \quad \phi = \widehat{z A Z} \quad ,$$

il est donc dans tous les cas voisin de 45°. L'axe Z est alors voisin de l'axe u.

L'évolution de ϵ_Z doit donc être semblable à celle de ϵ_u .

L'étude des graphes représentant Eps 1(t), Eps 2(t), Eps 3(t) obtenus au § III - 3.3.2. montre que quel que soit le point considéré, Eps 3(t), donc $\epsilon_u(t)$ est positive dans la première demi-période.

L'affectation de ϵ_I ou ϵ_{II} à la direction Z ou Y se fera donc selon le critère suivant :

$$\begin{aligned} \phi > 0 \quad , \quad \epsilon_Z &= \epsilon_I \\ &\epsilon_Y = \epsilon_{II} \\ \phi < 0 \quad , \quad \epsilon_Z &= \epsilon_{II} \\ &\epsilon_Y = \epsilon_I \end{aligned}$$

+ Remarque sur les calculs des directions principales.

la valeur de l'angle ϕ s'obtient par le calcul d'un arc tangente.

$$\phi = \text{Arctg} \frac{\epsilon_I - \epsilon_Z}{\epsilon_u - \frac{\epsilon_Z + \epsilon_Y}{2}}$$

Eps 1(t), Eps 2(t) et Eps 3(t) s'annulent tous en même temps (voir graphes en annexe III, § 5).

Selon la numérisation des signaux effectués par le programme ANADIG,

il est possible que pour certains points la quantité

$$\epsilon_u - \frac{\epsilon_Z + \epsilon_Y}{2} \text{ soit presque nulle, } \phi \text{ tend alors vers } \frac{\pi}{2}.$$

La recherche d'un maximum ou d'un minimum de $\phi(t)$ n'a donc aucune signification physique.

Nous avons dans le programme TRTDIG calculé la moyenne des

$\phi(t) > 0$, que nous avons appelée Phi moyen maxi et la moyenne des $\phi(t) < 0$: Phi moyen mini.

+ Programme TRTDIG (traitement du signal digital).

Le programme assure pour chaque point de mesure le calcul de

Phi (t), angle de direction principale

Epsilon Z(t) et Epsilon Y(t), déformations relatives principales

Sigma Z(t) et Sigma Y(t), contraintes normales principales

$\Gamma_{\max}(t)$ cisaillement maximum.

Une imprimante connectée en périphérique de sortie fournit un tableau comprenant les valeurs de :

- direction principale - Phi moyen mini, Phi moyen maxi
(voir § III - 3.3.4)
- contraintes normales - Sigma Z mini et la contrainte
principales Sigma Y associée.
Sigma Z maxi, Sigma Y
- Sigma Z moyen
- Sigma Y mini, Sigma Z
Sigma Y maxi, Sigma Z.
- Sigma Y moyen.
- contraintes de cisail - Tau mini
lement Tau maxi
Tau moyen

Une table traçante délivre les graphes :

$$\text{Epsilon Z} = f_1(t), \text{Epsilon Y} = f_2(t), \text{Phi} = f_3(t)$$

$$\text{et Sigma Z} = f_4(t), \text{Sigma Y} = f_5(t), \text{Tau} = f_6(t), \text{Phi} = f_3(t).$$

l'organigramme est écrit en 4 parties.

Le programme TRTDIG est joint en annexe III.

TRTDIG

Lire E, Nu

Sz min = Sy min = T min = Phi min = Eps z min = Eps y min = 100 000

Sz max = Sy max = T max = Phi max = Eps z max = Eps y max = - 100 000

I = N = Phi 1 = Phi 2 = Sz moy = Sy moy = T moy = Eps z moy = Eps y moy = Phi moy = 0

Dimensionnement des tableaux (1,512)

Eps 1(I), Eps 2(I), Eps 3(I), Eps z(I), Eps y(I), Phi (I), T max(I), Sig z(I), Sig y(I)

I = 1

Eps 1(I) = Eps 2(I) = Eps 3(I) = Eps z(I) = Eps y(I) = Phi (I) = T max (I) = Sig z(I) = Sig y(I) = 0

I = I + 1

I > 512

non

oui

Entrée du point de mesure correspondant au fichier sur cassette

Transfert du fichier de données cassette dans Eps 1(I), Eps 2(I), Eps 3(I)

II



II

I = 1

$E_z = Eps\ 2(I)$
 $E_y = Eps\ 1(I)$
 $E\ z\ y = Eps\ 3(I) - 0,5.(E_z + E_y)$
 $Eps\ 1 = \frac{1}{2} \{ (E_z + E_y) + [(E_z + E_y)^2 - 4 (E_z E_y - E^2_{zy})]^{1/2} \}$
 $Eps\ 2 = \frac{1}{2} \{ (E_z + E_y) - [(E_z + E_y)^2 - 4 (E_z E_y - E^2_{zy})]^{1/2} \}$
 $Phi(I) = Arctg \left(\frac{Eps\ 1 - E_z}{E_y} \right)$

oui non
 Phi (I) > 0

$N = N + 1$
 $Eps\ z(I) = Eps\ 1$
 $Eps\ y(I) = Eps\ 2$
 $Phi\ 2 = Phi\ 2 + Phi(I)$

$M = M + 1$
 $Eps\ z(I) = Eps\ 2$
 $Eps\ y(I) = Eps\ 1$
 $Phi\ 1 = Phi\ 1 + Phi(I)$

$Sig\ z(I) = 10^{-6} \cdot E \cdot \frac{Eps\ z(I) + Nu \cdot Eps\ y(I)}{1 - Nu^2}$
 $Sig\ y(I) = 10^{-6} \cdot E \cdot \frac{Eps\ y(I) + Nu \cdot Eps\ z(I)}{1 - Nu^2}$
 $T\ max(I) = \frac{Sig\ z(I) - Sig\ y(I)}{2}$

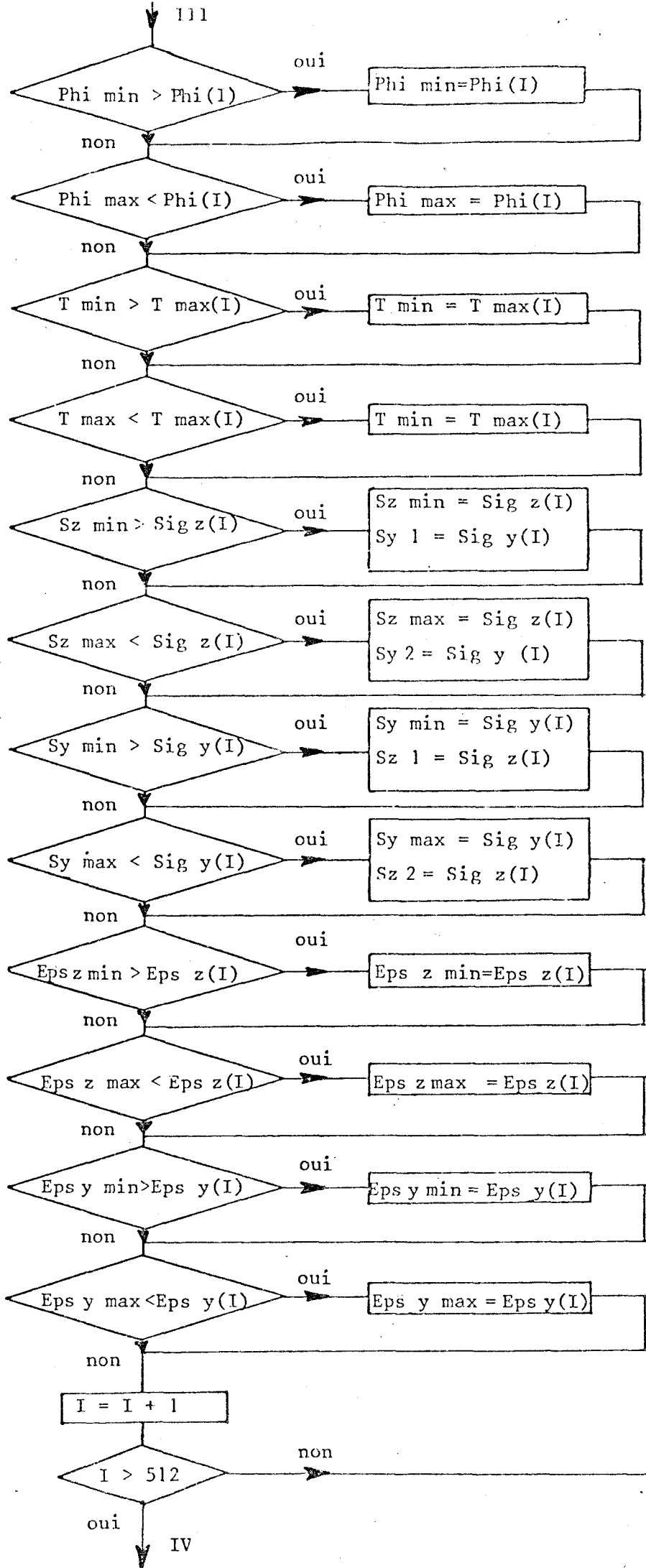
$Sz\ moy = Sz\ moy + Sig\ z(I)$
 $Sy\ moy = Sy\ moy + Sig\ y(I)$
 $T\ moy = T\ moy + T\ max(I)$
 $Phi\ moy = Phi\ moy + Phi\ moy(I)$
 $Eps\ z\ moy = Eps\ z\ moy + Eps\ z(I)$
 $Eps\ y\ moy = Eps\ y\ moy + Eps\ y(I)$

III



III

II



IV

Sortie sur imprimante de

Phi moyen mini		Phi moyen maxi
Sigma Z mini, Sigma Y	Sigma Z maxi, Sigma Y	Sigma Z moyen
Sigma Y mini, Sigma Z	Sigma Y maxi, Sigma Z	Sigma Y moyen
Tau mini	Tau maxi	Tau moyen

Sortie sur table traçante de :

Eps Z (I), I
Eps Y (I), I
Phi (I), I

PAUSE

Intervention de l'opérateur - Changement de cellule

Sortie sur table traçante de

Sigma Z (I), I
Sigma Y (I), I
Tau (I), I
Phi (I), I

DATA E, Nu

FIN



III - 4.5. Exploitation des résultats

Les différents graphes et tableaux obtenus sont joints en annexe III.

Ils comprennent, pour les points de mesure 1 à 16 :

- + graphes des variations des déformations relatives suivant les axes de mesure Eps 1, Eps 2, Eps 3. Voir graphe 16, ci-joint.
- + tableau des valeurs calculées : Tableau 17
- + graphes des variations des déformations relatives principales et de l'angle ϕ positionnant le repère principal. Graphe 18
- + graphes des variations des contraintes principales, du cisaillement maximal et de l'angle ϕ . Graphe 19

III - 4.5.1. Déformations relatives

L'étude des déformations relatives ϵ_u et ϵ_z montre que :

+ Les variations de ϵ_u (Eps 3 sur le graphe 16) et ϵ_z (graphe 18) sont comparables.

- les courbes sont toutes deux quasi sinusoïdales
- les valeurs en micro epsilon de ϵ_u et ϵ_z sont sensiblement égales.
- l'angle ϕ positionnant l'axe Z par rapport à l'axe z (voir § III - 4.4.3) vaut :

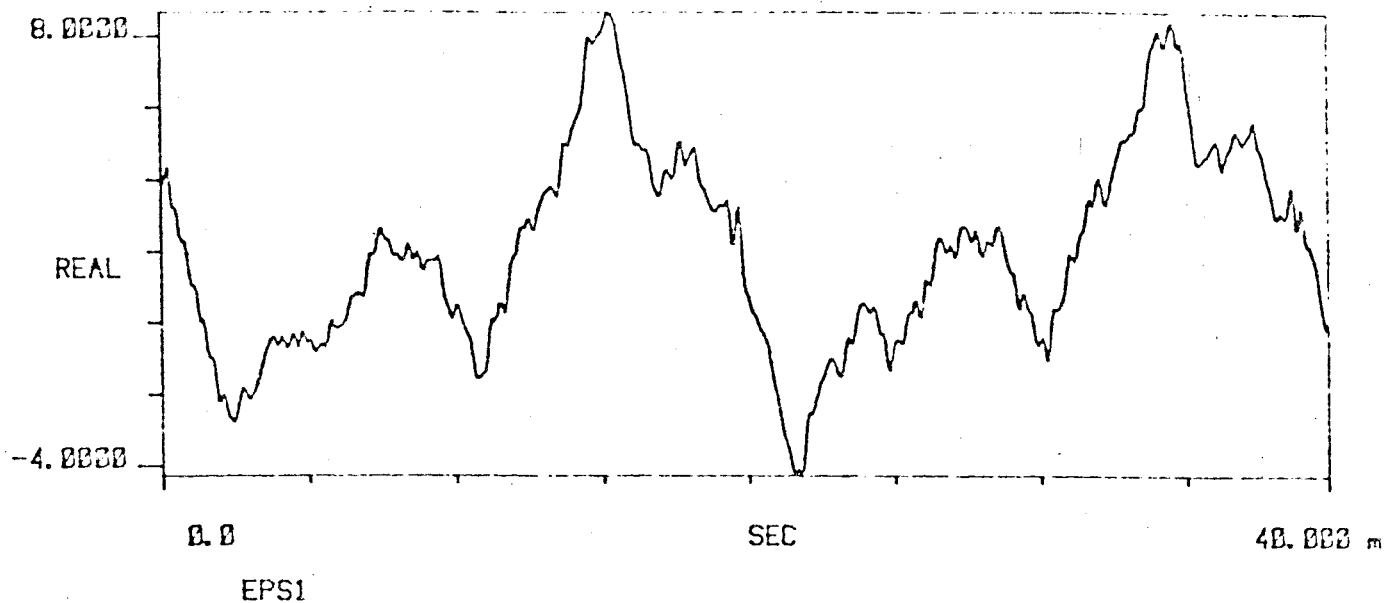
Phi moyen > 0 = 45.17 degrés

Phi moyen < 0 = - 44.75 degrés

TI AVG 1

R#: 501

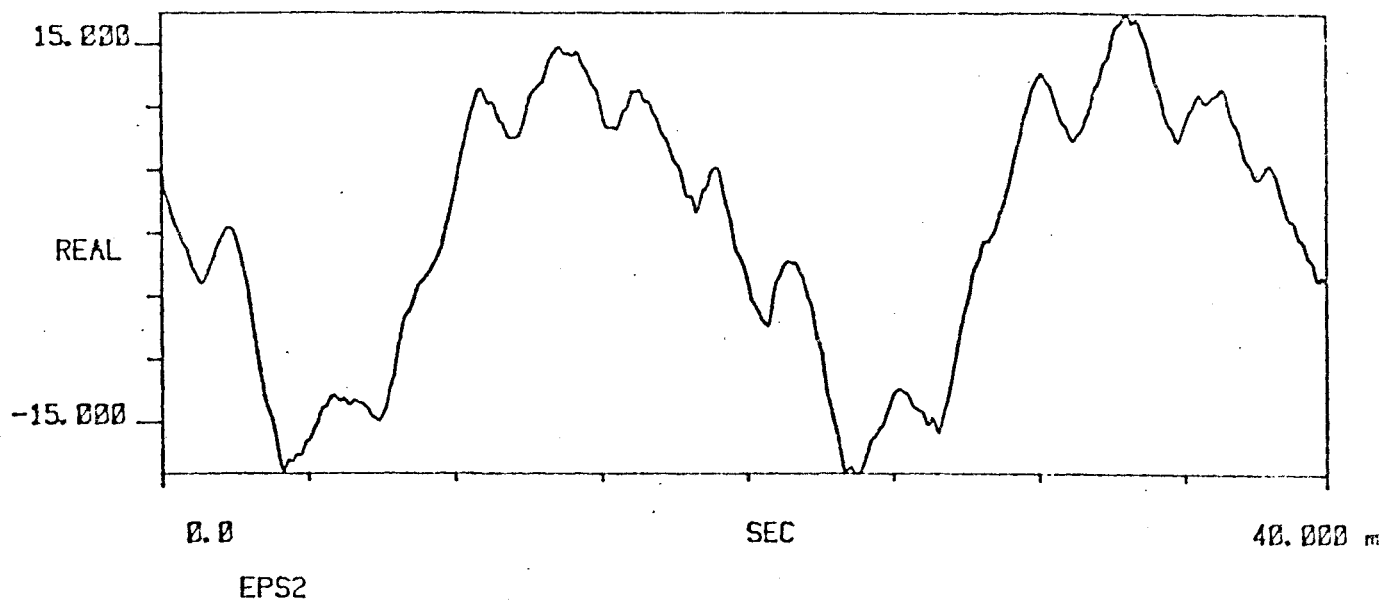
#A: 1



TI AVG 1

R#: 501

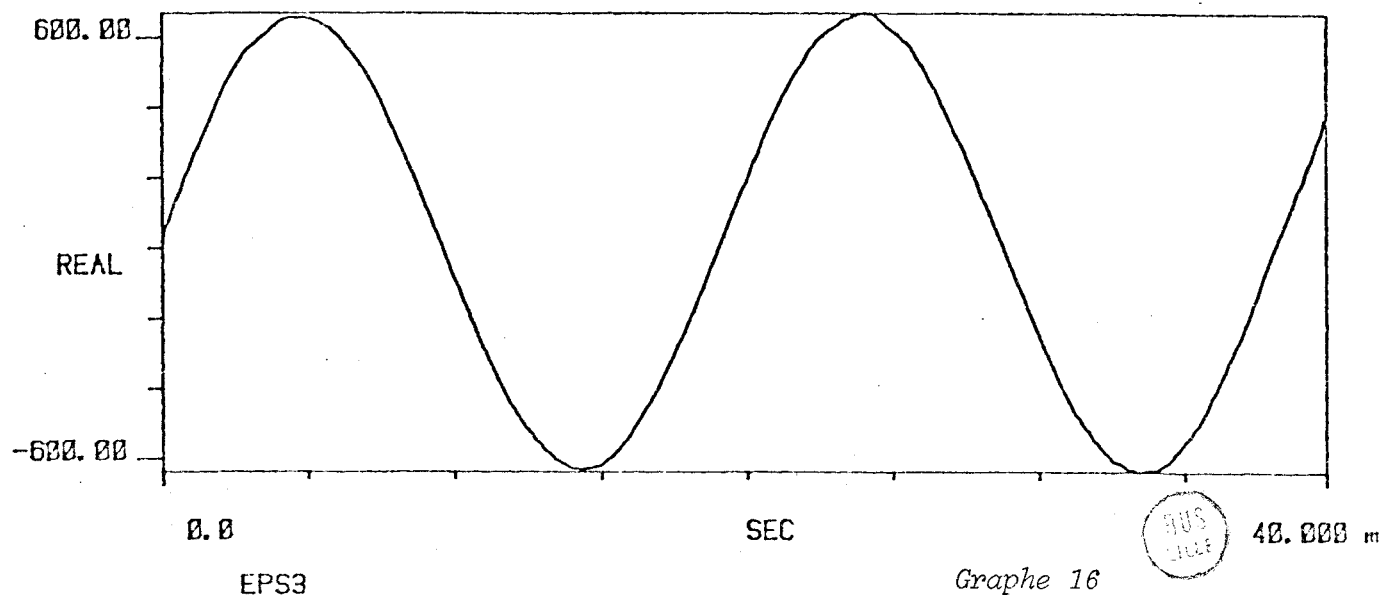
#A: 1



TI AVG 1

R#: 501

#A: 1



Grphe 16

PT1

PT1

Angle Phi, de direction principale (degres)

Phi moy mini

Phi moy maxi

-44.75

45.17

Contraintes normales Sigma Z (daN/mm2)

Sigma Z mini

Sigma Y

Sigma Z maxi

Sigma Y

Sigma Z moyen

-10.03

10.70

10.57

-11.07

.38

Contraintes normales Sigma Y (daN/mm2)

Sigma Y mini

Sigma Z

Sigma Y maxi

Sigma Z

Sigma Y moyen

-11.09

10.55

10.70

-10.03

-.31

Contraintes de cisaillement Tau (daN/mm2)

Tau mini

Tau maxi

Tau moyen

-10.37

10.82

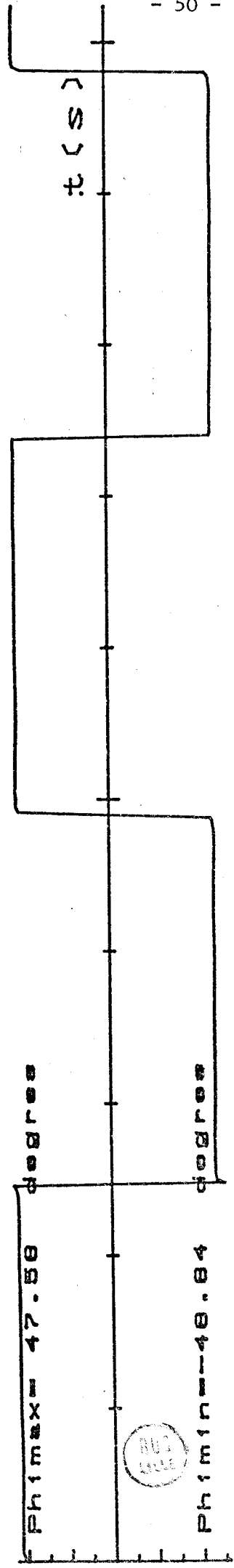
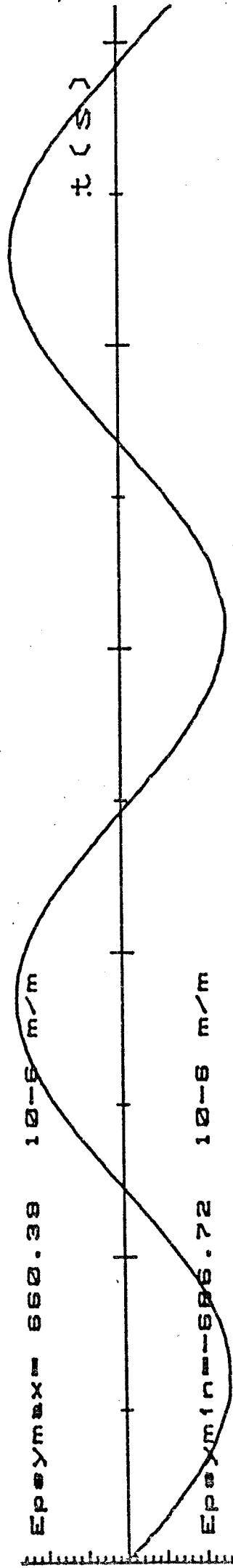
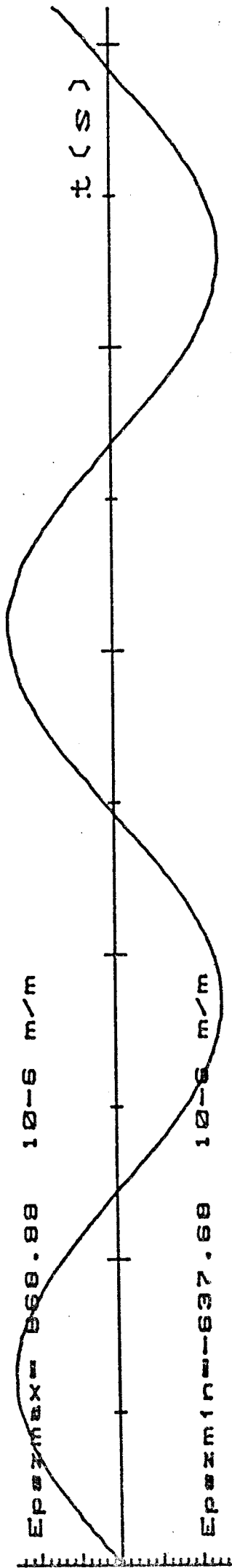
.34

Tableau 17



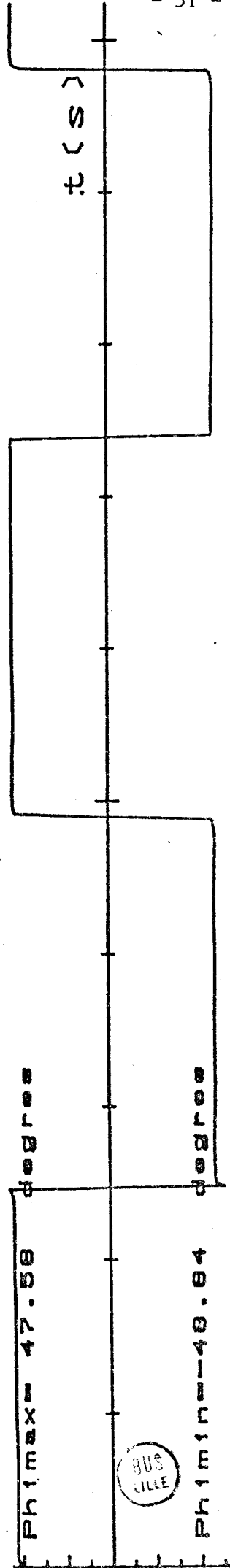
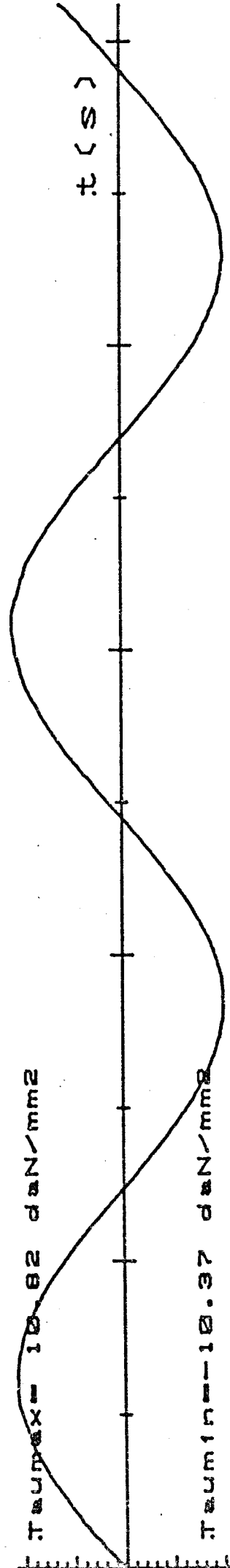
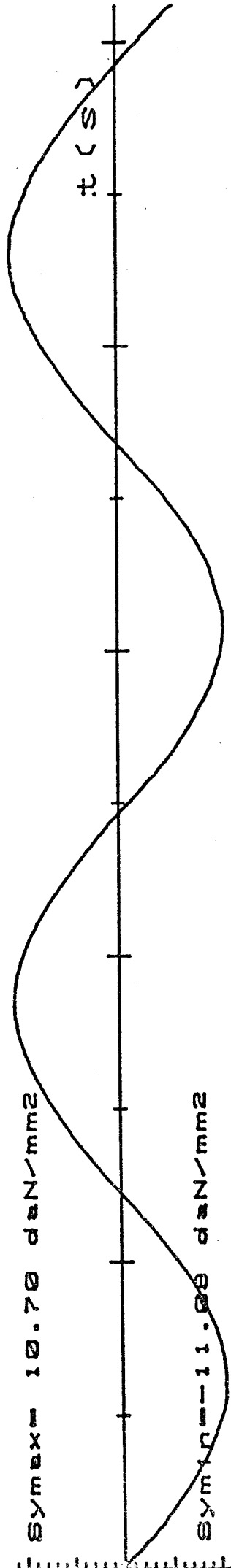
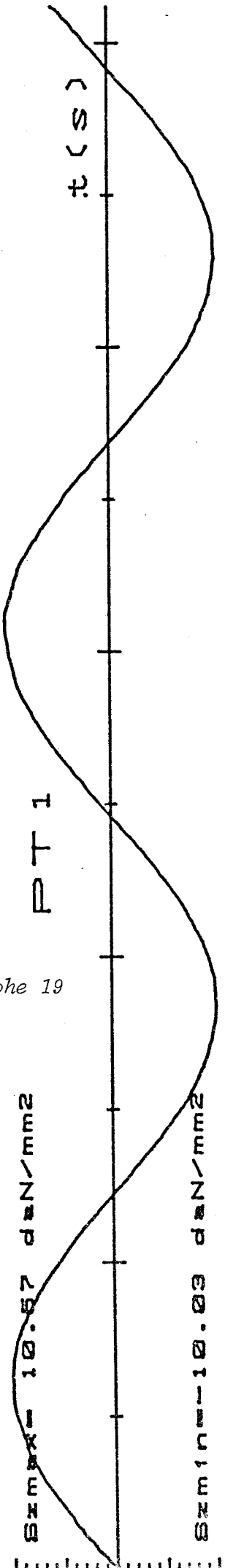
PT 1

Grappe 18



Graph 19

PT 1



BUS LILLE

Ces remarques nous permettent d'affirmer que :

- l'affectation de ϵ_I ou ϵ_{II} à la direction Z suivant le signe de ϕ (voir § III - 4.4.4.) est confirmée. Remarquons que la variation de Epsilon Z ne présente pas de discontinuité lorsque ϕ change de signe (graphe 18)
- compte tenu des imprécisions de collage de la jauge sur l'arbre de torsion, lors de l'oscillation du système, les directions principales sont à 45 degrés par rapport à l'axe longitudinal de l'arbre. L'axe Z est donc bien confondu avec l'axe u.

Notons que la connaissance de la variation de la déformation relative sur l'axe de mesure u en un point est suffisante pour y caractériser l'état de déformation. Dans l'éventualité de mesures à reconduire sur d'autres arbres, il sera possible de ne coller qu'une jauge unidirectionnelle à 45° par rapport à son axe longitudinal.

Nous pouvons donc analyser le signal analogique correspondant à la variation de déformation relative sur l'axe de mesure u pour connaître la période de la courbe Eps Z(t).

Analyse en fréquence du signal analogique Epsilon 3(t) :

. Chaîne de mesure :

l'enregistreur magnétique analogique (cf. § III - 4.1.3) est connecté à l'analyseur de déformations dynamiques de structures (cf. § III - 4.4.1). Une table traçante numérique branchée en périphérique de sortie permet de tracer les spectres de fréquence calculés.

. Processus de mesure :

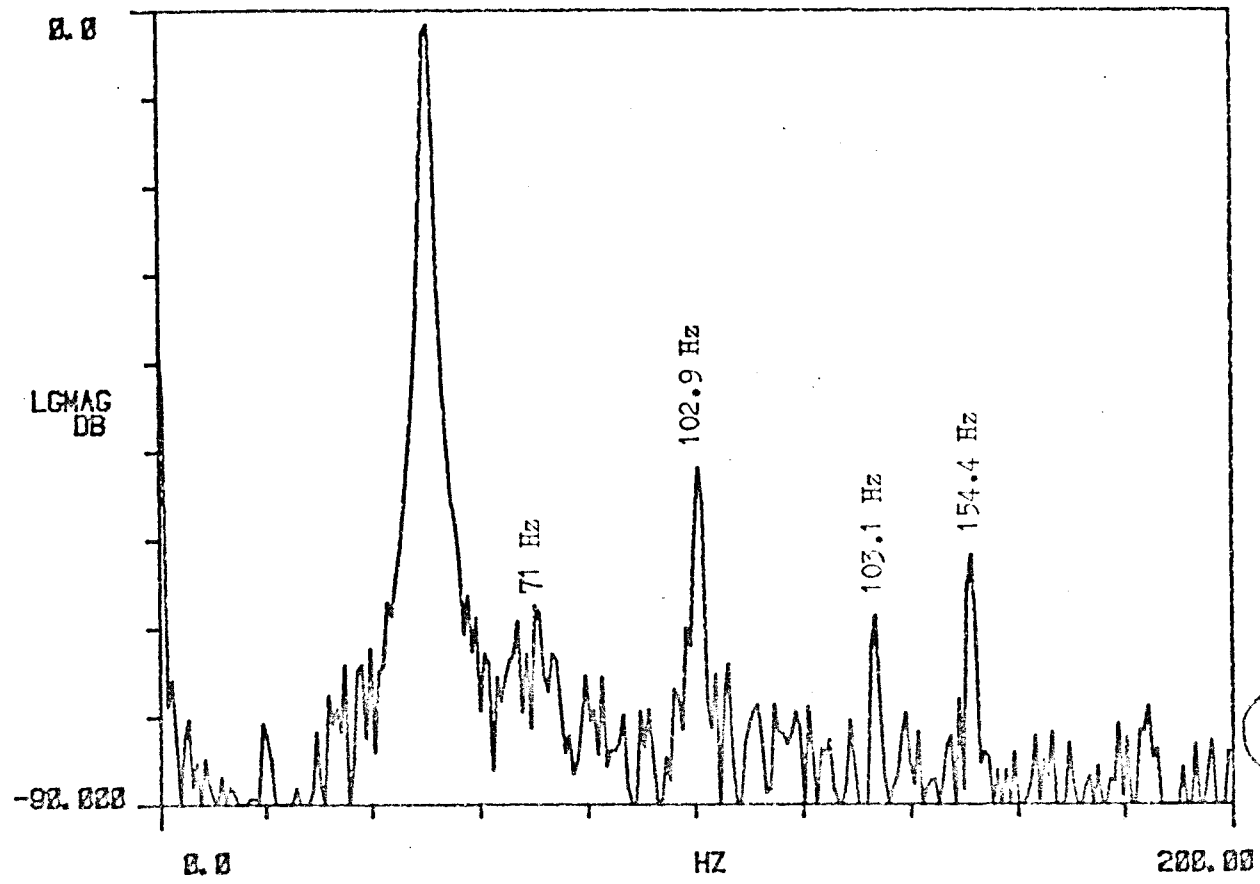
l'analyseur numérise le signal émis par l'enregistreur et en calcule le spectre de fréquence dans une gamme de fréquence 0-200Hz avec une résolution de 0,78Hz.

POINT 3

L SPEC 1

51.5 Hz

#A: 1B



Graphe 20

Les analyses en fréquence du signal analogique Epsilon 3(t) sont en annexe III.

. Conclusion :

en étudiant le spectrogramme du point 3 (graphe 20), nous constatons la présence très nette d'un pic à 51,5 Hz, puisqu'il se situe à plus de 50 dB des autres pics.

La variation de Epsilon 3(t) est donc sinusoïdale, de fréquence 51,5 Hz qui est la fréquence d'oscillation de l'arbre de torsion (voir § III 3.2.4.)

L'étude des déformations relatives principales montre que :

- + leur variation est sinusoïdale.
- + la fréquence de cette variation est la fréquence d'oscillation de l'arbre de torsion.
- + les directions portant ces déformations relatives sont à 45 degrés de part et d'autre de l'axe longitudinal d'oscillations.

III - 4.5.2. Contraintes principales σ_Z et σ_Y .

σ_Z et σ_Y s'obtiennent par une combinaison linéaire de ε_Z et ε_Y . Les variations des contraintes principales sont donc sinusoïdales. La fréquence de variation de σ_Z et σ_Y est celle de l'oscillation de l'arbre de torsion.

En étudiant le graphe 19 et le tableau 17, nous constatons que :

- + les valeurs moyennes des contraintes σ_Z et σ_Y sont presque nulles.

$$\begin{aligned} \text{point n}^\circ 1 : \sigma_Z \text{ moyen} &= 0,38 \text{ daN/mm}^2 \\ \sigma_Y \text{ moyen} &= - 0,31 \text{ daN/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_Z \text{ maxi} &= 10,57 \text{ daN/mm}^2 \\ \sigma_Z \text{ moyen} &= 0,04 \sigma_Z \text{ maxi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y \text{ mini} &= - 11,09 \text{ daN/mm}^2 \\ \sigma_Y \text{ moyen} &= 0,03 \sigma_Y \text{ mini} \end{aligned}$$

- + La variation de σ_Z est opposée à la variation de σ_Y en tous points, $\sigma_Z = - \sigma_Y$

Le cisaillement maximum aux différents points est donc :

$$\tau \text{ max} = \frac{\sigma_Z - \sigma_Y}{2} = \sigma_Z$$

- + La variation des contraintes principales maximales et minimales calculées aux différents points de mesure est très faible.

	Valeur moyenne daN/mm ²	Valeur supérieure daN/mm ²	Valeur inférieure daN/mm ²
σ_Z maximal	10.88	11.57	10.13
σ_Z minimal	- 10.18	- 9.52	- 11.06
σ_Y maximal	10.51	11.47	9.83
σ_Y minimal	- 10.93	- 10.04	- 11.92

D'autre part, il n'existe pas de loi reliant la variation de contrainte σ_Y ou σ_Z à la position du point où la contrainte a été mesurée.

Ces remarques nous permettent d'affirmer que lors de son fonctionnement, l'arbre de torsion est soumis à un état de torsion pure.

III - 5. AMPLITUDE MAXIMALE D'OSCILLATION DU PEIGNE VIBRANT.

III - 5.1. Amplitude calculée à partir des résultats des mesures extensométriques

Nous calculons la rotation maximale de section du point où la monture du peigne est liée à l'arbre. Ce dernier étant soumis à de la torsion pure (cf § III - 4.5.2), nous pouvons écrire la relation [2] :

$$\phi L = \frac{\tau \text{ max } \times L}{\rho \text{ max } \times G}$$

où ϕL est la rotation de la section située à une distance L de l'encastrement.

$\tau \text{ max}$ est le cisaillement maximum subi par la barre.

Nous avons calculé la moyenne des cisaillements maxima mesurés aux différents points :

$$\tau \text{ max } = 10.62 \text{ daN/mm}^2.$$

L est la distance entre l'encastrement de l'arbre et le manchon qui lie la monture à l'arbre :

$$L = 2550\text{mm}$$

ρ max est la distance maximum d'un point de la section à l'axe neutre

$$\rho \text{ max} = 18\text{mm}$$

G est le module transversal d'élasticité

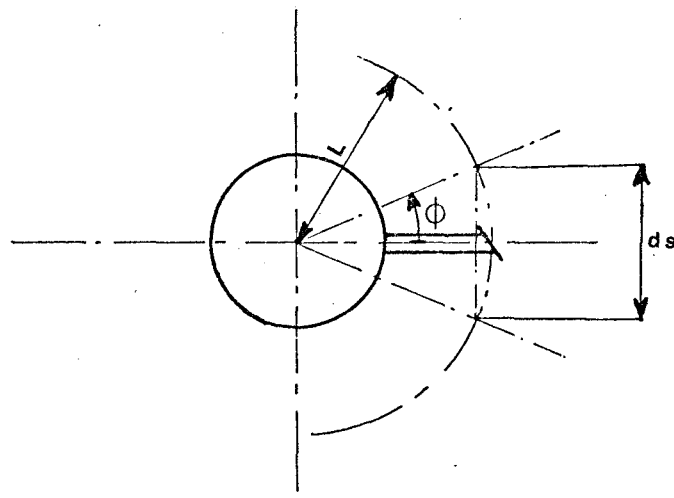
$$G = 7980 \text{ daN/mm}^2$$

Application numérique :

$$\phi L = \frac{10.62 \times 2550}{18 \times 7980} = 0,19 \text{ rd}$$

soit $\phi L = 10.8$ degrés.

III - 5.2. Amplitude relevée sur le système réel en fonctionnement.



Lors de l'oscillation du peigne, nous avons mesuré

$$ds = 32 \text{ mm.} , \quad l = 92\text{mm.}$$

donc,
$$\phi = \text{Arc sin } \frac{ds/2}{l}$$

$$\phi = 10,02 \text{ degrés.}$$

III - 5.3. Conclusion.

ϕL , calculé, est égal à 10.8 degrés.

ϕ , mesuré est égal à 10,02 degrés.

.../...

L'écart relatif entre les angles mesuré et calculé est de 8%. Nous en déduisons que :

- + la substitution du disque d'inertie à la monture du peigne se vérifie une nouvelle fois,
- + l'hypothèse de la torsion pure est valable,
- + les valeurs de contraintes déterminées par une chaîne de mesure et un traitement numérique assez complexe sont cohérentes.

III - 6. VERIFICATION DE LA FIABILITE DE L'ARBRE

(cours d'éléments de machines du Professeur FLAMME, USTL, normes DIN)

L'arbre est soumis, lors de son fonctionnement, à de la torsion pure. En accord avec le constructeur, nous appliquons le critère de la scission maximale pour en vérifier la fiabilité. Ce critère, dit critère de Tresca, est, dans cet état de charge, plus sévère que le critère des règles françaises pour le calcul des constructions métalliques en acier [3].

L'arbre est soumis à un état de charge dynamique. En un point, si σ_I , σ_{II} et σ_{III} sont les contraintes principales par ordre de grandeur du tenseur $[\sigma_{i,j}]$, on borne la scission maximale :

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \leq \tau_e \text{ (contrainte de limite élastique)}$$

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \leq \tau_f \text{ (contrainte de rupture par fatigue),}$$

Dans le cas du cisaillement pur, on pose $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$ et on admet $\tau_f = \frac{\sigma_f}{2}$. Le critère de Tresca s'écrit donc :

$$\sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_f$$

$$\sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_e$$

III - 6.1. Evaluation de la limite de rupture par fatigue σ_f

+ Cycle de variation des contraintes

La variation de σ_z est identique au signe près à celle de σ_y . L'étude du cycle de σ_z est identique à celle de σ_y .

La barre de torsion est soumise à des contraintes principales de variation sinusoïdale.

Le coefficient d'assymétrie du cycle r est égal à :

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{\min}}{-\sigma_{\min}} = -1.$$

Le cycle de variation de la contrainte est donc symétrique

- . la contrainte moyenne $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 0$

- . la contrainte alternée est égale à la contrainte maximale :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sigma_{\max}$$

cette contrainte doit être inférieure à la limite élastique σ_e et à la limite d'endurance σ_f (conventionnellement déterminée à 10^7 cycles).

+ limite d'endurance σ_f .

elle peut être évaluée comme suit :

- . limite d'endurance de l'arbre lisse

$$\sigma_f^0 = 50 \text{ daN/mm}^2$$

- . coefficient d'état de surface (β_b)

l'arbre est rectifié $\beta_b = 1$

- . facteur d'échelle (β_g)

pour le diamètre de l'arbre, (36,2mm), on peut écrire

$$\beta_g = 1,25$$

- . coefficient de concentration de contrainte (β_k)

Ce coefficient peut être estimé à partir du coefficient de concentration de contrainte théorique (α_k) et de l'indice de susceptibilité à l'entaille (η_k) selon la relation

$$\beta_k - 1 = \eta_k (\alpha_k - 1).$$

Compte tenu des dimensions de l'arbre et de ses changements de sections, on obtient :

$$- \eta_k = 0,8$$

$$- \alpha_k = 1$$

d'où $\beta_k = 1$

- . limite d'endurance de l'arbre réel :

$$\sigma_f = \sigma_f^0 / \beta_g \beta_b \beta_k = 0,8 \sigma_f^0$$

$$\sigma_f = 40 \text{ daN/mm}^2$$

+ contrainte alternée (contrainte maximale)

l'étude classique de la torsion [4] montre que, dans notre cas, les contraintes principales sont maximales à la périphérie de l'arbre. Le relevé des contraintes mesurées par essais extensométriques nous donne :

$$\sigma_{\max} = 11,27 \text{ daN/mm}^2$$

III - 6.2. Détermination de $(\sigma_I - \sigma_{III})$ maximum :

$$\begin{aligned} (\sigma_I - \sigma_{III})_{\max} &= \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \text{ (cf § II - 5.1.)} \\ &= 2 \sigma_{\max} \end{aligned}$$

donc $(\sigma_I - \sigma_{III})_{\max} = 22,54 \text{ daN/mm}^2$

III - 6.3. Vérification du critère de Tresca.

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{III} &\leq \sigma_e \\ \text{et} \\ \sigma_I - \sigma_{III} &\leq \sigma_f \end{aligned}$$

Application numérique

$$\sigma_e = 100 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_f = 40 \text{ daN/mm}^2$$

Le critère de Tresca est vérifié avec un coefficient de sécurité de 1.8 , ce qui nous permet d'affirmer que la durée de vie de l'arbre de torsion est bien illimitée.

III - 7. PROPAGATION DES DEFORMATIONS RELATIVES LE LONG DE L'ARBRE.

Nous avons enregistré les déformations relatives de différentes jauges placées suivant une direction commune (aux incertitudes de collage près). Nous avons ensuite mesuré le déphasage entre les signaux traduisant les déformations relatives selon l'axe de mesure des points 1 et 15 et des points 2 et 16 (cf § III - 4.4.3.). Ces déformations relatives sont

principales (cf § III - 4.5.1.). Un phasemètre électronique connecté aux deux sorties de l'enregistreur a mesuré un déphasage nul.

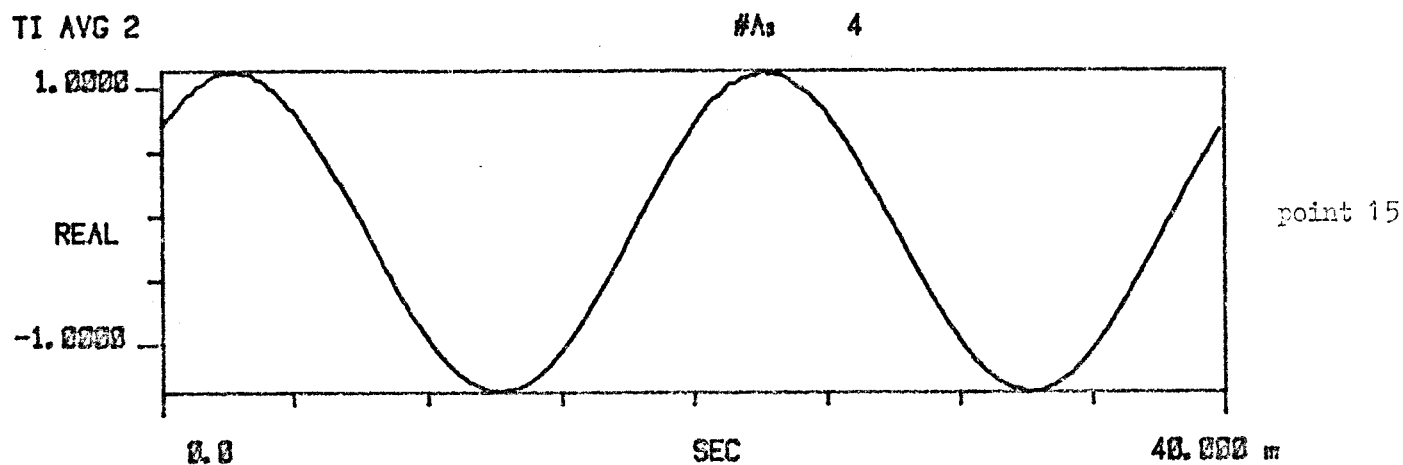
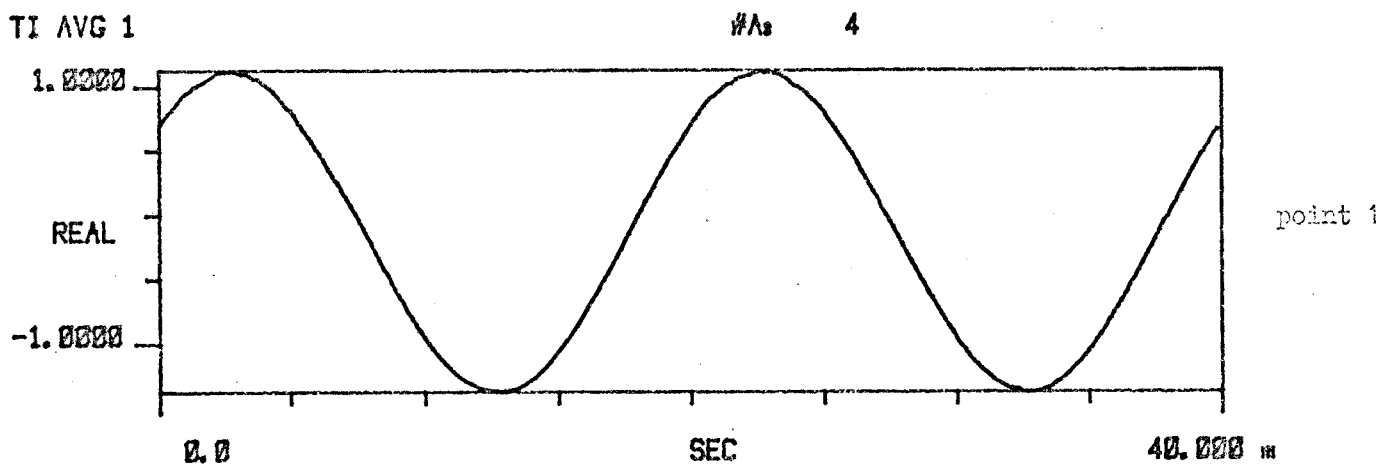
Nous avons alors branché les deux sorties de l'enregistreur aux entrées de l'analyseur dynamique de structure et numérisé en une seule saisie de données les signaux $\epsilon_3(t)$, points 1 et 15 et $\epsilon_3(t)$, points 2 et 16. Nous avons réalisé une copie sur table traçante des graphes obtenus (graphe 21 et 22).

Nous constatons à nouveau que le déphasage entre les deux signaux n'est pas mesurable.

Les différents points de l'arbre subissent donc lors de son mouvement des déformations relatives principales et des contraintes principales dont les variations dans le temps sont en phase.

Epsilon 3 = f(t)

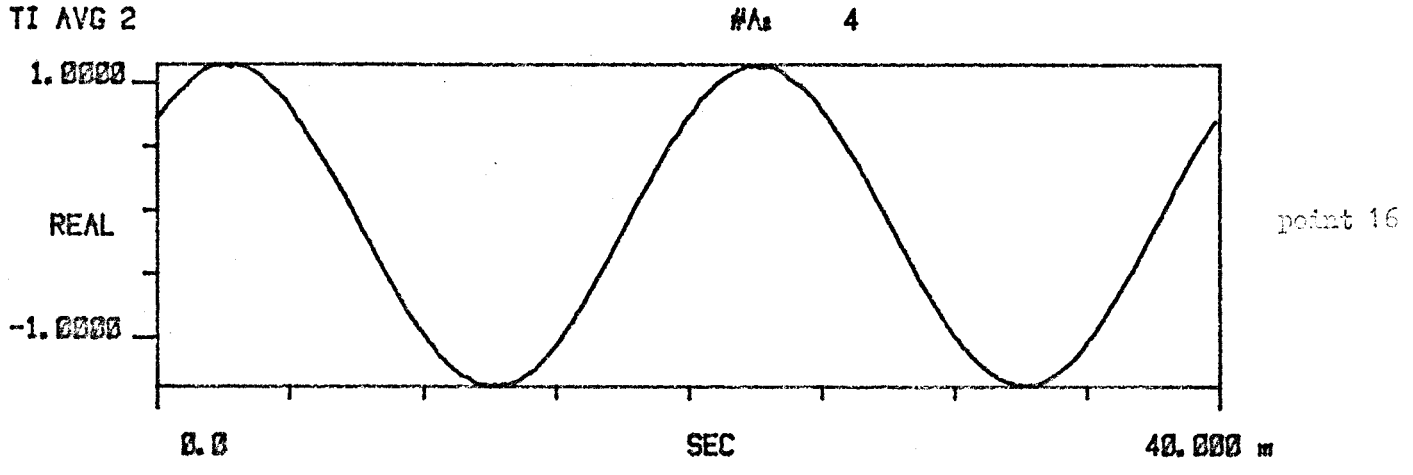
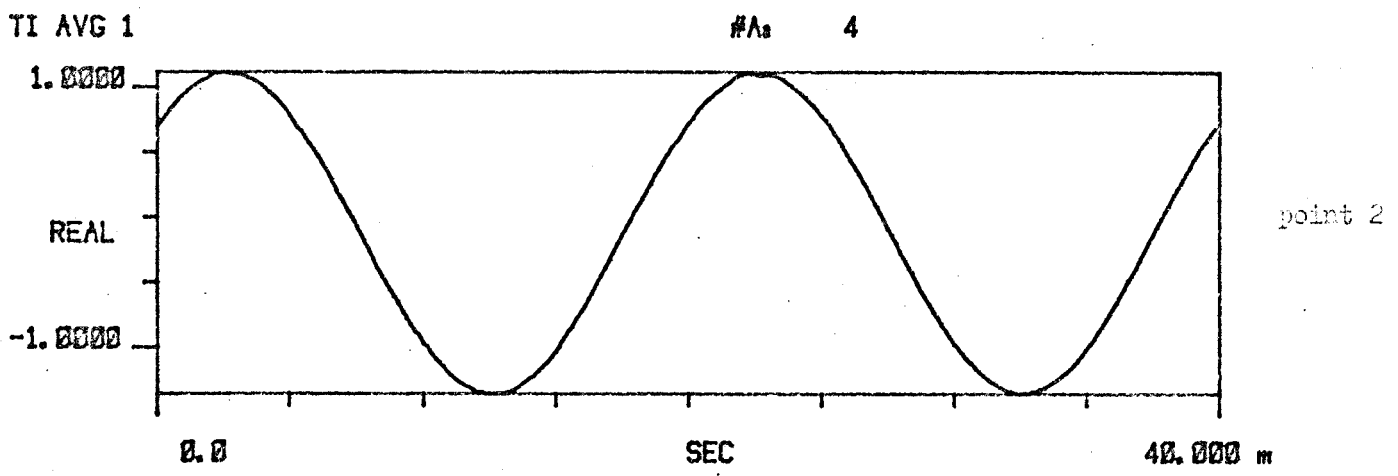
points 1 et 15



Grappe 21



Epsilon $\beta = f(t)$
point 2 et 16



Grappe 22



IV - ANALYSE VIBRATOIRE DES RESONANCES DE FLEXION DU PEIGNE.

IV - 1. INTRODUCTION

Lors de la vérification de la validité de la substitution du disque d'inertie à la monture du peigne (cf § III - 3.2.4.), nous avons vu que des phénomènes de flexion, dus à la dissymétrie de la monture et du disque, se produisent lors du fonctionnement du mécanisme industriel et du système expérimental arbre de torsion et disque. Ces phénomènes de flexion se manifestent lors de l'étude du spectre de fréquence du paramètre vitesse des vibrations mesurées sur les paliers par des pics en basse fréquence non harmoniques du fondamental d'oscillations. Dans l'étude extensométrique de l'arbre de torsion, les graphes obtenus par l'analyse en fréquence du signal analogique Epsilon 3(t), joints en annexe III, § 10, montrent l'existence de pics situés en basse fréquence : 20 Hz, 29.7Hz, 36 Hz, 70.7Hz. En outre, plus la jauge se situe près de l'encastrement de la barre, plus le niveau de ces pics augmente par rapport à ceux du fondamental d'oscillations et de ses harmoniques. Ces faits peuvent encore s'expliquer par la présence de phénomènes de flexion lors de l'oscillation de l'arbre. Il nous paraît donc nécessaire de connaître les modes de résonance en flexion des différents éléments, arbre et monture du peigne, du mécanisme étudié.

IV - 2. MESURE DES FREQUENCES DE RESONANCE DE FLEXION DE L'ARBRE ET DU PEIGNE.

IV - 2.1. - Chaîne de mesure (voir figure 23)

IV - 2.1.1. Générateur sinusoïdal

Il génère des signaux sinusoïdaux de fréquence comprise entre 10Hz et 20kHz selon une progression logarithmique. Le balayage en fréquence se fait électroniquement. Une tension de commande délivrée par la table traçante qui est connectée au générateur réalise la variation de fréquence.

Le générateur possède une sortie amplifiée dont le signal commande un excitateur magnétique.

La linéarité d'amplitude du signal de sortie est de $\pm 0,2$ dB pour la gamme de fréquence 10Hz - 20kHz.

IV - 2.1.2. Excitateur magnétique :

L'excitateur magnétique est formé d'un aimant permanent autour duquel un bobinage est enroulé.

Le générateur délivrant un courant constant, l'excitateur fournit une force d'excitation constante. La partie mobile est alors la structure étudiée. L'excitation se faisant sans contact, la force d'excitation est indépendante de la mobilité de la structure pour une fréquence donnée. Il n'est donc pas nécessaire de réaliser une

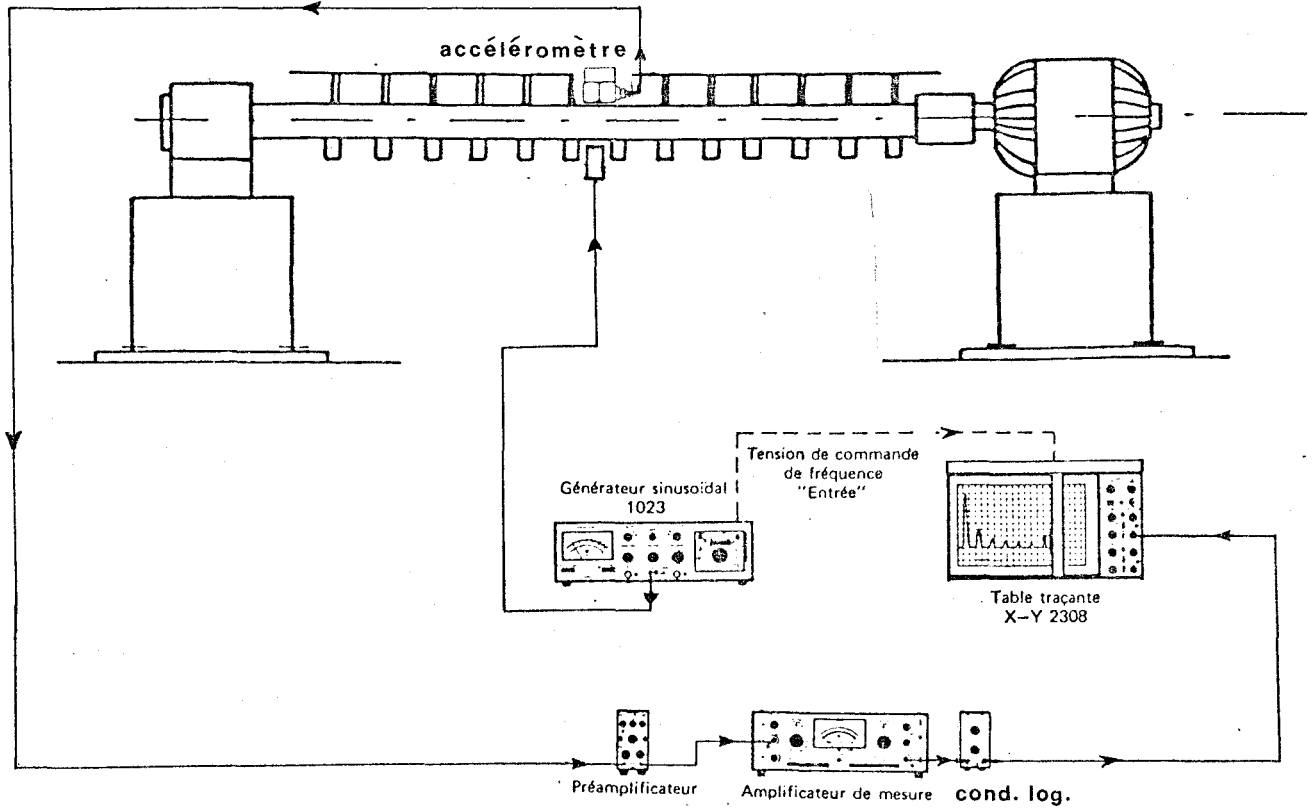


Figure 23

boucle de compression pour que la force d'excitation soit constante lorsque la fréquence varie. L'excitateur est positionné de telle sorte que l'effort qu'il crée ait une direction perpendiculaire à l'axe longitudinal d'oscillation z'z.

Les caractéristiques de l'excitateur sont jointes en annexe IV § 1.

IV - 2.1.3. Accéléromètre piézoélectrique

Un accéléromètre piézoélectrique est fixé à la pièce testée de telle sorte que son axe de mesure (axe de révolution du capteur) soit confondu avec l'axe de révolution des bobines de l'excitateur magnétique. Ainsi, l'accélération mesurée est celle du déplacement qui se réalise suivant l'axe portant l'effort dynamique créé par l'excitateur.

Les caractéristiques du capteur sont au § III 3.1.1.

IV - 2.1.4. Préamplificateur de charge.

Voir § III - 3.1.2.

IV - 2.1.5. Amplificateur de mesure.

Il mesure le signal d'accélération fourni par le préamplificateur de charge.

Le signal qu'il mesure peut varier en fréquence de 2Hz à 200kHz et en tension de 10 μ V à 200V.

Il délivre un signal de sortie amplifié proportionnel à la valeur efficace du signal d'entrée mesuré.

IV - 2.1.6. Conditionneur logarithmique.

Il transforme un signal électrique en volt en un niveau en dB. Sa dynamique est de 80dB.

IV - 2.1.7. Table traçante

C'est une table traçante dont la variation en X se fait grâce à une base de temps intégrée à l'appareil selon une vitesse de défilement choisie de 0,2 mm/s (vitesse minimum).

La variation en Y est commandée par le signal de sortie du conditionneur logarithmique.

La rampe de balayage interne de la table est utilisée en sortie extérieure pour accorder la fréquence d'excitation du générateur sinusoïdal.

La table traçante réalise donc un graphe représentant la variation du niveau de la valeur efficace du signal d'accélération mesuré en un point en fonction de la fréquence de la force sinusoïdale qui est appliquée à ce point.

Les fréquences de résonance en flexion sont alors les maxima des graphes tracés.

IV - 2.2. Mesures effectuées :

IV - 2.2.1. Trois séries de mesures sont réalisées

+ premier arbre avec disque d'inertie.

en trois points A, B, C (figure 24) suivant un plan d'excitation ho-

horizontal et un plan vertical. Les essais sont repérés : Ah1 (1er arbre, excitation en un plan horizontal au point A). puis Bh1, Ch1, AV1, BV1, CV1.

+ deuxième arbre avec disque d'inertie :
essais Ah2, Bh2, Ch2, AV2, BV2, CV2.

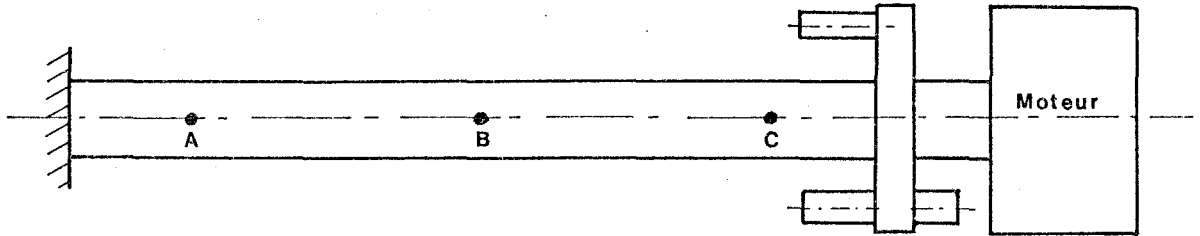


Figure 24

+ système réel :

au point B, nous avons usiné deux alésages dans le tube supportant le peigne afin de fixer l'accéléromètre sur l'arbre et de positionner l'excitateur suivant un plan horizontal pour déterminer les fréquences de résonance en flexion de l'arbre dans la monture. C'est l'essai Bh3.

en un point B' très proche de B, nous avons étudié les résonances de la monture suivant un plan d'excitation horizontal : B'h3.

IV - 2.2.2. Processus de mesure :

+ Positionnement de l'excitateur :

L'excitateur est placé à une distance de 1mm de la pièce étudiée. Ce réglage se fait par une cale étalon. L'incertitude de positionnement est assez grande, les niveaux des maxima obtenus sont relatifs puisque liés à la distance qui sépare l'excitateur de la pièce testée. Une comparaison entre des niveaux obtenus en différents essais n'a donc pas de signification.

La fixation de l'excitateur est réalisée par une potence. Nous avons étudié la rigidité de cette structure. En effet, selon le principe des actions mutuelles, la potence est soumise à une action opposée à celle qu'exerce l'excitateur sur la pièce étudiée. Nous avons donc remplacé l'excitateur par un cylindre de masse identique sur la potence et nous en avons déterminé les fréquences de résonance en nous servant de la chaîne de mesure décrite au § IV - 2. L'étude des fréquences de résonance obtenues (graphe 25) montre que l'on peut se servir de la potence jusqu'à une fréquence de 150Hz et à

Brüel & Kjaer

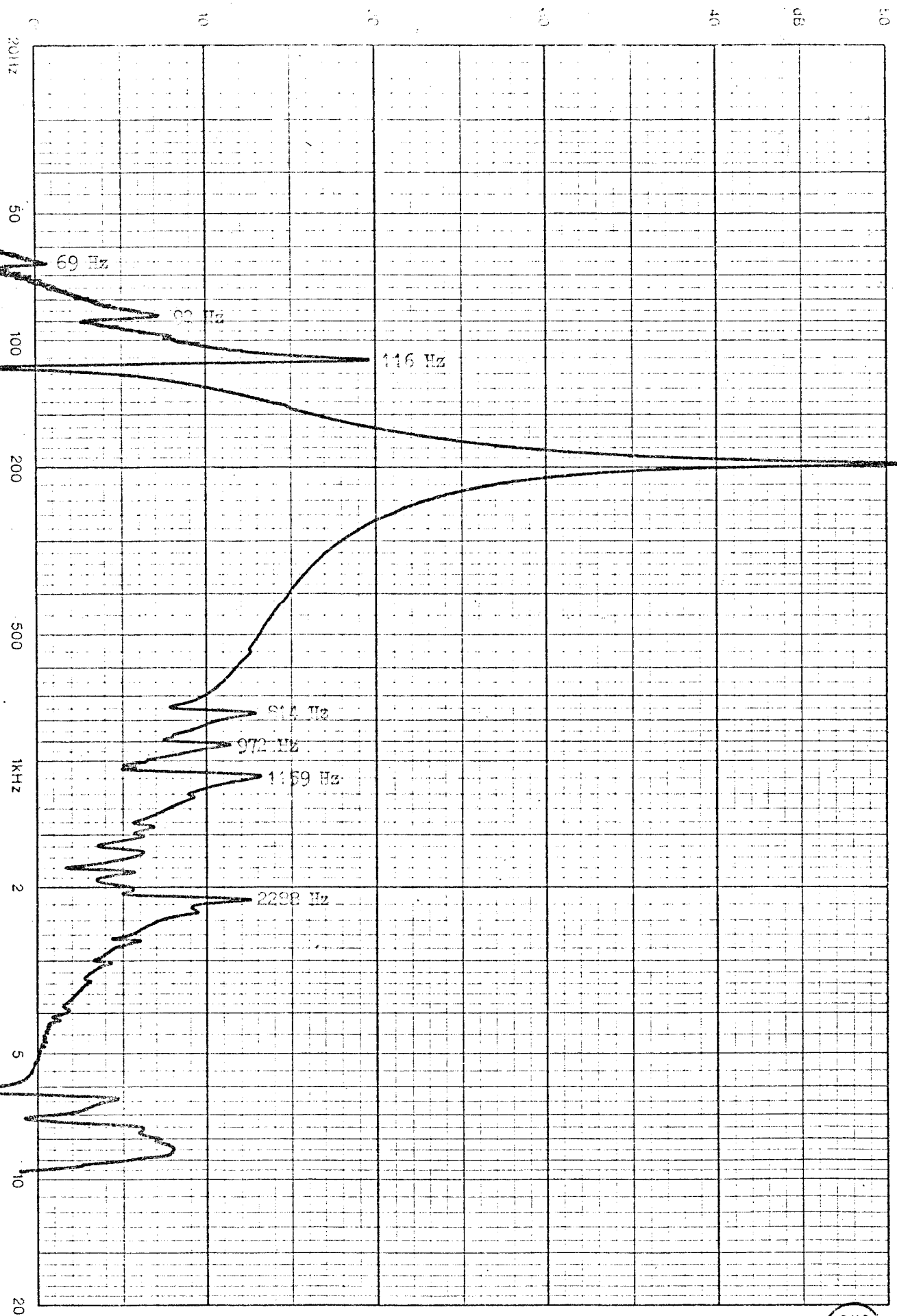
Ref. Level

Rec. No.:

Sign.:

Date:

Détermination des fréquences de résonance en flexion du support du capteur magnétique.



BUS LILLE 316

Graphe 25

partir de 230Hz jusqu'à 20kHz.

+ choix de la vitesse de balayage en fréquence.

Nous avons choisi la plus petite vitesse de balayage afin d'obtenir toutes les fréquences de résonance du système étudié.

+ Nota

Nous n'avons pas placé de filtre hétérodyne asservi au générateur sinusoïdal pour traiter le signal à la sortie du préamplificateur de charge car le banc étant dans une cave d'essais, les vibrations parasites sont négligeables.

Les graphes obtenus sont joints en annexe 4.

IV - 2.3. Interprétation des résultats.

IV - 2.3.1. Analyse des essais Ahl, Bhl, Chl, Avl, Bvl, Cvl.

* Les graphes résultant des différents essais montrent l'existence de fréquences de résonance :

Essai	Fréquences de résonance (Hz)						
Ahl	22,5		57,6		96,4		145
Bhl	22,6		57,7				144,9
Chl	22,6		57,5				145
Avl	23,8	39		63,4		103,1	147,2
Bvl	23,3	39		63,5			148,5
Cvl	23,5	39		63,3			147,2

Les fréquences de résonance mesurées lors des essais réalisés suivant un plan d'excitation horizontal différent de celles relevées en excitation verticale.

+ Les essais Ahl, Bhl et Chl ont trois groupes de fréquences de résonance communes :

22,6Hz. 57,6Hz et 145Hz.

+ Les essais Avl, Bvl, Cvl ont quatre groupes de fréquences de résonance communes :

23,5Hz 39Hz 63,5Hz et 147Hz

Les paliers qui guident l'arbre de torsion présentent donc une rigidité anisotrope.

* L'examen des graphes 26 et 27 relatifs aux essais Ahl et Avl montre que les variations de niveaux correspondant aux différentes harmoniques sont comparables. Cette propriété se vérifie encore pour les essais Bhl, Bvl et Chl, Cvl.

On ne peut par contre établir aucune corrélation entre les variations des maxima de points différents.

Les niveaux relatifs des fréquences de résonance mesurés dépendent donc du point de mesure. Si l'arbre est excité en un point nodal d'ordre n , à la fréquence f_n correspondant à cet ordre, le point étudié est immobile et le capteur ne traduit pas de résonance.

La coïncidence de la variation des niveaux relatifs des différents maxima pour les mêmes points de mesure montre que le positionnement des points est suffisamment précis, les divers essais ayant nécessité plusieurs montages et démontage de l'excitateur et de l'accéléromètre. Le processus de mesure est fidèle.

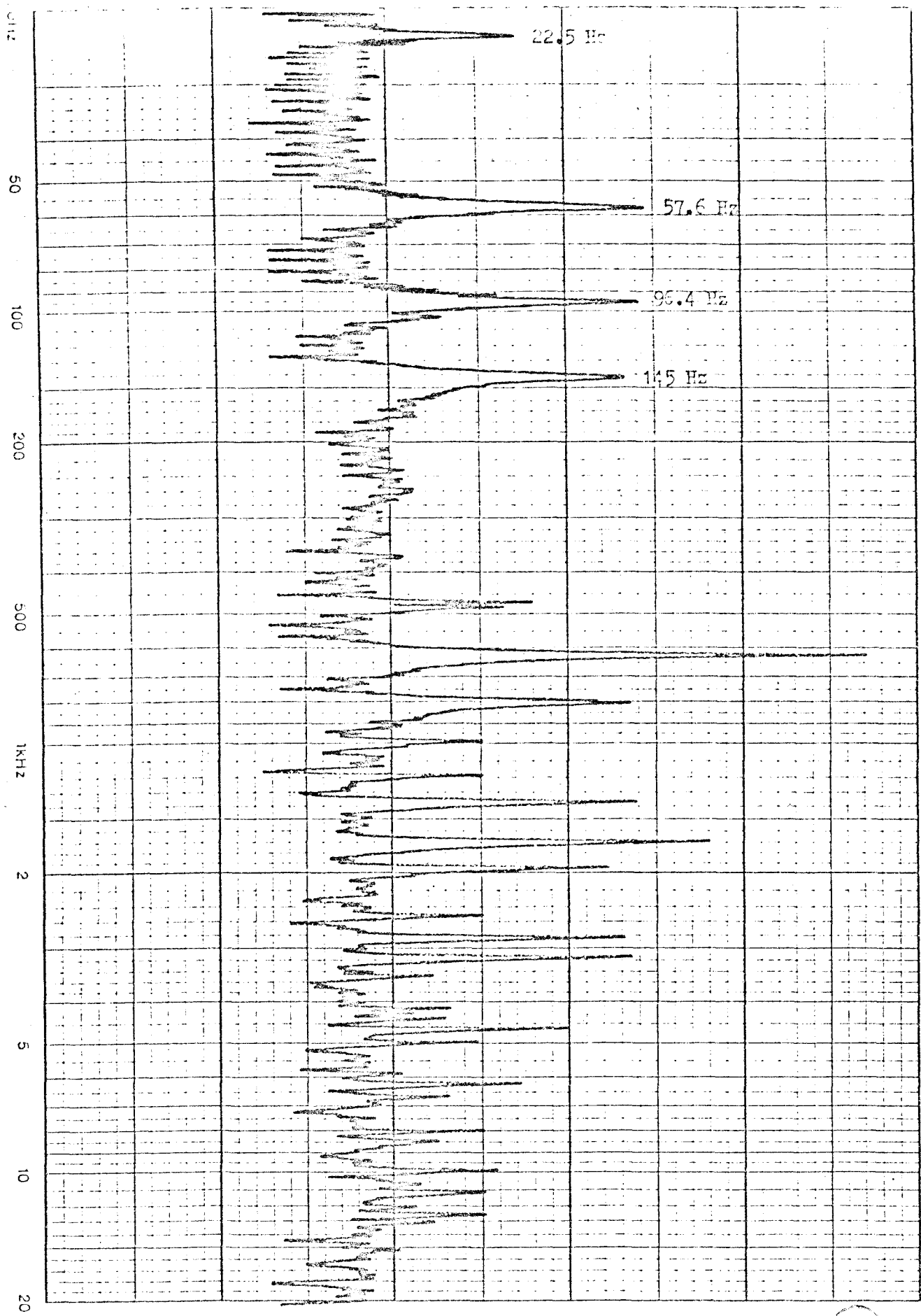
IV - 2.3.2. Comparaison des essais 1 et 2

Les fréquences de résonance mesurées dans la série d'essais 2 sont très voisines, de celles de la première série :

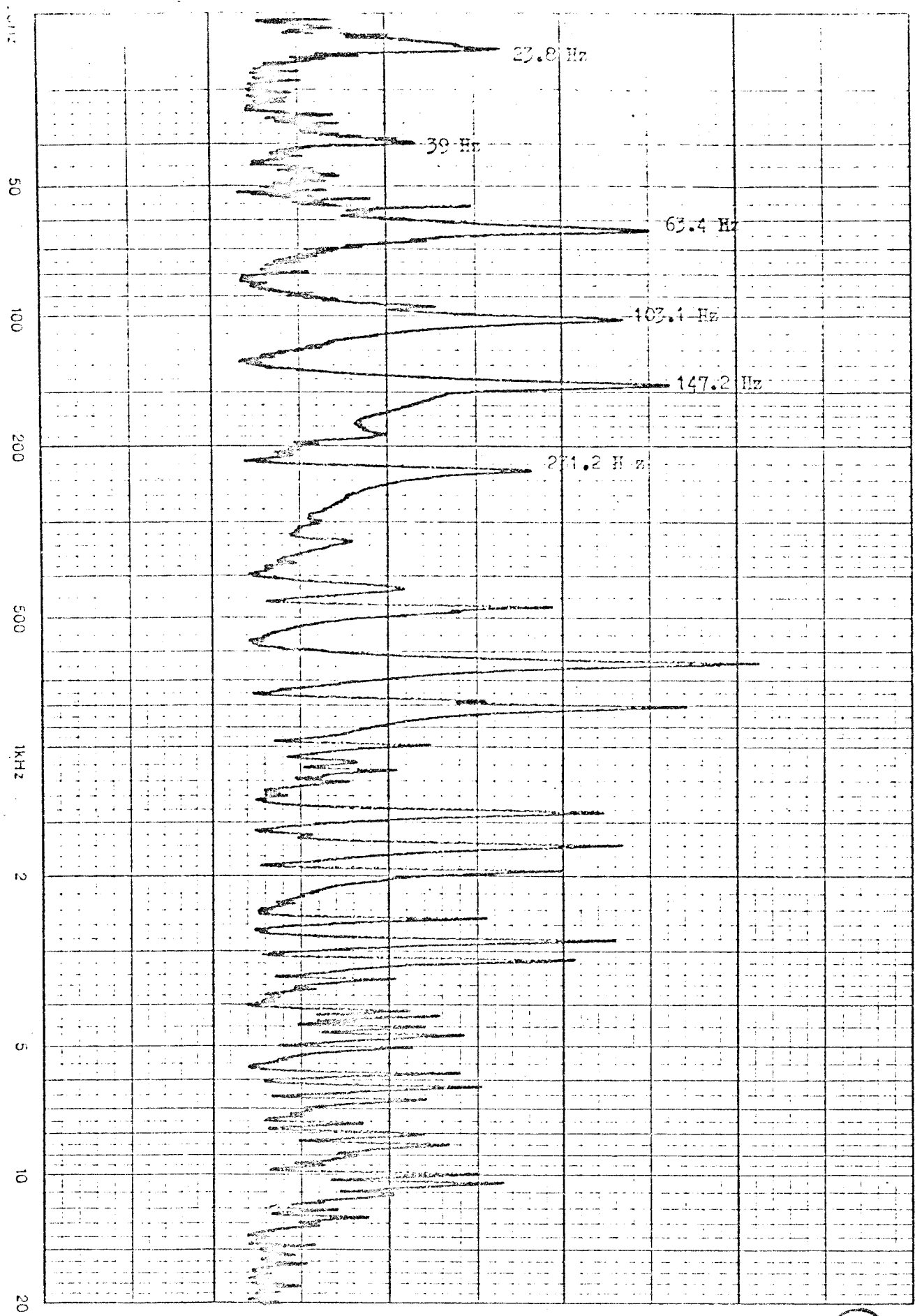
ESSAI A H 1
Niveau 50 dB = 10⁻² Pa²
No. 1

Signat:

Date:



Grphe 26



Essai A V 1
 Niveau 50 dB = 10⁻² µV
 Rec No:

Sign:

Date:



Grphe 27

Essai	Fréquence de résonance (Hz)			
	Ah1	22,5	57,6	96,4
Ah2	23,2	59,6	97,6	146

Le changement de barre de torsion ne modifie pas la valeur des fréquences de résonance mesurées. Le serrage côté encastrement, contrôlé par une clef dynamométrique assure donc une rigidité constante de la liaison.

IV - 2.3.3. Etude de l'essai Bh3.

Cet essai s'applique au système réel. Deux alésages usinés dans le tube support de peigne permettent d'accéder à l'arbre pour réaliser les mesures.

Le graphe de l'essai Bh3 révèle 2 fréquences de résonance à 26Hz et 133Hz. (voir graphe28).

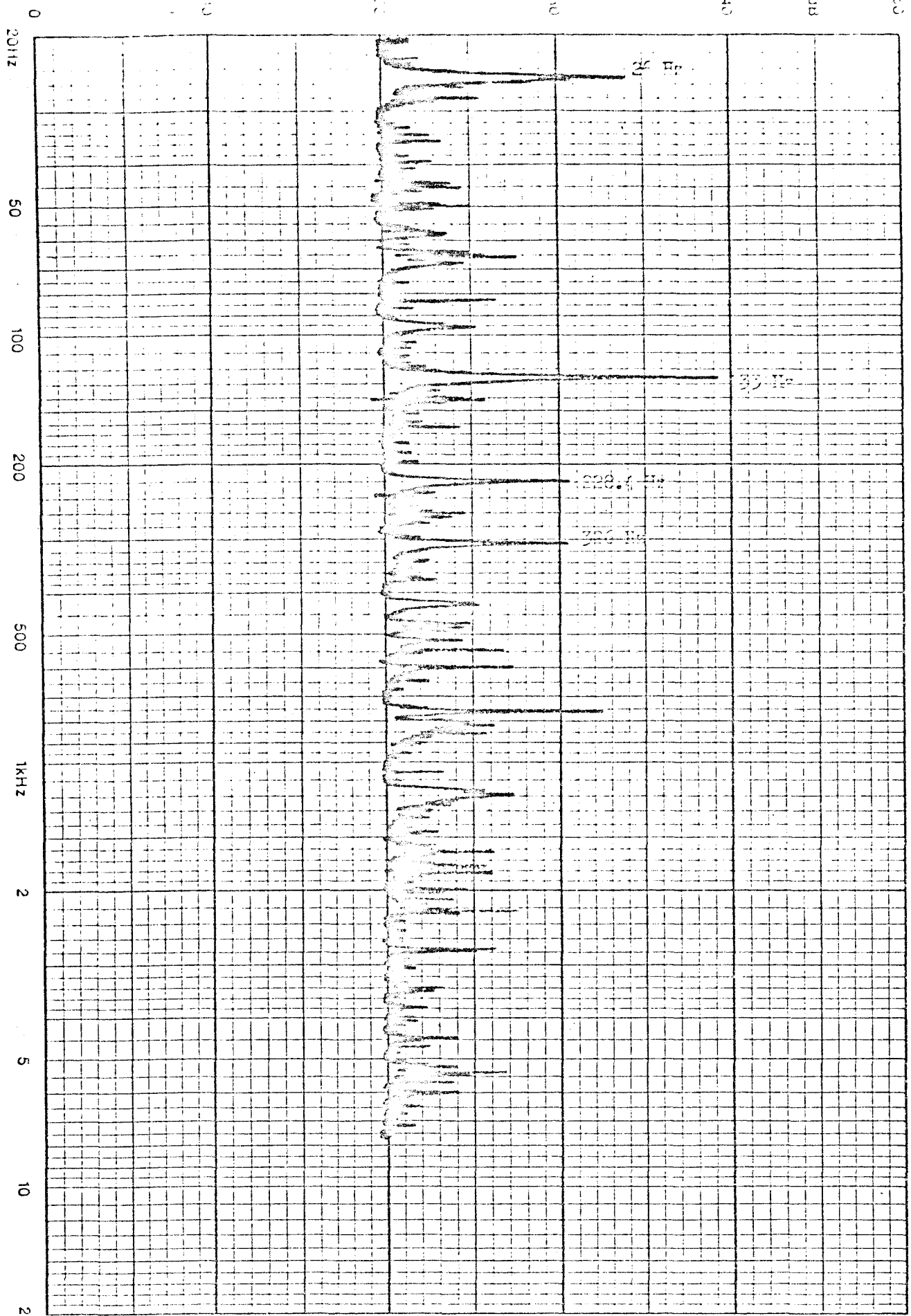
La fréquence fondamentale de 26Hz est légèrement supérieure à celles des essais Bh1 et Bh2 : 22,5Hz et 23 Hz. Ceci s'explique par la présence de la monture du peigne qui accroît la rigidité en flexion de l'arbre.

La fréquence voisine de 60Hz, proche du fondamental d'oscillations (52Hz) disparaît, ce qui élimine les risques de couplage flexion-torsion.

IV - 2.3.4. Etude de l'essai B'h3.

Bureau of Naval Affairs, Washington, D.C. 20374

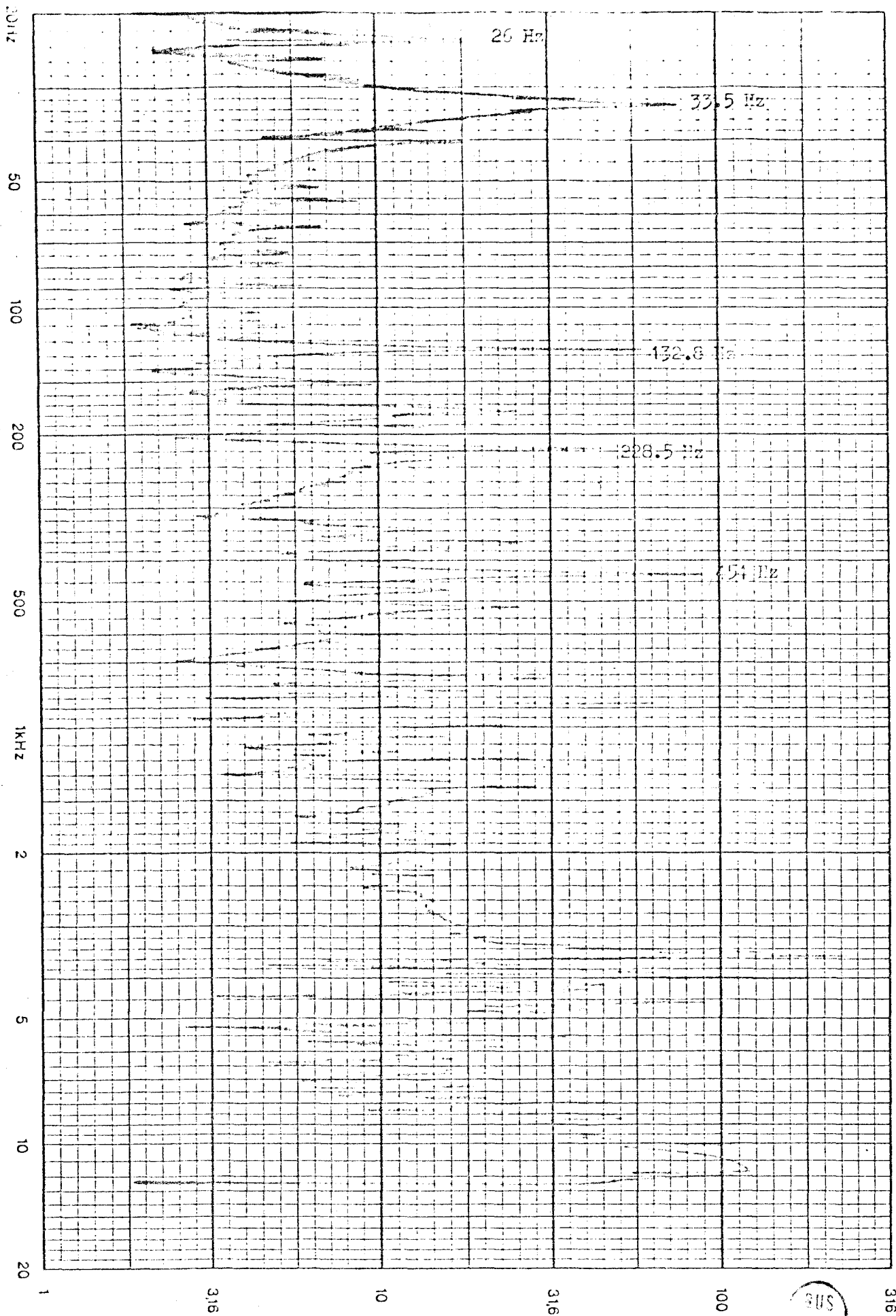
Rec. No.: _____ Date: _____



Grappe 28

Bruel & Kjaer Arbre et tube. Tube excité en son milieu. ESSAI B' n 3

Hel Level: Rec No: Sign: Date:



Graphe 29

Cet essai s'applique également au système réel. Le tube est excité en un point très proche du point de l'essai Bh3.

Le graphe de l'essai B'h3 montre 3 fréquences de résonance à 26Hz, 33,5Hz et 132,8Hz (voir graphe 29)

Les fréquences de 26Hz et 132,8Hz correspondent aux résonances de la barre de torsion déterminées par l'essai Bh3. Les vibrations subies par la monture du peigne sont transmises à la barre de torsion.

La fréquence de 33,5Hz est le mode fondamental de vibration de flexion de la monture.

IV - 3. INFLUENCE DES PHENOMENES DE FLEXION DANS LE FONCTIONNEMENT DU PEIGNE VIBRANT.

IV - 3.1. Etude des spectres de fréquence.

Lors de la vérification expérimentale de la substitution du peigne au disque d'inertie équivalente (§ III, 3), nous avons relevé les spectres de fréquence des signaux vibratoires sur le palier côté encastrement.

L'étude des graphes se rapportant à la mesure du paramètre vitesse montre la présence de pics :

+ graphe 30 : arbre et disque

maxima à 22 Hz, 44Hz et 52 Hz

Branch 1, 1st

Time Function Start:

seconds

End:

seconds

Not Expanded:

Expanded

Full Scale Level

110 dB

Reference Frequency

Weighting

Average Mode

No. of Spectra

Comments

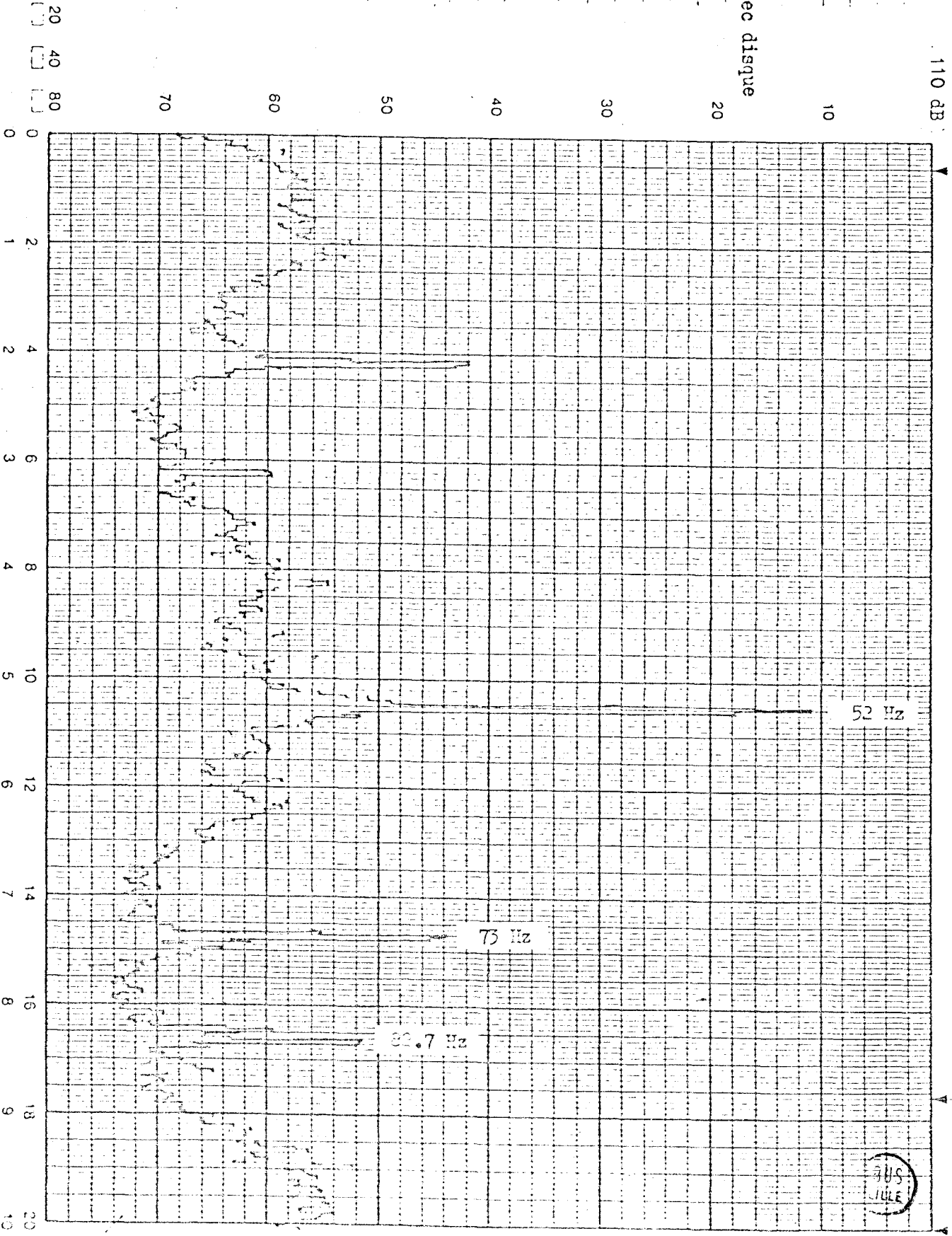
Mesure de vitesse avec disque

Plan vertical

Palier encastrement

Fenêtre de 1 00 Hz

Record No.
Date
Sign.



22Hz est la fréquence fondamentale de vibration de flexion de l'arbre mesurée au paragraphe IV - 2.3.1. et 44Hz son harmonique.

Le niveau du pic de 22 Hz est inférieur de 30dB à celui de 52Hz

+ graphe 31 : système industriel :

maxima à 26Hz et 52 Hz.

26Hz est la fondamentale de vibration de flexion de l'arbre logé dans le tube mesurée au paragraphe IV - 2.3.3. Le niveau du pic de 26Hz est inférieur de 24dB à celui de 52Hz.

Ces deux graphes ne présentent pas de maximum correspondant aux vibrations de flexion de la monture du peigne.

IV - 3.2. Conclusions expérimentales

La correspondance des fréquences de résonance de flexion de l'arbre déterminées par des méthodes différentes confirme la cohérence et la précision des mesures.

Il n'y a pas de fréquence de résonance de flexion au voisinage du fondamental d'oscillation de 52Hz. Seule intervient dans le niveau des vibrations étudiées la fréquence fondamentale de résonance de flexion de l'arbre de torsion : 26Hz. Son niveau est inférieur de 24dB à celui de la fréquence fondamentale d'oscillation (soit 16 fois plus faible) : nous pouvons négliger les phénomènes de flexion dans l'étude du peigne détacheur de carte.

Bruel & Kjaer

Full Scale Level: 100 dB

F. S. Frequency:

Weighting:

Average Mode:

No of Spectra:

Comments:

Mesure en vitesse

Plan vertical

Railier encastrement

Fenêtre de 100 Hz

Time Function Start:

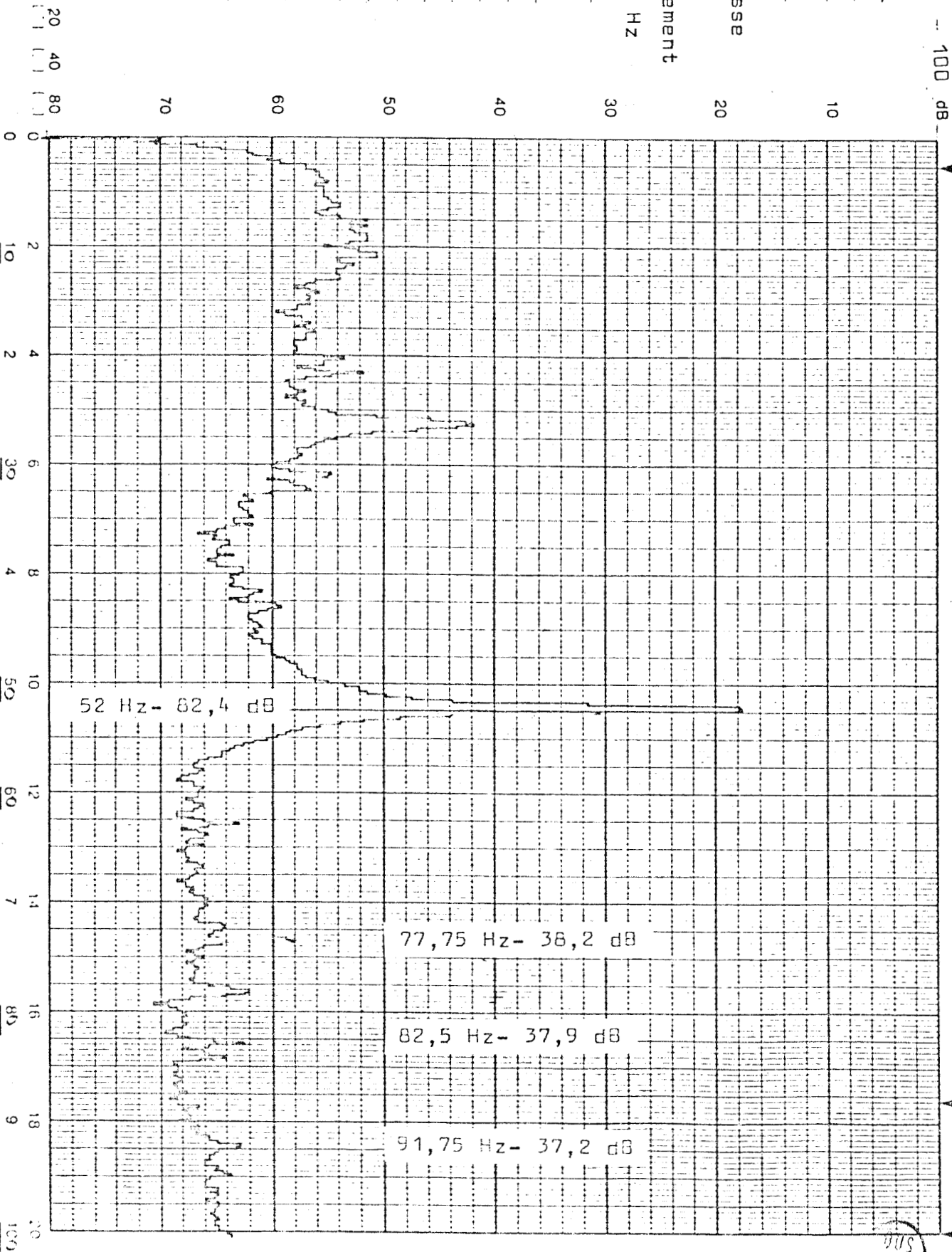
seconds

End:

seconds

Not Expanded: 1

Expanded: 1



Graphe 31

IV - 4. ETUDE DU GUIDAGE DE L'ARBRE DE TORSION.

L'arbre de torsion est encastré à une extrémité dans le bâti par l'intermédiaire d'une bague conique. L'autre extrémité est solidaire du rotor du moteur électrique qui ne possède qu'un degré de liberté par rapport au bâti : la rotation autour de l'axe z (voir figure 32). Pour calculer les fréquences de résonance en flexion de l'arbre, nous pouvons envisager la schématisation de la poutre encastrée en ses deux extrémités :

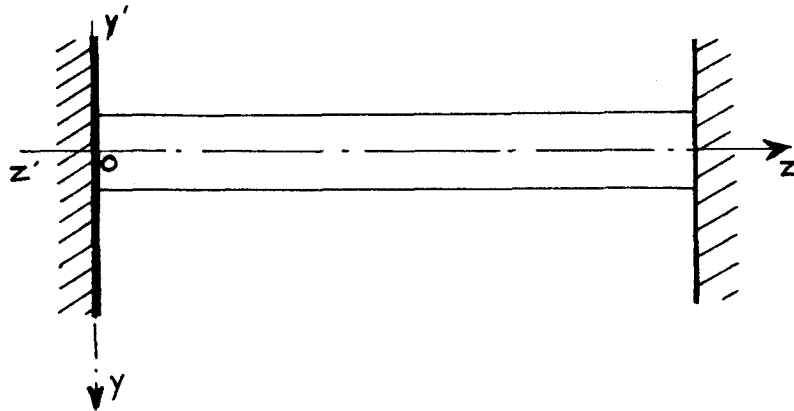


figure 32

l'équation :
$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = - \frac{E J_{z'z}}{\rho S} \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} \quad (6)$$

traduit les vibrations transversales des barres prismatiques.
[5]

- + $y(z,t)$ est l'ordonnée d'un point de la ligne élastique
 - + E est le module longitudinal d'élasticité
 - + $J_{z'z}$ est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan de symétrie
 - + ρ est la masse volumique du matériau supposée constante.
- Soit la fonction $y(z,t)$ séparable en les deux fonctions de variable indépendante :

$$y(z,t) = Z(z) U(t) \quad (7)$$

L'équation 6 se transforme selon :

$$\frac{1}{U(t)} \frac{d^2 U(t)}{dt^2} = - \frac{E J_{z'z}}{\rho S} \frac{1}{Z(z)} \frac{d^4 Z(z)}{dz^4} = - \omega^2 \quad (8)$$

où ω est une constante.

L'équation 8 est équivalente au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \omega^2 U(t) = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 Z(z)}{dz^4} - \frac{\rho S \omega^2}{E J_{z'z}} Z(z) = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

La solution générale de l'équation 9 s'écrit :

$$U(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

où a et b sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

En posant $k = \left(\frac{\rho S \omega^2}{E J_{z'z}}\right)^{1/4}$, la solution générale de l'équation 10 s'écrit :

$$Z(z) = C_1 [\cos(kz) + \operatorname{ch}(kz)] + C_2 [\cos(kz) - \operatorname{ch}(kz)] + C_3 [\sin(kz) + \operatorname{sh}(kz)] + C_4 [\sin(kz) - \operatorname{sh}(kz)] \quad (11)$$

Dans cette expression, C_1, C_2, C_3 et C_4 sont d'autres constantes précises par les conditions aux limites.

La barre étant encadrée en ses deux extrémités :

$$\text{en } z = 0, \quad y(z,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y(z,t)}{\partial z} = 0.$$

$$\text{en } z = 1, \quad y(z,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y(z,t)}{\partial z} = 0$$

or $y(z,t) = Z(z) U(t)$.

Les conditions précédentes sont équivalentes à :

$$Z(z) = 0, \quad \frac{dZ(z)}{dz} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1.$$

Appliquées à l'équation 11, ces conditions montrent que :

$$C_1 = 0$$

$$C_3 = 0$$

$$C_2 [\cos(kl) - \operatorname{ch}(kl)] + C_4 [\sin(kl) - \operatorname{sh}(kl)] = 0$$

$$- C_2 [\sin(kl) + \operatorname{sh}(kl)] + C_4 [\cos(kl) - \operatorname{ch}(kl)] = 0$$

C_2 et C_4 étant non nuls, il faut que

$$[\cos(kl) - \operatorname{ch}(kl)]^2 + \sin^2(kl) - \operatorname{sh}^2(kl) = 0$$

ou $\cos(kl) \operatorname{ch}(kl) = 1$

Cette équation transcendante a pour premières racines :

$$k_1 l = 4,730, \quad k_2 l = 7,853, \quad k_3 l = 10,996 \dots$$

or, nous avons posé : $k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{E J_{z'z}}$

la pulsation ω_n s'écrit par conséquent :

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{E J_{z'z}}{\rho S}}$$

et la fréquence d'ordre n :

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E J_{z'z}}{\rho S}}$$

Application numérique :

$$E = 207\,620 \text{ N/mm}^2$$

$$\left. \begin{aligned} J_{z'z} &= \frac{\pi D^4}{64} \\ S &= \frac{\pi D^2}{4} \end{aligned} \right\} D = 36\text{mm}$$

$$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$$

$$l = 2,55\text{m}$$

$$f_1 = 24,56 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 67,71 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 132,75 \text{ Hz}$$

Lors de l'analyse vibratoire des modes de résonance du peigne, nous avons montré que la fréquence fondamentale en vibration de flexion du système arbre et disque se situait à 22,5 Hz. (voir § IV - 2.3.1.). La valeur théorique précédemment calculée diffère donc de 9% de la valeur mesurée.

Ce faible écart nous permet d'affirmer que :

+ la schématisation proposée est valable pour déterminer les fréquences de résonance en flexion de l'arbre de torsion dans le cadre d'un calcul d'avant projet.

+ l'encastrement côté palier peut être considéré comme parfait pour la schématisation du peigne vibrant proposée au chapitre V.

Les études expérimentales ont montré que la schématisation du système industriel en un arbre et un disque (disque d'inertie équivalente à la monture et rotor du moteur) était justifiée et que, les phénomènes de flexion pouvant être négligés, il était possible d'utiliser les hypothèses de la torsion pour étudier analytiquement le comportement de l'arbre. Nous conservons donc cette schématisation pour déterminer le tenseur des contraintes en tout point de l'arbre. Dans ce calcul, la répartition de masse le long de l'arbre n'est plus négligée.

V - 1. ETUDE DE L'ARBRE

Soit un cylindre homogène ; exprimées en coordonnées cylindriques

(r, θ, z) et dans le cadre de la théorie linéaire de l'élasticité, les équations de la résultante dynamique du principe fondamental peuvent s'écrire : [6]

$$(\lambda + 2 \mu) \frac{\partial}{\partial r} \Delta - 2 \mu \frac{\partial}{r \partial \theta} \omega_{r\theta} + 2 \mu \frac{\partial}{\partial z} \omega_{zr} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$(\lambda + 2 \mu) \frac{\partial}{r \partial \theta} \Delta - 2 \mu \frac{\partial}{\partial z} \omega_{\theta z} + 2 \mu \frac{\partial}{\partial r} \omega_{r\theta} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$(\lambda + 2 \mu) \frac{\partial}{\partial z} \Delta - 2 \mu \frac{\partial}{r \partial r} r \omega_{zr} + 2 \mu \frac{\partial}{r \partial \theta} \omega_{\theta z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (14)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

+ u_r , u_θ et u_z sont les trois composantes du déplacement selon les directions radiale, tangentielle et axiale.

+ $\omega_{r\theta}$, $\omega_{\theta z}$, ω_{zr} sont les trois composantes du tenseur de rotation satisfaisant l'identité

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \omega_{\theta z}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \omega_{zr} + r \frac{\partial}{\partial z} \omega_{r\theta} = 0.$$

Les trois composantes du tenseur antisymétrique de rotation peuvent s'exprimer à l'aide des déplacements :

$$\omega_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{r \partial \theta} u_z - \frac{\partial}{\partial z} u_\theta \right)$$

$$\omega_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} u_r - \frac{\partial}{\partial r} u_z \right)$$

$$\omega_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} u_r \right]$$

+ Le scalaire Δ , divergence de u , caractérise la dilatation :

$$\Delta = \frac{\partial}{r\partial r} (r u_r) + \frac{\partial}{r\partial\theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z$$

La campagne extensométrique que nous avons menée, nous conduit à faire les hypothèses suivantes :

$$u_z = 0$$

$$u_\theta = V(r,z) e^{-i\omega t}$$

De plus, nous formulerons l'hypothèse : $u_r = 0$.

Exprimons les équations 12, 13 et 14 compte tenu de ces hypothèses :

$$* \Delta = \frac{\partial}{r\partial r} (r \cdot 0) + \frac{\partial}{r\partial\theta} V(r,z) e^{-i\omega t} + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$* \omega_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V(r,z) e^{-i\omega t}) - \frac{\partial}{\partial\theta} 0 \right]$$

$$\omega_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V(r,z) e^{-i\omega t}) \right]$$

$$* \omega_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{r\partial\theta} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (V(r,z) e^{-i\omega t}) \right]$$

$$\omega_{\theta z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (V(r,z) e^{-i\omega t})$$

$$* \omega_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} 0 - \frac{\partial}{\partial r} 0 \right) = 0$$

$$\omega_{zr} = 0$$

l'équation 12 devient :

$$- 2 \mu \frac{\partial}{r\partial\theta} \left[\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r V(r,z) e^{-i\omega t}) \right] + 2 \mu \frac{\partial}{\partial z} 0 = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

qui se ramène à l'identité des deux membres à zéro.

l'équation 14 s'écrit :

$$- 2 \mu \frac{\partial}{r\partial r} (r \cdot 0) + 2 \mu \frac{\partial}{r\partial\theta} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (V(r,z) e^{-i\omega t}) \right] = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

qui se ramène également à l'identité des deux membres à zéro.

l'équation 13 se transforme selon

$$-2 \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (V(r,z)e^{-i\omega t}) \right] + 2 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (rV(r,z)e^{-i\omega t}) \right] = \rho \frac{\partial}{\partial t^2} (V(r,z)e^{-i\omega t})$$

d'où il résulte

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(r,z) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV(r,z)) \right] = -\rho \omega^2 V(r,z)$$

et,

$$\mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(r,z) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV(r,z)) \right] \right\} = -\rho \omega^2 V(r,z) \quad (15)$$

En supposant que l'amplitude $V(r,z)$ est séparable en les fonctions de variables indépendantes r et z : $V(r,z) = V_1(r) V_2(z)$

l'équation 15 s'écrit :

$$-\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} [V_1(r) V_2(z)] = \rho \omega^2 V_1(r) V_2(z) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_1(r) V_2(z)) \right]$$

$$-\mu V_1(r) V_2''(z) = \rho \omega^2 V_1(r) V_2(z) + \mu V_2(z) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_1(r)) \right]$$

d'où la relation

$$\frac{V_2''(z)}{V_2(z)} = \pm k^2 = \frac{\mu \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_1(r)) \right] + \rho \omega^2 V_1(r)}{-\mu V_1(r)}$$

Cette équation est satisfaite par le système

$$\begin{cases} V_2''(z) - k^2 V_2(z) = 0 & (16) \\ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_1(r)) \right] + k^2 V_1(r) + \frac{\rho \omega^2}{\mu} V_1(r) = 0 & (17) \end{cases}$$

Remarque :

Le choix du signe négatif dans l'équation 16 est justifié par le fait que l'expérience n'a pas montré de périodicité de u_θ suivant l'axe z

Exprimons l'équation 17

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_1(r)) \right] + k^2 V_1(r) + \frac{\rho \omega^2}{\mu} V_1(r) = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} (V_1(r) + r V_1'(r)) \right] + k^2 V_1(r) + \frac{\rho \omega^2}{\mu} V_1(r) = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{V_1(r)}{r} + V_1'(r) \right] + \left[\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2 \right] V_1(r) = 0$$

$$-\frac{V_1(r)}{r^2} + \frac{V_1'(r)}{r} + V_1''(r) + \left[\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2 \right] V_1(r) = 0$$

$$\boxed{V_1''(r) + \frac{V_1'(r)}{r} + \left[\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2 - \frac{1}{r^2} \right] V_1(r) = 0} \quad (18)$$

Considérons le changement de variable : $r = \lambda R$

$$V_1(\lambda R) = f(R)$$

$$\frac{df(R)}{dR} = \lambda V_1'(\lambda R) \quad \text{et} \quad \frac{d^2f(R)}{dR^2} = \lambda^2 V_1''(\lambda R)$$

l'équation 18 s'écrit alors :

$$\frac{f''(R)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 R} f'(R) + \left(\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2 - \frac{1}{\lambda^2 R^2} \right) f(R) = 0$$

$$f''(R) + \frac{1}{R} f'(R) + \left[\lambda^2 \left(\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2 \right) - \frac{1}{R^2} \right] f(R) = 0$$

en posant $\lambda^2 = \frac{1}{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}$, on obtient une équation de Bessel d'ordre 1 :

$$\boxed{f''(R) + \frac{1}{R} f'(R) + \left[1 - \frac{1}{R^2} \right] f(R) = 0}$$

Cette équation différentielle a deux solutions

$$a) \quad J_1(R) = \frac{R}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{R}{2}\right)^{2p}}{\Gamma(p+1) \Gamma(p+2)}$$

la fonction $J_1(R)$ est définie pour $R = 0$.

$$b) \quad Y_1(R) = \frac{2}{\pi} J_1(R) \text{Log} \frac{R}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{R}{2}\right)^{2p+1} \frac{1}{\Gamma(p+2)} \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \left(\frac{R}{2}\right)^{2p-1} \frac{1}{\Gamma(p)}$$

la fonction $Y_1(R)$ n'est pas définie pour $R = 0$, ce qui l'exclut de notre recherche de solutions.

Les deux fonctions solutions du système d'équations différentielles sont donc :

$$\begin{cases} f(r) = J_1 \left(r \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} \right) \\ V_2(z) = B \operatorname{ch} k z + C \operatorname{sh} k z. \end{cases} \quad \text{et } u_\theta = f(r) V_2(z) e^{-i\omega t}$$

Conditions aux frontières :

+ A la surface de l'arbre, pour $r = a$, les contraintes $\tau_{r\theta}$ sont nulles.

Or, en coordonnées cylindriques, la loi de Hooke pour un milieu homogène et isotrope permet d'écrire :

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[\frac{\partial}{r \partial \theta} u_r + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\theta \right) \right] \quad [7]$$

donc $\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\theta \right) \right]$

$$\tau_{r\theta} = \mu r \left\{ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} J_1 \left(r \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} \right) \right] \right\} V_2(z) e^{-i\omega t}$$

Soit alors l'équation :

$$\mu r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} J_1 \left(r \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} \right) \right] V_2(z) e^{-i\omega t} = 0$$

ou : $R \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} J_1(R) \right] = 0$

$$- \frac{1}{R} J_1(R) + J_1'(R) = 0.$$

$$\boxed{- J_1(R) + R J_1'(R) = 0} \quad (19)$$

Or $\frac{d}{dR} [R J_1(R)] = R J_0(R)$ [8]

L'équation 19 s'écrit donc :

$$- J_1(R) - J_1(R) + R J_0(R) = 0.$$

$$- 2 J_1(R) + R J_0(R) = 0.$$

soit $2J_1 \left(r \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} \right) - r \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} J_0 \left(r \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} \right) = 0$

à la frontière, pour $r = a$:

$$2 J_1 \left(a \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} \right) - a \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} J_0 \left(a \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2} \right) = 0 \quad (20)$$

Les tables des fonctions de Bessel nous indiquent que les solutions sont :

ordre 0	:	$a \sqrt{\frac{\rho \omega_0^2}{\mu} + k_0^2} = 0$
1	:	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\rho \omega_1^2}{\mu} + k_1^2} = 3,26944$
2	:	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\rho \omega_2^2}{\mu} + k_2^2} = 5,35858$
3	:	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\rho \omega_3^2}{\mu} + k_3^2} = 7,39742$
4	:	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\rho \omega_4^2}{\mu} + k_4^2} = 9,41943$
.

+ Sur les sections droites, l'application des contraintes aux sections S doit être équivalente à un couple pur d'axe Ox_3

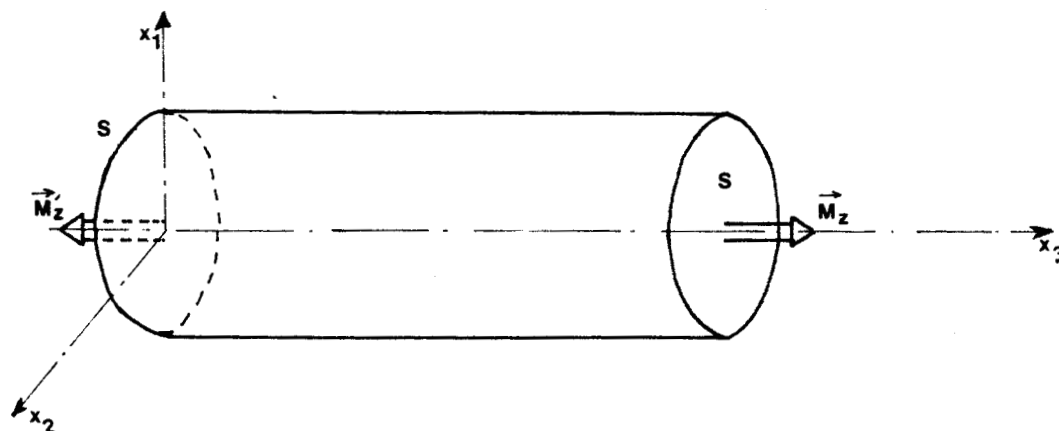


Figure 33

ce qui, dans le repère orthonormé $(\vec{Ox}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, s'exprime par les équations :

* résultante nulle :

$$\iint_S \tau_{31} dS = 0 \quad (21) , \quad \iint_S \tau_{32} dS = 0 \quad (22) , \quad \iint_S \sigma_{33} dS = 0 \quad (23)$$

Exprimons les contraintes τ_{31} , τ_{32} et σ_{33} en fonction des composantes du tenseur des contraintes exprimées en coordonnées cylindriques r , θ et z .

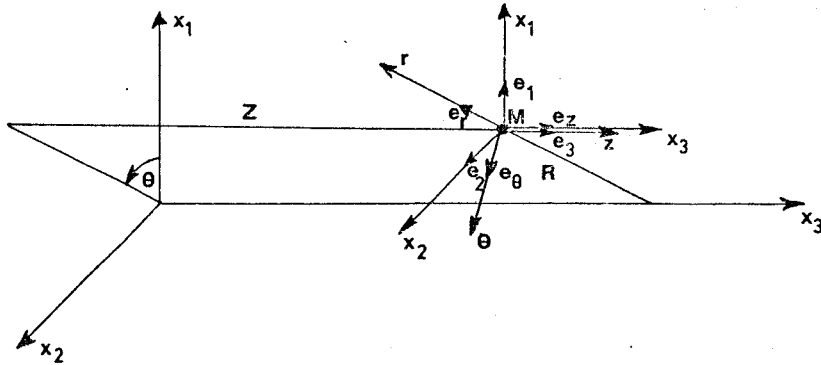


Figure 34

Soit (P) la matrice de changement de base telle que, symboliquement :

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } \vec{t}_{M(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{\theta r} & \tau_{zr} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \vec{t}_{M(x_1,x_2,x_3)} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

représentent respectivement le tenseur \vec{t} dans les repères (r, θ, z) et (x_1, x_2, x_3) en M,

alors $\vec{t}_{M(x_1,x_2,x_3)} = (P)^{-1} \vec{t}_{M(r,\theta,z)} (P)$. (24)

Le développement de l'équation 24 permet d'écrire :

$$\tau_{31} = \cos \theta \tau_{rz} - \sin \theta \tau_{\theta z}$$

$$\tau_{32} = \sin \theta \tau_{rz} + \cos \theta \tau_{\theta z}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{zz}$$

L'équation 21 s'écrit alors :

$$\iint_S (\cos \theta \tau_{rz} - \sin \theta \tau_{\theta z}) r dr d\theta = 0 ; \text{ d'après [7] :}$$

et
$$\iint_S [\mu \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial z} u_r + \frac{\partial}{\partial r} u_z \right) - \mu \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial z} u_\theta + \frac{\partial}{r \partial \theta} u_z \right)] r dr d\theta =$$

or
$$u_r = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{et} \quad u_\theta = v_1(r) v_2(z) e^{-i\omega t}$$

donc,
$$\iint_S -\mu \sin \theta \left[\frac{\partial}{\partial z} (v_1(r) v_2(z) e^{-i\omega t}) \right] r dr d\theta = 0$$

ou,
$$\int_0^{2\pi} -\mu \sin \theta d\theta \int_0^a \left[\frac{\partial}{\partial z} (v_1(r) v_2(z) e^{-i\omega t}) \right] r dr = 0$$

qui se ramène à l'identité des deux membres à zéro.

L'équation 22 devient :

$$\iint_S (+ \sin \theta \tau_{rz} + \cos \theta \tau_{\theta z}) r dr d\theta = 0 ; \text{ d'après [7] :}$$

et
$$\iint_S [+ \mu \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial z} u_r + \frac{\partial}{\partial r} u_z \right) + \mu \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial z} u_\theta + \frac{\partial}{r \partial \theta} u_z \right)] r dr d\theta =$$

qui, compte tenu des hypothèses faites sur les déplacements, s'écrit :

$$\iint_S \mu \cos \theta \left[\frac{\partial}{\partial z} (v_1(r) v_2(z) e^{-i\omega t}) \right] r dr d\theta = 0$$

ou,
$$\int_0^{2\pi} \mu \cos \theta d\theta \int_0^a \left[\frac{\partial}{\partial z} (v_1(r) v_2(z) e^{-i\omega t}) \right] r dr = 0$$

qui se ramène également à l'identité des deux membres à zéro.

L'équation 23 se transforme selon

$$\iint_S \sigma_{zz} dS = 0 ; \text{ d'après [7] :}$$

et
$$\iint_S (\lambda \Delta + 2 \mu \frac{\partial}{\partial z} u_z) r dr d\theta = 0$$

qui, compte tenu des hypothèses sur les déplacements, se ramène aussi à l'identité des deux membres à zéro.

La répartition des contraintes sur les surfaces latérales a bien une somme géométrique nulle. Le système de forces appliquées est équivalent à un couple que nous allons calculer.

Expression des moments appliqués aux extrémités.

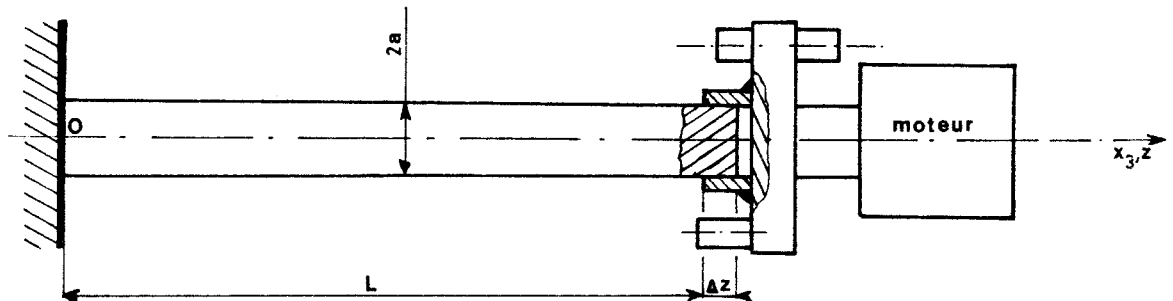


Figure 35

Le moteur fournit un couple $C_0 e^{-i\Omega t}$ par l'intermédiaire d'un manchon d'accouplement situé à $z = L$. La surface de contact entre l'arbre de torsion et le manchon étant un cylindre de rayon a et de hauteur Δz , négligeable devant L , la répartition des contraintes s'exprimera par :

- en $z = 0$, l'encastrement est parfait (cf IV - 4).

donc $u_\theta = 0$

Or, $u_\theta = (B \operatorname{ch} k z + C \operatorname{sh} k z) J_1(R) e^{-i\omega t}$

où $R = r \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}$.

Comme la condition à la frontière latérale entraîne :

$2 J_1(R) - R J_0(R) = 0$ (20)

et que $J_0(R)$ et $J_1(R)$ ont des zéros distincts, on voit que la condition

$$u_\theta = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ entraîne } B = 0.$$

u_θ s'écrit, par conséquent :

$$u_\theta = C \operatorname{sh} k z J_1(R) e^{-i\omega t} \quad (25)$$

- en $z = 1$, la présence du disque et du moteur nous amène à écrire :

$$\iint_S (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dS = C_0 e^{-i\omega t} - I_{z,z} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_\theta(r=a)}{a} \right) \quad (26)$$

où

* $\iint_S (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dS$ est le moment dû à la répartition de contraintes, sur la section droite en $z = 1$, exprimée dans le repère orthonormé x_1, x_2, x_3 .

En coordonnées cylindriques r, θ, z , ce moment s'exprime selon :

$$\iint_S \{ r \cos \theta [\sin \theta \tau_{rz} + \cos \theta \tau_{\theta z}] - r \sin \theta [\cos \theta \tau_{rz} - \sin \theta \tau_{\theta z}] \} r dr d\theta$$

$$\text{ou : } \iint_S r^2 \tau_{\theta z} dr d\theta$$

qui se transforme, en exprimant les contraintes en fonction des déplacements selon :

$$\iint_S r^2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} u_\theta + \frac{\partial}{r \partial \theta} u_z \right) dr d\theta.$$

$$\text{En considérant que : } u_\theta = C \operatorname{sh} k z J_1(R) e^{-i\omega t} \quad (25)$$

et $u_z = 0$ (hypothèses initiales),

l'expression du moment devient :

$$\iint_S r^2 \mu \left[\frac{\partial}{\partial z} (C \operatorname{sh} k z J_1(R) e^{-i\omega t}) \right] dr d\theta$$

ou $2\pi \mu k C \operatorname{ch} k z e^{-i\omega t} \int_0^a r^2 J_1(R) dr.$

Calculons l'intégrale $I = \int_0^a r^2 J_1(R) dr.$

En effectuant le changement de variable $R = r \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}$

$$I = \int_0^a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2} \frac{R^2}{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2} J_1(R) \frac{dR}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}}$$

$$I = \frac{1}{\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2\right)^{3/2}} \int_0^a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2} R^2 J_1(R) dR \quad (27)$$

Les propriétés des équations de Bessel permettent d'écrire [8] :

$$\frac{d}{dR} R^2 J_2(R) = R^2 J_1(R)$$

L'équation (27) devient :

$$I = \frac{1}{\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2\right)^{3/2}} \int_0^a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2} \left[\frac{d}{dR} R^2 J_2(R) \right] dR$$

et,
$$I = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}} a^2 J_2 \left(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2} \right)$$

Le premier terme de l'équation (26), moment dû à la répartition de contrainte sur la section droite en $z = l$ s'écrit donc :

$$\iint_S (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dS = 2\pi \mu k C \operatorname{ch} k l e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}} a^2 J_2(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2})$$

* $C_0 e^{-i\Omega t}$ est le couple moteur instantané

* $I_{z'z} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_\theta(r=a)}{a} \right)$ est le moment dynamique du rotor du moteur

et du disque en $z = l$. Exprimons cette quantité :

L'équation (25) nous permet d'écrire :

$$u_\theta(r=a) = C \operatorname{sh} k z J_1(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) e^{-i\omega t}$$

$$I_{z'z} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_\theta(r=a)}{a} \right) = -\frac{\omega^2}{a} C \operatorname{sh} k z J_1(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) e^{-i\omega t}$$

et, en $z = l$:

$$I_{z'z} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_\theta(r=a)}{a} \right) = -\frac{\omega^2}{a} C \operatorname{sh} k l J_1(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) e^{-i\omega t}$$

L'équation (26) s'écrit alors :

$$2\pi \mu k C \operatorname{ch} k l e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}} a^2 J_2(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) = C_0 e^{-i\Omega t} + \frac{\omega^2}{a} C \operatorname{sh} k l J_1(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) e^{-i\omega t}$$

qui est équivalente au système :

$$\omega = \Omega \quad (28)$$

$$2\pi \mu k C \operatorname{ch} k l \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}} a^2 J_2(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) = C_0 + \frac{\omega^2}{a} C \operatorname{sh} k l J_1(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) \quad (29)$$

V - 2. ANALYSE DE LA SCHEMATISATION

Les équations, solutions de notre modélisation, sont :

$$2 J_1(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) - a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2} J_0(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) = 0 \quad (20)$$

$$\omega = \Omega \quad (28)$$

$$2\pi \mu k C \operatorname{ch} k l \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}} a^2 J_2(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) = C_0 + \frac{\omega^2}{a} C \operatorname{sh} k l J_1(a \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu} + k^2}) \quad (29)$$

Remarque :

$$J_2\left(a \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}\right) = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}\right)^{2p}}{\Gamma(p+1) \Gamma(p+3)}$$

L'équation 29 s'écrit donc :

$$\mu k C \operatorname{ch} k l \left(\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2\right) \frac{\pi a^4}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}\right)^{2p}}{\Gamma(p+1) \Gamma(p+3)} = C_0 + \frac{\omega^2}{a} C \operatorname{sh} k l J_1\left(a \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}\right)$$

notons que dans le premier terme de cette équation, le facteur $\frac{\pi a^4}{2}$ est le moment d'inertie de la section de l'arbre par rapport à son centre.

l'équation transcendante 20 admet une infinité de zéros réels et simples tels que si :

$$\alpha_n = a \sqrt{\rho \frac{\omega_n^2}{\mu} + k_n^2} \quad (30) \quad ,$$

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_n < \dots \quad [9]$$

La connaissance du coupleur moteur $C_0 e^{-i\Omega t}$ nous permet de chercher le premier zéro de l'équation 20, α_p , tel que

$$\alpha_p^2 > \frac{\rho}{\mu} a^2 \omega_p^2 \quad \text{où} \quad \omega_p = \Omega$$

Nous pouvons, par l'intermédiaire de l'équation 30, calculer k_p .
L'équation 29 nous fournit alors C_p .

Les constantes ω_p, k_p, C_p déterminées, le déplacement u_θ est défini. Nous pouvons donc calculer, en tout point de l'arbre, le tenseur des contraintes $\vec{t}_{M(r,\theta,z)}$.

Par l'intermédiaire d'un algorithme numérique, lors d'une étude que nous effectuerons ultérieurement, il sera possible de connaître la variation de u_θ et de $\vec{t}_{M(r,\theta,z)}$ en fonction de C_0 et de Ω .

Remarque :

Dans les équations 16 et 17, nous avons choisi la constante $-k^2$ compte tenu de l'absence de périodicité en z constatée expérimentalement. Si nous prenons une constante positive $+k^2$ nous obtenons une fonction $V_2(z)$ périodique, de période $\frac{2\pi}{k}$. La grandeur $\frac{2\pi}{k}$ devant être grande, compte tenu des dimensions de l'arbre, k doit être petit.

En prenant $\rho \frac{\omega^2}{\mu} > k^2$, et à condition de poser $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho \frac{\omega^2}{\mu} - k^2}}$,

tous les calculs effectués à partir de 17 sont conservés, et, en particulier les équations (20) et (28)

Dans ce cas, 29 devient

$$2\pi \mu k C \cos k l \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}} a^2 J_2(a \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2}) = C_0 + \frac{\omega^2}{a} C \sin k l J_1(a \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu} + k^2})$$

l'équation 20 donne : $\alpha_n^2 = a^2 (\rho \frac{\omega_n^2}{\mu} - k_n^2)$ où $\omega_n = \Omega$, donné.

soit
$$k_n^2 = \frac{\rho \Omega^2}{\mu} - \frac{\alpha_n^2}{a^2}$$

Il faut donc choisir les α_p , solution de 20, tels que :

$$\alpha_p < a \cdot \sqrt{\frac{\rho \Omega^2}{\mu}}$$

Pour obtenir le plus petit k_p , il faut prendre α_p immédiatement inférieur à $a \cdot \sqrt{\frac{\rho \Omega^2}{\mu}}$.

VI - CONCLUSION

L'objet de notre travail, qui est l'étude du comportement d'un peigne battant détacheur de carde des Etablissements THIBEAU, a été abordé sur base d'une schématisation du système selon un oscillateur à un degré de liberté, utilisant les caractéristiques de l'arbre de torsion (longueur, diamètre, module transversal d'élasticité) et la connaissance du couple moteur instantané. Dans cette schématisation, tous les éléments oscillants sont assimilés à un disque unique.

Nous avons vérifié que les hypothèses simplificatrices conduisant à cette schématisation étaient justifiées et nous avons montré que les résultats qui s'en déduisent, permettent de calculer les fréquence et amplitude d'oscillation du peigne.

La comparaison des analyses vibratoires effectuées sur un montage expérimental (dans lequel la monture du peigne a été remplacée par un disque équivalent) et sur le peigne réel a montré que cette substitution était valable en torsion. Une campagne extensométrique complémentaire (tridirectionnelle et dynamique) menée sur l'arbre permet d'affirmer que cet élément n'est soumis qu'à de la torsion.

L'amplitude maximale d'oscillation du peigne calculée à partir des résultats extensométriques selon l'hypothèse de la torsion pure est égale à l'amplitude relevée sur le système industriel. Cette hypothèse en est confortée, et nous avons pu vérifier que, d'après le critère de Wöhler, la durée de vie de l'arbre était illimitée.

Nous avons déterminé expérimentalement les fréquences propres de flexion de l'arbre. Elles sont très proches des fréquences théoriques d'un arbre encastré en ses extrémités, ce qui nous a autorisé à considérer comme parfait l'encastrement de l'arbre de torsion dans le bâti. Nous avons retrouvé les fréquences propres expérimentales de flexion de l'arbre dans l'analyse des vibrations du système réel. Le niveau correspondant à ces fréquences étant bien inférieur à celui des vibrations de torsion, nous avons pu, une nouvelle fois, négliger les phé-

nomènes de flexion par rapport aux phénomènes de torsion.

La schématisation initiale reste limitée dans son exploitation : en particulier, elle ne permet pas l'évaluation de la fiabilité de l'arbre. C'est la raison pour laquelle nous avons été amené à développer une schématisation plus fine dont les hypothèses initiales sont conformes aux résultats expérimentaux obtenus précédemment. Nous avons dégagé l'expression analytique de cette schématisation mais nous n'en avons pas, dans le cadre de ce travail limité, développé la résolution numérique. Ceci fera l'objet d'une étude ultérieure.

Nous pensons que l'intérêt essentiel de notre travail est l'apport d'une méthode d'analyse précise et détaillée du fonctionnement vibratoire et du comportement d'un peigne battant particulier.

Cette méthode est bien entendu applicable à d'autres peignes de même type mais de dimensions et de fréquence de battement différentes. Il importe cependant de vérifier expérimentalement que les hypothèses conduisant à la schématisation finale restent inchangées pour l'appliquer valablement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. CHILLON et M. KERGUIGNAS, *Résistance des Matériaux*, Editions DUNOD, p. 268 (1969)
- [2] V. FEODOSSIEV, *Résistance des Matériaux*, Editions de la Paix - MOSCOU, p. 86
- [3] M. KERGUIGNAS et G. CAIGNAERT, *Résistance des Matériaux*, Editions DUNOD, p. 120 (1977)
- [4] L. SEDOV, *Mécanique des milieux continus, Tome II*, Editions de la Paix - MOSCOU, p. 363 (1975)
- [5] H. FAVRE, *Cours de mécanique, Tome III*, Edition LEEMANN ZURICH, p. 243 (1949)
- [6] P. GERMAIN, *Mécanique des milieux continus*, Editions MASSON et Compagnie, p. 342 (1962)
- [7] R.K. KAUL et G. HEERMANN, *Free torsional vibrations of an elastic cylinder with laminated periodic structure*, Int. J. Solids Structures, Volume 12, p. 451 (1976)
- [8] F. PARSY, *Techniques mathématiques de la mécanique et de la physique*, Université des Sciences et Techniques de LILLE (1977)
- [9] M. ABRAMOVITZ et I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, DOVER, NEW YORK, p. 414 (1970)

SOMMAIRE

I - INTRODUCTION

II - SCHEMATISATION DU PEIGNE EN UN OSCILLATEUR A UN DEGRE DE LIBERTE

II - 1) CALCUL DES CARACTERISTIQUES MECANQUES DU SYSTEME, EQUATION DU MOUVEMENT D'OSCILLATION

II - 1.1. Schématisation

II - 1.2. Détermination du moment d'inertie du système par rapport à l'axe d'oscillation $z'z$

II - 1.3. Détermination de la raideur K de l'arbre de torsion

II - 1.3.1. Torsion d'un arbre circulaire

II - 1.3.2. Constante de rappel élastique de l'arbre

II - 1.4. Equation du mouvement d'oscillation du système

II - 1.5. Détermination du coefficient d'amortissement ρ du peigne vibrant

II - 2) ANALYSE DE LA SCHEMATISATION

II - 2.1. Validité de la mise en équation

II - 2.2. Limites de cette méthode

II - 2.2.1. Hypothèses de calcul

II - 2.2.2. Exploitation des résultats

III - ETUDE EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT DE L'ARBRE DE TORSION

III - 1) INTRODUCTION

III - 2) REMPLACEMENT DE LA MONTURE DU PEIGNE PAR UN DISQUE D'INERTIE EQUIVALENTE

III - 2.1. Calcul des dimensions du disque

III - 2.1.1. Inertie de la monture

III - 2.1.2. Disque de moment d'inertie équivalent

III - 3) VERIFICATION EXPERIMENTALE DE LA SUBSTITUTION DU PEIGNE AU DISQUE D'INERTIE EQUIVALENTE

III - 3.1. Chaîne de mesure

III - 3.1.1. Accéléromètre

III - 3.1.2. Préamplificateur de charge

III - 3.1.3. Analyseur de spectre à bande étroite



- III - 3.2. Mesures effectuées
 - III - 3.2.1. Séries de mesures
 - III - 3.2.2. Processus expérimental
 - III - 3.2.3. Analyse des résultats
 - III - 3.2.4. Conclusions expérimentales
- III - 4) ETUDE EXTENSOMETRIQUE DE L'ARBRE DE TORSION
 - III - 4.1. Chaîne de mesure analogique
 - III - 4.1.1. Jauges de contraintes
 - III - 4.1.2. Pont de mesure
 - III - 4.1.3. Enregistreur magnétique analogique
 - III - 4.2. Mesures effectuées
 - III - 4.2.1. Description
 - III - 4.2.2. Processus expérimental
 - III - 4.3. Chaîne de traitement numérique
 - III - 4.3.1. Enregistreur magnétique analogique
 - III - 4.3.2. Analyseur de déformations dynamiques des structures
 - III - 4.3.3. Micro-ordinateur
 - III - 4.4. Calcul de l'état de déformation et de l'état de contrainte en différents points de l'arbre de torsion
 - III - 4.4.1. Numérisation des signaux
 - III - 4.4.2. Tracé des graphes de variation des déformations relatives Epsilon 1, Epsilon 2, Epsilon 3 en fonction du temps
 - III - 4.4.3. Calcul des directions, des déformations relatives et des contraintes principales. Calcul du cisaillement maximum
 - III - 4.4.4. Programme de calcul des directions, déformations relatives et des contraintes principales.
 - III - 4.5. Exploitation des résultats
 - III - 4.5.1. Déformations relatives
 - III - 4.5.2. Contraintes principales σ_z et σ_y
- III - 5) AMPLITUDE MAXIMALE D'OSCILLATION DU PEIGNE VIBRANT
 - III - 5.1. Amplitude calculée à partir de résultats des mesures extensométriques
 - III - 5.2. Amplitude relevée sur le système réel en fonctionnement
 - III - 5.3. Conclusion

III - 6) VERIFICATION DE LA FIABILITE DE L'ARBRE

III - 6.1. Evaluation de la limite de rupture par fatigue σ_f

III - 6.2. Détermination de $\sigma_I - \sigma_{III}$ maximum

III - 6.3. Vérification du critère de Tresca

III - 7) PROPAGATION DES DEFORMATIONS RELATIVES LE LONG DE L'ARBRE

IV - ANALYSE VIBRATOIRE DES RESONANCES DE FLEXION DU PEIGNE

IV - 1) INTRODUCTION

IV - 2) MESURE DES FREQUENCES DE RESONANCE DE FLEXION DE L'ARBRE ET DU PEIGNE

IV - 2.1. Chaîne de mesure

IV - 2.1.1. Générateur sinusoïdal

IV - 2.1.2. Excitateur magnétique

IV - 2.1.3. Accéléromètre piezoélectrique

IV - 2.1.4. Préamplificateur de charge

IV - 2.1.5. Amplificateur de mesure

IV - 2.1.6. Conditionneur logarithmique

IV - 2.1.7. Table traçante

IV - 2.2. Mesures effectuées

IV - 2.2.1. Séries de mesures

IV - 2.2.2. Processus de mesure

IV - 2.3. Interprétation des résultats

IV - 2.3.1. Analyse des essais Ah1, Bh1, Ch1, Av1, Bv1, Cv1

IV - 2.3.2. Comparaison des essais 1 et 2

IV - 2.3.3. Etude de l'essai Bh3

IV - 2.3.4. Etude de l'essai B'h3

IV - 3) INFLUENCE DES PHENOMENES DE FLEXION DANS LE FONCTIONNEMENT DU PEIGNE VIBRANT

IV - 3.1. Etude des spectres de fréquence

IV - 3.2. Conclusions expérimentales

IV - 4) ETUDE DU GUIDAGE DE L'ARBRE DE TORSION

V - SCHEMATISATION DU PEIGNE VIBRANT

V - 1) ETUDE DE L'ARBRE

V - 2) ANALYSE DE LA SCHEMATISATION

VI - CONCLUSION

INSTRUMENTATION UTILISEE DANS LES CAMPAGNES EXPERIMENTALES

Chaîne de mesure analogique (§ III-3-1)

Accéléromètre piézoélectrique	Bruel et Kjaer 4367	(1)
Préamplificateur de charge	Bruel et Kjaer 2635	(2)
Analyseur de spectre à bande étroite	Bruel et Kjaer 2033	(2)
Table traçante analogique X-Y	Bruel et Kjaer 2308	(1)

Chaîne de mesure analogique (§ III-4-1)

Pont extensométrique :		
- 3 conditionneurs amplificateurs	Vishay Micromesures V2120	(1)
- 1 voltmètre électronique	Vishay Micromesures 2100LD	(1)
Enregistreur analogique 4 voies	Philips Minilog 4	(3)

Chaîne de traitement numérique (§ III-4-3)

Analyseur dynamique de structure	Hewlett Packard 5423A	(4)
Micro-ordinateur	Hewlett Packard 9835	(3)
Table traçante numérique	Hewlett Packard 7225A	(4)

Traitement du programme TRTDIG

Micro-ordinateur	Hewlett Packard 9835	(1)
Table traçante numérique	Hewlett Packard 7225A	(1)
Imprimante à aiguilles	Hewlett Packard 2631B	(1)

Chaîne de mesure analogique (§ III-7)

Phasemètre	Bruel et Kjaer 2971	(1)
------------	---------------------	-----

Chaîne de mesure analogique (§ IV-2-1)

Accéléromètre piézoélectrique	Bruel et Kjaer 4367	(1)
Excitateur magnétique	Bruel et Kjaer MM0002	(1)
Générateur sinusoïdal	Bruel et Kjaer 1023	(1)
Table traçante analogique	Bruel et Kjaer 2308	(1)
Préamplificateur de charge	Bruel et Kjaer 2626	(1)
Amplificateur de mesure	Bruel et Kjaer 2606	(1)
Conditionneur logarithmique	Bruel et Kjaer 5597	(1)

(1) : Matériel du laboratoire de mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles. Roubaix

(2) : Matériel aimablement prêté par M. VERVOORT, BRUEL et KJAER, agence de Lille

(3) : Matériel du laboratoire de mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers - Centre de Lille

(4) : Matériel de l'Association des Directeurs des Ecoles d'Ingénieurs de la région Nord Pas-de-Calais, en dépôt au laboratoire de mécanique de l'E.N.S.A.M.