THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR DE 3e CYCLE

Spécialité Automatique-Electronique

par

Abdellah EL MOUDNI

Maître Es-Sciences

INTRODUCTION DE NOUVEAUX OUTILS MATHEMATIQUES POUR LA DESCRIPTION DES SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES DE GRANDE DIMENSION

Soutenue le 20 mars 1981 devant le Jury d'Examen

MM.	F.	LAURENT	Président
	P.E.	BORNE	Rapporteur
	M.	BENREJEB	Examinateur
	J.C.	GENTINA	Examinateur
	G.	JACOB	Examinateur
	R.	LELEU	Invité

A la mémoire de mon Père

A ma Mère

A mes Amis

AVANT PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique sous la direction de Monsieur le Professeur LAURENT, à qui nous exprimons toute notre reconnaissance d'avoir bien voulu nous accueillir dans son équipe. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser et les conseils éclairés qu'il nous a prodigués.

Nous sommes particulièrement sensible au grand honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider notre Jury.

Monsieur le Professeur BORNE nous a guidé et conseillé tout au long de l'élaboration de cette thèse avec beaucoup d'intérêt et une grande bienveillance. Très conscient de ce que nous lui devons, nous lui exprimons notre profonde reconnaissance et nos vifs remerciements.

Monsieur le Professeur BENREJEB de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT) a bien voulu nous conseiller et encourager au cours de nos recherches, sa présence dans notre Jury nous a profondément touché. Nous lui en témoignons toute notre gratitude.

Nous tenons à remercier vivement Monsieur le Professeur GENTINA pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux en acceptant de les juger.

Que Monsieur le Professeur JACOB reçoive ici le témoignage de notre profonde reconnaissance pour le soutien qu'il nous a apporté en participant à notre Jury.

Nous sommes grandement honoré de la participation dans notre Jury de Monsieur LELEU, Directeur du Service Technique et Développement de la Société KESTNER. C'est un agréable devoir pour nous de l'en remercier.

Que tous les chercheurs du Laboratoire de Systématique trouvent ici le témoignage de notre reconnaissance pour l'aide et l'amitié qu'ils nous ont toujours apportées.

Nous sommes particulièrement reconnaissant à Madame COPIN, Madame TAILLY, Madame FERRAR et Monsieur SOYEZ d'avoir permis la réalisation matérielle de ce mémoire.

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la présentation de nouvelles méthodes de représentation en vue de l'analyse des processus discrets non linéaires.

Divers algorithmes sont développés permettant la mise en équation d'un processus sous la forme d'une relation de récurrence vectorielle mettant en oeuvre un minimum de variables.

Dans le premier chapitre est proposée une généralisation au cas non linéaire de méthodes d'élimination usuellement réservées aux processus linéaires. L'utilisation des polynômes minimaux de matrice permet en particulier la définition de méthodes systématiques de représentation.

La généralisation au cas vectoriel des travaux de LAURENT /12/ relatifs à la représentation des systèmes a permis dans une première phase du second chapitre d'établir un algorithme d'éliminations successives des variables mises en oeuvre dans la représentation. La mise en évidence des sous systèmes et de polynômes formels particuliers associés permet une simplification notable de l'étude. Les relations récurrentes caractéristiques de l'évolution du processus se déduisent en effet directement, à partir d'une simple technique d'identification des expressions mises en oeuvre.

Une détermination directe de la représentation obtenue peut être effectuée à partir d'une méthode présentée dans une deuxième partie du second chapitre. Dans ce sens l'utilisation de matrices partitionnées en blocs et l'introduction de la notion de "polynôme caractéristique généralisé" permet une simplification importante de l'étude tout en introduisant une éventuelle redondance dans la description.

Les algorithmes proposés s'appliquent aux systèmes du type Lur'e Postnikov. L'équation obtenue (régissant en fait les variables intervenant non linéairement) est du type matriciel sans toutefois correspondre à une représentation d'état. Différentes représentations matricielles en sont alors déduites.

Les travaux de LAURENT /12/, BORNE et GENTINA /5/ /43/, BENREJEB /13/ nous ont permis dans le troisième chapitre d'établir des méthodes d'étude de stabilité appropriées aux différentes représentations obtenues. La première méthode concerne la forme récurrente . Un critère pratique généralisé est proposé dans ce sens permettant d'appréhender l'évolution du système étudié. La deuxième méthode relative à une forme matricielle de type Frobenius généralisé permet de mener une étude de stabilité globale, et pouvant conclure à la validité de conjecture linéaire. La deuxième partie de ce chapitre concerne l'étude de stabilité vis à vis des conditions initiales des systèmes étudiés et la détermination d'une estimation du domaine d'attraction de l'origine.

CHAPITRE I

REPRESENTATION D'ETAT ET SEQUENCE DES PROCESSUS DISCRETS NON LINEAIRES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous abordons un ensemble de notions générales qui concernent la description et la formulation des systèmes discrets non linéaires.

Ces systèmes sont souvent décrits à partir des modèles exprimés sous la forme d'équations de récurrence. Ce mode de représentation conduit généralement à un symbolisme mathématique simple de type matriciel ou scalaire.

Après avoir présenté les systèmes discrets étudiés, nous précisons différents résultats relatifs à leur formulation. Nous en proposons ensuite une généralisation en adoptant dans ce contexte des méthodes d'élimination courantes dans leur application aux systèmes linéaires. Cette transformation permet d'obtenir une relation récurrente qui fait intervenir seulement une partie du vecteur état et dont l'ordre est majoré par celui du système initial. La représentation obtenue est du type matriciel sans toutefois correspondre à une représentation d'état. Différentes formulations sont alors proposées.

Parmi les diverses méthodes d'étude de la stabilité, nous rappelons ensuite celles qui sont particulièrement adaptées aux divers types de représentation ainsi obtenues.

I - DEFINITIONS ET DESCRIPTION DES SYSTEMES DISCRETS

I-1 DEFINITIONS

Les systèmes dynamiques les plus souvent observés sont de deux types principaux selon le mode de transmission de l'information.

Il est possible de distinguer :

- Les systèmes continus dans lesquels l'information circule sous forme continue par rapport à la variable temps.

- Les systèmes discrets pour lesquels l'information est transmise à des intervalles de temps discrets périodiques ou non.

Lorsque le signal discret est obtenu par prise de valeurs à des instants discrets d'un signal initialement continu, le processus est dit échantillonné /1/.

Pour certains processus plus complexes, l'information peut circuler simultanément sous forme continue ou discrète, c'est le cas par exemple d'un processus continu piloté par un ordinateur /2/.

L'étude envisagée dans ce mémoire concerne essentiellement les processus discrets échantillonnés ou non, la variable temps évoluera dans un ensemble ordonné $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \{t_o, t_1, .. t_i ..\} \subset \mathcal{R}$$

I-2 CLASSE GENERALE DES SYSTEMES DISCRETS

Les systèmes discrets étudiés sont supposés susceptibles d'être décrits par le schéma bloc de la figure 1 /3/:

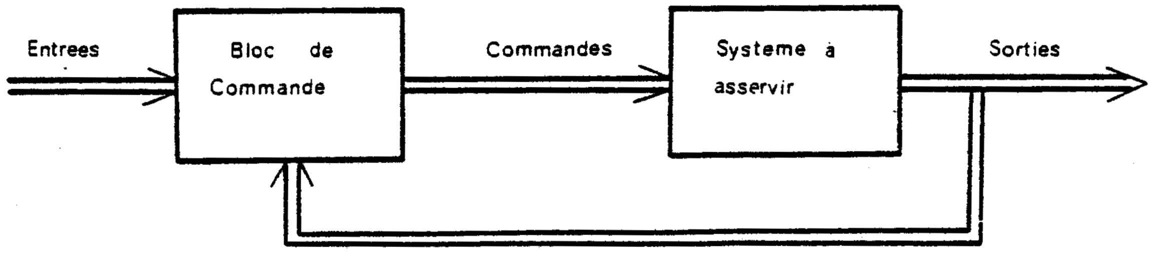

Figure I

Dans cette description, interviennent trois types de variables :

1 - L'influence de l'extérieur sur le processus est caractérisée par m grandeurs $e_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Celles-ci sont fonction du temps et constituent les variables d'entrée. Elles peuvent être de type continu ou discret, et sont généralement employées par l'utilisateur de manière à piloter le processus étudié. Ces m variables sont regroupées en un vecteur noté $E(t)$ ou $E(t_n) = E_n$ selon leur nature, continue ou discrète. Lorsque nous avons $E(t) = 0$ le régime de fonctionnement est dit libre ou autonome.

2 - L'action du processus sur son environnement est décrite par r variables notées $s_i(t)$ $(i = 1, \ldots, r)$ ou $s_i(t_n) = s_n^i$ constituent le vecteur de sortie noté $S(t)$ ou S_n selon sa nature continue ou discrète.

3 - Les p variables de commande $u_n^i(t)$ tiennent compte exclusivement du temps et des entrées-sorties aux instants t_n : elles permettent l'asservissement du processus et sont constantes ou non dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$ Ces variables forment un vecteur $U_n(t)$ qui est déterminé par E_n et S_n.

L'ensemble des paramètres formé par E_n et S_n n'est pas toujours suffisant pour préciser l'évolution d'un système : celle-ci se déduit en fait de la connaissance du vecteur état dont les composantes ne sont pas toutes nécessairement accessibles à la mesure.

Définition 1

L'état d'un système correspond à un ensemble suffisant de variables, dont la connaissance à l'instant initial permet à partir des équations régissant l'évolution du processus de préciser le comportement du système pour une loi d'évolution des entrées donnée.

Soient :

x_n^i les valeurs à l'instant t_n du vecteur état noté $x(t_n) = x_n$

$$x_n^T = (x_n^1 \ldots\ldots x_n^q)$$

avec $\quad x_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R}^q$

Le nombre minimal de composantes q de ce vecteur constitue l'ordre du système.

Dans le cas général des processus déterministes, il existe une relation de dépendance entre les valeurs du vecteur état aux instants t_o et t_n et l'évolution des entrées dans l'intervalle $[t_o, t_n]$. Cette propriété s'exprime sous la forme :

$$x_n = x\ (x(t_o),\ [t_o, t_n]\ ,\ e[t_o, t_n]\ ) \qquad \text{(I-1)}$$

Dans certains cas, il s'avère particulièrement intéressant de décrire l'évolution du processus à partir de certaines grandeurs caractéristiques On est ainsi amené à définir la notion de vecteur séquence : dans ce cas les informations caractérisant le processus sont formées des valeurs successives d'une même variable.

Définition 2

Un ensemble de valeurs d'une même variable d'état considérée en des instants successifs est appelé vecteur séquence si la connaissance de ses composantes suffit à caractériser l'évolution du système en réponse à une loi d'entrée connue.

Le nombre minimal de composantes d'un vecteur séquence est dans tous les cas égal à l'ordre d'un système.

Lorsqu'il est possible de déterminer un vecteur séquence x^i_{n+q-j} avec (j = 1 ... q), il existe une relation permettant de décrire l'évolution du processus sous la forme (I-2) /4/:

$$x^i_{n+q} = f(x^i_{n+q-1} \dots x^i_n,\ e^i_{n+q-i} \dots e^i_n,\ n+q-1 \dots n) \qquad \text{(I-2)}$$

Nous allons par la suite étudier le problème de l'équivalence entre une représentation d'état et une forme séquentielle. Dans ce sens un rappel de méthodes de mises en équation discrètes permet de préciser la question qui se pose à nous.

I-3 EQUATION RELATIVE A L'ETAT ET A LA FORME SEQUENTIELLE

I-3-1 *Equation d'état*

La relation déterminant le changement d'état entre deux instants successifs est de la forme (I-3) /5/ :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, n, \varepsilon_n) \\ s_n = h(x_n, n, \varepsilon_n) \\ \varepsilon_n = \psi(x_n, n, e_n) \end{cases} \qquad \text{(I-3)}$$

Dans le cas particulier des processus linéaires stationnaires, la fonction f dépend linéairement de l'état x_n . Il vient la description d'un système linéaire de la forme (I-4) /6/ :

$$\begin{cases} x_{n+1} = A\, x_n + K\, \varepsilon_n \\ s_n = C\, x_n + D\, \varepsilon_n \\ \varepsilon_n = e_n - B\, x_n \end{cases} \qquad \text{(I-4)}$$

où

x_n, ε_n, s_n, e_n sont des vecteurs respectivement d'état, d'écart, de sortie et d'entrée de dimension respectives q, p, r, m.

A,K, C, D, B sont des matrices constantes de dimensions respectives q×q,q x p, r x q, r x p et m x q.

Cette notation (I-4) peut être étendue aux systèmes non linéaires sous la forme :

$$x_{n+1} = A(x_n, n)\, x_n + K(\varepsilon_n, x_n, n)\, \varepsilon_n \qquad \text{(I-5)}$$

Les matrices A(.) et K(.) sont non constantes et ont les mêmes dimensions que précédemment.

I-3-2 *Equation de récurrence*

Lorsque le système est caractérisé par une séquence définie à partir des valeurs successives de la variable ε_n, les équations d'évolution sont du type (I-6).

$$\varepsilon_{n+q} = \Psi(\varepsilon_{n+q-1} \ldots\ldots \varepsilon_n, e_{n+q-1} \ldots\ldots e_n, n+q-1 \ldots\ldots n) \qquad \text{(I-6)}$$

si le processus est linéaire à coefficients constants, il vient l'équation de récurrence scalaire d'ordre q relative à ε_n et e_n /7/

$$\sum_{i=0}^{q} f_i \, \varepsilon_{n+i} = \sum_{j=0}^{q} g_j \, e_{n+j} \qquad \text{(I-7)}$$

f_i, g_j sont des constantes caractérisant l'évolution du processus.

Il est commode de généraliser la représentation (I-7) aux systèmes non linéaires. Dans ce cas les coefficients f_i sont des fonctions non linéaires /8 /.

Dans le cas particulièrement intéressant où seule la variable d'état ε_n intervient de façon non linéaire /19 /, ils prennent la forme :

$$f_j = f(\varepsilon_{n+j})$$

Nous obtenons alors la relation (I-8) :

$$\sum_{i=0}^{q} f_i(\varepsilon_{n+i}) \, \varepsilon_{n+i} = \sum_{j=0}^{q} g_j \, e_{n+j} \qquad \text{(I-8)}$$

(g_j constants)

Si l'entrée est nulle, l'évolution du système est représenté par :

$$\sum_{i=0}^{q} f_i \, (\varepsilon_{n+i}) \, \varepsilon_{n+i} = 0 \qquad \text{(I-9)}$$

I-3-3 Equations mixtes

Dans le cas où p composantes ε_n^i (i = 1...p) interviennent de façon non linéaire, une généralisation de l'équation (I-8) à entrée nulle est possible sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{l} F_j(\varepsilon_{n+j}) \, \varepsilon_{n+j} = 0 \quad /9/ \qquad \text{(I-10)}$$

- ε_n est un vecteur de composantes ε_n^i, $\varepsilon_n \in \mathcal{R}^p$.
- les (l + 1) "coefficients" $F_j(.)$ sont alors des matrices carrées de dimension p à coefficients non constants.

Par la suite nous dirons que (I-10) est une équation de récurrence vectorielle, d'ordre l et de dimension l.p.

Remarque :

Dans le cas de l'équation (I-10), l'ordre de la relation peut être supérieur à q, ordre du système initial, car la formulation envisagée impose l tel que pl ⩾ q. Dans tous les cas la représentation inclue le modèle étudié, mais elle peut toutefois être redondante. / 8/.

II - DIFFERENTES MISES EN EQUATIONS

II-1 SYSTEMES ECHANTILLONNES

II-1-1 *Description des systèmes étudiés*

Nous considérons la classe des systèmes à non linéarité séparables /10 / représentée par le schéma bloc de la figure 2 :

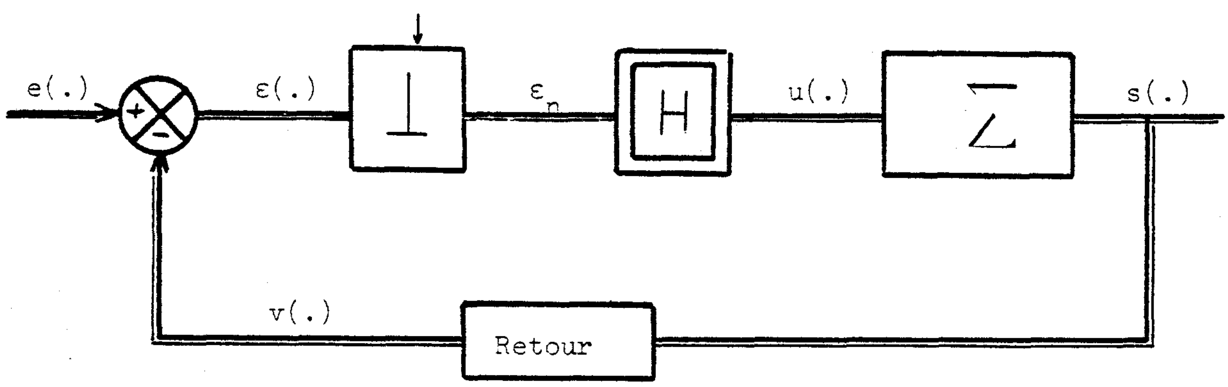

Figure 2

e(.), ε(.), u(.), s(.) et v(.) sont des variables vectorielles continues ou discrètes.

L'entrée est représentée par un vecteur e(t) :

$$\overset{T}{e(t)} = (e^1(t) \ \ldots \ e^m(t) \ )$$

la sortie du système est observée à partir de s(t) :

$$\overset{T}{s(t)} = (s^1(t) \ \ldots \ s^r(t))$$

Précisons les divers élèments qui interviennent dans le processus :

- Σ : La partie linéaire du système asservi peut être représentée dans le domaine temporel par une équation de la forme :

$$\overset{o}{x} = Mx(t) + Gu(t) \tag{I-11}$$

M : matrice constante de dimension q x q

$x(t) \in \mathcal{R}^q$, vecteur état

- <u>Le retour</u> : peut être caractérisé par une matrice B constante de dimension p x q définissant l'écart $\varepsilon(.)$ par la relation :

$$\varepsilon(.) = e(.) - v(.) = e(.) - B\ x(t) \tag{I-12}$$

- $\underline{\varepsilon_n}$: représente le vecteur de $\varepsilon(t)$ échantillonné à l'instant t_n et bloqué entre les instants t_n et t_{n+1}.

- <u>H</u> : est un modulateur qui élabore entre les instants t_n et t_{n+1} le signal de commande :

$$u(t, \varepsilon_n)^T = (u^1(.) \ \ldots \ u^p(.) \ )$$

Cette commande peut revêtir plusieurs formes particulières. Dans le cas d'un échantillonneur à période constante ($t_{n+1} - t_n = T \ \forall n$) un cas remarquable correspond au modulateur linéaire pour lequel le signal de commande admet toujours la même forme. Les seules variations étant des affinités qui dépendent du niveau du signal d'entrée ε_n scalaire.

Divers autres types de modulateur existent : en largeur, par tout ou rien etc...

II-1-2 *Decretisation d'une équation matricielle*

α) *Systèmes linéaires*

Considérons le système linéaire continu dont l'évolution est décrite par l'équation différentielle (I-11) avec :

$$x(t) \in \mathcal{R}^q,\ u(t) \in \mathcal{R}^p,\ M \in \mathcal{R}^{qxq},\ G \in \mathcal{R}^{qxp}$$

Nous supposons que l'échantillonnage se fait à intervalles de temps constants égaux à $T \in \mathcal{R}$

L'expression du vecteur état x_{n+1} à l'instant t_{n+1} en fonction de l'état précédent x_n est obtenue en intégrant l'équation différentielle (I-11) entre t_n et t_{n+1}. Cette intégration s'effectue simplement.

- La transformation de Laplace peut être utilisée dans le cas ou l'image de u(t) sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$ est facile à obtenir (cas d'un échantillonneur bloqueur d'ordre zéro, modulateur de durée d'impulsion ..).

- L'introduction d'une fonction de transition /5/ constitue une deuxième variante de la méthode d'intégration. La fonction de transition $\phi(t, t_o)$ solution de l'équation différentielle (I-13) :

$$\frac{d\phi(t, t_o)}{dt} = M\,\phi(t, t_o) \qquad \text{(I-13)}$$

est facile à déterminer et telle que :

$$\phi(t, t_o) = e^{M(t - t_o)} \qquad \text{(I-14)}$$

Dans ces conditions, la méthode de variation des constante conduit à poser

$$X(t) = \phi(t, t_o)\,C(t) \qquad \text{(I-15)}$$

Il vient alors la solution générale (I-16) :

$$x(t) = \phi(t, t_o)\,x(t_o) + \int_{t_o}^{t} \phi(t, \tau)\,G\,u(\tau)\,d\tau \qquad \text{(I-16)}$$

L'explicitation de x_{n+1} est alors immédiate en posant :

$t_o = nT \quad , \quad t = (n+1)\,T$

$$x_{n+1} = A\,x_n + K\,\varepsilon_n \quad /6/ \qquad \text{(I-17)}$$

où :

$$A = e^{MT} \text{ est une matrice carrée de dimension } q \times q \qquad (I-18)$$

$$K = \int_o^T e^{M(T-u)} \, G \, u(\mu) \, du$$

β) *Systèmes non linéaires*

Lorsque le système comporte un modulateur non linéaire, l'équation (I-17) ne suffit plus d'écrire son évolution. Nous limitons notre formulation aux processus pour lesquels l'évolution est décrite en l'absence d'entrée par l'équation (I-19) :

$$x_{n+1} = f(x_n, n) = \phi(n+1, n, x_n) \quad . \qquad (I-19)$$

où

$f : \mathcal{R}^q \times \mathcal{T} - \mathcal{R}^q$

$f(.) = \left[f_1(.) \; \ldots \; f_q(.) \right]^T$

$x_n \in \mathcal{R}^q$, représente l'état du système à l'instant n

Lorsque la fonction f vérifie à la fois les deux conditions :

- $\phi(x_n, n)$ est de classe $C^{(o,o)}$ en n, x_n /5/ de plus $\phi(n, n_o, x_o)$ de condition initial n_o, x_o vérifie :

$$\phi(n, n_o, x_o) = \phi(n, n_1, x(n_1, n_o, x_o))$$

$$\forall\, n, n_1, n_o, \in \mathcal{T} \quad , n_o < n_1 < n$$

- le point $x_n = 0$ est l'unique point d'équilibre ce qui se traduit par

$$f(o, n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathcal{T}$$

le système (I-19) peut s'écrire parfois sous la forme

$$x_{n+1} = A(x_n, n)\, x_n + K'(\varepsilon_n, n) \qquad (I-20)$$

- $A(x_n, n)$ matrice carrée non constante de dimension q
- $K'(\varepsilon_n, n)$ le vecteur de commande dépendant de ε_n

Lorsqu'il est possible de définir un gain équivalent /12/ (I-21)

$$K'^{*}(\varepsilon_n, n) \in \mathcal{R}^{qxp} \qquad (I-21)$$

tel que

$$K'(\varepsilon_n, n) = K'^{*}(\varepsilon_n, n)\ \varepsilon_n \qquad (I-22)$$

Il vient d'après (I-20) et (I-22), et en remplaçant ε_n par son expression (I-12), la relation (I-23) :

$$x_{n+1} = A'(x_n, n) \qquad (I-23)$$

où

$A'(x_n, n)$ est une matrice carrée de dimension q dont les éléments $a^{*}_{ij}(.)$ sont non constants, bornés en module, $\forall n$, $\forall x_n$.

II-2 EXEMPLE DE SYSTEMES DE GRANDE DIMENSION

Les systèmes de grande dimension /13/ que nous étudions sont ceux de la classe définie par l'équation de fonctionnement (I-20).

Nous présentons deux exemples auxquels se ramènent souvent les modèles de grande dimension : les systèmes interconnectés et les systèmes multivariables de type Lur'e Postnikov.

II-2-1 *Systèmes interconnectés*

Nous nous intéressons essentiellement aux processus interconnectés /14/ linéaires ou non admettant une description telle que les variables d'interconnexion entre sous systèmes puissent être regroupées en un vecteur conformément à la description suivante :

$$\begin{cases} x^i_{n+1} = A_{ii}(n, x^i_n)\ x^i_n + k_i(\varepsilon_n, n) \\ \varepsilon_n = e_n - B\ x_n \end{cases} \qquad (I-24)$$

avec

$$x^T_n = (x^{1T}_n, x^{2T}_n, \ldots x^{sT}_n) \qquad (I-25)$$

les vecteurs x^i_n étant de même dimension.

$$x_n^T = \left[0^T,\ 0^T,\ \ldots\ {}^ix_n^T,\ 0^T,\ 0^T\right] \qquad \text{(I-26)}$$

Il vient dans un fonctionnement isolé en l'absence d'entrée

us système la description :

$$x^i_{n+1} = A_{ii}\,(n,\ x^i_n)\ x^i_n + k_i\ (B\ {}^ix_n,\ n) \qquad \text{(I-27)}$$

nte les effets des interconnexions avec les autres sous

j.

II-2-2 Systèmes multivariables de type Lur'e Postnikov

Considérons les systèmes de type Lur'e Postnikov /15/ décrits par

ons (I-28) :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A\ x_n + K\gamma(\varepsilon_n,\ n) \\ \varepsilon_n &= e_n - B\ x_n \end{aligned} \qquad \text{(I-28)}$$

x_n est le vecteur état à l'instant $n \in \mathcal{R}^q$.

A matrice constante $\in \mathcal{R}^{q\times q}$

K matrice constante $\in \mathcal{R}^{q\times p}$

B matrice constante $\in \mathcal{R}^{p\times q}$ de rang p

$\varepsilon_n \in \mathcal{R}^p$

$\gamma_i \in \mathcal{R}^p \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^p$

$e_n \in \mathcal{R}^p$

$\gamma \in \mathcal{F} = \left\{ \gamma :\ \gamma(\varepsilon_n, n) = \Gamma^*(\varepsilon_n,\ n)\varepsilon_n, \Gamma^* \in [\underline{\Gamma},\ \overline{\Gamma}] \subset \mathcal{R}^{p\times p} \right\}$

($\underline{\Gamma}$ et $\overline{\Gamma}$ sont des matrices constantes vérifiant $\underline{\Gamma} \leq \overline{\Gamma}$).

La relation (I-28) s'écrit sous une deuxième forme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A\ x_n + K\ \Gamma^*(\varepsilon_n,\ n)\ \varepsilon_n && \text{(a)} \\ \varepsilon_n &= e_n - B\ x_n && \text{(b)} \end{aligned} \qquad \text{(I-29)}$$

Lorsque dans (I-29 b) $e_n = 0$ et en remplaçant ε_n par son expression dans (I-29,a) il vient en régime autonome l'expression

$$x_{n+1} = \left[A - K\,\Gamma^{*}(.)\,B\right] x_n \qquad \text{(I-30)}$$

$(A - K\,\Gamma^{*}(.)\,B)$ est une matrice non linéaire caractérisant l'évolution du système initial (I-28).

III - FORMULATIONS RECURRENTES ET MATRICIELLES

III-1 PASSAGE DE LA REPRESENTATION MATRICIELLE A LA REPRESENTATION SCALAIRE

III-1-1 *Système monovariable*

Dans le cas ou la variable ε_n est scalaire, le système peut être représenté dans l'espace d'état par les relations (I-31) :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_{n+1} = A\,x_n + k^{*}(\varepsilon_n)\,\varepsilon_n & \text{(a)} \\ s_n = C^T x_n & \text{(b)} \\ \varepsilon_n = e_n - b^T x_n & \text{(c)} \end{array}\right. \qquad \text{(I-31)}$$

où : ε_n et $s_n \in \mathcal{R}$

$x_n \in \mathcal{R}^q$

A matrice carrée $\in \mathcal{R}^{q\times q}$

$C^T = (C_1 \ldots C_q) \qquad C_i = c^{te}$

$b^T = (b_1 \ldots b_q) \qquad b_i = c^{te}$

$k^{*T}(\varepsilon_n) = (k^{*}_1(.) \ \ldots \ k^{*}_q(.)\,)$

Les variables ε_n et e_n / s_n sont liées par des équations de récurrences du type :

$$\begin{array}{l} f(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} \ldots \varepsilon_{n+q}, n) = g(s_n, s_{n+1} \ldots s_{n+q}, n) \\ f(\varepsilon_n, \ldots\ldots\ldots) = h(e_n, e_{n+1} \ldots e_{n+q}, n) \end{array} \qquad \text{(I-32)}$$

que nous allons maintenant étudier.

Dans ce sens, nous nous proposons de mettre en oeuvre un algorithme d'élimination utilisant une propriété des polynômes minimaux des matrices /16/. Par cette méthode nous obtenons une équation récurrente de degré d'itération minimum.

α) *Relation entre la sortie* s_n *et l'écart* ε_n

Nous désirons éliminer certaines composantes de x_n entre les équations (I-31, a et b) et ainsi établir l'équation de récurrence qui lie s_n et ε_n.

A l'instant (n+i)T, il vient (I-33)

$$x_{n+i} = A^i x_n + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} k(\varepsilon_{n+j}) \qquad (i = 1 \ldots q) \tag{I-33}$$

soit

$$s_{n+i} = C^T x_{n+i}$$

En multipliant à gauche chaque membre de la relation ci-dessus par C^T, nous faisons apparaître la variable s_n soit :

$$s_{n+i} = C^T A^i x_n + \sum_{j=0}^{i-1} C^T A^{i-1-j} k(\varepsilon_{n+j}) \tag{I-34}$$

Pour éliminer les termes $C^T A^i x_n$, indépendemment des conditions initiales, nous allons utiliser la définition suivante :

Définition 3/15/ :

Le polynôme minimal de la matrice A *est le polynôme de plus faible degré* $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \lambda^i$ *vérifiant pour* $\alpha_r = 1$

$$P(A) = A^r + \alpha_{r-1} A^{r-1} + \ldots \alpha_1 A + \alpha_o I_q = 0 \tag{I-35}$$

Son degré r *est au plus égal à l'ordre* q *de la matrice* A.

Une sommation pondérée par les coefficients $\alpha_i (i = 0,1,\ldots r)$ des égalités (I-34) conduit à l'équation (I-36) dans laquelle apparait $P(A)$:

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i s_{n+i} = C^T \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i A^i\right) x_n + \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} C^T A^{i-1-j} k(\varepsilon_{n+j})\right) \tag{I-36}$$

en ordonnant par rapport à ε_{n+j}, il vient :

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \, s_{n+i} = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{i=1+j}^{r} \alpha_i \, C^T A^{i-1-j} \, k(\varepsilon_{n+j}) \right)$$

nous avons de plus :

$$k(\varepsilon_{n+j}) = k^*(\varepsilon_{n+j}) \, \varepsilon_{n+j}$$

Il vient alors l'équation de récurrence scalaire (I-37)

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \, s_{n+i} = \sum_{j=0}^{r-1} l^*_j (\varepsilon_{n+j}) \, \varepsilon_{n+j} \qquad \text{(I-37)}$$

$$\text{avec } l^*_j(\varepsilon_{n+j}) = \sum_{i=1+j}^{r} \alpha_i \, C^T A^{i-1-j} \, k^*(\varepsilon_{n+j})$$

β) *Relation entre l'entrée e_n et l'écart ε_n*

Le même procédé d'élimination, appliqué aux équations (I-31, a et c) conduit à l'écriture de (I-38) après avoir multiplié à gauche par b^T les membres de la relation (I-33), soit :

$$b^T x_{n+i} = e_{n+i} - \varepsilon_{n+i} = b^T A^i \, x_n + \sum_{j=0}^{i-1} b^T A^{i-1-j} \, k(\varepsilon_{n+j}) \qquad \text{(I-38)}$$

En utilisant la sommation par les α_i (coefficients du polynôme minimal) de ces équations. Il vient :

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \, e_{n+i} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \, \varepsilon_{n+i} + \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} . b^T A^{i-1-j} \, k(\varepsilon_{n+j}) \right) \qquad \text{(I-39)}$$

En ordonnant par rapport à ε_{n+j}, cette expression devient :

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \, e_{n+i} = \varepsilon_{n+r} + \sum_{j=0}^{r-1} \left(\alpha_j + \sum_{i=1+j}^{r} \alpha_i \, b^T A^{i-1-j} \, k^*(\varepsilon_{n+j}) \right) \varepsilon_{n+j} \qquad \text{(I-40)}$$

ou encore (I-41) :

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \, e_{n+i} = \varepsilon_{n+r} + \sum_{j=0}^{r-1} f^*_j(\varepsilon_{n+j}) \, \varepsilon_{n+j} \qquad \text{(I-41)}$$

$$\text{avec } f^*_j(\varepsilon_{n+j}) = \alpha_j + \sum_{i=1+j}^{r} \alpha_i \, b^T A^{i-1-j} \, k^*(\varepsilon_{n+j})$$

Dans le cas d'un régime autonome ($e_n = 0$), l'équation (I-41) ne fait intervenir que le seul paramètre ε_n et s'écrit alors :

$$\varepsilon_{n+r} + \sum_{j=0}^{r-1} f^{*}_{j} (\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} = 0 \qquad \text{(I-42)}$$

γ) *Remarques sur les équations obtenues*

Nous avons déduit de la relation (I-31) deux équations de récurrence : l'une lie les variables e_n et s_n, l'autre e_n et ε_n.

L'ordre de récurrence de ces deux équations est égal au degré du polynôme minimal de la matrice A correspondant à la partie linéaire du système.

Ce polynôme existe toujours et son degré est inférieur ou égal à celui du polynôme caractéristique de A.

Dans le cas particulier ou le polynome minimal de A est aussi son polynôme caractéristique, on retrouve les résultats antérieurs /12//17/ démontrés pour les systèmes monovariables. Les $f^{*}_{j}(\varepsilon_{n+j})$ peuvent être obtenus directement à partir du calcul du polynôme "caractéristique" de la structure non constante $(A - k^{*}(.)\, b^T)$. On a alors :

$$\sum_{i=0}^{q} f_i(.)\, \lambda^i \equiv \det (\lambda I_q - A + k^{*}(.)\, b^T) \qquad \text{(I-43)}$$

L'algorithme que nous avons proposé constitue une extension des résultats antérieurs. Il met en évidence une réduction de dimentionnalité par l'introduction de la notion de polynôme minimal.

Nous allons maintenant montrer que cette méthode permet également de traiter les systèmes multivariables.

III-1-2 Systèmes multivariables /18/

Considérons un système de type Lur'e Postnikov multivariable décrit par l'équation (I-44) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = A\, x_n + K^{*} (\varepsilon_n)\, \varepsilon_n \\ s_n = C^T x_n \\ \varepsilon_n = e_n - B\, x_n \end{cases} \qquad \text{(I-44)}$$

Cette formulation généralise les relations (I-31) où

A matrice carrée $\in \mathcal{R}^{q\times q}$, $x_n \in \mathcal{R}^q$

$C^T \in \mathcal{R}^{r\times q}$, $s_n \in \mathcal{R}^r$

$B \in \mathcal{R}^{p\times q}$, $\epsilon_n \in \mathcal{R}^p$

$K^*(\epsilon_n) \in \mathcal{R}^{q\times p}$, $e_n \in \mathcal{R}^p$

L'algorithme décrit en (III-1-1) est encore applicable, avec les mêmes notations.

On peut donc remplacer les éléments scalaires par des éléments vectoriels. Les $\alpha_i (i=0, 1 \ldots r)$ représentent encore les coefficients du polynôme minimal de la matrice constante A. Il vient ainsi :

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i s_{n+i} = \sum_{j=0}^{r-1} \mathcal{L}^*_j(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} \tag{I-45}$$

avec $\mathcal{L}^*_j(\varepsilon_{n+j}) = \sum_{i=1+j}^{r} \alpha_i C^T A^{i-1-j} K^*(\varepsilon_{n+j})$ matrice carrée $\in \mathcal{R}^{p\times p}$

et

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i e_{n+i} = \varepsilon_{n+r} + \sum_{j=0}^{r-1} P^{j*}(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} \tag{I-46}$$

avec $P^{j*}(\varepsilon_{n+j}) = \alpha_j I_p + \sum_{i=1+j}^{r} \alpha_i B A^{i-1-j} K^*(\varepsilon_{n+j})$

Quand le vecteur e_n est identiquement nul nous obtenons une équation récurrente vectorielle en ε_n :

$$\varepsilon_{n+r} + \sum_{j=0}^{r-1} P^{j*}(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} = 0 \tag{I-47}$$

les $P^{j*}(.)$ sont des matrices carrées de dimension pxp pouvant s'écrire sous la forme :

$$P^{j*}(.) = \begin{bmatrix} p^{j*}_{11}(.) & \ldots\ldots & p^{j*}_{1p}(.) \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ p^{j*}_{p1}(.) & \ldots\ldots & p^{j*}_{pp}(.) \end{bmatrix} \quad \text{pour } j = 0\ldots r-1 \tag{I-48}$$

La méthode proposée permet d'écrire une équation de récurrence vectorielle (I-3-3) d'ordre r sur un vecteur de dimension p. Cette dernière peut être égale à q ou supérieure, dans ce cas l'ordre global de la représentation s'en trouve augmenté. Cette équation régit le comportement des grandeurs qui définissent l'erreur, en fait les variables traitées non linéairement.

III-1-3 *Exemple d'application*

Nous allons sur un exemple mettre en oeuvre les résultats proposés. Considérons un système discret multivariable à deux entrées et deux sorties décrit par les équations (I-44) avec les valeurs numériques suivantes :

$$q = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B \in \mathcal{R}^{2x3},\ C^T \in \mathcal{R}^{2x3},\ K^*(.) \in \mathcal{R}^{3x2}$$

La matrice A vérifie :

$$A^2 - 6\,A + 8\,I = 0 \tag{I-49}$$

le polynôme minimal $P(\lambda)$ est donc :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \tag{I-50}$$

avec $\quad \alpha_0 = 8 \quad \alpha_1 = -6 \quad \alpha_2 = 1$

Il vient par conséquent les équations de récurrences :

$$s_{n+2} - 6s_{n+1} + 8s_n = \left[C^T\,K^*(\varepsilon_{n+1})\right]\,\varepsilon_{n+1} + \left[C^T \begin{bmatrix} -3 & +3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix} K^*(\varepsilon_n)\right]\,\varepsilon_n \tag{I-51}$$

et

$$e_{n+2} - 6\,e_{n+1} + 8\,e_n = \varepsilon_{n+2} + \left[-6 + B\,K^*(\varepsilon_{n+1})\right]\varepsilon_{n+1} + \left[8 + B \begin{bmatrix} -3 & +3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix} K^*(\varepsilon_n)\right]\,\varepsilon_n$$

La méthode de mise en équation sur le polynôme caractéristique de A |17| aurait donné des équations de troisième ordre sous la forme :

$$\begin{aligned} & s_{n+3} - 8\,s_{n+2} + 20\,s_{n+1} - 16\,s_n = f(\varepsilon_{n+2}, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n) \\ \text{et} \quad & e_{n+3} - 8\,e_{n+2} + 20\,e_n - 16\,e_n = g(\varepsilon_{n+3}, \varepsilon_{n+2}, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n) \end{aligned} \tag{I-52}$$

Nous allons montrer par la suite, qu'il est possible inversement, de passer d'une représentation récurrente à une forme matricielle.

III-2 PASSAGE DE L'EQUATION DE RECURRENCE SCALAIRE A UNE EQUATION MATRICIELLE.

III-2-1 Systèmes monovariables

Considérons le système décrit en régime libre par l'équation de récurrence (I-53)

$$x_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} f_i\,(x_{n+q-i}) = 0 \qquad \text{(I-53)}$$

en prenant un vecteur défini par (I-54)

$$X_n^T = (x_n \;\ldots\; x_{n+q-1}) \qquad \text{(I-54)}$$

il vient la représentation matricielle de la forme :

$$X_{n+1} = M(X_n)\; X_n \qquad \text{(I-55)}$$

avec

$$M(X_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & \ddots & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -f_q^{*}(x_n) & -f_{q-1}^{*}(x_{n+1}) & \ldots\ldots & & -f_2^{*}(x_{n+q-2}) & -f_1^{*}(x_{n+q-1}) \end{bmatrix}$$

- $M(.)$ est une matrice compagnon /19/ dont les coefficients $f_i^{*}(.)$ $(i = 1 \ldots q)$ dépendent des x_{n+q-i} aux différents instants d'échantillonnage.

- $f_i(x_{n+q-i}) = f_i^{*}(x_{n+q-i})\; x_{n+q-i}$ (I-56)

  où $f_i^{*}(.) \in \left[\underline{f_i}\,,\ \overline{f_i}\right] \subset \mathcal{R} \quad \forall i = 1,2,\ldots, q$

Une dexième représentation de type Frobenius peut être déduite de l'équation scalaire initiale par introduction des variables annexes z_n^i /8/ /20/ /21/ pour i = 1 ... q définies par les équations (I-57).

$$
\begin{aligned}
z_{n+1}^{q} &= - f_q^{*}(x_n)\ x_n \\
z_{n+1}^{q-1} &= z_n^{q} - f_{q-1}^{*}(x_n)\ x_n \\
&\dots\dots\dots\dots \\
z_{n+1}^{3} &= z_n^{4} - f_3^{*}(x_n)\ x_n \\
z_{n+1}^{2} &= z_n^{3} - f_2^{*}(x_n)\ x_n \\
z_{n+1}^{1} &= z_n^{2} - f_1^{*}(x_n)\ x_n
\end{aligned}
\qquad \text{(I-57)}
$$

avec

$$x_n = z_n^1$$

Nous noterons Z_n^T le vecteur obtenu :

$$Z_n^T = (z_n^q\ ,\ z_n^{q-1}\ \dots\ z_n^2\ ,\ z_n^1 = x_n) \qquad \text{(I-58)}$$

il s'ensuit la relation (I-59)

$$z_{n+1} = M'(x_n)\ z_n \qquad \text{(I-59)}$$

où

$$M'(x_n) = \begin{bmatrix} 0 & & & & -f_q^{*}(x_n) \\ 1 & 0 & & & -f_{q-1}^{*}(x_n) \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 & -f_2^{*}(x_n) \\ & & & 1 & -f_1^{*}(x_n) \end{bmatrix}$$

Dans cette formulation les coefficients non constants f_i^{*}(i = 1 ... q) dépendant de la seule variable x_n prise à l'instant n.

La représentation (I-59) est plus facile à utiliser que la représentation (I-55). Elle donne lieu lors d'une étude de stabilité à des conditions généralement moins contraignantes sur le système initial (I-53).

III-2-2 Systèmes multivariables

Comme dans le cas précédent, il est possible de déduire plusieurs formes matricielles de l'équation de récurrence vectorielle (I-60) :

$$X_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} P^{i*}(X_{n+q-i})\, X_{n+q-i} = 0 \qquad \text{(I-60)}$$

où

X_n est ici un vecteur de composantes x_n^i $(i = 1 \ldots p)$

et $P^{i*}(.)$ une matrice carrée $\in \mathcal{R}^{p\times p}$ de composantes p_{jk}^{i*}

α) *1ère forme matricielle*

Soit un vecteur définit par (I-61)

$$\sigma_n^T = (X_n^T \ldots X_{n+q-1}^T) \qquad \text{(I-61)}$$

nous obtenons l'équation suivante :

$$\sigma_{n+1} = H(\cdot)\, \sigma_n \qquad \text{(I-62)}$$

les composantes de H(.) se répartissent dans un nombre limité de blocs matriciels. H(.) sera dite sous forme compagnon par blocs (ou épaisse) et représentée par (I-63) :

$$H(.) = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_p \\ -P^{q*}(X_n) & \ldots & \ldots & -P^{1*}(X_{n+q-1}) \end{bmatrix} \qquad \text{(I-63)}$$

où $I_p \in \mathcal{R}^{p\times p}$, matrice unité.

Une deuxième représentation peut être déduite de l'équation (I-60) en prenant un nouveau vecteur (I-64)

$$Y_n^T = (Y_n^{1T} \;\ldots\ldots\; Y_n^{pT}) \qquad \text{(I-64)}$$

avec

$$\begin{aligned} Y_n^{1T} &= (x_n^1 \;\ldots\ldots\; x_{n+q-1}^1) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ Y_n^{iT} &= (x_n^i \;\ldots\ldots\; x_{n+q-1}^i) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ Y_n^{pT} &= (x_n^p \;\ldots\ldots\; x_{n+q-1}^p) \end{aligned} \qquad \text{(I-65)}$$

l'équation obtenue est de la forme (I-66) :

$$Y_{n+1} = H'(.)\ Y_n \tag{I-66}$$

où H'(.) est une matrice carrée de forme compagnon généralisée :

$$H'(.) = \begin{bmatrix} H'_{11}(.) & \dots & H'_{1p}(.) \\ & \dots & \\ H'_{p1}(.) & \dots & H_{pp}(.) \end{bmatrix} \tag{I-67}$$

avec

$$H'_{jj}(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -p^{p*}_{jj}(x^j_n) & -p^{p-1*}_{jj}(x^j_{n+1}) & \dots & & -p^{1*}_{jj}(x^j_{n+q-1}) \end{bmatrix} \qquad j = 1 \dots p$$

Les matrices diagonales $H_{jj}(.)$ sont donc des formes compagnon.

Les matrices non diagonales s'écrivent :

$$H'_{jk}(.) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ -p^{p*}_{jk}(x^k_n) & \dots & p^{1*}_{jk}(x^k_{n+q-1}) \end{bmatrix} \qquad k \neq j = 1 \dots p$$

β) $2^{ème}$ *forme matricielle*

Comme dans le cas d'une équation de récurrence scalaire, l'introduction de variables vectorielles annexes dans l'équation (I-60) permet d'aboutir à une représentation de type Frobenius. Des hypothèses supplémentaires sont cependant nécessaires : le changement de variables ainsi défini doit être biunivoque. Il vient :

$$Z_{n+1} = C(X_n) \quad Z_n \tag{I-68}$$

où $Z_n^T = (Z_n^q \dots Z_n^2,\ Z_n^1 = X_n)$

avec $\quad Z^{i}_{n+1} = Z^{i+1}_{n} - P^{i^*}(X_n)\, X_n \quad$ pour $i = 1 \dots q$

on suppose que les matrices $P^{i^*}(.)$ sont régulières pour toute valeur fixée de l'état et du temps.

$$C(X_n) = \begin{bmatrix} 0 & & & & -P^{q^*}(X_n) \\ I_p & 0 & & & -P^{q-1^*}(X_n) \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -P^{2^*}(X_n) \\ 0 & & & I_p & -P^{1^*}(X_n) \end{bmatrix} \qquad \text{(I-69)}$$

Une permutation adéquate des composantes scalaires de Z_n permet ici encore d'aboutir à la forme (I-70)

$$S_{n+1} = C'(.)\, S_n \qquad \text{(I-70)}$$

avec

$$C'(.) = \begin{bmatrix} C'_{11}(.) & \dots & C'_{1p}(.) \\ \vdots & & \vdots \\ C'_{p1}(.) & \dots & C'_{pp}(.) \end{bmatrix} \qquad \text{(I-71)}$$

$$C'_{jj}(.) = \begin{bmatrix} 0 & & & & -P^{p^*}_{jj}(x^j_n) \\ 1 & 0 & & & -P^{p-1^*}_{jj}(x^j_n) \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & -P^{1^*}_{jj}(x^j_n) \end{bmatrix} \qquad j = 1 \dots p$$

Les matrices $C'_{jj}(.)$ sont sous forme Frobenius, dépendant d'un seul paramètre.

Les blocs matriciel hors diagonaux, s'écrivent :

$$C'_{jk}(.) = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & -P^{p^*}_{jk}(x^k_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & -P^{1^*}_{jk}(x^k_n) \end{bmatrix} \qquad j \neq k = 1 \dots p$$

La matrice $C'(.)$ est appelée forme de Frobenius généralisée. Cette formulation ne fait intervenir dans les coefficients le seul vecteur X_n pris à l'instant n.

Le représentation d'un système à l'aide d'une équation de récurrence vectorielle conduira naturellement à une description matricielle faisant intervenir des formes compagnon par blocs, généralisées ou des formes Frobenius généralisées.

L'utilisation de ces différentes formes sera justifiée par les applications.

IV - STABILITE DES SYSTEMES DISCRETS

Dans cette partie, nous nous proposons de rappeler quelques concepts usuels relatifs à la stabilité des systèmes discrets non linéaires, ainsi que les méthodes d'investigation que nous aurons à utiliser par la suite.

Les systèmes étudiés appartiennent à la classe des processus non linéaires décrits par l'équation d'état vectorielle (I-72) :

$$x_{n+1} = A(x_n, n)\, x_n \qquad \text{(I-72)}$$

x_n : vecteur état d'ordre q défini à l'instant n

$A(x_n, n)$ matrice carrée d'ordre q, d'élèments $a_{ij}(.)$ non constants.

Nous supposons que l'équation (I-72) remplit toutes les conditions concernant l'existence et l'unicité d'une solution $x(n, x_n, n_o)$. Nous supposons de plus que la position d'équilibre $x_n = 0$ est un point isolé.

IV-1 DEFINITIONS RELATIVES A LA STABILITE /5/ /22/ /23/

On appelera trajectoire la solution $x(n, n_o, x_o)$ représentée dans un repère d'état.

Nous noterons $||x_n||$ une norme de vecteur x_n. L'évolution de cette norme caractérisera les propriétés de stabilité du système.

IV-1-1 *Descriptions générales*

α) *Stabilité asymptotique*

Définition 4

L'équilibre de l'équation (I-72) est dit stable au sens de Lyapunov /24/ si :

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n_o \qquad \exists\, \delta(\varepsilon, n_o) > 0 \text{ tel que :} \\ \forall x_o \;,\; ||x_o|| < \delta \text{ il vient } ||x(n, n_o, x_o)|| < \varepsilon \qquad \forall n > n_o \end{array} \qquad \text{(I-73)}$$

δ est en général fonction de ε et n_o. Lorsqu'il est fonction de ε seul, on a la stabilité uniforme.

Définition 5

L'équilibre du système sera dit attractif s'il existe un nombre η tel que :

$$\lim_{n \to \infty} x(n, n_o, x_o) = 0 \quad \forall x_o(||x_o|| < \eta) \text{ et } \forall n_o \qquad \text{(I-74)}$$

Définition 6

L'équilibre du système sera asymptotiquement stable s'il est à la fois stable et attractif.

Dans le cas où ni δ, ni η ne dépendent de n_o, l'équilibre du système est asymptotiquement et uniformément stable.

β) *Stabilité vis à vis des conditions initiales*

Dans le cas des systèmes non linéaires complexes, il est intéressant de connaître l'ensemble des conditions initiales qui assurent la stabilité asymptotique. Cet ensemble est appelé domaine d'attraction de l'équilibre. Lorsque ce domaine est tout l'espace $\mathcal{R}^n$, la stabilité est dite asymptotique globale.

γ) *Stabilité par rapport à la forme des solutions*

Dans le cas d'un système asymptotiquement stable, on est parfois conduit à préciser la manière dont $x(n, n_o, x_o)$ tend vers la position d'équilibre, ou du moins à définir le mouvement idéal enveloppant le mouvement réel. Cette idée conduit notamment à la notion de stabilité exponentielle :

La position d'équilibre d'un système supposé ramené à l'origine dans l'espace $\mathcal{R}^n$, est exponentiellement stable s'il existe deux nombres réels $\alpha \geq 1$ et $\beta > 0$ tels que l'on ait :

$$||x(n, n_o, x_o)|| \leq \alpha \, ||x_o|| \quad e^{-\beta(n - n_o)} \tag{I-75}$$

$\forall x_o \in \mathcal{R}^q$ et $\forall n > n_o$

IV-1-2 Méthodes usuelles d'étude de stabilité

Nous considérons le système dont le régime libre est décrit par l'équation (I-72). Nous allons présenter en vue d'une utilisation ultérieure deux méthodes dites de comparaison basées sur les travaux de Lyapunov /25/ et les techniques de contraction /26/ /12/.

Méthode de Lyapunov

La mise en oeuvre de cette méthode consiste à trouver une fonction $V(x_n, n)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- il existe une fonction a de classe K /27/ telle que :

$$V(x_n, n) \geq a\,(||x_n||) \quad \forall x_n \in \mathcal{R}^q \tag{I-76}$$

- $V(x_n, n) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \quad \forall n.$

- La fonction

$$\Delta V(x_n, n) = V(x_{n+1}, n+1) - V(x_n, n) \tag{I-77}$$

est définie négative, c'est à dire qu'il existe, $\mathcal{C}$ de classe K telle qu'on ait :

$$\Delta V(x_n, n) < - \mathcal{C}(||x_n||) \quad \forall x_n \in \mathcal{D} \text{ voisinage de l'origine} \tag{I-78}$$

L'existence d'une telle fonction V(.) permet de conclure à la stabilité asymptotique du système. La stabilité est globale si $\mathcal{D} = \mathcal{R}^q$.

Si de plus, nous montrons l'existence d'un réel $\beta \in [0,1[$ tel que l'on a :

$$V(x_{n+1}) \leq \beta\, V(x_n) \quad \forall x_n \in \mathcal{R}^q \tag{I-79}$$

la solution de l'équation (I-72) converge exponentiellement vers l'origine.

L'analyse de la stabilité du système (I-72) est donc ramenée par cette méthode à l'étude d'un système de comparaison d'ordre 1 représenté par (I-79).

Une norme scalaire $p(x_n)$ du vecteur x_n de (I-72) par exemple peut constituer une fonction candidate à Lyapunov.

La généralisation de la méthode est possible : l'utilisation des fonctions de Lyapunov vectorielles /28/ /29/ /30/, introduit des systèmes de comparaison d'ordre supérieur à 1.

Nous ne rappelons ici que quelques résultats obtenus dans le cas où ces fonctions de Lyapunov vectorielles sont en fait des normes vectorielles.

IV-1-3 *Définition de la norme vectorielle d'un vecteur /5/* :

Soient x_n et y_n deux vecteurs définis sur un espace vectoriel E de dimension q, et soit une décomposition de l'espace E ou somme directe, telle que :

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots\ldots \cup E_k \tag{I-80}$$

Notons :

P_i la matrice a coefficients constants qui définit la projection de E dans E_i. Il vient :

$$x_n^i = P_i\, x_n,\ x_n^i \text{ est donc la projection de } x_n \text{ dans } E_i \qquad \text{(I-81)}$$

$P(x_n)$ est un vecteur de R_+^k de composantes $p_i(x_n^i)$
avec $p_i(x_n^i)$ une norme scalaire de vecteur x_n^i.

Définition 7

$P(x_n)$ est appelé norme vectorielle de x_n, si les relations suivantes sont vérifiées composantes à composantes.

$$\begin{aligned}
&P(x_n) \geq 0 && \forall\, x_n \in E \\
&P(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 && \\
&P(x_n+y_n) \leq P(x_n) + P(y_n) && \forall\, x_n,\, y_n \in E \\
&P(\lambda x_n) = (\lambda)\, P(x_n) && \forall x_n \in E,\ \forall \lambda \in \mathcal{R} \text{ ou } \mathcal{C}
\end{aligned} \qquad \text{(I-82)}$$

Il est possible de mener l'étude de la stabilité à partir de vecteur $P(x_n)$: la méthode utilisée conduit à une forme agrégée du système initial.

IV-1-4 *Définition des systèmes majorants*

L'utilisation des normes vectorielles permet de définir une forme agrégée appelée matrice majorante /31/ du processus étudié (I-72). L'évolution du processus associé à cette matrice majore celle du système initial. La stabilité de ce dernier peut donc être étudiée à partir d'un système majorant.

α - *Définition 8*

Soit :
$M(A(x_n, n))$ la norme de matrice $A(x_n, n)$ relative à la norme $P(x_n)$ ($\mathcal{R}^q \to \mathcal{R}_+^k$).

$M(x_n, n)$ est une majorante de $A(x_n, n)$ relative à la norme $P(x_n)$ lorsqu'est vérifiée composante à composante l'inégalité suivante :

$$M\,(A(x_n,\, n)) \geq M(x_n,\, n) \qquad \text{(I-83)}$$

Il vient alors :

$\forall n \in \mathcal{T}, \quad \forall x_n \in \mathcal{R}^q$:

$$P(x_{n+1}) \leqslant M(A(x_n,\ n))\ \ P(x_n) \tag{I-84}$$

Le système décrit par (I-85) est alors appelé système majorant du système représenté par (I-72).

$$\begin{cases} z_{n+1} = M(x_n,\ n)\ z_n \\ z_o \geqslant P(x_o) \end{cases} \tag{I-85}$$

Il vient le long des trajectoires du processus la relation :

$$P(x_{n+k}) \leqslant z_{n+k} \tag{I-86}$$

β) *Définition* 9 /5/

On appelle matrice majorante canonique de la matrice $A(x_n,\ n)$ la matrice $M^*(x_n,\ n)$ dont les éléments $m^*_{ij}(.)$ sont obtenus de la façon suivante :

$$m^*_{ij}\ (x_n,\ n) = m_{ij}(A(x_n,\ n)\ ) + \delta_{ij} \tag{I-87}$$

où $\quad \delta_{ij} \geqslant 0 \quad (\Delta = \{\delta_{ij}\}$ matrice à éléments non négatifs) $\forall i,j = 1 \ldots k$

$$m_{ij}(A(x_n,\ n)\ ) = \underset{\substack{x \in E_i \\ x \neq 0}}{\mathrm{Max}} \frac{P_i(A_{ij}(x_n,n)\ x)}{P_j(x)} \tag{I-88}$$

$$A_{ij}(x_n,\ n) = P_i\ \ A(x_n,\ n)\ P_j \qquad \forall i,j = 1 \ldots\ldots k$$

γ) *Cas particulier des normes scalaires*

Lorsque $P(x_n)$ norme vectorielle de x_n est d'ordre $k = 1$, ceci conduit à des résultats particulièrements simples : les normes scalaires de matrices. Il vient pour les deux principaux :

- Norme du max

$$P(x_n) = \mathrm{Max}\ |x^i_n| \qquad i = 1 \ldots q$$

La norme de matrice correspondante est donnée par la relation :

$$M(A(x_n, n)) = \underset{i}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}(.)| \tag{I-89}$$

les $a_{ij}(.)$ sont les élèments de la matrice non constante $A(x_n, n)$.

Norme des sommes des modules

$$P(x_n) = \sum_{i=1}^{q} |x_n^i|$$

il vient

$$M\ A(x_n, n) = \underset{j}{\text{Max}} \sum_{i=1}^{q} |a_{ij}(.)| \tag{I-90}$$

IV-1-5 Théorème 1 /35/

Lorsque à la fois :

- $M(x_n, n)$ a ses élèments non constants isolés dans une rangée (ligne ou colonne).
- $(I_k - M(x_n, n))$ l'opposée d'une M-matrice /32/pour tout $x_n \in \mathcal{R}^q$
- La matrice $M(A(x_n, n))$ vérifie composante à composante l'inégalité

  $$M(x_n, n) \leqslant M(A(x_n, n))$$

- Les conditions initiales du système (I-85) satisfont la relation (I-91)

  $$(z_n^T)_{(n=n_o)} = (P(x_n))^T_{(n=n_o)} \tag{I-91}$$

  il vient

  $$z_n \geqslant P(x_n) \qquad \forall n \in \mathcal{T} \tag{I-92}$$

  Le système représenté par (I-85) constitue un majorant asymptotiquement stable pour le modèle (I-72) entraînant la même propriété pour ce dernier.

IV-2 CRITERES PRATIQUES POUR L'ETUDE DE STABILITE

IV-2-1 *Méthode de contraction dans l'étude de convergence d'une équation de récurrence*

Considérons l'équation de récurrence vectorielle (I-93)

$$X_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} P^{i^*}(X_{n+q-i})\, X_{n+q-i} = 0 \qquad \text{(I-93)}$$

avec $P^{i^*}(.)$ des matrices carrées a coefficients non constants $\in \mathcal{R}^{p\times p}$

X_n vecteur de composante x_n^i $(i = 1 \dots p)$

soit $P(.)$ une norme multiplicative d'ordre k relative au vecteur X_n, il vient l'inégalité (I-94) :

$$P(X_{n+q}) \leq \sum_{i=1}^{q} M(P^{i^*}(.))\, P(X_{n+q-i}) \qquad \text{(I-94)}$$

$M(P^{i^*}(.))$ sont des matrices carrées $\in \mathcal{R}_+^{k\times k}$.

Les solutions de l'équation (I-93) convergent asymptotiquement vers zéro, lorsqu'il est possible de vérifier:

$$\sum_{i=1}^{q} M(P^{i^*}(.)) \leq C \qquad \text{(I-95)}$$

où

- C est une matrice constante ($C \in \mathcal{R}_+^{k\times k}$) de rayon spectral inférieur à l'unité /5/.

Démonstration

si $C > 0$ et $\rho(C) < 1$

il existe un changement de base diagonal à coefficients positifs /5/ :

$$D = \text{diag}\,\{di\}$$

tel que la matrice

$$D^{-1}\, C\, D$$

soit égale au produit d'une matrice stochastique S par $\rho(C) < 1$, et cette propriété implique à priori que chacune des matrices :

$$D^{-1}\, M(P^{i^*}(X_{n+q-i}))\, D$$

soit inférieure à une matrice stochastique.

Il vient :

$$D^{-1}\ P(x_{n+q}) \leq \sum_{i=1}^{q} D^{-1}(M(P^{i^*}(X_{n+q-i}))\ )\ D.\ D^{-1}\ P(X_{n+q-i}) \qquad (I-96)$$

notons

$$Z_{n+i} = D^{-1}\ P(X_{n+i}) \qquad (I-97)$$

il vient :

$$Z_{n+q} \leq \sum_{i=1}^{q} D^{-1}\ M(P^{i^*}(X_{n+q-i})\ D\ Z_{n+q-i}$$

soit par majoration

$$Z_{n+q} \leq \left(\sum_{i=1}^{q} D^{-1}\ M(P^{i^*}(X_{n+q-i}))\ D\ \right) \operatorname*{Max}_{i}(Z_{n+q-i}) \qquad (I-98)$$

en notant :

$$U = \{U^j\} \text{ et } u_i = \{u_i^j\}, \text{ la définition :}$$

$$U = \operatorname*{Max}_{i}\{u_i\} \qquad U^j = \operatorname*{Max}_{i}\{u_i^j\} \qquad (I-99)$$

il en résulte :

$$Z_{n+q} \leq S\ \rho(C)\ \operatorname*{Max}_{i}(Z_{n+q-i}) \qquad (I-100)$$

soit en majorant cette relation (I-100) par la norme de Max :

$$\operatorname*{Max}_{j}\left\{Z^j_{n+q}\right\} \leq \rho(C)\ \operatorname*{Max}_{i,j}\ \left\{Z^j_{n+q-i}\right\} \qquad (I-101)$$

d'où le résultat énoncé pour $\rho(C)$

β) *Cas particulier*

Dans le cas ou P(.) est une norme scalaire d'ordre 1 nous obtenons l'équation de récurrence scalaire

$$u_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} g_i(u_{n+q-i})\ u_{n+q-i} = 0 \qquad (I-102)$$

et la condition de stabilité qui en découle est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{q} g_i(\cdot) \leq 1 - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1) \qquad (I-103)$$

IV-2-2 Critère de majoration

Lors de la synthèse et de la mise au point d'un asservissement présentant plusieurs non linéarités, il suffit parfois pour apprêhender l'évolution du processus de façon satisfaisante, d'évaluer l'amplitude des oscillations qui, se produisent autour d'un point d'équilibre instable. Dans ce sens il est possible de définir une majorante de l'écart d'un système par rapport à sa position d'équilibre /33/.

Soit un système décrit par l'équation (I-104)

avec $\varepsilon_{n+i} \in \mathcal{R}$

$$\varepsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} \phi_i(\varepsilon_{n+q-i}) \tag{I-104}$$

il s'ensuit l'inégalité :

$$|\varepsilon_{n+q}| \leqslant \sum_{i=1}^{q} |\phi_i(\varepsilon_{n+q-i})| \tag{I-105}$$

Notons :

g(.) la fonction définie par la relation (I-106)

$$g(y_n, \dots y_{n+q-1}, n) = \sum_{i=1}^{q} |\phi_i(y_{n+q-i}) \tag{I-106}$$

elle admet une majorante G(H) de la forme :

$$G(H) = \sum_{i=1}^{q} \underset{0 \leqslant \alpha \leqslant +H}{\mathrm{Max}} |\phi_i(\alpha)| \tag{I-107}$$

avec :

$$|\varepsilon_n| = y_n$$

Critère :

La suite de terme général a_m défini par la relation :

$$\begin{cases} a_{m+1} = \sum_{i=1}^{q} \underset{0 \leqslant |\alpha| \leqslant a_m}{\mathrm{Max}} |\phi_i(\alpha)| \quad \forall m \\ \\ \text{et } a_o = \mathrm{Max}\,(|\varepsilon_o| \dots |\varepsilon_{q-1}| \end{cases} \tag{I-108}$$

l'amplitude limite des oscillations des solutions de (I-104) est majorée par la limite ℓ de la suite (I-108), soit :

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n| \leqslant \lim_{m\to\infty} a_m = \ell \tag{I-109}$$

IV-2-3 *Cas de validité de la conjecture linéaire*

Considérons le système non linéaire représenté par l'équation vectorielle (I-72).

Soit P(.) la norme de x_n de $i^{ème}$ composante $p^i(x_n) = |x_n^i|$ en notant $a_{ij}^*(.)$ les éléments de la matrice majorante canonique associée à $M(A(x_n,n))$, il vient :

$$a_{ij}^*(.) = |a_{ij}(.)| \qquad \forall i,\ j = 1 \ldots q \tag{I-110}$$

α) *Critère pratique de BORNE-GENTINA /34/*

Si les termes non constants de la matrice $M(A(x_n,n))$ sont groupés dans une seule ligne ou une seule colonne, la vérification $\forall x_n,\ n \in \mathcal{R}^q, \mathcal{T}$, des conditions de stabilité asymptotique des systèmes linéaires sur la matrice $M(A(x_n,n))$ assure la stabilité asymptotique globale du système non linéaire (I-72). Ces conditions peuvent se résumer alors à la vérification des contraintes suivantes : tous les mineurs principaux de la matrice $(I_q - M(A(x_n,n)))$ doivent être supérieurs ou égaux à un scalaire ε strictement positif /35/ /16/ soit :

$$1 - a_{11}^* \geq \varepsilon \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12}^* \\ -a_{21}^* & 1 - a_{22}^* \end{vmatrix} \geq \varepsilon > 0 \tag{I-111}$$

jusqu'à $\det(I_q - M(A(x_n,n))) \geq \varepsilon > 0$

β) *Cas particulier d'application du critère*

Considérons une matrice possédant plusieurs lignes ou colonnes non constantes. Dans ce cas la matrice caractéristique du système initial se présente après des permutations adéquates sur les composantes du vecteur état sous la forme A ou A^T avec le partitionnement en blocs suivants :

$$A'(.) = \begin{bmatrix} A_{11}(x_n,n) & \cdots\cdots & A_{1k}(x_n,n) \\ A_{21} & \cdots\cdots & A_{2k} \\ & & \\ A_{k1} & \cdots\cdots & A_{kk} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ \\ q-m \\ \\ \end{matrix} \tag{I-112}$$

les m premières lignes sont ici non constantes.

Ces m lignes correspondent à la première composante vectorielle X^1_n du vecteur état

$$X_n^T = (X_n^{1T} \; . \; X_n^{2T} \; . \; . \; . \; . \; X_n^{kT}) \qquad \text{(I-113)}$$

Soit P(.) une norme vectorielle de X_n respectant ce partitionnement

$$P^T(X_n) = (P_1(X_n^1) \; , \; P_2(X_n^2) \; . \; . \; . \; . \; P_k(X_n^k)) \qquad \text{(I-114)}$$

la matrice majorante associée $M'(A'(x_n, n))$ est carrée d'ordre k se mettant sous la forme :

$$M'(A'(x_n, n)) = \begin{bmatrix} a^*_{11}(x_n, n) & \ldots\ldots & a^*_{1k}(x_n, n) \\ a^*_{21} & \ldots\ldots\ldots & a^*_{2k} \\ a^*_{k1} & \ldots\ldots\ldots & a^*_{kk} \end{bmatrix} \qquad \text{(I-115)}$$

Les éléments a^*_{ij} sont alors des scalaïres.

La matrice obtenue ne possède qu'une seule ligne non constante. La vérification des contraintes précédentes (I-103) assure la stabilité asymptotique du système.

V - UTILISATION DES SYSTEMES REDONDANTS DANS L'ETUDE DE LA STABILITE /8/ /36/ /37/

La redondance pour un modèle de type séquentiel peut être obtenue en incrémentant l'indice d'observation de la variable. Pour un vecteur état, elle se fait en augmentant le nombre de ses composantes.

Les nombreux critères utilisés en vue de l'étude de stabilité globale conduisent à des conditions très génèrales, souvent très difficiles à exploiter. En effet, ils ne tiennent pas compte des formes particulières des équations de récurrences mises en oeuvre : on cherche habituellement à minimiser la dimension d'une représentation, cependant une écriture redondante s'avère dans certains cas plus adaptée à l'application des critères.

V-1 EQUATIONS DE RECURRENCES VECTORIELLES REDONDANTES

Soit l'équation récurrente vectorielle non linéaire d'ordre q :

$$X_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} P^{i*}(X_{n+q-i})\, X_{n+q-i} = 0 \qquad \text{(I-116)}$$

où

X_n est un vecteur de composante $x_n^i = 1 \ldots p$

$X_n^T = (x_n^1 \ldots . x_n^p)$

$P^{i*}(.)$ $(i = 1 \ldots q)$ sont des matrices carrées de dimensions pxp, dont les composantes non constantes s'écrivent $p_{jk}^{i*}(.)$.

La redondance s'obtient par exemple en faisant une combinaison linéaire de l'équation (I-116) exprimée aux instants n et n+1. Il vient :

$$X_{n+q+1} + \sum_{i=1}^{q} P^{i*}(X_{n+q-i+1})\, X_{n+q-i+1} + A\left[X_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} P^{i*}(X_{n+q-i})\, X_{n+q-i}\right] = 0 \qquad \text{(I-117)}$$

avec

A une matrice à coefficients constants , elle sera choisie de façon à ce que les solutions de (I-116) soient solutions de (I-117).

Les solutions de (I-116) constituent alors un cas particulier de celles de (I-117). La stabilité de (I-117) entraînera donc celle de (I-116).

La relation (I-117) peut s'exprimer sous forme semblable à (I-116). Il vient alors une expression de la forme (I-118)

$$X_{n+q+1} + \sum_{i=1}^{q+1} Q^{i*}(X_{n+q+1-i})\, X_{n+q+1-i} = 0 \qquad \text{(I-118)}$$

L'utilisation d'une telle représentation en vue de l'étude de la stabilité conduit souvent à des contraintes moins sévères sur les paramètres du système. A titre d'illustration nous traitons un exemple.

Soit le système non linéaire représenté par une équation de récurrence scalaire de la forme :

$$x_{n+1} = (\, 0{,}8 - 0{,}4\, f^*(x_{n+1})\,)\, x_{n+1} - (\, 0{,}1 + 0{,}5\, f^*(x_n)\,)\, x_n \qquad \text{(I-119)}$$

En appliquant la condition de stabilité /12/ :

$$\sum_{i=1}^{2} (f_i^*(.)) < \rho < 1$$

soit alors :

$$| 0{,}8 - 0{,}4\ f^* | + | 0{,}1 + 0{,}5\ f^* | \leqslant \rho < 1$$

il vient la condition suffisante de stabilité suivante :

$$- 0{,}33 < f^* < 1 \qquad \text{(I-120)}$$

Une combinaison de l'équation (I-106) écrite à n+3 et n+2, donne une nouvelle équation récurrente :

$$x_{n+3} = (0{,}8 - a - 0{,}4\ f^*(x_{n+2})x_{n+2} + (0{,}8a - 0{,}1 - (0{,}5+0{,}4a)f(x_{n+1}))\ x_{n+1}$$

$$- a(0{,}1 - 0{,}5\ f^*(x_n)\ )\ x_n \qquad \text{(I-121)}$$

Le même critère de stabilité appliquée à cette dernière équation et en choissisant a = 0,2 conduit à une nouvelle condition suffisante de stabilité :

$$- 0{,}33 < f^* < 1{,}5 \qquad \text{(I-122)}$$

L'utilisation d'une représentation redondante est alors justifiée.

V-2 EQUATIONS MATRICIELLES REDONDANTES

Soit l'équation vectorielle (I-123)

$$x_{n+1} = A(x_n) \quad x_n \qquad \text{(I-123)}$$

où

$x_n \in \mathcal{R}^q$, est le vecteur état

$A(x_n, n)$ matrices à coefficients non constant, $\in \mathcal{R}^{q\mathrm{x}q}$.

Principe de redondance

Pour augmenter l'ordre du système à s (s > q), nous procédons comme suit :

On se donne une matrice de changement de base P de rang maximum q tel que :

$$P \in \mathcal{R}^{s \times q} \qquad s > q$$

lorsque nous posons

$$y_n = P\, x_n \tag{I-124}$$

Il vient :

$$P\, x_{n+1} = P\, A(.)\, P^{+}\, (P\, x_n) \tag{I-125}$$

où P^{+} est la pseudo-matrice au sens de Moore-Penrose telle que l'on a :

$$P^{+}\, P = I_q \tag{I-126}$$

dans notre cas :

$$P^{+} \in \mathcal{R}^{q \times s}$$

On obtient ainsi le système dilaté (I-127)

$$y_{n+1} = (P\, A(.)\, P^{+})\, y_n \tag{I-127}$$

où

$$y_n \in \mathcal{R}^{s}$$

$$P\, A(.)\, P^{+} = B(.) \in \mathcal{R}^{s \times s}$$

Les composantes de la matrice B(.) sont alors des combinaisons linéaires des composantes x_n^i définies à partir des coefficients de la matrice P. Les solutions du système initial (I-23) ne constituent alors qu'un cas particulier de celles du systèmes dilaté (I-127).

Il existe d'autres modes permettant d'introduire une description redondante sur le système initial qui sont en fait que des cas particuliers du principe décrit auparavant.

Par exemple, il suffit parfois d'écrire plusieurs fois une ligne d'un système pour obtenir un ordre supérieur à l'ordre initial. Ainsi, le système décrit en (I-128) peut être représenté par (I-129) :

$$\begin{bmatrix} x^1_{n+1} \\ x^2_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a^*_{12}(x^2_n) \\ a_{21} & a^*_{22}(x^2_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_n \\ x^2_n \end{bmatrix} \qquad \text{(I-128)}$$

$$\begin{bmatrix} x^1_{n+1} \\ x^1_{n+1} \\ x^2_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & (1-\alpha)a_{11} & a^*_{12}(x^2_n) \\ \beta a_{11} & (1-\beta)a_{11} & a^*_{12}(x^2_n) \\ \gamma a_{21} & (1-\gamma)a_{21} & a^*_{22}(x^2_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_n \\ x^1_n \\ x^2_n \end{bmatrix} \qquad \text{(I-129)}$$

l'ordre apparent du système (I-129) est de trois. Les solutions de ce dernier englobent celles de (I-128). La stabilité du système redondant (I-29) entraîne celle du système initial (I-128).

Dans le deuxième chapitre, nous utiliserons le principe de redondance pour le partitionnement des matrices en blocs. Nous retiendrons un cas pour lequel, la matrice partitionnée est dilatée de façon telle que ses (m-1) premières colonnes sont des blocs diagonaux présentant la propriété de commutativité.

CONCLUSION

Après avoir défini la classe des processus étudiés, nous avons examiné les différentes expressions possibles d'une même équation faisant intervenir deux notions vectorielles : l'état et la séquence.

Lorsque le système est non linéaire, le choix de la représentation s'avère primordial pour l'application des critères de stabilité et la recherches de conditions les moins restrictives possibles.

En particulier l'augmentation de l'ordre d'une équation peut parfois permettre de déterminer des domaines de stabilité plus larges.

Un premier algorithme conduit à une généralisation au cas des processus multivariables de la représentation récurrente utilisée pour les modèles monovariables. On obtient alors une équation de récurrence relative au vecteur de sortie ou au vecteur de commande. Cette méthode permet d'obtenir une représentation mixte (état/séquence) à partir d'une écriture dans l'espace d'état. L'ordre global de la représentation peut s'en trouver augmenté. Par la suite, nous envisageons une deuxième méthode permettant d'obtenir le même type de formulation, mais avec un degré de redondance moindre.

CHAPITRE II

METHODES D'ELIMINATION PAR RAPPORT A UN VECTEUR COMPOSANT DANS LES SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES

INTRODUCTION

Nous abordons dans ce chapitre, la mise en oeuvre d'un algorithme d'élimination. Ce dernier permet d'éliminer une partie des composantes de l'état d'un système, en conservant une relation qui régit le comportement des composantes restantes.

Nous utilisons dans ce but une règle pratique basée sur la notion de polynôme caractéristique relatif à une variable d'état. Pour aboutir à l'équation de récurrence voulue, une simple identification suffit : les monômes de degré n intervenant dans l'expression du polynôme caractéristique sont remplacés par les fonctions non linéaires de la variable d'état considérée au degré d'itération n.

Dans une première partie, les coefficients des polynômes caractéristiques sont des fonctions scalaires de l'état. Une décomposition en sous systèmes permet de faire apparaître l'expression des p polynômes relatifs aux p variables non éliminées. Les p équations de récurrence obtenues sont alors regroupées en une équation récurrente vectorielle.

Dans une seconde partie nous introduisons la notion de"polynôme caractéristique" à coefficients matriciels . Ce polynôme est calculé à partir d'un partitionnement de la matrice en blocs de même dimension. Les règles de calcul sont alors analogues à celles employées sur des scalaires. La définition du polynôme caractéristique généralisée permet ainsi de réaliser l'opération d'élimination par rapport à un vecteur composant.

Cette méthode, valable aussi pour les systèmes linéaires, s'adapte parfaitement aux systèmes de type Lur'e Postnikov. Pour les modèles de ce type, il est souvent intéressant d'éliminer les variables intervenant linéairement. Pratiquement, cet aspect du problème revient dans de nombreux cas, à ne conserver que les grandeurs de commande.

Un certain degré de redondance par rapport à l'ordre initial du système peut intervenir dans l'ordre global des équations obtenues. Nous envisageons quelques applications de cette augmentation de dimension.

I - DESCRIPTION DES SYSTEMES ETUDIES

Nous proposons d'étudier un système non linéaire d'ordre q tel que les p composantes $(x_n^m \ . \ . \ . \ x_n^q)$ du vecteur état $(x_n^1 \ . \ . \ . \ x_n^q)$ apparaissent non linéairement dans les relations décrivant l'évolution du processus. Ce modèle peut être représenté sous la forme (II-1)

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}^1 = a_{11}x_n^1 + \dots + a_{1(m-1)}x_n^{m-1} + a_{1m}(x_n^m) + \dots + a_{1q}(x_n^q) \\ x_{n+1}^2 = a_{21}x_n^1 + \dots + a_{2(m-1)}x_n^{m-1} + a_{2m}(x_n^m) + \dots + a_{2q}(x_n^q) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1}^{m-1} = a_{(m-1)1}x_n^1 + \dots + a_{(m-1)(m-1)}x_n^{m-1} + a_{(m-1)m}(x_n^m) + \dots + a_{(m-1)q}(x_n^q) \end{array}\right. \qquad (II\text{-}1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}^m = a_{m1}x_n^1 + \dots + a_{m(m-1)}x_n^{m-1} + a_{mm}(x_n^m) + \dots + a_{mq}(x_n^q) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1}^q = a_{q1}\,x_n^1 + \dots + a_{q(m-1)}x_n^{m-1} + a_{qm}(x_n^m) + \dots + a_{qq}(x_n^q) \end{array}\right.$$

avec $p = q-(m-1)$

Chacune des q équations s'expriment sous la forme contractée (II-2) :

$$x_{n+1}^i = \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij}\, x_n^j + \sum_{k=m}^{q} a_{ik}(x_n^k) \qquad (II\text{-}2)$$

pour $i = 1 \ . \ . \ . \ q$

nous faisons apparaître les deux parties du vecteur état :

x_n^i, $i = 1 \ . \ . \ . \ (m-1)$	composantes non traitées par les non linéarités formant le vecteur X_n^1
x_n^i, $i = m \ . \ . \ . \ q$	composantes traitées par les non linéarités, regroupées en un vecteur σ_n

Ce système correspond au schéma bloc /3/ représenté figure 3

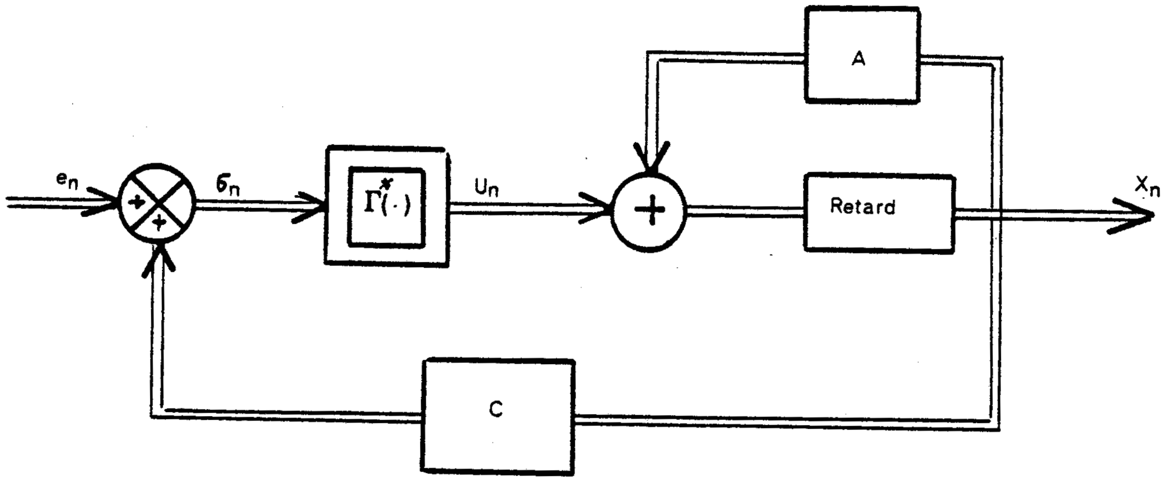

Figure3

De tels processus peuvent être représentés par l'équation d'état (II-3) à entrée nulle ($e_n = 0$) :

$$\begin{cases} X_{n+1} = A\, X_n + U_n \\ U_n = \Gamma^*(\sigma_n).\ \sigma_n \\ \sigma_n = C\, X_n \end{cases} \tag{II-3}$$

$X_n \in \mathcal{R}^q$, vecteur état à l'instant n.

$\sigma_n^T = (x_n^m \ . \ . \ . \ x_n^q) \in \mathcal{R}^p$ constitue le vecteur d'entrée de la non linéarité

$A \in \mathcal{R}^{qxq}$, matrice constante associée aux (m-1) premières colonnes de (II-1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1(m-1)} & 0 . . & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{q1} & \cdots\cdots & a_{q(m-1)} & 0 . . & 0 \end{bmatrix}$$

$\Gamma^*(\sigma_n)$ matrice caractérisant le modulateur non linéaire dont les entrées sont les composantes de vecteur σ_n sur lesquels nous établirons la relation de récurrence.

$\Gamma^*(\sigma_n) \in \mathcal{R}^{qxp}$, est une matrice à élèments non constants

$$\Gamma^{*}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^{*}_{1m}(x^m_n) & \dots\dots\dots & a^{*}_{1q}(x^q_n) \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a^{*}_{qm}(x^m_n) & \dots\dots\dots & a^{*}_{qq}(x^q_n) \end{bmatrix}$$

C matrice constante $\in \mathcal{R}^{p\times q}$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En explicitant la relation (II-3), le système s'écrit sous la forme :

$$x_{n+1} = A'(\sigma_n)\, x_n \qquad \text{(II-4)}$$

où

$$A'(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(m-1)} & a^{*}_{1m}(x^m_n) & \dots & a^{*}_{1q}(x^q_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{q(m-1)} & a^{*}_{qm}(x^m_n) & \dots & a^{*}_{qq}(x^q_n) \end{bmatrix}$$

Le but de notre étude est d'établir une relation récurrente gouvernant le seul vecteur σ_n. Il faut donc éliminer les (q-p) composantes de X^1_n dans (II-1). Nous allons envisager une méthode différente de celle proposée au premier chapitre.

II - METHODE D'ELIMINATION PAR RAPPORT A UNE COMPOSANTE SCALAIRE

Nous proposons dans cette partie une première méthode d'élimination des (q-p) composantes $(x^1_n \dots x^{m-1}_n)$ du système (II-1). Il s'agit en fait de p éliminations successives. Nous allons tout d'abord en rappeler le principe.

II-1 RAPPELS

Soit un système décrit par une équation vectorielle (II-5) :

$$y_{n+1} = B\, y_n \qquad \text{(II-5)}$$

où

$$y_n^T = (y_n^1 \; . \; . \; . \; y_n^s) \in \mathcal{R}^s$$

B matrice carrée $\in \mathcal{R}^{sxs}$

afin d'éliminer les composantes y_n^i pour $i = 1 \; . \; . \; . \; (s-1)$ du système, et obtenir une équation de récurrence relative à la composante restante y_n^s, il est commode d'utiliser la règle pratique basée sur le clacul du polynôme caractéristique /14/.

La substitution de y_{n+i}^s aux expressions $\lambda^i (i = 1 \; . \; . \; . \; s)$ dans le polynôme caractéristique, conduit immédiatement au résultat cherché sous forme d'équation récurrente (II-6) :

$$y_{n+s}^s + \sum_{i=1}^{s} p_i^{*} (y_{n+s-i}^s)\, y_{n+s-i}^s = 0 \qquad \text{(II-6)}$$

où

$p^{i*}(.)$ sont des coefficients non constants du polynôme caractéristique.

Rappelons que dans le cas d'un système linéaire, le choix de la composante y_n^i de vecteur état importe peu. Par contre dans le cas des systèmes non linéaires monovariables, il faut que la seule variable restante après élimination soit celle qui intervient non linéairement. Les coefficients $p_i(.)$ sont alors fonctions de cette variable à des instants différents.

II-1-1 Relation entre le polynôme caractéristique et l'équation de récurrence

Considérons l'équation de récurrence scalaire linéaire suivante :

$$y_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} a_i\, y_{n+q-i} = 0 \qquad \text{(II-7)}$$

a_i, des coefficients constants.

Nous pouvons définir le polynôme caractéristique en identifiant les degrés d'itération de y_n et la puissance de chaque monôme λ, nous obtenons le polynôme caractéristique (II-8) :

$$P(\lambda) = \lambda^q + \sum_{i=1}^{q} a_i \lambda^{q-i} \qquad \text{(II-8)}$$

Supposons maintenant que le système est non linéaire d'équation (II-9)

$$z_{n+1} = B(y_n)\, z_n \qquad \text{(II-9)}$$

avec

$$B(y_n) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -p_q^*(y_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -p_{q-1}^*(y_n) \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -p_1^*(y_n) \end{bmatrix}$$

où

- seul le paramètre y_n est modulé non linéairement.
- les $p_i^*(.)$ sont cette fois-ci des fonctions de y_n considérées à l'instant n. Il vient l'équation équivalente (II-10) :

$$y_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} p_i^*(y_{n+q-i})\, y_{n+q-i} = 0 \qquad \text{(II-10)}$$

Le polynôme non constant correspondant est obtenu par le même procédé d'identification que pour l'équation (II-7). Il vient :

$$P(\mu) = \mu^q + \sum_{i=1}^{q} p_i^*(y_{n+q-i})\, \mu^{q-i} \qquad \text{(II-11)}$$

Le polynôme (II-11) peut être aussi obtenu en calculant l'expression (II-12) :

$$P'(\mu) = \det(\mu I_q - B(y_n)) \qquad \text{(II-12)}$$

et en tenant compte du principe d'itération soit :

$$p_i^*(y_n)\, \lambda^k \longleftrightarrow p_i^*(y_{n+k})\, \lambda^k \qquad \text{(II-13)}$$

Donc, ici l'appelation "polynôme caractéristique" en non linéaire est encore justifiée par la relation matricielle (II-9) associée à (II-10) à laquelle il est toujours possible de se ramener.

II-2 APPLICATION DE LA METHODE AUX SYSTEMES DE TYPE (II-1)

Nous voulons éliminer (q-p) composantes du vecteur état et trouver une relation de récurrence entre les p composantes restantes : nous obtenons ainsi une équation de récurrence vectorielle sur σ_n.

La méthode consiste à décomposer le système en p sous systèmes. Ces derniers sont formés de toutes les lignes du bloc linéraire et une ligne relative à une composante de vecteur σ_n. Dans un premier temps nous calculons les p polynômes "caractéristiques" relatifs à chaque sous système. A partir de leurs expressions, nous déduisons les p équations récurrentes scalaires.

En posant dans le système (II-1) :

$$\alpha_n^i\,(\sigma_n) = (a_{im}(x_n^m) + \ldots + a_{iq}(x_n^q)) \qquad \text{pour } i = 1 \ldots q \qquad \text{(II-14)}$$

Celui-ci s'écrit sous la forme (II-15) :

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = a_{11}x_n^1 + \ldots\ldots\ldots a_{1(m-1)}x_n^{m-1} + \alpha_n^1(\sigma_n) \\ \vdots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1}^{m-1} = a_{(m-1)1}x_n^1 + \ldots\ldots\ldots a_{(m-1)(m-1)}x_n^{m-1} + \alpha_n^{m-1}(\sigma_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m) \quad x_{n+1}^m = a_{m1}\,x_n^1 + \ldots\ldots\ldots a_{m(m-1)}x_n^{m-1} + \alpha_n^m\,(\sigma_n) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ (q) \quad x_{n+1}^q = a_{q1}\,x_n^1 + \ldots\ldots\ldots a_{q(m-1)}\,x^{m-1} + \alpha_n^q\,(\sigma_n) \end{cases} \qquad \text{(II-15)}$$

II-2-1 *Détermination des polynômes "caractéristiques", équations de récurrence scalaires*

Considérons l'ensemble des (m-1) lignes relatives aux (m-1) variables que nous voulons éliminer. En lui associant la ligne correspondante à la première composante x_n^m du vecteur non linéaire σ_n, on obtient une équation caractérisant le premier sous système (II-14)

$$X_{n+1}^{m} = M_m(.)\ X_n^{m} \tag{II-16}$$

où

$$X_n^{mT} = (x_n^{1} \ . \ . \ . \ . \ . \ x_n^{m-1} \ x_n^{m})$$

$$M_m(.) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(m-1)} & \alpha_m^{1*}(\sigma_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(m-1)} & \alpha_m^{-1*}(\sigma_n) \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(m-1)} & \alpha_m^{m*}(\sigma_n) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\alpha_m^{i*}(\sigma_n) = \frac{\alpha_n^{i}(\sigma_n)}{x_n^{m}} = \frac{a_{im}(x_n^{m}) + \ . \ . \ . \ . + a_{iq}(x_n^{q})}{x_n^{m}} \quad \text{pour } i = 1 \ . \ . \ . \ m$$

- $\alpha_m^{i*}(\sigma_n)$ n'est alors définie en général que pour $x_n^{m} \neq 0$

- $\alpha_m^{i*}(\sigma_n)\ x_n^{m}$ est cependant partout défini.

Le polynôme caractéristique permettant la première élimination par rapport à x_n^{m} est noté :

$$P_{Mm}(\lambda) = \det\ (\lambda\ I_m - M_m(.)\ ) = \lambda^{m} + \sum_{i=1}^{m} p_i^{1}(.)\ \lambda_m^{m-i} \tag{II-17}$$

où

$$p_1^{1}(.) = -\ \mathrm{Tr}\ M_m(.) = -\ (\sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} + \alpha_m^{m*}(\sigma_n)\ )$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$p_m^{1}(.) = \det\ M_m(.)$$

en tenant compte de la propriété (II-18) :

$$\alpha_m^{i*}(\sigma_m) \quad \lambda^{j} = \left(\frac{a_{im}(x_n^{m}) + \ \dots \ a_{iq}(x_n^{q})}{x_n^{m}}\right)\lambda^{j} = \left(\frac{a_{im}(x_{n+j}^{m}) + \dots + a_{iq}(x_{n+j}^{q})}{x_{n+j}^{m}}\right)\lambda^{j} \tag{II-18}$$

l'expression du polynôme (II-17) devient :

$$P_{Mm}(\lambda) = \lambda^m + \left(-\sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} - \frac{a_{mm}(x^m_{n+m-1})+\ldots+a_{mq}(x^q_{n+m-1})}{x^m_{n+m-1}}\right) \lambda^{m-1}+\ldots+p^1_m(.) \tag{II-19}$$

le première équation de récurrence relative à la composante x^m_n est obtenue de la relation (II-19) par identification de

$$x^m_n \; \lambda^j \longleftrightarrow x^m_{n+j} \quad \text{et ceci pour } j = m \ldots 1,0 \tag{II-20}$$

On obtient ainsi la relation (II-21) :

$$x^m_{n+m}+(-\sum_{i=1}^{m-1} a_{ii}-a^{*}_{mm}(x^m_{n+m-1}))x^m_{n+m-1}-a^{*}_{m(m+1)}(x^{m+1}_{n+m-1})x^m_{n+m-1}\ldots-a^{*}_{mq}(x^q_{n+m-1})x^q_{n+m-1}+$$

$$\ldots+ p^1_m(.)\; x^m_n \tag{II-21}$$

où

$a^{*}_{ij}(.)$ sont les gains équivalents

tel que

$$a_{ij}(x^j_{n+k}) = a^{*}_{ij}\,(x^j_{n+k})\; x^j_{n+k}, \quad j = m \ldots q \;,\; k = 0,\ 1,\ \ldots\ m-1$$

Considérons l'ensemble des (m-1) premières lignes et la ligne correspondante à x^{m+1}_n. Nous obtenons le deuxième sous système (II-22)

$$X^{m+1}_{n+1} = M_{m+1}(\sigma_n)\; X^{m+1}_{n+1} \tag{II-22}$$

où

$$X^{m+1T}_n = (x^1_n \;.\;.\;.\; x^{m-1}_n \;\; x^{m+1}_n)$$

$$M_{m+1}(.) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(m-1)} & \alpha^{1*}_{m+1}(\sigma_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(m-1)} & \alpha^{m-1*}_{m+1}(\sigma_n) \\ a_{(m+1)1} & \cdots & a_{(m+1)(m+1)} & \alpha^{m+1*}_{m+1}(\sigma_n) \end{bmatrix}$$

avec

$$-\ \alpha^{i*}_{m+1}(\sigma_n) = \frac{\alpha^{i}_{n}(\sigma_n)}{x^{m+1}_{n}} \qquad (i = 1\ .\ .\ .\ m-1,\ m+1)$$

et $\quad x^{m+1}_{n} \neq 0$ pour que $\alpha^{i*}_{m+1}(\sigma_n)\ x^{m+1}_{n}$ soit partout défini.

Le polynôme de la deuxième élimination s'écrit :

$$P_{M(m+1)}(\lambda) = \lambda^{m} + \left(-\sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} - \left(\frac{a_{(m+1)m}(x^{m}_{n+m-1})+\ldots+a_{(m+1)q}(x^{q}_{n+m-1})}{x^{m+1}_{n+m-1}}\right)\lambda^{m-1}\ldots+p^{2}_{m}(.) \qquad \text{(II-23)}$$

d'où l'équation de récurrence scalaire correspondante à x^{m+1}_{n} (II-24)

$$x^{m+1}_{n+m} + \left(-\sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} - a^{*}_{(m+1)(m+1)}(x^{m+1}_{n+m-1})\right) x^{m+1}_{n+m-1} - a^{*}_{(m+1)m}(x^{m}_{n+m-1})\ x^{m}_{n+m-1} + \ldots$$

$$\ldots + a^{*}_{(m+1)q}(x^{q}_{n+m-1})\ x^{q}_{n+m-1} + \ldots + p^{2}_{m}(.)\ x^{m+1}_{n} \qquad \text{(II-24)}$$

..... et ainsi de suite jusqu'au dernier sous système, composé de (m-1) lignes et la ligne relative à x^{q}_{n}. Nous obtenons l'équation (II-25) :

$$X^{q}_{n+1} = M_q(\sigma_n)\ X^{q}_{n} \qquad \text{(II-25)}$$

où

$$X^{qT}_{n} = (x^{1}_{n}\ .\ .\ .\ x^{m-1}_{n}\ \ x^{q}_{n})$$

$$M_q(.) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1(m-1)} & \alpha^{1*}_{q}(\sigma_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1n} & \cdots\cdots & a_{(m-1)(m-1)} & \alpha^{*m-1}_{q}(\sigma_n) \\ a_{q1} & \cdots\cdots & a_{q(m-1)} & \alpha^{q*}_{q}(\sigma_n) \end{bmatrix}$$

avec $\quad \alpha^{i*}_{q}(\sigma_n) = \dfrac{\alpha^{i}_{n}(\sigma_n)}{x^{q}_{n}} \quad , \quad (i = 1\ .\ .\ .\ m-1,\ q)$

et les mêmes hypothèses que précédemment :

le dernier polynôme de la dernière élimination s'écrit :

$$P_{Mq}(\lambda) = \lambda^m + \left(- \sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} - \frac{a_{qm}(x^q_{n+m-1}) + \ldots a_{qq}(x^q_{n+m-1})}{x^q_{n+m-1}} \right) \lambda^{m-1} + \ldots\ p^p_m(.) \qquad \text{(II-26)}$$

à partir duquel nous déduisons la relation de récurrence sur x^q_n soit :

$$x^q_{n+m} + \left(- \sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} - a^{*}_{qq}(x^q_{n+m-1})\right) x^q_{n+m-1} - a^{*}_{qm}(x^m_{n+m-1}) - a^{*}_{q(m+1)}(x^{m+1}_{n+m-1}) x^{m+1}_{n+m-1} + \ldots + p^p_m(.) x^q_n \qquad \text{(II-27)}$$

α) *Equation vectorielle*

En ordonnant dans les p équations de récurrence scalaires obtenues (II-21), (II-24) . . . (II-27), par rapport au vecteur σ_n (II-28)

$$\sigma^T_n = (x^m_n \ldots x^q_n) = (\sigma^1_n \ldots \sigma^p_n) \qquad \text{(II-28)}$$

Il vient l'équation de récurrence vectorielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x^m_{n+m} \\ \vdots \\ x^q_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} + a^{*}_{mm}(x^m_{n+m-1}) \ , & a^{*}_{mm+1}(x^{m+1}_{n+m-1}), & \ldots & a_{mq}(x^q_{n+m-1}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a^{*}_{qm}(x^m_{n+m-1}), & \ldots , & a^{*}_{qq-1}(x^{q-1}_{n+m-1}), & \sum_{i=1}^{m-1} a_{ii} + a^{*}_{qq}(x^q_{n+m-1}) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x^m_{n+m-1} \\ \vdots \\ x^q_{n+m-1} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} p^{m*}_{11}(x^m_n) & \ldots & p^{m*}_{1p}(x^q_n) \\ & \ldots\ldots & \\ p^{m*}_{p1}(x^m_n) & \ldots & p^{m*}_{pp}(x^q_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^m_n \\ \vdots \\ x^q_n \end{bmatrix}$$

ou sous une forme condensée (II-29) :

$$\sigma_{n+m} + \sum_{i=1}^{m} p^{i*}(\sigma_{n+m-i})\, \sigma_{n+m-i} = 0 \qquad \text{(II-29)}$$

où

$$\sigma_n \in \mathcal{R}^p$$

$P^{i*}(\sigma_{n+j})$ sont des coefficients matriciels non constants (i = 1 ...m)

$P^{i*}(\sigma_{n+j}) \in \mathcal{R}^{p \times p}$ qui peuvent être écrites sous la forme :

$$P^{i*}(.) = \begin{bmatrix} p^{i*}_{11}(x^m_{n+j}) & \cdots & p^{i*}_{1p}(x^q_{n+j}) \\ & \cdots\cdots & \\ p^{i*}_{p1}(.) & \cdots\cdots & p^{i*}_{pp}(.) \end{bmatrix} \qquad \text{pour } i = 1 \ldots m \qquad \text{(II-30)}$$

β) *Forme matricielle*

La représentation (II-29) est génératrice de deux formes matricielles de types Compagnon et Frobenius épaisses. Il vient successivement et à partir du même procédé développé dans le premier chapitre (II-31), (II-32) :

$$E(.) \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & I_p \\ -P^{m*}(\sigma_n) & \cdots\cdots & & & -P^{1*}(\sigma_{n+m-1}) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-31)}$$

et

$$E'(.) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -P^{m*}(\sigma_n) \\ I_p & 0 & \cdots\cdots & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & I_p & -P^{1*}(\sigma_n) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-32)}$$

Deux autres formes matricielles de type Compagnon et Frobenius généraliséesont obtenues par simple permutation des lignes et colonnes dans les deux représentations (II-31) et (II-32). Nous obtenons ainsi :

$$\mathbf{N}(.) = \begin{bmatrix} N_{11}(.) & \cdots\cdots & N_{1p}(.) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{p1}(.) & \cdots\cdots & N_{pp}(.) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-33)}$$

avec

$$N_{jj}(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -p_{jj}^{*m}(\sigma_n^j) & \cdots & \cdots & \cdots & -p_{jj}^{1*}(\sigma_{n+m-1}^j) \end{bmatrix} \qquad j=1\ldots p$$

les matrices diagonales sous forme compagnon.

Les matrices non diagonales s'écrivent :

$$N_{jk}(.) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \\ -p_{jk}^{m*}(x_n^k) & \cdots\cdots & -p_{jk}^{1*}(\sigma_{n+m-1}^k) \end{bmatrix}$$

la forme Frobenius généralisée est de la forme :

$$\mathbf{N}'(.) = \begin{bmatrix} N'_{11}(.) & \cdots\cdots & N'_{1p}(.) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N'_{p1}(.) & \cdots\cdots & N'_{pp}(.) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-34)}$$

avec

$$N'_{jj}(.) = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -p_{jj}^{m*}(\sigma_n^j) \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & & & 0 & \cdot \\ 0 & & & & & 0 & 1 & -p_{jj}^{1*}(\sigma_n^j) \end{bmatrix} \qquad j=1 \ldots p$$

les matrices diagonales ne dépendant d'un seul paramètre à un instant donné

$$N'_{jk}(.) = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -p_{jk}^{m*}(\sigma_n^k) \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -p_{jk}^{1*}(\sigma_n^k) \end{bmatrix} \qquad j \neq k = 1 \ldots p$$

les matrices hors diagonale.

II-2-2 Exemple à l'ordre 3

Soit le système (II-35)

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= a_{11}\, x_n^1 + a_{12}(x_n^2) + a_{13}(x_n^3) \\ x_{n+1}^2 &= a_{21}\, x_n^1 + a_{22}(x_n^2) + a_{23}(x_n^3) \\ x_{n+1}^3 &= a_{31}\, x_n^1 + a_{32}(x_n^2) + a_{33}(x_n^3) \end{aligned} \qquad \text{(II-35)}$$

x_n^1 la variable intervenant linéairement que nous proposons d'éliminer.

x_n^2 et x_n^3 , les deux composantes traitées non linéairement, sur lesquelles nous établissons l'équation de récurrence.

nous posons donc :

$$\alpha_n^i(\sigma_n) = a_{i2}(x_n^2) + a_{i3}(x_n^3) \qquad \text{(II-36)}$$

où

$$i = 1, 2$$

$$\sigma_n^T = (x_n^2, x_n^3)$$

le système (II-25) s'écrit alors sous la forme (II-37) .

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= a_{11}\, x_n^1 + \alpha_n^1(\sigma_n) \\ x_{n+1}^2 &= a_{21}\, x_n^1 + \alpha_n^2(\sigma_n) \\ x_{n+1}^3 &= a_{31}\, x_n^1 + \alpha_n^3(\sigma_n) \end{aligned} \qquad \text{(II-37)}$$

la nouvelle représentation se décompose en deux sous systèmes (II-38) et (II-42)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_2^{1*}(\sigma_n) \\ a_{21} & \alpha_2^{2*}(\sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-38)}$$

où

$$\alpha_2^{i*}(\sigma_n) = \frac{\alpha_n^i(\sigma_n)}{x_n^2} \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } x_n^2 \neq 0$$

le polynôme correspondant à cette première élimination s'écrit :

$$P_{M_2}(\lambda) = \lambda^2 + (-a_{11} - \alpha_2^{2*}(\sigma_{n+1}))\lambda + \left(a_{11}\, \alpha_2^{2*}(\sigma_n) - a_{21}\, \alpha_2^{1*}(\sigma_n)\right)$$

(II-39)

ou sous une deuxième forme en remplaçant les $\alpha_2^{i*}(\sigma_n)$ par leur expression.

Il vient :

$$P_{M_2}(\lambda) = \lambda^2 + (-a_{11} - \frac{\alpha_n^2(\sigma_{n+1})}{x_{n+1}^2})\lambda + \left(a_{11}\, \frac{\alpha_n^2(\sigma_n)}{x_n^2} - \frac{a_{21}\alpha_n^1(\sigma_n)}{x_n^2}\right)$$

(II-40)

en identifiant les :

$$\lambda^i x_n^2 \longrightarrow x_{n+i}^2 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

et en remplaçant les $\alpha_n^i(\sigma_n)$ par leur valeur, nous obtenons la première équation de récurrence scalaire

$$x_{n+2}^2 - a_{11}x_{n+1}^2 - a_{22}^*(x_{n+1}^2)x_{n+1}^2 - a_{23}^*(x_{n+1}^3)x_{n+1}^3 + a_{11}(a_{22}^*(x_n^2)x_n^2 - a_{23}^*(x_n^3)x_n^3) +$$

$$+ a_{21}(a_{12}^*(x_n^2)x_n^2 + a_{13}^*(x_n^3)x_n^3) = 0 \qquad \text{(II-41)}$$

le deuxième sous système est de la forme :

$$\begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_3^{1*}(\sigma_n) \\ a_{31} & \alpha_3^{3*}(\sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^3 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-42)}$$

où

$$x_n^3 \neq 0$$

il admet pour polynôme caractéristique (II-43) :

$$P_{M_3}(.) = \lambda^2 + (a_{11} - \alpha_3^{3*}(\sigma_{n+1})) \lambda + \left(a_{11}\, \alpha_3^{3*}(\sigma_n) - a_{31}\, \alpha_3^{1*}(\sigma_n)\right)$$

(II-43)

en utilisant le même procédé que pour le premier sous système, il vient la deuxième équation récurrente scalaire :

$$x_{n+2}^3 - a_{11}\, x_{n+1}^3 - a_{33}^*(x_{n+1}^3)x_{n+1}^3 - a_{32}^*(x_{n+1}^2)x_{n+1}^2 + a_{11}(a_{32}^*(x_n^2)x_n^2 + a_{33}^*(x_n^3)x_n^3) -$$

$$- a_{31}(a_{12}^*(x_n^2)x_n^2 + a_{13}^*(x_n^2)x_n^2) = 0 \qquad \text{(II-44)}$$

α) *Equation de récurrence vectorielle*

En ordonnant entre les deux équations (II-41) et (II-44) par rapport à σ_n, nous obtenons l'équation de récurrence vectorielle (II-45)

$$\sigma_{n+2} - P^{*1}(\sigma_{n+1})\, \sigma_{n+1} + P^{*2}(\sigma_n)\, \sigma_n = 0 \qquad \text{(II-45)}$$

ou sous la forme explicite (II-46)

$$\begin{bmatrix} x^2_{n+2} \\ x^3_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a^{*}_{22}(x^2_{n+1}) & a^{*}_{23}(x^3_{n+1}) \\ a^{*}_{32}(x^2_{n+1}) & a_{11} + a^{*}_{33}(x^3_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2_{n+1} \\ x^3_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21}a^{*}_{12}(x^2_n) - a_{11}\, a^{*}_{22}(x^2_n) & a_{21}a^{*}_{13}(x^3_n) - a_{11}a^{*}_{23}(x^3_n) \\ a_{31}a^{*}_{12}(x^2_n) - a_{11}a^{*}_{32}(x^2_n) & a_{31}a^{*}_{13}(x^3_n) - a_{11}a^{*}_{33}(x^3_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2_n \\ x^3_n \end{bmatrix}$$

(II-46)

β) *Les formes matricielles*

Les deux formes épaisses : Compagnon et Frobenius se mettent successivement sous la forme :

$$N(.) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11}\, a^{*}_{22}(x^2_n) - a_{21}\, a^{*}_{12}(x^2_n), & a_{11}\, a^{*}_{23}(x^3_n) - a_{21}\, a^{*}_{13}(x^3_n), & a_{11} + a^{*}_{22}(x^2_{n+1}), & a^{*}_{23}(x^3_{n+1}) \\ a_{11}\, a^{*}_{32}(x^2_n) - a_{31}\, a^{*}_{12}(x^2_n), & a_{11}\, a^{*}_{33}(x^3_n) - a_{31}\, a^{*}_{13}(x^3_n), & a^{*}_{32}(x^2_{n+1}), & a_{11} + a^{*}_{33}(x^3_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$$N'(.) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{11}\, a^{*}_{22}(x^2_n) - a_{21}\, a^{*}_{12}(x^2_n) & a_{11}\, a^{*}_{23}(x^3_n) - a_{21}\, a^{*}_{13}(x^3_n) \\ 0 & 0 & a_{11}\, a^{*}_{32}(x^2_n) - a_{31}\, a^{*}_{12}(x^2) & a_{11}\, a^{*}_{33}(x^3_n) - a_{31}\, a^{*}_{13}(x^3_n) \\ 1 & 0 & a_{11} + a^{*}_{22}(x^2_n) & a^{*}_{23}(x^3_n) \\ 0 & 1 & a^{*}_{32}(x^2_n) & a_{11} + a^{*}_{33}(x^3_n) \end{bmatrix}$$

Par permutation des lignes et colonnes dans ces deux formes, on peut obtenir les formes dérivées : Compagnon et Frobenius généralisées :

$$
W(.) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
a_{11}\, a^{*}_{22}(x^2_n) - a_{21}\, a^{*}_{12}(x^2_n) , & a_{11} + a^{*}_{22}(x^2_{n+1}) , & a_{11}\, a^{*}_{23}(x^3_n) - a_{21}\, a^{*}_{13}(x^3_n) , & a^{*}_{23}(x^3_{n+1}) \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
a_{11}\, a^{*}_{32}(x^2_n) - a_{31}\, a^{*}_{12}(x^2_n) , & a^{*}_{32}(x^2_{n+1}) , & a_{11}\, a^{*}_{33}(x^3_n) - a_{31}\, a^{*}_{13}(x^3_n) , & a_{11} + a^{*}_{33}(x^3_{n+1})
\end{bmatrix}
$$

et :

$$
W'(.) = \begin{bmatrix}
0 , & a_{11}\, a^{*}_{22}(x^2_n) - a_{21}\, a^{*}_{12}(x^2_n) , & 0 , & a_{11}\, a^{*}_{23}(x^3_n) - a_{21}\, a^{*}_{13}(x^3_n) \\
1 , & a_{11} + a^{*}_{22}(x^2_n) , & 0 , & a^{*}_{23}(x^3_n) \\
0 , & a_{11}\, a^{*}_{32}(x^2_n) - a_{31}\, a^{*}_{12}(x^2_n) , & 0 , & a_{11}\, a^{*}_{33}(x^3_n) - a_{31}\, a^{*}_{13}(x^3_n) \\
0 , & a^{*}_{32}(x^2_n) , & 1 , & a_{11} + a^{*}_{33}(x^3_n)
\end{bmatrix}
$$

Les matrices N'(.) et W'(.) dont les coefficients non linéaires ne dépendent que de deux paramètres x^2_n et x^3_n et au même instant n.

III - DEVELOPPEMENT D'UN OUTIL MATHEMATIQUE PERMETTANT L'ELIMINATION PAR RAPPORT A UN VECTEUR COMPOSANT

III-1 POSITION DU PROBLEME

Nous avons montré qu'il était possible de décrire le système (II-1) sous la forme d'une équation de récurrence vectorielle relative à une partie de ses composantes. Les coefficients intervenant dans cette écriture sont calculées par des éliminations successives, ce mode de calcul peut paraître long. Nous allons proposer une unification avec les méthodes de calcul existantes.

Lorsqu'il s'agit de déterminer une équation de récurrence scalaire nous simplifions les calculs en introduisant une règle pratique basée sur le polynôme caractéristique scalaire /14/. Par analogie avec cette méthode nous proposons une généralisation de ce polynôme scalaire à un polynôme matriciel. L'utilisation des propriétés des ensembles commutatifs de l'anneau des matrices carrées nous permet de simplifier le problème /15/.

Dans la suite nous considérons les systèmes dont les matrices sont partitionnées en blocs carrées de même dimension, régi par l'équation (II-47) :

$$Y_{n+1} = \mathcal{M} Y_n \qquad \text{(II-47)}$$

où

$$Y_n^T = (y_n^{1T} \; . \; . \; . \; . \; y_n^{rT})$$

$$y_n^i \in \mathcal{R}^s \quad \text{pour } i = 1 \; . \; . \; . \; r$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & \ldots\ldots & M_{1r} \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ M_{r1} & \ldots\ldots & M_{rr} \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{M}$ est une matrice constituée de r^2 blocs de matrice M_{ij}
- M_{ij} $(i,j = 1 \; . \; . \; . \; r)$ sont carrées de dimension sxs dont les composantes m_{kl}^{ij} $(k, l = 1 \; . \; . \; . \; s)$

Pour simplifier les notations, nous désignons par D_i $(i = 1 \; ...r)$ les colonnes de $\mathcal{M}$ soit :

$$D_i = \begin{bmatrix} M_{1i} \\ \vdots \\ M_{ri} \end{bmatrix}$$

la matrice $\mathcal{M}$ s'écrit donc sous une deuxième forme (II-48) :

$$\mathcal{M} = (D_1 \; \ldots \; D_i \; \ldots \; D_r) \qquad \text{(II-48)}$$

On souhaite éliminer $y_n^1 \dots y_n^{r-1}$ et trouver une équation de récurrence régissant le vecteur y_n^r sous la forme :

$$y_{n+r}^r + \sum_{i=1}^{r} F_i \, y_{n+r-i}^r = 0 \qquad \text{(II-49)}$$

où :

les F_i sont des matrices carrées de même dimension que les blocs M_{ij}.

Il serait intéressant de pouvoir utiliser la même méthode à savoir la méthode pratique généralisée basée sur le "polynôme caractéristique vectoriel".

Pour cela un développement dans le sens d'un déterminant matriciel est étudié dans la suite.

III-2 DEFINITIONS ET PROPRIETES DU DETERMINANT MATRICIEL

Le calcul du déterminant sur les matrices en blocs carrées s'avère lourd quand la matrice partitionnée est d'ordre élevé. Néanmoins, il existe un cas où le problème se trouve simplifié : quand les blocs de la matrice $\mathcal{M}$ sont commutatifs. Dans ce cas le calcul se fait comme dans le cas des matrices à coefficients scalaires.

La propriété de commutativité sera obtenue par un partitionnement convenable de la matrice initiale .Nous verrons plus loin que cette propriété peut être obtenue en introduisant un degré de redondance suffisant lors du partitionnement de cette matrice.

En développant la matrice $\mathcal{M}$ par rapport à ses lignes ou colonnes, on obtient une matrice appelée : déterminant matriciel noté :

$$\mathrm{DET}(\mathcal{M}) \qquad \text{(II-50)}$$

III-2-1 Définition de déterminant matriciel

α) Hypothèses

h1) Soit E un anneau de matrices carrées.

h2) Soit E' un sous anneau commutatif de E.

h3) Soit $\mathcal{E}$ l'anneau des matrices partitionnées, en blocs de matrices carrées de E'. /39/

Nous pouvons donner à $\mathcal{E}$ une structure de module (à gauche) /40/ sur E' si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{E}$ est un groupe commutatif pour l'addition habituelle et vérifié d'après h3.

- $B \in E'$, $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \mathcal{E}$: $B \otimes (\mathcal{M} + \mathcal{M}') = B \otimes \mathcal{M} + B \otimes \mathcal{M}'$
- $B, B' \in E'$, $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$: $(B' + B) \otimes \mathcal{M} = B' \otimes \mathcal{M} + B \otimes \mathcal{M}$ (II-51)
- $B, B' \in E'$, $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$: $B \otimes (B' \otimes \mathcal{M}) = (B.B') \otimes \mathcal{M}$
- $I \in E'$ $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$: $I \otimes \mathcal{M} = \mathcal{M}$

On dira que $\mathcal{E}$ est un E'-module (en omettant à gauche)

Nous définissons la multiplication extérieure (notée $\otimes$) à gauche comme suit :

soit $B \in E'$, $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$

$$B \otimes (D_1 \ldots D_i \ldots D_r) = (B\,D_1, \ldots, B\,D_i, \ldots B\,D_r)$$

soit :

$$B \otimes \begin{bmatrix} M_{11} & \ldots & M_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{r1} & \ldots & M_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\,M_{11} & \ldots & B\,M_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B\,M_{r1} & \ldots & B\,M_{rr} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-52)}$$

Nous proposons de définir le déterminant matriciel de ces matrices de $\mathcal{E}$ et ceci de la même manière que le calcul de déterminant dans le cas des matrices à coefficients scalaires /39/.

β) *Définition*

Nous appelons déterminant matriciel de la matrice partitionnée $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$, la matrice notée DET($\mathcal{M}$) calculé comme suit :

$$\mathrm{DET}\ \mathcal{M} = \mathrm{DET} \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1r} \\ & \cdots\cdots & \\ M_{r1} & \cdots & M_{rr} \end{bmatrix}$$

$$= \sum sg(n_1 \ldots n_r)\, M_{n_1,1} \cdot M_{n_2,2} \cdots M_{n_r,r} \qquad \text{(II-53)}$$

où :

- la somme est étendue à toutes les r! permutations : $(n_1 \ldots n_r)$ de $(1,2 \ldots r)$
- $sg(.) = +1$ si la permutation $M_{n_1,1} \ldots M_{n_r,r}$ donc $(n_1 \ldots n_r)$ est paire et $sg(.) = -1$ dans le cas contraire.

γ) *Remarque*

Dans le cas où $r = 1$, on retrouve la définition habituelle de déterminant de matrice à coefficients scalaires.

Nous allons montrer les différentes propriétés de déterminant matriciel démontrées dans le cas général des matrices à élèments dans un anneau commutatif quelconque /39/ /41/ .

III-2-2 *Propriétés de déterminant matriciel*

D'après la notation adoptée (II-48), nous écrivons :

$$\mathrm{DET}\ \mathcal{M} = \mathrm{DET}\ (D_1 \ldots D_r)$$

Il vient les quatre propriétés suivantes :

a) si on interchange deux blocs (colonnes) entre eux dans $\mathcal{M}$ le déterminant matriciel reste le même changé de signe

$$\mathrm{DET}\ (D_1 \ldots D_i, D_{i+1}, \ldots D_r) = -\,\mathrm{DET}(D_1 \ldots D_{i+1}, D_i, \ldots D_r) \qquad \text{(II-54)}$$

b) Le déterminant matriciel est une fonction multilinéaire par rapport aux vecteurs (rangées) qui le composent. Il vient :

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{DET}\,(D_1 \ldots, D_{i1} + D_{i2}, \ldots D_r) = \mathrm{DET}(D_1 \ldots D_{i1} \ldots D_r) + \\
&\qquad + \mathrm{DET}(D_1 \ldots, D_{i2}, \ldots D_r) \\
&- \mathrm{DET}(D_1, \ldots, C\, D_i, \ldots D_r) = C.\mathrm{DET}\,(D_1, \ldots, D_i, \ldots, D_r) \qquad \text{(II-55)} \\
&- \mathrm{DET}\Big(C \otimes (D_1 \ldots D_i, \ldots, D_r)\Big) = C^r.\ \mathrm{DET}\,(D_1 \ldots D_i, \ldots D_r)
\end{aligned}
$$

où

C est une matrice constante $\in E'$, de même dimension que les blocs constituant $\mathcal{M}$.

c) Le déterminant matriciel d'un produit de deux matrices partitionnées en blocs de même dimension, est égal au produit des deux déterminants matriciels des matrices correspondantes.

$\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \mathcal{E}$ constituées de même nombre de bloc

$$\mathrm{DET}\,(\mathcal{M} . \mathcal{M}') = \mathrm{DET}(\mathcal{M}).\ \mathrm{DET}(\mathcal{M}') \qquad \text{(II-56)}$$

d) L'expression du déterminant matriciel peut être obtenuede deux façons, soit en le développant par rapport à une ligne soit par rapport à une colonne. Il vient respectivement dans les deux cas :

$$\mathrm{DET}\,(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^{r} M_{ij}(-1)^{i+j} N_{ij}$$

(II-57)

ou

$$\mathrm{DET}\,(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{r} M_{ij}(-1)^{i+j} N_{ij}$$

où

N_{ij} sont les "mineurs matriciels" correspondants aux blocs M_{ij} de la matrice $\mathcal{M}$

Les deux expressions peuvent être écrites sous une autre forme :

$$\mathrm{DET}\,(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^{r} M_{ij}\, C_{ij}$$

(II-58)

ou

$$\mathrm{DET}\,(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{r} M_{ij}\, C_{ij}$$

où les :

$C_{ij} = (-1)^{i+j} N_{ij}$ sont les "cofacteurs matriciels" du bloc M_{ij}.

Nous allons démontrer une propriété supplémentaire :

e) Si deux lignes ou colonnes de la matrice $\mathcal{M}$ sont proportionnelles on a :

$$\mathrm{DET}(\mathcal{M}) = 0 \tag{II-59}$$

d'après la propriété (II-54), on peut écrire que :

$$\mathrm{DET}(D_1 \ldots D_i \ldots D_j \ldots D_r) = -1\ \mathrm{DET}(D_1 \ldots D_j \ldots D_i \ldots D_r)$$

si de plus on a

$$D_j = D_i$$

Il vient alors :

$$\mathrm{DET}\ (D_1 \ldots D_i \ldots D_i \ldots D_r) = 0$$

II-2-3 Extension dans les propriétés de déterminant matriciel

Théorème (II-1)

$$\left(\mathrm{DET}(\mathcal{M})\right)^T = \mathrm{DET}(\mathcal{M}^T) \tag{II-60}$$

Démonstration

Par hypothèse, les blocs M_{ij} de $\mathcal{M}$ sont commutatifs. Quand nous prenons le transposé de $\mathcal{M}$, on a :

$$\mathcal{M}^T = \begin{bmatrix} M_{11}^T & \ldots & M_{r1}^T \\ & \ldots\ldots & \\ M_{1r}^T & \ldots & M_{rr}^T \end{bmatrix} \tag{II-61}$$

d'après la définition (II-53), on a :

$$\mathrm{DET}(\mathcal{M}^{T}) = \sum sg(n_1 \;\dots\; n_r) \prod_{i=1}^{r} M^{T}_{ni,i} \qquad \text{(II-62)}$$

en tenant compte de la propriété de commutativité des blocs M_{jk}, il vient :

$$\mathrm{DET}(\mathcal{M}^{T}) = \left(\sum sg(n_1 \;\dots\; n_r) \prod_{i=1}^{r} M_{ni,i}\right)^{T} \qquad \text{(II-63)}$$

$$\mathrm{DET}(\mathcal{M}^{T}) = \left(\mathrm{DET}\,\mathcal{M}\right)^{T}$$

soit le résultat recherche.

Théorème (II-2)

Si $\mathcal{M}$ est une matrice partitionnée en r^2 blocs commutatifs on a :

$$\det \mathcal{M} = \det\left(\mathrm{DET}(\mathcal{M})\right) \qquad \text{(II-64)}$$

Démonstration

Nous allons démontrer le théorème par récurrence en supposant que les $M_{ii} (i = 1 \dots r)$ sont inversibles.

- pour $r = 1$, on a :

$$\mathrm{DET}\,\mathcal{M} = M_{11} \qquad \text{(II-65)}$$

donc

$$\det(\mathrm{DET}\,\mathcal{M}) = \det M_{11} \qquad \text{(II-66)}$$

- Supposons la propriété vérifiée à l'ordre r, démontrons la à l'ordre (r + 1). Pour cela nous considérons la matrice $\mathcal{M}_1$ partitionnée en $(r+1)^2$ blocs commutatifs de la forme :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} M & B_1 & \dots & B_r \\ C_1 & M_{11} & \dots & M_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r & M_{r1} & \dots & M_{rr} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-67)}$$

en posant

$$B = (B_1 \; . \; . \; . \; B_r)$$

$$C^T = (C_1^T \; . \; . \; . \; C_r^T)$$

où

$$M \quad , B_j, C_j \; (j = 1 ... r) \in E'$$

la matrice $\mathcal{M}_1$ s'écrit sous une deuxième forme :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} M & B \\ & \\ C & \mathcal{M} \end{bmatrix} \tag{II-68}$$

En général, il existe i tel que :

M, M_{ii}($i = 1 \; . \; . \; . \; r$) soient invisibles.Il suffit pour cela de considérer une permutation adéquate des indices.

D'après /15/, nous pouvons calculer l'expression du déterminant scalaire de $\mathcal{M}_1$ soit :

$$\det \mathcal{M}_1 = \det M \det(\mathcal{M} - CM^{-1} B) \tag{II-69}$$

$$= \det(\mathcal{M} - CM^{-1} B) \det \begin{bmatrix} M & & & 0 \\ & I_s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_s \end{bmatrix}$$

où - $M \neq 0$

- I_s matrice unité de même ordre que M

Posons à titre de simplification de notation

$$\det \mathcal{M}_1 = \det E$$

avec

$$E = (\mathcal{M} - CM^{-1} B) \; . \begin{bmatrix} M & & & 0 \\ & I_s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_s \end{bmatrix} \tag{II-70}$$

en développant l'expression, on obtient :

$$E = \begin{bmatrix} M\,M_{11} - C_1\,B_1 & M_{12} - C_1\,M^{-1}B_2 & \ldots & M_{1r} - C_1\,M^{-1}\,B_r \\ M\,M_{21} - C_2\,B_1 & M_{22} - C_2\,M^{-1}B_2 & \ldots & M_{2r} - C_2\,M^{-1}\,B_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M\,M_{r1} - C_r\,B_1 & M_{r2} - C_r\,M^{-1}B_2 & \ldots & M_{rr} - C_r\,M^{-1}\,B_r \end{bmatrix} \qquad \text{(II-71)}$$

Par hypothèse de récurrence on a

$$\det E = \det \mathrm{DET}(E) \qquad \text{(II-72)}$$

Calculons donc l'expression de déterminant matriciel de E, nous avons alors :

$$\mathrm{DET}(E) = \mathrm{DET}\,(M\,D_1 - C\,B_1,\; D_2 - CM^{-1}\,B_2,\; \ldots\; D_r - CM^{-1}\,B_r) \qquad \text{(II-73)}$$

d'après la propriété (II-55), l'expression au dessus peut s'écrire sous la forme :

$$\mathrm{DET}(E) = \mathrm{DET}(MD_1,\; D_2 - CM^{-1}\,B_2,\; \ldots\; D_r - CM^{-1}\,B_r) +$$

$$+ \mathrm{DET}(-C\,B_1,\; D_2 - CM^{-1}\,B_2, \ldots,\; D_r - CM^{-1}\,B_r) \qquad \text{(II-74)}$$

soit encore par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \mathrm{DET}(E) = {} & \mathrm{DET}\,(M\,D_1,\; D_2,\; \ldots\ldots\; D_r - CM^{-1}\,B_r) \\ & + \mathrm{DET}\,(M\,D_1,\; -CM^{-1}\,B_2\; \ldots\; D_r - CM^{-1}\,B_r) \\ & + \mathrm{DET}\,(-C\,B_1,\; D_2\; \ldots\ldots\; D_r - CM^{-1}\,B_r) \\ & + \mathrm{DET}\,(-C\,B_1\; - C\,B_2\,M^{-1}, \ldots\; D_r - CM^{-1}\,B_r) \end{aligned} \qquad \text{(II-75)}$$

or le dernier terme a deux colonnes proportionnelles, $C\,B_1$ et $C\,B_2\,M^{-1}$, il est donc nul.

En développant de la même manière toutes les colonnes, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DET}(E) = {} & \mathrm{DET}\,(M\, D_1,\, D_2,\, \ldots\ldots\ldots\, D_r) \\
& + \mathrm{DET}\,(-C\, B_1,\, D_2,\, \ldots\ldots\ldots\, D_r) \\
& + \mathrm{DET}\,(M\, D_1,\, -CM^{-1}\, B_2,\, D_3 \ldots D_r) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mathrm{DET}\,(M\, D_1,\, D_2 \ldots D_i,\, -\, CM^{-1}\, B_{i+1},\, D_{i+1},\, \ldots\, D_r) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mathrm{DET}\,(M\, D_1,\, D_2\, \ldots\ldots\, D_{r-1},\, -\, CM^{-1}\, B_r)
\end{aligned}
\qquad \text{(II-76)}
$$

En tenant compte des permutations des signes, et de la propriété de proportionnalité des colonnes, ces derniers s'éliminent et il reste alors ainsi :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DET}\,(E) = {} & M.\ \mathrm{DET}\,(D_1\, \ldots\ldots\ldots\, D_r) \\
& - B_1\, \mathrm{DET}\,(C,\, D_2\, \ldots\ldots\, D_r) \\
& + B_2\, \mathrm{DET}\,(D_1,\, C,\, \ldots\ldots\, D_r) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +(-1)^i\, B_i\, \mathrm{DET}\,(D_1, \ldots, D_i,\, C,\, D_{i+1},\, \ldots,\, D_r) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +(-1)^r\, B_r\, \mathrm{DET}\,(D_1,\, \ldots\, D_{r-1},\, C)
\end{aligned}
\qquad \text{(II-77)}
$$

L'expression trouvée est le déterminant matriciel de $\mathcal{M}_1$ développé par rapport à sa première ligne et ceci identiquement au calcul mené sur les matrices à coefficients scalaires. Nous obtenons donc :

$$\det E = \det\,(\mathrm{DET}(E)\,) \qquad \text{(II-78)}$$

et

$$\det\ \mathcal{M}_1 = \det\,(\mathrm{DET}\ \mathcal{M}_1) \qquad \text{(II-79)}$$

d'où le théorème (II-41) pour les $M_{ii} \neq 0$.

Extension du théorème

Si certaines matrices de la diagonale principale sont singulières (déterminant nul), le théorème reste valable par passage à la limite /15/.

En se plaçant dans un anneau commutatif des matrices carrées, nous avons ainsi généralisé les propriétés du calcul de déterminant scalaire à des matrices partitionnées. Sous les mêmes hypothèses, nous définissons le polynôme caractéristique vectoriel en vue de généraliser la méthode d'élimination d'une composante scalaire à un vecteur composant.

III-3 POLYNOME CARACTERISTIQUE GENERALISE

- soit $\mathcal{M}$ la matrice carrée partitionnée en r^2 blocs M_{ij} commutatifs de dimension sxs .

$J_{(r,s)}$ la matrice unité partitionnée en r blocs I_s de même dimension que les blocs M_{ij}, elle s'écrit :

$$J_{(r,s)} = \left.\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{s} \Big\} s & & 0 \\ & \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \\ 0 & & \end{bmatrix}\right\} r \text{ blocs} \qquad \text{(II-80)}$$

- Λ est une matrice carrée diagonale de même dimension que les coefficients matriciel de $\mathcal{M}$. On la notera :

$$^{s}\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_s \end{bmatrix}$$

où

λ_i sont des scalaires $\in \mathcal{R}$ (i = 1 ... s)

III-3-1 Définition

($\mathcal{M} - {}^s\Lambda \otimes \mathbf{J}_{(r,s)}$) est appelée matrice caractéristique généralisée. En tenant compte de la commutativité des blocs M_{ij}, le calcul de déterminant matriciel généralisé de la matrice en blocs ($\mathcal{M} - {}^s\Lambda \otimes \mathbf{J}_{(r,s)}$) donne une équation appelée polynôme caractéristique généralisé noté :

$$P({}^s\Lambda) = \mathrm{DET}(\mathcal{M} - {}^s\Lambda \otimes \mathbf{J}_{(r,s)}) \qquad \text{(II-81)}$$

Il en résulte après développement de l'expression au dessus, une équation en puissance de ${}^s\Lambda$ de la forme :

$$P({}^s\Lambda) = {}^s\Lambda^{\,r} + \sum_{i=1}^{r} F_i \, {}^s\Lambda^{\,r-i} \qquad \text{(II-82)}$$

où

- $F_i(i = 1\ldots m)$ sont des matrices carrées d'ordre s, de composantes $f^i_{jk}(j,k = 1\ldots s)$.

Quand nous remplaçons ${}^s\Lambda$ par sa valeur dans le polynôme (II-82) on obtient une deuxième forme du polynôme caractéristique généralisée, sous la forme matricielle :

$$P({}^s\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\lambda_1) & \ldots\ldots & \mathcal{T}_{1s}(\lambda_s) \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ \mathcal{T}_{s1}(\lambda_1) & \ldots\ldots & \mathcal{T}_{ss}(\lambda_s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-83)}$$

où $\mathcal{T}_{jk}(.)$ sont des coefficients polynominaux scalaires de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{jj}(\lambda_j) &= \lambda_j^r + \sum_{i=1}^{r} f^i_{jj}\,\lambda_j^{r-i} && \text{pour } j = 1 \ldots s \\ \mathcal{T}_{jk}(\lambda_j) &= \sum_{i=1}^{r} f^i_{jk}\,\lambda_j^{r-i} && \text{pour } j \neq k = 1 \ldots s \end{aligned} \qquad \text{(II-84)}$$

III-3-2 Propriétés du polynôme caractéristique généralisé

Théorème (II-3)

Dans le cas où les M_{ij}, coefficients matriciels de $\mathcal{M}$ sont tous diagonaux, la matrice $\mathcal{M}$ vérifie son polynôme caractéristique vectoriel.

Il vient :

$$P(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^r + \sum_{i=1}^{r} F_i \otimes \mathcal{M}^{r-i} \qquad \text{(II-85)}$$

le calcul de $\mathcal{M}^j$ se fait comme dans le cas scalaire soit :

$$\mathcal{M}^j = \underbrace{\mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \quad . \ . \ . \ . \ . \times \mathcal{M}}_{j}$$

Démonstration

Considérons la matrice partitionnée $\mathcal{M}$ formée de r^2 blocs carrés M_{ij} diagonaux, d'ordre s :

$$\mathcal{M} = \left.\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} M_{ij} \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} & & \underbrace{\left.\begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}\right\} s}_{s} \end{bmatrix}\right\} r \text{ blocs} \qquad \text{(II-86)}$$

Par une simple permutation qui consiste à prendre la première composante de chaque sous vecteur x_i, puis la deuxième composante et ainsi de suite jusque la $s^{ième}$ composante, on aboutit à une deuxième forme de matrice $\mathcal{M}'$. Cette dernière est une matrice quasi diagonale par blocs. Elle correspond en fait à une décomposition de $\mathcal{M}$ en s sous systèmes indépendants. Ceci facilite d'autant le calcul de puissances de $\mathcal{M}'$, qui s'écrivent :

$$\mathcal{M}'^k = \left.\begin{bmatrix} (M'_{11})^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & (M'_{ii})^k & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \underbrace{(M'_{ss})^k}_{r} \end{bmatrix}\right\} s \text{ blocs} \qquad \text{(II-87)} \quad \forall k \in N$$

$\mathcal{M}'$ est caractérisée par ses blocs M'_{ii} qui sont des matrices carrées d'ordre r.

Le calcul de polynôme caractéristique généralisé de $\mathcal{M}$ donne après développement :

$$P({}^s\Lambda) = \mathrm{DET}\,(\mathcal{M} - {}^s\Lambda \otimes \mathcal{J}_{(r,s)}) = {}^s\Lambda^r + \sum_{i=1}^{r} Q^i\, {}^s\Lambda^{r-i} \qquad \text{(II-88)}$$

le calcul se fait comme s'il s'agissait des matrices à coefficients scalaires puisque les M_{ij} sont tous diagonaux.

Les coefficients Q^i intervenant dans l'expression (II-88) sont des matrices carrées d'ordre s, diagonales s'écrivent sous la forme :

$$Q^i = \begin{bmatrix} q^i_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q^i_{ss} \end{bmatrix} \qquad \text{pour } i = 1 \ldots r \qquad \text{(II-89)}$$

Une deuxième forme de polynôme (II-88) est obtenue en remplaçant dans celui-ci ${}^s\Lambda$ par sa valeur, nous obtenons ainsi une matrice diagonale à coefficients polynominaux de la forme :

$$P({}^s\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\lambda_1) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \mathcal{T}_{ii}(\lambda_i) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \mathcal{T}_{ss}(\lambda_s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-90)}$$

où

$$\mathcal{T}_{ii}(\lambda_i) = \lambda_i^r + \sum_{k-1}^{r} q^k_{ii}\, \lambda_i^{r-k} \qquad (i = 1 \ldots s) \qquad \text{(II-91)}$$

Il apparaît que les polynômes $\mathcal{T}_{ii}(\lambda_i)$ définissant la diagonale de $P({}^s\Lambda)$ correspondent en fait aux polynômes caractéristiques scalaires associés aux blocs M'_{ii} de la matrice $\mathcal{M}'$ soit :

$$\mathcal{T}_{11}(\lambda_1) = \det\,(M'_{11} - \lambda_1\, I_r)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(II-92)}$$

$$\mathcal{T}_{ss}(\lambda_s) = \det\,(M'_{ss} - \lambda_s\, I_r)$$

Dans ces conditions, la propriété de Cayley Hamilton /15/ s'écrit :

$$\mathcal{T}_{ii}(M'_{ii}) = 0 \qquad \text{pour } i = 1 \ldots s \qquad \text{(II-93)}$$

Quand nous remplaçons dans $P({}^s\Lambda)$, ${}^s\Lambda$ par $\mathcal{M}$, le polynôme obtenu est de la forme :

$$P(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^r + \sum_{i=1}^{r} Q^i \otimes \mathcal{M}^{r-i} \qquad \text{(II-94)}$$

La relation (II-94) après développement des calculs est une matrice en blocs de la même nature que $\mathcal{M}$. Par le même procédé de permutation qu'auparavant, nous obtenons une deuxième forme de matrice $P'(\mathcal{M})$ qui s'écrit :

$$P'(\mathcal{M}) = \begin{bmatrix} M'^{r}_{11} + \sum_{j=1}^{r} q^j_{11}\, M'^{r-j}_{11} = 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & M'^{r}_{ii} + \sum_{j=1}^{r} q^j_{ii}\, M'^{r-j}_{ii} = 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & M'^{r}_{ss} + \sum_{j=1}^{r} q^j_{ss}\, M'^{r-j}_{ss} = 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-95)}$$

d'après la propriété (II-93) tous les élèments de la diagonale de $P'(\mathcal{M})$ sont nuls, ce qui justifie le théorème.

<u>Exemple</u>

soit :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad {}^2\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{J}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}' = \begin{bmatrix} M'_{11} & 0 \\ 0 & M'_{22} \end{bmatrix} \qquad M'_{11} = \begin{bmatrix} a & c \\ e & g \end{bmatrix} \qquad M'_{22} = \begin{bmatrix} b & d \\ f & h \end{bmatrix}$$

$$P({}^2\Lambda) = \mathrm{DET}(\mathcal{M} - {}^2\Lambda \otimes \mathfrak{J}_{(2,2)}) = {}^2\Lambda^2 - \begin{bmatrix} a+g & 0 \\ 0 & b+h \end{bmatrix} {}^2\Lambda + \begin{bmatrix} ag-ec & 0 \\ 0 & bh-fd \end{bmatrix} \tag{II-96}$$

La deuxième forme de $P({}^2\Lambda)$ obtenue en remplaçant ${}^2\Lambda$ par sa valeur s'écrit :

$$P({}^2\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{11}(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \mathfrak{T}_{22}(\lambda_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}_{11}(\lambda_1) &= \lambda_1^2 - (a+g)\lambda_1 + (ag-ec) \\ \mathfrak{T}_{22}(\lambda_2) &= \lambda_2^2 - (e+h)\lambda_2 + (bh-fd) \end{aligned} \tag{II-97}$$

Nous remarquons que les deux polynômes caractéristiques peuvent être déduits de la matrice $\mathcal{M}'$

$$\mathfrak{T}_{11}(\lambda_1) = \det(M'_{11} - \lambda_1 I_2) \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}_{22}(\lambda_2) = \det(M'_{22} - \lambda_2 I_2)$$

ce qui vérifie aisément :

$$\mathfrak{T}_{11}(M'_{11}) = 0 \quad , \quad \mathfrak{T}_{22}(M'_{22}) = 0$$

Calculons $P(\mathcal{M})$:

$$P(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.\mathcal{M} - \begin{bmatrix} a+g & 0 \\ 0 & b+h \end{bmatrix} \otimes \mathcal{M} + \begin{bmatrix} ag-ec & 0 \\ 0 & bh-fd \end{bmatrix} \otimes \mathfrak{J}_{(2,2)}$$

En remplaçant $\mathcal{M}$ par sa valeur, on trouve :

$$P(\mathcal{M}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+ec & 0 \\ 0 & b^2+fd \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ac+cg & 0 \\ 0 & bd+dh \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ae+ge & 0 \\ 0 & bf+hf \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ac+g^2 & 0 \\ 0 & fd+h^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+ag & 0 \\ 0 & b^2+hb \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (a+g)c & 0 \\ 0 & (b+h)d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (a+g)e & 0 \\ 0 & (b+h)f \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (a+g)g & 0 \\ 0 & (b+h)h \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ag-ec & 0 \\ 0 & bh-fd \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} ag-ec & 0 \\ 0 & bh-fd \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$$

soit en procédant par la permutation indiquée, on trouve

$$P'(\mathcal{M}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+ec & ac+cg \\ ae+ge & ac+g^2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} b^2+fd & bd+dh \\ bf+hf & h^2+fd \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+ag & (a+g)c \\ (a+g)e & (a+g)g \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} b^2+hb & (b+h)d \\ (b+h)f & (b+h)h \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ag-ec & 0 \\ 0 & ag-ec \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} bh-fd & 0 \\ 0 & bh-fd \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+ec & ac+cg \\ ae+ge & ac+g^2 \end{bmatrix} -(a+g) \begin{bmatrix} a & c \\ e & g \end{bmatrix} + (ag-ec)\, I_2 \,, & 0 \\ 0 & , \begin{bmatrix} b^2+fd & bd+dh \\ bf+hf & h^2+fd \end{bmatrix} -(b+h) \begin{bmatrix} b & d \\ f & h \end{bmatrix} +(bh-fd)\, I_2 \end{bmatrix} = 0$$

soit

$$P'(\mathcal{M}) = \begin{bmatrix} M'^2_{11} - (a+g)\, M'_{11} + (ag-ec)\, I_2 = 0 & 0 \\ 0 & M'^2_{22} - (b+h)\, M'_{22} + (bh-fd) = 0 \end{bmatrix} = 0$$

III-3-3 Application à la mise en équation

En identifiant dans le polynôme vectoriel (II-82) :

$$P_\Lambda^i \quad y_n^r \longrightarrow y_{n+i}^r$$

et ceci pour i = 1 . . . r

Nous obtenons l'équation de récurrence vectorielle (II-98) relative au vecteur y_n^r, soit :

$$y^r_{n+r} + \sum_{i=1}^{r} F^i \, y^r_{n+r-i} = 0 \qquad \text{(II-98)}$$

où

F^i sont des coefficients matriciels de composantes f^i_{jk} $(j,k = 1...s)$

L'équation (II-98) est du même type que (II-29). Elle peut donc générer les quatre formes matricielles du type (II-31) (II-32) (II-33) et (II-34).

Quand tous les blocs de la matrice $\mathcal{M}$ sont commutatifs, la règle pratique d'élimination par rapport à une composante scalaire se généralise parfaitement par rapport à un vecteur composant. Nous avons ainsi obtenu une équation de récurrence vectorielle (II-98). Là aussi le choix du vecteur par rapport auquel se fait l'élimination importe peu en linéaire. Par contre en non linéaire, il faut que le vecteur restant après élimination soit celui qui intervient non linéairement. Les coefficients $F^i(.)$ sont alors fonctions de ce vecteur et à des instants différents.

Le choix de partitionnement de la matrice initiale en blocs tient compte de trois éléments : la dimension de la matrice du système initial, la dimension du vecteur par rapport auquel se fait l'élimination, et la propriété de commutativité des blocs que nous désirons assurer en vue d'appliquer la règle pratique d'élimination. Il existe un cas intéressant pour lequel nous obtenons des blocs diagonaux commutatifs ce qui correspond à un certain degré de redondance du système. Ceci fait l'objet d'un développement dans la suite.

IV - DIFFERENTS MODES DE PARTITIONNEMENT - ALGORITHMES GENERALISES D'ELIMINATION

IV-1 POSITION DU PROBLEME

Pour pouvoir appliquer l'algorithme d'élimination, il faut que la propriété de commutativité soit vérifiée. Celle-ci résulte d'un partitionnement adéquat du système. Dans tous les cas, on peut obtenir cette propriété en augmentant suffisamment l'ordre du système.

L'algorithme conduit à des formulations vectorielles récurrentes d'ordre 1 ou plus. La dimension de ces dernières formes est en général égale ou supérieure à celle de la représentation initiale. Suivant le cas on obtient :

- une description non redondante lorsque le polynôme vectoriel est de degré minimal (matrices initiales partitionnées en blocs commutatifs).

- un système d'arrivée redondant où le degré du polynôme varie suivant le partitionnement adopté (la redondance est alors nécessaire au partitionnement commutatif).

On notera :

q : la dimension du système initial

p : la dimension du vecteur par rapport auquel se fera l'élimination

m : le quotient de la division de q par p

IV-1-1 Le cas où $mp = q$

Le système initial et les équations de récurrence qui peuvent en être déduites sont de même dimension : il n'y a pas de redondance ce qui correspond à un degré minimal du polynôme vectoriel.

Ce cas se présentera chaque fois que q est divisible par p, m correspond au degré du polynôme.

Si la propriété de commutativité des blocs de la matrice partitionnée est acquise, on peut appliquer l'algorithme d'élimination et déduire l'équation de récurrence vectorielle.

IV-1-2 Le cas où $mp < q < (m+1)p$

Ce cas se présente chaque fois que q n'est pas divisible par p. m sera le résultat inférieur de l'opération. (m+1) est alors le degré du polynôme vectoriel s'il existe ; ce qui correspond en même temps au degré d'itération de l'équation de récurrence vectorielle. Cette dernière est redondante à un degré minimal par rapport au système initial.

La propriété de commutativité ne sera pas toujours acquise du fait de la redondance minimale. Dans le cas contraire l'algorithme d'élimination s'applique parfaitement.

IV-1-3 Exemple

Pour illustrer les deux cas, nous traitons un exemple avec $q = 6$, p variant de 2 à 5.

Soit le système (II-99) :

$$x^i_{n+1} = \sum_{j=1}^{6} a_{ij}\, x^j_n \qquad \text{(II-99)}$$

$i = 1 \ldots 6$

α) $p = 2$

Le vecteur sur lequel nous trouverons l'équation de récurrence est noté par exemple :

$$\sigma^T_n = (x^5_n, x^6_n) \qquad \text{(II-100)}$$

un partitionnement du système initial sous la forme :

$$X^{2T}_n = (x^3_n, x^4_n) \;, \quad X^{1T}_n = (x^1_n, x^2_n) \qquad \text{(II-101)}$$

donnerait un système partitionné (II-102) :

$$\begin{bmatrix} X^1_{n+1} \\ X^2_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{33} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1_n \\ X^2_n \\ \sigma_n \end{bmatrix} \qquad \text{(II-102)}$$

où

$$A_{ij} \in \mathcal{R}^{2x2} \qquad (i,j = 1,2,3)$$

On se trouve dans le premier cas. Quand la commutativité des blocs A_{ij} est assurée, l'application de l'algorithme d'élimination généralisé donne l'équation de récurrence vectorielle non redondante (II-103) :

$$\sigma_{n+3} + P^1 \sigma_{n+2} + P^2 \sigma_{n+1} + P^3 \sigma_n = 0 \qquad \text{(II-103)}$$

où les $P^i \in \mathcal{R}^{2x2}$, sont les coefficients du polynôme vectoriel du système (II-1C2).

β) p = 3

Le vecteur σ_n est de la forme :

$$\sigma_n^T = (x_n^4, x_n^5, x_n^6) \qquad \text{(II-104)}$$

Le partitionnement immédiat du système (II-99) dans le cas où

$$X_n^{1\,T} = (x_n^1\ x_n^2\ x_n^3)$$

est de la forme (II-105)

$$\begin{bmatrix} X_{n+1}^1 \\ \sigma_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n^1 \\ \sigma_n \end{bmatrix} \qquad \text{(II-105)}$$

où

$$A_{ij}(i,j = 1,2) \in \mathcal{R}^{3x3}$$

La dimension du système (II-99) est de 6 est divisible par celle du vecteur σ_n qui est de 3. On est dans le premier cas. Lorsque les A_{ij} sont commutatifs, l'application de l'algorithme donnerait une équation récurrente non redondante (II-106) :

$$\sigma_{n+2} + P^1 \sigma_{n+1} + P^2 \sigma_n = 0 \qquad \text{(II-106)}$$

avec

$P^i(i = 1,2) \in \mathcal{R}^{3x3}$ coefficient du polynôme vectoriel.

γ) p = 4

Le vecteur par rapport auquel se fera l'élimination est d'ordre quatre soit :

$$\sigma_n^T = (x_n^3,\ x_n^4,\ x_n^5,\ x_n^6)$$

Lorsque nous prenons

$$X_n^{1T} = (x_n^1,\ x_n^1,\ x_n^2,\ x_n^3)$$

il vient le système partitionné suivant :

$$\begin{bmatrix} X_{n+1}^1 \\ \sigma_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n^1 \\ \sigma_n \end{bmatrix} \qquad \text{(II-107)}$$

La dimension de (II-107) se trouve ainsi dilatée, mais à un degré minimal.

Les $A_{ij}(i = 1,2) \in \mathcal{R}^{4x4}$, peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{41} & 0 & a_{42} \\ a_{51} & 0 & a_{52} & 0 \\ 0 & a_{61} & 0 & a_{62} \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & \cdots\cdots & a_{36} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{63} & \cdots\cdots & a_{66} \end{bmatrix}$$

La commutativité des blocs A_{ij} nous permet l'application de l'algorithme d'élimination et d'aboutir ainsi à l'équation de récurrence redondante (II-108)

$$\sigma_{n+2} + P^1\ \sigma_{n+1} + P^2\ \sigma_n = 0 \qquad \text{(II-108)}$$

où

$$P^i \in \mathcal{R}^{4x4}$$

A noter que le choix des X_n^1 peut être toute autre combinaison entre x_n^1 et x_n^2. Nous pouvons prendre par exemple :

$$X_n^{1T} = (x_n^1\ x_n^1\ x_n^1\ x_n^2)$$

ou $$= (x_n^1\ x_n^2\ x_n^2\ x_n^2)$$

et pour chaque cas nous obtenons différentes matrices concernant A_{11}, A_{21}, A_{12}.

Le choix de X_n^1 peut être conduit en vue d'obtenir des blocs commutatifs, lorsque ceux-ci ne le sont pas naturellement.

ζ) p = 5

Ce cas correspond au vecteur σ_n de la forme :

$$\sigma_n^T = (x_n^2\ .\ .\ .\ .\ x_n^6) \qquad \text{(II-109)}$$

un partitionnement du système conduit à un choix de X_n^1 de la forme suivante :

$$X_n^{1T} = (x_n^1\ .\ .\ .\ .\ x_n^1),\ \in\ \mathcal{R}^5$$

Ceci nous donne un système partitionné dilaté à un degré qui permet d'avoir les blocs de la première colonne diagonaux donc commutatifs, et ceci dans tous les cas.

Ce mode de partitionnement peut s'appliquer à tous les systèmes en particulier au système non linéaire étudié du type (II-1). σ_n sera le vecteur de l'entrée de la non linéarité. C'est ce mode de partitionnement que nous adopterons dans toute la suite de l'étude.

IV-2 EXTENSION DE L'ALGORITHME D'ELIMINATION PROPOSE

Dans le système non linéaire décrit en (II-1), nous posons :

$$\sigma_n^T = (x_n^m\ .\ .\ .\ .\ x_n^q) \qquad \text{(II-110)}$$

on regroupe ainsi les variables traitées par les non linéarités sous un vecteur σ_n sur lequel on souhaite établir l'équation de récurrence.

Pour cela, nous partitionnons la matrice A' du système (II-1) en blocs de matrices carrées de même dimension.

Pour appliquer l'algorithme d'élimination, un partitionnement s'avère intéressant avec dilatation assurant la propriété de commutativité des blocs : on écrit chaque ligne associée à une variable linéaire $x_n^1 \ldots x_n^{m-1}$ autant de fois l'ordre du vecteur σ_n (p fois), on obtient ainsi la représentation dilatée sur la forme (II-111) :

$$
m\left\{
\begin{bmatrix}
p\left\{\begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ \vdots \\ x_{n+1}^1 \end{bmatrix}\right. \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} x_{n+1}^i \\ \vdots \\ x_{n+1}^i \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} x_{n+1}^{m-1} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{m-1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{n+1}^m \\ x_{n+1}^{m+1} \\ \vdots \\ x_{n+1}^q \end{bmatrix}
\end{bmatrix}\right.
=
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} a_{1(m-1)} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{1(m-1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1m}^{*}(.)\ldots a_{1q}^{*}(.) \\ \ldots\ldots \\ a_{1m}^{*}(.)\ldots a_{1q}^{*}(.) \end{bmatrix} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
\begin{bmatrix} a_{i1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{i1} \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} a_{i(m-1)} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{i(m-1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{im}^{*}(.)\ldots a_{iq}^{*}(.) \\ \ldots\ldots \\ a_{im}^{*}(.)\ldots a_{iq}^{*}(.) \end{bmatrix} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
\begin{bmatrix} a_{(m-1)1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{(m-1)1} \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} a_{(m-1)(m-1)} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{(m-1)m}^{*}(.)\ldots a_{(m-1)q}^{*}(.) \\ \ldots\ldots \\ a_{(m-1)m}^{*}(.)\ldots a_{(m-1)q}^{*}(.) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a_{m1} & 0 \\ \ddots & \\ a_{i1} & \\ \ddots & \\ 0 & a_{q1} \end{bmatrix} & \ldots & \begin{bmatrix} a_{m(m-1)} & 0 \\ \ddots & \\ a_{i(m-1)} & \\ \ddots & \\ 0 & a_{q(m-1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{mm}^{*}(.)\ldots a_{mq}^{*}(.) \\ \ldots \\ a_{qm}^{*}(.)\ldots a_{qq}^{*}(.) \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} x_n^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} x_n^{m-1} \\ \vdots \\ x_n^{m-1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_n^m \\ \vdots \\ x_n^q \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\qquad (II\text{-}111)
$$

- La matrice partitionnée caractérisée par ses (m-1) colonnes à blocs diagonaux qui sont commitatifs entre eux.

- La dernière colonne est à blocs non constants.

- Ce cas correspond à un degré de redondance qui assure en même temps la propriété de commutativité pour les (m-1) colonnes. Le fait de dilater suffisamment permet d'avoir la propriété en question.

Le système partitionné (II-111) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X_{n+1} = \mathcal{A}\, X_n \qquad \text{(II-112)}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots\cdots & A_{1(m-1)} & A^{*}_{1m}(\sigma_n) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ A_{m1} & \cdots\cdots & A_{mm-1} & A^{*}_{mm}(\sigma_n) \end{bmatrix}$$

avec

$$A^{*}_{im}(\sigma_n) = \frac{A_{im}(\sigma_n)}{\sigma_n} \qquad \text{pour } i = 1 \ldots m$$

$A^{*}_{im}(.)$ n'est alors en général défini que pour $\sigma_n \neq 0$

$$X_n^T = (X_n^{1T}, \ldots\ldots X_n^{m-1T}\ \sigma_n^T)$$

avec

$$X_n^{iT} = (x_n^i \ldots\ldots\ldots x_n^i) \in \mathcal{R}^p \qquad \text{pour } i = 1 \ldots (m-1)$$

$$\sigma_n^T = (x_n^m \ldots\ldots x_n^q) \in \mathcal{R}^p$$

Les blocs de matrice constituant $\mathcal{A}$ s'écrivent sous la forme :

$$A_{ij} = a_{ij}\, I_p\,, \quad \in \mathcal{R}^{p\times p} \qquad \text{pour } i, j = 1 \ldots (m-1)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{ij} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{ij} \end{bmatrix}$$

$$- \quad A^{*}_{im}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^{*}_{im}(x^m_n) & \dots\dots & a^{*}_{iq}(x^q_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{*}_{im}(x^m_n) & \dots\dots & a^{*}_{iq}(x^q_n) \end{bmatrix} , \in \mathcal{R}^{pxp} \text{ pour } i = 1\dots(m-1)$$

$$\text{où } a^{*}_{ij}(x^j_n) = \frac{a_{ij}(x^j_n)}{x^j_n} \quad , \; x^j_n \neq 0 \qquad j = m \dots q$$

$$- \quad A_{mj} = \begin{bmatrix} a_{mj} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{qj} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{pxp} \quad \text{pour } j = 1 \dots (m-1)$$

$$- \quad A^{*}_{mm}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^{*}_{mm}(x^m_n) & \dots\dots & a^{*}_{mq}(x^q_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{*}_{qm}(x^m_n) & \dots\dots & a^{*}_{qq}(x^q_n) \end{bmatrix} , \in \mathcal{R}^{pxp}$$

Pour l'élimination de $X^1_n \dots X^{m-1}_n$, on se propose d'étudier deux méthodes : l'une basée sur la propriété du polynôme caractéristique généralisé, l'autre sur la régle pratique d'élimination et ceci en vu de la généraliser aux matrices sous forme de blocs.

IV-2-1 *Méthode du polynôme caractéristique généralisée*

Le système représenté en (II-112) peut être décomposé en deux parties et s'écrit sous la forme (II-113) :

$$X_{n+1} = \mathcal{A}' X_n + \mathcal{B}(\sigma_n) \tag{II-113}$$

où

$$X^T_n = (X^{1T}_n \; \dots\dots \; X^{m-1T}_n \quad \sigma^T_n)$$

- $\mathcal{A}'$est la matrice caractérisant la partie linéaire du système Ses composantes sont des blocs de matrice tous constants et diagonaux. Elle s'écrit :

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1(m-1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{m(m-1)} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-114)}$$

- $\mathcal{B}(.)$: la matrice colonne représente la partie non constante du système dont les blocs la constituant sont tous fonction de σ_n. Il vient :

$$\mathcal{B}^*(.) = \begin{bmatrix} A^{*'}_{1m}(.) \\ \vdots \\ A^*_{mm}(.) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-115)}$$

Pour éliminer $X_n^1 \ldots X_n^{m-1}$, nous utilisons la propriété du polynôme généralisé (§ III-2-2), ce qui généralise aussi l'algorithme du polynôme minimal décrit dans le premier chapitre aux matrices partitionnées en blocs.

On se propose de retrouver une équation de récurrence régissant l'évolution du vecteur σ_n. Pour cela, le système représenté en (II-113) est réecrit sous la forme (II-116) :

$$\begin{cases} X_{n+1} = \mathcal{A}' X_n + \mathcal{B}(\sigma_n) \\ \sigma_n = (0 \ldots 0 \ \ I_p) X_n = \mathcal{C}^T \ X_n \end{cases} \qquad \text{(II-116)}$$

En écrivant l'équation (II-116) à l'instant (n+i)T, nous obtenons la relation (II-117) :

$$X_{n+i} = \mathcal{A}'^{i} X_n + \sum_{j=0}^{i-1} \mathcal{A}'^{i-1-j} \ \mathcal{B}(\sigma_{n+j}) \qquad \text{(II-117)}$$

La multiplication des deux membres de (II-117) par $\mathcal{C}^T$, fait apparaître le paramètre cherché, soit :

$$\mathcal{C}^T x_{n+i} = \sigma_{n+i} \tag{II-118}$$

Il vient ainsi :

$$\sigma_{n+i} = \mathcal{C}^T \mathcal{A}'^{i} x_n + \sum_{j=0}^{i-1} \mathcal{C}^T \mathcal{A}'^{i-1-j} \mathcal{B}(\sigma_{n+j}) \tag{II-119}$$

Pour éliminer les termes en $\mathcal{C}^T \mathcal{A}'^{i} x_n$, on utilise le théorème (II-3) soit :

En faisant la somme par les coefficients matriciels α^i du polynôme vectoriel (II-120) :

$$\mathrm{DET}(\mathcal{A}' - {}^p\Lambda \otimes J(m,p)) = \alpha^m\, {}^p\Lambda^m + \alpha^{m-1}\, {}^p\Lambda^{m-1} + \dots\ \alpha^1\, {}^p\Lambda \tag{II-120}$$

avec ${}^p\Lambda \in \mathcal{R}^{p\times p}$

Il vient :

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha^i \sigma_{n+i} = \sum_{i=0}^{m} \alpha^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \mathcal{C}^T \mathcal{A}'^{i-1-j} \mathcal{B}(\sigma_{n+j}) \right) \tag{II-121}$$

avec

$\alpha^m = I_p$, en ordonnant par rapport à σ_{n+j}, on obtient :

$$\sigma_{n+m} + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\alpha^j - \sum_{i=1+j}^{m} \alpha^i\, \mathcal{C}^T \mathcal{A}'^{i-1-j} \mathcal{B}^*(\sigma_{n+j})\right) \sigma_{n+j} = 0 \tag{II-122}$$

soit sous une deuxième forme :

$$\sigma_{n+m} + \sum_{j=0}^{m-1} S^{j*}(\sigma_{n+j})\, \sigma_{n+j} = 0 \tag{II-123}$$

où les $S^{j*}(.)$ sont des coefficients matriciels, $\in \mathcal{R}^{p\times p}$ s'écrivant sous la forme :

$$S^{j*}(\sigma_{n+j}) = \alpha^j - \sum_{i=1+j}^{m} \alpha^i\, \mathcal{C}^T \mathcal{A}'^{i-1-j} \mathcal{B}^*(\sigma_{n+j}) \tag{II-124}$$

Lorsqu'on développe l'équation (II-123), il vient :

$$\sigma_{n+m} + S^{m-1*}(\sigma_{n+m-1})\, \sigma_{n+m-1} + S^{m-2*}(\sigma_{n+m-2})\sigma_{n+m-2} + \dots$$

$$\dots + S^{1*}(\sigma_{n+1})\sigma_{n+1} + S^{0*}(\sigma_n)\sigma_n = 0 \tag{II-125}$$

Calculons les (m+1) coefficients matriciels, nous obtenons :

$$- S^{m-1*}(.) = \alpha^{m-1} - \sum_{m}^{m} \alpha^{i} \quad \mathcal{C}^{T} \quad \mathcal{A}'^{\,i-m} \quad \mathcal{B}^{*}(.)$$

soit

$$S^{m-1*}(.) = \alpha^{m-1} - A^{*}_{mm}(.) \qquad \text{(II-126)}$$

ce qui correspond à la première trace matricielle de $\mathcal{A}$.

$$- S^{m-2*}(.) = \alpha^{m-2} - \alpha^{m-1} \quad \mathcal{C}^{T} \quad \mathcal{A}^{*}(.) - \alpha^{m} \quad \mathcal{C}^{T} \mathcal{A}' \mathcal{B}^{*}(.)$$

$$S^{m-2}(.) = \alpha^{m-2} - \alpha^{m-1} A^{*}_{mm}(.) - \alpha^{m}(A_{m1}A^{*}_{1m}(.) + A_{m2}A^{*}_{2m}(.) + \ldots$$

$$\ldots + A_{mm-1} \, A^{*}_{m-1m}(.) \,) \qquad \text{(II-127)}$$

ce qui donne la deuxième trace de $\mathcal{A}$ quand nous remplaçons S^{m-2} par sa valeur,

.... et ceci jusqu'au dernier coefficient matriciel.

$$- S^{0*}(.) = \alpha^{0} - \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i} \quad \mathcal{C}^{T} \mathcal{A}'^{\,i-1} \quad \mathcal{B}^{*}(.)$$

soit :

$$S^{0*}(.) = \alpha^{0} - \alpha^{1} \quad \mathcal{C}^{T} \, \mathcal{B}^{*}(\sigma_{n}) + \alpha^{2} \quad \mathcal{C}^{T} \quad \mathcal{A}' \quad \mathcal{B}^{*}(.) + \ldots$$

$$\ldots - \alpha^{m-1} \quad \mathcal{C}^{T} \mathcal{A}'^{\,m} \quad \mathcal{B}^{*}(.) - \quad \mathcal{C}^{T} \mathcal{A}'^{\,m-1} \quad \mathcal{B}^{*}(.) \qquad \text{(II-128)}$$

quand nous développons complétement le calcul, nous retrouvons l'expression du déterminant matriciel de la matrice $\mathcal{A}$. Ce dernier peut être obtenu directement de la matrice $\mathcal{A}$, par un développement des calculs et ceci par rapport aux (m-1) colonnes à blocs commutatifs.

Donc, nous pouvons réduire l'algorithme d'élimination à un calcul direct sur la matrice $\mathcal{A}$ elle même. Ce résultat généraliserait la méthode pratique d'élimination aux matrices sous forme de blocs.

α) *Exemple*

Nous nous proposons d'appliquer la méthode à un système d'ordre $q = 4$ et $p = 2$. Celui-ci se met sous la forme :

$$
\begin{aligned}
x^1_{n+1} &= a_{11}\, x^1_n + a_{12}\, x^2_n + a_{13}(x^3_n) + a_{14}(x^4_n) \\
x^2_{n+1} &= a_{21} \qquad + a_{22} \qquad + a_{23}(x^3_n) + a_{24}(x^4_n) \\
x^3_{n+1} &= a_{31} \qquad + a_{32} \qquad + a_{33}(x^3_n) + a_{34}(x^4_n) \\
x^4_{n+1} &= a_{41} \qquad + a_{42} \qquad + a_{43}(x^3_n) + a_{44}(x^4_n)
\end{aligned}
\tag{II-129}
$$

Pour appliquer l'algorithme, nous partitionnons le système sous la forme :

$$
\begin{bmatrix} X^1_{n+1} \\ X^2_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A^{*}_{13}(\sigma_n) \\ A_{21} & A_{22} & A^{*}_{23}(\sigma_n) \\ A_{31} & A_{32} & A^{*}_{33}(\sigma_n) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X^1_n \\ X^2_n \\ \sigma_n \end{bmatrix}
\tag{II-130}
$$

où

$$
A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} \quad
A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix} , \quad
A^{*}_{13}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^{*}_{13}(x^3_n) & a^{*}_{14}(x^4_n) \\ a^{*}_{13}(x^3_n) & a^{*}_{14}(x^4_n) \end{bmatrix}
$$

$$
A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} \quad
A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} , \quad
A^{*}_{23}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^{*}_{23}(x^3_n) & a^{*}_{24}(x^4_n) \\ a^{*}_{23}(x^3_n) & a^{*}_{24}(x^4_n) \end{bmatrix}
$$

$$
A_{31} = \begin{bmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{41} \end{bmatrix} \quad
A_{32} = \begin{bmatrix} a_{32} & 0 \\ 0 & a_{42} \end{bmatrix} , \quad
A^{*}_{44}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^{*}_{33}(x^3_n) & a^{*}_{34}(x^4_n) \\ a^{*}_{43}(x^3_n) & a^{*}_{44}(x^4_n) \end{bmatrix}
$$

$$
X^{1T}_n = (x^1_n, x^1_n) , \quad X^{2T}_n = (x^2_n, x^2_n) , \quad \sigma^T_n = (x^3_n, x^4_n)
$$

Une autre forme d'écriture du système est :

$$\begin{cases} X_{n+1} = \mathcal{A}' X_n + \mathcal{B}(\sigma_n) \\ \sigma_n = (0\ ,\ 0\ ,\ I_2)\ X_n = \mathcal{C}^T X_n \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{bmatrix} , \mathcal{B}^*(\sigma_n) = \begin{bmatrix} A^*_{13}(.) \\ A^*_{23}(.) \\ A^*_{33}(.) \end{bmatrix} ,$$

$$\mathrm{DET}(\mathcal{A}' - {}^2\Lambda \otimes \mathfrak{I}(3,2)) = {}^2\Lambda^3 + (-A_{11} - A_{22})\ {}^2\Lambda^2 + (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})\ {}^2\Lambda$$

où

$$\alpha^3 = I_2\ ,\ \alpha^2 = (-A_{11}\ -A_{22}),\ \alpha^1 = (A_{11}\ A_{22}\ -A_{21}A_{12}) \qquad \text{(II-131)}$$

l'équation de récurrence correspondant au vecteur σ_n s'écrit :

$$\sigma_{n+3} + \sum_{j=0}^{2} \left(\alpha^j - \sum_{i=1+j}^{3} \alpha^i\ \mathcal{C}^T\ \mathcal{A}'^{\,i-1-j}\ \mathcal{B}^*(\sigma_{n+j})\right)\sigma_{n+j} \qquad \text{(II-132)}$$

soit encore :

$$\sigma_{n+3} + (\alpha^2 - \sum_{i=1}^{3} \alpha^i\ \mathcal{C}^T \mathcal{A}'^{\,i-3}\ \mathcal{B}^*(\sigma_{n+2})\sigma_{n+2}) + (\alpha^1 - \sum_{i=2}^{3} \alpha^i\ \mathcal{C}^T\ \mathcal{A}'^{\,i-2}\ \mathcal{B}^*(\sigma_{n+1})\sigma_{n+1}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{3} \alpha^i\ \mathcal{C}^T\ \mathcal{A}'^{\,i-1}\ \mathcal{B}^*(\sigma_n)\sigma_n = 0 \qquad \text{(II-133)}$$

en explicitant encore la relation obtenue, on a :

$$\sigma_{n+3} + (\alpha^2 - \mathcal{C}^T\ \mathcal{B}^*(\sigma_{n+2})\sigma_{n+2}) + (\alpha^1 - \alpha^2\ \mathcal{C}^T\ \mathcal{B}^*(\sigma_{n+1})\sigma_{n+1} - \mathcal{C}^T\mathcal{A}'\mathcal{B}^*(\sigma_{n+1})\sigma_{n+1}) -$$

$$-\alpha^1\ \mathcal{C}^T\ \mathcal{B}^*(\sigma_n)\sigma_n - \alpha^2 \mathcal{A}\mathcal{C}^T\ \mathcal{B}^*(\sigma_n)\sigma_n - \mathcal{C}^T\mathcal{A}'^2\mathcal{B}^*(\sigma_n)\sigma_n = 0$$

Après avoir effectué tous les calculs et remplacé les α^i par leur valeur, nous obtenons l'équation de récurrence vectorielle suivante :

$$\sigma_{n+3} + (-A_{11}-A_{22}-A^{*}_{33}(\sigma_{n+2})\sigma_{n+2} + (A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}-A_{11}A^{*}_{33}(\sigma_{n+1}) +$$

$$+ A_{22}A^{*}_{33}(\sigma_{n+1}) - A_{31}A^{*}_{13}(\sigma_{n+1}) - A_{32}A^{*}_{23}(\sigma_{n+1})\ )\ \sigma_{n+1} +$$

$$+(A_{11}A_{32}A^{*}_{23}(\sigma_n) + A_{31}A_{22}A^{*}_{13}(\sigma_n) - A_{11}A_{22}A^{*}_{33}(\sigma_n) - A_{21}A_{32}A^{*}_{13}(\sigma_n) -$$

$$- A_{31}A_{12}A^{*}_{23}(\sigma_n) \qquad + A_{21}\ A_{12}\ A^{*}_{33}(\sigma_n)\ )\ \sigma_n = 0$$

Nous remarquons que les coefficients matriciels intervenant dans cette équation peuvent être obtenus directement d'un calcul direct sur la matrice $\mathcal{A}$ de (II-130).

En développant l'expression (II-134) :

$$(\mathrm{DET})' \quad (\mathcal{A} - {}^{2}\Lambda \otimes \mathbf{J}(2,3)) \qquad \text{(II-134)}$$

par rapport aux deux premières colonnes, et en identifiant :

$${}^{2}\Lambda^{i} \quad \sigma_n \longrightarrow \sigma_{n+i} \quad i = 0, 1, 2, 3)$$

nous retrouvons l'équation de récurrence vectorielle au dessus (II-133).

IV-2-2 Généralisation de la méthode pratique d'élimination

La matrice $\mathcal{A}$ est caractérisée par ses (m-1) premières colonnes formées de blocs de matrices diagonales présentant la propriété de commutativité. Les blocs de la dernière colonne sont non constants, non commutatifs.

La théorie développée dans le chapitre, et en particulier le calcul de déterminant matriciel reste valable et ceci à une condition : le développement du calcul de celui-ci s'effectue par rapport aux (m-1) premières colonnes à élèments commutatifs. Cela nous permet une extension dans le calcul de polynôme caractéristique généralisé aux matrices partitionnées avec la dernière colonne contenant des blocs quelconques.

a) *Extension dans le calcul de polynôme caractéristique généralisé*

$(\mathcal{A} - {}^{p}\Lambda \otimes \mathfrak{J}(m,p))$ est encore appelée matrice caractéristique généralisée.

Dans le cas général, nous adopterons la notation suivante :

$$P({}^{p}\Lambda) = (\mathrm{DET})'\Big(\mathcal{A} - {}^{p}\Lambda \otimes \mathfrak{J}(m,p)\Big) \qquad \text{(II-135)}$$

où

$(\mathrm{DET})'(.)$ ne correspond au déterminant matriciel DET(.) avec les propriétés correspondantes que dans l'hypothèse de commutativité de tous les blocs de la matrice $\mathcal{A}$.

Donc la notation $(\mathrm{DET})'(.)$: un moyen permettant cette extension aux matrices de type $\mathcal{A}$, le développement de calcul se fait par rapport aux (m-1) colonnes à blocs commutatifs. Ce qui nous donne un polynôme en puissance de ${}^{p}\Lambda$ que nous appelons encore "polynôme caractéristique généralisé" et s'écrit :

$$P({}^{p}\Lambda) = {}^{p}\Lambda^{m} + \sum_{i=1}^{m} P^{i*}(\sigma_{n+m-i})\ {}^{p}\Lambda^{m-i} \qquad \text{(II-136)}$$

où

$$P^{i*}(.) = S^{m-i}(.) \quad (i = 1 \dots m)$$

$$P^{i*}(.) \in \mathcal{R}^{p\times p} \text{ de composantes } p^{i*}_{jk}(.) \quad (j,\ k = 1 \dots p)$$

Une deuxième expression du polynôme serait sous la forme matricielle, en remplaçant dans l'équation (II-136) ${}^{p}\Lambda$ par sa valeur soit :

$${}^{p}\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

Il vient le polynôme matriciel à coefficients polynominaux (II-137)

$$P({}^{p}\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\lambda_1) & \dots\dots & \mathcal{T}_{1p}(\lambda_p) \\ & \dots\dots\dots\dots & \\ \mathcal{T}_{p1}(\lambda_1) & \dots\dots & \mathcal{T}_{pp}(\lambda_p) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-137)}$$

avec

$$\mathcal{T}_{jj}(\lambda_{j}.) = \lambda_j^{m} + \sum_{i=1}^{m} p^{i*}_{jj}(\sigma^{j}_{n})\ \lambda_j^{m-i} \qquad (j = 1 \dots p)$$

$$\mathcal{T}_{jk}(\lambda_{k}.) = \sum_{i=1}^{m} p^{i*}_{jk}(\sigma^{k}_{n})\ \lambda_k^{m-i} \qquad \text{pour } j \neq k = 1 \dots p$$

b) *Mises en équations*

α) *Equations de récurrence vectorielle*

En identifiant dans l'équation (II-130) :

$$p_{\Lambda}{}^{i} \quad \sigma_n \longrightarrow \sigma_{n+i} \tag{II-138}$$

pour $i = 0 \ldots m$

Il vient l'équation de récurrence vectorielle (II-123) ou sous une forme explicitée (II-139) :

$$\begin{bmatrix} x^m_{n+m} \\ \vdots \\ x^q_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{1*}_{11}(x^m_{n+m-1}) & \ldots & p^{1*}_{1p}(x^q_{n+m-1}) \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ p^{1*}_{p1}(x^m_{n+m-1}) & \ldots & p^{n*}_{pp}(x^q_{n+m-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^m_{n+m-1} \\ \vdots \\ x^q_{n+m-1} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} p^{m*}_{11}(x^m_n) & \ldots & p^{m*}_{1p}(x^q_n) \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ p^{m*}_{p1}(x^m_n) & \ldots & p^{m*}_{pp}(x^q_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^m_n \\ \vdots \\ x^q_n \end{bmatrix} \tag{II-139}$$

β) *Formes matricielles*

Le même procédé développé sur l'équation (II-19) est appliqué dans le cas de (II-131), conduit aux quatre formes matricielles (II-31) (II-32) (II-33) et (II-34).

Parmi les cirtères de stabilité développés dans le premier chapitre, deux s'adaptent particulièrement sur les formes obtenues. Le critère de majoration pouvant s'appliquer aux formes récurrentes (II-19) Celui de BORNE et GENTINA sur la forme Frobenius généralisée après un changement de base sur celle-ci.

V - ILLUSTRATION SUR DES EXEMPLES

V-1 SYSTEME D'ORDRE q, (q-1) = p VARIABLES NON LINEAIRES

Soit le système représenté par (II-140) :

$$\begin{aligned} x^1_{n+1} &= a_{11}\, x^1_n + a_{12}(x^2_n) + \dots\dots\dots + a_{1q}(x^q_n) \\ x^2_{n+1} &= a_{21}\, x^1_n + a_{22}(x^2_n) + \dots\dots\dots + a_{2q}(x^q_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^q_{n+1} &= a_{q1}\, x^1_n + a_{q2}(x^2_n) + \dots\dots\dots + a_{qq}(x^q_n) \end{aligned} \qquad \text{(II-140)}$$

Nous voulons éliminer x^1_n et trouver une relation de récurrence par rapport au vecteur σ_n :

$$\sigma^T_n = (x^2_n \dots\dots x^q_n) \qquad \text{(II-141)}$$

V-1-1 Nouvelle représentation du système

Pour appliquer l'algorithme d'élimination généralisé, nous partitionnons le système (II-140). L'écriture de la première ligne (q-1) = p fois nous donne le système suivant :

$$\begin{bmatrix} X^1_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A^*_{12}(\sigma_n) \\ A_{21} & A^*_{22}(\sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1_n \\ \sigma_n \end{bmatrix} \qquad \text{(II-142)}$$

$$X^{1T}_n = (x^1_n \dots\dots x^1_n) \in \mathcal{R}^p$$

avec

$$A_{11} = a_{11}\, I_p = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A^{*}_{12}(\sigma_n) = \left.\begin{bmatrix} a^{*}_{12}(x^2_n) & \cdots\cdots & a^{*}_{1q}(x^q_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{*}_{12}(x^2_n) & \cdots\cdots & a^{*}_{1q}(x^q_n) \end{bmatrix}\right\} P$$

$$A_{21} = \left.\begin{bmatrix} a_{21} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_{i1} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & a_{q1} \end{bmatrix}\right\} P$$

$$A^{*}_{22}(\sigma_n) = \left.\begin{bmatrix} a^{*}_{22}(x^2_n) & \cdots & a^{*}_{2i}(x^i_n) & \cdots & a^{*}_{2q}(x^q_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{*}_{q2}(x^2_n) & \cdots & a^{*}_{qi}(x^i_n) & \cdots & a^{*}_{qq}(x^q_n) \end{bmatrix}\right\} P$$

V-1-2 Polynôme caractéristique généralisé

Le polynôme caractéristique généralisé relatif à la nouvelle représentation est obtenu en calculant l'expression :

$$(\mathrm{DET})^{\prime} \begin{bmatrix} A_{11} - {}^{P}\Lambda & A^{*}_{12}(\sigma_n) \\ A_{21} & A^{*}_{22}(\sigma_n) - {}^{P}\Lambda \end{bmatrix} = P({}^{P}\Lambda) \qquad \text{(II-143)}$$

il vient une équation vectorielle en puissance de ${}^{P}\Lambda$ (II-144)

$$P({}^{P}\Lambda) = {}^{P}\Lambda^2 - P^{1*}(\sigma_{n+1})\,{}^{P}\Lambda + P^{2*}(\sigma_n) \qquad \text{(II-144)}$$

avec :

$$P^{1*}(\sigma_{n+1}) = \begin{bmatrix} p^{1*}_{11}(x^2_{n+1}) & \cdots & p^{1*}_{1p}(x^q_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{1*}_{p1}(x^2_{n+1}) & \cdots & p^{1*}_{pp}(x^q_{n+1}) \end{bmatrix} = A_{11} + A^{*}_{22}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a_{11} + a^{*}_{22}(x^2_{n+1}) & \cdots & a^{*}_{2q}(x^q_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{*}_{q2}(x^2_{n+1}) & \cdots & a_{11} + a^{*}_{qq}(x^q_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$$P^{2*}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} p^{2*}_{11}(x^2_n) & \cdots & p^{*2}_{1p}(x^q_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{2*}_{p1}(x^2_n) & \cdots & p^{2*}_{pp}(x^q_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\,a^{*}_{22}(x^2_n) - a_{21}\,a^{*}_{12}(x^2_n) & \cdots & a_{11}\,a^{*}_{2q}(x^q_n) - a_{21}\,a_{1q}(x^q_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11}\,a^{*}_{q2}(x^2_n) - a_{q1}\,a^{*}_{12}(x^2_n) & \cdots & a_{11}\,a^{*}_{qq}(x^q_n) - aq_1\,a^{*}_{1q}(x^q_n) \end{bmatrix}$$

l'expression (II-144) peut être obtenue sous une forme matricielle en remplaçant ${}^{p}\Lambda$ par sa valeur soit :

$$
{}^{p}\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix}
$$

il vient alors le polynôme matriciel à coefficients polynominaux (II-145)

$$
P({}^{p}\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\lambda_1) & \dots & \mathcal{T}_{1p}(\lambda_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{T}_{p1}(\lambda_1) & \dots & \mathcal{T}_{pp}(\lambda_p) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-145)}
$$

où

$$
\mathcal{T}_{jj}(\lambda_i) = \lambda_i^2 - p_{jj}^{1*}(x_n^{j+1})\,\lambda_i + p_{jj}^{2*}(x_n^{j+1}) \qquad j = (1\ldots(q-1) = p)(i = 1\ldots p)
$$

$$
\mathcal{T}_{jk}(\lambda_i) = \quad - p_{jk}^{1*}(x_n^{k+1})\,\lambda_i + p_{jk}^{2*}(x_n^{k+1}) \qquad j \neq k = (1\ \ldots(q-1) = p)
$$

V-1-3 Equations de récurrence vectorielle

En identifiant dans l'expression (II-144) :

$$
{}^{p}\Lambda^{i} \quad \sigma_n \longrightarrow \sigma_{n+i} \qquad \text{pour } (i = 0\ \ldots\ 2)
$$

il vient l'équation suivante :

$$
\sigma_{n+2} - P^{1*}(\sigma_{n+1})\sigma_{n+1} + P^{2*}(\sigma_n)\sigma_n = 0 \qquad \text{(II-146)}
$$

ou sous une forme explicite :

$$
\begin{bmatrix} x_{n+2}^2 \\ \vdots \\ x_{n+2}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{22}^{*}(x_{n+1}^2) & a_{23}^{*}(x_{n+1}^3) & \dots & a_{2q}^{*}(x_{n+1}^q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q2}^{*}(x_{n+1}^2) & \dots & \dots & a_{11} + a_{qq}^{*}(x_{n+1}^q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1}^2 \\ \vdots \\ x_{n+1}^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21}a_{12}^{*}(x_n^2) - a_{11}a_{22}^{*}(x_n^2) & \dots & a_{21}a_{1q}^{*}(x_n^q) - a_{11}a_{2q}^{*}(x_n^q) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1}a_{12}^{*}(x_n^2) - a_{11}a_{q2}^{*}(x_n^2) & \dots & a_{q1}a_{1q}^{*}(x_n^q) - a_{11}a_{qq}^{*}(x_n^q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^q \end{bmatrix}
$$

1^er^ cas = q = 3 , p = 1

Le système se présente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x^1_{n+1} \\ x^2_{n+1} \\ x^3_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a^*_{12}(x^2_n) & a^*_{13}(x^3_n) \\ a_{21} & a^*_{22}(x^2_n) & a^*_{23}(x^3_n) \\ a_{31} & a^*_{32}(x^2_n) & a^*_{33}(x^3_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_n \\ x^2_n \\ x^3_n \end{bmatrix} \qquad \text{(II-147)}$$

α) *Nouvelle représentation*

En posant :

$$\sigma^T_n = (x^2_n,\ x^3_n)$$

le système (II-147) partitionné s'écrit :

$$\begin{bmatrix} X^1_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A^*_{12}(\sigma_n) \\ A_{21} & A^*_{22}(\sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1_n \\ \sigma_n \end{bmatrix} \qquad \text{(II-148)}$$

avec

$$X^{1T}_n = (x^1_n, x^1_n)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} \qquad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 \\ 0 & a_{31} \end{bmatrix}$$

$$A^*_{12}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^*_{12}(x^2_n) & a^*_{13}(x^3_n) \\ a^*_{12}(x^2_n) & a^*_{13}(x^3_n) \end{bmatrix} \qquad A^*_{22}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a^*_{22}(x^2_n) & a^*_{23}(x^3_n) \\ a^*_{32}(x^2_n) & a^*_{33}(x^3_n) \end{bmatrix}$$

β) *Polynôme caractéristique vectoriel*

Il est obtenu en calculant l'expression (II-149) :

$$P(^2\Lambda) = (\mathrm{DET})' \begin{bmatrix} A_{11} - {^2\Lambda} & A^*_{12}(\sigma_n) \\ A_{21} & A^*_{22}(\sigma_n) - {^2\Lambda} \end{bmatrix} = {^2\Lambda^2} - P^{1*}(\sigma_{n+1})\,{^2\Lambda} + P^{2*}(\sigma_n) \qquad \text{(II-149)}$$

avec :

$$P^{1*}(\sigma_{n+1}) = A_{11} + A^{*}_{22}(\sigma_{n+1}) = \begin{bmatrix} a_{11}+a^{*}_{22}(x^2_{n+1}) \; , & a^{*}_{23}(x^3_{n+1}) \\ \\ a^{*}_{32}(x^2_{n+1}) \; , & a_{11}+a^{*}_{33}(x^3_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{1*}_{11}(.) \; , & p^{1*}_{12}(.) \\ \\ p^{1*}_{21}(.) \; , & p^{1*}_{21}(.) \end{bmatrix}$$

$$P^{2*}(\sigma_n) = A_{11}A^{*}_{22}(\sigma_n) - A_{21}A^{*}_{12}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} a_{11}a^{*}_{22}(x^2_n) - a_{21}a^{*}_{12}(x^2_n) \; , & a_{11}a^{*}_{23}(x^3_n) - a_{21}a^{*}_{13}(x^3_n) \\ \\ a_{11}a^{*}_{32}(x^2_n) - a_{31}a^{*}_{12}(x^2_n) \; , & a_{11}a^{*}_{33}(x^3_n) - a_{31}a^{*}_{13}(x^3_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{2*}_{11}(.) & p^{2*}_{12}(.) \\ \\ p^{2*}_{21}(.) & p^{2*}_{22}(.) \end{bmatrix}$$

en remplaçant ${}^2\Lambda$ par sa valeur $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ il vient le polynôme matriciel :

$$P({}^2\Lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - p^{1*}_{11}(x^2_n)\,\lambda_1 + p^{2*}_{11}(x^2_n) \; , & - p^{1*}_{12}(x^3_n)\,\lambda_2 + p^{2*}_{12}(x^3_n) \\ \\ - p^{1*}_{21}(x^2_n)\,\lambda_1 + p^{2*}_{21}(x^2_n) \; , & \lambda_2^2 - p^{1*}_{21}(x^3_n)\,\lambda_2 + p^{2*}_{22}(x^3_n) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-150)}$$

γ) *Equation de récurrence vectorielle*

en identifiant dans le polynôme (II-149)

$${}^2\Lambda^i \quad \sigma_n \text{---} \sigma_{n+i} \qquad (i = 0,1,2)$$

nous obtenons l'équation (II-151) :

$$\sigma_{n+2} - P^{1*}(\sigma_{n+1})\sigma_{n+1} + P^{2*}(\sigma_n)\sigma_n = 0 \qquad \text{(II-151)}$$

ou sous une forme explicite :

$$\begin{bmatrix} x^2_{n+2} \\ \\ x^3_{n+2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}+a^{*}_{22}(x^2_{n+1}) & a^{*}_{23}(x^3_{n+1}) \\ \\ a^{*}_{32}(x^2_{n+1}) & a_{11}+a^{*}_{33}(x^3_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2_{n+1} \\ \\ x^3_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}a^{*}_{22}(x^2_n) - a_{21}a^{*}_{12}(x^2_n) \; , & a_{11}a^{*}_{23}(x^3_n) - a_{21}a^{*}_{13}(x^3_n) \\ \\ a_{11}a^{*}_{32}(x^2_n) - a_{13}a^{*}_{12}(x^2_n) \; , & a_{11}a^{*}_{33}(x^3_n) - a_{31}a^{*}_{13}(x^3_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2_n \\ \\ x^3_n \end{bmatrix} = 0$$

ξ) *Equations matricielles*

Soit un vecteur

$$y_n^T = (x_n^2 \; x_{n+1}^2 \; x_n^3 \; x_{n+1}^3)$$

l'équation obtenue est de la forme (II-152)

$$y_{n+1} = H(.)\, y_n \qquad \text{(II-152)}$$

avec

$$H(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{11}a_{22}^{*}(x_n^2) + a_{21}a_{12}^{*}(x_n^2) & a_{11}+a_{22}^{*}(x_{n+1}^2) & -a_{11}a_{23}^{*}(x_n^3) + a_{21}a_{13}^{*}(x_n^3) & a_{23}^{*}(x_{n+1}^3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{11}a_{32}^{*}(x_n^2) + a_{31}a_{12}^{*}(x_n^2) & a_{32}^{*}(x_{n+1}^2) & -a_{11}a_{23}^{*}(x_n^3) + a_{31}a_{13}^{*}(x_n^3) & a_{11}+a_{22}^{*}(x_{n+1}^3) \end{bmatrix}$$

La représentation duale de H(.) est obtenue par l'introduction des variables annexes dans l'équation (II-151). Nous obtenons la forme matricielle suivante :

$$C(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & a_{11}a_{32}^{*}(x_n^2) + a_{21}a_{12}^{*}(x_n^2) & 0 & -a_{11}a_{23}^{*}(x_n^3) + a_{21}a_{13}^{*}(x_n^3) \\ 1 & a_{11} + a_{22}^{*}(x_n^2) & 0 & a_{23}^{*}(x_n^3) \\ 0 & -a_{11}a_{23}^{*}(x_n^2) + a_{31}a_{12}^{*}(x_n^2) & 0 & -a_{11}a_{23}^{*}(x_n^3) + a_{31}a_{13}^{*}(x_n^3) \\ 0 & a_{32}^{*}(x_n^2) & 1 & a_{11} + a_{33}^{*}(x_n^3) \end{bmatrix} . \qquad \text{(II-153)}$$

C'est une matrice sous forme Frobenius généralisée dépendant de deux paramètres seulement et au même instant n (x_n^2, x_n^3)

<u>$2^{ème}$ cas : $q = 4$, $p = 2$</u>

Ce cas correspond à la représentation (II-154)

$$\begin{aligned}
x^1_{n+1} &= a_{11}x^1_n + a_{12}x^2_n + a_{13}(x^3_n) + a_{14}(x^4_n)\\
x^2_{n+1} &= a_{21}x^1_n + a_{22}x^2_n + a_{23}(x^3_n) + a_{24}(x^4_n)\\
x^3_{n+1} &= a_{31}x^1_n + a_{32}x^2_n + a_{33}(x^3_n) + a_{34}(x^4_n)\\
x^4_{n+1} &= a_{41}x^1_n + a_{42}x^2_n + a_{43}(x^3_n) + a_{44}(x^4_n)
\end{aligned} \qquad \text{(II-154)}$$

le système d'ordre 4, où x^1_n et x^2_n sont à éliminer, pour cela, il vient une deuxième représentation sous forme de blocs.

α) *Nouvelle représentation*

$$\begin{aligned}
X^1_{n+1} &= A_{11}\, X^1_n + A_{12}\, X^2_n + A^*_{13}\,(\sigma_n)\sigma_n\\
X^2_{n+1} &= A_{21}\, X^1_n + A_{22}\, X^2_n + A^*_{23}\,(\sigma_n)\sigma_n \qquad A_{ij} \in \mathcal{R}^{2x2}\\
\sigma_{n+1} &= A_{31}\, X^1_n + A_{32}\, X^2_n + A^*_{33}\,(\sigma_n)\sigma_n
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
X^{1T}_n &= (x^1_n, x^1_n)\\
X^{2T}_n &= (x^2_n, x^2_n) \qquad X^i_n \in \mathcal{R}^2 \qquad i = 1,2\\
\sigma^T_n &= (x^3_n, x^4_n)
\end{aligned}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix}, \quad A^*_{13} = \begin{bmatrix} a^*_{13}(x^3_n) & a^*_{14}(x^4_n) \\ a^*_{13}(x^3_n) & a^*_{14}(x^4_n) \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A^*_{23} = \begin{bmatrix} a^*_{23}(x^3_n) & a^*_{24}(x^4_n) \\ a^*_{23}(x^3_n) & a^*_{24}(x^4_n) \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{41} \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} a_{32} & 0 \\ 0 & a_{42} \end{bmatrix}, \quad A^*_{33} = \begin{bmatrix} a^*_{33}(x^3_n) & a^*_{34}(x^4_n) \\ a^*_{43}(x^3_n) & a^*_{44}(x^4_n) \end{bmatrix}$$

β) *Polynôme vectoriel caractéristique*

$$P({}^2\Lambda) = (\mathrm{DET})' \begin{bmatrix} A_{11} - {}^2\Lambda & A_{12} & A^*_{13}(\sigma_n) \\ A_{21} & A_{22} - {}^2\Lambda & A^*_{23}(\sigma_n) \\ A_{31} & A_{32} & A^*_{33}(\sigma_n) - {}^2\Lambda \end{bmatrix} \qquad \text{(II-155)}$$

en développant l'expression, on obtient :

$$P({}^2\Lambda) = {}^2\Lambda^3 - P^{1*}(\sigma_{n+2})\, {}^2\Lambda^2 + P^{2*}(\sigma_{n+1})\, {}^2\Lambda - P^{1*}(\sigma_n) \qquad \text{(II-156)}$$

$$P^{i*}(.) \in \mathcal{R}^{2\times 2} \text{ de composantes } P^{i*}_{jk}\ ,\ (j, k) = 1,2$$

$P({}^2\Lambda)$ peut être sous forme matricielle, quand on remplace ${}^2\Lambda$ par sa valeur dans l'expression (II-156)

$${}^2\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

il vient :

$$P({}^2\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\lambda_1) & \mathcal{T}_{12}(\lambda_2) \\ \mathcal{T}_{21}(\lambda_1) & \mathcal{T}_{22}(\lambda_2) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-157)}$$

avec

$$\mathcal{T}_{jj}(\lambda_j) = \lambda_j^3 - p^{1*}_{jj}(x_n^{j+2})\, \lambda_j^2 + p^{2*}_{jj}(x_n^{j+2})\lambda_j - p^{3*}_{jj}(x_n^{j+2}) \qquad (j=1,2)$$

$$\mathcal{T}_{jk}(\lambda_k) = - p^{*}_{jk}(x_n^{k+2})\, \lambda_k^2 + p^{2*}_{jk}(x_n^{k+2})\lambda_k - p^{3*}_{jk}(x_n^{k+2}) \qquad (j = k = 1,2)$$

avec $P^{i*}(.)$ sont des coefficients matriciels de la forme :

$$P^{1*}(\sigma_{n+2}) = \begin{bmatrix} p^{1*}_{11}(x^3_{n+2}) & p^{1*}_{12}(x^4_{n+2}) \\ p^{1*}_{21}(x^3_{n+2}) & p^{1*}_{22}(x^4_{n+2}) \end{bmatrix} = A_{11} + A_{22} + A^*_{33}(\sigma_{n+2}) = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} + a^*_{33}(x^3_{n+2}) & a^*_{34}(x^4_{n+2}) \\ a^*_{43}(x^3_{n+2}) & a_{11} + a_{22} + a^*_{44}(x^4_{n+2}) \end{bmatrix}$$

$$P^{2*}(\sigma_{n+1}) = \begin{bmatrix} p^{2*}_{11}(x^3_{n+1}) & p^{2*}_{12}(x^4_{n+1}) \\ p^{2*}_{21}(x^3_{n+1}) & p^{2*}_{22}(x^4_{n+1}) \end{bmatrix} = A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12} + A_{11} A^*_{33}(\sigma_{n+1}) + A_{22} A^*_{33}(\sigma_{n+1}) - A_{31} A^*_{13}(\sigma_{n+1}) - A_{32} A^*_{23}(\sigma_{n+1})$$

$$P^{3*}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} p^{3*}_{11}(x^3_n) & p^{3*}_{12}(x^4_n) \\ p^{3*}_{21}(x^3_n) & p^{3*}_{22}(x^4_n) \end{bmatrix} = A_{11} A_{22} A^*_{33}(\sigma_n) - A_{11} A_{32} A^*_{23}(\sigma_n) - A_{21} A_{12} A^*_{33}(\sigma_n) + A_{21} A_{32} A^*_{13} + A_{31} A_{22} A^*_{13}(\sigma_n) + A_{31} A_{12} A^*_{23}(\sigma_n)$$

γ) *Equation de récurrence vectorielle*

En posant dans l'expression du polynôme (II-156)

$\sigma_{n+i} \xrightarrow{\quad} {}^{2}\Lambda^{i} \ \sigma_n \qquad (i = 0,1,2)$

il vient l'équation vectorielle suivante :

$$\sigma_{n+3} - P^{1*}(\sigma_{n+2})\sigma_{n+2} + P^{2*}(\sigma_{n+1})\sigma_{n+1} - P^{3*}(\sigma_n)\sigma_n = 0 \qquad \text{(II-158)}$$

où

$$\begin{bmatrix} x^3_{n+3} \\ x^4_{n+3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^{1*}_{11}(x^3_{n+2}) & p^{1*}_{12}(x^4_{n+2}) \\ p^{1*}_{21}(x^3_{n+2}) & p^{1*}_{22}(x^4_{n+2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3_{n+2} \\ x^4_{n+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p^{2*}_{11}(x^3_{n+1}) & p^{2*}_{12}(x^4_{n+1}) \\ p^{2*}_{21}(x^3_{n+1}) & p^{2*}_{22}(x^4_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3_{n+1} \\ x^4_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^{3*}_{11}(x^3_n) & p^{3*}_{12}(x^4_n) \\ p^{3*}_{21}(x^3_n) & p^{3*}_{22}(x^4_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3_1 \\ x^4_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ξ) *Forme matricielle*

- Forme compagnon généralisée

La matrice correspondante est de la forme :

$$H(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ +p^{3*}_{11}(x^3_n) & -p^{2*}_{11}(x^3_{n+1}) & +p^{1*}_{11}(x^3_{n+2}) & p^{3*}_{12}(x^4_n) & -p^{2*}_{12}(x^4_{n+1}) & p^{1*}_{12}(x^4_{n+2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p^{3*}_{21}(x^3_n) & -p^{2*}_{21}(x^3_{n+1}) & +p^{1*}_{21}(x^3_{n+2}) & p^{3*}_{22}(x^4_n) & -p^{2*}_{22}(x^4_{n+1}) & p^{1*}_{22}(x^4_{n+2}) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-159)}$$

elle dépend de tous les paramètres du système et à des instants différents.

- Forme Frobenius généralisée

Elle se met sous la forme :

$$C(.)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & p_{11}^{3*}(x_n^3) & 0 & 0 & p_{12}^{3*}(x_n^4) \\ 1 & 0 & -p_{11}^{2*}(x_n^3) & 0 & 0 & -p_{12}^{2*}(x_n^4) \\ 0 & 1 & p_{11}^{3*}(x_n^3) & 0 & 0 & p_{12}^{1*}(x_n^4) \\ 0 & 0 & p_{21}^{3*}(x_n^3) & 0 & 0 & p_{22}^{3*}(x_n^4) \\ 0 & 0 & -p_{21}^{2*}(x_n^3) & 1 & 0 & -p_{22}^{3*}(x_n^4) \\ 0 & 0 & p_{21}^{1*}(x_n^3) & 0 & 1 & p_{22}^{1*}(x_n^4) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-160)}$$

elle ne dépend elle que de deux paramètres x_n^3 et x_n^4 et au même instant, ce qui détermine son choix par rapport à la représentation (II-159) pour l'étude de stabilité dans le troisième chapitre.

CONCLUSION

Nous avons montré qu'en se plaçant dans un anneau commutatif la régle d'élimination établie dans le cas de polynôme caractéristique scalaire peut être généralisée. Nous avons défini dans ce sens le déterminant matriciel et le "polynôme caractéristique" généralisé. Sous les mêmes hypothèses, les régles de calculs établies pour les matrices à coefficients scalaires sont aussi généralisées au cas de matrices partitionnées sous forme de blocs commutatifs.

Pour assurer la propriété de commutativité entre les blocs constituant la matrice, nous avons utilisé le principe de la redondance ou dilatation à un certain degré défini, en tenant compte de l'ordre du système initial et de la dimension choisie pour les blocs définis lors du partitionnement.

L'application des algorithmes d'élimination établis aurapavant aboutit à une forme de type équation de récurrence vectorielle de divers ordres. Divers types de représentations peuvent apparaître suivant le choix de représentation souhaitée.

CHAPITRE III

METHODES D'ETUDE DE STABILITE RELATIVES AUX DIFFERENTES REPRESENTATIONS OBTENUES

INTRODUCTION.

L'application des algorithmes d'élimination établis dans les premiers et deuxième chapitres conduit à des représentations systématiques du type équation de récurrence vectorielles. Nous avons montré que ces dernières sont génératrices de plusieurs formes matricielles. Nous nous intéressons dans ce chapitre, en plus de l'équation de recurrence vectorielle à la forme matricielle de type Frobenius généralisé. Les deux formulations ainsi choisi portent en fait sur une partie des composantes du systèmes : celles intervenant non linéairement.

Parmi les méthodes d'études de stabilité développées auparavant, nous en retiendrons deux en particulier. Le critère de majoration élaboré pour les équations scalaires, sera généralisé aux formes récurrentes vectorielles, ce qui constitue une extension du critère dans ses applications. D'autre part un changement de base sur la forme matricielle, conduit à une représentation permettant de mener une analyse de stabilité globale, qui permet dans certains cas, de conclure aisément à la validité de la conjoncture linéaire.

Une troisième partie de ce chapitre présente une méthode originale d'analyse de la stabilité vis à vis des conditions initiales utilisant la représentation proposée au deuxième chapitre. Cette méthode conduit à une définition simple de domaine d'attraction.

I - ETUDE DE LA STABILITE GLOBALE A PARTIR DES FORMES MATRICIELLES.

I-1 DESCRIPTION

Soit un système représenté par l'équation vectorielle (III-1)

$$X_{n+1} = \mathcal{A} X_n \qquad \text{(III-I)}$$

où

- $\mathcal{A}$ est une matrice partitionnée en m^2 blocs de matrices carrés de dimension $p \times p$. Les $(m-1)$ premières colonnes sont constituées de blocs diagonaux commutatifs.

- $X_n^T = (X_n^{1T} \text{ --- } X_n^{m-1T}, \sigma_n^T)$

avec $X_n^{iT} = (x_n^i, \text{ -- } x_n^i \text{ ---}, x_n^i) \in \mathcal{R}^p \quad \forall i = 1 \text{ --- } m-1.$

$\sigma_n^T = (\sigma_n^1 \text{ --- } \sigma_n^p) \in \mathcal{R}^p$

σ_n désigne ici le vecteur à partir duquel nous proposons d'établir différentes présentations.

L'application de l'alhorithme de mise en équations (ch. II) permet d'éliminer les vecteurs X_n^1 --- X_n^{m-1}, et d'établir l'équation de récurrence vectorielle relative au vecteurs σ_{n+i}. Il vient ainsi le polynôme caractéristique généralisé de la forme :

$$P(^p\Lambda) = {}^p\Lambda^m + \sum_{i=1}^{m} p^{i*}(\sigma_{n+m-i}) {}^p\Lambda^{m-i} \qquad \text{(III-2)}$$

avec ${}^p\Lambda$ une matrice diagonale carré de dimension $p \times p$ de la forme :

$${}^p\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \qquad \text{(III-3)}$$

En explicitant cette matrice dans (III-2), nous obtenons un polynôme matriciel en λ_i de la forme :

$$P({}^{p}\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\lambda_1,.) & --- & \mathcal{T}_{1p}(\lambda_p,.) \\ & & \\ \mathcal{T}_{p1}(\lambda_1,.) & --- & \mathcal{T}_{pp}(\lambda_p,.) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-4)}$$

on a ainsi pour les deux expressions du polynôme :

- $P^{i*}(.)$ matrices carrés de dimension $p \times p$ a coefficients non constants $p^{i*}_{jk}(.)$
- $\mathcal{T}_{jk}(.)$ polynômes scalaires en λ avec :

$$\mathcal{T}_{jj}(\lambda_j,.) = \lambda_j^m + \sum_{i=1}^{m} p^{i*}_{jj}(\sigma_n^j)\ \lambda_j^{m-i} \quad \text{pour } j = 1\ldots p$$

$$\mathcal{T}_{jk}(\lambda_k,.) = \sum_{i=1}^{m} p^{i*}_{jk}(\sigma_n^k)\ \lambda_k^{m-i} \qquad \text{pour } j \quad k = 1\ldots p \qquad \text{(III-5)}$$

en identifiant ${}^{p}\Lambda^{i}\sigma_n$ à σ_{n+i} $(i=0,1,\ldots m)$, dans le polynôme vectoriel (III-2) nous obtenons l'équation de récurrence vectorielle (III-6) :

$$\sigma_{n+m} + \sum_{i-1}^{m} P^{i*}(\sigma_{n+m-i})\ \sigma_{n+m-i} = 0 \qquad \text{(III-6)}$$

soit une forme developpée :

$$\begin{pmatrix} \sigma^1_{n+m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma^p_{n+m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p^{1*}_{11}(\sigma^1_{n+m-1}) & --- & p^{1*}_{1p}(\sigma^p_{n+m-1}) \\ & --- & \\ p^{1*}_{p1}(\sigma^1_{n+m-1}) & --- & p^{1*}_{pp}(\sigma^p_{n+m-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1_{n+m-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma^p_{n+m-1} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{pmatrix} p^{m}_{11}(\sigma^1_{n}) & --- & p^{m}_{1p}(\sigma^p_{n}) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ p^{m}_{p1}(\sigma^1_{n}) & --- & p^{m}_{pp}(\sigma^p_{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1_{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma^p_{n} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(III-7)}$$

I-2 ETUDE DE LA STABILITE.

L'introduction des variables annexes dans l'équation (III-6) conduit à une représentation de la forme Frobenius généralisée (III-8)

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} C_{11}(.) & --- & C_{1p}(.) \\ & --- & \\ C_{p1}(.) & --- & C_{pp}(.) \end{bmatrix} z_n \qquad \text{(III-8)}$$

où

$$C_{jj}(.) = \begin{bmatrix} 0 & ---- & & 0 & -p_{jj}^{m*}(\sigma_n^j) \\ 1 & 0 & --- & 0 & -p_{jj}^{(m-1)*}(\sigma_n^j) \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & -- & -- & 0 \; 1 & -p_{jj}^{1*}(\sigma_n^j) \end{bmatrix}, \; j = 1...p$$

$C_{jj}(.)$: blocs de matrices carrées d'ordre m, constituant la diagonale principale.

$$C_{jk}(.) = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & -p_{jk}^{m*}(\sigma_n^k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & -p_{jk}^{1*}(\sigma_n^k) \end{bmatrix}, \; j \neq k = 1...p$$

$C_{jk}(.)$: blocs hors diagonales dont les colonnes sont toutes nulles sauf la dernière.

1.2.1 - *Choix de la représentation.*

Le changement de base défini par la matrice bloc |44| :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & T_j^{-1} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & T_p^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-9)}$$

T_j^{-1} : matrice carrée a coefficients constants choisie selon l'expression :

$$T_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & (-\alpha_1^j) & (-\alpha_1^j)^2 & \cdots & (-\alpha_1^j)^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (-\alpha_{m-1}^j) & (-\alpha_{m-1}^j) & \cdots & (-\alpha_{m-1}^j)^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } j=1\ldots p \qquad \text{(III-10)}$$

conduit à une matrice constituée de p^2 blocs de matrice, carrées d'ordre m s'écrivant sous la forme :

$$B(.) = \begin{bmatrix} B_{11}(.) & \cdots & B_{1p}(.) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{p1}(.) & \cdots & B_{pp}(.) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-11)}$$

avec

$$B(.) = T^{-1}\, C(.)\, T.$$

Le calcul est effectué identiquement à celui des matrices à coefficients scalaires. Les blocs s'exprimant ainsi sous la forme :

$$B_{ii}(.) = T_i^{-1} C_{ii}(.) T_i \quad \text{pour } i = 1\ldots p$$

$$B_{ij}(.) = T_i^{-1} C_{ij} T_j \quad \text{pour } i \neq j = 1\ldots p$$

soit sous une forme developpée :

$$
B_{ii}(.)\quad \begin{bmatrix}
-\alpha_1^i & 0 & \cdots & 0 & -\mathcal{T}_{ii}(-\alpha_1^i,\ \sigma_n^i) \\
0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m-1}^i & -\mathcal{T}_{ii}(-\alpha_{m-1}^i,\ \sigma_n^i) \\
-\prod_{j=2}^{m-1}(\alpha_1^i-\alpha_j^i)^{-1} & \cdots & \cdots & -\sum_{j=1}^{m-2}(\alpha_{m-1}^i-\alpha_j^i) & -\sum_{j=1}^{m-1}(-\alpha_j^i) - p_{ii}^{1*}(\sigma_n^i)
\end{bmatrix}
$$

pour $i = 1 \ldots p$

avec :

$$
-\mathcal{T}_{ii}(-\alpha_l^i, \sigma_n^i) = -((-\alpha_l^i)^m + \sum_{j=1}^{m} p_{ii}^{j*}(\sigma_n^i)(-\alpha_l^i)^{m-j}) \text{ pour } l = 1\ldots(m-1) \qquad \text{(III-12)}
$$

Les blocs hors de la diagonale s'écrivent :

$$
B_{ij}(.) = \begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & -\mathcal{T}_{ij}(-\alpha_1^i,\ \sigma_n^j) \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & -\mathcal{T}_{ij}(-\alpha_{m-1}^i, \sigma_n^j) \\
0 & \cdots & 0 & -p_{ij}^{1*}(\sigma_n^j)
\end{bmatrix} \quad i \neq j = 1\ldots p \qquad \text{(III.13)}
$$

avec

$$
-\mathcal{T}_{ij}(-\alpha_l^i,\ \sigma_n^j) = -(\sum_{k=1}^{m} p_{ij}^{k*}(\sigma_n^j)(-\alpha_l^i)^{m-k}) \text{ pour } l = 1\ldots(m-1).
$$

En procédant par permutation des lignes et colonnes dans la matrice (III-11) nous pouvons obtenir une deuxième forme de matrice D(.) d'expression (III-14) :

$$
D(.) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12}(.) \\ D_{21} & D_{22}(.) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-14)}
$$

avec les notations suivantes :

$$
D_{11} = \text{diag } \{-\alpha_1^1 \ldots - \alpha_{m-1}^1, \ldots, -\alpha_1^i \ldots -\alpha_{m-1}^i, \ldots, -\alpha_1^p \ldots -\alpha_{m-1}^p\}
$$

$$D_{12}^{T}(.) = \left[\begin{pmatrix} -\mathcal{T}_{11}(-\alpha_1^1,\sigma_n^1)\ldots-\mathcal{T}_{1p}(-\alpha_1^1,\sigma_n^p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\mathcal{T}_{11}(-\alpha_{m-1}^1,\sigma_n^1)\ldots-\mathcal{T}_{1p}(-\alpha_{m-1}^1,\sigma_n^p) \end{pmatrix}^T \cdots \begin{pmatrix} -\mathcal{T}_{i1}(-\alpha_1^i,\sigma_n^1)\ldots-\mathcal{T}_{ip}(-\alpha_1^i,\sigma_n^p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\mathcal{T}_{i1}(-\alpha_{m-1}^i,\sigma_n^1)\ldots-\mathcal{T}_{ip}(-\alpha_{m-1}^i,\sigma_n^p) \end{pmatrix}^T \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \begin{pmatrix} -\mathcal{T}_{p1}(-\alpha_1^p,\sigma_n^1)\ldots-\mathcal{T}_{pp}(-\alpha_1^p,\sigma_n^p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\mathcal{T}_{p1}(-\alpha_{m-1}^p,\sigma_n^1)\ldots-\mathcal{T}_{pp}(-\alpha_{m-1}^p,\sigma_n^p) \end{pmatrix}^T \right]$$

$$D_{21}(.) = \left[\begin{pmatrix} -\prod_{j=2}^{m-1}(\alpha_1^1-\alpha_j^1)^{-1} \;\ldots\; -\prod_{j=1}^{m-2}(\alpha_{m-1}^1-\alpha_j^1)^{-1} \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ -\prod_{j=2}^{m-1}(\alpha_1^i-\alpha_j^i)^{-1} \;\ldots\; -\prod_{j=1}^{m-2}(\alpha_{m-1}^i-\alpha_j^i)^{-1} \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \end{pmatrix} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \begin{pmatrix} 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 0 \\ -\prod_{j=2}^{m-1}(\alpha_1^p-\alpha_j^p)^{-1} \;\ldots\; -\prod_{j=1}^{m-2}(\alpha_{m-1}^p-\alpha_j^p)^{-1} \end{pmatrix} \right]$$

$$D_{22}(.) = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{m-1}(\alpha_j^1)-p_{11}^{1*}(\sigma_n^1), & -p_{12}^{1*}(\sigma_n^2) & \ldots & -p_{1p}^{1*}(\sigma_n^p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_{i1}^{1*}(\sigma_n^1), & \ldots\ldots -\sum_{j=1}^{m-1}(-\alpha_j^i) - p_{ii}^{1*}(\sigma_n^i) & \ldots & -p_{ip}^{1*}(\sigma_n^p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_{p1}^{1*}(\sigma_n^1), & -p_{p2}^{1*}(\sigma_n^2) & \ldots\ldots -\sum_{j=1}^{m-1}(-\sigma_j^p) & -p_{pp}^{2*}(\sigma_n^p) \end{pmatrix}$$

Le système peut être représenté par l'équation (III-15)

$$W_{n+1} = D'(.)\ W_n \tag{III-15}$$

où

$$W_n^T = (W_{1n}^T \ldots W_{pn}^T,\ W_{(p+1)n}^T)$$

avec

$$W_{in}^T = (W_{in}^1 \ldots W_{in}^{m-1}) \qquad i = 1\ldots(p+1)$$

D'(.) est une matrice partitionnée en blocs de matrices carrées, soit :

$$D'(.) = \begin{bmatrix} D'_{11} & & & 0 & D'_{1(p+1)}(.) \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & D'_{ii} & & D'_{i(p+1)}(.) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & D'_{pp} & D'_{p(p+1)}(.) \\ D'_{(p+1)1}, \ldots, & & D'_{(p+1)i} \ldots\ldots & D'_{(p+1)p} & D'_{(p+1)(p+1)} \end{bmatrix} \tag{III-16}$$

avec

$$D'_{ii} = \begin{bmatrix} -\alpha_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha_{m-1}^i \end{bmatrix} \qquad \text{pour } i = 1\ldots p$$

$$D'_{i(p+1)}(.) = \begin{bmatrix} -\mathcal{J}_{i1}(-\alpha_1^i, \sigma_n^1) & \ldots\ldots\ldots & -\mathcal{J}_{ip}(-\alpha_1^i, \sigma_n^p) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ -\mathcal{J}_{i1}(-\alpha_{m-1}^i, \sigma_n^1) & \ldots\ldots & -\mathcal{J}_{ip}(-\alpha_{m-1}^i, \sigma_n^p) \end{bmatrix}$$

$$D'_{(p+1)i}(.) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ -\prod\limits_{j=2}^{m-1} (\alpha_1^i - \alpha_j^i)^{-1} & \cdots\cdots & -\prod\limits_{j=1}^{m-2} (\alpha_{m-1}^i - \alpha_j^i)^{-1} \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1\ldots p$$

$$D'_{(p+1)(p+1)}(.) = D_{22}(.).$$

Le choix de la même vectorielle (III-17) :

$$[p(W_n)]^T = [|W_{1n}^T|, \ldots |W_{pn}^T|, \text{Max} \{|w^1_{(p+1)n}|, \ldots |w^{m-1}_{(p+1)n}|\}] \qquad \text{(III-17)}$$

permet de définir pour le processus étudié, le système de comparaison (III-18) :

$$y_{n+1} = F(.)\, y_n \qquad \text{(III-18)}$$

où

$$F(.) = \left[\begin{array}{cccccc|c}
|\alpha_1^1| & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & R_1(-\alpha_1^1,\sigma_n) \\
 & |\alpha_{m-1}^1| & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & R_1(-\alpha_{m-1}^1,\sigma_n) \\
 & & |\alpha_1^i| & \cdots & \cdots & \cdots & R_i(-\alpha_1^i,\sigma_n) \\
 & & & |\alpha_{m-1}^i| & \cdots & \cdots & R_i(-\alpha_{m-1}^i,\sigma_n) \\
 & 0 & & & |\alpha_1^p| & \cdots & R_p(-\alpha_1^p,\sigma_n) \\
 & & & & & |\alpha_{m-1}^p| & R_p(-\alpha_{m-1}^p,\sigma_n) \\
|\prod\limits_{j=2}^{m-1}(\alpha_1^1-\alpha_j^1)| \cdots & |\prod\limits_{j=1}^{m-2}(\alpha_{m-1}^1-\alpha_j^1)^{-1}| \cdots & |\prod\limits_{j=2}^{m-1}(\alpha_1^i-\alpha_j^i)^{-1}| \cdots & |\prod\limits_{j=1}^{m-2}(\alpha_{m-1}^i-\alpha_j^i)^{-1}| \cdots & |\prod\limits_{j=2}^{m-1}(\alpha_1^p-\alpha_j^p)^{-1}| \cdots & |\prod\limits_{j=1}^{m-2}(\alpha_{m-1}^p-\alpha_j^p)| & R_s(.)
\end{array}\right]$$

en posant :

$$p(m-1)+1 = s$$

$$R_s(.) = \mathrm{Max} \left\{ \begin{array}{l} \left|- \sum_{j=1}^{m-1} -\alpha_j^1 - p_{11}^{1*}(\sigma_n^1)\right| + \sum_{j=2}^{p} \left|p_{1j}^{1*}(\sigma_n^j)\right| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|- \sum_{j=1}^{m-1} -\alpha_j^i - p_{ii}^{1*}(\sigma_n^i)\right| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \left|p_{ij}^{1*}(\sigma_n^j)\right| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|- \sum_{j=1}^{m-1} -\alpha_j^p - p_{pp}^{1*}(\sigma_n^p)\right| + \sum_{j=1}^{p-1} \left|p_{pj}^{1*}(\sigma_n^j)\right| \end{array} \right.$$

$$R_i(-\alpha_k^i,\sigma_n) = \{|\mathcal{T}_{i1}(-\alpha_k^i,\sigma_n^1)| + |\mathcal{T}_{i2}(-\alpha_k^i,\sigma_n^2)| \ldots + |\mathcal{T}_{ip}(-\alpha_k^i,\sigma_n^p)|\}$$

$k = 1\ldots m-1.$

La matrice F(.) est une matrice carrée d'ordre s, $(s = (m-1)p+1)$ a composantes toutes positives. Ses éléments non linéaires sont tous isolés dans la dernière colonne. L'application des conditions de KOTELYANSKI conduit à des conditions suffisantes de stabilité asymptotique et globale du système initial (III-I), d'où l'énoncé du théorème suivant :

1.2.2 Théorème III.1 |13| |5|

a) *Le système discret regi par l'équation de récurrence vectorielle (III.6) est asymptotiquement stable et localement, s'il existe* $\varepsilon > 0$, *et des paramètres arbitraires* $\alpha_j^1, \alpha_j^2, \ldots, \alpha_j^p$ *avec* $j = 1\ldots(m-1)$ *tels que les deux contraintes suivantes sur la matrice* F(.) *soient vérifiées :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} * \; 1 - |\alpha_j^i| \geq \varepsilon > & \forall j = 1,2,\ldots,(m-1) \\ & \forall i = 1,\ldots,p \\ & \\ * \; \det(I_s - F(.)) \geq \varepsilon > 0 \; \forall \sigma_n \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^p, \; \{0\} \in \mathcal{D}, \; \mathcal{D} \neq 0. & \end{array} \right. \quad \text{(III.19)}$$

b) *Si de plus* $\mathcal{D} = \mathcal{R}^p$ *la stabilité est globale.*

I.3 - APPLICATION.

Nous nous proposons deux systèmes interconnectés linéairement. L'un fonctionnant en régulateur comportant dans sa chaine d'action successivement un échantillonneur non linéaire de période constante T et un second ordre avec une intégration à une constante de temps τ .L'autre est un premier ordre commandé non linéairement par un deuxième échantillonneur non linéaire de même période que le premier et fonctionnant en synchronisation. Le système peut être représenté par le schéma bloc suivant :

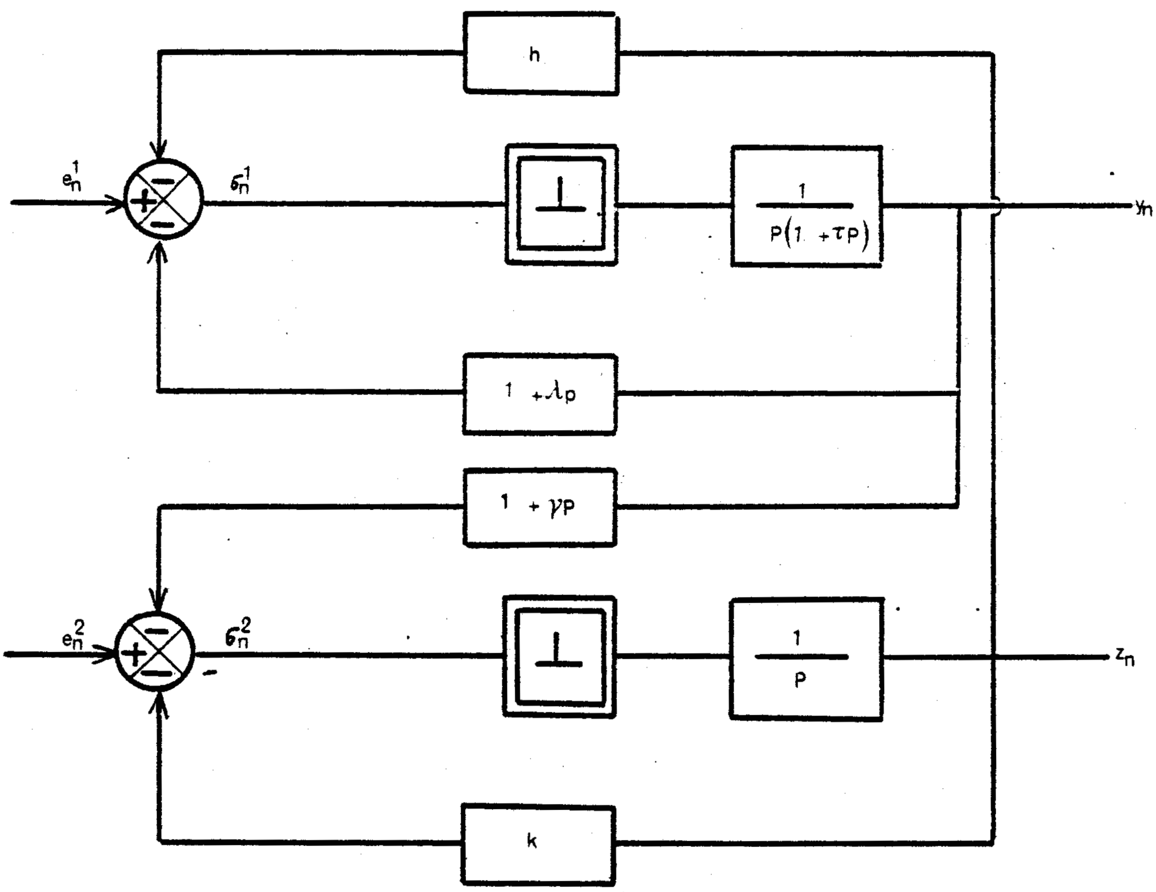

figure: 4

α) *Mise en équations*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \tau(1-D)\; y'_n + U(\sigma^1_n) \\ y'_{n+1} = \qquad D \;\; y'_n + v(\sigma^1_n) \\ \sigma^1_n = -y_n - \lambda y'_n - hz_n \Rightarrow -(y_n + hz_n) = \sigma^1_n + \lambda y'_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + W(\sigma^2_n) \\ \sigma^2_n = -y_n - \gamma y'_n - kz_n \Rightarrow -(y_n + kz_n) = \sigma^2_n + \gamma y'_n. \end{cases}$$

Nous obtenons l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y'_{n+1} \\ \sigma^1_{n+1} \\ \sigma^2_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & v^*(\sigma^1_n) & 0 \\ r & g^*_1(\sigma^1_n) & \ell^*_1(\sigma^2_n) \\ s & g^*_2(\sigma^1_n) & \ell^*_2(\sigma^2_n) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y'_n \\ \sigma^1_n \\ \sigma^2_n \end{pmatrix} \qquad \text{(III-20)}$$

avec

$$D = e^{-T/\tau}$$

$$v(\sigma^1_n) = v^*(\sigma^1_n).\sigma^1_n,\ U(\sigma^1_n) = u^*(\sigma^1_n)\sigma^1_n,\ W(\sigma^2_n) = W^*(\sigma^2_n)\ \sigma^2_n$$

$$g^*_1(\sigma^1_n) = 1 - U^*(\sigma^1_n) - \lambda v^*(\sigma^1_n),\ \ell^*_1(\sigma^2_n) = -\ hW^*(\sigma^2_n),\ r = (\lambda-\tau)(1-D)$$

$$g^*_2(\sigma^1_n) = -\ U^*(\sigma^1_n) - \gamma v^*(\sigma^1_n),\ \ell^*_2(\sigma^2_n) = -1-kW^*(\sigma^2_n),\ s = (\gamma-\tau)(1-D)$$

Les échantillonneurs nonlinéaires sont des bloqueurs d'ordre zéro munis de non linéarités $f_1(\sigma^1_n)$ et $f_2(\sigma^2_n)$. Il vient alors :

$$u^*(\sigma^1_n) = [T-\tau(1-D)]\ f^*_1(\sigma^1_n),\ v^*(\sigma^1_n) = (1-D)\ f^*_1(\sigma^1_n),\ W^*(\sigma^2_n) = Tf^*_2(\sigma^2_n)$$

σ^2_n, σ^2_n sont les deux variables traitées non linéairement.
y'_n est la composante que nous désirons éliminer, et trouver une équation de récurrence régissant σ^1_n et σ^2_n.

β) *Application de l'algorithme d'élimination.*

On dilate la matrice initiale du système (III-20) et nous la partitionnons en blocs de matrices carrées d'ordre deux, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y'_{n+1} \\ y'_{n+1} \\ \sigma^1_{n+1} \\ \sigma^2_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v^*(\sigma^1_n) & 0 \\ v^*(\sigma^1_n) & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g^*_1(\sigma^1_n) & \ell^*_1(\sigma^2_n) \\ g^*_2(\sigma^1_n) & \ell^*_2(\sigma^2_n) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_n \\ y'_n \\ \sigma^I_n \\ \sigma^2_n \end{bmatrix} \qquad \text{(III-21)}$$

Les deux blocs de la première colonne sont commutatifs, l'application de l'algorithme en vue d'obtenir le polynôme caractéristique généralisé donne l'expression suivante :

$$P({}^2\Lambda) = {}^2\Lambda^2 + \begin{bmatrix} -D-g^*_1(\sigma^1_n), & -\ell^*_1(\sigma^2_n) \\ -g^*_2(\sigma^1_n), & -D-\ell^*_2(\sigma^2_n) \end{bmatrix} {}^2\Lambda + \begin{bmatrix} Dg^*_1(\sigma^1_n)-rv^*(\sigma^1_n), & D\ell^*_1(\sigma^2_n) \\ Dg^*_2(\sigma^1_n)-sv^*(\sigma^1_n), & D\ell^*_2(\sigma^2_n) \end{bmatrix}$$

(III-22)

En remplaçant ${}^2\Lambda$ par sa valeur soit :

$${}^2\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Il vient la relation (III-49)

$$P(^2\Lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1^2-(D+g_1^*(\sigma_n^1))\lambda_1 + (Dg_1^*(\sigma_n^1)-rv^*(\sigma_n^1)), & -\lambda_2\ell_1^*(\sigma_n^2)+D\ell_1^*(\sigma_n^2) \\ -\lambda_1 g_2^*(\sigma_n^1) + Dg_2^*(\sigma_n^1) - sv^*(\sigma_n^1), & \lambda_2^2-(D+\ell_2^*(\sigma_n^2))\lambda_2+D\ell_2^*(\sigma_n^2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11}(\sigma_n^1,\lambda_1), & \mathcal{T}_{12}(\sigma_n^2,\lambda_2) \\ \mathcal{T}_{21}(\sigma_n^1, \lambda_1), & \mathcal{T}_{21}(\sigma_n^2,\lambda_2) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-23)}$$

γ) *Equation de récurrence.*

Par identification dans le polynôme vectoriel (III-22)

$$^2\Lambda^i \begin{pmatrix} \sigma_n^1 \\ \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{n+i}^1 \\ \sigma_{n+i}^2 \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 0,1,2,$$

Il vient alors la relation (III-24) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{n+2}^1 \\ \sigma_{n+2}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D-g_1^*(\sigma_{n+1}^1), & -\ell_1^*(\sigma_{n+1}^2) \\ -g_2^*(\sigma_{n+1}^1), & -D-\ell_2^*(\sigma_{n+1}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{n+1}^1 \\ \sigma_{n+1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Dg_1^*(\sigma_n^1)-rv^*(\sigma_n^1), & D\ell_1^*(\sigma_n^2) \\ Dg_2^*(\sigma_n^1)-sv^*(\sigma_n^2), & D\ell_2^*(\sigma_n^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n^1 \\ \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(III-24)

Σ) *Forme matricielle.*

Après l'introduction des variables annexes et permutation de lignes et colonnes suivant le procédé décrit auparavant, nous obtenons la matrice β(.) suivante :

$$\beta(.) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Dg_1^*(\sigma_n^1) + rv^*(\sigma_n^1) \\ 1 & D+g_1^*(\sigma_n^1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -D\ell_1^*(\sigma_n^2) \\ 0 & \ell_1^*(\sigma_n^2) \end{bmatrix} \\ & \\ \begin{bmatrix} 0 & -Dg_2^*(\sigma_n^1)+sv^*(\sigma_n^1) \\ 0 & g_2^*(\sigma_n^1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -D\ell_2^*(\sigma_n^2) \\ 1 & D+\ell_2^*(\sigma_n^2) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \qquad \text{(III-25)}$$

- *<u>Etude de la stabilité</u>*.

La matrice de changement de base de la forme

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \qquad \text{(III-26)}$$

conduit à la représentation (III-27) :

$$z_{n+1} = D(.)\, z_n \qquad \text{(III-27)}$$

avec :

$$D(.) = \begin{pmatrix} -\alpha_1^1 & 0 & , -\mathcal{J}_{11}(\sigma_n^1,-\alpha_1^1), & -\mathcal{J}_{12}(\sigma_n^2,-\alpha_1^1) \\ 0 & -\alpha_1^2 & , -\mathcal{J}_{21}(\sigma_n^1,-\alpha_1^2), & -\mathcal{J}_{22}(\sigma_n^2,-\alpha_1^2) \\ 1 & 0 & , \alpha_1^1+D+g_1^*(\sigma_n^1), & \ell_1^*(\sigma_n^2) \\ 0 & 1 & , g_2^*(\sigma_n^1), & \alpha_1^2+D+\ell_2^*(\sigma_n^2) \end{pmatrix}$$

Soit p(.) la norme relative au vecteur z_n telle que :

$$p(z_n)^T = (|z_n^1|, |z_n^2|, \text{Max}\,[|z_n^3|, |z_n^4|])$$

nous obtenons le système de comparaison (III-28)

$$y_{n+1} = \begin{pmatrix} |\alpha_1^1| & 0 & (|\mathcal{T}_{11}(\sigma_n^1,-\alpha_1^1)| + |\mathcal{T}_{12}(\sigma_n^2,-\alpha_1^1)|) \\ 0 & |\alpha_1^2| & (|\mathcal{T}_{21}(\sigma_n^1,-\alpha_1^2)| + |\mathcal{T}_{22}(\sigma_n^2,-\alpha_1^2)|) \\ 1 & 1 & \text{Max}\begin{bmatrix} |\alpha_1^1+D+g_1^*(\sigma_n^1)| + |\ell_1^*(\sigma_n^2)| \\ |\alpha_1^2+D+\ell_2^*(\sigma_n^2)| + |g_2^*(\sigma_n^1)| \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ y_n^3 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-28)}$$

Le système obtenu est sous la forme en flèche mince. Les éléments non linéaires sont isolés dans la dernière colonne. L'application du théorème (III.1) conduit à une condition suffisante de stabilité asymptotique : soit en remplaçant tous les termes par leur valeur :

$$\begin{cases} 1 - |\alpha_1^1| \geq \varepsilon > 0 \\ 1 - |\alpha_1^2| \geq \varepsilon > 0 \\ (1-|\alpha_1^1|)[(1-|\alpha_1^2|)(1-C)-B] - A(1-|\alpha_1^2|) \geq \varepsilon > 0 \end{cases} \qquad \text{(III-29)}$$

avec :

$$A = (|(\alpha_1^1)^2 + D\alpha_1^1+(\alpha_1^1+D)-af_1^*(\sigma_n^1)| + |(\alpha_1^1+D)hTf_2^*(\sigma_n^2)|)$$

$$B = (|bf_1^*(\sigma_n^1)| + |(\alpha_1^2)^2 + D\alpha_1^2 - (1+kTf_2^*(\sigma_n^2))(\alpha_1^1+D)|)$$

$$C = \text{Max}\begin{cases} |1 + \alpha_1^1+D-cf_1^*(\sigma_n^1)| + |hTf_2^*(\sigma_n^2)| \\ |\alpha_1^2 + D-1-kTf_2^*(\sigma_n^2)| + |df_1^*(\sigma_n^1)| \end{cases}$$

où $$a = (\alpha_1^1 + D)\ ((1-D)(\lambda-\tau)+T)\ +\ (\lambda-\tau)(1-D)^2$$

$$b = -(\alpha_1^2+D)(T-(1-D)(\gamma-\tau)-(1-D)^2(\gamma-\tau)$$

$$c = T + (1-D)(\lambda-\tau)$$

$$d = T + (1-\alpha_1^1)(\gamma-\tau)$$

II - ETUDE A PARTIR DE L'EQUATION DE RECURRENCE VECTORIELLE.

II-1 GENERALISATION DU CRITERE DE MAJORATION.

Nous étudions une généralisation aux équations de récurrence vectorielles d'une méthode élaborée pour les équations de récurrence scalaires.

La méthode s'applique directement sur les formes récurrente de type (III-30) :

$$\sigma_{n+m} + \sum_{i=1}^{m} P^i(\sigma_{n+m-i}) = 0 \qquad \text{(III-30)}$$

avec

$\sigma_n \in \mathcal{R}^p$, vecteur de composantes $\sigma_n^i(i=1\ldots p)$

$P^i(.) \in \mathcal{R}^p$, vecteur de composantes $p_k^i(.)$ $(k=1\ldots p)$

II-1-1 CRITERE PRATIQUE GENERALISE.

Notons :

$q(.)$ une norme relative au vecteur σ_n de taille k

Il vient :

$$q(\sigma_{n+m}) \leq \sum_{i=1}^{m} S^i(\sigma_{n+m-i}) \qquad \text{(III-31)}$$

avec

$S^i(.) = q(P^i(.))$

$S^i(.) \in \mathcal{R}^k$, vecteur de composante $s_l^i(l = 1\ldots k)$

Posons :

$$S(\sigma_{n+m-1},\ldots,\sigma_{n+1},\ \sigma_n) = \sum_{i=1}^{m} S^i\ (\sigma_{n+m-i}) \qquad \text{(III-32)}$$

La fonction F(.) de $R \in \mathcal{R}^k$ définie par :

$$F(R) = \sum_{i=1}^{m} \max_{q(\alpha) \leq R} S^i(\alpha) \qquad \text{(III-33)}$$

avec

$$\alpha \in \mathcal{R}^p \text{ et } R^T = [R_1,\ldots,R_k],\ R_i > 0 \quad \forall i = 1,\ldots,k.$$

est majorante de la fonction vectorielle positive $S(\beta)$ lorsque $\beta \in \mathcal{R}^p$ appartient au domaine défini par $q(\beta) \leq R \quad \forall i = 1\ldots m$.
Dans ces conditions si :

$$q(\sigma_{n+m-i}) \leq R \quad \forall i = 1\ldots m \qquad \text{(III-34)}$$

Il vient l'inégalité (III-35) :

$$q(\sigma_{n+m}) \leq \sum_{i=1}^{m} \max_{q(\alpha) \leq R} S^i(\alpha) = F(R) \qquad \text{(III-35)}$$

vérifiée composante à composante.

Cette fonction vectorielle satisfait les hypothèses permettant l'application des conditions de majoration d'où le critère suivant :

1) *Enoncé du critère.*

Si la suite vectorielle de terme générale Gr défini par la relation (III-36)

$$\begin{cases} G_{r+1} = F(Gr) \\ G_o = \max\ \{q(\sigma_o)\ldots q(\sigma_{m-1})\} \end{cases} \qquad \text{(III-36)}$$

tend vers une limite L, $L = \lim_{r\to\infty} G_r$.
$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix}$$

Au bout d'un temps suffisant, les amplitudes des solutions de l'équation (III-30) sont majorées et telles que :

$$\lim_{n\to\infty} q(\sigma_n) \leq \max\ \{G_o, L\} \qquad \text{(III-37)}$$

β) *Démonstration.*

Supposons que L soit la limite de G_r quand $r \to \infty$ pour les G_o considérés.

Posons :

$$\left.\begin{aligned} &- V_n = q(\sigma_n) \\ &- W_n = \text{MAX}\ \{V_n, V_{n+1}, \dots, V_{n+m-1}\} \end{aligned}\right. \qquad \text{(III-38)}$$

le MAX étant défini ici composante à composante, avec les hypothèses (III-36), il vient :

$$V_0, V_1, \dots, V_{m-1} \leq G_o$$

on sait que si :

$$q(\sigma_n)\ ,\ q(\sigma_{n+1}), \dots q(\sigma_{n+m-1}) \leq R$$

alors :

$$q(\sigma_{n+m}) \leq F(R)$$

écrivons la suite W_n à l'instant n+1 :

$$W_{n+1} = \text{MAX}\ \{V_{n+1} \dots V_{n+m-1}, V_{n+m}\} \qquad \text{(III-39)}$$

soit :

$$W_{n+1} \leq \text{MAX}\ \{\text{MAX}\{V_n, V_{n+1}, \dots V_{n+m-1}\}, V_{n+m}\}$$

Il vient alors :

$$W_{n+1} \leq \text{MAX}\ \{W_n, V_{n+m}\}$$

en tenant compte des relations au-dessus, nous obtenons la suite (III-40)

$$W_{n+1} \leq \text{MAX}\ \{W_n, F(W_n)\} \qquad \text{(III-40)}$$

Cette inégalité conduit à considérer deux suites distinctes :

- La première suite

$$W^1_{n+1} = W^1_n \tag{III-41}$$

qui converge vers W_o

-La deuxième suite

$$W^2_{n+1} = F(W^2_n) \tag{III-42}$$

qui tend elle vers L pour n tendant vers ∞
La suite (III-40)

$$W_{n+1} \leq \text{MAX } \{W_1, F(W_n)\}$$

converge donc vers une limite telle que

$$\lim_{n\to\infty} W_n \leq \text{MAX } \{G_o, L\} \tag{III-43}$$

ce qui démontre le critère.

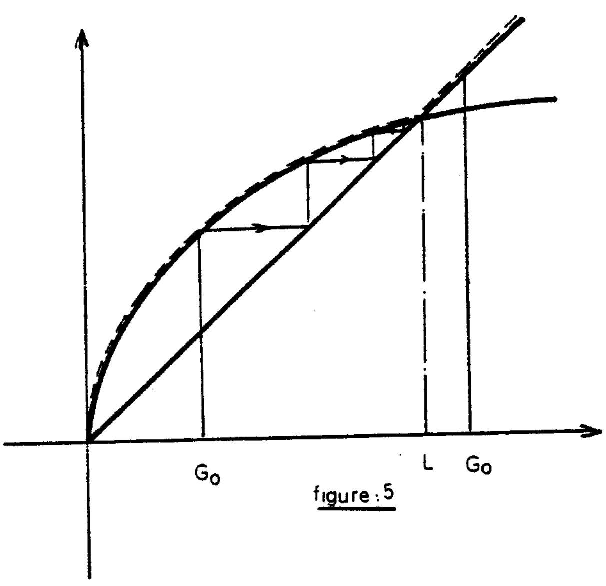

figure : 5

II.1.2 *Cas particuliers*.

Lorsque nous prenons pour q(·) une norme scalaire $\phi(.)$ correspondant au vecteur σ_n.
Il vient de la relation (III-30) l'inégalité suivante :

$$\phi_{n+m} \leq \sum_{i=1}^{m} f_i (\phi_{n+m-i})$$

avec

$$\phi_{n+m} = \phi(\sigma_{n+m})$$

$$f_i(.) = \phi(P^i(.)) \text{ qui sont des scalaires.}$$

Une majorante des oscillations limites du processus initial est définie sous la forme suivante :

$$F(S) = \sum_{i=1}^{m} \underset{\phi(\alpha) \leq S}{\text{Max}} fi(\alpha) \qquad \text{(III-44)}$$

$$\alpha^T = (\alpha^1, \ldots, \alpha^p)$$

L'étude s'effectue alors graphiquement. Il suffit de tracer les courbes représentatives des m équations aux paramètres α. L'intersection de la courbe somme avec la première bissectrice définie la valeur de L d'où il résulte une majorante de l'amplitude maximum des oscillations limites.

II.1.3 Remarque.

Dans le cas d'un système faiblement non linéaire au voisinage de l'origine, il peut être intéressant d'envisager une majoration de l'amplitude des oscillations limites à partir d'une représentation de la forme (III-45) :

$$\sigma_{n+m} + \sum_{i=1}^{m} P^{i*}(\sigma_{n+m-i})\, \sigma_{n+m-i} = 0 \qquad \text{(III-45)}$$

avec $\sigma_n \in \mathcal{R}^p$

$P^{i*}(.) \in \mathcal{R}^{p\times p}$, matrice carrés de composantes $p^{i*}_{jk}(.)$
$(j,k = 1\ldots p)$ $(i = 1\ldots m)$

Notons pour la même norme q(.) définie auparavant :

$M_{qq}(P^{i*}(.)) \in \mathcal{R}_+^{k\times k}$, la norme de matrice correspondante
(q est supposée ici régulière).

Il vient :

$$q(\sigma_{n+m}) \leq \sum_{i=1}^{m} M_{qq}(P^{i*}(\sigma_{n+m-i}))\, q(\sigma_{n+m-i})$$

avec

$$M_{qq}(P^{i*}(\sigma_{n+m-i}))q(\sigma_{n+m-i}) = \begin{pmatrix} m_{11}^{i*}(\sigma_{n+m-i}) & \cdots & m_{1k}^{i*}(\sigma_{n+m-i}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{k_1}^{i*}(\sigma_{n+m-i}) & \cdots & m_{k\,k}^{i*}(\sigma_{n+m-i}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(\sigma_{n+m-i}) \\ \cdots \\ q_k(\sigma_{n+m-i}) \end{pmatrix}$$

Posons :

$$- \; P(\sigma_{n+m-1}, \ldots \sigma_{n+1}, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{m} M_{qq}(P^{i*}(\sigma_{n+m-i})$$

$$- \; \mathrm{MAX}\,(V,W) = \begin{pmatrix} \mathrm{Max}\,(v^1, w^1) \\ \vdots \\ \mathrm{Max}\,(v^k, w^k) \end{pmatrix}$$

$$\forall V,\, W \in \mathcal{R}^k : \quad V^T = (v^1 \ldots v^k)$$
$$W^T = (w^1 \ldots w^k)$$

- le maximum sur la matrice $M_{qq}(.)$ est défini comme étant le maximum sur chaque terme de la matrice pris séparément soit

$$\underset{q(\alpha)\leq R}{\mathrm{MAX}}\,(M_{qq}(P^{i*}(.)) = \begin{pmatrix} \underset{q(\alpha)\leq R}{\mathrm{Max}}\,(m_{11}^{i*}(.)) & \cdots & \underset{q(\alpha)\leq R}{\mathrm{Max}}\,(m_{1k}^{i*}(.)) \\ & & \\ \underset{q(\alpha)\leq R}{\mathrm{Max}}\,(m_{k1}^{i*}(.)) & \cdots & \underset{q(\alpha)\leq R}{\mathrm{Max}}\,(m_{kk}^{i*}(.)) \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} q(\sigma_{n+m}) &\leq \sum_{i=1}^{m} M_{qq}(P^{i*}(\sigma_{n+m-i}))\, q(\sigma_{n+m-i}) \\ &\leq [\sum_{i=1}^{m} M_{qq}(P^{i*}(\sigma_{n+m-i}))]\, \underset{i=1..m}{\mathrm{MAX}}\,(q(\sigma_{n+m-i})) \end{aligned} \qquad \text{(III-46)}$$

Soit la relation :

$$q(\sigma_{n+m}) \leq P(\ldots\sigma_{n+m-i}\ldots) \underset{i=1\ldots m}{\mathrm{Max}} (q(\sigma_{n+m-i})).$$

La fonction $F^*(R)$ de $R \in \mathcal{R}^{k\times k}$ définie par :

$$F^*(R) = \sum_{i=1}^{m} \underset{q(\alpha)\leq R}{\mathrm{MAX}} M_{qq}(P^{i*}(\alpha)) \qquad \text{(III-47)}$$

avec

$$\alpha \in \mathcal{R}^p$$

est une majorante de la fonction matricielle positive $P(\beta_1,\ldots, \beta_m)$ lorsque chaque β_i appartient au domaine défini par $q(\beta_i) \leq R \quad \forall i = 1\ldots m$.

Donc :

pour :

$$\sigma_{n+m-i},\ \text{tel que}\ q(\sigma_{n+m-i}) \leq R \quad \forall i = 1\ldots m$$

on obtient :

$$\left.\begin{aligned} q(\sigma_{n+m}) &\leq F^*(R) \underset{i=1\ldots m}{\mathrm{MAX}} q(\sigma_{n+m-i}) \\ q(\sigma_{n+m}) &\leq F^*(R).R \end{aligned}\right. \qquad \text{(III-48)}$$

La majoration correspond dans ce cas à :

$$\lim_{n\to\infty} q(\sigma_n) \leq L$$

avec

$$L = \underset{R}{\mathrm{MAX}} [F^*(R).R \geq R)$$

I-2 *EXEMPLE D'APPLICATION DE CRITERE.*

Nous nous proposons d'appliquer le critère sur une équation vectorielle à coefficients numériques suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma^1_{n+2} \\ \\ \sigma^2_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\ \sigma^1_{n+1} + sg\sigma^1_{n+1} + \frac{k}{2}\,(\sigma^2_{n+1}) + 0,2\ \sigma^1_n + \frac{sg\sigma^1_n}{2} + \frac{k}{2}\,(\sigma^2_n) \\ \\ 0,1\ \sigma^1_{n+1} + 2sg\sigma^1_{n+1} + 0,2\ \sigma^2_{n+1} + sg\sigma^2_{n+1} + 0,2\sigma^1_n + sg\,\sigma^1_n + 0,3\sigma^2_n + sg\sigma^2_n \end{pmatrix}$$

(III-49)

avec : - $k(\alpha) = 2,5 + f(\alpha)$

et $f(\alpha)$ une non linéarité de la forme :

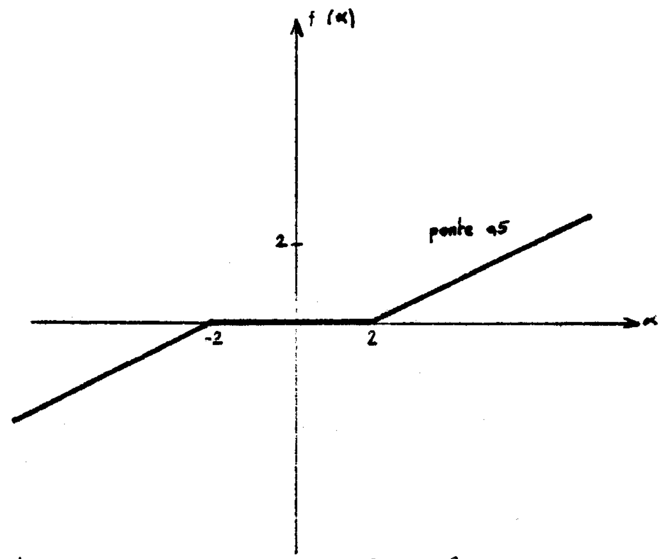

Figure : 6

$$- \ sg\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > 0 \\ -1 & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Posons :

$$q(\sigma_n) = (|\sigma^1_n|,\ |\sigma^2_n|)^T = |\sigma_n|$$

Il s'ensuit l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} |\sigma^1_{n+2}| \\ \\ |\sigma^2_{n+2}| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} |0,2\sigma^1_{n+1} + sg\sigma^1_{n+1} + \frac{k}{2}(\sigma^2_{n+1})| + |0,2\sigma^1_n + \frac{sg\sigma^1_n}{2} + \frac{k}{2}(\sigma^2_n)| \\ \\ |0,1\sigma^1_{n+1} + 2sg\sigma^1_{n+1} + 0,2\sigma^2_{n+1} + sg\sigma^2_{n+1}| + |0,2\sigma^1_n + sg\sigma^1_n + 0,3\sigma^2_n + sg\sigma^2_n| \end{pmatrix}$$

Quand on applique le critère de majoration, il vient la fonction majorante suivante :

$$F(R) = \underset{|\alpha| \leq R}{\mathrm{MAX}} \begin{pmatrix} |0,2\alpha_1 + sg\alpha_1 + \frac{k}{2}(\alpha_2)| + |0,2\alpha_1 + \frac{sg\alpha_1}{2} + \frac{k}{2}(\alpha_2)| \\ \\ |0,1\alpha_1 + 2sg\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + sg\alpha_2| + |0,2\alpha_1 + sg\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + sg\alpha_2| \end{pmatrix}$$

(III-50)

avec :

$$\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$R^T = (R_1, R_2)$$

Celle-ci peut s'écrire en tenant compte de la propriété de Max, sous la forme (III-51) :

$$F(R) = \begin{pmatrix} \underset{\Omega}{\mathrm{Max}} |0{,}2\alpha_1+sg\alpha_1| + \underset{\Omega}{\mathrm{Max}}|0{,}2\alpha_1 + \frac{sg\alpha_1}{2}| + \underset{\Omega}{\mathrm{Max}}|k(\alpha_2)| \\ \\ \underset{\Omega}{\mathrm{Max}}|0{,}1\alpha_1+2sg\alpha_1| + \underset{\Omega}{\mathrm{Max}}|0{,}2\alpha_1+sg\alpha_1| + \underset{\Omega}{\mathrm{Max}}|0{,}2\alpha_2+sg\alpha_2| + \underset{\Omega}{\mathrm{Max}}|0{,}3\alpha_2+sg\alpha_2| \end{pmatrix} \qquad \text{(III-51)}$$

avec

$$\Omega = \{\alpha_i \ : \ |\alpha_i| \le R_i, \ i = 1, 2\}$$

Lorsqu'on explicite chaque terme de la relation (III-52), on obtient :

$$F(R) = \begin{pmatrix} 0{,}4\ R_1 + f(R_2) + 4 \\ \\ 0{,}3\ R_1 + 0{,}5\ R_2 + 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-52)}$$

Dans ces conditions, la construction graphique représenté figure 7, conduit à définir une majorante :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26{,}66 \\ \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-53)}$$

d'où la majoration suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} |\sigma_n^1| \\ \\ |\sigma_n^2| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 26{,}66 \\ \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-54)}$$

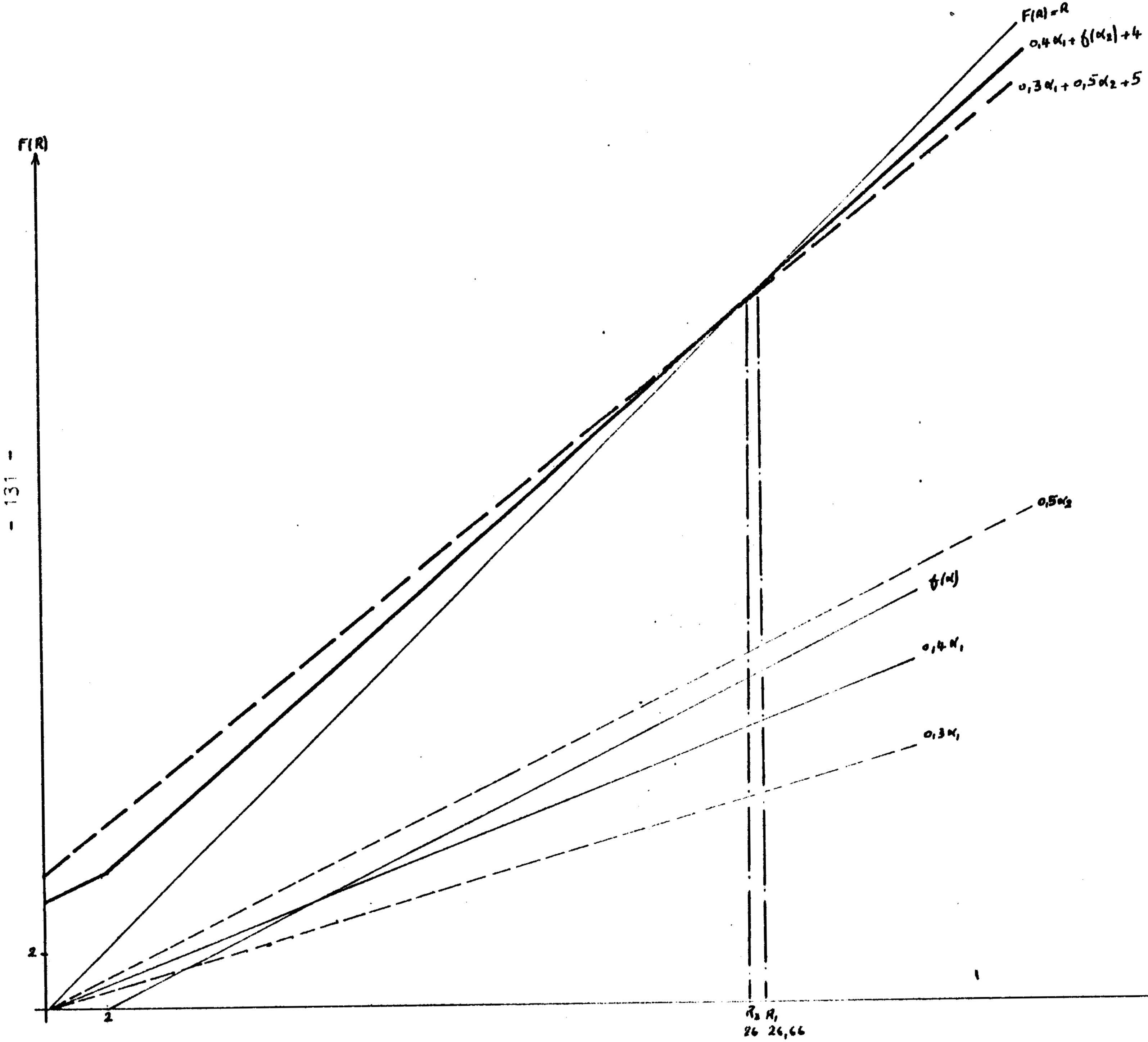

Figure : 7

III- ETUDE DE LA STABILITE VIS A VIS DES CONDITIONS INITIALES DES SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES.

Position du problème.

L'objet de cette troisième partie de déterminer un domaine d'attraction de l'origine (s'il existe) pour un système de grande dimension admettant plusieurs non linéarités. La méthode est basée sur une représentation particulière qui consiste à regrouper dans le vecteur état, les composantes dont dépendent les coefficients non constants. En appliquant la méthode à un système d'ordre q avec p variables d'état traitées non linéairement ($p < q$), il apparait possible de ramener l'étude dans un espace de dimension p permettant ainsi une simplification des calculs |42|.

Plusieurs résultats sont présentés relatifs à la définition de domaine de stabilité globale dans l'espace des variables d'état.

La mise en oeuvre de la méthode consiste en l'utilisation des relations des systèmes majorants basés sur les fonctions des normes vectorielles.

Cette méthode s'avère particulièrement adaptée aux systèmes de grande dimension avec peu de non linéarités.

STABILITE VIS A VIS DES CONDITIONS INITIALES.

Le système étudié est défini par un vecteur état X_n de dimension q dont une partie des composantes est traitée par les non linéarités.

La méthode que nous proposons consiste à trouver une fonction qui reste de Lyapunov tout le long des trajectoires du système lorsque le vecteur état initial X_{no} (à n = no) appartient à un certain domaine noté $\mathfrak{D}'$.

Si partant d'un point de $\mathfrak{D}'$ où la fonction $V(X_n)$ est de Lyapunov, on peut garantir que l'évolution du vecteur état X_n se fait dans $\mathfrak{D}'$, la stabilité vis à vis des conditions initiales ($X_{no} \in \mathfrak{D}'$) sera prouvée sans nécessairement expliciter les équipotentielles de Lyapunov pour le processus étudiée. Une étude similaire a été faite sur les systèmes continues |15|.

III.1 - *Représentation des systèmes étudiés.*

Nous supposons que seule une partie des composantes du vecteur état intervient non linéairement. Le X_n^1 définit l'ensemble des variables d'état intervenant non linéairement, le système dans l'hypothèse stationnaire peut en général être représenté par une équation de la forme :

$$X_{n+1} = A(X_n^1)\, X_n \qquad \text{(III-55)}$$

où

$$X_n^T = ({X_n^1}^T, {X_n^2}^T)$$

$$X_n^1 \in \mathcal{R}^{q_1}$$

$$X_n^2 \in \mathcal{R}^{q_2}$$

$$X_n \in \mathcal{R}^q \text{ avec } q = q_1 + q_2$$

$$A : \mathcal{R}^{q_1} \to \mathcal{R}^{q \times q}$$

en explicitant l'équation (III-55), il vient :

$$\begin{bmatrix} X_{n+1}^1 \\ X_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(X_n^1) & A_{12}(X_n^1) \\ A_{21}(X_n^1) & A_{22}(X_n^1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(III-56)}$$

avec :

$$A_{ij}\,(X_n^1) = \mathcal{R}^{q_1} \to \mathcal{R}^{q_i \times q_j} \quad (i,j = 1,2)$$

III-2 Conditions suffisantes de stabilité asymptotique.

L'utilisation des normes vectorielles permet de définir une forme agrégée de A(.) appelée matrice majorante |5| |43|.

Ainsi pour un système décrit par la relation (III-55), la matrice $M(A(X_n^1))$ est majorante de $A(X_n^1)$ relative à la norme $p(X_n)$ $(\mathcal{R}^q \to \mathcal{R}_+^k)$.

Notons $p_1(X_n^1)$ et $p_2(X_n^2)$ deux normes vectorielles de X_n^1 et X_n^2 et $\rho_{ij}(A_{ij}(X_n^1))$ des matrices majorantes qui lui sont associées (i, j = 1,2).

$$p_1(.) : \mathcal{R}^{q_1} \to \mathcal{R}_+^{k_1}$$

$$p_2(.) : \mathcal{R}^{q_2} \to \mathcal{R}_+^{k_2} \quad \text{avec } k_1 + k_2 = k$$

Il en résulte de la relation (III-55) et de la définition de la norme vectorielle l'inégalité (III-57) :

$$\begin{bmatrix} p_1(X^1_{n+1}) \\ p_2(X^2_{n+1}) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} p_{11}(A_{11}(X^1_n)) & p_{12}(A_{12}(X^1_n)) \\ p_{21}(A_{21}(X'_n)) & p_{22}(A_{22}(X^1_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(X^1_n) \\ p_2(X^2_n) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-57)}$$

Cette inégalité étant vérifiée composante à composante.

Soit le système de vecteur état z_n :

$$z_{n+1} = M(X^1_n)\, z_n \qquad \text{(III-58)}$$

où

$$M : \mathcal{R}^{q_1} \to \mathcal{R}^{k\times k}_+$$

$$z^T_n = (z^{1^T}_n \; z^{2^T}_n),\; z_n \in \mathcal{R}^{k_1},\; z^2_n \in \mathcal{R}^{k_2}.$$

Lorsque la matrice $M(X^1_n)$ vérifie pour tout $X^1_n \in \mathcal{R}^{q_1}$ l'inégalité (III-59) composante à composante :

$$M(X^1_n) \geq \begin{bmatrix} p_{11}(A_{11}(X^1_n)) & p_{12}(A_{12}(X^1_n)) \\ p_{21}(A_{21}(X^1_n)) & p_{22}(A_{22}(X^1_n)) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-59)}$$

avec

$M(.)$ à éléments non négatifs

et de plus :

- les conditions initiales du système (III-58) satisfont la relation (III-60)

$$[z^T_n]_{n=n_o} = [p^T_1(X^1_n),\; p^T_2(X^2_n)]_{n=n_o} \qquad \text{(III-60)}$$

Il vient composante à composante l'inégalité :

$$[p^T_1(X^1_n),\; p^T_2(X^2_n)] \leq z^T_n \qquad \forall n \geq n_o \qquad \text{(III-61)}$$

Le système (III-58) constitue un système majorant dit de comparaison pour le modèle représenté pour (III-55). La stabilité globale avec la convergence asymptotique du système (III-55) vers la position d'équilibre ($X_n = 0$) est déduite de celle du système (III-58).

Il convient maintenant de déterminer à partir de ces résultats des conditions permettant de conduire à la stabilité vis à vis des conditions initiales.

III.3 Détermination d'un domaine d'attraction.

Nous nous proposons de définir deux critères basés sur deux approches différentes des systèmes majorants :

- le premier utilise un système linéaire asymptotiquement stable qui majore le système à étudier (III-55) |47||48|.
- le deuxième utilise la seconde méthodes de Lyapunov à un système majorant non linéaire.

Il convient alors pour la suite de l'étude de définir une classe particulière $\phi(.)$ de norme scalaire dans l'ensemble des normes Φ telle que la vérification composante à composante de la relation (III-62)

$$0 \leq u_n \leq v_n \qquad \text{(III-62)}$$

implique celle de (III-63)

$$\phi(u_n) \leq \phi(v_n) \qquad \text{(III-63)}$$

et ceci :

$$\forall u_n,\ v_n \in \mathcal{R}_+^{k_1}.$$

Les normes $\phi(.)$ peuvent être par exemple définis à partir des normes de Holder définies de manière naturelle à partir des composantes du vecteur z_n.

III.3.1 Critère I, système de comparaison linéaire.

Soit :

$M(\alpha)$, si elle existe, une matrice majorante de $A(.)$ a coefficient constant, définie dans un voisinage de l'origine et vérifiant l'inégalité (III-64) terme à terme :

$$M(\alpha) \geq \begin{bmatrix} P_{11}(A_{11}(X_n^1)) & P_{12}(A_{12}(X_n^1)) \\ P_{21}(A_{21}(X_n^1)) & P_{22}(A_{22}(X_n^1)) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-64)}$$

pour tout X_n^1 vérifiant la contrainte (III-65) :

$$\phi(p_1(X_n^1)) < \alpha, \text{ avec } \alpha \text{ fixe } \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{(III-65)}$$

i.e : $M(\alpha)$ majore le système pourvue que X_n soit dans le voisinage de l'origine défini par :

$$\phi(p_1(X_n^1)) \leq \alpha,$$

Enoncé du critère I.

Soit le système non linéaire (III-55) :

$$X_{n+1} = A(X_n^1)X_n \qquad \text{(III-55)}$$

S'il existe une norme scalaire $\phi \in \Phi$ et une constante α positive telles que :

i) le système décrit par l'équation

$$z_{n+1} = M(\alpha)\, z_n \qquad \text{(III-66)}$$

est un majorant linéaire asymptotiquement stable du système (III-55) dans le voisinage de l'origine défini par :

$$\phi(p_1(X_n^1)) \leq \alpha \qquad \text{(III-67)}$$

ii) Il existe un voisinage $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}^{k_1 \times k_2}$ tel que si les conditions initiales de (III-66) sont dans $\mathcal{D}$ on ait :

$$\max_{n \in \mathcal{T}} \phi(z_n^1) \leq \alpha \qquad \text{(III-68)}$$

alors l'état d'équilibre $X_n = 0$ du processus (III-55) est asymptotiquement stable dans le domaine $\mathcal{D}_o$ défini à partir des vecteurs X_n tels que :

$$\mathcal{D} = \{z_n : z_n \in \mathcal{D} \Rightarrow z_{n+1} \in \mathcal{D} \text{ et } \phi(z_{n+1}^1) \leq \alpha\}$$

$$\text{et} \qquad \forall n \geq n_o \qquad \text{(III-69)}$$

$$\mathcal{D}_o = \{X_n, [p_1^T(X_n^1)\ p_2^T(X_n^2)]^T \in \mathcal{D}\}$$

Démonstration.

Compte tenu de la relation (ii), si

$$X_{n_o} \in \mathcal{D}_o \tag{III-70}$$

il en sera de même pour tout X_n, $\forall n \geq n_o$.
Dans ces conditions la propriétée :

$$\phi(p_1(X_n^1) \leq \alpha \tag{III-71}$$

reste vérifiée tout le long des trajectoires solution du système initial, le résultat énoncé résulte alors simplement de la propriété (i).

III.3.2 Critère II : système majorant non linéaire.

La matrice majorante $M(X_n^1)$ étant à coefficients non constants il est en général difficile de déterminer la solution générale du système (III-58). Son étude peut être abordée pour la deuxième méthode de Lyapunov.

Notons $S_{\phi\phi}(.)$ la matrice majorante relative à la norme scalaire de vecteur $\phi(.)$

$$\phi \in \Phi \quad , \quad \phi : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}_+$$

Par extension de langage, nous écrivons la relation :

$$\phi(z_n) = \phi(z_n^1, z_n^2) \tag{III-72}$$

Enoncé du critère II.

Le domaine défini par l'inégalité

$$\varphi(P_1(X_n^1), p_2(X_n^2)) \leq \alpha \tag{III-73}$$

est un domaine d'attraction pour l'état d'équilibre $X_n = 0$ du processus décrit par la relation (III-55) :

lorsqu'est vérifiée la contrainte.

$$S_{\phi\phi}(M(X_n^1)) \leq c < 1 \qquad \text{(III-74)}$$

dans le domaine défini par l'inégalité

$$\phi[p_1(X_n^1, 0)] \leq \alpha \qquad \text{(III-75)}$$

(α et c sont fixés).

Démonstration.

En vue de l'étude du système majorant (III-58) définissons une fonction candidate à Lyapunov $V(z_n)$ telle que :

$$V(z_n) = \phi(z_n)$$

avec

$$z_n^T = (p_1^T(X_n^1),\ p_2^T(X_n^2))$$

il vient immédiatement

$$\phi(z_{n+1}) \leq S_{\phi\phi}(M(X_n^1))\ \phi(z_n) \qquad \text{(III-76)}$$

lorsque la condition (III-77)

$$S_{\phi\phi}(M(X_n^1) \leq c < 1 \qquad \text{(III-77)}$$

est vérifiée tout le long des trajectoires du système, la stabilité asymptotique en découle.
L'inégalité (III-76) implique dans le cas :

$$\phi(z_n) \leq \phi(z_n)_{n=no} = \phi[p_1(X_n^1),\ p_2(X_n^2)]_{n=n_o},\ \forall n \in \mathcal{T} \qquad \text{(III-78)}$$

de plus le système (III-58) étant majorant du système (III-55), l'inégalité (III-61) relatives aux propriétés des normes φ permet d'écrire :

$$\phi[p_1(X_n^1),\ p_2(X_n^2)] \leq \phi(z_n),\ \forall n \in \mathcal{T}$$

et à fortiori :

$$\phi(p_1(X_n^1), 0) \leq \phi(z_n), \qquad \forall n \in \mathcal{T} \qquad \text{(III-79)}$$

Le rapprochement des inégalités (III-78) et (III-79) nous permet alors de conclure. En effet, la vérification des conditions (III-73) et (III-74) implique une évolution du système selon la contrainte (III-78).

L'inégalité (III-79) montre alors que la condition (III-75) reste vérifiée tout au long des trajectoires. L'origine est donc un point d'attraction asymptotiquement stable dans le domaine défini par l'inégalité :

$$\phi(p(X_n)) \leq \alpha$$

III.4. Application aux systèmes de types Luré Postnikov

III.4.1 Mise en équation.

Afin de préciser le domaine d'application des résultats que nous avons présentés, montrons comment ils peuvent être adaptés à certains modèles de type Luré Posnikov

Soit le système de vecteur état ω_n régi par les équations :

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = A\,\omega_n + B\gamma(\sigma_n) \\ \sigma_n = C\,\omega_n \end{cases} \qquad \text{(III-80)}$$

$\omega_n : \mathcal{T} \to \mathcal{R}^n$, $n \in \mathcal{T}$,

A : matrice constante $\in \mathcal{R}^{n \times n}$

B : matrice constante $\in \mathcal{R}^{n \times n_1}$

C : matrice constante $\in \mathcal{R}^{n_1 \times n}$, de rang n_1

$\sigma_n \in \mathcal{R}^{n_1}$

$\gamma \; : \mathcal{R}^{n_1} \to \mathcal{R}^{n_1}$

$\gamma \in F = \{ \gamma : \gamma(\sigma_n) = \Gamma^*(\sigma_n)\, \sigma_n,\ \Gamma^*(\sigma_n) \in [\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}] \subset \mathcal{R}^{n_1 \times n_1} \}$

$\underline{\Gamma}$ à $\bar{\Gamma}$: matrice constante vérifiant $\underline{\Gamma} \leq \bar{\Gamma}$.

effectuons un changement de rerpésentation du système décrit pour la forme (III-80) tel que :

$$X_n^1 = \sigma_n$$

et définissons X_n^2 pour que le vecteur X_n tel que :

$$X_n^T = (X_n^{1T}, X_n^{2T})$$

constitue un vecteur état.

Dans ce sens, introduisons une matrice carrée P :

$$P = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \qquad \text{(III-81)}$$

P : matrice carrée non singulière $\in \mathcal{R}^{n\times n}$

D : matrice constante $\in \mathcal{R}^{n_1 \times n}$

Il vient alors de la relation (III-81)

$$P\,\omega_{n+1} = PAP^{-1}\,P\omega_n + PB\gamma(\sigma_n)$$

soit alors :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1}^1 \\ X_{n+1}^2 \end{pmatrix} = PAP^{-1} \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix} + PB\Gamma^*(X_n^1)\, X_n^1 \qquad \text{(III-82)}$$

L'équation (III-55) à partir de laquelle nous avions mené notre étude prend alors la forme :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1}^1 \\ X_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(X_n^1) & A_{12} \\ A_{21}(X_n^1) & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-83)}$$

les matrices A_{12} et A_{22} sont constantes et l'étude de la convergence vis à vis de l'état initial en est simplifié d'autant.

III.4.2 Exemple d'application.

Le système asservis fonctionnant en régulateur fig 8. La chaine d'action comporte successivement un échantillonneur non linéaire de période constante T et un moteur de constante de temps τ.

λ est un paramètre constant dans une réalisation du système. Notons aux instants d'échantillonnage nT, l'entrée nulle en, la sortie y_n et d'erreur ε_n.

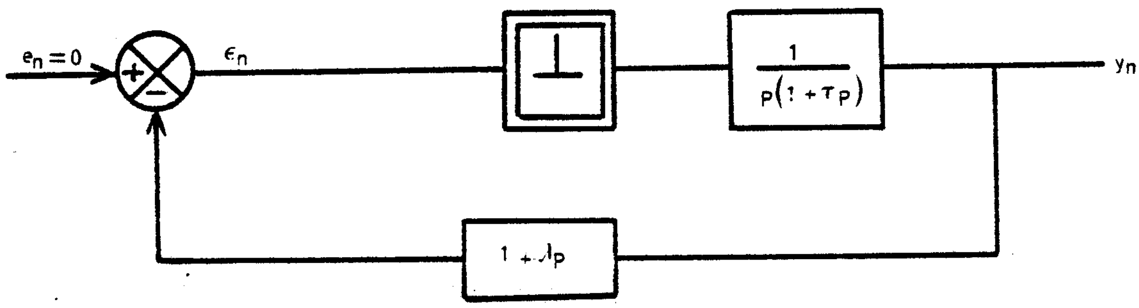

figure : 8

Mise en équation.

L'asservissement étudié est régi par les équations :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (1-D)\, y'_n + u^*(\varepsilon_n)\, \varepsilon_n \\ y'_{n+1} = D\, y'_n + v^*(\varepsilon_n)\, \varepsilon_n \end{cases} \qquad \text{(III-84)}$$

$$\varepsilon_n = -(y_n + \lambda y'_n)$$

avec :

$$D = e^{-T/2}, \ \lambda \neq \tau$$

et

$U^*(\varepsilon_n)$ et $v^*(\varepsilon_n)$ sont des fonctions scalaires caractérisant l'échantillonneur associé au filtre à commander.

La mise en oeuvre de la méthode proposée implique une transformation des équations (III-84) : on a donc :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - U^*(\varepsilon_n) - \lambda v^*(\varepsilon_n), & (\lambda-\tau)(1-D) \\ v^*(\varepsilon_n) & , \quad D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ y'_n \end{pmatrix} \qquad \text{(III-85)}$$

Application du critère.

Lorsqu'on opère un changement de base diagonale de type

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-\tau} \end{pmatrix}$$

L'équation (III-85) devient :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ (y'_{n+1})/(\lambda-\tau)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - U^*(\varepsilon_n) - \lambda v^*(\varepsilon_n), & (1-D) \\ v^*(\varepsilon_n)(\lambda-\tau) & , \quad D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ (y'_n)/(\lambda-\tau)^{-1} \end{pmatrix}$$

(III-86)

Le choix de la norme :

$$\phi(.,.) = |\varepsilon_n| + \frac{|y'_n|}{|(\lambda-\tau)^{-1}|} \qquad \text{(III-87)}$$

montre que d'apèrs le critère II, s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|1 - U^*(\varepsilon_n) - \lambda v^*(\varepsilon_n)| + |v^*(\varepsilon_n)(\lambda-\tau)| \leq c < 1, \qquad \text{(III-88)}$$

$\forall |\varepsilon_n| \leq \alpha.$

Le domaine défini par l'inégalité

$$|\varepsilon_{n_o}| + \frac{|y'_{n_o}|}{|(\lambda-\tau)^{-1}|} \leq \alpha \qquad \text{(III-89)}$$

est un domaine d'attraction de l'origine.

Pour déterminer une valeur convenable de α, il faudra étudier la fonction scalaire d'une seule variable (III-90).

$$M^*(\varepsilon_n) = |1-U^*(\varepsilon_n) - \lambda v^*(\varepsilon_n)| + |(\lambda-\tau)\, v^*(\varepsilon_n)| \qquad \text{(III-90)}$$

Mise au oeuvre pratique.

L'échantillonneur non linéaire est un bloqueur d'ordre zéro muni de la non linéairté $f(\varepsilon_n)$, il vient ainsi :

$$\begin{aligned} U^*(\varepsilon_n) &= (T - \tau(1-D))\, f^*(\varepsilon_n) \\ v^*(\varepsilon_n) &= (1-D)\, f^*(\varepsilon_n) \end{aligned} \qquad \text{(III-91)}$$

dans ce cas, la fonction (III-91) s'écrit :

$$M^*(\varepsilon_n) = |1-f^*(\varepsilon_n)\,[T + (1-D)(\lambda-\tau)]| + |(1-D)(\lambda-\tau)f^*(\varepsilon_n)| \qquad \text{(III-92)}$$

Dans l'hypothèse linéaire ($f^*(.) = K = c^{te}$), le choix de :

$$\tau-\lambda = \frac{TD^2}{1-D}$$

et

$$K = \frac{1}{T(1-D)}$$

permettent une annulation du transitoire du système en deux périodes.

Pour cette valeur de λ calculée, la fonction (III-92) s'écrit :

$$M^*(\varepsilon_n) = |1 - f^*(\varepsilon_n)\, T(1-D^2)| + |f^*(\varepsilon_n)\, TD^2|$$

d'où la condition de stabilité globale (III-93)

$$|1 - f^*T(1-D^2)| + |f^*|\, TD^2 \le \rho < 1 \qquad \text{(III-93)}$$

ce qui donne après résolution et pour une valeur de :

$$\frac{T}{\tau} > 0,35$$

le domaine :

$$0 < f^* < \frac{2}{T} \qquad \text{(III-94)}$$

Le système sera stable pour $f(\varepsilon_n)$ tel que :

$$0 < \frac{f(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} < \frac{2}{T}$$

CONCLUSION

Nous avons développé dans ce chapitre trois méthodes d'étude de stabilité. La première est basée sur la généralisation du critère de majoration des oscillations limites des solutions d'un système discret, à une description de type vectoriel.

La deuxième partie correspond à l'exposé d'une méthode systématique de description permettant à partir des techniques d'aggrégation de se ramener simplement à la définition d'un système de comparaison du processus caractérisé par une matrice en flèche mince. Cette forme particulière de description correspond à un cas de validité de la conjoncture linéaire présentée par BORNE et GENTINA ce qui simplifie considérablement l'étude de la stabilité.

Une étude relative à la définition d'un domaine d'attraction de l'origine est envisagée dans une troisième partie. Deux critères sont présentés. L'un correspond à la définition d'un système de comparaison du processus localement linéaire permettant de conclure sans faire explicitement des équipotentielles de Lyapunov pour le processus étudié. Le second utilisant un système de comparaison non linéaire apparait particulièrement intéressant lorsque le nombre de variables intervenant non linéairement dans la description du processus s'avère peu élevé en regard de sa dimension.

CONCLUSION GENERALE

La définition d'un polynôme caractéristique matriciel, nous a conduit à présenter un certain nombre de méthodes d'élimination, généralisant ainsi les travaux effectués dans le cas des systèmes monovariables admettant une seule non linéarité.

Dans ce sens nous avons été conduit en utilisant les propriétés des anneaux commutatifs de matrices carrées, à effectuer un partitionnement en blocs particuliers de la matrice caractéristique de l'évolution du processus. Ces blocs devront être commutatifs excepté ceux de la dernière "colonne".

La définition du déterminant matriciel a permis de généraliser au cas vectoriel non linéaire les méthodes d'élimination utilisées en linéaire et mettant en oeuvre la notion de polynôme caractéristique scalaire.

Plusieurs résultats importants se déduisent des représentations utilisées :

- la détermination de systèmes de comparaison vectoriels linéaires ou non d'un processus non linéaire.
- la définition d'un critère de stabilité d'application aisée relatif aux relations récurrentes vectorielles.
- la généralisation au cas vectoriel des techniques de majoration du domaine d'évolution limite d'un processus discret non linéaire.
- la définition d'une méthode d'estimation d'un domaine d'attraction de l'état d'équilibre d'un processus.
- la détermination du domaine de validité d'un modèle linéaire d'un processus non linéaire.

La généralisation à une classe plus vaste de processus des représentations proposées et l'application aux problèmes de synthèse apparaissent actuellement possibles et c'est dans cette voie que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

B I B L I O G R A P H I E

/1/ *Y. SEVELY*
"Systèmes de commande à données échantillonnées"
Edition ENSEEHT (Toulouse) 1967.

/2/ *J.C. GENTINA*
"Sur la notion de modèle dans la description d'un processus"
Acte d'un Colloque organisé par l'ENSTA sous l'égide de ANRT
Paris, Juin 1975.

/3/ *P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT*
"Sensitivity, adaptativity and optimality"
Proceding of the 3^{th} IFAC Symposium Lead, June 18-23 1973
Ischia, Italy.

/4/ *F. LAURENT*
"Transformation dans l'espace d'état"
Polycopié correspondant au certificat C4 d'Automatique Supérieure
AEA Lille I.

/5/ *P. BORNE*
"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés".
Doctorat es-Sciences Physiques, 2 Mars 1976.

/6/ *P. VIDAL*
"Théories simplifiées des systèmes discrets linéaires et non linéaires".
Polycopié 1968.

/7/ *P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT*
"Etude de stabilité d'un asservissement échantillonné non linéaire à paramètres périodiques".
Congrés d'Automatique de Madrid 14-17 Avril 1970.

/8/ F. LAURENT, M. ROMELOT
"Sur le régime dynamique d'un système échantillonné non linéaire décrit par un modèle redondant".
CRAS, Paris, t. 280, Série A, pp. 1033-1035, 1975.

/9/ F. LAURENT, J.C. GENTINA, M. STAROSWIECKI, P. BORNE
"On the operating time optimization of incompletely observable sampled data systems with a plurality of monitoring".
2nd IFAC, Dusseldorf, Octobre 11-13, 1971.

/10/ S. LEFSCHETZ
"Stability of non linear control Systems".
Mathematics in sciences and engineering, vol. 13, 1965.

/11/ R.E. KALMAN
"Mathetical description of linear systems".
J. SIAM on control, SO AI(2), pp. 152-192, 1963.

/12/ F. LAURENT
"Contribution des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique".
Thèse es-Sciences Physique , Lille, 1968.

/13/ M. BENREJEB
"Sur l'analyse et la synthèse des processus complexes hiérarchisés : Application aux systèmes singulièrement perturbés".
Doctorat es-Sciences Physique, Lille 1980.

/14/ P. BORNE, F. LAURENT, C. MAIZIERES
"Sur la stabilité dynamique des processus multivariables non linéaires".
ACTA, Vol. 6, N° 2, Mai 1978.

/15/ F. LAURENT, A. EL MOUDNI, J.P. RICHARD, P. BORNE
"On initial stability condition for non linear large scale systems".
4e Congress info y Auto. Madrid, 16-19 Oct. 1979.

/16/ GANTMACHER
"Théorie des matrices".
Dunod Tome 1 et 2.

/17/ P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT, P. VIDAL
"Synthèse des systèmes discrets non linéaires".
Contrat de DGRST N° 71.7.29.14

/18/ A. FOSSARD
"Commande des systèmes multidimentionnels".
Dunod 1972.

/19/ H.H. ROSENBROCK
"State-space and multivariable theory".
Studies in dynamical systems. Nelson 1970.

/20/ F. LAURENT
"Sur la stabilité et le temps de réponse d'un système échantillonné non linéaire".
CRAS, Paris, t. 260, p. 4444-4447, Avril 1965.

/21/ P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT
"Stability of large scale nonlinear discrete systms by the use of vectoriel norme".
Proc. of IFAC Symposium pp. 187-194,

/22/ ANTHONY N. MICHEL and JAMES A. HEINEN
"Quantitative and pratical stability of systems".
Acta 1974.

/23/ J.L. ABATTUT
"Sur les définitions de la stabilité".
RAIRO N° Avril 1974, pp. 141-146.

/24/ A.M. LYAPUNOV
"Problème général de la stabilité de mouvement".
Annales des études mathématiques N° 117. Princeton Univ. Press 1949.

/25/ W. HAHN
"Application de la méthode de Lyapunov aux équations aux différences".
Mathematische Annales, Col. 3 1958.

/26/ S. WEGRZYN, P. VIDAL, O. POLUSINKI et F. LAURENT
"Contribution de l'algébre de Banach à l'étude de la stabilité globale des processus linéaires".
4e Conf. d'Automatique de Pologne, Cracovic, Juin 1967.

/27/ W. HAHN
"Stability of motion".
Springer Verlay, 1967.

/28/ L.T. GRUJIC and D.D. SILJAK
"Exponentiel stability of large scale discrete systems".
Int. J. Control Vol. 19, N° 3 pp. 481-491, 1974.

/29/ L.T. GRUJIC and D.D. SILJAK
"On the stability of discret composite systems".
IEEE Trans. AC. pp. 522-524, 1973.

/30/ L.T. GRUJIC
"Uniforme asymptotic stability of discrete large scale systems".
IEEE Trans. AC Vol. 16, pp. 22-27, 1971.

/31/ P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT
"Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires".
RAIRO, Mai N° J 2, 1972, pp. 96-105.

/32/ M. FIELDER and V. PTAK
"On matrices with non positives of diagonal elements and positive principals minors".
C ZEC

/33/ F. LAURENT
"Sur une majoration en amplitude des oscillations limites des systèmes échantillonnés non linéaires".
CR Acad. Sc. t. 262, pp. 659-661, Mars 1966.

/34/ P. BORNE, J.C. GENTINA
"Sur une extension des conditions linéaires de stabilité à certaines classes des systèmes échantillonnés non linéaires".
CRAS, Série A, N° 16, t. 274, pp. 1275-1277, Avril 1972.

/35/ KOTELYANSKI
"Sur certaines propriétés des matrices à élèments positifs".
Math. Vol. 31, 1952, pp. 479-565.

/36/ *F. LAURENT, J.C. ANGUE, P. BORNE, J.C. GENTINA*
"About the use of redondant models in the description of discrete models analysis of the stability of non linear sampled date processus".
IFAC Discret Rega 1974.

/37/ *M. IKEDA and D.D. SILJAK*
"Overlapping decompositions expansions and contractor of dynamics systems"
Large scale systems. Theorie and applications Vol. 1, 1980.

/38/ *PENROSE*
"A generalised inverse for matrices".
Proc. Cambridge Philas Society, 51, pp. 406-413, 1955.

/39/ *H.H. RESENBROCK and STORY*
"Mathematics of dynamical systems".
Studies in dynamical systems, Nelson, 1970.

/40/ *CNRS*
"Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal".
Séminaire, 20-21 Novembre 1980, ENSTEG (Grenoble).

/41/ *C. PISOT, N. ZAMANSKY*
"Mathématiques générales, algébre - analyse".
Dunod, Paris, 1966.

/42/ *F. LAURENT, M. BENREJEB*
"Sur la stabilité des systèmes asservis de grande dimension vis à vis des conditions initiales".
Proc. of MECO 79, Congress, Grenoble, pp. 234-237, 1979.

/43/ *J.C. GENTINA*
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Doctorat es-Sciences Physique, 2 Mars 1976.

/44/ M. BENREJEB
"Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé".
Thèse de D.I., 10 Juin 1976.

/45/ P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT
"Sur une étude par majoration de la stabilité de suites récurrentes vectorielles non linéaires".
Colloque International CNRS, Toulouse, 1973.

/46/ F. LAURENT
"Sur un critère pratique de stabilité pour les systèmes échantillonnés non linéaires".
CRAS, Paris, t. 269, pp. 226-228, Juillet 1969.

/47/ J.P. RICHARD, A. EL MOUDNI, P. BORNE
"On the determination of a linear model for a localy stable non-linear process".
Congrés IASTED, Davos, Février 1981.

/48/ M. BENREJEB, G. DAUPHIN et P. BORNE
"Sur une nouvelle approche de la modélisation et de la simulation des processus non linéaires".
Congrés Simulation 80, Interlaken, Juin 1980.

TABLE DES MATIERES

Chapitre II : METHODES D'ELIMINATION PAR RAPPORT A UN VECTEUR COMPOSANT DANS LES SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES

Chapitre III : METHODES D'ETUDE DE STABILITE RELATIVES AUX DIFFERENTES REPRESENTATIONS OBTENUES