

N° d'ordre : 256

50376  
1981  
33

50376  
1981  
33

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR-INGENIEUR**

par

Rudolph Amah KOUGBEADJO

Ingénieur E.U.D.I.L.

**Identification de la diffusivité thermique par traitement  
du transfert de chaleur à travers une paroi homogène  
en régimes impulsionnel et pseudo-aléatoire  
Application des méthodes de corrélation en thermocinétique**



030 032114 3

Soutenue le 12 janvier 1981 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury	MM.	A. LEBRUN	Président
		P. THERY	Rapporteur
		L. RACZY	Examineur
		M. GERY	Invité
		J.C. MARECHAL	Invité
		J. VANHOVE	Invité

*A mes parents,*

*A tous ceux qui me sont chers,*

## AVANT - PROPOS

---

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mesures Automatiques de l'Université des Sciences et Techniques de Lille dans le cadre du "Centre de Recherche Sciences des Matériaux et Techniques de Construction" (CRESMAT).

Monsieur le Professeur LEBRUN, Directeur du Laboratoire s'est intéressé à tous les aspects de ce travail. Qu'il me permette de lui exprimer ici ma très profonde gratitude pour les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués et pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je voudrais que ce mémoire soit un témoignage de ma reconnaissance envers Monsieur THERY, Professeur, qui m'a confié le thème de cette étude. Les nombreux encouragements et conseils précieux qu'il m'a apportés ont été déterminants pour la réalisation de cette recherche. Je tiens à le remercier pour son amicale collaboration ainsi que pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Je ne crois pas que les mots puissent suffisamment exprimer ma reconnaissance envers MM. LEBRUN et THERY qui m'ont toujours soutenu en des moments difficiles, aussi qu'il me soit permis de leur dire tout simplement Merci.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur RACZY, Directeur de l'Institut "Informatique, Mesures, Automatique" de l'EUDIL, pour l'honneur qu'il me fait de juger ce travail.

Que Monsieur GERY, Directeur de la Section Génie Civil de l'INSA de Lyon soit remercié de l'intérêt qu'il a porté à cette étude en acceptant de participer à mon Jury.

Monsieur MARECHAL, Chef de la Division Thermique du CEBTP (Paris), malgré ses multiples responsabilités, me fait le grand honneur de faire partie du jury ; qu'il trouve ici l'expression de ma très grande reconnaissance.

.../...

Je remercie également Monsieur VANHOVE, Directeur du Laboratoire de Thermique de l'Ecole des Mines de Douai, pour avoir accepté de faire partie de mon Jury.

Ce travail a été effectué avec une bourse de recherche d'origine C.E.B.T.P. ; je remercie cet organisme pour le soutien qu'il m'a apporté.

Mes remerciements vont aussi aux membres de l'Equipe de Mesures Automatiques.

Madame CASTEGNIER a eu le rôle ingrat, mais combien nécessaire, de dactylographier ce mémoire. Je lui exprime mes vifs remerciements.

Je remercie enfin MM. DEHORTER et PLUQUET qui ont assuré l'impression de ce document.

# S O M M A I R E

-!-!-!-!-!-!-!-

	<u>Pages</u>
AVANT-PROPOS .....	
INTRODUCTION .....	1
NOTATIONS ET UNITES .....	6
<u>I - PREMIÈRE PARTIE : ELABORATION DES MODELES THERMOCINETIQUES</u>	
I-1- <u>CHAPITRE 1</u> : TRANSMISSION DE LA CHALEUR PAR CONDUCTION .....	7
I-1-1- LOI DE FOURIER	
I-1-2- FLUX THERMIQUE ET DENSITE DE FLUX	
I-1-3- L'EQUATION DE LA DIFFUSION THERMIQUE	
I-1-4- CONDITIONS AUX LIMITES	
I-1-5- CONDITIONS INITIALES	
I-1-6- CARACTERISTIQUES THERMOPHYSIQUES DES MATERIAUX	
I-1-6-1- La conductivité thermique	
I-1-6-2- L'effusivité thermique	
I-1-6-3- La diffusivité thermique	
I-1-7- CONCLUSION	
I-2- <u>CHAPITRE 2</u> : RESOLUTION DE L'EQUATION DE FOURIER .....	15
I-2-1- POSITION DU PROBLEME	
I-2-2- SOLUTION DU PROBLEME	
I-2-3- QUADRIPOLE EQUIVALENT	
I-2-3-1- Quadripôle équivalent à une paroi homogène	
I-2-3-2- Mise en cascade de plusieurs milieux	
I-2-4- CONCLUSION	
I-3- <u>CHAPITRE 3</u> : INTRODUCTION DE LA NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT EN THERMOCINETIQUE .....	20
I-3-1- INTRODUCTION	
I-3-2- DEFINITION	
I-3-3- LES FONCTIONS DE TRANSFERT RELIANT LES VARIATIONS DE TEMPERATURE ET DE FLUX	
I-3-3-1- Définitions	
I-3-3-2- Détermination du coefficient B	

- I-3-3-3- Détermination du coefficient C
- I-3-3-4- Autres fonctions de transfert
- I-3-3-5- L'impédance généralisée

- I-3-4- REMARQUES
- I-3-5- CONCLUSION

I-4- CHAPITRE 4 : REPONSE IMPULSIONNELLE..... 26

- I-4-1- INTRODUCTION
- I-4-2- REPONSE IMPULSIONNELLE
- I-4-3- ETUDE DE LA REPONSE A UNE IMPULSION DE FLUX
- I-4-4- GENERALISATION AUX IMPULSIONS DE DUREE FINIE

I-5- CHAPITRE 5 : INTERET DES MESURES FLUXMETRIQUES EN REGIME VARIABLE.. 35

- I-5-1- LES MESURES DE FLUX PERMETTENT DE DECELER DE PETITES PERTURBATIONS ENERGETIQUES
- I-5-2- LE FLUX FOURNIT UNE INFORMATION GLOBALE
- I-5-3- LE FLUX ATTEINT VITE LE REGIME PERMANENT
- I-5-4- REMARQUES PRATIQUES SUR LA DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT DE FLUX
  - I-5-4-1- Problème du maintien de la température de sortie à une valeur constante
  - I-5-4-2- Spécification des signaux d'entrée

CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE ..... 40

ANNEXES ..... 41

- A-I-1- REPRESENTATION D'ETAT DE L'EQUATION DE LA CHALEUR
- A-I-2- TRANSFORMEES DE LAPLACE DES FONCTIONS UTILISEES DANS LA PARTIE THEORIQUE

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE ..... 48

II - DEUXIÈME PARTIE : LES METHODES DE CORRELATIONS ET LEURS APPLI-CATIONS

II-1- CHAPITRE 1 : RAPPEL SUR LA NOTION DE CORRELATION ..... 50

- II-1-1- FONCTION D'AUTOCORRELATION
- II-1-2- FONCTION D'INTERCORRELATION

II-2- CHAPITRE 2 : ESTIMATION DES FONCTIONS DE CORRELATION. IDENTIFICATION PAR INTERCORRELATION ..... 56

- II-2-1- ESTIMATION DES FONCTIONS DE CORRELATION. METHODES NUMERIQUES

- II-2-2- IDENTIFICATION PAR INTERCORRELATION
  - II-2-2-1- Principe de la méthode
  - II-2-2-2- Avantages et inconvénients
  - II-2-2-3- Caractéristiques optimales du signal d'entrée
  
- ANNEXES ..... 64
  - A-II-1- NOTION DE CORRELATION
  
- BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE ..... 68
  
- III - TROISIÈME PARTIE : RÉGIME IMPULSIONNEL
  - III-1- CHAPITRE 1 : APPLICATIONS DE LA METHODE D'INTERCORRELATION EN THERMOCINETIQUE ..... 70
    - III-1-1- LE PROBLEME DE L'IDENTIFICATION
    - III-1-2- REPOSE A UN CRENEAU DE FLUX
    - III-1-3- FONCTION D'INTERCORRELATION ENTREE-SORTIE  $z(\tau)$ 
      - III-1-3-1- Expression de la fonction  $z(\tau)$  pour  $\tau < \delta$
      - III-1-3-2- Expression de la fonction  $z(\tau)$  pour  $\tau > \delta$
      - III-1-3-3- Maximum de la fonction d'intercorrélacion
    - III-1-4- PRINCIPE DE LA METHODE D'INTERCORRELATION DE FLUX
    - III-1-5- ETABLISSEMENT DES ABAQUES DE CALCUL
      - III-1-5-1- Etude des racines de l'équation du maximum
      - III-1-5-2- Abaques de calcul
    - III-1-6- CONCLUSION
  
  - III-2- CHAPITRE 2 : MISE EN OEUVRE DE LA METHODE ..... 83
    - III-2-1- SIMULATION DE LA METHODE
    - III-2-2- INFLUENCE D'UNE DISTORSION DU SIGNAL D'ENTREE
      - III-2-2-1- Méthode de calcul
      - III-2-2-2- Signal d'entrée à fronts exponentiels
      - III-2-2-3- Signal d'entrée à fronts raides
      - III-2-2-4- Répercussion du bruit
    - III-2-3- CONCLUSION
  
  - III-3- CHAPITRE 3 : DISPOSITIF EXPERIMENTAL ..... 100
    - III-3-1- LE GENERATEUR DE FLUX
    - III-3-2- LES FLUXMETRES THERMIQUES
    - III-3-3- ACQUISITION DES DONNEES
    - III-3-4- CONCLUSION

- III-4- CHAPITRE 4 : RESULTATS EXPERIMENTAUX ..... 108
  - III-4-1- PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET TRAITEMENT DES DONNEES
  - III-4-2- MESURES EFFECTUEES SUR LE PLEXIGLASS
    - III-4-2-1- Influence de la durée du créneau
    - III-4-2-2- Influence de l'épaisseur du matériau
    - III-4-2-3- Influence des capteurs
    - III-4-2-4- Influences du puits thermique et de la charge
  - III-4-3- ESSAIS DIVERS
  - III-4-4- CONCLUSION
  
- TABLEAUX DES MESURES ET COURBES EXPERIMENTALES ..... 117
  
- III-5- CHAPITRE 5 : LIMITES ET POSSIBILITES DE DEVELOPPEMENT DE LA METHODE EXPERIMENTALE ..... 130
  - III-5-1- LIMITATIONS IMPOSEES PAR LE RAPPORT SIGNAL/BRUIT
  - III-5-2- INFLUENCE DES CAPTEURS
  - III-5-3- SENSIBILITE DE LA METHODE
  - III-5-4- GENERALISATION DE LA METHODE A D'AUTRES TYPES DE SIGNAUX D'ENTREE
  
- ANNEXES DE LA TROISIEME PARTIE ..... 139
  
- BIBLIOGRAPHIE DE LA TROISIEME PARTIE ..... 145

IV - QUATRIÈME PARTIE : RÉGIME PSEUDO-ALÉATOIRE

- IV-1- CHAPITRE 1 : LES SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES. APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES SYSTEMES..... 147
  - IV-1-1- LES SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES
    - IV-1-1-1- Génération des SBPA
    - IV-1-1-2- Propriétés des SBPA de longueur maximale
  - IV-1-2- IDENTIFICATION PAR INTERCORRELATION AVEC DES SBPA
    - IV-1-2-1- Principe de la méthode
    - IV-1-2-2- Mise en oeuvre de la méthode
  - IV-1-3- CONCLUSION
  
- IV-2- CHAPITRE 2 : RESULTATS EXPERIMENTAUX ..... 157
  - IV-2-1- REALISATION D'UN GENERATEUR PROGRAMMABLE DE SBPA



IV-2-2- RESULTATS EXPERIMENTAUX

IV-2-2-1- Choix des paramètres de la séquence et traitement des données

IV-2-2-2- Résultats des mesures

IV-2-3- POSSIBILITES DE DEVELOPPEMENT DE LA METHODE

IV-2-4- CONCLUSION

TABLEAUX DES MESURES ET COURBES EXPERIMENTALES .....	163
BIBLIOGRAPHIE DE LA QUATRIEME PARTIE .....	169
CONCLUSION .....	170

ERRATA

1) Avant-Propos, ligne 20, lire :  
 Monsieur GERY, Directeur de la Section Equipement de l'INSA de Lyon  
 au lieu de Directeur de la Section Génie Civil.

2) p. 15, formule (I.2.1.01)  
 lire :  

$$\phi(x,t) = -\lambda \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

3) p. 134 formule de  $H_2(p) = \frac{1}{sh \sqrt{c} p}$

X

## INTRODUCTION

En régime variable l'évolution des températures de l'enveloppe d'un bâtiment et de ses charges internes est liée à son inertie thermique. Celle-ci dépend de la *capacité thermique* de chaque matériau constitutif des parois, grandeur qui représente le rapport entre la *conductivité* et la *diffusivité thermique* du matériau.

La connaissance de la diffusivité thermique est donc aussi importante que celle de la conductivité thermique pour déterminer et éventuellement limiter la charge thermique des bâtiments, soumis à des sollicitations extérieures (et parfois intérieures) variables dans le temps. Connaissant la diffusivité, il est possible d'introduire pour toute paroi homogène, un "*temps caractéristique*" de la dynamique des évolutions thermocinétiques.

Le coefficient de diffusivité est introduit pour caractériser le transfert de chaleur dans un matériau en régime variable ; il intervient naturellement dans tous les problèmes de chocs thermiques. Les impulsions thermiques induites par un brusque apport d'énergie ont été utilisées dès le XIX<sup>e</sup> siècle pour établir les bases de la thermocinétique. La conversion brusque d'énergie non calorifique en chaleur localisée sur la surface externe d'un solide, constitue une source thermique impulsionnelle qui perturbe localement l'état du système supposé initialement à l'équilibre thermique. Il en résulte en chaque point du solide, l'apparition d'un signal thermique présentant un caractère transitoire. L'évolution spatio-temporelle du déséquilibre thermique est liée aux grandeurs géométriques et thermophysiques caractéristiques du matériau. Elle est parfaitement déterminée lorsque l'on connaît les conditions limites imposées sur les surfaces externes. Le traitement de la réponse à une impulsion de flux thermique imposé sur la surface externe du système, permet de mesurer la diffusivité  $a = \lambda/\rho c$  en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$  et l'effusivité  $b = \sqrt{\lambda \rho c}$  en  $\text{J K}^{-1} \text{m}^{-2} \text{S}^{1/2}$  ( $\lambda$  représentant la conductivité thermique,  $\rho$  la masse volumique et  $c$  la chaleur massique).

Les sources thermiques impulsionnelles n'ont été introduites en métrologie qu'en 1961<sup>[1]</sup>. Le principe de la "méthode flash" consiste à imposer une certaine quantité d'énergie sur la face avant d'un échantillon pendant un intervalle de temps très court et à enregistrer l'évolution temporelle de la température sur la face arrière pendant le régime transitoire. L'avantage de cette méthode est de nature expérimentale : la mesure est rapide et ne dure que quelques

secondes à quelques minutes dans la plupart des cas. Par contre, les difficultés sont théoriques : il est nécessaire d'élaborer des modèles représentatifs de la configuration expérimentale et du signal imposé. Le développement récent des techniques de calcul numérique a fourni les outils nécessaires à l'exploitation de ces modèles. Les avantages de cette méthode séduisirent de nombreux praticiens qui ont cherché depuis à étendre le domaine d'application de la méthode flash [2] [3]

Notre travail se situe dans le cadre très général de la thermocinétique impulsionnelle. Il ne doit pas être considéré comme un développement de la méthode flash, mais comme un développement des méthodes impulsionnelles utilisant les progrès récents dans les domaines de l'instrumentation et du traitement du signal. Il en résulte une extension du domaine d'application des impulsions thermiques aux matériaux de grandes dimensions et une simplification de la configuration expérimentale à mettre en oeuvre.

La méthode que nous proposons permet d'effectuer la mesure de la diffusivité thermique de matériaux homogènes de grandes dimensions. Elle convient à la caractérisation des matériaux du bâtiment.

Les progrès récents dans le domaine de l'instrumentation concernent essentiellement la mesure des flux de chaleur. L'étude de l'effet thermoélectrique distribué dans les couches minces recouvertes d'un dépôt électrolytique a permis de détecter des tensions électriques d'amplitudes proportionnelles à un flux de chaleur superficiel. De nouveaux fluxmètres thermiques utilisables en régime variable, ont été réalisés et mis à la disposition des expérimentateurs, qui peuvent ainsi obtenir des informations électriques quantitativement représentatives des échanges énergétiques en régime variable.

Les fluxmètres se présentent sous la forme de feuilles minces, qui peuvent être mises en contact thermique avec les surfaces externes de la paroi soumise à un transfert de chaleur. Le flux thermique étant par définition la grandeur introduite pour caractériser un déséquilibre thermique, la mesure des flux est représentative d'une évolution thermocinétique au même titre qu'une variation temporelle de température superficielle. La grande sensibilité des fluxmètres (de l'ordre de quelques centaines de microvolts par watt, pour une surface de un décimètre carré) permet de détecter sur la face de sortie d'un matériau, le transfert d'impulsions de chaleur d'intensité suffisamment faible, pour que les variations correspondantes de température superficielle soient d'amplitudes négligeables. La puissance émise sur la surface du matériau est typiquement de l'ordre du Watt et la durée de l'impulsion est variable (quelques secondes à quelques minutes) selon le temps caractéristique du matériau testé. L'impulsion thermique superficielle provoquant l'évolution thermocinétique, peut être générée à l'aide d'une résistance imprimée, plate, appliquée sur la face

d'entrée du matériau et alimentée en impulsions. Le dispositif utilisé pour produire ces impulsions est particulièrement simple. La configuration expérimentale (constituée d'un fluxmètre appliqué sur la face de sortie d'une paroi soumise à une impulsion thermique) introduit naturellement la notion de la "*fonction de transfert*" de flux de chaleur, comme grandeur représentative de l'évolution thermocinétique. Pendant les premiers instants du régime transitoire, les variations de flux thermique précèdent les variations de température et la face de sortie peut être considérée à température constante. Cette stylisation des conditions aux limites conduit à une expression simple de la *fonction de transfert en flux*.

L'expression analytique de cette fonction de transfert est déterminée par résolution de l'équation de Fourier compte tenu des conditions aux limites. La fonction de transfert est un modèle représentatif du passage de la chaleur à travers la paroi sa transformée de Laplace inverse, la *réponse impulsionnelle*, représente l'évolution temporelle du flux de chaleur à travers la face de sortie, lorsque la face d'entrée est soumise à un signal thermique assimilable à une impulsion de Dirac. Cette réponse impulsionnelle présente un maximum pour une abscisse fonction du temps caractéristique de la paroi. Il en est de même lorsque la face d'entrée de la paroi est soumise à un créneau de flux de durée finie. L'abscisse du maximum de flux transmis est représentative du décalage temporel existant entre l'apparition du créneau de flux incident et l'effet qu'il produit à la sortie du matériau. Ce décalage correspond à un retard dans la réponse du système physique constitué par le matériau à la sollicitation du milieu extérieur ; c'est un des effets de l'inertie thermique de la paroi, lié au temps caractéristique  $\tau_c$  et à la durée du créneau de flux absorbé par le matériau.

La détermination du temps caractéristique est théoriquement possible, lorsque l'on connaît le retard pour lequel le flux transmis prend une valeur maximum. La détermination de ce retard est difficile en pratique et la mesure directe du temps caractéristique est peu précise. Les difficultés expérimentales sont dues au fait que la variation de flux observée sur la face d'entrée ne correspond pas toujours à un créneau idéal ; elles sont également dues à la présence de bruits additifs qui se superposent à la réponse attendue. Plutôt que de réaliser de longs calculs afin de tenir compte de la forme réelle du signal d'entrée, (et de perdre ainsi l'avantage essentiel des méthodes impulsionnelles qui est surtout la mesure rapide du temps caractéristique), nous avons établi l'expression analytique de la fonction d'intercorrélation flux entrant - flux sortant. Cette fonction présente un maximum pour un retard qui s'exprime en fonction du temps caractéristique. La mesure de ce retard par analyse des signaux d'entrée et de sortie, permet d'identifier le temps caractéristique de la paroi.

La simulation du problème sur ordinateur a permis de montrer que l'analyse par intercorrélacion impose beaucoup moins de contrainte au niveau expérimental, que l'analyse directe du signal transmis. Il est possible de mesurer le temps caractéristique lorsque le signal transmis est fortement bruité, puisque chaque point de la courbe d'intercorrélacion résulte d'une moyenne temporelle qui permet de filtrer le bruit.

Les distorsions de forme du flux d'entrée par rapport au créneau idéal utilisé pour établir les fondements de la méthode, ne perturbent pas de façon notable les résultats du traitement par intercorrélacion. Cette observation vérifiée par un grand nombre de résultats expérimentaux, peut être interprétée, en considérant que l'estimation de la diffusivité est correcte lorsque l'énergie du signal de flux incident est distribuée sur une bande de fréquences couvrant le spectre de la fonction de transfert en flux. La précision sur la détermination du temps caractéristique s'exprime par une condition sur l'étendue spectrale du signal thermique incident.

Dans une première partie théorique, nous reprenons le problème classique du transfert de la chaleur dans une paroi homogène et rappelons la signification physique des paramètres thermophysiques. Nous établissons les diagrammes caractéristiques du transfert de flux en régime impulsionnel. Les équations obtenues nous permettent d'introduire une fonction de transfert représentant le passage de la chaleur dans une paroi homogène.

La seconde partie rappelle quelques notions de traitement du signal, utilisées dans notre travail pour analyser les évolutions fluxométriques. Elle est rédigée pour les lecteurs qui n'auraient que peu de notions du sujet.

Dans la troisième partie, nous introduisons théoriquement et expérimentalement l'opérateur intercorrélacion en thermocinétique. Nous montrons que ce traitement, largement utilisé dans le domaine des mesures physiques, permet l'identification de la diffusivité en régime impulsionnel.

L'utilisation de l'intercorrélacion permet d'étendre la méthode d'identification développée, à une classe beaucoup plus large de signaux d'entrée. Ces signaux ont pour caractéristique commune, une fonction d'autocorrélacion assimilable à celle d'un créneau.

Parmi tous les signaux possibles, nous avons choisi les séquences binaires pseudo-aléatoires, qui peuvent être générées par les méthodes classiques de l'électronique.

Ces signaux sont déterministes et périodiques. Ils contiennent une énergie beaucoup plus importante que les impulsions et permettent une augmentation du rapport signal/bruit. La méthode d'intercorrélation mise au point pour traiter les impulsions de flux, a été utilisée pour mesurer la corrélation entre flux entrant et flux sortant et a conduit à une nouvelle méthode de mesure du temps caractéristique.

Cette méthode de caractérisation des matériaux par intercorrélation à l'aide de signaux pseudo-aléatoires fait l'objet de la dernière partie de ce mémoire.

Le développement de la méthode de mesure décrite dans ce travail introduit les signaux de l'électronique dans le domaine de la thermocinétique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] PARKER (W.J.) et al.  
"Flash method of determining thermal diffusivity heat capacity and thermal conductivity"  
J. Appl. Phys. 1961
  
- [2] PONCIN (H.)  
"Thermocinétique impulsionnelle et mesure de la diffusivité thermique"  
Chiron, 1978
  
- [3] DEGIOVANNI (A.)  
"Diffusivité et Méthode Flash"  
Revue Générale de Thermique , n° 185 , Mai 1977

NOTATIONS ET UNITES

---

$\lambda$	conductivité thermique	$W m^{-1} K^{-1}$
$\rho$	masse volumique	$Kg m^{-3}$
$c$	chaleur massique	$J Kg^{-1} K^{-1}$
$a = \frac{\lambda}{\rho c}$	diffusivité thermique	$m^2 s^{-1}$
$b = \sqrt{\lambda \rho c}$	effusivité thermique	$J K^{-1} m^{-2} s^{1/2}$
$\tau_c = \frac{\ell^2}{a}$	temps caractéristique d'une paroi d'épaisseur $\ell$	S
$\hat{\tau}_c$	estimation du temps caractéristique	S
$t$	variable temporelle	S
$x$	variable spatiale	m
$\ell$	épaisseur de la paroi	m , mm
$T(x,t)$	champ spatio-temporel de température	K , °C
$\phi(x,t)$	champ spatio-temporel de densité de flux	$W m^{-2}$
$\phi_1(t)$	densité de flux incident	$W m^{-2}$
$\phi_2(t)$	densité de flux sortant	$W m^{-2}$
$\delta$	durée du créneau de flux incident	S
$t_1$	abscisse du maximum de $\phi_2$	S
$R_{xy}(\tau)$	fonction d'intercorrélation de x et y	
$\hat{R}_{xy}(\tau)$	estimation de $R_{xy}$	
$z(\tau)$	fonction d'intercorrélation de $\phi_1$ et $\phi_2$	
$\tau_1$	abscisse du maximum de $z(\tau)$	S
$\hat{\tau}_1$	estimation de $\tau_1$	S
[ a ]	matrice de transition de la paroi	
L	longueur de la séquence binaire pseudo-aléatoire	
$\Delta t$	période d'horloge du générateur de SBPA	S
T	pas d'échantillonnage	S
H(p)	fonction de transfert de flux thermique	
h(t)	réponse impulsionnelle	
$\hat{h}(t)$	estimation de h(t)	

PREMIERE PARTIE

ÉLABORATION DES MODÈLES THERMOCINÉTIQUES

---



## CHAPITRE I : TRANSMISSION DE LA CHALEUR PAR CONDUCTION

Dans ce chapitre, nous établissons l'équation d'évolution des échanges thermiques par conduction et donnons la signification physique des paramètres de base figurant dans les équations de conduction [1] à [7]

### I-1-1- LOI DE FOURIER

Considérons, dans un milieu homogène et isotrope soumis à des perturbations thermiques d'origine externe transmises par conduction, un domaine  $\mathcal{D}$  limité par une surface  $\sigma$  (fig. I.1.1.0)

Soit  $T(x, y, z, t)$  la température à l'instant  $t$  en chaque point du domaine. La quantité de chaleur qui traverse un élément de surface  $d\sigma$  dans le sens de la normale pendant le temps  $dt$  est liée au champ de température par la loi de Fourier :

$$dQ = - \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} d\sigma dt \quad (\text{I.1.1.00})$$

$\vec{n}$  désigne la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de  $\sigma$ .

$\lambda$  est un paramètre positif caractéristique du milieu, appelé conductivité thermique. Il s'exprime en  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ .

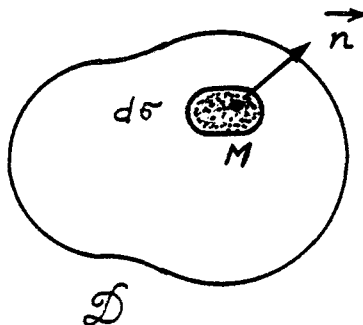


Figure I.1.1.0

Le signe moins de la relation (I.1.1.00) montre que les transferts de chaleur ont lieu dans le sens des températures décroissantes.

### I-1-2- FLUX THERMIQUE ET DENSITE DE FLUX

Pour décrire les échanges thermiques, il est commode d'introduire la densité de flux thermique qui s'exprime en  $W m^{-2}$  définie par la relation :

$$\phi = \frac{dQ}{d\sigma dt} \quad (I.1.2.00)$$

et le vecteur densité de flux :

$$\vec{\phi} = - \lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \quad (I.1.2.01)$$

de sorte que la loi de Fourier (I.1.1.00) s'écrit :

$$\frac{dQ}{dt} = \vec{\phi} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \quad (I.1.2.02)$$

### I-1-3- L'EQUATION DE LA DIFFUSION THERMIQUE

Dans un milieu matériel soumis à des sollicitations thermiques, le champ de température  $T(x,y,z,t)$  est solution de l'équation de la chaleur qui admet une solution unique lorsque les conditions aux limites et les conditions initiales sont précisées.

A partir de la loi de Fourier on peut exprimer la quantité de chaleur globale  $Q$  rentrant dans le domaine  $\mathcal{D}$  (figure I.1.1.0) pendant un temps  $dt$ .

$$Q = \iint_{\sigma} \lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} dt d\sigma \quad (I.1.3.00)$$

Cet apport calorifique  $Q$  élève la température locale au point  $M$  d'une quantité  $\frac{\partial T}{\partial t} dt$  ; de sorte que la quantité de chaleur fournie au domaine  $\mathcal{D}$  peut encore s'exprimer en fonction du champ de température par l'intégrale

$$\iiint_{\tau} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau \quad (I.1.3.01)$$

$d\tau$  étant l'élément de volume,  $\rho$  et  $c$  la densité volumique et la chaleur massique au point considéré.

Les transferts de chaleur étant uniquement dues aux variations spatiales de température, le principe de conservation de l'énergie implique l'égalité des expressions (I.1.3.00) et (I.1.3.01) :

$$\iint_{\sigma} \lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \, dt \, d\sigma = \iiint_{\tau} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \, dt \, d\tau \quad (\text{I.1.3.02})$$

En appliquant le théorème de la divergence, il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \operatorname{div} (\lambda \overrightarrow{\text{grad } T}) \quad (\text{I.1.3.03})$$

Généralement, le coefficient  $\lambda$  dépend de la température  $T$  et varie d'un point à un autre par l'intermédiaire de  $T$ .

La relation (I.1.3.03) peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \operatorname{div} (\overrightarrow{\text{grad } T}) + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \overrightarrow{\text{grad}}^2 T \quad (\text{I.1.3.04})$$

Dans de nombreux cas, les variations de températures sont faibles,  $\text{grad } T$  est faible, ainsi que son carré, et l'équation (I.1.3.04) prend la forme simple :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T} \quad (\text{I.1.3.05})$$

C'est l'équation de la diffusion thermique encore appelée équation de Fourier.  $\Delta T$  représente le Laplacien du champ thermique  $T(x,y,z,t)$  :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{I.1.3.06})$$

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$  est la diffusivité thermique du milieu, et s'exprime en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

La connaissance de ce coefficient est fondamentale pour caractériser les échanges thermiques par conduction en régime non stationnaire.

Un cas pratique important est celui du mur plan dont les dimensions transversales sont importantes vis-à-vis de l'épaisseur (figure I.1.3.0)

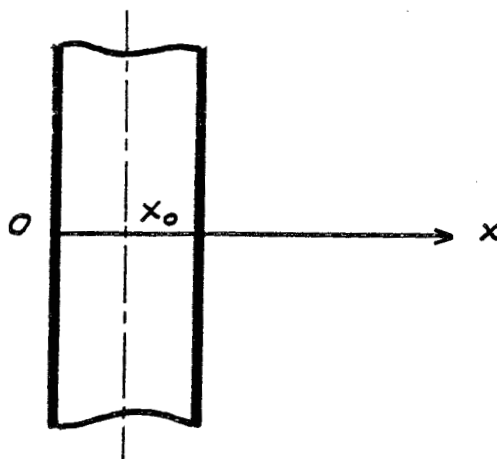


Figure I.1.3.0

Les plans de section droite sont isothermes et le milieu peut être assimilé à un système monodimensionnel. Dans ces conditions, le Laplacien n'a qu'une composante non nulle (suivant la direction Ox) et l'équation (I.1.3.05) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}} \quad (\text{I.1.3.07})$$

C'est l'équation de la diffusion thermique dans un milieu monodimensionnel, homogène à diffusivité constante. Elle représente un modèle assez fidèle de l'évolution temporelle du champ thermique dans une paroi plane lorsque les conditions aux limites et les conditions initiales sont spécifiées.

#### I-1-4- CONDITIONS AUX LIMITES

Les variations temporelles de la température ou du flux thermique aux frontières du matériau déterminent le champ thermique à l'intérieur du matériau. Ces conditions sont en général de trois sortes :

- Les conditions de 1ère espèce : En chaque point de la frontière, la température prend une valeur  $T_1(t)$  imposée par l'extérieur :

$$T(x_0, t) = T_1(t)$$

- Les conditions de 2<sup>è</sup> espèce : En chaque point de la frontière, la densité de flux thermique est imposée :

$$\phi(x_0, t) = \phi_1(t)$$

- Les conditions de 3<sup>è</sup> espèce : Il existe une relation linéaire entre flux thermique et température imposée :

$$\phi(x_0, t) = h [T(x_0, t) - T_f]$$

$T_f$  représentant la température d'un fluide en contact avec le matériau et "h" un coefficient de proportionnalité appelé coefficient d'échange. Cette dernière condition est assez fréquemment rencontrée en pratique.

#### I-1-5- CONDITIONS INITIALES

L'évolution thermocinétique en régime transitoire dépend des conditions initiales ; il faut, pour déterminer l'évolution thermocinétique, connaître l'expression analytique du champ thermique initial :

$$T(x, 0) = T_0(x)$$

de sorte que la solution de l'équation vérifie cette condition lorsque l'on fait tendre le temps vers zéro.

#### I-1-6- CARACTERISTIQUES THERMOPHYSIQUES DES MATERIAUX

La transmission de la chaleur par conduction dans un milieu met en jeu trois grandeurs essentielles caractéristiques de ce milieu : la conductivité thermique " $\lambda$ ", la diffusivité thermique " $a$ " et l'effusivité " $b$ " encore appelée coefficient d'arrachement.

##### I-1-6-1- LA CONDUCTIVITE THERMIQUE

Nous avons déjà rencontré ce paramètre dans l'expression de la loi de Fourier. La conductivité  $\lambda$  traduit l'aptitude d'un matériau à conduire plus ou moins la chaleur. A ce paramètre, on associe souvent la résistance thermique  $R$  caractéristique des problèmes de régime établi.

Si l'on considère une paroi plane d'épaisseur  $\ell$  soumis sur une de ses faces à une température  $T_1$  et sur son autre face à une température  $T_2$ , si  $T_1$  et  $T_2$  ne varient pas dans le temps, il s'établit dans cette paroi un flux constant

$$\phi = \frac{|T_1 - T_2|}{R} \quad (\text{I.1.6.00})$$

le vecteur flux étant dirigé vers la face la plus froide de la paroi.

On montre simplement à partir de la loi de Fourier que la résistance thermique d'une paroi plane d'épaisseur  $l$  et de section  $S$  est donnée par la relation :

$$R = \frac{l}{\lambda S} \quad (\text{I.1.6.01})$$

$R$  s'exprime en  $\text{K W}^{-1}$  et traduit les déperditions énergétiques en régime permanent. Ce paramètre joue un rôle essentiel dans les problèmes d'isolation thermique.

#### I-1-6-2- L'EFFUSIVITE THERMIQUE

Le flux thermique pénétrant dans un mur initialement à la température uniforme  $T_0$  et dont la face d'entrée est portée à une température constante  $T_1$ , est proportionnel à  $(T_1 - T_0)$  et à la grandeur :

$$b = \sqrt{\lambda \rho c} \quad (\text{I.1.6.02})$$

Ce paramètre  $b$  caractéristique du milieu est appelé effusivité ou coefficient d'arrachement et s'exprime en  $\text{J K}^{-1} \text{m}^{-2} \text{S}^{1/2}$ . Il joue un rôle important dans les problèmes de mise en contact brusque de deux corps à températures différentes. On montre en effet que deux corps plans dont les températures sont  $T_1$  et  $T_2$  mis en contact à l'instant zéro, prennent à leur surface commune une température  $T_0$  indépendante du temps. Cette température ne dépend que des effusivités des deux corps. Le corps de plus forte effusivité a tendance à imposer à la surface commune une température voisine de la sienne propre. Il est facile de montrer que l'effusivité peut encore s'écrire :

$$b = \sqrt{\frac{C}{R}} \quad (\text{I.1.6.03})$$

où  $C$  est la capacité thermique de la paroi d'épaisseur  $l$  et de section  $S$

$$C = \rho c l S \quad (\text{I.1.6.04})$$

I-1-6-3- LA DIFFUSIVITE THERMIQUE

La diffusivité thermique caractérise la vitesse de progression d'une perturbation thermique dans un milieu.

Si l'on considère un mur semi-infini soumis sur sa surface d'abscisse  $x = 0$  à une perturbation thermique à l'instant zéro, cette perturbation mettra un certain temps pour provoquer un effet sensible à la profondeur  $x = \ell$ . Ce "retard thermique de pénétration relatif à l'épaisseur  $\ell$ " est proportionnel à  $\ell^2$  et inversement proportionnel à la diffusivité thermique du matériau :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \text{ en } m^2 S^{-1} .$$

La grandeur

$$\tau_c = \frac{\ell^2}{a} \tag{I.1.6.05}$$

appelée temps caractéristique de Fourier de la paroi d'épaisseur  $\ell$ , traduit l'inertie thermique de cette paroi. Pour fixer les ordres de grandeur du retard thermique, considérons un mur semi-infini de diffusivité "a" soumis sur sa surface à une perturbation thermique unité. On montre [ 5 ] que le temps nécessaire pour que cette perturbation superficielle provoque un élèvement de température de  $0,01^\circ C$  à la profondeur  $x$  est :

$$t \approx 0,08 \frac{x^2}{a}$$

Pour une profondeur  $x = 10$  cm, ce temps est de l'ordre de 8 sec pour le cuivre ( $a \approx 10^{-5}$ ), de 13 mn pour un mur en brique ( $a \approx 10^{-6}$ ) et de 45 mm pour le sol ( $a \approx 3.10^{-7}$ ).

A cause de cet effet d'inertie, on peut considérer qu'une paroi d'épaisseur finie  $\ell$  se comporte comme un milieu semi-infini tant que le temps écoulé depuis l'apparition de la perturbation reste inférieur à  $0,08 \ell^2/a$ .

L'intérêt de la notion de diffusivité apparaît dans les problèmes de régime variable. Rappelons quelques résultats concernant la progression d'un signal thermique périodique dans un milieu semi-infini de diffusivité "a", initialement à la température zéro [ 2 ] :

Si la température superficielle ( $x = 0$ ) est :

$$T(0, t) = T_0 \text{ Cos } \omega t$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ ,  $\tau$  étant la période de la perturbation, il s'établit dans le milieu un régime permanent sinusoïdal

$$T(x,t) = T_0 e^{-mx} \text{ Cos } (\omega t - mx) \tag{I.1.6.06}$$

avec  $m = \sqrt{\frac{\pi}{a\tau}}$  .

L'amplitude des oscillations décroît de façon exponentielle lorsque  $x$  augmente ; elle est d'autant plus faible que la fréquence  $\frac{1}{\tau}$  des oscillations est élevée et la diffusivité faible. La profondeur  $x_k$  à laquelle l'amplitude est de  $\frac{1}{k}$  fois celle de la température superficielle est :

$$x_k = \frac{\ln k}{\sqrt{\pi}} \sqrt{a\tau} \quad (\text{I.1.6.07})$$

Pour un sol de diffusivité  $3.10^{-7}$ , des variations diurnes-nocturnes de température ( $\tau = 24$  h) d'amplitude  $10^\circ\text{C}$ , ne provoquent qu'une perturbation d'amplitude de  $0,1^\circ\text{C}$  à 42 cm de profondeur et de  $0,01^\circ\text{C}$  à 63 cm de profondeur.

#### I-1-7- CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons établi les équations de base qui régissent la transmission de la chaleur par conduction dans un milieu homogène et isotrope.

Nous avons rappelé les définitions et le sens physique des paramètres fondamentaux qui interviennent dans les équations de la chaleur et avons particulièrement insisté sur le rôle essentiel joué par la diffusivité en régime variable.

Le prochain chapitre sera consacré à la résolution de l'équation de la chaleur.



## CHAPITRE 2 : RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE FOURIER

Dans ce chapitre, nous montrons que l'état thermique local est défini lorsque l'on connaît flux thermique et variation de température. Nous montrons qu'il est possible d'introduire par résolution de l'équation de Fourier une matrice de transition permettant de définir l'état en un point à partir de l'état supposé connu en un autre point du système.

### I-2-1- POSITION DU PROBLEME

Considérons une paroi plane, d'épaisseur  $l$  faible vis-à-vis de ses dimensions transversales (figure I.2.1.0.) soumise à une sollicitation thermique définie par les valeurs des températures et flux thermiques sur les faces d'entrée (1) et de sortie (2) de la paroi.

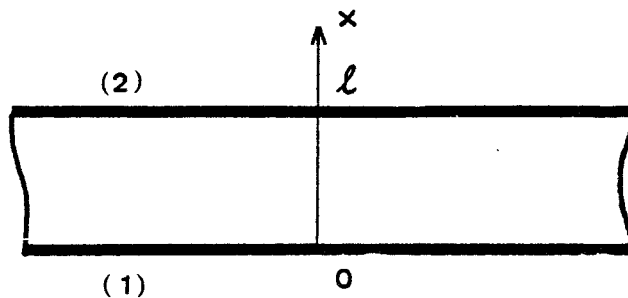


Figure I.2.1.0

L'évolution du champ thermique dans la paroi est solution de l'équation de Fourier :

$$a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (\text{I.2.1.00})$$

Nous associons à cette équation la loi de Fourier :

$$\phi(x,t) = - \lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (\text{I.2.1.01})$$

les conditions aux limites :

$$\text{en } x = 0 \quad : \quad T(0,t) \quad , \quad \phi(0,t) \quad \quad \quad (\text{I.2.1.02})$$

$$\text{en } x = l \quad : \quad T(l,t) \quad , \quad \phi(l,t) \quad \quad \quad (\text{I.2.1.03})$$

et la condition initiale représentative de l'équilibre thermique à l'instant initial

$$T(x,0^+) = 0 \quad \quad \quad (\text{I.2.1.04})$$

### I-2-2- SOLUTION DU PROBLEME

Soit  $\Theta(x,p)$  et  $\Phi(x,p)$  les transformées de Laplace de  $T(x,t)$  et de  $\phi(x,t)$  définies par :

$$\Theta(x,p) = \mathcal{L} [ T(x,t) ] \quad \quad \quad (\text{I.2.2.00})$$

$$\Phi(x,p) = \mathcal{L} [ \phi(x,t) ] \quad \quad \quad (\text{I.2.2.01})$$

$$\text{avec } \mathcal{L} [ f(x,t) ] = \int_0^{\infty} e^{-tp} f(x,t) dt \quad \quad \quad (\text{I.2.2.02})$$

Les résultats du calcul opérationnel<sup>[12]</sup> permettent de ramener l'équation (I.2.1.00) à une équation différentielle ordinaire :

$$a \frac{d^2}{dx^2} \Theta(x,p) = p \Theta(x,p) - T(x,0^+) \quad \quad \quad (\text{I.2.2.03})$$

L'utilisation de la condition initiale (I.2.1.04) conduit à la relation :

$$\frac{d^2}{dx^2} \Theta(x,p) - \frac{p}{a} \Theta(x,p) = 0 \quad \quad \quad (\text{I.2.2.04})$$

L'équation du flux (I.2.1.01) se met sous la forme opérationnelle :

$$\Phi(x,p) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \Theta(x,p) \quad \quad \quad (\text{I.2.2.05})$$

De même, les conditions aux limites (I.2.1.02) et (I.2.1.03) s'écrivent :

$$\text{en } x = 0 \quad : \quad \Theta(0,p) \quad , \quad \Phi(0,p) \quad \quad \quad (\text{I.2.2.06})$$

$$\text{en } x = l \quad : \quad \Theta(l,p) \quad , \quad \Phi(l,p) \quad \quad \quad (\text{I.2.2.07})$$

Compte tenu des conditions aux limites, la solution se met sous la forme matricielle<sup>[11]</sup> :

$$\begin{bmatrix} \Theta(\ell, p) \\ \Phi(\ell, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell & -\frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \text{Sh} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell \\ -\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \text{Sh} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell & \text{Ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta(o, p) \\ \Phi(o, p) \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.2.08})$$

Pour simplifier l'écriture de cette relation, nous pouvons introduire :

$$\begin{cases} \Theta(o, p) = \Theta_1(p) \\ \Phi(o, p) = \Phi_1(p) \\ \Theta(\ell, p) = \Theta_2(p) \\ \Phi(\ell, p) = \Phi_2(p) \end{cases} \quad (\text{I.2.2.09})$$

et l'effusivité  $b = \sqrt{\lambda \rho c}$

de sorte que l'équation (I.2.2.08) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Theta_2(p) \\ \Phi_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell & -\frac{\text{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell}{b \sqrt{p}} \\ -b \sqrt{p} \text{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell & \text{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1(p) \\ \Phi_1(p) \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.2.10})$$

Soit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.2.11})$$

L'équation matricielle (I.2.2.08) permet de calculer la température et le flux thermique dans un plan quelconque d'une paroi plane (Fig. I.2.2.0) lorsque l'on connaît l'évolution de la température et celle du flux dans un autre plan situé à une distance  $\ell$  du premier.

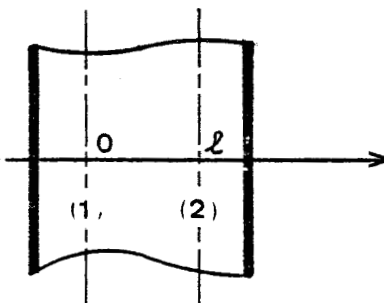


Figure I.2.2.0

Plus généralement, la connaissance de deux grandeurs thermiques quelconques dans le matériau ou sur ses frontières permettent de déterminer l'évolution thermocinétique dans le matériau.

I-2-3- QUADRIPOLE EQUIVALENT

I-2-3-1- QUADRIPOLE EQUIVALENT A UNE PAROI HOMOGENE

La matrice [a] définie par la relation (I.2.2.11) est connue sous l'appellation "Matrice de Chaîne" en électricité. Le déterminant de cette matrice a une propriété remarquable.

$$A^2 + BC = \text{ch}^2 \sqrt{\frac{p}{a}} \ell + \text{sh}^2 \sqrt{\frac{p}{a}} \ell = 1 \quad (\text{I.2.3.00})$$

de sorte que la relation inverse s'exprime par l'équation :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = [a]^{-1} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.3.01})$$

Les relations matricielles (I.2.2.11) et (I.2.3.01) peuvent être représentées par un quadripôle équivalent de matrice [a] figure I.2.3.0

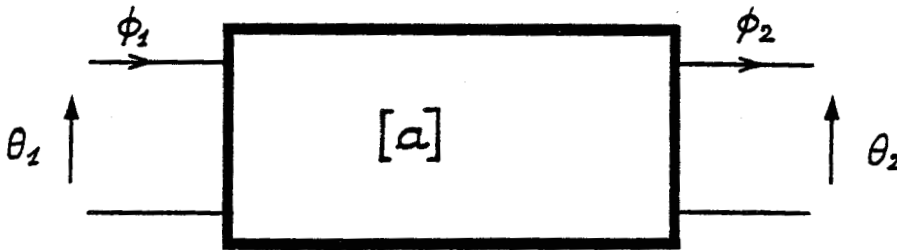


Figure I.2.3.0

Pour établir ce schéma équivalent, nous utilisons les analogies "température-potential" et "flux thermique-courant électrique".

I-2-3-2- MISE EN CASCADE DE PLUSIEURS MILIEUX

Dans le cas plus général d'un multicouche, on peut définir une matrice de transition (A-I-1) égale au produit des matrices de transition élémentaires.

Dans ce cas, nous aurons une relation matricielle de la forme :

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.3.02})$$

avec  $A = A'$  lorsque le système est symétrique.

Pour un tel système, on a la propriété

$$AA' + BC' = 1 \quad (\text{I.2.3.03})$$

de sorte que la relation inverse s'écrit toujours sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.3.04})$$

I-2-4- CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons montré que la solution de l'équation de la chaleur peut se mettre sous une forme matricielle qui relie flux et variations de température dans deux sections droites du système.

Nous montrons en annexe que cette représentation matricielle peut être obtenue à partir de la notion "d'état thermique local" (A-I-1).

La connaissance des deux composantes du vecteur d'état thermique (température et flux) permet de décrire complètement l'évolution thermocinétique du milieu étudié.

## CHAPITRE 3 : INTRODUCTION DE LA NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT EN THERMOCINETIQUE.

### I-3-1- INTRODUCTION

Dans le chapitre 2, nous avons décrit les échanges thermiques dans une paroi plane par une équation matricielle reliant flux et température dans un plan en fonction des quantités analogues définies dans un autre plan. Nous introduisons avec le flux et la température la notion fondamentale "d'état thermique local" \* qui définit localement l'évolution thermocinétique dans un plan de section droite (voir A-I-1). Ce modèle de représentation de l'évolution thermocinétique introduit naturellement la notion de "système thermique" à constantes réparties dans lequel l'état thermique local est une fonction dépendant du temps et des coordonnées d'espace. L'état d'un tel système ne peut être représenté analytiquement lorsque le système est hétérogène. La représentation matricielle, développée dans le cas des lignes dispersives <sup>[11]</sup>, conduit à des équations formellement analogues aux relations (I.2.2.10). Elle peut être utilisée pour modéliser les échanges thermiques en régime variable dans un milieu homogène. Ces résultats ont été utilisés par ailleurs <sup>[10]</sup> pour représenter la transmission de la chaleur en régime variable dans les parois composées.

Dans notre travail, nous généralisons ces résultats et introduisons la notion de système (boîte noire) en thermocinétique. La densité de flux thermique, composante locale du vecteur d'état thermique, est introduite pour représenter les évolutions thermocinétiques. L'utilisation de cette variable d'état est particulièrement représentative des évolutions provoquées par de faibles variations des paramètres intensifs difficiles à mesurer. Elle est particulièrement bien adaptée à l'identification des évolutions thermocinétiques.

-----  
\* La notion "d'état thermique" est entendu ici au sens de la théorie des systèmes, et non de la thermodynamique.

Ayant défini une représentation d'état, nous établissons les relations entre variations de températures et flux thermiques superficiels supposés accessibles à la mesure. Nous introduisons ainsi avec le vecteur d'état le "quadripôle thermique" équivalent à la paroi étudiée. Cette représentation est générale et indépendante des conditions aux limites. Elle permet de définir quatre fonctions de transfert différentes lorsque l'on utilise des conditions aux limites du type température ou flux thermique imposé. De façon plus générale, elle permet de représenter les fonctions de transfert correspondant à toute configuration expérimentale particulière.

L'introduction du flux thermique comme composante mesurable du vecteur d'état introduit en pratique des notions d'impédance thermique et de fonction de transfert en flux dans les méthodes d'identification.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à la détermination expérimentale de cette dernière fonction de transfert. Le concept d'impédance ou d'admittance thermique généralisées ne résulte pas uniquement d'une analogie de forme entre la représentation matricielle des échanges thermiques et les relations courant-tension sur les lignes électriques ; il peut être introduit de façon formelle par des méthodes variationnelles qui établissent des relations linéaires entre variations de températures et flux thermiques superficiels [17].

### I-3-2- DEFINITION

Le comportement dynamique d'un système linéaire à paramètres constants peut être décrit par sa fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

où  $S(p)$  désigne la transformée de Laplace de la sortie du système et  $E(p)$  celle de l'entrée.

La fonction de transfert est un modèle du système considéré, mais elle suppose que les conditions initiales sont nulles ; elle permet de calculer les variations du signal de sortie lorsque l'on connaît celles de l'entrée.

### I-3-3- LES FONCTIONS DE TRANSFERT RELIANT LES VARIATIONS DE TEMPERATURE ET DE FLUX

#### I-3-3-1-

Ayant défini une relation matricielle entre flux thermique et variations de température :

$$\Theta_2 = A \Theta_1 - B \Phi_1$$

(I.3.3.00)

$$\Phi_2 = -C \Theta_2 + A \Phi_1$$

avec  $A = \text{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell$        $B = \frac{\text{Sh} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell}{b \sqrt{p}}$        $C = b \sqrt{p} \text{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell$

Il est possible d'établir une relation entre deux variables si l'on impose une contrainte sur une troisième variable. Cette contrainte est généralement réalisée de façon expérimentale en imposant températures ou flux superficiels du matériau.

Avec ces contraintes, il est possible d'introduire les fonctions de transfert :

$$H'(p) = \left[ \begin{array}{c} \Theta_2 \\ \Theta_1 \end{array} \right]_{\Phi_2=0} = \frac{1}{A} \tag{I.3.3.01}$$

$$H(p) = \left[ \begin{array}{c} \Phi_2 \\ \Phi_1 \end{array} \right]_{\Theta_2=0} = \frac{1}{A} \tag{I.3.3.02}$$

Dans la première configuration, on maintient un flux nul sur la face de sortie de la paroi et on relève les variations de température à l'entrée et à la sortie de la paroi. En pratique, pour réaliser cette condition de flux nul, on peut utiliser un montage symétrique (figure I.3.2.0). Cette configuration expérimentale a été utilisée par certains auteurs pour la mesure de la diffusivité thermique [8].

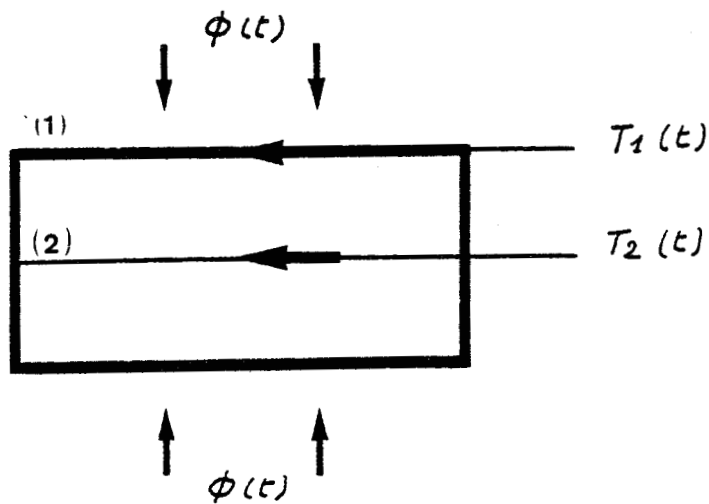


Figure I.3.2.0.



La seconde possibilité définie par la relation (I.3.3.02) conduit à maintenir constante la température sur la face de sortie du matériau. On mesure alors le gradient thermique en entrée et en sortie de la paroi.

L'étude expérimentale des fonctions de transfert H ou H' conduit à la détermination de la seule diffusivité puisque le coefficient A ne dépend que de la diffusivité.

#### I-3-3-2- DETERMINATION DU COEFFICIENT B

Le coefficient B de la matrice de transition peut être déterminé à partir de la fonction de transfert :

$$Y(p) = \left[ \begin{array}{c} \Phi_2 \\ \Theta_1 \end{array} \right]_{\Theta_2=0} = \frac{1}{B} \quad (\text{I.3.3.03})$$

L'identification expérimentale de cette fonction de transfert fournit un procédé de mesure simultanée de la diffusivité et de l'effusivité.

#### I-3-3-3- DETERMINATION DU COEFFICIENT C

De façon analogue, on peut déterminer le coefficient C à partir de la fonction de transfert :

$$R(p) = \left[ \begin{array}{c} \Theta_2 \\ \Phi_1 \end{array} \right]_{\Phi_2=0} = \frac{1}{C} \quad (\text{I.3.3.04})$$

L'identification expérimentale de cette fonction de transfert permet la détermination simultanée de la diffusivité et de l'effusivité.

#### I-3-3-4- AUTRES FONCTIONS DE TRANSFERT

On peut définir l'impédance d'entrée

$$Z_{e\infty} = \left[ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{array} \right]_{\Phi_2=0} = \frac{C}{A} \quad (\text{I.3.3.05})$$

obtenue lorsque la sortie est thermiquement isolée.

De même, on peut définir l'impédance d'entrée

$$Z_{eo} = \left[ \begin{array}{c} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{array} \right]_{\Theta_2=0} = \frac{B}{A} \quad (\text{I.3.3.06})$$

obtenue lorsque les variations de la température de sortie sont nulles.

I-3-3-5- L'IMPEDANCE GENERALISEE

En combinant les relations matricielles (I.2.2.11) et (I.2.3.01) et en introduisant les combinaisons de variables :

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \theta_1 - \theta_2 & ; & & \Sigma\theta &= \theta_1 + \theta_2 \\ \Delta\phi &= \phi_1 - \phi_2 & ; & & \Sigma\phi &= \phi_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

Il est facile de représenter les échanges thermiques par la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B}{1+A} & 0 \\ 0 & \frac{C}{1+A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma\phi \\ \Sigma\theta \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.3.07})$$

La matrice est diagonale. La différence de température n'est liée qu'à la somme des flux et la somme des températures à la différence des flux. Il est intéressant de considérer la grandeur  $Z(p)$  ou "impédance généralisée" qui représente la fonction de transfert entre  $\Delta\theta$  et  $\Sigma\phi$

$$Z(p) = \frac{\Delta\theta}{\Sigma\phi} = \frac{B}{1+A} \quad (\text{I.3.3.08})$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$Z(p) = \frac{1}{b \sqrt{p}} \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{a}} \ell \right) \quad (\text{I.3.3.09})$$

L'identification de cette fonction de transfert conduit à la détermination simultanée de la diffusivité et de l'effusivité.

L'intérêt pratique de cette représentation réside dans le fait qu'elle ne fait intervenir aucune contrainte sur une variable.

I-3-4- REMARQUES

a) La diffusivité intervient dans toutes ces fonctions de transfert et traduit la dynamique des échanges thermiques.

Par contre, l'effusivité n'apparaît que lorsque les grandeurs d'entrée et de sortie sont de natures différentes ; ce paramètre n'a qu'un rôle statique et n'influe pas sur la vitesse des échanges thermiques ; il apparaît simplement comme un facteur de proportionnalité au signal de sortie.

b) Il est important de noter que l'étalonnage des capteurs n'est pas nécessaire lorsque l'on s'intéresse uniquement à la mesure des fonctions de transfert reliant les flux thermiques ou les variations de température. Par contre, cet étalonnage devient obligatoire lorsque l'on s'intéresse à l'effusivité.

c) En pratique, il n'est pas simple d'imposer les contraintes  $\theta_2 = 0$  ou  $\phi_2 = 0$ .

- Le modèle adiabatique correspondant à la condition  $\phi_2 = 0$  a été utilisé par certains auteurs<sup>[8]</sup>. Cependant, l'isolation ne peut être parfaite. Le montage symétrique présenté en figure I.3.2.0. a l'avantage de réaliser cette condition avec une bonne approximation. Cependant, dans certains cas, il est difficile, voire impossible de disposer de deux échantillons et de deux sources d'excitation identiques. Les mesures non destructives des matériaux et les mesures in situ interdisent cette possibilité.

- Le modèle  $\theta_2 = 0$  où l'on impose une température constante en sortie ne présente pas moins d'inconvénients. En effet, pour que cette condition soit réalisée, il faut que la charge ait une capacité théoriquement infinie et une résistance nulle. Pratiquement, cette condition ne peut être qu'approchée. La mise en oeuvre d'un système de régulation classique pour imposer la condition  $\theta_2 = 0$  pose des difficultés pratiques. La température varie autour de la valeur de consigne, chaque perturbation provoquant une forte variation du flux de sortie  $\phi_2$ .

### I-3-5- CONCLUSION

La fonction de transfert représente dans le domaine complexe, le comportement d'un système linéaire. Ce modèle est bien adapté au calcul analytique ; il permet, lorsque l'on connaît les variations du signal d'entrée du système, de déterminer celles du signal de sortie.

D'autres modèles de représentation ont été développés<sup>[15],[18],[19]</sup>, ils ont l'avantage d'être mieux adaptés aux techniques expérimentales d'identification des systèmes ; tous ces modèles sont équivalents et il est possible de passer de l'un à l'autre à l'aide de techniques numériques (régression, transformation Fourier, etc...).

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude du modèle "Réponse impulsionnelle" à partir duquel seront développées les techniques expérimentales de notre travail.

## CHAPITRE 4 : RÉPONSE IMPULSIONNELLE

### I-4-1- INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la représentation d'état des échanges thermiques dans une paroi plane homogène et isotrope conduisait de façon simple à la notion de fonction de transfert lorsque l'on impose à la paroi, une condition aux limites de type température ou flux imposés.

Nous avons montré l'intérêt d'une telle représentation pour la détermination expérimentale des constantes thermophysiques.

La réponse impulsionnelle est un autre modèle du système, valable dans les mêmes conditions que la fonction de transfert. Elle exprime dans le domaine temporel le comportement dynamique d'un système linéaire à coefficients constants. Cette représentation est particulièrement bien adaptée à l'identification expérimentale des systèmes et a fait l'objet de nombreux travaux [15],[18],[19].

### I-4-2- REPONSE IMPULSIONNELLE

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'un système linéaire est par définition la réponse du système, lorsque le signal d'entrée est une impulsion infiniment brève\*  $\delta(t)$ .

Il est facile de montrer que la réponse impulsionnelle est donnée par la transformée inverse de Laplace de la fonction de transfert :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [ H(p) ] \quad (\text{I.4.2.00})$$

-----  
\*

en toute rigueur  $\delta(t)$  représente la distribution de Dirac définie par :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ pour } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned}$$

De même que la réponse  $s(t)$  à une excitation quelconque  $e(t)$  d'un système linéaire physiquement réalisable s'exprime par l'intégrale de convolution :

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) e(t - \tau) d\tau \quad (\text{I.4.2.01})$$

que l'on note encore

$$s(t) = h(t) * e(t) \quad (\text{I.4.2.02})$$

La détermination de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie constitue le problème de l'identification de processus.

### I-4-3- ETUDE DE LA REPONSE A UNE IMPULSION DE FLUX

La fonction de transfert de flux

$$H(p) = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \Theta_2 = 0$$

est définie par la relation :

$$H(p) = \frac{1}{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l} = \frac{1}{\text{ch} \sqrt{\tau_c p}} \quad (\text{I.4.3.00})$$

en faisant intervenir le temps caractéristique de Fourier  $\tau_c = \frac{l^2}{a}$

#### I-4-3-1- REPONSE IMPULSIONNELLE

Elle est définie par la transformée inverse de Laplace de  $H(p)$  :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [ H(p) ] \quad (\text{I.4.3.01})$$

Soit (voir A-I-2)

$$h(t) = \frac{\pi}{\tau_c} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c}} \quad (\text{I.4.3.02})$$

Pour les fortes valeurs du temps, ce développement converge très rapidement.

En effet, pour  $\frac{t}{\tau_c} \geq 0,3$  on commet une erreur inférieure à 1 % en limitant la série (I.3.6.02) à son premier terme :

$$h(t) \simeq \frac{\pi}{\tau_c} e^{-\frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c}} \quad \text{pour } \frac{t}{\tau_c} \geq 0,3 \quad (\text{I.4.3.03})$$

Pour les faibles valeurs du temps, il faut définir un autre développement ; nous utilisons pour cela la relation :

$$\frac{1}{\text{ch } u} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)u} \quad (\text{I.4.3.04})$$

qui permet d'écrire H(p) sous la forme :

$$H(p) = 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1) \sqrt{\tau_c p}} \quad (\text{I.4.3.05})$$

Soit, puisque  $\int^{-1} (e^{-\alpha \sqrt{p}}) = \frac{\alpha}{2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$  (I.4.3.06)

$$h(t) = h_0(t) = \frac{1}{\tau_c \sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau_c}{t}\right)^{3/2} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2 \frac{\tau_c}{4t}} \quad (\text{I.4.3.07})$$

Cette expression représente le développement de h(t) pour les faibles valeurs du temps.

Lorsque  $\frac{t}{\tau_c}$  est petit, on peut limiter la série  $h_0(t)$  à son premier terme, soit :

$$h_0(t) \simeq \frac{1}{\tau_c} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau_c}{t}\right)^{3/2} e^{-\frac{\tau_c}{4t}} \quad (\text{I.4.3.08})$$

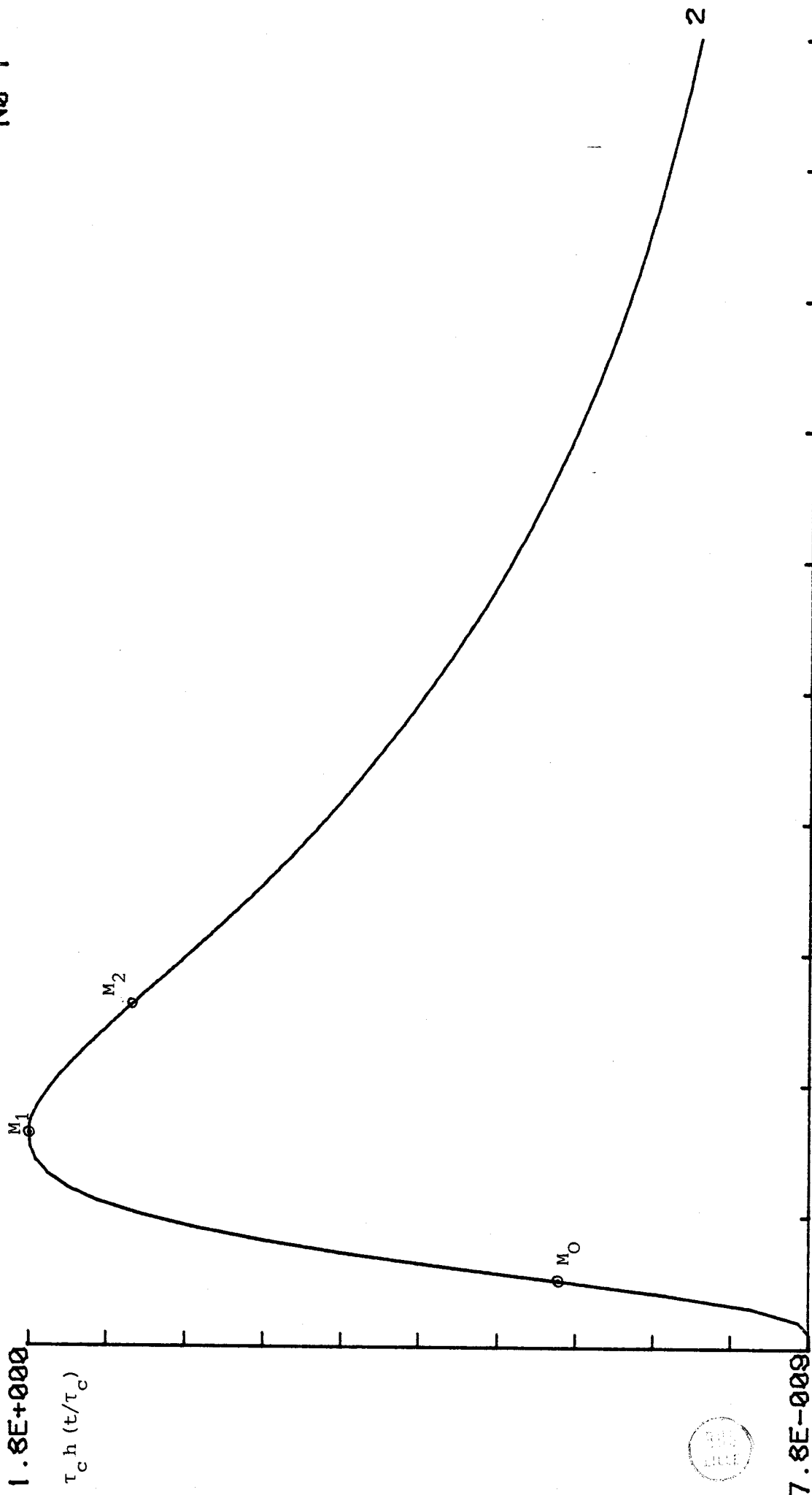
$$\left(\frac{t}{\tau_c} \ll 0,3\right)$$

Afin de préciser les variations de la réponse impulsionnelle, nous considérons d'une part la fonction  $h_1\left(\frac{t}{\tau_c}\right)$  définie par :

$$h_1\left(\frac{t}{\tau_c}\right) = \tau_c h(t) = \pi \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c}} \quad (\text{I.4.3.09})$$

et proportionnelle à la réponse impulsionnelle.

Nº 1



100pts  
t/tau\_c 1.00

axe X : 9.9E-002 /div  
 axe Y : 1.8E-001 /div

FIGURE I.4.3.0 REPONSE IMPULSIONNELLE



et d'autre part la fonction :

$$h_2\left(\frac{t}{\tau_c}\right) = \tau_c^2 \frac{d}{dt} h(t) = -\frac{\pi^3}{4} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (2n-1)^3 e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c}}$$

(I.4.3.10)

proportionnelle à la dérivée de  $h(t)$ .

Les variations de la réponse impulsionnelle ont été étudiées en utilisant les méthodes classiques du calcul numérique (à l'aide d'un calculateur de table).

La courbe de la figure I.4.3.0 représente les variations de  $h_1\left(\frac{t}{\tau_c}\right)$  pour  $\frac{t}{\tau_c}$  variant de  $10^{-2}$  à 1.

Ces résultats sont reportés en annexe dans le tableau A-I-3.

On notera le maximum de  $h_1\left(\frac{t}{\tau_c}\right)$  qui se produit au bout d'un temps

$$t_1 \approx \frac{\tau_c}{6}$$

valeur obtenue en résolvant l'équation transcendante  $h_2\left(\frac{t_1}{\tau_c}\right) = 0$ .

La valeur du maximum est  $h_1(0,1666) = 1,85013 = h_M$

La courbe présente 2 points d'inflexion  $M_0$  et  $M_2$  situés de part et d'autre de ce maximum, ayant respectivement pour abscisse  $(t_0/\tau_c) \approx 0,06$  et  $(t_2/\tau_c) \approx 0,27$ . Le point  $M_0$  correspond à la valeur maximale de la dérivée de  $h(t)$  :  $h_2(t_0/\tau_c) \approx 26$ .

Pour fixer les ordres de grandeur nous présentons dans le tableau I.4.3.0 les valeurs de  $h_1(t/\tau_c)$  normalisées par  $h_M$ . Le temps réduit  $t/\tau_c$  y est donné pour certaines valeurs particulières de  $h_1(t/\tau_c)$ .

Ce tableau résulte simplement de la résolution de l'équation :

$$\frac{1}{h_M} h_1(t/\tau_c) - \gamma = 0$$

où  $\gamma$  est donné en première colonne. On constate qu'en pratique, la réponse impulsionnelle peut être considérée comme nulle en dehors de l'intervalle  $[0,02 - 2]$ .



$\frac{1}{h_M} h_1 \left(\frac{t}{\tau_c}\right)$	$\frac{t}{\tau_c} \quad (t < t_1)$	$\frac{t}{\tau_c} \quad (t > t_1)$
0,01	0,028	2,08
0,1	0,042	1,147
0,2	0,051	0,866
0,3	0,058	0,702
0,4	0,065	0,585
0,5	0,072	0,495
0,6	0,080	0,421
0,7	0,089	0,358
0,8	0,101	0,301
0,9	0,117	0,248

Tableau I.4.3.0.

I-4-4- GENERALISATION AUX IMPULSIONS DE DUREE FINIE

Le signal de sortie du système étudié ne représente la réponse impulsionnelle que lorsque l'entrée est une "impulsion de Dirac" ( $e(t) = \delta(t)$ ). En pratique, la durée et l'amplitude finies du signal d'entrée font que la sortie dépend de la forme du signal d'entrée et non pas du système seul comme dans le cas de la réponse impulsionnelle.

Il est logique d'utiliser des signaux d'entrée de durée très brève de sorte que l'on puisse les assimiler en première approximation à une impulsion de Dirac.

Nous précisons dans ce paragraphe l'influence de la forme du signal d'entrée.

Nous considérerons des signaux d'entrée en créneau de durée  $\delta$  et d'amplitude unité (figure I.4.4.0).

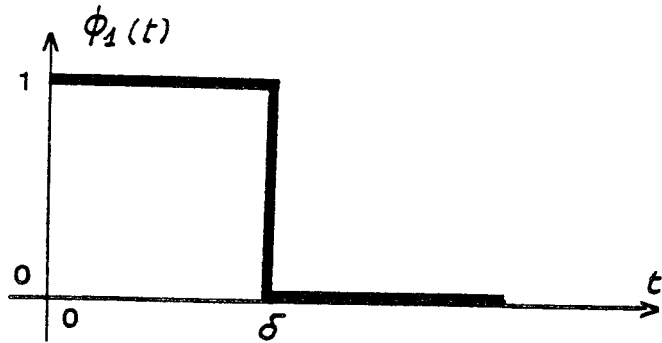


Figure I.4.4.0.

L'entrée  $\phi_1(t)$  est définie analytiquement par :

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < t < \delta \\ 0 & \text{pour } t > \delta \end{cases} \quad (\text{I.4.4.00})$$

La réponse  $\phi_2(t)$  à cette excitation est donnée par :

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) * h(t)$$

Soit

$$\phi_2(t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c}} \quad (\text{I.4.4.01})$$

pour  $t \leq \delta$

et

$$\phi_2(t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c}} \left( 1 - e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c}} \right) \quad (\text{I.4.4.02})$$

pour  $t \geq \delta$

Il est intéressant de comparer la réponse impulsionnelle  $h(t)$  donnée par l'expression (I.4.3.02) à la réponse à un créneau de durée  $\delta$ .

Compte tenu de la condition de normalisation de l'entrée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(t) dt = 1$$

définie en (I-4-2), il convient de considérer à l'entrée un créneau d'amplitude  $\frac{1}{\delta}$  afin de comparer la sortie réelle à la réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  s'écrit :

$$h(t) = \sum_{n \geq 1} \mu_n \quad (\text{I.4.4.03})$$

tandis que la réponse à une attaque en créneau obtenue par division de (I.4.3.02) par  $\delta$ , s'écrit :

$$\phi_2(t) = \sum_{n \geq 1} \mu_n \omega_n \quad (\text{I.4.4.04})$$

avec

$$\omega_n = \frac{4 \tau_c}{\pi^2 \delta} \frac{1 - e^{(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c}}}{(2n-1)^2}$$

$\omega_n$  est un facteur correctif qui tient compte de la forme du signal d'entrée.

Nous avons comparé ces deux réponses pour diverses valeurs de  $\frac{\delta}{\tau_c}$ . Les résultats obtenus montrent que l'estimation de la réponse impulsionnelle est très grossière lorsque le rapport  $\frac{\delta}{\tau_c}$  n'est pas suffisamment petit.

La position  $\frac{t_1}{\tau_c}$  du maximum du signal de sortie varie de façon sensible en fonction de  $\frac{\delta}{\tau_c}$ .

La courbe de la figure I.4.4.1 (tableau A-I-4) représente cette variation.

Pour  $\frac{\delta}{\tau_c} = 10^{-3}$  on commet une erreur relative de l'ordre de 0,3 % sur le rapport  $t_1/\tau_c$  lorsque l'on assimile l'entrée à une impulsion. Cette erreur passe à 3 % pour  $\frac{\delta}{\tau_c} = 10^{-2}$  et à 36 % pour  $\frac{\delta}{\tau_c} = 10^{-1}$ .

Il est donc nécessaire de considérer la forme du signal d'entrée lorsque le dispositif expérimental ne permet pas d'apporter de l'énergie au matériau en un temps très bref.

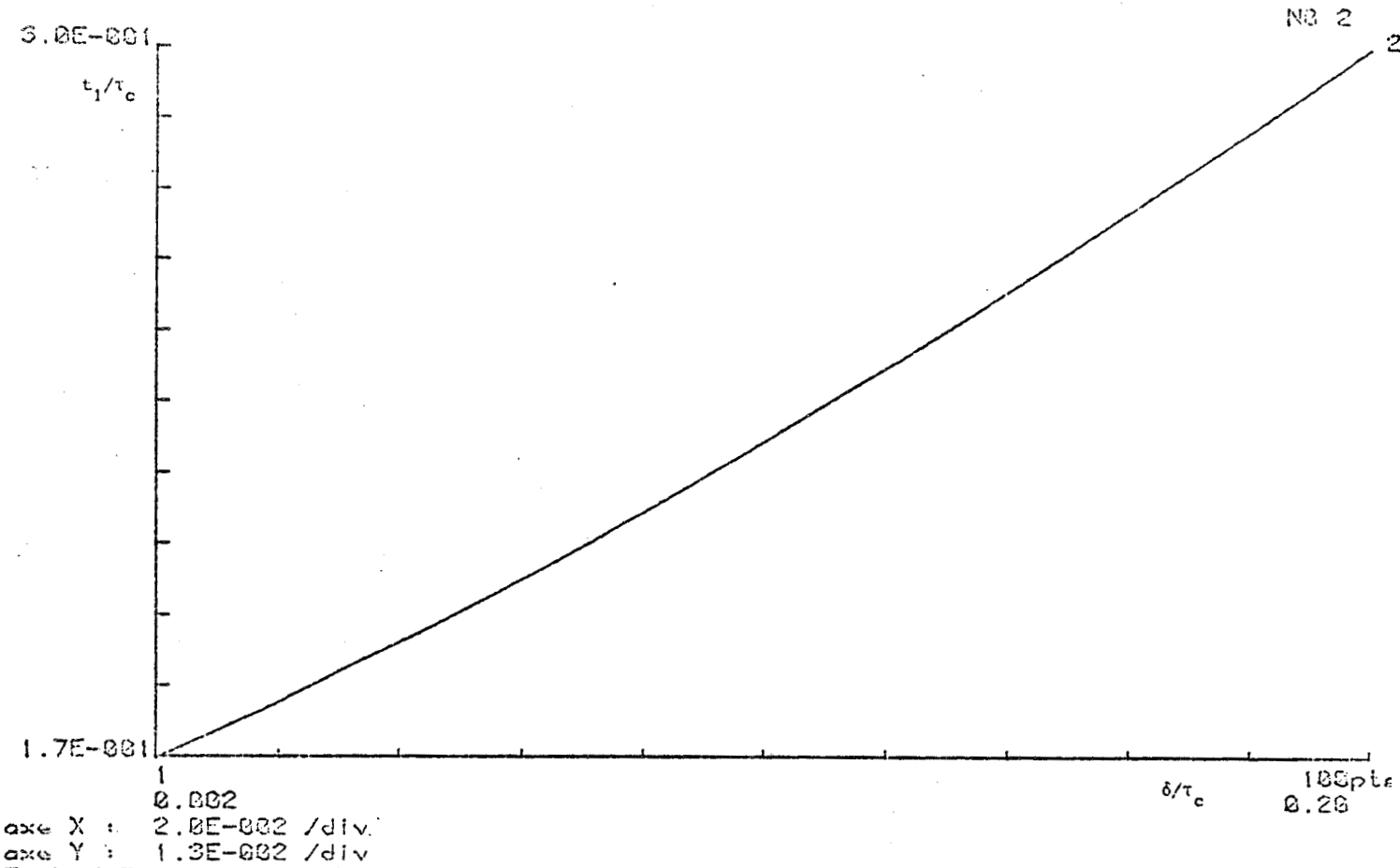


FIGURE I.4.4.1 POSITION DU MAXIMUM DE LA REPONSE A UN CRENEAU DE FLUX

#### I-4-5- CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons montré que la réponse impulsionnelle est un autre modèle représentatif de l'évolution thermocinétique de la paroi ; modèle valable dans les mêmes conditions que la fonction de transfert et qui conduit à l'expression du signal de sortie par une intégrale de convolution.

Nous avons étudié les variations de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  attachée à la fonction de transfert de flux  $H(p)$  définie au chapitre précédent.

Cette étude préalable nous a permis d'établir le modèle analytique de la réponse impulsionnelle.

Dans les chapitres suivants, nous exploitons les concepts développés et mettons en oeuvre des méthodes d'identification pour traiter les problèmes de caractérisation des matériaux.

## CHAPITRE 5 : INTÉRÊT DES MESURES FLUXMÉTRIQUES EN RÉGIME VARIABLE

Dans ce chapitre, nous montrons l'intérêt des mesures fluxmétriques et nous considérons quelques problèmes liés à la détermination expérimentale de la fonction de transfert de flux.

### I-5-1-LES MESURES DE FLUX PERMETTENT DE DECELER DE PETITES PERTUR- BATIONS ENERGETIQUES

Dans le chapitre 3, nous avons montré l'intérêt des fonctions de transfert entre variations de température et flux thermique pour la détermination de la diffusivité thermique.

Nous avons montré que les fonctions de transfert  $R(p)$  et  $H(p)$  permettent d'identifier la diffusivité par traitement de la réponse à une variation de flux imposée.

La fonction de transfert  $R(p)$  définie par la relation :

$$R(p) = \frac{\Theta_2}{\Phi_1} \Big|_{\Phi_2 = 0}$$

permet de déterminer la diffusivité à l'aide d'un simple enregistrement de la température de la face de sortie du matériau. C'est la configuration utilisée dans la "Méthode Flash" [ 8 ]. Cette méthode appliquée à des matériaux de faibles dimensions conduit à la détermination de la diffusivité avec une bonne précision.

Ce modèle adiabatique nécessite une mesure de température de surface difficile à mettre en oeuvre, surtout sur des surfaces non traitées .

D'autre part, il est nécessaire d'apporter une énergie suffisante au matériau afin de provoquer une élévation de température observable.

En régime impulsif, il est difficile d'apporter en un temps bref la quantité d'énergie nécessaire à une mesure précise. Il faut, de plus, que cette énergie ne soit pas trop importante afin de respecter les conditions de linéarité que suppose l'équation de Fourier.

Toutes ces considérations nous ont conduit à mettre en oeuvre des méthodes fluxmétriques en régime variable. Cette orientation a été d'autant plus naturelle que nous avons à notre disposition de nouveaux fluxmètres conçus de façon à apporter une perturbation la plus faible possible en régime variable [16]. (Le fluxmètre thermique a l'aspect d'une feuille mince, carrée, et est disposé contre la face de sortie du matériau). Ces considérations nous conduisent à exploiter la fonction de transfert de flux

$$H(p) = \left[ \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right] \theta_2 = 0$$

La contrainte  $\theta_2 = 0$  est difficile à maintenir en régime permanent ; elle est beaucoup plus facile à réaliser en pratique lorsque l'on effectue des mesures de flux, puisque ce n'est pas l'énergie qui intervient, mais sa variation

$$\phi = \frac{\partial Q}{\partial t} ;$$

ce qui permet de se limiter à des apports énergétiques de faibles amplitudes.

Une amplitude mesurable du flux de chaleur peut être réalisée par un faible transfert de chaleur pourvu qu'il soit suffisamment rapide. Dans ces conditions, il n'y a pas échauffement du système et la température ne subit pas de variation appréciable.

#### I-5-2- LE FLUX FOURNIT UNE INFORMATION GLOBALE

Un autre aspect pratique de la mesure de flux est son caractère global ; le flux représente une moyenne spatiale alors que la température est une information localisée.

#### I-5-3- LE FLUX ATTEINT VITE LE REGIME PERMANENT

Si l'on considère la progression dans un mur semi-infini d'une impulsion de densité de flux incidente d'amplitude  $\phi_0$  (figure I.5.3.0), on obtient les expressions suivantes pour la réponse impulsionnelle de la température et celle du flux dans un plan d'abscisse  $x_0$  :

$$T_i(x_0, t) = \frac{1}{b \sqrt{\pi t}} e^{-x_0^2/4at} \quad (I.5.3.00)$$

$$\phi_i(x_0, t) = \frac{x_0}{2\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{\pi t^3}} e^{-x_0^2/4at}$$

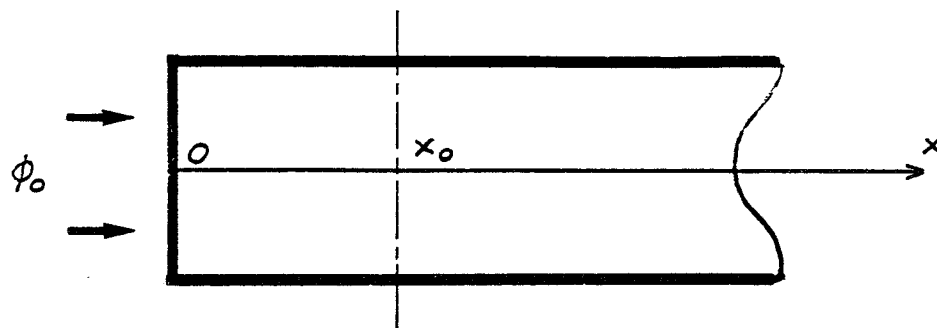


Figure I.5.3.0.

L'étude de ces réponses révèle que  $T_i(x_0, t)$  passe par le maximum :

$$T_{iM} \approx \frac{0,484}{\rho c x_0} \phi_0 \quad (\text{I.5.3.01})$$

au bout du temps

$$t_T \approx \frac{x_0^2}{2 a} \quad (\text{I.5.3.02})$$

tandis que le maximum du flux est donné par

$$\phi_{iM} \approx 0,9 \frac{a}{x_0^2} \phi_0 \quad (\text{I.5.3.03})$$

et se produit au bout du temps  $t_\phi \approx \frac{x_0^2}{6 a}$  (I.5.3.04)

Si l'on note  $\tau_c$  la quantité  $\frac{x_0^2}{a}$  ; on remarque que la réponse du flux est pratiquement nulle (1% de la valeur maximale) pour  $t > 10 \tau_c$  alors que l'effet provoqué par ce "passage de flux", la température, ne disparaît qu'au bout d'un temps de l'ordre de  $10^4 \tau_c$ . Ces résultats apparaissent dans la figure I.5.3.1.

La conclusion pratique sur les durées relatives de ces deux réponses impulsionnelles est qu'en régime variable, le flux atteint très vite le régime permanent alors qu'il faut un temps relativement plus long pour que la température s'établisse.

A titre d'exemple, on peut calculer les réponses à un échelon unité de flux ; elles s'obtiennent par intégration des réponses impulsionnelles. On constate que le flux atteint pratiquement sa valeur finale au bout d'un temps de l'ordre de  $10 \tau_c$  alors que la température met un temps beaucoup plus important (1000 fois plus long que le flux). Les mesures de flux sont donc particulièrement bien adaptées aux mesures rapides.

Elles permettent de prédire l'évolution de la température lorsque l'on connaît l'impédance thermique locale ; de ce fait, il est possible d'envisager l'utilisation de fluxmètres dans un système de contrôle pour anticiper les variations de température.

#### I-5-4- REMARQUES PRATIQUES SUR LA DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT DE FLUX

Ces considérations sur l'intérêt des mesures fluxmétriques nous conduisent naturellement à examiner en pratique les conditions de traitement de telles mesures. Il s'agit principalement de problèmes liés aux types de signaux d'entrée et à l'environnement dans lequel s'effectuent les mesures.

##### I-5-4-1- PROBLEME DU MAINTIEN DE LA TEMPERATURE DE SORTIE A UNE VALEUR CONSTANTE

On peut trouver une majoration de la variation de la température de sortie, provoquée par l'énergie incidente. En effet, si l'on suppose qu'il n'y a pas d'autre apport d'énergie, il est évident que la variation de la température de sortie  $\Delta T_2$  ne peut dépasser la valeur limite  $\Delta T_M$  que l'on obtiendrait si le système était adiabatique :

$$\Delta T_2 < \Delta T_M = \frac{\phi_o \delta}{\rho c \ell} \quad (I.5.4.00)$$

- .  $\phi_o \delta$  représente la densité d'énergie fournie au matériau,
- .  $\rho c$  la chaleur spécifique par unité de volume
- . et  $\ell$  l'épaisseur du matériau.

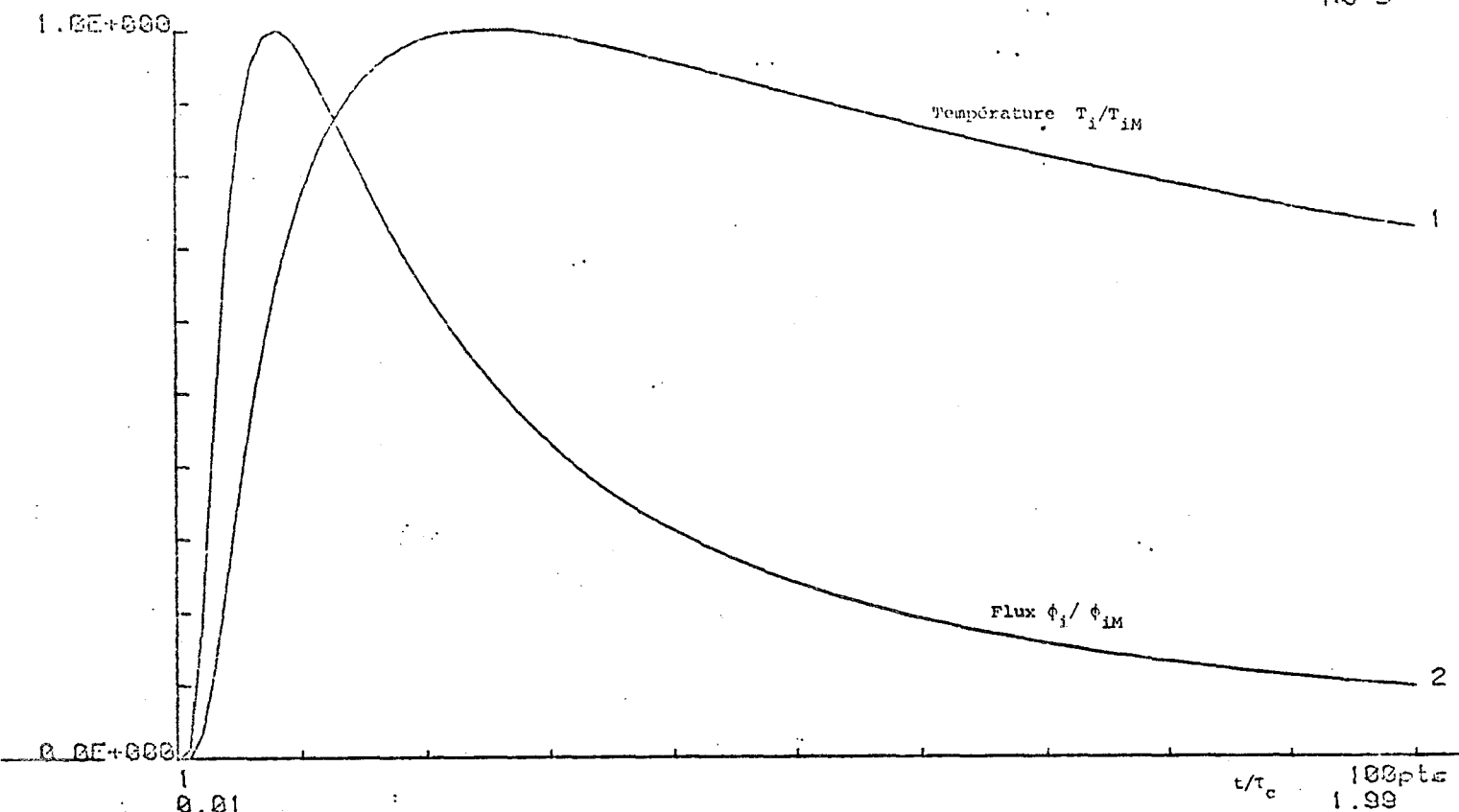
Pour une paroi en plexiglass ( $\rho c = 1,68 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ ) d'épaisseur 5 mm, on obtient pour une densité d'énergie fournie de  $50 \text{ J/m}^2$ , la majoration :

$$\Delta T_2 < 0,01^\circ\text{C}$$

##### I-5-4-2- SPECIFICATION DES SIGNAUX D'ENTREE

La majoration précédente n'est qu'une évaluation grossière de la perturbation provoquée en sortie par un apport d'énergie à l'entrée. Il est nécessaire que la température ambiante reste constante. Les systèmes de régulation sont plutôt délicats à mettre en oeuvre dans les mesures in situ. Ces réflexions, outre le souci de concevoir un matériel simple d'utilisation, nous ont amené à considérer, dans une première approche, les signaux d'entrée qui conduisent à un temps de mesure faible, de sorte que la température ambiante n'ait pas le temps de varier au cours des mesures. Les signaux impulsionnels semblent bien adaptés à ce type de problème.





axe X : 2.0E-001 /div  
 axe Y : 1.0E-001 /div

t/tau\_c 100pts  
 1.99

FIGURE I.5.3.1 REPONSES D'UN MILIEU SEMI-INFINI A UNE IMPULSION DE FLUX

I-5-5- CONCLUSION

Le flux thermique est comme la température une composante du vecteur d'état thermique local ; la connaissance de ces deux grandeurs est nécessaire pour identifier totalement un système thermique.

Dans des cas pratiques de mesures de diffusivité où la connaissance de la fonction de transfert de flux est suffisante pour modéliser le système thermique, les mesures fluxmétriques sont particulièrement intéressantes. Elles ne nécessitent que de faibles apports énergétiques et mettent en jeu une information globale et non localisée comme dans les mesures de température.

## CONCLUSION

Dans cette première partie, nous avons établi les équations de base régissant les échanges thermiques dans une paroi plane monodimensionnelle, homogène et isotrope. Nous avons précisé les rôles joués en thermocinétique par les constantes thermophysiques figurant dans les équations de base.

La résolution de l'équation de Fourier nous a amené à relier températures et flux thermiques superficiels par une équation matricielle. Nous avons introduit les notions de fonction de transfert et de réponse impulsionnelle qui permettent de modéliser le comportement de la paroi en dehors de toute spécification sur les signaux d'entrée.

Nous avons montré l'intérêt d'étudier la fonction de transfert  $H(p)$  reliant les variations du flux thermique de sortie à celles du flux d'entrée (la température de sortie maintenue à une valeur constante). L'intérêt de cette configuration expérimentale est liée à la précision des mesures fluxmétriques. Parmi tous les signaux possibles, les signaux de type impulsionnel ont l'avantage de provoquer une faible variation de température permettant de supposer que la condition  $\theta_2 = 0$  est réalisée, et en outre, l'intérêt de conduire à des mesures rapides.

L'étude détaillée de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  attachée à la fonction de transfert  $H(p)$  montre, dans le cas où l'approximation "signal d'entrée impulsionnel" est difficile à réaliser, la nécessité de définir un traitement adapté afin de pouvoir déterminer la diffusivité à partir des évolutions temporelles des flux d'entrée et de sortie.

Notre travail a l'avantage de se situer dans le cadre d'application des méthodes de traitement du signal et peut être considéré comme une première approche des mesures de diffusivité in situ.

La mise au point de méthodes de traitement applicables aux signaux de faibles niveaux fait l'objet de la partie pratique de notre travail.

## ANNEXE A-I-1 : REPRÉSENTATION D'ÉTAT DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

### REPRESENTATION D'ETAT

L'état d'un système (représenté par une équation différentielle d'ordre  $n$ ) à un instant quelconque  $t_0$  est défini par l'ensemble des  $n$  nombres  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ , ...  $x_n(t_0)$  qui, lorsqu'on connaît l'action  $u(t)$  ( $t > t_0$ ), est suffisant pour déterminer le comportement du système  $\forall t > t_0$ .

L'évolution de ces nombres  $x_i(t_0)$  en fonction du temps est un ensemble de variables  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) appelées variables d'état.

De façon générale, la représentation d'état d'un système linéaire se met sous la forme :

$$\dot{\underline{X}}(t) = A \underline{X}(t) + B u(t) \quad (1)$$

$$Y(t) = C \underline{X}(t) + D u(t) \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont respectivement appelées équation d'état et équation de sortie du système.

$\underline{X}$  est le vecteur d'état du système, de dimension  $(n \times 1)$

$\dot{\underline{X}}$  est la dérivée temporelle de  $\underline{X}$

A est la matrice d'état, de dimension  $n \times n$

B est la matrice d'entrée, de dimension  $(n \times 1)$

C est la matrice de sortie, de dimension  $(n \times 1)$

D est un scalaire

Y est la sortie du système.

La représentation d'état est un modèle du système considéré ; Par rapport à la fonction de transfert, elle n'impose aucune hypothèse sur les conditions initiales du système. Les méthodes de résolution relèvent de l'algèbre linéaire et sont bien adaptées au calcul numérique.

## MATRICE DE TRANSITION ; SOLUTION DE L'EQUATION D'ETAT

---

La résolution de l'équation d'état fait intervenir la matrice de transition  $\Psi(t, t_0)$  qui s'exprime par la relation :

$$\Psi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (3)$$

Si le vecteur  $\underline{x}_0$  représente l'état initial du système, la solution de l'équation homogène  $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$  s'écrit :

$$\underline{x}(t) = \Psi(t, t_0) \underline{x}_0 \quad (4)$$

De façon générale, la solution de l'équation d'état s'exprime par la relation :

$$\underline{x}(t) = \Psi(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau) B u(\tau) d\tau \quad (5)$$

La matrice de transition possède les propriétés suivantes :

$$\Psi(t_3, t_2) \cdot \Psi(t_2, t_1) = \Psi(t_3, t_1) \quad (6)$$

$$\Psi(t_2, t_1) = \Psi^{-1}(t_1, t_2) \quad (7)$$

Le calcul pratique de la matrice de transition s'effectue à partir de (3) de diverses manières : diagonalisation, itération etc...

On utilise aussi le calcul opérationnel ; en effet, on montre que

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(pI - A)} \quad (8)$$

La représentation d'état permet d'aborder de nombreux problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes de commande. Une abondante littérature est développée sur le sujet [18]

## APPLICATION A L'EQUATION DE LA CHALEUR

---

Nous avons vu que l'application de la transformation de Laplace à l'équation de Fourier

$$a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (9)$$

conduisait à la forme opérationnelle

$$\frac{d^2}{dx^2} \Theta(x,p) = \frac{p}{a} \Theta(x,p) \quad (10)$$

En introduisant les variables d'état

$$\begin{aligned} x_1 &= \Theta \\ x_2 &= \frac{dx_1}{dx} \end{aligned}$$

on obtient l'équation d'état :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p/a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

et l'équation de sortie :

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

où y représente la température  $\Theta(x,p)$

On notera que dans ce cas particulier, la dérivation porte sur l'espace et non le temps ; on peut définir alors la notion "d'état thermique local". La connaissance en tout point des composantes  $x_1$  et  $x_2$  du vecteur d'état définit entièrement le système.

Il est intéressant de faire apparaître les variables physiques que représentent les composantes  $x_1$ ,  $x_2$  du vecteur d'état :

$x_1 = \Theta(x,p)$  représente la transformée de Laplace de la température

$x_2 = \frac{d\Theta(x,p)}{dx} = -\frac{1}{\lambda} \Phi(x,p)$  est proportionnel à la transformée de Laplace du flux thermique

L'introduction de ces nouvelles variables conduit à l'équation :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Phi \end{bmatrix} (x,p) = - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ \rho c p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Phi \end{bmatrix} (x,p) \quad (12)$$

soit  $\frac{d}{dx} \underline{x} = - \underline{M} \underline{x}$  (13)

La solution de cette équation conduit à :

$$\underline{X}(x,p) = e^{-Mx} \underline{X}(0,p) \quad (14)$$

Le calcul de  $e^{-Mx}$  peut s'obtenir par un développement en série ou par diagonalisation de la matrice M ou plus simplement en utilisant la relation (8) :

$$\mathcal{L} \left[ e^{-Mx} \right] = (q I + M)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{q}{q^2 - \frac{p}{a}} & - \frac{1}{\lambda(q^2 - \frac{p}{a})} \\ - \frac{\rho c p}{q^2 - \frac{p}{a}} & \frac{q}{q^2 - \frac{p}{a}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

où q désigne l'opérateur de Laplace par rapport à la variable x, et I la matrice identité.

En prenant la transformée inverse et en posant  $b = \sqrt{\lambda \rho c}$ , on obtient :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \Theta \\ \Phi \end{bmatrix}_{(x,p)} = \begin{bmatrix} \text{ch } \sqrt{p/a} x & - \frac{1}{b \sqrt{p}} \text{sh } \sqrt{p/a} x \\ -b \sqrt{p} \text{sh } \sqrt{p/a} x & \text{ch } \sqrt{p/a} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Phi \end{bmatrix}_{(0,p)} \quad (16)$$

C'est la solution de l'équation d'état (12) . On obtient naturellement la même expression que celle donnée par la méthode classique (I.2.2.08) La matrice de transition, définie par la relation (16) , a les mêmes propriétés que la matrice chaîne des quadripôles (6) (7).

## ANNEXE A-I-2 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE FONCTIONS UTILISEES DANS LA PARTIE THEORIQUE

- Etant donné une fonction  $f(t)$  nulle pour  $t < 0$ , on définit l'image de cette fonction par l'intégrale :

$$\mathcal{L} [f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

-Inversement, étant donné  $F(p)$  définissant l'image d'une fonction inconnue  $f(t)$  appelée original de  $F(p)$ , on peut déterminer  $f(t)$  en résolvant l'équation intégrale (1).

On dispose à cet effet de deux moyens :

1) On peut utiliser la formule d'inversion de Mellin-Fourier qui permet d'explicitier la solution de (1) dans le plan complexe. Généralement, on utilise la méthode des résidus<sup>[12]</sup>. En thermocinétique, cette méthode conduit en général à l'expression des originaux sous forme de séries d'exponentielles du type

$$\sum_n C_n (\alpha_n) e^{-\alpha_n t} \quad \text{où } \alpha_n \text{ désigne les pôles de } F(p)$$

2) On peut utiliser un dictionnaire d'image en tenant compte des propriétés de la transformation de Laplace.

Nous donnons ci-dessous quelques images utilisées dans ce mémoire et tabulées par ailleurs [11],[12],[14].

IMAGE	ORIGINAL
$e^{-a \sqrt{p}}$	$\frac{a}{2 \sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
$\frac{e^{-a \sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{\text{ch } x \sqrt{p}}{\text{ch } a \sqrt{p}}$	$\frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2 t}{4a^2}} \cdot \cos \frac{(2n-1) \pi x}{2a}$
$\frac{\text{sh } x \sqrt{p}}{\sqrt{p} \text{ch } a \sqrt{p}}$	$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2 \frac{\pi^2 t}{4a^2}} \cdot \sin \frac{(2n-1) \pi x}{2a}$





$\frac{t}{\tau_c}$	$\tau_c h \left(\frac{t}{\tau_c}\right)$	$\tau_c^2 \frac{dh}{dt} \left(\frac{t}{\tau_c}\right)$	$\frac{t}{\tau_c}$	$\tau_c h \left(\frac{t}{\tau_c}\right)$	$\tau_c^2 \frac{dh}{dt} \left(\frac{t}{\tau_c}\right)$	$\frac{\delta}{\tau_c}$	$\frac{t_1}{\tau_c}$	$\frac{\delta}{\tau_c}$	$\frac{t_1}{\tau_c}$
0.01	0.0000	0.00	0.51	0.8925	-2.20	0.002	0.1676	0.102	0.2276
0.02	0.0007	0.41	0.52	0.8707	-2.15	0.004	0.1687	0.104	0.2289
0.03	0.0261	5.94	0.53	0.8495	-2.09	0.006	0.1697	0.106	0.2303
0.04	0.1361	16.17	0.54	0.8288	-2.04	0.008	0.1707	0.108	0.2317
0.05	0.3400	23.80	0.55	0.8086	-1.99	0.010	0.1717	0.110	0.2331
0.06	0.5952	26.45	0.56	0.7889	-1.95	0.012	0.1728	0.112	0.2345
0.07	0.8565	25.35	0.57	0.7697	-1.90	0.014	0.1738	0.114	0.2359
0.08	1.0955	22.25	0.58	0.7510	-1.85	0.016	0.1749	0.116	0.2373
0.09	1.2992	18.45	0.59	0.7327	-1.81	0.018	0.1760	0.118	0.2388
0.10	1.4645	14.64	0.60	0.7148	-1.76	0.020	0.1770	0.120	0.2402
0.11	1.5933	11.19	0.61	0.6974	-1.72	0.022	0.1781	0.122	0.2416
0.12	1.6899	8.21	0.62	0.6804	-1.68	0.024	0.1792	0.124	0.2430
0.13	1.7593	5.73	0.63	0.6638	-1.64	0.026	0.1803	0.126	0.2445
0.14	1.8060	3.69	0.64	0.6476	-1.60	0.028	0.1814	0.128	0.2459
0.15	1.8343	2.04	0.65	0.6319	-1.56	0.030	0.1825	0.130	0.2474
0.16	1.8478	0.72	0.66	0.6165	-1.52	0.032	0.1837	0.132	0.2488
0.17	1.8496	-0.32	0.67	0.6014	-1.48	0.034	0.1848	0.134	0.2503
0.18	1.8421	-1.14	0.68	0.5868	-1.45	0.036	0.1859	0.136	0.2518
0.19	1.8273	-1.78	0.69	0.5725	-1.41	0.038	0.1871	0.138	0.2533
0.20	1.8070	-2.27	0.70	0.5585	-1.38	0.040	0.1882	0.140	0.2547
0.21	1.7823	-2.64	0.71	0.5449	-1.34	0.042	0.1894	0.142	0.2562
0.22	1.7544	-2.92	0.72	0.5316	-1.31	0.044	0.1906	0.144	0.2577
0.23	1.7241	-3.13	0.73	0.5187	-1.28	0.046	0.1917	0.146	0.2592
0.24	1.6920	-3.27	0.74	0.5060	-1.25	0.048	0.1929	0.148	0.2607
0.25	1.6588	-3.37	0.75	0.4937	-1.22	0.050	0.1941	0.150	0.2622
0.26	1.6247	-3.43	0.76	0.4817	-1.19	0.052	0.1953	0.152	0.2637
0.27	1.5902	-3.46	0.77	0.4699	-1.16	0.054	0.1965	0.154	0.2652
0.28	1.5556	-3.47	0.78	0.4585	-1.13	0.056	0.1977	0.156	0.2667
0.29	1.5210	-3.46	0.79	0.4473	-1.10	0.058	0.1989	0.158	0.2683
0.30	1.4865	-3.43	0.80	0.4364	-1.08	0.060	0.2002	0.160	0.2698
0.31	1.4524	-3.39	0.81	0.4258	-1.05	0.062	0.2014	0.162	0.2713
0.32	1.4187	-3.35	0.82	0.4154	-1.02	0.064	0.2027	0.164	0.2729
0.33	1.3855	-3.30	0.83	0.4053	-1.00	0.066	0.2039	0.166	0.2744
0.34	1.3528	-3.24	0.84	0.3954	-0.98	0.068	0.2052	0.168	0.2759
0.35	1.3207	-3.18	0.85	0.3858	-0.95	0.070	0.2064	0.170	0.2775
0.36	1.2892	-3.12	0.86	0.3764	-0.93	0.072	0.2077	0.172	0.2790
0.37	1.2583	-3.05	0.87	0.3672	-0.91	0.074	0.2090	0.174	0.2806
0.38	1.2281	-2.99	0.88	0.3582	-0.88	0.076	0.2103	0.176	0.2822
0.39	1.1985	-2.92	0.89	0.3495	-0.86	0.078	0.2115	0.178	0.2837
0.40	1.1696	-2.86	0.90	0.3410	-0.84	0.080	0.2128	0.180	0.2853
0.41	1.1413	-2.80	0.91	0.3327	-0.82	0.082	0.2142	0.182	0.2869
0.42	1.1137	-2.73	0.92	0.3246	-0.80	0.084	0.2155	0.184	0.2885
0.43	1.0867	-2.67	0.93	0.3167	-0.78	0.086	0.2168	0.186	0.2900
0.44	1.0603	-2.61	0.94	0.3089	-0.76	0.088	0.2181	0.188	0.2916
0.45	1.0346	-2.54	0.95	0.3014	-0.74	0.090	0.2194	0.190	0.2932
0.46	1.0094	-2.48	0.96	0.2941	-0.73	0.092	0.2208	0.192	0.2948
0.47	0.9849	-2.42	0.97	0.2869	-0.71	0.094	0.2221	0.194	0.2964
0.48	0.9609	-2.37	0.98	0.2799	-0.69	0.096	0.2235	0.196	0.2980
0.49	0.9375	-2.31	0.99	0.2731	-0.67	0.098	0.2248	0.198	0.2996
0.50	0.9147	-2.25	1.00	0.2664	-0.66	0.100	0.2262	0.200	0.3012

TABLEAU A-I-4 POSITION DU MAXIMUM

TABLEAU A-I-3 REPONSE IMPULSIONNELLE



BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] CARLSLAW (H.S.) , JAEGER (J.C.)  
"Conduction of heat in solids"  
Oxford at the Clarendon Press, 1959
- [2] JAKOB (M.)  
"Heat Transfer" , Vol. I  
J. Wiley & Sons
- [3] MYERS (G.E.)  
"Analytical methods in conduction heat transfer"  
Mc Graw-Hill, 1971
- [4] LUIKOV (A.V.)  
"Analytical heat diffusion theory"  
Academic Press, 1968
- [5] RIBAUD (G.)  
"Conduction de la chaleur en régime variable"  
Gauthiers-Villars, 1960
- [6] VERNOTTE (P.)  
"Thermocinétique"  
Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, n°224,1949
- [7] PONCIN (H.) , BARDON (J.P.)  
"Exposés sur l'isolation thermique. Lois physiques fondamentales"  
Cahiers de la Thermique, N° 5, 1-121, SFT, Oct. 1975
- [8] PONCIN (H.)  
"Thermocinétique impulsionnelle et mesure de la diffusivité thermique"  
Chiron , 1978
- [9] TREVES (F.)  
"Etude de la propagation de la chaleur en régime variable à travers un mur  
d'épaisseur finie pour des impulsions quelconques"  
Herman, 1954
- [10] MAILLARD (R.)  
"Etude analytique et expérimentale des quadripôles. Application à la repré-  
sentation de la transmission de la chaleur en régime variable dans les  
parois composées"  
RGT, N° 90, Juin 1969
- [11] WEBER (E.)  
"Linear transient analysis", Vol. II  
Wiley, 1956

.../...

- [12] ANGOT (A.)  
"Compléments de mathématiques"  
CNET, Edts de la revue d'Optique, 1965
- [13] ORTUSI (J.)  
"Etude mathématique des circuits de l'électronique", Tome I, Analyse des  
Circuits  
Masson, 1966
- [14] SPIEGEL (M.R.)  
"Formules et tables de mathématiques"  
Ediscience/Mc Graw-Hill, 1974
- [15] MAX (J.)  
"Méthodes et techniques de traitement du signal"  
Masson, 1977
- [16] THERY (P.), FARZA (A.), RAVALITERA (G.)  
"Etude et caractérisation d'un nouveau fluxmètre calorifique"  
Congrès Mesucora, 1979
- [17] BIOT (M.A.)  
"Variational principles in heat transfer"  
Oxford University Press, 1970
- [18] FOULARD (C.), GENTIL (S.), SANDAZ (J.P.)  
"Commande et régulation par ordinateur numérique"  
Eyrolles , 1977
- [19] POVY (L.)  
"Identification des processus"  
Dunod, 1975

## DEUXIEME PARTIE

### LES MÉTHODES DE CORRÉLATION ET LEURS APPLICATIONS

---

## CHAPITRE 1 : RAPPEL SUR LA NOTION DE CORRÉLATION<sup>(\*)</sup>

### II-1-1- FONCTION D'AUTOCORRELATION

Soit  $x(t)$  une fonction du temps (aléatoire ou déterministe), la fonction d'autocorrélation (ou de corrélation) de  $x(t)$  est définie par la relation :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau) dt \quad (\text{II.1.1.00})$$

Cette fonction décrit la mémoire statistique du processus  $x(t)$  ; elle exprime la dépendance entre les valeurs définissant le processus à un moment donné et les valeurs définissant le même processus aux instants précédents. La fonction d'autocorrélation possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= R_{xx}(-\tau) \\ R_{xx}(0) &= \overline{x^2(t)} \\ |R_{xx}(\tau)| &\leq R_{xx}(0) \\ R_{xx}(\infty) &= (\overline{x(t)})^2 \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.01})$$

$R_{xx}(\tau)$  est une fonction paire, dont le maximum se situe à l'origine et est égal à la valeur quadratique moyenne (ou puissance moyenne) du signal  $x(t)$ . La fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire centré, tend vers zéro quand  $\tau$  augmente indéfiniment.

#### Densité spectrale énergétique

L'étude des processus aléatoires au moyen de fonction de corrélation est une analyse temporelle ; souvent, il est intéressant de caractériser un signal par une analyse harmonique.

-----  
<sup>(\*)</sup> Les bases fondamentales de la notion de corrélation et les conditions de validité des principes énoncés sont développées dans l'annexe A-II-1.

Considérons un signal aléatoire  $x(t)$  et supposons que nous disposons d'un filtre passe-bande idéal centré sur la fréquence  $f_0$  et de largeur de bande  $\Delta f$ . Si l'on applique le signal  $x(t)$  à l'entrée de ce filtre, on recueille en sortie, une puissance moyenne  $P(f_0, \Delta f)$  que l'on peut écrire si  $\Delta f$  est petit :

$$\left[ \frac{dP(f)}{df} \right]_{f=f_0} \cdot \Delta f = G_x(f_0) \Delta f$$

$G_x(f)$  est la densité de puissance du signal  $x(t)$  (ou densité spectrale). La puissance moyenne totale est évidemment la sommation sur toutes les fréquences de la densité de puissance.

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df = R_{xx}(0)$$

Wiener a montré que la densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation<sup>[3]</sup> :

$$G_x(f) = \mathcal{F}(R_{xx}(\tau)) \quad (\text{II.1.1.02})$$

### Applications

La corrélation constitue un outil puissant pour la détection d'un signal déterministe bruité. Cette possibilité est à la base de nombreuses applications<sup>[3]</sup>. La densité spectrale du signal de sortie d'un système linéaire de fonction de transfert isochrone<sup>(1)</sup>  $H(f)$  est donnée par la relation :

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

Cette propriété permet la détermination du module de la réponse fréquentielle  $H(f)$  du système lorsque l'on connaît les densités spectrales d'entrée et de sortie. Cette méthode ne permet pas d'obtenir la réponse fréquentielle en module et en phase, seul le module est accessible. Elle se simplifie lorsque la densité spectrale du signal d'entrée  $G_x(f)$  est constante ; la connaissance de la seule densité spectrale du signal de sortie permet de déterminer le module de la

(1) La fonction de transfert isochrone  $H(f)$  (ou réponse fréquentielle) est un autre modèle représentatif de la dynamique du système ; elle décrit en module et en phase le comportement du système lorsque le signal d'entrée est une sinusoïde de fréquence  $f$ . La fonction de transfert  $H(f)$  est aussi la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h(t)$ .

réponse fréquentielle ; ce signal d'entrée à densité spectrale constante est appelé "bruit blanc" ; la fonction d'autocorrélation d'un tel bruit est une impulsion de Dirac. En pratique, un tel signal ne peut être approché que par un bruit à large bande.

## II-1-2- FONCTION D'INTERCORRELATION

La fonction d'intercorrélacion (ou Cross-corrélation) de deux variables aléatoires  $x(t)$  et  $y(t)$  est définie par la relation :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt \quad (\text{II.1.2.00})$$

Cette fonction possède la propriété suivante :

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (\text{II.1.2.01})$$

Lorsque  $R_{xy}(\tau) = 0$ , les deux processus  $x(t)$  et  $y(t)$  ne sont pas corrélés.

La fonction d'intercorrélacion exprime la dépendance statistique entre deux phénomènes.

### Autre forme de la fonction d'intercorrélacion

Un simple changement de variable dans l'expression (II.1.2.00) permet de mettre la fonction d'intercorrélacion sous la forme :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t-\tau) y(t) dt \quad (\text{II.1.2.02})$$

Cette dernière forme est beaucoup plus intéressante en pratique car  $-\tau$  représente un retard et il est simple de retarder un signal par des moyens analogiques ou numériques.

Il est à signaler que certains auteurs [3][5] définissent la fonction d'intercorrélacion par la relation :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t-\tau) dt \quad (\text{II.1.2.03})$$

Il peut en résulter une certaine confusion lorsque l'on ne précise pas la définition utilisée ; en effet, il est facile de voir que :

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (\text{II.1.2.04})$$

Dans la suite de notre exposé, nous utiliserons la première définition (II.1.2.00) ou sa forme équivalente (II.1.2.02).

Densité spectrale d'interaction (ou interspectre)

La fonction d'intercorrélation possède une transformée de Fourier  $G_{xy}(f)$  que, par analogie, l'on a appelé densité spectrale d'interaction ou interspectre.

$$G_{xy}(f) = \mathcal{F}(R_{xy}(\tau)) \quad (II.1.2.05)$$

L'interspectre est relié à la fonction de transfert isochrone  $H(f)$  d'un système linéaire d'entrée  $x$  et de sortie  $y$  par la relation :

$$G_{xy}(f) = H(f) G_x(f) \quad (II.1.2.06)$$

La connaissance de l'interspectre et de la densité spectrale du signal d'entrée (ou autospectre) permet de déterminer la fonction de transfert isochrone  $H(f)$  en module et en phase.

Applications

Les méthodes de corrélation s'appliquent dans de nombreux domaines [1] [3]

Citons :

- la détection et l'extraction de signaux du bruit
- l'obtention des densités spectrales à partir des fonctions de corrélation
- l'identification des systèmes linéaires
- la mesure de retards.

La détection d'un signal du bruit utilise la propriété de distributivité de l'opérateur corrélation <sup>(3)</sup> : si  $x(t)$  est un signal résultant de la superposition d'un bruit additif  $b(t)$  à un signal utile  $u(t)$ , la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  s'écrit :

$$R_{xx}(\tau) = R_{uu}(\tau) + R_{bb}(\tau) + R_{bu}(\tau) + R_{ub}(\tau) \quad (II.1.2.07)$$

(3) Si l'on considère deux fonctions  $x(t) = x_1(t) + \dots + x_i(t) + \dots + x_m(t)$   
 $y(t) = y_1(t) + \dots + y_j(t) + \dots + y_n(t)$

on a :

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{x_i y_j}(\tau)$$



$R_{bb}(\tau)$  est la fonction de corrélation du bruit ; elle tend vers zéro pour  $|\tau| > \tau_M$  ; cette valeur  $\tau_M$  dépend des caractéristiques du bruit  $b(t)$  et en particulier de sa densité spectrale. Les fonctions  $R_{bu}$  et  $R_{ub}$  sont nulles puisque le bruit et le signal utile ne sont pas corrélés ; finalement, pour des retards suffisants ( $|\tau| > \tau_1$ ), on obtient

$$R_{xx}(\tau) \approx R_{uu}(\tau) \quad (\text{II.1.2.08})$$

D'autres applications ont été étudiées par ailleurs ; nous utiliserons surtout la fonction d'intercorrélation pour mesurer des retards temporels.

Mesures de retard

Supposons que l'on veuille déterminer le temps mis par un signal pour traverser un système. Si le système est linéaire, la fonction d'intercorrélation entrée-sortie peut fournir des informations sur le "temps de traversée" du système.

Le retard<sup>(2)</sup>  $\tau_1$  pour lequel a lieu le maximum de la fonction d'intercorrélation est caractéristique du "temps de traversée" du système. Cette propriété est évidente, particulièrement dans le cas où il existe un retard pur  $\tau_r$  entre signal d'entrée et signal de sortie ; la fonction d'intercorrélation entrée-sortie est alors confondue avec la fonction d'autocorrélation décalée d'un retard  $\tau_r$  (fig.II.1.2.0).

La mesure des temps de propagation par corrélation est très précise et a été largement utilisée (radar).

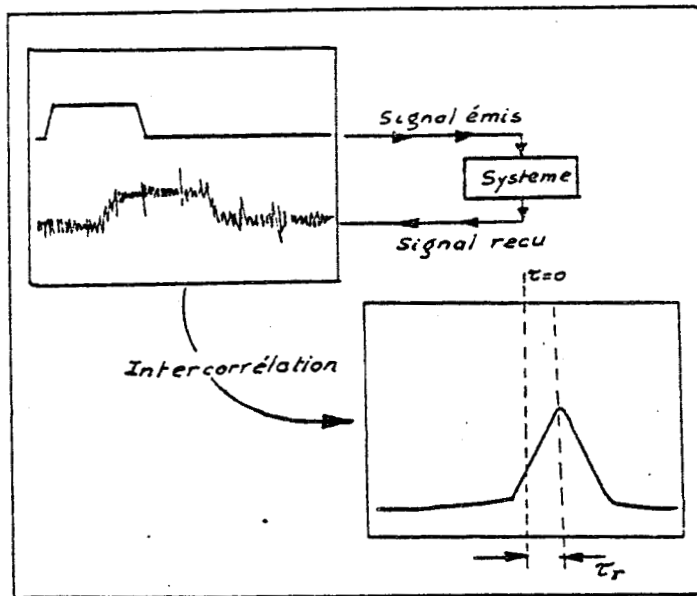


Figure II.1.2.0.

(2) La variable temporelle " $\tau$ " des fonctions de corrélation est souvent appelée retard.

Cette technique de mesure pose des problèmes pratiques lorsque le milieu de propagation est dispersif (i.e. : la vitesse de propagation dépend de la fréquence). Il est alors fructueux d'utiliser les méthodes fréquentielles (interspectr). En dépit des difficultés dues au caractère dispersif des systèmes thermiques, nous avons étudié la caractérisation des matériaux par mesure du temps de traversée de signaux impulsionnels. Pour conserver à la méthode sa simplicité de mise en oeuvre, nous avons établi une relation entre le temps de traversée et le temps caractéristique du milieu.

Compte tenu de la simplicité des relations établies, l'exploitation de la méthode est particulièrement intéressante dans les mesures in situ puisque la corrélation permet d'opérer avec des signaux de faible niveau. C'est sur cette approche intuitive et à la lumière des résultats obtenus par une analyse fréquentielle que nous nous sommes orientés vers les techniques de corrélation.

## CHAPITRE 2 : ESTIMATION DES FONCTIONS DE CORRELATION IDENTIFICATION PAR INTERCORRELATION

### II-2-1- ESTIMATION DES FONCTIONS DE CORRELATION. METHODES NUMERIQUES

Une valeur approchée de la fonction de corrélation

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) x(t-\tau) dt$$

est obtenue par la sommation numérique :

$$\hat{R}_{xy}(mT, N) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N y(kT) x[(k-m)T] \quad (\text{II.2.1.00})$$

$R_{xy}$  ne contenant que les composantes spectrales prises parmi celles de  $x$  et  $y$ , on montre<sup>[3]</sup> que si l'échantillonnage satisfait au théorème de Shannon ( $T \leq 1/(2 f_M)$ ,  $f_M$  étant la fréquence au-delà de laquelle le spectre du signal échantillonné est nul), cet échantillonnage est suffisant pour définir  $R_{xy}$  en tout point.

L'opération de corrélation comporte trois étapes :

- une opération de retard
- une opération de multiplication
- une intégration.

L'intégration : elle est imparfaite puisque le nombre  $N$  d'échantillons est limité. L'erreur commise sur l'estimation  $\hat{R}_{xy}$  est difficile à chiffrer dans le cas général car elle dépend de la nature des signaux  $x$  et  $y$ . Dans le cas particulier d'un bruit Gaussien de densité spectrale constante dans une bande de fréquence  $B$ , l'erreur relative commise sur l'autocorrélation est<sup>[3]</sup> :

$$\varepsilon = \frac{R_{xx}(\tau) - \hat{R}_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} = \frac{1,6}{\sqrt{BT_1}} \quad (\text{II.2.1.01})$$

où  $\hat{R}_{xx}$  représente l'estimation de la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  avec un temps d'intégration  $T_1$ . Il est important de remarquer que cette erreur ne dépend pas de la position de la fenêtre  $B$  dans la gamme des fréquences. Pour une largeur de bande de 1 kHz, une erreur relative de 1% nécessite un temps d'intégration de 25 s ; l'échantillonnage délivre 2000 points par seconde et la précision désirée est obtenue seulement pour un nombre  $N$  de points = 50.000 .

Le retard : La fonction retard, difficile à réaliser sur des signaux analogiques, ne pose aucun problème lorsque la corrélation est effectuée par voie numérique.

Influence de la quantification : On montre [ 3 ] que la quantification n'introduit aucune erreur sur la fonction d'autocorrélation (sauf à l'origine). La précision avec laquelle on connaît l'amplitude du signal n'est donc pas importante pour obtenir des fonctions de corrélation très précises. Lorsque le signal a une densité de probabilité voisine d'une Gaussienne, une quantification sur des mots de 3 bits est suffisante pour le calcul de la fonction de corrélation. L'erreur de quantification peut être représentée en introduisant un bruit blanc additif non corrélé avec le signal.

Ces remarques au sujet de la quantification sont importantes surtout lorsque l'on entreprend la réalisation câblée d'un corrélateur numérique puisque la complexité des circuits de multiplication et le temps de calcul sont liés à la longueur des mots traités.

#### METHODES NUMERIQUES

On montre [ 5 ] que la relation (II.2.1.00) ne conduit à une estimation valable de la fonction de corrélation que pour des valeurs de  $m \leq 0,2 N$ . Il est possible d'utiliser d'autres algorithmes d'intégration par exemple la méthode des trapèzes qui conduit à une précision meilleure. La programmation de ces algorithmes sur calculateur ne pose pas de difficultés particulières.

En pratique, on se heurte très vite à des temps de calculs longs dès que le nombre de points devient important et ceci en particulier sur les microordinateurs qui ont un temps de cycle relativement élevé (typiquement 1  $\mu$ s; une addition décimale nécessitant plusieurs cycles).

Nous avons utilisé pour tous nos calculs un microordinateur équipé d'un processeur de 8 bits et une mémoire centrale de 32 k octets. Le langage utilisé n'étant pas compilé (i.e. : traduit en langage machine, directement exécutable par le processeur) il fallait aussi compter le temps d'interprétation de chaque instruction. Cette situation rendait excessivement lente l'exploitation des données et nous a conduit à rechercher des algorithmes plus efficaces pour calculer les fonctions de corrélation en un temps moindre.

La méthode utilisée fait appel à la transformation rapide de Fourier (FFT) et est fondée sur l'application du théorème de corrélation :

$$\mathcal{F} [ R_{xy}(\tau) ] = X^*(f) Y(f) \quad (\text{II.2.1.02})$$

$X(f)$  et  $Y(f)$  désignent les transformées de Fourier des deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ .

La discrétisation de cette relation introduit la transformée de Fourier discrète (TFD) des deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ . Nous avons utilisé le procédé décrit, pour effectuer des corrélations de fonctions périodiques (4ème Partie). Dans le cas où les fonctions ne sont pas périodiques, il convient de prendre des précautions particulières [8] [9].

L'utilisation de l'algorithme de Cooley-Tukey [7] a permis de réduire considérablement le temps de calcul de la TFD. Ce temps de calcul qui était proportionnel à  $N^2$  lorsque l'on utilise la relation (II.2.1.00) devient proportionnel à  $N \log N$ . De nombreux travaux ont été effectués sur la mise en oeuvre de la FFT en traitement du signal [11][10][7].

Afin de diminuer encore le temps de calcul, nous avons utilisé le procédé de calcul simultané de deux TFD qui consiste à former la fonction complexe du temps  $z(t) = x(t) + j y(t)$  et de calculer la TFD  $Z(f)$  de  $z(t)$ . Il est aisé de déduire ensuite les TFD de  $x(t)$  et de  $y(t)$  par une combinaison des raies de  $Z(f)$  [6].

Nous avons programmé ces procédures de calcul et les résultats obtenus sont satisfaisants. Le temps de calcul a été considérablement réduit (environ de 15 à 1 mm pour 256 points).

Lorsque l'on utilise l'algorithme de Cooley-Tukey, le nombre de points  $N$  doit être une puissance entière de 2. Dans la plupart des cas pratiques, il est possible de remplir cette condition. Il n'en est pas ainsi pour les signaux binaires pseudo-aléatoires (4è Partie) qui ont une période multiple de  $2^k - 1$ ,  $k$  étant un entier caractéristique du signal. Ce problème a été soulevé par les auteurs [10] qui ont utilisé la FFT pour déterminer la réponse fréquentielle d'un système lorsque le signal d'entrée est une excitation pseudo-aléatoire. Les résultats obtenus par application directe de la FFT s'écartent nettement des valeurs attendues ; il se produit un phénomène d'étalement de spectre du au fait que la fenêtre d'analyse ( $2^k$  points) ne correspond pas avec la période du signal et il apparaît une discontinuité à la terminaison du signal. Diverses solutions ont été proposées pour résoudre ce problème : citons l'utilisation d'autres algorithmes (moins efficaces) n'imposant pas la contrainte  $N = 2^k$  sur le nombre de points, et l'utilisation de fenêtres de troncature qui permettent de réduire l'effet de discontinuité précédemment évoqué.

Nous avons utilisé un procédé plus simple mais qui a conduit à des résultats satisfaisants. A partir du tableau contenant les  $(2^k - 1)$  points du signal à analyser, obtenus avec un pas d'échantillonnage  $T$ , nous constituons à l'aide

d'une procédure d'interpolation linéaire, un nouveau tableau de  $2^k$  points distants d'un pas de discrétisation  $T'$  choisi de sorte que l'on ait  $2^k$  points par période. Les résultats obtenus par cette méthode coïncident avec les valeurs théoriques.

Nous n'avons utilisé ce procédé que lorsque le nombre de points traités était important. La mise au point de cet "outil" nous a permis d'effectuer un grand nombre de mesures et de simulations numériques au cours de notre travail de thèse.

II-2-2- IDENTIFICATION PAR INTERCORRELATION

II-2-2-1- PRINCIPE DE LA METHODE

Sur la figure II.2.2.0. est représenté un système linéaire invariant où  $b(t)$  représente le bruit ramené sur la sortie de diverses perturbations aléatoires agissant sur le système.

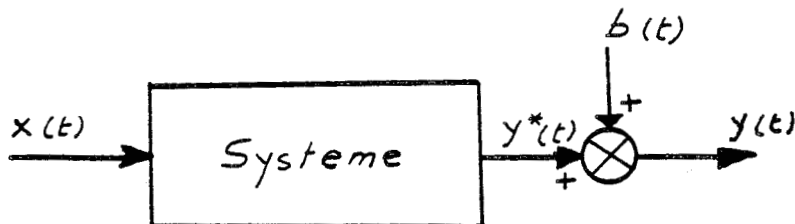


Figure II.2.2.0.

La sortie est reliée à l'entrée du système par l'intégrale de convolution :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) x(t-u) du + b(t) \quad (\text{II.2.2.00})$$

Partant de cette relation, il est possible d'obtenir une estimation  $\hat{h}(t)$  de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système en appliquant une méthode de déconvolution aux valeurs observées de  $x(t)$  et  $y(t)$ .

Lorsque les conditions expérimentales sont telles que le bruit représente une partie appréciable de la sortie  $y(t)$  (cas des mesures in situ), l'erreur sur la réponse impulsionnelle estimée devient importante.

L'optimisation de cette estimation conduit à rendre minimum l'erreur quadratique moyenne :

$$E \left\{ \left| y(t) - \int_0^{\infty} \hat{h}(u) x(t-u) du \right|^2 \right\} \quad (\text{II.2.2.01})$$

par rapport à la fonction  $\hat{h}$ .

Un calcul variationnel conduit à la solution [5]

$$\int_0^{\infty} \hat{h}(u) R_{xx}(\tau-u) du = R_{xy}(\tau) \quad (\text{II.2.2.02})$$

Cette équation appelée "équation de Wiener-Hopf" relie la fonction d'intercorrélation entrée-sortie à la fonction d'autocorrélation de l'entrée par une intégrale de convolution.

En absence de bruit, la fonction d'intercorrélation s'écrit :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt$$

Puisque la sortie  $y(t)$  du système est liée à l'entrée par l'intégrale de convolution :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(u) x(t-u) du$$

où  $h$  désigne la réponse impulsionnelle du système, la fonction d'intercorrélation peut encore s'écrire :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \int_0^{\infty} h(u) x(t+\tau-u) du dt \quad (\text{II.2.2.03})$$

En interchangeant l'ordre des intégrations, il vient :

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau-u) dt \right] du \quad (\text{II.2.2.04})$$

En remarquant que l'expression entre crochets représente la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée  $x(t)$ , il vient :

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) R_{xx}(\tau-u) du$$

on retrouve l'équation de Wiener-Hopf (II.2.2.02) exprimant la fonction d'intercorrélation  $R_{xy}$  comme la sortie d'un système de réponse impulsionnelle  $h(t)$  soumis à une excitation d'entrée  $R_{xx}(t)$ .

Lorsque les signaux d'entrée et de sortie sont stationnaires et ergodiques, il suffit d'évaluer les moyennes temporelles :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau) dt \quad (\text{II.2.2.05})$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt \quad (\text{II.2.2.06})$$

et de réaliser la déconvolution de l'équation de Wiener-Hopf pour obtenir la réponse impulsionnelle  $h(t)$ .



Lorsque les fonctions  $x(t)$  et  $b(t)$  ne sont pas corrélées

$$R_{xy}^T(\tau) = R_{yx}^T(\tau)$$

et l'identification n'est pas affectée par le bruit.

En pratique, l'observation des signaux ne peut se faire que pendant une durée  $T$  finie et l'équation de Wiener-Hopf devient alors :

$$R_{xy}^T(\tau) = \int_0^{+\infty} \hat{h}(u) \cdot R_{xx}^T(\tau-u) du \quad (\text{II.2.2.07})$$

avec

$$R_{xy}^T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt \quad (\text{II.2.2.08})$$

$$R_{xx}^T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau) dt \quad (\text{II.2.2.09})$$

Lorsque le signal d'excitation est un bruit blanc (ou bruit à spectre très étendu par rapport à la bande passante du système), la fonction d'intercorrélation entrée-sortie devient :

$$R_{xy}^T(\tau) = \int_0^{+\infty} h(u) \delta(\tau-u) du = h(\tau) \quad (\text{II.2.2.10})$$

puisque  $R_{xx}^T(u) = \delta(u)$ , il n'est donc pas nécessaire de réaliser la déconvolution.

#### II-2-2-2- AVANTAGES ET INCONVENIENTS

Lors de l'utilisation de la méthode de corrélation en vue de l'identification d'un système, on ne dispose des observations de  $x(t)$  et  $y(t)$  que pendant un intervalle de temps fini  $T$ . Il en résulte des erreurs sur l'estimation des fonctions d'intercorrélation.

- L'intercorrélation  $R_{xb}^T$  pendant ce temps fini n'est plus nulle même si les deux signaux  $x(t)$  et  $b(t)$  ne sont pas corrélés. Il y a donc une répercussion du bruit sur l'identification.
- La fonction  $R_{xx}^T$  peut être une grossière approximation de la fonction d'autocorrélation  $R_{xx}$ . On doit donc utiliser un temps d'identification relativement long.

Cette méthode d'identification par corrélation avec une excitation aléatoire est utilisable avec des signaux d'excitation naturels ; cependant, elle nécessite un volume de calcul important. En contrepartie, la méthode étant peu sensible aux bruits, permet d'utiliser des signaux d'excitation de faible niveau, rendant ainsi acceptable l'hypothèse de linéarité du système.

Cette méthode est applicable aux systèmes multivariables [ 5 ] , si l'on dispose d'un nombre de signaux statistiquement indépendants égal au nombre d'entrées.

Enfin, cette méthode possède l'avantage d'être applicable sur des systèmes en fonctionnement et d'introduire peu de perturbations dans le système testé.

### II-2-2-3- CARACTERISTIQUES OPTIMALES DU SIGNAL D'ENTREE

L'étude précédente permet de constater que les inconvénients de la méthode sont essentiellement liés aux caractéristiques du signal d'entrée.

Il est donc intéressant de rechercher parmi tous les signaux tests utilisables industriellement celui qui possède les caractéristiques optimales :

- a) Le signal test  $x(t)$  doit avoir un spectre assez étendu (4 à 6 octaves) par rapport à la bande passante du système, excitant ainsi avec la même énergie toutes les fréquences intéressantes du système. L'intercorrélation fournit alors la réponse impulsionnelle sans qu'une déconvolution soit nécessaire.
- b) Le signal  $x(t)$  doit être centré. Ainsi, le point de fonctionnement ne sera pas modifié par l'identification.
- c) Le signal  $x(t)$  doit être déterministe de façon à pouvoir être généré facilement.
- d) Il doit être binaire. La transmission du signal est aisée et le calcul de corrélation simplifié.
- e) Il doit être périodique. L'identification en absence de bruit est alors exacte pour un temps fini de corrélation, puisque les fonctions de corrélation de signaux périodiques sont également périodiques, si bien que l'on peut restreindre le temps d'identification à une période.

Ces caractéristiques sont pratiquement remplies par les signaux binaires pseudo-aléatoires que nous traitons dans la quatrième partie de ce mémoire.

## ANNEXE A-II-1 : NOTION DE CORRÉLATION

### Processus aléatoire

Une fonction  $X$  de la variable indépendante  $t$  est aléatoire quand pour toute valeur de la variable indépendante sa valeur est aléatoire.

Si l'on considère simultanément un groupe de fonctions  $x_k(t)$  (representatif  $(k=1, \dots, N)$ ) de processus physiques de même nature, on peut définir sur l'ensemble de  $N$  enregistrements des fonctions  $x_k(t)$ , des grandeurs statistiques exprimant le comportement d'ensemble du processus  $X(t)$ .

On définit la moyenne d'ensemble du premier ordre obtenue en donnant à la variable indépendante  $t$  la valeur  $t_1$  (figure 1); cette moyenne d'ensemble (ou moment) du premier ordre de la variable aléatoire  $X(t_1)$  peut être définie par l'expression :

$$E [X(t_1)] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x_1(t_1) + x_2(t_2) + \dots + x_N(t_1)}{N} \quad (1)$$

Il est alors possible de caractériser l'ensemble des valeurs du processus  $X(t_1)$  par une densité de probabilité  $p(x, t_1)$

On définit aussi les moments d'ordre  $k$  classiques de la théorie des probabilités par la relation :

$$m_k(t_1) = E \left[ [X(t_1)]^k \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x, t_1) dx \quad (2)$$

de même que les moments centrés :

$$\mu_k(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1(t_1))^k p(x, t_1) dx$$

Si nous notons  $E_N$  l'ensemble des valeurs de  $X(t)$  définies par les  $N$  enregistrements, et si nous considérons deux sous-ensembles  $E_N(t_1)$  et  $E_N(t_2)$  (figure 2) obtenus pour deux valeurs de la variable indépendante  $t$ , on peut définir une loi de probabilité à deux variables :  $p(x, x', t_1, t_2)$  exprimant la probabilité pour que le processus  $X(t)$  prenne la valeur  $x$  à l'instant  $t_1$  et  $x'$  à l'instant  $t_2$ .

La définition des moyennes statistiques dans le cas d'une loi de probabilité à deux variables conduit aux notions de covariance (moments du second ordre) et de coefficient de corrélation. Ces notions sont développées de façon explicite dans la littérature [1] [2].

Moyennes temporelles

Si l'on ne considère plus les moyennes statistiques faites sur N enregistrements à des instants précis, mais si l'on observe la variation d'un seul processus  $x_k(t)$  pendant une durée d'enregistrement T, on peut définir la moyenne temporelle :

$$\overline{x_k(t)} = \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(u) du \quad (3)$$

De façon plus générale, la moyenne temporelle de toute fonction  $g(x(t))$  est définie par :

$$\overline{g(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(u) du \quad (4)$$

Ces moyennes temporelles obtenues par traitement d'un seul enregistrement sont beaucoup plus pratiques à évaluer que les moyennes d'ensemble précédentes.

Pour que ces caractéristiques (statistiques et temporelles) soient identiques, il est nécessaire de formuler des hypothèses fondamentales sur la nature du processus étudié.

Stationnarité et ergodicité

Un processus aléatoire est dit "stationnaire au sens strict" lorsque toutes ses caractéristiques (moments) sont indépendantes de l'origine des temps.

Un tel processus possède les propriétés suivantes :

- la densité de probabilité est indépendante du temps
- la moyenne  $m_1 = E [X(t_1)]$  est constante
- les moments du second ordre ne dépendent que de la différence  $\tau = t_2 - t_1$  :

$$E [X(t_1) X(t_2) \dots X(t_n)] = E [X(t_1 + \theta) X(t_2 + \theta) \dots] \quad \forall \theta \quad (5)$$

Dans la plupart des cas, on se limite à la stationnarité du 2<sup>e</sup> ordre où les caractéristiques statistiques du premier et du deuxième ordre sont indépendantes de l'instant d'observation.

Un processus aléatoire est dit ergodique lorsque toutes ses moyennes temporelles existent et sont indépendantes de l'échantillon  $x_k$  choisi :

$$\overline{x_1(t)} = \overline{x_2(t)} = \dots \overline{x_k(t)} = \dots \overline{x_N(t)} \quad (6)$$

Lorsqu'un processus est ergodique, sa moyenne statistique est égale à sa moyenne temporelle

$$E [g(x)] = \overline{g(x(t))} \quad (7)$$

L'hypothèse d'ergodicité exprime que la réalisation particulière du processus, considérée sur un temps suffisamment long, prend toutes ses valeurs possibles c'est-à-dire toutes les valeurs de  $x_k(t_1)$ .

Cette hypothèse fondamentale est due au fait que dans la plupart des problèmes de mesure en physique, l'on a accès à des réalisations uniques, l'accès aux moyennes d'ensemble n'étant pas possible.

Dans la suite, nous considérerons uniquement des processus stationnaires et ergodiques.

### Fonction de corrélation

Si  $X(t)$  caractérise un processus aléatoire stationnaire et ergodique, on peut définir la moyenne des produits  $X(t_1) X(t_2)$  par la relation :

$$E [X(t_1) \cdot X(t_1 + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t_1) X(t_2) p(X(t_1), X(t_2), \tau) dx_1 dx_2 \quad (8)$$

où  $t_2 = t_1 + \tau$

Cette moyenne est la fonction de corrélation (ou d'autocorrélation) qui s'écrit encore en utilisant les moyennes temporelles :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (9)$$

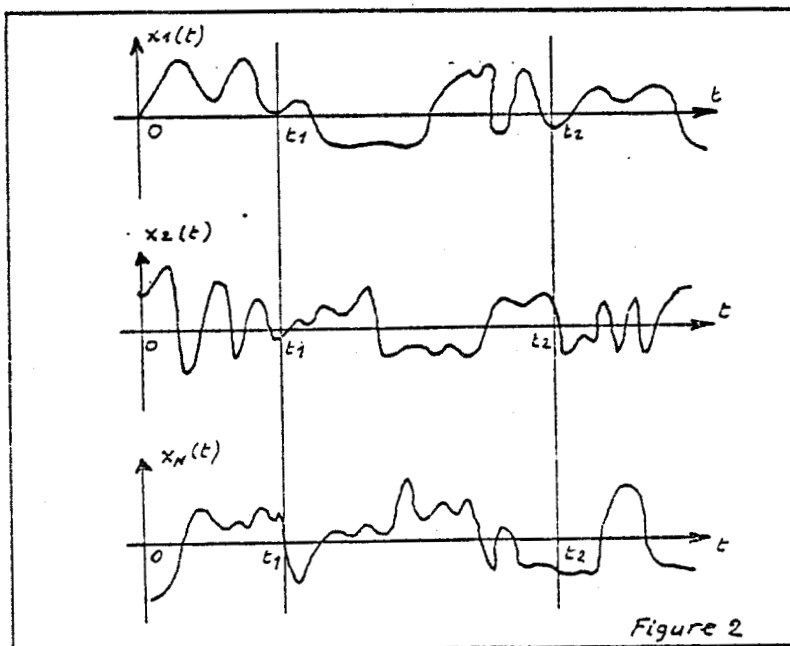
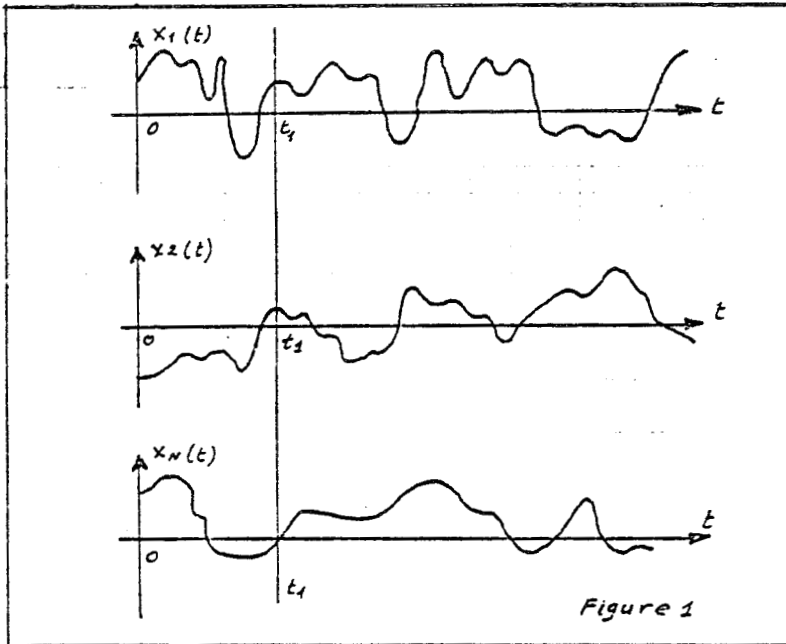
Fonction d'intercorrélation

Soient  $X(t)$  et  $Y(t)$  deux variables aléatoires stationnaires et ergodiques. La fonction d'intercorrélation de ces deux variables est donnée par la moyenne :

$$E [X(t_1) , Y(t_1+\tau)] \quad (10)$$

Soit, en utilisant les moyennes temporelles :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt \quad (11)$$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENDAT (J.S), PIERSOL (A.G)  
"Random Data : Analysis and Measurements procedures"  
New-York : Wiley, 1971
  
- [2] LEVINE (B.)  
"Fondements théoriques de la radiotechnique statistique"  
Vol. 1, Editions MIR - Moscou
  
- [3] MAX (J.)  
"Méthodes et Techniques de traitement du signal"  
Masson, 1977
  
- [4] SCHWARTZ (M.), SHAW (L.)  
"Signal Processing"  
Mc GRAW-HILL, 1975
  
- [5] POVY (L.)  
"Identification des processus"  
Dunod, 1975
  
- [6] BRIGHAM (E.O)  
"The Fast Fourier Transform"  
Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1974
  
- [7] LIFERMANN (J.)  
"Les méthodes rapides de transformation du signal"  
Masson, 1979
  
- [8] BURGESS (J.C)  
"On Digital Spectrum analysis of periodic signals"  
J. Acoust. Soc. Am., Vol. 58, n° 3, September 1975
  
- [9] HARRIS (F.J.)  
"On the use of windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform"  
Proceedings of the IEEE, vol. 66, N°1, January 1978

- [10] BARKER (H.A.), DAVY (B.A.)  
"System Identification using Pseudorandom Signals and the Discrete Fourier Transform"  
Proc. IEE , Vol. 122, N°3, March 1975
- [11] IEE Transactions on Audio and Electroacoustics  
Special Issue on the Fast Fourier Transform  
Vol. AU-17, N°2, June 1969



TROISIEME PARTIE

RÉGIME IMPULSIONNEL

---

## CHAPITRE I : APPLICATION DE LA MÉTHODE D'INTERCORRÉLATION EN THERMOCINÉTIQUE

Dans la première partie, nous avons introduit les concepts fondamentaux de fonction de transfert et de réponse impulsionnelle. Nous avons déduit la réponse impulsionnelle et plus généralement la réponse à un signal réel, des équations physiques régissant l'évolution du système. Nous n'avons pas défini les méthodes expérimentales d'identification de la réponse impulsionnelle ou de la fonction de transfert de flux thermique.

Dans la deuxième partie, nous avons rappelé que la réponse impulsionnelle pouvait être obtenue par des techniques d'identification et plus particulièrement celles fondées sur les méthodes de corrélation. Dans le cas particulier d'une entrée en créneau, la fonction d'intercorrélation entrée-sortie passe par un maximum dont l'abscisse est liée au temps caractéristique de la paroi. Cette propriété fondamentale, dont nous avons donné une approche assez intuitive dans la seconde partie, est utilisée pour établir une nouvelle méthode d'identification du temps caractéristique.

### III-1-1- LE PROBLEME DE L'IDENTIFICATION

Les expressions analytiques de la fonction de transfert de flux et de la réponse impulsionnelle sont explicitées dans la première partie ; elles conduisent à l'expression de la réponse en flux à une variation quelconque de flux imposé sur la face d'entrée.

Le problème de l'identification consiste à déterminer une estimation des paramètres du modèle théorique du système à partir des signaux d'entrée et de sortie du système. Pour préciser le domaine de validité du modèle, on définira une classe de signaux d'entrée et un critère.

La plupart des méthodes élaborées conduisent, dans un contexte déterministe, à l'optimisation d'un critère <sup>[ 1 ]</sup>. Citons :

- Les "méthodes de moindres carrés" qui consistent à minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs d'une mesure et les valeurs obtenues par le modèle,

- Les techniques de transformation fondées sur l'emploi de la transformation de Fourier rapide "FFT",
- les méthodes de corrélation.

D'un point de vue plus pratique, diverses méthodes sont proposées dans la littérature<sup>[ 2 ]</sup>, elles conduisent à l'identification d'un système à l'aide de modèles et de signaux d'entrée canoniques.

Le traitement d'évolutions thermocinétiques résultant d'une entrée en échelon (réponse indicielle) a été réalisé par quelques auteurs<sup>[ 3 ][ 4 ]</sup>. Cependant, outre les difficultés pratiques de maintien d'une telle condition aux limites, le signal d'entrée en échelon soulève un certain nombre de problèmes ; la perturbation du système testé est d'autant plus importante que l'apport énergétique est continu ; la température moyenne du système augmente ; il est difficile de maintenir les conditions de validité du modèle utilisé (faibles variations de température, température superficielle de sortie constante) et plus particulièrement dans les milieux humides où l'évolution de la température provoque un transfert de masse. Il est nécessaire d'identifier le système en utilisant une classe de signaux ayant pour caractéristique commune de n'apporter qu'une faible perturbation au système testé.

Si les modèles classiques de la théorie des systèmes linéaires (modèles d'ordre  $n$ , où  $n$  représente le nombre de pôles de la fonction de transfert) sont bien adaptés aux problèmes de commande et de régulation, ils ne représentent pas de façon satisfaisante les phénomènes de conduction thermique. En thermocinétique, les fonctions de transfert ont un nombre infini de pôles ; Il est possible dans certains cas, notamment pour des évolutions thermocinétiques en régime permanent, de ne considérer que les pôles dominants<sup>[ 4 ]</sup>, et de négliger les pôles d'ordre élevé qui, dans le domaine temporel, correspondent à des régimes transitoires très vite évanouis. Cette approximation devient grossière dès que l'on veut représenter les évolutions pour les faibles valeurs du temps.

Il est important de préciser qu'indépendamment de la nature du modèle de représentation adopté (réponse impulsionnelle, réponse fréquentielle...), le problème de l'identification se pose de deux façons distinctes :

- Il s'agit de déterminer un modèle représentatif du comportement de la paroi vis-à-vis du transfert de chaleur. Dans cette situation, il n'est pas nécessaire que la paroi soit homogène ; on peut s'affranchir de l'élaboration d'un modèle thermocinétique. Les modèles classiques de la théorie des systèmes linéaires sont suffisants.

- On souhaite déterminer les constantes thermophysiques de la paroi. Il est nécessaire que la paroi soit homogène et que l'on ait établi au préalable un modèle thermocinétique représentatif du transfert de chaleur.

Le traitement des données peut s'effectuer de deux façons différentes :

a) Comparer la réponse expérimentale au modèle théorique de la réponse et en déduire une estimation des paramètres du milieu.

b) Elaborer une méthode de dépouillement qui relie de façon explicite les paramètres recherchés à certaines informations particulières de la réponse expérimentale.

C'est cette deuxième approche que nous avons adoptée ; elle permet d'alléger la tâche de l'expérimentateur, en reportant à la phase théorique les difficultés du traitement. L'orientation même que nous voulons donner à ce travail (application industrielle) met en évidence, un autre aspect du traitement : la mécanisation de l'algorithme de dépouillement ne devra exiger qu'un minimum de moyens de calcul automatique. Parmi les méthodes d'identification, nous avons retenu les méthodes de corrélation particulièrement bien adaptées à l'environnement stochastique des mesures in situ.

### III-1-2- REPONSE A UN CRENEAU DE FLUX

La figure III.1.2.0 représente une paroi initialement à l'équilibre thermique et dont la surface de sortie ( $x = \ell$ ) est maintenue à une température constante ; cette paroi est soumise à l'instant zéro à une perturbation superficielle de flux  $\phi_1(t)$  (en  $x = 0$ ).

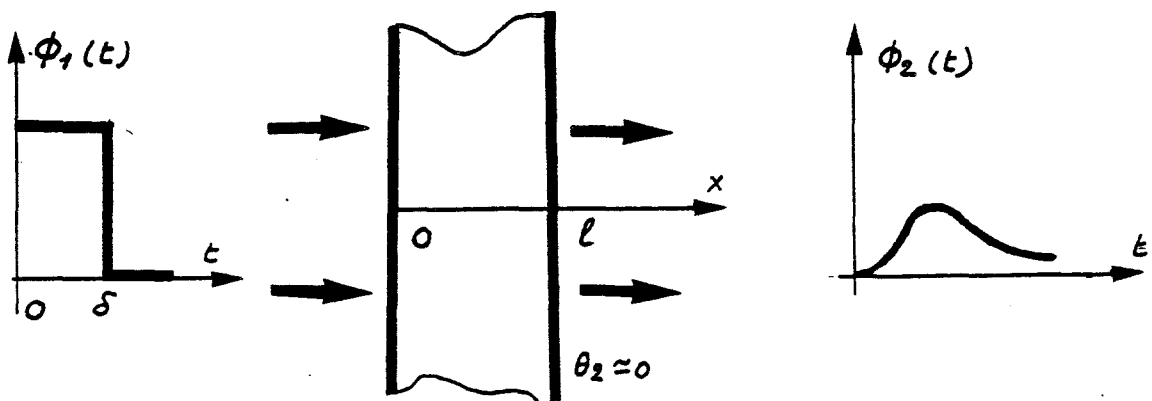


Figure III.1.2.0.

L'expression analytique du signal d'entrée est donnée par :

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \delta \\ 0 & \text{pour } t > \delta \end{cases} \quad (\text{III.1.2.00})$$

La réponse  $\phi_2(t)$  à cette excitation s'exprime par l'intégrale de convolution :

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) * h(t)$$

où  $h(t)$  représente la réponse impulsionnelle de la paroi (voir I-4-3).

L'expression de la réponse  $\phi_2(t)$  peut également s'obtenir à partir de la fonction de transfert de flux :

$$H(p) = \frac{1}{\text{ch } \sqrt{\tau_c p}} \quad (\text{voir I-4-3})$$

La transformée de Laplace de  $\phi_1(t)$  étant représentée par l'expression

$$\phi_1(p) = \frac{1 - e^{-\delta p}}{p} \quad (\text{III.1.2.01})$$

la réponse de la paroi se met sous la forme :

$$\phi_2(p) = \frac{1}{p \text{ ch } \sqrt{\tau_c p}} - \frac{1}{p \text{ ch } \sqrt{\tau_c p}} e^{-\delta p} \quad (\text{III.1.2.02})$$

soit

$$\phi_2(p) = F_1(p) - F_1(p) e^{-\delta p} \quad (\text{III.1.2.03})$$

La réponse temporelle  $\phi_2(t)$  est alors donnée par la relation :

$$\phi_2(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{pour } t \leq \delta \\ f_1(t) - f_1(t-\delta) & \text{pour } t \geq \delta \end{cases} \quad (\text{III.1.2.04})$$

La fonction  $f_1(t)$  désigne l'original de  $F_1(p)$  et s'exprime par la relation :

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p \operatorname{ch} \sqrt{\tau_c p}} \right)$$

soit

$$f_1(t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c} \right] \quad (\text{III.1.2.05})$$

En substituant  $f_1(t)$  dans les relations (III.1.2.04), on obtient les expressions temporelles du flux de sortie :

$$\phi_2(t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c} \right] \quad (t \leq \delta) \quad (\text{III.1.2.06})$$

$$\phi_2(t) = - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c} \right] \left[ 1 - \exp \left[ (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c} \right] \right] \quad (t > \delta) \quad (\text{III.1.2.07})$$

### III-1-3- FONCTION D'INTERCORRELATION ENTREE-SORTIE

La fonction d'intercorrélation entrée-sortie est définie par l'intégrale :

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_2(t) \phi_1(t-\tau) dt \quad (\text{III.1.3.00})$$

La fonction d'intercorrélation entre flux d'entrée et flux de sortie s'exprime en fonction des expressions des flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  calculées dans le paragraphe précédent. Le calcul peut être décomposé en deux parties suivant la valeur de  $\tau$  par rapport à  $\delta$ .

#### III-1-3-1- EXPRESSION DE LA FONCTION $z(\tau)$ POUR $\tau \leq \delta$

L'expression de la fonction d'intercorrélation pour des retards inférieurs à la durée du créneau peut s'obtenir à l'aide des relations (III.1.3.00) et (III.1.2.06). Le résultat du calcul est représenté par la surface hachurée de la figure III.1.3.0 où  $\tau$  désigne un retard et  $z(\tau)$  l'aire hachurée.

Dans le cas particulier étudié où le signal d'entrée est un créneau de largeur  $\delta$ , la fonction d'intercorrélation est proportionnelle à l'intégrale du signal de sortie sur une fenêtre mobile de largeur  $\delta$ , retardée d'un temps  $\tau$ .

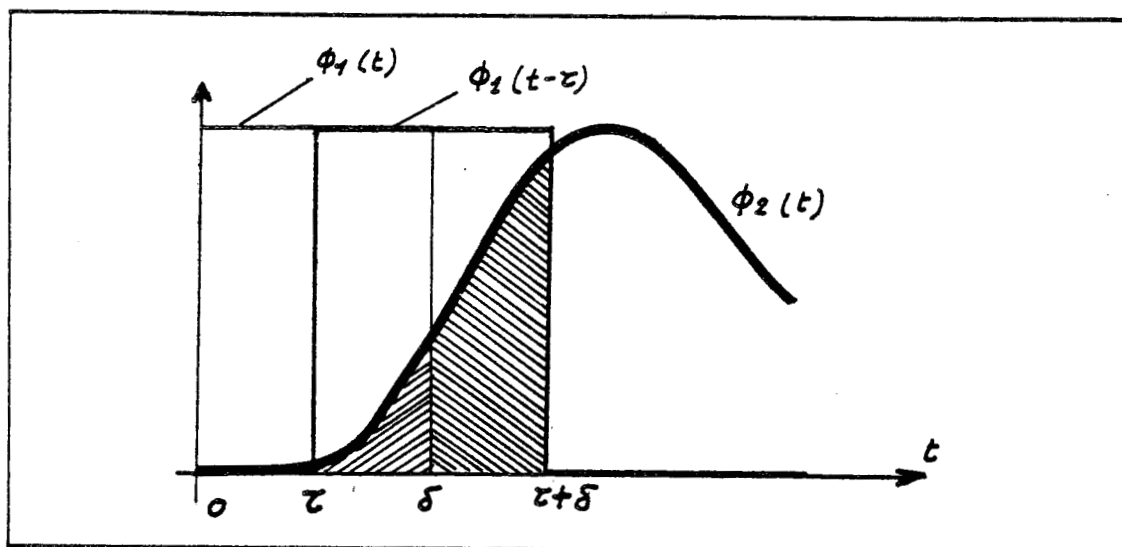


Figure III.1.3.0.

Ce calcul s'effectue en exprimant l'intégrale :

$$z(\tau) = \int_{\tau}^{\delta} \phi_2(t) \cdot 1 \cdot dt + \int_{\delta}^{\delta+\tau} \phi_2(t) \cdot 1 \cdot dt \quad (\text{III.1.3.01})$$

ou d'après (III.1.2.04),

$$z(\tau) = \int_{\tau}^{\delta} f_1(t) dt + \int_{\delta}^{\delta+\tau} [f_1(t) - f_1(t-\delta)] dt$$

soit

$$z(\tau) = \int_{\tau}^{\delta} f_1(t) dt + \int_{\delta}^{\delta+\tau} f_1(t) dt - \int_0^{\tau} f_1(t) dt \quad (\text{III.1.3.02})$$

En introduisant la fonction  $F_1(t)$  primitive de  $f_1(t)$  :

$$F_1(t) = \int f_1(t) dt \quad (\text{III.1.3.03})$$

il vient :

$$z(\tau) = -2 F_1(\tau) + F_1(\delta+\tau) + F_1(0) \quad (\text{III.1.3.04})$$

La fonction  $F_1(t)$  peut s'exprimer par le développement :

$$F_1(t) = \int \left\{ 1 - \frac{4}{\Pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\Pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c} \right] \right\} dt$$

soit

$$F_1(t) = \tau + \frac{16}{\Pi^3} \tau_c \sum_{n \geq 1} u_n \quad (\text{III.1.3.05})$$

avec

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\Pi^2}{4} \frac{t}{\tau_c} \right] \quad (\text{III.1.3.06})$$

on en déduit :

$$F_1(0) = \frac{\tau_c}{2} \quad (\text{III.1.3.07})$$

en utilisant le résultat bien connu :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\Pi^3}{32} \quad (\text{III.1.3.08})$$

Finalement, en reportant les relations (III.1.3.07) et (III.1.3.05) dans l'expression de  $z(\tau)$  (III.1.3.04), on obtient l'expression analytique de la fonction d'intercorrélacion :

$$z(\tau) = \delta - \tau + \frac{\tau_c}{2} - \frac{16}{\Pi^3} \tau_c \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\Pi^2}{4} \frac{\tau}{\tau_c} \right] \cdot \left[ 2 - \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\Pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c} \right] \right] \quad (\text{III.1.3.09})$$

### III-1-3-2- EXPRESSION DE LA FONCTION $z(\tau)$ pour $\tau \geq \delta$

Le calcul de la fonction d'intercorrélacion  $z(\tau)$  pour des retards supérieurs à  $\delta$  s'effectue en évaluant l'intégrale :

$$z(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\delta} \phi_2(t) \cdot 1 \cdot dt = \int_{\tau}^{\tau+\delta} [f_1(t) - f_1(t-\delta)] dt \quad (\text{III.1.3.10})$$

soit

$$z(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\delta} f_1(t) dt - \int_{\tau-\delta}^{\tau} f_1(t) dt$$



ou encore :

$$z(\tau) = -2 F_1(\tau) + F_1(\tau+\delta) + F_1(\tau-\delta) \quad (\text{III.1.3.11})$$

La substitution de la relation (III.1.3.05) dans l'expression précédente donne :

$$z(\tau) = -\frac{32}{\pi^3} \tau_c \sum_{n \geq 1} u_n (1 - \text{ch } \alpha_n)$$

avec

$$\alpha_n = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c}$$

C'est l'expression analytique de la fonction d'intercorrélacion pour des retards supérieurs à la durée du créneau et que l'on peut mettre sous la forme développée :

$$z(\tau) = -\frac{32}{\pi^3} \tau_c \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\tau}{\tau_c} \right] \cdot \left[ 1 - \text{ch} \left[ (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c} \right] \right] \quad (\text{III.1.3.12})$$

III-1-3-3- MAXIMUM DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION

La fonction d'intercorrélacion passe par un maximum pour un retard  $\tau_1$  que l'on obtient en annulant la dérivée de  $z(\tau)$  ; on aboutit aux deux équations transcendentes :

$$-1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\tau_1}{\tau_c} \right] \cdot \left[ 2 - \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c} \right] \right] = 0$$

pour  $\tau_1 < \delta$  (III.1.3.13)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp \left[ -(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\tau_1}{\tau_c} \right] \left[ 1 - \text{ch} \left[ (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\delta}{\tau_c} \right] \right] = 0$$

pour  $\tau_1 \geq \delta$  (III.1.3.14)

Ces deux relations constituent ce que nous appellerons "l'équation du maximum" :

$$G\left(\frac{\tau_1}{\tau_c}, \frac{\delta}{\tau_c}\right) = 0 \quad (\text{III.1.3.15})$$

### III-1-4- PRINCIPE DE LA METHODE D'INTERCORRELATION DE FLUX

L'exploitation de la position du maximum de la fonction d'intercorrélation, établie par l'équation précédente, fournit un procédé de mesure du temps caractéristique  $\tau_c$  de la paroi donc de la diffusivité.

L'inconnue du problème est  $\tau_c$  ; or nous connaissons  $\delta$  qui est la durée du créneau de flux incident. Nous pouvons obtenir une estimation de la fonction d'intercorrélation à l'aide de l'enregistrement du flux sortant de la paroi ; ce qui fournit la position  $\tau_1$  du maximum. Il est alors facile d'obtenir la valeur de  $\tau_c$  à partir de l'équation transcendante (III.1.3.15).

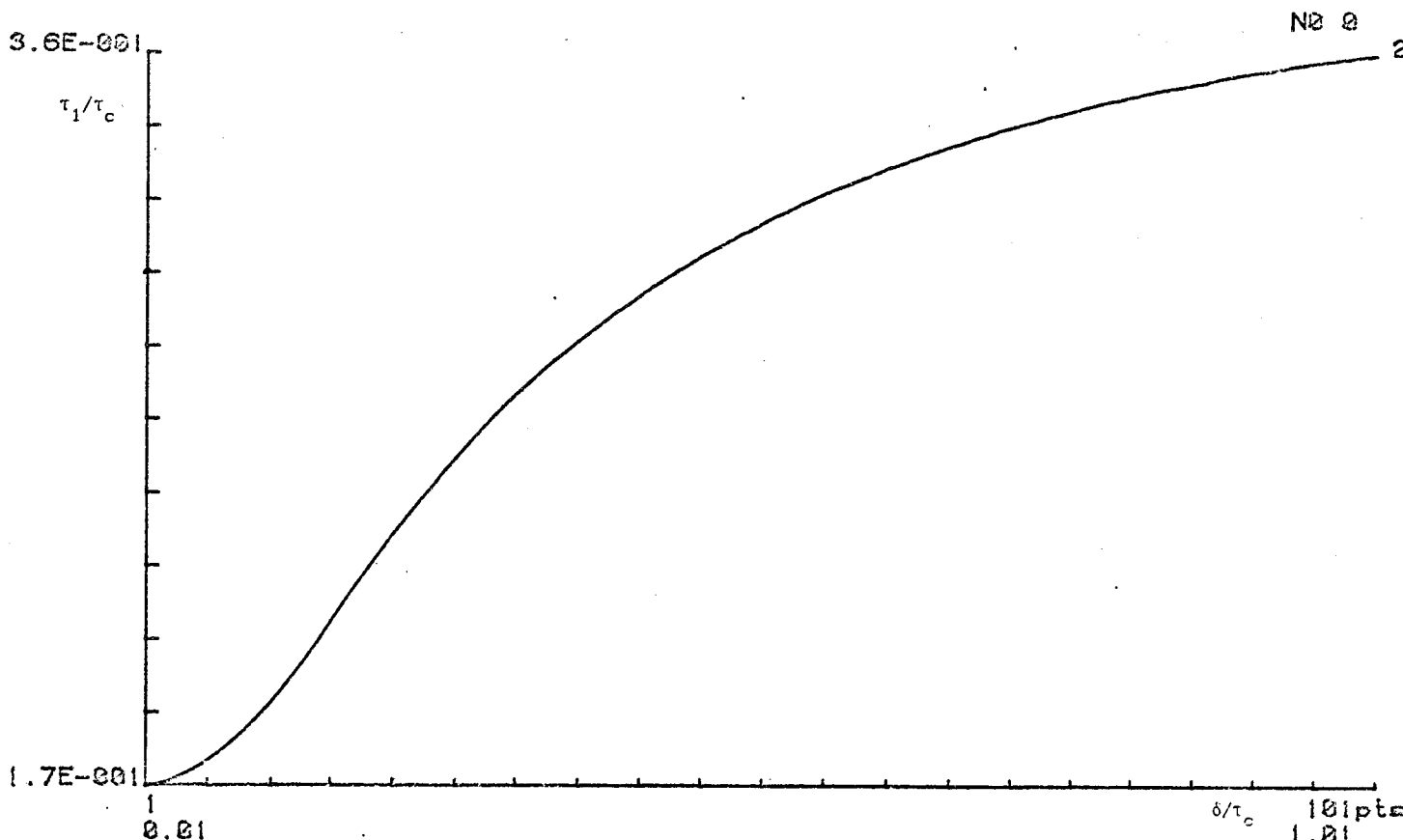
### III-1-5- ETABLISSEMENT DES ABAQUES DE CALCUL

#### III.1.5.1. ETUDE DES RACINES DE "L'EQUATION DU MAXIMUM"

Les racines de l'équation  $G(\tau_1/\tau_c, \delta/\tau_c) = 0$  ont été étudiées sur un calculateur de table à l'aide d'une méthode de dichotomie. Nous représentons sur la figure III.1.5.0 le lieu décrit par la racine  $\tau_1/\tau_c$  lorsque  $\delta/\tau_c$  varie. Nous y avons limité la plage de variation de  $\delta/\tau_c$  à l'intervalle  $[0,01-1]$  ; les résultats de cette étude sont tabulés en annexe [A-III-1]. Pour  $\delta/\tau_c \geq 2$ , l'abscisse  $\tau_1/\tau_c$  du maximum de la fonction d'intercorrélation  $z(\tau/\tau_c)$  est de l'ordre de 0,4 et est pratiquement indépendant de la durée du créneau. Inversement, dans le cas où le créneau est de courte durée ( $\delta/\tau_c \leq 0,01$ ), on a la relation :

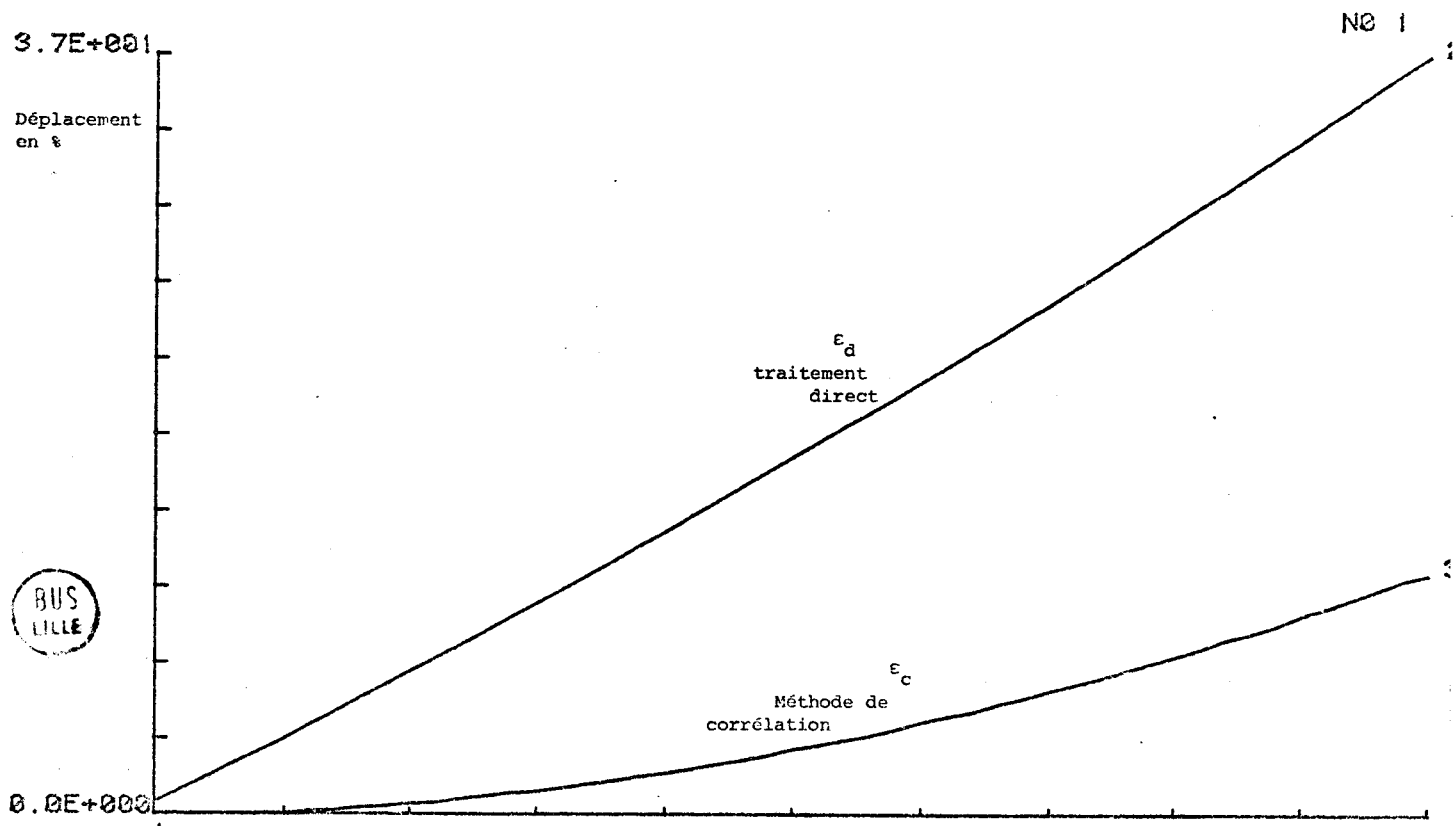
$$\tau_c \approx 6 \tau_1 \quad (\delta/\tau_c \leq 0,01) \quad (\text{III.1.5.16})$$

Dans ce cas particulier, le créneau de flux incident peut être assimilé à une impulsion de Dirac. Il est également possible d'évaluer le temps caractéristique à partir de la position  $t_1/\tau_c$  du maximum de la réponse  $\phi_2(t)$ . Pour  $\delta/\tau_c \leq 0,03$  on commet une erreur de l'ordre de 1 % sur la position du maximum  $\tau_1/\tau_c$  de  $z(\tau/\tau_c)$  alors que cette erreur est de l'ordre de 10 % si l'on considère la position du maximum  $t_1/\tau_c$  de la réponse  $\phi_2(t)$ . Nous avons représenté sur la figure III.1.5.1. le déplacement  $\epsilon_d$  de la position du maximum de  $\phi_2(t)$  par rapport à l'abscisse du maximum de la réponse impulsionnelle, lorsque la durée du créneau d'excitation varie :



axe X :  $5.0E-002$  /div  
 axe Y :  $1.9E-002$  /div  
 FIGURE III.1.5.0

Position du maximum de la fonction d'intercorrélation en fonction de la durée normalisée de l'impulsion de flux incidente.



axe X :  $1.0E-002$  /div  
 axe Y :  $3.7E+000$  %/div  
 FIGURE III.1.5.1

Déplacement des maximums de la réponse et de la fonction d'intercorrélation en fonction de la durée du créneau de flux incident



$$\varepsilon_d = \frac{t_1^* - t_1^{*0}}{t_1^{*0}}$$

où  $t_1^* = t_1/\tau_c$  et  $t_1^{*0} \approx 0,1666$  désigne la position du maximum  $t_1/\tau_c$  de la réponse  $\phi_2(t)$  pour une attaque impulsionnelle. Nous avons également représenté sur la même figure, le déplacement relatif  $\varepsilon_c$  de la position du maximum de la fonction d'inter-corrélation :

$$\varepsilon_c = \frac{\tau_1^* - \tau_1^{*0}}{\tau_1^{*0}}$$

où  $\tau_1^* = \tau_1/\tau_c$  et  $\tau_1^{*0} \approx 0,1666$  représente la position du maximum  $\tau_1/\tau_c$  de la fonction d'intercorrélacion, pour une attaque impulsionnelle.

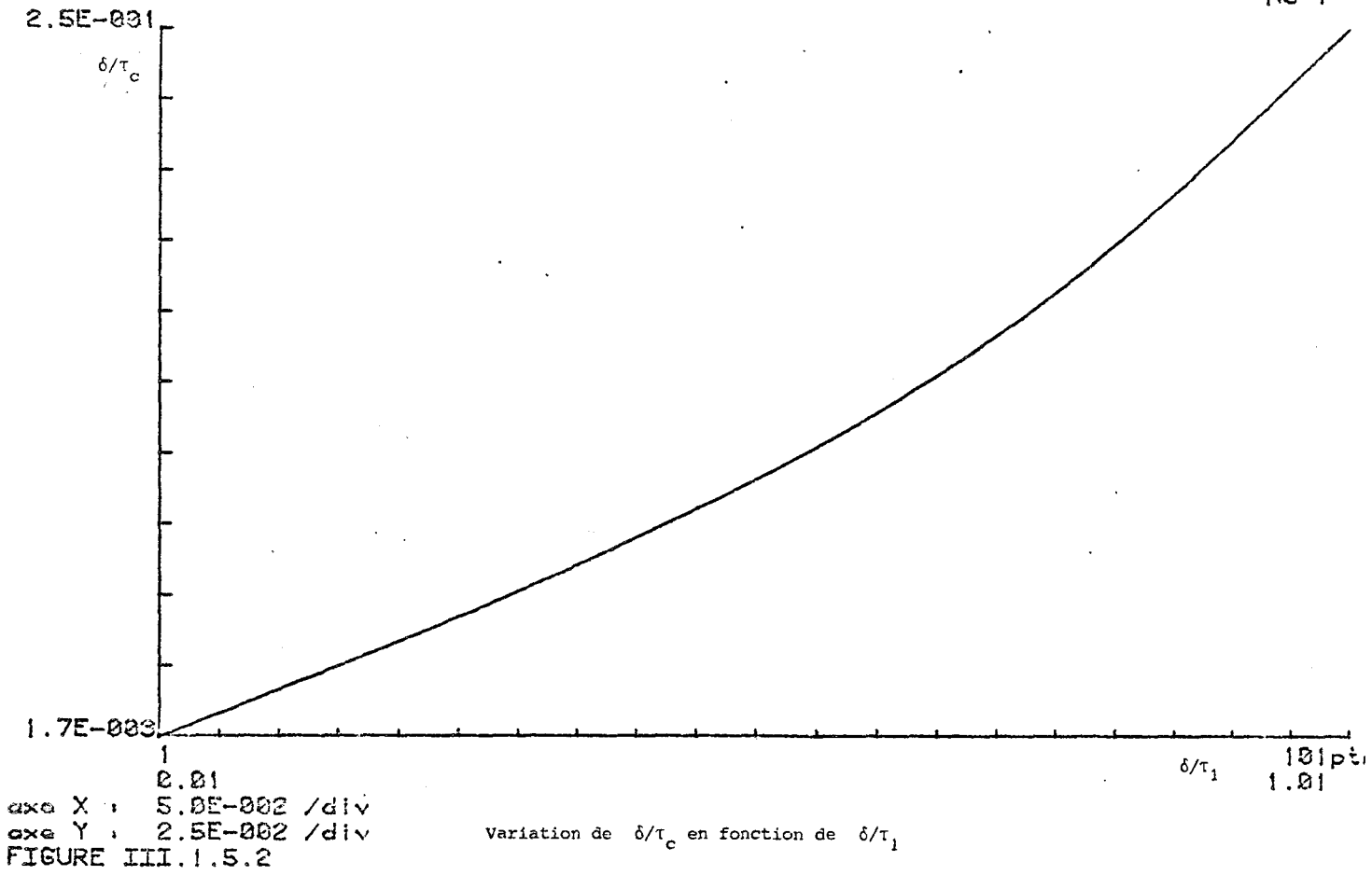
Nous donnons quelques valeurs numériques de ces déplacements dans le tableau III.1.5.0.

Il apparaît que l'approximation de l'entrée impulsionnelle est réalisée de façon satisfaisante pour un créneau d'entrée de durée  $\delta \leq 0,03 \tau_c$  lorsque l'on utilise la méthode de corrélation alors qu'il faut une durée  $\delta \leq 0,003 \tau_c$  lorsque l'on dépouille directement le signal de sortie.

### III-1-5-2- ABAQUES DE CALCUL

Les variables  $v = \tau_1/\tau_c$  et  $w = \delta/\tau_c$  apparaissent explicitement dans l'équation  $G(v,w) = 0$  ; cependant, le lieu des racines précédemment défini à l'aide de ces variables renseigne sur la position du maximum de la fonction  $z(\tau/\tau_c)$  sans être directement exploitable en pratique. Une étude détaillée a montré l'intérêt d'établir une correspondance entre les variables normalisées  $u = \delta/\tau_1$  et  $w = \delta/\tau_c$ . La variable  $u$  est issue des données expérimentales puisque  $\delta$  représente la durée du créneau et  $\tau_1$  la position du maximum de  $z(t/\tau_c)$ . Connaissant la correspondance entre  $u$  et  $w$ , il est possible de déterminer le temps caractéristique  $\tau_c$ . Nous avons établi la correspondance  $(w,u)$  ; les résultats de ce calcul sont représentés par la courbe de la figure III.1.5.2. ; les valeurs numériques sont tabulées en annexe [A-III-1]. Nous avons représenté l'abaque  $(w,u)$  par des polynômes d'approximation obtenue par la méthode des "moindres carrés". Les programmes de régression permettant ce calcul sont classiques et conduisent à la résolution de systèmes linéaires [5]. En adoptant les notations précédentes que nous rappelons :

$$w = \delta/\tau_c \quad , \quad u = \delta/\tau_1$$



$\delta/\tau_c$	0,002	0,006	0,01	0,014	0,018	0,022	0,026	0,03	0,034
$\epsilon_d$ (%)	0,6	1,8	3	4,3	5,6	6,9	8,2	9,5	11
$\epsilon_c$ (%)	0	0	0,0	0,2	0,4	0,5	0,8	1,1	1,3

Tableau III.1.5.0



les polynômes d'approximations peuvent se mettre sous la forme :

$$w = \sum_{k=0}^N \alpha_k u^k$$

En utilisant ces résultats, nous avons pu exprimer le temps caractéristique  $\tau_c$  par la formule approchée :

$$\tau_c \approx 6 \tau_1 \cdot \xi (\delta/\tau_1) \quad (\text{III.1.5.17})$$

expression dans laquelle  $\xi$  est un facteur correctif qui tient compte de la durée du créneau.

Pour  $\delta/\tau_1 \leq 0,1$ , le facteur correctif  $\xi$  est voisin de 1, tandis que pour  $0,1 \leq \delta/\tau_1 \leq 0,25$ , il s'exprime par la relation :

$$\xi (\delta/\tau_1) = \frac{1}{0,987 + 0,122(\delta/\tau_1)} \quad (\text{III.1.5.18})$$

Les expressions de  $\xi (\delta/\tau_1)$  pour  $0 \leq \delta/\tau_1 \leq 2,8$  sont données en annexe. Ces formules permettent de calculer directement le temps caractéristique à partir des données expérimentales  $\delta$  et  $\tau_1$ , et ce avec une précision meilleure que 0,5 %.

### III-1-6- CONCLUSION

Le signal d'entrée impulsionnel a le grand avantage de conduire rapidement à des valeurs numériques permettant de calculer le temps caractéristique.

De nombreuses méthodes numériques sont proposées par ailleurs pour traiter la réponse impulsionnelle. Ces méthodes intéressantes dans leur fondement théorique, conduisent généralement à des calculs longs et difficiles. La méthode de dépouillement proposée permet de garder le bénéfice attendu des mesures en régime impulsionnel (rapidité). Pour réaliser cet objectif, nous nous sommes efforcés de traduire les résultats de cette étude par des formules simples, de sorte que le dépouillement des données puisse être effectué à l'aide de moyens de calcul élémentaires.

## CHAPITRE 2 : MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE

Pour situer en pratique les limites de la méthode développée au chapitre précédent, il importe de préciser les influences de diverses perturbations et de chiffrer leurs répercussions sur les résultats des mesures. C'est l'objet de ce chapitre dans lequel, en nous aidant des techniques de simulation numérique, nous évaluons l'influence des erreurs introduites par la corrélation, la répercussion du bruit, l'incidence d'une distorsion du signal d'entrée.

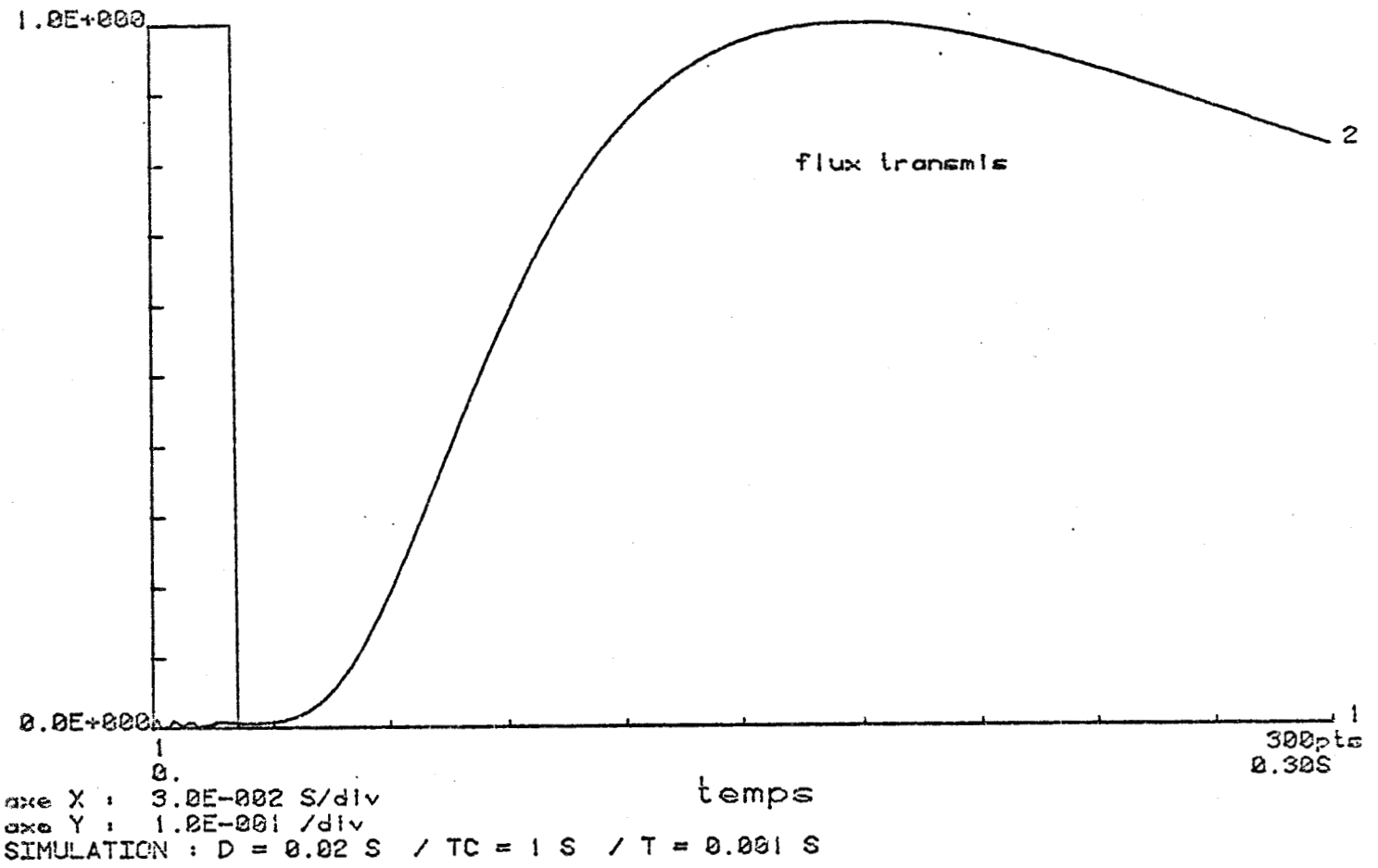
### III-2-1- SIMULATION DE LA METHODE

Pour évaluer en dehors de toute perturbation expérimentale, la précision que l'on peut attendre de cette méthode, nous avons procédé à divers essais par simulation numérique. En fixant le temps caractéristique à 1 s, nous avons, pour diverses valeurs de  $\delta/\tau_c$ , calculé la réponse  $\phi_2(t)$  en utilisant les relations (III.1.2.06) et (III.1.2.07).

Pour chaque valeur de  $\delta/\tau_c$  choisie, nous calculons la réponse  $\phi_2(kT)_{k=0 \text{ à } N}$ ; T représentant le pas d'échantillonnage, et N le nombre de points. Ensuite, nous procédons au calcul de la fonction d'intercorrélation entrée-sortie. Les courbes de la figure III.2.1.0. représentent les simulations pour  $\delta/\tau_c = 0.02$ , 0.1 et 0.25. Pour chaque valeur de  $\delta/\tau_c$ , nous représentons le signal d'entrée, le signal de sortie, ainsi que la fonction d'intercorrélation entrée-sortie. Les erreurs sur la détermination du paramètre  $\tau_1$  dépendent de la précision de la méthode d'intégration numérique tandis que la précision globale sur l'estimation de  $\tau_c$  fait intervenir en outre la durée du créneau (III.1.5.17).

Lorsque l'on utilise une méthode d'intégration numérique (trapèzes) et un pas d'échantillonnage  $T_e \leq \delta/50$ , on commet une erreur relative maximum de l'ordre de 0.3 % sur la détermination de  $\tau_c$ , pour  $\delta/\tau_c \leq 0.1$ . Cette erreur maximum est de 1 % pour  $\delta/\tau_c \leq 0.3$  et de 2 % pour  $\delta/\tau_c \leq 1$ .

NO 1



NO 1

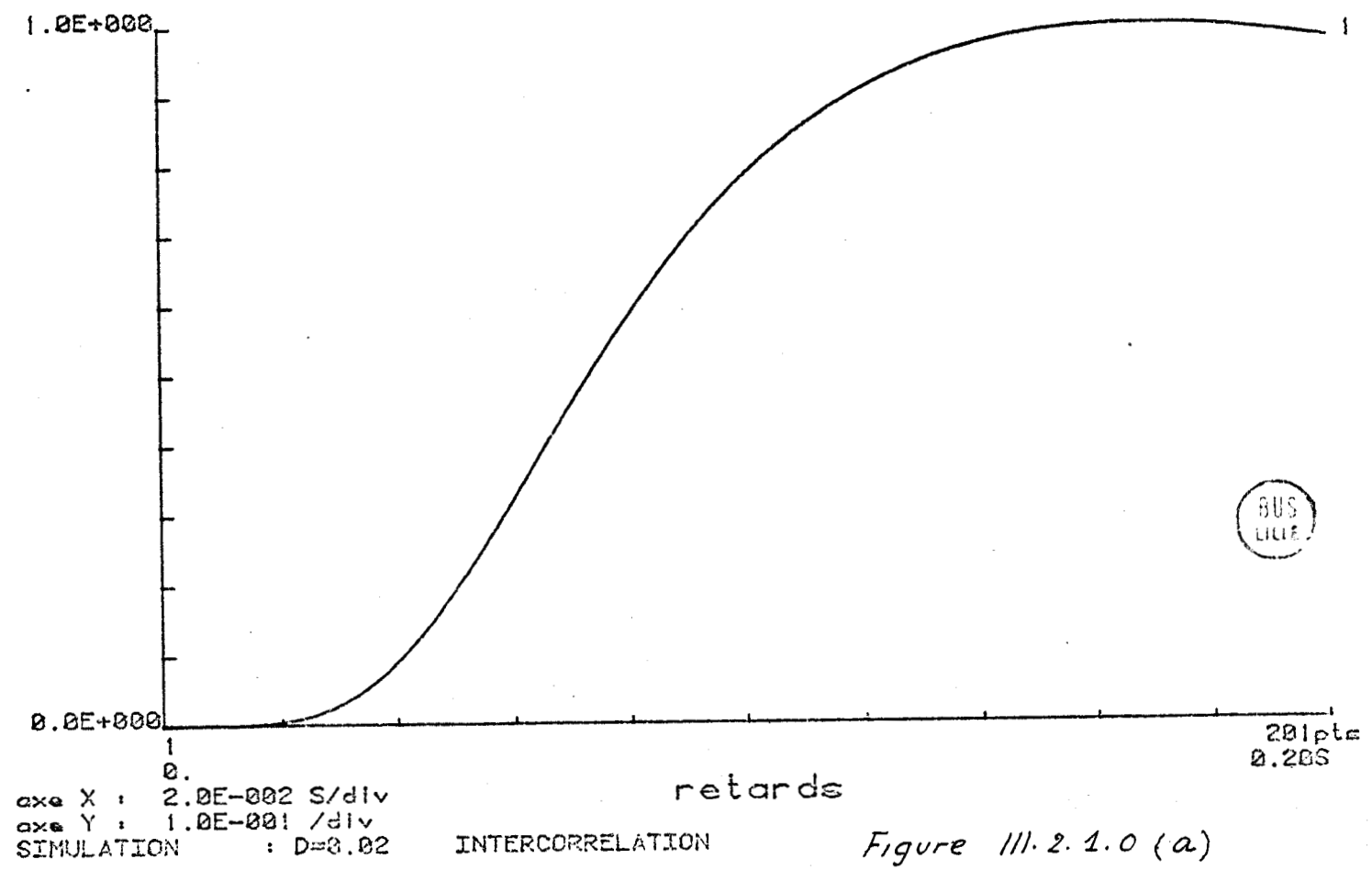
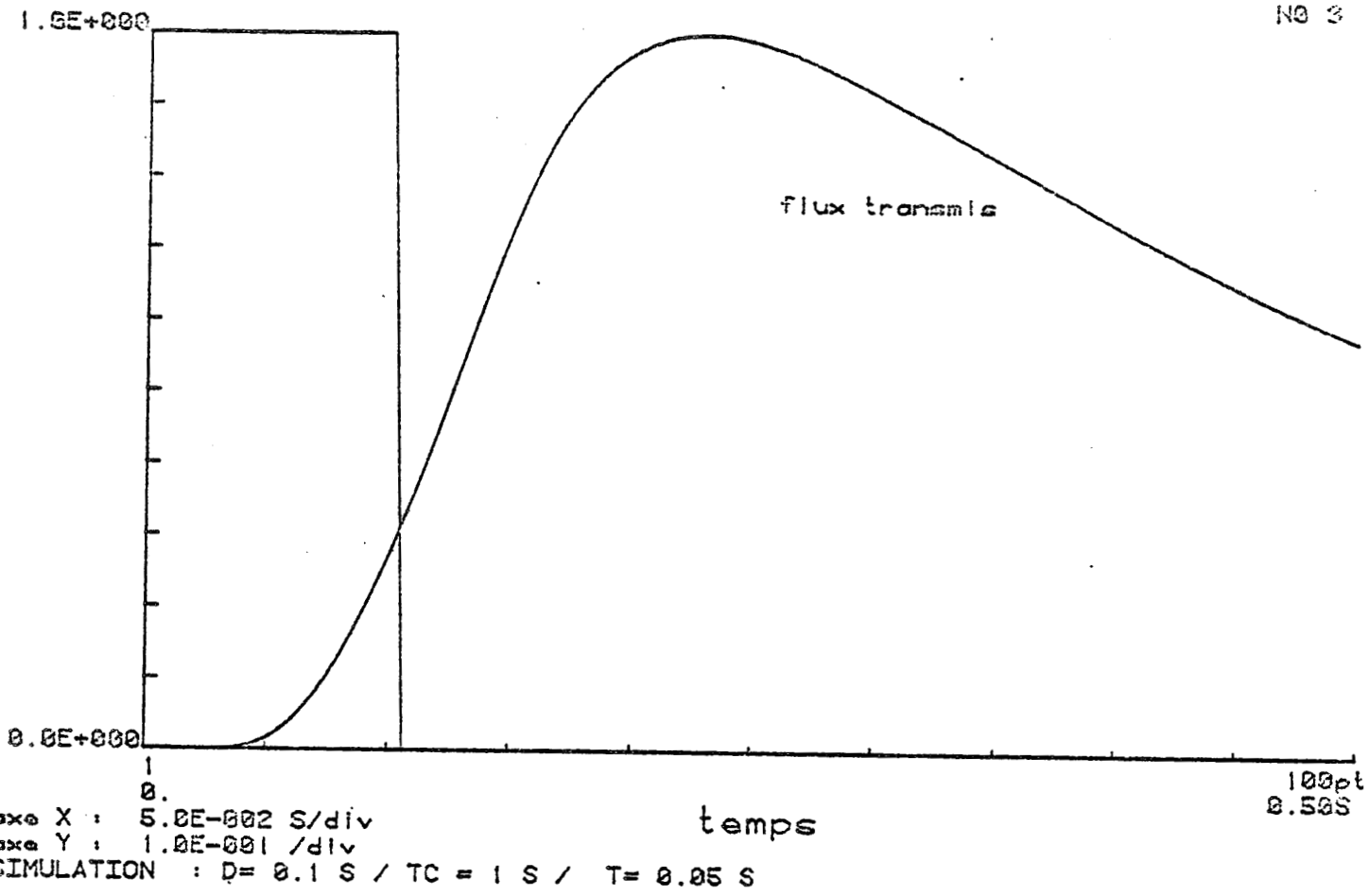


Figure III. 2. 1. 0 (a)



NO 3



NO 3

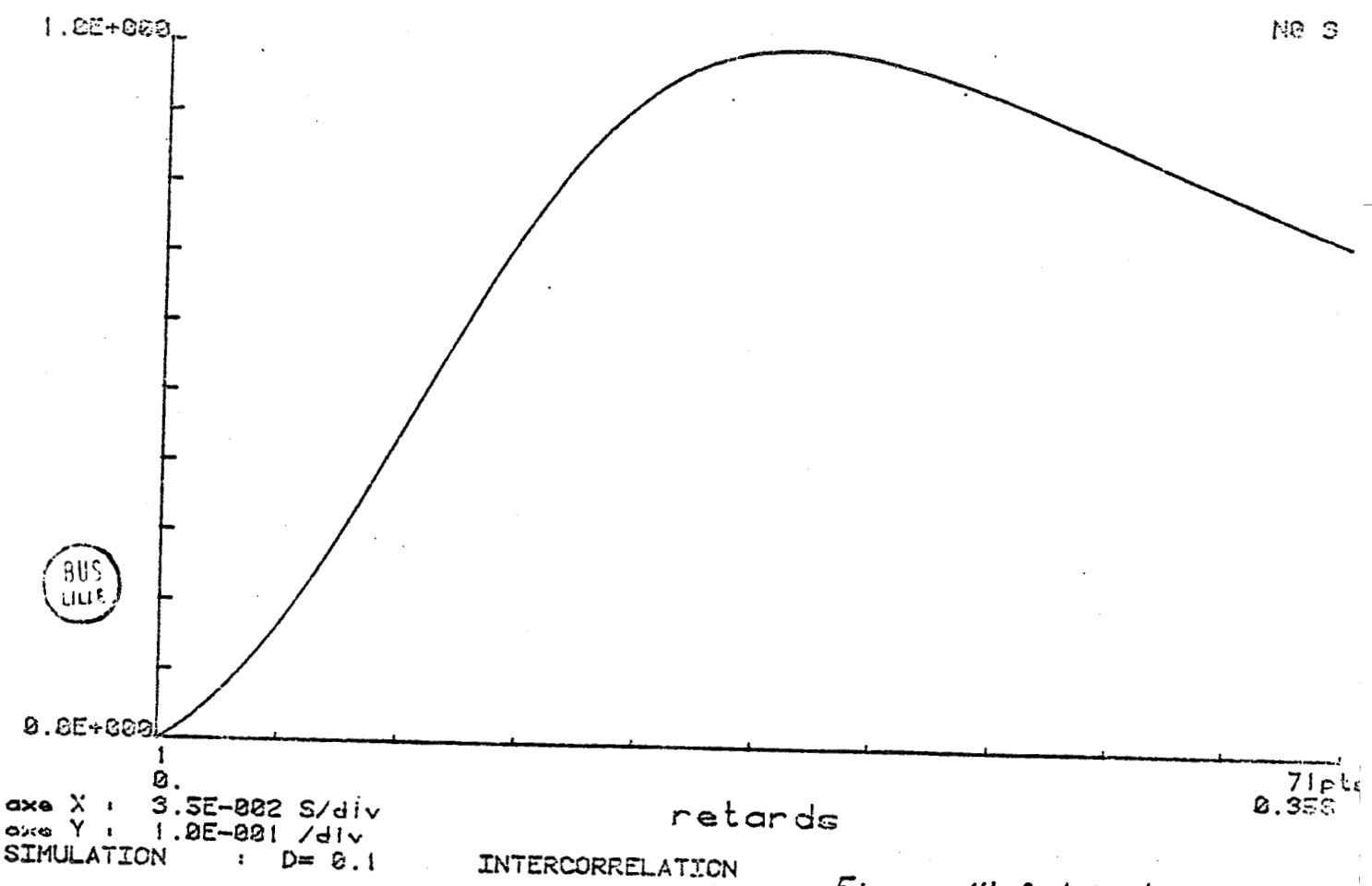
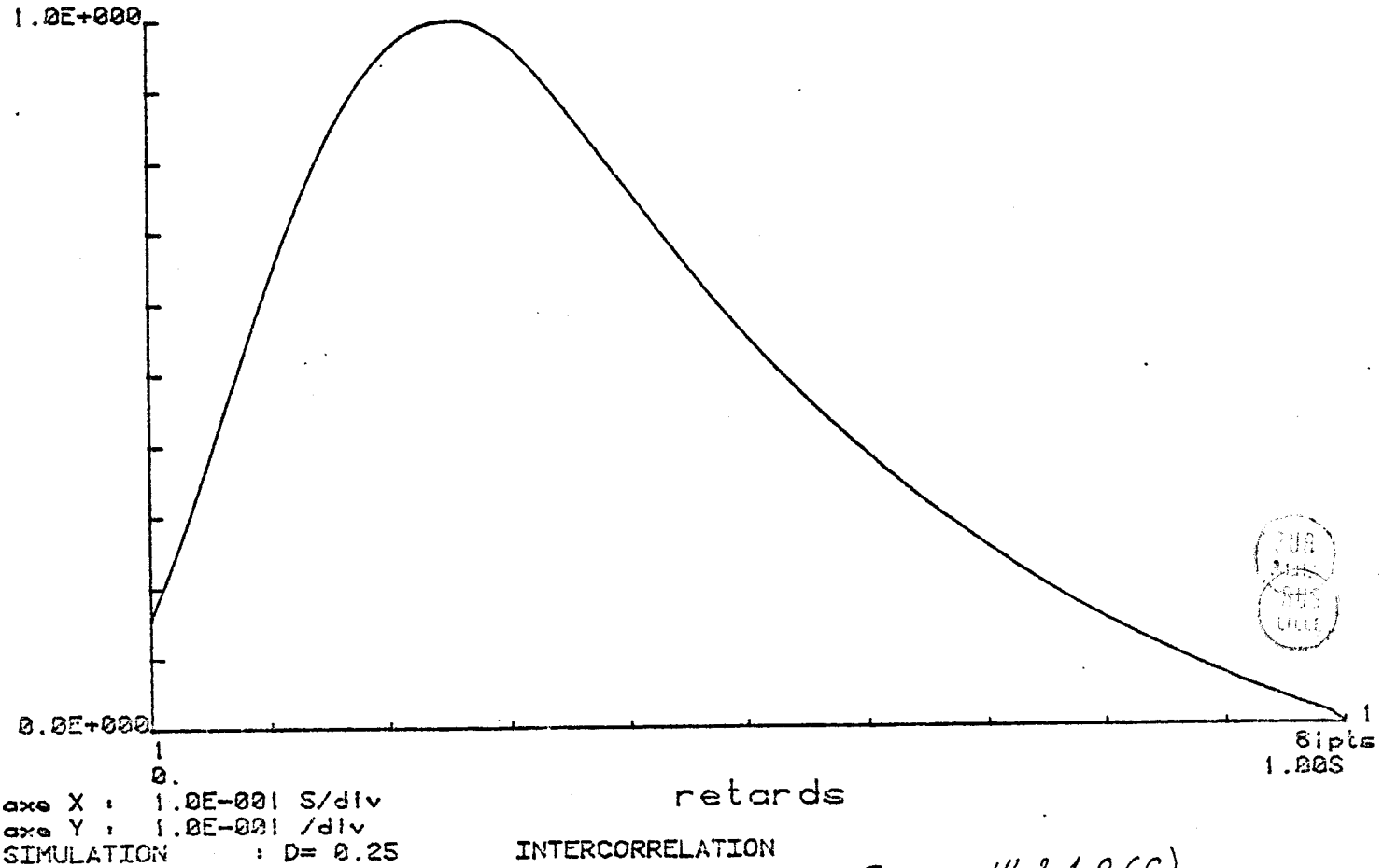
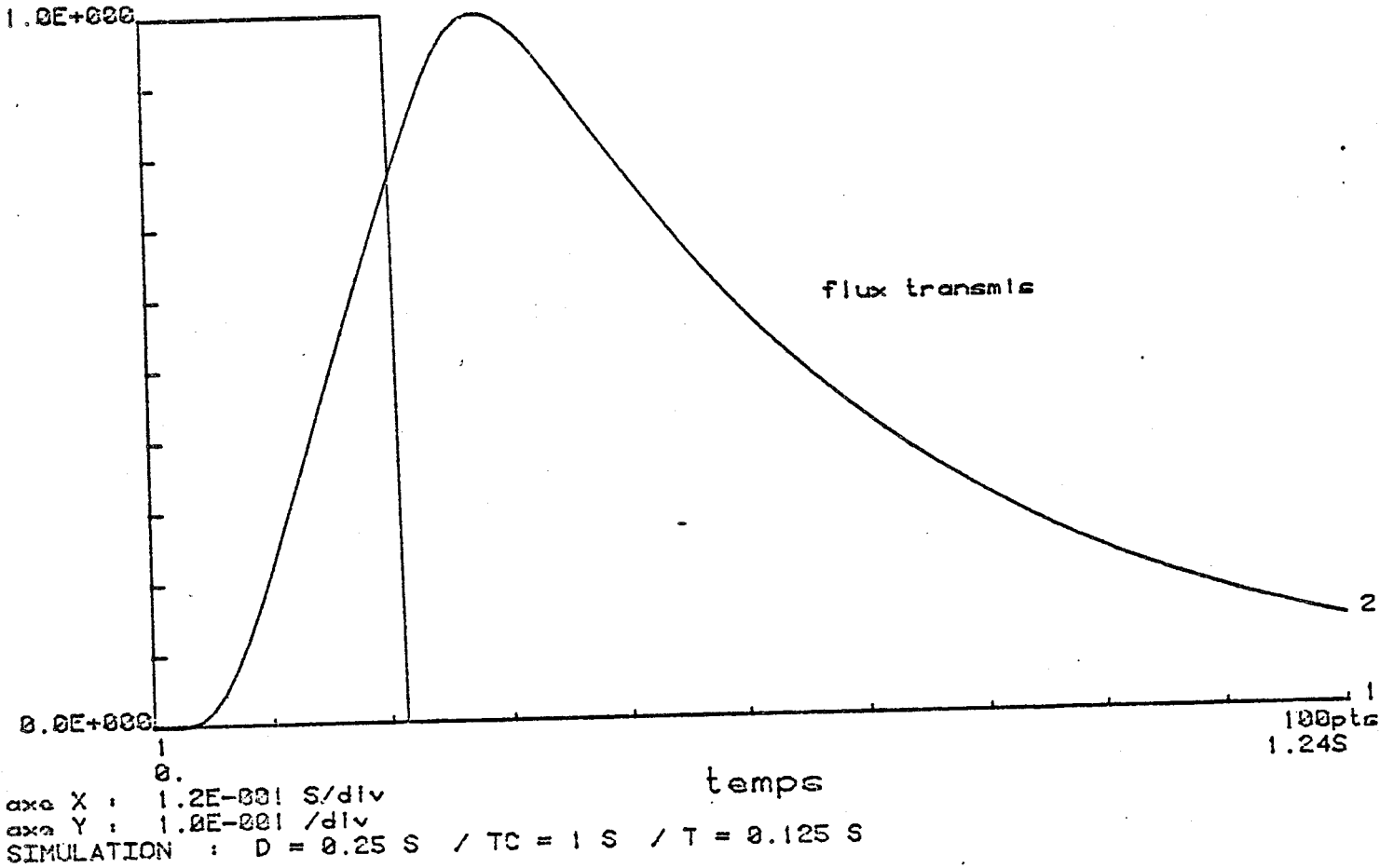


Figure III.2.1.0 (b)



### III-2-2- INFLUENCE D'UNE DISTORSION DU SIGNAL D'ENTREE

L'apport d'énergie au matériau ne pouvant être instantané, il convient de procéder à un contrôle expérimental, avant de conclure sur la validité des résultats obtenus à partir du modèle étudié ici, modèle qui suppose une entrée en forme de créneau. En pratique, l'évolution temporelle de la densité de flux absorbé  $\phi_1$  est liée à la configuration expérimentale utilisée. Nous reviendrons sur cette question importante au chapitre 3. Ce même problème a été traité lors de la mise au point de la méthode Flash [ 6 ] ; les réponses ont été calculées pour diverses formes du signal d'entrée. Nous avons envisagé une telle démarche, mais dans un premier temps nous avons adopté un point de vue pragmatique. Dans cette optique, nous nous sommes volontairement limités à l'étude des entrées observées lors de notre étude expérimentale.

Les essais expérimentaux nous ont conduit à retenir deux types de signaux d'entrée (figure III.2.2.0) :

- le signal d'entrée à fronts exponentiels caractérisé par une évolution de la forme

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/\tau_m} & 0 \leq t \leq \delta \\ (1 - e^{-\delta/\tau_m}) e^{-(t-\delta)/\tau_m} & t \geq \delta \end{cases}$$

- le signal d'entrée à fronts raides (figure III.2.2.0) que l'on peut définir par la relation :

$$\phi_1(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau_d} & 0 \leq t \leq \delta \\ (e^{-\delta/\tau_d} - 1) e^{-(t-\delta)/\tau_d} & t \geq \delta \end{cases}$$

Pour chacune de ces formes particulières, nous avons repris les calculs de la réponse et de la fonction d'intercorrélacion. Les résultats obtenus montrent un déplacement de l'abscisse du maximum par rapport aux résultats établis précédemment pour l'entrée en créneau. Pour cette étude, nous avons fixé  $\delta/\tau_c$  à 0,25 , valeur qui correspond à une limite raisonnable d'utilisation de la méthode.

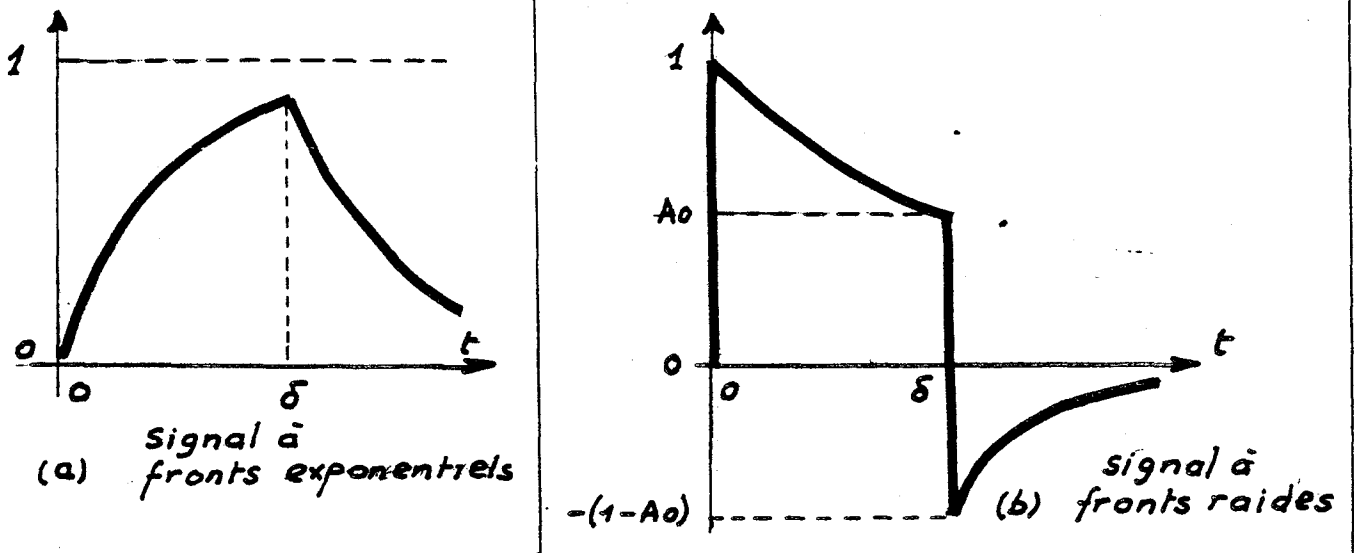


Figure III.2.2.0.

III-2-2-1- METHODE DE CALCUL

La réponse du système à une excitation  $\phi_1(t)$  quelconque a été calculée en utilisant les techniques de convolution numérique. Cette méthode de calcul est fondée sur l'équation de convolution (I.4.2.01) que nous rappelons :

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) e(t-\tau) dt$$

dans laquelle  $h(\tau)$  désigne la réponse impulsionnelle du milieu,  $e(t)$  l'entrée et  $s(t)$  la sortie.

Lorsque ce calcul est effectué par voie numérique, il n'est pas nécessaire de connaître les expressions analytiques des grandeurs figurant dans cette équation ; on utilise à cet effet l'équation de convolution discrète :

$$s(kT) = \sum_j h(jT) e [(k-j) T] \quad k, j = 0, 1 \dots N$$

où  $T$  représente le pas de discrétisation.

Il est possible d'utiliser d'autres techniques numériques pour évaluer l'intégrale de convolution. En pratique, le calcul direct de cette intégrale ne pose pas de difficultés particulières, hormis celui du temps de calcul qui peut devenir très long (proportionnel à  $N^2$ ), en particulier sur les microordinateurs qui n'autorisent pas des vitesses de calcul élevées. Il est plus efficace d'utiliser la rapidité de calcul permise par la transformée de Fourier rapide "FFT" [7].

Le procédé de calcul d'un produit de convolution par transformation de Fourier est illustré par le schéma de la figure III.2.2.1 ; Il fait appel au théorème de convolution :

$$\mathcal{F} (x(t) * h(t) ) = X(f) \cdot H(f)$$

où l'opérateur  $\mathcal{F}$  désigne la transformation de Fourier ;  $X(f)$  et  $H(f)$  représentent les transformées de Fourier de  $x(t)$  et  $h(t)$ .

Ce théorème établit l'équivalence entre la convolution dans le domaine temporel et la multiplication dans le domaine fréquentiel et inversement.

La convolution de deux fonctions  $x(t)$  et  $h(t)$  est égale à la transformée inverse de Fourier du produit des spectres de ces deux fonctions.

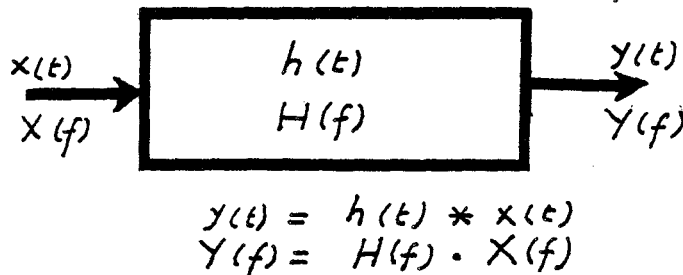


Figure III.2.2.1.

Ce procédé de calcul, analogue à la méthode de "corrélation rapide" évoquée dans la 2<sup>e</sup> partie de ce mémoire, permet, grâce à l'efficacité de la FFT, de convoluer des signaux en des temps de calcul raisonnables (proportionnel à  $N \log N$ ). La vitesse de calcul permise par ce procédé peut être augmentée lorsque les procédures de calcul de la FFT sont programmées en langage machine, directement exécutable par le microordinateur (sans interprétation). Nous avons programmé cette procédure de calcul en langage Basic ; ce sous-programme incorporé au programme de simulation nous permet de calculer la réponse du système étudié à une excitation quelconque.

Ces méthodes de transformation fondées sur l'analyse spectrale sont désormais classiques mais elles nécessitent en pratique des précautions particulières liées à l'utilisation de la FFT.

#### III-2-2-2- SIGNAL D'ENTREE A FRONTS EXPONENTIELS

Ce signal entièrement défini par les paramètres  $\delta$  et  $\tau_m$  représente la réponse d'un système intégrateur de fonction de transfert  $1/(1 + \tau_m p)$ , à une excitation en créneau de durée  $\delta$ .

### PROCEDURE DE SIMULATION

Pour tous les calculs, nous fixons  $\tau_c = 1$  s,  $\delta = 0.25$  s. Pour des valeurs de  $\tau_m/\delta$  choisies entre 0,1 et 1, nous générons le signal d'entrée et calculons le signal de sortie résultant. Nous procédons ensuite au calcul des auto-et-intercorrélations. La position du maximum de la fonction d'intercorrélacion nous fournit la valeur  $\hat{\tau}_1$  qui est comparée à la valeur  $\tau_1 = 0,25$  obtenue pour un créneau parfait.

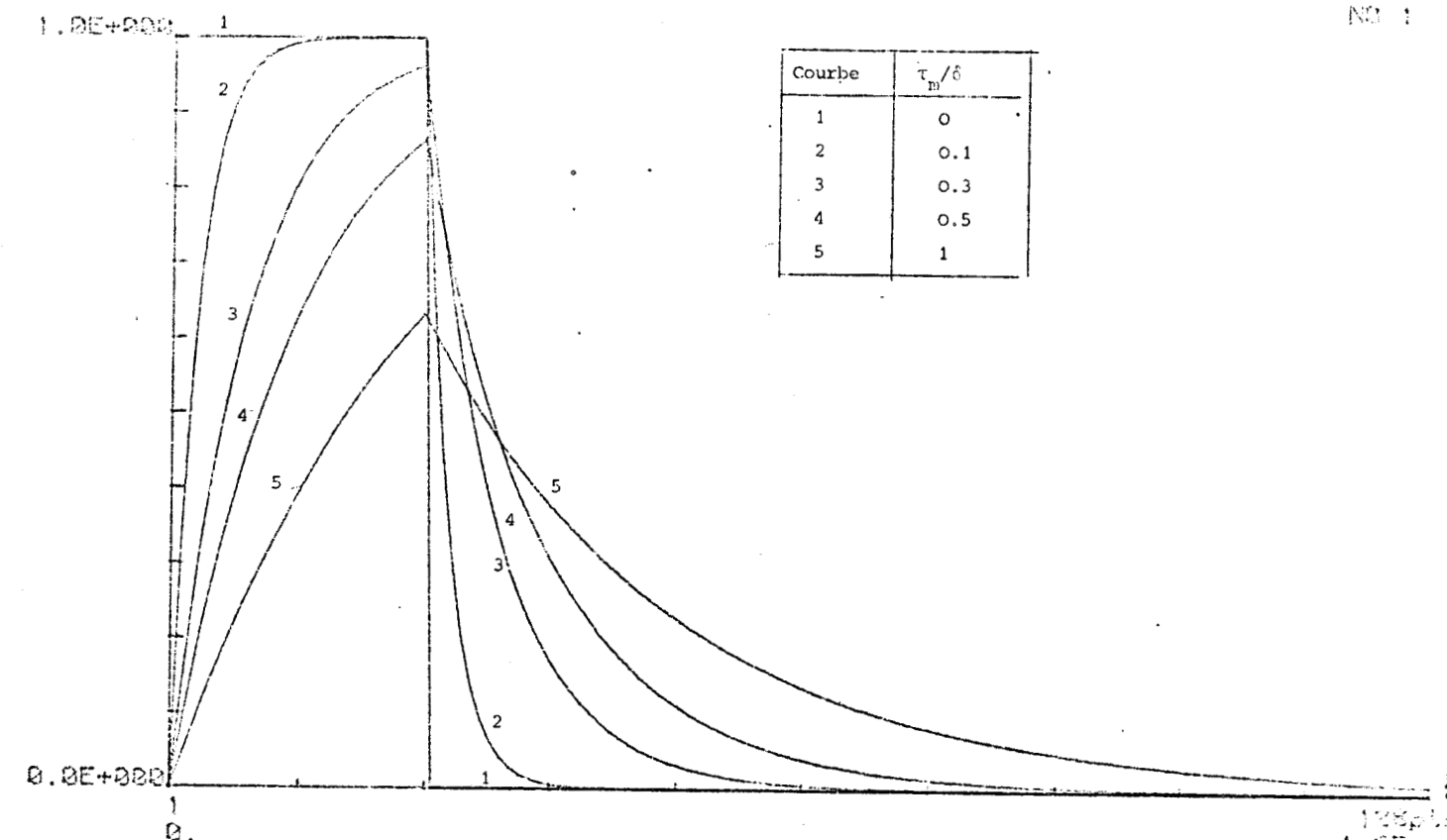
### RESULTATS

Les courbes caractéristiques de cette simulation sont représentées figure III.2.2.2. Les courbes numérotées 1 représentent le cas idéal du créneau et les courbes 2 à 5 correspondent aux valeurs de  $\tau_m/\delta$  de 0,1 , 0,3 , 0,5 et 1 ; Soit des valeurs de  $\tau_m/\tau_c$  variant de 0,025 à 0,25. Les résultats font apparaître une relation linéaire entre  $\hat{\tau}_1$  et  $\tau_m/\delta$  :

$$\hat{\tau}_1 \approx 0,25 + 0,06 \tau_m/\delta \quad (0,2 \leq \tau_m/\delta \leq 1)$$

L'incidence du temps de montée du signal d'entrée se traduit par le terme correctif 0,06  $\tau_m/\delta$ .

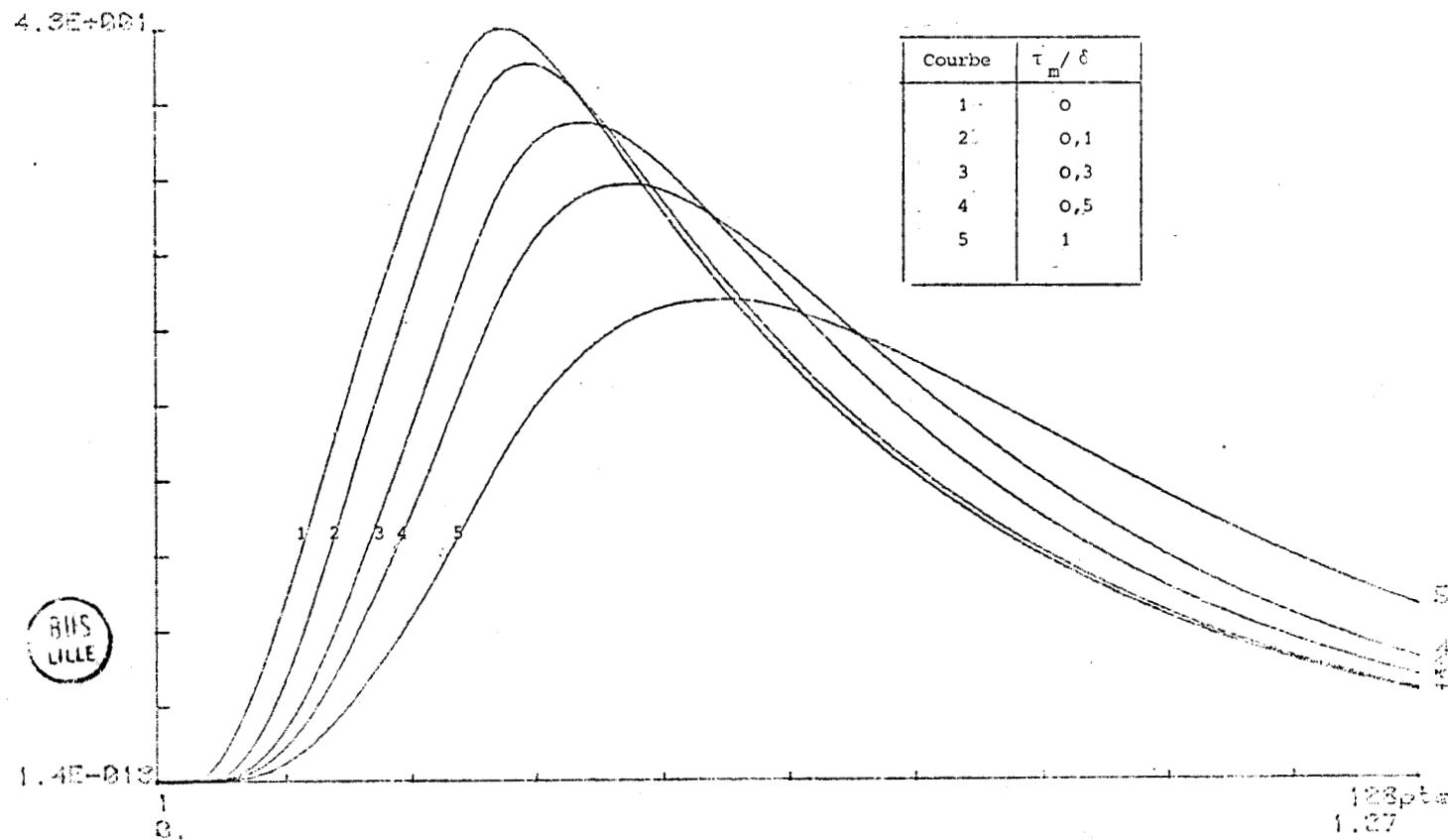
En pratique, il est possible de négliger cette influence lorsque  $\tau_m/\delta \leq 0,15$  et  $\delta/\tau_c \approx 0,25$  ; ce qui conduit à une erreur relative de l'ordre de 1 % sur la valeur de  $\hat{\tau}_1$ . Lorsque  $\tau_m/\delta$  varie de 0,1 à 1,  $\hat{\tau}_1$  ne varie que de 0,25 à 0,31 (soit un écart de 0,06) alors que dans les mêmes conditions la position  $\hat{\tau}_1$  du maximum de la réponse varie de 0,37 à 0,56 (soit un écart de 0,19). Ces résultats mettent en évidence une nouvelle fois l'effet modérateur du traitement par corrélation.



axe X : 1.3E-001 /div  
 axe Y : 1.0E-001 /div

Figure III.2.2.2 (a) entrées

123pt  
1.27



axe X : 1.3E-001 /div  
 axe Y : 4.3E+000 /div

Figure III.2.2.2 (b) Sorties

123pt  
1.27



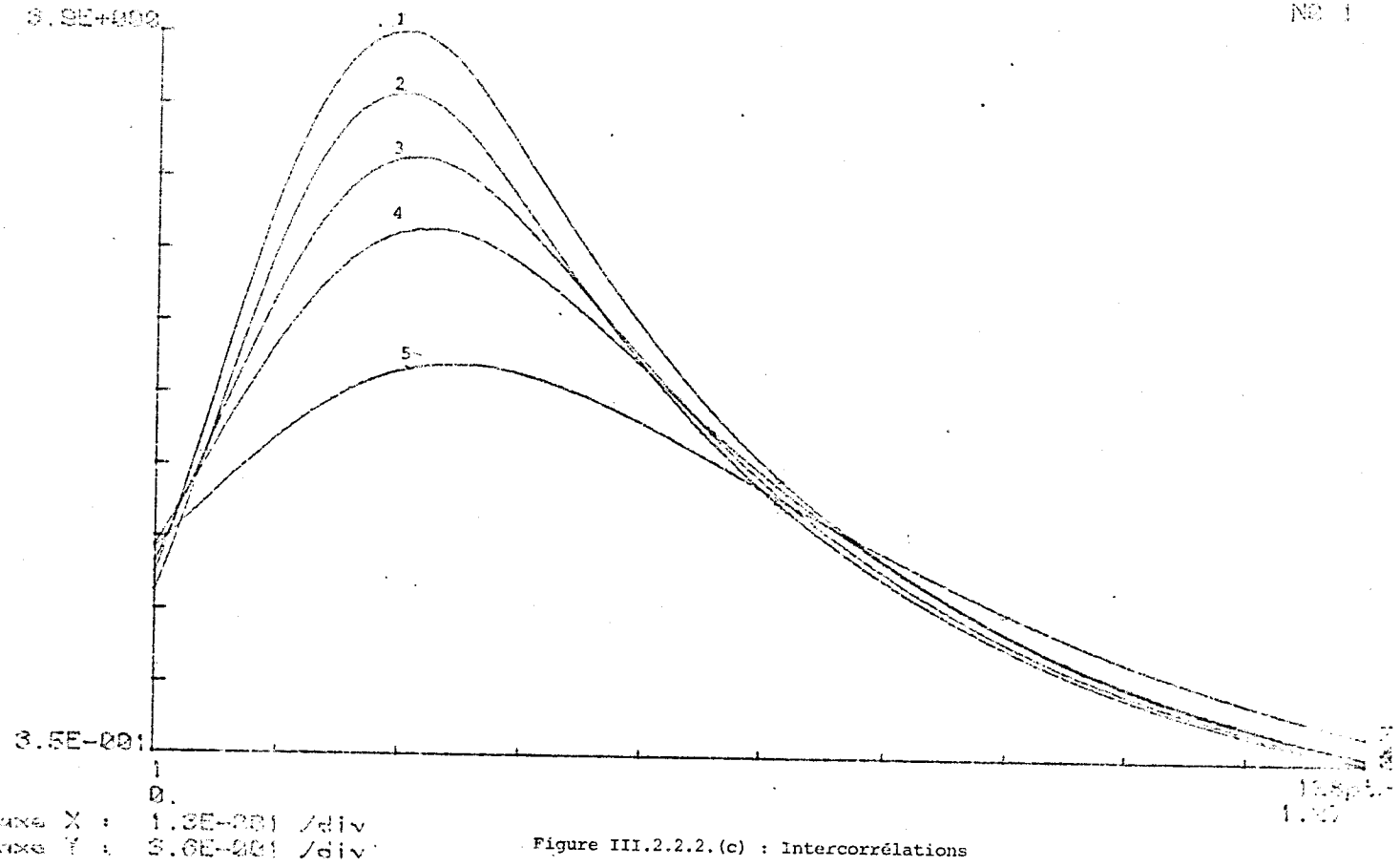


Figure III.2.2.2. (c) : Intercorrélations

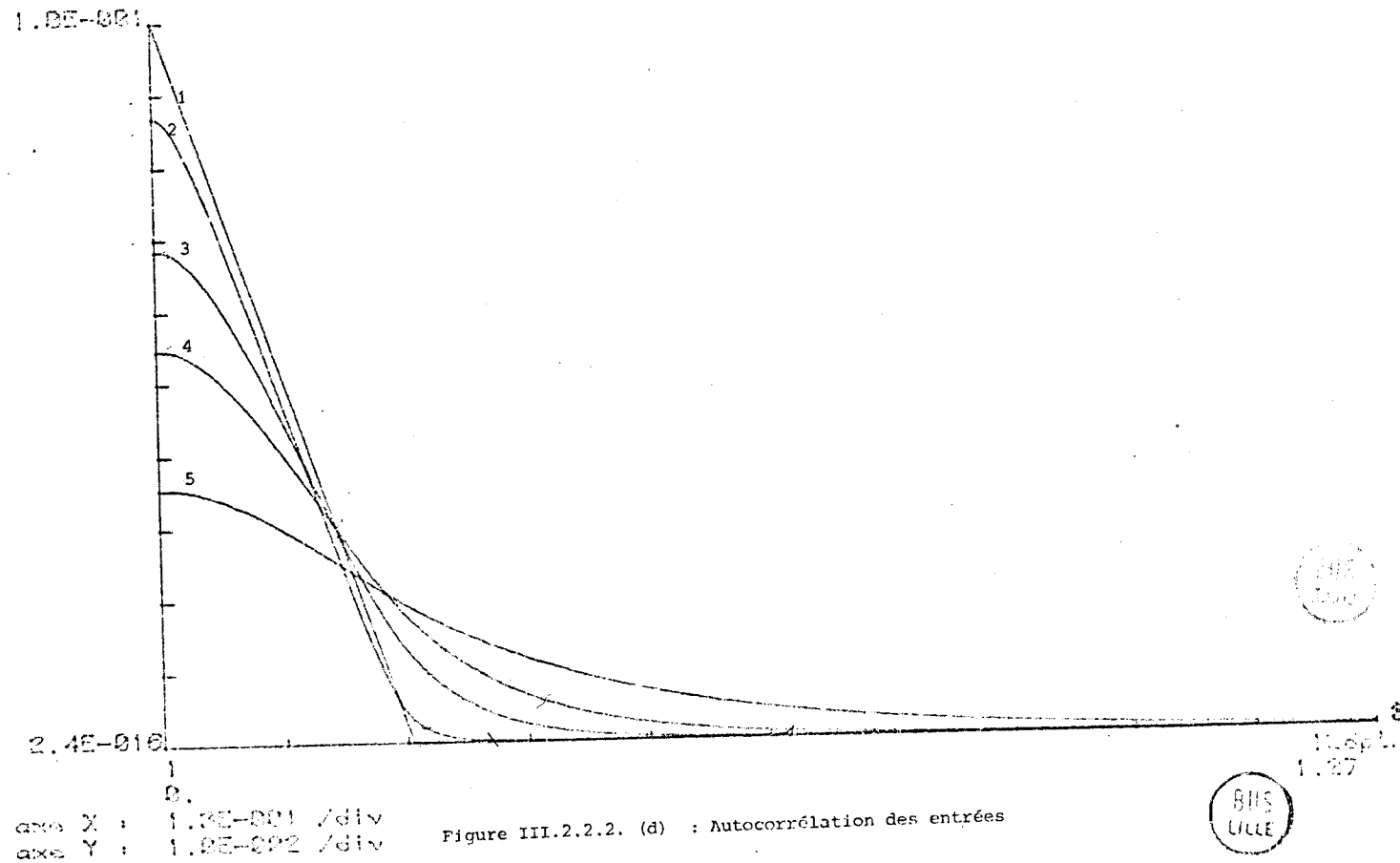


Figure III.2.2.2. (d) : Autocorrélation des entrées





### III-2-2-3- SIGNAL D'ENTREE A FRONTS RAIDES

Ce signal représenté sur la figure III.2.2.0 est complètement défini par les données  $\delta$  et  $A_0$  ;  $A_0$  représente la valeur qu'atteint le signal pour  $t = \delta$ , avant de s'inverser :

$$A_0 = e^{-\delta/\tau_d}$$

$\tau_d$  représentant la constante de temps de l'exponentielle. La décroissance exponentielle de ce signal est représentative d'un phénomène d'inversion des échanges thermiques entre le matériau et le milieu équivalent au générateur de flux.

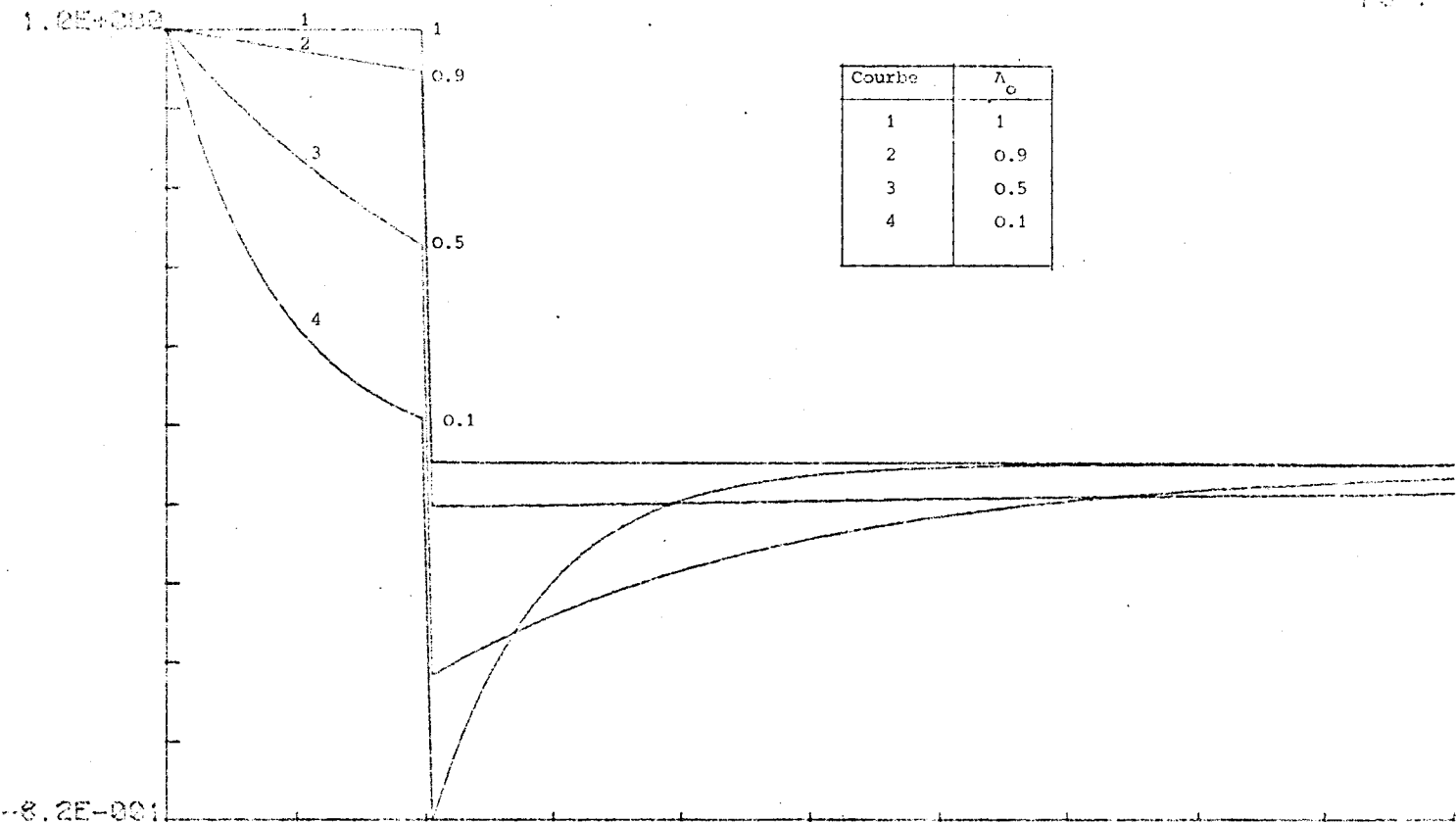
La procédure de simulation est analogue à la précédente. L'amplitude maximale du signal d'entrée étant égale à 1, les essais ont été réalisés pour des valeurs de  $A_0$  variant de 0,1 à 1. Le retard  $\hat{\tau}_1$  correspondant au maximum de la fonction d'intercorrélacion varie très peu en fonction de  $A_0$ . On n'observe un écart sensible par rapport au cas idéal ( $\tau_1 = 0,25$ ) que pour  $A_0 \leq 0,5$ . Pour  $A_0 = 0,1$ , le paramètre  $\hat{\tau}_1$  est égal à 0,22 et ne s'écarte que de 0,03 de la valeur théorique.

L'ensemble des résultats obtenus par simulation est représenté par les courbes de la figure III.2.2.3

L'évolution temporelle du signal d'entrée entre les instants  $t = 0$  et  $t = \delta$ , n'affecte que très peu la mesure du temps caractéristique pourvu que le signal d'entrée ait un front de montée et un front de descente suffisamment raides.

Dans le domaine fréquentiel, cette condition peut être interprétée en imposant que le spectre de puissance du signal d'entrée ait une amplitude suffisante aux fréquences élevées. Cette remarque a une interprétation physique simple, puisque le signal de flux incident peut être considéré comme un créneau de durée  $\delta$  filtré par un système dérivateur de fonction de transfert  $\tau_p/(1+\tau_d p)$ . La fonction d'autocorrélacion du signal de flux incident est pratiquement confondue avec la fonction d'autocorrélacion d'un signal en créneau pour les retards inférieurs à  $\delta$ . Il en résulte une faible modification de la forme de la fonction d'intercorrélacion entrée-sortie, liée à la fonction d'autocorrélacion du signal d'entrée par la relation :

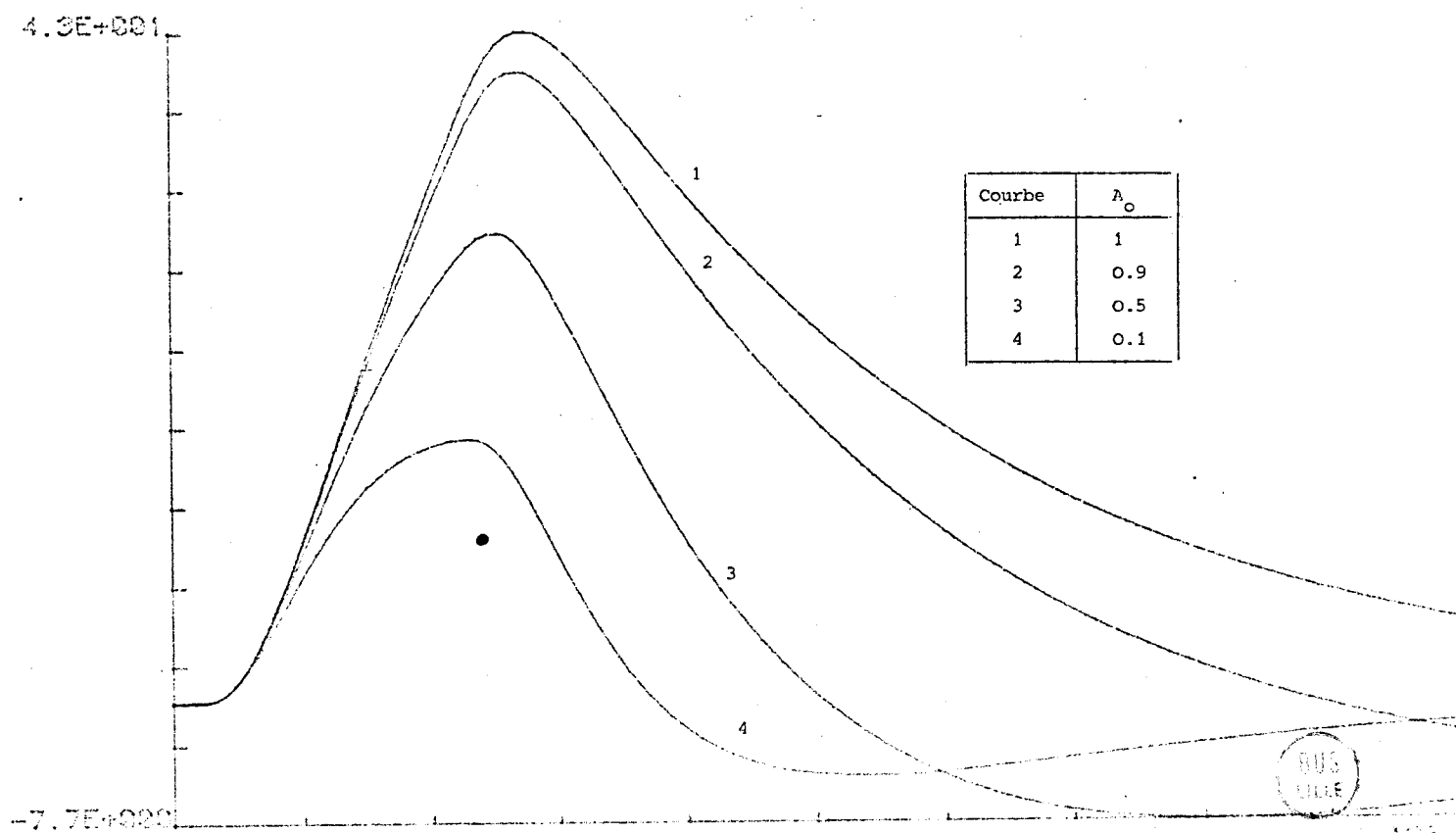
$$R_{es}(\tau) = R_{ee}(\tau) * h(\tau)$$



Courbe	$\lambda_0$
1	1
2	0.9
3	0.5
4	0.1

axe X : 1.0E-001 /div  
axe Y : 1.0E-001 /div

Figure III.2.2.3 (a) : Entrées



Courbe	$\lambda_0$
1	1
2	0.9
3	0.5
4	0.1

axe X : 1.0E-001 /div  
axe Y : 5.0E+000 /div

Figure III.2.2.3. (b) : Sorties



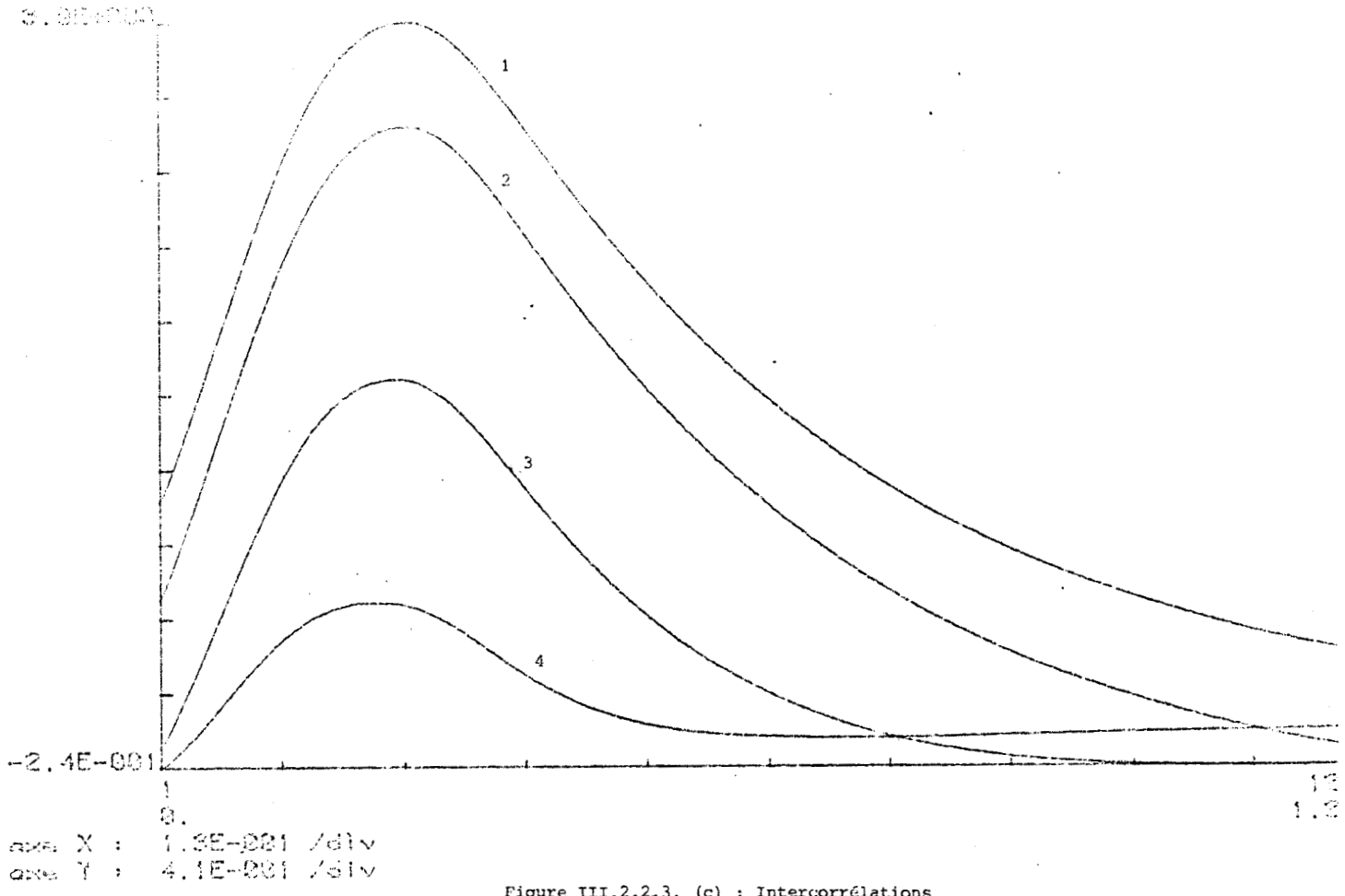


Figure III.2.2.3. (c) : Intercorrélations

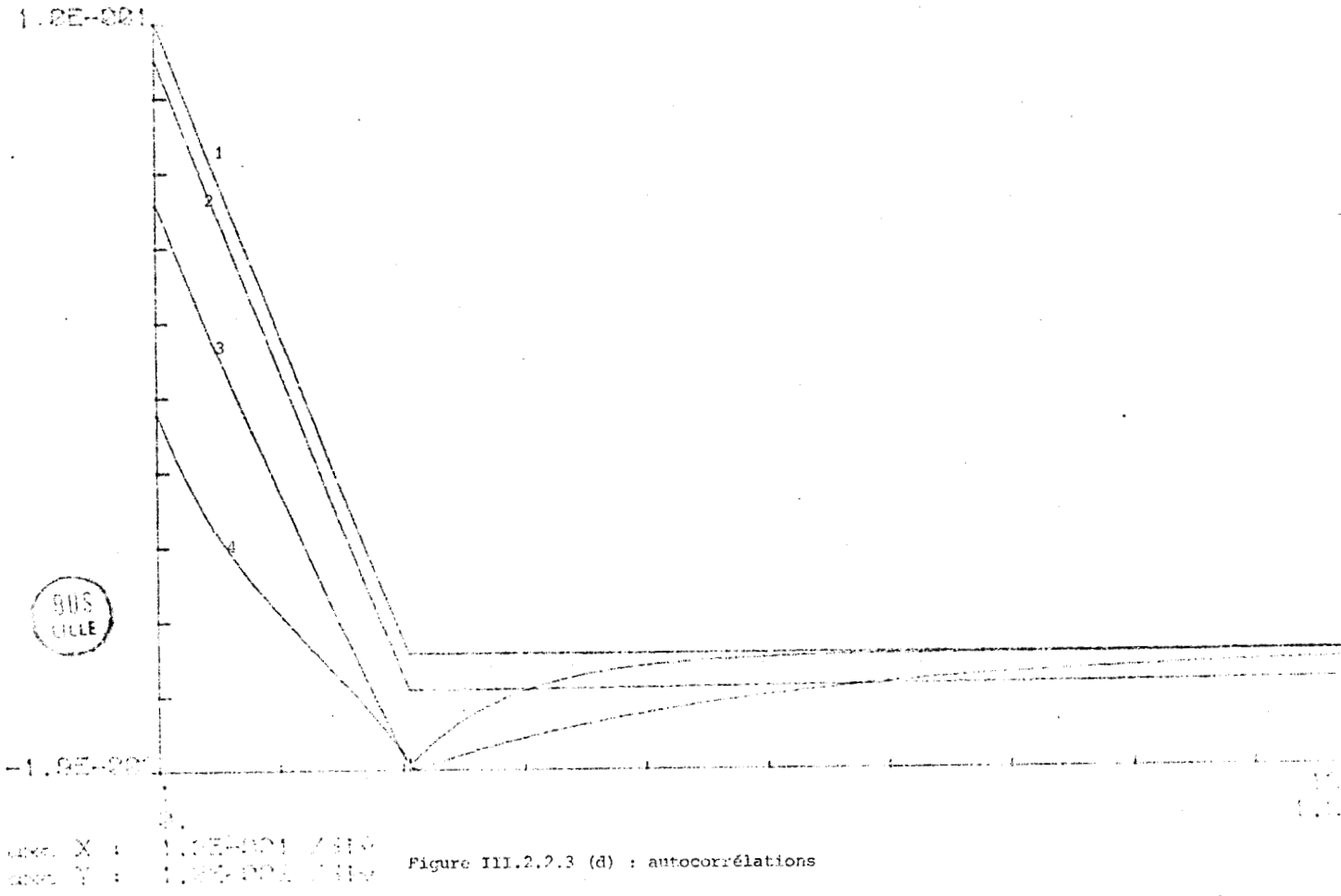


Figure III.2.2.3 (d) : autocorrélations

Les essais effectués dans les deux cas précédemment décrits, montrent que la condition essentielle de validité de l'approximation du modèle créneau, est que le signal d'entrée ait un temps de montée et un temps de descente suffisamment faibles par rapport au temps caractéristique du matériau. Les limites établies ( $\tau_m/\delta \leq 0.15$  ;  $A_0 \geq 0.5$ ) résultent d'une étude limitée au cas particulier où  $\delta/\tau_c = 0,25$ . Cette étude a toutefois l'intérêt de fixer des ordres de grandeur. Il est possible de montrer, en appliquant le théorème de la moyenne, que lorsque la durée du créneau est suffisamment faible ( $\delta/\tau_c \leq 0.01$ ), l'allure du signal d'entrée n'intervient plus et l'on peut appliquer avec une précision acceptable le résultat :

$$\tau_c \approx 6 \tau_1$$

### III-2-2-4- REPERCUSSION DU BRUIT

En superposant au signal de sortie un bruit uniformément distribué, centré, nous avons chiffré par simulation numérique l'effet de perturbations extérieures indépendantes. La variance du bruit peut être ajustée par programmation ainsi que la valeur du rapport signal/bruit définie par la relation :

$$S/B = \frac{\overline{s^2}}{\overline{b^2}}$$

Le bruit est obtenu numériquement à l'aide d'une procédure classique de génération de nombres pseudo-aléatoires, intégrée à la plupart des microordinateurs munis d'un interpréteur Basic. Pour les valeurs des paramètres  $\tau_c = 1$   $\delta/\tau_c = 0,25$ ,  $\tau_c = 0,02$ , nous avons calculé la fonction d'intercorrélation pour diverses valeurs du rapport signal sur bruit. Pour les faibles valeurs du rapport signal sur bruit, la courbe d'intercorrélation présente des fluctuations autour du contour régulier obtenu pour les valeurs importantes du rapport signal sur bruit. Pour obtenir une estimation de la position du maximum de la courbe d'intercorrélation, nous avons lissé la fonction d'intercorrélation en utilisant une loi d'approximation parabolique. Les résultats obtenus figurent dans les tableaux ci-dessous et sont représentés par les courbes de la figure III.2.2.4.

$$\delta = 0,25 \quad ; \quad \tau_1 = 0,25 \quad , \quad \tau_c = 1 \quad , \quad \delta/T = 50$$

S/B	1	10	100
$\hat{\tau}_1$	0,23	0,23	0,24
$\hat{\tau}_c$	0,28	0,28	0,26

sans régression

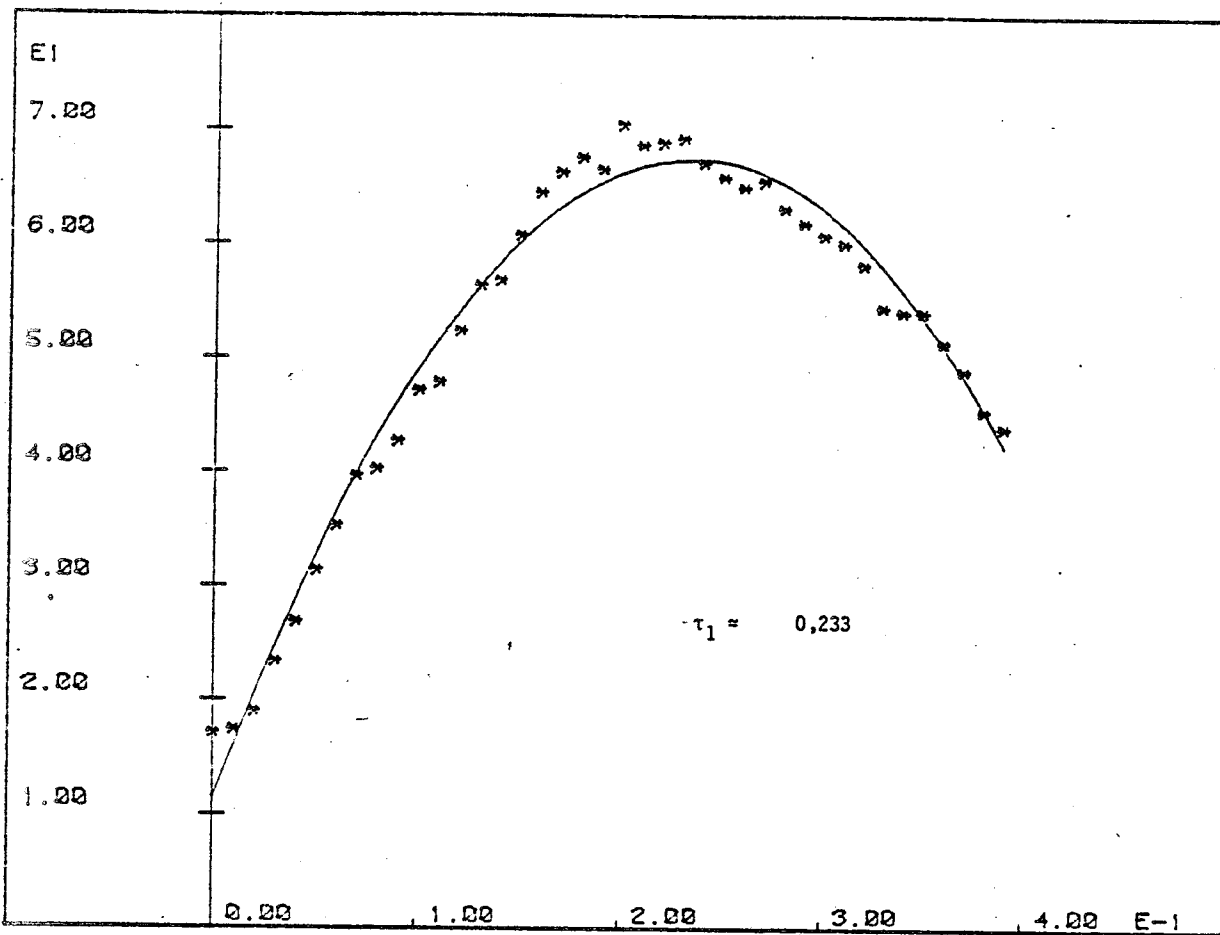


Figure III.2.2.4 a Intercorrélation,  $\delta/\tau_c = 0,25$  S/B=1

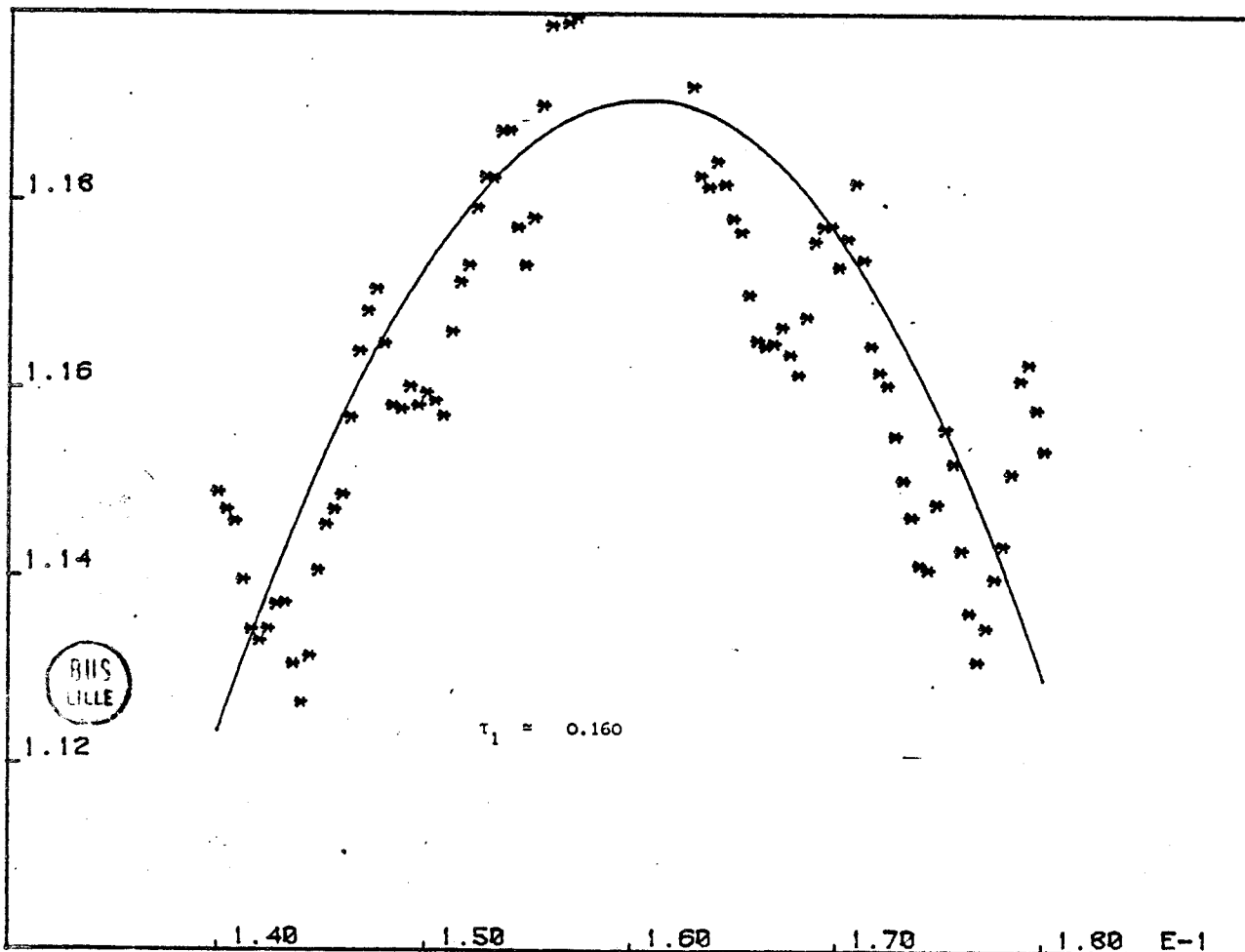


Figure III.2.2.4 b Intercorrélation  $\delta/\tau_c = 0.02$  S/B = 10

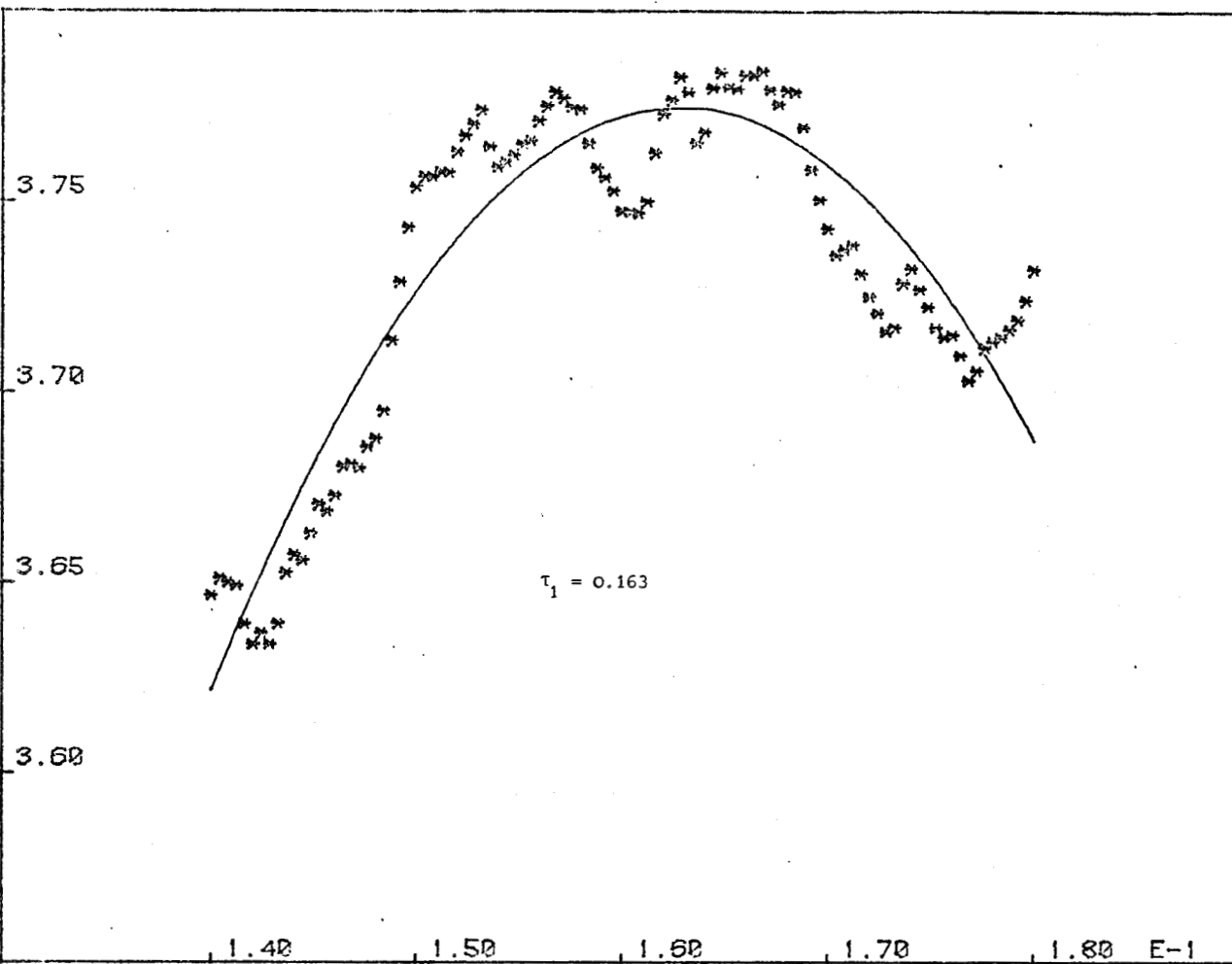
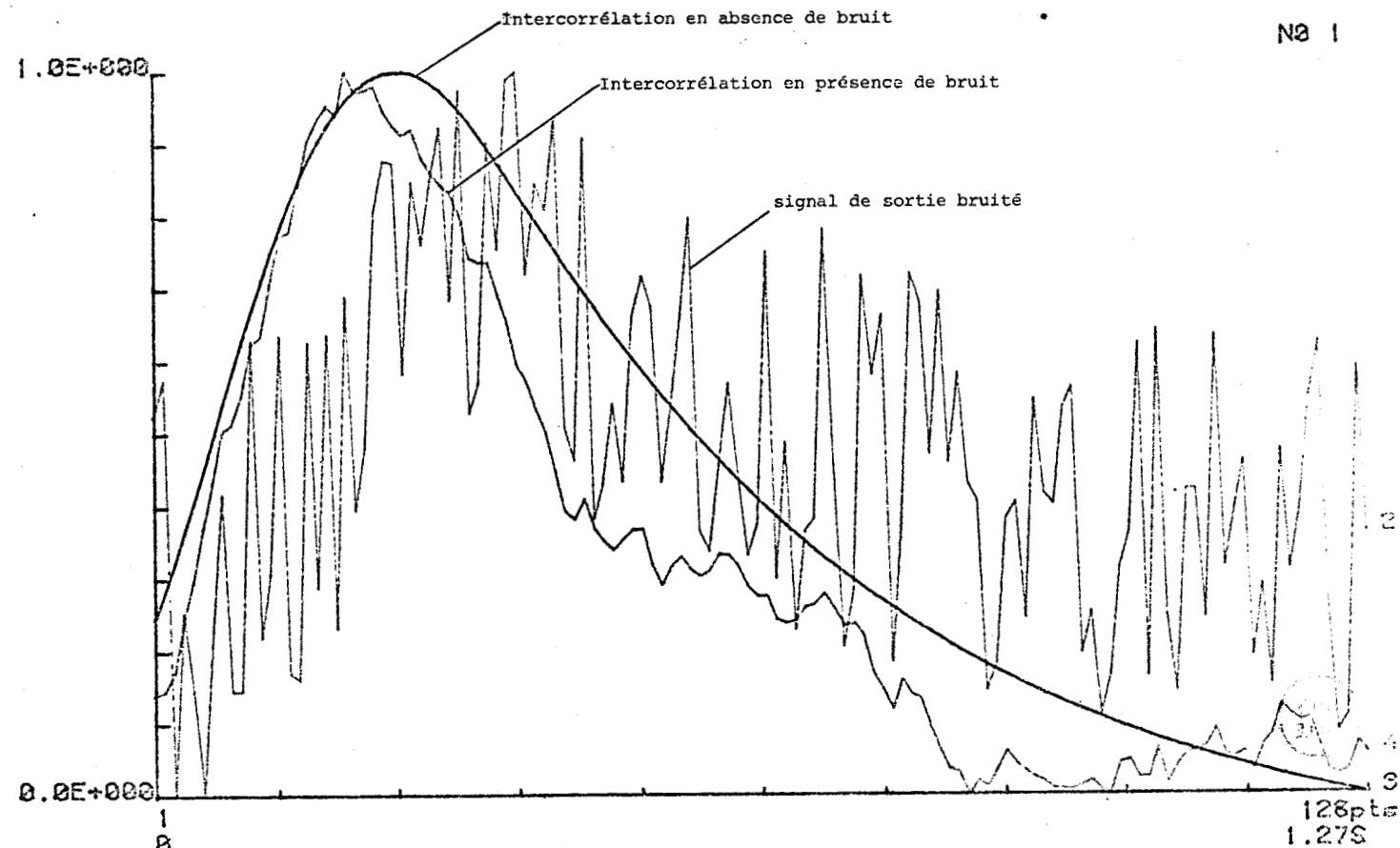


Figure III.2.2.4 c Intercorrélation,  $\delta/\tau_c = 0.02$  S/B = 100



axe X : 1.3E-001 S/div  
axe Y : 1.0E-001 /div  
FIGURE III.2.2.4 (d) INFLUENCE DU BRUIT S/B=1



$$\delta = 0,02 \quad ; \quad \tau_1 \approx 0,167 \quad , \quad \tau_c = 1 \quad , \quad \delta/T = 50$$

S/B	10	100
$\hat{\tau}_1$	0,161	0,163
$\hat{\tau}_c$	0,9660	0,978

### III-2-3- CONCLUSION

La simulation du processus de transfert de chaleur à travers une paroi homogène, a permis de préciser l'incidence de diverses perturbations sur les résultats obtenus à l'aide de la méthode décrite dans le chapitre précédent. Cette étude a permis de définir les limites de la méthode et d'en déduire les contraintes expérimentales. La détermination du temps caractéristique d'une paroi par intercorrélacion est applicable avec une précision raisonnable lorsque la condition  $\delta/\tau_c \leq 0,25$  est respectée. Le modèle  $h(t)$  de la réponse impulsionnelle a été établi pour une température maintenue constante sur la face de sortie. L'utilisation pratique des résultats théoriques impose une limitation des apports énergétiques afin de ne pas provoquer de variations appréciables de la température superficielle sur la face de sortie du matériau.

305  
3114

Ces conditions (créneau de courte durée) doivent être réalisées pour que la précision de la méthode développée soit optimale. Dans tous les cas, la précision est liée à l'erreur commise sur l'estimation de la fonction d'intercorrélacion. Pour les faibles valeurs du temps caractéristique (parois minces), il est possible, pour effectuer le traitement, d'utiliser un corrélateur analogique qui a l'avantage d'éviter les erreurs de quadrature numérique.

Enfin, la méthode de corrélation permet dans de nombreux cas pratiques d'assimiler le signal d'entrée à une impulsion ( $\delta/\tau_c \leq 0,03$ ) ; elle permet de limiter l'influence du bruit ainsi que les répercussions d'une distorsion du signal d'entrée sur la détermination du temps caractéristique. On pourrait envisager une étude analytique plus complète et préciser notamment l'influence d'une distribution initiale de température non uniforme. Le flux de chaleur mesuré sur les surfaces externes est alors la somme de deux composantes représentant la condition initiale et la progression de l'impulsion incidente. Le développement des méthodes de corrélation peut être envisagé pour traiter ce problème.

### CHAPITRE 3 : DISPOSITIF EXPERIMENTAL

L'ensemble des résultats obtenus au cours des études précédentes , nous a permis de préciser la nature des contraintes à imposer au système, pour remplir les conditions de validité du modèle théorique utilisé. La méthode de mesure nécessite essentiellement : le maintien à une valeur constante de la température sur la face de sortie du matériau, un signal d'entrée à fronts raides, des apports énergétiques faibles.

Il est alors possible d'imaginer plusieurs réalisations technologiques. Ce chapitre est consacré à la description du dispositif expérimental utilisé ainsi qu'aux questions relatives à l'exécution des mesures.

Le schéma de la figure III.3.0.0 représente le montage utilisé pour les premières expériences. On distingue le matériau sous test M, deux fluxmètres thermiques plans disposés sur les surfaces d'entrée et de sortie du matériau, ainsi que deux plaques P1 et P2 sur lesquelles vient s'appliquer une pression mécanique afin d'assurer un contact thermique convenable entre les divers interfaces.

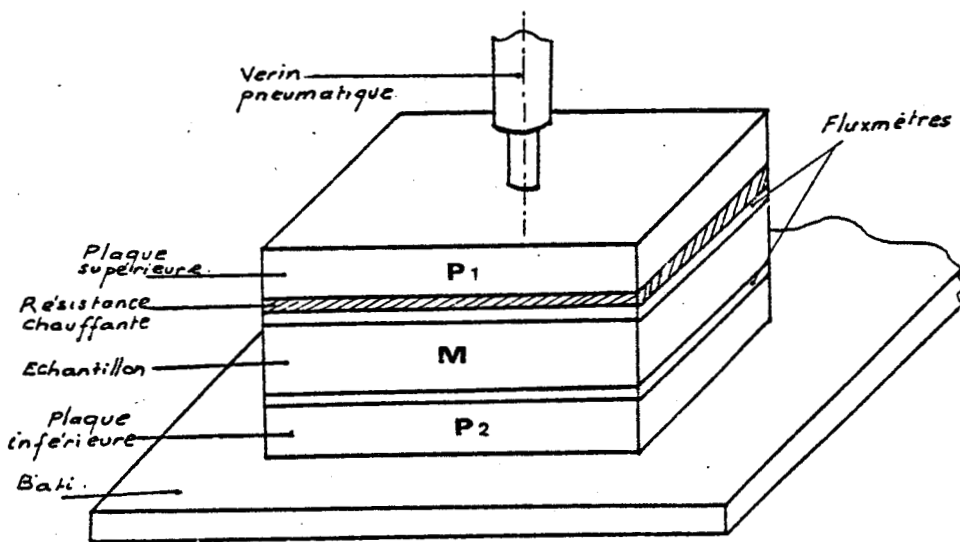


Figure III.3.0.0.



III-3-1- LE GENERATEUR DE FLUX

Les signaux thermiques d'entrée sont générés au moyen d'une résistance électrique plane (en constantan imprimé) alimentée en impulsion. Cette résistance disposée sur un support plan a été réalisée en vue d'assurer une distribution spatiale uniforme de la densité de flux thermique. La dissipation d'énergie électrique par effet Joule provoque des échanges thermiques avec les matériaux placés en contact avec la résistance. Ces échanges sont représentés par les flux  $\Phi_1$  et  $\Phi'_1$  de la figure III.3.1.0. Sur cette figure,  $P_1$  et  $P_2$  représentent des plaques de grande capacité qui peuvent être placées de part et d'autre du système. La résistance imprimée est représentée par un milieu  $M'$  thermiquement équivalent avec, pour représenter le chauffage par effet Joule, une source plane générant la puissance instantanée

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi'_1(t)$$

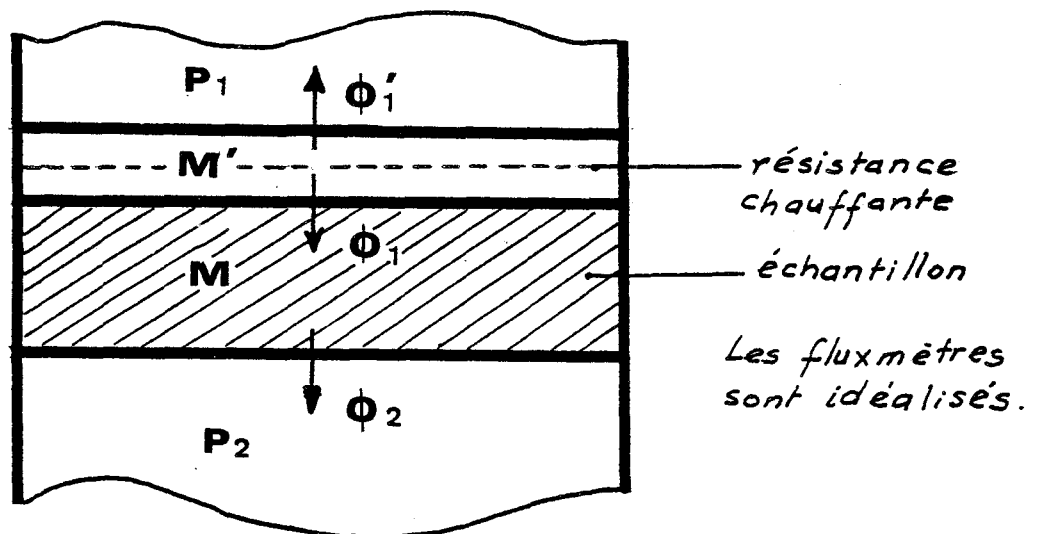


Figure III.3.1.0.

L'évolution temporelle du flux  $\Phi_1(t)$  dépend des constantes thermophysiques des milieux  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $M'$ ,  $M$ . Il est intuitif que lorsque le milieu  $P_1$  a une forte capacité thermique. Les variations temporelles de  $\Phi_1(t)$  sont de faibles amplitudes, mais sont représentatives des variations temporelles de  $\Phi(t)$  puisque le milieu  $P_1$  joue alors le rôle de puits thermique. Nous pouvons introduire pour représenter cette influence du milieu  $P_1$  une fonction de transfert liant le flux  $\Phi_1$  à la puissance électrique dissipée dans la résistance chauffante:  $\Phi_1(p) = H_1(p) \Phi(p)$ .

La fonction  $H_1(p)$  peut être matérialisée par un filtre, dont les caractéristiques dépendent des impédances thermiques des milieux situés de part et d'autre de la source. Ces impédances liées aux paramètres thermophysiques des milieux constitutifs du système, introduisent les constantes de temps  $\tau$  et  $\tau'$  dans la fonction de transfert  $H_1(p)$ . La constante  $\tau$  caractérise essentiellement le milieu  $M'P_1$  tandis que  $\tau'$  est représentative de l'ensemble du système "vu" par la source. L'évolution temporelle du signal thermique  $\phi_1(t)$  dépend des valeurs relatives des constantes de temps  $\tau$  et  $\tau'$ . Les trois cas de la figure III.3.1.1 représentent l'évolution temporelle du signal de flux  $\phi_1(t)$  compte tenu des valeurs relatives de  $\tau$  et  $\tau'$  ; Ces courbes sont idéales puisque la dissipation de la puissance électrique et le dégagement de chaleur qui en résulte ne sont pas des phénomènes instantanés et dans tous les cas il existe un temps de montée du signal, mais qui peut être très faible lorsqu'il existe une forte discontinuité de structure comme dans le cas N° 1.

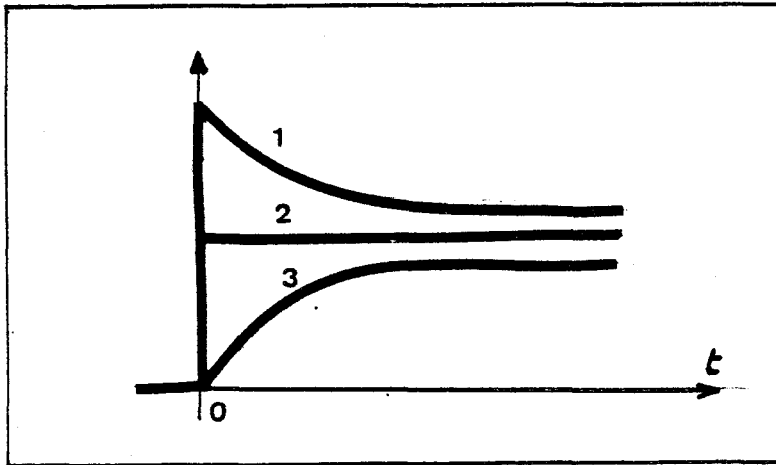


Figure III.3.1.1.

Le cas de figure le plus intéressant à réaliser est le cas N° 1, car il ne nécessite aucune connaissance à priori du matériau testé et il assure un temps de montée très bref. On pourrait évoquer le problème de la décroissance du flux observé dans ce cas ; cette question a été abordée au chapitre précédent. En pratique, ce problème n'est pas important car pour des créneaux de courte durée, cette baisse de niveau n'est pratiquement pas sensible.

Nous avons utilisé du laiton et de l'aluminium pour réaliser la plaque  $P_1$  ; en effet, ces matériaux possèdent une forte effusivité et imposent pratiquement une température constante sur la surface supérieure du milieu  $M'$ . Lorsqu'il n'existe pas d'autres matériaux entre l'interface  $M'P_1$ , hormis la résistance chauffante, la constante de temps  $\tau'$  est faible et l'on obtient dans de nombreux cas des signaux du type 1. Dans ces conditions (temps de montée bref), on peut effectuer les mesures en enlevant le fluxmètre d'entrée du dispositif expérimental.

Nous avons réalisé un grand nombre d'essais et avons pu confirmer expérimentalement le rôle essentiel joué par le puits thermique sur le front de montée et de descente de l'impulsion de flux.

Le modèle thermocinétique utilisé suppose que la température  $T_2$  sur la face arrière de l'échantillon, ne subit pas de variation temporelle appréciable. Cette condition est d'autant mieux réalisée que la plaque  $P_2$  a une effusivité importante. Pour les fortes valeurs du temps, il est nécessaire de tenir compte des variations de températures dues au stockage de chaleur dans la plaque  $P_2$  et la variation temporelle du flux  $\phi_2(t)$  dépend des caractéristiques thermophysiques de la plaque  $P_2$ . Cette plaque a été réalisée avec le même matériau que la plaque  $P_1$ .  $P_1$  et  $P_2$  sont en fait des échangeurs thermiques à l'intérieur desquels a été usinée une rainure en forme de serpentín de sorte qu'il est possible d'y faire circuler un fluide à température imposée. Enfin, un vérin pneumatique vient appliquer une pression sur la plaque supérieure de manière à réaliser un contact thermique convenable entre les divers interfaces. Ce matériel a été réalisé et utilisé pour d'autres travaux au laboratoire [4]. Nous avons réalisé plusieurs configurations expérimentales notamment en plaçant le système "résistance chauffante - matériau - fluxmètre" en dehors des plaques échangeuses.

### III-3-2- LES FLUXMETRES THERMIQUES

Nous avons utilisé deux types de fluxmètres. Le premier type est basé sur la mesure de la différence de température  $\Delta T$  produite par le passage d'un flux à travers une résistance thermique  $R$ , de surface  $S$  et d'épaisseur  $\epsilon$  (figure III.3.2.0.)

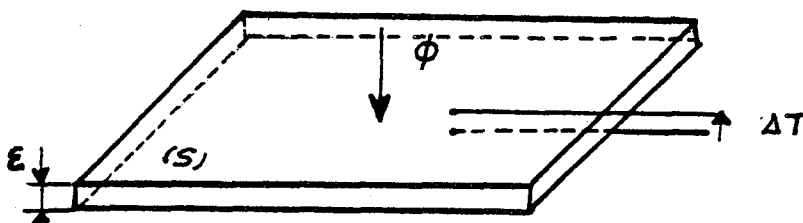


Figure III.3.2.0.

Lorsque les deux plans limites sont isothermes le flux s'exprime par le rapport  $\frac{\Delta T}{R}$ .

La réalisation de ce genre de fluxmètre pose des difficultés technologiques, car il faut un nombre considérable de soudures pour réaliser les thermopiles sur les deux faces du support d'épaisseur  $\epsilon$  afin de mesurer  $\Delta T$ . Ce type de fluxmètre a été réalisé par assemblage de 1200 paires de thermocouples

sur un support d'épaisseur 0,2 mm et sur une surface active de  $1/16 \text{ m}^2$ .

M. WATTIAU<sup>[4]</sup>, qui a bien voulu nous prêter ses fluxmètres, en donne les détails de construction et les méthodes de caractérisation.

Le principe même de ces capteurs limite l'épaisseur minimale du support de sorte que l'influence du fluxmètre ( $\tau_c \approx 25 \text{ s.}$ ) n'est pas négligeable pour des matériaux de faibles épaisseurs. Par contre, ce capteur a une bonne sensibilité et est bien adapté à la caractérisation de matériaux de grandes dimensions.

L'autre type de fluxmètre (figure III.2.0.1) conçu et réalisé au laboratoire par P. THERY, a fait l'objet d'un brevet et de plusieurs publications<sup>[8][9]</sup>. L'élément de mesure est un thermocouple intégré réalisé en déposant par voie électrolytique une couche conductrice sur un support également conducteur mais de nature différente. Une étude théorique a permis de montrer que les tensions apparaissant dans chacun des conducteurs superposés étaient proportionnelles à la moyenne spatiale du gradient thermique dans le plan du dépôt électrolytique. Le principe de la mesure consiste à induire dans le plan de chacun des thermocouples élémentaires (disposés dans un plan perpendiculaire au trajet de la chaleur) des gradients thermiques proportionnels au flux thermique à mesurer. Cette fonction a été réalisée en évacuant la chaleur par des contacts thermiques recouvrant partiellement la surface de chacun des thermocouples élémentaires. Dans ces conditions, les tensions induites dans les thermocouples de surface sont proportionnelles à la valeur locale du flux thermique inducteur. Ce capteur présente l'avantage par rapport aux autres dispositifs actuellement disponibles d'être réalisable en série par mise en oeuvre des procédés classiques en électronique (technique de circuits imprimés). Les capteurs utilisés comportent environ 1000 thermocouples par décimètre carré. La sensibilité est de l'ordre de quelques centaines de microvolts par watt, la constante de temps est voisine de une seconde. Ces caractéristiques nous ont permis d'étudier des évolutions rapidement variables dans des échantillons de faible épaisseur

### III-3-3- ACQUISITION DES DONNEES

Le dispositif d'acquisition de données est centré sur un ordinateur de table architecturé autour d'un microprocesseur. Un tel système a l'avantage d'associer sa puissance de calcul aux possibilités d'adressage de nombreux périphériques et d'interruptibilité pour des applications en temps réel.

La configuration utilisée est illustrée par le schéma de la figure III.3.3.0. Elle comprend une mémoire centrale de 32 K octets, un clavier alphanumérique, une console de visualisation, une mémoire de masse à bande magnétique, une table traçante et les périphériques nécessaires à l'exécution des mesures. Une connexion banalisée (bus IEE 488) permet de relier le ordinateur à un grand nombre d'appareils de mesure. L'intérêt d'un tel bus est que le protocole d'échange des informations entre les systèmes qui y sont connectés, est normalisé et rend compatibles, de ce fait,

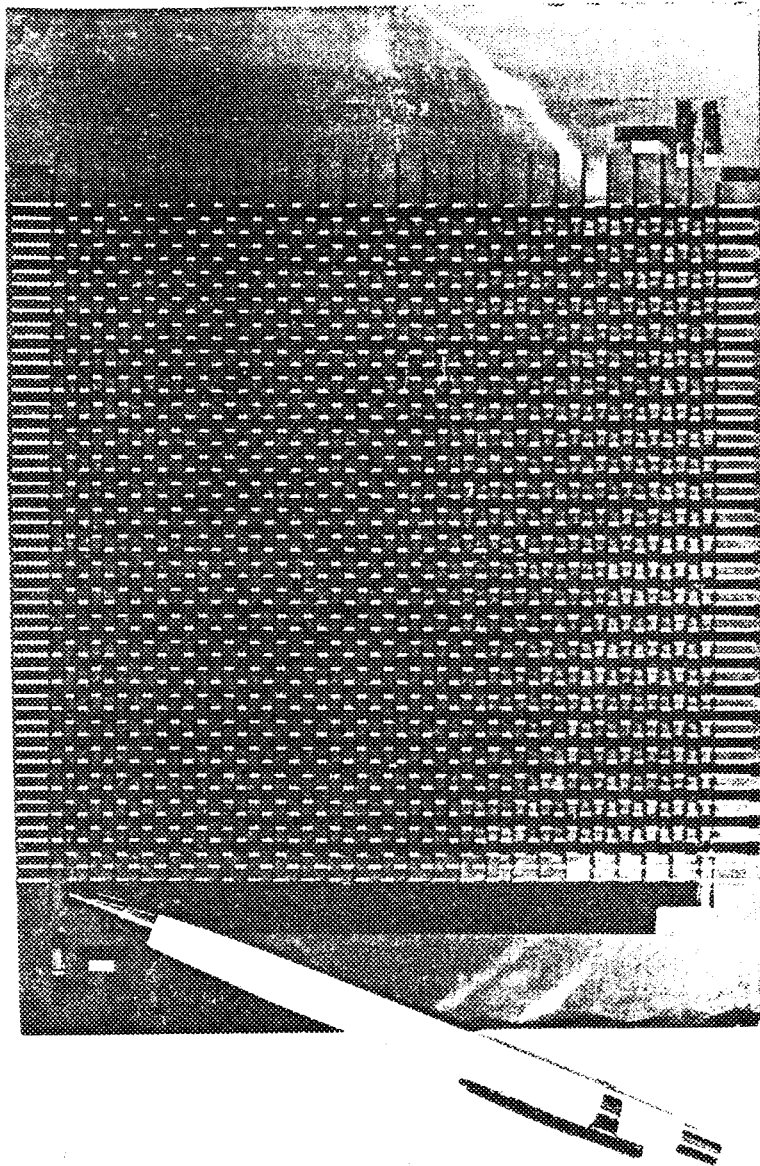


Figure III.2.0.1. : Fluxmètre à thermocouples intégrés

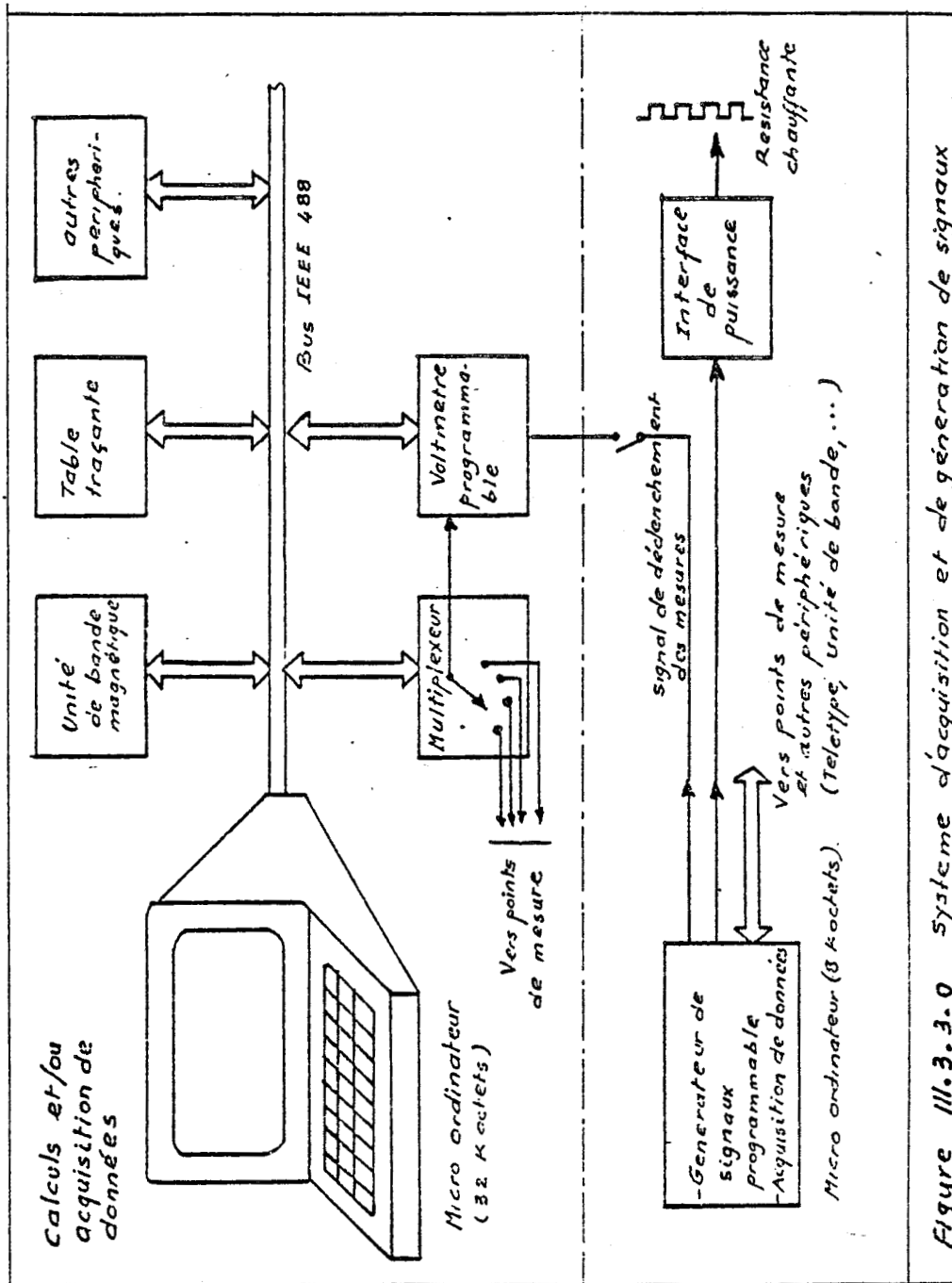


Figure III.3.3.0 système d'acquisition et de génération de signaux

divers types de périphériques. La gestion des échanges est prise en charge par le système de sorte que l'utilisateur peut se servir d'instructions simples pour adresser un appareil ou lire des données en provenance d'un périphérique.

Dans la configuration utilisée, on trouve connectés au bus, un multiplexeur ainsi qu'un voltmètre numérique dont l'entrée est reliée à la sortie du multiplexeur (fig.III.3.3.0). Tous ces dispositifs sont disponibles sur le marché. A l'aide de ce type de matériel, nous avons pu effectuer des acquisitions à une cadence maximale de 0,1 s/voie et avec une résolution de 2  $\mu$ V. Sur le schéma de la figure III.3.3.0., on distingue enfin un générateur qui fournit les signaux de déclenchement des mesures et le créneau qui, après amplification par un dispositif "interface de puissance" (transistor ou relais), apporte de l'énergie à la résistance chauffante.

Nous avons également réalisé un second système qui a l'avantage de grouper autour d'un microprocesseur sous une configuration minimale, les fonctions d'acquisition, de multiplexage et de génération des signaux. Ce système permet, grâce à la programmation en langage machine, une cadence maximale de l'ordre de 1 ms/voie, avec une résolution de 5 mV. Le générateur de signaux, programmable, permet de générer des formes d'ondes complexes ; on dispose ainsi d'un moyen simple, ne nécessitant aucune modification matérielle, pour imposer, suivant un profil quelconque, les variations de la puissance dissipée dans la résistance chauffante.

Le processus des acquisitions est similaire dans les deux systèmes : le microprocesseur reçoit une interruption provoquée par le signal de déclenchement des mesures. Ce signal initialise le processus de scrutation, d'acquisition et de stockage des données en mémoire.

Les données enregistrées sont généralement le flux d'entrée, le flux de sortie, ainsi que la température de sortie afin de se réserver la possibilité de procéder à un contrôle de la condition  $T_2 \approx 0$ .

### III-3-4- CONCLUSION

Les équipements décrits dans ce chapitre nous ont permis, grâce à l'automatisation rendue possible par les microprocesseurs, d'exécuter un grand nombre de mesures et de mettre en évidence certains phénomènes que le modèle mathématique utilisé ne permettait pas d'expliquer à priori.

La configuration utilisée est assez générale et nous a permis d'effectuer d'autres études notamment en provoquant d'autres types de perturbations énergétiques à l'entrée du matériau.

## CHAPITRE 4 : RÉSULTATS EXPERIMENTAUX

A partir du dispositif expérimental précédemment décrit, nous avons effectué un grand nombre de mesures sur des matériaux isolants thermiques. Lorsque les conditions expérimentales correspondent aux conditions formulées dans la partie théorique, l'application de la méthode proposée conduit à la détermination de la diffusivité thermique avec une bonne précision. L'étude expérimentale concerne également l'évaluation de la précision des mesures lorsque l'on s'écarte des conditions expérimentales idéales définies précédemment.

### III-4-1- PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET TRAITEMENT DES DONNEES

Nous avons utilisé deux types de fluxmètres thermiques pour effectuer les mesures : le fluxmètre à thermocouples différentiels<sup>[4]</sup> que nous désignerons par le type I, et le fluxmètre à thermoéléments intégrés<sup>[8]</sup> que nous noterons type II. Les principes de fonctionnement de ces deux capteurs sont explicités au chapitre précédent.

Nous distinguerons également deux types de configuration expérimentale. La configuration n° 1 correspond au dispositif expérimental décrit au chapitre précédent et qui comporte deux plaques échangeuses thermiques en laiton, jouant le rôle de puits thermique. Ce dispositif est mécaniquement très stable et thermiquement bien défini puisqu'il est possible de faire varier la température des plaques.

La configuration n° 2, plus rudimentaire, a été mise en oeuvre afin de simuler une application de la méthode in situ. Ce dispositif comporte deux plaques d'aluminium de 5 mm d'épaisseur entre lesquelles sont placés matériau, résistance chauffante et fluxmètre. Ce montage a été réalisé sur table par simple superposition des éléments.

Les matériaux utilisés se présentent sous forme soit d'une plaque de 500 x 500 mm<sup>2</sup>, soit d'une plaque de 130 x 130 mm<sup>2</sup>, d'épaisseur  $l$ . Ces plaques proviennent directement du commerce et n'ont subi aucun traitement de surface (rectification, métallisation), l'épaisseur moyenne  $l$  ayant été obtenue au pied à coulisse de 1/50 ou à partir du poids du matériau.



Après avoir mis en place le système thermique, nous procédons au chargement sur ordinateur des programmes de génération de signaux et d'acquisition de données. Ces programmes d'utilisation conversationnelle permettent de rentrer simplement les paramètres de la mesure : la durée du créneau, la cadence des acquisitions, les voies de mesure à scruter, le nombre de points de mesures. Cette période d'initialisation achevée, la mesure est rendue automatique ; elle est déclenchée par une fonction du ordinateur utilisée à cet effet.

Lorsque les acquisitions sont terminées, les données sont directement stockées sur bande magnétique et restent disponibles en mémoire centrale.

Plusieurs programmes permettant la visualisation des courbes ont été mis au point. La visualisation est possible sur écran ou sur une table traçante numérique. Le calcul de la fonction d'intercorrélation entrée-sortie avec recherche de la position  $\tau_1$  du maximum, le calcul du temps caractéristique  $\tau_c$  à partir des données  $\delta$  et  $\tau_1$  sont effectués dès que les valeurs expérimentales sont disponibles.

Lorsque le rapport signal sur bruit est faible, il convient de contrôler l'abscisse  $\tau_1$  du maximum affichée par le ordinateur notamment en visualisant la courbe d'intercorrélation.

Disposant de l'instrumentation précédemment décrite et des programmes de traitement des données, nous avons pu réaliser un grand nombre de mesures dans des conditions assez variées, notamment en remplaçant les plaques  $P_1$  et  $P_2$  par des matériaux de différentes caractéristiques thermophysiques, ou en démarrant les mesures alors que le système n'a pas encore atteint l'équilibre thermique. A ce sujet il est possible que certains écarts observés sont dus à l'influence des conditions initiales qui s'écartent parfois notablement de la condition de température uniforme supposée dans le matériau avant le début des mesures. Nous avons obtenu un grand nombre de résultats corrects en traitant la réponse superposée à un état quasi-stationnaire, caractérisé par un gradient de température ( $\phi \leq 1$  W) dans le matériau (très lentement variable dans le temps).

Enfin, pour contrôler la condition de "température constante" sur la face de sortie du matériau, nous avons souvent enregistré cette information fournie par un thermocouple cuivre-constantan.

### III-4-2- MESURES EFFECTUEES SUR LE PLEXIGLASS

---

Nous avons essentiellement utilisé le plexiglass pour tester notre méthode de mesure. Parmi les isolants thermiques, ce matériau de diffusivité de l'ordre de  $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  a l'avantage d'être stable et de servir souvent de corps de référence en métrologie. Nous résumons dans le tableau III.4.2.0 les valeurs de diffusivité relevées dans la littérature.

	Diffusivité $(10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$ a	Référence
PLEXIGLASS	$0.96 \leq a \leq 1.46$	[10]
	$1 \leq a \leq 1.08$	[4]
	$a \approx 1.12$	[11]

Tableau III.4.2.0

Nous présenterons les résultats en quatre phases en précisant :

- l'influence de la durée du créneau
- l'influence de l'épaisseur du matériau
- l'influence du puits thermique (milieu  $P_1$ ) et de la charge (milieu  $P_2$ )
- l'influence des capteurs.

MESURES EFFECTUEES SUR UNE PLAQUE DE PLEXIGLASS DE 5mm d'ÉPAISSEUR ( $\tau_c \approx 250 \text{ sec}$ )  
ET DE SURFACE  $500 \times 500 \text{ mm}^2$

III-4-2-1- INFLUENCE DE LA DUREE DU CRENEAU

Nous avons utilisé les deux types de configuration expérimentale ainsi que les deux types de fluxmètres précédemment définis.

CONFIGURATION N° 1 / FLUXMETRES I

La méthode a été appliquée pour des durées relatives  $\delta/\tau_c$  du créneau de flux incident variables entre 0.013 et 0.96.

Les résultats des mesures et les données expérimentales sont consignés dans le tableau III.4.2.1.

Pour  $\delta/\tau_c \leq 0.21$ , les résultats obtenus sont très cohérents et on obtient une diffusivité moyenne

$$\hat{a} \approx 1 \pm 0.04 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Ce résultat est conforme avec les valeurs relevées dans la littérature.

Il convient de préciser que pour ces premiers essais, les conditions expérimentales réalisent au mieux les conditions limites définies dans la partie théorique. Nous donnons quelques courbes expérimentales ; les numéros des courbes correspondent aux numéros donnés dans les tableaux de mesure.

On constate un écart relativement important (0.17) de la moyenne lorsque l'on utilise des créneaux de durée élevée.

CONFIGURATION N° 2 / FLUXMETRE II

Les mesures effectuées sur le même échantillon dans les conditions précisées dans le tableau III.4.2.2 conduisent à une diffusivité

$$\hat{a} \approx 0.98 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{en présence de pression (2 bars)}$$

et

$$\hat{a} \approx 1.06 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{en absence de pression}$$

En dépit du caractère rudimentaire de l'installation utilisée, les résultats se situent dans la fourchette des valeurs publiées dans la littérature.

III-4-2-2- INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DU MATÉRIAU :

Des échantillons d'épaisseur comprise entre 3 et 15 mm ont été utilisés pour tester la méthode. Les conditions expérimentales ainsi que les valeurs de diffusivité obtenues sont résumées dans le tableau III.4.2.3. On constate que dans la plupart des cas, pour des épaisseurs  $l \geq 5$  mm, les résultats obtenus sont assez proches des valeurs obtenues pour l'échantillon de 5 mm d'épaisseur.

Pour les matériaux d'épaisseur  $l \leq 4$  mm, les résultats s'écartent de la valeur théorique et pour  $l = 2,81$  mm, on obtient  $\hat{a} \approx 0.78 \pm 0.06$ . Lorsque le temps caractéristique du matériau n'est pas très supérieur à la constante de temps des fluxmètres, les résultats obtenus s'écartent de la valeur théorique. Dans ces conditions, le modèle (matériau homogène) utilisé n'est plus valable et il est nécessaire de tenir compte de l'influence du capteur en établissant un modèle bicouche. Nous reviendrons plus loin sur cet aspect. Il est important de noter que la notion de "fonction de transfert" développée reste valable quelle que soit la structure interne du système étudié (multicouche, inhomogénéité...). L'excellente reproductibilité des mesures et la faible dispersion des résultats pour une épaisseur de matériau donnée, témoignent de ce fait.

III-4-2-3- INFLUENCE DES CAPTEURS

L'influence des capteurs discutée de façon implicite dans le paragraphe précédent, est encore plus importante lorsque l'on dispose un fluxmètre du type I entre la chaufferette et le matériau afin d'enregistrer les variations temporelles du flux incident. Lorsque la constante de temps fondamentale du matériau est grande vis-à-vis de celle des fluxmètres, la présence d'un fluxmètre entre la chaufferette et le matériau n'influe pas sur la précision de la mesure.

Par contre lorsque l'épaisseur du matériau est faible et que le temps caractéristique est du même ordre de grandeur que la constante de temps des fluxmètres, on est en présence d'un milieu à trois couches et le modèle mono-couche proposé est inopérant.

Le tableau III.4.2.4 résume deux mesures faites en présence d'un fluxmètre d'entrée du type I (configuration n° 1). On trouve pour un échantillon en plexiglass de 5 mm, une diffusivité apparente

$$\bar{a} \approx 0,66 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

et pour un autre échantillon du même matériau, d'épaisseur 14,8 mm

$$\bar{a} \approx 0,91 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

alors que les mêmes mesures réalisées dans les mêmes conditions mais sans fluxmètre d'entrée donnent respectivement les valeurs 1.01 et 1.07  $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (voir tableaux III.4.2.1. et III.4.2.3.

Les fluxmètres du type I possèdent un temps caractéristique relativement important 25 sec, alors que les fluxmètres du type II ont un temps caractéristique inférieur à 2 sec.

Ces résultats montrent l'intérêt qu'il y a à enlever le fluxmètre d'entrée pour ne pas augmenter le temps de montée du signal d'entrée. Dans le cas où les matériaux testés ont un temps caractéristique suffisamment grand, il est possible de négliger l'influence des capteurs.

#### III-4-2-4- INFLUENCE DU PUITTS THERMIQUE

Par puits thermique nous désignons les plaques  $P_1$  et  $P_2$ , qui dans le cas idéal devraient avoir une effusivité infinie (résistance thermique très faible, capacité élevée). Le milieu  $P_1$  joue le rôle de dissipateur d'énergie tandis que le milieu  $P_2$  représente une charge thermique.

##### a) Influence du milieu $P_1$

L'influence du milieu  $P_1$  sur le front de montée du signal d'entrée peut être mis en évidence par simple observation du flux d'entrée. Pour évaluer l'incidence des paramètres thermophysiques du milieu  $P_1$  sur la valeur estimée de la diffusivité, nous avons réalisé quelques mesures, en remplaçant la plaque  $P_1$  par des matériaux de diverses natures.

Pour un échantillon en plexiglass de 5mm d'épaisseur, on obtient une diffusivité apparente

$$\bar{a} \approx 0.6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

pour un milieu  $P_1$  en polystyrène et

$$\bar{a} \approx 0.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

lorsque le milieu  $P_1$  est remplacé par de l'air (tableau III.4.2.5). Les écarts par rapport à la valeur réelle mettent en évidence l'influence du temps de montée sur la qualité de la mesure. Pour les valeurs importantes du temps de montée du signal on obtient une diffusivité faible.

b) Influence de la charge

Les spécifications sur la nature de la charge que constitue le milieu semblent moins astreignantes en pratique. En effet, lorsque les paramètres thermo-physiques du milieu  $P_2$  s'écartent très sensiblement des conditions idéales préconisées lors de l'étude théorique, les résultats des mesures demeurent stables et sont conformes aux valeurs données dans la littérature.

Nous avons effectué une série de mesures pour mettre en évidence l'influence de la charge thermique. Le tableau III-4-5 résume les conditions expérimentales ainsi que les résultats obtenus pour des échantillons en plexiglass, et pour le verre à vitre.

Pour toutes ces mesures, la plaque  $P_1$  est évidemment idéalisée (laiton ou aluminium).

Pour un échantillon en plexiglass de 5 mm d'épaisseur, on obtient les valeurs de diffusivité

$$\bar{a} \approx 1.05 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

pour une charge en polystyrène et

$$\bar{a} \approx 1.03 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

lorsque la charge est remplacée par de l'air (fluxmètre type I simplement posé sur le matériau sans aucune pression mécanique). Les mêmes mesures effectuées avec un fluxmètre type II et une charge "air" donnent les résultats 1.02 et  $1. \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

La concordance des résultats obtenus avec les valeurs théoriques semble surprenante, nous tentons plus loin de donner une interprétation à cette constatation.

La remarque précédente a été confirmée par d'autres mesures en présence de diverses charges sur un échantillon en plexiglass d'épaisseur 2 mm avec un fluxmètre II (tableau III.4.2.6).

Pour une charge en aluminium, qui se rapproche le plus de la condition idéale, on obtient une détermination de la diffusivité :

$$\bar{a} \approx 0.6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

alors que l'estimation obtenue en présence d'une charge "air" ou "polystyrène" sans pression mécanique, est de l'ordre de  $0.98 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Une mesure effectuée avec une charge polystyrène sur du verre à vitre d'épaisseur  $2.75 \leq l \leq 2.78 \text{ mm}$  conduit au résultat  $3.31 \leq \hat{a} \leq 3.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

alors que l'on obtient une diffusivité

$1.47 \leq \hat{a} \leq 1.5$  pour le même échantillon avec une charge en aluminium

La valeur relevée dans la littérature [12] est  $\hat{a} = 3.36 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

L'ensemble de ces résultats peut être interprété par le rôle de la charge sur la dynamique de l'évolution. Lorsque la charge ne possède pas une effusivité élevée (air, polystyrène...); il ne fait qu'avancer la réponse du système de sorte que cet effet compense partiellement les retards introduits par le fluxmètre.

Par ailleurs, nous avons constaté, pour les grandes valeurs du temps, une forte influence de la charge sur l'évolution temporelle du flux sortant, alors que la nature de la charge ne semble pas affecter de façon appréciable les variations du flux sortant pour les petites valeurs du temps.

Ces remarques n'ont évidemment aucun caractère de généralité et il faudrait effectuer une étude systématique fût elle empirique pour conclure sur l'influence de la charge. Un développement mathématique est envisageable à partir des notions d'impédance thermique pour rendre compte du comportement du système en fonction des paramètres thermophysiques de la charge; une telle analyse est en cours d'élaboration. Il nous a néanmoins semblé important d'insister sur cet aspect dont la compréhension pourrait conduire à une meilleure précision sur la détermination de la diffusivité.

### III-4-3- ESSAIS DIVERS

- Nous avons testé un échantillon de Verre à Vitre constitué par un empilement de deux carrés de surface  $135 \times 135 \text{ mm}$  et d'épaisseur totale  $8,7 \text{ mm}$ . Les données expérimentales figurent dans le tableau III.4.2.7. Les mesures ont été réalisées en utilisant un fluxmètre de type II dans la configuration N° 2. On trouve une diffusivité :

$$\hat{a} = 3.12 \pm 0.13 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

- Nous avons effectué des essais sur du Verre-Epoxy. Ce matériau, très utilisé en électronique, constitue le support des circuits imprimés. Nous avons testé une plaque de 1,5 mm d'épaisseur (dans la configuration n° 1) avec un fluxmètre de type II disposé sur chaque face du matériau. Le temps caractéristique obtenu est de l'ordre de 27 s. Ce qui donne une diffusivité apparente :

$$\hat{a} \approx 0.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

- Des essais effectués sur un échantillon de feutre d'environ 5 mm d'épaisseur à un temps caractéristique de 244 s ont conduit, soit une diffusivité :

$$\hat{a} \approx 1. \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

#### III-4-4- CONCLUSION

Les résultats obtenus dans le cas particulier du plexiglass nous ont permis de tester notre méthode et de mettre en évidence l'importance des contraintes définies dans la partie théorique. Avec un dispositif expérimental simplifié, nous avons pu obtenir des résultats assez satisfaisants. Nous n'avons pas pris de précautions particulières en ce qui concerne l'uniformisation de la température interne des échantillons avant les mesures. De plus, il aurait fallu connaître avec précision l'épaisseur de l'échantillon pour aboutir à de faibles incertitudes sur la valeur estimée de la diffusivité. Nous pensons néanmoins que la cohérence des résultats obtenus sur le plexiglass permet, sinon de conclure, tout au moins de prouver l'intérêt pratique de notre méthode. A ce sujet, la comparaison de nos résultats avec ceux obtenus sur les mêmes matériaux et avec les mêmes fluxmètres par une méthode exploitant les évolutions de température et de flux superficiels en régime transitoire <sup>[13]</sup>[4], semble assez concluante ; la valeur de la diffusivité mesurée par cette méthode est comprise entre  $1.29$  et  $1.10 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  pour des échantillons d'épaisseur  $l$  ( $2.85 \leq l \leq 14.8 \text{ mm}$ ).

Les techniques expérimentales développées dans le travail précédemment cité ont été conçues de façon à déterminer la chaleur massique de diverses substances avec une excellente précision. La précision est moins bonne pour les mesures de diffusivité de matériaux de faibles épaisseurs, même lorsque l'on tient compte de l'influence des fluxmètres. Cette limitation vient du fait que l'auteur ne considère que les deux premiers pôles de la fonction de transfert de sorte que le modèle (approché) qui en résulte n'est valable que pour les grandes valeurs du temps.

Nous n'avons imposé aucune restriction sur la validité du développement utilisé pour représenter la fonction de transfert. Les résultats obtenus sur un échantillon de plexiglass de 5 mm d'épaisseur (sans tenir compte de l'influence du capteur) confirment l'intérêt qu'il y a à considérer les pôles d'ordre élevé surtout lorsque l'influence des capteurs devient non négligeable. Il faut également noter l'excellente reproductibilité de nos mesures. Nous avons reporté dans les tableaux suivants des mesures effectuées sur le même matériau ; la faible dispersion des résultats obtenus confirme la validité des concepts développés dans les chapitres précédents.



TABLEAUX DES MESURES ET COURBES EXPERIMENTALES

TABLEAU III.4.2.1.

## INFLUENCE DE LA DUREE DU CRENEAU

Mesures effectuées entre plaques à 20°C avec un fluxmètre  
du type I.

Période d'échantillonnage  $T \leq \delta/10$

La variation maximale de la température de la face de sortie  
est de 1 %.

	$\delta$ (s)	$\delta/\tau_c$	$\tau_1$ (s)	$\bar{\tau}_c$ (s)	$\hat{a}$ ( $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ )	N°	Remarques
PLEXIGLASS $\lambda = 5 \text{ mm}$	3.2	0.013	40.54	244	1.02	1	
	6.4	0.026	43.52	259	0.96	2	
	12.24	0.049	42.24	245	1.02	3	Courbe n° 3
	12.8	0.051	41.92	244	1.02	4	
	21.3	0.085	46.9	261	0.96	5	
	24.48	0.093	47.36	258	0.97	6	
	53.3	0.213	58.3	247	1.01	7	Courbe n° 7
	"	"	60.42	262	0.96	8	
	"	"	56.5	234	1.06	9	Courbe n° 9
	147.1	0.6	82.68	252	0.99	10	Courbe n° 10
Moyenne				250	1		$0.96 \leq a < 1.04$
écart-type				$\pm 9.7$	$\pm 0.04$		$10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
PLEXIGLASS $\lambda = 4.9 \text{ mm}$	180	0.72	73.55	208	1.15	11	
	241.3	0.96	72.48	197	1.21	12	

TABLEAU III.4.2.2.

MESURES EFFECTUEES A LA TEMPERATURE AMBIANTE AVEC UN FLUXMETRE.

DU TYPE II

 $T \leq \delta/20$ 

	$\delta$ (s)	$\delta/\tau_c$	$\tau_1$ (s)	$\bar{\tau}_c$ (s)	$\hat{a}$ ( $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ )	N°	Remarques
PLEXIGLASS $\lambda = 5 \text{ mm}$	12.24	0.049	43.52	254	0.98	13	Configuration N°1 Courbe 13
	12.78	0.051	40.20	233	1.07	14	Configuration N°2 Courbe 14
	25.58	0.102	44.76	238	1.05	15	Configuration N°2 Courbe 15

TABLEAU III.4.2.3.

## INFLUENCE DE L'EPaisseur DE LA PAROI

Mesures effectuées sur du Plexiglass  
à 20°C, avec un fluxmètre du type I, dans la configuration n° 1

$\lambda$ mm	$\delta$ (s)	$\delta/\tau_c$	$\tau_1$ (s)	$\bar{\tau}_c$ (s)	$\hat{a}$ ( $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ )	N°	Remarques
14.8	1172.6	0.535	668	2051	1.07	16	avec le même maté- riau $\bar{\tau}_c=2120$ [4]
10	21.32	0.021	162	967	1.03	17	
5					1.00		Voir tableau III.4.2.1.
4	20.04	0.125	41.34	228	0.70	18	Très mauvais état de surface du matériau
	127.9	0.8	69	208	0.77	19	
	192	1.2	72.9	203	0.79	20	
2.81	7.5	0.095	18.24	103	0.77	21	
	10.66	0.135	19.2	103	0.77	22	
	63.96	0.81	34.5	104	0.77	23	
	95.94	1.21	39	110	0.72	24	



TABLEAU III.4.2.4.

## INFLUENCE DES CAPTEURS

Mesures effectuées en présence des deux fluxmètres (type I)  
Configuration 1.

	$\delta$ (s)	$\delta/\tau_c$	$\tau_1$ (s)	$\bar{\tau}_c$ (s)	$\bar{a}$ ( $10^{-7}m^2s^{-1}$ )	N°	Remarques
PLEXIGLASS 5 mm	40	0.16	71.04	378	0.66	25	Courbe n°25
PLEXIGLASS 14,8 mm	1172.6	0.53	750	2407	0.91	26	Voir Mesure n°16 courbe n° 26

TABLEAU III.4.2.5.

## INFLUENCE DU MILIEU P1

La charge (P2) étant de l'aluminium ou du laiton  
fluxmètre type I, configuration 2,  $\delta = 5.33$  s.

	Matériau milieu P1	$\tau_1$ (s)	$\bar{\tau}_c$ (s)	$\bar{a}$ ( $10^{-7}m^2s^{-1}$ )	N°	Remarques
PLEXIGLASS 5 mm	Polystyrène	64.75	416	0.6	27	
	Air	72.5	625	0.4	28	

TABLEAU III.4.2.6.

## INFLUENCE DE LA CHARGE (milieu P2)

Le milieu P1 étant de l'aluminium ou du laiton, le fluxmètre  
simplement posé, sans pression, config. 2

	Matériau milieu P2	$\tau_1$ (s)	$\bar{\tau}_c$ (s)	$\bar{a}$ ( $10^{-7}m^2s^{-1}$ )	N°	Remarques
PLEXIGLASS 5mm	Polystyrène	39.62	238	1.05	29	
FLUXMÈTRE I S=5.33 s	Air	40.47	243	1.03	30	Courbe n° 30
PLEXIGLASS 5mm	Air	41.6	245	1.02	31	
FLUXMÈTRE II S=10.66 s	"	42.6	250	1	32	
PLEXIGLASS 5mm	Polystyrène	6.72	39	1.02	33	Courbe n° 33
FLUXMÈTRE II S=2.13 s	Air	7.45	44	0.91	34	
	Aluminium	10.65	67	0.6	35	

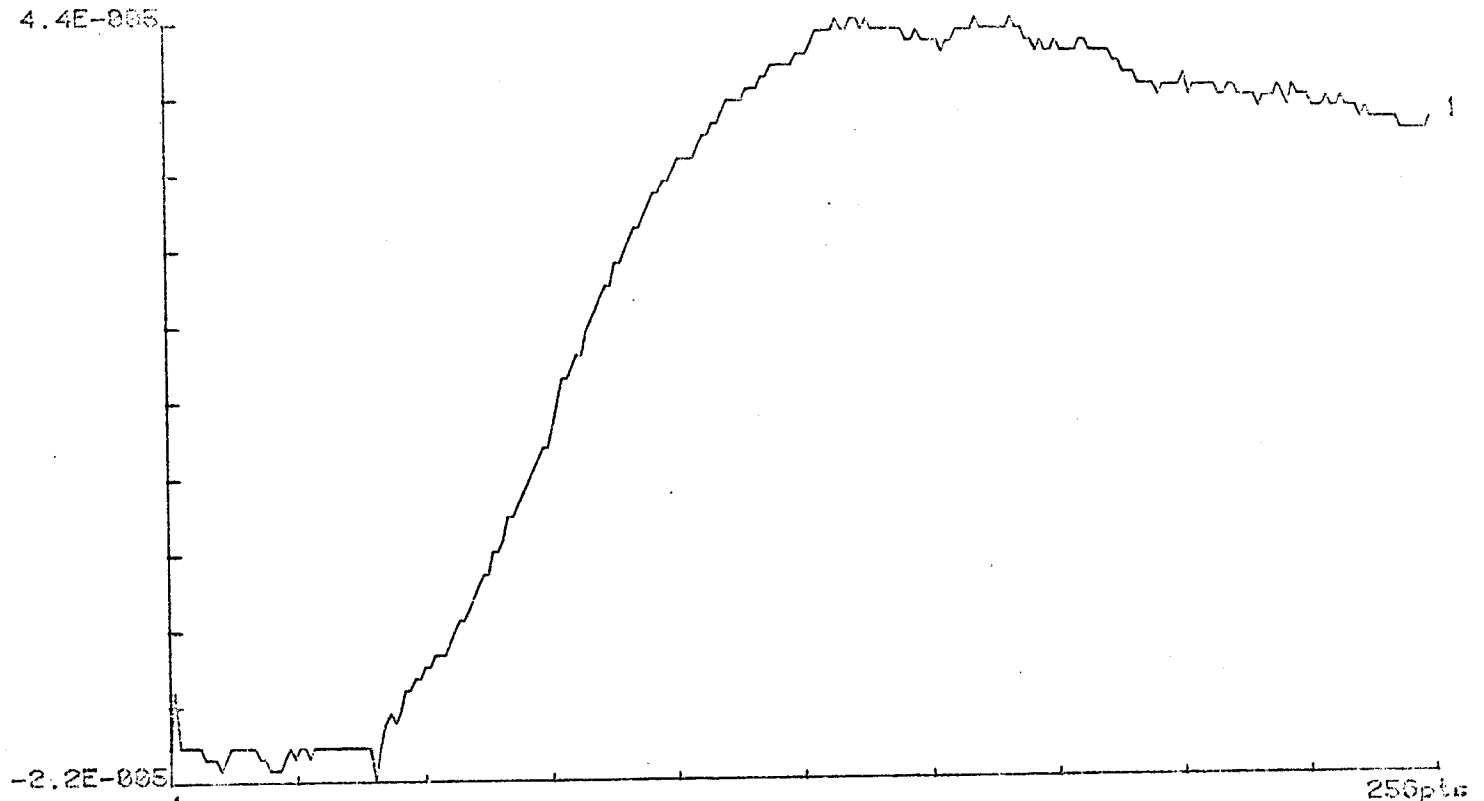
TABLEAU III.4.2.7.

Mesures effectuées sur du verre à vitre, de surface 135x135 mm<sup>2</sup>  
et d'épaisseur  $\delta$ ,

## Fluxmètre I, configuration 2

$\delta$ mm	$\delta$ (s)	$\delta/\tau_c$	$\tau_1$ (s)	$\bar{\tau}_c$ (s)	$\bar{a}$ ( $10^{-7}m^2s^{-1}$ )	N°	Remarques
8.7	10.66	0.04	40.50	237	3.18	36	Courbe n° 36
"	21.32	0.08	45.83	255	2.97	37	Courbe n° 36
"	31.98	0.14	46.90	235	3.22	38	
2.76	10.66	0.47	4.16	22.8	3.34	39	Charge : polys- tyrène
	10.66	0.47	14.9	36.6	2.08	40	Courbe n° 39

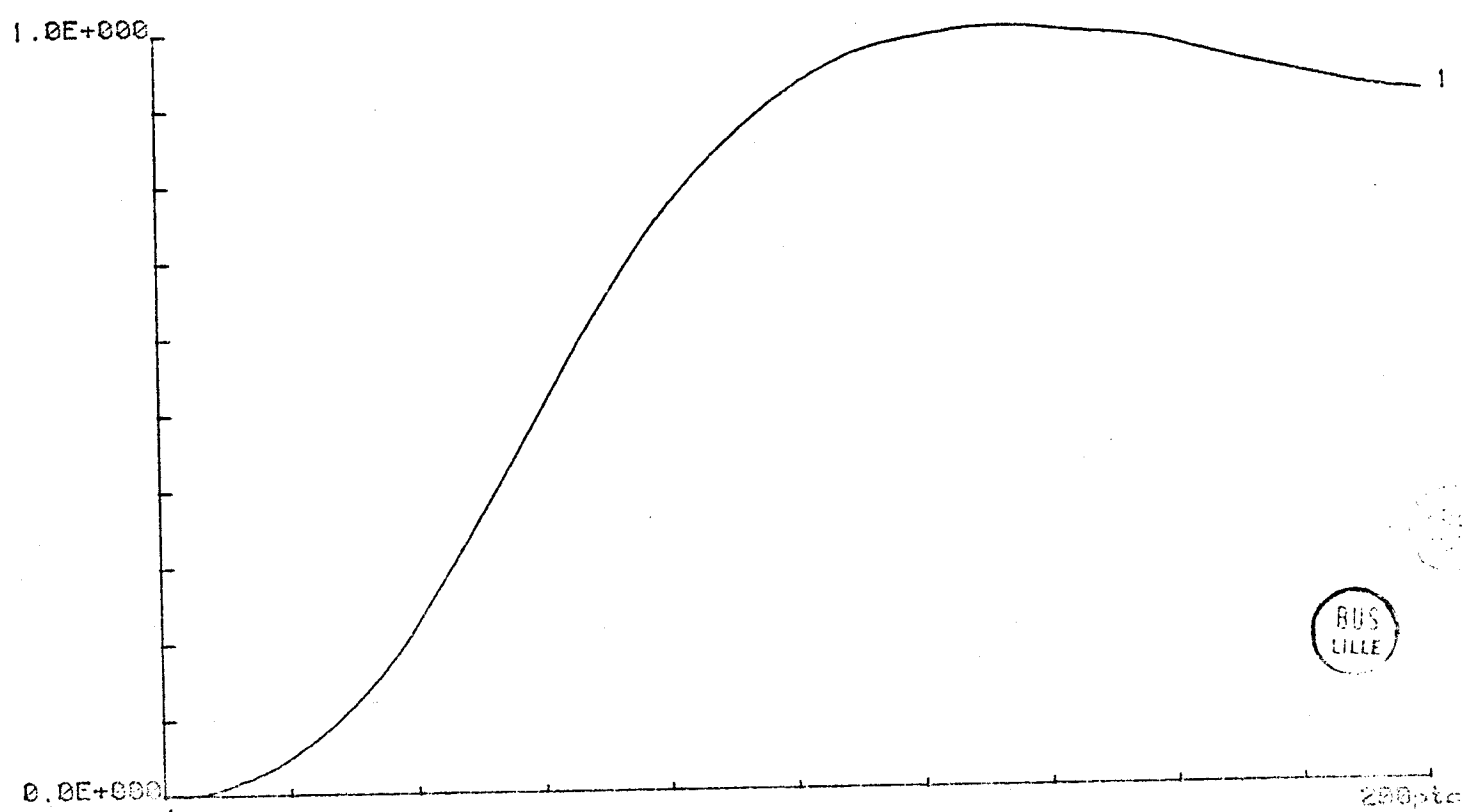
NO 3



1  
0.  
axe X : 8.2E+000 S/div  
axe Y : 6.6E-006 /div  
PLEXIGLASS 5mm . D= 12.24 S . FLUX TRANSMIS

256 pts  
81.60S

NO 3

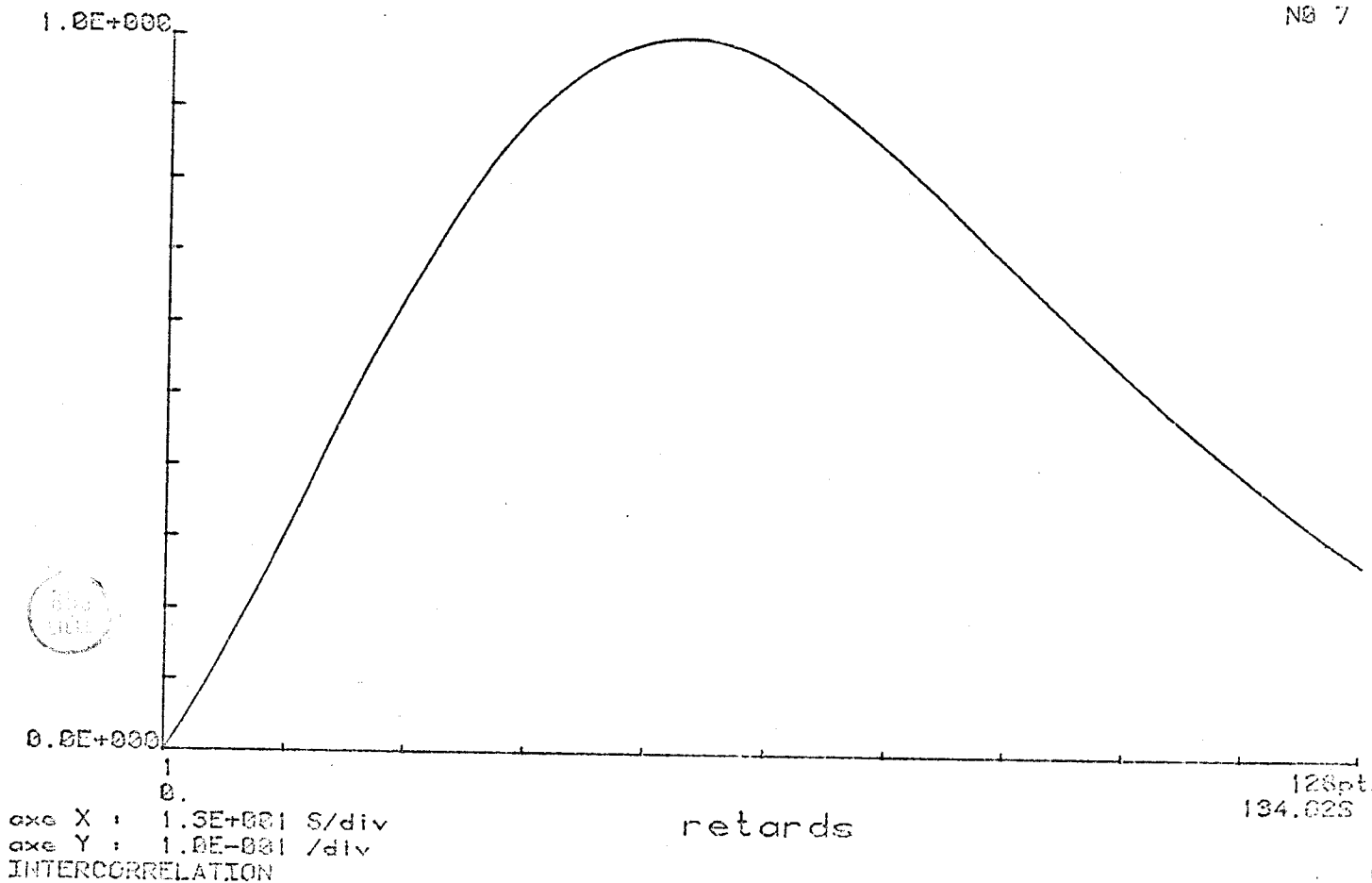
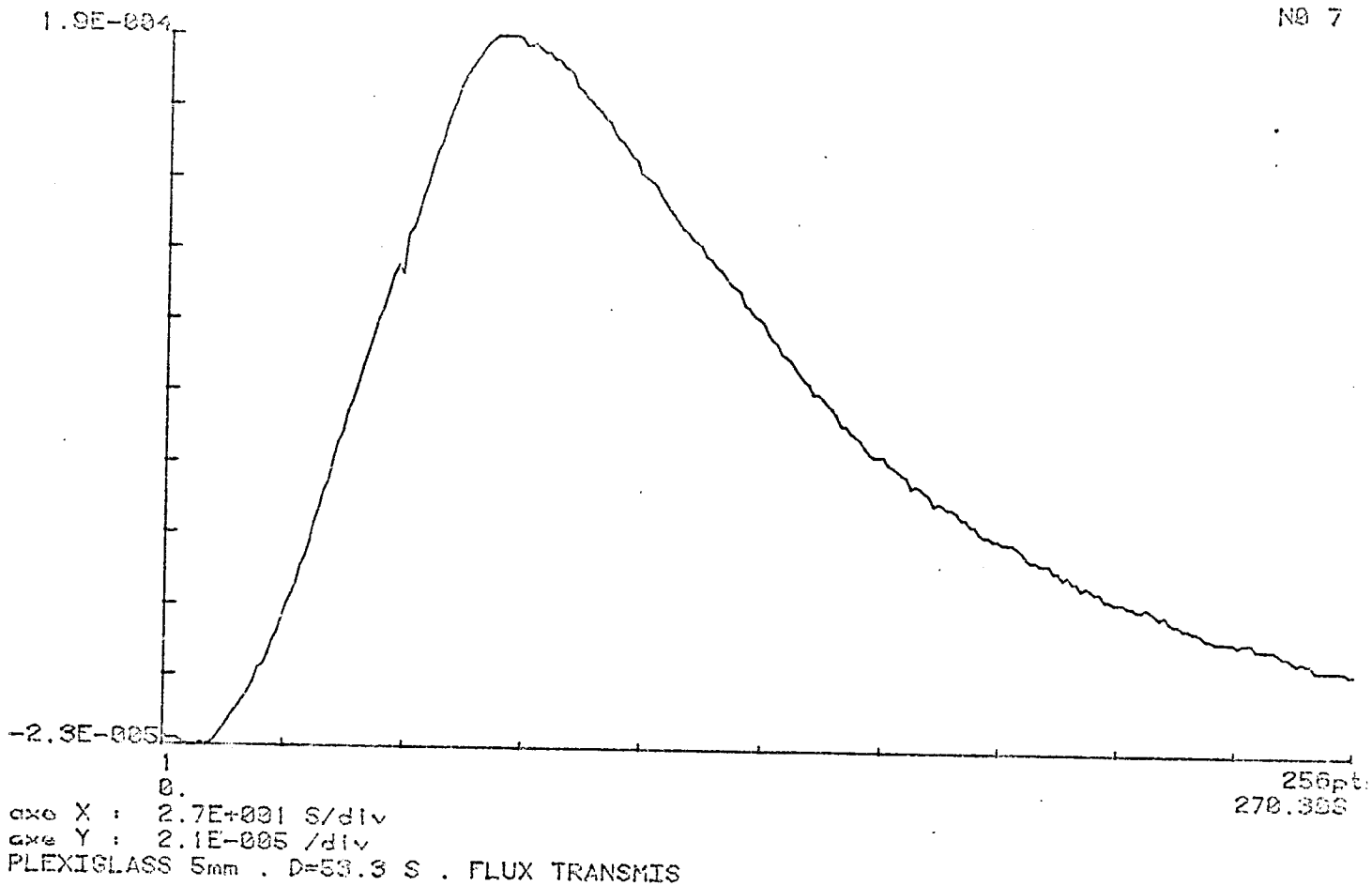


1  
0.  
axe X : 6.4E+000 S/div  
axe Y : 1.0E-001 /div  
INTERCORRELATION

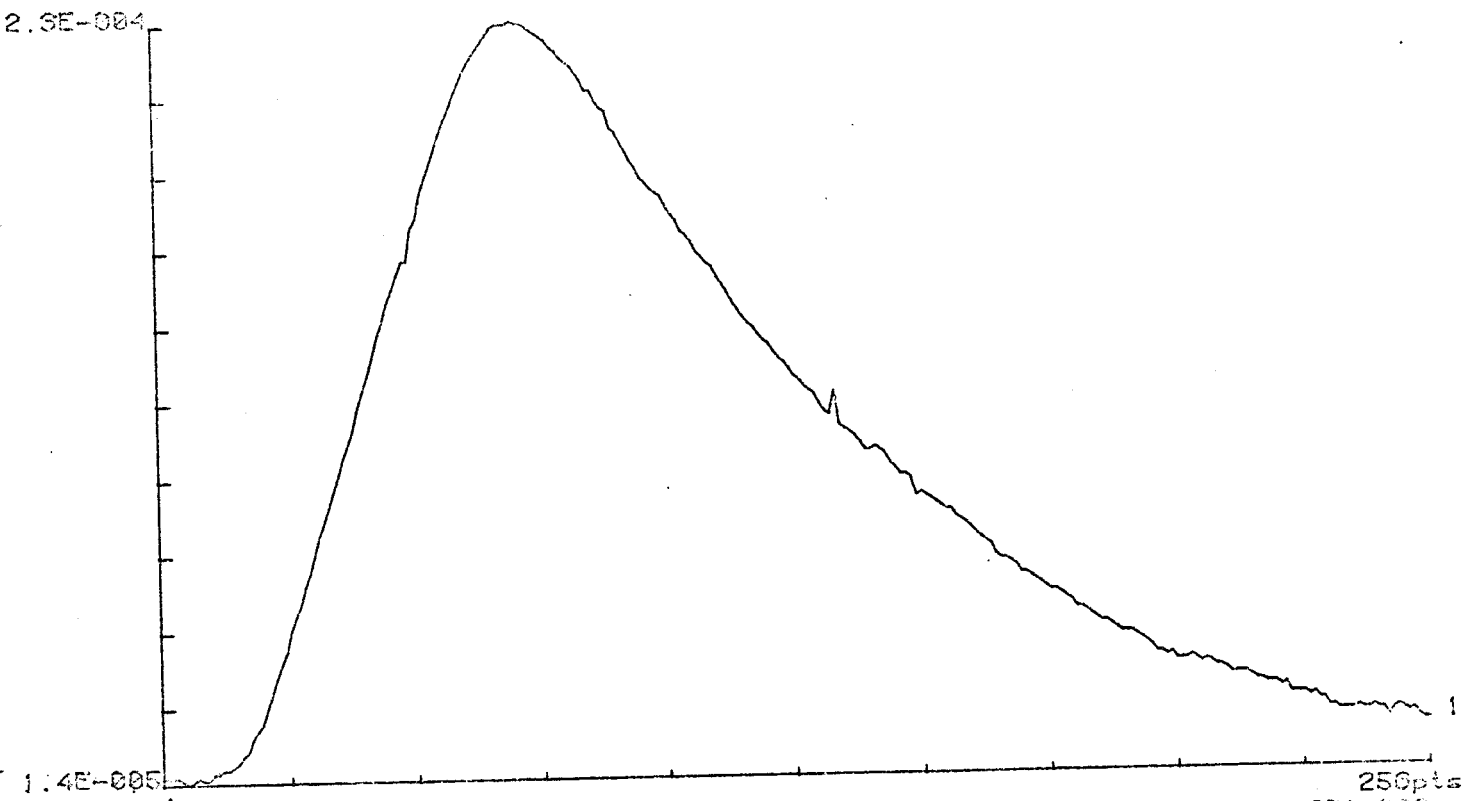
retards

200 pts  
63.60S



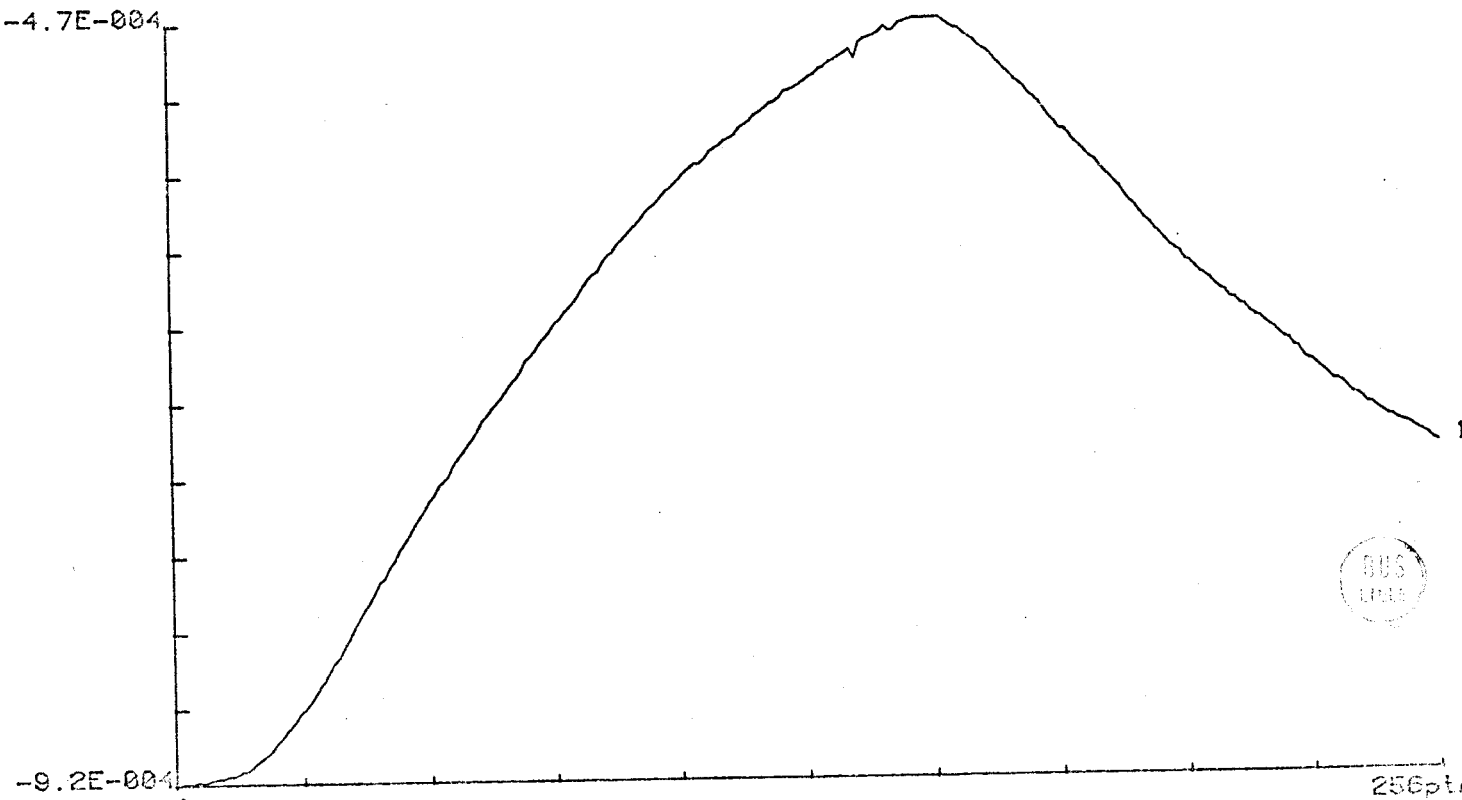


NO 9



axe X : 2.7E+001 S/div  
axe Y : 2.1E-005 /div  
PLEXIGLASS 5mm . D=53.3 S . FLUX TRANSMIS

NO 10

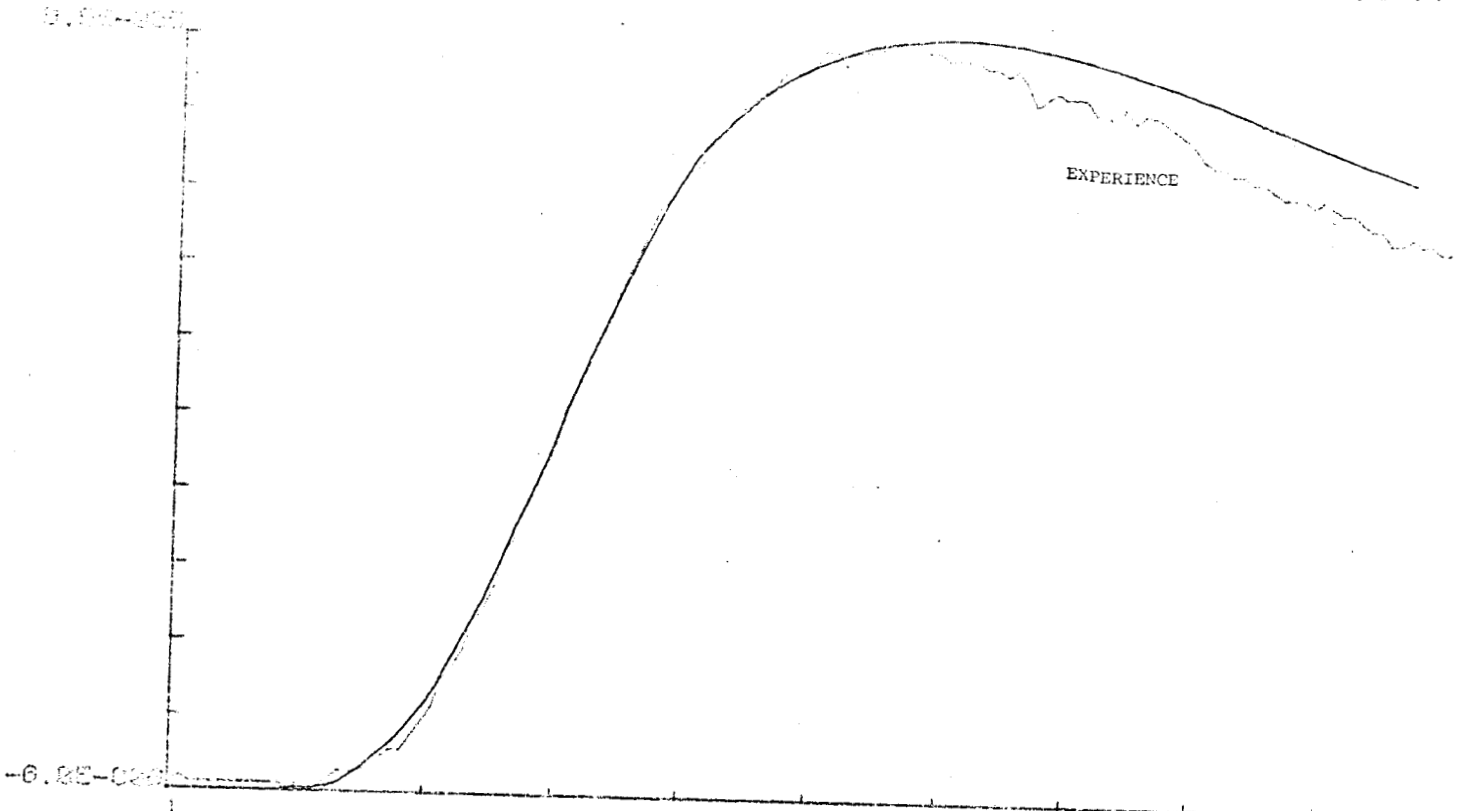


axe X : 2.7E+001 S/div  
axe Y : 4.4E-005 /div  
PLEXIGLASS 5mm . D=147.1 S . FLUX TRANSMIS



SIMULATION

Nº 14

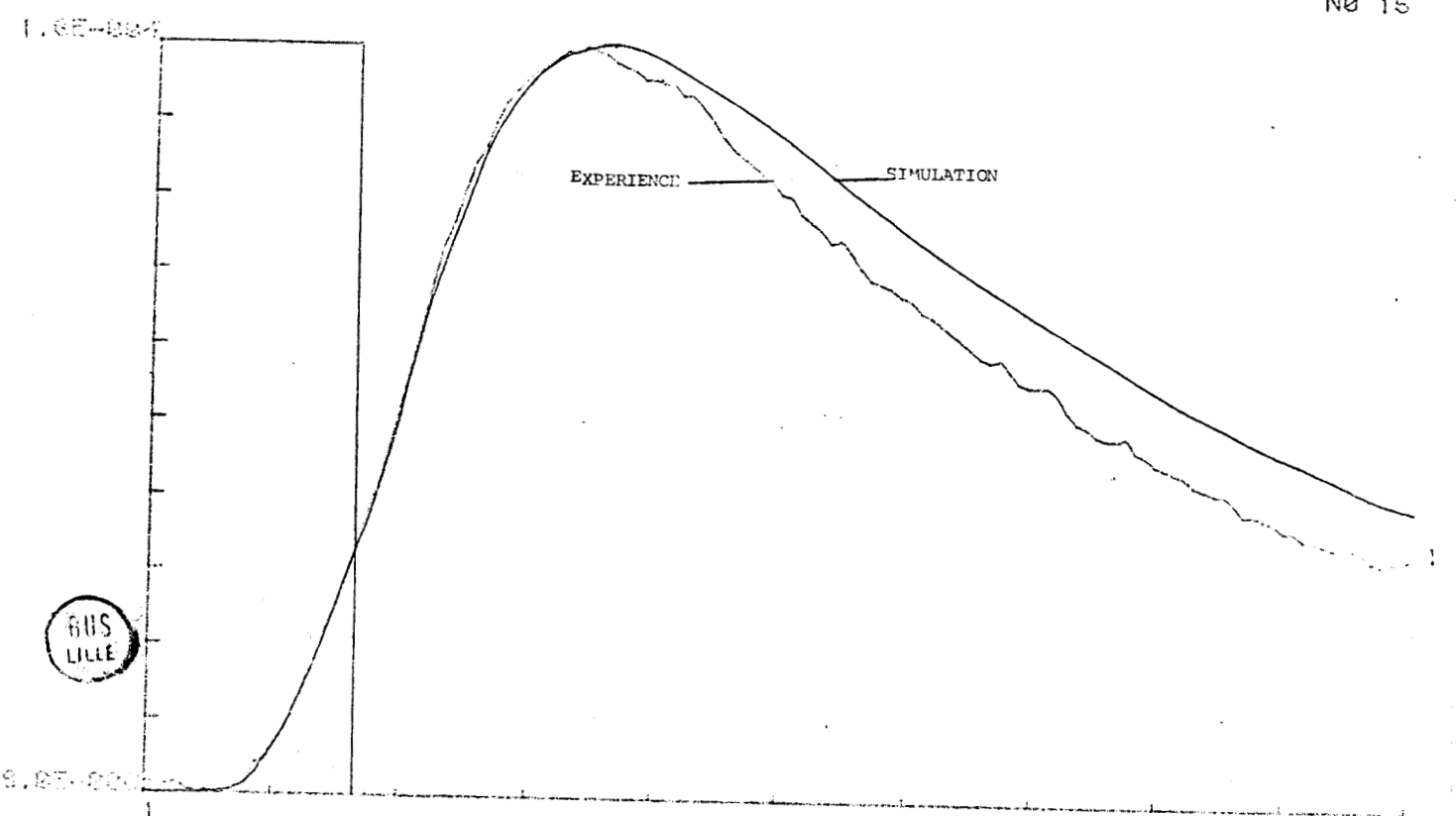


$\text{coef. X} = 6.1E-003 / \text{dB}$   
 $\text{coef. Y} = 1.1E-006 / \text{dB}$

PLEXIGLASS 5mm / D= 12.78 S

100%  
102.70

Nº 15

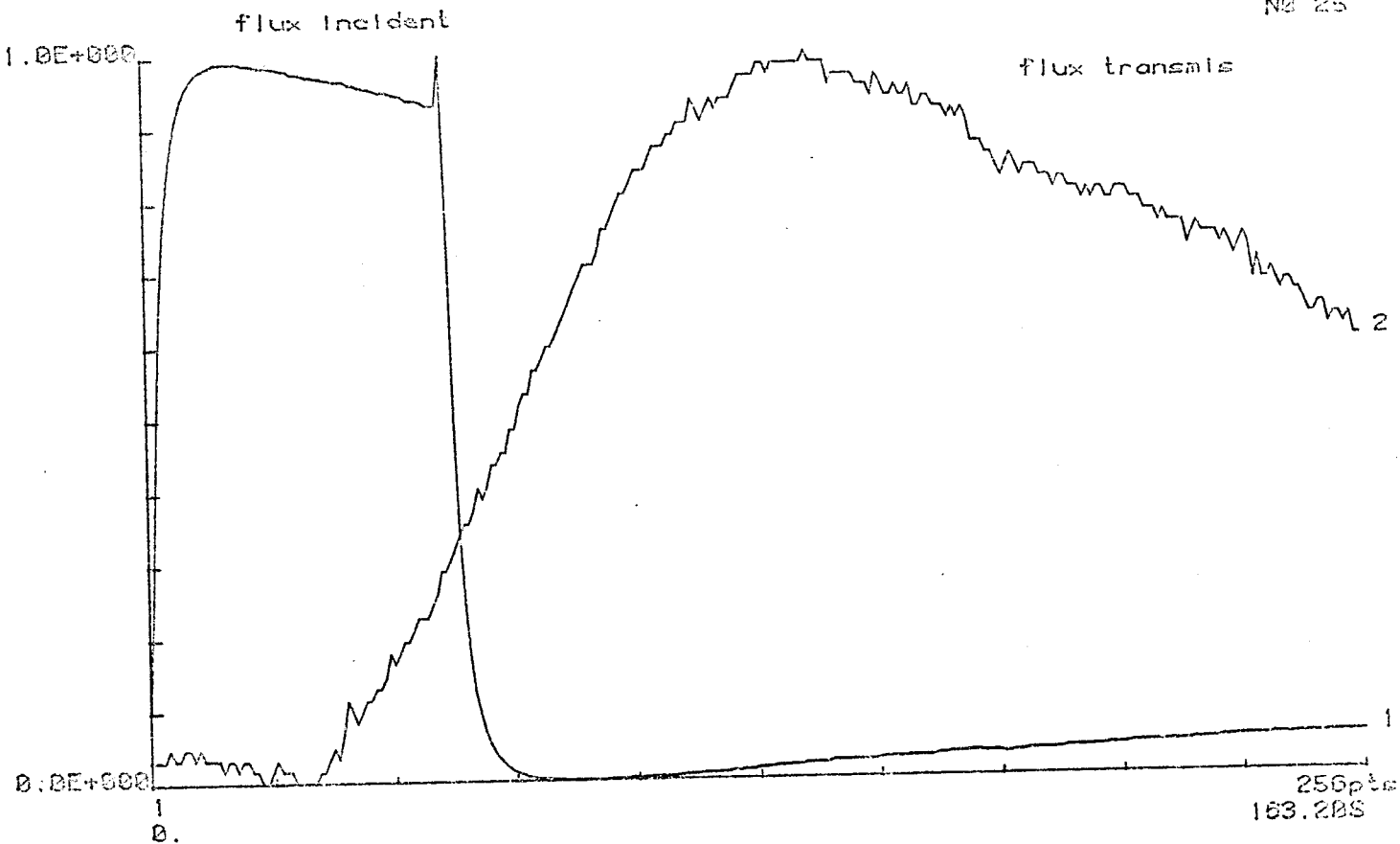


BUS LILLE

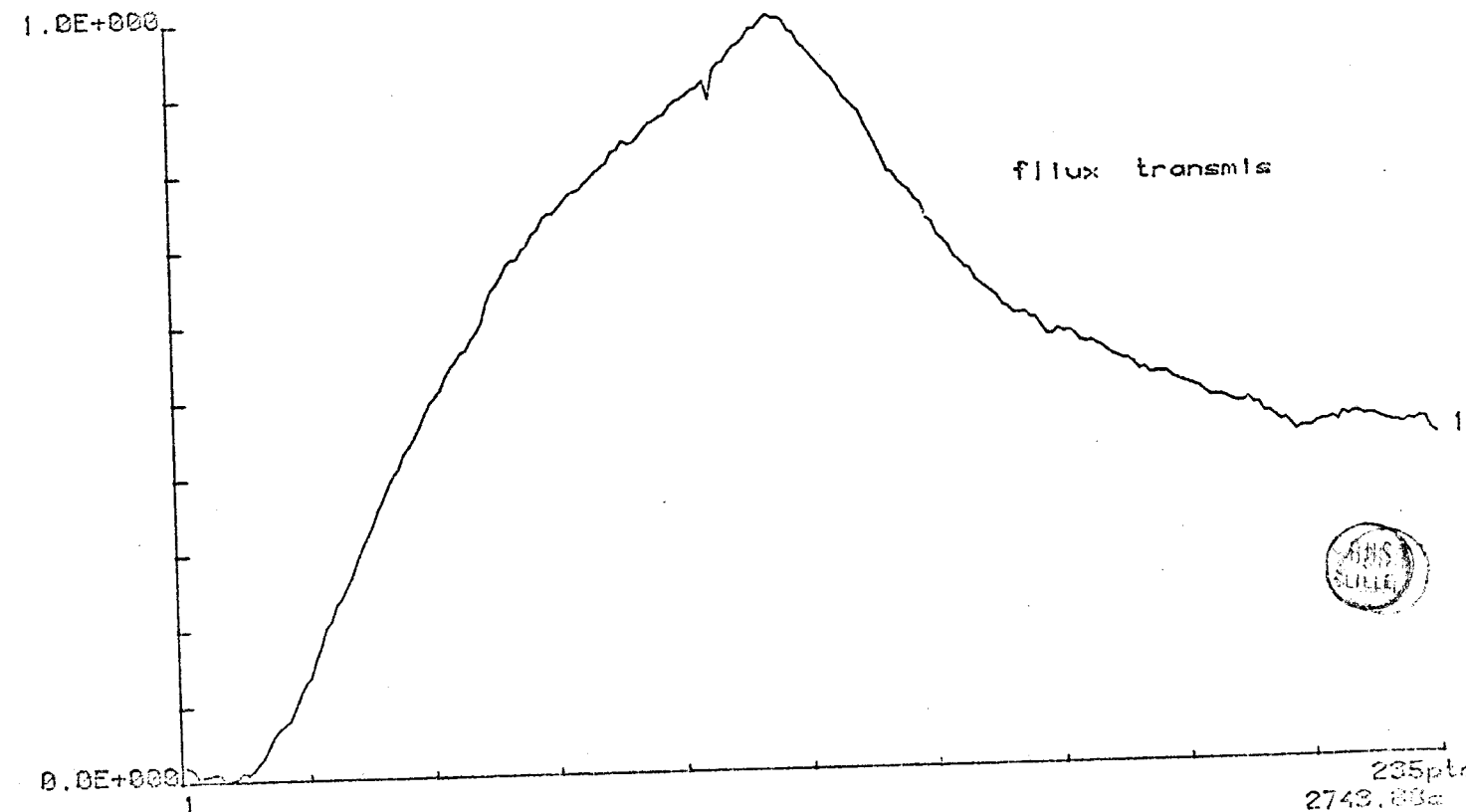
$\text{coef. X} = 1.0E-001 / \text{dB}$   
 $\text{coef. Y} = 1.0E-002 / \text{dB}$

PLEXIGLASS 5mm / D= 25.53 S

100%  
102.70



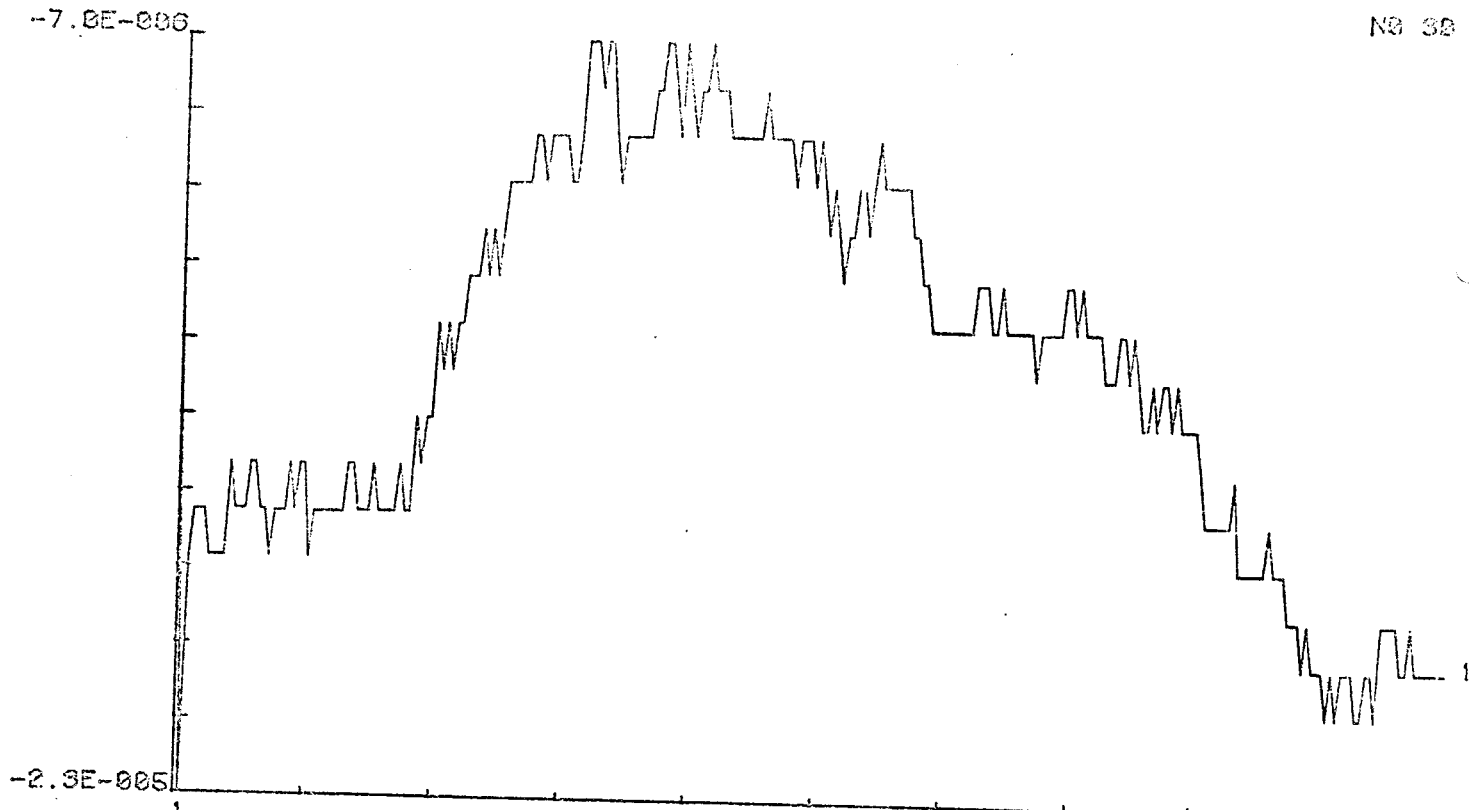
axe X : 1.0E+001 S/div  
 axe Y : 1.0E-001 /div  
 PLEXIGLASS 5mm . Influence des capteurs



axe X : 2.7E+002 a/div  
 axe Y : 1.0E-001 /div  
 PLEXIGLASS 14.8 mm . Influence des capteurs

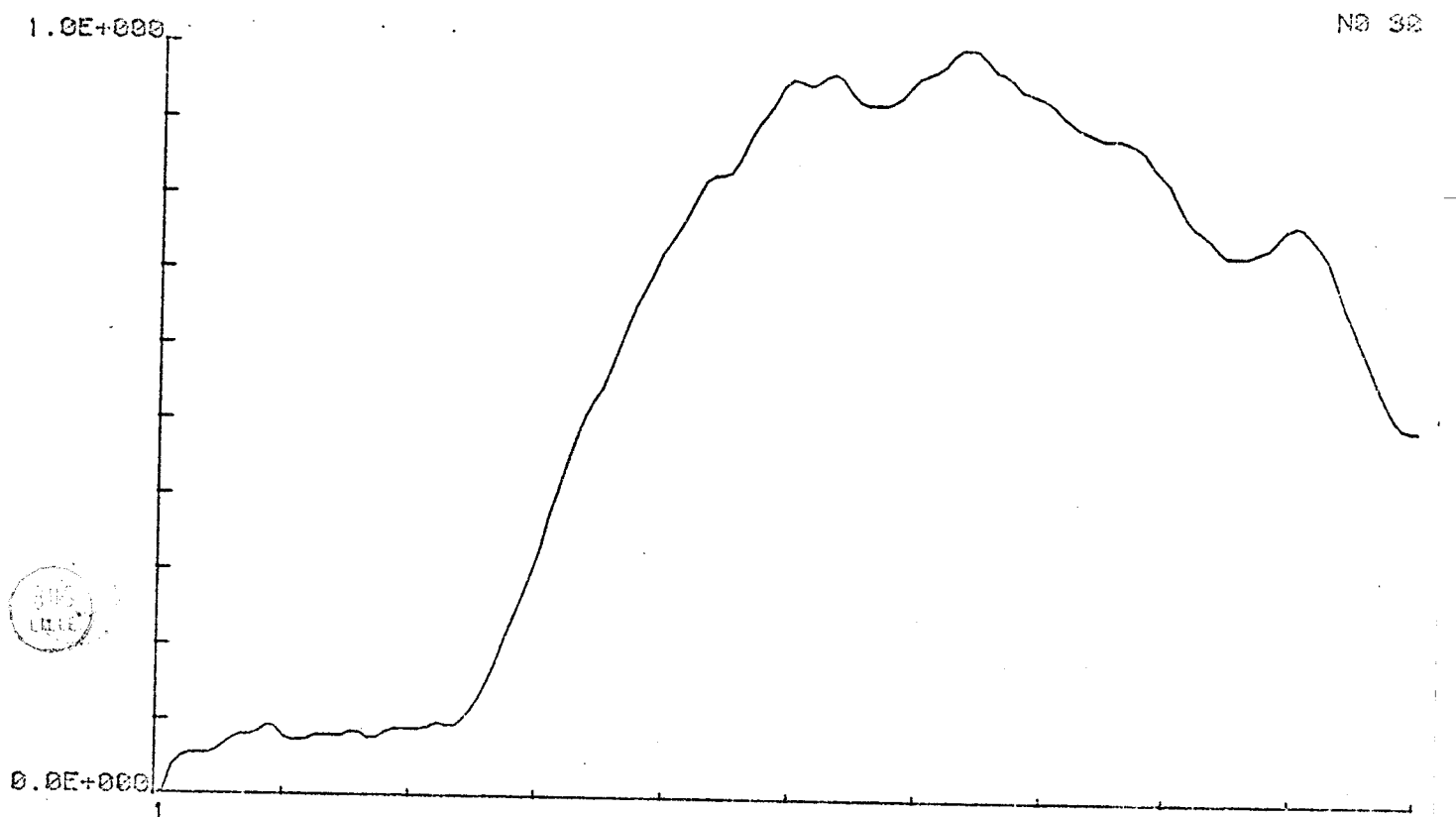






axe X :  $1.1E+001$  s/div  
 axe Y :  $1.6E-006$  /div  
 PLEXIGLASS 5mm , D=5.33 S . Influence de la charge

256pts  
168.60s

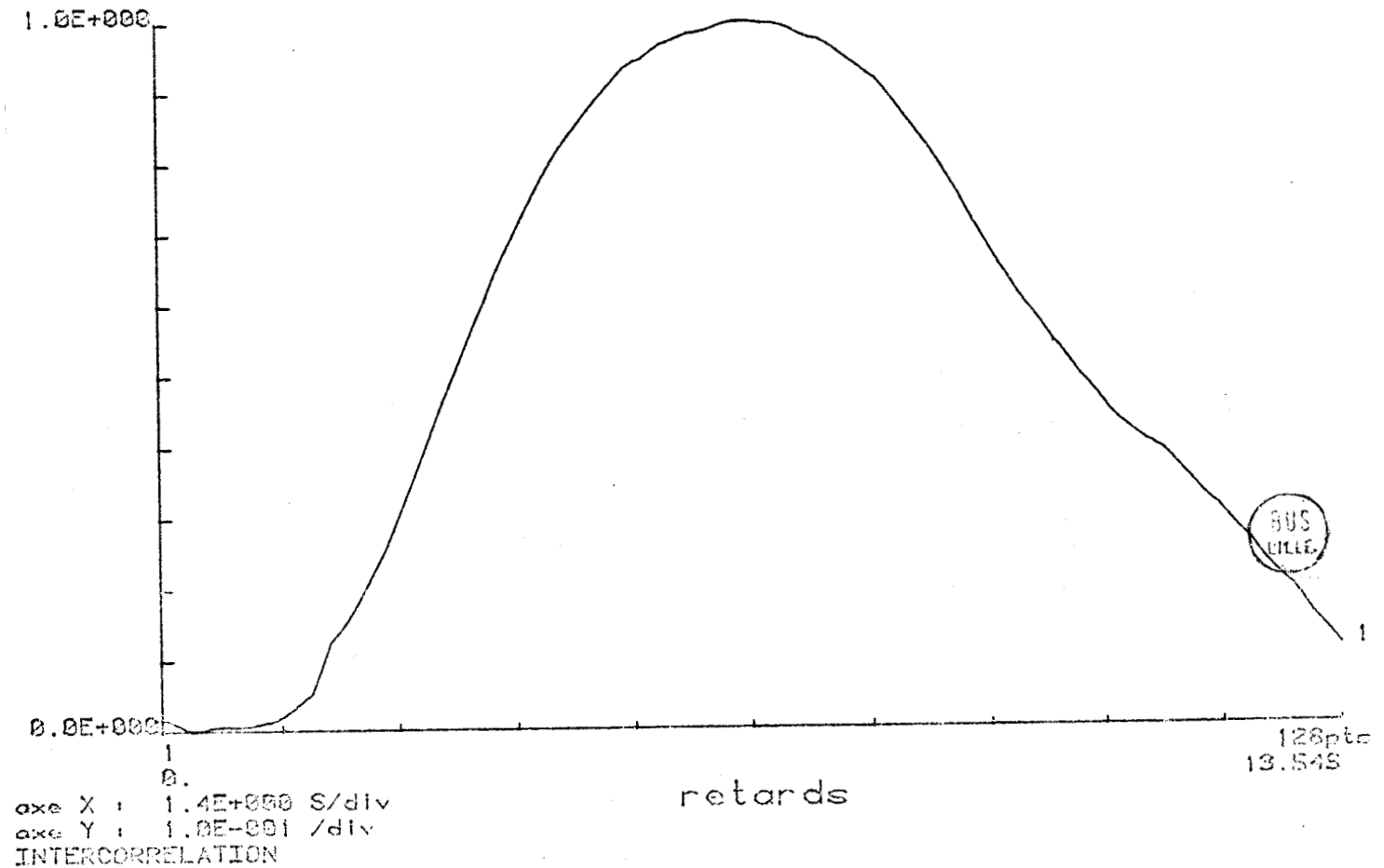
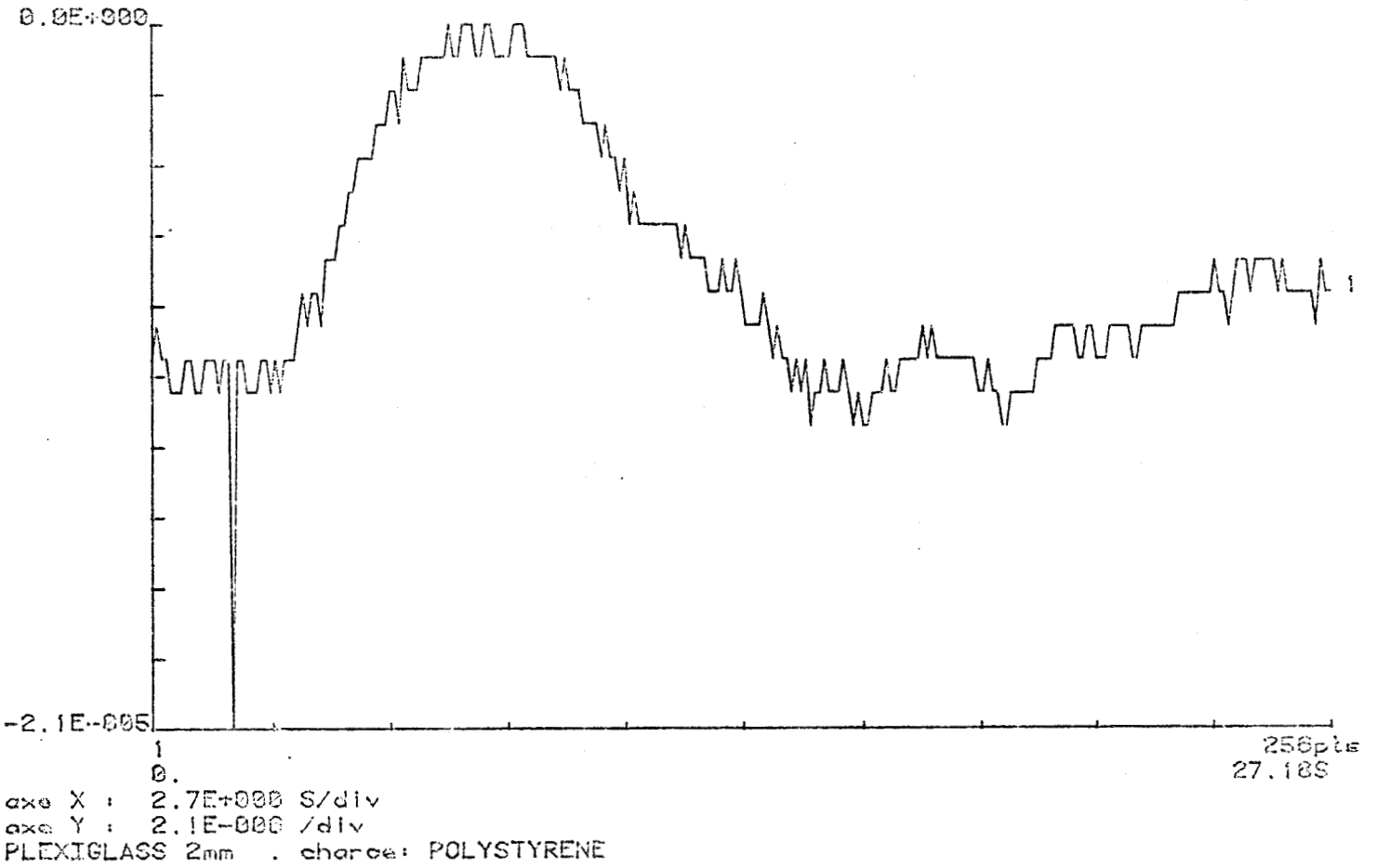


axe X :  $6.3E+000$  S/div  
 axe Y :  $1.0E-001$  /div  
 INTERCORRELATION

retards

150pts  
63.47s

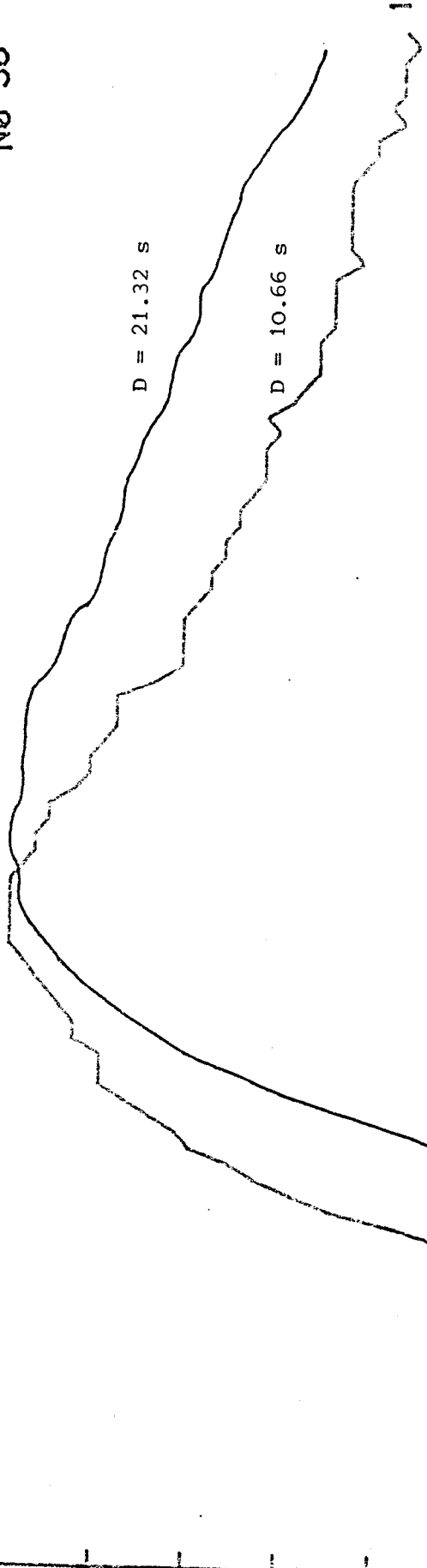




NO 36



1.2E+000

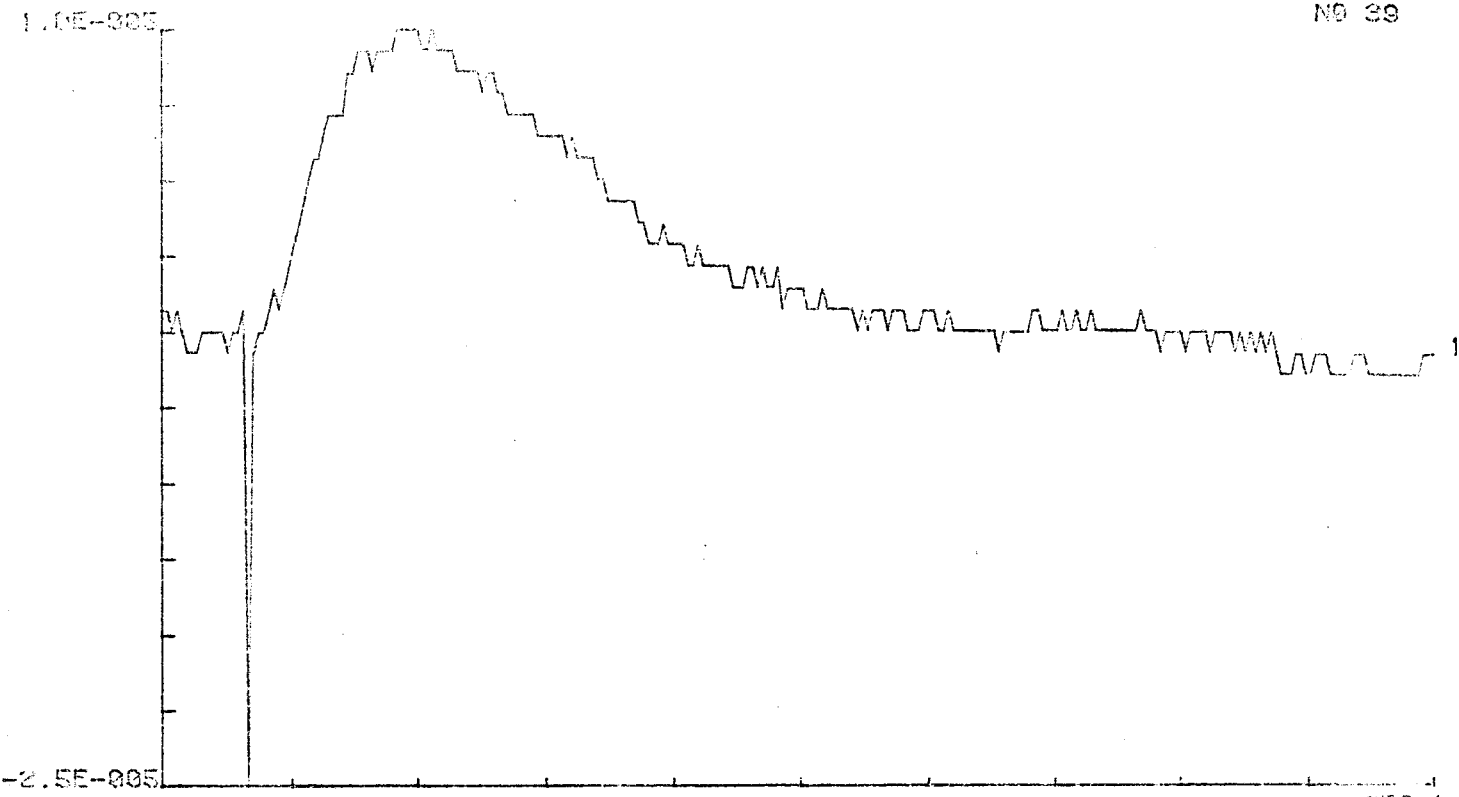


0.0E+000

ans X : 1.1E+001 /div  
 ans Y : 1.2E-001 /div

100pts  
 105.53

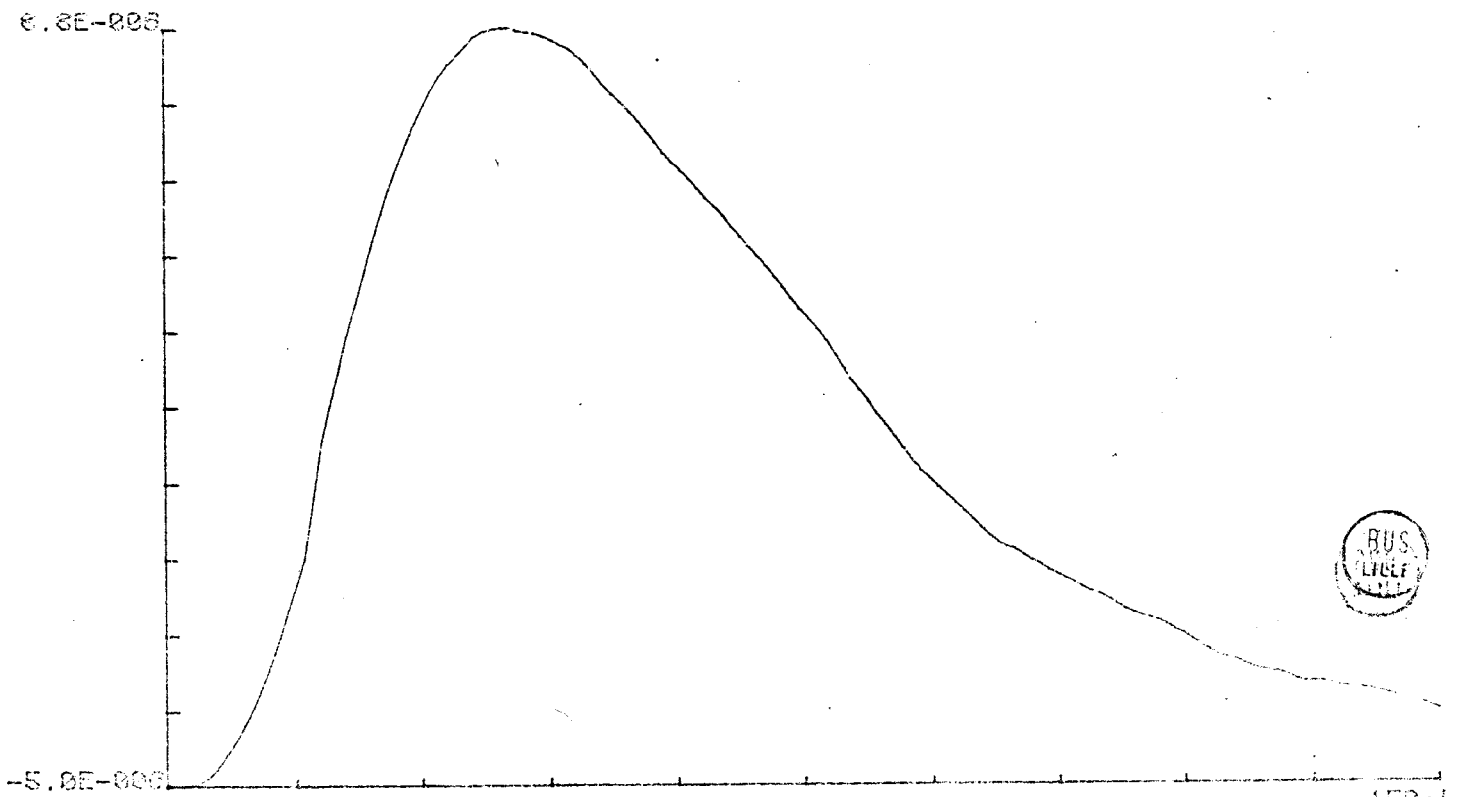
Nº 39



1  
0.  
250pts  
271 30DEC  
axe X : 2.7E+001 SEC/div  
axe Y : 3.5E-005 V/P

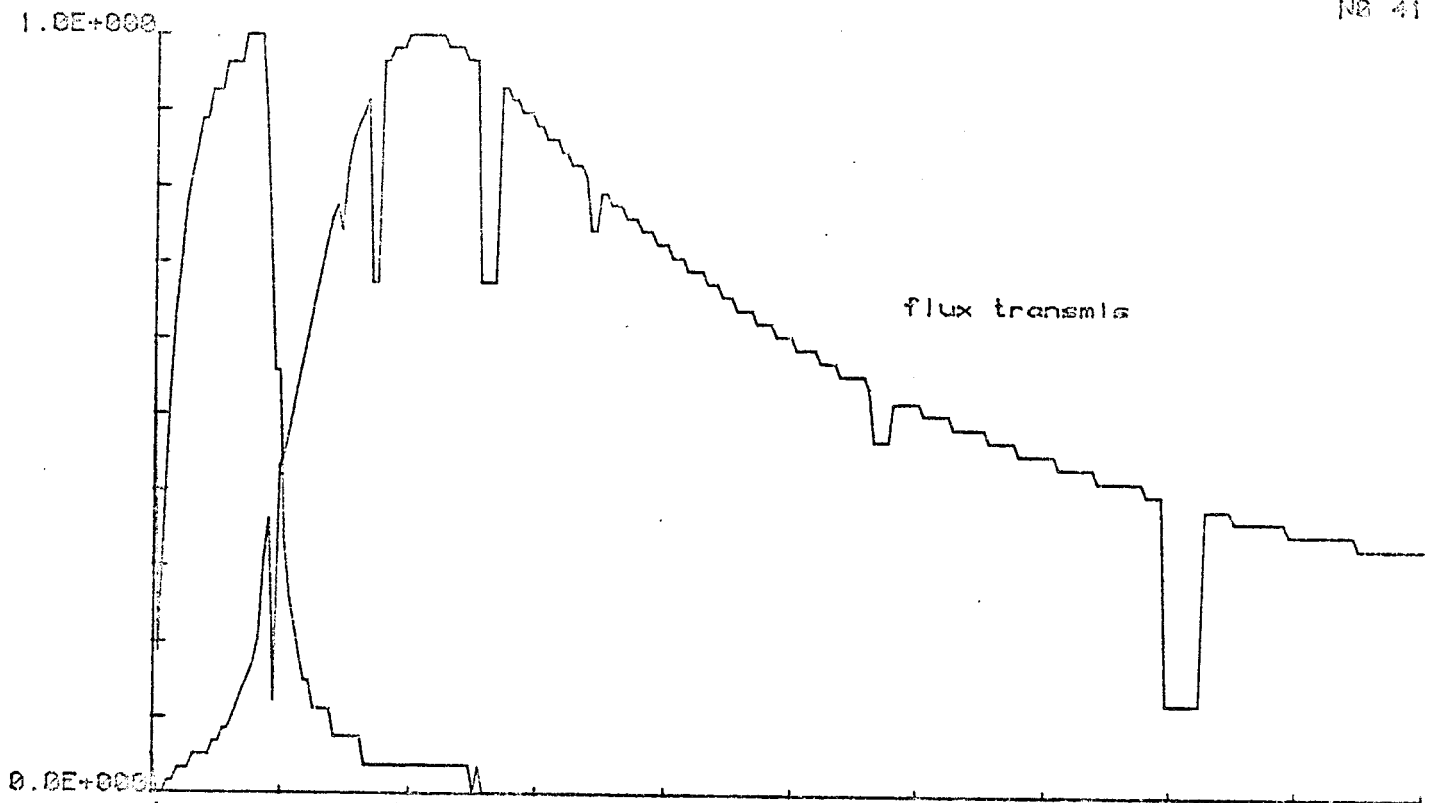
VERRE 2.75mm CHARGE POLYSTYRENE / D = 2.13 S

Nº 39



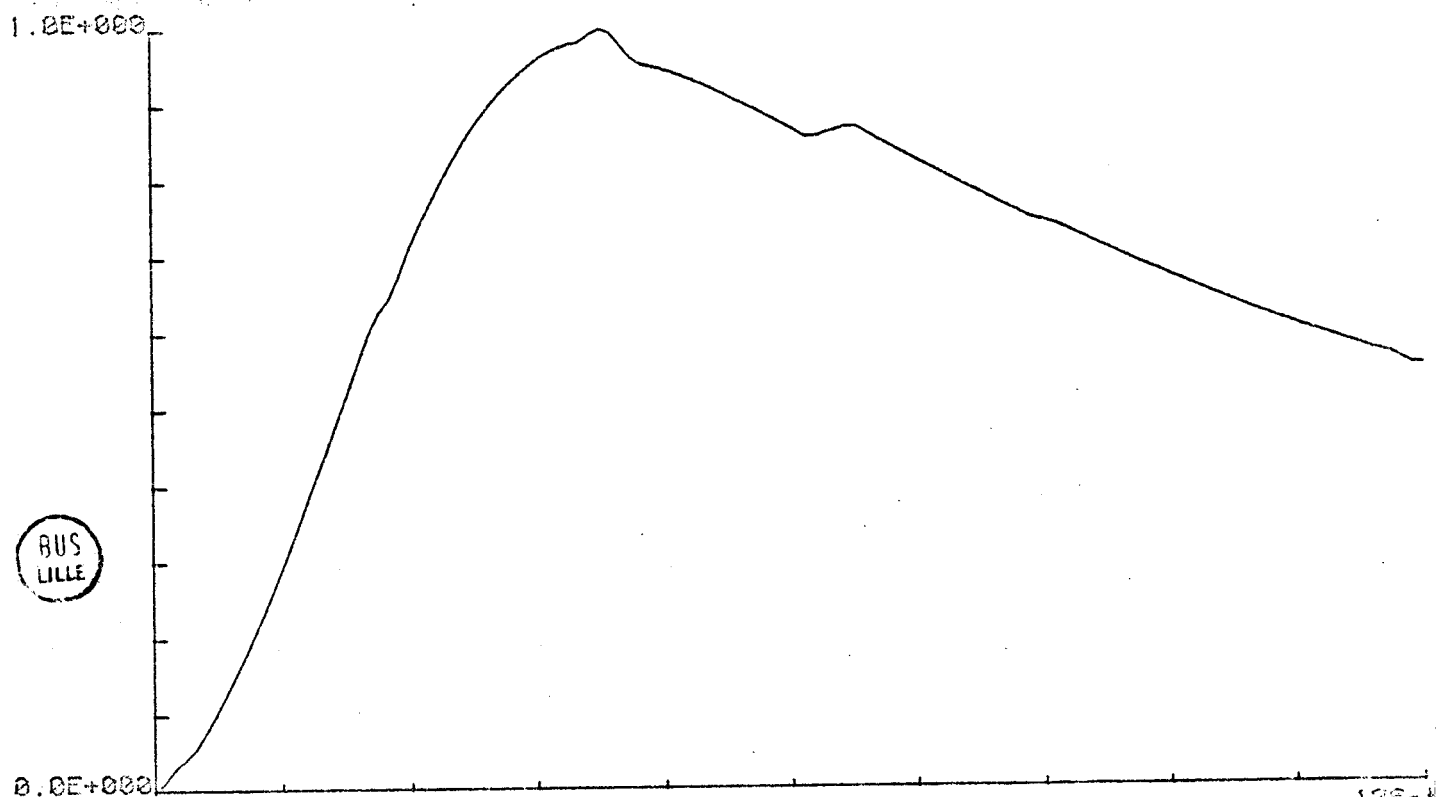
1  
0.  
150pts  
15.83  
axe X : 1.6E+002 /div  
axe Y : 1.4E-006 /div  
INT. CORR. VERRE





axe X :  $2.6E+000$  S/div  
axe Y :  $1.0E-001$  /div  
VERRE - EPOXY 1.5 mm . D=2.13 S

256pt  
25.50S



axe X :  $1.3E+000$  S/div  
axe Y :  $1.0E-001$  /div  
INTERCORRELATION

128pt  
12.50S

BUS  
LILLE

## CHAPITRE 5 : LIMITES ET POSSIBILITÉS DE DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

Nous précisons dans ce chapitre le domaine d'application de notre méthode et insistons plus particulièrement sur l'influence des capteurs. L'ensemble des résultats obtenus nous conduit à étendre la méthode de traitement à une classe beaucoup plus large de signaux d'entrée.

### III-5-1- LIMITATIONS IMPOSEES PAR LE RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

Dans le chapitre 2, nous avons étudié par simulation numérique, la répercussion sur l'estimation du temps caractéristique, d'un bruit additif uniformément distribué. Pour approfondir une telle étude, il eut été nécessaire de faire intervenir le spectre du bruit ou, ce qui revient au même, sa fonction d'auto-corrélation. Nous avons volontairement adopté un point de vue pragmatique et avons montré que pour des rapports signal sur bruit faibles, il était nécessaire d'effectuer un lissage de la courbe d'intercorrélacion afin de localiser le maximum avec une précision acceptable. Dans le même chapitre, nous avons montré que les créneaux de courte durée conduisent à des estimations plus précises du temps caractéristique. Ce résultat déduit d'une simulation numérique doit être pris avec réserve car en pratique les créneaux de durée trop courte conduisent à un rapport signal sur bruit faible, ce qui entraîne des erreurs inévitables. Une deuxième limitation inhérente aux très faibles valeurs de  $\delta/\tau_c$  est l'applatissage du sommet de la courbe d'intercorrélacion. Il en résulte, en présence de bruit, des difficultés pour déterminer la position du maximum avec précision. A cet égard, le critère d'identification retenu n'est pas optimal dans le sens qu'il n'exploite pas l'information contenue dans la totalité de la courbe d'intercorrélacion (à l'instar des techniques de régression). Soucieux de conserver à la méthode sa simplicité première, nous avons augmenté le rapport signal sur bruit afin de limiter les erreurs dues aux faibles valeurs du rapport signal/bruit. Pour des rapports  $\delta/\tau_c$  supérieurs à 0.05, on obtient dans la plupart des cas des courbes d'intercorrélacion présentant un maximum bien marqué.

Pour rendre compte de l'amplitude du signal détecté en fonction de la durée du créneau, nous représentons dans le tableau III-5-1 la valeur  $\phi_{2M}$  du maximum du flux sortant en fonction du rapport  $\delta/\tau_c$  pour un flux incident d'amplitude 1 W.

$\delta/\tau_c$	0.002	0.02	0.05	0.1	0.2
$\phi_{2M}$ (W)	0.004	0.04	0.09	0.18	0.34

Tableau III-5-1

Ce tableau met en évidence la faible amplitude du signal détecté lorsque le signal d'entrée est un créneau de durée trop brève. La corrélation permet d'extraire l'information lorsque le bruit additif possède une large bande mais lorsque le temps caractéristique du matériau à caractériser est élevé, les variations de flux induites par une ambiance non thermostatée ou des conditions initiales de température non uniforme provoquent une dérive thermique. Cette dérive superposée au signal utile peut provoquer, lorsque le rapport signal sur bruit n'est pas suffisant, de sérieuses perturbations et rendre inexploitable les enregistrements obtenus. Le traitement par corrélation ne permet pas de lutter contre les dérives. Il est possible, par des techniques de filtrage, de réduire l'influence des perturbations de très basses fréquences. En pratique, seules les conditions expérimentales bien soignées, un bon choix des évolutions thermocinétiques observées et une durée d'expérimentation courte, permettent de s'affranchir de ce phénomène de dérive.

En l'absence de ces problèmes de dérive thermique, la méthode de traitement par corrélation permet d'exploiter des signaux de faible amplitude. A titre d'exemple, nous donnons en figure III.5.1.0 un enregistrement effectué sur un échantillon de plexiglass de 5 mm d'épaisseur. L'amplitude du signal de sortie est de l'ordre de 50 mW. Les résultats obtenus sont tout à fait en accord avec les valeurs données dans la littérature.

### III-5-2- INFLUENCE DES CAPTEURS

Dans la partie théorique de notre travail, nous avons établi le modèle de la réponse impulsionnelle pour un milieu homogène monocouche en négligeant l'influence des capteurs. Nous avons montré dans la partie expérimentale que l'influence des capteurs conduit dans certains cas à une détermination peu précise de la diffusivité thermique. Le retard introduit par les capteurs que l'on peut modéliser par des "matériaux équivalents", conduit à un temps caractéristique apparent plus élevé. Pour obtenir l'évolution réelle du flux sortant à partir des informations fournies par les capteurs, il est nécessaire d'effectuer une déconvo-

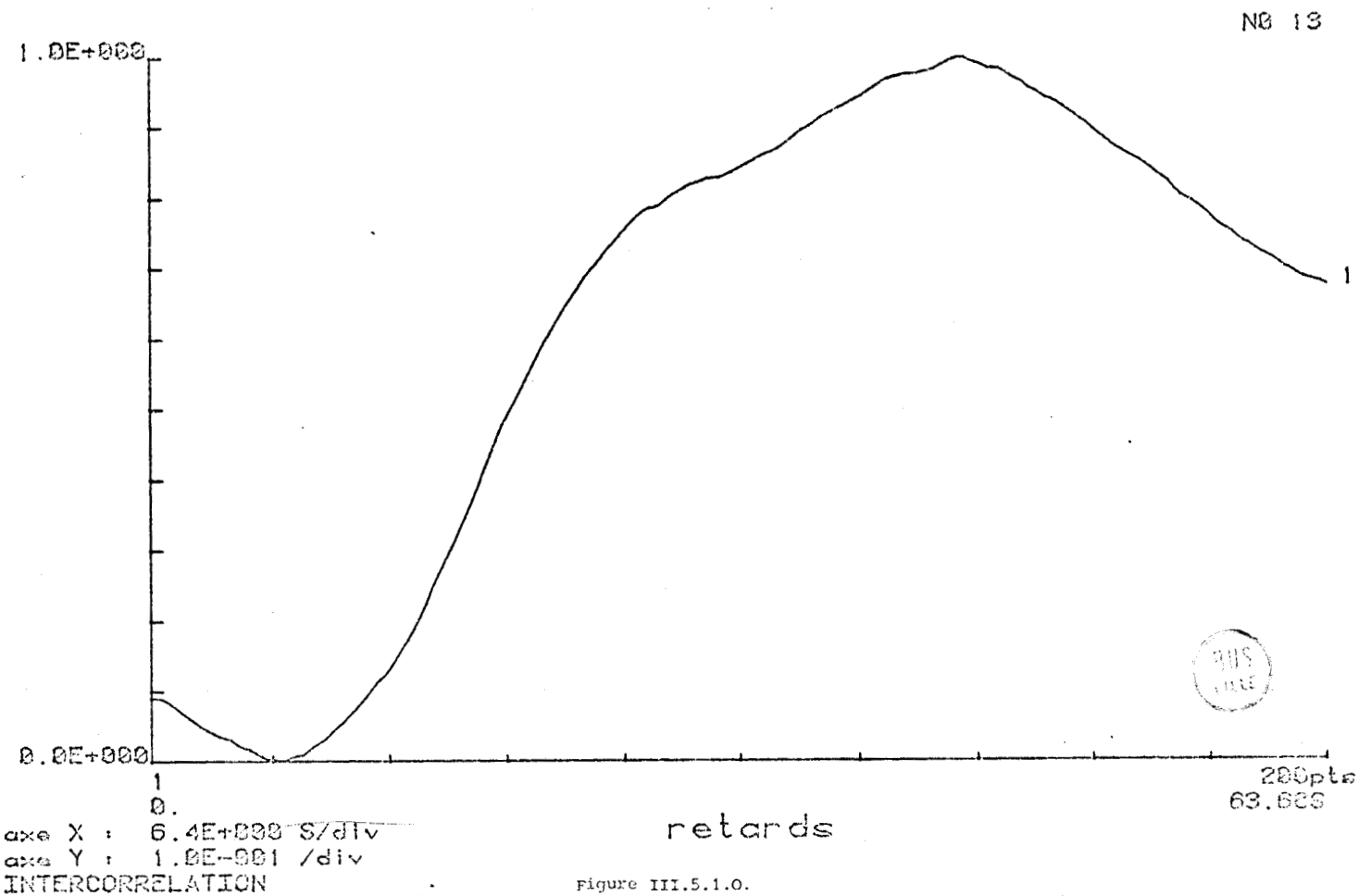
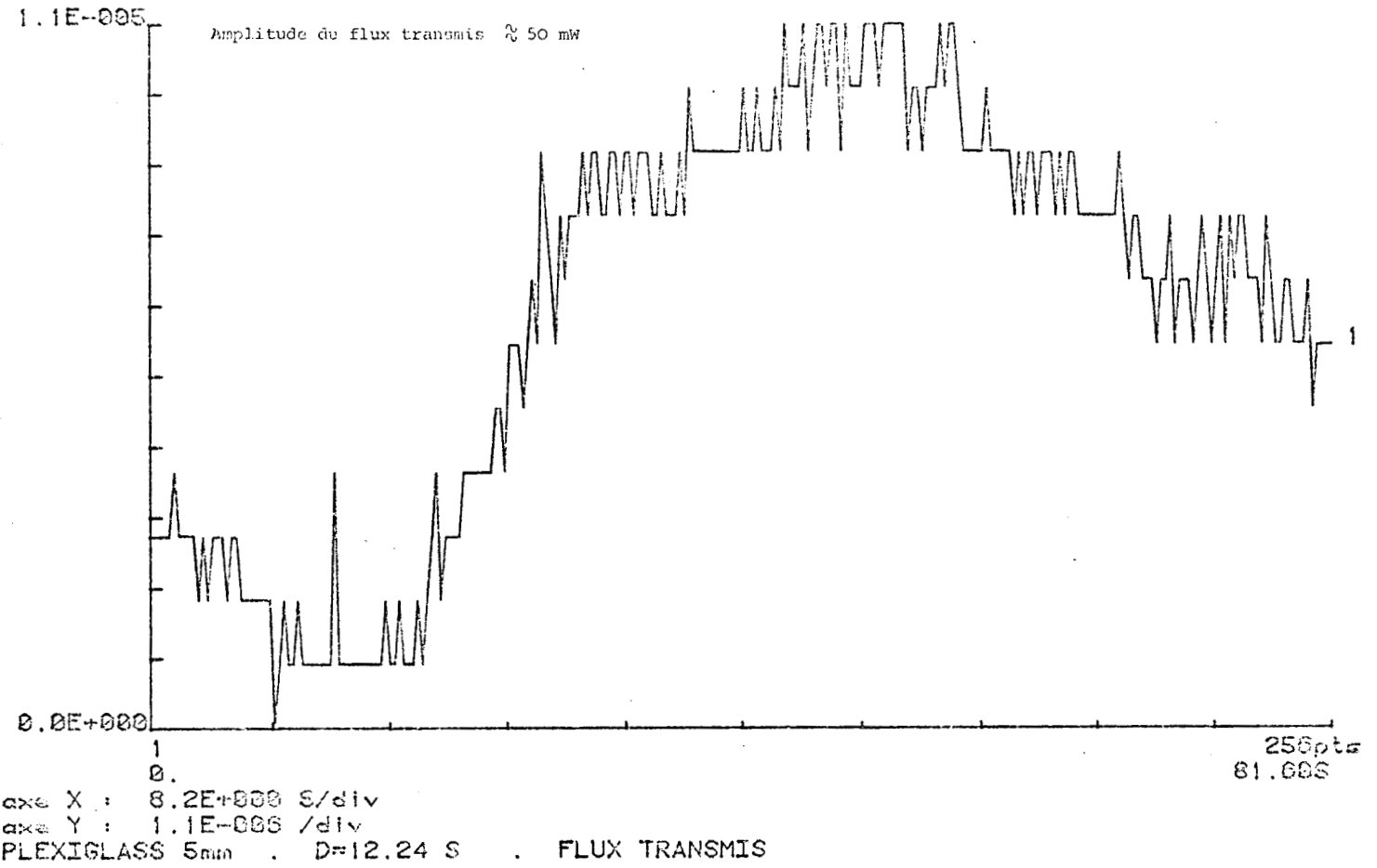


Figure III.5.1.0.



lution des mesures. Une telle opération n'est possible que lorsque l'on connaît la fonction de transfert des capteurs.

En toute rigueur le milieu sous test peut être modélisé par un système à trois couches. Les deux couches externes représentant les fluxmètres (figure III-5-2-0).

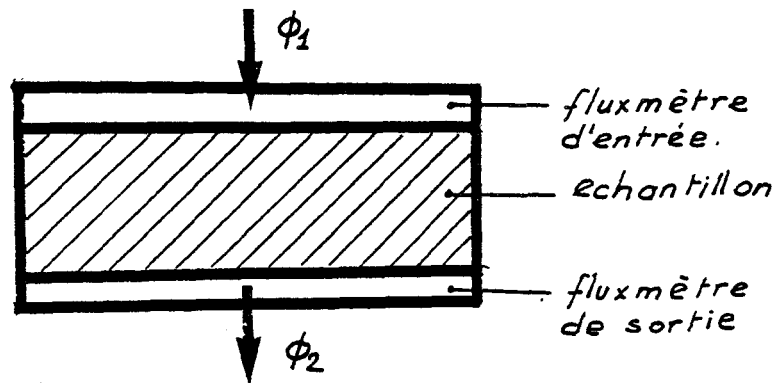


Figure III-5-2-0

La matrice de transition  $[a_3]$  du système tricouche s'exprime par la relation :

$$[a_3] = [a'] [a] [a']$$

où  $[a']$  désigne la matrice de transition du milieu équivalent à un fluxmètre et  $[a]$  la matrice de transition du matériau. En partant de la matrice  $[a_3]$  ainsi défini il est possible d'établir, de la même façon que pour un milieu monocouche, les modèles analytiques représentatifs des évolutions thermocinétiques. En pratique, afin de limiter l'influence des capteurs, nous avons souvent conservé dans le montage le seul fluxmètre de sortie. Dans ce cas, on est en présence d'un milieu bicouche dont la matrice de transition  $[a_2]$  s'écrit :

$$[a_2] = [a] [a']$$

Les matrices  $[a]$  et  $[a']$  sont analogues, les quantités primées se rapportant au fluxmètre.

La matrice de transition du système bicouche peut se mettre sous la forme :

$$[a_2] = \begin{bmatrix} A_2 & -B_2 \\ -C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

avec, en utilisant les résultats du paragraphe I-2-2,

$$D_2 = \text{ch } \sqrt{\tau_c} p \quad \text{ch } \sqrt{\tau'_c} p + \frac{b}{b'} \quad \text{sh } \sqrt{\tau_c} p \quad \text{sh } \sqrt{\tau'_c} p$$

La fonction de transfert de flux s'exprime par la relation :

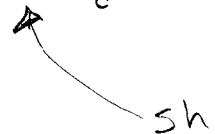
$$H_2(p) = \left[ \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right]_{\theta_2=0} = \frac{1}{D_2}$$

Soit :

$$H_2(p) = \frac{1}{\text{ch}\sqrt{\tau_c} p} \frac{1}{\text{ch } \sqrt{\tau'_c} p + \frac{b}{b'} \quad \text{sh } \sqrt{\tau'_c} p \quad \text{th } \sqrt{\tau_c} p}$$

ou encore

$$H_2(p) = H(p) \cdot H_f(p)$$



La fonction de transfert  $H_2(p)$  se décompose en un produit de deux facteurs :  $H(p)$  et  $H_f(p)$ ;  $H(p)$  représentant la fonction de transfert obtenue dans le cas idéal et  $H_f(p)$  une fonction faisant intervenir les paramètres thermophysiques du capteur. Les pôles de  $H_2(p)$  sont solution de l'équation :

$$\text{ch } \sqrt{\tau_c} p \quad \text{ch } \sqrt{\tau'_c} p + \frac{b}{b'} \quad \text{sh}\sqrt{\tau_c} p \quad \text{sh } \sqrt{\tau'_c} p = 0$$

qui n'admet de solution que pour  $\sqrt{p}$  imaginaire pur.

En posant  $p = -m^2$  et en introduisant les résistances et les capacités thermiques des deux milieux, la détermination des pôles se ramène à la résolution de l'équation transcendante :

$$\text{cotg } (m \sqrt{R C}) \quad \text{cotg } (m \sqrt{R' C'}) - \sqrt{\frac{C}{R} \frac{R'}{C'}} = 0$$

Lorsque l'on connaît les constantes figurant dans cette équation, on peut déterminer les racines  $m_k$  et la réponse impulsionnelle associée à  $H_2(p)$  s'écrit

$$h_2(t) = \sum_k \alpha_k e^{-m_k t}$$

où  $\alpha_k$  est évalué par la méthode des résidus.

Lorsque la résistance thermique  $R'$  et la capacité thermique  $C'$  du capteur sont négligeables devant celles du matériau testé :

$$R' \ll R \quad , \quad C' \ll C$$

Le problème se simplifie et on est conduit à résoudre l'équation :

$$\cos (m \sqrt{\tau_c}) = 0$$

dont la solution fournit les pôles

$$m_k = (2k + 1)^2 \frac{\pi^2}{4 \tau_c}$$

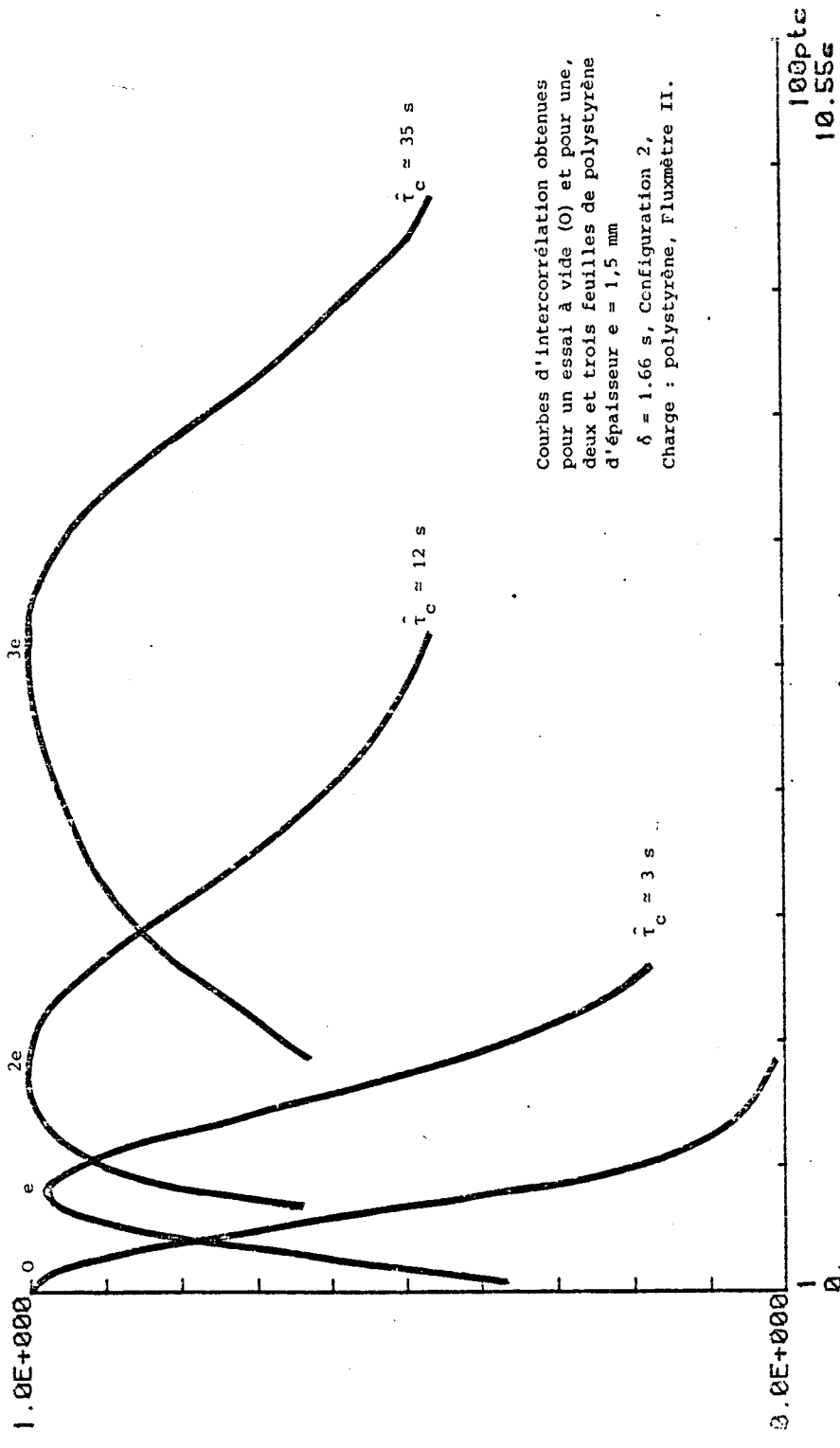
qui sont justement ceux de la fonction de transfert idéale  $H(p)$ .

L'analyse précédente confirme les écarts obtenus en pratique, lorsque l'on applique les résultats d'un modèle monocouche pour déterminer la diffusivité thermique d'un milieu de faible épaisseur ; on obtient une diffusivité apparente plus faible que la diffusivité réelle. Il est possible lorsque l'on connaît les caractéristiques thermophysiques du capteur et une constante thermophysique ( $R$  ou  $C$ ) du matériau, de calculer la diffusivité à partir du temps caractéristique apparent. Nous nous sommes contentés, dans un premier temps, d'évaluer les erreurs commises en négligeant l'influence du capteur. Pour un échantillon en plexiglass de 5 mm d'épaisseur ( $\tau_c = 250$  s) et un fluxmètre de temps caractéristique de l'ordre de 25 s. , on obtient des résultats assez satisfaisants en n'effectuant aucune correction.

### III-5-3- SENSIBILITE DE LA METHODE

Nous avons effectué des mesures sur des matériaux très minces. Les résultats obtenus, s'ils ne correspondent pas à la diffusivité réelle, renseignent au moins sur la possibilité d'étendre les techniques développées à la détermination des paramètres thermophysiques de matériaux de faible épaisseur. A titre d'exemple, nous donnons en figure III.5.3.0 les courbes expérimentales obtenues avec des feuilles de polystyrène ayant une épaisseur de l'ordre de 1.5 mm. Nous avons relevé les évolutions du flux sortant pour divers cas de figure : à vide, en intercalant un deux, puis trois feuilles entre chauffeurette et fluxmètre. Les courbes d'intercorrélations obtenues montrent le déplacement de l'abscisse du maximum lorsque l'épaisseur du matériau varie. Les faibles temps caractéristiques de ces feuilles ( $\approx 1$  sec. accentuent l'influence du fluxmètre qui a un temps caractéristique du même ordre de grandeur. Cependant le déplacement du maximum est net. Il est possible de calculer ce déplacement en fonction du temps caractéristique de la feuille lorsque l'on

Nº 0



Courbes d'intercorrélation obtenues pour un essai à vide (0) et pour une, deux et trois feuilles de polystyrène d'épaisseur  $e = 1,5 \text{ mm}$   
 $\delta = 1.66 \text{ s}$ , Configuration 2,  
Charge : polystyrène, Fluxmètre II.

axe X : 1.1E+000 s/div  
axe Y : 1.0E-001 /div  
FIGURE III.5.3.0 INTERCORRELATION . FEUILLES DE POLYSTYRENE



connaît la réponse impulsionnelle du système vide (i.e : chaufferette-fluxmètre). Un tel calcul pourrait permettre la détermination de la diffusivité de matériaux de très faibles épaisseurs.

Les essais effectués sur du verre-époxy de 1,6 mm d'épaisseur donnent un temps caractéristique apparent de l'ordre de 27 sec. soit une diffusivité apparente de  $0.94 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

De tels essais effectués dans des conditions expérimentales assez variées démontrent la possibilité d'étendre les méthodes fluxmétriques à la caractérisation de parois minces ; l'excellente reproductibilité des résultats obtenus nous encourage dans cette voie.

### III-5-4- GENERALISATION DE LA METHODE A D'AUTRES TYPES DE SIGNAUX D'ENTREE

Les résultats obtenus par simulation numérique au chapitre 2 nous ont permis de préciser l'influence des perturbations de diverses natures sur la détermination du temps caractéristique. Ces résultats montrent que l'incidence d'une déformation du signal d'entrée sur la valeur estimée du temps caractéristique n'est pas appréciable lorsque le signal d'entrée possède un front de montée et un front de descente suffisamment raides.

De cette étude, il résulte que la spécification de la seule densité spectrale du signal de flux incident était suffisante ; dès lors les calculs effectués pour le signal d'entrée en créneau sont valables pour des signaux d'entrée ayant la même densité spectrale. Il existe une classe de signaux répondant au problème posé. Cette généralisation de la méthode à d'autres types de signaux d'entrée représente à notre sens l'un des aspects les plus intéressants de notre travail. En égard aux difficultés pratiques pour imposer l'évolution temporelle du flux incident, la méthode de traitement par corrélation permet de réduire les contraintes expérimentales.

L'équation de Wiener-Hopf (II.2.2.02)

$$R_{es}(\tau) = \int_0^{\infty} h(t) R_{ee}(\tau-t) dt$$

exprime la fonction d'intercorrélation par un produit de convolution de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  et de la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée. En d'autres termes, pour un même système de réponse impulsionnelle  $h(t)$  tous les signaux d'entrée ayant la même fonction d'autocorrélation  $R_{ee}(\tau)$ , conduisent à une même fonction d'intercorrélation entrée-sortie. Cette classe de signaux correspond dans notre étude aux signaux ayant une fonction d'autocorrélation identique à celle d'un créneau de durée  $\delta$  Figure III.5.4.0.

$$e(t) = \begin{cases} A & \text{pour } 0 \leq t < \delta \\ 0 & \text{pour } t > \delta \end{cases} \quad \begin{cases} R_{ee}(\tau) = 0 & \text{pour } |\tau| > \delta \\ R_{ee}(\tau) = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right) & \text{pour } |\tau| \leq \delta \end{cases}$$

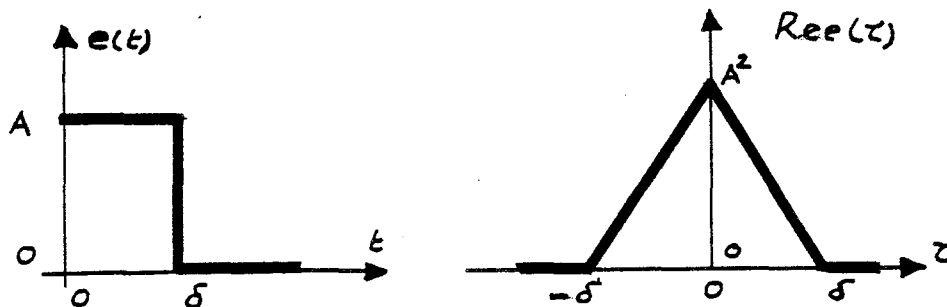


Figure III.5.4.0

De façon analogue, puisque la densité spectrale d'un signal est donnée par la transformée de Fourier de son autocorrélation, la spécification du seul contenu spectral suffit pour définir une telle classe de signaux. Soit, dans notre cas, les signaux dont le spectre de puissance est de la forme  $\left(\frac{\sin \alpha f}{\alpha f}\right)^2$  où  $f$  désigne la fréquence et  $\alpha$  une constante.

Par ailleurs, nous avons évoqué les problèmes rencontrés en pratique lorsque la durée de l'impulsion devient trop courte, alors même que cette diminution de la durée devrait théoriquement conduire, en absence de bruit, à une estimation plus précise du temps caractéristique ; ces difficultés proviennent essentiellement du rapport signal sur bruit qui devient alors trop faible.

En tenant compte des remarques précédentes sur la possibilité d'appliquer notre méthode à une classe de signaux, il est légitime de se demander s'il existe des signaux déterministes ou stochastiques appartenant à la classe définie ci-dessus, mais possédant une énergie beaucoup plus élevée. La possibilité de générer de tels signaux (équivalents à des impulsions de courte durée) permet d'envisager la détermination du temps caractéristique avec une précision beaucoup plus grande.

Ces signaux, en plus des spécifications précédentes, doivent être simples à générer afin de conserver à la méthode sa simplicité de mise en oeuvre. Les signaux binaires pseudo-aléatoires répondent à cette question. La quatrième partie de ce mémoire sera consacrée à la détermination de la diffusivité par intercorrélations avec des signaux d'entrée pseudo-aléatoires.

ANNEXES A-III-1

BUSS  
LITTLE

$\delta/\epsilon_1$	$\delta/\epsilon_2$	$\delta/\epsilon_1$	$\delta/\epsilon_2$	$\delta/\epsilon_2$	$\epsilon_1/\epsilon_2$	$\delta/\epsilon_2$	$\epsilon_1/\epsilon_2$
0.01	0.0017	0.52	0.0356	0.01	0.1668	0.52	0.3183
0.02	0.0033	0.53	0.0979	0.02	0.1674	0.53	0.3194
0.03	0.0050	0.54	0.1002	0.03	0.1684	0.54	0.3212
0.04	0.0067	0.55	0.1025	0.04	0.1697	0.55	0.3227
0.05	0.0083	0.56	0.1048	0.05	0.1713	0.56	0.3241
0.06	0.0100	0.57	0.1072	0.06	0.1735	0.57	0.3256
0.07	0.0117	0.58	0.1096	0.07	0.1763	0.58	0.3263
0.08	0.0134	0.59	0.1120	0.08	0.1788	0.59	0.3282
0.09	0.0150	0.60	0.1145	0.09	0.1819	0.60	0.3294
0.10	0.0167	0.61	0.1170	0.10	0.1854	0.61	0.3307
0.11	0.0184	0.62	0.1195	0.11	0.1891	0.62	0.3320
0.12	0.0201	0.63	0.1221	0.12	0.1929	0.63	0.3332
0.13	0.0218	0.64	0.1248	0.13	0.1971	0.64	0.3344
0.14	0.0235	0.65	0.1274	0.14	0.2014	0.65	0.3355
0.15	0.0252	0.66	0.1301	0.15	0.2058	0.66	0.3367
0.16	0.0269	0.67	0.1329	0.16	0.2104	0.67	0.3376
0.17	0.0286	0.68	0.1357	0.17	0.2151	0.68	0.3388
0.18	0.0303	0.69	0.1386	0.18	0.2198	0.69	0.3396
0.19	0.0320	0.70	0.1415	0.19	0.2245	0.70	0.3408
0.20	0.0338	0.71	0.1444	0.20	0.2291	0.71	0.3417
0.21	0.0355	0.72	0.1474	0.21	0.2336	0.72	0.3426
0.22	0.0373	0.73	0.1505	0.22	0.2378	0.73	0.3435
0.23	0.0390	0.74	0.1536	0.23	0.2421	0.74	0.3446
0.24	0.0408	0.75	0.1567	0.24	0.2463	0.75	0.3452
0.25	0.0426	0.76	0.1600	0.25	0.2500	0.76	0.3461
0.26	0.0443	0.77	0.1632	0.26	0.2537	0.77	0.3470
0.27	0.0461	0.78	0.1666	0.27	0.2573	0.78	0.3479
0.28	0.0479	0.79	0.1700	0.28	0.2608	0.79	0.3487
0.29	0.0497	0.80	0.1734	0.29	0.2642	0.80	0.3493
0.30	0.0516	0.81	0.1769	0.30	0.2674	0.81	0.3502
0.31	0.0534	0.82	0.1805	0.31	0.2705	0.82	0.3508
0.32	0.0552	0.83	0.1841	0.32	0.2736	0.83	0.3517
0.33	0.0571	0.84	0.1877	0.33	0.2765	0.84	0.3522
0.34	0.0590	0.85	0.1914	0.34	0.2794	0.85	0.3525
0.35	0.0608	0.86	0.1952	0.35	0.2821	0.86	0.3534
0.36	0.0627	0.87	0.1989	0.36	0.2849	0.87	0.3540
0.37	0.0647	0.88	0.2027	0.37	0.2874	0.88	0.3549
0.38	0.0666	0.89	0.2066	0.38	0.2898	0.89	0.3553
0.39	0.0685	0.90	0.2104	0.39	0.2923	0.90	0.3556
0.40	0.0705	0.91	0.2143	0.40	0.2945	0.91	0.3566
0.41	0.0725	0.92	0.2182	0.41	0.2969	0.92	0.3569
0.42	0.0745	0.93	0.2222	0.42	0.2992	0.93	0.3575
0.43	0.0765	0.94	0.2261	0.43	0.3013	0.94	0.3581
0.44	0.0785	0.95	0.2301	0.44	0.3033	0.95	0.3587
0.45	0.0806	0.96	0.2340	0.45	0.3054	0.96	0.3593
0.46	0.0827	0.97	0.2380	0.46	0.3074	0.97	0.3596
0.47	0.0848	0.98	0.2420	0.47	0.3092	0.98	0.3602
0.48	0.0869	0.99	0.2460	0.48	0.3109	0.99	0.3604
0.49	0.0890	1.00	0.2501	0.49	0.3133	1.00	0.3610
0.50	0.0912	1.01	0.2541	0.50	0.3145	1.01	0.3613

Abaque  $G(\delta/\epsilon_2, \delta/\epsilon_1) = 0$

$0.01 \leq \delta/\epsilon_1 \leq 1, 0.1$

Racines de l'equation du "maximum"  $G(\epsilon_1/\epsilon_2, \delta/\epsilon_2) = 0$



CALCUL DU TEMPS CARACTERISTIQUE

Formule approchée.

$$\tau_c = 6 \tau_1 \cdot \xi(\delta/\tau_1)$$

$\xi$  est un facteur correctif qui se met sous la forme :

$$\xi = \frac{a_0 + a_1 \frac{\delta}{\tau_1}}{b_0 + b_1 \left(\frac{\delta}{\tau_1}\right) + b_2 \left(\frac{\delta}{\tau_1}\right)^2}$$

Précision meilleure que 0,5 %

$\delta/\tau_1$		$\xi(\delta/\tau_1)$					
		a	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>
0	0,1	0,1	1	0	1	0	0
0,1	0,25	0,25	1	0	0,987	0,122	0
0,25	0,5	0,5	0	1	0,0087	0,895	0,356
0,5	0,8	0,8	0	1	0,251	-0,054	1,297
0,8	1,1	1,1	0	1	-0,356	1,289	0,566
1,1	2,8	2,8	0	1	-1,086	2,57	0

$\delta/\tau_1$	$\delta/\tau_c$	$\delta/\tau_1$	$\delta/\tau_c$
1.00	0.2501	1.51	0.4660
1.01	0.2541	1.52	0.4703
1.02	0.2582	1.53	0.4746
1.03	0.2622	1.54	0.4789
1.04	0.2663	1.55	0.4833
1.05	0.2704	1.56	0.4876
1.06	0.2745	1.57	0.4919
1.07	0.2786	1.58	0.4963
1.08	0.2828	1.59	0.5006
1.09	0.2869	1.60	0.5049
1.10	0.2910	1.61	0.5092
1.11	0.2952	1.62	0.5136
1.12	0.2994	1.63	0.5179
1.13	0.3035	1.64	0.5222
1.14	0.3077	1.65	0.5265
1.15	0.3119	1.66	0.5309
1.16	0.3161	1.67	0.5352
1.17	0.3203	1.68	0.5395
1.18	0.3245	1.69	0.5438
1.19	0.3287	1.70	0.5482
1.20	0.3330	1.71	0.5525
1.21	0.3372	1.72	0.5568
1.22	0.3414	1.73	0.5611
1.23	0.3457	1.74	0.5654
1.24	0.3499	1.75	0.5698
1.25	0.3542	1.76	0.5741
1.26	0.3584	1.77	0.5784
1.27	0.3627	1.78	0.5827
1.28	0.3670	1.79	0.5870
1.29	0.3712	1.80	0.5913
1.30	0.3755	1.81	0.5956
1.31	0.3798	1.82	0.5999
1.32	0.3841	1.83	0.6043
1.33	0.3884	1.84	0.6086
1.34	0.3927	1.85	0.6129
1.35	0.3970	1.86	0.6172
1.36	0.4013	1.87	0.6215
1.37	0.4056	1.88	0.6258
1.38	0.4099	1.89	0.6301
1.39	0.4142	1.90	0.6344
1.40	0.4185	1.91	0.6387
1.41	0.4228	1.92	0.6430
1.42	0.4271	1.93	0.6472
1.43	0.4314	1.94	0.6515
1.44	0.4357	1.95	0.6558
1.45	0.4400	1.96	0.6601
1.46	0.4444	1.97	0.6644
1.47	0.4487	1.98	0.6687
1.48	0.4530	1.99	0.6730
1.49	0.4573	2.00	0.6772

$1 \leq \delta/\tau_1 \leq 2$

Abaque  $G(\delta/\tau_c, \delta/\tau_1) = 0$ .

BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] FOULARD (C.), GENTIL (S.), SANDAZ (J.P.)  
"Commande et régulation par ordinateur numérique"  
Eyrolles , 1977
  
- [2] POVY (L.)  
"Identification des processus"  
Dunod, 1975
  
- [3] BERLOT (R.)  
"Mesure de la diffusivité et de la conductivité thermique des polymères"  
P.S.T. du Ministère de l'Air
  
- [4] WATTIAU (F.)  
"Contribution à l'étude théorique et expérimentale des échanges thermiques  
en régime transitoire dans les matériaux de construction"  
Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Lille 1, 1978
  
- [5] MILNE (W.E.)  
"Numerical Calculus"  
Princeton University Press, 1949
  
- [6] PONCIN (H.)  
"Thermocinétique impulsionnelle et mesure de la diffusivité thermique"  
CHIRON , 1978
  
- [7] LIFERMANN (J.)  
"Les méthodes rapides de transformation du signal"  
MASSON, 1979
  
- [8] THERY (P.), MARECHAL J.C.)  
"Etude et caractérisation d'un nouveau fluxmètre calorifique"  
J. Phys. E. : Sci. Instrum. , Vol. 13, 1980
  
- [9] THERY (P.), PAUQUET (J.)  
"Propriétés thermoélectriques des systèmes à deux couches conductrices  
superposées : application aux mesures de flux calorifiques"  
J. Phys. E. : Sci. Instrum. Vol. 13, 1980

- [10] MARTINET (J.)  
"Détermination des constantes thermiques des solides au moyen des méthodes de régime variable"  
P.S.T. du Ministère de l'Air, n° 411, 1965
- [11] MARECHAL (J.C.) , DEVISME (J.M.)  
"Diffusivité thermique des matériaux de construction. Méthode du signal périodique"  
Annales de l'I.T.B.T.P. , N° 357, Janvier 1978
- [12] KREITH  
"Thermodynamique et transmission de la chaleur"  
Masson
- [13] THERY (P.), DUBUS (J.P.), WATTIAU (F.)  
"Détermination de la diffusivité et de la chaleur massique par traitement d'une évolution thermocinétique transitoire"  
International Journal of Heat and Mass transfer, Vol. 23, pp. 562-566
- [14] DAURON (P.)  
"Contribution à la détermination des grandeurs thermophysiques par une méthode transitoire rapide"  
Thèse Docteur-Ingénieur, Poitiers , 1975
- [15] PELLETIER (P.)  
"Techniques numériques appliquées au calcul scientifique"  
Masson , 1971

QUATRIEME PARTIE

RÉGIME PSEUDO-ALÉATOIRE

---

# CHAPITRE I : LES SÉQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALÉATOIRES

## APPLICATION À L'IDENTIFICATION DES SYSTÈMES

### IV-1-1- LES SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES

Les séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA ou PRBS<sup>(1)</sup>) ont connu un très grand développement au cours de ces dernières années ; d'abord utilisées dans les systèmes de communication digitaux, elles ont trouvé plus récemment de nombreuses applications dans l'identification des systèmes.

Les SBPA sont des signaux générés suivant des lois déterministes, mais leurs propriétés statistiques sont telles qu'on peut les assimiler à des processus aléatoires.

#### IV-1-1-1- GENERATION DES SPBA

Le montage le plus utilisé fait appel à un registre à décalage de N cases actionné par une horloge de période  $\Delta t$ , et un additionneur module 2 (fig.IV.1.1.0). La période maximale qu'on peut obtenir à l'aide d'un tel générateur est  $2^N - 1$  ; en effet, dans le registre on verra défiler au maximum toutes les combinaisons possibles des N éléments avec deux états possibles pour chacun (un ou zéro) sauf la combinaison où toutes les cases du registre sont à l'état zéro. Cette dernière combinaison est interdite car le système resterait indéfiniment dans cet état.

Pour un bouclage quelconque (choix des coefficients  $\alpha_i$  de la figure IV.1.1.0), les états successifs du système ne présentent pas de propriétés particulières, et la fonction d'autocorrélation de la séquence obtenue est quelconque, de plus la période de la séquence n'est pas maximale. Parmi toutes les séquences binaires pouvant être générées par cette méthode, les séquences de longueur maximale présentent des propriétés intéressantes. Ce sont ces SBPA de longueur maximale qui sont utilisés pour l'identification des systèmes.

A titre d'exemple, considérons la séquence obtenue à partir du générateur de la figure IV.1.1.1 (N = 4). Lorsque l'état initial du registre est 1 1 1 1 on obtient la séquence de longueur maximale :

1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 . . . .

Période :  $L = 2^4 - 1 = 15$

-----  
(1) Pseudo-Random binary sequence.

Par contre, si l'on fait la somme modulo 2 de  $X_2$  et  $X_4$ , on obtient :

1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 . . . .

qui n'est pas une séquence de longueur maximale.

L'étude des propriétés de ces séquences fait appel à l'algèbre modulo 2. Les états successifs du registre peuvent être obtenus à partir de l'état initial à l'aide d'une matrice de transition A définie par les coefficients  $\alpha_i$  (fig. IV.1.1.0) [1]. Le polynôme caractéristique de cette matrice A définit complètement la séquence. Ce polynôme caractéristique peut également s'obtenir à partir du schéma du générateur. Dans l'exemple de la figure IV.1.1.1, on peut écrire :

$$D^{-1} X_1 = X_4 \oplus X_3 = D^3 X_1 \oplus D^2 X_1$$

D étant l'opérateur retard.

Puisque  $D(D^{-1} X_1) = X_1$ , on obtient :

$$(D^4 \oplus D^3 \oplus D^0) X_1 = 0$$

où  $D^4 \oplus D^3 \oplus D^0$  est le polynôme caractéristique qui définit complètement la séquence de l'exemple considéré. Il est à noter que les exposants de ce polynôme caractéristique indiquent le numéro des cases du registre intervenant dans l'addition modulo 2 de la contre-réaction.

On montre [1] que la condition nécessaire et suffisante pour que la séquence soit de longueur maximale est que son polynôme caractéristique soit irréductible c'est-à-dire ne pas posséder de polynôme diviseur et de plus être un polynôme primitif.

Le tableau IV.1.1.0 donne une liste des polynômes caractéristiques jusqu'au degré 11, suffisants dans la plupart des applications. Une liste plus complète est présentée dans [4].

#### IV-1-1-2- PROPRIETES DES SBPA DE LONGUEUR MAXIMALE

Les SBPA de longueur maximale possèdent de nombreuses propriétés qui sont explicitées par ailleurs [1]. Nous citerons simplement les propriétés utilisées dans l'identification des systèmes.

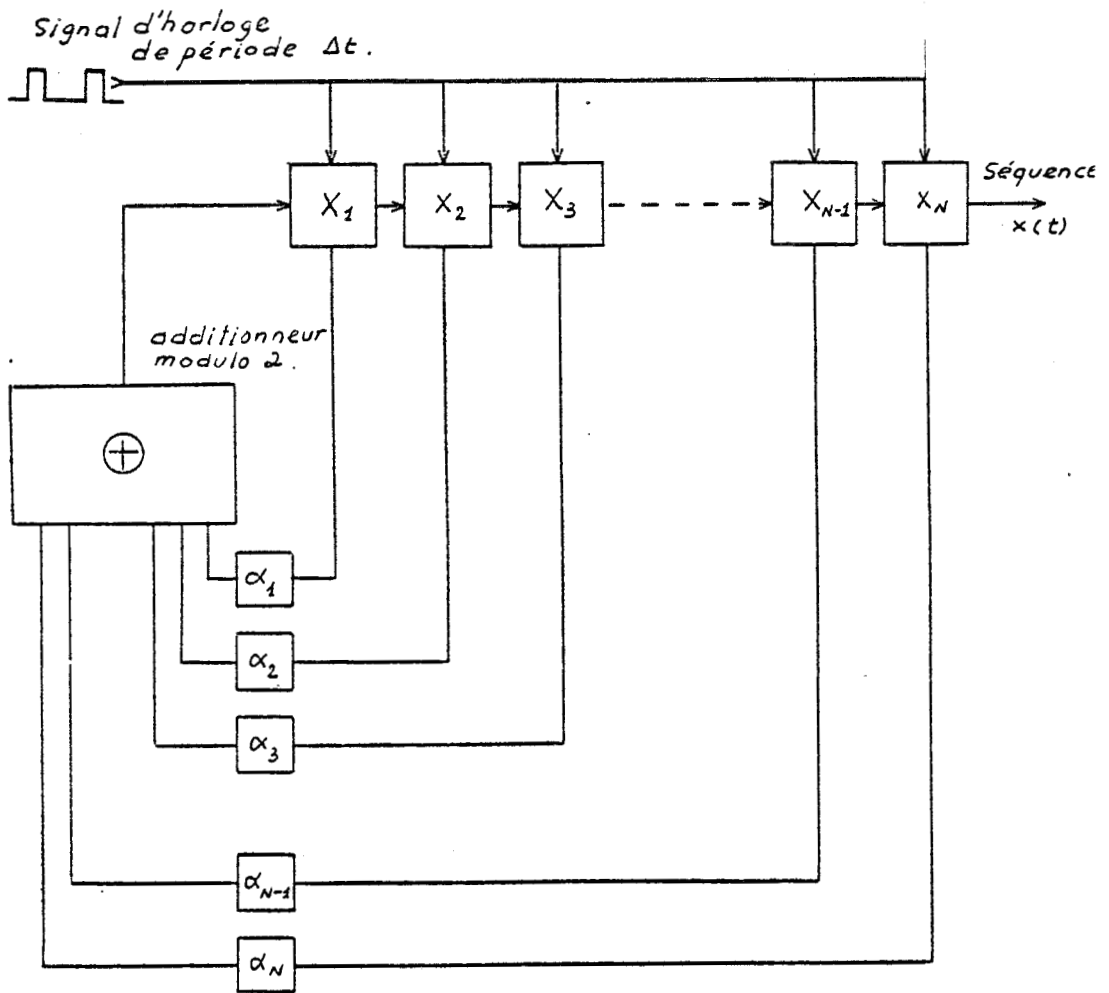


Figure IV.1.1.0 : Schéma de principe du générateur de SBPA



Le contenu  $e_i$  du registre est décalé à droite à chaque impulsion d'horloge ; les coefficients  $\alpha_i$  (1 ou 0) matérialisent la connexion, ou non, de la case  $i$  à l'entrée de l'additionneur.

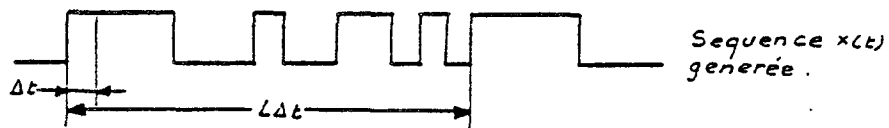
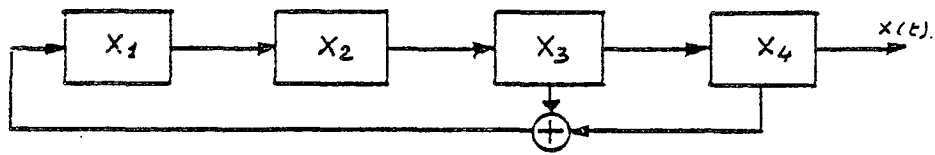


Figure IV.1.1.1. :  $N = 4$  ;  $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$

N	POLYNOME CARACTERISTIQUE (somme modulo 2)	Période L
2	$D^2 + D^1 + D^0$	3
3	$D^3 + D^2 + D^0$	7
4	$D^4 + D^3 + D^0$	15
5	$D^5 + D^3 + D^0$	31
6	$D^6 + D^5 + D^0$	63
7	$D^7 + D^6 + D^0$ et $D^7 + D^4 + D^0$	127
8	$D^8 + D^4 + D^3 + D^2 + D^0$	255
9	$D^9 + D^5 + D^0$	511
10	$D^{10} + D^7 + D^0$	1023



Tableau IV.1.1.0



Lorsque l'on choisit comme niveaux binaires +1 et -1 au lieu de 1 et 0 respectivement la valeur moyenne de la séquence s'écrit :

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{L}$$

puisque la configuration  $x_i = 0$  ( $i = 1$  à  $N$ ) est interdite, le nombre de +1 est supérieur d'une unité au nombre de -1. Il subsiste une faible composante continue qui peut être négligée pour des valeurs élevées de la période  $L$ .

Fonction d'autocorrélation

Le calcul de la fonction d'autocorrélation d'une SBPA de longueur maximale peut être effectué à partir des moyennes d'ensemble en tenant compte de l'équiprobabilité des états 0 et 1, ou, en exprimant les moyennes temporelles. Nous rappellerons simplement l'expression de la fonction d'autocorrélation [ 1 ]

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{L\Delta t} \int_0^{L\Delta t} x(t) \cdot x(t+\tau) dt$$

$$= \begin{cases} (1 - \frac{L+1}{L} \frac{|\tau|}{\Delta t}) a^2 & \text{pour } |\tau| \leq \Delta t \\ -\frac{a^2}{L} & \text{pour } |\tau| \geq \Delta t \end{cases} \quad \text{(IV.1.1.00)}$$

où  $\Delta t$  est la période de l'horloge actionnant le registre à décalage et où  $\pm a$  sont des valeurs analogiques correspondant aux niveaux  $\pm 1$ .

La courbe de la figure IV.1.1.2 représente une telle fonction constituée de pics triangulaires périodiques de période  $L\Delta t$ .

Densité spectrale

C'est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Elle s'exprime par la relation [ 1 ] :

$$G_x(f) = a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t \left( \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{L\Delta t}) - \frac{a^2}{L} \delta(f)$$

(IV.1.1.01)

$G_x(f)$  est un spectre de raies dont les harmoniques successives  $\frac{n}{L\Delta t}$  sont distantes de  $\frac{1}{L\Delta t}$  ; lorsque l'on choisit la période  $L\Delta t$  suffisamment grande, la première fréquence utilisable peut être aussi voisine de zéro qu'on le désire.

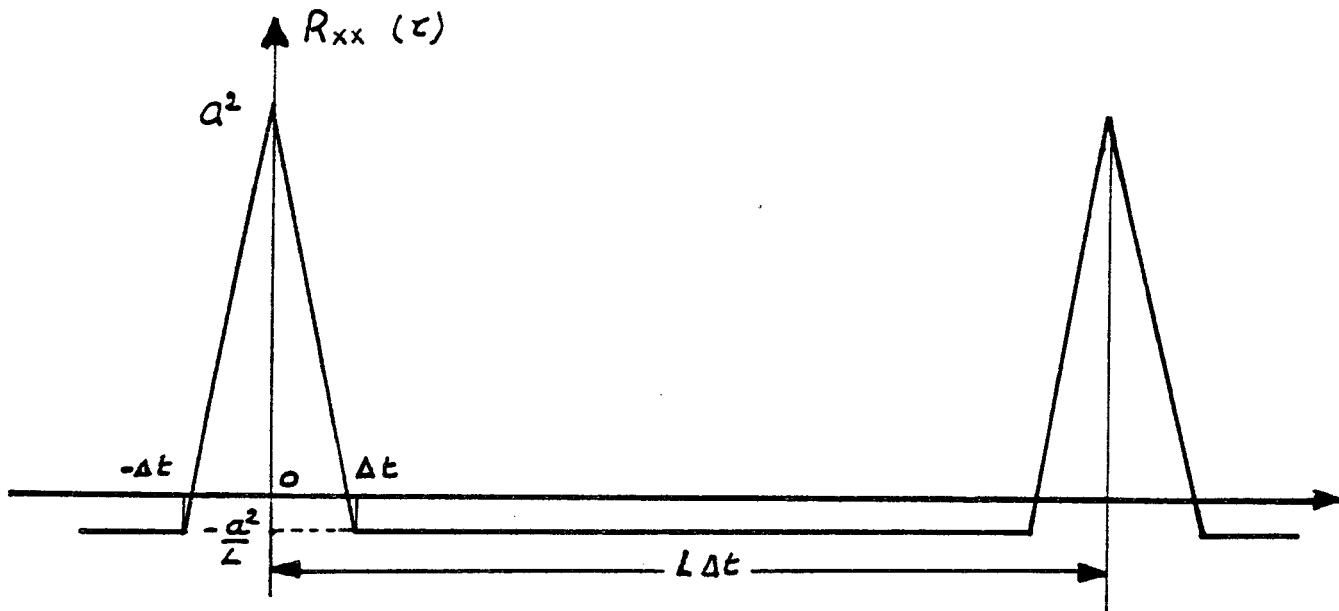


Figure IV.1.1.2 : Fonction d'autocorrélation d'une SBPA de longueur  $L$  et d'amplitude  $\pm a$

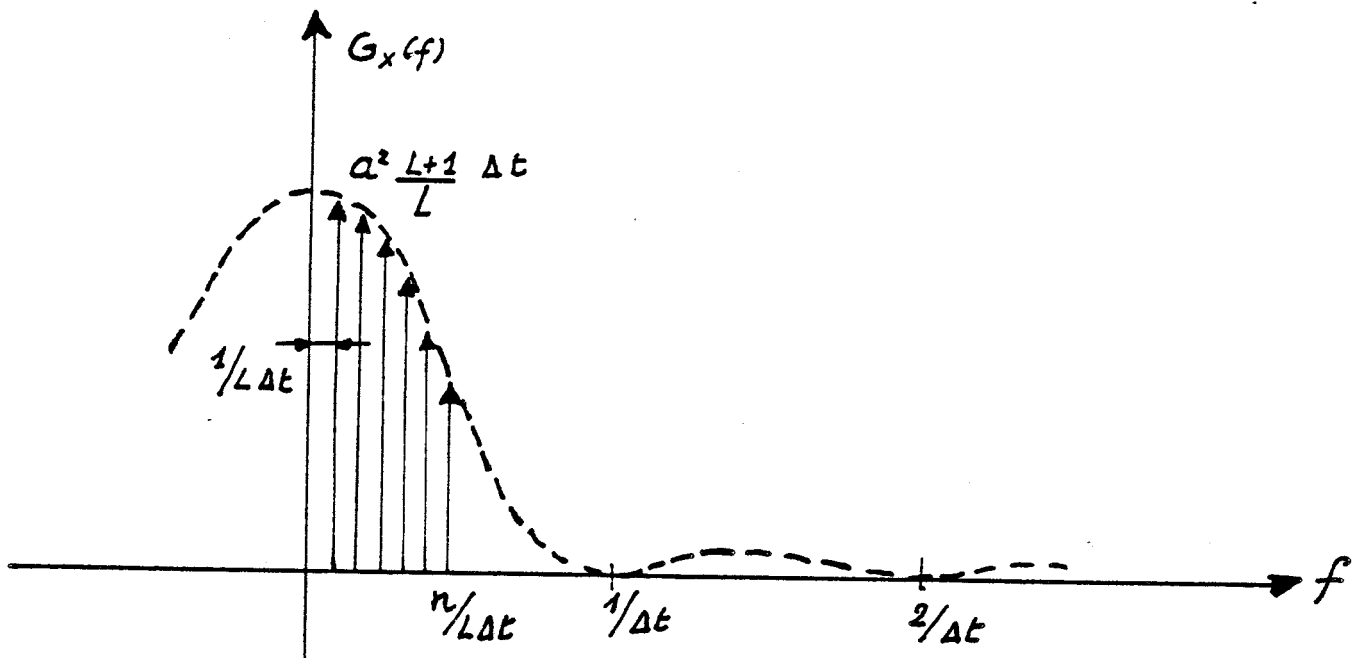


Figure IV.1.1.3 : Densité spectrale d'une SBPA

La densité spectrale  $G_x(f)$  est représentée par la courbe de la figure IV.1.1.3 ; l'amplitude du spectre décroît de 3 dB pour  $f = \frac{1}{3\Delta t}$  ; ainsi une SBPA de longueur maximale peut être assimilée à un bruit blanc pour des fréquences allant jusqu'à  $\frac{1}{3\Delta t}$ .

#### IV-1-2- IDENTIFICATION PAR INTERCORRELATION AVEC DES SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES

##### IV-1-2-1- PRINCIPE DE LA METHODE

La méthode d'identification des systèmes utilisant des signaux aléatoires a été décrite dans la deuxième partie. L'application de ces techniques utilisant des signaux aléatoires nécessite un traitement de longue durée pour obtenir une estimation précise de la fonction d'intercorrélation. A la fin de cette deuxième partie, nous avons précisé les caractéristiques optimales du signal d'entrée et rappelé l'intérêt des séquences binaires pseudo-aléatoires. Le problème du temps d'observation du processus ne se pose plus lorsque l'on utilise des SBPA qui sont des signaux périodiques. On obtient alors une estimation précise de la fonction d'intercorrélation par intégration sur une période ( $T = L\Delta t$ ) :

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt$$

Lorsqu'un système linéaire invariant à une entrée  $x$  et à une sortie  $y$  est soumis à des perturbations aléatoires  $b(t)$ , la fonction d'intercorrélation entrée-sortie  $R_{xy}(\tau)$  est donnée par l'équation de Wiener-Hopf (II.2.2.00) qui s'écrit lorsque le bruit  $b(t)$  n'est pas corrélé avec le signal d'entrée :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt = \int_0^{\infty} h(u) R_{xx}(\tau-u) du$$

Cette équation montre que la connaissance exacte de la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée  $R_{xx}(\tau)$  permet de déduire la réponse impulsionnelle par une opération de déconvolution.

Cette opération de déconvolution qui nécessite un volume de calcul important se simplifie lorsque la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée est assimilable à une impulsion de Dirac.

Le choix d'une SBPA de longueur  $L$  suffisamment grande pour que  $\frac{a}{L} \approx 0$  et d'une période d'horloge  $\Delta t$  suffisamment faible pour que  $h(t)$  varie peu dans l'intervalle  $t-\Delta t < t < t+\Delta t$  permet d'assimiler la fonction d'autocorrélation de la séquence à une suite périodique d'impulsions de Dirac :

$$R_{XX}(\tau) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t \delta(\tau - n L \Delta t) \quad (\text{IV.1.1.02})$$

En portant cette expression dans l'équation de Wiener-Hopf, on obtien

$$R_{XY}(\tau) = a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t \left[ m h(\tau) + h(\tau + L \Delta t) + \dots h(\tau + n L \Delta t) + \dots \right]$$

où  $m$  est un facteur qui tient compte de la distribution symétrique autour de l'origine de la fonction d'autocorrélation  $R_{XX}(\tau)$ :  $m=1$  pour  $\tau \geq \Delta t$  et  $m = \frac{1}{2}$  pour  $\tau = 0$ .

Si le système est stable ( $h(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ ) on peut choisir une période  $L\Delta t$  assez grande telle que  $h(t) \approx 0$  pour  $t > L\Delta t$ . Dans ces conditions, l'équation précédente s'écrit :

$$h(\tau) = \frac{1}{m a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt \quad (\text{IV.1.1.03})$$

( $T = L\Delta t$  ;  $0 \leq t \leq T$ )

que l'on peut encore écrire :

$$h(\tau) = K \int_0^T y(t) x(t-\tau) dt \quad (\text{IV.1.1.04})$$

( $T = L\Delta t$  ;  $0 < t \leq T$ )

Le problème de l'identification de la réponse impulsionnelle se ramène donc à l'évaluation de la fonction d'intercorrélacion entrée-sortie du système. L'utilisation d'une séquence binaire permet de simplifier en pratique le calcul de la fonction d'intercorrélacion.

#### IV-1-2-2- MISE EN OEUVRE DE LA METHODE

L'application de la méthode d'identification par intercorrélacion peut être réalisée de diverses façons selon le type de corrélateur utilisé. Nous nous sommes limités à une identification en temps différé, où les calculs sont effectués par voie numérique sur des données préalablement enregistrées sur bande magnétique. Le calcul des fonctions de corrélation par voie numérique est simple à mettre en oeuvre compte tenu de la facilité avec laquelle sont réalisés les retards  $\tau$  ; de plus, on n'est plus limité par le temps d'intégration  $L\Delta t$  maximum qui peut être imposé lorsque l'on utilise un corrélateur analogique.

Conditions de validité de la méthode, causes d'erreurs

Cette méthode d'identification par intercorrélation à l'aide de SBPA a été étudiée de façon approfondie [1][2]; les résultats obtenus à partir de calculs analytiques, d'expériences et de simulations numériques sur des systèmes variés ont permis de préciser les causes d'erreur ainsi que les conditions pratiques de validité de la méthode; nous nous contenterons de rappeler simplement ces résultats.

- La période  $\Delta t$  de l'horloge doit être inférieure à la plus petite constante de temps que l'on peut s'attendre à identifier. On peut aussi choisir  $\Delta t < T_0/10$ ,  $T_0$  étant tel que  $h(t) \approx 0, \forall t > T_0$ .

- La période  $L\Delta t$  de la séquence doit être supérieure au temps de réponse du système et en particulier pour un système à pôles réels,  $L\Delta t$  doit être supérieure à 4 fois la constante de temps prédominante. On peut aussi choisir  $L\Delta t > T_0$ .

- La réponse impulsionnelle obtenue est entachée d'une erreur systématique fonction du point de fonctionnement et du gain du système. Cette erreur continue peut être corrigée à posteriori par translation des ordonnées de la réponse impulsionnelle estimée, puisque pour un temps  $t > T_0$ , on a  $h(t) \approx 0$ .

- Il est impératif que l'intercorrélation soit réalisée sur une durée qui soit multiple entier d'une période  $L\Delta t$ . Dans le cas contraire, on obtient des erreurs trop importantes (50 %).

- Le régime permanent doit être établi avant le démarrage des mesures, ce qui conduit à appliquer la séquence pendant un temps assez long par rapport à la durée du régime transitoire. En pratique, on préconise de commencer les mesures après le passage du premier cycle de la séquence. L'étude des répercussions des transitoires montre que le démarrage des mesures dès l'introduction de la séquence dans le système n'entraîne que des erreurs relativement peu importantes.

- Si l'intercorrélation est réalisée par voie numérique, le signal de sortie doit être échantillonné et quantifié. L'erreur due à l'échantillonnage dépend de l'algorithme de corrélation utilisé. En réalisant une reconstitution du signal par interpolation linéaire, on vérifie que l'erreur d'échantillonnage est pratiquement négligeable lorsque  $T_e \leq \Delta t$  ( $T_e$  étant le pas d'échantillonnage). De même, on montre que l'influence de la quantification est négligeable lorsque  $\overline{y^2}/q^2 > 4$  ( $q$  étant le pas de quantification).

Outre les erreurs précédemment signalées, il faut ajouter l'influence des perturbations propres au système.

On montre que l'influence d'un bruit additif stationnaire et non corrélé avec le signal d'entrée est d'autant moins important que le spectre du bruit est étendu par rapport à celui du signal d'entrée. Dans ces conditions, il est possible de réaliser une identification satisfaisante même avec un rapport signal/bruit proche de 1.

Par contre, les perturbations très lentes ou dérives entraînent des erreurs importantes sur l'identification. Lorsque l'on connaît la dérive (linéaire ou polynômiale) il est possible de corriger l'estimation  $\hat{h}(t)$  de la réponse impulsionnelle, mais cette correction n'est efficace que lorsque le niveau de bruit est très faible.

La réponse impulsionnelle estimée  $\hat{h}(t)$  fait intervenir l'influence du transducteur d'entrée et celle du capteur de sortie du système. En toute rigueur, il faudrait corriger l'estimation  $\hat{h}(t)$  par une opération de déconvolution ; ceci suppose que l'on connaît les réponses impulsionnelles du transducteur et du capteur. Dans la plupart des cas, il est possible de négliger ces erreurs.

#### IV-1-3- CONCLUSION

Une telle méthode d'identification de processus peut s'appliquer à de nombreux systèmes <sup>[ 4 ]</sup> (électriques, chimiques, mécaniques etc...). Son caractère remarquable est que l'on puisse réaliser la mesure sur le système en cours de fonctionnement. La très faible perturbation permise par cette méthode en fait une technique bien adaptée à l'étude de systèmes non linéaires dont on peut déterminer les caractéristiques dynamiques autour d'un point de fonctionnement. Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre lorsque l'on dispose d'un calculateur numérique et le temps d'identification est à peine supérieur au temps de réponse du système.

Par contre, l'intercorrélacion est très sensible aux dérives et pour éviter celles-ci, les conditions expérimentales doivent être particulièrement soignées. Par ailleurs, la méthode n'est utilisable que pour des systèmes dont la réponse impulsionnelle vérifie la condition :  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ . Dans le cas contraire, il est nécessaire d'utiliser d'autres types de séquences <sup>[ 1 ]</sup>.

## CHAPITRE 2 : RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

### IV-2-1- REALISATION D'UN GENERATEUR PROGRAMMABLE DE SBPA

Le principe d'un générateur de SBPA ayant été décrit dans le chapitre précédent, nous présenterons seulement la réalisation du générateur de SBPA utilisé pour les mesures.

Deux solutions s'offraient pour une telle réalisation :

- la logique câblée
- la logique programmée à base de microprocesseur.

La première solution ne pose aucune difficulté et le générateur peut être réalisé par assemblage d'un registre à décalage et de circuits logiques. Plutôt que de réaliser un dispositif spécialisé, nous avons utilisé la deuxième solution qui nous a permis de réutiliser exactement le montage de la troisième partie et ceci sans aucune modification des connexions. Cette solution a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre et les paramètres de la séquence ( $\Delta t$  et le polynôme caractéristique) sont introduits une fois pour toute dans le système lors de la phase d'initialisation. Ce générateur programmable est facilement extensible et il suffit de modifier le programme de génération de signaux pour obtenir des formes d'ondes complexes.

Cette solution a permis une parfaite synchronisation des tâches de génération de signaux et d'acquisition de données qui sont gérées par le même microordinateur.

Le programme de génération de signaux a été réalisé en langage Assembleur et n'a pas posé de difficultés particulières. Les opérations de décalage et de sommation modulo 2 sont réalisées par le microprocesseur qui modifie toutes les  $\Delta t$  secondes l'état de la ligne de sortie (vers l'interface de puissance) suivant celui de la séquence (0 ou 1).

## IV-2-2- RESULTATS EXPERIMENTAUX

### IV-2-2-1- CHOIX DES PARAMETRES DE LA SEQUENCE ET TRAITEMENT DES DONNEES

A l'aide de l'instrumentation précédemment décrite, nous avons effectué des mesures sur divers matériaux en faisant varier les paramètres de la séquence binaire provoquant l'apport d'énergie au matériau. Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus sur le plexiglass ainsi que sur le verre. Les essais ont été effectués sur les matériaux testés précédemment afin de comparer la précision des deux techniques. Le protocole expérimental est également le même que celui de la méthode du créneau, hormis les paramètres additionnels qu'il faut introduire dans le générateur de SBPA : la longueur L de la séquence, la période  $\Delta t$  de l'horloge, le polynôme caractéristique de la séquence. Le démarrage des acquisitions est activée par une touche du calculateur réservée pour cette fonction. On peut enregistrer la séquence et le flux transmis sur une ou plusieurs périodes. Ces mesures sont stockées sur bande magnétique et il est possible de choisir par programme une fenêtre d'observation sur laquelle est effectué le traitement des données. Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire d'enregistrer la séquence qui peut être facilement reconstituée lors du traitement des données. Cependant, cette reconstitution nécessite la connaissance exacte de l'état du registre du générateur de SBPA lors du démarrage des mesures. Compte tenu de l'espace mémoire disponible, nous avons utilisé la première solution qui est d'une mise en oeuvre plus simple.

Le choix des paramètres de la séquence est facilité lorsque l'on connaît approximativement le temps caractéristique de la paroi à identifier. Il est à signaler que les précisions données à ce sujet dans le chapitre précédent sont des résultats généraux obtenus sur des systèmes à constantes localisées. Compte tenu de notre connaissance à priori du système étudié, il est possible d'exploiter les résultats établis dans la première partie de notre travail sur la transmission d'une impulsion de flux, pour déterminer les paramètres de la séquence. Nous avons montré que l'approximation "entrée impulsionnelle" est valable lorsque l'on utilise une méthode de corrélation pour des impulsions de durée  $\delta \leq 0.03 \tau_c$ . Compte tenu de la similitude entre un créneau et une séquence lorsque l'on utilise un traitement par intercorrélacion, on peut considérer que les séquences respectant condition :

$$\underline{\Delta t \leq 0.03 \tau_c}$$

sont satisfaisantes. Le choix de la période  $L\Delta t$  de la séquence est fondé sur le critère :  $L\Delta t > T_0$  avec  $h(t) \rightarrow 0, \forall t > T_0$ .



Les études faites dans la première partie permettent de fixer  $\tau_0 \approx 2 \tau_c$  ; il en résulte la condition :

$$\underline{L\Delta t > 2 \tau_c}$$

Lorsque les conditions précédentes sont remplies, l'intercorrélacion est une image de la réponse impulsionnelle du système et la détermination du temps caractéristique est aisée. Dans le cas où la première condition n'est pas respectée, il est possible de corriger l'estimation du temps caractéristique en utilisant les formules établies dans la troisième partie.

En résumé, nous dirons que les deux signaux d'entrée (Impulsion et SBPA) fournissent les mêmes informations qui peuvent être traitées par les mêmes procédures de calcul.

#### IV-2-2-2- RESULTATS DES MESURES

Nous avons principalement utilisé des échantillons de plexiglass et de verre. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau IV.2.2.0 de même que les conditions expérimentales. Les courbes expérimentales représentent quelques évolutions de signaux d'excitation (puissance dissipée), de flux transmis et d'intercorrélacion.

Les mesures effectuées sur un échantillon de plexiglass de 5 mm d'épaisseur ont conduit au résultat :

$$\underline{\hat{a} \approx 1.02 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$$

avec  $\Delta t = 4.26 \text{ s}$  et  $L\Delta t = 541 \text{ s}$  (mesure n° 3).

Il est à noter que ce résultat, obtenu sans aucune correction, ( $\hat{\tau}_c \approx 6 \tau_1$ ) est en parfait accord avec les valeurs relevées dans la littérature et se situe dans la fourchette des valeurs obtenues lors des essais impulsionnels. Lorsque l'on s'écarte des conditions établies ci-dessus concernant le choix des paramètres de la séquence, on obtient des estimations moins précises :

$$\begin{aligned} \hat{a} &\approx 0.93 \quad \text{pour } L\Delta t = 268 \text{ s} \\ \hat{a} &\approx 1.18 \quad \text{pour } L\Delta t = 132 \text{ s} \end{aligned}$$

Ces résultats mettent en évidence l'importance de la longueur de la séquence dans la précision des mesures.

Des essais effectués sur un échantillon de plexiglass de 2 mm chargé par du polystyrène ont conduit à des résultats sensiblement identiques à ceux obtenus à l'aide d'un créneau :

$$\hat{a} \approx 1.04 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

A ce sujet, il convient de remarquer la reproductibilité des constatations de la troisième partie sur l'influence de la charge.

Les mesures effectuées sur un échantillon de verre de 8.7 mm d'épaisseur ont conduit à la diffusivité (moyenne)

$$\hat{a} \approx 3.46 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Résultat qui est en accord avec les valeurs obtenues dans la troisième partie.

Nous n'avons pas constaté de variation sensible de la valeur estimée de la diffusivité lorsque l'on déplace la fenêtre d'observation, par contre le calcul sur la première période de la séquence a entraîné un écart de 10 % (mesure n° 5).

Nous nous sommes volontairement limités à l'exploitation systématique des données de façon à comparer les résultats obtenus à l'aide des deux excitations (créneau et SBPA) en utilisant la même méthode de traitement.

Une telle étude a confirmé l'intérêt des signaux de flux pseudo-aléatoires qui renferment une énergie beaucoup plus importante que l'impulsion. La courbe n° 3 montre les erreurs importantes occasionnées par le rapport signal/bruit trop faible obtenu pour une entrée impulsionnelle. On obtient une diffusivité :

$$\hat{a} \approx 0.75 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ pour une entrée impulsionnelle}$$

et

$$\hat{a} \approx 1.02 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ pour une entrée pseudo-aléatoire.}$$

On remarque qu'à l'origine ( $\tau = 0$ ) et pour les valeurs  $\tau \leq \Delta t$ , les courbes d'intercorrélation (sauf la courbe n° 7) présentent une anomalie. L'erreur à l'origine est liée à la méthode, tandis que les écarts observés pour  $\tau \leq \Delta t$  proviennent du fait que seuls les points de la réponse impulsionnelle espacés d'au moins  $\Delta t$  sont indépendants.

Nous n'avons pas jugé utile d'insister sur ces problèmes qui sont bien étudiés par ailleurs [2] et qui n'ont pas d'influence sur la qualité des résultats obtenus.

IV-2-3- POSSIBILITES DE DEVELOPPEMENT DE LA METHODE

On remarque que dans la plupart des cas, la branche ascendante de la courbe d'intercorrélacion est beaucoup plus régulière que la branche descendante qui présente des fluctuations surtout lorsque le rapport signal/bruit est peu élevé. On peut exploiter la branche ascendante. C'est un développement possible de la méthode qui fait l'objet de travaux en cours. Ce développement ne fait pas partie de l'objectif de ce travail, qui est, rappelons-le, la détermination de la diffusivité par mesure du "temps de traversée d'une paroi". Néanmoins, il apparaît comme une extension possible de notre travail et il nous semble important de le signaler.

L'exploitation de la branche ascendante ne pose pas de difficultés particulières lorsque la courbe d'intercorrélacion est une image de la réponse impulsionnelle : les résultats établis dans la première partie de ce mémoire peuvent être utilisés à cet effet (tableau I.4.3.0). Par exemple, on peut considérer le temps  $t_{0,5}$  au bout duquel la réponse impulsionnelle atteint la moitié de sa valeur maximale :

$$t_{0,5} = 0.07274 \tau_c \quad (IV.2.2.00)$$

Cette possibilité pouvant être utilisée lorsque la courbe d'intercorrélacion ne présente pas un maximum bien marqué. A titre d'exemple, la courbe n° 2 (plexiglass de 5 mm) donne :

$$t_{0,5} = 16.6 \text{ s} \quad \text{et l'on obtient :}$$

$$\hat{\tau}_c \approx 228 \text{ s, soit une diffusivité } \hat{a} \approx 1,09.10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

résultat qui est en accord avec les valeurs publiées sur le plexiglass.

Il est possible d'utiliser d'autres points de la courbe, par exemple, le temps  $t_{0,8}$  qui est lié au temps caractéristique par la relation :

$$t_{0,8} \approx 0,101 \tau_c \quad (IV.2.2.01)$$

De la courbe n° 2, on déduit :

$$t_{0,8} \approx 23,4 \text{ s}$$

ce qui conduit à un temps caractéristique :

$$\hat{\tau}_c \approx 232 \text{ s, soit une diffusivité } \hat{a} \approx 1,07.10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

En utilisant ces deux points bien distincts, on trouve des valeurs de diffusivité très proches. Ce recoupement des résultats peut être interprété par le rapport  $\frac{t_{0,8}}{t_{0,5}}$  qui est égal à 1.40 alors que la valeur théorique de ce rapport est 1.388.

La cohérence des résultats obtenus en utilisant cette technique d'exploitation témoigne de la validité du modèle utilisé et de celle de l'hypothèse "réponse impulsionnelle".

Cette technique d'exploitation de la courbe d'intercorrélacion peut être généralisée au cas où la période  $\Delta t$  de l'horloge du générateur de SBPA est quelconque. Mais ce serait, à notre avis, restreindre l'intérêt de la méthode qui permet justement, grâce à l'énergie contenue dans la séquence, d'utiliser des périodes  $\Delta t$  faibles et d'obtenir directement la réponse impulsionnelle.

Ce traitement de la courbe d'intercorrélacion est analogue à la technique de dépouillement utilisée dans la "méthode Flash", mais les concepts développés ici sont fondamentalement différents. Néanmoins, il nous semble intéressant d'évaluer l'intérêt des excitations pseudo-aléatoires dans la méthode Flash. Les praticiens de cette méthode<sup>[5]</sup> évoquent les problèmes soulevés par les variations importantes de température induites sur la face avant de l'éprouvette testée, par une impulsion de durée brève. Or, il est nécessaire que l'apport énergétique provoqué par l'éclair soit suffisant afin que les variations de température sur la face arrière de l'éprouvette soient décelables.

Il est possible que les signaux pseudo-aléatoires qui permettent de réduire l'amplitude du flux incident peuvent permettre de limiter les effets de non-linéarité que mentionnent les auteurs.

Les possibilités de continuation de ce travail sont nombreuses tant en ce qui concerne l'exploitation de la fonction d'intercorrélacion pour les faibles valeurs du temps que l'étude détaillée de l'influence de la charge et de celle du puits thermique.

L'étude des autres fonctions de transfert explicitées dans la première partie peut permettre des recoupements intéressants.

#### IV-2-4- CONCLUSION

L'ensemble des résultats montre que la méthode de mesure de la diffusivité, exploitant le temps de traversée d'une paroi homogène en régime impulsionnel, est directement applicable en régime pseudo-aléatoire. Les séquences binaires pseudo-aléatoires apparaissent donc comme une généralisation de l'entrée impulsionnelle, visant à améliorer le rapport signal sur bruit et à permettre l'utilisation de signaux de faible niveau afin de limiter les perturbations introduites dans le système par le signal test. Les résultats expérimentaux obtenus sur des échantillons de référence sont compatibles avec les résultats obtenus par d'autres méthodes.

TABLEAU DES MESURES ET COURBES EXPERIMENTALES

Tableau IV.2.2.0 : Mesures effectuées sur des échantillons de plexiglass et de verre.

	$\Delta t$ (s)	L	$\hat{t}_1$ (s)	$\hat{t}_c$ (s)	$\bar{a}$ ( $10^{-7} m^2 s^{-1}$ )	N°	Remarques
Plexiglass $\varnothing = 5$ mm	4.26	31	35,18	211	1.18	1	
	"	63	44.77	268	0.93	2	courbe n° 2
	"	127	40.5	243	1.02	3	courbe n° 3
Plexiglass $\varnothing = 2$ mm, Charge polystyrène	0.85	31	6.39	38,4	1.04	4	courbe n° 4
	"	"	5.75	34.5	1.15	5	mesure faite en début de séquence
Verre à vitre $\varnothing = 8.7$ mm	4.26	63	44.77	211	3.58	6	
	8.53	"	38.34	226	3.34	7	courbe n° 7

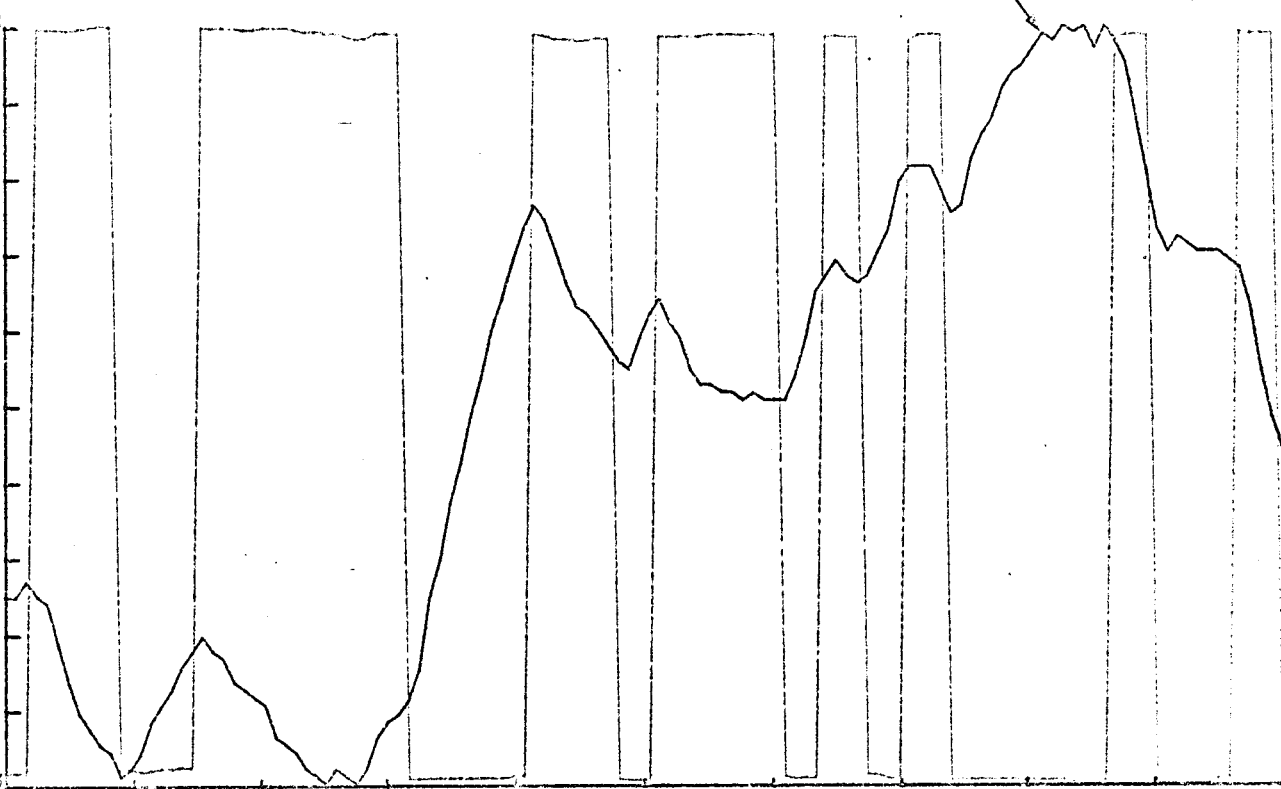


flux transmits

NO 1

1.0E+000

0.0E+000



1  
0.

124p  
131.12S

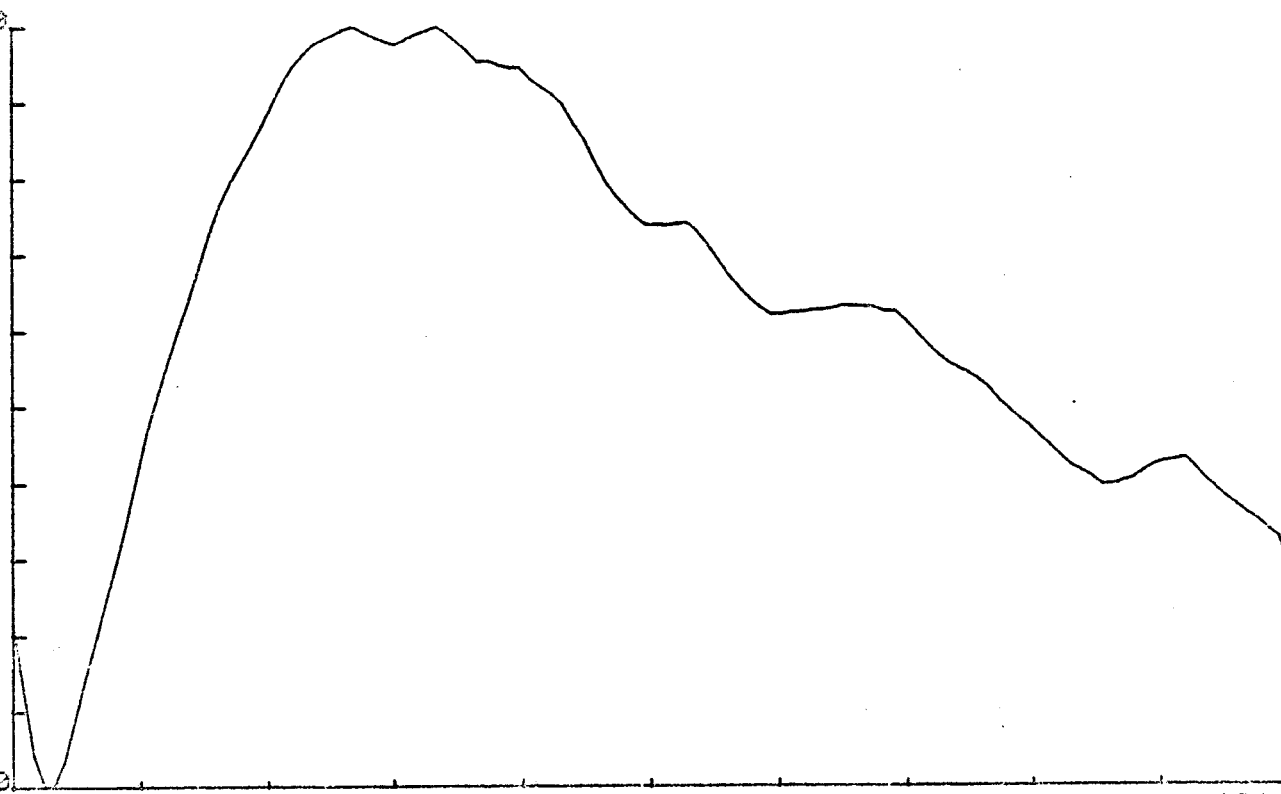
temps

axe X : 1.3E+001 S/div  
 axe Y : 1.0E-001 /div  
 PLEXIGLASS 5 mm / L=31 . D=4.26 S

NO 1

1.0E+000

0.0E+000



1  
0.

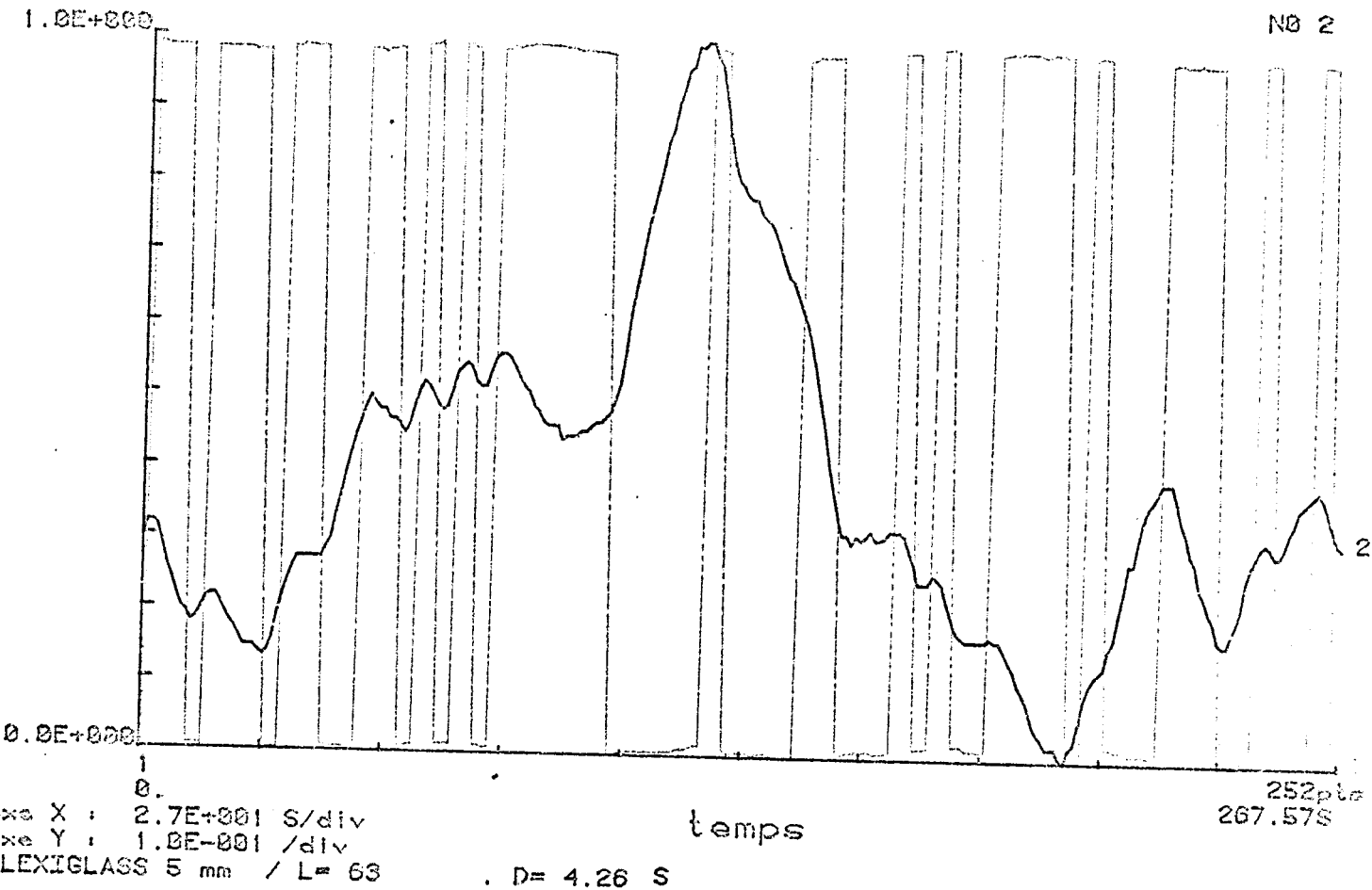
124p  
131.12S

retards

BUS  
LILLE

axe X : 1.3E+001 S/div  
 axe Y : 1.0E-001 /div  
 INTERCORRELATION

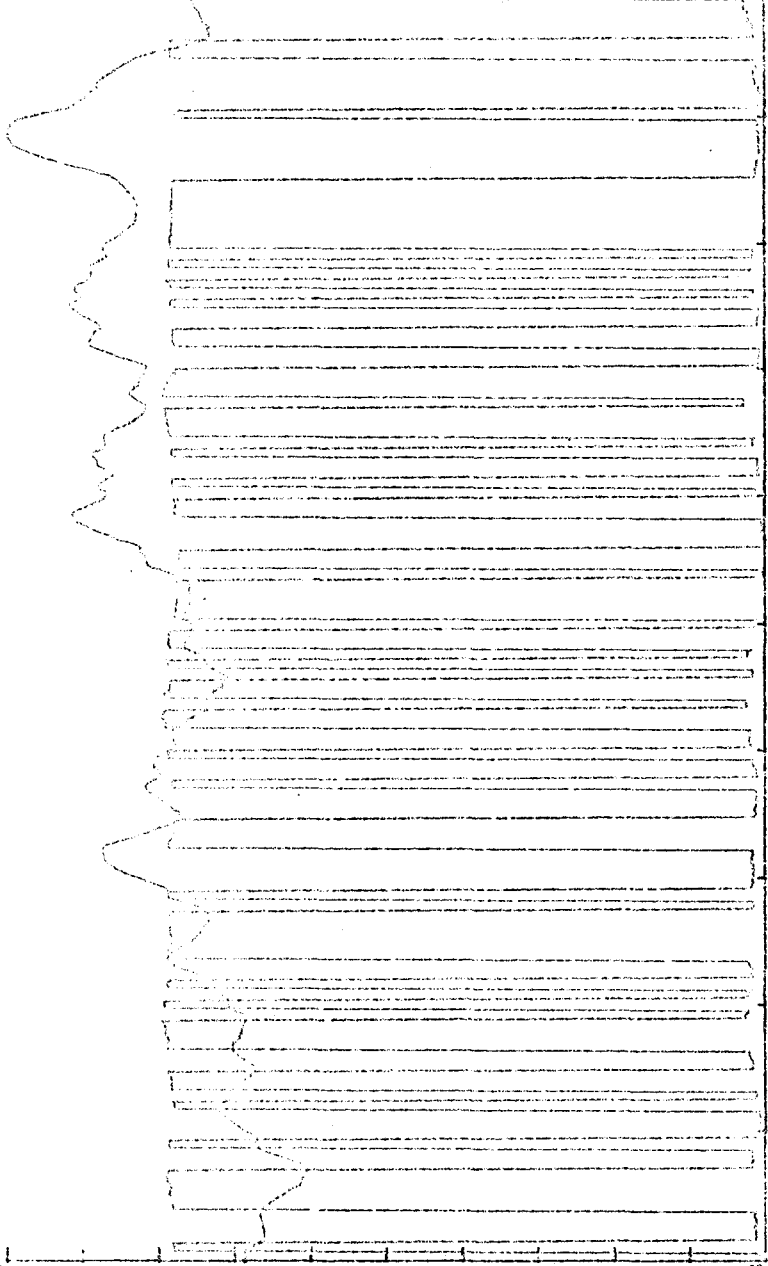
N0 2



N0 2



5.0E+004

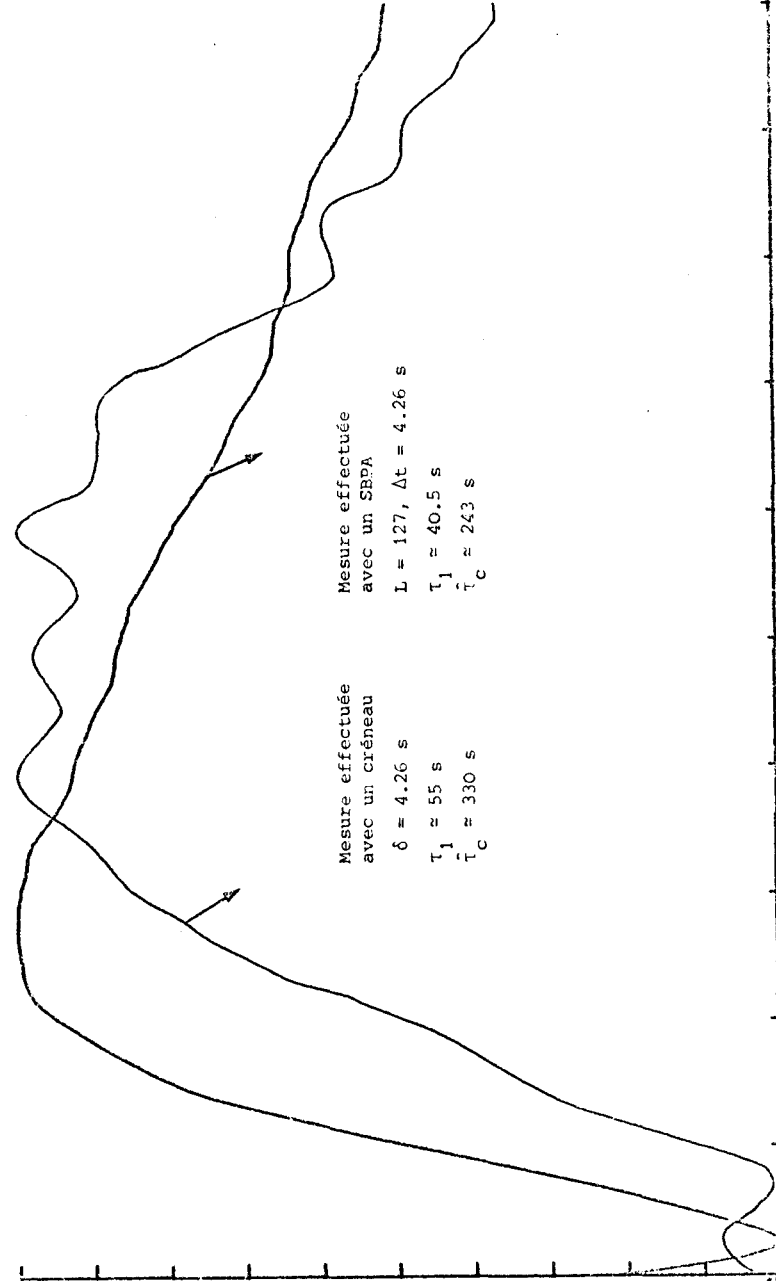


-7.0E+000

5.0E+004  
5.4E+00

axe X : 5.4E+001 S/div  
 axe Y : 5.0E+005 /div  
 PLEXIGLASS 5mm / L=127 . D=4.26 S

1.0E+000



Mesure effectuée avec un crâneau

$\delta = 4.26 \text{ s}$   
 $\tau_1 \approx 55 \text{ s}$   
 $\tau_c \approx 330 \text{ s}$

Mesure effectuée avec un SBPA

$L = 127, \Delta t = 4.26 \text{ s}$   
 $\tau_1 \approx 40.5 \text{ s}$   
 $\tau_c \approx 243 \text{ s}$



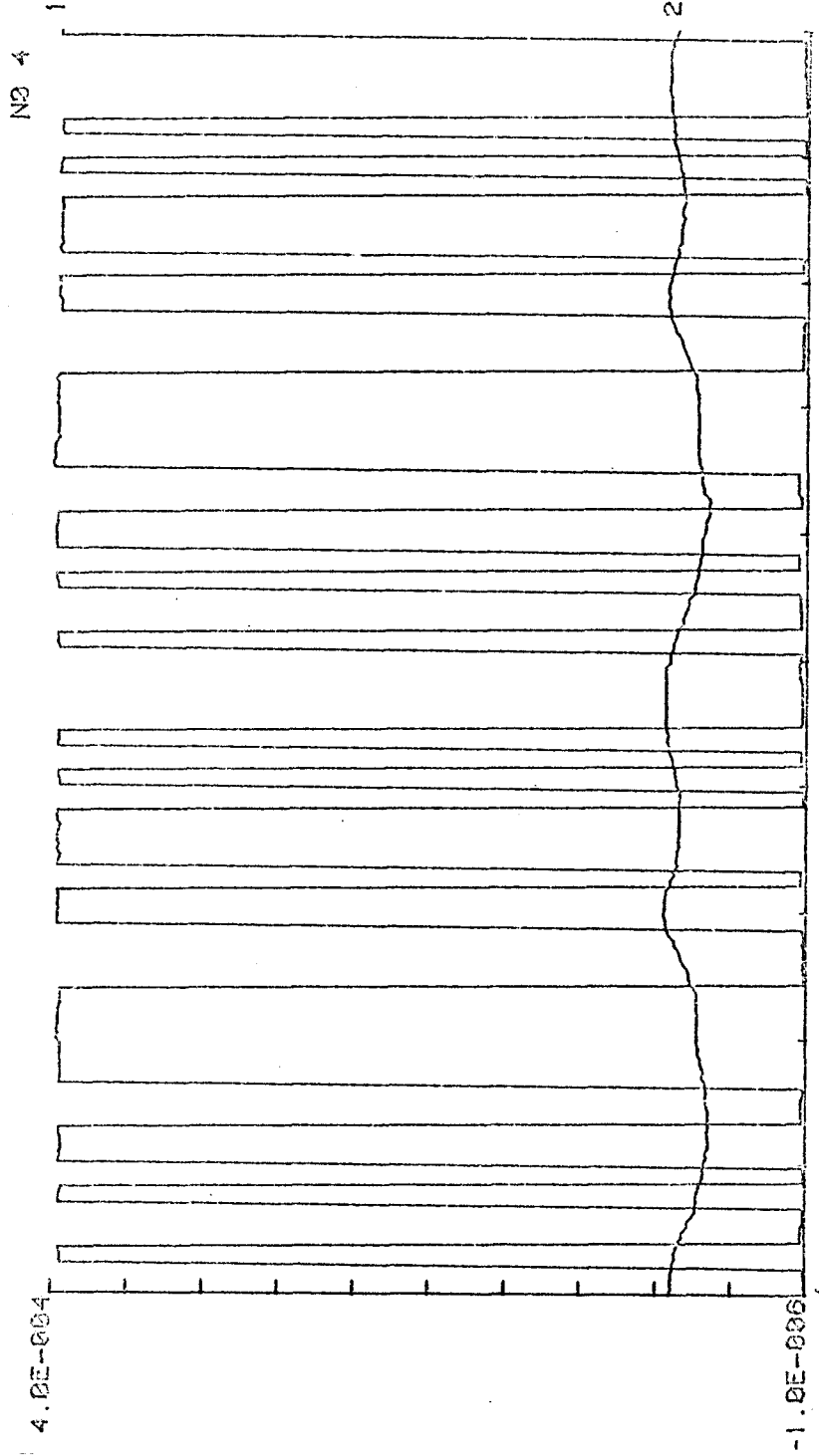
0.0E+000

1.4E+000  
1.5E+000

axe X : 1.5E+001 S/div  
 axe Y : 1.0E+001 /div  
 INTERCORRELATION

retards





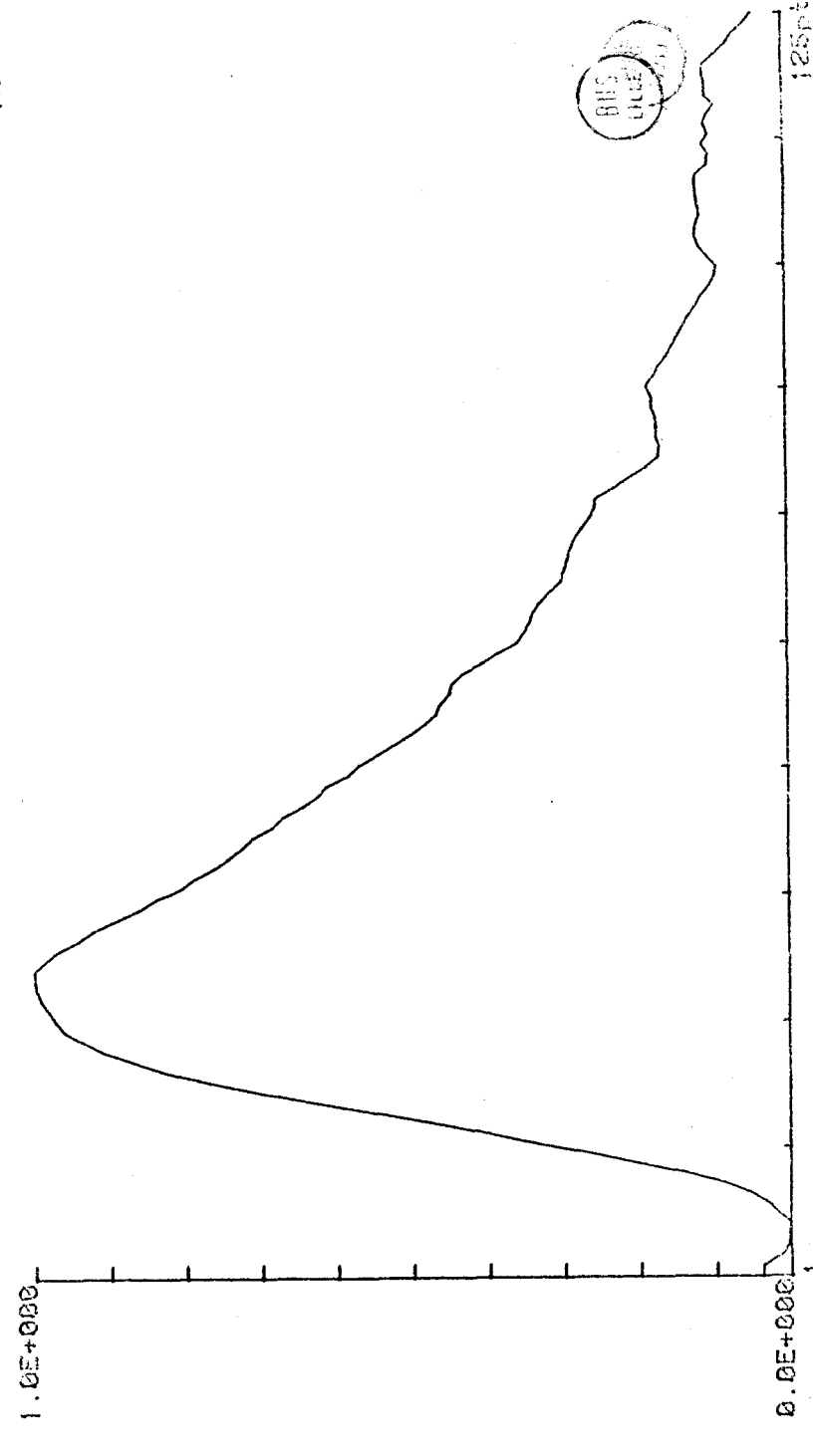
250pts  
54.32S

times

ch1 X : 5.4E+000 S/div  
ch1 Y : 4.1E-005 /div  
PLEXIGLASS 2mm / L=31

D= 0.8528

NO 4



125pts  
20.41S

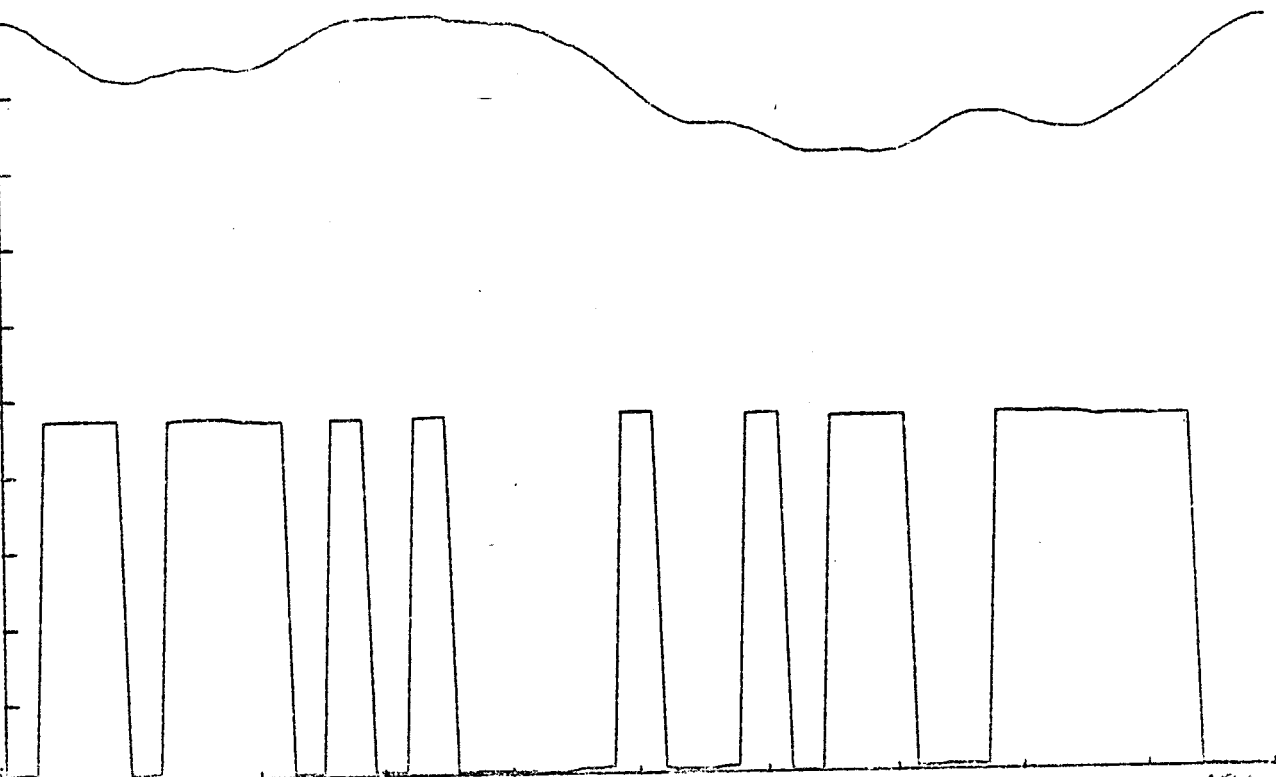
retards

ch1 X : 2.0E+000 S/div  
ch1 Y : 1.0E-001 /div  
INTERCORRELATION



8.6E-004

-4.0E-005



124pt  
251.99S

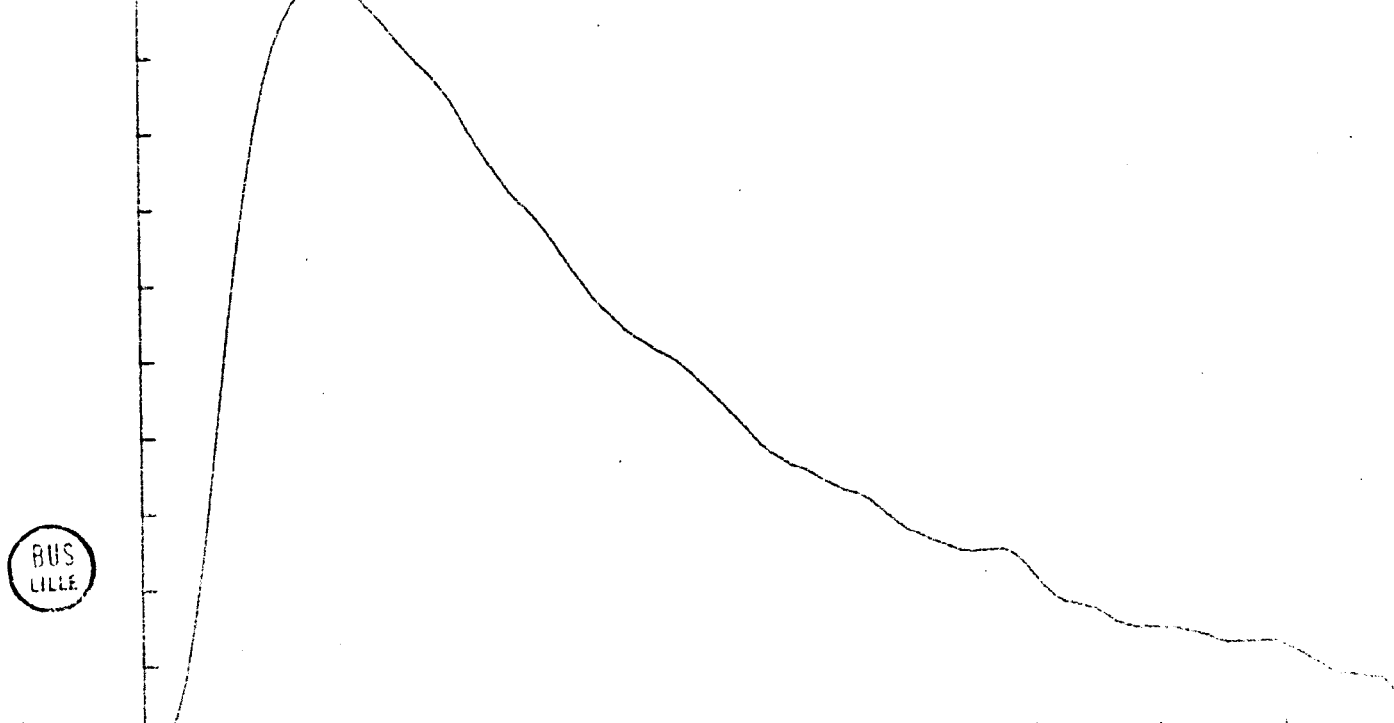
1  
0.

temps

axe X : 2.0E+001 S/div  
 axe Y : 8.6E-005 /div  
 VERRE a VITRE 6.7 mm / L= 63 / D= 6.53 S

1.7E-007

1.0E-007



124pt  
251.99S

1  
0.

axe X : 2.0E+001 /div  
 axe Y : 1.7E-007 /div  
 INTERCORRELATION



BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] DAVIES (W.D.T.)  
"System Identification for self adaptive control"  
Wiley, Interscience, 1970
  
- [2] MENENDEZ MARTINEZ (A.)  
"Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélacion  
au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires"  
Thèse Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1970
  
- [3] AUVRAY (J.)  
"Electronique des signaux échantillonnés et numériques"  
Dunod, 1979
  
- [4] MAX (J.)  
"Méthodes et techniques de traitement du signal"  
Masson, 1977
  
- [5] PONCIN (H.)  
"Thermocinétique impulsionnelle et mesure de la diffusivité thermique"  
CHIRON, 1978



## CONCLUSION

Nous avons pu étendre le domaine d'applications des impulsions thermiques en traitant l'évolution temporelle du flux de chaleur transmis par une paroi homogène en régime impulsionnel.

Nous pensons avoir contribué au développement théorique et expérimental des méthodes impulsionnelles.

Dans la première partie du travail qui est théorique et relative à la thermocinétique, nous avons établi un modèle représentatif du transfert de flux dans une paroi homogène valable lorsque les variations de température induites par le passage de la chaleur sur la face de sortie sont d'amplitudes négligeables. Nous avons établi les abaques caractéristiques du flux transmis par une paroi homogène, soumise sur sa face avant à une variation de flux en forme de créneau (abaques que nous n'avons pas trouvés dans la littérature). A partir des équations représentatives du passage de la chaleur, nous avons introduit la notion de fonction de transfert correspondant à la configuration expérimentale utilisée.

Ce mode de représentation des transferts de chaleur dans une paroi homogène introduit une méthode systématique pour calculer le flux de sortie quelle que soit l'évolution temporelle du flux incident. Cette approche est différente des méthodes habituellement utilisées pour mesurer la diffusivité. La représentation matricielle des évolutions thermocinétiques fait intervenir le milieu indépendamment des conditions limites imposées sur les surfaces externes. Elle conduit à un modèle valable lorsque les variations de température sur la face de sortie sont d'amplitudes négligeables. Pour d'autres conditions limites, le modèle aurait été différent mais la démarche identique. Dans ces conditions, la représentation matricielle (solution de l'équation de Fourier) conduit à un modèle particulier pour chaque configuration expérimentale. A chaque modèle sont associées une fonction de transfert et une réponse impulsionnelle. La connaissance du modèle introduit une relation fonctionnelle entre flux incident et transmis et par suite la possibilité d'utiliser les méthodes d'identification développées dans les cours de théorie des systèmes pour identifier la relation entre flux incident et flux transmis.

Dans les parties 2 et 3, nous avons introduit les méthodes d'intercorrelation et avons montré qu'elles étaient adaptées à l'identification des fonctions de transfert en thermocinétique. Ces méthodes d'analyse sont particulièrement riches d'enseignements puisqu'elles nous ont permis de définir une classe de signaux permettant d'identifier la diffusivité en régime instationnaire. Ce sont essentiellement les signaux qui ont une fonction d'autocorrélation assimilable à celle d'un créneau. Pour vérifier ces résultats, nous avons généré des variations pseudo-aléatoires de flux incident pour identifier la diffusivité. L'introduction de ces signaux permet d'améliorer la précision des mesures par augmentation du rapport signal/bruit. L'utilisation de ces signaux permet également de supprimer les problèmes de non linéarité qui apparaissent lorsque l'on utilise des créneaux d'énergie d'amplitude trop importante. L'introduction des signaux pseudo-aléatoires en thermocinétique peut être considérée comme une première approche des mesures de diffusivité in situ puisque ces signaux permettent d'injecter une énergie importante dans le matériau à identifier tout en limitant les perturbations introduites dans le système par le signal de test.

L'introduction des techniques de traitement du signal a permis d'atteindre l'objectif qui nous avait été fixé : mesurer la diffusivité de matériaux de grandes dimensions. L'ensemble des résultats obtenus montre que la précision de la méthode est liée à la distribution spectrale de l'énergie du flux incident. Avec la notion de distribution spectrale de l'énergie, nous avons introduit une nouvelle façon de concevoir le problème de l'identification de la diffusivité en régime instationnaire. L'approfondissement de cette notion pourrait constituer un prolongement de notre travail.

