

50376  
1981  
66

50376  
1981  
66

N° d'ordre 884

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

Docteur 3ème cycle

par

J.M. NOE

SUR UNE THEORIE ASYMPTOTIQUE DE LA

CONVECTION NATURELLE



Soutenue le 10 Mars 1981  
Membres du Jury :

devant la Commission d'Examen

Président : F. PARSY, Professeur.

Rapporteurs : M. R.Kh. ZEYTOUNIAN, Professeur.

M. A. TRAD, Chargé de Recherche au C.N.R.S.  
à l'Université de Poitiers.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à Monsieur PARSY, Professeur à l'Université de Lille 1, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du Jury, et pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail; à Monsieur ZEYTOUNIAN, Professeur à l'Université de Lille I, Ingénieur Chef de groupe à l'O.N.E.R.A. qui m'a dirigé au cours de cette étude et qui m'a fait bénéficier de son expérience par ses conseils et ses remarques judicieuses, et à Monsieur TRAD, Chargé de Recherche au C.N.R.S., qui a bien voulu examiner ce travail.

Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance à Mme DUSART qui a bien voulu, avec compétence, s'occuper de la partie dactylographie de ce travail et à Mme PÉTIAUX ainsi qu'aux personnes du service de reproduction de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées pour leur travail efficace et leur gentillesse.

# TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION _____	1
PREMIÈRE PARTIE : VENTS DE PENTES _____	2
I FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME _____	3
II MÉTHODE DE RÉOLUTION _____	5
Première approximation _____	6
Deuxième approximation _____	6
Non-existence d'une couche proximale _____	9
Mise en évidence du problème distal _____	10
Justification du choix $C_1 = 0$ _____	14
Influence de l'hypothèse de neutralité de la stratification de référence _____	16
Résolution du problème distal à l'ordre zéro _____	17
DEUXIÈME PARTIE : BRISES _____	22
I FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME _____	23
II MÉTHODE DE RÉOLUTION _____	26
Ordre de grandeur de $\lambda_0$ _____	26
Première approximation _____	27
Deuxième approximation _____	29
Mise en évidence du problème distal _____	33
Justification du choix $C_7 = C_9 = 0$ _____	37
III CONCLUSION _____	41
TROISIÈME PARTIE : CALCULS _____	42
I APPLICATION NUMÉRIQUE _____	43
II RÉSULTATS DES CALCULS EFFECTUÉS _____	44
III CONCLUSION _____	53
RÉFÉRENCES _____	54

E R R A T A

lire . page 17 à la 1ère ligne :

$$\hat{\mu} \Gamma \frac{\partial \bar{\psi}(0)}{\partial \bar{\eta}} \quad \text{et non} \quad \hat{\mu} \Gamma \frac{\partial \bar{\psi}(0)}{\partial \eta}$$

. page 17 à la 12ème ligne :

$$\left(-\frac{dT_{\infty}}{dz}\right) = \frac{\chi-1}{\chi} \frac{g}{R} \quad \text{et non} \quad \left(-\frac{\partial T_{\infty}}{\partial z}\right) = \frac{\chi-1}{\chi} \frac{g}{R}$$

. page 33 à la 9ème ligne :

$$\theta \sim \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} \left( \frac{i e^{i\tau} - i e^{-i\tau}}{4} \right) + \varepsilon \Theta \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} \left( -\frac{1}{8\sqrt{2}} \right) + o(\varepsilon^2)$$

$$\text{et non } \theta \sim \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} \left( \frac{i e^{i\tau} - i e^{-i\tau}}{4} \right) + \alpha \Theta \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} \left( -\frac{1}{8\sqrt{2}} \right) + o(\varepsilon^2)$$

# INTRODUCTION

---

Considérons le problème bidimensionnel de la convection naturelle engendrée par une oscillation de température avec le temps sur une surface cylindrique sous forme d'une onde cosinusoidale simple ; et induite par la force d'Archimède.

Il est important de noter que nous considérons ce problème comme une perturbation de la distribution standard.

Le caractère de fluctuation à haute fréquence de la température de la paroi nous permet d'affirmer que tout le mouvement périodique sera limité à une couche mince au voisinage de celle-ci. Cela est clair d'un point de vue physique car la température de paroi s'inverse avant que celle-ci ait eu le temps de diffuser de façon sensible au sein du fluide.

Une méthode analogue à celle utilisée par Stuart ( 1965 ) et Riley ( 1966 ) nous fournit une solution qui révèle une structure particulière du mouvement ; dans tout le domaine où a lieu la convection apparaissent une température et des courants secondaires ayant un caractère stationnaire, bien que la variation de température de la surface avec le temps soit périodique.

Ainsi, ces mouvements convectifs stationnaires subsistent loin de la paroi et nous amènent à introduire une couche distale au sein même de la couche convective considérée, dans laquelle les forces d'inertie et de viscosité sont du même ordre de grandeur. L'introduction de cette couche nous permet de retrouver le comportement singulier de la température et du champ de vitesses à la limite supérieure de la couche principale. C'est-à-dire que cette analyse permet de se convaincre que le phénomène de " Double couche limite oscillante " est aussi présent au niveau des mouvements de convection naturelle.

Il s'agit d'étudier ce problème dans deux cas particuliers :

\* Nous nous intéressons dans une première partie à la convection au-dessus d'une surface courbe, la température étant constante en chaque instant  $t$  sur celle-ci. Ceci a été traité par Zeytounian ( 1968 ) qui a obtenu une solution uniformément valable. Il faut cependant noter que ce travail avait été fait à Moscou en 1961 et avait pour but de montrer que l'introduction de la force d'Archimède engendrait un accroissement de température sur la paroi dû aux termes quasi-linéaires, ce qui généralisait l'étude de Schlichting ( 1932 ).

\* La deuxième partie de ce travail est relative à la convection au-dessus d'une surface plane ayant des hétérogénéités thermiques. C'est le phénomène de brises qui a été également formulé par Zeytounian ( 1976 ).

Enfin, dans le cas de la convection naturelle au-dessus d'une surface courbe, et sous réserve de la neutralité de la stratification de référence, la solution dans la zone distale est obtenue par une extension de la méthode de résolution d'équations différentielles non-linéaires dues à Fetti ( 1956 ).

PREMIÈRE PARTIE

VENTS DE PENTES

## I FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Le phénomène physique que nous avons pour but d'étudier est une transmission de chaleur dans un fluide par la fluctuation de température de paroi à haute fréquence induisant une convection naturelle par l'intermédiaire de la force d'Archimède.

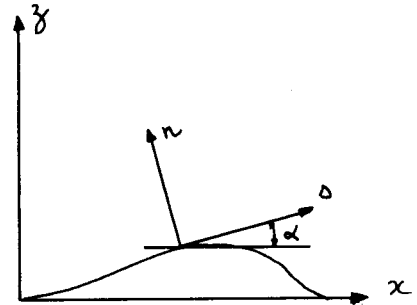
Les équations de départ sont celles de Navier-Stokes ; elles se réduisent dans le cas d'un mouvement bidimensionnel, dans le plan des  $x, z$  à :

$$(1a) \quad \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + w \frac{du}{dz} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right)$$

$$(1b) \quad \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + w \frac{dw}{dz} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g + \nu \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right)$$

$$(1c) \quad \frac{dp}{dt} + \frac{dpu}{dx} + \frac{dpw}{dz} = 0$$

$$(1d) \quad \frac{dT}{dt} + u \frac{dT}{dx} + w \frac{dT}{dz} - \frac{\chi-1}{\chi} \frac{T}{\rho} \left( \frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + w \frac{dp}{dz} \right) = \alpha \left( \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right)$$



où  $u, w$  sont les composantes de la vitesse;  $t$  le temps;  $x, z$  les coordonnées orthogonales rectangulaires;  $p, T, \rho$  les pression, température et masse volumique;  $g$  l'accélération de la pesanteur;  $\nu$  le coefficient cinématique de viscosité turbulente;  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  où  $\lambda$  est le coefficient de conductibilité thermique, et  $c_p$  la capacité thermique à pression constante;  $\chi = \frac{c_p}{c_v}$  le rapport des capacités thermiques.

Afin de pouvoir effectuer les approximations de couche limite au sens de Prandtl, il faut d'abord transformer les coordonnées  $x$  et  $z$  en coordonnées  $s$  et  $n$  respectivement parallèle et perpendiculaire à la surface courbe.

Ainsi, après avoir posé  $p = p_\infty + p'$ ;  $T = T_\infty + T'$ ;  $\rho = \rho_\infty + \rho'$  où  $p_\infty, T_\infty, \rho_\infty$  sont les valeurs standard positives de la pression de la température et de la masse volumique;  $p', T', \rho'$  étant les perturbations de ces mêmes éléments engendrées pendant le mouvement convectif, Zeytounian (1968) obtient :

$$(2a) \quad \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} \frac{d\bar{u}}{ds} + \bar{w} \frac{d\bar{u}}{dn} = - \frac{d\psi'}{ds} + \nu \frac{d^2\bar{u}}{dn^2} + \frac{g}{T_m} \sin \alpha T'$$

$$(2b) \quad 0 = - \frac{d\psi'}{dn} + \frac{g}{T_m} \cos \alpha T'$$

$$(2c) \quad \frac{dT'}{dt} + \bar{u} \frac{dT'}{ds} + \bar{w} \frac{dT'}{dn} + (\gamma_\alpha - \gamma_\infty) \left( \bar{u} \sin \alpha + \bar{w} \cos \alpha \right) = \alpha \frac{d^2T'}{dn^2}$$

$$(2d) \quad \frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{d\bar{w}}{dn} = 0$$

Dans ces équations,  $\bar{u}, \bar{w}$  sont les composantes de la vitesse du mouvement convectif le long des axes  $s$  et  $n$  respectivement;  $\psi' = R T_m p' / \rho_\infty$  où  $R$  est la constante des gaz parfaits; et  $T_m$  la valeur constante moyenne de  $T_\infty$  ;

$$(2e) \quad \gamma_\alpha = \frac{\chi-1}{\chi} \frac{g}{R} ; \quad \gamma_\infty = - \frac{dT_\infty}{dz}$$

Le paramètre  $\gamma_\alpha - \gamma_\infty$  tient compte de la stratification du mouvement de base.

Les équations ( 2 ) peuvent être encore simplifiées :

\* d'abord dans l'équation ( 2a ) le terme  $-\frac{d\bar{\Psi}'}{d\sigma}$  peut être négligé par rapport aux autres termes de l'équation, étant donné que la variation de pression le long de la surface courbe, ayant une température constante à chaque instant  $t$ , est très petite par rapport au terme  $\frac{g}{T_m} T' \sin \alpha$  qui nous donne le terme moteur du mouvement convectif.

\* ensuite dans l'équation ( 2c ) apparaît dans le terme traduisant la stratification la valeur  $(\gamma_\alpha - \gamma_\infty) \bar{w} \cos \alpha$  qui est très petite en comparaison des autres termes, et que nous pourrions négliger avec une bonne approximation.

\* enfin pour simplifier l'exposé, nous supposons que  $\alpha = \nu = \nu_0$ .

Nous obtenons en définitive le système suivant :

$$(3a) \quad \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} \frac{d\bar{u}}{d\sigma} + \bar{w} \frac{d\bar{u}}{dn} = \frac{g}{T_m} \sin \alpha T' + \nu_0 \frac{d^2 \bar{u}}{dn^2}$$

$$(3b) \quad \frac{dT'}{dt} + \bar{u} \frac{dT'}{d\sigma} + \bar{w} \frac{dT'}{dn} + (\gamma_\alpha - \gamma_\infty) \bar{u} \sin \alpha = \nu_0 \frac{d^2 T'}{dn^2}$$

$$(3c) \quad \frac{d\bar{u}}{d\sigma} + \frac{d\bar{w}}{dn} = 0$$

En accord avec la formulation de notre problème, nous prendrons les conditions aux limites suivantes :

$$(4a) \quad \text{pour } \eta = 0 \quad \bar{u} = \bar{w} = 0 \quad T' = T_{00} \text{ en } \sigma t$$

$$(4b) \quad \text{pour } \eta \rightarrow \infty \quad \bar{u} = 0 \quad T' = 0$$

L'équation ( 3c ) permet d'introduire la fonction de courant  $\bar{\Psi}(\sigma, n, t)$  telle que  $\bar{u} = \frac{d\bar{\Psi}}{dn}$   $\bar{w} = -\frac{d\bar{\Psi}}{d\sigma}$

Nous obtenons alors pour  $\bar{\Psi}$  et  $T'$  les deux équations suivantes :

$$(5a) \quad \frac{d^2 \bar{\Psi}}{d\sigma dn} + \frac{d\bar{\Psi}}{dn} \frac{d^2 \bar{\Psi}}{d\sigma dn} - \frac{d\bar{\Psi}}{d\sigma} \frac{d^2 \bar{\Psi}}{dn^2} = \frac{g}{T_m} \sin \alpha T' + \nu_0 \frac{d^3 \bar{\Psi}}{dn^3}$$

$$(5b) \quad \frac{dT'}{dt} + \frac{d\bar{\Psi}}{dn} \frac{dT'}{d\sigma} - \frac{d\bar{\Psi}}{d\sigma} \frac{dT'}{dn} + (\gamma_\alpha - \gamma_\infty) \frac{d\bar{\Psi}}{dn} \sin \alpha = \nu_0 \frac{d^2 T'}{dn^2}$$

avec les conditions aux limites :

$$(6a) \quad \text{pour } n = 0 \quad \frac{d\bar{\Psi}}{dn} = \frac{d\bar{\Psi}}{d\sigma} = 0 \quad T' = T_{00} \text{ en } \sigma t$$

$$(6b) \quad \text{pour } n \rightarrow \infty \quad \frac{d\bar{\Psi}}{dn} = 0 \quad T' = 0$$

Introduisons maintenant les grandeurs sans dimensions :

$$\xi = \frac{\sigma}{L} \quad ; \quad \eta = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu_0}} n \quad ; \quad \tau = \sigma t$$

$$\Psi = \frac{\sigma}{g} T_m \sqrt{\frac{\sigma}{\nu_0}} \frac{\bar{\Psi}}{T_{00} \sin \alpha_0} \quad ; \quad \theta = \frac{T'}{T_{00}}$$

où  $L$  et  $\alpha_0$  sont respectivement une échelle horizontale et une pente caractéristique de la surface courbe.



Pour  $\Psi$  et  $\Theta$  nous obtenons le problème suivant :

7a 
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau \partial \eta} + \varepsilon \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right) = \Gamma \Theta + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \eta^3}$$

7b 
$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \varepsilon \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + \varepsilon \mu \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}$$

8a avec pour  $\eta = 0$  
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \Theta = \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2}$$

8b pour  $\eta \rightarrow \infty$  
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0 \quad ; \quad \Theta = 0$$

8c où 
$$\Gamma = \Gamma(\xi) = \frac{\sin \alpha (L\xi)}{\sin \alpha_0} \quad ; \quad \mu = \frac{L \sin \alpha_0 (\gamma \alpha - \gamma_0)}{T_{00}} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{g}{T_m} \frac{T_{00} \sin \alpha_0}{\sigma^2 L}$$

$\Gamma(\xi)$  est une fonction de l'abscisse curviligne  $\xi$ , et caractérise la géométrie de la surface courbe  $\eta = 0$  au-dessus de laquelle on étudie la convection naturelle. Le paramètre  $\varepsilon$  est l'inverse d'un nombre de Froude multiplié par le rapport de l'amplitude des fluctuations de température de la paroi au niveau moyen de température dans la couche de fluide considérée. Nous supposons  $L, \alpha_0, T_{00}$  et  $\sigma$  choisies de telle façon que  $\varepsilon \ll 1$ . Dans ce cas, le champ des vitesses est contrôlé par l'équilibre entre la diffusion du tourbillon par effet de viscosité et sa création par la force d'Archimède, l'effet relatif de la convection étant d'ordre  $\varepsilon$ .

Remarquons que dans le travail de Zeytounian (1968), les valeurs limites  $\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}(\tau, \xi, \eta \rightarrow \infty)$  et  $\Theta(\tau, \xi, \eta = 0)$  faisaient intervenir deux constantes  $A(\xi)$  et  $B(\xi)$  qui s'interprètent comme un effet secondaire de la convection dû aux termes quasi-linéaires apparaissant dans les équations (7). Leur introduction permettait d'obtenir une solution uniformément valable. En fait, depuis les travaux de Stuart (1965) et Riley (1966), on sait que  $\varepsilon$  est un petit paramètre de perturbation singulière.

## II MÉTHODE DE RÉOLUTION

Nous allons donc chercher la solution de notre problème (7). (8) en développant  $\Psi$  et  $\Theta$  en série entière par rapport à  $\varepsilon$  :

9 
$$\Psi = \Psi^{(0)} + \varepsilon \Psi^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

$$\Theta = \Theta^{(0)} + \varepsilon \Theta^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

Ceci nous permet d'obtenir le système d'équations suivant :

10a 
$$\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial \tau \partial \eta} - \frac{\partial^3 \Psi^{(0)}}{\partial \eta^3} = \Gamma \Theta^{(0)}$$

10b 
$$\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0$$

10c 
$$\frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial \tau \partial \eta} - \frac{\partial^3 \Psi^{(1)}}{\partial \eta^3} = \Gamma \Theta^{(1)} - \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial \eta^2}$$

10d 
$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta^{(1)}}{\partial \eta^2} = -\Gamma \mu \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \eta}$$

qui doit être résolu avec les conditions aux limites :

(11a) pour  $\eta = 0$   $\frac{d\psi_{(0)}}{d\eta} = \frac{d\psi_{(0)}}{d\xi} = \frac{d\psi_{(1)}}{d\eta} = \frac{d\psi_{(1)}}{d\xi} = 0$   
 $\theta_{(0)} = \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2}$  ;  $\theta_{(1)} = 0$

(11b) pour  $\eta \rightarrow \infty$   $\frac{d\psi_{(0)}}{d\eta} = \frac{d\psi_{(1)}}{d\eta} = 0$  ;  $\theta_{(0)} = \theta_{(1)} = 0$

Première approximation :

Supposons que :

(12)  $\psi_{(0)}(\eta, \xi, \tau) = \Gamma(\xi) \frac{\psi_0(\eta)e^{i\tau} + \tilde{\psi}_0(\eta)e^{-i\tau}}{2}$   
 $\theta_{(0)}(\eta, \xi, \tau) = \frac{\theta_0(\eta)e^{i\tau} + \tilde{\theta}_0(\eta)e^{-i\tau}}{2}$

Alors, de (10 a) et (10 b), nous obtenons pour déterminer  $\psi_0(\eta)$  et  $\theta_0(\eta)$  les équations différentielles ordinaires :

(13)  $\psi_0''' - i\psi_0' + \theta_0 = 0$   
 $\theta_0'' - i\theta_0 = 0$

les conditions aux limites étant :

(14) pour  $\eta = 0$   $\psi_0' = \psi_0 = 0$  ;  $\theta_0 = 1$   
 pour  $\eta \rightarrow \infty$   $\psi_0' = 0$  ;  $\theta_0 = 0$

la solution de (13) (14) sera de la forme :

(15)  $\psi_0 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} - \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) - \frac{i}{2}\eta \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right)$   
 $\theta_0 = \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right)$

En mettant ces expressions dans (12), nous obtenons comme première approximation :

(16)  $\psi_{(0)} = \frac{1}{2} \Gamma \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) + (1 + \eta\sqrt{2}) \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) \right] \right\}$   
 $\theta_{(0)} = \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right)$

Notons que nous pouvons également obtenir  $\psi_{(0)}$  et  $\theta_{(0)}$  en écrivant :

$$\psi_{(0)} = \Gamma \left( \psi_{0r} \cos \tau - \psi_{0i} \sin \tau \right)$$

$$\theta_{(0)} = \theta_{0r} \cos \tau - \theta_{0i} \sin \tau$$

Deuxième approximation :

Si l'on porte l'approximation obtenue pour  $\psi_{(0)}$  et  $\theta_{(0)}$  dans les équations (10 c) et (10 d), on voit apparaître dans les membres de droite des termes du type suivant :

$$e^{2i\tau}, e^{i\tau}, e^{-i\tau}, e^{-2i\tau}$$

ainsi que des termes stationnaires. Ainsi nous sommes amenés à décomposer chacun de ces seconds membres en trois parties, dont l'une n'est pas fonction du temps. C'est-à-dire que nous prendrons pour  $\psi_{(1)}$  et  $\theta_{(1)}$  les expressions :

$$\begin{aligned}
 \Psi_{(1)} &= \Gamma \frac{d\Gamma}{d\mathcal{F}} \left[ \frac{\Psi_{1p2} e^{2i\tau} + \tilde{\Psi}_{1p2} e^{-2i\tau}}{2} \right] + \mu \Gamma^3 \left[ \frac{\Psi_{1p1} e^{i\tau} + \tilde{\Psi}_{1p1} e^{-i\tau}}{2} \right] + \Gamma \frac{d\Gamma}{d\mathcal{F}} \Psi_{1st} \\
 &= \Psi_{(1)p2} + \Psi_{(1)p1} + \Psi_{(1)st} \\
 \Theta_{(1)} &= \frac{d\Gamma}{d\mathcal{F}} \left[ \frac{\Theta_{1p2} e^{2i\tau} + \tilde{\Theta}_{1p2} e^{-2i\tau}}{2} \right] + \mu \Gamma^2 \left[ \frac{\Theta_{1p1} e^{i\tau} + \tilde{\Theta}_{1p1} e^{-i\tau}}{2} \right] + \frac{d\Gamma}{d\mathcal{F}} \Theta_{1st} \\
 &= \Theta_{(1)p2} + \Theta_{(1)p1} + \Theta_{(1)st}
 \end{aligned}$$

où les fonctions avec indice 1p1 ou 1p2 déterminent respectivement les composantes périodiques de fréquence Un ou Deux de la deuxième approximation, et celles avec l'indice 1st, les composantes stationnaires.

En substituant (17) dans les équations (10c) et (10d), nous obtenons les équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned}
 18a) \quad 2i \Psi'_{1p2} - \Psi_{1p2}''' &= \Theta_{1p2} + \frac{\Psi_0 \Psi_0''}{2} - \frac{\Psi_0'^2}{2} \\
 18b) \quad 2i \Theta_{1p2} - \Theta_{1p2}'' &= \frac{\Psi_0 \Theta_0'}{2} \\
 18c) \quad i \Psi'_{1p1} - \Psi_{1p1}''' &= \Theta_{1p1} \\
 18d) \quad i \Theta_{1p1} - \Theta_{1p1}'' &= -\Psi_0' \\
 18e) \quad -\Psi_{1st}''' &= \Theta_{1st} - \frac{\Psi_0' \tilde{\Psi}_0'}{2} + \frac{1}{4} (\Psi_0 \tilde{\Psi}_0'' + \tilde{\Psi}_0 \Psi_0'') \\
 18f) \quad -\Theta_{1st}'' &= \frac{1}{4} (\Psi_0 \tilde{\Theta}_0' + \tilde{\Psi}_0 \Theta_0')
 \end{aligned}$$

qui nous permettront de déterminer  $\Psi_{1p2}, \Psi_{1p1}, \Psi_{1st}, \Theta_{1p2}, \Theta_{1p1}, \Theta_{1st}$ . Les conditions aux limites relatives aux équations (18a) et (18b) donnant le mouvement périodique d'ordre Un et de fréquence Deux, seront :

$$\begin{aligned}
 19) \quad \text{pour } \eta = 0 \quad \Psi'_{1p2} = \Psi_{1p2} = 0 \quad ; \quad \Theta_{1p2} = 0 \\
 \text{pour } \eta \rightarrow \infty \quad \Psi'_{1p2} = 0 \quad ; \quad \Theta_{1p2} = 0
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir une solution de la forme :

$$\begin{aligned}
 20a) \quad \Psi_{1p2} &= \frac{17}{64} (1+i) \exp[-(1+i)\eta] - \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \exp[-(\frac{1+i}{\sqrt{2}})\eta] + \frac{9\sqrt{2}}{128} (1+i) \exp[-(1+i)\sqrt{2}\eta] \\
 &+ \frac{5}{32} i\eta \exp[-(1+i)\eta] + \frac{i}{8} \eta \exp[-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta] + \frac{i}{32} \eta \exp[-(1+i)\sqrt{2}\eta] + \frac{23\sqrt{2}-34}{128} (1+i)
 \end{aligned}$$

$$20b) \quad \Theta_{1p2} = \frac{5}{8} \exp[-(1+i)\eta] - \frac{1}{4} \exp[-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta] - \frac{3}{8} \exp[-(1+i)\sqrt{2}\eta] - \frac{1+i}{8\sqrt{2}} \eta \exp[-(1+i)\sqrt{2}\eta]$$

et d'écrire les expressions réelles de  $\Psi_{(1)p2}$  et  $\Theta_{(1)p2}$  :

$$21a) \quad \Theta_{(1)p2} = \frac{1}{16} \frac{d\Gamma}{d\mathcal{F}} \left\{ \begin{aligned} &10 \exp(-\eta) \cos(\eta - 2\tau) - 4 \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - 2\tau) \\ &- \sqrt{2} \exp(-\sqrt{2}\eta) \left[ (\eta + 3\sqrt{2}) \cos(\sqrt{2}\eta - 2\tau) + \eta \sin(\sqrt{2}\eta - 2\tau) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$(21b) \quad \Psi_{(1) p_2} = \frac{1}{32} \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \left\{ \begin{aligned} & 5 \exp(-\eta) \left[ \frac{17}{10} \cos(\eta - 2\tau) + \left(\frac{17}{10} + \eta\right) \sin(\eta - 2\tau) \right] \\ & - 4 \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - 2\tau\right) + (2\sqrt{2} - \eta) \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - 2\tau\right) \right] \\ & + \exp(-\sqrt{2}\eta) \left[ \frac{9\sqrt{2}}{4} \cos(\sqrt{2}\eta - 2\tau) + \left(\frac{9\sqrt{2}}{4} + \eta\right) \sin(\sqrt{2}\eta - 2\tau) \right] \\ & + \frac{23\sqrt{2} - 34}{128} (\cos 2\tau - \sin 2\tau) \end{aligned} \right\}$$

Nous pouvons également écrire

$$(22) \quad \begin{aligned} \Psi_{(1) p_2} &= \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \left( \Psi_{1 p_2} \cos 2\tau - \Psi_{1 p_2 i} \sin 2\tau \right) \\ \Theta_{(1) p_2} &= \frac{d\Gamma}{d\xi} \left( \Theta_{1 p_2} \cos 2\tau - \Theta_{1 p_2 i} \sin 2\tau \right) \end{aligned}$$

Pour les composantes périodiques d'ordre I et de fréquence Un, nous avons les équations ( I 8 c ) et ( I 8 d ) qui doivent être résolues avec les conditions aux limites suivantes :

$$(23) \quad \begin{aligned} \text{pour } \eta = 0 & : \Psi'_{1 p_1} = \Psi_{1 p_1} = 0 \quad ; \quad \Theta_{1 p_1} = 0 \\ \text{pour } \eta \rightarrow \infty & \quad \Psi'_{1 p_1} = 0 \quad ; \quad \Theta_{1 p_1} = 0 \end{aligned}$$

La solution de ( I 8 c ) - ( I 8 d ) - ( 23 ) est donc de la forme :

$$(24) \quad \begin{aligned} \Psi_{1 p_1} &= \left( \frac{1}{48} \eta^3 + \frac{1-i}{8\sqrt{2}} \eta^2 - \frac{5i}{16} \eta - 5 \frac{1+i}{16\sqrt{2}} \right) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) + 5 \frac{1+i}{16\sqrt{2}} \\ \Theta_{1 p_1} &= \left( -\frac{i}{8} \eta^2 - \frac{1+i}{8\sqrt{2}} \eta \right) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) \end{aligned}$$

d'où nous déduisons  $\Psi_{(1) p_1}$  et  $\Theta_{(1) p_1}$  :

$$(25) \quad \begin{aligned} \Psi_{(1) p_1} &= \Gamma^3 \left\{ \frac{5}{16} \sin\left(\frac{\eta}{4} - \tau\right) + \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ \left(\frac{\eta^3}{48} + \frac{\eta^2}{8\sqrt{2}} - \frac{5}{16\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) - \left(\frac{\eta^2}{8\sqrt{2}} + \frac{5\eta}{16} + \frac{5}{16\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) \right] \right\} \\ \Theta_{(1) p_1} &= \Gamma^2 \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ -\frac{\eta}{8\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) - \left(\frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{8\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) \right] \end{aligned}$$

Enfin les équations relatives aux composantes stationnaires d'ordre Un doivent être résolues avec les conditions aux limites :

$$(26) \quad \begin{aligned} \text{pour } \eta = 0 & : \Psi'_{1 st} = \Psi_{1 st} = 0 \quad ; \quad \Theta_{1 st} = 0 \\ \text{pour } \eta \rightarrow \infty & : \Psi'_{1 st} = 0 \quad ; \quad \Theta_{1 st} = 0 \end{aligned}$$

Par intégrations successives, nous obtenons grâce à ( I 8 e ) et ( I 8 f ) les expressions :

$$(27a) \quad \begin{aligned} \Psi_{1 st} &= -\frac{1}{16\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}\eta) \left( \eta^2 + \frac{9}{\sqrt{2}} \eta + \frac{25}{2} \right) - \left[ \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) \left( \frac{\eta}{16} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) + \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \eta\right) \left( \frac{\eta}{16} + \frac{1+i}{4\sqrt{2}} \right) \right] \\ & - c_1 \frac{\eta^4}{24} - c_2 \frac{\eta^3}{6} + c_3 \frac{\eta^2}{2} + c_4 \eta + c_5 \end{aligned}$$

(27b) 
$$\theta_{1st} = \frac{i}{8} \left[ \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \eta\right) - \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) \right] + \exp(-\sqrt{2} \eta) \left(-\frac{\eta}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right) + C_1 \eta + C_2$$

La forme de  $\psi_{1st}$  et  $\theta_{1st}$  présente un intérêt particulier puisqu'il n'est pas possible d'imposer toutes les conditions aux limites. Ces développements (27) ne sont donc pas uniformément valables dans la couche principale de Stokes.

Selon la valeur des constantes d'intégration, il apparaît un comportement singulier de  $\theta_{1st}$  soit au voisinage de  $\eta \rightarrow 0$ , soit au voisinage de  $\eta \rightarrow \infty$ , en revanche  $\psi_{1st}$  sera singulier au voisinage de  $\eta \rightarrow \infty$ .

Par conséquent il faut envisager l'introduction d'une sous-couche limite, et d'une sur-couche limite, afin de retrouver les singularités de  $\psi_{1st}$  et  $\theta_{1st}$ .

Non-existence d'une couche proximale

Posons tout d'abord

(28) 
$$\begin{aligned} \eta &= \varepsilon^\gamma \hat{\eta} && \text{avec } \gamma > 0 \\ \psi &= \varepsilon^\beta \hat{\psi} \\ \theta &= \hat{\theta} \end{aligned}$$

La recherche d'équations et de solutions non excessivement dégénérées est vaine et nous montre qu'il est impossible de faire apparaître une sous-couche limite. Par conséquent nous allons chercher à introduire une couche supérieure distale au sein même de la couche convective considérée, au voisinage de  $\eta \rightarrow \infty$  permettant de retrouver lorsque  $\eta \rightarrow 0$  ( $\hat{\eta} = \delta(\varepsilon) \eta$ ;  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) le comportement singulier de  $\psi$  et  $\theta$  à la limite supérieure de la couche principale de Stokes, lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ .

Considérons à nouveau les expressions (27) : pour satisfaire les conditions  $\psi'_{1st}(\eta=0) = \psi_{1st}(\eta=0) = \theta_{1st}(\eta=0) = 0$ , il faut faire le choix :

$$C_2 = \frac{1}{4} \quad ; \quad C_4 = -\frac{7}{8} \quad ; \quad C_5 = \frac{41}{32\sqrt{2}}$$

Les conditions  $\psi'_{1st}(\eta \rightarrow \infty) = \theta_{1st}(\eta \rightarrow \infty) = 0$  ne peuvent, quant à elles, être vérifiées.

Une fois la présence d'une couche distale admise, il n'y a plus lieu de supposer que  $\theta$  doit rester borné à la limite  $\eta \rightarrow \infty$ . Cependant le choix  $C_1 = 0$  s'avère être exact comme il sera montré plus loin en amexe.

Enfin la constante  $C_3$  n'intervient que comme paramètre dans les calculs de termes d'ordre supérieur, cela nous autorise à faire le choix

$$C_3 = 0$$

En définitive, nous pouvons écrire les expressions de  $\psi_{1st}$  et  $\theta_{1st}$  comme suit :

(29) 
$$\begin{aligned} \psi_{1st} &= -\frac{1}{16\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2} \eta) \left( \eta^2 + \frac{9}{\sqrt{2}} \eta + \frac{25}{2} \right) - \left[ \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) \left( \frac{\eta}{16} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) + \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \eta\right) \left( \frac{\eta}{16} + \frac{1+i}{4\sqrt{2}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\eta^3}{24} - \frac{7}{8} \eta + \frac{41}{32\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\theta_{1st} = \frac{i}{8} \left[ \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \eta\right) - \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) \right] + \exp(-\sqrt{2} \eta) \left(-\frac{\eta}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

Mise en évidence du problème distal

On constate que la solution ( 9 ) est uniformément valable à l'ordre zéro, et qu'il n'est donc pas nécessaire d'introduire de couche supérieure distale.

Par contre, à l'ordre Un, si l'on impose à la solution  $\Psi_{(1)}$ ,  $\theta_{(1)}$ , de satisfaire aux conditions :

$$\frac{\partial \Psi_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi_{(1)}}{\partial \eta} = \theta_{(1)} = 0 \quad \text{pour } \eta = 0$$

alors on est conduit, lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ , aux comportements suivants pour  $\Psi$  et  $\theta$  :

(30a) 
$$\Psi \sim \frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] + \varepsilon \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left[ \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right]$$

$$+ \varepsilon \Gamma \frac{\Gamma^3}{16\sqrt{2}} \left[ \frac{1+i}{2} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-i\tau} \right] + \varepsilon \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \left[ -\frac{\eta^3}{24} - \frac{7}{8} \eta + \frac{41}{32\sqrt{2}} \right] + O(\varepsilon^2)$$

(30b) 
$$\theta \sim \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\xi} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Nous allons donc considérer la région distale et nous demander s'il existe des termes que nous n'avons pas mentionnés et qui par leur omission nous ont conduits aux résultats précédents :

(31a) soit  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-\gamma}$  avec  $\gamma < 0$  de telle façon que :

$$\eta = \varepsilon^{\gamma} \bar{\eta}$$

et introduisons pour la couche supérieure distale les fonctions :

(31b) 
$$\bar{\Psi}(\xi, \bar{\eta}, \tau, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \bar{\theta}(\xi, \bar{\eta}, \tau, \varepsilon) \quad \text{telles que}$$

$$\Psi - \frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] = \varepsilon^{\beta} \bar{\Psi}$$

(31c) 
$$\theta = \varepsilon^{\alpha} \bar{\theta}$$

En raison du comportement ( 30b) de  $\theta$ , il apparaît que  $\alpha = 1$

En substituant ( 31 ) dans ( 7 ), nous obtenons :

(32) 
$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] - \varepsilon^{1-\gamma} \frac{\Gamma'}{2} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$= \Gamma \varepsilon^{1-\beta+\gamma} \bar{\theta} + \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] - \varepsilon^{1-\gamma} \frac{\Gamma'}{2} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}}$$

$$+ \varepsilon^{\beta-\gamma} \Gamma \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

Il s'agit ici de rechercher la dégénérescence significative associée au problème distal, c'est-à-dire de déterminer les réels  $\beta$  et  $\gamma$ .

Tout d'abord, les termes convectifs et de viscosité étant du même ordre de grandeur, nous en tirons la relation :

(33a) 
$$1 + \beta - \gamma = -2\gamma$$

D'autre part, il nous faut examiner les conditions de raccord sur  $\Psi$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ , pour ce faire, réécrivons (30a) en variable distale, et (31b) :

$$\begin{aligned} \Psi - \frac{\Gamma}{2} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) &= \varepsilon \Gamma \Gamma' \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left( \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right) \\ &+ \varepsilon \mu \Gamma^3 \frac{5}{16\sqrt{2}} \left( \frac{1+i}{2} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-i\tau} \right) \\ &+ \Gamma \Gamma' \left[ -\varepsilon^{1+3\gamma} \frac{\bar{\eta}^3}{24} - \varepsilon^{1+\gamma} \frac{7}{8} \bar{\eta} + \frac{41}{32\sqrt{2}} \varepsilon \right] + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^\beta \bar{\Psi} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la règle simplifiée de raccord de Van Dyke (1964), il vient :

$$\beta = 1+3\gamma$$

Par conséquent, la résolution du système (33) nous permet de déterminer  $\beta$  et  $\gamma$  :

$$\beta = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

En définitive, les fonctions  $\bar{\Psi}$  et  $\bar{\Theta}$  doivent satisfaire au problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] - \varepsilon^{3/2} \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\bar{\xi}} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ = \Gamma \varepsilon \bar{\Theta} + \varepsilon \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] - \varepsilon^{3/2} \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\bar{\xi}} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \\ + \mu \Gamma \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pour } \bar{\eta} = 0 \quad \bar{\Psi} &= \Gamma \frac{d\Gamma}{d\bar{\xi}} \varepsilon^{3/2} \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left( \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right) \\ &+ \mu \Gamma^3 \varepsilon^{3/2} \frac{5}{16\sqrt{2}} \left( \frac{1+i}{2} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-i\tau} \right) + \Gamma \frac{d\Gamma}{d\bar{\xi}} \varepsilon^{3/2} \frac{41}{32\sqrt{2}} + O(\varepsilon^{5/2}) \\ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} &= -\Gamma \frac{d\Gamma}{d\bar{\xi}} \varepsilon \frac{7}{8} + O(\varepsilon^{5/2}) \quad ; \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\bar{\xi}} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{pour } \bar{\eta} \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = 0 \quad ; \quad \bar{\Theta} = 0$$

Il s'avère alors que ce système (34) est erroné à cause du terme apparaissant dans (34b). Pour pouvoir effectuer la résolution du problème distal, ce terme lié à la stratification doit être proportionnel à  $\varepsilon$ . Il nous faut donc admettre la relation de similitude suivante

$$\mu = \varepsilon \hat{\mu} \quad \text{où} \quad \hat{\mu} = O(1)$$

et dans ce cas, le système ( 34 ) devient :

(36a) 
$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] - \varepsilon^{3/2} \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\xi} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} = \Gamma \varepsilon \bar{\Theta} + \varepsilon \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

(36b) 
$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] - \varepsilon^{3/2} \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\xi} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} + \varepsilon \hat{\mu} \Gamma \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

(36c) pour  $\bar{\eta} = 0$  
$$\bar{\Psi} = \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \varepsilon^{3/2} \left[ \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left( \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right) + \frac{41}{32\sqrt{2}} \right] + O(\varepsilon^{5/2})$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = -\Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \varepsilon \frac{7}{8} + O(\varepsilon^{5/2})$$

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\xi} + O(\varepsilon)$$

(36d) pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$  
$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = 0 \quad ; \quad \bar{\Theta} = 0$$

L'expression de  $\bar{\Psi}$  et de  $\bar{\Theta}$  lorsque  $\bar{\eta} \rightarrow 0$  nous amène à rechercher leur solution sous forme de développements en série par rapport à  $\varepsilon^{1/2}$  :

(37) 
$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{(0)} + \varepsilon^{1/2} \bar{\Psi}_{(1)} + \varepsilon \bar{\Psi}_{(2)} + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_{(0)} + \varepsilon^{1/2} \bar{\Theta}_{(1)} + \varepsilon \bar{\Theta}_{(2)} + O(\varepsilon^{3/2})$$

Nous obtenons donc le système d'équations suivant :

(38a) 
$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} = 0$$

(38b) 
$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(1)}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} = 0$$

(38c) 
$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} = \Gamma \bar{\Theta}_{(0)} + \frac{\partial^3 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

(38d) 
$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \tau} = 0$$

(38e) 
$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{(1)}}{\partial \tau} = 0$$

(38f) 
$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{(2)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} + \hat{\mu} \Gamma \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

pour lequel les conditions aux limites sont déduites de (36) :

(39a) pour  $\bar{\eta} = 0$  
$$\frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \bar{\Psi}_{(0)} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(1)}}{\partial \bar{\eta}} = \bar{\Psi}_{(1)} = \bar{\Psi}_{(2)} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{7}{8} \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi}$$

$$\bar{\Theta}_{(0)} = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\xi} \quad ; \quad \bar{\Theta}_{(1)} = \bar{\Theta}_{(2)} = 0$$

(39b) pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$  
$$\frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(1)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \bar{\eta}} = 0$$

$$\bar{\Theta}_{(0)} = \bar{\Theta}_{(1)} = \bar{\Theta}_{(2)} = 0$$

L'équation ( 38 a ) nous conduit à :

(40) 
$$\bar{\Psi}_{(0)} = \bar{\Psi}_{(0)1}(\bar{\eta}, \xi) + \bar{\Psi}_{(0)2}(\xi, \tau)$$



Pour déterminer  $\overline{\Psi}_{(0)1}$  et  $\overline{\Psi}_{(0)2}$ , il nous faut utiliser les conditions limites associées à l'ordre zéro :

pour  $\overline{\eta} = 0$   $\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} = \overline{\Psi}_{(0)} = 0$

pour  $\overline{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} = 0$

il est évident que la fonction  $\overline{\Psi}_{(0)2}$  ne peut satisfaire à ces conditions ; il faut donc choisir :  $\overline{\Psi}_{(0)2} \equiv 0$ . C'est-à-dire que

$$\overline{\Psi}_{(0)} = \overline{\Psi}_{(0)}(\xi, \overline{\eta})$$

est indépendante du temps et doit satisfaire aux conditions :

pour  $\overline{\eta} = 0$   $\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} = \overline{\Psi}_{(0)} = 0$

pour  $\overline{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} = 0$

Si l'on intègre l'équation (38 c) par rapport à  $\tau$ , et si l'on tient compte de la périodicité de l'écoulement recherché, il faut nécessairement que les termes indépendants de  $\tau$  soient nuls afin de ne pas engendrer de termes séculaires en  $\tau$ .

Le même raisonnement peut être tenu pour l'équation (38 f), ce qui nous conduit au système suivant :

$$\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\tau} = \frac{d\overline{\Theta}_{(0)}}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} \frac{d^2\overline{\Psi}_{(0)}}{d\xi d\overline{\eta}} - \frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\xi} \frac{d^2\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}^2} = \Gamma \overline{\Theta}_{(0)} + \frac{d^3\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}^3}$$

$$\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} \frac{d\overline{\Theta}_{(0)}}{d\xi} - \frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\xi} \frac{d\overline{\Theta}_{(0)}}{d\overline{\eta}} + \hat{H} \Gamma \frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} = \frac{d^2\overline{\Theta}_{(0)}}{d\overline{\eta}^2}$$

pour  $\eta = 0$   $\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} = \overline{\Psi}_{(0)} = 0$  ;  $\overline{\Theta}_{(0)} = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\xi}$

pour  $\eta \rightarrow \infty$   $\frac{d\overline{\Psi}_{(0)}}{d\overline{\eta}} = 0$  ;  $\overline{\Theta}_{(0)} = 0$

Ceci représente le problème stationnaire distal dominant qui régit le mouvement convectif à l'ordre zéro dans la couche supérieure distale où nous avons la représentation :

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \overline{\Psi}_{(0)}(\xi, \varepsilon^{1/2} \eta) + \dots$$

$$\Theta = \varepsilon \overline{\Theta}_{(0)}(\xi, \varepsilon^{1/2} \eta) + \dots$$

Notons enfin que, corrélativement à la relation de similitude (35), le terme de stratification apparaît à l'ordre deux dans le système (7). Nous recherchons donc précisément la solution proximale sous la forme :

$$\Psi = \Gamma(\xi) \left[ \frac{\Psi_{0p}(\eta) e^{i\tau} + \tilde{\Psi}_{0p}(\eta) e^{-i\tau}}{2} \right] + \varepsilon \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \left[ \frac{\Psi_{1p}(\eta) e^{2i\tau} + \tilde{\Psi}_{1p}(\eta) e^{-2i\tau}}{2} + \Psi_{1st}(\eta) \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\Theta = \frac{\Theta_{0p}(\eta) e^{i\tau} + \tilde{\Theta}_{0p}(\eta) e^{-i\tau}}{2} + \varepsilon \frac{d\Gamma}{d\xi} \left[ \frac{\Theta_{1p}(\eta) e^{2i\tau} + \tilde{\Theta}_{1p}(\eta) e^{-2i\tau}}{2} + \Theta_{1st}(\eta) \right] + O(\varepsilon^2)$$

C'est-à-dire qu'à l'ordre Un, il n'existe pas de termes en  $e^{i\tau}$  dans les développements de  $\Psi$  et  $\Theta$

Les solutions  $\Psi_0$  et  $\Theta_0$  à l'ordre zéro restent valables ; ainsi qu'à l'ordre Un les composantes stationnaires  $\Psi_{1st}$  et  $\Theta_{1st}$ , et les composantes périodiques de fréquence deux :  $\Psi_{1p2}$  et  $\Theta_{1p2}$  qui prennent respectivement ici les notations  $\Psi_{1p}$  et  $\Theta_{1p}$ .

Le comportement (30) de  $\Psi$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$  est lui aussi erroné et devient :

(46) pour  $\eta \rightarrow \infty$  
$$\Psi \rightarrow \frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] + \varepsilon \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \left[ \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left( \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} - \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right) - \frac{\eta^3}{24} - \frac{7}{8}\eta + \frac{41}{32\sqrt{2}} \right] + O(\varepsilon^2)$$

A l'ordre auquel nous avons limité ce travail, la solution distale n'est pas affectée par cette différence de comportement de  $\Psi$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ , puisque le terme proportionnel à  $\mu$  de la zone proximale se raccorde à  $\Psi(3)$ .

En définitive, il apparaît que le terme de stratification a une influence uniquement dans la zone distale.

Justification du choix  $C_1=0$

Revenons maintenant à la justification du choix  $C_1=0$ . Nous nous replaçons dans le cas où  $\mu = O(1)$ . Dans la couche proximale, lorsque  $C_1 \neq 0$  et  $\eta \rightarrow \infty$ , le comportement de  $\Psi$  et  $\Theta$  prend la forme :

(47a) 
$$\Psi \sim \frac{\Gamma}{2} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) + \varepsilon \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left( \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right) + \varepsilon \mu \Gamma^3 \frac{5}{16\sqrt{2}} \left( \frac{1+i}{2} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-i\tau} \right) + \varepsilon \Gamma \frac{d\Gamma}{d\xi} \left( -\frac{C_1 \eta^4}{24} - \frac{\eta^3}{24} + C_2 \frac{\eta^2}{2} - \frac{7}{8}\eta + \frac{41}{32\sqrt{2}} \right) + O(\varepsilon^2)$$

(47b) 
$$\Theta \sim \frac{1}{4} \varepsilon \frac{d\Gamma}{d\xi} + C_1 \eta \varepsilon \frac{d\Gamma}{d\xi} + O(\varepsilon^2)$$

$\bar{\Psi}$  et  $\bar{\Theta}$  Posons de nouveau  $\eta = \varepsilon^\gamma \bar{\eta}$  avec  $\gamma < 0$  et introduisons les fonctions telles que :

(48a) 
$$\Psi - \frac{\Gamma}{2} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) = \varepsilon^\beta \bar{\Psi}$$

(48b) 
$$\Theta = \varepsilon^\alpha \bar{\Theta}$$

Par substitution dans (7), nous obtenons :

(49) 
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\xi} \varepsilon^{1-\gamma} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ = \Gamma \varepsilon^{\alpha-\beta+\gamma} \bar{\Theta} + \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^3} \\ \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] - \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\xi} \varepsilon^{1-\gamma} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \\ + \varepsilon^{1+\beta-\gamma-\alpha} \Gamma \mu \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}^2} \end{aligned}$$

La recherche d'une dégénérescence significative associée au problème distal, nous amène à déterminer  $\beta, \gamma, \alpha$ .

Les termes convectifs et de viscosité étant du même ordre de grandeur, nous en déduisons la relation :

50a

$$1 + \beta - \gamma = -2\gamma$$

Ensuite, il nous faut examiner les conditions de raccord sur  $\Psi$  et  $\theta$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ ; récrivons donc d'une part (47 a) en variable distale et (48 a) et d'autre part (47 b) en variable distale et (48 b):

$$\begin{aligned} \Psi - \frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right] &= \varepsilon \Gamma \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left[ \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right] \\ &+ \varepsilon \mu \Gamma^3 \frac{5}{16\sqrt{2}} \left[ \frac{1+i}{2} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-i\tau} \right] \\ &+ \Gamma \frac{d\Gamma}{d\zeta} \left[ -\varepsilon^{1+4\gamma} \frac{\eta^{-4}}{24} C_1 - \varepsilon^{1+3\gamma} \frac{\eta^{-3}}{24} + \varepsilon^{1+2\gamma} \frac{\eta^{-2}}{2} C_3 - \varepsilon^{1+\gamma} \frac{7}{8} \eta + \frac{41}{32\sqrt{2}} \varepsilon \right] + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \beta \bar{\Psi} \end{aligned}$$

$$\theta = \varepsilon \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\zeta} + C_1 \frac{d\Gamma}{d\zeta} \varepsilon^{1+\gamma} \eta = \varepsilon^\alpha \bar{\theta}$$

d'où, d'après la règle simplifiée de raccord de Van Dyke, appliquée à  $\Psi$  et  $\theta$ , nous tirons:

$$\beta = 1+4\gamma$$

$$\alpha = 1+\gamma$$

50b

50c

Nous obtenons du système (50) les valeurs de  $\beta, \gamma, \delta$ ;

$$\beta = -\frac{3}{5} \quad ; \quad \gamma = -\frac{2}{5} \quad ; \quad \alpha = \frac{3}{5}$$

et par conséquent les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \tau \partial \eta} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \eta^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \eta^2} \varepsilon^{7/5} \\ = \varepsilon^{4/5} \Gamma \bar{\theta} + \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \eta^3} \end{aligned}$$

51

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \eta} \right] - \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \eta} \varepsilon^{7/5} \\ + \Gamma \mu \varepsilon^{1/5} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \eta} = \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

qui doivent satisfaire aux conditions aux limites déduites de (47):

$$\begin{aligned} \text{pour } \bar{\eta} = 0 \quad \bar{\Psi} &= \Gamma \frac{d\Gamma}{d\zeta} \varepsilon^{8/5} \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left( \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right) \\ &+ \mu \Gamma^3 \varepsilon^{8/5} \frac{5}{16\sqrt{2}} \left( \frac{1+i}{2} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-i\tau} \right) \\ &+ \Gamma \frac{d\Gamma}{d\zeta} \varepsilon^{8/5} \frac{41}{32\sqrt{2}} + O(\varepsilon^{13/5}) \end{aligned}$$

52

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \eta} = -\Gamma \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{7}{8} \varepsilon^{6/5} + O(\varepsilon^{13/5})$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \varepsilon^{2/5} + O(\varepsilon^{7/5})$$

$$\text{pour } \bar{\eta} \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \eta} = 0 \quad ; \quad \bar{\theta} = 0$$

53

L'obtention de la véritable dégénérescence significative associée au problème distal nécessite l'introduction de la relation de similitude:

$$M = \hat{\mu} \varepsilon^{3/5} \quad \text{où} \quad \hat{\mu} = 0(1)$$

En définitive les fonctions  $\bar{\Psi}$  et  $\bar{\theta}$  doivent satisfaire au problème suivant:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\zeta} \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\bar{\zeta}} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \varepsilon^{7/5}$$

$$= \Gamma \varepsilon^{4/5} \bar{\Theta} + \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] - \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{d\bar{\zeta}} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\tau} \right) \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \varepsilon^{7/5}$$

$$+ \hat{M} \Gamma \varepsilon^{4/5} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

54

pour  $\bar{\eta} = 0$   $\bar{\Psi} = \Gamma \frac{d\Gamma}{d\bar{\zeta}} \varepsilon^{8/5} \frac{23\sqrt{2}-34}{128} \left( \frac{1+i}{2} e^{2i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-2i\tau} \right)$   
 $+ \hat{M} \Gamma^3 \varepsilon^{11/5} \frac{5}{16\sqrt{2}} \left( \frac{1+i}{2} e^{i\tau} + \frac{1-i}{2} e^{-i\tau} \right) + \Gamma \frac{d\Gamma}{d\bar{\zeta}} \varepsilon^{8/5} \frac{41}{32\sqrt{2}} + o(\varepsilon^{13/5})$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = -\Gamma \frac{d\Gamma}{d\bar{\zeta}} \frac{7}{8} \varepsilon^{6/5} + o(\varepsilon^{13/5})$$

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\bar{\zeta}} \varepsilon^{2/5} + o(\varepsilon^{7/5})$$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = 0$  ;  $\bar{\Theta} = 0$

Nous sommes ainsi conduits à rechercher la solution de  $\bar{\Psi}$  et  $\bar{\Theta}$  sous forme de développements en série :

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{(0)} + \varepsilon^{2/5} \bar{\Psi}_{(1)} + \varepsilon^{4/5} \bar{\Psi}_{(2)} + \dots$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_{(0)} + \varepsilon^{2/5} \bar{\Theta}_{(1)} + \varepsilon^{4/5} \bar{\Theta}_{(2)} + \dots$$

55

et obtenons par substitution de ( 55 ) dans ( 54 ) le système d'équations :

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(1)}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \tau \partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\zeta} \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} = \Gamma \bar{\Theta}_{(0)} + \frac{\partial^3 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{(1)}}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{(2)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} + \hat{M} \Gamma \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

56

devant satisfaire aux conditions aux limites déduites de ( 54 ). Il est facile de montrer que nous retrouvons les équations ( 43 ) régissant le mouvement convectif à l'ordre zéro dans la couche supérieure distale, mais devant satisfaire aux conditions aux limites :

pour  $\bar{\eta} = 0$   $\frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \bar{\Psi}_{(0)} = 0$  ;  $\bar{\Theta}_{(0)} = 0$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = 0$  ;  $\bar{\Theta}_{(0)} = 0$

La méthode inspirée par Fetti's ( 1956 ) et détaillée plus loin nous permet de conclure que dans le cas présent où  $C_1$  est non nulle, la solution du problème distal est identiquement nulle, ce qui est en contradiction avec le comportement proximal, c'est-à-dire que  $C_1$  a nécessairement une valeur nulle.

Remarquons que concernant la nullité de  $C_1$ , l'argumentation est analogue à celle de Riley ( 1966 ) dans la mesure où nous retrouvons, lorsque  $C_1 \neq 0$ , le même système d'équations distales, mais avec des conditions aux limites différentes.

Influence de l'hypothèse de neutralité de la stratification de référence

Dans le système d'équations ( 7 ) apparaissait le terme  $\varepsilon^{\Gamma M} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}}$  lié à la stratification de référence et qui, d'après la relation de similitude  $M = \varepsilon \hat{M}$

prenait la forme  $\varepsilon^2 \hat{M} r \frac{d\psi}{d\eta}$  et  $\hat{M} r \frac{d\bar{\psi}_{(0)}}{d\eta}$  respectivement dans les systèmes

d'équations ( 7 ) et ( 43 ) régissant le mouvement convectif dans les zones proximale ou distale.

Par conséquent, à l'ordre auquel nous avons limité ce travail, on notait l'influence de la stratification de base uniquement dans cette zone distale.

La résolution du problème ( 43 ) par la méthode inspirée de Fettis qui sera précisée plus loin fait apparaître un système d'équations qu'il n'est pas possible de résoudre facilement.

La recherche de simplification nous conduit à faire l'hypothèse de neutralité de la stratification de référence, c'est-à-dire d'après ( 2 e ) et ( 8 c ) de supposer :

$$\left( - \frac{dT_0}{dz} \right) = \frac{\chi-1}{\chi} \frac{g}{R}$$

donc de considérer le cas où  $M = \hat{M} = 0$ .

L'influence de cette hypothèse se traduit donc par la transformation du problème stationnaire distal dominant qui prend la forme :

$$\frac{d\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\eta}} \frac{d^2\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\eta}^2} - \frac{d\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\xi}} \frac{d^2\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\eta}^2} = r \bar{\theta}_{(0)} + \frac{d^3\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\eta}^3}$$

$$\frac{d\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\eta}} \frac{d\bar{\theta}_{(0)}}{d\bar{\xi}} - \frac{d\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\xi}} \frac{d\bar{\theta}_{(0)}}{d\bar{\eta}} = \frac{d^2\bar{\theta}_{(0)}}{d\bar{\eta}^2}$$

(57) pour  $\bar{\eta} = 0$   $\frac{d\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\eta}} = \bar{\psi}_{(0)} = 0$  ;  $\bar{\theta}_{(0)} = \frac{1}{4} \frac{dr}{d\bar{\xi}}$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{d\bar{\psi}_{(0)}}{d\bar{\eta}} = 0$  ;  $\bar{\theta}_{(0)} = 0$

### Résolution du problème distal à l'ordre zéro

Pour résoudre ce système ( 57 ), nous allons utiliser une méthode inspirée de celle employée par Stuart ( 1965 ), elle même suggérée par Fettis ( 1956 ). Nous allons développer  $\bar{\psi}_{(0)}$  et  $\bar{\theta}_{(0)}$  en série entière par rapport à un " petit paramètre "  $\alpha$  qui prendra par la suite la valeur unité :

(58)  $\bar{\psi}_{(0)} = \gamma(\xi) + \alpha \phi_1(\xi, \bar{\eta}) + \alpha^2 \phi_2(\xi, \bar{\eta}) + \alpha^3 \phi_3(\xi, \bar{\eta}) + O(\alpha^4)$

$$\bar{\theta}_{(0)} = \delta(\xi) + \alpha T_1(\xi, \bar{\eta}) + \alpha^2 T_2(\xi, \bar{\eta}) + \alpha^3 T_3(\xi, \bar{\eta}) + O(\alpha^4)$$

Il est utile de préciser que cette méthode est particulièrement facile à appliquer quand les fonctions  $\phi$  et  $T$  ont un comportement exponentiel décroissant ainsi  $\gamma(\xi)$  et  $\delta(\xi)$  représentent les valeurs respectives de  $\bar{\psi}_{(0)}$  et  $\bar{\theta}_{(0)}$  lorsque  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$

Dans l'analyse suivante, nous noterons par des primes les dérivées par rapport à  $\eta$ , et par des suffixes les dérivées par rapport à  $\xi$ , sauf les dérivées de  $\gamma$  et  $\delta$  par rapport à  $\xi$  qui seront notées par des primes.

Les conditions aux limites relatives aux fonctions  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, T_1, T_2, T_3$  sont :

(59a) pour  $\bar{\eta} = 0$   $\phi'_1 = \phi'_2 = \phi'_3 = 0$

$$T_1 = \frac{1}{4} \frac{dr}{d\bar{\xi}} ; T_2 = T_3 = 0$$

(59b) pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\phi'_1 = \phi_1 = \phi'_2 = \phi_2 = \phi'_3 = \phi_3 = 0$  ;  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ .

Après avoir remarqué que conformément à ces conditions,  $J(\xi) = 0$  nous déterminerons  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, T_1, T_2, T_3$  en fonction du paramètre  $\gamma(\xi)$  qui sera ensuite déterminé en écrivant :

$$\bar{\Psi}(0) = 0 \quad \text{pour } \bar{\eta} = 0$$

La substitution de (58) dans (57) et l'identification suivant les puissances de  $\alpha$  nous fournit le système d'équations suivant :

$$-\gamma' \phi_1'' = \Gamma T_1 + \phi_1'''$$

$$\phi_1' \phi_1' \gamma - \gamma' \phi_2'' - \phi_1 \gamma \phi_1'' = \Gamma T_2 + \phi_2'''$$

$$\phi_1' \phi_2' \gamma + \phi_2' \phi_1' \gamma - \gamma' \phi_3'' - \phi_1 \gamma \phi_2'' - \phi_2 \gamma \phi_1'' = \Gamma T_3 + \phi_3'''$$

$$J(\xi) = 0$$

$$-\gamma' T_1' = T_1''$$

$$\phi_1' T_1 \gamma - \gamma' T_2' - \phi_1 \gamma T_1' = T_2''$$

$$\phi_1' T_2 \gamma + \phi_2' T_1 \gamma - \gamma' T_3' - \phi_1 \gamma T_2' - \phi_2 \gamma T_1' = T_3''$$

auquel il faut associer les conditions aux limites (59), et dont la solution est :

$$T_1 = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma}{d\xi} e^{-\gamma' \bar{\eta}}$$

$$\phi_1 = e^{-\gamma' \bar{\eta}} \left[ -\frac{\Gamma \Gamma'}{4 \gamma'^2} \bar{\eta} - \frac{\Gamma \Gamma'}{4 \gamma'^3} \right]$$

$$T_2 = l_1 e^{-\gamma' \bar{\eta}} + e^{-2\gamma' \bar{\eta}} [ \bar{\eta} l_2 - l_1 ]$$

$$\phi_2 = e^{-\gamma' \bar{\eta}} [ l_3 \bar{\eta} + l_4 ] + e^{-2\gamma' \bar{\eta}} [ l_5 \bar{\eta}^2 + l_6 \bar{\eta} + l_7 ]$$

$$T_3 = -e^{-\gamma' \bar{\eta}} [ m_2 + m_5 ] + e^{-2\gamma' \bar{\eta}} [ m_1 \bar{\eta} + m_2 ] + e^{-3\gamma' \bar{\eta}} [ m_3 \bar{\eta}^2 + m_4 \bar{\eta} + m_5 ]$$

$$\phi_3 = e^{-\gamma' \bar{\eta}} [ m_6 \bar{\eta} + m_7 ] + e^{-2\gamma' \bar{\eta}} [ m_8 \bar{\eta}^2 + m_9 \bar{\eta} + m_{10} ] + e^{-3\gamma' \bar{\eta}} [ m_{11} \bar{\eta}^3 + m_{12} \bar{\eta}^2 + m_{13} \bar{\eta} + m_{14} ]$$

(61)

: ou :

$$l_1 = -\frac{15}{64} \frac{\Gamma \Gamma'^2 \gamma''}{\gamma'^5} + \frac{5 \Gamma'^3}{64 \gamma'^4} + \frac{\Gamma \Gamma' \Gamma''}{32 \gamma'^4}$$

$$l_2 = \frac{3 \Gamma \Gamma'^2 \gamma''}{32 \gamma'^4} - \frac{\Gamma'^3}{32 \gamma'^3}$$

$$l_3 = \frac{15 \Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma''}{64 \gamma'^7} - \frac{5 \Gamma \Gamma'^3}{64 \gamma'^6} - \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma''}{32 \gamma'^6}$$

$$l_4 = \frac{1}{64} \frac{\Gamma \Gamma'^3}{\gamma'^7} + \frac{1}{16} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma''}{\gamma'^8} - \frac{5}{64} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma''}{\gamma'^7}$$

$$l_5 = -\frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma''}{64 \gamma'^6}$$

$$l_6 = -\frac{\Gamma \Gamma'^3}{128 \gamma'^6} - \frac{5}{128} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma''}{\gamma'^7}$$

(62)

$$l_7 = -\frac{13}{256} \frac{\Gamma \Gamma'^3}{\gamma'^7} + \frac{17}{256} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma''}{\gamma'^8} + \frac{3}{128} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma''}{\gamma'^7}$$

$$m_1 = \frac{15}{128} \frac{\Gamma \Gamma'^4 \gamma''}{\gamma'^8} + \frac{3}{128} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma'' \gamma''}{\gamma'^8} - \frac{1}{128} \frac{\Gamma \Gamma'^3 \Gamma''}{\gamma'^7}$$

$$- \frac{90}{512} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^3 \gamma''^2}{\gamma'^9} - \frac{2}{256} \frac{\Gamma'^5}{\gamma'^7}$$

$$m_2 = \frac{121}{512} \frac{\Gamma \Gamma'^4 \gamma''}{\gamma'^9} + \frac{93}{512} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma'' \gamma''}{\gamma'^9} - \frac{13}{256} \frac{\Gamma \Gamma'^3 \Gamma''}{\gamma'^8}$$

$$- \frac{53}{128} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^3 \gamma''^2}{\gamma'^{10}} - \frac{5}{256} \frac{\Gamma'^5}{\gamma'^8} - \frac{1}{128} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma''^2}{\gamma'^8}$$

$$+ \frac{1}{128} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^3 \gamma''^3}{\gamma'^9} - \frac{5}{512} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \Gamma''}{\gamma'^8}$$

$$m_3 = \frac{7}{768} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^3 \gamma''^2}{\gamma'^8} + \frac{5}{1536} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^3 \gamma''^3}{\gamma'^7} - \frac{3}{384} \frac{\Gamma \Gamma'^4 \gamma''}{\gamma'^7}$$

$$+ \frac{\Gamma'^5}{384 \gamma'^6} - \frac{1}{768} \frac{\Gamma \Gamma'^3 \Gamma''}{\gamma'^6}$$

$$m_4 = -\frac{39}{1024} \frac{\Gamma \Gamma'^4 \gamma''}{\gamma'^8} - \frac{1}{128} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma'' \gamma''}{\gamma'^8} - \frac{29}{9216} \frac{\Gamma \Gamma'^3 \Gamma''}{\gamma'^7}$$

$$+ \frac{125}{9216} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^3 \gamma''^3}{\gamma'^8} + \frac{109}{4608} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^3 \gamma''^2}{\gamma'^9} + \frac{1}{768} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma''^2}{\gamma'^7}$$

$$- \frac{1}{768} \frac{\Gamma^2 \Gamma'^2 \Gamma''}{\gamma'^7} + \frac{109}{9216} \frac{\Gamma'^5}{\gamma'^7}$$

BUS LILLE

$$m_5 = \frac{71}{13824} \frac{\Gamma \Gamma' \Gamma''}{\gamma'^8} - \frac{59}{1536} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma'' \gamma''}{\gamma'^9} + \frac{25}{9216} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma''^2}{\gamma'^8} - \frac{163}{3072} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma''}{\gamma'^9}$$

$$+ \frac{167}{13824} \frac{\Gamma \gamma''^5}{\gamma'^9} + \frac{1145}{27648} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \gamma''^2}{\gamma'^{10}} + \frac{359}{27648} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \gamma''^3}{\gamma'^9} - \frac{1}{9216} \frac{\Gamma^2 \Gamma' \Gamma''}{\gamma'^8}$$

$$m_6 = \frac{\Gamma}{\gamma'^2} (m_2 + m_5) + \frac{m_9 + m_{13}}{\gamma'} - (2m_{10} + 3m_{14})$$

$$m_7 = \frac{\Gamma}{\gamma'^3} (m_2 + m_5)$$

$$m_8 = \frac{5 \Gamma \Gamma' \gamma'' l_3}{16 \gamma'^4}$$

$$m_9 = \frac{9}{8} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_3}{\gamma'^5} + \frac{\Gamma \Gamma'' l_4}{8 \gamma'^3} + \frac{\Gamma'^2 l_4}{8 \gamma'^3} + \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_4}{8 \gamma'^4} + \frac{\Gamma m_1}{4 \gamma'^3}$$

$$m_{10} = \frac{35}{32} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_3}{\gamma'^6} + \frac{\Gamma \Gamma'' l_3}{8 \gamma'^5} + \frac{\Gamma'^2 l_3}{8 \gamma'^5} + \frac{3}{16} \frac{\Gamma \Gamma'' l_4}{\gamma'^4} + \frac{3}{16} \frac{\Gamma'^2 l_4}{\gamma'^4}$$

$$+ \frac{7}{16} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_4}{\gamma'^5} + \frac{\Gamma m_1}{2 \gamma'^4} + l_4' \frac{\Gamma \Gamma'}{16 \gamma'^4} + \frac{\Gamma m_2}{4 \gamma'^3}$$

$$m_{11} = -\frac{\Gamma \Gamma'' l_5}{36 \gamma'^3} - \frac{\Gamma'^2 l_5}{36 \gamma'^3} + \frac{\Gamma \Gamma' l_5'}{72 \gamma'^3} + l_5 \frac{\Gamma \Gamma' \gamma''}{9 \gamma'^4}$$

$$m_{12} = -\frac{5}{72} \frac{\Gamma'^2 l_5}{\gamma'^4} - \frac{5}{72} \frac{\Gamma \Gamma'' l_5}{\gamma'^4} + \frac{5}{144} \frac{\Gamma \Gamma' l_5'}{\gamma'^4} + \frac{5}{18} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_5}{\gamma'^5}$$

$$+ \frac{\Gamma \Gamma' l_6'}{72 \gamma'^3} + \frac{11}{72} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_6}{\gamma'^4} - \frac{\Gamma \Gamma'' l_6}{36 \gamma'^3} - \frac{\Gamma'^2 l_6}{36 \gamma'^3} + \frac{\Gamma m_3}{18 \gamma'^3}$$

$$m_{13} = \frac{5}{216} \frac{\Gamma \Gamma'' l_5}{\gamma'^5} + \frac{5}{216} \frac{\Gamma'^2 l_5}{\gamma'^5} + \frac{19}{432} \frac{\Gamma \Gamma' l_5'}{\gamma'^5} + \frac{1}{54} \frac{l_5 \Gamma \Gamma' \gamma''}{\gamma'^6} + \frac{7}{216} \frac{\Gamma \Gamma' l_6'}{\gamma'^4}$$

$$+ \frac{29}{54} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_6}{\gamma'^5} - \frac{29}{216} \frac{\Gamma \Gamma'' l_6}{\gamma'^4} - \frac{29}{216} \frac{\Gamma'^2 l_6}{\gamma'^4} + \frac{7}{54} \frac{\Gamma m_3}{\gamma'^4} + \frac{\Gamma \Gamma'}{72} \frac{l_7}{\gamma'^3}$$

$$+ l_7 \frac{\Gamma \Gamma''}{36 \gamma'^3} + \frac{l_7 \Gamma'^2}{36 \gamma'^3} - \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_7}{36 \gamma'^4} + \frac{\Gamma m_4}{18 \gamma'^3}$$

$$m_{14} = \frac{67}{1296} \frac{l_5 \Gamma'^2}{\gamma'^6} + \frac{67}{1296} \frac{l_5 \Gamma \Gamma''}{\gamma'^6} - \frac{17}{162} \frac{l_5 \Gamma \Gamma' \gamma''}{\gamma'^7} + \frac{65}{2592} \frac{\Gamma \Gamma' l_5'}{\gamma'^6}$$

$$- \frac{15}{144} \frac{\Gamma'^2 l_6}{\gamma'^5} - \frac{15}{144} \frac{\Gamma \Gamma'' l_6}{\gamma'^5} - \frac{137}{162} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_6}{\gamma'^6} + \frac{11}{432} \frac{\Gamma \Gamma' l_6'}{\gamma'^5}$$

$$+ \frac{7}{216} \frac{\Gamma \Gamma'' l_7}{\gamma'^4} + \frac{7}{216} \frac{\Gamma'^2 l_7}{\gamma'^4} - \frac{7}{216} \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'' l_7}{\gamma'^5} + \frac{1}{432} \frac{\Gamma \Gamma' l_7'}{\gamma'^4}$$

$$+ \frac{11}{108} \frac{\Gamma m_3}{\gamma'^5} + \frac{7}{108} \frac{\Gamma m_4}{\gamma'^4} - \frac{\Gamma m_5}{18 \gamma'^3}$$



Les termes d'ordre supérieur peuvent être calculés de la même manière.  
Si nous posons maintenant  $\alpha = 1$ , et satisfaisons la condition à la limite :

$$\bar{\Psi}(0) = 0 \quad \text{pour } \bar{\eta} = 0$$

nous obtenons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(63) \quad \gamma - \frac{\Gamma \Gamma'}{4 \gamma^3} + l_4 + l_7 + m_7 + m_{10} + m_{14} = 0$$

d'où nous tirons :

$$(64) \quad \begin{aligned} & \gamma \gamma'^3 - \frac{\Gamma \Gamma' \gamma'^{10}}{4} - \frac{9}{256} \Gamma \Gamma'^3 \gamma'^6 + \frac{33}{256} \Gamma^2 \Gamma'^2 \gamma'' \gamma'^5 - \frac{7}{128} \Gamma^2 \Gamma' \Gamma'' \gamma'^6 \\ & + 0,277223187 \Gamma^2 \Gamma'^4 \gamma'' \gamma' + 0,218442564 \Gamma^3 \Gamma'^2 \Gamma'' \gamma'' \gamma' \\ & - 0,096008552 \Gamma^2 \Gamma'^3 \Gamma'' \gamma'^2 - 0,270847399 \Gamma^3 \Gamma'^3 \gamma''^2 \\ & - 0,022886928 \Gamma \Gamma'^5 \gamma'^2 - 0,029742959 \Gamma^3 \Gamma' \Gamma''^2 \gamma'^2 \\ & + 0,025913066 \Gamma^3 \Gamma'^3 \gamma''' \gamma' - 0,017222463 \Gamma^3 \Gamma'^2 \Gamma''' \gamma'^2 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Cette formule ne permet de déterminer  $\gamma(\xi)$  que pour des valeurs particulières de  $\Gamma(\xi)$ ; c'est pourquoi nous n'allons pas définir ici les conditions aux limites que nous devons lui associer.

Nous allons donc considérer une situation physique ayant un degré de symétrie tel que nous pouvons développer  $\Gamma(\xi)$  sous la forme :

$$(65) \quad \Gamma(\xi) = \lambda (m \xi - \xi^3)$$

Une étude complète de ce phénomène de vents de pentes sera traitée dans la troisième partie.

DEUXIÈME PARTIE

BRISES

## I FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Le phénomène physique que nous allons étudier ici correspond aux circulations locales au-dessus d'un site plat sans relief, mais ayant des hétérogénéités thermiques, c'est-à-dire aux brises caractérisées par les contrastes de température du sol.

Cette convection naturelle est également engendrée par la force d'Archimède

Les équations de départ sont celles de Navier-Stokes relatives au cas d'un mouvement bidimensionnel : ( I )

Les perturbations thermodynamiques :

$$(67) \quad \pi = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty} ; \quad \omega = \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} ; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}$$

où  $p_\infty, \rho_\infty, T_\infty$  sont les valeurs standard positives de la pression, de la masse volumique, et de la température, peuvent être introduites, ainsi que les variables adimensionnées  $\bar{x}, \bar{z}, \tau, \bar{u}, \bar{w}$  réduites respectivement par rapport à  $L_0, H_0, t_0, u_0, \frac{H_0}{L_0} u_0$

La transformation de ( I ) nous donne, après simplifications, le système d'équations sans dimensions :

$$S \frac{d\bar{u}}{d\tau} + \bar{u} \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} + \bar{w} \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} = - \frac{1}{\chi M_\infty^2} \frac{d\pi}{d\bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{z}^2}$$

$$\frac{d\pi}{d\bar{z}} = \beta \theta$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = 0$$

$$S \frac{d\theta}{d\tau} + \bar{u} \frac{d\theta}{d\bar{x}} + \bar{w} \frac{d\theta}{d\bar{z}} + \left( \frac{\chi-1}{\chi} \beta - A \right) \bar{w} = \frac{1}{Pr Re} \frac{d^2 \theta}{d\bar{z}^2}$$

où apparaissent les nombres sans dimensions :

$$S = \frac{L_0}{U_0 t_0} \text{ nombre de Strouhal} ;$$

$$M_\infty = \frac{U_0}{(\chi R T_\infty)^{1/2}} \text{ nombre de Mach} ;$$

$$Re = \frac{L_0 U_0}{\nu} \text{ nombre de Reynolds} ;$$

$$Pr = \frac{\nu \rho_\infty c_p}{\lambda} \text{ nombre de Prandtl}$$

$$A = \frac{H_0 \gamma_\infty}{T_\infty}$$

$$B = \frac{g H_0}{R T_\infty}$$

paramètres de l'état standard, avec  $\gamma_\infty = - \frac{dT_\infty}{dz}$ .

Notons qu'au niveau de ce phénomène de convection libre, ne s'introduit qu'une seule échelle  $L_0$  qui est liée au domaine où a lieu la condition à la limite

$$(70) \quad \theta = \frac{\Delta T_0}{T_\infty} \quad \square (t, x) \quad \text{pour } z = 0$$

par conséquent, au niveau des paramètres  $A$  et  $B$ , ce n'est pas l'échelle  $H_0$  qui intervient, mais l'échelle  $L_0$ .

La condition à la limite (70) introduit le paramètre primitif  $\tau_0 = \frac{\Delta T_0}{T_\infty}$  (où  $\Delta T_0$  est l'amplitude de la variation de température), que nous allons utiliser pour la recherche d'une dégénérescence significative du système (68).

Puisque l'on s'intéresse au phénomène de convection libre, il nous faut tout d'abord définir une vitesse caractéristique intrinsèque; il s'avère pour la suite, judicieux de l'introduire sous la forme :

$$(71) \quad U_0 = (g L_0)^{1/2} \tau_0$$

Il vient dans ce cas :

$$(72) \quad M_\infty = \frac{\beta}{\chi} \tau_0^2 \quad ; \quad Re = \frac{(g L_0^3)^{1/2}}{\nu} \tau_0$$

Dans les problèmes de convection libre atmosphérique,  $\tau_0$  et  $1/Re$  sont simultanément petits; nous pouvons donc écrire la relation de similitude :

$$(73) \quad \frac{1}{Re} = \hat{G} \tau_0^\nu \quad \text{où } \nu > 0 \quad \text{et } \hat{G} \text{ paramètre de similitude constant.}$$

Nous allons donc rechercher la dégénérescence significative (intérieure) en supposant tout d'abord les paramètres  $A, \beta, Pr, S, M_0 = \frac{\chi-1}{\chi} \beta A$  de l'ordre de l'unité, c'est-à-dire fixés lorsque  $\tau_0 \rightarrow 0$  et en posant :

$$(74) \quad \begin{aligned} x &= \tilde{x} \\ z &= \tau_0 \tilde{z} \\ u &= v_1 \\ w &= \tau_0 v_3 \\ \pi &= \tau_0^2 \tilde{\pi} \\ \theta &= \tau_0 \tilde{\theta} \\ 1/Re &= \hat{G} \tau_0^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons pour  $v_1, v_3, \tilde{\pi}, \tilde{\theta}$  le système d'équations non linéaires suivant :

$$(75) \quad \begin{aligned} S \frac{d v_1}{d \tilde{x}} + v_1 \frac{d v_1}{d \tilde{x}} + v_3 \frac{d v_1}{d \tilde{z}} &= - \frac{1}{\beta} \frac{d \tilde{\pi}}{d \tilde{x}} + \hat{G} \frac{d^2 v_1}{d \tilde{z}^2} \\ \frac{d \tilde{\pi}}{d \tilde{z}} &= \beta \tilde{\theta} \\ \frac{d v_1}{d \tilde{x}} + \frac{d v_3}{d \tilde{z}} &= 0 \\ S \frac{d \tilde{\theta}}{d \tilde{x}} + v_1 \frac{d \tilde{\theta}}{d \tilde{x}} + v_3 \frac{d \tilde{\theta}}{d \tilde{z}} + M_0 v_3 &= \frac{\hat{G}}{Pr} \frac{d^2 \tilde{\theta}}{d \tilde{z}^2} \end{aligned}$$

valable dans une couche limite d'épaisseur  $L_0 \tau_0$ , et auquel il faut associer les conditions aux limites :

$$(76) \quad \text{pour } \tilde{z} = 0 : \quad v_1 = v_3 = 0 \quad ; \quad \tilde{\theta} = \Theta(\tau, \tilde{x}) = \Theta_0(\tilde{x}) \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2}$$

$$\text{pour } \tilde{z} \rightarrow \infty \quad v_1 = v_3 = 0 \quad ; \quad \tilde{\theta} = 0 \quad ; \quad \tilde{\pi} = 0$$

Nous nous intéressons ici aux oscillations de température à haute fréquence, c'est-à-dire au cas où la fréquence dimensionnelle  $\omega_0$  a une valeur élevée. Nous pouvons donc introduire le petit paramètre :

$$\epsilon = \frac{1}{\omega_0} \ll 1$$

Introduisons dans le système (75) la fonction  $\psi$  telle que :

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad ; \quad u_2 = - \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Nous obtenons donc, après avoir éliminé la fonction  $\psi$ , les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \epsilon \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \epsilon \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \epsilon \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + \epsilon \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

ce système devant satisfaire aux conditions aux limites :

$$\text{pour } \tilde{z} = 0 : \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \psi = 0$$

$$\text{pour } \tilde{z} = 1 : \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \psi = 0$$

Nous obtenons dans ces conditions la solution triviale  $\psi \equiv 0$  et devons donc transformer les fonctions et les variables de la manière suivante :

$$\tilde{z} = z \quad ; \quad \tilde{t} = t \quad ; \quad \psi = \theta \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \psi \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \theta$$

Il vient donc à la place de (78) le système suivant :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \epsilon \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \epsilon \left[ \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \epsilon \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)$$

ou  $\psi_0 = \sqrt{\epsilon} \theta$  caractérisé la stratification de référence, et auquel il faut associer les conditions :

$$\text{pour } \tilde{z} = 0 : \quad \psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

$$\text{pour } \tilde{z} = 1 : \quad \psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Le paramètre  $\xi$  est l'inverse du nombre de Strouhal et nous impose de choisir  $L_0$  et  $\omega_0$  telles que :

$$\xi = \sqrt{\frac{g}{L_0}} \frac{1}{\omega_0} \frac{\Delta T_0}{T_0} \ll 1$$

L'intervention de ce paramètre nous permet de nouveau de conclure que, lorsqu'il est petit, le champ des vitesses est contrôlé par l'équilibre entre la diffusion du tourbillon par effet de viscosité et sa création par la force d'Archimède, l'effet relatif de la convection étant d'ordre  $\xi$ .

Nous particulariserons le problème en choisissant  $Pr = 1$

## II MÉTHODE DE RÉOLUTION

Comme dans la première partie de ce travail, nous recherchons la solution de ce problème en développant  $\psi$  et  $\theta$  en série entière par rapport au petit paramètre de perturbation singulière, ici  $\xi$  :

$$\psi = \psi_{(0)} + \xi \psi_{(1)} + O(\xi^2)$$

$$\theta = \theta_{(0)} + \xi \theta_{(1)} + O(\xi^2)$$

ce qui nous permet d'obtenir le système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \tau} = \lambda_0 \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta_{(0)}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial T_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_{(1)}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial \theta_{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \eta} = \lambda_0 \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta_{(1)}}{\partial \eta^2}$$

auquel il faut associer les conditions aux limites :

pour  $\eta = 0$   $\frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \eta} = 0$  ;

$$\theta_{(0)} = \Xi(\xi) \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2} ; \theta_{(1)} = 0$$

pour  $\eta \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \eta} = 0$  ;

$$\theta_{(0)} = \theta_{(1)} = 0$$

Ordre de grandeur de  $\lambda_0$

Supposons en première approximation que :

$$\psi_{(0)}(\tau, \xi, \eta) = f(\xi) \frac{\psi_0(\eta) e^{i\tau} + \tilde{\psi}_0(\eta) e^{-i\tau}}{2}$$

$$\theta_{(0)}(\tau, \xi, \eta) = \Xi(\xi) \frac{\theta_0(\eta) e^{i\tau} + \tilde{\theta}_0(\eta) e^{-i\tau}}{2}$$

En reportant ( 86 ) dans ( 84 ) et ( 85 ), nous obtenons à l'ordre zéro les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (87) \quad & i f \psi_0'' + B' \theta_0 = f \psi_0^{(4)} \\ & i B \theta_0 = \lambda_0 f' \psi_0 + B \theta_0'' \end{aligned}$$

dont nous n'allons pas définir les conditions aux limites, puisque ce système n'est pas correct et ne permet pas de déterminer  $f(\xi)$ . Il est donc judicieux d'introduire la relation de similitude :

$$(88) \quad \lambda_0 = \hat{\lambda}_0 \varepsilon \quad \text{où} \quad \hat{\lambda}_0 = O(1)$$

d'où la modification du terme de couplage de l'équation de la température (81) qui devient  $\varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$

Ainsi nous obtenons le système d'équations suivant :

$$(89a) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2}$$

$$(89b) \quad \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{(0)}}{\partial \eta^2}$$

$$(89c) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi_{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_{(1)}}{\partial \eta^2}$$

$$(89d) \quad \frac{\partial \theta_{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \eta} = \hat{\lambda}_0 \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta_{(1)}}{\partial \eta^2}$$

qui doit satisfaire aux conditions :

$$\text{pour } \eta = 0 \quad \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \eta} = 0$$

$$(90) \quad \theta_{(0)} = B(\xi) \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2} ; \quad \theta_{(1)} = 0$$

$$\text{pour } \eta \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{(1)}}{\partial \eta} = 0 ; \quad \theta_{(0)} = \theta_{(1)} = 0$$

Première approximation :

Supposons que :

$$\begin{aligned} (91) \quad \psi_{(0)}(\tau, \xi, \eta) &= \frac{dB(\xi)}{d\xi} \frac{\psi_0(\eta) e^{i\tau} + \tilde{\psi}_0(\eta) e^{-i\tau}}{2} \\ \theta_{(0)}(\tau, \xi, \eta) &= B(\xi) \frac{\theta_0(\eta) e^{i\tau} + \tilde{\theta}_0(\eta) e^{-i\tau}}{2} \end{aligned}$$

Alors de ( 89 a ) et ( 89 b ) nous obtenons pour déterminer  $\psi_0(\eta)$  et  $\theta_0(\eta)$  les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (92) \quad & \psi_0^{(4)} - i \psi_0'' = \theta_0 \\ & \theta_0'' - i \theta_0 = 0 \end{aligned}$$

les conditions aux limites étant :

(93) pour  $\eta = 0$   $\Psi_0 = \frac{d\Psi_0}{d\eta} = 0$  ;  $\theta_0 = 1$   
 pour  $\eta \rightarrow \infty$   $\Psi_0 = \frac{d\Psi_0}{d\eta} = 0$  ;  $\theta_0 = 0$

La solution de ce système est donc de la forme :

(94)  $\Psi_0 = \exp\left[-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\eta\right] \left[\eta \frac{1+i}{2\sqrt{2}} + C_1\right] + C_2 \eta + C_3$   
 $\theta_0 = \exp\left[-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\eta\right]$

La fonction  $\Psi_0$  ne pouvant satisfaire toutes les conditions aux limites, nous allons examiner l'introduction d'une sous-couche ou d'une surcouche limite permettant de retrouver son comportement singulier, au voisinage de  $\eta = 0$  ou de  $\eta \rightarrow \infty$  respectivement.

L'analyse de l'existence d'une sous-couche limite nous conduit à introduire la variable proximale  $\hat{\eta}$  et les fonctions  $\hat{\Psi}$  et  $\hat{\theta}$  telles que :

(95)  $\eta = \alpha^\gamma \hat{\eta}$   
 $\Psi = \alpha^\beta \hat{\Psi}$   
 $\theta = \hat{\theta}$

L'impossibilité de faire apparaître un système d'équations et de solutions non excessivement dégénérées nous montre que nous ne pouvons pas envisager l'existence d'une sous-couche limite. Nous introduirons donc uniquement une surcouche limite et choisirons les constantes d'intégration apparaissant dans  $\Psi_0$  et éventuellement dans les fonctions d'ordre supérieur, de manière à ce que celles-ci aient un comportement régulier au voisinage de la paroi, donc singulier au voisinage de  $\eta \rightarrow \infty$ .

C'est-à-dire que nous retrouvons ici un phénomène de double couche limite, la solution de (89), (90) étant appelée proximale.

Ainsi, le choix des constantes  $C_1, C_2, C_3$  est tel que nous obtenons la solution :

(96)  $\Psi_0 = \left(\exp\left[-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right]\right) \cdot \left[\eta \frac{1+i}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}$   
 $\theta_0 = \exp\left[-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right]$

En mettant ces expressions dans (91), nous obtenons en première approximation :

(97)  $\Psi_{(0)} = \frac{d\mathcal{F}(\mathcal{F})}{d\mathcal{F}} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ \left(\frac{\eta}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) + \frac{\eta}{2\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) \right] - \frac{1}{2} \cos \tau \right\}$   
 $\theta_{(0)} = \mathcal{B}(\mathcal{F}) \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right)$

Il est impossible à  $\Psi_{(0)}$  de satisfaire la condition  $\Psi_{(0)}(\eta \rightarrow \infty) = 0$   
 Il apparaît donc dès l'ordre zéro une singularité loin de la paroi se traduisant par l'existence de courants ascendants ou descendants.



Deuxième approximation

Si l'on porte la solution obtenue pour la première approximation dans (89 c) et (89 d), nous voyons apparaître dans les seconds membres des termes du type  $e^{2i\tau}$ ,  $e^{i\tau}$ ,  $e^{-i\tau}$ ,  $e^{-2i\tau}$ , ainsi que des termes stationnaires. Nous sommes donc amenés à prendre pour  $\psi^{(1)}$  et  $\theta^{(1)}$  les expressions :

(98)

$$\psi^{(1)} = \frac{d\beta}{d\zeta} \frac{d^2\beta}{d\zeta^2} \left[ \frac{\psi_{1p21} e^{2i\tau} + \tilde{\psi}_{1p21} e^{-2i\tau}}{2} + \psi_{1st1} \right] + \beta \frac{d^3\beta}{d\zeta^3} \left[ \frac{\psi_{1p22} e^{2i\tau} + \tilde{\psi}_{1p22} e^{-2i\tau}}{2} + \psi_{1st2} \right] + \hat{\lambda}_0 \frac{d^3\beta}{d\zeta^3} \left[ \frac{\psi_{1p1} e^{i\tau} + \tilde{\psi}_{1p1} e^{-i\tau}}{2} \right]$$

$$\theta^{(1)} = \left( \frac{d\beta}{d\zeta} \right)^2 \left[ \frac{\theta_{1p21} e^{2i\tau} + \tilde{\theta}_{1p21} e^{-2i\tau}}{2} + \theta_{1st1} \right] + \beta \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left[ \frac{\theta_{1p22} e^{2i\tau} + \tilde{\theta}_{1p22} e^{-2i\tau}}{2} + \theta_{1st2} \right] + \hat{\lambda}_0 \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left[ \frac{\theta_{1p1} e^{i\tau} + \tilde{\theta}_{1p1} e^{-i\tau}}{2} \right]$$

où les fonctions avec les indices  $1p_1$  ou  $1p_{21}$ - $1p_{22}$  déterminent les composantes périodiques de fréquence adimensionnée Un ou Deux de la deuxième approximation, et celle avec indice  $1st_1$  ou  $1st_2$  les composantes stationnaires.

Par substitution de (98) dans (89) nous obtenons les équations permettant de déterminer  $\psi_{1p21}$ ,  $\psi_{1p22}$ ,  $\psi_{1p1}$ ,  $\psi_{1st1}$ ,  $\psi_{1st2}$ ,  $\theta_{1p21}$ ,  $\theta_{1p22}$ ,  $\theta_{1p1}$ ,  $\theta_{1st1}$ ,  $\theta_{1st2}$

(99a)

$$2i \psi_{1p21}^{(4)} - \psi_{1p21}^{(4)} = - \frac{\psi_0 \psi_0''}{2} + \frac{\tilde{\psi}_0 \tilde{\psi}_0''}{2} - 2\theta_{1p21} - \theta_{1p22}$$

(99b)

$$2i \psi_{1p22}^{(4)} - \psi_{1p22}^{(4)} = - \theta_{1p22}$$

(99c)

$$i \psi_{1p1}^{(4)} - \psi_{1p1}^{(4)} = - \theta_{1p1}$$

(99d)

$$\psi_{1st1}^{(4)} = \frac{\psi_0 \tilde{\psi}_0'' + \tilde{\psi}_0 \psi_0''}{4} - \frac{\psi_0 \tilde{\psi}_0''' + \tilde{\psi}_0 \psi_0'''}{4} + 2\theta_{1st1} + \theta_{1st2}$$

(99e)

$$\psi_{1st2}^{(4)} = \theta_{1st2}$$

(99f)

$$2i \theta_{1p21} - \theta_{1p21}'' = - \frac{\psi_0' \theta_0}{2}$$

(99g)

$$2i \theta_{1p22} - \theta_{1p22}'' = \frac{\psi_0 \theta_0'}{2}$$

(99h)

$$i \theta_{1p1} - \theta_{1p1}'' = \psi_0$$

(99i)

$$\theta_{1st1}'' = \frac{\psi_0' \tilde{\theta}_0 + \tilde{\psi}_0' \theta_0}{4}$$

(99j)

$$\theta_{1st2}'' = - \frac{\psi_0 \tilde{\theta}_0' + \tilde{\psi}_0 \theta_0'}{4}$$

Les conditions aux limites relatives aux équations (99 a) - (99 b) (99 f) (99 g) donnant le mouvement périodique d'ordre un et de fréquence deux sont :

(100)

pour  $\eta = 0$  :  $\psi_{1p21}' = \psi_{1p21} = \psi_{1p22}' = \psi_{1p22} = 0$  ;  $\theta_{1p21} = \theta_{1p22} = 0$

pour  $\eta \rightarrow \infty$  :  $\psi_{1p21}' = \psi_{1p21} = \psi_{1p22}' = \psi_{1p22} = 0$  ;  $\theta_{1p21} = \theta_{1p22} = 0$

ce qui nous permet d'obtenir la solution qui est de la forme :

$$\Psi_{1p21} = \left( \exp\left[-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right] \right) \left[ \frac{\eta}{8} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right] - \exp\left[-\sqrt{2}(1+i)\eta\right] \frac{1-i}{16\sqrt{2}} + \exp\left[-(1+i)\eta\right] \left[ \frac{-3\eta}{16\sqrt{2}} - 3\frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right] - 3\frac{1-i}{32\sqrt{2}}$$

$$\Psi_{1p22} = \exp\left[-(1+i)\eta\right] \cdot \left[ -\frac{5\eta}{16\sqrt{2}} - 5\frac{1-i}{32\sqrt{2}} - \frac{11(1-i)}{64} \right] + \exp\left[-\sqrt{2}(1+i)\eta\right] \cdot \left[ -\frac{\eta}{32} - \frac{3}{32}\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right]$$

101

$$+ \exp\left[-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right] \cdot \frac{1-i}{2\sqrt{2}} + \left[ 11\frac{1-i}{64} - 8\frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right]$$

$$\theta_{1p21} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \exp\left[-(1+i)\eta\right] + \left[ -\frac{\eta}{8} - \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right] \exp\left[-\sqrt{2}(1+i)\eta\right]$$

$$\theta_{1p22} = -5\frac{1-i}{8\sqrt{2}} \exp\left[-(1+i)\eta\right] + \left[ \frac{\eta}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2}}(1-i) \right] \exp\left[-\sqrt{2}(1+i)\eta\right] + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right]$$

et d'écrire les composantes  $\Psi_{(1)p2}$  et  $\theta_{(1)p2}$  :

$$\Psi_{(1)p2} = \frac{d\beta}{d\mathcal{F}} \frac{d^2\beta}{d\mathcal{F}^2} \left\{ \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ \left( \frac{\eta}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - 2\tau\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - 2\tau\right) \right] \\ & + \exp(-\eta) \left[ -\left( \frac{3\eta}{16\sqrt{2}} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \right) \cos(\eta - 2\tau) + \frac{3}{32\sqrt{2}} \sin(\eta - 2\tau) \right] \\ & - \frac{1}{16} \exp(-\sqrt{2}\eta) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\eta + 2\tau\right) - \frac{3}{32} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\tau\right) \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{d^3\beta}{d\mathcal{F}^3} \left\{ \begin{aligned} & \exp(-\eta) \cdot \left[ -\left( \frac{5\eta}{16\sqrt{2}} + \frac{5}{32\sqrt{2}} + \frac{11}{64} \right) \cos(\eta - 2\tau) + \left( \frac{5}{32\sqrt{2}} + \frac{11}{64} \right) \sin(\eta - 2\tau) \right] \\ & + \exp(-\sqrt{2}\eta) \left[ -\left( \frac{\eta}{32} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \right) \cos(\sqrt{2}\eta - 2\tau) + \frac{3}{32\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\eta - 2\tau) \right] \\ & + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta}{\sqrt{2}} + 2\tau\right) + \left( \frac{11}{32\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\tau\right) \end{aligned} \right.$$

102

$$\theta_{(1)p2} = \left( \frac{d\beta}{d\mathcal{F}} \right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \exp(-\eta) \left[ \cos(\eta - 2\tau) - \sin(\eta - 2\tau) \right] \\ & + \exp(-\sqrt{2}\eta) \left[ -\left( \frac{\eta}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \cos(\sqrt{2}\eta - 2\tau) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\eta - 2\tau) \right] \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{d^2\beta}{d\mathcal{F}^2} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{5}{4\sqrt{2}} \exp(-\eta) \left[ \cos(\eta - 2\tau) - \sin(\eta - 2\tau) \right] \\ & + \exp(-\sqrt{2}\eta) \left[ \left( \frac{\eta}{4} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \right) \cos(\sqrt{2}\eta - 2\tau) - \frac{3}{4\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\eta - 2\tau) \right] \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - 2\tau\right) - \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - 2\tau\right) \right] \end{aligned} \right.$$

Nous remarquons ici également l'impossibilité pour  $\Psi_{(1)p2}$  de satisfaire à la condition  $\Psi_{(1)p2}(\eta \rightarrow \infty) = 0$ , d'où apparition de courants ascendants ou

descendants loin de la paroi, d'ordre un de fréquence deux.

Pour déterminer les composantes périodiques d'ordre un et de fréquence un, nous avons les équations (99 c) et (99 h) qui doivent être résolues avec les conditions aux limites :

(103) pour  $\eta = 0$  :  $\Psi'_{1p1} = \Psi_{1p1} = 0$  ;  $\theta_{1p1} = 0$

pour  $\eta \rightarrow \infty$  :  $\Psi'_{1p1} = \Psi_{1p1} = 0$  ;  $\theta_{1p1} = 0$

La solution de (99 c) - (99 h) - (103) est donc de la forme :

(104) 
$$\Psi_{1p1} = \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) \cdot \left[ \frac{1+i}{48\sqrt{2}}\eta^3 + \frac{\eta^2}{4} + 5\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\eta - iC_4 - 2i \right] - \frac{\eta^2}{4} + C_5\eta + C_6$$

$$\theta_{1p1} = \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) \cdot \left[ \frac{\eta^2}{8} + 3\frac{1-i}{8\sqrt{2}}\eta - \frac{i}{2} \right] + \frac{i}{2}$$

Les conditions  $\Psi_{1p1}(0) = \Psi'_{1p1}(0) = 0$  nous fournissent les relations :

-  $iC_4 - 2i + C_6 = 0$

-  $\frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(C_4 + \frac{3}{4}\right) + C_5 = 0$

La constante  $C_5$  n'intervenant que comme paramètre dans les calculs ultérieurs, nous allons faire le choix  $C_5 = 0$ , et par conséquent, nous en déduisons les valeurs de  $C_4$  et  $C_6$  :

$$C_4 = -\frac{3}{4} \quad ; \quad C_6 = \frac{5i}{4}$$

Ainsi la solution (104) est précisément :

(105) 
$$\Psi_{1p1} = \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) \left[ \frac{1+i}{48\sqrt{2}}\eta^3 + \frac{\eta^2}{4} + \frac{5(1-i)}{4\sqrt{2}}\eta - \frac{5i}{4} \right] - \frac{\eta^2}{4} + \frac{5i}{4}$$

$$\theta_{1p1} = \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) \left[ \frac{\eta^2}{8} + 3\frac{1-i}{8\sqrt{2}}\eta - \frac{i}{2} \right] + \frac{i}{2}$$

d'où nous tirons les composantes périodiques d'ordre un et de fréquence un

(106) 
$$\Psi_{(1)p1} = \hat{\Delta}_0 \frac{d^3 B}{d\mathcal{F}^3} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ \left( \frac{\eta^3}{48\sqrt{2}} + \frac{\eta^2}{4} + \frac{5\eta}{4\sqrt{2}} \right) \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) + \left( \frac{\eta^3}{48\sqrt{2}} - \frac{5\eta}{4\sqrt{2}} - \frac{5}{4} \right) \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) \right] \right. \\ \left. - \frac{\eta^2}{4} \cos\tau - \frac{5}{4} \sin\tau \right\}$$

$$\theta_{(1)p1} = \hat{\Delta}_0 \frac{d^2 B}{d\mathcal{F}^2} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \left[ \left( \frac{\eta^2}{8} + \frac{3\eta}{8\sqrt{2}} \right) \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) - \left( \frac{3\eta}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \tau\right) \right] - \frac{1}{2} \sin\tau \right\}$$

Il apparaît donc loin de la paroi un comportement singulier de la température, et du champ des vitesses.

Enfin, les équations relatives aux composantes stationnaires d'ordre un

doivent être résolues avec les conditions aux limites :

107

pour  $\eta = 0$  :  $\Psi'_{1st_1} = \Psi_{1st_1} = \Psi'_{1st_2} = \Psi_{1st_2} = 0$  ;  $\Theta_{1st_1} = \Theta_{1st_2} = 0$

pour  $\eta \rightarrow \infty$  :  $\Psi'_{1st_1} = \Psi_{1st_1} = \Psi'_{1st_2} = \Psi_{1st_2} = 0$  ;  $\Theta_{1st_1} = \Theta_{1st_2} = 0$

Nous obtenons donc par intégrations successives les expressions

$$\Psi_{1st_1} = \exp(-\sqrt{2}\eta) \left[ -\frac{\eta^2}{16\sqrt{2}} - \frac{7\eta}{32} - \frac{11}{32\sqrt{2}} \right] - \frac{\eta}{16} \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\eta\right) - \frac{\eta}{16} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) + (2C_7 + C_9) \frac{\eta^5}{120} + (2C_8 + C_{10}) \frac{\eta^4}{24} + C_{11} \frac{\eta^3}{6} + C_{12} \frac{\eta^2}{2} + C_{13}\eta + C_{14}$$

108

$$\Psi_{1st_2} = \exp(-\sqrt{2}\eta) \left[ \frac{\eta}{32} + \frac{7}{32\sqrt{2}} \right] + \frac{1+i}{8\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\eta\right) + \frac{1-i}{8\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) + C_9 \frac{\eta^5}{120} + C_{10} \frac{\eta^4}{24} + C_{15} \frac{\eta^3}{6} + C_{16} \frac{\eta^2}{2} + C_{17}\eta + C_{18}$$

$$\Theta_{1st_1} = C_7\eta + C_8$$

$$\Theta_{1st_2} = \left( \frac{\eta}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \right) \exp(-\sqrt{2}\eta) - \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[ (1+i) \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\eta\right) + (1-i) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) \right] + C_9\eta + C_{10}$$

Nous remarquons que l'expression générale de  $\Theta_{1st_1}$ , sujette aux conditions (107) nous fournit la solution particulière :

109

$$\Theta_{1st_1} \equiv 0$$

Les conditions relatives à  $\Theta_{1st_2}$  ne peuvent quant à elles être vérifiées.

Nous allons ici faire le choix  $C_9 = 0$  ;  $C_{10} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$  permettant à  $\Theta_{1st_2}$  de rester borné pour  $\eta \rightarrow \infty$ . (Nous montrerons que ce choix est correct) Les conditions en  $\eta = 0$  relatives à  $\Psi_{1st_1}$ ,  $\Psi_{1st_2}$  nous fournissent les valeurs :

$$C_{13} = 0 ; C_{14} = \frac{11}{32\sqrt{2}} ; C_{17} = \frac{7}{16} ; C_{18} = -\frac{15}{32\sqrt{2}}$$

Enfin les constantes  $C_{11}, C_{12}, C_{15}, C_{16}$  n'interviennent que comme paramètres dans les calculs de termes d'ordre supérieur. Cela nous autorise à faire le choix :

$$C_{11} = C_{12} = C_{15} = C_{16} = 0$$

Par conséquent les expressions de  $\Psi_{1st_1}, \Psi_{1st_2}, \Theta_{1st_1}, \Theta_{1st_2}$  prennent la forme :

$$\Theta_{1st_1} \equiv 0$$

$$\Theta_{1st_2} = \left( \frac{\eta}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \right) \exp(-\sqrt{2}\eta) - \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[ (1+i) \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\eta\right) + (1-i) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) \right] - \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

110

$$\Psi_{1st_1} = \left[ -\frac{\eta^2}{16\sqrt{2}} - \frac{7\eta}{32} - \frac{11}{32\sqrt{2}} \right] \exp(-\sqrt{2}\eta) - \frac{\eta}{16} \left[ \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) + \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\eta\right) \right] - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{11}{32\sqrt{2}}$$

$$\Psi_{1st_2} = \left[ \frac{\eta}{32} + \frac{7}{32\sqrt{2}} \right] \exp(-\sqrt{2}\eta) + \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[ (1+i) \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\eta\right) + (1-i) \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta\right) \right] - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{7}{16}\eta - \frac{15}{32\sqrt{2}}$$

Mise en évidence du problème distal

Nous constatons que la solution (83) n'est pas uniformément valable, et que, après avoir satisfait toutes les conditions à la limite  $\eta = 0$ , nous sommes conduits aux comportements suivants pour  $\psi$  et  $\theta$ , lorsque  $\eta \rightarrow \infty$  :

111

$$\begin{aligned} \psi \sim & \frac{d\Omega}{d\xi} \left( -\frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \right) + \varepsilon \frac{d\Omega}{d\xi} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \left[ \frac{-3(1-i)e^{2i\tau} - 3(1+i)e^{-2i\tau}}{64\sqrt{2}} \right] \\ & + \varepsilon \Omega \frac{d^3\Omega}{d\xi^3} \left[ \left( 11\frac{1-i}{128} - 4\frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right) e^{2i\tau} + \left( 11\frac{1+i}{128} - 4\frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) e^{-2i\tau} \right] \\ & + \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^3\Omega}{d\xi^3} \left[ \left( -\frac{\eta^2}{8} + \frac{5i}{8} \right) e^{i\tau} + \left( -\frac{\eta^2}{8} - \frac{5i}{8} \right) e^{-i\tau} \right] \\ & + \varepsilon \frac{d\Omega}{d\xi} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \left[ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{11}{32\sqrt{2}} \right] + \varepsilon \Omega \frac{d^3\Omega}{d\xi^3} \left[ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{7\eta}{16} - \frac{15}{32\sqrt{2}} \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\theta \sim \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \left( \frac{ie^{i\tau} - ie^{-i\tau}}{4} \right) + \frac{\Omega}{\varepsilon} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \left( -\frac{1}{8\sqrt{2}} \right) + O(\varepsilon^2)$$

Nous allons donc considérer la région distale et essayer de faire apparaître des termes que nous n'avons pas mentionnés et qui, par leur omission, nous ont conduits aux résultants précédents.

Introduisons la variable distale  $\bar{\eta}$  et les fonctions  $\bar{\psi}(\tau, \xi, \bar{\eta}, \varepsilon), \bar{\theta}(\tau, \xi, \bar{\eta}, \varepsilon)$  telles que

112

$$\begin{aligned} \eta &= \varepsilon^\gamma \bar{\eta} \quad \text{où } \gamma < 0 \\ \psi &+ \frac{1}{4} \frac{d\Omega}{d\xi} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}) = \varepsilon^\beta \bar{\psi} \\ \theta &= \varepsilon^\alpha \bar{\theta} \end{aligned}$$

En raison du comportement de  $\theta$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ , il apparaît que  $\alpha = 1$  la substitution de (112) dans (81) nous permet d'obtenir, avec  $\hat{\lambda}_0 = \varepsilon \hat{\lambda}_0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] + \varepsilon^{1-\gamma} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ + \varepsilon^{1-\beta+2\gamma} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} = \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] + \varepsilon^{1-\gamma} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}} \\ = \hat{\lambda}_0 \varepsilon^\beta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} - \hat{\lambda}_0 \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} + \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}^2} \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant rechercher une dégénérescence significative de ce système, donc déterminer les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$ .

Premièrement les termes convectifs et de viscosité sont du même ordre de grandeur. Nous en tirons :

113

$$1 + \beta - \gamma = -2\gamma$$

Deuxièmement, afin d'examiner les conditions de raccordement sur  $\psi$ , il nous faut réécrire (111) en variable distale, et l'équation (112) relative à  $\psi$ .

$$\begin{aligned} \Psi + \frac{1}{4} \frac{d\Theta}{d\zeta} (e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}) &= \varepsilon \frac{d\Theta}{d\zeta} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} \left[ \frac{-3(1-i)e^{2i\zeta} - 3(1+i)e^{-2i\zeta}}{64\sqrt{2}} \right] \\ &+ \varepsilon \Theta \frac{d^3\Theta}{d\zeta^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{128} - 4 \frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right) e^{2i\zeta} + \left( 11 \frac{1+i}{128} - 4 \frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) e^{-2i\zeta} \right] \\ &+ \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^3\Theta}{d\zeta^3} \left[ \left( -\frac{\bar{\eta}^2}{8} \varepsilon^{2\gamma} + \frac{5i}{8} \right) e^{i\zeta} + \left( -\frac{\bar{\eta}^2}{8} \varepsilon^{2\gamma} - \frac{5i}{8} \right) e^{-i\zeta} \right] \\ &+ \frac{d\Theta}{d\zeta} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} \left[ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\bar{\eta}^4}{24} \varepsilon^{1+4\gamma} + \frac{11}{32\sqrt{2}} \varepsilon \right] + \Theta \frac{d^3\Theta}{d\zeta^3} \left[ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\bar{\eta}^4}{24} \varepsilon^{1+4\gamma} + \frac{7}{16} \bar{\eta} \varepsilon^{1+\gamma} - \frac{15}{32\sqrt{2}} \varepsilon \right] \\ &+ O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^\beta \bar{\Psi} \end{aligned}$$

En utilisant la règle simplifiée de raccord de Van Dycke, nous obtenons

(114)  $\beta = 1 + 4\gamma$

Nous déduisons alors de (113) et (114) les valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$  :

(115)  $\beta = -\frac{3}{5} ; \gamma = -\frac{2}{5}$

cela nous permet d'exprimer le problème auquel doivent satisfaire  $\bar{\Psi}$  et  $\bar{\Theta}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] + \varepsilon^{7/5} \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{4} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ + \varepsilon^{4/5} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \zeta} = \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] + \varepsilon^{7/5} \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{4} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}}$$

$$= \hat{\lambda}_0 \varepsilon^{3/5} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \zeta} - \hat{\lambda}_0 \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{4} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} + \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

(116) pour  $\bar{\eta} = 0$ :  $\bar{\Psi} = -\varepsilon^{8/5} \frac{d\Theta}{d\zeta} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} \frac{3}{64\sqrt{2}} \left[ (1-i)e^{2i\zeta} + (1+i)e^{-2i\zeta} \right]$

$$+ \varepsilon^{8/5} \Theta \frac{d^3\Theta}{d\zeta^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{128} - 4 \frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right) e^{2i\zeta} + \left( 11 \frac{1+i}{128} - 4 \frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) e^{-2i\zeta} \right]$$

$$+ \varepsilon^{8/5} \frac{d\Theta}{d\zeta} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} \frac{11}{32\sqrt{2}} - \varepsilon^{8/5} \Theta \frac{d^3\Theta}{d\zeta^3} \frac{15}{32\sqrt{2}} + \hat{\lambda}_0 \frac{d^3\Theta}{d\zeta^3} \varepsilon^{8/5} \frac{5}{8} \left[ ie^{i\zeta} - ie^{-i\zeta} \right] + O(\varepsilon^{13/5})$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = \varepsilon^{6/5} \Theta \frac{d^3\Theta}{d\zeta^3} \frac{7}{16} + O(\varepsilon^{13/5})$$

$$\bar{\Theta} = \hat{\lambda}_0 \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} \frac{ie^{i\zeta} - ie^{-i\zeta}}{4} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \Theta \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} + O(\varepsilon)$$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = 0 ; \bar{\Theta} = 0$

(117) Il s'avère alors que la relation de similitude (88)  $\lambda_0 = \varepsilon \hat{\lambda}_0$  est erronée et que nous devons maintenant admettre  $\lambda_0 = \varepsilon^{12/5} \hat{\lambda}_0$ , c'est-à-dire au vu du problème distal:  $\hat{\lambda}_0 = \varepsilon^{7/5} \hat{\hat{\lambda}}_0$

Le problème (116) se transforme donc en :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \bar{F}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{F}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] + \varepsilon^{7/5} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{F}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{4/5} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{F}} = \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{4/5} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{F}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{F}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] + \varepsilon^{7/5} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^2} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}}$$

$$\stackrel{\wedge}{=} \varepsilon^{4/5} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{F}} - \stackrel{\wedge}{=} \varepsilon^{7/5} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^2} + \varepsilon^{4/5} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

(118)

pour  $\bar{\eta} = 0$

$$\bar{\Psi} = -\varepsilon^{8/5} \frac{d\bar{\Theta}}{d\bar{F}} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^2} \frac{3}{64\sqrt{2}} \left[ (1-i) e^{2i\tau} + (1+i) e^{-2i\tau} \right] + \varepsilon^{8/5} \bar{\Theta} \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{128} - 4 \frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right) e^{2i\tau} + \left( 11 \frac{1+i}{128} - 4 \frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) e^{-2i\tau} \right] + \varepsilon^{8/5} \frac{d\bar{\Theta}}{d\bar{F}} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^2} \frac{11}{32\sqrt{2}} - \varepsilon^{8/5} \bar{\Theta} \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^3} \frac{15}{32\sqrt{2}} + O(\varepsilon^{13/5})$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = \varepsilon^{6/5} \bar{\Theta} \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^3} \frac{7}{16} + O(\varepsilon^{13/5})$$

$$\bar{\Theta} = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \bar{\Theta} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{F}^2} + O(\varepsilon)$$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} = 0$  ;  $\bar{\Theta} = 0$

Nous sommes ainsi conduits à rechercher la solution de  $\bar{\Psi}$  et  $\bar{\Theta}$  sous forme de développements en série par rapport à  $\varepsilon^{1/5}$  :

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{(0)} + \varepsilon^{2/5} \bar{\Psi}_{(2)} + \varepsilon^{4/5} \bar{\Psi}_{(4)} + O(\varepsilon)$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_{(0)} + \varepsilon^{2/5} \bar{\Theta}_{(2)} + \varepsilon^{4/5} \bar{\Theta}_{(4)} + O(\varepsilon)$$

Nous obtenons donc le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \bar{\eta}^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(4)}}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \bar{F}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{F}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{F}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\Theta}_{(0)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\Theta}_{(2)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\Theta}_{(4)} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{F}} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{F}} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \stackrel{\wedge}{=} \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{F}} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

(119)

(120)

Les conditions aux limites s'y rapportant étant déduites de ( 118 ) :

pour  $\bar{\eta} = 0$   $\bar{\Psi}(0) = \bar{\Psi}(2) = \bar{\Psi}(4) = 0$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}(2)}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}(4)}{\partial \bar{\eta}} = 0$$

$$\bar{\Theta}(0) = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{\xi}^2} \bar{\Theta}$$

$$\bar{\Theta}(2) = \bar{\Theta}(4) = 0$$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}(2)}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}(4)}{\partial \bar{\eta}} = 0$

$$\bar{\Theta}(0) = \bar{\Theta}(2) = \bar{\Theta}(4) = 0$$

121

Ces équations peuvent enfin être exploitées comme nous l'avons fait dans le problème distal des vents de pente ( voir ( 40 ) à ( 43 ) ). Nous obtenons donc le système suivant :

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{\Theta}(0)}{\partial \tau} = 0$$

122

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial \bar{\Theta}(0)}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}(0)}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\Theta}(0)}{\partial \bar{\eta}} = \hat{d}_0 \frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}(0)}{\partial \bar{\eta}^2}$$

pour  $\bar{\eta} = 0$   $\bar{\Psi}(0) = \frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}} = 0$

$$\bar{\Theta}(0) = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \bar{\Theta} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{\xi}^2}$$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\Psi}(0)}{\partial \bar{\eta}} = 0$  ;  $\bar{\Theta}(0) = 0$

Ceci représente le problème stationnaire distal dominant qui régit le mouvement convectif à l'ordre zéro dans la couche supérieure distale où nous avons la représentation :

123

$$\Psi = -\frac{1}{4} \frac{d\bar{\Theta}}{d\bar{\xi}} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}) + \frac{1}{\varepsilon^{3/5}} \bar{\Psi}(0) (\bar{\xi}, \varepsilon^{2/5} \bar{\eta}) + \dots$$

$$\Theta = \varepsilon \bar{\Theta}(0) (\bar{\xi}, \varepsilon^{2/5} \bar{\eta}) + \dots$$

Notons enfin que, corrélativement à la relation de similitude ( 117 ), le terme de stratification apparaît à un ordre supérieur à deux dans le système ( 81 ). Nous recherchons donc précisément la solution proximale sous la forme :

124

$$\Psi = \frac{d\bar{\Theta}}{d\bar{\xi}} \left[ \frac{\Psi_0(\bar{\eta}) e^{i\tau} + \tilde{\Psi}_0(\bar{\eta}) e^{-i\tau}}{2} + \varepsilon \frac{d\bar{\Theta}}{d\bar{\xi}} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{\xi}^2} \left[ \frac{\Psi_{1p21} e^{2i\tau} + \tilde{\Psi}_{1p21} e^{-2i\tau}}{2} + \Psi_{1st1} \right] \right]$$

$$+ \varepsilon \bar{\Theta} \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d\bar{\xi}^3} \left[ \frac{\Psi_{1p22} e^{2i\tau} + \tilde{\Psi}_{1p22} e^{-2i\tau}}{2} + \Psi_{1st2} \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\Theta = \bar{\Theta} \left[ \frac{\Theta_0(\bar{\eta}) e^{i\tau} + \tilde{\Theta}_0(\bar{\eta}) e^{-i\tau}}{2} + \varepsilon \left( \frac{d\bar{\Theta}}{d\bar{\xi}} \right)^2 \left[ \frac{\Theta_{1p21} e^{2i\tau} + \tilde{\Theta}_{1p21} e^{-2i\tau}}{2} + \Theta_{1st1} \right] \right]$$

$$+ \bar{\Theta} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d\bar{\xi}^2} \left[ \frac{\Theta_{1p22} e^{2i\tau} + \tilde{\Theta}_{1p22} e^{-2i\tau}}{2} + \Theta_{1st2} \right] + O(\varepsilon^2)$$



C'est-à-dire qu'à l'ordre un il n'existe pas de termes en  $e^{i\tau}$  dans les développements de  $\psi$  et  $\theta$ . Les solutions  $\psi_0$  et  $\theta_0$  à l'ordre zéro restent valables, ainsi qu'à l'ordre un les composantes stationnaires  $\psi_{1st}, \psi_{1st2}, \theta_{1st}, \theta_{1st2}$ , et les composantes périodiques de fréquence deux  $\psi_{1p21}, \psi_{1p22}, \theta_{1p21}, \theta_{1p22}$ .  
Le comportement (111) de  $\psi$  et  $\theta$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$  est lui aussi erroné et devient :

pour  $\eta \rightarrow \infty$

$$\psi \approx -\frac{d\theta}{d\zeta} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} + \varepsilon \frac{d\theta}{d\zeta} \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left[ \frac{-3(1-i)e^{2i\tau} - 3(1+i)e^{-2i\tau}}{64\sqrt{2}} \right]$$

$$+ \varepsilon \theta \frac{d^3\theta}{d\zeta^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{128} - 4 \frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right) e^{2i\tau} + \left( 11 \frac{1+i}{128} - 4 \frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) e^{-2i\tau} \right]$$

$$+ \varepsilon \frac{d\theta}{d\zeta} \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left[ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{11}{32\sqrt{2}} \right] + \varepsilon \theta \frac{d^3\theta}{d\zeta^3} \left[ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{7}{16} \eta - \frac{15}{32\sqrt{2}} \right]$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

$$\theta \approx \varepsilon \theta \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left( -\frac{1}{8\sqrt{2}} \right) + O(\varepsilon^2)$$

A l'ordre auquel nous avons limité ce travail, la solution distale n'est pas affectée par cette différence de comportement de  $\psi$  et  $\theta$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ .  
En définitive, il apparaît que le terme de stratification a une influence uniquement dans la zone distale.

Justification du choix  $C_7 = C_9 = 0$  Nous reprenons ici l'hypothèse selon laquelle  $\lambda_0 = \varepsilon \hat{\lambda}_0$  (où  $\hat{\lambda}_0 = o(1)$ ).

Lorsque  $C_7$  et  $C_9$  sont non-nulles et  $\eta \rightarrow \infty$ , le comportement de  $\psi$  et  $\theta$  prend la forme :

$$\psi \approx -\frac{1}{4} \frac{d\theta}{d\zeta} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}) + \varepsilon \theta \frac{d^3\theta}{d\zeta^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{128} - 8 \frac{1-i}{64\sqrt{2}} \right) e^{2i\tau} + \left( 11 \frac{1+i}{128} - 8 \frac{1+i}{64\sqrt{2}} \right) e^{-2i\tau} \right]$$

$$+ \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^3\theta}{d\zeta^3} \left[ \left( -\frac{\eta^2}{4} + \frac{5i}{4} \right) \frac{e^{i\tau}}{2} + \left( -\frac{\eta^2}{4} - \frac{5i}{4} \right) \frac{e^{-i\tau}}{2} \right]$$

$$+ \varepsilon \frac{d\theta}{d\zeta} \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left[ (2C_7 + C_9) \frac{\eta^5}{120} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{11}{32\sqrt{2}} \right]$$

$$+ \varepsilon \theta \frac{d^3\theta}{d\zeta^3} \left[ C_9 \frac{\eta^5}{120} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\eta^4}{24} + \frac{7}{16} \eta - \frac{15}{32\sqrt{2}} \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\theta \approx \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left[ \frac{ie^{i\tau} - ie^{-i\tau}}{4} \right] + \varepsilon \left( \frac{d\theta}{d\zeta} \right)^2 C_7 \eta + \varepsilon \theta \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \left( C_9 \eta - \frac{1}{8\sqrt{2}} \right) + O(\varepsilon^2)$$

Posons de nouveau  $\eta = \varepsilon^\gamma \bar{\eta}$  (avec  $\gamma < 0$ ), et introduisons les fonctions  $\bar{\psi}$  et  $\bar{\theta}$  telles que :

$$\psi + \frac{1}{4} \frac{d\theta}{d\zeta} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}) = \varepsilon \beta \bar{\psi}$$

$$\theta = \varepsilon^\alpha \bar{\theta}$$

Par substitution dans (81), compte tenu de la relation de similitude (88), nous obtenons :

(128)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] + \frac{1}{4} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} \left( e^{i\tau} + e^{-i\tau} \right) \varepsilon^{1-\gamma} \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

$$+ \varepsilon^{\alpha-\beta+2\gamma} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} = \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{1+\beta-\gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] + \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} \frac{1}{4} \left( e^{i\tau} + e^{-i\tau} \right) \varepsilon^{1-\gamma} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}}$$

$$= \hat{\lambda}_0 \varepsilon^{1+\beta-\alpha} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} - \hat{\lambda}_0 \varepsilon^{1-\alpha} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} \frac{1}{4} \left( e^{i\tau} + e^{-i\tau} \right) + \varepsilon^{-2\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

La recherche d'une dégénérescence significative associée au problème distal nous conduit à déterminer  $\alpha, \beta, \gamma$

Les termes convectifs et de viscosité étant du même ordre de grandeur, nous en tirons la relation :

(129)

$$1 + \beta - \gamma = -2\gamma$$

Ensuite, il nous faut examiner les conditions de raccord sur  $\Psi$  et  $\Theta$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ . Réécrivons donc d'une part (126 a) en variable distale et (127 a), et d'autre part (126 b) en variable distale et (127 b) :

(130)

$$\Psi + \frac{1}{4} \frac{d \bar{\Theta}}{d \xi} \left( e^{i\tau} + e^{-i\tau} \right) = \varepsilon \bar{\Theta} \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d \xi^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{64} - 8 \frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right) \frac{e^{2i\tau}}{2} + \left( 11 \frac{1+i}{64} - 8 \frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) \frac{e^{-2i\tau}}{2} \right]$$

$$+ \varepsilon^{1+2\gamma} \hat{\lambda}_0 \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d \xi^3} \left[ -\frac{\bar{\eta}^2}{4} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2} \right] + \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d \xi^3} \frac{5i}{4} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2}$$

$$+ \frac{d \bar{\Theta}}{d \xi} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} \left[ \frac{2C_7 + C_9}{120} \bar{\eta}^5 \varepsilon^{1+5\gamma} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\bar{\eta}^4}{24} \varepsilon^{1+4\gamma} + \frac{11}{32\sqrt{2}} \varepsilon \right]$$

$$+ \bar{\Theta} \frac{d^3 \bar{\Theta}}{d \xi^3} \left[ \frac{C_9}{120} \bar{\eta}^5 \varepsilon^{1+5\gamma} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\bar{\eta}^4}{24} \varepsilon^{1+4\gamma} + \frac{7}{16} \bar{\eta} \varepsilon^{1+\gamma} - \frac{15}{32\sqrt{2}} \varepsilon \right]$$

$$+ 0 (\varepsilon^2)$$

$$\Theta = \varepsilon \hat{\lambda}_0 \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} \left[ \frac{ie^{i\tau} - ie^{-i\tau}}{4} \right] + \varepsilon^{1+\gamma} \left[ \left( \frac{d \bar{\Theta}}{d \xi} \right)^2 C_7 \bar{\eta} + \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} \bar{\Theta} C_9 \bar{\eta} \right] - \frac{1}{8\sqrt{2}} \varepsilon \bar{\Theta} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} + 0 (\varepsilon^2)$$

$$= \varepsilon^\alpha \bar{\Theta}$$

d'où nous tirons, d'après la règle simplifiée de raccord de Van Dycke :

(131)

$$1 + 5\gamma = \beta$$

$$1 + \gamma = \alpha$$

La solution des équations (129)-(131) est :

(132)

$$\beta = -\frac{2}{3} ; \quad \gamma = -\frac{1}{3} ; \quad \alpha = \frac{2}{3}$$

Les équations (128) deviennent donc précisément :

(133)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{2/3} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] + \frac{1}{4} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{d \xi^2} \left( e^{i\tau} + e^{-i\tau} \right) \varepsilon^{4/3} \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

$$+ \varepsilon^{2/3} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} = \varepsilon^{2/3} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$(134) \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{2/3} \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] + \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{1}{4} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}) \varepsilon^{4/3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}}$$

$$= \hat{\lambda}_0 \varepsilon^{-1/3} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} - \hat{\lambda}_0 \varepsilon^{1/3} \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} + \varepsilon^{2/3} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

et doivent satisfaire aux conditions aux limites déduites de (126) :

pour  $\bar{\eta} = 0$   $\bar{\psi} = \varepsilon^{5/3} \theta \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{64} - 8 \frac{1-i}{32\sqrt{2}} \right) \frac{e^{2i\tau}}{2} + \left( 11 \frac{1+i}{64} - 8 \frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) \frac{e^{-2i\tau}}{2} \right] + \varepsilon^{5/3} \hat{\lambda}_0 \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \frac{5i}{4} \frac{(e^{i\tau} - e^{-i\tau})}{2}$

$$+ \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{11}{32\sqrt{2}} \varepsilon^{5/3} - \theta \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \frac{15}{32\sqrt{2}} \varepsilon^{5/3} + O(\varepsilon^{8/3})$$

$$(135) \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} = \theta \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \frac{7}{16} \varepsilon^{4/3} + O(\varepsilon^{8/3})$$

$$\bar{\theta} = \varepsilon^{1/3} \hat{\lambda}_0 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \left[ \frac{ie^{i\tau} - ie^{-i\tau}}{4} \right] - \frac{1}{8\sqrt{2}} \varepsilon^{1/3} \theta \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + O(\varepsilon^{4/3})$$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} = 0$

$$\bar{\theta} = 0$$

L'obtention de la véritable dégénérescence significative associée au problème distal impose à  $\hat{\lambda}_0$  de vérifier la relation de similitude :

$$(136) \quad \hat{\lambda}_0 = \alpha \hat{\lambda}_0 \quad (\text{où } \hat{\lambda}_0 = O(1))$$

En définitive les fonctions  $\bar{\psi}$  et  $\bar{\theta}$  doivent satisfaire au problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{2/3} \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} \right] + \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \varepsilon^{4/3} \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^3}$$

$$+ \varepsilon^{2/3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} = \varepsilon^{2/3} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + \varepsilon^{2/3} \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}} \right] + \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} \varepsilon^{4/3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}}$$

$$= \hat{\lambda}_0 \varepsilon^{2/3} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} - \hat{\lambda}_0 \varepsilon^{4/3} \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{4} + \varepsilon^{2/3} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{\eta}^2}$$

$$(137) \quad \text{pour } \bar{\eta} = 0 \quad \bar{\psi} = \varepsilon^{5/3} \theta \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \left[ \left( 11 \frac{1-i}{64} - 8 \frac{1-i}{8\sqrt{2}} \right) \frac{e^{2i\tau}}{2} + \left( 11 \frac{1+i}{64} - 8 \frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right) \frac{e^{-2i\tau}}{2} \right]$$

$$+ \varepsilon^{5/3} \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{11}{32\sqrt{2}} - \varepsilon^{5/3} \theta \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \frac{15}{32\sqrt{2}} + O(\varepsilon^{8/3})$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} = \theta \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \frac{7}{16} \varepsilon^{4/3} + O(\varepsilon^{8/3})$$

$$\bar{\theta} = - \frac{1}{8\sqrt{2}} \varepsilon^{1/3} \theta \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + O(\varepsilon^{4/3})$$

pour  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$   $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}} = 0$

$$\bar{\theta} = 0$$

Nous sommes ainsi conduits à rechercher la solution de  $\bar{\Psi}$  et  $\bar{\Theta}$  sous forme de développements en séries

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \bar{\Psi}_{(0)} + \varepsilon^{1/3} \bar{\Psi}_{(1)} + \varepsilon^{2/3} \bar{\Psi}_{(2)} + O(\varepsilon) \\ \bar{\Theta} &= \bar{\Theta}_{(0)} + \varepsilon^{1/3} \bar{\Theta}_{(1)} + \varepsilon^{2/3} \bar{\Theta}_{(2)} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

et obtenons par substitution de (138) dans (137) le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(1)}}{\partial \bar{\eta}^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \tau} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\Theta}_{(1)}}{\partial \tau} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\Theta}_{(2)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} \end{aligned}$$

devant satisfaire aux conditions limites :

$$\begin{aligned} \text{pour } \bar{\eta} = 0 \quad & \bar{\Psi}_{(0)} = \bar{\Psi}_{(1)} = \bar{\Psi}_{(2)} = 0 \\ & \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(1)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \bar{\eta}} = 0 \\ & \bar{\Theta}_{(0)} = \bar{\Theta}_{(2)} = 0 \\ & \bar{\Theta}_{(1)} = -\frac{1}{8\sqrt{2}} B \frac{d^2 B}{d\xi^2} \\ \text{pour } \bar{\eta} \rightarrow \infty \quad & \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(1)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(2)}}{\partial \bar{\eta}} = 0 \\ & \bar{\Theta}_{(0)} = \bar{\Theta}_{(1)} = \bar{\Theta}_{(2)} = 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons ici encore exploiter ces équations comme nous l'avons fait dans le problème distal des vents de pentes. Nous obtenons en définitive le problème suivant à l'ordre zéro :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \tau} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}^2} \\ \text{pour } \bar{\eta} = 0 \quad & \bar{\Psi}_{(0)} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = 0 \quad ; \quad \bar{\Theta}_{(0)} = 0 \\ \text{pour } \bar{\eta} \rightarrow \infty \quad & \frac{\partial \bar{\Psi}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = 0 \quad ; \quad \bar{\Theta}_{(0)} = 0 \end{aligned}$$

La solution de ce système est identiquement nulle, ce qui est en contradiction avec le comportement proximal, c'est-à-dire que  $C_7$  et  $C_9$  ont nécessairement une valeur nulle.

Remarquons de nouveau que, concernant la nullité de  $C_7$  et  $C_9$ , l'argumentation est analogue à celle de Riley ( 1966 ) dans la mesure où nous retrouvons, lorsque  $C_7 \neq 0$  et  $C_9 \neq 0$ , le même système d'équations distales, mais avec des conditions aux limites différentes.

### III CONCLUSION

Pour rendre compte du phénomène de brises, engendrant un écoulement de fluide incompressible, visqueux et pesant, nous avons construit un modèle non - stationnaire bidimensionnel qui conduit à résoudre les équations de Navier-Stokes.

Pour ce faire, nous avons utilisé une méthode de perturbation (de l'état standard).

Ayant défini le petit paramètre  $\xi$ , qui est un paramètre de perturbation singulière, nous avons montré qu'il s'agissait d'un phénomène de double couche limite oscillante.

Nous avons donc défini et raccordé deux représentations asymptotiques.

En définitive, il serait intéressant de prolonger cette étude en effectuant la résolution numérique du problème distal, puisque nous nous sommes limités à sa mise en forme.

# TROISIÈME PARTIE

## CALCULS

## I APPLICATION NUMERIQUE

Nous nous intéressons ici au champ des vitesses et à la variation de la perturbation de température  $\theta$  obtenus pour une fonction  $\Gamma(\xi)$  particulière, que nous allons définir.

Précisons tout d'abord que pour des raisons de simplicité algébrique, nous limiterons les développements distaux de  $\Psi_{(0)}$  et  $\bar{\theta}_{(0)}$  respectivement à :

$$\begin{aligned} \Psi_{(0)} &= \gamma(\xi) + \phi_1(\xi, \bar{\eta}) \\ \bar{\theta}_{(0)} &= T_1(\xi, \bar{\eta}) \end{aligned}$$

Par conséquent l'expression de la condition  $\bar{\Psi}_{(0)}(0) = 0$  se réduit à :

$$\gamma - \frac{r r'}{4 \gamma^{1/3}} = 0$$

Nous allons donc rechercher la fonction  $\gamma(\xi)$  sous la forme d'un développement en série entière par rapport à  $\xi$  du type suivant :

$$\gamma(\xi) = a_1 \xi + a_3 \frac{\xi^3}{3} + a_5 \frac{\xi^5}{5} + \dots$$

La substitution de ( I44 ) dans ( I43 ) puis l'identification selon les puissances de  $\xi$  nous permet de déterminer  $a_1, a_3, a_5$  en fonction de  $\lambda$  et  $m$ .

Considérons maintenant les expressions de  $\phi_1$  et  $T_1$  : leur caractère exponentiel décroissant nous impose d'avoir la fonction  $\gamma'(\xi)$  toujours positive dans l'intervalle  $[-1, 1]$

Nous sommes ainsi amenés à choisir  $\Gamma(\xi)$  :

$$\Gamma(\xi) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (2\xi - \xi^3)$$

$$\text{d'où nous tirons } \gamma(\xi) = 1,6119 [\xi - 0,2 \xi^3 - 0,0432 \xi^5 + \dots]$$

ce qui nous permet de déterminer précisément  $\bar{\Psi}_{(0)}$  et  $\bar{\theta}_{(0)}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{(0)} &= 1,6119 [\xi - 0,2 \xi^3 - 0,0432 \xi^5] \\ &\quad + \exp[-1,6119(1 - 0,6 \xi^2 - 0,2156 \xi^4) \bar{\eta}] \times \\ &\quad [-2,5981 (\xi - 0,8 \xi^3 - 0,1388 \xi^5) \bar{\eta} - 1,6119 (\xi - 0,2 \xi^3 - 0,0432 \xi^5)] \end{aligned}$$

$$\bar{\theta}_{(0)} = 2,5981 \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \xi^2 \right] \exp[-1,6119 (1 - 0,2 \xi^2 - 0,2156 \xi^4) \bar{\eta}]$$

Nous sommes donc en mesure de calculer les termes :

$$\Psi_{(0)}, \theta_{(0)}, \Psi_{(1)st}, \theta_{(1)st}, \Psi_{(1)p}, \theta_{(1)p}, \bar{\Psi}_{(0)}, \bar{\theta}_{(0)}$$

L'examen des variations de la perturbation de température  $\theta$  nous permet de remarquer que le raccord s'effectue au voisinage d'une zone correspondant aux valeurs respectives 1,5 et 0,5 des variables proximale et distale.

Nous obtenons, compte tenu de la relation ( 3I a ), (avec  $\gamma = -\frac{1}{2}$ ), la valeur de  $\xi$  :

$$\xi \approx 0,1111$$

Nous faisons donc le choix  $\varepsilon = 0,1$  d'où, après avoir remarqué

\* que  $\psi_{(1)pr}$  et  $\theta_{(1)pr}$  sont négligeables respectivement devant  $\psi_{(1)st}$  et  $\theta_{(1)st}$

\* que, compte tenu de la faible valeur de  $\eta$  pour laquelle s'effectue le raccord, nous avons remplacé, dans les représentations distales de  $\psi$  et  $\theta$  les termes  $\frac{\Gamma}{2} \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{i\eta z} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\eta z} \right)$  et 0 respectivement par  $\psi_{(0)}$  et  $\theta_{(0)}$ , l'obtention des représentations de  $\psi$  et  $\theta$  valables respectivement dans les régions proximale et distale :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_{(0)} + 0,1 \psi_{(1)st} \\ \theta &= \theta_{(0)} + 0,1 \theta_{(1)st} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_{(0)} + 3,1623 \overline{\psi_{(0)}} \\ \theta &= \theta_{(0)} + 0,1 \overline{\theta_{(0)}} \end{aligned} \right\}$$

148

## II RESULTATS DES CALCULS EFFECTUES

En nous servant des formules obtenues, nous avons fait des calculs pour obtenir les lignes de courant  $\psi = C^{te}$  ( fig. 1 et 2 ) et les courbes  $\theta = C^{te}$ , ( fig. 3 et 4 ), respectivement avec les valeurs  $\pi/3$  et  $2\pi/3$  affectées à  $\eta$ .

Pour ces tracés, nous avons reporté  $\xi$  en abscisse ( avec  $\xi \in [-1, +1]$  ), et l'altitude adimensionnée  $\eta$  en ordonnée ( avec  $\eta \in [0, 8]$  )

D'autre part nous avons tracé pour une valeur déterminée de  $\xi$  ( $\xi = 0,4$ ), l'évolution de  $\psi$  et de  $\theta$  en fonction de l'altitude ( fig. 5, 6, 7, 8 )

Remarquons tout d'abord que la prise en compte des termes d'ordre un dans les équations (7) change radicalement l'image du mouvement étudié. Cela est bien visible sur les courbes ( 5, 6, 7, 8 ) où nous avons représenté  $\psi(\eta)$  et  $\theta(\eta)$  en trait continu, et leurs valeurs limitées à l'ordre zéro :  $\psi_{(0)}(\eta)$  et  $\theta_{(0)}(\eta)$  en pointillé.

La visualisation des lignes de courant (fig. 1-2) nous permet de nous rendre compte du phénomène des vents de pentes.

Il apparaît tout d'abord une ligne de courant  $\psi = 0$  pouvant être assimilée à une "ligne de séparation".

Ainsi, dans la région située au-dessus de cette ligne, nous remarquons principalement l'existence de courants descendants ou ascendants loin de la paroi respectivement aux niveaux  $\xi = 0$  et  $\xi = \pm 1$ .

En revanche, en dessous de cette ligne, nous voyons apparaître un écoulement tourbillonnaire qui se traduit par l'existence d'un courant ascendant au niveau de  $\xi = 0$ , et par des courants horizontaux : près de la paroi dirigés vers  $\xi = 0$  et loin de la paroi en sens contraire.

En définitive, sur la verticale  $\xi = 0$  prennent naissance (entre 0 et environ 500 m à 1000 m) un écoulement ascendant et au dessus de cette valeur un écoulement descendant.



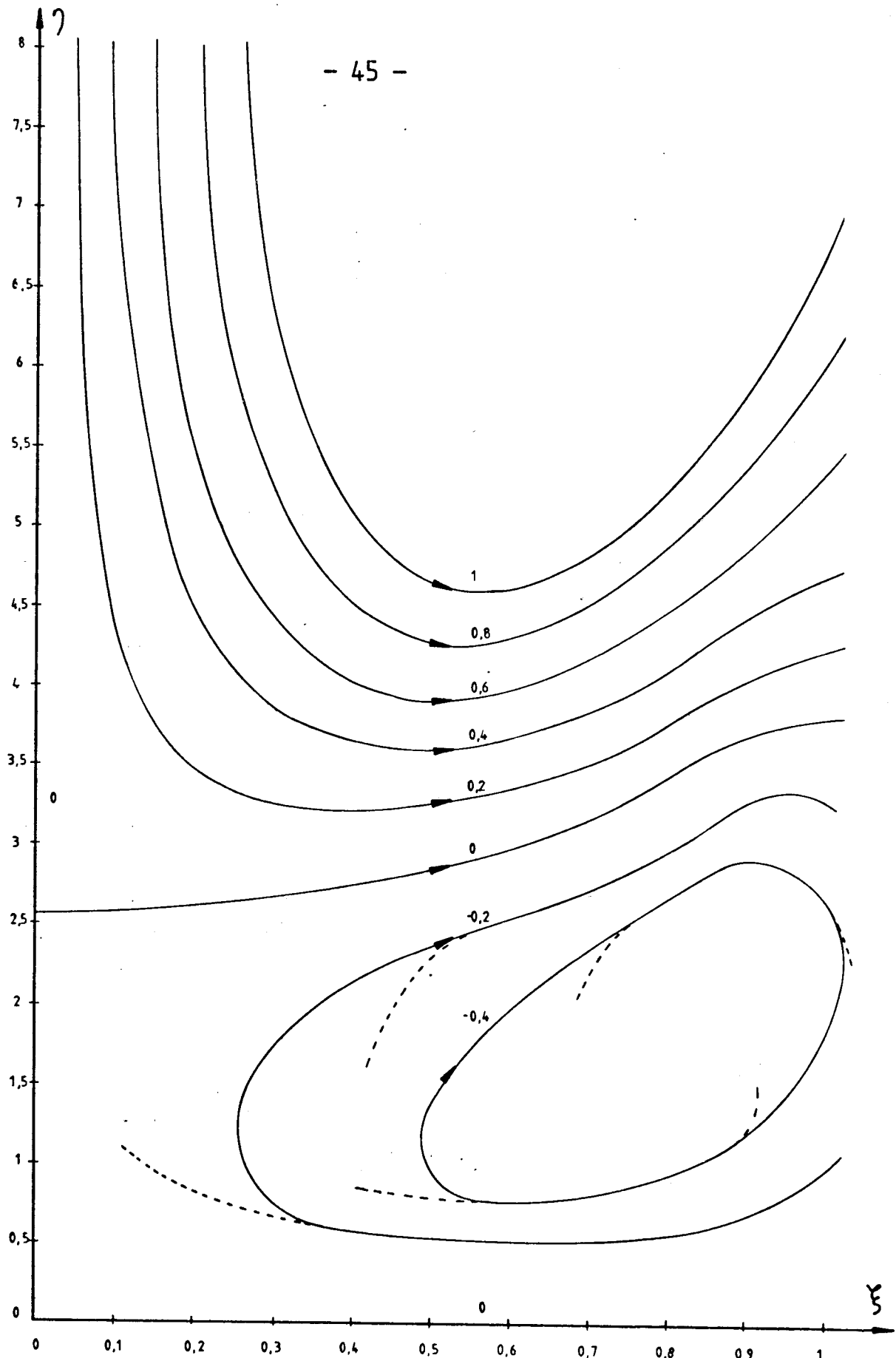
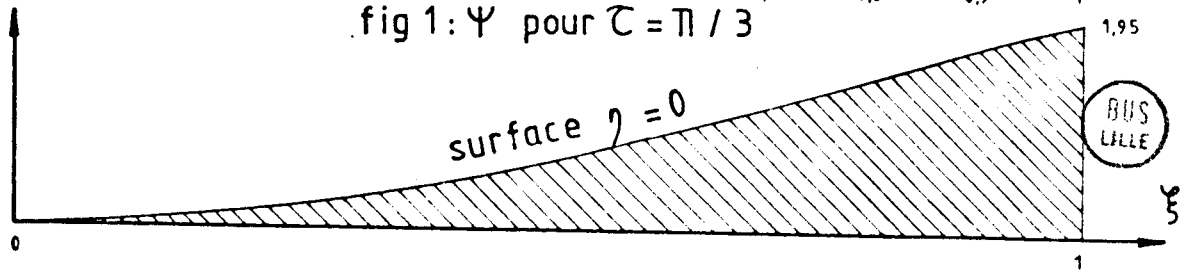


fig 1:  $\Psi$  pour  $\tau = \pi / 3$



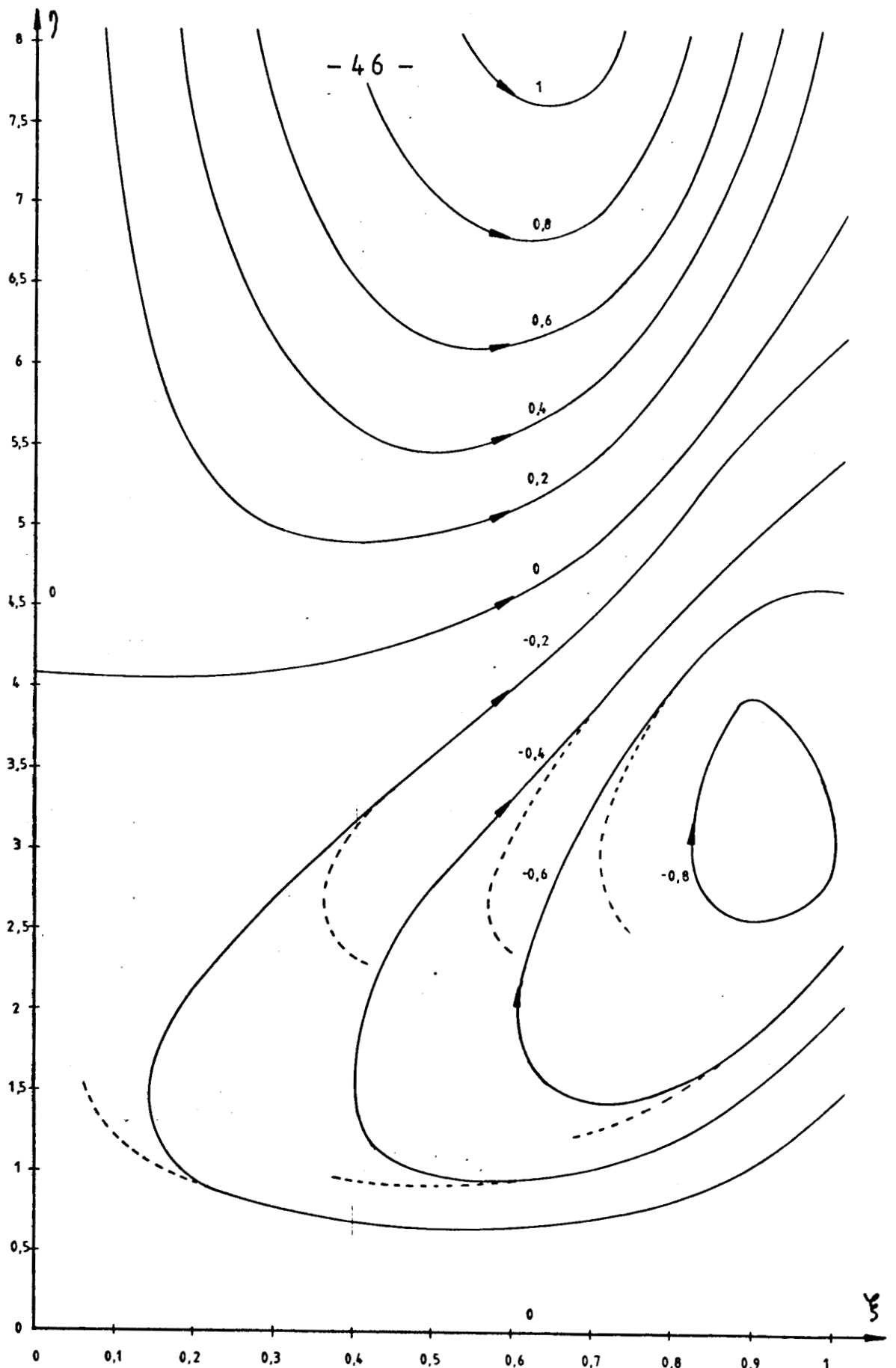
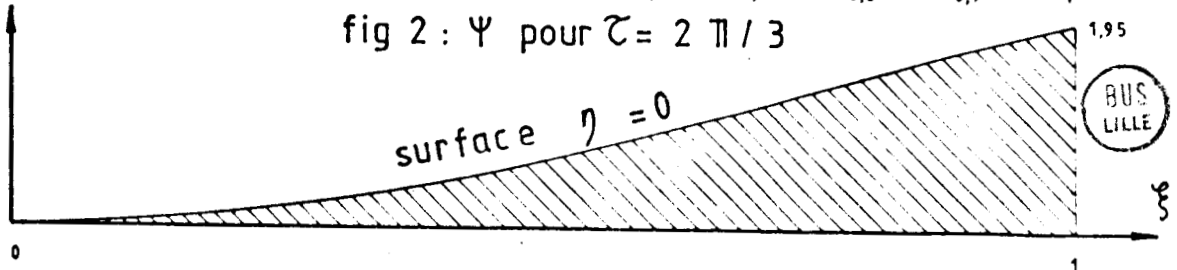


fig 2 :  $\Psi$  pour  $\tau = 2\pi/3$



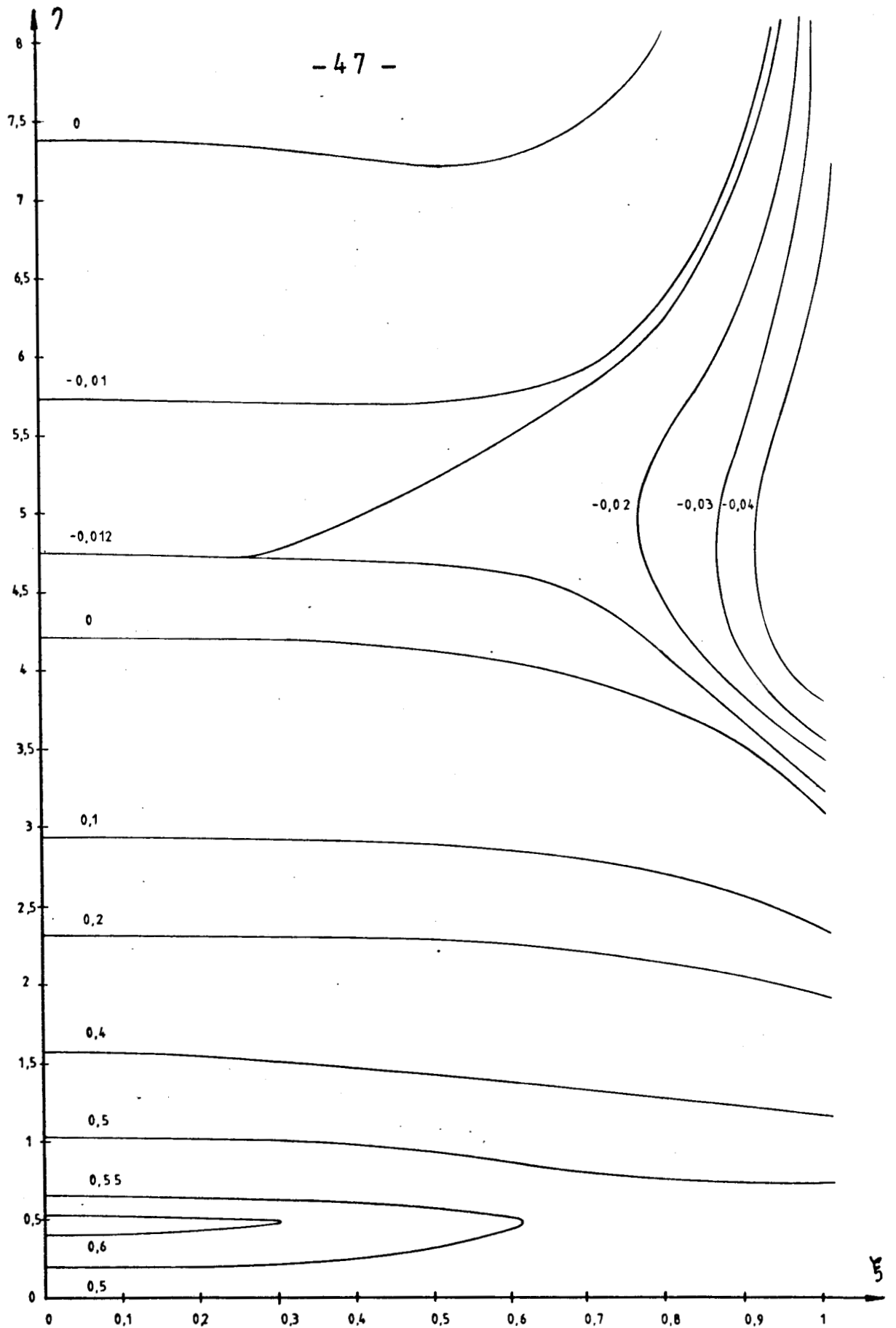
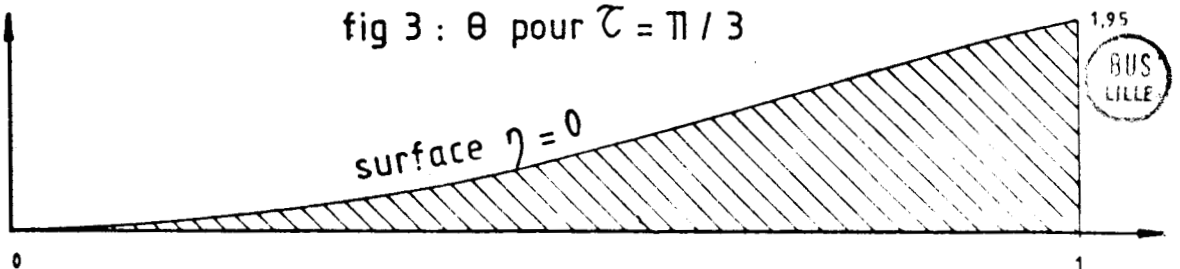


fig 3 :  $\theta$  pour  $\tau = \pi / 3$



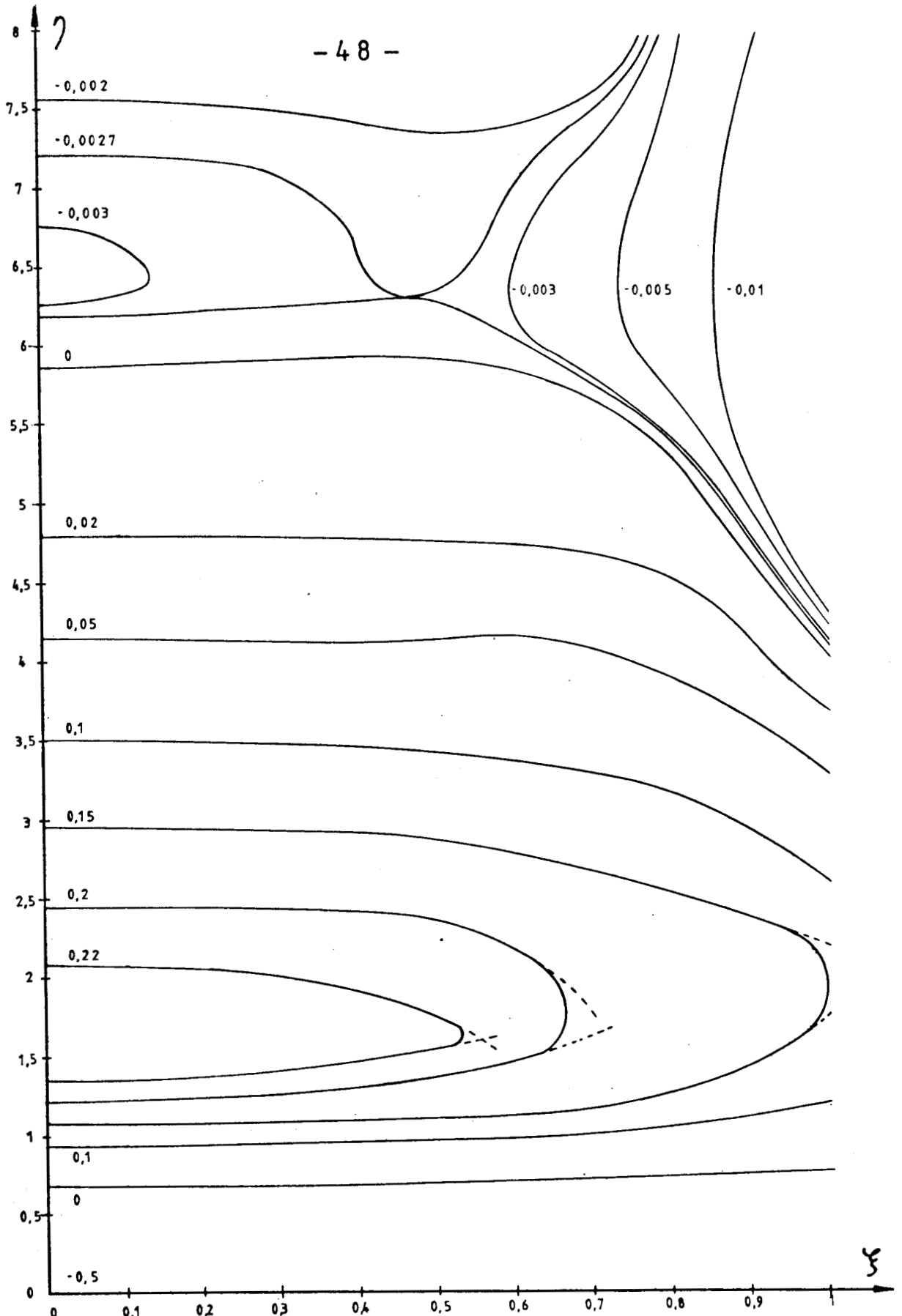
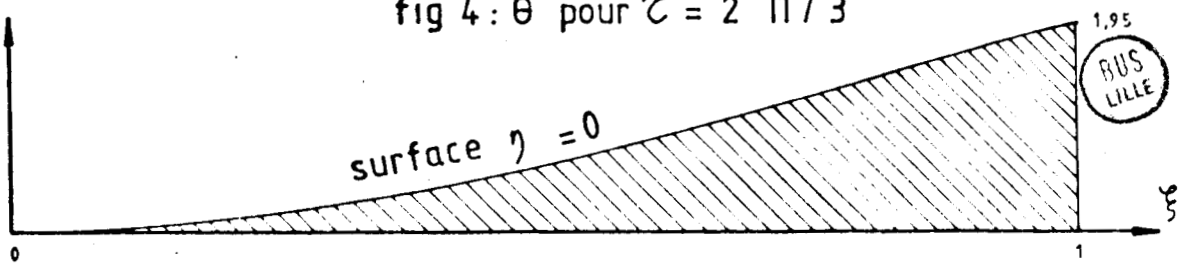


fig 4:  $\theta$  pour  $\tau = 2 \pi / 3$



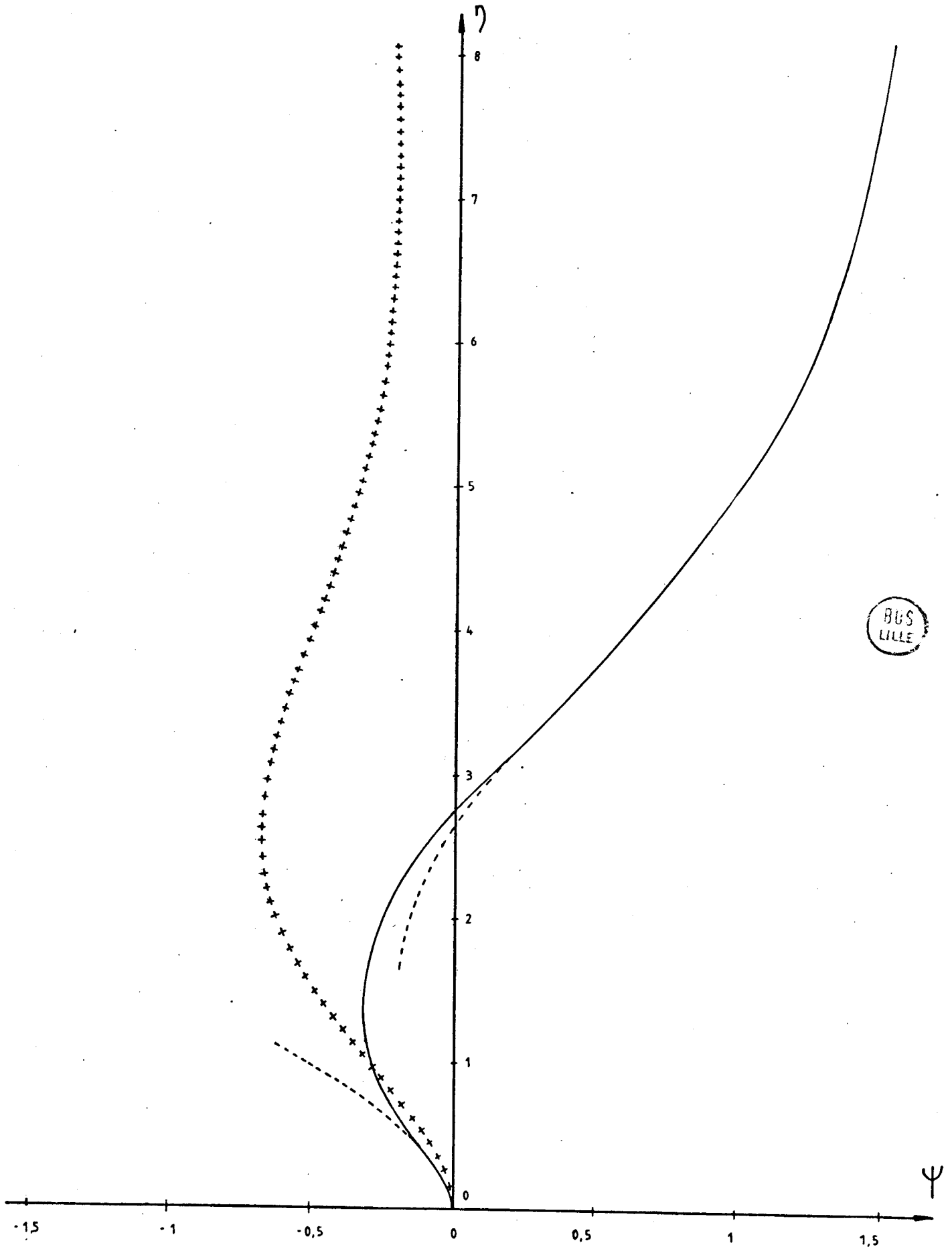


fig 5 :  $\Psi$  pour  $\tau = \pi / 3$

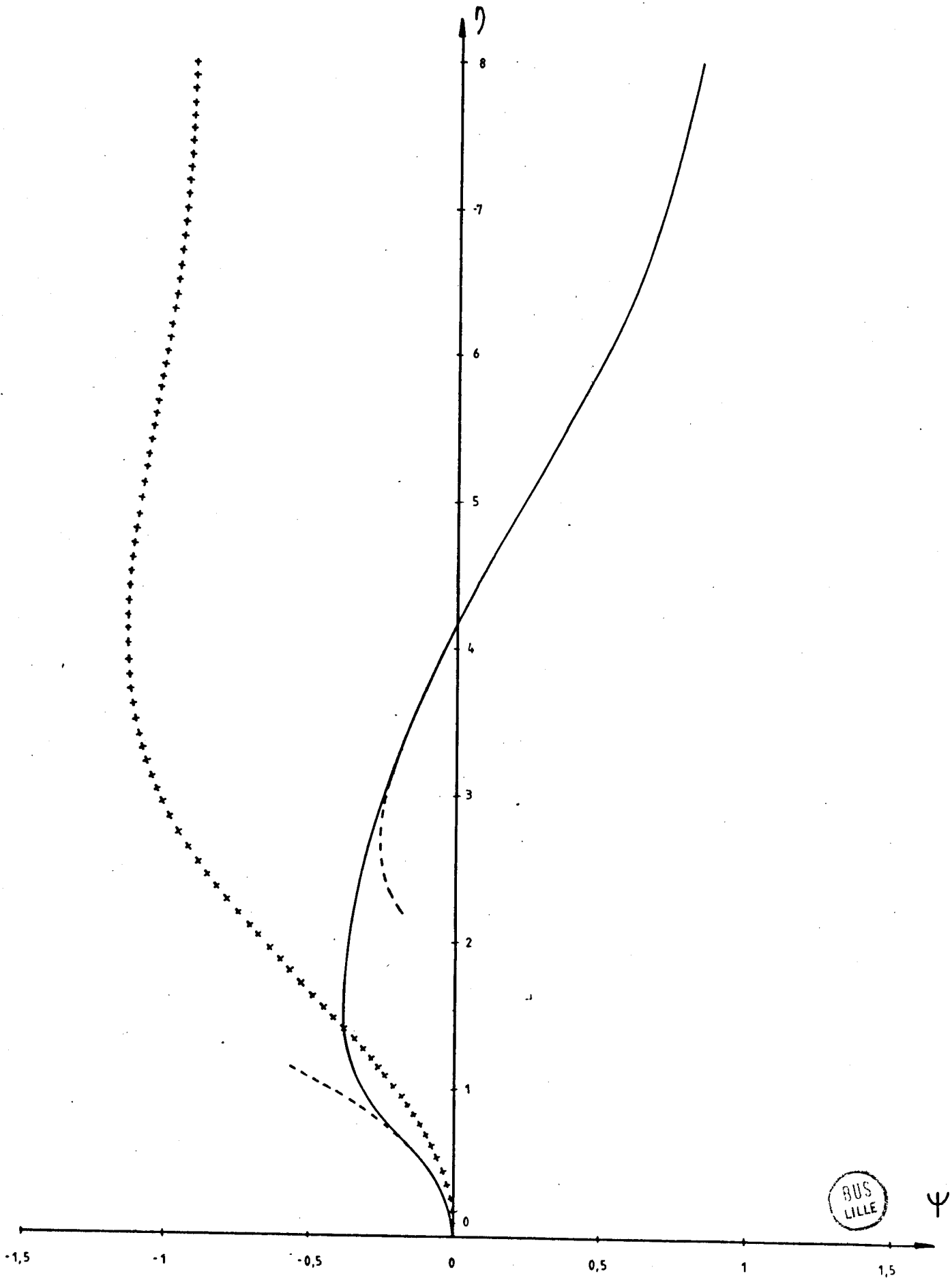


fig 6 :  $\Psi$  pour  $\tau = 2 \pi / 3$

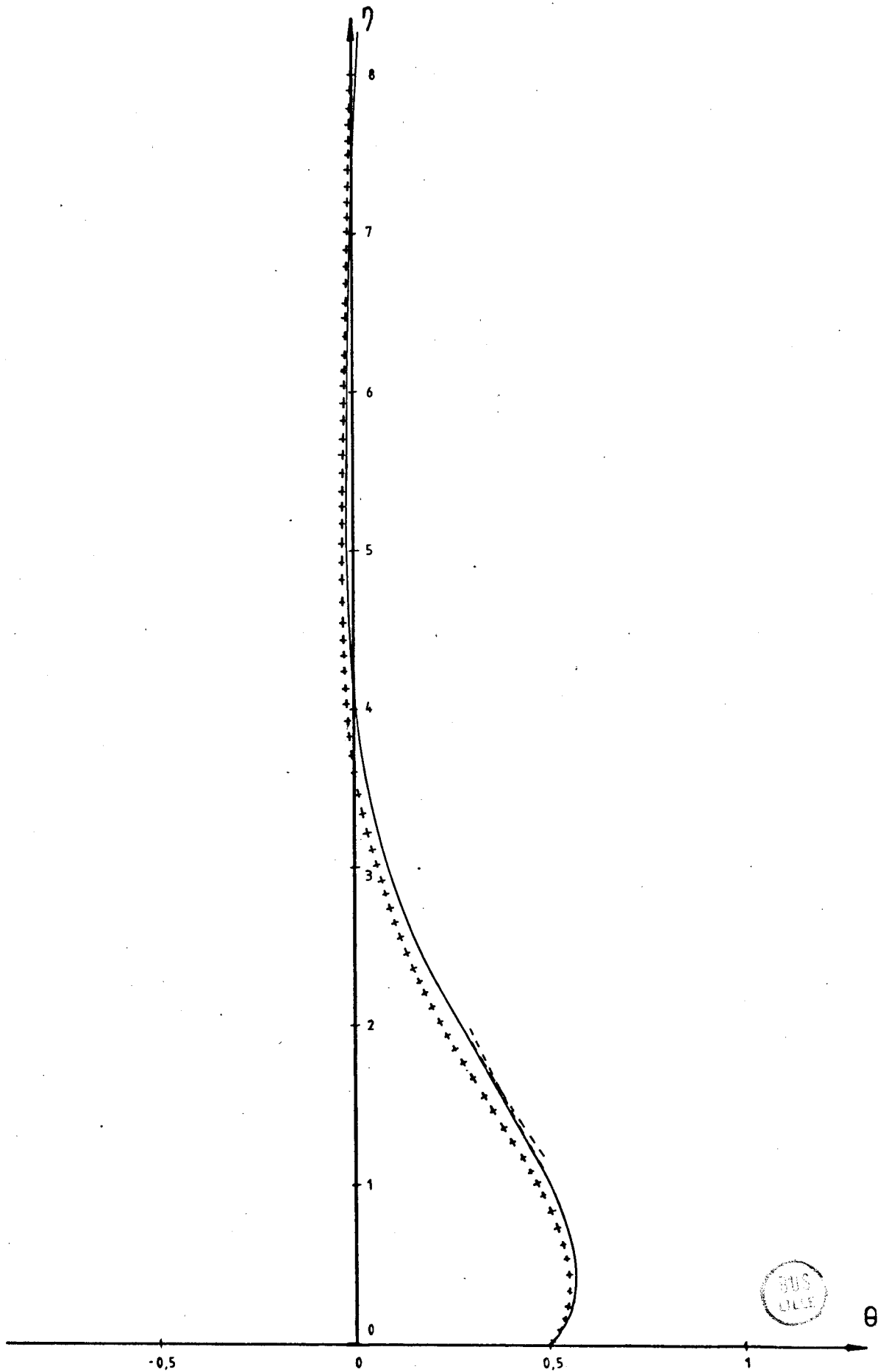


fig 7 :  $\theta$  pour  $\tau = \pi / 3$

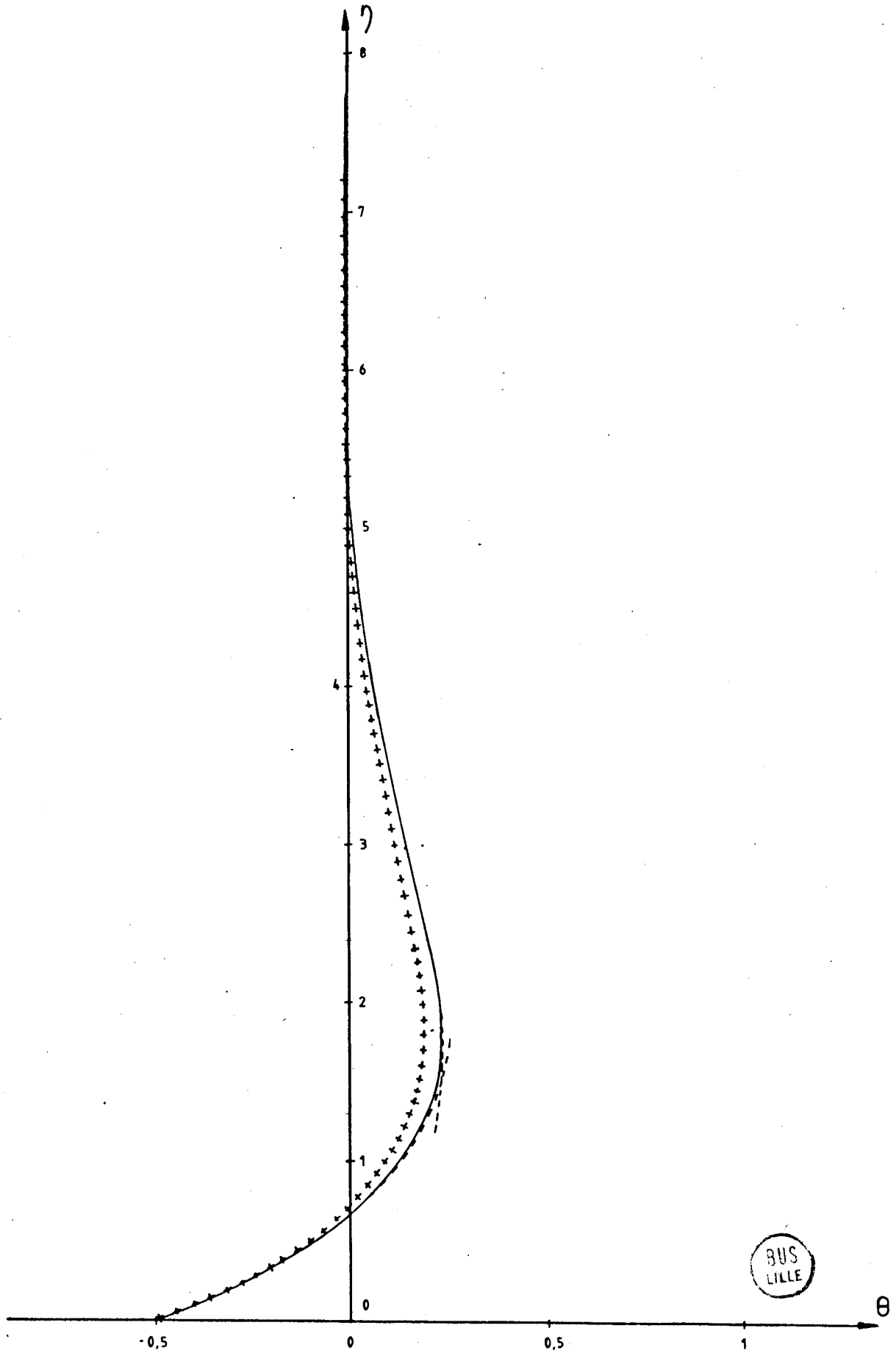


fig 8 :  $\theta$  pour  $\tau = 2 \pi / 3$



### III CONCLUSION

Ce phénomène des vents de pentes a été, comme celui des brises, considéré comme une perturbation de l'état standard.

L'emploi du petit paramètre de perturbation singulière  $\epsilon$  nous a permis de faire apparaître un phénomène de double couche limite oscillante.

Nous avons donc établi une théorie asymptotique qui pose ce problème sous un jour nouveau.

Cette façon de procéder élimine entièrement les difficultés qui étaient apparues dans l'étude directe ( Zeytounian 1968 ), par suite de la présence de deux représentations: distale et proximale.

# RÉFÉRENCES

---

STUART J.T. (1965)

Double boundary layers in oscillatory viscous flow  
J. Fluid Mech. (1966) , vol.24, part 4 , pp 673 - 687

RILEY N. (1966)

Oscillating viscous flows  
Mathematika 12 (1965) pp 161-175

ZEYTOUNIAN R.Kh. (1968)

Convection naturelle périodique au dessus d'une surface courbe  
Journal de mécanique , vol.7, N°2, Juin 1968

SCHLICHTING H. (1932)

Berechnung ebener periodischer grenzschichtströmungen  
Phys.-Zeitschrift, t.33, n°8, 1932, p 327

ZEYTOUNIAN R.Kh. (1976)

Les modèles de couche limite en dynamique de l'atmosphère  
Lecture notes in Mathematics , 594 , Springer Verlag , 1977

FETTIS H.E. (1956)

On the integration of a class of differential equations occurring in boundary-layer  
and other hydrodynamic problems  
Proc. 4th Mid West Conf. Fluid Mech. 1955, Purdue Univ. 93 - 114

VAN DYKE M. (1964)

Perturbation methods in Fluid Mechanics  
Academic Press (1964)

