

N° d'ordre : 905

50376
1981
82

50376
1981
82

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

EN MATHÉMATIQUES PURES

par

Yves CARRIÈRE

FLOTS RIEMANNIENS

et

FEUILLETAGES GEODESIBLES DE CODIMENSION UN



Membres du Jury : D. LEHMANN, Président
G. HECTOR, Rapporteur
Y. FELIX, Examineur

Soutenue le 25 Juin 1981

*A tous ceux et celles que j'aime
et qui m'ont aidé par leur présence proche ou lointaine*

Je suis heureux de pouvoir remercier ici Gilbert Hector de m'avoir accueilli au sein de son équipe. Je lui suis très reconnaissant de la patience qu'il a eue à mon égard et des nombreux conseils qu'il m'a donnés lors de la rédaction de cette thèse.

C'est grâce à l'amitié d'Etienne Ghys que j'ai été amené à m'intéresser aux feuilletages. J'ai pu bénéficier, au cours de nombreuses discussions à bâtons rompus, de la vision personnelle et enrichissante qu'il a des mathématiques. Une partie de cette thèse est le développement d'un travail que nous avons fait ensemble à l'I.M.P.A. de Rio de Janeiro. Pour l'intérêt constant qu'il a porté à mon travail, je le remercie très chaleureusement.

L'idée de la démonstration principale du deuxième chapitre de cette thèse est due à Alberto Verjovsky, je l'en remercie très sincèrement.

Je remercie également Daniel Lehmann et Yves Félix d'avoir accepté de participer à mon jury.

Je suis reconnaissant de l'intérêt amical que m'ont témoigné Gérard Duminy, Aziz El-Kacimi et Vlad Sergiescu.

Pour avoir moi-même frappé des textes mathématiques, j'apprécie particulièrement l'absolue qualité de la dactylographie de ce texte. C'est à Arlette Lengaigne que je dois ce travail, je l'en remercie vivement. Mes remerciements vont aussi au service d'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille I.

I N T R O D U C T I O N .

La notion de feuilletage riemannien a été introduite en 1959 par B. Reinhart. Ces feuilletages sont ceux qui ont la propriété forte d'admettre une métrique transverse invariante ou, pour employer une terminologie plus intuitive, d'être à feuilles "parallèles" (cf. [Rum]).

Dans ce travail, nous étudions principalement les flots riemanniens, c'est-à-dire les feuilletages riemanniens de dimension 1 orientés. Trois raisons essentielles ont motivé cette étude :

i) Il était a priori intéressant de mieux connaître, parmi les feuilletages riemanniens, le cas le plus "simple" des flots riemanniens. A notre connaissance, personne jusque là n'avait abordé ce sujet de manière systématique.

ii) Les flots riemanniens constituent une généralisation naturelle des flots isométriques. Par une étude détaillée des flots riemanniens, nous touchons ainsi à la question de l'existence de flots isométriques sur les variétés riemanniennes.

iii) Le flot orthogonal d'un feuilletage totalement géodésique de codimension 1, est riemannien. Il y a donc un lien évident entre notre étude et le problème, naturel en géométrie riemannienne, de l'existence de feuilletages totalement géodésiques.

Dans [Mol.1-2], P. Molino a donné un théorème décrivant la structure des feuilletages riemanniens sur les variétés compactes. Nous le complétons dans le cas des flots riemanniens, en prouvant essentiellement que l'adhérence d'une orbite d'un tel flot sur une variété compacte, est un tore. C'est là notre résultat principal. Il généralise un résultat déjà connu pour les flots isométriques (cf. [Gro]) et ceci de manière non-triviale.

Il existe en effet des flots riemanniens non-isométriques sur certaines variétés compactes. Comme première application, nous obtenons la classification, à conjugaison près, des flots riemanniens sur les 3-variétés compactes.

Les autres applications concernent essentiellement l'étude des feuilletages totalement géodésiques. Certains auteurs, comme K. Abe et D. Ferus (cf. [Abe], [Fer]), ont considéré le problème de l'existence de ces feuilletages sur une variété munie d'une métrique riemannienne fixe. Nous nous posons un problème différent, analogue à celui étudié par D. Sullivan à propos des feuilletages minimaux (cf. [Sul. 2]) : soit F un feuilletage sur une variété M , existe-t-il sur M une métrique riemannienne rendant F totalement géodésique ? S'il existe une telle métrique, on dit que F est géodésible.

Nos résultats portent sur les feuilletages géodésibles de codimension 1. D'abord, nous montrons que le relevé d'un tel feuilletage dans le revêtement universel d'une variété compacte, est en produit. Il s'agit là d'une généralisation, pour la codimension 1, d'un théorème connu de G. De Rham sur les structures presque-produits. A partir de ([Pla], [Sul. 1]), nous pouvons alors caractériser, sur une variété compacte M , les feuilletages géodésibles de codimension 1 possédant une mesure transverse invariante non-triviale. Cette caractérisation est toujours applicable lorsque $\pi_1(M)$ est à croissance non-exponentielle.

Ensuite, nous obtenons de notre résultat principal sur les flots riemanniens la conséquence suivante : si une variété compacte M supporte un feuilletage géodésible de codimension 1, alors $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe abélien distingué de rang ≥ 1 . En particulier, il n'existe pas de feuilletage géodésible de codimension 1 sur une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle < 0 .

Enfin, de la classification des flots riemanniens sur les 3-variétés compactes et de [Ghy, Ser], nous tirons la classification des feuilletages géodésibles de codimension 1 sur ces mêmes variétés.

Par ailleurs, en étudiant les exemples de flots riemanniens sur les 3-variétés compactes, nous avons été amenés à donner un contre-exemple à un théorème de dualité de Reinhart contenu dans [Rei.2]. Ce théorème constituait une généralisation naturelle de la dualité de Poincaré pour la cohomologie basique d'un feuilletage riemannien. Par notre contre-exemple, nous pouvons affirmer que cette généralisation est inexacte, tout au moins sous la forme où elle est énoncée dans [Rei.2] et ceci même dans le cas "simple" des flots riemanniens. Il semble cependant qu'avec des hypothèses plus fortes telle que l'existence d'un feuilletage riemannien transverse (structure presque - produit), la conclusion de ce théorème pourrait rester correcte.

A la suite de l'étude que nous avons décrite, il était naturel de s'intéresser aux flots transversalement conformes et à leur lien avec les feuilletages totalement ombilicaux de codimension 1. Sans avoir obtenu de résultat complet sur cette question, nous avons montré cependant que le feuilletage de Reeb de S^3 peut être rendu totalement ombilical (alors qu'il n'est ni géodésible, ni même minimal).

Notre travail est organisé de la façon suivante. Le chapitre I contient les résultats sur les structures transverses utiles pour la suite ainsi que des exemples de flots riemanniens avec, parmi eux, le contre-exemple dont nous avons parlé. Une idée de A. Verjosky nous permet de classifier, au chapitre II, les \mathbb{R}^n -flots sur les variétés compactes. Le chapitre III est la démonstration de notre résultat principal dans le cas des G -flots de Lie à orbites denses (cette étude a été faite en collaboration avec P. Caron cf. [Car, Car]). Nous pouvons alors, après l'exposé du chapitre IV sur les travaux de P. Molino, énoncer au chapitre V notre résultat principal sur les flots riemanniens. Le chapitre VI est un développement, rendu possible par les chapitres antérieurs, d'un travail sur les feuilletages géodésibles de codimension 1 écrit avec E. Ghys (cf. [Car, Ghy]). Nous terminons, au chapitre VII, par un "essai" sur les flots transversalement conformes et les feuilletages ombilicalisables de codimension 1.

Convention : Dans tout ce qui suit, nous supposons que les variétés sont orientables et que les feuilletages sont transversalement orientables. Nous nous plaçons dans la catégorie C^r , $r \geq 2$.

P L A N .

	<u>Pages</u>
<u>CHAPITRE I - STRUCTURES TRANSVERSES, EXEMPLES.-</u>	1
A - Préliminaires.	1
B - Flots riemanniens.	4
C - Flots admettant une (G,T)-structure transverse.	8
D - Flots de Lie.	14
E - Contre-exemple à un théorème de dualité de Reinhart.	18
 <u>CHAPITRE II - \mathbb{R}^n-FLOTS.-</u>	 22
 <u>CHAPITRE III - G-FLOTS MINIMAUX.-</u>	 26
 <u>CHAPITRE IV - FEUILLETAGES RIEMANNIENS.-</u>	 36
A - Feuilletages transversalement parallélisables.	36
B - Constructions de parallélismes.	38
1 - Variétés riemanniennes.	38
2 - Feuilletages riemanniens.	39
a) Construction de (M_T, F_T) .	40
b) Exemple : flot isométrique.	41
c) Parallélisme transverse de F_T .	43
C - Structure des feuilletages riemanniens.	44
 <u>CHAPITRE V - FLOTS RIEMANNIENS.-</u>	 46
A - Structure des flots riemanniens en dimension quelconque.	46
B - Classification en dimension 3.	52
	 ./...

<u>CHAPITRE VI - FEUILLETAGES GEODESIBLES DE CODIMENSION 1.-</u>	57
A - Un critère de géodésibilité.	58
B - Propriétés topologiques en dimension quelconque.	62
C - Classification en dimension 3.	67
<u>CHAPITRE VII - FLOTS TRANSVERSALEMENT CONFORMES ET FEUILLETAGES</u> <u> OMBILICALISABLES DE CODIMENSION 1.-</u>	68
A - Flots transversalement conformes.	70
B - Construction d'exemples sur S^3 .	77
C - Feuilletages ombilicalisables de codimension 1.	82
<u>CONCLUSION.-</u>	86
<u>BIBLIOGRAPHIE.-</u>	87

CHAPITRE I

STRUCTURES TRANSVERSES,
EXEMPLES.

A - PRELIMINAIRES.-

Définition I.A.1.- Un feuilletage F sur une variété M , est la donnée d'un cocycle feuilleté noté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$, où :

a) $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M .

b) f_i est une submersion de U_i dans une variété T appelée variété transverse.

c) γ_{ij} est un difféomorphisme local de la variété T , tel que pour tout $x \in U_i \cap U_j$, on a :

$$f_i(x) = \gamma_{ij} \circ f_j(x)$$

Le feuilletage F est défini sur chaque ouvert U_i par la submersion f_i . On dit que le couple (U_i, f_i) est une carte de F . Les difféomorphismes locaux γ_{ij} sont appelés changements de cartes ou de coordonnées transverses. Il est clair que les γ_{ij} vérifient la condition de cocycle :

$$\gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}(x), \quad \forall x \in f_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

Par ailleurs, les γ_{ij} engendrent un pseudo-groupe Γ de difféomorphismes locaux de la variété T .

De manière générale, se donner une structure transverse pour le feuilletage F revient à imposer certaines conditions à ce pseudo-groupe.

Exemples I.A.2.-

1 - S'il existe une métrique riemannienne g sur T , invariante par Γ , on dit que F est un feuilletage riemannien. Ce premier exemple de structure transverse a été introduit par Reinhart dans [Rei 1].

2 - Supposons maintenant que T est connexe, et soit G un groupe d'isométries de la variété riemannienne (T, g) . On peut imposer à Γ la condition supplémentaire d'être un sous-pseudo-groupe du groupe G . Autrement dit, que les changements de coordonnées transverses γ_{ij} soient des restrictions d'isométries de (T, g) appartenant à G . Ces changements de coordonnées transverses, qui habituellement sont définis localement, ont dans ce cas un caractère global. Ceci permettra de construire une représentation d'holonomie globale.

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que F admet une (G, T) - structure riemannienne transverse. Cette notion est une généralisation pour les feuilletages de celle de (G, T) - structure (appelée plutôt dans ce cas (G, X) - structure) introduite par Ehresmann pour les variétés. En réalité, comme nous le verrons plus loin, le concept de (G, T) - structure (ou de (G, X) - structure) est plus général.

3 - Si on suppose de plus, dans l'exemple précédent, que G agit transitivement sur T , alors G a la structure d'un groupe de Lie et T s'identifie à un espace homogène de G . On dit dans ce cas que F est un feuilletage riemannien transversalement homogène.

Ces feuilletages ont été initialement introduits et étudiés par

Blumenthal dans [Blu].

4 - Lorsqu'on suppose aussi que G agit librement sur T , on dit alors que F est transversalement de Lie ou encore que F est un G -feuilletage de Lie. Dans ce cas la variété transverse T s'identifie au groupe de Lie G . Ce type de structure transverse a été étudié pour la première fois par Fédida dans [Féd].

Nous reviendrons, lorsque ce sera nécessaire, sur les définitions précises de ces différentes structures transverses.

Dans tout ce qui suit, nous serons amenés principalement à étudier des feuilletages de dimension 1 orientés sur des variétés compactes. Un tel feuilletage Φ est constitué par les courbes intégrales d'un champ de vecteurs. Pour cette raison, nous appellerons flot (sans paramètre) le feuilletage Φ . Lorsqu'on considérera un paramétrage de Φ , c'est-à-dire un flot (avec paramètre) dont les orbites sont les feuilles de Φ , on le notera toujours ϕ_t , en indiquant explicitement le paramètre. Nous utiliserons cette convention d'écriture, toutes les fois où il n'y aura aucune confusion possible entre les deux notions.

Définition I.A.3.- On dira que deux flots sont conjugués, s'ils sont conjugués en tant que feuilletages.

N.B.- Cette définition est en contradiction avec les conventions habituelles utilisées dans la théorie des systèmes dynamiques. Nous l'avons néanmoins adoptée, dans la mesure où le terme "flot" signifie pour nous "feuilletage orienté de dimension 1".

B - FLOTS RIEMANNIENS.-

Pour plus de clarté, redonnons tout d'abord la définition d'un feuilletage riemannien que nous avons vu apparaître à la partie précédente.

Définition I.B.1.- Soit F un feuilletage sur une variété M . Supposons qu'il existe un cocycle $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ définissant F , de variété transverse T (c.f. I.A.1.), tel que :

- a) la variété T est une variété riemannienne.
- b) les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des isométries locales de T .

On dit alors que F est un feuilletage riemannien.

Dans ces conditions, soit g_0 une métrique riemannienne quelconque sur M et P un champ de plans supplémentaire du fibré tangent à F (on peut prendre par exemple pour P le champ de plans orthogonal à F relativement à g_0). Il est facile de vérifier alors qu'il existe une unique métrique riemannienne g_1 sur M , telle que :

- 1) Les métriques induites par g_1 et g_0 sur l'espace tangent à F coïncident.
- 2) Le champ de plans P est orthogonal à F pour la métrique g_1 .
- 3) La métrique induite par g_1 sur P est localement l'image réciproque par f_i de la métrique de T .

Une métrique vérifiant 2) et 3) est dite quasi-fibrée relativement à F ("bundle-like" dans la terminologie de Reinhart (cf. [Rei 1])). L'existence d'une métrique quasi-fibrée caractérise les feuilletages riemanniens (cf. [Rei 1]).

Soit maintenant g une métrique riemannienne sur M et F un feuilletage sur M . Notons \langle, \rangle le produit scalaire associé à g . Le lemme suivant est une conséquence directe de la proposition 2.1. de [Rei 1]:

Lemme I.B.2.- La métrique g est quasi-fibrée relativement à F , si et seulement si, pour tout champ de vecteurs X tangent à F et tout champ de vecteurs Y orthogonal à F et unitaire (Y est défini sur un ouvert de M), on a :

$$\langle Y, [X, Y] \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant donner les premiers exemples de flots riemanniens.

Exemple I.B.3.- Soit (M, g) une variété riemannienne et ϕ_t un flot isométrique sur M (i.e. agissant par isométries). Appelons \langle, \rangle le produit scalaire et X le champ de vecteurs $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}$. Comme ϕ_t est isométrique, on a pour tout champ de vecteurs unitaire Y (défini sur un ouvert de M) :

$$\langle \phi_t^*(Y), \phi_t^*(Y) \rangle - \langle Y, Y \rangle = 0, \quad \forall t$$

d'où

$$\left\langle \frac{\phi_t^*(Y) - Y}{t}, Y \right\rangle + \left\langle \phi_t^*(Y), \frac{\phi_t^*(Y) - Y}{t} \right\rangle = 0, \quad \forall t \neq 0$$

En faisant tendre t vers zéro, on obtient $\langle [X, Y], Y \rangle = 0$. D'après le lemme précédent, g est quasi-fibrée pour le flot ϕ_t . Donc tout flot isométrique est un exemple de flot riemannien.

Lorsque ϕ est un flot (sans paramètre) sur une variété M , on dira que ϕ est isométrique s'il existe un paramétrage de ϕ et une métrique riemannienne sur M pour laquelle le flot avec paramètre correspondant ϕ_t est isométrique.

Les exemples qui suivent sont des cas particuliers de flots isométriques :

Exemple I.B.4.- Soit M une variété et ϕ un flot donné par une action localement libre de \mathbb{S}^1 sur M . Le flot ϕ est isométrique et par conséquent il est riemannien. En effet, une action de \mathbb{S}^1 sur M est isométrique pour une métrique obtenue de la manière suivante : partant d'une métrique quelconque sur M , on prend la moyenne des transformées de cette métrique par les éléments de \mathbb{S}^1 , relativement à la mesure de Haar de \mathbb{S}^1 .

Remarque : Un flot dont toutes les orbites sont fermées sur une variété M compacte de dimension 3 est toujours donné par une action localement libre de \mathbb{S}^1 $[\text{Eps}]$. Un tel flot est donc riemannien, il définit sur M une fibration de Seifert (cf. $[\text{Orl}]$).

Exemple I.B.5.-

1) On considère la sphère \mathbb{S}^3 donnée dans \mathbb{C}^2 par :

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

et le flot ϕ_t sur \mathbb{S}^3 défini par :

$$\begin{aligned}\phi_t : \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow (e^{i\lambda t} z_1, e^{i\mu t} z_2)\end{aligned}$$

où λ et μ sont deux constantes réelles.

Pour la métrique standard de \mathbb{S}^3 , le flot ϕ_t agit par isométries. Ce flot est donc un exemple de flot riemannien sur \mathbb{S}^3 .

Si λ et μ sont en rapport rationnel, ϕ_t peut être défini par une action localement libre de \mathbb{S}^1 et on retrouve donc un exemple du type précédent.

Si λ et μ sont en rapport irrationnel, ϕ_t possède exactement deux orbites fermées données respectivement par les équations $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$.

Les autres orbites ont pour adhérences les tores d'équations $|z_1| = k$, où k est une constante appartenant à $]0, 1[$.

2) L'espace lenticulaire $L_{p,q}$ est obtenu comme quotient de \mathbb{S}^3 par le groupe engendré par l'isométrie

$$\begin{aligned}h_{p,q} : \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i/q} z_2)\end{aligned}$$

où p et q sont des entiers. Le flot isométrique que nous venons de construire sur \mathbb{S}^3 passe clairement au quotient sur $L_{p,q}$. Il fournit par conséquent un exemple de flot riemannien sur $L_{p,q}$.

C - FLOTS ADMETTANT UNE (G,T) - STRUCTURE TRANSVERSE.

Dans cette partie, nous allons rappeler la construction de la représentation d'holonomie associée à une (G,T)-structure. Nous donnerons aussi les résultats essentiels concernant les feuilletages admettant une (G,T)-structure transverse. Nous passerons, dans la partie suivante, à l'étude des cas particuliers que sont les feuilletages de Lie.

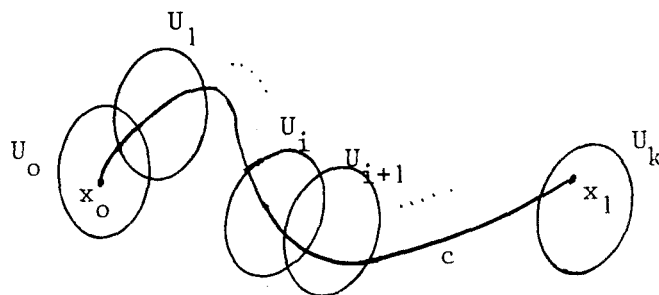
Soit G un groupe de difféomorphismes d'une variété T . On dit que G opère analytiquement sur T si deux difféomorphismes appartenant à G sont égaux dès qu'ils coïncident sur un ouvert non vide de T .

Définition I.C.1.- Soit F un feuilletage sur une variété M . Supposons qu'il existe un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ définissant F , de variété transverse T (cf. I.A.1.) tel que :

- a) les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des restrictions de difféomorphismes de T appartenant à un groupe G .
- b) le groupe G opère analytiquement sur T .

On dit alors que F admet une (G,T)-structure transverse.

Nous allons construire la représentation d'holonomie de cette (G,T)-structure. Soit x_0 et x_1 deux points de M et c un chemin joignant x_0 à x_1 . Recouvrons c par des cartes de F comme sur la figure suivante :



les ouverts U_0, \dots, U_k sont choisis tels que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i = 0, \dots, k-1$.

Comme G opère analytiquement sur T , nous pouvons noter de la même manière le changement de coordonnées transverses γ_{ij} et l'unique difféomorphisme appartenant à G dont il est restriction, ceci pourvu que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

On définit alors $H(c)$ comme le composé des changements de cartes γ_{ii+1} le long de c :

$$H(c) = \gamma_{01} \circ \gamma_{12} \circ \dots \circ \gamma_{k-1k}$$

Cette expression a bien un sens car chaque γ_{ii+1} est défini, puisque $U_i \cap U_{i+1}$ est non vide.

En utilisant encore une fois le fait que G agit analytiquement sur T , on vérifie aisément que l'élément $H(c)$ de G ainsi obtenu ne dépend pas du recouvrement choisi et qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de c .

En particulier, si l'on suppose que $x_0 = x_1$, on obtient ainsi une représentation :

$$H : \pi_1(x_0, M) \longrightarrow G$$

appelée holonomie (relative à x_0) de la (G, T) -structure transverse de F . Son image est le groupe d'holonomie (relatif à x_0).

En fait, dans ce qui suit, nous ne préciserons pas le point base choisi et nous parlerons simplement de la représentation d'holonomie et du groupe d'holonomie de la (G, T) -structure transverse de F (ou encore de F lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible).

Les deux résultats qui suivent sont démontrés dans [Thu]. Fixons d'abord des notations que nous utiliserons souvent sans les préciser.

Soit M une variété, on note \tilde{M} le revêtement universel de M . Le groupe fondamental $\pi_1(M)$ agit sur \tilde{M} (on suppose qu'un point base a été choisi), on note :

$$\begin{aligned} \pi_1(M) \times \tilde{M} &\longrightarrow \tilde{M} \\ (c, x) &\longrightarrow c \cdot x \end{aligned}$$

cette action.

Soit F un feuilletage admettant une (G, T) -structure transverse sur M . La représentation d'holonomie correspondante est notée H . On désigne par \tilde{F} le relevé de F dans \tilde{M} .

Dans ces conditions on a la

Proposition I.C.2.- Soit F un feuilletage admettant une (G, T) -structure transverse sur une variété M . Alors, il existe une submersion D de \tilde{M} sur un ouvert de T , telle que :

i) les composantes connexes des fibres de D sont les feuilles de \tilde{F} .

ii) D est équivariante par rapport à H , c'est-à-dire que pour tout $c \in \pi_1(M)$ et tout $x \in \tilde{M}$, on a :

$$D(c \cdot x) = H(c) \circ D(x) . \quad \blacksquare$$

L'application D porte le nom d'application développante (de la (G, T) -structure considérée).

Remarque : Réciproquement, supposons que l'on se donne une représentation H de $\pi_1(M)$ dans G et D une submersion de \tilde{M} sur un ouvert de T , équivariante par rapport à H . Alors, le feuilletage défini par D sur \tilde{M} passe au quotient en un feuilletage admettant une (G,T) -structure transverse sur M . C'est cette remarque qui nous permettra de construire des exemples.

Exemple I.C.3.- La variété $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ est obtenue comme le quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par l'homothétie h de rapport 2 opérant sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Ecrivons \mathbb{R}^3 sous la forme $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et considérons la restriction D à $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de la projection de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{C} . Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ est cyclique. Soit c_0 un générateur qui agit sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par l'homothétie h et H la représentation de $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ dans le groupe $\text{Sim}(\mathbb{C})$ des similitudes de \mathbb{C} , qui à c_0 associe l'homothétie de rapport 2. La submersion D est équivariante par rapport à H . Elle définit donc sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ un flot ϕ admettant une $(\text{Sim}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -structure transverse. Remarquons bien que la submersion D n'est pas une fibration localement triviale puisque seule la fibre au-dessus de zéro a deux composantes connexes.

Le flot ϕ obtenu a deux orbites fermées dont l'une est attractante et l'autre répulsive (ce flot est un flot de Morse-Smale).

L'exemple que nous venons de décrire est un cas particulier de (G,T) -structure transverse, celui où le groupe G est un groupe de Lie et la variété T un espace homogène G/K du groupe G . Un feuilletage qui admet une $(G,G/K)$ -structure transverse est dit transversalement homogène G/K (cf. [Blu]).

Lorsque G est un groupe d'isométries d'une variété riemannienne connexe T , il est facile de vérifier que G opère analytiquement sur T . Cette situation donne donc lieu à des (G,T) -structures particulières que nous avons appelées riemanniennes (cf. exemple I.A.2.). Pour ces (G,T) -structures particulières, on a le résultat suivant dû à Ehresmann (non publié) et démontré dans [Thu] :

Théorème I.C.4. (Ehresmann) - Soit F un feuilletage admettant une (G,T) -structure riemannienne transverse sur une variété compacte M . Alors la variété riemannienne T est complète et l'application développante D est une fibration localement triviale de \tilde{M} sur T . ■

Remarquons que la (G,T) -structure transverse du flot ϕ de l'exemple I.C.3., bien qu'homogène, n'est pas riemannienne. En effet, le flot ϕ possède une orbite fermée attractante, il ne peut donc admettre de métrique transverse invariante. Nous avons d'ailleurs remarqué que l'application développante de ϕ n'était pas une fibration. Ceci est une autre façon de montrer (cf. théorème précédent), que la (G,T) -structure transverse de ϕ n'est pas riemannienne.

Pour que la $(G, G/K)$ -structure transverse d'un feuilletage F transversalement homogène soit riemannienne, il faut et il suffit qu'il existe sur G une métrique invariante à gauche qui soit aussi invariante à droite par K . On dit alors que F est un feuilletage riemannien transversalement homogène (cf. exemple I.A.2.).

Lorsque K est un sous-groupe compact de G , une $(G, G/K)$ -structure transverse peut toujours être rendue riemannienne. En particulier, ceci est vrai si K est trivial, c'est-à-dire lorsqu'on a une (G,G) -structure transverse ou encore une structure de Lie G transverse.

C'est pour cette raison que nous parlons d'un G -feuilletage de Lie sans préciser qu'il est riemannien. Quitte à choisir une métrique sur G invariante à gauche, un tel feuilletage est toujours riemannien.

Avant de passer à l'étude de ces feuilletages, donnons des exemples de flots admettant une (G,T) -structure riemannienne transverse qui n'est pas nécessairement de Lie.

Exemple I.C.5.- Soit ϕ un flot sur une variété compacte M , défini par une fibration en cercles : $M \rightarrow T$. On choisit sur T une métrique riemannienne. Ce flot ϕ admet alors une (G,T) -structure riemannienne transverse où G est trivial.

Exemple I.C.6.- Un flot ϕ obtenu par suspension d'une isométrie h d'une variété riemannienne compacte T admet une (G,T) -structure riemannienne transverse. Dans ce cas, le groupe G est engendré par l'isométrie h .

Remarque : Le flot de l'exemple I.B.5. est riemannien et même isométrique. Pourtant, dans le cas où λ et μ sont en rapport irrationnel, il n'admet pas de (G,T) -structure riemannienne transverse. En effet, s'il en admettait une, d'après le théorème I.C.4., il devrait avoir toutes ses orbites fermées du fait que \mathbb{S}^3 est simplement connexe. Or ce flot ne possède que deux orbites fermées.

D - FLOTS DE LIE.

Nous avons vu à la partie précédente qu'un G -feuilletage de Lie était un feuilletage admettant une (G,G) -structure transverse. On peut toujours supposer que cette structure est riemannienne quitte à choisir une métrique invariante à gauche sur G . On notera en général Γ le groupe d'holonomie d'un tel feuilletage. Le groupe Γ est un sous-groupe du groupe de Lie G et opère sur G par translation à gauche. Le théorème suivant est une application directe du théorème I.C.4.

Théorème I.D.1. (Fédida) - Soit F un G -feuilletage de Lie sur une variété compacte \tilde{M} . Alors, on a :

i) l'application développante D est une fibration localement triviale de \tilde{M} sur le groupe de Lie G .

ii) les adhérences des feuilles de F sont les fibres d'une fibration $\bar{D} : M \rightarrow K \backslash G$ où K désigne l'adhérence du groupe d'holonomie Γ dans G .

iii) dans chaque fibre de la fibration \bar{D} , le feuilletage induit par F est transversalement de Lie K_e , où K_e désigne la composante connexe de l'élément neutre dans K . Les feuilles de ce feuilletage sont denses. ■

Donnons un corollaire immédiat de ce théorème, précisant la relation entre le groupe d'holonomie et la topologie des feuilles d'un G -feuilletage de Lie :

Corollaire I.D.2. - Soit M une variété compacte et F un G -feuilletage de Lie sur M . On a les propriétés suivantes :

- i) les feuilles de F sont toutes difféomorphes.
- ii) les feuilles de F sont denses, si et seulement si, le groupe d'holonomie de F est dense dans G .
- iii) les feuilles de F sont compactes, si et seulement si, le groupe d'holonomie de F est un sous-groupe discret uniforme de G . ■

Les exemples de G -flots de Lie que nous allons donner sont de type "homogène". Nous montrerons dans le chapitre suivant que tout \mathbb{R}^n -flot sur une variété compacte est de ce type. Cette propriété reste vraie pour les G -flots, où G est le groupe de Heisenberg de dimension 3 [Car].

Définition I.D.3.- Soient G un groupe de Lie, Γ un sous-groupe discret uniforme de G et X un sous-groupe distingué à un paramètre de G . L'opération naturelle à droite de X sur la variété compacte $M = \Gamma \backslash G$, est un flot transversalement de Lie G/X qu'on appellera flot de type homogène.

Exemple I.D.4.- Flots linéaires sur le tore.

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) un vecteur de \mathbb{R}^n ; on considère le sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie \mathbb{R}^n , défini par $X(t) = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$; en projetant sur $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$, on obtient un \mathbb{R}^{n-1} -flot (flot linéaire sur T^n); ce \mathbb{R}^{n-1} -flot est de type homogène.

Exemple I.D.5.- Flots "propres" sur les fibrés hyperboliques.

Soit A une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à deux; l'automorphisme A a deux valeurs propres réelles positives et distinctes, λ et $1/\lambda$; on note V_1 et V_2 des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres λ et $1/\lambda$.

On désigne par T_A^3 le fibré en tores T^2 sur le cercle, obtenu en quotientant $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence qui identifie (m,t) à $(A(m), t+1)$; la direction propre Δ_2 engendrée par V_2 induit sur $T^2 \times \mathbb{R}$ un flot $\bar{\phi}_2$ (ce flot est irrationnel dans chaque tore) ; le flot $\bar{\phi}_2$ définit sur T_A^3 un flot ϕ_2 qu'on appelle flot "propre" de T_A^3 associé à la valeur propre $1/\lambda$.

Proposition I.D.6. - Le flot propre ϕ_2 sur T_A^3 est transversalement de Lie le groupe affine GA et il est de type homogène.

Démonstration : Nous allons utiliser une extension du groupe affine GA par le groupe de Lie \mathbb{R} , qui a été décrite par E. Ghys [Ghy] dans son étude des actions "homogènes" du groupe affine.

Puisque la matrice A a deux valeurs réelles strictement positives, on peut définir A^t pour tout réel t ; munissons \mathbb{R}^3 de la loi de groupe :

$$(t, x, y) (t', x', y') = (t + t', A^t(x', y') + (x, y))$$

on obtient ainsi un groupe de Lie résoluble de dimension 3.

Il est facile de voir (cf. [Kir], [Ghy]) que la structure de ce groupe de Lie ne dépend pas de la matrice A de trace > 2 choisie. Nous noterons donc G_3 ce groupe.

Le sous-groupe Γ_A de G_3 défini par

$$\Gamma_A = \{(t, x, y) \in G_3 ; t, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe discret uniforme de G_3 et l'espace homogène compact $\Gamma_A \backslash G_3$ est le tore hyperbolique T_A^3 .

On identifie le groupe affine GA au groupe de Lie obtenu en considérant sur \mathbb{R}^2 la loi de groupe :

$$(t,s) (t',s') = (t + t', \lambda^t s + s')$$

On note $\eta_1(x,y)$ la composante sur le vecteur V_1 du vecteur (x,y) de \mathbb{R}^2 , l'application σ définie par :

$$\sigma(t,x,y) = (t, \eta_1(x,y))$$

est un homomorphisme de groupes de Lie. L'homomorphisme σ est surjectif et son noyau $X = \text{Ker } \sigma$ est le sous-groupe à un paramètre de G_3 défini par :

$$X = \{(0, k V_2) \in G_3 ; k \in \mathbb{R}\}$$

Le sous-groupe à un paramètre X définit sur $\Gamma_A \backslash G_3$ le flot ϕ_2 , ce qui démontre le résultat.

Remarque : On peut définir de la même manière un GA-flot de type homogène ϕ_1 sur T_A^3 , associé à la valeur propre λ ; on a ainsi obtenu les deux flots "propres" de T_A^3 .

E - CONTRE-EXEMPLE A UN THEOREME DE DUALITE DE REINHART.-

Soit M une variété et F un feuilletage sur M défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ de variété transverse T .

Notons $A^p(M)$ l'espace des p -formes différentielles sur M . Pour $\alpha \in A^p(M)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $i_X \alpha = 0$ et $i_X d\alpha = 0$ pour tout champ de vecteurs tangent à F .

ii) la forme α est obtenue localement comme image réciproque d'une unique forme sur T , invariante par les changements de coordonnées transverses γ_{ij} .

Si α vérifie l'une de ces conditions, on dit que c'est une p -forme basique.

On note $A_b^p(M, F)$ l'espace de ces formes. Si on appelle q la codimension de F , c'est-à-dire la dimension de T , on a bien entendu : $A_b^p(M, F) = 0$, $\forall p > q$. Il est immédiat de vérifier que la différentielle d'une forme basique est basique, ce qui permet d'introduire la cohomologie basique de F :

$$H_b^*(M, F) = \bigoplus_{p=0}^q H_b^p(M, F)$$

Pour simplifier, nous noterons plutôt $H_b^*(F)$ cette cohomologie. Il n'est pas difficile de voir, grâce à la condition ii) que $H_b^*(F)$ s'identifie à la cohomologie des formes différentielles sur T , invariantes par les γ_{ij} . C'est cette remarque qui permet en général de calculer les groupes de cohomologie basique d'un feuilletage. Dans [Sch], G.W. Schwarz a montré que ces groupes peuvent être de dimension infinie.

Antérieurement, B. Reinhart a énoncé dans [Rei 2] le résultat suivant :

Si F est un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte, alors :

a) la dimension des groupes $H_b^p(F)$ est finie.

b) $\dim H_b^p(F) = \dim H_b^{q-p}(F)$.

Nous allons montrer par un exemple que l'assertion b) est inexacte. Il semble par ailleurs que l'assertion a) reste vraie. Avant de donner ce contre-exemple, démontrons le résultat suivant :

Proposition I.E.1. - Soit ϕ_t un flot isométrique sur une variété riemannienne compacte M . Appelons Ω la forme volume de M , X le champ $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}$. Alors la forme $i_X \Omega$ est basique et la classe de $i_X \Omega$ dans la cohomologie basique du flot (sans paramètre) ϕ associé à ϕ_t est non nulle.

Démonstration : Supposons que $i_X \Omega$ soit la différentielle d'une forme basique α . Notons ω la forme donnée par $\omega(Y) = \langle X, Y \rangle$. On a $\omega \wedge i_X \Omega = \Omega$ et donc $\omega \wedge d\alpha = \Omega$. Mais $d\omega \wedge \alpha = 0$ car $d\omega$ est basique. D'où $\Omega = d(\omega \wedge \alpha)$, comme M est compacte, ceci est impossible. ■

Soit ϕ l'un des flots de l'exemple I.D.5. Ce flot est transversalement de Lie le groupe affine GA . Appelons Γ son groupe d'holonomie, d'après la remarque que nous avons faite, la cohomologie basique de ϕ est celle des formes invariantes par Γ . Mais, comme une forme invariante par Γ l'est aussi par l'adhérence $K = \overline{\Gamma}$, c'est aussi la cohomologie des formes sur GA invariantes par K .

Si on identifie, comme en I.D.5., le groupe affine GA au groupe de Lie obtenu en considérant sur \mathbb{R}^2 la loi de groupe

$$(t,s) (t',s') = (t + t', \lambda^t s' + s)$$

le groupe K est alors le sous-groupe

$$K = \{(n,s) , n \in \mathbb{Z} , s \in \mathbb{R}\}$$

Proposition I.E.2.- Le groupe $H_b^2(\Phi)$ est nul.

Démonstration : L'opération de K et de GA sur GA est l'opération à gauche. Les 1-formes $\alpha = dt$ et $\beta = \frac{ds}{\lambda^t}$ sont invariantes à gauche.

Une fonction f est K-invariante si elle ne dépend pas de s et vérifie :

$$f(t) = f(t + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Une 1-forme ω K-invariante s'écrit donc :

$$\omega = f(t) \alpha + g(t) \beta$$

où f et g sont K-invariantes.

Une 2-forme Ω K-invariante s'écrit

$$\Omega = h(t) \alpha \wedge \beta$$

où h(t) est K-invariante. Pour montrer le résultat, il suffit de prouver que Ω est toujours différentielle d'une 1-forme K-invariante.

C'est-à-dire que $\forall h$ fonction K -invariante, il existe des fonctions f et g , K -invariantes, telles que :

$$d(f(t) \alpha + g(t) \beta) = h(t) \alpha \wedge \beta$$

ou encore :

$$(g'(t) + g(t) \text{Log } \lambda) \alpha \wedge \beta = h(t) \alpha \wedge \beta$$

c'est-à-dire :

$$g'(t) + g(t) \text{Log } \lambda = h(t) .$$

Posons $g(t) = \lambda^{-t} g_1(t)$ (variation des constantes). On doit donc trouver $g_1(t)$ telle que $g_1'(t) \lambda^{-t} = h(t)$, ce qui donne par intégration : $g(t) = \lambda^{-t} (k + \int_0^t \lambda^x h(x) dx)$ où k est une constante.

Puisque $h(x) = h(x+1) \forall x$, pour avoir $g(t+1) = g(t) \forall t$, il suffit de choisir $k = \frac{1}{\lambda-1} \int_0^1 \lambda^x h(x) dx$. Ce qui est toujours possible puisque $\lambda \neq 1$, d'où $H_b^2(\phi) = 0$. ■

Il est facile de voir que pour un feuilletage F quelconque on a toujours $\dim H_b^0(F) = 1$. La proposition précédente montre donc que le flot ϕ est un contre-exemple à l'assertion b) du résultat de Reinhart.

De la proposition I.E.2. on tire :

Corollaire I.E.3.- Le flot ϕ n'est pas isométrique. ■

Nous verrons au chapitre V que les flots de l'exemple I.D.5. sont les seuls flots riemanniens non-isométriques sur une variété compacte de dimension 3.

CHAPITRE II

\mathbb{R}^n -FLOTS

La classification des \mathbb{R}^n -flots est donnée par le théorème suivant :

Théorème II.1.- Soient M une variété compacte de dimension $(n+1)$ et Φ un \mathbb{R}^n -flot sur M .

Alors on a les deux possibilités suivantes :

a) les orbites de Φ sont les fibres d'une fibration en cercles de M sur T^n .

b) les orbites de Φ ne sont pas fermées ; dans ce cas la variété M est difféomorphe à T^{n+1} et le flot Φ est conjugué à un flot linéaire sur T^{n+1} .

Si les orbites de Φ sont fermées, le groupe d'holonomie Γ de Φ est un sous-groupe discret uniforme de \mathbb{R}^n ; les orbites de Φ sont alors les fibres d'une fibration $\bar{D} : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$ (Th. I.D.1.), ce qui démontre la partie a) du théorème.

Pour la partie b) du théorème, on montre que Φ possède une section isomorphe au groupe de Lie T^n et donc que Φ s'obtient par suspension d'une translation du groupe T^n ; la démonstration de ce point s'effectue à l'aide des deux lemmes suivants :

Lemme II.2.- Soient Γ un sous-groupe de \mathbb{R}^n et K l'adhérence de Γ dans \mathbb{R}^n . Le sous-groupe K est uniforme dans \mathbb{R}^n , si et seulement si, Γ contient un sous-groupe discret uniforme de \mathbb{R}^n .

Démonstration : Si Γ contient un sous-groupe Γ_0 discret uniforme dans \mathbb{R}^n , alors l'espace homogène \mathbb{R}^n/K est compact, puisque image du compact \mathbb{R}^n/Γ_0 par la projection canonique de \mathbb{R}^n/Γ_0 sur \mathbb{R}^n/K .

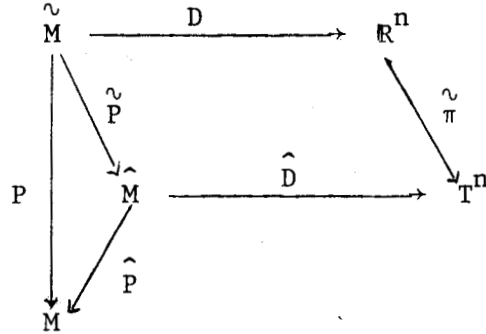
Réciproquement, si Γ ne contient aucun sous-groupe discret uniforme de \mathbb{R}^n , alors Γ et par conséquent K ne contiennent aucune base de \mathbb{R}^n ; le sous-espace vectoriel W engendré par K est donc de dimension $p < n$; si W_1 est un supplémentaire de W , l'espace homogène \mathbb{R}^n/K est homéomorphe à l'espace produit $W_1 \times W/K$, ce qui montre que K n'est pas un sous-groupe uniforme de \mathbb{R}^n . ■

Lemme II.3.- Le flot ϕ possède une section.

Démonstration : Soient Γ le groupe d'holonomie de ϕ et K l'adhérence de Γ dans \mathbb{R}^n ; comme K est un sous-groupe uniforme de \mathbb{R}^n , le sous-groupe Γ contient un sous-groupe Γ_0 discret uniforme dans \mathbb{R}^n (Lemme II.2.), le groupe $H = \Gamma/\Gamma_0$ est abélien de type fini, par conséquent $H = H_1 \oplus H_1'$ où H_1 est isomorphe à \mathbb{Z}^p et H_1' est un groupe fini; si $\tilde{\Gamma}_0$ est l'extension de Γ_0 par H_1' , alors le sous-groupe $\tilde{\Gamma}_0$ est discret uniforme dans \mathbb{R}^n et le groupe $\Gamma/\tilde{\Gamma}_0$ est isomorphe à \mathbb{Z}^p .

Considérons la variété $\hat{M} = \tilde{\tilde{M}}/\tilde{\tilde{\Gamma}}_0$; la projection canonique $\tilde{p} : \tilde{\tilde{M}} \rightarrow \hat{M}$ est une application de revêtement galoisien, le groupe de ce

revêtement est $\tilde{\Gamma}_0$. Il existe alors un revêtement galoisien $\hat{p} : \hat{M} \rightarrow M$ de groupe $\Gamma/\tilde{\Gamma}_0 = \mathbb{Z}^D$ tel que $p = \hat{p} \circ \tilde{p}$. On note par ailleurs $\tilde{\pi}$ la projection canonique de \mathbb{R}^n sur $\mathbb{R}^n/\tilde{\Gamma}_0 \simeq T^n$.



La fibration D induit une fibration $\hat{D} : \hat{M} \rightarrow T^n$ telle que :

$$\hat{D} \circ \tilde{p} = \tilde{\pi} \circ D .$$

Si $\hat{\phi}$ est le flot relevé dans \hat{M} , alors les feuilles du feuilletage défini par $\hat{\phi}$ sont les fibres de \hat{D} ; puisque les orbites de $\hat{\phi}$ ne sont pas fermées, le fibré \hat{D} est un fibré en droites orientable, par conséquent, la variété \hat{M} est difféomorphe à $\mathbb{R} \times T^n$. Le revêtement galoisien $\hat{p} : \hat{M} \rightarrow M$ a une base compacte et son espace total a deux bouts ; on en déduit que son groupe, à savoir $\Gamma/\tilde{\Gamma}_0$, a deux bouts. Le groupe $\Gamma/\tilde{\Gamma}_0$ est donc isomorphe à \mathbb{Z} . Un lemme technique de D. Fried [Fri], montre que dans ces conditions, il existe une section $\hat{\sigma}$ du fibré \hat{D} telle que $\hat{p} \circ \hat{\sigma}$ est un plongement ; la sous-variété $\hat{p} \circ \hat{\sigma}(T^n)$, isomorphe au groupe de Lie T^n , est alors une section du flot ϕ . ■

Démonstration du théorème II.1. : On note Λ la section du flot ϕ , obtenue dans le lemme II.3 ; on modifie le paramétrage du flot ϕ de manière à ce que la fonction de temps de premier retour associée à Λ soit constante et égale à 1 et on appelle R le

difféomorphisme de premier retour. En transportant la section Λ par le flot ϕ (muni de son nouveau paramétrage), on obtient sur M une fibration de fibre Λ et de base \mathbb{R} ; la variété M est difféomorphe au quotient de $\Lambda \times \mathbb{R}$ obtenu en identifiant (λ, t) et $(R(\lambda), t-1)$; comme par ailleurs, R est obtenu à partir d'une translation de \mathbb{R}^n , la variété M est difféomorphe à T^{n+1} . Avec le nouveau paramétrage, le flot ϕ est induit par le champ de vecteurs constant $(0, 1)$ sur $\Lambda \times \mathbb{R}$, et par conséquent le flot ϕ est conjugué à un flot linéaire de T^{n+1} . ■

D'après le théorème I.D.1, les adhérences des orbites d'un G -flot ϕ sur une variété compacte, constituent une fibration telle que dans chaque fibre, le flot induit par ϕ est à orbites denses. Nous allons étudier les G -flots minimaux (i.e. les G -flots à orbites denses) dans le chapitre suivant et montrer que ce sont en fait des \mathbb{R}^n -flots. Grâce au théorème que nous venons d'établir, nous obtiendrons ainsi la classification des G -flots minimaux sur les variétés compactes. C'est là le point essentiel qui nous permettra au chapitre V, d'énoncer notre résultat principal sur les flots riemanniens (théorème V.A.1.).

CHAPITRE III

G-FLOTS MINIMAUX.

Pour montrer qu'un G -flot minimal est un \mathbb{R}^n -flot, il suffit de montrer que le groupe de Lie G est commutatif ; pour ce faire, nous adaptons une méthode de W. Thurston [Thu] qui consiste à construire une relation d'ordre sur les "petits éléments" du groupe d'holonomie Γ ; cette construction s'effectue à l'aide de la relation d'ordre naturel qui est définie sur les orbites d'un flot. En vérifiant que cet ordre est un bon ordre, on en déduit que Γ est commutatif ; comme par ailleurs, Γ est un sous-groupe dense de G (corollaire I.D.2.), la commutativité de G en découle.

Théorème III.1.- Soient M une variété compacte de dimension $(n+1)$, G un groupe de Lie simplement connexe de dimension n et ϕ un G -flot sur M . Si le G -flot ϕ est minimal, alors on a : $G = \mathbb{R}^n$.

Choisissons une métrique invariante à gauche sur G , dont nous noterons d la distance associée. Le flot ϕ est alors riemannien (cf. I.D.) et nous pouvons construire comme en I.B. une métrique μ sur M quasi-fibrée relativement à ϕ . La métrique $\tilde{\mu}$ relevée dans \tilde{M} , se projette par l'application développante D en la métrique invariante à gauche que nous avons choisie sur G .

Le relèvement vertical des courbes de G par D existe globalement et préserve les longueurs ; la projection par D conserve aussi les longueurs des courbes verticales [Rei-1].

Soit Γ le groupe d'holonomie du flot Φ ; pour $\varepsilon > 0$
on note :

$$\Gamma_\varepsilon = \{g \in \Gamma, d(e, g) < \varepsilon\} \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = \{g \in G, d(e, g) < \varepsilon\}$$

La démonstration du théorème I.1. s'effectue en trois temps :

- 1) la construction d'une relation d'ordre sur G_ε .
- 2) la relation d'ordre sur G_ε , induit sur Γ_ε (pour ε suffisamment petit) une relation de bon ordre.
- 3) le groupe Γ est commutatif.

1. - Relation d'ordre sur G_ε .

Appelons I_1 la borne inférieure des longueurs des lacets de M non homotopes à zéro ; comme la variété M est compacte, le nombre I_1 est strictement positif ; soit par ailleurs un nombre $I_2 > 0$ tel que G_{I_2} est une boule géodésiquement convexe ; on notera $I = \inf(I_1, I_2)$. Soient g_0 et g_1 deux éléments distincts de G ; on dira que g_0 et g_1 sont comparables si :

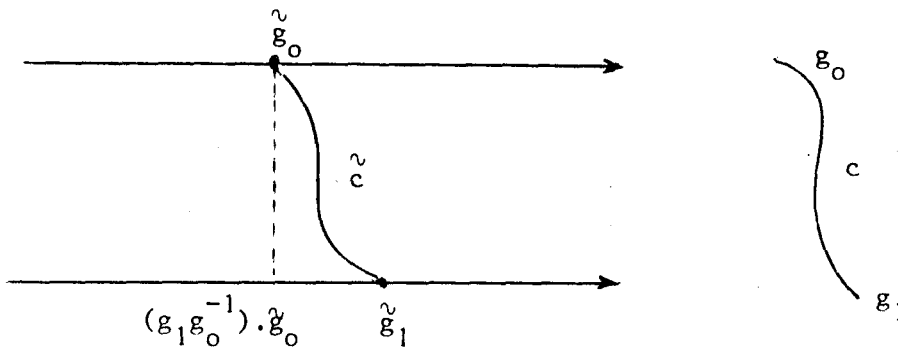
$$g_1 g_0^{-1} \in \Gamma \quad \text{et} \quad d(g_0, g_1) < I .$$

Considérons alors c un chemin de G joignant g_0 à g_1 de longueur $\ell(c)$ strictement plus petite que I . Pour $\tilde{g}_0 \in D^{-1}(g_0)$, il existe un relèvement vertical unique \tilde{c} de c d'origine \tilde{g}_0 ; notons \tilde{g}_1 l'extrémité de ce relèvement. Les points $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0$ et \tilde{g}_1 sont distincts ; en effet si $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0 = \tilde{g}_1$ alors $p \circ \tilde{c}$ est un lacet de M non homotope à zéro (puisque $g_0 \neq g_1$)

et de longueur strictement plus petite que I , ce qui contredit le choix de I .

On dira alors que $g_0 > g_1$ (resp. $g_0 < g_1$) si :

$$\tilde{g}_1 = \tilde{\phi}_t \left[(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0 \right] \quad \text{avec } t > 0 \text{ (resp. } t < 0)$$



Cas : $g_1 < g_0$.

La relation définie ci-dessus est clairement antisymétrique ; elle vérifie en outre les propriétés suivantes :

i) elle ne dépend pas des choix de c et \tilde{g}_0

Considérons c' un autre chemin de longueur strictement plus petite que I joignant g_0 à g_1 ; d'après le choix de I , il existe une homotopie F_θ entre c et c' telle que pour tout $\theta : \ell(F_\theta) < I$; on note \tilde{F}_θ le relèvement vertical de F_θ d'origine \tilde{g}_0 . L'application $\psi : [0, 1] \rightarrow D^{-1}(g_1)$ définie par $\psi(\theta) = \tilde{F}_\theta(1)$ est continue et $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0$ n'appartient pas à $\text{Im } \psi$; les nombres t_θ définis par :

$$\psi(\theta) = \tilde{\phi}_{t_\theta} \left[(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0 \right]$$

sont donc de même signe, en particulier t_0 et t_1 sont de même signe.

Pour c fixé, t défini par $\tilde{g}_1 = \tilde{\Phi}_t[(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0]$ dépend continûment de \tilde{g}_0 (théorème de continuité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux conditions initiales), lorsque \tilde{g}_0 varie dans $D^{-1}(g_0)$, t est donc de signe constant.

ii) Pour tout $\varepsilon < I/4$ la relation induite sur G_ε est transitive.

Le groupe Γ opère à gauche sur \tilde{M} en respectant l'orientation des orbites de $\tilde{\Phi}$, c'est-à-dire que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\gamma \cdot \tilde{\Phi}_t(\tilde{x}_0) = \tilde{\Phi}_{t'}(\gamma \cdot \tilde{x}_0)$$

avec t' de même signe que t .

Soient g_0 , g_1 et g_2 des éléments de G_ε tels que :

$g_0 < g_1$ et $g_1 < g_2$. Les éléments g_0 et g_2 sont comparables puisque $g_2 g_0^{-1} \in \Gamma$ et $d(g_0, g_2) < I$ (puisque $\varepsilon < I/2$).

Soient c_1 un chemin de G joignant g_0 à g_1 de longueur $\ell(c_1) < I/2$ et c_2 un chemin de G joignant g_1 à g_2 de longueur $\ell(c_2) < I/2$. Considérons \tilde{c}_1 le relèvement vertical de c_1 d'origine \tilde{g}_0 et \tilde{c}_2 le relèvement vertical de c_2 d'origine $\tilde{g}_1 = \tilde{c}_1(1)$; on notera \tilde{g}_2 l'extrémité de \tilde{c}_2 .

Les relations $g_0 < g_1$ et $g_1 < g_2$ montrent que l'on a :

$$\tilde{g}_1 = \tilde{\Phi}_{t_1}[(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] \quad \text{et} \quad \tilde{g}_2 = \tilde{\Phi}_{t_2}[(g_2 g_1^{-1}) \cdot \tilde{g}_1] \quad \text{avec}$$

$$t_1 < 0 \quad \text{et} \quad t_2 < 0.$$

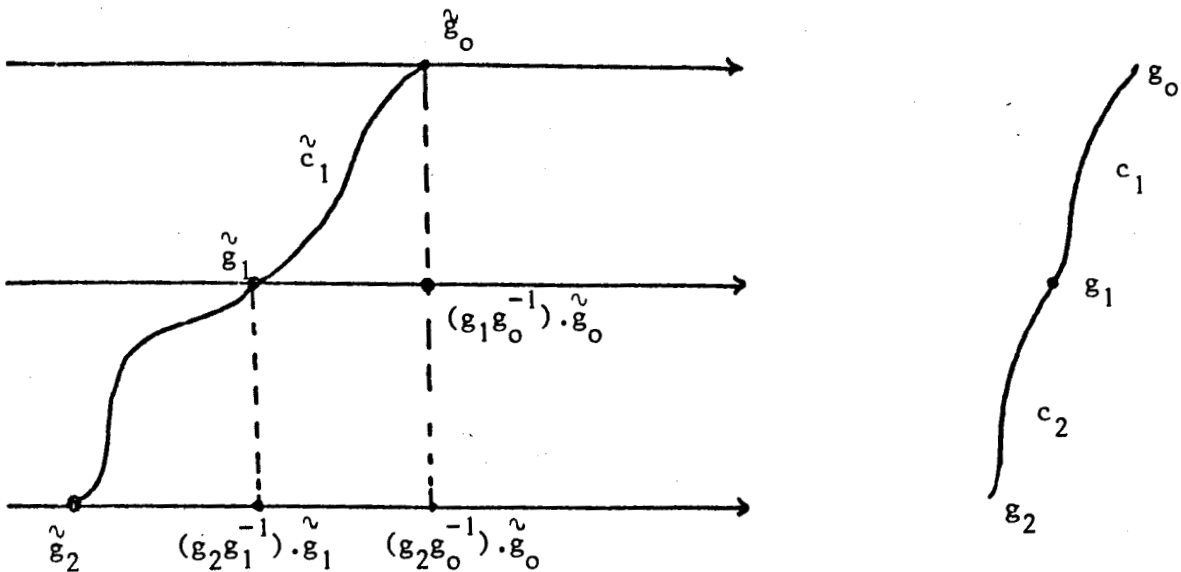
Comme Γ opère sur \tilde{M} en respectant l'orientation des orbites, il existe $t'_1 < 0$ tel que :

$$(g_2 g_1^{-1}) \cdot \tilde{\phi}_{t_1} [(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] = \tilde{\phi}_{t'_1} [(g_2 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] ;$$

on obtient ainsi :

$$\tilde{g}_2 = \tilde{\phi}_{t_2+t'_1} [(g_2 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] \quad \text{avec} \quad t_2 + t'_1 < 0$$

et par conséquent $g_0 < g_2$.



iii) La relation est invariante par multiplication à gauche par les éléments de Γ .

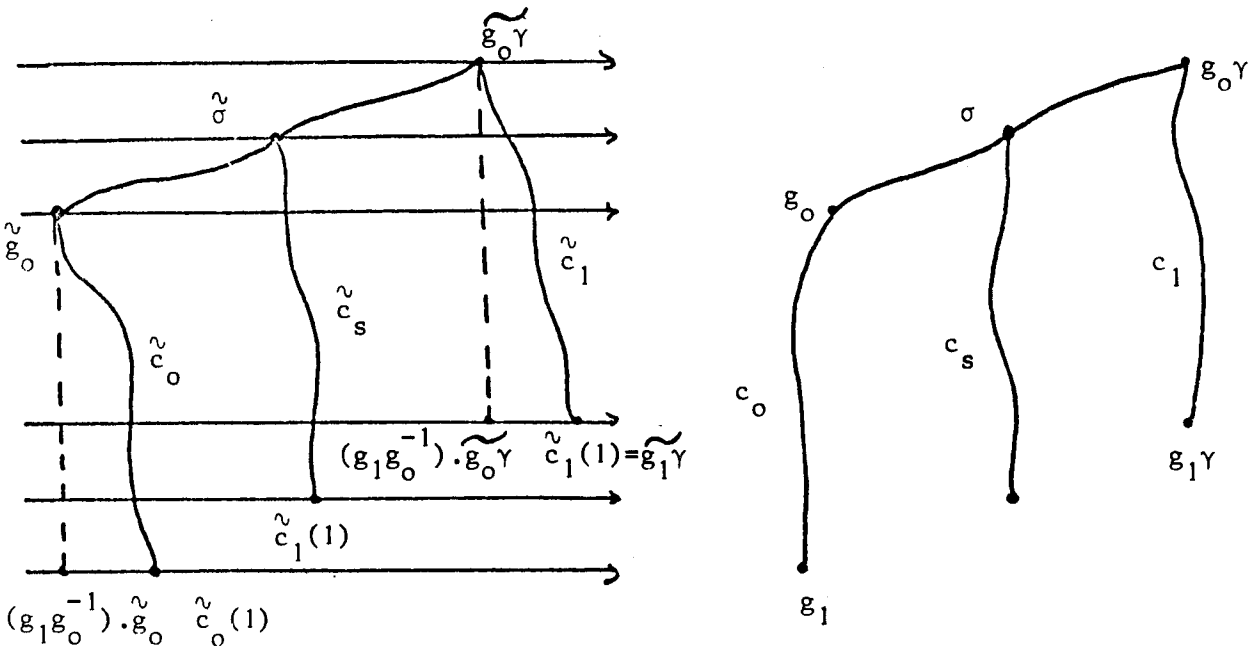
Il suffit de remarquer que la métrique d est invariante à gauche, et que le groupe Γ opère sur \tilde{M} en respectant l'orientation des orbites.

iv) Pour tout $\epsilon < I/2$, la relation induite sur G_ϵ est invariante par multiplication à droite par les éléments de $\Gamma_{\epsilon/2}$.

Soient g_0 et g_1 deux éléments comparables de G . Si γ est un élément de $\Gamma_{\epsilon/2}$, l'inégalité triangulaire montre que $d(g_0 \gamma, g_1 \gamma) < I$, par conséquent, les éléments $g_0 \gamma$ et $g_1 \gamma$ sont comparables.

Par ailleurs, soit σ la géodésique joignant g_0 à $g_0 \gamma$ et pour tout $s \in [0,1]$, soit c_s la géodésique joignant $\sigma(s)$ à $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \sigma(s)$. On montre comme précédemment que pour tout $s \in [0,1]$: $\sigma(s)$ et $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \sigma(s)$ sont comparables.

Si $\tilde{\sigma}$ est le relèvement vertical de σ d'origine \tilde{g}_0 , on note \tilde{c}_s le relèvement vertical de c_s d'origine $\tilde{\sigma}(s)$. En utilisant le même argument que dans i), on remarque que si $g_1 < g_0$, alors $g_1 \gamma < g_0 \gamma$.



Pour résumer, si $\epsilon < I/4$ alors la relation construite ci-dessus

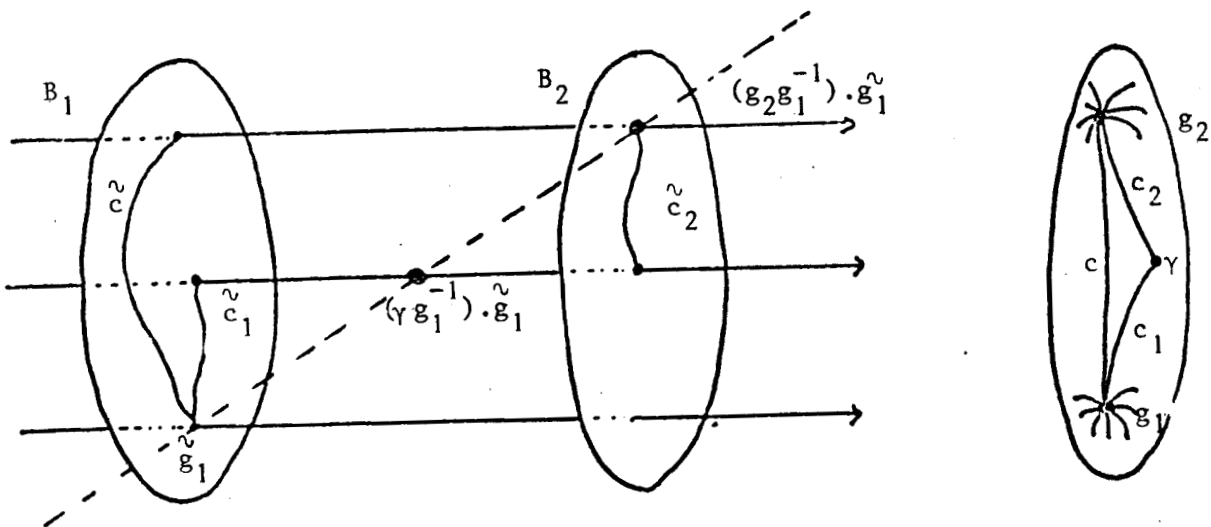
induit sur Γ_ϵ une relation d'ordre total invariante par multiplication à droite et à gauche par les éléments de Γ_ϵ (il s'agit bien entendu de considérer la relation $g_0 \leq g_1$ si et seulement si $g_0 < g_1$ ou $g_0 = g_1$).

2. - Relation de bon ordre sur Γ_ϵ .

Lemme III.2.- Pour $\epsilon < 1/4$, la relation d'ordre définie sur Γ_ϵ est une relation de bon ordre.

Démonstration : Soient g_1 et g_2 deux éléments de Γ_ϵ ; montrons qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de Γ_ϵ compris entre g_1 et g_2 .

Fixons \tilde{g}_1 dans $D^{-1}(g_1)$ et notons B_1 la boule constituée par tous les relèvements verticaux d'origine \tilde{g}_1 des géodésiques joignant g_1 à un point quelconque de G_ϵ ; de même, B_2 sera la boule formée de tous les relèvements verticaux d'origine $(g_2 g_1^{-1}) \cdot \tilde{g}_1$ des géodésiques joignant g_2 à un point quelconque de G_ϵ .



Si un élément γ de Γ_ϵ vérifie : $g_1 < \gamma < g_2$, alors $(\gamma g_1^{-1}) \cdot \tilde{g}_1$ est dans le cylindre de bases B_1 et B_2 , donc dans un compact fixe. Les fibres du revêtement $p : \tilde{M} \rightarrow M$ étant discrètes, l'ensemble des $\gamma \in \Gamma_\epsilon$ tels que $g_1 < \gamma < g_2$ est fini. ■

3. - Le sous-groupe Γ est commutatif.

Nous aurons besoin dans la suite de la démonstration du lemme suivant :

Lemme III.3.- Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble Γ_ϵ engendre Γ .

Démonstration : Soit $\tilde{\Gamma}_\epsilon$ le sous-groupe de Γ engendré par Γ_ϵ ; $\tilde{\Gamma}_\epsilon$ est un sous-groupe dense de Γ , donc si $g \in \Gamma$, il existe $h \in \tilde{\Gamma}_\epsilon$ tel que $d(h, g) < \epsilon$; la distance d étant invariante à gauche, on a $(h^{-1} g) \in \Gamma_\epsilon$ et par conséquent $g = h \cdot (h^{-1} g)$ est un élément de $\tilde{\Gamma}_\epsilon$, ce qui montre que $\Gamma = \tilde{\Gamma}_\epsilon$. ■

Remarque.- Pour $\epsilon < 1/4$, la relation d'ordre sur Γ_ϵ est invariante par multiplication à gauche et à droite par les éléments de Γ_ϵ ; une relation du type $e < \alpha < \beta$ est donc équivalente à la relation : $\beta^{-1} < \alpha^{-1} < e$; on peut ainsi remplacer Γ_ϵ par $\Gamma_\epsilon^+ = \{\gamma \in \Gamma_\epsilon; \gamma > e\}$ dans le lemme III.2.

Compte tenu du lemme III.2. et de la remarque précédente, le groupe Γ sera commutatif si Γ_ϵ^+ est contenu dans $C(\Gamma)$ le centre de Γ . C'est cette inclusion que nous démontrons dans le lemme qui suit.

Lemme III.4. - Pour $\varepsilon < 1/4$, on a : $\Gamma_\varepsilon^+ \subset C(\Gamma)$.

Démonstration : Soit $C_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^+ \cap C(\Gamma)$; raisonnons par l'absurde en supposant que $\Gamma_\varepsilon^+ \setminus C_\varepsilon$ est non vide. Le sous-ensemble $\Gamma_\varepsilon^+ \setminus C_\varepsilon$ est une partie non vide et minorée de Γ_ε et, par conséquent, possède un plus petit élément α . Comme α est un élément de Γ_ε , on peut écrire :

$$d(e, \alpha) = \varepsilon - \eta \text{ avec } \eta > 0 .$$

Le plus petit élément α de $\Gamma_\varepsilon^+ \setminus C_\varepsilon$ commute avec $\Gamma_{\eta/2}$; en effet si $g \in \Gamma_{\eta/2}$, on a $g \alpha g^{-1} \in \Gamma_\varepsilon$ en utilisant l'inégalité triangulaire. Comme par ailleurs, la relation d'ordre est invariante par multiplication à droite et à gauche, $g \alpha g^{-1}$ vérifie : $e < g \alpha g^{-1}$ puisque $e < \alpha$, et par conséquent, $g \alpha g^{-1} \in \Gamma_\varepsilon^+$. Si $e < g \alpha g^{-1} < \alpha$, alors $g \alpha g^{-1}$ est dans $C(\Gamma)$ et donc $\alpha \in C(\Gamma)$ puisque $C(\Gamma)$ est un sous-groupe distingué de Γ ; on montre de la même manière que l'on ne peut avoir $e < \alpha < g \alpha g^{-1}$ en remplaçant g par g^{-1} . D'où la relation :

$$g \alpha g^{-1} = \alpha .$$

Puisque $\Gamma_{\eta/2}$ engendre Γ , α est dans $C(\Gamma)$ ce qui contredit l'hypothèse. ■

Conclusion : Le groupe Γ est commutatif ; comme par ailleurs, Γ est dense dans G , le groupe G est lui-même commutatif, ce qui démontre le théorème III.1.

Le théorème suivant est une conséquence directe des théorèmes II.1. et III.1. :

Théorème III.5.- Soient M une variété compacte de dimension $(n+1)$, G un groupe de Lie simplement connexe de dimension n et ϕ un G -flot sur M . Si ϕ est un G -flot minimal, alors la variété M est difféomorphe à T^{n+1} et le flot ϕ est conjugué à un flot linéaire sur T^{n+1} .

Avant de donner les conséquences de ce théorème concernant la structure des flots riemanniens, nous étudions dans le chapitre suivant la structure des feuilletages riemanniens en général.

CHAPITRE IV

FEUILLETAGES RIEMANNIENS.

Ce chapitre est consacré aux résultats obtenus par Molino dans [Mol. 1] et [Mol. 2], concernant la structure des feuilletages riemanniens sur les variétés compactes. Dans une première partie, nous rappelons le théorème de structure des feuilletages transversalement parallélisables sur les variétés compactes.

Nous décrivons ensuite la construction d'un parallélisme transverse pour le feuilletage induit par un feuilletage riemannien sur la variété de ses repères orthonormés transverses. Pour terminer ce chapitre, nous énonçons le théorème de structure des feuilletages riemanniens sur les variétés compactes et donnons une partie de sa démonstration.

A - FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT PARALLELISABLES.

Rappelons qu'un parallélisme sur une variété T de dimension q est la donnée d'un système X_1, \dots, X_q de champs de vecteurs sur T , formant en chaque point une base de l'espace tangent à T .

Définition IV.A.1. - Soit F un feuilletage de codimension q sur une variété M . Supposons qu'il existe un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ définissant F , de variété transverse T (cf. I.A.1.), tel que :

- a) il existe sur T un parallélisme X_1, \dots, X_q .
- b) ce parallélisme est invariant par les changements de coordonnées transverses γ_{ij} .

On dit alors que F est transversalement parallélisable.

Remarquons qu'un tel feuilletage F est un cas particulier de feuilletage riemannien. En effet, considérons sur T la métrique riemannienne g pour laquelle X_1, \dots, X_q est un repère orthonormé. Les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des isométries locales de (T, g) et donc (cf. I.B.1.), F est riemannien.

Soit maintenant F un G -feuilletage de Lie. Ce feuilletage admet un parallélisme transverse donné par une base de l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur G . Les feuilletages de Lie sont donc des cas particuliers de feuilletages transversalement parallélisables.

Le théorème suivant, démontré dans [Mol. 1], précise la relation qu'il y a entre les feuilletages transversalement parallélisables et les feuilletages de Lie :

Théorème IV.A.2.- (Molino) - Soit F un feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte M . Alors :

- i) toutes les feuilles de F sont difféomorphes ,
- ii) il existe une variété W et une fibration localement triviale $\pi : M \rightarrow W$, dont les fibres sont les adhérences des feuilles de F .
- iii) il existe un groupe de Lie simplement connexe G tel que F induit sur chaque fibre de π un G -feuilletage de Lie. ■

On appelle π la fibration basique de F , la variété W est la variété basique de F . Le groupe de Lie G est un invariant du feuilletage F ; pour cette raison , on dit que G est le groupe structural de F .

B - CONSTRUCTIONS DE PARALLELISMES.

Nous allons d'abord rappeler la construction d'un parallélisme naturel sur le fibré des repères orthonormés E d'une variété riemannienne T . Nous décrirons ensuite la construction d'un parallélisme transverse pour un feuilletage F_T naturellement associé à un feuilletage riemannien F . Ce feuilletage F_T est construit sur le fibré des repères orthonormés transverses à F . Dans tout ce qui suit le terme "repère" signifiera toujours "repère orthonormé".

1. - Variétés riemanniennes.

La construction que nous allons décrire est classique ; pour les détails, on pourra se référer à [Kob, Nom].

Soit T une variété riemannienne de dimension q et $E \xrightarrow{p} T$, le fibré des repères de T . Ce fibré est un fibré principal de groupe structural O_q .

La forme fondamentale θ est une 1-forme sur E à valeurs dans \mathbb{R}^q définie par :

$$\forall z \in E, \forall X_z \in T_z(E) \quad \theta(X_z) = (x_1, \dots, x_q)$$

où (x_1, \dots, x_q) désignent les coordonnées de $p^*(X_z) \in T_{p(z)}(T)$ dans le repère en $p(z)$ donné par z .

La connection de Levi-Civita sur l'espace tangent à T , induit une unique 1-forme ω sur E à valeurs dans l'algèbre de Lie O_q de O_q (connection de fibré principal associée à la connection de Levi-Civita cf. [Kob, Nom]).

Notons K l'espace vertical du fibré $E \xrightarrow{p} T$ et \mathcal{W} l'algèbre de Lie des champs fondamentaux de ce fibré. Par ailleurs, notons L l'espace horizontal de la connection ω . L'espace L est précisément le noyau de ω . Ceci étant, les formes θ et ω jouissent des propriétés suivantes :

i) ω restreinte à K , réalise un isomorphisme d'algèbre de Lie entre \mathcal{W} et \mathcal{O}_q .

ii) θ restreinte à L , réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels entre L et \mathbb{R}^q en chaque point de E .

Etant donné $\xi \in \mathbb{R}^q$, on note $B(\xi)$ l'unique champ horizontal sur E tel que : $\theta(B(\xi)) = \xi$.

On obtient alors un parallélisme sur E en complétant une base de l'algèbre de Lie \mathcal{W} par les champs $B(e_1), \dots, B(e_q)$, où e_1, \dots, e_q désigne la base canonique de \mathbb{R}^q .

Remarque. - Le parallélisme que nous venons de construire sur E est invariant par les difféomorphismes locaux de E , induits par des isométries locales de T . Cette remarque est fondamentale pour la construction que nous allons faire dans le cas des feuilletages riemanniens.

2. - Feuilletages riemanniens.

Soit F un feuilletage riemannien sur une variété M . On choisit un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$, définissant F et satisfaisant aux propriétés de la définition I.B.1. . On suppose que le feuilletage F est de codimension q , c'est-à-dire que la variété riemannienne transverse T est de dimension q .

a) Construction de (M_T, F_T) .

Cette construction est d ue   Molino [Mol. 1] . Rappelons que les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des isométries locales de T . Le fibré Q normal à F est donc défini par le cocycle $\{U_i, d\gamma_{ij}\}$ qui est à valeurs dans O_q . Ceci permet d'associer à Q un fibré principal de groupe structural O_q au-dessus de M (cf. [Kob, Nom]) . Notons $M_T \xrightarrow{P_T} M$ ce fibré principal que nous appellerons fibré des repères transverses à F . La variété M_T est la variété des repères transverses à F .

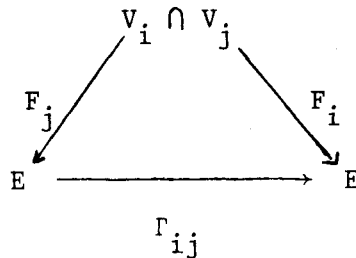
Nous allons maintenant définir le feuilletage F_T induit par F sur M_T . Appelons V_i l'image réciproque de U_i par P_T et $E \xrightarrow{P} T$, le fibré des repères au-dessus de T . Les différentielles des submersions f_i , permettent d'associer à un repère transverse au-dessus de U_i un repère au-dessus de T . Ces différentielles induisent donc des submersions F_i de V_i dans E , telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{F_i} & E \\ P_T|_{V_i} \downarrow & & \downarrow P \\ U_i & \xrightarrow{f_i} & T \end{array}$$

Les différentielles des isométries locales γ_{ij} induisent des difféomorphismes locaux Γ_{ij} de E , tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Gamma_{ij}} & E \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ T & \xrightarrow{\gamma_{ij}} & T \end{array}$$

Il est clair, étant donné la construction naturelle des F_i et des Γ_{ij} , que l'on a la commutativité des diagrammes :



d'où un cocycle feuilleté $\{V_i, F_i, \Gamma_{ij}\}$.

C'est ce cocycle qui définit le feuilletage F_T sur M_T . Les propriétés suivantes résultent immédiatement de la commutativité des diagrammes (*) et (**):

Proposition IV.B.1. - Soit F un feuilletage riemannien sur une variété M . Alors, le feuilletage F_T induit par F sur la variété des repères transverses M_T vérifie les propriétés :

- a) Les feuilletages F et F_T ont même dimension.
- β) L'action de O_q sur M_T laisse F_T invariant.
- γ) Une feuille de F_T se projette par P_T sur une feuille de F . ■

b) Exemple : flot isométrique.

On peut voir clairement la signification géométrique du feuilletage que nous venons de construire lorsqu'on considère un flot isométrique ϕ sur une variété M . Pour un tel flot, il existe une métrique riemannienne sur M , telle que si X désigne un champ de vecteurs unitaire tangent à ϕ , le flot avec paramètre ϕ_t correspondant est isométrique (cf. exemple I.B.3.).

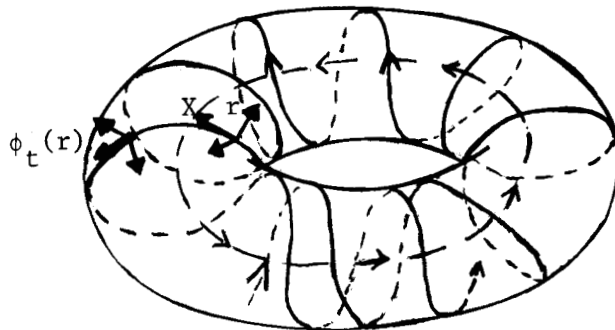
Dans cette situation, on peut identifier un repère transverse de ϕ à un repère orthonormé dont le premier vecteur est X . Les différentielles des isométries ϕ_t conservent ces repères et induisent un flot ψ_t sur M_T

$$\begin{aligned} \psi_t : M_T &\longrightarrow M_T \\ (x,r) &\longmapsto (\phi_t(x), (d\phi_t)_x(r)) \end{aligned}$$

où $x \in M$ et r désigne un repère orthonormé de M en x , dont le premier vecteur est X .

Les orbites du flot ψ_t sur M_T sont les feuilles du flot ϕ_T induit par ϕ sur la variété des repères transverses M_T .

En particulier, considérons l'exemple de flot isométrique sur S^3 donné en I.B.5. Regardons dans cet exemple, pour le cas où λ et μ sont en rapport irrationnel, la nature des orbites du flot ψ_t au-dessus d'une orbite compacte de ϕ_t .



Comme les orbites voisines d'une orbite compacte (cf. figure) tournent autour de cette orbite sans se refermer, l'action de ψ_t au-dessus de cette orbite compacte est libre. Par ailleurs, l'action de ψ_t au-dessus des orbites non compactes est nécessairement libre.

On voit donc que ψ_t agit librement sur M_T . Il n'est pas difficile de vérifier que les adhérences des orbites de ψ_t sont des tores qui forment une fibration.

c) Parallélisme transverse de F_T .

Le feuilletage F_T est défini sur la variété M_T par le cocycle feuilleté $\{V_i, F_i, \Gamma_{ij}\}$ de variété transverse E . La variété E est la variété des repères au-dessus de la variété riemannienne T . Nous avons construit en 1) un parallélisme sur E invariant par les difféomorphismes locaux de E induits par des isométries locales. Comme les changements de coordonnées transverses Γ_{ij} de F_T sont induits par les isométries locales γ_{ij} de T , on en déduit que ce parallélisme sur E est invariant par les changements de coordonnées transverses Γ_{ij} . On a donc la

Proposition IV.B.2.- Soit F un feuilletage riemannien sur une variété M . Alors, le feuilletage F_T induit par F sur la variété des repères transverses M_T est transversalement parallélisable. ■

Lorsque la variété M est compacte, la variété M_T qui est l'espace total d'un fibré principal de groupe O_q au-dessus de M , est aussi compacte. Nous pouvons donc appliquer à F_T le théorème IV.A.2. . Ceci va nous permettre d'étudier les adhérences des feuilles d'un feuilletage riemannien sur une variété compacte.

C - STRUCTURE DES FEUILLETAGES RIEMANNIENS.

Nous conservons les notations de la partie précédente et supposons maintenant que la variété M est compacte. D'après le théorème IV.A.2., les adhérences des feuilles de F_T constituent une fibration $\pi_T : M_T \rightarrow W_T$, et dans chaque fibre de π_T , le feuilletage F_T induit un G_T -feuilletage de Lie.

Théorème IV.C.1.- (Molino) - Soit F un feuilletage riemannien sur une variété compacte M . Alors :

1) Il existe un champ de plans en involution, de dimension variable, dont les variétés intégrales maximales sont les adhérences des feuilles de F .

2) Sur l'ouvert U où ce champ de plans a une dimension maximale, les adhérences de F constituent un feuilletage riemannien.

3) Le feuilletage induit par F sur l'adhérence d'une feuille est un feuilletage riemannien transversalement homogène G_T/K , où K est un sous-groupe fermé de G_T le groupe structural de F_T .

Démonstration : Nous nous contenterons de démontrer les points 1) et 2) du théorème et renvoyons à [Mol. 2] pour la démonstration du point 3).

Soit F une feuille de F_T ; notons F_1 sa projection par P_T : c'est une feuille de F (proposition IV.B.1.). L'adhérence \bar{F} de F est un ensemble compact, minimal pour F_T et se projette donc en un ensemble compact, minimal pour F . Cet ensemble $P_T(\bar{F})$ contient l'adhérence \bar{F}_1 de F_1 , il est donc égal à \bar{F}_1 . Pour simplifier nous noterons $L = \bar{F}$ et $L_1 = \bar{F}_1$. Montrons le

Lemme IV.C.2.- L'application $L \xrightarrow{P_T|L} L_1$ est un sous-fibré principal de groupe K_1 , où K_1 est un sous-groupe compact de O_q ; L_1 est une sous-variété de M .

Démonstration : Appelons K_1 le sous-groupe de O_q qui laisse L invariant, K_1 est fermé dans O_q . Nous disons que si $x_0 \in L_1$ et $y \in L$ avec $P_T(y) = x_0$, l'ensemble $K.y$ est égal à la fibre de $P_T|L$ au-dessus de x_0 . En effet, supposons que $y' \in P_T^{-1}(x_0)$, alors $y' = k.y$ où $k \in O_q$; montrons que $k \in K_1$. Comme L est un ensemble minimal pour F_T , l'ensemble $k.L$ est encore minimal pour F_T et puisque $y' \in L \cap k.L$, on a $L = k.L$ et donc $k \in K_1$.

Ainsi, $L \xrightarrow{P_T|L} L_1$ est un sous-fibré principal de groupe K_1 . Le groupe K_1 est un sous-groupe de Lie en tant que sous-groupe fermé de O_q . Comme L est une variété, ceci implique nécessairement que L_1 est une sous-variété de M . ■

Considérons maintenant le champ de plans tangent à la fibration : $\pi_T : M_T \rightarrow W_T$. Ce champ de plans est invariant par l'action de O_q sur M_T , il donne donc sur M un champ de plans P en involution. D'après le lemme que nous venons de montrer, les adhérences des feuilles de F sont des variétés qui sont évidemment les variétés intégrales maximales de P . Soit U l'ouvert saturé pour F où le champ de plans P est de dimension maximale. Sur cet ouvert, le champ de plans P est de dimension constante, il donne donc un feuilletage non singulier qui est riemannien. ■

Nous allons, dans le chapitre suivant, préciser ce théorème de structure dans le cas des flots riemanniens, en utilisant les résultats des chapitres II et III.

CHAPITRE V

FLOTS RIEMANNIENS.

A - STRUCTURE DES FLOTS RIEMANNIENS EN DIMENSION QUELCONQUE.

Les adhérences des orbites d'un flot isométrique (cf. exemple I.B.3.) sur une variété compacte sont des tores. Il est simple de démontrer cette propriété, à partir du moment où l'on sait que le groupe d'isométries d'une variété riemannienne compacte, a une structure de groupe de Lie compact (cf. par exemple [Gro] et pour une étude récente du groupe d'isométries d'une variété compacte cf. [Yau]).

Nous avons vu qu'un flot isométrique est en particulier riemannien. Par contre, les flots de l'exemple I.D.5. sont des exemples de flots riemanniens non-isométriques sur des 3-variétés compactes (corollaire I.E.3.). Il est cependant naturel de se demander si la propriété que nous venons d'indiquer pour les flots isométriques est valable en général pour les flots riemanniens. Une réponse précise à cette question est fournie par le théorème suivant :

Théorème V.A.1.- Soit Φ un flot riemannien sur une variété compacte M . Alors :

1) Il existe un champ de plans en involution sur M , de dimension variable, dont les variétés intégrales maximales sont les adhérences des orbites de Φ .

2) Sur l'ouvert U où ce champ de plans a une dimension maximale, les adhérences des orbites de Φ constituent un feuilletage riemannien.

3) L'adhérence d'une orbite de ϕ est difféomorphe à un tore.

4) Le flot induit par ϕ sur l'adhérence d'une orbite est conjugué à un flot linéaire sur un tore.

Démonstration : Les propriétés 1) et 2) sont simplement la retranscription des propriétés 1) et 2) du théorème IV.C.1. Il nous reste à démontrer les propriétés 3) et 4).

On sait d'après le chapitre précédent que le flot ϕ_T induit par ϕ sur la variété M_T des repères transverses, est dans l'adhérence d'une orbite un G_T -flot à orbites denses. D'après le théorème III.1., on a nécessairement $G_T = \mathbb{R}^n$.

Appliquons maintenant le point 3) du théorème IV.C.1.. Comme tout espace homogène de \mathbb{R}^n est un groupe de Lie, on en déduit que le flot induit par ϕ sur l'adhérence d'une orbite est transversalement de Lie à orbites denses. Les propriétés 3) et 4) découlent alors du théorème III.5. ■

Précisons maintenant la relation entre le groupe fondamental de l'adhérence d'une orbite d'un flot riemannien et le groupe fondamental de la variété :

Proposition V.A.2.- Soit ϕ un flot riemannien sur une variété compacte M . Soit L_1 l'adhérence d'une orbite de ϕ . Alors l'image de $\pi_1(L_1)$ dans $\pi_1(M)$ est un sous-groupe abélien de type fini distingué dans $\pi_1(M)$.

Démonstration : Soit M_T la variété des repères transverses à ϕ et ϕ_T le flot induit par ϕ sur M_T (cf. IV.B.). Les adhérences des orbites de ϕ_T forment une fibration localement triviale $\pi_T : M_T \rightarrow W_T$ (cf. IV.C.). Utilisant la suite exacte d'homotopie de cette fibration, on obtient que l'image du groupe fondamental de l'adhérence L d'une orbite de ϕ_T est un sous-groupe distingué de $\pi_1(M_T)$.

Appelons comme en IV.C., $P_T : M_T \rightarrow M$ la projection de M_T sur M . Soit L_1 l'adhérence d'une orbite de ϕ et L l'adhérence d'une orbite de ϕ_T se projetant sur L_1 par P_T .

D'après le lemme IV.C.2., on a le diagramme commutatif de groupes suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(L) & \longrightarrow & \pi_1(M_T) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(L_1) & \longrightarrow & \pi_1(M) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Comme l'image de $\pi_1(L)$ est distinguée dans $\pi_1(M_T)$, d'après ce diagramme, l'image de $\pi_1(L_1)$ dans $\pi_1(M)$ est distinguée. Par ailleurs, comme L est un tore, cette image est un groupe abélien de type fini. ■

Dans le cas où le flot ϕ admet une (G,T) -structure riemannienne transverse on peut préciser ce dernier résultat par la :

Proposition V.A.3.- Soit Φ un flot admettant une (G,T) -structure riemannienne transverse sur une variété compacte M .

On a alors les deux possibilités suivantes :

i) $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe N distingué, abélien de type fini et de rang au moins égal à 1.

ii) les orbites de Φ sont fermées et d'ordre fini dans $\pi_1(M)$.

Démonstration : Soit L_1 l'adhérence d'une orbite de Φ . D'après la proposition précédente, l'image N de $\pi_1(L_1)$ dans $\pi_1(M)$ est un sous-groupe distingué, abélien et de type fini. Supposons que N soit de rang nul, c'est-à-dire fini.

Soit alors $\tilde{\Phi}$ le relevé de Φ dans le revêtement universel \tilde{M} de M . Puisque N est fini, le tore L_1 se relève dans \tilde{M} en un tore \hat{L}_1 , le flot induit par $\tilde{\Phi}$ sur \hat{L}_1 est à orbites denses (il est le relevé par le revêtement fini $\hat{L}_1 \rightarrow L_1$ du flot induit par Φ sur L_1). D'après le théorème I.C.4., le flot $\tilde{\Phi}$ est défini par une fibration localement triviale, ses orbites sont donc fermées. Par conséquent \hat{L}_1 est une orbite compacte et il en est de même de L_1 , d'où le point ii). ■

Avant de donner un corollaire de cette proposition, rappelons le théorème classique suivant :

Théorème.- Soit M une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle < 0 . Alors on a :



a) Un sous-groupe abélien quelconque de $\pi_1(M)$ est soit trivial, soit infini cyclique (Preissman).

b) Le revêtement universel de M est difféomorphe à \mathbb{R}^n (Hadamard).

c) Le groupe $\pi_1(M)$ est à croissance exponentielle. ■

Corollaire V.A.4. - Soit M une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle < 0 . Alors il n'existe aucun flot sur M , admettant une (G,T) -structure riemannienne transverse.

Démonstration du corollaire : Supposons qu'il existe sur M un flot Φ possédant une (G,T) -structure riemannienne transverse. Examinons alors les deux cas de la proposition précédente.

Dans le cas i), le sous-groupe abélien distingué N est infini cyclique (cf. théorème précédent). Mais comme $\pi_1(M)$ est à croissance exponentielle, il existe au moins un élément $m \in \pi_1(M)$ tel que $m \notin N$. Cet élément m est d'ordre infini. Soit n un générateur de N , on a : $m n m^{-1} = n$ ou $m n m^{-1} = n^{-1}$ et donc $m^2 n m^{-2} = n$. Par conséquent, le groupe engendré par n et m^2 est abélien libre à deux générateurs, ce qui contredit le théorème précédent.

Dans le cas ii) de la proposition, le flot $\tilde{\Phi}$ relevé dans le revêtement universel \tilde{M} de M , est à orbites compactes. Par ailleurs, d'après le théorème I.C.4., les orbites de $\tilde{\Phi}$ sont les fibres d'une fibration localement triviale $D : \tilde{M} \rightarrow T$. Mais \tilde{M} est difféomorphe à \mathbb{R}^n , donc contractile. Il résulte alors de la suite exacte d'homotopie de la fibration D , que le revêtement universel \tilde{T} de T

a le type d'homotopie d'un $K(\pi_2, \mathbb{Z})$. C'est-à-dire encore le type d'homotopie de l'espace projectif complexe $P^\infty(\mathbb{C})$. Cet espace a des groupes d'homologie non nuls en grande dimension, il n'a donc pas le type d'homotopie d'une variété. Nous aboutissons encore à une contradiction. ■

On sait que les variétés riemanniennes compactes à courbure sectionnelle < 0 ne supportent aucune action non triviale de S^1 (cf. [Grom]). Donc pour toute métrique sur une telle variété, le groupe d'isométries est fini. En particulier, une telle variété ne supporte pas de flot isométrique. On peut conjecturer à partir de là que ces variétés ne supportent pas de flots riemanniens. Nous ne savons pas montrer ce résultat pour l'instant. Nous allons cependant voir que ce résultat est vrai en dimension 3.

B - CLASSIFICATION EN DIMENSION 3.

Les exemples de flots riemanniens sur les 3-variétés compactes que nous avons donnés au chapitre I sont les seuls possibles. Autrement dit, tout flot riemannien sur une 3-variété compacte est conjugué à l'un de ces exemples. Énonçons notre théorème de classification :

Théorème V.B.1.- Soit ϕ un flot riemannien sur une 3-variété compacte M , on a les possibilités suivantes :

1) Les orbites de ϕ sont denses : La variété M est difféomorphe à T^3 et ϕ est conjugué à un flot linéaire sur T^3 .

2) Les orbites de ϕ ne sont ni fermées, ni denses, alors deux cas sont possibles :

a) la variété M est difféomorphe à T^3 et ϕ est conjugué à un flot linéaire sur T^3 .

b) la variété M est difféomorphe au fibré hyperbolique T_A^3 ($\text{tr}A > 2$) et ϕ est conjugué à l'un des flots propres de T_A^3 (exemple I.D.5.).

3) Le flot ϕ possède deux orbites fermées, alors deux cas sont possibles :

a) la variété M est difféomorphe à un espace lenticulaire $L_{p,q}$ et ϕ est conjugué à un flot de l'exemple I.B.5.

b) la variété M est difféomorphe à $S^2 \times S^1$ et le flot ϕ est conjugué au flot donné par la suspension d'une rotation irrationnelle de S^2 .

4) Le flot ϕ a toutes ses orbites fermées : la variété M est un fibré de Seifert dont les fibres sont les orbites de ϕ .

Démonstration : Appliquons le théorème V.A.1. à chacun des cas qui se présente :

α) Le flot ϕ possède une orbite dense : on a alors immédiatement 1).

β) Les orbites de ϕ ne sont ni fermées, ni denses : les adhérences des orbites de ϕ forment une fibration $D : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ de fibre T^2 . Cette fibration se relève en une fibration $D_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, toujours de fibre T^2 , on note ϕ_1 le flot relevé dans M_1 .

La fibration D_1 est triviale puisque \mathbb{R} est contractile. Soit $M \cong T^2 \times \mathbb{R}$ une trivialisat ion ; pour chaque s , le flot ϕ_1 induit sur $T^2 \times \{s\}$ un flot conjugué à un flot linéaire à orbites denses. En fait, par des arguments entièrement analogues à ceux utilisés dans [Car], on peut démontrer qu'il existe une trivialisat ion $M_1 \cong T^2 \times \mathbb{R}$, dans laquelle le flot ϕ_1 induit sur chaque $T^2 \times \{s\}$ le même flot linéaire irrationnel noté ϕ_1^0 .

Considérons alors le difféomorphisme de recollement f du fibré D relatif à une telle trivialisat ion. Ce difféomorphisme préserve le flot linéaire irrationnel ϕ_1^0 . On peut alors affirmer d'après le lemme I.B.5. de [Ghy, Ser] que f est isotope à travers des difféomorphismes qui préservent ϕ_1^0 à un difféomorphisme linéaire préservant ϕ_1^0 .

Soit A la matrice définissant ce difféomorphisme linéaire, comme le nombre de rotation de ϕ_1^0 est irrationnel, la matrice A préserve une direction propre irrationnelle. On a donc $|\text{tr } A| \geq 2$. Du fait que le feuilletage ϕ est par définition orientable, on a aussi $\text{tr } A \geq 0$ et donc $\text{tr } A \geq 2$.

Si $\text{tr } A = 2$, alors $A = I$, la variété M est difféomorphe à T^3 et ϕ est conjugué à un flot linéaire sur T^3 (cas 2) a) du théorème).

Si $\text{tr } A > 2$, la variété M est difféomorphe à T_A^3 et ϕ est conjugué à l'un des flots propres de T_A^3 (cas 2) b) du théorème).

γ) Le flot ϕ possède une orbite fermée et une orbite non fermée :

l'ouvert U où la dimension de l'adhérence d'une orbite est maximale est exactement constitué par les adhérences des orbites non fermées de ϕ . Le complémentaire de U dans M est réunion d'un nombre fini d'orbites fermées, donc U est connexe.

Les adhérences des orbites non fermées de ϕ constituent une fibration $D : U \rightarrow V$ de fibre T^2 . La variété V est de dimension 1, connexe et nécessairement non compacte car U est non compact. On peut donc identifier V à l'intervalle $]0,1[$.

La fibration D est triviale puisque sa base est contractile ; par les mêmes arguments que ceux utilisés en β), il est possible de trouver une trivialisatoin $U = T^2 \times]0,1[$, telle que le flot ϕ induise sur chaque $T^2 \times \{s\}$ le même flot linéaire à orbites denses ϕ^0 .

Considérons maintenant une orbite fermée γ du flot ϕ , l'holonomie de cette orbite est conjuguée à une rotation irrationnelle R . Il existe donc un voisinage tubulaire $V(\gamma)$ de γ invariant par ϕ , tel que :

$$V(\gamma) \cong D^2 \times S^1$$

D^2 désignent le disque unité de dimension deux. Le flot ϕ dans $D^2 \times S^1$

est obtenu par suspension de la rotation irrationnelle R agissant sur D^2 .

Le bord de $V(\gamma)$ est exactement égal à une fibre de D . Il est alors clair que ϕ possède exactement deux orbites fermées et que, moyennant une conjugaison, on peut construire la variété M et le flot ϕ de la manière suivante :

$$M = D_0^2 \times \mathbb{S}^1 \underset{h}{\sqcup} D_1^2 \times \mathbb{S}^1$$

où l'on a :

i) les tores pleins $D_i^2 \times \mathbb{S}^1$, $i = 0, 1$, sont les voisinages tubulaires des deux orbites fermées γ_0 et γ_1 de ϕ .

ii) le flot ϕ dans $D_i^2 \times \mathbb{S}^1$ est obtenu par suspension d'une rotation irrationnelle sur D_i^2 .

iii) le difféomorphisme h identifie le bord de $D_0^2 \times \mathbb{S}^1$ avec le bord de $D_1^2 \times \mathbb{S}^1$ en envoyant le flot induit par ϕ sur $\partial D_0^2 \times \mathbb{S}^1$ sur le flot induit par ϕ sur $\partial D_1^2 \times \mathbb{S}^1$.

La variété M est donc obtenue en recollant deux tores pleins par leurs bords. La variété M est donc soit difféomorphe soit à un espace lenticulaire $L_{p,q}$, soit à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Dans le premier cas il est évident que le flot ϕ est conjugué au flot de l'exemple I.B.5. sur $L_{p,q}$ (cas 3) a) de théorème). Dans le second cas il est clair que ϕ est conjugué au flot sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ obtenu par suspension d'une rotation irrationnelle de \mathbb{S}^2 (cas 3) b) du théorème).

δ) ϕ a toutes ses orbites fermées : l'holonomie d'une orbite quelconque est conjuguée à une rotation rationnelle ce qui montre immédiatement que les orbites de ϕ constituent une fibration de Seifert, on est donc dans le cas 4) du théorème.

Tous les cas possibles ayant été examinés, le théorème est démontré. ■

Corollaire V.B.2.- Soit M une 3-variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle < 0 . Alors il n'existe pas de flot riemannien sur M .

Démonstration : On vérifie, à l'aide du théorème cité à la partie précédente, qu'aucune des 3-variétés compactes intervenant dans notre classification n'admet de métrique à courbure sectionnelle < 0 . ■

CHAPITRE VI

FEUILLETAGES GEODESIBLES DE CODIMENSION 1.

Ce chapitre correspond essentiellement au travail fait en collaboration avec E. Ghys dans [Car, Ghy].

Dans une première partie, nous explicitons une observation de [Rei 1] et [Rum] selon laquelle le flot orthogonal à un feuilletage totalement géodésique de codimension 1, est un flot riemannien.

Dans la seconde partie, nous décrivons le revêtement universel d'un feuilletage totalement géodésique de codimension 1 sur une variété compacte. Nous montrons alors que le flot orthogonal à un tel feuilletage admet une (G,T) -structure riemannienne transverse. Grâce au chapitre précédent, nous en tirons la conséquence suivante : il n'existe pas de feuilletage géodésible de codimension 1 sur une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle < 0 .

La connaissance de la structure du revêtement universel nous permet aussi de caractériser les feuilletages géodésibles de codimension 1 possédant une mesure transverse invariante non triviale.

Ceci donne en particulier la caractérisation des feuilletages géodésibles de codimension 1 sur les variétés compactes dont le groupe fondamental est à croissance non-exponentielle.

Pour terminer cette seconde partie, nous précisons la structure algébrique du groupe fondamental d'une variété compacte supportant un feuilletage géodésible de codimension 1.

La troisième partie contient la classification des feuilletages géodésibles de codimension 1 sur les 3-variétés compactes.

A - UN CRITERE DE GEODESIBILITE.-

Un feuilletage F sur une variété riemannienne M est dit totale-
ment géodésique si toutes les feuilles de F sont totalement
géodésiques, c'est-à-dire si toute géodésique tangente à F en un point
l'est partout. Un feuilletage F sur une variété M est dit géodésible
s'il existe une métrique riemannienne sur M , pour laquelle F est
totale-ment géodésique.

Si M est une variété riemannienne, on notera \langle, \rangle le produit
scalaire sur le fibré tangent à M , et ∇ la connection de Levi-Civita
associée. Par définition, un feuilletage F de codimension 1 sur M
est totalement géodésique, si et seulement si, la seconde forme quadratique
fondamentale des feuilles est nulle. C'est-à-dire que, pour tout champ
de vecteurs X tangent à F et tout champ Z normal à F , on a :

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle = 0$$

Rappelons, avant de poursuivre, la formule classique en
géométrie riemannienne :

$$(1) \quad 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle$$

où X, Y, Z désignent des champs de vecteurs quelconques sur M .

Exemple VI.A.1.- Considérons le groupe de Lie résoluble G_3
que nous avons vu apparaître dans la démonstration de la proposition I.D.6.
L'algèbre de Lie des champs de vecteurs de G_3 invariants à gauche est
engendrée par X, Y, Z vérifiant les relations de crochet (cf. $[Ghy]$) :

$$[X, Y] = Y$$

$$[X, Z] = -Z$$

$$[Y, Z] = 0$$

Munissons G_3 de la métrique invariante à gauche pour laquelle X, Y, Z forment une base orthonormée.

Soit Γ_A le sous-groupe discret uniforme de G_3 associé à une matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $\text{tr } A > 2$, l'espace homogène $\Gamma_A \backslash G_3$ est le tore hyperbolique T_A^3 (cf. I.D.6.).

Le champ de plans engendré par X et Y est intégrable, il passe au quotient sur T_A^3 et définit un feuilletage F_1 totalement géodésique sur T_A^3 (muni de la métrique issue de G_3). Pour s'en assurer, il suffit d'utiliser la formule (1) et les relations de crochet et d'orthogonalité entre les champs X, Y et Z .

On aurait pu aussi considérer le feuilletage F_2 donné par le champ de plans engendré par X et Z . Ce feuilletage est lui aussi totalement géodésique.

Remarques :

1) Les feuilletages F_1 et F_2 sont définis par des actions du groupe affine (cf. [Ghy]). Ces feuilletages sont les deux "feuilletages modèles" de Ghys et Sergiescu sur T_A^3 (cf. [Ghy, Ser]).

2) Dans l'exemple que nous venons de construire, considérons les flots ϕ_1 et ϕ_2 sur T_A^3 donnés respectivement par les champs de vecteurs Z et Y . On vérifie sans peine que la métrique riemannienne choisie sur T_A^3 est quasi-fibrée relativement à ϕ_1 et ϕ_2 (cf. I.B.2.).

Les flots ϕ_1 et ϕ_2 sont donc riemanniens. En fait, ϕ_1 et ϕ_2 sont exactement les deux flots "propres" de T_A^3 tels qu'ils ont été construits en I.D.5.

Les feuilletages F_1 et F_2 sont, d'après cette dernière remarque, tels que la métrique riemannienne de T_A^3 est quasi-fibrée relativement au flot ϕ_1 orthogonal à F_1 (resp. au flot ϕ_2 orthogonal à F_2). Cette propriété caractérise en général les feuilletages totalement géodésique de codimension 1 :

Proposition VI.A.2.- Soit F un feuilletage de codimension 1 sur une variété riemannienne M compacte. Alors, F est totalement géodésique, si et seulement si, la métrique de M est quasi-fibrée relativement au flot ϕ orthogonal à F .

Démonstration : Il suffit de remarquer que la formule (1) donne, dans le cas où X est un champ unitaire tangent à F , et Z un champ orthogonal à F (tous deux définis sur un ouvert de M) :

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle = \langle X, [X, Z] \rangle$$

et d'appliquer le lemme I.B.2. ■

Nous obtenons alors le critère de géodésibilité suivant :

Proposition VI.A.3.- Un feuilletage F de codimension 1 sur une variété compacte est géodésible, si et seulement si, il est transverse à un flot riemannien.

Démonstration : Soit ϕ un flot riemannien transverse à F .

On peut construire une métrique quasi-fibrée relativement à ϕ , de sorte

que F et ϕ soient orthogonaux (cf. construction I.B.1.). La proposition précédente permet alors de conclure que, pour cette métrique, F est totalement géodésique. ■

Remarque : Ce critère est semblable à celui utilisé par D. Sullivan dans [Sul.2] pour caractériser les feuilletages à feuilles minimales comme étant ceux qui possèdent un flot transverse préservant une forme volume. Ici la condition est évidemment plus forte : le flot transverse préserve une métrique transverse.

Corollaire VI.A.4.- Tout feuilletage de codimension 1 suffisamment proche d'un feuilletage géodésible est géodésible. ■

Appelons fibré de Seifert généralisé un flot à orbites compactes de longueurs bornées. Un tel flot est défini par une action localement libre de S^1 (cf. [Wad]), il est donc riemannien, d'où le :

Corollaire IV.A.5.- Tout feuilletage de codimension transverse à un fibré de Seifert généralisé est géodésible. ■

B - PROPRIETES TOPOLOGIQUES EN DIMENSION QUELCONQUE.

Dans cette partie, F désignera toujours un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte M . On notera \tilde{F} le relevé de F dans le revêtement universel \tilde{M} de M . Le critère que nous avons énoncé à la partie précédente va nous permettre de préciser la structure de \tilde{F} lorsque F est géodésique :

Proposition VI.B.1.- Supposons que F est totalement géodésique. Appelons ϕ le flot orthogonal à F et $\tilde{\phi}$ le flot orthogonal à \tilde{F} (pour la métrique sur \tilde{M} relevée de celle de M).

Alors $(\tilde{F}, \tilde{\phi})$ est un produit, c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme de \tilde{M} sur $L \times \mathbb{R}$ envoyant les feuilles de \tilde{F} sur $L \times \{*\}$ et celles de $\tilde{\phi}$ sur $\{*\} \times \mathbb{R}$.

Démonstration : D'après [Hec], pour montrer que $(\tilde{F}, \tilde{\phi})$ est un produit, il suffit de montrer que toute application :

$$f : [0,1] \times [0,1] - \{(1,1)\} \longrightarrow M$$

envoyant $\{*\} \times [0,1]$ dans une orbite de ϕ et $[0,1] \times \{*\}$ dans une feuille de F , se prolonge au carré $[0,1] \times [0,1]$.

Dans le cas considéré, le feuilletage F étant totalement géodésique, la métrique de M est quasi-fibrée relativement à ϕ . Par conséquent, la longueur des courbes γ_t pour $t \in [0,1[$:

$$\gamma_t : s \in [0,1] \longrightarrow f(s,t) \in M$$

est constante. Ceci permet de construire l'extension souhaitée. ■

Corollaire VI.B.2.- Si F est totalement géodésique, le flot Φ orthogonal à F admet une (G,T) -structure riemannienne transverse.

Démonstration : Le revêtement universel \tilde{M} de M est difféomorphe à $L \times \mathbb{R}$. Le groupe fondamental de M opère sur $L \times \mathbb{R}$ en préservant les deux facteurs, et en opérant par isométries sur le premier.

En particulier Φ possède une $(\text{Isom}(L), L)$ - structure transverse où $\text{Isom}(L)$ désigne le groupe d'isométries de la variété riemannienne L . ■

Du corollaire V.A.4. on tire alors le :

Corollaire VI.B.3.- Soit M une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle < 0 . Alors, il n'existe sur M aucun feuilletage géodésible de codimension 1. ■

Nous allons aborder maintenant l'étude des propriétés topologiques des variétés compactes qui possèdent un feuilletage géodésible de codimension 1. La proposition suivante caractérise de façon précise les feuilletages de codimension 1 sur des variétés compactes, géodésibles et qui admettent une mesure transverse invariante non triviale (cf. [Pla]). Elle généralise la proposition II.2. de [Car, Ghy] :

Proposition VI.B.4.- Soit F un feuilletage géodésible de codimension 1 sur une variété compacte M . Supposons que F admette une mesure transverse invariante non triviale μ (c'est le cas en particulier si F possède une feuille compacte). Alors :

- i) la variété M fibre sur le cercle.
- ii) la monodromie de ce fibré est isotope à un difféomorphisme périodique.
- iii) le feuilletage F est transverse à un fibré de Seifert généralisé.

Démonstration : Le support de μ étant non vide, il contient un ensemble minimal M .

D'après [Pla] et [Sac], M n'est pas exceptionnel, M est donc soit une feuille compacte, soit égal à M .

1^{er} cas : M est une feuille compacte. D'après la proposition précédente toute orbite du flot ϕ orthogonal à F coupe toute feuille de F .

Par conséquent, la feuille compacte M est une section globale de ϕ , ce qui implique que la variété M fibre sur le cercle. L'application de premier retour associée à cette section globale est une isométrie h de la variété M . Le groupe d'isométries G de M a la structure d'un groupe de Lie compact. On considère dans G l'adhérence H du groupe engendré par h . Le groupe H est compact et commutatif, appelons H_e la composante connexe de l'élément neutre de H . L'isométrie h s'écrit $h = h_0 \cdot g$, où $h_0 \in H_e$ et g est périodique. Comme h_0 est isotope à l'identité, h est isotope à l'isométrie périodique g .

2^{ème} cas : M est toute la variété M . Le support de F est donc égal à M . Dans ces conditions, d'après [Sul. 1], on peut approcher F par un feuilletage défini par une forme fermée. Il existe donc une forme fermée ω transverse au flot ϕ orthogonal à F . En appliquant le théorème de Tischler [Tis], on obtient une section globale pour le

flot Φ . On conclut comme dans le premier cas. ■

On en déduit de manière évidente le :

Corollaire VI.B.5.- Soit F un feuilletage défini par une fibration d'une variété compacte sur le cercle. Alors F est géodésible, si et seulement si, la monodromie du fibré est isotope à un difféomorphisme périodique. ■

Remarque : Le critère topologique de [Sul. 2] montre que toute fibration sur le cercle est minimale.

Corollaire VI.B.6.- Soit F un feuilletage géodésible de codimension 1 sur une variété M compacte, telle que $\pi_1(M)$ est à croissance non-exponentielle. Alors on a les propriétés i), ii) et iii) de la proposition.

Démonstration : Comme \tilde{F} est en produit dans \tilde{M} (proposition VI.B.1.), F n'a pas de cycle évanouissant. D'après [Pla], la croissance des feuilles de F est dominée par celle du groupe fondamental. Toujours d'après [Pla], F possède une mesure invariante transverse non triviale. ■

Nous pouvons énoncer la :

Proposition VI.B.7.- Soit F un feuilletage géodésible de codimension 1 sur une variété compacte M . Alors :

i) $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe abélien distingué de rang ≥ 1 .

ii) Si $\pi_1(M)$ ne contient aucun élément d'ordre infini dans son centre, il est à croissance exponentielle et contient un sous-groupe abélien distingué de rang ≥ 2 .

Démonstration : Soit Φ le flot riemannien transverse à F . Soit L_1 l'adhérence d'une orbite de Φ , c'est un tore. D'après la proposition V.A.2., l'image de $\pi_1(L_1)$ dans $\pi_1(M)$ est un sous-groupe abélien distingué de $\pi_1(M)$. Puisque F n'a pas de cycle évanouissant (cf. démonstration précédente), il n'y a aucune transversale fermée homotope à zéro ([Hae]). Il n'est pas difficile de prouver que L_1 contient une courbe fermée transverse à F et donc que l'image de $\pi_1(L_1)$ dans $\pi_1(M)$ est un sous-groupe abélien distingué de rang ≥ 1 .

Le résultat s'obtient alors directement du corollaire VI.B.6. ■

Donnons pour terminer, la classification des feuilletages géodésibles de codimension 1 sur les 3-variétés compactes, telle qu'elle a été obtenue dans [Car, Ghy].

C - CLASSIFICATION EN DIMENSION 3.-

La classification des flots riemanniens en dimension 3, obtenue au chapitre précédent, donne celle des feuilletages géodésibles sur les variétés de dimension 3 compactes. Ce sont exactement, à conjugaison près, les feuilletages donnés par l'exemple VI.A.1, et le corollaire VI.A.5. :

Théorème VI.C.- Soit F un feuilletage de codimension 1 sur une variété M compacte de dimension 3. Alors F est géodésible si et seulement si :

i) soit M est difféomorphe à un fibré en tores hyperbolique T_A^3 ($\text{tr } A > 2$) et F est conjugué à l'un des feuilletages modèles de Ghys et Sergiescu ([Ghy, Ser]) ;

ii) soit F est transverse à un fibré de Seifert.

Démonstration : Puisque F est géodésible, il existe un flot riemannien ϕ transverse à F . Le flot ϕ est donc conjugué à l'un des modèles donnés par le théorème V.B.1. On remarque que tous les modèles, intervenant dans ce théorème de classification, sont approchables par un fibré de Seifert à l'exception du cas où M est difféomorphe à T_A^3 ($\text{tr } A > 2$) et ϕ est conjugué à l'un des flots propres de T_A^3 (cas 2) b) du théorème V.B.1.). Dans ce cas là, le feuilletage F ne peut avoir de feuilles compactes, en vertu de la proposition VI.B.4. (la monodromie du fibré T_A^3 ($\text{tr } A > 2$) ne peut être périodique). Il résulte alors de la classification de Ghys et Sergiescu des feuilletages sans feuilles compactes sur les fibrés en tores hyperboliques que F est conjugué (différentiablement) à l'un des feuilletages modèles qui ont été décrits dans l'exemple VI.A.1. (cf. [Ghy - Ser]). ■

CHAPITRE VII

FLOTS TRANSVERSALEMENT CONFORMES ET FEUILLETAGES OMBILICALISABLES DE CODIMENSION 1.

Ce chapitre est le fruit de remarques que nous avons faites avec Etienne Ghys, avant et après avoir écrit notre article [Car, Ghy]. Dans les chapitres antérieurs, nous avons principalement étudié des feuilletages admettant une métrique transverse invariante (feuilletages riemanniens), Il est dès lors naturel d'étudier les feuilletages possédant une métrique transverse conformément invariante, c'est-à-dire les feuilletages transversalement conformes.

Dans une première partie, nous dégageons la notion (non classique) de métrique "conformément quasi-fibrée". Nous analysons alors les différentes possibilités que l'on a de construire des flots transversalement conformes non-riemanniens sur les variétés compactes. Nous finissons cette partie en remarquant que la notion de flot transversalement conforme coïncide, en dimension 3, avec celle de flot transversalement holomorphe,

C'est ce qui nous permet, dans la deuxième partie, de donner des exemples sur S^3 . Les flots que nous construisons sur S^3 proviennent d'une étude faite dans [Cam], nous mettons en lumière que ces flots sont transversalement holomorphes.

Dans la dernière partie, nous étudions les feuilletages totalement ombilicaux de codimension 1. Nous donnons un critère d'ombilicalisabilité analogue au critère de géodésibilité du chapitre précédent. Nous

pouvons alors affirmer que le feuilletage de Reeb de S^3 est ombilicalisable. Cette partie débouche sur une conjecture que nous n'avons pas su résoudre.

Etant donné la profonde analogie qu'il y a entre les techniques utilisées dans ce chapitre et celles des chapitres précédents, nous nous sommes permis d'omettre un certain nombre de preuves.

A - FLOTS TRANSVERSALEMENT CONFORMES.

Définition VII.A.1.- Soit F un feuilletage sur une variété M . Supposons qu'il existe un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ définissant F , de variété transverse T , tel que :

- i) la variété T est une variété riemannienne.
- ii) les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des transformations conformes locales de T .

On dit alors que F est transversalement conforme.

Dans ces conditions, soit g_0 une métrique riemannienne quelconque sur M et P un champ de plans supplémentaire du fibré tangent à F (on peut prendre par exemple pour P le champ de plans orthogonal à F relativement à g_0). Nous allons construire une métrique g_1 sur M , telle que :

- 1) Le champ de plans P est orthogonal à F pour la métrique g_1 .
- 2) La métrique induite par g_1 sur P est conformément équivalente (localement) à la métrique image réciproque par f_i de celle de T .

Construction de g_1 .

Appelons g la métrique de T . Sur une carte U_i de F , on peut munir naturellement le champ de plans P de la métrique image réciproque de g par f_i . Nous noterons μ_i cette métrique.

Considérons maintenant deux cartes U_i et U_j avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Comme les changements de cartes γ_{ij} laissent la métrique g conformément invariante, on a la relation suivante :

$$(*) \quad \forall x \in U_i \cap U_j \quad \mu_i(x) = \lambda_{ij}(x) \mu_j(x)$$

où $\lambda_{ij}(x)$ est une fonction de $U_i \cap U_j$ à valeurs dans \mathbb{R}^{**} .

On constate que les λ_{ij} vérifient la condition de cocycle :

$$\forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k \quad \lambda_{ik}(x) = \lambda_{ij}(x) \lambda_{jk}(x) .$$

Autrement dit, λ_{ij} est un cocycle sur M à valeurs dans \mathbb{R}^{**} . Ce cocycle définit sur M un fibré en droites vectorielles orientable. Un tel fibré étant nécessairement trivial, le cocycle λ_{ij} est lui-même trivial, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions

$\lambda_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^*$ telles que :

$$\forall x \in U_i \cap U_j \quad \lambda_{ij}(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_j(x)}$$

En reportant cette dernière relation dans (*), on obtient :

$$(**) \quad \forall x \in U_i \cap U_j \quad \frac{\mu_i(x)}{\lambda_i(x)} = \frac{\mu_j(x)}{\lambda_j(x)} .$$

On note ν_i la métrique μ_i/λ_i ainsi définie sur la restriction de \mathcal{P} à U_i . On considère alors la métrique ν_i' obtenue sur l'espace tangent à U_i , en faisant la somme orthogonale de la restriction de g_0 à l'espace tangent à F et de la métrique ν_i sur \mathcal{P} . La condition (**) assure que les métriques ν_i' se recollent pour donner une métrique g_1 sur M . Par construction, la métrique g_1 vérifie les propriétés 1) et 2).

Une métrique vérifiant les conditions 1) et 2) sera dite conformément quasi-fibrée relativement à F . On montrerait aisément, par des arguments analogues à ceux utilisés dans [Rei-1], que l'existence d'une métrique conformément quasi-fibrée caractérise les feuilletages transversalement conformes.

Soit maintenant g une métrique riemannienne sur M et F un feuilletage sur M . Notons \langle , \rangle le produit scalaire associé à g . Le lemme suivant est un analogue direct du lemme I.B.2. :

Lemme VII.A.2.- La métrique g est conformément quasi-fibrée relativement à F , si et seulement si, il existe une fonction λ sur M , telle que : pour tout champ de vecteurs X tangent à F et tout champ de vecteurs Y orthogonal à F et unitaire (Y est défini sur un ouvert de M), on a :

$$\langle Y, [X, Y] \rangle = \lambda \langle Y, Y \rangle . \blacksquare$$

Remarque : Si la fonction λ est identiquement nulle, la métrique g est quasi-fibrée. On retrouve ainsi ce que l'on peut directement remarquer à partir de la définition VII.A.1. : les feuilletages riemanniens sont des cas particuliers de feuilletages transversalement conformes.

Notre but est précisément de donner des exemples de flots transversalement conformes sur des variétés compactes qui ne soient pas des flots riemanniens. La première idée qui vient à l'esprit pour trouver de tels exemples, est de considérer des flots conformes (i.e. des groupes à un paramètre de transformations conformes d'une variété riemannienne).

En effet, il n'est pas difficile de montrer, à l'aide du lemme précédent, qu'un flot conforme est transversalement conforme (exactement comme nous avons montré, à partir du lemme I.B.2., qu'un flot isométrique était riemannien cf. exemple I.B.3.).

Rappelons cependant le résultat suivant dû à J. Lelong-Ferrand [Lel-Fer] :

Théorème VII.A.3.- (J. Lelong-Ferrand) - Soient M une variété riemannienne compacte de dimension n et G le groupe (de Lie) des transformations conformes de M . Alors G est non-compact, si et seulement si, M est conformément équivalente à la sphère euclidienne S^n . ■

D'après ce théorème, un flot conforme sur une variété riemannienne M non-conformément équivalente à une sphère euclidienne peut toujours être rendu isométrique. En effet, dans ce cas, le groupe G des transformations conformes de M est compact, il agit donc par isométries pour une autre métrique riemannienne sur M (cf. raisonnement de l'exemple I.B.4. ou [Yau]).

En conséquence, si l'on veut trouver des exemples de flots conformes qui ne soient pas riemanniens, on doit examiner les flots conformes sur une sphère euclidienne. Le résultat suivant est démontré dans [Oba] où, par ailleurs, on trouvera une autre démonstration du théorème VII.A.3.,.

Rappelons qu'un groupe G de transformations conformes d'une variété riemannienne M est dit "essentiel", s'il n'existe aucune métrique sur M pour laquelle G agit isométriquement (cf. [Oba]).

Proposition VII.A.4.- (Obata) - Un groupe essentiel à un paramètre de transformations conformes d'une sphère euclidienne admet au moins un point fixe. ■

Cette proposition, jointe aux remarques que nous avons faites à la suite du théorème VII.A.3., montre qu'un flot conforme (sans singularité) sur une variété riemannienne compacte, peut toujours être rendu isométrique.

Si nous voulons donner des exemples de flots transversalement conformes et non-riemanniens, nous devons donc envisager d'autres méthodes de construction.

La seconde idée naturelle est de suspendre une transformation conforme h d'une variété riemannienne compacte K . Le flot obtenu ϕ_h est transversalement conforme. Pour que ϕ_h ne soit pas riemannien, il faut et il suffit que le groupe H engendré par h soit essentiel. Dans ce cas, le groupe H est inclus dans un groupe G à un paramètre de transformations conformes [Oba]. D'après le théorème VII.A.3., K est conformément équivalente à une sphère euclidienne et d'après la proposition VII.A.4., G a au moins un point fixe. On a ainsi obtenu la :

Proposition VII.A.5.- Soit ϕ un flot transversalement conforme sur une variété compacte M de dimension $(n+1)$. Supposons que ϕ est non-riemannien et qu'il possède une section K . Alors, on a :

i) $K \cong \mathbb{S}^n$ et $M \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$

ii) ϕ possède au moins une orbite fermée. ■

Un feuilletage F admettant une (G,T) -structure transverse, où T est une variété riemannienne connexe et G un groupe de transformations conformes de T , est un feuilletage transversalement conforme. On dit alors que F admet une (G,T) -structure conforme transverse.

Le flot de l'exemple I.C.3. est de ce type. Il donne donc un exemple de flot transversalement conforme sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Nous avons remarqué que ce flot n'était pas riemannien et il n'est pas difficile de vérifier que ce flot n'a pas de section. On peut généraliser cet exemple en considérant une homothétie de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (au lieu de se limiter au seul cas $n = 3$). On obtient alors de la même manière un flot transversalement conforme non-riemannien et sans section sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Remarque : En partant d'un feuilletage de \mathbb{R}^n par sous-variétés linéaires parallèles de dimension d , on obtiendrait sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ un feuilletage transversalement conforme non-riemannien de dimension d . Ainsi, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ possède la propriété remarquable d'admettre des feuilletages transversalement conformes non-riemanniens de toutes les dimensions possibles.

Pour obtenir des flots transversalement conformes non-riemanniens sur \mathbb{S}^3 , nous aurons besoin de décrire encore une autre méthode de construction.

Définition VII.A.6.- Soit F un feuilletage sur une variété M . Supposons qu'il existe un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ définissant F , de variété transverse T , tel que :

- i) T a une structure de variété analytique complexe.

ii) les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des transformations biholomorphes locales de T .

On dit alors que F est transversalement holomorphe.

Exemple VII.A.7.- Tout feuilletage F analytique complexe sur une variété analytique complexe M , est transversalement holomorphe.

L'existence de coordonnées isothermales sur les surfaces riemanniennes donne immédiatement la :

Proposition VII.A.8.- Soit F un feuilletage de codimension 2 sur une variété M . Le feuilletage F est transversalement conforme, si et seulement si, il est transversalement holomorphe. ■

Ainsi, la recherche de flots transversalement conformes sur les variétés de dimension 3 se ramène à la recherche de flots transversalement holomorphes.

B - CONSTRUCTION D'EXEMPLES SUR \mathbb{S}_r^3 .-

Soit \mathbb{S}_r^3 la sphère de rayon $r > 0$ centrée à l'origine dans \mathbb{C}^2 :

$$\mathbb{S}_r^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = r\}$$

Considérons alors sur \mathbb{C}^2 un germe de champ de vecteurs holomorphe $X(z_1, z_2)$ ayant une singularité isolée en 0. Soit W un voisinage de l'origine sur lequel X est défini. Le champ X donne sur $W \setminus \{0\}$ un feuilletage analytique complexe F de dimension (complexe) 1. Ce feuilletage est de dimension réelle 2 et il est transversalement holomorphe (cf. Exemple VII.A.7.).

Proposition VII.B.1.- Supposons que F intersecte transversalement une sphère $\mathbb{S}_r^3 \subset W \setminus \{0\}$. Alors le flot ϕ obtenu sur \mathbb{S}_r^3 (par intersection de F et de \mathbb{S}_r^3) est transversalement holomorphe.

Démonstration : Soit $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ un cocycle feuilleté sur $W \setminus \{0\}$, définissant F , de variété transverse T et satisfaisant aux conditions de la définition VII.A.6. Puisque F intersecte transversalement \mathbb{S}_r^3 , il induit (par intersection) un flot ϕ sur \mathbb{S}_r^3 . Les applications $g_i = f_i|_{U_i \cap \mathbb{S}_r^3}$ sont des submersions définissant localement ϕ . Appelons V_i l'ouvert $U_i \cap \mathbb{S}_r^3$ de \mathbb{S}_r^3 . Le cocycle feuilleté $\{V_i, g_i, \gamma_{ij}\}$ définit ϕ sur \mathbb{S}_r^3 . Par conséquent, ϕ est transversalement holomorphe. ■

Remarque : Le procédé que nous venons de décrire ainsi, est général. Si l'on considère sur une variété M un feuilletage F possédant une certaine structure transverse et N une sous-variété de M intersectant F transversalement, le feuilletage F' induit par F sur N possède le même type de structure transverse que F .

Exemple VII.B.2.- On se donne un flot holomorphe linéaire et diagonal : $X(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z)$ (on identifie l'espace tangent de \mathbb{C}^2 à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$). Il s'agit de savoir quelle est la condition sur λ_1 et λ_2 pour que le feuilletage F induit par X sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ intersecte transversalement une sphère \mathbb{S}_r^3 .

L'espace tangent (réel) à F au point $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ est le plan

$$P(z_1, z_2) = \{a(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2), a \in \mathbb{C}\}$$

L'équation de l'espace tangent à la sphère \mathbb{S}_r^3 passant par le même point est donnée par :

$$(\bar{z}_1 z_1 + z_1 \bar{z}_1) + (\bar{z}_2 z_2 + z_2 \bar{z}_2) = 0$$

et donc l'intersection de $P(z_1, z_2)$ avec l'espace tangent à \mathbb{S}_r^3 est le sous-espace vectoriel (réel) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$I(z_1, z_2) = \{a(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2), a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(a \lambda_1) |z_1|^2 + \operatorname{Re}(a \lambda_2) |z_2|^2 = r\}$$

On vérifie par un calcul simple que la dimension de $I(z_1, z_2)$ est 1 pour tout point de \mathbb{S}_r^3 , sauf si $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$. Donc si $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$, F intersecte une sphère \mathbb{S}_r^3 (quelconque) transversalement et induit sur \mathbb{S}_r^3 un flot Φ transversalement holomorphe (proposition VII.B.1.).

Si $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, on retrouve les flots riemanniens qui ont déjà été décrits dans l'exemple I.B.5. Examinons donc le cas où $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$.

Dans ce cas, on constate que le flot ϕ a deux orbites fermées d'équations respectives $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$. Ces orbites sont respectivement α -limite et ω -limite pour toutes les orbites de ϕ . Le flot ϕ est un flot de Morse-Smale, il n'est donc pas riemannien. Par ailleurs, on vérifie qu'il est transverse aux tores d'équations $|z_1| = k$ où k est une constante appartenant à $]0,1[$. A partir de cette remarque, il est clair que ϕ est transverse au feuilletage de Reeb standard de \mathbb{S}_r^3 .

On peut maintenant se demander à quelle condition un germe de champ holomorphe X avec singularité isolée en 0 dans \mathbb{C}^2 , est transverse à des "petites sphères" autour de l'origine. La réponse à cette question est donnée dans [Cam] : les champs vérifiant cette condition de transversalité sont équivalents (au sens analytique complexe) aux champs suivants :

1) Un champ X dont la partie linéaire \bar{X} à l'origine est de la forme :

$$\bar{X}(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2), \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}.$$

2) Un champ X linéaire :

$$X(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2), \lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

3) Un champ X de la forme :

$$X(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2 + a z_1^n), \lambda_2 = n \lambda_1, n > 0.$$

Il est clair que les seuls exemples de flots transversalement holomorphes obtenus sur \mathbb{S}^3 , par la méthode décrite précédemment, sont ceux donnés par ces trois types de champs.

Un champ du premier type est une perturbation, au voisinage de l'origine, de celui considéré à l'exemple précédent. Il donne donc, par intersection avec les petites sphères \mathbb{S}_r^3 , un flot transversalement holomorphe qui est une perturbation du flot ϕ de l'exemple précédent. Mais ϕ est de Morse-Smale, donc structurellement stable, par conséquent on n'obtient pas de nouvel exemple à partir d'un champ du premier type.

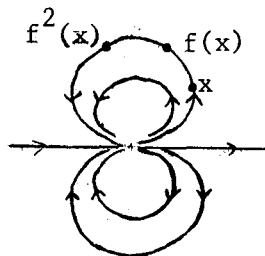
Les champs du deuxième type sont ceux qui donnent les flots riemanniens de l'exemple I.B.5.

Par contre, les champs du troisième type fournissent de nouveaux exemples de flots transversalement holomorphes non-riemanniens sur \mathbb{S}^3 . L'idée de considérer ces exemples est due à E. Ghys et C. Camacho :

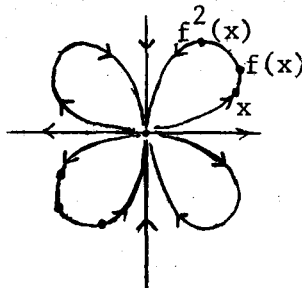
Exemple VII.B.3.- On considère un champ du type 3) avec $a \neq 0$. Ce champ donne un feuilletage analytique complexe F sur $W \setminus \{0\}$, où W est un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 . Le feuilletage F intersecte transversalement une petite sphère \mathbb{S}_r^3 en un flot ϕ transversalement holomorphe (proposition VII.B.1.). On vérifie que le flot ϕ possède une unique orbite fermée qui est α -limite et ω -limite pour tout autre orbite. L'holonomie de cette orbite est donnée par un germe f de fonction holomorphe à l'origine dans \mathbb{C} (cf. [Cam]) :

$$f(z) = \lambda z(1 + z^n), \quad \lambda^n = 1.$$

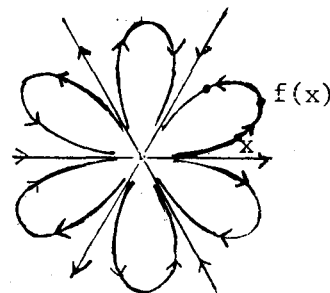
Les orbites de germe f sont situées sur des courbes du type suivant (cf. [Cam] ou calcul direct) :



Cas $n = 1$



Cas $n = 2$



Cas $n = 3$

Ce dernier exemple montre qu'un flot transversalement holomorphe sur une 3-variété compacte peut avoir une certaine complexité. Notons que les flots que nous venons d'obtenir sont des perturbations d'une fibration de Seifert (cas où le champ X de type 3) est tel que $a = 0$). D'ailleurs, à l'exception de l'exemple VII.B.2., tous les flots transversalement holomorphes que nous avons obtenus sur S^3 , sont des perturbations de fibrations de Seifert. On peut se demander s'il y a là un phénomène général, et même, si les exemples que nous avons décrits sur S^3 , ne sont pas les seuls exemples possibles (à conjugaison près). Nous ne sommes pas en mesure de répondre, pour l'instant, à cette question qui nécessiterait probablement une étude précise de l'espace des déformations d'un flot transversalement holomorphe.

C - FEUILLETAGES OMBILICALISABLES DE CODIMENSION 1.-

Cette partie présente de nombreuses analogies avec le chapitre VI auquel on se réfèrera. Un feuilletage F de codimension 1 sur une variété riemannienne M est dit totalelement ombilical si toutes les feuilles de F sont des sous-variétés totalelement ombilicales de M . Il revient au même de dire que la seconde forme quadratique fondamentale des feuilles de F est proportionnelle à la première forme quadratique fondamentale en chaque point de M . Un feuilletage F de codimension 1 sur une variété M est dit ombilicalisable s'il existe une métrique riemannienne sur M , pour laquelle F est totalelement ombilical.

Le premier exemple de feuilletage totalelement ombilical auquel on pense, est le feuilletage de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (muni de la métrique induite par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n) par les sphères de centre l'origine. On remarque dans ce cas là, que le flot orthogonal à ce feuilletage est celui des homothéties de centre 0, c'est-à-dire un flot conforme (cf. VII.A.).

Donnons un deuxième exemple :

Exemple VII.C.1.- On considère encore $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ muni de la métrique suivante :

$$g = \frac{g_0}{\|x\|} \quad \text{au point } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

où g_0 désigne la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

La métrique g est invariante par homothétie et elle est conformétement équivalente à la métrique euclidienne g_0 .

On considère la trace sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ d'un feuilletage par plans parallèles de \mathbb{R}^n . Le feuilletage F' de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ainsi défini est totalement ombilical pour la métrique g (puisqu'il est totalement géodésique pour la métrique g_0 conformétement équivalente à g). Ce feuilletage est invariant par homothétie.

Le quotient de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par l'homothétie h de rapport 2 est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$; la métrique g passe au quotient pour donner une métrique μ sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Le feuilletage F' passe lui aussi au quotient pour donner un feuilletage F totalement ombilical sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ (muni de la métrique μ). Si $n = 3$, le feuilletage F n'est autre que le feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

On remarque, encore une fois, que le flot orthogonal à F est précisément celui décrit en VII.A. (Exemple I.C.3. et sa généralisation). Ce flot est transversalement conforme. Le phénomène que nous venons de remarquer par deux fois, est en fait général :

Proposition VII.C.2.- Soit F un feuilletage de codimension 1 sur une variété riemannienne M . Alors, F est totalement ombilical, si et seulement si, la métrique de M est conformétement quasi-fibrée relativement au flot ϕ orthogonal à F .

Démonstration : Elle est analogue à celle de la proposition VI.A.2. On utilise la formule (1) de VI et on applique le lemme VII.A.2. ■

On obtient ainsi, grâce à la construction d'une métrique conformément quasi-fibrée (cf. VII.A.), le critère suivant (la démonstration est analogue à celle de la proposition VI.A.3.) :

Proposition VII.C.3.- Un feuilletage F de codimension 1 sur une variété M est ombilicalisable, si et seulement si, il est transverse à un flot transversalement conforme. ■

Nous avons alors le :

Corollaire VII.C.4.- Le feuilletage de Reeb de S^3 est ombilicalisable.

Démonstration : On a remarqué que le flot transversalement holomorphe (et donc transversalement conforme) de l'exemple VII.B.2. était transverse au feuilletage de Reeb de S^3 . D'où le résultat. ■

Remarque : Un feuilletage géodésible est bien entendu ombilicalisable. Les exemples que nous venons de donner ne sont pas géodésibles (ils ne sont pas minimaux cf. critère de [Sul. 2]). Le problème principal est en fait de préciser quels sont les feuilletages ombilicalisables non-géodésibles sur les variétés compactes. Dans cette direction on a la :

Proposition VII.C.5.- Sur une variété compacte, tout feuilletage ombilicalisable et défini par une 1-forme fermée est en fait géodésible.

Démonstration : Soit F un feuilletage ombilicalisable et défini par une 1-forme fermée sur une variété compacte. Supposons que F est non-géodésible et considérons un flot ϕ transversalement conforme,

transverse à F . En appliquant le théorème de Tischler [Tis], on prouve que ϕ a une section. Par la proposition VII.A.5. et le fait qu'une forme fermée sans singularité sur $S^n \times S^1$ définit toujours une fibration (le groupe de ses périodes est \mathbb{Z} et donc est discret), on obtient que F est un produit de sphères. Ce qui contredit la non-géodésibilité de F . ■

Pour terminer, nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture VII.C.6.- Tout feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte, minimal et ombilicalisable, est géodésible.

Remarque : Si ce résultat est vrai, on en tire immédiatement [Sul. 2], qu'un feuilletage ombilicalisable et non-géodésible sur une variété compacte, admet une feuille compacte (non coupée par une transversale fermée).

Outre que cette conjecture est naturelle (une application conforme qui préserve un volume est une isométrie pour une certaine métrique), elle est aussi motivée par la proposition précédente et par le fait que nous avons cherché en vain un contre-exemple. Pour résoudre cette conjecture, il faudra probablement utiliser le critère de [Sul. 2], mais aussi, disposer d'une étude précise de l'espace des déformations d'un flot transversalement conforme. On retrouve là le problème crucial que nous avons soulevé à la fin de la partie précédente.

C O N C L U S I O N .

A l'issue de ce travail, un certain nombre de problèmes restent posés :

1) Déterminer les hypothèses exactes selon lesquelles le théorème de dualité de Reinhart est vrai. De manière plus générale, donner une interprétation de la cohomologie basique d'un feuilletage riemannien.

2) Caractériser les flots isométriques parmi les flots riemanniens. Nous sommes actuellement sur le point de résoudre complètement ce problème.

3) Prouver qu'il n'existe pas de flot riemannien sur une variété riemannienne M compacte à courbure sectionnelle < 0 . Nous avons montré ce résultat lorsque $\dim M \leq 3$.

4) Existe-t-il un critère topologique de géodésibilité pour les feuilletages de codimension 1 sur les variétés compactes, analogue au critère de minimalité de D. Sullivan ?

5) Donner une classification des flots transversalement conformes sur S^3 .

6) Résoudre la conjecture VII.C.6.

Nous espérons donner assez rapidement une solution à une partie de ces problèmes.

B I B L I O G R A P H I E.

- [Abe] K. ABE - *Applications of a Ricatti type differential equation to riemannian manifolds with totally geodesic distributions.*
Tohoku Math. J. 25 (1973) pp. 425-444.
- [Blu] R. BLUMENTHAL - *Transversaly homogeneous foliations.*
Ann. Inst. Fourier 29, 4 (1979), pp. 143-158.
- [Cam] C. CAMACHO - *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in \mathbb{C}^2 .*
Soc. Math. de France, Astérisque 59-60 (1978), pp. 83-94.
- [Car] P. CARON - *Flots transversalement de Lie.*
Thèse de 3ème cycle, Université de Lille (1980).
- [Car, Car] P. CARON et Y. CARRIERE - *Flots transversalement de Lie \mathbb{R}^n , flots transversalement de Lie minimaux.*
C.R.A.S. 280 (1980) pp. 477-478.
- [Car, Ghy] Y. CARRIERE et E. GHYS - *Feuilletages totalement géodésiques.*
Preprint I.M.P.A. (Rio de Janeiro) (octobre 1980).
A paraître dans Anais Brasileiras de Ciencias.
- [Eps] D.B.A. Epstein - *Periodic flows on 3-manifolds.*
Ann. Math. 95 (1972) pp. 68-82.
- [Féd] E. FEDIDA - *Sur les feuilletages de Lie.*
C.R.A.S. 272 (1971) pp. 999-1002.
- [Fer] D. FERUS - *Totally geodesic foliations.*
Math. Ann. 188 (1970) pp. 313-316.

- [Fri] D. FRIED - *The geometry of cross-section to flows.*
Thèse Berkeley.
- [Ghy] E. GHYS - *Sur les actions localement libres du groupe affine.*
Thèse de 3ème cycle, Université de Lille (1979).
- [Ghy,Ser] E. GHYS et V. SERGIESCU - *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages.*
Topology 19 (1980) pp. 179-197.
- [Gro] K. GROVE - *Isometry invariant geodesics.*
Topology 13 (1974) pp. 281-292.
- [Grom] M. GROMOV - *Volume and bounded cohomology.*
Preprint I.H.E.S. (1980).
- [Hae] A. HAEFLIGER - *Variétés feuilletées.*
Ann. Ec. Norm. Pisa, 16 (1964), pp. 367-397.
- [Hec] G. HECTOR - *Croissance des feuilletages presque sans holonomie.*
Lectures Notes n° 652, School of Topology, PUC, Rio de Janeiro (1976).
- [Kir] A. KIRILLOV - *Eléments de la théorie des représentations.*
Edition M.I.R.
- [Kob, Nom] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU - *Foundation of differential geometry.*
- [Lel-Fer] J. LELONG-FERRAND - *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes.*
C.R.A.S. 269 (1969) p. 583-586.
- [Mo1.1] P. MOLINO - *Feuilletages transversalement complets et applications.*
Ann. Ec. Norm. Sup. 10 (1977) pp. 289-307.

- [Mo1.2] P. MOLINO - *Feuilletages riemanniens sur les variétés compactes ; champs de Killing transverses.*
C.R.A.S. 289 (1979) pp. 421-423
et
- *Géométrie globale des feuilletages riemanniens.*
dans le séminaire de géométrie différentielle
1979-80, Université de Montpellier.
- [Oba] M. OBATA - *The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds.*
J. Diff. Geom. 6 (1972) 247-258.
- [Or1] P. ORLIK - *Seifert Manifolds.*
Lectures Note n° 291.
- [Pla] J.F. PLANTE - *Foliations with measure preserving holonomy.*
Ann. of Math. 102 (1975) pp. 327-361.
- [Rei.1] B. REINHART - *Foliated manifolds with bundle-like metrics.*
Ann. of Math. 69 (1959) pp. 119-132.
- [Rei.2] B. REINHART - *Harmonics integrals on foliated manifolds.*
Am. J. of. Math. (1959) pp. 529-536.
- [Rum] H. RUMMLER - *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts.*
Com. Mat. Helv. 54 (1979) pp. 224-239.
- [Sac] R. SACKSTEDER - *Foliations and pseudo-groups.*
Ann. of Math. 87 (1965) pp. 79-102.
- [Sch] G.W. SCHWARZ - *On the de Rham cohomology of the leaf space of a foliation.*
Topology 13 (1974) pp. 185-187.

- [Su1.1] D. SULLIVAN - *Cycle for dynamical study of foliated manifolds.*
Inv. Math. 36 (1976) pp. 225-255.
- [Su1.2] D. SULLIVAN - *A homological characterisation of foliations
consisting of minimal surfaces.*
Com. Helv. 54 (1979) pp. 218-223.
- [Thu] W. THURSTON - *The geometry and topology of 3-manifolds.*
chapitre IV, Princeton University.
- [Tis] D. TISCHLER - *On fibering certain foliated manifolds over S^1 .*
Topology 9 (1970), pp. 153-154.
- [Yau] S.T. YAU - *Remarks on the group of isometries of a
riemannian manifold.*
Topology 16 (1977) pp. 239-247.
- [Wad] A.W. WADSLEY - *Geodesic foliations by circles.*
J. of. Diff. Geom. 10 (1975) pp. 541-549.

