

50376
1981
86

N° d'ordre : 266

50376
1981
86

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

Docteur-Ingénieur

par

STANISLAS Michel

"ETUDE D'UN ECOULEMENT INTERNE DECOLLE PAR UNE METHODE VELOCIMETRIQUE
D'HOLOGRAPHIE A DOUBLE EXPOSITION ET PAR UN CALCUL UTILISANT UN MODELE
DE TURBULENCE A UNE EQUATION DE TRANSPORT".



Soutenue le 27 Mai 1981

devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

Président : H. CHAUVIN, Professeur, Université de Marseille.

Rapporteurs : M. DYMENT, Professeur, Université de Lille,
Professeur à l'Institut Industriel du Nord.

M. TSEN, Maître de Recherches au C.N.R.S.
Université de Poitiers, C.E.A.T

Membre : M. THERY, I.C.A. Directeur Technique, Institut
de Recherches Franco Allemand de
Saint Louis.

Je tiens en premier lieu à remercier M. DYMENT pour ses conseils, pour son exemple scientifique et pour le soutien moral essentiel qu'il a su m'apporter. Ma reconnaissance ira également à M. ROYER de l'Institut de St Louis pour ses conseils éclairés en matière d'holographie et à M. TSEN qui est un guide précieux dans les dédales de la turbulence et des méthodes numériques.

M. CHAUVIN qui a été mon professeur au V.K.I. et M. THERY qui a dirigé le groupe 6 de la D.R.E.T. ont accepté de faire partie du jury : qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Mes remerciements vont à la D.R.E.T. pour le soutien financier apporté à l'ensemble de ces travaux et à l'I.S.L. pour l'aide technique à la mise en oeuvre de la méthode holographique.

Que le personnel de l'I.M.F.L. soit également assuré de toute ma reconnaissance, en particulier mes camarades ingénieurs et techniciens du service aérodynamique et du centre de calcul. Je leur dois une aide importante et des conversations fructueuses.

Je remercie enfin le personnel de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées et notamment Mme PETIAUX pour la frappe du manuscrit.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u> :	PROBLEMES ASSOCIES AU FONCTIONNEMENT D'UNE PRISE D'AIR D'AVION A GRANDE INCIDENCE.	1
<u>PREMIERE PARTIE</u> :	ETUDE EXPERIMENTALE. MISE EN OEUVRE D'UNE METHODE DE VELOCIMETRIE PAR HOLOGRAPHIE A DOUBLE EXPOSITION.	7
<u>CHAPITRE 1</u> :	DESCRIPTION DE LA METHODE.	10
	1-1. Principe de l'holographie.	10
	1-2. Description de la méthode et du montage.	12
	1-3. Méthode de calcul des coordonnées et des vitesses.	14
	1-4. Précision.	17
	1-5. Limitations.	24
	1-5-1. Limitations optiques.	24
	1-5-2. Flou de bouger.	25
	1-5-3. Exploitation des hologrammes.	25
	1-5-4. Suivi des particules.	26
	1-5-5. Conclusion.	31
<u>CHAPITRE 2</u> :	ETUDE EXPERIMENTALE D'UNE PRISE D'AIR.	33
	2-1. Description du montage expérimental.	33
	2-2. Ensemencement.	34
	2-2-1. Bulles de savon.	34
	2-2-2. Gouttelettes d'eau.	35

2-3. Résultats.....	36
2-3-1. Réponse d'une particule à la turbulence... ..	36
2-3-2. Résultats pour les gouttes d'eau.....	39
2-3-3. Résultat pour les bulles de savon.	42
<u>CONCLUSION</u> de la 1ère partie.	44
<u>DEUXIEME PARTIE</u> : ETUDE NUMERIQUE : CALCUL DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT DECOLLE DANS UNE PRISE D'AIR BIDIMENSIONNELLE EN INCIDENCE.	46
<u>CHAPITRE I</u> : DESCRIPTION DU PROBLEME.	48
<u>CHAPITRE 2</u> : FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLEME.	50
2-1. Vitesses moyennes et fluctuations.	50
2-2. Equations de Reynolds.....	51
2-3. Conditions aux limites des équations de Reynolds.....	54
2-4. Equations de transport des grandeurs fluctuantes.....	54
2-4-1. Equations de transport des contraintes de Reynolds.	54
2-4-2. Equation de transport pour l'énergie turbulente.	56
2-5. Modèle de turbulence.....	58
2-6. Système d'équations résolu.	65
2-7. Conditions aux frontières et conditions initiales.....	67
2-7-1. Conditions à l'entrée.	68
2-7-2. Conditions à la sortie.	68
2-7-3. Traitement particulier des zones de parois.	69
2-7-4. Conditions initiales.....	72

<u>CHAPITRE 3</u> :	PROBLEME AUX DIFFERENCES FINIES.	73
	3-1. Choix du maillage.	73
	3-2. Discrétisation des équations.	74
	3-2-1. Discrétisation dans le domaine central.	74
	3-2-2. Discrétisation dans les couches de paroi.	78
	3-3. Discrétisation des conditions aux limites.	79
	3-3-1. Conditions à l'entrée.	79
	3-3-2. Conditions à la sortie.	80
	3-3-3. Conditions à la frontière des couches de paroi.	80
	3-4. Méthode de Résolution.	81
<u>CHAPITRE 4</u> :	RESULTATS	83
	4-1. Ecoulement établi entre parois parallèles.	83
	4-2. Ecoulement à l'entrée d'un tuyau sans incidence.	84
	4-3. Prise d'air en incidence.	86
	4-3-1. Résultats à 20°.	86
	4-3-2. Résultats à 40°.	88
	4-4. Discussion.	90
<u>CONCLUSION</u>	de la 2 ^{ème} partie.	94
<u>LISTE DES REFERENCES</u>	96
LISTE DES ANNEXES	102
Annexe 1	103
Annexe 2	104
Annexe 3	107
Annexe 4	120
Annexe 5	122
Annexe 6	124

LISTE DES TABLEAUX	126
TABLEAU 1 - Résultats pour les gouttes d'eau.....	127
TABLEAU 2 - Résultats partiels pour les gouttes d'eau	131
TABLEAU 3 - Résultat pour les bulles de savon	134
TABLEAU 4 - Comparaisons des constantes du modèle de turbulence avec différents auteurs	136
TABLEAU 5 - Valeur des coefficients de l'équation de transport pour différentes variables	137
LISTE DES FIGURES	138-199

INTRODUCTION

PROBLÈMES ASSOCIÉS AU FONCTIONNEMENT D'UNE PRISE D'AIR D'AVION

D'une manière générale, le rôle d'une prise d'air est d'amener un certain débit au turbo propulseur avec un minimum de pertes de pression totale. Elle doit de plus adapter cet écoulement au compresseur, ce qui explique sa forme divergente en vol subsonique, car en général, la vitesse à l'entrée du compresseur est plus faible que la vitesse de l'avion. Enfin, outre la nécessité de pénaliser l'avion au minimum sur le plan de la traînée, la prise doit fournir au compresseur un écoulement de qualité aussi bonne que possible. Une bonne prise d'air doit être capable de tenir ce rôle avec efficacité dans tout le domaine de vol de l'avion qu'elle équipe. Il est bien évident que ceci pose des problèmes cruciaux lorsque l'avion est à des incidences telles que des décollements deviennent inévitables à l'intérieur de la prise d'air.

Les problèmes de fonctionnement des prises d'air à grande incidence concernent essentiellement deux types d'avions. D'une part les avions appelés STOL et VTOL c'est-à-dire les avions à décollage et atterrissage court ou vertical, et d'autre part, les avions de combat.

Pour le premier type d'avion, le problème se pose essentiellement dans les phases subsoniques de décollage et d'atterrissage, où l'on a justement besoin de toute la puissance. Ces avions sont soit dotés de nacelles orientables afin que la poussée contribue à la sustentation (VTOL), soit ils sont équipés de dispositifs hypersustentateurs très efficaces, qui permettent d'évoluer à des incidences élevées, donc à des coefficients de portance grands, ce qui autorise des vitesses faibles.

Pour leur part, les avions de combat rencontrent le même problème en phase de vol subsonique ou supersonique; au cours de manoeuvre, à haute altitude où l'on doit compenser la diminution de la masse volumique de l'air par une augmentation de l'incidence, mais également dans des phases transitoires de combat à basse et moyenne altitude. Il est de toute façon évident que la supériorité de tels avions repose en grande partie sur l'extension de leur domaine de vol et que l'on vise actuellement à pouvoir les piloter jusqu'à 70° d'incidence. Il faut donc que le moteur puisse fonctionner sans pomper dans tout le domaine de vol, et ce avec un minimum de pertes.

Pour résumer, on peut considérer que la prise d'air à deux fonctions essentielles à assurer vis-à-vis du moteur dans tout le domaine de vol :

- Elle doit lui fournir une certaine quantité d'air, qui va conditionner la puissance disponible. Ce problème semble aujourd'hui à peu près résolu [1] - [4], soit par un dessin adapté de la forme des prises d'air [2], soit par l'utilisation de prise à géométrie variable, ou de trappes annexes [4]. La figure (1), extraite de la référence [4] présente quelques solutions proposées pour résoudre le problème de débit à grande incidence dans le cas d'une nacelle fixe.
- La prise d'air doit également fournir au compresseur un écoulement de qualité. Cet écoulement peut être qualifié par deux paramètres :
- l'efficacité moyenne, caractérise les pertes de pression totale moyenne dans la prise d'air. C'est le rapport de la pression totale moyenne à l'entrée du compresseur à la pression atmosphérique à l'altitude de vol. La moyenne est calculée dans l'espace et dans le temps.
- La distorsion qui caractérise la déformation de l'écoulement à l'entrée du compresseur par rapport à un écoulement uniforme.

La distorsion stationnaire peut être quantifiée à l'aide de deux paramètres :

- le coefficient de distorsion de pression totale $(P_{tmax} - P_{tmin}) / P_{t_0}$

$$\text{avec } P_{t_0} = \frac{1}{S} \int P_t ds$$

- le coefficient de distorsion d'incidence $(\alpha_{max} - \alpha_{min}) / \alpha_0$ avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{S} \int \alpha ds .$$

Si l'on veut décrire cette distorsion de manière plus détaillée, on dressera des cartes de variations spatiales de la pression totale et de l'incidence.

Si l'on veut accéder à l'aspect instationnaire, on dressera des cartes des grandeurs qui caractérisent la turbulence; taux de turbulence, tensions de Reynolds, etc. ou mieux, des cartes de pression totale et d'incidence instantanées.

Les études qui ont été effectuées soit sur des maquettes à l'échelle 1 [1], [2], soit sur des modèles complets d'avion [4], montrent une grande sensibilité de la distorsion à l'entrée du compresseur à la géométrie de la prise d'air, et à l'existence ou non d'un décollement de lèvre inférieure.

A l'heure actuelle, on constate qu'aux grandes incidences, il existe un manque de compréhension de l'écoulement dans la prise d'air à l'amont immédiat du moteur. Les motoristes effectuent des essais au banc en tentant de simuler des distorsions à l'aide de grilles de perméabilité variable placées dans le circuit en amont du compresseur [5]. On peut ainsi simuler des distorsions annulaires ou radiales. On constate que de telles distorsions ont tendance à abaisser la limite de pompage du compresseur, comme le montre la figure (2) extraite de [5]. On voit sur cette figure la courbe caractéristique d'un étage de compresseur en présence d'une distorsion radiale comparée à la même courbe en l'absence de distorsion. On constate que la

limite de pompage est nettement abaissée. On imagine facilement qu'à grande incidence, où la distorsion stationnaire est relativement importante, il suffira d'une bouffée instationnaire pour amener le compresseur au pompage. Si de telles mesures fournissent comme on le voit des indications intéressantes, il n'existe pas à notre connaissance de mesures effectuées en vol qui permettraient de savoir si ces modèles de distorsions stationnaires sont représentatifs.

Du point de vue de la prise d'air, on essaye de qualifier les distorsions qu'elle délivre au compresseur par des mesures au banc statique à l'échelle 1, ou sur des modèles en soufflerie. On a pu aussi dresser des cartes de distorsion stationnaire et de taux de turbulence sur des modèles à grande échelle [6]. Sur les modèles testés en soufflerie, des études beaucoup plus fines de l'écoulement dans la prise sont effectuées, avec des mesures des grandeurs moyennes et des grandeurs turbulentes [7], [8], [9], [10] ainsi que des visualisations [10], [11], [12].

Pour ce qui est des mesures instationnaires, il n'existe pas à notre connaissance de travaux publiés. Il est vraisemblable que de telles mesures sont en cours dans un certain nombre de laboratoires, mais on imagine qu'elles représentent un travail de stockage et de traitement de l'information très important, surtout pour des maquettes à grande échelle.

Du point de vue théorique et numérique, un certain nombre de travaux existent ou sont en cours. Certains [13] visent seulement à prédire le décollement à la lèvre inférieure. D'autres [14], [15] ont pour objectif une description et une compréhension des phénomènes turbulents engendrés par ce décollement.

Rappelons brièvement les différentes solutions numériques qui sont utilisées ou que l'on peut envisager d'utiliser pour un tel problème.

La première, et la plus complexe consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes instationnaires. Une telle méthode nécessite des outils mathématiques très sophistiqués et des calculateurs puissants. Elle est limitée en nombre de Reynolds par des problèmes de stabilité et de capacité mémoire. Elle permet d'obtenir des informations réalistes sur l'aspect instationnaire de la phase initiale du décollement. Cette méthode est appliquée à une prise bidimensionnelle à parois rectilignes et parallèles [15].

Une autre méthode qui nécessite de puissants moyens de calculs, consiste à résoudre les mêmes équations mais en modélisant la turbulence dont l'échelle est inférieure à la taille des mailles [16]. On garde ainsi l'aspect instationnaire lié aux grosses structures turbulentes qui est le plus important du point de vue de la distorsion. A notre connaissance cette méthode n'est pas appliquée actuellement aux prises d'air.

Une technique peu développée actuellement consiste à effectuer un calcul en fluide parfait avec émission de tourbillons ponctuels ou de filaments tourbillonnaires [17]. De telles méthodes sont actuellement plus qualitatives que quantitatives, et elles ont besoin d'être développées théoriquement. Nous n'en connaissons pas d'application aux prises d'air.

Enfin une dernière méthode, plus accessible avec des moyens de calcul modestes, consiste à utiliser la fermeture en un point des équations de Reynolds à l'aide de modèles de turbulence comportant un nombre plus ou moins grand d'équations de transport pour les grandeurs turbulentes. Un exemple d'application avec un modèle de fermeture sans équation de transport est fourni en [14]. Il est important d'évaluer les possibilités de telles méthodes qui ont été relativement bien développées sur le plan théorique dans le cas d'écoulements à une dimension, et qui sont peu onéreuses, donc intéressantes pour l'industriel.

Dans ce mémoire, nous présenterons dans une première partie un travail expérimental qui vise à développer une méthode de mesure permettant d'obtenir des champs de vitesses instantanées. De telles mesures devraient contribuer à une meilleure compréhension de l'aspect instationnaire de l'écoulement.

Dans une deuxième partie, nous présenterons une étude numérique qui s'inscrit dans la dernière catégorie des méthodes décrites plus haut. Elle consiste à calculer l'écoulement turbulent dans une prise d'air à grande incidence à l'aide d'un modèle à une équation de transport, en supposant connues les conditions à l'entrée.

PREMIERE PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE. MISE EN OEUVRE D'UNE
METHODE DE VELOCIMETRIE PAR HOLOGRAPHIE A DOUBLE
EXPOSITION.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, on n'accède pas pour le moment à la compréhension des phénomènes qui se produisent dans des écoulements décollés complexes tels que ceux que l'on peut rencontrer dans une prise d'air à grande incidence.

Un des moyens d'atteindre cette connaissance, consiste à effectuer des mesures détaillées de ces écoulements, en faisant varier les paramètres susceptibles de les modifier afin de dégager les lois qui les régissent.

De telles mesures sont en cours dans différents laboratoires à l'aide de moyens conventionnels stationnaires tel que les sondes de pression et les clinomètres, ou instationnaires tels que les fils chauds et les capteurs de pression. On utilise également des méthodes optiques telles que l'anémométrie laser. Ces méthodes, mis à part les capteurs de pression qui fournissent des valeurs instantanées permettent d'obtenir des valeurs moyennes de la vitesse de la pression, de leurs fluctuations et des différentes corrélations entre ces fluctuations. Il serait intéressant, à côté de ces méthodes qui fournissent déjà des renseignements très importants, de développer un moyen de mesure qui permette d'obtenir une carte des vitesses instantanées dans tout un domaine de l'écoulement. Ce moyen permettrait peut être d'accéder à une compréhension physique plus approfondie des phénomènes. Il fournirait tout au moins des données expérimentales de comparaison aux méthodes de calcul instationnaires qui cherchent à décrire le comportement des grosses structures.

C'est une méthode de ce type que nous nous proposons d'appliquer à la prise d'air en incidence, et dont nous présentons les premiers résultats de mise en oeuvre dans cette partie de notre mémoire.

CHAPITRE 1

DESCRIPTION DE LA METHODE

En 1948, Dennis GABOR proposa un nouveau procédé de formation des images en deux étapes, sans lentilles, qu'il appela reconstruction des surfaces d'ondes [18]. GABOR fit la remarque suivante : si on superpose une onde cohérente de référence à la lumière diffractée par un objet, ces deux ondes interfèrent, et l'on peut alors enregistrer l'information concernant à la fois l'amplitude et la phase des ondes diffractées, bien que le film photographique ne soit sensible qu'aux intensités. Il démontra qu'à partir d'un tel diagramme d'interférences, on peut obtenir une image en relief de l'objet original.

L'apparition dans les années 60 du laser, source de lumière cohérente, a fortement contribué au développement de cette méthode.

1.1. PRINCIPE DE L'HOLOGRAPHIE

La figure (3) représente un schéma du montage qui permet d'enregistrer un hologramme de GABOR : le rayon de lumière sortant du laser est étalé en un faisceau parallèle à l'aide d'un collimateur. On suppose que l'onde sortant du collimateur est plane et uniforme d'amplitude A.

Si on place un objet de très petite taille sur le trajet de l'onde, celui-ci intercepte une partie de la lumière et diffracte en direction de l'hologramme une onde de la forme :

$$1.1. \quad a(x,y) = a_0 \exp [jk \sqrt{z_0^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}]$$

Si l'objet est petit, on peut supposer qu'il ne perturbe pas l'onde de référence qui reste plane et uniforme. L'hologramme reçoit donc deux ondes :

- une onde plane uniforme intense d'amplitude A
 - une onde diffusée faible produite par l'objet
- l'intensité lumineuse que reçoit l'hologramme s'écrit :

$$1-2. \quad \begin{aligned} I(x,y) &= |A + a(x,y)|^2 \\ &= A^2 + |a(x,y)|^2 + A a(x,y) + A a^*(x,y) \end{aligned}$$

a^* étant la quantité complexe conjuguée de a

On voit par conséquent que cette méthode permet d'enregistrer sur un support qui n'est sensible qu'à l'intensité lumineuse (la plaque photographique) des informations sur l'amplitude et la phase de l'onde objet.

Une fois l'hologramme enregistré et développé, on effectue la restitution sur le montage représenté figure (4) : un faisceau de lumière parallèle et cohérente obtenu à partir d'un laser et d'un collimateur éclaire l'hologramme qui restitue deux images jumelles de l'objet holographié.

Si on suppose que la transmittance en amplitude de l'hologramme développé est proportionnelle à l'intensité lumineuse qu'il a reçu (ce qui est possible à condition de prendre certaines précautions [19] p. 59) on a :

$$1-3. \quad t_p = t_b + \beta (|a|^2 + A a + A a^*)$$

t_b étant une transmittance moyenne uniforme à la restitution

β est un facteur qui caractérise l'émulsion photographique.

Si on suppose que l'onde sortant du collimateur est plane et uniforme d'intensité B, l'onde transmise par l'hologramme a pour amplitude :

$$1-4. \quad B t_p = B t_b + \beta (B|a|^2 + B A a + B A a^*)$$

Le premier terme représente une onde plane qui traverse l'hologramme sans être diffusée mais qui subit une atténuation uniforme.

Le deuxième terme peut être négligé car $|a| \ll A$.

Le troisième terme est directement proportionnel à l'onde objet originale $a(x,y)$. Pour un observateur placé comme il est indiqué sur la figure (4), il correspond à une onde provenant d'une image virtuelle de l'objet située de l'autre côté de l'hologramme par rapport à l'observateur.

Le quatrième terme s'écrit :

$$1-5. \quad \beta B A a^*(x,y) = \beta B A a_o^* \exp [-j k \sqrt{z_o^2 + (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}]$$

Il correspond à une onde sphérique qui converge vers un foyer réel situé à z_o du plan de l'hologramme et du même côté que l'observateur.

On voit donc que l'on est capable par l'intermédiaire de l'holographie de reconstituer l'image d'un petit objet se trouvant dans l'espace éclairé par le faisceau laser. On peut généraliser cette affirmation à un ensemble de petits objets à condition qu'ils ne soient pas suffisamment nombreux pour perturber le faisceau de référence. On pourra alors à la restitution observer chaque objet à la place qu'il occupait au moment où il a été holographié.

Si on est capable d'enregistrer sur la même plaque deux hologrammes successifs à un intervalle de temps déterminé; si de plus, on est capable à partir des coordonnées d'un point mesurées dans l'espace l'image de déterminer les coordonnées de ce même point dans l'espace objet; alors, on peut espérer mesurer la vitesse instantanée de petites particules se déplaçant dans le champ holographié.

1.2. DESCRIPTION DE LA METHODE ET DU MONTAGE.

L'idée qui a été ébauchée à la fin du paragraphe précédent a été proposée en premier lieu par B.J. THOMPSON [20] en 1966. Depuis cette date, J.D. TROLINGER [21], [22] a beaucoup contribué au développement de la méthode. En France, c'est H. ROYER [23], [24], [25] à l'Institut de Saint Louis qui a mis en oeuvre et développé la méthode.

La figure 5 présente un montage d'application à la mesure des vitesses de micro-particules dans un écoulement en soufflerie autour d'une maquette.

La source lumineuse est un laser pulsé à Rubis qui fournit deux impulsions d'environ 30 millijoules chacune et dont l'intervalle de temps qui les sépare est réglable entre 2 et 500 micro-secondes. Le faisceau sortant du laser est ouvert à l'aide d'une lentille divergente que l'on place suffisamment loin de l'hologramme pour que le faisceau soit quasi parallèle (3 à 5 m). Ce faisceau vient frapper l'hologramme après avoir traversé la soufflerie par des hublots de bonne qualité optique, dans la zone qui intéresse l'expérimentateur.

Une photo diode placée derrière un miroir de renvoi à l'intérieur du laser permet de connaître l'énergie des deux impulsions ainsi que l'intervalle de temps qui les séparent. L'information sur l'énergie est importante, car une dissymétrie apparaît à la restitution sous forme d'une différence de brillance et permet de donner le sens de la vitesse.

On voit que par cette technique les deux hologrammes sont enregistrés sur le même support. Ceci présente l'avantage important d'éviter tous les problèmes de recadrage d'une image par rapport à l'autre. Le seul inconvénient de la technique est une légère diminution du contraste des images puisque à chacune d'elle est superposé le fond gris moyen créé par l'autre exposition.

Après enregistrement, la plaque holographique est développée environ 5 mn dans du métinol U puis fixée et séchée. Elle peut être alors montée sur une chaîne de restitution présentée figure (6).

Un laser continu hélium Néon de 15 mW fournit un faisceau de lumière cohérente. Ce faisceau est ouvert à l'aide d'une lentille divergente. L'hologramme est monté sur une platine motorisée 3 axes qui est commandée par

l'opérateur. L'image réelle est observée à l'aide d'un objectif de 50 mm f/4 qui la projette sur la cible d'une caméra de télévision dont l'écran de visualisation se trouve en face de l'opérateur. On peut ainsi obtenir un grandissement optique de l'ordre de 30 et un grandissement électronique du même ordre ce qui conduit à un grandissement total de l'ordre de 1000. Les positions des tables sont affichées à chaque instant sur le pupitre de commande, elles peuvent être imprimées sur une télécopie ou perforées sur du ruban papier. Ceci permet un traitement direct sur ordinateur.

On peut donc par cette méthode déterminer la dimension et les trois coordonnées de chacune des images de chaque particule qui se trouvait dans le champ au moment où l'hologramme a été enregistré. On en déduit, connaissant l'intervalle de temps entre les deux impulsions, la vitesse de la particule en module et en direction.

1.3. METHODE DE CALCUL DES COORDONNES ET DES VITESSES

Nous présentons cette méthode dans le cas d'un objet ponctuel. Ceci s'applique directement au cas des micro-gouttelettes, mais peut se généraliser facilement à un objet étendu.

La figure (7) présente la configuration et les conventions choisies à l'enregistrement. L'origine des coordonnées est placée sur l'hologramme. L'onde émise par l'objet O que nous avons choisi pour simplifier dans le plan O y z interfère en un point courant M ($h \cos \vartheta$, $h \sin \vartheta$) avec l'onde émise par la source de référence S qui se trouve sur l'axe Oz à la distance R de l'hologramme.

Si λ est la longueur d'onde de la lumière émise par S la différence de phase en M entre les ondes venant de O et de S s'écrit :

$$1-6. \quad \frac{\phi}{2\pi} = \frac{OM-SM}{\lambda}$$

Soit :

$$1-7. \quad \frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} \left[z^2 + (y-h \cos \psi)^2 + (h \sin \psi)^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\lambda} \left[R^2 + h^2 \right]^{1/2}$$

La figure (8) présente la configuration et les conventions choisies à la restitution. L'origine des coordonnées est la même qu'à l'enregistrement. A l'enregistrement, la figure d'interférence produite par le faisceau issu de O et celui issu de S se trouve centrée à l'intersection du plan de l'hologramme et de l'axe SO. A la restitution on amène l'image au centre de l'écran de télévision donc sur l'axe source caméra. Par raison de symétrie, cette image se trouve alors dans le plan Oy' z'. Elle a pour coordonnées (0, y', z'). La source se trouve alors en S' (0, y', R'). Elle émet sur la longueur d'onde λ' .

La différence de phase en M s'écrit :

$$1-8. \quad \frac{\phi'}{2\pi} = \frac{O'M-S'M}{\lambda'}$$

Soit comme précédemment :

$$1-9. \quad \frac{\phi'}{2\pi} = \frac{1}{\lambda'} \left[z'^2 + (y'-h \cos \psi)^2 + (h \sin \psi)^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\lambda'} \left[R'^2 + (y'-h \cos \psi)^2 + (h \sin \psi)^2 \right]^{1/2}$$

Si on se place dans les conditions de GAUSS, c'est-à-dire si les angles d'ouverture et de champ sont faibles, h et y sont petits par rapport à z et R et on peut effectuer un développement limité des expressions 1 - 7 et 1-9. Les calculs sont détaillés en annexe 1. On obtient en se limitant à l'ordre 2 :

$$1-10 \quad \frac{\phi}{2\pi} = \frac{z-R}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \left[h^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) + \frac{y^2 - 2 h y \cos \psi}{z} \right] + o(3)$$

$$1-11. \quad \frac{\phi'}{2\pi} = \frac{z'-R'}{\lambda'} + \frac{1}{2\lambda'} \left[h^2 \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) + \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) (y'^2 - 2h y' \cos \psi) \right] + 0(3)$$

Les conditions de stigmatisme entre O et O' s'écrivent :

$$1-12. \quad |\phi| - |\phi'| = \text{cste}$$

si l'on se restreint au stigmatisme approché dans les conditions de GAUSS, cette relation doit être vérifiée à l'ordre 2.

L'image virtuelle s'obtient en écrivant :

$$1-13. \quad \frac{\phi' - \phi}{2\pi} = \text{cst} \quad \forall M$$

L'image réelle en écrivant :

$$1-14. \quad \frac{\phi' + \phi}{2\pi} = \text{cst} \quad \forall M$$

Ceci conduit aux relations suivantes :

Image virtuelle :

$$1-15. \quad \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right)$$

$$1-16. \quad \frac{y'}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = \frac{y}{\lambda} \cdot \frac{1}{z}$$

Image réelle :

$$1-17. \quad \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right)$$

$$1-18. \quad \frac{y'}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = -\frac{y}{\lambda} \frac{1}{z}$$

Dans la méthode qui est employée ici, on observe l'image réelle. Les équations 1-17 et 1-18 peuvent se réécrire :

$$1-19. \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{R} - \frac{\lambda}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right)$$

$$1-20. \quad x = -\frac{\lambda}{\lambda'} z \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) \quad x' = \frac{R-z}{R} x'$$

$$1-21. \quad y = -\frac{\lambda}{\lambda'} z \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) \quad y' = \frac{R-z}{R} y'$$

La relation 1-20 se déduisant directement de 1-21.

On voit qu'à l'aide de ces relations, connaissant les coordonnées d'un point dans l'image, on peut déterminer ses coordonnées dans l'espace objet qui a été holographié.

Les deux hologrammes étant enregistrés sur la même plaque, il suffit de déterminer les trois coordonnées de chacune des deux images pour, connaissant l'intervalle de temps Δt qui les sépare, connaître la position de la particule correspondante ainsi que sa vitesse.

Le grandissement longitudinal se déduit de 1-19 par dérivation :

$$1-22. \quad g_z = - \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{z'}{z} \right)^2$$

Le grandissement transversal au sens optique doit être calculé pour une position donnée de l'hologramme. On obtient :

$$1-23. \quad g_x = g_y = - \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{z'}{z}$$

1.4. PRECISION

Les composantes de la vitesse sont obtenues à l'aide de relations du type :

$$1-24. \quad u = \Delta x / \Delta t$$

On voit donc que les deux paramètres qui vont influencer la qualité des mesures sont la précision sur l'intervalle de temps ainsi que la qualité du pointé d'une image.

Pour l'intervalle de temps Δt , nous disposons d'une chaîne qui nous fournit une précision absolue de $0,25 \mu s$. Les intervalles que nous utilisons étant de l'ordre de $50 \mu s$, nous obtenons une précision relative de l'ordre de $0,5 \%$. Pour des intervalles de temps plus courts, il faudrait utiliser une technique de mesure donnant une meilleure précision si l'on ne veut pas détruire la qualité des mesures. On peut facilement atteindre aujourd'hui une précision absolue de $0,01 \mu s$ avec des compteurs.

La précision de pointé est elle, fonction à la fois de la qualité optique de l'image restituée et des conditions expérimentales.

La qualité de l'image restituée va dépendre essentiellement de trois paramètres :

- La qualité de l'émulsion photographique.
- Les aberrations géométriques liées au montage.
- La diffraction.

a) Qualité de l'émulsion photographique.

Une émulsion photographique est définie par quatre caractéristiques :

- la rapidité (ou sensibilité), le noircissement nécessite d'autant moins d'énergie que l'émulsion est plus rapide.
- la sensibilité spectrale, décrit les variations de la rapidité en fonction de la longueur d'onde de la lumière qui sert à l'impressionner. La figure 9 a présente la courbe de sensibilité spectrale de l'émulsion que nous utilisons dans nos expériences.
- le pouvoir de résolution, définit le plus petit détail qui peut être enregistré par l'émulsion, compte tenu de la taille des grains d'argent qu'elle contient. Il varie à l'inverse de la rapidité, et s'exprime en holographie comme le nombre de franges d'interférence que l'émulsion peut enregistrer par mm. On voit par conséquent que l'interfrange ne pourra pas être inférieur à une certaine valeur ce qui limite l'angle entre le faisceau objet et le faisceau de référence.

L'interfrange est donné par la relation :

1-25.

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin \psi/2}$$

où ψ est l'angle entre les deux faisceaux. Si on appelle i_m l'interfrange minimum admis par l'émulsion, on obtient une condition sur ψ :

$$1-26. \quad \sin \frac{\psi}{2} < \frac{\lambda}{2i_m}$$

L'émulsion que nous utilisons à un pouvoir de révolution de 2.800 franges par mm. Ce qui correspond à $i_m = .36 \mu m$ et $\psi < 150^\circ$. On voit que cette résolution est suffisante puisque dans le cas d'un hologramme de GABOR on a : $\psi \leq 90^\circ$.

- La courbe caractéristique définit la relation entre l'énergie lumineuse reçue et la transmittance (ou la densité) de l'émulsion après développement. En 1-1 nous avons fait l'hypothèse que cette loi était linéaire. La figure 9b présente la courbe caractéristique (extraite de [25 bis]) de l'émulsion utilisée. Elle fournit la transparence en amplitude de la plaque développée en fonction de la lamination. On a porté sur cette courbe la zone d'exposition correcte déterminée par H ROYER dans le cas de l'holographie de GABOR [25 bis]. Elle correspond à une densité comprise entre 1 et 1,5. On constate que cette zone se trouve légèrement en dehors de la zone de linéarité. Pour plus de détails sur l'influence de l'émulsion et sur les conséquences de son utilisation dans les zones non linéaires, on se reportera avec profit à la référence [19].

b) Aberrations géométriques

La déformation de la surface d'onde réelle par rapport à la surface d'onde idéale est représentée par les termes du 4^{ème} ordre dans l'équation 1-14. En regroupant les termes proportionnels à h^4 , h^3 , h^2 et h on fait apparaître classiquement les termes d'aberration sphérique, de coma, d'astigmatisme et de courbure de champ et distorsion.

Dans un but de simplification, les calculs sont effectués dans un repère différent représenté figure (10) et (11).

Les calculs sont détaillés en annexe 2. On obtient :

$$1-27. \quad \frac{\Delta s}{\lambda} = \frac{h^4}{8\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) \left[\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right)^2 - 3 \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) + \frac{3}{R'^2} - \frac{3}{zR} \right]$$

$$1-28. \quad \frac{\Delta c}{\lambda} = - \frac{h^3 y \cos \vartheta}{2 \lambda} \frac{R+z}{R^2 z^2}$$

$$1-29. \quad \frac{\Delta a}{\lambda} = - \frac{h^2 y^2}{4\lambda} \frac{(1 + 2 \cos^2 \vartheta)}{Rz (R-z)}$$

$$1-30. \quad \frac{\Delta d}{\lambda} = 0 .$$

Suivant H. ROYER [26] nous posons :

$$t = z/R, \quad m = R/R', \quad K = \lambda'/\lambda, \quad \alpha = h/z$$

Les relations 1-27 à 1-30 deviennent :

$$1-31. \quad \Delta s = \frac{\alpha^4 z}{8} (1-t) \left[(k^2-1)(1-t)^2 - 3k \, t m (1-t) + 3 t^2 m^2 - 3t \right].$$

$$1-32. \quad \Delta c = - \frac{\alpha^3 y \cos \vartheta}{2} t(1+t)$$

$$1-33. \quad \Delta a = - \frac{\alpha^2 y^2 (1+2 \cos^2 \vartheta)}{4} \frac{t}{R(1-t)} .$$

On voit d'après ces relations que l'on peut annuler simultanément les trois aberrations pour $t = 0$ et $k = 1$ ce qui correspond à travailler en lumière parallèle avec la même longueur d'onde à l'enregistrement qu'à la restitution.

Dans le cas de notre montage ces aberrations ne sont pas nulles, mais elles doivent rester très faibles puisque l'on travaille en lumière légèrement divergente $t \ll 1$ et que λ et λ' sont relativement voisins.

Plaçons-nous dans un cas classique d'enregistrement et de restitution de l'hologramme. On peut prendre les valeurs suivantes pour les différents paramètres :

$$R = R' = - 5 \text{ m}$$

$$\lambda = . 6943 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\lambda' = .6328 \text{ } \mu\text{m}$$

$$z = -.2 \text{ m}$$

$$y = .03 \text{ m}$$

on obtient

$$\Delta s = .009 \alpha^4$$

1-34.

$$\Delta c = - .0006 \alpha^3$$

$$\Delta a = -.000006 \alpha^2$$

c) Diffraction

La diffraction a été définie par SOMMERFELD comme "toute déviation des rayons lumineux de leur trajet rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion ni par une réfraction".

Une des conséquences de ce phénomène qui nous intéresse directement ici est que l'image d'une source ponctuelle obtenue à l'aide d'un appareil optique n'est pas un point mais une tâche appelée figure de diffraction.

Dans le cas d'un élément optique à ouverture circulaire, cette tâche est constituée de disques concentriques alternativement sombres et brillants. La figure (12) extraite de [27] présente cette figure de diffraction appelée figure d'Airy ainsi qu'un diagramme de variation de l'intensité suivant le diamètre. Le rayon du disque central qui rassemble plus de 90 % de l'énergie émise par la source est donné par la relation :

1-35.

$$\rho = 1,22 \frac{\lambda z}{2r}$$

ou λ est la longueur d'onde de la source, z la distance de l'ouverture à l'écran d'observation et r le rayon de l'ouverture. Ne cherchant que des ordres de grandeur, nous noterons que :

1-36.

$$\rho \approx \frac{\lambda z}{2r}$$

On voit d'après cette relation que le diamètre de la tâche de diffraction augmente quand on réduit l'ouverture $\alpha = \frac{r}{z}$.

Sur la figure 13 nous avons représenté les différentes ouvertures qui interviennent dans le montage et donc dans la détermination de la qualité de l'image.

Il y a tout d'abord l'hologramme. On le suppose circulaire de diamètre $2H$. Pour un objet étendu ou une source éloignée, c'est cette dimension qui déterminerait la qualité de l'image obtenue en O' . Mais on réalise ici l'hologramme de micro-gouttelettes qui interceptent un faisceau de lumière quasi parallèle et le diffracte. On peut donc leur appliquer les lois de la diffraction, et l'essentiel de l'information concernant la goutte O sera contenue sur l'hologramme dans un disque de rayon $\rho \approx \frac{\lambda z}{2r}$ (figure 13) où z est la distance de la goutte à l'hologramme et $2r$ son diamètre. On trouve en reprenant les valeurs proposées en 1-4 b) pour une goutte de $20 \mu\text{m}$ de diamètre :

$$\rho \approx 0,007 \text{ m .}$$

L'ouverture correspondante est donc :

$$\frac{\rho}{z} \approx 0,035 \approx \frac{\rho}{z'}$$

Partant des relations 1-3 4 on obtient :

$$\Delta s = 0,02 \mu\text{m}$$

$$\Delta c = 0,03 \mu\text{m}$$

$$\Delta a = 0,01 \mu\text{m}$$

ce qui conduit au niveau de l'image aux valeurs suivantes pour les aberrations quand on se place au meilleur foyer :

$$\Delta s \approx 0,5 \mu\text{m}$$

$$\Delta c \approx 0,5 \mu\text{m}$$

$$\Delta a \approx 0,5 \mu\text{m}$$

La dernière ouverture intervenant dans le montage est celle de l'objectif qui permet d'agrandir l'image et de la projeter sur l'écran E (figure 13) qui en l'occurrence est la cible de la caméra de télévision.

Nous avons choisi un objectif de 50 mm de focale ouvrant à $f/4$. Cet objectif étant corrigé, nous supposons qu'il n'introduit pas d'aberrations géométriques supérieures à celles introduites par l'hologramme. La tâche de diffraction qu'il introduit, a pour rayon ramené au niveau de l'image O' :

$$\rho' \approx \frac{\lambda' f}{d}$$

soit

$$\rho' \approx 3 \text{ } \mu\text{ m} .$$

On constate par conséquent que l'erreur introduite par la chaîne vient essentiellement dans ce type de montage de la diffraction introduite par l'objectif de restitution. Cette erreur est de l'ordre de $\pm 1,5 \text{ } \mu\text{ m}$.

Le circuit fermé de télévision que nous utilisons pour observer l'image à un grandissement interne de 20. Pour atteindre les grandissements de 400 que nous employons habituellement, il faut un grandissement optique de l'ordre de 20 également.

La résolution de la caméra est de 850 pts sur 2,5 cm au niveau de la cible, soit un point tous les 30 microns. Ceci correspond ramené au niveau de l'image O' à environ un point tous les 1,5 microns. Une goutte de 15 microns s'étendra donc sur une dizaine de points.

Enfin l'expérience montre qu'à ce grandissement, l'oeil apprécie sur l'écran un déplacement de la table de ± 1 pas.

La précision de pointer est donc de $\pm 2,5 \text{ } \mu\text{ m}$.

L'erreur due à la diffraction étant également de cet ordre, on peut évaluer que l'erreur sur la mesure sera de l'ordre de $\pm 5 \text{ } \mu\text{ m}$.

Les mesures de vitesse s'effectuant généralement sur un parcours de la particule de l'ordre de 1000 $\mu\text{ m}$, on obtient une précision de l'ordre de 1 % sur les composantes de la vitesse qui sont dans le plan de l'hologramme; ce compte tenu de l'erreur sur Δt .

Pour ce qui est de la composante perpendiculaire au plan de l'hologramme, les aberrations optiques dont nous avons parlé précédemment, diminuent la qualité de l'image; De sorte que la mise au point de la goutte est rendue beaucoup plus délicate que son pointer transversal. La précision suivant Oz est donc beaucoup moins bonne. L'expérience montre qu'elle peut être évaluée à $\pm 25 \mu\text{m}$.

1.5. LIMITATIONS

Comme tout moyen de mesure, l'holographie à côté de ses avantages présente certaines limitations qui font qu'elle sera choisie pour certains types de mesures et rejetée pour d'autres.

1.5.1. Limitations optiques

Une première limitation de la méthode, qui a été mentionnée en 1-1, est que le milieu traversé doit être transparent. Ceci veut dire que le faisceau de référence, après avoir traversé la veine d'essai, ne doit pas être trop perturbé à la fois en amplitude et en phase. On voit donc que les applications de la méthode à des écoulements où il existe des gradients de pression ou des gradients de température sont limitées. De même, s'il existe des hublots sur le trajet du faisceau lumineux (ce qui est le cas pour les souffleries), il faut veiller à ce qu'ils soient de bonne qualité optique.

D'autre part, si le brouillard de particules qui ensemence l'écoulement vient à être trop dense, la phase et l'amplitude de la référence vont être perturbées. Ceci se traduit par une détérioration de la qualité de l'image et donc par une diminution de la précision. ROYER [23] définit un critère sur la densité d'ombre, qui est le rapport de la somme des sections de toutes les gouttes visibles dans le champ de l'hologramme

à la surface de l'hologramme. Si la densité d'ombre reste inférieure à 1 % la qualité de l'image est excellente, au-delà de 10 % il n'est plus possible de faire des mesures.

La limitation optique la plus importante du moins pour la vélocimétrie et sur laquelle nous reviendrons en 1-5-4, provient de la diffraction. L'intensité de la lumière diffractée par une particule étant une fonction inverse du diamètre de celle-ci, il existe une taille critique de particule en-dessous de laquelle, le rapport entre l'intensité du faisceau objet et celle du faisceau de référence ne permet plus de distinguer la particule. Pour un hologramme simple, cette taille minimum est de l'ordre de 5 μm . Pour un hologramme à double exposition, compte-tenu de la perte de contraste due à la superposition d'images, on peut évaluer cette taille à 10 μm [25].

1.5.2. Flou de Bouger

La durée de l'impulsion lumineuse émise par le laser étant de 15 nano-secondes, il existe une vitesse limite pour ce procédé si l'on ne veut pas que le flou de bouger dépasse le flou d'aberration :

$$v < \frac{\rho}{t} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-9}}$$

$$V < 300 \text{ m/s} .$$

1.5.3. Exploitation des hologrammes

Une autre limitation actuelle de la méthode, tient au délai qui existe entre le moment de la mesure et celui où l'on obtient les résultats.

Supposons que l'on veuille effectuer des mesures dans un volume cubique de 1 cm^3 . Si l'on veut une image de qualité excellente, on se limitera à une densité d'ombre de 1 %. Si l'on suppose que l'on aensemencé l'écoulement avec un brouillard de particules d'un diamètre homogène de

20 microns, on peut déterminer par un rapport de surface le nombre maximum de particules admises par cm^2 :

$$N = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{\pi \frac{d^2}{4}} \approx 3\,200 \text{ particules}$$

L'hologramme étant à double exposition, on aura donc environ 1600 couples de particules par cm^2 . Si la veine fait 10 cm de profondeur, on disposera en moyenne de 160 couples par cm^3 .

En supposant que l'on passe à peu près une minute à relever les deux positions et le diamètre d'une particule, le dépouillement d'un cm^3 est effectué en $2^{\text{H}} 40'$.

Cette durée reste raisonnable tant que l'on se contente de dépouiller de petits volumes judicieusement choisis dans l'écoulement. Il est évident qu'elle ne l'est plus, si l'on s'intéresse à des volumes de plusieurs dizaines de cm^3 . Il est alors nécessaire d'envisager l'automatisation du dépouillement. Cette automatisation présenterait un deuxième avantage, celui d'éliminer les erreurs dues à la fatigue de l'opérateur.

Reste un problème évoqué en [25] celui de l'identification des images jumelles. Ce problème ne se pose pas dans le cas de la vélocimétrie, car on utilise des densités de particules faibles afin d'avoir une bonne qualité d'image d'une part, et de ne pas perturber l'écoulement d'autre part. Il n'y a alors que très rarement doute sur l'association des particules entre elles. Si non, il faut réduire l'intervalle de temps pour rapprocher les deux images.

1.5.4. Suivi des particules

Dès que l'on aborde une méthode de vélocimétrie optique, il faut se pencher sur le problème de l'inertie des traceurs. Ce problème se pose avec d'autant plus d'acuité pour l'holographie à double exposition que l'on est

limité à des particules de diamètre supérieur à 10 μm . Pour la clarté de l'exposé, nous scinderons l'étude de ce problème en deux. Au chapitre suivant, nous étudierons la réponse d'une particule à la turbulence existant dans l'écoulement, et ce, en liaison avec l'étude expérimentale effectuée. Dans l'exposé présenté ici, nous allons nous intéresser à la réponse de la particule aux modifications de l'écoulement moyen : accélération, déccélération, déflexion.

L'équation du mouvement d'une particule sphérique isolée dans un fluide en mouvement à une vitesse variable a été écrite pour la première fois par TCHEN [28]. C'est une extension de l'équation pour le mouvement lent d'une sphère dans un fluide lui-même en mouvement lent écrite déjà par BOUSSINESQ [29]. L'équation de TCHEN qui se limite au mouvement de particules sphériques solides s'écrit :

$$1-37. \quad \frac{\pi}{6} d^3 \rho_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = 3 \pi \mu d(\vec{v}_f - \vec{v}_p) + \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \frac{d\vec{v}_f}{dt} + \frac{1}{2} d^3 \rho_f \left(\frac{d\vec{v}_f}{dt} - \frac{d\vec{v}_p}{dt} \right) + \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu} \int_{t_0}^t \frac{\frac{d\vec{v}_f}{dt'} - \frac{d\vec{v}_p}{dt'}}{\sqrt{t-t'}} dt' + F_e$$

Cette équation est démontrée en annexe 3. \vec{v}_p est la vitesse de la particule ρ_p sa masse volumique, d son diamètre, \vec{v}_f la vitesse du fluide, μ sa viscosité cinématique, ρ_f sa masse volumique et F_e le champ de forces extérieures.

Cette équation est valable sous les deux hypothèses suivantes :

- la particule est suffisamment petite, et son mouvement par rapport au fluide est suffisamment lent pour que le nombre de Reynolds relatif

$$R_{ep} = d |V_f - V_p| / \nu \text{ soit inférieur à un.}$$

- Les forces extérieures dérivent d'un potentiel.

On peut donner l'interprétation suivante des différents termes.

- Le terme du premier membre représente les forces d'inertie.

- Le premier terme du second membre correspond aux forces visqueuses exprimées par la loi de Stokes en mouvement permanent.

- Le second terme est dû aux gradients de pression existants au sein du fluide il est évalué ici dans l'hypothèse où l'on néglige la viscosité.

- Le troisième terme dit "de masse induite" provient de la traînée de forme en fluide idéal.

- Le quatrième terme appelé "terme de Basset" est comme le premier, un terme de traînée visqueuse qui tient compte des conditions initiales et de l'histoire du mouvement.

Cette équation, bien qu'elle ne soit valable que pour un mouvement lent de la particule par rapport au fluide, est relativement complexe.

Si on se limite au cas où la masse volumique de la particule est grande devant celle du fluide, ce qui est le cas de particules solides dans l'air, cette équation se simplifie comme il est montré en annexe 4.

On obtient l'équation simplifiée :

$$1-38. \quad \frac{\pi}{6} d^3 \rho_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = 3 \pi \mu d (\vec{v}_f - \vec{v}_p)$$

ne contenant que le terme d'inertie et le terme de Stokes.

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$1-39 \quad \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{3}{4} C_D \operatorname{Re}_p \frac{\mu}{\rho_p d^2} (\vec{v}_f - \vec{v}_p)$$

avec

$$1-40 \quad \operatorname{Re}_p = \rho_f |\vec{v}_f - \vec{v}_p| d / \mu$$

C_D est le coefficient de traînée de la particule. Dans le cas de l'hypothèse de Stokes on a :

$$1-41. \quad C_D = \frac{24}{Re_p}$$

On peut corriger cette formule pour étendre sa validité jusqu'à $Re_p = 200$ [54]

$$1-42. \quad C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + .15 Re_p^{.687}).$$

On voit que l'équation 1-39 peut se résoudre très aisément par une méthode numérique à condition de connaître le champ de vitesse du fluide. Il est intéressant d'effectuer cette résolution dans quelques cas simples, ce qui permet d'évaluer la réponse des particules à l'écoulement. Les détails de la méthode de résolution sont exposés en annexe 5.

Nous nous sommes limités à deux cas, dont un seul pour lequel nous disposons de mesures expérimentales.

Le premier cas est celui de l'écoulement par tranches dans le collecteur de la soufflerie transsonique de l'I.M.F.L.

L'air subit une accélération depuis la vitesse de 5m/s en amont du collecteur jusqu'à la vitesse de 166 m/s dans la veine. La figure 14 présente la loi de variation de vitesse dans le collecteur. Les expériences ont été réalisées par holographie à double exposition. Les particules étaient des gouttelettes d'eau produites par un pulvérisateur. Celui-ci était placé suffisamment loin en amont pour que les particules aient la vitesse du fluide à l'entrée du collecteur. Le collecteur avait une longueur de 0,8 m. La figure 14 présente également l'évolution de la vitesse d'une particule de 20 μm comparée à la vitesse du fluide dans le collecteur. On constate que la particule accuse un retard d'accélération, et qu'à la sortie du collecteur sa vitesse est plus faible que celle de l'écoulement.

Les mesures en veine vide ont été effectuées à 0,26 m en aval de la sortie du collecteur. La figure 15 présente les résultats obtenus et leur comparaison avec le calcul. On voit que la vitesse des particules diminue quand leur diamètre augmente, et que l'accord entre les mesures et le calcul est bon.

Le deuxième cas est celui de l'écoulement autour d'un dièdre. Le potentiel complexe w d'un tel écoulement est donné par la relation :

$$1-43. \quad w = \alpha z^m$$

m est défini sur la figure 16, α est à déterminer en fonction de la vitesse u_0 au point x_0 sur l'axe Ox . Les composantes de la vitesse en un point de l'écoulement sont donc données par :

$$u_g = \alpha m r^{m-1} \cos [(m-1) \theta]$$

1-44.

$$v_g = -\alpha m r^{m-1} \sin [(m-1) \theta]$$

avec :

$$1-45. \quad \alpha = U_0 / m x_0^{m-1}$$

Nous avons effectué le calcul pour $\alpha = 135^\circ$ dans le cas de particules de 15 μm de diamètre qui sont les plus petites particules que l'on peut espérer déceler sans difficultés dans des conditions habituelles d'expérience. Nous avons pris $U_0 = 20 \text{ m/s}$ à $x_0 = -10 \text{ cm}$.

La figure 17 présente le résultat du calcul. On constate que l'inertie des particules n'est pas négligeable. Du point de vue du module, elles accusent dans la première partie de l'écoulement un retard à la décélération, puis, en aval du sommet un retard à l'accélération. Du point de vue de la direction, l'écart angulaire dans le pire des cas est de l'ordre de 4° .

On constate par conséquent que l'effet d'inertie est loin d'être négligeable, et que si on veut le prendre en compte correctement dans les mesures, il est nécessaire de connaître en détail les capacités de réponse d'une particule aux variations de vitesse de l'écoulement. Pour ce faire, il paraît important dans un premier temps de qualifier le domaine de validité de l'équation 1-37 par des mesures détaillées dans divers cas d'écoulement, ce que l'holographie est tout à fait en mesure de permettre.

1.5.5. Conclusion

De cette étude, il ressort que la limitation essentielle de l'holographie de GABOR à double exposition, pour son utilisation à des fins de vélocimétrie dans des gaz, tient à l'impossibilité de distinguer des particules de taille inférieure à $10\ \mu\text{m}$. Si l'on cherche en conséquence à définir l'ensemencement idéal pour cette méthode, on aboutit à des particules liquides de taille homogène de l'ordre de $15\ \mu\text{m}$, de masse volumique voisine de celle de l'air. Les particules solides sont à éviter à cause de l'érosion qu'elles provoquent sur les hublots, les maquettes et les pales de ventilateurs. Deux sortes de particules solides pourraient néanmoins être envisagées car elles ont une densité intéressante : les billes de polystyrène triées et les particules de latex. Pour les particules liquides, on doit prendre garde à la toxicité, à la vaporisation et à la corrosion, de sorte que l'on est quasiment limité à l'eau. Une solution intéressante consiste à utiliser des bulles de savon gonflées à l'hélium. Mais nous verrons plus loin que leur taille minimale de l'ordre de $1,5\ \text{mm}$ impose d'utiliser de grandes maquettes.

Une autre solution au problème de l'inertie, consiste à utiliser un montage optique différent qui permette de visualiser des particules de taille plus petite que la taille de diffraction. C'est une solution que

propose H.ROYER [30] et que, comme nous le verrons plus loin, il faut envisager dans le cas d'écoulements fortement turbulents, si l'on veut mettre en évidence des aspects instationnaires.

CHAPITRE 2

ETUDE EXPERIMENTALE D'UNE PRISE D'AIR.

Comme nous l'avons dit plus haut, il s'agit ici d'une expérience de mise en oeuvre de la méthode qui vise essentiellement trois buts :

- améliorer notre connaissance de la méthode,
- comparer les résultats obtenus avec deux types de traceurs entre eux d'abord, puis avec des mesures effectuées à l'aide de moyens conventionnels (anémoclinomètre fil chaud) au C.E.A.T. de Poitiers,
- nous préparer à des mesures de même nature mais à vitesses subsoniques et transsoniques.

2.1. DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL.

La figure 18 présente un schéma de principe de montage. La soufflerie a été réalisée à l'aide d'un ventilateur de 0,5 m de diamètre, débouchant dans une chambre de tranquillisation de 0,8 m × 0,8 m de section, munie d'un nid d'abeille et de grillage. La chambre est raccordée par un convergent à la section de sortie de dimension 0,08 m × 0,350 m. La vitesse moyenne mesurée dans la section de sortie est de 16 m/s. Les variations transversales de cette vitesse moyenne dans les deux plans ——— de symétrie sont inférieures à 1 % jusqu'à 5 mm des parois. Le taux de turbulence mesuré au fil chaud au centre de la veine dans la section de sortie est de l'ordre de 3 %.

La maquette a été réalisée à l'aide de plaques de plexiglass de 5 mm d'épaisseur; la section d'entrée est de 0,044 m × 0,300 m; la longueur de 0,356 m. Deux hublots de bonne qualité optique sont montés dans les parois latérales au droit du domaine à explorer.

2.2. ENSEMENCEMENT

La vélocimétrie par holographie à double exposition est une méthode optique qui nécessite l'ensemencement de l'écoulement. La chaîne dont nous disposons, ne permettant pas de discerner des particules dont la taille est inférieure à 10 microns, nous avons envisagé l'utilisation de deux types de traceurs afin d'essayer de se faire une idée du suivi de l'écoulement par les particules.

Nous avons utilisé d'une part des micro-bulles de savon gonflées à l'hélium et dont le diamètre était voisin de 1,3 mm. Ces bulles ont l'avantage d'avoir une densité par rapport à l'air proche de 1, mais elles ont l'inconvénient d'être grosses relativement à l'échelle de l'écoulement. D'autre part, nous avons utilisé des micro-gouttelettes d'eau dont les dimensions variaient de quelques microns à quelques centaines de microns. Ces particules présentent l'avantage d'être petites mais elles ont par contre une masse volumique élevée.

2.2.1. Bulles de savon

La réalisation et la mise en oeuvre de l'émetteur de bulles de savon a été effectuée par l'ENSAM Paris (réf. [31]). Dans un premier temps, il a été réalisé un émetteur à sept têtes représenté figure 19. Chaque tête était constituée de deux tubes concentriques. Un vase contenant du liquide sulfoné dans lequel barbotte de l'hélium alimente le tube central en ménisques liquides séparés par de l'hélium. Le tube extérieur est alimenté par de l'air comprimé qui détache la bulle et l'entraîne.

Des essais préliminaires ont montré que le débit de bulles de cet émetteur était insuffisant et ont conduit à la réalisation d'émetteurs à une tête basée sur un principe différent. La tête est constituée de trois

tubes concentriques, le premier amène l'hélium, le second le liquide et le troisième l'air. La bulle est formée directement au bout de la sonde. Ce procédé permet d'augmenter notablement le débit de l'émetteur (maximum de l'ordre de 1500 bulles/s). La figure 20 présente les deux émetteurs construits.

Sur la figure 21 on présente les images d'une bulle de savon obtenue sur l'écran à partir d'un hologramme à double exposition. La bulle a environ 1,2 mm de diamètre et le grandissement sur l'écran est de l'ordre de 100.

2.2.2. Gouttelettes d'eau

Les micro-gouttelettes d'eau sont générées à l'aide d'un pulvérisateur de type Napier qui avait été réalisé pour l'étude de mise en oeuvre de la méthode et qui est présenté figure 22. Un jet d'eau alimenté par un tube capillaire interchangeable est cassé par un jet d'air comprimé concentrique dont on peut ajuster la pression génératrice.

On peut ainsi régler la densité du brouillard et centrer la distribution de diamètre sur la valeur désirée (rappelons que le diamètre des particules est réparti suivant une loi de WEIBULL réf. [32]).

Le pulvérisateur est placé dans la chambre de tranquillisation en amont du collecteur de façon que les particules aient le temps de s'adapter à la vitesse de l'écoulement.

En ce qui concerne la répartition de diamètre, nous avons effectué un étalonnage grossier par holographie à simple exposition qui montre que pour le réglage d'injecteur choisi, la courbe de WEIBULL est centrée approximativement entre 15 et 20 μm .

La figure 23 présente l'image obtenue sur l'écran à partir d'un hologramme à double exposition réalisé dans la prise d'air. On voit ici en haut à droite et en bas à gauche les deux positions d'une goutte d'eau d'environ 60 microns de diamètre; le grandissement au niveau de l'écran est de 300.

2.3. RESULTATS

2.3.1. Réponse d'une particule à la turbulence

Au paragraphe 1-5-4, nous avons étudié la réponse d'une particule aux variations de la vitesse moyenne. Il est intéressant de se demander comment va se comporter cette particule en présence d'un écoulement turbulent. Si on se reporte à HINZE [33] l'équation 1-38 reste valable à condition d'ajouter les hypothèses suivantes :

- la turbulence est homogène et entretenue,
- le domaine turbulent est infini,
- la particule est petite comparée à la plus petite longueur d'onde présente dans l'écoulement (par exemple la micro-échelle de KOLMOGOROV).

Dans ce qui suit, nous négligeons les forces extérieures.

On suppose que les vitesses peuvent s'écrire sous forme d'une intégrale de Fourier :

$$v_f = \int_0^{\infty} (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) d\omega$$

$$v_p = \int_0^{\infty} (\gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t) d\omega$$

avec $\omega = 2\pi n$, n fréquence.

Cela étant, HINZE obtient les relations suivantes :

$$\gamma = [1 + f_1(\omega)] \alpha + f_2(\omega) \beta$$

$$\delta = -f_2(\omega) \alpha + [1 + f_1(\omega)] \beta$$

$$f_1(\omega) = \frac{\omega (\omega + c \sqrt{\pi \omega/2})(b-1)}{(a + c \sqrt{\pi \omega/2})^2 + (\omega + c \sqrt{\pi \omega/2})^2}$$

$$f_2(\omega) = \frac{\omega (a + c \sqrt{\pi \omega/2})(b-1)}{(a + c \sqrt{\pi \omega/2})^2 + (\omega + c \sqrt{\pi \omega/2})^2}$$

et

$$a = \frac{36 \mu}{(2\rho_p + \rho_f) d^2} \quad b = \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f} \quad c = \frac{18}{(2\rho_p + \rho_f)d} \sqrt{\frac{\rho_f \mu}{z}}$$

D'autre part, en définissant les spectres Lagrangiens d'énergie E_f et E_p

par :

$$\overline{v_f^2} = \int_0^\infty E_f(n) dn \quad \overline{v_p^2} = \int_0^\infty E_p(n) dn$$

on a :

$$\frac{E_p}{E_f} = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = [1 + f_1(\omega)]^2 + f_2^2(\omega)$$

On ne restreint pas la généralité de ce qui suit en se plaçant dans le cas où $\alpha = 1$ $\beta = 0$.

Etudions tout d'abord le cas d'une bulle de savon. On a $\rho_p = \rho_f$ d'où $f_1(\omega) = f_2(\omega) = 0$ et $\gamma = 1$ $\delta = 0$ donc $E_p = E_f$. On en conclut qu'une bulle de savon répond parfaitement à une fluctuation de vitesse quelle que soit sa fréquence.

Il faut néanmoins remarquer que les bulles utilisées dont le diamètre varie entre 1,2 et 1,6 mm sont certainement loin de vérifier la troisième hypothèse énoncée plus haut et que par conséquent, elles filtrent certainement la turbulence dont l'échelle est inférieure ou comparable au diamètre.

Etudions maintenant le cas des gouttelettes d'eau.

On a $\rho_p = 10^3 \text{ Kg/m}^3$ et $\mu = 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m.s}$ à 290° K .

La figure 24 présente les variations de E_p/E_f en fonction de la fréquence pour différents diamètres. Si l'on se reporte aux mesures au fil chaud effectuées par ARNAUDON et TSEN (réf. [6]), on constate que le spectre de fréquence relevé dans une prise d'air identique à la nôtre, avec un taux de turbulence comparable, couvre à peu près la bande 75 à 7.600 Hz.

Les courbes de la figure 24 montrent qu'une particule de 20 microns répond parfaitement aux fluctuations de fréquence inférieure à 15 Hz et filtrent complètement celles de fréquence supérieure à 2.000 Hz. Pour une particule de 10 microns, on obtient respectivement 50 et 6.000 Hz. Dans les zones turbulentes, les gouttes filtrent toute l'agitation à haute fréquence et donnent une idée de l'importance des mouvements à grande échelle.

Les mesures effectuées par ARNAUDON et TSEN donnent également des indications sur la valeur de la macro-échelle spatiale. A l'intérieur du bulbe, on constate que celle-ci augmente depuis 1,8 mm à l'entrée et atteint une valeur à peu près constante de 4,5 mm pour x voisin de H . On voit par conséquent que les bulles de savon sont loin de vérifier la dernière hypothèse énoncée au début de ce paragraphe. On peut s'attendre à ce que les bulles donnent une indication proche de la vitesse moyenne au voisinage de la section d'entrée, puisque la dispersion des mesures augmente quand on progresse vers l'aval.

Dans le bulbe, la macro-échelle donnée en [6] est de l'ordre de 1 mm. Donc les bulles vont filtrer complètement la turbulence.

En ce qui concerne les gouttes d'eau, il apparaît qu'elles seront toujours beaucoup plus petites que la macro-échelle. Elles devraient par conséquent suivre les fluctuations de vitesse dues aux grosses structures.

La tentative d'approche théorique faite ci-dessus a un champ d'application restreint compte-tenu des hypothèses faites; cependant elle permet d'obtenir un certain nombre d'indications qualitatives.

2.3.2. Résultats pour les gouttes d'eau

Le tableau 1 réunit l'ensemble des mesures qui ont été faites à 40° en utilisant les gouttes d'eau. Les dépouillements ont été effectués dans trois sections : $x = 0$, $x = 40$ mm et $x = 80$ mm. Afin de rendre plus claire la présentation faite sur la figure 25, nous avons sélectionné un certain nombre de points de mesures dans chacune de ces sections. Les valeurs correspondantes sont reportées dans le tableau 2.

La première constatation que l'on peut faire est que l'on n'a pas obtenu de mesures dans le bulbe de recirculation. Ceci est vraisemblablement dû à ce que les gouttes utilisées ont une inertie trop importante pour pouvoir pénétrer dans le bulbe, compte tenu de l'étendue limitée de la zone de mélange. Un remède consisterait à ensemercer directement dans la bulbe à des vitesses d'injection faibles, mais cela est impossible car l'intensité du jet nécessaire à la pulvérisation détruirait complètement l'écoulement.

On remarque ensuite une certaine dispersion, le module de la vitesse et surtout sa direction variant parfois brusquement entre deux points voisins. Cela vient de ce que les mesures ne sont faites ni au même instant ni à la même valeur de z . On peut penser que cette dispersion traduit le caractère instationnaire de l'écoulement. En effet, nous avons vu en 2-3-1 que si les particules sont soumises à des fluctuations, elles peuvent suivre seulement celles de basse fréquence.

De plus, comme nous l'avons vu en 1-5-4, il ne faut pas négliger l'inertie des particules quand elles se trouvent soumises à un champ de vitesses moyennes non uniformes. Pour évaluer l'importance de cet effet,

nous avons détaillé sur la figure 26 certaines mesures effectuées avec les gouttes dont les dimensions obtenues au dépouillement sont sensiblement voisines. Ces mesures ont été faites à proximité du bord d'attaque inférieur, là où le gradient de vitesse est très intense et où l'agitation est faible, car on se trouve hors de la zone de mélange. L'évolution de la vitesse suivant y semble chaotique. Ceci peut s'expliquer de la façon suivante : nous nous trouvons dans la zone d'entrée de la prise d'air, donc là où le brouillard de particules est le plus dense. De plus, nous sommes à proximité d'une paroi, ce qui compte tenu de la légère divergence du faisceau implique des réflexions parasites. Enfin nous sommes près des bords des hublots, ce qui limite le champ d'enregistrement.

Toutes ces causes contribuent à diminuer nettement la qualité de l'hologramme dans cette zone, ce qui laisse à penser que si l'on parvient encore à identifier deux images jumelles, on peut facilement se tromper dans l'évaluation de leur diamètre. Les particules qui sont les moins déviées sont probablement plus grosses que ce qu'indiquent les mesures et compte tenu du sens de l'erreur due à l'inertie, elles sont à éliminer.

La situation est différente dans les sections aval car la plupart des grosses particules ont été éliminées naturellement par choc avec la paroi supérieure. L'hologramme est de qualité nettement meilleure car les défauts signalés au voisinage du bord d'attaque n'existent plus. Il en résulte que la détermination du diamètre des particules est plus précise, de sorte que les écarts obtenus sont dûs à l'inertie centrifuge des particules et aux sollicitations turbulentes.

En ce qui concerne la composante w , on constate qu'elle reste relativement faible (tableau 1). Il paraît difficile de tirer des conclusions quantitatives quant à cette composante car elle est très petite devant la composante longitudinale.

Pour effectuer une comparaison avec les résultats obtenus en [34] à l'anémoclinomètre dans une configuration identique à la nôtre figure (27), il serait nécessaire de pouvoir effectuer des moyennes temporelles sur nos mesures. Cela n'est pas envisageable compte tenu de la quantité d'hologrammes nécessaires pour donner une valeur moyenne significative. Par contre, il est aisé d'effectuer des moyennes spatiales qui permettent en quelque sorte une comparaison globale. Ces moyennes ont été faites dans les trois sections $x = 0$, 40 et 80 mm et sur des intervalles suivant y pour lesquels il existe des mesures à la fois dans nos expériences et dans celles décrites en [34]. Dans la section d'entrée cet intervalle est - 15, + 15 mm. La valeur moyenne du module $\sqrt{u^2 + v^2}/U_0$ obtenu à l'anémoclinomètre vaut 1.04. Celle obtenue avec les gouttes d'eau de taille inférieure à 20 microns est 1.06. Par contre l'incidence moyenne est dans le premier cas de $38,2^\circ$ et dans le deuxième cas de $48,1^\circ$. Il faut remarquer que dans le cas des gouttes d'eau, c'est la zone voisine du décollement qui gonfle beaucoup cette valeur, où l'on peut mettre en doute les indications de l'anémoclinomètre.

Néanmoins, cela n'explique pas tout l'écart observé et il est vraisemblable que l'incidence aérodynamique soit un peu plus élevée en ce qui nous concerne. Si on écarte la proximité du bord d'attaque dans l'évaluation de la moyenne, on trouve une différence d'incidence d'environ 8° .

Dans la section $x = 40$ mm, les moyennes sont prises entre $y = + 3$ mm et $y = + 15$ mm. On trouve pour la vitesse moyenne au pitot 1.23 et pour celle obtenue par holographie 1.25. Par contre l'incidence est dans un cas de $1,3^\circ$ et dans l'autre de 7° .

Enfin dans la section $x = 80$ mm, on trouve pour la vitesse moyenne entre $y = + 6$ mm et $y = + 20$ mm 1.21 au pitot tandis que l'holographie donne 1.29. Les incidences moyennes sont respectivement $- 2^\circ$ et 0° .

On constate que les valeurs moyennes des vitesses sont en assez bon accord. Par contre, les valeurs de l'incidence sont en désaccord. Pour la section $x = 0$, ce désaccord se justifie par la différence d'incidence aérodynamique. Pour les deux autres sections, cette explication n'est pas suffisante : en effet la comparaison des mesures effectuées en référence [34] à 30 et 40° semble montrer qu'une augmentation de l'incidence générale conduit à une diminution de l'angle de la vitesse dans ces sections. La cause la plus vraisemblable de l'écart observé provient dans ce cas de l'inertie des particules.

Pour conclure, en ce qui concerne les gouttes d'eau, nous présentons en figure 28 un dépouillement effectué en suivant la direction du vecteur vitesse. La courbe obtenue devrait être voisine d'une ligne de courant.

2.3.3. Résultats pour les bulles de savon

Le tableau 3 et la figure 29 rassemblent les résultats obtenus avec les bulles de savon.

Rappelons que l'ensemencement a été fait soit par l'amont à l'aide de deux émetteurs placés en parallèle à la sortie du convergent, soit par la paroi inférieure afin d'obtenir des mesures dans le bulbe. Dans la section d'entrée, les bulles présentent un léger déficit de vitesse dû très vraisemblablement au fait que les émetteurs n'étaient pas suffisamment éloignés de la prise d'air.

Il est ici beaucoup plus difficile de faire des moyennes compte tenu de la faible densité de l'ensemencement (la figure 20 est le résultat de la superposition de plusieurs hologrammes).

On constate que dans la partie haute de l'écoulement, le module et la direction de la vitesse présentent des fluctuations relativement importantes. Si l'on se reporte au paragraphe 2.3.1, on remarque que c'est

dans ce domaine que la macro-échelle est la plus grande. Afin d'effectuer une comparaison, nous avons dépouillé sur un hologramme les gouttes d'eau situées au voisinage de la position de quelques bulles de savon. Le résultat est représenté sur la figure 30. On voit que dans la partie aval, l'accord sur les modules est relativement bon; par contre il y a une dispersion sur la direction. Etant données les dimensions de la maquette, la taille des bulles de savon est un handicap important, d'autant plus qu'il s'agit de traceurs déformables. Le dépouillement permet de mettre en évidence des rotations et des distorsions importantes entre les deux images d'une même bulle.

Un avantage des bulles de savon est qu'elles permettent un ensemencement pariétal.

En ce qui concerne le dépouillement, il est plus aisé et plus rapide qu'avec les gouttes d'eau, car les bulles sont peu nombreuses (ce qui améliore la qualité de l'hologramme) et beaucoup plus visibles.

Pour obtenir des résultats quantitatifs valables, il faudrait augmenter le rapport entre les dimensions des bulles et celles de la maquette. A ce sujet, il est intéressant de remarquer que nous avons pu détecter quelques bulles de savon dont le diamètre moyen était de quelques dixièmes de millimètres. Il serait intéressant d'essayer de développer un émetteur capable d'en produire en grande quantité.

CONCLUSION

Cette partie de notre travail constitue une première étape d'une entreprise qui vise à développer un outil de vélocimétrie et à l'appliquer à des écoulements complexes qu'il est difficile d'étudier avec des méthodes classiques. Il ressort de notre étude que l'holographie à double exposition bien qu'elle présente un certain nombre de faiblesse, est une méthode de mesure intéressante, car complémentaire des méthodes existantes.

Pour ce qui est du champ d'application de la méthode dans son état actuel, il faut à notre avis distinguer deux cas :

Dans les écoulements de gaz où l'inertie des particules est la limitation principale, on devra se restreindre à des écoulements permanents, peu turbulents, dans lesquels on pourra déterminer les 3 composantes de la vitesse moyenne.

L'accès à l'aspect instationnaire nécessite soit la modification de la méthode d'enregistrement, soit l'utilisation de particules plus légères telles que le polystyrène dont nous avons fait mention plus haut.

Dans les liquides par contre, où on peut négliger l'inertie des particules, on pourra déterminer des champs de vitesses instantanés dans des écoulements instationnaires. Il est évident que de tels champs de vitesses ne présentent de l'intérêt que si l'on peut les corréler entre eux. Il faudra pour cela que l'aspect instationnaire de l'écoulement ne soit pas totalement aléatoire, et que l'on puisse recalibrer les images par rapport à une échelle de temps.

Pour ce qui est des perfectionnements à apporter à la chaîne de mesure actuellement implantée, notre étude nous conduit à définir trois axes principaux :

- améliorer notre connaissance du comportement d'une particule solide ou liquide dans un écoulement gazeux. Cet effort doit être à la fois théorique

et expérimental. En effet, la littérature ne contient que peu de développements théoriques sur ce sujet, pour la simple raison qu'il n'existe quasiment pas de données expérimentales auxquelles la théorie peut être confrontée. L'holographie est en cela un moyen privilégié d'obtenir ces données, puisqu'elle permet de mesurer la taille et la vitesse d'une particule de diamètre supérieur à $10\ \mu\text{m}$.

- Accéder à la mesure de vitesse des particules plus petites que la taille de diffraction, afin de s'affranchir des problèmes d'inertie dans les écoulements turbulents. Ceci est possible d'ors et déjà sur des champs restreints à l'aide de montages optiques plus complexes que celui mis en oeuvre ici. L'extension du champ étant liée seulement à la puissance du laser d'enregistrement, il est à prévoir qu'il s'agit d'une réalité prochaine.
- Automatiser le dépouillement des hologrammes, qui compte tenu du grandissement important est long et fastidieux. Ceci permettra de s'affranchir du risque d'erreur dû à la fatigue du manipulateur, de diminuer l'intervalle de temps entre la mesure et le résultat, d'augmenter considérablement le volume d'information extrait d'un hologramme. Cet objectif est réalisable à moyen terme.

En ce qui concerne la prise d'air, il est certain que notre travail n'a rien apporté de particulièrement nouveau sur la connaissance de l'écoulement. Ceci est dû en partie aux nombreuses difficultés expérimentales que l'on rencontre lors de la mise en oeuvre d'une méthode, et en partie aux limitations actuelles de cette méthode. Néanmoins, comme nous l'avons vu, les enseignements tirés de cette étude nous laissent beaucoup espérer de l'holographie comme moyen optique de vélocimétrie.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE NUMERIQUE : CALCUL DE L'ECOULEMENT
TURBULENT DECOLLE DANS UNE PRISE D'AIR
BIDIMENSIONNELLE EN INCIDENCE.

Comme il a été dit en introduction, si l'on veut accéder à la compréhension d'écoulements turbulents complexes tels que ceux que l'on rencontre dans une prise d'air, il faut compléter les travaux expérimentaux par une approche théorique de prédiction. C'est le but de cette deuxième partie de notre mémoire. Les progrès accomplis au cours de ces dernières années dans le domaine des ordinateurs, mettent aujourd'hui à la disposition du théoricien un outil puissant. La résolution numérique des équations, couplée à des travaux expérimentaux est donc devenu un moyen essentiel de vérification de la théorie. Dans ce travail, nous visons à réaliser un programme de calcul permettant de connaître les limites d'application des modèles de turbulence simples à un écoulement turbulent décollé à l'intérieur d'une prise d'air en incidence. Ceci devrait permettre de se rendre compte dans quelle mesure ces modèles simples sont capables de décrire correctement les aspects fondamentaux d'un écoulement complexe. Les résultats obtenus serviraient alors de guide à des méthodes plus sophistiquées telles que celles qui ont été évoquées dans l'introduction.

CHAPITRE 1

DESCRIPTION DU PROBLEME

Une étude à caractère un peu fondamental passe en général par une modélisation du problème. C'est le cas pour l'étude des prises d'air à grande incidence; un modèle de prise d'air a été choisi, sur lequel différentes mesures ont été effectuées dans différentes configurations et dans plusieurs laboratoires. Pour notre part, nous nous sommes attachés aux travaux expérimentaux détaillés effectués au C.E.A.T. de Poitiers par ARNAUDON et TSEN [6] et GUILLEMIN ARNAUDON et TSEN [34]. Ces mesures ont été effectuées en incompressible sur un modèle de prise d'air rectangulaire placée en incidence dans un jet à 17 m/s; Elles fournissent la vitesse moyenne en module et direction ainsi que le taux de turbulence, les spectres d'énergie et les macro- échelles spatiales et temporelles.

La prise d'air a une hauteur de 45 mm et un allongement de 8 H. Les résultats sont fournis aux incidences géométriques de 20, 30 et 40 degrés. Les figures 31a et b présentent respectivement les vecteurs vitesses et les profils de taux de turbulence obtenus à 40°. On constate sur la figure 32a qu'il existe un bulbe de recirculation de taille importante puisqu'il occupe la moitié de la prise d'air en hauteur. Ce bulbe est surmonté par une zone de survitesse où passe le débit alimentant le moteur. La frontière entre cette zone et le bulbe est caractérisée par un important gradient de vitesse. Cette partie de l'écoulement que l'on appelle zone de mélange est le siège d'une intense agitation turbulente comme le montre la figure 31b. En aval du bulbe, l'écoulement se rétablit progressivement pour tendre vers un écoulement développé de tuyau. Le pic des profils de taux de turbulence s'étale et

s'aplatit, signifiant que la turbulence tend à s'homogénéiser.

Au vu de ces résultats et dans l'optique d'une modélisation, on peut attribuer à l'écoulement étudié un certain nombre de propriétés qui seront importantes pour le choix des équations et de la modélisation, et qui permettront de mieux en apprécier les limitations.

C'est un écoulement bidimensionnel, du moins en ce qui concerne les vitesses moyennes.

C'est un écoulement visqueux, essentiellement dans la zone de mélange et au voisinage des parois.

C'est un écoulement turbulent, dont la turbulence n'est ni homogène ni isotrope, du moins dans toute la partie amont de la prise d'air.

L'ensemble de ces caractères va poser sur le plan du calcul essentiellement deux problèmes :

Un problème de modélisation car, comme nous le verrons, les modèles que nous utiliserons sont basés sur des hypothèses d'homogénéité et d'équilibre local de la turbulence.

Un problème numérique, car nous devons résoudre des équations elliptiques pour lesquelles un certain nombre de précautions numériques sont à prendre.

CHAPITRE 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

La plupart des écoulements envisagés dans des applications pratiques sont turbulents.

Ce terme signifie que l'écoulement se compose d'un écoulement moyen permanent, sur lequel viennent se superposer des fluctuations irrégulières. Ces fluctuations sont de nature si complexe qu'elles sont restées inaccessibles mathématiquement jusqu'à ce jour. Il en résulte néanmoins un mouvement de mélange qui a pour effet d'augmenter la viscosité et dont les conséquences sont prépondérantes pour la description de l'écoulement.

La turbulence est causée en général d'une augmentation pénalisante des pertes par frottement (donc de la traînée); elle est néanmoins favorable dans certains cas, car elle retarde un décollement de couche limite dans un gradient de pression adverse. La résolution des équations de Navier Stokes dans leur formulation initiale instationnaire s'étant avérée impossible jusqu'à ce jour dans le cas des écoulements turbulents, nous nous limiterons à l'étude de grandeurs moyennées dans le temps. Cette approche a permis de développer des théories et d'obtenir des résultats vérifiés par l'expérience.

Nous donnons ci-dessous un rappel des fondements sur lesquels repose la théorie de la turbulence.

2.1. VITESSES MOYENNES ET FLUCTUATIONS.

Une étude détaillée de l'écoulement turbulent fait apparaître que son caractère le plus fondamental est, qu'en un point donné de l'espace, la vitesse et la pression ne restent pas constantes dans le temps, mais subissent des variations irrégulières et de très haute fréquence. Les particules qui

effectuent ces déplacements fluctuants ne sont pas des molécules mais des agglomérats de taille petite et variable. La taille de ces particules de fluide qui se font et se défont perpétuellement définit "l'échelle de turbulence".

On est donc amené, pour étudier l'écoulement, à décomposer les variables en une valeur moyenne et une valeur de fluctuation. On a :

$$2-1. \quad u_i = \bar{u}_i + u_i'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad T = \bar{T} + T' .$$

Les valeurs moyennes sont données en un point fixé de l'espace par :

$$2-2. \quad \bar{\chi} = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \chi \, dt$$

on suppose t_1 suffisamment grand pour que $\bar{\chi}$ ne dépende pas du temps.

On a alors par définition :

$$2-3. \quad \bar{u}_i' = 0 ; \quad \bar{p}' = 0 ; \quad \bar{\rho}' = 0 ; \quad \bar{T}' = 0 .$$

2.2. EQUATIONS DE REYNOLDS.

Nous avons vu en introduction que dans le problème qui nous intéresse nous nous limitons à un écoulement bidimensionnel de fluide isovolume. Néanmoins, nous présenterons les différentes équations à résoudre dans le cas général tridimensionnel.

L'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes pour un fluide isovolume s'écrivent :

$$2-4. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$2-5. \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u$$

$$2-6. \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v$$

$$2-7. \quad \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w$$

En décomposant les quantités dans les équations en valeur moyenne et fluctuation, et en prenant la moyenne des équations de quantité de mouvement, on obtient deux équations de continuité :

$$2-8. \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

$$2-9. \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

et les équations de Reynolds

$$2-10. \quad \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left(\overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial z}} \right)$$

$$2-11. \quad \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left(\overline{\frac{\partial u'v'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'^2}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial v'w'}{\partial z}} \right)$$

$$2-12. \quad \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left(\overline{\frac{\partial u'w'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'w'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w'^2}{\partial z}} \right)$$

ces trois équations, associées à 2-8, déterminent l'écoulement moyen.

On remarque qu'elles sont identiques aux équations de Navier-Stokes pour les écoulement stationnaires, à l'exception des derniers termes du 2ème membre qui dépendent des vitesses de fluctuation turbulente. Ces termes peuvent être interprétés comme les composantes du tenseur des contraintes

turbulentes, appelé tenseur des contraintes de Reynolds; il s'écrit :

$$2-13. \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho \overline{u'^2} & \rho \overline{u'v'} & \rho \overline{u'w'} \\ \rho \overline{u'v'} & \rho \overline{v'^2} & \rho \overline{v'w'} \\ \rho \overline{u'w'} & \rho \overline{v'w'} & \rho \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

Ces termes turbulents s'ajoutent aux termes visqueux ordinaires.

La contrainte totale est la somme de la contrainte visqueuse et de cette contrainte de Reynolds

$$2-14. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} \end{aligned}$$

etc...

En général, dans un écoulement turbulent, les contraintes visqueuses sont beaucoup plus faibles que les contraintes de Reynolds et on peut les négliger avec une bonne approximation.

Si l'on se reporte aux équations 2-4 à 2-7, qui expriment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, on constate que l'on dispose d'un système fermé de 4 équations à 4 inconnues u, v, w, p . Le fait de décomposer la vitesse instantanée en valeur moyenne et fluctuation conduit aux équations 2-8 et 2-10 à 2-12 qui sont toujours au nombre de quatre, mais introduit six inconnues supplémentaires qui sont les composantes du tenseur des contraintes turbulentes. On voit donc qu'il va falloir fournir un certain nombre d'hypothèses qui permettront de réduire le nombre d'inconnues. C'est le but de la modélisation de la turbulence qui sera exposée en 2-5.

2.3. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LES EQUATIONS DE REYNOLDS.

Les conditions que doivent satisfaire les vitesses moyennes des équations de Reynolds sur une paroi fixe sont les mêmes que pour un écoulement laminaire, c'est-à-dire la condition d'adhérence $u = v = w = 0$. De plus toutes les composantes turbulentes doivent être nulles à la paroi et très petites dans sa proximité immédiate.

Il existe donc une très fine couche de fluide contre la paroi appelée sous couche visqueuse où les forces turbulentes et les forces d'inertie sont négligeables devant les forces visqueuses.

Au-dessus de la sous-couche visqueuse, on trouve une couche de transition où les variations de vitesses sont si grandes qu'elles donnent naissance à des contraintes de friction turbulentes comparables aux contraintes visqueuses, et où les forces d'inertie prennent de l'importance.

Enfin, dans la couche limite turbulente, les contraintes visqueuses deviennent négligeables devant les contraintes de Reynolds.

2.4. EQUATIONS DE TRANSPORT DES GRANDEURS FLUCTUANTES.

Les équations de Reynolds permettent de décrire l'écoulement moyen. Mais nous avons besoin d'équations pour décrire le transport de la turbulence.

2.4.1. Equations de transport des contraintes de Reynolds.

Elles sont au nombre de six et sont déduites des équations de Navier-Stokes en annexe 6. Dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} = & - \left(\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(u'_i u'_j u'_k)} \\
 & - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) + \nu \nabla^2 \overline{u'_i u'_j} - 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k}
 \end{aligned}$$

I
II
III

2-15.

IV
V
VI

2.4.2. Equation de transport pour l'énergie turbulente.

L'énergie cinétique totale moyenne $\frac{\overline{u_i^2}}{2}$ se décompose en l'énergie cinétique de l'écoulement moyen $\frac{\overline{u_i^2}}{2}$ et l'énergie cinétique turbulente :

$$2-17. \quad k = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2}$$

L'équation de transport pour cette grandeur scalaire s'obtient à partir de l'équation 2-15 pour les contraintes de Reynolds par contraction des indices i et j . En remplaçant l'indice k par j, elle s'écrit :

$$\overline{u_j} \frac{\partial K}{\partial x_j} = - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j' u_i' u_i'}) - \frac{1}{\rho} \overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}$$

$$2-18. \quad \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array}$$

$$+ \nu \nabla^2 k - \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2$$

$$\begin{array}{cc} \text{V} & \text{VI} \end{array}$$

Le terme I représente la variation convective due à l'écoulement moyen de l'énergie turbulente k le long d'une ligne de courant.

Le terme II est un terme de production. En effet, nous verrons plus loin que ce terme apparaît changé de signe dans l'équation pour l'énergie cinétique moyenne. Il exprime donc une transformation de l'énergie cinétique moyenne en énergie cinétique turbulente.

Les termes III et IV regroupés s'écrivent :

$$-\overline{u'_j \frac{1}{2} \frac{\partial u'_i{}^2}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho} \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} = -\overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} p' + k' \right)} \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i{}^2}$$

ce terme représente donc la convection par la turbulence de la pression totale turbulente.

Les termes V et VI représente les effets visqueux qui ne peuvent être que de deux types dans un équation de transport :

- 1) une dissipation d'énergie turbulente en chaleur
- 2) un transport moléculaire d'énergie turbulente. On peut transformer

V + VI de la façon suivante :

$$2-19. \quad \nu \nabla^2 k - \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\underbrace{u'_i \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{(1)} \right] - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \underbrace{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{(2)}$$

Avant de donner une interprétation de ces termes, il est intéressant d'écrire l'équation de transport pour l'énergie cinétique instantanée :

$$2-20. \quad \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{u_i u_i}{2}}_I = - \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \underbrace{\left(\frac{P}{\rho} + \frac{u_i u_i}{2} \right)}_{II} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\underbrace{u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{III} \right] - \nu \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{IV}$$

Cette équation exprime que les variations locales par unité de masse et de temps de l'énergie cinétique (I) sont égales à la somme des variations convectives de la pression totale (II), de la diffusion moléculaire (III) et de la dissipation en chaleur par frottement (IV).

L'analogie entre les termes III et IV de l'équation 2-20 et les termes (1) et (2) de l'équation 2-19 nous conduit à dire que :

le terme (1) représente le transport moléculaire d'énergie turbulente.

le terme (2) représente la dissipation visqueuse par unité de masse.

On constate par conséquent que le terme V de l'équation 2-18 ne peut pas être interprété comme un terme de transport pur, et le terme VI comme un terme de dissipation pure. Sauf dans une partie de l'écoulement où la turbulence est homogène, et où on a :

$$2-21. \quad \frac{\partial(\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_k} = 0$$

d'où :

$$2-22. \quad \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_i' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)} \right] = \nu \nabla^2 k$$

et

$$2-23. \quad \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) = \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2$$

Le terme de dissipation visqueuse (2) est souvent noté ϵ dans la littérature.

2.5. MODELE DE TURBULENCE

Nous avons vu en 2-2 que les équations de Reynolds comportent plus d'inconnues que d'équations. Il est donc nécessaire de "fermer" ce système soit en rajoutant des équations, soit en exprimant certaines inconnues comme

fonctions des autres à l'aide d'un "modèle".

La première idée qui vient à l'esprit, consiste à écrire des équations de transport pour ces neuf contraintes. C'est ce qui a été fait en 2-4-1 où nous avons abouti à l'équation 2-16. On constate qu'en écrivant cette équation, on ne résoud en rien le problème puisque l'on ajoute des inconnues supplémentaires telles que les corrélations triples de vitesses et les corrélations vitesse pression.

On voit par conséquent apparaître ici la nécessité d'une modélisation, c'est-à-dire de l'établissement d'un certain nombre d'hypothèses sur les termes inconnus des équations qui vont permettre de fermer le système et donc de le résoudre. Cette fermeture des équations peut s'effectuer actuellement à deux niveaux :

- au niveau des équations de transport pour les contraintes de Reynolds dont on modélise les termes inconnus. On doit alors résoudre un système de 11 équations, car on adjoint en général une équation supplémentaire pour la dissipation d'énergie turbulente. Pour ce type de modélisation qui est actuellement la plus sophistiquée, on peut citer les contributions de LAUNDER [35] et LUMLEY [36]. Néanmoins, les applications ne sont qu'au stade des écoulements régis par des équations de type parabolique (couche limite, jet).

- fermeture au niveau des équations de Reynolds elles-mêmes en modélisant les contraintes turbulentes. Ce type de modèle est étudié depuis beaucoup plus longtemps et il en existe donc une grande variété; depuis le modèle basé sur la longueur de mélange de Prandtl [37] jusqu'au modèle à deux équations de transport pour l'énergie turbulente et la dissipation de cette énergie [38]. Tous ces modèles sont basés sur l'hypothèse de Boussinesq qui relie le tenseur des contraintes turbulentes au tenseur taux de déformation de l'écoulement moyen à l'aide d'une viscosité turbulente.

Le fondement de cette hypothèse apparaît clairement quand on écrit l'équation de transport pour l'énergie cinétique moyenne [33] :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_j \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) &= - \left(- \overline{u_i' u_j'} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(- \overline{u_i' u_j' u_i} \right) \\
 &\quad \text{I} \qquad \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \qquad \text{III} \\
 2-24. \quad + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{u}_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] &- \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\
 &\quad \text{IV} \qquad \qquad \qquad \text{V}
 \end{aligned}$$

La signification des différents termes est la suivante :

I : variation convective de la pression et de l'énergie cinétique.

II : travail de déformation par les contraintes turbulentes. Pour $i \neq j$, $-\overline{u_i' u_j'}$ et $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ont le même signe, de sorte que ce terme prélève de l'énergie à l'écoulement moyen. Comme nous l'avons remarqué précédemment ce terme se retrouve changé de signe dans l'équation pour l'énergie turbulente. L'énergie prélevée sur l'écoulement moyen sert donc à alimenter la turbulence.

III : Diffusion turbulente de l'énergie cinétique moyenne.

IV : Diffusion moléculaire de l'énergie cinétique moyenne.

V : Dissipation visqueuse.

On constate par conséquent que les contraintes turbulentes $-\overline{u_i' u_j'}$ et les contraintes visqueuses $\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ jouent des rôles tout à fait analogues, et ceci nous conduit à exprimer les premières en fonction du taux de déformation de l'écoulement moyen. C'est l'hypothèse de Boussinesq généralisée :

$$2-25. \quad \overline{u_i' u_j'} = - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

Le terme $\frac{2}{3} k \delta_{ij}$ est ajouté pour éviter que la trace du tenseur des contraintes modélisé ne soit nulle. On remarquera que la formulation de ce terme implique l'isotropie locale de la turbulence.

Grâce à cette hypothèse, nous voyons que l'on réduit le nombre d'inconnues supplémentaires de 9 à 2, à savoir v_t et k . Le problème est que la viscosité turbulente que nous avons introduit n'est pas comme la viscosité laminaire ν une propriété intrinsèque du fluide, mais qu'elle dépend au contraire des caractéristiques locales de la turbulence. Il nous faut donc la relier à des grandeurs caractéristiques de la turbulence.

Pour ce faire, nous allons reprendre l'hypothèse de Prandtl-Kolmogorov qui consiste à supposer que la turbulence est en équilibre local. La figure 32 présente la densité spectrale d'énergie de la turbulence en équilibre local. Les grosses structures de fréquence basse prélève comme nous l'avons vu précédemment (termes II de 2-26) l'énergie de l'écoulement moyen dans les zones de fort gradient. Cette énergie est transférée à des structures de plus en plus petites pour être finalement dissipée en chaleur par des structures dont la taille est fixée par la viscosité du fluide. On constate donc qu'il existe des structures turbulentes de toutes les tailles. Néanmoins, si on fait l'hypothèse que la turbulence est en équilibre local, c'est-à-dire que le transfert d'énergie à travers le spectre est constant et égal à la dissipation d'énergie turbulente, alors, la turbulence peut être caractérisée par les seules grosses structures, celles qui prélèvent l'énergie dans l'écoulement moyen.

Ces structures peuvent elles-même être caractérisées par une échelle de vitesse : \sqrt{k} et par une échelle de longueur que nous noterons ℓ . L'analogie avec la viscosité laminaire conduit alors à la formule suivante pour la viscosité turbulente :

2-26.

$$v_t = c \frac{k^{1/2}}{\mu} \ell$$

C_μ est une constante d'ordre 1 à ajuster.

On constate que cette équation ne fait que déplacer le problème puisqu'on dispose toujours de deux inconnues supplémentaires k et ℓ .

Intéressons nous tout d'abord à l'énergie turbulente. Notre intention est de la calculer à l'aide de l'équation de transport écrite en 2-4-2. Compte tenu des considérations faites dans ce paragraphe elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \underbrace{- \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}_{\text{II}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(\overline{u_j' u_i' u_i'})}_{\text{III}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(\overline{u_j' p'})}_{\text{III}_b} \\
 &+ \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left[\overline{u_i'} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right]}_{\text{III}_c} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)}_{\text{IV}}
 \end{aligned}$$

2-27.

Si l'on prend en compte l'hypothèse de Boussinesq, seul les termes III et IV sont inconnus, donc à modéliser.

Si le nombre de Reynolds de la turbulence $R_t = k^{1/2} \ell / \nu$ est suffisamment grand, ce qui est le cas dès que l'on s'éloigne des couches visqueuses, le terme de diffusion moléculaire IIIc est négligeable devant le terme de diffusion turbulente IIIa.

Le terme de corrélation vitesse pression IIIb peut s'exprimer à l'aide d'une hypothèse de type Boussinesq en fonction du gradient de pression moyenne :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j' p'}) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_p} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right)$$

2-28.

Néanmoins, cette modélisation pose un problème dans notre cas, car nous verrons plus loin que dans le système d'équations que nous avons choisi de résoudre la pression moyenne n'est pas calculée. D'autre part, on constate que cette corrélation est difficile à mesurer, et que l'on ne dispose pas de données expérimentales pour calibrer la constante σ_p . Cependant HARLOW et NAKAYAMA [39] propose une solution couplée à la modélisation du terme IIIa.

Pour notre part, nous négligerons ce terme.

Le terme de corrélation triple de vitesse IIIa est également modélisé avec une hypothèse de type Boussinescq :

$$2-29. \quad \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j' u_i' u_i'}) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

on introduit par cette relation une constante arbitraire σ_k à fixer. Il nous reste pour fermer l'équation 2-29 à modéliser le terme de dissipation visqueuse.

L'hypothèse de l'équilibre local de la turbulence nous a conduit à supposer, que toute l'énergie reçue par la turbulence à travers les grosses structures est transférée vers les petites structures et que ce sont elles seules qui dissipent cette énergie en chaleur. On voit donc que dans cette hypothèse ce sont les grosses structures de la turbulence qui caractérisent la dissipation visqueuse. L'énergie qu'elles contiennent étant k , nous les avons caractérisées par l'échelle de vitesse \sqrt{k} et l'échelle de longueur ℓ . L'échelle de temps qui s'en déduit est \sqrt{k}/ℓ et le transfert aux petites structures dissipatives est donc proportionnel à $k \sqrt{k}/\ell$. Le terme IV est donc modélisé de la façon suivante :

$$2-30. \quad \varepsilon = C_D k^{3/2}/\ell$$

On obtient la forme suivante pour l'équation modélisée :

$$2-31. \quad \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

Soit encore :

$$2-32. \quad \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

Il nous reste à ce stade à prescrire les valeurs des trois constantes C_μ , C_D et σ_k et à définir l'échelle de longueur l .

Pour déterminer C_μ et C_D , on considère l'écoulement à proximité d'une paroi. Dans ce cas, on peut montrer [40] que l est proportionnelle à la longueur de mélange de Prandtl. On a :

$$2-33. \quad l = \left(\frac{C_D}{C_\mu^3} \right)^{1/4} \cdot l_m$$

avec

$$l_m = H y, \quad H = 0.4$$

Suivant RUNCHAL [41], on doit avoir dans une couche de paroi $l = y$ ce qui conduit à la relation

$$2-34. \quad \left(\frac{C_D}{C_\mu^3} \right)^{1/4} = 2.5$$

D'après RODI [40] on doit avoir

$$2-35. \quad C_\mu \cdot C_D \approx .08$$

(SPALDING [42] déduit une valeur un peu plus faible de l'expérience :

$$C_\mu \cdot C_D = .063)$$

Les relations 2-33 et 2-34 conduisent à :

$$2-36. \quad C_\mu = .213 \quad C_D = .376$$

On prend de plus : [40]

$$2-37. \quad \sigma_k = 1.$$

Pour l'échelle de longueur nous avons choisi d'utiliser dans la zone pleinement turbulente la longueur de mélange obtenue pour un écoulement de tuyau pleinement développé par ZAGUSTIN et ZAGUSTIN [43].

$$2-38. \quad \ell_m = \frac{H}{3} \left(1 - \left(2 \frac{y}{H} \right)^3 \right)$$

De plus nous supposons que ℓ reste proportionnelle à ℓ_m dans la zone pleinement turbulente. Compte tenu de ce qui précède on a :

$$2-39. \quad \ell = 2.5 \times \ell_m$$

Nous reviendrons en 2-7-3 sur l'échelle de longueur choisie dans les couches de parois.

2.6. SYSTEME D'EQUATIONS RESOLU.

Les équations de Navier-Stokes présentent un inconvénient; en écoulement de fluide incompressible, la pression n'apparaît dans les équations que par ses dérivées spatiales. Ceci conduit à un traitement numérique plus délicat. Afin d'éliminer la pression, nous n'allons pas résoudre les équations de Reynolds 2-10 à 2-12 mais les équations pour le tourbillon et la fonction de courant que l'on peut en déduire dans le cas d'un écoulement bidimensionnel.

Pour simplifier l'écriture, nous remplaçons à partir de maintenant les variables surlignées par des variables non surlignées ayant la même signification.

Les équations 2-10 et 2-11 s'écrivent dans ce cas :

$$2-40 \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}'^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}'v')$$

$$2-41. \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}'v') - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}'^2)$$

L'équation 2-25 devient :

$$\overline{u'^2} = -v_t (2 u_x) + \frac{2}{3} k$$

2-42.

$$\overline{u'v'} = -v_t (u_y + v_x)$$

$$\overline{v'^2} = -v_t (2 v_y) + \frac{2}{3} k$$

Soit en remplaçant dans 2-40 et 2-41

$$2-43. \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + \left[(v+v_t) u_x \right]_x + \left[(v+v_t) u_y \right]_y \\ + v_{tx} u_x + v_{ty} v_x$$

$$2-44. \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} + \left[(v+v_t) v_x \right]_x + \left[(v+v_t) v_y \right]_y \\ + v_{tx} u_y + v_{ty} v_y .$$

Posons $v_e = v + v_t$.

Si nous introduisons maintenant la fonction de courant ψ et l'opposé du tourbillon ω définis par les relations :

$$2-45. \quad u = \psi_x \quad v = -\psi_y$$

$$2-46. \quad \omega = u_y - v_x$$

nous pouvons écrire une équation de transport pour ω déduite des équations 2-43 et 2-44 :

$$2-47. \quad u \omega_x + v \omega_y = (v_e \omega)_{xx} + (v_e \omega)_{yy} + 2 [\{ v_e (u_x - v_y) \}]_{xy} \\ - (v_e v_x)_{yy} - (v_e u_y)_{xx}]$$

L'équation pour la fonction de courant se déduit directement de la relation 2-46 :

$$2-48. \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega$$

Nous allons donc résoudre le système 2-47, 2-48, auquel il faut adjoindre la relation 2-26, l'équation de transport pour l'énergie turbulente :

$$2-49. \quad uk_x + vk_y = \left(\frac{v_t}{\sigma_K} k_x \right)_x + \left(\frac{v_t}{\sigma_K} k_y \right)_y + P - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

$$2-50. \quad \text{avec } P = v_t (2 u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2 v_y^2)$$

et la relation 2-39 qui fournit l'échelle de longueur. On dispose ainsi d'un système de trois équations aux dérivées partielles à trois inconnues ψ , ω et k .

2.7. CONDITIONS AUX FRONTIÈRES ET CONDITIONS INITIALES.

Nous nous proposons de résoudre un problème elliptique, il nous faut donc prescrire des conditions sur toutes les frontières du domaine de calcul. De plus, bien que l'on se limite à la résolution du problème stationnaire, il nous faut initialiser les variables dans tout le champ.

Le domaine de calcul représenté figure 32 est rectangulaire. Il est constitué par les deux parois solides haute et basse, par la section d'entrée et par la section de sortie.

2.7.1. Conditions à l'entrée

On impose les deux composantes $u(0,y)$ et $v(0,y)$ de la vitesse à l'entrée à partir de données expérimentales [34]. On en déduit :

$$2-51. \quad \psi(0,y) = \int_0^y u_1(0,y) dy$$

$$2-52. \quad \omega(0,y) = \psi_{xx}(0,y) + \psi_{yy}(0,y)$$

On suppose que l'énergie turbulente est nulle dans la section d'entrée :
 $k(0,y) = 0$.

Remarque : Pour les tests préliminaires effectués sur un écoulement turbulent développé entre parois parallèles, on utilise des valeurs expérimentales de $k(0,y)$.

2.7.2. Conditions à la sortie

On suppose que la section de sortie se trouve suffisamment loin en aval pour que l'écoulement soit à peu près établi.

On a alors :

$$2-53. \quad v(L,y) = v_x(L,y) = 0.$$

On en déduit :

$$2-54. \quad \psi_x(L,y) = \psi_{xx}(L,y) = 0.$$

$$2-55. \quad \omega(L,y) = \psi_{yy}(L,y).$$

De plus on suppose :

$$2-56. \quad k_x(L,y) = 0.$$

2.7.3. Traitement particulier des zones de parois.

- Mise en équations, modèle de turbulence -

A proximité de la paroi, l'écoulement présente deux particularités qui rendent son traitement numérique délicat.

D'une part, la turbulence s'atténue jusqu'à s'annuler dans la sous-couche visqueuse, ce qui remet en cause les hypothèses faites pour la modélisation.

D'autre part, cette zone est le siège de gradients transversaux de vitesse très importants, ce qui nécessite un maillage très fin si l'on veut une résolution numérique correcte.

Dans un premier temps [4], nous avons choisi d'intégrer analytiquement l'équation de quantité de mouvement longitudinale simplifiée par l'hypothèse $v = 0$. Il s'agissait des "fonctions de paroi" de l'Imperial College [45].

Par la suite, nous avons préféré résoudre numériquement cette équation ainsi que l'équation de l'énergie simplifiée par la même hypothèse. Les calculs effectués n'étant pas concluants, nous avons complété ces deux équations par l'équation de continuité, en tenant compte de la vitesse transversale v dans le terme de production de l'équation pour K .

En 2-5, nous avons fait l'hypothèse que la turbulence était caractérisée par une seule échelle de longueur. Quand on approche d'une paroi, le nombre de Reynolds de la turbulence diminue, et les hypothèses faites pour modéliser le terme de dissipation ne sont plus valables.

Suivant WOLFSHTEIN [46], nous avons conservé la forme obtenue pour ce terme, mais nous distinguons entre l'échelle de longueur ℓ_D qui caractérise la dissipation et celle ℓ_μ qui intervient dans la viscosité turbulente.

En conséquence, les équations que nous proposons de résoudre s'écrivent :

$$2-57. \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(v_e \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$2-58. \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell_D} = 0$$

$$2-59. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$2-60. \quad P = v_t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$2-61. \quad v_t = C_\mu k^{1/2} \ell_\mu .$$

Nous utilisons pour ℓ_μ et ℓ_D les expressions proposées par WOLFSHTEIN [46] :

$$2-62. \quad \ell_\mu = y [1 - \exp(-A_\mu R)]$$

$$2-63. \quad \ell_D = y [1 - \exp(-A_D R)]$$

$$2-64. \quad \text{avec : } R = k^{1/2} y/v$$

Nous avons représenté sur le tableau 4 les valeurs des 5 constantes C_μ , C_D , σ_k , A_μ , A_D choisies par différents auteurs comparées aux valeurs que nous nous proposons d'utiliser. Le choix des valeurs de C_μ , C_D et σ_k a été défini au paragraphe 2-5. On voit que ces valeurs diffèrent légèrement de celles utilisées par WOLFSHTEIN [46].

Pour A_μ et A_D , WOLFSHTEIN propose .016 et .263. Pour définir ces valeurs, il se base sur des données expérimentales dans la sous-couche

visqueuse qui fournissent les deux relations suivantes :

$$2-65. \quad \frac{C_D}{A_D} = 1.582$$

$$C_{\mu} \cdot A_{\mu} = .00352$$

ce qui dans notre cas conduit à : $A_{\mu} = .0165$, $A_D = .238$.

On voit que quand on s'éloigne de la paroi on a : $l_{\mu} \sim l_D \sim y$
 or quand y tend vers zéro, l'expression 2-39 donne $l \sim y$; on a donc bien
 raccordement entre les échelles de longueur des couches de paroi et celle
 utilisée dans le domaine extérieur.

- Conditions aux limites.

A la paroi, la vitesse et l'énergie turbulente sont nulles :

$$2-66. \quad y = 0, \quad u = v = 0, \quad k = 0$$

A la frontière extérieure, qui se trouve à une distance y_G de la
 paroi, il faut assurer le raccordement entre les domaines de calcul. Pour
 cela, nous allons assurer la continuité des variables u , v , ω , ψ et k et
 des dérivées transversales de u , v et k . On prescrit à l'aide du calcul
 de l'écoulement extérieur les vitesses longitudinale et transversale et la
 dérivée de l'énergie turbulente :

$$2-67. \quad y = y_G : u = u_G^*, \quad v = v_G^*, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \alpha_G^*$$

L'indice supérieur * signifiant que le calcul s'effectue dans
 l'écoulement extérieur.

Le calcul de l'écoulement dans la zone de paroi (indice supérieur +)
 nous fournit les conditions aux limites suivantes pour l'écoulement extérieur :

$$2-68. \quad y = y_G : \quad \omega = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_G^+ - \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_G^+, \quad \psi = \int_0^{y_G} u \, dy, \quad K = K_G^+$$

Il nous reste, pour compléter les conditions à la frontière extérieure de la zone de paroi à prescrire le gradient longitudinal de pression.

Pour cela, on écrit l'équation de quantité de mouvement longitudinale à la frontière de la couche de paroi en négligeant les termes de convection ainsi que deux autres termes d'ordre plus élevé qui proviennent de la contrainte de Reynolds :

$$2-69. \quad \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(v_e \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_e \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Dans cette équation, les dérivées suivant y intervenant au second membre sont évaluées dans l'écoulement extérieur à la couche de paroi.

Ce qui précède concerne la paroi inférieure, la paroi supérieure est traitée de la même manière en changeant y en $H-y$ et v en $-v$.

2.7.4. Conditions initiales.

Les variables ψ et ω sont initialisées par intégration et dérivation du profil des vitesses dans un tuyau où est établi un écoulement turbulent pleinement développé. L'énergie est initialisée à partir d'une répartition de viscosité turbulente proposée en [43] pour cet écoulement

CHAPITRE 3

PROBLEME AUX DIFFERENCES FINIES

Le chapitre 2 nous a conduit à écrire un système de trois équations aux dérivées partielles accompagné d'un certain nombre de conditions aux frontières. Il nous faut maintenant choisir une méthode de résolution de ce système. Notre choix s'est porté sur une méthode aux différences finies existante et éprouvée, élaborée par GOSSMAN et al. [51]. Mais avant de décrire la méthode de discrétisation des équations, il nous faut parler du maillage du domaine de calcul.

3.1. CHOIX DU MAILLAGE.

La figure 32 présente le domaine de calcul ainsi que son découpage et le maillage que nous avons choisi. Comme il a été dit plus haut, ce domaine est divisé en trois sous domaines :

Un domaine central où sont résolues les trois équations pour ω , ψ et k . Dans un premier temps ce domaine a été maillé uniformément avec un maillage carré ($DX = DY$). Ensuite, dans le but d'étendre le domaine de calcul vers l'aval, et de raffiner le maillage au voisinage des parois, on a utilisé un maillage rectangulaire non uniforme.

Deux couches de parois où sont résolues l'équation de quantité de mouvement longitudinale, l'équation de continuité et l'équation pour l'énergie turbulente. Dans ces couches de paroi, le maillage longitudinal est identique à celui du domaine extérieur, et le maillage transversal est exponentiel.

3.2. DISCRETISATION DES EQUATIONS

3.2.1. Discretisation dans le domaine central.

Les trois équations résolues dans ce domaine peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$2-70. \quad a_{\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[b_{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (c_{\phi} \phi) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[b_{\phi} \frac{\partial}{\partial y} (c_{\phi} \phi) \right] + d_{\phi} = 0$$

Le tableau 5 présente l'expression des coefficients a_{ϕ} , b_{ϕ} , c_{ϕ} , d_{ϕ} pour les trois équations résolues. La technique de discrétisation consiste à intégrer cette équation locale sur un petit domaine élémentaire entourant un point courant du maillage. La figure 34 présente les notations choisies pour nommer les points adjacents au point central P de ce domaine élémentaire.

L'équation obtenue par intégration s'écrit :

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} a_{\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] dx dy - \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial x} \left[b_{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (c_{\phi} \phi) \right] dx dy$$

$$2-71. \quad - \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial y} \left[b_{\phi} \frac{\partial}{\partial y} (c_{\phi} \phi) \right] dx dy + \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} d_{\phi} dx dy = 0$$

Appelons I_{conv} le terme de convection, I_{diff} le terme de diffusion et I_{sour} le terme source. Il vient :

$$2-72. \quad I_{conv} = a_{\phi P} \left[\int_{y_s}^{y_n} \left\{ \phi_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_e - \phi_w \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_w \right\} dy - \int_{x_w}^{x_e} \left\{ \phi_n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_n - \phi_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_s \right\} dx \right]$$

$$2-73. \quad I_{diff} = \int_{y_s}^{y_n} \left[b_{\phi_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (c_{\phi} \phi) \right\}_e - b_{\phi_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (c_{\phi} \phi) \right\}_w \right] dy \\ + \int_{x_w}^{x_e} \left[b_{\phi_n} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (c_{\phi} \phi) \right\}_n - b_{\phi_s} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (c_{\phi} \phi) \right\}_s \right] dy$$

$$2-74. \quad I_{\text{sour}} = \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} d\phi \, dx \, dy$$

avec :

$$2-75. \quad I_{\text{conv}} - I_{\text{diff}} + I_{\text{sour}} = 0 .$$

Evaluation du terme de convection

On introduit les valeurs moyennes sur chaque segment d'intégration :

$$I_{ce} = \int_{y_s}^{y_n} \phi_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_e dy = \bar{\phi}_e (\psi_{ne} - \psi_{se})$$

$$I_{cw} = \int_{y_s}^{y_n} \phi_w \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_w dy = \bar{\phi}_w (\psi_{nw} - \psi_{sw})$$

2-76.

$$I_{cn} = \int_{x_w}^{x_e} \phi_n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_n dx = \bar{\phi}_n (\psi_{ne} - \psi_{nw})$$

$$I_{cs} = \int_{x_w}^{x_e} \phi_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_s ds = \bar{\phi}_s (\psi_{se} - \psi_{sw})$$

Pour évaluer la valeur moyenne de ϕ , on utilise la technique de la différence amont :

$$\bar{\phi}_e = \phi_P \text{ si } \psi_{ne} - \psi_{se} > 0$$

$$\bar{\phi}_e = \phi_E \text{ si } \psi_{ne} - \psi_{se} \leq 0$$

d'où

$$I_{ce} = \frac{1}{2} (\phi_P AE2 - \phi_E AE1)$$

$$I_{cw} = \frac{1}{2} (-\phi_P AW1 + \phi_W AW2)$$

2-77.

$$I_{cn} = \frac{1}{2} (-\phi_P AW1 + \phi_N AN2)$$

$$I_{cs} = \frac{1}{2} (\phi_P AS2 - \phi_S AS1)$$

avec :

$$AE1 = -(\psi_{ne} - \psi_{se}) + |\psi_{ne} - \psi_{se}|$$

$$AE2 = (\psi_{ne} - \psi_{se}) + |\psi_{ne} - \psi_{se}|$$

$$AW1 = -(\psi_{nw} - \psi_{sw}) + |\psi_{nw} - \psi_{sw}|$$

2-78.

$$AW2 = (\psi_{nw} - \psi_{sw}) + |\psi_{nw} - \psi_{sw}|$$

$$AN1 = -(\psi_{ne} - \psi_{nw}) + |\psi_{ne} - \psi_{nw}|$$

$$AN2 = (\psi_{ne} - \psi_{nw}) + |\psi_{ne} - \psi_{nw}|$$

$$AS1 = -(\psi_{se} - \psi_{sw}) + |\psi_{se} - \psi_{sw}|$$

$$AS2 = (\psi_{se} - \psi_{sw}) + |\psi_{se} - \psi_{sw}|$$

et

$$\psi_{ne} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_E + \psi_N + \psi_{NE})$$

$$\psi_{se} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_E + \psi_S + \psi_{SE})$$

2-79.

$$\psi_{nw} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_W + \psi_N + \psi_{NW})$$

$$\psi_{sw} = \frac{1}{4} (\psi_P + \psi_W + \psi_S + \psi_{SW})$$

Il vient alors :

$$I_{\text{conv}} = \frac{1}{2} a_{\phi P} \{ \phi_P [AE2 + AW1 + AN1 + AS2] - \phi_E AE1 \\ - \phi_W AW2 - \phi_N AN2 - \phi_S AS1 \}$$

Evaluation du terme de diffusion

On fait là encore l'approximation de valeur moyenne :

$$I_{de} = \int_{y_s}^{y_n} b\phi_e \left(\frac{\partial}{\partial x} (c_\phi \phi) \right)_e dy = \frac{b\phi_E + b\phi_P}{2} \frac{C\phi_E \phi_E - C\phi_P \phi_P}{x_E - x_P} \frac{(y_N - y_S)}{2}$$

$$I_{dw} = \int_{y_s}^{y_n} b\phi_w \left(\frac{\partial}{\partial x} (c_\phi \phi) \right)_w dy = - \frac{b\phi_W + b\phi_P}{2} \frac{C\phi_W \phi_W - C\phi_P \phi_P}{x_P - x_W} \frac{(y_N - y_S)}{2}$$

2-81.

$$I_{dn} = \int_{x_w}^{x_e} b\phi_n \left(\frac{\partial}{\partial y} (c_\phi \phi) \right)_n dx = \frac{b\phi_N + b\phi_P}{2} \frac{C\phi_N \phi_N - C\phi_P \phi_P}{y_N - y_P} \frac{(x_E - x_W)}{2}$$

$$I_{ds} = \int_{x_w}^{x_e} b\phi_s \left(\frac{\partial}{\partial y} (c_\phi \phi) \right)_s dx = - \frac{b\phi_S + b\phi_P}{2} \frac{C\phi_S \phi_S - C\phi_P \phi_P}{y_P - y_S} \frac{(x_E - x_W)}{2}$$

Il vient :

$$I_{\text{diff}} = \frac{1}{2} \left[- (BE + BW + BN + BS) C\phi_P \phi_P + BE \cdot C\phi_E \phi_E + BW C\phi_W \phi_W \\ + BN C\phi_N \phi_N + BS C\phi_S \phi_S \right]$$

2-82.

avec

$$BE = \frac{(b\phi_E + b\phi_P)}{2} \frac{(y_N - y_S)}{(x_E - x_P)} \quad BW = \frac{(b\phi_W + b\phi_P)}{2} \frac{(y_N - y_S)}{(x_P - x_W)}$$

2-83.

$$BN = \frac{(b\phi_N + b\phi_P)}{2} \frac{(x_E - x_W)}{(y_N - y_P)} \quad BS = \frac{(b\phi_S + b\phi_P)}{2} \frac{(x_E - x_W)}{(y_P - y_S)}$$

Evaluation du terme source.

On suppose qu'il est constant sur le domaine d'intégration et égal à sa valeur en P :

$$2-84. \quad I_{\text{sour}} = \int_{x_W}^x \int_{y_S}^y d_\phi \, dx \, dy = \frac{1}{4} d\phi_P (x_E - x_W)(y_N - y_S)$$

Compte tenu de 2-80, 2-82 et 2-84, l'équation 2-75 s'écrit :

$$\{a\phi_P (AE2 + AW1 + AN1 + AS2) + (BE + BW + BN + BS) C\phi_P\} \phi_P =$$

$$2-85. \quad a\phi_P (\phi_E AE1 + \phi_W AW2 + \phi_N AN2 + \phi_S AS1) + BE C\phi_E \phi_E \\ + BW C\phi_W \phi_W + BN C\phi_N \phi_N + BS C\phi_S \phi_S \\ - \frac{1}{2} d\phi_P (x_E - x_W)(y_N - y_S)$$

Il suffit de remplacer les coefficients présentés dans le tableau 5 pour obtenir les trois équations discrétisées. Dans les termes sources, les dérivées sont évaluées par différences centrées. Une variante est appliquée à l'équation pour l'énergie, le terme de dissipation qui fait intervenir la valeur k_p est passé au premier membre de 2-85.

3.2.2. Discrétisation dans les couches de paroi.

On utilise un maillage exponentiel en y de façon à employer un minimum de points dans la couche de paroi. La maille est représentée fig. 34.

L'équation 2-57 discrétisée donne :

$$2-86. \quad A u_N + B u_P + C u_S - P' = 0$$

avec

$$2-87. \quad \frac{v_{eN} + v_{eP}}{(HN+HS)H_N} \quad B = -A - C \quad C = \frac{v_{eP} + v_{eS}}{(HN+HS)HS}$$

L'équation 2-58 conduit à :

$$2-88. \quad A K_N + B K_P + C K_S + D = 0$$

avec

$$A = \frac{2v + (v_{tP} + v_{tN})/\sigma_k}{(HN + HS) HN} \quad B = -A - C - \left[C_D \frac{K^{3/2}}{\ell_D} \right]_P$$

2-89.

$$C = \frac{2v + (v_{tP} + v_{tS})/\sigma_k}{(HN + HS) HS} \quad D = v_{tP} \left[u_y^2 + 2u_x^2 + 2v_y^2 \right]_P$$

L'équation 2-59 s'écrit :

$$2-90. \quad A v_N + B v_P + C v_S + D = 0$$

avec :

$$A = \frac{HS}{(HN+HS)HN} \quad B = -\frac{HN}{(HN+HS)HS}$$

2-91.

$$C = \frac{du}{dx} \quad D = \frac{HN-HS}{HN \cdot HS}$$

3.3. DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

3.3.1. Conditions à l'entrée

La relation 2-51 qui fournit la valeur de la fonction de courant dans la section d'entrée à partir du profil de vitesse $u_1(y)$ mesuré se discrétise de la façon suivante :

$$2-92. \quad \psi(1,j) = \psi(1,j-1) + \frac{(u_1(j) + u_1(j-1))}{2} DX(1)$$

avec $\psi(1,1) = 0$

La relation 2-52 qui fournit la valeur du tourbillon est discrétisée comme suit :

$$\omega(1,j) = \psi_{xx}(1,j) + \psi_{yy}(1,j)$$

$$2-93 \quad \psi_{yy}(1,j) = \frac{2\psi(1,j+1)}{DY(J)(DY(J)+DY(J-1))} - \frac{2\psi(1,j)}{DY(J)DY(J-1)} + \frac{2\psi(1,j-1)}{DY(J-1)(DY(J)+DY(J-1))}$$

$$\psi_{xx}(1,j) = \frac{2(\psi(2,j) - \psi(1,j))}{Dx^2} - \frac{2v_1(j)}{Dx}$$

on voit que cette expression devra être calculée à chaque itération puisque $\psi(2,j)$ change.

3.3.2. Conditions à la sortie

La relation 2-54 conduit à :

$$2-94. \quad \psi(M,j) = \psi(M-1,j)$$

La relation 2-55 se discrétise ainsi :

$$2-95. \quad \omega(M,j) = \frac{2\psi(M,j+1)}{DY(J)(DY(J)+DY(J-1))} - \frac{2\psi(M,j)}{DY(J)DY(J-1)} + \frac{2\psi(M,j-1)}{DY(J-1)(DY(J)+DY(J-1))}$$

La relation 2-56 s'écrit :

$$2-96. \quad K(M,j) = K(M-1,j).$$

3.3.3. Conditions à la frontière des couches de paroi

Evaluation des grandeurs nécessaires au calcul de l'écoulement dans la couche de paroi.

On doit évaluer en $y = y_G$ les valeurs de u_G^* , v_G^* , α_G^* et $\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$.
 u_G^* et α_G^* sont calculés à partir de ψ et K à l'aide d'une formule décentrée précise au second ordre. v_G^* est évaluée par différence centrée précise au second ordre à partir de la fonction de courant.

Le gradient de pression est fourni par la relation 2-70.

Le premier terme de cette équation ne pose pas de problème; pour le second terme, $\frac{\partial u}{\partial y}$ est calculé par différence centrée dans l'écoulement extérieur, et prise égale à la valeur de raccordement $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_C^+$ à la frontière; puis la seconde dérivée est évaluée de façon décentrée comme u_G^* et α_G^* .

Evaluation des grandeurs nécessaires au calcul de l'écoulement extérieur.

On doit évaluer en $y = y_G$ les grandeurs :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_G^+, \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_G^+, \psi_G^+ \text{ et } K_G^+.$$

La dérivée de u est déterminée par différence décentrée précise au premier ordre.

La dérivée de v est calculée comme dérivée seconde de la fonction de courant par différence centrée.

La fonction de courant est obtenue par intégration entre la paroi et $y = y_G$ de la vitesse longitudinale.

L'énergie à la frontière est obtenue directement comme résultat du calcul.

3.4. METHODE DE RESOLUTION

Dans le domaine central, les équations sont résolues ponctuellement par la méthode de GAUSS SEIDEL. Dans les couches de parois, les équations sont tridiagonales, elles sont résolues à l'aide d'un algorithme proposé par ROACHE [52]. Le système de trois équations résolu dans cette couche étant non linéaire et couplé, il est nécessaire d'effectuer une itération interne.

La figure 35 présente un organigramme du processus de résolution.

A chaque itération, on part des valeurs des variables dans le domaine central pour déterminer des conditions à la frontière extérieure de chaque couche de paroi. On calcule alors l'écoulement dans ces couches sur toute la longueur du domaine. Ceci nécessite comme nous l'avons dit plus haut une itération interne dans chaque section. On peut alors calculer des conditions à la frontière des couches de paroi, mais cette fois pour l'écoulement dans le domaine central. On effectue alors un balayage pour chacune des trois équations résolues dans ce domaine.

Il faut noter que la réduction de la taille des mailles du domaine central au voisinage des couches de parois nécessite une sous relaxation sur ω à la frontière afin de maintenir la stabilité du système.

CHAPITRE 4

RESULTATS

Le programme a tout d'abord été testé sur deux écoulements connus à savoir, l'écoulement turbulent développé entre parois parallèles et l'écoulement à l'entrée d'un tuyau sans incidence. On a ensuite effectué le calcul de l'écoulement dans une prise d'air aux incidences de 20 et 40°.

4.1. ECOULEMENT ETABLI ENTRE PAROIS PARALLELES

A l'entrée du domaine de calcul les variables ont été initialisées à l'aide de données expérimentales mesurées par COMTE BELLOT [53]. Cet auteur fournit les profils de vitesses ainsi que les profils des trois fluctuations de vitesses pour des Reynolds basés sur la hauteur de 57.000, 120.000 et 230.000. Nous avons utilisé les profils correspondant au nombre de Reynolds de 120.000. Le profil des vitesses longitudinales a servi à initialiser ψ et ω , la vitesse transversale ayant été prise nulle. L'énergie turbulente dans la section d'entrée est déduite des profils de fluctuations de vitesses par la relation :

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) .$$

Les calculs ont été effectués pour un tuyau de longueur $6H$ avec un pas en x de $2H$ et deux maillages suivant y . La figure 36 présente les profils de vitesses et les profils d'énergie turbulente obtenues dans la section de sortie du domaine de calcul, comparés au profil imposé dans la section d'entrée pour les deux maillages.

En ce qui concerne les profils de vitesses, on constate que les résultats sont un peu moins bon au voisinage de la paroi avec le maillage

le plus grossier, mais ils restent néanmoins acceptables. Pour ce qui est de l'énergie turbulente, il apparaît que la taille du maillage a une influence non négligeable, et que le maillage fin donne un profil plus proche du résultat expérimental.

4.2. ÉCOULEMENT À L'ENTRÉE D'UN TUYAU SANS INCIDENCE

Les variables ψ et ω à l'entrée ont été initialisées avec un profil de vitesses unitaires uniforme sur la hauteur.

L'énergie turbulente a été prise nulle dans la section d'entrée.

Pour l'échelle de longueur, nous avons choisi la formule suivante proposée par EMERY et GESSNER [55] .

$$\ell = 2.5 \times \ell_P$$

$$\ell_P^* = \frac{2H}{F(y^*) + K(x^*) G(y^*)}$$

avec

$$F(y^*) = 2 \left[1 + \frac{1}{(y^*)^2} \right]^{1/2} + 2 \left[1 + \frac{1}{(2-y^*)^2} \right]^{1/2}$$

$$G(y^*) = \sum_{n=0}^7 c_n (1 + (y^*)^n)$$

$$K(x^*) = 1 - c_8 \left[1 + t \operatorname{anh} (c_9(x^* - x_0^*)) \right]$$

et :

$$x^* = x/H, \quad y^* = y/\delta$$

$$\ell_P^* = \ell_P/\delta \quad \text{pour } 0 < y < \delta$$

$$\ell_P^* = \ell_P(y = \delta)/\delta \quad \text{pour } y > \delta$$

avec les valeurs suivantes des constantes :

$$\begin{aligned}
 K &= 0.45 & C_1 &= 1.15718 & C_2 &= 21.32706 & C_3 &= -20.60664 \\
 C_4 &= -10.65843 & C_5 &= 7.29654 & C_6 &= 16.08880 & C_7 &= -10.36380 \\
 C_8 &= 0.4 & C_9 &= 0.11 & x_0^* &= 46
 \end{aligned}$$

Pour δ nous avons choisi une loi linéaire :

$$\delta = .0118 x^* + .075$$

Les calculs ont été effectués sur deux maillages différents.

La figure 38 présente le premier maillage utilisé, et la figure 39 les profils de vitesses obtenus comparés à l'expérience. On constate que les résultats du calcul présentent un déficit de vitesse dans la zone de fort gradient dès la section 14.3 H. Nous avons alors raffiné le maillage dans la zone voisine de la paroi. Le deuxième maillage est présenté figure 40 et le résultat figure 41. Bien qu'il existe une légère différence, les résultats sont en meilleur accord avec l'expérience.

Sur la figure 42 nous avons porté la vitesse sur l'axe et le frottement à la paroi. On constate que dans les deux cas la vitesse sur l'axe est bien prédite.

Le maillage n° 1 prédit un frottement à la paroi trop important. Le maillage n° 2 permet de s'approcher plus de l'expérience, mais le frottement en sortie de domaine de calcul, là où l'écoulement tend à s'établir reste trop élevé. Ceci est confirmé par les résultats obtenus en 4-1 pour l'écoulement développé entre parois parallèles. Le calcul a été repris en modifiant légèrement le modèle dans les couches de paroi : nous avons choisi $A_\mu = .014$ et $A_D = .220$.

La figure 43 présente la comparaison entre les vitesses sur l'axe et le frottement à la paroi obtenus avec le maillage n° 2 pour les deux modèles.

On voit que pour la vitesse sur l'axe, l'accord est satisfaisant dans les deux cas.

Pour le frottement à la paroi on constate un meilleur accord global avec le deuxième modèle malgré un décalage entre $x = 15 H$ et $x = 50 H$.

Les profils de vitesse n'ont pas été représentés pour le deuxième modèle, car ils s'écartent peu de ceux obtenus pour le premier modèle. Ils tendent néanmoins à se rapprocher des résultats expérimentaux.

4.3. PRISE D'AIR EN INCIDENCE

Les calculs ont été effectués aux incidences de 20 et 40 degrés, à partir de données expérimentales à l'entrée obtenues au C.E.A.T de Poitiers [34] .

4.3.1. Résultats à 20° d'incidence

La figure 44 présente les composantes de la vitesse imposées dans la section d'entrée rapportées à la vitesse au loin v_e . Un calcul a d'abord été effectué avec le premier modèle sur un maillage uniforme représenté figure 45, avec un domaine s'étendant longitudinalement sur 4 hauteurs. On disposait de 14 mailles dans chaque couche de paroi et de 18 mailles dans le domaine central. L'épaisseur de chaque couche de paroi est : $Y_{M1} = Y_{M2} = .02H$. Un calcul nécessite environ 170 itérations et 2H de CPU sur interdata 8.32.

Les figures 46, 47 et 48 comparent les résultats obtenus à l'expérience. Sur la figure 46 sont portés les vecteurs vitesses en module et direction dans différentes sections de la prise d'air. On constate que le calcul prédit un bulbe de décollement plus petit, aussi bien en longueur qu'en hauteur.

La figure 47 présente les valeurs calculées de la racine carrée de l'énergie turbulente comparée à un taux de turbulence déterminé à partir des mesures de $\overline{u'^2} / u_e^2$ et $\overline{v'^2} / u_e^2$ fournie en [57]. On ne dispose pas des mesures de $\overline{w'^2} / u_e^2$. On constate que malgré la simplicité du modèle et compte tenu du fait que l'on ne peut pas accorder une grande confiance aux mesures dans le bulbe, l'évolution de l'énergie est prédite assez correctement. Néanmoins, à la paroi supérieure, le calcul fait apparaître une diffusion d'énergie turbulente vers le centre qui n'est pas confirmée par les mesures.

La figure 48 présente les iso tourbillons et les lignes de courant obtenues par le calcul. On constate l'existence d'une zone d'intensité tourbillonnaire élevée liée à la frontière du bulbe. La longueur de ce dernier est de l'ordre d'une hauteur. Nous avons effectué un deuxième calcul à cette incidence avec le premier modèle et avec un maillage non uniforme qui est représenté figure 49. Ceci nous a permis de porter l'étendue longitudinale du domaine de calcul à 5,3 H. et de resserrer le maillage au voisinage du décollement. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 50 à 52.

Sur la figure 50, on constate que les profils de vitesses sont très peu modifiés par rapport au calcul précédent. On remarque également que le rétablissement vers l'aval de l'écoulement est très lent, bien plus que ne semble l'indiquer l'expérience. Entre $x = 14,5$ cm et $x = 22$ cm, la vitesse à la frontière de la couche de paroi inférieure varie de .243 à .36.

La figure 51 présente les profils d'énergie turbulente. On remarque immédiatement que l'énergie turbulente au voisinage du bulbe est nettement plus grande que dans le calcul précédent, le pic à $x = 1$ cm variant du simple au double. Cet écart s'amenuise vers l'aval à mesure que l'énergie turbulente diffuse. Cette énergie reste néanmoins un peu plus élevée dans le second cas, de sorte que l'on a un meilleur accord avec l'expérience à $x = 18$ cm que dans le cas du premier calcul. On remarque également que ce pic est plus

étendu transversalement dans toutes les sections.

Sur la figure 52 on note essentiellement un léger raccourcissement de la zone de recirculation.

Compte tenu de ces résultats, nous avons effectué un dernier calcul avec le premier modèle et un maillage plus raffiné au voisinage du point de décollement (fig. 53). Les résultats sont portés sur les figures 54 à 56.

Sur la figure 54 on remarque tout d'abord que le bulbe de recirculation est plus petit que dans les calculs précédents. Ceci apparaît également sur la figure 56 qui représente les lignes de courant. En aval par contre, dès $x = 1$ cm on constate que les trois calculs sont en accord.

En ce qui concerne l'énergie turbulente, on constate encore une augmentation de la valeur du pic dans la section $x = 1$ cm par contre, dans les autres sections, les résultats sont très voisins de ceux obtenus avec le maillage n° 3.

4.3.2. Résultats à 40° d'incidence

Les données expérimentales fournies en [34] peuvent donner lieu à différentes interprétations au voisinage du bord d'attaque inférieur.

La figure 57 présente les profils proposés en [58], ainsi que ceux que nous nous sommes imposés en tenant compte du fait qu'au voisinage de la lèvre inférieure l'angle de la vitesse avec Ox doit prendre une valeur élevée.

Deux calculs ont été effectués avec le premier modèle de turbulence sur un maillage uniforme identique à celui utilisé à 20°. Un calcul nécessite environ 200 itérations.

Les figures 58 à 60 présentent les résultats obtenus avec les profils en trait continu de la figure 57.

Sur la figure 58 sont portées les vitesses en module et direction dans différentes sections, ainsi que les résultats expérimentaux correspondants.

Comme à 20° , on constate que le calcul sous estime l'extension longitudinale et transversale du bulbe.

D'autre part, on remarque un étalement des gradients transversaux de vitesse dans la zone de cisaillement liée au bulbe.

Il est évident que les gradients indiqués par les résultats expérimentaux dans cette zone sont relativement intenses et que leur description nécessiterait un maillage plus fin.

Cet étalement des gradients de vitesse conduit à un étalement du pic d'énergie turbulente, comme on peut le constater sur la figure 59. En dehors de cela, les niveaux d'énergie sont en accord satisfaisant avec l'expérience dès la section $x = 4$ cm.

Sur la figure 60 où sont portées les lignes iso tourbillon et les lignes de courant, on remarque que la zone de forte intensité tourbillonnaire liée à la ligne de cisaillement s'étale largement à l'intérieur du bulbe, alors que l'on pourrait s'attendre, si les gradients étaient correctement prédits, à une forte concentration de rotationnel.

On note d'autre part que les lignes de courant présentent une courbure notable dont il serait nécessaire de tenir compte dans le modèle de turbulence [59].

Un deuxième calcul a été effectué sur ce même maillage avec les profils de vitesse à l'entrée proposés en [58], dans le but évaluer la sensibilité du calcul aux conditions à l'entrée. On constate sur les figures 61 à 63 que les modifications du résultat de calcul sont très faibles, et qu'elles sont très vite "oubliées" vers l'aval.

Un dernier calcul a été effectué cette fois avec le deuxième modèle de turbulence, et sur un maillage non uniforme représenté figure 64. Ce maillage est identique dans la direction transversale au maillage N° 3 utilisé à 20° . Longitudinalement, l'étendue du domaine de calcul est $5.8 H$.

Les résultats obtenus sont portés sur les figures 65 à 67. Sur la figure 65, on remarque tout d'abord que le bulbe n'a pas changé de taille, mais que les vitesses de retour y sont plus importantes. Dans la partie supérieure, jusqu'à $x = 4$ cm, les vitesses calculées sont en bon accord avec l'expérience. Néanmoins on constate que le lissage du gradient à la frontière du bulbe persiste.

En aval le désaccord est important, et semble dû à la trop faible longueur du bulbe. Par exemple le profil calculé à $x = 10$ cm est comparable à celui mesuré à $x = 17$ cm. Sur la figure 66, on constate comme à 20° , que le pic d'énergie est beaucoup plus élevé sur le maillage fin, mais qu'il est également plus étalé transversalement, et ce dans toutes les sections. Ceci est particulièrement net à $x = 1$ cm où la zone turbulente calculée s'étend pratiquement à toute la hauteur alors que selon l'expérience elle est très localisée. Jusqu'en $x = 17$ cm l'accord avec l'expérience est ici beaucoup moins bon.

Sur la figure 67, qui représente les iso tourbillons et les lignes de courant, on observe un raccourcissement longitudinal du bulbe et une extension transversale. De plus les lignes de courant se resserrent beaucoup plus à l'intérieur du bulbe, au voisinage du bord d'attaque. Ceci indique l'existence de gradients de vitesse plus intenses et confirme l'augmentation de l'énergie turbulente dans cette zone.

4.4. DISCUSSION

De l'ensemble des résultats qui sont présentés, on peut extraire une remarque fondamentale. Tant que le vecteur vitesse reste quasiment aligné avec les lignes de maillage, les résultats obtenus par la méthode utilisée sont en bon accord avec l'expérience, à condition de serrer le maillage

suffisamment dans les zones de fort gradient de vitesse. Par contre, dès que le vecteur vitesse fait un angle notable avec les lignes de maillage, un désaccord apparaît, ce qui a pour effet d'étaler transversalement les gradients. Ceci est caractéristique de la méthode de discrétisation utilisée. En effet, afin de conserver la stabilité numérique du schéma de résolution, on est amené à évaluer les termes de convection par la technique connue de différence décentrée vers l'amont. On sait, en effet que pour un Reynolds de maille $Re_m = \rho u \Delta x / \mu_e$ supérieur à 2, ce qui est le cas ici, le schéma élaboré à l'aide de différences centrées est instable.

Malheureusement, la différenciation décentrée des termes de convection introduit une viscosité numérique proportionnelle à $u \Delta x$. Nous avons remarqué en effet que pour l'écoulement développé comme pour l'écoulement à l'entrée d'un tuyau une diminution de Dx (ou plutôt de Dy) conduit à un meilleur résultat dans les zones de fort gradient.

G. DE VAHL DAVIS et G.D. MALLINSON [60] montrent que la diffusion numérique augmente avec l'angle que fait la vitesse avec les lignes de maillage. Ils proposent la formule suivante pour le coefficient de fausse diffusion :

$$\Gamma_f = \frac{u \, Dx \, Dy \, \sin 2\theta}{4(Dy \sin^3 \theta + Dx \cos^3 \theta)}$$

où θ est l'angle de la vitesse avec l'axe des x .

En conséquence, dans toute la zone du bulbe de décollement, il existe une diffusion numérique importante qui explique le lissage des gradients de vitesse. G.D. RAITHBY [61] obtient des résultats tout à fait analogues sur la convection d'un échelon de vitesse.

On peut envisager trois remèdes à cette difficulté. Une première solution est de raffiner le maillage partout où cela s'avère nécessaire de façon à rendre la diffusion numérique négligeable. Cette solution, si elle est la plus simple dans son principe, est aussi la plus coûteuse, car elle implique de grosses capacités mémoire et de long temps de calcul.

Une deuxième solution consiste à calculer le maillage en même temps que l'écoulement en s'arrangeant pour qu'ils suivent au plus près les lignes de courant. On joue ainsi sur le terme $\sin 2\theta$ de la formule Γ_f . Ceci pose quelques problèmes dans la zone de recirculation, car les lignes y sont fermées.

La troisième solution consiste à modifier la formulation aux différences finies de façon à éliminer le terme de diffusion numérique. C'est ce que propose RAITHBY [62] dans son schéma de différenciation amont qui tourne pour s'aligner sur la vitesse.

Il reste néanmoins que même dans ce cas, il sera nécessaire de raffiner le maillage à la frontière du bulbe si l'on veut décrire correctement l'intense gradient de vitesse qui se produit à cet endroit.

Que dire maintenant du modèle de turbulence choisi. Si on admet que les différences observées sur les profils de vitesse dans la prise d'air en incidence sont dues à la diffusion numérique, on peut en conclure que le modèle choisi est capable de donner des résultats satisfaisants. On remarque en effet, en ce qui concerne l'énergie turbulente, que la "mémoire" de l'écoulement est assez faible, et que très vite vers l'aval il "oublie" ce qui s'est produit au niveau du bulbe. Dès lors, les résultats semblent en accord raisonnable avec l'expérience.

Toutefois, il y a lieu de faire une remarque sur l'échelle de longueur adoptée. Dans notre cas particulier, le modèle choisi contribue à notre avis, à augmenter la diffusion transversale de l'énergie turbulente.

Si on se souvient en effet que le terme de production dans l'équation pour l'énergie s'écrit :

$$P = \nu_t (2 u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2 v_y^2)$$

avec $\nu_t = C K^{1/2} \ell$

et que le terme de dissipation s'écrit dans cette même équation

$$D = - C_D K^{3/2} / \ell.$$

on constate que dans la zone de fluide non turbulent qui borde la ligne de jet à l'entrée de la prise d'air, l'échelle de longueur choisie est certainement trop grande. Elle contribue donc à une surestimation du terme de production et une sous estimation du terme de dissipation. Ceci explique vraisemblablement en partie l'étalement du pic d'énergie turbulente dans la partie amont de la prise d'air.

Par contre, dès que la ligne de jet a atteint la paroi supérieure on peut penser que le modèle choisi est satisfaisant. Il serait néanmoins judicieux de s'affranchir de cette prescription arbitraire en introduisant une équation de transport supplémentaire pour la dissipation d'énergie turbulente. Ceci permettrait de plus d'obtenir des informations supplémentaires sur les caractéristiques de la turbulence dans le domaine étudié.

CONCLUSION

Il ressort de ce mémoire que dans l'état actuel de l'art en matière d'ordinateurs courants il n'est pas possible, de prédire correctement un écoulement turbulent complexe tel que celui présenté ici à l'aide d'une formulation aux différences finies classiques. Cette formulation introduit en effet une diffusion numérique importante qu'on ne peut pas éliminer par simple raffinement du maillage, compte tenu de l'étendue du domaine de calcul, de la taille mémoire dont on dispose, et du coût du temps de calcul.

Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes plus sophistiquées telle que la modification de la formulation aux différences finies ou encore le calcul du maillage simultanément à celui de l'écoulement, ce qui permettrait d'apporter un remède au problème de la diffusion numérique.

Notre étude montre en effet que les modèles simples à une ou deux équations de transport sont susceptibles de donner des résultats de bonne qualité.

En ce qui concerne notre traitement de l'écoulement au voisinage des parois, il semble satisfaisant, bien qu'il nécessiterait une comparaison qualité prix avec les méthodes "de fonctions de paroi". De plus il serait nécessaire d'incorporer les termes de convection dans l'évaluation du gradient de pression longitudinal à la frontière des couches de paroi, termes qui déstabilisent le calcul dans son état actuel.

Enfin en ce qui concerne la méthode de résolution, elle gagnerait également à bénéficier d'un certain nombre de perfectionnement pour en

améliorer la stabilité et la convergence. Ceci passe à notre avis par le choix d'une méthode implicite de résolution des équations dans le domaine central, et par une étude détaillée du processus itératif à la frontière de la couche de paroi afin d'éliminer les instabilités qui y naissent quand on raffine le maillage.

LISTE DE REFERENCES

- [1] POTONIDES D. "Development of an inlet for a tilt nacelle subsonic V/STOL aircraft" ASME Paper 78 GT 121.
- [2] BURLEY R.R. : "Effect of lip and center body geometry on aerodynamic performance of inlets for tilting nacel VTOL aircraft AIAA Paper 79 0381.
- [3] HARDY H.D. : "Aircraft inlet and turbofan engine compatibility assesment techniques". National conference on Environmental effets on aircraft and Propulsion Systems" May 1971.
- [4] LOTTER K.W. MALE FAKIS J. : "Intake design and intake/air frame integration for a post stall fighter aircraft concept.
- [5] BILWAKESH K.R. DOYLE V.L. KOCH C.C.: "Evaluation of range and distorsion tolerance for high Mach number transonic Fan stages, vol. 1 Final report" NASA CR 72806.
- [6] J.F. ARNAUDON L.F. TSEN. Essais entrée d'air aux grandes incidences. Rapport CEAT 703/5 5 Nov. 1976.
- [7] J.F. ARNAUDON L.F. TSEN : "Etude exploratoire de la turbulence dans les prises d'air" 13ème Colloque d'Aérodynamique Appliquée AAAF Lyon Nov. 1976.
- [8] J.F. ARNAUDON L.F. TSEN : "Ecoulement turbulent avec recirculation à l'intérieur d'un cylindre de révolution à grande incidence". 14ème Congrès Yougoslave de Mécanique rationnnelle et appliquée. Portoroz Juin 1978.

- [9] R. LEBLANC, P. THIEBAUT, P. ARDONCEAU, R. GOETHALS : "Etude expérimentale des entrées d'air transsoniques aux grandes Incidences" contrat DRET n° 77/214 1978.
- [10] R. REGARD : "Etude expérimentale d'une prise d'air bidimensionnelle à grande incidence". Rapport ONERA 63/2149 AY 302 Dec. 76.
- [11] H. WERLE M. GALLON : "Sur l'écoulement autour d'une prise d'air".
La recherche aérospatiale 1975 n° 2, p. 81 à 92.
- [12] A. DYMENT, P. GRYSOY, J.C. PEGNEAUX
Etude expérimentale des entrées d'air en écoulement subsonique, grandes incidences et effet de trappe additionnelle. Rapport IMFL n° 79/18 Avril 79.
- [13] D.C. CHOU, R.W. LUIDENS, N.O. STOCKMAN : "Prediction of laminar and turbulent boundary layer flow separation in V/STOL engine inlets" AIAA Paper 77-144.
- [14] L.F. TSEN : "Méthode de calcul par différence finie de l'écoulement turbulent moyen dans une prise d'air à grande incidence".
Rapport STAE 77 98 507 1978.
- [15] B. MANTEL, J. PERIAUX, P. PERRIER : "Une application de la solution numérique de problèmes non linéaires en mécanique des fluides, par la méthode des moindres carrés abstraits et d'éléments finis, aux équations de Navier Stokes instationnaires.
15ème Colloque AAAF Marseille Novembre 1978.
- [16] J.H. FERZIGER. Large eddy numerical simulation of turbulent flows.
AIAA Journal Vol. 15 n° 9 Sept 1977 p. 1261.
- [17] A. LEONARD : Vortex method for flow simulation Journal of Comp. Physics
37 289-335 1980.

- [18] GABOR D. : A new Microscope Principle Nature 161 : 777 1948.
- [19] VIENOT J.C., SMIGIELSKI P., ROYER H.: Holographie optique, développements et applications Dunod.
- [20] THOMPSON B.J., G.B. PARRENT, J.H. WARD, B. JUSTH : Journ of Appl. Météorology 5, 434 1966.
- [21] J.D. TROLINGER : Laser instrumentation for flow field diagnostic Agardograph n° 186 March 1974.
- [22] J.D. TROLINGER : Aerodynamic Holography in laser technology. In aerodynamic measurements Agard LS 49 June 1971.
- [23] H. ROYER : Une application de la micro-holographie ultrarapide à la métrologie des brouillards. Nouv. Rev. Optique 1974 t. 5, n° 2 pp. 87-93.
- [24] H. ROYER : Particle velocity measurements via high speed holography. Proceedings of the 11th International Congress on high Speed photography Sep 1974 Chapman and Hall London.
- [25] H. ROYER : La mesure des vitesses de micro particules par holographie Rapport ISL R 107/75.
- [25bis] H. ROYER : Rapport ISL à paraître.
- [26] H. ROYER, F. ALBE : L'utilisation du montage de gabor en micro holographie. Rapport ISL n° 34/71.
- [27] J.W. GOODMAN, Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie Masson 1972.
- [28] C.M. TCHEM : Mean value an correlation Problems connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid. Ph. D. Thesis Delft 1947.

- [29] J. BOUSSINESQ : Theorie analytique de la chaleur vol. 2 P 224
Gauthier-Villars PARIS.
- [30] H. ROYER : Holographic velocimetry of sub micron particle. Rapport
ISL 306/76.
- [31] J.P. HENRY : Visualisation par bulles de savon. Rapport ENSAM
RC.EMG.Aé.101-11.
- [32] J. HAERTIG : Les particules en anémométrie laser. Anémométrie Doppler à
laser, cours Disa LDA 5-7 Mars 79.
- [33] J.O. HINZE : Turbulence. Mac Graw Hill second edition 1975.
- [34] G. GUILLEMIN, J.F. ARNAUDON, L.F. TSEN : "Etude d'une entrée d'air de
section rectangulaire, rapport de Synthèse contrat STAE
77-98 507.
- [35] B.E. LAUNDER : In Measurements and Prediction of complex turbulent flow
VKI LS 1980-3.
- [36] J.L. LUMLEY : In Prediction Methods for turbulent flow VKI LS 1979-2.
- [37] L. PRANDTL : "Bericht über Untersuchungen zur aus gebildeten turbulenz"
ZAMM 5, 136 1925.
- [38] LAUNDER B.E. SPALDING D.B. : "The numerical computation of turbulent
flows. Computer methods in applied Mechanics and engineering
3. 1974.
- [39] HARLOW F.H. NAKAYAMA P.I. : Turbulence Transport Equations. The Physics
of fluids vol. 10-11. 1967.
- [40] RODI W. : Turbulence models for enviromental problems VKI 25 79-2. In
Prediction methods for turbulent flows.
- [41] RUNCHAL A.K.: Transfer Process in steady two dimensional separated flow.

BUS
LILLE

- [42] SPALDING D.B. : Heat transfer from turbulent separated flow J.F.M.
Vol. 27-1, pp. 97-109. 1967.
- [43] ZAGUSTIN A., ZAGUSTIN K. : Analytical solution for turbulent flow in
pipes. La Houille blanche n° 2 pp. 113-118. 1969.
- [44] M. STANISLAS : Calcul de l'écoulement dans une prise d'air en incidence
à l'aide d'un modèle de type viscosité turbulente. Rapport IMFL
n° 7926.
- [45] LE FEUVRE : Laminar and turbulent flow convection process through
inlet tube banks . Imperial College of London report HTS/7415.
- [46] WOLFSTEIN M. : The velocity and temperature distribution in one dimen-
sional flow with turbulent augmentation and pressure gradient
Int Journ. Heat Mass Transfer Vol. 12, pp. 301-313, 1969.
- [47] L. PRANDTL : Uber ein neues formel system fur die angebildete turbulenz
Nachsichten. Von der Akad der Wissenschaften in Göttingen
pp. 6-19 von den loek of ruprecht Göttengen 1945.
- [48] GLUSCHKO : Turbulent boundary layer on a flat plate in an incompressible
fluid. IZV Akad Naut SSR, MCKK, n° 4, 13-23, 1965.
- [49] SPALDING D.B. : Monograph on turbulent boundary layers. Tech. Rep.
n° TWF/TN/33 Imp. Coll. London 1967.
- [50] SPALDING D.B. Turbulence Models. 3rd issue tech. rep. n° HTS/76/77
Imp. Coll. London 1976.
- [51] A.D. GOSSMAN et al. : "Heat and Mass transfer in recirculating flows".
Academic Press London 1969.
- [52] ROACHE P.J. : "Computational fluid dynamics". Hermosa Publishers.
- [53] COMTE-BELLOT G. : Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles.
Thèse de Doctorat d'Etat. 1965.

- [54] M.J. WALSH : Drag coefficient equations for small particles in high speed flow. AIAA Journal vol. 13-11, p. 1526
- [55] EMERY A.F., GESSNER F.B.: The numerical prediction of turbulent flow and heat transfer in the entrance region of a parallel Plate duct . Transaction of the ASME. Journal of heat transfer Nov. 76, p. 594.
- [56] DEAN R.B. : "An investigation of shear layer Interaction in ducts and Diffusers" Ph.D. Thesis University of London Feb. 1974.
- [57] J.F.ARNAUDON et L.F. TSEN : non publié.
- [58] L.F. TSEN : Méthode de calcul par différence finie de l'écoulement turbulent moyen dans une prise d'air à grande Incidence. Juillet 78.
- [59] F. DURST AK. RASTOGI : "Turbulent flow over two dimensional fences". Turbulent shear flows 2 London July 79.
- [60] G. DE VAHL DAVIS, G.D. MALLINSON : On evaluation of up wind and central difference approximation by a study of recirculating flows. Computers and fluids. 1976 Vol. 4, pp. 29-43.
- [61] G.D. RAITBY : "A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng 9 (1976) 75-103.
- [62] G.D. RAITBY : "Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow". Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 9 (1976) 153-164.

LISTE DES ANNEXES

	Pages
<u>Annexe 1</u> : Relations entre les coordonnées dans l'espace image et dans l'espace objet.	103
<u>Annexe 2</u> : Calcul des aberrations géométriques.	104
<u>Annexe 3</u> : Démonstration de l'équation du mouvement d'une particule sphérique dans un fluide en mouvement.	107
<u>Annexe 4</u> : Simplification de l'équation du mouvement de la particule dans le cas où $\rho_P \ll \rho_f$	120
<u>Annexe 5</u> : Résolution de l'équation du mouvement de la particule dans un écoulement bidimensionnel.	122
<u>Annexe 6</u> : Equations de transport des contraintes de Reynolds.	124

Annexe 1 : Relations entre les coordonnées dans l'espace image et dans l'espace objet.

On se réfère aux figures (7) et (8)

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} \left[z^2 + (h \cos \psi - y)^2 + (h \sin \psi)^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\lambda} \left[R^2 + h^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{z}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h \cos \psi - y}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{h^2 \sin^2 \psi}{z^2} \right] - \frac{R}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} \right] + O(z)$$

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} (z - R) + \frac{1}{2\lambda} \left[h^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) + \frac{y^2 - 2hy \cos \psi}{z} \right] + O(3)$$

$$\frac{\phi'}{2\pi} = \frac{1}{\lambda'} \left[z'^2 + (h \cos \psi - y')^2 + (h \sin \psi)^2 \right]^{1/2} -$$

$$- \frac{1}{\lambda'} \left[R'^2 + (h \cos \psi - y')^2 + (h \sin \psi)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{\phi'}{2\pi} = \frac{1}{\lambda'} (z-R) + \frac{1}{2\lambda'} \left[h^2 \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) + \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) (y'^2 - 2h y' \cos \psi) \right] + O(z)$$

Image virtuelle :

$$\frac{\phi' - \phi}{2\pi} = \text{cst} \quad \forall h \text{ et } \psi .$$

$$\frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\frac{y'}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = \frac{y}{\lambda} \frac{1}{z}$$

Image réelle :

$$\frac{\phi' + \phi}{2\pi} = \text{cste} \quad \forall h \text{ et } \psi$$

$$\frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\frac{y'}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{R'} \right) = - \frac{y}{\lambda} \frac{1}{z}$$

Annexe 2 : Calcul des aberrations géométriques.

On se réfère aux figures (10) et (11).

Les différences de phase en M s'écrivent :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{OM-SM}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[h^2 \sin^2 \psi + (h \cos \psi - (y-y'))^2 + z^2 \right]^{1/2} \\ - \frac{1}{\lambda} \left[h^2 \sin^2 \psi + (h \cos \psi + (y'))^2 + R^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{\phi'}{2\pi} = \frac{O'M-S'M}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda'} \left[z'^2 + h^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\lambda'} \left[R'^2 + h^2 \right]^{1/2}$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 4 de ces deux expressions par rapport à h/z , h/R , y/z , y/R , y'/z , y'/R , h/z , h/R :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} (z-R) + \frac{h^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2\lambda z} \left((y-y')^2 - 2h(y-y') \cos \psi \right) - \frac{1}{2\lambda R} (y'^2 + 2h y' \cos \psi) \\ - \frac{1}{8\lambda z^3} (h^2 + (y-y')^2 - 2h(y-y') \cos \psi)^2 + \frac{1}{8\lambda R^3} (h^2 + y'^2 + 2h y' \cos \psi)^2 + 0 \quad (6)$$

$$\frac{\phi'}{2\pi} = \frac{1}{\lambda'} (z'-R') + \frac{h^2}{2\lambda'} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) - \frac{h^4}{8\lambda'} \left[\frac{1}{z'^3} - \frac{1}{R'^3} \right] + 0(6)$$

L'écart aberrant Δ ramené au niveau de l'objet dans le cas de l'image réelle s'écrit alors :

$$\frac{\Delta}{\lambda} = - \frac{1}{8\lambda z^3} (h^2 + (y-y')^2 - 2h(y-y') \cos \psi)^2 + \frac{1}{8\lambda R^3} (h^2 + y'^2 + 2h y' \cos \psi)^2 \\ - \frac{h^4}{8\lambda'} \left[\frac{1}{z'^3} - \frac{1}{R'^3} \right]$$

développons :

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{-1}{8\lambda z^3} \left[h^4 + (y-y')^4 + 4h^2(y-y')^2 \cos^2 \psi + 2h^2(y-y')^2 - 4h^3(y-y') \cos \psi \right. \\ \left. - 4h(y-y')^3 \cos \psi \right] + \frac{1}{8\lambda R^3} \left[h^4 + y'^4 + 4h^2 y'^2 \cos^2 \psi + 2h^2 y'^2 + \right. \\ \left. + 4h^3 y' \cos \psi + 4h y'^3 \cos \psi \right] - \frac{1}{8\lambda'} \left[\frac{h^4}{z'^3} - \frac{h^4}{R'^3} \right]$$

Regroupons les termes suivant les puissances de h, pour obtenir les différentes aberrations :

aberration sphérique :

$$\frac{\Delta s}{\lambda} = -\frac{h^4}{8} \left[\frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{z'^3} - \frac{1}{R'^3} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right]$$

tenant compte de 1-17, il vient :

$$\frac{\Delta s}{\lambda} = \frac{h^4}{8\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) \left[\frac{1}{z'^2} + \frac{1}{z'R'} + \frac{1}{R'^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{zR} - \frac{1}{R^2} \right]$$

$$\frac{\Delta s}{\lambda} = \frac{h^4}{8\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) \left[\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right)^2 - 3 \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) + \frac{3}{R'^2} - \frac{3}{zR} \right]$$

Coma :

$$\frac{\Delta c}{\lambda} = \frac{h^3}{2\lambda} \left[\frac{1}{z^3} (y - y') + \frac{y'}{R^3} \right] \cos \psi$$

tenant compte de 1-21 il vient :

$$\frac{\Delta c}{\lambda} = -\frac{h^3 y \cos \psi}{2\lambda} \cdot \frac{R+z}{R^2 z^2}$$

Astigmatisme :

$$\frac{\Delta a}{\lambda} = \frac{h^2}{4\lambda} \left[-\frac{1}{z^3} (2 (y-y')^2 \cos^2 \psi + (y-y')^2) + \frac{1}{R^3} (2 y'^2 \cos^2 \psi + y'^2) \right]$$

tenant compte de 1-21 il vient :

$$\frac{\Delta a}{\lambda} = -\frac{h^2 y^2}{4\lambda} \frac{(1+2 \cos^2 \psi)}{Rz (R-z)}$$

courbure de champ et distorsion :

$$\frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{h \cos \theta}{2\lambda} \left[\frac{(y-y')^3}{z^3} + \frac{y'^3}{R^3} \right]$$

tenant compte de 1-21 il vient :

$$\frac{\Delta d}{\lambda} = 0 .$$

Annexe 3 : Démonstration de l'équation du mouvement d'une particule.

Cette équation est le résultat des travaux de Boussinescq [29] et de Tchen [28]. Nous développerons tout d'abord la démonstration principale effectuée par Boussinescq puis nous détaillerons la contribution de Tchen.

Boussinescq a calculé la traînée d'une sphère en petit mouvements relatifs par rapport à un fluide lui-même un mouvement d'ensemble lent.

Le fluide est en mouvement sous l'action d'une force extérieure uniforme dans tout le champ mais variable dans le temps. Notons (F_x, F_y, F_z) les 3 composantes de cette force par unité de masse,

Le champ de pression loin de la particule est donc uniforme, les seules variations spatiales de la pression sont celles dûes à la présence de la particule au sein du fluide.

La particule dont le centre d'inertie à pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) est animée d'un mouvement de translation $(\frac{\partial x_0}{\partial t}, \frac{\partial y_0}{\partial t}, \frac{\partial z_0}{\partial t})$ à l'exclusion de tout mouvement de rotation.

On note u, v, w les composantes de la vitesse locale du fluide. Loin de la particule, les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F_x(t) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = F_y(t) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = F_z(t) \end{cases}$$

En effet, loin de la particule, compte-tenu des hypothèses, le terme de gradient de pression ainsi que les termes contenant les dérivées spatiales de la vitesse sont nuls.

Nous allons chercher à déterminer les 3 composantes (T_x, T_y, T_z) de la traînée T de la particule à l'instant t .

On se limite au cas d'une particule sphérique dont la surface a pour équation :

$$(2) \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

La condition d'adhérence s'écrit :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial x_0}{\partial t} \\ v = \frac{\partial y_0}{\partial t} \\ w = \frac{\partial z_0}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{pour } r = R$$

Notons p les variations locales de la pression par rapport à la pression au loin, les conditions au loin s'écrivent :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 0 \\ u = \int_{-\infty}^t F_x dt \\ v = \int_{-\infty}^t F_y dt \\ w = \int_{-\infty}^t F_z dt \end{array} \right. \quad \text{pour } r \rightarrow +\infty$$

Il nous reste pour bien poser le problème à fournir des conditions initiales.

Nous supposons que pour $t = -\infty$ tout est au repos.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = F_y = F_z = 0 \\ \frac{\partial x_0}{\partial t} = \frac{\partial y_0}{\partial t} = \frac{\partial z_0}{\partial t} = 0 \\ u = v = w = 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } t = -\infty$$

Si on suppose que la vitesse relative de la particule par rapport au fluide est suffisamment petite, on peut négliger les termes non linéaires dans les équations de Navier-Stokes écrites au voisinage de la particule. Celles-ci deviennent alors :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta w \end{array} \right.$$

Plaçons-nous dans le repère lié à la particule et posons :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \xi = u - \frac{\partial x_0}{\partial t} \\ \eta = v - \frac{\partial y_0}{\partial t} \\ \delta = w - \frac{\partial z_0}{\partial t} \end{array} \right.$$

Le système d'équation qui régit l'écoulement s'écrit en adjoignant l'équation de continuité :

$$(8) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial z} = 0$$

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = F_x - \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \nu \Delta \xi \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = F_y - \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nu \Delta \eta \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = F_z - \frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \delta}{\partial t} + \nu \Delta \delta \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$(10) \quad \xi = \eta = \delta = 0 \quad \text{pour } r = R$$

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} P = 0 \\ \xi = \int_{-\infty}^t (F_x - \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2}) dt \\ \eta = \int_{-\infty}^t (F_y - \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}) dt \\ \delta = \int_{-\infty}^t (F_z - \frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2}) dt \end{array} \right. \quad \text{pour } r \rightarrow +\infty$$

$$(12) \quad \xi = \eta = \delta = 0 \quad \text{pour } t \rightarrow -\infty$$

Boussinesq démontre alors que le système (8), (9) muni des conditions aux limites (10), (11), (12) admet une solution unique en ξ , η , δ . Nous ne reproduisons pas cette démonstration ici. Il nous faut maintenant trouver cette solution.

On remarque tout d'abord que le système et ses conditions aux limites étant linéaires par rapport aux différentes variables, et que ξ , η , δ , p étant à priori des fonctions continues de x , y , z et t , on peut appliquer un principe de superposition et décomposer le problème en trois problèmes plus simples, où la force extérieure sera dirigée suivant chacun des axes de coordonnées.

Nous nous limiterons donc dès à présent à un mouvement de la particule et du fluide suivant l'axe des x .

Notons $V_x = \int_{-\infty}^t (F_x - \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2}) dt$ la vitesse relative du fluide et de la particule suivant l'axe des x .

Introduisant une fonction ψ telle que :

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \xi = \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \eta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \delta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \end{array} \right.$$

La fonction ψ prise sous cette forme vérifie l'équation de continuité (8).

Les équations (9) deviennent :

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) \right] = \frac{\partial v_x}{\partial t} - \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{P}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) \right] = 0 \end{array} \right.$$

Supposons que ψ ne dépendent que de t et r , les deux dernières équations montrent que $\frac{P}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right)$ ne dépend ni de y ni de z , donc pas de r .

On en déduit que le second membre de la première équation ne dépend que de t .

Posons :

$$(15) \quad \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}$$

ψ ne dépendant que de r , le premier membre devient en coordonnées sphériques :

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r \psi}{\partial t} - v \frac{\partial^2 r \psi}{\partial r^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} r$$

Intégrons deux fois par rapport à r :

$$(17) \quad \frac{\partial r \psi}{\partial t} - v \frac{\partial^2 r \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \frac{r^3}{4} - \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} r + \psi_1(t)$$

ψ et ψ_1 sont des fonctions arbitraires de t à déterminer.

Supposons que $\psi = 0$ pour $r = R$.

Les équations (13) s'écrivent en sphérique.

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{(x-x_0)^2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ \eta = - \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ \delta = - \frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \end{array} \right.$$

La condition d'adhérence (10) s'écrit :

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = R$$

on a donc à la surface de la particule les conditions suivantes :

$$(20) \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{pour } r = R$$

Compte tenu de (20), l'équation (17) s'écrit à la surface de la particule :

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \frac{R^3}{4} - \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} R + \psi_1(t) = 0$$

dont on déduit :

$$(21) \quad \psi_1(t) = \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} R - \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \frac{R^3}{4}$$

L'équation (17) devient alors :

$$(22) \quad \frac{\partial r \psi}{\partial t} - v \frac{\partial^2 r \psi}{\partial r^2} = - \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} (r-R) + \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \frac{r^3 - R^3}{4}$$

Soit encore :

$$(23) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left[r \psi + \psi(t) (r-R) - \frac{\partial f(t)}{\partial t} \frac{r^3 - R^3}{4} - \frac{3}{2} v f(t) r \right] = 0$$

on voit donc que l'expression entre crochets que nous noterons U est solution de l'équation de diffusion :

$$(24) \quad \frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 0 \quad \text{avec } a = \sqrt{v}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$(25) \quad \begin{aligned} U &= -\frac{3}{2} v R f(t) && \text{pour } r = R \\ U &= 0 && \text{pour } r = +\infty \quad \forall t \\ U &= 0 && \text{pour } t = -\infty \quad \forall r \end{aligned}$$

la solution de cette équation est :

$$(26) \quad U = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} v R \int_0^{\infty} f \left[t - \frac{1}{v} \frac{(r-R)^2}{2\alpha^2} \right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

La fonction ψ est donc la solution de l'équation :

$$(27) \quad \begin{aligned} r \psi + \psi(t) (r-R) - \frac{\partial f(t)}{\partial t} \frac{(r^3 - R^3)}{4} - \frac{3}{2} v f(t) r = \\ -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} v R \int_0^{\infty} f \left[t - \frac{1}{v} \frac{(r-R)^2}{2\alpha^2} \right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions aux frontières (11) et (20) et la condition initiale (12).

Il nous faut donc choisir ψ et f pour que ces conditions soient vérifiées. Il faut de plus que U vérifie les relations (25) ce qui impose des conditions supplémentaires sur ψ et f .

Pour $t \rightarrow -\infty$ $U \rightarrow 0$, il faut donc d'après (27) que $\psi(t)$, $f(t)$, $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$ tendent vers zéro pour que ψ tendent vers zéro et que la première condition (20) soit vérifiée.

Pour $r \rightarrow +\infty$ $U \rightarrow 0$ et on a :

$$(28) \quad \psi = -\psi(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial t} \frac{r^2}{4} + \frac{3}{2} v f(t)$$

en reportant dans (13) on obtient :

$$(29) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\partial f(t)}{\partial t} \\ \eta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

dont on déduit en tenant compte de (11)

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = v_x(t)$$

d'où

$$(30) \quad f(t) = \int_{-\infty}^t v_x(\tau) d\tau$$

on remarque que l'on a bien à $t = -\infty$, $f(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t} = 0$, et que les conditions (12) sont satisfaites.

Il nous faut maintenant vérifier les conditions (20).

La première est vérifiée d'après (25).

La deuxième et la troisième s'écrivent compte-tenu de la première :

$$(31) \quad \frac{\partial r\psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r\psi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{pour } r = R.$$

La forme (21) choisie pour ψ_1 et la première condition (20) impliquent d'après (22) que la deuxième relation (31) est également déjà vérifiée par ψ .

Il ne nous reste donc qu'à vérifier la première relation (31) d'après (27) on a :

$$(32) \quad r\psi = -\psi(t)(r-R) + \frac{\partial f(t)}{\partial t} \frac{r^3 - R^3}{4} + \frac{3}{2} v f(t) r - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} v R \int_0^\infty f \left[t - \frac{1(r-R)}{2\alpha^2} \right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

Soit en différenciant par rapport à r

$$(33) \quad \frac{\partial r\psi}{\partial r} = -\psi(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial f(t)}{\partial t} r^2 + \frac{3}{2} v f(t) + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} R(r-R) \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t} \left[t - \frac{1}{v} \frac{(r-R)^2}{2\alpha^2} \right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

posons :

$$\beta = \frac{r-R}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{2v}} \quad \text{d'où} \quad \frac{r-R}{\alpha^2} \sqrt{\frac{1}{2v}} d\alpha = -d\beta$$

on doit alors avoir pour $r = R$:

$$(34) \quad \psi(t) = \frac{3}{4} \frac{\partial f(t)}{\partial t} R^2 + \frac{3}{2} v f(t) + 3 \sqrt{\frac{v}{\pi}} R \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t} [t - \beta^2] d\beta$$

on voit que l'on a bien $\psi(t) = 0$ quand $t \rightarrow -\infty$ d'après (30) et (34) on a :

$$(35) \quad \psi(t) = \frac{3}{4} v_x(t) R^2 + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t v_x(\tau) d\tau + 3 \sqrt{\frac{v}{\pi}} R \int_0^\infty v_x(t - \beta^2) d\beta$$

Nous disposons donc à présent d'une fonction ψ vérifiant (27) et les conditions aux limites (11), (12), (20) et (25).

Evaluons maintenant la pression locale P à l'aide des équations (14) et de la condition à la limite (11).

Tenant compte de (15) et (30) on a :

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) \right] = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{P}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\quad \quad \quad \right] = 0 \end{cases}$$

soit en multipliant par $\rho dx, \rho dy, \rho dz$ et en ajoutant membre à membre ces trois équations :

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} [\quad] dx + \rho \frac{\partial}{\partial y} [\quad] dy + \rho \frac{\partial}{\partial z} [\quad] dz = - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} dx$$

soit :

$$\rho \frac{\partial}{\partial r} [\quad] dr = - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \cos \alpha dr$$

intégrons en tenant compte de (11)

$$P - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi \right) = - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \cos \alpha r$$

on a d'autre part d'après (22) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \psi}{\partial t} - v \frac{\partial^2 r \psi}{\partial r^2} \right) = - \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} + \frac{R}{r} \left[\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} r^2$$

d'où :

$$(37) \quad P = \rho R \left[\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right] \frac{\partial 1/r}{\partial x}$$

Evaluons maintenant la trainée de la sphère.

Nous allons tout d'abord calculer la force exercée sur une sphère de centre (x_0, y_0, z_0) de rayon $r > R$.

Par raison de symétrie, cette force passe par le centre et est dirigée suivant l'axe des x . Il suffit donc d'évaluer la composante suivant cet axe.

Soit $d\sigma$ l'élément de surface de la sphère de rayon r .

Soit α, β, γ les trois cosinus directeurs de la normale dr à $d\sigma$ la composante suivant l'axe des x de la pression unitaire sur $d\sigma$ s'écrit :

$$(38) \quad p_{\sigma} = (-P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) \cos \alpha + \mu (\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \cos \beta + \mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \cos \gamma.$$

Substituons les valeurs de u, v, w données par (7), puis les expressions de ξ, η, δ, p données par (13) et (37) :

$$P_{\sigma} = \left[-P + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \cos \alpha + \mu \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \cos \beta + \mu \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right] \cos \gamma$$

$$P_{\sigma} = \left[-\rho R \left\{ \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial 1/r}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right] \cos \alpha$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right] \cos \beta + 2\mu \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} - 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial x^2} \right] \cos \gamma$$

Si l'on tient compte des relations suivantes :

$$\frac{\partial 1/r}{\partial x} = -\frac{\cos \alpha}{r^2} \quad \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \cos \alpha$$

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \cos \gamma = \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r}$$

l'expression précédente devient :

$$(39) \quad P_{\sigma} = \rho R \left\{ \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right\} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} + \mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} (1 + \cos^2 \alpha) - 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

or on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \cos \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \frac{\cos^2 \alpha}{r} \right] = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \cos^2 \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= \Delta \psi \cos^2 \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (1 - 3 \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \Delta \psi \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) (1 - 3 \cos^2 \alpha)$$

L'équation (22) divisée par r et dérivée par rapport à r donne :

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \psi}{\partial r^2} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial r} \Delta \psi = \rho R \left(\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right) \frac{1}{r^2} - \frac{\rho}{2} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial r^2} r + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}$$

(39) devient alors :

$$\begin{aligned} (40) \quad P_\sigma &= \rho R \left[\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right] \frac{1}{r^2} - \rho \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} r \sin^2 \alpha + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} \sin^2 \alpha \\ &\quad - 2 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) (1 - 3 \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

la force exercée par le fluide sur la sphère de rayon r est alors :

$$\begin{aligned} T_x &= \int_\sigma P_\sigma \, d\sigma \\ T_x &= 4\pi \rho R \left[\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right] - \rho \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} r \int_\sigma \sin^2 \alpha \, d\sigma \\ &\quad + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} \int_\sigma \sin^2 \alpha \, d\sigma - 2 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \int_\sigma (1 - 3 \cos^2 \alpha) \, d\sigma \end{aligned}$$

Soit :

$$(41) \quad T_x = 4\pi \rho R \left[\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} - \frac{R^2}{3} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \frac{r^3}{R^3} + \frac{2}{3} \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} \right]$$

Pour $r = R$ on a d'après (20) $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \forall t$ et la trainée devient :

$$T_x = 4\pi \rho R \left[\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \frac{7R^2}{12} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right]$$

Soit un tenant compte de (30) et (35)

$$(42) \quad T_x = 6 \pi R \mu V_x + \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \frac{\partial V_x}{\partial t} + 12 \sqrt{\pi \rho \mu} R^2 \int_0^\infty \frac{\partial V_x}{\partial t} (t-\beta^2) d\beta$$

posons $\tau = t - \beta^2$ on obtient :

$$(43) \quad T_x = 6 \pi R \mu V_x + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \rho R^3 \right) \frac{\partial V_x}{\partial t} + 12 \sqrt{\pi \rho \mu} R^2 \int_{-\infty}^t \frac{\frac{\partial V_x}{\partial t}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

on en déduit aisément les deux autres composantes, d'où l'expression vectorielle :

$$(44) \quad \vec{T} = 6 \pi R \mu \vec{V} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \rho R^3 \right) \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 12 \sqrt{\pi \rho \mu} R^2 \int_{-\infty}^t \frac{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

L'équation de la dynamique fournit alors :

$$(45) \quad \frac{4}{3} \pi \rho_P R^3 \frac{d\vec{V}_P}{dt} = 6 \pi R \mu (\vec{V}_f - \vec{V}_P) + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \rho_f R^3 \right) \frac{d}{dt} (\vec{V}_f - \vec{V}_P) + 12 \sqrt{\pi \rho_f \mu} R^2 \int_{-\infty}^t \frac{\frac{d}{dt} (\vec{V}_f - \vec{V}_P)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

tel est l'équation du mouvement que l'on obtient à partir de la démonstration de Boussinesq qui s'arrête à l'équation (44). La contribution de TCHEN [28] à consisté à prendre en compte l'existence d'un gradient de pression au sein du fluide dans lequel se déplace la particule.

Il a supposé que ce gradient est suffisamment faible pour que les hypothèses introduites par Boussinesq restent valables et que donc les équations restent linéaires. On peut alors appliquer encore un principe de superposition et considérer que ce gradient de pression apporte en tout point du fluide un supplément de pression p .

La force supplémentaire exercée sur la sphère s'écrit :

$$- \int_{\sigma} P d\sigma = - \int_v \text{grad}_P dv$$

compte tenu des hypothèses de Boussinesq, les équations de Navier Stokes s'écrivent :

$$\text{grad}_p = - \rho \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t}$$

En supposant que grad_p est constant à l'échelle de la particule il vient :

$$- \int_{\sigma} p \, d\sigma = \frac{4}{3} \pi \rho R^2 \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t}$$

L'équation (45) devient finalement en introduisant le diamètre de la particule

$$(46) \quad \frac{\pi}{6} d^3 \rho_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = 3 \pi \mu d (\vec{V}_f - \vec{V}_p) + \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \frac{d\vec{V}_f}{dt} + \frac{1}{2} d^3 \rho_f \left(\frac{d\vec{V}_f}{dt} - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) + \frac{3}{2} \sqrt{\pi \rho_f \mu} d^2 \int_{-\infty}^t \frac{\frac{d\vec{V}_f}{dt} - \frac{d\vec{V}_p}{dt}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

Annexe 4 : Simplification de l'équation du mouvement de la particule dans le cas où $\rho_p \gg \rho_f$

L'équation 1-37 peut se réécrire : en négligeant les forces extérieures :

$$\frac{\rho_P}{\rho_f} \frac{dv_P}{dt} = \frac{18\pi}{v d^2} (v_f - v_p) + \frac{dv_f}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_f}{dt} - \frac{dv_P}{dt} \right) + 9 \frac{\sqrt{\pi v}}{d} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{dv_f}{dt'} - \frac{dv_P}{dt'}}{\sqrt{t-t'}} dt'$$

on constate que si on fait l'hypothèse que $\frac{\rho_P}{\rho_f} \gg 1$ on peut négliger les termes de gradient de pression et de masse ajoutée devant le terme d'inertie.

Comparons maintenant le terme de Basset au terme de Stokes. Ces deux termes s'écrivent :

$$\frac{18\pi}{v d^2} \left[(v_f - v_p) + \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{\pi v}} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{dv_f}{dt'} - \frac{dv_P}{dt'}}{\sqrt{t-t'}} dt' \right]$$

supposons que $v_f - v_p = v_0 \sin \omega t$.

On trouve alors pour le terme de Basset :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{\pi v}} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{dv_f}{dt'} - \frac{dv_P}{dt'}}{\sqrt{t-t'}} dt' = \frac{v_0 d}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{v}} (\cos \omega t + \sin \omega t).$$

Le rapport des amplitudes des deux termes est donc :

$$\frac{\text{Basset}}{\text{Stokes}} = \frac{d}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{v}}$$

plaçons-nous dans le cas réaliste d'une particule d'eau de 20 μm dans l'air, et calculons la fréquence à laquelle le terme de Basset est 10 fois plus petit que le terme de Stokes on obtient $\omega = 3000$ soit $f = 480$ Hz. Or si l'on se reporte aux résultats des calculs qui sont développés en 2-3-1, on constate

qu'une particule ne répond correctement que jusqu'à une fréquence de 20 Hz environ. On peut donc considérer qu'en ce qui nous concerne le terme de Basset est toujours négligeable devant le terme de Stokes.

L'équation 1-38 se réduit finalement à :

$$\frac{\pi}{6} d^3 \rho_P \frac{dv_P}{dt} = 3\pi \mu d(v_f - v_P)$$

Annexe 5 : Résolution de l'équation du mouvement de la particule dans un écoulement bidimensionnel.

On dispose d'une équation pour chaque composante de vitesse (les termes de gravité sont négligés).

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{3}{4} C_D Re_p \frac{\mu_f}{\rho_p d^2} (u_f - u_p)$$

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{3}{4} C_D Re_p \frac{\mu_f}{\rho_p d^2} (v_f - v_p)$$

avec :

$$Re_p = \rho_f |\vec{v}_f - \vec{v}_p| d / \mu$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + .15 Re_p^{.687})$$

L'équation est résolue par une méthode de différence finie. La dérivée par rapport au temps est évaluée à l'aide d'une formule décentrée précise au 1er ordre. La vitesse du fluide est supposée connue dans tout le champ. On utilise une méthode de résolution explicite.

Les équations discrétisées s'écrivent :

$$u_p(t + \Delta t) = u_p(t) + \Delta t \frac{18\mu_f}{\rho_p d^2} (u_f(t) - u_p(t)) (1 + .15 Re_p(t)^{.687})$$

$$v_p(t + \Delta t) = v_p(t) + \Delta t \frac{18\mu_f}{\rho_p d^2} (v_f(t) - v_p(t)) (1 + .15 Re_p(t)^{.687})$$

Les déplacements de la particule sont évalués à l'aide des formules :

$$\Delta x = u_p \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t = \frac{u_p(t) + u_p(t + \Delta t)}{2} \Delta t$$

$$\Delta y = v_p \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t = \frac{v_p(t) + v_p(t + \Delta t)}{2} \Delta t$$

Le Reynolds relatif est donné par :

$$Re_p(t) = \sqrt{(u_f(t) - u_p(t))^2 + (v_f(t) - v_p(t))^2} \cdot \frac{d\rho_f}{\mu_f}$$

Dans le cas d'un écoulement compressible, la masse volumique du fluide varie et elle doit être calculée à chaque pas. C'est le cas pour l'exemple mono dimensionnel que nous présentons. La masse volumique est calculée à l'aide des relations :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$M = \frac{U}{\sqrt{\gamma RT}}$$

Annexe 6 : EQUATIONS DE TRANSPORT DES CONTRAINTES DE REYNOLDS.

Nous écrirons ces équations pour l'écoulement tridimensionnel d'un fluide incompressible et de viscosité constante. Nous négligerons les forces extérieures massiques.

Partant des équations de Navier-Stokes pour ce cas particulier :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

on obtient, en passant aux grandeurs moyennes et fluctuante dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

Multiplions l'équation de quantité de mouvement par u'_j et prenons la moyenne temporelle; on obtient :

$$\overline{u'_j \rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + u'_i)} + \overline{u'_j (\bar{u}_k + u'_k) \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i + u'_i)} = - \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p')}$$

$$\overline{u'_j \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\bar{u}_i + u'_i)}$$

soit encore

$$\rho \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial t} u'_i} + \rho \overline{\bar{u}_k u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \rho \overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}$$

$$= - \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \mu \overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}}$$

ajoutons lui son équation conjuguée :

$$\rho \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial t} u'_j} + \rho \overline{\bar{u}_k u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \rho \left(\overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \right)$$

$$= - \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \mu \sum_k \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2}}$$

il vient :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} + \rho \overline{\bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} u'_i u'_j} = - \rho \left(\overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} \right)$$

$$- \rho \left(\overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \right) - \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)$$

$$+ \mu \left(\overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2}} \right)$$

en tenant compte des relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(u'_i u'_j u'_k)} = \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}} = 0$$

$$\nabla^2 \overline{u'_i u'_j} = 2 \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2}} + \overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}}$$

L'équation s'écrit :

$$\rho \frac{D}{Dt} \overline{u'_i u'_j} = - \rho \left(\overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(u'_i u'_j u'_k)}$$

$$- \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) + \mu \nabla^2 \overline{u'_i u'_j} - 2 \mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

Remarque : dans le cas d'un écoulement permanent, le premier membre s'écrit :

$$\overline{\bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} u'_i u'_j}$$



LISTE DES TABLEAUX

	Pages
Tableau 1	Résultats pour les gouttes d'eau. 127
Tableau 2	Résultats partiels pour les gouttes d'eau. 131
Tableau 3	Résultat pour les bulles de savon. 134
Tableau 4	Comparaisons des constantes du modèle de turbulence avec différents auteurs. 136
Tableau 5	Valeur des coefficients de l'équation de transport pour les différentes variables. 137

TABLEAU 1

XH = 0.0435 M UO = 16.40 M/S I = 40. DEGRES XO = 0.0000 M
DT = 0.4850E-04 S DX = 0.0040 M DZ = 0.0200 M M = 123 POINTS DE MESURE

X(M)	Y(M)	Z(M)	U(M/S)	V(M/S)	W(M/S)	D(MICR.)	NO
-0.000592	-0.018868	-0.000855	5.21	13.75	0.04	20.	57
0.000587	-0.018522	-0.003805	0.57	11.67	0.72	21.	76
-0.0000460	-0.018356	0.013350	7.70	11.40	0.04	20.	77
0.000297	-0.018117	-0.014308	4.25	11.35	0.45	22.	74
0.000210	-0.017568	0.006667	4.01	6.44	0.02	16.	79
0.000040	-0.017156	0.005896	3.74	8.56	0.04	20.	80
0.000319	-0.016962	-0.004366	2.01	6.93	1.34	22.	81
0.000431	-0.016699	0.017880	6.34	12.40	-1.85	17.	78
0.000699	-0.016540	-0.002572	4.62	8.58	0.03	20.	83
-0.000201	-0.016446	-0.005787	9.37	15.31	-2.69	21.	82
-0.000020	-0.016373	0.012300	9.06	14.90	0.05	18.	85
-0.000115	-0.015996	0.001946	4.59	14.39	-2.27	15.	67
0.000664	-0.015983	-0.000499	7.95	13.36	0.04	23.	84
0.000684	-0.015907	0.013438	11.45	11.83	4.07	15.	87
0.000303	-0.015891	0.013671	8.79	15.10	-2.38	15.	86
-0.000160	-0.014989	-0.000689	8.67	14.26	7.60	18.	58
0.000936	-0.014129	0.008032	7.59	15.83	1.65	17.	88
0.000840	-0.013992	0.003342	9.32	16.66	-1.00	16.	91
-0.000762	-0.013617	0.006564	9.35	13.60	0.41	16.	94
0.000337	-0.013558	-0.003397	11.29	15.50	-3.01	16.	92
0.000540	-0.013485	0.006070	7.04	14.97	-4.53	23.	89
0.000742	-0.012784	0.002001	4.21	12.23	-1.14	18.	68
0.000962	-0.012723	0.005993	7.18	15.18	-4.12	21.	90
0.000058	-0.012483	0.012191	10.37	18.40	1.32	13.	96
0.000073	-0.012441	0.018070	9.18	14.54	-3.19	18.	95
0.000304	-0.012414	-0.003282	10.29	14.62	2.75	21.	99
0.000351	-0.012391	0.008737	10.06	16.83	0.41	15.	97
0.001098	-0.012162	0.001640	6.52	12.47	-2.41	16.	93
0.000376	-0.012133	0.008416	9.90	16.52	-4.60	22.	98
0.000377	-0.012107	0.008494	9.86	16.55	-5.72	19.	100
0.000701	-0.011957	0.001156	10.07	16.20	1.13	18.	59
0.000513	-0.011170	0.013342	9.84	15.15	-0.71	18.	101
0.000480	-0.009851	-0.000791	10.82	15.18	-0.66	18.	103
-0.000215	-0.009844	-0.011692	13.21	14.28	1.66	15.	102
-0.000095	-0.009471	0.006240	10.95	16.16	2.05	15.	69
-0.000230	-0.009250	0.013294	12.18	15.15	-0.97	17.	105
0.000571	-0.009137	0.017050	10.56	14.05	-1.58	17.	60
-0.000357	-0.008604	-0.002744	10.81	14.75	-2.00	16.	104
-0.000740	-0.008293	-0.000715	11.11	14.39	2.27	20.	107



X(M)	Y(M)	Z(M)	U(M/S)	V(M/S)	W(M/S)	D(MICR.)	NO
-0.000010	-0.007877	-0.012176	12.72	13.63	-1.69	16.	108
0.000516	-0.007732	0.016979	11.98	14.12	0.05	15.	106
-0.000519	-0.007618	0.010772	11.65	13.53	0.04	17.	70
-0.000200	-0.006992	-0.002699	11.42	14.31	1.51	15.	109
-0.000142	-0.006232	0.012071	10.33	13.09	1.37	18.	110
0.000063	-0.006097	0.012361	11.81	14.82	0.06	15.	61
-0.000662	-0.005171	-0.009719	14.20	13.12	0.14	15.	71
0.000193	-0.004679	-0.013753	10.24	13.85	4.10	16.	111
0.000188	-0.004668	-0.013646	10.25	13.77	1.51	17.	112
0.000556	-0.004259	-0.009587	13.69	12.28	-1.17	22.	113
0.000459	-0.003231	0.016722	12.05	14.15	-0.94	16.	114
0.000354	-0.003077	0.009446	12.20	13.76	0.04	19.	115
0.000186	-0.003073	-0.009633	14.08	12.14	-1.16	18.	55
0.000240	-0.002644	0.011629	12.07	13.35	0.63	18.	117
-0.000836	-0.002631	-0.011055	13.80	11.80	-0.78	15.	118
0.000883	-0.002446	0.009509	11.51	13.90	2.12	19.	116
-0.001020	-0.000469	0.006824	11.60	12.73	-0.59	19.	123
0.000548	-0.000004	0.000347	11.25	14.17	0.05	17.	66
-0.000024	0.000824	-0.018165	13.80	10.73	1.21	24.	119
-0.000216	0.000943	-0.014247	14.56	11.30	-0.78	16.	72
0.000518	0.002759	0.008675	12.89	13.04	3.92	14.	56
0.000710	0.004238	-0.007366	12.62	11.57	4.87	20.	73
-0.000395	0.005235	0.000132	12.49	10.38	1.79	22.	65
0.000404	0.009239	-0.004098	12.18	9.91	-4.91	18.	64
-0.000857	0.011709	0.016366	11.57	11.98	0.04	17.	121
-0.000186	0.012346	0.004166	10.47	10.55	-1.38	21.	63
-0.000141	0.012396	-0.001488	12.08	14.74	-0.14	16.	122
-0.000837	0.014026	-0.005587	11.51	11.91	0.04	21.	62
-0.000244	0.014365	-0.016562	17.71	7.69	5.24	19.	120

TABIEAU 1 (suite)



XH = 0.0435 M UO = 16.40 M/S I = 40. DEGRES XO = 0.0400 M

DT = 0.4850E-04 S DX = 0.0040 M DZ = 0.0250 M M = 123 POINTS DE MESURE

X(M)	Y(M)	Z(M)	U(M/S)	V(M/S)	W(M/S)	D(MICR.)	NO
0.039042	-0.008634	0.014745	-1.26	0.22	1.29	52.	34
0.039545	0.003159	0.014672	21.08	1.01	0.00	13.	39
0.039324	0.007150	0.013081	19.88	3.10	0.01	21.	54
0.038671	0.008185	-0.008801	20.80	3.64	-2.13	19.	9
0.037925	0.009088	0.018770	19.03	8.76	0.02	23.	33
0.038005	0.010333	-0.016088	20.60	3.56	0.01	23.	32
0.039484	0.011145	0.001099	19.75	3.57	-1.66	15.	13
0.038007	0.011834	-0.000570	19.34	4.50	0.01	19.	35
0.039400	0.011992	-0.010922	21.07	3.02	0.01	16.	8
0.039441	0.012022	0.002875	20.77	1.63	0.00	13.	38
0.038140	0.012952	-0.012713	20.10	2.35	0.01	0.	31
0.039267	0.013152	-0.001078	18.65	6.14	0.01	24.	30
0.037584	0.013916	-0.001705	18.29	6.50	0.01	28.	29
0.038643	0.013929	0.006077	18.88	2.32	0.00	14.	7
0.039445	0.013979	0.006734	18.90	1.84	0.00	19.	36
0.038549	0.015269	-0.014398	19.43	2.10	0.00	12.	6
0.039345	0.015697	-0.017560	19.61	0.91	0.00	18.	44
0.038499	0.016450	-0.011109	16.12	7.51	0.02	22.	53

TABIEAU 1 (suite)



TABLEAU 1 (suite)

XH = 0.0435 M UO = 16.40 M/S I = 40. DEGRES XO = 0.0800 M
 DT = 0.4850E-04 S DX = 0.0040 M DZ = 0.0250 M M = 123 POINTS DE MESURE

X(M)	Y(M)	Z(M)	U(M/S)	V(M/S)	W(M/S)	D(MICR.)	NO
0.079269	0.000137	0.016076	15.64	-1.75	-0.00	29.	28
0.078678	0.007085	0.006824	20.29	-3.35	-0.01	10.	5
0.078725	0.008330	-0.017310	21.11	-3.22	-0.01	10.	17
0.078557	0.010844	0.008997	22.89	0.11	0.00	13.	43
0.078621	0.011334	-0.015897	21.83	-2.73	-0.01	10.	4
0.077748	0.011380	0.009216	22.45	1.45	0.00	21.	52
0.077412	0.012059	0.008439	21.71	1.69	0.00	19.	41
0.078621	0.012207	-0.016754	20.76	-2.31	-0.00	17.	12
0.079012	0.012344	0.009304	22.77	0.13	0.00	9.	51
0.077394	0.012928	-0.018565	21.06	-0.63	-0.00	23.	27
0.078092	0.013054	0.002161	22.14	1.02	-9.92	12.	49
0.077413	0.013105	0.001668	21.91	1.39	0.00	15.	40
0.079068	0.013299	0.002061	22.33	0.97	0.00	12.	48
0.077830	0.013561	0.004041	22.03	1.67	0.00	20.	50
0.078508	0.013885	0.005379	21.83	-0.95	-0.00	15.	26
0.077492	0.013899	0.008192	21.53	-0.74	-0.00	11.	3
0.078043	0.013917	-0.007255	20.91	2.43	0.01	19.	37
0.077636	0.015362	-0.024226	20.35	-0.81	-0.00	20.	25
0.078655	0.016012	0.002987	22.37	1.77	0.01	23.	47
0.078010	0.016235	0.002826	21.84	-0.29	0.00	11.	2
0.077909	0.016660	0.010323	19.88	1.76	22.00	31.	24
0.078490	0.016817	-0.022512	20.33	-0.17	0.00	25.	23
0.073757	0.017341	-0.023779	19.55	-1.21	-0.00	20.	11
0.078790	0.017489	0.007230	22.18	2.03	0.01	29.	46
0.077973	0.017910	-0.020439	21.04	-0.11	0.00	19.	14
0.078330	0.018405	-0.020412	20.83	0.27	0.00	20.	10
0.077219	0.018737	0.003290	21.65	2.41	0.01	10.	42
0.077977	0.018866	0.011753	22.25	1.39	0.00	31.	45
0.077154	0.019690	-0.020501	20.74	0.97	0.00	17.	1



TABLEAU 2

XH = 0.0435 M UO = 16.40 M/S I = 40. DEGRES XO = 0.0000 M
 DT = 0.4850E-04 S DX = 0.0040 M DZ = 0.0200 M M = 30 POINTS DE MESURE

X(M)	Y(M)	Z(M)	U(M/S)	V(M/S)	W(M/S)	D(MICR.)	NO
-0.000592	-0.018868	-0.000855	5.21	13.75	0.04	20.	21
-0.000160	-0.014989	-0.000889	8.67	14.26	7.60	18.	22
0.000701	-0.011957	0.001156	10.07	16.20	1.13	18.	23
0.000571	-0.009137	0.017050	10.56	14.05	-1.58	17.	24
0.000063	-0.006097	0.012361	11.81	14.82	0.06	15.	25
0.000186	-0.003073	-0.009633	14.08	12.14	-1.16	18.	19
0.000548	-0.000004	0.000347	11.25	14.17	0.05	17.	30
0.000518	0.002759	0.008675	12.89	13.04	3.92	14.	20
-0.000395	0.005235	0.000132	12.49	10.38	1.79	22.	29
0.000404	0.009239	-0.004098	12.18	9.91	-4.91	18.	28
-0.000186	0.012346	0.004166	10.47	10.55	-1.38	21.	27
-0.000837	0.014026	-0.005587	11.51	11.91	0.04	21.	26



TABLEAU 2 (suite)

XH = 0.0435 M UO = 16.40 M/S I = 40. DEGRES XO = 0.0400 M
 DT = 0.4850E-04 S DX = 0.0040 M DZ = 0.0250 M M = 30 POINTS DE MESURE

X(M)	Y(M)	Z(M)	U(M/S)	V(M/S)	W(M/S)	D(MICK.)	NO
0.039545	0.003159	0.014672	21.08	1.01	0.00	13.	16
0.038671	0.008185	-0.008801	20.80	3.64	-2.13	19.	9
0.039484	0.011145	0.001099	19.75	3.57	-1.66	15.	13
0.039400	0.011992	-0.010922	21.07	3.02	0.01	16.	8
0.039441	0.012022	0.002875	20.77	1.63	0.00	13.	15
0.038643	0.013929	0.006077	18.88	2.32	0.00	14.	7
0.038549	0.015269	-0.014398	19.43	2.10	0.00	12.	6



TABLEAU 2 (suite)

XH = 0.0435 M UO = 16.40 M/S I = 40. DEGRES XO = 0.0800 M
 DT = 0.4850E-04 S DX = 0.0040 M DZ = 0.0250 M M = 30 POINTS DE MESURE

X(M)	Y(M)	Z(M)	U(M/S)	V(M/S)	W(M/S)	D(MICR.)	NO
0.078678	0.007085	0.006824	20.29	-3.35	-0.01	10.	5
0.078621	0.011334	-0.015897	21.83	-2.73	-0.01	10.	4
0.077412	0.012059	0.008439	21.71	1.69	0.00	19.	18
0.078621	0.012207	-0.018754	20.76	-2.31	-0.00	17.	12
0.077413	0.013105	0.001668	21.91	1.39	0.00	15.	17
0.077492	0.013899	0.008192	21.53	-0.74	-0.00	11.	3
0.078043	0.013917	-0.007255	20.91	2.43	0.01	19.	14
0.078010	0.016235	0.002826	21.84	-0.29	0.00	11.	2
0.078757	0.017341	-0.023779	19.55	-1.21	-0.00	20.	11
0.078330	0.018405	-0.020412	20.83	0.27	-0.00	20.	10
0.077154	0.019690	-0.020501	20.74	0.97	0.00	17.	1



TABLEAU 3

XH = 0.0435 M UO = 16.00 M/S I = 40. DEGRES XO = 0.0000 M
DT = 0.3620E-03 S DX = 1.1000 M DZ = 1.1000 M M = 53 POINTS DE MESURE

X (M)	Y (M)	Z (M)	U (M/S)	V (M/S)	W (M/S)	D (MICR.)	NO
0.040344	-0.017959	0.006183	-3.34	0.69	1.01	1482.	46
0.034689	-0.015542	-0.037144	-6.13	1.63	-2.35	1416.	52
0.072143	-0.015500	0.001938	0.69	-1.11	-2.48	1349.	50
0.093660	-0.014824	0.011956	6.52	-0.88	1.54	1445.	49
-0.001882	-0.013308	0.025449	11.83	11.17	0.06	1371.	11
0.074349	-0.010860	-0.007647	2.18	-3.89	-3.22	1349.	53
0.070756	-0.009206	0.035850	2.17	-4.76	6.61	1457.	45
0.017777	-0.007408	0.026921	14.70	2.89	-1.62	1310.	8
0.088219	-0.004694	-0.004535	6.28	-2.35	1.16	1517.	44
0.021864	-0.001709	0.039298	14.27	7.72	-0.05	1299.	36
0.031273	0.001336	-0.004093	12.72	3.60	2.38	1510.	51
0.004988	0.001338	0.022520	13.83	9.78	0.98	1360.	10
0.068337	0.001467	-0.008079	16.64	-0.46	1.33	1568.	48
0.020340	0.002555	0.027008	17.76	6.55	-0.16	1360.	7
-0.002401	0.003321	0.029447	9.52	9.64	0.42	1399.	21
0.082998	0.003501	-0.007724	16.08	-1.31	1.02	1551.	43
0.008074	0.004460	0.037186	11.47	9.01	1.77	1129.	25
0.016757	0.004611	0.000138	14.22	6.75	-4.92	1232.	19
0.047543	0.005694	0.028266	20.48	1.69	0.02	1391.	5
0.100984	0.005789	0.006197	7.96	4.29	-4.39	1484.	47
0.008514	0.006793	0.009163	13.13	9.11	-2.20	1233.	20
0.000262	0.007505	0.016562	9.48	8.26	-0.78	1563.	42
0.007787	0.007869	0.025446	9.90	8.75	0.16	1240.	9
0.029867	0.008475	0.039072	18.03	6.83	0.04	1397.	35
0.086242	0.010615	0.022348	20.99	0.96	0.10	1379.	3
0.013902	0.011652	0.033558	12.55	8.21	-1.69	1469.	26
0.004781	0.013686	0.003804	10.76	8.07	-3.35	1553.	41
0.099203	0.014094	0.018337	17.76	-1.04	-1.62	1579.	37
0.014326	0.014937	0.042753	14.17	6.19	0.04	1148.	33
0.075149	0.015136	0.034744	19.52	-2.55	-0.01	1164.	30
0.016817	0.015168	0.038627	11.53	7.70	-0.17	1168.	27
0.084117	0.015572	0.030621	19.44	-0.06	-0.41	1366.	2
0.046020	0.015587	0.033668	17.87	4.36	0.78	1414.	34
0.038534	0.015641	0.034192	16.88	1.77	0.01	1173.	32
0.046749	0.015815	0.011262	13.36	-1.84	-0.36	1534.	39
0.013060	0.016258	0.037035	11.28	6.96	0.51	1434.	18
0.030721	0.016698	0.012515	15.61	4.27	0.13	1546.	40
0.072263	0.016753	0.035363	17.96	2.61	1.02	1095.	22
0.067793	0.017108	0.038004	19.64	-1.14	-0.19	1181.	28



TABLEAU 3 (suite)

X (M)	Y (M)	Z (M)	U (M/S)	V (M/S)	W (M/S)	D (MICR.)	NO
0.029187	0.017320	0.045459	15.15	6.95	0.14	1250.	17
0.023238	0.017364	0.025842	16.11	5.06	0.73	1372.	6
0.09399	0.017597	0.030544	18.21	-1.48	-0.25	1360.	38
0.039031	0.018197	0.036102	17.07	0.58	0.48	1155.	31
0.054819	0.018236	0.025522	19.18	2.85	-0.27	1373.	4
0.071561	0.018264	0.031281	16.36	-0.88	-1.34	325.	14
0.082729	0.018537	0.023196	20.60	2.16	1.30	1365.	1
0.063372	0.018614	0.040417	16.99	-2.20	0.85	1450.	23
0.033795	0.018640	0.038411	15.44	3.65	0.02	1435.	24
0.076916	0.018881	0.022358	17.09	-0.94	-3.01	227.	13
0.087599	0.018903	0.022984	18.77	0.25	-0.33	1440.	12
0.058926	0.019122	0.031501	9.89	-0.73	-2.08	161.	16
0.072436	0.019202	0.032435	14.61	-0.81	-0.03	152.	15
0.071606	0.020028	0.038057	17.54	-1.94	-0.09	1306.	29



	Wieghardt [47]	Glushko [48]	Spalding [42]	Spalding [49]	Spalding [50]	Runchal [41]	Wolfshtein [46]	Premier modèle	deuxième modèle
C_{μ}	.224	.200	.200	.179	.219	.200	.220	.213	.213
C_D	.450	.313	.313	.224	.410	.313	.416	.376	.376
σ_K	1.47	2.15	1.70	2.13	1.	1.54	1.53	1.	1.
A_{μ}	-	.0091	-	.0315	-	-	.016	.0165	.0140
A_D	-	.08	-	.112	-	-	.263	.238	.0220

Tableau 4



ϕ	a_ϕ	b_ϕ	c_ϕ	d_ϕ
ψ	0	1	1	$+\omega$
ω	1	1	v_e	$-2 \left[v_e (u_x - v_y) \right]_{xy} + 2(v_e v_x)_{yy} + 2(v_e u_y)_{xx}$
K	1	$\frac{v_t}{\sigma_k}$	1	$-v_t (2u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2v_y^2) + C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}$

Tableau 5 - Expression des coefficients de l'équation de transport pour les différentes variables.



LISTE DES FIGURES

	Pages
Fig. 1 : Différentes configurations de prises d'air à grande incidence..	141
Fig. 2 : Caractéristiques d'un compresseur avec et sans distorsion radiale [5].	142
Fig. 3 : Enregistrement d'un hologramme de Gabor.	143
Fig. 4 : Restitution d'un hologramme de Gabor.	143
Fig. 5 : Montage d'enregistrement.	144
Fig. 6 : Montage de restitution.	144
Fig. 7 : Conventions de notations à l'enregistrement.	145
Fig. 8 : Conventions de notations à la restitution.	145
Fig. 9 : Caractéristiques de l'émulsion holotest 10 E 75.	146
Fig. 10 : Enregistrement.	147
Fig. 11 : Restitution.	147
Fig. 12 : Figure de diffraction d'une ouverture circulaire.	148
Fig. 13 : Ouvertures intervenant dans le montage.	149
Fig. 14 : Loi de variation de la vitesse de l'air et vitesse d'une particule de 20 μm de diamètre dans le collecteur de la soufflerie sonique de l'I.M.F.L.	150
Fig. 15 : Vitesse des gouttes en veine vide en fonction de leur diamètre.	151
Fig. 16 : Schéma de définition de l'écoulement autour d'un dièdre.	152
Fig. 17 : Résultat pour des particules de 20 μm	152
Fig. 18 : Schéma du montage.	153
Fig. 19 : Emetteur multitête.	154
Fig. 20 : Emetteur à grand débit.	154
Fig. 21 : Hologramme d'une bulle de savon.	155
Fig. 22 : Injecteur.	155
Fig. 23 : Hologramme d'une goutte d'eau.	156
Fig. 24 : Rapport des spectres d'énergie en fonction de la fréquence. ...	157

Fig. 25	: Résultats pour les gouttes d'eau.	158
Fig. 26	: Vitesse au voisinage du bord d'attaque.	159
Fig. 27	: Anémoclinomètre [34]	160
Fig. 28	: Ligne de courant.	161
Fig. 29	: Résultats pour les bulles de savon.	162
Fig. 30	: Comparaison bulles de savon gouttes d'eau.	163
Fig. 31	: Vecteurs vitesses et taux de turbulence dans une prise d'air à 40° d'incidence.	164
Fig. 32	: Spectre d'énergie.	165
Fig. 33	: Domaine de calcul.	166
Fig. 34	: Maillage dans la zone d'écoulement bidimensionnel.	166
Fig. 35	: Maillage dans les couches de paroi.	167
Fig. 36	: Organigramme.	168
Fig. 37	: Ecoulement turbulent développé entre parois parallèles.	169
Fig. 38	: Maillage entrée de tuyau n° 1.	170
Fig. 39	: Entrée de tuyau à section rectangulaire $Re = 10^5$	171
Fig. 40	: Maillage entrée de tuyau n° 2.	172
Fig. 41	: Entrée de tuyau à section rectangulaire $Re = 10^5$	173
Fig. 42	: Vitesse sur l'axe et frottement à la paroi avec 2 maillages. .	174
Fig. 43	: Vitesse sur l'axe et frottement à la paroi avec 2 modèles. ...	175
Fig. 44	: Profils de vitesse à l'entrée à 20° d'incidence.	176
Fig. 45	: Calculs en incidence : maillage uniforme.	177
Fig. 46	: Profils de vitesse à l'incidence 20°.	178
Fig. 47	: Energie turbulente à l'incidence 20°.	179
Fig. 48	: Lignes iso tourbillon et lignes de courant à l'incidence 20°. 180	
Fig. 49	: Incidence 20° maillage n° 3.	181
Fig. 50	: Profils de vitesse.	182
Fig. 51	: Energie turbulente.	183

Fig. 52	: Lignes iso tourbillon et lignes de courant.....	184
Fig. 53	: Incidence 20° maillage n° 2.	185
Fig. 54	: Profils de vitesse.	186
Fig. 55	: Energie turbulente.	187
Fig. 56	: Lignes iso tourbillon et lignes de courant.	188
Fig. 57	; Profils de vitesse à l'entrée à 40° d'incidence.	189
Fig. 58	: Profils de vitesse.	190
Fig. 59	: Energie turbulente.	191
Fig. 60	: Lignes iso tourbillon et lignes de courant.	192
Fig. 61	: Profils de vitesse.	193
Fig. 62	: Energie turbulente.	194
Fig. 63	: Lignes iso tourbillon et lignes de courant.....	195
Fig. 64	: Incidence 40° maillage n° 3.	196
Fig. 65	: Profil de vitesse.	197
Fig. 66	: Energie turbulente.	198
Fig. 67	: Lignes iso tourbillon et lignes de courant.....	199

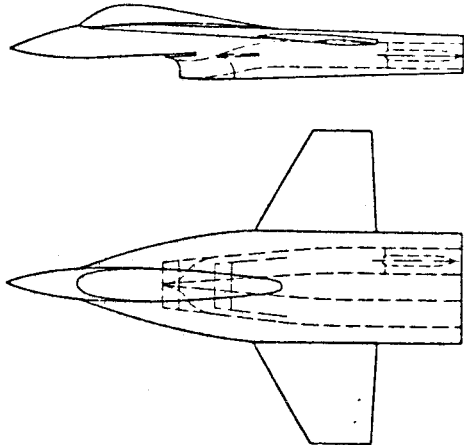
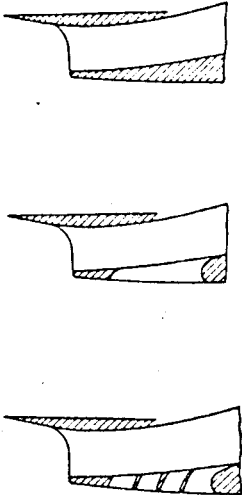
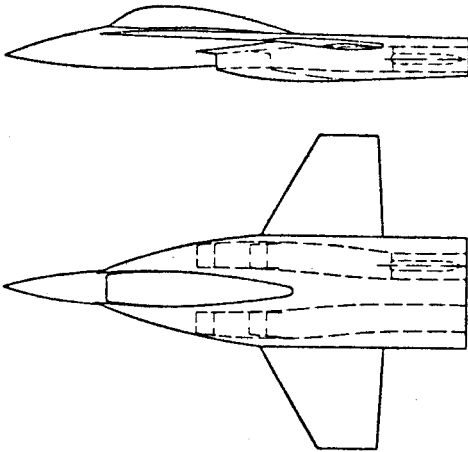
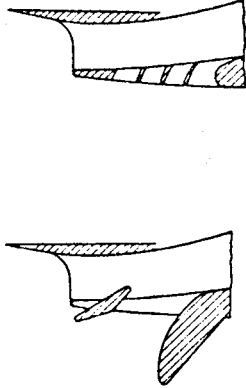
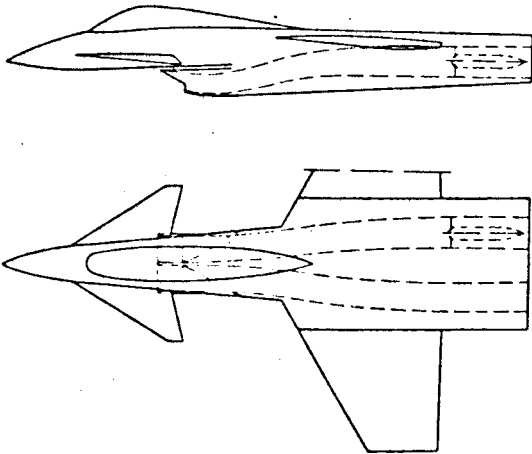
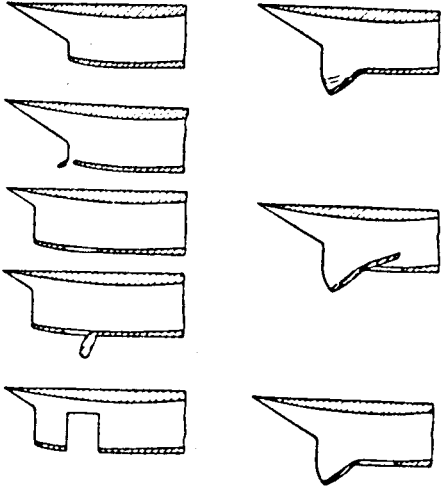
Model Configuration	Auxiliary Intake Variation
<p data-bbox="334 185 606 220">Intake under Fuselage</p> 	
<p data-bbox="355 760 600 794">Intake under Strake</p> 	
<p data-bbox="334 1306 606 1340">Intake under Fuselage</p> 	



FIG 1 : DIFFERENTES CONFIGURATIONS DE PRISES D'AIR A GRANDE INCIDENCE (4)

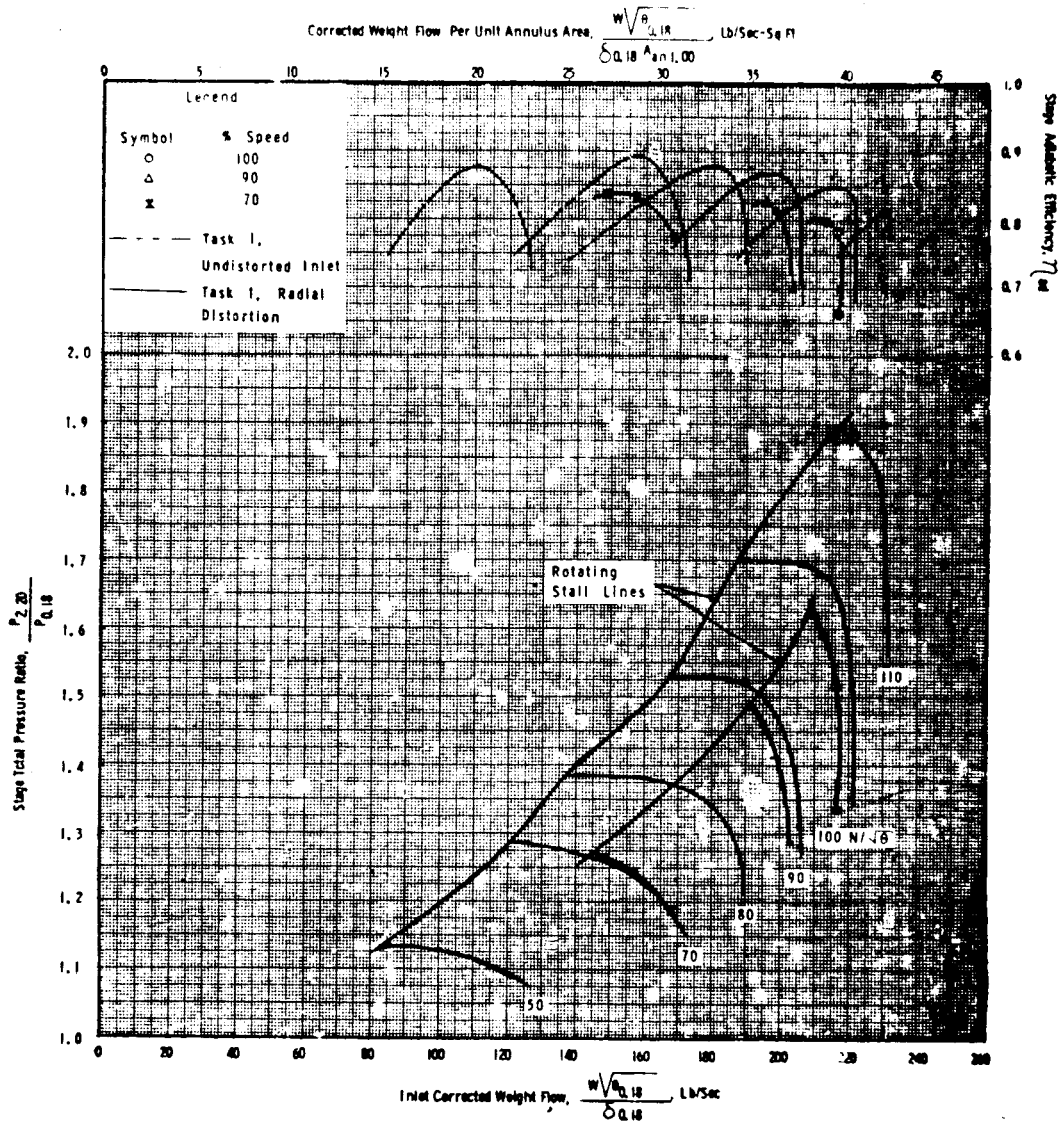


FIG : 2 CARACTERISTIQUES D'UN COMPRESSEUR AVEC ET SANS DISTORSION RADIALE (5)



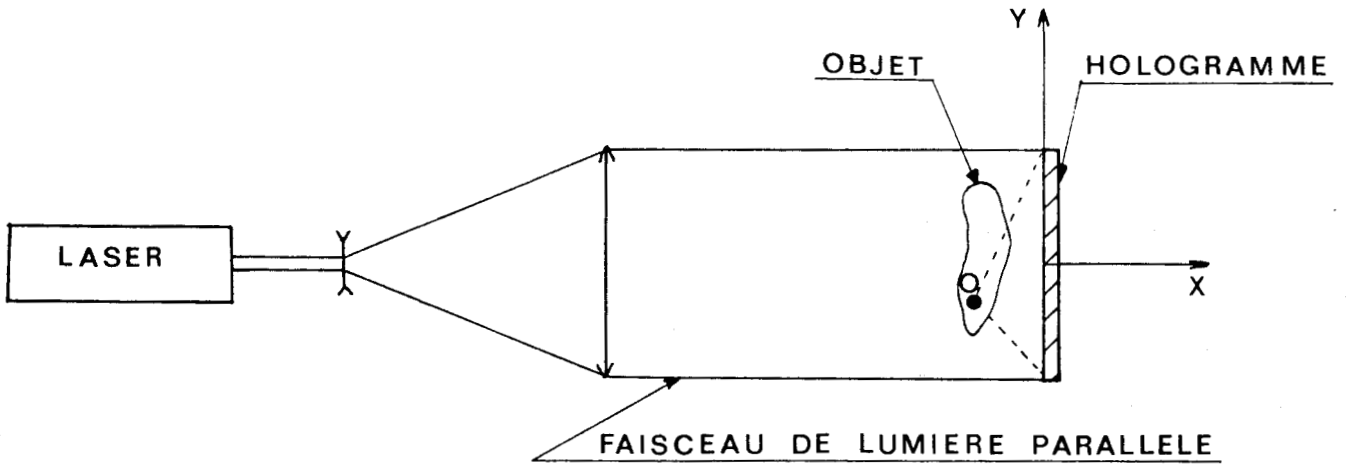


FIG:3 ENREGISTREMENT D'UN
HOLOGRAMME DE GABOR

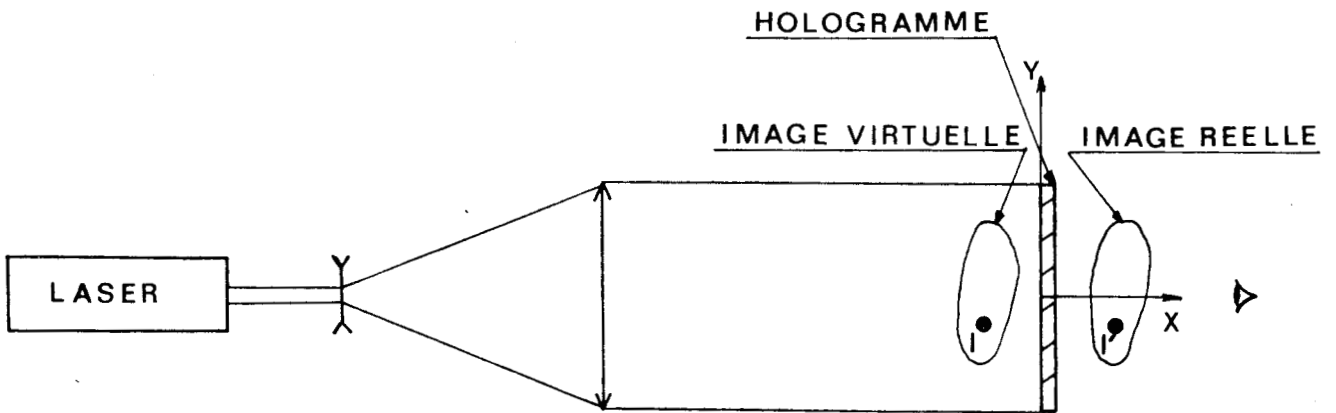


FIG:4 RESTITUTION D'UN
HOLOGRAMME DE GABOR

ÉCOULEMENT ENSEMBLE DE
GOUTTELETTES D'EAU

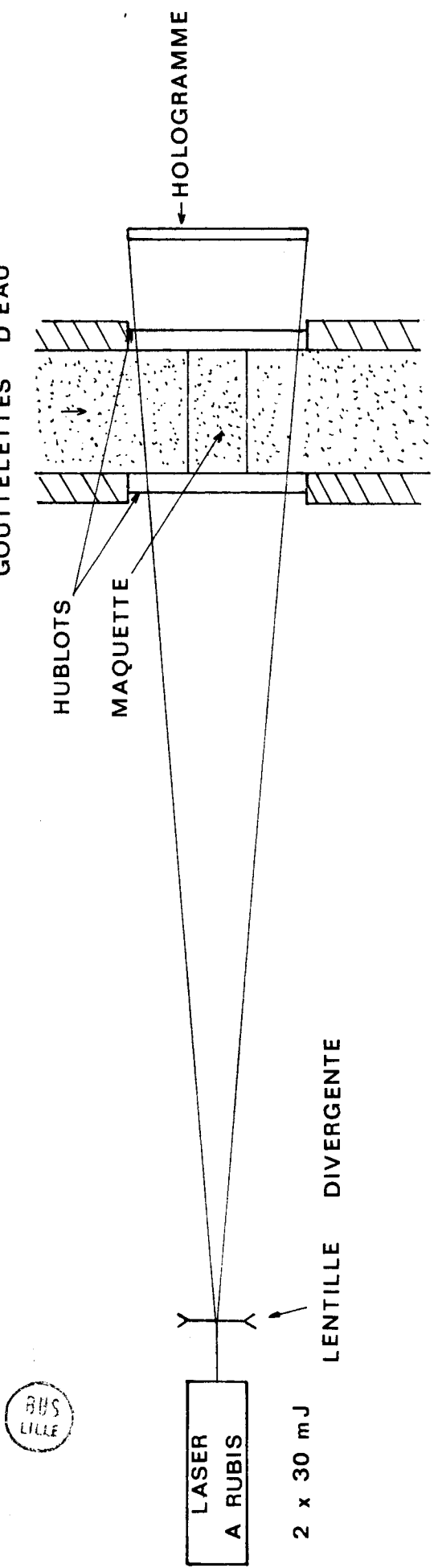


FIG: 5 ENREGISTREMENT

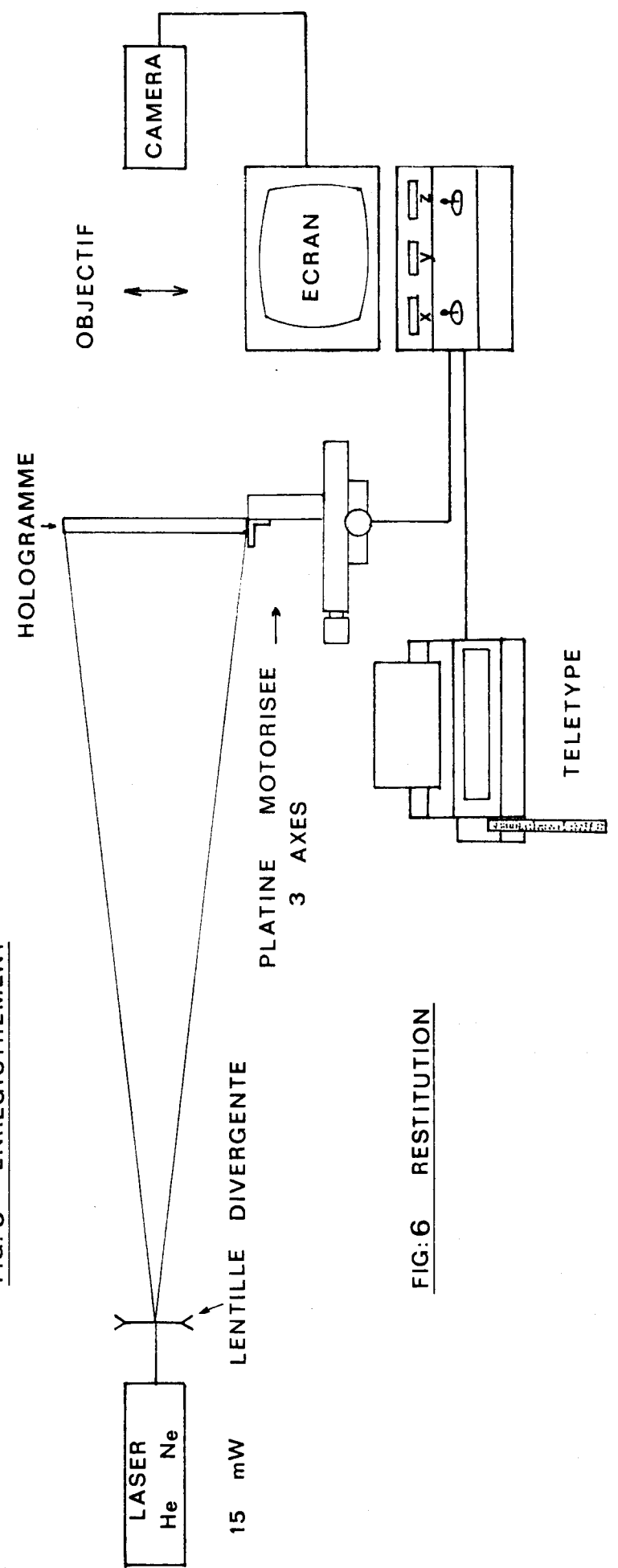


FIG: 6 RESTITUTION

BUS
LILLE

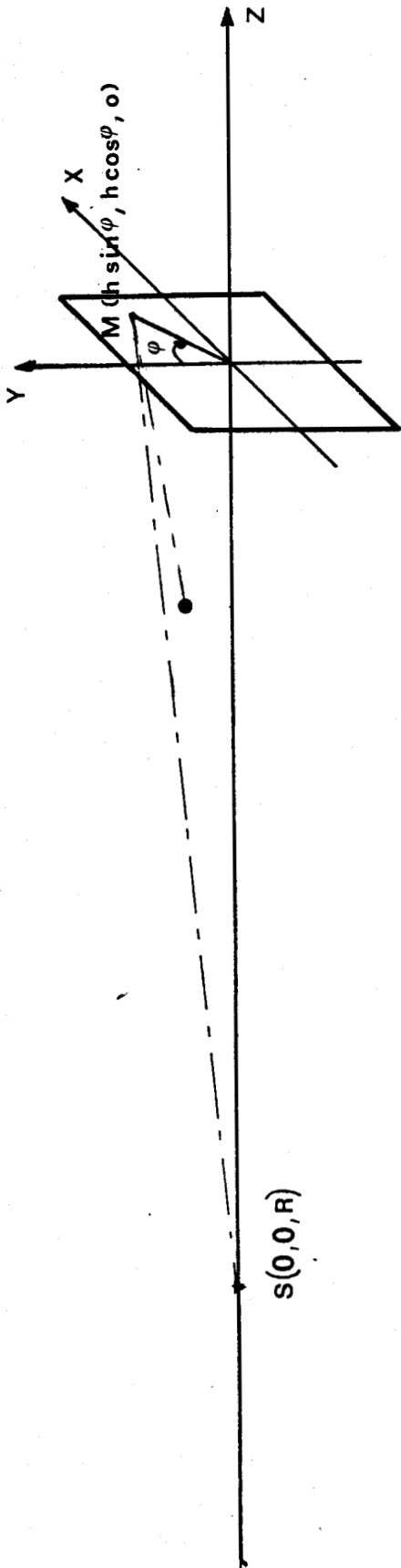


FIG:7 CONVENTIONS DE NOTATIONS A L'ENREGISTREMENT

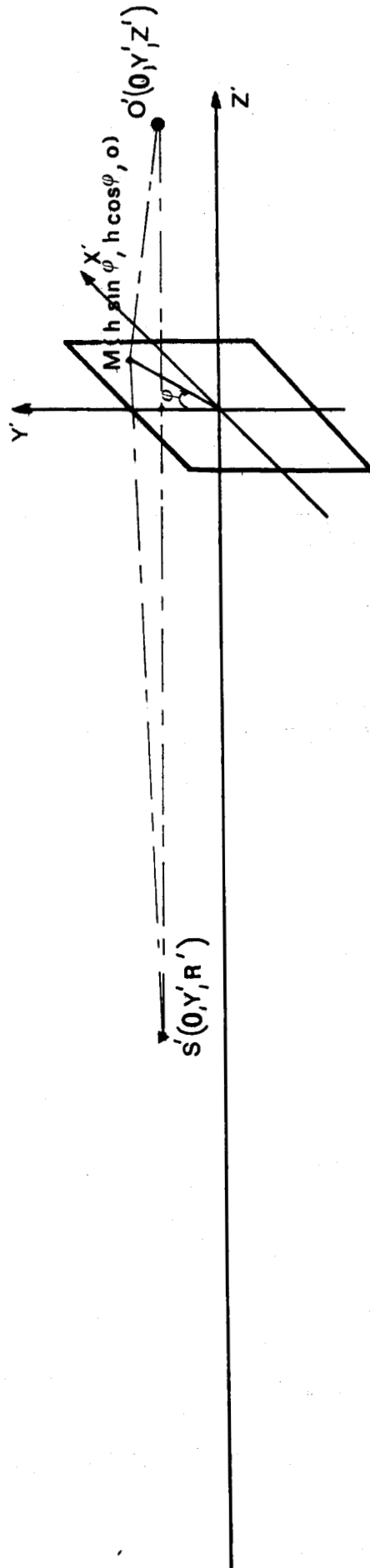


FIG:8 CONVENTIONS DE NOTATIONS A LA RESTITUTION



a SENSIBILITE SPECTRALE

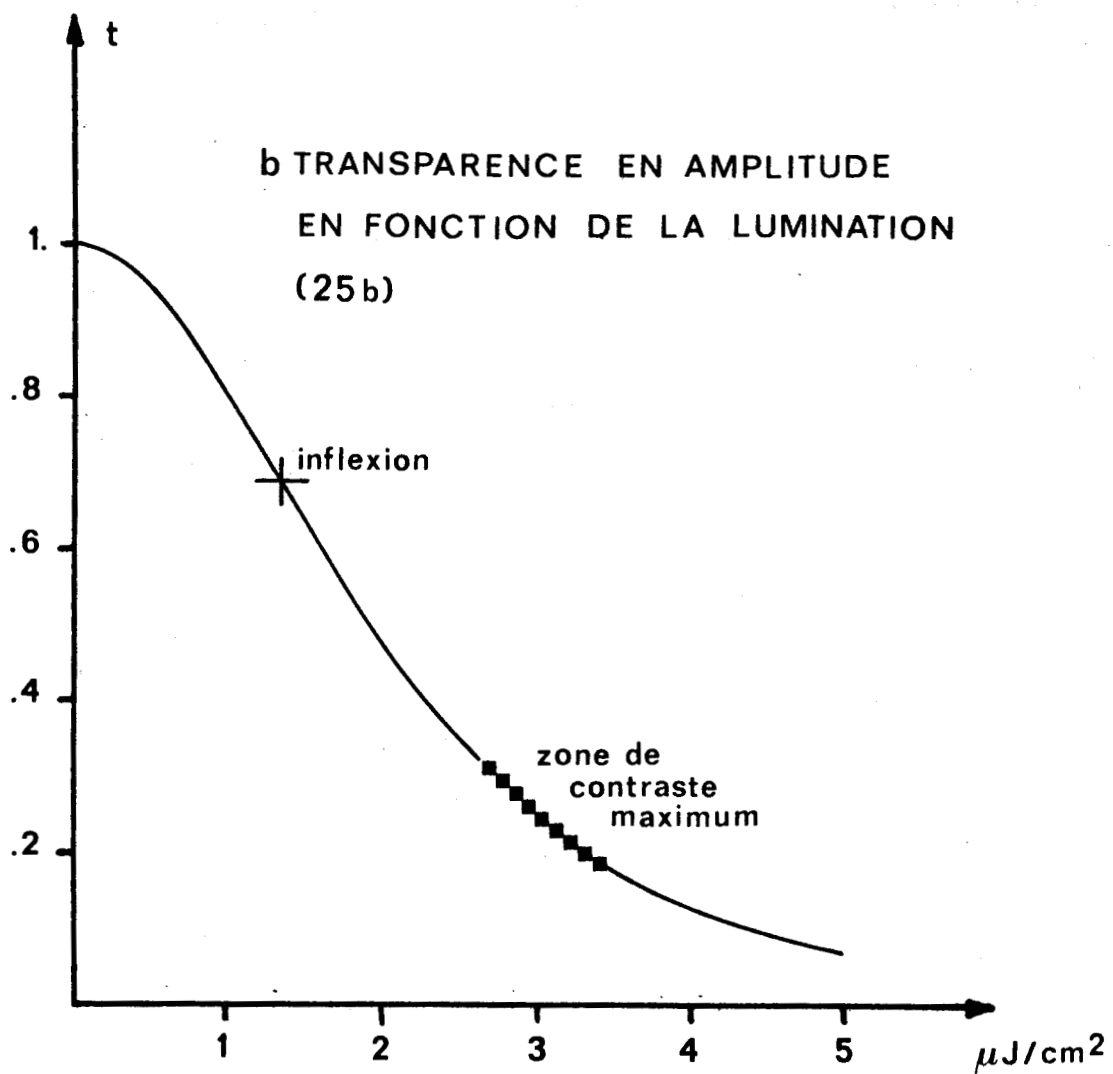
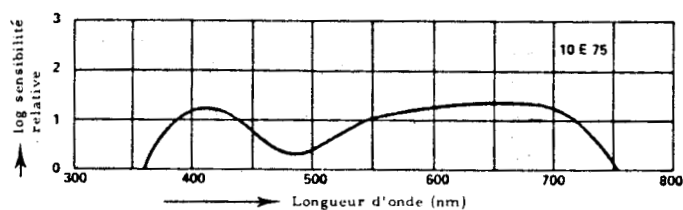


FIG:9 CARACTERISTIQUES DE L'HOLOTEST 10E75

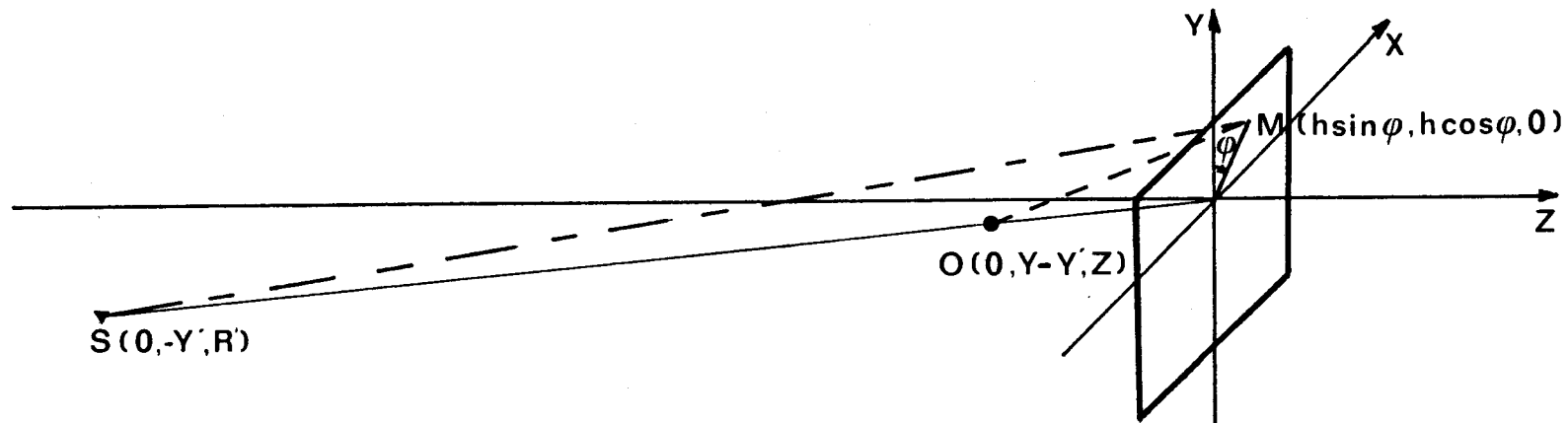


FIG:10 ENREGISTREMENT

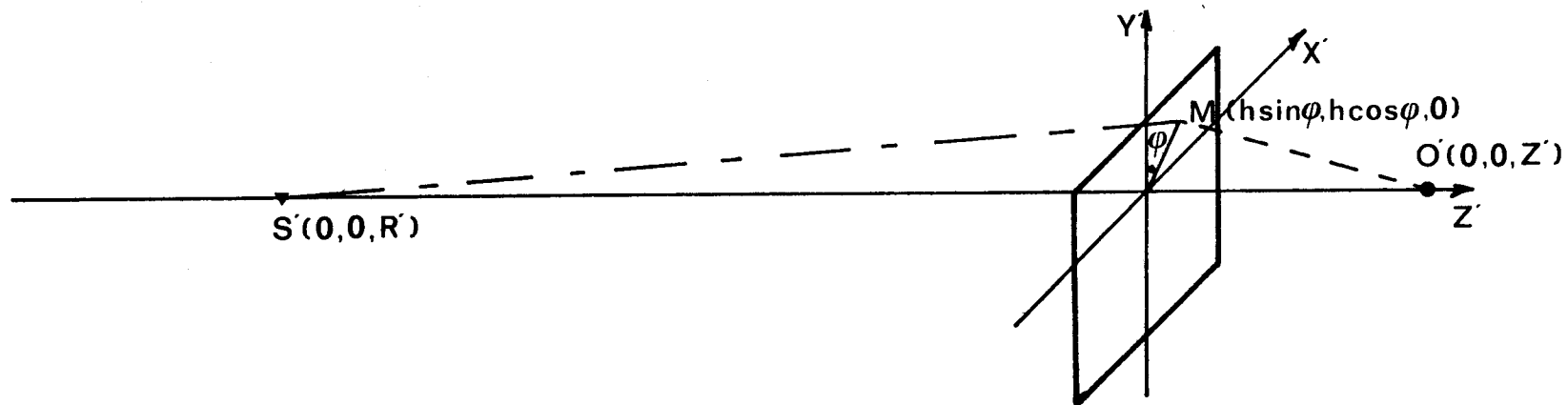


FIG:11 RESTITUTION



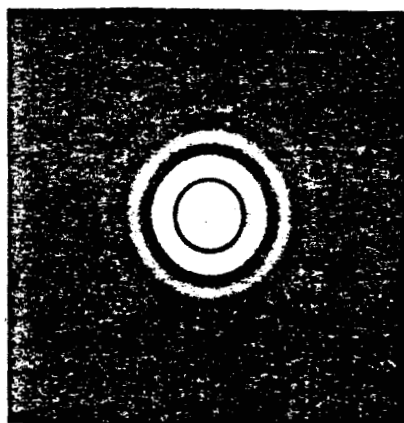
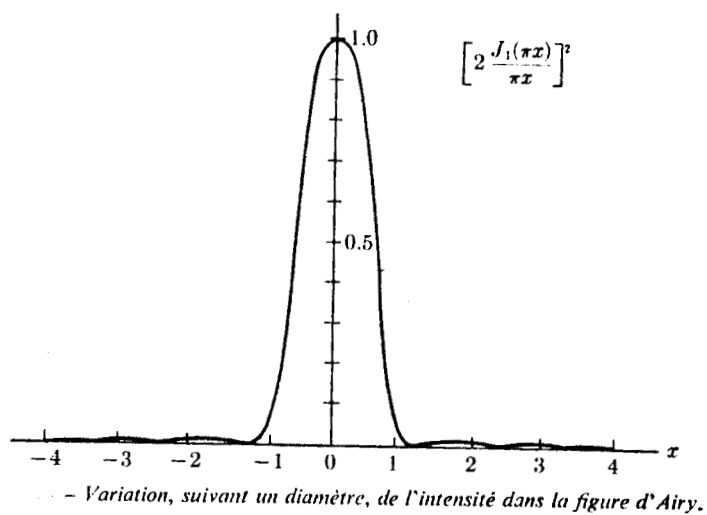


FIG:12 FIGURE DE DIFFRACTION D'UNE OUVERTURE CIRCULAIRE

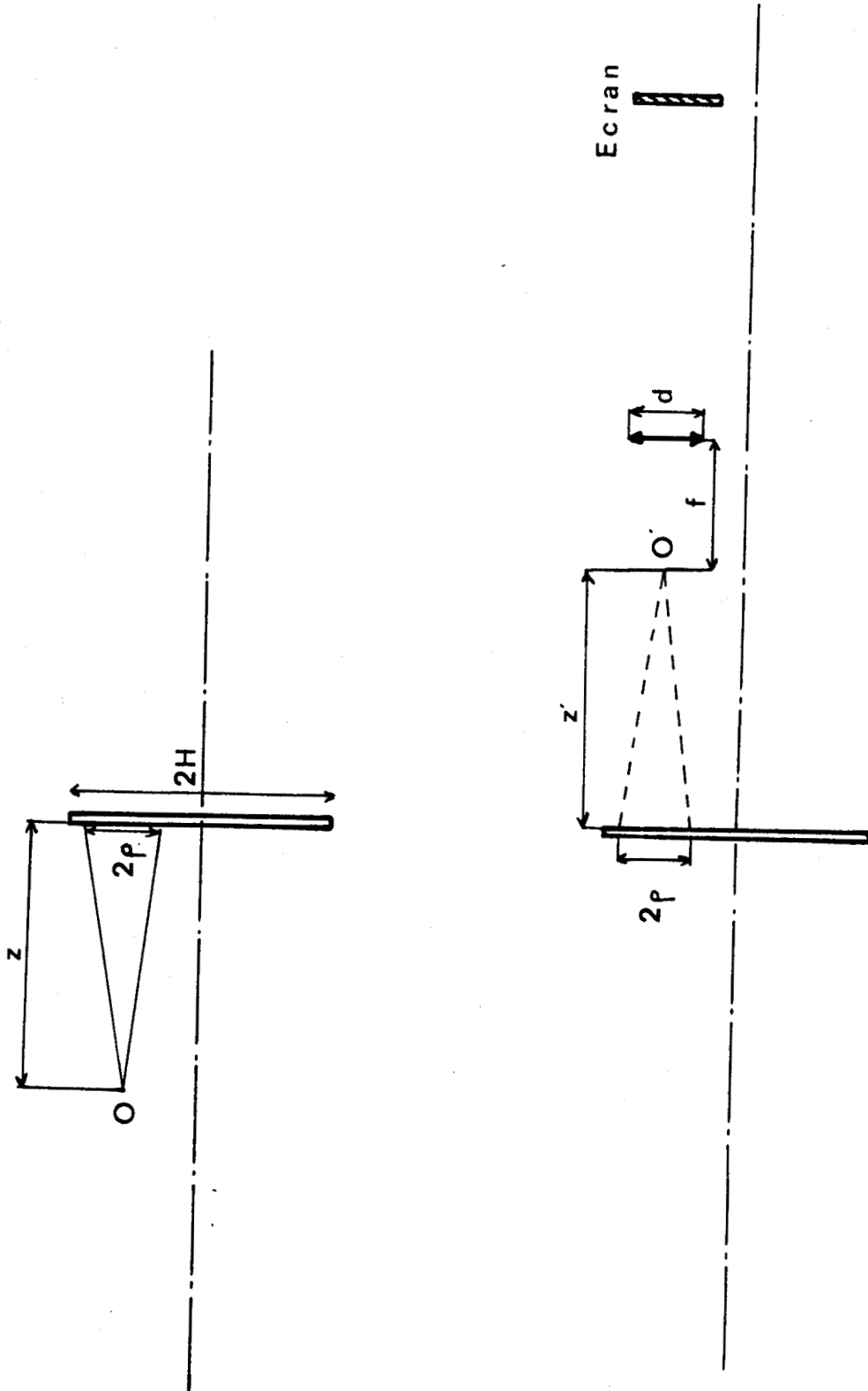


FIG 13 : DIFFERENTES OUVERTURES INTERVENANT
DANS LE MONTAGE

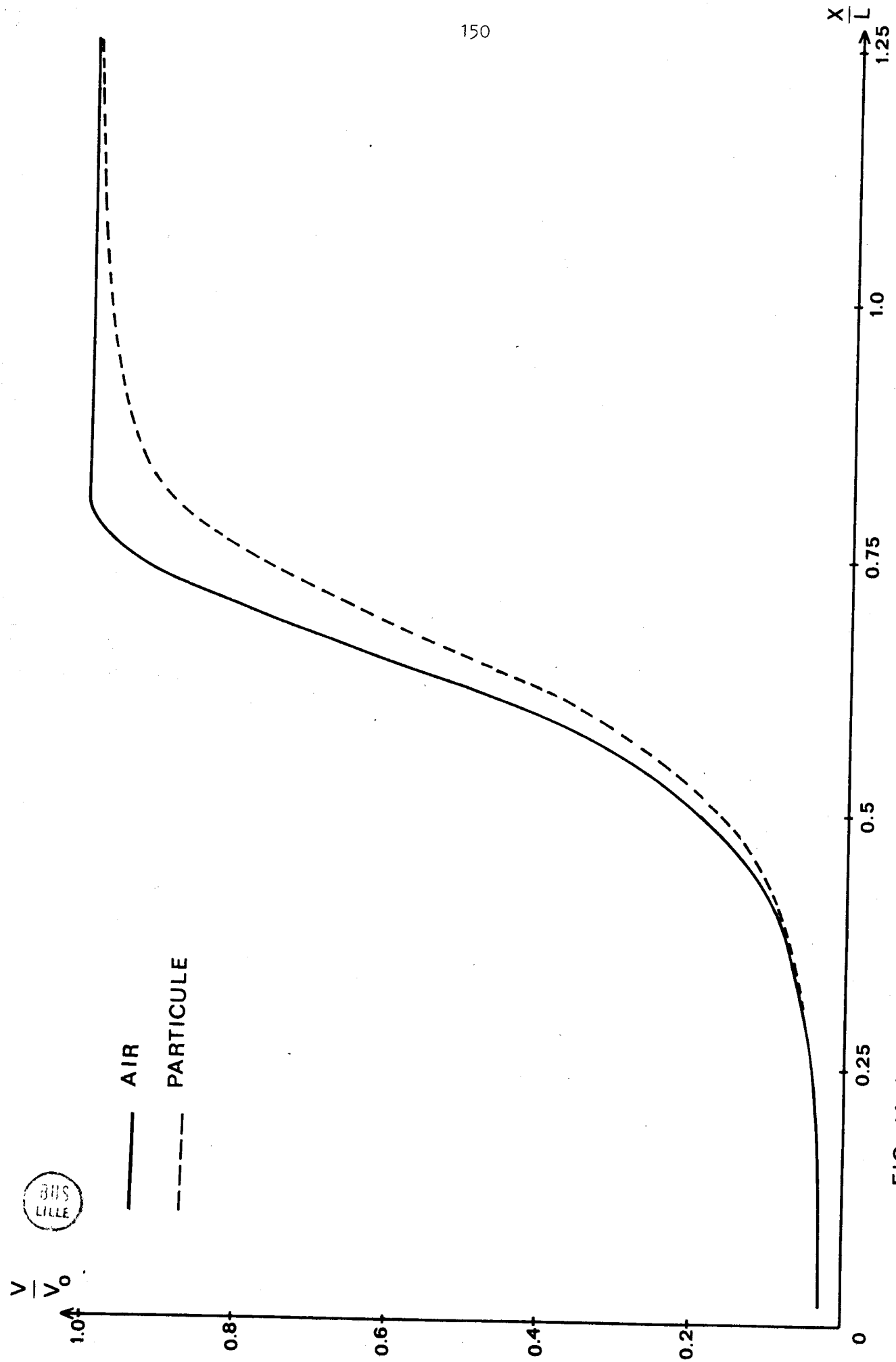


FIG: 14 LOIS DE VARIATIONS DE LA VITESSE DE L'AIR ET DE LA VITESSE D'UNE PARTICULE DE 20 μm DE DIAMETRE DANS LE COLLECTEUR DE LA SOUFFLERIE SONIQUE DE L'IMFL

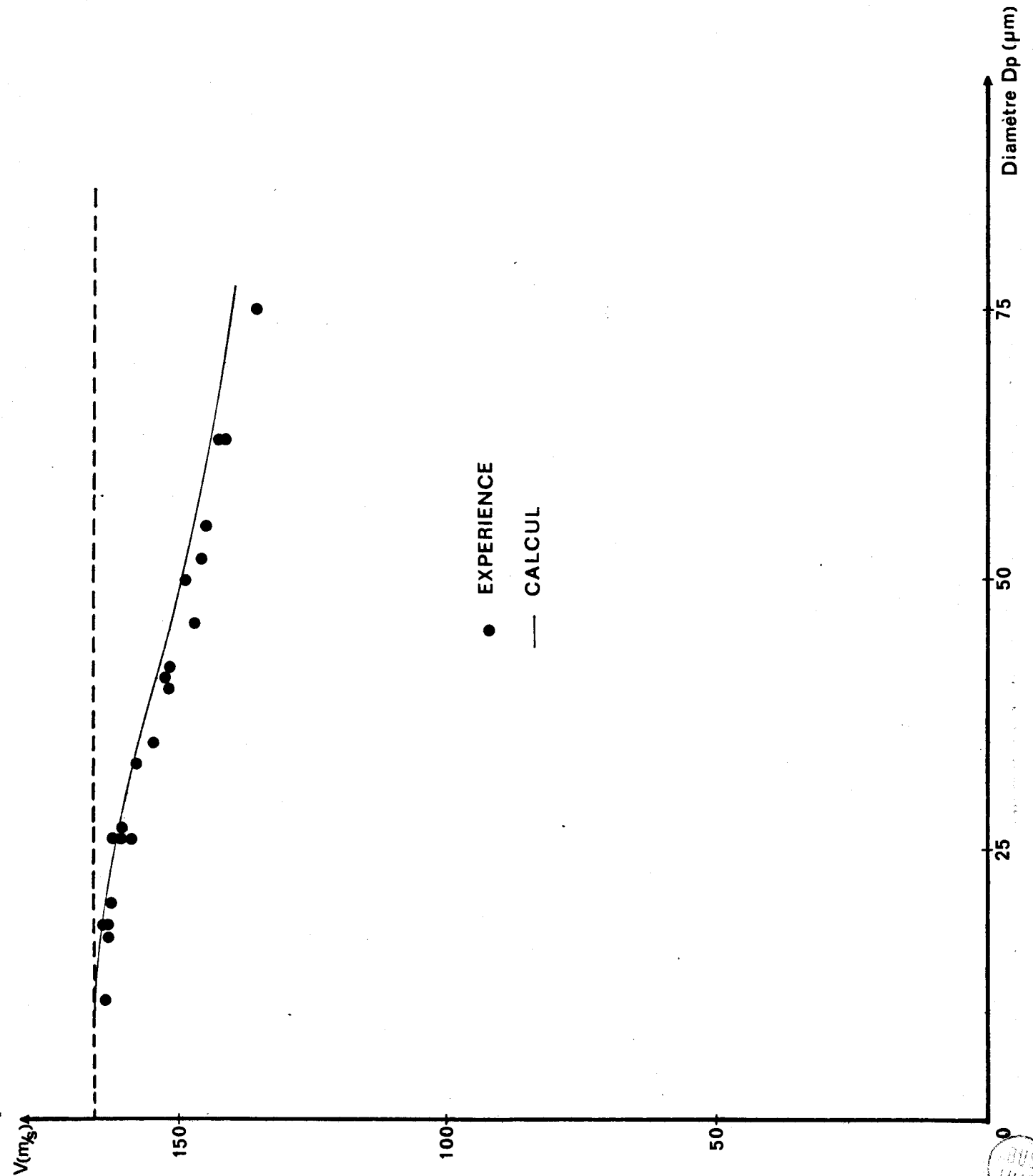


Fig.15 VITESSE DES GOUTTES EN VEINE VIDE EN FONCTION DE LEUR DIAMETRE X: 1.06m



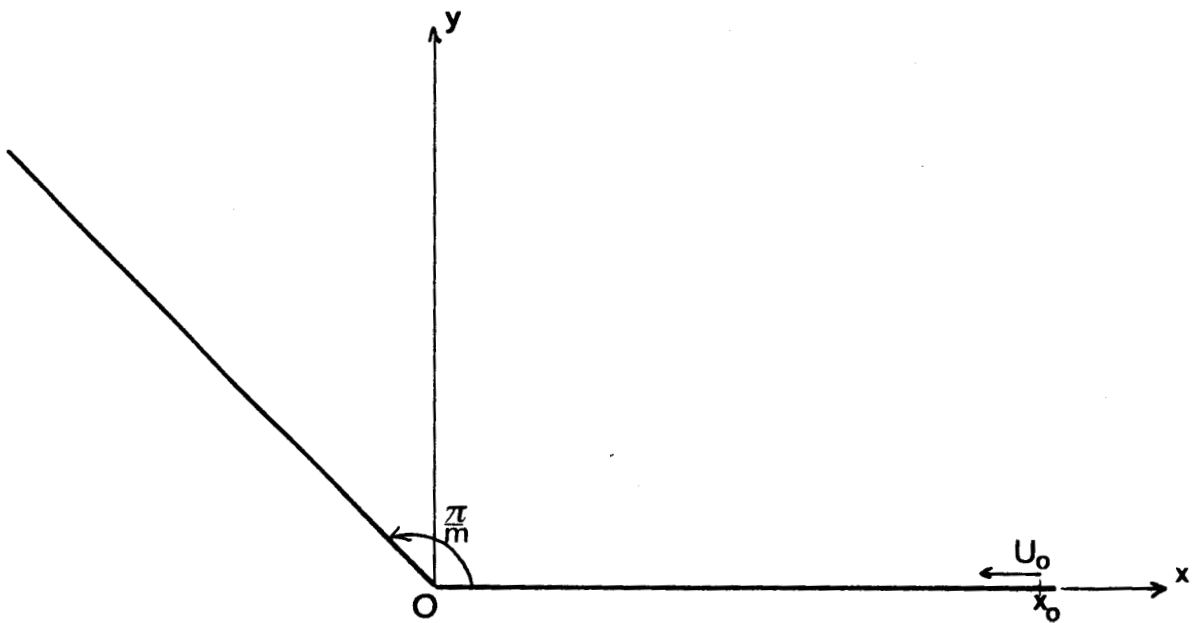
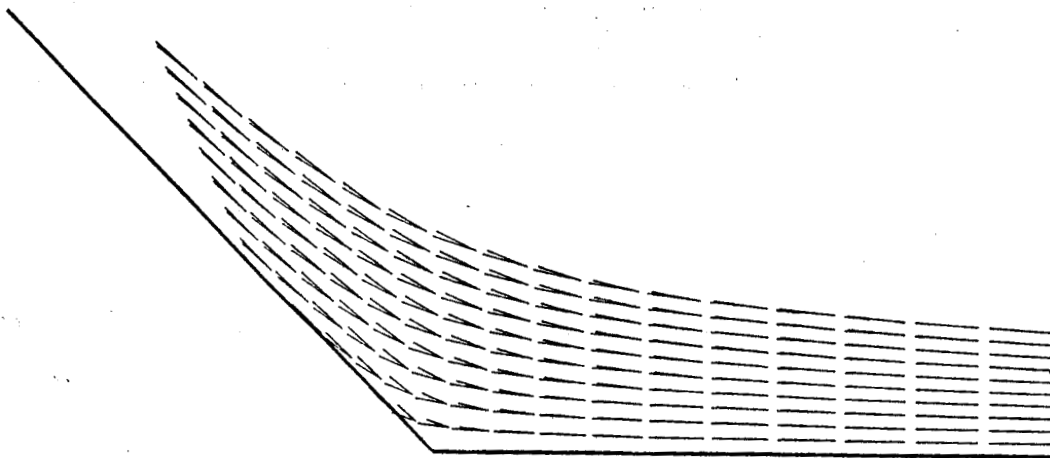


FIG: 16 SCHEMA DE DEFINITION DE L'ÉCOULEMENT
AUTOUR D'UN DIEDRE



$$D_p = 20 \mu\text{m}$$

$$\rho_p = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$U_0 = 20 \text{ m/s}$$



FIG: 17 RESULTAT POUR DES PARTICULES DE 20 μm

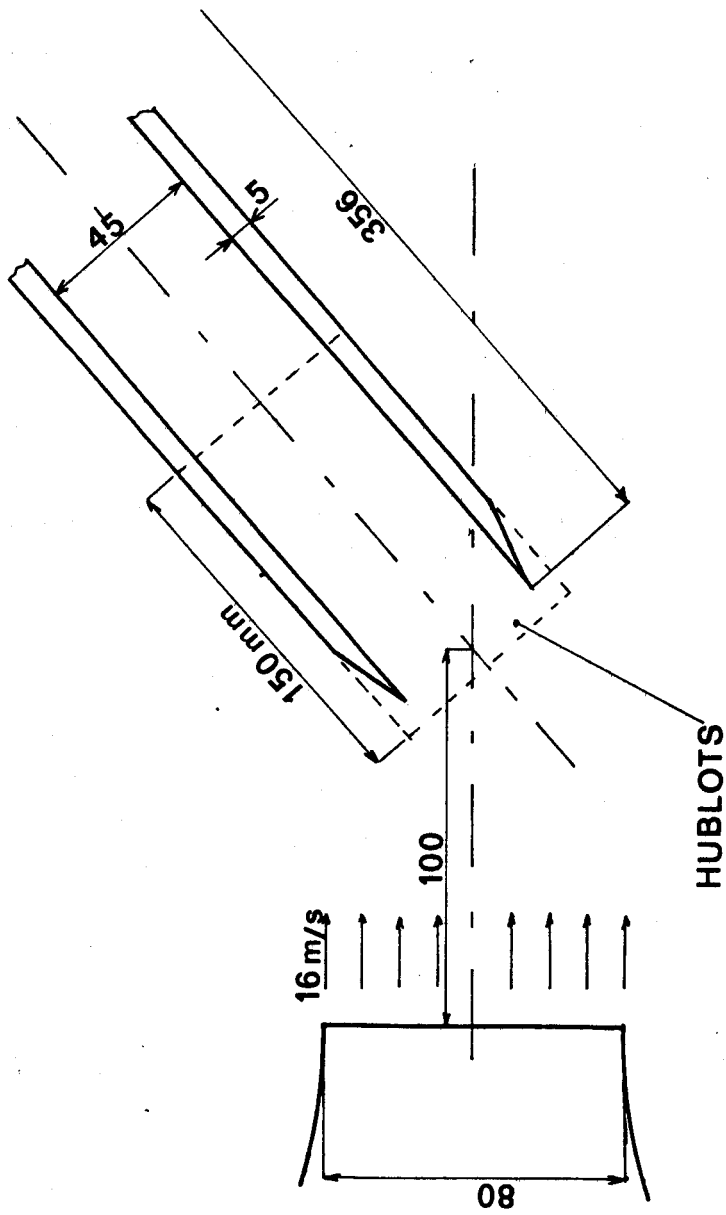


FIG:18 SCHEMA DU MONTAGE



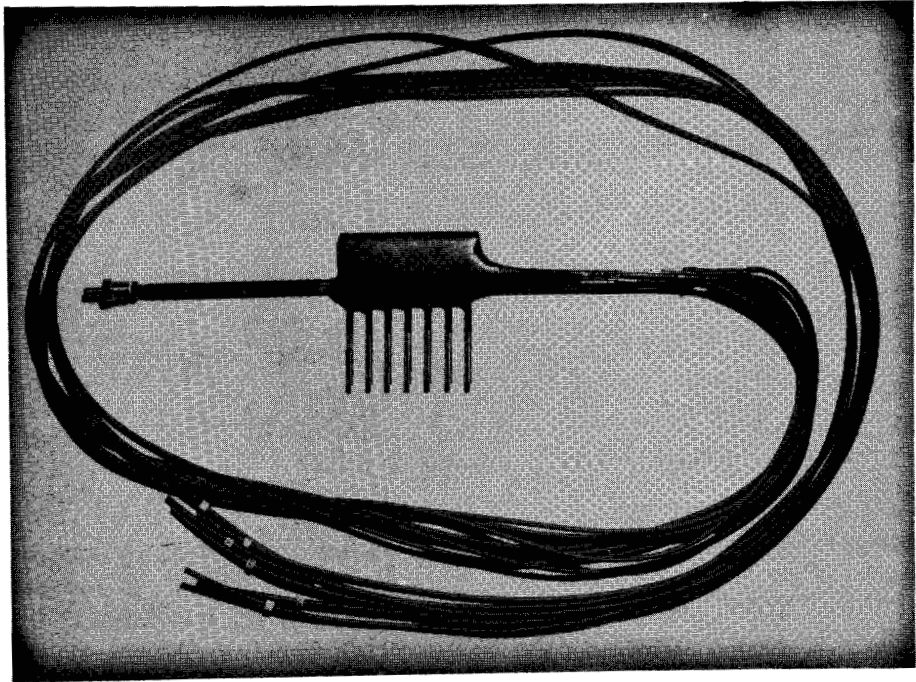


Fig.19 EMETTEUR MULTITETES

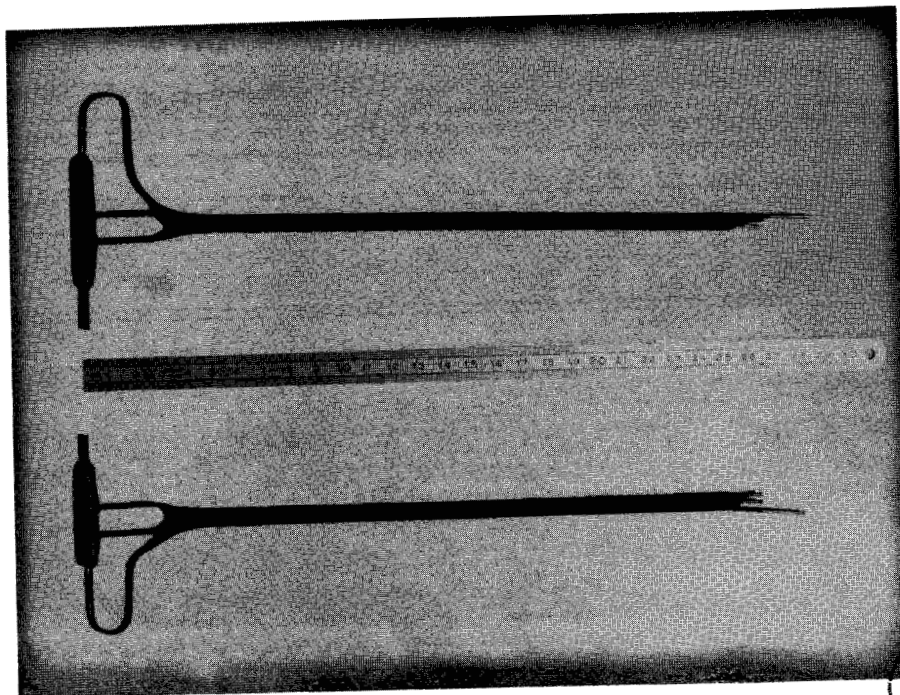


Fig.20 EMETTEUR A GRAND DEBIT

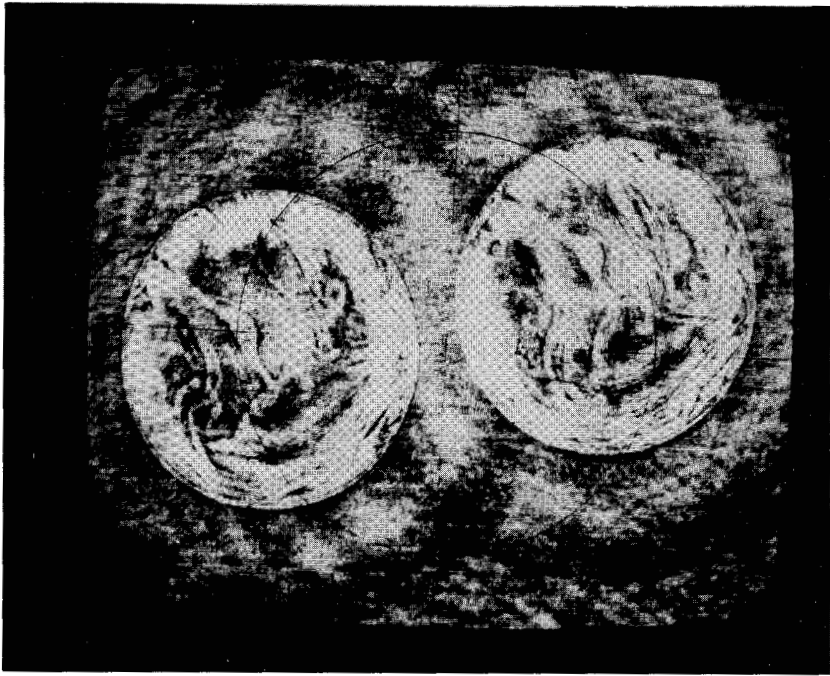


Fig.21 BULLE DE SAVON diam.1.2 mm grand.100

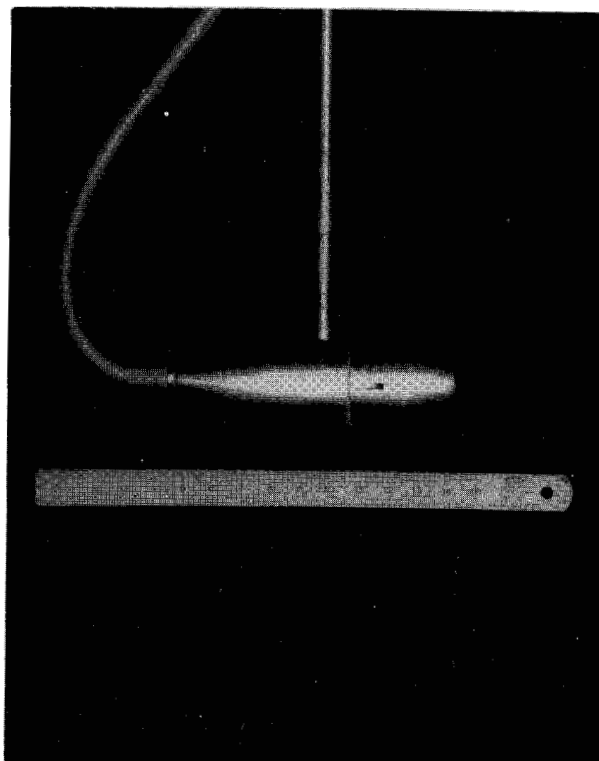


Fig.22 INJECTEUR

BUS
LILLE

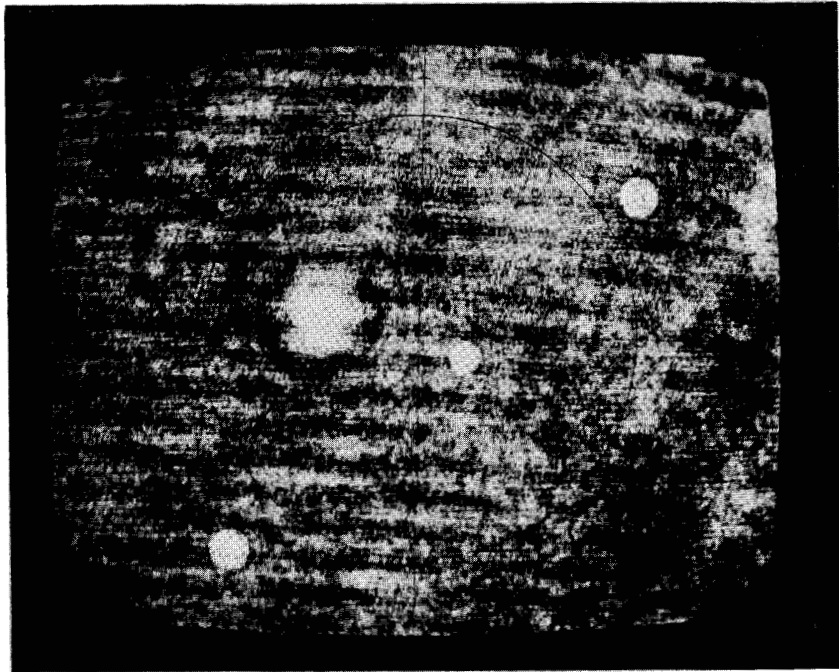


FIG: 23 HOLOGRAMME DE GOUTTE D'EAU

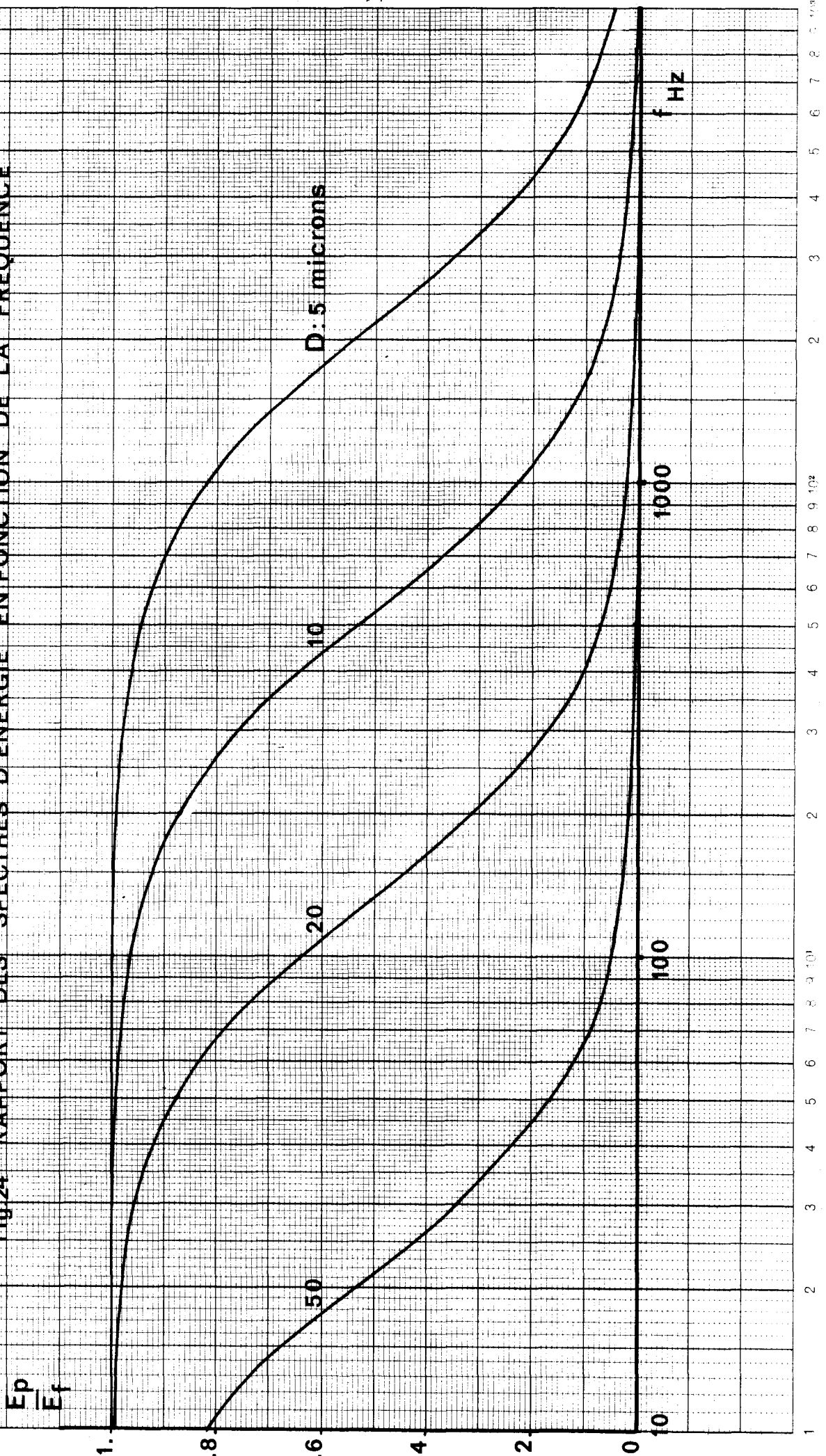
diam. \approx 60 microns

grand. 300

dbles exposition



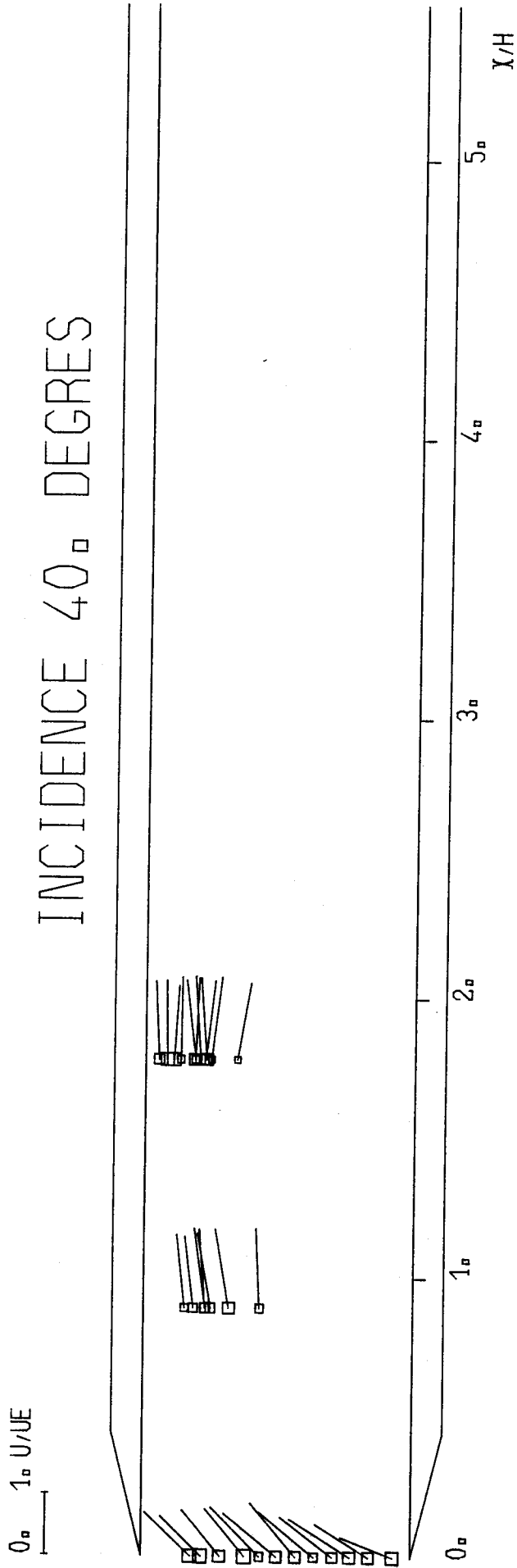
Fig 24 RAPPORT DES SPECTRES D'ENERGIE EN FONCTION DE LA FREQUENCE



Teilung } 1:4000 Einheit } 90 mm
 Logar. Division } 1:4000 Unité }



FIG: 25 RESULTAT POUR LES GOUTTES D'EAU



GOUTTES D'EAU



—————→ Incidence géométrique
-----→ Incidence moyenne

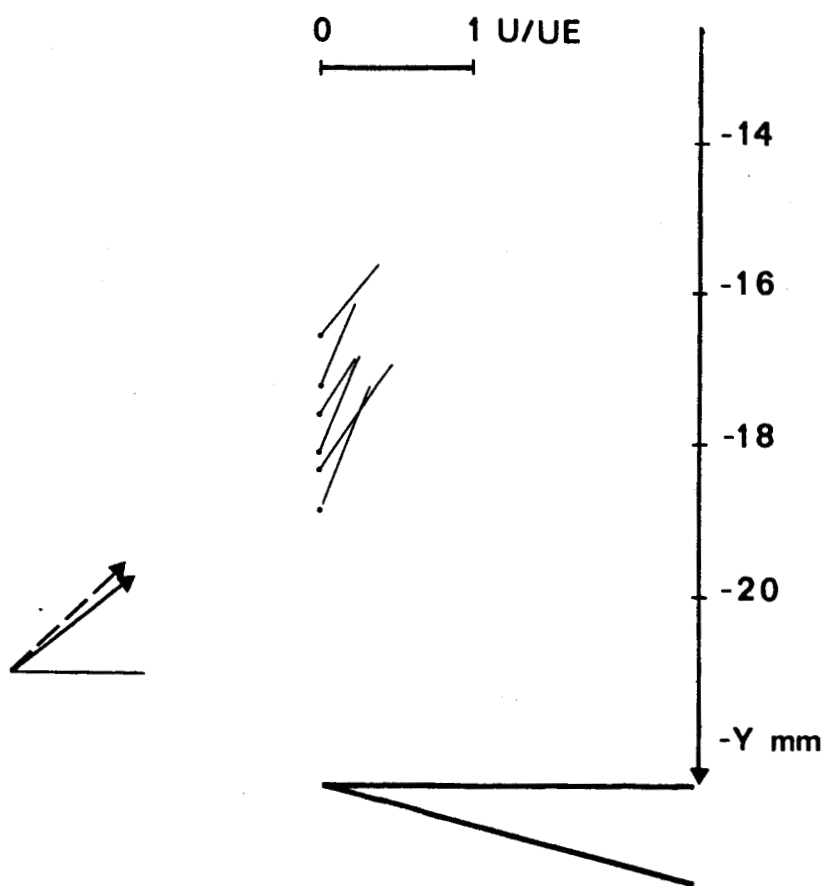
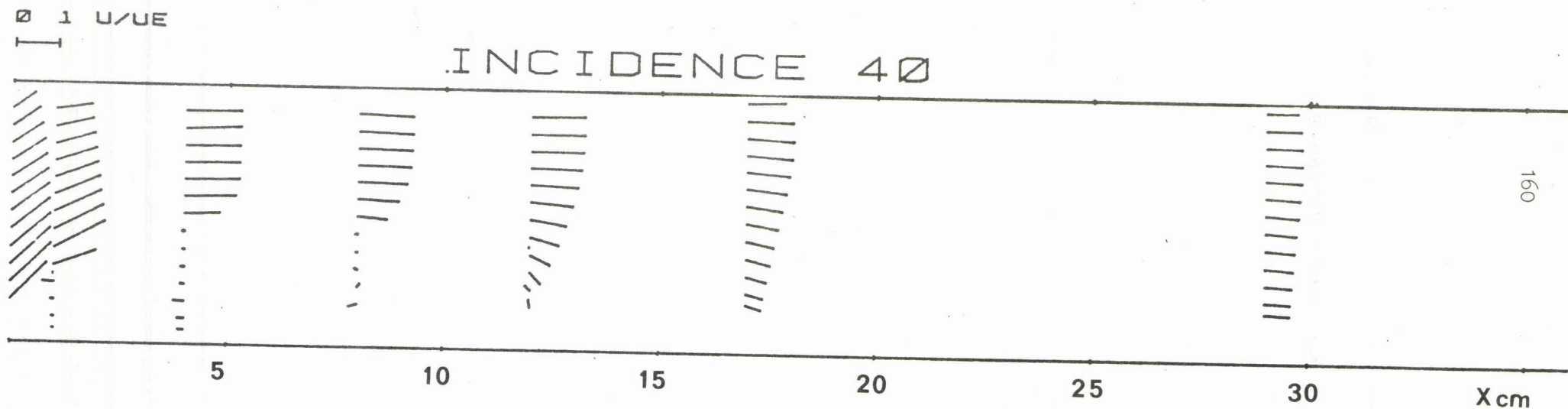


Fig 26

VITESSE AU VOISINAGE DU BORD D'ATTAQUE



Fig.27



ANEMOCLINOMETRE (ref 34)

Fig.28

INCIDENCE 40° DEGRES

0° 1° U/UE

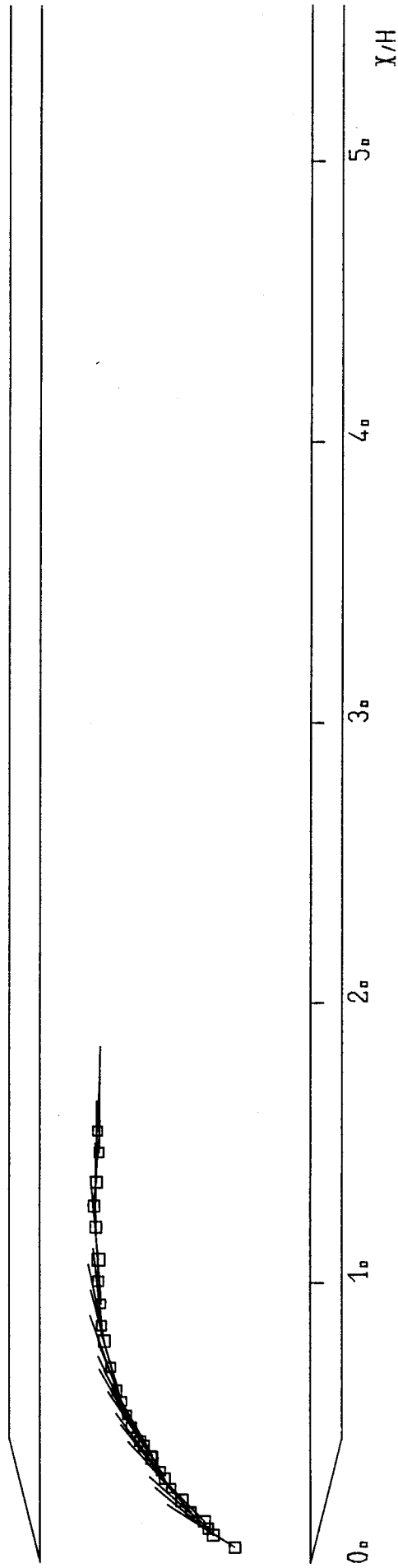
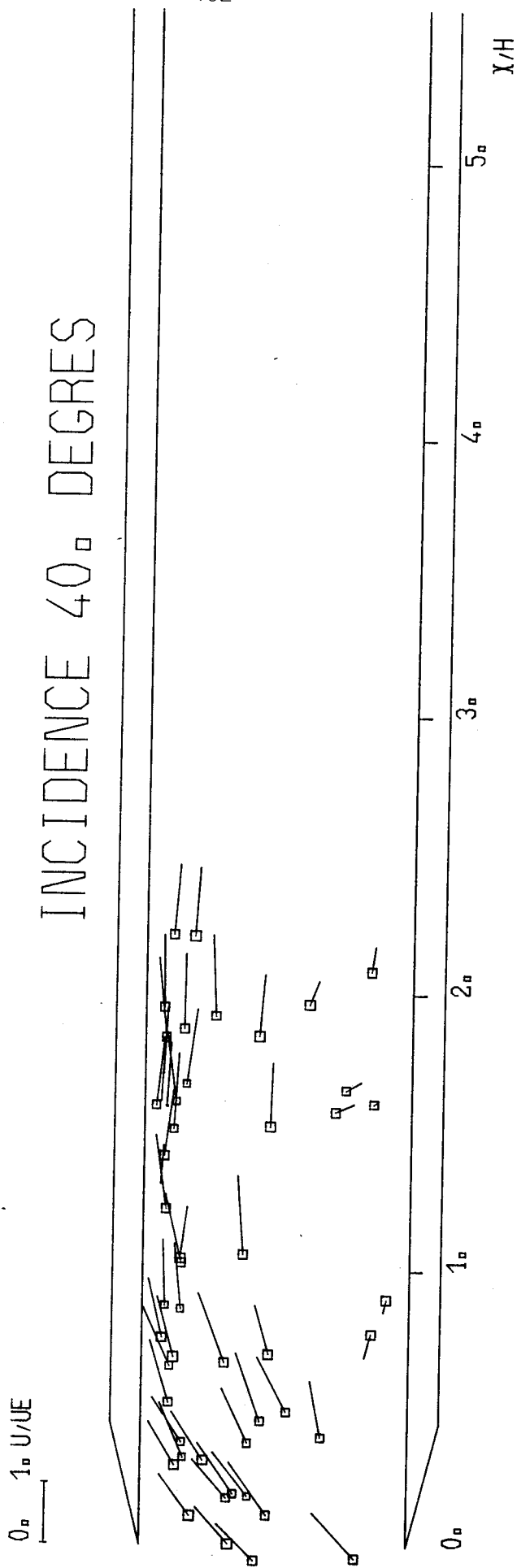




FIG 29 RESULTATS POUR LES BULLES DE SAVON



BULLES DE SAVON

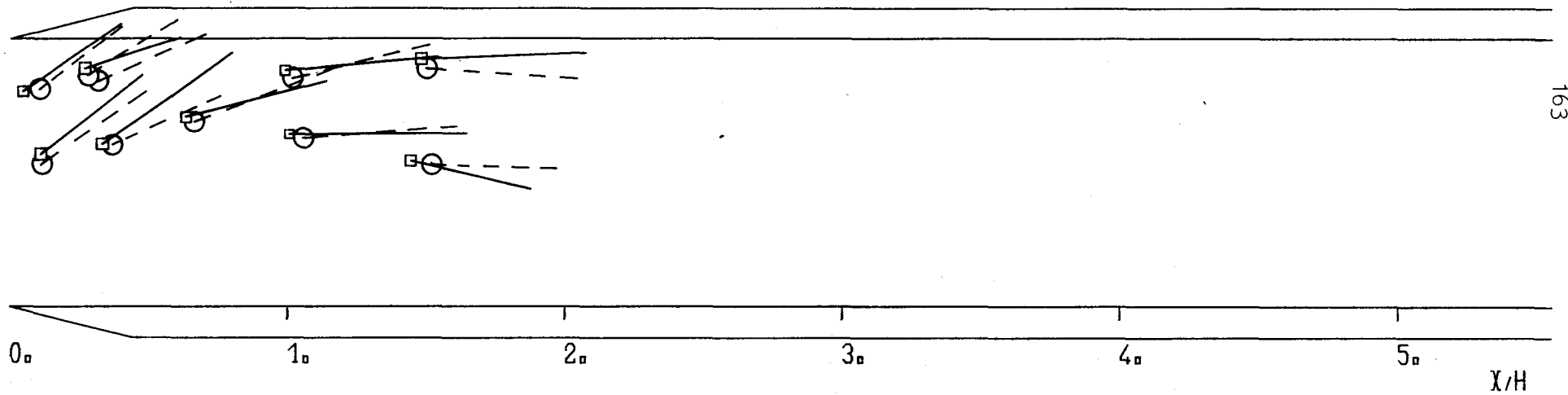
⊙ - - - BULLES DE SAVON

□ - - - GOUTTES D'EAU

Fig.30 COMPARAISON BULLES DE SAVON
ET GOUTTES D'EAU

0. 1. U/UE

INCIDENCE 40. DEGRES



163

COMP. BULLES DE SAV. GOUTTES D'EAU



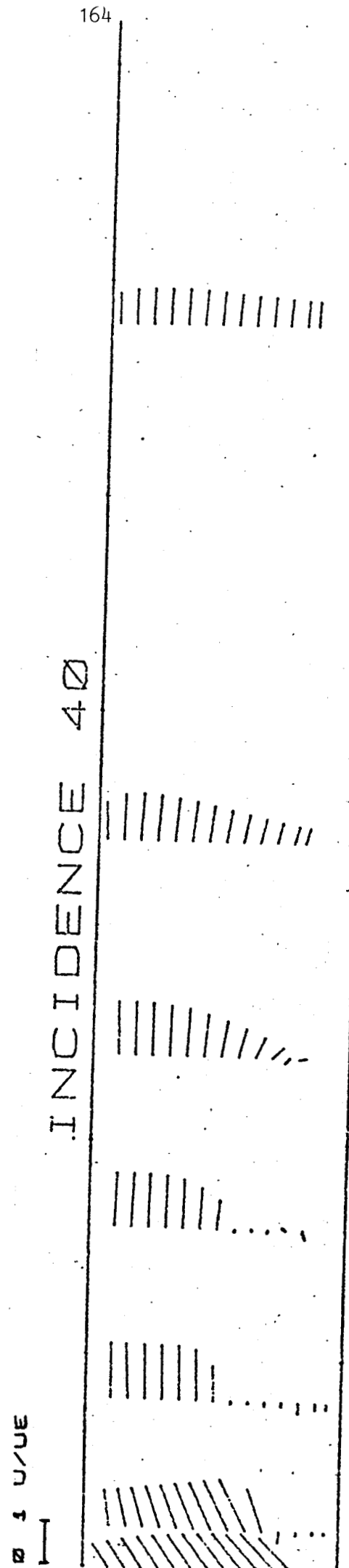
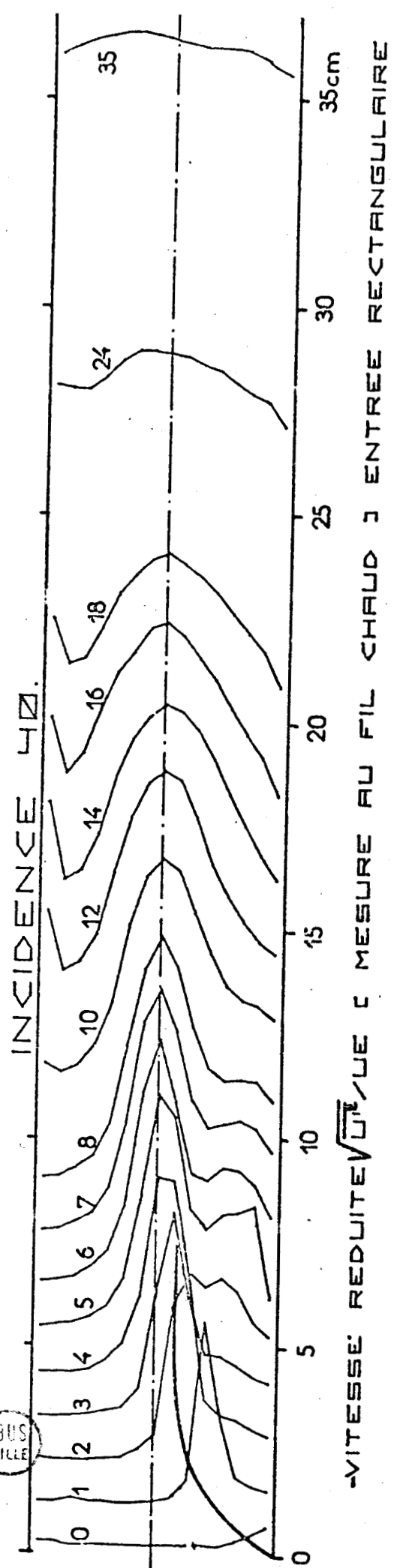


FIG: 31 VECTEURS VITESSES ET TAUX DE TURBULENCE DANS UNE PRISE D'AIR A 40° D'INCIDENCE (34)

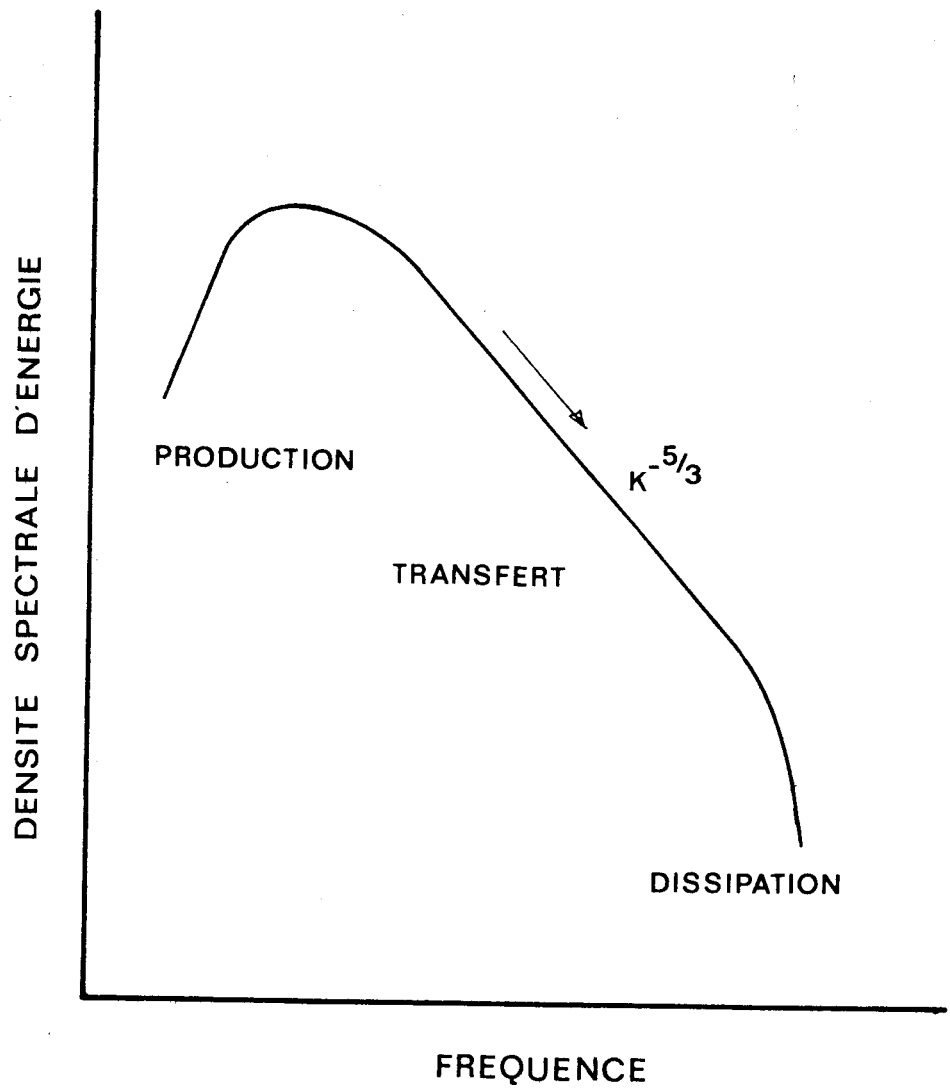


FIGURE 32



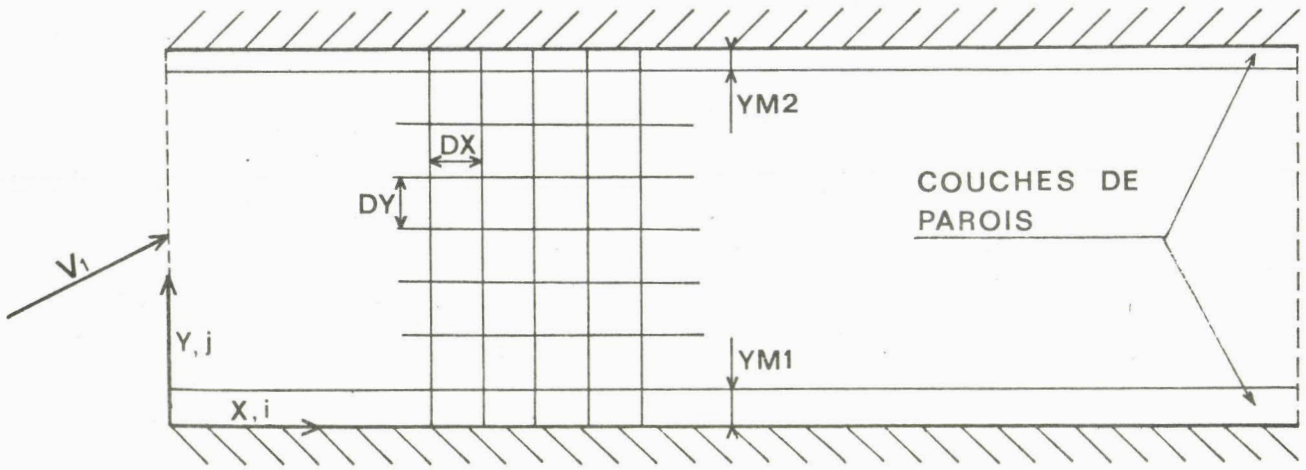


FIGURE 33 DOMAINE DE CALCUL

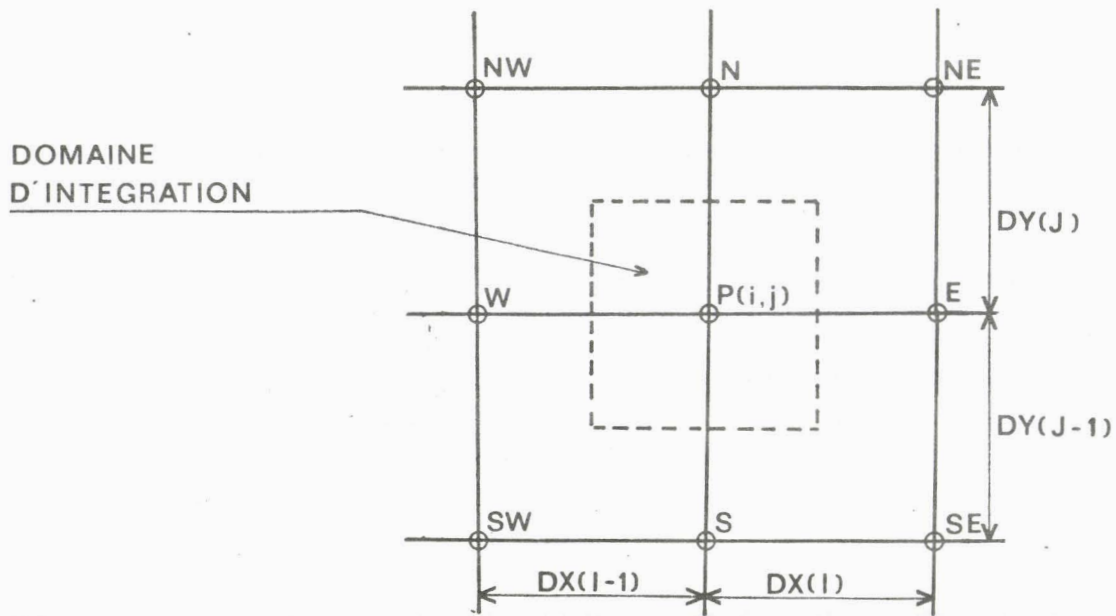


FIGURE 34 MAILLAGE DANS LA ZONE D'ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL



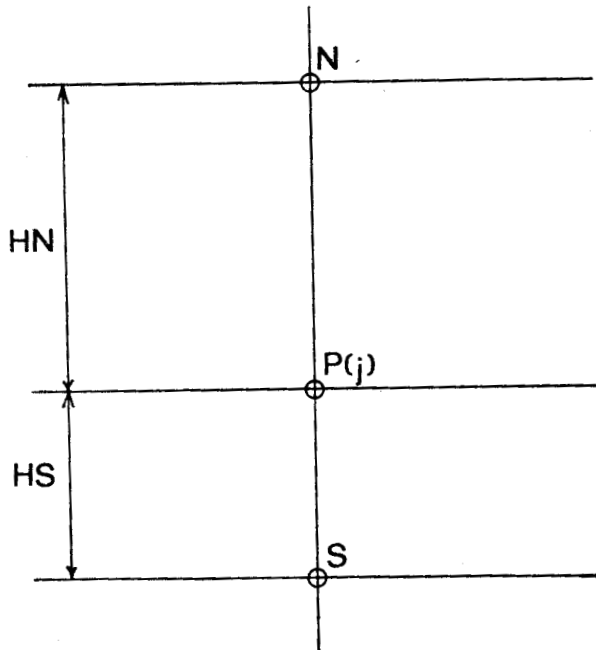


FIG:35 MAILLAGE DANS LES COUCHES DE PAROIS



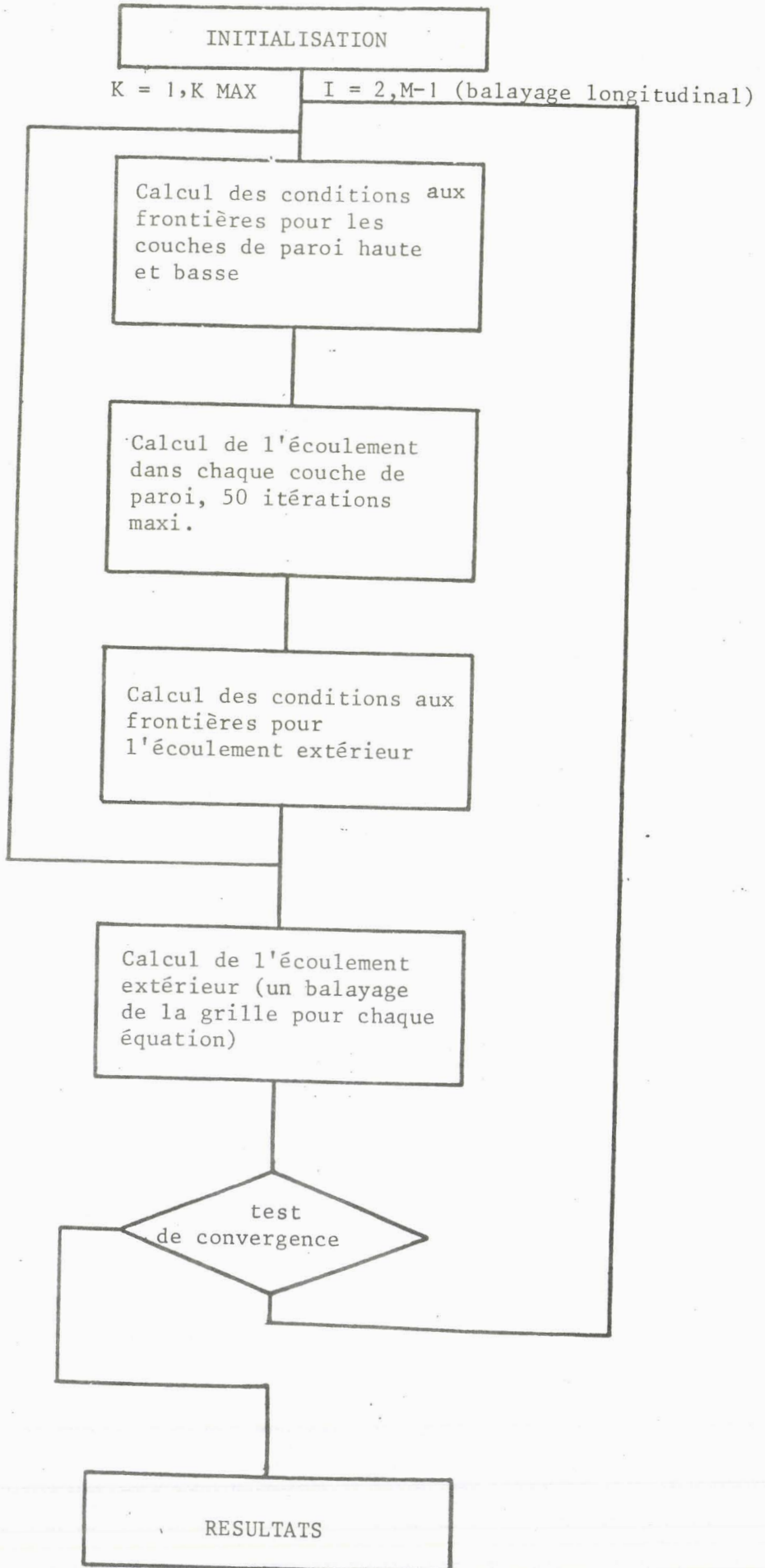


FIG 36 ORGANIGRAMME

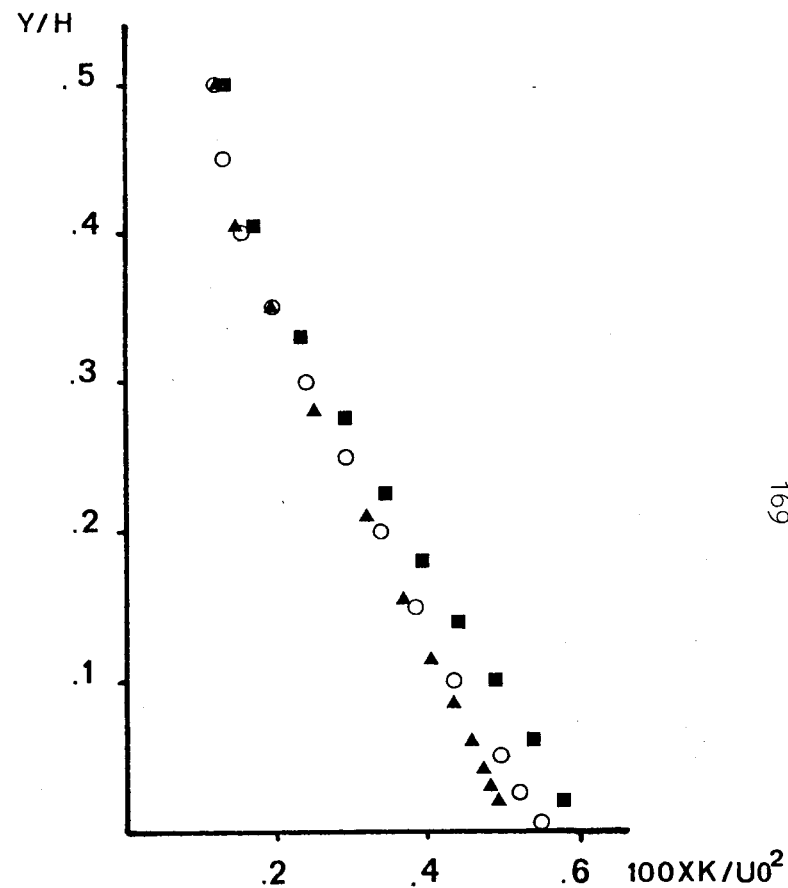
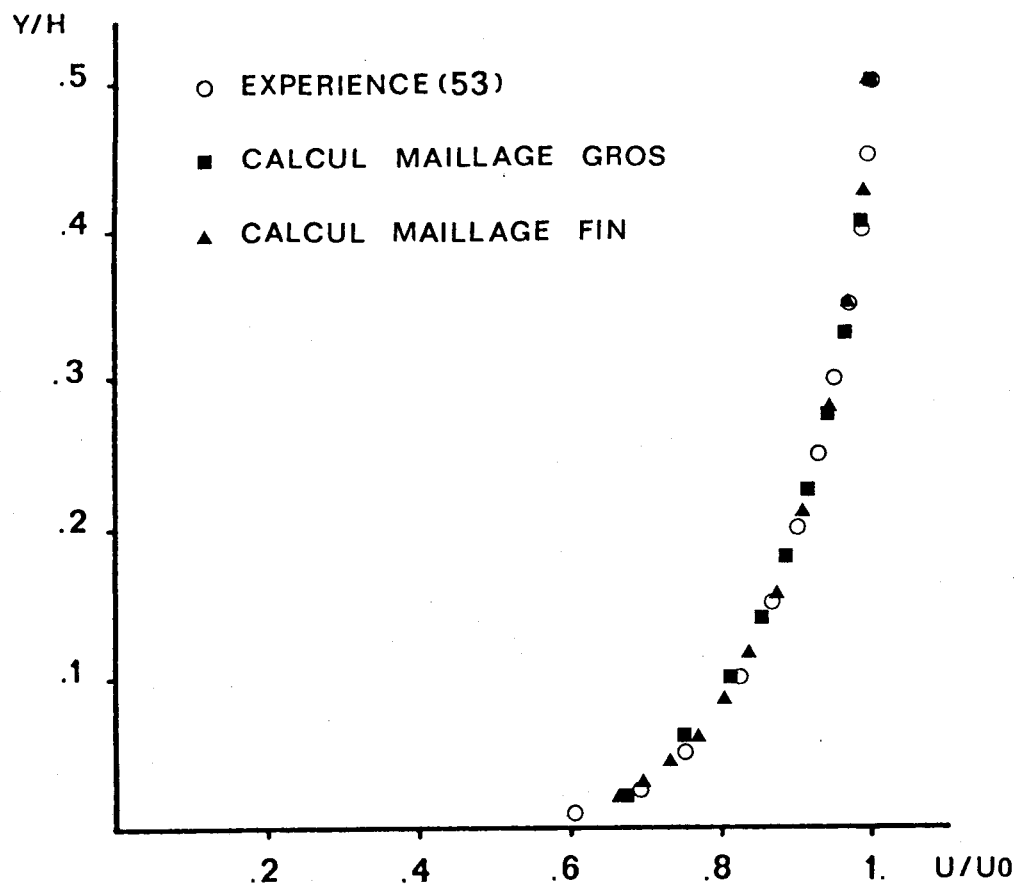
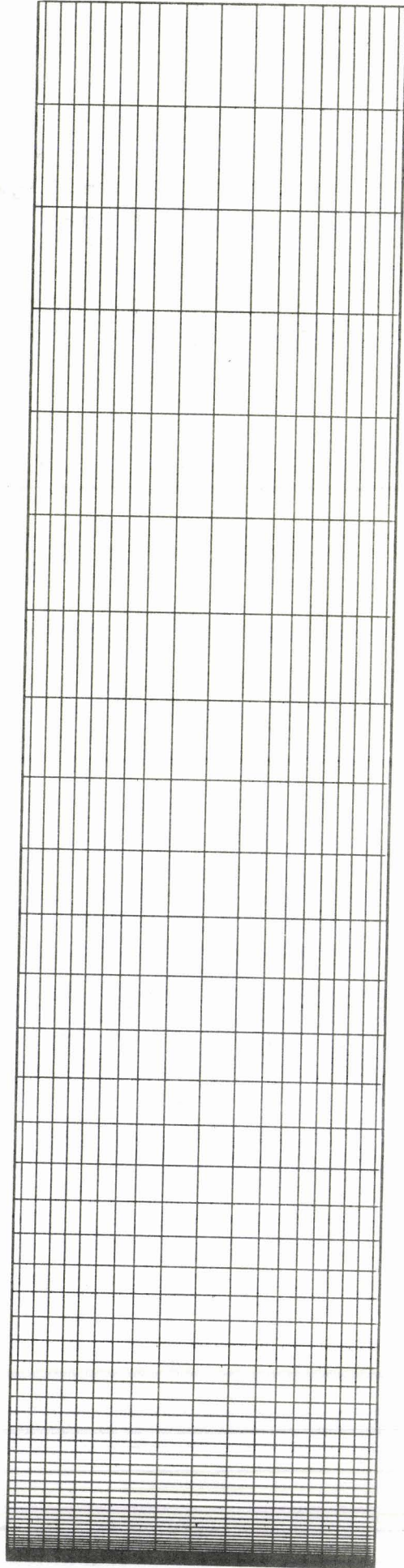


FIG:37 ECOULEMENT TURBULENT DEVELOPPE ENTRE PAROIS PARALLELES



FIG: 38



MAILLAGE ENTREE DE TUYAU NO 1



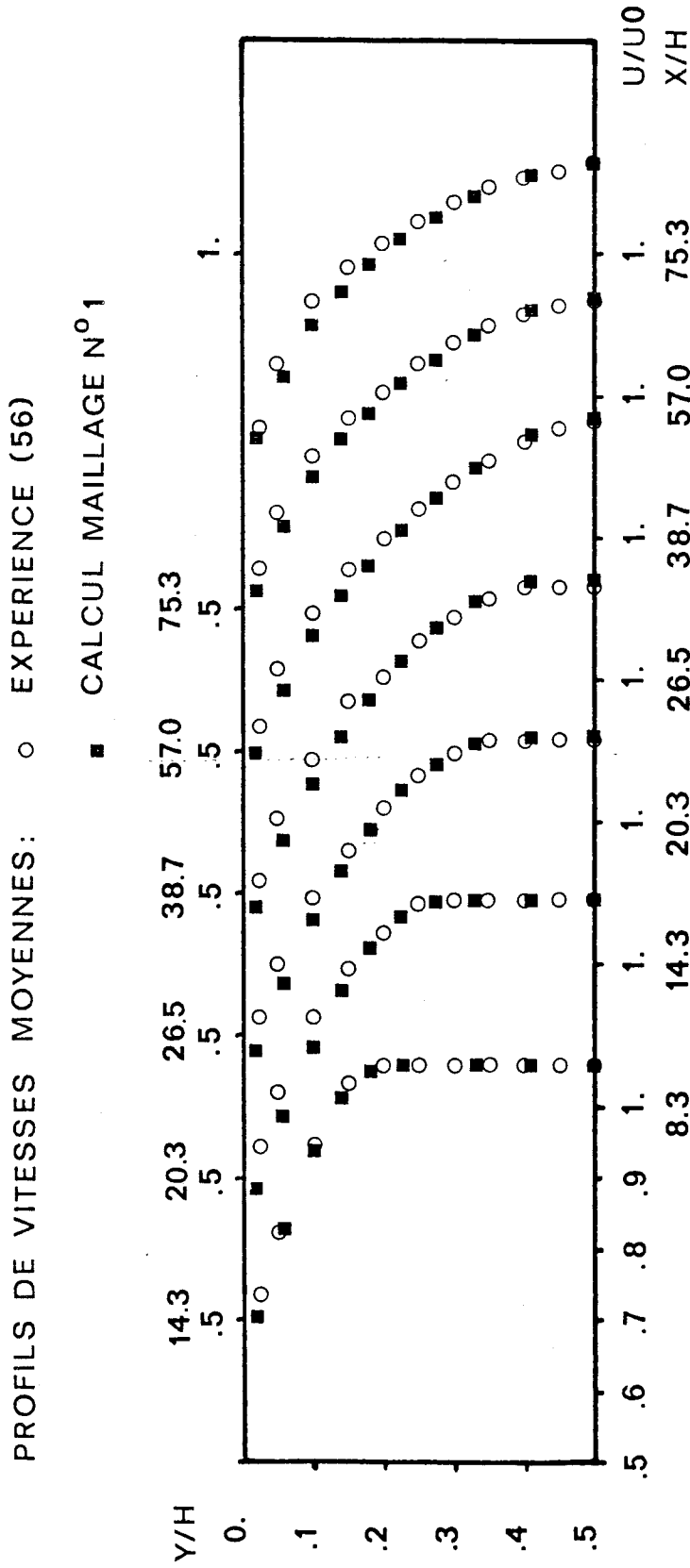
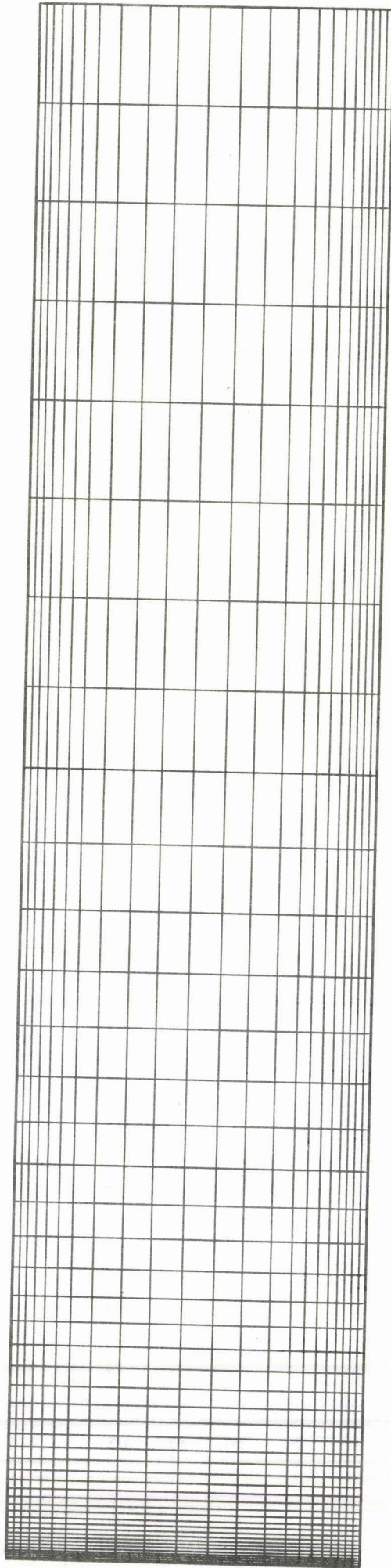


FIG.39 ENTREE DE TUYAU A SECTION RECTANGULAIRE RE:10⁵



FIG: 40



MAILLAGE ENTREE DE TUYAU NO 2



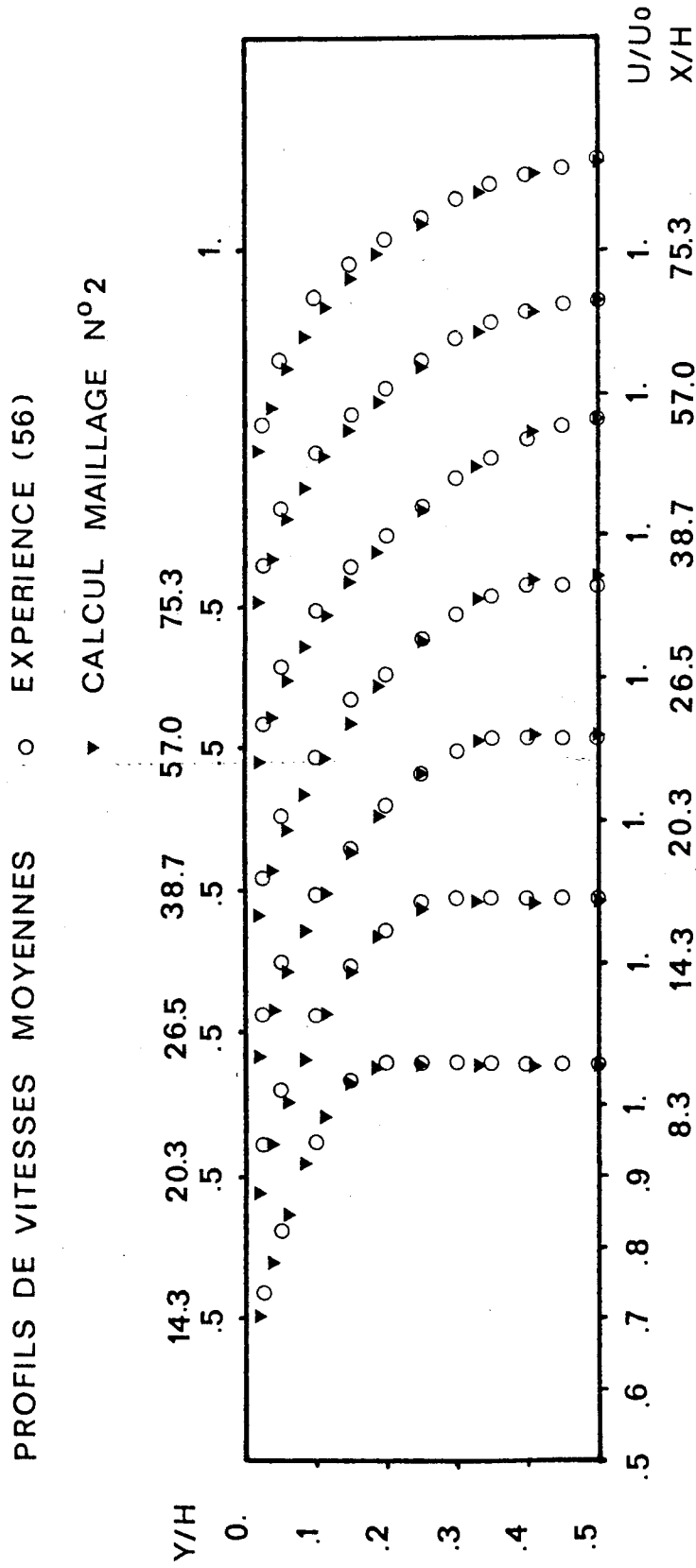
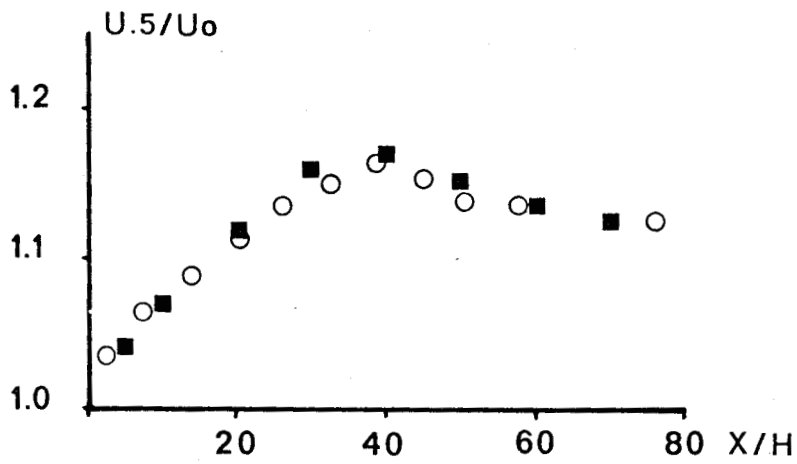
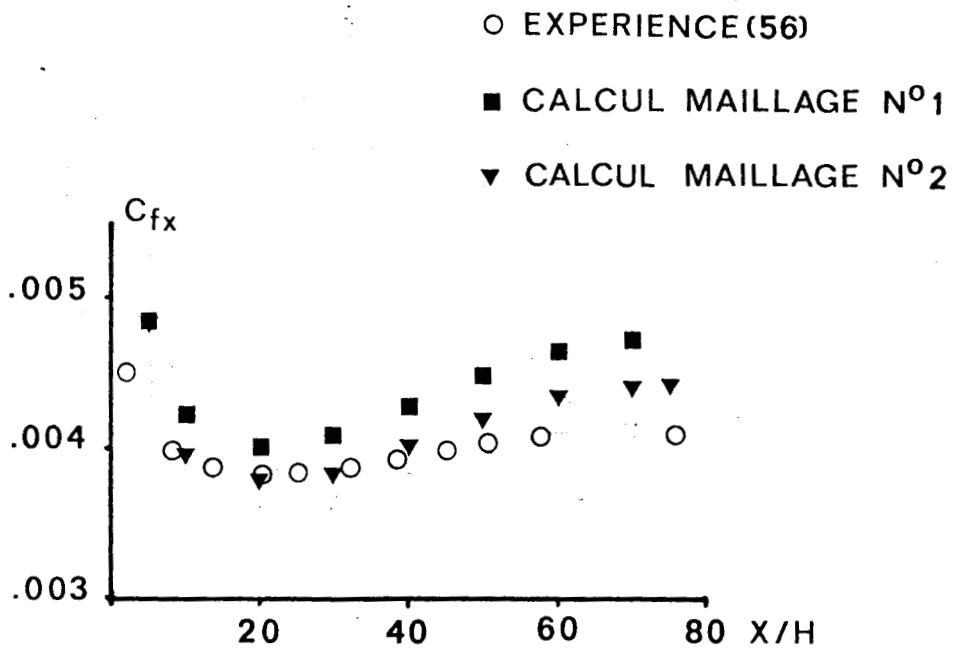


FIG:41 ENTREE DE TUYAU A SECTION RECTANGULAIRE RE : 10⁵





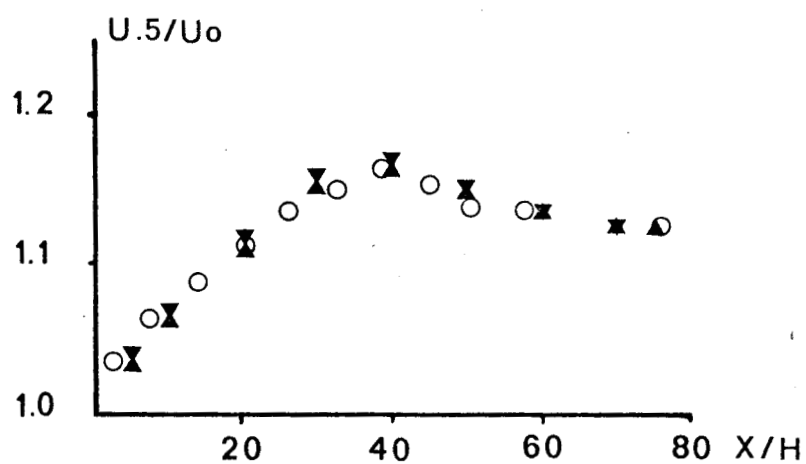
VITESSE SUR L'AXE



FROTTEMENT A LA PAROI

FIG:42 ENTREE DE TUYAU A SECTION RECTANGULAIRE

RE: 10⁵

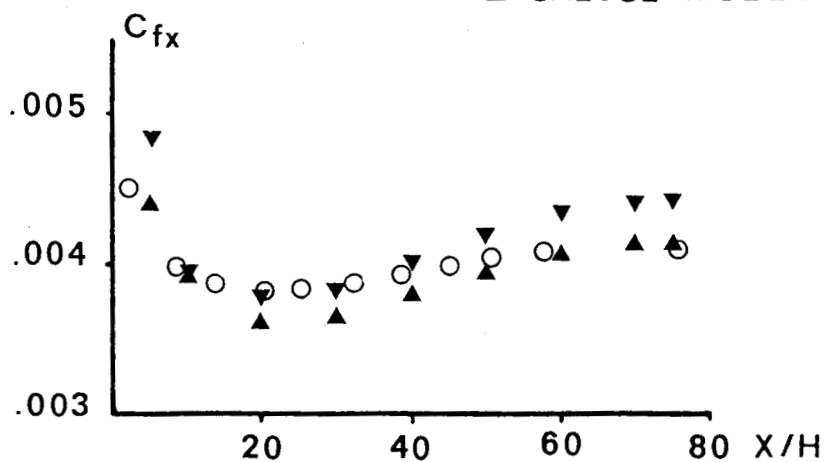


VITESSE SUR L'AXE

○ EXPERIENCE (56)

▼ CALCUL MODELE 1

▲ CALCUL MODELE 2



FROTTEMENT A LA PAROI

FIG:43 ENTREE DE TUYAU A SECTION RECTANGULAIRE

RE: 10^5



RHS
LILLE

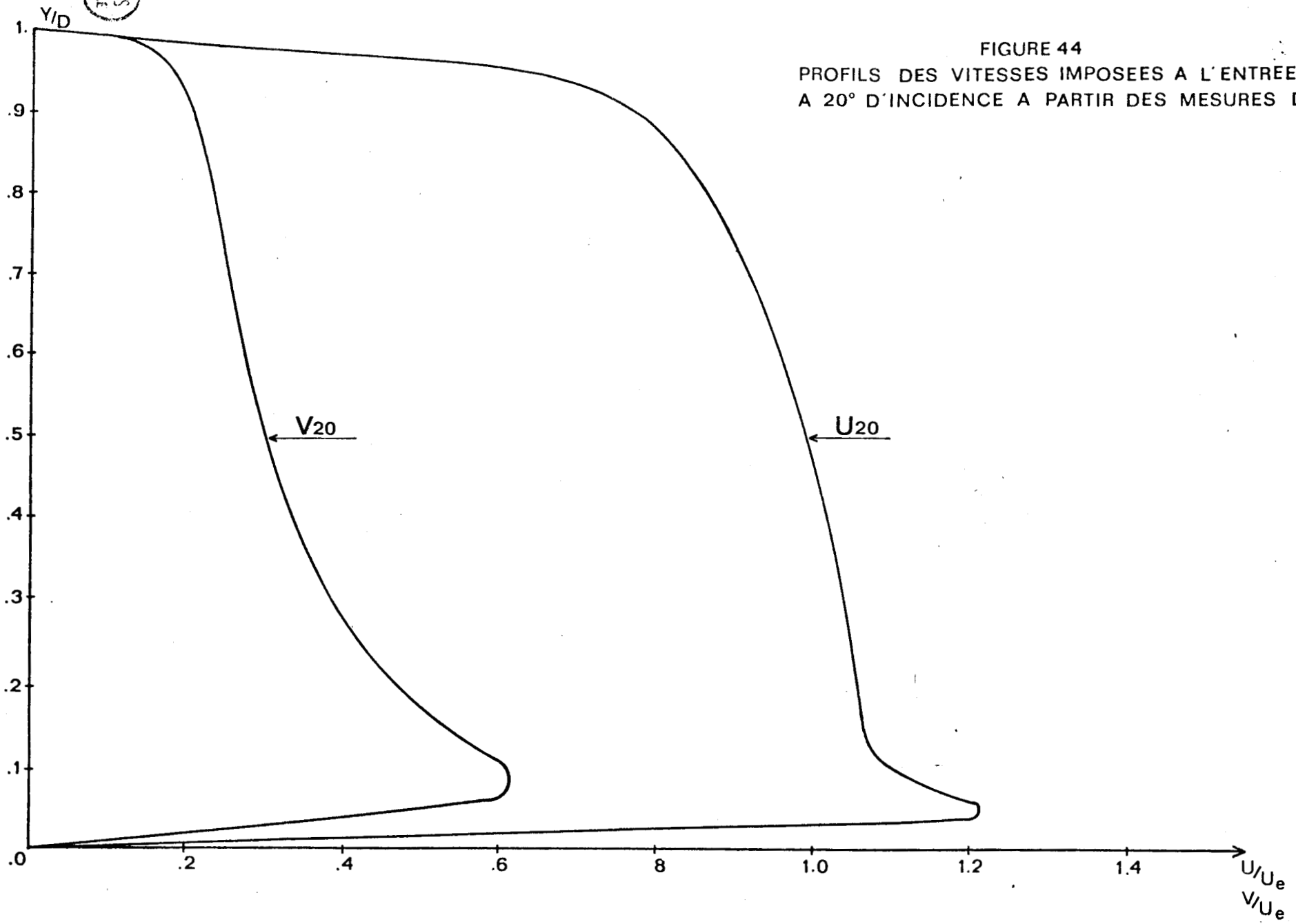
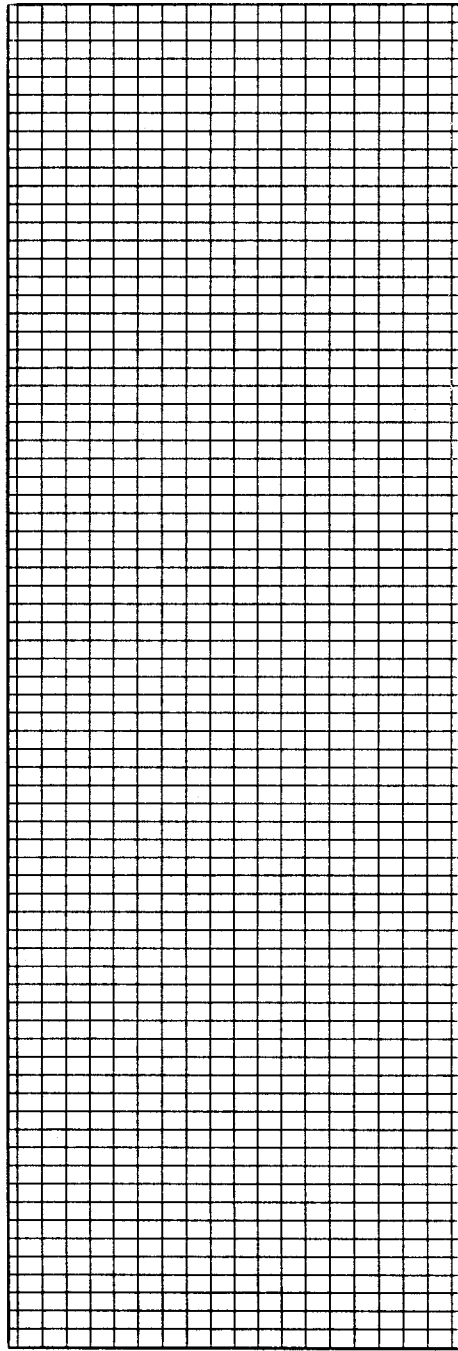


FIGURE 44
PROFILS DES VITESSES IMPOSEES A L'ENTREE
A 20° D'INCIDENCE A PARTIR DES MESURES DE(34)



CALCULS EN INCIDENCE MAILLAGE UNIFORME





FIGURE 46

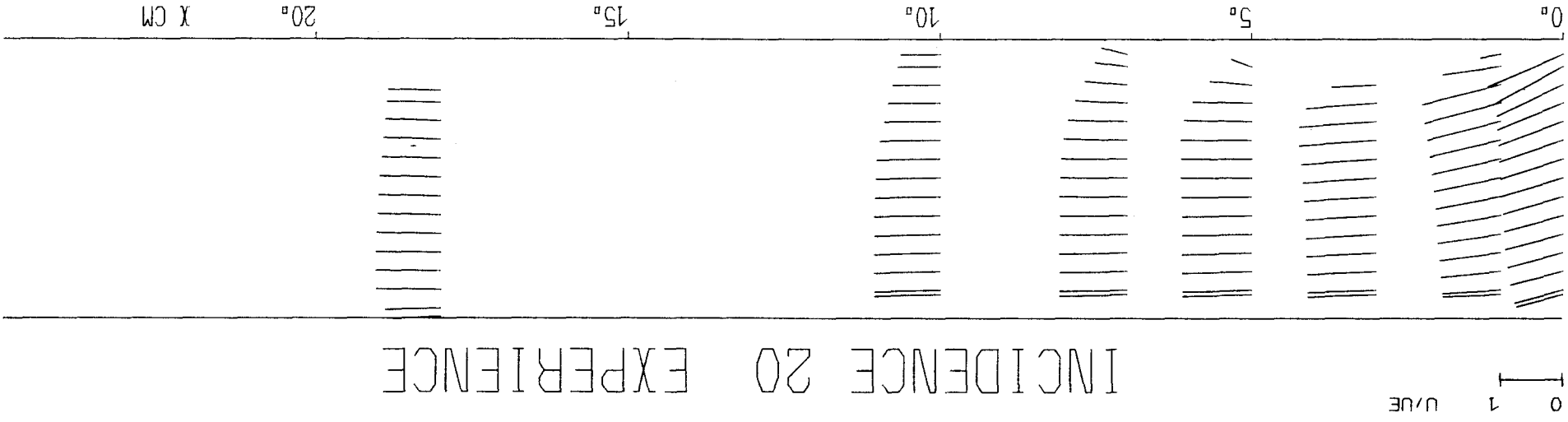
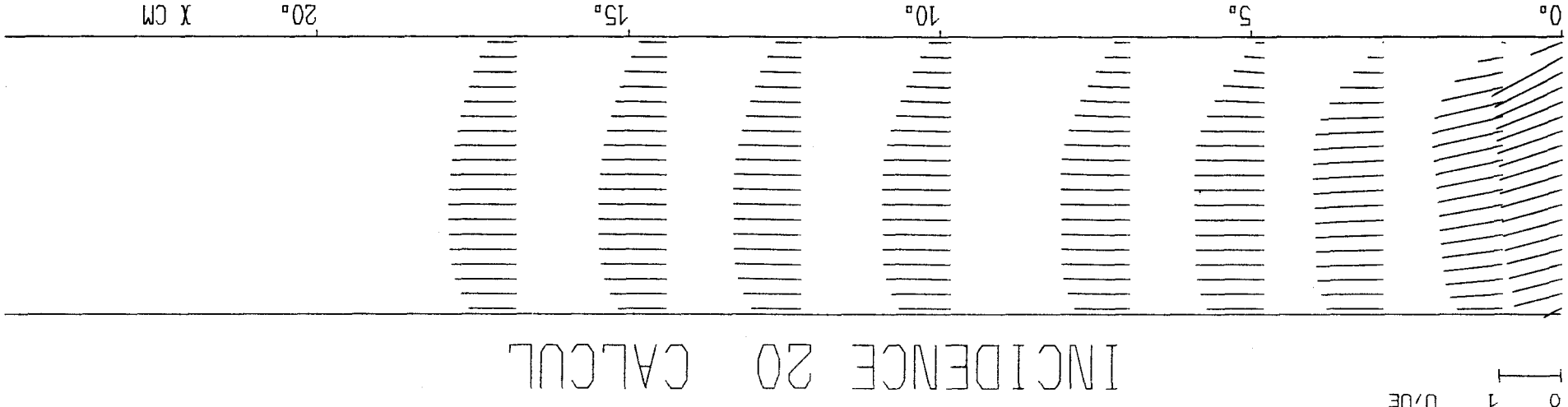
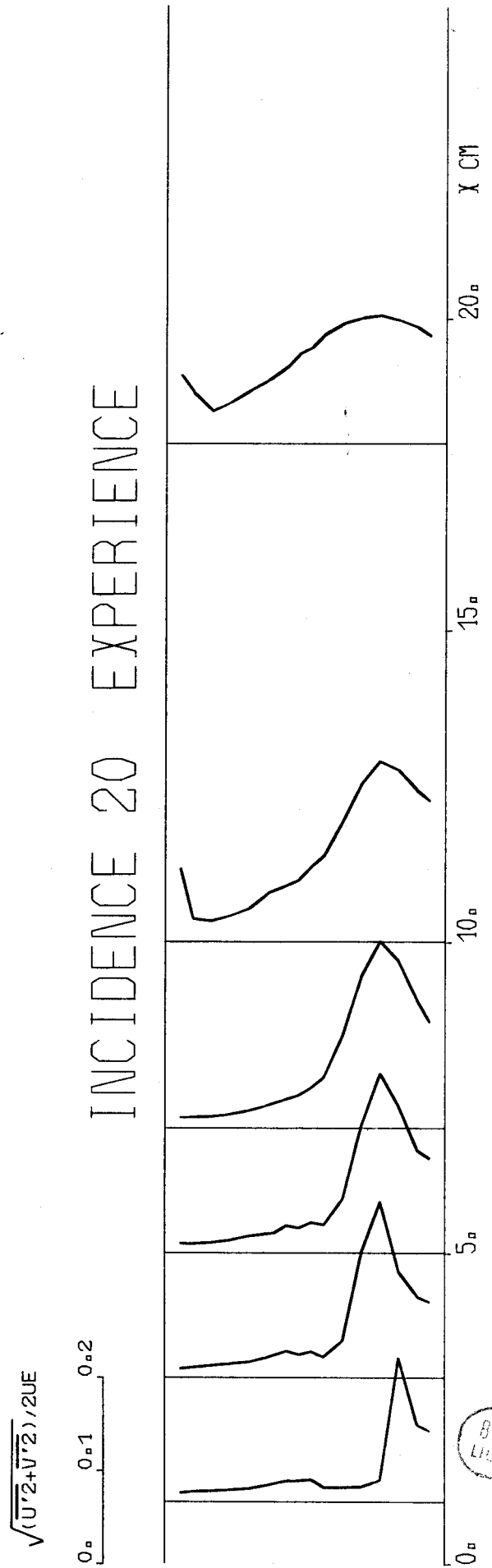
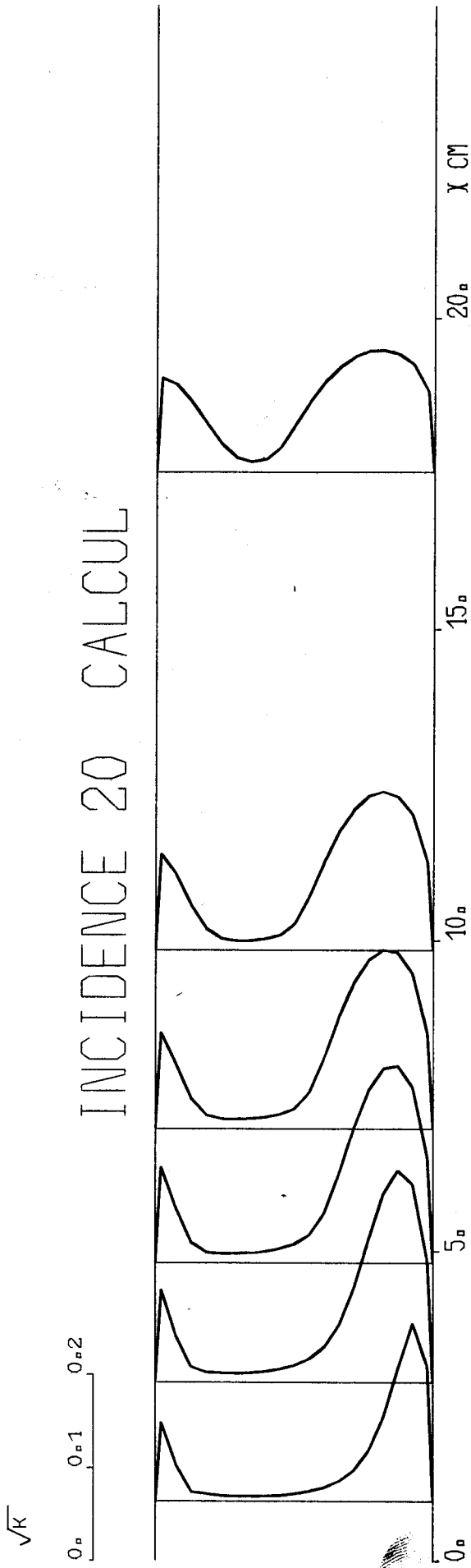


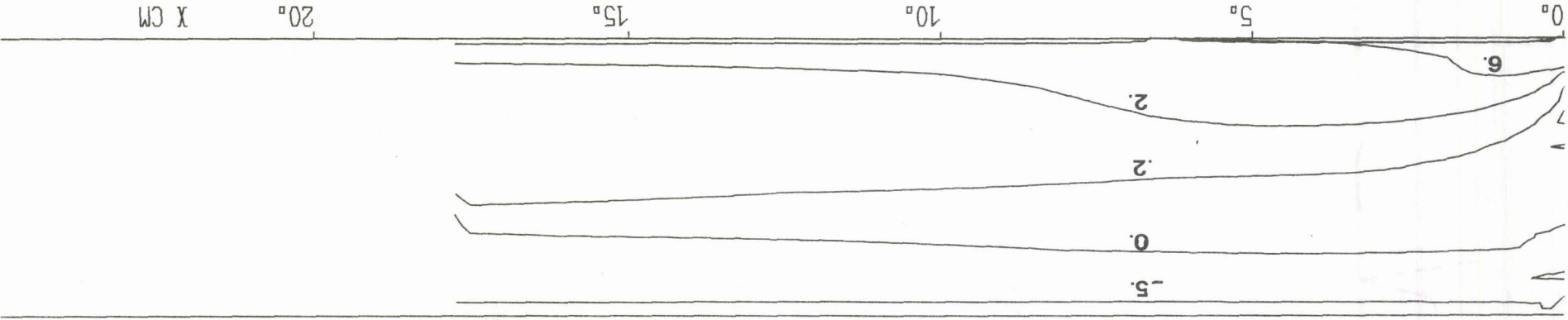
FIGURE 47



COMPARAISON ENTRE L'ENERGIE TURBULENTE CALCULEE ET LE TAUX DE TURBULENCE MESURE



LIGNES ISO TOURBILLON $I = 20$



LIGNES DE COURANT $I = 20$

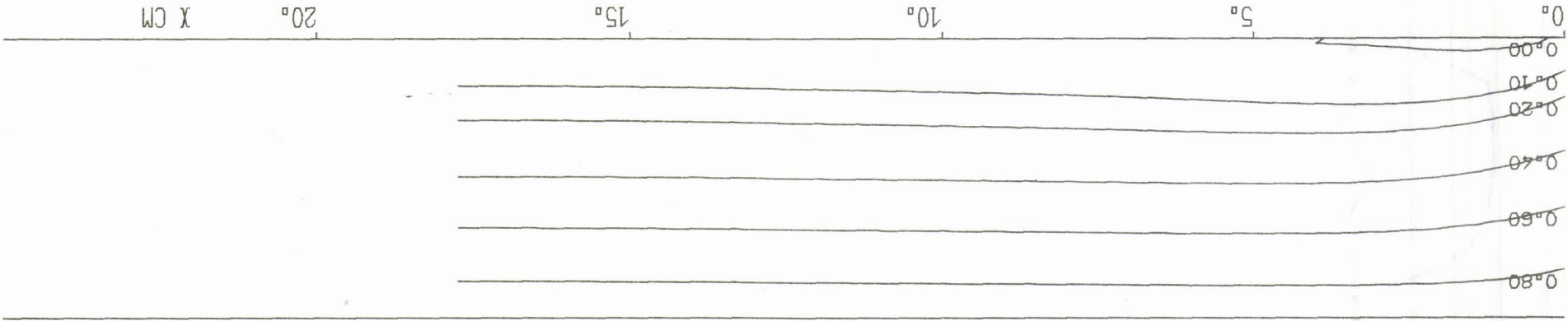
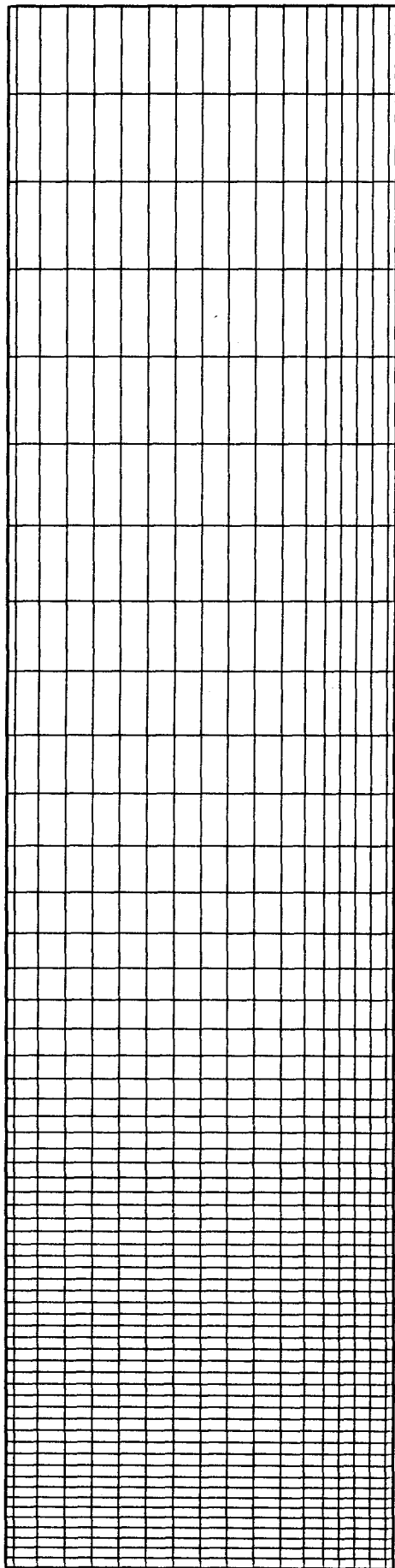


FIGURE 49



INCIDENCE 20 DEGRES MAILLAGE NO 3



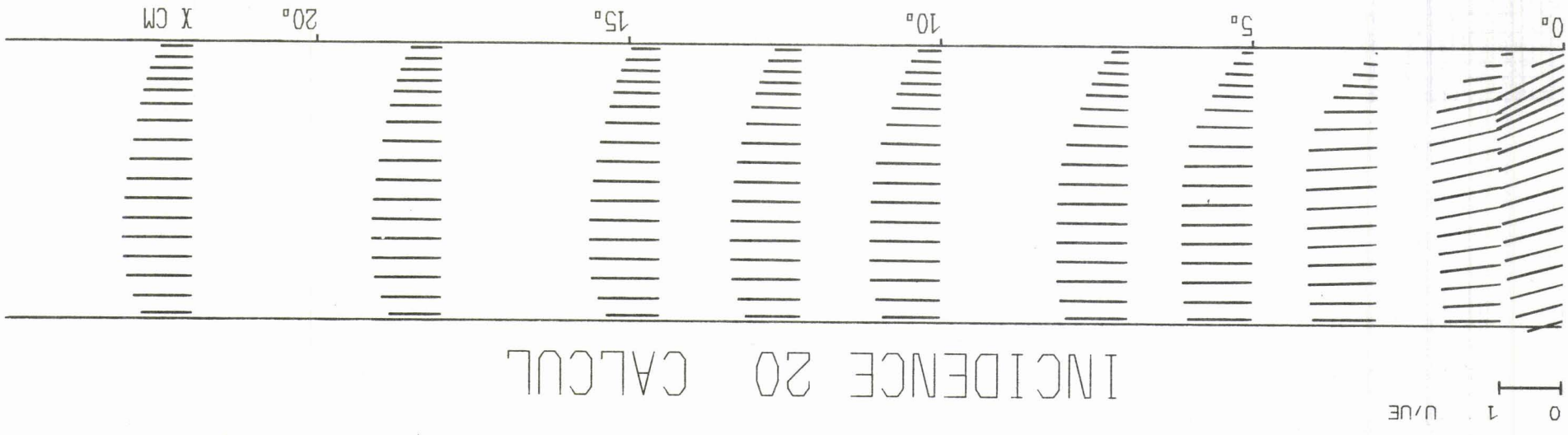
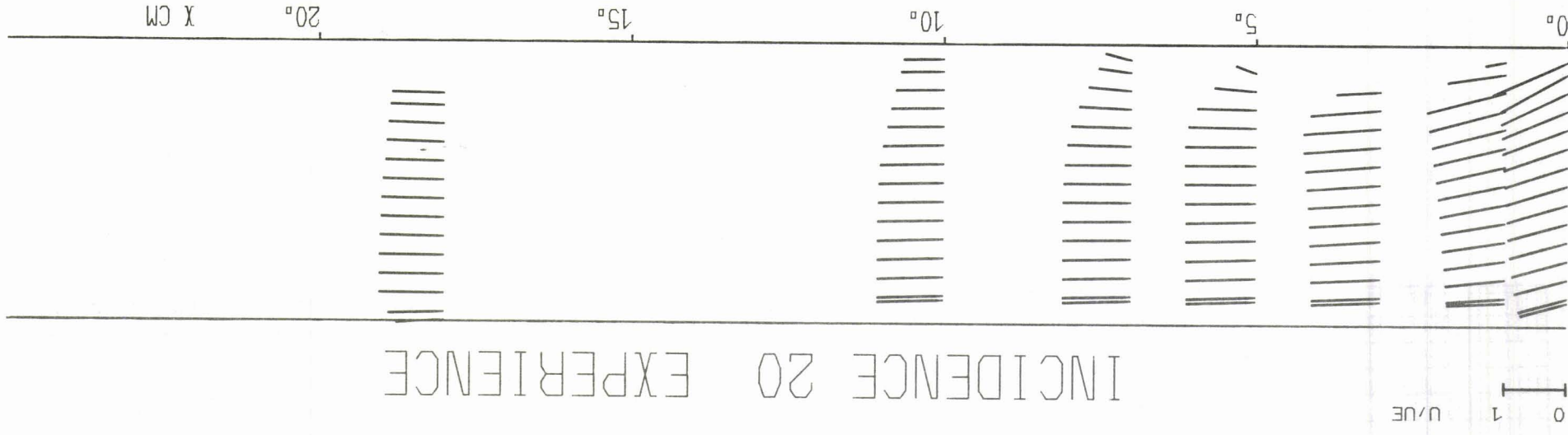
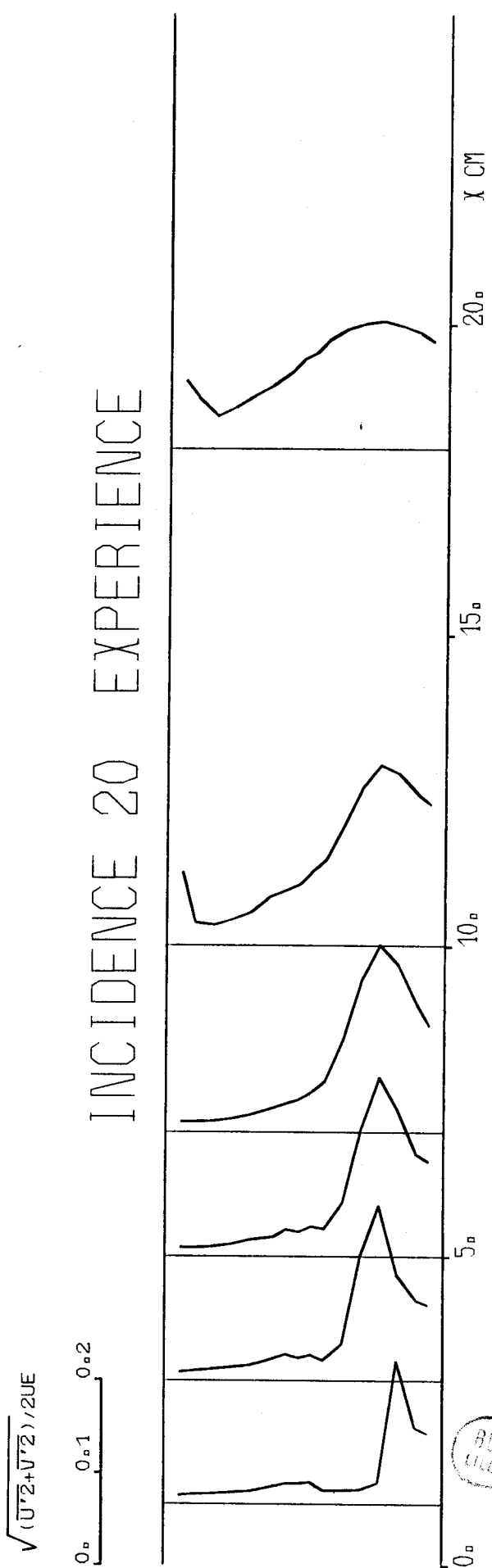
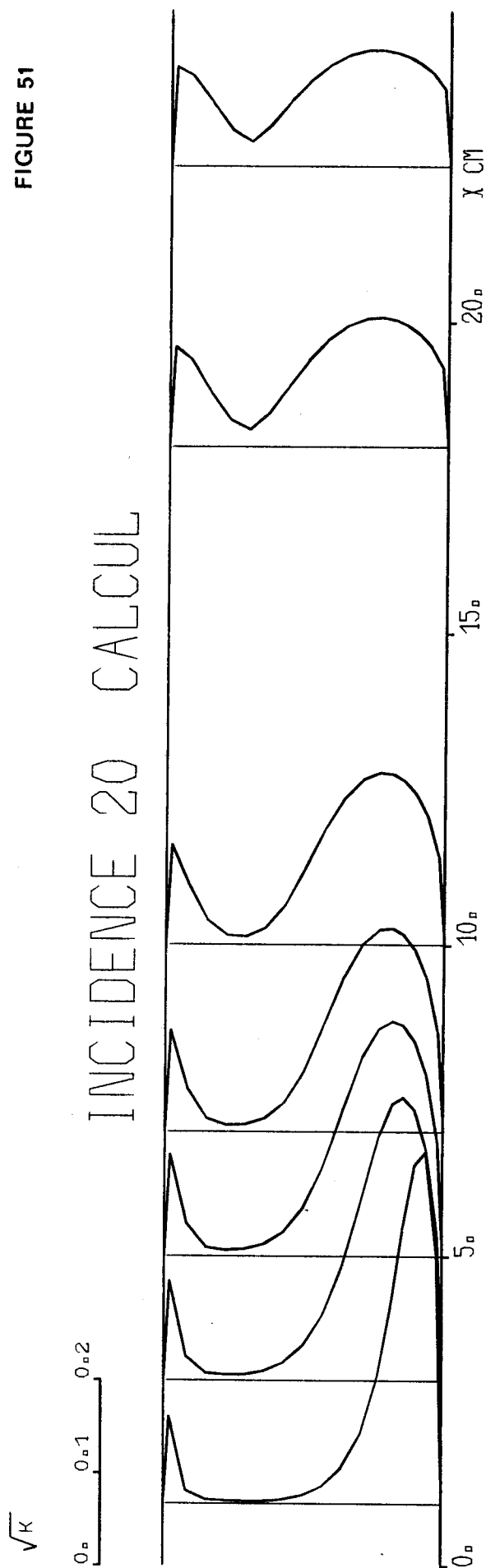


FIGURE 50

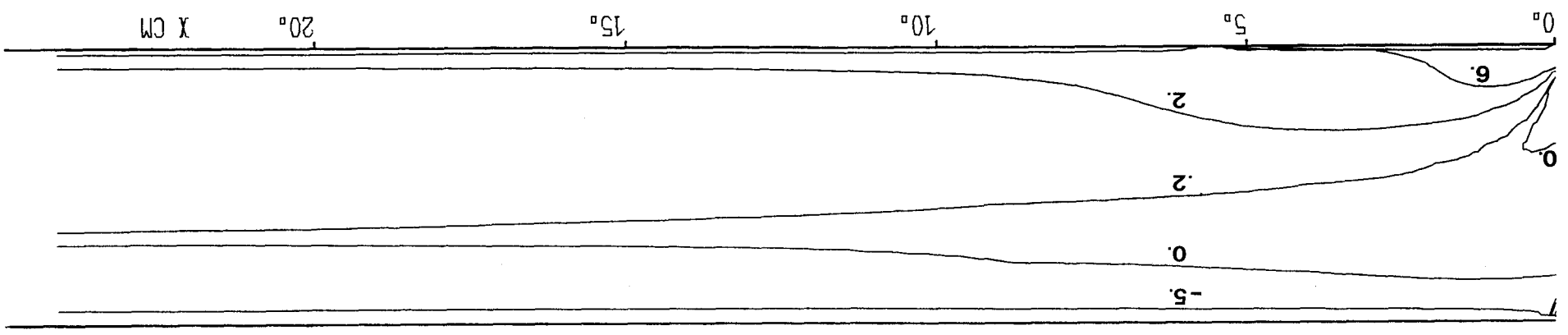
FIGURE 51



COMPARAISON ENTRE L'ENERGIE TURBULENTE CALCULEE ET LE TAUX DE TURBULENCE



LIGNES ISO TOURBILLON I = 20



LIGNES DE COURANT I = 20

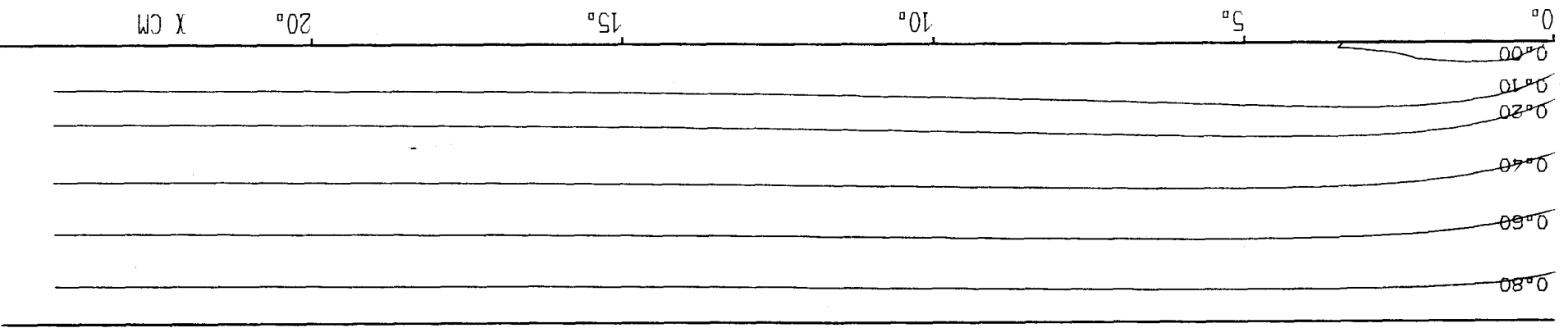
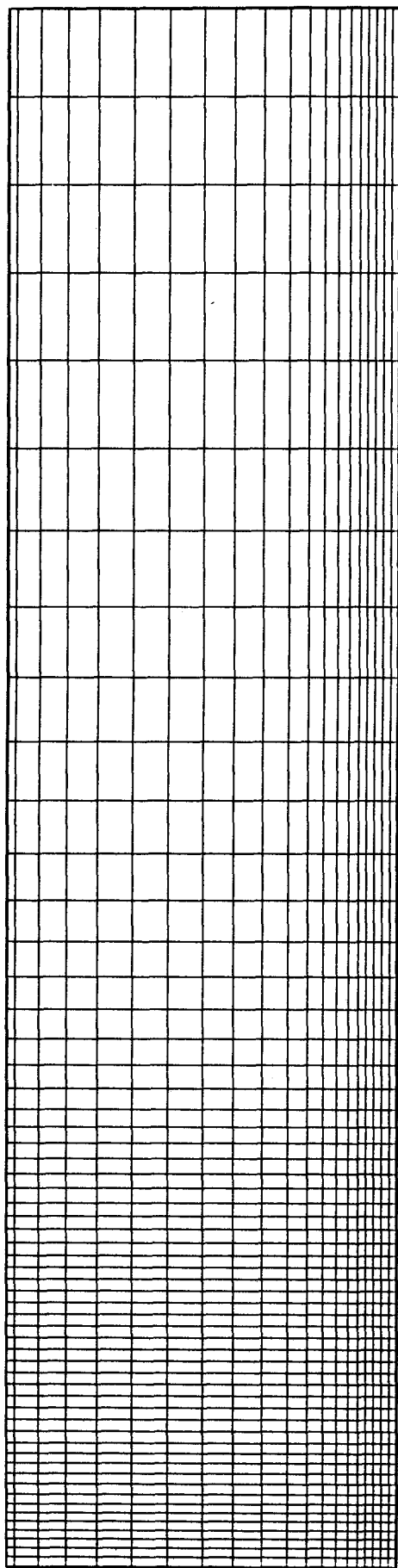


FIGURE 52

FIGURE 53

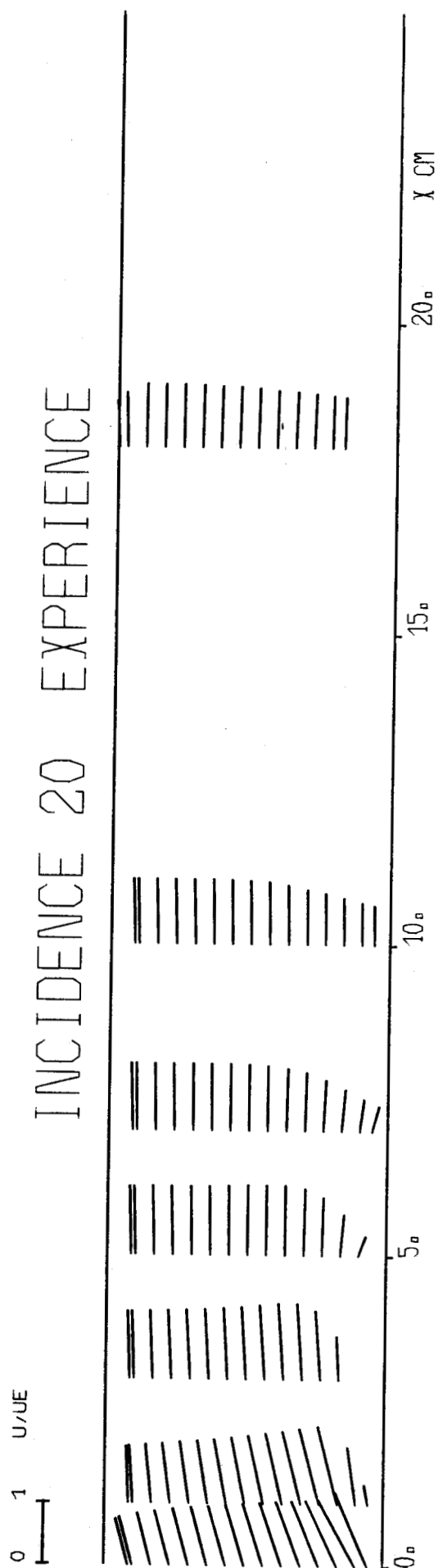
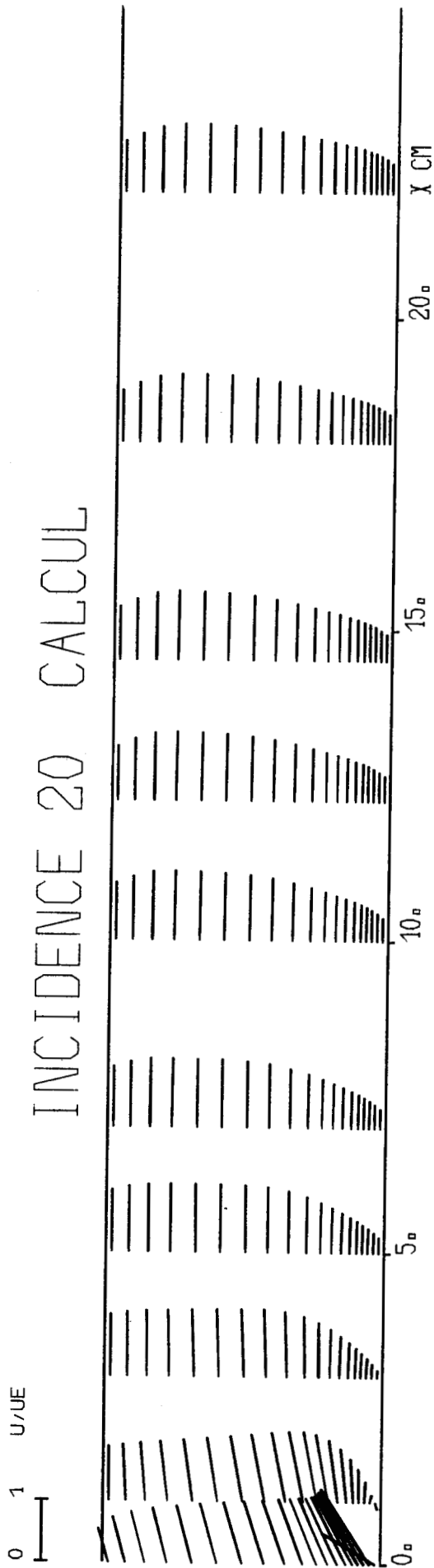


INCIDENCE 20 DEGRES MAILLAGE NO 2





FIGURE 54

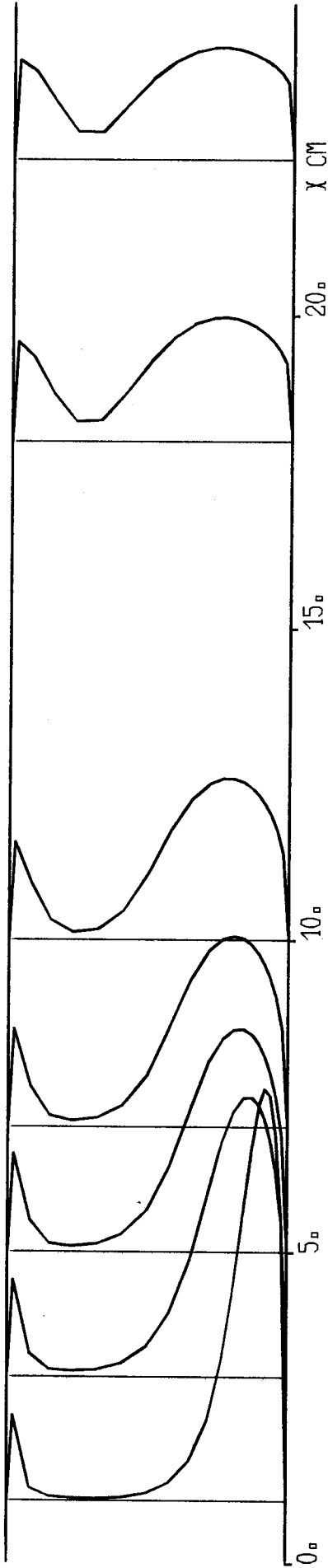


\sqrt{K}

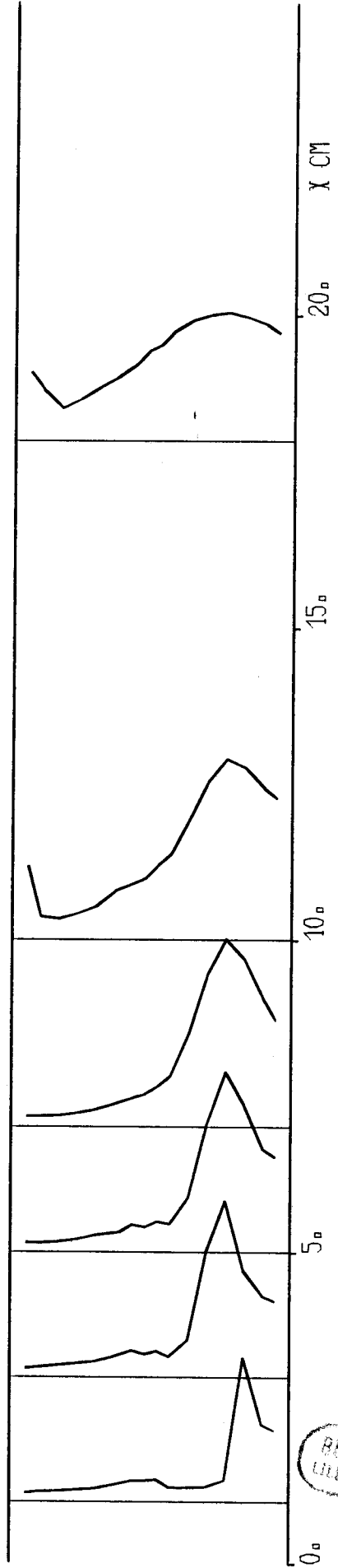
FIGURE 55

0_a 0.1 0.2

INCIDENCE 20 CALCUL

 $\sqrt{(U'^2+V'^2)}/2UE$ 0_a 0.1 0.2

INCIDENCE 20 EXPERIENCE

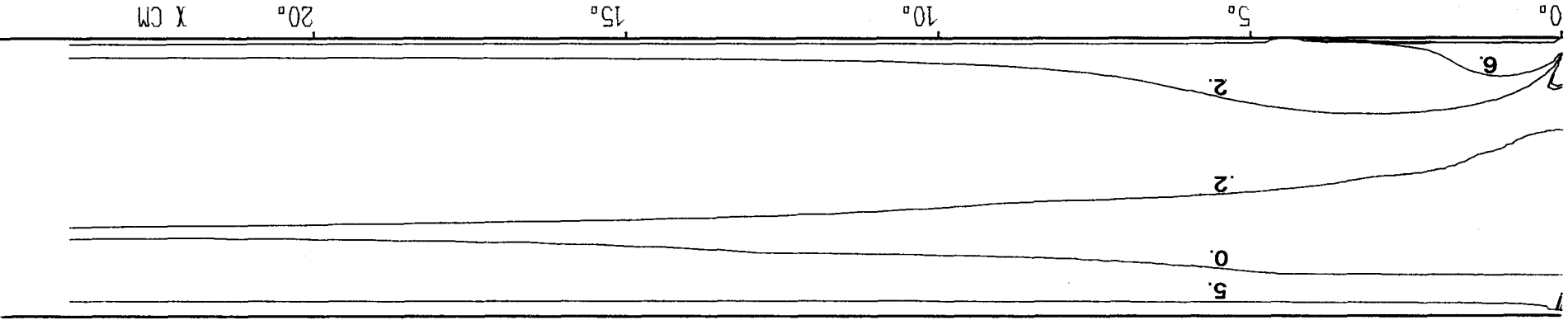


COMPARAISON ENTRE L'ENERGIE TURBULENTE CALCULEE ET LE TAUX DE TURBULENCE

RMS
LILLE



LIGNES ISO TOURBILLON I = 20



LIGNES DE COURANT I = 20

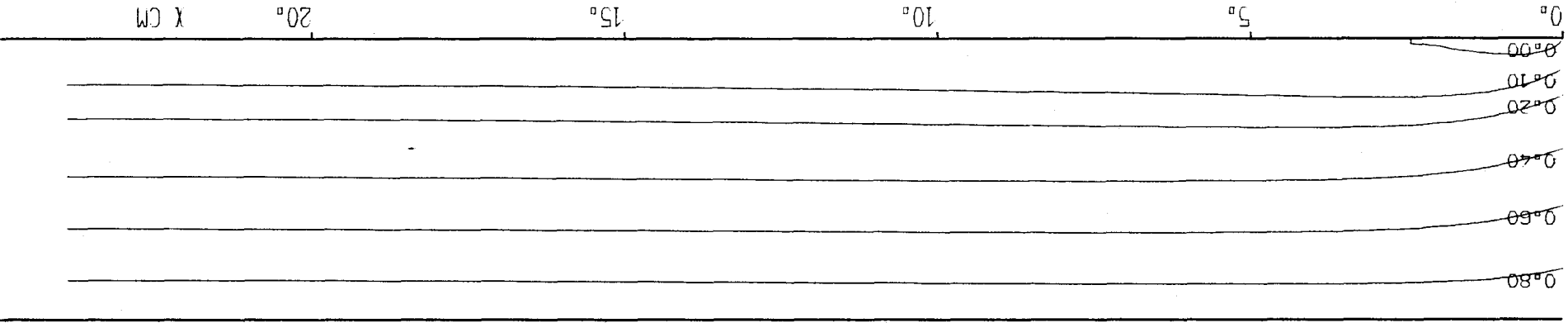
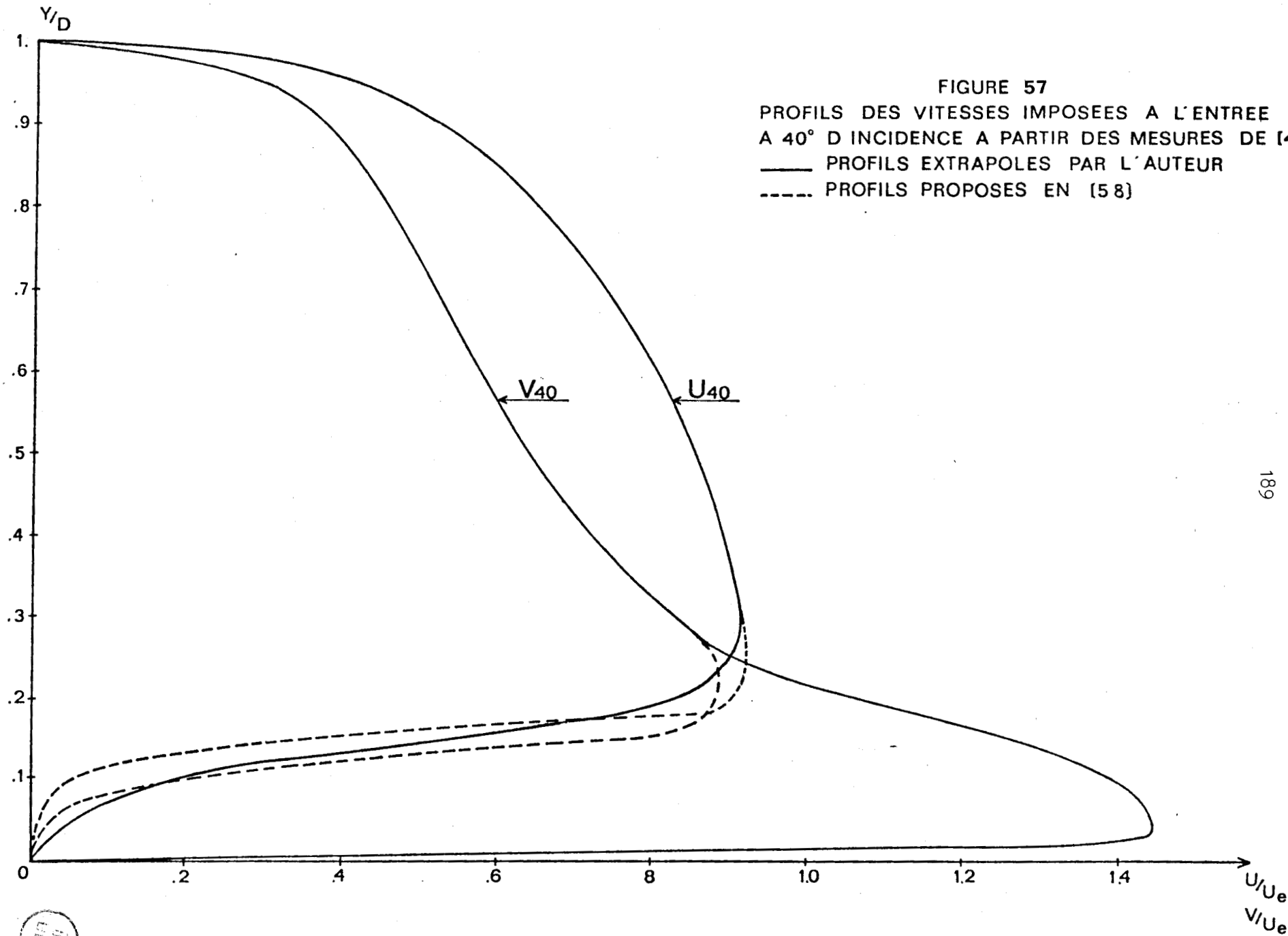


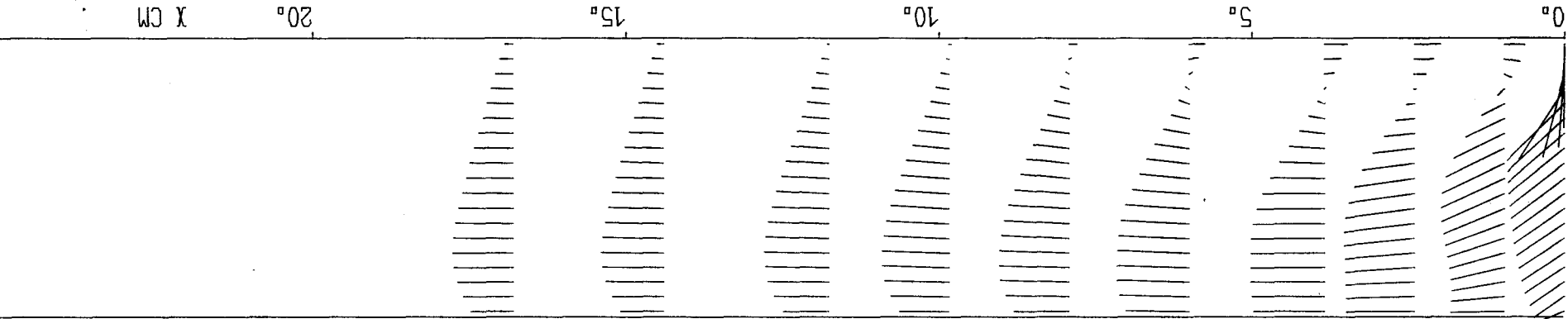
FIGURE 56





0 1 U/UE

INCIDENCE 40 CALCUL



0 1 U/UE

INCIDENCE 40 EXPERIENCE

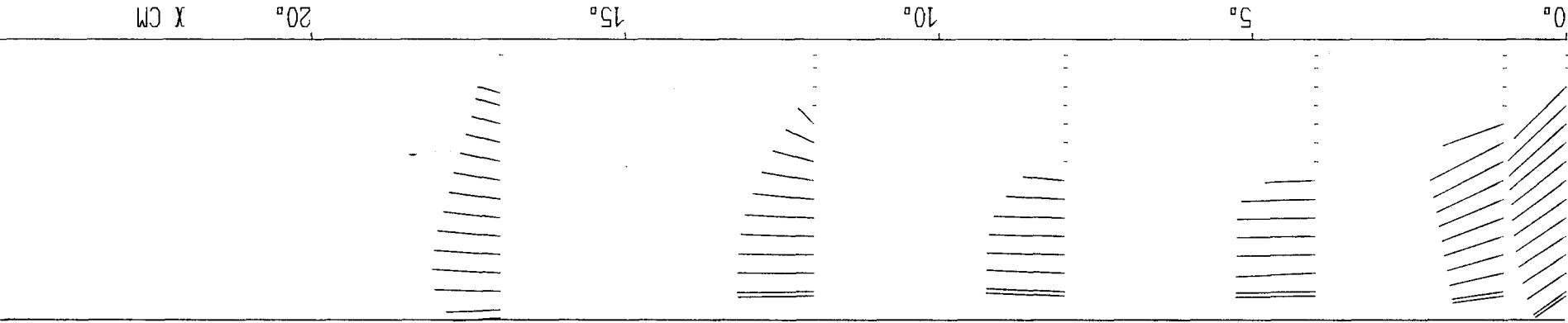


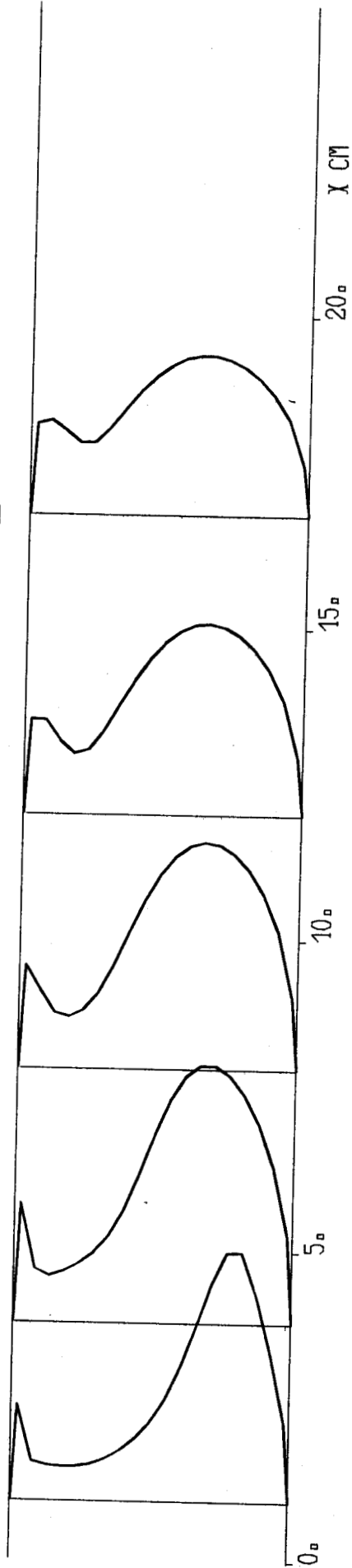
FIGURE 58

\sqrt{k}

FIGURE 59

0_a 0.1 0.2

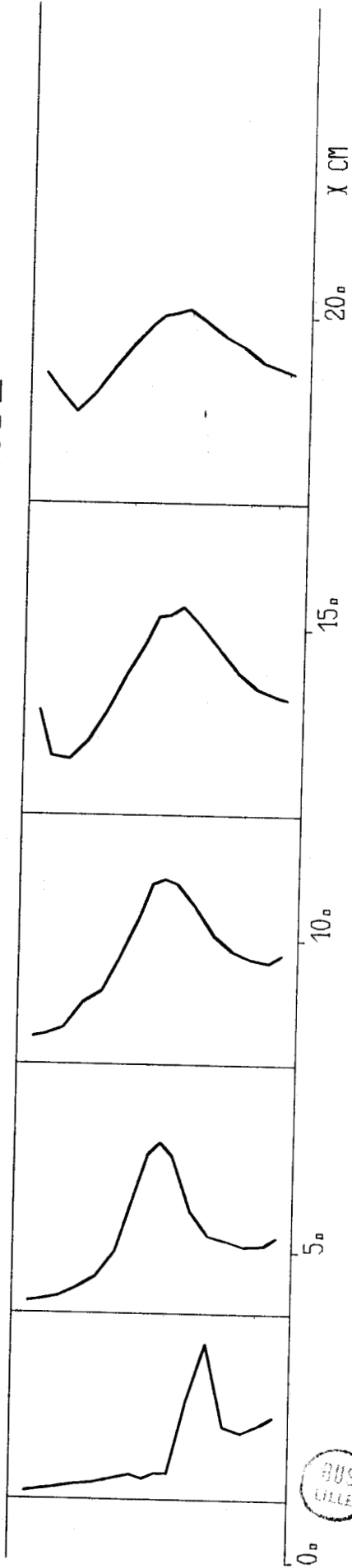
INCIDENCE 40 CALCUL



$\sqrt{(U'^2+V'^2)}/2U_E$

0_a 0.1 0.2

INCIDENCE 40 EXPERIENCE

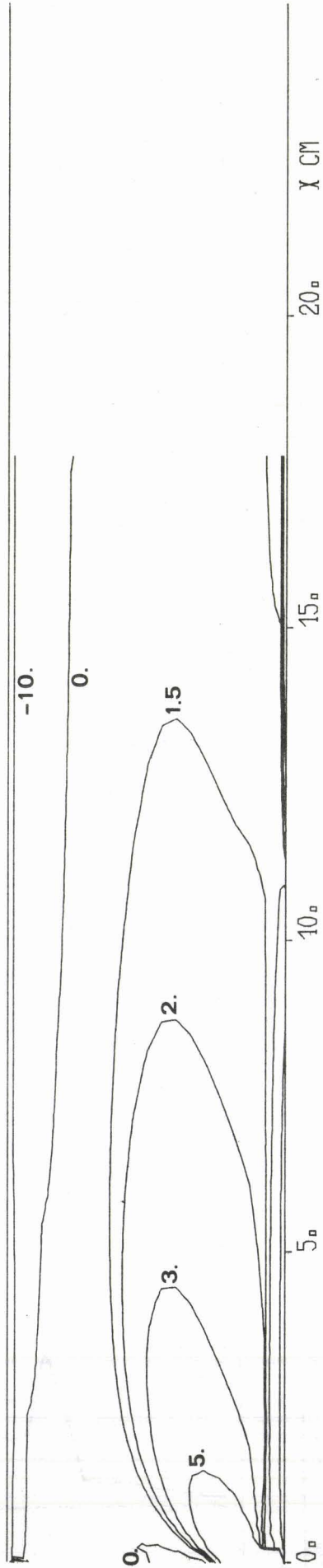


COMPARAISON ENTRE L'ENERGIE TURBULENTE CALCULEE ET LE TAUX DE TURBULENCE MESURE

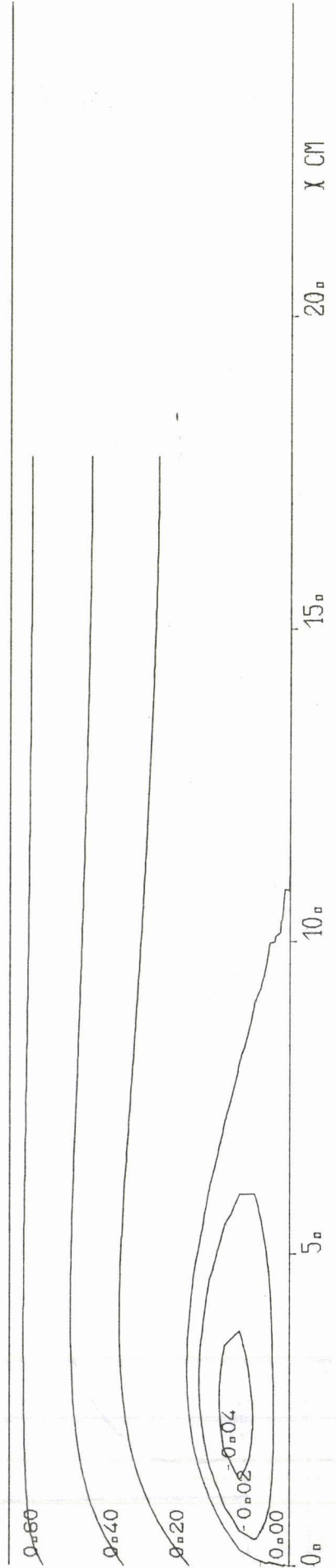


FIGURE 60

LIGNES ISO TOURBILLON $I = 40$

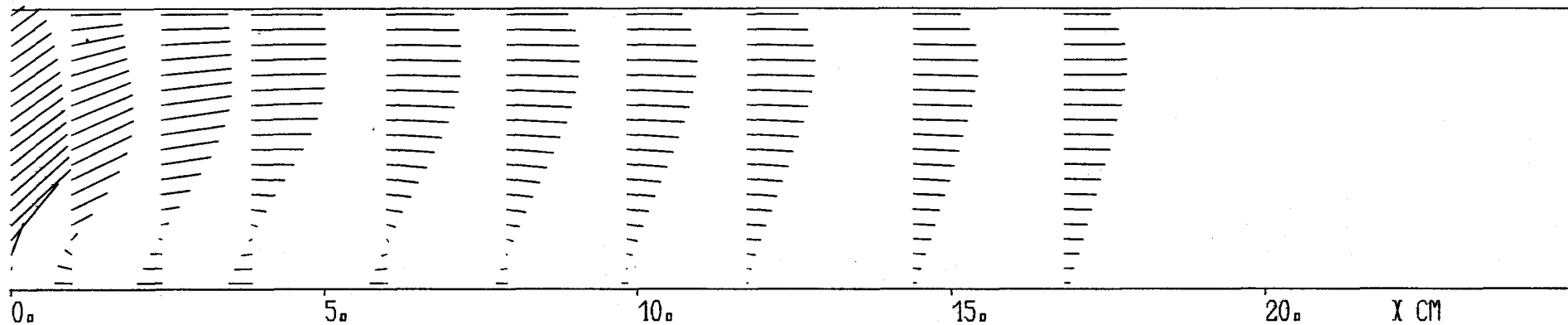


LIGNES DE COURANT $I = 40$



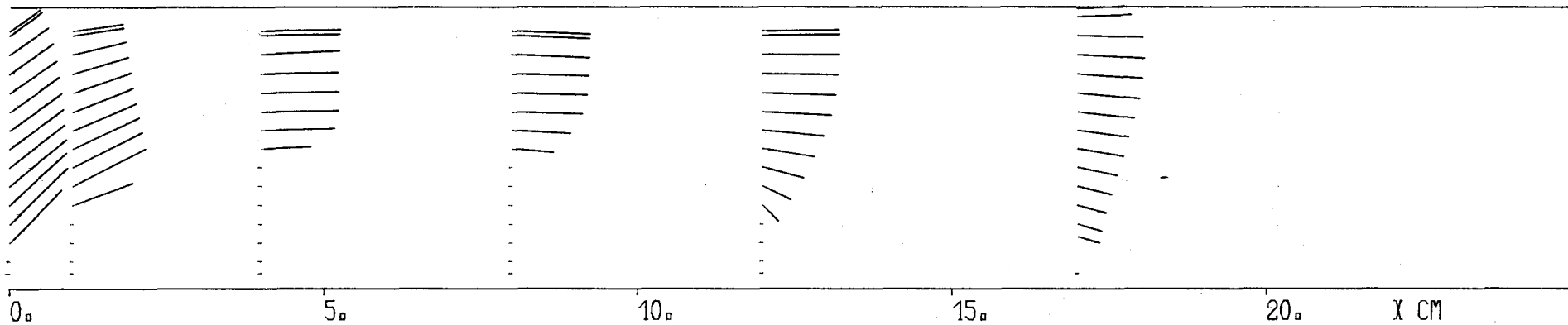
0 1 U/UE

INCIDENCE 40 CALCUL



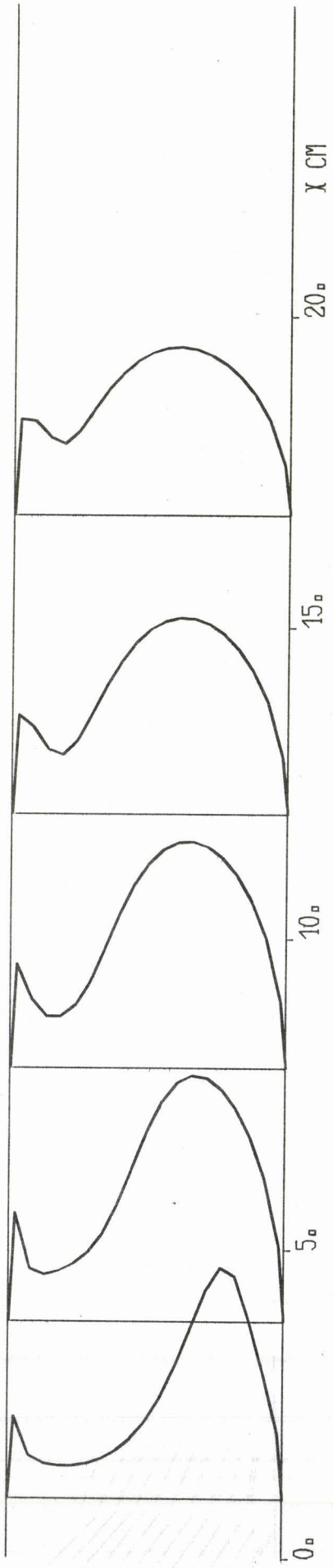
0 1 U/UE

INCIDENCE 40 EXPERIENCE



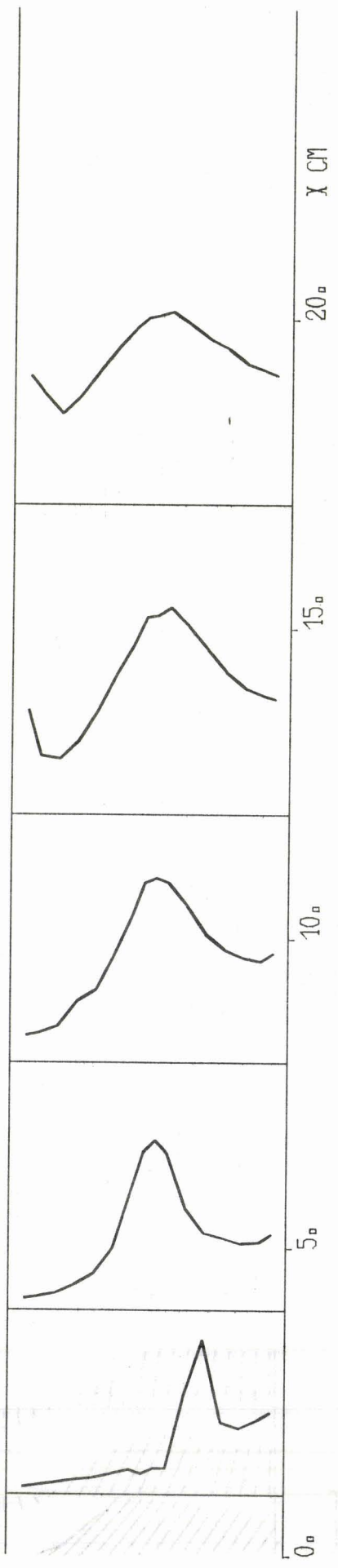
INCIDENCE 40 CALCUL

\sqrt{K}
0.0 0.1 0.2



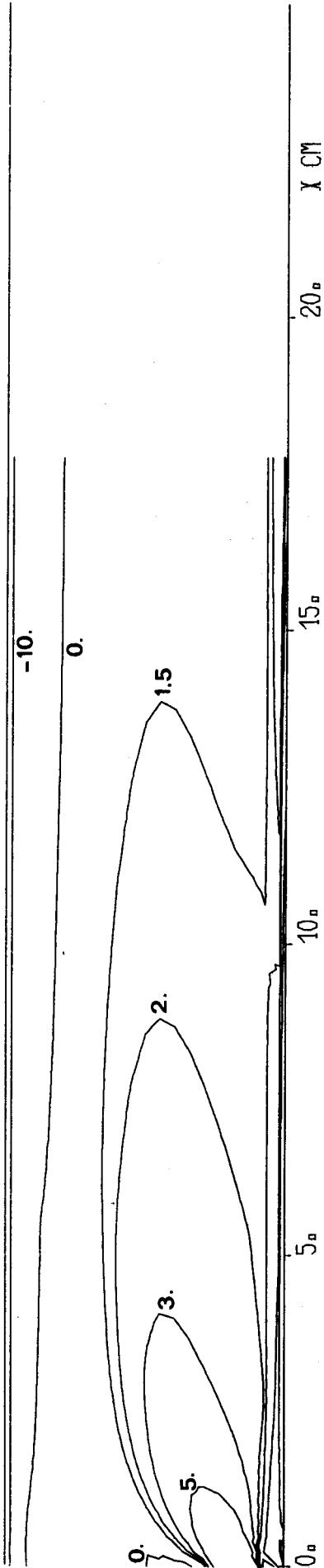
INCIDENCE 40 EXPERIENCE

$\sqrt{(U'^2+V'^2)}/2U_E$
0.0 0.1 0.2

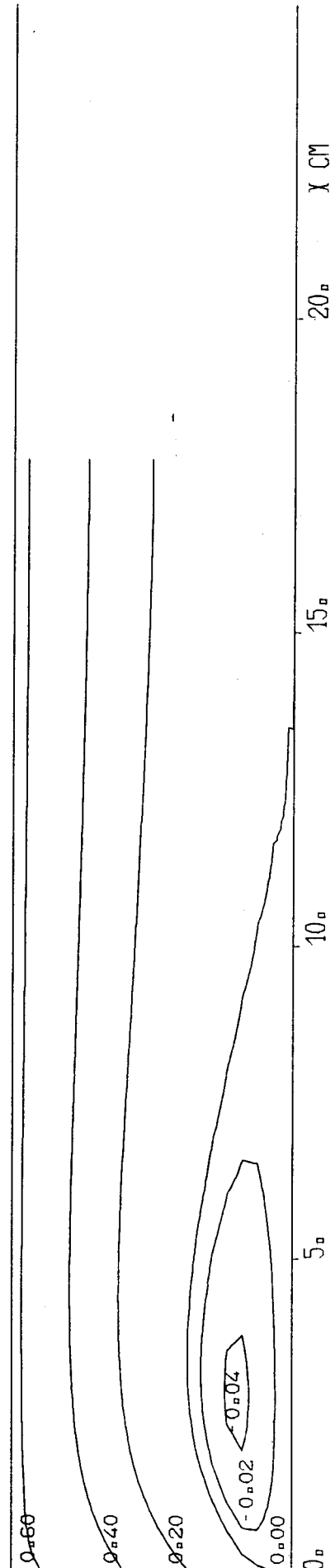


COMPARAISON ENTRE L'ENERGIE TURBULENTE CALCULEE ET LE TAUX DE TURBULENCE MESURE

LIGNES ISO TOURBILLON $I = 40$



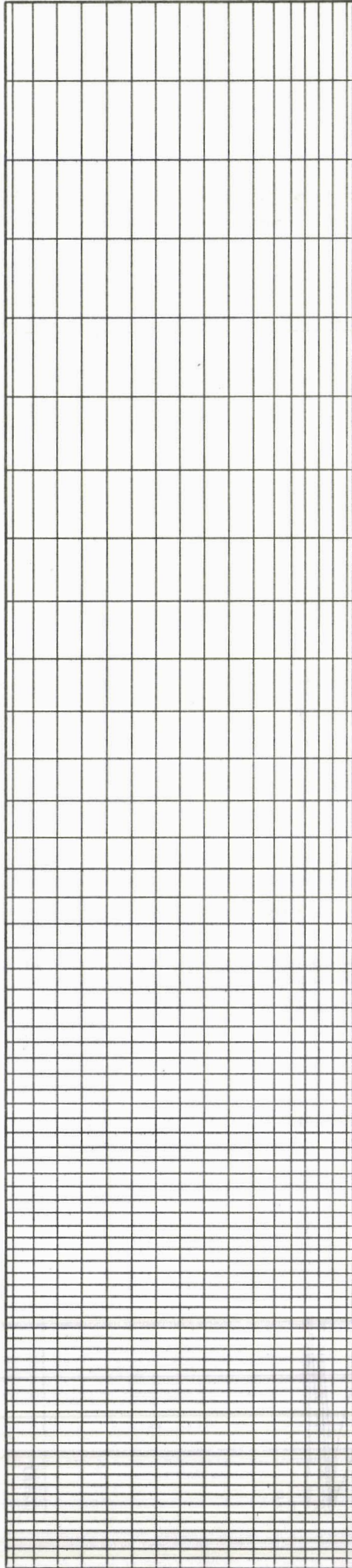
LIGNES DE COURANT $I = 40$



BUS
LILLE



FIGURE 64



MAILLAGE INCIDENCE 40 DEGRES NO 3

FIGURE 65

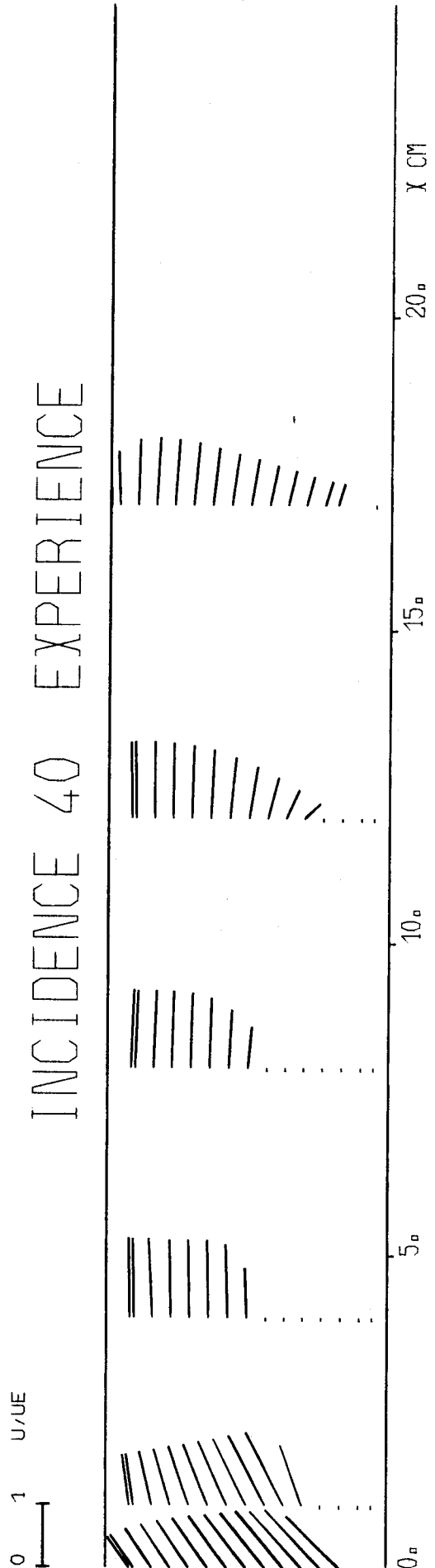
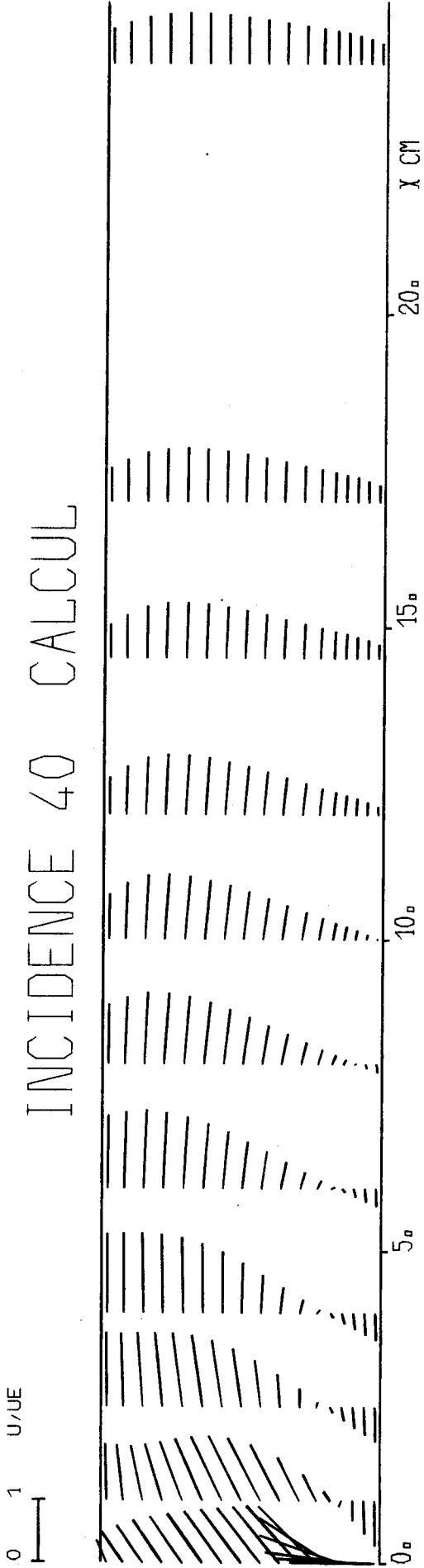
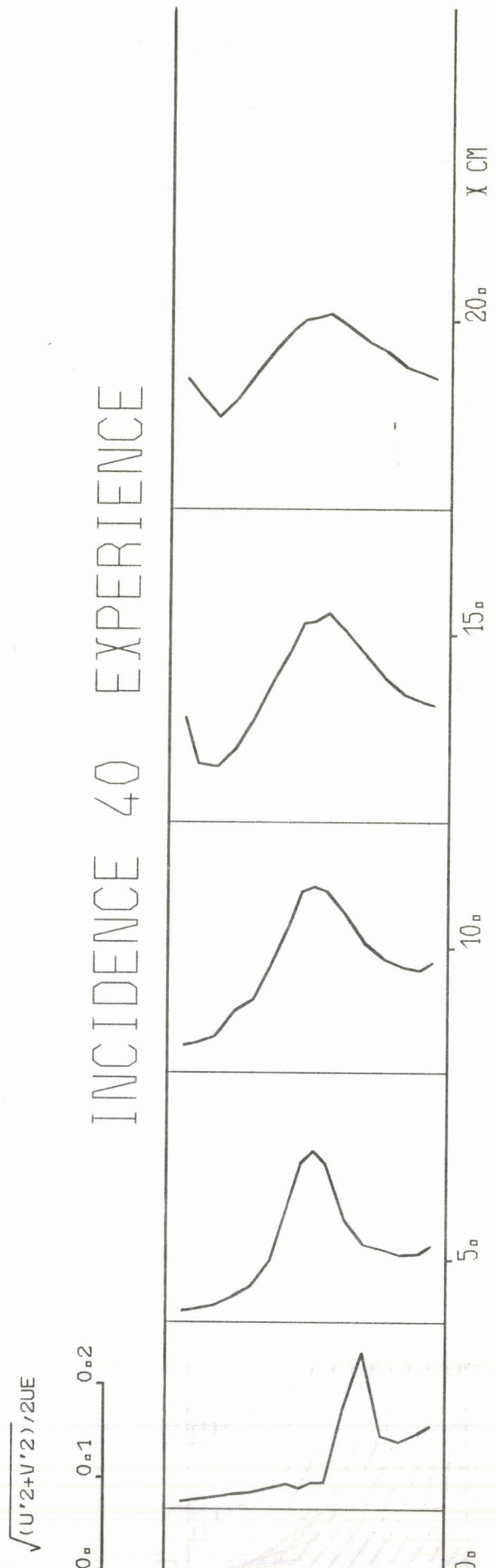
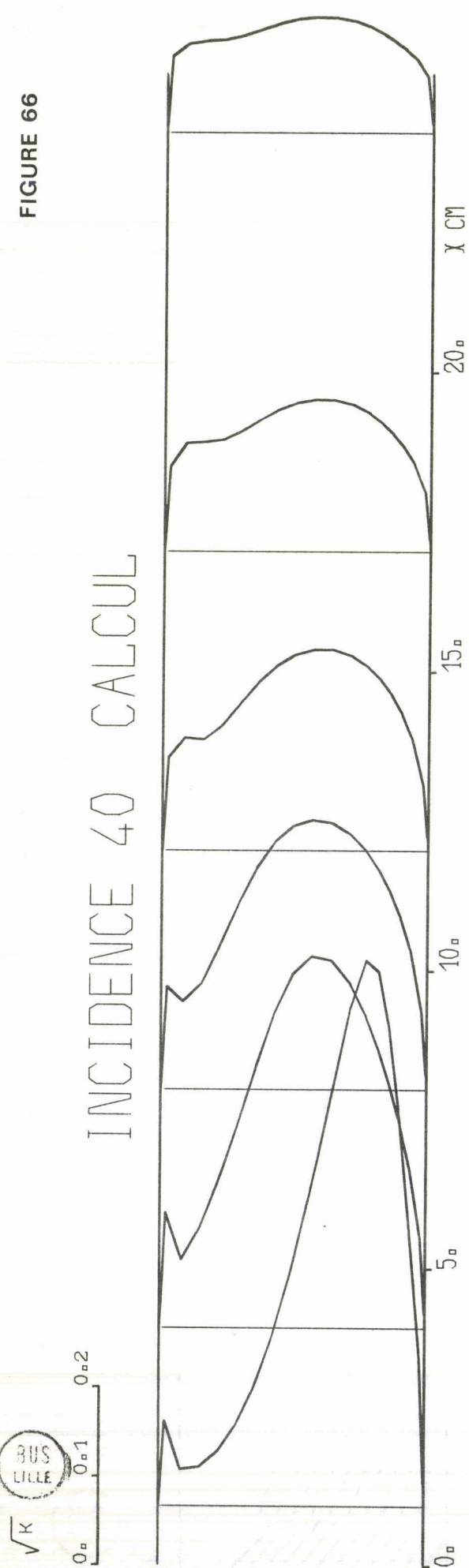


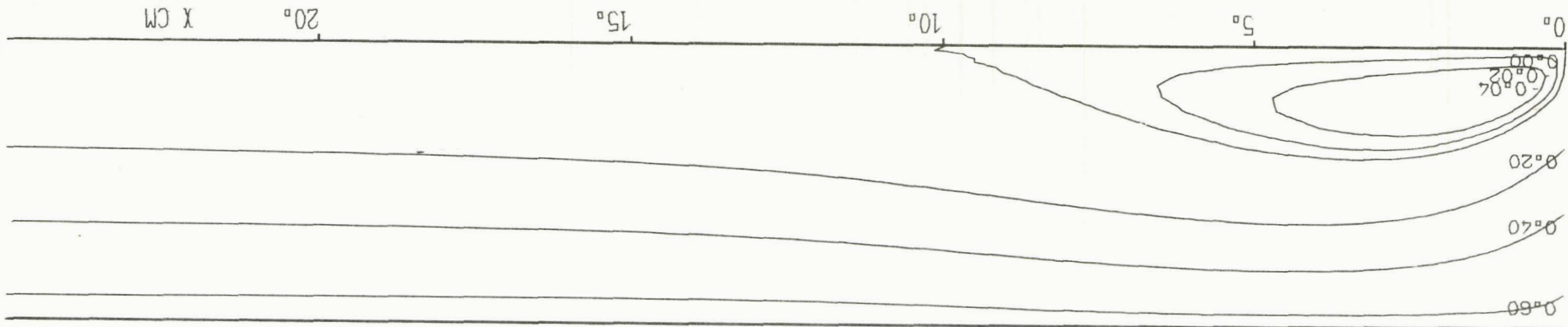
FIGURE 66



COMPARAISON ENTRE L'ENERGIE TURBULENTE CALCULEE ET LE TAUX DE TURBULENCE



LIGNES DE COURANT $I = 40$



LIGNES ISO TOURBILLON $I = 40$

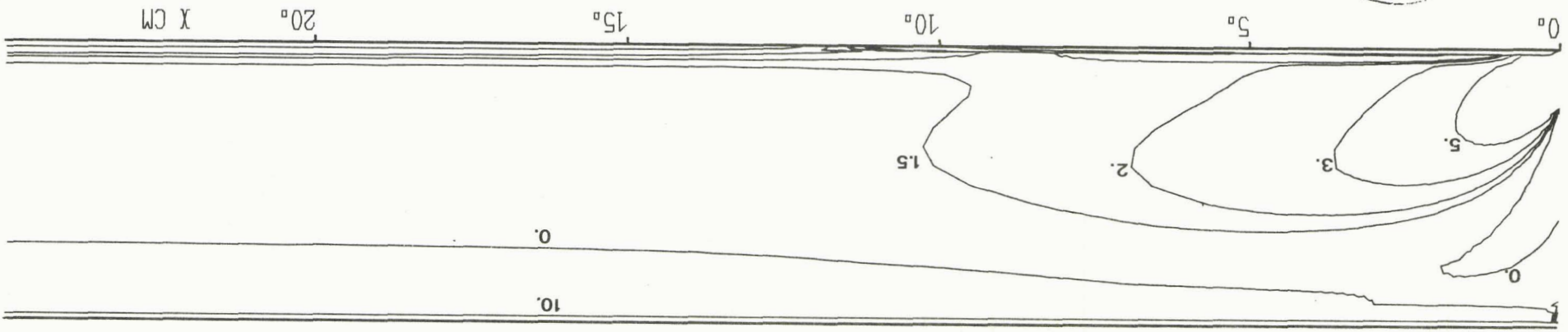


FIGURE 67