

50376  
1981  
9

N° d'Ordre : 259

50376  
1981  
9

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR INGÉNIEUR

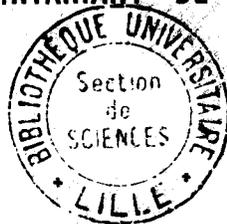
par

Jean-Pierre RICHARD

Ingénieur I D N

SUR LA MISE EN EQUATIONS D'ETAT DE SYSTEMES CONTINUS  
NON LINEAIRES PAR UNE METHODE DE CALCUL SYMBOLIQUE :

DEFINITION D'UN INVARIANT DE REPRESENTATION .



Soutenu le 30 Janvier 1981 devant le Jury d'examen

MM. M. MORIAMEZ  
F. LAURENT  
P. BORNE  
Lj. T. GRUJIC'  
J.C. GENTINA  
M. BENREJEB  
G. CARNAILLE

Président  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Invité

*A mes amis*

AVANT PROPOS

---

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

Nous tenons tout d'abord à remercier très vivement Monsieur le Professeur MORIAEZ, Directeur de l'Institut Industriel du Nord, pour le grand honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider notre Jury de Thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de notre respectueuse gratitude et de notre profond dévouement.

Nous sommes particulièrement reconnaissant envers Monsieur le Professeur LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique, qui nous a accueilli au sein de son équipe et a su, par ses conseils éclairés et sa grande expérience, nous initier à la recherche. Nous tenons à lui exprimer nos vifs remerciements.

Monsieur le Professeur BORNE nous a, à tout moment, encouragé et soutenu dans notre recherche. Les conseils dont il a su nous faire profiter, ainsi que sa présence dans notre Jury, nous ont profondément touché. Qu'il reçoive ici le témoignage de notre reconnaissance.

Nous sommes grandement honoré de l'intérêt que Monsieur le Professeur GRUJIĆ, de l'Université de Belgrade, a bien voulu porter à nos travaux. Nous tenons à lui témoigner notre profonde gratitude.

Que Monsieur le Professeur BENREJEB, de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis soit ici remercié, tant pour les conseils qu'il nous a prodigués que pour sa présence à notre Jury.

Que Monsieur le Professeur GENTINA reçoive ici nos très sincères remerciements pour s'être intéressé à notre travail. Nous lui exprimons toute notre reconnaissance pour sa participation à notre Jury.

Nous sommes très flatté de la présence à notre Jury de Thèse de Monsieur CARNAILLE, Membre du Directoire de la Société A.P.C. C'est un agréable devoir pour nous de l'en remercier vivement.

Enfin, qu'il nous soit permis de rendre hommage à tous les chercheurs du Laboratoire de Systématique pour l'aide précieuse qu'il nous ont apportée, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain, de même qu'à Madame LAGROU qui s'est chargée de la présentation matérielle de ce rapport de thèse.

## INTRODUCTION GENERALE

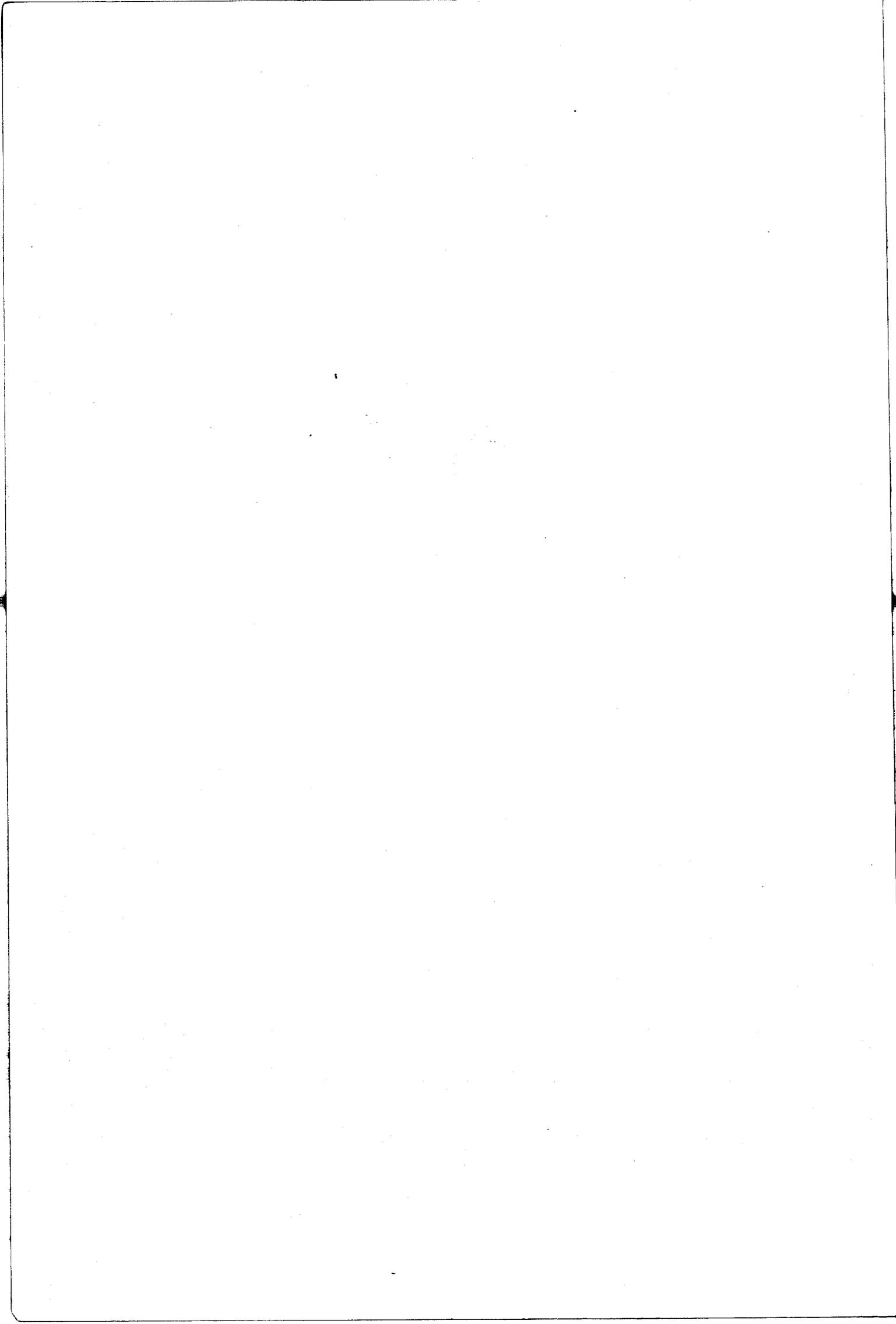
Les travaux présentés dans ce mémoire concernent une méthode de mise en équation rapide d'un système non linéaire sous une forme matricielle définie a priori.

Cette méthode est valable pour toute une classe de processus non-linéaires, non-stationnaires, définie dans le premier chapitre et à laquelle sont applicables de nombreux critères de stabilité, proposés par LYAPUNOV[1], LAURENT et LHOTE[2], BORNE et GENTINA[3], et BENREJEB[4]. Un algorithme est présenté et permet de mettre la matrice du système sous une forme canonique définie pour le linéaire [6].

Le principe d'identification d'une représentation connue d'un système à une forme matricielle arbitraire est exposé dans la deuxième partie : il met en oeuvre un polynôme symbolique qui, dans le cas particulier d'un système linéaire et stationnaire, s'identifie au polynôme caractéristique.

L'introduction d'un calcul symbolique permet alors de traiter la mise en équation par des méthodes pratiques, semblables à celles employées pour les processus linéaires.

Dans le troisième chapitre, l'étude de la stabilité d'un système est envisagée à partir des méthodes de mise en équation proposées. Celles-ci permettent notamment d'étudier au moyen de différents critères la stabilité globale ou locale de systèmes non-linéaires.



## CHAPITRE I : REPRESENTATIONS D'ETAT DE SYSTEMES D'ORDRE FINI

### INTRODUCTION

Ce chapitre a pour but la présentation de la classe des processus étudiés et de leurs diverses représentations d'état.

Dans un premier temps sont précisés les concepts d'espace d'état, d'entrée et de sortie. Ces notions permettent en particulier l'application des méthodes du calcul matriciel à la mise en équations des systèmes continus.

Les diverses notions de stabilité sont ensuite rappelées ; il apparaît ainsi que le choix de la représentation d'un système non linéaire est une phase essentielle lors de l'analyse de stabilité. L'introduction de systèmes de comparaison permet d'élargir le champ des méthodes d'étude les plus connues.

Nous définissons ensuite la classe des modèles étudiés, dont l'évolution peut être caractérisée par une matrice carrée d'ordre  $q$  dont seule une rangée est constituée d'éléments non constants.

Après avoir donné une classification de ces systèmes, nous présentons leurs différentes formes canoniques à partir d'une décomposition matricielle par blocs.

# I - STRUCTURE DES PROCESSUS CONTINUS NON LINEAIRES

## I.1. Etat d'un système

L'évolution d'un processus déterministe, considérée à partir d'un instant  $t_0$ , ne dépend pas uniquement de l'influence immédiate du milieu dans lequel il se trouve, mais aussi de données internes.

Il convient donc de décrire son comportement par trois ensembles de variables considérées à un instant  $t$  :

- les entrées, qui représentent l'action de l'extérieur sur le système,
- les sorties, qui sont ses réactions accessibles,
- enfin l'état, qui est un ensemble de  $q$  informations instantanées dépendant de l'évolution du système antérieurement à l'instant  $t$ .

Par définition, la connaissance de l'évolution des entrées sur l'intervalle de temps  $(t_0, t_1)$  (et de l'état à l'instant  $t_0$  doit permettre de prévoir le comportement du système de  $t_0$  à  $t_1$  ; ses sorties, entre autres, sont alors prévisibles.

En vue de simplifier l'étude, nous choisirons dans la plupart des cas un nombre  $q$  d'informations nécessaire et suffisant. Il est cependant possible d'employer un ensemble redondant.

Ces  $q$  fonctions du temps  $t \in (t_0, +\infty)$  seront regroupées sous la forme d'un vecteur  $x(t)$  d'ordre  $q$ , défini sur  $\mathcal{R}^q$  où  $\mathcal{R}$  est le corps des réels.

$x(t)$  est alors appelé vecteur état du système et ses composantes, variables d'état.

L'évolution du système est ainsi représentée au moyen des trajectoires décrites par l'extrémité M du vecteur  $x = \overline{OM}(t)$ , le point O étant l'origine d'un repère  $(O, e_1, e_2 \dots e_q)$  de l'espace d'état  $\mathcal{R}^q$ . La représentation de l'état x dépend donc du repère choisi.

I.2. Equations représentatives d'un processus

Nous limiterons notre étude à l'ensemble des systèmes dont le comportement en réponse à une entrée u pendant l'intervalle de temps  $\mathcal{T} = (t_0, +\infty)$  (peuvent être décrit par des relations de la forme : [6]).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{dt}(x) = f(x(t), u(t), t) & \text{(I-1)} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & \text{(I-2)} \end{cases}$$

- avec  $( t \in (t_0, +\infty) (= \mathcal{T}$
- $( t_0 \in \mathcal{R}$
- $( x \text{ vecteur état } \in \mathcal{R}^q, x^t = (x_1(t) \dots x_q(t))$
- $( u \text{ vecteur des entrées } \in \mathcal{R}^n, u^t = (u_1(t) \dots u_n(t))$
- $( y \text{ vecteur des sorties } \in \mathcal{R}^p, y^t = (y_1(t) \dots y_p(t))$
- $( f : \mathcal{R}^q \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R}^q$
- $( g : \mathcal{R}^q \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R}^p \text{ fonction univoque.}$

f doit en outre posséder les propriétés assurant l'existence et l'unicité d'une solution de (I-1) lorsque l'entrée u(t) et les valeurs initiales sont données [7] [44]. Le nombre minimal de valeurs initiales  $x_i(t_0)$  ( $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ ) à connaître est alors appelé ordre du système. Il est égal à q lorsque le vecteur x(t) assure une représentation non redondante de l'état.

Cette formulation suppose que  $\frac{dx}{dt}$  puisse être explicité à partir

des équations du système physique. C'est le cas par exemple des mouvements mécaniques caractérisés par l'accélération  $\ddot{z}$  d'un point M,

$$\overline{OM} = z$$

On peut alors poser  $\dot{x} = (\dot{z}, \ddot{z})^T$ .

Le système ainsi défini peut se représenter d'après le schéma de la figure (I-1), avec les conventions suivantes [8] :

- les variables  $u, x, y, \dot{x}$  sont représentées par des flèches doubles,
- les fonctions  $f$  et  $g$  correspondent à des modules dont les variables et résultats sont les entrées et sorties,
- le symbole  $\int$  représente la fonction  $I(a, t) = \int_{t_0}^t a dt$  avec  $a \in \mathcal{P}^q$ . Les entrées du module correspondant seront  $\dot{x}(t)$  et  $x_0 = x(t_0)$ , et la sortie  $x(t)$ . Il s'agit donc d'un module d'intégration composante à composante.

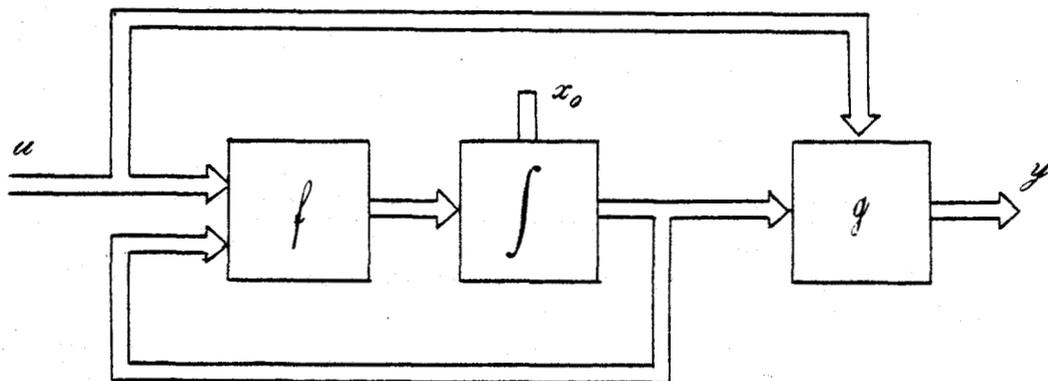


FIGURE (I-1)

La représentation (I-1) (I-2) n'est pas unique. Il suffit pour la changer de choisir un nouveau vecteur état  $x_1$  lié à  $x$  par une fonction biunivoque dérivable :  $x(t) = T(x_1(t))$  (I-3)

Les équations (I-1) et (I-2) s'écrivent alors :

$$\dot{x} = f(T(x_1(t)), u(t), t) = \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^T \dot{x}_1(t) = T_{x_1}^T \dot{x}_1(t) \quad (I-4)$$

$$y(t) = g(T(x_1(t)), u(t), t) \quad (I-5)$$

et par conséquent, la matrice des dérivées partielles  $T_{x_1}$ , étant inversible,

$$\dot{x}_1(t) = F(x_1(t), u(t), t) \quad (I-6)$$

$$y(t) = G(x_1(t), u(t), t) \quad (I-7)$$

Il est notamment possible de définir des fonctions  $T$  correspondant à des changements de bases dans l'espace d'état :

$$x(t) = P x_1(t) \quad , \text{ avec } P \text{ matrice constante, régulière.}$$

Par conséquent, si  $x(t)$  est un vecteur état d'un processus ,  $P^{-1} x(t)$  aussi.

L'étude d'un système est conditionnée par le choix d'un vecteur état adapté [9] [10] [11] [4].

Après avoir défini un ensemble de paramètres correspondant à un état du processus, il s'agit donc d'envisager les diverses formulations des équations d'évolution de cet état. Il est pratique de considérer celles qui sont liées entre elles par des changements de base.

Il faut pour cela passer à une représentation matricielle des équations (I-1) et (I-2).

### I.3. Représentation matricielle des systèmes d'ordre fini

Nous allons maintenant considérer un système d'ordre fini dont l'état  $x(t)$  peut s'exprimer [6] sous forme d'une fonction de transmission  $\Omega$ , supposée parfaitement identifiée :

$x(t) = \Omega(u, t, x_0, t_0)$ ,  $\Omega$  fonction linéaire en  $u, x$   
avec comme sortie  $\Psi$

$y(t) = \Psi(t, x, u)$ ,  $\Psi$  fonction linéaire en  $x, u$

Il est possible de représenter un tel système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t) x(t) + B(t) u(t) \\ y = C(t) x(t) + D(t) u(t) \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

avec

$$x \in \mathcal{R}^q, u \in \mathcal{R}^n, y \in \mathcal{R}^p$$

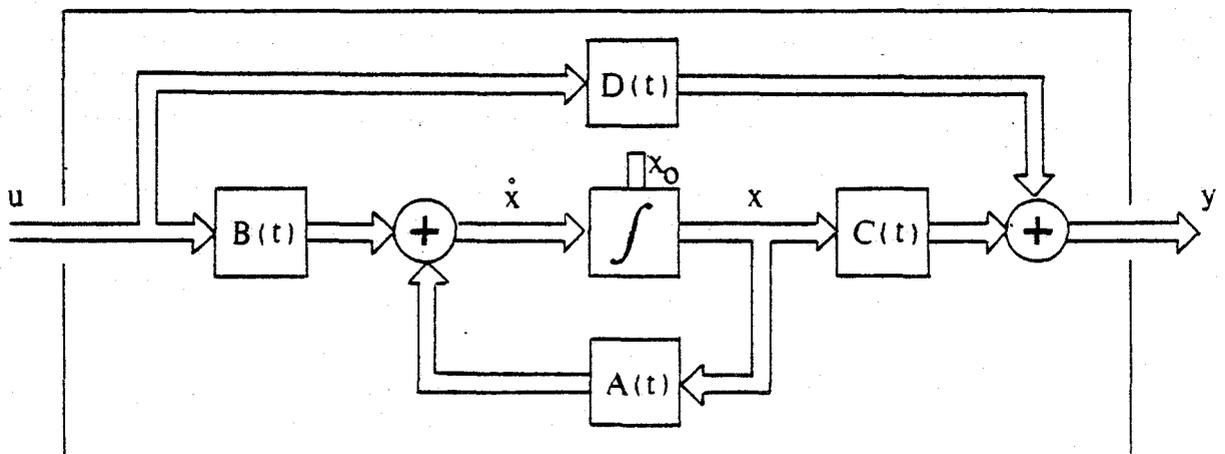
A	matrice	$q \times q$	dite d'évolution
B	matrice	$q \times n$	dite de commande
C	matrice	$p \times q$	dite d'observation
D	matrice	$p \times n$	dite de transmission directe

Ces systèmes seront dits linéaires non stationnaires.

Lorsque les matrices A, B, C et D ne dépendent pas du temps, le système est dit linéaire stationnaire.

Le schéma associé à la représentation (I-8) est décrit

figure (I-2):



Cependant, dans de nombreux cas, les systèmes physiques ne peuvent pas être totalement représentés par une fonction de transition linéaire en u ou x. On gardera cependant la formulation (I-8), en précisant que les matrices A, B, C, D sont fonction des vecteurs u(t) et x(t).

On se ramène à des équations de la forme (I-9):

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x,u,t) x(t) + B(x,u,t) u(t) \\ y = C(x,u,t) x(t) + D(x,u,t) u(t) \end{cases} \quad (I-9)$$

où les matrices et vecteurs A, B, C, D, u, x, y ont les mêmes dimensions que dans les notations précédentes et vérifient les propriétés requises pour l'existence et l'unicité d'une solution.

Il faut notamment supposer que l'on puisse définir les termes non linéaires du processus par un "gain" variable selon x, u et t, ce qui est souvent le cas. La représentation ainsi définie n'est pas toujours unique : dans un multiplieur d'entrées x et z, de sortie xz, on peut considérer tour à tour x ou z comme variable ou comme gain.

En regroupant la totalité des équations scalaires d'un système en deux égalités, cette représentation permet d'utiliser des méthodes de calcul matriciel. Elle est donc souvent proposée [13] [14] et permet une simplification des notations.

Cette forme convient en particulier à des système de type LUR'E POSTNIKOV [14] décrits par les relations (I-10) (I-11) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B(t) \gamma(t, x, \sigma) & (I-10) \\ \sigma = u(t) + C x(t) & (I-11) \end{cases}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{R}^q, A \in \mathcal{R}^{q \times q}, B \in \mathcal{R}^{q \times n}, \gamma \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^n, C \in \mathcal{R}^{n \times q}, \sigma \in \mathcal{R}^n \\ \sigma = \{\sigma_i\}, \sigma \in \sum_C \mathcal{R}^n \\ x \in \mathcal{L}_C \mathcal{R}^q \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Sigma \text{ et } \mathcal{L} \text{ ensembles contenant un} \\ \text{voisinage du point d'équi-} \\ \text{libre en } \sigma \text{ ou } x. \end{array}$$

Si  $\gamma$  appartient à la classe  $\Phi$  caractérisée par

$$\Phi = \begin{cases} \gamma(t, x, \sigma) : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \Sigma \rightarrow \mathcal{R}^n \\ \gamma(t, x, \sigma) = \{ \gamma_i(t, x_i, \sigma_i) \} \\ \gamma^*(t, x, \sigma) = \text{diag} \left\{ \frac{\gamma_i(t, x_i, \sigma_i)}{\sigma_i} \right\} \\ \gamma^*(t, x, \sigma) \in (\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}) \subset \mathcal{R}^{n \times n} \\ \forall t \in \mathcal{T} \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \forall \sigma \in \Sigma \end{cases}$$

de (I-10) et (I-11) il vient alors (I-12) :

$$\dot{x}(t) = (A + B(t) \cdot \gamma^*(t, x, \sigma) \cdot C)x(t) + B(t) \cdot \gamma^*(t, x, \sigma) \cdot u(t) \tag{I-12}$$

et lorsque l'entrée  $u$  est nulle  $\forall t \in \mathcal{T}$ , on a le régime autonome

$$\dot{x}(t) = L(t, x, \sigma) x(t) \tag{I-13}$$

$$L(t, x, \sigma) = A + B(t) \cdot \gamma^*(t, x, \sigma) \cdot C \tag{I-14}$$

Cette représentation présente l'avantage de faire apparaître séparément les termes non constants de  $L(t, x, \sigma)$ .

## II - REMARQUES SUR LA STABILITE DES SYSTEMES. CONJECTURE LINEAIRE

### II.1. Notion de stabilité

Considérons un processus représenté à l'instant  $t$  par l'équation d'état (I-15) :

$$\dot{x} = f(x, u, p, t) \tag{I-15}$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) \text{ vecteur d'état} \\ u(t) \text{ vecteur des entrées} \\ p \text{ ensemble des paramètres identifiant le processus réel à son modèle mathématique.} \end{array} \right.$

Lorsque des conditions initiales  $x_0, u_0, p_0$  sont données à  $t = t_0$ , l'état du processus décrit une trajectoire  $\tilde{x}(t)$ , dite nominale.

Une perturbation de ces conditions initiales peut déterminer une autre trajectoire  $x(t)$ , dite perturbée.

Le comportement de l'écart  $\Delta x(t)$  caractérise la stabilité du système.

On distingue habituellement trois types de stabilités [8] selon que la perturbation est due à une variation sur :

- l'état du système (stabilité dite classique),
- les paramètres du modèle (stabilité structurelle),
- les entrées du système (stabilité en régime forcé).

La stabilité classique [7] est définie "au sens de LYAPUNOV". Elle est souvent étudiée en régime libre, c'est-à-dire à entrée nulle et dans ces conditions les perturbations ne sont considérées que sur les valeurs de l'état.

Notons que la notion de stabilité dynamique [15] [16] a été introduite lorsque les entrées ne sont pas nulles mais peuvent être considérées comme non perturbées.

Le système est dit stable par rapport à l'équilibre  $x_e$  si, pour des conditions initiales suffisamment proches de l'équilibre  $x_e$ , la trajectoire reste dans la boule de centre  $x_e$  et de rayon  $\varepsilon$  arbitraire :

(I-16)

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0, \|x_0 - x_e\| < \delta \implies \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon, \forall t > t_0$$

Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.

Par la suite, nous prendrons comme équilibre le point  $x_e = 0$ .

Il suffit pour cela de choisir  $x_e$  comme origine du repère d'état.

Lorsque, de plus, cet état d'équilibre est attractif (I-17),

l'équilibre est asymptotiquement stable:

$$\exists \rho > 0, \forall \eta > 0, \exists T(\eta, x_0, t_0), \forall t \geq t_0 + T, \forall \|x_0\| < \rho, \|x(t, x_0, t_0)\| < \eta \quad (I-17)$$

Si le système est linéaire, il est équivalent de considérer la stabilité asymptotique au sens de LYAPUNOV ou la stabilité structurelle. Si de plus le processus est stationnaire et si on s'impose des entrées bornées, la stabilité en régime forcé est également équivalente.

Par la suite, nous étudierons la stabilité des systèmes en régime libre, ce qui correspond à une approche générale de la stabilité d'un processus physique : c'est usuellement la propriété minimale exigée d'un système. Elle peut aussi inclure les notions fort utiles de rapidité et de temps de réponse.

Pour qualifier les différents types de stabilités, nous utiliserons les termes définis dans l'annexe A.

## II.2. Conditions de stabilité du linéaire. Conjecture linéaire

Considérons maintenant le système (I-9) en régime libre, donc pour  $u(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$ .

Il se représente de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A(x, t) \cdot x(t) \end{array} \right. \quad (I-18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = C(x, t) \cdot x(t) \end{array} \right. \quad (I-19)$$

Dans le cas simple où A est constante, on aboutit à une condition de stabilité nécessaire et suffisante :

CL : Le système (I-18) est (asymptotiquement) stable si et seulement si les parties réelles des valeurs caractéristiques de A sont (strictement) négatives.

La stabilité d'un tel système est donc entièrement déterminée par le polynôme caractéristique de  $A$ ,  $\det(\lambda I_q - A)$ . On aboutit alors aux conditions de ROUTH-HURWITZ [ 17 ].

Cependant, dans la plupart des cas,  $A$  dépend de  $x$  et/ou de  $t$ , et il n'est généralement pas possible de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes. L'analyse de la stabilité consiste donc à trouver des conditions suffisantes les moins contraignantes possibles pour le système, c'est-à-dire à élargir les domaine de stabilité (vis-à-vis des conditions initiales, des paramètres du système, etc...).

Même si la détermination d'un domaine maximal est difficile en général, il est intéressant de chercher des conditions ou des classes de systèmes pour lesquels on puisse appliquer à un processus non linéaire les conditions CL de stabilité du linéaire.

MM. KRASOVSKI [18] a démontré la condition suffisante suivante :

si  $A(x,t) + A^T(x,t)$  est telle que, pour toute évolution de l'état  $x$ , ses racines caractéristiques restent strictement négatives, alors le système (I-18) est globalement asymptotiquement stable.

Si par exemple  $A(x,t)$  est une matrice symétrique pour tout  $(x,t)$ , on peut donc lui appliquer la condition CL relative aux systèmes linéaires. Cette condition de symétrie est cependant très restrictive car elle exclue, au moins dans le cas linéaire, les systèmes pouvant présenter des oscillations en réponse indicielle.

D'autre part, dans le cas d'un système linéaire stationnaire représenté par une matrice à coefficients hors diagonaux positifs, la condition nécessaire et suffisante CL peut s'énoncer différemment par application du Lemme de KOTELYANSKI [17]:

Un nombre réel  $\lambda$  est plus grand que la valeur caractéristique maximale  $r$  de la matrice  $A = (a_{ik})$ , à éléments non diagonaux positifs ou nuls si, et seulement si, pour cette valeur  $\lambda$  tous les mineurs principaux successifs de la matrice  $(\lambda I - A)$  sont positifs.

Ainsi toutes les parties réelles des valeurs caractéristiques de  $A$  seront négatives si, et seulement si, les mineurs successifs de  $(-A)$  sont positifs.

P. BORNE et J.C. GENTINA ont montré [19] que ce critère pouvait s'appliquer à certaines représentations non linéaires :

Théorème : soit  $A(x,t) = (a_{ij})^q$ , une matrice de  $\mathcal{R}^{q \times q}$ , à éléments non diagonaux positifs et dont les termes non constants sont regroupés dans une seule ligne (ou une seule colonne). (ajoutée)

Le système décrit par  $\dot{x} = A(x,t)x$  est stable si les  $q$  mineurs principaux de  $(-A(x,t))$  sont positifs, c'est-à-dire :

$$-a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^j \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^q \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} \end{vmatrix} > 0 \quad (I-20)$$

Ici encore, on peut donc appliquer à  $A(x,t)$  les conditions qui, en linéaire, sont nécessaires et suffisantes. Les hypothèses d'application de ce théorème de BORNE et GENTINA sont nettement moins restrictives que celles du critère de KRASOVSKI.

### II.3. Recherche des domaines de stabilité

Dans le cas où la matrice du régime libre ne vérifie pas l'une des deux hypothèses citées plus haut, il faut pouvoir en étudier la stabilité par des procédés différents de ceux du linéaire : soit en utilisant directement sur le système des méthodes de nature topologique, soit en introduisant un second système dont la convergence assure celle du premier et qui puisse être étudié avec les moyens (du linéaire ou non-linéaire) déjà cités.

Dans cette optique, nous avons rappelé en annexe A les méthodes de LYAPUNOV, puis les méthodes de majoration et d'agrégation. Il est intéressant de constater combien l'introduction des systèmes de comparaison élargit le champ des possibilités d'étude de la stabilité : c'est ce que nous allons montrer sur un exemple.

### II.4. Exemple d'application des techniques de majoration

Considérons le système représenté par le schéma figure (I-3). Selon la forme de la non-linéarité, un problème d'unicité de la réponse à une entrée donnée peut se poser, notamment pour ce qui est de la fréquence du signal  $y$  lorsque  $u$  est périodique. La méthode du premier harmonique ne donne pas de renseignements sur ces différents comportements possibles [20] [21]. L'unicité peut être étudiée en même temps que la stabilité par une méthode matricielle. Nous allons montrer sur cet exemple la puissance des méthodes de majoration : il est possible d'obtenir des résultats sur la stabilité d'un système sans utiliser la fonction de LYAPUNOV de ce système.

En régime libre et relativement au vecteur état  $x = \begin{bmatrix} y \\ 2y + \dot{y} \end{bmatrix}$ , on a

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \left( \frac{-1+2\tau_1+2\tau_2-4\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2} + \frac{(2-\lambda)f^*}{\tau_1\tau_2} \right) & \left( 2 - \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} - \frac{f^*}{\tau_1\tau_2} \right) \end{bmatrix} \cdot x \quad (I-21)$$

$$\text{Posons } a(\varepsilon) = \frac{1}{\tau_1\tau_2} (-1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 - 4\tau_1\tau_2 + f^*(\varepsilon)(2-\lambda)) \quad (I-22)$$

$$b(\varepsilon) = \frac{1}{\tau_1\tau_2} (2 - 1/\tau_1 - 1/\tau_2 - f^*(\varepsilon)) \quad (I-23)$$

Il vient :

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} x = A(\varepsilon) x \quad (I-24)$$

Le système décrit par (I-25) est majorant de (I-24) pour des conditions initiales  $z(t_0) = x(t_0)$  :

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ |a| & b \end{pmatrix} z = M(\varepsilon) z \quad (I-25)$$

$$\text{Posons } v(y) = y_1^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (I-26)$$

$$\text{avec } y = (y_1, y_2)^T \in \mathcal{R}^2$$

Nous allons rechercher les cas dans lesquels les fonctions candidates  $v(x)$  ou  $v(z)$  sont de LYAPUNOV pour le système initial (I-24) ou pour son majorant (I-25).

Ceci revient [9] à appliquer le lemme de KOTELYANSKI aux matrices  $P^{-1}A(\varepsilon)P$  et  $P^{-1}M(\varepsilon)P$  définies par le changement de base (I-27).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (I-27)$$

Nous poserons pour unifier les écritures dans les calculs qui vont suivre :

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & b \end{pmatrix} P^{-1} \quad (I-28)$$

avec  $\alpha = a$  pour le système (I-24) (I-29)

et  $\alpha = |a|$  pour son majorant (I-25) (I-30)

L'étude de la fonction  $v$  revient à déterminer le signe et l'évolution des valeurs propres des matrices symétriques  $\frac{1}{2}(B+B^T)$  dans les deux cas (I-29) et (I-30) de détermination de  $\alpha$ .

Les valeurs propres de  $\frac{B+B^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2+\alpha+b}{2} \\ \frac{2+\alpha+b}{2} & b-1 \end{bmatrix}$  sont

négatives si, et seulement si :

$$1-b - \frac{(2+\alpha+b)^2}{2} > 0 \quad (I-31)$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 \\ \tau_2 &= 2 \\ \lambda &= 2,2 \end{aligned}$$

$$\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = f^*(\varepsilon) \in (7,13) \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{R} - \{0\}$$

Le point  $(\alpha, b)$  doit donc se trouver dans le domaine ① (fig.14) pour que  $v(y)$  soit fonction de LYAPUNOV de  $\dot{y} = By$ .

Le point  $(|a|, b)$  reste dans le rectangle noté SM (fig.(I-4)), donc dans ①, alors que le point  $(a,b)$ , symétrique de  $(|a|, b)$  par rapport à l'axe  $x = 0$ , admet des variations hors de ① (domaine SI).

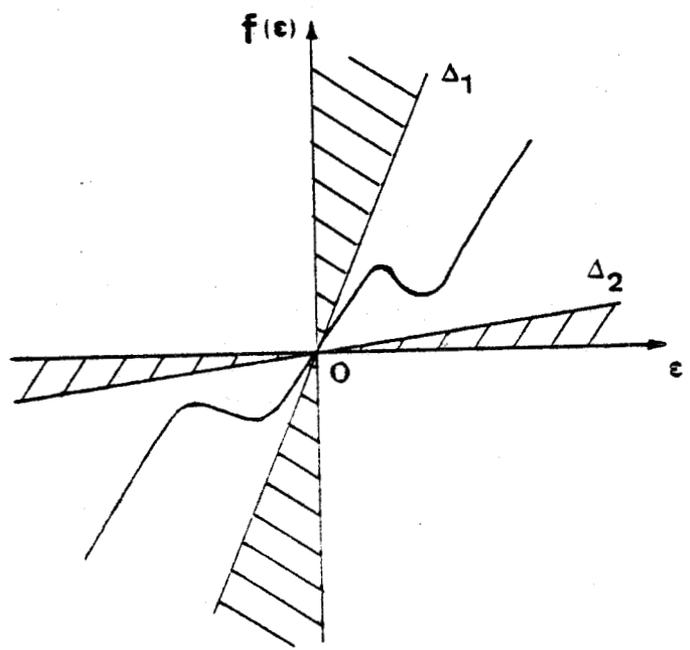
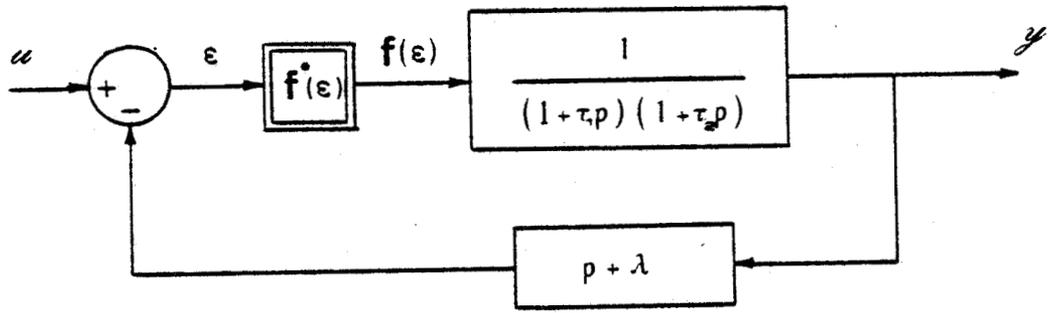
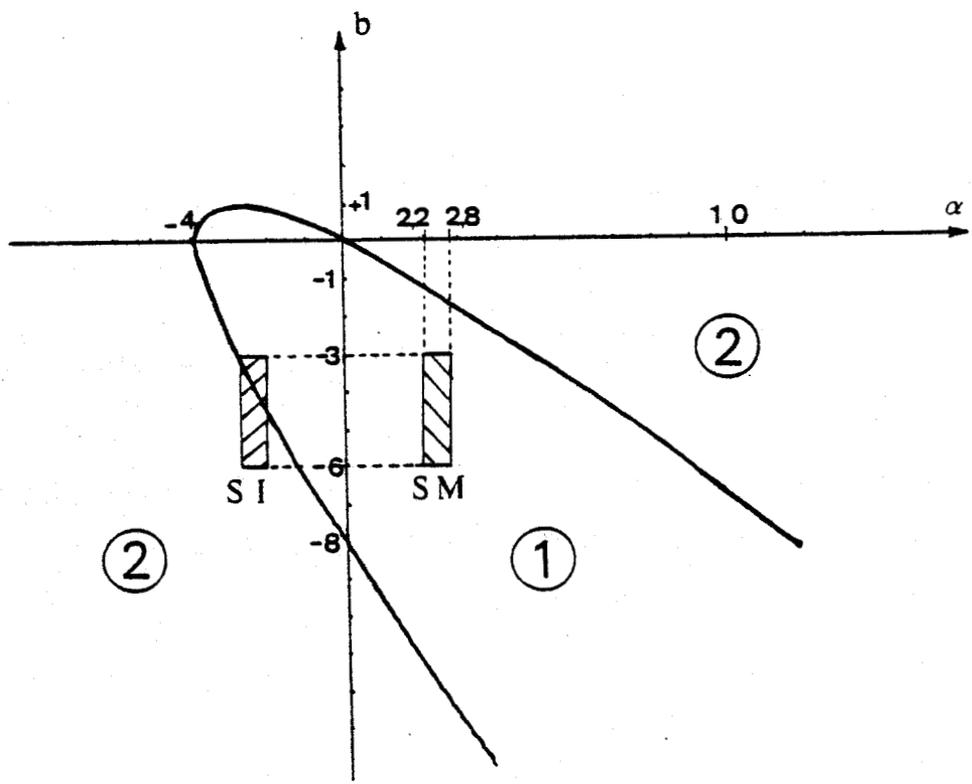


FIGURE (I-3)



BUS  
LILLE

La fonction de LYAPUNOV  $v(z)$  permet donc de conclure à la stabilité du système majorant.

Il résulte de la théorie des systèmes de comparaison que le système initial converge. L'unicité de la réponse à une entrée donnée est également prouvée.

Les méthodes de majoration et d'agrégation permettent d'analyser un système par le biais d'un système de comparaison:

Dans l'exemple considéré ci-dessus, les propriétés de stabilité et d'unicité ont été mises en évidence sans introduction d'une fonction de LYAPUNOV pour le système initial. La recherche d'une telle fonction pour un processus s'avère être un cas particulier d'analyse de stabilité. On peut l'élargir à la recherche d'une fonction de LYAPUNOV d'un système de comparaison d'ordre égal ou différent. Dans le cas où la matrice de comparaison est constante, on peut lui appliquer directement les conditions du linéaire.

II.5. Sur le choix de la représentation

Il apparaît que le conditionnement d'une matrice  $A(x,t)$  ou  $M(x,t)$  représentative du fonctionnement du système en régime libre est fondamental dans l'étude de la stabilité au sens de LYAPUNOV.

Par exemple, la matrice constante  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  ne pourra pas être traitée par un des trois critères définis en annexe A : considérons la matrice pseudo-majorante  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ : le maximum des sommes en colonne des éléments de  $M$ ,  $M^T$  ou  $\frac{M + M^T}{2}$  n'est pas négatif.

Si par contre on effectue le changement de vecteur état défini par le changement de base  $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , elle s'écrit  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Les trois critères s'appliquent alors indifféremment.

Les schémas-blocs des deux systèmes :

$$\dot{\bar{x}} = Ax \tag{I-32}$$

$$\text{et } \dot{y} = P^{-1}AP y \tag{I-33}$$

sont différents. Ils peuvent être représentés comme indiqué sur les figures (I-5) et (I-6).

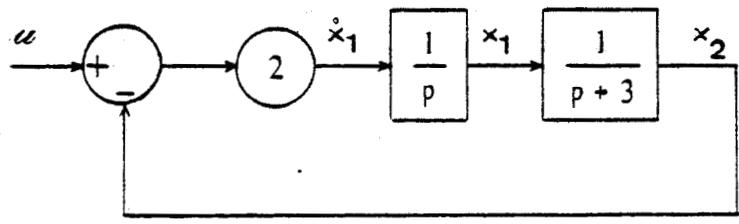


Figure (I-5) :  $\dot{\bar{x}} = Ax$ .

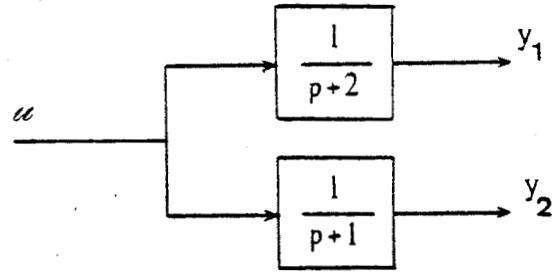


Figure (I-6) :  $\dot{y} = P^{-1}AP y$ .

Ainsi le choix du vecteur état et par conséquent de la forme de la matrice  $(A(x,t))$  en régime libre peut être interprété comme un choix de structure de représentation. Il est donc particulièrement intéressant, pour simplifier l'étude de la stabilité (en analyse ou en synthèse d'un processus), de disposer d'un éventail de représentations différentes d'un même système.

Nous allons donc, dans cette optique, décrire les méthodes d'obtention de quelques formes remarquables.

III - DEUX STRUCTURES FONDAMENTALES : SYSTEMES "À NON-LINEARITES DE RANG 1"

III.1. Description de la décomposition matricielle utilisée pour la classification

Considérons le régime libre (I-18) d'un système (I-9):  
 $\dot{x}(t) = A(x,t) x(t)$  (I-18)

La matrice A(x,t) peut être décomposée sous la forme :  
 $A(x,t) = A_0 + A_1(x,t)$  (I-34)

où A<sub>0</sub> est une matrice constante.  
Si A<sub>0</sub> = (a<sup>0</sup><sub>ij</sub>) et A<sub>1</sub>(x,t) = (a<sup>1</sup><sub>ij</sub>(x,t)) on a donc :  
Vi et Vj = 1 ..... q

$A(x,t) = (a_{ij}(x,t)) = (a^0_{ij} + a^1_{ij}(x,t))$  (I-35)

Cette décomposition correspond à la représentation décrite figure (I-7).

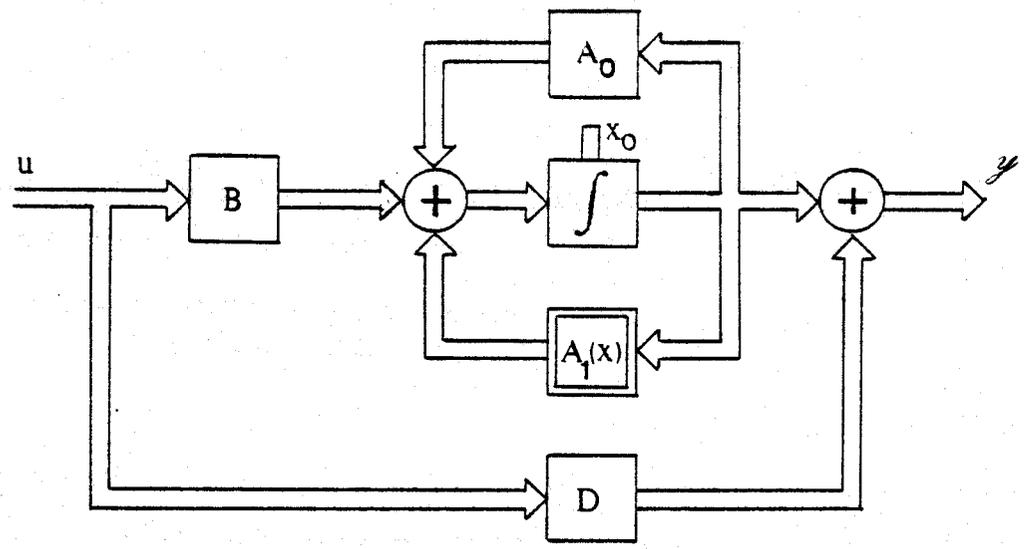


FIGURE (I-7)

Pour simplifier les notations et lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous écrirons  $A(x) = A_0 + A_1(x)$ , bien que  $A$  et  $A_1$  puissent dépendre de  $t$ .

Le système, pour une entrée nulle, est présenté figure (I-8) sous le forme d'une partie linéaire  $\mathcal{L}$  bouclée par un retour non linéaire définissant une commande non linéaire  $u(x, t)$ :

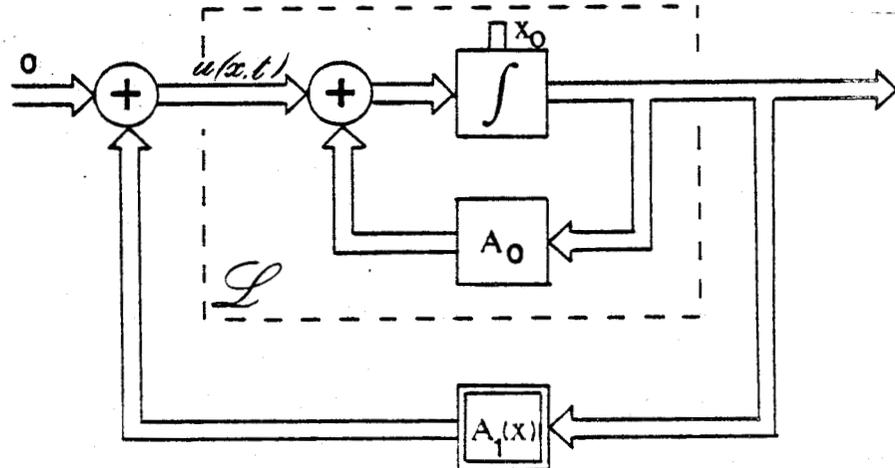


FIGURE (I-8)

Notons que la décomposition de  $A(x, t)$  en  $A_0$  et  $A_1(x, t)$  n'est pas unique.

En effet, il suffit de considérer des matrices  $A_0'$  et  $A_0''$  telles que  $A_0 = A_0' + A_0''$  (I-36) pour pouvoir définir différemment

$$A(x, t) = A_0' + A_1'(x, t) \quad (\text{I-37})$$

$$A_1'(x, t) = A_0'' + A_1(x, t) \quad (\text{I-38})$$

Deux cas très importants de décomposition sont cependant à considérer.

### III.2. Non-linéarité à sortie scalaire (type I)

Si  $A_1(x, t)$  peut s'écrire (I-39)

$$A_1(x, t) = h \cdot v^T(x, t)$$

$$\text{avec } h = (\lambda_1 \dots \lambda_q) \in \mathcal{R}^q - \{0\} \quad (\text{I-39})$$

$$v(x, t) = (v_1(x, t) \dots v_q(x, t))^T$$

$$\text{alors } u(x, t) = A_1(x, t) x(t) = h \cdot v^T(x, t) x \quad (\text{I-40})$$

La commande  $u(x, t)$  est dans ce cas variable avec  $x$  et  $t$ , mais le vecteur qui la représente a une direction constante, définie par  $h$ .

Un schéma de représentation de ces systèmes est proposé figure (I-9).



III.3. Non-linéarité à entrée scalaire (type II)

Si  $A_1(x, t)$  peut s'écrire

$$A_1(x, t) = v(x, t) h^T \tag{I-44}$$

avec les mêmes notations que pour (I-39)

$$\text{alors } u(x, t) = A_1(x, t) x(t) = v \cdot h^T x \tag{I-45}$$

Cette commande particularise une variable d'état du système  $\epsilon = h^T x$ , mais le vecteur  $u(x, t)$  n'a plus une direction constante.

Cette classe de systèmes correspond à la structure décrite figure (I-10).

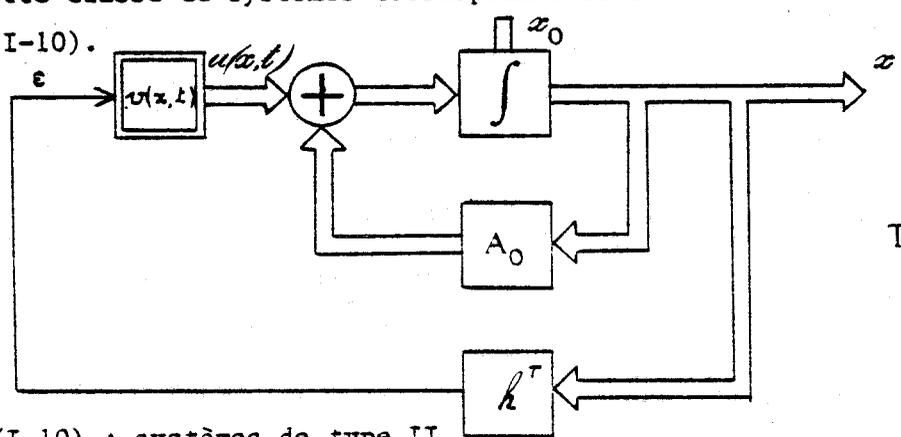


FIGURE (I-10) : systèmes de type II.

Notons que, dans de nombreux cas, la non-linéarité vectorielle  $v(x, t)$  est due à un ensemble de gains non constants, dépendant de la variable d'entrée  $\epsilon$ .

C'est le cas des systèmes représentés par  $\dot{x} = Ax + b f(\epsilon)$ , avec  $\epsilon = h^T x$  (cf. fig(I-11)).

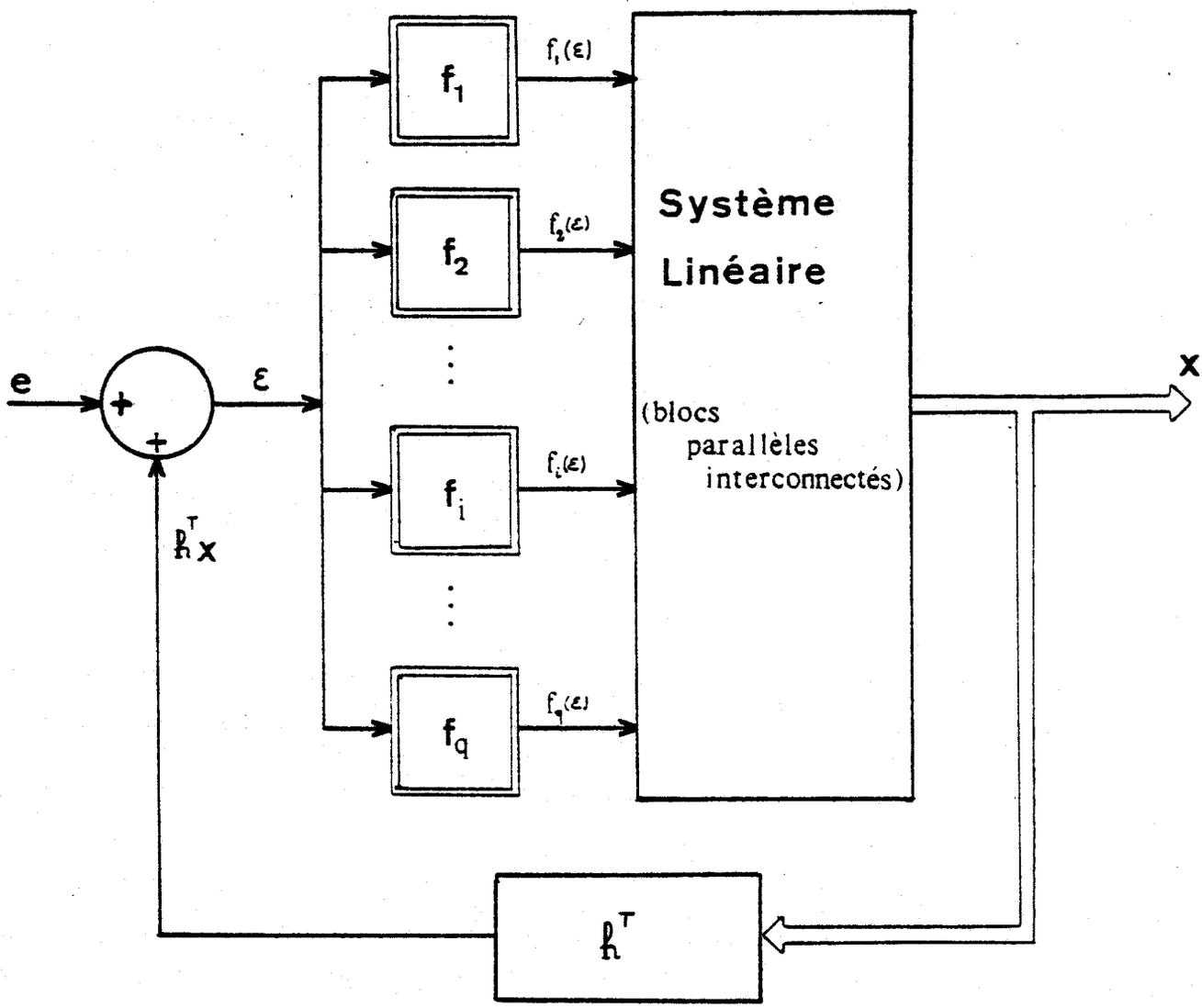
On aura donc souvent  $v(x, t) = v(\epsilon, t)$ , ce qui revient à considérer un système à une seule variable d'état traitée non linéairement. L'appellation "système à non-linéarité à entrée monovariable" est ici possible.

Les systèmes de type II peuvent se mettre en équation sous la forme (I-46) :

$$P^{-1} \dot{x} = (P^{-1} A P) (P^{-1} x) \tag{I-46}$$

avec  $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \alpha_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \forall i=1 \dots q, \alpha_{ij} \text{ constant avec } t \forall j=1 \dots q-1$   
 $\alpha_{iq} \text{ terme variable, fonction de } x \text{ et } \epsilon$

Le changement de base est le transposé de celui considéré en (I-41). Il est à noter que, dans cette forme, la dernière composante  $x_q$  du vecteur état est  $\epsilon = h^T x$ .



$$\dot{x} = Ax + bf(\epsilon)$$
$$\epsilon = h^T x$$

FIGURE (I-11) : Système à commande scalaire.



### III.4. Systèmes à non-linéarités de rang 1

Pour introduire les processus de type I et II, nous avons supposé que  $A_1(x,t) = h v^T(x,t)$  ou  $A_1'(x,t) = v(x,t) h^T$

Ceci revient à supposer que la matrice  $A_1$  ou  $A_1'$  considérée est de rang 1 pour chaque couple  $(x,t)$  fixé.

De plus,  $h$  étant un vecteur constant, les sous-espaces invariants de  $A_1(x,t)$  ou  $A_1'^T(x,t)$  sont tous engendrés par le même vecteur constant  $h$ , quelque soit le couple  $(x,t)$ .

Pour ces raisons, nous appellerons ces deux types de processus "systèmes à non-linéarités de rang 1". Cette dénomination ne s'appliquera pas aux systèmes tels que  $A_1(x,t) = v(x,t) h^T(x,t)$ , l'espace invariant de  $A_1$  ne restant pas constant pendant l'évolution de  $x$ .

Notons que si un système très complexe ne vérifie pas ces propriétés, il est souvent possible de définir un système majorant qui, lui, se représentera au moyen d'une matrice "à non-linéarités de rang 1".

## IV - REPRESENTATIONS CANONIQUES SOUS FORMES COMPAGNON

### IV.1. Systèmes de type II

Ces systèmes sont représentés par :

$$\dot{x} = A(x,t)x \quad (I-18)$$

$$A(x,t) = A_0 + A_1(x,t) \quad (I-34)$$

$$A_1(x,t) = v(x,t) h^T \quad (I-44)$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} A_0 \text{ matrice carrée constante d'ordre } q, h \text{ vecteur d'ordre } q \\ v : \mathcal{L} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^q \\ \mathcal{L} = \text{ensemble des points des trajectoires du système.} \end{array} \right.$

Nous allons démontrer un Théorème essentiel à la suite de notre travail et relatif à la décomposition de  $A(x,t)$  en une matrice triangulaire par blocs, sous la forme d'une matrice  $F(x,t)$  définie par (I-47) :

$$F(x,t) = \begin{bmatrix} F_{11} & \dots & \circ & F_{1n}(x,t) \\ & & & F_{in}(x,t) \\ & F_{ii} & \dots & \vdots \\ \circ & & & F_{n-1,n}(x,t) \\ & & F_{n-1,n-1} & F_{nn}(x,t) \end{bmatrix} \quad (I-47)$$

avec :

$$F_{nn}(x,t) = \begin{bmatrix} 0 & & & -f_1(x,t) \\ 1 & // & & \vdots \\ & & 0 & -f_{nn}(x,t) \\ & & 1 & \end{bmatrix}$$

matrice  $n_n \times n_n$  sous forme compagnon non linéaire

et  $\forall i = 1 \dots n-1$

$$F_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & & -\alpha_{i1} \\ 1 & // & & \vdots \\ & & 0 & -\alpha_{in_i} \\ & & 1 & \end{bmatrix}$$

matrice  $n_i \times n_i$  constante sous forme compagnon

$$F_{in}(x,t) = \begin{bmatrix} \square & g_{i1}(x,t) \\ & \vdots \\ & g_{in_i}(x,t) \end{bmatrix}$$

matrice  $n_i \times n_n$  à termes non constants tous situés dans la dernière colonne.



Théorème (I-1) : Pour tout système de type II, il est possible de définir un vecteur état  $z$  vérifiant, à entrée nulle, une relation du type

$$\dot{z} = F(x,t) z$$

où  $F(z,t)$  est une matrice du type défini en (I-47).

Théorème (I-2) : L'ordre de la matrice  $F_{nn}(z,t)$  intervenant dans cette décomposition est égal à la dimension du sous-espace observable par  $h^T$  relativement à la matrice  $A_0$ .

En d'autres termes,

$$n_n = \text{Rang} \left\{ h, A_0^T h, A_0^{T2} h \dots A_0^{Tk} h \dots \right\}$$

Démonstration des Théorèmes (I-1) et (I-2) :

Nous avons vu dans le paragraphe (III-3) que, si on choisit

$\tilde{e} = h^T x$  comme dernière composante du vecteur état  $x$ , tout système de type II était représenté en régime libre par :

$$\dot{x} = (A_0 + A_1(x,t)) \cdot x \quad \left[ \begin{array}{l} v_1(x,t) \\ v_2(x,t) \\ \vdots \\ v_i(x,t) \\ \vdots \\ v_q(x,t) \end{array} \right] \quad (I-48)$$

avec  $A_1(x,t) = \left[ \begin{array}{l} \text{O} \\ \vdots \\ \text{O} \\ q, q-1 \end{array} \right] \quad (I-49)$

Soit  $\mathcal{B}'$  une base dans laquelle cette décomposition (I-48) (I-49) s'effectue.

$\mathcal{B}'$  vérifie l'égalité (I-50)

$$\mathcal{B}' = e'_1, e'_2, \dots, e'_{q-1}, e'_q = h \quad (I-50)$$

On a en effet  $x^T h = \tilde{e}$ , dernière composante de  $x$ .

Nous savons [5] qu'il existe un nombre  $m$ ,  $1 \leq m \leq q$ , et des scalaires  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  tels que les vecteurs

$$h, A_0^T h, A_0^{T2} h \dots A_0^{T(m-1)} h$$

soient linéairement indépendants et que l'on ait l'égalité (I-52)

$$(A_0^{Tm} h + \sum_{i=0}^{m-1} \beta_{m-i} (A_0^{Ti}) h = 0 \quad (I-52)$$

$\lambda^m + \sum_{i=0}^{m-1} \beta_{m-i} \lambda^i$  est le polynôme minimal de  $h$  relativement à l'opérateur  $A_0^T$ . [5]



\* Le polynôme caractéristique de chaque bloc  $F_{ii}$  est divisible par celui du bloc suivant  $F_{i+1, i+1}$

Remarquons que la troisième condition peut être remplacée par "le polynôme caractéristique de chaque bloc  $F_{ii}$  est une puissance d'un polynôme irréductible sur  $\mathcal{R}$ ". La forme  $S_1 C_1 S_1^{-1}$  serait alors la deuxième forme normale naturelle de  $C_1$  [5].

ii)  $S_2$  est une matrice carrée régulière d'ordre  $m$  définie par

$$(I-62) : \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & \beta_m \dots & \beta_i \dots & \beta_2 \\ & \circlearrowleft & & \vdots \\ & & & \beta_i \\ & & & \vdots \\ & & & \beta_m \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (I-62)$$

On a alors (I-63) :

$$S Q^{-1} T A_0 Q^T S^{-1} = S C_0 S^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 C_1 S_1^{-1} & C_2 S_2^{-1} \\ \hline \circlearrowleft & F_2 \end{bmatrix} \quad (I-63)$$

$$\text{avec } F_2 = \begin{bmatrix} 0 & \text{---} & 0 & -\beta_1 \\ 1 & \text{---} & 0 & -\beta_2 \\ & \text{---} & \vdots & \vdots \\ & \text{---} & 0 & -\beta_i \\ & \text{---} & 1 & -\beta_m \end{bmatrix} \quad (I-64)$$

D'après (I-57), (I-60) et (I-62), la matrice  $P = SQ^{-1T}$  est donc telle que sa dernière ligne soit  $(0, \dots, 0, 1)$ .

Nous avons donc défini une matrice de passage  $P$  telle que :

- \* le changement de base de  $A_0$  à  $PA_0P^{-1}$  conserve la dernière composante  $\xi$  du vecteur état,
- \*  $PA_0P^{-1} = F$ , où  $F$  est une matrice constante de même forme que la matrice  $F(x,t)$  décrite en (I-47).

Par conséquent, il existe une matrice régulière  $P$  vérifiant

$$PA(x,t)P^{-1} = F + PA_1(x,t)P^{-1} \quad (I-65)$$

La matrice  $PA_1(x,t)P^{-1}$  a la même forme que  $A_1(x,t)$ : ses éléments sont tous nuls sauf ceux de la dernière colonne.

La matrice  $PA(x,t)P^{-1}$  est donc de la forme voulue (I-47).

Il vient (I-66) :

$$PA(x,t)P^{-1} = F(x,t) \quad (I-66)$$

Comme de plus  $x$  s'exprime linéairement en fonction de  $z$

$$x = P^{-1}z, \quad (I-67)$$

on pourra noter :

$$PA(x,t)P^{-1} = F(z,t) \quad (I-68)$$

D'où l'énoncé du Théorème (I-1).

La construction même de la matrice de passage  $Q$  (I-55) au moyen de (I-51) et (I-52) démontre le Théorème (I-2).

#### IV.2. Systèmes de type I

Nous avons vu (Théorème (I-1)) qu'il existait un changement de base  $P_A$  tel que, si  $A(x,t)$  vérifie (I-34) et (I-44) on ait :

$$P_A^{-1}A(x,t)P_A = F(x,t) \quad (I-69)$$

avec  $F(x,t)$  décrite en (I-47).

Supposons que le système à considérer soit maintenant de type I et défini par la matrice  $B(x,t)$  (I-70) :

$$B(x,t) = B_0 + h v(x,t)^T \quad (I-70)$$

Il vient (I-71) :

$$B^T(x,t) = B_0^T + v(x,t) h^T \quad (I-71)$$

Les Théorèmes (I-1) et (I-2) s'appliquent à  $B^T(x,t)$  ; il existe donc un changement de base  $P_B$  tel que (I-72) soit vérifiée :

$$P_B^{-1} B^T(x,t) P_B = F(x,t) \quad (I-72)$$

et par conséquent, on a (I-73) :

$$P_B^T B(x,t) (P_B^T)^{-1} = F^T(x,t) \quad (I-73)$$

Il vient ainsi les théorèmes similaires des précédents (I-1) et (I-2).

Théorème (I-3) : Pour tout système de type  $\dot{x} = A(x,t) x$ , il est possible de définir un changement de base, associé à matrice constante  $M$ , tel que :

$$M^{-1} A(x,t) M = F^T(x,t)$$

avec  $F^T(x,t) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ \hline & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ \hline & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ \hline & 0 \end{matrix}} & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ \hline & 0 \end{matrix}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \boxed{F_{11}} & & \\ & \dots & \\ & & \boxed{F_{ii}} & \dots & \\ & & & \dots & \\ & & & & \boxed{F_{nn}(x,t)} \end{array} \right] \quad (I-74)$

- $F_{ii}$  matrice compagnon constante d'ordre  $n_i$ ,  $i \neq n$
- $F_{ni}(x,t)$  matrice  $n_n \times n_i$  à éléments non constants tous situés dans la dernière ligne
- $F_{nn}(x,t)$  matrice compagnon non constante d'ordre  $n_n$ ,  $\sum_i n_i = q$

Théorème (I-4) : L'ordre de la matrice compagnon non-linéaire intervenant dans cette décomposition est égal à la dimension du sous-espace vectoriel commandable par  $h$  relativement à  $A_0$ , c'est-à-dire que  $n_n = \text{Rang} \{ h, A_0 h, \dots, A_0^k h \dots \}$  (I-75)

Remarque : Tous les changements de base intervenant dans les démonstrations ci-dessus peuvent être calculés par programmation sur ordinateur, lorsqu'il est nécessaire de connaître l'expression de la matrice de passage conduisant à la forme canonique prévue. On peut utiliser ce mode de détermination de vecteurs de base pour aboutir à d'autres formes matricielles [ 22 ] .





Deux exemples de systèmes de type LUR'E POSTNIKOV monovariabiles d'ordre 2 et 3 vont nous permettre d'illustrer la démarche permettant de passer de la forme compagnon  $F_1(\epsilon)$  à sa transposée  $F_2(\epsilon) = F_1^T(\epsilon)$ . Le calcul du changement de base correspondant y sera explicité.

La détermination générale de la matrice  $F_2$  sera traitée dans le deuxième chapitre. Notons que nous n'avons envisagé le passage d'une matrice non constante à sa transposée que dans le cas où le système est à la fois de type I et II (non-linéarité à entrée et sortie scalaires).

IV.4. Exemples d'ordre 2 et 3

Le schéma du système d'ordre 2 est représenté figure (I-13).

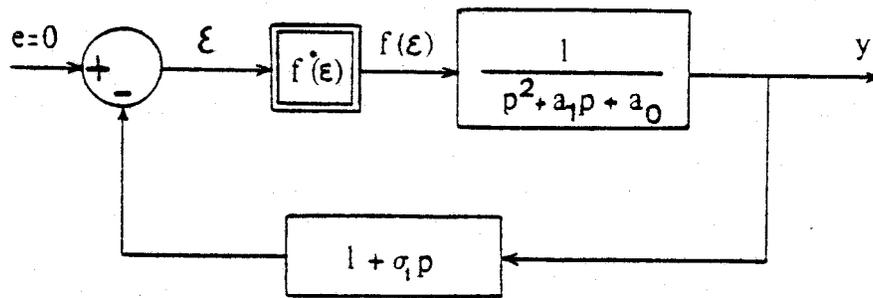


FIGURE (I-13)

En posant  $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 - f^* & -a_1 - \sigma_1 f^* \end{bmatrix}$   $f^* = f^*(\epsilon)$

il vient :  $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = A(\epsilon) \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

Nous allons effectuer un changement de variables  $P_1$  donnant comme nouveau vecteur état  $(y, \epsilon)^T$  :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sigma_1 \end{pmatrix} \quad P_1^{-1} A(\epsilon) P_1 = \begin{pmatrix} a_0 & \sigma_1 & -a_1 & -a_0 - f^* \\ a_0 & \sigma_1^2 & -a_1 \sigma_1 + 1 & -\sigma_1 (a_0 + f^*) \end{pmatrix}$$

dans le cas où il y a simplification d'un pôle par le zéro  $-\sigma_1^{-1}$  le terme  $a_0 \sigma_1^2 - a_1 \sigma_1 + 1$  est nul.

On a alors :

$$P_1^{-1} A(\epsilon) P_1 = \begin{bmatrix} -\sigma_1^{-1} & -(a_0 + f^*) \\ 0 & -\sigma_1(a_0 + f^*) \end{bmatrix}$$

qui correspond à une décomposition en deux systèmes, dont un indépendant : le système du premier ordre  $\dot{\epsilon} = -\sigma_1(a_0 + f^*) \cdot \epsilon$  définit à lui seul la stabilité du processus lorsqu'est vérifiée l'inégalité  $\sigma_1 > 0$  ( $f^*$  est supposé borné).

Dans le cas contraire, le changement de base :

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} a_0 \sigma_1^2 - a_1 \sigma_1 + 1 & -(a_0 \sigma_1 - a_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

définit la matrice :

$$P_2^{-1} P_1^{-1} A(\epsilon) P_1 P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 - f^* \\ 1 & -a_1 - \sigma_1 f^* \end{bmatrix} = A^T(\epsilon) ,$$

$$P_2^{-1} P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -(a_0 \sigma_1 - a_1) & 1 \\ 1 & \sigma_1 \end{bmatrix}$$

Au troisième ordre, lorsqu'il n'y a pas de simplification de pôle de la fonction de transfert de la chaîne d'action

1

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

par un zéro du retour  $1 + \sigma_1 p + \sigma_2 p^2$ , la matrice  $Q^{-1} A Q$  du régime libre s'écrit :

$$Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 - f^* \\ 1 & 0 & -a_1 - \sigma_1 f^* \\ 0 & 1 & -a_2 - \sigma_2 f^* \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } Q^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1(\sigma_1 a_0 - a_1) - (\sigma_2 a_0 - a_2) & \sigma_2(\sigma_1 a_0 - a_1) + 1 & -(\sigma_0 a_0 - a_1) \\ \sigma_2(\sigma_1 a_0 - a_1) + 1 & \sigma_2(\sigma_2 a_0 - a_2) + \sigma_1 & -(\sigma_2 a_0 - a_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - f^* & -a_1 - \sigma_1 f^* & -a_2 - \sigma_2 f^* \end{bmatrix}$$



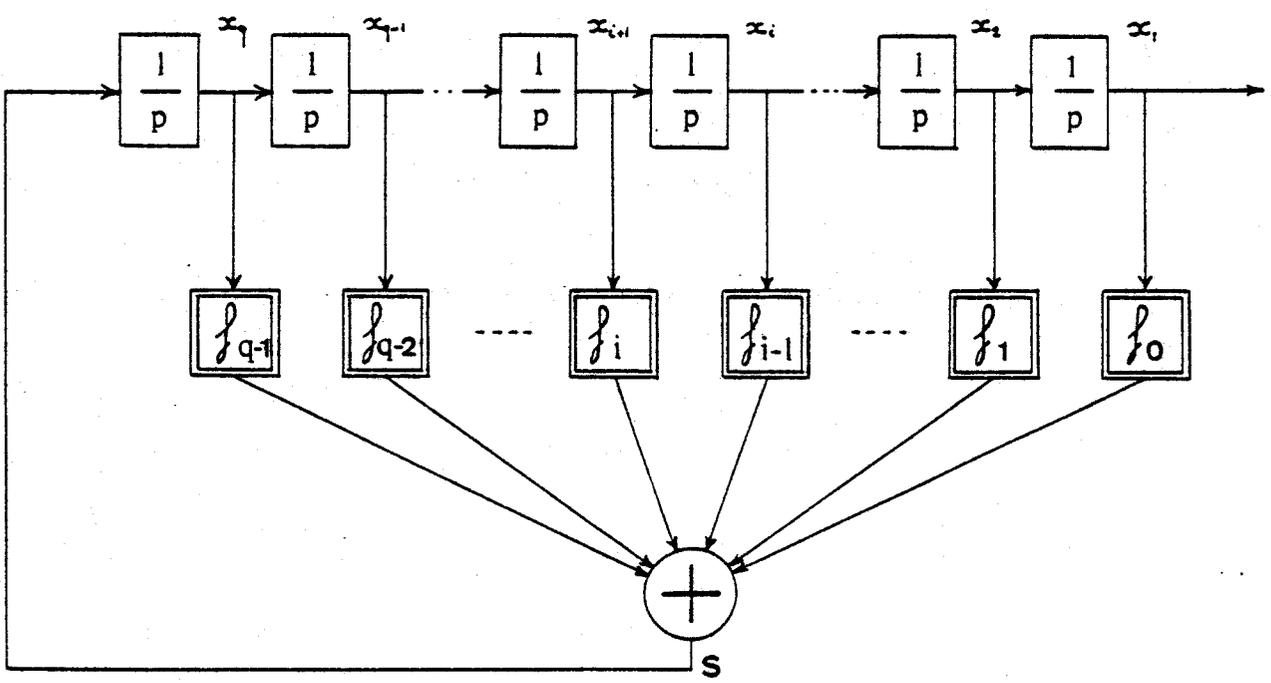


FIGURE 1-13

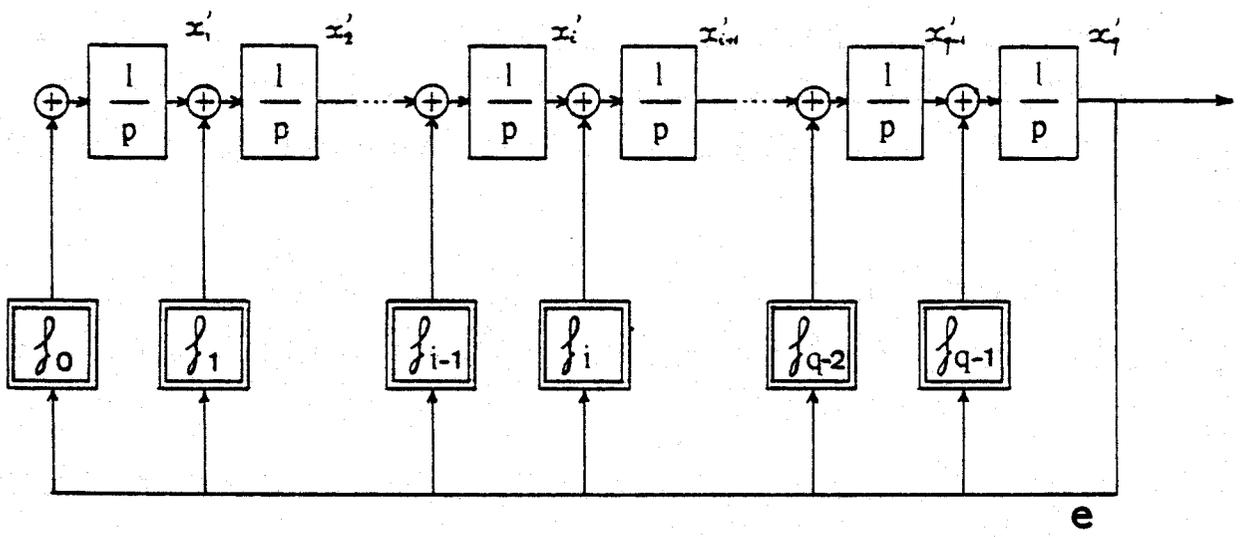


FIGURE 1-14

BUS LILLE

V.1.2. Forme générale

La forme générale  $F(x, t)$  (I-47) ou  $F^T(x, t)$  (I-74) particularise n-1 sous-systèmes linéaires (matrices  $F_{ii}$ ,  $i = 1 \dots n-1$ ) et un sous-système non linéaire  $F_{nn}$  sous forme simple  $F_1$  ou  $F_2$  (voir paragraphe IV.1. ).

Les  $n_i$  lignes associées à  $F_{ii}$  et donnant l'expression du sous-vecteur  $\overset{\circ}{x}_i$  (sous-système  $S_i$ ) s'écrivent :

$$\overset{\circ}{x}_i = F_{ii} \overset{\circ}{x}_i + u_i \quad i = 1 \dots n \quad (I-91)$$

avec pour les systèmes de type I (matrice décrite en (I-74)) :

$$\begin{cases} u_i = 0 \text{ si } i \neq n \\ u_n = \sum_{j=1}^{n-1} F_{nj} x_j \end{cases} \text{ commande provenant des } S_i, \text{ agissant sur } S_n,$$

et pour les systèmes de type II (matrice décrite en (I-47)) :

$$\begin{cases} u_n = 0 \\ \forall i = 1 \dots n-1, u_i = F_{in} x_n \end{cases} \text{ commandes provenant de } S_n, \text{ agissant sur les } S_i.$$

Cette structure triangulaire par blocs va permettre d'utiliser le théorème démontré en annexe B.

Théorème I-5 : Si les n blocs diagonaux  $F_{ii}$  d'un système à non-linéarités de rang l sont asymptotiquement stables, alors ce système est asymptotiquement stable et réciproquement.

Si on élimine la question triviale des n-1 systèmes linéaires, on peut ainsi ne considérer, dans l'étude de stabilité, qu'une seule matrice  $F_1(x, t)$  ou  $F_2(x, t)$ .

V.1.3. Réduction d'ordre par application des CNS du linéaire

La stabilité asymptotique des systèmes à non-linéarités de rang l est donc liée de manière nécessaire et suffisante à celle des n sous-matrices  $F_{ii}$  de la diagonale.

Seule la matrice  $F_{nn}(x, t)$  du sous-système  $S_n$  est non-linéaire, c'est-à-dire que lorsque la stabilité de  $S_n$  est assurée, les conditions de stabilité des n-1 systèmes linéaires  $F_{ii}$ ,  $i \leq n-1$  sont nécessaires et suffisantes. Les conditions les moins restrictives concernant le système  $F_{nn}$  (conditions sur l'état initial par exemple) seront donc aussi les plus larges pour le système global.

Il apparaît par conséquent que la recherche de conditions de stabilité les moins contraignantes possibles pour un système à non-linéarités de rang 1 peut être menée sur les formes compagnon simples  $F_1(x,t)$  ou  $F_2(x,t)$  (I-87)(I-88).

La suite de ce chapitre sera consacrée à l'étude de transformations sur ces deux formes, donnant lieu à une approche naturelle de la stabilité et de la synthèse des systèmes associés à ces deux matrices.

V.2. Forme en flèche [4] [23]

V.2.1. Définition, structure

Soit la matrice d'ordre  $q$  de forme décrite en (I-87) ou (I-88). Il est possible de se ramener, par un changement de base linéaire, à une forme matricielle dans laquelle seuls les éléments de la diagonale, de la dernière ligne et de la dernière colonne sont différents de zéro. Cette forme est dite "en flèche mince". Sa principale caractéristique est que éléments  $\lambda_i$  ( $i = 1$  à  $q$ ) de la diagonale, tous différents et non nuls, peuvent être arbitrairement déterminés par la matrice de changement de base (I-92):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_{q-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{q-1} & \dots & \lambda_i^{q-1} & \dots & \lambda_{q-1}^{q-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{I-92}$$

telle que, si  $R(p) = \prod_{i=1}^{q-1} (p - \lambda_i)$  et  $\mathcal{F}(\lambda) = -\lambda + \sum_{i=0}^{q-1} \lambda^i f_i$  (I-93)

On a  $P^{-1} F_1(x,t) P =$  
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \left(\frac{p - \lambda_1}{R(p)}\right)_{p=\lambda_1} \\ & \dots & & & \\ & & \lambda_i & & \left(\frac{p - \lambda_i}{R(p)}\right)_{p=\lambda_i} \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_{q-1} \\ \mathcal{F}(\lambda_1) - \mathcal{F}(\lambda_i) & \dots & \lambda_1^{q-1} & \dots & \lambda_{q-1}^{q-1} \\ & & f_{q-1} & \dots & \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i \end{bmatrix} \tag{I-94}$$

$P^T F_2(x,t) (P^T)^{-1} = (P^{-1} F_1(x,t) P)^T$  (I-95)

Le changement de base permettant de passer d'une forme en flèche à une forme compagnon est donc défini par  $P^{-1}$  ou  $P^{T-1}$ .

Ces formes ont la particularité de correspondre non plus à des structures de type "série" comme les formes compagnon, mais à des structures "parallèle", représentables par  $q-1$  systèmes linéaires du premier ordre coordonnés de façon non linéaire par un  $q^e$  système (fig.I-15). Du point de vue technique, cela permet notamment de diminuer les effets de dérive des amplificateurs lors de la simulation analogique du système [24] et généralise ainsi la décomposition modale utilisée pour les systèmes linéaires.

Remarque :

Dans le cas d'un système à plusieurs lignes ou colonnes non-linéaires, cette forme a été généralisée [4] et correspond à un système hiérarchisé, formé de  $n-1$  systèmes d'ordre plus élevé, sans interconnexions directes entre eux et reliés à un seul et même système, dit "coordinateur" ou "système de pointe".

Dans le cas d'un système de type II, le système coordonnateur est associé à la variable  $\varepsilon$  traitée par les non-linéarités (cf.Fig.II0 § III-3).

L'évolution de cette variable est donc déterminante pour la stabilité du système : si les sous-systèmes de la diagonale sont stables ( $\lambda_i < 0$ ), les conditions de stabilité porteront uniquement sur le coordonnateur (élément à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne) et sur les interconnexions (dernière ligne et dernière colonne).

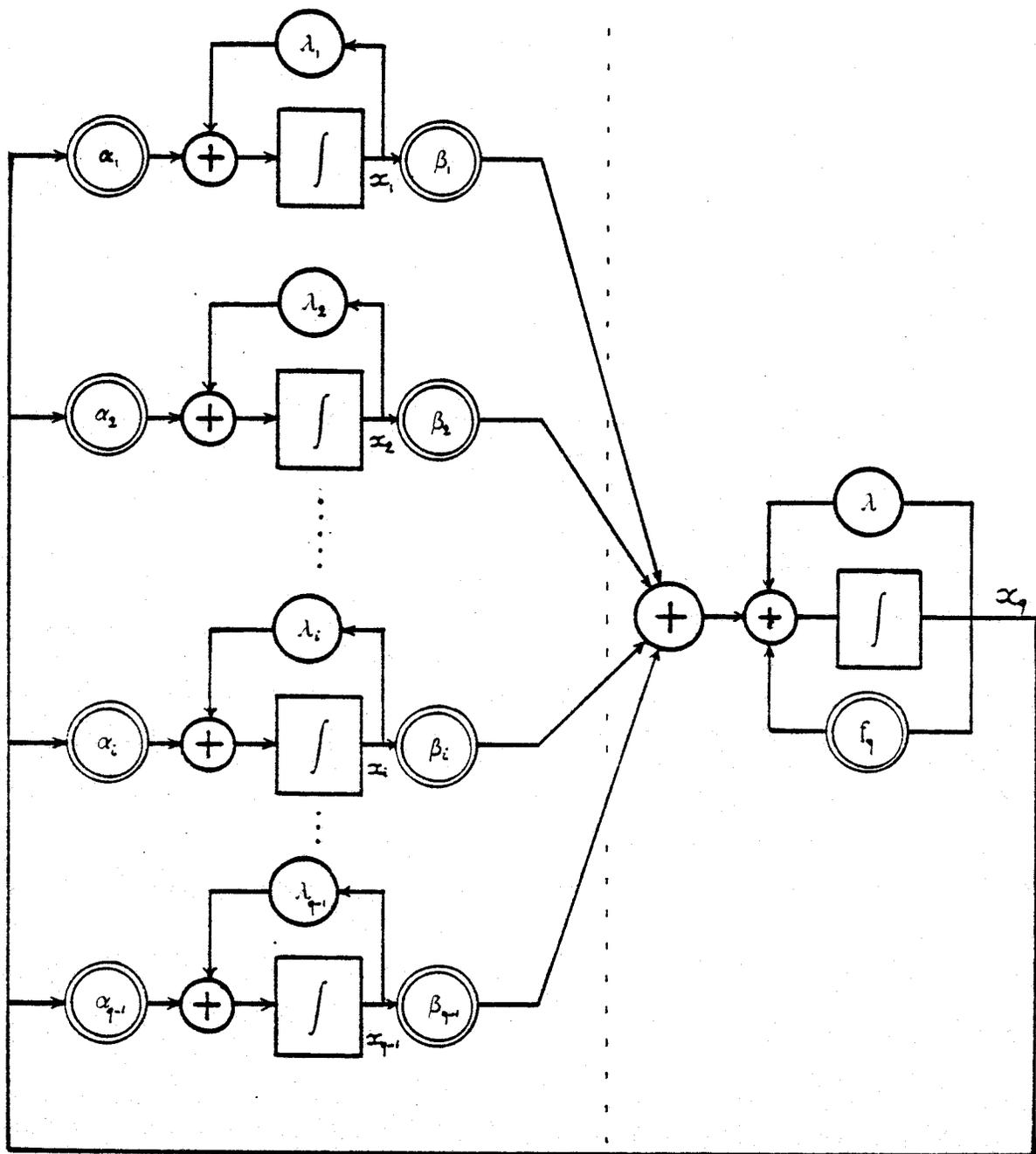


Figure (I-15)

Structure hiérarchisée à deux niveaux associée à la forme en flèche mince.

Type I :  $\alpha_i$  constants,  $\beta_i$  fonctions de  $(x, t)$

Type II :  $\beta_i$  constants,  $\alpha_i$  fonctions de  $(x, t)$ .



V.2.2. Application aux systèmes de type LUR'E POSTNIKOV monovariables

Soit le système décrit Figure (I-16).

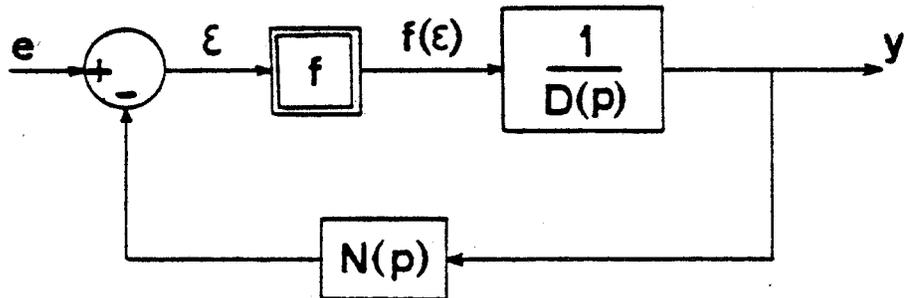


Figure (I-16)

$$\text{Avec : } D(p) = p^q + a_{q-1} p^{q-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

$$N(p) = p^{q-1} + \sigma_1 p^{q-2} + \dots + \sigma_{q-2} p + \sigma_{q-1}$$

$$f(\varepsilon) = f^*(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

Nous avons vu dans le paragraphe IV.3. que ce système était à la fois de type I et de type II. Il est donc possible de le représenter sous la forme d'une flèche mince dont les termes non constants sont soit dans la dernière ligne, soit dans la dernière colonne.

Remarques :

Lorsque les racines  $(-\lambda_i)$  de  $N(p)$  sont distinctes, il vient par la transformation P décrite en (I-92) :

$$M_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & & & \vdots \\ & \ddots & & & \\ & & -\lambda_j & & \frac{p+\lambda_j}{N(p)} \Big|_{p=\lambda_j} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \dots & -D(-\lambda_j) & \dots & \dots & \sigma_1 - a_{q-1} - f^*(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (\text{I-95})$$

Cette forme est commune aux représentations de type I et II.

Elle correspond à un système non-linéaire coordonnant linéairement  $q-1$  systèmes linéaires de type  $\dot{x}_i = -\lambda_i x_i$  où les  $(-\lambda_i)$  sont les racines du retour  $N(p)$  (Fig.(I-15) avec  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  constants.)

V.2.2.a. Lorsque les produits  $\left( \frac{-D(p)}{N(p)} \right)_{p=-\lambda_i}$  sont positifs, cette formulation matricielle amène, par application du critère de BORNE et GENTINA 19, le théorème suivant :



à laquelle les conditions du linéaire sont applicables.

V.2.2.c. Les conditions sur le signe des résidus de  $\frac{D(p)}{N(p)}$

aux points  $\lambda_i$  sont significatives du placement les uns par rapport aux autres des pôles et des zéros de  $W(p)$ . Le cas  $\left( \frac{D(p)}{N(p)} \right)_{p = -\lambda_i} < 0$  correspond

notamment à des pôles et zéros alternés (c'est-à-dire à un système dont le déphasage ne dépasse pas  $\pi/2$ ).

V.2.2.d. Lorsque les racines du numérateur sont multiples ( $\lambda_i = \lambda_j$  pour  $i \neq j$ ) le changement de base P n'est plus défini. Une forme correspondant une structure série a été proposée [26], qui introduit soit une sous-diagonale d'éléments unités (systèmes de type I), soit une sur-diagonale (système de type II) : on obtient alors les matrices  $H_1$  ou  $H_1^T$  :

$$H_1 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{q-1} & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{q-2} & \xi_{q-1} \end{bmatrix} \quad (I-97)$$

V.2.3. Application du critère pratique de BORNE et GENTINA à la forme en flèche mince :

Il apparaît que l'application du critère pratique de BORNE et GENTINA est facilitée par le conditionnement même d'une matrice en flèche. Ceci pour deux raisons majeures :

- les matrices pseudo-majorantes canoniques d'une forme en flèche sont en forme en flèche,
- le calcul des q mineurs principaux se réduit au seul calcul du produit des termes diagonaux et du déterminant complet de la matrice. La formulation de ce déterminant est d'ailleurs simple :

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \circ & a_{1q} \\ \circ & a_{q-1 \ q-1} & a_{q-1 \ q} \\ a_{q1} & \dots & a_{q \ q-1} & a_{qq} \end{bmatrix} \quad (\text{I-98})$$

$$\text{alors } \det A = \left\{ a_{qq} - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{a_{qi} \cdot a_{iq}}{a_{ii}} \right\} \prod_{i=1}^{q-1} \{ a_{ii} \} \quad (\text{I-99})$$

ce qui permet un calcul rapide.

La forme en flèche s'avère donc particulièrement adaptée à l'étude des équations différentielles dans l'espace d'état, notamment en ce qui concerne les systèmes à non-linéarités de rang 1, et a pour ceux-ci des applications multiples :

- la structure de sa représentation permet une simulation avec accès direct aux termes diagonaux et aux non-linéarités,
- elle est très bien adaptée à l'analyse de la stabilité, que ce soit par application des conditions du linéaire ou par utilisation des systèmes majorants,
- elle permet de mener rapidement une synthèse d'asservissement : en particulier, pour les systèmes de type LUR'E POSTNIKOV, l'interprétation se fait directement par rapport aux paramètres du système physique.

## CONCLUSION

Après avoir défini les notions concernant l'état et la représentation d'un système, nous avons rappelé quelques méthodes d'étude de la stabilité.

Cette première analyse met en évidence l'importance de la formulation adoptée pour représenter l'évolution du système.

Pour une classe importante de systèmes, dits "à non-linéarités de rang 1", nous nous sommes ramenés à l'étude d'une forme compagnon simple. Cette forme, à son tour, conduit à une représentation "en flèche" permettant l'analyse et la synthèse du système.

Par la suite, nous proposerons pour ce type de système une unification avec le symbolisme du linéaire.

Ceci permettra de mettre immédiatement en équations un système non-linéaire et donc d'éviter des pertes de temps lors de son analyse.

## CHAPITRE II

DEFINITION D'UN POLYNOME SYMBOLIQUE.APPLICATION A LA MISE EN EQUATION DE SYSTEMES NON LINEAIRESINTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons précisé la classe des systèmes à non-linéarités de rang 1. Pour étudier la stabilité de ces systèmes, un algorithme linéaire a été proposé et permet de simplifier le conditionnement de la matrice représentative du régime libre. La représentation ainsi obtenue particularise plusieurs systèmes linéaires et un seul système non-linéaire représenté par une matrice  $F(x,t)$  que nous appelons "matrice de forme compagnon" par analogie avec le linéaire [6].

L'étude des propriétés de stabilité et du comportement dynamique des systèmes linéaires peut être menée à partir de n'importe quelle représentation : la connaissance des valeurs propres de leurs matrices suffit à conduire cette première analyse.

Par contre, le choix de la représentation du bloc non-linéaire  $F(x,t)$  conditionne la suite de l'étude : la détermination des matrices semblables caractérisant ce sous-système est donc nécessaire.

La méthode que nous avons envisagée jusqu'à présent pour obtenir  $F(x,t)$  est l'application stricte de l'algorithme linéaire. Cependant, sa mise en oeuvre peut s'avérer très longue dans le cas de systèmes de grande dimension, comme le suggèrent les exemples de changements de bases envisagés à l'ordre 2 et 3 entre la forme  $F(x,t)$  et sa transposée  $F^T(x,t)$  (cf. Chapitre I, § IV.4.).

Il serait donc très intéressant de pouvoir définir directement la matrice  $F(x,t)$  sans passer par le calcul successif des vecteurs constituant la base d'état correspondante.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de calcul symbolique permettant de déterminer les représentations matricielles d'un même système qui se déduisent les unes des autres par changements de base. Cette méthode présente l'avantage de ne faire intervenir que des calculs relatifs à des polynômes : il n'est en aucun cas nécessaire de préciser les changements de base dans l'espace d'état. On accède ainsi directement au résultat cherché.

Cette technique de calcul peut être considérée de deux points de vue : soit comme un moyen simple de passer d'une forme matricielle à une autre, soit comme un outil de mise en équation vectorielle d'un système décrit par son schéma-bloc. Ce dernier aspect permet d'appliquer directement les méthodes de mise en équation des systèmes linéaires en vue d'obtenir une formulation matricielle, par exemple "en flèche" [4].

Plusieurs applications de cette méthode de calcul symbolique sont proposées.

I - NOTION DE POLYNOME SYMBOLIQUE

Dans un premier temps, nous nous proposons de définir la notion de polynôme symbolique pour une certaine classe de systèmes. Par la suite nous étudierons ses propriétés.

I.1. Définition du polynôme symbolique

Soit  $A(x,t)$  une matrice à non-linéarités de rang 1.  $A(x,t)$  ou  $A^T(x,t)$  s'exprime dans une certaine base (chapitre I § IV) :

$$M^{-1}AM = F(x,t) = \begin{bmatrix} F_{11} & & & F_{1n}(x,t) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{ii} & F_{in}(x,t) \\ & & & \ddots \\ & & & & F_{nn}(x,t) \end{bmatrix} \quad (II-1)$$

Les  $F_{ii}$  sont des matrices compagnon d'ordre  $n_i + 1$  :

$$F_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & & -\alpha_i^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & -\alpha_i^j \\ & & & \vdots \\ & & & & 1 & -\alpha_i^{n_i} \end{bmatrix} \quad F_{nn}(x,t) = \begin{bmatrix} 0 & & & -f_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & -f_j \\ & & & \vdots \\ & & & & 1 & -f_{nn} \end{bmatrix}$$

$\forall i = 1 \dots n, \quad j \in (0, n_i)$

Définition 1 : Nous appellerons polynôme symbolique de la matrice  $A(x,t)$  ou  $A^T(x,t)$  représentative du régime libre d'un système à non-linéarités de rang 1 la fonction polynomiale en  $\lambda$ , à coefficients fonctions de l'état  $x$  et/ou du temps  $t$  définie par :

$$p : \mathcal{C} \times \mathcal{X} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$p(\lambda, x, t) = \left( \lambda^{n_n+1} + \sum_{i=0}^{n_n} f_i(x,t) \lambda^i \right) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left( \lambda^{n_i+1} + \sum_{j=0}^{n_j} \alpha_j^i \lambda^j \right) \quad (II-2)$$

$p$  est de degré  $q$  en  $\lambda$ ,  $q = \sum_{i=1}^n (n_i + 1)$

$\mathcal{C}$  : corps des complexes

$\mathcal{X}$  : ensemble contenant les évolutions du vecteur

état  $x$  et un voisinage de  $x = 0$

$\mathcal{T} = (t_0, +\infty[$

II - PROPRIETES DU POLYNOME SYMBOLIQUE : DEUXIEME DEFINITION

II.1. Calcul du polynôme symbolique en tant que déterminant :

Nous avons déjà considéré la matrice  $F(x,t)$  comme un tableau de coefficients pris dans le corps des réels et non plus comme un opérateur linéaire. Il est possible d'effectuer un calcul symbolique sur ce tableau. Nous proposons ici de définir le déterminant d'une matrice non constante de la même manière celui d'une matrice constante.

Les calculs de déterminants s'effectueront alors comme si les  $f_i$  étaient des coefficients constants écrits sous forme littérale. Les règles de multiplication et d'addition restent celles du corps des réels. Ce n'est que lors de leur remplacement par des fonctions numériques que l'état et/ou le temps interviendront comme opérands. Les règles de calcul sont alors les mêmes que sur des matrices à coefficients constants : développements par rapport aux lignes et colonnes, changements de signe par permutation de deux rangées, etc...

La propriété  $\det(AB) = \det A \det B$  est notamment conservée, même si A et B sont des matrices carrées de même ordre mais non constantes.

Il est par exemple possible de calculer le déterminant de manière symbolique,  $\lambda$  étant un scalaire et  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

$$\lambda I_{nn} - F_{nn}^T = \begin{bmatrix} \lambda & & & & f_0 \\ -1 & & & & f_1 \\ & & & & f_i \\ & & & \lambda & \\ & & & -1 & \lambda + f_{n-1} \end{bmatrix} \quad (II-3)$$

Il vient (II-4) :

$$\det(\lambda I_{nn} - F_{nn}^T) = \lambda^{n-1} + f_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + f_1 \lambda + f_0 \quad (II-4)$$

Remarque II.1.1. : Il est à noter que les termes non constants de la matrice sont tous situés dans une même rangée des matrices  $F_{nn}$  ou  $F_{nn}^T$  ; le calcul du déterminant se fait donc de façon linéaire par rapport aux  $f_i$ .

En utilisant ces règles de calcul symbolique sur la matrice caractéristique  $F(x,t)$  d'un système à non-linéarités de rang 1, il vient :

$$p(\lambda, x, t) = \det(\lambda I_q - F(x, t)) = \det(I_q - F^T(x, t)) \quad (II-5)$$

On retrouve alors l'expression (II-2) du polynôme symbolique de la matrice  $F(x, t)$  (II-1).

## II.2. Invariance du polynôme symbolique par changement de base.

### Matrices semblables.

Considérons maintenant une matrice constante  $P$  régulière d'ordre  $q$ . Elle définit un changement de base. Si dans la base originelle  $(e_i)$  un régime autonome est décrit par  $\dot{x} = F(x,t) x$ , dans la nouvelle base  $(Pe_i)$  la matrice caractéristique sera dite semblable à  $F(x,t)$ , définie en (II-6) :

$$P\dot{x} = P F(x,t) P^{-1} (Px) \quad (\text{II-6})$$

Les règles de calcul de déterminant étant les mêmes que pour des matrices constantes, le changement de base  $P$  n'affectera pas l'expression du polynôme symbolique de  $F(x,t)$ . On a :

$$\det(\lambda I_q - P F(x,t) P^{-1}) = p(\lambda, x, t) \quad (\text{II-7})$$

Ainsi la formule (II-5) permettant de calculer le polynôme symbolique d'une matrice à non-linéarités de rang 1 reste valable quelle que soit la base dans laquelle la matrice est exprimée. Nous avons vu que pour tout système associé à une matrice  $A(x,t)$  de cette classe, il existait une matrice de changement de base  $M$  telle que :

$$M A(x,t) M^{-1} = F(x,t) \text{ ou } F^T(x,t) \quad (\text{II-8})$$

Nous pouvons donc donner une nouvelle définition du polynôme symbolique :

Définition 2 : Soit un système (S) représenté en régime libre

par :

$$\dot{x} = A(x,t) x$$

$$\text{avec } A(x,t) = A_0 + v(x,t) \cdot h^T$$

$$\text{ou } A(x,t) = A_0 + h \cdot v(x,t)^T \text{ les notations}$$

sont celles du chapitre I, paragraphe III.

Nous appellerons polynôme symbolique du système (S)

la fonction  $p$  de  $\lambda$ ,  $x$  et  $t$

définie de façon unique par

$$p(\lambda, x, t) = \det(\lambda I_q - A(x, t)) \quad (\text{II-9})$$

Comme il a été remarqué en (II.1.1.), les fonctions composantes du vecteur  $v(x, t)$  interviennent de façon linéaire dans l'expression des coefficients de  $p(\lambda, x, t)$ . Ces coefficients peuvent être calculés par les méthodes classiques (de LEVERRIER, de FADEEV...) [5].

De la définition première du polynôme symbolique (chapitre III, § I), il vient également :

Théorème II-i : Soit  $A(x, t)$  une matrice à non-linéarités de rang 1 et  $p(\lambda, x, t)$  son polynôme symbolique.

Il existe toujours une base de  $\mathcal{P}^q$  dans laquelle  $A(x, t)$  ou  $A^T(x, t)$  s'écrit sous une forme  $F(x, t)$  décrite en (I-1), chacun des  $n$  sous-systèmes diagonaux ayant pour polynôme symbolique  $p_i$  tel que

$$p(\lambda, x, t) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} p_i(\lambda) \right) \cdot p_n(\lambda, x, t) \quad (\text{II-10})$$

Remarque : Dans le cas fréquent où  $n = 1$  (décomposition en une matrice compagnon non-linéaire unique) l'expression du polynôme symbolique se réduit au polynôme  $p_n(\lambda, x, t)$ .

### II.3. Relation avec le polynôme caractéristique en linéaire

Dans le cas où le système est linéaire et stationnaire, le polynôme  $p(\lambda, x, t)$  devient (II-11) :

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^n \det(\lambda I_{n_i} - F_{ii}) = \det(\lambda I_q - F) \quad (\text{II-11})$$

où  $I_{n_i}$  est la matrice identité d'ordre  $n_i$ .

On retrouve alors l'expression classique du polynome caractéristique de la matrice F.

Chaque sous-système  $F_{ii}$  déconnecté du système global est alors caractérisé par l'équation différentielle régissant les dérivées successives d'une même variable d'état  $\xi_i$

$$\xi_i^{(n_i+1)} + \sum_{j=0}^{n_i} \alpha_j^i \xi_i^{(j)} = 0 \tag{II-12}$$

et définie par le polynôme  $p_i(\lambda) = \det(\lambda I_{n_i} - F_{ii})$

Lorsque la matrice  $F(x,t)$  n'est plus constante, nous avons vu que, par définition, la propriété de calcul (II-11) était conservée. Cependant, il n'en va pas de même pour l'interprétation du polynôme en tant qu'équation différentielle : un système non linéaire ne peut pas en général être caractérisé par une équation du type (II-12).

C'est le cas par exemple des systèmes pour lesquels les termes non constants ne sont pas dérivables par rapport à t :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -f_1(x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - f_2(x_2) \end{aligned} \tag{II-13}$$

Dans cet exemple, l'élimination sous forme (II-14) :

$$\ddot{x}_2 + \frac{d}{dt} f_1(x_2) + f_2(x_2) = 0 \tag{II-14}$$

n'est possible que si la fonction  $f_1(x_2)$  est dérivable.

Cette remarque permet d'expliquer le choix du terme "polynôme symbolique". Celui-ci représente un invariant du système, comme dans le cas des systèmes linéaires, mais n'a pas de signification physique : on ne peut pas en général l'utiliser pour écrire une équation différentielle scalaire caractéristique du comportement du système.

### III - UTILISATION DU POLYNOME SYMBOLIQUE DANS LA MISE EN EQUATION DES SYSTEMES A NON-LINEARITES DE RANG 1

Considérons un système S qu'un certain choix de variables d'état permette de ranger dans la classe des systèmes à non-linéarités de rang 1.

Le polynôme de la matrice  $A(x,t)$  caractéristique d'un tel processus en régime autonome est un invariant par rapport à la base dans laquelle  $A(x,t)$  est représentée.

Nous nous proposons d'utiliser cette propriété pour définir les expressions de  $A(x,t)$  dans d'autres bases que celle de mise en équation initiale.

#### III.1. Identification de deux matrices non-linéaires semblables

Supposons que, pour le système S, il soit possible de prévoir la forme d'une représentation matricielle  $A'(x,t)$  dans une certaine base  $\mathcal{B}'$ .

Il se peut que ni l'expression des vecteurs de  $\mathcal{B}'$ , ni celle des composantes de  $A'(x,t)$  ne soient connues. C'est le cas du système considéré dans l'exemple Chapitre I, § IV.3. .

Nous avons vu que ce système du type LUR'E POSTNIKOV monovariante est à la fois de type I et II.

De plus, nous supposerons que  $N(p)$  et  $D(p)$  n'ont pas de zéro commun. La partie linéaire  $\frac{N(p)}{D(p)}$  peut être représentée de façon observable ou commandable. Il existe donc [27] une matrice  $Q$  régulière telle que :

$$Q^{-1} A(\varepsilon) Q = A'(\varepsilon)$$



Sur cet exemple simple, nous avons donc montré la simplicité d'emploi de la méthode d'identification proposée pour des matrices dont on connaît d'avance la similitude. Il est possible d'appliquer ce mode de raisonnement par polynôme symbolique à des formes plus élaborées que les représentations compagnon, et plus adaptées à l'étude des systèmes continus. Nous allons envisager l'utilisation de cette technique sur les formes dites "en flèche".

III.2. Application au passage d'une forme en flèche à une autre

Considérons deux matrices en flèche mince, de même ordre q et dont les termes non constants  $\alpha_i(\cdot)$ ,  $\beta_i(\cdot)$ ,  $\gamma_i(\cdot)$ ,  $\delta_i(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  sont fonction des mêmes variables d'état et/ou du temps t.

$$A_1(\cdot) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \beta_1(\cdot) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_i & \beta_i(\cdot) \\ & & & \vdots \\ \alpha_1(\cdot) \dots \alpha_i(\cdot) & \dots & \lambda_{q-1} & f(\cdot) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} D_1 & \beta(\cdot) \\ \hline \alpha^T(\cdot) & f(\cdot) \end{array} \right] \quad (II-22)$$

$$A_2(\cdot) = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \delta_1(\cdot) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mu_i & \delta_i(\cdot) \\ & & & \vdots \\ \gamma_1(\cdot) \dots \gamma_i(\cdot) & \dots & \mu_{q-1} & g(\cdot) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} D_2 & \delta(\cdot) \\ \hline \gamma^T(\cdot) & g(\cdot) \end{array} \right] \quad (II-23)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que :

- soit  $\beta_i(.)$  et  $\delta_i(.)$  sont des termes constants

$\forall i = 1 \dots q-1$

- soit  $\alpha_i(.)$  et  $\gamma_i(.)$  sont des termes constants

$\forall i = 1 \dots q-1$

Les systèmes associés aux matrices  $A_1(.)$  et  $A_2(.)$  seront donc à non-linéarités de rang 1 et de même type I ou II.

Il est alors possible de définir le polynôme symbolique

$p_1(\lambda, .)$  de  $A_1(.)$  :

$$p_1(\lambda, .) = \det(\lambda I_q - A_1(.))$$

$$= \left[ \alpha^T(.) (\lambda I_{q-1} - D_1)^{-1} \beta(.) + \lambda - f(.) \right] \det(\lambda I_{q-1} - D_1) \tag{II-24}$$

Remarques :

III.2.1. Les termes  $\alpha_i(.)$  ou  $\beta_i(.)$  n'apparaissent pas séparément : seuls les produits  $\alpha_i(.) \cdot \beta_i(.)$  interviennent de façon explicite dans les calculs. Ceci peut s'interpréter en termes de changement de base : si D est une matrice diagonale régulière, la matrice  $DA_1(.) D^{-1}$  s'écrit sous forme en flèche.

$$DA_1(.) D^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & d_1 \beta_1(.) \\ & \dots & & & \vdots \\ & & \lambda_i & & d_i \beta_i(.) \\ & & & \dots & \vdots \\ \alpha_1(.) & \dots & \alpha_i(.) & \dots & f(.) \\ \hline & & d_1 & & \\ & & & d_i & \end{bmatrix}$$

avec  $D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & d_i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & d_{q-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

Le polynôme symbolique de  $DA_1(.) D^{-1}$  doit être le même que celui de  $A_1(.)$ . Par conséquent  $d_i$  ne doit pas intervenir dans l'expression des coefficients de  $p_1(\lambda, .)$ .

On retrouve le fait que les termes des dernières lignes  $\alpha^T$  et dernière colonne  $\beta$  n'interviennent que par leurs produits :

$$\alpha_i(.) \beta_i(.) = \frac{\alpha_i}{d_i} \beta_i d_i, \quad \forall i = 1 \text{ à } q-1 \quad (\text{II-26})$$

III.2.2. Les termes non constants (en  $\alpha_i(.)$  ou  $\beta_i(.)$ )

selon le type de système) interviennent linéairement dans les coefficients du polynôme symbolique. C'est une propriété générale des matrices à non-linéarités de rang 1 qui se retrouve ici (cf. remarque III.1.1.). D'après la première remarque, les termes  $\alpha_i(.) \beta_i(.)$  interviennent donc aussi linéairement.

Nous allons utiliser les propriétés exprimées dans ces remarques III.2.1. et III.2.2. pour déterminer une forme  $A_2(.)$  semblable à  $A_1(.)$ , mais dont les termes  $\mu_i$  seront choisis arbitrairement.

Si on suppose que les  $\lambda_i$  sont tous distincts et que les  $\mu_i$  fixés arbitrairement le sont aussi,  $\forall i = 1 \dots q-1$ , alors il existe un changement de base permettant de passer de  $A_1(.)$  à  $A_2(.)$ , les termes de  $\gamma^T(.)$ ,  $g(.)$  et  $\delta(.)$  étant déterminés par le choix des  $\mu_i$ . Ce changement de base est le produit de deux passages :

- passage de  $A_1(.)$  à une forme compagnon,
- passage de la forme compagnon à  $A_2(.)$ .

Les deux matrices régulières intervenant dans ces changements sont déterminées comme la matrice P décrite en (I-92) : la première est définie par les  $\lambda_i$ , la seconde par les  $\mu_i$ .

L'identification des polynômes symboliques va permettre de calculer les termes composants de  $\gamma^T(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  et  $\delta(\cdot)$  assurant la similitude de  $A_1(\cdot)$  et  $A_2(\cdot)$ . Elle se fera en appliquant les deux règles suivantes :

- 1ère règle : si  $A_1(\cdot)$  est de type I,  $A_2(\cdot)$  aussi
- si  $A_1(\cdot)$  est de type II,  $A_2(\cdot)$  aussi.

Les termes non constants de  $A_2(\cdot)$  seront situés dans la même rangée que ceux de  $A_1(\cdot)$ .

2ème règle : on doit avoir, pour tout scalaire  $\lambda$ ,

$$\det(\lambda I_q - A_1(\cdot)) = \det(\lambda I_q - A_2(\cdot)) = p_1(\lambda, \cdot)$$

(II-27)

La première règle détermine quelle rangée  $\gamma^T(\cdot)$  ou  $\delta(\cdot)$  doit être constante dans  $A_2(\cdot)$ .

La deuxième introduit la résolution d'un système (E) d'équations linéaires, d'ordre q, d'inconnues  $\gamma_i(\cdot) \cdot \delta_i(\cdot)$

$$(i = 1 \text{ à } q-1), \text{ et } g(\cdot).$$

Si le changement de base de  $A_1(\cdot)$  à  $A_2(\cdot)$  existe, (E) a une solution. Le système (E) est donc de CRAMER si pour d'une part  $\gamma_i = \lambda_i$  et d'autre part  $\gamma_i = \mu_i$  ( $i = 1 \text{ à } q-1$ )

l'inégalité (II-28) est vérifiée:

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_{q-1} & 0 \\
 \gamma_2 & \gamma_2 & \gamma_2 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \gamma_{q-1} & \gamma_{q-1} & \gamma_{q-1} & 0 \\
 \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_{q-1} & 1
 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{II-28}$$

Exemple d'ordre 4

Nous allons mettre en oeuvre la méthode d'identification par polynôme symbolique sur un système d'ordre 4. Considérons la forme en flèche (II-29) :

$$A_1(\epsilon) = \begin{bmatrix} \lambda & & & \beta_1(\epsilon) \\ & \lambda_2 & & \beta_2(\epsilon) \\ & & \lambda_3 & \beta_3(\epsilon) \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & f(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (II-29)$$

où  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  et  $f$  sont des fonctions de la même variable d'état  $\epsilon$ , dernière composante du vecteur état. Nous supposons ici que  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ ;

Soit  $A_2(\epsilon)$  une forme en flèche posée à priori, de même type que  $A_1$  et dont les termes non constants sont également des fonctions de  $\epsilon$ .

$$A_2(\epsilon) = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \delta_1(\epsilon) \\ & \mu_2 & & \delta_2(\epsilon) \\ & & \mu_3 & \delta_3(\epsilon) \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & g(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (II-30)$$

Nous adopterons par la suite les notations (II-31) :

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \sigma_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ s_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 & \sigma_2 &= \mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_3 \mu_1 \\ s_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & \sigma_3 &= \mu_1 \mu_2 \mu_3 \\ a_i(\epsilon) &= \alpha_i \beta_i(\epsilon) \\ b_i(\epsilon) &= \gamma_i \delta_i(\epsilon) \end{aligned} \right\} \quad \forall i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (II-31)$$

Les polynômes symboliques de  $A_1(\epsilon)$  et  $A_2(\epsilon)$  sont notés respectivement  $p(\lambda, \epsilon)$  et  $q(\lambda, \epsilon)$ , avec :

$$p(\lambda, \epsilon) = \lambda^4 + p_3(\epsilon) \lambda^3 + p_2(\epsilon) \lambda^2 + p_1(\epsilon) \lambda + p_0(\epsilon) \quad (II-32)$$

$$q(\lambda, \epsilon) = \lambda^4 + q_3(\epsilon) \lambda^3 + q_2(\epsilon) \lambda^2 + q_1(\epsilon) \lambda + q_0(\epsilon) \quad (II-33)$$



On retrouve ici le fait que le système (II-35) a une solution si le changement de base de  $A_1$  à  $A_2$  existe. De plus, ce changement de base conserve la dernière composante  $\epsilon$  du vecteur état (cf. chap. I, §V.2). La variable  $\epsilon$  peut donc être directement explicitée en fonction du nouveau vecteur état relatif à  $A_2$  ( $\epsilon$ ).

Nous connaissons donc l'expression des matrices en flèche semblables à  $A_1$  ( $\epsilon$ ), pour tous les triplets  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ,

$\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ , choisis arbitrairement : ces matrices sont définies par les égalités (II-37) à (II-40) :

$$g(\epsilon) = -\sigma_1 - p_3(\epsilon) \tag{II-37}$$

$$b_1(\epsilon) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & -\sigma_1 - p_3(\epsilon) & 0 & 0 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 + p_2(\epsilon) & 1 & 1 \\ \sigma_2 & -\sigma_3 - p_1(\epsilon) & \mu_1 + \mu_3 & \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma_3 & p_0(\epsilon) & \mu_1 \mu_3 & \mu_1 \mu_2 \end{vmatrix} \tag{II-38}$$

$$b_2(\epsilon) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sigma_1 - p_3(\epsilon) & 0 \\ \sigma_1 & 1 & -\sigma_2 + p_2(\epsilon) & 1 \\ \sigma_2 & \mu_2 + \mu_3 & -\sigma_3 - p_1(\epsilon) & \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma_3 & \mu_2 \mu_3 & p_0(\epsilon) & \mu_1 \mu_2 \end{vmatrix} \tag{II-39}$$

$$b_3(\epsilon) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sigma_1 - p_3(\epsilon) \\ \sigma_1 & 1 & 1 & -\sigma_2 + p_2(\epsilon) \\ \sigma_2 & \mu_2 + \mu_3 & \mu_1 + \mu_3 & -\sigma_3 - p_1(\epsilon) \\ \sigma_3 & \mu_2 \mu_3 & \mu_1 \mu_3 & p_0(\epsilon) \end{vmatrix} \tag{II-40}$$

Les produits  $b_i(\epsilon) = \gamma_i \cdot \delta_i(\epsilon)$  déterminent le terme non constant  $\delta_i(\epsilon)$  à constante multiplicative arbitraire  $\gamma_i$  près.

III.3. Application à la représentation en flèche mince de systèmes décrits par leur schéma bloc

Nous allons dans cette partie considérer le passage d'une forme matricielle quelconque à une forme en flèche.

III.3.1. Calcul du polynôme symbolique d'une forme en flèche mince

Pour unifier les représentations, nous nous placerons dans le cas d'une forme en flèche de type II, c'est-à-dire dont les termes non constants sont isolés dans la dernière colonne. Les calculs s'effectuent de la même manière sur la forme transposée et leur résultat est similaire.

Considérons un polynôme à coefficients non constants :

$$p(\lambda, \cdot) = \lambda^q + \sum_{i=0}^{q-1} p_i(\cdot) \lambda^i \tag{II-41}$$

où les  $p_i(\cdot)$  sont des fonctions bornées de variables continues (temps et/ou état).

Nous allons calculer le polynôme symbolique de la forme en flèche mince  $A(\cdot)$  définie par l'égalité (II-42) :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & -p(\lambda_1, \cdot) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_i & -p(\lambda_i, \cdot) \\ & & & \vdots \\ & & & \lambda_{q-1} & -p(\lambda_{q-1}, \cdot) \\ \alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_{q-1} & & & -p_{q-1}(\cdot) - \left( \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i \right) \end{bmatrix} \tag{II-42}$$

où les  $\lambda_i, i = 1 \text{ à } q-1$ , sont distincts et les  $\alpha_i$  sont définis par (II-43) :

$$\alpha_i = \left[ \frac{(\lambda - \lambda_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{q-1} (\lambda - \lambda_j)} \right]_{\lambda = \lambda_i} \quad \forall i = 1 \dots q-1 \tag{II-43}$$

Il vient alors, en posant  $N(\lambda) = \prod_{i=1}^{q-1} (\lambda - \lambda_i)$  (II-44)

$$\det(\lambda I_q - A(\cdot)) = N(\lambda) \left\{ P_{q-1}(\cdot) + \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i + \lambda + \sum_{i=1}^{q-1} \left( (\lambda - \lambda_i)^{-1} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_i) p(\lambda, \cdot)}{N(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_i} \right) \right\}$$

Or, si on considère la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle en  $\lambda$  :  $\frac{p(\lambda, \cdot)}{N(\lambda)}$ , on obtient [21] l'égalité (II-46):

$$\frac{p(\lambda, \cdot)}{N(\lambda)} = \lambda + P_{q-1}(\cdot) + \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i + \sum_{i=1}^{q-1} \left[ \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \left( \frac{(\lambda - \lambda_i) p(\lambda, \cdot)}{N(\lambda)} \right)_{\lambda = \lambda_i} \right] \quad (II-46)$$

On constate que :

$$\det(\lambda I_q - A(\cdot)) = p(\lambda, \cdot) \quad (II-47)$$

La forme en flèche  $\dot{A}(\cdot)$  est déterminée, à un changement de base diagonal près, par le choix des  $\lambda_i$  et les expressions de son polynôme symbolique aux points  $\lambda = \lambda_i$ .

III.3.2. Cas d'un système monovariante de type LUR'E POSTNIKOV

Considérons le système (S) représenté fig.(II-1), avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe IV.3., chapitre I.

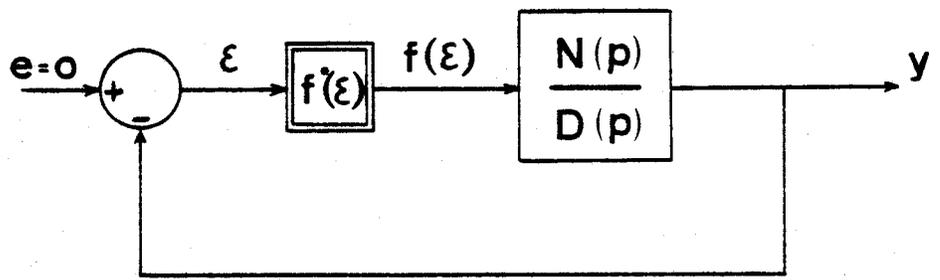


Figure II-1

$$\begin{aligned} D(p) &= p^q + a_{q-1} p^{q-1} + \dots + a_1 p + a_0 \\ N(p) &= \sigma_{q-1} p^{q-1} + \dots + \sigma_1 p + \sigma_0 \end{aligned} \quad (II-48)$$



$$\text{On a : } \frac{y}{f(\varepsilon)} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (\text{II-53})$$

$$\text{avec : } f(\varepsilon) = (e^{-y}) f^*(\varepsilon) \quad (\text{II-54})$$

$$\text{Il vient : } \frac{Y}{e} = \frac{N(\lambda) f^*(\varepsilon)}{D(\lambda) + f^*(\varepsilon) N(\lambda)} = W^*(\lambda, \varepsilon) \quad (\text{II-55})$$

Le dénominateur de cette fraction est le polynôme symbolique (II-52) associé à la représentation du processus.

Le système peut se mettre en équation sous forme en flèche (cf. chap. I paragraphe V.2.) de type I ou II, c'est-à-dire avec des termes constants dans la dernière ligne ou dernière colonne. La méthode d'identification des termes de cette forme en flèche est ici particulièrement intéressante : on connaît le polynôme symbolique commun à toutes les représentations en flèche mince du système en régime libre.

Il vient immédiatement la représentation (II-56) :

$$\dot{z} = A(\varepsilon) z \quad (\text{II-56})$$

$$\text{avec } A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \beta_1(\varepsilon) \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_i & \beta_i(\varepsilon) \\ \alpha_1(\varepsilon) & \dots & \alpha_i(\varepsilon) & \dots & f(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (\text{II-57})$$

avec  $\alpha_i$  (ou  $\beta_i$ ) tous constants et

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \cdot \beta_i(\varepsilon) &= p(\lambda_i, \varepsilon) \cdot \left[ \frac{\lambda - \lambda_i}{\prod_{j=1}^{q-1} (\lambda - \lambda_j)} \right]_{\lambda=\lambda_i} \\ f(\varepsilon) &= -p_{q-1}(\varepsilon) - \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i \\ p(\lambda, \varepsilon) &= \lambda^q + \lambda^{q-1} \cdot p_{q-1}(\varepsilon) + \dots + \lambda \cdot p_1(\varepsilon) + p_0(\varepsilon) = D(\lambda) + f^*(\varepsilon) N(\lambda) \end{aligned} \right\} (\text{II-58})$$

Le calcul de  $p(\lambda, \epsilon)$  par la formule (II-52) suffit donc pour identifier les formes en flèche correspondantes au système (S), ceci pour des  $\lambda_i$  distincts.

III.3.3. Exemple de mise en équation

Le système considéré est celui de la figure (II-2):

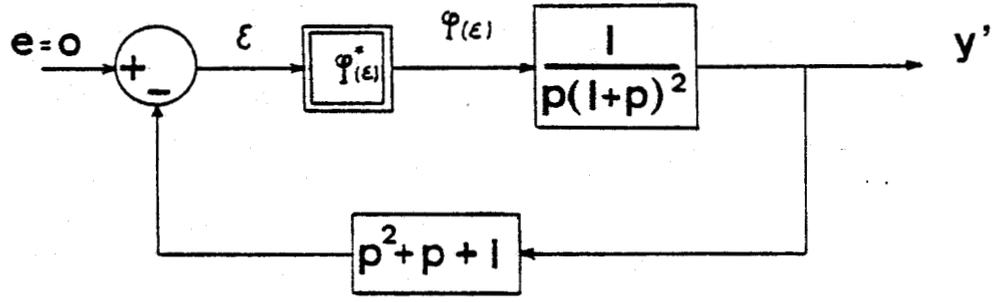


Figure (II-2)

Les formules (II-48) deviennent ici (II-59)

$$\begin{cases} N(p) = p^2 + p + 1 \\ D(p) = p^3 + 2p^2 + p \end{cases} \quad (II-59)$$

Le polynôme symbolique s'écrit, par application de (II-52) :

$$p(\lambda, \epsilon) = \varphi^*(\epsilon)N(\lambda) + D(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(2 + \varphi^*(\epsilon)) + \lambda(1 + \varphi^*(\epsilon)) + \varphi^*(\epsilon) \quad (II-60)$$

La matrice en flèche (II-61) :

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & -(\lambda_1^3 + \lambda_1^2(2 + \varphi^*(\epsilon)) + \lambda_1(1 + \varphi^*(\epsilon)) + \varphi^*(\epsilon)) \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_2^3 + \lambda_2^2(2 + \varphi^*(\epsilon)) + \lambda_2(1 + \varphi^*(\epsilon)) + \varphi^*(\epsilon)) \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\lambda_1 - \lambda_2 - 2 - \varphi^*(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (II-61)$$

est représentative du régime libre du système.

Dans une autre base d'état, la matrice caractéristique du régime libre est  $A^T(\varepsilon)$ . Notons que lorsque les termes diagonaux  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont pris égaux aux racines de  $N(p) = p^2 + p + 1$ , les termes non constants en  $\alpha_i$  ou  $\beta_i$  s'annulent. Seul le terme  $f(\cdot)$  de la dernière ligne, dernière colonne subsiste. On a alors une forme matricielle (II-62) à la fois du type I et II :

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1+j\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} & \frac{1-j\sqrt{3}}{2} \\ -j/\sqrt{3} & +j/\sqrt{3} & -1-\varphi^*(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (\text{II-62})$$

Cette forme  $A(\varepsilon)$ , écrite sur le corps des complexes, peut être étudiée à l'aide des critères existants [4] [10].

#### III.3.4. Systèmes à plusieurs non-linéarités

Supposons que le fonctionnement autonome du système à étudier puisse être décrit par une forme matricielle d'ordre  $q$  de type I ou II. Ceci impose que les éléments non linéaires puissent être regroupés sous forme d'une non-linéarité à entrée ou sortie scalaire (cf. chap. I, § III.2. et III.3.).

On ne peut pas toujours affirmer a priori que ce système puisse se représenter sous forme en flèche mince : ce serait supposer que dans la décomposition canonique sous formes compagnons (Théorèmes (I-1) et (I-3)) la matrice non-linéaire compagnon  $F_{nn}(\cdot)$  serait d'ordre maximal  $q$ . Nous avons vu que ce n'était pas toujours le cas.

Lorsque le système peut être représenté par une fonction de transfert bouclée par un gain non constant (fig.(II-1)), il suffit de vérifier que numérateur et dénominateur n'ont pas de zéro commun : la partie linéaire est alors commandable par son entrée  $f(\varepsilon)$  et observable par sa sortie  $y$ .

Lorsque le processus est plus complexe, il est plus difficile de conclure. Pour une matrice de type  $A_0 + v(x,t) h^T$ , par exemple, le calcul du rang de  $\{h, A_0 h, \dots, A_0^k h, \dots\}$  permet (cf. Théorème(I-2)) de déterminer l'ordre de la matrice compagnon non constante  $F_{nn}(x,t)$ . Cependant, dans la majorité des cas, le calcul des vecteurs  $A_0^k h$  n'est pas nécessaire et peut être remplacé par l'application de la propriété (II-1) :

Propriété (II-1) : Lorsque le polynôme symbolique d'un système à non-linéarités de rang 1 n'a aucune racine constante, c'est-à-dire indépendante de l'état et du temps, il existe une base d'état dans laquelle la matrice du régime libre est en flèche mince, de même type que le système.

Démonstration : Si l'ordre de la matrice  $F_{nn}$  n'est pas égal à celui du système, le polynôme symbolique du système est le produit d'un polynôme constant par le polynôme symbolique de  $F_{nn}(x,t)$ . Il a donc des racines constantes.

Dans le cas contraire où le polynôme symbolique n'a pas de racines constantes, on peut donc définir les matrices en flèche correspondantes par les formules (II-58) pour des termes diagonaux choisis.

Nous allons maintenant montrer sur un exemple la simplicité de la méthode proposée.

III.3.5. Exemple de mise en équation

Considérons le système monovariante à deux non-linéarités décrit fig (II-3), constitué de deux systèmes interconnectés, dont les sorties s'ajoutent (c'est le cas du couplage de deux treuils électriques, par exemple).

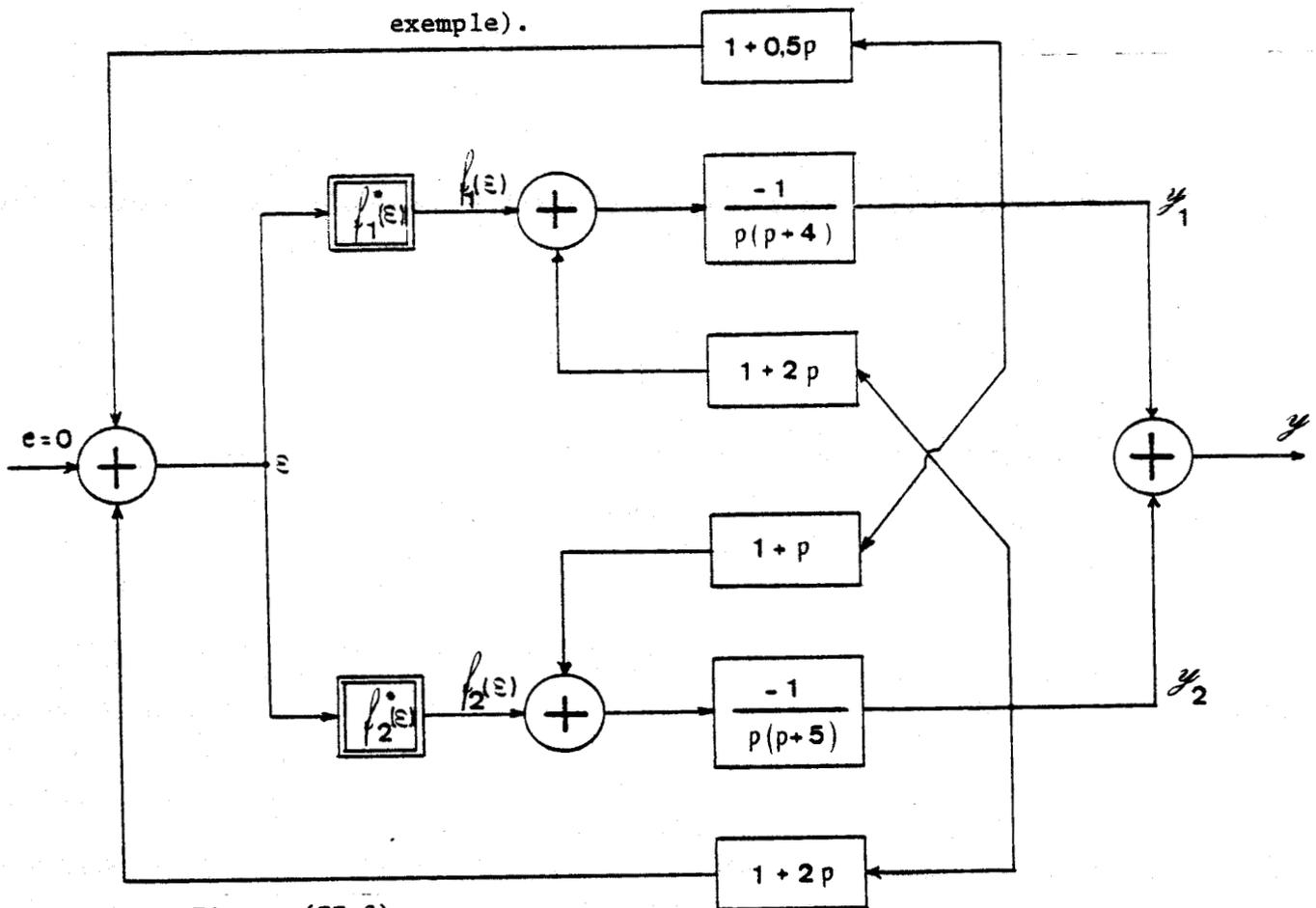


Figure (II-3)

le système, considéré par rapport au vecteur état :  
 $x = (y_1, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \varepsilon)^T$  se décrit en régime autonome  
 sous la forme (II-63) :

$$\dot{x} = A(\varepsilon) x \tag{II-63}$$

$$\text{Avec } A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3,5 & 0 & -(1+f_1^*(\varepsilon)) \\ -1 & -1 & -5 & -f_2^*(\varepsilon) \\ -1,5 & -2,75 & -9 & -0,5(1+f_1^*(\varepsilon))-2f_2^*(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

En adoptant la notation simplificatrice

$f_1^*(\varepsilon) = f_1$ ,  $f_2^*(\varepsilon) = f_2$ , le polynôme symbolique de  $A(\varepsilon)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} p(\lambda, \varepsilon) = & \lambda^4 + (8,5 + 0,5(1+f_1) + 2f_2) \cdot \lambda^3 \\ & + (16,5 + 1,5(1+f_1) + 8f_2) \cdot \lambda^2 \\ & + (5 + 3(1+f_1) + 5,5f_2) \cdot \lambda \\ & + (4(1+f_1) + f_2) \cdot 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{p(\lambda, \varepsilon)} \right\} \quad \text{(II-65)}$$

Ce polynôme n'a pas de racine constante. Nous allons ainsi pouvoir écrire directement la forme en flèche correspondant aux termes diagonaux  $-1$ ,  $-0,5$  et  $-2$  en calculant les expressions (II-66) du polynôme symbolique en ces points :

$$\begin{cases} p(-1, \varepsilon) = 4 + 2(1+f_1) + 1,5f_2 \\ p(-0,5, \varepsilon) = 2,875 - 0,7875(1+f_1) \\ p(-2, \varepsilon) = 4 + 6f_2 \end{cases} \quad \text{(II-66)}$$

ainsi que les termes correspondant à  $X_i = \left[ \frac{-(\lambda - \lambda_i)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)} \right]_{\lambda = \lambda_i}$   
pour  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0,5$ ,  $\lambda_3 = -2$  :

$$\begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = -(0,75)^{-1} \\ X_3 = -(7,5)^{-1} \end{cases} \quad \text{(II-67)}$$

On obtient la nouvelle formulation (II-68) de A (ε) :

$$B(\epsilon) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & (4+2(1+f_1^*)+1,5f_2^*) \\ 0 & -0,5 & 0 & -(2,875-0,7875(1+f_1^*)) \\ 0 & 0 & -2 & -(4+6f_2^*) \\ 2 & +1,333 & +0,133 & -(5+0,5(1+f_1^*)+2f_2^*) \end{bmatrix} \quad (\text{II-68})$$

Sans calculer de changement de base (seule la dernière composante ε de l'état est ici connue), nous avons donc déterminé une forme pratique de représentation. Nous étudierons ultérieurement la stabilité de ce système à l'aide de ce résultat.

III.4. Passage à une forme arbitrairement définie

III.4.1. Méthodes permettant le passage

Nous avons vu que si son polynôme symbolique n'a aucun zéro constant, la matrice du système peut s'écrire, relativement à un certain vecteur état, sous forme compagnon. Ceci est également vrai dans le cas plus général où :

$$\text{rang} \left\{ h, A_0^T h, \dots, A_0^{Tk} h \dots \right\} = q$$

(les notations sont ici celles utilisées au premier chapitre dans les théorèmes (I-2) et (I-4) ).

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème (II-2) : Soient deux matrices  $A_1(x,t)$  et  $A_2(x,t)$  de même type I ou II :

$$\begin{cases} A_1(x,t) = A_{01} + v_1(x,t) h_1^T \\ A_2(x,t) = A_{02} + v_2(x,t) h_2^T \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{cases} A_1(x,t) = A_{01}^T + h_1 v_1^T(x,t) \\ A_2(x,t) = A_{02}^T + h_2 v_2^T(x,t) \end{cases}$$

avec:  $h_1$  et  $h_2$  vecteurs de  $\mathbb{R}^q$

$v_1(x,t)$  et  $v_2(x,t)$  fonctions bornées de  $\mathcal{L} \times \mathcal{T}$  dans  $\mathbb{R}^q$   
 et  $A_{01}, A_{02}$  matrices constantes de  $\mathbb{R}^{q \times q}$

Ces deux matrices doivent en outre vérifier une des deux propriétés (II.2.1.) ou (II.2.2.) :

(II.2.1.)  $A_{01}$  ou  $A_{02}$  est respectivement observable par

$h_1^T$  ou  $h_2^T$  :

$$\text{rg} \left\{ h_1, A_{01}^T h_1, \dots, A_{01}^{Tk} h_1 \dots \right\} = q$$

ou

$$\text{rg} \left\{ h_2, A_{02}^T h_2, \dots, A_{02}^{Tk} h_2 \dots \right\} = q$$

(II.2.2.) le polynôme symbolique de  $A_1(x,t)$  et  $A_2(x,t)$

n'a pas de zéro constant quand  $(x,t)$  varie, c'est à dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (x,t) \in \mathcal{L} \times \mathcal{T}, p_1(\lambda) = \det(\lambda I_q - A_1(x,t)) \neq 0$$

ou

$$p_2(\lambda) = \det(\lambda I_q - A_2(x,t)) \neq 0$$

Dans ces conditions les matrices  $A_1(x,t)$  et  $A_2(x,t)$  sont semblables si et seulement si leurs polynômes symboliques sont égaux pour tout  $(x,t) \in \mathcal{L} \times \mathcal{T}$ . Ce qui se traduit par :

$$P \in \mathbb{R}^{q \times q}, \det P \neq 0, A_1(x,t) = P^{-1} A_2(x,t) P \iff \left[ \forall (x,t) \in \mathcal{L} \times \mathcal{T}, p_1(\lambda, x, t) = p_2(\lambda, x, t) \right]$$

Démonstration : Les hypothèses assurent dans chaque cas l'existence de deux changements de bases constants permettant de passer de  $A_1(x,t)$  et  $A_2(x,t)$  à la même forme compagnon non-linéaire. Le passage de  $A_1(x,t)$  à  $A_2(x,t)$  existe donc et peut être calculé si nécessaire : en effet, les deux changements sont explicités par les Théorèmes (I-1), (I-2), (I-3) et (I-4) (chapitre I).

Application :

Si  $A_1(x,t)$  est la matrice (donnée) d'un système en régime autonome et si elle vérifie les conditions du Théorème (II-2), on peut définir arbitrairement une forme matricielle  $A_2(x,t)$  et la comparer à  $A_1(x,t)$  : si elle vérifie les mêmes conditions, il suffit d'identifier son polynôme symbolique à celui de  $A_1(x,t)$  pour garantir que  $A_2(x,t)$  est l'expression de la matrice du système considéré dans une autre base d'état.

Nous pouvons noter que la condition (II.2.1.) est plus générale et englobe la condition (II.2.2). Cette dernière est cependant plus pratique à mettre en oeuvre, car elle inclue le calcul du polynôme symbolique, calcul dont le résultat sera utilisé pour l'identification des deux formes. La propriété (II.2.2.) peut être mise en évidence en calculant, par des moyens informatiques, les domaines de variations des racines de  $p(\lambda, x, t) = 0$  lorsque  $(x, t)$  varie. Si aucun de ces domaines n'est réduit à un point, cette propriété (II.2.2.) est vérifiée.

III.4.2. Exemple d'application

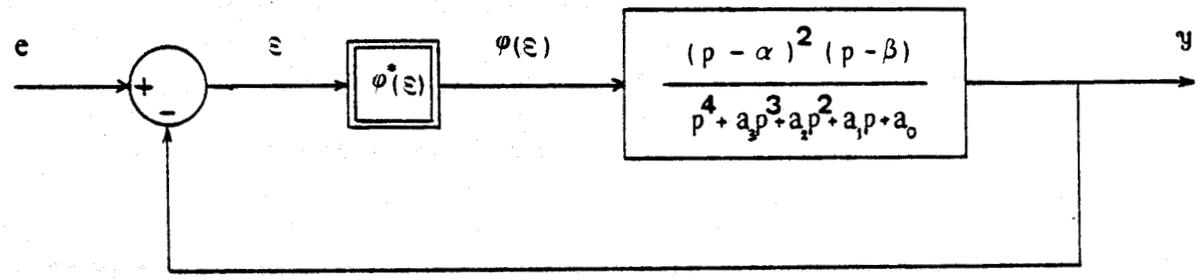


Figure (II-4)

Il s'agit de trouver pour le système décrit figure(II-4) une représentation matricielle qui permette de traiter la stabilité du mouvement en réponse à une entrée donnée. Posons  $N(p) = (p - \alpha)^2 (p - \beta)$   
 $D(p) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$   
 $D(\alpha) \cdot D(\beta) \neq 0$

Il n'est pas possible de définir un changement de base mettant la matrice du régime libre sous une forme en flèche dont le seul terme non-constant soit situé dans la dernière ligne, dernière colonne : en effet, le numérateur  $N(p)$  possède un zéro double  $\alpha$ . Nous nous proposons donc d'identifier la matrice de système à la forme (II-69) :

$$B(\epsilon) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & \alpha & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \beta & b_3 \\ 1 & 1 & 1 & f^*(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (II-69)$$

où  $b_1, b_2, b_3$  sont des constantes.

Cette matrice sera semblable à une forme compagnon de type II si et seulement si on peut trouver un vecteur  $h$  constant, un vecteur  $v(\epsilon)$  et une matrice  $A_0$  constante tels que :

$$B(\epsilon) = A_0 + v(\epsilon) h^T \quad (II-70)$$

$$\text{et rang} \{h, A_0^T h, A_0^{T2} h, A_0^{T3} h\} = 4 \quad (II-71)$$

$$\text{Posons } \begin{cases} A_0 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & \alpha & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \beta & b_3 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \\ h^T = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \\ v^T(\epsilon) = (0 \ 0 \ 0 \ f^* - \alpha) \end{cases} \quad (II-72)$$

l'égalité (II-70) est alors vérifiée.

$$\text{Posons } b = b_1 + b_2 + b_3 \quad (II-73)$$

Il vient alors les expressions (II-74) et (II-75) :

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_0^T h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad A_0^{T2} h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta - \alpha \\ +\alpha^2 \end{pmatrix} \quad A_0^{T3} h = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha^2 + b \\ \alpha^2 + b \\ \beta^2 + \alpha^2 - \alpha\beta + b \\ b_1 + b_3(\beta - \alpha) - \alpha(b + \alpha^2) \end{pmatrix} \quad (II-74)$$

$$\det(h, A_0^T h, A_0^{T2} h, A_0^{T3} h) = (\alpha - \beta)^2 \quad (II-75)$$

Ce déterminant est non nul si et seulement si  $\alpha \neq \beta$ .

Le polynôme symbolique du système fig.(II-4) est

$p(\lambda, \epsilon) = D(\lambda) + \varphi^*(\epsilon) N(\lambda)$ . Le système décrit

fig.(II-4) peut donc être représenté par la matrice  $B(\epsilon)$

(II-69) sous forme (II-76) :

$$\dot{y} = B(\epsilon) y, \quad y^T \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} = \epsilon \quad (II-76)$$

si et seulement si sont vérifiées (II-77) et (II-78) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq \beta \end{array} \right. \quad (II-77)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(\lambda I - B(\epsilon)) = D(\lambda) + \varphi^*(\epsilon) N(\lambda) \end{array} \right. \quad (II-78)$$

En supposant  $\alpha \neq \beta$ , l'identification (II-78) des polynômes symboliques donne (II-79) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 \beta (\varphi^* + f^*) = a_0 + b_1(\alpha\beta - \beta) + b_2(\alpha\beta) + b_3(\alpha^2) \\ (\alpha^2 + 2\alpha\beta)(\varphi^* + f^*) = -a_1 + b_1(\alpha) + b_2(\alpha + \beta) + b_3(2\alpha) - \alpha^2 \beta \\ (2\alpha + \beta)(\varphi^* + f^*) = a_2 + b_1 + b_2 + b_3 - \alpha^2 - 2\alpha\beta \\ (\varphi^* + f^*) = -a_3 - 2\alpha - \beta \end{array} \right. \quad (II-79)$$

Application :

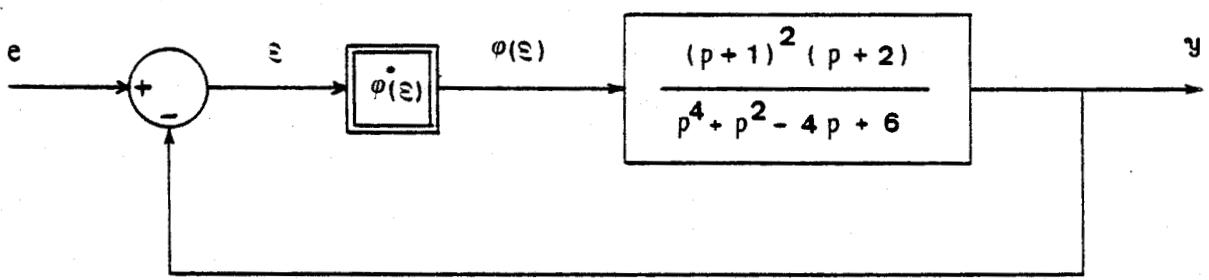


Figure (II-5)

Le régime libre du système décrit fig.(II-5) peut être représenté par l'équation d'état (II-80) :

$$\dot{x}(t) = B(\epsilon) \cdot x(t) \quad (II-80)$$

avec  $B(\epsilon) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 15/4 \\ 1 & -1 & 0 & -9/4 \\ 0 & 0 & -2 & -25/4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 - \varphi^*(\epsilon) \end{bmatrix}$

Après un changement de base diagonal D sur B ( $\epsilon$ ), nous obtenons une matrice M ( $\epsilon$ ) symétrique, caractérisant de manière suffisante [18] la stabilité de (II-80) :

$$M(\epsilon) = \frac{[D^{-1}B(\epsilon)D] + [D^{-1}B(\epsilon)D]^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 19/8 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 19/8 & 0 & 0 & 4 - \varphi^*(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (\text{II-81})$$

Les conditions de KOTELYANSKI appliquées à M ( $\epsilon$ ) nous donnent la condition suffisante de stabilité du système décrit figure (II-5) :

$$\forall \epsilon, \quad \varphi^*(\epsilon) \geq 10,35 \quad (\text{II-82})$$

L'inégalité (II-82) n'est pas stricte du fait de l'arrondi effectué pour le calcul.

Le domaine de variation de  $\varphi(\epsilon)$  correspondant est représenté figure (II-6) en hachuré. L'axe  $\epsilon = 0$  est exclu de ce domaine par hypothèse (le gain  $\varphi^*(\epsilon)$  doit en effet rester borné).

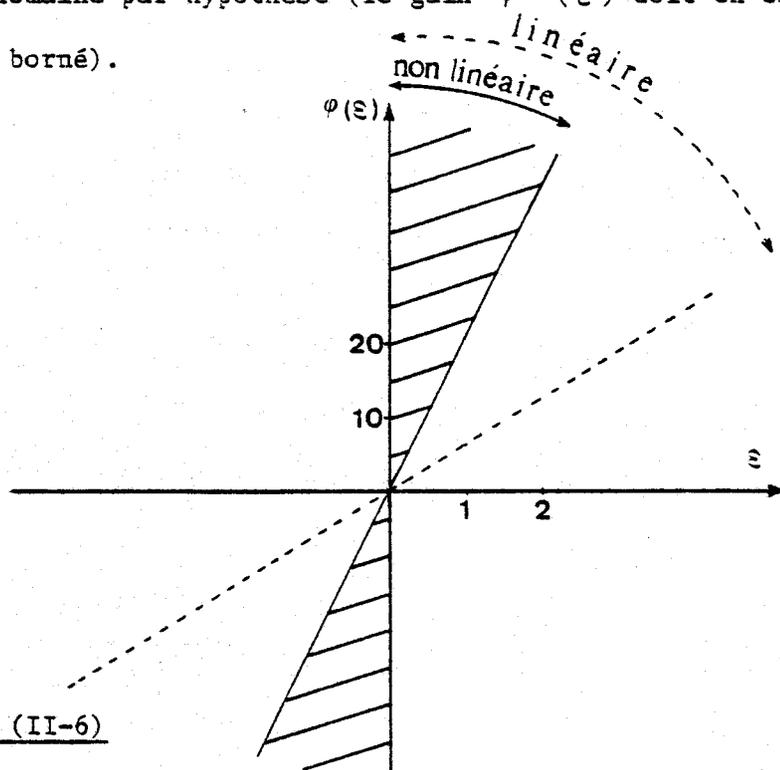


FIGURE (II-6)

Si le système était linéaire, pour  $\varphi^*(\epsilon) = K$ , les conditions de stabilité seraient  $K \geq 3,28$ .

### III.5. Résumé pratique sur l'utilisation du polynôme symbolique dans la mise en équation

L'identification de deux matrices au moyen du polynôme symbolique est réalisable lorsque :

- 1) Les matrices sont toutes deux représentatives de systèmes à non-linéarités de rang 1, et de même type : les termes non constants doivent pouvoir être regroupés dans une même colonne ou ligne et doivent dépendre des mêmes variables  $x$  et/ou  $t$ . Les matrices s'écrivent donc sous la forme :

$$A_0 + v(x,t) \cdot h^T \text{ ou } A_0^T + hv(x,t)^T.$$

- 2) Chaque matrice peut s'écrire sous forme compagnon non constante par changement de base. Il suffit par exemple de vérifier une des deux conditions (a) ou (b) :

(a) le polynôme symbolique de la matrice n'a pas de zéro indépendant de  $(x,t)$

$$(b) \text{Rang} \left\{ h, A_0 h, A_0^2 h \dots, A_0^k h \dots \right\} = q$$

Dans ces conditions, les matrices sont semblables si et seulement si leurs polynômes symboliques sont égaux.

Dans le cas où les matrices considérées ne sont pas semblables à une forme compagnon simple, l'identification est encore possible mais s'avère plus complexe. Il faut alors décomposer chaque matrice sous une forme triangulaire par blocs en utilisant l'algorithme décrit dans la démonstration du Théorème 1, chapitre I.

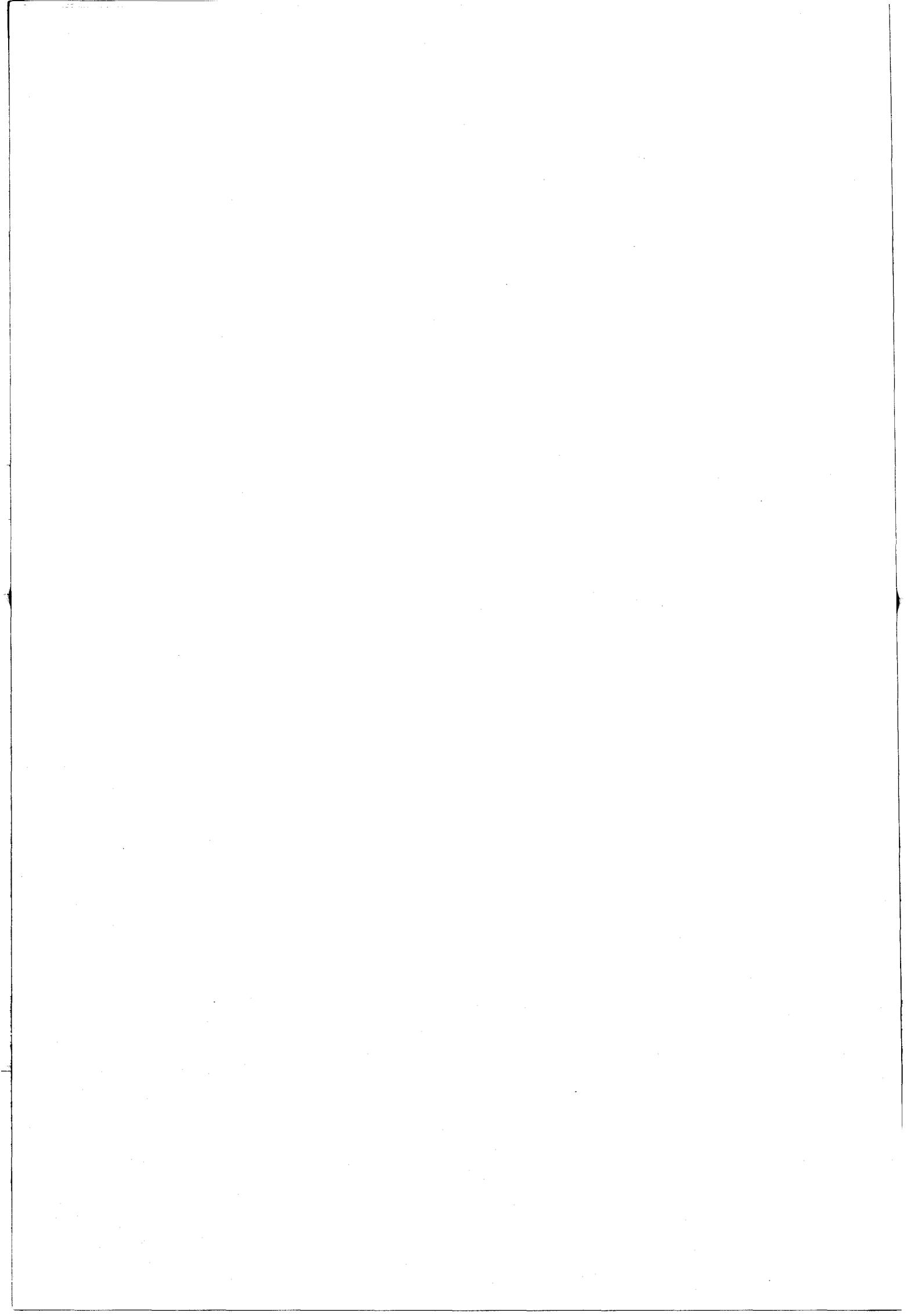
#### IV - CONCLUSION

L'introduction d'un polynôme symbolique permet de simplifier la mise en équation des systèmes continus non-linéaires. Ce polynôme est invariant dans tout changement de représentation de type changement de base : il permet donc l'identification de deux matrices semblables, tout comme pour des systèmes linéaires. L'une de ces deux matrices peut notamment avoir une forme définie a priori.

Le cas très important de la formulation en flèche mince a été envisagé. Le polynôme symbolique étant déterminé pour une forme, l'obtention de matrices semblables est immédiate. De plus, tout système à non-linéarités de rang 1 dont le polynôme symbolique n'a pas de racine constante peut se représenter sous forme en flèche mince déterminée par la méthode précédente. Ceci permet de passer du schéma-bloc de certains processus à leur représentation matricielle en flèche, en appliquant des règles de calcul élémentaires.

Nous allons montrer maintenant que, dans de nombreux cas, le calcul du changement de base effectif donnant la représentation finale n'est pas nécessaire : en effet, il est possible de connaître une des composantes du vecteur état associé à cette représentation.

L'étude de la stabilité peut alors être menée sur une forme choisie et permettant l'application de critères pratiques.



## CHAPITRE III

POLYNOME SYMBOLIQUE ET ETUDE DE LA STABILITEDES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRESINTRODUCTION

Les méthodes proposées permettent de mettre en oeuvre la matrice caractéristique de la représentation d'un système sans avoir à préciser l'expression du vecteur état qui s'y rattache. Ceci permet d'effectuer une étude rapide : il suffit de proposer à priori une forme de représentation, puis de vérifier que cette hypothèse est justifiée pour le système. On sait alors déterminer le changement de base entre les deux formes, par passage de chaque matrice à la même forme compagnon. Cependant, nous allons voir que dans de nombreux cas, la connaissance de l'expression du vecteur état n'est pas nécessaire : le long calcul attaché au changement de base peut alors être évité.

Ainsi nous n'envisageons pas dans leur ensemble les méthodes d'étude qui nécessitent l'explicitation des composantes du vecteur état. Par contre, certaines propriétés d'un système à non-linéarités de rang 1 peuvent être mises en évidence sur une représentation du régime libre, du type  $\dot{x} = M(x,t) \cdot x$  et cela même si les seuls termes explicités sont  $M(x,t)$  et la dernière composante de  $x$ .

C'est le cas de la stabilité globale d'un système régulateur et de la stabilité locale, qui pourront être traitées en fonction des paramètres et caractéristiques propres du processus.

Nous étudierons donc ces deux propriétés à partir d'une mise en équation par polynôme symbolique.

86

## I - STABILITE GLOBALE DES SYSTEMES A NON-LINEARITES DE RANG 1

### I.1. Utilisation des mises en équations par polynôme symbolique. Exemple.

Considérons un processus régulateur représenté par l'équation matricielle de son régime libre (III-1) :

$$\dot{x}(t) = A(x,t) x(t) \quad (\text{III-1})$$

où  $A(x,t)$  est une matrice à non-linéarités de rang 1.

Si  $P$  est une matrice régulière,  $Px(t)$  est un vecteur état possible. Son comportement sera caractéristique de la stabilité du processus. Pour conclure à la stabilité (asymptotique) globale de (III-1), il est donc suffisant de montrer l'existence d'une matrice régulière  $P$  telle que le système décrit par (III-2) soit globalement (asymptotiquement) stable :

$$\dot{y}(t) = PA(x,t) P^{-1}y(t) \quad (\text{III-2})$$

Ce point de vue correspond tout à fait aux méthodes de mise en équation proposées dans le chapitre II. Une forme de matrice  $B(x,t)$ , à coefficients indéterminés, est proposée à priori. On étudie ensuite sa similitude avec  $A(x,t)$ .

Lorsqu'un certain choix des coefficients de  $B(x,t)$  permet de rendre  $A(x,t)$  et  $B(x,t)$  semblables, la vérification de conditions de stabilité globale du système (III-3) associé à  $B(x,t)$  permet de conclure à celle de (III-1) :

$$\dot{y}(t) = B(x,t) \cdot y(t) \quad (\text{III-3})$$

Il faut noter que, même dans le cas où les non-linéarités peuvent dépendre de plusieurs variables, l'expression des gains équivalents  $f_i^*(x,t)$  est conservée à travers les changements de base : les conditions de stabilité porteront donc, indépendamment de la base choisie, sur les caractéristiques du système, que celui-ci soit de type I ou II. La stabilité globale peut donc dans tous les cas être étudiée à partir d'une mise en équation par polynôme symbolique.

Exemple :

Dans l'exemple III.3.5 de mise en équation proposé dans le deuxième chapitre, nous avons obtenu une représentation en flèche mince sous forme (III-4) :

$$B(\epsilon) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +(4+2(1+f_1^*)+1,5f_2^*) \\ 0 & -0,5 & 0 & -(2,875-0,7875(1+f_1^*)) \\ 0 & 0 & -2 & -(4+6f_2^*) \\ 2 & +1,333 & +0,133 & -(5+0,5(1+f_1^*)+2f_2^*) \end{bmatrix} \quad (III-4)$$

Nous allons chercher les domaines de variations de  $f_1^*(\epsilon)$  et  $f_2^*(\epsilon)$  pour lesquels les conditions de stabilité du linéaire sont d'une part vérifiées et d'autre part suffisantes pour conclure à la stabilité du système associé à la matrice  $B(\epsilon)$ .

La matrice  $B(\epsilon)$  doit être sa propre pseudo-majorante [10] ce qui s'exprime par (III-5) :

$$\left. \begin{aligned} 4 + 2(1+f_1^*) + 1,5 f_2^* &> 0 \\ 2,875 - 0,7875(1+f_1^*) &< 0 \\ 4 + 6 f_2^* &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (III-5)$$

soit respectivement :

$$\left. \begin{aligned} 2f_1^* + 1,5 f_2^* + 6 &\geq 0 \\ f_1^* &\geq 2,651 \\ f_2^* &\leq -2/3 \end{aligned} \right\} \quad (III-6)$$

Le point  $(f_1^*(\epsilon), f_2^*(\epsilon))$  doit donc appartenir au domaine  $\mathcal{D}_1$  hachuré (fig.(III-1)) délimité par les droites  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ .

La stabilité asymptotique sera alors assurée si les conditions de KOTELYANSKI sont vérifiées. Dans le cas de cette forme en flèche à termes diagonaux négatifs [4], elles sont réduites à (III-7) :

$$\exists \lambda > 0, \det(\lambda I_4 - B(\epsilon)) > 0 \quad (III-7)$$

Cette condition portant sur le polynôme symbolique de  $B(\epsilon)$  :

$$p(\lambda, \epsilon) = \lambda^4 + p_3(\epsilon)\lambda^3 + p_2(\epsilon)\lambda^2 + p_1(\epsilon)\lambda + p_0(\epsilon) \quad (III-8)$$

se résume donc en (III-9) :

$$p_0(\epsilon) = \det B(\epsilon) = 4(1 + f_1^*(\epsilon)) + f_2^*(\epsilon) > 0 \quad (III-9)$$

Le point  $(f_1^*(\varepsilon), f_2^*(\varepsilon))$  doit être situé (fig.III-1) dans le demi-plan délimité par la droite  $\Delta_S$  d'équation (III-10):

$$\Delta_S : 4f_1^* + f_2^* + 4 = 0$$

et contenant le point 0.

Cette dernière propriété est toujours vérifiée dans  $\mathcal{D}_1$ . Ainsi  $\mathcal{D}_1$  est un domaine suffisant de stabilité.

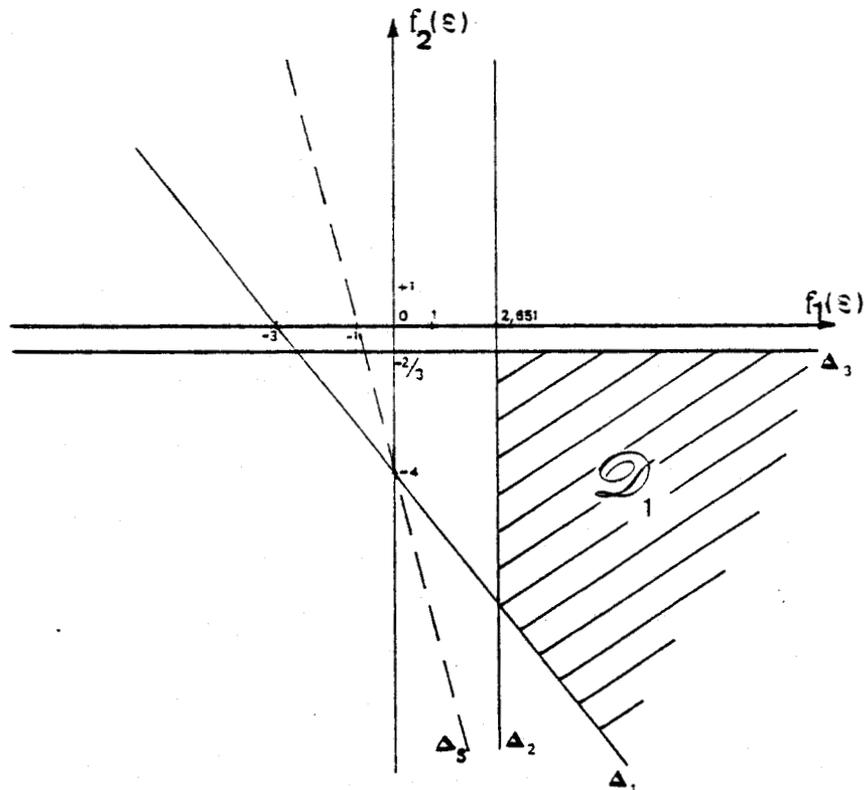


Figure (III-1): Domaine d'application et de vérification des conditions de stabilité du linéaire.

Dans cet exemple,  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions d'un même paramètre  $\varepsilon$ , qui est une composante du vecteur état dans les deux bases considérées.

L'interprétation des conditions de stabilité se fait donc sur les caractéristiques propres  $f_1(\varepsilon)$  et  $f_2(\varepsilon)$  du processus, comme nous l'avons déjà remarqué plus généralement.

## I.2. Réduction de dimensionalité. Exemple.

Nous avons, dans le premier chapitre (§ IV-1), décrit un changement de base permettant d'écrire la matrice  $A(x,t)$  caractéristique d'un système à non-linéarités de rang 1 sous une forme factorisée  $F(x,t)$  ou  $F^T(x,t)$  définie par (III-11):

$$F(x,t) = \begin{bmatrix} F_{11} & & & F_{11}(x,t) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{ii} & F_{in}(x,t) \\ & & & \vdots \\ & & & F_{nn}(x,t) \end{bmatrix} \quad (\text{III-11})$$

Les  $F_{in}(x,t)$  sont bornées quand  $(x,t)$  varie,  $\forall i = 1 \dots n-1$ .

Si la décomposition de  $A(x,t)$  en  $A_0 + v(x,t) h^T$  a été effectuée de façon à ce que les parties réelles des valeurs propres des  $F_{ii}$  ( $i = 1$  à  $n-1$ ) soient toutes négatives, la stabilité du  $n^{\text{ième}}$  sous-système  $S_n$  caractérisé par la matrice d'ordre  $n$   $F_{nn}(x,t)$  est nécessaire et suffisante à la stabilité du système global décrit par (III-11).

Dans le cas où la décomposition introduit effectivement une ou des matrices  $F_{ii}$ , l'ordre de la matrice  $F_{nn}(x,t)$  est strictement inférieur à celui de  $A(x,t)$ .

Il y a alors réduction d'ordre dans l'étude de la stabilité du système. Nous allons appliquer cette méthode et montrer son intérêt sur un exemple.

### Exemple :

Soit le système décrit par son équation en régime libre :

$$\dot{x}(t) = A(x,t) x(t) \quad (\text{III-12})$$

avec :

$$A(x,t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & f_1(x,t) \\ -1 & -2 & 0 & f_2(x,t) \\ 1 & 1 & -1 & f_3(x,t) \\ 0 & 1 & 1 & f_4(x,t) \end{bmatrix} \quad (\text{III-13})$$

$f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont des fonctions de  $x$  et  $t$   
 $f_1$  et  $f_2$  sont bornées pour  $(x,t) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}_+$

Nous pouvons poser :

$$A(x,t) = A_0 + v(x,t) h^T \tag{III-15}$$

avec :

$$h^T = (0,0,0,1)$$

$$v(x,t)^T = (f_1, f_2+1, f_3-2, f_4)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{III-17}$$

Le calcul des vecteurs  $h, A_0^T h, A_0^{T2} h \dots$  donne :

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_0^T h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_0^{T2} h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = h - A_0^T h \tag{III-18}$$

Le polynôme minimal de  $h$  relatif à  $A_0^T$  est donc  $\lambda^2 + \lambda - 1$  ; son degré est inférieur à 4. Il est donc possible de décomposer  $A(x,t)$  en une matrice triangulaire supérieure par blocs.

Pour cela, il suffit de choisir  $h$  et  $A_0^T h$  comme derniers vecteurs d'une base dans laquelle nous allons exprimer  $A^T(x,t)$ . Il vient (III-19) :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III-19}$$

$$P^{-1T} A(x,t) P^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & f_1(x,t) \\ -1 & -2 & 0 & f_2(x,t) \\ 0 & 0 & -1 & f_2(x,t)+f_3(x,t) \\ 0 & 0 & 1 & f_4(x,t) \end{pmatrix} \tag{III-20}$$

le changement de base  $Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

permet d'écrire la forme canonique :

$$Q P^{-1T} A(x,t) P^T Q^{-1} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & -3 & -2 & 2-f_1+2f_2 \\ 1 & -4 & 0 & f_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & f_2+f_3+f_4 \\ 0 & 0 & 1 & f_4 - 1 \end{array} \right) \tag{III-22}$$

la matrice  $F_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$  a ses deux valeurs propres  $-1$  et  $-3$  négatives.

On peut réduire de façon équivalente l'étude de la stabilité de (III-12) à celle de (III-23) :

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & f_2(x,t) + f_3(x,t) + f_4(x,t) \\ 1 & f_4(x,t) - 1 \end{pmatrix} \cdot y = F_{22}(x,t) y \quad (\text{III-23})$$

Par les méthodes exposées précédemment,  $F_{22}(x,t)$  se met immédiatement sous forme "en flèche"  $F_{22}'(x,t)$  (III-25), de polynôme symbolique  $p(\lambda, x, t)$  décrit en (III-24) :

$$p(\lambda, x, t) = \lambda^2 - (f_4(x,t) - 1)\lambda - (f_2(x,t) + f_3(x,t) + f_4(x,t)) \quad (\text{III-24})$$

$$F_{22}'(x, t) = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha^2 - \alpha(1-f_4) + f_2 + f_3 + f_4 \\ 1 & f_4 - \alpha - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-25})$$

Selon les expressions des  $f_i$  ( $i = 2, 3$  ou  $4$ ) la stabilité du système correspondant peut être traitée par les méthodes usuelles. Notamment, dans le cas où il existe un réel  $\alpha$  tel que  $p(\alpha, x, t)$  soit toujours négatif, l'application des conditions du linéaire se réduit au critère de ROUTH-HURWITZ sur le polynôme symbolique :

Il vient la condition de stabilité :

$$\exists \alpha < 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} \times \mathcal{T} \quad \begin{cases} 1 - f_4(x) < 0 \\ \alpha^2 + \alpha(1 - f_4(x)) < f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

## II - ETUDE DE LA STABILITE VIS-A-VIS DES CONDITIONS INITIALES

Nous avons précédemment étudié la stabilité globale de certains systèmes : cependant il est des cas où il n'est pas possible de prouver que l'état  $x(t)$  d'un processus converge vers sa position d'équilibre indépendamment de sa valeur initiale  $x(t_0)$ . Il s'agit alors de rechercher un domaine d'attraction, ou de stabilité vis-à-vis des conditions initiales, défini comme un ensemble de valeurs du vecteur état à  $t = t_0$  garantissant sa convergence asymptotique vers sa position d'équilibre [28] [29]. (termes définis dans l'annexe A.)

Dans un premier temps, nous proposons deux déterminations suffisantes d'un tel domaine pour une large classe de systèmes continus stationnaires.

Ces deux méthodes sont ensuite appliquées aux systèmes à non-linéarités de rang 1, et illustrées par des exemples.

### II.1. Classe de systèmes étudiés

Nous allons tout d'abord particulariser la partie des composantes du vecteur état  $x$  qui intervient explicitement dans les éléments non-linéaires du système. Celui-ci est alors défini par

(III-27) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(x_1) x(t) \\ t \in \mathcal{I} \\ x \in \mathcal{R}^q \\ x^T = (x_1^T, x_2^T) \quad x_1 \in \mathcal{R}^{q_1} \quad x_2 \in \mathcal{R}^{q_2} \\ A : \mathcal{R}^{q_1} \rightarrow \mathcal{R}^{q \times q} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III-27)} \\ \\ \\ \\ q_1 + q_2 = q \end{array}$$

La relation (III-27) peut aussi s'exprimer sous la forme

(III-28) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) & A_{12}(x_1) \\ A_{21}(x_1) & A_{22}(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{(III-28)}$$

$A_{ij}(x_1) \in \mathcal{R}^{q_i \times q_j} \quad i, j = 1 \text{ ou } 2$

Cette relation permet d'introduire une matrice pseudo-majorante  $M(x_1)$  adaptée à l'étude, associée à deux normes vectorielles  $p_1(x_1)$  et  $p_2(x_2)$  définies en (III-29) :

$$\left. \begin{array}{l} p_1(\cdot) : \mathcal{R}^{q_1} \rightarrow \mathcal{R}^{k_1} \\ p_2(\cdot) : \mathcal{R}^{q_2} \rightarrow \mathcal{R}^{k_2} \\ k_1 + k_2 = k \end{array} \right\} \quad \text{(III-29)}$$

$p_{ij}(A_{ij}(x_1))$  étant la matrice pseudo-majorante associée à  $A_{ij}(x_1)$  pour ces normes, il vient (III-30) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(x_1) = \begin{bmatrix} p_{11}[A_{11}(x_1)] & p_{12}[A_{12}(x_1)] \\ p_{21}[A_{21}(x_1)] & p_{22}[A_{22}(x_1)] \end{bmatrix} \\ M(x_1) \in \mathcal{R}^{k \times k} \end{array} \right. \quad \text{(III-30)}$$

Toute matrice  $M^*(x_1)$  telle que l'inégalité (III-31) :

$$M^*(x_1) \geq M(x_1) \quad \text{(III-31)}$$

soit vérifiée composante à composante est aussi une pseudo-majorante du système (III-27).

Il vient le théorème (III-1) :

théorème (III-1) [10] :

Si  $M^*(x_1)$  est l'opposée d'une M-matrice pour tout  $x_1 \in \mathcal{R}^{q_1}$   
et si les conditions initiales du système décrit par (III-32) :

$$\dot{z} = M^*(x_1) \cdot z$$

$$z^T = (z_1^T, z_2^T) \quad z_1 \in \mathcal{R}^{k_1}, \quad z_2 \in \mathcal{R}^{k_2}$$

satisfont la relation (III-33) :

$$\left[ z^T \right]_{t=t_0} = \left[ p_1^T(x_1), \quad p_2^T(x_2) \right]_{t=t_0} \quad (\text{III-33})$$

alors on a composante à composante l'inégalité (III-34) :

$$z^T \geq \left[ p_1^T(x_1), \quad p_2^T(x_2) \right] \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{III-34})$$

De plus,  $z$  et  $x$  convergent asymptotiquement vers les positions d'équilibre  $z = 0$  et  $x = 0$ .

Il convient maintenant de déterminer à partir de ce résultat des conditions permettant de conclure à la stabilité vis-à-vis des conditions initiales.

## II.2. Détermination d'un domaine d'attraction [28]

### 2.1. Définition d'une classe de normes

Nous proposons maintenant de définir deux critères basés sur deux approches différentes des systèmes majorants :

- l'un consistant à appliquer la seconde méthode de LYAPUNOV à un système majorant non linéaire [30] [31]
- l'autre utilisant un système linéaire asymptotiquement stable qui majore localement le système réel.

A cet effet, il convient par la suite de définir une classe particulière  $\Phi$  de normes scalaires notées  $\phi(\cdot)$  telles que, pour tous les vecteurs  $u, v$  d'un même espace  $\mathcal{R}^s$  ( $s \in \mathcal{N}$ ), la vérification composante à composante de la relation (III-35) :

$$0 < u \leq v \quad (\text{III-35})$$

implique celle de (III-36) :

$$\phi(u) < \phi(v) \quad (\text{III-36})$$

Les normes  $\phi$  (.) peuvent être par exemple de HOLDER et définies de manière naturelle à partir des composantes du vecteur de  $\mathcal{R}^s$  considéré [45].

Remarque :

La condition imposée ici est généralement vérifiée.

Cependant, certaines normes ne conviennent pas. La norme définie par  $n(x_1, x_2) = |x_1| + |x_1 - x_2|$ , par exemple, n'appartient pas à la classe  $\Phi$ . On a en effet, composante à composante :

$$(0,0) \leq (1,0) \leq (1,1)$$

et par contre  $n(1, +1) \leq n(1,0)$ .

La relation d'ordre n'est pas conservée dans ce cas.

### II.2.2. Premier critère : système majorant non-linéaire localement stable

Notons  $S_{\phi\phi}$  (.) la matrice pseudo-majorante associée à la norme scalaire de vecteur  $\phi$  (.) (III-37) :

$$\phi \in \Phi \quad \phi : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}^+ \quad (\text{III-37})$$

Par extension de langage nous écrirons (III-38) :

$$\phi(z) = \phi(z_1, z_2) \quad (\text{III-38})$$

Critère III-1 : Le domaine défini par l'inégalité

$$\phi(p_1(x_1), p_2(x_2)) \leq \beta \quad (\text{III-39})$$

est un domaine d'attraction pour l'état d'équilibre  $x = 0$  du processus décrit par la relation (III-27) si :

$$(\exists Y > 0) \quad (\forall x \in \mathcal{R}^q) \quad (\phi(p_1(x_1), 0) < \beta \Rightarrow S_{\phi\phi}(Mbx) \leq -Y < 0) \quad (\text{III-40})$$

Démonstration du Critère III-1 :

Nous allons définir une fonction candidate à LYAPUNOV  $v(z)$  continue et telle que :

$$\begin{cases} v(z) = \phi(z) \\ z^T = (p_1^T(x_1), p_2^T(x_2)) \end{cases} \quad (\text{III-41})$$

$$\text{Il vient : } D^+v(z) \leq S_{\phi\phi}(M(x_1))v(z) \quad (\text{III-42})$$

Lorsque la condition (III-43) :

$$S_{\phi\phi}(M(x_1)) \leq -\gamma < 0 \quad (\text{III-43})$$

est vérifiée tous au long des trajectoires du système, la stabilité asymptotique en découle. Ceci se produit si l'évolution de  $x(t)$  se fait dans le domaine (III-39).

Supposons (III-40) vérifiée.

Soit  $x_0$  un vecteur de conditions initiales appartenant au domaine défini par (III-39). On a alors :

$$\phi(p_1(x_0), 0) \leq \phi(p_1(x_0), p_2(x_0)) \leq \beta \quad (\text{III-44})$$

et par conséquent :

$$\left[ S_{\phi\phi}(M(x_1)) \right]_{t=t_0} \leq -\gamma < 0 \quad (\text{III-45})$$

La fonction  $v(z)$  est donc décroissante à  $t = t_0$ ;  $v(z)$

étant continue, le vecteur  $x(t)$  restera donc dans le domaine défini par l'intérieur de l'équipotentielle de LYAPUNOV  $v(p_1(x_1), p_2(x_2)) = \beta$ . Dans ce domaine, le système converge vers  $x = 0$ .

### 2.3. Deuxième critère : système linéaire stable localement majorant

Nous allons maintenant supposer que  $M^*(x_1)$  peut être choisie constante. La loi régissant l'évolution du système majorant peut alors être explicitée par intégration de (III-32) et (III-33). Il est donc possible de majorer cette évolution lorsque le système linéaire est stable.

Notons  $M^*(\alpha)$ , si elle existe, une matrice à coefficients constants, définie dans un voisinage de l'origine et vérifiant les inégalités (III-31) pour tout  $x$  satisfaisant la contrainte (III-46):

$$\phi(p_1(x_1)) \leq \alpha, \quad \alpha \in \mathcal{R} \quad (\text{III-46})$$

Critère III-2 : Soit le système non-linéaire décrit par (III-27) :

$$\dot{x}(t) = A(x_1)x(t) \quad (\text{III-27})$$

S'il existe une norme scalaire  $\phi \in \Phi$  (III-36) et une constante  $\alpha$  positive telles que :

(III.2.a) Le système décrit par l'équation

$$\dot{z} = M^*(\alpha) z \tag{III-47}$$

est un majorant linéaire asymptotiquement stable du système (III-27) dans le voisinage de l'origine défini par :

$$\phi(p_1(x_1)) \leq \alpha \tag{III-48}$$

(III.2.b) Il existe un voisinage de l'origine  $\mathcal{F}$  inclus dans  $\mathcal{D}^{k_1 \times k_2}$  tel que si les conditions initiales de (III-47) sont dans  $\mathcal{F}$  on ait :

$$\max_{t \in \mathcal{F}} \phi(z_1(t)) < \alpha \tag{III-49}$$

alors l'état d'équilibre  $x_e = 0$  du processus dont l'évolution est décrite par la relation (III-27) est asymptotiquement stable dans le domaine  $\mathcal{D}_0$  défini à partir des vecteurs  $x$  tels que :

$$(p_1(x_1), p_2(x_2)) \in \mathcal{F}$$

Démonstration : Posons  $x(t_0) = x_0$ .

D'après la définition de  $\mathcal{D}_0$ , il vient :

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ x_0, \text{ (III-47) vérifie (III-49) pour tout } z_0 = p(x_0) \right\}$$

Considérons la solution  $z(t)$  du système (III-47) définie à partir des conditions initiales  $z(t_0) = p(x_0) = z_0$ .

L'hypothèse (III.2.b) étant supposée vérifiée, l'évolution de  $z(t)$  se fait dans le domaine défini par  $\phi(z_1) < \alpha$

Le système (III-47) étant asymptotiquement stable, il suffit de démontrer qu'il reste majorant de (III-27) et donc que :

$$\forall t \in \mathcal{F}, p_1(x_1(t)) \leq \alpha$$

À  $t = t_0$ ,  $x_0$  appartient à  $\mathcal{D}_0$ .

$\phi$  est une norme scalaire, donc continue sur  $\mathcal{D}^k$ .

Par conséquent,  $\phi(p_1(x_1(t)))$  est une fonction continue et la trajectoire de  $x(t)$  ne peut sortir du domaine  $\mathcal{D}_0$  qu'en passant par un état tel que :

$$\phi(p_1(x_1)) = \alpha \tag{III-50}$$

D'après (III.2.a), on a alors:  $z_1 \geq p_1(x_1)$

$$\text{il vient : } \phi(z_1) \geq \phi(p_1(x_1)) \tag{III-52}$$

Mais (III-52) contredit la définition de  $\mathcal{D}_0$ .  
 $x(t)$  restera donc dans  $\mathcal{D}_0$  pour tout  $t$  dans  $\mathcal{F}$ .

2.4. Application aux systèmes de type LUR'E POSTNIKOV

Ces méthodes de détermination de domaine d'attraction sont particulièrement adaptées à ce type de systèmes (décrits en (I-10), (I-11), même lorsque plusieurs lignes (ou colonnes) de la matrice caractéristique du régime libre sont non constantes.

Les composantes de  $x \in \mathbb{R}^q$  traitées par les non-linéarités sont alors réduites au vecteur

$$y_1 = \sigma = Cx \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{q_1}$$

Définissons  $y_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$  tel que  $y^T = (y_1^T, y_2^T)$  soit un vecteur état du système.

Pour cela, nous introduisons la matrice de changement de base  $P \in \mathbb{R}^{q \times q}$  constante et régulière :

$$P = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \tag{III-53}$$

avec C, D, M et N matrices  $q_1 \times q$ ,  $q_2 \times q$ ,  $q \times q_1$  et  $q \times q_2$

On a alors (III-54) :

$$PL(t, x, \sigma)P^{-1} = PAP^{-1} + PB(t)\gamma^*(t, x, \sigma)CP^{-1} \tag{III-54}$$

Par hypothèse (III-53) C, D, M et N vérifient (III-55) et (III-56) :

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CM & CN \\ DM & DN \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} I_{q_1} & 0_{q_2 \times q_1} \\ \hline 0_{q_2 \times q_1} & I_{q_2} \end{array} \right] \tag{III-55}$$

$$\tag{III-56}$$

Il vient (III-57) :

$$PB(t)\gamma^*(t, x, \sigma)CP^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} PB\gamma^* & 0 \\ \hline (q \times q_1) & (q \times q_2) \end{array} \right] \tag{III-57}$$

D'après (III-54), l'équation du système s'écrit donc maintenant (III-58) :

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} A_{11}(t, x, \sigma) & A_{12} \\ A_{21}(t, x, \sigma) & A_{22} \end{bmatrix} \cdot y \tag{III-58}$$

Les matrices  $A_{12}$  et  $A_{22}$  étant constantes, l'étude de stabilité vis-à-vis des conditions initiales par les méthodes proposées est nettement simplifiée : les termes non constants sont regroupés dans les premières colonnes de la matrice.

## 2.5. Stabilité et fonction de LYAPUNOV

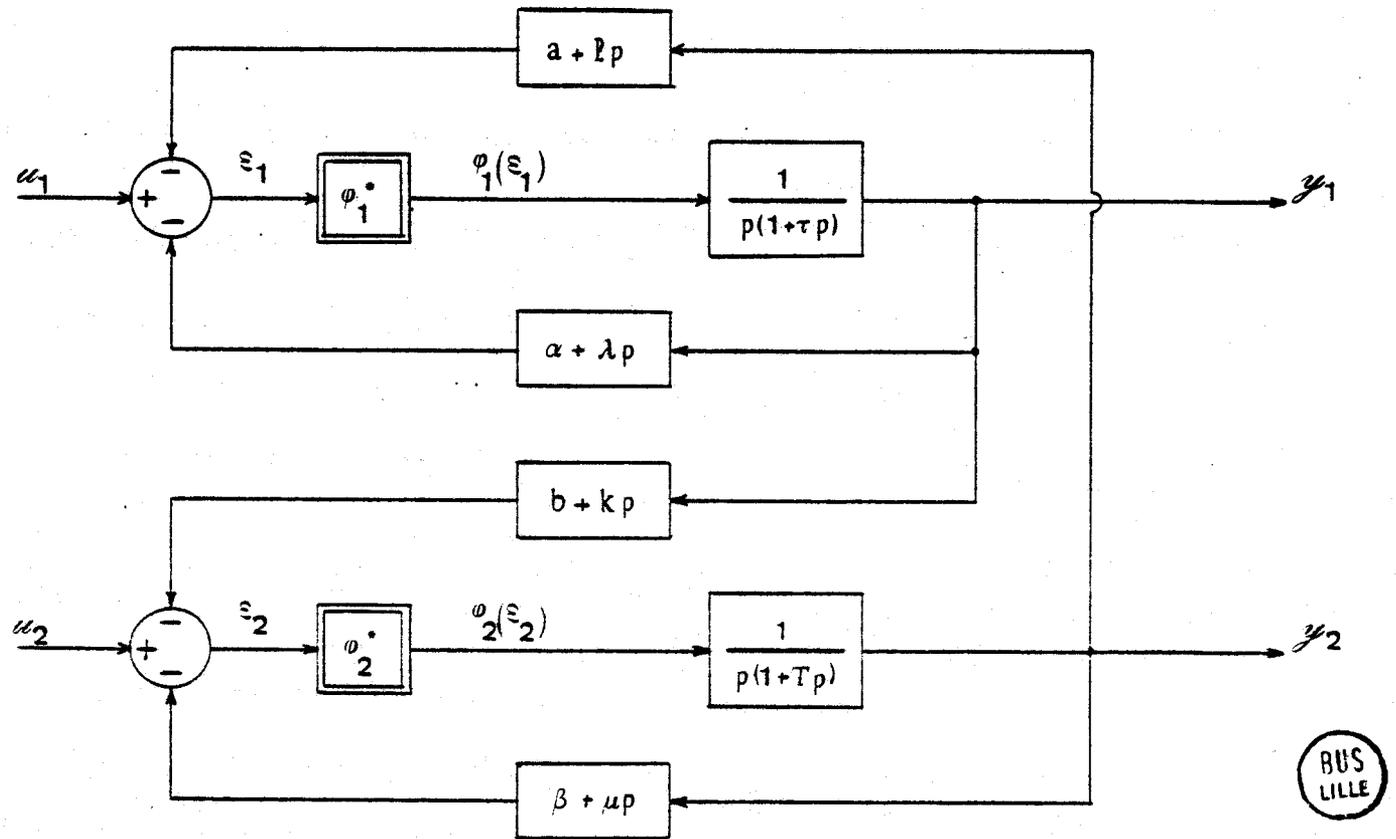
Dans le critère III-2, nous avons proposé d'étudier la stabilité d'un système non-linéaire sans faire intervenir de fonction de LYAPUNOV : il s'agit de majorer, même localement, le processus par un système linéaire dont l'évolution, calculable, doit rester dans un certain domaine.

Ce résultat confirme la généralité des méthodes de majoration, puisqu'elles élargissent le champ des méthodes traditionnelles d'étude des systèmes non-linéaires. Notons toutefois que d'autres critères conduisent à l'analyse de systèmes sans utiliser de fonction de LYAPUNOV (méthode du premier harmonique, de POPOV, etc...).

Par contre, dans le premier chapitre, nous avons envisagé une étude de stabilité à partir d'une fonction candidate particulière : cette fonction était de LYAPUNOV pour le système de comparaison, mais non pour le système initial. Comme nous l'avons déjà montré, (chapitre I, § II4), ce résultat original illustre parfaitement l'apport de la notion de système de comparaison dans l'analyse des systèmes non-linéaires.

2.6. Exemple d'application des deux critères. Changement de régime

Considérons le système constitué par deux filtres du second ordre à commande non-linéaire et interconnectés (fig.III-2).



BUS LILLE

Figure (III-2)

Lorsque l'entrée  $(u_1, u_2)$  est constante, le système peut se mettre en équations sous la forme (III-59) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\tau} \phi_1^* & \frac{l}{T} \phi_2^* & -\alpha + \frac{\lambda}{\tau} & -a + \frac{l}{T} \\ -\frac{k}{\tau} \phi_1^* & \frac{\mu}{T} \phi_2^* & -b + \frac{k}{\tau} & -\beta + \frac{\mu}{T} \\ \frac{1}{\tau} \phi_1^* & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} \phi_2^* & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

Nous supposons que :

$$\begin{cases} \tau > 0, T > 0 \\ \forall i = 1, 2, \phi_i^*(\varepsilon_i) > 0 \text{ si } \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$

Chaque fonction de transfert comporte un intégrateur pur. Les dérivées  $\dot{y}_1$  et  $\dot{y}_2$  des sorties  $y_1$  et  $y_2$  sont alors variables d'état.

Le système étant en équilibre pour un ensemble de consignes constantes  $(u_1, u_2)$ , une variation brusque de consigne de valeur  $(\Delta u_1, \Delta u_2)$  peut déstabiliser l'ensemble. Cependant, si le système reste stable, son seul état d'équilibre sera  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ , et donc d'après (III-59)

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . L'étude de la stabilité en réponse à deux échelons  $\Delta u_1$  et  $\Delta u_2$  se réduit donc à l'analyse de la convergence de l'état  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)^T$  vers sa position d'équilibre 0 pour des conditions initiales vérifiant (III-60) et (III-61) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{10} = \Delta u_1 \\ \dot{y}_{10} = 0 \end{cases} \quad \text{(III-60)} \quad \begin{cases} \varepsilon_{20} = \Delta u_2 \\ \dot{y}_{20} = 0 \end{cases} \quad \text{(III-61)}$$

Si on choisit la norme vectorielle  $p$  définie par (III-62) :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, p(x) = (|x_1| + |x_2|, |x_3|, |x_4|)^T$$

on obtient la matrice pseudo-majorante  $M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  en

flèche mince, à non-linéarités de rang 1, décrite en (III-63):

$$M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{bmatrix} \text{Max} \left\{ \varphi_1^* \left( \frac{-\lambda + |k|}{\tau} \right), \varphi_2^* \left( \frac{-\mu + |l|}{T} \right) \right\} & \frac{|\lambda - \alpha\tau| + |k - b\tau|}{\tau} & \frac{|\ell - aT| + |\mu - \beta T|}{T} \\ \frac{1}{\tau} \varphi_1^* & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ \frac{1}{T} \varphi_2^* & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

à laquelle on peut appliquer le critère III-1 :

posons :

$$\begin{cases} m_{11}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{Max} \left\{ \varphi_1^* \left( \frac{-\lambda + |k|}{\tau} \right), \varphi_2^* \left( \frac{-\mu + |l|}{T} \right) \right\} \\ m_{12} = \frac{|\lambda - \alpha\tau| + |k - b\tau|}{\tau} \\ m_{13} = \frac{|\ell - aT| + |\mu - \beta T|}{T} \end{cases}$$

les conditions de KOTELIANSKI s'écrivent alors (III-64) :

$$m_{11}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \varphi_1^*(\varepsilon_1) m_{12} + \varphi_2^*(\varepsilon_2) m_{13} < 0$$

Application numérique :

$$\left. \begin{cases} T=1 & \tau=1 \\ \lambda=5 & k=-1 & \alpha=4 & b=-2 \\ \mu=6 & \ell=2 & \beta=5 & a=2 \end{cases} \right\} \text{(III-65)}$$

Il vient :

$$\begin{cases} m_{11} = 4 \text{ Min} \{ \varphi_1^*(\varepsilon_1), \varphi_2^*(\varepsilon_2) \} \\ m_{12} = 2 \\ m_{13} = 1 \end{cases}$$

(III-64) devient alors :

$$4 \text{ Min} \{ \varphi_1^*(\varepsilon_1), \varphi_2^*(\varepsilon_2) \} > 2 \varphi_1^*(\varepsilon_1) + \varphi_2^*(\varepsilon_2)$$

ce qui détermine le domaine d'attraction  $\mathcal{D}_0$  défini par :

$$\mathcal{D}_0 = \{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \forall |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < \alpha, 0,5 \varphi_2^*(\varepsilon_2) < \varphi_1^*(\varepsilon_1) < 1,5 \varphi_2^*(\varepsilon_2) \}$$

Le réel  $\alpha$  dépend des formes de  $\varphi^*_1(\varepsilon_1)$  et  $\varphi^*_2(\varepsilon_2)$ .  
 Si par exemple  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des non-linéarités définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^3 + \varepsilon_1 \\ \varphi_2(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2^3 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

on a la condition :

$$-0.5 + \varepsilon_2^2 < \varepsilon_1^2 < 3\varepsilon_2^2 + 0.5$$

Ce qui définit le domaine ouvert  $\mathcal{D}_0$  (voir fig.III-3) :

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

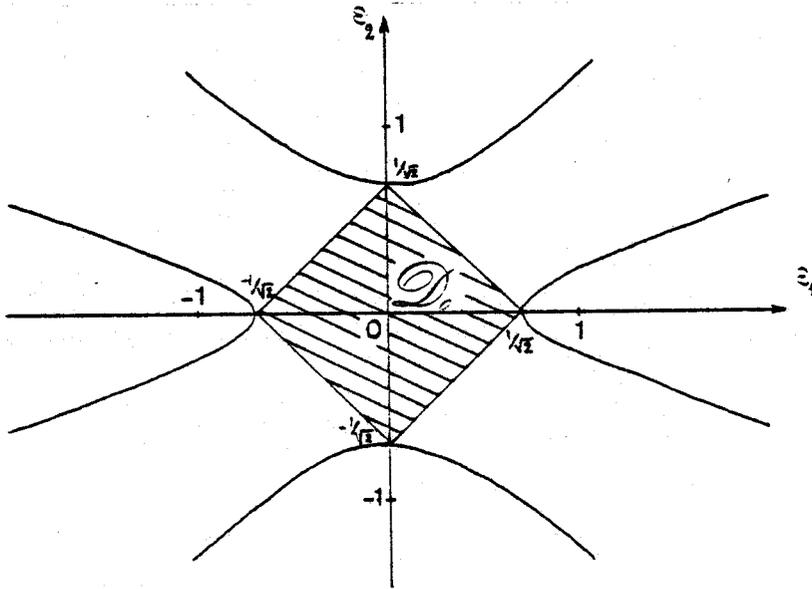


Figure (III-3)

Conclusion de l'application du critère III-1 :

Nous avons vu que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2) = 0$  est un équilibre en régime permanent. Le système (III-59) (III-65) (III-66) étant en équilibre pour une entrée constante  $(u_1, u_2)$ , tout changement de consigne  $(\Delta u_1, \Delta u_2)$  tel que  $|\Delta u_1| + |\Delta u_2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$  sera suivi de façon stable par le système. Il s'ensuit une variation de sorties  $(\Delta y_1, \Delta y_2)$  définie par :

$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{5\Delta u_1 - 2\Delta u_2}{24} \\ \Delta y_2 = \frac{2\Delta u_1 + 4\Delta u_2}{24} \end{cases}$$

Il peut être également possible d'appliquer le critère III-2 : si par exemple il existe un réel  $\sigma$  tel que (III-67) soit vérifiée :

$$|\epsilon_1| + |\epsilon_2| \leq \gamma \implies \begin{cases} 0 \leq \sigma < \phi_1^*(\epsilon_1) < 2\sigma \\ 0 \leq \sigma < \phi_2^*(\epsilon_2) < 2\sigma \end{cases} \quad \text{(III-67)}$$

on peut choisir comme pseudo-majorante linéaire la matrice A d'ordre 2 définie par :

$$A = \left[ \begin{array}{cc} \text{Max} \left\{ \left( \frac{-\mu + |l|}{T} \right) \sigma, \left( \frac{-\lambda + |k|}{\tau} \right) \sigma \right\} & \text{Max} \left\{ m_{12}, m_{13} \right\} \\ \text{Max} \left\{ \frac{\sigma}{T}, \frac{\sigma}{\tau} \right\} & \text{Max} \left\{ -\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{T} \right\} \end{array} \right]$$

et correspondant à

$$\begin{cases} p_1 (\epsilon_1, \epsilon_2) = |\epsilon_1| + |\epsilon_2| \\ p_2 (\dot{y}_1, \dot{y}_2) = |\dot{y}_1| + |\dot{y}_2| \end{cases}$$

les mêmes valeurs numériques (III-65) donnent :

$$A = \begin{bmatrix} -4\sigma & 2 \\ 2\sigma & -1 \end{bmatrix}$$

A est stable : ses valeurs propres sont 0 et  $(-4\sigma - 1)$ .

A est donc un majorant linéaire stable du système considéré

pour  $|\epsilon_1| + |\epsilon_2| \leq \gamma$

Il s'agit maintenant de déterminer pour quelles conditions initiales on a :

$$\text{MAX}_{t \in \mathcal{I}} [z_t] < \gamma$$

Le processus est stationnaire. Nous poserons donc, sans restriction,  $t_0 = 0$ . La résolution du système linéaire par diagonalisation donne :

$$z_t (z_{10}, z_{20}, t) = \frac{z_{10} + 2z_{20} + (4z_{10}\sigma - 2z_{20}) e^{-t(4\sigma+1)}}{4\sigma+1}$$

Dans tous les cas, le maximum de  $z_1$  est :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{t \in (0, +\infty)} z_1(t) &= \text{Max} \left\{ |z_1(+\infty)|, |z_1(0)| \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \left| \frac{z_{10} + 2z_{20}}{1 + 4\sigma} \right|, |z_{10}| \right\} \end{aligned}$$

Le domaine de conditions initiales garantissant une majoration correcte de l'évolution du système linéaire est :

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ (z_{10}, z_{20}), |z_{10}| < \gamma, |z_{10} + 2z_{20}| < \gamma(1 + 4\sigma) \right\}$$

$\mathcal{D}_0$  est représenté fig. (III-4). Si, à  $t = t_0$ ,  $(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|, |\dot{y}_1| + |\dot{y}_2|)$  appartient à  $\mathcal{D}_0$ , la trajectoire converge asymptotiquement vers  $x_e = 0$ .

Le domaine de variations de consigne  $(\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2)$  en régime établi est alors défini par :

$$\mathcal{D}'_0 = \left\{ (\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2), |\Delta \varepsilon_1| + |\Delta \varepsilon_2| < \gamma \right\}$$

$\mathcal{D}'_0$  est représenté sur la figure III-5.

Conclusion :

Si pour tout  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  dans  $\mathcal{D}'_0$ , il existe  $\sigma$  vérifiant (III-67), alors  $\mathcal{D}_0$  est un domaine d'attraction pour le système (III-59) (III-65) et en régime établi, toute variation brusque de consigne restant dans  $\mathcal{D}'_0$  laisse le système stable.

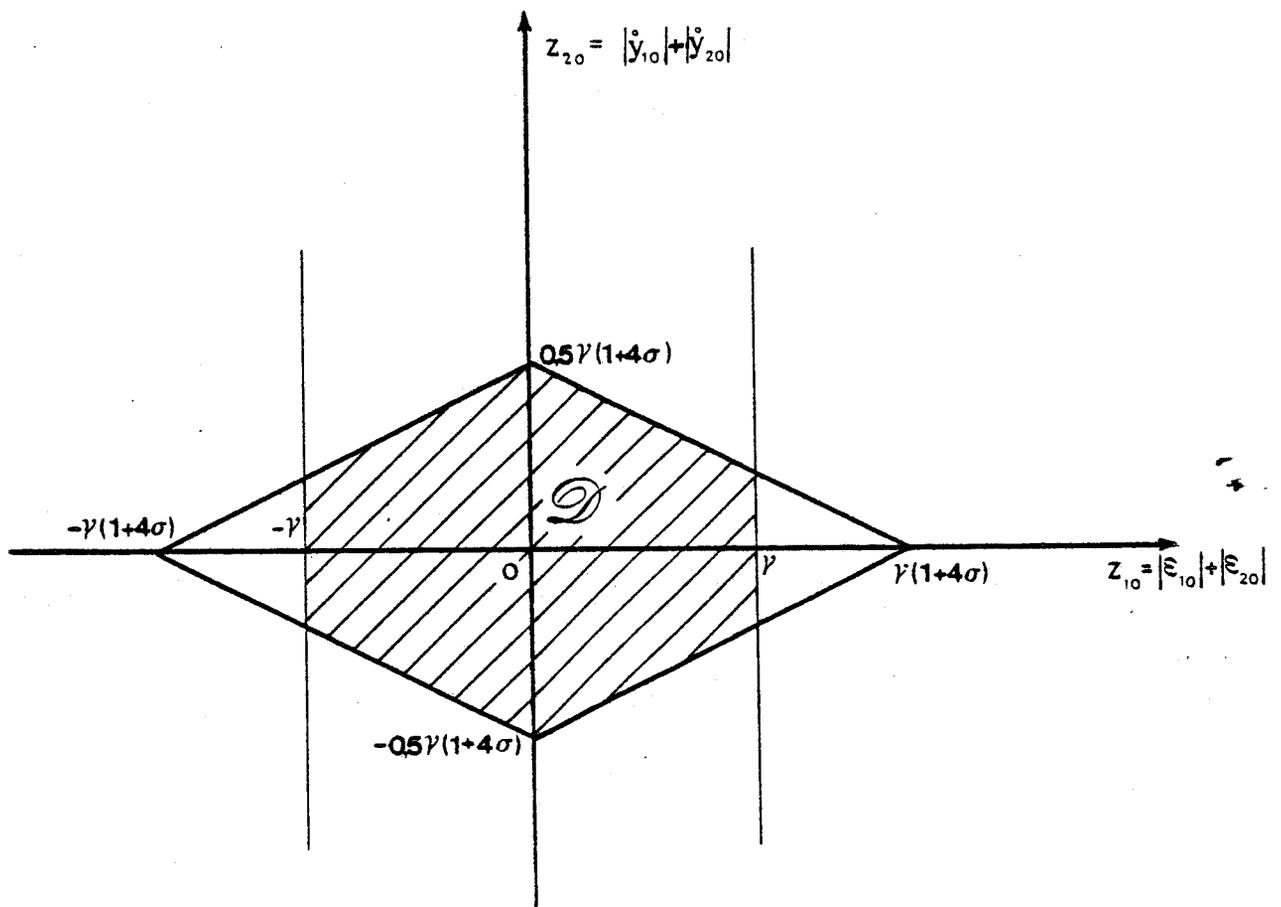


Figure (III-4) : domaine de stabilité vis-à-vis des conditions initiales.

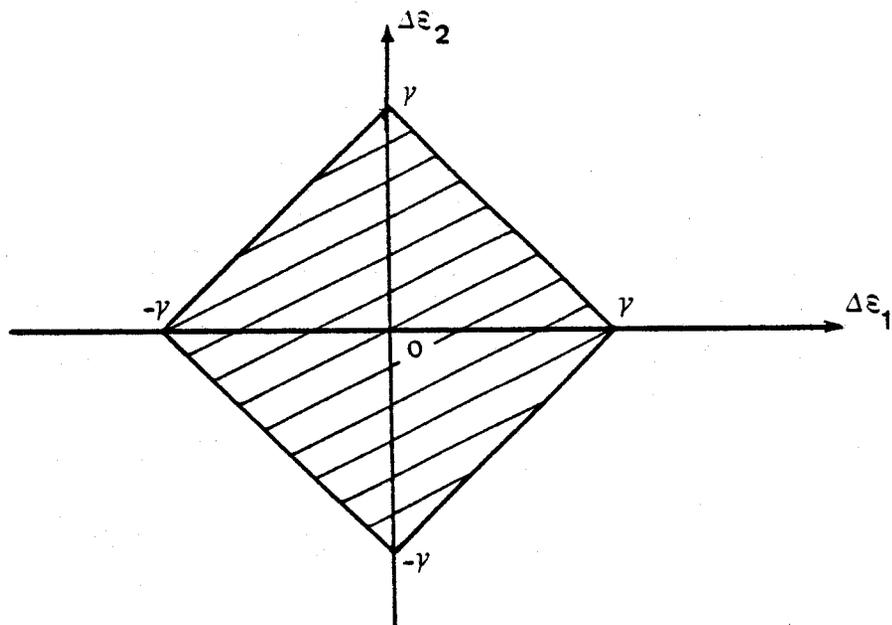


Figure (III-5) : domaine de variation admissible de consigne.

II.3. Application aux systèmes de type II :

La théorie qui a été présentée est valable dans le cas d'un système à non-linéarités de rang 1. Elle est notablement simplifiée dans le cas d'un système de type II : on retrouve, comme pour les systèmes de type LUR'E POSTNIKOV, un regroupement des termes non constants dans la dernière colonne de la matrice représentative du régime libre.

La décomposition du vecteur état x est alors la suivante :

$$\begin{matrix} x_1 = \varepsilon \in \mathcal{R}^{q-1} \\ x_2 \quad \in \mathcal{R} \end{matrix} \quad \text{(III-68)}$$

La première composante est ici la seule variable traitée non linéairement ; on sait de plus que cette quantité  $\varepsilon$  est une composante commune à tous les vecteurs état qui donnent lieu à une représentation matricielle simple (c'est-à-dire avec une seule colonne non constante).

Le problème de stabilité locale pour les processus de type II peut donc être traité à partir d'une mise en équation par polynôme symbolique : la connaissance du changement de base menant à la forme matricielle choisie n'est pas nécessaire, puisque la variable  $\varepsilon$  est directement accessible dans toutes les représentations.

Nous pouvons par exemple traiter dans cette optique l'exemple déjà considéré au chapitre II, § III.3.5. et chapitre III, § I.1.

$\varepsilon$  est, là encore, variable d'état.

$\varepsilon$  tend vers zéro si les gains équivalents  $f^*_1(\varepsilon)$  et  $f^*_2(\varepsilon)$  évoluent dans le domaine  $\mathcal{D}_1$  décrit fig.(III-1). Les critères de stabilité vis-à-vis des conditions initiales permettent alors d'étudier l'influence d'un changement brusque de consigne.

Une construction graphique permet alors de déterminer, comme sur la figure (III-7), le domaine de variation de consigne admissible en régime établi, défini par (III-70):

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \varepsilon, |\varepsilon| < \alpha \implies (f^*_1(\varepsilon), f^*_2(\varepsilon)) \in \mathcal{D}_1 \right\}$$

Pour la construction fig.(III-7), nous avons pris pour exemple :

$$\left. \begin{matrix} f_1(\varepsilon) = \begin{cases} 3\varepsilon + \varepsilon^2 & \text{si } |\varepsilon| < 1 \\ 4 & \text{si } |\varepsilon| \geq 1 \end{cases} \\ f_2(\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } |\varepsilon| \leq 2 \\ -1 & \text{si } |\varepsilon| \geq 2 \end{cases} \end{matrix} \right\} \implies \alpha = 1,5 \text{ et } \mathcal{D}_\alpha = \left\{ \varepsilon, |\varepsilon| < 1,5 \right\}$$

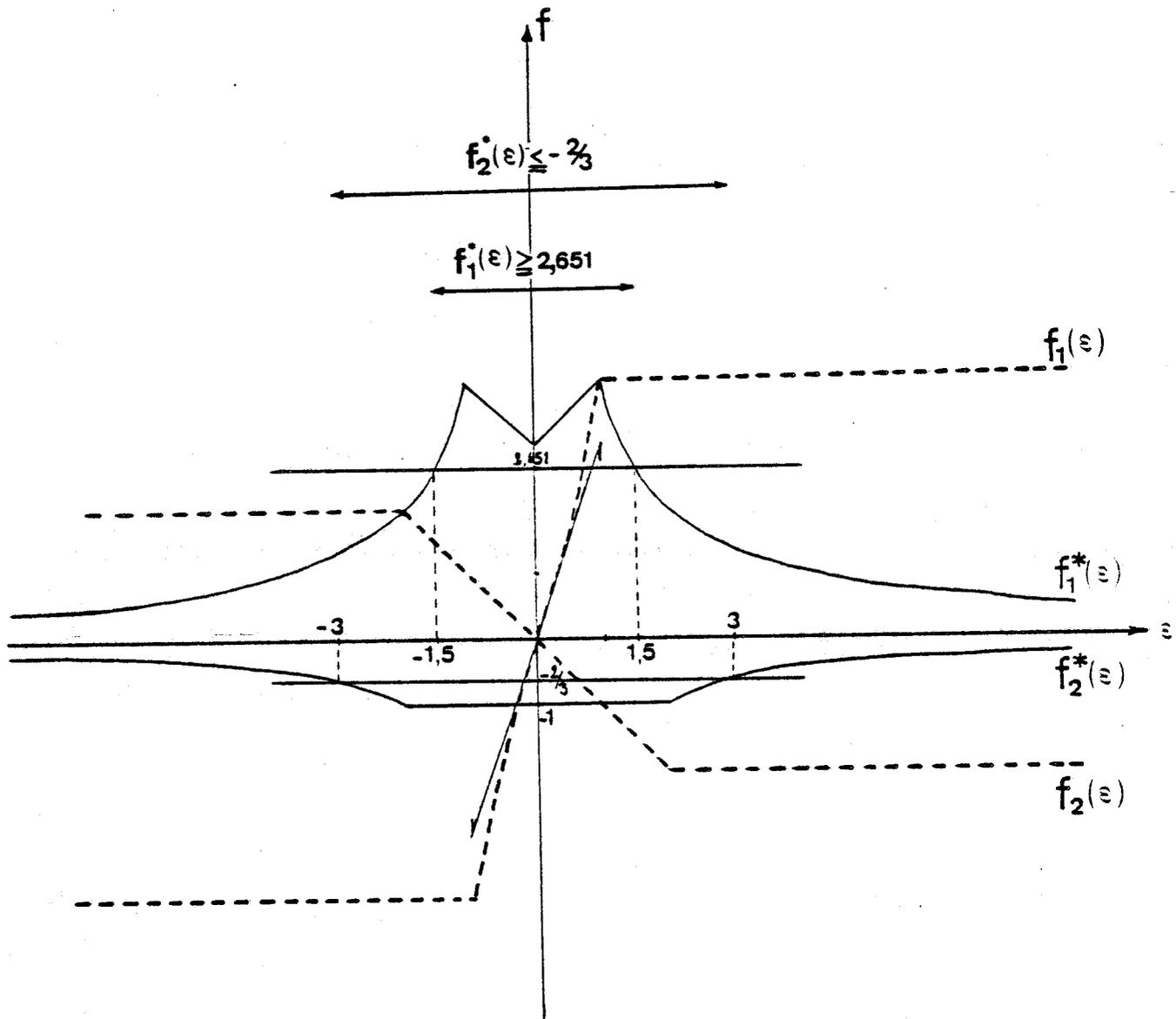


Figure (III-7) =

Non-linéarités et gains équivalents.

#### II.4. Application au choix d'un modèle linéaire pour un système non-linéaire localement stable [32]

Il peut être utile de disposer d'un modèle simple pour assurer la commande d'un processus, notamment pour obtenir une évaluation de son état (non accessible). Lorsque le système physique à asservir n'est pas linéaire, la modélisation la plus facile à effectuer consiste à remplacer les parties non linéaires par des gains constants les approchant au mieux dans un certain domaine. Lorsque le processus n'est stable que localement, la linéarisation doit s'effectuer autour des valeurs correspondant aux gains non-linéaires considérés dans le domaine de stabilité. Le modèle est alors globalement stable.

Cependant la stabilité du modèle linéaire ne suffit pas en général à assurer la validité de la modélisation : on doit aussi pouvoir assurer que les évolutions de l'état du modèle restent comprises dans le domaine de stabilité du processus, de façon à assurer la cohérence de la modélisation avec le système réel [32]. Le modèle peut, par exemple, être utilisé pour définir une commande qui doit tenir compte des propriétés de stabilité réelles du processus.

Le but de cette étude est donc d'utiliser les résultats précédents pour définir une matrice-modèle M telle que l'approximation du processus par ce modèle reste valable pour toutes les conditions initiales assurant la stabilité du système réel.

Si le système réel est d'ordre q, décrit par (III-71) :

$$\dot{x} = A(x) x \quad A(x) = (a_{ij}(x_j)) \quad (III-71)$$

le modèle est alors de même ordre, décrit en (III-72) :

$$\dot{x} = M x \quad M = (m_{ij}) \quad (III-72)$$

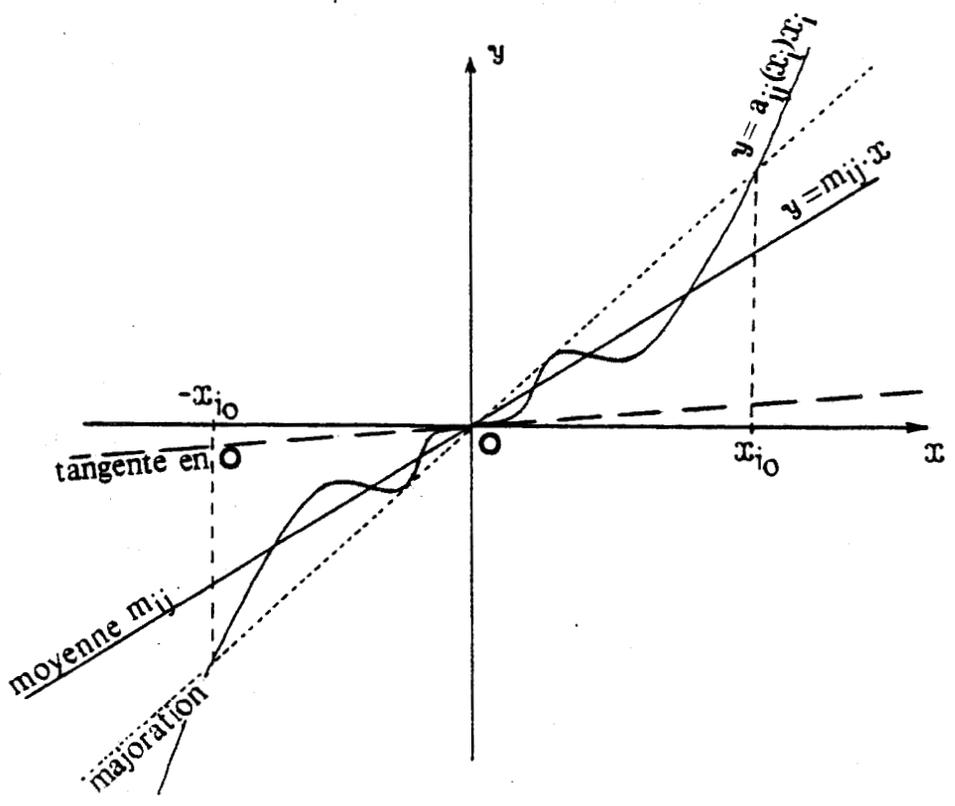


Figure (III-8)

Chaque terme  $m_{ij}$  peut être déterminé de différentes façons (fig.(III-8) ) :

- soit par égalité avec la tangente à l'origine de la fonction non-linéaire,
- soit par majoration du gain équivalent sur un domaine  $(-x_{i0}, x_{i0})$
- soit en définissant une pente intermédiaire, qui peut être la moyenne des deux premières.

Des résultats de simulation décrits figure (III-10) font apparaître que les deux premières approximations sont souvent insuffisantes dans le domaine de stabilité  $\mathcal{D}$ :

- une approche par la tangente à l'origine est assez imprécise,
- une approche par majoration conduit à des trajectoires sortant du domaine de stabilité, ce qui peut donner lieu à une commande incohérente avec le processus réel,
- l'approche par moyenne de secteur permet ici d'avoir une meilleure approximation des trajectoires que par la tangente, et également définira une commande toujours admissible.

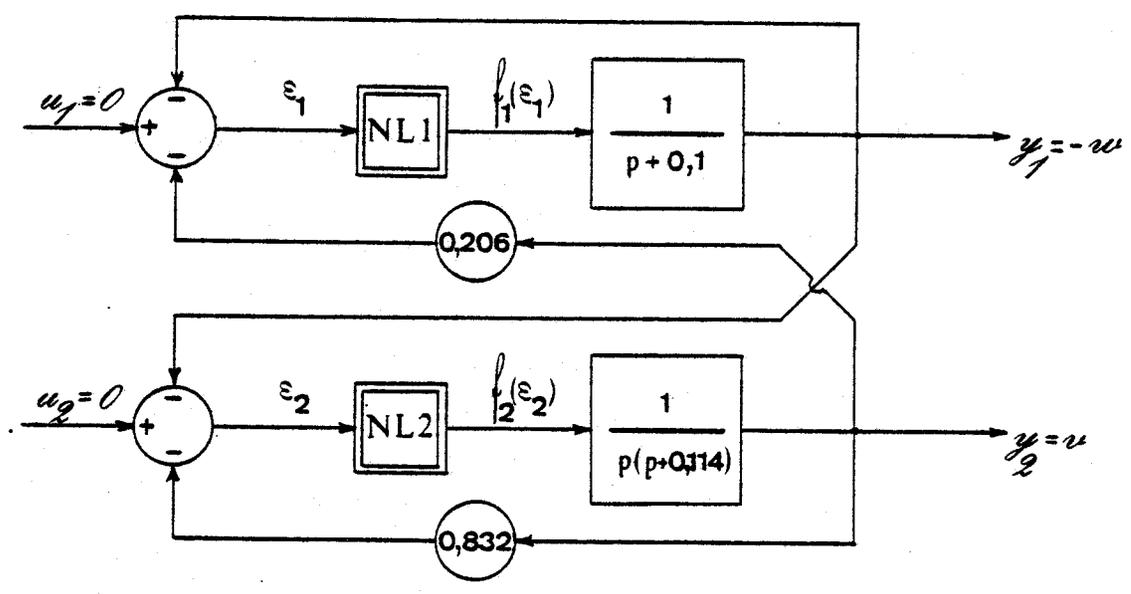


Figure III-9-1

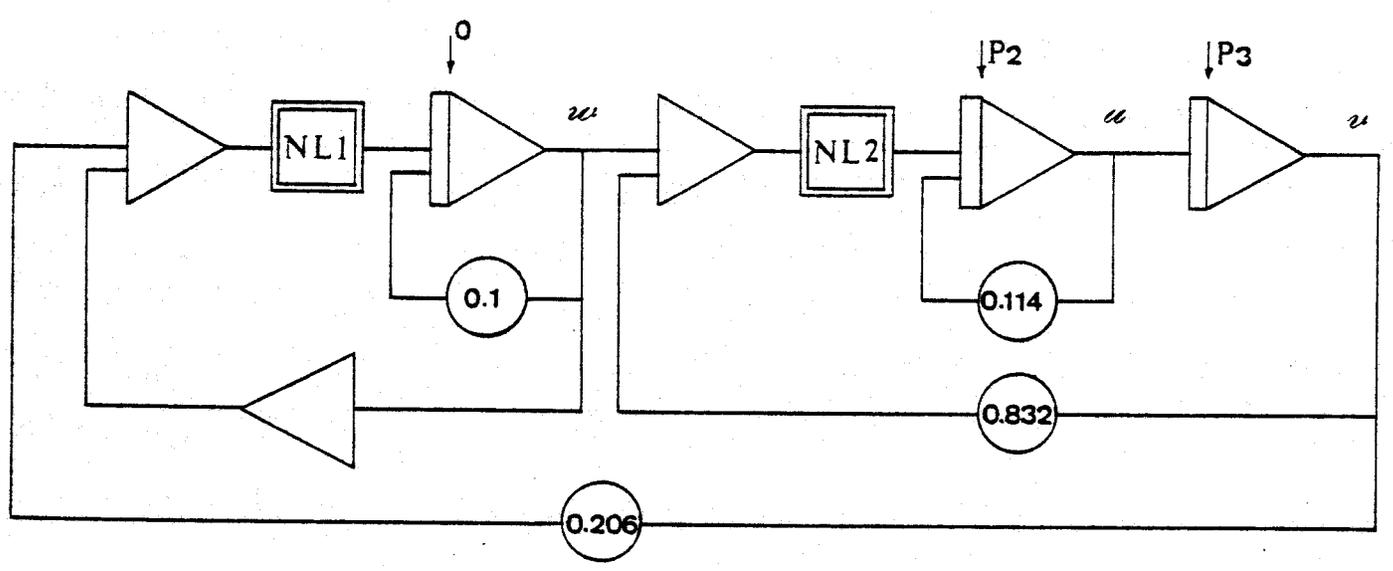
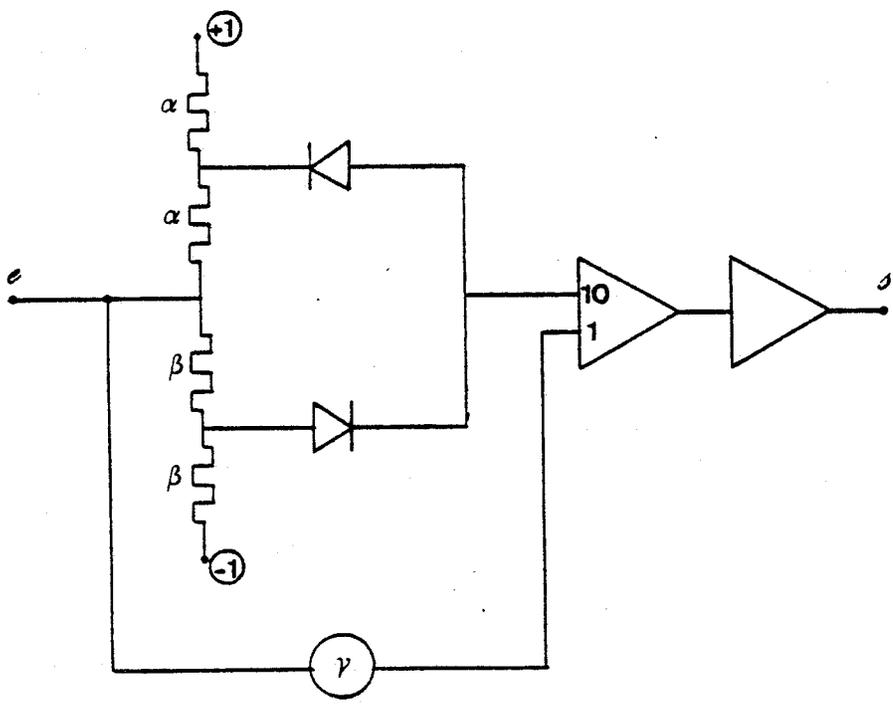


Figure III-9-2

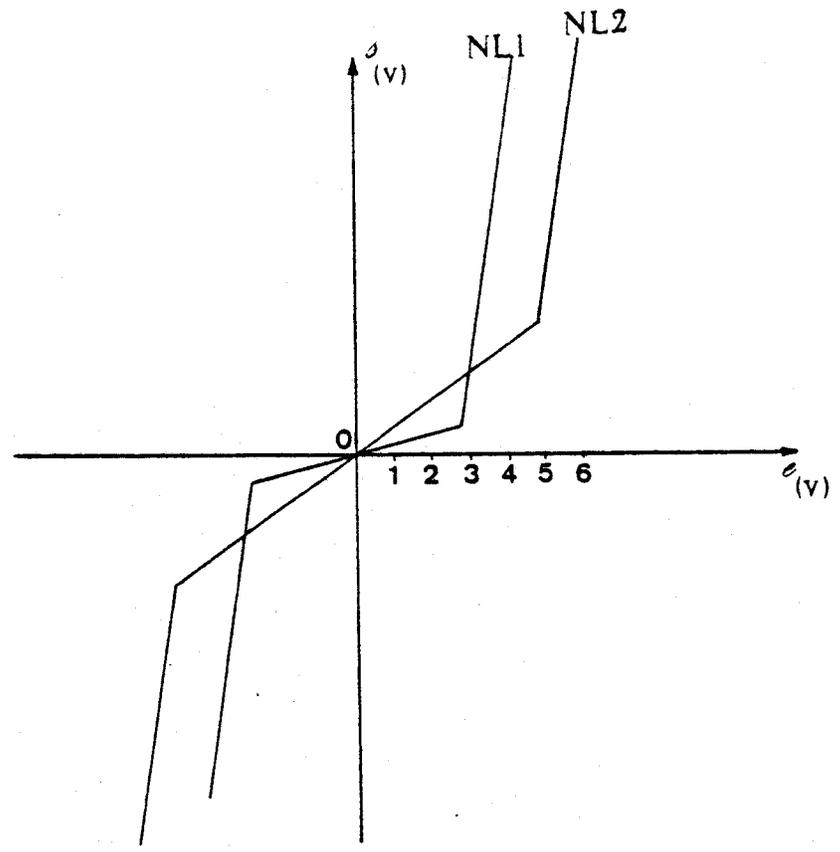
BUS  
LILLE



$$NL1 \begin{cases} \alpha = 0.3 \\ \beta = 0.3 \\ \gamma = 0.7 \end{cases}$$

$$NL2 \begin{cases} \alpha = 0.2 \\ \beta = 0.2 \\ \gamma = 0.3 \end{cases}$$

Figure III-9-3



BUS  
LILLE

Figure III-9-4

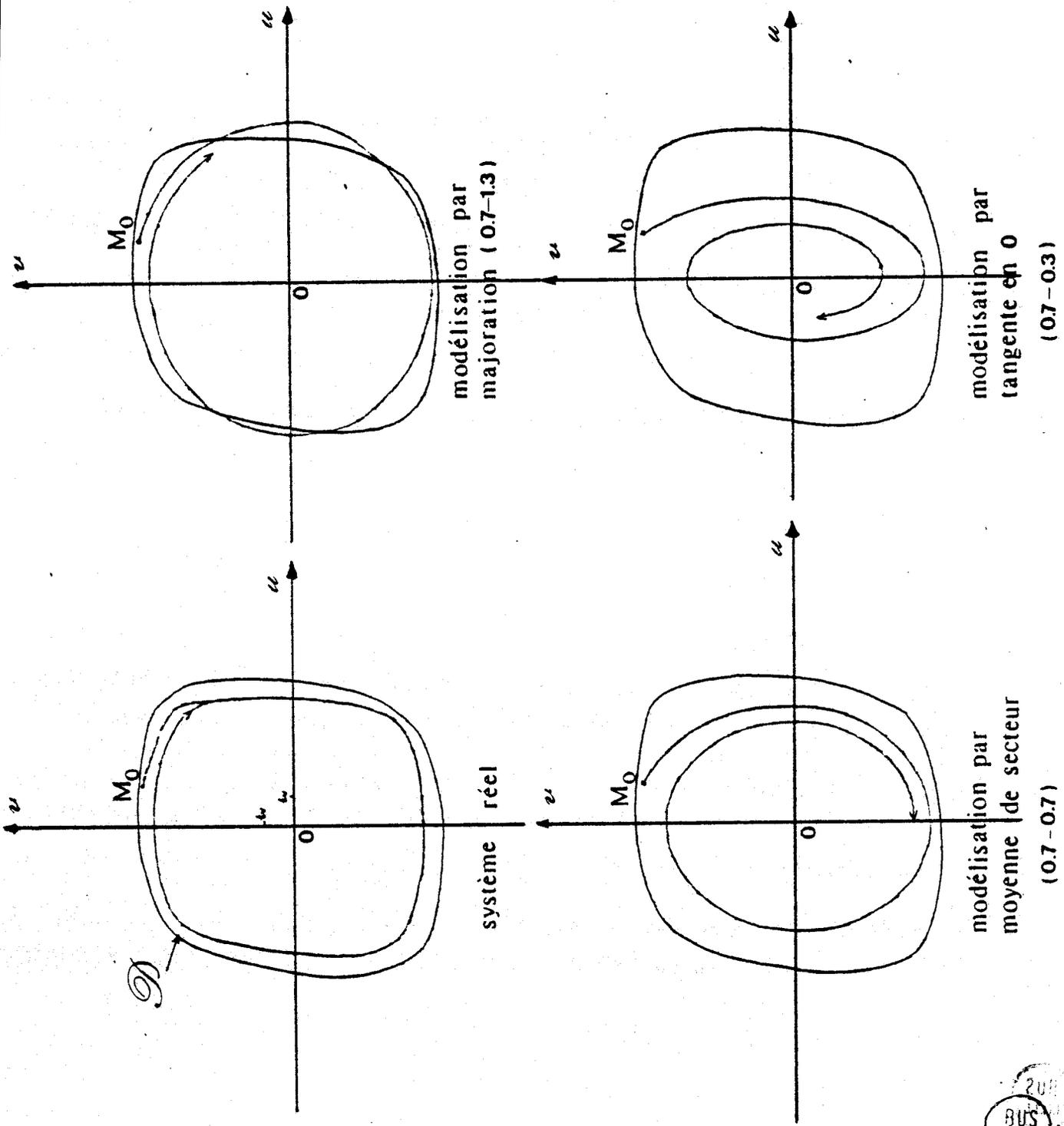


Figure III-10



Le système simulé était ici représenté par (III-73)

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,114 & 0,832 f_2^* & f_2^* \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,206 f_1^* & -0,1 - f_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

ce qui correspond au schéma-bloc de la figure (III-9-1) et au schéma de simulation fig.(III-9-2) et (III-9-3). La forme des non-linéarités est décrite figure(III-9-4).

Il apparaît que pour garantir la validité du modèle linéaire, il faut vérifier le Critère III-3 :

Critère de validité d'un modèle linéaire (III-3) :

Le domaine d'attraction du système non-linéaire est un ensemble invariant pour le système linéarisé.

En effet, pour toutes les conditions initiales assurant la stabilité du processus, les trajectoires du modèle linéaire resteront dans le domaine de stabilité. Cet ensemble étant défini par une majoration de normes, une résolution des équations linéaires ou une simulation permettent d'appliquer le critère.

La méthode proposée est donc plus précise qu'une approximation par la tangente à l'origine (valable dans un domaine souvent très restreint) et plus sûre qu'une modélisation par majoration sans vérification.

### III - CONCLUSION

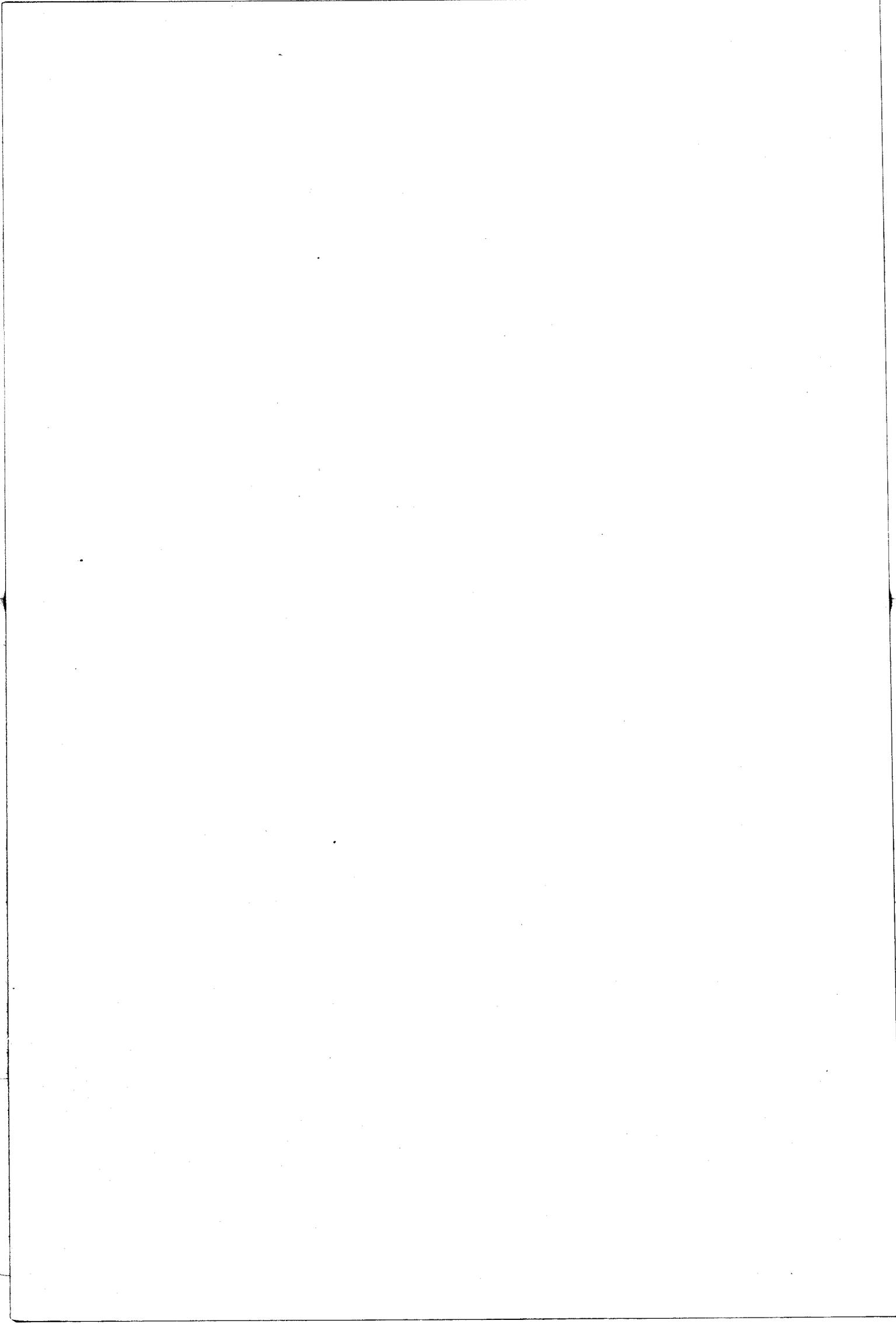
Il apparaît que la connaissance du changement de base qui permet d'écrire la matrice caractéristique d'un système à non-linéarités de rang 1 n'est pas indispensable dans de nombreux cas.

La stabilité globale d'un système peut être analysée à partir de toute représentation semblable de cette matrice : l'explicitation de l'état n'est pas nécessaire, car l'interprétation des conditions trouvées se fait directement sur les termes non-linéaires correspondant à la description physique du processus. Il est également possible, dans certains cas, de traiter la stabilité d'un système d'ordre réduit et d'en déduire des conditions aussi larges sur le système réel.

La stabilité vis-à-vis des conditions initiales peut être étudiée à partir de représentations très générales des systèmes, notamment ceux de type LUR'E POSTNIKOV.

Les méthodes proposées permettent d'analyser la stabilité d'un système non linéaire sans faire intervenir de fonction de LYAPUNOV. Elles peuvent également être utiles en modélisation et sont facilement applicables à des systèmes mis en équation par polynôme symbolique. Dans certains cas, la notion de stabilité locale peut recouvrir celle de stabilité à un changement brutal de régime établi.

La méthode permettant de représenter directement un système dans différentes bases d'état est donc exploitable dans de nombreux cas, elle permet de choisir une forme matricielle définie a priori, d'identifier ses composantes et d'étudier à partir de cette représentation la stabilité locale ou globale du processus.



## CONCLUSION GENERALE

La définition d'un invariant de représentation, appelé polynôme symbolique, associée à une décomposition canonique d'un type de matrices non constantes, nous a permis de définir une méthode de mise en équations des processus.

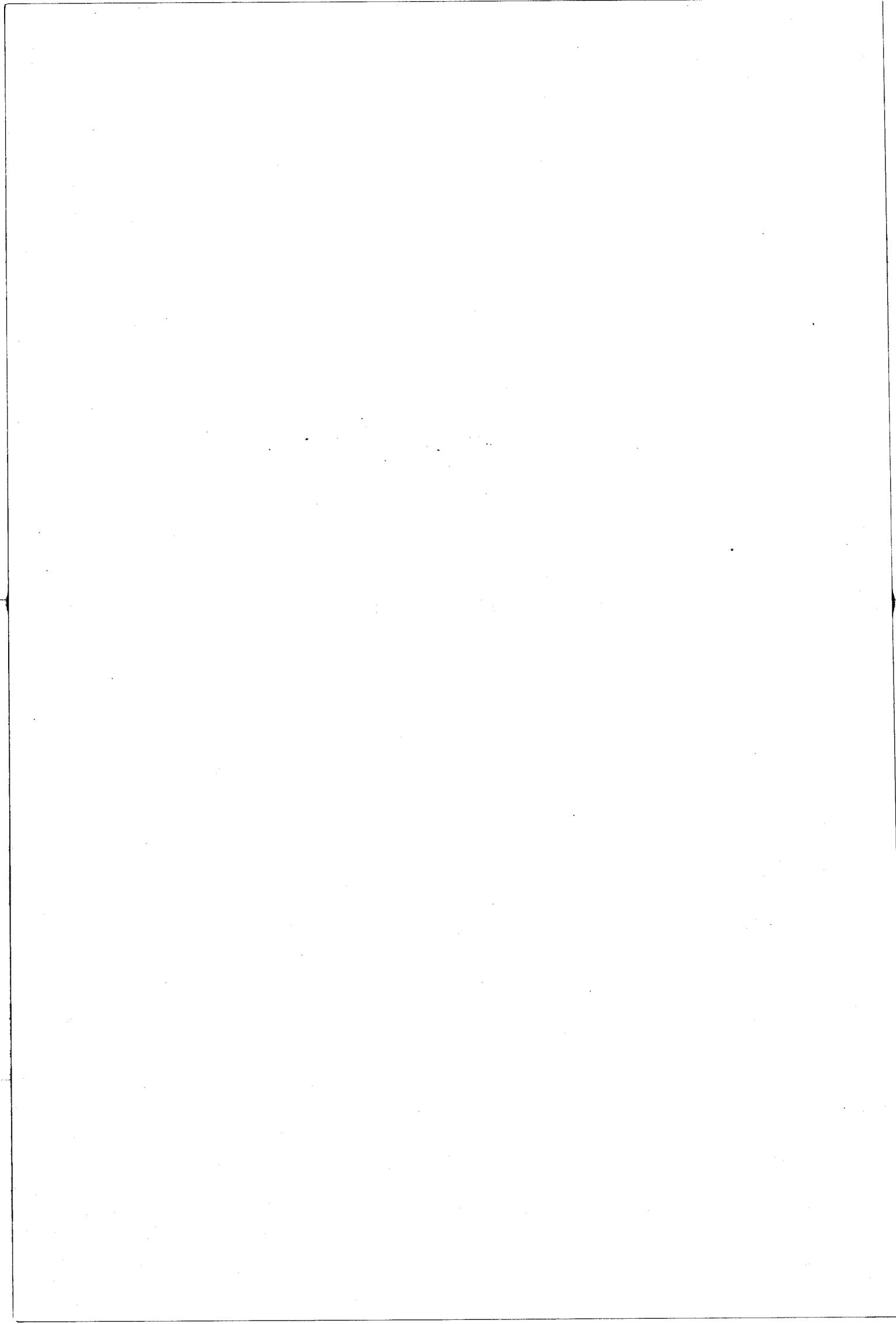
Il s'agit dans un premier temps de déterminer une quelconque représentation matricielle du système à partir de ses caractéristiques physiques. Dans une deuxième phase, une forme matricielle doit être choisie, qui puisse donner lieu à une analyse concluante du système, puis identifiée par des critères précis. Dans un troisième temps, il est possible de définir a posteriori le changement de base d'état correspondant au passage de l'ancienne formulation à la nouvelle. Cette troisième partie n'est cependant pas indispensable dans de nombreux cas.

L'intérêt de la méthodologie proposée réside essentiellement dans le fait qu'elle permet à l'ingénieur de disposer d'un large éventail de représentations matricielles canoniques facilement utilisables. Dans ce sens, nos travaux donnent facilement accès aux puissantes méthodes matricielles d'analyse, souvent réservées au spécialiste.

D'autre part, la méthode proposée permet d'étudier l'existence de changements de base entre des matrices non linéaires, et d'explicitier ces changements si cela s'avère nécessaire. Cet aspect du problème peut être développé en vue d'obtenir de nouvelles représentations matricielles, mieux adaptées à l'analyse ou à la synthèse de processus.

Une approche de différents types de stabilités à partir de représentations obtenues par identification de polynômes symboliques montre la généralité d'utilisation de la méthode.

Dans ce mémoire, nous nous sommes limités à certaines classes de processus non linéaires. Nous envisageons donc de poursuivre nos travaux en vue de généraliser cette approche à des systèmes et représentations plus complexes.



ANNEXE A

DEFINITIONS RELATIVES A LA STABILITE EN REGIME LIBRE. METHODES D'ETUDE.

A.I. - DEFINITIONS

Nous allons étudier le régime libre d'un système continu. Lorsque les paramètres du modèle sont parfaitement déterminés, ce système peut être représenté par (A-1) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (A-1)$$

Les propriétés d'existence et d'unicité de la solution  $x(t, t_0, x_0)$  de cette équation sont supposées vérifiées. La fonction  $f$  définit alors un système physique déterministe.

Nous allons rappeler quelques propriétés que peut présenter une position d'équilibre  $x_e$  d'un tel système. Nous poserons par hypothèse que cette solution  $x_e$  de  $f(x,t) = 0 \forall t$  est un point singulier.

Définition 1 : STABILITE

L'équilibre  $x = x_e$  est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0, \left\{ \|x_0 - x_e\| < \delta \implies \forall t \geq t_0, \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon \right\}$$

Ceci signifie que pour des conditions initiales suffisamment proches de l'équilibre  $x = x_e$ , la trajectoire reste dans la boule fermée de centre  $x_e$  et de rayon  $\varepsilon$  fixé arbitrairement.

Définition 2 : ATTRACTIVITE

L'équilibre  $x = x_e$  est attractif si :

$$\exists \rho > 0, \forall \eta > 0, \exists T(\eta, x_0, t_0), \forall t \geq t_0 + T \left\{ \|x_0 - x_e\| \leq \rho \implies \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| \leq \eta \right\}$$

L'attractivité implique la convergence de l'état vers  $x_e$  au bout d'un temps infini, lorsque les conditions initiales  $x_0$  se situent dans une boule de centre  $x_e$  de rayon  $\rho$ .

Définition 3 : STABILITE ASYMPTOTIQUE

Lorsque l'équilibre  $x_e$  est à la fois stable et attractif, il est dit asymptotiquement stable.

Ceci suppose, en plus de la condition d'attractivité, que les trajectoires  $x(t, x_0, t_0)$  restent arbitrairement bornées pour des conditions initiales suffisamment faibles.

Dans les définitions 1, 2 et 3, l'instant initial  $t_0$  influe sur la détermination de  $T$  ou  $\delta$ . Certains systèmes non-stationnaires, par exemple,

convergent différemment selon la valeur de leurs coefficients à  $t = t_0$ . Pour un processus stationnaire ou à coefficients périodiques, par contre, la valeur de  $t_0$  n'intervient plus. Les propriétés de stabilité et d'attractivité sont alors plus particulières, et sont dites uniformes :

**Définition 4 (PERSIDSKII 1961) : STABILITE UNIFORME**

L'équilibre  $x = x_e$  est uniformément stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall t_0, \left\{ \begin{array}{l} \|x_0 - x_e\| < \delta \\ \Rightarrow \forall t \geq t_0, \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

**Définition 5 (HAHN 1967, ANTOSIEWICZ 1958) : ATTRACTIVITE UNIFORME**

L'équilibre  $x = x_e$  est uniformément attractif

- par rapport à  $t_0$  si :  $\exists \rho > 0, \forall \eta > 0, \exists T(\eta, x_0), \forall t \geq t_0 + T, \{ \|x_0 - x_e\| < \rho \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \eta \}$

- par rapport à  $x_0$  si :  $\exists \rho > 0, \forall \eta > 0, \exists T(\eta, \rho, t_0), \forall t \geq t_0 + T, \{ \|x_0 - x_e\| < \rho \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \eta \}$

**Définition 6 (MALKIN 1958) : STABILITE UNIFORME ASYMPTOTIQUE**

L'équilibre  $x = x_e$  est uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et uniformément attractif.

Lorsqu'une des propriétés 1 à 6 est vérifiée sans restrictions sur le domaine de conditions initiales elle est dite globale.

Ainsi, on aura stabilité uniforme globale si dans la définition 4 on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) > 0$

De même,  $x = x_e$  est uniformément globalement attractif si la propriété 5 est vérifiée quelquesoit  $\rho > 0$ .

Il est à noter que d'autres formes de stabilités ont été introduites.

Citons notamment :

- la stabilité absolue (LUR'E POSTNIKOV 1944) et l'hyperstabilité [27] qui font intervenir la stabilité en tant que propriété d'une famille de systèmes, constituée en changeant les modulateurs non linéaires d'un même processus,
- la stabilité dynamique [15] [16] qui considère non plus un point d'équilibre, mais une trajectoire nominale,
- la stabilité pratique [35] [36] : on peut aussi ne s'intéresser qu'aux propriétés du système après un temps  $\tau$  de fonctionnement. Les mêmes notions de stabilité, attractivité, uniformité, etc... pourront être adaptées à cette nouvelle forme d'étude. Ceci revient à imposer au processus un certain comportement à partir de l'instant  $t_0 + \tau$ , avec des contraintes moindres pour les instants compris entre  $t_0$  et  $t_0 + \tau$ .

### Définition 7 : DOMAINES DE STABILITE

Lorsque le comportement d'un processus est stable pour toute évolution de son état dans un domaine  $D$  contenant un voisinage de l'équilibre  $x_e$ , nous dirons que  $D$  est un domaine de stabilité.

### Définition 8 : STABILITE VIS-A-VIS DES CONDITIONS INITIALES

Soit  $D_a$  le domaine de  $\mathcal{R}^q$  défini comme suit :

$$D_a = \left\{ x \in \mathcal{R}^q, \|x\| < a \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathcal{R} \\ x^T = (x_1^T, x_2^T) \in \mathcal{R}^q \end{array} \right.$$

Le système de vecteur état  $x(t)$  sera dit asymptotiquement stable vis-à-vis des conditions initiales, de domaine de stabilité  $D_a$ , si pour toutes les conditions initiales  $x_0$  dans  $D_a$ , les trajectoires  $x(t)$  convergent asymptotiquement vers  $x_e$  :  $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \forall x_0 \in D_a, \exists \delta(\varepsilon, t_0) \in ]0, a), \{ \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon \}$

#### A.II. - THEOREMES DE LYAPUNOV [1]

##### A.II.1. Notations et définitions [34]

Afin d'introduire les théorèmes de LYAPUNOV sur la stabilité des équilibres, il est nécessaire de rappeler quelques définitions sur les fonctions intervenant dans les énoncés. Nous ne considérons ici que l'équilibre  $x_e = 0$ , auquel le cas général  $x_e \neq 0$  peut se ramener par un simple changement du repère d'état. On notera :

$$R_{h, t_0} = \{ (x, t), \|x\| < h, t \geq t_0 \}$$

$$R_h = \{ x, \|x\| < h \}$$

$w$  une fonction scalaire de  $R_h$  dans  $\mathcal{R}$ , continue,

différentiable, à dérivées partielles continues,

$v$  une fonction scalaire de  $R_{h, t_0}$  dans  $\mathcal{R}$ , continue,

différentiable, à dérivées partielles continues.

**Définition 9 :**  $w(x)$  est dite positive semi-définie si :

$$w(0) = 0$$

$$w(x) \geq 0 \quad \forall x \in R_h$$

si la deuxième condition s'écrit :

$$w(x) > 0 \quad \forall x \in R_h - \{0\}$$

alors  $w(x)$  est définie positive.

**Définition 10 :**  $v(x, t)$  est dite positive semi-définie si :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \\ \exists h_1 \in ]0, h), \forall (x, t) \in R_{h_1, t_0}, v(x, t) \geq 0 \end{array} \right.$$

si de plus il existe une fonction  $w(x)$  définie positive telle que  $v(x, t) \geq w(x) \quad \forall (x, t) \in R_{h_1, t_0}, v(x, t)$  est définie positive.

Définition 11 : Une fonction  $v(x,t) : \mathcal{R}^q \times (t_0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{R}$  est dite "non bornée en rayon" (radially unbounded) lorsque

$$\forall \alpha > 0, \exists \beta > 0, \|x\| > \beta \Rightarrow \forall t > t_0, v(x,t) > \alpha$$

Ce qui revient à dire que  $v(x,t)$  tend uniformément par rapport à  $t$  vers l'infini quand  $\|x\|$  tend vers l'infini.

Définition 12 :  $v(x,t)$  est décroissante si  $v(x,t)$  converge uniformément par rapport à  $t$  vers 0 quand  $\|x\|$  tend vers 0.

On peut introduire de façon similaire les fonctions negatives définies ou semi-définies comme les opposées  $-v$  et  $-w$  des fonctions précédentes.

#### A.II.2. Enoncé des théorèmes

Différents résultats sur les propriétés de l'équilibre  $x = 0$  pour le système décrit par (A-1) ont été énoncés. La stabilité du système représenté par le vecteur état  $x$  sera étudiée ici à travers la convergence d'une distance généralisée  $v(x,t)$  de l'extrémité de  $x$  à l'origine 0.

théorème 1 sur la stabilité [1] :

L'équilibre  $x = 0$  est stable s'il existe une fonction définie positive  $v(x,t)$  dont la dérivée totale  $\dot{v}$  pour l'équation (A-1) soit semi-définie négative.

théorème 2 sur la stabilité asymptotique [1] :

L'équilibre  $x = 0$  est asymptotiquement stable s'il existe une fonction définie positive décroissante  $v(x,t)$  dont la dérivée totale  $\dot{v}$  pour (A-1) soit définie négative.

théorème 3 sur la stabilité asymptotique globale [39] :

L'équilibre  $x = 0$  est asymptotiquement globalement stable s'il existe une fonction  $v(x,t)$  définie positive dans tout l'espace, non bornée en rayon, décroissante, et dont la dérivée totale pour (A-1) soit définie négative.

Une fonction satisfaisant les conditions des théorèmes 1, 2 ou 3 est appelée fonction de LYAPUNOV pour l'équation (A-1). La condition selon laquelle  $\dot{v}$  est continue n'est pas nécessaire : on peut admettre pour  $\dot{v}$  des sauts bornés [34].

Dans de nombreux cas, les fonctions  $v$  peuvent présenter une propriété supplémentaire : si il existe une constante  $c > 0$  telle que :  $v(x,t)$  est comprise entre deux normes de  $x$

$\dot{v}(x,t) \leq -c v(x,t)$  pour tout  $(t,x)$  sur la trajectoire, alors la stabilité est dite exponentielle. On peut interpréter ce terme par le fait que  $v(x,t)$  est majorée par  $v(x_0, t_0) e^{-c(t-t_0)}$ .

Il peut parfois être utile de montrer que le système est instable. Des théorèmes similaires ont été énoncés, notamment par LYAPUNOV, CHETAEV et PERSIDSKII [34].

Dans l'étude de la stabilité par ces méthodes, il s'agit donc de rechercher une fonction de LYAPUNOV du système, dite "fonction candidate". On est souvent conduit à l'explicitier, mais d'une manière plus générale il suffit de montrer son existence. Lorsque l'équation est écrite sous forme vectorielle, il est possible d'"essayer" quelques fonctions candidates remarquables, assimilables à des normes scalaires  $\phi(x)$  du vecteur état  $x$ .

La fonction ainsi définie est continue, donc dérivable à gauche et à droite en tout point. Elle vérifie donc les propriétés requises pour être candidate.

Notamment dans le cas où  $\phi$  est la norme du maximum  $\phi(x) = \phi((x_1 \ x_2 \dots x_q)^T) = \max_i |x_i|$ , on aboutit au critère de ROSENBROCK [40] relatif au système (A-2):

$$\dot{x} = A(x,t) x, \text{ avec } A(x,t) = [a_{ij}(x,t)] \quad i, j = 1 \dots q \quad (A-2)$$

Le système décrit par (A-2) est asymptotiquement stable si il existe une constante  $\delta$  telle que :

$$\text{MAX}_{i=1 \text{ à } q} \left\{ a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |a_{ij}| \right\} \leq -\delta < 0$$

En choisissant comme norme :  $\phi(x) = \sum |x_i|$  ou  $\sqrt{\sum x_i^2}$

ce même critère peut être appliqué à  $A^T$  ou  $\frac{A + A^T}{2}$  [2]

A.III. - SYSTEMES DE COMPARAISON [3] [4]

D'un certain point de vue, l'introduction d'une fonction de LYAPUNOV  $v(x)$  revient à comparer un processus non linéaire d'ordre  $q$  à un système d'ordre 1 représenté par l'état scalaire  $v(x)$ . Si on

montre que  $\dot{v}(x,t) \leq -\epsilon < 0$ , le système en  $v$  est tout juste stable, c'est-à-dire comparable à une fonction de transfert  $(p + \epsilon)^{-1}$ .

Plus généralement, on peut étudier l'évolution du processus d'ordre  $q$  à partir de celle d'un système linéaire ou fortement non linéaire, d'ordre quelconque :

- soit d'un ordre plus élevé : on choisit une représentation redondante du système [41] [43] ,
- soit d'un ordre inférieur ou égal : il est possible de définir des systèmes de comparaison d'ordre plus petit que celui du système initial et qui seront appelés systèmes agrégés. Ces méthodes ont pour base les concepts de fonctions de LYAPUNOV vectorielles [31] ou de normes vectorielles [31] [30] [45] . Nous ne rappellerons ici que la théorie des systèmes pseudo-majorants [10].

A.III.1. Définitions : [31]

NORME VECTORIELLE

Soit  $\mathcal{E} \in \mathcal{R}^n$  un espace vectoriel et  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k$  des sous-espaces de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \dots \cup \mathcal{E}_k$   
 Soit  $x$  un vecteur de  $\mathcal{E}$  et  $x_i$  ses projections sur les  $\mathcal{E}_i$ :  
 $x_i = Pr_i x$  où  $Pr_i$  est un opérateur de projection de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}_i$ .

On notera  $p_i$  une norme scalaire ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) définie sur  $\mathcal{E}_i$ . La fonction  $p$  définie par ses  $k$  composantes  $p_1 \dots p_k$  et telle que :

$$p_i(x) = p_i(x_i)$$

$$p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}_+^k$$

$$x \rightarrow p(x)$$

sera appelée norme vectorielle de dimension  $k$  sur  $\mathcal{E}$ .

Si  $k-1$  des sous-espaces  $\mathcal{E}_i$  ne sont pas suffisants pour définir l'espace  $\mathcal{E}$ , la norme vectorielle est surjective. Si de plus les  $\mathcal{E}_i$  sont disjoints deux à deux

( $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = (0)_i \times (0)_j, \forall i \neq j = 1, \dots, k$ )  $p$  est dite régulière.

SYSTEMES MAJORANTS :

Soit le système d'ordre n :  $\dot{x} = A(t,x) \cdot a(t,x)$  (A-3)

avec  $A(t,x)$  matrice  $n \times m$   $A : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$

et  $a(t,x)$  vecteur d'ordre m  $a : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$

Nous noterons  $D^+(p_i(x_i))$  et  $D^+p(x)$  les dérivées à droite le long de la trajectoire de S dans  $\mathcal{E}_i$  et dans  $\mathcal{E}$  [10] .

Définition 13 : La matrice  $M : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{k \times k}$  définit un système majorant de (A-3) par rapport à la Norme Vectorielle p si et seulement si l'inégalité

$$D^+p(x) \leq M(t,x) p(x)$$

est vérifiée composante à composante pour tout  $x \in \mathcal{E}$  et  $t \in \mathcal{T}$  .

On notera  $Pr_j^*$  ( $j = 1 \dots k$ ) l'opérateur de projection de  $\mathcal{R}^m$  dans  $\mathcal{E}_j$

$$\text{et } a_j(t,x) = Pr_j^* a(t,x) \quad \forall j = 1 \dots k$$

$$A_{ij}(t,x) = Pr_i^* A(t,x) Pr_j^* \quad \forall ij = 1 \dots k$$

$$M(t,x) = [\mu_{ij}(t,x)]$$

Définition 14 : La matrice  $M(t,x)$  est une matrice pseudo-majorante de type canonique, si :

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_{ii}(t,x) &= \text{Sup}_{y \in \mathcal{E}_i} \frac{\text{grad } p_i(y)^T A_{ii}(t,x) a_i(t,y)}{p_i(y)} \\ \mu_{ij}(t,x) &= \text{Max} \left\{ 0, \text{Sup}_{y \in \mathcal{E}_j} \frac{\text{grad } p_i(y)^T A_{ij}(t,x) a_j(t,y)}{p_j(y)} \right\} \quad (i \neq j) \end{aligned} \right.$$

Application :

Lorsque le système (A-3) s'écrit sous forme (A-2) :  
 $\dot{x} = A(t,x) \cdot x(t)$ , la matrice  $M(t,x)$  s'écrit plus simplement

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{ii} = \sup_{y \in \mathcal{E}} \frac{\text{grad } p_i(y_i)^T A_{ii}(t,x) y_i}{p_i(y_i)} \\ \mu_{ij} = \max \left\{ 0, \sup_{y \in \mathcal{E}} \frac{\text{grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t,x) y_j}{p_i(y_i)} \right\} \end{array} \right\}$$

La matrice  $M(t,x)$  ainsi définie est à éléments hors diagonaux positifs. Si ses éléments non linéaires sont regroupés dans une seule ligne ou colonne, on peut donc lui appliquer les conditions du linéaire (Lemme de KOTELYANSKI).

Soit  $M(t,x)$  une matrice pseudo-majorante du système S :

$$\dot{x} = A(t,x) x$$

$$A(t,x) = (a_{ij}(t,x)) \quad i, j = 1 \dots q$$

associée à norme vectorielle  $p(x)$ .

Théorème :

Si le système  $\dot{z} = M(t,x) \cdot z$  est (asymptotiquement) stable, alors le système S est (asymptotiquement) stable.

#### A.III.2. Critère pratique de BORNE et GENTINA

Si la matrice  $M(t,x)$  est telle que ses éléments non constants soient groupés dans une seule ligne ou colonne, une condition suffisante de stabilité (asymptotique) du système S est que  $-M(t,x)$  aie tous ses mineurs principaux (strictement) positifs.

Application : considérons la norme :

$$p(x) = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_q|)^T$$

la matrice  $M(t,x)$  s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & |a_{12}| & \dots & |a_{1q}| \\ |a_{21}| & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{q1}| & \dots & \dots & a_{qq} \end{bmatrix}$$

si les éléments non constants de  $M(t,x)$  sont dans une seule ligne ou colonne, les conditions sur les  $q$  mineurs s'écrivent :

$$a_{11} < 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \dots \quad (-1)^q \det(M(t,x)) > 0$$

ANNEXE B

THEOREME SUR LA STABILITE DES MATRICES TRIANGULAIRES PAR BLOCS

Nous allons dans cette partie démontrer un théorème relatif à la stabilité du système (S) représenté par l'équation (B-1):

(S)  $\dot{x} = A(x,t) \cdot x$  (B-1)  
 $(x,t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{T}$

dans laquelle x est un vecteur d'état décomposé en n composantes vectorielles  $x_i$  de façon à ce que la matrice A(x,t) soit triangulaire supérieure par blocs pour ce partitionnement. Il vient :

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & B_{1n}(x,t) \\ & A_{ii} & B_{ij}(x,t) & \\ & & A_{jj} & \\ & & & A_{nn}(x,t) \end{bmatrix}$   $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  (B-2)

- $\forall i = 1 \dots n-1, A_{ii}$  matrice constante de  $\mathcal{R}^{n_i \times n_i}$
- $A_{nn}(x,t)$  matrice non constante de  $\mathcal{R}^{n \times n}$ , à éléments bornés
- $\forall i < j = 1 \dots n, B_{ij}(x,t)$  matrice non constante de  $\mathcal{R}^{n_i \times n_j}$ , à éléments bornés
- $\forall i > j = 1 \dots n, B_{ij} = 0 \in \mathcal{R}^{n_i \times n_j}$

Nous noterons (S<sub>i</sub>) le sous-système déconnecté défini par (B-3)

(S<sub>i</sub>)  $\dot{x}_i = A_{ii}(x,t) x_i$  (B-3)

**Théorème :** Le système (S) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les sous-systèmes (S<sub>i</sub>) correspondant aux blocs diagonaux sont asymptotiquement stables.

Démonstration de la condition suffisante :

Supposons que toutes les matrices  $A_{ii}$ ,  $i = 1$  à  $n$ , correspondent à des sous-systèmes (S<sub>i</sub>) asymptotiquement stables. Le temps  $t_0 = 0$  sera pris comme origine. L'équilibre étudié est  $x = 0$ .

Notons  $|x_i|$  une norme du vecteur  $x_i$ ,  $i = 1$  à  $n$ , et  $|B_{ij}(x,t)|$  la norme matricielle associée aux normes  $|x_i|$  et  $|x_j|$ . Les éléments de  $B_{ij}(x,t)$  étant par hypothèse tous bornés, il vient (B-4) :

$\exists \beta_{ij} > 0, \forall (x,t) \in (\mathbb{X}, \mathbb{T}), |B_{ij}(x,t)| \leq \beta_{ij}$  (B-4)

Nous allons démontrer la condition suffisante par récurrence descendante sur  $i$ .

$\dot{x}_n = A_{nn}(x, t)$   $x$  est asymptotiquement stable par hypothèse.

Supposons que  $n-i$  dernières composantes vectorielles  $x_k$  convergent asymptotiquement vers 0. Il vient (B-5)

$$\forall \eta > 0, \exists T > 0, \forall t > T, \forall k \in (n, i), |x_k(t)| < \eta \text{ et } |e^{A_{ii}t}| < \eta \quad (\text{B-5})$$

La propriété sur l'exponentielle de  $A_{ii}t$  vient en effet de l'hypothèse de stabilité asymptotique de  $(S_i)$ .

La  $i^{\text{ème}}$  ligne en  $x_i$  s'écrit (B-6) :

$$\dot{x}_i = A_{ii} x_i + \sum_{k=i+1}^n B_{ik}(x, t) \cdot x_k \quad (\text{B-6})$$

les solutions en  $x_i$  sont de la forme ( $K_0 \in \mathcal{R}^{n_i}$ ) :

$$x_i = e^{A_{ii}t} K_0 + \int_T^t e^{A_{ii}(t-\tau)} \cdot \left( \sum_{k=i+1}^n B_{ik}(x, \tau) x_k \right) d\tau \quad (\text{B-7})$$

Posons (B-8) :

$$b_i = \sum_{k=i+1}^n \beta_{ik} \quad (\text{B-8})$$

Il vient, d'après (B-4) :

$$|x_i| \leq |e^{A_{ii}t}| |K_0| + \int_T^t |e^{A_{ii}(t-\tau)}| \cdot b_i \cdot \text{Max}_{i+1}^n |x_k| \cdot d\tau \quad (\text{B-9})$$

D'après l'hypothèse (B-5), si  $t \geq T$ , (B-10) et (B-11) sont vérifiées :

$$|e^{A_{ii}t}| \leq \eta \quad \text{et} \quad \text{Max}_{i+1}^n |x_k| \leq \eta \quad (\text{B-10})$$

$$\exists K_1 \in \mathcal{R}^+, \exists \alpha \in \mathcal{R}^+, \forall \tau \in (T, t), |e^{A_{ii}(t-\tau)}| \leq K_1 e^{-\alpha(t-\tau)} \quad (\text{B-11})$$

$-\alpha < 0$  est par exemple la valeur propre de plus grande partie réelle de la matrice  $A_{ii}$  :

(B-9), (B-10) et (B-11) entraînent alors (B-12) :

$$|x_i| \leq \eta \left( |K_0| + b_i K_1 \frac{1}{\alpha} \right) \quad (\text{B-12})$$

En posant :

$$|K_0| + b_i K_1 \frac{1}{\alpha} = K > 0 \quad (\text{B-13})$$

il vient :

$$\forall \eta > 0, \exists T > 0, \forall t \geq T, |x_i| \leq K \eta \quad (\text{B-14})$$

(B-14) assure la convergence asymptotique de  $|x_i|$  vers 0. La propriété de récurrence (B-5) est donc assurée pour  $k \in (n, i+1)$

Elle est donc vérifiée pour tous les indices de ligne  $k$  (1 à  $n$ ).

Le système (S) est asymptotiquement stable.

#### Démonstration de la condition nécessaire :

Nous allons démontrer que si il existe au moins un sous-système

(S) non asymptotiquement stable, le système (S) ne l'est pas non plus.

Supposons que l'équilibre  $x_i = 0$  ne soit pas stable pour  $(S_i)$  (définition 1, annexe A) :

$$(\exists \epsilon > 0) (\exists t_0 \in \mathbb{R}^+) (\forall \delta > 0) (|x_{i0}| < \delta \text{ et } \exists t > t_0, |x_i(t, x_{i0}, t_0)| > \epsilon) \quad (B-15)$$

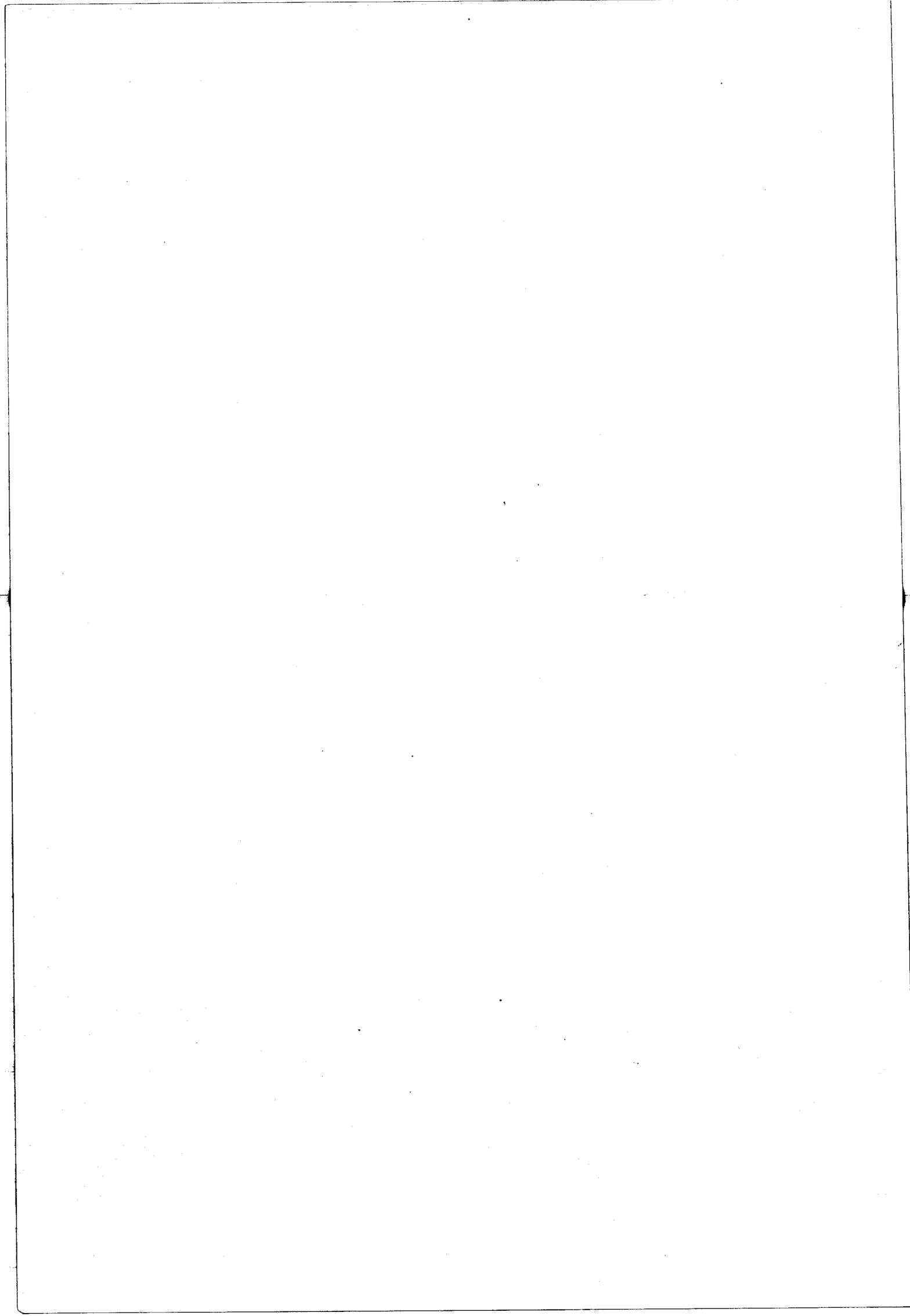
Cela signifie que le fait de borner les conditions initiales de  $x_i$  ne suffit pas à borner arbitrairement l'évolution de ce vecteur dans le temps.

Si on choisit comme condition initiale du système complet le vecteur  $x_0 = (0, \dots, 0, x_{i0}, 0 \dots 0)^T$ , on aura à  $t = t_0$  :

$$\left. \begin{aligned}
\dot{x}_1 &= B_{1i}(x, t) x_{i0} \\
\vdots & \\
\dot{x}_{i-1} &= B_{i-1,i}(x, t) x_{i0} \\
\dot{x}_i &= A_{ii} x_{i0} \\
\dot{x}_{i+1} &= 0 \\
\vdots & \\
\dot{x}_n &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (B-16)$$

Seules les  $i$  premières composantes vectorielles de  $x$  vont varier. L'évolution de la variable  $x_i$  est alors caractérisée entièrement par celle de  $(S_i)$ . La norme de  $x$  étant supérieure à celle de  $x_i$ , le système n'est pas stable.

De la même manière, si l'équilibre  $x_i = 0$  n'est pas attractif pour  $(S_i)$ ,  $|x_i|$  ne tend pas vers zéro au bout d'un temps infini et donc  $|x|$  non plus. L'équilibre  $x = 0$  n'est pas attractif pour  $(S)$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- 1 LYAPUNOV  
 "Problème général de la stabilité du mouvement".  
 University Press, Princeton, 1949.
  
- 2 LAURENT F. et LHOTE.F.  
 "Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non linéaire".  
 C.R.A.S. Paris, t.262, p.35-37, 3 Janvier 1966.
  
- 3 GENTINA J.C., BORNE P. et LAURENT F.  
 "Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension".  
 Revue R.A.I.R.O, J-3, p.69-77, Août 1972.
  
- 4 BENREJEB M.  
 "Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés.  
 Application aux systèmes singulièrement perturbés".  
 Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1980.
  
- 5 GANTMACHER F.R.  
 "Théorie des matrices". Tome 1.  
 Collection universitaire de mathématiques, Dunod 1966.
  
- 6 ROSENBROCK H.H.  
 "State-space and multivariable theory".  
 Studies in dynamical systems, Nelson, 1970.
  
- 7 YOSHIZAWA T.  
 "Stability theory by Liapunov's second method".  
 The mathematical society of Japan, 1966.
  
- 8 BOUDAREL R. DELMAS J. et GUICHET P.  
 "Commande optimale des processus". Tome 1.  
 Techniques de l'automatisme. Dunod 1967.
  
- 9 LAURENT F.  
 "Sur la stabilité globale et le temps de réponse d'un système échantillonné non linéaire".  
 C.R.A.S. Paris, t.260, p.4444-4447, 26 Avril 1965.

- 10 GENTINA J.C.  
 "Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".  
 Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1976.
- 11 BORNE P.  
 "Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés".  
 Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1976.
- 12 FOSSARD A.  
 "Commande des systèmes multidimensionnels".  
 Dunod, 1972.
- 13 ŠILJAK D.D.  
 "On large scale systems stability".  
 Proc. 9th Ann. Allerton Conf. Circ. Syst theory. 731-741  
 University of Illinois - 1971.  
 "Stability of large scale systems under structural perturbations".  
 IEEE trans. Sys.Man, Cybernetic, vol.SMC-3 n°4, 657-663, 1972.
- 14 GRUJIĆ Lj.T.  
 "Solutions for the Lur'e Postnikov and Aizerman problems".  
 Int. J. Systems Science, Vol.9, n°12, p.1359-1372, 1978.
- 15 BORNE P. LAURENT F. et MAIZIÈRES C.  
 "Sur la stabilité dynamique des processus multivariables non linéaires".  
 Proc. of MECO 77, Congress Zürich, 1977.
- 16 BORNE P. BENREJEB M. and LAURENT F.  
 "Matrix approaches to absolute dynamical stability of Lur'e Postnikov systems".  
 4e Congreso Informatica y Automatica, Madrid 1979.
- 17 GANTMACHER F.R.  
 "Théorie des matrices". Tome 2.  
 Collection universitaire de mathématiques, Dunod, 1966.

18 KRASOVSKI N.N.  
 "Certain problem of the theory of stability of motion".  
 Moscou 1959 (Russe).  
 Traduction Stanford, Californie, 1963.

19 GENTINA J.C. et BORNE P.  
 "Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires".  
 C.R.A.S. Paris, t.275, 16 Août 1972.

20 MAIZIERES C. et LAURENT F.  
 "Sur l'unicité de la réponse d'un système continu non linéaire".  
 C.R.A.S. Paris, série A, t 264, Juin 1967.

21 BENREJEB M.  
 "Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé".  
 Thèse Docteur Ingénieur, Lille, Juin 1976.

22 MEIZEL D., GENTINA J.C. and RICHARD J.P.  
 "A systematic approach of the stability problem for a large class of non linear processes".  
 3th congress I.M.A., Sheffield, September 1980.

23 BENREJEB M. et BORNE P.  
 "Sur la synthèse d'un processus continu non linéaire".  
 Proc. of MECO 79 Congress, Grenoble, p.234-237, 1979.

24 BENREJEB M. DAUPHIN G. et BORNE P.  
 "Sur une nouvelle approche de la modélisation et de la simulation des processus non linéaires".  
 Congrès Simulation 80, Interlaken, Juin 1980.

25 BORNE P. et BENREJEB M.  
 "On an algebraic stability criterion for non linear processes : Interpretation in the frequency domain".  
 Congrès MECO, Athènes, Juin 1978.

- 26 MEIZEL D. and GENTINA J.C.  
 "New aspects on linear and non linear single input single output systems".  
 Int. J. of Control, Vol.30, n°6, p.1043-1060, 1979.
- 27 POPOV V.M.  
 "L'hyperstabilité des systèmes automatiques".  
 Dunod, 1973.
- 28 LAURENT F., EL MOUDNI A., RICHARD JP. and BÖRNE P.  
 "On initial stability conditions for non linear large scale systems".  
 4° congreso Informatica y Automatica, Madrid, Octobre 1979.
- 29 LAURENT F. et BENREJEB M.  
 "Sur la stabilité vis-à-vis des conditions initiales des systèmes discrets de grande dimension".  
 Proc. of MECO 79 Congress, Grenoble, P.234-237, 1979.
- 30 GENTINA J.C. BÖRNE P. BURGAT C. BERNUSSON J. et GRUJIC Lj.T.  
 "Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Normes vectorielles.  
 RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control, vol.13, n°1, p.57-75, 1979.
- 31 GRUJIC Lj.T. GENTINA J.C. and BÖRNE P.  
 "General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms".  
 Int. J. Control, vol.24, n°4, p.529-550, 1976.
- 32 RICHARD J.P., EL MOUDNI A., BÖRNE P.  
 "On the determination of a linear model for a locally stable non-linear process".  
 A paraître, Congrès IASTED, Davos, Février 1981.
- 33 NARENDRA K.S. and TAYLOR J.H.  
 "Frequency domain criteria for absolute stability".  
 Academic Press, New-York and London, 1973.
- 34 HAHN W.  
 "Theory and application of Lyapunov's direct method".  
 Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

- 35 MICHEL A.N. and HEINEN J.A.  
 "Quantitative and practical stability of systems".  
 ACTA 1974.
- 36 LASALLE J.P. and LEFSHETZ S.  
 "Stability by Lyapunov's direct method with applications".
- 37 RICHARD J.P., LAURENT F.  
 "On a systematic determination of choosen state space description of given non linear continuous processes. Application to education".  
 A paraître, Congrès IASTED, Le Caire, Septembre 1981.
- 38 BARBASIN and KRASOVSKI N.N.  
 "On the existence of Lyapunov's functions in the case of asymptotic stability in the large".  
 Prikladnaja Matematika i Mekhanika 18, 345-350, Moscou 1954.
- 39 ROSENBROCK H.H.  
 "A method of investigating stability".  
 Conf. IFAC, Bâle 1965.
- 40 LAURENT F. et ROMÉLOT M.  
 "Sur le régime dynamique d'un système échantillonné non linéaire décrit par un modèle redondant".  
 C.R.A.S. Paris, t.280, 1033-1035, 21 Avril 1975.
- 41 ROBERT F.  
 "Etude et utilisation des normes vectorielles en analyse numérique linéaire".  
 Thèse de Doctorat es Sciences, Grenoble, 1968.
- 42 PENROSE  
 "A generalised inverse for matrices".  
 Proc. Cambridge Philas. Society, 51, p.406-413, 1955.
- 43 BELLMANN R. and COOKE K.L.  
 "Differential - Difference equations".  
 Mathematics in Science and Engineering 6, Academic Press, 1963.

- 44 MAITRE J.F.  
"Norme composée et norme associée généralisée d'une matrice".  
Numerische Mathematik, Vol.10, 132-141, 1967.
- 45 ROSENBROCK H.H. and STOREY  
"Mathematics of dynamical systems".  
Nelson, 1970.
- 46 WILLEMS J.L.  
"Stability theory of dynamical systems".  
NELSON, 1970.
- 47 GRUJIĆ Lj.T.  
"Novel development of Lyapunov stability of motion".  
Int. J. Control, vol.22, n°4, p.525-549, 1975.
- 48 BENREJEB M., BORNE P., DAUPHIN G. et LAURENT F.  
"Global asymptotic stability of non linear time-varying perturbed systems".  
3th congress I.M.A., Sheffield, Septembre 1980.

TABLE DES MATIERES

<u>Avant-propos</u>		1
<u>INTRODUCTION GENERALE</u>		3
<hr/>		
<u>Chapitre I : REPRESENTATIONS D'ETAT DE SYSTEMES D'ORDRE FINI</u>		
<hr/>		
Introduction .....		5
I -	Structure des processus continus non linéaires .....	6
	I.1. Etat d'un système .....	6
	I.2. Equations représentatives d'un processus .....	7
	I.3. Représentation matricielle de systèmes d'ordre fini .....	10
II -	Remarques sur la stabilité. Conjecture linéaire .....	12
	II.1. Notion de stabilité .....	12
	II.2. Condition de stabilité du linéaire. Conjecture linéaire .....	14
	II.3. Recherche des domaines de stabilité .....	17
	II.4. Exemple d'application des techniques de majoration .....	17
	II.5. Sur le choix de la représentation .....	21
III -	Deux structures fondamentales : systèmes à non-linéarités de rang 1	23
	III.1. Description de la décomposition matricielle utilisée pour la classification .....	23
	III.2. Non-linéarité à sortie scalaire (type I) .....	24
	III.3. Non-linéarité à entrée scalaire (type II) .....	26
	III.4. Systèmes à non-linéarités de rang 1 .....	28
IV -	Représentations canoniques sous formes compagnon .....	28
	IV.1. Systèmes de type II .....	28
	IV.2. Systèmes de type I .....	33
	IV.3. Exemple de système à non-linéarité de rang 1 .....	35
	IV.4. Exemples d'ordre 2 et 3 .....	37

V -	Formes canoniques des systèmes à non-linéarités de rang 1 .....	40
	V.1. Structures associées aux formes compagnon .....	40
	V.1.1. Formes simples .....	40
	V.1.2. Forme générale .....	42
	V.1.3. Réduction d'ordre par application des CNS du linéaire ..	42
	V.2. Forme en flèche .....	43
	V.2.1. Définition et structure associée .....	43
	V.2.2. Application aux systèmes de type Lur'e Postnikov monovariabiles .....	46
	V.2.3. Application du critère pratique de Bonne et Gentina à la forme en flèche mince .....	48
	Conclusion .....	50

---

Chapitre II : DEFINITION D'UN POLYNOME SYMBOLIQUE. APPLICATION A LA MISE EN EQUATION DE SYSTEMES NON LINEAIRES.

---

	Introduction .....	51
I -	Notion de polynôme symbolique .....	52
II -	Propriétés du polynôme symbolique : deuxième définition .....	53
	II.1. Calcul du polynôme symbolique en tant que déterminant .....	53
	II.2. Invariance par changement de base. Matrices semblables .....	55
	II.3. Relation avec le polynôme caractéristique en linéaire .....	55
III -	Utilisation du polynôme symbolique dans la mise en équation des systèmes à non-linéarités de rang 1 .....	58
	III.1. Identification de deux matrices non constantes semblables ...	58
	III.2. Application au passage d'une forme en flèche à une autre. Exemple .....	60
	III.3. Application à la représentation en flèche mince de systèmes décrits par leur schéma-bloc .....	67
	III.3.1. Calcul du polynôme symbolique d'une forme en flèche mince .....	67
	III.3.2. Cas d'un système monovariabiles de type Lur'e Postnikov	68
	III.3.3. Exemple de mise en équation .....	71
	III.3.4. Système à plusieurs non-linéarités .....	72
	III.3.5. Exemple de mise en équation .....	74

- III.4. Passage à une forme arbitrairement définie ..... 76
  - III.4.1. Méthodes permettant le passage ..... 76
  - III.4.2. Exemple d'application ..... 78
- III.5. Résumé pratique sur l'utilisation du polynôme symbolique dans la mise en équation ..... 82
- Conclusion ..... 83

**Chapitre III : POLYNOME SYMBOLIQUE ET ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES.**

- Introduction ..... 85
- I - Stabilité globale des systèmes à non-linéarités de rang 1 ..... 86
  - I.1. Utilisation des mises en équation par polynôme symbolique.
    - Exemple ..... 86
  - I.2. Réduction de dimensionalité. Exemple ..... 89
- II - Etude de la stabilité vis-à-vis des conditions initiales ..... 91
  - II.1. Classe de systèmes étudiés ..... 92
  - II.2. Détermination d'un domaine d'attraction ..... 93
    - II.2.1. Définition d'une classe de normes ..... 93
    - II.2.2. Premier critère : système majorant non linéaire localement stable ..... 94
    - II.2.3. Deuxième critère : système linéaire stable localement majorant ..... 95
    - II.2.4. Application aux systèmes de type Lur'e Postnikov ..... 97
    - II.2.5. Stabilité et fonction de Lyapunov ..... 98
    - II.2.6. Exemple d'application des deux critères : changement de régime ..... 99
  - II.3. Application aux systèmes de type II ..... 105
  - II.4. Application au choix d'un modèle linéaire pour un système non linéaire localement stable ..... 107
- Conclusion ..... 113

CONCLUSION GENERALE ..... 115

ANNEXE A : Définitions relatives à la stabilité en régime libre . Méthodes d'étude. 117  
 ANNEXE B : Théorème sur la stabilité des matrices triangulaires par blocs. 125

BIBLIOGRAPHIE ..... 129

TABLE DES MATIERES ..... 135

