

N° d'ordre : 911

50376
1981
94

50376
1981
94

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

EN MATHÉMATIQUES PURES

par

Alioune FALL



FEUILLETAGES PRESQUE SANS HOLONOMIE

et

FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOMOGRAPHIQUES

Membres du Jury : J. LEHMANN-LEJEUNE, Présidente
G. HECTOR, Rapporteur
J.C. THOMAS, Examineur

Soutenue le 26 Juin 1981

A mes parents,

En me consacrant une partie précieuse de son temps y compris pendant les week-end, en m'aidant constamment à résoudre toutes sortes de difficultés, Gilbert Hector a rendu possible cette thèse. Je voudrais l'en remercier très chaleureusement.

Mes remerciements vont également à Madame Josiane Lehmann et Monsieur Jean-Claude Thomas qui me font l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Enfin, j'adresse mes remerciements au secrétariat scientifique de l'U.E.R. de Mathématiques et en particulier à Madame Claudine Tatti pour le soin apporté à la rédaction de ce mémoire.

INTRODUCTION

Cette étude a pour objet deux classes particulières de feuilletages de codimension un :

- (i) les feuilletages presque sans holonomie (en abrégé p.s.h.) ;
- (ii) les feuilletages transversalement homographiques.

Le but de l'étude est la recherche d'un représentant homographique dans chaque classe de conjugaison d'un modèle de feuilletage p.s.h.

En effet, on savait déjà (cf. [Sa 1]) que tout feuilletage de codimension un de classe C^2 sans holonomie sur une variété compacte est topologiquement conjugué à un feuilletage défini par une forme fermée.

Tout naturellement, on s'est posé la question de savoir si un modèle de feuilletage p.s.h. de classe C^2 pouvait quant à lui être conjugué topologiquement à un feuilletage transversalement affine.

La réponse est affirmative si le champ transverse, au feuilletage est partout rentrant (ou partout sortant) au bord de la variété ; dans tous les cas, la conjugaison est possible avec un modèle de feuilletage transversalement homographique.

C'est là le résultat principal de ce travail ; il repose sur les résultats bien connus des feuilletages presque sans holonomie.

Cette classe de feuilletages a été étudiée de manière approfondie par R. Moussu (cf. [MO 1]).

On sait, par ses travaux, entre autres, qu'un feuilletage p.s.h. ne possède pas de feuilles exceptionnelles et que le groupe d'holonomie d'une feuille d'un tel feuilletage est abélien libre.

D'autres auteurs ont également étudié ce type de feuilletages notamment G. Hector (cf. [HE 1] et [HE 2]) dont le théorème de réduction permet de ramener l'étude d'un feuilletage p.s.h. à celle de modèles, et H. Imanishi (cf. [IM 2]).

Le théorème de conjugaison a aussi nécessité l'étude des feuilletages transversalement homographiques. On n'a pas cherché à répondre de manière systématique à toutes les questions que l'on pouvait se poser à propos de tels feuilletages mais plutôt à établir les résultats nécessaires à la démonstration du théorème de conjugaison. C'est ainsi qu'on a montré, entre autres, que :

(i) à un feuilletage p.s.h. transversalement homographique non trivial est associée une structure transverse homographique unique ;

(ii) un feuilletage transversalement homographique sans holonomie sur une variété compacte peut être définie par une forme fermée sans singularité.

(iii) un modèle de feuilletage presque sans holonomie est topologiquement conjugué à un modèle presque sans holonomie transversalement affine si et seulement si le champ transverse garde un sens constant sur les composantes connexes du bord de la variété (partout rentrant ou partout sortant).

Enfin, comme pour les feuilletages sans holonomie, on a ici aussi besoin d'un théorème de type Tischler.

Mais contrairement à certains auteurs, Imanishi notamment^(*), nous nous préoccupons de ce qui se passe au bord de la variété.

Mettant en oeuvre une démonstration élémentaire, avec une méthode d'approximation de 1-formes fermées plus géométrique on montre que dans tout "voisinage" (au sens de la C^0 -topologie des champs de $(n-1)$ -plans) d'un modèle de feuilletage transversalement homographique de classe C^2 , on peut

(*) Bien que notre méthode de conjugaison soit adaptée de celle d'Imanishi.

trouver un modèle de feuilletage transversalement homographique dont l'intérieur de la variété fibre sur S^1 .

En guise d'applications, nous nous sommes bornés à retrouver des résultats connus sur la croissance des feuilletages presque sans holonomie (cf. [HE 2]).

Nous envisageons d'autres applications notamment sur le type de feuilles des feuilletages p.s.h. en dimension trois ; elles feront l'objet d'une publication ultérieure.

Le plan de ce travail est le suivant :

- dans le chapitre I, on passe en revue les notions générales de feuilletages presque sans holonomie et on y étudie également la théorie d'Imanishi (cf. [IM 1]).

- dans le chapitre II, nous faisons l'étude des feuilletages transversalement homographiques.

- le chapitre III est consacré aux modèles transversalement homographiques ; en particulier, on associera à un modèle presque sans holonomie, un modèle transversalement homographique.

- l'objet du chapitre IV est l'établissement d'un théorème de type Tischler pour les modèles transversalement homographiques.

- la conjugaison des modèles p.s.h. est abordée au chapitre V

- enfin, le chapitre VI traite de la croissance.

I - FEUILLETAGES PRESQUE SANS HOLONOMIE

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions générales de feuilletages presque sans holonomie et de modèles de tels feuilletages (cf. [HE 1]), d'une part et, d'autre part d'étudier la théorie d'Imanishi (cf. [IM 1]) pour les modèles de feuilletages presque sans holonomie.

I.1. Généralités sur les feuilletages presque sans holonomie.

Soit (M, F, X) une variété de dimension n compacte, orientable munie d'un feuilletage F de codimension un de classe C^r , $r \geq 2$, et d'un champ transverse X . On suppose que si $\partial M \neq \emptyset$, alors F est tangent au bord ∂M .

I.1.1. Définition (cf. [HE 1]). Le feuilletage F est dit presque sans holonomie (p.s.h) si toute feuille $F \in F$ à holonomie non triviale est compacte.

I.1.2. Exemples.

- 1) Les feuilletages sans holonomie sont bien évidemment presque sans holonomie.
- 2) Tout feuilletage d'une surface Σ^2 est presque sans holonomie.
- 3) Les feuilletages en plans ou en cylindres sur M^3 variété de dimension 3 sont presque sans holonomie (cf. [HE 3]).
- 4) Les feuilletages définis par une action localement libre de \mathbb{R}^{n-1} sur une variété compacte de dimension n sont presque sans holonomie (cf. [MO 1]).
- 5) Les feuilletages de classe C^2 à croissance d'ordre inférieur ou égal à 1 sont presque sans holonomie (cf. [HE 1]).

1.1.3. Définition (cf [HE 1]). On dira que (M, F) est un modèle (de feuilletage p.s.h) de type (i, j) si F est presque sans holonomie et si la condition correspondante est satisfaite :

(1) le feuilletage $\overset{\circ}{F}$ induit par F sur $\overset{\circ}{M}$ est sans holonomie ;

en outre :

(1.1) $\overset{\circ}{F}$ est une fibration de $\overset{\circ}{M}$ sur S^1 ;

(1.2) toutes les feuilles de $\overset{\circ}{F}$ sont denses dans $\overset{\circ}{M}$;

(2) pour toute composante L de ∂M , la variété M est C^r -diffeomorphe à $L \times [0, 1]$ et F est transverse au facteur $[0, 1]$.

1.1.4. Exemples.

(i) Tout feuilletage de T^2 est un modèle p.s.h. de type 1.

(ii) Le feuilletage de Reeb sur $D^2 \times S^1$ (cf [RE 1]) et la composante cylindrique sont aussi des modèles du type 1.

(iii) Un modèle de type 2 sur $M = L \times [0, 1]$ est complètement déterminé par une représentation abélienne du groupe fondamental de L dans le groupe des homéomorphismes croissants de classe C^r , $r \geq 2$, de $[0, 1]$ (cf. [HA 1]).

Utilisant les propriétés topologiques des feuilletages sans holonomie, on montre le résultat suivant :

1.1.5. Théorème. Soit (M, F) un feuilletage presque sans holonomie. Si $\overset{\circ}{F}$ est sans feuille compacte, alors (M, F) est un modèle du type 1.

Preuve : Puisque (M, F) est presque sans holonomie et que $\overset{\circ}{F}$ ne possède pas de feuille compacte, $\overset{\circ}{F}$ est sans holonomie. On montre que pour un tel feuilletage, il n'y a que deux possibilités :

- soit $\overset{\circ}{F}$ est une fibration de $\overset{\circ}{M}$ sur S^1 ,

- soit toutes les feuilles de $\overset{\circ}{F}$ sont denses dans $\overset{\circ}{M}$.

Pour cela, on montre qu'il existe une transversale fermée θ dans $\overset{\circ}{M}$, totale pour $\overset{\circ}{F}$; alors, quitte à modifier θ et utilisant une généralisation convenable du théorème de Sacksteder, on a une des deux situations suivantes :

- (i) la relation d'équivalence restreinte à θ, ρ_θ est triviale,
- (ii) toutes les trajectoires de ρ_θ sont partout denses (cf. [HE 1]).

Le théorème en résulte ■

Le théorème suivant dû à G. Hector (cf. [HE 1]) permet de réduire l'étude des feuilletages p.s.h. à celle des modèles.

.1.6. Théorème. Si (M, F) est une variété munie d'un feuilletage p.s.h. de classe C^r , $r \geq 2$, il existe une suite finie $\{(M_i, \psi_i)\}_{i \in \{1, \dots, p\}}$ de variétés compactes M_i et d'immersions :

$$\psi_i : M_i \rightarrow M, \quad \text{telle que}$$

(a) pour tout i , l'image $\psi_i(M_i)$ de ψ_i est une sous-variété compacte, saturée de (M, F) et la restriction de ψ_i à $\overset{\circ}{M}_i$ et à chaque composante de ∂M_i est injective ;

(b) la réunion des sous-variétés $\psi_i(M_i)$ est égale à M et $(M_i, \psi_i^*(F))$ est un modèle pour tout i .

Preuve (cf. [HE 1]) : D'après un théorème de Haefliger (cf. [HA 1]), la réunion A des feuilles compactes de F est un fermé de M .

Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des composantes connexes de $M - A$. Soit \bar{F}_n le feuilletage induit par F sur \bar{W}_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque F est p.s.h., (\bar{W}_n, \bar{F}_n) est un modèle de type 1 (cf. théorème précédent). Utilisant alors le fait que pour presque tout n , (\bar{W}_n, \bar{F}_n) est un modèle de type 2

et qu'il n'existe qu'un nombre fini de composantes W_n telles que (\bar{W}_n, \bar{F}_n) ne soit pas du type 2, on montre qu'on peut se ramener à une décomposition finie de (M, F) en modèles ■

On déduit de ce résultat, le théorème fondamental suivant :

I.1.7. Théorème (cf. [HE 1]). Si (M, F) est un feuilletage p.s.h. de classe C^2 , alors :

- (i) F ne possède pas de feuille exceptionnelle ;
- (ii) le groupe d'holonomie de toute feuille de F est abélien.

Preuve (cf. [HE 1]) :

(i) Comme on l'a vu dans le théorème de décomposition en modèles, si A désigne la réunion des feuilles compactes de F , $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des composantes connexes de $M - A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, \bar{F}_n le feuilletage induit par F sur \bar{W}_n , alors (\bar{W}_n, \bar{F}_n) est un modèle de type 1. Or un modèle de type 1 ne possède pas de feuille exceptionnelle. Par conséquent aucune feuille de F n'est exceptionnelle.

(ii) Si F est une feuille compacte, alors

- soit F est isolée à droite dans l'ensemble des feuilles compactes auquel cas le groupe d'holonomie à droite G^+ de F peut être réalisé par un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux de $[0, +\infty[$ définis au voisinage de 0 et qui sont soit des contractions, soit des dilatations (ou encore l'identité).

Par suite G^+ est totalement ordonné, archimédien, donc abélien (cf. le théorème bien connu de Birkhoff).

- soit F n'est pas isolée à droite, G^+ peut alors être réalisé par un groupe d'homéomorphismes de $[0, 1]$ qui ont tous le même ensemble B de points fixes et qui commutent sur les composantes connexes du complé-

mentaire de B. Bref dans ce cas également G^+ est abélien. D'où le théorème ■

1.1.8. Remarque. La condition (ii) n'implique pas qu'un feuilletage soit p.s.h. En effet, dans son article "quelques exemples de feuilletages. Espèces rares" (cf. [HE 4]), G. Hector construit un feuilletage analytique de $V_2 \times S^1$ (où V_2 désigne la surface compacte de genre 2) sans feuille compacte et sans feuille localement dense. Tous les groupes d'holonomie de ce feuilletage sont isomorphes à $\{0\}$ ou \mathbb{Z} et ce feuilletage possède un minimal exceptionnel.

1.2. Modèles standard.

Nous allons maintenant introduire un élément de régularité dans les modèles de feuilletage p.s.h.

1.2.1. Définition. Un modèle (M, F, X) de feuilletage p.s.h est un modèle standard si le feuilletage $\overset{0}{F}$ peut être défini par une forme fermée.

1.2.2. Exemples.

1) le feuilletage de Reeb sur $D^2 \times S^1$ est un modèle standard ; en effet si p désigne la projection des feuilles de l'intérieur de $D^2 \times S^1$ sur le cercle intérieur transverse, la forme fermée $p^* d\theta$, où $d\theta$ est la forme canonique de S^1 , définit le feuilletage sur l'intérieur de $D^2 \times S^1$.

2) Tout modèle (M, F) de type (1.1) est un modèle standard : si f est l'application de projection de la fibration de $\overset{0}{M}$ sur S^1 , alors $f^* .d\theta$ est une forme fermée définissant $\overset{0}{F}$.

3) - sur T^2 , il existe des modèles standard : feuilletages obtenus par suspension d'une rotation.

- sur T^2 , il existe aussi des modèles non standard.

En effet, soit (T^2, F) un feuilletage de T^2 de classe C^2 .

a) S'il existe des feuilles compactes, alors toutes les feuilles sont propres et F est presque sans holonomie.

Tous les modèles de T^2 possédant une feuille compacte sont standard.

b) Il faut donc que F soit sans holonomie avec toutes ses feuilles denses ; cela équivaut à dire que F est la suspension d'un difféomorphisme f de S^1 de nombre de rotation α irrationnel.

Une telle suspension est standard si et seulement si elle est définie par une forme fermée ; cela équivaut à dire que f est différemmentiellement conjugué à la rotation d'angle α . Il est bien connu (cf. Arnold "Small denominators" [AR 1]) qu'il existe un difféomorphisme f analytique qui n'est pas C^1 conjugué à une rotation.

Remarque. On verra que tout modèle est topologiquement conjugué à un modèle standard.

I.2.3. Définition. Une métrique riemannienne R sur (M, F, X) est dite "bundle-like" si :

- i) X est orthogonal à F pour R ;
- ii) la métrique induite par R sur la somme disjointes des courbes intégrales de X est invariante par le pseudo-groupe d'holonomie de F .

Les lemmes suivants résument deux propriétés des modèles standard qui nous seront utiles dans la suite.

I.2.4. Lemme (cf. [HE 1]). Si (M, F, X) est un modèle standard non trivial et si ω est une 1-forme sur $\overset{\circ}{M}$ définissant $\overset{\circ}{F}$, alors il existe une métrique "bundle-like" $R_{\overset{\circ}{F}}$ pour $\overset{\circ}{F}$ sur $\overset{\circ}{M}$ telle que :

- i) $\|\omega\|_{R_{\overset{\circ}{F}}} \equiv 1$
- ii) $(\overset{\circ}{M}, R_{\overset{\circ}{F}})$ est complète.

Preuve : Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $\overset{\circ}{M}$ par des ouverts bidistingués de $\overset{\circ}{F}$ et soit pour tout $i \in I$ une submersion :

$$x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{telle que}$$

$$\omega|_{U_i} = dx_i .$$

Alors pour tout $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_j = x_i + a_{ij} \quad \text{sur } U_i \cap U_j .$$

Soit ρ la métrique canonique de \mathbb{R} (invariante par translation). Il existe sur la réunion des trajectoires du champ X une métrique $\overset{T}{R}_{\overset{\circ}{F}}$ telle que pour tout $i \in I$, on ait :

$$\overset{T}{R}_{\overset{\circ}{F}}|_{U_i} = x_i^* \rho .$$

Soit R une métrique riemannienne définie sur M ; désignons par R^H la restriction de R à F . Soit alors $R_{\overset{\circ}{F}}$ la métrique riemannienne définie sur $\overset{\circ}{M}$ en complétant $\overset{T}{R}_{\overset{\circ}{F}}$ par R^H , c'est-à-dire encore :

$$R_{\overset{\circ}{F}} = R^H \oplus \overset{T}{R}_{\overset{\circ}{F}} .$$

Alors $R_{\overset{\circ}{F}}$ est "bundle-like" et vérifie (i).

Maintenant, considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\overset{\circ}{M}, R_{\overset{\circ}{F}})$. On peut supposer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (M, R) vers un point y . Il faut donc montrer que y ne peut pas appartenir à ∂M . Si c'était le cas, comme la métrique R est définie sur M , c'est que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente (comme suite de Cauchy) à une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ portée par une trajectoire du champ X . Par conséquent, il suffit de montrer

que la longueur d'un segment $[x, y[$ où $x \in \overset{\circ}{M}$ et $y \in \partial M$, mesurée à l'aide de $R_{\overset{\circ}{F}}$ est infinie.

En vertu du théorème de stabilité, le pseudo-groupe d'holonomie de la feuille F_y est non trivial. D'autre part, du fait que $\overset{\circ}{F}$ est sans holonomie, un élément différent de l'identité du pseudogroupe d'holonomie de F_y est sans point fixe ; considérons donc un élément contractant f du pseudogroupe d'holonomie de F_y , f défini par un élément γ de $\pi_1(F_y, y)$.

En supposant x assez voisin de y pour la métrique R , on définit alors une suite $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers le point y pour la métrique R .

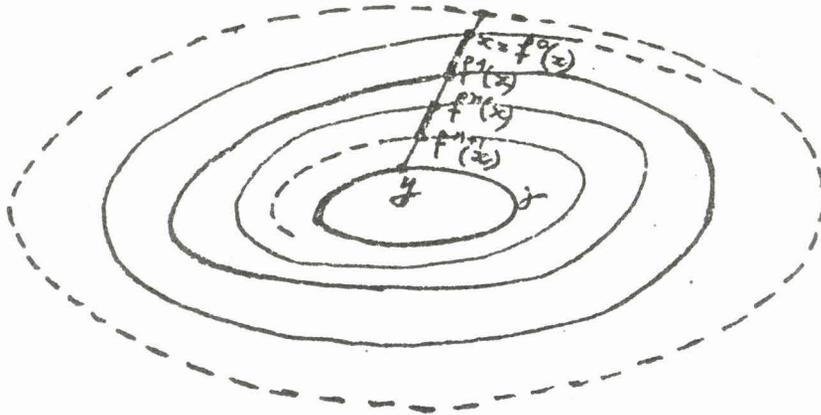


Figure 1

Du fait de l'invariance de $R_{\overset{\circ}{F}}$ par le pseudogroupe d'holonomie les segments $\{]f^n(x), f^{n+1}(x)[\}_{n \in \mathbb{N}}$ ont même longueur (mesurée par $R_{\overset{\circ}{F}}$). Et comme ils sont disjoints, la somme de leur longueur est infinie, donc aussi la longueur du segment $[x, y[$ ■

I.2.5. Lemme. Pour tout modèle standard non trivial (M, F) , la forme fermée ω tend en norme vers l'infini uniformément au voisinage du bord de la variété.

Preuve : Soit x_0 un élément de ∂M et supposons qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, et un voisinage U de x_0 tels que sur $U \cap \overset{\circ}{M}$, on ait :

$$\|\omega\| < A.$$

Soit γ un lacet de point base x_0 , contenu dans ∂M tel que l'application d'holonomie associée $h(\gamma)$ soit non nulle et contractante.

Envoyons alors le cylindre $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1[$ au-dessus du lacet γ .

Soient m_0, n_0 deux points distincts de la transversale en x_0 , situés dans U . Puisque ω est fermée et nulle sur les feuilles du feuilletage C induit par F sur C , on peut écrire en suivant les notations de la figure ci-dessous,

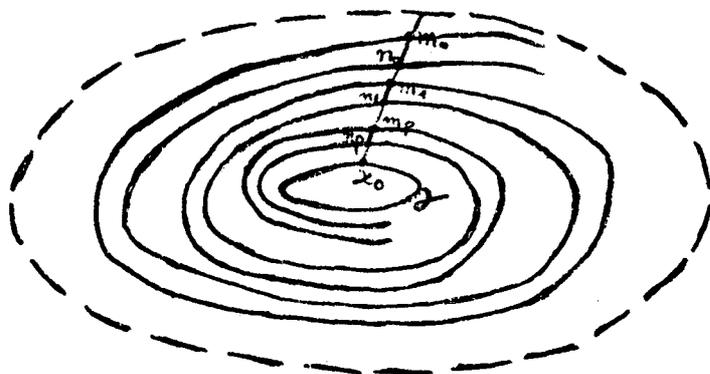


Figure 2

$$\int_{[m_0, n_0]} \omega = \int_{[m_1, n_1]} \omega = \dots = \int_{[m_p, n_p]} \omega = \dots ,$$

où pour tout $p \in \mathbb{N}$: $m_p = [h(\gamma)]^p(m_0)$ et

$$n_p = [h(\gamma)]^p(n_0).$$

Or :

$$\left| \int_{[m_p, n_p]} \omega \right| \leq A \|[m_p, n_p]\| \quad \text{où} \quad \|[m_p, n_p]\|$$

désigne la longueur du segment transverse $[\underline{m}_p, \underline{n}_p]$. Par conséquent, puisque cette longueur tend vers 0 quand p devient infini, il vient :

$$\int_{[\underline{m}_0, \underline{n}_0]} \omega = 0,$$

d'où la contradiction ■

1.3. Théorie d'Imanishi pour les modèles de type 1.

En fait, on va s'intéresser ici au modèles de type (1.2), notre but étant de montrer qu'à conjugaison (topologique) près tout se passe comme dans un modèle standard.

Dans son article intitulé "On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy" (cf. [Im 1]), Hideki Imanishi établit le résultat suivant relatif aux domaines de difféomorphismes d'holonomie associés aux chemins dans les feuilles d'un feuilletage de codimension un.

I.3.1. Théorème (cf. [Im 1]). Soit (M, F, ψ) une variété compacte, fermée munie d'un feuilletage F de codimension un sur M et d'un flot

$$\psi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M,$$

dont les orbites sont transverses aux feuilles de F .

Soit $c : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin dans une feuille de F et $(-t'_0, t_0)$ le domaine de définition du difféomorphisme d'holonomie associé à c .

Si t_0 est fini, la feuille F_0 passant par $\psi(c(0), t_0)$ est telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$, vérifiant :

(i)
$$t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$$

(ii) la feuille passant par $\psi(c(0), t)$ a de l'holonomie.

Par conséquent si (M, F, φ) est comme dans le théorème et est en outre sans holonomie, le difféomorphisme d'holonomie associé à tout chemin tracé dans une feuille de F est défini sur tout \mathbb{R} , autrement dit, on peut relever un tel chemin dans les feuilles de F tout le long des trajectoires du flot φ . Ceci permet de montrer que le revêtement universel d'une telle variété est une variété produit feuilletée en produit. De manière précise, on peut énoncer :

I.3.2. Théorème. Soit (M, F, X) une variété compacte fermée munie d'un feuilletage sans holonomie et d'un champ transverse X (tout est supposé de classe C^r , $r \geq 2$).

Il existe un revêtement $\hat{p} : \hat{M} \rightarrow M$ tel que

- (i) si F est une feuille de F , alors $\hat{M} \cong F \times \mathbb{R}$
- (ii) le groupe des automorphismes du revêtement Γ est abélien et agit sans point fixe sur \mathbb{R} .

Preuve : Soit $(\tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{X})$ le revêtement universel de (M, F, X) et soit \tilde{p} l'application de projection.

(a) Tout chemin tracé dans une feuille de \tilde{F} se relève dans les feuilles de \tilde{F} tout le long des trajectoires de X .

(b) D'autre part, dans $(\tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{X})$ il n'y a pas de transversale fermée (sinon il existerait un cycle évanouissant dans (M, F, X)).

Par conséquent, une feuille de \tilde{F} coupe toute intégrale de \tilde{X} en un point unique ; par suite \tilde{M} est un produit $\tilde{F} \times Y$ où Y est difféomorphe à \mathbb{R} , \tilde{F} est une feuille type de \tilde{F} ; en outre \tilde{F} c'est le feuilletage produit.

Soit x_0 un point fixé de M ; choisissons un point \tilde{x}_0 de $\tilde{p}^{-1}(x_0)$ et notons \tilde{F}_t la feuille passant par $\tilde{\varphi}(\tilde{x}_0, t)$ ($\tilde{\varphi}$ est le flot

associé à \tilde{X}). D'après ce qui précède, les feuilles de \tilde{F} sont ainsi indexées sur \mathbb{R} .

Soit γ un élément de $\pi_1(M, x_0)$ et désignons encore par γ l'automorphisme du revêtement (\tilde{M}, p, M) associé à γ . La transformation $\gamma : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ préserve les feuilles de \tilde{F} i.e. la structure produit.

Avec Novikov, on définit alors un difféomorphisme de \mathbb{R} associé à γ , $H(\gamma)$, en posant pour tout t :

$$\tilde{F}_{H(\gamma)}(t) = \gamma(\tilde{F}_t) \quad \text{i.e. encore on a :}$$

$$\gamma(\tilde{x}, t) = (\tilde{\gamma}(\tilde{x}), H(\gamma)(t)),$$

pour tout $(\tilde{x}, t) \in \tilde{M}$ et où $\tilde{\gamma}$ est un difféomorphisme de \tilde{F} . On obtient alors un homomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} H : \pi_1(M, x_0) & \longrightarrow & \text{Diff}(\mathbb{R}) \\ \gamma & \longrightarrow & H(\gamma) \end{array}$$

où $\text{Diff}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des difféomorphismes de \mathbb{R} .

Soit \hat{M} le revêtement de M défini par la suite exacte :

$$0 \hookrightarrow \ker H \hookrightarrow \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{H} \text{Im } H \subset \text{Diff}(\mathbb{R}) \rightarrow 0.$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & & \\ \downarrow p & \searrow q & \\ M & & \hat{M} \\ & \nearrow \hat{p} & \end{array}$$

où \hat{p} est l'application de projection du revêtement \hat{M} .

Le triplet (M, q, \hat{M}) est également un revêtement de groupe égal à $\ker H$. Par conséquent \hat{M} est un produit $\hat{F} \times \mathbb{R}$ où

$$\hat{F} \cong \tilde{F} / \ker H .$$

Le groupe $\Gamma = \text{Aut } \hat{M} \cong \pi_1(M) / \ker H$ opère sur \hat{M} en préservant la structure produit : pour tout $\bar{\gamma} \in \Gamma \cong \pi_1(M) / \ker H$ et pour tout $(\hat{x}, t) \in \hat{M}$, on a :

$$\bar{\gamma}(\hat{x}, t) = (\hat{\gamma}(\hat{x}), H(\gamma)(t)) , \quad (\gamma \in \bar{\gamma}).$$

Si un élément $\gamma \in \pi_1(M)$ tel que $H(\gamma) \neq e$ possède un point fixe $t_0 \in \mathbb{R}$, alors γ correspond à un élément d'holonomie non nul de F . Par conséquent $H(\pi_1(M))$ opère sans point fixe sur \mathbb{R} ; donc ce groupe est ordonné, archimédien et abélien puisqu'il est de type fini (cf. un résultat bien connu dû à Birkhoff). On en déduit le point (ii) du théorème.

Enfin on a : $\hat{F} \cong F$ car $\hat{p}|_{\hat{F}} : \hat{F} \rightarrow F$ est injectif (en effet si $\hat{y} = \bar{\gamma}(\hat{x})$ où $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{F}$, alors $H(\gamma) = e$, i.e. $\gamma \in \ker H$ i.e.

$$\bar{\gamma} = \text{id}) \blacksquare$$

La démonstration donnée par Imanishi du théorème sur le domaine des difféomorphismes d'holonomie montre que pour l'intérieur d'un modèle, le feuilletage induit sur l'intérieur possède la propriété du relèvement, tout le long des transversales à \hat{F} , des chemins tracés dans une feuille, de la sorte, le résultat précédent est valable pour l'intérieur d'un modèle.

I.3.3. Théorème. Si (M, F, X) est un modèle de feuilletage p.s.h. de type 1 de classe C^r , $r \geq 2$, alors le résultat du théorème I.3.2 est valable pour $(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{F}, \overset{\circ}{X})$ où $\overset{\circ}{F}$ (resp. $\overset{\circ}{X}$) est le feuilletage (resp. le champ transverse) induit par F (resp. X) sur l'intérieur $\overset{\circ}{M}$.

On en déduit alors le théorème suivant :

I.3.4. Théorème de type Sacksteder pour l'intérieur d'un modèle.

Soit (M, F, X) un modèle de feuilletage p.s.h. de type 1.

Alors $(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{F})$ est topologiquement conjugué à un feuilletage sur $\overset{\circ}{M}$ défini par une 1-forme fermée.

Preuve : On peut supposer que (M, F, X) est du type (1.2) ; en effet si (M, F, X) est du type (1.1), $(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{F})$ est tel que $\overset{\circ}{F}$ est défini par une forme fermée.

D'après le théorème précédent, il existe un revêtement $\widehat{\overset{\circ}{M}}$ de $\overset{\circ}{M}$ difféomorphe à $\widehat{\overset{\circ}{F}} \times \mathbb{R}$ où $\overset{\circ}{F}$ est une feuille-type de $\overset{\circ}{F}$. Le groupe d'automorphismes Γ de ce revêtement opérant sans point fixe sur \mathbb{R} est ordonné, archimédien. On sait (résultat dû à Birkhoff) qu'il existe un homomorphisme injectif de groupe ordonné.

$$\begin{aligned} \tau : \Gamma &\hookrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ \gamma &\mapsto T_\gamma \end{aligned}$$

défini à une constante positive multiplicative près ; T_γ représente une translation de \mathbb{R} .

Les trajectoires de $\tau(\Gamma)$ étant denses, il existe un homéomorphisme h de \mathbb{R} tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ \downarrow \gamma & & \downarrow T_\gamma \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \end{array} \quad \text{(c'est une linéarisation de } \Gamma \text{)}$$

Soit $d\theta$ la mesure canonique de \mathbb{R} ; alors $\mu = h^* d\theta$ est une mesure sur \mathbb{R} invariante par Γ .

La suite de la démonstration reprend la dernière partie du théorème 6 de "Foliations and pseudogroups" de R. Sacksteder (Cf. [Sa 1]) ■

II - FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOMOGRAPHIQUES

Dans l'étude des classes caractéristiques des feuilletages, un exemple dû à Roussarie a joué un rôle très important ; il a été le premier exemple de feuilletage d'invariant de Godbillon-Vey non nul (cf. [G-V]).

Nous allons prendre ce même exemple comme prototype d'une classe de feuilletages : les feuilletages transversalement homographiques. Cette classe contient les feuilletages transversalement affines qui ont été étudiés par Fédida et Furness (cf. [F-F]) et par Bobo Séré (cf. [Se 1]).

Nous commençons par rappeler l'exemple de Roussarie.

Soit $SL(2, \mathbb{R})$ le groupe homographique, sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}, \quad x, y, u, v \in \mathbb{R} \quad \text{vérifiant}$$

$$xv - uy = 1.$$

On se fixe une base $(\tilde{\Omega}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ des formes de Pfaff invariantes à gauche de $SL(2, \mathbb{R})$ vérifiant les identités suivantes :

$$(H) \quad \begin{cases} \tilde{d}\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \wedge \tilde{\alpha} \\ \tilde{d}\tilde{\alpha} = \tilde{\Omega} \wedge \tilde{\beta} \\ \tilde{d}\tilde{\beta} = \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \end{cases}$$

par exemple, la base obtenue en posant :

$$\begin{cases} \tilde{\Omega} = vdy - ydv \\ \tilde{\alpha} = 2(vdx - ydu) = 2(udy - xdv) \\ \tilde{\beta} = 2(udx - xdu). \end{cases}$$

On sait qu'il existe un sous-groupe discret Γ de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que la variété quotient $M = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ soit compacte. Les formes Ω, α, β induites sur M par $\tilde{\Omega}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ respectivement sont sans singularité et vérifient les identités analogues aux précédentes, les identités (H). La forme Ω est sans singularité et complètement intégrable donc définit un feuilletage F sur M de codimension 1, qui est le feuilletage annoncé.

En particulier rappelons que la forme $\Omega \wedge \alpha \wedge \beta$ définit une classe de cohomologie non nulle $[\Omega \wedge \alpha \wedge \beta]$ qui est l'invariant de Godbillon-Vey.

Introduisons maintenant la généralisation annoncée.

II.1. Définitions générales.

II.1.1. Définition. Un feuilletage F de codimension un sur une variété M sera dit transversalement homographique s'il existe un triplet (Ω, α, β) de 1-formes sur M tel que :

- (i) Ω est sans singularité ;
- (ii) le triplet (Ω, α, β) vérifie les identités (H) ;
- (iii) F est défini par Ω .

Cette famille de feuilletages contient bien sûr les familles particulières suivantes :

- (i) les feuilletages définis par des formes fermées i.e. par des triplets $(\Omega, 0, 0)$,
- (ii) les feuilletages transversalement affines, c'est-à-dire définis par des triplets du type $(\Omega, \alpha, 0)$.

II.1.2. Autres exemples.

1) Le feuilletage défini sur $C = \mathbb{S}^1 \times I$ par le triplet (Ω, α, β) tel que

$$\begin{cases} \Omega = dr + r(1-r)d\theta, \\ \alpha = (1-2r)d\theta, \\ \beta = -2d\theta, \end{cases}$$

est transversalement homographique

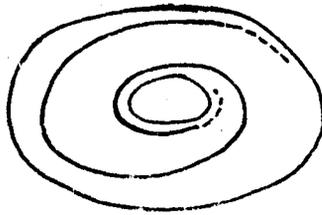


Figure 3

2) La composante de Reeb en dimension 2 ou 3 est transversalement affine.

3) E. Ghys et V. Sergiescu ont montré que l'action du groupe affine sur des espaces homogènes de $SL(2, \mathbb{R})$ définit des feuilletages transversalement homographiques sur des variétés quotients de $SL(2, \mathbb{R})$ (cf. [G-S1]).

En effet, on peut plonger le groupe affine dans le groupe homographique, par exemple, en posant :

$$\psi(a, b) = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & b/\sqrt{a} \\ 0 & 1/\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

pour tout élément (a, b) du groupe affine. Une base de l'algèbre de Lie du groupe affine induit un système de deux vecteurs linéairement indépendants \tilde{X} et \tilde{Y} de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$; complétons celui-ci en

une base $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$; la base duale associée à $\{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}\}$ vérifie alors les identités (H).

L'expression "homographique" se trouvera justifiée par l'étude de la structure transverse à F . Pour ce faire, introduisons la notion auxiliaire suivante :

II.1.3. Définition. On appelle cocycle homographique associé à un feuilletage (M, F) un atlas de cartes distinguées $\{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$ tel que :

- (i) la famille $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M tel que $U_i \cap U_j$ est connexe pour tout $(i, j) \in I^2$
- (ii) pour tout $i \in I$, $h_i = (y_i, x_i) : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ est un difféomorphisme tel que pour tout $(i, j) \in I^2$, tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe un

élément $A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que

$$x_j = \frac{a_{ij}x_i + b_{ij}}{c_{ij}x_i + d_{ij}}$$

[ce qu'on notera en bref : $x_j = A_{ij} \cdot x_i$].

On désignera un tel cocycle par le triplet $\{(U_i, h_i, A_{ij})\}_{(i, j) \in I^2}$.

Bien sûr un feuilletage quelconque n'admet pas en général un cocycle homographique. D'autre part, il est évident qu'à un même feuilletage pourront être associés éventuellement différents cocycles homographiques ; ceci pose un problème d'équivalence de ces cocycles.

II.1.4. Définition.

(i) Deux cocycles homographiques $\{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$ et $\{(\hat{U}_j, \hat{h}_j)\}_{j \in J}$ sur (M, F) seront dits équivalents si pour tout $(i, j) \in I \times J$, il existe

un élément $A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que :

$$\hat{x}_j = A_{ij} \cdot x_i = \frac{a_{ij}x_i + b_{ij}}{c_{ij}x_i + d_{ij}} \quad \text{sur } \underline{U_i \cap \hat{U}_j}$$

(ii) Une classe d'équivalence sera appelée structure homographique transverse de F .

Nous pouvons établir maintenant la relation entre feuilletage transversalement homographique et cocycle homographique.

II.1.5. Théorème. Un feuilletage (M, F) de codimension un transversalement orientable est transversalement homographique si et seulement s'il existe une structure transverse homographique associée à F .

La démonstration de ce théorème utilise le résultat fondamental qu'on trouvera dans "Differential Geometry" de Spivak (cf. [Sp 1]).

II.1.6. Théorème de Lie (cf. [Sp 1]). Soit G l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G (connexe) et désignons par π la forme de Maurer-Cartan sur G .

Si $\omega : TM \rightarrow G$ est une 1-forme sur une variété M à valeurs dans G vérifiant l'équation de Maurer-Cartan :

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0,$$

alors pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable

$$f : U \longrightarrow G$$

tels que

$$\omega|_U = f^* \pi.$$

De plus si $g : U \rightarrow G$ vérifie

$$\omega|_U = g^* \pi, \quad ,$$

il existe $\alpha \in G$ tel que :

$$g = \alpha.f .$$

On notera que dans le cas où M est simplement connexe, le théorème se globalise c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : M \rightarrow G$ tel que

$$\omega = f^* \pi .$$

La preuve du théorème II.1.5 peut maintenant être établie en deux étapes :

(i) on montre que si F possède un cocycle homographique, alors F est transversalement homographique ;

(ii) réciproquement si F est transversalement homographique, alors F possède un cocycle homographique.

La première étape nécessite quelques préliminaires.

Soit $\{(U_i, h_i, A_{ij})\}$ un cocycle homographique associé à un feuilletage F . La coordonnée transverse dans U_i étant notée x_i , on a les relations :

$$x_j = A_{ij} \cdot x_i = \frac{a_{ij} x_i + b_{ij}}{c_{ij} x_i + d_{ij}}$$

sur $U_i \cap U_j$ pour tout (i,j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. De plus, soit $(\varphi_k)_{k \in I}$ une partition différentiable de l'unité associée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de M . Pour tout $i \in I$, considérons les fonctions $(u_i, v_i) : U_i \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} u_i(x) = e^{-[\sum_k \varphi_k(x) \text{Log}(c_{ki} x_i + d_{ki})^2]} \\ v_i(x) = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k(x) \frac{d}{dx_i} [\text{Log}(c_{ki} x_i + d_{ki})^2]. \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

II.1.7. Lemme. Pour tout $(i,j) \in I^2$, tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a :

$$\begin{aligned} u_j &= u_i (c_{ij} x_i + d_{ij})^2 \\ v_j &= v_i (c_{ij} x_i + d_{ij})^2 + c_{ij} (c_{ij} x_i + d_{ij}), \end{aligned}$$

sur $U_i \cap U_j$.

Preuve : Soit $(i,j) \in I^2$, tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$; pour tout $k \in I$,

on a :

$$\text{Log}(c_{ik} x_i + d_{ik})^2 = \text{Log}(c_{ik} \frac{d_{ij} x_j - b_{ij}}{-c_{ij} x_j + a_{ij}} + d_{ik})^2$$

Et, puisque $A_{ik} = A_{jk} \cdot A_{ij}$, on a l'égalité

$$(1) \quad \text{Log}(c_{ik} x_i + d_{ik})^2 = -\text{Log}(-c_{ij} x_j + a_{ij})^2 + \text{Log}(c_{jk} x_j + d_{jk})^2 .$$

En sommant à l'aide de la partition de l'unité, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_k \varphi_k(x) \text{Log}(c_{ik} x_i + d_{ik})^2 &= -\text{Log}(-c_{ij} x_j + a_{ij})^2 + \sum_k \varphi_k(x) \text{Log}(c_{jk} x_j + d_{jk})^2 \\ &= \text{Log}(c_{ij} x_i + d_{ij})^2 + \sum_k \varphi_k(x) \text{Log}(c_{jk} x_j + d_{jk})^2 , \end{aligned}$$

car : $c_{ij}x_i + d_{ij} = \frac{1}{-c_{ij}x_i + a_{ij}}$. Par passage à l'exponentielle, on trouve la première relation annoncée :

$$u_i(x) = \frac{1}{(c_{ij}x_i + d_{ij})^2} u_j(x).$$

D'autre part, puisque sur $U_i \cap U_j$, on a :

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{1}{(c_{ij}x_i + d_{ij})^2} \frac{d}{dx_j},$$

on montre, utilisant (1), que :

$$v_i(x) = \frac{-c_{ij}}{c_{ij}x_i + d_{ij}} + \frac{v_j(x)}{(c_{ij}x_i + d_{ij})^2},$$

donc

$$v_j(x) = v_i(x)(c_{ij}x_i + d_{ij})^2 + c_{ij}(c_{ij}x_i + d_{ij}) \quad \blacksquare$$

Considérons maintenant les 1-formes définies sur chaque ouvert U_i en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_i = u_i dx_i, \\ \alpha_i = 2v_i dx_i - \frac{du_i}{u_i}, \\ \beta_i = 2 \left[\frac{v_i^2}{u_i} dx_i - \frac{dv_i}{u_i} \right] \end{array} \right.$$

La preuve du lemme ci-dessous découle immédiatement des relations mises en évidence en II.1.7.

II.1.8. Lemme.

(a) Pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a :

$$\Omega_i|_{U_i \cap U_j} = \Omega_j|_{U_i \cap U_j},$$

$$\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j},$$

$$\beta_i|_{U_i \cap U_j} = \beta_j|_{U_i \cap U_j}.$$

(b) Pour tout $i \in I$, le triplet $(\Omega_i, \alpha_i, \beta_i)$ vérifie les identités (H).

II.1.9. Preuve du théorème II.1.5. : La première partie du théorème s'établit immédiatement en posant :

$$\Omega|_{U_i} = \Omega_i, \quad \alpha|_{U_i} = \alpha_i \quad \text{et} \quad \beta|_{U_i} = \beta_i,$$

pour tout $i \in I$.

Pour démontrer la réciproque, on considère un feuilletage F transversalement homographique sur M et défini par le triplet $\omega = (\Omega, \alpha, \beta)$.

Ce triplet ω peut être considéré comme une 1-forme sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$. La condition (H) signifie précisément que :

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

D'après le théorème de Lie, il existe donc un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de M tel que pour tout $i \in I$, on ait une application différentiable

$$f_i : U_i \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4,$$

telle que :

$$\omega|_{U_i} = f_i^* \pi \quad \text{où} \quad \pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$$

désigne la forme de Maurer-Cartan de $SL(2, \mathbb{R})$. Cette forme peut s'écrire (dans \mathbb{R}^4) :

$$\begin{cases} \pi_0 = vdy - ydv, \\ \pi_1 = 2(udy - xdv), \\ \pi_2 = 2(udx - xdu). \end{cases}$$

De plus, les fonctions f_i peuvent se mettre sous la forme

$$f_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i) ,$$

avec

$$\tilde{x}_i \tilde{v}_i - \tilde{u}_i \tilde{y}_i \equiv 1.$$

On a alors :

$$\Omega|_{U_i} = \tilde{v}_i d\tilde{y}_i - \tilde{y}_i d\tilde{v}_i ,$$

$$\alpha|_{U_i} = 2 (\tilde{u}_i d\tilde{y}_i - \tilde{x}_i d\tilde{v}_i),$$

$$\beta|_{U_i} = 2(\tilde{u}_i d\tilde{x}_i - \tilde{x}_i d\tilde{u}_i).$$

D'autre part, d'après le même théorème de Lie, pour tout (i, j) tel que $U_{ij} \neq \emptyset$, il existe $A_{ij} \in SL(2, \mathbb{R})$ tel que :

$$f_j = A_{ij} \cdot f_i \quad \text{sur } U_{ij}.$$

Cette dernière relation s'écrit encore :

$$(1) \quad \underline{(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{u}_j, \tilde{v}_j) = (a_{ij}\tilde{x}_i + b_{ij}\tilde{u}_i, a_{ij}\tilde{y}_i + b_{ij}\tilde{v}_i, c_{ij}\tilde{x}_i + d_{ij}\tilde{u}_i, c_{ij}\tilde{y}_i + d_{ij}\tilde{v}_i)}.$$

En prenant éventuellement un recouvrement plus fin que le recouvrement $(U_i)_{i \in I}$, on peut supposer que pour tout $i \in I$, l'une des fonctions \tilde{v}_i ou \tilde{y}_i ne s'annule jamais sur U_i , ce qui permet de définir une appli-

cation différentiable : $x_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on choisira égale à \tilde{y}_i/\tilde{v}_i (resp. \tilde{v}_i/\tilde{y}_i) si \tilde{v}_i (resp. \tilde{y}_i) ne s'annule pas sur U_i . On a alors :

$$\Omega|_{U_i} = \tilde{v}_i^2 dx_i \quad (\text{resp.} \quad \Omega|_{U_i} = -\tilde{y}_i^2 dx_i).$$

Comme Ω est sans singularité, x_i est une submersion. Les cartes (U_i, x_i) sont distinguées pour F et on vérifie, grâce à (1) que pour tout $(i, j) \in I^2$, tel que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a :

$$x_j = A_{ij} \cdot x_i \quad , \quad \text{où } A_{ij} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}),$$

ce qui achève la preuve du théorème ■

On avait une notion d'équivalence de cocycles homogographiques associés à un même feuilletage F . Nous allons maintenant transposer cette équivalence au niveau des triplets de 1-formes. Pour cela nous utiliserons un résultat dû à E. Cartan ("la théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle", p. 126).

II.1.10. Lemme (cf. [Ca 1]). Soient (x, u, v) et (x_1, u_1, v_1) deux triplets de fonctions définies sur un ouvert U d'une variété M tels qu'on ait sur U les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u dx &= u_1 dx_1, \\ 2v dx - \frac{du}{u} &= 2v_1 dx_1 - \frac{du_1}{u_1}, \\ 2\left(\frac{v^2}{u} dx - \frac{dv}{v}\right) &= 2\left(\frac{v_1^2}{u_1} dx_1 - \frac{dv_1}{u_1}\right). \end{aligned}$$

Alors il existe un élément $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, tel que :

$$x_1 = A \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{sur } U.$$

II.1.11. Proposition. Deux triplets de 1-forme $\omega = (\Omega, \alpha, \beta)$ et $\omega' = (\Omega', \alpha', \beta')$ vérifiant les identités (H) définissent le même cocycle homographique sur M si et seulement s'il existe deux fonctions différentiables f et g définies sur M , f sans zéro, telles que :

$$(E) \begin{cases} \Omega' = f\Omega, \\ \alpha' = \alpha - \frac{df}{f} + g\Omega, \\ \beta' = \frac{1}{f}(\beta + g\alpha + \frac{g^2}{2}\Omega - dg). \end{cases}$$

Preuve : Dans un même atlas distingué pour F d'ouverts U_i , $i \in I$, les deux triplets ω et ω' s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \Omega = u_i dx_i, \\ \alpha = 2v_i dx_i - \frac{du_i}{u_i}, \\ \beta = 2\left(\frac{v_i^2}{u_i} dx_i - \frac{dv_i}{u_i}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Omega' = u'_i dx'_i, \\ \alpha' = 2v'_i dx'_i - \frac{du'_i}{u'_i}, \\ \beta' = 2\left(\frac{v'^2_i}{u'_i} dx'_i - \frac{dv'_i}{u'_i}\right) \end{cases}$$

(i) Supposons que les deux triplets définissent la même structure transverse. Alors il existe une fonction f sans zéro telle que : $\Omega' = f\Omega$, puisque Ω et Ω' définissent le même feuilletage.

En se reportant à la définition de l'équivalence, on voit que pour tout $i \in I$, il existe $A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ tel que :

$$x'_i = \frac{a_i x_i + b_i}{c_i x_i + d_i}.$$

On en déduit :

$$u'_i dx'_i = u'_i \frac{dx_i}{(c_i x_i + d_i)^2} = f u_i dx_i \quad ;$$

et par suite, la relation :

$$(1) \quad \underline{u'_i = (u_i f)(c_i x_i + d_i)^2} .$$

Puisque $d\Omega' = \Omega' \wedge \alpha'$ où $\Omega' = f\Omega$, il existe une fonction différentiable g définie sur M telle que : $\alpha' = \alpha - \frac{df}{f} + g\Omega$. Ceci s'écrit encore :

$$\alpha' = 2v'_i dx'_i - \frac{du'_i}{u'_i} ,$$

on obtient la relation

$$(2) \quad \underline{v'_i = (v_i + \frac{1}{2} g u_i)(c_i x_i + d_i)^2 + c_i(c_i x_i + d_i)} .$$

Utilisant alors (1) et (2), il vient :

$$\beta' = 2 \left[\frac{(v_i + \frac{1}{2} g u_i)^2}{u_i f} dx_i - \frac{d(v_i + \frac{g u_i}{2})}{u_i f} \right] .$$

En développant le second membre de cette égalité et en regroupant convenablement les termes ainsi obtenus, on a :

$$\beta' = \frac{1}{f} (\beta + g\alpha + \frac{g^2}{2} \Omega - dg) .$$

En résumé, on a donc montré que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega' = f\Omega , \\ \alpha' = \alpha - \frac{df}{f} + g\Omega , \\ \beta' = \frac{1}{f} (\beta + g\alpha + \frac{g^2}{2} \Omega - dg) . \end{array} \right.$$

(ii) Soient maintenant ω et ω' deux triplets de 1-formes sur M vérifiant les identités (H) et satisfaisant aux relations (E).

Localement ces dernières s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_i dx'_i = f u_i dx_i , \\ 2v'_i dx'_i - \frac{du'_i}{u'_i} = 2v_i dx_i - \frac{du_i}{u_i} - \frac{df}{f} , \\ 2\left(\frac{v_i^2}{u_i} dx_i - \frac{dv_i}{u_i}\right) = \frac{1}{f} \left[2\left(\frac{v_i^2}{u_i} dx_i - \frac{dv_i}{u_i}\right) + 2gv_i dx_i - g \frac{du_i}{u_i} + \frac{g^2 u_i dx_i}{2} - dg \right] . \end{array} \right.$$

Mais les seconds membres des deux dernières égalités s'écrivent encore respectivement :

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} 2(v_i + \frac{1}{2} g u_i) dx_i - \frac{d(u_i f)}{u_i f} \\ \frac{2}{(u_i f)} \left[(v_i + \frac{1}{2} g u_i)^2 dx_i - d(v_i + \frac{1}{2} g u_i) \right] . \end{array} \right.$$

En posant : $U_i = u_i f$ et $V_i = v_i + \frac{1}{2} g u_i$, ceci nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_i dx'_i = U_i dx_i , \\ 2v'_i dx'_i - \frac{du'_i}{u'_i} = 2V_i dx_i - \frac{dU_i}{U_i} , \\ 2\left[\frac{v_i^2}{u_i} dx_i - \frac{dv_i}{u_i}\right] = 2\left[\frac{V_i^2}{U_i} dx_i - \frac{dV_i}{U_i}\right] . \end{array} \right.$$

Par suite, d'après le lemme II.2.10, il existe $A_i \in SL(2, \mathbb{R})$ tel que

$$x'_i = A_i \cdot x_i ,$$

d'où la proposition ■

A la suite de cette proposition, on peut introduire de manière naturelle la définition suivante :

II.1.12. Définition. Une application

$$f : [M, \omega = (\Omega, \alpha, \beta)] \rightarrow [M_1, \omega_1 = (\Omega_1, \alpha_1, \beta_1)]$$

est un homomorphisme des variétés M et M_1 munies de feuilletages transversalement homographiques définis par ω et ω_1 si et seulement si $f^*\omega_1$ et ω sont équivalents.

II.2. Un problème d'unicité.

La question qu'on se pose est de savoir si on peut associer à un même feuilletage plusieurs structures transverses homographiques c'est-à-dire si un feuilletage peut être défini par deux triplets de 1-formes non équivalents.

Ce problème a été d'abord étudié dans le cas affine par Bobo Séké (cf. [Se 1]). Il montre qu'un feuilletage défini par une 1-forme fermée ω sur une variété M admet une infinité de structures transversales affines : il y a toutes celles définies par les couples $(\omega, \lambda\omega)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Par contre la structure transversale affine est unique si le feuilletage possède de l'holonomie non triviale.

Dans notre cas, la situation est analogue. Pour les formes fermées, on a une infinité de structures données par les triplets $(\omega, \lambda\omega, \mu\omega)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par contre, pour le cas général, on a :

II.2.1. Théorème. Soit (M, F) un feuilletage transversalement homographique. Si l'holonomie de F est non triviale, alors F admet une structure transverse homographique unique.

La démonstration de ce théorème repose sur les quatre lemmes qui suivent :

II.2.2. Lemme. Si un feuilletage (M, F) transversalement homographique possède une feuille L compacte sans holonomie, alors F est sans holonomie (donc défini par une forme fermée, d'après II.3).

Preuve : D'après le théorème de stabilité de Reeb, il existe un voisinage ouvert saturé de L constitué uniquement de feuilles compactes. Soit U la réunion de tels voisinages de L et soit L' une feuille de F adhérente à U ; L' est adhérente d'un côté à U .

Soit $x' \in L'$ et soit γ un élément de $\pi_1(L', x')$. Alors l'élément d'holonomie $h(\gamma)$ associé à γ est un germe en 0 d'une fonction analytique définie sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) égal à l'identité sur $[-\varepsilon, 0]$ ou $[0, \varepsilon]$. Par suite, cet élément d'holonomie est trivial c'est-à-dire que L' ne possède pas d'holonomie non nulle et le théorème de stabilité s'applique à nouveau. On en déduit que L' est une feuille compacte et L' est contenue dans U ; autrement dit, on a :

$$\bar{U} = U,$$

d'où

$$U = M,$$

le lemme en résulte ■

II.2.3. Lemme (cf. [Se 1]). Soit ω une 1-forme fermée sur une variété V (connexe). Toute fonction f vérifiant :

(i) $df + f\omega = 0$

(ii) $f(x) = 0$ pour un certain x de V ,

est identiquement nulle sur V .

Preuve : Soit $y \in V$; il existe un voisinage U de y et une fonction $k : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega|_U = dk$. L'équation (i) est alors équivalente sur U à $d(e^k f) = 0$. Ceci montre que localement : $e^k f = C^{te}$; d'où la conclusion ■

II.2.4. Lemme. Soit $\varpi = (\Omega, \alpha, \beta)$ un triplet de 1-formes définissant un feuilletage F transversalement homographique sur M . La structure transverse homographique est unique si et seulement si pour tout couple (k, h) de

de fonctions différentiables telles que :

$$k \alpha - \frac{1}{2} dk = h\Omega ,$$

on a :

$$h \equiv 0, \quad k \equiv 0.$$

Preuve : Soient $\omega = (\Omega, \alpha, \beta)$ et $\omega' = (\Omega', \alpha', \beta')$ deux triplets de 1-formes vérifiant les identités (H) et définissant le même feuilletage (M, F) .

On peut supposer que $\Omega' = \Omega$, car, pour toute fonction ψ sans zéro de M , les triplets $(\frac{1}{\psi} \Omega', \alpha' + \frac{d\psi}{\psi}, \psi\beta')$ et $(\Omega', \alpha', \beta')$ sont équivalents.

Un calcul simple montre alors qu'il existe deux fonctions différentiables f et g de M telles que :

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + f\Omega , \\ \beta' = \beta + f\alpha - df + g\Omega. \end{cases}$$

D'autre part, en écrivant :

$$d\beta' = \Omega' \wedge \alpha',$$

on voit, qu'il existe une fonction différentiable h telle que :

$$(2g - f^2)\alpha - \frac{1}{2} d(2g - f^2) = h\Omega.$$

Pour que les triplets ω et ω' soient équivalents il faut et il suffit que l'on ait : $g = \frac{f^2}{2}$. Par conséquent la condition annoncée est suffisante.

Si, réciproquement, il existe un couple (k, h) de fonctions différentiables non identiquement nulles telles que :

$$k\alpha - \frac{1}{2} dk = h\Omega ,$$

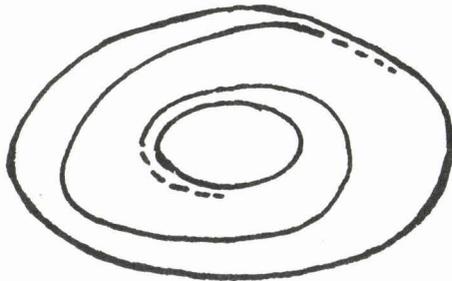
on voit que la structure transverse homographique associée à F n'est pas unique. En effet F est encore défini par le triplet homographique

$$\varpi_1 = (\Omega_1, \alpha_1, \beta_1) \text{ où :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \Omega, \\ \alpha_1 = \alpha, \\ \beta_1 = \beta + \frac{k}{2} \Omega, \end{array} \right. \text{ et } \varpi \text{ et } \varpi_1$$

ne sont pas équivalents, d'où le lemme ■

II.2.5. Lemme. Le feuilletage suivant de $C = \mathbb{S}^1 \times I$ admet exactement une structure transverse homographique



Preuve : Ce feuilletage peut être défini par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = dr + r(1-r)d\theta, \\ \alpha = (1-2r)d\theta, \\ \beta = -2d\theta. \end{array} \right.$$

Le lemme II.2.5. sera démontré si nous montrons que la condition du lemme II.2.4 est vérifiée. Soient donc k et h deux fonctions différentiables définies sur C telles que :

$$k\alpha - \frac{1}{2} dk = h\Omega .$$

Pour toute feuille F , $\alpha|_F$ est fermée et on peut écrire :

$$k(\alpha|_F) - \frac{1}{2} dk = 0.$$

Par conséquent, d'après le lemme II.2.3, si k s'annule en un point de F , alors k est identiquement nulle sur F .

Soit alors m_0 un point de C tel que $k(m_0) \neq 0$. Soit n_0 un point appartenant au segment transverse passant par m_0 et tel que k soit non nul sur $[m_0, n_0]$. Considérons le saturé $S_{[m_0, n_0]}$ du segment $[m_0, n_0]$. On a $k \neq 0$ sur $S_{[m_0, n_0]}$ et on peut supposer $k > 0$. Bien plus, on aura $d(k^{1/2}\Omega) = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} d(k^{1/2}\Omega) &= \frac{1}{2} \frac{dk}{k^{1/2}} \wedge \Omega + k^{1/2}\Omega , \\ &= k^{1/2} \left[\frac{1}{2} \frac{dk}{k} \wedge \Omega + d\Omega \right] \\ &= k^{1/2} [\alpha \wedge \Omega + d\Omega] , \end{aligned}$$

car, en tout point où $k \neq 0$, on a : $\alpha = \frac{1}{2} \frac{dk}{k} + \frac{h}{k} \Omega$.

D'où :

$$d(k^{1/2}\Omega) = k^{1/2} [d\Omega - \Omega\alpha] = 0.$$

Par application du théorème de Stokes et en suivant les notations de la figure ci-dessus, on peut écrire :

$$\int_{[m_0, n_0]} k^{1/2}\Omega = \int_{[m_1, n_1]} k^{1/2}\Omega = \dots = \int_{[m_p, n_p]} k^{1/2}\Omega$$

où, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $m_p = \psi^p(m_0)$, ψ étant l'application de premier retour. Comme la longueur du segment $[m_p, n_p]$ tend vers 0 quand p devient infini et que $\|\Omega\|$ est bornée, on en déduit :

$$\int_{[m_0, n_0]} k^{1/2} \Omega = 0.$$

Par conséquent k s'annule dans $[m_0, n_0]$, d'où la contradiction ; par suite k et h sont identiquement nulles sur C ■

Ces préliminaires étant posés, on peut passer à la démonstration proprement dite du théorème II.2.1.

II.2.6. Démonstration du théorème II.2.1. Cette démonstration repose sur la notion de minimal. Un minimal du feuilletage (M, F) est de l'un des trois types suivants :

- (i) une feuille compacte,
- (ii) toute la variété,
- (iii) exceptionnel.

Soit M un minimal de (M, F) . Il a dans tous les cas de l'holonomie non nulle : ceci découle dans le cas (i) (resp. (ii)) du lemme II.2.2 (resp. de l'hypothèse de non trivialité de l'holonomie de F), alors que dans le cas (iii) on applique le théorème du point fixe de Sacksteder (cf. [Sa 1]).

Envoyons alors l'anneau $C = \mathbb{S}^1 \times [0,1[$ au-dessus du lacet qui a de l'holonomie (laquelle est contractante puisque F est transversalement homographique). Pour tout couple (k,h) de fonctions différentiables de M telles que :

$$k\alpha - \frac{1}{2} dk = h\Omega ,$$

la fonction k est nulle sur le cylindre, donc sur le minimal, donc sur un voisinage ouvert saturé de M . Par conséquent puisque de tels ouverts forment un recouvrement de M , la fonction k est nulle sur M . Le théorème résulte alors du lemme II.2.4. ■

II.3. Feuilletages transversalement homographiques et formes fermées.

Le but de cette section est de montrer l'analogue d'un résultat établi par Bobo Séré pour les feuilletages transversalement affines (cf. [Se 1]) à savoir que de tels feuilletages (sur une variété compacte) peuvent toujours être définis par une forme fermée si et seulement s'ils sont sans holonomie.

II.3.1. Théorème. Soit F un feuilletage transversalement homographique sur une variété fermée M compacte. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) F est sans holonomie,
- (ii) F est défini par une forme fermée sans singularité.

La démonstration de ce théorème nécessite quelques préliminaires.

Supposons F défini par le triplet de 1-formes $\omega = (\Omega, \alpha, \beta)$. Désignons par \tilde{M} le revêtement universel de M et par \tilde{p} l'application de projection de ce revêtement. Le feuilletage $\tilde{F} = \tilde{p}^*(F)$ induit par F sur \tilde{M} est un feuilletage transversalement homographique défini par le

triplet $\tilde{\omega} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \tilde{p}^* (\Omega, \alpha, \beta)$.

D'après le théorème de Lie, il existe une fonction

$$\tilde{F} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}) : \tilde{M} \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$$

telle que $\tilde{\omega} = \tilde{p}^* \omega = \tilde{F}^* \pi$, où π est la forme de Maurer-Cartan de $SL(2, \mathbb{R})$. Dans les coordonnées canoniques de \mathbb{R}^4 , ceci s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{\Omega} = \tilde{v} d\tilde{y} - \tilde{y} d\tilde{v}, \\ \tilde{\alpha} = 2(\tilde{u}d\tilde{y} - \tilde{x}d\tilde{v}), \\ \tilde{\beta} = 2(\tilde{u}d\tilde{x} - \tilde{x}d\tilde{u}). \end{cases}$$

Soit γ un élément de $\pi_1(M)$. Considéré comme automorphisme de ce revêtement, γ laisse invariant $\tilde{F}^* \pi$, i.e.

$$(\tilde{F} \circ \gamma)^* \pi = \tilde{F}^* \pi.$$

Par conséquent, d'après le théorème de Lie, il existe un élément $H(\gamma)$ de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que :

$$\tilde{F} \circ \gamma = H(\gamma) \circ \tilde{F}.$$

On définit ainsi un homomorphisme :

$$H : \pi_1(M) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}),$$

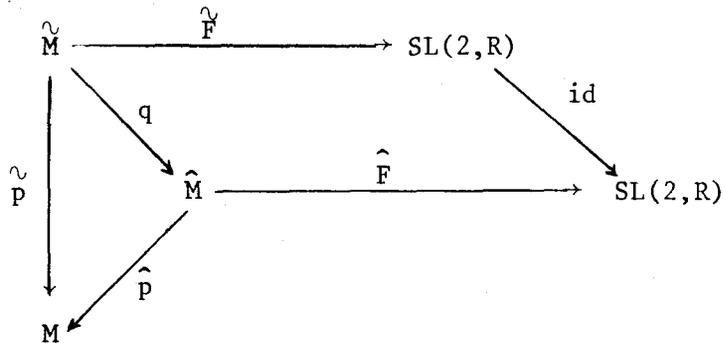
tel que pour tout γ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{F}} & SL(2, \mathbb{R}) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow H(\gamma) \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{F}} & SL(2, \mathbb{R}) \end{array}$$

Désignons par \hat{p} l'application de projection du revêtement \hat{M} de M défini par la suite exacte

$$0 \hookrightarrow \text{Ker } H \hookrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{H} \text{Im } H \rightarrow 0.$$

Le groupe d'automorphismes de ce revêtement est isomorphe à $\text{Im } H$ et \hat{F} induit une application \hat{F} telle que le diagramme suivant est commutatif :



Considérant les inclusions

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \text{GA} \hookrightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}),$$

remarquons que si $\text{Im } H$ est contenu dans GA (resp. dans \mathbb{R}), alors F est transversalement affine (resp. défini par une forme fermée).

Si F est sans holonomie, on a les précisions suivantes :

II.3.2. Lemme. Si F est transversalement homographique et sans holonomie, alors

(i) la variété \hat{M} a une structure de produit $\hat{F} \times \mathbb{R}$ induite par (\hat{F}, \hat{X}) où $\hat{F} = \hat{p}^*(F)$ et $\hat{X} = \hat{p}^*(X)$.

(ii) Le groupe $H(\pi_1(M))$ opère sans point fixe sur \mathbb{R} .

En particulier $H(\pi_1(M))$ est abélien.

Preuve :

a) D'après le théorème 3.1 d'Imanishi relatif aux domaines des difféomorphismes d'holonomie associés aux chemins dans les feuilles d'un feuilletage de codimension un (cf. [Im 1]), on peut relever de tels chemins dans (M, F) tout le long des trajectoires du champ X . Donc aussi dans (\tilde{M}, \tilde{F}) et (\hat{M}, \hat{F}) .

D'autre part, dans (\tilde{M}, \tilde{F}) , il n'y a pas de transversale fermée (sinon il existerait un cycle évanouissant dans M). Par conséquent, une feuille de \tilde{F} coupe toute intégrale de \tilde{X} au maximum en un point ; par suite \tilde{M} est un produit $\tilde{F} \times Y$ où Y est difféomorphe à \mathbb{R} .

b) F étant transversalement homographique, il en est ainsi de \tilde{F} . Donc Y possède une structure homographique et pour tout élément γ de $\pi_1(M)$, $H(\gamma)$ est un automorphisme de cette structure.

Comme groupe d'automorphismes, $\pi_1(M)$ opère en préservant la structure produit ; pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$, et pour tout élément $(\tilde{x}, t) \in \tilde{M}$, on a :

$$\gamma(\tilde{x}, t) = (\tilde{\gamma}(\tilde{x}), H(\gamma)(t)).$$

c) En quotientant $\tilde{M} \cong \tilde{F} \times \mathbb{R}$ par le sous-groupe $\text{Ker } H$, on aura un produit $\hat{F} \times Y$ avec

$$\hat{F} \cong \tilde{F} / \text{ker } H.$$

d) Le groupe $\text{Aut } \hat{M} \cong \pi_1(M) / \text{ker } H$ opère sur \hat{M} en préservant la structure produit : pour tout $\bar{\gamma} \in \text{Aut } \hat{M}$ et pour tout $(\hat{x}, t) \in \hat{M}$, on a :

$$\bar{\gamma}(\hat{x}, t) = (\hat{\gamma}(\hat{x}), H(\gamma)(t)), \quad (\gamma \in \bar{\gamma}).$$

Si un élément γ_0 tel que $H(\gamma_0) \neq e$ possède un point fixe $t_0 \in Y$, alors γ_0 correspond à un élément d'holonomie non nul de F . Par conséquent $H(\pi_1(M))$ opère sans point fixe sur Y . Pour ce sous-groupe sans point fixe de $\text{Aut}(Y)$, on a alors deux possibilités :

1) pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$, l'élément $H(\gamma)$ est sans point fixe fini et alors $H(\pi_1(M))$ est constitué uniquement de translations ;

2) il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, tel que $Y \cong]\alpha, \beta[$ et pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$, les points α et β sont fixes par $H(\gamma)$.

e) D'après ce qui précède, $H(\pi_1(M))$ est abélien. D'autre part, on a $\hat{F} \cong F$ parce que $\hat{p}|_{\hat{F}}$ est injectif (en effet si $\hat{y} = \hat{\gamma}(\hat{x})$ où $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{F}$, alors $H(\gamma) = e$ i.e. $\gamma \in \text{Ker } H$ i.e. $\bar{\gamma} = \text{id.}$) ■

II.3.3. Démonstration du théorème II.3.1. D'après le lemme II.3.2, le groupe $H(\pi_1(M))$ peut être considéré comme un sous-groupe de GA (éventuellement on remplacera F par $\tau_A.F$ où $\tau_A : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ est la translation à gauche par $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ceci lorsque $Y \cong]-1, +1[$, -1 et $+1$ étant fixes par $H(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$). Par suite, F est transversalement affine. On est ramené à la situation étudiée par Bobo Séké (cf [Se 1] page 44), d'où le théorème ■

Le corollaire suivant résulte du fait que de la démonstration de B. Séké, on tire que le couple de 1-formes (Ω, α) définissant le feuilletage transversalement affine sans holonomie F est équivalent au couple (ω, ω) où ω est une 1-forme fermée sans singularité définissant F .

II.3.4. Corollaire. Dans les conditions du théorème II.3.1., il existe une 1-forme fermée ω sans singularité sur M telle que :

- (i) la forme ω définit le feuilletage F ;
- (ii) le triplet de 1-formes (Ω, α, β) définissant la structure transverse homologique est équivalent au triplet $(\omega, \omega, 0)$.

A.II. APPENDICE. STRUCTURES HOMOGRAPHIQUES SUR \mathbb{R} .

L'étude des feuilletages transversalement homographiques peut se faire sur des variétés non compactes. En fait, ici on se contente de l'espace des réels \mathbb{R} auquel cas le feuilletage transversalement homographique sera simplement une structure homographique.

Alors qu'il existe trois structures affines sur \mathbb{R} (cf. [Se 1]), on n'aura que deux structures homographiques sur \mathbb{R} à isomorphisme près.

On va faire la liste de ces structures en donnant pour chaque structure :

- (i) un triplet de 1-formes
- (ii) le groupe d'automorphismes.

Par analogie avec les structures affines, on peut définir a priori trois structures homographiques sur \mathbb{R} .

- (i) la structure canonique de \mathbb{R} , $[\mathbb{R}, (dt, 0, 0)]$;
- (ii) la restriction de (i) à $]0, +\infty[$, c'est-à-dire $]0, +\infty[, (dt, 0, 0)$;
- (iii) la restriction de (i) à $] -1, +1[$, c'est-à-dire $] -1, +1[, (dt, 0, 0)$.

Commençons par déterminer les automorphismes de ces structures.

A.II.1. Proposition.

- 1) $\text{Aut}(i) = \text{GA} =$ le groupe affine ;
- 2) $\text{Aut}(ii) = \mathbb{R}_+^* \times \{0\} =$ le sous-groupe de GA des homothéties positives ;
- 3) $\text{Aut}(iii) =$ le sous-groupe commutatif de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ des éléments de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Preuve : Soit f un automorphisme de la structure $(X, (dt, 0, 0))$ où X est égal à \mathbb{R} ou $]0, +\infty[$ ou $] -1, +1[$. D'après la définition II.1.12, il existe deux fonctions différentiables g et h sur X , g sans zéro telles que :

$$\left| \begin{array}{l} f^* dt = g dt, \\ 0 = -\frac{dg}{g} + h dt, \\ 0 = \frac{h^2}{2} dt - dh. \end{array} \right.$$

La dernière relation s'écrit encore :

$$d(h^2/g) = 0,$$

soit :

$$h^2 = cg \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

On en déduit : $h = a g^{1/2}$, $a \in \mathbb{R}$ (g étant supposée strictement positive sur X). La relation

$$0 = -\frac{dg}{g} + h dt,$$

s'écrit alors

$$\frac{dg}{g^{3/2}} = a dt.$$

Par conséquent, on obtient :

$$g = \frac{1}{(a_1 t + a_2)^2} \quad (\text{où } a_1 = \frac{a}{2}).$$

On va maintenant examiner trois cas :

1) $X = \mathbb{R}$, alors $a_1 = 0$; d'où : $c = 0$, ce qui signifie que f est une application affine i.e. le groupe d'automorphismes de $(\mathbb{R}, (dt, 0, 0))$ est le groupe affine GA ;

2) $X =]0, +\infty[$, le même raisonnement qu'en 1) montre que f est une homothétie positive i.e. le groupe d'automorphismes de $(]0, +\infty[, (dt, 0, 0))$ est le sous-groupe $\mathbb{R}_+^* \times \{0\}$ des homothéties positives de GA ;

3) $X =]-1, +1[$, l'équation $f^* dt = g dt$, où $g(t) = \frac{1}{(a_1 t + a_2)^2}$, donne :

$$f(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \text{ avec } ad - bc = 1.$$

De plus, comme f doit vérifier :

$$f(-1) = -1 \text{ et } f(1) = 1 \text{ ou } f(-1) = 1 \text{ et } f(1) = -1,$$

f s'écrit encore sous la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ avec

$$a^2 - b^2 = 1 \text{ et } b^2 - a^2 = 1, \text{ respectivement.}$$

En réalité f ne peut pas être de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ car dans ce cas, on aurait $-1 < f(\infty) < 1$ et f ne serait pas un difféomorphisme de $] -1, +1[$ sur lui-même.

Enfin toute fonction f définie par $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ où $a^2 - b^2 = 1$ est un automorphisme de $(] -1, +1[, (dt, 0, 0))$: on prendra :

$$g = \frac{1}{(bt+a)^2} \text{ et } h = \frac{-2b}{bt+a}$$

A.II.2. Remarque.

Pour les structures induites par la structure canonique de \mathbb{R} , on a les isomorphismes suivants :

(i) $]a, +\infty[\simeq]0, +\infty[$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, avec

$$f(t) = -a + t \quad ;$$

(ii) $] -\infty, 0[\simeq] 0, +\infty[$, avec

$$f(t) = -t ;$$

(iii) $] a, b[\simeq] -1, +1[$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, avec :

$$f(t) = \frac{2t - (a+b)}{b-a} .$$

On a aussi, comme pour le cas affine, l'isomorphisme

$$] 0, +\infty[, (dt, 0, 0) \simeq (\mathbb{R}, (dt, 0, 0)),$$

avec

$$f(t) = \text{Log } t .$$

Dans le cas affine, les analogues des trois structures repertoriées ci-dessus étaient distinctes. Ce n'est plus le cas pour les structures homographiques.

A.II.3. Lemme.

Pour les structures homographiques induites par la structure canonique de \mathbb{R} les variétés $] 0, +\infty[$ et $] -1, +1[$ sont isomorphes.

Preuve : L'application homographique f de matrice $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

est un difféomorphisme de $] 0, +\infty[$ sur $] -1, +1[$. Pour tout $t \in] 0, +\infty[$, on pose :

$$g(t) = \frac{1}{(t + \frac{1}{2})^2} \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{-2}{t + \frac{1}{2}} .$$

On vérifie immédiatement que :

$$f^* dt = g dt$$

$$0 = f^*0 = -\frac{dg}{g} + hdt ,$$

$$0 = f^*0 = \frac{1}{g} \left[\frac{h^2}{2} dt - dh \right]$$

d'où le lemme ■

A.II.4. Lemme. Les deux structures $(]0, +\infty[, (dt, 0, 0))$ et $(\mathbb{R}, (dt, 0, 0))$ sont distinctes.

Preuve : Supposons qu'il existe un difféomorphisme

$$f : (]0, +\infty[, (dt, 0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, (dt, 0, 0)) ,$$

pour lequel il existe deux fonctions différentiables g et h définies sur $]0, +\infty[$ telles que :

$$\left[\begin{array}{l} f^* dt = gdt \\ 0 = -\frac{dg}{g} + hdt, \\ 0 = -\frac{1}{g} \left[\frac{h^2}{2} dt - dh \right]. \end{array} \right.$$

En raisonnant, comme dans la proposition A.II.1, on montre que f doit être de la forme :

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d} \quad (\text{avec } ad - bc = 1).$$

On doit avoir $f(+\infty) = +\infty$, par suite $c = 0$, i.e. f est affine mais alors f ne peut pas être surjective, ce qui est contradictoire ■

Pour finir, on peut classifier les structures homographiques de \mathbb{R} .

A.II.5. Théorème.

Toute structure homographique sur \mathbb{R} est isomorphe à l'une des deux structures homographiques :

- (i) $(\mathbb{R}, (dt, 0, 0))$, ou
- (ii) $(]0, +\infty[, (dt, 0, 0))$.

Preuve : Il suffit de transcrire la démonstration correspondante du cas affine (cf. [Se 1]). Comme \mathbb{R} est simplement connexe, une structure homographe sur \mathbb{R} peut être définie par un triplet de la forme :

$$\varpi = (\Omega, \alpha, \beta) = (gdh, 2kdh - \frac{dg}{g}, 2(\frac{k^2}{g} dh - \frac{dk}{g})) ,$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement monotone et g une fonction strictement positive.

Le triplet ϖ est équivalent à $\varpi' = (dh, 0, 0)$. D'autre part, h est en fait un difféomorphisme de \mathbb{R} sur un intervalle $]a, b[$ et $\varpi' = h^*(dt, 0, 0)$; donc h est un isomorphisme de (\mathbb{R}, ϖ') sur $(]a, b[, (dt, 0, 0))$. Trois cas sont alors possibles :

- i) $]a, b[= \mathbb{R}$;
- ii) $]a, b[$ est différent de \mathbb{R} mais n'est pas borné ; on peut supposer dans ce cas que $a = 0$ et $b = +\infty$ ou bien $a = -\infty$ et $b = 0$;
- iii) a et b sont finis i.e. $]a, b[$ est borné ; on peut supposer que $]a, b[=]-1, +1[$.

Dans les cas ii) et iii) la structure $(]a, b[, (dt, 0, 0))$ est en fait isomorphe à $(]0, +\infty[, (dt, 0, 0))$, d'où le théorème ■

III - MODELES DE FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT

HOMOGRAPHIQUES

III.1. Propriétés générales.

On s'attache dans ce chapitre à dégager certaines propriétés intéressantes des modèles de feuilletage p.s.h. qui ont une structure transverse homographique. Ainsi, généralisant le résultat démontré au §.II.3.1, on peut énoncer :

III.1.1. Théorème. Tout modèle transversalement homographique (M, F) de type 1 est standard.

Preuve : On utilise la généralisation du théorème d'Imanishi à l'intérieur d'un modèle et on poursuit la démonstration comme pour le théorème II.3.1 ■

Le résultat suivant sera utile pour la démonstration du théorème de type Tischler pour les modèles transversalement homographiques.

III.1.2. Théorème. Soit (M, F) un modèle transversalement homographique non trivial.

Alors il existe une forme fermée ω sur $\overset{\circ}{M}$ définissant $\overset{\circ}{F}$ et deux fonctions différentiables f et ψ sur M telles que :

(i) $f(x) > 0$ sur $\overset{\circ}{M}$ et $f^{-1}(0) = \partial M$

(ii) la structure transverse homographique sur F est définie par le triplet (Ω, α, β) où :

$$\Omega = f\omega$$

$$\alpha = -\frac{df}{f} + \psi\omega$$

$$\beta = -\frac{d\psi}{f} + \frac{\psi^2}{2f}\omega .$$

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, on va commencer par établir le résultat suivant :

III.1.3. Lemme. Si $\{(U_i, (y_i, x_i))\}_{i \in I}$ désigne un atlas de cartes distinguées pour F , il existe pour tout $i \in I$ un point $m_i \in U_i \cap \overset{\circ}{M}$, une fonction différentiable g_i définie sur $U_i \cap \overset{\circ}{M}$, tels que :

(i) $\omega = dg_i$

(ii) $g_i = \frac{x_i - x_{i_0}}{a_i(x_i - x_{i_0}) + b_i} + g_i(m_i)$, a_i et b_i étant des constantes,

(y_{i_0}, x_{i_0}) les coordonnées de m_i .

Preuve : Pour tout $i \in I$, on peut écrire :

$$\Omega|_{U_i} = u_i dx_i, \quad \alpha|_{U_i} = -\frac{du_i}{u_i} + v_i dx_i, \quad \beta|_{U_i} = \left[\frac{v_i^2}{2u_i} dx_i - \frac{dv_i}{u_i} \right]$$

et $\omega = dg_i$, sur l'ouvert U_i (U_i suffisamment petit), u_i, v_i et g_i étant des fonctions différentiables définies sur U_i .

La structure transverse homographique du feuilletage $\overset{\circ}{F}$ est définie par la restriction du triplet (Ω, α, β) à $\overset{\circ}{M}$; on l'obtient encore en considérant le triplet $(\omega, \omega, 0)$ lequel est en outre équivalent (cf. II.3.4) à la restriction à $\overset{\circ}{M}$ de (Ω, α, β) . Par conséquent, il existe deux fonctions différentiables f et ψ de $\overset{\circ}{M}$ de classe C^r , telles que :

$$\Omega = f\omega, \quad \alpha = -\frac{df}{f} + \psi\omega \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{d\psi}{f} + \frac{\psi^2}{2f}\omega, \quad \text{sur } \overset{\circ}{M}.$$

En restriction à l'ouvert U_i , ces relations s'écrivent encore :

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} f dg_i = u_i dx_i \\ -\frac{df}{f} + \psi dg_i = -\frac{du_i}{u_i} + v_i dx_i \\ -\frac{d\psi}{f} + \frac{\psi^2}{2f} dg_i = \frac{v_i^2}{2u_i} dx_i - \frac{dv_i}{u_i} \end{array} \right.$$

La première relation indique que :

$$g_i = g_i(x_i) \quad \text{et} \quad f|_{U_i} = \frac{u_i}{g_i}.$$

De la 2ème relation, on déduit alors :

$$\varphi|_{U_i} = \frac{v_i}{g_i} - \frac{g_i''}{2g_i'^2}.$$

En remplaçant alors dans la dernière relation $(g_i, f|_{U_i}, \varphi|_{U_i})$ par les expressions précédentes, il vient :

$$\frac{g_i'''}{g_i'} - \frac{3}{2} \frac{g_i''^2}{g_i'^2} = 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$g_i = \frac{x_i - x_{i_0}}{a_i(x_i - x_{i_0}) + b_i} + g_i(m_i), \quad \text{d'où le lemme} \blacksquare$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que f et φ sont en fait des restrictions à $\overset{\circ}{M}$ de fonctions différentiables de classe C^r , définies sur M tout entier.

III.1.4. Démonstration du théorème.

D'après le lemme précédent, pour tout $i \in I$, il existe des constantes a_i, b_i et x_{i_0} telles qu'on puisse écrire :

$$\omega|_{U_i \cap \overset{\circ}{M}} = h_i(x_i) dx_i$$

où

$$h_i(x_i) = \frac{b_i}{[a_i(x_i - x_{i_0}) + b_i]^2}$$

Sur tout ouvert U_i , la fonction $k_i = (f|_{U_i}) \cdot h_i$ est bien définie et de classe C^r puisque sur un tel ouvert la relation $\Omega = f\omega$ s'écrit $\Omega = (f|_{U_i}) \cdot h_i(x_i) dx_i$.

Par conséquent, la restriction de f à U_i est donnée par :

$$f|_{U_i} = \frac{k_i(y_i, x_i)}{h_i(x_i)} = \frac{[a_i(x_i - x_{i_0}) + b_i]^2}{b_i} k_i(y_i, x_i) ,$$

ce qui montre que f est définie sur U_i tout entier, de classe C^r , prenant la valeur nulle sur $U_i \cap \partial M$ lorsque ce dernier n'est pas vide (h_i tend vers l'infini quand on s'approche du bord). On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \alpha|_{U_i \cap \overset{\circ}{M}} &= -\frac{df}{f} + \psi h_i(x_i) dx_i \\ &= -\frac{dk_i}{k_i} + \frac{dh_i}{h_i} + \psi h_i(x_i) dx_i ; \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \alpha|_{U_i \cap \overset{\circ}{M}} + \frac{dk_i}{k_i} &= \frac{dh_i}{h_i} + \psi h_i dx_i \\ &= \left[\frac{1}{h_i} \frac{dh_i}{dx_i} + \psi \cdot h_i \right] dx_i \end{aligned}$$

Mais pour tout $i \in I$, $\alpha|_{U_i} + \frac{dk_i}{k_i}$ est bien définie sur U_i et est de la forme $A_i(y_i, x_i) dx_i$ (compte tenu de l'égalité ci-dessus). Par conséquent en restriction à $U_i \cap \overset{\circ}{M}$, la fonction ψ s'écrit :

$$\psi|_{U_i \cap \overset{\circ}{M}} = -\frac{1}{h_i^2} \cdot \frac{dh_i}{dx_i} + \frac{A_i(y_i, x_i)}{h_i}$$

ou encore :

$$\psi|_{U_i \cap \overset{\circ}{M}} = \frac{2a_i}{b_i} [a_i(x_i - x_{i_0}) + b_i] + A_i(y_i, x_i) \frac{[a_i(x_i - x_{i_0}) + b_i]^2}{b_i}$$

Cette égalité montre que lorsque l'ouvert U_i rencontre le bord de M , $\psi|_{U_i \cap \overset{\circ}{M}}$ se prolonge à $U_i \cap \partial M$ et que $\psi|_{U_i}$ est de classe C^r ■

Utilisant les résultats qui précèdent, on va maintenant montrer qu'on peut associer à tout modèle p.s.h. de type 1, un modèle standard.

III.2. Modèle standard associé à un modèle p.s.h. de type 1.

Le point de départ est le résultat suivant dû à R. Sacksteder (cf. [Sa 1]).

III.2.1. Théorème de Sacksteder. Soit F un feuilletage de codimension un de classe C^r , $r \geq 2$ sur une variété compacte fermée. Alors il existe une structure différentiable S_F et une métrique riemannienne "bundle-like" R_F de classe C^r sur M telles que :

- i) les structures induites par S_F et R_F sur chaque feuille de F sont égales aux structures initiales ;
- ii) F est défini par une forme fermée dans la structure S_F ;
- iii) M est complète pour la métrique R_F .

Adaptant la démonstration de ce théorème au cas des modèles p.s.h. c'est-à-dire des variétés avec bord (le feuilletage étant tangent au bord), G. Hector a obtenu le résultat suivant :

III.2.2. Théorème (cf. [He 1]). Si (M, F) est un modèle de type 1, de classe C^2 , il existe une structure différentiable $S_{\overset{o}{F}}$ et une métrique riemannienne "bundle-like" $R_{\overset{o}{F}}$ de classe C^2 sur $\overset{o}{M}$ telles que :

- i) les structures induites par $S_{\overset{o}{F}}$ et $R_{\overset{o}{F}}$ sur chaque feuille de $\overset{o}{F}$ sont égales aux structures initiales ;
- ii) $\overset{o}{F}$ est défini par une forme fermée dans la structure $S_{\overset{o}{F}}$;
- iii) $\overset{o}{M}$ est complète pour la métrique $R_{\overset{o}{F}}$.

Partant de ce résultat, on va maintenant montrer qu'il existe une structure différentiable sur la variété entière bord compris telle que le feuilletage soit transversalement homographique dans cette nouvelle

structure. Plus précisément :

III.2.3. Théorème. Dans les conditions du théorème III.2.2, il existe une structure différentiable S_F sur M et une métrique riemannienne "bundle-like" $R_{\overset{\circ}{F}}$ de classe C^r $r \geq 2$ sur $\overset{\circ}{M}$ telles que :

- i) la structure induite par S_F (resp. $R_{\overset{\circ}{F}}$) sur chaque feuille de F (resp. $\overset{\circ}{F}$) est égale à la structure initiale ;
- ii) F est transversalement homographique dans la structure S_F et $\overset{\circ}{F}$ est défini par une forme fermée dans la structure induite par S_F sur $\overset{\circ}{M}$;
- iii) $\overset{\circ}{M}$ est complète pour la métrique $R_{\overset{\circ}{F}}$.

Preuve : Soit ω une forme fermée définissant $\overset{\circ}{F}$ dans la structure $S_{\overset{\circ}{F}}$ comme le spécifie le théorème III.2.2. Considérons le champ \tilde{X} dual de la forme ω , vérifiant :

$$\omega(\tilde{X}) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \|\tilde{X}\|_{R_{\overset{\circ}{F}}} \equiv 1 .$$

Soit $\{(U_i(y_i, x_i))\}_{i \in I}$ un recouvrement bidistingué de M et fixons pour tout $i \in I$ un élément $m_i \in U_i \cap \overset{\circ}{M}$. Les courbes intégrales de \tilde{X} sont des géodésiques de $(\overset{\circ}{M}, R_{\overset{\circ}{F}})$; par conséquent \tilde{X} définit un flot $(\tilde{\psi}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ préservant $\overset{\circ}{F}$.

La structure S_F sera alors définie comme suit :

- i) si $U_i \cap \partial M = \emptyset$, on pose : $\hat{x}_i = \text{expt}(t)$, pour tout $m \in U_i$, où t est défini par la condition : $\tilde{\psi}(m, -t)$ appartient à la plaque de m_i ;
- ii) si $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$ et si le champ transverse est rentrant sur $U_i \cap \partial M$, on pose : $\hat{x}_i = \exp(t)$, pour $m \in U_i \cap \overset{\circ}{M}$, où t est défini comme ci-dessus et, $\hat{x}_i = 0$, pour $m \in U_i \cap \partial M$;
- iii) si $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$ et si le champ transverse est sortant sur $U_i \cap \partial M$, on pose : $\hat{x}_i = -\exp(-t)$, pour $m \in U_i \cap \overset{\circ}{M}$, où t est encore défini

comme en (i), et,

$$\hat{x}_i = 0, \quad \text{pour } m \in U_i \cap \partial M ;$$

iv) enfin, pour tout $i \in I$, on pose :

$$\hat{y}_i = y_i .$$

Par construction $\{(U_i, (\hat{y}_i, \hat{x}_i))\}_{i \in I}$ est un système de cartes distinguées pour F . On vérifie, d'autre part, ce de manière simple, que sur $U_i \cap U_j$, pour tout $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les changements de cartes pour la coordonnée transverse sont de la forme :

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= a_{ij} \hat{x}_i \quad \text{ou} \\ \hat{x}_j &= \frac{-a_{ij}}{\hat{x}_i} , \end{aligned}$$

a_{ij} étant une constante strictement positive.

La forme fermée définissant $\overset{\circ}{F}$ s'écrira dans cette nouvelle structure :

$$\omega = \frac{d\hat{x}_i}{\hat{x}_i} \quad \text{sur } U_i \cap \overset{\circ}{M},$$

dans les cas (i) ou (ii) ci-dessus, et

$$\omega = - \frac{d\hat{x}_i}{\hat{x}_i} \quad \text{sur } U_i \cap \overset{\circ}{M},$$

dans le cas (iii).

La métrique riemannienne "bundle-like" pour $\overset{\circ}{F}$ sera obtenue en appliquant le lemme I.2.4 dans la nouvelle structure, d'où le théorème ■

A présent, on peut se demander à quelle condition on peut modifier la structure différentiable initiale de M de telle sorte que le feuilletage F soit transversalement affine dans cette nouvelle structure. Avec les notations du théorème III.2.3, on peut énoncer :

III.2.4. Théorème. Dans les conditions et avec les notations du théorème III.2.3, le feuilletage F sera transversalement affine dans la structure S si et seulement si le champ normal X est soit partout rentrant soit partout sortant sur ∂M .

Avant de passer à la démonstration proprement dite du théorème, on va établir un résultat préliminaire utile du reste pour cette dernière.

Soit M_1 une composante du bord d'une variété M munie d'un modèle de feuilletage F transversalement affine non trivial et d'un champ orthogonal à F noté X . Soit $m_1 \in M_1$ et désignons par \odot_1 la trajectoire du champ X issue de m_1 . Soit ψ une paramétrisation de \odot_1 :

$$\psi : [0, a_1[\rightarrow \odot_1,$$

obtenue en posant :

$$\psi(t) = \psi(m_1, t)$$

où $(\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ désigne le flot associé à X . Soit (Ω_1, α_1) un couple de 1-formes définissant la structure affine induite par ψ sur \odot_1 . On a alors le résultat suivant :

III.2.5. Lemme.

- i) a_1 est infini, égal à $+\infty$;
- ii) les structure affines $\{]0, a_1[, (\Omega_1, \alpha_1)\}$ et $\{]0, +\infty[, (dt, 0)\}$ sont isomorphes.

Preuve :

i) Comme \textcircled{M}_1 est une trajectoire du champ X issue de $m_1 \in \partial M$, a_1 est fini si et seulement \textcircled{M}_1 va d'une composante du bord à une autre. Si a_1 était fini, du fait que le groupe d'holonomie de la composante M_1 est non nul, on aurait un automorphisme de la structure affine de $]0, a_1[$ différent de l'identité ce qui contredirait le point (a.2) de la proposition A.III.1.

ii) La structure affine $]0, a_1[, (\Omega_1, \alpha_1)$ ($a_1 = +\infty$) est aussi celle induite sur $]0, a_1[=]0, +\infty[$ par la structure affine définie sur $]0, +\infty[$ à l'aide de ψ .

Soit $(\bar{\Omega}_1, \bar{\alpha}_1)$ le couple de 1-formes définissant la structure affine de $]0, +\infty[$ définie à l'aide de ψ . On a :

$$(\Omega_1, \alpha_1) = (\bar{\Omega}_1, \bar{\alpha}_1) \Big|]0, +\infty[.$$

D'autre part $\{]0, +\infty[, (\bar{\Omega}_1, \bar{\alpha}_1)\}$ est isomorphe soit à $\{]0, +\infty[, (dt, 0)\}$, soit à $\{]a, b[, (dt, 0)\}$ (cf. proposition A.III.1) ; cependant la deuxième possibilité est exclue du fait que le groupe d'holonomie de la composante M_1 est non nul et que le groupe d'automorphismes de $\{]a, b[, (dt, 0)\}$ est trivial (cf. A.III.1).

Par conséquent $\{]0, +\infty[, (\bar{\Omega}_1, \bar{\alpha}_1)\}$ est isomorphe à $\{]0, +\infty[, (dt, 0)\}$ et donc $\{]0, +\infty[, (\Omega_1, \alpha_1)\}$ à $\{]0, +\infty[, (dt, 0)\}$ ■

III.2.6. Démonstration du théorème II.2.4.

a) Soit (M, F, X) un modèle transversalement homographique dont le champ transverse X est partout rentrant. Désignons par ω une 1-forme fermée définie dans $\overset{\circ}{M}$ et définissant $\overset{\circ}{F}$ puisqu'on sait que (M, F, X) est standard. On sait aussi (cf. Lemme I.2.4.) qu'il existe une métrique "bundle-like" pour $\overset{\circ}{F}$, soit $R_{\overset{\circ}{F}}$ et qu'on peut définir un champ de vecteurs

\tilde{X} orthogonal à $\overset{\circ}{F}$ tel que :

$$\omega(\tilde{X}) \equiv 1$$

et

$$\|\tilde{X}\|_{R_{\overset{\circ}{F}}} \equiv 1 .$$

Considérant alors le flot $(\tilde{\varphi}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ associé à \tilde{X} et un recouvrement $\{(U_i, (y_i, x_i))\}_{i \in I}$ bidistingué de M on procède comme dans le théorème III.2.3 pour définir la nouvelle structure S_F avec cette particularité qu'on n'a que deux cas

soit : $U_i \cap \partial M = \emptyset$

soit : $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$ avec le champ transverse rentrant au bord.

Dans tous les cas, les changements de cartes pour la coordonnée "verticale" dans le nouvel atlas $\{(U_i, (\hat{y}_i, \hat{x}_i))\}_{i \in I}$ sont affines ; comme cet atlas est distingué pour F , il s'en suit que F est transversalement affine.

b) Réciproque. Supposons que le champ X ne soit pas partout rentrant ni partout sortant et soient M_i , $i = 1, 2$ deux composantes de ∂M telles que sur M_1 (resp. M_2), le champ soit rentrant (resp. sortant). Pour $i = 1, 2$, fixons un point m_i de M_i et soit \textcircled{H}_i la trajectoire du champ X issue de m_i .

Soit F_0 une feuille de $\overset{\circ}{F}$ et pour $i = 1, 2$, soit x_i un point d'intersection de F_0 avec \textcircled{H}_i . Désignons par c un chemin dans F_0 joignant x_2 à x_1 .

Considérons le difféomorphisme d'holonomie r associé à c . Comme $\overset{\circ}{F}$ est sans holonomie il résulte du théorème d'Imanishi relatif aux domaines des difféomorphismes d'holonomie (cf. théorème I.3.1) que r est un difféomorphisme de $\textcircled{H}_2 \cap \overset{\circ}{M}$ sur $\textcircled{H}_1 \cap \overset{\circ}{M}$.

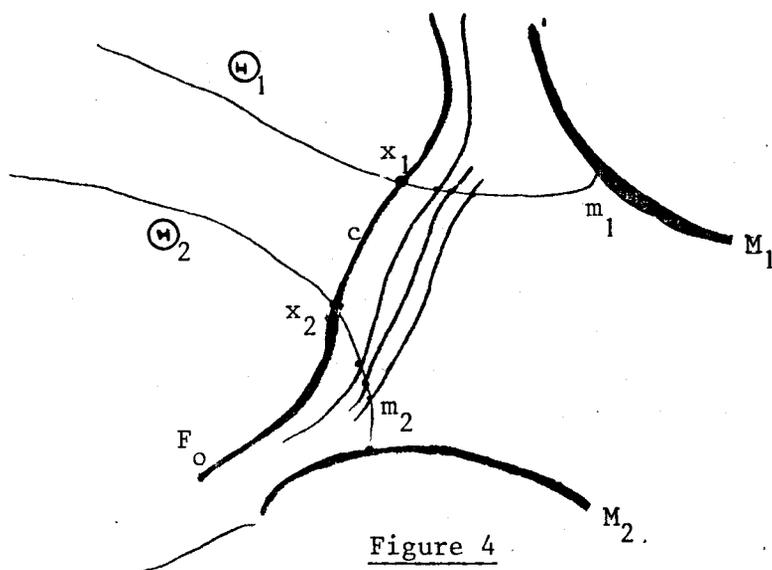


Figure 4

En désignant par ψ le flot associé à X , on obtient une paramétrisation de \mathbb{H}_1 (resp. \mathbb{H}_2) qu'on notera ψ_1 (resp. ψ_2) en posant :

$$\psi_1(t) = \psi(m_1, t) \quad (\text{resp.} \quad \psi_2(t) = \psi(m_2, t)),$$

pour $t \in]0, a_1[$ (resp. $]a_2, 0[$).

L'application \hat{r} induit un difféomorphisme r de $]a_2, 0[$ sur $]0, a_1[$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}]a_2, 0[& \xrightarrow{\psi_2} & \mathbb{H}_2 \cap \overset{\circ}{M} \\ \downarrow r & & \downarrow \hat{r} \\]0, a_1[& \xrightarrow{\psi_1} & \mathbb{H}_1 \cap \overset{\circ}{M} \end{array}$$

Le feuilletage F étant transversalement affine, le pseudogroupe d'holonomie de F est constitué de germes d'applications affines, donc \hat{r} est localement affine ; comme \hat{r} est globalement défini sur $\mathbb{H}_1 \cap \overset{\circ}{M}$, l'application \hat{r} est un isomorphisme des structures affines induites par (M, F) sur $\mathbb{H}_1 \cap \overset{\circ}{M}$ et $\mathbb{H}_2 \cap \overset{\circ}{M}$. Par conséquent r est un isomorphisme croissant des structures affines définies sur $]a_2, 0[$ et $]0, a_1[$ par ψ_2 et ψ_1

respectivement. Soit (Ω_1, α_1) (resp. (Ω_2, α_2)) un couple de 1-formes définissant la structure affine induite par ψ_1 (resp. ψ_2) sur $]0, a_1[$ (resp. $]a_2, 0[$).

On montre (cf. Appendice) que :

- i) a_1 et a_2 sont infinis
 - ii) $\{]0, a_1[=]0, +\infty[, (\Omega_1, \alpha_1)\}$ est isomorphe à $\{]0, +\infty[, (dt, 0)\}$
- alors que $\{]a_2, 0[=]-\infty, 0[, (\Omega_2, \alpha_2)\}$ est isomorphe à $\{]-\infty, 0[, (dt, 0)\}$.

Ainsi donc r est un isomorphisme croissant de $\{]-\infty, 0[, (dt, 0)\}$ sur $\{]0, +\infty[, (dt, 0)\}$, ce qui contredit la proposition A.III.2 ■

A titre d'illustration, regardons le cas des feuilletages de $C = \mathbb{S}^1 \times I$.

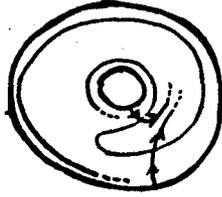
Les feuilletages de $C = \mathbb{S}^1 \times I$ sont de deux types (cf. [MO 1]) ; ils sont topologiquement conjugués à l'un des feuilletages définis par les formes du type (1) : $\omega_1 = dr + \psi(r)d\theta$, où $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que

$$\begin{cases} \psi(0) = \psi(1) = 0 \\ \psi(r) > 0, & \text{si } 0 < r < 1, \end{cases}$$

et du type (2) : $\omega_2 = (1-2r)dr + \psi(r)d\theta$ où ψ est comme précédemment.

Dans les exemples du type (1) (cf. figure 3 page 21) le champ transverse est sortant sur une composante du bord et rentrant sur l'autre mais un feuilletage de ce type F_1 n'est transversalement affine que si $\omega_1 = dr$, et alors on n'a pas affaire à un modèle non trivial.

Dans les exemples du type (2), le champ est partout sortant (ou partout rentrant) ; pour $\psi(r) = r(1-r)$, (2) donne un modèle de feuilletage transversalement affine non trivial.



un feuilletage F_2 .

Figure 5

A.III. APPENDICE. STRUCTURES AFFINES SUR $]0, +\infty[$.

On sait (cf. [SE 1]) qu'il existe seulement trois structures affines sur \mathbb{R} :

- (i) \mathbb{R} avec sa structure canonique définie par $(dt, 0)$,
- (ii) $]0, +\infty[$ avec la structure induite par (i),
- (iii) $] -1, +1[$ avec la structure induite par (i).

De manière analogue, on montre :

A.III.1. Proposition.

a) $]0, +\infty[$ ne possède que deux structures affines :

(a.1) $]0, +\infty[$ avec la structure induite par la structure canonique de \mathbb{R} (le groupe d'automorphismes étant réduit au sous-groupe des homothéties positives).

(a.2) $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) avec la structure induite par la structure canonique de \mathbb{R} (le groupe d'automorphismes est réduit à l'identité) ;

b) $]0, 1[$ ne possède qu'une seule structure affine : celle induite par la structure canonique de \mathbb{R} (le groupe d'automorphismes est réduit à deux éléments : l'identité et l'involution : $t \mapsto 1-t$).

A.III.2. Proposition. Il n'existe pas de difféomorphisme croissant de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, 0[$ qui soit un isomorphisme des structures affines induites sur $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$ par la structure canonique de \mathbb{R} .

Preuve : Soit en effet $f : \{] -\infty, 0[, (dt, 0) \} \rightarrow \{]0, +\infty[, (dt, 0) \}$ un isomorphisme des structures affines ; f vérifie alors :

$$\begin{cases} f^* dt = h dt \\ 0 = f^* o = 0 - \frac{dh}{h} , \end{cases}$$

où h est une fonction différentiable sans zéro sur $] -\infty, 0[$.

On en déduit alors : $f'(t) = K = C^{te}$; d'où

$$f(t) = Kt + K_1 \quad (K_1 = C^{te}) ;$$

f étant un difféomorphisme de $] -\infty, 0[$ sur $] 0, +\infty[$, on a nécessairement

$$K_1 = 0 \quad \text{et} \quad K < 0,$$

i.e. f est décroissante ■

IV - UN THEOREME DE TYPE TISCHLER POUR LES MODELES

p.s.h. DE TYPE 1 TRANSVERSALEMENT HOMOGRAPHIQUES

D'après le célèbre théorème de Tischler (cf. [Ti 1]), il est bien connu que toute variété fermée (i.e. sans bord) possédant une 1-forme fermée sans singularité est fibrée sur S^1 . Les travaux de Joubert et Moussu ont montré que cette fibration peut être choisie de telle sorte qu'une feuille du feuilletage défini par la forme fermée soit un revêtement de la fibre (cf. [J-M1]).

Nous redémontrons ce résultat dans un premier temps pour l'intérieur d'un modèle standard (M, F) de type $(1, 2)$. Plus précisément nous montrons qu'étant donné un modèle standard (M, F) de type $(1, 2)$, moyennant certaines conditions sur M et F , on peut "approcher" F au sens de la " C^0 -topologie des formes" par une fibration $\overset{\circ}{T}$, l'approximation étant faite de telle sorte qu'une feuille F de $\overset{\circ}{F}$ soit un revêtement de la fibre T de $\overset{\circ}{T}$ de groupe Z^{p-1} , $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans une deuxième étape, nous montrons que pour un modèle transversalement homographique (M, F) de type $(1, 2)$, on a une approximation par un modèle transversalement homographique de type $(1, 1)$, (M, T) .

Les démonstrations mises en oeuvre ici se veulent relativement élémentaires et géométriques ; elles utilisent :

- (i) le revêtement associé à une 1-forme fermée ;
- (ii) une procédure nouvelle d'approximation de 1-formes fermées.

IV.1. Revêtement \tilde{M} d'une variété Riemannienne M munie d'une
1-forme fermée ω sans singularité.

Le revêtement d'Imanishi étudié au chapitre I se construit ici de manière canonique à l'aide de la forme.

Etant donné une 1-forme fermée ω sur une variété M , on lui associera l'homomorphisme :

$$I_\omega : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma \rightarrow \int_\gamma \omega$$

- (i) I_ω ne dépend que de la classe $[\omega]$ de ω ;
- (ii) Si nous désignons par Γ_ω l'image de I_ω , on peut écrire :

$$\Gamma_\omega \cong \pi_1(M, x_0) / \ker I_\omega ;$$

Γ_ω est appelé le groupe des périodes de ω . Si $\pi_1(M, x_0)$ est de type fini, Γ_ω est un \mathbb{Z} -module libre de rang p fini ;

- (iii) La suite : $0 \rightarrow \ker I_\omega \rightarrow \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{I_\omega} \Gamma_\omega \rightarrow 0$ est exacte.

(iv) Le revêtement $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ défini par la suite exacte (iii) est galoisien et le groupe d'automorphismes est isomorphe à Γ_ω .

Soit $\tilde{\omega}, \tilde{X}, \tilde{R}$ respectivement les relèvements de ω, X, R à \tilde{M} par π .

IV.1.1. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Gamma_\omega = 0$

(ii) la variété M est un produit $F \times \mathbb{R}$ où les feuilles de ω (resp. les courbes intégrales de X) sont de la forme $F \times \{t\}$ (resp. de la forme $\{x\} \times \mathbb{R}$).

Preuve :

- (ii) => (i) : c'est évident
- Supposons $\Gamma_\omega = 0$; alors ω est exacte,

$$\omega = df = f^* dt \quad \text{où}$$

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_*(X) = \frac{\partial}{\partial t} .$$

F n'a donc pas de transversale fermée ; par conséquent, toutes les feuilles de F sont fermées et une trajectoire de X rencontre au maximum en un point une feuille de F .

D'autre part le flot $(\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ associé au champ X préserve le feuilletage F (X est choisi tel que $\omega(X) \equiv 1$), d'où l'existence d'une feuille type F ; par suite, on a bien :

$$M = F \times \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

IV.1.2. Lemme. Soit M une variété riemannienne complète et ω une 1-forme fermée sans singularité sur M telle que $\|\omega\| = 1$. Alors on a les propriétés suivantes :

- (i) toutes les feuilles de F sont difféomorphes à une variété F ;
- (ii) le revêtement \tilde{M} défini comme ci-dessus (propriété (iv) de I_ω) est difféomorphe à $F \times \mathbb{R}$;
- (iii) le groupe des automorphismes opère par translations sur \mathbb{R} et la suite définie comme en (iii) (propriétés de I_ω) devient :

$$0 \longrightarrow \pi_1(F, x_0) \longrightarrow \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{I_\omega} \Gamma_\omega \longrightarrow 0$$

Preuve :

- On considère le revêtement \tilde{M} muni de la forme $\tilde{\omega}$; d'après le lemme précédent, on a : $\tilde{M} = F \times \mathbb{R}$ où F est une feuille type de $\tilde{\omega}$.

- Le groupe des automorphismes du revêtement préservant la structure produit $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ agit sur chaque facteur et en particulier sur le facteur \mathbb{R} comme le groupe Γ_ω .

- son action sur $\tilde{F} \times \{t\}$ est triviale (En effet $\ker I_\omega = \pi_* (\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)) = \pi_* (\pi_1(\tilde{F} \times \{t\}, \tilde{x}_0))$; d'où $\ker I_\omega \subset \pi_1(F, x_0) \subset \text{Ker } I_\omega$); donc la restriction de π à $\tilde{F} \times \{t\}$ est un difféomorphisme de $\tilde{F} \times \{t\}$ sur son image. Par conséquent toutes les feuilles de F sont difféomorphes à $F \cong \tilde{F}$ et $\tilde{M} \cong F \times \mathbb{R}$.

- la suite exacte découle du fait que $\ker I_\omega = \pi_1(F, x_0)$ ■

Utilisant les lemmes précédents, on peut alors énoncer :

IV.1.3. Proposition. Dans les conditions du lemme IV.1.2, on a les trois cas :

- (i) $\Gamma_\omega = 0 \iff M = F \times \mathbb{R}$;
- (ii) $\Gamma_\omega = \mathbb{Z} \iff$ Il existe une fibration de M sur S^1 définissant F ;
- (iii) $\Gamma_\omega = \mathbb{Z}^p, p > 1 \iff$ toutes les feuilles de F sont denses.

Preuve :

- a) la première équivalence résulte du lemme IV.1.1.
- b) si $\Gamma_\omega = \mathbb{Z}$, désignant par e l'application de projection de \mathbb{R} sur $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, il existe une application différentiable

$$f : M \rightarrow S^1$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{M}, \tilde{\omega}) & \xrightarrow{\pi} & (M, \omega) \\
 \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{e} & S^1
 \end{array}$$

où pr_2 c'est la projection de $F \times \mathbb{R}$ sur le second facteur. Cette application f définit la fibration cherchée.

c) Soit θ une transversale fermée de M et soit $\tilde{\theta}$ une composante de $\pi^{-1}(\theta)$; alors $\tilde{\theta}$ est de la forme $\{x\} \times \mathbb{R}$

$$\Gamma_\omega = \mathbb{Z}^p, \quad p > 1 \Leftrightarrow \text{l'orbite d'un point de } \tilde{\theta} \text{ est dense dans } \tilde{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \theta \cap F \text{ est dense dans } \theta$$

$$\Leftrightarrow F \text{ est dense dans } M, \text{ ce qui achève de}$$

démontrer la proposition ■

Maintenant nous allons introduire le deuxième préliminaire au théorème principal qui fait l'objet de ce chapitre, c'est-à-dire l'approximation des 1-formes fermées.

IV.2. Approximation de 1-formes fermées.

On s'intéresse à des 1-formes différentiables fermées.

On commence par choisir des normes appropriées.

Soit M une variété compacte et notons $Z^1(M)$ (resp. $B^1(M)$) l'espace des 1-formes fermées de M (resp. l'espace des cobords de M); l'application $\|\cdot\|_1 : Z^1(M) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|\omega\|_1 = \sup_{x \in M} \|\omega_x\|,$$

est une norme sur $Z^1(M)$ (on suppose fixée une métrique riemannienne sur M).

IV.2.1. Lemme. L'espace $B^1(M)$ est fermé dans $Z^1(M)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Preuve : Soit $(dg_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B^1(M)$ et soit ω un élément de $Z^1(M)$ et supposons que la suite $(dg_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ω pour la norme $\|\cdot\|_1$. On peut supposer qu'il existe un point x_0 de

M tel que $g_n(x_0) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: ceci est possible car les fonctions g_n sont définies à une constante près.

Par un calcul simple, on montre alors que :

(i) la famille $\mathcal{G} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'applications uniformément équicontinue de M dans \mathbb{R} ;

(ii) pour tout $x \in M$, $\mathcal{G} \cdot x = \{g_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact.

Par conséquent, d'après le théorème d'Ascoli, \mathcal{G} est une partie relativement compacte de $F_u(M, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions numériques continues sur M muni de la norme de la convergence uniforme ; donc il existe une fonction continue :

$$g : M \rightarrow \mathbb{R}$$

telle qu'en remplaçant éventuellement la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une sous-suite, on puisse écrire :

$$g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g ,$$

la convergence étant uniforme.

Utilisant alors un résultat élémentaire sur la dérivabilité des limites des suites de fonctions différentiables, on montre que g est différentiable et que $\omega = dg$, d'où le lemme ■

Conséquence du lemme IV.2.1.

La norme précédente, $\|\cdot\|_1$ sur $Z^1(M)$, induit sur l'espace $H^1(M) = Z^1(M) / B^1(M)$ une norme donnée par :

$$\|[\omega]\| = \inf_{\alpha \in [\omega]} \|\alpha\|_1$$

Le premier théorème de type Tischler annoncé concerne l'intérieur $\overset{\circ}{M}$ de la variété M ; on aura ainsi à procéder à une approximation d'une 1-forme fermée définie seulement sur $\overset{\circ}{M}$; en réalité, cette dernière résultera d'une approximation d'une 1-forme définie sur une sous-variété compacte de M contenue dans $\overset{\circ}{M}$; pour ce faire, on utilisera le résultat suivant :

IV.2.2. Lemme. Si M est une variété compacte à bord, il existe une sous-variété compacte M_1 de M contenue dans $\overset{\circ}{M}$ et une rétraction r de $\overset{\circ}{M}$ sur M_1 qui est la restriction à $\overset{\circ}{M}$ d'une rétraction de M sur M_1 .

Ce lemme est bien connu et résulte du théorème d'existence du voisinage collier du bord d'une variété (cf. [Mu 1]).

Si r désigne la rétraction du lemme précédent de $\overset{\circ}{M}$ sur M_1 , alors :

$$r^* : H^1(M_1, \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\overset{\circ}{M}, \mathbb{R}),$$

est un isomorphisme ; donc pour toute forme ω de $\overset{\circ}{M}$, il existe une forme α de M_1 telle que :

$$[\omega] = [r^* \alpha].$$

Supposons maintenant la variété M munie d'un feuilletage de codimension un de classe C^r , $r \geq 2$, tel que (M, F) soit un modèle standard de type (1,2). Le feuilletage $\overset{\circ}{F}$ est alors défini par une 1-forme fermée ω de classe C^r , $r \geq 2$, sans singularité. Avec les notations précédentes, on peut écrire :

$$\omega = r^* \omega_1 + dg_0,$$

où $\omega_1 \in Z^1(M_1)$ et $g_0 : \overset{\circ}{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable de classe C^r , $r \geq 2$.

Soit I_{ω_1} l'homomorphisme associé à ω_1 ; alors Γ_{ω_1} est un \mathbb{Z} -module libre de rang p fini et p est différent de 0 car il existe dans $\overset{\circ}{M}$ une transversale fermée à F de sorte que Γ_{ω} , groupe des périodes de ω , qui est égal à $\Gamma_{r^* \omega_1}$, est non nul.

Soit $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q\}$ un système de générateurs de $\pi_1(M_1, x_0)$ tel que si $(\tau_i)_{1 \leq i \leq q}$ désigne les images par I_{ω_1} des $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq q}$, alors $\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ soit une base de Γ_{ω_1} .

En fait l'approximation de ω que l'on vise résultera d'une approximation de ω_1 .

Désignons par J l'isomorphisme canonique :

$$J : H^1(M_1, \mathbb{R}) \longrightarrow H_1(M_1, \mathbb{R})^*, \quad \text{et}$$

$$\mu \longrightarrow J(\mu)$$

pour tout $\mu \in H^1(M_1, \mathbb{R})$ notons J_μ la restriction de $J(\mu)$ à $H^1(M_1, \mathbb{Z})$. On a donc $J_\mu = I_\omega$ pour tout $\omega \in \mu$.

IV.2.3. Lemme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu \in H^1(M_1, \mathbb{R})$ tel que

$$J_\mu : H_1(M_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- 1) rang $J_\mu = 1$,
- 2) $\ker J[\omega_1] \subset \ker J_\mu$
- 3) $\|\mu - [\omega_1]\| \leq \varepsilon$.

Preuve : Pour tout $i = 1, \dots, p$, soit $\tau'_i \in \mathbb{Q}$ tel que τ'_i soit ε -proche de τ_i , en particulier $\tau'_i = \tau_i$ si $\tau_i \in \mathbb{Q}$.

Soit $\delta : \Gamma_{\omega_1} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'unique homomorphisme de Γ_{ω_1} dans \mathbb{R} tel que :

$$\delta(\tau_i) = \tau_i' \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

Posons alors : $J_\mu = \delta \circ J[\omega_1]$.

Alors μ ainsi défini vérifie bien les conditions 1) et 2) du lemme. La condition 3) provient de l'équivalence des normes sur l'espace $H^1(M_1, \mathbb{R})$ ■

Le choix particulier de la norme mise sur $H^1(M_1; \mathbb{R})$, c'est-à-dire la norme $\|\cdot\|$ permet alors d'obtenir le lemme suivant :

IV.2.4. Lemme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une 1-forme fermée α_1 sur M_1 telle que :

- 1) $[\alpha_1] = \mu$ où μ est donné par le lemme IV.2.3 ;
- 2) $\|\alpha_1 - \omega_1\| \leq \varepsilon$.

Preuve : D'après le lemme précédent, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\mu \in H^1(M_1, \mathbb{R})$ tel qu'en particulier :

$$\|\mu - [\omega_1]\| \leq \varepsilon.$$

Comme par définition des normes, on a :

$$\|\mu - [\omega_1]\| = \inf_{\substack{\alpha_1 \in \mu \\ \beta_1 \in [\omega_1]}} [\|\alpha_1 - \beta_1\|],$$

il existe $\alpha_1 \in \mu$ et une fonction différentiable g_1 définie sur M_1 tels que :

$$\|\omega_1 - (\alpha_1 + dg_1)\| \leq \varepsilon \quad \text{d'où lemme} \quad \blacksquare$$

Grâce à la rétraction r de $\overset{\circ}{M}$ sur M_1 , on obtient une 1-forme fermée approchée de la forme ω de $\overset{\circ}{M}$, soit :

IV.2.5. Lemme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une 1-forme fermée α sur $\overset{\circ}{M}$ telle que :

- 1) $\text{rang } I_\alpha = 1$
- 2) $\ker I_\omega \subset \ker I_\alpha$,
- 3) $\|\alpha - \omega\|_1 \leq 2\varepsilon$
- 4) $\alpha - \omega = \theta|_{\overset{\circ}{M}}$ où $\theta \in Z^1(M)$

Preuve : Soit $\alpha = r^* \alpha_1 + dg_0$ où α_1 est donné par le lemme IV.2.4 et g_0 étant la fonction définie précédemment par l'égalité :

$$\omega = r^* \omega_1 + dg_0$$

Les propriétés 1) et 2) annoncées résultent alors des égalités :

$$I_\omega = I_{\omega_1} \circ r_* \quad \text{et} \quad I_\alpha = I_{\alpha_1} \circ r_* \quad (r_* : \pi_1(\overset{\circ}{M}, x_0) \rightarrow \pi_1(M_1, x_0)).$$

D'autre part, on a :

$$\alpha - \omega = r^* \alpha_1 - r^* \omega_1 = r^* (\alpha_1 - \omega_1) .$$

Les propriétés 3) et 4) résultent du fait que r est la restriction à $\overset{\circ}{M}$ d'une rétraction de M sur M_1 et que donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir cette rétraction de telle sorte que 3) soit vérifié ■

Nous savons d'après le lemme I.2.4, qu'il existe une métrique riemannienne $R_{\overset{\circ}{M}, F}$ sur $\overset{\circ}{M}$, "bundle-like" telle que :

- (i) $\|\omega\|_{R_{\overset{\circ}{M}, F}} \equiv 1$,
- (ii) $(\overset{\circ}{M}, R_{\overset{\circ}{M}, F})$ est une variété complète.

De plus, si R désigne la métrique choisie sur M , en multipliant éventuellement R par une constante, on peut écrire :

$$R \leq R_{\frac{O}{F}} \quad \text{sur } \overset{O}{M} .$$

Alors la forme α donnée par le lemme IV.2.5 vérifie :

$$\|\omega - \alpha\|_R \geq \|\omega - \alpha\|_{R_{\frac{O}{F}}} .$$

Donc pour tout ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on a :

$$\|\omega - \alpha\|_{R_{\frac{O}{F}}} \leq \varepsilon < \frac{1}{2} .$$

Or : $\|\omega\|_{R_{\frac{O}{F}}} \equiv 1$, d'où le lemme suivant :

IV.2.6. Lemme. La forme α est sans singularité.

En résumé, on a donc montré qu'étant donné ε , $0 < \varepsilon < 1$, il existe une 1-forme α sur $\overset{O}{M}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) α est sans singularité ;
- (ii) $\ker I_\omega \subset \ker I_\alpha$
- (iii) $\text{rang } I_\alpha = 1$
- (iv) $\|\omega - \alpha\|_{R_{\frac{O}{F}}} \leq \|\omega - \alpha\|_R \leq \varepsilon$
- (v) $\omega - \alpha$ est la restriction à $\overset{O}{M}$ d'un élément de $Z^1(M)$.

Les suites :

$$0 \rightarrow \ker I_\omega \rightarrow \pi_1(\overset{O}{M}, x_0) \xrightarrow{I_\omega} \Gamma_\omega \rightarrow 0 ,$$

$$0 \rightarrow \ker \delta \xrightarrow{\hookrightarrow} \underset{\substack{\mathbb{S} \\ \mathbb{Z}P}}{\Gamma} \xrightarrow{\delta} \underset{\substack{\mathbb{S} \\ \mathbb{Z}}}{\Gamma_\alpha} \rightarrow 0 ,$$

sont exactes.

On a d'autre part : $I_\alpha = \delta \circ I_\omega$, de sorte que si l'on note Δ le noyau de δ , on peut écrire :

$$\underline{\Gamma_\alpha = \Gamma_\omega / \Delta}.$$

Ces préliminaires étant posés, on va maintenant énoncer et démontrer les théorèmes annoncés au début de cette section.

IV.3. Théorèmes de type Tischler.

On va distinguer deux étapes : dans la première, on va s'intéresser à l'intérieur d'un modèle standard de type (1.2) et dans la seconde aux modèles transversalement homographiques.

IV.3.1. Théorème. Soit (M, F) un modèle standard de type (1,2) de classe C^r , $r \geq 2$. Alors il existe un feuilletage $\overset{\circ}{T}$ sur $\overset{\circ}{M}$ tel que :

(i) $\overset{\circ}{T}$ est arbitrairement proche de $\overset{\circ}{F}$ (au sens de la C^0 -topologie des champs de $(n-1)$ -plans aussi bien pour la métrique induite sur $\overset{\circ}{M}$ par celle de M que pour la métrique "bundle-like" de $\overset{\circ}{F}$).

(ii) $\overset{\circ}{T}$ définit une fibration de $\overset{\circ}{M}$ sur S^1 telle qu'une feuille F de $\overset{\circ}{F}$ est un revêtement de la fibre T de $\overset{\circ}{T}$ dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à \mathbb{Z}^{p-1} , $p \geq 1$, où p est le rang de Γ_ω .

Preuve : Désignons par \tilde{M} le revêtement galoisien de $\overset{\circ}{M}$ associé à $\ker I_\omega$ et par \hat{M} celui associé à $\ker I_\alpha$ où α est une 1-forme fermée sans singularité obtenue à partir de ω par approximation comme au paragraphe IV.2. Soit π (resp. q) l'application de projection du revêtement \tilde{M} (resp. \hat{M}).

D'après le théorème IV.1.1. on peut écrire :

$$\tilde{M} \cong F_\omega \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \hat{M} \cong F_\alpha \times \mathbb{R},$$

où F_ω (resp. F_α) est une feuille type du feuilletage F_ω défini par ω

(resp. F_α défini par α) sur $\overset{\circ}{M}$.

D'autre part, du fait de l'inclusion de $\ker I_\omega$ dans $\ker I_\alpha$, il existe un revêtement galoisien :

$$p : \tilde{M} \rightarrow \overset{\circ}{M},$$

de groupe $\Delta = \ker \delta \cong \mathbb{Z}^{p-1}$, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{M} \cong F_\omega \times \mathbb{R}, \tilde{X} & \\
 & \swarrow p & \downarrow \pi \\
 \tilde{X}, F_\alpha \times \mathbb{R} \cong \overset{\circ}{M} & & \overset{\circ}{M}, \omega, \alpha, X \\
 & \searrow q & \\
 & &
 \end{array}$$

Le feuilletage $(F_\omega \times \{t\})_{t \in \mathbb{R}}$ sur \tilde{M} est invariant par Δ (Δ est un sous-groupe de Γ_ω) ; par conséquent, la projection de ce feuilletage par p définit un deuxième feuilletage sur $\overset{\circ}{M}$ transverse au facteur \mathbb{R} du produit $F_\alpha \times \mathbb{R}$.

En fait la projection p consiste à identifier un certain nombre de trajectoires du champ $\tilde{X} = \pi^* X$ de \tilde{M} . Donc $p(F_\omega)$ est transverse à $\tilde{X} = q^* X$ et $p(F_\omega)$ rencontre chaque trajectoire de \tilde{X} .

La feuille F_ω est un revêtement de F_α car il existe une application $\bar{p} : F_\omega \rightarrow F_\alpha$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 F_\omega \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & F_\omega \\
 \downarrow p & & \downarrow \bar{p} \\
 F_\alpha \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & F_\alpha
 \end{array}$$

En effet, pour tout $x \in F_\omega$, il existe $y \in F_\alpha$ tel que

$$p(\{x\} \times \mathbb{R}) = \{y\} \times \mathbb{R},$$

et pour tout $\gamma \in \Delta$

$$p(\{x\} \times \mathbb{R}) = p[\gamma(\{x\} \times \mathbb{R})].$$

Par conséquent le revêtement $\{F_\omega, \bar{p}, F_\alpha\}$ est un revêtement de groupe Z^{p-1} .

Le feuilletage $\overset{\circ}{T}$, c'est le feuilletage F_α défini par α ■

Utilisant alors le théorème II.1.2, on va établir le théorème de type Tischler pour les modèles transversalement homographiques.

IV.3.2. Théorème. Soit (M, F) un modèle transversalement homographique de classe C^r , $r \geq 2$. Alors il existe sur M un feuilletage T de classe C^r , $r \geq 2$, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) (M, T) est un modèle transversalement homographique de type $(1, 1)$;
- (ii) T est arbitrairement proche de F ;
- (iii) une feuille F de $\overset{\circ}{F}$ est un revêtement de la fibre T de $\overset{\circ}{T}$ dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à Z^{p-1} , $p \geq 1$, où p est le rang de Γ_ω (ω 1-forme fermée sur $\overset{\circ}{M}$ définissant $\overset{\circ}{F}$).

Preuve : D'après le théorème III.1.2, il existe deux fonctions différentiables sur M , f et ψ telles que :

$$f|_{\overset{\circ}{M}} > 0, \quad f^{-1}(0) = \partial M$$

et que la structure transverse homographique sur F soit définie par le triplet de 1-forme (ω, α, β) :

$$\Omega = f\omega ,$$

$$\alpha = -\frac{df}{f} + \psi\omega ,$$

$$\beta = -\frac{d\psi}{f} + \frac{\psi^2}{2f}\omega .$$

Soit ω' une 1-forme fermée sur $\overset{\circ}{M}$ sans singularité approchée de ω suivant la manière indiquée au paragraphe IV.2. On sait entre autres que $\omega' - \omega$ est en réalité une 1-forme fermée θ définie sur toute la variété M .

Posons alors :

$$\Omega' = f\omega' = f\omega + f\theta = \Omega + f\theta ,$$

$$\alpha' = -\frac{df}{f} + \psi\omega' = \alpha + \psi\theta ,$$

$$\beta' = -\frac{d\psi}{f} + \frac{\psi^2}{2f}\omega' = \beta + \frac{\psi^2}{2f}\theta .$$

Il est alors clair que le triplet de 1-formes $(\Omega', \alpha', \beta')$ est défini sur M , que Ω' est sans singularité et enfin que les identités (H) sont satisfaites par $(\Omega', \alpha', \beta')$.

Le feuilletage \mathcal{T} est le feuilletage défini par Ω' , d'où le théorème ■

V - CONJUGAISON DES MODELES DE FEUILLETAGE p.s.h.

Tout feuilletage de codimension un, sans holonomie, de classe C^r est conjugué à un feuilletage défini par une forme fermée : partant de la structure différentiable dans laquelle le feuilletage se définit par une forme fermée, on opère un retour à la structure différentiable initiale. Récemment Hideki Imanishi a donné une nouvelle démonstration de ce résultat (cf. [Im 1]). Il l'a ensuite appliquée à l'intérieur d'un modèle mais pas au modèle entier bord compris (cf. [Im 2]). Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à toute la variété bord compris.

Le résultat principal s'énonce alors :

V.1. Théorème.

Tout modèle (M, F, X) de feuilletage p.s.h. de type 1, de classe C^r , $r \geq 2$, est topologiquement conjugué à un modèle (de feuilletage p.s.h) transversalement homographique.

A partir de là, le résultat suivant est immédiat, compte tenu du théorème III.2.4 :

V.2. Corollaire.

Un modèle (M, F, X) de feuilletage p.s.h. de type 1, de classe C^r , $r \geq 2$, est topologiquement conjugué à un modèle de feuilletage p.s.h transversalement affine si et seulement si le champ transverse X est partout rentrant ou partout sortant.

Auparavant, on aura besoin de quelques préliminaires.

V.3. Résultats préliminaires.

D'après la proposition III.2.3, nous savons que dans la structure $S_F (M, F)$ est un modèle transversalement homographique défini par un triplet de 1-formes (Ω, α, β) où

$$\Omega = f\omega ,$$

f étant une fonction de classe C^r sur M , ω désignant une 1-forme fermée sans singularité de $\overset{\circ}{M}$ définissant $\overset{\circ}{F}$.

Considérons le champ de vecteurs dual de ω , \hat{X} , défini sur $\overset{\circ}{M}$ c'est-à-dire : $\omega(\hat{X}) \equiv 1$.

D'après le théorème de type Tischler IV.3.2, il existe dans S_F un modèle transversalement homographique de type $(1,1) (M, T)$ arbitrairement proche de F tel que donc $\overset{\circ}{T}$ est défini par une forme fermée ω' et induit une fibration

$$\Phi : \overset{\circ}{M} \rightarrow \mathcal{S}^1 ,$$

dont les fibres sont transverses à \hat{X} ; de plus les variétés intégrales de ω sont des revêtements de la fibre de Φ .

Soit $a : \overset{\circ}{M} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable telle que :

$$\Phi_* (a(x) \hat{X}(x)) = \frac{\partial}{\partial t} ,$$

où t c'est la coordonnée naturelle de \mathcal{S}^1 . La forme $\omega' = \Phi^* dt$ vérifie alors :

$$\omega' (a \hat{X}) \equiv 1 \quad \text{sur } \overset{\circ}{M}.$$

Soit $(\hat{\Psi}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre de $a.\hat{X}$. Alors $(\hat{\Psi}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\hat{\psi}_1$ préserve les fibres de Φ ;

(ii) si T_0 est une fibre fixée de Φ , alors on a :

$$\overset{0}{M} \cong T_0 \times [0,1] / (x,0) \sim (\hat{\psi}_1(x),1) ;$$

(iii) en notant S la structure différentiable initiale sur M , l'homéomorphisme

$$h : (M, S_F) \longrightarrow (M, S)$$

$$m(\hat{y}_i, \hat{x}_i) \mapsto m(y_i, x_i)$$

envoie une trajectoire de $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dans une trajectoire de $\psi = (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, où ψ c'est le flot associé au champ transverse initial X : localement, une trajectoire de \hat{X} donc de $a.\hat{X}$ est contenue dans les arcs transverses de $(M, F; S)$ définis par :

$$y_i = C^{te} .$$

Pour tout $z \in M$ soit \hat{P}_z (resp. \hat{A}_z) une plaque de F en z (resp. un arc de courbe intégrale de $a.\hat{X}$ (ou axe) passant par z). Pour tout $x \in T_0$, il existe un voisinage \hat{P}'_x de x contenu dans T_0 tel que la projection

$$\begin{aligned} \pi_x : \hat{P}'_x &\longrightarrow \hat{P}_x \\ z &\longmapsto \hat{P}_x \cap A_z \end{aligned} ,$$

soit un difféomorphisme :

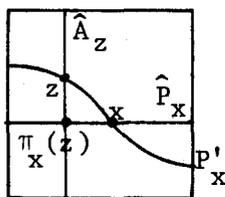


Figure 6

V.3.1. Définition. L'application π_x est appelée projection locale.

Rappelons encore les propriétés suivantes de (M, S_F, T) :

- (i) toutes les feuilles de T sont propres ;
- (ii) l'holonomie de toute feuille de $\overset{0}{M}$ est triviale ;
- (iii) pour tout lacet c transverse à $\overset{0}{T}$, on a :

$$\text{sat}(c) = \overset{0}{M},$$

où $\text{sat}(c)$ désigne le saturé de c pour la relation d'équivalence induite par T ;

- (iv) toute feuille T de $\overset{0}{T}$ contient le bord de M dans son adhérence ;
- (v) si L est une composante du bord, alors le groupe d'holonomie de L considéré comme feuille de T est isomorphe à Z .

On est alors dans les conditions d'application du résultat suivant qui est une conséquence du théorème de Thom-Nakatsuka (cf. [Na 1]).

V.3.2. Proposition. Si (L, x_0) est une feuille compacte d'une variété feuilletée (M, F) telle que $\text{hol}(L) \cong Z$, alors il existe une sous-variété connexe N contenue dans L de codimension un au point x_0 , telle que :

$$\ker h = \pi_1(N, x_0),$$

où h c'est la représentation d'holonomie :

$$0 \rightarrow \ker h \rightarrow \pi_1(L, x_0) \xrightarrow{h} h(L) \cong Z \rightarrow 0.$$

On sait que F et T sont deux feuilletages de (M, S_F) transverses au même champ de vecteurs et tangents à ∂M ; donc il existe un recouvrement ouvert bidistingué $(U_i)_{i \in I}$ pour T tel que pour tout $i \in I$ tel que

$U_i \cap \partial M$ soit non vide, on puisse trouver un ouvert bidistingué U'_i pour F tel que :

- (i) l'adhérence de U'_i soit contenue dans U_i ;
- (ii) tout axe de U_i coupe toute plaque de U'_i .

Pour toute composante L de ∂M , considérons une triangulation K_L de L telle que :

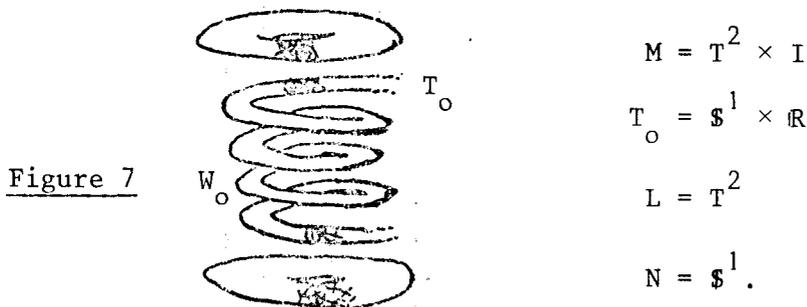
- (a) pour tout $(n-1)$ -simplexe σ , il existe $i \in I$ tel que :

$$\sigma \subset U_i ;$$

- (b) la sous-variété N donnée par V.3.2 est un sous-complexe de L .

Relevons maintenant le long des transversales la triangulation K_L , dans les feuilles de T , ceci pour toute composante L de ∂M .

On définit ainsi une sous-variété connexe compacte W_0 de T_0 dont le bord consiste en des sous-variétés compactes homéomorphes aux sous-variétés N_L , L décrivant l'ensemble des composantes de ∂M , et dont le complémentaire (dans T_0) ainsi que le bord sont triangulés.



Mais on sait (cf. [Mu 1]) que si V est une variété compacte à bord, toute C^r -triangulation de ∂V peut être étendue à V . De plus la triangulation de V ainsi obtenue peut être rendue aussi fine qu'on veut. Par conséquent, on a le résultat suivant :

V.3.3. Lemme. La fibre T_0 de Φ possède une triangulation K telle que :

(i) pour tout $(n-1)$ -simplexe σ de K , il existe $i \in I$ tel que σ soit contenu dans U_i ;

(ii) si x_0 est un point de T_0 proche du bord de M et si \hat{A}_{x_0} est un arc de courbe intégrale de $a.\hat{X}$ s'accumulant, au point z de ∂M , alors la suite $(\sigma_{y_p})_{p \in \mathbb{N}}$ où $y_p = \hat{\psi}_p(x_0)$ converge vers σ_z (on a supposé le champ transverse sortant en z).

On supposera dans la suite que pour tout $(n-1)$ -simplexe σ de K , on s'est fixé une plaque \hat{P}'_σ du feuilletage T le contenant.

Le lemme fondamental appelé "assertion" dans la démonstration du théorème (1.2) de [Im 1] devient :

V.3.4. Lemme (cf. [Im 1]). Il existe une immersion injective :

$$J : T_0 \longrightarrow (M, S),$$

transverse à ψ et telle que :

(i) pour tout $x \in \hat{P}'_\sigma$, $J(x)$ et $h \circ \pi_\sigma(x)$ appartiennent au même axe de (F, S) ;

(ii) l'application J se prolonge en un homéomorphisme de \bar{T}_0 sur $\overline{J(T_0)}$ tel que :

$$J|_{\bar{T}_0} \cap \partial M = h|_{\bar{T}_0} \cap \partial M.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur le squelette de K à la manière d'Imanishi (cf. [Im 1]).

Supposons définie une immersion injective J_p d'un voisinage $V(K_p)$ du p -squelette K_p de K satisfaisant à la propriété (i) et telle

que si $J_p(m) = \psi(h \circ \pi_\sigma(m), t)$, on ait :

$$|t| \leq \sup_{m' \in \sigma} |\hat{x}'_1(m') - \hat{x}'_1(\pi_\sigma(m'))|$$

où l'on note (\hat{y}'_1, \hat{x}'_1) l'application de carte définie sur U_1 ouvert bidistingué pour T .

Soit K_{p+1} le $(p+1)$ -squelette de K et soit τ un élément de K_{p+1} ; soit σ un $(n-1)$ -simplexe de k contenant τ comme l'une de ses faces ; il existe alors une application différentiable $f_{\sigma\tau}$ définie sur un voisinage $V(\partial\tau)$ de $\partial\tau$ par :

$$J_p(m) = \psi(h \circ \pi_\sigma(m), f_{\sigma\tau}(m)) ,$$

pour tout $m \in V(\partial\tau)$.

Soit alors $\bar{f}_{\sigma\tau}$ un prolongement différentiable de $f_{\sigma\tau}$ défini dans un voisinage $V(\tau)$ de τ et telle que :

$$|\bar{f}_{\sigma\tau}(m)| \leq \sup_{m' \in \sigma} |\hat{x}'_1(m') - \hat{x}'_1(\pi_\sigma(m'))| ,$$

pour tout $m \in V(\tau)$. Posons alors :

$$J_{p+1,\tau}(m) = \psi(h \circ \pi_\sigma(m), \bar{f}_{\sigma\tau}(m)) ,$$

pour tout m de $V(\tau)$. On obtient ainsi une application différentiable injective du voisinage $V(\tau)$ de (M,S) vérifiant (i). En outre, $J_{p+1,\tau}$ est une immersion car la restriction de $h \circ \pi_\sigma$ à une plaque de $(M,S_{\bar{f}},T)$ est un difféomorphisme.

On définit ainsi une famille d'applications $J_{p+1,\tau}$, où τ décrit le $(p+1)$ -squelette K_{p+1} et elles se recollent bien grâce à un choix convenable des voisinages $V(\tau)$; d'où une immersion injective J_{p+1} d'un voisinage $V(K_{p+1})$ du $(p+1)$ -squelette de K :

$$J_{p+1} : V(K_{p+1}) \longrightarrow (M, S),$$

vérifiant la propriété (i) et telle que si :

$$J_{p+1}(m) = \psi(h \circ \pi_{\sigma}(m), t),$$

on ait :

$$|t| \leq \sup_{m' \in \sigma} |\hat{x}'_1(m') - \hat{x}'_1(\pi_{\sigma}(m'))| \quad (*).$$

Par conséquent, il existe une immersion injective

$$J : T_o \longrightarrow (M, S),$$

transverse à ψ , vérifiant (i) et telle que si

$$J(m) = \psi(h \circ \pi_{\sigma}(m), t),$$

t satisfait à la condition (*).

Soit alors $m \in \partial M$ et soit $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de T_o convergeant vers le point m .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit σ_k un $(n-1)$ -simplexe contenant m_k . Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma_k = \hat{\psi}_k(\sigma_{m_k}^o)$, ce que l'on peut faire d'après le choix de K . Utilisant la condition (*), il est alors facile de vérifier que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(m_k) = h(m),$$

d'où l'assertion (ii) ■

En considérant un certain nombre de fibres de Φ du type T_o , on aura une famille d'applications du type J précédent ; en recollant ces dernières de manière convenable, on obtient un homéomorphe de (M, S_f) sur (M, S) ; c'est ce qu'énonce le lemme suivant.

V.3.5. Lemme (cf. [Im 1]). Il existe un homéomorphisme

$$h_1 : (M, S_F) \longrightarrow (M, S),$$

transverse à ψ et tel que :

- 1) $h_1|_{\partial M} = h|_{\partial M}$,
- 2) $h_1|_{\overset{\circ}{M}}$ est un difféomorphisme.

Preuve : La démonstration d'Imanishi (cf. [Im 1]) du résultat analogue se répète ici telle quelle.

Soit $s : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < 1$, une subdivision de S^1 suffisamment fine pour que si $T_k = \phi^{-1}(t_k)$, pour $0 \leq k \leq p$, un axe issu d'un point quelconque de T_k rencontre T_{k+1} , pour tout k , $0 \leq k \leq p-1$

Soit $J_s = \bigsqcup_{k=0}^p J_k$ l'application de $\bigsqcup_{k=0}^p T_k$ dans (M, S) définie à l'aide des fonctions J_k données par le lemme V.3.4.

Soit m_k un point de T_k et m_{k+1} un point de T_{k+1} tels qu'on ait :

$$\hat{A}_{m_k} = \hat{A}_{m_{k+1}}.$$

D'après la propriété (i) du lemme précédent, pour tout $m \in \bigsqcup_{k=0}^p T_k$, les images $J_s(m)$ et $h(m)$ appartiennent au même axe de F feuilletage de (M, S) . Par conséquent, on a :

$$A_{J_s}(m_k) = A_{J_s}(m_{k+1}) \quad ;$$

On peut ainsi envoyer de façon difféomorphe le segment de trajectoire orthogonale $[m_k, m_{k+1}]$ sur le segment $[J_s(m_k), J_s(m_{k+1})]$. Soient en effet α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$m_{k+1} = \hat{\psi}(m_k, \alpha) \quad \text{et}$$

$$J_s(m_{k+1}) = \psi(J_s(m_k), \beta).$$

On pose alors, pour tout $m \in [m_k, m_{k+1}]$:

$$h_1(m) = h_1(\hat{\psi}(m_k, t)) = \psi(J_S(m_k), \beta/\alpha t)$$

où t est défini par $m = \hat{\psi}(m_k, t)$.

Si nous notons \hat{S}_k la partie saturée par les trajectoires orthogonales de $\hat{\psi}$ et comprise entre T_k et T_{k+1} , on définit de cette manière un difféomorphisme de \hat{S}_k sur la partie de (M, S) saturée par les trajectoires de ψ et limitée par $J_S(T_k)$ et $J_S(T_{k+1})$; de plus, la restriction de h_1 à $T_k \cup T_{k+1}$ est exactement J_S .

En répétant cette opération avec la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq p}$ pour p assez grand, on définit un homéomorphisme :

$$h_1 : (M, S_F) \rightarrow (M, S),$$

et h_1 satisfait aux propriétés annoncées (il est évident que h_1 défini sur $\overset{\circ}{M}$ comme plus haut se prolonge à ∂M avec $h_1|_{\partial M} = h|_{\partial M}$) ■

En fait, les structures S_F et S sans être les mêmes en général sont difféomorphes.

V.3.6. Lemme. Il existe un difféomorphisme :

$$\hat{h} : (M, S_F) \longrightarrow (M, S).$$

Preuve : Supposons ∂M connexe et soit $L = \partial M$.

Relevons L dans l'intérieur de M à l'aide du champ transverse \hat{X} ce qui définit un voisinage W_L de L .

Les variétés (M, S_F) et $(M_1, S_F|_{M_1})$ où $M_1 = M \setminus W_L$ sont évidemment difféomorphes.

D'autre part, la restriction de h_1 à M_1 , où h_1 est donné par le lemme V.3.5 est un difféomorphisme de M_1 sur $h_1(M_1)$ et est transverse à ψ . Par conséquent le lemme sera démontré si on exhibe un difféomorphisme de $(h_1(M_1), S)$ sur (M, S) .

Supposons qu'on ait :

$$\partial M_1 = \hat{\psi}(L, \tau) \quad (\tau \in \mathbb{R}_*^+).$$

Soit :

$$W_L^\varepsilon = \hat{\psi}(L \times [0, \tau + \varepsilon])$$

($\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, ε très petit),

L'espace $M_1^\varepsilon = M \setminus W_L^\varepsilon$, muni de la structure différentiable induite par S_F , est une variété à bord difféomorphe à (M, S_F) . Puisque M_1^ε est contenu dans $\overset{\circ}{M}_1$, on a :

$$h_1(M_1^\varepsilon) \subset h_1(\overset{\circ}{M}_1).$$

Soit L_1 (resp. L_1^ε) le bord de $h_1(M_1)$ (resp. de $h_1(M_1^\varepsilon)$). Considérés comme sous-variétés de (M, S) , les espaces L, L_1 et L_1^ε sont tous difféomorphes et transverses au champ X .

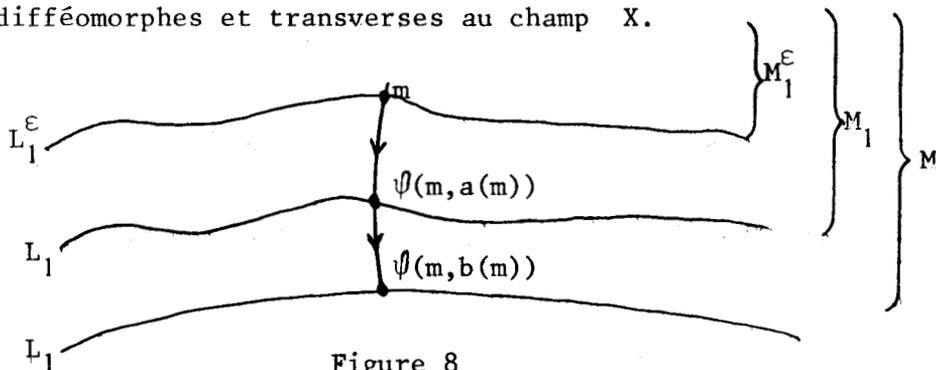


Figure 8

Pour tout m appartenant à L_1^ε , il existe deux nombres uniques $a(m)$ et $b(m)$ tels que $\psi(m, a(m))$ (resp. $\psi(m, b(m))$) appartienne à L_1 (resp. L).

Soit alors l'application :

$$h_2 : [\bar{h}_1(M_1), S] \rightarrow (M, S),$$

définie par

$$h_2(m_1) = \begin{cases} m_1 & \text{si } m_1 \in h_1(M_1^\varepsilon) \\ \psi(m, t \frac{b(m)}{a(m)}) & \text{si } m_1 \in h_1(M_1 \setminus M_1^\varepsilon) \end{cases}$$

où t est défini par $m_1 = \psi(m, t)$, $m \in L_1^\varepsilon$ étant l'unique point d'intersection de L_1^ε avec la trajectoire de ψ issue de m_1 .

L'application h_2 c'est le difféomorphisme cherché, d'où le lemme ■

Avec l'ensemble de ces préliminaires, la démonstration du théorème énoncé en V.1 est immédiate.

V.4. Démonstration du théorème V.1.

Considérons la suite d'applications :

$$(M, S_F ; F, T) \xrightarrow{h_1} (M, S ; F) \xrightarrow{\hat{h}^{-1}} (M, S_F ; F, T) ,$$

où \hat{h} est donnée par le lemme V.3.6.

Alors l'application $H = \hat{h} \circ h^{-1}$ est un homéomorphisme de (M, S) sur lui-même dont la restriction à ∂M est égale à l'identité.

Posons

$$\Omega_1 = (\hat{h}^{-1})^*(\Omega)$$

$$\alpha_1 = (\hat{h}^{-1})^*(\alpha)$$

$$\beta_1 = (h^{-1})^*(\beta),$$

où (Ω, α, β) définit le feuilletage transversalement homographique $(M, S_F ; F)$.

Ω_1 est sans singularité et définit sur (M, S) un feuilletage F_1 qui est transversalement homographique ; en outre, l'homéomorphisme H réalise une conjugaison de F_1 et de F ; en effet, si on note \hat{F} le feuilletage F dans S_F , il vient :

$$H^*(F_1) = (\hat{h} \circ h^{-1})^*(F_1) = (h^{-1})^*[\hat{h}^*(F_1)] = (h^{-1})^*(\hat{F})$$

où \hat{F} c'est le feuilletage F dans la structure S_F ; donc $H^*(F_1) = F$, d'où le théorème V.1. ■

VI - CROISSANCE DES FEUILLETAGES p.s.h.

Il s'agit pour nous, en appliquant les résultats de l'étude qui précède, de retrouver la croissance des feuilletages p.s.h. Les calculs de croissance utiliseront principalement les propriétés de revêtements.

VI.1. Rappels.

On va d'abord rappeler brièvement les définitions usuelles relatives à la croissance des fonctions et des feuilletages (cf. [Pe 1], [He 2], Plante); puis seront redémontrés quelques résultats importants en matière de calculs de croissance.

VI.1.1. Croissances des fonctions. Soient f et g deux éléments de $C(\mathbb{R}^+)$, l'ensemble des applications croissantes de \mathbb{R}^+ dans lui-même.

(i) On dit que f est dominé par g s'il existe trois constantes positives α, β, δ telles que :

$$f(x) \leq \alpha g(\beta x + \delta) ,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) On note croiss(f) la classe de f pour la relation d'équivalence associée au préordre défini en (i) et deux éléments équivalents sont dits "avoir même type de croissance".

(iii) On munit l'ensemble des types de croissance de la relation d'ordre induite, que l'on notera \leq , et pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est à croissance polynomiale de degré n (resp. à croissance exactement polynomiale de degré n) si on a :

$$\text{croiss}(f) \leq \text{croiss}(x^n)$$

(resp. $\text{croiss}(f) = \text{croiss}(x^n)$).

Dans le second cas on écrira aussi $\text{deg}(f) = n$.

(iv) La fonction f est à croissance exponentielle si, on a : $\text{croiss}(f) \geq \text{croiss}(e^x)$ et à croissance non exponentielle sinon.

VI.1.2. Croissance des variétés riemanniennes. Si F est une variété riemannienne orientable de classe C^1 et a un point de F , on note $B_a(r)$ pour $r \in \mathbb{R}^+$ la boule fermée de centre a et de rayon r dans F ; on définit g_a la fonction croissance de F en a par :

$$g_a(r) = \text{vol}(B_a(r)).$$

Cette fonction dépend du point a et de la métrique de F . Par contre, si F est une feuille d'un feuilletage \mathcal{F} sur une variété compacte M munie de la métrique induite par une métrique de M , le type de croissance de g_a , que l'on appelle encore type de croissance de F et que l'on note $\text{croiss}(F)$ est bien défini.

VI.1.3. Croissance d'un feuilletage. Un feuilletage \mathcal{F} sur M est dit à croissance d'ordre n (resp. à croissance exactement polynomiale de degré n), $n \in \mathbb{N}$, si toutes ses feuilles sont à croissance d'ordre inférieure ou égal à n (resp. à croissance polynomiale telle que $n = \sup_{F \in \mathcal{F}} \text{deg}(F)$), (dans le second cas, on écrira aussi $n = \text{deg}(\mathcal{F})$).

\mathcal{F} est dit à croissance non exponentielle s'il en est ainsi pour toutes ses feuilles.

VI.1.4. Croissance d'un groupe d'automorphismes G de type fini d'un revêtement. Pour un groupe d'automorphismes G , de type fini d'un revêtement, rappelons que l'on peut définir deux notions de croissance :

une croissance de groupe "abstraite" et une croissance "géométrique".

a) Croissance "abstraite" d'un groupe G de type fini.

Soit $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ un système de générateurs d'un groupe G de type fini tel que :

$$\Sigma^{-1} = \Sigma .$$

(i) On dit qu'un élément g de G est de longueur inférieure à k par rapport à Σ si g peut s'écrire comme un produit $b_1 \dots b_\ell$ avec $\ell \leq k$ où chaque b_i est un élément de Σ .

(ii) Soit $v_\Sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par : $v_\Sigma(n) =$ le nombre d'éléments de G de longueur inférieure à n par rapport à Σ , pour $n \in \mathbb{N}$.

On appelle fonction croissance "abstraite" de G (relativement à Σ) toute application croissante $g_\Sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ prolongeant v_Σ .

Pour tout autre système de générateurs Σ' de G, il existe un entier ℓ tel que tout élément de Σ' est de longueur inférieure à ℓ par rapport à Σ . On en déduit :

$$g_{\Sigma'}(n) \leq g_\Sigma(\ell n) ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, toutes les fonctions croissance de G ainsi définies ont donc le même type de croissance.

(iii) On dit que G a une croissance "abstraite" polynomiale (resp. exponentielle, resp. non exponentielle) si une fonction croissance "abstraite" de G a une croissance polynomiale (resp. exponentielle, resp. non exponentielle).

Exemples (cf. [Mi 1])

1) Soit G le groupe libre engendré par $\Sigma = \{a_1, \dots, a_p\}$. Une fonction croissance "abstraite" de G est donnée par tout prolongement croissant de v_Σ où on a :

$$v_\Sigma(n) = \frac{p(2p-1)^n - 1}{p-1} ,$$

pour $n \in \mathbb{N}$; i.e. G est à croissance exponentielle.

2) Si G est de plus abélien, on a :

$$v_\Sigma(n) = \sum_{\ell=0}^p 2^\ell \binom{p}{\ell} \binom{n}{\ell} ,$$

pour $n \in \mathbb{N}$; i.e. G a une croissance polynomiale.

b) Croissance "géométrique d'un groupe d'automorphismes G de type fini d'un revêtement.

(i) Un difféomorphisme (resp. un difféomorphisme local)

$f : (M, R) \rightarrow (M', R')$ entre deux variétés riemanniennes est une quasi-isométrie (resp. une quasi-isométrie locale) s'il existe des constantes strictement positives k et K telles que :

$$k \|v\|_R \leq \|f_*(v)\|_{R'} \leq K \|v\|_R ,$$

pour tout vecteur tangent à M .

(ii) Deux métriques R_1 et R_2 sur une variété M seront dites quasi-équivalentes s'il existe une quasi-isométrie de (M, R_1) sur (M, R_2) .

Soit $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ un revêtement régulier d'une variété riemannienne M (compacte) de groupe d'automorphismes G . On suppose \tilde{M} muni de la métrique induite par celle de M ou d'une métrique quasi-équivalente définissant

une distance \tilde{d} sur \tilde{M} . G est alors un groupe d'isométries ou de quasi-isométries de M . Soit \tilde{x} un point base de \tilde{M} et soit

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$$

l'application définie par : $g(r) =$ le nombre d'éléments γ de G vérifiant $\tilde{d}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x}) \leq r$.

(iii) On appelle fonction croissance "géométrique" de G la fonction g ainsi définie.

(iv) On appelle croissance "géométrique" du groupe G la croissance de la fonction g .

(v) On dit que G a une croissance "géométrique" polynomiale (resp. exponentielle, resp. non exponentielle) si la fonction g a une croissance polynomiale (resp. exponentielle, resp. non exponentielle).

Le résultat suivant est bien connu mais son importance pour la suite est telle qu'il nous a semblé utile d'en redonner la démonstration.

VI.1.5. Théorème. Soit $p : \tilde{M} \rightarrow M$ un revêtement régulier d'une variété compacte M de groupe d'automorphismes G . Alors les types de croissance suivants sont égaux :

- (i) croissance "abstraite" de G ;
- (ii) croissance "géométrique" de G ;
- (iii) croissance de la variété \tilde{M} .

le théorème va résulter de deux lemmes,

VI.1.6. Lemme. (cf. [Pl-Th 1]). Soit Σ un système fini, symétrique de générateurs de $\pi_1(M)$ où M est une variété riemannienne compacte.

Pour tout $\bar{\alpha} \in \pi_1(M)$, on désigne par $l_1(\bar{\alpha})$ la longueur minimale d'un mot sur Σ représentant $\bar{\alpha}$ et par $l_2(\bar{\alpha})$ la longueur minimale des chemins dans $\bar{\alpha}$. Alors il existe k_1, k_2 ($0 < k_1 < k_2$) tels que pour tout $\bar{\alpha} \neq e$,

$$k_1 \leq l_2(\bar{\alpha}) / l_1(\bar{\alpha}) \leq k_2 .$$

Preuve : Notons d'abord que $l_2(\bar{\alpha})$ est strictement positif, pour tout $\bar{\alpha} \neq e$. Si $\bar{\alpha} = \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_n}$, alors on a :

$$l_2(\bar{\alpha}) \leq l_2(\gamma_{i_1}) + \dots + l_2(\gamma_{i_n}).$$

Soit $k_2 = \sup_{\gamma \in \Sigma} [l_2(\gamma)]$; on a alors :

$$l_2(\bar{\alpha}) / l_1(\bar{\alpha}) \leq k_2 .$$

Pour obtenir k_1 , on considère le revêtement universel \tilde{M} de M . Soit K un domaine fondamental compact et soit D le diamètre de K . Soit d le diamètre de M . La boule \tilde{B} de rayon $3d+D$ de centre $\tilde{x}_0 \in K$ est de volume fini, donc il y a au plus un nombre fini d'images de K entièrement contenues dans \tilde{B} ($K \subset \tilde{B}$). Mais toute image de K qui rencontre la boule de centre \tilde{x}_0 et de rayon $3d$ est entièrement dans \tilde{B} . Par conséquent, il existe un nombre fini de classes d'homotopie de lacets $\bar{\alpha}$ vérifiant $l_2(\bar{\alpha}) \leq 3d$.

Soit $k = \sup_{l_2(\bar{\alpha}) \leq 3d} [l_1(\bar{\alpha})]$. Soit α un lacet de M basé en x_0 .

Il existe une subdivision de α (avec des chemins de longueur inférieure à d à partir du point base) telle que :

$$\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_m, \text{ où } |\alpha_i| \leq 3d \text{ et } m \leq |\alpha| / d + 1$$

(on désigne la longueur d'un chemin par le symbole $|\cdot|$).

En effet soit $\tilde{\alpha}$ le relèvement de α en \tilde{x}_0 et soit \tilde{y} l'extrémité de $\tilde{\alpha}$. Soit $\tilde{\tau}$ une géodésique (de longueur minimale) reliant \tilde{x}_0 à \tilde{y} . Considérons des points $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{m+1} = \tilde{y}$ appartenant à $\tilde{\tau}$ tels que

$$d(\tilde{x}_0, \tilde{y}_1) < d, \dots, d(\tilde{y}_i, \tilde{y}_{i+1}) < d,$$

$$m \leq \frac{|\tilde{\tau}|}{d} + 1.$$

Comme $\pi_1(M)$ opère transitivement sur chaque fibre, il existe $\beta_i \in \pi_1(M)$ et des points $\tilde{x}_i \in K$ vérifiant :

$$\tilde{\beta}_1 = \text{id}, \dots, \tilde{\beta}_i \cdot \tilde{x}_i = \tilde{y}_i, \dots, \tilde{\beta}_{m+1} = \tilde{\alpha}$$

(L'automorphisme associé à $\gamma \in \pi_1(M)$ se notant $\tilde{\gamma}$).

L'élément $\tilde{\alpha}$ est égal à $(\tilde{\beta}_1^{-1} \circ \tilde{\beta}_2) \dots (\tilde{\beta}_m^{-1} \circ \tilde{\beta}_{m+1})$.

D'autre part, puisque les $\tilde{\beta}_i$ sont des isométries de \tilde{M} , on a :

$$d(\tilde{x}_i, \tilde{\beta}_i^{-1} \cdot \tilde{\beta}_{i+1}(\tilde{x}_{i+1})) = d(\tilde{\beta}_i^{-1} \cdot \tilde{y}_i, \tilde{\beta}_i^{-1} \cdot \tilde{y}_{i+1}) = d(\tilde{y}_i, \tilde{y}_{i+1}) < d.$$

Il suffit alors de prendre $\alpha_i = \beta_i^{-1} \circ \beta_{i+1}$, pour $i = 1, \dots, m$.

On a alors :

$$l_1(\bar{\alpha}) \leq \sum_{i=1}^m l_1(\bar{\alpha}_i) \leq \left(\frac{|\alpha|}{d} + 1\right)k.$$

Soit $d_0 = \inf\{|\beta| \mid \beta \neq 0\} > 0$. Pour $\alpha \neq 0$, on a :

$$|\alpha| + d \leq (1+d/d_0)|\alpha|,$$

et donc :

$$l_1(\bar{\alpha}) \leq \frac{(1+d/d_0)}{d} |\alpha|k.$$

En passant à la borne inférieure sur les $\alpha \in \bar{\alpha}$, on obtient :

$$l_1(\bar{\alpha}) \leq \left[\frac{(d+d_0)}{dd_0} \right]^k l_2(\bar{\alpha}),$$

ou encore :

$$\frac{l_2(\bar{\alpha})}{l_1(\bar{\alpha})} \geq \frac{dd_0}{d+d_0} \times \frac{1}{k} = k_1 \quad \blacksquare$$

Le premier lemme montre que les deux premiers types de croissance énoncés dans le théorème VI.1.5 sont égaux ; la preuve du théorème VI.1.5 sera complète si on établit le lemme suivant.

VI.1.7. Lemme. Soit $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ un revêtement régulier d'une variété compacte M de groupe d'automorphismes G . On suppose que p est une isométrie locale pour les métriques g et \tilde{g} . Alors on a :

$$\text{croiss}(\tilde{M}) = \begin{array}{l} \text{croiss}(G) \\ \text{"géométrique"} \end{array}$$

Preuve : On sait que $G \cong \pi_1(M) / \pi_1(\tilde{M})$. Soit K_0 un domaine fondamental compact pour la projection p de diamètre fini, soit δ ; fixons-nous un point \tilde{x} de K_0 et soit pour $r \in \mathbb{R}_+$ l'entier $n(r)$ défini par :

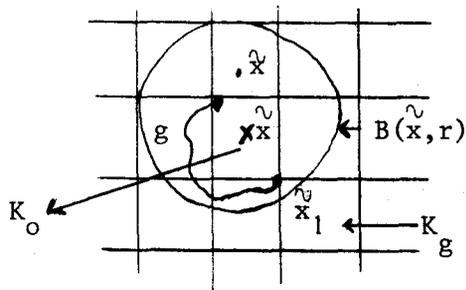
$$n(r) = \text{card}\{g \in G \mid K_g \cap B(\tilde{x}, r) \neq \emptyset\} \quad (\text{où } K_g = g(K_0)).$$

Soit $g \in G$ tel que K_g a une intersection non vide avec $B(\tilde{x}, r)$ la boule de \tilde{M} de centre \tilde{x} et de rayon r ; alors il existe $\tilde{x}_1 \in K_g$ et $\tilde{x}' \in K_0$ tels que

$$\tilde{x}_1 = g.\tilde{x}'.$$

Par définition de la distance sur une variété riemannienne, on peut supposer que g est représentable dans M par un lacet de longueur

inférieure à $2r$. On en déduit alors :



$$\text{Vol}(B(\tilde{x}, r)) \leq \text{Vol}(K_0)g(2r) ,$$

où g est la fonction croissance "géométrique" de G .

Figure 9

Réciproquement, choisissons une boule fermée K de \tilde{M} de rayon ε suffisamment petit pour que les images K_γ de K soient deux à deux disjointes. Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, considérons l'ensemble des transformés de K par les éléments de G de longueur (géométrique) inférieure à r ; la réunion des K_γ où la longueur de γ est inférieure à r est contenue dans $B(\tilde{x}, r+\varepsilon)$ d'une part et d'autre part ces K_γ sont en nombre égal à $g(r)$, distincts avec un volume fini fixe ; par conséquent, on a :

$$\text{Vol}(B(\tilde{x}, r+\varepsilon)) \geq g(r) \text{Vol}(K) ,$$

ou encore :

$$g(r) \leq \frac{1}{\text{Vol}(K)} \text{Vol}(B(\tilde{x}, r+\varepsilon)) ;$$

ce qui achève de prouver que le type de croissance de \tilde{M} est le même que celui de la fonction croissance "géométrique" de G ■

Une conséquence immédiate du lemme VI.1.7 s'énonce :

VI.1.8. Corollaire. Dans les hypothèses du lemme VI.1.7, si p est une quasi-isométrie locale, alors la conclusion du VI.1.7 est encore valable.

Le résultat suivant est évident.

VI.1.9. Lemme. Si H est un sous-groupe infini cyclique de $\pi_1(M)$, alors la croissance de H est linéaire.

De manière analogue, on pourrait définir la croissance de semi-groupes. On a évidemment pour tout semi-groupe infini cyclique H_+ :

$$\text{croiss}(H_+) = \text{croiss}(x).$$

Une extension utile du lemme VI.1.7 pourra s'énoncer :

VI.1.10. Proposition. Soit $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ un revêtement régulier d'une variété riemannienne M de groupe d'automorphismes G de type fini.

Supposons que :

- (i) p est une isométrie pour les métriques g et \tilde{g} ;
- (ii) la variété M est à croissance linéaire ;
- (iii) le type de G est de degré n .

Alors le type de \tilde{M} est de degré $n+1$.

Preuve : On a $G \cong \pi_1(M) / \pi_1(\tilde{M})$. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, notons $B(a, r)$ (resp. $\tilde{B}(\tilde{a}, r)$) la boule de rayon r et de centre $a \in M$ (resp. $\tilde{a} \in \tilde{M}$). Si ω est la forme volume sur M , on peut calculer le volume $\tilde{\text{Vol}}(\tilde{B}(\tilde{a}, r))$ par la relation :

$$(*) \quad \tilde{\text{Vol}}(\tilde{B}(\tilde{a}, r)) = \int_{B(a, r)} n(r) \omega,$$

où pour tout $x \in M$, $n(r)(x) = \text{card}\{p_r^{-1}(x)\}$ (avec $p_r = p|_{\tilde{B}(\tilde{a}, r)}$).

Or, on a pour tout x de $B(a, r)$:

$$n(r)(x) \leq g(2r)$$

où g est la fonction croissance "géométrique" de G . Par conséquent, on a d'après (*) :

$$\tilde{\text{Vol}}(\tilde{B}(\tilde{a}, r)) \leq g(2r) \text{Vol}(B(a, r)).$$

Réciproquement, soient maintenant $\gamma_1, \dots, \gamma_{g(r)}$, les éléments de G représentables par des lacets en a de longueur inférieure ou égale à r . Posons :

$$\tilde{K} = \bigcup_{i=1}^{g(r)} [\gamma_i \cdot \tilde{B}(a, r)] .$$

Puisque, pour tout $i = 1, \dots, g(r)$, la longueur de γ_i est inférieure ou égale à r et qu'en outre γ_i est une isométrie, on a :

$$\tilde{K} \subset \tilde{B}(a, 2r) ;$$

par conséquent, pour tout $x \in K = p(\tilde{K})$, on a :

$$n_{2r}(x) \geq g(r) ;$$

d'où, d'après (*) :

$$\text{Vol}(\tilde{B}(a, 2r)) \geq g(r) \text{Vol}(B(a, r)) ,$$

ce qui achève de montrer que le type de \tilde{M} est de degré $n+1$ ■

Le corollaire suivant est immédiat.

VI.1.11. Corollaire. Le résultat du VI.1.10 reste valable si p est une quasi-isométrie.

VI.2. Croissance des modèles.

Nous nous proposons maintenant de calculer la croissance des feuilles dans les modèles.

Deux types de calculs seront mis en oeuvre suivant qu'on a affaire à des modèles du type (1,1) ou du type (1,2).

On commencera par étudier le cas des modèles du type (1,1), ceux du type (1,2) s'en déduisant.

Soit M une variété connexe (compacte) et soit S une sous-variété fermée de M de codimension un.

VI.2.1. Définition. Un semi-revêtement de semi-groupe cyclique N de M , c'est la donnée d'une variété \tilde{M} dont le bord est homéomorphe à S et d'une application $p : \tilde{M} \rightarrow M$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout x n'appartenant pas à S , il existe un voisinage ouvert U de x trivialisant pour p avec \mathbb{N} pour fibre.

(ii) pour tout x de S , il existe un voisinage ouvert U de x , une composante connexe U_S de $p^{-1}(U)$ tels que :

(a) l'ouvert U est trivialisant pour la restriction de p à $p^{-1}(U) \setminus U_S$ avec \mathbb{N} pour fibre ;

(b) l'application p est un homéomorphisme de U_S sur l'adhérence dans U d'une composante de $U \setminus S$.

Exemple. L'application $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par

$$p(t) = e^{2i\pi t},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ définit un semi-revêtement de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{S}^1 .

Soit L une variété compacte et soit M le produit $L \times [0,1]$. Supposons M munie d'un feuilletage p.s.h. F transverse au facteur I et au bord $L \times \{1\}$ et tel que :

(i) l'unique feuille compacte de F est $L \times \{0\}$,

(ii) l'holonomie de $L \times \{0\}$ est non nulle et cyclique.

Soit $p : M \rightarrow L$ la projection suivant le facteur I . Pour toute feuille $F \in \overset{o}{F}$ posons $p_F = p|_F$.

VI.2.2. Lemme. La projection p_F définit un semi-revêtement de F sur L .

Preuve : Comme F est transverse à $L \times \{1\}$, l'intersection de

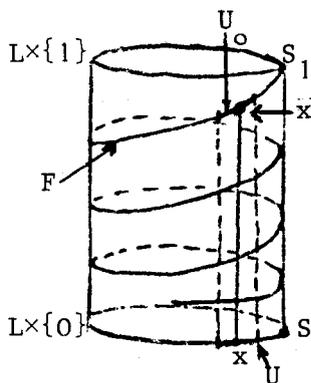


Figure 10

F avec $L \times \{1\}$ est une sous-variété S_1 de $L \times \{1\}$ de codimension un. Sa projection S est une sous-variété de codimension un de $L \times \{0\}$.

Pour tout $x \in L \times \{0\} \setminus S$, on sait par définition que : $p_F^{-1}(x) \cap (L \times \{1\}) = \emptyset$.

Soit :

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid p_F^{-1}(x) \cap (L \times \{t\}) \neq \emptyset\}.$$

Puisque F est propre l'intersection de $p_F^{-1}(x)$ avec $L \times \{t_0\}$ est non vide. Soit donc :

$$x_0 = p_F^{-1}(x) \cap (L \times \{t_0\})$$

Par suite : $p_F^{-1}(x) = \{(h(\gamma))^p(x_0), p \in \mathbb{N}\}$, où $\gamma \in \pi_1(M, x)$ définit l'holonomie cyclique de $L \times \{0\}$.

Il suffit alors de prendre pour ouvert trivialisant : $U = p_F(U_0)$ où U_0 est un voisinage de x_0 dans F suffisamment petit.

Pour tout x appartenant à S , on considèrera la variété $M_\epsilon = L \times [0, 1+\epsilon]$ et le prolongement F_ϵ de F qui vérifie les mêmes propriétés que F dans M_ϵ et on s'aperçoit que la condition (ii) de la définition VI.2.1 est bien vérifiée, d'où le lemme ■

On a encore le résultat suivant :

VI.2.3. Lemme. Soit F une variété riemannienne et soit K un compact de F tel que $F \setminus K$ ait exactement q composantes connexes F_1, \dots, F_q .

Supposons que pour tout $i = 1, \dots, q$, la croissance de F_i soit polynomiale ; alors, on a :

$$\text{croiss}(F) = \sup_{1 \leq i \leq q} \text{croiss}(F_i)$$

Preuve :

(i) On a $\text{croiss}(F) \geq \text{Croiss}(F_i)$ pour $i = 1, \dots, q$, d'où

$$\text{croiss}(F) \geq \sup_{1 \leq i \leq q} \text{croiss}(F_i)$$

(ii) Soit $a \in K$ et soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que K soit contenu dans $B(a, \delta)$. Choisissons $a_i \in F_i$ tels que

$$d(a, a_i) = \delta \quad \text{pour } i = 1, \dots, q.$$

On a alors pour tout r , tel que $r > 2\delta$

$$B(a, r) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq q} B(a_i, r),$$

d'où

$$g_F(r) \leq \sum_{1 \leq i \leq q} g_{F_i}(r),$$

où g_F (resp. g_{F_i}) est la fonction croissance de F (resp. F_i), d'où le lemme ■

Soit (M, F) un modèle de type $(1, 1)$ et soit L_j , $j \in J$ (J fini) une composante connexe de ∂M . Désignons par W_j un voisinage collier de L_j difféomorphe à $L_j \times [0, 1]$ tel que le feuilletage induit sur W_j par F soit transverse au facteur $[0, 1]$.

Choisissons les voisinages W_j tels qu'ils soient disjoints deux à deux et tels qu'en outre la feuille $F \in \overset{o}{F}$ soit transverse à $L_j \times \{1\}$, où F est une feuille fixée.

Alors, d'après le lemme VI.2.2, toute composante F_j de $F \cap W_j$, $j \in J$, est un semi-revêtement cyclique de L_j . Par conséquent, F_j est de croissance linéaire (le résultat du théorème VI.1.5 s'étend au cas particulier d'un semi-revêtement cyclique de manière immédiate).

D'autre part les composantes F_j sont en nombre fini, puisque F n'a qu'un nombre fini de bouts (tous isolés) qui sont des bouts de F_j .

Donc, d'après le lemme VI.2.3, F a une croissance linéaire ;

d'où :

VI.2.4 Proposition. Si (M, F) est un modèle de feuilletage p.s.h. de type (1,1), alors toute feuille $F \in \overset{\circ}{F}$ a une croissance linéaire.

Maintenant, considérons un modèle (M, F) p.s.h. de type (1,2).

Le calcul de la croissance est alors une conséquence du théorème de Tischler et du corollaire VI.1.11. On peut donc énoncer :

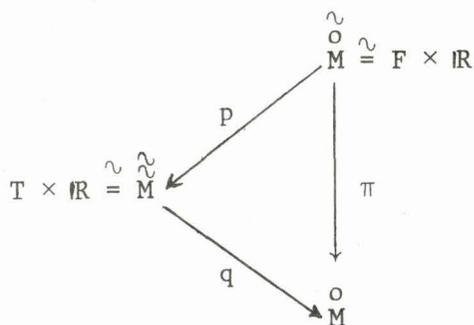
VI.2.5. Proposition. Si (M, F) est un modèle de feuilletage p.s.h. de type (1,2), alors toute feuille $F \in \overset{\circ}{F}$ a une croissance polynomiale de degré $p+1$, $p \in \mathbb{N}$ fixé.

Preuve : D'après le théorème de type Tischler énoncé en IV.3.2, il existe une structure différentiable S_F sur M dans laquelle $\overset{\circ}{F}$ est défini par une forme fermée ω dont l'approximation fournit un modèle (M, T) de type (1,1) tel qu'une feuille $F \in \overset{\circ}{F}$ est un revêtement de la fibre T de $\overset{\circ}{T}$ de groupe Z^p , $p \in \mathbb{N}$ ($p = \text{rang } I\omega$).

Désignons par \hat{R} une métrique sur (M, S_F) telle que la projection d'une composante T_j de $T \cap W_j$ (où les W_j , voisinages colliers des composantes L_j de ∂M sont définis comme dans les préliminaires à VI.2.4) sur L_j soit une isométrie locale.

Il existe d'autre part une métrique \hat{R}_1 sur (M, S_F) telle que la restriction $\hat{R}_{1|F}$ à une feuille F de $\overset{\circ}{F}$ soit identique à la restriction R_F d'une métrique R initialement choisie sur (M, S) .

D'après le diagramme commutatif suivant, la restriction de p à $F \times \{0\} \subset \overset{\circ}{M}$ est une isométrie locale de $(F, \pi^* \hat{R}_1)$ sur $(T, q^* \hat{R}_1)$.



Mais les variétés riemanniennes $(F, \pi^* \hat{R}_1)$ et (F, \hat{R}_{1F}) [resp. $(T, q^* \hat{R}_1)$ et (T, \hat{R}_{1T})] sont isométriques. Donc p est une isométrie locale de (F, \hat{R}_{1F}) sur (T, \hat{R}_{1T}) .

Comme l'application identique est une quasi-isométrie de (T, \hat{R}_{1T}) sur (T, \hat{R}_T) et que $R_F = \hat{R}_{1F}$, il s'ensuit que l'application

$$p : (F, R_F) \rightarrow (T, \hat{R}_T) ,$$

est une quasi-isométrie.

Par conséquent, d'après la proposition VI.1.10, la croissance de F est polynomiale de degré $p+1$ ■

BIBLIOGRAPHIE

- [Ar.1] V.I. ARNOLD : *Small denominators. 1*, Trans. Amer. Math. Soc. 2 series Vol 46, p. 213-284.
- [Ca.1] E. Cartan : *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*. Gauthiers-Villars.
- [Ch.1] S. CHIHU : *Sur les feuilletages de codimension un transversalement homographiques*. Thèse de 3ème cycle, Strasbourg (1979).
- [F-F1] P.M.D FURNESS et E. FÉDIDA : *Transversally affine foliations*. Glasgow Math. Journal (février 1975).
- [G-S1] E. GHYS et V. SERGIESCU : *Il existe des feuilletages C^∞ -stables*.
- [G-V1] C. GODBILLON et J. VEY : *Un invariant des feuilletages de codimension un*. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273 (12 juillet 1971).
- [Ha-1] A. HAEFLIGER : *Variétés feuilletées*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 16 (1962) 367-397.
- [He-1] G. HECTOR : *Croissance des feuilletages presque sans holonomie*
- [He-2] G. HECTOR : *Sur les feuilletages presque sans holonomie*. C.R. Acad. Sc. Paris, 274 (1972) 1703-1706.
- [He-3] G. HECTOR : *Feuilletages en cylindres*.
- [He-4] G. HECTOR : *Quelques exemples de feuilletages. Espèces rares*. Ann. Inst. Fourier
- [He-5] G. HECTOR : *Sur un théorème de structure des feuilletages de codimension un*. Thèse, Strasbourg, 1972.
- [Im.1] H. IMANISHI : *On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy*. J. Math. Kyoto. Univ. Vol 14 (1974) 607-634.
- [IM.2] H. IMANISHI : *Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy*. J. Math. Kyoto. Univ. (IMKYAZ) 16-1 (1976) 93-99.
- [J-M1] G. JOUBERT et R. MOUSSU : *Feuilletages sans holonomie d'une variété fermée*. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, (23 février 1970).
- [Mi.1] J. MILNOR : *Growth of finitely generated solvable groups*. Jour. of Diff. Geom. Vol 2, p. 1-7 et p. 447-449 (1968).
- [Mo.1] R. MOUSSU : *Thèse. Faculté des Sciences d'Orsay de l'Université de Paris (1971)*.

- [Na.1] H. NAKATSUKA : *One representations of homology classes*. Proc. Japan Acad. 48 (1972).
- [Pe.1] F. PELLETIER : *Croissance des feuilles d'un feuilletage de cod. 1*. Thèse de 3ème cycle, Dijon (1973).
- [Pl.1] J. PLANTE : *Foliations with measure preserving holonomy*. Annals of Mathematics, 102 (1975), p. 327-361.
- [Pl-Th.1] J. PLANTE et W. THRUSTON : *Polynomial growth in holonomy groups of foliations*. Commentarii Math. Helvetici, 39 (1976) pp. 567-584.
- [Re.1] G. REEB : Thèse. Université de Strasbourg, 1948 - Actualités Scientifiques et Industrielles - Hermann (1952)
- [Ro.1] H. ROSENBERG : *Actions of \mathbb{R}^n on manifolds*. Commentarii Math. Helv. Vol. 41 (1966).
- [Sa.1] R. SACKSTEDER : *Foliations and pseudogroups*. Amer. Jour. of Math. Vol. 87 (1965).
- [Sa.2] R. SACKSTEDER and A. SCHWARTZ : *Limit sets of foliations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Vol 15-2 (1965)
- [Se.1] B. SÈKÈ : *Sur les feuilletages de codimension un transversalement affines*. Thèse de 3ème cycle, Strasbourg (1977).
- [Sp.1] SPIVAK : *Differential Geometry*.
- [Ti.1] D. TISCHLER : *On fibering certain foliated manifolds over S^1* . Topology, Vol.9 (1969).

* *

