

N° d'ordre : 901

50376
1981
98

50376
1981
98

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

par

Marc HUTTNER

MESURES DE L'IRRATIONALITÉ
DE CERTAINS NOMBRES LIÉS
AUX FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES



Président de Thèse :

Madame le Professeur ZINN-JUSTIN.

Assesseurs :

Monsieur le Professeur BKOUCHE.

Monsieur le Professeur PARREAU.

Monsieur le Professeur WALDSCHMIDT.



D 030 175085 0

Soutenue le 18 juin 1981

ERRATA

p.2 : ligne 11. lire $\psi(b_n)$ au lieu de $\psi(q)$

p.12 : ligne 8. lire $\psi(q) = q^{-(1+1/\delta)}$ au lieu de $1 + \frac{1}{\delta}$

p.13 : ligne 13 lire $\psi(q) = q^{-(1+1/\lambda)}$ " " " $1 + \frac{1}{\lambda}$

p.16 : Supprimer "et ceci d'après le théorème suivant" et les 2 dernières lignes

p.17 : Supprimer "définitif" et ajouter e ne se comporte pas comme presque tous les réels du point de vue de l'approximation rationnelle.

p.24 : théorème II.1.11 : remplacer u par n dans $P_u^{\alpha, \gamma}$ et $Q_u^{\alpha, \gamma}$ et ajouter $\psi(x)$ au lieu de (x) la ligne 9.

p.25 : ligne 4. lire ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} n+1, \gamma+n \\ \gamma+2n \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)$

p.25 : ligne 5 et 6 lire "on associe" au lieu de "et associer"

p.29 : ligne 3 lire $p^F q$

p.33 : ligne 3 lire $\frac{d^n}{dx^n}$ au lieu de $\frac{d^2}{dx^2}$

p.34 : théorème II.3.1 lire $\int_{-i\infty}^{+\infty}$

p.35 : lire $\sum_{h=1}$ au lieu de $\sum_{h=m}$

p.45 : Théorème III.3.3 lire $|x| < 1$ au lieu de $|s| < 1$

p.45 : ligne 2 lire $\prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{\lambda=m} (\omega_\mu - \omega_\lambda) (\omega_\mu - \omega_\lambda - 1) \dots (\omega_\mu - \omega_\lambda - \rho_\lambda + 1)$

p.51 : ligne 2. lire $(1-x)$

p.59 : Corollaire IV.1.3 supprimer "le théorème de Khintchine montre que" et le remplacer par "l'approximant étant donné par les réduites de e".

p.73 : Lemme V.1.2.3 remplacer "équivalent" par $< e^{(1+\varepsilon)n}$

p.77 : ligne 4. lire " $d_n < e^{(1+\epsilon)n}$ "

p.81 : dernière ligne. lire " $-x-\epsilon$ au lieu de $-x-\mu$ ".

p.85 : ligne 10 lire $n|a-b$

p.86 : ligne 12 lire " p_ρ et q_ρ "

p.90 : ligne 7 et 11 lire "sont liés aux plus petites solutions"

p.91 : ligne -2 ajouter " ${}_2F_1\left(\begin{matrix} -\rho, -\rho \\ -2\rho \end{matrix} \middle| x\right)$ a pour symbole"

p.93 : ligne -7 lire $I_\rho < e^{(1+\epsilon)\rho} q^\rho \left(-\frac{p}{q}\right)^{2\rho+1} \left(1-\sqrt{1+\frac{p}{q}}\right)^{2\rho}$

p.94 : Supprimer 5693 à la ligne 1 et lire $q < 5693$ à la ligne 6

p.96 : ligne 3 : lire. $\sqrt{q(q+1)}$ dans les formules donnant D' et D'' .

A ma femme

A ma famille

A mes amis

Je tiens à remercier Madame ZINN-JUSTIN dont la compétence et l'érudition ont été des guides inestimables dans la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement Messieurs BKOUCHE, PARREAU et WALDSCHMIDT d'avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse ainsi que pour leur assistance et leurs remarques judicieuses.

Je tiens également à remercier Madame TATTI qui a assuré avec soin et compréhension la tâche délicate qu'est la frappe de cette thèse.

MESURES DE L'IRRATIONALITE DE CERTAINS NOMBRES LIES

AUX FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES

Le but de cette thèse est d'étudier différentes méthodes d'approximation d'irrationnels algébriques ou transcendants qui ont tous en commun d'être liés aux fonctions hypergéométriques et aux fonctions "dites spéciales".

. Le premier chapitre, après quelques rappels sur les fractions continuées régulières ou généralisées, insiste sur les conséquences du théorème de Liouville et ses "raffinements" (théorèmes de Thue, Siegel et Roth) pour arriver à la notion essentielle de "mesures d'irrationalité".

. Le deuxième chapitre fait des rappels concernant les propriétés des fonctions hypergéométriques et les propriétés d'approximation de ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right)$ dont les réduites du développement en fraction continuée généralisée sont liées aux polynômes de Jacobi.

. Le troisième chapitre met en place la notion d'Approximant de Padé de type I ou II essentielles en arithmétique depuis la démonstration de l'irrationalité de e par Hermite et la remarquable inégalité de Mahler $|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{42q}$.

En particulier les propriétés essentielles des approximants de Padé de type I pour les fonction binômes et logarithmes y sont démontrées.

. Le quatrième chapitre utilise les résultats liés à la fonction de Bessel pour retrouver des résultats connus concernant les approximants de $\exp(\frac{2}{n})$ avec $n \in \mathbb{N}$ et de $\operatorname{tg} 1$.

Par exemple, on y démontre l'inégalité

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2 \frac{\operatorname{Log} q}{\operatorname{Log}(\operatorname{log} q)}}$$

pour q assez grand.

. Le cinquième chapitre utilise les résultats du chapitre II dans le cas particulier des polynômes de Legendre pour déterminer les mesures de l'irrationalité de $\text{Log}(1 + \frac{P}{q})$ pour des rationnels $\frac{P}{q}$ proches de 0. En particulier, la méthode permet de trouver une mesure de l'irrationalité pour $\frac{\Pi}{\sqrt{3}}$. (cf. [10])

. Le sixième chapitre utilise les résultats du chapitre III pour déterminer les mesures de l'irrationalité des nombres de la forme $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}$ et en particulier $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{17}$. (cf. [9])

On retrouve le système d'Approximant utilisé par A. Baker mais on améliore un peu les mesures de l'irrationalité de ces nombres en déterminant des équivalents asymptotiques pour le dénominateur et le reste de l'approximant de Padé.

On montre aussi que l'on peut retrouver les résultats du chapitre V par cette méthode.

Le dernier chapitre donne pour mémoire une troisième méthode basée sur la fonction génératrice des polynômes de Legendre qui redonne l'irrationalité de

$$\text{Log}\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad \text{pour } a \in \mathbb{N}.$$

Cette thèse est en grande partie inspirée des articles de G.V. Choodnovsky parus aux compte-rendus de l'Académie des Sciences et aux lectures Notes de Mathématiques.

I.1. HISTORIQUE ET INTRODUCTION.

1737 : Euler montre l'irrationalité de e et de e^x pour x entier.

1771 : Lambert montre celles de Π , de e^x et $\operatorname{tg} x$ pour $x \in \mathbb{Q}^*$.

Lambert et Euler utilisent des fractions continuées généralisées liées aux fonctions hypergéométriques et aux fonctions spéciales.

Ces méthodes deviendront courantes aux XVIIIe et XIXème siècle et remises à l'honneur avec la démonstration de l'irrationalité de $\xi(3)$ par Apéry.

Mais les méthodes d'approximations des nombres irrationnels n'ont pas seulement une importance pour démontrer l'irrationalité des nombres concernés mais aussi, dans le cas des nombres algébriques, pour le calcul de leur "mesure d'irrationalité", ce qui a des conséquences importantes pour la résolution d'équations diophantiennes. (cf. [33])

Dans cette thèse nous allons étudier différentes méthodes d'approximations d'irrationnels par des rationnels qui ont toutes en commun les propriétés de la fonction hypergéométrique et des fonctions dites "spéciales".

I.2. APPROXIMATION DES IRRATIONNELS ALGEBRIQUES OU TRANSCENDANTS.

Définition 1.2. On dit qu'un nombre réel x est rationnellement approchable à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ s'il existe une constante réelle $K(x)$ telle que l'inéquation :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{K(x)}{q^n}$$

admette une infinité de solutions $\frac{p}{q}$.

Remarque importante. $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ on a $|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{bq}$ si $\frac{p}{q} \neq x$
 donc $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{C(x)}{q}$ ou $C(x)$ est l'inverse du dénominateur de x .

Ceci implique que : un rationnel n'est approchable à aucun ordre supérieur à 1 d'où un premier critère simple d'irrationalité.

Théorème I. Un nombre α est irrationnel s'il existe une fonction $\psi(q)$ décroissante telle que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q \cdot \psi(q) = 0 \text{ et } 0 < |\alpha - \frac{p}{q}| < \psi(q).$$

Exemples.

1.a : e est irrationnel et l'approximation "polynomiale" suffit, on trouve que $0 < e - \frac{a_n}{b_n} < \frac{1}{n \cdot b_n}$ avec $b_n = n!$ quand $n \rightarrow \infty$ nous verrons que

$$n = O\left(\frac{\text{Log } b_n}{\text{Log}(\text{Log } b_n)}\right) \text{ donc } \psi(q) = \frac{K}{b_n \left(\frac{\text{Log } b_n}{\text{Log}(\text{Log } b_n)}\right)}, \text{ K étant une constante.}$$

1.b : Apéry a démontré l'irrationalité de $\xi(3)$ en trouvant une suite de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ vérifiant l'inégalité

$$0 < \left| \xi(3) - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1,08}}.$$

1.c : Le théorème de Dirichlet implique que tout irrationnel α est approchable à l'ordre 2.

On trouve que $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ il existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ en nombre infini tel que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q}.$$

Cette inégalité peut être également obtenue par un procédé que l'on appelle les fractions "continuées régulières" dont nous allons rappeler les principales propriétés.

1.3. PROPRIETES ELEMENTAIRES DES REDUITES DES FRACTIONS CONTINUEES REGULIERES.

1.3.1. Rappels. (cf. [22])

Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et $a_0 = [x]$; on peut écrire $x = a_0 + x_0$ où $0 < x_0 < 1$; on pose $\alpha_1 = \frac{1}{x_0}$ et $\alpha_1 > 1$ d'où $x = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$; on continue ce raisonnement avec α_1 .

$\alpha_1 = a_1 + x_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$ et on a réitéré le processus ce qui permet en définitive d'obtenir une expression du type :

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}}$$

- Une telle expression s'appelle fraction continuée régulière
- les entiers $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les quotients partiels
- les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les quotients complets.

Deux cas sont à envisager :

1) Après un nombre fini d'étapes on tombe sur α_n entier, l'algorithme s'arrête et $x \in \mathbb{Q}$.

Inversement si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ on reconnaît l'algorithme d'Euclide dans le développement de x en fraction continuée.

On peut donc identifier \mathbb{Q} avec l'ensemble des fractions continuées finies.

2) Si les α_i ne sont jamais entiers l'algorithme devient infini et $x \notin \mathbb{Q}$.

1.3.2. Propriétés élémentaires.

On utilisera la notation due à Euler :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

ainsi : $[a_0] = a_0$

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{P_1}{Q_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2] = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{P_2}{Q_2}$$

De proche en proche on obtient les formules de récurrence suivantes

$$\begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \quad \textcircled{A}$$

et on démontre facilement que

$$\underline{P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}} \quad \textcircled{B}$$

ce qui implique que les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ sont des fractions irréductibles.

Ⓐ et Ⓑ permettent de démontrer rapidement que les réduites de rang pair forment une suite croissante des valeurs approchées par défaut de x .

De même les réduites de rang impair forment une suite décroissante des valeurs approchées par excès et on obtient de plus

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - x \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2} \quad \textcircled{C}$$

la dernière propriété des réduites que nous citerons est le théorème de Lagrange qui est une sorte de réciproque de la propriété (C).

Théorème I.3.3. (dit de Lagrange). Si une suite de rationnels irréductibles vérifie la relation

$$0 < \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{2Q_n^2}$$

alors $\frac{P_n}{Q_n}$ est une des réduites du développement de x en fraction continue.

I.4. LES FRACTIONS CONTINUEES GENERALISEES.

Historiquement elles sont apparues avant les fractions continues régulières par exemple G. Brouncker donne

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

et les numérateurs sont différentes de 1.

Définition I.4.1. On appelle fraction continuée généralisée une expression de la forme

$$a_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{\dots}}}} \quad \text{notée} \quad a_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$$

les a_i et b_j sont des réels, des complexes ou même des fonctions de plusieurs variables.

On démontre les relations de récurrence suivantes pour les réduites.

1.4.2.

$$\begin{cases} P_{n+1} = b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1} \\ Q_{n+1} = b_{n+1}Q_n + a_{n+1}Q_{n-1} \end{cases}$$

Remarque. On ne change pas la valeur de ces réduites si l'on remplace successivement pour $p = 1, 2, \dots, n$, a_p et b_p par $c_{p-1} \cdot c_p \cdot a_p$ et $c_p \cdot a_p$, si bien que dans certains cas l'on peut s'arranger pour ramener l'expression (I.4.1) à une fraction continuée régulière ($a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$) ou à celle où tous les b_j sont égaux à 1.

On obtient aussi la relation suivante :

1.4.3.
$$\underline{P_n \cdot Q_{n-1} - Q_n \cdot P_{n-1} = (-1)^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_n}$$

et dans le cas où tous les termes sont des entiers on n'est plus certain que les réduites sont des fractions irréductibles.

On peut remarquer dans ce cas qu'une fraction finie représentera un rationnel mais la réciproque est fautive comme le prouve l'exemple suivant :

$$\frac{2}{+1} \left| + \frac{3}{|2+} \right| \frac{+4}{|3+} \left| \frac{5}{|4+} \right| \dots \frac{n+1}{|n+} = 1$$

Ceci montre qu'elles sont plus difficiles à manipuler et il apparait des problèmes de convergence.

1.5. LE THEOREME DE LIOUVILLE ET SES CONSEQUENCES.

Soit x un nombre algébrique irrationnel de degré d alors il existe une constante $C(x, d)$ positive telle que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $q > 0$ on ait :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{C(x,d)q^d} .$$

Conséquences.

1.5.1. Un nombre algébrique de degré d n'est approchable à aucun ordre $> d$.

En particulier les racines d'équations algébriques du 2ème degré ne sont approchables qu'à l'ordre 2, la constante $C(x,d)$ étant effective.

Pour $d \geq 3$, on a essayé d'améliorer le théorème de Liouville et ceci en liaison avec la résolution d'équations diophantiennes ce qui a donné les améliorations suivantes :

1.5.2. Théorème de Thue Siegel. Soit x un nombre algébrique de degré $n \geq 3$ et soit s un nombre entier vérifiant $1 \leq s \leq n-1$ qui réalise le minimum de la quantité $\beta = \frac{n}{s+1} + s$. Soit ν un nombre réel, $\nu > \beta$ alors il existe q_0 et une constante C tels que $q > q_0$ implique

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^\nu}$$

le résultat définitif a été obtenu par Roth en 1955. (cf. [32])

1.5.3. Théorème de Roth. Soit x un nombre algébrique irrationnel alors il existe q_0 entier et une constante réelle C telle que pour $q > q_0$ l'on ait $\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Ce résultat est bien sûr indépendant du degré du nombre algébrique x et il est meilleur que les résultats du théorème de Thue et de Liouville, sauf lorsque $d = 2$ car dans ce cas le résultat de Liouville est meilleur et de plus fournit une valeur pour la constante mise en jeu.

Dans les théorèmes de Thue-Siegel et Roth, les démonstrations ne fournissent aucune valeur effective pour la constante.

Dans la suite nous fournirons des approximants pour certains nombres algébriques comme $\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[3]{17}$ qui donneront des valeurs effectives pour C .

Par exemple Baker a démontré que pour tout p et tout q on a :

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{2,955}} \quad \text{avec } C = 10^{-6}.$$

Ce qui a pour conséquence que le nombre de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $x^3 - 2y^3 = n$ est borné et les bornes sont calculables. (cf. [1] et [2])

$$\text{On a } |x| < M \quad |y| < M \quad \text{avec } M = (3 \cdot 10^5 |n|)^{23}.$$

Nous essayerons d'améliorer en le diminuant l'exposant de q dans cette inégalité.

1.5.4. Le théorème de Liouville a également eu pour conséquence la découverte des nombres transcendants.

Par exemple $x = \sum_{n=1}^{x=\infty} \frac{1}{a^{n!}}$ avec a entier, $a \geq 2$ est transcendant.

De même que le nombre

$$x = [0, 10, 10^{2!}, 10^{3!}, \dots] = \frac{1}{10 + \frac{1}{10^{2!} + \frac{1}{10^{3!} + 1}}}$$

et soient $\left(\frac{P_n}{Q_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ les réduites successives du développement de x en fraction continuée.

$$\text{On a facilement } \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = a_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} < a_{n+1} + 1 \quad \text{d'où}$$

$$\frac{Q_n}{Q_0} = Q_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \times \frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \times \dots \times \frac{Q_1}{Q_0} < (a_n + 1)(a_{n-1} + 1) \dots (a_1 + 1)$$

d'où

$$Q_n < (a_1 a_2 \dots a_n) \left(1 + \frac{1}{10}\right) \left(1 + \frac{1}{10^2}\right) \left(1 + \frac{1}{10^n}\right) < 2 \cdot 10^{1!+2!+\dots+n!}$$

d'où

$$Q_n < 10^{(2n)!} = a_n^2.$$

Or

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - x \right| < \frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n (a_{n+1} Q_n + Q_{n-1})} < \frac{1}{a_{n+1}}$$

et donc

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - x \right| < \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{Q_n^{n/2}}$$

donc pour $n > 2N$ avec N assez grand l'inéquation $\left| \frac{P_n}{Q_n} - x \right| < \frac{K(x)}{Q_n^n}$ admet une infinité de solutions et ceci implique qu'il est transcendant.

Ce genre de nombre amène à la définition suivante :

Définition 1.5.5. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est un nombre de Liouville si pour tout entier n il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ qui vérifie :
 $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-n}$ et $q \geq 2$.

Il est évident qu'un nombre de Liouville est transcendant et les deux exemples précédents sont des nombres de Liouville.

Mais Malher qui a démontré que pour tout p et tout $q \geq 2$ on a l'inégalité $\left| \Pi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{42q}$, donc Π n'est pas un nombre de Liouville.

On a un résultat analogue pour e que nous verrons dans cette thèse.

Malher a même remarqué que $x = 0,123456789101112 \dots$ n'était pas un nombre de Liouville.

I.6. MESURE DE L'IRRATIONALITE D'UN NOMBRE REEL.

Problème : Trouver pour un nombre réel x une fonction $\psi(q)$ telle que l'inéquation $|x - \frac{p}{q}| < \psi(q)$ ait un nombre fini de solutions.

Nous prendrons $\psi(q)$ décroissante telle que $\lim_{q \rightarrow \infty} q \psi(q) = 0$ par exemple pour $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ on peut prendre

$$\psi(q) = q^{-1 - \frac{C \cdot \text{Log } q}{\text{Log}(\text{Log } q)}}$$

et pour π , $\psi(q) = q^{-42}$ ce qui amène à la définition suivante :

Définition 1.6.1. Une fonction ψ décroissante telle que $\lim_{q \rightarrow \infty} q \psi(q) = 0$ est une mesure de l'irrationalité d'un nombre x s'il existe q_0 entier et une constante $K(q_0, x)$ telle que pour tout $q > q_0$ on ait :

$$|x - \frac{p}{q}| > K(q_0, x) \cdot \psi(q).$$

Existence de la mesure de l'irrationalité.

Supposons l'inéquation $|x - \frac{p}{q}| < \psi(q)$ avec ψ décroissante et telle que $\lim_{q \rightarrow \infty} q \psi(q) = 0$ satisfaite pour une infinité de valeurs de q .

Soit $q_1 < q_2 < q_3, \dots < q_n \dots$ une suite croissante de valeurs de q satisfaisant l'inégalité.

On a par exemple le résultat "d'accélération de la convergence" suivant :

Théorème 1.6.2. En formant la différence d'ordre k :

$$\Delta_k q_n = q_{n+k} - C_k^1 q_{n+k-1} + C_k^2 q_{n+k-2} - \dots + (-1)^k q_n$$

quel que soit k fixe, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_k q_n = \infty$.

Démonstration : APPROXIMATION DIOPHANTINNE DES NOMBRES ALGEBRIQUES

par Gérard Rauzy p. 7,8,9.

Définition 1.6.3. On dira que $\frac{a}{b}$ est une meilleure approximation de x si

$$|x - \frac{p}{q}| < |x - \frac{a}{b}| \Rightarrow q > b$$

c'est-à-dire que $\frac{a}{b}$ approxime x de meilleure façon que toute fraction de dénominateur inférieur à b .

Les réduites du développement en fraction continuée régulière sont des meilleures approximations mais ce ne sont pas les seules.

L'existence de meilleures approximations intercallées entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ est liée à la valeur de a_{n+1} .

Si $a_{n+1} = 1$ il n'y en a pas et si $a_{n+2} > 2$ il en existe au moins une c'est $\frac{P_{n+1} - P_n}{Q_{n+1} - Q_n}$ mais il en existe beaucoup d'autres.

Nous allons voir que si une approximation est régulière dans un certain sens il n'existe pas d'approximations trop bonnes c'est-à-dire que le nombre x aura pour cette suite d'approximation une mesure d'irrationalité.

Théorème 1.6.4. Soit x un nombre irrationnel : supposons qu'il existe $\delta > 0$, $\alpha > 0$ et une suite de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions

- a) q_n est une suite monotone croissante
- b) $q_n < q_{n-1}^{1+\alpha}$ pour n assez grand
- c) $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ pour n assez grand
- d) $0 < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$

Alors il existe q_0 entier tel que pour tous entiers p et $q > q_0$ et tout $\varepsilon > 0$ on ait

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{1}{\frac{1+\delta}{\delta-\alpha+\varepsilon} q} > \frac{1}{q^{1+\frac{1}{\delta}}}$$

c'est-à-dire que $1 + \frac{1}{\delta}$ est une mesure de l'irrationalité de x .

Démonstration : Supposons que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\tau}$ et choisissons n entier tel que $q_{n-1}^{1+\delta} \leq q^\tau < q_n^{1+\delta}$ alors si $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p}{q}$ ce qui est possible d'après c)

on a : $\frac{1}{qq_n} \leq |\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}| \leq |x - \frac{p_n}{q_n}| + |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q_n^{1+\delta}} + \frac{1}{q^\tau}$

donc $\frac{1}{2} q^\tau \leq qq_n \leq qq_{n-1}^{1+\alpha} < q^{1 + \frac{\tau}{1+\delta}(1+\alpha)}$ or

$$|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q^{1 + \frac{\tau}{1+\delta}(1+\alpha)}}$$

Donc ceci est vérifié si on choisit $\tau < 1 + \frac{\tau}{1+\delta}(1+\alpha)$ c'est-à-dire

$$\tau < \frac{\delta}{\delta-\alpha+\varepsilon} < 1 + \frac{1}{\delta}.$$

Remarque. Une telle valeur de la mesure de l'irrationalité de x s'obtient en remarquant que

$$|x - \frac{p}{q}| > \left| |x - \frac{p_n}{q_n}| - \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q} \right| \right|$$

donc $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$ ce qui revient à chercher $\inf \left(\frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n^{1+\delta}} \right)$

ce qui après une étude de fonction donne le résultat car le minimum est atteint en $q_n = O(q^{1/\delta})$.

Théorème 1.6.5. Soit α un nombre irrationnel et soit une suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 1}$ de nombres rationnels vérifiant les conditions suivantes

- a) $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{Z}$
- b) il existe $Q \in \mathbb{R}^+, C_1 \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tels que $|q_n^\alpha - p_n| < C_1 Q^{-\lambda n}$
- c) il existe $C_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que $|q_n| < C_2 Q^n$
- d) $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Alors pour tous $p \in \mathbb{N}, q > (2C_1)^{-1}$ on a l'inégalité

$$|q^\alpha - p| > \frac{1}{2C_2 Q^2} \frac{1}{(2C_1 q)^{1/\lambda}}$$

c'est-à-dire que $1 + \frac{1}{\lambda}$ est une mesure de l'irrationalité de α dès que $q > (2C_1)^{-1}$.

Démonstration : On pose $|q^\alpha - p| = \varepsilon$ en éliminant α entre cette égalité et l'inégalité b on obtient

$$|qp_n - pq_n| < C_1 q Q^{-\lambda n} + \varepsilon q_n \tag{1}$$

Si $2C_1 q > 1$, il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$2C_1 q = Q^{\lambda x} \tag{2}$$

On peut toujours d'après d) choisir $n = [x] + 1$ ou $n = [x] + 2$ tel que

$$|qp_n - pq_n| \geq 1.$$

D'après (1) et (2) on obtient

$$\frac{1}{2} < \varepsilon_{q_n} < \varepsilon_{C_2 Q^n} < \varepsilon_{C_2 Q^{x+2}} = \varepsilon_{C_2 Q^2 (2C_1 q)^{1/\lambda}}$$

d'où la conclusion.

Remarque. Ce théorème est plus précis que le théorème 1.6.4. mais dans les démonstrations il demande une étude plus minutieuse de l'approximation dès que $n \geq 1$. cf. [1], [2], [7] pour son utilisation.

Remarques. La mesure de l'irrationalité d'un nombre x dépend essentiellement de la façon dont on a approximé x par la suite $\frac{p_n}{q_n}$.

Pour x donné cette fonction ψ n'est pas unique.

On peut se poser la question de trouver pour x donné "la meilleure mesure de l'irrationalité" de x .

Définition 1.6.6. Une fonction ψ' sera une meilleure mesure de l'irrationalité que ψ à partir du rang q_0 si pour tout $q \geq q_0$ $\psi'(q) \geq \psi(q)$.

Exemples.

1) Mignotte a démontré que pour $q \geq \exp(110)$ $|\pi^2 - \frac{p}{q}| > \frac{1}{18q}$ et dans le même article que pour $q \geq 2$, $|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{21q}$ ce qui dans ce cas améliore le résultat de Malher qui avait trouvé comme mesure de l'irrationalité de π , $\psi(q) = q^{-42}$. cf. [26]

2) Apéry a démontré que $|\xi(2) - \frac{p}{q}| > \frac{c'(\varepsilon)}{\theta' + \varepsilon q}$ avec

$$\theta' = \frac{\text{Log}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{5 \text{Log}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - 2} \approx 11,85078$$

pour q assez grand ce qui améliore le résultat de Mignotte.

3) Apéry démontre l'irrationalité de $\xi(3)$ plus le fait que

$$|\xi(3) - \frac{p}{q}| > \frac{c(\varepsilon)}{q^{\theta+\varepsilon}} \quad \text{où} \quad \theta = \frac{8\text{Log}(1+\sqrt{2})}{4\text{Log}(1+\sqrt{2})-3} \approx 13,417 \quad (\text{cf. [15] ou [30]})$$

4) Pour e on va montrer dans cette thèse que

$$|e - \frac{p}{q}| > q^{-2} \frac{\text{Log Log } q}{\text{Log } q} \quad \text{pour } q \geq q_0$$

et dans ce cas le mesure de l'irrationalité de e est la meilleure possible et est de la forme

$$\psi(q) = q^{-2} \frac{\text{Log}(\text{Log } q)}{\text{Log } q} .$$

On a un résultat analogue pour $\exp(\frac{2}{n})$ avec n entier.

On verra que e et $\exp(\frac{2}{n})$ admettent des développements en fraction continuée régulière.

5) Chudnovski a démontré que $|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}| > q^{-2,652}$ ce qui améliore un peu le résultat de Baker à savoir que $|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^{2,955}}$ avec $c = 10^{-6}$. (cf. [9])

6) Pour un nombre algébrique donné de degré ≥ 2 le théorème de Roth donne comme mesure d'irrationalité $\psi(q) = q^{-2-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ elle sera d'autant meilleure que ε sera proche de 0. L'inconvénient c'est que ces résultats ne sont pas effectifs sauf pour $d = 2$ où $\psi(q) = q^{-2}$ et la constante est effective, les approximants étant donnés par des développements en fraction continuée régulière.

On a d'ailleurs le théorème suivant :

Théorème 1.6.6. Les propriétés suivantes concernant un nombre irrationnel sont équivalentes

- a) la mesure de l'irrationalité de x est $\psi(q) = q^{-2}$
- b) si $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ est le développement en fraction continuée régulière de x alors il existe une constante $c > 0$ telle que $a_n < c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Cf. Lang. Introduction to diophantine approximations p.24-25.

Définition 1.6.7. On dira que x a une mesure d'irrationalité de type constant si $\psi(q) = q^{-\alpha}$ avec $\alpha > 2$.

- On en déduit que si un nombre est algébrique sa meilleure mesure d'irrationalité" de type constant est $\psi(q) = q^{-2}$.

- Pour e qui ne vérifie pas b du théorème 1.6.6 on ne trouve pas une mesure d'irrationalité du type constant mais

$$\psi(q) = \frac{1}{q^2 \frac{\text{Log } q}{\text{Log}(\text{Log } q)}} .$$

Dans ce cas on a aussi la "meilleure" mesure d'irrationalité.

Et ceci d'après le théorème suivant :

Théorème de Khintchine 1.6.8. Soit ψ une fonction positive telle que $\sum_{q=1}^{q=\infty} \psi(q)$ converge.

Alors pour presque tous les nombres réels x la mesure de l'irrationalité de x est au moins $\frac{\psi(q)}{q}$

Démonstration : Lang p. 24. cf. [22].

Du théorème de Roth, on déduit facilement que x ne peut être algébrique.

$$e \text{ a pour mesure d'irrationalité } \frac{\psi(q)}{q} = \frac{1}{q^2 \frac{\text{Log } q}{\text{Log}(\text{Log } q)}} .$$

Soit une meilleure mesure d'irrationalité de e notée $\frac{\varphi(q)}{q}$

on a alors

$$\frac{\varphi(q)}{q} > \frac{1}{q^2 \frac{\text{Log } q}{\text{Log}(\text{Log } q)}} \Rightarrow \varphi(q) > \frac{1}{q \frac{\text{Log } q}{\text{Log}(\text{Log } q)}}$$

or $\sum_{q=0}^{q=\infty} \varphi(q)$ diverge, ce qui est contradictoire, ce qui donne un résultat définitif pour e .

II LES FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES

Rappel des principales propriétés. cf. [20] et [21].

Définition II.1.1.

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n) n!} x^n$$

où

$$(a, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1) & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right)$ est la série hypergéométrique de Gauss.

Définition II.1.2. On notera ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right)$ le prolongement analytique de la série hypergéométrique qui admet comme seuls points singuliers $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$.

En effectuant le prolongement analytique sans franchir la coupure $[1, \infty[$ on définit une branche principale notée $\bar{F}_2 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right)$ qui est holomorphe dans $\mathbb{C} - [1, \infty[$

Définition II.1.3. On appelle fonction contigüe à ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right)$ une fonction hypergéométrique qui s'en déduit en ajoutant ou retranchant l'unité à l'un des 3 premiers éléments les autres conservant la même valeur. Il y a 6 fonctions contigües que l'on désignera par

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a\pm 1, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) \quad \text{ou} \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b\pm 1 \\ c \end{matrix} \middle| x \right) \quad \text{ou} \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c\pm 1 \end{matrix} \middle| x \right)$$

Théorème II.1.4. La fonction hypergéométrique et deux de ses fonctions contigües sont liées par une équation linéaire homogène dont les coefficients sont des polynômes en x, a, b, c .

Définition II.1.5. - Fonctions associées. Nous dirons que $F\left(\begin{matrix} a+m, b+n \\ c+p \end{matrix} \middle| x\right)$ où $(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$ est une fonction associée à $F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$.

Théorème II.1.5. 3 fonctions associées à F sont liées par une équation homogène linéaire dont les coefficients sont des polynômes en (a, b, c, x) .

En particulier une fonction associée à F s'exprime linéairement au moyen de F et de l'une des six fonctions contigües à F .

Equation différentielle II.1.5. La fonction $F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$ vérifie l'équation différentielle du type de Fuchs

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dy}{dx} - ab y = 0 \quad (1)$$

Intégrale générale : tableau de Kummer.

D'après la théorie des équations différentielles du type de Fuchs et d'après Riemann, les pôles des coefficients de y et y' étant simples et les racines des équations déterminantes en $0, 1, \infty$ étant $0, 1-c$; $0, c-a-b$, a, b on a le théorème suivant :

Théorème II.1.6. Une intégrale de l'équation hypergéométrique est holomorphe dans le voisinage de tout point sauf en $x = 0, 1, \infty$ qui sont singuliers réguliers ; lorsqu'aucun nombre $c, c-a-b, a-b$ n'est entier il existe 2 intégrales indépendantes régulières dans le domaine de chacun des points singuliers

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1^{(0)} = P_1(x) & y_2^{(0)} = x^{1-c} P_2(c) \\ y_1^{(1)} = P_3(x-1) & y_2^{(1)} = (1-x)^{c-a-b} P_4(x-1) \\ y_1^{(\infty)} = x^{-a} P_5\left(\frac{1}{x}\right) & y_2^{(\infty)} = x^{-b} P_6\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

$P(x-a)$ désignant une fonction holomorphe dans le domaine de convergence de la série autour de a et $P(0) \neq 0$.

On désigne par

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix} \quad \text{l'intégrale générale de l'équation } \textcircled{1}$$

et on a pour $|x| < 1$

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix} = A \underbrace{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right)}_{P_1(x)} + B x^{1-c} \underbrace{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+1-c, b+1-c \\ 2-c \end{matrix} \middle| x \right)}_{P_2(x)}$$

Pour $|x-1| < 1$ on trouve pour le symbole de Riemann

$$A' \underbrace{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+1-c \end{matrix} \middle| x \right)}_{P_3(x)} + B' (1-x)^{c-a-b} \underbrace{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c+1-a-b \end{matrix} \middle| 1-x \right)}_{P_4(x)}$$

pour $|x| > 1$ on trouve

$$A'' x^{-a} \underbrace{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, a+1-c \\ a+1-b \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)}_{P_5(x)} + B'' x^{-b} \underbrace{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} b+1-c, b \\ b+1-a \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)}_{P_6(x)}$$

on a

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) &= (1-x)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1} \right) & 1' \\ &= (1-x)^{-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1} \right) & 1'' \\ &= (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) & 1''' \end{aligned}$$

où on prend la détermination de $(1-x)^\lambda$ qui prend la valeur 1 pour $x = 0$, les séries $1'$ et $1''$ sont convergentes pour $|\frac{x}{x-1}| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} x < \frac{1}{2}$.

On fait de même avec les 2 autres et on obtient les 24 intégrales particulières de l'équation hypergéométrique de Kummer.

Représentations intégrales de ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$ II.1.7.

Intégrale hypergéométrique d'Euler.

Théorème II.2.1. Formule de Jordan-Pochhammer.

Lorsque $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ la branche principale de la fonction hypergéométrique est représentée dans tout le domaine $C - \{1, \infty\}$ par l'intégrale

$$B(b, c-b) {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-ux)^{-a} du = \int_0^1 U(a) du$$

avec $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ $|\arg(1-x)| < \Pi$.

$B(b, c-b) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}$ le chemin d'intégration étant rectiligne de 0 à 1, la fonction multiforme $U(a)$ admet les points de ramification : 0, 1, ∞ , $\frac{1}{x}$; sa détermination est choisie de manière que $\arg u = 0$, $\arg(1-u) = 0$, $\arg(1-ux) = 0$ si $u = 0$.

Les formules de transformation d'Euler et Gauss.

En faisant les changement de variable $u = 1-v$, $u = \frac{v}{1-x-vx}$, $u = \frac{1-x}{1-vx}$ ${}_2F_2\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$ se change en une intégrale du même type ce qui motive les formules $1'$, $1''$, $1'''$ et qui donne les 24 intégrales particulières de l'équation de Gauss.

Il y a d'autres formules intégrales de Jordan-Pochhammer qui n'imposent plus la condition $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ que nous découvriront dans la suite de l'exposé.

Fraction continuée et fonction hypergéométrique. (cf. [4])

Théorème de Gauss II.1.8. Pour le quotient de 2 fonctions hypergéométriques on a le développement en fraction continuée suivant

$$\frac{{}_2\bar{F}_1\left(\begin{matrix} \alpha & \beta+1 \\ \gamma+1 \end{matrix} \middle| x\right)}{{}_2\bar{F}_1\left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)} = \frac{1}{1 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{1 + a_3 x \dots}}}$$

avec $a_{2n+1} = -\frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+n)(\gamma+2n+1)}$

$$a_{2n} = -\frac{(\beta+n)(\gamma-\alpha+n)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)}$$

les réduites $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont liées par la relation

$$\begin{cases} A_n(x) = A_{n-1}(x) + x a_n A_{n-2}(x) \\ B_n(x) = B_{n-1}(x) + x a_n B_{n-2}(x) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \deg A_{2n} = n & \deg A_{2n+1} = n+1 \\ \deg B_{2n} = n & \deg B_{2n+1} = n \end{cases}$$

Théorème de Riemann II.1.9. Dans le domaine muni de la coupure $[1, \infty[$ en excluant les zéros de $\bar{F}\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$ la fraction continuée de Gauss converge uniformément dans ce domaine et représente effectivement le quotient des fonctions

$$\frac{{}_2\bar{F}_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta+1 \\ \gamma+1 \end{matrix} \middle| x\right)}{{}_2\bar{F}_1\left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)}$$

qui est méromorphe dans ce domaine.

Les développements en fractions continuées résultent essentiellement des relations de contiguité de la fonction hypergéométrique.

On a également des résultats explicites importants

a) $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont des "polynômes hypergéométriques"

b) le reste $\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta+1 \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)} - \frac{A_m(x)}{B_m(x)} = x^{m+1} \cdot R_m(x)$ est une fonction hypergéométrique.

Ceci sera précisé dans la suite.

Nous allons voir un cas particulier important.

NB : Dans la suite on identifiera ${}_2F_1$ avec $\bar{{}_2F}_1$.

II.1.10. Développement en fraction continuée de ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} \cdot x^n$$

Rappel. ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$ est solution de l'équation différentielle de type de Fuchs

$$x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} + (\gamma - \alpha x) \frac{du}{dx} - \alpha u = 0 \quad (1)$$

Mais dans ce cas particulier, elle satisfait l'équation du premier ordre

$$\left\{x(1-x) \frac{d}{dx} + (\gamma - \alpha x)\right\} f = \gamma \quad (2)$$

ce qui en utilisant le symbole de Riemann permet de mettre la solution sous la forme

$$P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\gamma & \alpha & \gamma-\alpha-1 \end{pmatrix} = P^{(\alpha)} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$$

$$P^{(\alpha')} = x^{1-\gamma} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2-\gamma, \alpha-\gamma+1 \\ 2-\gamma \end{matrix} \middle| x \right) = x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1}$$

Cas particulier.

$$\begin{aligned} \bullet (1-x)^\alpha &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, \alpha \\ 1 \end{matrix} \middle| x \right) ; \quad \text{Log}(1-x) = -x {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} \middle| x \right) \\ \bullet \text{Log} \frac{1+x}{1-x} &= 2x {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| x^2 \right) ; \quad \text{Ar Ctg } x = x {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| x \right). \end{aligned}$$

En remarquant que ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 0, a \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = 1$, on peut trouver le développement en fractions continuées de ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, a \\ c \end{matrix} \middle| x \right)$ et dans ce cas les déduites sont liées aux polynômes de Jacobi par le théorème suivant :

Théorème II.1.11. Considérons $\psi(x) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)x} \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)$

il existe 2 polynômes $P_n^{\alpha, \gamma}(x)$ et $Q_n^{\alpha, \gamma}(x)$ de degrés respectifs n et $n-1$ tels que

$$P_n^{\alpha, \gamma}(x) (x) - Q_n^{\alpha, \gamma}(x) = R_n^{\alpha, \gamma}(x)$$

où $P_n^{\alpha, \gamma}(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, \gamma+n-1 \\ \alpha \end{matrix} \middle| x \right) = F_n(\gamma-1, \alpha, x)$ est le polynôme de Jacobi que l'on peut aussi écrire

$$(\gamma+n-1)_n (-1)^n \frac{x^n}{(\alpha)_n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, 1-n-\alpha \\ 2-2n\gamma \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} R_n^{\alpha, \gamma}(x) &= \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \frac{C_p}{x^p} = \int_0^1 \frac{F_n(\gamma-1, \alpha, u)}{x-u} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du \\ &= \frac{n!}{(\alpha, n)} x^{-(n+1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n+1, \alpha+n \\ \gamma+2n \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Le reste est sous forme hypergéométrique.

Corollaire II.1.11. $P_n^{\alpha, \gamma}(x) = F_n(\gamma-1, \alpha, x)$ et $x^{-n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, \alpha+n \\ \gamma+2n \end{matrix} \middle| \frac{1}{x}\right)$ sont solution de la même équation différentielle hypergéométrique

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\alpha - \gamma x] \frac{dy}{dx} + n(\gamma+n-1)y = 0$$

Démonstration du corollaire :

a) on peut le vérifier directement

b) le plus astucieux est de raisonner avec le symbole de Riemann (cf. Théorème II.1.6.)

Il suffit de vérifier que ${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \gamma+n-1 \\ \alpha \end{matrix} \middle| x\right)$ et $x^{-n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, \gamma+n \\ +2n \end{matrix} \middle| \frac{1}{x}\right)$ on peut associer des symboles équivalents

à ${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \gamma+n-1 \\ \alpha \end{matrix} \middle| x\right)$ et associer le symbole $P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & -n & 0 \\ 1-\alpha & \gamma+n-1 & \alpha-\gamma+1 \end{pmatrix}$

à $x^{-n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, \alpha+n \\ \gamma+n \end{matrix} \middle| \frac{1}{x}\right)$ et associer $P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \alpha & n & 0 \\ 1 & 1-\gamma-n & \gamma-\alpha-1 \end{pmatrix}$

qui est équivalent à $P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 1-\alpha & 1-\gamma-n & \gamma-\alpha-1 \end{pmatrix}$, qui est également équivalent

à $P \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & -n & 0 \\ 1-\alpha & \gamma+n-1 & \alpha+1-\gamma \end{pmatrix}$ (car quand on change n en $-n$ et

$1-\gamma-n$ en $\gamma+n-1$ on utilise le fait que la somme des exposants est égale à 1)

Démonstration du théorème : on a $\psi(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u} du$ (1)

Nous allons déterminer les polybômes de degré n et $Q_n(x)$ de degré $n-1$ tels que

$$\psi(x) = \frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{P_n(x)} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \frac{C_p}{x^p} \quad (\text{cf. chapitre III})$$

on a d'après (1) $P_n(x)\psi(x) = \int_0^1 \frac{P_n(x)u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u} du$ d'où

$$P_n(x)\psi(x) = \int_0^1 \frac{P_n(x)-P_n(u)}{x-u} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1} du + \int_0^1 \frac{P_n(u)u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u} du$$

On pose $Q_n(x) = \int_0^1 \frac{P_n(x)-P_n(u)}{x-u} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1} du$ qui est un polynôme de degré $n-1$ et

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{P_n(u)u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u} du$$

Comme dans la théorie des polynômes orthogonaux on va déterminer P_n tel que

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1} u^k P_n(u) du = 0 \quad (2)$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

En considérant $\int_0^1 \frac{P_n(u)(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{x-u} u^{\alpha-1} du$ qui s'écrit

pour $|x| > 1$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \left[\int_0^1 P_n(u) u^{\alpha+k-1} (1-u)^{\alpha-1} du \right] \frac{1}{x^{k+1}}$$

on choisit P_n vérifiant (2) ; la 2ème intégrale débutera bien par $\frac{1}{x^{n+1}}$ et on aura bien $P_n(x)\psi(x) + Q_n(x) = R_n(x)$.

Lemme II.1.11. (a). *Formule de Rodrigues.*

$$P_n(x) = \frac{x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha+1-\gamma}}{(\alpha, n)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n-1} (1-x)^{\gamma+n-\alpha-1}] =$$

$$= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, \gamma+n-1 \\ \alpha \end{matrix} \middle| x \right) = F_n(\gamma-1, \alpha, x)$$

(notation des polynômes de Jacobi).

Démonstration : On considère $\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} f(u) P_n(u) du$ et on intègre n fois par partie. On obtient ainsi :

$$(-1)^n \int_0^1 u^{\alpha+n-1} (1-u)^{\gamma+n-\alpha-1} \left(\frac{d^n}{du^n} f(u) \right) du$$

et ceci à condition que l'on ait :

$$\left[u^{\alpha-1} \frac{d^k}{du^k} f(u) \right]_{u=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left[(1-u)^{\gamma-\alpha-1} \frac{d^k f}{du^k} \right]_{u=1} = 0$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ce qui est vérifié si f est un polynôme et si $\text{Re } \alpha > 0$ et $\text{Re}(\gamma-\alpha) > 0$, donc si f est un polynôme de degré inférieur à n

$$\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} f(u) P_n(u) du = 0$$

ce qui montre que P_n est le polynôme cherché.

On prendra finalement pour dénominateur de la réduite de rang n le polynôme donné dans la formule du lemme.

Jacobi a démontré que $F_n(\alpha, \gamma, x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \alpha+n \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$ pour cela il suffit de développer dans F_n par la formule de Leibniz, la dérivée $n^{\text{ième}}$ ce qui permet d'établir que $F_n = (1-x)^n {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \gamma-\alpha-n \\ \gamma \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right)$ et en appliquant la transformation d'Euler on trouve :

$$F_n = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \alpha+n \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$$

donc le polynôme $P_n(x)$ s'écrit bien

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \gamma+n-1 \\ \alpha \end{matrix} \middle| x\right) = F_n(\gamma-1, \alpha, x).$$

Lemme II.1.11. (b). Les polynômes de Jacobi forment une famille orthogonale sur $[0, 1]$ pour la mesure $x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$ c'est-à-dire que

$$\int_0^1 F_n(x) F_m(x) x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

$$\int_0^1 F_n^2(x) x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{(\alpha, n)} \cdot \frac{(\alpha+1-\gamma, n)}{(\gamma, n)} \cdot \frac{(1, n)}{\alpha+2n}$$

Démonstration : Ceci résulte du fait que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} f(x) F_n(x) dx &= \frac{1}{(\gamma, n)} \int_0^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{(\gamma, n)} \int_0^1 x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma} f^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Cette formule permet de démontrer le lemme. La forme du reste dans le théorème résulte de la formule de Rodrigues et d'une intégration par parties (cf. aussi III.3.7 (a)).

II.2. FONCTION HYPERGEOMETRIQUE GENERALISEE.

Définition II.2.1. Soit la série de Gauss

$$F_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(a_1, n)(a_2, n) \dots (a_p, n)}{(b_1, n)(b_2, n) \dots (b_q, n)n!} x^n .$$

Nous dirons que la fonction définie par cette série à l'intérieur de son cercle de convergence (qui comprend tout le plan si $p < q+1$) et par son prolongement analytique au dehors est une fonction hypergéométrique d'ordre p .

Remarques. On supposera que les éléments b_j sont distincts des éléments a_i si $p = q+1$ le rayon de convergence de cette fonction est 1.

Equation différentielle II.2.2.

En posant $Q(x) = x(x+b_1-1)(x+b_2-1) \dots (x+b_q-1)$

$$P(x) = (x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n)$$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n x^n$ une série formelle où $\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{P(n)}{Q(n+1)}$ $n \geq 1$

Alors $f(x)$ vérifie facilement l'équation différentielle suivante

$$\{Q(\delta) - P(\delta).x\}f = 0 \quad \text{où} \quad \delta = x \cdot \frac{d}{dx}$$

On vérifie facilement que $f(x) = {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x \right)$.

On a $\{\delta(\delta+c-1)-x(\delta+a)(\delta+b)\}f$ qui est l'équation différentielle vérifiée par ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a_1, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right)$.

On peut se demander comment on passe de l'opérateur δ à l'opérateur $D = \frac{d}{dx}$.

On a par exemple $Z^n D^n = \delta(\delta-1)(\delta-2) \dots (\delta-n+1)$ et d'autres formules cf. Yudell-Luke : "The special functions" p. 24,25,26.

Nous nous intéresserons au cas $q = p+1$.

On vérifie que ${}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{p+1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{matrix} \middle| x \right)$ satisfait une équation

différentielle de type de Fuchs d'ordre $p+1$.

Les seules singularités sont $\{0, 1, \infty\}$ (cf. Bateman p.184).

Pour symbole de Riemann associé on a dans ce cas (cf. [13])

$$\left(\begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 1-b_1 & a_2 & 1 \\ 1-b_2 & a_3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-b_p & p_{p+1} & p-1 \\ & & d \end{matrix} \right) \quad \text{où } d = \sum_{i=1}^{i=p} b_i - \sum_{j=1}^{j=p+1} a_j$$

car on pose que la somme des multiplicités des singularités est $\frac{n(n-1)}{2} \cdot p$.

II.2.3. Intégrales hypergéométriques $q = p+1$

Les formules de Pochhammer sous forme intégrales, prolongement de la série de Gauss que nous utiliserons, sont

$${}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 & a_{p+1} \\ b_1, b_2 & b_p \end{matrix} \middle| x \right) = \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)} \int_0^1 dt_i \dots$$

$$\int_0^1 dt_p \prod_{i=1}^{i=p} (1-t_i)^{b_i-a_i-1} t_i^{a_i-1} (1-t_1 t_2 \dots t_p x)^{-a}$$

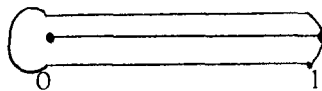
où $a_1, a_2, \dots, a_{p+1}, b_1, b_2, \dots, b_p$ sont des paramètres complexes vérifiant $\text{Re}(b_i) > \text{Re}(a_i) > 0, i=1, 2, p, |\arg(1-x)| < \pi$ et d'autres formules que nous utiliserons dans la suite de l'exposé. cf. Erdelyi Bateman.

Par exemple dans le cas de polynômes hypergéométriques

$${}_pF_p \left(x \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \right. \right) = \prod_{i=1}^{i=p} \frac{-i\Gamma(b_i)\exp(-i\pi a_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)2\sin\pi a_i} \times$$

$$\int_1^{0+} dt_1 \dots \int_1^{0+} dt_p \prod_{i=1}^{i=p} t_i^{a_i-1} (1-t_i)^{b_i-a_i-1} (1-t_1 t_2 \dots t_p x)^{-a_{p+1}}$$

avec $\text{Re } b_i > \text{Re } a_i, |\text{Arg}(-x)| < \pi$ le parcours d'intégration étant le suivant :



les définitions des fonctions contigües et associées sont les mêmes.

Les relations de contigüité sont en général beaucoup plus compliquées que dans le cas ${}_2F_1$.

(Cf. Bailey pour ${}_2F_3$ et Wilson pour ${}_3F_4$).

II.2.4. Les dégénérescences de la fonction hypergéométrique de Gauss.

Considérons la fonction hypergéométrique

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \frac{1}{\varepsilon} \\ \gamma \end{matrix} \middle| \varepsilon x \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m) (\frac{1}{\varepsilon}, m)}{(\gamma, m) m!} x^m \cdot \varepsilon^m \quad \textcircled{A}$$

on a facilement $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{1}{\varepsilon}, m) \varepsilon^m = 1$ d'où on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \frac{1}{\varepsilon} \\ \gamma \end{matrix} \middle| \varepsilon x \right) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)}{(\gamma, m)} \frac{x^m}{m!}$$

ce qui d'après la notation précédente donne ${}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$ ou $G(\alpha, \gamma, x)$.

Cette fonction est la première dégénérescence de la fonction de Gauss et vérifie l'équation différentielle

$$(x(1-\varepsilon x)) \frac{d^2}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \frac{1}{\varepsilon} + 1)\varepsilon x] \frac{d}{dx} - \alpha = 0$$

c'est-à-dire en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ cette équation "tend" vers

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0 \quad \text{II.2.4.1.}$$

L'équation (A) possède les 3 points singuliers réguliers $0, \infty, 1$.

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, l'équation II.2.4.1 ne possède plus que 2 points singuliers 0 et ∞ et ∞ étant irrégulier, ∞ résultant de la "confluence" des 2 singularités régulières $\frac{1}{\varepsilon}$ et ∞ .

${}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$ est la fonction hypergéométrique confluyente lorsque $\gamma \notin \mathbb{N}$ l'intégrale générale de II.2.4.1 peut être mise sous la forme

$$y = A {}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right) + B x^{1-\gamma} {}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha+1-\alpha \\ 2-\gamma \end{matrix} \middle| x\right)$$

qui peut se déduire par passage à la limite de II.1.6.

On peut exprimer ${}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right)$ par une intégrale définie

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} e^{ux} du \quad \text{II.2.4.2.}$$

Cette intégrale ne change pas quand on fait $u = 1-v$ d'où la formule Kummer ${}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right) = e^x {}_1F_1\left(\begin{matrix} \gamma-\alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| -x\right)$ limite de la formule d'Euler (II.1.6.1").

Toute fonction de Kummer où $\alpha = -n$ entier négatif est un polynôme de degré n qui se déduit par dégénérescence des polynômes de Jacobi

$${}_1F_1 \left(\begin{matrix} -n \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_n \left(\frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x \right)$$

ce qui en passant à la limite donne

$${}_1F_1 \left(\begin{matrix} -n \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{x^{1-\gamma} e^x}{(\gamma, n)} \frac{d^2}{dx^2} [x^{\gamma+n-1} e^{-x}]$$

si $\gamma = 1$ on obtient les polynômes de Laguerre.

1.2.4.2. Fonction de Bessel.

Considérons la fonction hypergéométrique ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \\ \gamma \end{matrix} \middle| \varepsilon^2 x \right)$,
on a comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon}, m \right) \left(\frac{1}{\varepsilon}, m \right) \cdot \varepsilon^{2m} = 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \\ \gamma \end{matrix} \middle| \varepsilon^2 x \right) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{x^m}{(\gamma, m)(1, m)},$$

série qui converge pour tout $x \in \mathbb{C}$.

On pose

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(\gamma, m)m!} = {}_0F_1 \left(\begin{matrix} \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \mathcal{J}(\gamma, x)$$

or Bessel pose

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)} \mathcal{J}(k+1, -\frac{x^2}{2^2}) \tag{I}$$

De l'équation différentielle

$$x(1-\varepsilon^2 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\gamma - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) 2^2 x \right] \frac{dy}{dx} - y = 0$$

vérifiée par ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \\ \gamma \end{matrix} \middle| \varepsilon^2 x \right)$, on déduit en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ celle vérifiée par $\mathcal{J}(\gamma, x)$ qui est

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma \frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{II.2.4.2.1.}$$

Lorsque $\gamma \notin \mathbb{N}$ l'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$y = A \mathcal{J}(\gamma, x) + B x^{1-\gamma} \mathcal{J}(2-\gamma, x)$$

Grâce à la formule (I), on peut, en partant de l'équation différentielle précédente, retrouver l'équation différentielle vérifiée par la fonction de Bessel.

$$\underline{x^2 \frac{d^2 \mathcal{J}_k}{dx^2} + x \frac{d \mathcal{J}_k}{dx} + (x^2 - k^2) \mathcal{J}_k = 0.}$$

II.3. GENERALISATIONS DE LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE, LES G-FONCTIONS.

Formule de Mellin-Barnes II.3.1. cf. [21]

Théorème II.3.1.

$$\frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i}^i \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)} \cdot \Gamma(-s)(-x)^s ds$$

Démonstration : On applique le théorème des résidus à la fonction sous le signe \int sur le contour C. suivant : (cf. Fig. 1).

1) le segment $[-i(n + \frac{1}{2}), +i(n + \frac{1}{2})]$, n entier positif, de l'axe imaginaire de façon à laisser à sa droite les pôles de $\Gamma(-s)$ et à sa gauche ceux de $\Gamma(\alpha+s)$ et $\Gamma(\beta+s)$.

2) la demi circonférence $C(0, n + \frac{1}{2})$ située à droite de l'axe imaginaire.

On fait tendre n vers l'infini et on conclut par prolongement analytique sur \mathbb{C} muni de la coupure $[1, \infty[$.

On peut retrouver les propriétés de la fonction hypergéométrique par cette formule que l'on généralise.

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \mid \begin{matrix} a_1 a_2 & a_p \\ b_1 b_2 & b_q \end{matrix} \right) = G_{p,q}^{m,n} \left(x \mid \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right) =$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{j=m} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{s=n} \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^{s=q} \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^{j=p} \Gamma(a_j - s)} x^s ds$$

si $0 \leq m \leq q$ ou $0 \leq n \leq q$ le produit vide sera égal à 1 et les paramètres a_h et b_h sont tels que aucun pôle de $\Gamma(b_j - p)$ ne coïncide avec un pôle de $\Gamma(1 - a_k + s)$.

Ainsi $(a_k - b_j)$ n'est pas un entier positif et on supposera que $x \neq 0$.

On prendra pour L une boucle commençant et se terminant à $+\infty$, encerclant les pôles de $\Gamma(b_j - q)$ $j = 1, 2, \dots, m$ dans le sens négatif et évitant les pôles de $\Gamma(1 - a_k + s)$ $k = 1, 2, \dots, n$.

L'intégrale converge pour $q \geq 1$ ainsi que si $p < q$ et $|x| < 1$.

En utilisant ce parcours on a en utilisant la somme des résidus ($b_h - b_k \notin \mathbb{Z}$).

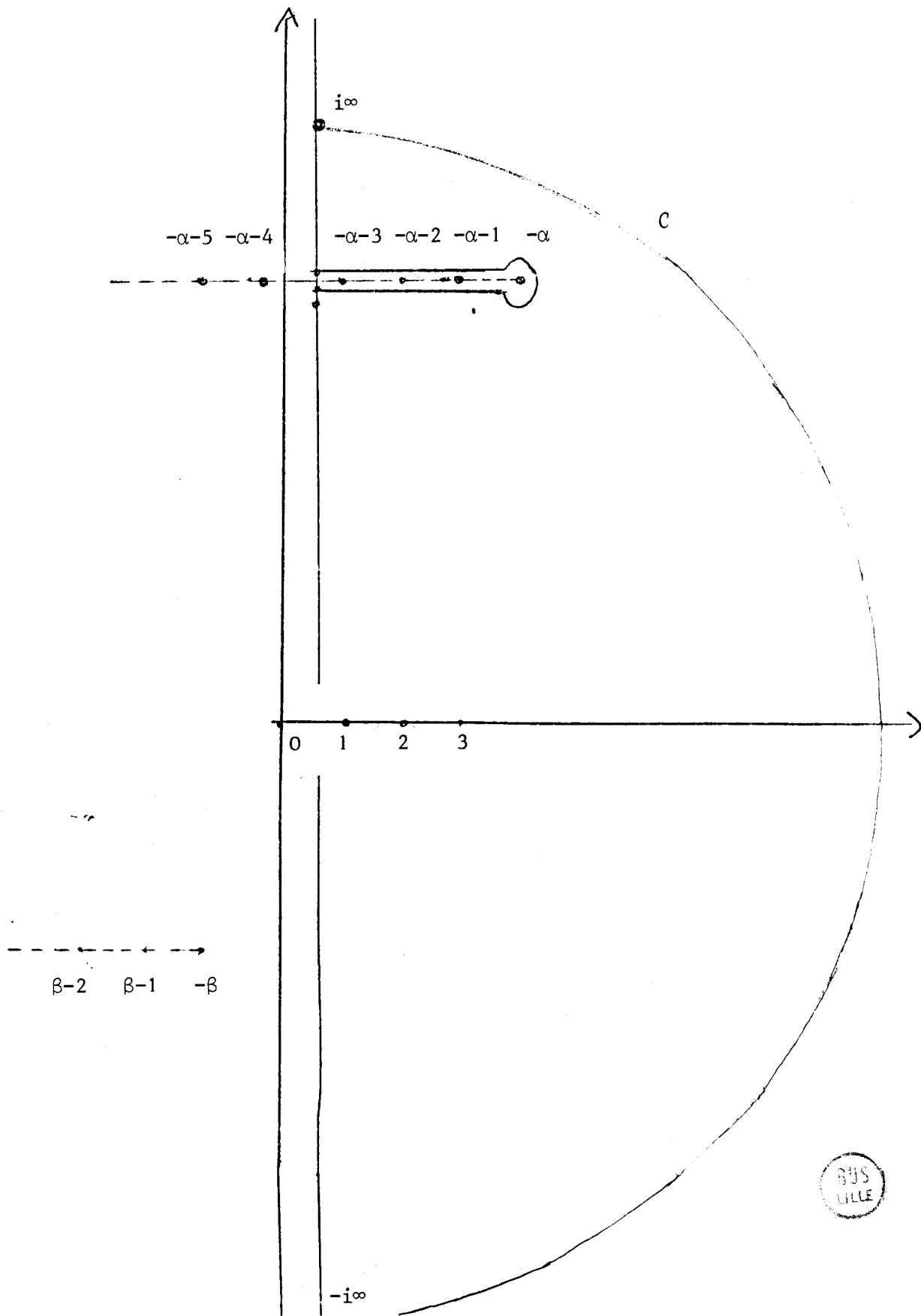
Théorème II.3.3. cf. [41]

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \mid \begin{matrix} (a)_q \\ (b)_q \end{matrix} \right) = \sum_{h=m}^{h=q} \prod_{s=1}^{s=m} \frac{\Gamma(b_j - b_h)^* \prod_{s=1}^{s=n} \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^{j=q} \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^{j=p} \Gamma(a_j - b_h)} \times x^{b_h}$$

$${}_p F_{q-1} \left(\begin{matrix} (1 + b_h - a)_p \\ (1 + b_h - b)_q^* \end{matrix} \mid (-1)^{p-m-n} x \right)$$

avec $p < q$ ou $p = q$ et $|x| < 1$.

(l'étoile ayant pour signification que l'on omet le facteur si celui-ci est nul).



III APPROXIMANTS DE PADÉ ET ARITHMETIQUE

III.1.1. Cas général. (cf. [4])

Définition. Soit une série formelle $A(x) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j x^j$ à coefficients dans \mathbb{C} .

On appelle approximant de Padé de type $[L, M]$ une fonction rationnelle notée $[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}$ où

- . $P_L(x)$ est un polynôme de degré au plus L
- . $Q_M(x)$ " " " " M

tel que $Q_M(0) = 1$ qui vérifient la condition $Q_M(x).A(x) - P_L(x) = Q_M(x).R_{L+M+1}(x)$ où $R_{L+M+1}(x)$ est une série formelle d'ordre $L+M+1$ qui est le reste de l'approximant de Padé.

III.1.2. Conséquences et rappels.

- a) On démontre l'unicité de l'approximant de Padé
- b) on démontre que $[L/M]$ existe si et seulement si le déterminant suivant

$$C(L/M) = \begin{vmatrix} a_L & a_{L+1} & a_{L-M+1} \\ a_{L+1} & & \\ & & \\ a_{L-M+1} & a_{L+M-2} & a_L \end{vmatrix} \neq 0$$

(déterminant de Hankel).

- c) Dans les applications de l'arithmétique nous aurons besoin d'une estimation précise du reste $R_{L+M+1}(x)$ en fonction du dénominateur $Q_M(x)$.

d) Dans certains cas nous construirons l'approximant de Padé en $x = 0$ de type $[L/L]$ et $[L+1/L]$ qui correspond aux réduites du développement en fraction continuée de $A(x)$.

III.1.3. Approximants de Padé et équations différentielles. (cf [13])

Nous allons construire un approximant de Padé pour un système de fonctions $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ satisfaisant un système différentiel linéaire de la forme

$$f'_i(z) = \sum_{j=1}^{s=n} Q_{j,i}(z) \cdot f_j(z) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pour des fonctions $Q_{j,i}(z)$ rationnelles possédant un développement en série entière dans $\mathbb{C}[[z]]$.

Cet approximant de Padé de type $[L/L]$ et $[L+1/L]$ devra satisfaire aux conditions suivantes :

a) le reste de l'approximant de Padé doit satisfaire un système d'équations différentielles explicite.

b) les polynômes de l'approximant de Padé doivent satisfaire une équation de récurrence linéaire ainsi que le reste.

c) le reste $R_N(z) = R(z, w_1, w_2, \dots, w_n)$ doit pouvoir se mettre sous forme intégrale.

d) on doit pouvoir donner un équivalent asymptotique du reste $|R(z, N)|$ de $|P_L(z)|$ et de $|Q_M(z)|$ pour $z \neq 0$ et $N = L+M$ tend vers l'infini.

Pour cela nous introduisons des approximants de Padé spéciaux qui vérifient les conditions a), b), c), d) et qui se retrouvent également dans les démonstrations d'irrationalité et de transcendance de certains nombres liés à des équations différentielles que l'on retrouve dans les oeuvres d'Hermite, Malher, Siegel.

Définition III.1.4. Approximant de Padé de type I.

Soient $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$. N points distincts de \mathbb{C} et $f_1(z), \dots, f_n(z)$ des fonctions analytiques dans un voisinage de $z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_N$.

Pour n entiers naturels m_1, m_2, \dots, m_n , on considère les n polynômes $A_i(z | f_1, f_2, \dots, f_n, m_1, m_2, \dots, m_n)$: de degrés $\leq m_i$ tels que la fonction

$$R(z | f_1, f_2, \dots, f_n, m_1, m_2, \dots, m_n) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i(z | f_1, f_2, \dots, f_n, m_1, m_2, \dots, m_n) \times f_i(z)$$

ait pour zéros $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$. Tels que

$$\sum_{j=1}^{s=N} \text{ord}_{z_j}(R) \geq \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} (m_i + 1) \right\} - 1 \quad \textcircled{I}$$

$R(z | f_1, f_2, \dots, f_n, m_1, m_2, \dots, m_n)$ est le reste de l'approximant de Padé de type I pour le système $\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}$ dont les poids respectifs sont m_1, m_2, \dots, m_n ; $A_j(z | f_1, f_2, \dots, f_n, m_1, m_2, \dots, m_n)$ sont appelés les approximants de Padé de type I.

En général on considère l'approximant de Padé en un seul point $z = 0$.

Le cas le plus intéressant est celui où les poids m_i $i = 1, 2, \dots, n$ sont tels que $m_i = N - i$ $i = 1, 2, \dots, n$. (cas diagonal) ou $|m_i - N| \leq 1$ cas "sous diagonal".

On notera $R_n(z)$ le reste de l'approximant de Padé

$A_{i,N}(z)$: les polynômes de type I.

Définition III.1.5. Un approximant de Padé de type I est dit parfait si \textcircled{I} est une égalité. Il est dit presque parfait si et seulement si

$$\sum_{\delta=1}^{s=N} \text{ord}(z)_j(R) - \sum_{i=1}^{i=n} (m_i + 1) + 1 \leq C(\bar{f})$$

pour une constante absolue $C(\bar{f}) > 0$.

III.2. Approximants de Padé de type II.

Définition III.2.1. Soient $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ des séries formelles et $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ des entiers positifs.

On dira que $\{a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(z)\}$ est un système de polynômes de type II correspondants aux poids $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ et au système $(f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))$.

Si $\{a_i(z)\}$ est un système de polynômes non identiquement nul vérifiant

$$1) \deg a_i(x) \leq \delta - \rho_i \quad \text{avec} \quad \delta = \sum_{j=1}^{j=m} \rho_j$$

2) l'ordre en $z = 0$ de

$$a_\rho(z) \cdot f_k(z) - a_k(z) f_\rho(z)$$

est au moins $\delta + 1$ pour $k = 1, 2, \dots, m$ et $\rho = 1, 2, \dots, m$.

Exemples. Les premiers systèmes d'approximants de type I et II ont été introduits par Hermite en 1873 pour démontrer la transcendance de e ;

Malher les a également utilisés pour trouver des approximants de Π et l'inégalité $|\Pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{42q}$. Cf. [24].

Nous donnerons des exemples dans la suite de l'exposé.

Le lien entre les deux types d'approximants est le théorème suivant :

Théorème III.2.2. Soit $A(z, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ la matrice de terme général

$$A_{i,h}(z, \rho_1 + \delta_{h,1}, \rho_2 + \delta_{h,2}, \dots, \rho_m + \delta_{h,m}) \quad \begin{matrix} i = 1.2. m \\ h = 1.2. m \end{matrix}$$

et $\mathcal{A}(z | \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ la matrice de terme général

$$\mathcal{A}_{i,h}(z, \rho_1 - \delta_{h,1}, \rho_2 - \delta_{h,2}, \dots, \rho_m - \delta_{h,m}) \quad \begin{matrix} i = 1.2. m \\ h = 1.2. m \end{matrix}$$

Sous certaines conditions (cf. DE Bruin - Generalised functions and multidimensional Padé table), on a

$$A(z|\rho_1, \rho_2, \rho_m) \mathcal{A}^T(z, \rho, \rho_2, \rho_m) = \begin{pmatrix} c_1 z^\sigma & & 0 \\ & c_2 z^\sigma & \\ 0 & & z_n z^\sigma \end{pmatrix}$$

pour des constantes c_i .

En d'autres termes si on connaît un système de polynôme de type I on connaît un système de type II et réciproquement.

D'où l'équivalence de ces deux méthodes.

Malher a également prouvé que les deux polynômes

$$\det A(z|\rho_1, \rho_2, \rho_n) = b z^\sigma$$

$$\det \mathcal{A}(z|\rho_1, \rho_n) = a \cdot z^{(m-1)\sigma}$$

où a et b sont constants.

Exemples d'approximants de Padé de type I.

III.3. Formule d'interpolation d'Hermite.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée C contenant l'origine 0 et soient z_1, z_2, \dots, z_n n points de C .

On définit $R(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{P_n(z)} dz$ où

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

Alors en posant $z_1 = \underbrace{\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_1}_{n_1+1 \text{ fois}}$ avec $n = \sum_{j=1}^m (n_j+1)$

$$z_i = \{\omega_i, \omega_i, \dots, \omega_i\} \quad n_{i+1} \text{ fois}$$

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^m (z - z_i)^{n_i+1} = \prod_{j=1}^m (z - \omega_j)^{n_j+1}$$

$$\text{Alors } R(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{n_j!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n_j} \left\{ \frac{f(z) (z-\omega_j)^{n_j+1}}{P_n(z)} \right\}_{z = \omega_j}$$

Démonstration. C'est le théorème des résidus appliqué à la fonction $\frac{f(z)}{P_n(z)}$.

III.3.1. Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ des nombres complexes tels que $\omega_i - \omega_j \notin \mathbb{Z}$ et ω_i, ω_j non entiers.

On pose

$$R \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ K_0, K_1 & K_m \end{matrix} \right. \right) = \frac{K_0! K_1! \dots K_m!}{2i\pi} \oint_{C_0} \frac{{}_2F_1(1, s, c, x)}{\Phi_0(s)} ds$$

où $\Phi_0(s) = \prod_{i=1}^{i=m} \prod_{k=0}^{k=K_i} (s+k-\omega_i) \prod_{k=0}^{k=K_0} (s+k)$, K_0, K_1, \dots, K_m étant des entiers positifs et C_0 contenant tous les zéros de $\Phi_0(s)$, on a le théorème suivant :

Théorème III.3.2.

$$R \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ K_0, K_1 & K_m \end{matrix} \right. \right) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ K_0, K_1 & K_m \end{matrix} \right. \right) f_i(x)$$

$$f_0(x) = 1 \quad f_i(x) = {}_2F_1(1, \omega_i, c, x) \quad \text{et}$$

$$\text{deg } A_i \leq K_i \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Démonstration. C'est le théorème des résidus appliqué à la fonction R où les pôles de $\Phi_0(s)$ sont simples et les résidus en $s = k + \omega_i$ sont

$$\frac{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, -k + \omega_i \\ c \end{matrix} \middle| x \right)}{\Phi_0'(-k + \omega_i)}$$

On utilise le fait que ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, -k+\omega_i \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$ est combinaison linéaire de $1 = {}_2F_1\left(\begin{matrix} 0, \omega_i \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$ et ${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \omega_i \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$ à coefficients qui sont des fonctions rationnelles de ω_i , c et polynomiales en x .

Ceci résulte de la relation de contigüité suivante :

$$(c-\omega_i) {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \omega_i-1 \\ c \end{matrix} \middle| x\right) + (\omega_i-1)(1-x) {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \omega_i \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (c-1) {}_2F_1\left(\begin{matrix} 0, \omega_i \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$$

$$\text{d'où } {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \omega_i-1 \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \frac{(x-1)(\omega_i-1) {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \omega_i \\ c \end{matrix} \middle| x\right) + (c-1)}{(c-\omega_i)}$$

ce qui permet de démontrer par récurrence que

$$A_i \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_n \\ K_0, K_1 & K_m \end{matrix} \right)$$

est un polynôme de degré $\leq K_i$ en $(1-x)$.

Approximant de Padé de type I pour les fonctions binômes. Cf. [19]

Théorème III.3.3. En posant

$$R \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1, \rho_2 & \rho_m \end{matrix} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(1-x)^s}{\Phi(s)} ds \quad |s| < 1$$

où C est un contour décrit dans le sens positif entourant les pôles

$$\omega_\lambda + r \quad \text{et} \quad \Phi(s) = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=m} \prod_{r=0}^{r=\rho_\lambda-1} (s-\omega_\lambda-r) .$$

Alors

$$R \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1, \rho_2 & \rho_m \end{matrix} \right) = \sum_{k=1}^{k=m} A_k \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1, \rho_2 & \rho_m \end{matrix} \right) (1-x)^{\omega_k}$$

où
$$A_k \left(x \mid \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1, \rho_2 & \rho_m \end{matrix} \right) = \sum_{k=0}^{k=\rho_\lambda-1} \frac{(1-x)^k}{\Phi'(\omega_k+k)} .$$

Démonstration : C'est le théorème des résidus.

Théorème III.3.4. *Approximant de Padé et "fonctions hypergéométriques".*

$$A_\mu \left(x \mid \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1, \rho_2 & \rho_m \end{matrix} \right) = c \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{\lambda=m} \frac{\Gamma(\omega_\lambda - \omega_\mu)}{\prod_{\lambda=1}^{\lambda=m} \Gamma(\omega_\lambda - \omega_\mu + \rho_\lambda)} \times$$

$${}_m F_{m-1} \left(\begin{matrix} \omega_\mu - \omega_1 - \rho_1 + 1, \dots, \omega_\mu - \omega_m - \rho_m + 1 \\ \omega_\mu - \omega_1 + 1, \dots, \omega_\mu - \omega_m + 1 \end{matrix} \mid 1 - x \right)$$

où * signifie que $\omega_\mu - \omega_\mu + 1$ est omis.

Ce qui montre que

$$A_\mu \left(x \mid \begin{matrix} \omega_1 & \omega_m \\ \rho_1 & \rho_m \end{matrix} \right)$$

est un polynôme hypergéométrique.

$$R \left(x \mid \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1, \rho_2 & \rho_m \end{matrix} \right) = c \cdot G \left(\begin{matrix} m, 0 \\ m, m \end{matrix} \mid \begin{matrix} \omega_1 + \rho_1 & \omega_m + \rho_m \\ \omega_n & \omega_n \end{matrix} \right)$$

où G est la fonction de Meijer (cf. II.3.2), c étant une constante positive.

Démonstration : On va évaluer de manière précise $A_\mu \left(x \mid \begin{matrix} \omega_1 & \omega_m \\ \rho_1 & \rho_m \end{matrix} \right) .$

Soit C_0^μ le terme constant du polynôme $A_\mu \left(x \mid \begin{matrix} \omega_1, \omega_2, \omega_m \\ \rho_1, \rho_2, \rho_m \end{matrix} \right)$

On a

$$C_o^\mu = \frac{1}{(-1)(-2) \dots (-\rho_\mu + 1) \cdot \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{\lambda=\mu} (\omega_\mu - \omega_\lambda)(\omega_\mu - \omega_\lambda + 1) (\omega_\mu - \omega_\lambda + \omega_\lambda + 1)}$$

$$\text{donc } C_o^\mu = (-1)^{-1} \frac{\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \Gamma(\omega_\lambda - \omega_\mu)}{\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \Gamma(\omega_\lambda - \omega_\mu + \rho_\lambda)} \quad \text{où } \sigma = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \rho_\mu$$

donc C_o^μ est le coefficient de la fonction hypergéométrique.

Le quotient du terme de degré $\omega+1$ et de degré ω de $A_k(x)$ en $1-x$ où $\omega = 0, 1, 2, \dots$ $\rho_\mu - 2$ est

$$(1-x) \frac{1}{1+r} \frac{\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} (\omega_\mu - \omega_\lambda - \rho_\lambda + 1 + r)}{\prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{\lambda=\mu} (\omega_\mu - \omega_\lambda + 1 + r)}$$

d'où on en déduit que $A_\mu \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_m \\ \rho_1 & \rho_m \end{matrix} \right)$ est bien un polynôme hypergéométrique.

Pour $m = 2$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{matrix} \right) = C \frac{\Gamma(\omega_2 - \omega_1)}{\Gamma(\rho_1) \Gamma(\omega_2 - \omega_1 + \rho_1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1 + 1, \omega_1 - \omega_2 - \rho_2 + 1 \\ \omega_1 - \omega_2 + 1 \end{matrix} \middle| 1 - x \right) \\ A_2 \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{matrix} \right) = C \frac{\Gamma(\omega_1 - \omega_2)}{\Gamma(\rho_2) \Gamma(\omega_1 - \omega_2 + \rho_1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_2 + 1, \omega_2 - \omega_1 - \rho_1 + 1 \\ \omega_2 - \omega_1 + 1 \end{matrix} \middle| 1 - x \right) \end{array} \right.$$

Formules (III.3.4.).

En écrivant

$$R \left(x \left| \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_m \end{array} \right. \right) = \sum_{k=1}^{k=m} A_k \left(x \left| \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_m \end{array} \right. \right) (1-x)^{\omega_k}$$

on retrouve la formule du théorème II.3.3 en remplaçant x par $1-x$ et en faisant $p = q = m$, $a_\mu = \omega_\mu + \rho_\mu$, $b_\mu = \omega_\mu$ on obtient

$$(-1)^{\sigma-1} C.G_{m,m}^{m,0} \left(1-x \left| \begin{array}{cc} \omega_1 + \rho_1 & \omega_m + \rho_m \\ \omega_1, \omega_2 & \omega_m \end{array} \right. \right)$$

d'où le théorème.

Lemme III.3.5. $R \left(x \left| \begin{array}{cc} \omega_1, \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1, \rho_2 & \rho_m \end{array} \right. \right)$ n'est pas identiquement nulle

et est d'ordre $\sigma-1$ (le système d'approximant étant parfait).

Démonstration : On peut écrire $R \left(x \left| \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_m \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_m \end{array} \right. \right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\binom{x}{n} dx}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} \prod_{r=0}^{r=\rho_\mu-1} (x-\omega_\mu-r)}$$

où C entoure tous les pôles.

C'est pourquoi $a_n = (-1)^{n-1} \operatorname{Res}_{x=\infty} \frac{\binom{x}{n}}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} \prod_{r=0}^{r=\rho_\mu-1} (x-\omega_\mu-r)}$ le numé-

rateur qui se compose du coefficient binomial est de degré n et le déno-

minateur est de degré $\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \rho_\mu = \sigma$.

Ainsi

$$\begin{cases} a_n = 0 & n = 0, 1, \dots, \sigma-2 \\ a_{\sigma-1} = \frac{(-1)^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!} \end{cases}$$

Donc $\sum_{k=1}^{k=m} A_k (1-x)(1-x)^{\omega_k} = \sum_{q \geq \sigma-1} a_q x^q$, ce qui montre que le système de polynôme $A_k(x)$ où $\deg A_k = \sigma_k - 1$ est un approximant de Padé de type I pour le système $(1-x)^{\omega_1}, (1-x)^{\omega_2}, \dots, (1-x)^{\omega_k}$.

Théorème III.3.6. Théorème de Padé.

Pour $m = 2$ on a

$$A_1 \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right) = C {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, \omega_1-\omega_2-\rho_2+1 \\ -\rho_1-\rho_2+2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$A_2 \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right) = -C {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_2+1, \omega_2-\omega_1-\rho_1+1 \\ -\rho_1-\rho_2+2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$R \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right) = C \frac{\Gamma(\rho_1) \cdot \Gamma(\rho_2) \Gamma(\omega_1-\omega_2+\rho_1) \Gamma(\omega_2-\omega_1+\rho_2)}{\Gamma(\rho_1+\rho_2-1) \cdot \Gamma(\rho_1+\rho_2) \Gamma(\omega_1-\omega_2+1) \Gamma(\omega_2-\omega_1)} \times$$

$$x^{\rho_1+\rho_2-1} (1-x)^{\omega_2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \omega_2-\omega_1+\rho_2, \rho_1 \\ \rho_1+\rho_2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

Démonstration : Nous allons faire la transformation $x \rightarrow 1-x$ d'après

II.15 et II.1.6. on peut écrire

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = P {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+1-c \end{matrix} \middle| 1-x \right) + Q(1-x)^{c-a-b} \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a; c-b \\ c-a-b+1 \end{matrix} \middle| 1-x \right)$$

où P et Q sont des constantes car les 3 solutions particulières sont solutions de l'équation

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0$$

En prenant $a = -\rho_1+1$, $b = \omega_1-\omega_2+1$, $c = -\rho_1-\rho_2+2$ on en déduit que

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, \omega_1-\omega_2+1 \\ -\rho_1-\rho_2+2 \end{matrix} \middle| x \right) = P {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, \omega_1-\omega_2-\rho_2+1 \\ \omega_1-\omega_2+1 \end{matrix} \middle| 1-x \right) +$$

$$+ Q(1-x)^{-\omega_1+\omega_2} \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_2+1, -\omega_1+\omega_2-\rho_1+1 \\ -\omega_1+\omega_2+1 \end{matrix} \middle| 1-x \right)$$

or, pour $-\omega_1+\omega_2 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm p$, $(1-x)^{-\omega_1+\omega_2}$ n'est pas une fonction rationnelle.

On en déduit puisque les 3 séries sont des polynômes que $Q = 0$ et en faisant $x = 0$ alors

$$1 = P {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, \omega_1-\omega_2-\rho_2-1 \\ \omega_1-\omega_2+1 \end{matrix} \middle| 1 \right)$$

or d'après la formule de Gauss

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \cdot \Gamma(c-b)}$$

si $\text{Re}(c-a-b) > 0$ d'où la valeur de P.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, \omega_1-\omega_2-\omega_2+1 \\ \omega_1-\omega_2+1 \end{matrix} \middle| 1-x \right) &= \frac{\Gamma(\omega_1-\omega_2+1) \cdot \Gamma(\rho_1+\rho_2-1)}{\Gamma(\omega_1-\omega_2+\rho_2) \Gamma(\rho_2)} \times \\
 &\times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, \omega_1-\omega_2-\rho_2+1 \\ -\rho_1-\rho_2+2 \end{matrix} \middle| x \right)
 \end{aligned}$$

d'où

$$A_1 \left(\begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \middle| x \right) = C' (\omega_1-\omega_2) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, \omega_1-\omega_2-\rho_2+1 \\ -\rho_1-\rho_2+2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$A_2 \left(\begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \middle| x \right) = C' (\omega_2-\omega_1) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_2+1, \omega_2-\omega_1-\rho_1+1 \\ -\rho_1-\rho_2+2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$C' = C \frac{\Gamma(\omega_1-\omega_2) \Gamma(\omega_2-\omega_1) \Gamma(\rho_1+\rho_2-1)}{\Gamma(\omega_1-\omega_2+\rho_1) \Gamma(\omega_2-\omega_1+\rho_2) \Gamma(\rho_1) \Gamma(\rho_2)}$$

$$R \left(\begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \middle| x \right) = C G_{2,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} \omega_1+\rho_1, \omega_2+\rho_2 \\ \omega_1, \omega_2 \end{matrix} \middle| 1-x \right)$$

or on sait que

$$G_{2,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} \omega_1+\rho_1, \omega_2+\rho_2 \\ \omega_1, \omega_2 \end{matrix} \middle| 1-x \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\Gamma(\omega_1-z) \Gamma(\omega_2-z)}{\Gamma(\omega_1+\rho_1-z) \Gamma(\omega_2+\rho_2-z)} \times (1-x)^z dz$$

C étant le parcours complexe de la formule de Mellin Barnes (cf. II.3.2).

On suppose que $0 < x < 1$ et en intégrant sur $\text{Re } z = a$ avec

$a < \min(\text{Re } \omega_1, \text{Re } \omega_2)$ en posant $z = \omega_2^{-s}$, $1-x = e^{-t}$ $t > 0$, on obtient

$$G_{2,2}^{2,0} \left(1-x \middle| \begin{matrix} \omega_1 + \rho_1, \omega_2 + \rho_2 \\ \omega_1, \omega_2 \end{matrix} \right) = \frac{(1-x)^{\omega_2}}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Gamma(s+\omega_1-\omega_2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\omega_1-\omega_2+\rho_1)\Gamma(s+\rho_2)} \cdot e^{ts} \frac{ds}{s}$$

où $b > \max(0, \text{Re}(\omega_1-\omega_2))$.

A part le facteur $(1-x)^{\omega_2}$ on retrouve le transformé de Laplace de la fonction $\frac{\Gamma(s+\omega_1-\omega_2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\omega_1-\omega_2+\rho_1)\Gamma(s+\rho_2)}$ et en se servant d'une table des transformés de Laplace on trouve

$$G_{2,2}^{2,0} \left(1-x \middle| \begin{matrix} \omega_1 + \rho_1, \omega_2 + \rho_2 \\ \omega_1, \omega_2 \end{matrix} \right) = (1-x)^{\omega_2} \frac{x^{\rho_1 + \rho_2 - 1}}{\Gamma(\rho_1 + \rho_2)} \times$$

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \omega_1 - \omega_2 + \rho_2, \rho_1 \\ \rho_1 + \rho_2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

Remarques III.2.6.

① Dans les applications on prendra $\underline{\rho_1 = \rho_2 = \rho \in \mathbb{N}}$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \nu = \frac{m}{n}$.

$$A_1 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, \nu \\ \rho, \rho \end{matrix} \right) = C {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho+1, -\nu-\rho+1 \\ -2\rho+2 \end{matrix} \middle| x \right) \quad \textcircled{a}$$

$$A_2 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, \nu \\ \rho, \rho \end{matrix} \right) = -C {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho+1, \nu-\rho+1 \\ -2\rho+2 \end{matrix} \middle| x \right) \quad \textcircled{b}$$

$$R \left(x \left| \begin{matrix} 0, \nu \\ \rho, \rho \end{matrix} \right. \right) = C \cdot \frac{\Gamma(\rho)^2 \Gamma(-\nu+\rho) \Gamma(\nu+\rho)}{\Gamma(2\rho-1) \Gamma(2\rho) \Gamma(1-\nu) \Gamma(\nu)} \times x^{2\rho-1} (1-x)^\nu$$

$$\times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \nu+\rho, \rho \\ 2\rho \end{matrix} \middle| x \right) = x^{2\rho-1} (1-x) \cdot \frac{A_1 \left(\begin{matrix} 0, \nu \\ 1, \rho, \rho \end{matrix} \right)}{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} \nu+\rho, \rho \\ 2\rho \end{matrix} \middle| 1 \right)} \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \nu+\rho, \rho \\ 2\rho \end{matrix} \middle| x \right) \quad (c)$$

Remarques III.3.7. Pour les polynômes hypergéométriques on a les relations suivantes

$$(1) \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{(-m)_k (b)_k x^k}{(c)_k k!}$$

Si $c \notin \mathbb{Z}^-$:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{(b)_m (-1)^m x^m}{(c)_m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, 1-m-c \\ 1-m-b \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right) \quad (a)$$

Si $a = -m$ et $c = -n$, $b \notin \mathbb{Z}$, on définit le polynôme hypergéométrique de la façon suivante :

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, b \\ -n \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{r=0}^{r=m} \frac{(m)_r (b)_r}{(-n)_r r!} x^r \quad (b)$$

On a

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, b \\ -n \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{(n-m)! (b)_m}{n!} x^m {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, n+1-m \\ 1-m-b \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)$$

III.3.8. Relations de confluence. Approximants de Padé de type I pour la fonction exponentielle.

Théorème III.3.8. Soient ρ_1 et ρ_2 , 2 entiers positifs et $\omega_1 + \omega_2$ deux nombres complexes distincts.

Soient $A_1 \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right)$, $A_2 \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right)$ le système d'approximants

de Padé de type I pour le système $(e^{\omega_1 x}, e^{\omega_2 x})$ au point (ρ_1, ρ_2) et

$R \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right)$ le reste.

On a :

$$A_1 \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right) = C {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1 + 1 \\ -\rho_1 - \rho_2 + 2 \end{matrix} \middle| (-\omega_1 + \omega_2)x \right)$$

$$A_2 \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right) = -C {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_2 + 1 \\ -\rho_1 - \rho_2 + 2 \end{matrix} \middle| (\omega_1 - \omega_2)x \right)$$

$$R \left(x \middle| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right) = C (\omega_1 - \omega_2)^{\rho_1 + \rho_2 - 1} (-1)^{\rho_1 - 1} e^{\omega_2 x} \frac{\Gamma(\rho_1)\Gamma(\rho_2)}{\Gamma(\rho_1 + \rho_2 - 1)\Gamma(\rho_1 + \rho_2)}$$

$$\times x^{\rho_1 + \rho_2 - 1} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_1 + \rho_2 \end{matrix} \middle| (\omega_1 - \omega_2)x \right)$$

Démonstration : Ceci résulte du principe de confluence et des formules (III.3.4) si on remplace ω_1 par $-\omega_1 u$, ω_2 par $-\omega_2 u$, x par $\frac{x}{u}$ et que l'on fait $u \rightarrow \infty$.

Pour $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, on retrouve l'approximant de Padé pour e .

Malher dans son article intitulé "Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms (Math. Annalen. 1967) a utilisé un système d'approximant de type I pour le système $\{e^{\omega_1 x}, \dots, e^{\omega_m x}\}$.

III.3.9. Système d'approximants de Padé de type I dans le cas des fonctions logarithmes.

Nous repartirons de la formule

$$R \left(x \begin{matrix} 1, 2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \begin{matrix} r \\ \rho_m \end{matrix} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(1-x)^z}{\Phi(z)} dz$$

où l'on pose $\Phi(z) = \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \prod_{r=0}^{r=\rho_\mu-1} (z-r)$.

Théorème III.3.9. En posant $R(x|\rho_1, \rho_2 \quad \rho_m) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(1-x)^z}{\Phi(z)} dz$

on a :

$$R(x|\rho_1, \rho_2 \quad \rho_m) = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} A_\mu(x|\rho_1, \rho_2 \quad \rho_m) \text{Log}^{m-\mu}(1-x)$$

$A_\mu(x|\rho_1, \rho_2 \quad \rho_m)$ est un polynôme de degré au plus $\rho_\mu - 1$.

Démonstration : En faisant un développement en série de Laurent de $\frac{1}{\Phi(z)}$ au voisinage de ces pôles on trouve :

$$1) \quad \frac{1}{\Phi(v)} = \sum_{k=m}^{k=\infty} C_k^{(v)} (z-v)^k \quad \begin{matrix} v = 0, 1 \quad \rho_m - 1 \\ 0 < |z-v| < 1 \end{matrix}$$

Comme $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \dots \leq \rho_m$ on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{-m} \neq 0 \quad \text{pour } 0 \leq \nu \leq \rho_1 - 1 \quad , \quad C_{-m}^\nu = 0 \quad \text{pour } \nu > \rho_1 - 1 \\ C_{-m+1} \neq 0 \quad \text{pour } \rho_1 - 1 \leq \nu \leq \rho_2 - 1 \quad , \quad C_{-m+1}^\nu = 0 \quad \text{pour } \nu > \rho_2 - 1 \\ \vdots \\ C_{-1} \neq 0 \quad \rho_{m-1} - 1 \leq \nu \leq \rho_m - 1 \quad , \quad C_{-1}^\nu = 0 \quad \text{pour } \nu > \rho_m - 1 \end{array} \right.$$

En développant $f(x) = (1-x)^Z$ au voisinage de $Z = \nu$ en série on obtient

$$2) \quad (1-x)^Z = (1-x)^\nu \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(\text{Log}(1-x))^k}{k!} (z-\nu)^k \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \rho_m - 1 .$$

Des formules 1) et 2) il résulte que

$$\text{Res}_{z=0} \frac{(1-x)^z}{\Phi(z)} = (1-x)^\nu \sum_{\mu=-m}^{\mu=-1} \frac{C_\mu^{(\nu)}}{(-\mu-1)!} \text{Log}^{-\mu-1}(1-x)$$

et par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} R(x|_{\rho_1, \rho_2} \quad \rho_m) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=\rho_m-1} (1-x)^z \sum_{\mu=-m}^{\mu=-1} \frac{C_\mu^{(\nu)}}{(\mu-1)!} \text{Log}^{-\mu-1}(1-x) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \text{Log}^{m-\mu}(1-x) \sum_{\nu=0}^{\nu=\rho_m-1} \frac{C_{-m+\mu-1}^{(\nu)}}{(m-\mu)!} (1-x)^\nu \end{aligned}$$

$$\text{d'où en écrivant } A_\mu(x|_{\rho_1, \rho_2} \quad \rho_m) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\rho_m-1} \frac{C_{-m+\mu-1}^{(\nu)}}{(m-\mu)!} (1-x)^\nu \quad \mu = 1, 1, \dots, m$$

on en déduit que

$$R(x|_{\rho_1, \rho_2} \quad \rho_m) = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} A_\mu(x|_{\rho_1, \rho_2} \quad \rho_m) \text{Log}^{m-\mu}(1-x)$$

où $A_\mu(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m)$ est un polynôme dont le degré est donné par

$$d_\mu(A_\mu(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m)) = \begin{cases} \rho_\mu - 1 & \text{pour } \mu = 1 \\ \leq \rho_\mu - 1 & \text{pour } \mu = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

On termine la démonstration par un lemme analogue à III.3.5.

Lemme III.3.10. $R(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m)$ n'est pas la fonction identiquement nulle et la famille $A(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m)$ est le système d'approximant de Padé de $\{1, \text{Log}(1-x), \dots, \text{Log}^{m-1}(1-x)\}$.

Démonstration : En écrivant $(1-x)^z = 1 - \binom{z}{1}x + \binom{z}{2}x^2 - \dots$ et en intégrant terme à terme $R(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m)$ on en déduit que

$$R(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \dots$$

avec $a_n = (-1)^{n-1} \text{Res}_{z=\infty} \frac{\binom{z}{n}}{\Phi(z)}$ le degré de $\Phi(z)$ étant $\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \rho_\mu = \sigma$ on en déduit le résultat demandé.

Théorème III.3.11. On a :

$$A_1(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m) = \frac{C(-1)^{m-1}}{\Gamma(m) \cdot \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \Gamma(\rho_\mu)} \times {}_mF_{m-1} \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, -\rho_2+1, \dots, -\rho_m+1 \\ 1, 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| 1-x \right)$$

$$R(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m) = C G_{m,m}^{m,0} \left(\begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m \\ 0, 0, \dots, 0 \end{matrix} \middle| 1-x \right)$$

Démonstration : On a $A_1(x|\rho_1, \rho_2, \rho_m) = \sum_{r=0}^{r=\rho_1-1} \frac{C^{(v)}}{(m-1)!} (1-x)^v$ avec $C_{-m}^{(v)}$ défini comme en III.3.9, on a

$$C_{-m}^r = \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{r!(-1) \cdot (-2) \dots (-\rho_{\mu} + r + 1)} \quad r = 0, \dots, \rho_1 - 1$$

ce qui montre que $A_1(x | \rho_1, \rho_2 \dots \rho_m)$ est un polynôme hypergéométrique (même démonstration que dans le cas binomial).

On a :

$$A_1(x | \rho_1 \dots \rho_m) = \frac{(-1)^{\sigma+m}}{\Gamma(m) \cdot \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \Gamma(\rho_{\mu})} {}_mF_{m-1} \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, -\rho_2+1, \dots, -\rho_m+1 \\ 1, 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| 1-x \right)$$

De même $R(x | \rho_1, \rho_2 \dots \rho_m)$ est une G fonction où $n = 0$, $p = m$, $q = m$, $a_{\mu} = \rho_{\mu}$, $b_{\mu} = 0$, $z = 1-x$ et on a :

$$G_{m,m}^{m,0} \left(1-x \middle| \begin{matrix} \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^*} \frac{\{\Gamma(-s)\}^m (1-x)^s}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} \Gamma(\rho_{\mu} - s)} ds$$

C^* étant le parcours classique de la G-fonction (cf. II.3.2.).

Dans ce cas particulier il n'y a qu'un nombre fini de pôles, c'est pourquoi on peut réduire C^* à un cercle d'orientation négative entourant ces ρ_m pôles.

Corollaire III.3.12. Cas $m = 2$.

$$G_{2,2}^{2,0} \left(1-x \middle| \begin{matrix} \rho_1, \rho_2 \\ 0 \quad 0 \end{matrix} \right) = \frac{x^{\rho_1 + \rho_2 - 1}}{\Gamma(\rho_1 + \rho_2)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \rho_1, \rho_2 \\ \rho_1 + \rho_2 \end{matrix} \middle| x \right)$$

Démonstration : analogue au cas binomial.

Corollaire III.3.13. (Théorème de Padé).

$$\text{On a : } {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} \middle| x \right) = - \frac{\text{Log}(1-x)}{x}$$

$$A_1(x|\rho_1, \rho_2) = c {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1+1, -\rho_2 \\ -\rho_1-\rho_2+1 \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$R(x|\rho_1, \rho_2) = c \frac{((\Gamma(\rho_1)\Gamma(\rho_2))^2}{\Gamma(\rho_1+\rho_2)\Gamma(\rho_1+\rho_2+1)} x^{\rho_1+\rho_2-1} \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \rho_1, \rho_2+1 \\ \rho_1+\rho_2+1 \end{matrix} \middle| x \right)$$

avec $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2+1$, $c \neq 0$ constante réelle, ceci en remplaçant ρ_2 par ρ_2^{-1} on retrouve les résultats de II.1.11.

IV APPLICATIONS ARITHMETIQUES

IV.1.1. Mesure de l'irrationalité de $\exp(\frac{2}{n})$ et $\frac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)}$

Introduction et historique :

- a) E. Borel en 1899 trouve une approximation rationnelle de e telle que l'on ait $|e - \frac{p}{q}| > q^{-c} \log(\log q)$ où c est une constante
- b) I. Popken (1928) trouve comme mesure de l'irrationalité de e une inégalité du type suivant

$$|e - \frac{p}{q}| > |q|^{-2} |q|^{-\frac{\lambda}{\text{Log}(\log|q|)}} \quad \lambda > 0$$

- c) K. Malher (1932 et 1967) montre que pour tout rationnel $r \neq 0$

$$|e^r - \frac{p}{q}| > |q|^{-2} |q|^{-\frac{c}{\text{Log}(\text{Log}|q|)}} \quad (\text{cf. [24]}).$$

avec $c = c(a) > 0$ pouvant être une constante absolue si $|q| > q(r)$.

Malher utilise pour cela les mêmes techniques d'approximations que celles d'Hermite par des approximants de Padé de type I donnés par la formule d'interpolation d'Hermite.

Cependant, pour $r \neq \frac{2}{n}$ nous n'obtenons pas la "meilleure mesure de l'irrationalité de e^r ".

Rappels. On considère l'équation différentielle de Bessel

$$x^2 \omega'' + x\omega' + (x^2 - \nu^2)\omega = 0$$

on sait que si $\nu \notin \mathbb{N}$ elle admet 2 solutions linéairement indépendantes $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$.

on a
$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{(\frac{1}{2}x)^{m+\nu}}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \quad (1)$$

ν est l'ordre de la fonction de Bessel d'après (II.2.4.2) on a :

$$\mathcal{J}_\nu(x) = (\frac{1}{2}x)^\nu \frac{{}_0F_1(\nu+1, -\frac{x^2}{4})}{\Gamma(\nu+1)} \quad (2)$$

Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème IV.1.1. Pour $\nu = \frac{r}{s}$ et $x = \frac{2}{s.m}$ avec r, s, m entiers

et $s \geq 1, m \geq 1$. Alors

$$\left| \frac{\mathcal{J}'_\nu(x)}{\mathcal{J}_\nu(x)} - \frac{p}{q} \right| \geq C' |q|^{-2} \frac{\text{Log}(\text{Log}|q|)}{\text{Log}|q|}$$

pour tous entiers p et q , $p \geq 1$, $q \geq q_0$ et $C = C'(\nu) > 0$, ce qui donne les corollaires suivants.

Corollaire IV.1.2. Pour $\nu = \frac{1}{2}$ l'inégalité du théorème 1 s'applique pour $\text{tg} \frac{1}{n}$ et $\text{tg} \frac{1}{n/\sqrt{n}}$.

Corollaire IV.1.3. Pour tous entiers p et q on a

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2} \frac{\text{Log}(\text{Log}|q|)}{\text{Log}|q|} \quad |q| > q_0$$

Le théorème de Khintchine : cf. I.6.8. montre que ces inégalités constituent les meilleures mesures d'irrationalité possibles.

Démonstration : Le point important est la relation de "contiguité" suivante dite formule de Lommel.

$$\underline{\mathcal{J}_{\nu-1}(x) + \mathcal{J}_{\nu+1}(x) = 2\nu x^{-1} \mathcal{J}_{\nu}(x)} \quad (3)$$

ce qui par récurrence permet de démontrer le lemme suivant :

Lemme IV.1.1.

$$\mathcal{J}_{\nu+m}(x) = \mathcal{J}_{\nu}(x) R_{m,\nu}(x) - \mathcal{J}_{\nu-1}(x) R_{m-1,\nu+1}(x) \quad (4)$$

$$(-1)^m \mathcal{J}_{-(\nu+m)}(x) = \mathcal{J}_{-\nu}(x) R_{m,\nu}(x) + \mathcal{J}_{-\nu-1}(x) R_{m-1,\nu+1}(x) \quad (5)$$

où $R_{m,\nu}(x)$ sont des polynômes de degré m en $\frac{1}{x}$ qu'on appelle polynôme de Lommel. (cf [34])

Lemme IV.1.2.

$$R_{m,\nu}(x) = \frac{\Pi}{2} x (\sin \Pi\nu)^{-1} [\mathcal{J}_{\nu+m}(x) \mathcal{J}_{-\nu+1}(x) + (-1)^m \mathcal{J}_{-\nu-m}(x) \mathcal{J}_{\nu-1}(x)] \quad (6)$$

Démonstration : En utilisant les relations (4) et (5) et la relation suivante

$$\mathcal{J}_{-\nu+1}(x) \mathcal{J}_{\nu}(x) + \mathcal{J}_{-\nu}(x) \cdot \mathcal{J}_{\nu-1}(x) = (2\Pi x)^{-1} \sin \Pi\nu$$

qui provient du fait que le wronskien de 2 solutions de (1) est

$$W(\mathcal{J}_{\nu}, \mathcal{J}_{-\nu}) = -(2\Pi x)^{-1} \sin \Pi\nu$$

Lemme IV.1.3.

$$R_{m,\nu}(x) = \sum_{n=0}^{n \leq \left[\frac{1}{2} m\right]} \frac{(-1)^m (m-n)! \Gamma(\nu+m-n)}{n! (m-2n)! \Gamma(\nu+n)} \left(\frac{1}{2} x\right)^{-m+2n} \quad (7)$$

ou en utilisant les fonctions hypergéométriques généralisées

$$R_{m,\nu}(x) = \frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{1}{2} x\right)^{-m} {}_2F_3 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m, \nu \\ -m, 1-\nu-m \end{matrix} \middle| -x^2 \right) \quad (8)$$

Démonstration : En utilisant l'expression explicite du produit de 2 fonctions de Bessel (cf. Watson p. 295-296)

$$\mathcal{J}_\nu(x) \cdot \mathcal{J}_\mu(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{2} x\right)^{\nu+\mu+2m} \frac{\Gamma(\mu+\nu+2m+1)}{m! \Gamma(\mu+m+1) \Gamma(\nu+m+1) \Gamma(\nu+\mu+m+1)}$$

et en remplaçant dans la formule (6) on obtient le résultat cherché.

Remarque. Le résultat de la formule (8) n'est qu'un cas particulier d'une étude menée par G.V. Chudnovski pour la construction d'un approximant de Padé de type II pour une fonction hypergéométrique généralisée

(Cf : Journal Maths. Pures et Appliquées 5.8. 1979 p. 445-476 formule 1.8 p. 451).

Lemme IV.1.4. (théorème d'Hurwitz)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+\nu+1} \frac{R_{m,\nu}(x)}{\Gamma(\nu+m)} = \mathcal{J}_{\nu-1}(x) \quad (9)$$

Démonstration : On a d'après le lemme IV.1.3.

$$\frac{\left(\frac{1}{2} x\right)^{\nu+m} R_{m,\nu+1}(x)}{\Gamma(\nu+m+1)} = \sum_{n=0}^{n < \frac{1}{2} m} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2} x\right)^{\nu+2n}}{\Gamma(\nu+n+1) \cdot n!} \frac{(m-n)! \Gamma(\nu+m-n+1)}{(m-2n)! \Gamma(\nu+m+1)}$$

En posant $\theta(m,n) = \frac{(m-n)! \Gamma(\nu+m-n+1)}{(m-2n)! \Gamma(\nu+m+1)}$ et en explicitant, on a

$$\theta(m,n) = \frac{(m-n)(m-n-1)}{(\nu+m)(\nu+m-1)} \frac{(m-2n+1)}{(\nu+m-n+1)} .$$

Posons $N = E(|\nu|) =$ partie entière de $|\nu|$, si on a $n > N$, et $m > 2N$, on a $|\theta(m,n)| < 1$. Si on fixe n , on a de plus $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta(m,n) = 1$.

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2} x\right)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \quad \text{étant absolument convergente et } \textcircled{7} \text{ pouvant}$$

s'écrire

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n < \frac{1}{2} m} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2} x\right)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \theta(m, n)$$

On en déduit le lemme en utilisant le théorème de Fubini Lebesgue pour le produit des mesures discrètes sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

De plus la convergence vers $\mathcal{J}_\nu(x)$ étant uniforme sur tout domaine et borné sur \mathbb{C} la convergence de $\textcircled{7}$ est uniforme sur un tel domaine.

Lemme IV.1.5. Majoration du reste.

Pour $z = x+iy$ on a pour tout $w > -\frac{1}{2}$

$$|\mathcal{J}_w(z)| \leq \left|\frac{z}{2}\right|^w \frac{\exp|y|}{\Gamma(w+1)}$$

Démonstration : Nous partirons de la formule intégrale suivante pour la fonction de Bessel

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \mathcal{J}_\nu(z) = 2\pi^{-1/2} \left(\frac{1}{2} z\right)^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \varphi) \cos^{2\nu} \varphi \, d\varphi$$

on en déduit que

$$\Gamma(\nu+1) |\mathcal{J}_\nu(z)| \leq \pi^{-1/2} \left|\frac{1}{2} z\right|^\nu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp|y| |\cos \varphi|^{2\nu} \, d\varphi$$

$$\leq \pi^{-1/2} \exp|y| \left|\frac{1}{2} z\right|^\nu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos \varphi|^{2\nu} \, d\varphi$$

$$\leq \left|\frac{1}{2} z\right|^\nu \frac{\exp|y|}{\Gamma(\nu+1)}$$

Lemme IV.1.6. Si $v = \frac{r}{s}$ et $x = \frac{2}{sn}$ alors pour tout entier $n \geq 1$, $R_{m,v}(x)$ est entier ainsi que $R_{m,v+1}(x)$, (de même si $\frac{2}{x} \in \mathbb{Z}[i]$)

Démonstration : Il suffit de considérer la formule (7)

a) de vérifier que $\frac{\Gamma(v+m-n)}{\Gamma(v+n)}$ est un entier. Ce qui résulte du fait que $n < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ et donc que $v+m-n < v+n$

b) $\Gamma(v+m-n) = (v+m-n)(v+m-n-1)\dots(v-2n+1)\Gamma(v+n)$ et $(\frac{x}{2})^{-m+2n} = (s/n)^{-m+2n}$ ce qui termine la démonstration du lemme.

Lemme IV.1.7. Soit $g(x)$ la fonction réciproque de $a^x \cdot \Gamma(x)$ avec $a > 1$.

Alors pour x assez grand $g(x) = O(\frac{\text{Log } x}{\text{Log}(\text{Log } x)})$.

Démonstration : On pose $f(x) = a^x \Gamma(x)$ qui est strictement croissante pour $x > 2$ donc admet une fonction réciproque.

On pose $y = a^x \Gamma(x)$ $\text{Log } y = x \text{Log } a + \text{Log } \Gamma(x)$.

Or d'après la formule de Stirling pour x assez grand.

Il existe $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tels que

$$C_2 \times \text{Log } x < \text{Log } \Gamma(x) < C_1 \times \text{Log } x \quad (1)$$

D'où il existe $A > 0$, $B > 0$ tels que

$$\frac{1}{A \text{Log } x} \leq \frac{x}{\text{Log } y} \leq \frac{1}{B \text{Log } x} \quad (2)$$

(1) implique que $\text{Log } B + \text{Log}(\text{Log } x) + \text{Log } x \leq \text{Log}(\text{Log } y) \leq \text{Log } A + \text{Log}(\text{Log } x) + \text{Log } x$. D'où l'inégalité

$$\left[\frac{\text{Log } B}{\text{Log } x} + \frac{\text{Log}(\text{Log } x)}{\text{Log } x} + 1 \right] \leq \frac{\text{Log}(\text{Log } y)}{\text{Log } x} \leq \left[\frac{\text{Log } A}{\text{Log } x} + \frac{\text{Log}(\text{Log } x)}{\text{Log } x} + 1 \right]$$

ce qui implique que pour x assez grand il existe $C'_1 > 0$ et $C'_2 > 0$ tels que $C'_1 \text{Log } x \leq \text{Log}(\text{Log } g) \leq C'_2 \text{Log } x$ et en utilisant (2) pour x assez grand il existe $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ tels que

$$\frac{K_2 \text{Log } y}{\text{Log}(\text{Log } y)} \leq x \leq \frac{K_1 \text{Log } y}{\text{Log}(\text{Log } y)}$$

d'où le résultat.

Fin de la démonstration du théorème.

En utilisant les formules (4) et (9) on obtient la majoration

$$\left| \frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)} R_{m,\nu}(x) - R_{m-1,\nu+1}(x) \right| < \frac{\Gamma(\nu+m) \cdot C}{\Gamma(\nu+m+1) |R_{m,\nu}(x)|}$$

où C est une constante dépendant de l'estimation asymptotique de $R_{m,\nu}(x)$.

D'où l'on obtient facilement

$$\left| \frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)} - \frac{R_{m-1,\nu+1}(x)}{R_{m,\nu}(x)} \right| < \frac{C}{(\nu+m+1) |R_{m,\nu}(x)|}$$

ce qui montre que pour $x = \frac{2}{sn}$ que $\frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)}$ est irrationnel.

Puisque $\left| \frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)} - \frac{R_{m-1,\nu+1}(x)}{R_{m,\nu}(x)} \right| < \frac{C}{|R_{m,\nu}(x)|^{2(\nu+m+1)}}$ en posant

$\frac{R_{m-1,\nu+1}(\frac{2}{sn})}{R_{m,\nu}(\frac{2}{sn})} = \frac{p_m}{q_m}$, on en déduit que si $x = \frac{2}{sn}$

$$\left| \frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)} - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{C}{(\nu+m+1) q_m^2} < \frac{1}{2q_m^2} \quad \text{si } m > 2C$$

ce qui montre que les fractions irréductibles parmi $\frac{p_m}{q_m}$ sont les réduites du développement en fraction continuée régulière de $\frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)}$ (si $m > 2C$) en raison du théorème de Lagrange (théorème 1.3.3.). De l'estimation asymptotique

$$q_m = R_{m,\nu}(x) = q_m^2 \frac{\Gamma(\nu+m) \mathcal{J}_{\nu-1}(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+\nu+1}}$$

avec $x = \frac{2}{sn}$ et $\nu = \frac{r}{s}$, on déduit que $|q_m| \sim (sn)^{m+1} \Gamma(m)$.

Or pour tout N assez grand il existe m tel que

$$|q_m| \leq N < |q_{m+1}|$$

car il existe $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tels que

$$C_1 (sn)^m \Gamma(m-1) < N \leq C_2 (sn)^{m+1} \Gamma(m)$$

en posant $g(n)$ la fonction inverse de $(sn)^{m+1} \Gamma(m)$ on en déduit que

$$g\left(\frac{N}{C_1}\right) < m < g\left(\frac{N}{C_2}\right) + 1.$$

On termine en utilisant le lemme (IV.1.7).

D'où l'existence d'un réel $C > 0$ tel que

$$\left| \frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)} - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^2 g(q)} \quad \text{car}$$

si $\frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q}$ ceci résulte de la démonstration car

$$\left| \frac{\mathcal{J}_\nu(x)}{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)} - \frac{p_m}{q_m} \right| \sim \frac{C}{q_m^2 g(q)}$$

Si $\frac{p_m}{q_m} \neq \frac{p}{q}$.

Pour q assez grand on peut trouver m tel que

$$\frac{1}{q q_m} > \frac{c}{q^2 g(q)} \quad \text{et} \quad q_m > 2q.$$

Il suffit de prendre m tel que $g(\frac{qg(q)}{c}) > m > g(2q)$.

De l'inégalité $\frac{qg(q)}{c} > q_m > 2q$ pour $q > q_0$ il résulte que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{J}_v(x)}{v-1(x)} - \frac{p}{q} \right| &\geq \left| \frac{p_m}{q_m} - \frac{p}{q} \right| - \left| \frac{\mathcal{J}_v(x)}{\mathcal{J}_{v-1}(x)} - \frac{p_m}{q_m} \right| \\ &\geq \frac{1}{q q_m} - \frac{1}{q_m^2 g(q_m)} > \frac{c}{2q^2 g(q)}. \end{aligned}$$

Donc pour q assez grand

$$\left| \frac{\mathcal{J}_v(x)}{\mathcal{J}_{v-1}(x)} - \frac{p}{q} \right| > \frac{c'}{q^2 g(q)}$$

La formule $x \mathcal{J}'_v(x) - v \mathcal{J}_v(x) = -x \mathcal{J}_{v+1}(x)$ termine la démonstration du théorème.

Le corollaire IV.1.3 utilise les entiers de Gauss tels que $\frac{2}{x} \in \mathbb{Z}(i)$ pour le lemme IV.1.6. La suite de la démonstration restant inchangée.

Développement en fraction continuée de e et e^2 .

Théorème IV.1.8. On a

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots] = [2, \underbrace{1, 2m, 1}_{\text{période } 2}]$$

$$e^2 = [7, 3m-1, 1, 3m, 12m+6, \dots] \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\text{th } \frac{1}{y} = [0, y, 2y, 3y, \dots]$$

Démonstration : Il y a plusieurs façons de déterminer le développement de e

a) cf. Lang (chapitre V), p. 73,74,75.

On part du développement en série ${}_0F_1(\gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{(\gamma, n)n!}$ et de la relation de contiguité suivante

$${}_0F_1(\gamma, x) = {}_0F_1(\gamma+1, x) + \frac{x}{\gamma(\gamma+1)} {}_0F_1(\gamma+2, x)$$

ce qui donne facilement le développement de Lambert

$$\frac{e^{\frac{1}{y}} - e^{-\frac{1}{y}}}{e^{\frac{1}{y}} + e^{-\frac{1}{y}}} = [0, y, 3y, 5y, \dots] \quad \text{d'où pour } y = 2$$

$\frac{e-1}{e+1} = [0, 2, 6, 10, \dots]$ on obtient e par quelques transformations supplémentaires.

b) On a aussi par exemple

$$\frac{\mathcal{J}_{\nu-1}(x)}{\mathcal{J}_{\nu}(x)} = \frac{2\nu}{x} - \frac{1}{\frac{2\nu+2}{x} - \frac{1}{\frac{2\nu+4}{x} - \dots}} = \left[\frac{2\nu}{x}, -\frac{2\nu+2}{x}, -\frac{2\nu+4}{x}, -\frac{2\nu+6}{x}, \dots \right]$$

d'où $\frac{\mathcal{J}_{\nu-1}(2ix)}{\mathcal{J}_{\nu}(2ix)} = \left[\frac{\nu}{x}, \frac{\nu+1}{x}, \frac{\nu+2}{x}, \dots, \frac{\nu+k}{x} \right]$ pour $x = \frac{2}{y}$ on en déduit le résultat de Lambert.

c) Une autre méthode proposée par Legendre consiste à partir de ${}_0F_1(\gamma, x)$ vérifiant l'équation différentielle

$$xy'' + \gamma y' = y \quad (\text{Cf. II.4.2.1})$$

Ce qui conduit facilement à la fraction continuée

$$\frac{y}{y'} = \gamma + \frac{x}{\gamma+1 + \frac{x}{\gamma+2 + \frac{x}{\gamma+3 \dots}}} \quad \gamma \neq 0, -1, -2$$

En posant $\gamma = \frac{1}{2}$ on obtient le développement en fraction continuée de \sqrt{x} . $\text{Coth } 2\sqrt{x}$.

On pourrait se demander si cette méthode est généralisable à une équation linéaire du second ordre de la forme

$$y = Q_0 y' + P_1 y'' \tag{1}$$

De (1) on en déduit facilement la fraction continuée

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \frac{P_1}{Q_1 + \frac{P_2}{Q_2 + P_3}} \tag{2}$$

où P_n et Q_n sont définis par $y^{(n)} = Q_n y^{(n+1)} + P_{n+1} y^{(n+2)}$, ce qui conduit aux formules de récurrence

$$Q_n = \frac{Q_{n-1} + P'_n}{1 - Q'_{n-1}} \quad P_{n+1} = \frac{P_n}{1 - Q'_{n-1}}$$

cependant même si P_1 et $Q_0 \in \mathbb{Z}[x]$ on ne peut prouver en général l'irrationalité de $\frac{y'}{y}(x)$ pour $x \in \mathbb{Q}$ car (2) $\frac{y'}{y}(x) = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ n'est pas le développement en fraction continuée régulière c'est-à-dire que les réduites ne vérifient pas

$$\left| \frac{y'}{y}(x) - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}$$

sauf dans le cas des réduites liées à $\mathcal{J}_\nu(x)$ qui donnent des résultats pour $\frac{\text{tg } x}{x}$ $x \neq 0$ et x^2 irrationnel, $\text{th } \frac{1}{y}$, e , e^2 .

On démontre aussi que $\frac{\mathcal{J}'_0(1)}{\mathcal{J}_0(1)}$ admet comme développement en fraction continuée régulière $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots}}}$ (cf. IV.1.8.b) et cette

fraction continuée donne également la meilleure mesure de l'irrationalité d'un tel nombre qui est de plus transcendant. (cf. [35])

Pour e^3 il n'y a plus de développement connu en fraction continuée régulière et ces méthodes ne s'appliquent plus.

V APPROXIMATIONS RATIONNELLES DES LOGARITHMES
DE NOMBRES RATIONNELS

V.I. INTRODUCTION ET HISTORIQUE DE LA QUESTION.

Les preuves classiques de l'irrationalité et de la transcendance de π et $\log \alpha$ pour α algébrique $\alpha \neq 0,1$ donnent des bornes très pauvres pour la mesure de l'irrationalité de tels nombres.

J. Popken fut le premier à démontrer que

$$\left| \text{Log } \alpha - \frac{p}{q} \right| > \exp(-C_2^q) \quad \text{pour } C_2 = C_2(\alpha).$$

Puis K. Malher améliora le résultat en démontrant que

$$\left| \text{Log } \alpha - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-C} \text{Log } H(\alpha),$$

$H(\alpha)$ étant la hauteur du nombre algébrique α et C une constante $C \leq 70$.

Baker en utilisant les formes linéaires de logarithmes arrive à

$$\left| \text{Log } \alpha - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-C_3 d^2 \cdot \text{Log } H(\alpha)}$$

avec $C_3 > 0$, $d = \text{deg } \alpha$. Pour α proche de 1 on a le théorème suivant (Baker). (cf. [3])

Théorème V.I.1. Pour $a \geq 1$ on a

$$\left| \text{Log} \left(1 + \frac{1}{a} \right) - \frac{p}{q} \right| > C(a) \cdot |q|^{-\nu(a)}$$

$$\text{avec } \nu(1) = 12,5, \quad \nu(2) = 7, \quad \nu(a) = \frac{\text{Log}(4\sqrt{2} a^2 / (a+1))}{\text{Log}(\sqrt{2} a^3 / (a+1)^2)} \quad a \geq 3$$

$$C(1) = 10^{-10^5} \quad C(0) = (a\sqrt{2})^{-10^4} \quad a > 2$$

et

$$\left| \text{Log} \frac{b}{a} - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-X} \quad |q| \geq q_0(a,b) \quad X > 1$$

$$h = b-a > 0 \quad \rho = 2 \frac{X+1}{X-1} \quad a > ((4\sqrt{2})h)^{\rho} .$$

Nous allons utiliser 3 méthodes :

- la première s'appuie sur les propriétés de ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, \alpha \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right)$ et son développement en fraction continuée.

- la deuxième sur les approximants de Padé de type I d'un système de logarithme que nous verrons au chapitre VI.

- la troisième sur la technique des séries génératrices et des équations différentielles (chapitre VII).

V.1.2. Mesure de l'irrationalité de $\text{Log}(1+x)$ pour x rationnel proche de 0. (1ère méthode).

Théorème V.1.2. Soient a, b, p, q des entiers positifs. Supposons que

$$\left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{p}{q}} \right\}^2 \cdot q < \frac{1}{e} .$$

Alors $\text{Log}(1 + \frac{p}{q})$ est irrationnel et de plus pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $b_0(\varepsilon)$ tel que $b \geq b_0(\varepsilon)$ implique que

$$\left| \text{Log}(1 + \frac{p}{q}) - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{b^{\mu_{p,q} + \varepsilon}}$$

avec

$$\mu_{p,q} = \frac{\text{Log}\{q(1 + \sqrt{1 + \frac{p}{q}})^2\} + 1}{\text{Log}\{\frac{q}{p}(1 + \sqrt{1 + \frac{p}{q}})^2\} - 1} + 1$$

Corollaire V.1.3. $\text{Log}(1 + \frac{1}{m})$ est irrationnel pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

et $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{1,m} = 2.$

Corollaire V.1.4. Log 2 a pour mesure d'irrationalité

$$\mu_{1,1} \approx 4,622.$$

D'après le théorème II.1.11 pour $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, on a

$$\psi(x) = -\frac{\text{Log}(1 - \frac{1}{x})}{2x}$$

$$P_n^{1,2}(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^n (1-x)^n] = P_n(x)$$

$n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre.

$$Q_n^{1,2}(x) = \int_0^1 \frac{P_n(x) - P_n(u)}{x-u} du$$

$$R_n^{1,2}(x) = x^{-(n+1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n+1, n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)$$

Posons $Q_n(x) = x Q_n^{1,2}(x)$ polynôme de degré n

$$R_n(x) = -x^{-n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n+1, n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)$$

on obtient l'égalité

$$\frac{1}{2} \text{Log}(1 - \frac{1}{x}) P_n(x) - Q_n(x) = R_n(x) \quad (1)$$

Lemme V.1.2.1.

a) $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients entiers

b) $Q_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \left\{ \frac{1}{n-k+1} - \frac{2}{2k-1} \right\} P_{n-2k+1}$ où $N = \left[\frac{n+1}{2} \right]$ (for-

mule de Christoffel-Gobbsen).

Démonstration :

a) il est facile de voir que $P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k C_{n+k}^k (-x)^k$

b) $Q_n(x)$ étant de degré n il est combinaison linéaire dans la base P_n des P_n . Cherchons les coefficients de cette combinaison.

Soit $y(x)$ la 2ème solution de l'équation différentielle vérifiée par ${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| x\right)$ qui est

$$x(1-x)y'' + (1+2x)y' - n(n+1)y = 0 \quad (2)$$

on posera D l'opérateur

$$x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + (1-2x) \frac{d}{dx} - n(n+1).$$

Calculons $D\left(\frac{1}{2} P_n(x) \cdot \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x}\right) - v(x)\right)$ on trouve

$$2P'_n(x) - Dv$$

Pour que y vérifie (2) il suffit que $Dv = 2P'_n(x)$. Or on sait que le reste vérifie l'équation (2) ce qui implique que v peut être calculé et on a

$$\underline{Dv = 2P'_n(x)}$$

(cf. Corollaire II.1.11). v sera donc la solution polynômiale de cette équation.

Un calcul facile (cf. Smirnov p. 504) donne

$$P'_n(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} (2n-k+3) P_{n-2k+1}(x) \quad N = \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

En considérant l'équation différentielle vérifiée par $P'_{n-2k+1}(x)$ on en déduit que l'équation

$$x(1-x)\omega'' + (1-2x)\omega' - n(n+1)\omega = (2n-4k+3) P_{n-2k+1}(x)$$

a pour solution particulière $\omega(x) = \frac{2n-4k+3}{2(2k-1)(n-k+1)} \cdot P_{n-2k+1}$ on en déduit le résultat annoncé.

Lemme V.1.2.1. "Estimation asymptotique du reste".

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} |R_n(x)| = \text{Log} \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} \right)^2$$

Démonstration : On peut écrire le reste sous la forme

$(-1)^n \int_0^1 u^n (1-u)^n (x-u)^{-(n+1)} du$ d'où en posant $f(u) = \frac{u(1-u)}{x-u}$ il suffit de trouver le maximum de cette fonction sur $]0,1[$ qu'on obtient pour

$u(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$ on obtient le résultat annoncé en remplaçant dans l'intégrale.

Lemme V.1.2.3. Estimation asymptotique du ppcm $(1, 2, \dots, n)$

En notant $[1, 2, \dots, n] = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} [1, 2, \dots, n]}{n} = 1$ ou $[1, 2, \dots, n]$ équivalent à e^n quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration : On a

$$[1, 2, \dots, n] = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\alpha_p(1, 2, \dots, n)}$$

où $\alpha_p(1, 2, \dots, n)$ est le plus grand exposant k tel que p^k divise n .

On a donc $p^k \leq n < p^{k+1}$ d'où $k = \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor$.

On en déduit que

$$\text{Log} [1, 2, \dots, n] = \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \right\rfloor \text{Log } p \quad \textcircled{1}$$

Cette fonction est représentée par $\psi(n)$ en théorie analytique des nombres et on a aussi

$$\psi(n) = \sum_{\substack{p^{\nu} | n \\ p \leq n \\ p \text{ premier}}} \text{Log } p = \sum_{n=1}^{n=\infty} \theta\left(n^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

où $\theta(n) = \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n}} \text{Log } p.$

Rosser et Shoenfeld établissent que pour $n \geq 121$ on a

$$1 - \frac{1}{\text{Log } n} + \frac{0,98}{n^{1/2}} < \frac{\psi(n)}{n} < 1 + \frac{1}{2\text{Log } n} + \frac{1,02}{n^{1/2}} + \frac{3}{n^{1/3}}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}(1,2, \dots, n)}{n} = 1$ (en fait on a $\frac{\psi(x)}{n} \leq 1,03883$ le maximum étant atteint pour $n = 113$).

Dans la pratique il est suffisant à partir de ① de vérifier que

$$\frac{\text{Log}(1,2, \dots, n)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{p \text{ premier}} \frac{\text{Log } n}{\text{Log } p} \text{Log } p = \text{Log } n \Pi(n)$$

le théorème des nombres premiers entraînant que

$$\overline{\lim} \frac{\text{Log}(1,2, \dots, n)}{n} = \overline{\lim} \frac{\Pi(n)}{n} \text{Log } n = 1$$

Dans la suite on va poser

$$P_n\left(-\frac{1}{x}\right) = b_n$$

$$-x d_n Q_n\left(-\frac{1}{x}\right) = a_n$$

où $d_n = \text{ppcm}(1,2, \dots, n)$

Lemme V.1.4. (Relations de contiguité).

$a_n, b_n, R_n\left(\frac{1}{x}\right)$ vérifient la même équation récurrence du 2ème ordre

$$n u_n - (2n-1)\left(1 + \frac{2}{x}\right) u_{n-1} + (n-1)u_{n-2} = 0$$

$b_n, R_n\left(\frac{1}{x}\right)$ en sont 2 solutions linéairement indépendantes, $R_n\left(\frac{1}{x}\right)$ étant la solution non polynômiale.

Démonstration : c'est évident en utilisant la relation de récurrence du 2ème ordre vérifiée par les polynômes de Legendre.

Pour $R_n\left(\frac{1}{x}\right)$ il suffit de considérer

$$\int_0^1 \frac{\{n P_n(u) - (2n-1)(1-2u)P_{n-1}(u) + (n-1)P_{n-2}(u)\} du}{1 + ux} = 0$$

qui résulte du fait que $\int_0^1 P_{n-1}(u) du = 0$ si $n \geq 2$.

Lemme V.1.5. Théorème de Poincaré.

Soit (u_n) une suite satisfaisant à l'équation récurrente du 2ème ordre $a_n u_n + b_n u_{n-1} + c_n u_{n-2} = 0$ où

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \\ c_n \rightarrow c \end{array} \right\} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Supposons de plus que le polynôme $ax^2 + bx + c = 0$ ait 2 racines de modules distincts.

Alors si $u_n \neq 0$ pour une infinité de valeurs de n on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ où ρ est une racine de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Remarques. Ce lemme va donner des équivalents asymptotiques pour les solutions des équations aux différences finies, il est d'un usage

courant dans de nombreux problèmes de suites liées à des récurrences linéaires du 2ème ordre.

Dans la majorité des cas on peut s'en passer (cf. chap. VI) car les suites obtenues sont liées aux fonctions hypergéométriques.

La démonstration se trouve dans (Leçons sur les récurrences. Paul Montel).

On en déduit les équivalents asymptotiques pour a_n et b_n . Si α et β désignent les racines de l'équation

$$X^2 - 2\left(1 + \frac{2}{x}\right)X + 1 = 0$$

Comme $\alpha\beta = 1$ et $|R_n(x)| < P_n(x)$ on en déduit que

$$|P_n(-\frac{1}{x})| \text{ équivalent à } |\alpha|^n \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$|R_n(-\frac{1}{x})| \text{ équivalent à } |\beta|^n \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Fin de la démonstration du théorème.

En posant $I_n = -x R_n(-\frac{1}{x})$, on en déduit que $b_n \text{Log}(1+x) + \frac{a_n}{d_n} = I_n$
 $\Rightarrow \text{Log}(1+x) + \frac{a_n}{b_n d_n} = \frac{I_n}{b_n}$. On pose $x = \frac{p}{q}$ donc $a_n = -\frac{p}{q}$ donc

$$a_n = -\frac{p}{q} Q_n(-\frac{q}{p}) \text{ a pour dénominateur } p^{n-1} q d_n$$

$$b_n d_n = d_n p_n(-\frac{q}{p}) \text{ a pour dénominateur } p^n$$

donc en multipliant les 2 expressions par $p^n q d_n$ on travaille dans \mathbb{Z}

$$\text{et on a posé } A_n = p^n d_n q q_n$$

$$B_n = p^n d_n b_n$$

$$\mathcal{J}_n = p^n d_n I_n.$$

On a $\text{Log}(1 + \frac{p}{q}) + \frac{A_n}{B_n} = \frac{J_n}{B_n}$.

En utilisant le lemme V.1.2.2. on a

$$|J_n| \leq p^{n+1} \left\{ \frac{1}{1 + \sqrt{1+p/q}} \right\}^{2n} d_n$$

et comme d'après V.1.3.2.3 $d_n \sim e^n$ quand $n \rightarrow \infty$.

On en déduit que

$$|J_n| \leq p \cdot \text{eq}(1 - \sqrt{1+p/q})^{2n} \tag{1}$$

Reste à démontrer que J_n , donc I_n , ne s'annule pas pour n assez grand, ceci résulte du lemme suivant (cf. lemme de Poincaré).

Lemme V.1.6. Soit f une fonction continue et P_n une suite de polynômes orthogonaux sur $[0,1]$. Supposons que $\int_0^1 f(x) \cdot P_n(x) dx = 0$ pour tout $n \geq N$.

Alors f est un polynôme de degré $< N$.

Démonstration : On écrit $f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k P_k(x)$ donc $\int_0^1 f(x) P_n(x) dx = a_n = 0$ pour tout $n \geq N$ donc f est un polynôme de degré $< N$.

Fin de la démonstration (suite)

Comme $|P_n(-\frac{1}{x})| \sim |\alpha|^n$ et $|J_n|$ majoré par (1) on détermine la mesure de l'irrationalité de $\text{Log}(1 + \frac{p}{q})$ en utilisant le théorème I.6.4.

Théorème V.2.1. Le nombre $\Pi\sqrt{3}$ est irrationnel et pour tout $\epsilon > 0$

$$|\Pi\sqrt{3} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^{\mu+\epsilon}} \quad \text{pour } q \geq q_0(\epsilon)$$

avec $\mu = \frac{2|\text{Log}(\sqrt{1+x+1})| + 1}{2|\text{Log}(\sqrt{1+x-1})| - 1} = 8,3099$ avec $x = \exp(\frac{2i\Pi}{3})$.

Démonstration : On remarque d'abord que si $x = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ alors $\text{Log}(1+x) = \frac{i\pi}{3}$.

De plus $\sup_{0 \leq u \leq 1} \frac{u(1-u)}{|1+ux|} = \sup \frac{u(1-u)}{\sqrt{u^2 - u + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ on en déduit que $|I_u(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n$

De l'égalité $\frac{1}{2} \text{Log}(1+x) P_n\left(-\frac{1}{x}\right) - Q_n\left(-\frac{1}{x}\right) = x^n {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \middle| x\right) = I$, on en déduit

$$d_n I_n(x) = d_n P_n\left(-\frac{1}{x}\right) \text{Log}(1+x) - Q_n\left(-\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

Si x est une unité de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, il en est de même de $-\frac{1}{x}$ et en posant $-\frac{1}{x} = j$ on remarque que $j^3 = -1$.

Ceci implique que $d_n P_n(j)$ et $Q_n(j)$ sont des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ car de la forme $\frac{u+v\sqrt{-3}}{2}$, u et v étant de même parité.

De (1) découle l'inégalité $|d_n I_n| \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{e}{2\sqrt{3}}\right)^n$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \frac{\pi}{3} + b_n \right| = 0 \quad \text{en posant} \quad \begin{aligned} a_n &= d_n P_n\left(-\frac{1}{x}\right) \\ b_n &= -Q_n\left(-\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

En explicitant a_n et b_n en se servant de la remarque $j^3 = -1$, on trouve 2 suites a'_n, b'_n et a''_n, b''_n d'entiers rationnels tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n \pi\sqrt{3} + b'_n| \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a''_n \pi\sqrt{3} + b''_n| = 0.$$

Donc $\pi\sqrt{3}$ est irrationnel.

Pour pouvoir se servir du lemme de Poincaré, on remarque d'abord que les entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ forment un ensemble discret de \mathbb{R} et que en multipliant les 2 membres de l'égalité (1) par $1+x$ l'une au moins des 2 suites d'approximations vérifient les conditions du théorème 1.6.4 ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarques.

a) si λ est tel que $\frac{1}{\lambda}$ est un entier de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ cette méthode montre que $\text{Log}(1+\lambda) \notin \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ (l'ensemble des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ est discret dans \mathbb{R}).

Mais ceci n'implique pas que $\text{Im}(\text{Log}(1+\lambda))$ et $\text{Re}(\text{Log}(1+\lambda)) \notin \mathbb{Q}$ c'est la difficulté que l'on rencontre avec Π en effet

$$\text{Log}(1+i) = \frac{1}{2} \text{Log } 2 + \frac{i\Pi}{4} .$$

Et comme $\text{Log}(1+i-1) = \frac{i\Pi}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |(i-1)|^n I_n(i-1) \neq 0$, on ne peut même pas prouver que Π est irrationnel par cette méthode.

b) le résultat d'Apery implique que si $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\left| \frac{\Pi^2}{k} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{11,851+\varepsilon}} \quad \forall q \quad q \geq q_0(\varepsilon)$$

Donc pour tout entier $k > 0$

$$\left| \frac{\Pi}{\sqrt{k}} + \frac{p}{q} \right| \left| \frac{\Pi}{\sqrt{k}} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{\Pi^2}{k} - \frac{p^2}{q^2} \right| > \frac{1}{q^{23,702+\varepsilon}}$$

pour $q \geq q_1(\varepsilon, k)$ d'où

$$\left| \frac{\Pi}{\sqrt{k}} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{23,702+\varepsilon}} \quad \text{pour } q \geq q_2(\varepsilon, k)$$

quand $k = 3$ le théorème II donne une meilleure mesure d'irrationalité.

c) En se servant du théorème II.1.11 pour ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, -1/k \\ 1 \end{matrix} \middle| x \right)$ on peut trouver une mesure de l'irrationalité de $(1-x)^{1/k}$ les méthodes sont les mêmes et conduisent aux polynômes de Jacobi au lieu de ceux de Legendre.

Nous allons étudier ce problème dans le chapitre suivant par la méthode des approximants de Padé de type I.

VI FORMULES D'HERMITE POUR LES APPROXIMANTS DE PADÉ
DES FONCTIONS BINÔMES ET DE LOGARITHMES ET MESURES D'IRRATIONALITÉ

Théorème VI.1. (Baker) Cf. [1] et [2]

On pose $\tilde{\sigma}_n = \prod_{p|n} \frac{1}{p^{p-1}}$ et on suppose que m et n sont des entiers tels que $n \geq 3$ et $1 \leq m \leq n$.

Soient a et b 2 entiers positifs pour lesquels $\frac{7}{8} a \leq b < a$ et on suppose que $a-b$ est divisible par n .

Supposons de plus que $\lambda = 4b(a-b)^{2n} \tilde{\sigma}_n^{-1} > 1$.

Alors $x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$ satisfait l'inégalité $|x - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^r}$ pour tous entiers p et q , $q > 0$, où a et c sont donnés par

$$\lambda^{r-1} = 2\tilde{\sigma}_n^{r-1}(a+b) \quad \text{et} \quad \frac{1}{c} = 2^{a+2}(a+b).$$

Corollaire VI.1. On a $|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^r}$ avec $a \approx 2,955$ et $c = 10^{-6}$.

On peut faire de même avec $\sqrt[3]{17}$, $\sqrt[3]{19}$, $\sqrt[3]{20}$, $\sqrt[3]{37}$.

Démonstration du corollaire. Pour $\sqrt[3]{2}$ on pose $a = 128$, $b = 125$ et on applique le théorème aux rationnels de la forme $\frac{4p}{5q}$.

Pour $\sqrt[3]{17}$ on a $a = 3 \cdot (18)^3 = 17496$, $b = a-3 = 3 \cdot 17 \cdot 7^3$.

On a $a \approx 2,4$, $c > 10^{-9}$ et on prend des rationnels de la forme $\frac{18q}{7p}$.

Pour $\sqrt[3]{19}$ on prend $a = 3 \cdot (8^3+1)$ et $b = a-3$

" $\sqrt[3]{20}$ " " $a = 3(19^3+1)$ et $b = a-3$

" $\sqrt[3]{37}$ " " $a = 3 \cdot 10^3$ et $b = a-3$

Démonstration du théorème. Baker "Rational Approximations of $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic Numbers" (Proc. London Math. Soc. 1964). (cf. [1] et [2])

On peut remarquer que Baker utilise un approximant de Padé de $\frac{1}{(1-x)^p}$ et il démontre que pour tout $x \in]0,1[$ on a

$$A_n(x) - (1-x)^\alpha B_n(x) = x^{2n+1} A_n(1) E_n(x) \quad \text{où } \alpha = \frac{1}{p}$$

avec

$$A_n(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\alpha-n, -n \\ -2n \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$B_n(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha-n, -n \\ -2n \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$E_n(x) = \frac{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\alpha+n+1, n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \middle| x \right)}{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\alpha+n+1, n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \middle| 1 \right)}$$

Nous allons démontrer un théorème "un peu meilleur" dû à Choodnovski.

Théorème VI.2. (G.V. Schudnovski)

Soient 2 entiers satisfaisant à $1 \leq b < a$ et m et n , deux entiers vérifiant $1 \leq m < n$.

Soit μ_n un dénominateur de $\frac{a-b}{n}$ c'est-à-dire que

$$\mu_n | n \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_n = \prod_{p|n} p^{\left(\frac{1}{p-1}\right)}$$

si $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \tilde{\sigma}_n \mu_n < 1$ alors pour tous p et q entiers quelconques on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left| \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q} \right| > q^{-\chi-\mu} \quad \text{où} \quad q \geq q_0(a,b)$$

avec
$$\chi = 1 - \frac{\text{Log}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \mu_n \overset{\sim}{\sigma}_n\}}{\text{Log}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \mu_n \overset{\sim}{\sigma}_n\}}$$

Corollaire VI.2.1. Pour $|q| > q_0$ on a $|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}| > |q|^{-2,94703}$

Remarques sur les théorèmes VI.1 et VI.2. Pour $\sqrt[3]{2}$ la mesure de l'irrationalité obtenue par G.V. Chudnovski n'est pas sensiblement meilleure que celle obtenue par Baker.

Baker avait lui-même fait remarquer dans ce même article que d'après les oeuvres de Riemann on pouvait améliorer ces mesures d'irrationalité en utilisant des équivalents asymptotiques pour le reste et le dénominateur de l'approximant de Padé.

L'avantage de la démonstration de Baker est que pour des procédés n'utilisant que l'arithmétique il obtient cette mesure d'irrationalité dès que $q \geq 1$.

Chudnovski s'est donc servi des résultats de Riemann qu'il a retrouvé par la formule d'interpolation d'Hermite et donne d'autres résultats que l'on va découvrir dans ce paragraphe.

(Dans le corollaire on prend $a = 128$ et $b = 125$, $\mu_n = 1$, $\sigma_n = \sqrt{3}$).

Démonstration du théorème.

Lemme VI.2.2. Estimation asymptotique de $A_i \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right)$ et $R \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right)$ Riemann.

En posant $\rho_i = a_i + \rho$, ρ entier et $0 < x < 1$.

Alors pour ρ assez grand devant $x, a_1, a_2, \omega_1, \omega_2$ on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \text{Log} \left| R \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right) \right| = \text{Log}(1 - \sqrt{1-x})^2$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \text{Log} \left| A_i \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right) \right| = \text{Log}(1 + \sqrt{1-x})^2$$

Dans la suite on va poser $\omega_1 = 0, \omega_2 = \nu$.

Démonstration : On va utiliser la formule III.3.6.

Pour cela il nous faut une formule intégrale de Pochhammer pour les polynômes hypergéométriques (cf. II.2.3, b)).

On a :

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \mathbb{R} \right) = \frac{-i\Gamma(c)\exp(-i\pi b)}{4\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin \pi b \cdot \sin \pi(c-b)} \int_c t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}$$

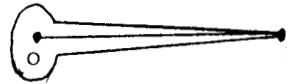
$$\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} c$$

$$|\arg(-x)| < \pi$$

on pose $a = -\rho - a_1 + 1$

$$b = \omega_1 - \omega_2 - \rho - a_2 + 1$$

$$c = -2\rho + 2 - a_1 - a_2$$



On va évaluer $\int_c t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} dt$ par la méthode du

col c'est-à-dire

$$\int_c t^{-\rho - a_2 + \omega_1 - \omega_2} (1-t)^{-\rho - a_1 + \omega_2 - \omega_1 + 1} (1-tx)^{\rho + a_1 - 1} dt$$

on va poser $\psi(t) = t^{\omega_1 - \omega_2 - a_2} (1-t)^{-a_1 + \omega_2 - \omega_1 + 1} (1-tx)^{a_1 - 1}$ et

$\exp \psi(t) = \frac{1-t \cdot x}{t(1-t)}$. Le maximum du module de $\exp \psi(t)$ est obtenu par la racine de la dérivée de $\frac{1-tx}{t(1-t)}$ dans $]0,1[$ c'est-à-dire la racine de $xt^2 - 2t + 1 = 0$, on trouve dans $]0,1[$, $\sigma = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$.

Dans ce cas $\left[\frac{t-tx}{t(1-t)} \right]^\rho = (1+\sqrt{1-x})^{2\rho}$. On pose $t = \sigma + u$ et on fait tendre la courbe C vers l'intervalle $[0,1]$.

On peut écrire l'intégrale sous la forme

$$\int_0^1 \psi(t) e^{\rho\psi(t)} dt = \frac{e^{\rho\psi(\sigma)}}{\sqrt{-\rho} \frac{\psi''(\sigma)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

où on a posé $z^2 = -\rho \frac{\psi''(\sigma)}{2} u^2$ (on a $\psi''(\sigma) < 0$).

On en déduit que

$$\int_0^1 \psi(t) e^{\rho\psi(t)} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\rho}} (1+\sqrt{1-x})^{2\rho+\alpha+\beta+1} (1-x)^{\frac{\beta+1}{4} + \frac{1}{4}}$$

où α, β dépendent de $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2$.

D'où

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \text{Log} \left| A_1 \left(x \begin{array}{cc} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{array} \right) \right| = \text{Log}(1+\sqrt{1-x})^2$$

(car le coefficient de l'intégrale s'évalue facilement par la formule de Stirling

$$(\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z})$$

Pour $R \left(\begin{array}{cc} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{array} \middle| x \right)$ la formule de Pochhammer utilisée est la formule

II.2.3. A. D'après le théorème III.3.6 on va évaluer ${}_2F_1 \left(\begin{array}{c} \omega_2^{-\omega_1+\rho_2}, \rho_1 \\ \rho_1+\rho_2 \end{array} \middle| x \right)$ qui n'est plus un polynôme hypergéométrique.

On trouve :

$${}_2F_1 \left(\begin{array}{c} \omega_2^{-\omega_1+\rho+a_2}, \rho+a_1 \\ 2\rho+a_1+a_2 \end{array} \middle| x \right) = \frac{\Gamma(\rho+a_1)}{\Gamma(\rho+a_2+\omega_2-\omega_1) \cdot \Gamma(a_1-a_2+\omega_1-\omega_2)} \int_0^1 t^{\omega_2^{-\omega_1+\rho+a_2}-1} (1-t)^{\rho+a_2} (1-tx)^{-\rho+a_2+\omega_1-\omega_2} dt$$

Par une démonstration analogue on doit évaluer une intégrale de la forme

$$\int_0^1 \left[\frac{(1-t)t}{1-tx} \right]^\rho \psi(t) dt.$$

le maximum de la fonction $\frac{(1-t)t}{1-tx}$ est donné par la racine $\sigma \in]0,1[$ de l'équation $xt^2 - 2t + 1 = 0$.

On obtient l'équivalent asymptotique de cette intégrale quand $\rho \rightarrow \infty$ c'est-à-dire que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \left| \text{Log} \left(x \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \rho_1, \rho_2 \end{matrix} \right. \right) \right| = \text{Log}(1 - \sqrt{1-x})^2$$

Lemme VI.2.3. Lemme arithmétique.

Soient 2 entiers a et b positifs et supposons que $n \mid a-b$.

Alors pour tout entier positif ρ posons

$$\sigma_n^\rho = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} p^{\left[\frac{\rho}{p-1} \right]} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_n = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} p^{\left[\frac{1}{p-1} \right]}$$

Alors

$$q_\rho = \binom{2\rho}{\rho} \sigma_n^\rho a^\rho A_1 \left(\begin{matrix} 0, \nu \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b}{a} \right) \quad \text{et}$$

$$p_\rho = \binom{2\rho}{\rho} \tilde{\sigma}_n^\rho a^\rho A_2 \left(\begin{matrix} 0, \nu \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b}{a} \right)$$

sont des entiers positifs et $q_{\rho+1} > q_\rho$.

Démonstration : Dans les formules III.3.6 (remarques) on va remplacer ρ par $\rho+1$ avec $\rho \in \mathbb{N}$ et on obtient

$$A_1 \left(x \left| \begin{matrix} 0, \nu \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \right. \right) = C \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho, -\nu-\rho \\ -2\rho \end{matrix} \middle| x \right)$$

$$A_2 \left(x \mid \begin{matrix} 0, \nu \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \right) = -c \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho, \nu-\rho \\ -2\rho \end{matrix} \mid x \right)$$

$$R \left(x \mid \begin{matrix} 0, \nu \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \right) = x^{2\rho+1} (1-x)^\nu \frac{A_1 \left(1 \mid \begin{matrix} 0, \nu \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \right)}{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} \nu+\rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \mid 1 \right)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \nu+\rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \mid x \right)$$

Par définition de la fonction hypergéométrique

$$A_1(x) = \sum_{j=0}^{j=\rho} \left\{ \prod_{k=0}^{k=j-1} \frac{\rho+\nu-k}{2\rho-k} \right\} \binom{\rho}{j} (-x)^j$$

ce qui en explicitant donne

$$A_1(x) = \sum_{j=0}^{j=\rho} \ell(j) n^{-j} \frac{(\rho!)^2}{(2\rho)! j!} \binom{2\rho-j}{\rho} (-x)^j \quad (1)$$

où on a posé $\ell(j) = \prod_{k=\rho-j+1}^{k=\rho} (kn+m)$. Si p est un nombre premier qui divise n alors l'exposant de p dans $\rho!$ est donné de manière classique par

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} [\ell p^{-s}] \leq \left[\frac{\rho}{p-1} \right],$$

$\left[\frac{\rho}{p-1} \right]$ étant l'exposant de p dans σ_n (le cas où p ne divise pas n ne présentant pas de difficulté). On en déduit que $\binom{2\rho}{\rho} \sigma_n^\rho A_2(nx)$ est un entier, il est facile de vérifier en partant de (1) que p_ρ et p_ρ sont strictement positifs.

De plus $q_{\rho+1} > q_\rho$ (en utilisant (1) car $(\rho+1)n+m > n+1$).

Comme $(\tilde{\sigma}_n)^\rho > \sigma_n^\rho$ le résultat du lemme subsiste si on remplace σ_n^ρ par $\tilde{\sigma}_n^\rho$.

Lemme VI.2.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ et donc pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p}{q}$.

Démonstration : De l'égalité du théorème VI.1. ① on obtient

$$\begin{aligned} & A_1 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, v \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \right) A_2 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, v \\ \rho+2, \rho+2 \end{matrix} \right) - A_1 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, v \\ \rho+2, \rho+2 \end{matrix} \right) A_2 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, v \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \right) \\ &= x^{2\rho+1} \{ A_1 \left(1 \middle| \begin{matrix} 0, v \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \right) A_2 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, v \\ \rho+2, \rho+2 \end{matrix} \right) E_\rho(x) - x^2 A_1 \left(x \middle| \begin{matrix} 0, v \\ \rho+2, \rho+2 \end{matrix} \right) \\ &\quad \times E_{\rho+1}(x) \}. \end{aligned}$$

En posant $E_\rho(x) = \frac{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -v+\rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| x \right)}{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -v+\rho+1, v+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| 1 \right)}$ le membre de gauche

représente un polynôme en x de degré au plus $2\rho+1$, le membre de droite une série entière commençant par $x^{2\rho+1} A_\rho(1) E_\rho(0)$ d'où l'égalité.

Fin de la démonstration du théorème VI.2.

De l'égalité ($v = \frac{m}{n}$)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b} \right)^v A_1 \left(\begin{matrix} 0, v \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b}{a} \right) - A_2 \left(\begin{matrix} 0, v \\ \rho+1, \rho+1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b}{a} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{b}{a} \right)^{2\rho+1} \left(\frac{b}{a} \right)^v K(\rho) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} v+\rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b}{a} \right) \quad \text{où} \end{aligned}$$

$$K(\rho) = \left(\frac{b}{a} \right)^v \frac{\Gamma(\rho+1)^2 \Gamma(\rho+1-v) \Gamma(\rho+1+v)}{\Gamma(2\rho+1) \Gamma(2\rho+2) \Gamma(1-v) \Gamma(v)} \cdot \frac{1}{c} \quad |c| = 1$$

On va donner un équivalent asymptotique de $K(\rho)$.

Par la formule de Stirling, on a $\frac{\Gamma(\rho+1)^2}{\Gamma(2\rho+2)} \sim \frac{\sqrt{\pi(\rho+1)}}{2^{2(\rho+1)}}$ de même $\Gamma(\rho+1-\nu) \sim \Gamma(\rho) \rho^{1-\nu} \Gamma(\rho+1+\nu) \sim \Gamma(\rho+1)\rho^\nu$ ce qui, par la formule des compléments, conduit facilement à

$$K(\rho) \sim \frac{[\rho(\rho+1)]^{3/2}}{2^{4\rho+2}(2\rho+1)} \sin \Pi\nu\left(\frac{b}{a}\right)^\nu$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\nu - \frac{p_\rho}{a_\rho} = K(\rho) \binom{2\rho}{\rho} \frac{\sigma_n^\rho a^\rho {}_2F_1\left(\begin{matrix} \nu+\rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b}{a}\right)}{q_\rho} \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right)^{2\rho+1}$$

comme $\sigma_n^\rho < (\tilde{\sigma}_n)^\rho$

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^\nu - \frac{p_\rho}{q_\rho}\right| \leq K(\rho) \cdot \binom{2\rho}{\rho} (\tilde{\sigma}_n a)^\rho \frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix} \nu+\rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b}{a}\right)}{q_\rho} \times \left(1 - \frac{b}{a}\right)^{2\rho+1}$$

d'après le lemme précédent il faut remplacer $a-b$ par $\mu_n(a-b)$ pour rendre p_ρ et q_ρ entiers. D'où

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} - \frac{p_\rho}{q_\rho}\right| \leq K(\rho) \binom{2\rho}{\rho} (\tilde{\sigma}_n a)^\rho {}_2F_1\left(\begin{matrix} \nu+\rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| \mu_n \left(1 - \frac{b}{a}\right)\right).$$

On va conclure en utilisant les expressions asymptotiques de p_ρ et q_ρ .

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} - \frac{p_\rho}{q_\rho}\right| \leq K(\rho) \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^{2\rho+1} \binom{2\rho}{\rho} \tilde{\sigma}_n^\rho (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2\rho+2} \mu_n^{\rho+1}$$

si $\left|\frac{a-b}{2a}\right| < 1$ et si $\left\{\tilde{\sigma}_n \mu_n (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\right\} < 1$.

Alors pour ρ assez grand

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} - \frac{p_\rho}{q_\rho}\right| < \frac{\left\{\tilde{\sigma}_n \mu_n (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\right\}^{\rho+1}}{q_\rho} \quad \textcircled{1}$$

En utilisant le fait que

$$q_\rho \sim \{\mu_n \tilde{\sigma}_n (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\}^{\rho+1} \quad (2)$$

on en déduit que $\rho+1 \sim \frac{\text{Log } q_\rho}{\text{Log}\{\mu_n \tilde{\sigma}_n (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\}}$.

En remplaçant dans ① on prouve que

$$\left| \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} - \frac{p_\rho}{q_\rho} \right| < q_\rho^{-1} \frac{\text{Log}\{\mu_n \tilde{\sigma}_n (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2\}}{\text{Log}\{\mu_n \tilde{\sigma}_n (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\}}$$

Comme q_ρ est croissante et que pour ρ assez grand en utilisant ② il existe $\alpha > 0$ tel que $q_\rho < q_{\rho-1}^{1+\alpha}$ on peut conclure en utilisant le théorème 1.6.4 ou le théorème 1.6.5.

Remarque. pour $\sqrt[3]{17}$ on trouve 2,391925 comme mesure d'irrationalité.

Remarques.

① On aurait pu démontrer le théorème VI.2 par l'utilisation d'un approximant de Padé du type $[n-1, n]$ comme le théorème II.11 le suggère.

Les résultats trouvés sont les mêmes mais il y a quelques petites différences dans le calcul du numérateur de l'approximant qui n'est plus un polynôme de Jacobi mais une combinaison de tels polynômes dont le calcul à partir de la formule

$$Q_n(x) = \int_0^1 \frac{P_n(x) - P_n(u)}{x-u} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du$$

se fait facilement par l'étude de

$$\int_0^1 \frac{x^m - u^m}{x-u} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du .$$

Les propriétés arithmétiques de $Q_n(x)$ sont analogues à celles du dénominateur.

Les équivalents asymptotiques pour le dénominateur et le reste sont les mêmes.

2 Il n'est pas facile de déterminer les rationnels $\frac{a}{b}$ vérifiant $\mu_n | n$ et $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \approx \mu_n < 1$ et on peut remarquer que pour $\sqrt[3]{2}$, $a = 128$ et $b = 125$ sont les plus petites solutions en nombre entiers de l'équation diophantienne

$$* \quad 2x^3 - y^3 = 3$$

Pour $\sqrt[3]{17}$: il faut résoudre l'équation diophantienne

$$x^3 - 17y^3 = 1$$

Dans tous les cas a et b sont solutions d'une équation diophantienne de ce type

Mesure d'irrationalité des nombres liés aux logarithmes.

On posera $\rho_1 = \rho_2 = \rho + 1 \in \mathbb{N}$ et on utilise le théorème V.1.2, on en déduit l'égalité

$$R(x, \rho+1, \rho+1) = A_1(x | \rho+1, \rho+1) \text{Log}(1-x) + A_2(x | \rho+1, \rho+1)$$

on pose $x = -\frac{p}{q}$

$$R(-\frac{p}{q} | \rho+1, \rho+1) = A_1(x | \rho+1, \rho+1) \text{Log}(1 + \frac{p}{q}) + A_2(x | \rho+1, \rho+1)$$

on va expliciter A_1, A_2, R .

On a :

$$A_1(x | \rho+1, \rho+1) = \frac{-c}{\Gamma(\rho+1)^2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho_1, & -\rho \\ & 1 \end{matrix} \middle| 1-x \right)$$

qui est un polynôme hypergéométrique de degré .

De même on peut expliciter $A_2(x|\rho+1, \rho+1)$.

D'après le théorème III.3.9, on a :

$$A_2(x|\rho+1, \rho+1) = c \sum_{\nu=0}^{\nu=\rho} c_{-1}^{\nu} (1-x)^{\nu}$$

Il reste donc à évaluer c_{-1}^{ν} : un calcul simple à partir du développement de $\frac{1}{\Phi(z)}$ donne

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{\prod_{r=0}^{\rho} (z-r)^2} = \frac{1}{(z-\nu)^2} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq r}}^{\nu=\rho} \frac{1}{\nu-r} \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p (p+1) \left(\frac{z-\nu}{z-r}\right)^p$$

d'où $c_{-1}^{\nu} = -2c_0^{\nu} \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq \nu}}^{r=\rho} \frac{1}{\nu-r}$.

Ceci permettra de trouver les propriétés arithmétiques des coefficients de $A_2(x|\rho+1, \rho+1)$, on en déduit l'égalité

$$-c {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho, -\rho \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 + \frac{p}{q} \right) \text{Log} \left(1 + \frac{p}{q} \right) + G \left(1 + \frac{p}{q} \right) =$$

$$\frac{\Gamma(\rho+1)^2}{\Gamma(2\rho+2)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{2\rho+1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| -\frac{p}{q} \right) = R \left(-\frac{p}{q}\right).$$

On va transformer $A_1(x|\rho+1, \rho+1)$ en une fonction hypergéométrique de la variable x .

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho, -\rho \\ 1 \end{matrix} \middle| 1-x \right) \text{ a pour symbole de Riemann } P \left(\begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 1+2\rho & -\rho & 0 \end{matrix} \right)$$

qui est équivalent à $P \left(\begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 1+2\rho & -\rho & 0 \end{matrix} \right) c'$ est-à-dire que ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho, -\rho \\ -2\rho \end{matrix} \middle| x \right)$

est solution de la même équation hypergéométrique que A_1 en posant

$$p_\rho = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\rho, -\rho \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 + \frac{p}{q} \right) .$$

Lemme III.3.12.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \operatorname{Log} p_\rho = \operatorname{Log} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{p}{q}} \right)^2$$

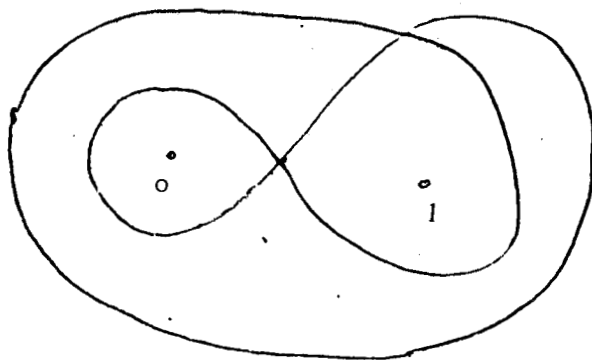
$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} R \left(-\frac{p}{q} \right) = \operatorname{Log} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{p}{q}} \right)^2$$

Démonstration : Pour trouver un équivalent asymptotique de p_ρ , on prend la formule intégrale suivante (cf. Bateman p. 115 tome 1)

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{-\Gamma(c) \exp(-i\pi c)}{4\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin\pi b \sin\pi(c-b)} \times$$

$$\int_{1+0+1-0-} t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} dt$$

avec b et $c-b \neq 1, 2, 3$, le parcours $(1+, 0+, 1-, 0-)$ étant de la forme



D'où en explicitant on retrouve par la même démonstration l'expression asymptotique du lemme VI.2.2.

Comme $R = c \cdot \frac{x^{2\rho+1} \Gamma(\rho+1)^2}{\Gamma(2\rho+2)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+2 \end{matrix} \middle| x\right)$ l'expression

asymptotique du lemme VI.2.2 est encore valable.

Fin de la démonstration :

Pour avoir les coefficients dans Z on posera

$$a_\rho = q^\rho [1, 2 \quad \rho] \Gamma(\rho+1)^2 A_1(\rho+1, \rho+1, -\frac{p}{q})$$

$$b_\rho = q^\rho [1, 2 \quad \rho] \Gamma(\rho+1)^2 A_2(\rho+1, \rho+1, -\frac{p}{q})$$

$$I_\rho = q^\rho [1, 2 \quad \rho] \frac{\Gamma(\rho+1)^2}{\Gamma(2\rho+2)} \left(-\frac{p}{q}\right)^{2\rho+1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \rho+1, \rho+1 \\ 2\rho+1 \end{matrix} \middle| -\frac{p}{q}\right)$$

d'où

$$\underline{a_\rho \operatorname{Log}\left(1 + \frac{p}{q}\right) + b_\rho = I_\rho}$$

Donc si $\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_\rho = 0$ on peut conclure à l'irrationalité de $\operatorname{Log}\left(1 + \frac{p}{q}\right)$. Or :

$$I_\rho \approx e^\rho q^\rho \cdot \left(-\frac{p}{q}\right)^{2\rho+1} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{p}{q}}\right)^{2\rho}$$

cond si $\frac{p}{q} \leq 1$ et $\operatorname{eq}\left\{1 - \sqrt{1 + \frac{p}{q}}\right\}^2 < 1$ on retrouve les conditions du théorème V.1.2. et on retrouve le théorème V.12 et ses corollaires en particulier les mesures de l'irrationalité de $\operatorname{Log} 2$ et $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Remarques. F. Beukers dans son article "Rational Approximations to $\operatorname{Log} 2$, $\sqrt[3]{2}$ and related Numbers" trouve des mesures de l'irrationalité de $\operatorname{Log} 2$, et $\sqrt[3]{2}$ qui sont vérifiées dès que $q \geq 1$.

Pour $\text{Log } 2$, il utilise le développement des 5693 premières réduites du développement en fraction continuée

$$\text{Log } 2 = [0, 1, 2, 3, 1, 6, 3, 1, 1, 2, 1, 1, \dots]$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{9}{13}, \frac{61}{88}, \frac{192}{277}, \frac{253}{365}, \frac{445}{642}, \dots$$

et ce qui permet de vérifier que dès que $n < 5693$, $|p - q \text{Log } 2| > q^{-6}$ et donc que q^{-6} est une mesure de l'irrationalité de $\text{Log } 2$ dès que $q \geq 1$.

De même

$$\frac{\Pi}{\sqrt{3}} = [1, 1, 4, 2, 1, 2, 3, 7, 3, 3, 30, 2, \dots]$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{9}{5}, \frac{20}{11}, \frac{29}{16}, \frac{78}{43}, \frac{263}{145}, \frac{1919}{3319}, \frac{19979}{11015}, \dots$$

et on vérifie que $|\frac{\Pi}{\sqrt{3}} - \frac{p}{q}| > q^{-20}$ pour tout $q \geq 1$, ce qui constitue une mesure de l'irrationalité de $\frac{\Pi}{\sqrt{3}}$ analogue à celle trouvée par M. Mignotte pour Π .

VII EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE DE FUCHS

ET MESURE DE L'IRRATIONALITE DE CERTAINS NOMBRES

VII.1. MESURE D'IRRATIONALITE DE $\text{Log}(1 + \frac{1}{a})$ PAR LA METHODE DES SERIES
GENERATRICES (Van der Poorten, 1978). (Cf. [12])

Considérons la série génératrice des polynômes de Legendre $y_0(x) = (x^2 - 2bx + 1)^{-1/2}$ avec $b = 2a+1$, a entier $a \geq 1$ on a

$$y_0(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(b) x^n$$

où P_n est le polynôme de Legendre de degré n .

On sait que $y_0(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et que $y_0(x)$ vérifie l'équation différentielle du 1er ordre

$$(x^2 - 2bx + 1) \frac{dy}{dx} + (x-b)y = 0 = D_0 y . \quad (1)$$

On va essayer de ramener celle-ci à une équation du 2ème ordre en cherchant les solutions de l'équation

$$D_0 y = 1. \quad (2)$$

la méthode de la variation de constante donne immédiatement comme solution de (2)

$$y_1(x) = y_0(x) \int_0^x y_0(t) dt$$

ce qui montre que $y_0(x)$ et $y_1(x)$ sont solutions de l'équation différentielle du type de Fuchs

$$\frac{d}{dx} D_0 = (1-2b x+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3(x-b) \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (3)$$

les points singuliers de cette équation sont les racines de $x^2-2bx+1 = 0$ et ∞ . On pose $D' = 2a+1 - 2 a(a+1)$ et $D'' = 2a+1 + 2 a(a+1)$ on pose $a_n = P_n(b)$.

Le rayon de convergence de y_0 est D' c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} |a_n| = \text{Log} \frac{1}{|D'|} .$$

En posant $y_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n = y_0(x) \int_0^x y_0(t) dt$ on a facilement

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\sum_{r+s=n} \frac{P_r(b) P_s(b)}{s+1} \right) x^n$$

d'où

$$b_n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{P_r(b) P_{n-r+1}(b)}{n-r+1}$$

en posant $[1, 2, n] = \text{ppcm}(1, 2, n)$ on a

$$[1, 2, n] \cdot b_n \in \mathbb{Z} .$$

Nous allons prendre comme solution de 2) celle qui n'admet pas de singularité en D' c'est-à-dire que l'on va choisir ω tel que la solution $y_1(x) - \omega y_0(x)$ vérifie (2) et ceci donne

$$\omega = \lim_{x \rightarrow D'} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}$$

intégrale qui s'évalue facilement par le changement de variable $t = D'u$ et qui conduit à la fonction hypergéométrique

$$D' \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^{1/2} (1-D'u)^{1/2}} = D' {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1/2, 1 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| D', 2 \right)$$

ce qui d'après II.1.10 fournit facilement

$$\omega = \frac{1}{2} \text{Log} \left(1 + \frac{1}{a} \right) .$$

En posant

$$p_n = b_n [1, 2, n] \in \mathbb{Z}$$

$$q_n = a_n [1, 2, n] \in \mathbb{Z}$$

et en se servant du fait que $[1, 2, n]$ a une expression asymptotique obtenue par le lemme V.1.2.3 on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } q_n = 1 + \text{Log} \frac{1}{|D'|}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\text{Log } p_n - \omega \text{Log } q_n| = 1 + \text{Log} \frac{1}{|D''|}$$

ce qui fournit facilement $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left| \frac{p_n}{q_n} - \omega \right| = \text{Log} \left| \frac{D'}{D''} \right|$ d'où

$\left| \frac{p_n}{q_n} - \omega \right| \sim \left| \frac{D'}{D''} \right|^n$ quand n assez grand. Ce qui fournit la suite d'approximants de ω .

Par exemple pour $\text{Log } 2$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n = [1, 2, n] \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k C_n^{k+n} \\ p_n = [1, 2, n] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_n^k C_n^{k+n}}{n-k+1} \end{array} \right.$$

et en se servant du théorème 1.6.4 on démontre un théorème analogue au théorème V.1.2 (corollaire).

B I B L I O G R A P H I E

A. BAKER

- ① Algebraic numbers : Proc. London Math. Soc. (3). 14. 1964 (385-398).
- ② Rational Approximations of $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers : quart. J. Math. OXFORD 14, 1964 (375-83).
- ③ Acta. Arithmetica 10, 1964 - p. 315-323.

IR. BAKER

- ④ Essentiels of Padé Approximants : Academic Press 1975.

BATEMAN N and ERDELYI

- ⑤ Higher transcendental functions : 3 volumes M.C. Graw-Hill - 1953.

BEUKERS F.

- ⑥ A note of irrationality of $\xi(2)$ and $\xi(3)$ (preprint)
- ⑦ Rational Approximations of $\log 2$, $\sqrt[3]{2}$ and related numbers (preprint).

BUNDSCHUM Peter

- ⑧ Irrationalitätssätze für e^a (Math Annalen 192, 1971 - p. 229-242).

CHUDNOVSKY. G.V.

- ⑨ Formules d'Hermite pour les Approximants de Padé de Logarithmes et de fonctions binômes : C.R. Academie des Sciences Série A - 11 juin 1979 p. 965.
- ⑩ Approximations rationnelles de logarithmes de nombres rationnels. C.R. Academie des Sciences - 26 mars 1979 - Série A - p. 607.
- ⑪ Padé Approximations of the Generalised Hypergeometric Functions : Journal Math pures et Appliquées 1979 - p. 445 à 476.
- ⑫ Explicit Construction of Auxiliary Functions for transcendental Numbers : (Lectures notes in Mathematics - Springer 1979 n°751).
- ⑬ Padé Approximation and Riemann Monodromy Problem (Preprint 1980)
- ⑭ Multidimensional Hermite Interpolation and Padé Approximation (preprint C.E.A division de physique théorique).

COHEN Henri

- ⑮ Démonstration de l'irrationalité de $\xi(3)$ d'après Apéry : séminaire de théorie des nombres 5/10/78 Grenoble.

DIEUDONNE.

- ⑩ Abrégé d'Histoire des Mathématiques (Hermann)
- ⑪ Calcul infinitésimal (Hermann)

ELLISON et Mendès FRANCE

- ⑫ Les nombres premiers (Hermann p.25)

JAGER H.

- ⑬ A Multidimensional Generalisation of the Padé Table : Drukkeris Holland N.V. Amsterdam 1964.

KAMPÉ DE FERIET M.J.

- ⑭ La fonction hypergéométrique. Memorial des sciences Mathématiques - Gauthier-Villars 1937.
- ⑮ Fonctions hypergéométriques et hypersphériques : Gauthier-Villars 1926.

LANG Serge.

- ⑯ Introduction to Diophantine Approximations (Addison-Wesley).

LEVEQUE

- ⑰ Reviews in Number Theory A.M.S 1974. Vol. 3. Chap. I-80.

MALHER Kurt

- ⑱ Applications of some formulae by Hermite to the approximation of Exponential and logarithms : (Math Annalen p. 168-200 - 1967).
- ⑲ Lectures on transcendental numbers : lectures notes in Mathematics 566 Springer-Verlag 1976.

MIGNOTTE M.

- ⑳ Approximations rationnelles de Π et quelques autres nombres : (Bull. Soc. Math de France Mémoire 37 - 1974 p. 121-132).

MONTEL Paul

- ㉑ Leçons sur les récurrences (Gauthier-Villars 1957).

OUVAVOV

- ㉒ Elements de la théorie des fonctions spéciales. Editions Mir.

PLEMELJS

- ㉓ Problems in the sense of Riemann and Klein (Intersciences Publishers)

BUS
LILLE

REYSSAT Eric

- ③① Irrationalité de $\xi(3)$ selon Apéry (Séminaire Delange Poitou Pisot 1978-1979 n°6).

RIEMANN

- ③① Oeuvres Mathématiques (Albert Blanchard Paris).

RAUZY Gérard.

- ③② Approximation diophantienne des nombres algébriques (cours de Mathématiques Approfondies - Théorie des nombres - Paris)

RÖTH and DAVENPORT

- ③③ Rational Approximations of Algebraic numbers : Mathematika 2 1955 p.160-167.

ROBINSON and K. ALLALI

- ③④ On certain irrational values of logarithm : (Lectures notes 1979 n°751).

SIEGEL C.L.

- ③⑤ Transcendental numbers : (Princeton University Press 1949).

SMIRNOV.

- ③⑥ Cours de Mathématiques supérieures - tome 3 - Editions Mir-Moscou.

VAN DER POORTEN

- ③⑦ Some wonderful formulae : Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1978-79 n°29.

WALDSCHMIDT Michel.

- ③⑧ Transcendence Methods : Queens Papers in Pure and applied Mathematic.

WATSON G.M.

- ③⑨ A treatise on the theory of Bessel functions (University press - Cambridge G.B. 1944).

WILSON.

- ④① Hypergeometric Series : Recurrence Relations and some new orthogonal functions (P.H.D. Université du Wisconsin-Madison).

YUDELL and LUKE.

- ④② The special functions and their approximations (2 volumes Academic press).

