N° d'ordre : 940
N° d'ordre : 940 bis





# THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Danièle LEFEBVRE-HUYET
Marie-Thérèse POURPRIX-EGO



## JETS SUFFISANTS DE FONCTIONS A VALEURS DANS $R^p$

| Membres du Jury : | MM. | | |
|---|---|---|---|
| | | PARREAU M. | Président |
| | | ANTOINE Ph. | Rapporteur |
| | | COEURÉ G. | Examinateur |
| | | BRASSELET J.P. | Examinateur |
| | | TAKENS F. | Invité |

Soutenues le 4 janvier 1982

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur M. PARREAU d'avoir accepté de présider ce jury ainsi que Messieurs les Professeurs G. COEURÉ et J.P. BRASSELET qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail.

Nous sommes très reconnaissantes à Monsieur le Professeur F. TAKENS de s'être intéressé à notre recherche et de nous honorer de sa présence aux soutenaces.

Nous tenons à témoigner notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur Ph. ANTOINE qui nous a proposé ce sujet et dont les suggestions, les conseils et les critiques nous ont aidées à élargir notre étude et nous ont permis de mener à bien ce travail.

Nous adressons nos plus vifs remerciements à Madame R. BÉRAT dont nous avons apprécié le soin et l'attention lors de la dactylographie du manuscrit.

Nous ne saurions oublier dans nos remerciements tous les membres de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées pour la sympathie dont ils nous ont entourées.

*Après une recherche effectuée en commun, ont été réunis dans ce mémoire les travaux de :*

- *Danièle LEFEBVRE-HUYET sur les jets v-suffisants et $C^0$-suffisants (PREMIERE PARTIE).*

- *Marie-Thérèse POURPRIX-EGO sur les jets homogènes (DEUXIEME PARTIE).*

*L'introduction, la conclusion et les annexes ont été rédigés en commun.*

--------------

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES (Suite)

# INTRODUCTION

## I. PRESENTATION DU PROBLEME ET RESULTATS CONNUS.

Soit $f$ un germe à l'origine d'application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que $f(0) = 0$, $f$ désignera aussi bien un germe que l'un de ses représentants. Pour étudier la nature topologique de la surface de niveau $f^{-1}(0)$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$, la première idée est d'essayer de remplacer $f$ par son jet d'ordre $k$ en $0$, $f_k$, de sorte que les germes des zéros de $f$ et de $f_k$ soient homéomorphes. Cela n'est pas toujours possible (ex : $f(0) = 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{||x||^2}}$ pour $x \neq 0$).

Le problème peut être formulé de deux manières :

1) $f$ étant fixé, à quelle condition sur $f$ peut-on trouver $k$ tel que le germe des zéros de $f$ en $0$ soit homéomorphe au germe des zéros en $0$ de la variété algébrique définie par $f_k$ ?

2) un jet d'ordre $k$, $f_k$, tel que $f_k(0) = 0$ étant fixé, à quelle condition sur $f_k$ deux réalisations de $f_k$ dans $E^p_\mu$ $(k \leq \mu)$ ont-elles des germes de zéros en $0$, homéomorphes ?

*Définitions* :

1) $E_\mu$ $(\mu \in \mathbb{N}$ ou $\mu = \infty)$ est l'anneau des germes à l'origine de $\mathbb{R}^n$ de fonctions numériques, de classe $C^\mu$ ;
$E^p_\mu$ est le module sur $E_\mu$ des germes à l'origine de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, de classe $C^\mu$.

2) Soit $f_k$ un jet d'ordre $k$ nul en $0$, et $\mu$ tel que $k \leq \mu \leq \infty$ ; on dit que $g$ est une réalisation de $f_k$ dans $\mathcal{E}^p_\mu$ si $g \in \mathcal{E}^p_\mu$ et $g_k = f_k$.

3) On dit que $f_k$ est v-suffisant dans $\mathcal{E}^p_\mu$ $(k \leq \mu)$ si deux réalisations de $f_k$ dans $\mathcal{E}^p_\mu$ ont des germes de zéros en $0$ homéomorphes.

L'homéomorphisme $h$ qui échange les germes de zéros en $0$ est très souvent induit par un homéomorphisme local c'est-à-dire qui transforme l'un dans l'autre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas si $h$ est de classe $C^q$, $1 \leq q \leq \infty$, alors $h$ conserve les propriétés différentiables des surfaces de niveau. Par exemple les cônes tangents aux surfaces de niveau sont alors isomorphes, l'isomorphisme étant $Dh(0)$. Ceci est intéressant en calcul des variations : la connaissance du cône tangent de la surface de niveau en $0$ permet d'exprimer les conditions nécessaires pour qu'une fonctionnelle présente un extrémum en $0$ sur cette surface [4].

Cependant de tels homéomorphismes $h$ ne sont pas forcément de classe $C^1$ :

exemple : $n = 2$, $p = 1$, $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = y^2 - x^6$

l'homéomorphisme $h$ défini par :

$$h(x,y) = (y + x^3, y - x^3)$$

est tel que $g(x,y) = f(h(x,y))$

mais les cônes tangents en $0$ ne peuvent pas être isomorphes

$$T_f = \{(x,y) \mid xy = 0\}$$
$$T_g = \{(x,y) \mid y^2 = 0\}.$$

*Rôle des singularités de* f.

Soit $f$ de $\mathcal{E}^p_\mu$, $1 \leq \mu \leq \infty$, tel que $f(0) = 0$.

Si $Df(0)$ est surjectif, alors, le germe des zéros de $f$ en $0$ est homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^{n-p}$ et l'homéomorphisme est de classe $C^\mu$ [voir Annexe II, VII.1.a].

On s'intéresse donc aux cas où $Df(0)$ n'est pas surjectif, $0$ est dit point singulier de $f$.

THOM, le premier, a envisagé les problèmes de jets suffisants et de germes de détermination finie ; il a mis en évidence le lien entre la théorie des singularités ; la théorie de la stabilité topologique et les problèmes de bifurcation.

Le premier cas étudié en bifurcation est celui où 0 est une singularité isolée de $f$ dans $f^{-1}(0) = W_f$.

KUO [12] a donné plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un jet $f_k$ tel que $f_k(0) = 0$ soit v-suffisant dans $\mathcal{E}^p_k$ dont l'une est (A) :

(A) $\left\{\right.$ Toutes les réalisations de $f_k$ dans $\mathcal{E}^p_k$ n'ont pas de singularité, autre que $0$, dans leur surface de niveau en $0$.

Il construit, dans le cas où $f_k$ n'est pas v-suffisant dans $\mathcal{E}^p_k$, un arc analytique issu de $0$ et une réalisation $f$ de $f_k$ dans $\mathcal{E}^p_k$ tels que l'arc soit contenu dans $W_f$ et dans l'ensemble des singularités de $f$ (arc de BOCHNAK-LOJASIEWICZ).

Il montre aussi que si $f$ est analytique et est telle que $0$ est une singularité isolée de $f$ dans $W_f$, alors pour $k$ assez grand, $f_k$ est v-suffisant dans $\mathcal{E}^p_k$.

Il n'en est pas de même si $f$ est seulement de classe $C^\infty$ (ex : $f(0) = 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{||x||^2}}$ pour $x \neq 0$).

Dans le cas $p = 1$, nous verrons que si $f$ a un jet $f_k$ v-suffisant dans $E_k^1$, alors nécessairement $0$ est une singularité isolée de $f$, mais cette condition n'est pas suffisante, sauf si $f$ est analytique.

*Définitions* :

On a été amené, dans la recherche de l'existence de ces homéomorphismes $h$ (ou difféomorphismes), à établir des équivalences de germes, équivalences qui étaient sous-entendues en théorie de la bifurcation.

On notera parfois $E_\infty^p = E^p$, $E_\infty^1 = E$.

On dit que $f$ et $g$ de $E_\mu^p$ tels que $f(0) = g(0) = 0$ sont

(1) v-équivalents s'ils ont des germes de zéros en $0$ homéomorphes.

(2) $C^q$-équivalents au sens de TOUGERON [17], $1 \leqslant q \leqslant \mu$ s'il existe $h$ germe en $0$ de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de classe $C^q$ tel que $h(0) = 0$ et $(f)_q = (g \circ h)_q$ où $(f)_q$ est l'idéal de $E_q$ engendré par les composantes de $f$ considérées comme éléments de $E_q$.

La $C^q$-équivalence de TOUGERON entraîne la v-équivalence.

(3) équivalents pour la $C^q$-équivalence de contact. ($1 \leqslant q \leqslant \mu \leqslant \infty$) s'il existe $h$ germe en $0$ de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de classe $C^q$, tel que $h(0) = 0$ et $v$ germe en $0$ d'application de $\mathbb{R}^n$ dans Aut $\mathbb{R}^p$, de classe $C^{q-1}$ tels que, dans un

voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ : $f(x) = v(x)\, g(h(x))$.

C'est cette définition que nous prendrons.

Il existe d'autres définitions de la $C^q$-équivalence de contact. En particulier, celle de MAGNUS [15] où $h$ et $v$ sont de même classe $C^q$ ($0 \leqslant q \leqslant \mu$, si $q = 0$ $h$ est un homéomorphisme). Dans ce cas, nous dirons que $f$ et $g$ sont équivalents pour la $C^q$-équivalence de contact de MAGNUS.

Pour $q \geqslant 1$ la $C^q$-équivalence de contact de MAGNUS entraîne la $C^q$-équivalence de TOUGERON.

Pour $q \geqslant 1$ la $C^q$-équivalence de contact entraîne la $C^{q-1}$-équivalence de contact de MAGNUS.

(4) p-<u>équivalents</u> (pour l'<u>équivalence polaire</u> de MAGNUS [15]) si $\mu = \infty$ et passant en coodonnées polaires : $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = t\lambda$ où $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \Sigma_n$ où $\Sigma_n = \{\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^n, ||\lambda|| = 1\}$

il existe $(\rho,\theta)$ germe en $\{0\} \times \Sigma_n$ de difféomorphisme défini sur $]a,b[ \times \Sigma_n$ à valeurs dans $]a',b'[ \times \Sigma_n$, $a < 0 < b$, et $L$ germe en $\{0\} \times \Sigma_n$ d'application défini sur $]a,b[ \times \Sigma_n$ à valeurs dans $\mathrm{Aut}\, \mathbb{R}^p$, de classe $C^\infty$, tel que

$$L(0,\lambda) = 1_p \quad (1_p = 1_{\mathbb{R}^p}) \text{ et tels que}$$

$$f(\rho(t,\lambda)\theta(t,\lambda)) = L(t,\lambda) g(t\lambda).$$

Si pour tout $(t,\lambda)$ de $]a,b[ \times \Sigma_n$ on a $L(t,\lambda) = 1_p$, alors $f$ et $g$ sont dits p-équivalents stricts.

Cette équivalence entraîne la $C^0$-équivalence de contact de MAGNUS dans $\mathcal{E}^p$.

(5) $C^q$-équivalents $(0 \leqslant q \leqslant \mu)$ s'il existe $h$ germe en $0$ de difféomorphisme (homéomorphisme si $q = 0$) de $\mathbb{R}^n$, de classe $C^q$, tel que

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad f = g \circ h.$$

Cette équivalence implique toutes les autres sauf la p-équivalence.

De ces équivalences sur les germes, on déduit des définitions sur les jets. Soit $f_k$ un jet d'ordre $k$ tel que $f_k(0) = 0$, $f_k$ est :

(2') $C^q$-rigide dans $E^p_\mu$ si deux réalisations de $f_k$ dans $E^p_\mu$ sont $C^q$-équivalents au sens de TOUGERON.

(3') suffisant dans $E^p_\mu$ pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. de MAGNUS) si deux réalisations de $f_k$ dans $E^p_\mu$ sont équivalentes pour la $C^q$ - équivalence de contact (resp. de MAGNUS).

(4') suffisant pour la p-équivalence (resp. stricte) si deux réalisations de $f_k$ dans $E^p$ sont p-équivalents (resp. stricts).

(5') $C^q$-suffisant dans $E^p_\mu$ si deux réalisations de $f_k$ dans $E^p_\mu$ sont $C^q$-équivalentes.

Les relations d'équivalence sur les germes définies en (1), (2), (3), (4), (5) entraînent que si $f_k$ est suffisant dans $E^p_\mu$ avec $k \leqslant \mu \leqslant \infty$ pour l'une des relations d'équivalence, alors pour tout $k'$, tout $\mu'$ tels que $k \leqslant k'$, $\mu \leqslant \mu'$, $k' \leqslant \mu'$ et tout relèvement $f_{k'}$ d'ordre $k'$ de $f_k$ : $f_{k'}$ est suffisant dans $E^p_{\mu'}$, pour la même relation d'équivalence.

On dit qu'un germe $f$ de $E^p_\mu$ tel que $f(0) = 0$ est

(1") <u>v-déterminé dans</u> $E^p_k$ s'il existe $r$, $(1 \leqslant r \leqslant k \leqslant \mu)$ tel que $f_r$ est v-suffisant dans $E^p_k$ (on dit alors que $f$ est **r-v**-déterminé dans $E^p_k$).

(2") <u>$C^q$-rigide dans</u> $E^p_\mu$ s'il existe $r$ tel que $f_r$ est $C^q$-rigide dans $E^p_\mu$.

(3") <u>déterminé dans</u> $E^p_k$ <u>pour la</u> <u>$C^q$-équivalence de contact</u> $(1 \leqslant q \leqslant k \leqslant \mu)$ s'il existe $r$, $1 \leqslant r \leqslant k$ tel que $f_r$ est suffisant dans $E^p_k$ pour la $C^q$-équivalence de contact.

(4") $(\mu = \infty)$ <u>k-déterminé pour la p-équivalence</u> (resp. stricte) si $f_k$ est suffisant pour la p-équivalence (resp. stricte).

(5") <u>$C^q$-déterminé dans</u> $E^p_k$ où $q \leqslant k \leqslant \mu$, s'il existe $r$, $(1 \leqslant r \leqslant k)$ tel que $f_r$ est $C^q$-suffisant dans $E^p_k$ (on dit alors que $f$ est $r$ - $C^q$-déterminé dans $E^p_k$).

<u>*Quelques résultats*</u>.

On a déjà vu la condition nécessaire et suffisante (A) de KUO pour que $f_r$ soit v-suffisant dans $E^p_r$.

KUO [12] en établit une autre $(K_r)$ :

Soit $\omega$, $0 < \omega < \infty$, on note $W^r_\omega(f) = \{x \neq 0, ||f(x)|| \leqslant \omega ||x||^r\}$

$$(K_r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{il existe}}\ \omega, \varepsilon,\ 0 < \omega < \infty,\ 0 < \varepsilon < \infty\ \underline{\text{et}}\ V\ \underline{\text{voisinage}} \\ \underline{\text{de l'origine de}}\ \mathbb{R}^n\ \underline{\text{tels que pour tout}}\ x\ \underline{\text{de}}\ V \cap W^r_\omega(f_r) \\ d(\text{grad } f^1_r(x), \ \text{grad } f^p_r(x)) \geqslant \varepsilon ||x||^{r-1} \end{array} \right.$$

(pour $p$ vecteurs $z_1, \ldots, z_p$ de $\mathbb{R}^p$, $d(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ est la borne inférieure des distances de $z_i$ au sous-espace vectoriel engendré par $\{z_j\}_{j \neq i}$ pour $i = 1, \ldots, p$).

Si $\omega = \infty$ c'est-à-dire si on remplace $V \cap W^r_\omega(f_r)$ par $V - \{0\}$, on a <u>la condition</u> $(K'_r)$.

Ici, le jet $f_r$ est considéré comme un germe, en effet à tout jet correspond le germe de $\mathcal{E}^p$ dont un représentant est le polynôme associé au jet.

De même, on dit que <u>le germe</u> f <u>de</u> $\mathcal{E}^p_\mu$ <u>tel que</u> $f(0) = 0$ <u>vérifie la condition</u> $(K_r)$ (resp. $K'_r$) où $1 \leqslant r \leqslant \mu$, r non nécessairement entier mais fini, s'il satisfait à la condition ci-dessus obtenue en remplaçant $f_r$ par f.

On montre que si f de $\mathcal{E}^p_\mu$ vérifie $K_r$, pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant r \leqslant k \leqslant \mu$, $f_k$ vérifie $(K_r)$. Inversement, si f de $\mathcal{E}^p_\mu$, $f(0) = 0$, est tel qu'il existe k, r, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant r \leqslant k \leqslant \mu$ avec $f_k$ vérifiant $(K_r)$, alors f vérifie $(K_r)$ (cf. annexe II - proposition 2).

Nous utiliserons par la suite une hypothèse $(H_r)$ équivalente à $(K_r)$ (resp. $(H'_r)$ équivalente à $(K'_r)$) (cf. ANTOINE [3] et annexe II - proposition 1) dont la formulation est indépendante de la base choisie dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ :

<u>On dit que</u> f de $\mathcal{E}^p_\mu$, $f(0) = 0$, <u>vérifie</u> $(H_r)$ <u>où</u> $1 \leqslant r \leqslant \mu$ <u>si et seulement si</u>

$(H_r)$ $\left\{\right.$ <u>Il existe</u> V <u>voisinage de l'origine de</u> $\mathbb{R}^n$, <u>des constantes</u> C et $\alpha$, $0 < \alpha < \infty$, $0 < c < \infty$ <u>tels que si</u> $x \in V \cap W^r_\alpha(f)$ alors $Df(x)$ <u>admet une section</u> $S(x)$ <u>telle que</u>

$$||S(x)|| \leqslant \frac{C}{||x||^{r-1}} .$$

Si on prend $\alpha = \infty$, on a l'hypothèse $(H'_r)$.

Si f vérifie $(H_r)$ (resp. $(H'_r)$) alors f vérifie $(H_\rho)$

(resp. $(H'_\rho)$) pour tout $\rho$ réel tel que $r \leqslant \rho \leqslant \mu$.

*Remarques*

1) Pour $p = 1$, $f$ de $E_\mu$, $f(0) = 0$, vérifie $(K_r)$ si et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage $V$ de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x$ de $V$ :

$$||\text{grad } f(x)|| \geq \varepsilon ||x||^{r-1} .$$

En effet, pour $p = 1$ les hypothèses $(K_r)$ et $(K'_r)$ sont équivalentes (cf. annexe II, proposition 3).

Pour $p > 1$, l'hypothèse $(K'_r)$ est plus forte que l'hypothèse $(K_r)$.

Nous donnons à la fin du chapitre I et au chapitre III.C des exemples de jets vérifiant $(H_r)$ ou $(H'_r)$, jets homogènes ou non, avec $p = 1$ ou $p \geqslant 1$.

2) Si $f$ vérifie $(K_r)$, tout $x$ de $V \cap W^r_\omega(f)$ est un point régulier, car $\text{grad } f^1(x),\dots,\text{grad } f^p(x)$ sont linéairement indépendants.

*Cas où $p = 1$.*

KUIPER [10] puis BOCHNAK et LOJASIEWICZ [7], ont montré l'équivalence des propositions (1), (2), (3)

(1) $f_r$ vérifie $(K'_r)$

(2) $f_r$ est $v$-suffisant dans $E_r$

(3) $f_r$ est $C^0$-suffisant dans $E_r$.

Si $f \in E$, $f(0) = 0$, BOCHNAK [5] utilise les travaux de TOUGERON pour montrer l'équivalence des propositions (4), (5), (6), (7)

(4) <u>il existe</u> $r$, $r \geq 1$ <u>tel que</u> $f$ <u>vérifie</u> $(K'_r)$

(5) $f$ <u>est</u> $v$-<u>déterminé dans</u> $E$

(6) <u>pour tout</u> $q$ <u>de</u> $\mathbb{N}$, $f$ <u>est</u> $C^q$ <u>déterminé dans</u> $E$

(7) <u>l'idéal</u> $H_1(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1,\dots,n)_\infty$ <u>est elliptique</u>

(un idéal est elliptique si et seulement si il est de type fini et il contient les fonctions infiniment plates)

(voir tableau I).

TAKENS [16] précise, <u>si</u> $f \in E_\mu$ <u>et</u> $f$ <u>vérifie</u> $(K'_r)$, la longueur du jet $C^q$-suffisant dans $E_\mu$.

On note $s_f$ (ou $s$ si aucune confusion n'est possible) l'entier tel que $f_{s-1} \equiv 0$ et $f_s \not\equiv 0$ (on a forcément $s \leq r$ : cf. annexe II, remarque 1).

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $k(q)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $r-1+q(r-s+1)$. TAKENS montre que :

<u>Pour tout</u> $q$ <u>de</u> $\mathbb{N}^*$ <u>tel que</u> $k(q) \leq \mu$, $f$ <u>est</u> $k(q) - C^q$-<u>déterminé dans</u> $E_{k(q)}$.

Nous établirons le même résultat numérique que TAKENS si $f$ vérifie $(K'_r)$ avec $p$ quelconque. Si $f$ vérifie $(K_r)$ on a : $f$ est $k(q)$-déterminé pour la $C^q$-équivalence de contact dans $E^p_{k(q)}$.

<u>*Cas où* $p \geq 1$.</u>

Les travaux de TOUGERON [17] sont antérieurs aux précédents. Leurs résultats ont été exploité par de nombreux auteurs, en particulier par BOCHNAK [6] et BRODERSEN [9] :

Soit $f \in E^p$, $f(0) = 0$, on note $H_p(f)$ l'idéal de $E$ engendré par les mineurs d'ordre $p$ de la matrice jacobienne de $f$ :

$$\mathcal{H}_p(f) = \left(\frac{Df^1 \dots f^p}{Dx_{i_1} \dots Dx_{i_p}}\right) \quad \text{et} \quad J_p(f) = (f) + \mathcal{H}_p(f).$$

Soit m l'idéal maximal de $\mathcal{E}$.

On a les groupes d'équivalence suivants :

I
- . f <u>est</u> v-<u>déterminé dans</u> $\mathcal{E}^p$
- . <u>pour tout</u> q <u>de</u> $\mathbb{N}^*$, f <u>est</u> $C^q$-<u>rigide dans</u> $\mathcal{E}^p$
- . $J_p(f)$ <u>est elliptique</u>. (BOCHNAK-BRODERSEN)

II
- . f <u>est</u> $C^o$-<u>déterminé dans</u> $\mathcal{E}^p$
- . <u>pour tout</u> q <u>de</u> $\mathbb{N}^*$, f <u>est</u> $C^q$-<u>déterminé dans</u> $\mathcal{E}^p$
- . $\mathcal{H}_p(f)$ <u>est elliptique</u>. (BRODERSEN)

III
- . <u>il existe</u> $\alpha$ <u>de</u> $\mathbb{N}^*$ <u>tel que</u> $m^\alpha \subset J_p(f)$
- . <u>il existe</u> $\alpha$ <u>de</u> $\mathbb{N}^*$ <u>tel que</u> $f_{2\alpha}$ est $C^{\mu-2\alpha-1}$-<u>rigide dans</u> $\mathcal{E}^p_\mu$ $(2\alpha + 2 \leq \mu \leq \infty)$
- . f <u>est</u> $C^\infty$-<u>rigide dans</u> $\mathcal{E}^p$ (BOCHNAK)

et si p = 1

IV
- . <u>il existe</u> $\alpha$ <u>de</u> $\mathbb{N}^*$ <u>tel que</u> $m^\alpha \subset \mathcal{H}_1(f)$
- . <u>il existe</u> $\alpha$ <u>de</u> $\mathbb{N}^*$ <u>tel que</u> $f_{2\alpha}$ <u>est</u> $C^{\mu-2\alpha-1}$ <u>suffisant dans</u> $\mathcal{E}_\mu$ $(2\alpha + 2 \leq \mu \leq \infty)$
- . f <u>est</u> $C^\infty$-<u>déterminé dans</u> $\mathcal{E}$. (BOCHNAK)

(voir tableaux I et II)

<u>*Remarques*</u> :

*1*) Ces résultats sont <u>imprécis</u> quand à la longueur du jet $C^q$-suffisant ou $C^q$-rigide.

2) <u>le groupe d'équivalence IV ne peut pas s'obtenir pour</u> $p > 1$. En effet, MATHER (résultat non publié cf. [6]) a montré que si $p > 1$, $f$ de $E^p$ est $C^\infty$- déterminé dans $E^p$ si et seulement si 0 est un point régulier de $f$.

Aussi dans les cas étudiés où $p > 1$, $H_p(f)$ ne contiendra pas de puissance de $m$ et $f$ ne pourra être, au mieux, que, par exemple, $C^\infty$-rigide ou déterminé pour la $C^\infty$-équivalence de contact.

3) il se dégage <u>différentes sortes d'hypothèses</u> sur $f$ élément de $E^p$

(1) $J_p(f)$ (<u>resp</u>. $H_p(f)$) <u>est elliptique</u>.

(2) <u>il existe</u> $r$, $r \geqslant 1$, <u>tel que</u> $f$ <u>vérifie</u> $(K_r)$ (<u>resp</u>. $(K_r')$)

(3) <u>il existe</u> $\alpha$, $\alpha \in N^*$ <u>tel que</u> $m^\alpha \subset J_p(f)$ (resp. $p = 1$ et $m^\alpha \subset H_1(f)$).

(voir tableaux I et II).

Il est évident que (3) <u>entraîne</u> (1), et d'après les groupes d'équivalence I et II précédents (2) <u>entraîne</u> (1).

Nous montrerons au chapitre I - IV que (1) <u>entraîne</u> (2), ce résultat est connu pour $p = 1$ (cf. [5]). Si $f$ est un jet homogène de degré $s$ considéré comme un germe, on peut préciser que, si $J_p(f)$ (resp. $H_p(f)$) est elliptique alors $f$ vérifie $(K_s)$ (resp. $K_s$)). (cf. Annexe II - prop. 5 et 6).

<u>Nous observons que pour accroître le degré de différentiabilité de</u> $h$

- sous les hypothèses (1) et (2) en "allonge" le jet.

On obtient ainsi les groupes d'équivalence I et II.

Nous montrerons (théorème I - chap. I, I) que

$f_{k(q)}$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. $C^q$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_{k(q)}$. Alors deux réalisations de $f_{k(0)}$ de classe $C^{k(q)}$ ayant même jet $f_{k(q)}$ sont équivalentes ($k(0)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $r$).

- sous les hypothèses (3) plus fortes que les précédentes, on garde le même jet, mais on impose aux réalisations de ce jet d'être suffisamment différentiables. On obtient les groupes d'équivalence III et IV dont nous préciserons les résultats dans le cas où $f$ est un jet homogène (théorème II et III, chap. II).

(4) Un calcul simple (cf. annexe II, prop. 4) montre que tout élément $\psi$ de $\mathcal{E}^p$ tel que $(\psi) \subset J_p(f)$ (resp. $(\psi) \subset \mathcal{H}_p(f)$) s'écrit :

$$\boxed{(1) \qquad \psi(x) = Df(x).g(x) + L(x).f(x)}$$

resp. (1 bis) $\psi(x) = Df(x).g(x)$

où $g$ est un germe d'application à l'origine de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^\infty$ et $L$ est un germe d'application à l'origine de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathcal{E}nd\ \mathbb{R}^p$, de classe $C^\infty$.

MAGNUS [15] dans un article récent, fait apparaître la relation (1) sous sa forme polaire. Il montre que si $f \in \mathcal{E}^p$, $f(0) = 0$, tel que $M_{r-1} \subset J_f$ où $r \in \mathbb{N}^*$, alors $f$ est $r$-déterminé pour la p-équivalence.

Ici $E_p$ est l'ensemble des germes en $\{0\} \times \Sigma_n$ d'applications de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, de classe $C^\infty$. $M_k$ est le sous-ensemble de $E_p$ des germes ayant leurs $(k-1)$ premières dérivées par rapport à la première variable nulles sur

$\{0\} \times \Sigma_n$, $k \in \mathbb{N}^*$. Et $J_f$ (resp. $I_f$) est le sous-ensemble des germes $\varphi$ de $E_p$ tels qu'il existe $g$ germe en $\{0\} \times \Sigma_n$ d'application de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^\infty$ et $L$ germe d'application en $\{0\} \times \Sigma_n$ de $\mathbb{R} \times \Sigma$ à valeurs dans $End\, \mathbb{R}^p$ (resp. $L = 0$) tels que

$$\varphi(t,\lambda) = Df(t\lambda)g(t,\lambda) + L(t,\lambda)f(t\lambda) .$$

De plus si $M_{r-1} \subset I_f$ alors $f$ est r-déterminé pour la p-équivalence stricte.

Il fait remarquer que si $f$ est un jet homogène de degré $r$ et si $0$ est un singularité isolée de $f$, alors $M_{r-1} \subset I_f$.

Pour situer les hypothèses de MAGNUS par rapport aux précédentes, on peut remarquer que (cf. annexe II, prop. 7 et tableaux I, II, IV, V)

$M_{r-1} \subset I_f$ entraîne $f$ vérifie $(K'_r)$

$M_{r-1} \subset I_f$ entraîne $f$ vérifie $(K_r)$

et si $f$ est un jet homogène de degré $r$

$f$ vérifie $(K'_r)$ si et seulement si $M_{r-1} \subset I_f$

$f$ vérifie $(K_r)$ entraîne $M_r \subset J_f$.

Enfin, ANTOINE [1] montre que tout jet homogène de degré $r$ vérifiant $(K_r)$ est suffisant pour la $C^1$-équivalence de contact dans $\mathcal{E}^p_{r+1}$.

*Quelques mots sur les méthodes.*

TOUGERON utilise les idéaux de germes de fonctions différentiables et le théorème des fonctions implicites classique.

Pour montrer l'équivalence des germes $f$ et $g$, KUO, TAKENS et MAGNUS intègrent un champ de vecteurs défini à partir de $F(x,u) = (1-u)f(x) + ug(x)$ où $u \in [0,1]$.

ANTOINE utilise un théorème de fonctions implicites avec paramètre après avoir écrit $x$ en coordonnées polaires, nous reprendrons cette méthode.

## II. SOMMAIRE.

Trois théorèmes articulent les chapitres suivants :

1) Le premier chapitre est divisé en trois parties principales.

A) dans cette première partie, nous démontrons le théorème I qui prolonge pour $p$ quelconque et pour l'équivalence de contact le résultat de TAKENS [16].

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $k(q)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $(r-1) + q(r-s+1)$.

*Théorème 1.*- Si $f$ de $E^p_\mu$, $f(0) = 0$ vérifie $(H_r)$ (resp. $(H'_r)$) $(r \leq \mu \leq \infty)$ alors pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $k(q) \leq \mu$, $f$ est $k(q)$-déterminé pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. $k(q)$-$C^q$-déterminé) dans $E^p_{k(q)}$.

Ceci est obtenu en utilisant un théorème de fonctions implicites avec paramètres. L'hypothèse $(H_r)$ (resp. $(H'_r)$) permet un contrôle des normes des sections de $Df(x)$.

La relation de contact entre $f$ et $f_{k(q)}$ et donc entre deux germes de $E^p_{k(q)}$ ayant le même jet $f_{k(q)}$, est la plus "forte" possible, en ce sens que, dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x) = v(x) f_{k(q)}(h(x)) \qquad (\text{resp. } f(x) = f_{k(q)}(h(x))$$

avec $h(0) = 0$, $v(0) = 1_p$ , $Dh(0) = 1_n$

et si $q \geq 2$, $D^i h(0) = 0$, $D^{i-1} v(0) = 0$, pour $1 \leq i \leq q$ (cf. [14]).

Nous donnons ensuite une application du théorème 1 aux espaces de Banach.

B) On peut, si $f$ <u>vérifie</u> $(H'_r)$ obtenir le même résultat par la méthode de TAKENS [16]. On obtient de plus que si $k(0) \leq \mu$, $f_{k(0)}$ <u>est $C^o$-suffisant dans</u> $E^p_{k(0)}$ avec $k(0)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $r$.

<u>Réciproquement</u>, on sait que $f_k$ est $v$-suffisant dans $E^p_k$ si et seulement si $f_k$ vérifie $(H_k)$.

De même, nous montrons que $f_k$ <u>est</u> $C^o$- <u>suffisant dans</u> $E^p_k$ <u>si et seulement si</u> $f_k$ <u>vérifie</u> $(H'_k)$.

C) Nous étudions ensuite le lien entre l'hypothèse d'ellipticité et celle du type $(H_r)$.

Il est bien connu [9] que l'hypothèse : $f$ vérifie $(H_r)$ (resp. $(H'_r)$) pour $f$ de $E^p$, entraîne que $J_p(f)$ (resp. $H_p(f)$) est elliptique. Nous montrons que

<u>Si</u> $f$ <u>de</u> $E^p$ <u>est tel que</u> $J_p(f)$ <u>(resp.</u> $H_p(f)$) <u>est elliptique, alors il existe</u> $r$, $r \geq 1$ <u>tel que</u> $f$ <u>vérifie</u> $(H_r)$ (resp. $(H'_r)$).

Le chapitre se termine par des exemples

Voir TABLEAUX I - II - III.

2) <u>Dans le chapitre</u> II, nous étudions des <u>jets homogènes</u> $f_s$. A tout jet homogène vérifiant $(H_s)$ (resp. $(H'_s)$) on peut appliquer les résultats du théorème I.

En mettant sur $f_s$ des hypothèses plus fortes que $(H_s)$ (resp. $(H'_s)$) nous obtiendrons dans ce chapitre des résultats qui prolongent ceux du théorème 1 et qui précisent ceux des groupes d'équivalence III et IV.

*Définitions* :

1) On dit que $f_s$ vérifie $(\tilde{H}_s)$ (resp. $p = 1$ et $(\tilde{H}'_s)$) si l'ensemble des zéros communs des polynômes représentants des germes qui engendrent $J_p(f_s)$ (resp. $H_1(f_s)$) est, dans $\mathbb{C}^n$, réduit à $\{0\}$.

Remarquons que $f_s$ vérifie $(H_s)$ (resp. $(H'_s)$ si et seulement si l'ensemble précédent est, dans $\mathbb{R}^n$, réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si $0$ est une singularité isolée de $f_s$ dans $W_{f_s}$ (resp. $0$ est une singularité isolée de $f_s$).

(cf. ANTOINE [1] et annexe II, proposition 6).

L'hypothèse $(\tilde{H}_s)$ (resp. $(\tilde{H}'_s)$ est donc plus forte que l'hypothèse $(H_s)$ (resp. $(H'_s)$).

2) A chaque jet $f_s$, nous associons une suite de fonctions $\Phi_\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$) définies de la manière suivante : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $L^k_s(n,p)$ l'ensemble des applications $k$ linéaires et symétriques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, $L^k_s(n, End(p))$ l'ensemble des applications $k$ linéaires et symétriques de $\mathbb{R}^n$ dans $End\, \mathbb{R}^p$, $L^o_s(n, End(p)) = End\, \mathbb{R}^p$.

L'application $\phi_\ell$ est définie sur $L^\ell_s(n, End(p)) \times L^{\ell+1}_s(n, n)$ est à valeurs dans $L^{\ell+s}_s(n,p)$ et est telle que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$ :

$$\phi_\ell(v,u)(x)^{\ell+} = v(x)\ f_s(x) + Df_s(x)u(x)^{\ell+1}.$$

Si $p = 1$, on note $\bar{\phi}_\ell$ la restriction de $\phi_\ell$ à $\{0\} \times L^{\ell+1}_s(n,n)$.

Nous montrons que si $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) est surjectif alors quel que soit $\ell' \in \mathbb{N}$, $\ell' \geq \ell$, $\phi_{\ell'}$ (resp. $\bar{\phi}_{\ell'}$) est surjectif.

Les propriétés des fonctions $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\Phi}_\ell$) sont liées aux propriétés de $f_s$ de la façon suivante :

les propositions (1), (2), (3) sont équivalentes :

(1) $f_s$ vérifie $(\tilde{H}_s)$ (resp. $\tilde{H}'_s$))

(2) il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\Phi}_\ell$) soit surjectif

(3) il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $m^\alpha \subset J_p(f_s)$ (resp. $m^\alpha \subset H_1(f_s)$).

En particulier, si $m^\alpha \subset J_p(f_s)$ (resp. $m^\alpha \subset H_1(f_s)$) avec $\alpha \geqslant s$ alors $\phi_{\alpha-s}$ (resp. $\bar{\Phi}_{\alpha-s}$) est surjectif.

Inversement si $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\Phi}_\ell$) est surjectif, il existe $\alpha$ tel que $m^\alpha \subset J_p(f_s)$ (resp. $m^\alpha \subset H_1(f_s)$) mais on peut avoir $\alpha > \ell + s$. Si $p = 1$, $H_1(f_s) = J_1(f_s)$, on montre que $\Phi_\ell$ est surjectif si et seulement si $m^{s+\ell} \subset H_1(f_s)$.

Par une méthode proche de celle d'ANTOINE [1], avec un paramètre supplémentaire, nous obtenons le :

*Théorème* 2.- Si $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\Phi}_\ell$) (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$) est surjectif alors pour tout $q$, $q \in \mathbb{N}$, $\ell \leqslant q < \infty$, $f_{s+\ell-1}$ relèvement d'ordre $s+\ell-1$ de $f_s$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. $C^q$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_{s+q-1}$.

Ceci prolonge le résultat suivant (THEOREME 1) : si $f_s$ vérifie $(H_s)$ (resp. $(H'_s)$) alors pour tout $\ell$ de $\mathbb{N}^*$, $f_{s+\ell-1}$ est suffisant pour la $C^\ell$-équivalence de contact (resp. $C^\ell$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_{s+\ell-1}$.

Nous obtenons ensuite, en utilisant le théorème d'inversion locale le

*Théorème* 3.- Si $\phi_o$ (resp. $\bar{\Phi}_o$) est surjectif alors pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$ et $q = \infty$, $f_s$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. $C^q$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_{s+q-1}$.

voir TABLEAUX IV et V.

Nous donnons au chapitre III des exemples de jets homogènes qui vérifient $(\tilde{H}_s)$ (resp. $(\tilde{H}'_s)$ et des exemples de jets homogènes qui vérifient $(H_s)$ (resp. $(H'_s)$) et ne vérifient pas $(\tilde{H}_s)$ (resp. $(\tilde{H}'_s)$).

A) pour $p = 1$, on retrouve entre autre le lemme de MORSE, on donne aussi des exemples de jets où le plus petit $\ell$ tel que $\bar{\Phi}_\ell$ est surjectif est 0,1, ou $\ell$ quelconque.

B) pour $p = 2$, $s = 2$, $n \geqslant 2$. Si $f_2$ vérifie $(\tilde{H}_2)$ $\phi_o$ est surjectif seulement pour $n = 2$ et 3 bien que pour $n = 3$, $m^2$ ne soit pas inclus dans $J_2(f_2)$. On a toujours pour $n \geqslant 2$, $m^3 \subset J_2(f_2)$ et donc $\phi_1$ est surjectif.

Si $f_2$ vérifie $(H_2)$, $f_2$ est donc suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact dans $E^2_{q+1}$ avec $1 \leqslant q < \infty$ (et $q = \infty$ pour $n = 2$ ou 3).

C) Nous prolongeons alors l'étude de la manière suivante : On a montré (chap. II - Proposition 1) que $f_s$ est suffisant pour la $C^2$-équivalence de contact (resp. $C^2$-suffisant) si et seulement si $\phi_1$ (resp. $\bar{\Phi}_1$) est surjectif.

Dans le cas précédent $(p = 2, s = 2, n = 4)$ si $f_2$ vérifie $(H_2)$ et ne vérifie pas $(\tilde{H}_2)$ $f_2$ ne peut pas être suffisant pour la $C^2$-équivalence de contact dans $E^2_3$.

Nous étudions alors le problème de l'existence, non pas d'une $C^2$-équivalence de contact, mais seulement d'un difféomorphisme local $h$ tel que $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_n$ de classe $C^2$ qui échange les surfaces de niveau de $f_2$ et de l'une de ses réalisations dans $E^2_3$. Nous donnons des exemples où $f$ vérifie $(H_2)$ et où ce $h$ n'existe pas.

TABLEAU I   $f \in E$

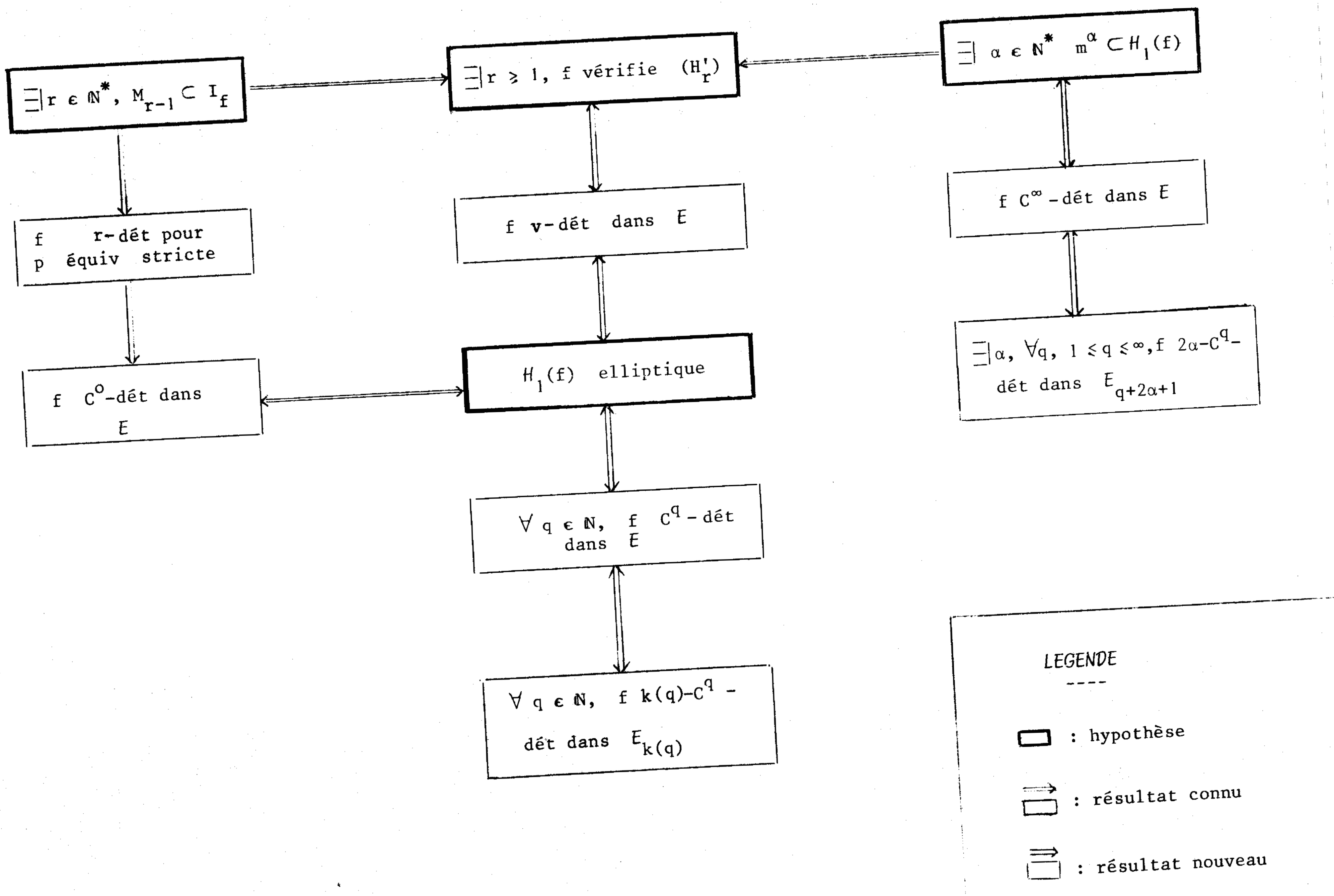
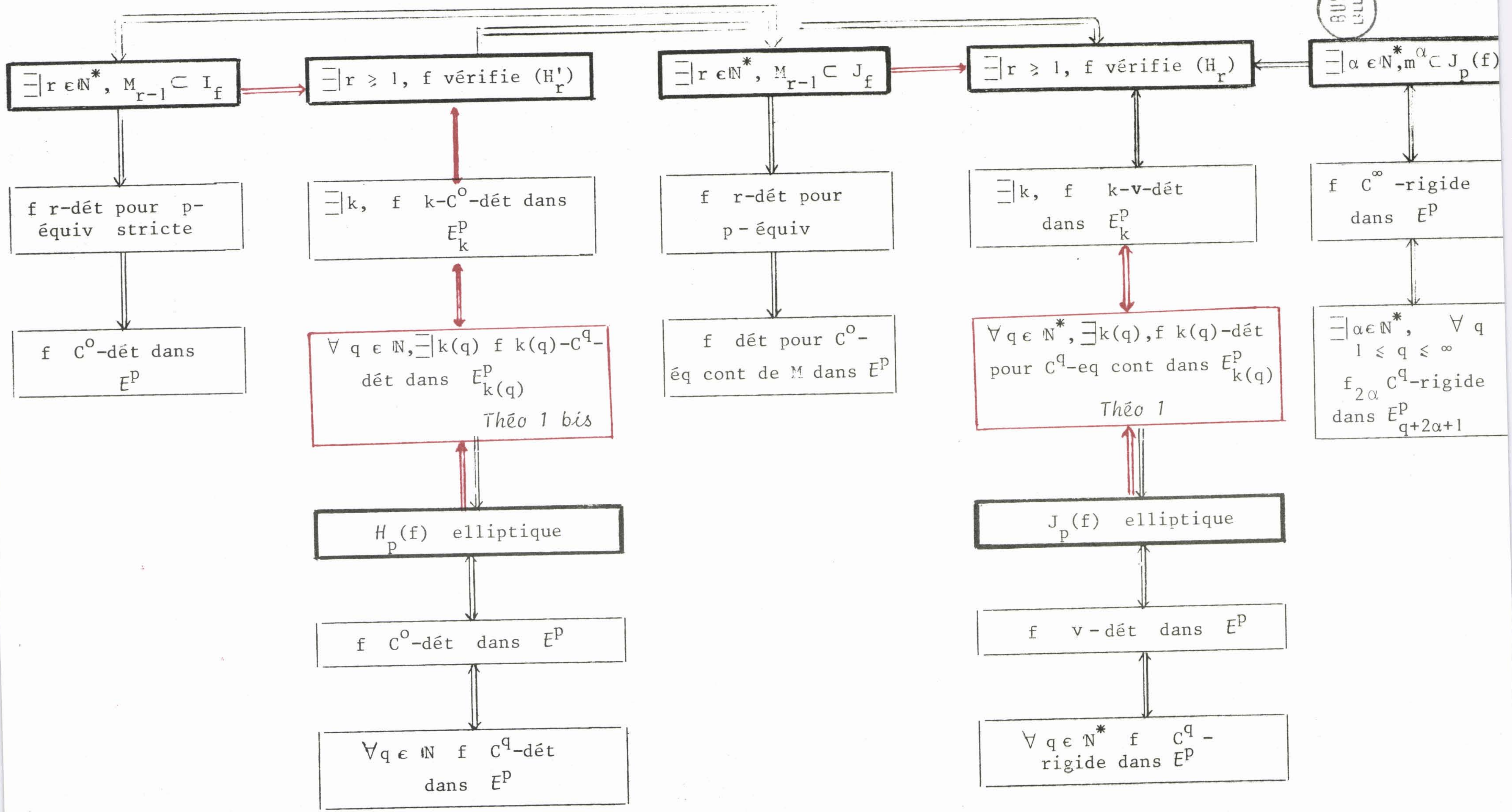
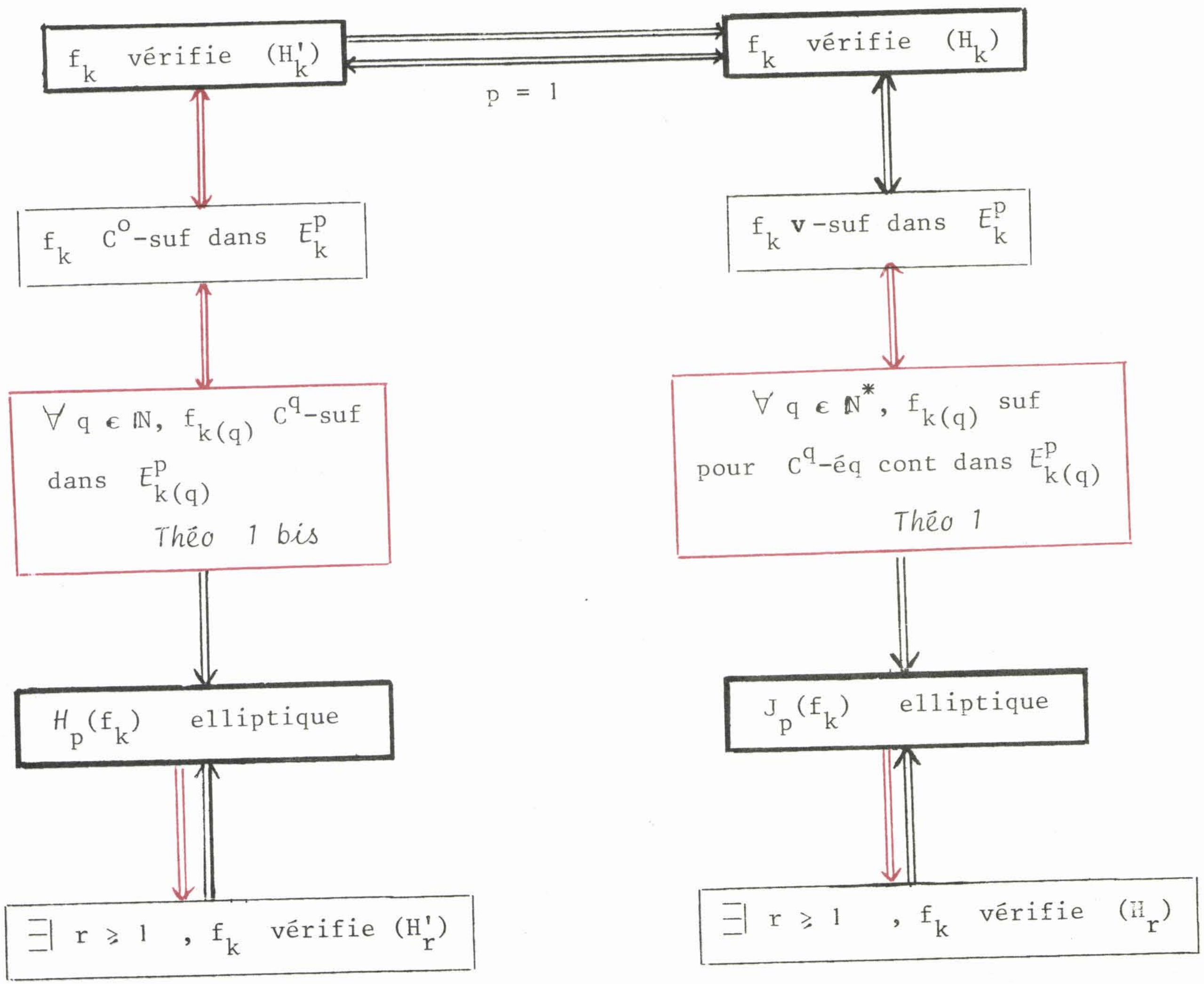


TABLEAU II - $f \in E^p$ $n \geq p > 1$



# TABLEAU III

$f_k$ jet non homogène $k > s_{f_k}$ , $p > 1$




- ici $k(0) = k$
  et si $q \in \mathbb{N}^*$
  $k(q) = k-1+q(r-s_{f_k}+1)$

- $f_{k(q)}$ est un relèvement d'ordre $k(q)$ de $f_k$

*TABLEAU IV*

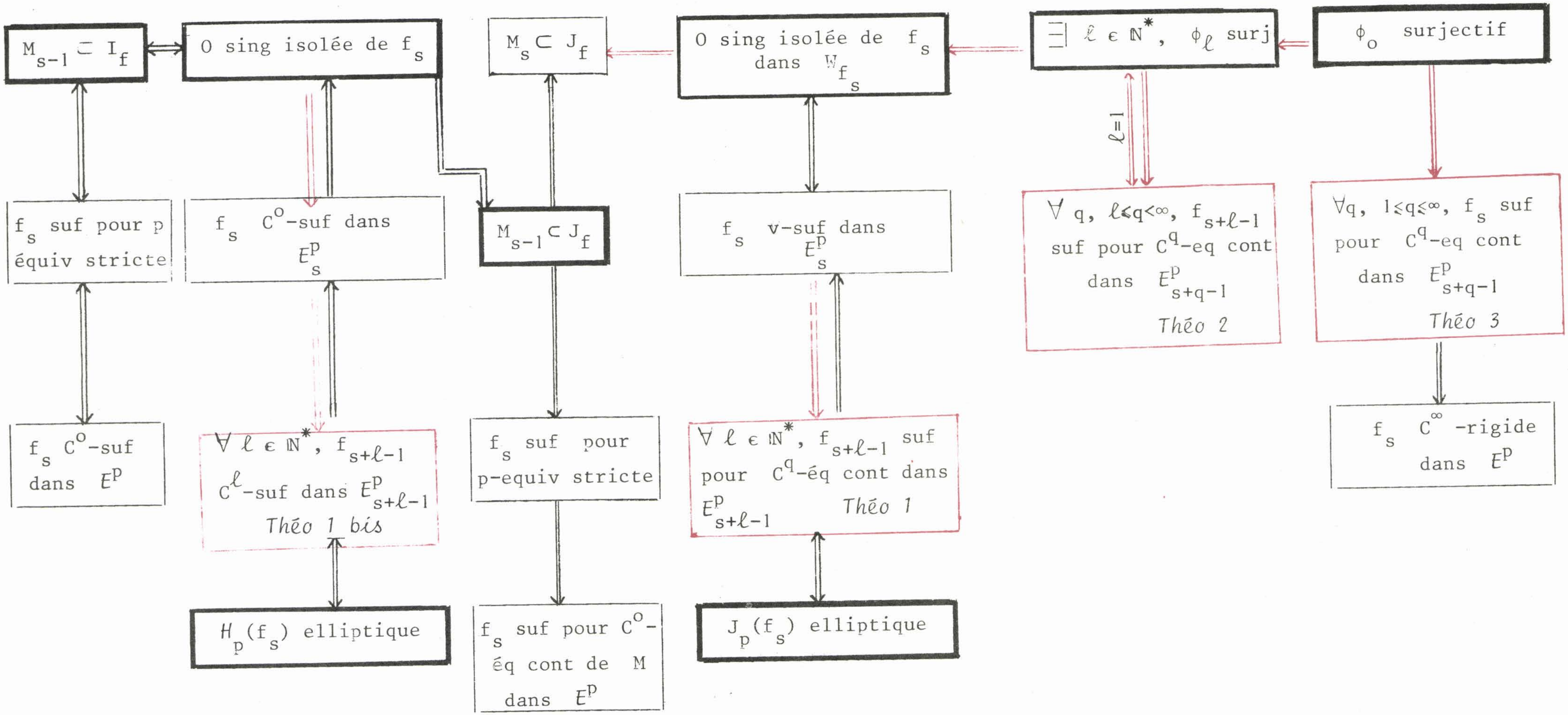
---------

$f_s$ jet homogène $p = 1$, $s \geq 2$

pour $\ell \geq 2$, $f_{s+\ell-1}$ est un relèvement de $f_s$ d'ordre $s + \ell - 1$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{M_{s-1} \subset I_f} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{0 \text{ sing isolée de } f_s} \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\exists \ell \geq 2 \ \ m^{s+\ell} \subset H_1(f_s)} \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{m^{s+1} \subset H_1(f_s)} \arrow[l] \arrow[d, Leftrightarrow] & \boxed{m^{s} \subset H_1(f_s)} \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] \\
\begin{array}{c} f_s \text{ suf pour} \\ p\text{-équiv. stricte} \end{array} \arrow[d, leftrightarrow] & f_s \ \text{v-suf dans } E_s \arrow[d, leftrightarrow] & \begin{array}{l} \forall q, \ \ell \leq q < \infty, \ f_{s+\ell-1} \\ C^q\text{-suf dans } E_{s+q-1} \\ \quad \textit{Théo 2 bis} \end{array} & \begin{array}{l} \forall q \in \mathbb{N}^*, f_s \ \ C^q\text{-suf} \\ \text{dans } E_{s+q-1} \\ \quad \textit{Théo 2 bis} \end{array} & \begin{array}{l} \forall q, 1 \leq q \leq \infty, f_s \ \ C^q\text{-} \\ \text{suf dans } E_{s+q-1} \\ \quad \textit{Théo 3 bis} \end{array} \\
f_s \ C^0\text{-suf dans } E \arrow[d, leftrightarrow] & \begin{array}{l} \forall \ell \in \mathbb{N}^* \ \ f_{s+\ell-1} \ \ C^\ell\text{-} \\ \text{suf dans } E_{s+\ell-1} \end{array} \arrow[d, leftrightarrow] & & & \\
f_s \ V\text{-suf dans } E & \boxed{H_1(f_s) \text{ elliptique}} & & &
\end{tikzcd}
$$

*TABLEAU V* - $f_s$ jet homogène, $n \geq p > 1$, $s \geq 2$



# P R E M I E R E   P A R T I E

## JETS $v$-SUFFISANTS ET $C^0$-SUFFISANTS

# CHAPITRE I

----------

## I - L'Hypothèse $H_r$ et la $C^q$-équivalence de contact.

Soit $f$ de $E^p_\mu$ et $r$ un réel, $\mu \geq r \geq 1$.

Nous utiliserons les notations et les définitions suivantes :

*Notations.*

$s_f$ est le plus petit entier $i$ tel que $D^i f(0) \neq 0$.

$W^r_\alpha(f)$ : pour tout $\alpha$ de $\bar{\mathbb{R}}$, $0 < \alpha \leq \infty$, on pose :

$$W^r_\alpha(f) = \{x \neq 0 \ / \ ||f(x)|| \leq \alpha ||x||^r\}.$$

$k(q)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $r$ si $q = 0$ et à $r - 1 + q(r-s_f+1)$ si $q \in \mathbb{N}^*$.

*Définitions.*

f vérifie $H_r$ s'il existe une constante $C$, $C > 0$ et un voisinage $V$ de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x$ de $V \cap W^r_\alpha(f)$, $Df(x)$ admette une section $S(x)$ telle que $||S(x)|| \leq \dfrac{C}{||x||^{r-1}}$.

On dira que $f$ vérifie $H'_r$ s'il vérifie $H_r$ pour $\alpha = \infty$ (c'est-à-dire que $V \cap W^r_\infty(f) = V - \{0\}$).

Rappelons que si $f$ vérifie $H_r$ (resp. $H'_r$) on a nécessairement $r \geq s_f$ (Annexe II. Remarque 1 du I).

Dans cette première partie, nous démontrerons le théorème I [14].

*Théorème I.a.*

Soit $f$ de $E^p_\mu$ vérifiant $H_r$ avec $1 \leqslant r \leqslant \mu$, tel que $f(0) = 0$.

Pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $k(q) \leqslant \mu$, $f$ est $k(q)$-déterminé pour la $C^q$-équivalence de contact dans $E^p_{k(q)}$.

Pour un jet $f$ d'ordre $r$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, KUO [12] a montré que $f$ est v-suffisant dans $E^p_r$ si et seulement si il vérifie $K_r$, hypothèse elle-même équivalente à $H_r$. On peut alors traduire le théorème 1-a sous la forme suivante :

*Théorème I.b.*

Si $f$ jet d'ordre $r$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f(0) = 0$, est v-suffisant dans $E^p_r$, pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, un relèvement quelconque de $f$, d'ordre $k(q) = r - 1 + q(r-s_f+1)$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact dans $E^p_{k(q)}$.

*Quelques indications sur la méthode.*

Pour une fonction $f$ de $E^p_\mu$ vérifiant les hypothèses du théorème I.a, on cherche à déterminer :

$\bar{v}$ germe en $0$ d'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^p)$ de classe $C^{q-1}$,

$h$ germe en $0$ de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^q$, $q \geqslant 1$, tel que $h(0) = 0$ et $k$ entier tel que si $f_k$ est le jet d'ordre $k$ de $f$ en $0$ on ait dans un voisinage de $0$ :

$$f(x) = \bar{v}(x) . f_k(h(x)) \qquad (1)$$

Si la relation (1) est vérifiée pour $q \geqslant 1$, en identifiant les développements limités d'ordre $s$ des deux membres (où $s = s_f$) on obtient :

$\bar{v}(0) f_s(Dh(0).x) = f_s(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$.

Cette condition nécessaire est réalisée par $\bar{v}(0) = 1_p$ et $Dh(0) = 1_n$ (où $1_m = 1_{\mathbb{R}^m}$).

Passant en coordonnées polaires, on pose $x = t\lambda$, avec $t = ||x||$ et $\lambda = \dfrac{x}{||x||}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

On cherche $h$ et $\bar{v}$ sous la forme :

$$\bar{v} = 1_p + t^\beta v_{t,\lambda} \qquad h(t\lambda) = t\lambda + t^{\beta+1} u_{t,\lambda}(\lambda)$$

où $v_{t,\lambda} \in \mathrm{End}(p)$ et $u_{t,\lambda} \in \mathrm{End}(n)$.

La relation (1) se traduit par l'égalité :
$f(t\lambda) = (1_p + t^\beta v_{t,\lambda}) \cdot f_k(t\lambda + t^{\beta+1} u_{t,\lambda}(\lambda))$ ou ce qui revient au même pour $t \neq 0$ :

$$\frac{1}{t^\alpha}(f(t\lambda) - f_k(t\lambda)) = \frac{1}{t^\alpha}\left[(1_p + t^\beta v_{t,\lambda}) \cdot f_k(t\lambda + t^{\beta+1} u_{t,\lambda}(\lambda)) - f_k(t\lambda)\right] \quad (2).$$

Pour tout $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $I = ]0,\eta[$, $\Omega$ un voisinage de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, il s'agit de déterminer $(u,v)$, fonction différentiable de $(t,\lambda)$, vérifiant (2).

Pour cela, nous établirons un théorème de fonction implicite dépendant des paramètres $t$ et $\lambda$ (proposition I et II).

Nous appliquerons ce théorème à la fonction $G$ de $\mathrm{End}(n) \times \mathrm{End}(p) \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, définie par :

$$G((u,v),t,\lambda) = \frac{1}{t^\alpha}\left[(1_p + t^\beta v) \cdot f_k(t\lambda + t^{\beta+1} u(\lambda)) - f_k(t\lambda)\right]$$

pour résoudre $G((u,v),t,\lambda) = y$ pour tout $y$ d'un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p$ (proposition III). Puis nous prendrons $y = \dfrac{f(t\lambda) - f_k(t\lambda)}{t^\alpha}$ pour établir le théorème I.

Pour que la norme de la section orthogonale de $D_1G((0,0),t,\lambda)$ soit bornée, il faut prendre $\alpha - \beta = r$ ; le choix de $\beta = r - s$ permet d'avoir $h$ et $v$ de classe $C^q$ et $C^{q-1}$ respectivement.

*Notation.*

Pour $r$ réel, $s$ entier, $r \geq s \geq 1$ et pour $(i', i'')$ de $\mathbb{N}^2$ on pose

$\ell(i',i'') = i'(r-s+1) + i''(r-s)$.

*Proposition I.-*

Soient $F$ et $G$ des espaces de Banach, $U$ un ouvert de $F$, $\Omega$ un ouvert de $G$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $I = ]0,\eta[$, $f$ une application de $U \times I \times \Omega$ dans $F$, de classe $C^\mu$, $1 \leq \mu \leq +\infty$. On suppose qu'il existe $x_o$ de $U$, $y_o$ de $F$ tels que :

(a) $f(x_o,t,\lambda) = y_o$ et $D_1f(x_o,t,\lambda) = 1_F$ quel que soit $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$.

(b) Pour tout $(i,i',i'')$ de $\mathbb{N}^3$ tel que $1 \leq i + i' + i'' \leq \mu$, la famille d'applications $\left\{t^{\ell(i',i'')} D_1^{\,i} D_2^{\,i'} D_3^{\,i''} f(.,t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est équicontinue et bornée en $x_o$.

Alors, il existe $\rho$, $\rho > 0$ et une application $\xi$ de $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$ dans $\bar{B}_F(x_o,2\rho)$, de classe $C^\mu$ telle que :

(1) quel que soit $(y,t,\lambda)$ de $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$ : $f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda) = y$.

(2) quel que soit $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$ : $\xi(y_o,t,\lambda) = x_o$ et $D_1\xi(y_o,t,\lambda) = 1_F$.

(3) Pour tout $(i,i',i'')$ de $\mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq i + i' + i'' \leq \mu$, la famille d'applications $\left\{t^{\ell(i',i'')} D_1^{\,i} D_2^{\,i'} D_3^{\,i''} \xi(.,t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est équicontinue et bornée en $y_o$.

La famille $\{D_1f(.,t,\lambda)\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est équicontinue en $x_o$ et $D_1f(x_o,t,\lambda) = 1_F$.

Il existe donc $\rho$, $\rho > 0$, tel que pour tout $(x,t,\lambda)$ de $\bar{B}_F(x_o,2\rho) \times I \times \Omega$

$$||D_1 f(x,t,\lambda) - 1_F|| \leq \frac{1}{2}\ .$$

On définit une application $g$, de classe $C^\mu$, contractante de rapport 1/2 par rapport à $x$, définie sur $\bar{B}_F(x_o,2\rho) \times B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$, à valeurs dans $\bar{B}_F(x_o,2\rho)$ par :

$$g(x,y,t,\lambda) = x + y - f(x,t,\lambda).$$

En appliquant la proposition 8 de l'annexe II, on peut conclure qu'il existe une application $\xi$ de classe $C^\mu$, de $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$ dans $\bar{B}_F(x_o,2\rho)$ vérifiant (1) et (2).

D'après le lemme 1 de l'annexe I : pour tout $(x,t,\lambda)$ de $B_F(x_o,2\rho) \times I \times \Omega$, $D_1 f(x,t,\lambda)$ est un automorphisme de $F$ et $||[D_1 f(x,t,\lambda)]^{-1}|| \leq 2$.

L'équicontinuité de la famille $\{[D_1 f(.,t,\lambda)]^{-1}\}_{(t,\lambda)\,\in\, I \times \Omega}$ en $x_o$, résulte de :

$$||1_F - [D_1 f(x,t,\lambda)]^{-1}|| \leq ||[D_1 f(x,t,\lambda)]^{-1}||\ ||1_F - D_1 f(x,t,\lambda)|| \leq$$

$$2||1_F - D_1 f(x,t,\lambda)||.$$

En différentiant $f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda) = y$ on montre que pour $(i,i',i'')$ tel que $i + i' + i'' = n$, $1 \leq n \leq \mu$, les différentielles de $\xi$ sont de la forme :

$$D_{1^i 2^{i'} 3^{i''}}\xi(y,t,\lambda) = [D_1 f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda)]^{-1}.\Sigma(i,i',i'') \quad \text{où}$$

$\Sigma(i,i',i'')$ est une combinaison linéaire de termes du type :

$$D_{1^\delta 2^{\beta_o} 3^{\gamma_o}} f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda)\left[D_{1^{\alpha_1} 2^{\beta_1} 3^{\gamma_1}}\xi(y,t,\lambda),\ldots,D_{1^{\alpha_\delta} 2^{\beta_\delta} 3^{\gamma_\delta}}\xi(y,t,\lambda)\right]$$

avec $\sum_{m=1}^{\delta} \alpha_m = i$ ; $\sum_{m=0}^{\delta} \beta_m = i'$ ; $\sum_{m=0}^{\delta} \gamma_m = i''$ ; $0 \leq \alpha_m+\beta_m+\gamma_m < n$

pour $1 \leqslant m \leqslant \delta$.

En particulier, on a : $D_1\xi(y,t,\lambda) = [D_1 f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda)]^{-1}$.

On en déduit que $D_1\xi(y_o,t,\lambda) = 1_F$ et que la famille $\{\xi(.,t,\lambda)\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est équicontinue en $y_o$ puisque $D_1\xi$ est borné sur $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$.

Ceci démontre (3) pour $i + i' + i'' = 0$.

Il reste à montrer que quel que soit $(i,i',i'')$ tels que $i + i' + i'' = n$, $1 \leqslant n \leqslant \mu$, (3) est vérifié. Pour cela nous raisonnerons par récurrence sur $n$.

Supposons (3) réalisé quel que soit $(i,i,i'')$, $0 \leqslant i+i'+i'' < n$. L'hypothèse (b) entraîne qu'il existe un voisinage $V_n$ de $x_o$ tel que quel que soit $(i,i',i'')$, $1 \leqslant i+i'+i'' \leqslant n$, $t^{\ell(i',i'')}D_{1^i 2^{i'} 3^{i''}}f$ soit borné sur $V_n \times I \times \Omega$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, il existe un voisinage $V'_n$ de $y_o$ tel que $\xi(y,t,\lambda) \in V_n$ si $(y,t,\lambda) \in V'_n \times I \times \Omega$ et que $D_{1^{\alpha_m} 2^{\beta_m} 3^{\gamma_m}}\xi$ soit borné sur $V'_n \times I \times \Omega$ quel que soit $m$, $1 \leqslant m \leqslant \delta$.

Compte tenu de l'équicontinuité de $\{[D_1 f(.,t,\lambda)]^{-1}\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ en $x_o$ et de la relation $\ell(i',i'') = \sum_{m=1}^{\delta} \ell(\beta_m,\gamma_m)$, la conclusion (3) est bien obtenue pour $i + i' + i'' = n$.

*Proposition II.-*

Soient $E$, $F$, $G$ des espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $\Omega$ un ouvert de $G$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $I = ]0,\eta[$, $f$ une application de $U \times I \times \Omega$ dans $F$, de classe $C^\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant \infty$. On suppose qu'il existe $x_o$ de $U$, $y_o$ de $F$ tels que :

(a) quel que soit $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$ $f(x_o,t,\lambda) = y_o$.

(b) quel que soit $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$, $D_1 f(x_o,t,\lambda)$ admette une section

$S(t,\lambda)$ et que l'application $S$ de $I \times \Omega$ dans $L(F,E)$ soit de classe $C^{\mu}$.

De plus, on suppose que pour tout $(i',i'')$ de $\mathbb{N}^2$, $0 \leq i' + i'' \leq \mu$ :

$$\left\{ t^{\ell(i',i'')} D_{1^{i'}2^{i''}} S(t,\lambda) \right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega} \quad \text{est borné.}$$

(c) Pour tout $(i,i',i'')$ de $\mathbb{N}^3$ tel que $1 \leq i + i' + i'' \leq \mu$ (resp. $2 \leq i + i' + i'' \leq \mu$) la famille $\left\{ t^{\ell(i',i'')} D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}} f(.,t,\lambda) \right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est équicontinue en $x_o$ (resp. bornée en $x_o$).

Alors il existe $\rho$, $\rho > 0$ et une application $\xi$ de $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$ dans $E$, de classe $C^{\mu}$ telle que :

(1) quel que soit $(y,t,\lambda)$ de $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$ $\quad f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda) = y$

(2) quel que soit $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$ $\quad \xi(y_o,t,\lambda) = x_o$

(3) quel que soit $(i,i',i'')$ de $\mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq i + i' + i'' \leq \mu$, la famille d'applications $\left\{ t^{\ell(i',i'')} D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}} \xi(.,t,\lambda) \right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est équicontinue et bornée en $y_o$.

*Démonstration* :

L'application $S$ étant bornée, il existe un voisinage $U'$ de $0$ dans $F$ tel que quel que soit $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$, $x_o + S(t,\lambda)U' \subset U$.

Soit $g$ l'application de $U' \times I \times \Omega$ dans $F$ définie par :

$$g(y,t,\lambda) = f(x_o + S(t,\lambda).y,t,\lambda).$$

$g$ est de classe $C^{\mu}$ et quel que soit $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$, on a :

$g(0,t,\lambda) = y_o$ ; $D_1 g(0,t,\lambda) = 1_F$.

Pour $(i,i',i'')$ de $\mathbb{N}^3$, $D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}} g(y,t,\lambda)$ est une combinaison linéaire d'éléments du type :

$$D_{1^{\alpha}2^{\beta_o}3^{\gamma_o}} f(x_o+S(t,\lambda)y,t,\lambda).\Big[D_{1^{\beta_1}2^{\gamma_1}}S(t,\lambda),\dots,D_{1^{\beta_i}2^{\gamma_i}}S(t,\lambda),$$

$$D_{1^{\beta_{i+1}}2^{\gamma_{i+1}}}S(t,\lambda).y,\dots,D_{1^{\beta_\alpha}2^{\gamma_\alpha}}S(t,\lambda)y\Big]$$

avec $\sum\limits_{m=0}^{\alpha} \beta_m = i'$, $\sum\limits_{m=0}^{\alpha} \gamma_m = i''$ et $(\beta_m,\gamma_m) \neq (0,0)$ pour $m > i$.

En utilisant les hypothèses b et c et le fait que $\ell(i',i'') = \sum\limits_{m=0}^{\alpha} \ell(\beta_m,\gamma_m)$, on vérifie que pour $1 \leqslant i+i'+i'' \leqslant \mu$ la famille $\left\{t^{\ell(i',i'')}D_{1^i2^{i'}3^{i''}}\, g(\,.\,,t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est équicontinue en 0 ; elle est également bornée en 0, pourvu que $i \geqslant 2$ (car $i \geqslant \alpha \geqslant 2$).

Ce n'est que dans $D_{1\,2^{i'}3^{i''}}\, g$ et $D_{2^{i'}3^{i''}}\, g$ que peut figurer $D_1 f(x_o,t,\lambda)$.

Mais alors : $D_{1\,2^{i'}3^{i''}}\, g(0,t,\lambda) = 0$ si $i' + i'' \geqslant 1$.

$$D_{2^{i'}3^{i''}}\, g(0,t,\lambda) = 0 \quad \text{si } i' + i'' \geqslant 0.$$

g vérifiant toutes les hypothèses de la proposition I, il existe $\rho$, $\rho > 0$, et une application $\tau$ de $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$ dans $\overline{B}_F(0,2\rho)$, de classe $C^\mu$, vérifiant les conclusions de la proposition I.

Soit $a = \sup\limits_{(t,\lambda)\in I\times\Omega} ||S(t,\lambda)||$, on considère l'application $\xi$, de classe $C^\mu$, de $B_F(y_o,\rho) \times I \times \Omega$ dans $B_E(0,2a\rho)$ définie par :

$$\xi(y,t,\lambda) = x_o + S(t,\lambda).\tau(y,t,\lambda).$$

Elle vérifie les conclusions (1), (2) de la proposition III.

Pour $1 \leqslant i+i'+i'' \leqslant \mu$, on a :

$$D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}}\xi(y,t,\lambda) = \sum_{\gamma=0}^{i''} \sum_{\beta=0}^{i'} C^{\gamma}_{i''} C^{\beta}_{i'} D_{1^{\beta}2^{\gamma}}S(t,\lambda).D_{1^{i}2^{i'-\beta}3^{i''-\gamma}}\tau(y,t,\lambda).$$

Avec l'hypothèse (b) et $\ell(i',i'') = \ell(\beta,\gamma) + \ell(i'-\beta,i''-\gamma)$, on peut montrer que $\xi$ satisfait à la conclusion (3).

<u>*Proposition*</u> *III.-*

<u>Soit</u> $g$ <u>un jet d'ordre</u> $k$ <u>de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^p$, <u>vérifiant l'hypothèse</u> $H_r$ <u>avec</u> $1 \leqslant s_g \leqslant r \leqslant k$ (<u>on posera</u> $s = s_g$) <u>et soit</u> $q$ <u>un entier</u>, $q \geqslant 1$. <u>Il existe alors un voisinage</u> $V$ <u>de l'origine de</u> $\mathbb{R}^p$, $I = ]0,\eta[$ <u>un intervalle de</u> $\mathbb{R}$, $\Omega$ <u>un voisinage de la sphère unité de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et une application</u> $(\xi,\tau)$ <u>de</u> $V \times I \times \Omega$ <u>dans</u> $End(n) \times End(p)$ <u>de classe</u> $C^{\infty}$, <u>telle que</u> :

(1) <u>quel que soit</u> $(t,\lambda)$ <u>de</u> $I \times \Omega$, $\xi(0,t,\lambda) = 0$ <u>et</u> $\tau(0,t,\lambda) = 0$

(2) <u>quel que soit</u> $(y,t,\lambda)$ de $V \times I \times \Omega$ :

$$(1_p+t^{r-s}\tau(y,t,\lambda)) \bullet g(t\lambda + t^{r-s+1}\xi(y,t,\lambda)(\lambda)) - g(t\lambda) = t^{2r-s}y.$$

(3) <u>quel que soit</u> $(i,i',i'')$ <u>de</u> $\mathbb{N}^3$, <u>les familles d'applications</u> :

$$(3.1) \quad \left\{t^{\ell(i',i'')}D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}}\xi(.,t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$$

$$(3.2) \quad \left\{t^{\ell(i',i'')}D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}}\tau(.,t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$$

<u>soient équicontinues et bornées en l'origine de</u> $\mathbb{R}^p$.

On considère l'application $G$ de $(End(n) \times End(p)) \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$G((u,v),t,\lambda) = \frac{1}{t^{2r-s}}\left[(1_p+t^{r-s}v) \bullet g(t\lambda+t^{r-s+1}u(\lambda)) - g(t\lambda)\right].$$

Cette application $G$ est de classe $C^\infty$ par rapport aux trois variables $(u,v),t,\lambda$ et $G((0,0,t,\lambda)) = 0$ quel que soit $(t,\lambda)$.

Nous allons voir que $G$ satisfait aux hypothèses de la proposition II. $g$ vérifiant $H_r$, il existe $\alpha > 0$, $c > 0$ et un voisinage $V'$ de $0$ tel que pour tout $x$ de $V' \cap W_\alpha^r(g)$, $Dg(x)$ admette une section $S_1(x)$ avec $||S_1(x)|| \leq \dfrac{C}{||x||^{r-1}}$.

Soit $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{R}^n / \frac{1}{2} < ||\lambda|| < \frac{3}{2}\}$ et soit $\eta$ réel fini, tel que si $(t,\lambda)$ appartient à $]0,\eta[ \times \Omega$, $t\lambda \in V'$. On notera $I = ]0,\eta[$.

1) *__Quel que soit__* $(t,\lambda)$ *__de__* $I \times \Omega$, $D_1G((0,0)t,\lambda)$ *__est surjective__* :

Pour $(u,v)$ de $\mathrm{End}(n) \times \mathrm{End}(p)$, on a :

$$D_1G((0,0),t,\lambda)(u,v) = \frac{1}{t^r}\,(v.g(t\lambda) + t\, Dg(t\lambda).u(\lambda)).$$

Il s'agit de montrer que pour tout $y$ de $\mathbb{R}^p$, il existe $(u_y,v_y)$ de $\mathrm{End}(n) \times \mathrm{End}(p)$, tel que

$$t^r y = v_y.g(t\lambda) + t\, Dg(t\lambda).u_y(\lambda).$$

Deux cas se présentent :

a) $t\lambda \in W_\alpha^r(g)$, on prend $v_y = 0$ et on pose $u_y(\lambda) = t^{r-1} S_1(t\lambda).y$. On peut choisir $u_y$ de sorte que $||(u_y,v_y)|| = ||u_y|| \leq 2^{r-1}C$.

b) $t\lambda \notin W_\alpha^r(g)$ c'est-à-dire $||g(t\lambda)|| > \alpha||t\lambda||^r$ on prend $u_y = 0$ et on pose $v_y(g(t\lambda)) = yt^r$. En prolongeant convenablement $v_y$ sur $\mathbb{R}^p$ on a :

$$||(u_y,v_y)|| \leq \frac{2^r}{\alpha}\,||y||.$$

Pour tout $(t,\lambda)$ de $I \times \Omega$, $D_1G((0,0),t,\lambda)$ est surjective. Elle admet une section orthogonale : $S(t,\lambda) = \sigma(D_1G((0,0),t,\lambda)$ (en reprenant les notations du lemme 2 de l'annexe I, $\sigma(u)$ est la section orthogonale de $u$). $S$ est bornée et de classe $C^\infty$ sur $I \times \Omega$.

2) *Pour tout* $(i,i',i'')$ *de* $\mathbb{N}^3$ *tel que* $i+i'+i'' \geq 1$ (*resp.* $i+i'+i'' \geq 2$), $\left\{ t^{\ell(i',i'')} D_{1^i 2^{i'} 3^{i''}} G(.,t,\lambda) \right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ *est équicontinue* (*resp. bornée*) *en* $(0,0)$ :

a) Etude des dérivées de $G$ :

On pose $z = z(u,t,\lambda) = t\lambda + t^{r-s+1} u(\lambda)$.

Soient $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ des voisinages bornés de l'origine respectivement dans $\mathrm{End}(n)$ et $\mathrm{End}(p)$. Il existe une constante $K$, $K > 0$, telle que, quels que soient $i$ de $\mathbb{N}$ et $(u,t,\lambda)$ de $\mathcal{U}_1 \times I \times \Omega$, on ait :

$||D^i g(z)|| \leq K\, t^{s-i}$ si $0 \leq i \leq s$ et $||D^i g(z)|| \leq K$ si $i > s$.

Soient $U = (u_1,\dots,u_i) \in (\mathrm{End}(n))^i$ et $V = (v_1,\dots,v_i) \in (\mathrm{End}(p))^i$. On a : $D_{1^i}(G((u,v),t,\lambda)(U,V) =$

$$\frac{1}{t^{2r-s}} \Big[ t^{i(r-s+1}(1_p + t^{r-s} v).D^i g(z) \quad (u_1(\lambda),\dots,u_i(\lambda)) + \sum_{j=1}^{i} t^{i(r-s+1)-1}\, v_j\, D^{i-1} g(z)(u_1(\lambda),\dots,\widehat{u_j(\lambda)},\dots,u_i(\lambda)) \Big].$$

Grâce à cette formule, on montre que :

$$\left\{ t^{(2-i)(r-s)} D_{1^i} G((u,v),t,\lambda) \right\}_{(u,v,t,\lambda)\in \mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times I\times\Omega}$$

est borné.

Pour les dérivées de $G$ par rapport à $t$ et $\lambda$, on remarque que :

$$\left\{ D_{2^\beta 3^\gamma} z(u,t,\lambda) \right\}_{(u,t,\lambda)\in\mathcal{U}_1\times I\times\Omega} \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{1}{t} D_3 z(u,t,\lambda) \right\}_{(u,t,\lambda)\in\mathcal{U}_1\times I\times\Omega}$$

sont bornées. Il est alors facile de voir que pour tout $(i,i',i'')$, $i+i'+i'' \geq 0$, on a :

$$\left\{t^{(2-i)(r-s)+i'} D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}} G((u,v),t,\lambda)\right\}_{(u,v,t,\lambda)\in \mathcal{U}_1\times \mathcal{U}_2\times I\times\Omega} \quad \text{est borné.}$$

b) On en déduit que $\left\{t^{\ell(i',\, i'')} D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}} G((0,0),t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega}$ est borné puisque pour tout $(i,i',i'')$, $i + i' + i'' \geq 2$, on a $\ell(i',i'') \geq i' - (i-2)(r-s)$.

Enfin lorsque $i+i'+i'' \geq 1$, $\ell(i,i'') \geq i' - (i-1)(r-s)$ et

$$\left\{t^{\ell(i',i'')} D_{1^{i+1}2^{i'}3^{i''}} G((u,v),t,\lambda))\right\}_{(u,v,t,\lambda)\in \mathcal{U}_1\times \mathcal{U}_2\times I\times\Omega} \quad \text{est borné.}$$

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis, pour démontrer que

$$\left\{t^{\ell(i',i'')} D_{1^{i}2^{i'}3^{i''}} G(.,t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega} \quad \text{est équicontinue en } (0,0) \text{ si}$$

$i+i'+i'' \geq 1$.

3) *Pour tout* $(i',\, i'')$ *de* $\mathbb{N}^2$ *tel que* $i' + i'' \geq 0$,

$$\left\{t^{\ell(i',i'')} D_{1^{i'}2^{i''}} S(t,\lambda)\right\}_{(t,\lambda)\in I\times\Omega} \quad \textit{est borné.}$$

Pour $i'+i'' \geq 0$, $D_{1^{i'}2^{i''}} S(t,\lambda)$ est une combinaison linéaire de termes du type :

$$D^{\alpha}\, \mathcal{G}'(D_1 G((0,0),t,\lambda).\left[D_{12^{\beta_1}3^{\gamma_1}} G((0,0),t,\lambda),\ldots,DG_{12^{\beta_\alpha}3^{\gamma_\alpha}}((0,0),t,\lambda)\right] \quad \text{avec}$$

$$\sum_{m=1}^{\alpha} \beta_m = i', \quad \sum_{m=1}^{\alpha} \gamma_m = i''.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 2 de l'annexe I et de remarquer que $\alpha \leq i'+i''$ pour vérifier l'hypothèse (b) de la proposition II.

$G$ vérifiant les hypothèses de la proposition II, les conclusions de la proposition III en découlent directement.

Enfin, voici deux lemmes qui nous seront utiles pour la démonstration du théorème I.

*Lemme 1.-*

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto ||x||$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Pour tout $i$ de $\mathbb{N}$, $\{||x||^{i-1} D^i(||x||)\}_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}}$ et $\left\{||x||^i\, D^i \left(\frac{x}{||x||}\right)\right\}_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}}$ sont bornés.

Soient $i$ de $\mathbb{N}^*$ et $u$ de $\mathbb{R}^n$. Il existe des constantes $A_k$ telles que :

$$D^i(||x||)(u)^i = \sum_{k=0}^{E(\frac{i}{2})} A_k \frac{||u||^{2k}(\langle x,u\rangle)^{i-2k}}{||x||^{2i-2k-1}} .$$

D'autre part, $D^i\left(\frac{1}{||x||}\right)$ est une combinaison linéaire de termes de type :

$$\frac{1}{||x||^{1+\alpha_1+\ldots+\alpha_i}} (D||x||)^{\alpha_1},\ldots,(D^i||x||)^{\alpha_i} \quad \text{avec} \quad \sum_{m=1}^{i} m\, \alpha_m = i.$$

Enfin, $D^i\left(\frac{x}{||x||}\right)(u)^i = D^i\left(\frac{1}{||x||}\right)(u)^i . x + \sum_{j=1}^{i} D^{i-1}\left(\frac{1}{||x||}\right)(u)^{i-1} x_j .$

Le résultat annoncé est une conséquence immédiate de ces formules et du fait que $||D(||x||)|| = 1$.

*Lemme 2.-*

Soit $f$ une application d'un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, de classe $C^\mu$, $k$ un entier et $\ell$ un réel, $0 \leq \ell \leq k \leq \mu$.

On pose :

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f_k(x)}{||x||^\ell} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } \psi(0) = 0.$$

Pour tout entier $i$, $0 \leqslant i \leqslant k$, pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V$ de $0$ tel que pour tout $x$ de $V - \{0\}$, $||D^i\psi(x)|| \leqslant \varepsilon \; ||x||^{k-\ell-i}$.

*Démonstration* :

$D^i\psi(x)$ est une combinaison linéaire de termes du type :

$$\frac{D^\alpha f(x) - D^\alpha f_k(x)}{||x||^{\ell+\alpha_1+\dots+\alpha_i}} (D||x||)^{\alpha_1}, \dots, (D^i||x||)^{\alpha_i} \quad \text{avec} \quad \alpha + \sum_{m=1}^{i} m\,\alpha_m = i.$$

On utilise alors le lemme 1 et le fait pour tout $\alpha$ entier, $0 \leqslant \alpha \leqslant k$, $\dfrac{||D^\alpha f(x) - D^\alpha f_k(x)||}{||x||^{k-\alpha}}$ tend vers $0$ avec $x$.

*Démonstration du théorème I.*

Soit $f$ de $E^p_\mu$ vérifiant $H_r$ pour $1 \leqslant r \leqslant \mu$ et tel que $f(0) = 0$. Soit $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $k(q) \leqslant \mu$ et soit $k$ un entier, $k(q) \leqslant k \leqslant \mu$.

Nous allons montrer qu'il existe $\mathcal{V}$ voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x$ de $\mathcal{V}$ :

$$(1_p + v(x)) \cdot f_k(h(x)) = f(x)$$

où $h$ est le germe en $0$ d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^q$,

$v$ est le germe en $0$ d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{End}(p)$, de classe $C^{q-1}$, tels que $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_n$, $v(0) = 0$ et si $q \geqslant 2$ : $D^i h(0) = 0$, $D^{i-1}v(0) = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant q$.

1°) Construction de l'homéomorphisme $h$ et de $v$ de classe $C^0$.

On se sert de ce que pour tout $k$, $r \leqslant k \leqslant \mu$, le jet $f_k$ de $f$ en $0$ vérifie $H_r$.

On applique la proposition III (dont nous reprendrons les notations) avec $g = f_k$ et $y = \psi(x)$ où $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f_k(x)}{||x||^{2r-s}}$ si $x \neq 0$ et $\psi(0) = 0$.

Lorsque $k \geq k(1) = 2r-s$, $\psi$ est continue en $0$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x$ de $\mathcal{V}$ on dit $||x|| < \eta$ et $\psi(x) \in V$.

On considère l'application $v$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathrm{End}(p)$, de classe $C^\mu$ dans $\mathcal{V} - \{0\}$, définie par :

$$v(x) = ||x||^{r-s}\tau(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||}) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad v(0) = 0.$$

$v(x)$ tend vers $0$ avec $x$ (on utilise (1) et (3.2) avec $i+i'+i'' = 0$).

Ainsi $v$ est continue sur $\mathcal{V}$ et quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on peut supposer que $(1_p + v(x))$ est un automorphisme pour tout $x$ de $\mathcal{V}$.

Soit $h$ l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^\mu$ dans $\mathcal{V} - \{0\}$, définie par :

$$h(x) = x + ||x||^{r-s+1}\xi(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||})(\frac{x}{||x||}) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \ ; \ h(0) = 0.$$

Pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x$, $||x|| < \eta_1$, $||h(x) - x|| \leq \varepsilon ||x||^{r-s+1}$ (en utilisant (1) et (3.1) pour $i+i'+i'' = 0$). Donc $h$ est continue sur $\mathcal{V}$. Elle est différentiable en $0$ et $Dh(0) = 1_n$. Pour tout $x$ de $\mathcal{V}$ on a :

$$(1_p + v(x)).f_k(h(x)) = f(x).$$

2°) $h$ <u>est de classe</u> $C^1$ <u>et</u> $Dh(0) = 1_n$. En posant pour $x \neq 0$ : $t = ||x||$, $\lambda = \frac{x}{||x||}$, $z = (\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||})$, on a pour tout $X$ de $\mathbb{R}^n$ :

$$Dh(x)X - X = (r-s+1)t^{r-s}\xi(z)(\lambda)Dt.X + t^{r-s+1}\Big[D_1\xi(z)(D\psi(x).X,\lambda) + D_2\xi(z)(Dt.X,\lambda) + D_3\xi(z)(D\lambda.X,\lambda) + \xi(z).D\lambda.X\Big].$$

Pour montrer que $||Dh(x) - 1_n||$ tend vers $0$ avec $x$, on utilise :

a) le lemme 2 et la propriété (3.1). Alors pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de $0$ dans $R^n$ tel que pour tout $x$, $x \neq 0$, de ce voisinage :

$$||t^{r-s+1} D_1\xi(z).(D\varphi(x).X,\lambda)|| \leq \varepsilon\, t^{k-r}||X||.$$

b) le lemme 1, la propriété 3.1, $\xi(0,t,\lambda) = 0$, $D_2\xi(0,t,\lambda) = 0$ et $D_3\xi(0,t,\lambda) = 0$.

3°) <u>Si</u> $q \geq 2$ <u>et si</u> $k \geq k(q)$, $h$ <u>est de classe</u> $C^q$ <u>et</u> $D^i h(0) = 0$ <u>pour</u> $2 \leq i \leq q$.

En fait nous allons montrer que $\dfrac{D^i h(x)}{||x||}$ si $i < q$ et $D^q h(x)$ tendent vers $0$ avec $x$.

Remarquons que la condition sur $k$ implique $k \geq q$.

Pour $2 \leq i \leq k$, $D^i h(x)$ est une combinaison linéaire de termes du type $t^{r-s+1-\delta} D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma}\xi(\varphi(x),||x||, \frac{x}{||x||})\Big[(D\varphi(x))^{\alpha_1},\ldots,$

$(D^i\varphi(x))^{\alpha_i},(Dt)^{\beta_1},\ldots,(D^i t)^{\beta_i},(D\lambda)^{\gamma_1},(D^i\lambda)^{\gamma_i}\Big](\lambda)^{1-\varepsilon_o}$

avec $\alpha = \sum\limits_{m=i}^{i} \alpha_m$ ; $\beta + \delta = \sum\limits_{m=1}^{i} \beta_m$ ; $\gamma + \varepsilon_o = \sum\limits_{m=1}^{i} \gamma_m$ ; $\varepsilon_o = 0$ ou $1$ ;

$$\sum_{m=1}^{i} m(\alpha_m + \beta_m + \gamma_m) = i.$$

Parmi les termes dont $D^i h(x)$ est combinaison linéaire, on distingue ceux où $\alpha = 0$ et ceux où $\alpha \geq 1$.

a) Considérons un terme de $D^i h(x)$ où $\alpha = 0$. Alors $\beta + \gamma \leq i$. Il existe un voisinage $V$ de $0$ tel que :

$$t^{\ell(\beta,\gamma)} D_{1\,2^\beta\,3^\gamma}\, \xi(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||}) \quad \text{soit borné pour} \quad x \in V - \{0\}.$$

Sachant que $D_{2^\beta\,3^\gamma}\xi(0,t,\lambda) = 0$, on montre à l'aide du théorème des accroissements finis qu'il existe des constantes A et A' telles que

$$||t^{r-s+1-\delta} D_{2^\beta\,3^\gamma}\xi(z)\left[(Dt)^{\beta_1},\ldots,(D^i t)^{\beta_i},(D\lambda)^{\gamma_1},\ldots,(D^i\lambda)^{\gamma_i}\right](\lambda)^{1-\varepsilon_o}|| \leqslant$$

$$A||\psi(x)||t^{r-s+1-i-(\beta+\gamma)(r-s)} \leqslant A'||\psi(x)||t^{(1-i)(r-s+1)}$$

pour $x$ dans $V - \{0\}$.

Pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V'$ de $0$ tel que pour tout $x$ de $V' - \{0\}$, l'expression considérée est majorée par :

$$\varepsilon\, ||x||^{k-r+1-i(r-s+1)},$$

c'est-à-dire par $\varepsilon||x||$ si $i < q$ et par $\varepsilon$ si $i = q$.

b) Lorsque $\alpha \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \beta + \gamma \leqslant i - 1$ et l'un des $\alpha_m$ est non nul. En vertu du lemme 2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V''$ de $0$, tel que pour tout $x$ de $V'' - \{0\}$

$$||t^{r-s+1-\delta} D_{1^\alpha\,2^\beta\,3^\gamma}\,\xi(z)\left[(D\psi(x))^{\alpha_1},\ldots,(D^i\psi(x))^{\alpha_i},(Dt)^{\beta_1},\ldots,(D^i t)^{\beta_i},(D\lambda)^{\gamma_1},\right.$$
$$\left.\ldots,(D^i\lambda)^{\gamma_i}\right](\lambda)^{1-\varepsilon_o}|| \leqslant \varepsilon||x||^{\alpha(k-2r+s)-(\beta+\gamma)(r-s)+(r-s+1)-i}.$$

Comme $\alpha(k-2r+s) - (\beta+\gamma)(r-s) + (r-s+1) - i \geqslant$

$$k - r + 1 - i(r-s+1) + (r-s) \geqslant 0,$$

La quantité considérée est majorée par $\varepsilon||x||^{k-r+1-i(r-s+1)}$.

4°) $v$ <u>est de classe</u> $C^q$ <u>et</u> $D^i v(0) = 0$ <u>pour</u> $0 \leqslant i \leqslant q$ <u>pourvu que</u> $k \geqslant r + q(r-s+1) = k(q) + 1$.

Ceci entraînera en particulier que si $k \geqslant k(q)$ avec $q \geqslant 1$, alors $v$ sera de classe $C^{q-1}$.

Rappelons que $v(x) = ||x||^{r-s}\tau(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||})$ si $x \neq 0$ et $v(0) = 0$.

Pour $1 \leq i \leq k$, $D^i v(x)$ est une combinaison linéaire de termes du type :

$$t^{r-s-\delta} D_{1^\alpha\, 2^\beta\, 3^\gamma} \tau(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||}) \left[ (D\psi(x))^{\alpha_1}, \ldots, (D^i\psi(x))^{\alpha_i}, (Dt)^{\beta_1}, \ldots, (D^i t)^{\beta_i}, (D\lambda)^{\gamma_1}, \ldots, (D^i\lambda)^{\gamma_i} \right]$$

avec $\alpha = \sum_{m=i}^{i} \alpha_m$, $\beta + \delta = \sum_{m=1}^{i} \beta_m$, $\gamma = \sum_{m=1}^{i} \gamma_m$, $\sum_{m=1}^{i} m(\alpha_m + \beta_m + \gamma_m) = i$.

La démonstration se fait de la même façon que pour $h$ en distinguant les cas où $\alpha = 0$ et ceux où $\alpha \geq 1$.

*Remarque 1.-*

Si dans la proposition III on remplace $H_r$ par $H'_r$, les conclusions peuvent s'énoncer avec $\tau = 0$. Il suffit de considérer l'application $H$ de :

$\mathrm{End}(n) \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$H(u,t,\lambda) = G((u,0),t,\lambda).$$

$h$ étant défini comme précédemment, on a dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $0$ :

$f_k(h(x)) = f(x)$ où $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_n$ et $D^i h(0) = 0$ si $2 \leq i \leq q$.

On peut alors énoncer le résultat :

<u>Soit</u> $f$ <u>de</u> $\mathcal{E}^p_\mu$ <u>vérifiant</u> $H'_r$, $1 \leq r \leq \mu$, <u>tel que</u> $f(0) = 0$. <u>Pour tout</u> $q$ <u>de</u> $\mathbb{N}^*$ <u>tel que</u> $k(q) \leq \mu$, $f$ <u>est</u> $k(q)$-$C^q$-<u>déterminé dans</u> $\mathcal{E}^p_{k(q)}$.

Nous démonterons en III que $f$ est $k(0)$-$C^o$ déterminé dans $E^p_{k(0)}$ ($k(0)$ étant le plus petit entier supérieur ou égal à $r$). Mais la méthode précédente ne permet pas d'atteindre ce résultat.

*Remarque 2.-*

S'il existe des constantes $\alpha$, $r$, $\alpha > 0$, $r \geq 1$ et un voisinage $V$ de $0$ tel que $V \cap W^r_\alpha(f) = \emptyset$ alors $f$ vérifie $H_r$ et pour tout entier $k$, $k \geq r$, il existe $\alpha'$, $\alpha' > 0$ et $V'$ voisinage de $0$ tel que $W^r_{\alpha'}(f_k) \cap V' = \emptyset$.

Sous l'hypothèse précédente, on peut alors énoncer les conclusions de la proposition III avec $\xi = 0$ en considérant la fonction :

$$(v,t,\lambda) \longmapsto G((0,v),t,\lambda).$$

Alors, si $k \geq r+q(r-s+1)$, où $q \geq 1$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ et une application $v$, de classe $C^q$, de $\mathcal{V}$ dans $End(p)$ telle que pour tout $x$ de $\mathcal{V}$ :

$(1_p + v(x)).f_k(x) = f(x)$, où $v(0) = 0$ et $D^i v(0) = 0$ si $1 \leqslant i \leqslant q$.

C'est-à-dire que dans $\mathcal{V}$, $h = 1_n$.

Ce cas se présente par exemple lorsque $f$ vérifie $H_r$ et lorsque $n < p$.

Pour $n < p$, $f$ vérifie $H_r$ si et seulement si $(f) = J_p(f)$ est elliptique.

*Remarque 3.-*

L'entier $k(q)$ est généralement la plus petite valeur de $k$ telle que $f$ soit $k$-déterminé pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. la $C^q$-équivalence) dans $E^p_k$. En effet, considérons l'exemple suivant étudié par KUIPER [10] : le jet homogène d'ordre 4 de $\mathbb{R}^2$

dans $\mathbb{R}$ défini par $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$ vérifie $H_4'$. Il est $C^1$-suffisant dans $E_4$ et pour tout $p$ de $\mathbb{N}$, son jet d'ordre $(p+4)$ est $C^{p+1}$-suffisant dans $E_{p+4}$ mais il n'est pas $C^{p+2}$-suffisant dans $E_{p+4}$ : KUIPER a montré que $(x^2+y^2)^2$ et $(x^2+y^2)^2 + x^{p+5}$ ne sont pas $C^{p+2}$-équivalents (ici $k(p+1) = p+4$ et $k(p+2) = p+5$).

Pour les jets homogènes de degré $s$, on peut donner également de nombreux exemples de ce type. En effet, par le théorème I, on sait que si $f$ est un jet homogène de degré $s$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, vérifiant $H_s$ (resp. $H_s'$), il est suffisant pour la $C^1$-équivalence de contact (resp. $C^1$-suffisant) dans $E_s^p$. Pour que $f$ soit suffisant pour la $C^2$-équivalence de contact (resp. $C^2$-suffisant) dans $E_{s+1}^p$ il est nécessaire et suffisant que $\phi_1$ (resp. $\bar{\phi}_1$) soit surjective (proposition I chapitre II).

Rappelons que $\phi_1$ est l'application linéaire de $L_s(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^2(n,n)$ dans $L_s^{s+1}(n,p)$ définie par :

$$\phi_1(v,u)(x)^{s+1} = v(x).f(x) + Df(x).u(x)^2 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

$\bar{\phi}_1$ est la restriction de $\phi_1$ à $\{0\} \times L_s^2(n,n)$.

La surjectivité de $\bar{\phi}_1$ impose à $n$ et $p$ la condition :

$$\frac{n(n+1)\ \dots\ (n+s)}{(s+1)\ !}\, p \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2} . \qquad (1)$$

De même la surjectivité de $\phi_1$ n'est possible que si :

$$\frac{n(n+1)\ \dots\ (n+s)}{(s+1)\ !}\, p \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2} + n\, p^2 \qquad (2)$$

Lorsque $p = 1$ $\bar{\phi}_1$ est surjective si et seulement si $\phi_1$ l'est (en effet $\phi_1$ surjective équivaut alors à $m^{s+1} \subset J_1(f)$ et $\bar{\phi}_1$

surjective équivaut à $m^{s+1} \subset H_1(f)$, de plus $J_1(f) = H_1(f)$. Voir chapitre II, proposition IV). On vérifie en utilisant (1) que f ne peut être $C^2$-suffisant dans $E_{s+1}$ ni dans $E_s$, $s \geq 2$, lorsque :

$\underline{s = 3 \text{ et } n \geq 7}$ ; $\underline{s = 4 \text{ et } n \geq 3}$ ; $\underline{s \geq 5 \text{ et } n \geq 2}$.

(Ces résultats ont été donnés par KUIPER [10]).

Lorsque $p > 1$, un jet homogène f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ ne peut être $C^2$-suffisant dans $E^p_{s+1}$, $s \geq 2$. Sinon il existerait $\alpha$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $m^\alpha \subset H_p(f)$ (voir dans l'introduction le sommaire du chapitre II et la proposition III du chapitre II). Alors f serait $C^\infty$-déterminé dans $E^p$. MATHER a montré que cela était impossible. Si on se place dans le cas où $n \geq p$ et $s \geq 2$ on voit d'après (2) qu'un jet homogène d'ordre s de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ ne peut être suffisant pour la $C^2$-équivalence de contact dans $E^p_{s+1}$ ni a fortiori dans $E^p_s$ si :

| | |
|---|---|
| $p = 2$ | $s = 3$ $n \geq 4$ ; $s = 4$ $n \geq 3$ ; $s = 5$ $n \geq 3$ ; $s \geq 6$ $n \geq 2$ |
| $p = 3$ | $s = 2$ $n \geq 9$ ; $s = 3$ $n \geq 4$ ; $s \geq 4$ $n \geq 3$ |
| $p = 4$ | $s = 2$ $n \geq 6$ ; $s \geq 3$ $n \geq 4$ |
| $p = 5$ | $s = 2$ $n \geq 6$ ; $s \geq 3$ $n \geq 5$ |
| $p = 6$ | $s = 2$ $n \geq 7$ ; $s \geq 3$ $n \geq 6$ |
| $p \geq 7$ | $s \geq 2$ $n \geq p$. |

Dans le cas $s = 2$, $p = 2$, $n \geq 3$, nous avons approfondi l'étude de la surjectivité de $\phi_1$ et nous avons des exemples de jets d'ordre 2 de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$, homogènes, vérifiant $H_2$ qui ne sont pas suffisants pour la $C^2$-équivalence de contact dans $E_3^2$.

## II - *Une application du théorème I aux espaces de Banach.*

Soient $E$ et $F$ des espaces de Banach, $f$ un germe en $0$ d'application de $E$ dans $F$, de classe $C^\mu$, $2 \leq \mu \leq \infty$, tel que $f(0) = 0$ et $Df(0)$ soit un opérateur de Fredholm.

On peut appliquer à $f$ le procédé de Liapounov-Schmitt (paragraphe VII - 1 de l'Annexe II, dont nous reprendrons les notations) puisque, $\operatorname{Ker} Df(0)$ et $\operatorname{Coker} Df(0)$ étant de dimension finie, $\operatorname{Ker} Df(0)$ et $\operatorname{Coker} Df(0)$ sont des facteurs directs de $E$ et $F$ respectivement.

Il existe un germe en $0$ de difféomorphisme $h_1$, défini sur $E$ à valeurs dans $\operatorname{Im} Df(0) \times \operatorname{Ker} Df(0)$, de classe $C^\mu$, tel que $h_1(0) = (0,0)$ et $u$ un germe en $0$ d'application de $\operatorname{Ker} Df(0)$ dans $\operatorname{Coker} Df(0)$, de classe $C^\mu$, tel que $u(0) = 0$, $Du(0) = 0$ et tel que $h_1$ transforme localement $f^{-1}\{0\}$ en $\{0\} \times (u^{-1}\{0\})$. On vérifie que $u_\ell$, le jet d'ordre $\ell$ de $u$ en $0$ ne dépend que des dérivées de $f$ en $0$, d'ordre inférieur ou égal à $\ell$. Lorsque $u$ vérifie $H_r$, on peut lui appliquer le théorème I puisque $\operatorname{Ker} Df(0)$ et $\operatorname{Coker} Df(0)$ sont de dimensions finies. Rappelons que $f$ vérifie $H_r$ si et seulement si $u$ vérifie $H_r$ (proposition 9 de l'annexe II). On peut alors énoncer la proposition suivante en notant $k_u(q)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $r-1+q(r-s_u+1)$ :

*Proposition IV.*-

Soient $E$ et $F$ des espaces de Banach, $f$ un germe en $0$

d'application de $E$ dans $F$, de classe $C^{\mu}$, $2 \leqslant \mu \leqslant \infty$, tel que $f(0) = 0$ et $Df(0)$ soit un opérateur de Fredholm. Si $f$ vérifie $H_r$, alors pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $k_u(q) \leqslant \mu$, il existe un difféomorphisme local $h$ de $E$ dans $\mathrm{Im}\, Df(0) \times \mathrm{Ker}\, Df(0)$, de classe $C^q$, tel que $h(0) = 0$, transformant localement $f^{-1}\{0\}$ en $\{0\} \times u_{k_u(q)}^{-1}\{0\}$.

Si $\chi$ est la projection de $F$ sur $\mathrm{Coker}\, Df(0)$ et $\iota$ la restriction de $1_E$ à $\mathrm{Ker}\, Df(0)$ on a vu que $u_2 = \chi \circ f_2 \circ \iota$. Alors $u$ vérifie $H_2$ si et seulement si $\chi \circ f \circ \iota$ vérifie $H_2$. $\Delta^2 f(0)$ étant la différentielle intrinsèque seconde de $f$ en $0$, on peut énoncer le corollaire :

*Corollaire* :

$E$ et $F$ étant des espaces de Banach, $f$ un germe en $0$ d'application de $E$ dans $F$, de classe $C^{\mu}$, $2 \leqslant \mu \leqslant \infty$ tel que $f(0) = 0$ et $Df(0)$ soit un opérateur de Fredholm. Alors si $\Delta^2 f(0)$ vérifie $H_2$, il existe un difféomorphisme local $h$ de $E$ dans $\mathrm{Im}\, Df(0) \times \mathrm{Ker}\, Df(0)$, de classe $C^1$ tel que $h(0) = 0$, transformant localement $f^{-1}\{0\}$ en le cône $K = \{x \in \mathrm{Ker}\, Df(0) / D^2 f(0)(x,x) \in \mathrm{Im}\, df(0)\}$.

ANTOINE [2] a montré un résultat identique en modifiant ainsi les hypothèses du corollaire : $E$ et $F$ sont des espaces de Hilbert, $\mu \geqslant 3$ et on remplace l'hypothèse $Df(0)$ opérateur de Fredholm par $\mathrm{Im}\, Df(0)$ fermée. L'hypothèse $H_2$ peut s'exprimer sous la forme équivalente suivante :

il existe $a$, $a > 0$ tel que quel que soit $x$ de la sphère unité de $\mathrm{Ker}\, Df(0)$, quel que soit $y$ de la sphère unité de $\mathrm{Coker}\, Df(0)$ on ait :

$$||\Delta^2 f(0)(x,x)||^2_{\text{Coker } Df(0)} + ||\left[\Delta^2 f(0)(x)\right]^* y||_{\text{Ker } Df(0)} > a ,$$

*Remarque 4.-*

Supposons maintenant que $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$. Soit $f$ de $E^p_\mu$ tel que $f(0) = 0$, vérifiant $H_r$ pour $r \geq 2$.

Lorsqu'on s'intéresse à l'équivalence de contact, on ne peut qu'appliquer le théorème I. Si on s'intéresse à la surface de niveau de $f$ en 0, le théorème I dit que pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $k_f(q) \leq \mu$, il existe un difféomorphisme $h$ de classe $C^q$ qui transforme le germe des zéros de $f$ en 0 en le germe des zéros de $f_{k(q)}$ en 0. On peut aussi si $s_f = 1$ et $Df(0)$ non surjective (pour $Df(0) = 0$ la décomposition de Liapounov Schmitt n'a aucune utilité) appliquer le proposition IV. On a $s_u \geq 2$ et $k_f(q)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $(r-1+qr)$. Il en résulte que $k_u(q) \leq k_f(q) - q$. Il peut arriver que :

a) $k_u(q) \leq \mu \leq k_f(q)$ et alors il existe un difféomorphisme de classe $C^q$ transformant le germe en 0 des zéros de $f$ en le germe en 0 des zéros de $u_{k_u(q)}$ même si $f_{k_f(q)}$ n'est pas équivalent à $f$ pour la $C^q$-équivalence de contact.

b) il existe $q'$, $q' > q$ tel que $k_u(q') \leq k_f(q)$ avec $k_u(q') \leq \mu$ alors $f^{-1}\{0\}$ est localement $C^{q'}$-difféomorphe à $u_{k_u(q')}^{-1}\{0\}$.

## *III - L'hypothèse* $H'_r$ *et la* $C^q$*-équivalence.*

On a constaté lors du théorème I (remarque 1 du I) que si $f$ est un jet d'ordre $k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f(0) = 0$, qui vérifie $H'_r$, $r \leq k$, pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, un relèvement quelconque de f d'ordre $k(q)$ est $C^q$-suffisant dans $\mathcal{E}^p_{k(q)}$. La méthode employée dans le I ne donne pas $k(0)$ sauf lorsque $r = s_f$ puisqu'alors le jet d'ordre r est $C^1$-suffisant dans $\mathcal{E}^p_r$.

Pour $p = 1$, BOCHNAK et LOJASIEWCZ [7] ont montré que si le jet f d'ordre k vérifie $H'_k$, f est $C^0$-suffisant dans $\mathcal{E}_k$ (tableau I). Lorsque $p > 1$ et $r > s_f$, nous allons aussi montrer que si un jet f d'ordre k vérifie $H'_r$ pour $1 < r \leqslant k$, f est $C^0$-suffisant dans $\mathcal{E}^p_k$. Pour cela, il suffit de généraliser la démonstration de F. TAKENS [16] à $p > 1$.

*Théorème I bis a.-*

Soit f de $\mathcal{E}^p_\mu$ vérifiant $H'_r$ avec $1 < r \leqslant \mu$, tel que $f(0) = 0$. Pour tout q de $\mathbb{N}$ tel que $k(q) \leqslant \mu$, f est $k(q)$-$C^q$-déterminé dans $\mathcal{E}^p_{k(q)}$.

Nous supposerons ici que $r > 1$ car lorsque $n \geqslant p$ (ce qui est nécessairement le cas lorsque f vérifie $H'_r$) et $r = 1$, $Df(0)$ est surjective. Ce cas simple a été écarté (introduction et Annexe II.VII)

*Démonstration du théorème I bis.*

Soit f de $\mathcal{E}^p_\mu$ vérifiant $H'_r$ pour $1 < r \leqslant \mu$, tel que $f(0) = 0$. Soit k un entier, $r \leqslant k \leqslant \mu$ et $f_k$ le jet d'ordre k de f en 0. On considère F, germe en $\{0\} \times [0,1]$ d'application, de classe $C^\mu$, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ défini par $F(x,t) = f_k(x) + tP(x)$ où $P(x) = f(x) - f_k(x)$.

La démonstration se fait en cinq étapes :

*1ère étape :*

Il existe un voisinage V de l'origine de $\mathbb{R}^n$, un intervalle ouvert I de R, $I \supset [0,1]$, un réel C, $C > 0$, tels que pour tout $(x,t)$ de $\dot{V} \times I$ (où $\dot{V} = V - \{0\}$) $DF(x,t)$ admette une section $S(x,t)$ telle que $||S(x,t)|| \leqslant \dfrac{C}{||x||^{r-1}}$.

$f_k$ vérifiant $H'_r$, il existe un voisinage $V'$ de $0$ et une constante $C$, $C > 0$, tels que pour tout $x$ de $V' - \{0\}$, $Df_k(x)$ admette une section $S_k(x)$ telle que $||S_k(x)|| \leqslant \dfrac{C}{2||x||^{r-1}}$ .

Le jet d'ordre $k$ de $P$ en $0$ étant nul, il existe un voisinage $V''$ de $0$ dans $R^n$ tel que :

$$||P(x)|| \leqslant ||x||^r \quad \text{et} \quad ||DP(x)|| \leqslant \frac{2}{3C}\, ||x||^{r-1}.$$

Prenons $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ et $V = V' \cap V''$. Pour tout $(x,t)$ de $\dot{V} \times I$ on a :

$$||D_1F(x,t) - Df_k(x)|| = ||t\ DP(x)|| \leqslant \frac{1}{2||s_k(x)||} .$$

Il en résulte, d'après le lemme 1 - Annexe I que $D_1F(x,t)$ est surjective et que sa section orthogonale $S_1(x,t)$ vérifie : $||S_1(x,t)|| \leqslant \dfrac{C}{||x||^{r-1}}$ . Enfin $S_1$ est de classe $C^{k-1}$ sur $\dot{V} \times I$.

Soit $S(x,t)(y) = (S_1(x,t).y,0)$ pour $(x,t,y)$ de $\dot{V} \times I \times \mathbb{R}^p$. $S$ est de classe $C^{k-1}$ sur $\dot{V} \times I$ et vérifie les propriétés annoncées.

*2ème étape* :

Par tout point de $V \times I$ passe une trajectoire et une seule du champ de vecteurs défini sur $V \times I$ par

$$v(x,t) = (0,1) - S(x,t)P(x) \quad \text{si} \quad x \neq 0$$
$$v(0,t) = (0,1).$$

En outre $F$ est constant le long de chacune de ces trajectoires.

$v$ est de classe $C^{k-1}$ donc au moins $C^1$ car $k-1 \geqslant r-1 > 0$.

$v$ est continue sur $\{0\} \times I$ uniformément par rapport à $t$ puisque quel que soit $(t,t')$ de $I^2$ on a :

$$||v(x,t) - v(0,t')|| \leqslant C||x||.$$

Par tout $(x_o,t_o)$ de $\dot{V} \times I$, il passe localement une et une seule courbe intégrale ($v$ est localement lipschitzienne en tout point de $\dot{V} \times I$).

Une solution de l'équation différentielle : $(\dot{x},\dot{t}) = v(x,t)$ passant par $(x_o,t_o)$ est une application définie sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ contenant $0$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, de la forme : $t \to (\psi(x_o,t_o,t),t_o+t)$ où $\psi$ vérifie :

$$\begin{cases} \psi(x_o,t_o,0) = x_o & (1) \\ \dfrac{d\psi}{dt}(x_o,t_o,t) = -S_1(\psi(x_o,t_o,t),t_o+t)P(\psi(x_o,t_o,t)) & (2) \end{cases}$$

Il résulte de (2) et des majorations de $||S_1(x,t)||$ et de $||P(x)||$ sur $V \times I$ que pour tout $t$ de $J$ on a :

$$||\frac{d\psi}{dt}(x_o,t_o,t)|| \leqslant C||\psi(x_o,t_o,t)||.$$

La fonction numérique définie sur $J$ par $g(t) = ||\psi(x_o,t_o,t)||^2 e^{2ct}$ (resp. $g_1(t) = ||\psi(x_o,t_o,t)||^2 e^{-2ct}$) est croissante (resp. décroissante).

Montrons par exemple que $g$ est croissante.

$$g'(t) = 2e^{2ct}(C||\psi(x_o,t_o,t)||^2 + \langle\psi(x_o,t_o,t), \frac{d\psi}{dt}(x_o,t_o,t)\rangle).$$

$$g'(t) \geqslant 2e^{2ct}||\psi(x_o,t_o,t)||(C||\psi(x_o,t_o,t)|| - ||\frac{d}{dt}\psi(x_o,t_o,t)||) \geqslant 0.$$

On prouve de même que $g_1$ est décroissante.

Pour tout $t$ de $J$, on a donc : $||\psi(x_o,t_o,t)|| \geqslant ||x_o||e^{-c|t|}$ et par suite $(\psi(x_o,t_o,t),t_o+t) \in \dot{V} \times I$.

La courbe intégrale reste dans la région où $v$ est de classe $C^1$. La trajectoire passant par $(x_o,t_o)$ de $\dot{V} \times I$ est donc globalement unique.

Par les points $(0,t_o)$ où $t_o \in I$, passe la solution $t \to (0,t+t_o)$ et c'est la seule. En effet, soit $\Psi$ une solution telle que $\Psi(0) = (0,t_o)$. S'il existe un $t$ tel que $\Psi(t)$ appartienne à $\dot{V} \times I$, alors la courbe intégrale passant par $\Psi(t)$ passerait aussi par $(0,t_o)$. Ceci est impossible, on l'a vu précédemment.

Enfin $F$ est constant le long d'une courbe intégrale car :

$$\frac{d}{dt} F(\psi(x_o,t_o,t),t_o+t) = 0.$$

*3ème étape* :

<u>Il existe</u> $h$ <u>germe en</u> $0$ <u>d'homéomorphisme de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>tel que</u> $h(0) = 0$ <u>et</u> $f(x) = f_k(h(x)$.

Considérons l'application $h$ de $V$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $h(x) = \psi(x,0,1)$.

C'est-à-dire qu'à tout $x$ de $V$, on associe l'unique $h(x)$ de $V$ tel que $(x,0)$ et $(h(x),1)$ appartiennent à la même courbe intégrale.

Ceci définit bien une application bijective : $h^{-1}(x) = \psi(x,1,-1)$. On a aussi $h(0) = 0$.

La continuité de $h$ sur $\dot{V}$ résulte de ce que $v$ est localement lipschitzienne sur $\dot{V} \times I$.

En $0$, on utilise le fait que $||\psi(x,0,1)|| \leqslant ||\psi(x,0,0)||e^c$ et par suite :

$$||h(x)|| \leqslant e^c||x||.$$

De même $$||h^{-1}(x)|| \leqslant e^c||x||.$$

Enfin, comme $F$ est constant le long de toute courbe intégrale, on a :

$$F(x,0) = f_k(x) = F(h(x),1) = f(h(x)).$$

On obtient un résultat que ne donne pas la méthode employée au théorème I : <u>pour tout</u> $k$, $k \geq r$, $f_k$ <u>est</u> $C^0$<u>-suffisant dans</u> $E_k^p$.

*4ème étape* :

<u>Si</u> $k(q) \leq k \leq \mu$ <u>avec</u> $q \in \mathbb{N}^*$ <u>alors</u> $h$ <u>et</u> $h^{-1}$ <u>sont de classe</u> $C^q$.

Nous donnons ici une autre démonstration d'un résultat obtenu lors du théorème I (remarque 1, I).

On suppose que $k \geq (r-1) + q(r-s+1)$ avec $q \in \mathbb{N}^*$.

Pour montrer que $h$ et $h^{-1}$ sont de classe $C^q$, il suffit de montrer que le champ de vecteurs, $v$, est de classe $C^q$ sur $V \times I$ (LANG th. I - chap. IV [13]).

Il est évident que $v$ est de classe $C^q$ sur $\dot{V} \times I$ car $v$ est de classe $C^{k-1}$ (puisque $r > 1$, on a $k > q + q(r-s)$).

Posons $w(x,t) = S_1(x,t).P(x)$. Pour montrer que $v$ est de classe $C^q$ sur $V \times I$, il suffit de le démontrer pour $w$. De façon précise, nous allons établir que pour tout $j$, $1 \leq j \leq q$ et pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V'$ de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $(x,t)$ de $\dot{V}' \times I$, pour tout $(i,i')$ de $\mathbb{N}^2$ tel que $i + i' = j$, on ait :

$$||D_1^i\, _2^{i'}\, w(x,t)|| \leq \varepsilon ||x||^{k-r+1-j(r-s+1)} .$$

Soient $i$, $i'$ tels que $i + i' = j$, on vérifie que :

$$D_{1^i\,2^{i'}}\, w(x,t) = \sum_{\ell=0}^{i} C_i^{\ell}\; D_{1^{\ell}\,2^{i'}}\, S_1(x,t).D^{i-\ell}P(x),$$

où $D_{1^{\ell}\,2^{i'}}\, S_1(x,t)$ est une combinaison linéaire de termes du type :

$$D^{\gamma}\sigma(D_1F(x,t))\left[D_{1^{\alpha_1}\,2^{\beta_1}}F(x,t),\ldots,D_{1^{\alpha_\gamma}\,2^{\beta_\gamma}}F(x,t)\right] \quad \text{avec}$$

$\sum_{m=1}^{\gamma} \alpha_m = \ell,\quad \sum_{m=1}^{\gamma} \beta_m = i'$. ($\sigma(u)$ est la section orthogonale de u).

En utilisant le lemme 2 de l'annexe I et le fait que $F(x,t) = tf(x) + (1-t)f_k(x)$, on sait qu'il existe un voisinage $V''$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $(x,t)$ de $\dot{V}'' \times I$,

pour tout $m$, $1 \leqslant m \leqslant \gamma$, tout $\gamma$, $\gamma \leqslant j$,

$$||D^{\gamma}\sigma(D_1F(x,t))||\;\; ||x||^{(r-1)(\gamma+1)},$$

$$||D_{1^{\alpha_m}\,2^{\beta_m}}F(x,t)||\;\; ||x||^{\alpha_m - s} \quad \text{si } \alpha_m \leqslant s \quad \text{et}$$

$$||D_{1^{\alpha_m}\,2^{\beta_m}}F(x,t)|| \qquad \text{si } \alpha_m > s \quad \text{soient bornés.}$$

De plus $\dfrac{||D^{i-\ell}P(x)||}{||x||^{k-i+\ell}}$ tend vers 0 avec x pour tout $\ell$, $0 \leqslant \ell \leqslant i$.

Alors, pour tout $\varepsilon'$, $\varepsilon'$ strictement positif, il existe un voisinage $V'$ de 0 et une constante K tel que pour tout $(x,t)$ de $\dot{V}' \times I$ :

$$||D^{\gamma}\sigma(D_1F(x,t))D_{1^{\alpha_1}\,2^{\beta_1}}F(x,t)\ldots D_{1^{\alpha_\gamma}\,2^{\beta_\gamma}}F(x,t)|| \leqslant K\, ||x||^{-(\gamma+1)(r-1)+\gamma s+k-i}.$$

Comme $0 \leqslant \gamma \leqslant j$ et $i \leqslant j$, l'expression est aussi majorée par $K'||x||^{k-(r-1)-j(r-s+1)}$.

Donc $\dfrac{D_{1^i\,2^{i'}}\, w(x,t)}{||x||}$ si $i + i' < q$ et $||D_{1^i\,2^{q-i}}\, w(x,t)||$

tendent vers 0 avec x, uniformément par rapport à t de I.

Donc w est de classe $C^q$ sur $V \times I$ et $D_{1^i\,2^{i'}}\, w(0,t) = 0$ pour tout t de I.

*5ème étape* : Si $q \geq 1$, $Dh(0) = 1_n$ et si $q \geq 2$, $D^i h(0) = 0$ pour tout $i$, $2 \leq i \leq q$.

Pour tout x de V on a $h(x) = x - \int_0^1 w(\varphi(x,0,u),u)du.$

w étant de classe $C^q$ sur $V \times I$, il existe un voisinage U de 0 tel que pour $(x,u)$ de $U \times [0,1]$ et $i$, $1 \leq i \leq q$, $D_{1^i}\varphi(x,0,u)$ soit borné.

En outre, $||\varphi(x,0,u)|| \leq e^c ||x||$ et $D_{1^i}\, w(x,u)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, uniformément par rapport à u de $[0,1]$. On déduit alors facilement que $||Dh(x) - 1_n||$ et $||D^i h(x)||$, $2 \leq i \leq q$, tendent vers 0 avec x.

On retrouve ainsi un difféomorphisme h ayant les mêmes dérivées en 0 que celui du théorème I.

Il résulte du théorème 1 bis que si f est un jet d'ordre k de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f(0) = 0$, qui vérifie $H'_k$, f est $C^o$-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$.

La réciproque est connue dans deux cas :

1) Si f est un jet homogène de degré k : on a même les propositions équivalentes suivantes :

(i) f vérifie $H'_k$ ;

(ii) f est $C^o$-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$ ;

(iii) f est $C^1$-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$ ;

(théorème I bis, proposition 6 annexe II et tableaux IV et V).

2) Si $p = 1$. BOCHNAK et LOJASIEWCZ [7] ont montré l'équivalence des propositions :

(i) $f$ est v-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$.

(ii) $f$ est $C^0$-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$.

(iii) $f$ vérifie $H_k'$ (resp. $H_k$).

Nous allons voir qu'en fait la réciproque est toujours vraie. On a pour un jet d'ordre $k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f(0) = 0$, les deux résultats parallèles suivants :

$f$ est v-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$ si et seulement si $f$ vérifie $H_k$.

$f$ est $C^0$-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$ si et seulement si $f$ vérifie $H_k'$.

Le premier est dû a KUO [12] ; le second est l'objet de la proposition suivante :

*Proposition V.-*

Soit $f$ un jet d'ordre $k$, $k \geq 2$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, $n \geq p$, tel que $f(0) = 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ vérifie $H_k'$ ;

(2) $f$ est $C^0$-suffisant dans $\mathcal{E}_k^p$ ;

(3) Pour toute suite $(x_q)$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ convergeant vers $0$ et pour toute réalisation $\tilde{f}$ de $f$ dans $\mathcal{E}_k^p$, il existe un entier $N$ tel que quel que soit $q$, $q > N$, il existe un voisinage de $x_q$, dans lequel :

- si $n > p$, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x_q))$ est une variété de codimension $p$ ;
- si $n = p$, $\tilde{f}$ est injective.

(4) Pour toute réalisation $\tilde{f}$ de $f$ dans $\mathcal{E}_k^p$, $0$ est une singularité isolée de $\tilde{f}$.

Rappelons que KUO [12] a montré l'équivalence des propositions suivantes pour un jet d'ordre $k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que $f(0) = 0$

et pour $n \geq p$ :

(i) $f$ vérifie $H_K$ ;

(ii) $f$ est v-suffisant dans $E_k^p$ ;

(iii) Pour toute réalisation $\tilde{f}$ de $f$ dans $E_k^p$, l'origine est une singularité isolée de $\tilde{f}$ dans $\tilde{f}^{-1}(\{0\})$.

Avant de démontrer la proposition V, nous allons établir deux lemmes :

*Lemme 3* [9].-

Si $f$ est un jet d'ordre $k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f(0) = 0$, $C^0$-suffisant dans $E_\mu^p$, $\mu \geq k$ alors $n \geq p$. De plus, pour tout réalisation $\tilde{f}$ de $f$ dans $E_\mu^p$ et pour toute suite $(x_q)$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ convergeant vers $0$, il existe un entier $N$ tel que quel que soit $q$, $q > N$, il existe un voisinage de $x_q$ dans lequel :

- si $n > p$, $\tilde{f}^{-1}(f(x_q))$ est une variété de codimension $p$,
- si $n = p$, $\tilde{f}$ est injective.

La démonstration repose sur le lemme de THOM qui est démontré dans l'annexe II, paragraphe VIII).

*Lemme de THOM*.-

Soient $U$ et $V$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ et une application $G$ de $U \times V$ dans $\mathbb{R}^r$ de classe $C^\infty$. Si $c$ de $\mathbb{R}^r$ est une valeur régulière de $G$ (c'est-à-dire que $G$ ne possède aucun point singulier dans $G^{-1}(\{c\})$), alors pour presque tout $y$ de $V$, $c$ est une valeur régulière de $G_y$ où $G_y(x) = G(x,y)$.

*Démonstration du lemme 3*.-

Supposons $n < p$.

Soit $(x_q)$ une suite de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ convergeant vers $0$ et soit $G$ l'application de $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

$$G(x,y) = f(x) + e^{-\frac{1}{||x||^2}}y.$$

G est une submersion en tout point.

Pour tout $q$, il existe $F_q$ sous-ensemble de mesure nulle de $\mathbb{R}^p$ tel que pour tout $y$ de $\mathbb{R}^p - F_q$, $f(x_q)$ soit une valeur régulière de $G_y : y \mapsto G(x,y)$.

Prenons $y$ dans $\mathbb{R}^p - (\bigcup_{q\in\mathbb{N}} F_q)$ $(\bigcup_{q\in\mathbb{N}} F_q$ est de mesure nulle).

Pour tout $q$, $f(x_q)$ est une valeur régulière de $G_y$.

L'application $g$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par $g(x) = G_y(x)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$ est une réalisation $C^\infty$ de $f$.

Comme $n < p$, $g^{-1}\{f(x_q)\} \subset \{0\}$.

$f$ étant $C^o$-suffisant dans $\mathcal{E}^p_\mu$, il existe un homéomorphisme local $h$ de $V$ sur $W$, voisinages de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $h(0) = 0$ et $f = g \circ h$.

$h$ transforme $(f^{-1}\{f(x_q)\}) \cap V$ en $(g^{-1}\{f(x_q)\}) \cap W$.
Ceci est impossible dès que $q$ assez grand car alors $h(x_q) = 0$.
Nous avons ainsi montré que nécessairement $n \geqslant p$.

Soit $\tilde{f}$ une réalisation de $f$ dans $\mathcal{E}^p_\mu$ et une suite $(x_q)$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui converge vers $0$.

En considérant l'application $G$ de $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

$$G(x,y) = f(x) + e^{-\frac{1}{||x||^2}}y,$$

on montre comme ci-dessus, qu'il existe $y$ de $\mathbb{R}^p$ tel que pour tout $q$ de $\mathbb{N}$, $\tilde{f}(x_q)$ soit une valeur régulière de $G_y$.

$g$ définie par $g(x) = G_y(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est une réalisation de classe $C^\infty$ de $f$.

$f$ étant $C^o$-suffisant dans $E^p_\mu$, il existe un homéomorphisme local $h$ de $\mathbb{R}^n$, tel que $h(0) = 0$, $\tilde{f} = g \circ h$ et qui pour $q$ assez grand transforme localement $\tilde{f}^{-1}\{\tilde{f}(x_q)\}$ en $G_y^{-1}\{\tilde{f}(x_q)\}$.

Si $n > p$, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x_q))$ est une variété de codimension $p$ dans un voisinage de $x_q$. Si $n = p$, $\tilde{f}$ est injective dans un voisinage de $x_q$.

*Lemme 4* (ANTOINE [3]).-

Soit $u$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, $n \geq p$ et soit $\varepsilon$ un réel, $\varepsilon > 0$.

a) il existe $v$ de $L(n,p)$, $v$ surjective, telle que $||u-v|| \leq \varepsilon$

b) Soit $y$ de la sphère unité $\Sigma_p$ de $\mathbb{R}^p$ tel que $||u^*.y|| < \varepsilon$ alors il existe $w$ de $L(n,p)$ tel que $||u-w|| \leq 3\varepsilon$, $w$ de rang $(p-1)$ et $w^*.y = 0$.

a) Pour démontrer a, il suffit de prouver que si $u_1,\dots,u_p$ sont $p$ vecteurs de $\mathbb{R}^p$, pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe une base de $\mathbb{R}^p$, $\{v_1,\dots,v_p\}$ telle que pour tout $i$, $1 \leq i \leq p$, $||u_i-v_i|| \leq \varepsilon$.

Soit $k$ le rang du système de vecteurs $\{u_1,\dots,u_p\}$, $k \leq p$.

Si $k = p$, on prend $u_i = v_i$, $1 \leq i \leq p$.

Si $k < p$, en supposant que $u_1,\dots,u_k$ sont linéairement indépendants, on pose $u_i = v_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et on construit par récurrence $v_i = u_i + w_i$ pour $k+1 \leq i \leq p$, où $w_i$ appartient au supplémentaire orthogonal de l'espace vectoriel engendré par $\{v_1,\dots,v_k,\dots,v_{i-1}\}$ et est tel que $||w_i|| \leq \varepsilon$.

b) A $u$, on associe $v$ de $L(n,p)$, surjective, telle que $||u-v|| \leq \varepsilon$. Alors $||v^*.y|| \leq 2\varepsilon$.

On définit $w$ de $L(n,p)$ par $w.x = v.x - \langle v^*.y,x\rangle\ y$.

Alors pour tout $z$ de $\mathbb{R}^p$ : $w^*.z = v^*.z - \langle y,z\rangle v^*.y$.

Donc $w^*.y = 0$ et

$||(u^*-w^*).z|| \leqslant ||u^*-v^*||\ ||z|| + ||v^*.y||\ ||z|| \leqslant 3\varepsilon||z||$.

Donc $||u-w|| \leqslant 3\varepsilon$.

Enfin, $\operatorname{Ker} w^* = \{z/v^*\ (z - \langle y,z\rangle y) = 0\}$.

Puisque $v$ est surjective, $v^*$ est injective et $z = \langle y,z\rangle y$.
Le noyau de $w^*$ est engendré par $y$, $w$ est de rang $(p-1)$.

*Démonstration de la proposition V.-*

Nous supposerons $p > 1$, le cas $p = 1$ ayant déjà été résolu [7]

(1) => (2) résulte du théorème I bis ;

(2) => (3) résulte du lemme 3 pour $\mu = k$ ;

(3) => (1) nous allons en fait montrer que (non 1) => (non 3).

Supposons que $f$ ne vérifie pas $H'_k$ : Pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_q)$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ convergeant vers $0$ telle que :

$$\operatorname*{Inf}_{y\in\Sigma_p} ||(Df(x_q))^*.y|| < \frac{1}{3q}\ ||x_q||^{k-1} \quad \text{(voir remarque 1, annexe II).}$$

On peut toujours choisir la suite $(x_q)$ de sorte que $||x_{q+1}|| \leqslant \frac{1}{2}\ ||x_q||$.

$\Sigma_p$ étant compact, il existe une suite $(y_q)$ de $\Sigma_p$ telle que :

$$||(Df(x_q))^*.y_q|| < \frac{1}{3q}\ ||x_q||^{k-1}.$$

Par le lemme 4, pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, il existe $w_q$ de $L(n,p)$ tel que

$$||Df(x_q) - w_q|| \leqslant \frac{1}{q}\,||x_q||^{k-1} \quad \text{et} \quad w_q^{*}.y_q = 0.$$

Soit $\theta$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $[0,1]$, de classe $C^\infty$ telle que $\theta(x) = 0$ si $||x|| \geqslant \frac{1}{4}$ et $\theta(x) = 1$ dans un voisinage de $0$.

On pose

$$\Psi(x) = \sum_{q\geqslant 1} \theta\left(\frac{x-x_q}{||x_q||}\right)\left((Df(x_q) - w_q).(x-x_q) + \varepsilon_q||x-x_q||^2\right)$$

où $\varepsilon_q$ est une suite de $\mathbb{R}^p$ telle que pour tout $q$ : $||\varepsilon_q|| \leqslant \frac{1}{q}\,||x_q||^{k-2}$.

Les boules $B(x_q, \frac{1}{4}\,||x_q||)$ sont disjointes deux à deux.
La série comporte au plus un terme non nul pour chaque $x$ de $\mathbb{R}^n$.
$\Psi$ est une fonction de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ; $\Psi(0) = 0$.
Nous allons montrer que $\Psi$ est de classe $C^k$ et que pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $D^i\Psi(0) = 0$.

Si $x$ n'appartient à aucune boule $B(x_q, \frac{1}{4}\,||x_q||)$ toutes les dérivées en $x$ sont nulles. Supposons maintenant que $||x-x_q|| < \frac{1}{4}\,||x_q||$ on a alors :

$$||\Psi(x)|| \leqslant \frac{5}{16q}\,||x_q||^k \leqslant \frac{5}{16q}\,.\left(\frac{4}{3}\right)^k||x||^k \quad \text{puisque}$$

$$||x|| \geqslant ||x_q|| - ||x-x_q|| \geqslant \frac{3}{4}\,||x_q||.$$

Comme $k \geqslant 2$, $\dfrac{||\Psi(x)||}{||x||}$ tend vers $0$ quand $||x||$ tend vers $0$.

$\Psi$ est différentiable en $0$ et $D\Psi(0) = 0$.

Pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\theta$ et ses dérivées d'ordre inférieur à $i$ sont bornées dans $B(0, \frac{1}{4})$. Si $||x-x_q|| < \frac{1}{4}\,||x_q||$, il existe des constantes $K$ et $K'$ positives telles que :

$$||D^i\Psi(x)|| \leqslant \frac{K}{q}\,||x_q||^{k-i} \leqslant \frac{K'}{q}\,||x||^{k-i}.$$

Pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V$ de $0$ tel que pour tout $x$ de $V - \{0\}$

$$||D^i\Psi(x)|| \leq \varepsilon||x||^{k-i}.$$

Ainsi quand $||x||$ tend vers $0$, $\dfrac{||D^i\Psi(x)||}{||x||}$ si $i < k$, $||D^k\Psi(x)||$ tendent vers $0$. $\Psi$, de classe $C^k$, est $k$-plate en $0$.

Soit $\tilde{f} = f - \Psi$ : c'est une réalisation de $f$, de classe $C^k$ telle que $D\tilde{f}(x_q) = w_q$. $x_q$ est un point singulier de $\tilde{f}$ de corang 1. Nous allons montrer que quel que soit $q$ de $\mathbb{N}^*$, dans aucun voisinage de $x_q$ $\tilde{f}^{-1}\{\tilde{f}(x_q)\}$ n'est une variété de codimension $p$ si $n > p$ (resp. $\tilde{f}$ n'est injective si $n = p$).

Fixons $q$ dans $\mathbb{N}^*$. Nous allons appliquer le procédé de Liapounov-Schmitt au germe en $x_q$ de l'application : $x \mapsto \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_q)$. Puisque $w_q^*.y_q = 0$ et que $\operatorname{Coker} w_q$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, la projection $\chi$ de $\mathbb{R}^p$ sur $\operatorname{Coker} w_q$ est, à cet isomorphisme près, l'application $z \mapsto \langle z, y_q\rangle$.

En reprenant les notations du paragraphe VII-1, annexe II, on sait qu'il existe $h_1$ germe en $x_q$ de difféomorphisme de classe $C^k$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\operatorname{Im} w_q \times \operatorname{Ker} w_q$ tel que $h_1(x_q) = (0,0)$ et $k_1$ germe en $0$ de difféomorphisme de classe $C^k$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\operatorname{Im} w_q \times \mathbb{R}$, tel que $k_1(0) = (0,0)$ on peut alors déterminer des voisinages $\mathcal{V}$ de $x_q$ dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}_1$ de $0$ dans $\operatorname{Im} w_q$, $\mathcal{V}_2$ de $0$ dans $\operatorname{Ker} w_q$ tels que $h_1(\mathcal{V}) = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ et si $u$ est l'application, de classe $C^k$, de $\mathcal{V}_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$u(y) = \langle y_q\ ,\ \tilde{f}(h_1^{-1}(0,y)) - \tilde{f}(x_q)\rangle \quad \text{on a}$$

$h_1(\mathcal{V} \cap W_q) = \{0\} \times (u^{-1}\{0\} \cap \mathcal{V}_2)$ où $W_q = \{x/\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_q)\}$ et

$$k_1 \cdot (\tilde{f}(h_1^{-1}(0,y)) - \tilde{f}(x_q)) = (0,u(y)). \qquad (1)$$

De plus : $u(0) = 0$, $Du(0) = 0$ et :

$$D^2u(0) = \langle y_q, D^2f(x_q)(.,.) - 2\varepsilon_q\langle .,.\rangle\rangle .$$

On choisira $\varepsilon_q$ de sorte que $||\varepsilon_q|| \leqslant \frac{1}{q}\, ||x_q||^{k-2}$ et que la forme bilinéaire $D^2u(0)$ soit non dégénérée.

On peut alors appliquer le corollaire de la proposition IV puisque $D^2u(0)$ vérifie $H_2$. Il existe un difféomorphisme $h$ de classe $C^1$ tel que $h(0) = 0$ qui transforme localement $W_q$ en le cône :

$$K_q = \{x \in \text{Ker } w_q \ / \ D^2\tilde{f}(x_q)(x,x) \in \text{Im } w_q\}.$$

Si $n > p$, $W_q = \tilde{f}^{-1}\{\tilde{f}(x_q)\}$ ne peut être une variété de codimension $p$ dans aucun voisinage de $x_q$.

Si $n = p$ : $\text{Ker } w_q$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ et dans tout voisinage de $0$, il existe $y$, $y'$ de $V_2$, $y \neq y'$ tel que $u(y) = u(y')$ (puisque $Du(0) = 0$ et $D^2u(0) \neq 0$). Nous allons montrer que dans tout voisinage $V'$ de $x_q$ on peut trouver $x, x'$, $x \neq x'$ tel que $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x')$.

Il existe un voisinage $V_2'$ de $0$ dans $\text{Ker } w_q$ tel que $h_1(V' \cap V) \supset \{0\} \times V_2'$.

Soient $y$ et $y'$ de $V_2'$ tels que $u(y) = u(y')$ avec $y \neq y'$.

Alors $x = h_1^{-1}(0,y)$ et $x' = h_1^{-1}(0,y')$ appartiennent à $V'$ et sont distincts puisque $y$ et $y'$ le sont. Enfin, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x')$ puisque grâce à (1) on a :

$$\tilde f(x) - \tilde f(x_q) = k_1^{-1}(0,u(y)) = k_1^{-1}(0,u(y')) = \tilde f(x') - \tilde f(x_q).$$

(1) => (4) Car toute réalisation $\tilde f$ de $f$ dans $E_k^p$ vérifie $H_k'$ et pour tout $x$, $x \neq 0$, d'un voisinage de $0$, $D\tilde f(x)$ surjective.

(4) => (3) est évident car $\tilde f$ est une submersion en tout point d'un voisinage de $0$ sauf en $0$.

On peut alors énoncer un théorème analogue au théorème I-b.

*Théorème I bis b.*-

Si $f$, un jet d'ordre $r$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f(0) = 0$, est $C^0$-suffisant dans $E_r^p$, pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, un relèvement quelconque de $f$ d'ordre $k(q) = r-1+q(r-s_f+1)$ est $C^q$-suffisant dans $E_{k(q)}^p$.

(Voir tableau III).

En conclusion, pour les fonctions de $E^p$, on a les groupes de propositions équivalentes :

*Proposition VI.*-

Soit $f$ de $E^p$ telle que $f(0) = 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) il existe un réel $r$, $r \geqslant 1$ tel que $f$ vérifie $H_r$ ;

2) $f$ est $k$ - $v$ déterminé dans $E_k^p$ ;

3) Pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, il existe $k(q)$ tel que $f$ soit $k(q)$-déterminé pour la $C^q$-équivalence de contact dans $E_{k(q)}^p$.

*Proposition VI bis.*-

Soit $f$ de $E^p$ telle que $f(0) = 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) il existe un réel $r$, $r \geqslant 1$ tel que $f$ vérifie $H_r'$ ;

2) $f$ <u>est</u> $k$-$C^0$<u>-déterminé dans</u> $E_k^p$ ;

3) <u>Pour tout</u> $q$ <u>de</u> $\mathbb{N}$, <u>il existe</u> $k(q)$ <u>tel que</u> $f$ <u>soit</u> $k(q)$-$C^q$ <u>déterminé dans</u> $E_{k(q)}^p$.

## IV - *Lien entre les hypothèses* $H_r$, $H'_r$ *et l'ellipticité de certains idéaux.*

Nous savons que si $f$ de $E^p$ vérifie $H_r$ (resp. $H'_r$), $f$ est $k - v$ -déterminé (resp. $k$-$C^0$-déterminé) dans $E_k^p$ pour tout $k$, $k \geq r$ ; $f$ est donc $v$-déterminé (resp. $C^0$-déterminé) dans $E^p$. Par suite, $J_p(f)$ (resp. $H_p(f)$) est elliptique [9].

Pour $p = 1$, BOCHNAK et LOJASIEWCZ ont montré, réciproquement, que si $H_1(f)$ est elliptique, il existe un réel $r$, $r \geq 1$, tel que $f$ vérifie $H'_r$ (ou $H_r$).

Nous allons généraliser cela pour $n \geq p$ :

*Proposition VII.-*

<u>Soit</u> $f$ <u>de</u> $E^p$ <u>tel que</u> $f(0) = 0$.

$J_p(f)$ <u>est elliptique si et seulement si il existe un réel</u> $r$, $r \geq 1$ <u>tel que</u> $f$ <u>vérifie</u> $H_r$.

*Proposition VII bis.-*

<u>Soit</u> $f$ <u>de</u> $E^p$ <u>tel que</u> $f(0) = 0$.

$H_p(f)$ <u>est elliptique si et seulement si il existe un réel</u> $r$, $r \geq 1$ <u>tel que</u> $f$ <u>vérifie</u> $H'_r$.

La démonstration des propositions VII et VII bis s'inspire de celle de KUO et BOCHNAK [8].

<u>*Démonstration de la proposition*</u> VII.

Il nous reste seulement à prouver que si $J_p(f)$ est elliptique, il existe un réel $r$, $r \geq 1$, tel que $f$ vérifie $H_r$.

$J_p(f)$ étant elliptique, $f$ est v-déterminé dans $E^p$ [9]. Il existe donc $k$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $f_k$, le jet d'ordre $k$ de $f$ en 0, soit v-suffisant dans $E^p$. Alors pour toute réalisation $\tilde{f}$ de $f_k$ dans $E^p$, $J_p(\tilde{f})$ est elliptique [9] et la fonction

$$x \mapsto ||\tilde{f}(x)||^2 + \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \left[ \frac{D(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p)}{D(x_{i_1} \ldots x_{i_p})} (x) \right]^2$$

est elliptique (au sens du II. Annexe II). Dans un voisinage de 0, sauf en 0, elle ne s'annule pas. Pour tout $x$, $x \neq 0$, de ce voisinage tel que $\tilde{f}(x) = 0$, $D\tilde{f}(x)$ est surjective. Donc si $J_p(f)$ est elliptique pour toute réalisation $\tilde{f}$ de $f_k$ dans $E^p$, 0 est une singularité isolée de $\tilde{f}$ dans $\tilde{f}^{-1}\{0\}$.

Nous allons montrer que s'il n'existe aucun réel $r$, $r \geq 1$ tel que $f$ vérifie $H_r$, on peut construire une réalisation $\tilde{f}$ de $f_k$ dans $E^p$ et une suite $x_q$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, convergeant vers 0 telle que $\tilde{f}(x_q) = 0$ et $D\tilde{f}(x_q)$ soit non surjective.

Supposons que $f$ ne vérifie $H_r$ pour aucune valeur $r$. Alors pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_q)$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, convergeant vers 0, telle de $||f(x_q)|| \leq ||x_q||^{q+1}$ et

$$\inf_{y \in \Sigma_q} ||(Df(x_q))^* . y|| \leq \frac{||x_q||^q}{3} .$$

On choisit la suite $(x_q)$ de sorte que $||x_{q+1}|| \leq \frac{1}{2} ||x_q|| \leq \frac{1}{2q}$. $\Sigma_p$ étant compact, il existe une suite $(y_q)$ de $\Sigma_p$ telle que :

$$\inf_{y \in \Sigma_p} || [Df(x_q)]^* . y || = || [Df(x_q)]^* . y_q ||.$$

D'après le lemme 4, pour tout $q$, il existe $w_q$ de $L(n,p)$ de rang $(p-1)$ telle que $||Df(x_q) - w_q|| \leq ||x_q||^q$.

On considère la même application $\theta$ qu'à la proposition V et on pose

$$\Psi(x) = \sum_{q\geq 1} \theta\left(\frac{x-x_q}{||x_q||}\right)(f(x_q) + (Df(x_q) - w_q).(x-x_q)).$$

Pour chaque $x$, cette série comporte au plus un terme non nul. $\Psi$ est de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Nous allons montrer qu'elle est de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et infiniment plate en $0$.

Si $x \notin \bigcup_{q\geq 1} B(x_q, \frac{1}{4}||x_q||)$, $D^i\Psi(x) = 0$ pour tout $i$ de $\mathbb{N}$.

Si $||x-x_q|| < \frac{1}{4}\,||x_q||$, on a : $||\Psi(x)|| \leq \frac{5}{4}\,||x_q||^{q+1} \leq \frac{5}{4}\,||x_q||$.

Comme $||x|| \leq \frac{3}{4}\,||x_q||$, on a aussi $||\Psi(x)|| \leq \frac{5}{3}\,||x||$ .

Soit $i$ de $\mathbb{N}^*$ et $V' = B(0,||x_{i-1}||)$. Soit $x$ de $V'$ alors ou bien $D^i\Psi(x) = 0$ ou bien il existe $q$, $q \geq i$ tel que $||x-x_q|| < \frac{1}{4}\,||x_q||$.

Il existe une constante $K$ telle que :

$$||D^i\Psi(x)|| \leq K||x_q||^{q+1-i} \leq K||x_q|| \leq \frac{4K}{3}\,||x||.$$

Pour tout entier $i$ et pour tout $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V$ de $0$ tel que pour tout $x$ de $V - \{0\}$ : $||D^i\Psi(x)|| \leq \varepsilon$ .

$\Psi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i$, $D^i\Psi(0) = 0$.

Prenons $\tilde{f} = f - \Psi$ . On a alors $\tilde{f}(x_q) = 0$ et $D\tilde{f}(x_q) = w_q$ qui est de rang $(p-1)$. $\tilde{f}$ est une réalisation de $f_k$ dans $E^p$ et $(x_q)$ une suite de points singuliers de $\tilde{f}$ dans $\tilde{f}^{-1}\{0\}$ convergeant vers $0$.

*Démonstration de la proposition VII bis.*

1°) Si $f$ vérifie $H'_r$, $H_p(f)$ est elliptique car $f$ est v-déterminé dans $E^p$.

2°) Si $H_p(f)$ est elliptique, $f$ est k-v déterminé dans $E^p$ et il existe un entier $k$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $f_k$ soit $C^o$-suffisant dans $E^p$ [9].

Pour toute réalisation $\tilde{f}$ de $f_k$ dans $E^p$, $0$ est une singularité isolée de $\tilde{f}$ puisque $H_p(\tilde{f})$ est elliptique et la fonction :

$$x \to \sum_{1 \leq i_1 \dots < i_p \leq n} \left[\frac{D(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p)}{D(x_{i_1} \dots x_{i_p})}(x)\right]^2 \quad \text{est elliptique}$$

donc non nulle dans un voisinage de $0$, sauf en $0$.

Comme dans la proposition VII, on suppose que $f$ ne vérifie $H'_r$ pour aucune valeur de $r$, $r \geq 1$.

Pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_q)$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ telle que $\lim_q x_q = 0$, $||x_{q+1}|| \leq \frac{1}{2} ||x_q|| < \frac{1}{2q}$ et une suite $y_q$ de $\Sigma_p$ telles que $||(Df(x_q))^*.y_q|| < \dfrac{||x_q||}{3}$.

Il existe $w_q$ de $L(n,p)$, de rang $(p-1)$, telle que $||Df(x_q) - w_q|| \leq ||x_q||^q$.

On pose $\Psi(x) = \sum_{q \geq 1} \theta\left(\frac{x - x_q}{x_q}\right)((Df(x_q) - w_q).(x - x_q))$.

On montre de la même façon qu'à la proposition VII que $\Psi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, qu'elle est infiniment plate en $0$. $\tilde{f} = f - \Psi$ est une réalisation de $f_k$ dans $E^p$ qui admet une suite $(x_q)$ de points singuliers, convergeant vers $0$, car $D\tilde{f}(x_q) = w_q$.

*Remarque* :

Lorsque l'on applique les propositions VII et VII bis aux jets :

Si $f$ est un jet d'ordre $k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que $f(0) = 0$ on a :

- $J_p(f)$ est elliptique si et seulement si il existe $r$, $r \geq 1$ tel que $f$ vérifie $H_r$.

- $\mathcal{H}_p(f)$ est elliptique si et seulement si il existe $r$, $r \geq 1$ tel que $f$ vérifie $H'_r$.

Si $f$ est un polynome homogène de degré $k$, les propositions s'énoncent avec $r = k$ (voir proposition 5 et 6 de l'annexe II).

Dans le cas de jets non homogènes : Si $f$ vérifie $H_k$, $J_p(f)$ est elliptique ; mais si $J_p(f)$ est elliptique $f$ ne vérifie pas forcément $H_k$ (il se peut que $r > k$). De même si $f$ vérifie $H'_k$, $\mathcal{H}_p(f)$ est elliptique. La réciproque est fausse.

Dans la 4ème partie, nous verrons deux exemples de jets $f$ d'ordre $k$ tels que $\mathcal{H}_p(f)$ soit elliptique et qui vérifient $H'_r$ pour $r > k$ :

Soient $f$ et $g$ les jets de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définis par $f(x,y) = x^3 - 3xy^k$ où $k \geq 3$ et $g(x,y) = x^k - xy^k$, où $k \geq 2$.

$f$ vérifie $H'_r$ pour tout $r$, $r \geq \frac{3k}{2}$ et pour aucun $r$, $r < \frac{3k}{2}$ ;

$g$ " " " " $r \geq k + \frac{k}{k-1}$ et pour aucun $r$, $r < k + \frac{k}{k-1}$ ;

(voir tableau III).

## V - *Exemples de jets vérifiant* $H_r$ *ou* $H'_r$.

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs normes euclidiennes.

*I - Le jet* $f$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *défini par* $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^{k_i}$, *où* $k_i \geq 2$, *vérifie* $H'_r$ *pour un* $r$, $r \geq 1$ *si et seulement si pour tout* $i$, $a_i \neq 0$. *Et alors* $r = \sup_{1 \leq i \leq m} k_i$.

Si $a_i = 0$, la suite $(x_p)$ formée des éléments de $\mathbb{R}^n$ dont seule la $i^e$ coordonnée est non nulle et vaut $\frac{1}{p}$ est telle que pour tout $p$, $Df(x_p) = 0$. $0$ n'est pas un point singulier isolé de $f$ et $f$ ne peut vérifier $H'_r$ pour aucune valeur de $r$.

Réciproquement, supposons que pour tout $i$, $a_i \neq 0$. Soit $\alpha = \inf |a_i| . k_i$, $r = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} k_i$ et $x$ tel que $||x|| < 1$, on a alors :

$$||\text{grad } f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \, a_i^2 \, x_i^{2(k_i-1)} \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{2(r-1)}$$

$$\text{et} \quad ||\text{grad } f(x)|| \geq \frac{\alpha}{n^{\frac{r-1}{2}}} \, ||x||^{r-1} .$$

II - <u>*Le jet*</u> $f$ <u>*de*</u> $\mathbb{R}^2$ <u>*dans*</u> $\mathbb{R}$ <u>*défini par*</u> $f(x,y) = x^k - xy^k$, $k \geq 2$, <u>*vérifie*</u> $H'_r$ <u>*pour tout*</u> $r$, $r \geq k + \frac{k}{k-1}$ <u>*et ne vérifie pas*</u> $H'_r$ <u>*si*</u> $r < k + \frac{k}{k-1}$.

Cet exemple a été cité par BOCHNAK et LOJASIEWICZ [7].

Soit $\rho$ un réel tel que $1 \leq \rho < k + \frac{k}{k-1}$. Pour tout $(x,y)$ tel que $kx^{k-1} = y^k$, on a :

$$\frac{||\text{grad } f(x,y)||}{||(x,y)||^{\rho-1}} = k^{1-\frac{1}{k-1}} \frac{|y|^{k+\frac{k}{k-1}-\rho}}{\left(1 + \frac{|y|^{\frac{2k}{k-1}-2}}{k^{2/k-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{2}}}$$

Si $(x,y)$ est un point de la courbe $y^k = k\,x^{k-1}$ et si $||(x,y)||$ tend vers $0$, $\Delta||(x,y)||$ tend également vers $0$. $f$ ne peut vérifier $H'_\rho$.

Soit $V = B(0,1)$. Posons $r = k + \frac{k}{k-1}$ et $\Delta(x,y) = \dfrac{\|\text{grad } f(x,y)\|^2}{(x^2+y^2)^{r-1}}$.

Considérons les ensembles : $A = \{(x,y)/x^2 \geq y^2\} \cap V$

$B = \{(x,y)/x^2 < y^2\} \cap V$

$C = \{(x,y)/|k\, x^{k-1} - y^k| \leq \frac{1}{2}\, |y|^k\} \cap V$.

Si $(x,y) \in A$, $\Delta(x,y) \geq \dfrac{(k|x|^{k-1} - |x|^k)^2}{(2x^2)^{r-1}} = \dfrac{x^{2(k-r)}(k - |x|)}{2^{r-1}}$.

Quand $x$ tend vers 0, le 2e membre de l'inégalité tend vers l'infini. Si $(x,y) \in B \cap C$ alors $k|x|^{k-1} \geq \frac{1}{2}\,|y|^k$

$$\text{d'où } \Delta(x,y) \geq \frac{k^2}{(2k)^{\frac{2}{k-1}} . 2^{r-1}}\, |y|^{\frac{2k}{k-1} + 2k - 2r}$$

$$\text{soit } \Delta(x,y) \geq \frac{k^2}{(2k)^{\frac{2}{k-1}} . 2^{r-1}}\ .$$

Enfin si $(x,y) \in B - C$, $\Delta(x,y) \geq \frac{1}{2^{r+1}}\,|y|^{2(k-r+1)}$ qui tend vers l'infini quand $y$ tend vers 0.

En résumé, il existe une constante $C$, $C > 0$ et un voisinage $V'$ de $(0,0)$ tel que si $(x,y) \in V' - \{(0,0)\}$, $\Delta(x,y) \geq C$.

Ceci montre bien que $f$ vérifie $H_r$ pour tout $r$, $r \geq k + \frac{k}{k-1}$.

BOCHNAK et LOJASIEWICZ [6] font remarquer que $f$ est $C^0$-suffisant dans $E_{k+2}$ et nous avons montré qu'il ne l'est pas dans $E_{k+1}$.

III - *Le jet* $f$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *défini par* $f(x,y) = x^3 - 3x\,y^k$, $k \geq 3$. *vérifie* $H'_r$ *pour tout* $r$, $r \geq \frac{3k}{2}$ *et ne vérifie pas* $H'_r$ *si* $r < \frac{3k}{2}$.

Cet exemple est étudié par KUO [10] pour déterminer $r_o$, le plus petit entier $r$ tel que le jet d'ordre $r$ de $f$ soit $C^o$-suffisant dans $E_{r+1}$ : il trouve pour $r_o$ le plus petit entier $r$ tel que $r > \frac{k}{2} + k - 1$.

L'étude se fait comme pour l'exemple précédent.

On a : $Df(x,y) = 3(x^2 - y^k, \ -kx\, y^{k-1})$.

On voit que si $\rho < \frac{3k}{2}$ et si $(x,y)$ est un point de la courbe $x^2 = y^k$ tel que $||(x,y)||$ tende vers 0, alors $\dfrac{||\text{grad } f(x,y)||}{||(x,y)||^{\rho-1}}$ tend vers 0. $f$ ne peut vérifie $H'_\rho$.

Pour montrer que $f$ vérifie $H_r$ pour $r \geqslant \frac{3k}{2}$ on minore $\Delta(x,y)$ sur $A$, $B \cap C$, $B - C$ avec

$$A = \{(x,y)/x^2 \geqslant y^2,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$
$$B = \{(x,y)/x^2 \leqslant y^2,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$
$$C = \{(x,y)/\ |x^2-y^k| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|y|^k,\ \ x^2 + y^2 < 1\}.$$

Ici encore, on voit que le jet d'ordre $r_o$ est $C^o$-suffisant dans $E_{r_o+1}$ il ne l'est pas dans $E_{r_o}$.

IV - <u>*Le jet*</u> $f$ <u>*de*</u> $\mathbb{R}^2$ <u>*dans*</u> $\mathbb{R}^2$ <u>*défini par*</u> $f(x,y) = (x,y^k)$, $k \geqslant 2$ <u>*vérifie*</u> $H_r$ <u>*pour tout*</u> $r \geqslant k$, <u>*ne vérifie pas*</u> $H_r$ <u>*si*</u> $r < k$.

$f$ ne peut vérifier $H'_r$ car les points $(x,0)$ sont des points singuliers de $f$.

$f$ ne peut vérifier $H_r$ pour $r < k$ puisque le jet d'ordre $(k-1)$ est $(x,0)$.

Soit $V = B(0, \frac{1}{2})$ et $t = \sqrt{x^2+y^2}$ .

$||f(x,y)||^2 = x^2 + y^{2k}$. $Df(x,y)$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k\,y^{k-1} \end{pmatrix}$ .

Pour $y \neq 0$, $Df(x,y)$ admet pour inverse $S(x,y)$ dont la matrice est

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{k\,y^{k-1}} \end{pmatrix}$ . Pour tout $(x,y)$ tel que $y \neq 0$, on a :

$||S(x,y)|| \leqslant 2 \sup(1, \dfrac{1}{k|y|^{k-1}}) = \dfrac{2}{k|y|^{k-1}}$ dans un voisinage de $(0,0)$.

Si $||f(x,y)||^2 \leqslant t^{2k}$ alors $x^2 \leqslant t^{2k}$ et $y^2 = t^2-x^2 \geqslant t^2-t^{2k} > 0$.

Donc :

$$||S(x,y)|| \leqslant \frac{2}{k\,t^{k-1}(1-t^{k-2})^{\frac{k-1}{2}}} \leqslant \frac{2}{k(1-(\frac{1}{2})^{k-2})^{\frac{k-1}{2}}\,t^{k-1}} .$$

Si $(x,y) \in W_1^k(f) \cap V$, $Df(x,y)$ est surjective et de section

$S(x,y)$ : $||S(x,y)|| \leqslant \dfrac{C}{t^{k-1}}$ . On peut généraliser aux <u>jets de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>définis par</u> $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^k)$ où $k \geqslant 2$.
Ils vérifient $H_r$ si et seulement si $r \geqslant k$.

V - *Soit* f *le jet de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *défini par* $f(x,y) = (x,xy-y^3)$

f *vérifie* $H_3$.

f ne vérifie $H'_r$ pour aucun $r$. Il ne peut vérifier $H_2$ car le jet $(x,xy)$ présente des singularities dans sa surface de niveau en 0.

Soit V la boule de centre 0 et de rayon 1/2 et soit $t = \sqrt{x^2+y^2}$.

$Df(x,y)$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x-3y^2 \end{pmatrix}$ .

Pour tout $(x,y)$ tel que $x \neq 3y^2$, $Df(x,y)$ admet pour inverse $S(x,y)$ de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x-3y^2 \end{pmatrix} .$$

Pour tout $(x,y)$ tel que $x \neq 3y^2$, $Df(x,y)$ admet pour inverse $S(x,y)$ de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-y}{x-3y^2} & \dfrac{1}{x-3y^2} \end{pmatrix} .$$

Alors $||S(x,y)||^2 \leqslant 4 \ \mathrm{Sup}(1 + \dfrac{y^2}{(x-3y^2)^2} , \dfrac{1}{(x-3y^2)^2})$ et,

dans un voisinage de $O$, $\dfrac{1}{2(x-3y^2)^2} > 1$ et $y^2 < \dfrac{1}{2}$, d'où

$$||S(x,y)|| \leqslant \frac{2}{|x-3y^2|}$$

si $||f(x,y)||^2 \leqslant t^6$ alors $x^2 + y^2(x-y^2)^2 \leqslant t^6$.

Comme $x^2 \leqslant t^6$ alors $y^2 = t^2 - x^2 \geqslant t^2(1-t^4)$.

$3\ y^2 - x \geqslant 3t^2 - 3t^6 - t^3 \geqslant t^2(3 - \dfrac{3}{2^4} - \dfrac{1}{2}) = \alpha t^2$,

si $||f(x,y)|| \leqslant t^3$, $Df(x,y)$ est surjective et $||Df(x,y)|| \leqslant \dfrac{2}{\alpha t^2}$.

f vérifie $H_3$.

*VI - Soit* f *le jet de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *défini par* $f(x,y) = (x+y,\ x^2y+y^3)$

f *vérifie* $H'_3$.

$Df(x,y)$ est inversible dans $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ et admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2+3y^2 \end{pmatrix} .$$

Son inverse a pour matrice
$$\begin{pmatrix} \dfrac{x^2+3y^2}{x^2+3y^2-2xy} & \dfrac{-1}{x^2+3y^2-2xy} \\ \dfrac{-2xy}{x^2+3y^2-2xy} & \dfrac{1}{x^2+3y^2-2xy} \end{pmatrix}$$

$$||S(x,y)||^2 \leq 4 \sup \left( \frac{(x^2+3y^2)^2+4x^2y^2}{(x^2+3y^2-2xy)^2} , \frac{2}{(x^2+3y^2-2xy)^2} \right) .$$

Comme $(x^2+3y^2)^2 + 4x^2y^2$ tend vers 0 avec $(x,y)$, dans un voisinage de $(0,0)$, on a $(x^2+3y^2)^2 + 4x^2y^2 < 2$,

Donc $||S(x,y)|| \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{x^2+3y^2-2xy}$ .

Considérons la fonction $\Delta(x,y) = \dfrac{x^2+3y^2-2xy}{x^2+y^2}$ .

Les dérivées de $\Delta$ par rapport à $x$ et par rapport à $y$ s'annulent lorsque :

$$y(2xy - x^2 + y^2) = 0 \quad \text{et} \quad x(2xy - x^2 + y^2) = 0.$$

Les solutions de ce système sont $(0,0)$, $(1 + \sqrt{2},1)y$, $(1 - \sqrt{2},1)y$.

$\Delta(x,y)$ présente un minimum absolu en les points $(1 + \sqrt{2},1)y$ puisque $\Delta((1 + \sqrt{2})y,y) = 2 - \sqrt{2}$ et que $\Delta(x,y) - 2 + \sqrt{2} = \dfrac{x^2(\sqrt{2}-1)-2xy+y^2(1+\sqrt{2})}{x^2 + y^2} \geq 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

$f$ vérifie bien $H'_3$ puisque $||S(x,y)|| \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(x^2+y^2)}$ .

## VII - *Forme générale des jets homogènes de degré 2, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifient* $H_2'$.

Pour un jet homogène d'ordre 2, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$, l'hypothèse $H_2$ (resp. $\tilde{H}_2$) se traduit par le fait que dans l'espace projectif réel $P(3,\mathbb{R})$ (resp. complexe $P(3,\mathbb{C})$ deux quadriques du faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathcal{F}_{C}$) d'équation $\lambda.D^2f(0)(x,x) = 0$ où $\lambda$ forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^2$ (resp. sur $\mathbb{C}^2$) ne sont tangentes en aucun point réel (resp. réel ou imaginaire).

Nous avons ainsi 5 types de jets homogènes de degré 2 vérifiant $H_2$.

a) Les quadriques de $\mathcal{F}_C$ n'ont aucun point de contact ni réel ni imaginaire $(\widetilde{H_2})$.

b) Les quadriques de $\mathcal{F}_C$ ont deux points de contact seulement, imaginaires conjugués, la droite qui les joint est dans l'intersection à l'intersection des quadriques.

c) Les quadriques de $\mathcal{F}_C$ ont deux seuls points de contact, imaginaires conugués, la droite qui les joint est dans l'intersection des quadriques.

d) Les quadriques de $\mathcal{F}_C$ ont quatre points de contact imaginaires conjugués deux à deux $A$, $\bar{A}$, $B$, $\bar{B}$ et les droites $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $AB$ et $\bar{A}\bar{B}$ sont dans l'intersection.

e) Les quadriques de $\mathcal{F}_C$ sont tangentes le long d'une conique imaginaire ou elles sont imaginaires confondues.

Dans les cas a, b, d, e, il existe une base de $\mathbb{C}^4$ dans laquelle le jet s'écrit : $\left(\sum_{i=4}^{4} \lambda_i \, x_i^2 \, , \, \sum_{i=1}^{4} \mu_i \, x_i^2\right)$ (1)

Toute cette étude est faite aux chapitres III. Nous allons donner seulement ici la forme des jets vérifiant $H_2'$ par rapport à une base réelle.

Dans le cas a) certains jets seulement vérifient $H_2'$ (alors la base par rapport à laquelle le jet s'écrit sous la forme (1) est imaginaire, les vecteurs de base étant imaginaires conjugués deux à deux).

Dans les cas c et d, tous les jets vérifient $H_2'$ tandis que dans les cas b et e, ils ne le vérifient jamais.

<u>*Cas a*</u> : les jets qui vérifient $H_2'$ et $\tilde{H}_2$ sont de la forme :

$$(\alpha(x_1^2-x_2^2) + 2\beta\, x_1x_2 + \gamma(x_3^2-x_4^2) + 2\delta\, x_3x_4, \alpha'(x_1^2-x_2^2) + 2\beta'\, x_1x_2 + \gamma'(x_3^2-x_4^2) + 2\delta'\, x_3x_4).$$

avec la condition : tous les déterminants d'ordre 2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \quad \text{sont non nuls.}$$

<u>*Cas c*</u> : les jets sont de la forme :

$$(2(x_1x_3-x_2x_4) + \gamma(x_3^2-x_4^2) + 2\delta\, x_3x_4,\ 2\alpha(x_1x_3-x_2x_4) + 2\beta(x_1x_4+x_2x_3) + (2+\alpha\gamma-\beta\delta)(x_3^2-x_4^2) + (\beta\gamma + \alpha\delta)x_3x_4)$$

avec $\beta \neq 0$.

<u>*Cas d*</u> : les jets sont de la forme :

$$\alpha(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2) + 2\beta(x_1x_2+x_3x_4), \alpha'(x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2) + 2\beta'(x_1x_2+x_3x_4))$$

avec $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

# DEUXIEME PARTIE

## JETS HOMOGÈNES

---------------

# CHAPITRE II

## I - *Rappels et présentation du problème.*

Nous étudions ici les jets homogènes $f_s$, $s \geq 2$.

Rappelons les propriétés équivalentes des jets homogènes : (cf. annexe II, propositions 5 et 6)

- $f_s$ vérifie $H_s$ (resp. $H'_s$) ;
- $0$ est une singularité isolée de $f_s$ dans $W_{f_s}$ (resp. $0$ est une singularité isolée de $f_s$) autrement dit l'ensemble des zéros communs des polynômes représentants des germes qui engendrent $J_p(f_s)$ (resp. $\mathcal{H}_p(f_s)$) est, dans $\mathbb{R}^n$, réduit à $\{0\}$.
- $J_p(f_s)$ (resp. $\mathcal{H}_p(f_s)$) est elliptique.

On sait, par le théorème 1, que si $f_s$ vérifie $H_s$ (resp. $H'_s$) alors $f_s$ est suffisant pour la $C^1$-équivalence de contact (resp. $C^1$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_s$ ; et plus généralement, si $\ell \in \mathbb{N}^*$, $f_{s+\ell-1}$ relèvement d'ordre $s+\ell-1$ de $f_s$, est suffisant pour la $C^\ell$-équivalence de contact (resp. $C^\ell$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_{s+\ell-1}$.

Notre but est de formuler des conditions plus fortes que $H_s$ (resp. $H'_s$) telles que si $f_s$ vérifie ces conditions alors $f_s$ est suffisant pour la $C^2$-équivalence de contact (resp. $C^2$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_{s+1}$ ou $f_{s+\ell-1}$ est suffisant pour la $C^{\ell+1}$-équivalence de contact (resp. $C^{\ell+1}$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_{s+\ell}$.

## II - *Les fonctions* $\phi_\ell$.

Le problème précédent fait apparaître les applications $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\Phi}_\ell$) ($\ell \in \mathbb{N}$) associées au jet homogène $f_s$ et définies de la façon suivante (voir introduction p. 18) : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note $L_s^k(n,p)$ l'espace vectoriel des applications $k$ linéaires et symétriques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, $L_s^k(n,\mathrm{End}(p))$ l'espace vectoriel des applications $k$ linéaires et symétriques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{End}\,\mathbb{R}^p$ et $L_s^o(n,\mathrm{End}(p)) = \mathrm{End}\,\mathbb{R}^p = \mathrm{End}(p)$.

*Définition*.- $\phi_\ell$ est l'application linéaire de $L_s^\ell(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^{\ell+1}(n,n)$ dans $L_s^{s+\ell}(n,p)$ telle que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$ et tout $(v,u)$ de $L_s^\ell(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^{\ell+1}(n,n)$ on ait :

$$\phi_\ell(v,u)(x)^{s+\ell} = v(x)^\ell f_s(x) + Df_s(x)u(x)^{\ell+1}$$

c'est-à-dire pour tout $(s+\ell)$ uple $(x_1,x_2,\ldots,x_{s+\ell})$ de $\mathbb{R}^n$ :

$$\phi_\ell(v,u)(x_1,x_2,\ldots,x_{s+\ell}) =$$

$$\frac{1}{(s+\ell)!}\left[\sum_{\tau\in\mathcal{T}} v(x_{\tau_1},\ldots,x_{\tau_\ell})A_s(x_{\tau_{\ell+1}},\ldots,x_{\tau_{s+\ell}})+sA_s(x_{\tau_1},\ldots,x_{\tau_{\ell-1}},u(x_{\tau_\ell},\ldots,x_{\tau_{s+\ell}}))\right]$$

où $A_s = \frac{1}{s!}D^s f(0)$ et $\mathcal{T}$ est l'ensemble des permutations des $(s+\ell)$ premiers entiers naturels.

On note $\bar\Phi_\ell$ la restriction de $\phi_\ell$ à $\{0\} \times L_s^{\ell+1}(n,n)$.

*Proposition 1*.- Si le jet homogène $f_s$ est suffisant pour la $C^2$-équivalence de contact (resp. $C^2$-suffisant) dans $E_{s+1}^p$, alors $\phi_1$ (resp. $\bar\Phi_1$) est surjectif.

*Démonstration* : Soit $f$ une réalisation de $f_s$ dans $E_{s+1}^p$. Supposons qu'il existe $h$ germe en $0$ de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^2$ et $v$ germe en $0$ d'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^p$ de classe $C^1$ tels que $h(0) = 0$ et pour tout $x$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x) = v(x)f_s(h(x)).$$

Le développement limité de cette expression est possible jusqu'à l'ordre $(s+1)$.

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$, on a

(1) $f_s(x) = v(0)f_s(Dh(0)x)$ en dérivant ceci on obtient

(2) $Df_s(x) = v(0)Df_s(Dh(0)x) \quad Dh(0)$.

On a aussi :

(3) $$\frac{1}{(s+1)!} D^{s+1}f(0)(x)^{s+1} = Dv(0)(x)f_s(Dh(0)x)+ \frac{1}{2} v(0)Df_s(Dh(0)x)D^2h(0)(x)^2$$

$v(0)$ et $Dh(0)$ étant inversibles, on reporte les égalités (1) et (2) dans (3) et on obtient :

$$\frac{1}{(s+1)!} D^{s+1}f(0)(x)^{s+1} = Dv(0)(x)v(0)^{-1}f_s(x)+\frac{1}{2}Df_s(x) \quad Dh^{-1}(0) \quad D^2h(0)(x,x)$$

soit donc

$$\frac{1}{(s+1)!} D^{s+1}f(0)(x)^{s+1} = \phi_1(Dv(0)(.)\ v(0)^{-1},\ \frac{1}{2} Dh^{-1}(0)D^2h(0))(x)^{s+1}.$$

Il s'ensuit que $\phi_1$ est surjectif puisque $D^{s+1}f(0)$ est quelconque. On fait le même genre de démonstration si $f_s$ est $C^2$-suffisant.

<u>Plus généralement</u>, supposons $f_{s+\ell-1}$ $(\ell > 1)$ suffisant pour la $C^{\ell+1}$-équivalence de contact dans $E^p_{s+\ell}$, il existe donc $v$ de classe $C^\ell$ et $h$ de classe $C^{\ell+1}$ tels que dans un voisinage de $0$ :

$$f(x) = v(x)f_{s+\ell-1}(h(x)) \quad - \quad \text{avec} \quad h(0) = 0.$$

On peut faire un développement limité à l'ordre $(s+\ell)$ de cette expression, les termes de degré $s$, $s+1$ imposent que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$ :

$$f_s(x) = v(0).f_s(Dh(0)(x))$$

$$\frac{1}{(s+1)!} D^{s+1} f(0) = Dv(0)(x).f_s(Dh(0)(x)) + \frac{1}{2} v(0)Df_s(Dh(0)(x))D^2h(0)(x,x)$$

$$+ \frac{1}{(s+1)!} v(0)D^{s+1} f(0)(Dh(0)(x))^{s+1}.$$

On remarque qu'une solution de ces équations est, si on ne fait pas d'hypothèse sur $\phi_1$, $v(0) = 1_p$, $Dv(0) = 0$, $Dh(0) = 1_n$, $D^2h(0) = 0$ et ainsi de suite jusque $D^{\ell-1}v(0) = 0$, $D^{\ell}h(0) = 0$ ceci pour résoudre les équations suivantes correspondant aux termes de degré compris entre $(s+2)$ et $(s+\ell-1)$. Alors les termes de degré $(s+\ell)$ imposent que :

$$\frac{1}{(s+\ell)!} D^{s+\ell} f(0)(x)^{s+\ell} = \frac{1}{\ell!} D\, v(0)(x)^{\ell}.f_s(x) + \frac{1}{(s+\ell)!} Df_s(x).D^{\ell+1}h(0)(x)^{\ell+1}$$

et donc, puisque $D^{s+\ell}f(0)$ est quelconque, $\phi_\ell$ est surjectif.

*Proposition* 2.- <u>Si</u> $\phi_\ell$ (<u>resp</u>. $\bar{\phi}_\ell$) <u>est surjectif alors pour tout</u> $\ell'$ <u>de</u> $\mathbb{N}$ <u>tel que</u> $\ell' \geq \ell$, $\phi_\ell$ (<u>resp</u>. $\bar{\phi}_{\ell'}$) <u>est surjectif</u>.

*Démonstration* : Si $\phi_\ell$ est surjectif alors $\phi_{\ell+1}$ est surjectif, en effet, $\phi_\ell$ étant une application linéaire surjective, il existe une application linéaire $\Psi_\ell$ de $L_s^{s+\ell}(n,p)$ dans $L_s^{\ell}(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^{\ell+1}(n,n)$ telle que $\phi_\ell \circ \Psi_\ell = I_{L_s^{s+\ell}(n,n)}$. Soit c fixé de $L_s^{s+\ell+1}(n,p)$. Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $c(x,.) \in L_s^{s+\ell}(n,p)$ et donc il existe $(v_x,u_x)$ de $L_s^{\ell}(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^{\ell+1}(n,n)$ tels que $(v_x,u_x) = \Psi_\ell(c(x,.))$ et l'application $\emptyset$ telle que $\emptyset(x) = (v_x,u_x)$ est linéaire. On considère donc $(v,u)$ de $L_s^{\ell+1}(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^{\ell+2}(n,n)$ défini par

$$v(a_1,a_2,\ldots,a_{\ell+1}) = \frac{1}{\ell+1} \Big(\sum_{j=1}^{\ell+1} v_{a_j}(a_1,\ldots,a_{j-1},\hat{a}_j,a_{j+1},\ldots,a_{\ell+1})\Big)$$

$$u(a_1,a_2,\ldots,a_{\ell+2}) = \frac{1}{\ell+1} \Big(\sum_{i=1}^{\ell+2} u_{a_i}(a_1,\ldots,a_{i-1},\hat{a}_i,a_{i+1},\ldots,a_{\ell+2})\Big)$$

$v$ et $u$ sont bien linéaires en chaque variable et symétriques par rapport à l'ensemble de leurs variables. De plus, comme pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$

$c(x)^{s+\ell+1} = v_x(x)^{\ell} f_s(x) + Df_s(x) u_x(x)^{\ell+1}$ on a :

$c(x)^{s+\ell+1} = v(x)^{\ell+1} f_s(x) + Df_s(x) u(x)^{\ell+2}$.

## III - *Relations entre la surjectivité de* $\phi_\ell$ *et les propriétés de* $f_s$.

*Définition* 1.- (*voir introduction p. 18*).

$f_s$ vérifie $\tilde{H}_s$ (resp. $\tilde{H}'_s$) si l'ensemble des zéros communs des polynômes représentants des germes qui engendrent $J_p(f_s)$ (resp. $H_1(f_s)$) est, dans $\mathbb{C}^n$, réduit à $\{0\}$.

On peut formuler autrement cette hypothèse, en effet : le jet $f_s$ est associé à une application $s$ linéaire et symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, il peut être prolongé de façon naturelle en une application $s$ linéaire et symétrique $\tilde{f}_s$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$. On a $\tilde{f}_s(x) = f_s(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$.

*Définition* 2.- $f_s$ vérifie $(\tilde{H}_s)$ (resp. $(\tilde{H}'_s)$) si et seulement si pour tout $x$ de $\mathbb{C}^n - \{0\}$ tel que $\tilde{f}_s(x) = 0$, (resp. pour tout $x$ de $\mathbb{C}^n - \{0\}$) alors l'application linéaire $D\tilde{f}_s(x)$ est surjective.

On peut prolonger tout élément $v$ de $L_s^{\ell}(n,\mathrm{End}(p))$ en $\tilde{v}$ de $L_s^{\ell}(\tilde{n},\mathrm{End}(\tilde{p}))$ (application $\ell$ linéaire et symétrique de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^p$) et tout élément $u$ de $L_s^{\ell+1}(n,n)$ en $\tilde{u}$ de $L_s^{\ell+1}(\tilde{n},\tilde{n})$ (application $(\ell+1)$ linéaire et symétrique de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$) ; $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) peut aussi se prolonger en $\tilde{\phi}_\ell$ (resp. $\tilde{\bar{\phi}}_\ell$) application de $L_s^{\ell}(\tilde{n},\mathrm{End}(\tilde{p})) \times L_s^{\ell+1}(\tilde{n},\tilde{n})$ dans $L_s^{s+\ell}(\tilde{n},\tilde{p})$ de sorte que si $(v,u) \in L_s^{\ell}(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^{\ell+1}(n,n)$ on ait pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$ :

$$\tilde{\phi}_\ell(\tilde{v},\tilde{u})(x)^{s+\ell} = \phi_\ell(v,u)(x)^{s+\ell}.$$

$\tilde{\bar{\phi}}_\ell$ est la restriction de $\tilde{\phi}_\ell$ à $\{0\} \times L_s^{\ell+1}(\tilde{n},\tilde{n})$.

$\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) est surjectif si et seulement si $\tilde{\phi}_\ell$ (resp. $\tilde{\bar{\phi}}_\ell$) est surjectif.

*Proposition* 3.- <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u>

(1) $f_s$ <u>vérifie</u> $\tilde{H}_s$ (<u>resp.</u> $\tilde{H}'_s$)

(2) <u>il existe</u> $\ell \in \mathbb{N}$ <u>tel que</u> $\phi_\ell$ (<u>resp.</u> $\bar{\phi}_\ell$) <u>soit surjectif</u> ;

(3) <u>il existe</u> $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $m^\alpha \subset J_p(f_s)$ (resp. $m^\alpha \subset H_1(f_s)$).

Ces équivalences entraînent que $\bar{\phi}_\ell$ ne peut pas être surjectif sauf pour $p = 1$ car $0$ est un point singulier de $f_s$ $(s \geq 2)$. (Résultat de MATHER non publié, voir [6] et introduction voir p. 12).

Nous allons montrer que (3) => (2) => (1) => (3).

(3) => (2) On peut toujours se ramener à $\alpha \geq s$. On va montrer que <u>si</u> $m^{s+\ell} \subset J_p(f_s)$ (<u>resp.</u> $m^{s+\ell} \subset H_1(f_s)$) <u>avec</u> $\ell \in \mathbb{N}$ <u>alors</u> $\phi_\ell$ (<u>resp.</u> $\bar{\phi}_\ell$) <u>est surjectif</u>. Il s'en suit que si $f_s$ vérifie $(\tilde{H}_s)$ (resp. $(\tilde{H}'_s)$), si on note $\alpha_o$ le plus petit entier $\alpha$ tel que $m^\alpha \subset J_p(f_s)$ (resp. $m^\alpha \subset H_1(f_s)$) et $\ell_o$ le plus petit entier tel que $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) est surjectif (voir la proposition 2), on a $0 \leq \ell_o \leq \mathrm{Sup}(0,\alpha_o - s)$. Si $p \geq 2$, $\alpha_o \geq s$ car $\alpha_o \geq \mathrm{Inf}(s,p(s-1))$. Soit $c$ un éléménet de $L_s^{s+\ell}(n,p)$, il définit un germe en $0$ d'application $\theta$, $(\theta(x) = c(x)^{s+\ell})$ élément de $E^p$ dont chacune des composantes appartient à $m^{s+\ell}$. Il existe donc (voir annexe II - proposition 4) $L$ germe en $0$ d'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{End}(p)$ de classe $C^\infty$, et $g$ germe en $0$ d'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $C^\infty$ tel que :

$$c(x)^{s+\ell} = L(x).f_s(x) + Df_s(x).g(x).$$

On prend alors le terme de degré $(s+\ell)$ du développement limité de cette expression et on trouve que $c(x)^{s+\ell}$ peut aussi se mettre sous la forme :

$$c(x)^{s+\ell} = \frac{1}{\ell!} D^{\ell}L(0)(x)^{\ell}.f_s(x) + Df_s(x) \frac{1}{(\ell+1)!} D^{\ell+1}g(0)(x)^{\ell+1}$$

et donc $c = \phi_{\ell}(\frac{1}{\ell!} D^{\ell}L(0), \frac{1}{(\ell+1)!} D^{\ell+1}g(0))$.

(2) => (1) Il s'agit de montrer que si $x_o \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ et $\tilde{f}_s(x_o) = 0$ alors $D\tilde{f}_s(x_o)$ est surjectif (voir Définition 2, II de ce chapitre). A tout $y$ de $\mathbb{C}^p$, on peut associer $C_y$ de $L_s^{\ell+1}(\tilde{n},\tilde{p})$ tel que $C_y(x_o)^{\ell+1} = y$, $\phi_{\ell}$ étant surjectif, $\tilde{\phi}_{\ell}$ l'est aussi et il existe $(v_y,u_y)$ de $L_s^{\ell}(\tilde{n},\mathrm{End}\,\tilde{p}) \times L_s^{\ell+1}(\tilde{n},\tilde{n})$ tel que $C_y = \tilde{\phi}_{\ell}(v_y,u_y)$. Il s'en suit que $y = D\tilde{f}_s(x_o).u_y(x_o)^{\ell+1}$ et $D\tilde{f}_s(x_o)$ est surjectif.

(1) => (3) BOCHNAK [6] démontre le théorème suivant de SAMUEL : Soit $p_1, p_2,\ldots,p_m$ des polynômes à coefficients réels de la variable $x$ de $\mathbb{R}^n$, de degré inférieur ou égal à $k$. Si $O$ est un point isolé de l'ensemble des zéros communs, dans $\mathbb{C}^n$, de ces polynômes, alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $m^{\alpha} \subset I$, où $I$ est l'idéal de $\mathcal{E}$ engendré par les germes à l'origine des $p_i$ $(i = 1,\ldots,m)$. On a de plus $\alpha \leqslant k^n$.

On applique ce théorème aux polynômes homogènes qui représentent les composantes de $f_s$ et les mineurs d'ordre $p$ de la matrice jacobienne de $f_s$. Ici $k \leqslant \sup(s,p(s-1))$ et donc $\alpha \leqslant \sup(s^n,p^n \times (s-1)^n)$.

On démontrerait la proposition pour $p = 1$ de la même manière.

Nous venons de montrer des relations entre la surjectivité de $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) et les propriétés de $f_s$, dans les cas particuliers suivants nous pouvons préciser :

<u>Le cas</u> $p = 1$ $J_1(f_s) = H_1(f_s)$ car $f_s$ est représenté par un polynôme homogène et on a la formule d'EULER

$$s.f_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_s(x)}{\partial x_i} .x_i = Df_s(x).x .$$

*Proposition 4.-* <u>$\bar{\phi}_\ell$ est surjectif si et seulement si</u> $m^{s+\ell} \subset H_1(f_s)$. Il découle de cette proposition et de la proposition 2 que si $p = 1$ et si $f_s$ vérifie $\overset{\sim}{H}'_s$ , si on note $\ell_o$ le plus petit entier $\ell$ tel que $\bar{\phi}_\ell$ est surjectif, $\alpha_o$ le plus petit entier $\alpha$ tel que $m^\alpha \subset H_1(f_s)$ alors $\ell_o = \text{Sup}(0,\alpha_o-s)$ (si $p > 1$, $0 \leq \ell_o \leq \alpha_o-s$).

*Démonstration* : On a déjà montré à la proposition 3 ((3) => (2)) que si $m^{s+\ell} \subset H_1(f_s)$ alors $\bar{\phi}_\ell$ est surjectif. Inversement supposons $\bar{\phi}_\ell$ surjectif et soit $c$ de $m^{s+\ell}$. Il existe un voisinage $V$ de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et un germe en $0$ : $\bar{c}$ d'application de $V$ dans $L_s^{s+\ell}(n,p)$ de classe $C^\infty$ tels que pour tout $x$ de $V$ : $c(x) = \bar{c}(x)(x)^{s+\ell}$ (formule de Taylor avec reste intégral). Or $\bar{\phi}_\ell$ est une application linéaire surjective : il existe $\Psi_\ell$ application linéaire de $L_s^{s+\ell}(n,1)$ dans $L_s^{\ell+1}(n,n)$ telle que $\bar{\phi}_\ell \circ \Psi_\ell = 1_{L_s^{s+\ell}(n,1)}$. Posons $u_x = \Psi_\ell(\bar{c}(x))$. Le germe en $0$ , $\theta$ , d'application de $V$ dans $\mathbb{R}^n$ défini par $\theta(x) = u_x(x)^{\ell+1}$ est de classe $C^\infty$ et pour tout $x$ de $V$ on a $c(x) = \bar{c}(x)(x)^{\ell+1} = Df_s(x)\theta(x)$ donc $c \in H_1(f_s)$.

<u>Le cas</u> $n \leqslant p$

<u>Si</u> $n < p$, $J_p(f_s) = (f_s)$

en effet, il n'y a pas de mineur d'ordre $p$ dans la matrice jacobienne de $f_s$.

Si $n = p$, $J_p(f_s)$ est engendré par les composantes de $f_s$ et le germe en $0$ représenté par le déterminant de la matrice jacobienne de $f_s$.

<u>Si</u> $n \leqslant p$,

$f_s$ <u>vérifie</u> $H_s$ <u>si et seulement si</u> $\{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ f_s(x) = 0\} = \{0\}$

$f_s$ <u>vérifie</u> $\tilde{H}_s$ <u>si et seulement si</u> $\{x \mid x \in \mathbb{C}^n,\ f_s(x) = 0\} = \{0\}$.

Ceci est évident si $n < p$ car alors $J_p(f_s) = (f_s)$.

Si $n = p$ tout $x_o$ de $\mathbb{C}^n - \{0\}$, vérifiant $\tilde{f}_s(x_o) = 0$ est tel que $D\tilde{f}_s(x_o)$ n'est pas régulière (formule d'EULER), $x_o$ annule donc tous les polynômes qui engendrent $J_p(f_s)$.

<u>Si</u> $n = 1$ <u>et</u> $f_s$ <u>vérifie</u> $H_s$ <u>alors</u> $m^s \subset (f_s)$.

En effet, les composantes de $f_s$ sont de la forme $a_i x^s$ avec $1 \leqslant i \leqslant p$ et si $f_s$ vérifie $H_s$, l'un des $a_i$ n'est pas nul.

## *IV - <u>Le théorème</u> II.*

*<u>Théorème</u> 2.-* <u>Soit</u> $f_s$ <u>un jet homogène de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^p$, $p > 1$, <u>tel que</u> $\phi_\ell$ <u>est surjectif</u> $(\ell \in \mathbb{N}^*)$. <u>Alors pour tout</u> $q$ <u>de</u> $\mathbb{N}$ <u>tel que</u> $\ell \leqslant q < \infty$, $f_{s+\ell-1}$ <u>est suffisant pour la</u> $C^q$-<u>équivalence de contact dans</u> $E^p_{s+q-1}$.

Pour montrer ce théorème nous poserons pour $x \neq 0$, $x = t\lambda$ avec $t = ||x||$ et $\lambda = \dfrac{x}{||x||}$. Grâce aux propositions V et VI, nous mettrons $f$ sous la forme :

$$- f(t\lambda) = \left[1_p + v_{q-1}(t,\lambda)(t\lambda)^{q-1}\right] \circ f_{s+\ell-1}(t\lambda + u_q(t,\lambda)(t\lambda)^q) \quad \text{si} \quad q = \ell+1$$

$$- f(t\lambda) = \left[1_p + \sum_{i=0}^{q-\ell-2} v^o_{\ell+i}(t\lambda)^{\ell+i} + v_{q-1}(t,\lambda)(t\lambda)^{q-1}\right] \circ$$

$$f_{s+\ell-1}(t\lambda + \sum_{i=0}^{q-\ell-2} u^o_{+i+1}(t\lambda)^{\ell+i+1} + u_q(t,\lambda)(t\lambda)^q) \quad \text{si} \quad q \geq \ell+2$$

où $v_{q-1}(t,\lambda) \in L_s^{q-1}(n,\mathrm{End}(p))$ et $u_q(t,\lambda) \in L_s^q(n,n)$ et pour $0 \leq i \leq q-\ell-2$,

$(v^o_{\ell+i}, u^o_{\ell+i+1})$ de $L_s^{\ell+i}(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^{\ell+i+1}(n,n)$ sont définis de proche en proche en utilisant la surjectivité de $\phi_{\ell+i}$.

En posant ensuite $v(0) = 1_p$, $h(0) = 0$ et pour $x \neq 0$

$$v(x) = 1_p + \sum_{i=0}^{q+\ell-2} v^o_{\ell+i}(x)^{\ell+i} + v_{q-1}(||x||, \frac{x}{||x||})(x)^{q-1}$$

$$h(x) = x + \sum_{i=0}^{q+\ell-1} u^o_{\ell+i+1}(x)^{\ell+i+1} + u_q(||x||, \frac{x}{||x||})(x)^q \ .$$

On en déduira que $f(x) = v(x) \quad f_{s+\ell-1}(h(x))$.
On aura si $\ell \geq 2$, $D^{i-1}v(0) = 0$ et $D^i h(0) = 0$ pour $2 \leq i \leq \ell$, le $v$ de classe $C^{q-1}$ et le $h$ de classe $C^q$ avec $q \geq \ell + 1$ construits ici "prolongent" donc le $v$ de classe $C^{\ell-1}$ et le $h$ de classe $C^\ell$ construits au théorème I.

Nous établissons d'abord les propositions 5 et 6 qui sont des théorèmes de fonctions implicites avec paramètres.

*Proposition* 5.-

Soit $F$ et $G$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $V$ un ouvert de $F$, $\Omega$ un compact de $G$, $\Omega'$ un ouvert de $G$ tels que $\Omega \subset \Omega' \subset G$,

$I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $0$

$f$ une application de classe $C^{\mu}$, $1 \leqslant \mu \leqslant \infty$, définie sur $V \times I \times \Omega'$ à valeurs dans $F$, telle qu'il existe $x_o$ appartenant à $V$ et $y_o$ appartenant à $F$ et vérifiant :

1) pour tout $\lambda$ de $\Omega'$ : $f(x_o,0,\lambda) = y_o$

2) pour tout $\lambda$ de $\Omega'$ : $D_1 f(x_o,0,\lambda) = 1_F$.

Alors, il existe des réels strictement positifs $\rho$ et $\eta$, $\Omega''$ un ouvert de $G$, tels que $[-\eta,\eta] \subset I$ et $\Omega \subset \Omega'' \subset \Omega'$, et une unique application $\xi$ de classe $C^{\mu}$ définie sur $B_F(y_o,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega'$ à valeurs dans $\bar{B}_F(x_o,2\rho)$, telle que pour tout $y$ de $B_F(y_o,\rho)$, tout $t$ de $]-\eta,\eta[$, et tout $\lambda$ de $\Omega''$ on ait :

1) $f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda) = y$

2) $\xi(y_o,0,\lambda) = x_o$

3) $D_1\xi(y_o,0,\lambda) = 1_F$ .

*Démonstration :*

Soit $\rho'$ et $\eta'$ des réels strictement positifs tels que $\bar{B}_F(x_o,\rho') \subset V$, $[-\eta',\eta'] \subset I$ et $\Omega''$ un voisinage ouvert relativement compact de $\Omega$ tel que $\Omega \subset \Omega'' \subset \bar{\Omega}'' \subset \Omega'$. Comme $\mu \geqslant 1$, $D_1 f$ est uniformément continu sur $\bar{B}_F(x_o,\rho') \times [-\eta',\eta'] \times \Omega''$ : il existe donc $\rho$ et $\eta''$ tels que $0 < \rho < \rho'$, $0 < \eta'' < \eta$ et que pour tout $x$ de $\bar{B}_F(x_o,2\rho)$, tout $t$ de $[-\eta'',\eta'']$ et tout $\lambda$ de $\Omega''$ on ait $||1_F - D_1 f(x,t,\lambda)|| \leqslant \frac{1}{4}$. De même, $f$ est uniformément continue sur $\bar{B}_F(x_o,\rho') \times [-\eta'',\eta''] \times \Omega''$, il existe donc $\eta$, $0 < \eta < \eta''$ tel que pour tout $t$ de $[-\eta,\eta]$ et tout $\lambda$ de $\Omega''$ on ait $||f(x_o,t,\lambda) - f(x_o,0,\lambda)|| \leqslant \frac{\rho}{2}$. On considère $g$ l'application de classe $C^{\mu}$, contractante de rapport $\frac{1}{2}$ définie sur $\bar{B}_F(x_o,2\rho) \times B_F(y_o,\rho) \times$ $\times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ à valeurs dans $\bar{B}_F(x_o,2\rho)$ par $g(x,y,t,\lambda) = x + y - f(x,t,\lambda)$.

Du théorème du point fixe (voir Annexe II - VI) on déduit qu'il existe une application $\xi$ de classe $C^{\mu}$ de $B_F(y_o,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ dans $\bar{B}_F(x_o,2\rho)$ vérifiant 1, 2, 3).

*Proposition 6.-*

Soit $E$, $F$, $G$ des espaces vectoriels de dimension finie, $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine, $U$ un ouvert de $E$, $\Omega$ un compact contenu dans $G$, $\Omega_1$ un ouvert de $G$ contenant $\Omega$, et $f$ une application de classe $C^{\mu}$, $2 \leq \mu \leq \infty$, de $U \times I \times \Omega_1$ dans $G$.

On suppose que

1) il existe $y_o$ de $F$ et $x_o$ de $U$ tels que pour tout $\lambda$ de $\Omega_1$ on ait $f(x_o,0,\lambda) = y_o$.

2) pour tout $\lambda$ de $\Omega$, $D_1 f(x_o,0,\lambda)$ est surjective. Alors il existe $\rho$ et $\eta$ réels strictement positifs et $\Omega''$ un ouvert de $F$ tels que $[-\eta,\eta] \subset I$ et $\Omega \subset \Omega'' \subset \Omega_1$ et $\xi$ une application définie sur $B_F(y_o,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ à valeurs dans $E$, de classe $C^{\mu-1}$, telle que pour tout $(y,t,\lambda)$ de $B_F(y_o,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ on ait :

$$f(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda) = y$$

et
$$\xi(y_o,0,\lambda) = x_o.$$

*Démonstration :*

D'après l'hypothèse 2) et la remarque de l'annexe I, il existe un ouvert $\Omega_2$ tel que $\Omega \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$ et une application $S$ de $\Omega_2$ dans $L(F,E)$ de classe $C^{\mu-1}$ tel que pour tout $\lambda$ de $\Omega_2$, $S(\lambda)$ soit une section de $D_1 f(x_o,0,\lambda)$. Prenons $\Omega'$ ouvert relativement compact de $G$ tel que $\Omega \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$, alors il existe $V$ voisinage de l'origine de $F$ tel que pour tout $y$ de $V$ et tout $\lambda$ de $\Omega'$ on ait

$x_o + S(\lambda)y$ appartient à $U$.

On pose $g$ l'application de $V \times I \times \Omega'$ dans $F$ telle que $g(y,t,\lambda) = f(x_o + S(\lambda)y,t,\lambda)$, $g$ est de classe $C^{\mu-1}$ et pour tout $\lambda$ de $\Omega'$ on a $g(0,0,\lambda) = f(x_o,0,\lambda) = y_o$ et $D_1 g(0,0,\lambda) = D_1 f(x_o,0,\lambda) o S(\lambda) = 1_F$. Ainsi $g$ vérifie les hypothèses de la proposition 1, il existe donc $\rho > 0$, $\eta > 0$, et $\Omega''$ ouvert de $G$ tel que $\Omega \subset \Omega'' \subset \Omega'$ et une application $\xi_1$ de $B_F(y_o,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ dans $\bar{B}_F(0,2\rho)$, donc une application $\xi : \xi(y,t,\lambda) = x_o + S(\lambda)\xi_1(y,t,\lambda)$ de classe $C^{\mu-1}$, telle que pour tout $(y,t,\lambda)$ de $B_F(y_o,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ :

$$g(\xi(y,t,\lambda),t,\lambda) = y$$

$$\xi(y_o,0,\lambda) = x_o$$

$$D_1\xi(y_o,0,\lambda) = S(\lambda).$$

*Démonstration du théorème 2.-*

a) Les fonctions $H_q$.

Si $q = \ell$ le résultat est donné par le théorème 1.

Dorénavant $q \geq \ell+1$.

On considère les fonctions $H_q$ définies sur $L_s^{q-1}(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^q(n,n) \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, telles que

. si $q = \ell+1$

$$H_q(v_{q-1},u_q,t,\lambda) = \frac{1}{t^{s+q-1}}\left[(1_F + v_{q-1}(t\lambda)^{q-1})f_{s+\ell-1}(t\lambda + u_q(t\lambda)^q) - f_{s+q-1}(t\lambda)\right]$$

. si $q \geq \ell+2$ , $H_q(v_{q-1},u_q,t,\lambda) = \frac{1}{t^{s+q-1}} \times$

$$\left[(1_F + \sum_{i=0}^{q-\ell-2} \overset{o}{v}_{\ell+i}(t\lambda)^{\ell+i} + v_{q-1}(t\lambda)^{q-1})f_{s+\ell-1}(t\lambda + \sum_{i=0}^{q-\ell-2} \overset{o}{u}_{\ell+i+1}(t\lambda)^{\ell+i+1} + u_q(t\lambda)^q) - f_{s+q-1}(t\lambda)\right]$$

où pour $0 \leqslant i \leqslant q-\ell-2$, $(v^o_{\ell+i}, u^o_{\ell+i+1})$ de $L^{\ell+i}_s(n,End(p)) \times L^{\ell+i+1}_s(n,n)$ sont définis de telle manière que $H_q$ puisse être prolongé par continuité ainsi que ses dérivées partielles au point $t = 0$. Nous allons montrer qu'un tel choix est possible, en effet le terme entre crochet dans l'expression de $H_q$ est un polynôme en $t$

- si $q = \ell+1$ les coefficients de $t^i$ sont nuls pour $0 \leqslant i \leqslant s+\ell-1$ et le problème est résolu.
- si $q \geqslant \ell+2$, dans le crochet, les coefficients de $t^{s+k}$ sont nuls pour $0 \leqslant k \leqslant \ell-1$. Celui de $t^{s+\ell}$ est

$$v^o_\ell(\lambda)^\ell f_s(\lambda) + Df_s(\lambda)u^o_{\ell+1}(\lambda)^{\ell+1} - \frac{1}{(s+\ell)!} D^{s+\ell}f(0)(\lambda)^{s+\ell}.$$

Ceci peut être rendu nul car $\phi_\ell$ est supposée surjective, on choisit $v^o_\ell$ et $u^o_{\ell+1}$ tels que $\phi_\ell(v^o_\ell, u^o_{\ell+1}) = \frac{1}{(s+\ell)!} D^{s+\ell}f(0)$.

On définit ainsi de proche en proche $(v^o_{\ell+k'}, u^o_{\ell+k'+1})$ : en effet, le coefficient de $t^{s+\ell+k'}$ pour $0 \leqslant k' \leqslant q-\ell-2$ a la forme suivante :

$$v^o_{\ell+k'}(\lambda)^{\ell+k'} f_s(\lambda) + Df_s(\lambda)u^o_{\ell+k'+1}(\lambda)^{\ell+k'+1} + \sum_{0 \leqslant k'' < k'} .(\lambda)^{s+\ell+k'}$$

$$- \frac{1}{(s+\ell+k')!} D^{s+\ell+k'}f(0)(\lambda)^{s+\ell+k'}$$

où $\sum\limits_{0 \leqslant k'' < k'}$ est une combinaison linéaire d'applications $s+\ell+k'$ linéaires par rapport à $\lambda$ dépendant de $(v^o_{\ell+k''}, u^o_{\ell+k''+1})$ avec $0 \leqslant k'' < k'$ précédemment définis. $\phi_{\ell+k'}$ étant surjectif, on peut choisir $(v^o_{\ell+k'}, u^o_{\ell+k'+1})$ de façon que

$$\phi(v^o_{\ell+k'}, u^o_{\ell+k'+1}) = - \sum_{0 \leqslant k'' < k'} + \frac{1}{(s+\ell+k')!} D^{s+\ell+k'}f(0) .$$

Ainsi tous les coefficients de $t^i$ sont nuls pour $0 \leqslant i \leqslant s+q-2$.

Montrons que $H_q$ vérifie les hypothèses de la proposition 6, avec $H_q$ de classe $C^\infty$, $y_o = 0$, $\Omega = \Sigma_n$, $\Omega_1 = \mathbb{R}^n$, la première variable étant $(v_{q-1}, u_q)$.

- Il existe $(v^o_{q-1}, u^o_q)$ tel que $H_q(v^o_{q-1}, u^o_q, 0, \lambda) = 0$, en effet :

$$H_q(v^o_{q-1}, u^o_q, 0, \lambda) = \phi_{s+q-1}(v^o_{q-1}, u^o_q)(\lambda)^{s+q-1} + \sum_{0 \leq k' < q-1} \cdot (\lambda)^{s+q-1}$$

$$- \frac{1}{(s+q-1)!} Df^{s+q-1} f(0)(\lambda)^{s+q-1}$$

où $\sum\limits_{0 \leq k' < q-1}$ est une combinaison linéaire d'application $(s+q-1)$ linéaires par rapport à $\lambda$, dépendant de $(v^o_{\ell+k'}, u^o_{\ell+k'+1})$ avec $0 \leq k' < q-1$ précédemment définis. $\phi_{s+q-1}$ étant surjectif, on choisit $(v^o_{q-1}, u^o_q)$ tel que $\phi_{s+q-1}(v^o_{q-1}, u^o_q) = - \sum\limits_{0 \leq k' < q-1} + \frac{1}{(s+q-1)!} D^{s+q-1} f(0)$.

- $D_1 H_q(v^o_{q-1}, u^o_q, 0, \lambda)$ est surjectif pour $\lambda \neq 0$, en effet :

$D_1 H_q(v^o_{q-1}, u^o_q, 0, \lambda)(V,U) = V(\lambda)^{q-1} f_s(\lambda) + Df_s(\lambda) U(\lambda)^q = \phi_{s+q-1}(V,U)(\lambda)^{s+q-1}$.

$\lambda \neq 0$ étant fixé, à tout $y$ de $\mathbb{R}^p$ on peut associer $C$ de $L_s^{s+q-1}(n,p)$ tel que $C(\lambda)^{s+q-1} = y$ et $C$ est l'image par $\phi_{s+q-1}$ surjectif, d'un couple $(V,U)$ de $L_s^{q-1}(n, \mathrm{End}(p)) \times L_s^q(n,n)$ solution de l'équation : $D_1 H_q(v^o_{q-1}, u^o_q, 0, \lambda)(V,U) = y$.

- il existe donc $\rho > 0$, $\eta > 0$ et $\Omega''$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\Sigma_n$ et des applications $(v_{q-1}, u_q)$ de $B_p(0,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ dans $L_s^{q-1}(n, \mathrm{End}(p)) \times L_s^q(n,n)$, de classe $C^\infty$ et vérifiant pour tout $(y,t,\lambda)$ de $B_p(0,\rho) \times ]-\eta,\eta[ \times \Omega''$ :

$$H_q(v_{q-1}(y,t,\lambda),u_q(y,t,\lambda),t,\lambda) = y$$
$$u_q(0,0,\lambda) = u_q^o$$
$$v_{q-1}(0,0,\lambda) = v_{q-1}^o .$$

<u>*Conséquence*</u> : $D_3 i\ u_q(0,0,\lambda) = 0$ et $D_3 i\ v_{q-1}(0,0,\lambda) = 0$ pour tout $i$ de $\mathbb{N}^*$.

b) <u>Construction de</u> $v$ <u>et de</u> $h$.

Soit $f$ une réalisation de $f_s$ dans $E^p_{s+q-1}$ dont le jet d'ordre $(s+\ell-1)$ est $f_{s+\ell-1}$. Nous allons montrer qu'il existe $v$ application d'un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ dans Aut $\mathbb{R}^p$, de classe $C^{q-1}$, $h$ difféomorphisme local à l'origine de $\mathbb{R}^n$, de classe $C^q$ tels que : $v(0) = 1_p$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_n$, et dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ : $f(x) = v(x) f_{s+\ell-1}(h(x))$.

Soit
$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f(x) - f_{s+q-1}(x)}{||x||^{s+q-1}} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ \varphi(0) = 0 . \end{cases}$$

$\varphi$ est de classe $C^o$ dans un voisinage $U$ de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et de classe $C^{s+q-1}$ sur $U - \{0\}$, (Chapitre I - lemmes 1 et 2). Il existe donc un autre voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ : $V$, $V \subset U$ tel que si $x \in V$ alors $||x|| < \eta$ et $\varphi(x) \in B_p(0,\rho)$. Soit alors $v$ l'application définie sur $V$ à valeurs dans End(p) telle que

$$\begin{cases} v(x) = 1_p + \sum\limits_{i=0}^{q-\ell-2} v^o_{\ell+i}(x)^{\ell+i} + v_{q-1}(\varphi(x), ||x|| \dfrac{x}{||x||})(x)^{q-1} & \text{pour } x \neq 0 \\ \\ v(0) = 1_p \end{cases}$$

où $\sum_{i=0}^{q-\ell-2} \overset{o}{v}_{\ell+i}(x)^{\ell+i} \equiv 0$ si $q = \ell+1$.

$v$ est de classe $C^{s+q-1}$ sur $V - \{0\}$ et de classe $C^o$ sur $V$. En effet, $v_{q-1}(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||}) - v_{q-1}(0,0, \frac{x}{||x||})$, pour $x \neq 0$, tend vers $0$ quand $x$ tend vers $0$ et $v_{q-1}(0,0, \frac{x}{||x||})$ est borné, donc $v(x)$ tend vers $1_p$ quand $x$ tend vers $0$. Quitte à restreindre $V$, on peut supposer $v(x)$ inversible pour tout $x$ de $V$.

Soit alors $h$ l'application de $V$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{cases} h(x) = x + \sum_{i=0}^{q-\ell-2} \overset{o}{u}_{\ell+i+1}(x)^{\ell+i+1} + u_q(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||})(x)^q & \text{pour } x \neq 0 \\ h(0) = 0. \end{cases}$$

$h$ est de classe $C^{s+q-1}$ sur $V - \{0\}$ et de classe $C^o$ sur $V$, ceci pour les raisons données pour la classe de $v$. On a bien pour tout $x$ de $V$ :

$$f(x) = v(x) f_{s+\ell-1}(h(x)).$$

c) <u>Différentiabilité de</u> $h$ <u>et de</u> $v$.

Il suffit de montrer, d'après la forme de $h$ et de $v$, que pour $1 \leqslant i \leqslant q$, $D^i(u_q(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||}).(x)^q)$,

et pour $2 \leqslant j \leqslant q$, $D^{j-1}(v_{q-1}(\psi(x), ||x||, \frac{x}{||x||})(x)^{q-1})$ ont une limite quand $x$ tend vers $0$.

On reprend les notations : si $x \neq 0$, $x = t\lambda$ avec $t = ||x||$ et $\lambda \in \Sigma_n$. Nous utiliserons les résultats suivants (chapitre I, lemmes 1 et 2)

- pour tout $j$ de $\mathbb{N}$, $t^{j-1}D^j t$ et $t^j D^j \lambda$ sont bornés
- pour $0 \leqslant j \leqslant s+q-1$, $t^j ||D^j \psi(x)|| = \varepsilon_j(x)$ avec $\varepsilon_j(x)$ qui tend vers $0$ quand $x$ tend vers $0$.

De plus pour $(\alpha,\beta,\gamma)$ de $\mathbb{N}^3$ : $D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma}(u_q(\psi(x)),t,\lambda) - u_q(0,0,\lambda))$ et $D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma}(v_{q-1}(\psi(x),t,\lambda) - v_{q-1}(0,0,\lambda))$ tendent vers 0 quand x tend vers 0, uniformément par rapport à $\lambda$ qui appartient au compact $\Sigma_n$, car les applications $u_q$ et $v_{q-1}$ de $B_p(0,\rho) \times ]\eta,\eta[ \times \Omega''$ dans $L_s^{q-1}(n,\mathrm{End}(p)) \times L_s^q(n,n)$ sont de classe $C^\infty$.

Alors $D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma} u_q(0,0,\lambda)$ et $D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma} v_{q-1}(0,0,\lambda)$ étant bornés, il s'en suit que $D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma} u_q(\psi(x),t,\lambda)$ et $D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma} v_{q-1}(\psi(x),t,\lambda)$ sont bornés pour x assez petit.

Calcul des différentielles premières :

$$\begin{aligned} D(u_q(\psi(x),t,\lambda)(x)^q). &= D_1 u_q(\psi(x),t,\lambda)D\psi(x).(x)^q \\ &+ D_2 u_q(\psi(x),t,\lambda)Dt.(x)^q \\ &+ D_3 u_q(\psi(x),t,\lambda)d\lambda.(x)^q \\ &+ q\, u_q(\psi(x),t,\lambda)(x)^{q-1} . \end{aligned}$$

Or $q \geq \ell+1 \geq 2$ et tous les termes tendent vers 0 quand x tend vers 0. On a donc $\lim\limits_{x\to 0} D(u_q(\psi(x),t,\lambda)(x)^q) = 0$. h est donc de classe $C^1$ sur $V$ avec $Dh(0) = 1_n$, en restreignant si besoin est $V$, h est un difféomorphisme sur $V$ de classe $C^1$.

Pour la différentielle première de $v_{q-1}$, on a la même écriture que pour $u_q$ en remplaçant u par v et q par (q-1) :

si ($\ell = 1$ et $q = 2$) alors $Dv(0) = v_1^o$ ;

si ($\ell = 1$ et $q > 2$) ou si ($\ell > 1$) alors $Dv(0) = 0$.

Calcul des différentielles d'ordre i, $1 \leq i \leq q$ de $u_q(\psi(x),t,\lambda)(x)^q$. Cette différentielle d'ordre i est une combinaison linéaire à coefficients constants de termes de la forme :

$$D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma} u_q(\psi(x),t,\lambda)\left[(D\psi(x))^{\alpha_1}\ldots(D^i\psi(x))^{\alpha_i}(Dt)^{\beta_1}\ldots(D^it)^{\beta_i}(D\lambda)^{\gamma_1}\ldots(D^i\lambda)^{\gamma_i}\right](x)^{q-\delta}$$

avec $\alpha = \sum_{p=1}^{i} \alpha_p$ , $\beta = \sum_{p=1}^{i} \beta_p$ , $\gamma = \sum_{p=1}^{i} \gamma_p$ , $i = \sum_{p=1}^{i} p(\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \delta$ .

Ce terme est majoré, à une constante multiplicative près, par

$$||D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma} u_q(\psi(x),t,\lambda)|| . \prod_{p=1}^{i} (\varepsilon_p(x))^{\alpha_p} . t^{-\sum_{p=1}^{i}(p\,\alpha_p + (p-1)\beta_p + p\,\gamma_p) + q - \delta}$$

soit par $||D_{1^\alpha 2^\beta 3^\gamma} u_q(\psi(x),t,\lambda)|| . \prod_{p=1}^{i} (\varepsilon_p(x))^{\alpha_p} . t^{q-i+\beta}$ donc

- si $1 \leqslant i < q$ , $D^i(u_q(\psi(x),t,\lambda)(x)^q)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

- si $i = q$ , les termes tels que $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ tendent vers 0,

si $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma \neq 0$ alors $D_{3^\gamma} u(\psi(x),t,\lambda)$ tend vers 0,

si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ alors $u_q(\psi(x),t,\lambda)$ tend vers $u_q^o$ et donc $D^q(u_q(\psi(x),t,\lambda)(x)^q)$ tend vers $q!u_q^o$ quand x tend vers 0, h est donc de classe $C^q$ sur $V$ avec

$D^ih(0) = i!u_i^o$ pour $\ell + 1 \leqslant i \leqslant q$

$D^ih(0) = 0$ si $\ell > 1$ et pour $2 \leqslant i < \ell+1$.

Pour les différentielles successives de $v_{q-1}$ , on remplace dans l'écriture précédente u par v et q par (q-1), v est donc de classe $C^{q-1}$ sur $V$ avec

$D^iv(0) = i!v_i^o$ pour $\ell \leqslant i \leqslant q-1$

$D^iv(0) = 0$ si $\ell > 1$ et pour $1 \leqslant i < \ell$.

*Remarques* :

1) si $p = 1$ et si $\bar{\phi}_\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}^*$) est surjectif, on obtient le

*Théorème II bis*.- Soit $f_s$ un jet homogène de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, tel que $\bar{\phi}_\ell$ est surjectif ($\ell \in \mathbb{N}^*$). Alors pour tout $q$ de $\mathbb{N}$ tel que $\ell \leqslant q < \infty$, $f_{s+\ell-1}$ est $C^q$-suffisant dans $E^p_{s+q-1}$.

*Démonstration* : On considère les fonctions $\bar{H}_q(u_q,t,\lambda) = H_q(0,u_q,t,\lambda)$ et on fait le même type de démonstration avec $v^o_{\ell+k} = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant q-\ell-1$, puis on pose $v(x) = 1_p$.

2) Soit $\bar{\bar{\phi}}_\ell$ la restriction de $\phi_\ell$ à $L^\ell_s(n,\mathrm{End}(p)) \times \{0\}$ si $\bar{\bar{\phi}}_\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}^*$) est surjectif, alors pour tout $q$ de $\mathbb{N}$ tel que $\ell \leqslant q < \infty$, $f_{s+\ell-1}$ relèvement d'ordre $s+\ell-1$ de $f_s$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact dans $E^p_{s+q-1}$ avec $h = 1_n$.
Ce cas particulier se présente lorsque $n < p$ et $f$ vérifie $\tilde{H}_s$, alors il existe $\ell$ tel que $\bar{\bar{\phi}}_\ell$ est surjectif. On a, en effet, si $n < p$, $J_p(f_s) = (f_s)$ (voir au III de ce chapitre - le cas $p > n$).
Si $n = 1$, $\bar{\bar{\phi}}_o$ est surjectif et donc $\bar{\bar{\phi}}_1$ est aussi surjectif (voir le théorème III).

3) Si $f_s$ vérifie $H_s$ (resp. $H'_s$) et si $f$ est une réalisation de $f_s$ dans $E^p_{s+\ell}$ telle que $D^{s+\ell}f(0) \in \mathrm{Im}\,\phi_\ell$ (resp. $D^{s+\ell}f(0) \in \mathrm{Im}\,\bar{\phi}_\ell$), $f_{s+\ell-1}$ étant le jet d'ordre $s+\ell-1$ de $f$ ($\ell \in \mathbb{N}^*$) alors il existe $h$ germe en $0$ de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{\ell+1}$ et $v$ germe en $0$ d'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^p$ de classe $C^\ell$ (resp. $v(x) = 1_p$) tels que $v(0) = 1_p$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_n$ et pour tout $x$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x) = v(x) f_{s+\ell-1}(h(x)).$$

Par le théorème I (resp. I bis), on aurait seulement $h$ de classe $C^\ell$ et $v$ de classe $C^{\ell-1}$.

4) Plus généralement, soit $f_s$ un jet homogène vérifiant $H_s$ (resp. $(H'_s)$) et $f_{s+\ell}$ un relèvement de $f_s$ d'ordre $s+\ell$ $(\ell \in \mathbb{N}^*)$. Alors tout germe $f$ de $E^p_{s+\ell}$ réalisation de $f_{s+\ell}$ est tel que pour toute projection $(1-\chi)$ de $L_s^{s+\ell}(n,p)$ dans $\mathrm{Im}\,\phi_\ell$, il existe $h$ de classe $C^{\ell+1}$, $v$ de classe $C^\ell$, (resp. $v(x) = 1_p$) avec $v(0) = 1_p$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_n$ et dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x) = v(x)\left[f_{s+\ell-1}(h(x)) + \chi \frac{1}{(s+\ell)!} D^{s+\ell} f(0)(h(x))^{s+\ell}\right].$$

*Démonstration* : On considère $H^i_{\ell+1}(v_\ell, u_{\ell+1}, t, \lambda) =$

$$\frac{1}{t^{s+\ell}}\left[(1_p + t^\ell v_\ell(t\lambda)^\ell) f_{s+\ell-1}(t\lambda + u_{\ell+1}(t\lambda)^{\ell+1}) + \chi \frac{1}{(s+\ell)!} D^{s+\ell} f(0)(t\lambda + u_{\ell+1}(t\lambda)^{\ell+1}) - f_{s+\ell}(t\lambda)\right].$$

Dans le crochet, on a un polynôme en $t$. Les termes de degré $0, 1, \ldots, s+\ell-1$ sont nuls. On peut donc poser

$$H^1_{\ell+1}(v_\ell, u_{\ell+1}, 0, \lambda) = v_\ell(\lambda)^\ell f_s(\lambda) + Df_s(\lambda)\, u_{\ell+1}(\lambda)^{\ell+1} - (1-\chi)\frac{1}{(s+\ell)!} D^{s+\ell} f(0)(\lambda)^{s+\ell}.$$



Or, il existe $v^o_\ell$ et $u^o_{\ell+1}$ tel que pour tout $\lambda$ de $E$, on ait :

$H'_{\ell+1}(v^o_\ell, u^o_{\ell+1}, 0, \lambda) = 0$ car $(1-\chi) D^{s+\ell} f(0) \in \mathrm{Im}\,\phi_\ell$.

Le reste de la démonstration est le même que dans le théorème II.

## *V - Le théorème III.*

*Théorème* 3.- Si $f_s$ est tel que $\phi_o$ (resp. $\bar{\phi}_o$) est surjectif alors pour tout $q$ tel que $1 \leq q \leq \infty$, $f_s$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. $C^q$-suffisant) dans $E^p_{s+q-1}$.

*Démonstration* : Si $\phi_o$ est surjectif alors $\phi_1$ est surjectif (proposition 2) et le théorème 3 est démontré pour $1 \leq q < \infty$ (théorème 2). Il s'agit donc de démontrer ce théorème seulement pour $q = \infty$, en fait nous allons montrer que si $\phi_o$ est surjectif, $f_s$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact de MAGNUS dans $E^p_{s+q}$ avec $1 \leq q \leq \infty$.

En effet, si nous considérons l'application $\Psi$ de $\mathrm{End}(p)\times \mathrm{End}(n)$ dans $L^s_s(n,p)$ définie par $\Psi(v,u) = v.f_s.u$ , $\Psi$ est de classe $C^\infty$ et a pour différentielle $\phi_o$ en $1_p \times 1_n$ car $\phi_o(V,U)(x)^s = V.f_s(x)+Df_s(x)U(x)$. Si $\phi_o$ est surjectif, $\Psi$ est une submersion en $1_p \times 1_n$. Il existe donc un voisinage $W$ de $f_s$ dans $L^s_s(n,p)$ et $\Theta$ une application de $W$ dans $\mathrm{End}(p) \times \mathrm{End}(n)$ de classe $C^\infty$ telle que $\Psi \circ \Theta = 1_{L^s_s(n,p)}$ et $\Theta(f_s) = (1_p,1_n)$ (cf. Annexe II - VII - 1.b).

Soit $f$ une réalisation de $f_s$ dans $E^p_{s+q}$. Il existe un voisinage $V$ de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que, dans ce voisinage, $f(x) = \bar{f}(x)(x)^s$ où $\bar{f}(x) \in L^s_s(n,p)$ et $\bar{f}(0)(x)^s = f_s(x)$ (formule de Taylor avec reste intégral) et l'application $\bar{f}$ définie sur $V$ est de classe $C^q$. En restreignant si besoin est, $V$ pour que $\mathrm{Im}\,\bar{f} \subset W$, $\Theta \circ \bar{f}$ est de classe $C^q$ et vérifie pour tout $x$ de $V$ : $\Theta \circ \bar{f}(x) = (v_x,u_x)$ avec $v_o = 1_p$, $u_o = 1_n$ et pour tout $y$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$v_x f_s(u_x(y)) = \bar{f}(x)(y)^s.$$

On définit $v$ le germe en $0$ d'application de classe $C^q$ de $V$ dans $\mathrm{End}(p)$ tel que $v(x) = v_x$ et $h$ le germe en $0$ d'application de classe $C^q$ de $V$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $h(x) = u_x(x)$. On restreint une nouvelle fois $V$ de façon que pour tout $x$ de $V$, $v_x$ appartienne à $\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^p$ et que $h$ soit un difféomorphisme de $V$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, $q \geq 1$ et $Dh(0) = 1_n$ car $h(0) = u_o(0) = 0$, $h(x)-h(0) = u_x(x)-u_o(x)+u_o(x)$ et donc $||h(x)-x|| \leq \varepsilon(x)||x||$ où $\varepsilon(x) = ||u_x-u_o||$, $\varepsilon(x)$ tend vers $0$ avec $x$.

On a donc pour tout $x$ de $V$ :

$$f(x) = v(x)(f_s(h(x)) \,. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

On fait le même type de démonstration si $\bar{\phi}_o$ est surjectif.

## VI - *Application des théorèmes II et III aux espaces de Banach.*

Par le procédé de Liapounov-Schmitt (voir Annexe II - VII et [2]), on sait associer à un germe $f$ en $0$ d'application de classe $C^\mu$ de $E$ dans $F$, espaces de Banach, tel que $2 \leqslant \mu \leqslant \infty$, $f(0) = 0$ et $Df(0)$ est un opérateur de Fredholm, un germe $u$ en $0$ d'application de classe $C^\mu$ de $\operatorname{Ker} Df(0)$ dans $\operatorname{Coker} Df(0)$, espaces de dimension finie, tel que $u(0) = 0$ et $Du(0) = 0$.

On pose $W = f^{-1}(0)$ et $W' = u^{-1}(0)$. Il existe alors un germe en $0$ de difféomorphisme de $E$ dans $\operatorname{Im} Df(0) \times \operatorname{Ker} Df(0)$, de classe $C^\mu$, qui échange localement $W$ en $\{0\} \times W'$.

On note $u_\ell$ le jet d'ordre $\ell$ de $u$ $(1 \leqslant \ell \leqslant \mu)$ et $W_\ell = u_\ell^{-1}(0)$. Si $f$ vérifie $(H_r)$ (ce qui est équivalent à $u$ vérifie $(H_r)$) avec $1 < r \leqslant \mu$, on a montré (chapitre I, proposition 4) qu'il existe un germe en $0$ de difféomorphisme de $E$ dans $\operatorname{Im} Df(0) \times \operatorname{Ker} Df(0)$ de classe $C^q$ qui transforme localement $W$ en $\{0\} \times W_k$, $W_k$ est le germe en $0$ des zéros de la variété algébrique d'équation $u_k(y) = 0$ $(k = k_u(q) = r-1+q(r-s_u+1),\ k \leqslant \mu)$.

On peut améliorer ces résultats, par exemple dans le cas où $f$ vérifie $(H_2)$, $u_2$ est alors un jet homogène vérifiant $H_2$ et on peut alors parfois appliquer à $u$ les résultats du théorème 2 ou du théorème 3. Plus généralement, on a les propositions suivantes :

*Proposition 7.*- Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $f$ un germe en $0$ d'application de $E$ dans $F$, de classe $C^\mu$, $2 \leqslant \mu \leqslant \infty$, tel que $f(0) = 0$, $Df(0)$ est un opérateur de Fredholm et $f$ vérifie

$H_s$ avec $s$ entier, $2 \leqslant s \leqslant \mu$. Si $u_s$ (jet d'ordre $s$ de $u$, $u$ déduit de $f$ par le procédé de L.S.) est un jet homogène et s'il existe $\ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant \mu-s$ tel que $D^{s+\ell}u(0) \in \operatorname{Im} \phi_\ell$ ($\phi_\ell$ relatif à $u_s$), alors il existe un difféomorphisme local $h$ de classe $C^{\ell+1}$ de $E$ dans $\operatorname{Im} Df(0) \times \operatorname{Ker} Df(0)$, $h(0) = (0,0)$ qui transforme localement $W$ en $\{0\} \times W_{s+\ell-1}$.

Par la proposition 4 du chapitre I, $h$ était seulement de classe $C^\ell$.

*Exemple* : Si $\mu \geqslant 3$ et $f$ vérifie $(H_2)$ :

- si $D^3u(0) \in \operatorname{Im} \phi_1$ alors il existe $h$ de classe $C^2$ qui transforme localement $W$ en $\{0\} \times W_2$ et $W_2 = K$ : cône tangent en $0$ à la surface de niveau $W$ (voir [2]),
- si $D^3u(0) \notin \operatorname{Im} \phi_1$, dans certains cas (voir chap. III - c) il n'existe pas de $h$ de classe $C^2$ qui transforme $W$ en $\{0\} \times K$, mais $h$ de classe $C^1$ existe.

*Proposition* 8.- Soit $f$ défini à la proposition 6. Si $u_s$ $(2 \leqslant s \leqslant \mu)$ est un jet homogène vérifiant $\tilde{H}_s$, alors il existe $\ell$ tel que $\phi_\ell$ (associé à $u_s$) soit surjectif. Si $1 \leqslant \ell \leqslant \mu-s+1$, pour tout $q$ de $\mathbb{N}$ tel que $\ell \leqslant q \leqslant \mu-s+1$, il existe un difféomorphisme local $h$ de classe $C^q$ de $E$ dans $\operatorname{Im} Df(0) \times \operatorname{Ker} Df(0)$, $h(0) = (0,0)$ qui transforme localement $W$ en $\{0\} \times W_{s+\ell-1}$.

Si $\phi_o$ est surjectif et si $\mu = \infty$ alors il existe aussi un difféomorphisme local $h$ de classe $C^\infty$ qui transforme localement $W$ en $\{0\} \times W_s$.

*Exemples* : On montrera au chapitre III - a, b, que si $u_2$ vérifie $H_2$ alors

- $\phi_1$ est surjectif pour Dim Coker Df(O) = 2 et Dim Im Df(O) $\geqslant 4$ et alors pour tout $q$ fini tel que $1 \leqslant q \leqslant \mu-1$, il existe $h$ de classe $C^q$ qui transforme localement $W$ en $\{0\} \times K$ ;

- $\phi_o$ est surjectif pour Dim Coker Df(O) = 1 (u vérifiant seulement $H_2$) ou pour Dim Coker Df(O) = 2 et Dim Ker Df(O) = 2 ou 3, alors si $\mu = \infty$, $h$ de classe $C^\infty$ transforme localement $W$ en $\{0\} \times K$.

# CHAPITRE III

Dans la première partie A de ce chapitre, nous donnons des exemples où $p = 1$ et où $f_s$ vérifie $\tilde{H}'_s$.

Dans la deuxième partie B, nous étudions le cas où $s = 2$, $p = 2$, $n$ est quelconque et $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$.

Dans la troisième partie C nous étudions le cas où $s = 2$, $p = 2$, $n = 4$, $f_2$ vérifie $H_2$ mais ne vérifie pas $\tilde{H}_2$. Nous donnons la forme de tels jets et montrons que pour certains d'entre eux il n'existe pas de difféomorphisme local de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même, de classe $C^2$ tel que $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_4$ et qui transforme localement la surface de niveau de $f_2$ en la surface de niveau de l'une de ses réalisations dans $E_3^2$.

Rappel des propositions équivalentes (Proposition 3 - Ch. II)

- si $f_s$ vérifie $\tilde{H}_s$ (resp. $\tilde{H}'_s$) ;
- il existe $\ell$ de $\mathbb{N}$ tel que $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) est surjectif ;
- il existe $\alpha$ de $\mathbb{N}$ tel que $m^\alpha \subset J_p(f_s)$ (resp. $m^\alpha \subset H_1(f_s)$).

Nous remarquons d'abord que si $f_s$ vérifie $\tilde{H}_s$ (resp. $\tilde{H}'_s$) alors $f_s$ vérifie $H_s$ (resp. $H'_s$).

De plus, $f_s$ vérifie $\tilde{H}_s$ (resp. $\tilde{H}'_s$) si et seulement si il existe $\ell$ tel que $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) est surjectif ce qui impose des conditions de dimension (voir Ch. I, Remarque 3) :

si $p = 1$, pour que $\bar{\phi}_\ell$ soit surjectif, il est nécessaire d'avoir :

$$\dim L_s^{s+\ell}(n,1) \leq \dim L_s^{\ell+1}(n,n)$$

$$\text{soit} \quad C_{n+s+\ell-1}^{s+\ell} \leq n\, C_{n+\ell}^{\ell+1}$$

si $p > 1$, <u>pour que</u> $\phi_\ell$ <u>soit surjectif, il est nécessaire d'avoir</u> :

$$\dim L_s^{s+\ell}(n,p) \leq \dim L_s^{\ell}(n,\mathrm{End}(p)) + \dim L_s^{\ell+1}(n,n)$$

$$\text{soit} \quad p \times C_{n+s+\ -1}^{\ell+s} \leq p^2 \times C_{n+\ell-1}^{\ell} + n\, C_{n+\ell}^{\ell+1}.$$

A) *Exemples de jets homogènes* $f_s$ *à valeurs réelles vérifiant* $\tilde{H}'_s$.

Nous considérons d'abord tous les jets homogènes de degré 2 définis sur $\mathbb{R}^n$, puis les jets homogènes de degré 3 et 4 définis sur $\mathbb{R}^2$. S'ils vérifient $\tilde{H}'_s$ alors $\bar{\phi}_o$ ou $\bar{\phi}_1$ est surjectif. Dans les deux derniers exemples de jets d'ordre $s$, le plus petit $\ell$ tel que $\bar{\phi}_\ell$ est surjectif est fonction croissante de $s$ et de $n$. Nous rappelons que $\bar{\phi}_\ell$ est surjectif si et seulement si $m^{s+\ell} \subset H_1(f_s)$ (Ch. II, proposition 4). Par application des théorèmes 2 et 3, nous obtenons :

1) <u>$s = 2$, $n$ est quelconque</u>.

$f_2$ vérifie $H'_2$ si et seulement si $f_2$ est associé à une forme quadratique non dégénérée. On a alors $m \subset H_1(f_2)$ et $\bar{\phi}_o$ est donc surjectif.

*Lemme de MORSE.*

<u>Si $f_2$ est un jet homogène associé à une forme quadratique non dégénérée alors $f_2$ est $C^q$-suffisant dans $E_{q+1}$ pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$ et $q = \infty$</u> .

KUIPER [9] a déjà montré ce résultat ; le lemme de MORSE classique montre seulement que $f_2$ est $C^q$-suffisant dans $E_{q+2}$ pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$ et $q = \infty$.

2) <u>$s = 3$, $n = 2$</u>.

Si $f_3$ vérifie $H'_3$ nous montrerons que $m^3 \subset H_1(f_3)$ et $\bar{\phi}_o$ est donc surjectif.

*Proposition 1.*- Tout jet homogène de degré 3 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ v-suffisant dans $E_3$ est $C^q$-suffisant dans $E_{q+2}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et $q = \infty$.

Pour $s = 3$, $n = 3$.

*Conjecture* : si $f_3$ vérifie $H_3'$ alors $m^4 \subset H_1(f_3)$ et donc $\bar{\phi}_1$ est surjectif. Si cela est vrai, tout jet homogène de degré 3 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ v-suffisant dans $E_3$ est $C^q$-suffisant dans $E_{q+2}$ pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$. Nous avons un plan de démonstration et il semble que cette conjecture soit vraie. Les calculs se font bien dans les cas particuliers, ils sont lourds dans le cas général.

3) $s = 4$, $n = 2$.

Si $f_4$ vérifie $\tilde{H}_4'$, on a $m^5 \subset H_1(f_4)$ $\bar{\phi}_1$ est donc surjectif.

*Proposition 2.*- Tout jet homogène de degré 4 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\tilde{H}_4'$ est $C^q$-suffisant dans $E_{q+3}$ pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$.

Il existe des jets $f_4$ vérifiant $H_4'$ mais ne vérifiant pas $\tilde{H}_4'$ : ils sont tels que l'équation $f_4(x) = 0$ a deux racines doubles imaginaires conjuguées dans $P(1,\mathbb{C})$ (droite projective complexe). Ils se ramènent donc, après changement de base dans $\mathbb{R}^2$, à la forme : $f_4(x) = (x_1^2 + x_2^2)^2$ où $x = (x_1, x_2)$.

4) $s \geq 4$, $n = 2$.

Les jets de la forme : $f_s(x) = x_1^s + x_2^s$ vérifient $m^{2s-3} \subset H_1(f_s)$ et $(s-3)$ est la plus petite valeur de $\ell$ tel que $\bar{\phi}_\ell$ soit surjectif. Il s'en suit que $f_{2s-4}$ relèvement d'ordre $(2s-4)$ de $f_s$ est $C^q$-suffisant dans $E_{s+q-1}$ pour tout $q$ de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à $(s-3)$.

5) $s \geq 3, \quad n \geq 3$.

Les jets de la forme : $f_s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s$ vérifient $m^{n(s-2)+1} \subset H_1(f_s)$ et $n(s-2)-s+1$ est la plus petite valeur $\ell$ tel que $\bar{\phi}_\ell$ soit surjectif. Il s'en suit que $f_{n(s-2)}$ relèvement d'ordre $n(s-2)$ de $f_s$ est $C^q$-suffisant dans $E_{s+q-1}$ pour tout $q$ de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à $n(s-2)-s+1$.

*Démonstrations* : On va souvent utiliser une base de $\mathbb{C}^n$ telle que, dans cette base, l'écriture de $\widetilde{f_s}(x)$ soit simplifiée . On rappelle aussi que $\bar{\phi}_\ell$ est surjectif si et seulement si $\tilde{\bar{\phi}}_\ell$ est surjectif (on oubliera le $\sim$).

1) $s = 2$, $n$ est quelconque.

Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ telle que dans cette base, $f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$. $f_2$ vérifie $H_2'$ si et seulement si pour tout $i$, $a_i \neq 0$ (voir Ch. I, V). Alors les polynômes $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ engendrent $H_1(f_2)$ et donc $m \subset H_1(f_2)$ (formule de Taylor avec reste intégral).

2) $s = 3, \quad n = 2$.

$f_3(x) = \alpha x_1^3 + \beta x_1^2 x_2 + \gamma x_1 x_2^2 + \delta x_2^3$ . Si $f_3$ vérifie $H_3'$ , le polynôme homogène $f_3$ n'a pas de racine double dans $P(1,\mathbb{R})$ donc dans $P(1,\mathbb{C})$ : si $f_3$ vérifie $H_3'$ alors $f_3$ vérifie $(\tilde{H}_3')$. On peut alors choisir deux points distincts de $P(1,\mathbb{C})$ réels ou imaginaires conjugués qui annulent $f_3$. Dans la base formée des représentants dans $\mathbb{C}^2$ de ces deux points, $f_3$ à la forme : $f_3(x) = a x_1^2 x_2 + b x_1 x_2^2$ avec $a \times b \neq 0$ car $f_3$ vérifie $H_3'$. En changeant la longueur d'un vecteur de la base, on peut ramener $f_3$ à la forme suivante : $f_3(x) = 3(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)$. Soit $A = \frac{1}{3!} D^3 f_3(0)$. $\bar{\phi}_o$ est surjectif si à toute forme trilinéaire symétrique $B$ caractérisée par $B(e_i,e_i,e_j) = b_{iij}$ où $i,j \in \{1,2\}$ on peut associer $u$ de $End(2)$

caractérisé par $ue_i = u_i^1 e_1 + u_i^2 e_2$ où $i \in \{1,2\}$, tel que pour $i$ et $j$ de $\{1,2\}$ on ait :

$$B(e_i,e_i,e_j) = 2A(e_i,e_j,u(e_i)) + A(e_i,e_i,u(e_j))$$

c'est-à-dire :
$$b_{111} = 3u_1^2$$
$$b_{222} = 3u_2^1$$
$$b_{112} = 2u_1^2 + 2u_1^1 + u_2^2$$
$$b_{122} = 2u_2^1 + 2u_2^2 + u_1^1 \, .$$

Ce système ayant des solutions en $u_i^j$, $\bar{\phi}_o$ est surjectif.

3) <u>$s = 4$, $n = 2$.</u>

$f_4$ vérifie $\tilde{H}_4'$ : $f_4$ n'a pas de racine multiple dans $P(1,\mathbb{C})$. Comme précédemment on choisit une base de $\mathbb{C}^2$ telle que dans cette base $f_4$ a la forme : $f_4(x) = ax_1^3x_2 + bx_1^2x_2^2 + cx_1x_2^3$ avec $a \times b \neq 0$ et $b^2 - 4ac \neq 0$ car $f_4$ vérifie $\tilde{H}_4'$. En changeant la longueur d'un vecteur de base on se ramène au cas où $a = c$. Soit $d$ une racine quatrième de $b+2a$ et d'une racine quatrième de $b-2a$, on a $d \neq 0$ et $d' \neq 0$ car $b^2-4a^2 \neq 0$. On considère alors le changement de base défini par le changement de coordonnées :

$$x_1 = \frac{1}{d}\, x_1' + \frac{1}{d'}\, x_2'$$
$$x_2 = \frac{1}{d}\, x_1' - \frac{1}{d'}\, x_2' \, .$$

$f_4$ se ramène alors à la forme $f_4(x) = x_1^4 + 6\alpha x_1^2x_2^2 + x_2^4$ avec $\alpha^2 \neq \frac{1}{9}$. Pour des raisons de dimension énoncées au début du chapitre on ne peut pas avoir $\bar{\phi}_o$ surjectif. $\bar{\phi}_1$ est surjectif si pour tout $C$ de $L_s^4(2,1)$ on peut associer $u$ de $L_s^2(2,2)$ défini par $u(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{2} u_{ij}^k e_k$ $i,j \in \{1,2\}$ tels que si $A = \frac{1}{4!} D^4 f_4(0)$ on ait pour $i,j$ de $\{1,2\}$

$$C(e_i^5) = 4A(e_i^3, u(e_i, e_i))$$

$$C(e_i^4, e_j) = \frac{4}{10}\left[4A(e_i^3, u(e_i, e_j)) + 6A(e_i^2, e_j, u(e_i)^2)\right]$$

$$C(e_i^3, e_j^2) = \frac{4}{10}\left[A(e_i^3, u(e_j)^2) + 3A\,(e_i, e_j^2, u(e_i)^2) + 6A\,(e_i^2, e_j, u(e_i, e_j))\right].$$

Les coefficients $u_{ij}^k$ sont solutions d'un système linéaire dont la matrice des coefficients est la suivante :

$$\begin{array}{cccccc} u_{11}^1 & u_{22}^2 & u_{12}^1 & u_{12}^2 & u_{11}^2 & u_{22}^1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3\alpha & 0 \\ 3\alpha & 0 & 0 & 6\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 3\alpha & 6\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice vaut $(-4) \times (9\alpha^2-1)^2$ et donc le système a des solutions puisque $\alpha^2 \neq \frac{1}{9}$.

4) <u>$s = 2,\ n \geq 4$.</u>

$f_s(x) = x_1^s + x_2^s$. On a $D_i f_s(x) = s\ x_i^{s-1}$ pour $i = 1,2$. L'ensemble des polynômes homogènes de degré $2(s-1)+1$ est donc contenu dans $H_1(f_s)$ ; en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral il s'en suit que $m^{2s-3} \subset H_1(f_s)$.

La condition de dimension pour que $\bar{\phi}_\ell$ soit surjectif s'écrit (voir début du chapitre) : $C_{n+s+\ell-1}^{s+\ell} \leq n\ C_{n+\ell}^{\ell+1}$ c'est-à-dire si

$n = 2$ $\qquad s+\ell+1 \leq 2(\ell+2)$

soit $\qquad s-3 \leq \ell$

$(s-3)$ est donc bien le plus petit $\ell$ tel que $\bar{\phi}_\ell$ soit surjectif.

5) $n \geq 3,\ s \geq 3.$

$f_s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s$. On a $D_i f_s(x) = s\, x_i^{s-1}$ donc l'ensemble des polynômes homogènes de degré $n(s-2)+1$ est contenu dans $H_1(f_s)$ et on a $m^{n(s-2)+1} \subset H_1(f_s)$. Comme le polynôme homogène $\prod_{i=1}^{n} x_i^{s-2}$ n'appartient pas à $H_1(f_s)$ on n'a pas $m^{n(s-2)} \subset H_1(f_s)$ et donc le plus petit $\ell$ tel que $\bar{\phi}_\ell$ soit surjectif est $n(s-2)-s+1$.

B) *Jets homogènes* $f_2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant* $\tilde{H}_2$.

Nous allons montrer que si $f_2$ vérifie $(\tilde{H}_2)$ alors $\phi_o$ est surjectif pour $n = 2$ et $3$ et $\phi_1$ est surjectif pour $n \geq 2$.

Le plus petit $\alpha$ tel que $m^\alpha \subset J_2(f_2)$ est $\alpha = 2$ pour $n = 2$ et $\alpha = 3$ pour $n \geq 3$. Par application des théorèmes 2 et 3, on obtient :

*Proposition* 3.- Si $f_2$ vérifie $(\tilde{H}_2)$, alors $f_2$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact dans $E^2_{q+1}$ pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$. De plus si $n = 2$ ou $3$. $f_2$ est aussi suffisant pour la $C^\infty$-équivalence de contact dans $E^2$.

Nous montrons d'abord (1)) que si $f_2$ vérifie $(\tilde{H}_2)$, une base de $\mathbb{R}^2$ étant fixée, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ telle que dans cette base, $f_2$ s'écrit : $f_2(x) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 , \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2)$ autrement dit les 2 formes bilinéaires symétriques associées à $f_2$ sont, dans cette base, diagonales. Réciproquement (2)) une base de $\mathbb{C}^n$ étant fixée ainsi qu'une base de $\mathbb{R}^2$, si par rapport à ces bases $f_2$ a la forme :

$f_2(x) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 , \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2)$ nous cherchons les conditions remplies par les $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{i=1}^n$ pour que $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$.

1) *Diagonalisation simultanée de* $f_2$ *sous l'hypothèse* $\tilde{H}_2$.

*Notations* : La base de $\mathbb{R}^2$ est fixée, on a $f_2 = (f_2^1, f_2^2)$. On note $K = \{x | x \in \mathbb{R}^n,\ f_2(x) = 0\}$, $\tilde{K} = \{x | x \in \mathbb{C}^n,\ \tilde{f}_2(x) = 0\}$. $X$ est l'élément de $P(n-1,\mathbb{R})$ (resp. $P(n-1,\mathbb{C})$) de représentant $x$ dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). $Q_1$ et $Q_2$ (resp. $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$) sont les quadriques de $P(n-1,\mathbb{R})$ (resp. $P(n-1,\mathbb{C})$) telles que pour $i = 1,2$, $X \in Q_i$ (resp. $X \in \tilde{Q}_i$) si et seulement si $f_2^i(x) = 0$ (resp. $\tilde{f}_2^i(x) = 0$).

$f_2$ vérifie $H_2$ (resp. $\tilde{H}_2$) si et seulement si $Q_1$ et $Q_2$ (resp. $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$) n'ont pas de point de contact dans $P(n-1,\mathbb{R})$ (resp. $P(n-1,\mathbb{C})$). S'il existe un repère $\{E_i\}_{i=1}^n$ de $P(n-1,\mathbb{C})$ tel que les points du repère soient conjugués 2 à 2 par rapport aux deux quadriques $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$, alors, dans la base constituée des représentants $e_i$ des $E_i$, où $1 \leq i \leq n$, les formes bilinéaires associées à $\tilde{f}_2$ sont simultanément diagonales. On va donc chercher un tel repère dans $P(n-1,\mathbb{C})$.

a) <u>Si $n = 2$</u>. $\tilde{Q}_1$ (resp. $\tilde{Q}_2$) est formé de l'ensemble de deux points éventuellement confondus.

Si $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$ alors $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2 = \phi$ et on peut trouver dans $P(1,\mathbb{C})$ deux points conjugués par rapport à $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$.

Si $f_2$ vérifie $H_2$ et pas $\tilde{H}_2$ alors $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2 = \{X,\bar{X}\}$ avec $X \neq \bar{X}$. En changeant éventuellement de base de $\mathbb{R}^n$, $f_2$ s'écrit :
$f_2(x) = (\lambda_1(x_1^2 + x_2^2), \mu_1(x_1^2 + x_2^2))$ avec $(\lambda_1,\mu_1) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
On a alors $K = \{0\}$.

b) <u>Si $n = 3$</u>. Si $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$ les coniques $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ se coupent en 4 points distincts et elles ont un triangle autopolaire commun.

Si $f_2$ vérifie $H_2$ et pas $\tilde{H}_2$ les coniques $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ sont bitangentes en deux points de contact imaginaires conjugués et il existe une infinité de triangles autopolaires communs aux deux coniques. On a encore $K = \{0\}$.

c) <u>si $n \geq 4$.</u> Si $f_2$ vérifie $H_2$ et si $Q_1$ n'est pas une conique propre, $X_1$ point singulier de $Q_1$, de représentant $x_1$, n'appartient pas à $Q_2$, sinon $f_2(x_1) = 0$ et $Df_2(x_1)$ n'est pas surjectif. Alors l'hyperplan polaire $\pi$ (resp. $\tilde{\pi}$) de $X_1$ par rapport à $Q_2$ (resp. $\tilde{Q}_2$) coupe $Q_1$ et $Q_2$ (resp. $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$) suivant $q_1$ et $q_2$ (resp. $\tilde{q}_1$ et $\tilde{q}_2$) et si $f_2$ vérifie $H_2$ (resp. $\tilde{H}_2$) $q_1$ et $q_2$ (resp. $\tilde{q}_1$ et $\tilde{q}_2$) n'ont pas de point de contact dans $\pi$ (resp. $\tilde{\pi}$) sinon en ce point $Q_1$ et $Q_2$ (resp. $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$) auraient même plan tangent contenant $X_1$. De plus, s'il se trouve dans $\tilde{\pi}$ un repère dont les points sont conjugués deux à deux par rapport à $\tilde{q}_1$ et $\tilde{q}_2$, alors la base formée de la réunion de leurs représentants dans $\mathbb{C}^n$ et de $x_1$ est solution du problème. Ainsi si $f_2$ vérifie $H_2$ (resp. $\tilde{H}_2$) et si l'une des quadriques a des points singuliers, on se ramène à l'aide d'une récurrence sur $n$ soit au cas où $n = 3$ (et le problème est résolu), soit au cas où $Q_1$ et $Q_2$ sont des quadriques propres.

Si $Q_1$ et $Q_2$ sont des quadriques propres, alors il existe un vecteur non nul $e_1$ de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda$ de $\mathbb{C}^*$ tels que $Df_2^1(e_1) = \lambda Df_2^2(e_1)$ car les matrices symétriques réelles associées à $f_2^1$ et $f_2^2$ sont régulières. Le point $E_1$ a même plan polaire $\tilde{\pi}$ par rapport à $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ et $E_1$ n'appartient pas à $\tilde{\pi}$. On note $\tilde{q}_1 = \tilde{\pi} \cap \tilde{Q}_1$, $\tilde{q}_2 = \tilde{\pi} \cap \tilde{Q}_2$, $\tilde{q}_1$ et $\tilde{q}_2$ sont des quadriques propres et si $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$, elles n'ont pas de point de contact dans $\tilde{\pi}$. Ainsi si $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$ , on fait une nouvelle récurrence sur $n$ pour se ramener au cas où $n = 3$.

On a ainsi montré que si $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$ une base de $\mathbb{R}^2$ étant fixée, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ : $\{e_i\}_{i=1}^n$ telle que dans cette base, $f_2$ s'écrit :

$$f_2(x) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \ , \ \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2).$$

2) *Réciproquement, étant donné une base de* $\mathbb{R}^2$ *et une base de* $\mathbb{C}^n$ : $\{e_i\}_{i=1}^n$ , *on suppose que par rapport à ces bases* $f_2$ *s'écrit* : $f_2(x) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \ , \ \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2)$.

a) <u>si</u> $f_2$ <u>vérifie</u> $H_2$ <u>alors pour tout</u> $i$, $1 \leq i \leq n$, <u>on a</u> $(\lambda_i, \mu_i) \neq (0,0)$.

En effet, supposons que $\lambda_1 = \mu_1 = 0$, alors $E_1 + \bar{E}_1$ de $P(n-1,\mathbb{R})$ est un point singulier de $Q_1$ et de $Q_2$ ce qui est impossible.

b) Si on pose $D_{ij} = \lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i = \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix}$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

$f_2$ <u>vérifie</u> $\tilde{H}_2$ <u>si et seulement si</u> $D_{ij} \neq 0$ <u>pour</u> $i \neq j$.

En effet, si tous les $D_{ij}$ sont non nuls pour $i \neq j$, tout point $x$ de $\tilde{K} - \{0\}$ a au moins deux coordonnées non nulles, il est tel que $Df_2(x)$ est surjectif. Par contre, si $D_{12} = 0$ le point $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ de $\tilde{K} - \{0\}$ vérifiant $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 = 0$ est tel que $Df_2(x)$ n'est pas surjectif.

3) $\phi_o$ *est surjectif si et seulement si* $n = 2$ <u>ou</u> $3$.

Les conditions de dimension imposent que $\phi_o$ ne peut pas être surjectif pour $n \geq 5$. Nous devons montrer que toute application $B$ de $L_s^2(\tilde{n}, \tilde{2})$ est l'image par $\tilde{\phi}_o$ d'un couple $(v,u)$ de

$\mathrm{End}(\tilde{2}) \times \mathrm{End}(\tilde{n})$, c'est-à-dire que pour tout $(i,j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, on doit avoir

$$B(e_i,e_j) = v\, A(e_i,e_j) + A(u(e_i),e_j) + A(e_i,u(e_j)).$$

On note $\{e'_1,e'_2\}$ la base de $\mathbb{R}^2$, $v(e'_i) = v_i^1 e'_1 + v_i^2 e'_2$, $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} u_i^j e_j$ , $B(e_i,e_j) = b_{ij}^1 e'_1 + b_{ij}^2 e'_2$. On doit résoudre

$$b_{ii}^1 = \lambda_i\, v_1^1 + \mu_i\, v_2^1 + 2\mu\; u_i^i$$

$$b_{ii}^2 = \lambda_i\, v_1^2 + \mu_i\, v_2^2 + 2\mu_i\, u_i^i$$

et pour $i \neq j$

$$b_{ij}^1 = \lambda_i\, u_j^i + \lambda_j\, u_i^j$$

$$b_{ij}^2 = \mu_i\, u_j^i + \mu_j\, u_i^j$$

Pour $i \neq j$, les coefficients $u_i^j$ existent toujours car $D_{ij} \neq 0$. Il reste à prouver l'existence des $\{u_i^i\}_{i=1}^n$ et des $\{v_i^j\}_{i,j=1}^2$ . Voici la matrice des coefficients du système dont les premiers membres sont $\{b_{ii}^1\ ,\ b_{ii}^2\}_{i=1}^n$ :

$$\begin{array}{cccccccc|l}
v_1^1 & v_2^1 & v_1^2 & v_2^2 & u_1^1 & u_2^2 & u_3^3 & u_4^4 & \\
 & & & & & n=2 & n=3 & n=4 & \\
\hline
\lambda_1 & \mu_1 & 0 & 0 & 2\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 & 2\mu_1 & 0 & 0 & 0 & \\
\lambda_2 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_2 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \lambda_2 & \mu_2 & 0 & 2\mu_2 & 0 & 0 & n=2 \\
\lambda_3 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_3 & 0 & \\
0 & 0 & \lambda_3 & \mu_3 & 0 & 0 & 2\mu_3 & 0 & n=3 \\
\lambda_4 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_4 & \\
0 & 0 & \lambda_4 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_4 & n=4
\end{array}$$

- Si $n = 2$, le système a des solutions car $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = - D_{12}^2$

et $D_{12} \neq 0$

- Si $n = 3$. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients $\{\rho_i\}_{i=1}^{6}$ des lignes $L_i$ du système : $\sum_{i=1}^{6} \rho_i L_i = 0$.

En considérant les colonnes relatives à $u_1^1$, $u_2^2$, $u_3^3$ on a $\lambda_1\rho_1 + \mu_1\rho_2 = 0$, $\lambda_2\rho_3 + \mu_2\rho_4 = 0$, $\lambda_3\rho_5 + \mu_3\rho_6 = 0$ ; il existe donc des scalaires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que $\rho_1 = \alpha\,\mu_1$, $\rho_2 = -\alpha\,\lambda_1$, $\rho_3 = \beta\,\mu_2$, $\rho_4 = -\beta\,\lambda_2$, $\rho_5 = \gamma\,\mu_3$, $\rho_6 = -\gamma\,\lambda_3$. En considérant les quatre premières colonnes du système, on a :

$$\begin{aligned} \alpha\,\lambda_1\mu_1 + \beta\,\lambda_2\mu_2 + \gamma\,\lambda_3\mu_3 &= 0 \\ \alpha\,\lambda_1^2 + \beta\,\lambda_2^2 + \gamma\,\lambda_3^2 &= 0 \\ \alpha\,\mu_1^2 + \beta\,\mu_2^2 + \gamma\,\mu_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

or

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 \end{vmatrix} = D_{12} \times D_{23} \times D_{13} .$$

Comme $D_{12} \times D_{23} \times D_{13} \neq 0$ on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et le système a des solutions car la matrice des coefficients est de rang 6.

- Si $n = 4$. On suppose de même qu'il existe $\{\rho_i\}_{i=1}^{8}$ tels que $\sum_{i=1}^{8} \rho_i L_i = 0$, on en tire comme précédemment l'existence de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ liés aux $\{\rho_i\}_{i=1}^{6}$ et de $\delta$ tel que $\rho_7 = \delta\,\mu_4$ et $\rho_8 = -\delta\,\lambda_4$. En considérant les quatre premières colonnes, on a :

$$\alpha\ \lambda_1\mu_1 + \beta\ \lambda_2\mu_2 + \gamma\ \lambda_3\mu_3 + \delta\ \lambda_4\mu_4 = 0$$
$$\alpha\ \lambda_1^2 + \beta\ \lambda_2^2 + \gamma\ \lambda_3^2 + \delta\ \lambda_4^2 = 0$$
$$\alpha\ \mu_1^2 + \beta\ \mu_2^2 + \gamma\ \mu_3^2 + \delta\ \mu_4^2 = 0\ .$$

Ces trois équations homogènes à quatre inconnues ont toujours des solutions non toutes nulles, la matrice des coefficients n'est donc pas de rang 8 et $\phi_o$ n'est pas surjectif.

*4)* $\phi_1$ *est surjectif pour tout* $n$, $n \geq 2$.

Nous venons de montrer que pour $n = 2$ ou $3$, $\phi_o$ est surjectif, donc $\phi_1$ est surjectif (Chapitre II - proposition 2). Il suffit donc de montrer ici que $\phi_1$ est surjectif pour $n \geq 4$.

On note $C(e_i,e_j,e_k) = C^1_{ijk}e'_1 + C^2_{ijk}e'_2 = \overrightarrow{C_{ijk}}$,

$v(e_i) = \gamma_i$ avec $\gamma_i(e'_m) = \gamma^1_{im}e'_1 + \gamma^2_{im}e'_2 = \overrightarrow{\gamma_{im}}$ où $m \in \{1,2\}$,

$u(e_i,e_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} u^k_{ij}e_k$ et $\vec{V}_i = \lambda_i e'_1 + \mu_i e'_1$. On doit avoir pour tout $(i,j,k)$ variant de $1$ à $n$ :

$C(e_i,e_j,e_k) =$

$$\frac{1}{3}\left[v(e_i)A(e_j,e_k)+v(e_j)A(e_k,e_i)+v(e_k)A(e_i,e_j)+2A(u(e_i,e_j),e_k)+2A(u(e_j,e_k),e_i)+2A(u(e_k,e_i),e_j)\right]$$

soit $\quad \vec{c}_{iii} = \lambda_i\vec{\gamma}_{i1} + \mu_i\ \vec{\gamma}_{i2} + 2u^i_{ii}\ \vec{V}_i$

pour $i \neq j \quad \vec{c}_{iij} = \frac{1}{3}\ (\lambda_i\ \vec{\gamma}_{j1} + \mu_i\ \vec{\gamma}_{j2}) + \frac{1}{3}\ (2u^i_{ij}\ \vec{V}_i + u^j_{ii}\ \vec{V}_j)$

et pour $i,j,k$ distincts $\vec{c}_{ijk} = \frac{2}{3}\ (u^i_{jk}\ \vec{V}_i + u^j_{ki}\ \vec{V}_j + u^k_{ij}\ \vec{V}_k)$

Ce système a des solutions. Prenons, par exemple, $u^i_{ii} = 0$ pour tout $i$, alors $\vec{\gamma}_{i1}$ et $\vec{\gamma}_{i2}$ sont définis par la première équation vectorielle car $(\lambda_i,\mu_i) \neq (0,0)$ ; alors les autres coefficients de $u$, affectés d'indices non tous égaux, n'apparaissent chacun que dans une seule équation vectorielle du type des deux dernières équations, ces coefficients de $u$ sont alors définis car $\mathrm{Det}(\vec{V}_i,\vec{V}_j) = D_{ij}$.

et $D_{ij} \neq 0$ pour $i \neq j$.

5) *On a* $m^2 \subset J_2(f_2)$ *pour* $n = 2$ *et* $m^3 \subset J_2(f_2)$ *pour* $n \geq 3$.

Pour montrer que $m^\alpha \subset J_2(f_2)$ $(\alpha \in \mathbb{N}^*)$ il suffit de montrer que $P_\alpha \subset J_2(f_2)$ où $P_\alpha$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré $\alpha$ à coefficients réels de la variable $x$ de $\mathbb{R}^n$ et d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral. Or $P_\alpha \subset J_2(f_2)$ signifie que tout polynôme homogène de degré $\alpha$ est combinaison linéaire à coefficients dans $E$ de polynômes engendrant $J_2(f_2)$. Il existe une telle combinaison linéaire dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré $(\alpha-2)$ (on prend les termes de degré $\alpha$ dans le développement limité). On peut donc passer aux complexifiés et $P_\alpha \subset J_2(f_2)$ équivaut à $\tilde{P}_\alpha \subset \tilde{J}_2(f_2)$ où $\tilde{J}_2(f_2)$ est l'ensemble des combinaisons des polynômes de $J_2(f_2)$, les coefficients de la combinaison des polynômes étant des polynômes homogènes de degré $(\alpha-2)$ à coefficients complexes et $\tilde{P}_\alpha$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré $\alpha$ à coefficients complexes de la variable $x$ de $\mathbb{C}^n$. Etant dans $\mathbb{C}$, on peut se servir du 1) de ce paragraphe B et considérer $\tilde{J}_2(f_2)$ engendré par les polynômes $\Sigma\lambda_i x_i^2$ , $\Sigma\mu_i x_i^2$ , $\{x_i x_j\}_{i,j=1}^n$ avec $i \neq j$.

. <u>si $n = 2$</u> : $\widetilde{J_2}(f_2)$ est engendré par $\{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2, \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2, x_1 x_2\}$ soit par $\{x_1^2, x_2^2, x_1 x_2\}$ car $D_{12} \neq 0$. On a donc $\tilde{P}_2 = \tilde{J}_2(f_2)$

. <u>si $n \geq 3$</u> : on ne peut pas avoir $m^2 \subset J_2(f_2)$ car cela imposerait l'existence de scalaires $\alpha$, $\beta$, $\gamma_{ij}$ $(i \neq j)$ tels que

$$x_1^2 = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2\right) + \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} x_i x_j$$ mais alors on a

$\gamma_{ij} = 0$ pour tout $(i,j)$ et $1 = \alpha\,\lambda_1 + \beta\,\mu_1$, $0 = \alpha\,\lambda_2 + \beta\,\mu_2$ ,

$0 = \alpha\,\lambda_3 + \beta\,\mu_3$ ce qui est impossible car $D_{23} \neq 0$.

Par contre $m^3 \subset J_2(f_2)$ en effet les polynômes de la forme $x_i^2 x_j$ et $x_i x_j x_k$, où $i, j, k$ sont distincts, sont de la forme $x_i(x_i,x_j)$ et $x_i(x_j,x_k)$. Puisque $(\lambda_i,\mu_i) \neq (0,0)$, ceux de la forme $x_i^3$ sont de la forme $(\lambda_i \neq 0)$ :

$$x_i^3 = \frac{x_i}{\lambda_i}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right) - \frac{1}{\lambda_i}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k (x_i x_k)\right).$$

*Remarque* : On sait (Chapitre II - Proposition 3) que si $f_s$ vérifie $\tilde{H}_s$ (resp. $\tilde{H}'_s$) il existe $\ell$ tel que $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) est surjectif et il existe $\alpha$ tel que $m^\alpha \subset J_p(f_s)$ (resp. $m^\alpha \subset H_1(f_s)$), $\ell_o$ le plus petit $\ell$ et $\alpha_o$ le plus petit $\alpha$ vérifiant ceci sont tels que :

- pour $p = 1$, $\ell_o = \sup(0,\alpha_o-s)$ :

*Exemples* : si $s = 2$ et $n$ est quelconque, on a $\alpha_o = 1$ et donc $\ell_o = 0 = \sup(0,\alpha_o-s)$. On a donné d'autres cas où $\ell_o = \alpha_o-s$ .

- pour $p > 1$, $0 \leqslant \ell_o \leqslant \alpha_o-s$ :

*Exemples* :

- si $s = 2$ et $p = 2$, $n = 2$ ou $n \geqslant 4$, on a $\ell_o = \alpha_o-s$ ;
- si $s = 2$ et $p = 2$, $n = 3$, on a $\ell_o = 0$, $\alpha_o = 3$ et donc $0 \leqslant \ell_o < \alpha_o-s$.

6) *Autre exemple de jet homogène* $f_2$ *vérifiant* $\tilde{H}_2$ (p=3, n=4)

Dans le cas $s = 2$, $p = 2$, $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$, nous venons de chercher les valeurs de $\ell_o$ et $\alpha_o$ suivant les valeurs de $n$. Les calculs ont pu se faire aisément du fait de l'existence dans ce cas d'une base de $\mathbb{C}^n$, par rapport à laquelle $f_2$ se met sous une forme diagonale. Une telle base n'existe pas pour $p \geqslant 3$. Cependant dans certains cas où $f_2$ se présente a priori sous forme diagonale, on peut alors étudier facilement les conditions pour que $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$, calculer $\ell_o$ et donc appliquer à $f_2$ le théorème 2.

*Exemple* :

$$s = 2, \quad n = 4, \quad p = 3, \quad f_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i^2, \ \sum_{i=1}^{4} \mu_i x_i^2, \ \sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i^2\right).$$

$f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$ si et seulement si $D_{ijk} \neq 0$ pour $i,j,k$ distincts :

$$D_{ijk} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k \\ \mu_i & \mu_j & \mu_k \\ \nu_i & \nu_j & \nu_k \end{vmatrix}$$

$$J_2(f_2) = \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i^2 , \ \sum_{i=1}^{4} \mu_i x_i^2 , \ \sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i^2, x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, x_3x_4\ x_1, x_4x_1x_2\right).$$

$\phi_o$ ne peut pas être surjectif pour des raisons de dimension.

Montrons que $\phi_1$ est surjectif (le théorème 2 s'applique donc à $f_2$).

On reprend les notations précédentes, on trouve les conditions :

$$\overrightarrow{c_{iii}} = \lambda_i \vec{\gamma}_{i1} + \mu_i \vec{\gamma}_{i2} + \nu_i \vec{\gamma}_{i3} + 3u_{ii}^i \vec{V}_i$$

$i \neq j$, $$\overrightarrow{c_{ijj}} = \frac{1}{3}(\lambda_j \vec{\gamma}_{i1} + \mu_j \vec{\gamma}_{i2} + \nu_j \vec{\gamma}_{i3}) + u_{jj}^i \vec{V}_i + 2u_{ij}^j \vec{V}_j$$

$i,j,k$ distincts $$\overrightarrow{c_{ijk}} = u_{ij}^k \vec{V}_k + u_{jk}^i \vec{V}_i + u_{ki}^j \vec{V}_j .$$

Les coefficients de $u$ affectés de 3 indices distincts sont parfaitement définis par la dernière équation vectorielle. Les $\vec{\gamma}_{i1}, \vec{\gamma}_{i2}, \vec{\gamma}_{i3}$ sont solutions de 4 équations vectorielles, ils existent (prenons par exemple $i = 1$) si et seulement si :

(par extension de la notion de déterminant) :

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{c_{111}} - 3u_{11}^1 \vec{V}_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \overrightarrow{c_{122}} - u_{22}^1 \vec{V}_1 - 2u_{12}^2 \vec{V}_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \overrightarrow{c_{133}} - u_{33}^1 \vec{V}_1 - 2u_{13}^2 \vec{V}_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \overrightarrow{c_{144}} - u_{44}^1 \vec{V}_1 - 2u_{14}^4 \vec{V}_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \end{vmatrix} = 0$$

C'est-à-dire si

$$\overrightarrow{c_{111}}D_{234} - \overrightarrow{c_{122}}D_{341} + \overrightarrow{c_{133}}D_{412} - \overrightarrow{c_{144}}D_{123} +$$
$$\vec{V}_1(-3u^1_{11}D_{234} + u^1_{22}D_{341} - u^1_{33}D_{412} + u^1_{44}D_{123}) +$$
$$\vec{V}_2(2u^2_{12}D_{341}) - \vec{V}_3(2u^3_{13}D_{412}) + \vec{V}_4(2u^4_{14}D_{123}) = 0.$$

Si on prend $u^1_{11} = u^1_{22} = u^1_{33} = u^1_{44} = 0$ alors $u^2_{12}, u^3_{13}, u^4_{14}$ sont définis de façon unique et donc les $\vec{\gamma}_{11}, \vec{\gamma}_{12}, \vec{\gamma}_{13}$ existent. $\phi_1$ est donc surjectif. Cependant on n'a pas $m^3 \subset J_2(f_2)$ car il existerait alors des scalaires $a_i, b_i, c_i$, $1 \leqslant 1 \leqslant 4$ tels que

$$x_1^3 = (\sum_{i=1}^{4} a_i x_i)(\sum_{j=4}^{4} \lambda_j x_j^2) + (\sum_{i=1}^{4} b_i x_i)(\sum_{j=1}^{4} \mu_j x_j^2) + (\sum_{i=1}^{4} c_i x_i)(\sum_{j=1}^{4} \nu_j x_j^2)$$

et donc en identifiant les coefficients de

$$(x_1^3) \quad : 1 = a_1\lambda_1 + b_1\mu_1 + c_1\nu_1$$
$$(x_1\ x_2^2) : 0 = a_1\lambda_2 + b_1\mu_2 + c_1\nu_2$$
$$(x_1\ x_3^2) : 0 = a_1\lambda_3 + b_1\mu_3 + c_1\nu_3$$
$$(x_1\ x_4^2) : 0 = a_1\lambda_4 + b_1\mu_4 + c_1\nu_4 .$$

Or ce système n'a pas de solution car $D_{234} \neq 0$.

On a donc ici encore $0 \leqslant \ell_o < \alpha_o - s$

## C) *Jets homogènes de* $\mathbb{R}^4$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant* $H_2$ *et ne vérifiant pas* $\tilde{H}_2$.

$s = 2,\ p = 2,\ n = 4.$

Soit $f_2$ un jet homogène vérifiant $H_2$ et ne vérifiant pas $\tilde{H}_2$, on sait que $f_2$ est suffisant pour la $C^1$-équivalence de contact dans $E_2^2$ (théorème 1) et que $f_2$ n'est pas suffisant pour la $C^2$-équivalence de contact dans $E_3^2$ puisqu'alors $\phi_1$ n'est pas surjectif (chapitre II - proposition 1).

On se pose alors le problème suivant : si $f$ de $E_3^2$ est une réalisation de $f_2$, à quelle condition sur $f$ existe-t-il seulement $h$ germe en $0$ de difféomorphisme de classe $C^2$ tel que $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_4$ et qui transforme localement $W$ en $K$ ($W = f^{-1}(0)$, $K = f_2^{-1}(0)$) ?

On sait que si $f$ est tel que $D^3f(0) \in \text{Im}\, \phi_1$ un tel $h$ existe et on a même une $C^2$-équivalence de contact entre $f$ et $f_2$ (théorème 2, remarque 3). Que se passe-t-il si $D^3f(0)$ n'appartient pas à $\text{Im}\, \phi_1$ ?

*Proposition 4.*- Soit $f_2$ un jet homogène de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que les quadriques de $P(3,\mathbb{C})$ $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ qu'il définit aient deux points de contact (et deux seuls) imaginaires conjugués et aient une intersection ou bien contenant deux coniques propres réelles et distinctes ou bien formée de la droite joignant les deux points de contact et d'une cubique unicursale. Alors pour qu'il existe $h$, germe en $0$ de difféomorphisme de classe $C^2$ tel que $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_4$, échangeant localement les surfaces de niveau de ce jet et d'une de ses réalisations $f$ dans $E_3^2$, il est nécessaire et suffisant que $D^3f(0) \in \text{Im}\, \phi_1$.

Nous verrons au II que de tels jets existent bien. Ils vérifient $(H_2)$ et ne vérifient pas $(\tilde{H}_2)$ car les quadriques $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ n'ont pas de point de contact dans $P(3,\mathbb{R})$ mais ont deux point de contact dans $P(3,\mathbb{C})$. Les $\phi_1$ associés à ces jets ne sont donc pas surjectifs. Un tel jet $f_2$ étant fixé, on peut donc trouver $f$ réalisation de $f_2$ dans $E_3^2$ tel que $D^3f(0) \notin \text{Im}\, \phi_1$ et alors il n'existe pas de $h$ de classe $C^2$ échangeant localement les surfaces de niveau en $0$ de $f$ et de $f_2$. Ce qui montre qu'on ne peut pas améliorer les résultats du théorème 1.

Dans une première partie, nous cherchons une forme réduite de $f_2$ lorsque $f_2$ vérifie $(H_2)$ et ne vérifie pas $(\tilde{H}_2)$. Nous ferons des remarques concernant :

- les jets $f_2$ vérifiant $(H_2')$ ;
- le faisceau de quadriques engendré par $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ .

Dans une deuxième partie, nous montrons que si $f$ réalisation de $f_2$ dans $E_3^2$ est tel qu'il existe $h$ de classe $C^2$ échangeant les surfaces de niveau, alors la relation suivante est vérifiée :

(1) $\qquad \forall\, a \in K \qquad D^3f(0)(a)^3 = 3\ Df_2(a) \circ D^2h(0)(a)^2.$

On montre ensuite que, pour certains $f_2$ tels que $K$ contient "beaucoup" d'éléments, s'il existe $D^2h(0)$ tel que (1) soit vérifié, alors nécessairement $D^3f(0) \in \operatorname{Im} \phi_1$.

*I - Forme de* $f_2$.

Nous prolongeons l'étude faite au B.

Une base de $\mathbb{R}^2$ est fixée. Une base de $\mathbb{C}^4$ étant fixée on note $A_1$ et $A_2$ les matrices symétriques correspondant à $f_2^1$ et $f_2^2$. Si $f_2$ vérifie $H_2$ et ne vérifie pas $\tilde{H}_2$ il existe au moins deux points de contact distincts $X$ et $\bar{X}$ de $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ , soit $x$ et $\bar{x}$ les représentants de $X$ et $\bar{X}$ . Il existe $\lambda$ de $C$ tel que $f_2(x) = f_2(\bar{x}) = 0$ et $Df_2^1(x) = \lambda Df_2^2(x)$, $Df_2^1(\bar{x}) = \bar{\lambda} Df_2^2(\bar{x})$.

<u>1er cas</u> : <u>La droite</u> $(X\bar{X})$ <u>n'est pas contenue dans</u> $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$.

On a $\lambda \in \mathbb{R}$ car $Df_2^1(x).\bar{x} = Df_2^1(\bar{x}).x = \lambda Df_2^2(x).\bar{x} = \bar{\lambda} Df_2^2(\bar{x}).x$ et si $\lambda \neq \bar{\lambda}$ alors $X$ et $\bar{X}$ sont conjugués par rapport aux deux quadriques ce qui entraîne $(X,\bar{X}) \subset \tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$. D'autre part, les plans tangents communs en $X$ et $\bar{X}$ se coupent suivant une droite réelle $\Delta$ qui ne coupe pas $(X,\bar{X})$ sinon ce point d'intersection serait conjugué de $X$ et de $\bar{X}$ par rapport aux deux quadriques et on aurait encore $(X,\bar{X}) \subset \tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$. Soit deux points $X_1$ et $X_2$ de $P(3,\mathbb{R}) \cap (X,\bar{X})$ conjugués par rapport à $X$ et $\bar{X}$, le plan $(X_2,\Delta)$ coupe $Q_1$ et $Q_2$ suivant deux coniques $q_1$ et $q_2$ qui n'ont pas de point de contact réel : dans le plan $(X_2,\Delta)$ il existe donc au moins un triangle autopolaire commun à $q_1$ et $q_2$. Les matrices $A_1$ et $A_2$, dans la base formée de la réunion des représentants dans $\mathbb{C}^4$ de $X_1$ et des sommets d'un triangle autopolaire commun, sont diagonales.

<u>2ème cas</u> : $(X\bar{X}) \subset \tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$.

Alors les plans tangents communs en $X$ et $\bar{X}$ se coupent suivant $(X,\bar{X})$. Ils sont distincts sinon les points réels de $(X,\bar{X})$ auraient même plan tangent. De plus $Q_1$ et $Q_2$ sont des quadriques propres. En effet, si $X_1$ est un point singulier de $Q_1$, comme $X_1$ n'appartient pas à $Q_2$, $X_1$ n'appartient pas à $(X,\bar{X})$, et donc le plan $(X,\bar{X},X_1)$ est le plan tangent commun à $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ en $X$ et $\bar{X}$ ce qui est impossible. On a aussi $\lambda \neq \bar{\lambda}$ sinon en tout point, et donc en particulier en tout point réel de $(X,\bar{X})$, les deux quadriques auraient même plan tangent. On prend une base de $\mathbb{C}^4$ formée de $(X,\bar{X},Y,\bar{Y})$ où $Y$ (resp. $\bar{Y}$) appartient au plan tangent en $X$ (resp. $\bar{X}$) et $Y \notin (X,\bar{X})$. Les matrices $A_1$ et $A_2$ s'écrivent dans cette base :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda a \\ 0 & 0 & \overline{\lambda a} & 0 \\ 0 & \overline{\lambda a} & b' & c' \\ \lambda a & 0 & c' & \bar{b}' \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{a} & b & c \\ a & 0 & c & \bar{b} \end{pmatrix}$$

avec $a \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $c' \in \mathbb{R}$. On utilise le fait que $D^2 f_2^i(0)$ pour $i = 1,2$ sont des formes bilinéaires symétriques à valeurs réelles.

Cherchons les points de $P(3,\mathbb{C})$ ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques. Ces points ont pour représentants $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que les lignes suivantes sont proportionnelles.

$$\begin{array}{llll} a\ x_4 & \bar{a}\ x_3 & \bar{a}\ x_2 + b\ x_3 + c\ x_4 & a\ x_1 + c\ x_3 + \bar{b}\ x_4 \\ \lambda a\ x_4 & \overline{\lambda a}\ x_3 & \overline{\lambda a}\ x_2 + b'x_3 + c'x_4 & \lambda a\ x_1 + c'x_3 + \bar{b}'x_4 \end{array}$$

les seuls coefficients de proportionnalité possibles sont $\lambda$ et $\bar{\lambda}$ car $a \neq 0$, autrement dit $\lambda$ et $\bar{\lambda}$ sont les valeurs propres doubles de $A_2^{-1}A_1$. Cherchons les vecteurs propres. On a déjà $x$ et $\bar{x}$ associés à $\lambda$ et $\bar{\lambda}$. Ceux relatifs à la valeur propre $\lambda$ vérifient :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ \lambda(\bar{a}\ x_2 + c\ x_4) = \overline{\lambda a}\ x_2 + c'x_4 \\ \lambda\bar{b}\ x_4 = \bar{b}'x_4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ (\lambda-\bar{\lambda})\bar{a}x_2 + (\lambda c-c')x_4 = 0 \\ (\lambda\bar{b}-\bar{b}')x_4 = 0 \end{cases}$$

ceux relatifs à la valeur propre $\bar{\lambda}$ vérifient

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ \bar{\lambda}b\ x_3 = b'x_3 \\ \bar{\lambda}a\ x_1 + \bar{\lambda}c\ x_3 = \lambda a\ x_1 + c'x_3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_4 = 0 \\ (\bar{\lambda}b-b')x_3 = 0 \\ (\bar{\lambda}-\lambda)a\ x_1 + (\bar{\lambda}c-c')x_3 = 0 \end{cases}$$

- si $\bar{\lambda}b-b' = 0$ les points

$$Z = (\bar{\lambda}c-c')X + \frac{(\bar{\lambda}-\lambda)ba}{2\bar{a}}\bar{X} + (\lambda-\bar{\lambda})aY$$

$$\bar{Z} = \frac{(\lambda-\bar{\lambda})\overline{ba}}{2a}X + (\lambda c-c')\bar{X} + (\bar{\lambda}-\lambda)\bar{a}\bar{Y}$$

ont même plan polaire et on vérifie qu'ils appartiennent aux deux quadriques : ce sont des points de contact de $\tilde{Q}_1$ et de $\tilde{Q}_2$. On a $Df_2^1(z) = \bar{\lambda}\ Df_2^2(z)$.

Les points $(x,\bar{x},z,\bar{z})$ forment une base de $\mathbb{C}^4$, on se place dans cette base pour écrire les matrices $A_1$ et $A_2$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda a \\ 0 & 0 & \overline{\lambda a} & 0 \\ 0 & \overline{\lambda a} & 0 & 0 \\ \lambda a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{a} & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de diagonalisation simultanée de $A_1$ et $A_2$ est donc formée des vecteurs $x + \bar{z}$ , $x - \bar{z}$ , $\bar{x} + z$ , $\bar{x} - z$.

- si $\bar{\lambda}b - b' \neq 0$ les seuls vecteurs propres de $A_2^{-1}A_1$ sont $x$ et $\bar{x}$. Alors il existe une base de $\mathbb{C}^4$ : $(x,y,\bar{x},\bar{y})$ telle que, dans cette base $A_2^{-1}A_1$ et $A_2$ s'écrivent :

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & d & \bar{b} & c \\ 0 & \bar{b} & 0 & \bar{a} \\ b & c & \bar{a} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

Pour que $A_1 = A_2 \times A_2^{-1}A_1$ soit symétrique, il est nécessaire d'avoir $b = c = 0$ et alors

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a\lambda & 0 & 0 \\ a & a+d\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a\lambda} \\ 0 & 0 & \bar{a} & \bar{a}+\overline{d\lambda} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a} \\ 0 & 0 & \bar{a} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

avec $a \neq 0$ et $\lambda \neq \bar{\lambda}$. On peut prendre $a = 1$ en remplaçant $x$ (donc $\bar{x}$) par un vecteur proportionnel.

Dans la base $(x,y,\bar{x},\bar{y})$ $f_2$ s'écrit :

$$f_2(x) = (2\lambda x_1x_2 + (1+d\lambda)x_2^2 + 2\bar{\lambda}x_3x_4 + (1+\bar{d}\bar{\lambda})x_4^2,$$
$$2x_1x_2 + dx_2^2 + 2x_3x_4 + \bar{d}x_4^2) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq \bar{\lambda}.$$

En résumé, si $f_2$ vérifie $H_2$, une base de $\mathbb{R}^2$ étant fixée, il existe une base de $\mathbb{C}^4$ : $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ tel que dans cette base $f_2$ s'écrit :

soit $f_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i^2 , \sum_{i=1}^{4} \mu_i x_i^2\right)$

soit $f_2(x) = (2\lambda x_1 x_2 + (1+d\lambda)x_2^2 + 2\bar{\lambda} x_3 x_4 + (1+\bar{d}\bar{\lambda})x_4^2,$
$2x_1x_2 + dx_2^2 + 2x_3x_4 + \bar{d}x_4^2)$ dans ce dernier cas (cas c) $\lambda \neq \bar{\lambda}$ et $e_3 = \bar{e}_1$ , $e_4 = \bar{e}_2$.

*Réciproque 1* : Une base de $\mathbb{R}^2$ étant fixée, il existe une base de $\mathbb{C}^4$ telle que dans cette base $f_2$ a la forme $\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i^2 , \sum_{i=1}^{4} \mu_i x_i^2\right)$. Quelles sont les conditions vérifiées par les $(\lambda_i, \mu_i) = V_i$ pour que $f_2$ vérifie $H_2$ ? On a déjà vu au B qu'il est nécessaire que pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $V_i \neq (0,0)$. Les quatre vecteurs $V_i$ définissent donc au plus quatre directions de $\mathbb{R}^2$. On sait que les $V_i$ définissent quatre directions si et seulement si $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$.

i) Si les $V_i$ définissent une direction quadruple, $f_2$ vérifie $H_2$ si et seulement si $K = \{0\}$. On peut, dans ce cas, en changeant la longueur des vecteurs de base ramener $f_2$ à la forme $f_2(x) = (\lambda_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2), \mu_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2))$ avec $(\lambda_1, \mu_1) \neq (0,0)$.

ii) Si les $V_i$ définissent deux directions dont une triple, $f_2$ vérifie $H_2$ si et seulement si $K = \{0\}$. On ramène $f_2$ à la forme $f_2(x) = (\lambda_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \lambda_4 x_4^2, \mu_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \mu_4 x_4^2)$ avec $D_{14} \neq 0$.

iii) Si les $V_i$ définissent deux directions doubles, $f_2$ vérifie $H_2$ si et seulement si la base $\{e_i\}_{i=1}^{4}$ par rapport à laquelle $f_2$ a la forme réduite : $f_2(x) = (\lambda_1(x_1^2+x_2^2) + \lambda_3(x_3^2+x_4^2),$
$\mu_1(x_1^2+x_2^2) + \mu_3(x_3^2+x_4^2))$

avec $D_{13} \neq 0$ est soit réelle (et alors $K = \{0\}$) soit telle que $e_1 = \bar{e}_3$, $e_2 = \bar{e}_4$ (et alors $K \neq \{0\}$). (cas b).

En effet, les points de contact ont pour représentants $x, \bar{x}, y, \bar{y}$ tels que ou bien $e_1 = x+\bar{x}$, $e_2 = i(x-\bar{x})$, $e_3 = y+\bar{y}$, $e_4 = i(y-\bar{y})$ et alors $e_1, e_2, e_3, e_4$ sont réels, ou bien $e_1 = x+\bar{y}$, $e_2 = i(x-\bar{y})$, $e_3 = \bar{x}+y$, $e_4 = -i(\bar{x}-y)$, alors $e_1 = \bar{e}_3$, $e_2 = \bar{e}_4$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_3$, $\mu_1 = \bar{\mu}_3$.

iv) Si les $V_i$ définissent trois directions dont une double, $f_2$ vérifie $H_2$ si et seulement si la base $\{e_i\}_{i=1}^{4}$ par rapport à laquelle $f_2$ a la forme réduite : $f_2(x) = (\lambda_1(x_1^2+x_2^2) + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2,\ \lambda_1(x_1^2+x_2^2) + \mu_3 x_3^2 + \mu_4 x_4^2)$ avec $D_{13} \neq 0$, $D_{41} \neq 0$, $D_{34} \neq 0$ est telle que $e_1$ et $e_2$ sont réels (cas a).

En effet, les points de contact ont pour représentants $x$ et $\bar{x}$ tels que $e_1 = x+\bar{x}$, $e_2 = i(x-\bar{x})$. $e_1$ et $e_2$ sont donc réels, $(\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$. On montre que dans ce cas $e_3$ et $e_4$ sont

- ou bien réels (cas $a_1$ - si $K \neq \{0\}$) et alors $(\lambda_3, \mu_3)$ et $(\lambda_4, \mu_4)$ appartiennent à $\mathbb{R}^2 - (0,0)$
- ou bien imaginaires conjugués (cas $a_2$ , $K \neq \{0\}$) et alors $\bar{\lambda}_3 = \lambda_4$, $\bar{\mu}_3 = \mu_4$.

*Réciproque 2*.- Supposons qu'une base de $\mathbb{R}^2$ étant fixée, il existe une base de $\mathbb{C}^4$ telle que $e_3 = \bar{e}_1$ , $e_4 = \overline{e_2}$ et que dans cette base $f_2$ à la forme :

$$f_2(x) = (2\lambda x_1 x_2 + (1+d\lambda)x_2^2 + 2\bar{\lambda}x_3 x_4 + (1+\bar{d}\bar{\lambda})x_4^2 ,$$
$$2x_1 x_2 + dx_2^2 + 2x_3 x_4 + \bar{d}\ x_4^2) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq \bar{\lambda}$$

alors $f_2$ vérifie $H_2'$ (et ne vérifie pas $\tilde{H}_2$ !).

En effet, tout point de $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ s'écrit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \bar{x}_1 \bar{e}_1 + \bar{x}_1 \bar{e}_1$ avec $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ et donc en ce point $f_2$ a pour matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \lambda x_2 & \lambda x_1+(1+d\lambda)x_2 & \bar{\lambda}\bar{x}_2 & \bar{\lambda}\bar{x}_1+(1+\bar{d}\bar{\lambda})\bar{x}_2 \\ x_2 & x_1+dx_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_1+\bar{d}\bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

Or cette matrice est de rang 2 car $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ et $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

*Remarque 1.*- Recherche des cas où $f_2$ vérifie $H_2'$, $f_2^1$ et $f_2^2$ étant simultanément diagonalisables par rapport à une base $\{e_i\}_{i=1}^n$.

a) $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$.

- si un vecteur de la base $\{e_i\}_{i=1}^n$ appartient à $\mathbb{R}^n$, alors $f_2$ ne vérifie pas $H_2'$. En effet, supposons que $e_1 \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Im} Df(e_1)$ est engendré par $V_1$ et $Df(e_1)$ n'est pas surjectif.

- si pour tout $i$, $1 \leq i \leq n$, $e_i \in \mathbb{C}^n - \mathbb{R}^n$ alors $f_2$ vérifie $H_2'$. En effet, tout point de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a au moins deux composantes non nulles. En ce point $x$ la matrice jacobienne de $f_2$ est de rang 2 et $Df_2(x)$ est donc surjectif.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \\ \mu_1 x_1 & \mu_2 x_2 & \cdots & \mu_n x_n \end{pmatrix}$$

*Attention* : Dans ce cas $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$ et $H_2'$ mais ne vérifie pas $(\widetilde{H_2'})$ !

b) $n = 4$, $f$ vérifie $H_2$ et ne vérifie pas $\tilde{H}_2$.

Dans le cas a, $f_2$ ne vérifie pas $H_2'$ car $e_1 \in \mathbb{R}^4$.

Dans le cas b avec $K = \{0\}$, $f_2$ ne vérifie pas $H_2'$ car $e_1 \in \mathbb{R}^4$.

Dans le cas b avec $K \neq \{0\}$, $f_2$ vérifie $H_2'$ car tout point de $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ s'écrit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \bar{x}_1\bar{e}_1 + \bar{x}_2\bar{e}_2$ avec $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ et la matrice jacobienne de $f_2$ en ce point est de rang 2 :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \bar{\lambda}_1 \bar{x}_1 & \bar{\lambda}_1 \bar{x}_2 \\ \mu_1 x_1 & \mu_1 x_2 & \bar{\mu}_1 \bar{x}_1 & \bar{\mu}_1 \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

En résumé, si $f_2$ vérifie $H_2$ et si $K \neq \{0\}$, $f_2$ vérifie $H'_2$ dans le cas c et lorsque les vecteurs de la base de $\mathbb{C}^4$ (resp. $\mathbb{C}^n$ si $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$) qui permettent la diagonalisation simultanée de $f_2^1$ et $f_2^2$ appartiennent à $\mathbb{C}^4-\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{C}^n-\mathbb{R}^n$).

La forme des jets vérifiant $H'_2$ est donnée dans une base de $\mathbb{R}^4$ en fin de chapitre I.

*Remarque* 2.- Dans les cas suivants

- $f_2$ vérifie $\tilde{H}_2$
- $n = 4$, $f_2$ vérifie $H_2$ et $K \neq \{0\}$

toute quadrique de $P(n-1,\mathbb{C})$ contenant $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ appartient au faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ défini par $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$.

En particulier dans le cas a 1 et dans le cas c, toute quadratique de $p(3,\mathbb{R})$ contenant $Q_1 \cap Q_2$ appartient au faisceau $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ défini par les quadriques $Q_1$ et $Q_2$.

Si $K = \{0\}$ ce qui précède n'est pas vrai :

exemple : si dans la base réelle $\{e_i\}_{i=1}^4$, $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ ont pour équation : $\lambda_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \lambda_4 x_4^2 = 0$ et $\mu_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \mu_4 x_4^2 = 0$ avec $D_{14} \neq 0$, alors la quadrique d'équation $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_4$ contient $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ mais n'appartient pas au faisceau défini par $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$.

Pour montrer cela, on introduit $T(\tilde{K}) = \{x \underset{s}{\otimes} x \mid x \in \tilde{K}\}$ et $\mathrm{Ker}\, a = \{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_i \underset{s}{\otimes} e_j \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} Df(e_i).e_j = 0\}$ où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et on établit que $T(\tilde{K})$ engendre Ker a.

Ceci revient à montrer l'exactitude de la suite suivante :

$$0 \to \mathrm{End}(\tilde{2}) \xrightarrow{\bar{\phi}_o} L_s^2(\tilde{n},\tilde{2}) \xrightarrow{S} L_s^2(\tilde{n},\tilde{2})/_{(K)} \longrightarrow 0$$

où $\bar{\phi}_o(v) = \phi_o(v,0)$

et $S(B) = 0$ si et seulement si pour tout $x$ de $\tilde{K}$ : $B(x,x) = 0$.

C - *II* - Nous allons démontrer la proposition 4 énoncée au début du C. La condition suffisante est démontrée par la remarque 3 qui suit le théorème 2. Nous allons montrer la condition nécessaire c'est-à-dire : <u>soit</u> $f_2$ <u>un jet homogène vérifiant</u> $H_2$ <u>dans le cas</u> $a_1$ <u>ou le cas c, alors si</u> $f$ <u>de</u> $\mathcal{E}_3^2$ <u>estune réalisation de</u> $f_2$ <u>et s'il existe</u> $h$ <u>germe en</u> 0 <u>de difféomorphisme de</u> $\mathbb{R}^4$ <u>dans lui-même, de classe</u> $C^2$, <u>qui transforme localement</u> $K$ <u>en</u> $W$ <u>avec</u> $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_4$, <u>on a</u> $D^3f(0) \in \mathrm{Im}\ \phi_1$.

Dans le cas a (et donc dans le cas $a_1$), on montre que $D^3f(0) \in \mathrm{Im}\ \phi_1$ si et seulement si $D^3f(0)(e_1+\varepsilon ie_2)^3$ sont proportionnels à $V_1$ ($e_1+\varepsilon ie_2$ où $\varepsilon = \pm 1$ sont les représentants des deux points de contact de $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$, $V_1 = f_2(e_1) = f_2(e_2)$).

La démonstration se fait en deux étapes :

1) On montre que si $f_2$ est un jet homogène, <u>si</u> $f$ <u>de</u> $\mathcal{E}_3^2$ <u>est une réalisation de</u> $f_2$ <u>telle qu'il existe</u> $h$ <u>germe en</u> 0 <u>de difféomorphisme qui transforme localement</u> $K$ <u>en</u> $W$, <u>de classe</u> $C^2$, <u>tel que</u> $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_4$, <u>alors pour tout</u> $a$ <u>de</u> $K$ <u>on a</u> :
$D^3f(0)(a)^3 - 3Df_2(a).D^2h(0)(a)^2 = 0$.

2) si $K = \{0\}$ le 1) n'a pas d'intérêt. Mais <u>dans le cas</u> $a_1$ <u>et le cas c tout élément</u> $C$ <u>de</u> $L_s^3(4,2)$ nul sur $K$ (c'est-à-dire vérifiant

$C(a)^3 = 0$ pour tout $a$ de $K$) est tel qu'il existe $v$ de $L(4,\mathrm{End}(2))$ avec $C = \phi_1(v,0)$. On applique alors ceci à $C = D^3f(0) - 3\phi_1(0,D^2h(0))$ et on en déduit la proposition.

*Démonstration de 1)*.- Soit $h$ le difféomorphisme défini sur $V$ voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^4$, $r$ un réel strictement positif tel que la boule de $\mathbb{R}^4$ : $B(0,r)$ soit contenue dans $h(V)$ et $a$ un élément de $K - \{0\}$. Pour tout $t$ de $\mathbb{R}$ tel que $|t| < \dfrac{r}{||a||}$, $at$ appartient à $B(0,r) \cap K$ et donc $f_2(at) = 0$ et $f(h^{-1}(at)) = 0$.

On rappelle que $Dh^{-1}(0) = (Dh(0))^{-1} = 1_4$ et donc $D^2h^{-1}(0) = -D^2h(0)$

Un développement limité au voisinage de $t = 0$ de la fonction $g : g(t) = f(h^{-1}(at))$ est possible à l'ordre 3. Comme cette fonction est identiquement nulle, on obtient :

$$\frac{1}{3!} D^3f(0)(a)^3 - \frac{1}{2^2} D^2f(0)(a,D^2h(0)(a)^2) = 0.$$

*Démonstration de 2)*.-

$\boxed{\text{Cas } a_1}$

a) Détermination de $Q_1 \cap Q_2$ dans les cas $a_1$ et $a_2$.

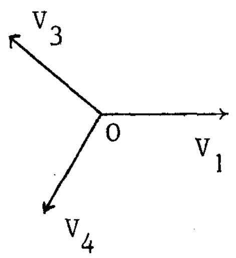
Dans le cas $a$, il existe une base $\{e_i\}_{i=1}^4$ de $\mathbb{C}^4$ avec $e_1$ et $e_2$ de $\mathbb{R}^4$ telle que dans cette base $f_2$ s'écrit :

$$f_2(x) = (\lambda_1(x_1^2+x_2^2) + \lambda_3x_3^2 + \lambda_4x_4^2 \;,\; \mu_1(x_1^2+x_2^2) + \mu_3x_3^2 + \mu_4x_4^2).$$

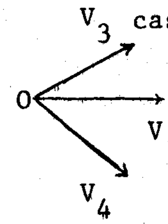
avec $D_{13} \neq 0$, $D_{34} \neq 0$, $D_{41} \neq 0$.

$\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ sont deux quadriques de même axe de révolution et se coupent suivant deux cercles dont les points sont représentés par les éléments de $\tilde{K}$ de la forme : $x = \alpha(\cos\psi\, e_1+\sin\psi\, e_2)+\varepsilon\alpha_3e_3+\alpha_4e_4$ avec $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha^2 = D_{34}$, $\alpha_3^2 = D_{41}$, $\alpha_4^2 = D_{13}$ et $\psi$ décrit $\mathbb{R}$.

<u>Cas $a_1$</u> : Si pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant 4, e_i \in \mathbb{R}^4$ alors $(\lambda_i,\mu_i) \in \mathbb{R}^2$ <u>et</u> $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ <u>contient deux cercles réels si</u> $D_{34}$, $D_{41}$, $D_{13}$ <u>sont tous de même signe</u>




$\boxed{\text{Cas } a_1}$ : O est a l'intérieur du triangle dont les sommets sont les extrémités de $V_1$, $V_3$, $V_4$




cas à exclure $K=\{0\}$

<u>Cas $a_2$</u> : $e_3 = \bar{e}_4$ et donc $(\lambda_1,\mu_1) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_4$, $\mu_3 = \bar{\mu}_4$, il s'en suit que $D_{13} = \overline{D_{14}}$ et $(iD_{34}) \in \mathbb{R}^*$.

Si $D_{34} = i\alpha_o^2$ on pose $\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \alpha_o$ et $\alpha_3 = i\bar{\alpha}_4$ (car $\alpha_3^2 = -\bar{\alpha}_4^{2}$).

Les deux cercles de $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ sont représentés par les points :

$$x = e^{\frac{i\pi}{4}} \left[ \alpha_o(\cos\psi e_1 + \sin\psi e_2) + \varepsilon\, e^{\frac{i\pi}{4}} \bar{\alpha}_4 e_3 + e^{-\frac{i\pi}{4}} \alpha_4 \overline{e_3} \right]$$

l'un est réel $(\varepsilon = 1)$, l'autre est imaginaire $(\varepsilon = -1)$.

Si $D_{34} = -i\alpha_o^2$ on multiplie par $i$ l'expression des éléments de $\tilde{K}$ et on trouve le même résultat.

<u>Finalement</u>, <u>dans le cas $a_1$</u>, $Q_1 \cap Q_2$ <u>est formé de deux cercles distincts</u>, <u>dans le cas $a_2$</u>, $Q_1 \cap Q_2$ <u>est formé d'un seul cercle</u>

b) <u>Dans le cas a</u>, $C$ <u>de</u> $L_s^3(4,2)$ <u>est tel que</u> $C = \phi_1(v,0)$ <u>où</u> $v \in L(4,\mathrm{End}(2))$ <u>si et seulement si les conditions suivantes sont remplies</u>.

On note $c_{ijk} = C(e_i,e_j,e_k)$

- $c_{ijk} = 0$ pour tous les $i,j,k$ distincts
- $c_{111} = 3c_{112}$, $c_{222} = 3c_{221}$, $c_{311} = c_{322}$, $c_{422} = c_{411}$

$$- D_{43}c_{111} + 3D_{41}c_{133} + 3D_{13}c_{144} = 0$$

$$- D_{34}c_{222} + 3D_{31}c_{244} + 3D_{14}c_{233} = 0$$

$$- D_{14}c_{333} + 3D_{43}c_{311} + 3D_{31}c_{344} = 0$$

$$- D_{13}c_{444} + 3D_{34}c_{422} + 3D_{41}c_{433} = 0 .$$

*Démonstration* :

$e_1$ et $e_2$ jouent le même rôle ainsi que $e_3$ et $e_4$ dans la forme de $f_2$. On note $A = \frac{1}{2} D^2 f_2(0)$. Supposons que $C = \phi_1(v,0)$

- si $i$, $j$, $k$ sont distincts alors

$$c_{ijk} = v(e_i)A(e_j,e_k) + v(e_j)A(e_k,e_i) + v(e_k)A(e_i,e_j) = 0.$$

- les $c_{iij}$ font apparaître $v(e_j)$

faisons $j = 1$ : $c_{111} = v(e_1)A(e_1,e_1) = v(e_1)V_1$

et pour $i = 2,3,4$ $c_{1ii} = \frac{1}{3}(v(e_1)A(e_i,e_i)+2v(e_i)A(e_1,e_i)) = \frac{1}{3} v(e_1)V_i$

et puisque $V_2 = V_1$ , on a $c_{111} = 3c_{122}$

et donc en faisant $j = 2$ : $c_{222} = 3c_{211}$

faisons $j = 3$ $c_{333} = v(e_3)V_3$

et pour $i = 1,2,4$ $c_{3ii} = \frac{1}{3} v(e_3)V_i$

et donc $c_{311} = c_{322}$

en faisant $j = 4$ : $c_{411} = c_{422}$ .

On a ainsi trouvé des conditions nécessaires sur les coefficients de $C$ pour que $v$ existe. Cherchons les autres conditions qui permettront de calculer $v$ en fonction des coefficients de $C$ :

On pose $v(e_i) = \gamma_i$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 2$, $\gamma_i(e'_j) = \gamma^1_{ij} e'_1 + \gamma^2_{ij} e'_2$ .

Calcul de $v(e_1)$. Si on suppose que $\overrightarrow{c_{111}} = \overrightarrow{3c_{122}}$ , pour $k = 1,2$

$\gamma^k_{11}$ et $\gamma^k_{12}$ n'apparaissent plus que dans trois équations :

$$c^k_{111} = \gamma^k_{11}\lambda_1 + \gamma^k_{12}\mu_1$$

$$c^k_{133} = \frac{1}{3}(\gamma^k_{11}\lambda_3 + \gamma^k_{12}\mu_3)$$

$$c^k_{144} = \frac{1}{3}(\gamma^k_{11}\lambda_4 + \gamma^k_{12}\mu_4)$$

les $\gamma^k_{1j}$ existent si et seulement si $\begin{vmatrix} c^k_{111} & \lambda_1 & \mu_1 \\ 3c^k_{133} & \lambda_3 & \mu_3 \\ 3c^k_{144} & \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix} = 0$

c'est-à-dire si $D_{34}c_{111} - 3D_{14}c_{133} + 3D_{13}c_{144} = 0.$

De même $v(e_2)$ se calcule si

$$D_{43}c_{222} - 3D_{13}c_{244} + 3D_{14}c_{233} = 0.$$

<u>Calcul de $v(e_3)$</u>. Si on suppose que $c_{311} = c_{322}$, pour $k = 1,2$ $\gamma^k_{31}$ et $\gamma^k_{32}$ n'apparaissent plus que dans trois équations :

$$c^k_{333} = \gamma^k_{31}\lambda_3 + \gamma^k_{32}\mu_3$$

$$c^k_{311} = \frac{1}{3}(\gamma^k_{31}\lambda_1 + \gamma^k_{32}\mu_1)$$

$$c^k_{344} = \frac{1}{3}(\gamma^k_{31}\lambda_4 + \gamma^k_{32}\mu_4)$$

les $\gamma^k_{3j}$ existent si et seulement si $\begin{vmatrix} c^k_{333} & \lambda_3 & \mu_3 \\ 3c^k_{311} & \lambda_1 & \mu_1 \\ 3c^k_{344} & \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix} = 0$

c'est-à-dire si $D_{14}c_{333} + 3D_{43}c_{311} + 3D_{31}c_{344} = 0.$

De même $v(e_4)$ se calcule si

$$D_{13}c_{444} + 3D_{34}c_{422} + 3D_{41}c_{433} = 0.$$

c) <u>Dans le cas $a_1$, si $C$ de $L^3_s(4,2)$ s'annule sur</u> K, <u>alors les conditions exprimées au b sont remplies.</u>

En effet, pour tout $\psi$ de $\mathbb{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$, on a

$C(\alpha(e_1 \cos\psi + e_2 \sin\psi) + \varepsilon\,\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4)^3 = 0$

avec $\alpha^2 = D_{34}$, $\alpha_3^2 = D_{41}$, $\alpha_4^2 = D_{13}$.

<u>La somme des termes sans</u> $\varepsilon$ <u>est nulle</u> : c'est-à-dire

$$(1)\quad \alpha^3\left[\cos^3\psi\, c_{111} + \sin^3\psi\, c_{222} + 3\cos^2\psi \sin\psi\, c_{112} + 3\cos\psi \sin^2\psi\, c_{112}\right]$$
$$+ 3\alpha^2\alpha_4\left[\cos^2\psi\, c_{114} + \sin^2\psi\, c_{224} + 2\sin\psi\cos\psi\, c_{124}\right]$$
$$+ 3\alpha\alpha_3^2\left[\cos\psi\, c_{133} + \sin\psi\, c_{233}\right] + 3\alpha\alpha_4^2\left[\cos\psi\, c_{144} + \sin\psi\, c_{244}\right]$$
$$+ 3\alpha_3^2\alpha_4 c_{334} + \alpha_4^3 c_{444} = 0.$$

<u>La somme des termes avec</u> $\varepsilon$ <u>en facteur est nulle</u> : c'est-à-dire

$$(2)\quad \alpha_3^3 c_{333} + 3\alpha_3\alpha_4^2 c_{344} + 3\alpha_3\alpha^2\left[\cos^2\psi\, c_{113} + \sin^2\psi\, c_{223} + 2\sin\psi\cos\psi\, c_{123}\right]$$
$$+ 6\alpha\alpha_3\alpha_4\left[\cos\psi\, c_{134} + \sin\psi\, c_{234}\right] = 0.$$

Dans (2), on fait $\cos\psi = 0$, $\sin\psi = \varepsilon'$ $(\varepsilon' = \pm 1)$, on obtient :

$\alpha_3^3 c_{333} + 3\alpha_3\alpha_4^2 c_{344} + 3\alpha_3\alpha^2 c_{223} + 6\varepsilon'\alpha\alpha_3\alpha_4 c_{234} = 0$

donc $\boxed{c_{234} = 0}$

et $\alpha_3^2 c_{333} + 3\alpha_4^2 c_{344} + 3\alpha^2 c_{223} = 0$ (calcul de $v(e_3)$)

puis on fait sur $\psi = 0$, $\cos\psi = \varepsilon'$, on obtient

$\alpha_3^3 c_{333} + 3\alpha_3\alpha_4^2 c_{344} + 3\alpha_3\alpha^2 c_{113} + 6\varepsilon'\alpha\alpha_3\alpha_4 c_{134} = 0$

donc $\boxed{c_{134} = 0}$

et $\alpha_3^2 c_{333} + 3\alpha_4^2 c_{344} + 3\alpha^2 c_{113} = 0$, soit par différence avec l'avant

dernière expression $\boxed{c_{223} = c_{113}}$ on reporte le tout dans (2) et

on obtient $\boxed{c_{123} = 0}$ .

Dans (1) on fait $\cos\psi = 0$, $\sin\psi = \varepsilon'$, on obtient :

$$\varepsilon'\alpha^3 c_{222} + 3\alpha^2\alpha_4 c_{224} + 3\varepsilon'\alpha\alpha_3^2 c_{233} + 3\varepsilon'\alpha\alpha_4^2 c_{244} + 3\alpha_3^2\alpha_4 c_{334} + \alpha_4^3 c_{444} = 0,$$

on en tire

$$\alpha^2 c_{222} + 3\alpha_3^2 c_{332} + 3\alpha_4^2 c_{244} = 0 \qquad \text{(calcul de } v(e_2)\text{)}$$

et $$3\alpha^2 c_{224} + 3\alpha_3^2 c_{334} + \alpha_4^2 c_{444} = 0 \qquad \text{(calcul de } v(e_4)\text{)}$$

puis on fait $\sin\psi = 0$, $\cos\psi = \varepsilon'$, on obtient

$$\varepsilon'\alpha^3 c_{111} + 3\alpha^2\alpha_4 c_{114} + 3\varepsilon'\alpha\alpha_3^2 c_{133} + 3\varepsilon'\alpha\alpha_4^2 c_{144} + 3\alpha^2\alpha_4 c_{334} + \alpha_4^3 c_{444} = 0$$

on en tire

$$\alpha^2 c_{111} + 3\alpha_3^2 c_{133} + 3\alpha_4^2 c_{144} = 0 \qquad \text{(calcul de } v(e_1)\text{)}$$

et $$3\alpha^2 c_{114} + 3\alpha_3^2 c_{334} + \alpha_4^2 c_{444} = 0$$

par différence de cette dernière expression et de celle permettant le (calcul de $v(e_4)$), on obtient : $\boxed{c_{224} = c_{114}}$ .

On reporte dans (1) :

$$- \alpha^3 \sin^2\psi \cos\psi\, c_{111} - \alpha^3 \sin\psi \cos^2\psi\, c_{222} + 3\alpha^3 \cos^2\psi \sin\psi\, c_{112}$$
$$+ 3\alpha^3 \cos\psi \sin^2\psi\, c_{122} + 6\alpha^2\alpha_4 \sin\psi \cos\psi\, c_{124} = 0$$

donc

$$- \alpha \sin\psi\, c_{111} - \alpha \cos\psi\, c_{222} + 3\alpha \cos\psi\, c_{112} + 3\alpha \sin\psi\, c_{122} + 6\alpha_4 c_{124} = 0$$

et donc $\boxed{c_{124} = 0}$ , $\boxed{c_{111} = 3c_{122}}$ et $\boxed{c_{222} = 3c_{112}}$ .

<u>Ainsi on obtient toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence de</u> $v$ <u>tel que</u> $C = \phi_1(v,0)$.

d) <u>Dans le cas</u> $a_2$, <u>les conditions remplies par</u> $C$ <u>de</u> $L_s^3(4,2)$ <u>s'il s'annule sur</u> $K$ <u>ne suffisent pas à établir l'existence de</u> $v$ <u>de</u> $L(4,\mathrm{End}(2))$ <u>tel que</u> $C = \phi_1(v,0)$.

En effet, les éléments de $K$ dans le cas $a_2$ ont la même forme que ceux de $K$ dans le cas $a_1$ mais avec seulement $\varepsilon = +1$. On n'aura plus les équations (1) et (2) mais une seule équation (3)

((3) = (1) + (2)) et on ne pourra plus montrer par exemple que $c_{ijk} = 0$ pour $i,j,k$ distincts.

**Cas b**

Dans une base $\{e_i\}_{i=1}^4$ de $\mathbb{C}^4$ telle que $e_1 = \bar{e}_3$, $e_2 = \bar{e}_4$, $f_2$ s'écrit :

$$f_2(x) = (\lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_3(x_3^2 + x_4^2),\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2) + \mu_3(x_3^2 + x_4)^2)$$

avec $D_{13} \neq 0$.

$\tilde{K}$ est formé de quatre droites de la forme :

$\alpha(e_1 + \varepsilon ie_2) + \beta(e_3 + \varepsilon' ie_4)$ avec $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$.

$K$ est formé de 2 droites de la forme : $\alpha(e_1 + \varepsilon ie_2) + \bar{\alpha}(e_3 - i\varepsilon e_4)$.

Si pour tout $\alpha$ de $\mathbb{C}$, $C$ de $L_s^3(4,2)$ vérifie

$$C(\alpha(e_1 + \varepsilon ie_2) + \bar{\alpha}(e_3 - \varepsilon ie_4))^3 = 0 \quad \text{alors} \quad 2c_{123} = c_{114} - c_{224}$$

(coefficient de $3\varepsilon i\alpha^2\bar{\alpha}$) mais $c_{123}$ et $c_{114}-c_{224}$ ne sont pas forcément nuls, condition nécessaire à l'existence de $v$ tel que $C = \phi_1(v,0)$.

Donc dans ce cas b, les conditions remplies par $C$ s'il s'annule sur $K$ ne suffisent pas à établir l'existence de $v$.

*Démonstration de 2).-*

**Cas c**

Dans une base $\{e_i\}_{i=1}^4$ de $\mathbb{C}^4$ telle que $e_3 = \bar{e}_1$, $e_4 = \bar{e}_2$, $f_2$ s'écrit :

$$f_2(x) = (2\lambda x_1x_2 + (1+d\lambda)x_2^2 + 2\bar{\lambda}x_3x_4 + (1+\bar{d}\bar{\lambda})x_4^2,\ 2x_1x_2 + d\,x_2^2 + 2x_3x_4 + \bar{d}\,x_4^2)$$

$x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ appartient à $\tilde{K}$ si et seulement si

$$x_2^2 + 2(\bar{\lambda} - \lambda)x_3x_4 + (1+\bar{d}(\bar{\lambda}-\lambda)x_4^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2(\lambda-\bar{\lambda})x_1x_2 + (1+d(\lambda-\bar{\lambda})x_2^2 + x_4^2 = 0.$$

On pose $u = 1 + d(\lambda-\bar{\lambda})$ et $v = \bar{\lambda}-\lambda$ alors $\bar{v} = -v$ $(v \neq 0)$.

Les éléments de la forme $x_2 = x_4 = 0$ appartiennent à $\tilde{K}$, pour les autres on pose $x_2 = 2v\alpha^2\beta$, $x_4 = 2v\alpha\beta^2$ avec $\alpha\beta \neq 0$ et on en déduit $x_1$ et $x_2$. Les éléments de $\tilde{K}$ sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = \alpha e_1 + \beta e_3 \quad \text{ou} \\ x = (\beta^2+u\alpha^2)\beta e_1 + 2v\alpha^2\beta e_2 - (\alpha^2+\bar{u}\beta^2)\alpha e_3 + 2v\alpha\beta^2 e_4 \,. \end{cases}$$

Ceux de $K$ ont la même forme avec $\beta = \bar{\alpha}$. D'après la forme de $f_2$, les vecteurs $(e_1,e_2)$ jouent le même rôle que $(e_3,e_4)$. Il est clair que $C$ de $L^3_s(4,2)$ se met sous la forme $C = \phi_1(v,0)$ où $v \in L(4,\mathrm{End}\ 2)$ si et seulement si

(i) $c_{111} = c_{333} = c_{113} = c_{114} = c_{133} = c_{233} = 0$

(ii) on peut calculer $v(e_1)$ et $v(e_2)$ (et donc $v(e_3)$ et $v(e_4)$) en fonction des coefficients de $C$.

Nous utiliserons le lemme suivant (déjà employé au cas b).

*Lemme*.- Soit $P_n$ un polynôme homogène de degré $n$ des variables $(X,Y)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si $P_n(\alpha,\bar{\alpha}) = 0$ pour tout $\alpha$ de $\mathbb{C}$ alors $P_n$ a tous ses coefficients nuls.

*Démonstration* : On pose pour $\alpha \neq 0$, $\alpha = \rho\, e^{i\theta}$ avec $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$ $P_n(\alpha,\bar{\alpha}) = \rho^n e^{-in\theta} P_n(e^{2i\theta},1)$ et la fonction polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $f_n$ définie par $f_n(x) = P_n(x,1)$ s'annule pour tout $x$ de $\mathbb{C}$ tel que $|x| = 1$, il s'en suit que $f_n \equiv 0$.

i) est réalisé si $C$ s'annule sur $K$ : Pour tout $\alpha$ de $\mathbb{C}$ on a $C(\alpha e_1 + \bar{\alpha} e_3)^3 = 0$, on en déduit, d'après le lemme que $c_{111} = c_{113} = c_{133} = c_{333} = 0$. On a aussi pour tout $(\alpha,\beta)$ tel que $\beta = \bar{\alpha}$ :

(1) $C((\beta^2 + u\,\alpha^2)\beta e_1 + 2v\alpha^2\beta e_2 - (\alpha^2+\bar{u}\beta^2\alpha)e_3 + 2v\alpha\beta^2 e_4)^3 = 0$.

D'après le lemme, le coefficient de $3\alpha\beta^8$ dans l'équation (1) est nul, c'est-à-dire :

$- \bar{u}\, c_{113} + 2v\, c_{114} = 0$ donc $c_{114} = 0$, de même celui de $3\alpha^8\beta$ est nul :

$+ u\, c_{331} + 2v\, c_{332} = 0$ et donc $c_{332} = 0$. c.q.f.d.

ii) Montrons l'existence de $v(e_1)$ et de $v(e_2)$. On les trouve dans les équations suivantes :

$$c_{112} = \frac{1}{3}\,(2v(e_1)A(e_1,e_2) + v(e_2)A(e_1,e_1)) = \frac{2}{3}\,v(e_1)\,\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$$

$$c_{144} = \frac{1}{3}\,(2v(e_4)A(e_1,e_4) + v(e_1)A(e_4,e_4)) = \frac{1}{3}\,v(e_1)\,\begin{pmatrix}1+\bar{d}\bar{\lambda}\\ \bar{d}\end{pmatrix}$$

$$c_{134} = \frac{1}{3}\,(v(e_1)A(e_3,e_4) + v(e_3)A(e_4,e_1) + v(e_4)A(e_1,e_3)) = \frac{1}{3}\,v(e_1)\,\begin{pmatrix}\bar{\lambda}\\1\end{pmatrix}$$

$$c_{122} = \frac{1}{3}\,(v(e_1)A(e_2,e_2) + 2v(e_2)A(e_1,e_2)) = \frac{1}{3}\,v(e_1)\,\begin{pmatrix}1+d\lambda\\ d\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\,v(e_2)\,\begin{pmatrix}\bar{\lambda}\\1\end{pmatrix}$$

$$c_{222} = v(e_2)A(e_2,e_2) = v(e_2)\,\begin{pmatrix}1+d\lambda\\ d\end{pmatrix}$$

$$c_{234} = \frac{1}{3}\,(v(e_2)A(e_3,e_4) + v(e_3)A(e_4,e_2) + v(e_4)A(e_2,e_3)) = \frac{1}{3}\,v(e_2)\,\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$$

$$c_{244} = \frac{1}{3}\,(v(e_2)A(e_4,e_4) + 2v(e_4)A(e_2,e_4)) = \frac{1}{3}\,v(e_2)\,\begin{pmatrix}1+\bar{d}\bar{\lambda}\\ \bar{d}\end{pmatrix} .$$

Pour assurer la compatibilité des trois premières équations définissant $v(e_1)$, on doit avoir pour $k = 1,2$

$$\begin{vmatrix} c^k_{112} & \lambda & 1 \\ 2c^k_{144} & 1+\bar{d}\bar{\lambda} & \bar{d} \\ 2c^k_{134} & \bar{\lambda} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

soit $c_{112} - 2(\lambda-\bar{\lambda})c_{144} - (1+\bar{d}(\bar{\lambda}-\lambda))c_{134} = 0$ c'est-à-dire :

(2) $c_{112} + 2v\, c_{144} - 2\bar{u}\, c_{134} = 0.$

Pour assurer la compatibilité des trois dernières équations définissant $v(e_2)$ on doit avoir pour $k = 1,2$ :

$$\begin{vmatrix} c^k_{222} & 1+d\lambda & d \\ 3c^k_{234} & \bar{\lambda} & 1 \\ 3c^k_{244} & 1+\bar{d}\bar{\lambda} & \bar{d} \end{vmatrix} = 0$$

soit $-c_{222} - 3(\bar{d}-d + (\lambda-\bar{\lambda})d\bar{d})c_{234} + 3(1+(\lambda-\bar{\lambda})d)c_{244} = 0$

et puisque $d = \frac{1-u}{v}$ : $-c_{222} - 3\,\frac{u\bar{u}-1}{v}\,c_{234} + 3u\,c_{244} = 0.$

Montrons que $v(e_1)$ est bien défini, le coefficient de $\alpha^2\beta^7$ de (1) est nul : on obtient (2). De même, montrons que $v(e_2)$ est bien défini, on considère le coefficient nul de $\alpha^4\beta^5$ de (1) : on obtient après simplification :

(3) $- uc_{112} + \bar{v}c_{221} + u\bar{v}\,c_{144} + 2v\bar{v}\,c_{244} + (1+u\bar{u})c_{134} + 2v\bar{u}\,c_{234} = 0.$

De même le coefficient de $\alpha^6\beta^3$ de (1) est nul : on obtient

(4) $4v\bar{v}\,c_{222} - 3u^2\,c_{112} + 6\bar{v}u\,c_{221} + 6u\,c_{134} + 12v\,c_{234} = 0.$

On fait alors la combinaison linéaire : $3u^2 \times (2) + 6u \times (3) - (4)$ :

$$\begin{array}{lll} (3u^2) & \times & [c_{112} + 2vc_{144} + -2\bar{u}c_{134} = 0] \\ (6u) & \times & [-uc_{112} + u\bar{v}c_{144} + (1+u\bar{u})c_{134} + \bar{v}c_{221} + 2v\bar{v}c_{244} + 2v\bar{u}c_{234} = 0] \\ (-1) & \times & [-3u^2c_{112} + \quad + 6uc_{134} + 6\bar{v}uc_{221} + 12vc_{234} + 4v\bar{v}c_{222} = 0] \end{array}$$

les coefficients de $c_{112}, c_{144}, c_{134}, c_{221}$ sont nuls, il reste

$$3u\bar{v}c_{244} + 3(u\bar{u}-1)c_{234} - \bar{v}c_{222} = 0$$

c'est-à-dire la condition d'existence de $v(e_2)$.

De plus, si $C$ vérifie (1), $v(e_1)$ et $v(e_2)$ étant précédemment définis on a bien $c_{122} = \frac{1}{3}\,v(e_1)\binom{1+d\lambda}{d} + \frac{2}{3}\,v(e_2)\binom{\lambda}{1}$.
En effet (3) est réalisé et si on remplace dans (3) $c_{112}, c_{221}, c_{144}, c_{244}, c_{134}, c_{234}$ en fonction de $v(e_1)$ et de $v(e_2)$, on trouve :

$$\frac{1}{3}\, v(e_1) \begin{bmatrix} \bar{v}(1+d\lambda) & - 2u\lambda & + u\bar{v}(1+\bar{d}\bar{\lambda}) & + (1+u\bar{u})\bar{\lambda} \\ \bar{v}\, d & - 2u & + u\bar{v}\quad \bar{d} & + 1+u\bar{u} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3}\, v(e_2) \begin{bmatrix} 2\bar{v}\,\lambda & + 2v\bar{v}(1+\bar{d}\bar{\lambda}) & + 2v\bar{u}\bar{\lambda} \\ 2\bar{v} & + 2v\bar{v}\quad \bar{d} & + 2v\bar{u} \end{bmatrix}$$

on vérifie facilement que puisque $d = \frac{1-u}{v}$ , les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qu'affectent $v(e_1)$ et $v(e_2)$ sont nuls. On peut donc conclure que si $C$ s'annule sur $K$ on peut définir $v(e_1)$ et $v(e_2)$ par les 3 premières et 3 dernières équations en $c_{112}$, $c_{144}$, $c_{134}$ et $c_{222}$, $c_{234}$, $c_{244}$, l'équation en $c_{122}$ est puisque $\bar{v} \neq 0$ une combinaison linéaire des autres.

<u>Finalement, on a montré que si</u> $C$ <u>s'annule sur</u> $K$ <u>il existe</u> $v$ <u>de</u> $L(4,End(2))$ <u>tel que</u> $C = \phi_1(v,0)$.

*Remarques* :

1) Nous venons de montrer que dans les cas $a_1$ et $c$, la <u>suite suivante est exacte</u> :

$$0 \xrightarrow{i} L^1_s(4,End(2)) \xrightarrow{\bar{\bar{\phi}}_1} L^3_s(4,2) \xrightarrow{S_1} L^3_s(4,2)/K \longrightarrow 0$$

où $\bar{\bar{\phi}}_1(v) = \phi_1(v,0)$

et $S_1(C) = 0$ si et seulement si $C$ s'annule sur $K$.

2) <u>Dans le cas $a_1$</u>, on peut aussi montrer que la suite suivante est exacte

$$0 \xrightarrow{i} L^2_s(4,End(2)) \xrightarrow{\bar{\bar{\phi}}_2} L^4_s(4,2) \xrightarrow{S_2} L^4_s(4,2)/K \longrightarrow 0$$

où $\bar{\bar{\phi}}_2(v) = \phi_2(v,0)$

et $S_2(C) = 0$ si et seulement si $C$ s'annule sur $K$.

Dans ce cas si $f$ de $E_4^2$ réalisation de $f_2$ est telle que $D^3f(0) \in \mathrm{Im}\,\phi_1$ (c'est-à-dire $D^3f(0)\,(e_1 + \varepsilon\, ie_2)^3$ sont proportionnels à $V_1 = (\lambda_1, \mu_1)$) alors il existe $h$ de classe $C^2$ et $v$ de classe $C^1$ tels que $h(0) = 0$, $Dh(0) = 1_4$, $v(0) = 1_2$ et $f(x) = v(x) f_2(h(x))$ pour tout $x$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^4$. On choisit $Dv(0)$ et $D^2h(0)$ tels que $\phi_1(Dv(0), \frac{1}{2} D^2h(0)) = \frac{1}{3!} D^3f(0)$.

On peut chercher à quelle condition sur $D^4f(0)$ on peut construire $h$ et $v$ précédemment décrits mais cette fois de classe respective $C^3$ et $C^2$. Cette condition est de la forme : $D^4f(0)(e_1 + \varepsilon\, ie_2)^4 + \varepsilon B + C$ proportionnels à $V_1$, où $B$ et $C$ de $\mathbb{C}^2$ dépendent (non linéairement) de $D^3f(0)$ et de $f_2$, et ne dépendent pas du choix de $(Dv(0), \frac{1}{2} D^2h(0))$ dans $\phi_1^{-1}(\frac{1}{3!} D^3f(0))$.

# CONCLUSION

## *PROBLEMES OUVERTS.*

Dans le théorème I, nous avons montré que si un jet $f_r$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f_r(0) = 0$, est v-suffisant (resp. $C^o$-suffisant) dans $E^p_r$, pour tout $q$ de $\mathbb{N}^*$, tout relèvement $f_{k(q)}$ d'ordre $k(q) = r-1+q(r-s_{f_r}+1)$ de $f_r$ est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. $C^q$-suffisant) dans $E^p_{k(q)}$.

Dans le chapitre II, nous avons considéré les jets homogènes $f_s$ d'ordre $s$. Nous avons mis en évidence une condition $\tilde{H}_s$ (resp. $\tilde{H}'_s$), plus forte que $H_s$ (resp. $H'_s$), telle que si $f_s$ la vérifie, il existe un entier $\ell$ tel que $\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) soit surjective (prop. 3 du chapitre II). Alors si $\ell \geq 1$, pour tout entier $q$, $q$ fini et supérieur ou égal à $\ell$, tout relèvement $f_{k(\ell)}$ d'ordre $k(\ell)$ de $f_s$, est suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact (resp. $C^q$-suffisant) dans $E^p_{k(q)}$ et si $\ell = 0$, $f_s$ est suffisant pour la $C^\infty$-équivalence de contact (resp. $C^\infty$-suffisant) dans $E^p$ (resp. dans $E$).

Cette étude des jets homogènes pourrait se prolonger de deux manières :

1°) Lorsque $\phi_\ell$ est surjective ou encore $m^{s+\ell} \subset J_p(f_s)$ pour $\ell \geq 1$, peut-on avoir une $C^\infty$-équivalence de contact entre $f_{k(\ell)}$ et $f$ réalisation de $f_{k(\ell)}$ dans $E^p$ ? De même $\bar{\phi}_\ell$ étant surjective (ce qui équivaut alors à $m^{s+\ell} \subset H_1(f_s))f_{k(\ell)}$ peut-il être $C^\infty$-suffisant dans $E$ ?

2°) Si $f$ est une réalisation analytique du jet homogène $f_s$ et si

$\phi_\ell$ (resp. $\bar{\phi}_\ell$) est surjective pour un entier $\ell$, h germe en 0 de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, v germe en 0 de $\mathbb{R}^n$ dans End(p), tels que $h(0) = 0$ et $f(x) = v(x).f_{k(\ell)}(h(x))$, peuvent-ils être analytiques ? En effet, on a vu, lors de la démonstration du théorème 2 qu'il existe des relations de récurrence entre les dérivées de f, de h et de v.

Le troisième problème que nous poserons concerne les jets non homogènes : soit $f_r$ un jet de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, tel que $f_r(0) = 0$, vérifiant $H_r$ (resp. $H'_r$) et ne vérifiant pas $H_s$ (resp. $H'_s$) (on pose ici $s = s_{f_r}$ ). Sous quelle condition supplémentaire, vérifiée par $f_r$, existe-t-il un entier $r'$, $r' \geq r$, et un relèvement $f_{r'}$ de $f_r$ d'ordre $r'$ tel que si $q$ est l'entier tel que $k(q) \leq r' < k(q+1)$, $f_{r'}$ soit suffisant pour la $C^{q+1}$-équivalence de contact (resp. $C^{q+1}$-suffisant) dans $\mathcal{E}^p_\mu$ pour $\mu$ assez grand. Plus généralement, pourra-t-on étendre aux jets non homogènes les résultats du théorème 3 : autrement dit la propriété précédente sera-t-elle vraie pour tout relèvement $f_{r'}$ de $f_r$ et tout $q'$, $q' \geq q+1$ ?

Les méthodes que nous avons utilisées au chapitre II pour résoudre ce type de problème pour les jets homogènes v-suffisants ne peuvent se transposer au cas où $r > s$. Cependant une piste nous est suggérée par BOCHNAK [6]. En utilisant ses résultats, on peut dire que, s'il existe un entier $\alpha$ tel que $m^\alpha \subset H_1(f_r)$, le jet d'ordre $2\alpha$ de $f_r$ est $C^q$-suffisant dans $\mathcal{E}_{q+2\alpha+1}$ pour tout q, $1 \leq q \leq \infty$. Pour $p > 1$, s'il existe un entier $\alpha$ tel que $m^\alpha \subset J_p(f_r)$, le jet d'ordre $2\alpha$ de $f_r$, $f_{2\alpha}$, est $C^q$-rigide dans $\mathcal{E}^p_{q+2\alpha+1}$ pour tout q, $1 \leq q \leq \infty$. Alors il existe un difféomorphisme h de classe $C^q$ qui transforme le germe en 0 des zéros de $f_{2\alpha}$ en le germe en 0 des zéros de $f$, réalisation quelconque de $f_{2\alpha}$ dans $\mathcal{E}_{q+2\alpha+1}$. Ceci conduit à la question suivante : la condition $m^{\alpha} \subset J_p(f_r)$ est-elle suffisante pour qu'un jet de $f_r$ soit suffisant pour une $C^q$-équivalence de contact ? Remarquons que si $f$, un jet d'ordre $k$, vérifiant $H_r$ pour $r \leqslant k$, est déterminé pour la $C^{\infty}$-équivalence de contact dans $\mathcal{E}^p$, alors il existe un entier $\ell$, $\ell \geqslant 1$ tel que le jet d'ordre $k(\ell)$ de $f$ en $0$, $f_{k(\ell)}$, soit suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact dans $\mathcal{E}^p_{k(q)}$, pour tout $q$, $q \geqslant \ell$. On peut ainsi envisager un quatrième problème : celui de la $C^{\infty}$-équivalence de contact dans $\mathcal{E}^p$.

MAGNUS et BOCHNAK ont acquis des résultats sur les germes de classe $C^{\infty}$, du point de vue de l'équivalence polaire et de la $C^{\infty}$-rigidité respectivement.

Ainsi MAGNUS a montré que si $M_{r-1} \subset J_f$ (resp. $M_{r-1} \subset I_f$) le germe $f$ de $\mathcal{E}^p$ est $r$-déterminé pour la $p$-équivalence (resp. la $p$-équivalence stricte (cf. page 13). Quant à BOCHNAK, il a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ de $\mathcal{E}^p$ soit $C^{\infty}$-rigide (resp. $C^{\infty}$-déterminé) est qu'il existe un entier $\alpha$ tel que $m^{\alpha} \subset J_p(f)$ (resp. $m^{\alpha} \subset \mathcal{H}_1(f)$). Ceci nous amène à poser les problèmes suivants pour $p > 1$ :

- La condition : $m^{\alpha} \subset J_p(f)$ (resp. $M_{r-1} \subset J_p$ ou $M_{r-1} \subset I_f$) permet-elle d'obtenir une $C^{\infty}$-équivalence de contact entre $f$ et l'un de ses jets ? Dans l'affirmative, quelle est la longueur de ce jet ?
- Plus généralement, à quelle condition un germe $f$ de $\mathcal{E}^p$ est-il déterminé pour la $C^{\infty}$-équivalence de contact ?

# ANNEXE I

--------

## RESULTATS SUR LES SECTIONS

$E$ et $F$ étant des espaces euclidiens réels, de dimension $n$ et $p$ et $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$ les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $u$ est surjective
2) $u$ admet une section
3) $u.u^{*}$ est un automorphisme de $F$
4) $u^{*}$ est injective.

$\mathcal{S}$, l'ensemble des applications linéaires surjectives de $E$ sur $F$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$. L'application $\sigma$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{L}(F,E)$ définie par $\sigma(u) = u^{*}.(u.u^{*})^{-1}$ est de classe $C^{\infty}$, $\sigma(u)$ est la section orthogonale de $u$. De toutes les sections de $u$, $\sigma(u)$ est celle de norme minimale.

*Remarque* :

Une conséquence des propriétés de $\sigma$, qui nous sera utile dans le théorème 2, chapitre II est la suivante :

Si une application $u$ d'un ouvert $U$ de $E$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ de classe $C^{\mu}$, $\mu \geq 0$, est telle que pour tout $x$ de $\Omega$, où $\Omega \subset U$, $u(x)$ soit surjective, alors il existe un voisinage $U'$ de $\Omega$, $\Omega \subset U' \subset U$ et une application $\bar{\sigma}$ de $U'$ dans $\mathcal{L}(F,E)$, de classe $C^{\mu}$ telle que pour tout $x$ de $U'$, $\bar{\sigma}(x)$ soit une section de $u(x)$.

En effet $U' = u^{-1}(S)$ est un voisinage ouvert de $\Omega$ et $\bar{\sigma} = \sigma.u$ répond aux conditions ci-dessus.

*Lemme 1.-*

Soit $u_o$ de $S$ et $u$ de $L(E,F)$ telle que $||u-u_o|| \leqslant \dfrac{1}{2||\sigma(u_o)||}$, appartient à $S$ et $||\sigma(u)|| \leqslant 2||\sigma(u_o)||$.

Si on pose $S_o = \sigma(u_o)$, on a $||u.S_o - 1_F|| \leqslant \frac{1}{2}$ donc $(u.S_o)$ est un automorphisme de $F$. $S = S_o.(u.S_o)^{-1}$ est une section de $u$.

$$||(u.S_o)^{-1}|| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} ||1_F - (u.S_o)||^n \leqslant 2.$$

D'où $||\sigma(u)|| \leqslant ||S|| \leqslant 2||S_o||$.

*Lemme 2.-*

Pour tout $u$ de $S$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on a :

$$||D^n \sigma(u)|| \leqslant A_n||\sigma(u)||^{n+1} \quad \text{où}$$

$A_n$ est la suite de réels déterminée par $A_o = 1$, $A_1 = 2$, $A_n = 2n\,A_{n-1} + n(n-1)A_{n-2}$.

Soit $\psi$ l'application de $S$ dans $\mathrm{End}(F)$, de classe $C^\infty$, définie par $\psi(u) = (u.u^*)^{-1}$.

On a : $\sigma(u) = u^*.\psi(u)$ ; $(\sigma(u))^* = \psi(u).u$ ; $\psi(u) = (\sigma(u))^*.\sigma(u)$.

En particulier $||u^*.\psi(u)|| = ||\sigma(u)||$ et $||\psi(u)|| \leqslant ||\sigma(u)||^2$ (1).

Pour tout $U$ de $L(E,F)$, on a : $D\psi(u).U = -\psi(u).(U.u^* + u.U^*).\psi(u)$.

Il en résulte que :

$$||D\psi(u)|| \leqslant 2||\sigma(u)||^3 \quad \text{et} \quad ||u^*.D\psi(u).U|| \leqslant 2||\sigma(u)||^2||U|| \qquad (2).$$

De : $D\sigma(u).U = (1_E - \sigma(u).u).U^*.\psi(u) - \sigma(u).U.\sigma(u)$, on déduit que :

$$||D\sigma(u)|| \leq 2||\sigma(u)||^2 . \qquad (3)$$

(Pour (2) et (3) on utilise le fait que $||u^*.(\sigma(u))^*|| = 1$ et $||1_E - \sigma(u).u|| = 1$ puisque ce sont des projecteurs).

On vérifie que pour $U_1,\dots,U_n$ éléments de $L(E,F)$ :

$$D^n\psi(u)(U_1,\dots,U_n) = -\sum_{i=1}^{n} \psi(u).(U_i.u^* + u.U_i^*).D^{n-1}\psi(u)(\hat{U}_i)$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \psi(u).(U_i.U_j^* + U_i^*.U_j).D^{n-2}\psi(u)(\widehat{U_iU_j}) \qquad (4)$$

où $(\hat{U}_i) = (U_1,\dots,U_{i-1},U_{i+1},\dots,U_n)$ et

$(\widehat{U_iU_j}) = (U_1,\dots,U_{i-1},U_{i+1},\dots,U_{j-1},U_{j+1},\dots,U_n)$

Supposons par récurrence que pour $n \geq 3$ :

$$||D^{n-1}\psi(u)|| \leq A_{n-1}||\sigma(u)||^{n+1}$$

$$||u^*.D^{n-1}\psi(u)(U_1,\dots,U_{n-1})|| \leq A_{n-1}||\sigma(u)||^n||U_1||\dots||U_{n-1}||.$$

La relation a été démontrée pour $n = 1$, $n = 2$ : $A_o = 1$, $A_1 = 2$ (voir (1) et (2)).

Grâce à la relation (4), on obtient les mêmes inégalités à l'ordre $n$ avec :

$$A_n = 2n\, A_{n-1} + n(n-1)A_{n-2}.$$

Enfin : $D^n\sigma(u)(U_1,\dots,U_n) = \sum_{i=1}^{n} U_i^*.D^{n-1}\psi(u)(\hat{U}_i) + u^*.D^n\psi(u)(U_1,\dots,U_n) =$

$(1_E - \sigma(u).u).\sum_{i=1}^{n} U_i^*.D^{n-1}\psi(u)(\hat{U}_i) - \sum_{i=1}^{n} \sigma(u).U_i.u^*.D^{n-1}\psi(u)(\hat{U}_i) -$

$\sum_{1\leq i<j\leq n} \sigma(u).(U_iU_j^* + U_i^*U_j).D^{n-2}\psi(u)(\widehat{U_iU_j})$. D'où :

$$||D^n \sigma(u)|| \leq (2n \quad A_{n-1} + n(n-1)A_{n-2})||\sigma(u)||^{n+1} = A_n||\sigma(u)||^{n+1}.$$

*Lemme* 3.-

Soit $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$, $\alpha$ un réel, $\alpha > 0$, tel que pour tout $y$ de $\Sigma_F = \{y \in F/||y|| = 1\}$ on ait : $||u^* y|| \geq \alpha$.

Alors $u$ est surjective et $||\sigma(u)|| = \dfrac{1}{\inf\limits_{y\in\Sigma_F} ||u^* y||}$ .

Pour tout $y$ de $\Sigma_F$ :

$$||u.u^* y|| = \sup_{z\in\Sigma_F} <z,u.u^* y> = \sup_{z\in\Sigma_F} <u^* z,u^* y> \geq ||u^* y|| \geq \alpha^2.$$

$u$ est surjective puisque $(u.u^*)$ est injective et par suite est un automorphisme de $F$.

Nous allons montrer que $||u||^2$ est la plus grande valeur propre de $(u^*.u)$ :

$$||u||^2 = \sup_{x\in\Sigma_E} J(x) \quad \text{où} \quad J(x) = <ux,ux> = <x,u^*.ux>.$$

$J$ atteint son maximum en $x_o$ de $\Sigma_E$. Donc il existe $\lambda$ de $\mathbb{R}$ (multiplicateur de Lagrange) tel que $(u^*.u)(x_o) = \lambda\, x_o$. $\lambda$ est une valeur propre de $(u^*.u)$. Comme $J(x_o) = \lambda$, $||u||^2$ est la plus grande valeur propre de $(u^*.u)$.

De même si on pose $S = \sigma(u)$, $||S||^2$ est la plus grande valeur propre de $S^*.S = (u.u^*)^{-1}$.

Toutes les valeurs propres de $(u.u^*)$ sont réelles et strictement positives.

Si on les appelle $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, on a :

$$||S||^2 = \sup_{1\leq i\leq p} \left(\frac{1}{\lambda_i}\right) = \frac{1}{\inf\limits_{1\leq i\leq p} (\lambda_i)} .$$

En raisonnant comme dans l'étude du maximum de $J$ sur $\Sigma_E$, on montre que

$$\inf_{y\in\Sigma_F} ||u^* y||^2 = \sum_{1\leq i\leq p} (\lambda_i) .$$

*Remarque* :

Si $\operatorname{Inf}_{y\in\Sigma_F} ||u^* y|| = 0$, alors $(u.u^*)$ admet $0$ pour valeur propre. Ce n'est pas un automorphisme de $E$. Donc $u$ n'est pas surjective. Et réciproquement.

# ANNEXE II

-------

## I. *Liens entre* $H_r$, $H'_r$, $K_r$, $K'_r$.

Pour tout $f$ de $E^p_\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant \infty$, $r$ de $\mathbb{R}$, $r \geqslant 1$, $\alpha$ de $\bar{\mathbb{R}}$, $0 < \alpha \leqslant \infty$, on pose :

$$W^r_\alpha(f) = \{x \neq 0 / \|f(x)\| \leqslant \alpha \|x\|^r\} .$$

Rappelons que :

$f$ vérifie $K_r$ s'il existe des réels $w$ et $\varepsilon$, $w > 0$, $\varepsilon > 0$ et un voisinage $V$ de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x$ de $V \cap W^r_w(f)$ :

$$d\left[(\mathrm{grad}\ f^1)(x), \ldots, (\mathrm{grad}\ f^p)(x)\right] \geqslant \varepsilon \|x\|^{r-1} .$$

(Pour $p$ vecteurs $z_1, \ldots, z_p$ de $\mathbb{R}^n$, $d(z_1, \ldots, z_p)$ est la borne inférieure des distances de $z_i$ au sous-espace vectoriel engendré par $\{z_j / j \neq i\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$).

On dira que $f$ vérifie $K'_r$ si elle vérifie $K_r$ pour $w = \infty$ (alors $V \cap W^r_\infty(f) = V - \{0\}$).

Les travaux sur les jets suffisants utilisent tous l'hypothèse $K_r$ introduite par T.C. KUO. ANTOINE [3] l'a formulée sous la forme $H_r$ plus commode pour le contrôle de la section de $Df(x)$ quand $x$ tend vers $0$.

$f$ vérifie $H_r$ s'il existe des réels $\alpha$ et $C$, $\alpha > 0$, $C > 0$ et un voisinage $V$ de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x$ de $V \cap W^r_\alpha(f)$, $Df(x)$ admette une section $S(x)$ avec

$$\|S(x)\| \leqslant \frac{C}{\|x\|^{r-1}} .$$

$f$ <u>vérifie</u> $H'_r$ <u>si elle vérifie</u> $H_r$ <u>pour</u> $\alpha = \infty$ .

<u>*Proposition 1.-*</u>

<u>Soit</u> $f$ <u>de</u> $E^p_\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant \infty$ et $r$ un réel, $r \geqslant 1$.

$f$ <u>vérifie</u> $K_r$ <u>(resp.</u> $K'_r$) <u>si et seulement si elle vérifie</u> $H_r$ <u>(resp.</u> $H'_r$).

<u>*Démonstration :*</u>

$\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne usuelle, $z_1,\ldots,z_p$ étant $p$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose
$G(z_1,\ldots,z_p) = \det[<z_i,z_j>]$ ; on a $G(z_1,\ldots,z_p) \geqslant 0$.

Le carré de la distance de $z_i$ au sous-espace vectoriel engendré par $\{z_j / j \neq i\}$ est :

$$\frac{G(z_1,\ldots,z_p)}{G(z_1,\ldots,\hat{z}_i,\ldots,z_p)} .$$

D'où $$\Big(d(z_1,\ldots,z_p)\Big)^2 = \frac{G(z_1,\ldots,z_p)}{\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant p} G(z_1,\ldots,\hat{z}_i,\ldots,z_p)} .$$

Pour $x$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose $u = Df(x)$ et $z_i = (\mathrm{grad}\, f^i)(x)$.
Alors $u.u^* = [<z_i,z_j>]$.
$(u.u^*)$ admet $p$ valeurs propres réelles, positives ou nulles :
$\lambda_1,\ldots,\lambda_p$.

a) Supposons que $f$ vérifie $K_r$ :
Si $x \in V \cap W^r_w(f)$, $G(z_1,\ldots,z_p) > 0$, donc $(u.u^*)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^p$. $Df(x)$ admet une section $S(x)$ : $S(x) = u^*(u.u^*)^{-1}$.
D'après le lemme 3 de l'annexe 2 : $||S(x)||^2 = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant p} (\frac{1}{\lambda_i})$.

En considérant le polynôme caractéristique de $(u.u^*)$ et l'équation aux inverses on a :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} G(z_1,\dots,\hat{z}_i,\dots,z_p)}{G(z_1,\dots,z_p)} \qquad (1)$$

Ceci implique que $||S(x)|| \leqslant \dfrac{p}{\varepsilon||x||^{r-1}}$ . Donc f vérifie $H_r$.

b) Réciproquement, supposons que f vérifie $(H_r)$ :

Si $x \in V \cap W_\alpha^r(f)$, $(u.u^*)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^p$ dont les valeurs propres vérifient (1). D'où :

$$[d(z_1,\dots,z_p)]^2 \geqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i}} \geqslant \frac{1}{p \sup(\frac{1}{\lambda_i})} \geqslant \frac{1}{p||S(x)||^2} \geqslant \frac{||x||^{2(r-1)}}{p\ C^2} .$$

Ceci prouve que f vérifie $K_r$.

On démontre en même temps que f vérifie $K'_r$ si et seulement si elle vérifie $H'_r$.

La proposition suivante est la généralisation d'un résultat prouvé par KUIPER pour $p = 1$ [10].

*Proposition 2.-*

<u>Soit</u> f <u>de</u> $E_\mu^p$ <u>et</u> r <u>un réel,</u> $1 \leqslant r \leqslant \mu \leqslant \infty$.

<u>Si</u> f <u>vérifie</u> $H_r$ <u>(resp.</u> $H'_r$<u>)</u> <u>alors pour tout entier</u> k, $r \leqslant k \leqslant \mu$, $f_k$ <u>le jet d'ordre</u> k <u>de</u> f <u>en</u> 0 <u>vérifie</u> $H_r$ <u>(resp.</u> $H'_r$<u>)</u>. <u>Réciproquement, s'il existe un entier</u> k, $\mu \geqslant k \geqslant r$ <u>tel que</u> $f_k$ <u>véri-fie</u> $H_r$ <u>(resp.</u> $H'_r$<u>)</u> <u>alors</u> f <u>vérifie</u> $H_r$ <u>(resp.</u> $H'_r$<u>)</u>.

*Démonstration :*

Supposons que f vérifie $H_r$ (resp. $H'_r$).

Pour tout entier k, $r \leqslant k \leqslant \mu$, il existe un voisinage $V_1$ de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout x de $V_1$ :

$$||f(x) - f_k(x)|| \leqslant \frac{\alpha}{2} ||x||^r \quad \text{et} \quad ||Df(x) - Df_k(x)|| \leqslant \frac{1}{2C} ||x||^{r-1} .$$

Prenons $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$, $C' = 2C$, $V' = V \cap V_1$.

Pour tout $x$ de $V' \cap W^r_{\alpha'}(f_k)$, $Df(x)$ admet une section $S(x)$ telle que :

$$||Df(x) - Df_k(x)|| \leqslant \frac{1}{2||S(x)||} .$$

D'après le lemme 1 de l'annexe 1, $Df_k(x)$ admet une section $S_k(x)$ et $||S_k(x)|| \leqslant \dfrac{2C}{||x||^{r-1}}$. $f_k$ vérifie $H_r$ (resp. $H'_r$) pour $\alpha'$, $C'$, $V'$.

$f$ et $f_k$ jouant des rôles symétriques dans la démonstration, la réciproque est immédiate.

*Remarque 1.*

Si $f$ vérifie $H_r$ (ou $H'_r$), on a nécessairement $r \geqslant s_f$.

Ceci est évident lorsque $r$ est entier. S'il ne l'est pas supposons $r < s_f$. On notera $s = s_f$. Alors $f_s$ vérifie $H_r$ (ou $H'_r$) : il existe $\alpha$, $C$, $0 < \alpha \leqslant \infty$, $C > 0$ et un voisinage $V$ de $0$ tel que pour tout $x$ de $V \cap W^r_\alpha(f_s)$, $Df_s(x)$ admette une section $S(x)$ avec $||S(x)|| \leqslant \dfrac{C}{||x||^{r-1}}$.

Soient $a = \frac{1}{s!} ||D^s f(0)||$, $\varepsilon = (\frac{\alpha}{a})^{\frac{1}{s-r}}$ et $V_1 = V \cap B_{\mathbb{R}^n}(0,\varepsilon)$.

Pour tout $x$ de $V_1 - \{0\}$, $Df_s(x)$ admet une section $S(x)$.
Il existe une constante $C'$, $C' > 0$, telle que pour tout $x$ de $V_1$ :
$||Df_s(x)|| \leqslant C'||x||^{s-1}$.

Pour tout $x$ de $V_1 - \{0\}$ : $\dfrac{1}{C'||x||^{s-1}} \leqslant ||S(x)|| \leqslant \dfrac{C}{||x||^{r-1}}$

c'est-à-dire $||x||^{r-s} \leqslant C\,C'$.

Ceci conduit à une absurdité quand $x$ tend vers $0$.

La proposition 3 met en évidence une équivalence implicite dans toutes les études où $p = 1$.

*Proposition 3.-*

Soit $f$ de $\mathcal{E}_\mu$ et $r$ un réel, $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

$f$ vérifie $H_r$ (resp. $K_r$) si et seulement si elle vérifie $H'_r$ (resp. $K'_r$).

*Démonstration :*

Si $f$ vérifie $H'_r$, elle vérifie $H_r$.

Réciproquement si $f$ vérifie $H_r$, pour tout entier $k$, $r \leqslant k \leqslant \mu$, $f_k$ le jet d'ordre $k$ de $f$ en $0$ vérifie $H_r$.

On utilise alors le lemme suivant dû à BOCHNACK et LOJASIEWICZ [7]. Si $g$, analytique dans un voisinage de $0$ est telle que $g(0) = 0$ et si $0 < \theta < 1$

$||x||\ ||(\text{grad } g)(x)|| \geqslant \theta \ ||g(x)||$ dans un voisinage de $0$.

En appliquant ce lemme à $g = f_k$ on prouve que dans un voisinage de $0$ :

$$||(\text{grad } f_k)(x)|| \geqslant \varepsilon ||x||^{r-1}, \text{ où } \varepsilon \text{ est une constante, } \varepsilon > 0.$$

## II. *Quelques définitions équivalentes d'un idéal elliptique.*

Un idéal $I$ de $\mathcal{E}$ elliptique s'il remplit l'une des deux conditions équivalentes :

(1) $I$ est de type fini et contient l'idéal des fonctions infiniment plates $m^\infty$ où $m^\infty = \bigcap_{k=1}^{+\infty} m^k$ ($m$ étant l'idéal maximal de $\mathcal{E}$).

(2) $I$ est de type fini et contient un germe en $0$ d'application $g$, telle qu'il existe $\varepsilon$ ; $\beta$, $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$, un voisinage $V$

de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$||g(x)|| \geqslant \varepsilon ||x||^{\beta} \text{ pour tout } x \text{ de } V.$$

Lorsque $\mathcal{I}$ est elliptique, g est la somme des carrés des germes d'applications qui engendrent l'idéal. On dira que g est une fonction elliptique.

## III. *Lien avec les résultats de TOUGERON* [17].

La proposition 4 permet d'éclairer le lien entre les résultats de TOUGERON [17] et les nôtres (principalement dans le cas homogène, voir chap. II) ainsi que le choix des hypothèses de MAGNUS [15] pour obtenir des jets suffisants pour l'équivalence polaire.

Pour f de $\mathcal{E}^p$ tel que $f(0) = 0$, on note $\mathcal{H}_p(f)$ l'idéal de $\mathcal{E}$ engendré par les mineurs d'ordre p de la matrice jacobienne de f et $J_p(f) = (f) + \mathcal{H}_p(f)$.

*Proposition 4.-*

Soient f et $\psi$ de $\mathcal{E}^p$ tels que $f(0) = 0$ et $(\psi) \subset J_p(f)$ (resp. $(\psi) \subset \mathcal{H}_p(f)$). Il existe g germe à l'origine d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et L germe à l'origine d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{R}^p)$) tels que :

$$\psi(x) = Df(x).g(x) + L(x).f(x) \quad (\text{resp. } \psi(x) = Df(x).g(x)).$$

*Lemme* : Quel que soit $\delta$ de $\mathcal{H}_p(f)$, il existe S, germe en 0 d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $L(p,n)$ tel que $\delta(x) 1_p = Df(x).S(x)$. (ceci traduit que $\mathcal{H}_p(f) \subset \text{Ann Coker } Df$ - voir Tougeron [17] p. 208).

Ceci est évident si $n < p$ car alors $\mathcal{H}_p(f) = \{0\}$. On prend $S = 0$.

Pour $n \geqslant p$, il suffit de démontrer le lemme pour tout $\delta$ générateur de $H_p(f)$.

Par exemple soit $\delta(x) = \det\left(\frac{D(f_1,\ldots,f_p)}{D(x_1,\ldots,x_p)}(x)\right) = \det M(x)$.

Il existe $S_1$ germe en 0 d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans End(p) tel que :

$M(x)\, S_1(x) = \delta(x) 1_p$, $S_1(x)$ étant la matrice des cofacteurs de $M(x)$. Il suffit de prendre $S(x).y = (S_1(x).y, 0, \ldots, 0)$ pour que $\delta(x).1_p = Df(x).S(x)$.

*Démonstration de la proposition 4* :

Puisque $(\psi) \subset J_p(f)$, pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, il existe $\alpha_i^j$ de $E$ et $\delta_i$ de $H_p(f)$ tel que :

$$\psi_i(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j(x) f_j(x) + \delta_i(x).$$

Soit $L$ le germe en 0 d'application de $\mathbb{R}^n$ dans End(p) de matrice $(\alpha_i^j)$ :

$$\psi(x) = L(x).f(x) + \sum_{i=1}^{p} \delta_i(x).e_i.$$

($e_1,\ldots,e_p$ étant la base canonique de $F$).

$\delta_i(x) e_i = Df(x).S_i(x).e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$, où $S_i$ est un germe en 0 d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $L(p,n)$.

On prendra alors $g(x) = \sum_{i=1}^{p} S_i(x).e_i$.

## IV. *Les jets homogènes.*

Nous allons maintenant donner quelques caractérisations des jets homogènes de degré $s$, v-suffisants dans $\mathcal{E}^p_s$. Nous retiendrons la caractérisation 3 qui est la plus commode dans les calculs.

*Proposition* 5.-

Soit $f$ un jet homogène de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ de degré $s$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est v-suffisant dans $\mathcal{E}^p_s$ ;

(2) $f$ vérifie $H_s$ ;

(3) Pour tout $x$, $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0$, $Df(x)$ est surjective. C'est-à-dire que l'origine de $\mathbb{R}^n$ est une singularité isolée de $f$ dans $f^{-1}\{0\}$ ;

(4) Il existe une constante $\beta$, $\beta > 0$, telle que pour tout $x$ de la sphère unité $\Sigma_n$ de $\mathbb{R}^n$ et tout $y$ de la sphère unité $\Sigma_p$ de $\mathbb{R}^p$ :

$$||f(x)|| + ||(Df(x))^* y|| \geq \beta$$

(5) $J_p(f)$ est elliptique ;

(6) Pour toute réalisation $\tilde{f}$ dans $f$ dans $\mathcal{E}^p_s$, l'origine est une singularité isolée de $\tilde{f}$ dans $\tilde{f}^{-1}\{0\}$ .

L'équivalence de (1), (2), (6) a été démontrée par T.C. KUO [12]

Montrons que (2) => (3).

S'il existe $x$, $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0$, pour $\lambda > 0$, assez petit, $Df(\lambda x)$ admet une section puisque $f(\lambda x) = 0$. Donc

$Df(x) = \dfrac{1}{\lambda^{s-1}} Df(\lambda x)$ est surjectif.

<u>Montrons que (3) => (4).</u>

Si (4) n'est pas vérifié, il existe une suite $(x_q)$ de $\Sigma_n$ et $y_q$ de $\Sigma_p$ telles que pour tout $q$ de $N^*$ :

$$||f(x_q)|| + ||(Df(x_q))^* y_q|| < \frac{1}{q} .$$

$\Sigma_n$ et $\Sigma_p$ étant des compacts, on peut extraire des sous-suites $(x_{q_k})$ et $(y_{q_k})$ convergeant respectivement vers $x$ de $\Sigma_n$ et $y$ de $\Sigma_p$ .

A la limite, on obtient $||f(x)|| + ||(Df(x)^* y|| = 0$.

Donc $f(x) = 0$ et $Df(x)$ est surjectif alors que $(Df(x))^*$ n'est pas injectif (puisqu'il existe $y$ de $\Sigma_p$ tel que $(Df(x))^* y = 0$). D'où la contradiction (Annexe 1).

<u>Montrons que (4) => (2).</u>

Soient $\alpha = \frac{\beta}{2}$ et $x$ de $W^s_\alpha(f)$. Pour tout $y$ de $\Sigma_p$ on a

$$||(Df(\frac{x}{||x||}))^* y|| \geq \alpha.$$

D'après le lemme 3 de l'annexe 1 : $Df(\frac{x}{||x||})$ admet une section ainsi que $Df(x)$. $S(x)$ étant la section orthogonale de $Df(x)$, on a :

$$||S(x)|| = \frac{1}{\inf\limits_{y \in \Sigma_F} ||(Df(x))^* y||} \leq \frac{1}{\alpha ||x||^{s-1}} .$$

<u>Montrons que (1) => (5).</u>

Si $f$ est v-suffisant dans $\mathcal{E}^p_s$, il l'est aussi dans $\mathcal{E}^p$. Donc $J_p(f)$ est elliptique [9].

Montrons que (5) => (2).

$J_p(f)$ étant elliptique, il existe $\varepsilon$ et $\beta$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$ tels que dans un voisinage de 0 :

$$\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) + \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \left[ \frac{D(f_1,\ldots,f_p)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})} (x) \right]^2 \geq \varepsilon ||x||^\beta \quad \text{(II. Annexe II).}$$

Si $f(x) = 0$ avec $x \neq 0$ alors $Df(x)$ est de rang $p$, donc surjective.

$f$ vérifie $H_s$.

De même, on peut caractériser les jets homogènes de degré $s$, $C^o$-suffisant dans $E_s^p$ :

*Proposition 6.-*

Soit $f$ un jet de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, homogène de degré $s$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est $C^o$-suffisant dans $E_s^p$.

(2) $f$ vérifie $H'_s$.

(3) Pour tout $x$, $x \neq 0$ $Df(x)$ est surjective. C'est-à-dire que l'origine de $\mathbb{R}^n$ est une singularité isolée de $f$.

(4) il existe une constante $\beta$, $\beta > 0$, telle que pour tout $x$ de $\Sigma_n$ et tout $y$ de $\Sigma_p$ : $||(Df(x))^* y|| \geq \beta$.

(5) $H_p(f)$ est elliptique.

(6) Pour toute réalisation $\tilde{f}$ de $f$ dans $E_s^p$, l'origine de $\mathbb{R}^n$ est une singularité isolée de $\tilde{f}$.

L'équivalence des propriétés (2), (3), (4) se démontrent comme dans la proposition 5.

L'implication (2) => (1) résulte du théorème 1-bis (chapitre I).

(1) => (5) puisque $f$ $C^o$-suffisant dans $E_s^p$, l'est aussi dans $E^p$. Par suite $H_p(f)$ est elliptique [9].

(5) => (2) se démontre comme dans la proposition 5.

(2) => (6) puisque toute réalisation $\tilde{f}$ de f dans $E^p_s$ vérifie $H'_s$.

(6) => (3) il suffit de prendre $\tilde{f} = f$.

## V. *Liens entre les hypothèses* $H_r$, $H'_r$ *et les hypothèses de MAGNUS* [15].

La proposition suivante établit le lien entre les hypothèses $H_r$, $H'_r$ et celles prises par MAGNUS [15] pour obtenir un jet suffisant pour l'équivalence polaire.

Rappelons que $E_p$ est l'ensemble des germes en $\{0\} \times \Sigma_n$ d'applications définies sur $\mathbb{R} \times \Sigma_n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, de classe $C^\infty$, $\Sigma_n$ étant la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. $M_r$, $r \in \mathbb{N}^*$, est le sous-ensemble de $E_p$ des germes ayant leurs (r-1) premières dérivées par rapport à la première variable nulles sur $\{0\} \times \Sigma_n$. $J_f$ (resp. $I_f$) est le sous-ensemble des germes $\psi$ de $E_p$ tels qu'il existe g germe en $\{0\} \times \Sigma_n$ d'application de $R \times \Sigma_n$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^\infty$ et L germe d'application en $\{0\} \times \Sigma_n$ de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{R}^p)$ (resp. L = 0) tels que :

$$\psi(t,\lambda) = Df(t\lambda)g(t,\lambda) + L(t,\lambda)f(t\lambda).$$

*Proposition 7.-*

Soient f de $E^p$ et r de $\mathbb{N}^*$.

a) Si $M_{r-1} \subset J_f$ (resp. $M_{r-1} \subset I_f$), alors f vérifie $H_r$ (resp. $H'_r$).

b) Si f est un polynôme homogène de degré r, $r \geq 1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et si f vérifie $H_r$ (resp. $H'_r$), alors $M_r \subset J_f$ (resp. $M_{r-1} \subset I_f$).

Remarquons que $\psi$ de $E_p$ appartient à $M_k$ si et seulement si il existe $\psi_1$ de $E_p$ tel que pour tout $(t,\lambda)$ de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ :
$\psi(t,\lambda) = t^k\, \psi_1(t,\lambda)$.

(on applique la formule de Taylor avec reste intégral).

*Démonstration de* a).

Soit $f$ de $E^p$ tel que $M_{r-1} \subset J_f$.

On choisit une base $e_1,\dots,e_p$ de $\mathbb{R}^p$ et on considère les applications de $M_{r-1}$ telles que : $(t,\lambda) \mapsto t^{r-1} e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Pour tout entier $i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe $g_i$ germe en $\{0\} \times \Sigma_n$ d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $L_i$ germe en $\{0\} \times \Sigma_n$ d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{R}^p)$ tels que pour tout $(t,\lambda)$ de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ :

$$e^i\, t^{r-1} = Df(t\,\lambda) g_i(t,\lambda) + L_i(t,\lambda) f(t\lambda).$$

Soit $\varepsilon > 0$ ; $C = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ |t|\leqslant\varepsilon\\ \lambda\in\Sigma_n}} ||g_i(t,\lambda)||$ ; $M = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ |t|\leqslant\varepsilon\\ \lambda\in\Sigma_n}} ||L_i(t,\lambda)||$

Soit $V = B_{\mathbb{R}^n}(0,\varepsilon)$ et $\alpha$ un réel tel que $p\,\alpha\, M\,\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Pour tout $x$ de $V \cap W^r_\alpha(f)$ on pose $t = ||x||$ et $\lambda = \dfrac{x}{||x||}$.

Si $\varepsilon_i = e_i - \dfrac{L_i(t,\lambda) f(t\lambda)}{t^{r-1}}$, on a $t^{r-1}\,\varepsilon_i = Df(t\lambda) h_i(t,\lambda)$.

$Df(x)$ est de rang $p$ donc surjective car $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p\}$ est une base de $\mathbb{R}^p$.

En effet, la matrice des composantes des $\{\varepsilon_i\}$ par rapport à la base $\{e_i\}$ est $I - P(t,\lambda)$ où $I$ est la matrice unité de $\mathbb{R}^p$, $P(t,\lambda)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont $\dfrac{L_i(t,\lambda) f(t\lambda)}{t^{r-1}}$ $1 \leqslant i \leqslant p$.

$I - P(t,\lambda)$ est inversible car la norme de l'endomorphisme associé à $P(t,\lambda)$ vérifie :

$||P(t,\lambda)|| \leq p\, M\, \alpha\, t \leq p\, M\, \alpha\, \varepsilon < \frac{1}{2}$ . ($\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne).

En prenant pour nouvelle base de $\mathbb{R}^p$ : $\{\varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq p\}$,

l'application linéaire $S(x)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$S(x).y = \sum_{i=1}^{p} \frac{g_i(||x||, \frac{x}{||x||})}{||x||^{r-1}}\, y_i \quad \text{où} \quad y = \sum_{i=1}^{p} y_i \varepsilon_i .$$

est une section de $Df(x)$ et $||S(x)|| \leq \dfrac{C\, p}{||x||^{r-1}}$ .

De même, si $M_{r-1} \subset I_f$, $f$ vérifie $H'_r$ (il suffit de prendre $L_i = 0$).

*Démonstration de* b).

R. MAGNUS [15] a prouvé que si $f$ est un polynôme homogène de degré $r$ et si $Df(x)$ est surjective pour tout $x$, $x \neq 0$, c'est-à-dire si $f$ vérifie $H'_r$, alors $M_{r-1} \subset I_f$.

Soit $f$ un polynôme homogène de degré $r$ vérifiant $H_r$ et soit $\psi$ de $M_r$.

Il existe $\psi_1$ de $E_p$ tel que $\psi(t,\lambda) = t^r\, \psi_1(t,\lambda)$.

Soit $\lambda_o$ un vecteur de la sphère unité $\Sigma_n$ de $E$.

Si $f(\lambda_o) \neq 0$, il existe un voisinage $V(\lambda_o)$ de $\lambda_o$ tel que $f(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda$ de $V(\lambda_o)$.

Pour $(t,\lambda) \in \mathbb{R} \times (V(\lambda_o) \cap \Sigma_n)$, on pose $\begin{cases} g_{\lambda_o}(t,\lambda) = 0 \\ L_{\lambda_o}(t,\lambda) = \dfrac{\langle f(\lambda), . \rangle}{||f(\lambda)||^2}\, \psi_1(t,\lambda). \end{cases}$

$g_{\lambda_o}$ et $L_{\lambda_o}$ sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times (V(\lambda_o) \cap \Sigma_n)$.

Si $f(\lambda_o) = 0$ alors $Df(\lambda_o)$ est surjective (proposition 5, annexe II). Il existe un voisinage $V(\lambda_o)$ de $\lambda_o$ tel que $Df(\lambda)$ soit surjective pour tout $\lambda$ de $V(\lambda_o)$ (lemme 1, Annexe I).

Pour $(t,\lambda) \in \mathbb{R} \times (V(\lambda_o) \cap \Sigma_n)$, on pose $\begin{cases} g_{\lambda_o}(t,\lambda) = \sigma(Df(\lambda))(t\ \psi_1(t,\lambda)) \\ L_{\lambda_o}(t,\lambda) = 0 . \end{cases}$

$g_{\lambda_o}$ et $L_{\lambda_o}$ sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times (V(\lambda_o) \cap \Sigma_n)$ ($\sigma(u)$ étant la section orthogonale de $u$).

$\bigcup_{\lambda_o \in \Sigma} V(\lambda_o)$ est un recouvrement ouvert du compact $\Sigma_n$. Il existe $m$ vecteurs $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ de $\Sigma_n$ tels que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} V(\lambda_i) \supset \Sigma_n$.

On pose $g_{\lambda_i} = g_i$, $L_{\lambda_i} = L_i$, $V(\lambda_i) = V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Il existe $m$ applications $\theta_i$ de $\mathbb{R}^n$ dans $[0,1]$, de classe $C^\infty$ telles que :

$\operatorname{supp}(\theta_i) \subset V_i$, $\sum_{i=1}^{m} \theta_i(\lambda) \leqslant 1$ si $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{m} \theta_i(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \Sigma_n$

(partition de l'unité sur $\Sigma_n$).

Pour $(t,\lambda)$ de $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ les applications $g$ et $L$ définies par :

$$g(t,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(\lambda) g_i(t,\lambda)$$

$$L(t,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(\lambda) L_i(t,\lambda)$$

sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \Sigma_n$ et pour tout $(t,\lambda)$ de $R \times \Sigma_n$ on a :

$$Df(\lambda).g(t,\lambda) + tL(t,\lambda)f(\lambda) = t\ \psi_1(t,\lambda).$$

Donc $\psi$ appartient à $J_f$.

*Remarque* : Si $f$ est un polynôme homogène de degré $r$ : $f$ vérifie $H'_r$ si et seulement si $M_{r-1} \subset I_f$.

Par contre, si $f$ vérifie $H_r$ et non $H'_r$, $M_r$ est inclus dans $J_f$ tandis que $M_{r-1}$ ne l'est pas.

En effet, sinon tout $\psi$ de $M_{r-1}$ s'écrivant $\psi(t,\lambda) = t^{r-1}\,\psi_1(t,\lambda)$ on aurait :

$$\psi_1(t,\lambda) = Df(\lambda)g(t,\lambda) + tL(t,\lambda)f(\lambda)$$

et pour $t = 0$ : $\quad \psi_1(0,\lambda) = Df(\lambda)\,g(0,\lambda)$.

$\psi(0,\lambda)$ pouvant être choisi arbitrairement, $Df(\lambda)$ serait surjective pour tout $\lambda$, $\lambda \neq 0$. $f$ vérifierait alors $H'_r$.

## VI. *Théorème du point fixe dépendant d'un paramètre.*

*Proposition 8.-*

Soient $X$ et $Y$ des espaces de Banach, $E$ un boule fermée de $X$, $\Omega$ un ouvert de $Y$ et $f$ une application de $E \times \Omega$ dans $E$, de classe $C^{\mu}$, $\mu \geqslant 0$, telle que pour tout $\lambda$ de $\Omega$, l'application $f_\lambda$ de $E$ dans $E$ définie par : $f_\lambda(x) = f(x,\lambda)$ soit lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Alors l'application $\xi$ de $\Omega$ dans $E$ qui à $\lambda$ associe le point fixe de l'application contractante $f_\lambda$ est de classe $C^{\mu}$ et

$$D\xi(\lambda) = \left[1_E - D_1 f(\xi(\lambda),\lambda)\right]^{-1} \circ D_2 f(\xi(\lambda),\lambda).$$

a) *Continuité de* $\xi$.

Pour tout $(\lambda,\mu)$ de $\Omega^2$ : $||\xi(\lambda)-\xi(\mu)|| = ||f(\xi(\lambda),\lambda)-f(\xi(\mu),\mu)|| \leqslant$

$||f(\xi(\lambda),\lambda) - f(\xi(\lambda),\mu)|| + ||f(\xi(\lambda),\mu) - f(\xi(\mu),\mu)||$ soit :

$$||\xi(\lambda) - \xi(\mu)|| \leqslant \frac{1}{1-k}\,||f(\xi(\lambda),\lambda) - f(\xi(\lambda),\mu)||.$$

La continuité de $f$ en $(\xi(\lambda),\lambda)$ entraîne celle de $\xi$ en $\lambda$.

De plus, si $f$ est localement lipschitzienne de rapport $k_o$ en $(\xi(\lambda_o),\lambda_o)$, $\xi$ est localement lipschitzienne en $\lambda_o$ puisque :

$$||\xi(\lambda) - \xi(\mu)|| \leqslant \frac{k_o}{1-k_o} \text{ dans un voisinage de } \lambda_o.$$

(En particulier, si $f$ est de classe $C^1$, $f$ est localement lipschitzienne).

*b) $\xi$ est différentiable de classe $C^\mu$, si $\mu \geqslant 1$.*

Comme $f_\lambda$ est contractante de rapport $k$ et de classe $C^1$, on a pour tout $(x,\lambda)$ de $E \times \Omega$ :

$$||D_1 f(x,\lambda)|| \leqslant k \qquad (1)$$

Comme $k < 1$, l'application linéaire $(1_E - D_1 f(x,\lambda))$ est un isomorphisme de $E$.

Soit $u$ l'application continue de $\Omega$ dans $L(Y,X)$ définie par :

$$u(\lambda) = \left[1_E - D_1 f(\xi(\lambda),\lambda)\right]^{-1} \circ D_2 f(\xi(\lambda),\lambda)$$

d'où $\quad u(\lambda) = D_1 f(\xi(\lambda),\lambda).u(\lambda) + D_2 f(\xi(\lambda),\lambda) \qquad (2).$

Si l'on pose $\xi(\lambda) = x$, $h = \xi(\lambda+\mu) - \xi(\lambda)$, la différentiabilité de $f$ en $(\xi(\lambda),\lambda)$ s'exprime par le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $||h|| < \eta$ et $||\mu|| < \eta$ on ait :

$$||f(x+h,\lambda+\mu) - f(x,\lambda) - D_1 f(x,\lambda).h - D_2 f(x,\lambda).\mu|| \leqslant \varepsilon \sup(||h||,||\mu||)$$

en utilisant (1), (2) et les valeurs de $x$ et de $h$ on obtient :

$$||\xi(\lambda+\mu) - \xi(\lambda) - u(\lambda).\mu|| \leqslant \varepsilon \sup(||\xi(\lambda+\mu) - \xi(\lambda)||,||\mu||) + k||\xi(\lambda+\mu) - \xi(\lambda) - u(\lambda).\mu||.$$

$\xi$ est localement lipschitzienne en $\lambda$ puisque $f$ est de classe $C^1$. Soit $k' \geqslant 1$ une constante de Lipschitz pour $\xi$ au voisinage de $\lambda$. Il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $\mu$ tel $||\mu|| < \inf(\eta', \frac{\eta}{k'})$ :

$$||\xi(\lambda+\mu) - \xi(\lambda) - u(\lambda).\mu|| \leqslant \frac{\varepsilon k'}{1-k} ||\mu||.$$

Donc $\xi$ est différentiable en tout point de $\Omega$ et

$$D\xi(\lambda) = \left[1_E - D_1 f(\xi(\lambda),\lambda)\right]^{-1} \circ D_2 f(\xi(\lambda),\lambda) .$$

Si $f$ est de classe $C^\mu$, on déduit par récurrence de la formule précédente que $\xi$ est également de classe $C^\mu$.

## *VII. Application différentiable et procédé de Liapounov-Schmitt.*

### *1) Rappel et notations.*

Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $a$ un élément de $E$, $f$ un germe en $a$ d'application de $E$ dans $F$, de classe $C^\mu$, $2 \leqslant \mu \leqslant \infty$, $f(a) = 0$ tel que $\operatorname{Im} Df(a)$ et $\operatorname{Ker} Df(a)$ soient des facteurs directs de $F$ et de $E$.

(Rappelons que deux germes en $0$, $f$ et $\tilde{f}$ d'application de classe $C^\mu$ sont $\mu$ équivalents s'il existe deux germes en $0$ de difféomorphisme $h$ et $k$, de classe $C^\mu$, tels que $\tilde{f} \circ h = k \circ f$).

On sait (procédé de Liapounov-Schmitt) que $f$ est équivalent à un germe en $(0,0)$, $\tilde{f}$, d'application de $X \times Y$ dans $X \times Z$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & F \arrow[d, "k"] \\ X \times Y \arrow[r, "\tilde{f}"] & X \times Z \end{tikzcd}$$

de classe $C^{\mu}$, tel que dans un voisinage de $(0,0)$ :

$$\tilde{f}(x,y) = (x,g(x,y))$$

où $g$ est de classe $C^{\mu}$ et vérifie :

$$g(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad Dg(0,0) = 0.$$

Alors $h$ transforme localement $W$ $(W = f^{-1}(0))$ en $\{0\} \times W'$ $(W' = \{y | g(0,y) = 0\})$.

Ce résultat peut se montrer de la manière suivante :

(cf. ANTOINE [2]) :

Soit $P$ une projection de $F$ sur $\operatorname{Im} Df(a)$

$Q$ une projection de $E$ sur $\operatorname{Ker} Df(a)$

$\chi$ l'application canonique de $F$ sur $\operatorname{Coker} Df(a)$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad f \quad} & F \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow k \\ \operatorname{Im} Df(a) \times \operatorname{Ker} Df(a) & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & \operatorname{Im} Df(a) \times \operatorname{Coker} Df(a) \end{array}$$

$h$ est le germe en $a$ d'application de $E$ dans $\operatorname{Im} Df(a) \times \operatorname{Ker} Df(a)$ défini par $h(x) = (P \circ f(x), Q(x-a))$ on a $h(a) = (0,0)$.

$h$ est un germe en $a$ de difféomorphisme de classe $C^{\mu}$.

$k$ est le germe en $0$ d'application de $F$ dans $\operatorname{Im} Df(a) \times \operatorname{Coker} Df(a)$ : défini par $k(y) = (P(y), \chi(y))$, on a : $k(0) = (0,0)$.

$k$ est un germe en $0$ de difféomorphisme de classe $C^{\mu}$ (et même de classe $C^{\infty}$).

Il existe $V$ voisinage de $a$ dans $E$, $V_1$ voisinage de $0$ dans $\operatorname{Im} Df(a)$ et $V_2$ voisinage de $0$ dans $\operatorname{Ker} Df(a)$ tel que

$h(V) = V_1 \times V_2$.

On pose alors $\tilde{f} = k \circ f \circ h^{-1}$.

$\tilde{f}$ est un germe en $(0,0)$ d'application définie sur $V_1 \times V_2$ à valeurs dans $\operatorname{Im} Df(a) \times \operatorname{Coker} Df(a)$, de classe $C^\mu$, tel que $\tilde{f}(x,y) = (x, g(x,y))$ où $g$ est de classe $C^\mu$ sur $V_1 \times V_2$ et est à valeurs dans $\operatorname{Coker} Df(a)$.

On a $g \circ h = \chi \circ f$.

<u>Si</u> $f$ <u>est une submersion en</u> $a$, alors pour tout $(x,y)$ de $V_1 \times V_2$ on a $\tilde{f}(x,y) = (x,0)$. De plus

a) $h(V \cap W) = \{0\} \times V_2$

Ainsi si $E$ et $F$ sont de dimension finie $n$ et $p$, $f^{-1}(0) \cap V$ est une sous-variété différentielle de $E$, de dimension $(n-p)$ dont $h$ est une carte.

b) il existe $\Psi$ germe en $0$ d'application de $\operatorname{Im} Df(a)$ dans $E$, de classe $C^\mu$ tel que

$\Psi(0) = a$

$f \circ \Psi(x) = x$ pour tout $x$ de $V_1$

$(\Psi(x) = h^{-1}(x,0))$.

c) plus généralement, c'est-à-dire $f$ n'étant pas nécessairement une submersion en $a$, on peut poser pour tout $y$ de $V_2$ :

$h^{-1}(0,y) = y + \varphi(y)$.

$\varphi$ est un germe en $0$ d'application de $\operatorname{Ker} Df(a)$ dans $(1_E - Q)E$, de classe $C^\mu$, vérifiant pour tout $y$ de $V_2$ :

$$P \circ f(y + \varphi(y)) = 0 \quad (\text{car } P \circ f(h^{-1}(0,y)) = 0)$$

alors $\varphi(0) = 0$ et $D\varphi(0) = 0$.

Si $f$ est une submersion en $a$, on retrouve le théorème des fonctions implicites car alors $P = 1_E$.

*Définition et propriétés de la fonction* $u$.-

On pose pour tout $y$ de $V_2$ : $u(y) = g(0,y)$.

On a : $u(y) = \chi \circ f(h^{-1}(0,y)) = \chi \circ f(y + \varphi(y))$

et $u(0) = 0$.

$u$ est un germe en $0$ d'application de $\operatorname{Ker} Df(a)$ dans $\operatorname{Coker} Df(a)$ de classe $C^\mu$.

On vérifie facilement que

d) $h(V \cap W) = \{0\} \times (V_2 \cap W')$

donc $h$ transforme localement $W$ en $\{0\} \times W'$.

e) De plus, $u$ est tel que

$$Du(0) = 0$$

et $$D^2u(0) = \Delta^2 f(a)$$

où $$\Delta^2 f(a) = \chi \circ D^2 f(a) \circ \iota^2$$

$\iota$ est l'injection canonique de $\operatorname{Ker} Df(a)$ dans $E$.

$\Delta^2 f(a)$ est la différentielle intrinsèque seconde de $f$ en $a$.

f) Jets de $u$. On se ramène à $a = 0$.

Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leq \ell \leq \mu$, on note $u_\ell$ et $f_\ell$ les jets en $0$ d'ordre $\ell$ de $u$ et de $f$.

On a $$u_1 = 0$$

$$u_2 = \chi \circ f_2 \circ \iota .$$

- les projecteurs $P$ et $Q$ étant fixés, pour tout $\ell$, $1 \leq \ell \leq \mu$, $u_\ell$ ne dépend que de $f_\ell$.

En effet, $(0,(u(0,y)) = \tilde{f}(0,y) = k \circ f(h^{-1}(0,y))$ et on identifie les développements limités d'ordre $\ell$.

Plus précisément, on peut déduire $u_\ell$ de $f_\ell$ de la façon suivante :

Pour tout $y$ de $V_2$, on a :

$$u(y) = \chi \circ f(y + \psi(y))$$

$$(1) \qquad 0 = P \circ f(y + \psi(y))$$

$$\text{Donc} \qquad 0 = P \circ D^2 f(0) + Df(0) \circ D^2\psi(0)$$

Or $Df(0)$ est un isomorphisme de $(1_E - Q)E$ sur $\mathrm{Im}\, Df(0)$ et $D^2\psi(0)$ est défini sur $(\mathrm{Ker}\, Df(0))^2$ et est à valeurs dans $(1_E-Q)E$, il s'en suit que $D^2\psi(0)$ est complètement déterminé par l'équation (1).

Plus généralement pour $3 \leq i \leq \mu$, $D^i\psi(0)$ est entièrement déterminé par les dérivées de $f$ en $0$ d'ordre inférieur ou égal à $i$, ceci se montre par récurrence : on dérive $i$ fois (1) :

$$0 = Df(0) \circ D^i\psi(0) + P \circ \sum_{\alpha,\alpha_m} C_{\alpha,\alpha_m} D^\alpha f(0)(1_E)^{\alpha_1}(D^2\psi(0))^{\alpha_2}\ldots(D^{i-1}\psi(0))^{\alpha_{i-1}}$$

avec $\alpha = \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m$ et $i = \sum_{m=1}^{i-1} m\,\alpha_m$ et par un raisonnement identique au précédent, on en déduit $D^i\psi(0)$ en fonction des $D^j\psi(0)$ et $D^\alpha f(0)$ avec $1 \leq j \leq i-1$, $1 \leq \alpha \leq i$.

<u>*Remarque*</u> : A deux couples $(P_1,Q_1)$, $(P_2,Q_2)$ de projecteurs correspond $u_1$ et $u_2$ $\mu$ équivalents.

- <u>Pour</u> $3 \leq \ell \leq \mu$, <u>on ne peut pas en général choisir</u> $P$ <u>et</u> $Q$ <u>de façon que</u> $u_\ell = \chi \circ f_\ell \circ \iota$.

Par exemple :

$$u_3(y) = \chi \circ f_3(y) + \chi \circ D^2 f(0)(y, D^2\psi(0)(y,y))$$

(i) $D^2\varphi(0)$ est identiquement nul si l'image de la restriction de $D^2f(0)$ à $(\mathrm{Ker}\, Df(0))^2$ est contenue dans un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, Df(0)$ (voir (1)). On prend alors la projection $P$ associée à ce supplémentaire.

(ii) On a encore $u_3 = \chi \circ f_3 \circ \iota$ si l'image de la restriction de $D^2f(0)$ à $\mathrm{Ker}\, Df(0) \times E_2$ (où $E_2$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, Df(0)$) est contenue dans $\mathrm{Im}\, Df(0)$. On prend alors $Q$ tel que $E_2 = (1_E - Q)E$.

Mais en général $u_3 \neq \chi \circ f_3 \circ \iota$.

2) *Proposition* 9.

Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $f$ un germe en $0$ d'application de $E$ dans $F$ de classe $C^\mu$, $2 \leq \mu \leq \infty$, $f(0) = 0$ tel que $\mathrm{Im}\, Df(0)$ et $\mathrm{Ker}\, Df(0)$ soient des facteurs directs de $F$ et de $E$.

Si $1 < r \leq \mu$, $f$ vérifie $(H_r)$ si et seulement si $u$ vérifie $(H_r)$.

On va d'abord montrer que $f$ vérifie $(H_r)$ si et seulement si $\tilde{f}$ vérifie $(H_r)$ (lemme 1) et ensuite que $\tilde{f}$ vérifie $(H_r)$ si et seulement si $u$ vérifie $(H_r)$ (lemme 2).

*Lemme 1*.- Soit $f$ et $\tilde{f}$ deux germes en $0$ de classe $C^\mu$, $\mu$ équivalents avec $2 \leq \mu \leq \infty$. Pour $1 < r \leq \infty$, $f$ vérifie $(H_r)$ si et seulement si $\tilde{f}$ vérifie $(H_r)$.

Il suffit de montrer que si $f$ vérifie $(H_r)$ alors $\tilde{f}$ vérifie $(H_r)$. On suppose que $f$ et $\tilde{f}$ sont définis ainsi que les germes en $0$ de difféomorphisme $h$ et $k$ suivant le diagramme ci-après :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad f \quad} & F \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \tilde{E} & \xrightarrow[\quad \tilde{f} \quad]{} & \tilde{F} \end{array}$$

$f(0) = 0$, $\tilde{f}(0) = 0$, $h(0) = 0$, $k(0) = 0$ et $f = k^{-1} \circ \tilde{f} \circ h$.

Par hypothèse, il existe $V$ voisinage de l'origine de $E$, des constantes strictement positives $\alpha$ et $C$ tels que si $x \in V \cap W^r_\alpha(f)$, $Df(x)$ admet une section $S(x)$ avec $||S(x)|| \leq \dfrac{C}{||x||^{r-1}}$.

On doit montrer qu'il existe $\tilde{V}$ voisinage de l'origine de $\tilde{E}$, des constantes strictement positives $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{C}$ tels que si $y \in \tilde{V} \cap W^r_{\tilde{\alpha}}(\tilde{f})$, $D\tilde{f}(y)$ admet une section $\tilde{S}(y)$ avec $||\tilde{S}(y)|| \leq \dfrac{\tilde{C}}{||y||^{r-1}}$.

a) Quitte à restreindre $V$, on suppose que $f$ est défini sur $V$, $\tilde{f}$ est défini sur $h(V)$, $h$ est un difféomorphisme défini sur $V$ et $k$ est un difféomorphisme défini sur un ouvert contenant $f(V)$.

$h$ et $k^{-1}$ sont de classe $C^1$ et $h(0) = 0$, $k^{-1}(0) = 0$, il existe donc deux constantes strictement positives $H$ et $K$ et deux voisinages $U$ et $\Omega$ de l'origine respective de $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ tels que pour tout $y$ de $U$ on ait :

$$||y|| \leq H||h^{-1}(y)||$$

et pour tout $z$ de $\Omega$, on ait :

$$||k^{-1}(z)|| \leq K||z|| .$$

On pose $U' = U \cap h(V) \cap \tilde{f}^{-1}(\Omega)$.

Pour $y$ de $U' \cap W^r_{\tilde{\alpha}}(\tilde{f})$, on a $||\tilde{f}(y)|| \leq \tilde{\alpha}||y||^r$ et donc

$$||f(h^{-1}(y))|| \leq \tilde{\alpha}\, KH^r ||h^{-1}(y)||^r$$

On prend donc $\tilde{\alpha}$ tel que $\alpha = \tilde{\alpha}\, KH^r$.

b) Alors pour tout $y$ de $\mathcal{U}' \cap W^r_{\tilde{\alpha}}(\tilde{f})$, $x = h^{-1}(y)$ appartient à $\mathcal{V} \cap W^r_\alpha(f)$ et $Df(x)$ admet une section $S(x)$, comme $D\tilde{f}(y) = Dk(f(x)) \circ Df(x) \circ Dh^{-1}(y)$, $D\tilde{f}(y)$ admet aussi une section $\tilde{S}(y) = Dh(x) \circ S(x) \circ Dk^{-1}(\tilde{f}(y))$.

$h$ et $k^{-1}$ étant de classe $C^2$, il existe deux constantes strictement positives $H'$ et $K'$ et deux voisinages $\mathcal{U}''$ et $\Omega'$ de l'origine respective de $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ tels que pour tout $y$ de $\mathcal{U}''$ on ait :

$$||Dh(h^{-1}(y)\ || \leq H'$$

et pour tout $z$ de $\Omega'$ on ait

$$||Dk^{-1}(z)|| \leq K' .$$

On pose $\mathcal{U}''' = \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}'' \cap \tilde{f}^{-1}(\Omega')$

alors si $y \in \mathcal{U}''' \cap W^r_{\tilde{\alpha}}(\tilde{f})$

$$||\tilde{S}(y)|| \leq \frac{H'\ K'\ H^{r-1} C}{||y||^{r-1}} .$$

On a donc $\tilde{C} = H'\ K'\ H^{r-1}\ C$ et $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{U}'''$ .

*Lemme 2*.- Soit $f$ un germe en $(0,0)$ d'application de $X \times Y$ dans $X \times Z$ de classe $C^\mu$, $f(0,0) = (0,0)$ telle que $f(x,y) = (x,g(x,y))$ où $g$ vérifie $g(0,0) = 0$ et $Dg(0,0) = 0$.

Soit $u$ le germe en $0$ de $Y$ dans $Z$, de classe $C^\mu$, défini par $u(y) = g(0,y)$.

Alors $f$ vérifie $(H_r)$ si et seulement si $u$ vérifie $(H_r)$ $(1 \leq r \leq \mu)$.

*Démonstration* : On suppose d'abord que $f$ vérifie $(H_r)$ : alors il existe un voisinage de $(0,0)$ de $X \times Y$ de la forme $V_1 \times V_2$, des constantes strictement positives $\alpha$ et $C$ tels que si $(x,y) \in (V_1 \times V_2) \cap W^r_\alpha(f)$, $Df(x,y)$ admet une section $S(x,y)$ avec $||S(x,y)|| \leqslant \dfrac{C}{||(x,y)||^{r-1}}$.

Soit $y$ de $V_2$ tel que $||u(y)|| < \alpha||y||^r$ alors $(0,y) \in (V_1 \times V_2) \cap W^r_\alpha(f)$ et $Df(0,y)$ admet une section $S(0,y)$.

Or $Df(0,y)(a,b) = (a, D_1g(0,y)a + D_2g(0,y)b)$ et donc si $y \in V_2$, à tout $z$ de $Z$ on peut associer $\beta$ de $Y$ tel que $(0,\beta) = S(0,y)(0,z)$.

On pose $S(y)$ l'application de $Z$ dans $Y$ qui a $z$ associe la projection canonique sur $Y$ de $S(0,y).(0,z)$. $S(y)$ est une section de $Du(y) = D_2g(0,y)$ et

$$||S(y)|| = \sup_{||z||=1} ||S(y).z|| \leqslant \sup_{||(x,z)||=1} ||S(0,y)(x,z)||$$

et donc $||S(y)|| \leqslant \dfrac{C}{||y||^{r-1}}$.

*Réciproque* : On suppose qu'il existe $V_2$ voisinage de l'origine de $Y$, des constantes positives $\alpha_2$ et $C_2$ tels que si $y \in V_2 \cap W^r_{\alpha_2}(u)$ alors $Du(y)$ admet une section $S(y)$ avec $||S(y)|| \leqslant \dfrac{C_2}{||y||^{r-1}}$.

On prend dans $X \times Y$ et $X \times Z$ les normes suivantes : $||(x,y)|| = \sup(||x||,||y||)$, $||(x,z)|| = \sup(||x||,||z||)$.

a) Soit $\alpha$ un réel strictement positif quelconque et $V_1$ la boule ouverte de $X$ de centre $0$ de rayon $(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{r-1}}$.

En restreignant, si besoin est, $V_1$ et $V_2$ pour que $f$

soit défini sur $V_1 \times V_2$, on a pour tout $(x,y)$ de $(V_1 \times V_2) \cap W^r_\alpha(f)$ :

$$\mathrm{Sup}(||x||,||g(x,y)||) \leqslant \alpha\ \mathrm{Sup}(||x||,||y||)^r$$

Comme on ne peut pas avoir $||x|| \leqslant \alpha||x||^r$ il s'en suit que $||(x,y)|| = \mathrm{Sup}(||x||,||y||) = ||y||$

$$||x|| \leqslant \alpha||y||^r \quad \text{et} \quad ||g(x,y)|| \leqslant \alpha||y||^r .$$

$g$ étant de classe $C^1$, il existe une constante strictement positive $L$ et $V'_1 \times V'_2$ voisinage de $(0,0)$ de $X \times Y$ tel que pour tout $(x,y)$ de $V'_1 \times V'_2$ on ait :

$$||g(x,y) - g(0,y)|| \leqslant L||x|| \quad (L = \sup_{(x,y) \in V'_1 \times V'_2} ||D_1 g(x,y)||)$$

On restreint $V'_1$ et $V'_2$ de façon que $V'_1 \subset V_1$ et $V'_2 \subset V_2$.

Comme $g(0,y) = g(0,y) - g(x,y) + g(x,y)$ pour tout $(x,y)$ de $(V'_1 \times V'_2) \cap W^r_\alpha(f)$ on a :

$$||g(0,y)|| \leqslant L||x|| + \alpha||y||^r \leqslant \alpha(L+1)||y||^r .$$

On choisit $\alpha$ tel que $\alpha(1+L) = \alpha_2$.

b) $\alpha$ étant ainsi fixé, si $(x,y) \in (V'_1 \times V'_2) \cap W^r_\alpha(f)$ alors $y \in V_2 \cap W^r_{\alpha_2}(u)$ et donc $Du(y)$ admet une section $S(y)$ telle que

$$||S(y)|| \leqslant \frac{C_2}{||y||^{r-1}}$$

Or $Du(y) = D_2 g(0,y)$. $g$ étant de classe $C^2$, il existe une constante strictement positive $L'$ et $V''_1 \times V''_2$ voisinage de l'origine de $X \times Y$ tels que pour tout $(x,y)$ de $V''_1 \times V''_2$ on ait $||D_2 g(x,y) - D_2 g(0,y)|| \leqslant L'||x||$.

Prenons $V''_1 \times V''_2$ tel que $V''_1 \subset V'_1$, $V''_2 \subset V'_2$ et pour tout $y$ de $V''_2$ , $||y|| < \dfrac{1}{2\alpha C_2 L'}$ , alors pour tout $(x,y)$ de $(V''_1 \times V''_2) \cap W^r_\alpha(f)$ on a $||x|| \leqslant \alpha||y||^r$ et donc

$$||D_2g(x,y) - D_2g(0,y)|| < \frac{||y||^{r-1}}{2C_2} .$$

Or le lemme 1 de l'annexe I reste vrai pour des espaces de Banach. Comme on a pour tout $(x,y)$ de $(V''_1 \times V''_2) \cap W^r_\alpha(f)$ :
$||D_2g(x,y) - D_2g(0,y)|| \leqslant \dfrac{1}{2||S(y)||}$ , il s'en suit que $D_2g(x,y)$ admet une section $S(x,y)$ telle que

$$||S(x,y)|| \leqslant \frac{2C_2}{||y||^{r-1}} \quad \text{et donc}$$

$$||S(x,y)|| \leqslant \frac{2C_2}{||(x,y)||^{r-1}}$$

puisque pour tout $(x,y)$ de $V_1 \times V_2 \cap W^r_\alpha(f)$ on a $||y|| = ||(x,y)||$.

c) Montrons que $Df(x,y)$ admet une section $\tilde{S}(x,y)$ pour tout $(x,y)$ de $(V''_1 \times V''_2) \cap W^r_\alpha(f)$.

$Df(x,y)(a,b') = (a,D_1g(x,y)a + D_2g(x,y)b') = (a,b)$
et donc $\tilde{S}(x,y)(a,b) = (a,S(x,y)(b - D_1g(x,y)a))$.
Or $\mathrm{Sup}(||a||,||S(x,y)(b - D_1g(x,y)a)||) \leqslant \mathrm{Sup}\left(||a||, \dfrac{2C_2(||b|| + L||a||)}{||(x,y)||^{r-1}}\right)$
et $\displaystyle\sup_{||(a,b)||=1}\left(||a||, \frac{2C_2(||b|| + L||a||)}{||(x,y)||^{2-1}}\right) = \frac{2C_2(1 + L)}{||(x,y)||^{r-1}}$ à condition de prendre $V''_1 \times V''_2$ dans la boule ouverte de $X \times Y$ de centre $(0,0)$ de rayon $(2C_2L)^{\frac{1}{r-1}}$. On obtient alors que $||\tilde{S}(x,y)|| \leqslant \dfrac{2C_2(1 + L)}{||(x,y)||^{r-1}}$ .

## VIII. *Le lemme de THOM.*

*Proposition 10* [3].-

Soient $U$ et $V$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ et une application $G$, de classe $C^\infty$, de $U \times V$ dans $\mathbb{R}^r$. Si $c$ est une valeur régulière de $G$ (c'est-à-dire il n'y a pas de point singulier de $G$ dans $G^{-1}\{c\}$). Alors pour presque tout $y$ de $V$, $c$ est une valeur régulière de $G_y : x \to G(x,y)$.

Soit $p$ la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^p$ et $\bar{p}$ la restriction de $p$ à $G^{-1}\{c\}$. On applique à $\bar{p}$ le théorème de SARD.

*Théorème de Sard.*-

L'ensemble des valeurs non régulières d'une application de classe $C^\infty$ et de mesure nulle.

Pour presque tout $y$ de $V$, $y$ est valeur régulière de $\bar{p}$. Considérons une valeur régulière $y$ de $\bar{p}$. Nous allons montrer que pour tout $x$ tel que $G_y(x) = c$ alors $DG_y(x)$ est surjective.

Si $G_y(x) = c$ alors $\bar{p}(x,y) = y$.

$DG(x,y)$ étant surjective, pour tout $Z$ de $\mathbb{R}^r$, il existe $(X,Y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ tel que :

$$Z = DG(x,y)(X,Y) = D_1G(x,y)X + D_2G(x,y)Y.$$

$y$ étant valeur régulière de $\bar{p}$, l'application linéaire tangente à $\bar{p}$ est surjective de $\mathrm{Ker}\, DG(x,y)$, espace tangent en $(x,y)$ à $G^{-1}\{c\}$, sur $\mathbb{R}^p$ et il existe $(X',Y)$ tel que $DG(x,y)(X',Y) = 0$.

D'où $Z = D_1G(x,y)(X-X') = DG_y(x)(X-X')$.

BIBLIOGRAPHIE


[1] Ph. ANTOINE - Image réciproque d'un point par une application différentiable en un point critique. C.R. Académie des Sciences de Paris, t. 288, 5.2. 1979.

[2] Ph. ANTOINE - Etude locale d'une application différentiable Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-79. Publications IRMA de l'U.E.R. de Math. Pures et Appliquées de Lille I, Vol. I, année 1979.

[3] Ph. ANTOINE - Jets v-suffisants. Séminaire d'Analyse 1979-80, U.E.R. Math. Pures et Appliquées de Lille I, non publié.

[4] Ph. ANTOINE - Détermination explicite du cône tangent d'une surface de niveau, application du calcul des variations. C.R. Académie des Sciences de Paris, à paraître.

[5] J. BOCHNAK - Jets suffisants et germes de détermination finie. C.R. Académie des Sciences de Paris, T. 271, 9.12.1970.

[6] J. BOCHNAK - Relèvements de jets. Séminaire P. Lelong (analyse) 1970-71, Lectures Notes Math. 275, p. 106-118.

[7] J. BOCHNAK et S. LOJASIEWICZ - A converse of the KUIPER-KUO theorem Proc. of Liverpool Symposium on Singularities Springer Lectures Notes (1971) - 192 - p.254-261.

[8] J. BOCHNAK and T.C. KUO - Rigid and finitely v-determined germs of $C^\infty$-mapping. Journal of Math. Vol. XXV, n° 4, 1973, p. 727-732.

[9] H. BRODERSEN - Infinite determinacy of smooth map germs. Aarhus Universitet Preprint Series 1978-79, n° 20, August 1979.

[10] N.H. KUIPER - $C_1$-équivalence of functions near isolated critical points. Proc. Symp. in infinite dimensional topology Baton Rouge 1967, p. 199 à 218.

[11] T.C. KUO - A complete determination of $C^0$-sufficiency in $J^r(2,1)$. Invent. Math. Vol. 8 (1969) p. 226-235.

[12] T.C. KUO - Characterizations of v-sufficiency of jets. Topology 11 - 1972, p. 115 à 131.

[13] S. LANG - Introduction aux variétés différentiables. John Wiley and Sons, 1962.

[14] D. LEFEBVRE et M.T. POURPRIX - Conditions pour qu'un jet soit suffisant pour la $C^q$-équivalence de contact. C.R. Académie des Sciences de Paris, T. 293, 6.7.1981.

[15] R. MAGNUS - Topological equivalence in bifurcation theory. Proceding conf. Sao Carlos Brazil 1979, Lectures Notes Math. 799, p. 262-276.

[16] F. TAKENS - A note on sufficiency of jets. Invent. Math. Vol. 13, 1971, p. 225-231.

[17] J.C. TOUGERON - Idéaux de fonctions différentiables. Ann. Institut Fourier, Grenoble 1968, p. 177-240.

## *Notations et abréviations*

Ann Coker Df : annulateur du conoyau de Df.

Aut $(R^p)$ : groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^p$.

Coker Df(0) : conoyau de Df(0).

$\mathcal{E}$ : anneau des germes en 0 d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^\infty$.

$\mathcal{E}_\mu$ : " " " " , de classe $C^\mu$.

$\mathcal{E}^p$ : module sur $\mathcal{E}$ des germes en 0 d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, de classe $C^\infty$.

$\mathcal{E}^p_\mu$ : " $\mathcal{E}_\mu$ " " , de classe $C^\mu$.

End$(\mathbb{R}^p)$ ou End(p) : espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$.

$E_p$ : cf. p. 13.

$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ faisceau de quadriques dans l'espace projectif réel.

$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ " " " " complexe.

$f_k$ : le jet d'ordre k de f en 0 ou un jet d'ordre k.

(f) : idéal de $\mathcal{E}$ engendré par les composantes de f, $f \in \mathcal{E}^p$.

$(f)_\mu$ : idéal de $\mathcal{E}_\mu$ engendré par les composantes de f, $f \in \mathcal{E}^p_\mu$.

$\mathcal{H}_p(f)$ : idéal de $\mathcal{E}$ engendré par les mineurs d'ordre p de la matrice jacobienne de f, $f \in \mathcal{E}^p$.

$H_r$ : cf. p. 8.

$H'_r$ : cf. p. 8.

$\tilde{H}_r$ : cf. p. 18.

$\tilde{H}'_r$ : cf. p. 18.

$I_f$ : cf. p. 14

Im $\phi_1$ : image de $\phi_1$.

$J_f$ : cf. p. 14.

$J_p(f) = (f) + \mathcal{H}_p(f)$ où $f \in \mathcal{E}^p$

$K$ : $K = f_2^{-1}\{0\}$ où $f_2$ est un jet d'ordre 2 vérifiant $H_2$.

$K_r$ : cf. p. 7.

$K'_r$ : cf. p. 8.

$k(q)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $r$ si $q=0$, à $r-1+q(r-s_f+1)$ si $q \in \mathbb{N}^*$.

$k_f(q)$ " " " " " pour $f$ de $E^p_\mu$.

$L(E,F)$ espace vectoriel des applications linéaires et continues de $E$ dans $F$.

$L(n,p)$ espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

$L^o_s(n,End(p)) = End(p)$.

$L^k_s(n,End(p))$ espace vectoriel des applications k-linéaires et symétriques de $\mathbb{R}^n$ dans $End(p)$.

$L^k_s(\tilde{n},End(\tilde{p}))$ espace vectoriel des applications k-linéaires et symétriques de $\mathbb{C}^n$ dans $End(\mathbb{C}^p)$.

$L^k_s(n,p)$ espace vectoriel des applications k-linéaires et symétriques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

$L^k_s(\tilde{n},\tilde{p})$ espace vectoriel des applications k-linéaires et symétriques de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$.

$M_r$ : cf. p. 13.

$m$ : idéal de $E$ formé des germes nuls à l'origine.

$m^\infty$ : idéal de $E$ formé par les fonctions infiniment plates.

$P((n-1),\mathbb{C})$ : espace projectif complexe de dimension $n$.

$P((n-1),\mathbb{R})$ : espace projectif réel de dimension $n$.

$s_f$ : pour $f$ de $E^p_\mu$, $s_f$ est le plus petit entier i, s'il existe, tel que $D^i f(0) \neq 0$.

$Supp(\theta)$ : est le support de $\theta$, la fermeture de l'ensemble des $x$ tels que $\theta(x) \neq 0$.

$W_f$ : pour $f$ de $E^p_\mu$, $W_f = f^{-1}(\{0\})$.

$W_\ell = W_{f_\ell}$ si $f_\ell$ est le jet d'ordre $\ell$ de $f$ en 0.

$W^r_\alpha(f)$ : pour $\alpha$, $r$, $f$ tels que $0 < \alpha \leqslant \infty$, $r \geqslant 1$, $f$ de $\mathcal{E}^p_\mu$, on pose $W^r_\alpha(f) = \{x/x \neq 0, \; ||f(x)|| \leqslant \alpha ||x||^r$ .

$\phi_\ell$ : cf. p. 18.

$\bar{\phi}_\ell$ : restriction de $\phi_\ell$ à $\{0\} \times L^{\ell+1}_s(n,n)$.

$\bar{\bar{\phi}}_\ell$ : restriction de $\phi_\ell$ à $\mathcal{L}^\ell_s(n,\mathrm{End}(p)) \times \{0\}$.

$\tilde{\phi}_\ell$ : cf. p. 83.

$\tilde{\bar{\phi}}_\ell$ : restriction de $\tilde{\phi}_\ell$ à $\{0\} \times \mathcal{L}^{\ell+1}_s(\tilde{n},\tilde{n})$.

$\Sigma_E$ : sphère unité de $E$.

$\Sigma_n$ : sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

$\sigma(u)$ est la section orthogonale de $u$ pour $u$ application linéaire surjective de $E$ dans $F$.

$1_E$ : application identique de $E$ sur lui-même.

$1_n$ : application identique de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

## *Abréviations des tableaux.*

$C^q$-det : $C^q$-déterminé.

$C^q$-éq cont : $C^q$-équivalence de contact.

$C^q$-suf : $C^q$-suffisant.

éq. cont de M : équivalence de contact de MAGNUS.

p-équiv : p-équivalence.

p-équiv stricte : p-équivalence stricte.

sing : singularité.

v-dét : v-déterminé.

v-suf : v-suffisant.