Nº d'ordre: 954

50376 1982 127 50376 1982 127

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES PURES

PAR

ACHARFI SIDI MOHAMED

v-SUFFISANCE DE JETS DÉFINIS SUR UN ESPACE DE BANACH APPLICATION A UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION



MEMBRES DU JURY : G. CŒURÉ, Président

Ph. ANTOINE, Rapporteur

J.P. PENOT (Université de PAU)

F. BERQUIER

F. VAN ISEGHEM

Examinateurs

SOUTENUE LE 19 MARS 1982

" Solitaire

Dans mon horreur de la solitude,
J'ai cru, salutaire,
La science du Symbole.

Téméraire
Est ma tentative
Comme une goutte d'eau
Dans l'océan du Savoir.
Dans la foulée de mes pensées
La genèse d'une passion
Encore fragile.

Mise à part, l'illusion facile D'un devoir accompli Demeure en moi La frustation inassouvie De l'Abstrait ".

Acharfi Sidi Mohamed .

Monsieur Ph. Antoine m'a initié aux techniques du calcul différentiel. Ses suggestions nombreuses et ses remarques pertinemment constructives sont à la base de l'élaboration de ce travail. J'ai trouvé, auprès de lui, beaucoup de patience pour m'aider à cheminer et une grande disponibilité pour se pencher sur mes travaux, parfois au prix de son temps personnel. Ses qualités pédagogiques m'ont profondément marqué. Je saisis donc cette occasion pour lui exprimer toute ma gratitude.

Je remercie Monsieur G. Coeuré d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse ainsi que Monsieur F. Van Iseghem et Mademoiselle F. Berquier qui m'ont fait le plaisir de juger ce travail.

Monsieur J.P. Penot s'est déplacé de l'Université de Pau, pour examiner cette thèse. Sa présence m'honore et je l'en remercie vivement.

Je remercie également les enseignants et les étudiants chercheurs en Mathématiques pour les discussions chaleureuses que j'ai eues avec eux, de même que toutes les personnes qui m'ont sincèrement apporté, à un moment ou à un autre, leur sympathie ou leur amitié.

Enfin, je remercie chaleureusement Arlette Lengaigne qui a dactylographié cette thèse avec soin et compétence ainsi que tout le personnel de l'Imprimerie de l'U.E.R. qui en assuré le tirage et l'empilage.

NOTATIONS.

- . Soit E (resp. F) un espace de Banach. On notera , $|\cdot|\cdot|_E$ la norme dans E , $B_E(x_0;r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r dans E ,L(E) l'espace des endomorphismes de E , E^* le dual de E, l'endomorphisme identité de E , L(E,F) l'espace des applications linéaires continues de E dans F , $L_S^2(E,F)$ l'espace des applications bilinéaires symétriques et continues de E × E dans F.
- . Soit H un espace de Hilbert. On note $\big| \ \big|_H$, la norme dans H et <,> le produit scalaire dans H.
- . Si f est une application de classe C^r , $r \geqslant 1$, d'un ouvert U de $E \times F$, (E et F étant des espaces de Banach). On notera d_1 f(x,y) (resp. d_2 f(x,y)) la différentielle de f par rapport à la première variable (resp. la deuxième variable).
- . Si M est un sous-espace de E , on note \overline{M} , l'adhérence de M dans E et si f est une application de E dans F , f $_{\mid M}$ désignera la restriction de f au sous-espace M.
 - . [x] = classe de x pour une relation d'équivalence.
 - . Si A est une matrice, on désignera par À sa transposée.

TABLE DES MATIERES.

	Page
INTRODUCTION.	1
CHAPITRE I - FORMALISME INTERVENANT DANS L'ENONCE DU THEOREME.	5
I.1 - Couples d'espaces de Banach en dualité.	5
1.2 - Morphismes de couples.	6
1.3 - Morphismes bilinéaires symétriques de couples.	6
I.4 - Opérateurs symétriques sur un couple.	7
I.5 - Couples hilbertiens.	9
1.6 - Morphismes admettant une quasi-section.	11
I.7 - Description de facteurs directs hilbertiens.	23
1.8 - Différentiabilité au sens des couples.	27
1.9 - Théorèmes d'existence sur les couples.	29
1.10 - Germes r-équivalents au sens des couples.	29
CHAPITRE II - THEOREME DE V-SUFFISANCE DU JET D'ORDRE 2 D'UNE	
APPLICATION DIFFERENTIABLE ENTRE COUPLES.	35
II.1 - Enoncé du théorème.	35
II.2 - Démonstration du théorème.	36

./..

HAPITRE III - APPLICATION A UNE EQUATION D'EVOLUTION D'UN SYSTEME	
AUTONOME. 5	1
III.1 - Formalisation et étude locale du problème. 5	1
III.2 - Expression de β o Δ^2 g(τ_0 , x_0 , u_0 ,0).	2
III.3 - Conditions pour qu'une fonctionnelle quadratique du type $\int_{0}^{1} a(t) (h(t),h(t)) dt \text{vérifie la}$	
condition (R) du théorème II.1.	3
III.4 - Démonstration du théorème III.3.	64
111.5 - Discussion de la condition (C) dans le cas d'un contrôle scalaire.	4
NNEXE.	77
IBLIOGRAPHIE.	32

INTRODUCTION.

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert contenant l'origine dans E. Si f est une application de classe C^r , de U dans F telle que f(0) = 0, pour $0 \le k \le r$, on appelle jet d'ordre k ou k-jet de f en 0, le polynôme taylorien de degré k de f en 0. On note $J^k(E,F)$ l'ensemble de tous les k-jets de germes en 0, d'applications de classe C^r , $r \ge k$ de E dans F, nulles en 0 et $J^k(n,p)$ le même ensemble lorsque E et F sont de dimension finie n et p. Considérons les notions suivantes :

<u>Définition</u> 1.- Soit z dans $J^k(E,F)$. On dit que z <u>est</u> v-<u>suffisant</u> si f et g étant deux réalisations de z, de classe C^r , r > k, il existe un homéomorphisme local h tel que h(0) = 0 et $h(g^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$.

<u>Définition</u> 2.- Soit z dans $J^k(E,F)$. On dira que z est <u>suffisant pour la C¹-équivalence de contact</u> si pour toutes réalisations f et g de z, de classe C^r , r > k, il existe un voisinage V de 0 dans E, un difféomorphisme local h de classe C^1 et une application a de classe C^0 de V dans L(F) tels que :

- i) h(0) = 0 , $dh(0) = l_E$
- ii) $a(0) = l_F$,
- iii) $f(x) = a(x) \circ g(h(x))$, pour tout x dans V.

Suivant R. Magnus [1], nous considérerons une troisième notion d'équivalence de contact : la C¹-équivalence de contact "polaire"

qui est plus faible que la C^1 -équivalence de contact. Pour cela nous supposerons qu'il existe sur l'espace de Banach E , une structure préhilbertienne. Soit Σ la sphère unité de E pour la norme préhilbertienne ; à tout germe f en 0 d'application de classe C^r , de E dans F, on associe un germe \overline{f} en $\{0\} \times \Sigma$, d'application de classe C^r de $\mathbb{R} \times \Sigma$ dans F de la façon suivante :

$$\forall (t,\xi) \in \mathbb{R} \times \Sigma$$
, $\overline{f}(t,\xi) = f(t\xi)$.

<u>Définition</u> 3.- Soit z dans $J^k(E,F)$, on dira que z est suffisant pour la C^1 -équivalence de contact "polaire" si pour toutes réalisations f et g de z, de classe C^r , $r \ge k$, il existe des voisinages V et V' de $\{0\} \times \Sigma$ dans $\mathbb{R} \times \Sigma$, un difféomorphisme local (ρ,θ) de classe C^1 , de V dans V' et une application a de classe C^1 , de V dans L(F), tels que :

- i) $\forall \xi \in \Sigma$, $\rho(0,\xi) = 0$
- ii) $\forall \xi \in \Sigma$, $a(0,\xi) = 1_F$
- iii) $\forall (t,\xi) \in V$, $\bar{f}(t,\xi) = a(t,\xi) \circ \bar{g}(\rho(t,\xi), \theta(t,\xi))$.

Dans le cas où les espaces E et F sont de dimension finie, un critère de v-suffisance a été donné par Tzee-Char Kuo dans [2]. Ce critère peut s'énoncer ainsi :

Ce critère permet dans le cas des espaces de dimension finie de déterminer l'aspect topologique local de la surface de niveau d'une application de classe Cr, au voisinage d'un point. Pour notre cas, nous nous intéressons aux jets d'ordre 2, qu'on pourra (*) supposer homogènes. En dimension finie, pour un k-jet homogène, la v-suffisance entraîne la C¹-équivalence de contact [3]. Pour les espaces de Hilbert, Ph. Antoine a montré dans [4] que le critère de Tzee-Char Kuo étendu de manière évidente aux cas des espaces de dimension infinie, entraîne encore la C^l-équivalence de contact. Notre propos est de démontrer un résultat analogue pour des espaces plus généraux. L'idéal serait de faire cette extension aux espaces de Banach quelconques ! Malheureusement, les techniques de démonstrations ne s'y prêtent pas ; et c'est pourquoi on fait appel à des espaces de Banach munis d'une structure supplémentaire qui tient lieu du produit scalaire des espaces hilbertiens, à savoir les "couples hilbertiens" définis au paragraphe I.5. Cette classe d'espaces contient entre autres la classe des espaces de Hilbert. Ajoutons, par ailleurs, que les fonctionnelles du calcul de variations sont définies et différentiables sur des "couples hilbertiens". Les hypothèses que 1'on fera (condition (R) page 36) sont plus faibles que la généralisation naturelle sur l'espace de Banach du critère de Tzee-Char Kuo; en contrepartie nous ne démontrerons (théorème II.1.) que la suffisance pour la C¹-équivalence de contact polaire. Nous donnons une démonstration du théorème II. l. au chapitre II, après avoir, au préalable, au chapitre I, d'une part rappelé le formalisme de calcul différentiel sur les couples [5] et d'autre part établi certains résultats techniques (notamment les propriétés des morphismes de couples admettant une quasi-section) dont on se sert au

^{(*):} voir proposition I.10.2. page 30.

chapitre II. Nous présentons ensuite au chapitre III une application du théorème II.1., dans le cas d'une équation d'évolution d'un système autonome. Après avoir fait apparaître l'ensemble des solutions de cette équation comme la surface de niveau d'une application différentiable entre couples, nous donnons une condition nécessaire et suffisante (C) (**) pour que la différentielle seconde intrinsèque de cette application vérifie la condition (R) (du théorème II.1.). La condition (C) présente l'avantage d'être locale et finidimentionnelle et peut donc être facilement vérifiée sur un exemple.

^{(**) :} La condition (C) est donnée au théorème III.3. page 64 .

CHAPITRE I

FORMALISME INTERVENANT DANS L'ENONCE DU THEOREME.

Nous énonçons ici (paragraphes I.1, I.2, I.3, I.4, I.5, I.8 et I.9) les résultats du calcul différentiel sur les couples d'espaces de Banach en dualité dont nous aurons besoin. La plupart des démonstrations se trouvent dans [5]. Néanmoins, nous donnons des résultats nouveaux avec leurs démonstrations aux paragraphes I.6, I.7 et I.10.

I.1. - COUPLES D'ESPACES DE BANACH EN DUALITE.-

I.1.1. - <u>Définition</u>. - On appelle couple d'espaces de Banach en dualité et on le note $\mathbb E$, le triplet (E,E',Φ) où E et E' sont des espaces de Banach et Φ une forme bilinéaire continue mettant E et E' en dualité séparante.

 $I.1.2. - \underline{Couple\ produit} : \text{Soient} \quad \mathbb{E}_1 = (\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_1',\Phi_1') \quad \text{et}$ $\mathbb{E}_2 = (\mathbb{E}_2,\mathbb{E}_2',\Phi_2') \quad \text{deus couples d'espaces de Banach en dualité, on définit}$ le couple produit $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ (au sens de la catégorie des couples d'espaces de Banach en dualité), par le triplet $(\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2,\mathbb{E}_1' \oplus \mathbb{E}_2',\Phi)$ où Φ est la dualité donnée par :

$$\forall (x_{1}', x_{2}') \in E_{1}' \oplus E_{2}', \forall (x_{1}, x_{2}) \in E_{1} \times E_{2},$$

$$\Phi((x_{1}', x_{2}'), (x_{1}, x_{2})) = \Phi_{1}(x_{1}', x_{1}) + \Phi_{2}(x_{2}', x_{2}).$$

1.2. - MORPHISMES DE COUPLES (*).-

1.2.1. - <u>Définition</u>. On appelle morphisme du couple $\mathbb{E} = (E, E', \phi) \quad \text{dans le couple } \mathbb{F} = (F, F', \psi) \quad \text{, un couple d'applications } (u, u')$ où u (resp. u') est une application linéaire et continue de E dans $\mathbb{F} \quad \text{(resp. de } F' \quad \text{dans } E') \quad \text{vérifiant :}$

$$\forall y' \in F'$$
, $\forall x \in E$, $\Phi(u'y',x) = \Psi(y',ux)$.

Soient $\mathbf{E}=(\mathtt{E},\mathtt{E}',\Phi)$ et $\mathbf{F}=(\mathtt{F},\mathtt{F}',\Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité, on note $\mathbf{I}_{\mathbf{E}}$ le morphisme identité de \mathbf{E} c'est-à-dire le couple d'applications $(\mathbf{I}_{\mathbf{E}},\mathbf{I}_{\mathbf{E}'})$ et $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ l'ensemble des morphismes du couple \mathbf{E} dans le couple \mathbf{F} . $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ est un espace de Banach pour la norme $||(\mathbf{u},\mathbf{u}')||=\sup(||\mathbf{u}||,||\mathbf{u}'||)$.

1.2.2. - Composition des morphismes de couples.

Etant donnés, \mathbb{E} , \mathbb{F} et \mathbb{G} trois couples d'espaces de Banach en dualité, (u,u') un morphisme de \mathbb{E} dans \mathbb{F} et (v,v') un morphisme de \mathbb{F} dans \mathbb{G} . Alors (v,v') o (u,u') = $(v \circ u, u' \circ v')$ est un morphisme de \mathbb{E} dans \mathbb{G} .

1.3. - MORPHISME BILINEAIRE SYMETRIQUE DE COUPLES.-

1.3.1. - <u>Définition</u>.~ Soient $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ et $\mathbb{F} = (F, F', \Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité, on appelle morphisme bilinéaire symétrique, le couple d'applications (A,A') de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{F} , où A est bilinéaire symétrique et continue de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{F} et A', bilinéaire continue, de $\mathbb{F}' \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{E}' , vérifiant la propriété d'adjonction suivante :

^{(*) :} Couples d'espaces de Banach en dualité.

$$\forall x_1 \ \epsilon \ E$$
 , $\forall x_2 \ \epsilon \ E$, $\forall Y' \ \epsilon \ F'$,

$$\Phi(A'(Y,X_1),X_2) = \Psi(Y',A(X_1,X_2)) = \Phi(A'(Y,X_2),X_1)$$
.

On notera $L_s^2(\mathbb{E},\mathbb{F})$ l'ensemble des morphismes bilinéaires symétriques de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{F} . $L_s^2(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un espace de Banach pour la norme $||(A,A')|| = \sup(||A||, ||A'||)$.

1.4. - OPERATEURS SYMETRIQUES SUR UN COUPLE.-

I.4.1. - <u>Définition</u>. - Soit $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ un couple d'espaces de Banach en dualité. Un <u>opérateur symétrique</u> sur \mathbb{E} est une application T , <u>linéaire et continue de E dans E'</u>, telle que :

$$\forall x \in E$$
 , $\forall y \in E$, $\Phi(Tx,y) = \Phi(Ty,x)$.

On notera $L_s(\mathbb{E})$ l'ensemble des opérateurs symétriques sur le couple \mathbb{E} . $L_s(\mathbb{E})$ est un espace de Banach pour la norme :

$$||T|| = \sup_{\mathbf{x} \in E} ||T\mathbf{x}||_{E}$$
.

1.4.2. - Proposition. - $L_s(\mathbb{E})$ s'identifie à $L_s^2(\mathbb{E},\mathbb{R})$.

 $\frac{\underline{D\acute{e}monstration}}{\underline{D\acute{e}monstration}}: \ Consid\acute{e}rons \ 1'application \ \eta \ de \ L_S^{(E)}$ dans $L_S^2(E,I\!\!R), \ d\acute{e}finie \ par :$

$$\forall T \in L_S(\mathbb{E}) , \eta(T) = (A_T, A_T')$$

où $\mathbf{A}_{\mathbf{T}}$ désigne une application bilinéaire symétrique et continue

de E × E dans IR, définie par :

$$\forall x \in E$$
 , $\forall y \in E$, $A_T(x,y) = \Phi(Tx,y)$

et A_T' une application bilinéaire et continue, de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{E}' , définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$
 , $\forall z \in E$, $A_{T}(\lambda, z) = \lambda$. Tz

 η est une application linéaire; elle est continue car $||\eta||\leqslant \sup(1,\,||\Phi||)$. En outre η est injective. En effet, $\eta(T)=0$ entraı̂ne en particulier $A_T \quad \text{identiquement nul; d'où, } \Phi(Tx,y)=0 \text{ , quels que soient } x \text{ et } y$ dans E. Ceci entraı̂ne, puisque Φ est une dualité séparante, que Tx=0 , pour tout x de E donc T est identiquement nul.

D'autre part η est surjective (puisque $T = A'(1,.) \in L_s(\mathbb{E})$). Ainsi η est un isomorphisme de $L_s(\mathbb{E})$ dans $L_s^2(\mathbb{E},\mathbb{R})$.

1.4.3. - <u>Définition</u>. - Soit $T \in L_s(\mathbb{E})$, T est dit <u>positif</u> si :

$$\forall x \in E$$
 , $\Phi(TX,X) > 0$.

- $\label{eq:Ls} \textit{1.4.4.} \underline{\textit{Définition.}} \text{ Soit } \texttt{T} \in \texttt{L}_{s}(\texttt{E}) \text{ , } \texttt{T} \text{ est dit } \underline{\texttt{coercif}}$ s'il est intérieur à l'ensemble des opérateurs positifs sur le couple E .

1.5. - COUPLES HILBERTIENS.-

- 1.5.1. <u>Définition</u>. Etant donné $\mathbf{E} = (\mathbf{E}, \mathbf{E}', \Phi)$, un couple d'espaces de Banach en dualité. On dira que \mathbf{E} est un couple hilbertien s'il existe un opérateur coercif sur \mathbf{E} .
 - 1.5.2. Propriétés d'un opérateur coercif sur un couple.

Un opérateur coercif T sur un couple $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ (hilbertien) définit une structure préhilbertienne séparée sur l'espace E de norme :

$$\forall x \in E$$
, $|x|_T = (\Phi(Tx,x))^{1/2}$

Les structures préhilbertiennes définies sur l'espace $\, {\rm E} \,$ par deux opérateurs coercifs $\, {\rm T}_1 \,$ et $\, {\rm T}_2 \,$ sont équivalentes.

On note ${}^{H}_{\mathbb{E}}$, le complété de E pour la structure préhilbertienne séparée sur E (définie par un opérateur coercif T sur le couple E) et $|x|_{H_{\overline{E}}} = |x|_{T}$, quel que soit x de E.

- 1.5.3. <u>Proposition</u>. <u>Tout facteur direct d'un couple hilbertien</u> est un couple hilbertien.
- 1.5.4. <u>Remarque</u>. <u>Tout couple</u> E <u>de dimension finie est un</u> couple hilbertien.
- $1.5.5. \underline{\textit{Proposition}}. \underline{\textit{Soit}} \quad \mathbb{E} = (\mathbb{E}, \mathbb{E}', \Phi) \quad \underline{\textit{un couple hilbertien}}$ $\underline{\text{et}} \quad H_{\mathbb{E}} \quad , \quad \underline{\textit{1'espace de Hilbert associ\'e au couple}} \quad \mathbb{E}. \quad \underline{\textit{On a les propriét\'es}}$ suivantes :
 - 1) L'injection canonique, α de E dans $H_{\mathbb{E}}$ est continue.
 - 2) Pour tout x' de E', la forme linéaire $\Phi(x',.)$ sur E,

s'étend en une forme linéaire continue sur $H_{\mathbb{E}}$. Et l'application linéaire α' , de E' dans $H_{\mathbb{E}}^*$, définie par $\alpha(x')$ est la prolongée de $\Phi(x',.)$ sur $H_{\mathbb{E}}$, est une injection continue et d'image dense.

3) Tout opérateur T symétrique sur E s'étend en un opérateur h_T symétrique de H_E dans H_E^* c'est-à-dire α o T = h_T o α . Si l'on pose $L_s(H_E) = L_s(H_E, H_E^*)$, l'application τ de $L_s(E)$ dans $L_s(H_E)$ définie par :

$$\forall T \in L_s(\mathbb{E}) , \quad \tau(T) = h_T$$

est linéaire continue.

- $1.5.6. \underline{\textit{Proposition}}. \underline{\textit{Soient}} \quad \mathbb{E} = (E, E', \phi) \quad \underline{\textit{et}} \quad \mathbb{F} = (F, F', \psi)$ $\underline{\textit{deux couples hilbertiens et}} \quad (u, u') \quad \underline{\textit{un morphisme de}} \quad \mathbb{E} \quad \underline{\textit{dans}} \quad \mathbb{F} .$ $\underline{\textit{Alors 1'application}} \quad u, \underline{\textit{de}} \quad E \quad \underline{\textit{dans}} \quad F, \underline{\textit{s'étend en une application}}$ $\underline{\textit{linéaire continue}} \quad h_u, \underline{\textit{de}} \quad H_E \quad \underline{\textit{dans}} \quad H_F \quad \underline{\textit{et 1'application linéaire}}$ $\underline{\textit{ainsi définie de}} \quad L(E,F) \quad \underline{\textit{dans}} \quad L(H_E,H_F) \quad \underline{\textit{est continue}}. \quad \underline{\textit{En outre}},$ $\underline{\textit{1'application u' de}} \quad F' \quad \underline{\textit{dans}} \quad E' \quad \underline{\textit{s'étend en une application linéaire}}$ $\underline{\textit{continue de}} \quad H_F^* \quad \underline{\textit{dans}} \quad H_E^* \quad ; \quad \underline{\textit{cette extension}} \quad h_u^* \quad \underline{\textit{est la transposée}}$ $\underline{\textit{de h}} \quad .$
- 1.5.7. Corollaire. Soient E et F deux couples

 hilbertiens et (u,u') un morphisme de E dans F. Si S est l'opérateur coercif sur le couple F qui a servi à construire H_F, il

 existe alors b strictement positif tel que

$$\forall x \in E$$
, $|ux|_{H_{\overline{B}}} \le (b||S||)^{1/2} ||(u,u')|| |x|_{H_{\overline{B}}}$.

1.5.8. - <u>Corollaire</u>. - <u>Soit</u> $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ <u>un couple hilbertien</u>. On considère (A,A') <u>un élément de</u> $L_s^2(\mathbb{E},\mathbb{R}^n)$ <u>défini par</u>

$$\forall (x_1, x_2) \in E \times E$$
, $A(x_1, x_2) = [\phi(T_i x_1, x_2)]_{i=1}^n$

 \underline{ou} T_i , $1 \leqslant i \leqslant n$, $\underline{est \ un \ opérateur \ symétrique \ sur \ 1e \ couple}$ E \underline{et}

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$$
 , $\forall x \in E$, $A'(\lambda, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i x$.

Il existe alors D, constante strictement positive telle que:

$$\forall x \in E$$
, $||A(x,x)||_{\mathbb{R}^n} \leq D ||(A,A')|| |x|_{\mathbb{H}}^2$.

1.6. - MORPHISMES ADMETTANT UNE QUASI-SECTION.-

On considère $\mathbb{E}=(E,E',\Phi)$, $\mathbb{F}=(F,F',\Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité et $\nu=(u,u')$ un morphisme du couple \mathbb{E} dans le couple \mathbb{F} .

I.6.1. - <u>Définition</u>. - On dit que ν admet une quasi-section s'il existe un morphisme σ = (s,s') du couple ${\mathbb F}$ dans le couple ${\mathbb E}$ tel que :

1.6.2. - Description du couple Kerv.

Soient i l'injection canonique de Keru dans E , i'
la surjection canonique de E' dans Coker u'

1.6.2. - <u>Proposition</u>. - <u>La forme bilinéaire</u> Φ_1 <u>définie</u> <u>sur</u> Coker u' × Ker u <u>par</u> :

 $\forall x \in \text{Ker } u$, $\forall x' \in E'$, $\Phi_1([x'],x) = \Phi_1(i'x',x) = \Phi(x',ix)$ est une dualité séparante.

 $\underline{\text{Démonstration}}: \text{ Si } \Phi_1(\left[x'\right], \text{ } x) = 0 \text{ , quel que soit } \left[x'\right]$ on a $\Phi(x', ix) = 0$, quel que soit x' d'où, puisque Φ est séparante, ix = 0 et, i étant injectif, il vient : x = 0.

D'autre part, si $\Phi_1([x'], x) = 0$, quel que soit x on a $\Phi(x', ix) = 0$ quel que soit x; donc x' appartient au polaire de Ker u.

Nous allons montrer que ce polaire est égal à Im u'.

On a :

$$\forall Y' \in F'$$
, $\forall X \in Ker u$, $\Phi(u' Y', X) = \Psi(Y', uX) = 0$

Donc Im u' est contenu dans le polaire de Ker u .

Réciproquement. Soit X' un élément du polaire de Ker u .

Comme u admet une quasi section s , il vient que :

$$\forall x \in E$$
 , $x - s \circ u \times \varepsilon \text{ Ker } u$.

Donc:

$$\forall X \in E$$
, $\Phi(X' - u' \circ s' X', X) = \Phi(X', X - s \circ u X) = 0$

d'où: X'-u'o s' X' est nul c'est-à-dire X' appartient à Im u' et donc le polaire de Ker u est contenu dans Im u'.

Par conséquent, $x' \in \text{Im } u'$ entraîne [x'] = 0.

1.6.2. - <u>Définition</u>. - On appellera noyau du morphisme v = (u,u') et on notera \mathbb{K} er v ou \mathbb{K} er(u,u'), le couple d'espaces de Banach en dualité défini par le triplet : (Ker u, Coker u', Φ_1).

On vérifie que (i,i') est un monomorphisme du couple $\mathbb{K}\mathrm{er}\ \nu$ dans le couple $\mathbb{E}.$

I.6.3. - Description du couple Coker v.

Soient k la surjection canonique de F sur Coker u et k' l'injection canonique de $Ker\ u'$ dans F' .

1.6.3. - <u>Proposition</u>. - <u>La forme bilinéaire</u> Ψ_1 <u>définie</u> <u>sur Ker u' × Coker u par :</u>

$$\forall y \in F$$
 , $\forall y' \in Ker u'$, $\Psi_1(y', [y]) = \Psi_1(y', ky) = \Psi(k'y', y)$

est une dualité séparante.

Par ailleurs, si $\Psi_1(y',[y])$ est nul quel que soit y', on a $\Psi(k'y',y)$ nul quel que soit y'; donc y appartient au polaire de Ker u'. Nous allons prouver que ce polaire est égal à Im u on a :

$$\forall X \in E$$
, $\forall Y' \in Ker u'$, $\Psi(Y', uX) = \Phi(u'Y', X) = 0$

Donc Im u est inclus dans le polaire de Ker u'.

Réciproquement si l'on prend Y dans le polaire de Ker u', étant donné que u' admet une quasi-section s', on a :

$$\forall y' \in F'$$
 , $y' - s' \circ u' \ Y' \in Ker \ u'$

il vient alors :

$$\forall Y' \in F'$$
, $\Psi(Y' - s' \circ u' Y', Y) = \Psi(Y', Y - u \circ s Y) = 0$

d'où Y - u o s Y est nul i.e. Y appartient à Im u et donc le polaire de Ker u' est contenu dans Im u finalement y appartient à Im u et [y] = 0.

I.6.3. - <u>Définition</u>. On appellera Conoyau du morphisme v = (u,u') et on le notera Coker v ou Coker(u,u'), le couple défini par le triplet (Coker u , Ker u', Ψ_1) .

On vérifie que (k,k') est un épimorphisme du couple Coker ν dans le couple E.

1.6.4. - Description du couple Im v.

Soient j l'injection canonique de Im u dans F , j' la surjection canonique de F' sur CoIm u'.

1.6.4. - <u>Proposition</u>. - <u>La forme bilinéaire</u> Ψ_2 <u>définie sur</u> Colm u' × Im u <u>par</u> :

$$\forall z' \in F'$$
, $\forall z \in Im u$, $\Psi_2([z'], z) = \Psi_2(j'z', z) = \Psi(z', jz)$

est une dualité séparante.

D'autre part, si $\Psi_2([z'],z) = 0$ quel que soit z, il

vient : $\Psi(z',jz) = 0$ quel que soit z ; donc z' appartient au polaire de Im u. Montrons que ce polaire est égal à Ker u', on a :

$$\forall$$
Z' ϵ Ker u' , \forall X ϵ E , Ψ (Z',uX) = Φ (u'Z',X) = 0 .

Donc Ker u' est inclus dans le polaire de Im u.

Réciproquement, prenons Z' un élément du polaire de Im u .

Sachant que u admet une quasi-section s, il vient :

$$\forall z \in F$$
, $z - (z - u \circ s z) \in Im u$.

D'autre part, on a :

 \forall Z ϵ F , Ψ (Z' - (Z' - s' o u' Z'), Z) = Ψ (Z', Z - (Z - u o s Z)) = 0 d'où Z' = Z' - s' o u' Z'. Comme u' admet une quasi-section s' on déduit que Z' appartient à Ker u'. Et donc le polaire de Im u est contenu dans Ker u'.

Par conséquent, z' ϵ Ker u' soit [z'] = 0.

1.6.4. - <u>Définition</u>. - On appellera image du morphisme v = (u, u') et on le notera $\operatorname{Im} v$ ou $\operatorname{Im}(u, u')$, le couple défini par le triplet $(\operatorname{Im} u, \operatorname{CoIm} u', \Psi_2)$.

On vérifie que (j,j') est un monomorphisme du couple ${\rm Im}\ \nu$ dans le couple ${\rm If}$.

- 1.6.5. Lemme. Soit u : E → F une application linéaire continue on suppose que u admet une quasi-section s, (i.e. : u o s o u = u) alors on a les propriétés suivantes :
 - 1) $p = s \circ u$ est un projecteur sur E.
 - 2) q = u o s est un projecteur sur F.
 - 3) $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} u$.
 - 4) $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} u$.

Preuve:

- 1) $p^2 = s \circ u \circ s \circ u = s \circ (u \circ s \circ u) = s \circ u = p$
- 2) $q^2 = u \circ s \circ u \circ s = (u \circ s \circ u) \circ s = u \circ s = q$.
- 3) On a évidenment Ker u \subset Ker p . Montrons que Ker p \subset Ker u. Pour x dans Ker p , on a so u x = 0 d'où u o so u x = u 0 = 0. Comme u admet une quasi section s, il vient que ux = 0 et x \in Ker u.
- 4) De toute évidente, Im q est contenu dans Im u. Montrons que Im u ⊂ Im q . Soit y un élément de Im u , il existe alors un x élément de E tel que y = u x. Sachant que u admet une quasisection, s, il vient que y = u o s o u x d'où y = u o s y et donc y € Im q. ■
- I.6.6. Lemme. Soit v = (u,u') un morphisme du couple $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$ dans le couple $\mathbb{F} = (F,F',\Psi)$, on suppose que v admet une quasi-section $\sigma = (s,s')$. Alors on a les propriétés suivantes :
 - 1) (s o u, u' o s') = (p,p') est un projecteur sur le couple \mathbb{E} .
 - 2) $(u \circ s, s' \circ u') = (q,q')$ est un projecteur sur le couple F.
 - 3) Ker p = Ker u
 Im p' = Im u'
 - 4) $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} u$ $\operatorname{Ker} q' = \operatorname{Ker} u'$.

Preuve:

1) Sachant que ν admet une quasi-section (i.e. : u=u o s o u et u'=u' o s' o u') on a (lemme I.6.5.) que p=s o u est un projecteur sur l'espace de Banach E. Et en remplaçant u par u' dans l'hypothèse

du même lemme I.6.5. il vient que p' = u's' est un projecteur sur l'espace de Banach E'. D'autre part, si Φ est la dualité sur le couple Φ , on a :

$$\forall x \in E$$
, $\forall x' \in E'$, $\Phi(x', s \circ u x) = \Phi(u' \circ s' x', x)$

c'est-à-dire:

$$\forall x \in E$$
 , $\forall x' \in E'$, $\Phi(x', px) = \Phi(p'x', x)$

et (p,p') est un projecteur sur le couple E.

2) D'après le lemme I.6.5. on a q = u o s est un projecteur sur l'espace de Banach F et en changeant u en u' dans l'hypothèse du même lemme I.6.5., on a q' = s' o u' est un projecteur sur F'. Par ailleurs, Ψ étant la dualité sur le couple F, on a :

$$\forall y \in F$$
, $\forall y' \in F'$, $\Psi(y', u \circ s y) = \Psi(s' \circ u'y', y)$

c'est-à-dire :

$$\forall y \in F$$
, $\forall y' \in F'$, $\Psi(y',q y) = \Psi(q' y',y)$

et (q,q') est un projecteur sur le couple F.

- 3) D'après le lemme I.6.5., on a : Ker p = Ker u. En outre, si l'on remplace u par u' dans l'hypothèse de ce lemme I.6.5., il vient que : Im u' o s' = Im u' Soit Im p' = Im u'.
- 4) Du lemme I.6.5., on déduit que Im q = Im u. Et en remplaçant u par u' dans ce lemme I.6.5., on obtient que Ker s' o u' = Ker u' soit Ker q' = Ker u'. ■

1.6.7. - <u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> v = (u,u') <u>un morphisme du couple</u> $\mathbf{E} = (\mathbf{E},\mathbf{E}',\Phi) \quad \underline{\text{dans le couple}} \quad \mathbf{F} = (\mathbf{F},\mathbf{F}',\Psi). \quad \underline{\mathbf{Si}} \quad v \quad \underline{\text{admet une quasi-section}},$ $\sigma = (\mathbf{s},\mathbf{s}') \quad \underline{\text{alors le couple}} \quad \mathbf{Ker} \quad v \quad \underline{\text{est un facteur direct du couple}} \quad \mathbf{E}.$

<u>Démonstration</u>: Soient i, l'injection canonique de Ker u dans E et i', la surjection canonique de E' dans Coker u'. Nous allons établir que le monomorphisme (i,i') admet une projection, à savoir un morphisme (γ,γ') , de E dans Ker ν , tel que :

$$\gamma \circ i = 1_{\text{Ker } u}$$
, $i' \circ \gamma' = 1_{\text{Coker } u'}$

On sait (définition I.6.2.) que \mathbb{K} er $v = (\mathbb{K}$ er u, \mathbb{C} oker u', Φ_1) où Φ_1 est définie par :

$$\forall [x'] \in Coker u'$$
, $[x'] = i'x'$, $\forall x \in Ker u$, $\Phi_1([x'], x) = \Phi(x', ix)$

et que (i,i') est le monomorphisme canonique de Ker ν dans E. On définit une projection (γ,γ') de E sur Ker ν par :

 $(p,p') = (s \ o \ u, \ u' \ o \ s') \quad \text{\'etant un projecteur sur le couple } \mathbb{E}$ (lemme I.6.6.), l'endomorphisme $(l_E - p, l_{E'} - p')$, du couple \mathbb{E} , se factorise en un couple d'applications (γ,γ') linéaires et continues de \mathbb{E} dans \mathbb{K} er ν on a: $i \ o \ \gamma = l_E - p$, et γ' o $i' = l_E, -p'$. D'autre part, $(l_E - p, l_{E'} - p')$ étant un morphisme de \mathbb{E} dans lui-même, (γ,γ') est un morphisme de \mathbb{E} sur \mathbb{K} er ν . Vérifions que (γ,γ') est une projection de (i,i') on a:

1) io $(\gamma \circ i) = (i \circ \gamma) \circ i = (l_E - p) \circ i = i$, (car $u \circ i = 0$) d'où $\gamma \circ i = l_{Ker} u$.

2) (i' o
$$\gamma$$
') o i' = i' o (γ ' o i') = i' o ($l_{E'}$ - p ') = i' , (car i' o u' = 0) d'où i' o γ ' = $l_{Coker\ u'}$.

I.6.8. - <u>Proposition</u>. - <u>Soient</u> $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \mathbb{E}', \Phi)$ <u>et</u> $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, \mathbb{F}', \Psi)$ <u>deux couples d'espaces de Banach en dualité. Si</u> $\nu = (u, u')$, <u>morphisme</u> <u>de</u> \mathbb{E} <u>dans</u> \mathbb{F} , <u>admet une quasi-section</u> $\sigma = (s, s')$. <u>Alors le couple</u> Im ν est un facteur direct du couple \mathbb{F} .

 $\underline{\underline{\text{D\'emonstration}}}: \text{ Soient, j 1'injection canonique de Im u}$ dans F et j' la surjection canonique de F' sur CoIm u'. Montrons que le monomorphisme (j,j') admet une projection (π,π') de F sur Im ν tel que:

$$\pi \circ j = 1_{\text{Im } u}$$
 et $j' \circ \pi' = 1_{\text{CoIm } u'}$.

On sait (définition I.6.4.) que Im ν est le couple défini par le triplet : (Im u, CoIm u', Ψ_2) où Ψ_2 est la dualité définie par :

$$\forall [y'] \in CoIm u'$$
, $[y'] = j'y'$, $\forall y \in Im u$, $\Psi_2([y'], y) = \Psi_2(j'y', y)$
= $\Psi(y', j, y)$

et que (j,j') est le monomorphisme canonique de Im ν dans F. On définit une projection (π,π') , de F sur Im ν , par :

(q,q') = $(u \circ s, s' \circ u')$ étant un projecteur sur le couple F (lemme I.6.6.), il se factorise en un couple d'applications (π,π') linéaires et continues de F sur Im ν , comme suit :

$$\mathbf{j}$$
 o π = \mathbf{q} et π' o \mathbf{j}' = \mathbf{q}' .

Comme (q,q') est un endomorphisme du couple F , (π,π') est un morphisme du couple F sur le couple Im ν .

Vérifions que (π,π') est une projection de ${\rm I\!F}$ sur ${\rm I\!Im}\ \nu$. On a :

- 1) jo $(\pi \circ j) = (j \circ \pi) \circ j = q \circ j = j$ (car $q \circ u = u$) d'où $\pi \circ j = l_{\text{Im } u}$.
- 2) $(j! \circ \pi') \circ j' = j' \circ (\pi' \circ j') = j' \circ q' = j'$ (car Ker u' = Ker q') d'où j' o $\pi' = 1_{CoIm \ u'}$
- 1.6.9. <u>Proposition</u>. <u>Soient</u> $E = (E, E', \Phi)$ <u>et</u> $F = (F, F', \Psi)$ <u>deux couples d'espaces de Banach en dualité et</u> (u, u') <u>un morphisme de</u> $E \quad \underline{dans} \quad F \quad , \quad \underline{admettant} \quad \underline{une} \quad \underline{quasi-section} \quad (s, s') \quad , \quad \underline{alors \quad on \quad a \quad les \quad propriétés \quad suivantes}$
- i) L'application u de E dans F, induit une application v

 de Im p dans Im q où p = s o u et q = u o s. Et l'application u'

 de F' dans E', induit une application v', de Im q' dans Im p'

 où q' = s' o u' et p' = u' o s'.
- ii) <u>La restriction</u> Φ_1 , <u>de</u> Φ <u>à</u> Im p' × Im p, <u>est une</u> dualité séparante. On note \mathbb{E}_1 , <u>le couple</u> : (Im p, Im p', Φ_1).
- iii) <u>La restriction</u> Ψ_1 , <u>de</u> Ψ <u>à</u> Im q' × Im q , <u>est une</u> <u>dualité séparante. On note</u> \mathbb{F}_1 , <u>le couple</u> : (Im q, Im q', Ψ_1).
 - iv) (v,v') est un isomorphisme du couple \mathbb{E}_1 dans le couple \mathbb{F}_1 .

Démonstration :

i) Montrons que $\,v\,$ induite par $\,u\,$ sur $\,Im\,\,p\,$, est à valeurs dans $\,Im\,\,q\,$. On a :

 $\forall x \in \text{Im } p$, $\exists y \in E$, $v x = u x = u \circ s \circ u y$ (car u admet une quasi-section s).

Posons $x' = u \ y$, il vient $v \ x = u \ o \ s \ x'$ donc $v \ x$ appartient à Im q . D'autre part, v' induite par u' sur Im q', est à valeurs dans Im p' . En effet :

 $\forall z' \in \text{Im } q' \ , \ \, \exists z \in F' \ , \ v'z' = u'z' = u' \ o \ s' \ o \ u'z \ \, (\text{car } u'$ admet une quasi-section $\ s') \, .$

Posons y' = u'z, il vient v'z' = u' o s'y' donc v'z' appartient à Im p'.

En outre v (resp. v') est linéaire continue car u (resp. u')

l'est. Par ailleurs, sachant (lemme I.6.6.) que (p,p') (resp. (q,q'))

est un projecteur sur E (resp. F), les sous-espaces Im p (res. Im q)

et Im p' (resp. Im q') sont fermés respectivement dans E (resp. F)

et E' (resp. F'). Ils sont donc des espaces de Banach.

ii) La forme Φ_1 , définie sur Im p' × Im p , par : $\forall y' \in \text{Im p'}, \ \forall y \in \text{Im p}, \ \forall x' \in \text{E'}, \ \forall x \in \text{E}, \ \Phi_1(y',y) = \Phi(u' \text{ o s'x'}, \text{ s o u x})$ est une forme bilinéaire continue (car Φ 1'est).

Montrons que Φ_1 est séparante. En effet si $\Phi_1(y',y)=0$ quel que soit y dans Im p , alors sachant que, u' admet une quasisection s', on a : $\Phi(u' \circ s'x', s \circ u x) = \Phi(u' \circ s' \circ u' \circ s'x', x) = 0$, pour tout x dans E. Il vient donc, puisque Φ est séparante : u' o s'x' = 0 soit y' = 0. Si $\Phi_1(y',y)=0$ quel que soit y' dans Im p', alors sachant que, u admet une quasi-section s , on a : $\Phi(u' \circ s'x', s \circ u x) = \Phi(x', s \circ (u \circ s \circ u x)) = 0$, pour tout x' dans E'. Il vient donc, puisque Φ est séparante que : $\Phi(u' \circ s'x', s \circ u) = \Phi(u' \circ s'x', s \circ u) = 0$.

iii) La forme Ψ_1 définie sur Im q' × Im q par : $\forall z' \in \text{Im } q' \text{ , } \forall z \in \text{Im } q \text{ , } \forall y' \in F' \text{ , } \forall y \in F \text{ , } \Psi_1(z',z) = \Psi(s' \text{ o } u'y', u \text{ o s } y)$ est une forme bilinéaire continue (car Ψ l'est). Montrons qu'elle est séparante. En effet si $\Psi_1(z',z) = 0$ quel que soit z dans Im q alors sachant que, u' admet une quasi-section s', on a : $\Psi(s' \text{ o } u'y', \text{ u o s } y) = \Psi(s' \text{ o } (u' \text{ o s' o } u')y', y) = 0 \text{ , quel que soit } y$ dans F; il vient, puisque Ψ est séparante , que : s' o u'y' = 0 soit z' = 0. Si $\Psi_1(z',z) = 0$ quel que soit z' dans Im q' , alors, du fait que u admet une quasi-section u s, on a :

 $\Psi(s'\ o\ u'y',\ u\ o\ s\ y)\ =\ \Psi(y',\ u\ o\ s\ o\ u\ o\ (s\ y))\ =\ 0\ ,\ quel\ que\ soit\ y'$ dans F' . Il vient donc, puisque $\ \Psi$ est séparante, que : u o s y = 0 soit z = 0 .

iv) Montrons d'abord que v (resp. v') est bijective.
v est injective car pour x_1 dans Im p et $v x_1 = 0$, on a x_1 dans Im p et $u x_1 = 0$ c'est-à-dire $x_1 \in \text{Im p} \cap \text{Ker u}$. Comme d'après le lemme I.6.6. on a Ker p = Ker u , il vient que $x_1 \in \text{Im p} \cap \text{Ker p}$ donc $x_1 = 0$. En outre sachant (lemme I.6.6.) que Im u = Im q , on a : Im v = Im u = Im q d'où v est surjective. D'autre part, v' est injective car pour y_1' dans Im q et $v' y_1' = 0$ on a y_1' dans Im q' et $u' y_1' = 0$ c'est-à-dire $y_1' \in \text{Im q'} \cap \text{Ker u'}$. Or d'après le lemme I.6.6. on a Ker u' = Ker q' donc $y_1' \in \text{Im q'} \cap \text{Ker q'}$ soit $y_1' = 0$. Par ailleurs sachant (lemme I.6.6.) que Im u' = Im p' on a : Im v' = Im u' = Im p' d'où v' est surjective. Vérifions que (v,v') est un morphisme de \mathbb{E}_1 dans \mathbb{F}_1 où \mathbb{E}_1 est le couple : (Im \mathbf{p} , Im $\mathbf{p'}$, $\mathbf{\Phi}_1$) et \mathbb{F}_1 , le couple : (Im \mathbf{q} , Im $\mathbf{q'}$, $\mathbf{\Psi}_1$). On a :

 $\forall y_1' \in \text{Im } q'$, $\forall x_1 \in \text{Im } p$, $\Phi_1(v' y_1', x_1) = \Phi(u' y_1', x_1)$

Comme (u,u') est un morphisme de ${\mathbb E}$ dans ${\mathbb F}$, il vient que :

$$\forall y_1' \in \text{Im } q' , \forall x_1 \in \text{Im } p , \Phi(u'y_1',x_1) = \Psi(y_1',u x_1) = \Psi(y_1',v x_1)$$

$$= \Psi_1(y_1',v x_1) .$$

Par conséquent :

$$\forall y_1' \in \text{Im } q'$$
, $\forall x_1 \in \text{Im } p$, $\Phi_1(v'y_1', x_1) = \Psi_1(y_1', v x_1)$.

Ainsi (v,v') est un morphisme de \mathbb{E}_1 dans \mathbb{F}_1 . Comme v (resp. v') est bijectif, (v,v') est un isomorphisme de \mathbb{E}_1 dans \mathbb{F}_1 .

1.7. - DESCRIPTION DES FACTEURS DIRECTS HILBERTIENS.-

Soient $\mathbf{E}=(\mathbf{E},\mathbf{E}',\Phi)$, $\mathbf{F}=(\mathbf{F},\mathbf{F}',\Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité et $\nu=(u,u')$, un morphisme de \mathbf{E} dans \mathbf{F} , admettant une quasi-section $\sigma=(s,s')$. On fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

(M) : Il existe un opérateur A de E dans E', symétrique positif et inversible.

L'opérateur Λ est donc coercif (proposition I.4.5.) et le couple $\mathbb E$ est hilbertien. Le couple $\mathbb K$ er ν étant un facteur direct du couple $\mathbb E$ (proposition I.6.7.) il est aussi hilbertien (proposition I.5.3.). Il existe alors sur $\mathbb K$ er ν un opérateur coercif ; par exemple S=i' o Λ o i (où (i,i') est le monomorphisme de $\mathbb K$ er ν dans $\mathbb E$) est coercif sur $\mathbb K$ er ν .

1.7.1. - <u>Définition</u>. - Etant donné un couple $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$, on note $\stackrel{\sim}{\mathbb{E}}$ le couple donné par le triplet : $(E', E, \stackrel{\sim}{\Phi})$ où $\stackrel{\sim}{\Phi}$ est la dualité définie sur $E \times E'$ par :

$$\forall x \in E$$
 , $\forall x' \in E'$, $\mathring{\Phi}(x,x') = \Phi(x',x)$.

Remarquons d'abord qu'en vertu de l'hypothèse (M), l'opérateur Λ^{-1} de E' dans E est symétrique positif et inversible ; il est donc (Proposition I.4.5.) coercif sur le couple $\stackrel{\sim}{\mathbb{E}}$ qui est hilbertien.

1.7.2. - Lemme. - L'identité de E' induit un isomorphisme isométrique de H_E^* sur H_E^* .

<u>Preuve</u>: Soit x' un élément de E', évaluons |x'| . $H_{\mathbb{E}}^*$. A étant l'opérateur coercif (sur \mathbb{E}) qui a permis de construire $H_{\mathbb{E}}$, on a :

$$|x'|_{\mathbb{E}} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|\Phi(x',x)|}{(\Phi(\Lambda x,x))^{1/2}}.$$

Comme Λ est inversible, il vient:

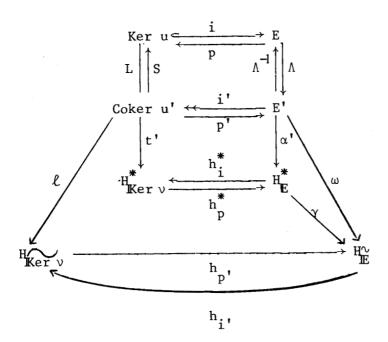
$$|x'|_{E} = \sup_{\substack{y' \in E' \\ y' \neq 0}} \frac{|\Phi(x', \Lambda^{-1} y')|}{(\Phi(y', \Lambda^{-1} y'))^{1/2}} = \sup_{\substack{y' \in E' \\ y' \neq 0}} \frac{|\langle x', y' \rangle_{H_{E}^{\circ}}|}{|y'|_{H_{E}^{\circ}}} = |x'|_{H_{E}^{\circ}}$$

Ainsi l'identité de E' induit une isométrie de $H_{\mathbb{E}}^*$ dans $H_{\mathbb{E}}^{\wedge}$. En outre, cette isométrie est surjective car E' est dense dans $H_{\mathbb{E}}^*$ (Proposition I.5.5.). Elle est donc un isomorphisme entre $H_{\mathbb{E}}^*$ et $H_{\mathbb{E}}^{\wedge}$.

Soient (i,i') le monomorphisme canonique de Ker ν dans E et (p,p') une projection de (i,i'). Le couple Ker ν étant (proposition I.6.7.) un facteur direct du couple \tilde{E} , est (proposition I.5.3.) hilbertien et l'opérateur L = p o Λ^{-1} o p est coercif sur Ker ν . D'autre part on considère $H_{Ker \ \nu}$, l'espace de Hilbert, complété de l'espace Ker u pour le produit scalaire associé à l'opérateur S (coercif sur le couple Ker ν) et $H_{Ker \ \nu}$, l'espace de Hilbert complété de l'espace Coker u' pour le produit scalaire associé à l'opérateur L (coercif sur le couple Ker ν). On notera t, l'injection canonique de Ker u dans u d

Preuve: Ce lemme ne résulte pas du lemme I.7.2. précédent car ni l'opérateur S , ni l'opérateur L ne sont bijectifs en général. D'après la proposition I.5.6. on sait qu'il existe des applications linéaires continues h_i^* , de H_E^* dans H_{Ker}^* , h_p^* de H_{Ker}^* dans H_E^* , h_p^* , de H_{Ker}^* dans H_E^* , h_i^* , de H_E^* dans H_{Ker}^* telles que : α' o p' = h_p^* o t' , t' o i' = h_i^* o α' , h_p^* , o ℓ = ω o p' .

faisons un schéma d'application entre couples pour situer le problème :



on a:

- 2) L'isomorphisme γ de H_{E}^{*} sur H_{E} , induit par l'identité de E' (lemme I.7.2.), induit à son tour un isomorphisme $\hat{\gamma}$ de $\overline{\alpha'(\operatorname{Im} p')}$ sur $\overline{\omega(\operatorname{Im} p')}$.
- 3) h_p , est une section de h_i , donc h_p , est un isomorphisme de $H_{\ker \nu}$ sur Im h_p , . Comme le diagramme est commutatif on a h_p , (Im ℓ) = ω (Im p'). En outre ℓ étant d'image dense, on a : Im h_p , = $\overline{\omega$ (Im p') et donc h_p , est un isomorphisme de $H_{\ker \nu}$ sur $\overline{\omega$ (Im p') qui est le complété de Im p' pour la norme $H_{\ker \nu}$.

4) L'application μ de $H_{\text{Ker }\nu}^*$ dans $H_{\text{Ker }\nu}$ définie par : h_p , o $\mu = \hat{\gamma}$ o h_p^* est un isomorphisme induit par l'identité de Coker u' car le diagramme étant commutatif on a pour tout z' dans Coker u' : h_p , o μ o t' z' = $\hat{\gamma}$ o h_p^* o t' z' = $\hat{\gamma}$ o α' o p' z' = ω o p' z' = h_p , o ℓ z'.

Comme h_p , est injective, il vient, pour tout z' dans Coker u': μ o t' z' = ℓ z' . Ce qui signifie exactement que μ est induite par l'identité de Coker u'.

1.8. - DIFFERENTIABILITE SUR LES COUPLES.-

- 1.8.1. <u>Définition</u>.- Soient $\mathbb{E}=(E,E',\Phi)$, $\mathbb{F}=(F,F',\Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité et f, une application de U (ouvert de E) dans F. f est dite de classe C^r , relativement aux couples \mathbb{E} et \mathbb{F} si :
- i) f est de classe $\textbf{C}^{\mathbf{r}}$ relativement aux espaces de Banach E et F.
- ii) Il existe une application d'f de classe C^{r-1} , définie sur U à valeurs dans L(F',E') telle que :

 $\forall x \in E$, $\forall y' \in F'$, $\forall x \in U$, $\Psi(Y', df(x)X) = \Phi(d'f(x)Y', X)$

Autrement dit, l'application df, de U dans L(E,F) se factorise en une application δf de classe C^{r-1} , de U dans L(E,F), définie par :

 $\forall x \in U$, $\delta f(x) = (df(x), d'f(x))$.

1.8.2. - Remarque. - Si f définie sur U (ouvert de E) à valeurs dans F, est une application de classe C^r , avec $r \ge 2$, relativement aux couples E et F. Alors pour tout x de U, le morphisme $\delta^2 f(x) = (d^2 f(x), dd'f(x))$ est bilinéaire symétrique et vérifie la propriété d'adjonction suivante :

$$\begin{split} \forall x_1 \in E \ , \ \forall x_2 \in E \ , \quad \forall y' \in F' \ , \quad \forall x \in U \ , \\ \Phi(\mathrm{dd'f}(x)(Y',X_2),X_1) &= \Psi(Y',\mathrm{d}^2f(x)(X_1,X_2)) \\ &= \Psi(Y',\mathrm{d}^2f(x)(X_2,X_1) = \Phi(\mathrm{dd'f}(x)(Y',X_1),X_2) \ . \end{split}$$

En d'autres mots l'application $\delta^2 f$ de U dans $L^2_s(\!E,\!F\!\!\!F)$ est de classe c^{r-2} .

1.8.3. - Remarque. - Etant donnés $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$ et $\mathbb{F} = (F,F',\Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité. Une application u de E dans F, linéaire continue, est de classe C^{∞} si et seulement si elle définit un morphisme de couples (u,u'), de E dans F. Et dans ce cas on a :

$$\forall x \in E$$
 , $\delta u(x) = (u,u')$.

1.9. - THEOREMES D'EXISTENCE SUR LES COUPLES.-

I.9.1. - Théorème d'inversion locale. - Soient $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ et $\mathbb{F} = (F, F', \Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité, \mathbb{U} un ouvert de \mathbb{E} et \mathbb{F} une application de \mathbb{U} dans \mathbb{F} , de classe \mathbb{C}^r (r > 1) relativement aux couples \mathbb{E} et \mathbb{F} . Si en un point a de \mathbb{U} on a $\delta f(a)$ ε Isom(\mathbb{E}, \mathbb{F}), il existe un voisinage ouvert \mathbb{V} de a et un voisinage \mathbb{V} de \mathbb{F} de \mathbb{F} soit un difféomorphisme de classe \mathbb{C}^r de \mathbb{V} sur \mathbb{V} , relativement aux couples \mathbb{E} et \mathbb{F} .

1.9.2. - Théorème des fonctions implicites. - Soient $E = (E, E', \Phi)$ $F = (F, F', \Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité,

U un ouvert de E , f une application de classe C^r de U dans F.

Si en un point a de U, la différentielle $\delta f(a)$ admet une section,

il existe un voisinage V de a , un voisinage W de l'origine dans

Ker df(a) et une application g de W dans E, de classe C^r relativement aux couples E E telle que :

$$g(W) = \{x \mid x \in V, f(x) = f(a)\}, g(0) = a$$

et $\delta g(0) = (i,i')$, monomorphisme canonique de Ker $\delta f(a)$ dans E.

1.10. - GERMES r-EQUIVALENTS AU SENS DES COUPLES.-

 $1.10.1. - \underline{\textit{Définition}}. - \text{ Soient } \mathbb{E}_1 = (\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_1', \Phi_1') ,$ $\mathbb{E}_2 = (\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_2', \Phi_2') , \quad \mathbb{F}_1 = (\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1', \Psi_1') , \quad \mathbb{F}_2 = (\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2', \Psi_2') \quad \text{quatre couples d'espaces de Banach en dualité et deux applications } f \quad (\text{resp. f'}) \text{ de }$ $\mathbb{E}_1 \quad \text{dans } \mathbb{F}_1 \quad (\text{resp. de } \mathbb{E}_2 \quad \text{dans } \mathbb{F}_2). \text{ On notera } (f, \mathbb{X}_0') \quad \text{le germe}$

de f en x_o , (f',y_o) le germe de f' en y_o . On dira que ces germes (f,x_o) et (f',y_o) sont r-<u>équivalents au sens des couples</u> s'il existe ℓ (resp. ℓ ') un difféomorphisme local de E_1 dans E_2 (resp. de F_1 dans F_2), de classe C^r relativement aux couples E_1 et E_2 (resp. E_1 et E_2) tels que :

$$\ell(x_0) = y_0$$
 et $(f' \circ \ell, x_0) = (\ell' \circ f, x_0)$.

1.10.2. - <u>Proposition</u>. - <u>Soient</u> $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \mathbb{E}', \Phi)$, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, \mathbb{F}', \Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité et f une application de \mathbb{U} (ouvert de \mathbb{E}), à valeurs dans \mathbb{F} , de classe \mathbb{C}^r ($r \geq 2$) relativement aux couples \mathbb{E} et \mathbb{F} . Si le morphisme $\delta f(x_0)$, pour x_0 dans \mathbb{U} admet une quasi-section. Alors le germe de f en x_0 est r-équivalent au sens des couples au germe en (0,0) d'une application m définie sur un ouvert \mathbb{V} de $\mathbb{I}m$ df(x_0) \times Ker df(x_0), à valeurs dans $\mathbb{I}m$ df(x_0) \times Coker df(x_0), de la forme m(x,y) = (x,g(x,y)) où g est une application définie sur \mathbb{V} , à valeurs dans $\mathbb{C}m$ Coker df(x_0) de $\mathbb{E}m$ definie sur $\mathbb{E}m$ \mathbb{E}

Démonstration: Par translations, on commence par se ramener au cas où $\mathbf{x}_0 = 0$ et $f(\mathbf{x}_0) = 0$ et on pose $(\mathbf{u},\mathbf{u}') = (\mathrm{d}f(0),\mathrm{d}'f(0)) = \delta f(0)$. Sachant que (\mathbf{u},\mathbf{u}') admet une quasi-section, notons la $\sigma = (\mathbf{s},\mathbf{s}')$, les couples $\mathrm{Ker}(\mathbf{u},\mathbf{u}')$ et $\mathrm{Im}(\mathbf{u},\mathbf{u}')$ sont des facteurs directs respectivement des couples E et F (Propositions I.6.7. et I.6.8.). Soient alors (γ,γ') une projection de E sur $\mathrm{Ker}(\mathbf{u},\mathbf{u}')$ et (π,π') une projection de F sur $\mathrm{Im}(\mathbf{u},\mathbf{u}')$, les couples $\mathrm{Ker}(\pi,\pi')$ et $\mathrm{Im}(\mathbf{u},\mathbf{u}')$ sont supplémentaires dans F . Considérons une application ℓ de U

(voisinage ouvert de l'origine dans E), à valeurs dans $Im\ u\ \times\ Ker\ u$, définie par :

$$\forall x \in U$$
 , $\ell(x) = (\pi \circ f(x), \gamma x)$

et une application ℓ' , de F dans Im u \times Ker π , définie par :

$$\forall y \in F$$
, $\ell'(y) = (\pi y, (1-\pi) y)$.

Montrons, en utilisant le théorème I.9.1., que ℓ (resp. ℓ') est un difféomorphisme local de classe C^r relativement aux couples E et $\operatorname{Im}(u,u') \times \operatorname{Ker}(u,u')$ (resp. F et $\operatorname{Im}(u,u') \times \operatorname{Ker}(\pi,\pi')$). Remarquons d'abord, en vertu du théorème de composition d'applications de classe C^r entre couples que ℓ (resp. ℓ') est de classe C^r relativement aux couples E et $\operatorname{Im}(u,u') \times \operatorname{Ker}(u,u')$ (resp. F et $\operatorname{Im}(u,u') \times \operatorname{Ker}(\pi,\pi')$). Il reste à établir que le morphisme $\delta\ell(0) = (d\ell(0), d'\ell(0))$ est un isomorphisme de E sur $\operatorname{Im}(u,u') \times \operatorname{Ker}(u,u')$ et que le morphisme $\delta\ell'(0) = (d\ell'(0), d'\ell'(0))$ est un isomorphisme de F sur $\operatorname{Im}(u,u') \times \operatorname{Ker}(\pi,\pi')$). En effet :

(1) Sachant (lemme I.6.6.) que $(p,p') = (s \circ u, u' \circ s')$ est un projecteur sur \mathbb{E} on a : $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} u$ et l'application $d\ell(0)$, de E dans $\operatorname{Im} u \times \operatorname{Ker} u$, est donnée par :

$$\forall x \in E$$
 , $d\ell(0) x = (u x_1, x_2)$

où x_1 est dans Im p et x_2 dans Ker p. D'autre part, on a $E' = \operatorname{Im} p' \oplus \operatorname{Ker} p' , \operatorname{Im} p' = \operatorname{Im} u' \text{ et 1'application d'} \ell(0) , \text{ de } E'$ dans $\operatorname{CoIm} u' \oplus \operatorname{Ker} p'$, est donnée par :

$$\forall x' \in E'$$
, $d'\ell(0) x' = (u'x'_1, x'_2)$

où x_1' est dans Im p' et x_2' dans Ker p'. En posant :

$$(v,v') = (d\ell(0) \Big|_{\text{Im } p}, d'\ell(0) \Big|_{\text{CoIm } u'})$$

il vient que $(v,v') = \delta \ell(0) \Big|_{\mathbf{E}_1}$ où , d'après la proposition I.6.9., \mathbf{E}_1 est le couple : $(\operatorname{Im}\, p, \operatorname{Im}\, p', \Phi_1)$ avec $\Phi_1 = \Phi \Big|_{\operatorname{Im}\, p' \times \operatorname{Im}\, p}$. Ainsi (v,v') est un isomorphisme de \mathbf{E}_1 sur $\operatorname{Im}(u,u')$. Par ailleurs on a :

$$\delta \ell(0) \left| \mathbb{K}\mathrm{er}(\mathbf{p}, \mathbf{p'}) \right| = (d\ell(0)) \left| \mathbb{K}\mathrm{er}(\mathbf{p}) \right| + (\mathbf{k}\mathrm{er}(\mathbf{p})) = (\mathbf{k}\mathrm{er}(\mathbf{p})) + (\mathbf{k}\mathrm{er}(\mathbf{p})) = (\mathbf{k}\mathrm{er}(\mathbf{p})) + (\mathbf{k}\mathrm{er}(\mathbf{p$$

d'où $\delta \ell(0)$ | $\mathbb{K}\mathrm{er}(p,p')$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}\mathrm{er}(u,u')$ sur lui-même. Comme $\mathbb{E}=\mathbb{E}_1$ \oplus $\mathbb{K}\mathrm{er}(u,u')$, $\delta \ell(0)=(v,v')$ \oplus $\mathbb{I}_{\mathbb{K}\mathrm{er}(u,u')}$ est donc un isomorphisme de \mathbb{E} sur $\mathbb{I}\mathrm{m}(u,u')$ \times $\mathbb{K}\mathrm{er}(u,u')$.

(2) Sachant (lemme I.6.6.) que (q,q') = (u s, s'u') est un projecteur sur \mathbb{F} , on a : $F = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q$, $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} u$, Ker $\pi = \operatorname{Ker} q$ et l'application $d\ell'(0)$, de F dans $\operatorname{Im} u \times \operatorname{Ker} \pi$ est donnée par :

$$\forall y \in F$$
, $d\ell'(0) y = (\pi y_1, (1-\pi) y_2) = (y_1, y_2)$

où y est dans Im q et y dans Ker q. Ainsi d ℓ '(0) est l'identité de F sur Im u × Ker π ; par adjonction d' ℓ '(0) est l'application identité de CoIm u' θ Coker π ' sur F' et donc le morphisme $\delta\ell$ '(0)

est un isomorphisme de \mathbb{F} sur $\mathbb{Im}(u,u') \times \mathbb{K}er(\pi,\pi')$.

Considérons enfin l'application m, de V ouvert de Im u × Ker u , dans Im u × Ker π définie par : m o $\ell = \ell'$ o f , elle est de classe C^r relativement aux couples $\text{Im}(u,u') \times \text{Ker}(u,u')$ et $\text{Im}(u,u') \times \text{Ker}(\pi,\pi')$. En outre m est de la forme souhaitée puisqu'elle s'écrit :

$$m(x_1,x_2) = (x_1,g(x_1,x_2))$$

où x_1 est dans Im u , x_2 dans Ker u et g, l'application de V dans Ker π , définie par :

$$g \circ \ell = (1-\pi) \circ f$$
.

L'application g est de classe C^r relativement aux couples $\text{Im}(u,u') \times \text{Ker}(u,u') \text{ et } \text{Ker}(\pi,\pi') \text{ ; de plus elle vérifie } g(0,0) = 0$ (car $\ell(0) = 0$ et f(0) = 0) et sa différentielle en zéro (au sens banachique) est donnée par :

$$dg(0,0) \circ dl(0) = (1-\pi) \circ u = 0$$
 (car $\pi \circ u = u$).

Comme $d\ell(0)$ est inversible, il vient que dg(0,0) = 0 et donc le morphisme $\delta g(0,0)$ est identiquement nul.

Pour clore la démonstration de la proposition, il nous reste à établir que $\operatorname{Ker}(\pi,\pi')$ est isomorphe à $\operatorname{Coker}(u,u')$. En effet on a d'après le lemme I.6.6. : Im $u=\operatorname{Im} q$. D'où un isomorphisme entre Coker u et Ker q. D'autre part, on rappelle que (j,j') est le monomorphisme canonique de $\operatorname{IIm}(u,u')$ dans F et comme q=j o π on a : Ker $q=\operatorname{Ker}\pi$ et Coker u est donc isomorphe à Ker π . En outre sachant que π' o j'=q', on a $\operatorname{Im} q'=\operatorname{Im} \pi'$ et Coker π' est isomorphe à

Ker q'. Or d'après le lemme I.6.6., Ker q' = Ker u' d'où un isomorphisme entre Ker u' et Coker π' . Par ailleurs les dualités sur $\operatorname{Ker}(\pi,\pi')$ et $\operatorname{Coker}(u,u')$ s'identifient (comme restrictions de la dualité sur F) donc $\operatorname{Ker}(\pi,\pi')$ est isomorphe à $\operatorname{Coker}(u,u')$.

CHAPITRE 11

THEOREME DE V-SUFFISANCE DU JET D'ORDRE 2 D'UNE APPLICATION DIFFERENTIABLE ENTRE COUPLES.

II.1. - ENONCE DU THEOREME. -

Soient $\mathbf{E}=(\mathbf{E},\mathbf{E}',\Phi)$ et $\mathbf{F}=(\mathbf{F},\mathbf{F}',\Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité, \mathbf{U} un voisinage ouvert de l'origine dans \mathbf{E} et \mathbf{f} une application définie sur \mathbf{U} , à valeurs dans \mathbf{F} , de classe \mathbf{C}^3 relativement aux couples \mathbf{E} et \mathbf{F} , telle que $\mathbf{f}(0)=0$. On notera \mathbf{A} l'application bilinéaire de $\begin{bmatrix} \mathrm{Ker}\ \mathrm{df}(0) \end{bmatrix}^2$ dans $\mathrm{Coker}\ \mathrm{df}(0)$ définie par : $\mathbf{A}=\mathbf{k}$ o $\mathbf{d}^2\mathbf{f}(0)$ o \mathbf{i}^2 , où \mathbf{i} est l'injection canonique de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{df}(0)$ dans \mathbf{E} et \mathbf{k} , la surjection canonique de \mathbf{F} sur $\mathrm{Coker}\ \mathrm{df}(0)$. On désignera par \mathbf{A}' , l'application bilinéaire de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{df}(0) \times \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}'\mathrm{f}(0)$ dans $\mathrm{Coker}\ \mathrm{d}'\mathrm{f}(0)$ définie par : $\mathbf{A}'=\mathbf{i}'$ o $\mathrm{dd}'\mathrm{f}(0)$ o (\mathbf{k}',\mathbf{i}) , où \mathbf{i}' est la surjection canonique de E' sur $\mathrm{Coker}\ \mathrm{d}'\mathrm{f}(0)$ et \mathbf{k}' , l'injection canonique de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{d}'\mathrm{f}(0)$ dans F' . Notons que (A,A') définit un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbf{S}}(\mathrm{Ker}\ \delta\mathrm{f}(0)$, $\mathrm{Coker}\ \delta\mathrm{f}(0)$). On se propose de démontrer le résultat suivant :

- II.1.1. Théorème. Si f est de classe C3 relativement aux couples E et F et vérifie les conditions suivantes :
 - i) Le morphisme $\delta f(0)$ admet une quasi-section $\sigma = (s,s')$.
 - ii) Le couple Coker $\delta f(0)$ est de dimension finie.
- iii) Il existe un opérateur Λ coercif et inversible sur le couple ${\mathbb E}.$
- iv) <u>Le morphisme bilinéaire symétrique</u> (A,A') <u>vérifie la</u> condition (R) suivante :

$$(R): \exists \varepsilon > 0 , \forall x \in \text{Ker df}(0) , \forall y \in \text{Ker d'f}(0)$$

$$\left(||A(x,x)||_{\text{Coker df}(0)} \leqslant \varepsilon |x|^{2}_{\text{HKer }\delta f(0)} \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(|A'(x,y)|_{\text{Ker }\delta f(0)} \right) \approx \varepsilon ||y||_{F}, |x|_{\text{HKer }\delta f(0)}$$

Alors le jet d'ordre 2 de f est suffisant pour la C équivalence de contact polaire (au sens de la définition 3 de l'introduction).

11.2. - DEMONSTRATION DU THEOREME.-

En vertu de la proposition I.10.2. et du lemme I.7.3. il suffit de démontrer le théorème II.1. dans le cas où $\delta f(0) = 0$ sous les hypothèses suivantes : Le couple \mathbb{F} est de dimension finie n, les couples \mathbb{E} et $\frac{\lambda}{\mathbb{E}}$ sont hilbertiens et $\frac{\lambda}{\mathbb{E}}$ est canoniquement isomorphe à $\frac{1}{\mathbb{E}}$, le morphisme bilinéaire symétrique $(A,A') = \delta^2 f(0)$ vérifie la condition (R_0) suivante :

la démonstration du théorème dans ce cas repose sur le lemme fondamental suivant :

11.2.1. - Lemme. - Soient $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \mathbb{E}', \Phi)$ un couple d'espaces de Banach en dualité et (A,A') un morphisme bilinéaire symétrique de \mathbb{E} dans \mathbb{R}^n . On suppose que les couples \mathbb{E} et \mathbb{E} sont hilbertiens

Soit Ω , 1'ouvert de E, défini par $\Omega = \{x \mid x \in E, \frac{1}{2} < |x|_{H_{\underline{E}}} < \frac{3}{2} \}, \underline{\text{il existe alors un voisinage}} \ \mathcal{U} \ \underline{\text{de}}$ $(A,A') \ \underline{\text{dans}} \ L_S^2(E,\mathbb{R}^n) \ \underline{\text{et une application}} \ ((u,u'), v), \underline{\text{définie sur}}$ $\mathcal{U} \times \Omega \ \underline{\text{à valeurs dans}} \ L(E) \times L(\mathbb{R}^n), \underline{\text{de classe}} \ C^{\infty}, \underline{\text{telle que}} :$

- 1) v((B,B'),x) o A(u((B,B'),x)x, u((B,B'),x)x) = B(x,x), pour tout x de Ω et tout (B,B') de U.
- 2) $u((A,A'),x) = 1_E$, $u'((A,A'),x) = 1_{E'}$, $v((A,A'),x) = 1_{\mathbb{R}^n}$, pour tout x de Ω .

<u>Démonstration</u>: Nous utilisons essentiellement un théorème de fonctions implicites dépendant d'un paramètre dont voici l'énoncé, sa démonstration étant donnée en annexe.

- - i) $g(x_0, \lambda) = y_0$, quel que soit λ de Ω .
- iii) Pour tout λ_0 dans Ω , il existe un voisinage Ω_0 de λ_0 , Ω_0 $\subset \Omega$, tel que la famille d'applications $\{dg(.,\lambda)\}_{\lambda \in \Omega_0}$ soit équicontinue au point x.

- 1) $\forall (y,\lambda) \in T$, $g(\xi(y,\lambda), \lambda) = y$
- 2) $\xi(y_0, \lambda) = x_0$, quel que soit λ de Ω .

Considérons l'application g , de $\left[L(\!E\!) \times L(\!R^n) \right] \times \Omega$ dans ${I\!R}^n$, définie par :

$$\forall (u,u') \in L(\mathbb{E})$$
, $\forall v \in L(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in \Omega$,
 $g((u,u'),v),x) = v$ $A(ux,ux) \sim A(x,x)$.

g est de classe C^{∞} et vérifie l'hypothèse (i) du théorème II.2.2. en effet :

$$\forall x \in \Omega$$
, $g(((1_E, 1_{E'}), 1_{R^n}), x) = 0$.

D'autre part on a :

 $\forall (\mathtt{U},\mathtt{U}) \in \mathtt{L}(\mathtt{I\!E})$, $\forall \mathtt{V} \in \mathtt{L}(\mathtt{I\!R}^n)$, $\forall \mathtt{x} \in \Omega$,

$$d_{1}g(((1_{E_{1}}, 1_{E_{1}}), 1_{R}n), x) ((U,U'), V) = 2A(Ux,x) + VA(x,x)$$
.

Il vient, en utilisant le corollaire I.5.8., que :

où D est une constante strictement positive, c'est-à-dire :

 $||d_1g(((1_E, 1_{E'}), 1_{\mathbb{R}^n}), x)|| \leq \frac{27}{4} D^2 ||(A,A')|| \text{ , pour tout } x \text{ de } \Omega.$ Ainsi $d_1g(((1_E, 1_{E'}), 1_{\mathbb{R}^n}), .)$ est une application bornée sur $\Omega.$ Par ailleurs on a :

$$\forall (U_{1},U_{1}') \in L(\mathbb{E}) , \forall (U_{2},U_{2}') \in L(\mathbb{E}) , \forall V_{1} \in L(\mathbb{R}^{n}) , \forall V_{2} \in L(\mathbb{R}^{n}) , \forall x \in \Omega$$

$$d_{11}^{2}g(((u,u'),v),x) ((U_{1},U_{1}'), V_{1}) ((U_{2}, U_{2}'), V_{2}) =$$

$$2v A(U_{2}x, U_{1}x) + 2 V_{1} A(U_{2}x, ux) + 2 V_{2} A(U_{1}x, ux) .$$

Soit en réutilisant le corollaire I.5.8. :

$$\begin{aligned} ||d_{11}^{2}g(((u,u'),v),x)| &((U_{1},U_{1}'),V_{1})| &((U_{2},U_{2}'),V_{2})|| &\leq \\ &2 D^{3} \sup(||(U_{1},U_{1}')||,||V_{1}||) \sup(||(U_{2},U_{2}')||,||V_{2}||)|| &(A,A')|| \\ &(2 ||u|| + ||v||) |x|_{H_{\mathbb{R}}}^{2}. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (I) suivante :

(I) :
$$\left|\left|d_{11}^{2}g(((u,u'),v),x)\right|\right| \le 2 D^{3} \left|\left|(A,A')\right|\right| (2 \left|\left|u\right|\right| + \left|\left|v\right|\right|) \left|x\right|_{H_{E}}^{2}$$
, pour tout x de Ω .

D'un autre côté, on a :

$$\forall (\mathtt{U},\mathtt{U}') \in \mathtt{L}(\mathtt{E}) , \forall \mathtt{V} \in \mathtt{L}(\mathtt{R}^n) , \forall \mathtt{y} \in \mathtt{E} , \forall \mathtt{x} \in \Omega ,$$

$$\mathtt{d}_{12}^2 \mathtt{g}(((\mathtt{u},\mathtt{u}'),\mathtt{v}),\mathtt{x}) (((\mathtt{U},\mathtt{U}'),\mathtt{V}),\mathtt{y}) =$$

$$2\mathtt{v} \ \mathtt{A}(\mathtt{U}\mathtt{x},\mathtt{u}\mathtt{y}) + 2\mathtt{v} \ \mathtt{A}(\mathtt{U}\mathtt{x},\mathtt{u}\mathtt{x}) + 2 \ \mathtt{V}\mathtt{A}(\mathtt{u}\mathtt{x},\mathtt{u}\mathtt{y})$$

c'est-à-dire, l'inégalité (II) suivante :

 $(II): \left| \left| d_{12}^2 g(((u,u'),v),x) \right| \right| \leq 2 D^2 \left| \left| (A,A') \right| \right| \left| \left| u \right| \right| (2 \left| \left| v \right| \right| + \left| \left| u \right| \right|) \left| x \right|_{H_E},$ pour tout x de Ω .

Moyennant les inégalités (I) et (II), on peut conclure (théorème des accroissements finis) que la famille d'applications $\{dg(((.,.),.),x)\}_{x\in\Omega}$ est équicontinue au point $((l_E\ ,\ l_{E'}),\ l_R^n)$ et donc a fortiori g vérifie l'hypothèse (iii) du théorème II.2.2. Pour que l'application g vérifie toutes les hypothèses de ce théorème II.2.2., il reste à prouver que $d_1g(((l_E\ ,\ l_{E'}),\ l_R^n)\ ,\ x)$ admet une section s(x) pour tout x de Ω de telle manière que l'application s, de Ω dans $L(\mathbb{R}^n,\ L(\mathbb{E})\times L(\mathbb{R}^n))$, soit de classe C^∞ . Notons que montrer l'existence d'une section de $d_1g(((l_E\ ,\ l_{E'}),\ l_R^n)\ ,\ x)$ pour tout x de Ω revient à résoudre en ((U,U'),V) l'équation (C) suivante :

(C)
$$2A(Ux,x) + VA(x,x) = y ,$$

pour x dans Ω et y dans \mathbb{R}^n . Pour cela nous allons construire une application de Ω dans \mathbb{R} de classe C^∞ qui nous permettra de séparer l'équation (C) en deux équations (C₂) et (C₁) respectivement en (U,U') et V. Remarquons d'abord que pour tout x de Ω et tout y de \mathbb{R}^n vérifiant $|\mathbf{x}|_{H_E} = 1 = ||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}$, la condition (R₀) du lemme II.2.1. devient la condition (R₁) suivante :

$$(R_1): \exists \varepsilon > 0 , \forall x \in \Omega , |x|_{H_{\underline{\mathbb{E}}}} = 1 , \forall y \in \mathbb{R}^n , ||y||_{\mathbb{R}^n} = 1 ,$$

$$||A(x,x)||_{\mathbb{R}^n}^2 + |A'(x,y)|_{H_{\underline{\mathbb{E}}}}^2 \ge \varepsilon^2 .$$

Pour le ϵ de la condition (R_1) considérons θ une fonction de \mathbb{R}^+ dans $\left[0,1\right]$, de classe C^∞ , définie par :

$$\theta(t) = 0$$
 si $t \leq \frac{\varepsilon^2}{2^6}$

$$\theta(t) = 1$$
 si $t \ge \frac{2 \varepsilon^2}{2^6}$

et \emptyset l'application de \mathbb{R} dans [0,1] définie par :

$$\psi(t) = \frac{\theta(t)}{t} , \quad \text{si} \quad t \neq 0$$

$$\psi(0) = 0$$

 ψ restreinte à \mathbb{R}^+ est de classe C^∞ . D'autre part soient, α l'application, de Ω dans \mathbb{R} , définie par : $\alpha(x) = \theta(\left|\left|A(x,x)\right|\right|^2_{\mathbb{R}^n})$, α est de classe C^∞ et β l'application, de Ω dans \mathbb{R} , définie par : $\beta(x) = \psi(\left|\left|A(x,x)\right|\right|^2_{\mathbb{R}^n})$, β est de classe C^∞ .

L'équation (C) est équivalente aux équations (C $_1$) (en V) et (C $_2$) (en (U,U')) suivantes :

$$(C_1)$$
: $VA(x,x) = \alpha(x)y$, pour x dans Ω et y dans \mathbb{R}^n

$$(C_2)$$
: $A(Ux,x) = \frac{1-\alpha(x)}{2}y$, pour x dans Ω et y dans \mathbb{R}^n .

II.2.3. - Résolution de l'équation (C_1) .-

<,> étant le produit scalaire dans \mathbb{R}^n , pour x dans Ω ,
 on considère $S_V(x)$, l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans $L(\mathbb{R}^n)$ définie
 par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n$$
 , $S_{V}(x)$. $y = \beta(x) < .$, $A(x,x) > y$.

On vérifie aisément que $S_V(x)$.y est solution de l'équation (C_1) . On a donc défini ainsi une application S_V de Ω dans $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n))$, de classe C^∞ .

II.2.4. - Résolution de l'équation (C_2) .-

Considérons d'abord le lemme suivant :

11.2.4.1. - Lemme. - Soit $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \mathbb{E}', \Phi)$ un couple d'espaces de Banach en dualité. On suppose que les couples \mathbb{E} et \mathbb{E}' sont hilbertiens et que $\mathbb{H}_{\mathbb{E}}^*$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{H}_{\mathbb{E}}^{\vee}$.

Soient T un opérateur coercif sur le couple $\stackrel{\sim}{\mathbb{E}}$ et (u,u') un morphisme de $\stackrel{\sim}{\mathbb{E}}$ dans $\stackrel{\sim}{\mathbb{R}}^n$ tel que, pour ε réel strictement positif on ait $|u'y|_{\stackrel{\ast}{\mathbb{E}}} > \varepsilon ||y||_{\stackrel{\ast}{\mathbb{R}}}$, pour tout y de $\stackrel{\ast}{\mathbb{R}}^n$.

Alors l'application u o T o u' est un isomorphisme de \mathbb{R}^n dans lui-même et $||(u \circ T \circ u')^{-1}|| \leqslant \frac{1}{K \; \epsilon^2}$, où K est une constante strictement positive.

$$\|u \circ T \circ u'y\|_{\mathbb{R}^n} = \sup_{\|z\|_{\mathbb{R}^n}} \langle z, u \circ T \circ u'y \rangle$$

Soit encore, si o est la dualité sur le couple E:

$$||u \circ T \circ u'y||_{\mathbb{R}^n} = \sup_{|z|=1} \Phi(u'z, T \circ u'y)$$

En faisant $z = \frac{y}{||y||_{\mathbb{R}^n}}$, on obtient:

$$||u \circ T \circ u'y||_{\mathbb{R}^n} \ge \frac{1}{||y||_{\mathbb{R}^n}} \Phi(u'y, T \circ u'y) = \frac{1}{||y||_{\mathbb{R}^n}} \widetilde{\Phi}(T \circ u'y, u'y) =$$

$$= \frac{1}{||y||} |u'y|_{\mathbb{H}^{\infty}}^{2} .$$

Comme H_E^{\wedge} est canoniquement isomorphe à H_E^{*} , il existe une constante K>0 telle que pour tout y de \mathbb{R}^n on ait :

$$||\mathbf{u} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{u}'\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^{n}} \ge \frac{K}{||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^{n}}} |\mathbf{u}'\mathbf{y}|_{\mathbb{E}^{n}}^{2} \ge \frac{K}{||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^{n}}} \varepsilon^{2} ||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^{n}}^{2} = K \varepsilon^{2} ||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^{n}}^{2}$$

Il en découle que l'application linéaire continue u o T o u' , de ${\rm I\!R}^n$ dans lui-même, est injective donc bijective et que

$$||(\mathbf{u} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{u'})^{-1}|| = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n}} \frac{||(\mathbf{u} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{u'})^{-1}||}{||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^{n}}} = \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n}} \frac{||\mathbf{z}||_{\mathbb{R}^{n}}}{||\mathbf{u} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{u'}\mathbf{z}||_{\mathbb{R}^{n}}}$$

d'où:

$$||(\mathbf{u} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{u}')^{-1}|| \leq \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \frac{||\mathbf{z}||}{||\mathbf{x}||^2} = \frac{1}{||\mathbf{z}||} = \frac{1}{||\mathbf{x}||^2}$$

Remarquons que si $||A(x,x)||_{\mathbb{R}^n}^2 \le \frac{3 \varepsilon^2}{2^6}$, on a:

$$\left\| A\left(\frac{x}{|x|_{H_{E}}}, \frac{x}{|x|_{H_{E}}}\right) \right\|_{\mathbb{R}^{n}}^{2} \leq \frac{3 \varepsilon^{2}}{2^{6}} \cdot \frac{1}{|x|_{H_{E}}^{4}} \leq \frac{3^{2}}{2^{2}},$$

pour tout x de Ω .

La condition (R_1) entraîne donc pour tout y de \mathbb{R}^n que :

$$\left| \left| A(\frac{x}{|x|_{H_{E}}}, \frac{x}{|x|_{H_{E}}}) \right| \right|^{2} + \left| A'(\frac{x}{|x|_{H_{E}}}, \frac{y}{||y||_{\mathbb{R}^{n}}}) \right|^{2}_{H_{E}^{*}} \ge \epsilon^{2}$$

d'où:

$$\left|A'\left(\frac{x}{|x|_{H_{\mathbb{E}}}}, \frac{y}{|y||_{\mathbb{R}^n}}\right)\right|_{\mathbb{R}^n}^2 \ge \frac{\varepsilon^2}{2^2}$$

soit encore:

$$|A'(x,y)|_{H_{\mathbb{E}}^{*}}^{2} \ge \frac{\varepsilon^{2}}{2^{2}} |x|_{H_{\mathbb{E}}}^{2} ||y||_{\mathbb{R}^{n}}^{2} \ge \frac{\varepsilon^{2}}{2^{4}} ||y||_{\mathbb{R}^{n}}^{2}$$

c'est-à-dire : pour tout y de Rⁿ :

$$|A'(x,y)|_{H_{\mathbb{R}}^*} \ge \frac{\varepsilon}{2^2} ||y||_{\mathbb{R}^n}$$
.

Si T est un opérateur coercif sur le couple \tilde{E} , en appliquant le lemme II.2.4.1. aux applications u = A(.,x) et u' = A'(x,.), on conclut que l'application A(.,x) o T o A'(x,.) est un isomorphisme de \mathbb{R}^n dans lui-même.

D'autre part si P est un opérateur coercif sur le couple E , on considère $S_U(x)$ l'application linéaire, de \mathbb{R}^n dans L(E), définie par :

$$\forall y~\varepsilon~{\rm I\!R}^n$$
 ,

$$S_{U}(x).y = \frac{1-\alpha(x)}{2} \frac{\Phi(Px, .)}{\Phi(Px, x)}$$
 To $(A'(x, .) \circ [A(., x) \circ T \circ A'(x, .)]^{-1})$ y,

pour x dans
$$\Omega$$
 tel que $\left|\left|A(x,x)\right|\right|^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{3 \varepsilon^2}{2^6}$.

$$S_{U}(x) = 0$$
 , sinon.

On vérifie que $S_{II}(x)$.y est solution de l'équation (2). En outre $S_{II}(x)$.y se met sous la forme canonique suivante :

$$S_{II}(x) y = \lambda \Phi(Z^{\dagger},.) Z$$

avec
$$\lambda = \frac{1-\alpha(x)}{2\Phi(Px,x)}$$
 , $\lambda \in \mathbb{R}$

$$Z^{\dagger} = Px$$
 , $Z^{\dagger} \in E^{\dagger}$

$$Z = T \circ (A'(x,.) \circ [A(.,x) \circ T \circ A'(x,.)]^{-1}) y , Z \in E$$
.

D'où par un calcul élémentaire d'adjonction, l'expression de l'application $S_{II}(x)$ y pour tout y de \mathbb{R}^n :

$$S_{II}(x) y = \lambda \Phi(.,Z) Z'$$

 $S_{II}(x)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans L(E') et l'application $(S_{II},S_{II},)$, de Ω dans $L(\mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{E}))$ ainsi définie est de classe C^{∞} .

Finalement les équations (C_1) et (C_2) admettent respectivement des solutions $\mathbf{S}_{\mathbf{V}}$ et $(\mathbf{S}_{\mathbf{U}},\mathbf{S}_{\mathbf{U'}})$, de classe $\mathbf{C}^{\infty}.$ L'application $d_1g(((1_{\mbox{\footnotesize E}}\mbox{\ , }1_{\mbox{\footnotesize R}}^{\mbox{\ }})$, $l_{\mbox{\footnotesize IR}}^{\mbox{\ }}n)$, x) admet donc pour tout x de Ω une section s(x) définie par : $s(x) = ((S_U(x), S_U(x)), S_V(x))$ et l'application s , de Ω dans $L({\rm I\!R}^n$, $L({\rm I\!E})$ imes $L({\rm I\!R}^n)$) ainsi définie est de classe C^∞ . Par conséquent, il existe (théorème II.2.2.) un voisinage T de $\{0\} \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n \times \Omega$ et une application ((ξ,ξ '), η) de classe C^{∞} , de T dans $L(\mathbb{E}) \times L(\mathbb{R}^n)$ telle que : $\eta(y,x)$ $A(\xi(y,x)x$, $\xi(y,x)x)$ - A(x,x) = y , pour tout (y,x) de Tet $\xi(0,x) = l_E$, $\xi'(0,x) = l_E$, $\eta(0,x) = l_R n$, pour tout x de Ω . Par ailleurs, on considère U le voisinage de (A,A') dans $L_s^2(\mathbb{E},\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$\mathcal{U} = \{(\mathtt{B},\mathtt{B'}) \mid (\mathtt{B},\mathtt{B'}) \in \mathtt{L}^2_{\mathbf{S}}(\mathbb{E},\mathbb{R}^n) , ((\mathtt{B-A})(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x}) \in \mathcal{T}\}$$

et on définit des applications (u,u') , de $\mathcal{U}\times\Omega$ dans L(E) et v, de $\mathcal{U}\times\Omega$ dans L(R^n) par :

$$u((B,B^{\dagger}),x) = \xi((B-A)(x,x),x)$$

$$u^{\dagger}((B,B^{\dagger}),x) = \xi^{\dagger}((B-A)(x,x),x)$$

$$v((B,B^{\dagger}),x) = \eta((B-A)(x,x),x)$$

Ces applications sont de classe C^{∞} par construction et vérifient les propriétés (1) et (2) du lemme II.2.1., du fait des propriétés correspondantes pour les applications ξ , ξ' et η . Ainsi le lemme II.2.1. est démontré.

Remarquons enfin que les applications \underline{u} , \underline{v}' , \underline{v} définies par :

$$\underline{u}((B,B'),x) = u((B,B'), \frac{x}{|x|}_{H_{\underline{E}}})$$

$$\underline{u}'((B,B'),x) = u'((B,B'), \frac{x}{|x|}_{H_{\underline{E}}})$$

$$\underline{v}((B,B',x) = v((B,B'), \frac{x}{|x|}_{H_{\underline{E}}})$$

sur $\mathcal{U} \times \Omega$, jouissent respectivement des mêmes propriétés que u , u' , v. De plus elles sont homogènes de degré zéro en x.

II.2.5. - Démonstration du théorème II.1.-

L'application f, de U (ouvert contenant l'origine dans E), à valeurs dans F, étant de classe C^3 relativement aux couples \mathbb{E} et \mathbb{R}^n , le morphisme $\delta^2 f(0) = (d^2 f(0), dd' f(0))$ est bilinéaire symétrique et l'application $\delta^2 f$, de U dans $L_s^2(\mathbb{E},\mathbb{R}^n)$ est de classe C^1 . En outre s'étant placé dans le cas où f(0) = 0 et df(0) = 0, on a par la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral :

$$f(x) = \left[\int_0^1 (1-\lambda) d^2 f(\lambda x) d\lambda\right] (x,x), \text{ pour tout } x \text{ de } B(0, \frac{3}{2} r)$$

où B(0, $\frac{3}{2}$ r) est une boule ouverte de centre l'origine de E et de rayon $\frac{3}{2}$ r contenue dans U.

Soient $\Sigma_E = \{x \mid x \in E , |x|_{H_E} = 1\}$ et V_o un voisinage ouvert de $\{0\} \times \Sigma_E$ dans $\mathbb{R} \times E$ défini par : $V_o = \bigcup_{\substack{x \in \Sigma_E \\ 0}} (]-r_{x_o}, r_{x_o}[\times \omega_{x_o})$ où ω_{x_o} est un voisinage ouvert de x_o dans E; définissons une application \overline{a} , de V_o dans $L_s^2(E,\mathbb{R}^n)$, en posant :

$$\bar{a}(t,x) = \int_0^1 (1-\lambda) \, \delta^2 f(\lambda t x) \, d\lambda \,, \quad \text{pour } (t,x) \, \text{dans } V_0.$$

Remarquons que \bar{a} est de classe C^1 , qu'elle est homogène de degré 0 et que pour tout (t,x) dans V_0 avec $t \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{t^2} f(tx) = \overline{a}(t,x) (x,x) .$$

Par ailleurs le morphisme bilinéaire symétrique (A,A') = $\frac{1}{2} \delta^2 f(0)$ vérifie la condition (R_o) du lemme II.2.1. Soit \mathcal{U} le voisinage de (A,A') dans $L_s^2(\mathbb{E}_s\mathbb{R}^n)$ donné par le lemme II.2.1. ; il existe alors un voisinage \mathcal{V} de $\{0\} \times \Sigma_{\mathbb{E}}$, contenu dans $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$

tel que $\bar{a}(V) \subset U$ et donc une application $((\bar{u},\bar{u}'),\bar{v})$, de V dans $L(\mathbb{E}) \times L(\mathbb{R}^n)$, définie par :

$$\bar{u}(t,x) = u(\bar{a}(t,x), \frac{x}{|x|_{H_{\underline{E}}}})$$

$$\bar{u}'(t,x) = u'(\bar{a}(t,x), \frac{x}{|x|_{H_{\underline{E}}}})$$

$$\bar{v}(t,x) = v(\bar{a}(t,x), \frac{x}{|x|_{H_{\underline{E}}}})$$

et on a $\bar{u}(0,x)=1_E$, $\bar{u}'(0,x)=1_E$, $\bar{v}(0,x)=1_R$ n , pour tout x de Σ_E .

L'application $((\bar{u},\bar{u}'),\bar{v})$ est de classe C^1 sur V (par construction) elle est en outre homogène de degré O en x et l'on a d'après la conclusion (1) du lemme II.2.1. :

$$\forall (t,x) \in V$$
, $t \neq 0$

$$\frac{1}{t^2} \bar{f}(t,x) = \frac{1}{t^2} f(tx) = \bar{a}(t,x)(x,x) = \bar{v}(t,x) \text{ o } A(\bar{u}(t,x)x, \bar{u}(t,x)x) .$$

Considérons à présent l'application h de V dans $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ définie par :

$$h(t,x) = (t, \overline{u}(t,x)x)$$

Notons que h est de classe C^1 sur V (par construction) et h(0,x) = (0,x), pour tout x de Σ_E . C' est-a-dire b $\{0\} \times \Sigma_E$ est l'identité.

D'autre part on a :

$$dh(t,x)(T,X) = (T, d_1\bar{u}(t,x)(T,x) + d_2\bar{u}(t,x)(X,x) + \bar{u}(t,x)X)$$
.

Comme $\bar{u}(0,x) = 1_E$, pour tout x de Σ_E on a d_2 $\bar{u}(0,x) = 0$ et $dh(0,x)(T,X) = (T,d_1$ $\bar{u}(0,x)(T,x) + X)$ est inversible pour tout x de Σ_E . Par le théorème d'inversion locale on a :

i) $\forall x \in \Sigma_E, \exists \eta_x' > 0, \exists r_x' > 0$ tels que h soit un difféomorphisme de $\exists -\eta_x', \eta_x' [\times B(x,r_x')]$ sur son image.

Par ailleurs la continuité de l'application \bar{u} sur V et la propriété $\bar{u}(0,x)=1_E$, pour tout x de Σ_E , entraînent que :

ii)
$$\forall x \in \Sigma_E$$
, $\exists \eta_x'' > 0$, $\exists r_x'' > 0$ tels que

$$\forall (\bar{t}, \bar{x}) \in]-\eta_x'', \eta_x''[\times B(x, r_x''), ||\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) - 1_E|| < \frac{1}{5} \frac{r_x'}{||x||}.$$

On choisit $\eta_x = \inf(\eta_x', \eta_x'')$ et $r_x \le \inf(\frac{1}{5}r_x', r_x'', ||x||)$ et on considère W le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ défini comme suit :

$$W = \bigcup_{x \in \Sigma_{E}} (] - \eta_{x}, \eta_{x}[\times B(x,r_{x}))$$

W est un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, il contient {0} \times $\Sigma_{\hbox{\footnotesize E}}$.

Comme $h_{\mid\{0\}\times\Sigma_{E}}$ = identité , h(W) contient $\{0\}\times\Sigma_{E}$. Pour montrer que h est un difféomorphisme (de W sur son image), au sens de la définition 3 de l'introduction, il suffit d'établir que h est injective sur W.



Si $h(t_1,x_1) = h(t_2,x_2)$ pour $(t_i,x_i) \in W$, i=1, 2, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = t_2 \\ \bar{\mathbf{u}}(t_1, \mathbf{x}_1) \mathbf{x}_1 = \bar{\mathbf{u}}(t_2, \mathbf{x}_2) \mathbf{x}_2 \end{array} \right.$$

Comme $(t_i, x_i) \in W$, il existe x_i' tel que $x_i \in B(x_i', r_{x_i'})$, i = 1, 2; on suppose que $r_{x_2'}' \ge r_{x_1'}'$. Or $r_{x_i'}$ ayant été choisi tel que $r_{x_i'}' \le \inf(\frac{1}{5}r_{x_i'}', r_{x_i'}'', ||x_i'||)$ on a :

$$||x_{i}|| < ||x_{i}'|| + r_{x_{i}'} \le 2 ||x_{i}'||$$

et d'après ii),

$$||\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{t_i}, \mathbf{x_i}) \ \mathbf{x_i} - \mathbf{x_i}|| \le \frac{1}{5} \mathbf{r_{x_i^!}'} \frac{||\mathbf{x_i}||}{||\mathbf{x_i^!}||} \le \frac{2}{5} \mathbf{r_{x_i^!}'}, i = 1, 2.$$

D'autre part, sachant que $\bar{u}(t_1,x_1)x_1 = \bar{u}(t_2,x_2)x_2$ et

$$||x_2 - x_2'|| < \frac{1}{5} \quad r_{x_2'}'$$
 on peut écrire :

$$||\mathbf{x}_{1} - \mathbf{x}_{2}^{!}|| \leq ||\mathbf{x}_{1} - \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{t}_{1}, \mathbf{x}_{1}) \mathbf{x}_{1}|| + ||\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{t}_{2}, \mathbf{x}_{2}) \mathbf{x}_{2} - \mathbf{x}_{2}|| + ||\mathbf{x}_{2} - \mathbf{x}_{2}^{!}||$$

$$< \frac{2}{5} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_{1}^{!}}^{!} + \frac{2}{5} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_{2}^{!}}^{!} + \frac{1}{5} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_{2}^{!}}^{!} \leq \mathbf{r}_{\mathbf{x}_{2}^{!}}^{!}$$

et par ailleurs, $||\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2'|| < \frac{1}{5} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_2'}' < \mathbf{r}_{\mathbf{x}_2'}'$. D'où : \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 appartiennent à $\mathbf{B}(\mathbf{x}_2', \mathbf{r}_{\mathbf{x}_2'}')$. Enfin sachant que h est un difféomorphisme de $]-\eta_{\mathbf{x}_2'}$, $\eta_{\mathbf{x}_2'}[\times \mathbf{B}(\mathbf{x}_2', \mathbf{r}_{\mathbf{x}_2'}')]$ sur son image et ayant supposé $\mathbf{h}(\mathbf{t}_1, \mathbf{x}_1) = \mathbf{h}(\mathbf{t}_2, \mathbf{x}_2)$ on a donc $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$; par conséquent h est injective sur W.

CHAPITRE III

APPLICATION A UNE EQUATION D'EVOLUTION D'UN SYSTEME AUTONOME.

Nous faisons dans ce chapitre une étude locale d'une équation d'évolution d'un système autonome, en d'autres mots une étude locale d'une équation différentielle décrivant l'évolution d'un objet sous certaines contraintes. Nous mettons en particulier la différentielle seconde intrinsèque de la fonction (définissant l'évolution et les contraintes du problème) sous forme d'une fonctionnelle quadratique.

Après quoi, nous établissons une condition nécessaire et suffisante (C) pour qu'une telle fonctionnelle vérifie la condition (R) du théorème II.1.

Nous interprétons ensuite la condition (C) dans le cadre du problème initial pour un contrôle scalaire.

III.1. - FORMALISATION ET ETUDE LOCALE DU PROBLEME.-

Soient, I l'intervalle [a,b], $W^{O}(I,\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions intégrables bornées de I dans \mathbb{R}^n et $W^{I}(I,\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues de I dans \mathbb{R}^n dont la dérivée au sens des distributions est un élément de $W^{O}(I,\mathbb{R}^n)$.

 ${\it III.1.1.} - {\it D\'efinition.} - {\it Pour x et y quelconques dans } \mathbb{R}^p \ ,$ on définit x * y , l'élément de \mathbb{R}^p , obtenu comme le produit composante par composante de x et de y. On notera x ^2 quand il n'y aura pas de confusion, l'élément x * x et l _p , l'élément de \mathbb{R}^p dont chaque composante est égale à l.

On se donne le système d'équations différentielles (équation d'évolution et contraintes du problème) suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_{1}}{dt} = \dot{x}_{1} = f_{1}(x_{1}, u_{1}) \\ x_{1}(0) = \gamma, & x_{1}(\tau) = \zeta \\ -1 \leq u_{1,i} \leq 1, & i = 1, \dots, p \end{cases}$$

où τ est un nombre réel strictement positif, x_1 un élément de $W^1([0,\tau],\mathbb{R}^n)$, u_1 un élément de $W^0([0,\tau],\mathbb{R}^p)$ et f_1 une application d'un ouvert \mathcal{U}_o de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , trois fois partiellement continûment différentiable en les 2 variables.

On va formaliser ce problème afin de faire apparaître l'espace des solutions comme la surface de niveau d'une application de classe C entre couples d'espaces de Banach en dualité. Pour cela on commence par poser :

$$x_1(t) = x(\frac{t}{\tau})$$
 $u_1(t) = u(\frac{t}{\tau})$
 $f_1(x_1(t), u_1(t)) = f(x(\frac{t}{\tau}), u(\frac{t}{\tau}))$
 $x(0) = \gamma, x(1) = \zeta$

On définit ainsi des éléments x de $W^1([0,1],\mathbb{R}^n)$, u de $W^0([0,1],\mathbb{R}^p)$ et une application f d'un ouvert U_1 (de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$), dans \mathbb{R}^n trois fois partiellement continûment différentiable en les 2 variables. Puis, en introduisant une fonction auxiliaire $v \in W^0([0,1],\mathbb{R}^p)$,

on ramène la contrainte unilatérale , $-1 \le u_i \le 1$, $i=1,\ldots,p$ à la contrainte bilatérale suivante : $u*u+v*v=u^2+v^2=1_p$. Le système (1) devient alors :

(1)'
$$\begin{cases} \dot{x} = \tau f(x, u) \\ x(0) = \gamma, & x(1) = \zeta \\ u * u + v * v = u^2 + v^2 = 1 \end{cases} p$$

<,> désignant le produit scalaire dans \mathbb{R}^n ou dans \mathbb{R}^p et I ,
l'intervalle fixe [0,1], on définit les couples \mathbb{E} et \mathbb{F} de la manière
suivante ; on pose :

$$\begin{split} & \mathbb{E} = \mathbb{R} \times \mathbb{W}^{1}(\mathbb{I},\mathbb{R}^{n}) \times \mathbb{W}^{0}(\mathbb{I},\mathbb{R}^{p}) \times \mathbb{W}^{0}(\mathbb{I},\mathbb{R}^{p}) \quad , \\ \\ & \mathbb{E}^{!} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{W}^{0}(\mathbb{I},\mathbb{R}^{n}) /_{\{(\lambda,-\lambda,\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}^{n}\}}) \times \mathbb{W}^{0}(\mathbb{I},\mathbb{R}^{p}) \times \mathbb{W}^{0}(\mathbb{I},\mathbb{R}^{p}) \end{split}$$

et Ф la dualité entre E' et E définie par :

$$\forall (\bar{\tau}, [(\alpha, \beta, \bar{x})], \bar{u}, \bar{v}) \in E', \forall (\tau, x, u, v) \in E,$$

$$\Phi((\bar{\tau}, [(\alpha, \beta, \bar{x})], \bar{u}, \bar{v}), (\tau, x, u, v)) = \tau \bar{\tau} + \langle \alpha, x(0) \rangle + \langle \beta, x(1) \rangle$$

$$+ \int_{0}^{1} \langle \bar{x}(t), \dot{x}(t) \rangle dt + \int_{0}^{1} \langle \bar{u}(t), u(t) \rangle dt$$

$$+ \int_{0}^{1} \langle \bar{v}(t), v(t) \rangle dt .$$

 Φ est séparante et on définit ainsi un couple d'espaces de Banach en dualité (E,E', Φ) que l'on note E. D'autre part, on pose :

$$F = F' = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{W}^o(I,\mathbb{R}^n) \times \mathbb{W}^o(I,\mathbb{R}^p)$$

et Y la dualité entre F' et F définie par :

$$\forall (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{h}, \bar{k}) \in F' , \forall (\xi, \eta, h, k) \in F ,$$

$$\forall ((\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{h}, \bar{k}), (\xi, \eta, h, k)) = \langle \bar{\xi}, \xi \rangle + \langle \bar{\eta}, \eta \rangle + \int_{0}^{1} \langle \bar{h}(t), h(t) \rangle dt$$

$$+ \int_{0}^{1} \langle \bar{k}(t), k(t) \rangle dt$$

 Ψ est séparante et on note $\mathbb F$, le couple d'espaces de Banach en dualité (F,F',Ψ) ainsi défini.

Par ailleurs soit $\mbox{\it U}$ l'ouvert de E, ensemble des quadruplets $(\tau,\;x,\;u,\;v)$ tels que :

- i) $\tau > 0$
- ii) il existe un compact K \subset U tel que (x(t),u(t)) \in K , pour presque tout t dans $\left[0,1\right]$

et g l'application, de $\mathcal U$ dans F, de classe $\mathcal C^3$ relativement aux couples $\mathbb E$ et $\mathbb F$, définie par :

$$g(\tau,x,u,v) = (x(0) - \gamma, x(1) - \zeta, \dot{x} - \tau f(x,u), u^2 + v^2 - l_p)$$
.

Les points (τ, x, u, v) de U tels que $g(\tau, x, u, v) = 0$, sont dits : "points admissibles". En se plaçant en un point quelconque (τ_0, x_0, u_0, v_0) de U, il vient pour tout (T, X, U, V) dans E:

$$\begin{split} dg(\tau_{o}, x_{o}, u_{o}, v_{o}) &= \\ (X(0), X(1), &\dot{X} - \tau_{o} d_{1}f(x_{o}, u_{o}) X - \tau_{o} d_{2}f(x_{o}, u_{o}) U - Tf(x_{o}, u_{o}), \\ &= \\ 2 u_{o} * U + 2 v_{o} * V) \end{split}$$

En posant A = τ_0 d₁f(x₀,u₀) , B = τ_0 d₂f(x₀,u₀) , on définit des applications A , de [0,1] dans

 $L(\mathbb{R}^n)$ et B , de [0,1] dans $L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$, intégrables bornées et l'on obtient :

$$dg(\tau_{o}, x_{o}, u_{o}, v_{o})(T, X, U, V) = (X(0), X(1), \dot{X} - AX - BU - Tf(x_{o}, u_{o}),$$

$$2 u_{o} * U + 2 v_{o} * V)$$

D'autre part, un calcul élémentaire d'adjonction donne :

$$\forall (\xi, \, \eta, \, h, \, k) \in F' , \quad d'g(\tau_{o}, \, x_{o}, \, u_{o}, \, v_{o}) \quad (\xi, \, \eta, \, h, \, k) =$$

$$(-\int_{0}^{1} \langle h(t), \, f(x_{o}, u_{o}) \rangle dt , \quad [(\xi, \, \eta - \tau_{o} \int_{0}^{1} \stackrel{\sim}{Ah}, \, h + \int_{0}^{\bullet} \stackrel{\sim}{Ah})],$$

$$2 u_{o} * k - \stackrel{\sim}{Bh}, \quad 2 v_{o} * k) .$$

En outre $f(x_0, u_0) = \frac{\dot{x}_0}{\tau_0}$ pour un point (τ_0, x_0, u_0, v_0) "admissible" et l'on a :

$$\begin{split} d'g(\tau_{o}, \ x_{o}, \ u_{o}, \ v_{o}) \ &(\xi, \ \eta, \ h, \ k) = \\ &(-\frac{1}{\tau_{o}} \int_{0}^{1} \langle h(t), \ \dot{x}_{o}(t) \rangle \ dt \ , \ \left[(\xi, \ \eta - \tau_{o} \int_{0}^{1} \stackrel{\sim}{Ah}, \ h + \int_{0}^{\bullet} \stackrel{\sim}{Ah}) \right], \\ &2 \ u_{o} \ * \ k - \stackrel{\sim}{Bh} \ , \ 2 \ v_{o} \ * \ k) \ . \end{split}$$

On se place désormais dans le cas où v_o est presque partout nul (et u_o^2 presque partout égal à l_p) contrôle de type "bang-bang"; montrons qu'alors le morphisme $\delta g(\tau_o, x_o, u_o, 0)$ admet une quasi-section et le couple Coker $\delta g(\tau_o, x_o, u_o, 0)$ est de dimension finie. Pour montrer que le morphisme $\delta g(\tau_o, x_o, u_o, 0)$ admet une quasi-section, on utilise les deux lemmes suivants :

 $III.1.2. - \underline{Lemme}. - \underline{Soit} \quad v_o \quad \underline{un \; morphisme \; d'un \; couple}$ $\mathbf{E} = (\mathbf{E}, \mathbf{E}', \Phi) \quad \underline{dans \; un \; couple} \quad \mathbf{F}_o \quad \underline{de \; dimension \; finie. \; Alors} \quad v_o \quad \underline{admet}$ $\underline{une \; quasi-section} \quad \sigma_o \quad \underline{de} \quad \mathbf{F}_o \quad \underline{dans} \quad \mathbf{E} \; .$

$$\mathbf{u}_{o}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} \Phi(\mathbf{e}_{i}', \mathbf{x}) \, \boldsymbol{\varepsilon}_{i}$$
 et $\mathbf{u}_{o}' \left(\sum_{i=1}^{N} \mu_{i} \, \boldsymbol{\varepsilon}_{i}^{*}\right) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \, \boldsymbol{e}_{i}'$

On a en particulier $\Phi(e_i', e_j) = \delta_{ij}$. On définit $\sigma_0 = (s_0, s_0')$ par : $s_0(\sum\limits_{i=1}^N \lambda_i \ \epsilon_i) = \sum\limits_{i=1}^r \lambda_i \ e_i$ et $s_0'(x') = \sum\limits_{i=1}^r \Phi(x_i', e_i) \ \epsilon_i^*$

et on vérifie aisément que σ_o est une quasi-section de ν_o . \blacksquare

III.1.3. - Lemme. - Soit $v = (v_0, v_1)$ un morphisme d'un couple E dans un produit de couples $F_0 \times F_1$. On suppose que le couple F_0 est de dimension finie et que le morphisme v_1 admet une section σ_1 . Alors le morphisme v_1 admet une quasi-section σ_1 dans E. De plus, le couple Coker v_1 est de dimension finie.

 $\frac{\text{D\'{e}monstration}}{\text{D\'{e}monstration}}: \text{ Soit } \bar{\nu}_0 = \nu_0 \text{ o } (\frac{1}{E} - \sigma_1 \text{ o } \nu_1) \text{ , } \bar{\nu}_0 \text{ est}$ un morphisme de E dans F_0 (de dimension finie). Par ailleurs, on pose en écriture matricielle :

$$\sigma = ((1_E - \sigma_1 \circ v_1) \circ \sigma_0, \sigma_1 - (1_E - \sigma_1 \circ v_1) \circ \sigma_0 \circ v_0 \circ \sigma_1)$$
Si $\sigma = (s, s')$ on a donc, pour tout y_0 de F_0 et tout y_1 de F_1 :
$$s(y_0, y_1) = (1_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0 y_0 + (s_1 - (1_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0 \circ u_0 \circ s_1) y_1$$
et on vérifie aisément que σ est une quasi-section de v .

D'autre part, le conoyau de $u = (u_0, u_1)$ est isomorphe au noyau du projecteur u o s (car d'après le lemme I.6.6., Im u o s = Im u). De plus on a :

$$u \circ s (y_0, y_1) = (u_0 \circ (1_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0 y_0 + (s_1 - (1_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0 \circ u_0 \circ s_1) y_1, y_1).$$

D'où Ker u o s est isomorphe à Ker u o $(1_E - s_1 \circ u_1)$ o s qui est justement de dimension finie.

Si on pose $\delta g(\tau_o, x_o, u_o, 0) = (v_o, v_l)$, $\mathbf{F}_o = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{F}_l = \mathbf{W}^o(\mathbf{I}, \mathbb{R}^n) \times \mathbf{W}^o(\mathbf{I}, \mathbb{R}^p)$ (*), il suffit d'après le lemme III.1.3. de vérifier que v_l admet une section σ_l pour que $\delta g(\tau_o, x_o, u_o, 0)$ admette une quasi-section et que le couple Coker $\delta g(\tau_o, x_o, u_o, 0)$ soit de dimension finie. Soient R la résolvante de l'équation $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ et $\lambda = \mathbf{X}(0)$, on pose $\sigma_l = (s_l, s_l^*)$ où s_l est l'application de $\mathbf{W}^o(\mathbf{I}, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{W}^o(\mathbf{I}, \mathbf{R}^p)$ dans E, définie par :

$$\forall h \in W^{O}(I,\mathbb{R}^{n}) , \forall k \in W^{O}(I,\mathbb{R}^{p}) ,$$

$$s_{1}(h,k) = (0, R(.,0) \lambda + \frac{1}{2} \int_{0}^{\cdot} R(.,s) \left[B(s) u_{0}(s) * k(s) + 2h(s)\right] ds ,$$

$$\frac{1}{2} u_{0} * k, 0)$$

On vérifie aisément que σ_1 est une section de ν_1 . \blacksquare

Par ailleurs, on note $\Delta^2 g(\tau_0, x_0, u_0, 0)$ la différentielle seconde intrinsèque de l'application g au point $(\tau_0, x_0, u_0, 0)$. Pour exprimer les formes quadratiques β o $\Delta^2 g(\tau_0, x_0, u_0, 0)$ où β est une forme linéaire sur Coker $dg(\tau_0, x_0, u_0, 0)$. Nous allons dans

 $[\]begin{array}{lll} (*) & \text{On note} & \mathbb{W}^0(\mathbf{I},\mathbb{R}^m) \text{ , le couple défini par} & (\mathbb{W}^0(\mathbf{I},\mathbb{R}^m),\,\mathbb{W}^0(\mathbf{I},\mathbb{R}^m)\,,\,\Theta) \\ \\ & \text{où} & \Theta(\overline{\ell},\ell) = \int_0^1 \langle \overline{\ell}(t)\,,\,\ell(t)\rangle \text{ dt , pour tout } \overline{\ell} \text{ dans } \mathbb{W}^0(\mathbf{I},\mathbb{R}^m) \text{ et} \\ \\ & \text{tout } \ell \text{ dans } \mathbb{W}^0(\mathbf{I},\mathbb{R}^m)\,. \end{array}$

un premier temps expliciter (Coker $dg(\tau_0, x_0, u_0, 0)$)* qui s'identifie à Ker $d'g(\tau_0, x_0, u_0, 0)$ et ensuite Ker $dg(\tau_0, x_0, u_0, 0)$.

III.1.4. - Caractérisation de Ker d'g(τ_0 , x_0 , u_0 , 0).

Un point quelconque (ξ, η, h, k) de F' est dans Ker d'g(τ_0 , x_0 , u_0 , 0) si et seulement si il vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}
(1) : \int_{0}^{1} \langle h(t), f(x_{o}, u_{o}) \rangle dt = 0 \\
(2) : h + \tau_{o} \int_{0}^{\cdot} Ah = \xi \\
(3) : \tau_{o} \int_{0}^{1} Ah - \eta = \xi \\
(4) : \mathcal{L}u_{o} * k - \tau_{o} Bh = 0
\end{cases}$$

Si $(\tau_0, x_0, u_0, 0)$ est un point "admissible" on a $f(x_0, u_0) = \frac{x_0}{\tau_0}$ et l'équation (1) devient (1)' : $\int_0^1 \langle h(t), x_0(t) \rangle dt = 0$. De l'équation (2) résulte alors $\xi = h(0)$ et en utilisant l'équation (3) on obtient $\eta = -h(1)$. De plus en différentiant l'équation (2), on obtient l'équation (2)' suivante :

(2)':
$$h + Ah = 0$$

Soit R la résolvante de l'équation \dot{x} = Ax , en tenant compte du lemme suivant :

III.1.4.1. - Lemme. - Si R est la résolvante de l'équation \dot{x} = Ax , la résolvante S de l'équation \dot{x} + $\dot{A}x$ = 0 (où \ddot{A} désigne la transposée de A) est donnée par : $S(t,s) = \ddot{R}(s,t)$.

$$\dot{R}_{1}(t,s)$$
 o $R(s,t) + R(t,s)$ o $\dot{R}_{2}(s,t) = 0$

En passant aux transposées, on obtient:

$${\overset{\circ}{R}}(s,t) \ {\circ} \ {\overset{\circ}{R}}_{1}(t,s) \ + \ {\overset{\circ}{R}}_{2}(s,t) \ {\circ} \ {\overset{\circ}{R}}(t,s) \ = \ {\overset{\circ}{R}}(s,t) \ {\circ} \ {\overset{\circ}{R}}_{1}(t,s) \ + \ {\overset{\circ}{R}}_{2}(s,t) \ {\circ} \ {\overset{\circ}{R}}(t,s) \ = \ {0}$$

C'est-à-dire la relation (*) suivante :

(*)
$$R_{2}^{(s,t)} = -R(s,t) \circ R_{1}^{(t,s)} \circ R(s,t)$$

Comme $R_1(t,s) = A(t)$ o R(t,s) on a donc $R_1(t,s) = R(t,s)$ o A(t).

$$\overset{\circ}{R}(s,t) \ \circ \overset{\circ}{R}_{1}(t,s) \ \circ \overset{\circ}{R}(s,t) = \overset{\circ}{R}(s,s) \ \circ \overset{\circ}{A}(t) \ \circ \overset{\circ}{R}(s,t) = \overset{\circ}{A}(t) \ \circ \overset{\circ}{R}(s,t) \ .$$

En utilisant la relation (*); on obtient:

$${\stackrel{\circ}{N}}_{2}(s,t) + {\stackrel{\circ}{A}}(t) \circ {\stackrel{\circ}{R}}(s,t) = 0$$

Cette dernière relation jointe à $\overset{\circ}{R}(s,s)=I$ assure que $\overset{\circ}{R}(s,t)$ est la résolvante de l'équation $\overset{\circ}{x}+\overset{\circ}{Ax}=0$.

Il vient que : $h(t) = \mathring{R}(0,t) \xi$, $\eta = -\mathring{R}(0,1) \xi$.

En outre l'équation (4) jointe à $u_0 * u_0 = u_0^2 = l_p$, entraı̂ne que :

$$k = \frac{1}{2} u_0 * (Bh) = \frac{1}{2} u_0 * (B \circ R(0,.)) \xi$$

Enfin l'équation (1)' prend la forme suivante :

$$\int_{0}^{1} \langle R(0,t) \xi, x_{0}(t) \rangle dt = 0$$

Ce qui donne la condition (1)" suivante sur ξ :

(1)"
$$\langle \xi , \int_0^1 R(0,t) \dot{x}_0(t) dt \rangle \approx 0$$
.

De (1)" résulte deux cas :

i) $\int_0^1 R(0,t) \stackrel{\bullet}{x}_0(t) dt = 0 , \text{ on n'a pas de condition sur } \xi,$ il en découle que l'anormalité du problème est n.

ii) $\int_0^1 R(0,t) \stackrel{\bullet}{x_0}(t) dt \neq 0$, la condition (1)" définit alors l'équation d'un hyperplan de \mathbb{R}^n et donc l'anormalité du problème est n-1.

En supposant désormais $n \ge 2$, on se place dans le cas où l'anormalité du problème est n-1; le noyau de $d'g(\tau_0,x_0,u_0,0)$ est alors le sous-espace de F' suivant :

$$\{(\xi, -\tilde{R}(0,1) \; \xi, \; \tilde{R}(0,.) \; \xi \; , \; \frac{1}{2} \, u_{_{\scriptstyle 0}}(.) \; * \; \tilde{B}(.) \; \circ \; \tilde{R}(0,.)) \; \xi), \\ \xi \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{n} \; , \qquad <\xi \; , \; \int_{0}^{1} \, R(0,t) \; \overset{\star}{\mathbf{x}_{_{\scriptstyle 0}}}(t) \; dt > = 0 \}$$

où R est la résolvante de l'équation $\dot{x} = Ax$.

III.1.5. - Caractérisation de Ker
$$dg(\tau_0, x_0, u_0, 0)$$
.

Un point quelconque (T,X,U,V) de E est dans $\text{Ker dg}(\tau_0,x_0,u_0,0) \quad \text{si et seulement si il vérifie le système d'équations } \\ \text{suivant, où l'on a supposé que le point } (\tau_0,x_0,u_0,0) \quad \text{est "admissible" :}$

$$\begin{cases}
(1) : \dot{X} - AX - BU - \frac{T}{T} \dot{x}_{0} = 0 \\
(2) : X(0) = 0 \\
(3) : X(1) = 0 \\
(4) : u_{0} * U = 0
\end{cases}$$

Sachant que $u_0^2 = u_0 * u_0 = l_p$, l'équation (4) entraîne que U = 0. L'équation (1) devient : $\dot{X} = AX + \frac{T}{\tau} \dot{x}_0$; soit X la solution de cette équation, X est nulle pour t = 0 d'après (2) et l'on a :

$$X(t) = \frac{T}{\tau_0} \int_0^t R(t,s) \dot{x}_0(s) ds .$$

Pour avoir X(1) = 0, il faut donc que : $\frac{T}{\tau_0} \int_0^1 R(1,s) \dot{x}_0(s) ds = 0$. Comme R(1,s) = R(1,0) o R(0,s). Cette condition s'écrit :

$$TR(1,0)$$
 $\int_{0}^{1} R(0,s) \dot{x}_{0}(s) ds = 0$

soit, R(1,0) étant inversible:

$$T \int_{0}^{1} R(0,s) \dot{x}_{0}(s) ds = 0$$
.

Or s'étant placé dans le cas où l'anormalité du problème est n-1. On a $\int_0^1 R(0,s) \stackrel{\bullet}{x}_0(s) ds \neq 0$ donc T=0 et X=0.

Ainsi Ker $dg(\tau_0, x_0, u_0, 0)$ est le sous espace de E suivant :

$$\{(0,0,0,V) / V \in W^{O}(I, \mathbb{R}^{p})\}$$

c'est-à-dire $W^{O}(I,\mathbb{R}^p)$ et le couple $\operatorname{Ker} \delta g(\tau_{O},x_{O},u_{O},0)$ est isomorphe au couple $W^{O}(I,\mathbb{R}^p)$.

III.2. - EXPRESSION DE $\beta \circ \Delta^2 g(\tau_0, x_0, u_0, 0)$.

Pour tout élément $(0,0,0,\mathbb{V})$ du noyau de $dg(\tau_0,x_0,u_0,0)$ on a :

$$d^{2}g(\tau_{0}, x_{0}, u_{0}, 0)(0,0,0,V)^{2} = (0,0,0,2 \ V * V)$$

Si β est une forme linéaire sur Coker $dg(\tau_0, x_0, u_0, 0)$ représentée par un élément (ξ, η, h, k) de Ker $d'g(\tau_0, x_0, u_0, 0)$ on a donc :

$$\beta \circ \left[\Delta^{2} g(\tau_{0}, x_{0}, u_{0}, 0) (0, 0, 0, V)^{2}\right] = \Psi((\xi, \eta, h, k), (0, 0, 0, 2 \ V * V))$$

$$= \int_{0}^{1} \langle k(t), 2V(t) * V(t) \rangle dt.$$

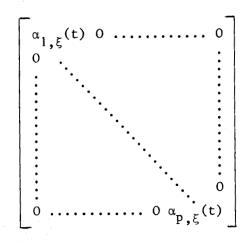
En remplaçant k par son expression dans $\operatorname{Ker} d'g(\tau_0, x_0, u_0, 0)$, on obtient :

$$\beta \circ (\Delta^{2}g(\tau_{0}, x_{0}, u_{0}, 0)(0, 0, 0, V)^{2}) = \int_{0}^{1} \langle \frac{1}{2} u_{0}(t) * (\mathring{B}(t) \circ \mathring{R}(0, t)) \xi,$$

$$2V(t) * V(t) > dt$$

$$= \int_{0}^{1} \langle u_{0}(t) * (\mathring{B}(t) \circ \mathring{R}(0, t)) \xi, V(t) * V(t) > dt$$

On pose $\alpha_{j,\xi}(t)$, la j^{ème} composante de $u_0(t)*(\mathring{B}(t)\circ\mathring{R}(0,t))\xi$ qui dépend linéairement de ξ et $a_{\xi}(t)$ la forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^p dont la matrice est la matrice diagonale suivante :



On a donc:

$$\beta \circ (\Delta^2 g(\tau_0, x_0, u_0, 0)(0, 0, 0, V)^2) = \int_0^1 a_{\xi}(t) (V(t), V(t)) dt$$

En se bornant aux contrôles u_o continus par morceaux, l'application a_ξ de [0,1] dans $L_s^2(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ est continue par morceaux.

On se place dans cette hypothèse et on est ainsi ramené à l'étude d'une fonctionnelle quadratique Q , définie sur $\left[\overline{W}^{O}(\mathbf{I},\mathbf{R}^{p})\right]^{2}$, à valeurs dans \mathbb{R}^{n-1} , du type :

$$Q(h,h) = \int_{0}^{1} a(t) (h(t),h(t)) dt$$
.

où h est dans $W^{0}(I,\mathbb{R}^{p})$ et a une application continue par morceaux de I dans $L^{2}_{s}(\mathbb{R}^{p},\mathbb{R}^{n-1})$.

111.3. - CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTIONNELLE DU TYPE $\int_{0}^{1} a(t) (h(t), h(t)) dt$ VERIFIE LA CONDITION (R) DU THEOREME 11.1.-

On considère les couples d'espaces de Banach en dualité $\mathbb{E}_0 = \mathbb{W}^0(I,\mathbb{R}^p) \quad \text{et} \quad \mathbb{F}_0 = \mathbb{R}^r \quad , \quad \text{où} \quad I \quad \text{désigne l'intervalle} \quad \boxed{0,1}$ et (Q,Q') le morphisme bilinéaire symétrique, de $\mathbb{E}_0 \times \mathbb{E}_0$ dans \mathbb{R}^r , défini par :

$$\forall h \in W^{O}(I,\mathbb{R}^p)$$
, $Q(h,h) = \int_{0}^{1} a(t) (h(t), h(t)) dt$.

Il résulte de la propriété d'adjonction de Q et Q' que :

$$\begin{array}{lll} \forall \mu \ \varepsilon \ \mathbb{R}^r \ , & \forall h \ \varepsilon \ W^O(I,\mathbb{R}^p) \ , & <\mu, \ Q(h,h)> = \int_0^1 <\left[Q'(h,\mu)\right](t) \ , \ h(t)> \ dt \\ \\ \text{d'où}: & \forall \mu \ \varepsilon \ \mathbb{R}^r \ , \ \forall h \ \varepsilon \ W^O(I,\mathbb{R}^p) \ , \ Q'(h,\mu) = \sum_{i=1}^r \ \mu_i \ a_i \ h \ . \end{array}$$

Rappelons que les applications a_i , $l \le i \le r$, de [0,l] dans $L_s^2(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ étant continues par morceaux, les applications $\sum\limits_{i=1}^r \lambda_i \ a_i$, pour λ dans \mathbb{R}^r le sont aussi. Nous désignerons par $(\sum\limits_{i=1}^r \lambda_i \ a_i(t))^+$, la limite à droite de l'application $\sum\limits_{i=1}^r \lambda_i \ a_i$, au point $\sum\limits_{i=1}^r \lambda_i \ a_i(t))^-$, sa limite à gauche en ce point. Nous allons démontrer principalement dans ce qui suit le théorème que voici :

- III.3. <u>Théorème</u>. <u>Une condition nécessaire et suffisante</u>

 pour que le morphisme bilinéaire symétrique (Q,Q') vérifie la condition

 (R) du théorème II.1. est que :
- (C): $\forall \lambda \in S_r$, sphère unité de \mathbb{R}^r , $\exists \mu \in S_r$ tels que :

(1)
$$\forall t \in [0,1[, \forall X \in Ker(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i(t))^{+} - \{0\}, (\sum_{i=1}^{r} \mu_i a_i(t))^{+} (X,X) > 0$$

(2)
$$\forall t \in]0,1], \forall x \in Ker([\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t))]^{-} - \{0\}, ([\sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t))]^{-} (X,X) > 0$$

Notons que la condition (C) semble pratique à vérifier sur un exemple.

III.4. - <u>Démonstration du théorème</u>. - Nous allons dans un premier temps donner une condition équivalente à la condition (R) par la proposition suivante :

111.4.1. - <u>Proposition</u>.- <u>Les conditions suivantes sont</u> équivalentes :

$$\begin{split} &(R): \; \left] \varepsilon > 0 \;\;, \;\; \forall h \; \varepsilon \; W^{O}(I, \mathbb{R}^{p}) \;\;, \;\; \forall \mu \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{r} \;\;, \\ &\left(\left| \left| Q(h,h) \right| \right|_{\mathbb{R}^{r}} \; \leqslant \; \varepsilon \; \left| h \right|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})}^{2} \right) \Longrightarrow \left(\left| Q'(h,\mu) \right|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})} \right) \approx \varepsilon \; \left| \left| \mu \right| \right|_{\mathbb{R}^{r}} \; \left| h \right|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})} \right) \\ &(R'): \; \left] \varepsilon > 0 \;\;, \;\; \forall h \; \varepsilon \; C^{O}(I, \mathbb{R}^{p}) \;\;, \;\; \forall \mu \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{r} \;\;, \\ &\left(\left| \left| Q(h,h) \right| \right|_{\mathbb{R}^{r}} \; \leqslant \; \varepsilon \; \left| h \right|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})}^{2} \right) \Longrightarrow \left(\left| Q'(h,\mu) \right|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})} \right) \approx \varepsilon \; \left| \left| \mu \right| \right|_{\mathbb{R}^{r}} \; \left| h \right|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})} \right) \end{split}$$

 $\underline{\text{D\'emonstration}}: \text{ Comme } \text{ C}^{\text{O}}(\text{I,R}^{\text{p}}) \subset \text{ W}^{\text{O}}(\text{I,R}^{\text{p}}) \text{ , la condition (R)}$ entraîne la condition (R').

Réciproquement, soit h un élément de W^O(I,R^P) , h est limite (au sens L¹) d'une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et uniformément bornées de I dans \mathbb{R}^P . Rappelons qu'une telle suite converge dans chaque espace \mathbb{L}^P , $\mathbb{I} \leq p < \infty$ et que sur un couple hilbertien tout morphisme bilinéaire symétrique est continu pour la norme préhilbertienne sur le couple (voir proposition I.5.5.). Ici, en raisonnant sur chaque composante de $\mathbb{Q}(h,h)$, il vient que \mathbb{Q} est continu pour la norme \mathbb{L}^2 . En conséquence si $\mathbb{Q}(h,h) = \mathbb{Q}(h,h) =$

$$|Q'(h,\mu)|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})} \geq \varepsilon ||\mu||_{\mathbb{R}^{r}} |h|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})} > \frac{\varepsilon}{2} ||\mu||_{\mathbb{R}^{r}} |h|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})}.$$

Pour ϵ réel strictement positif et λ dans S_r posons :

$$K_{\epsilon}(Q) = \{h \mid h \in C^{0}(I,\mathbb{R}^{p}), ||Q(h,h)||_{\mathbb{R}}r \leq \epsilon |h|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})}^{2}\}$$

et

$$E_{\lambda,\varepsilon} = \{h \mid h \in C^{0}(I,\mathbb{R}^{p}), \mid \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} = h \mid L^{2}(I,\mathbb{R}^{p}) < \varepsilon \mid h \mid L^{2}(I,\mathbb{R}^{p}) \}$$

La condition (R') se réécrie alors de manière équivalente sous la forme :

(R'): $\exists \epsilon > 0$ tel que la condition (R'_{ϵ}) suivante soit vérifiée,

$$(R'): \forall \lambda \in S_r, K_{\varepsilon}(Q) \cap E_{\lambda, \varepsilon} = \{0\}.$$

Par ailleurs soient les conditions suivantes :

(C'): $\exists \alpha > 0$ tel que la propriété (C') suivante soit vérifiée :

$$(C'_{\alpha}): \forall \lambda \in S_{r}, \exists \mu \in S_{r} \text{ tels que}:$$

(1):
$$\forall t \in [0,1[, \forall X \in Ker (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i(t))^+, (\sum_{i=1}^{r} \mu_i a_i(t))^+ (X,X) \ge \alpha ||X||_{\mathbb{R}^p}^2$$

(2):
$$\forall t \in]0,1]$$
, $\forall x \in \text{Ker} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t)\right)^{-}$, $\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t)\right)^{-} (X,X) \ge \alpha \left|\left|X\right|\right|_{\mathbb{R}^{p}}^{2}$

(C"); $\exists \alpha > 0$ tel que la propriété (C") suivante soit vérifiée :

$$(C_{\alpha}^{"}): \forall \lambda \in S_{r}, \exists \mu \in S_{r} \underline{\text{tels que}}:$$

(1): $\forall t \in [0,1[, \forall x \in \mathbb{R}^p]$,

$$\left|\left|\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t)\right)^{+} X\right|\right| \leq \alpha \left|\left|X\right|\right|_{\mathbb{R}^{p}} \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t)\right)^{+} (X,X) \geq \alpha \left|\left|X\right|\right|_{\mathbb{R}^{p}}^{2}$$

(2): $\forall t \in]0,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$,

$$\left|\left|\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} \ a_{i}(t)\right)^{-} X\right|\right| \leq \alpha \left|\left|X\right|\right|_{\mathbb{R}^{p}} \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \ a_{i}(t)\right)^{-} (X,X) \geq \alpha \left|\left|X\right|\right|_{\mathbb{R}^{p}}^{2}$$

Il est évident que (C") => (C') => (C) . Pour établir que (C) est nécessaire et suffisante pour que (R) soit vérifiée nous ferons la démonstration en utilisant le schéma suivant :

- i) $(R') \Longrightarrow (C')$, proposition III.4.2.
- ii) (C) \Longrightarrow (C") , proposition III.4.3.
- iii) (C") \Longrightarrow (R') , proposition III.4.4.

Ainsi le théorème III.3. sera démontré.

III.4.2. - Proposition. -
$$(R') \Longrightarrow (C')$$
.

Or ici $K_{7\alpha}(Q)$ n'est pas le cône d'une application bilinéaire et $E_{\lambda,7\alpha}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $C^{\circ}(I,\mathbb{R}^p)$. Pour être dans les hypothèses du théorème, nous allons construire une application bilinéaire D , voisine de Q , dont le cône K(D) soit inclus dans $K_{7\alpha}(Q)$ et un sous-espace F de $C^{\circ}(I,\mathbb{R}^p)$ qui soit inclus dans $E_{\lambda,7\alpha}(Q)$ tels que D vérifie la propriété (N_p) sur F. En appliquant le théorème

on aura alors un élément non nul de K(D) \cap F donc un élément non nul de K $_{7\alpha}$ (Q) \cap E $_{\lambda,7\alpha}$ d'où le résultat.

 $Si \quad (C_\alpha') \quad \text{\'etait fausse, il existeralt} \quad \lambda \quad dans \quad S_r \quad tel \; que$ pour tout μ dans S_r , il existe t_μ dans $\left[0,1\right]$ et X_μ dans $Ker(\sum_{i=1}^r \lambda_i \; a_i(t_\mu))^{\sigma_\mu} \quad \text{où} \quad \sigma_\mu \; \varepsilon \; \{+\;,\;-\} \quad avec \quad \sigma_\mu \; = \; + \quad si \quad t_\mu \; = \; 0$ et $\sigma_\mu \; = \; - \quad si \quad t_\mu \; = \; 1 \quad tels \; que \quad (\sum_{i=1}^r \lambda_i \; a_i(t_\mu))^{\sigma_\mu}(X_\mu, X_\mu) \; < \; \alpha \; \left| \; |X_\mu| \; \right|^2 \; .$

Pour μ_{o} fixé dans S_{r} , il existe un voisinage V_{o} de μ_{o} dans S_{r} et un intervalle ouvert I_{o} dans $\left[0,1\right]$ de la forme $I_{o} = \left]t_{\mu_{o}} - \eta \right], t_{\mu_{o}} \left[si \sigma_{\mu_{o}} = - et I_{o} = \left]t_{\mu_{o}}, t_{\mu_{o}} + \eta \left[si \sigma_{\mu_{o}} = + , soient continues a_{i}, 1 \leqslant i \leqslant r \right], soient continues sur <math>I_{o}$, tels que : $\forall \mu \in V_{o}$, $\forall t \in I_{o}$,

i)
$$\langle \mu, \mu_{o} \rangle \geqslant \frac{1}{2}$$

ii) $\sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t) (X_{\mu_{o}}, X_{\mu_{o}}) < 2\alpha ||X_{\mu_{o}}||^{2}$

iii) $||\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t) X_{\mu_{o}}|| < 7\alpha ||X_{\mu_{o}}||.$

Ce qui est possible par définition même des limites. Par ailleurs la sphère S_r étant compacte on peut la recouvrir d'un nombre fini de voisinages V_1, \ldots, V_N correspondant à un choix d'éléments μ_1, \ldots, μ_N dans S_r auquels sont associés des intervalles I_1, \ldots, I_N dans [0,1]. On choisit N sous intervalles J_1, \ldots, J_N disjoints deux à deux, inclus respectivement dans I_1, \ldots, I_N et on choisit N applications Θ_k , $1 \le k \le N$, continues sur [0,1] telles que :

- 1) θ_k ait son support dans J_k , $1\leqslant k\leqslant N$.
 - 2) $\theta_k(t) \leq 7\alpha$, pour tout t , $1 \leq k \leq N$.
 - 3) $J_k' = \{t \mid \theta_k(t) > 6\alpha\}$ ne soit pas vide , $1 \le k \le N$.

Soient d_i , $1 \le i \le r$, les formes bilinéaires sur \mathbb{R}^p définies par : $d_i(t) = a_i(t) - \sum\limits_{k=1}^N \theta_k(t) (\mu_k)_i$ S où S est l'application produit scalaire sur \mathbb{R}^p et $(\mu_k)_i$, la i^{ème} composante de μ_k .

Vérifions que K(D) où D est définie par :

$$D(h,h) = (\int_0^1 d_i(t) (h(t), h(t)) dt)_{i=1}^r$$

est inclus dans $K_{7\alpha}(Q)$; en effet, un élément h est dans K(D) si et seulement si

$$\int_{0}^{1} a_{i}(t) (h(t),h(t)) dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{J_{k}} \theta_{k}(t) (\mu_{k})_{i} ||h(t)||_{\mathbb{R}^{p}}^{2} dt, \quad 1 \leq i \leq r$$

c'est-à-dire :

$$\left| \left| \left| \left(\int_{0}^{1} a_{i}(t) (h(t), h(t)) dt \right)_{i=1}^{r} \right| \right|_{\mathbb{R}^{r}} \leq 7\alpha \left| h \right|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})}^{2}.$$

D'autre part on a :

$$\forall k$$
, $1 \le k \le N$, $\forall t \in J_k$, $\left|\left|\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i(t) X_k\right|\right| \le 7\alpha \left|\left|X_k\right|\right|_{\mathbb{R}^p}$

En posant

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t)$$
 et $v(t) = u(t) - \sum_{k=1}^{N} \chi_{k} \frac{\langle ., X_{k} \rangle}{\langle X_{k}, X_{k} \rangle} u(t) \chi_{k}$

où χ_k désigne la fonction caractéristique de l'intervalle J_k , il vient que pour tout t dans J_k , v(t) $X_k = 0$ et le sous-espace vectoriel $F = \{h \mid h \in C^0(I,\mathbb{R}^p) , \forall t \in [0,1], v(t) \mid h(t) = 0\}$ est inclus dans l'ensemble $E_{\lambda,7\alpha}$. En effet si pour tout t dans [0,1],

v(t) h(t) = 0 alors pour tout dans [0,1], on a:

$$u(t) h(t) = \sum_{k=1}^{N} \chi_k \frac{\langle h(t), X_k \rangle}{\langle X_k, X_k \rangle} u(t) X_k$$
.

c'est-à-dire, pour tout t dans [0,1]:

$$\int_{0}^{1} ||u(t)|h(t)||^{2} dt < \sum_{k=1}^{N} \int_{J_{k}} \frac{||h(t)||^{2}}{||X_{k}||^{2}} (7_{\alpha})^{2} ||X_{k}||^{2} \le (7\alpha)^{2} \int_{0}^{1} ||h(t)||^{2} dt$$

soit: $\left| uh \right|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^p)} < (7\alpha)^2 \left| h \right|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^p)}$.

Il reste à établir que l'application D vérifie la propriété (N_p) en fait (N_∞) , sur l'espace F. Pour tout μ dans S_r , il existe un indice k, $1\leqslant k\leqslant N$ tel que μ appartienne à V_k . En outre pour toute fonction ψ définie et continue sur $\left[0,1\right]$ à support contenu dans J_k' , posons $h_\psi=\psi\;X_k$ on a $h_\psi\in F$ et

$$\mu \text{ o D}(h_{\psi}, h_{\psi}) = \int_{0}^{1} \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} d_{i}(t) (\psi(t) X_{k}, \psi(t) X_{k}) dt$$

$$= \int_{0}^{1} [\psi(t)]^{2} (\sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t) (X_{k}, X_{k}) - \theta_{k}(t) \langle \mu, \mu_{k} \rangle ||X_{k}||^{2}) dt$$

$$\leq 2\alpha |h_{\psi}|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})}^{2} - 6\alpha \frac{1}{2} |h_{\psi}|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})}^{2} = -\alpha |h_{\psi}|_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})}^{2}$$

La forme bilinéaire μ o D est donc strictement négative sur un sous espace de dimension infinie de F, il résulte donc du théorème (cité au début de la démonstration) que $K(D) \cap F \neq \{0\}$ c'est-à-dire $K_{7\alpha}(Q) \cap E_{\lambda,7\alpha} \neq \{0\}$ ce qui contredit la condition $(R_{7\alpha})$.

III.4.3.- Proposition (C) \Longrightarrow (C").

Démonstration : En première étape nous montrerons la proposition dans le cas où les applications a_i , $l \leqslant i \leqslant r$ sont continues sur un intervalle fermé $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ aux bords duquel on a prolongé par continuité. Par l'absurde, si (C") était fausse alors pour tout n ε N , il existerait λ^n dans S_r tel que pour tout μ dans S_r , il existerait t_u^n dans I, et x_u^n de norme 1 dans \mathbb{R}^p tels que $\left|\left|\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i}^{n} a_{i}(t_{\mu}^{n}) X_{\mu}^{n}\right|\right| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t_{\mu}^{n}) (X_{\mu}^{n}, X_{\mu}^{n}) \leqslant \frac{1}{n} \text{ . La sphère}$ S étant compacte, on pourrait extraire de la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une soussuite $(\lambda^{n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergerait vers λ dans S . Pour le μ dans $\mathbf{S}_{\mathbf{r}}$, associé à ce $~\lambda~$ par la condition (C) on pourrait, sachant que l'intervalle I, et la sphère S sont compacts, extraire de la soussuite $(t^{"})_{n\in {\rm I\! N}}$, une sous-suite $(t^{"})_{n\in {\rm I\! N}}$ qui convergerait vers t_{μ} dans I, et de la sous-suite $(X_{\mu}^{n})_{n \in \mathbb{N}}$, une sous-suite $(X^{n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergerait vers $\ \ \overset{}{X}_{\mu} \ \ dans \ \ \overset{}{S}_{p}$, il en résulterait alors que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t_{\mu}) X_{\mu} = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t_{\mu}) (X_{\mu}, X_{\mu}) = 0 \text{ ce qui contredirait}$ la condition (C).

Enfin si les applications a_i , $1 \le i \le r$ sont continues par morceaux et si $t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_m = 1$ est une subdivision de [0,1] qui leur est subordonnée alors d'après ce qui précède, $(C) \Longrightarrow (C'')$ sur tout intervalle fermé $[t_j, t_{j+1}]$, $1 \le j \le m$.

En posant $\alpha = \inf_{1 \le j \le m} \alpha_j$, on obtient que (C) \Longrightarrow (C'') sur [0,1].

 $\underline{\underline{\text{D\'emonstration}}}$: Remarquons d'abord que si on note Λ l'ouvert des points de continuité de l'application a, la condition (C'') entraîne d'une façon évidente la condition (C''') suivante :

(C''') :
$$\exists \alpha > 0$$
, $\forall \lambda \in S_r$, $\exists \mu \in S_r$, $\forall t \in \Lambda$, $\forall X \in \mathbb{R}^p$,
$$||\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i(t) X|| \leq \alpha ||X|| \Longrightarrow \sum_{i=1}^r \mu_i a_i(t) (X,X) \geqslant \alpha ||X||^2$$

Nous allons montrer que (C''') et non (R') entraı̂nent une contradiction. Pour α donné par la condition (C''') posons :

$$\Omega = \{t \mid t \in \Lambda, \left| \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t) h(t) \right| \right| \leq \alpha \left| \left| h(t) \right| \right| \}$$

Si (R') était fausse alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existerait λ dans $S_r \text{ et } h \text{ dans } K_\varepsilon(Q) \cap E_{\lambda,\varepsilon} - \{0\} \text{ c'est-a-dire } \lambda \text{ et } h \text{ v\'erifiant}$

i)
$$\left| \left| Q(h,h) \right| \right|_{\mathbb{R}^r} \le \varepsilon \left| h \right|^2$$
 $L^2(I,\mathbb{R}^p)$

ii)
$$\int_{0}^{1} \left| \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t) h(t) \right| \right|^{2} dt < \varepsilon^{2} \left| h \right|^{2}_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})}.$$

On aurait alors:

$$\epsilon^{2} |h|^{2}_{L^{2}(I,\mathbb{R}^{p})} > \int_{0}^{1} ||\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t) h(t)||^{2} dt \ge \int_{\Lambda - \Omega} ||\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} a_{i}(t) h(t)||^{2} dt$$

$$\ge \alpha^{2} \int_{\Lambda - \Omega} ||h(t)||^{2} dt$$

$$\int_{\Lambda-\Omega} ||h(t)||^2 dt < \frac{\epsilon^2}{\alpha^2} |h|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^p)}.$$

D'autre part, en prenant le $\,\mu\,$ dans $\,S_{\,r}\,$, associé au $\,\lambda\,$ dans $\,S_{\,r}\,$, par la condition (C'") et en posant $\,M\,=\,|\,|\,a\,|\,|\,\,$ on a :

$$\int_{0}^{1} \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \ a_{i}(t) \ (h(t), h(t)) \ dt = \int_{\Lambda}^{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \ a_{i}(t) \ (h(t), h(t)) \ dt$$

$$= \int_{\Omega}^{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \ a_{i}(t) \ (h(t), h(t)) \ dt + \int_{\Lambda - \Omega}^{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \ a_{i}(t) \ (h(t), h(t)) \ dt$$

En utilisant (C'''), il vient:

$$\int_{0}^{1} \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t) (h(t), h(t)) dt \ge \alpha \int_{\Omega} ||h(t)||^{2} dt - \int_{\Lambda - \Omega} M ||h(t)||^{2} dt$$

$$\ge \alpha \int_{0}^{1} ||h(t)||^{2} dt - \int_{\Lambda - \Omega} (M + \alpha) ||h(t)||^{2} dt$$

$$\ge \alpha |h|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})}^{2} - (M + \alpha) \frac{\varepsilon^{2}}{\alpha^{2}} |h|_{L^{2}(I, \mathbb{R}^{p})}^{2} .$$

Si on a fixé ϵ tel que (M+ α) $\frac{\epsilon^2}{\alpha^2} \leqslant \frac{\alpha}{2}$, il vient :

$$\int_{0}^{1} \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} a_{i}(t) (h(t), h(t)) dt \ge \frac{\alpha}{2} |h|^{2} L^{2}(I,\mathbb{R}^{p}).$$

Soit : μ o Q(h,h) $\geqslant \frac{\alpha}{2} \left| h \right|^2$. Comme μ est de norme 1 il en résulte que $\left| \left| Q(h,h) \right| \right|_{\mathbb{R}^r} \geqslant \frac{\alpha}{2} \left| h \right|^2$. Ce qui est contradictoire avec l'inégalité i), si l'on s'est fixé $\epsilon \leqslant \inf(\frac{\alpha}{3}, \sqrt{\frac{\alpha}{2(M+\alpha)}})$.

111.5. - DISCUSSION DE LA CONDITION (C) DANS LE CAS D'UN CONTROLE SCALAIRE.-

Sous les mêmes hypothèses et les mêmes données qu'au paragraphe III.3. On suppose p=1 et B continue ; dans ce cas le contrôle u_0 est scalaire et la matrice B(t) (pour $t \in [0,1]$) est alors une matrice unicolonne à n lignes. Rappelons que 1'on s'est placé dans le cas d'anormalité n-1, avec $n \geqslant 2$. Soit R la résolvante de l'équation $\dot{x}=Ax$ on a, pour ξ dans $\mathbb{R}^n-\{0\}$:

$$(\tilde{\mathbf{B}}(\mathsf{t}) \circ \tilde{\mathbf{R}}(\mathsf{0},\mathsf{t})) \; \xi = \left[\psi_1(\mathsf{t}) \; , \ldots, \; \psi_n(\mathsf{t}) \right] \left[\begin{matrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{matrix} \right] = \sum_{i=1}^n \; \xi_i \; \psi_i(\mathsf{t}) \; .$$

Remarquons que les fonctions ψ_i i = 1,...,n sont continues et l'application $a_{\xi}(t)$, pour $t \in [0,1]$ définie au paragraphe III.2., est alors une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb R$, donnée par :

$$a_{\xi}(t) = u_{o}(t) * (\mathring{B}(t) \circ \mathring{R}(0,t)) \xi = u_{o}(t) (\sum_{i=1}^{n} \xi_{i} \psi_{i}(t))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u_{o}(t) \xi_{i} \psi_{i}(t) .$$

Considérons E l'espace de dimension n engendré par les fonctions ψ_1,\ldots,ψ_n et E' le sous-espace de E, de dimension n-1 engendré par les $\sum\limits_{i=1}^n \xi_i \, \psi_i$ où ξ vérifie la relation $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \, \xi_i = 0$, α_1,\ldots,α_n étant les composantes de $\int_0^1 R(0,t) \, \dot{x}_o(t) \, dt$. La condition (C) s'écrit alors sous la forme suivante :

(D):
$$\forall \psi \in E' - \{0\}, \ \exists \psi \in E' - \{0\}, \ \forall t_o \ \text{racine de } \psi,$$

$$u_o(t_o^+) \ \psi(t_o) > 0$$
 et
$$u_o(t_o^-) \ \psi(t_o) > 0 \ .$$

Notons d'abord que si u change de signe en t (racine de ψ), la condition (D) est non vérifiée.

III.5.1. - <u>Proposition</u>. - <u>Si</u> n = 2 , <u>une condition nécessaire</u> et suffisante pour que (D) <u>soit vérifiée est qu'un générateur de</u> E' n'ait pas de zéro dans [0,1].

 $\underline{\text{D\'emonstration}}: \text{Pour n} = 2 \text{ , on a dim } E' = 1 \text{ , soit } \psi_0 \neq 0 \text{ ,}$ un g\'en\'erateur de E' :

- i) si ψ_0 possède une racine to dans [0,1] auquel cas to est racine de tout élément de E' $\{0\}$ et donc (D) est non vérifiée.
- ii) si ψ_0 ne possède pas de racine dans [0,1] alors aucun élément de E' $\{0\}$ n'admet de racine dans [0,1] et la condition (D) est trivialement vérifiée (puisqu'elle est vide).

 $\underline{\text{D\'emonstration}} \ : \ \text{Le syst\`eme d'\'equations suivant , pour } \xi$ dans \mathbb{R}^n - {0} avec $n \, \geqslant \, 3$,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \xi_{i} \psi_{i}(t_{o}) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \xi_{i} \alpha_{i} = 0 \end{cases}$$

admet toujours une solution. Par conséquent, pour tout t_o dans [0,1] il existe un ψ dans $E' - \{0\}$ tel que $\psi(t_o) = 0$ si de plus (D) est vérifiée alors u_o est de signe constant sur [0,1].

On suppose dans la suite que u_0 est de signe constant sur tout l'intervalle $\left[0,l\right]$, la condition (D) devient alors la suivante :

(D') : $\forall \emptyset \in E' - \{0\}$, $\exists \psi \in E' - \{0\}$, $\forall t_o \text{ racine de } \emptyset$, $\Psi(t_o) > 0$.

111.5.3. - <u>Proposition</u>.- <u>Si</u> E' (de dimension n-1) <u>vérifie</u>

la condition de Haar suivante.

(H): $\forall \psi \in E' - \{0\}$, ψ admet au plus n-2 racines.

alors E' vérifie (D').

 $\underline{\text{D\'emonstration}}: \text{Soit } \emptyset \text{ un \'el\'ement de } E' - \{0\}, \text{ si}$ $t_1, \dots, t_p, \text{ avec } p \leqslant n-2, \text{ sont les racines de } \emptyset. \text{ Par la propri\'et\'e}$ $\text{d'interpolation v\'erifi\'ee par un système de Haar, il existe toujours un \'el\'ement } \Psi \text{ de } E' - \{0\} \text{ tel que } \Psi(t_i) = 1 \text{ . Ce qui assure } (D'). \blacksquare$

Haar qui est déjà suffisante (proposition III.5.3.) est aussi nécessaire pour que (D') soit vérifiée. Elle traduit exactement que dans ce cas (D') n'est vérifiée que si tout élément de $E' - \{0\}$, ne possède aucune racine dans [0,1]. Par contre pour $n \ge 3$, la condition de Haar est suffisante (proposition III.5.3.) mais non nécessaire. En effet si n=3 dès que E' (de dimension 2) est engendré par l et une fonction continue ayant au moins 2 racines dans [0,1], alors (D') est évidemment vérifiée et la condition de Haar ne l'est pas.

ANNEXE.

La démonstration du théorème II.2.2. repose essentiellement sur le théorème suivant :

- i) $g(x_0, \lambda) = y_0$, quel que soit λ de Ω
- ii) $d_1 g(x_0, \lambda) = l_F$, quel que soit λ de Ω

 $\frac{\text{Il existe alors un voisinage ouvert}}{\text{F} \times \Omega} \quad \frac{\text{de } \{y_o\} \times \Omega}{\text{et une application}} \quad \xi \quad \underline{\text{de }} \quad T \quad \underline{\text{dans}} \quad F \text{ , } \underline{\text{de classe}} \quad C^k \quad \underline{\text{tels que}} :$

- 0) $g(\xi(y,\lambda),\lambda) = y$, quel que soit (y,λ) dans T
- 1) $\xi(y_0, \lambda) = x_0$, quel que soit λ dans Ω
- 2) $d_1 \xi(y_0, \lambda) = 1_F$, quel que soit λ dans Ω .

En prenant $r_{\lambda_{_{\scriptsize O}}} > 0$ et assez petit pour que la boule ouverte de centre $x_{_{\scriptsize O}}$ et de rayon 2 $r_{\lambda_{_{\scriptsize O}}}$ (B $_{F}(x_{_{\scriptsize O}}; 2 r_{\lambda_{_{\scriptsize O}}})$) soit incluse dans $V_{\lambda_{_{\scriptsize O}}}$ pour tout λ de $\Omega_{_{\scriptsize O}}$, on a :

$$\forall x \in F$$
, $||x - x_0|| < 2 r_{\lambda_0}$, $\forall \lambda \in \Omega_0$, $||1_F - d_1 g(x, \lambda)|| \le \frac{1}{2}$.

Considérons alors une application f , de $B_F(x_0; 2r_{\lambda_0}) \times (B_F(x_0; r_{\lambda_0}) \times \Omega_0)$ dans $B_F(x_0; 2r_{\lambda_0})$, définie par :

$$f(x,y,\lambda) = x + y - g(x,\lambda) .$$

Cette application est contractante, de rapport $\frac{1}{2}$, par rapport à x. Par le théorème du point fixe, il existe une application ξ_{λ_0} de $T_{\lambda_0} = B_F(y_0; r_{\lambda_0}) \times \Omega_0 \quad \text{dans} \quad B_F(x_0; 2 r_{\lambda_0}) \quad \text{telle que} :$

$$\xi_{\lambda_0}(y,\lambda) = f(\xi_{\lambda_0}(y,\lambda), y,\lambda) = \xi_{\lambda_0}(y,\lambda) + y - g(\xi_{\lambda_0}(y,\lambda), \lambda)$$

soit

$$g(\xi_{\lambda_0}(y,\lambda),\lambda) = y$$
 , quel que soit (y,λ) dans T_{λ_0} .

L'unicité de l'application ξ_{λ_0} , pour tout λ_0 dans Ω , induit l'existence d'une application ξ de $T=\bigcup_{\lambda_0\in\Omega}T_{\lambda_0}$ dans F vérifiant :

(0)
$$g(\xi(y,\lambda), \lambda) = y$$
, quel que soit (y,λ) dans T .

D'autre part, l'unicité du point fixe et la relation $f(x_0,y_0,\lambda) = x_0 + y_0 - g(x_0,\lambda) = x_0 \quad \text{entraînent que} :$

(1)
$$\xi(y_0, \lambda) = x_0$$
, quel que soit λ de Ω .

La différentiabilité de ξ étant de nature locale, elle résulte de l'application du théorème des fonctions implicites classique en chaque point et la différentielle de ξ est donnée par les identités :

$$d_{1} g(\xi(y,\lambda),\lambda) \circ d_{1} \xi(y,\lambda) = 1_{F}$$

$$d_{1} g(\xi(y,\lambda),\lambda) \circ d_{2} \xi(y,\lambda) + d_{2} g(\xi(y,\lambda),\lambda) = 0$$

On a en particulier

(2)
$$d_1 \xi(y_0, \lambda) = l_F$$
, pour tout λ de Ω .

- i) $g(x_0, \lambda) = y_0$, quel que soit λ de Ω .
- ii) L'application d_1 $g(x_0,.)$, \underline{de} Ω \underline{dans} L(E,F) $\underline{est\ born\acute{e}e}$, d_1 $g(x_0,\lambda)$ $\underline{admet\ une\ section}$ $s(\lambda)$ $\underline{quel\ que\ soit}$ λ \underline{de} Ω $\underline{et\ l'application}$ \underline{cation} s \underline{de} Ω \underline{dans} L(F,E) $\underline{est\ de\ classe}$ C^k .
- iii) Pour tout λ_0 de Ω , il existe un voisinage Ω_0 de λ_0 dans Ω tel que la famille d'applications $\{dg(.,\lambda)\}_{\lambda \in \Omega_0}$ soit équicontinue au point X_0 .

- 0) $g(\xi(y,\lambda),\lambda) = y$, pour tout (y,λ) de T
- 1) $\xi(y_0, \lambda) = x_0$, quel que soit λ de Ω .

$$x_{o} + s(\lambda) V_{\lambda_{o}} \subset U$$
 , pour tout λ dans Ω_{o} .

Considérons l'application f, de $U=\bigcup_{\lambda_0\in\Omega}(V_{\lambda_0}\times\Omega_0)$ (voisinage ouvert

de $\{0\} \times \Omega$ dans $F \times \Omega$) à valeurs dans F, définie par :

$$f(y,\lambda) = g(x_0 + s(\lambda) y, \lambda)$$
.

L'application f est de classe C^k par construction et vérifie les hypothèses du théorème O. En effet :

$$\begin{split} &f(0,\lambda)=g(x_{_{\scriptsize{0}}},\lambda)=y_{_{\scriptsize{0}}} \text{ , pour tout } \lambda \text{ de } \Omega \text{ et} \\ &d_{_{\scriptsize{1}}}f(0,\lambda)=d_{_{\scriptsize{1}}}g(x_{_{\scriptsize{0}}},\lambda) \text{ o } s(\lambda)=l_{_{\scriptsize{F}}} \text{ , quel que soit } \lambda \text{ de } \Omega. \end{split}$$

Par ailleurs on a les inégalités suivantes :

(I)
$$||d_1 f(y,\lambda) - d_1 f(0,\lambda)|| \le ||d_1 g(x_0 + s(\lambda) y,\lambda) - d_1 g(x_0,\lambda)||$$

 $||s(\lambda)||$

(II)
$$||d_{2} f(y,\lambda) - d_{2} f(0,\lambda)|| \le ||d_{1} g(x_{o} + s(\lambda)y,\lambda) - d_{1} g(x_{o},\lambda)|| ||ds(\lambda)||$$

 $+ ||d_{2} g(x_{o} + s(\lambda)y,\lambda) - d_{2} g(x_{o},\lambda)||$

Les hypothèses (ii) et (iii) jointes au fait que s et ds soient localement bornées entraînent moyennant les inégalités (I) et (II) que la famille d'applications $\{\mathrm{df}(.,\lambda)\}_{\lambda\in\Omega_{_{\mathbf{O}}}}$, $\Omega_{_{\mathbf{O}}}\subset\Omega$, vérifie l'hypothèse (iii) du théorème 0; il existe donc d'après ce théorème, un voisinage

ouvert ${\cal T}$ de $\{y_{_{\mbox{0}}}\}\times\Omega$ dans $F\times\Omega$ et une application n, de ${\cal T}$ dans F, de classe C^k , telle que :

 $f(\eta(y,\lambda),\lambda) = y \text{ , quel que soit } (y,\lambda) \text{ dans } T \text{ et}$ $\eta(y_0,\lambda) = 0 \text{ , d}_1 \eta(y_0,\lambda) = 1_F \text{ , quel que soit } \lambda \text{ dans } \Omega.$

Soit ξ l'application, de \mathcal{T} dans E , définie par :

$$\xi(y,\lambda) = x_0 + s(\lambda) \circ \eta(y,\lambda)$$
.

Cette application est de classe C^k par construction, elle vérifie

(0)
$$g(\xi(y,\lambda),\lambda) = g(x_0 + s(\lambda) \circ \eta(y,\lambda),\lambda) = f(\eta(y,\lambda),\lambda) = y$$
 quel que soit (y,λ) dans $\mathcal T$ et

(1) $\xi(y_0, \lambda) = x_0 + s(\lambda) \circ \eta(y_0, \lambda) = x_0$ quel que soit λ de Ω .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] R. MAGNUS
- Topological equivalence in bifurcation theory.

 Proceedings conference Sao Carlos Brazil 1979.

 Lectures Notes in Mathematics n° 799.

 Springer Verlag p. 263-276.
- [2] TZEE-CHAR KUO
- Characterizations of v-sufficiency of jets.
 Topology vol. 11 (1972) p. 115-131.
- [3] Ph. ANTOINE
- Image réciproque d'un point par une application différentiable en un point critique.
 C.R.A.S. Paris t. 288, série A, (1979) p. 347-349.
- [4] Ph. ANTOINE
- Surface de niveau d'une application différentiable. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-79. Publications IRMA de Lille I. U.E.R. de Maths. Pures et Appliquées, Vol. I, Année 1979.
- [5] Ph. ANTOINE
- Conditions pour un minimum local d'une fonction différentiable. Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle. Vol. XX2, 2ème trimestre 1979, p. 111-135.
- [6] Ph. ANTOINE
- Détermination explicite du cône tangent d'une surface de niveau ; application. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1980-81. Publications I.R.M.A. de Lille I, U.E.R. de Maths. Pures et Appliquées, vol. 3 Fascicule 5, année 1981.

