N° d'ordre : 945

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

Kadour BELABBES

SOLUTIONS NULLES POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL MATRICIEL ANALYTIQUE RELATIVEMENT A UNE HYPERSURFACE CARACTÉRISTIQUE MULTIPLE AVEC UNE CONDITION DE TYPE HYPERBOLICITE FORTE

MEMBRES DU JURY : R. BERZIN, *Président*
J.C. de PARIS, *Rapporteur*
D. GOURDIN, Examinateurs
D. SCHILTZ, Examinateurs

SOUTENUE LE 6 JANVIER 1982

A mon père

A ma mère

A ma famille

mes amis ...

Monsieur le Professeur Robert Berzin m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, il a répondu avec gentillesse à toutes les questions sur la 1ère partie de ce travail que j'ai dû lui poser ; qu'il en soit ici très vivement remercié.

Je remercie également Messieurs D. Gourdin et D. Schiltz d'avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean-Claude De Paris qui m'a initié à la théorie des Equations aux Dérivées Partielles et m'a guidé tout au long de ce travail par sa disponobilité et ses conseils.

Je témoigne aussi ma gratitude à toute l'équipe de recherche en Equations aux Dérivées Partielles de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille I au sein de laquelle j'ai trouvé une ambiance chaleureuse.

Mesdames Edith Duchêne et Annick Mennechet ont bien voulu accepter le surcroît de travail que leur a causé la frappe de cette thèse. Malgré le court délai dont elles disposaient, elles ont fait ce travail avec gentillesse et efficacité. Qu'elles trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie de même Madame Monique Lloret qui a toujours accepté gentiment de me photocopier les documents dont j'avais besoin.

Un grand merci également à Madame Françoise Dwoczyk, Messieurs Albert Gournay et Michel Provost qui ont imprimé cette thèse avec rapidité et compétence.

J'ai eu le plaisir de travailler pendant 3 ans avec D.Abi-Ayad, M.Boukrouche, O.Hebbar, S.Sedjelmaci. Qu'ils trouvent ici mes remerciements pour toutes les fructueuses conversations que nous avons eues.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0 : INTRODUCTION

Suivant une question qui m'a été posée par Monsieur le Professeur J.C. DE PARIS, j'ai essayé de construire une solution nulle dans l'espace des ultra-distributions pour un opérateur matriciel h d'ordre t, au voisinage d'un point caractéristique a, dans le cas dit H.F de J. VAILLANT [6].

On utilise la méthode de [15], reprise par H. KOMATSU dans le cadre des ultra-distributions [16].

Elle consiste d'abord en la construction d'une onde asymptotique de phase ϕ, pour l'opérateur h ; c'est l'objet du chapitre I. L'essentiel de ses calculs était fait dans [6], [1]. Il a fallu préciser le calcul des coefficients de distorsion $(Y_j^B)_{1\leqslant B\leqslant m}$, $j \geqslant 0$ de manière explicite afin de pouvoir les majorer.

La deuxième partie consiste à montrer que que les $(Y_j^B)_{1\leqslant B\leqslant m}$, $j \geqslant 0$ vérifient certaines majorations, on utilise pour cela la méthode des majorantes, sous la forme particulièrement élégante que lui a donnée C. WAGSCHAL [8]. Dans la dernière partie, on démontre la convergence de l'onde asymptotique dans l'espace des ultradistributions vers la solution nulle voulue. Les calculs sont analogues à ceux de [16] .

CHAPITRE I : CONSTRUCTION D'ONDE ASYMPTOTIQUE

I - *Quelques rappels d'Algèbre élémentaire.*

1) Cofacteurs.

Soit $(H^A_B)_{1\leq A,B\leq m} = H$, une matrice carrée d'ordre m.

Nous avons

(1) $$\det(H^A_B) = \sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon_\sigma \, H_1^{\sigma(1)} \, H_2^{\sigma(2)} \ldots\ldots H_m^{\sigma(m)}$$

où S_m est le groupe des permutations de $\{1,\ldots,m\}$ et ε_σ la signature de σ .

définition (A.I1). Soit $(A_1,\ldots,A_2)$ et $(B_1,\ldots,B_1)$ des r-uples de $\{1,\ldots,m\}$ formés d'éléments 2 à 2 distincts.

Alors : 1°) $A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$ désignera le coefficient de $H^{A_1}_{B_1} H^{A_2}_{B_2}\ldots H^{A_r}_{B_r}$ dans $\det(H^A_B)$ et sera appelé cofacteur d'ordre $(m-r)$ de H

2°) $\mathcal{L}^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$ est la matrice obtenue en barrant dans (H^A_B) les $A_1^{eme},\ldots,A_r^{eme}$ lignes et les $B_1^{eme},\ldots,B_r^{eme}$ colonnes.

Dans la suite on notera $\{C_1,\ldots,C_{m-r}\}$ (resp $D_1,\ldots,D_{m-r}$) le complémentaire de $\{A_1,\ldots,A_r\}$ (resp $\{B_1,\ldots,B_r\}$) dans $\{1,\ldots,m\}$

Remarque: il résulte de (1) que

$$A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r} = \sum_{\substack{\sigma\in S_m \\ \sigma(B_1)=A_1 \\ \vdots \\ \sigma(B_r)=A_r}} \varepsilon_\sigma \, H_{D_1}^{\sigma(D_1)} \ldots H_{D_{m-r}}^{\sigma(D_{m-r})}$$

Puisque le produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs on supposera dorénavant que $C_1 < C_2 < \dots < C_{m-r}$ (resp $D_1 < D_2 < \dots < D_{m-r}$)

1.1. Calcul de $A^{B_1\dots B_r}_{A_1\dots A_r}$ en fonction de $\mathcal{L}^{B_1\dots B_r}_{A_1\dots A_r}$

Considérons la matrice (K^A_B) définie comme suit :

$$\begin{cases} K^A_B = H^A_B \text{ si } B \notin \{B_1,\dots,B_r\} \text{ , } 1 \leq A \leq m \\ K^A_{B_k} = \delta^A_{A_k} \quad 1 \leq k \leq r,\ 1 \leq A \leq m \end{cases}$$

nous avons

$$\det(K^A_B) = \sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon_\sigma\ K_1^{\sigma(1)}\ K_2^{\sigma(2)} \ \dots\dots\ K_m^{\sigma(m)}$$

Remarquons que $\forall \sigma \in S_m$,$\forall i \in \{1,\dots,r\}$

$$K_{B_i}^{\sigma(B_i)} = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma(B_i) \neq A_i \\ 1 \text{ si } \sigma(B_i) = A_i \end{cases}$$

Donc

$$\det(K^A_B) = \sum_{\substack{\sigma\in S_m \\ \sigma(B_1)=A_1 \\ \vdots \\ \sigma(B_r)=A_r}} \varepsilon_\sigma\ H_{D_1}^{\sigma(D_1)} \dots H_{D_{m-r}}^{\sigma(D_{m-r})}$$

$$= A^{B_1\dots B_r}_{A_1\dots A_r}$$

Soient τ , $\tau' \in S_m$ tels que $\begin{cases} 1 \leq \tau(A_1) < \tau(A_2)\dots < \tau(A_r) \leq m \\ \text{et} \\ \tau(C_k) = C_k,\ k \in \{1,\dots,m-r\} \end{cases}$

et $\begin{cases} 1 \leq \tau'(B_1) < \tau'(B_2) < \dots < \tau'(B_r) \leq m \\ \text{et} \\ \tau'(D_k) = D_k \text{ , } k \in \{1,\dots,m-r\} \text{ .} \end{cases}$

Considérons la matrice $(K'^{A}_{B}) = (K^{\tau(A)}_{\tau'(B)})$ obtenue en permutant les lignes et les colonnes de (K^{A}_{B}).

Nous avons alors d'une part :

$$\det(K'^{A}_{B}) = (-1)^{\sum_{k=1}^{r}(A_k+B_k)} \det \mathcal{L}^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$$

et d'autre part

$$\det(K'^{A}_{B}) = \varepsilon_\tau \times \varepsilon_{\tau'} \det (K^{A}_{B})$$

Par conséquent

$$A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r} = \varepsilon_\tau \times \varepsilon_{\tau'} (-1)^{\sum_{k=1}^{r}(A_k+B_k)} \det \mathcal{L}^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$$

En remarquant que

$$\varepsilon_\tau\ \varepsilon_{\tau'} = (-1)^{N^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}}$$, où $N^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$ est le nombre d'inversions de $\binom{B_1\ldots B_r}{A_1\ldots A_r}$

$$N^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots 1_r} = \mathrm{Card}\{(i,j) : i < j \text{ et } \mathrm{Sgn}(B_j-B_i) = -\mathrm{sgn}(A_j-A_i)\}$$

Alors nous avons

$$(2)\quad A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r} = (-1)^{\sum_{k=1}^{r}(A_k+B_k)+N^{B_1\ldots B_r}_{k_1\ldots A_r}} \det \mathcal{L}^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$$

Convention : on convient que si les $A_1,\ldots,A_r$ ou les $B_1,\ldots,B_r$ ne sont pas 2 à 2 distincts

$$A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r} = 0$$

2.1. <u>Formules utiles dans la suite</u>

<u>Proposition</u> (A.I.1) : $\displaystyle\sum_{A=1}^{m} H^{A}_{D_j} A^{B_1\ldots B_r D_\ell}_{A_1\ldots A_r A} = \delta^{D_\ell}_{D_j} A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$

avec δ^p_q symbole de Kronecker.

<u>Preuve</u> : On peut supposer évidemment $A_1,\ldots,A_r$ et $B_1,\ldots,B_r$ 2 à 2 distincts. On a donc

$$A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r} = \sum_{\substack{\sigma\in S_m\\ \sigma(B_1)=A_1\\ \vdots\\ \sigma(B_r)=A_r}} \varepsilon_\sigma H^{\sigma(D_1)}_{D_1} \cdots\cdots H^{\sigma(D_{m-r})}_{D_{m-r}}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma\in S_m\\ \sigma(B_1)=A_1\\ \vdots\\ \sigma(B_r)=A_r}} H^{\sigma(D_j)}_{D_j} \varepsilon_\sigma H^{\sigma(D_1)}_{D_1} \ldots H^{\sigma(D_{j-1})}_{D_{j-1}} H^{\sigma(D_{j+1})}_{D_{j+1}} \ldots H^{\sigma(D_{m-r})}_{D_{m-r}}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m-r} H^{C_\ell}_{D_j} \sum_{\substack{\sigma\in S_m\\ \sigma(D_j)=C_\ell\\ \sigma(B_1)=A_1\\ \vdots\\ \sigma(B_r)=A_r}} \varepsilon_\sigma H^{\sigma(D_1)}_{D_1} \ldots H^{\sigma(D_{j-1})}_{D_{j-1}} H^{\sigma(D_{j+1})}_{D_{j+1}} \ldots H^{\sigma(D_{m-r})}_{D_{m-r}}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m-r} H^{C_\ell}_{D_j} A^{B_1\ldots B_r [D_j]}_{A_1\ldots A_r C_\ell}$$

$$= \sum_{A=1}^{m} H^{A}_{D_j} A^{B_1\ldots B_r [D_j]}_{A_1\ldots A_r A}$$

Soit $\mathcal{L}^{*}{}^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$ la matrice obtenue en remplaçant dans

$\mathcal{L}^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$, la $\ell^{\text{ième}}$ colonne par la jème.

Alors nous avons, si $j \neq \ell$

$$0 = \det \mathcal{L}^{*}{}^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r} = \sum_{k=1}^{m-r} H^{C_k}_{D_j} A^{B_1\ldots B_r D_\ell}_{A_1\ldots A_r C_k}$$

$$= \sum_{A=1}^{m} H^{A}_{D_j} A^{B_1\ldots B_r D_\ell}_{A_1\ldots A_r A}$$

Par conséquent nous avons

$$\sum_{A=1}^{m} H^{A}_{D_j} A^{B_1\ldots B_r D_\ell}_{A_1\ldots A_r A} = \delta^{\ell}_{j} A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

En échangeant le rôle des lignes et des colonnes nous aurons aussi :

$$\sum_{B=1}^{m} H^{C_j}_{B} A^{B_1\ldots B_r B}_{A_1\ldots A_r C_\ell} = \delta^{j}_{\ell} A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$$

<u>Conséquences.</u>

a) En prenant $r = \nu$ et $A_i = B_i = i$, $1 \leqslant i \leqslant \nu$ nous aurons, en chapeautant (resp. en surbarrant) les éléments de $\{\nu+1,\ldots m\}$ (resp $1,\ldots,\nu\}$), et en utilisant la convention d'Einstein

$$(3) \qquad H^{\hat C}_{B} A^{1\ldots\nu B}_{1\ldots\nu \hat D} = \delta^{\hat C}_{\hat D} A^{12\ldots\nu}_{12\ldots\nu}$$

$$(3') \qquad H^{A}_{\hat C} A^{1\ldots\nu \hat D}_{1\ldots\nu A} = \delta^{\hat D}_{\hat C} A^{12\ldots\nu}_{12\ldots\nu}$$

En prenant $r = \nu - 1$ et

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} A_j = j , & j \in \{1,\dots,\bar{A}-1\} \\ \text{et} & \\ A_j = j+1 , & j \in \{\bar{A}, \bar{A}+1,\dots, \nu-1\} \end{array}\right. \\ \text{et} \\ \left\{\begin{array}{ll} B_j = j , & j \in \{1,\dots,\bar{D}-1\} \\ \text{et} & \\ B_j = j+1 , & j \in \{\bar{D}, \bar{D}+1,\dots,\nu-1\} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

nous aurons

$$(4) \qquad H^E_B \, A^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\nu B}_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}+1\dots\nu\bar{A}} = \delta^E_{\bar{A}} \, A^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\nu}_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}+1\dots\nu} , \quad E \in \{\bar{A},\nu+1,\dots,m\}$$

$$(4') \qquad H^A_E \, A^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\ \nu\bar{D}}_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}-1\dots\ \nu A} = \delta^{\bar{D}}_E \, A^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\nu}_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}+1\dots\nu} , \quad E \in \{\bar{D},\nu+1,\dots,m\}$$

2°) Bases de Ker $((H^A_B))$ et Ker$({}^t(H^A_B))$

Supposons que (H^A_B) est de rang $(m-\nu)$ et que $A^{12\dots\nu}_{12\dots\nu}$ est le cofacteur non-nul.

D'après la formule (4) nous avons pour tout $\bar{A} \in \{1,\dots,\nu\}$

$$\sum_{B=1}^{m} H^E_B \, A^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\nu B}_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}+1\dots\nu\bar{A}} = \delta^E_{\bar{A}} \, A^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\nu}_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}+1\dots\nu}$$

pour tout $E \in \{\bar{A}, \nu+1,\dots,m\}$.

Posons

$$\Delta^B_{\bar{D}} = \frac{A^{12\dots\bar{D}-1\ B\ \bar{D}+1\dots\nu}_{12\dots\dots\dots\dots\dots\nu}}{A^{12\dots\dots\nu}_{12\dots\dots\nu}} \quad \text{et} \quad \Delta_{\bar{D}} = (\Delta^1_{\bar{D}},\dots,\Delta^m_{\bar{D}})$$

Alors, pour tout $\bar{A}$ et $E \varepsilon \{\bar{A}, \nu+1,\dots,m\}$ nous avons

$$\sum_{B=1}^{m} H_B^E \Delta_{\bar{D}}^B = \left(\sum_{B=1}^{m} H_B^E A_{12\dots\dots\dots\dots\dots\nu}^{12\dots D-1\ B\ D+1\dots\nu}\right) \frac{1}{A_{12\dots\nu}^{12\dots\nu}}$$

$$= \frac{(-1)^{\bar{A}+\bar{D}}}{A_{12\dots\nu}^{12\dots\nu}} \sum_{B=1}^{m} H_B^E \ A_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}+1\dots\nu\ \bar{A}}^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\nu\ B}$$

$$= (-1)^{\bar{A}+\bar{D}} \delta_{\bar{A}}^{E} \ \frac{A_{12\dots\bar{A}-1\ \bar{A}+1\dots\nu}^{12\dots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\dots\nu}}{A_{12\dots\nu}^{12\dots\nu}}$$

Les cofacteurs d'ordre $(m-1)$ étant nuls nous avons alors pour tout $\bar{D}$ et tout $E \varepsilon \{1,\dots,m\}$ $\sum_{B=1}^{m} H_B^E \Delta_{\bar{D}}^B = 0$ ie $(\Delta_{\bar{D}})_{1\leq\bar{D}\leq\nu}$ est une base du noyau de (H_B^A) .

En utilisant cette fois la formule (4'), on montre de la même manière, si on pose

$$\Gamma_A^{\bar{F}} = \frac{A_{1\dots\bar{F}-1A\bar{F}+1\dots\nu}^{1\dots\dots\dots\dots\dots\nu}}{A_{1\dots\nu}^{1\dots\nu}} \quad \text{et} \quad \Gamma^{\bar{F}} = (\Gamma_1^{\bar{F}},\dots,\Gamma_m^{\bar{F}})$$

que $\{\Gamma^{\bar{F}}\}_{1\leq\bar{F}\leq\nu}$ est une base du noyau de ${}^tH$ (on dit aussi une base du noyau à gauche de H.)

3. - <u>Résolution d'un système de m équations à m inconnues, de rang m-ν</u>

Soit $(H_B^A)_{1\leq A,B\leq m}$ une matrice de rang $(m-\nu)$.

Considérons le système suivant

$$\left(H_B^A \quad Y^B\right) = (F^A) \ . \text{ (On suppose } A_{1\dots\nu}^{1\dots\nu} \neq 0)$$

la condition nécessaire et suffisante de compatibilité de ce système s'écrit :

$\Gamma_A^{\bar{F}} F^A = 0$, $1 \leq \bar{F} \leq \nu$ (on utilise maintenant la convention d'Einstein. Si un indice est à la fois en haut et en bas, on somme par rapport à cet indice décrivant son ensemble de définition c'est-à-dire

$\{1,\dots,m\}$ pour un indice ordinaire $\{1,\dots,\}$ pour un indice surbarré et $\{\nu+1,\dots,m\}$ pour un indice chapeauté).

Si la condition nécessaire et suffisante de compatibilité est satisfaite alors nous avons, en séparant les inconnues principales

$$H^{\hat{A}}_{\hat{B}}\ Y^{\hat{B}} = F^{\hat{A}} - H^{\hat{A}}_{\bar{B}}\ Y^{\bar{B}}$$

Puisque $\det(H^{\hat{A}}_{\hat{B}}) = A^{12\dots\nu}_{12\dots\nu} \neq 0$, nous aurons

$$Y^{\hat{B}} = \frac{1}{A^{1\dots\nu}_{1\dots\nu}} \begin{vmatrix} H^{\nu+1}_{\nu+1}\dots H^{\nu+1}_{\hat{B}-1} & F^{\nu+1}-H^{\nu+1}_{\bar{D}}\ Y^{\bar{D}} & H^{\nu+1}_{\hat{B}+1}\dots H^{\nu+1}_{m} \\ \vdots & & \\ H^{m}_{\nu+1}\dots H^{m}_{\hat{B}-1} & F^{m}-H^{m}_{\bar{D}}\ Y^{\bar{D}} & H^{m}_{\hat{B}+1}\dots H^{m}_{m} \end{vmatrix}$$

ou encore

$$Y^{\hat{B}} = \frac{A^{12\dots\nu\hat{B}}_{12\dots\nu\hat{C}}}{A^{1\dots}_{1\dots}}\ F^{\hat{C}} + \Delta^{\hat{B}}_{\bar{D}}\ Y^{\bar{D}}$$

d'où la solution en fonction de $(Y^1,\dots,Y^\nu)$

$$\boxed{Y^{B} = \Delta^{B}_{\bar{D}}\ Y^{\bar{D}} + \frac{A^{12\dots\nu\hat{B}}_{12\dots\nu\hat{C}}}{A^{12\dots\nu}_{12\dots\nu}}\ F^{\hat{C}}\ ,\ 1 \leq B \leq m}\ .$$

II - *Hypothèses - Notations*.

Soit X une variété analytique réelle de dimension $(n+1)$, $a \in X$

Soit S une hypersurface analytique de X passant par a.

On note dans une carte locale en a

$$x = (x^o, x') = (x^o, x^1,\dots,x^n)$$

un élément de X .

Soit $T^*(X) = \bigcup_{x \in X} T^*_x(X)$ l'espace fibré cotangent à X.

On note (x, ξ) avec $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ un élément de $T^*(X)$.

Posons comme dans [1] :

$$\partial\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad , \quad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq n \; .$$

Soit $h = (h^A_B(x,\partial))_{1 \leq A, B \leq m}$ un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre t $(t \geq 1)$, analytique au voisinage de a.

$H^A_B(x, \xi)$ est le symbole principal de $h^A_B(x, \partial)$ si celui-ci est d'ordre t et 0 sinon $(H^A_B(x, \xi))_{1 \leq A, B \leq m}$ est la matrice caractéristique de l'opérateur h au sens de Cauchy-Kowalevski.

1 - *Hypothèses - définitions.*

$\det(H)\,(x, \;)$ est un polynome en ξ , à coefficients dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en a. Il admet donc, dans cet anneau factoriel une factorisation de la forme $\prod_{s=1}^{\sigma} [H_s(x,\xi)]^{\alpha_s}$, avec H_s élément irréductible de l'anneau.

On suppose que

(H_1)

1) $\det H = (H')^\nu . H''$ et $(\det H)\,(a,.) \neq 0$

2) S est totalement caractéristiques pour H' et elle est simple en a.

3) S n'est pas caractéristique en a pour H'' .

(H_2) la matrice $H\,(x, \operatorname{grad} \phi(x))$ est de rang $m-\nu$ au voisinage de a et $A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}\,(a, \operatorname{grad} \phi(a)) \neq 0$.

notation : si f est une fonction de (x, ξ) alors on pose
$\tilde{f}(x) = f(x, \operatorname{grad} \phi(x))$.

définition (A I.1.) Un opérateur différentiel matriciel linéaire k est dit bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité ν si et seulement si il existe des opérateurs matriciels linéaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ tels que :

1) $k = \lambda_0 (h')^\nu + \lambda_1 (h')^{\nu-1} + \dots + \lambda_\nu$

2) la matrice caractéristique Λ_o de λ_o n'est pas divisible par H'.

3) $\forall r \in \{1, \dots, \nu\}$, $k - \sum_{p=0}^{r} \ell_p (h')^{\nu-p}$ est d'ordre strictement inférieur à (ord $k - r$)

Cette définition généralise de manière naturelle la définition donnée dans [5] .

définition (A.II.2.) S est régulière pour k en a relativement à la décomposition précédente si et seulement si S est non caractéristique en a pour λ_o .

définition (A.II.3.) Si h vérifie $\det H = (H')^\nu H''$ on dit que h vérifie la condition $(D_o)_\nu$ si et seulement il existe des opérateurs différentiels linéaires

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{A}^{1 \dots\dots\dots\dots \nu}_{1 \dots \bar{F}-1\ A\ \bar{F}+1 \nu} \quad (A \in \{1, \dots, m\}\ ,\ \bar{F} \in \{1, \dots, \nu\}) \\
\text{de symbole principal } A^{1 \dots\dots\dots\dots \nu}_{1 \dots \bar{F}-1 A \bar{F}+1 \dots \nu} \\
\text{et} \\
\mathcal{A}^{1 \dots \bar{D}-1\ B\ \bar{D}+1 \dots \nu}_{1 \dots\dots\dots\dots \nu} \quad (B \in \{1, \dots m\}\ ,\ \bar{D} \in \{1, \dots, \nu\}) \\
\text{de symbole principal } A^{1 \dots \bar{D}-1\ B\ \bar{D}+1 \dots \nu}_{1 \dots\dots\dots\dots \nu}
\end{array}\right.$$

tels que si

$$\begin{cases} k^{\bar{F}}_{\bar{D}} = \mathfrak{G}^{1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\nu}_{1\ldots(\bar{F}-1)\;A\;\bar{F}+1\ldots\nu}\, h^A_B \;\; \mathfrak{G}^{1\ldots\bar{D}-1\;B\;\bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\nu} \\ \text{et} \\ k = (k^{\bar{F}}_{\bar{D}})_{1\leq \bar{F},\bar{D}\leq \nu} \end{cases}$$

Alors

k est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 1 et S est régulière en a pour k.

On suppose qu'il existe un voisinage de a tel que pour tout x de ce voisinage $H'(x,\xi)$ soit un polynome irréductible en ξ. On note alors Φ_x l'anneau localisé de $\mathbb{R}[\xi]$ par l'idéal engendré par $H'(x,.)$

Pour tout x, il existe alors, [3], $q_1(x),\ldots,q_m(x)$ entiers, tels que : . $q_1(x) \geq q_2(x) \geq \ldots \geq q_m(x)$

$$. \; H(x,.) \underset{\Phi_x}{\sim} \begin{pmatrix} [H'(x,.)]^{q_1(x)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [H'(x,.)]^{q_m(x)} \end{pmatrix}$$

On rappelle que ces nombres sont tels que $q_{r+1} + q_{r+2}+\ldots+q_m$ est la plus grande puissance de H' qui divise tous les cofacteurs d'ordre $(m-r)$.

<u>définition</u> (A.II.4) [6] On dit que h vérifie $(H.F)_\nu$ si et seulement il existe un voisinage de a tel que pour tout x de ce voisinage

$$q_1(x) = q_2(x) = \ldots\ldots = q_\nu(x) = 1$$

$$q_{\nu+1}(x) = q_{\nu+2}(x) = \ldots\ldots = q_m(x) = 0$$

Proposition(*) (A.II.1.)

Si det $H = (H')^{\nu} H''$(avec $(\det H)(a,\cdot) \not\equiv 0$) avec $H'(x,\xi)$ irréductible en ξ pour tout x d'un voisinage de a , si il existe un cofacteur d'ordre $(m-\nu)$ (qu'on supposera être égal à $A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}$) non nul en $(a, \text{grad}\,\phi(a))$ et si S est caractéristique totale simple pour H' , on a

$$(D_o)_{\nu} \Longleftrightarrow (H_1),\ (H_2) \text{ et } (H.F)_{\nu}$$

Preuve.

a) (H_1), (H_2) et $(H,F)_{\nu} \Longrightarrow (D_o)_{\nu}$

on a $K^{\bar F}_{\bar D} = A^{1\ldots\bar F-1\ \bar F\ \bar F+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar F-1\ A\ \bar F+1\ldots\nu}\, H^A_B\, A^{1\ldots\bar D-1\ \bar B\ \bar D+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar D-1\ \bar D\ \bar D+1\ldots\nu}$

or $H^A_B\, A^{1\ldots\bar D-1\ B\ \bar D+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar D-1\ \bar D\ \bar D+1\ldots\nu} = (-1)^{\bar F+\bar D}\, H^A_B\, A^{1\ldots\bar D-1\ \bar D+1\ldots\nu\ B}_{1\ldots\bar F-1\ \bar F+1\ldots\nu\ \bar F}$

$$= (-1)^{\bar F+\bar D}\, \delta^A_{\bar F}\, A^{1\ldots\bar D-1\ \bar D+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar F-1\ \bar F+1\ldots\nu}$$

si $A \in \{\bar F, \nu+1,\ldots,m\}$.

D'autre part si $A \in \{1,\ldots,\bar F-1,\bar F+1,\ldots,\nu\}$ on a

$$A^{1\ldots\bar F-1\ \bar F\ \bar F+1\ldots\nu}_{1\ldots F-1\ A\ \bar F+1\ldots\nu} = 0$$

et par conséquent

$$K^{\bar F}_{\bar D} = A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}\,(-1)^{\bar F+\bar D}\, A^{1\ldots\bar D-1\ \bar D+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar F-1\ \bar F+1\ldots\nu}$$

D'après $(H.F)_{\nu}$ tous les cofacteurs d'ordre $(m-\nu+1)$ sont divisibles par H' , donc en particulier $A^{1\ldots\bar D-1\ \bar D+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar F-1\ \bar F+1\ldots\nu}$ et par conséquent $K^{\bar F}_{\bar D}$.

On pose donc $A^{1\ldots\bar{D}-1\,\bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\,\bar{F}+1\ldots\nu} = H'\ B^{\bar{F}}_{\bar{D}}\ (-1)^{\bar{F}+\bar{D}}$

On sait aussi, d'après $(H.F)_\nu$ que l'un au moins de ces polynômes n'est pas divisible par H'

Si $\lambda_o{}^{\bar{F}}_{\bar{D}}$ est un opérateur de symbole principal $\Lambda_o{}^{\bar{F}}_{\bar{D}} = \tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}\ B^{\bar{F}}_{\bar{D}}$

$\lambda_o = (\lambda_o{}^{\bar{F}}_{\bar{D}})_{1\leq\bar{F},\bar{D}\leq\nu}$ on a :

$\lambda_1 = k - \lambda_o\ h'$, qui est d'ordre strictement inférieur à l'ordre de k .

Donc k est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 1 .

Il reste à prouver que S est régulière en a pour cette décomposition.

Or on a ([6] , [7])

$$\det\left((-1)^{\bar{F}+\bar{D}}\ A^{1\ldots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\ \bar{F}+1\ldots\nu}\right) = \det(H) \times (A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^{\nu-1}$$

$$\text{donc } \det\ (\Lambda_o) = \frac{(A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^\nu}{(H')^\nu}\ .\ \det H.(A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^{\nu-1}$$

$$= H''.\ (A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^{2\nu-1}$$

qui n'est pas nul en $(a, \operatorname{grad}\phi(a))$ d'après (H_1) et (H_2) .

b) $(D_o)_\nu \Longrightarrow (H_1), (H_2), (H.F)_\nu$

on a déjà $\det H = H''.\ (H')^\nu$ qui n'est pas identiquement nul en a et S qui est caractéristique totale simple pour H' en a

$$(D_o)_\nu \Longrightarrow K^{\bar{F}}_{\bar{D}} = H'\Lambda_o{}^{\bar{F}}_{\bar{D}} = A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}\ (-1)^{\bar{F}+\bar{D}}\ A^{1\ldots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\ \bar{F}+1\ldots\nu}$$

donc $(H')^{\nu} \det(\Lambda_o) = (A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^{\nu} \det((-1)^{\bar{F}+\bar{D}} A^{1\ldots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\ \bar{F}+1\ldots\nu})$

$$= (A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^{2\nu-1} \det(H)$$

$$= (A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^{2\nu-1} H''.\ (H')^{\nu}$$

donc $\det(\Lambda_o) = (A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu})^{2\nu-1} . H''$

S régulière en a pour la décomposition implique donc

$H''(a, \operatorname{grad}\phi(a) = \tilde{H}''(a) \neq 0$ et $\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}(a) \neq 0$.

On a donc $(D_o)_{\nu} \Longrightarrow (H_1)$

Il reste donc à prouver $(H.F)_{\nu}$ et (H_2) .

Comme H' divise $A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu} A^{1\ldots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\ \bar{F}+1\ldots\nu}$, qu'il est irréductible et que $A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}$ n'est pas divisible par H' (puisque $\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}(a) \neq 0$), on a donc H' qui divise tous les mineurs $A^{1\ldots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\ \bar{F}+1\ldots\nu}$.

Comme H' est irréductible, l'idéal engendré par (H') est premier et l'anneau quotient de $\mathbb{R}[\xi]$ par cet idéal est intègre. On note $\mathbb{K}$ son corps des fractions, la matrice H définit une matrice $\mathcal{H}$ à coefficients dans ce corps. Il existe un mineur d'ordre $m-\nu$ de $\mathcal{H}$ qui est non nul (celui qui correspond à $A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}$) .

Comme tous les mineurs associés à $A^{1\ldots\bar{D}-1\ \bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\ \bar{F}+1\ldots\nu}$ sont nuls il en résulte que le rang de $\mathcal{H}$ est exactement $(m-\nu)$ et donc tous les mineurs d'ordre $(m-\nu+1)$ de H sont divisibles par H' .

Alors d'une part on aura :

$(D_o)_{\nu} \Longrightarrow (H_1)$

et d'autre part, on aura, pour tout x d'un certain voisinage de a

$$q_{\nu+1}(x) = \ldots\ldots = q_m(x) = 0$$

$$q_\nu(x) \geq 1$$

Comme $q_1(x) + \ldots + q_\nu(x) = \nu$ et $q_1(x) \geq q_2(x) \geq \ldots \geq q_\nu(x) \geq 1$

on a nécessairement $q_1(x) = q_2(x) = \ldots = q_\nu(x) = 1$ et par conséquent $(H.F)_\nu$. (H_2) en résulte directement.

(*) Cette proposition m'a été communiquée par J.C. DE PARIS. Je le remercie d'avoir permis qu'elle figure dans cette thèse.

2. - *Formule de Leibnitz pour un opérateur matriciel.*

a) Cas scalaire

Soit h un opérateur différentiel scalaire linéaire d'ordre t ce qui s'écrit localement $h = \sum_{|\alpha| \leq t} a_\alpha(x)\, D^\alpha$.

Soit ϕ une fonction C^∞ et f une fonction C^∞, une distribution ou une ultradistribution. $f \circ \phi$ désignera respectivement une fonction, une distribution ou une ultra-distribution.

Pour une fonction y, C^∞, nous avons :

$$h(y \times f \circ \phi) = \sum_{|\alpha| \leq t} a_\alpha(x)\, D^\alpha(y \times f \circ \phi)$$

D'après le formule de Leibnitz nous avons

$$D^\alpha(y \times f \circ \phi) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta\, D^\beta(f \circ \phi) \times D^{\alpha-\beta}\, y$$

Remarquons que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$

$$D^\alpha(f \circ \phi) = \sum_{p=0}^{|\alpha|} F_p^\alpha(\phi) \times f^{(p)} \circ \phi$$

avec $$\begin{cases} F^\alpha_{|\alpha|}(\phi) = (\text{grad}\ \phi)^\alpha \\ F_1^\alpha(\phi) = D^\alpha \phi \quad \text{si } \alpha \neq 0 \\ F_o^\alpha(\phi) = 0 \qquad \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Alors :

$$h(y \times f \circ \phi) = \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta (f \circ \phi) \times D^{\alpha-\beta} y$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq t} a_\alpha(x) \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \left[\sum_{p=0}^{|\beta|} F_p^\beta(\phi) \times f^{(p)} \circ \phi \right] \times D^{\alpha-\beta} y$$

de là il résulte que

$$h(y \times f \circ \phi) = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}_\phi^r(y) \times f^{(t-r)} \circ \phi \quad \text{où}$$

$$\mathcal{H}_\phi^r(x,D) = \sum_{t-r \leq |\alpha| \leq t} a_\alpha(x) \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| \geq t-r}} C_\alpha^\beta F_{t-r}^\beta(\phi) \times D^{\alpha-\beta} \ , \ 0 \leq r \leq t$$

et un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$ ($|\alpha-\beta| = |\alpha| - |\beta| \leq t - (t-r) = r$)

Nous avons $\mathcal{H}_\phi^0(x,D) = \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha(x) F_t^\alpha(\phi) = \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha(x) (\text{grad } \phi(x))^\alpha$

donc $\mathcal{H}_\phi^0(x,D)$ est la multiplication par la fonction $\tilde{H}(x) = H(x, \text{grad } \phi(x))$.

De même $\mathcal{H}_\phi^1(x,D)[y] = \sum_{t-1 \leq |\alpha| \leq t} a_\alpha(x) \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta F_{t-1}^\beta(\phi) \times D^{\alpha-\beta} y$

ou encore

$$\mathcal{H}_\phi^1(x,D)[y] = \sum_{|\alpha|=t} a(x) \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta|=t-1}} C_\alpha^\beta (\text{grad } \phi(x))^\beta \times D^{\alpha-\beta} y +$$

$$\left[\sum_{|\alpha|=t} a_\alpha(x) F_{t-1}^\alpha(\phi) \right] \times y + \left[\sum_{|\alpha|=t-1} a_\alpha(x) (\text{grad } \phi(x))^\alpha \right] \times y$$

Si on note $\overbrace{H^{*\cdots*}}^{k}(x,\xi)$ la partie homogène d'ordre $(t-k)$ de h alors nous aurons :

$$\mathcal{H}_\phi^1(x,D)[y] = \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha(x) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\partial_0\phi)^{\alpha_0} \cdots (\partial_{i-1}\phi)^{\alpha_{i-1}} (\partial_i\phi)^{\alpha_i - 1} (\partial_{i+1}\phi)^{\alpha_{i+1}} \cdots (\partial_n\phi)^{\alpha_n} \times D_i y$$

$$+ \tilde{H}^*(x).y + \left[\sum_{|\alpha|=t} a_\alpha(x) F_{t-1}^\alpha(\phi) \right] \times y$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \widetilde{\partial^j H(x)} \times \partial_j\, y + \left[\tilde{H}^*(x) + \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha(x)\, F^\alpha_{t-1}(\phi)\right] \times y$$

$$= (p^j\, \partial_j + p^*)\ [y]$$

si on note $p^j(x) = \partial^j H(x, \text{grad}\, \phi(x))$

Par conséquent, si ϕ est caractéristique simple pour H,

on a $\qquad \mathcal{H}^1_\phi(x,D) = p^j\, \partial_j + p^*$

qui est un opérateur de dérivation le long des bicaractéristiques par rapport à H des hypersurfaces $\phi(x) = c^{te}$

$$\mathcal{H}^t_\phi(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq t} a_\alpha(x) \sum_{\beta\leq\alpha} C^\beta_\alpha\, F^\beta_o(\phi)\, D^{\alpha-\beta} = \sum_{|\alpha|\leq t} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

donc $\mathcal{H}^t_\phi(x,D) = h(x,D)$.

Expression de $\mathcal{H}^r_\phi$ dans le cas $\phi(x) = \langle \xi, x \rangle$

$$\mathcal{H}^r_\phi = \sum_{|t-r|\leq|\alpha|\leq t} a_\alpha(x) \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ |\beta|\geq t-r}} C^\beta_\alpha\, F^\beta_{t-r}(\phi)\, D^{\alpha-\beta}$$

nous avons $D^\alpha(f \circ \phi) = \xi^\alpha\, f^{(|\alpha|)} \circ \phi$

donc $F^\alpha_p = 0$ si $p < |\alpha|$ et $F^\alpha_{|\alpha|} = \xi^\alpha$

on aura donc

$$\mathcal{H}^r_\phi = \sum_{t-r\leq|\alpha|\leq t} a_\alpha(x) \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ |\beta|=t-r}} C^\beta_\alpha\, \xi^\beta\, D^{\alpha-\beta}$$

si on pose $\alpha - \beta = \gamma$

$$\mathcal{H}^r_\phi = \sum_{|\gamma|\leq r} \Big(\sum_{|\beta|=t-r} C^\beta_{\beta+\gamma}\, a_{\beta+\gamma}(x)\, \xi^\beta \Big)\, D^\gamma$$

on a donc $\mathcal{H}^r_\phi = \displaystyle\sum_{|\gamma|\leq r} \frac{1}{\gamma!}\, D^\gamma_\xi\, H^{*(t-|\gamma|)}(\xi)\, D^\gamma$

$$= \sum_{|\gamma|\leq r} \frac{1}{\gamma!}\, \widetilde{D^\gamma_\xi\, H^{*(t-|\gamma|)}}\, D^\gamma$$

Soit maintenant $T \geq t$; on a $h(y \times f \circ \phi) = \sum_{r=0}^{T} \mathcal{H}_{\phi}^{T,r} \times f^{(T-r)} \circ \phi$

avec $\mathcal{H}_{\phi}^{T,r} = 0$ pour $0 \leq r \leq (T-t) - 1$

et

$$\mathcal{H}_{\phi}^{T,r} = \mathcal{H}_{\phi}^{r-(T-t)} \quad \text{pour} \quad T-t \leq r \leq T$$

Remarque 1 : $\mathcal{H}_{\phi}^{t,r} = \mathcal{H}_{\phi}^{r}$, $0 \leq r \leq t$,

Remarque 2 : soit $T_2 \geq T_1 \geq t$, alors pour $0 \leq r \leq T_1$ $\mathcal{H}_{\phi}^{T_1,r} = \mathcal{H}_{\phi}^{T_2,(T_2-T_1)+r}$

b) Cas matriciel

Soit $h = (h_B^A)$ un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre $t (t \geq 1)$.

Nous avons alors $\forall\, 1 \leq A, B \leq m$ ord $h_B^A \leq t$, et d'après ce qui précède

$$h_B^A(Y_B \times f \circ \phi) = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}_{B\phi}^{A,t,r}(Y_B) \times f^{(t-r)} \circ \phi$$

En posant $\mathcal{H}_{\phi}^{r} = (\mathcal{H}_{B\ \phi}^{A,t,r})_{1 \leq A,B \leq m}$

nous aurons

$$h(Y \times f \circ \phi) = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}_{\phi}^{r}(Y) \times f^{(t-r)} \circ \phi$$

avec ord $\mathcal{H}_{\phi}^{r} \leq r$.

Formule de composition.

Soient h_1 et h_2 deux opérateurs différentiels matriciels linéaires d'ordre t_1 et t_2 respectivement.

Soit $h = h_1 \circ h_2$.

Nous avons alors

$$h(Y \times f \circ \phi) = h_1\left[h_2[Y \times f \circ \phi]\right]$$

$$= h_1\left[\left[\sum_{r_2=0}^{t_2} \mathcal{H}_{2,\phi}^{r_2} [Y]\right] \times f^{(t_2-r_2)} \circ \phi\right]$$

$$= \sum_{r_2=0}^{t_2} h_1\left[\mathcal{H}_{2,\phi}^{r_2} [Y] \times f^{(t_2-r_2)} \circ \phi\right]$$

$$= \sum_{r_2=0}^{t_2} \sum_{r_1=0}^{t_1} \mathcal{H}_{1,\phi}^{r_1} \circ \mathcal{H}_{2,\phi}^{r_2} [Y] \times f^{(t_1-r_1)+(t_2-r_2))} \circ \phi$$

$$= \sum_{r=0}^{t_1+t_2} \Big(\sum_{\substack{r_1+r_2=r \\ 0\leq r_1\leq t_1 \\ 0\leq r_2\leq t_2}} \mathcal{H}_{1,\phi}^{r_1} \circ \mathcal{H}_{2,\phi}^{r_2} \Big) [Y] \times f^{(t_1+t_2-r)} \circ \phi$$

De manière générale si $h_1, h_2,\ldots,h_k$ sont des opérateurs différentiels matriciels linéaires d'ordres $t_1, t_2,\ldots,t_k$ respectivement et si $h = h_1 \circ h_2 \circ \ldots \circ h_k$ nous aurons alors :

$$h(Y \times f \circ \phi) = \sum_{r=0}^{T} \Big(\sum_{\substack{r_1+\ldots+r_k=r \\ 0\leq r_j\leq t_j}} \mathcal{H}_{1,\phi}^{r_1} \circ \mathcal{H}_{2,\phi}^{r_2} \circ \ldots \circ \mathcal{H}_{k,\phi}^{r_k} \Big) [Y] \times f^{(T-r)} \circ \phi$$

où $T = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$.

Par conséquent $\mathcal{H}_\phi^r = \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_k=r \\ 0\leq r_j\leq t_j}} \mathcal{H}_{1,\phi}^{r_1} \circ \mathcal{H}_{2,\phi}^{r_2} \circ \ldots \circ \mathcal{H}_{k,\phi}^{r_k}$

Ce qui est une génération au cas matriciel des formules de ([2])

III. - *Construction de la solution formelle.*

La condition $(D_o)_\nu$ équivaut à dire qu'il existe des opérateurs différentiels matriciels linéaires λ_o , λ_1 tels que :

$k = \lambda_o h' + \lambda_1$, avec $\det \tilde{\Lambda}_o(a) \neq 0$ et

$\mathrm{ord}(k - \lambda_o h') = \mathrm{ord}\, \lambda_1 < (2(m-\nu) + 3)t$

Nous avons

$$K_\phi^o = (\lambda_o)_\phi^0 \quad (h')_\phi^o + (\lambda_1)_\phi^{ord(k)0}$$

l'ordre de λ_1 étant strictement inférieur à celui de k il résulte des propriétés des opérateurs associés que $(\lambda_1)_\phi^{ordk,0} = 0$

Par conséquent $K_\phi^o = \tilde{\Lambda}_o \tilde{H}' = 0$

De même

$$K_\phi^1 = (\lambda_o)_\phi^1 \cdot (h')_\phi^0 + (\lambda_o)_\phi^0 (h')_\phi^1 + (\lambda_1)_\phi^{ordk,1}$$

$$= (\lambda_o)_\phi^1 \tilde{H}' + \tilde{\Lambda}_o \ (h')_\phi^1 + (\lambda_1)_\phi^{ord(k)-1,0}$$

Par conséquent au voisinage de a, nous aurons :

en posant $\tilde{\Lambda}_1 = (\lambda_1)^{ord(k')-1,0}$

$$K_\phi^1 = \tilde{\Lambda}_o (h')_\phi^1 + \tilde{\Lambda}_1$$

Soit $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de fonctions, distributions, ou ultra distributions sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall\, j \in \mathbb{Z}.\ f_j' = f_{j-1}$

On veut construire maintenant une solution formelle, de la forme $Y(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} Y_j(x) \times f_j(\phi(x))$, de l'équation (*) $h(x,\partial)\ Y(x) = 0$

$h(Y)$ s'écrit formellement

$$h(Y)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} h(Y_j \times (f_j o\phi))\ (x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}_\phi^r(Y_j)(x) \times \quad f_j^{(t-r)} \ o \ \phi(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{r=0}^{\min(t,j)} \mathcal{H}_\phi^r(Y_{j-r})\ (x)\Big) \times f_{j-t}\ (\phi(x))$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x) \quad f_{j-t} \ o \ \phi \ (x)$$

En choisissant les Y_j de telle manière que $\forall\, j \geqslant 0 \quad F_j = 0$ alors Y sera une solution formelle de $(*)$.

<u>Calcul de Y_0^B en fonction des $Y_o^{\bar{D}}$</u>

La 1ère équation s'écrit :

$$\sum_{r=0}^{\min(t,0)} \mathcal{H}_\phi^r(Y_{o-r}) = \mathcal{H}_\phi^o\,(Y_o) = \tilde{H}.\, Y_o = 0$$

en posant $D_{\bar{D}}^B = \dfrac{\tilde{A}^{1\ldots\bar{D}-1\ B\ \bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{D}-1\ \bar{D}\ \bar{D}+1\ldots\nu}}{\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}}$

$$G_A^{\bar{F}} = \frac{\tilde{A}^{1\ldots\bar{F}-1\ \bar{F}\ \bar{F}+1\ldots\nu}_{1\ldots\bar{F}-1\ A\ \bar{F}+1\ldots\nu}}{\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}}$$

nous aurons, d'après le § I.

$$Y_o^B = D_{\bar{D}}^B\ Y_o^{\bar{D}}\ ,\ 1 \leqslant B \leqslant m\ .$$

<u>Calcul des Y_1^B en fonction des Y_o^B et $Y_1^{\bar{D}}$</u>

la 2ème équation s'écrit

$$0 = \sum_{r=0}^{1} \mathcal{H}_\phi^r(Y_{1-r}) = \mathcal{H}_\phi^0(Y_1) + \mathcal{H}_\phi^1(Y_o)$$

la condition nécessaire et suffisante de compatibilité de ce système s'écrit :

$$G_A^{\bar{F}}\ \mathcal{H}^{A,1}_{B,\phi}(Y_0^B) = G_A^{\bar{F}}\ \mathcal{H}^{A,1}_{B,\phi}\ D_{\bar{D}}^B\ (Y_o^{\bar{D}}) = 0$$

ou encore

$$\mathcal{K}_{\bar{D}}^{\bar{F}}{}_{\phi}^{1} \left[\frac{Y_o^{\bar{D}}}{\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}}\right] = 0$$

en posant $\bar{Y}_o = \begin{pmatrix} Y_\nu^1 \\ \vdots \\ Y_o^\nu \end{pmatrix}$, ceci s'écrit encore

$$\left[\tilde{\Lambda}_o\,(p^j\,\partial_j + p^*) + \tilde{\Lambda}_1\right] \left[\frac{\bar{Y}_o}{A^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}}\right] = 0$$

$\tilde{\Lambda}_o$ étant inversible au voisinage de a alors la condition de compatibilité pour la 2ème équation s'écrit

$$(p^j \partial_j + p^*) \left(\frac{\bar{Y}_o}{\tilde{A}^{1\dots\nu}_{1\dots\nu}}\right) + \tilde{\Lambda}_o^{-1} \cdot \tilde{\Lambda}_1 \left[\frac{\bar{Y}_o}{\tilde{A}^{1\dots\nu}_{1\dots\nu}}\right] = 0$$

En supposant que $p^0(a) \neq 0$, alors avec les conditions initiales suivantes

$$Y_o^{\bar{D}}(0,x^1,x^2,..,x^n) = \delta_1^{\bar{D}} \quad , \quad 1 \leq \bar{D} \leq \nu$$

où $\delta_1^{\bar{D}}$ est le symbole de Kronecker.

Le théorème de Cauchy-Kowalevski nous assure l'existence d'un $\bar{Y}_o$ analytique au voisinage de a et par conséquent l'existence d'un Y_o analytique au voisinage de a tel que $\mathcal{H}^o_\phi(Y_o) = 0$ et que la condition de compatibilité soit satisfaite.

La solution de la 2ème équation s'écrit alors :

$$Y_1^B = D^B_{\bar{D}} \, Y_1^{\bar{D}} + W_1^B$$

avec $$W_1^B = - \frac{\tilde{A}^{1\dots\nu B}_{1\dots\nu A}}{\tilde{A}^{1\dots\nu}_{1\dots\nu}} \mathcal{H}^{A,1}_{C,\phi} (Y_o^C) \quad .$$

En posant $$\mathcal{S}^r = (\mathcal{S}^{B,r}_C) = - \frac{\tilde{A}^{1\dots\nu B}_{1\dots\nu A}}{\tilde{A}^{1\dots\nu}_{1\dots\nu}} \mathcal{H}^{Ar}_{C\phi} \quad , \quad 1 \leq r \leq t$$

nous aurons $W_1^B = \mathcal{S}^{B1}_C (Y_o^C)$.

<u>Formule de récurrence.</u>

Les deux premières équations nous donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_o = D_{\bar{D}} \, Y_o^{\bar{D}} \\ \left\{ \begin{array}{l} K^1_\phi \left(\frac{\bar{Y}_o}{\tilde{A}^{1\dots\nu}_{1\dots\nu}}\right) = 0 \\ Y_o^{\bar{D}}(0, x') = \delta_1^{\bar{D}} \quad , \quad 1 \leq \bar{D} \leq \nu \end{array} \right. \\ Y_1 = D_{\bar{D}} \, Y_1^{\bar{D}} + \mathcal{S}^1 [Y_o] \end{array} \right.$$

On pose $\mathcal{M}_B^{\bar{F},r} = - G_A^{\bar{F}} \mathcal{H}_{B,\phi}^{A,r}$

$$W_j^B = \sum_{r=1}^{\min(t,j)} \mathcal{G}_c^{B,r} (Y_{j-r}^c)$$

$$\Omega_j^{\bar{F}} = \mathcal{M}_B^{\bar{F},1} (W_{j-1}^B) + \sum_{r=2}^{\min(t,j)} \mathcal{M}_B^{\bar{F},r} (Y_{j-r}^B)$$

On montre par récurrence la propriété (P_j)

(P_j) Si $\bar{Y}_{j-1}$ est solution du problème de Cauchy

$$\mathcal{K}_\phi^1\left(\frac{\bar{Y}_{j-1}}{\tilde{A}_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu}}\right) = \Omega_j \times \tilde{A}_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu}$$

$$Y_{j-1}^{\bar{D}}(0,x') = \delta_1^{\bar{D}} \times \delta_{j-1}^{o}$$

Alors la $(j+1)^{\text{ième}}$ équation est compatible et on a

$$Y_j = D_{\bar{D}} Y_j^{\bar{D}} + W_j$$

Supposons $P_o,\ldots,P_j$,vrais, on démontre P_{j+1}

l'équation d'ordre $(j+2)$ s'écrit

$$\mathcal{H}_\phi^0 (Y_{j+1}) + \mathcal{H}_\phi^1 (Y_j) + \sum_{r=2}^{\min(t,j+1)} \mathcal{H}_\phi^r (Y_{j+1-r}) = 0$$

la condition nécessaire et suffisante de compatibilité de ce système s'écrit :

$$G_A^{\bar{F}}\{\mathcal{H}_{B,\phi}^{A,1}[D_{\bar{D}}^B Y_j^{\bar{D}} + W_j^B] + \sum_{r=2}^{\min(t,j+1)} \mathcal{H}_{B,\phi}^{A,r} (Y_{j+1-r}^B)\} = 0$$

ou encore

$$\frac{1}{\tilde{A}_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu}} \mathcal{K}_{\bar{D},\phi}^{\bar{F},1}\left(\frac{Y_j^{\bar{D}}}{\tilde{A}_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu}}\right) = \mathcal{M}_{B,1}^{\bar{F}} (W_j^B) + \sum_{r=2}^{\min(t,j+1)} \mathcal{M}_B^{\bar{F},r} (Y_{j+1-r}^B)$$

ceci s'écrit encore

$$K_{\bar{D},\phi}^{\bar{F},1}\left(\frac{Y_j^{\bar{D}}}{\tilde{A}_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu}}\right) = \bar{\Omega}_{j+1}$$

ceci s'écrit localement

$$\tilde{\Lambda}_o^{-1} \Omega_{j+1} = (p^\alpha \partial_\alpha + p^*) \left[\frac{\bar{Y}_j}{\tilde{A}_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu}}\right] + \tilde{\Lambda}_o^{-1} \times \tilde{\Lambda}_1 \left(\frac{\bar{Y}_j}{\tilde{A}_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu}}\right)$$

Avec les données initiales le théorème de Cauchy-Kowalevski nous assure l'existence d'un $\bar{Y}_j$ analytique au voisinage de a , et par conséquent l'existence d'un Y_j analytique au voisinage de a (d'après (P_j)) la condition de compatibilité étant satisfaite, on trouve donc

$$Y^B_{j+1} = D^B_{\bar{D}}\, Y^{\bar{D}}_{j+1} - \sum_{r=1}^{\min(t,j+1)} \frac{\tilde{A}^{1\ldots\nu B}_{1\ldots\nu A}}{\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}} \times \mathcal{H}^{Ar}_{C\phi}\,(Y^C_{j+1-r})$$

$$= D^B_{\bar{D}}\, Y^{\bar{D}}_{j+1} + \sum_{r=1}^{\min(t,j+1)} \mathcal{S}^{B,r}_{C}\,(Y^C_{j+1-r})$$

$$= D^B_{\bar{D}}\, Y^{\bar{D}}_{j+1} + W^B_{j+1}$$

ce qui termine la démonstration de (P_{j+1})

Ainsi on vient de construire une onde asymptotique dont les coefficients de distorsion sont analytiques au voisinage de a.

Remarque : les Y_j sont analytiques sur un même voisinage de a car leur intégration est ramenée à l'intégration d'équations différentielles ordinaires le long des bicaractéristiques. On retrouvera d'ailleurs ce résultat dans le chapitre II, en montrant que les Y_j possèdent des majorantes définies sur un même polydisque de centre a.

IV. - *Une 2ème méthode pour calculer une onde asymptotique.*

Soit A la matrice des cofacteurs d'ordre m-1 ie $A = (A^B_A)_{1\leq A,B\leq m}$

définition (I.IV.1). h vérifie $(D)_\nu$ si et seulement si il existe un opérateur différentiel matriciel linéaire a de symbole principal A , tel que h o a soit bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité ν .

<u>Proposition</u> (I.IV.1) si h vérifie $(H.F)_\nu$, h vérifie $(D)_\nu$

<u>Preuve</u>. Remarquons que [1] A est divisible par $(H')^{\nu-1}$;
donc $A = (H')^{\nu-1} B$.
où $B(x,\xi)$ est analytique en x , polynomiale en ξ de degré :
$(m-1)t-(\nu-1)\tau$, si τ est le degré de $H'(x,\xi)$.

Nous avons $HA = AH = \det H.I = (H')^\nu .H''.I$.

ou encore

$$H.(H')^{\nu-1} B = (H')^{\nu-1} B H = (H')^{\nu-1}.\ H'.H''I$$

d'où

$$HB = BH = H'\ H''\ I.$$

Soit b un opérateur différentiel matriciel linéaire de symbole principal B, h' opérateur de symbole principal H' et h'' un opérateur de symbole principal H'' .

Nous avons alors $\mathrm{ord}(hob - h''h'I) < mt - (\nu-1)\tau$.

Soit $a = b(h')^{\nu-1}$. Il a pour symbole principal A.

Posons $\ell = h \circ b - h''\ h'\ I$.

Nous avons alors

$$\ell \circ (h')^{\nu-1} = h \circ b \circ (h')^{\nu-1} - (h''I)\ (h')^{\nu-1}$$

ou encore

$$h \circ a = (h''I)\ (h')^{\nu} + \ell \circ (h')^{\nu-1}$$

$$\mathrm{ord}(h \circ a - (h''I)\ (h')^{\nu}) < mt\ .$$

<u>Calcul d'onde asymptotique 2 pour opérateur bien décomposable.</u>

<u>Proposition (I.IV.2)</u>

Si b est un opérateur différentiel matriciel linéaire bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité ν alors
$\mathcal{B}_\phi^k = 0$ pour $0 \leq k \leq \nu - 1$.

<u>Preuve</u>. Soit t_b l'ordre de b.

Par hypothèse $b = \ell_o(h')^{\nu} + \ell_1(h')^{\nu-1} + \ldots + \ell_{\nu}$

$$= b_o + b_1 + \ldots + b_{\nu}$$

Nous avons alors

$$\mathcal{B}^k_{\phi} = \mathcal{B}^{t_b,k}_{o,\phi} + \mathcal{B}^{t_b,k}_{1,\phi} + \ldots + \mathcal{B}^{t_b,k}_{k,\phi}$$

Il résulte des ordres des opérateurs b_ℓ et des propriétés des opérateurs associés que pour $0 \leqslant k \leqslant \nu-1$ nous avons

$$\mathcal{B}^k_{\phi} = \mathcal{B}^{t_b,k}_{o,\phi} + \mathcal{B}^{t_b-1,k-1}_{1\;,\;\phi} + \ldots + \mathcal{B}^{t_b-k,0}_{k,\phi}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \sum_{r_o+r_1+\ldots+r_{\nu-r}=k-r} \mathcal{L}^{r_o}_{r,\phi} \circ (h')^{(r_1+r_2+\ldots r_{\nu-k})}_{\phi}$$

mais $(\nu-r)$ étant strictement supérieur à $k-r$ pour $0 \leqslant k \leqslant \nu-1$, alors il existe $1 \leqslant i \leqslant \nu-r$ tel que $r_i = 0$.

Par conséquent $(h')^{r_i}_{\phi} = \tilde{H}' = 0$; ce qui entraîne

$$\mathcal{B}^{t_k-r,k-r}_{r,\quad\phi} = 0 \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant r \leqslant k.$$

Par conséquent $\mathcal{B}^k_{\phi} = 0$. C.Q.F.D.

Pour $r \geqslant \nu$ nous avons

$$\mathcal{B}^r_{\phi} = \mathcal{B}^{t_o,r}_{o,\phi} + \mathcal{B}^{t_b-1,r-1}_{1\quad,\phi} + \ldots + \mathcal{B}^{t_b-\nu,r-\nu}_{\nu\quad,\phi}$$

Donc pour $r = \nu$, nous aurons

$$\mathcal{B}^{\nu}_{\phi} = \mathcal{B}^{t_b,\nu}_{o,\phi} + \mathcal{B}^{t_b-1,\nu-1}_{1\quad,\phi} + \ldots + \mathcal{B}^{t_b-\nu,o}_{\nu\quad,\phi}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \mathcal{B}^{t_b-k,\nu-k}_{k\quad,\phi}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{r_o+r_1+\ldots+r_{\nu-k}=\nu-k} \mathcal{L}^{r_o}_{k,\phi} \circ (h')^{r_1+\ldots+r_{\nu-k}}$$

du fait que $\tilde{H}'$ est identiquement nul au voisinage de a

alors $\mathcal{B}_\phi^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \tilde{L}_k . \left[(h')_\phi^1\right]^{\nu-k}$

Puisqu'il existe une carte locale telle que

$$(h')_\phi^1 = \frac{\partial}{\partial x^0} + p^*$$

alors $\mathcal{B}_\phi^\nu$ s'écrit
$$\mathcal{B}_\phi^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \tilde{L}'_k \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^{\nu-k}$$

Soit $Z = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j \times (f_j \circ \phi)$.

Soit b un opérateur différentiel matriciel linéaire, d'ordre t_b , bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité ν ; et ϕ caractéristique réelle totale simple pour H' , régulière en a pour cette décomposition.

Nous avons alors, avec un calcul semblable à celui fait précédemment

$$b(Z) = b\left(\sum_{j=0}^{\infty} Z_j \times (f_j \circ \phi)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} b(Z_j \times (f_j \circ \phi))$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{t_b} \mathcal{B}_\phi^r(Z_j) \times (f_{j+r-t_b} \circ \phi)$$

$$= \sum_{j=\nu}^{\infty} \sum_{r=\nu}^{\min(t_b,j)} \mathcal{B}_\phi^r(Z_{j-r}) \times (f_{j-t_b} \circ \phi)$$

$$= \sum_{j=\nu}^{\infty} F_j \times (f_{j-t_b} \circ \phi)$$

En choisissant les Z_j de telle manière que $\forall\, j \geq \nu,\ F_j = 0$ alors Z est une onde asymptotique

$F_\nu = 0$ s'écrit $\mathcal{B}_\phi^\nu\ (Z_o) = 0$

$F_{\nu+1} = 0$ s'écrit $\mathcal{B}_\phi^\nu\ (Z_1) + \mathcal{B}_\phi^\nu\ (Z_o) = 0$

De manière générale $F_{\nu+j} = 0$ s'écrit

$$\mathcal{B}_{\phi}^{\nu}(Z_j) + \sum_{r=\nu+1}^{\min(t_b,\nu+j)} \mathcal{B}_{\phi}^{r}(Z_{j+\nu-r}) = 0$$

$\mathcal{B}_{\phi}^{\nu}(x,D)$ est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre ν le long des courbes bicaractéristiques de ϕ par rapport à H' .

Donc les Z_j s'obtiennent par la résolution du même système différentiel, au 2^{nd} membre près, le long des courbes bicaractéristiques.

Ceci montre bien l'existence d'ondes asymptotiques à coefficients analytiques, de phase ϕ , pour l'opérateur b.

Onde asymptotique pour h vérifiant $(D)_\nu$

h o a étant bien décomposable alors il résulte de ce qui précède l'existence d'une onde asymptotique $\underset{\smile}{Z}$ pour h o a et par conséquent l'existence d'une onde asymptotique pour h , qui s'écrit

$$a(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} a(Z_j \times (f_j \circ \phi))$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\min((m-1)t,j)} (a)_{\phi}^{r} (Z_{j-r}) \times (f_{j-(m-1)t} \circ \phi)$$

Remarque. Cette méthode est évidemment très rapide et s'applique dans beaucoup de cas ([4]). Elle a cependant l'inconvénient de nécessiter des hypothèses très fortes, elle augmente l'ordre des équations différentielles déterminant les coefficients de distorsion, et nécessite, si on veut résoudre un problème de Cauchy asymptotique, un travail important au niveau des données de Cauchy.

CHAPITRE II - MAJORATION DES Y_j^β

I. - Rappels sur les majorantes.

1) Notations - définitions.

α désigne un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+1}$ et E une $\mathbb{K}$-algèbre de Banach ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Une série entière formelle en X à coefficients dans E s'écrit

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} a_\alpha \frac{X^\alpha}{\alpha!}$$

où

pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $a_\alpha \in E$ et $X^\alpha = X_o^{\alpha_o} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$.

On note $E\left[[X]\right]$ l'ensemble des séries entières formelles en X à coefficients dans E.

Soient

$$U(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} U_\alpha \frac{X^\alpha}{\alpha!}$$

$$V(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} V_\alpha \frac{X^\alpha}{\alpha!}$$

deux éléments de $E\left[[X]\right]$.

λ et μ 2 éléments de $\mathbb{K}$.

On pose

$$\lambda U(X) + \mu V(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} (\lambda U_\alpha + \mu V_\alpha) \frac{X^\alpha}{\alpha!}$$

$$U(X)\, V(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} \Big(\sum_{0\leq\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta\, U_{\alpha-\beta}\, V_\beta\Big) \frac{X^\alpha}{\alpha!}$$

| munie de ces opérations, $E\left[[X]\right]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre

Si $\gamma \in \mathbb{N}^{n+1}$ on pose

$$D^{\gamma}\, U(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} u_{\alpha+\gamma} \frac{X^{\alpha}}{\alpha!}$$

<u>définition</u> (I.1.) Soient $U(X) \in E\left[[X]\right]$ et $\mathcal{U}(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} \mathcal{U}_{\alpha} \frac{X}{\alpha!}$

telle que $\mathcal{U}_{\alpha} \in \mathbb{R}_{+}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. Nous dirons alors que
$U(X)$ est majorée par $\mathcal{U}(X)$ si et seulement si
$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ $\|U_{\alpha}\| \leq \mathcal{U}_{\alpha}$ (on note alors $U(X) << \mathcal{U}(X)$)
si $U(X) = (U^{1}(X),\ldots, U^{m}(X))$ et $\mathcal{U}(X) = (\mathcal{U}^{1}(X),\ldots,\mathcal{U}^{m}(X))$, on note
$U(X) << \mathcal{U}(X)$ si et seulement si : $\forall\, A \in \{1,\ldots,m\}$: $U^{A}(X) << \mathcal{U}^{A}(X)$.

Cette relation est stable par dérivation ; elle vérifie aussi

a) $U(X) << \mathcal{U}(X)$ et $V(X) << \mathcal{V}(X) \Longrightarrow U(X) + V(X) << \mathcal{U}(X) + \mathcal{V}(X)$

b) $U(X) << \mathcal{U}(X)$ et $\lambda(X) << \Lambda(X) \Longrightarrow \lambda(x)\quad U(X) << \Lambda(X)\quad \mathcal{U}(X)$

2°) <u>Propriétés</u>.

Soient R, R' deux réels positifs tels que

$$0 < R' < R$$

On note $\theta(t)$ une série formelle d'une variable t ; et supposons que

$$\theta(t) >> 0$$

soit $\Theta(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \vdots \\ \theta(t) \end{pmatrix}$

Alors $\Theta(t) >> 0$.

<u>Proposition</u> (I.1) si $(R'-t)\,\Theta\,(t) \gg 0$. Alors

a) $\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \Theta^{(j)}(t) \ll R'\,\Theta^{(j+1)}(t)$

b) $\frac{1}{R-t}\,\Theta^{(j)}\,(t) \ll \frac{1}{R-R'}\,\Theta^{(j)}(t)$.

<u>Preuve</u> :

a) La majoration étant stable par dérivation, nous avons alors :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}\ ,\ \Theta^{(j)}(t) \gg 0.$$

Pour $j \geq 1$, nous obtenons en dérivant j fois l'expression $(R'-t)\,\Theta\,(t) \gg 0$:

$$(*) \qquad \left[(R'-t)\,\Theta\,(t)\right]^{(j)} = (R'-t)\,\Theta^{(j)}(t) - j\,\Theta^{(j-1)}(t) \gg 0\ .$$

En ajoutant $j\,\Theta^{(j-1)}(t)$, qui est une série positive, aux deux membres de l'expression nous obtenons :

$$(R'-t)\,\Theta^{(j)}(t) \gg 0\ .$$

Ainsi nous avons pour $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \Theta^{(j)}(t) \gg 0 \\ \text{et} \\ (R'-t)\,\Theta^{(j)}(t) \gg 0 \end{cases}$$

Par conséquent il suffit de montrer que a) est vraie pour $j = 0$ pour qu'elle le soit pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Pour $j = 1$ l'expression (*) s'écrit :

$$(R'-t)\,\Theta^{(1)}(t) - \Theta(t) \gg 0 \iff (R'-t)\,\Theta^{(1)} \gg \Theta(t)$$

mais $\Theta^{(j)}(t) \gg 0$ entraine $t\,\Theta^{(j)}(t) \gg 0$.

Donc $(R'-t)\,\Theta^{(1)} + t\,\Theta^{(1)}(t) \gg \Theta(t)$

ou encore : $R'\,\Theta^{(1)}(t) \gg \Theta(t)$.

b) nous avons

$$\frac{1}{R-R'}\,\Theta^{(j)}(t) - \frac{1}{R-t}\,\Theta^{(j)}(t) = \frac{R'-t}{(R-R')(R-t)}\,\Theta^{(j)}(t)$$

or

$$(R'-t)\,\Theta^{(j)}(t) \gg 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{R-R'}\;\frac{1}{R-t} \gg 0$$

donc

$$\frac{1}{R-t}\,\Theta^{(j)}(t) \ll \frac{1}{R-R'}\,\Theta^{(j)}(t) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On pose $t = \rho x^o + x^1 + \ldots + x^n \quad , \quad \rho \geq 1$.

Proposition (I.2)

Soit $C(x,D)$ un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre ℓ en x et ℓ_1 en x^o , à coefficients analytiques au voisinage de a.

Alors

il existe une constante positive B , ne dépendant que de l'opérateur $C(x, D)$, telle que si $U \ll \Theta^{(j)} \circ t$ alors $C(U) \ll B\,\rho^{\ell_1}\,\Theta^{(\ell+j)} \circ t$.

Généralisation au cas matriciel d'une proposition de [8] .

Preuve.

On travaille dans une carte locale telle que $a^i = 0,\ 0 \leq i \leq n$.

Par hypothèse il existe $R > 0$ tel que les coefficients de $C(x, D)$ se prolongent en fonctions holomorphes sur un voisinage du polydisque fermé $\overline{PD(0,\ R)}$.

Soit R' tel que

$$0 < R' < R$$

Par hypothèse

$$C(x, D) = \sum_{\substack{\alpha_o \leq \ell_1 \\ |\alpha| \leq \ell}} A_\alpha(x)\, D^\alpha$$

Il existe $M > 0$ tel que les $A_\alpha(x)$ soient majorés par

$\frac{M}{R-t(x)}$ (i.e. $A^C_{D,\alpha}(x) \leq \frac{M}{R-t(x)}$, $\forall\, 1 \leq C, D \leq m, \forall\, \alpha : |\alpha| \leq \ell$ et $\alpha_o \leq \ell_1$)

En appliquant la proposition (II.I.1.) nous aurons pour tout α tel que $|\alpha| \leq \ell$ et $\alpha_o \leq \ell_1$

$$D^\alpha U << D\,(\Theta^{(j)} \circ t) = \rho^{\alpha_o}\, \Theta^{(j+|\alpha|)} \circ t$$

$$<< \rho^{\ell_1} (R')^{\ell-|\alpha|}\, \Theta^{(j+\ell)} \circ t$$

En posant

$$B = \frac{m.M}{R-R'} \sum_{\substack{\alpha_o \leq \ell_1 \\ |\alpha| \leq \ell}} (R')^{\ell-|\alpha|}$$

nous aurons alors

$$C(U) << B\, \rho^{\ell_1}\, \Theta^{(j+\ell)} \circ t$$

C.Q.F.D.

Soit $C(x, D)$ un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre ℓ en x et strictement inférieur à ℓ en x^o , à coefficients analytiques au voisinage de a .

Considérons le problème de Cauchy analytique

$$\text{(II.1)} \quad \begin{cases} \partial_o^\ell U = C(x, D)\, U + f \\ \partial_o^k U(0, x') = Z_k(x') \ , \ 0 \leq k < \ell \end{cases}$$

Soient $\mathscr{C}(x, D) >> C(x, D)$ et $F >> f$.

Nous avons alors le lemme suivant

<u>lemme</u> (I.1)

Si $\mathfrak{U}(x)$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_o^\ell\, \mathfrak{U}(x) >> \mathscr{C}(x, D)\, \mathfrak{U}(x) + F(x) \\ \partial_o^k\, \mathfrak{U}(0, x') >> Z_k(x'),\ 0 \leq k \leq \ell - 1 \ . \end{cases}$$

Alors

la solution $U(x)$ de (II.1) est majorée par $\mathcal{U}(x)$

Généralisation au cas matriciel d'une proposition de [10] .

Preuve.

Il suffit de prouver que

$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \partial_0^k U(0, x') << \partial_0^k \mathcal{U}(0, x')$

Nous avons, localement

$$C(x, D) = (C_B^A(x, D)) \ , \ C_B^A(x, D) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \ell \\ \alpha_0 < \ell}} C_{B,\alpha}^A (x) D^\alpha$$

le résultat est vrai pour $k = 0,1,\dots,\ell-1$ par hypothèse pour $k = \ell$, nous aurons

$$\partial_0^\ell U(0, x') = (C(x,D) U)(0,x') + f(0,x')$$

on a
$$\Big(\sum_{B=1}^m \sum_{\substack{|\alpha| \leq \ell \\ \alpha_0 < \ell}} C_{B,\alpha}^A(0, x') \partial^{\alpha'} \partial_0^{\alpha_0} U^B(0, x')\Big) + f^A(0, x')$$

$$<< \Big(\sum_{B=1}^m \sum_{\substack{|\alpha| \leq \ell \\ \alpha_0 < \ell}} C_{B,\alpha}^A(0, x') \partial^{\alpha'} \partial_0^{\alpha_0} \mathcal{U}^B(0, x')\Big) + F^A(0,x')$$

donc

$$\partial_0^\ell U(0,x') << (\mathcal{C}(x, D) \mathcal{U}) (0, x') + F(0, x') << \partial_0^\ell U(0, x')$$

donc le résultat est vrai pour $k = \ell$.

Supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre j $(j \geq \ell)$.

Nous avons

$$\partial_0^j U(0, x') = \partial_0^{j-\ell}(C(x, D) U) (0, x') + \partial_0^{j-\ell} f(0, x')$$

En développant les calculs nous obtenons

$$\partial_o^j U^A(0,x') = \Big(\sum_{B=1}^{m} \sum_{|\alpha|\leq \ell} \sum_{\beta\leq j-\ell} C_{j-\ell}^{\beta} \; \partial_o^{j-(\beta+\ell)} C_{B,\alpha}^{A} (0,x') \, \partial_o^{\beta} \partial^{\alpha'} U^B(0,x')\Big)$$

$$+ \partial_o^{j-\ell} f^A(0,x')$$

$$<< \Big(\sum_{B=1}^{m} \sum_{|\alpha|\leq \ell} \sum_{\substack{\beta\leq j-\ell \\ \alpha_o<\ell}} C_{j-\ell}^{\beta} \; \partial_o^{j-(\beta+\ell)} \mathcal{C}_{B,\alpha}^{A}(0,x') \, \partial_o^{\beta} \partial^{\alpha'} \mathcal{U}^B(0,x')$$

$$+ \partial_o^{j-\ell} F(0^A,x')$$

donc

$$\partial_o^j U(0,x') \lesssim \partial_o^{j-\ell} (\mathcal{C}(x,D)\mathcal{U}) (0,x') + \partial_o^{j-\ell} F(0,x') << \partial_o^j U(0,x')$$

C.Q.F.D.

Ce lemme nous permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition (II.I.3)

> On considère le problème de Cauchy-analytique (II.1)
>
> Si $f << W. \, \Theta^{(j+\ell)} \circ t$
>
> et
>
> $Z_k(x') << W_k \, (\Theta^{(j+k)} \circ t) \, (0,x') \; , \; 0 \leq k < \ell$
>
> Alors, il existe ρ_o tel que : $\forall \; \rho \geq \rho_o$
>
> il existe une constante positive B_1 indépendante
>
> de Θ telle que la solution $U(x)$ de (II.1) vérifie
>
> $U(x) << B_1 \, \Theta^{(j)} \circ t$.

Généralisation au cas matriciel d'une proposition de [10] .

Preuve.

Il existe $R > 0$ tel que les coefficients de l'opérateur $C(x, D)$ possèdent des prolongements holomorphes sur un voisinage du polydisque fermé $\overline{PD(0,R)}$. Par conséquent il existe $M > 0$ tel que les coefficients de $C(x, D)$ soient majorés par $\frac{M}{R-t}$.

On pose $\mathcal{C}_B^A(x, D) = \frac{M}{R-t} \sum_{\substack{\alpha_o < \ell \\ |\alpha| \leq \ell}} D^\alpha$, $\mathcal{C}(x,D) = (\mathcal{C}_B^A(x,D))$

nous avons alors

$$C(x, D) << \mathcal{C}(x, D)$$

d'après le lemme (II.1) il suffit de trouver B_1 tel que

$$\begin{cases} \partial_o^\ell \; (B_1 \; \Theta^{(j)} \circ t) >> \mathcal{C}(x, D) \; (B_1 \; \Theta^{(j)} \circ t) + W \; \Theta^{(j+\ell)} \circ t \\ \partial_o^k \; (B_1 \; \Theta^{(j)} \circ t) >> W_k \; \Theta^{(j+k)} \circ t \quad , 0 \leq k \leq \ell - 1 \; . \end{cases}$$

pour que $U(x)$ soit majorée par $B_1 \; \Theta^{(j)} \circ t$ c'est-à-dire, compte tenu de la proposition (II.2).

$$B_1 \; \rho^\ell \; \Theta^{(j+\ell)} \circ t >> \left(B.B_1 \; \rho^{\ell-1} + W \right) \Theta^{(j+\ell)} \circ t$$

et

$$B_1 \; \rho^k \; \Theta^{(j+k)} \circ t >> W_k \; \Theta^{(j+k)} \circ t \; , \; 0 \leq k < \ell$$

ou encore d'après (a.4).

et
$$\begin{cases} B_1 \; \rho^\ell \geq B_1 \; B \; \rho^\ell + W \\ \\ B_1 \; \rho^k \geq W_k \; , \; 0 \leq k \leq \ell - 1 \end{cases}$$

si on suppose $\rho > B$, ceci équivaut

encore à

$$\begin{cases} B_1 \geq \dfrac{W}{\rho^\ell (1 - \frac{B}{\rho})} \\ \\ B_1 \geq \dfrac{W_k}{k} \; , \; 0 \leq k < \ell \end{cases}$$

En prenant $B_1 = \max \left(\dfrac{\frac{W}{\rho^\ell}}{1 - \frac{B}{\rho}} \; , W_o \; , \frac{W_1}{\rho} \; , \; \ldots \; , \frac{W_{\ell-1}}{\rho^{\ell-1}} \right)$

nous aurons le résultat. Ce qui achève la démonstration C.Q.F.D.

II. - *Majoration des Y_j*

$\vec{p}(a)$ étant non nul, supposons que $p^o(a) \neq 0$. Par conséquent

$\frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}} \mathcal{K}^1_\phi(\bar{Y}_j) = \Omega_{j+1}$ s'écrit localement.

$$(p^\alpha \partial_o + p^*) \cdot \left(\frac{\bar{Y}_j}{\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}} \right) + \tilde{\Lambda}_o^{-1} \cdot \tilde{\Lambda}_1 \left[\frac{\bar{Y}_j}{\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}} \right] = \tilde{\Lambda}_o^{-1} \, \Omega_{j+1} \, \tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}$$

ou encore

$$\partial_o \bar{Y}_j = C(x, \partial) \bar{Y}_j + Z_j$$

avec $C(x, \partial)$ d'ordre 1 et d'ordre 0 en x^o

et $Z_j = \frac{\left(\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}\right)^2}{p^o} \times \tilde{\Lambda}_o^{-1} \, \Omega_{j+1}$

Donc la formule de récurrence s'écrit localement

$$(P')_j \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \partial_o \bar{Y}_j = C(x, \partial)(\bar{Y}_j) + Z_j \\ Y_j^{\bar{D}} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } (\bar{D}, j) \neq (1, 0) \\ 1 \text{ si } (\bar{D}, j) = (1, 0) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad , \ 1 \leq \bar{D} \leq \nu \\ \\ Y_j = D_{\bar{D}} \, Y_j^{\bar{D}} + W_j \end{array} \right.$$

nous avons la proposition suivante.

Proposition II.1.

Il existe des constantes positives $\rho \geq 1$, C, C_1 indépendantes de Θ telles que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad Y_j \ll C_1 \, C^j \, \Theta^{(j)} \, o \, t \, .$$

Preuve.

On pose $D = (D_1, D_2, \ldots, D_\nu)$ et $G = (G^1, G^2, \ldots, G^\nu)$ ce sont des matrices à m lignes et ν colonnes

(P'_o) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_o \bar{Y}_o = C(x, \partial)(\bar{Y}_o) \\ \bar{Y}_o(0, x') = (1, 0, \ldots, 0) \\ Y_o = D.\bar{Y}_o \end{cases}$$

On voit qu'il existe $V_o > 0$ tel que

$\bar{Y}_o(0, x') \ll V_o \; \Theta \circ t(x')$

En considérant la proposition (II.3) on voit que

$\bar{Y}_o \ll V_o \, . \, \Theta \circ t$

En considérant la proposition (II.2) , nous aurons

$Y_o \ll B\, V_o . \, \Theta \circ t$

En prenant $C_1 \geq B\, V_o$ alors le résultat est vrai pour $j = 0$.

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $(j-1)$.

i.e. $Y_k \ll C_1 \, C^k \; \Theta^k \circ t \; , \; 0 \leq k \leq j-1$.

$(P')_j$ s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{cases} \partial_o \bar{Y}_j = C(x, \partial)(\bar{Y}_j) + Z_j \\ Y_j^{\bar{D}} (0, x') = \delta_1^{\bar{D}} \times \delta_j^o \; , \; 1 \leq D \leq \nu \end{cases} \\ Y_j = D\, \bar{Y}_j + W_j \end{cases}$$

Majorons W_j .

Nous avons

$$W_j = \sum_{r=1}^{\min(t,j)} \mathcal{S}^r(Y_{j-r}) \quad \text{ou} \quad \mathcal{S}^r = (\mathcal{S}_c^{r,B})_{1\leq B,C\leq m}$$

en appliquant la propriété (II.2) , nous aurons

$$W_j << B\left(\sum_{r=1}^{\min(t,j)} \rho^r\, C_1\, C^{j-r}\right) \Theta^{(j)} \circ t = B\left(\sum_{r=1}^{\min(t,j)} \left(\frac{\rho}{c}\right)^r\right) C_1\, C^j \Theta^{(j)} \circ t$$

en supposant $p < C$ nous aurons :

$$W_j << B\left(\frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}}\right) . C_1\, C^j\, \Theta^{(j)} \circ t .$$

Majorons Z_j :

nous avons $$Z_j = \left(\tilde{A}^{1\ldots\nu}_{1\ldots\nu}\right)^2 \frac{(\tilde{\Lambda}_o)^{-1}}{p^0} \left[\mathcal{M}^1(W_j) + \sum_{r=2}^{\min(t,j+1)} \mathcal{M}^r(Y_{j+1-r})\right]$$

$$\text{où } \mathcal{M}^r = \left(\mathcal{M}_B^{\bar{F},r}\right)_{\substack{1\leq\bar{F}\leq\nu \\ 1\leq B\leq m}}$$

En appliquant la proposition (II.2) , nous aurons

$$Z_j << B^2.\rho . \frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}} C_1\, C^j\, \Theta^{(j+1)} \circ t + \left(\sum_{r=2}^{\min(t,j+1)} B\rho^r\, C_1\, C^{j+1-r}\right) \Theta^{(j+1)} \circ t$$

$$<< B^2.\rho . \frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}} C_1\, C^j\, \Theta^{(j+1)} \circ t + B\rho . \frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}} C_1\, C^j\, \Theta^{(j+1)} \circ t .$$

En appliquant la proposition (II.3), nous aurons

$$\bar{Y}_j << \frac{\rho}{\rho-B}\; B(B+1) \left(\frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}}\right) C_1\, C^j\, \Theta^{(j)} \circ t .$$

En appliquant la proposition (II.2) , nous aurons

$$Y_j << \left(\frac{\rho}{\rho-B} . B^2(B+1)+B\right) \frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}}\; C_1\, C^j\, \Theta^{(j)} \circ t$$

En supposant $\rho \geq 2B$, on trouve :

$$Y_j << (2B^2(B+1)+B) \frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}} C_1 \, C^j \, \theta^{(j)} \circ t \, .$$

On pose $K = 2B^2(B+1) + B$

on a donc

$$Y_j << K. \frac{\frac{\rho}{C}}{1-\frac{\rho}{C}} C_1 \, C^j \, \theta^{(j)} \circ t \, .$$

si on se donne $\rho_o = \max(1, 2B)$ et si on choisit

$$C \geq \rho_o(1 + K) \, .$$

on trouve bien

$$Y_j << C_1 \, C^j \, \theta^{(j)} \circ t \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Ainsi on a le théorème suivant :

<u>Théoréme 1.</u>

Soit X une variété analytique réelle de dimension $(n+1)$, S une hypersurface analytique de X régulière en a , d'équation locale $\phi(x) = 0$ au voisinage de a , h un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre t sur X .

Si le déterminant de la matrice caractéristique se met sous la forme $(H')^{\nu} H''$
avec H' et H'' polynomiales en ξ , à coefficients analytiques sur un voisinage de a et S caractéristique totale simple pour H' au voisinage de a.

Si h vérifie $(D_o)_{\nu}$ et (H_2), il existe une suite Y_j de fonctions analytiques sur un même voisinage de a , à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $Y = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j \times (f_j \circ \phi)$ soit une onde asymptotique pour h et telle que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad Y_j << C_1 \, C^j \, \theta^{(j)} \, (t(x)).$$

CHAPITRE III : SOLUTIONS NULLES

I.- *FONCTIONS ULTRADIFFERENTIABLES, ULTRADISTRIBUTIONS.*

1.- Suites (M_p)

Soit (M_p) une suite de réels positifs.

On note par (M.0), (M.1), (M.2), (M.3), (M.2)', (M.3)' les conditions suivantes sur (M_p)

(M.0) $M_0 = 1$ (commodité)

(M.1) $(M_p)^2 \leqslant M_{p-1}\, M_{p+1}$, $\forall p \geqslant 1$ (convexité logarithmique)

(M.2) $\exists A,\ \exists H > 0$:

$\forall p \in \mathbb{N}\quad M_p \leqslant A\, H^p \min\limits_{0 \leqslant q \leqslant p} M_q\, M_{p-q}$ (stabilité par ultradifférentiel)

(M.3) $\exists A > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on ait

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leqslant A.p.\ \frac{M_p}{M_{p+1}}$$ (forte non quasi-analycité)

(M.2)' $\exists A > 0 ,\exists H > 0$:

$\forall p \in \mathbb{N}$, $M_{p+1} \leqslant A\, H^p\, M_p$ (stabilité par opérateurs différentiels)

(M.3)' $$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < +\infty$$ (non quasi-analycité)

Les conditions (M.2) et (M.3) sont appelées les conditions fortes du fait qu'elles entraînent respectivement (M.2)' et (M.3)' .

Posons $\dfrac{M_p}{M_{p-1}} = m_p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Alors nous aurons :

(M.1) $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad m_p \leqslant m_{p+1}$

(M.2)' $\forall p \in \mathbb{N} \quad m_{p+1} \leqslant A\, H^p$

(M.3)' $$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{m_p} < +\infty .$$

Définition (I.1.1). Si (M_p) est une suite de réels positifs, on appelle fonctions associées à la suite (M_p) les fonctions $M(\rho)$ et $M^*(\rho)$ définies sur $]0,+\infty[$ par

$$M(\rho) = \sup_{p\in\mathbb{N}} \log \frac{\rho^p M_0}{M_p}$$

$$M^*(\rho) = \sup_{p\in\mathbb{N}} \log \frac{\rho^p p!\, M_0}{M_p}$$

En notant $m(\lambda)$ le nombre de p tels que $m_p \leqslant \lambda$ alors nous avons

$$M(\rho) = \int_0^\rho \frac{m(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda$$ (Mandelbrojt [11] , p.21 , Roumieu [12],p.65)

2.- Fonctions ultradifférentiables et ultradistributions de type Roumieu.

a) On note Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{n+1}$,(M_p) une suite de réels positifs.

Si f est une fonction C^∞ sur Ω , K un compact de Ω , h un réel strictement positif, on note

$$p_{K,h}(f) = \sup_{\substack{x\in K \\ \alpha\in\mathbb{N}^{n+1}}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

$C_c^\infty(\Omega, \{M_p\} , K, h)$ est l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur Ω , à support dans K , telles que $p_{K,h}(f) < +\infty$; muni de la norme $p_{K,h}$, c'est un espace de Banach qu'on note $\mathcal{D}(\Omega, \{M_p\} , K, h)$

$C_c^\infty(\Omega, \{M_p\})$ est la réunion des $C^\infty(\Omega, \{M_p\} , K, h)$ quand K décrit l'ensemble des compacts de Ω et h décrit $]0,+\infty[$.

On a de manière évidente $K \subset K'$ et $h \leqslant h'$ => $\mathcal{D}(\Omega, \{M_p\})K,h \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega,\{M_p\},K',h')$ (C car $p_{K,h}(f) \leqslant p_{K',h'}(f'))$. On munit $C_c^\infty(\Omega, \{M_p\})$ de la topologie limite inductive de $\mathcal{D}(\Omega, \{M_p\},K, h)$ et on note $\mathcal{D}(\Omega, \{M_p\})$ l'espace vectoriel topologique obtenu. C'est l'espace des fonctions ultradifférentiables à support compact de type Roumieu, associé à la suite $\{M_p\}$.

b) Soit K la fermeture d'un ouvert relativement compact de Ω . On note $C^\infty(\Omega, \{M_p\}, K)$ l'espace vectoriel des fonctions ϕ , prolongeables à un voisinage ouvert de K en une fonction C^∞ , f , telle qu'il existe h pour lequel $p_{K,h}(f) < +\infty$; on note $p_{K,h}(\phi) = p_{K,h}(f)$, et ceci ne dépend pas du choix de f .

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$C^\infty(\Omega, \{M_p\},K, h)$ $\{\phi \in C^\infty(\Omega, \{M_p\},K) \mid p_{K,h}(\phi) < +\infty\}$

muni de la norme $p_{K,h}$, c'est un espace de Banach noté $\mathcal{E}(\Omega,\{M_p\},K, h)$ si $h \leqslant h'$, on a $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\}, K, h) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega, \{M_p\}, K, h')$ (car $p_{K,h} \leqslant p_{K,h'}$) On munit donc $C^\infty(\Omega, \{M_p\}, K)$ de la topologie limite inductive des espaces de Banach $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\}, K, h)$, et on note $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\},K)$ cet espace vectoriel topologique .

On note $C^\infty(\Omega, \{M_p\})$ l'espace vectoriel des fonctions f,C^∞ sur Ω telles que, pour tout K , fermeture d'un ouvert relativement compact de Ω , on ait $f_{|K}$ dans $C^\infty(\Omega, \{M_p\},K)$. C'est l'espace vectoriel des fonctions ultradifférentiables du type Roumieu. On le munit de la topologie limite projective des $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\},K)$ par rapport aux applications de restriction à K et on note $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$ cet espace vectoriel topologique.

Le dual de $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$ s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega, \{M_p\})$ formé par les ultradistributions à support compact.

<u>Rappel</u>. Si la suite $\{M_p\}$ vérifie (M.2)' , pour tout $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$, D^β est une application linéaire continue de $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$ dans lui-même.

<u>Remarque</u>.

Si une série $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ de fonctions de $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$ est telle que $\forall K \in E$, $\exists$ $h > 0$ tel que $\sum_{j=0}^{\infty} p_{K,h}(u_j) < +\infty$, alors cette série converge dans $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$; la condition peut encore s'écrire d'après la définition des $p_{K,h}$:

$$\forall K \in E, \exists\, h > 0, \exists\, A > 0 : \forall x \in K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |D^{\alpha} u_j(x)| \leq A\, h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$$

En effet

si $\sum_{j=0}^{\infty} p_{K,h}(u_j) < +\infty$ alors $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge dans $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\}, K, h)$.

Donc $\forall K \in E, \exists\, h > 0$ tel que $(\sum_{j=0}^{\infty} u_j)$ converge dans $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\}, K, h)$.

Par conséquent, d'après la définition de la limite inductive, $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge dans $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\}, K)$, pour tout $K \in E$.

$\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$ étant la limite projectivre des $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\}, K)$, $K \in E$ alors $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge dans $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$.

3.- Fonctions ultradifférentiables et ultradistributions de type Beurling.

a) On note $C_c^{\infty}(\Omega, (M_p), K) = \bigcap_{h>0} C_c^{\infty}(\Omega, \{M_p\}, K, h)$ et $\mathcal{D}(\Omega, (M_p), K)$ la limite projective par rapport à $h \in \mathbb{R}_+^*$ des $\mathcal{D}(\Omega, \{M_p\}, K, h)$.

On note $C_c^{\infty}(\Omega, (M_p)) = \bigcup_{K \text{ compact}} C^{\infty}(\Omega, (M_p), K)$ et $\mathcal{D}(\Omega, (M_p))$ la limite inductive par rapport à K des $\mathcal{D}(\Omega, (M_p), K)$. C'est l'espace vectoriel topologique des fonctions ultradifférentiables à support compact de type Beurling, pour la suite (M_p) .

Le dual fort de $\mathcal{D}(\Omega, (M_p))$, noté $\mathcal{D}'(\Omega, (M_p))$ est l'espace vectoriel topologique des ultradistributions de type Beurling pour la suite (M_p) .

b) Si K est la fermeture d'un ouvert non vide, relativement compact de Ω , on note $C^{\infty}(\Omega, (M_p), K)$ l'espace des fonctions ϕ , prolongeables à un voisinage ouvert de K en une fonction f telle que

$$\forall h > 0 \quad , \quad p_{K,h}(f) < +\infty$$

On note $p_{K,h}(\phi) = p_{K,h}(f)$ (définition indépendante du choix de f).

Muni de la topologie limite projective par rapport à h, cet espace est noté $\mathcal{E}(\Omega, (M_p), K)$, on note $C^\infty(\Omega, (M_p)) = \bigcap_K C^\infty(\Omega, (M_p), K)$ et $\mathcal{E}(\Omega, (M_p))$ la limite projective par rapport à K des $\mathcal{E}(\Omega, (M_p), K)$.

C'est l'espace des fonctions ultradifférentiables de type Beurling, relatives à la suite (M_p). Son dual s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega, (M_p))$ formé par les ultradistributions à support compact.

<u>Remarques.</u>

- $\mathcal{D}(\Omega, (M_p)) \subset \mathcal{D}(\Omega, \{M_p\})$
- Si (M_p) vérifie (M.1) et (M.3)', $\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega, (M_p))$ et $\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega, \{M_p\})$.

4.- <u>Opérateurs ultradifférentiels.</u>

<u>Définition (I.4.1).</u>

Un opérateur $P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, est dit ultradifférentiel de classe $\{M_p\}$ (resp. (M_p)) si et seulement s'il existe des constantes positives L et C (resp. pour toute constante positive L, il existe une constante positive C) telles que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \qquad |a_\alpha| \leqslant C \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}$$

<u>Proposition (I.4.1).</u>

Supposons que la suite (M_p) satisfait la condition (M.1).

Alors :

pour toute fonction entière $P(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbb{C}^{n+1}$

les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Il existe des constantes positives L et C

(resp. $\forall L > 0$, $\exists C > 0$) telles que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \qquad |a_\alpha| \leqslant C \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}$$

(b) Il existe des constantes positives L et C

(resp. $\forall L > 0, \exists C > 0$) telles que

$\forall \xi \in \mathbb{C}^{n+1} \quad |P(\xi)| \leq C \quad \exp M(L|\xi|)$.

<u>Preuve</u> :

(a) => (b)

en posant $|\xi|^\alpha = |\xi_0|^{\alpha_0} \cdot |\xi_1|^{\alpha_1} \ldots |\xi_n|^{\alpha_n}$ nous aurons

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} |a_\alpha \xi^\alpha| \leq C \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{L^{|\alpha|} ||\xi||^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} = \frac{C}{M_0} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{(L||\xi||)^{|\alpha|} M_0}{M_{|\alpha|}}$$

d'après la définition de $M(\rho)$ nous avons

$$\exp M(L||\xi||) = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{(L||\xi||)^{|\alpha|} M_0}{M_{|\alpha|}}$$

Par conséquent

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha \xi|^\alpha \leq \frac{C}{M_0} \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} 2^{-|\alpha|} \right) \exp M(2L||\xi||)$$

$$= \left(\frac{2^{n+1} C}{M_0}\right) \cdot \exp M(2L||\xi||)$$

(b) => (a) .

Soit $PD(0,r)$ le polydisque de centre 0 et de rayon $r = (r_0, r_1, \ldots r_n)$. Il résulte des inégalités de Cauchy que

$$|a_\alpha| \leq \frac{1}{r^\alpha} \sup_{\xi \in \partial PD(0,r)} |P(\xi)| \quad , \text{ avec } r^\alpha = \prod_{j=0}^{n} (r_j)^{\alpha_j} .$$

Si on prend $r_0 = r_1 = \ldots = r_n = \rho$, on trouve, en utilisant l'hypothèse

$$|a_\alpha| \leq \frac{C}{\rho^{|\alpha|}} \exp(M\ L \sqrt{n+1}\ \rho) = C(M\ L \sqrt{n+1})^{|\alpha|} \frac{\exp(M\ L \sqrt{n+1} \times \rho)}{(M\ L \sqrt{n+1} \times \rho)^{|\alpha|}}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\rho > 0$ et que $M_p = \inf_\rho \frac{\exp M(\rho)}{\rho^p}$

(d'après M.0 , M.1)

on a

$$|a_\alpha| \leqslant C(M\ L\ \sqrt{n+1})^{|\alpha|} \times M_{|\alpha|}$$

C.Q.F.D.

Donnons certains rappels que l'on utilisera par la suite.

Rappels.

Lemme. (Komatsu [13] , p.55)

Supposons que (M_p) satisfait (M.1) et que m_p , $m(\lambda)$ et $M_{(\rho)}$ sont définis comme dans 1) .

Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(a) $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{m_p} < +\infty$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{m(\lambda)}{\lambda^2}\, d\lambda < +\infty$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{M(\rho)}{\rho^2}\, d\rho < +\infty$

(d) $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(M_p)^{\frac{1}{p}}} < +\infty$

Ces conditions impliquent les conditions suivantes

(a') $\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{m_p} = 0$

(b') $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{m(\lambda)}{\lambda} = 0$

(c') $\lim_{\rho\to\infty} \frac{M(\rho)}{\rho} = 0$

Proposition (Komatsu [13] , p.51)

La suite $\{M_p\}$ satisfait (M.2) si et seulement si il existe A et $H > 1$ tels que

$$2\, M(\rho) \leqslant M(H\rho) + \log(A\ M_0)$$

Proposition (Komatsu [13] , p.57)

Si M_p satisfait (M.1) et (M.3) , on a :

$$\forall \rho \geqslant 0 \qquad \rho \int_{\rho}^{\infty} \frac{M(\lambda)}{\lambda^2}\, d\lambda \leqslant (A+1)\, M(\rho) + m_1 \int_{0}^{\infty} \frac{M(\lambda)}{\lambda^2}\, d\lambda$$

Propostition (I.4.2)

Supposons que (M_p) remplit les conditions (M.1) (M.2) et (M.3) .

Si une fonction entière $P(\xi)$ satisfait les conditions

(C_1) $P(\xi)$ a une factorisation d'Hadamard :

$$P(\xi) = a\, \xi^{n(0)} \prod_{k=n(0)+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{C_k}\right)$$

(C_2) Il existe des constantes positives L et C

(resp. $\forall L > 0, \exists\, C > 0$) telles que

$$\forall \rho \in (\mathbb{R}^*)^+ \ , \ N(\rho) = \int_0^{\rho} \frac{n(\lambda)-n(0)}{\lambda}\, d\lambda \leqslant M(L\rho) + \operatorname{Log} C$$

où $n(\lambda)$ est le nombre de zéros C_p vérifiant $|C_p| \leqslant \lambda$.

Alors

$P(\xi)$ satisfait la condition b) de la proposition (I.4.1).

Preuve :

On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $|C_{k+1}| \geqslant |C_k|$ et que $P(0) = 1$.

Nous aurons alors

$$\operatorname{Log} \sup_{|\xi|=\rho} |P(\xi)| = \operatorname{Log} \sup_{|\xi|=\rho} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left|1 - \frac{\xi}{C_k}\right| \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Log} \sup_{|\xi|=\rho} \left|1 - \frac{\xi}{C_k}\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\rho}{|C_k|}\right)$$

Il résulte de la définition de $n(\lambda)$ que

$\forall k \geq 1$, $n(\lambda)$ = constante dans les intervalles $\left[|c_k|, |c_{k+1}|\right[$

$n(\lambda)$ étant une fonction croissante, constante sur les intervalles $\left]|c_k|, |c_{k+1}|\right[$, admettant des sauts $s_k = 1$ aux points c_k .

Si C est sa partie continue alors nous aurons

$$\int_0^{\Lambda} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\lambda}) dn(\lambda) = \int_0^{\Lambda} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\lambda}) C'(\lambda) d\lambda + \sum_{\substack{p \\ |c_p| \leq \Lambda}} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{|c_p|})$$

mais C' étant nulle presque partout alors

$$\int_0^{\Lambda} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\lambda}) dn(\lambda) = \sum_{\substack{p \\ |c_p| \leq \Lambda}} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{|c_p|})$$

d'où

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\lambda}) dn(\lambda) = \lim_{\Lambda \to +\infty} \Big(\sum_{\substack{p \\ |c_p| \leq \Lambda}} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{|c_p|})$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{|c_p|})$$

Soit σ un réel fini alors :

$$\int_0^{\sigma} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\lambda}) dn(\lambda) = \left[\mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\lambda}) n(\lambda)\right]_0^{\sigma} - \int_0^{\sigma} \frac{-\frac{\rho}{\lambda^2}}{1 + \frac{\rho}{\lambda}} n(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\sigma}) \cdot n(\sigma) + \rho \int_0^{\sigma} \frac{n(\lambda)}{\lambda(\lambda+\rho)} d\lambda .$$

Nous avons donc :

$$\int_0^{\sigma} \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\lambda}) dn(\lambda) = n(\sigma)\, \mathrm{Log}(1 + \frac{\rho}{\sigma}) + \frac{\rho\, N(\sigma)}{\rho + \sigma} + \rho \int_0^{\sigma} \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\rho)^2} d\lambda$$

[car on a $N(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{n(\lambda)}{\lambda} d\lambda$ et

$$\int_0^\sigma \frac{n(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda+\rho} d\lambda = \frac{N(\sigma)}{\sigma+\rho} + \int_0^\sigma \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\rho)^2} \Big]$$

Puisque $\int_0^\infty \frac{N(\rho)}{\rho^2} d\rho < +\infty$ alors il résulte des rappels que :

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{\rho\, N(\sigma)}{\rho+\sigma} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\sigma\to+\infty} n(\sigma) \operatorname{Log}(1+\frac{\rho}{\sigma}) = 0$$

On a donc en faisant tendre σ vers $+\infty$:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+\frac{\rho}{|c_p|}) = \rho \int_0^\infty \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\rho)^2} d\lambda \ .$$

Or d'après l'hypothèse (C_2) $\exists\, L > 0$, $\exists\, C > 0$ (resp. $\forall\, L > 0, \exists\, C > 0$)

tels que :

$$N(\rho) \leqslant M(L\rho) + \operatorname{Log} C$$

donc

$$\sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+\frac{\rho}{|c_p|}) \leqslant \rho \int_0^\infty \frac{M(L\,\lambda)}{(\lambda+\rho)^2} d\lambda + \rho \operatorname{Log} C \cdot \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda+\rho)^2}$$

$$= \rho \int_0^\infty \frac{M(L\,\lambda)}{(\lambda+\rho)^2} d\lambda + \operatorname{Log} C$$

$$= \frac{\rho}{L} \int_0^\infty \frac{M(\lambda)}{(\frac{\lambda}{L}+\rho)^2} d\lambda + \operatorname{Log} C$$

ou encore

$$\sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+\frac{\rho}{|c_p|}) \leqslant L\rho \int_0^{L\rho} \frac{M(\lambda)}{(L\rho)^2} d\lambda + L\rho \int_{L\rho}^{+\infty} \frac{M(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda + \operatorname{Log} C$$

Il résulte de la proposition [Komatsu [13] ,p.57] citée dans les rappels que (car (M_p) vérifie (M.1) et (M.3))

$$L\rho \int_{L\rho}^{+\infty} \frac{M(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda \leqslant (A+1)\, M(L\rho) + m_1 \int_0^\infty \frac{M(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda$$

en remarquant que $L\rho \int_0^{L\rho} \frac{M(\lambda)}{(L\rho)^2}\, d\lambda \leqslant M(L\rho)$ (car $M(\rho)$ est croissante)

nous aurons alors :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\rho}{|c_p|}\right) \leqslant (A+2)\, M(L\rho) + \mathrm{Log}\, C + m_1 \int_0^{\infty} \frac{M(\lambda)}{\lambda^2}\, d\lambda$$

$$= (A+2)\, M(L\rho) + \mathrm{Log}\, C' \quad .$$

(M_p) vérifiant (M.2) il résulte alors de la proposition (3.6) [Komatsu [13], p.51] en l'applicant plusieurs fois de suite, qu'il existe des constantes positives B et H telles que

$$(A+2)\, M(L\rho) + \mathrm{Log}\, C' \leqslant M(B\, L\rho) + \mathrm{Log}(H\, C')$$

donc $$\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\rho}{|c_p|}\right) \leqslant M(B\, L\rho) + \mathrm{Log}(H\, C') \quad .$$

Pour un $P(\xi)$ quelconque, si $\xi = 0$ est un zéro de multiplicité $n(0)$, nous avons en posant $P'(\xi) = \frac{P(\xi)}{\xi^{n(0)}}$:

$$P'(0) = 1 \quad .$$

Par conséquent

$$\mathrm{Log} \sup_{|\xi|=\rho} |P'(\xi)| \leqslant M(L\rho) + \mathrm{Log}\, C$$

ou encore

$$\mathrm{Log} \sup_{|\xi|=\rho} |P(\xi)| \leqslant M(L\rho) + \mathrm{Log}\, C + n(0)\, \mathrm{Log}\, \rho \; .$$

Mais d'après la définition de $M(\rho)$ nous avons :

$$\forall \rho > 0 \qquad M(\rho) \geqslant \mathrm{Log}\, \rho - m_1 \geqslant \mathrm{Log}\, \rho - \mathrm{Log}\, AH \quad (\text{d'après M.2})$$

Par conséquent

$$\mathrm{Log} \sup_{|\xi|=\rho} |P(\xi)| \leqslant M(B\, L\rho) + \mathrm{Log}(C'\, H) \quad .$$

C.Q.F.D.

Remarque 1.

On peut démontrer l'implication dans l'autre sens.

Remarque 2.

Il résulte de la proposition ci-dessus que si (M_p) satisfait les conditions (M.1) (M.2) et (M.3) alors les opérateurs :

$P(D) = D^{n(0)} \prod_{p=n(0)+1}^{\infty} (1 + \frac{D}{C_p})$ sont ultradifférentiels de classe

(M_p) (resp. $\{M_p\}$) si $P(\xi)$ remplit la condition C_2 .

Corollaire (I.4.1).

Si (M_p) vérifie (M.1) (M.2) et (M.3) . Alors pour tout $H > 0$ l'opérateur $P(D) = \prod_{p=1}^{\infty} (1 + \frac{H}{m_p} D)$ est ultradifférentiel de classe $\{M_p\}$.

Preuve.

Si $n(\lambda)$ est le nombre d'indices $p : \frac{m_p}{H} \leqslant \lambda$, alors nous aurons $n(\lambda) = m(H\lambda)$.

Donc $$N(\rho) = \int_0^\rho \frac{n(\lambda)}{\lambda} d\lambda = \int_0^\rho \frac{m(H\lambda)}{\lambda} d\lambda = \int_0^{H\rho} \frac{m(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

$$= M(H\rho) \quad .$$

Par conséquent la condition (C_2) est satisfaite pour

$L = H$ et $C = 1$.

Donc $P(D)$ est ultradifférentiel de classe $\{M_p\}$.

C.Q.F.D.

Proposition (I.4.3).

Soit (M_p) une suite de réels positifs satisfaisant (M.1) et telle que : $\forall L > 0, \exists C > 0 \quad : \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad p! \leqslant C L^p M_p \quad ((M_p) > (p!))$

Alors

un opérateur ultradifférentiel de classe $\{M_p\}$ (resp. (M_p)) est un opérateur linéaire continu sur l'espace de Frechet $\Theta(V)$ des fonctions holomorphes sur V, pour chaque ouvert V de $\mathbb{C}^n$.

Plus précisément, il existe des constantes positives L et C (resp. $\forall L > 0, \exists C > 0$) telles que

$$|P(D)\, F(z)| \leqslant C \exp M^*\left(\frac{L}{t}\right) \sup_{\substack{|z'_i - z_i| \leqslant t \\ i=\overline{0,n}}} |F(z')| .$$

Pour toute fonction holomorphe $F(z)$ définie sur un voisinage du polydisque $\{z' \in \mathbb{C}^n : |z'_i - z_i| \leqslant t \quad , \quad i = \overline{0,n}\}$.

Preuve.

Soit $P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur ultradifférentiel de classe $\{M_p\}$ (resp. (M_p)).

Alors

$\exists L' > 0, \exists C' > 0$ (resp. $\forall L' > 0, \exists C' > 0$) tels que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \quad |a_\alpha| \leqslant C' \frac{L^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} .$$

En utilisant les inégalités de Cauchy nous aurons

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \quad |D^{\alpha} F(z)| \leq \frac{|\alpha|!}{t^{|\alpha|}} \sup_{\substack{|z'_i - z_i| \leq t \\ i=\overline{0,n}}} |F(z')|$$

donc

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_{\alpha} \quad D^{\alpha} F(z)| \leq \frac{C'}{M_0} \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(\frac{L'}{t})^{|\alpha|} \ |\alpha|! \ M_0}{M_{|\alpha|}} \right) \sup_{\substack{|z'_i - z_i| \leq t \\ i=\overline{0,n}}} |F(z')|$$

$$\leq \frac{2^{(n+1)} C'}{M_0} \sup_{\alpha} \frac{(\frac{2L'}{t})^{|\alpha|} \ |\alpha|! \ M_0}{M_{|\alpha|}} \sup_{\substack{|z'_i - z_i| \\ i=\overline{0,n}}} |F(z')|$$

Comme (M_p) satisfait (M.1), et $(M_p) > (p!)$. Alors

$$\sup_{\alpha} \frac{(\frac{2L'}{t})^{|\alpha|} \ |\alpha|! \ M_0}{M_{|\alpha|}} = \exp M^{*} \left(\frac{2L'}{t}\right)$$

Par conséquent

$$|P(D) \ F(z)| \leq \frac{2^{(n+1)} C'}{M_0} \ . \exp M^{*} \left(\frac{2L'}{t}\right) \sup_{\substack{|z'_i - z_i| \leq t \\ i=\overline{0,n}}} |F(z')|$$

$$\leq C \exp M^{*} \left(\frac{L}{t}\right) \sup_{\substack{|z'_i - z_i| \leq t \\ i=\overline{0,n}}} |F(z')|$$

C.Q.F.D.

5.- Hyperfonctions.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{n+1}$.

On note $\mathcal{B}(\Omega) = H^{n+1}(V, \Theta)$ le $(n+1)^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie relative de V modulo $V - \Omega$, à valeurs dans le faisceau Θ des fonctions holomorphes sur V , ouvert de Stein de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant Ω comme sous-ensemble fermé. Cette définition est indépendante du choix de V .

Si $\Omega = \prod_{k=0}^{n} \Omega_k$, avec Ω_k ouvert de $\mathbb{R}$, on a plus simplement

$$\mathcal{B}(\Omega) = \frac{\Theta\left(\prod_{k=0}^{n} (V_k \setminus \Omega_k)\right)}{\sum_{j=0}^{n} \Theta((V_1\setminus\Omega_1)\times - \times(V_{j-1}\setminus\Omega_{j-1})\times V_j \times(V_{j+1}\setminus\Omega_{j+1})\times - \times(V_n\setminus\Omega_n))}$$

On montre que tout espace d'ultradistributions s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\Omega)$.

II.- SOLUTIONS NULLES ULTRADIFFERENTIABLES DE CLASSE $\{M_p\}$.

1.- Choix de la suite f_j

On pose

$$\begin{cases} f_0(y) = \dfrac{1}{2\Pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\xi)^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi}{m_p}\right)^{-1} e^{\xi y}\, d\xi \\[2ex] f_j(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{(y-\eta)^{j-1}}{(j-1)!} f_0(\eta)\, d\eta \quad , \quad j = 1,2,\ldots \\[2ex] f_j(y) = f_0^{(-j)}(y) \quad , \quad j = -1,-2,\ldots . \end{cases}$$

D'après [16] $f_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \{M_p\})$ et vérifie

i) $f_0 = 0$ sur $]-\infty, 0]$

ii) $0 \in \operatorname{supp} f_0$

Pour $j \geq 1$, f_j est la primitive d'ordre j de f_0 , s'annulant $(j-1)$ fois en 0 .

Pour $j \leq 0$, f_j est la dérivée d'ordre $(-j)$ de f_0 .

La suite f_j vérifie

$$\forall j \in \mathbb{Z} \qquad f_j' = f_{j-1} \ .$$

Il résulte de la définition de $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \{M_p\})$ que pour tout $R > 0$ $\exists\ h > 0$, $\exists\ \tilde{C} > 0$ tels que

$$\forall y \in [-R,R] \ , \forall j \in \mathbb{N} \qquad |f_{-j}(y)| = |f^{(j)}(y)| \leqslant \tilde{C}\, h^j\, M_j$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\forall y \in [-R,R] \ , \ |f_j(y)| \leqslant \frac{|y|^j}{j!} \sup_{|\eta| \leqslant R} |f_0(\eta)|$$
$$\leqslant \tilde{C} \frac{|y|^j}{j!}$$

2.- <u>Solutions nulles ultradifférentiables de classe $\{M_p\}$</u>

La majoration de la solution formelle donnée dans le chapitre II et les rappels donnés en détail dans le paragraphe I de ce chapitre vont nous permettre de faire converger notre solution formelle

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(x) \times (f_j \circ \phi)(x)$$

dans un certain espace $[\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})]^m$. De manière plus précise nous avons le théorème suivant :

<u>Théorème</u> :

Soit X une variété analytique réelle de dimension $(n+1)$,
h un opérateur différentiel matriciel sur X d'ordre t ,
S une hypersurface analytique de X régulière en a , caractéristique pour h .
Si h et S vérifient les hypothèses du théorème 1, il existe Ω_0 voisinage ouvert de a et $Y \in [C^\infty(\Omega_0, \{M_p\})]^m$, solution nulle de h pour S en a , pour toute suite (M_p) vérifiant (M.0) , (M.1) et (M.3)' .

Preuve.

La démonstration de ce théorème consiste à prouver l'existence d'un ouvert Ω_0 de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout compact K fermeture d'un ouvert relativement compact de Ω, il existe des constantes positives A et h telles que :

$$\forall B \in \{1,\dots,m\},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1},\ \sup_{x\in K} \sum_{j=0}^{\infty} |D^{\alpha}(Y_j^B(x)\times(f_j o\phi)(x))| \leqslant AH^{|\alpha|}M_{|\alpha|}$$

le problème étant local, on choisit une carte locale telle que :

$$\phi(x) = x^1 \quad \text{et} \quad a = (0,\text{---},0) \quad .$$

On pose $x' = (x^0,x^2,\dots,x^n)$

D'après la proposition (II.1) du chapitre II si

$$S_\alpha^B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} |D^{\alpha}(Y_j^B(x)\times(f_j o\phi)(x))|$$

$$\tilde{S}_\alpha^B(x) = \sum_{j=0}^{\alpha_1-1} \left[\sum_{\beta_1=0}^{j} C_{\alpha_1}^{\beta_1} |D_1^{\beta_1} D_{x'}^{\alpha'} Y_{j-\beta_1}^B(x)|\right] . |f_{j-\alpha_1}(x^1)|$$

$$\tilde{\tilde{S}}_\alpha^B(x) = \sum_{j=\alpha_1}^{+\infty} \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{\beta_1} |D_1^{\beta_1} D_{x'}^{\alpha'} Y_{j-\beta_1}^B(x)|\right) . |f_{j-\alpha_1}(x^1)|$$

nous avons

$$S_\alpha^B(x) \leqslant \tilde{S}_\alpha^B(x) + \tilde{\tilde{S}}_\alpha^B(x)$$

Majorons $\tilde{S}_\alpha^B(x)$.

Il existe $h > 0$ tel que

$$\tilde{S}_\alpha^B(x) \leqslant \sum_{j=0}^{\alpha_1} \left[\sum_{\beta_1=0}^{j} C_{\alpha_1}^{\beta_1} C^{j-\beta_1} \frac{h^{\alpha_1-j}}{(r-t(|x|))^j} \times (j+|\alpha|)!\right] \times \frac{C_1\ \rho^{|\alpha|}}{|r-t(|x|)|^{|\alpha|+1}}$$

En remarquant que $(M_p) \supset (p!)$ ie $\exists\ \tilde{B}, L > 0$ tq $\forall\ p \in \mathbb{N},\ p! \leqslant \tilde{B}\, L^p\, M_p$

On montre qu'il existe une constante $\tilde{H}$ telle que

$$\tilde{S}^B_\alpha(x) \leqslant \left[\frac{\tilde{H}}{r-t(|x|)}\right]^{|\alpha|} \times \frac{\tilde{B}\, C_1}{r-t(|x|)} \times M_{|\alpha|}$$

Majorons cette fois $\tilde{\tilde{S}}^B_\alpha(x)$.

Si x est tel que $C\ |x^1| + t(|x|) < r$

nous aurons

$$\tilde{\tilde{S}}^B_\alpha(x) \leqslant \frac{C_1}{r-C|x^1|-t(|x|)} \times \left[\frac{\rho(1+C)}{r-c|x^1|-t(|x|)}\right]^{|\alpha|} (|\alpha|)\ !$$

ou encore

$$\tilde{\tilde{S}}^B_\alpha(x) \leqslant \frac{\tilde{B}\, C_1}{(r-C|x^1|-t(|x|)} \times \left(\frac{\rho L(1+C)}{r-C|x^1|-t(|x|)}\right)^{|\alpha|} .\ M_{|\alpha|}$$

En notant $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : C|x^1|+t(|x|) < r\}$ alors nous avons, pour tout compact $K \subset \Omega_0$, l'existence de constantes A et H telles que

$$\forall\ B \in \{1,\dots,m\},\ \forall\ x \in K,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_\alpha(x) D^\alpha Y^B_j(x)| \leqslant AH^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$$

Remarquons que

$$Y^B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Y^B_j(x) \times (f_j \circ \phi)(x) = 0 \quad \text{sur} \quad S_- = \{x : x^1 < 0\}$$

et $Y^1(0,x') = Y^1_0(0,x') \times f_0(x^1) = f_0(x^1)$

Donc Y est bien une solution nulle appartenant à $\left[\mathcal{E}(\Omega_0, \{M_p\})\right]^m$

C.Q.F.D.

Remarque.

Le détail des calculs de cette démonstration est donné dans [14] .

III.- SOLUTIONS NULLES ULTRADISTRIBUTIONS.

On suppose que la suite (M_p) vérifie (M.0) (M.1), (M.2) et (M.3) .

1.- Choix de la suite f_j

Posons

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Phi_j(z) = \frac{z^{j-1}}{(j-1)!}\left[\text{Log } z - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{j-1}\right)\right] \quad , \ j = 1,2,\ldots$$

$$\Phi_j(z) = \Phi_0^{(-j)}(z) \quad , \quad j = -1,-2,\ldots.$$

où Log z est définie sur le domaine de Reiman :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \ : -\Theta < \arg z < 2\Pi+\Theta\} \ , \ (\Theta > 0) \quad .$$

Les Φ_j sont holomorphes sur D et vérifient

$$\forall\, j \in \mathbb{Z} \qquad \Phi_j' = \Phi_{j-1} \quad .$$

La fonction $z \text{ Log } z$ est bornée sur $\{z \in D : |z| \leqslant R \ , \ R > 0\}$.
Rappelons un résultat essentiel pour la démonstration du théorème qu'on donnera par la suite.

Théorème (Komatsu [13] , p.97)

Supposons que (M_p) vérifie (M.1) (M.2) (M.3) (et que $(M_p) \subset (M_p^* \, p!)$) .
Soit $F(x+iy)$ une fonction holomorphe sur V_Γ satisfaisant la condition suivante :

$\forall K$ compact dans Ω, $\forall \Gamma'$ sous-cône fermé de Γ,

$\forall L > 0$, $\exists\, C > 0$, $\exists\, \alpha > 0$ telles que

$$\sup_{x \in K} |F(x+iy)| \leqslant C \exp M^*\left(\frac{L}{|y|}\right)$$

Si $y \in \Gamma'$ et $||y|| < \alpha$.

Alors la valeur au bord, $F(x + i\,\Gamma\, 0)$ de F au sens des hyperfonctions est dans $\mathcal{D}'(\Omega, (M_p))$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ est un cône convexe ouvert} \\ V \text{ un ouvert de Stein} \\ V_\Gamma = (\mathbb{R}^n + i\,\Gamma) \cap V \\ \Omega = \mathbb{R}^n \cap V \end{array} \right.$$

Soit $P(D) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{m_p} D\right)$

d'après ce qui précède $P(D)$ est ultradifférentiel de classe $\{M_p\}$.

Posons

$$\forall j \in \mathbb{Z} \qquad \phi_j(z) = -\frac{1}{2\Pi i} P(D)\,(\Phi_j)\,(z)$$

la suite (ϕ_j) vérifie aussi :

$$\forall j \in Z \qquad \phi_j' = \phi_{j-1} \quad .$$

Il résulte de la proposition (I.4.3) de ce chapitre qu'il existe des constantes B' et L' telles que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : |z| \leqslant r \text{ et } t < |z| \text{ on ait } |\phi_j(z)| \leqslant B \exp M^*\left(\frac{L'}{t}\right) \sup_{|W-z|=t} |\Phi_j(W)|$$

ou encore $|\phi_j(z)| \leqslant (B'\, M) \cdot \dfrac{(2|z|)^{j-2}}{(j-2)!} \exp M^*\left(\dfrac{L'}{t}\right)$

M^* étant semi-continue inférieurement sur $]0, +\infty[$ et croissante on aura donc si $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| \leqslant r$ et $j \geqslant 2$

$$|\phi_j(z)| \leqslant (B' M) \frac{(2|z|)^{j-2}}{(j-2)!} \exp M^* (\frac{L'}{|z|})$$

2.- Solutions nulles ultradistributions de classe (M_p)

On va démontrer le théorème suivant :

Théorème.

Soit X une variété analytique réelle de dimension $(n+1)$, h un opérateur différentiel matriciel sur X , d'ordre t , S une hypersurface analytique de X , régulière en a , caractéristique pour h .

Si h et S vérifient les hypothèses du théorème 1 , il existe Ω_0 voisinage ouvert de a et $Y \in [\mathcal{D}'(\Omega_0, (M_p)]^m$, solution nulle de h , pour S en a , pour toute suite (M_p) vérifiant (M.0), (M.1), (M.2), (M.3) .

Preuve.

La démonstration de ce théorème est donnée en détail dans [14] . D'après le chapitre II nous avons r,C,ρ convenables.

$$Y_j^B(x) \ll C_1 \, C^j \frac{j!}{[r-t(x)]^{j+1}} \quad \text{avec} \quad t(x) = \rho x + x^1 + x^2 + \dots x^n$$

Y_j^B se prolonge donc en une fonction holomorphe $\mathcal{Y}_j^B$ sur

$$D = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} | \rho |z^0| + |z^1| + |z^2| + \dots + |z^n| < r\}$$

et nous avons

$$\mathcal{Y}_j^B(z) \ll C_1 \, C^j \frac{j!}{(r-t(z))^{j+1}} \quad .$$

Si $z \in D \bigcap \left[(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^n\right]$ nous avons alors :

$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{Y}_j^B(z)\times \phi_j(z^1)\right| \leqslant \frac{C_1\ C^2\ B'M}{[r-t(|z|)]^3} \times \left(\sum_{j=2}^{\infty}\left[\frac{2\ C|z^1|}{r-t(|z|)}\right]^{j-2} j(j-1)\right) e^{M^*\left(\frac{L'}{|z^1|}\right)}$$

pour $z \in \mathcal{Y}_0 = \{z \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\times \mathbb{C}^n \ |2\ C|z^1| + t(|z|) < r\}$ alors

$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{Y}_j^B(z) \times \phi_j(z^1)\right| \leqslant \frac{2\ C_1\ C^2\ B'\ M}{[r-2\ C|z^1|-t(|z|)]^3} \times \exp M^*\left(\frac{L'}{|z^1|}\right)$$

Soit $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}|\ \ 2\ C|x^1| + t(|x|) < r\}$

Si K est un compact de Ω_0

alors $\exists\ \varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K \qquad r - 2\ C|x^1| - t(|x|) \geqslant \varepsilon$$

Si $y = (y^0,y^1,\dots,y^n)$ est tel que $2\ C|y^1| + t(|y|) < \varepsilon$ et si $z = x + iy$

on a

$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{Y}_j^B(x+iy)\ \phi_j(x^1+iy^1)\right| \leqslant \frac{2\ C_1\ C^2\ B'\ M}{\varepsilon^3} \exp M^*\left(\frac{L'}{|z^1|}\right)$$

d'après le théorème (Komatsu [13] , p.97), énoncé précédemment, la valeur au bord de cette fonction existe et est dans $\mathcal{D}'(\Omega_0, (M_p))$

posons $f_j(x) = \phi_j^+(x) - \phi_j^-(x)$. Alors $\sum_{j=0}^{\infty} Y_j \times f_j \circ \phi \in \left[\mathcal{D}'(\Omega_0, (M_p))\right]^m$

et est une solution nulle de h pour S au voisinage de a .

C.Q.F.D.

B I B L I O G R A P H I E

|1| BERZIN-VAILLANT - Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples (J. Maths Pures et Appliquées 58, 1979 p. 165-216).

|2| J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy oscillatoire asymptotique ; lien avec l'hyperbolicité (J. Maths Pures et Appliquées 51, 1972, p. 231 à 256).

|3| BOURBAKI - Groupes et corps ordonnés, Paris 1964.

|4| BERZIN-VAILLANT - Bulletin Société Mathématique 2ème série, 102, 1978, p. 287-294.

|5| J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy asymptotique ; lien avec l'hyperbolicité (Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-1973).

|6| J. VAILLANT - Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques (J. Maths Pures 47, 1968, p. 1-40).

|7| J. VAILLANT - Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. (Ann. Institut Fourier, Grenoble 15.2 (1965) p. 225-311).

|8| C. WAGSCHAL - Problème de Cauchy analytique à données méromorphes (J. Maths Pures et Appliquées 51 (1972) p. 375-397).

|9| HAMADA - The singularities of the solutions of the Cauchy Problem (Publication RIMS, KYOTO University 5 (1969) p. 21-40).

|10| J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy analytique à données singulières pour opérateur différentiel bien décomposable (Journal Maths Pures et Appliquées 51 (1972) p. 465-488).

|11| S. MANDELBROJT - Séries adhérentes, Régularisation de suites et applications, Gauthier Villars, Paris (1952).

|12| C. ROUMIEU - Ultradistributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables (J. Maths Pures, 10 (63-63) p. 153-192)

|13| H. KOMATSU - Ultradistributions I , Structure Theorems and Caracterisation (J. Faculty Sciences University of Tokyo, Section I A, 20 (1973).

|14| O. HEBBAR - Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hyper-surface caractéristique double avec une condition de décomposition (Thèse de 3ème Cycle (1982)).

|15| S. MIZOHATA - Solutions nulles et solutions non analytiques (J. Maths-Kyoto, University I (1962) p. 271-302).

|16| H. KOMATSU - Irregularities of characteristic elements and construction of null. solution (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Section I A, Vol. 23, 1976, p. 297-342).