N° d'ordre : 539

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Gérard COMYN

OBJETS INFINIS CALCULABLES

Soutenue le 5 mars 1982 devant la Commission d'Examen

Président :	V. CORDONNIER
Rapporteurs :	V. CORDONNIER
	M. NIVAT
	G. PLOTKIN
Examinateurs :	A. ARNOLD
	G. BERRY
	M. DAUCHET
	G. WERNER

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique
M. DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. GERVAIS Michel	S.E.S.
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HANGAN Théodore	Mathématiques
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LAURENT François	I.E.E.A.
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques

/

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

J'exprime à Messieurs les Membres du Jury ma profonde gratitude :

à A. ARNOLD et G. BERRY pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail;

à V. CORDONNIER dont le rôle de Président et de Rapporteur traduit l'amicale confiance et l'intérêt scientifique qu'il n'a cessé de manifester ;

à Max DAUCHET pour sa passion communicative de la recherche, son sens aigu du contre-exemple, son amitié solide et sa patience remarquable. J'espère que nous aurons souvent encore l'occasion de travailler ensemble ;

à Maurice NIVAT qui a donné à ce travail son orientation et sa consistance, et dont la perspicacité, la motivation et l'accueil chaleureux furent déterminants pour la réalisation de cette Thèse;

à G. PLOTKIN qui, malgré ses nombreuses activités, l'éloignement et les problèmes linguistiques, m'a fait l'honneur de s'intéresser à ce travail et d'en être un rapporteur attentif ;

à G. WERNER dont la compétence et la connaissance en logique et en théorie de la récursion ont été très précieux dans l'élaboration des résultats relatifs aux aspects calculables.

De façon générale, je remercie tous mes collègues, et plus particulièrement E. DUSZYNSKI, J. LOSFELD et G. STAMON, qui m'ont amicalement incité à terminer ce travail et ont accepté, parfois subi, mon manque de disponibilité pendant la période de rédaction.

Le travail de dactylographie a été entièrement réalisé par Janine DESCARPENTRIES qui a poussé la conscience professionnelle et le dévouement amical jusqu'au sacrifice d'une partie de ses vacances : Qu'elle trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance, ainsi que Madame DEBOCK qui a imprimé et relié cette thèse avec soin et rapidité, malgré une situation familiale difficile.

Il serait injuste d'omettre dans ces remerciements MARIE-FRANCE, HELENE et ANTOINE qui ont stoïquement supporté mon absence, physique et intellectuelle, et m'ont permis, par leur patience et leur compréhension, de conclure ce travail.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE II - COMPLETION METRIQUE ET CPO's INFINITAIRES

CHAPITRE III - ESPACES DE FONCTIONS

CHAPITRE IV - CPO's INFINITAIRES EFFECTIFS ET ESPACES METRIQUES RECURSIFS

CHAPITRE V - OBJETS INFINITAIRES DECIDABLES ET LIMITES DE SUITES DE CAUCHY EFFECTIVES

INTRODUCTION

Les langages de programmation manipulent des objets dont certains sont finis et peuvent être implémentés sans problème; d'autres sont infinis et donc ne peuvent être représentés dans un ordinateur de mémoire finie. Un exemple explicité par STOY [133] est celui des fonctions. Certaines sont finies, comme l'application qui associe aux adresses leurs contenus, et représentables de façon interne; pour les autres, on ne peut accéder qu'à des *approximations* finies de leur graphe : On ne pourra véritablement "calculer" un tel objet infini qu'en définissant un programme d'énumération d'approximants de plus en plus précis dont l'objet infini est la "limite".

a) L'identification entre objet infini calculable et programme de calcul de cet objet est bien connue dans le cas des réels calculables [113,143] , que l'on choisisse des approximations par fractions continues, intervalles à bornes rationnelles ou représentations décimales. Mais si tout réel calculable est (identifié à) un programme, une fonction définie sur les réels calculables devient alors une fonctionnelle d'ordre supérieur qui doit à son tour être considérée en tant qu'objet infini calculable. La construction des objets infinis calculables utilisés en programmation doit donc être valable pour tout type (fini) de fonctionnelle : le calcul d'une expression de la forme $f(x)$, où x est un objet infini calculable, peut alors être entreprise de deux façons (dont EGLI & CONSTABLE [44] ont prouvé l'équivalence) :

- soit en calculant le résultat à partir des approximations (finies) du graphe de x : C'est le point de vue "mathématique" ou "dénotationnel".

- soit en travaillant directement sur le programme associé à l'objet calculable x : C'est le point de vue "opérationnel".

Le calcul des objets infinis joue donc un rôle privilégié dans l'étude de la sémantique des langages de programmation : c'est dans ce cadre essentiellement que se situera ce travail.

b) L'exemple des réels calculables montre également qu'il existe plusieurs types d'approximations. Or, le calcul d'une expression de la forme $f(x)$, où x est approché par des morceaux finis x_i, ne peut être effectué qu'à partir (d'approximants finis) de $f(x_i)$; ce qui nécessite en particulier que, si x est "limite" des x_i, $f(x)$ soit aussi limite des $f(x_i)$: cette notion de *continuité* est fondamentale et permet de rendre compatibles l'approximation d'un objet infini et les calculs effectués sur cet objet.

WIEDMER [144] et MOSCHOVAKIS [96] ont montré que certaines approximations de réels calculables ne permettaient pas de rendre continues des opérations aussi élémentaires que l'addition : C'est le cas en particulier des approximations par représentation décimale finie. Nous nous intéresserons essentiellement aux approximations (dites *finitaires*) qui permettent l'extension (par continuité) aux objets infinis des opérations sur leurs approximants finis.

c) Enfin, les études nombreuses relatives aux calculs des réels ont généralement été entreprises d'un point de vue métrique par les analystes numériciens, la notion même de précision de calcul n'ayant de sens que par rapport à une métrique donnée. Or les informaticiens ont, à partir des résultats de SCOTT [122], travaillé sur des ensembles ordonnés particuliers (les CPO's, que nous définissons dans les pages qui suivent); afin de comparer ces deux démarches, nous aurons donc à considérer simultanément, à partir des mêmes approximants finitaires, les "chemins de calcul" différents que sont les suites de Cauchy et les chaînes croissantes.

Les résultats qui suivent ont requis un travail de synthèse préalable qui a permis de donner une consistance aux notions d'objets finitaires et infinitaires. La plupart d'entr'eux expriment simplement, d'un point de vue métrique, des propriétés fondamentales de convergence ou de calculabilité.

- On sait définir des topologies séparées sur des CPO's (topologie dite "de Cantor" utilisée par PLOTKIN [108] , topologie de BETREMA [17]) qui en font des espaces métrisables; mais l'explicitation du choix de métriques restait à faire (toutes les métriques possibles ne sont pas uniformément équivalentes).
  Nous définissons une *métrique sur les CPO's* construits à partir d'une base finitaire : Cette métrique très naturelle s'avère uniformément équivalente à celle de BOASSON-NIVAT [20] sur les mots et à celle de ARNOLD-NIVAT [3] sur les arbres.

- La topologie induite étant celle de Cantor, des propriétés de nature topologique peuvent en être déduites; mais nous nous attachons essentiellement aux *propriétés spécifiquement métriques :*
  Nous montrons ainsi que *les objets infinis construits à partir d'une collection donnée d'objets finitaires par suites de Cauchy et par chaînes croissantes sont les mêmes.*
  Nous montrons également que *les objets infinis calculables construits à partir des suites de Cauchy effectives ne sont autres que les objets infinis décidables* obtenus par chaînes croissantes effectives.

- Nous obtenons aussi des résultats de nature topologique qu'il aurait été possible d'obtenir à partir de la seule topologie, mais qu'une approche métrique rend particulièrement agréables : Ainsi, la convergence au sens de notre métrique coïncide-t-elle effectivement avec la convergence simple; elle coïncide même avec la convergence uniforme dans le cas de suites croissantes de fonctions.

Dans cette introduction, nous rappelons d'abord le rôle joué par les approximations (au sens de SCOTT) dans la sémantique des langages de programmation; nous montrons ensuite comment cette définition des approximations a été utilisée dans le lambda-calcul et dans l'étude sémantique des langages typés. Nous détaillons enfin les motivations (CPO's et espaces métriques), le plan et les résultats de ce travail.

I - QUELQUES RAPPELS :

La notion de calcul sur machine est généralement associée à celle de finitude : Nombre fini d'états internes, capacité finie de stockage d'information, temps d'exécution fini. Ce sont les logiciens (l'idée des machines de Tűring fut émise dès 1936) qui s'intéressèrent d'abord au comportement infini des machines; MINSKY [95] note, en 1967, que ce n'est pas la finitude des machines qui limite leur utilisation mais le temps d'exécution des calculs et la complexité conceptuelle de leurs structures (ou programmes) et insiste sur la nécessité de s'intéresser à des machines capables, à un instant donné, de traiter une quantité finie d'information et susceptibles de "grossir" indéfiniment avec le temps ("growing machines"). Les machines de Tűring, répondant à cette conception, servirent de support à la théorie des fonctions calculables [113] pour laquelle d'autres approches devaient être ultérieurement proposées ([69,83,88,7,...]) .

D'autres considérations permettent aujourd'hui de donner une dimension nouvelle à cette approche de la calculabilité. Ainsi la notion même de système conduit à celle de calcul infini; la définition de systèmes hiérarchisés de fichiers est couramment associée à une arborescence (potentiellement) infinie ; les définitions de types [92,127] , les calculs sur les réels [145] montrent qu'il est indispensable de parvenir à construire *de façon compatible avec le fonctionnement d'un ordinateur* des objets "infinis" à partir d'objets "finis" les approchant; donc de donner un sens à la notion d'*approximation* (par machine) et de *limite* (effective) *d'approximations.*

C'est SCOTT [122] qui définit le concept d'objet *"continu"* qu'il situa entre le *"discret"*, associé à une quantité d'information finie, et l' *"infini arbitraire"* des mathématiciens; ainsi, pour approcher les réels, on peut considérer le treillis continu des intervalles à bornes rationnelles, ordonné par :

$$I \leq J \ \underline{\text{ssi}} \ I \supseteq J$$

admettant la droite réelle pour élément minimal et l'intervalle vide pour élément maximal. De façon générale, SCOTT définit une théorie des ensembles ordonnés par :

$x \leq y$ <u>ssi</u> x approche y (ou x contient moins d'information que y)

qui devait s'avérer particulièrement fructueuse dans l'étude de la sémantique des langages de programmation.

I.A.- APPROXIMATIONS ET SÉMANTIQUE DES LANGAGES DE PROGRAMMATION.

La sémantique des langages de programmation est née du besoin ressenti par les informaticiens d'associer aux langages de programmation syntaxiquement bien définis une expression non ambigüe de leur signification; autrement dit d'associer à un programme un procédé formel permettant de caractériser proprement ce que fait ce programme.

Diverses "écoles" ont vu le jour : sans entrer dans les détails, mentionnons simplement diverses approches à ce problème, qui illustrent l'intérêt d'une définition claire de la notion d'approximation.

. Une première sémantique est dite *opérationnelle* (elle est parfois appelée "naïve" dans la mesure où elle est orientée vers une explicitation du type "faire ceci, puis faire cela") et peut être exprimée par un interpréteur abstrait [111] qui exécute les instructions et manipule les données du programme.

. Une seconde sémantique plus éloignée des considérations d'implémentation est dite *dénotationnelle* et associe directement à un programme une fonction entre données et résultats; elle a la propriété intéressante, par opposition à la sémantique précédente, de séparer clairement domaine syntaxique et domaine sémantique.

. Enfin, la sémantique *algébrique*, s'inspirant des travaux de POST et MARKOV, travaille directement sur les schémas de programmes : elle privilégie la structure syntaxique et interprète a posteriori les symboles fonctionnels qui apparaissent dans cette structure.

L'équivalence du point de vue dénotationnel et opérationnel a été montrée par RAVI SETHI dans [111]; considérons dans ce cadre une équation récursive telle que :

$$F(x,y) = \underline{\text{si}} \;\; x = 0 \;\; \underline{\text{alors}} \;\; y \;\; \underline{\text{sinon}} \;\; F(x-1 \; , \; 1+y)$$

Il est facile de vérifier que les fonctions :

$$f \equiv \lambda xy.x+y \quad \text{et} \quad g \equiv \lambda xy. \;\; \underline{\text{si}} \;\; x < 0 \;\; \underline{\text{alors}} \;\; 0 \;\; \underline{\text{sinon}} \;\; x+y$$

sont points fixes de cette équation, mais aucun d'entre eux ne peut être considéré comme <u>le</u> point fixe. Par contre, une fonction définie par :

$$h \equiv \lambda xy. \;\; \underline{\text{si}} \;\; x < 0 \;\; \underline{\text{alors}} \;\; \text{indéfini} \;\; \underline{\text{sinon}} \;\; x+y$$

est telle que, pour tout point fixe k de l'équation précédente, $k(x,y)$ et $h(x,y)$ sont égaux dès lors que $h(x,y)$ est défini. En ce sens, la fonction h peut être considérée comme minimale.

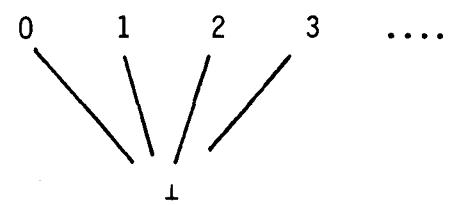
Pour expliciter cette notion de minimalité, il convient d'abord de régler ce problème d'indétermination ou de non définition de variables : Considérons les programmes élémentaires :

P1	P2
$x \leftarrow 1$	
$y \leftarrow 2$	$y \leftarrow 2$
$z \leftarrow x+y$	$z \leftarrow x+y$

Dans le programme P2 , la variable x n'est pas initialisée. Décidons de désigner par $\perp$ (élément "bottom") sa valeur. Dès lors le domaine de définition des variables x, y et z n'est plus l'ensemble $\mathbb{N}$ mais $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$; L'ordre sur cet ensemble doit traduire le rôle privilégié donné à $\perp$: Notons :

$\perp \leq i$ pour exprimer le fait que $\perp$ apporte "moins d'information" que i , pour tout $i \in \mathbb{N}$

Le domaine de définition des variables x, y, z est donc le domaine "plat" représenté comme suit :



Un calcul consistera donc à partir de la valeur $\perp$, pour toutes les variables des programmes, pour "remonter" jusqu'à une valeur définie.

Revenons alors aux programmes P1 et P2 précédemment utilisés : il est logique d'obtenir pour P1 le résultat défini z et pour P2 le résultat indéfini $(z = \perp)$; il convient donc de poser :

$$i + \perp = \perp + i = \perp \qquad \forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{\perp\}$$

Autrement dit, l'addition doit vérifier (*propriété de monotonicité*) :

$$(i,j) \leq (i',j') \Longrightarrow i+j \leq i'+j' \qquad \forall\, i,i',j,j' \in \mathbb{N} \cup \{\perp\}$$

où l'ordre sur les couples est défini par :

$$(i,j) \leq (i',j') \ \underline{\text{ssi}} \ \ i \leq i' \ \text{ et } \ j \leq j'$$

On peut alors revenir à l'équation récursive évoquée précédemment, cette dernière peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\Phi(F)(x,y) = \ & \underline{\text{Si}} \ \ x = 0 \ \ \underline{\text{alors}} \ \ y \\ & \underline{\text{Sinon}} \ \ F(x-1,y+1)\end{aligned}$$

Etendons à l'espace des fonctions de $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ dans $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ l'ordre précédemment défini : Soit $\perp$ la fonction $\lambda x.\perp$ partout indéfinie. Considérons la séquence :

$$\perp \, , \, \Phi(\perp) \, , \, \Phi^2(\perp) \, , \, \ldots \, , \, \Phi^n(\perp) \, , \, \ldots$$

Intuitivement, il est facile de voir que la fonction définie par $\Phi^n(\perp)$ n'est autre que :

$$\lambda xy. \ \underline{\text{si}} \ \ 0 \leq x < n \ \ \underline{\text{alors}} \ \ x+y \ \ \underline{\text{sinon}} \ \ \perp$$

et que, pour tous les couples (x,y) tels que $\Phi^n(\perp)$ est défini, la fonction $\Phi^{n+1}(\perp)$ est également définie et prend la même valeur; on a donc :

$$\perp \leq \Phi(\perp) \leq \ldots \leq \Phi^n(\perp) \leq \ldots .$$

L'ensemble des $\Phi^n(\perp)$ est appelé *chaîne croissante* et doit être associé à une augmentation progressive de l'information relative aux fonctions calculées. Chaque fonction calculée est une *approximation* de la fonction définie par :

$$\lambda xy. \ \underline{\text{si}} \ \ x \geq 0 \ \ \underline{\text{alors}} \ \ x+y \ \ \underline{\text{sinon}} \ \ \perp$$

Cette fonction peut être définie en tant que *supremum* de la chaîne infinie précédente : Pour cela, l'espace des fonctions doit être complet (pour le Sup de chaîne croissante); il possède alors une structure de CPO (Complete Partial Order).

Enfin, une condition nécessaire pour que $h = \mathrm{SUP}_n \, \Phi^n(\perp)$ soit point fixe de la fonctionnelle Φ est que cette dernière soit *continue*, c'est-à-dire telle que :

$$\Phi(\sup_n \Phi^n(\perp)) = \sup_n(\Phi^{n+1}(\perp)) .$$

Ces notions sont fondamentales et servent de support à d'autres travaux concernant les approximations; mais il est clair que $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ ne peut être considéré comme le seul domaine de calcul; Ainsi, la sémantique algébrique devait introduire un nouveau domaine de calcul: *le magma libre complet* [101] . Associons en effet à l'équation récursive précédente le schéma de programme suivant :

$$F(x,y) = t(x,y,F(a(x),s(y)))$$

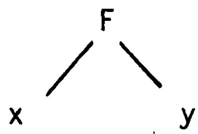
Alors l'équation récursive est une instance de ce schéma dans la mesure où l'on obtient cette équation à partir du schéma en remplaçant les symboles de fonction t , a et s par les fonctions :

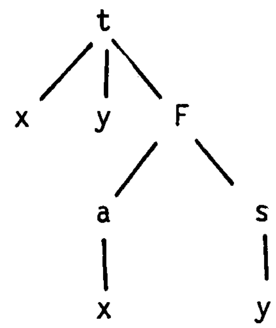
$$\begin{aligned} t(x,y,z) &\equiv \underline{\text{si}}\ x = 0\ \underline{\text{alors}}\ y\ \underline{\text{sinon}}\ z \\ a(x) &\equiv x - 1 \\ s(y) &\equiv y + 1 \end{aligned}$$

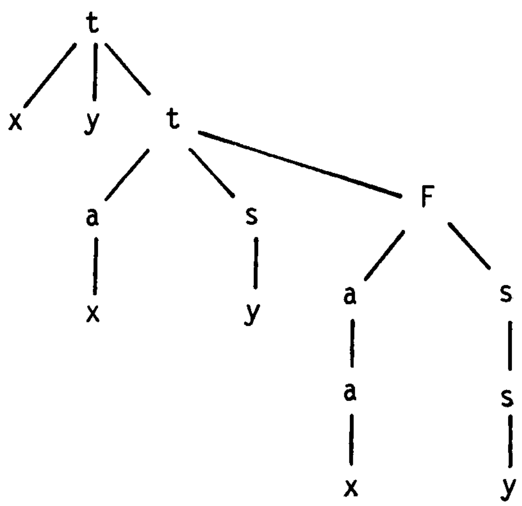
Un tel schéma calcule la suite des expressions :

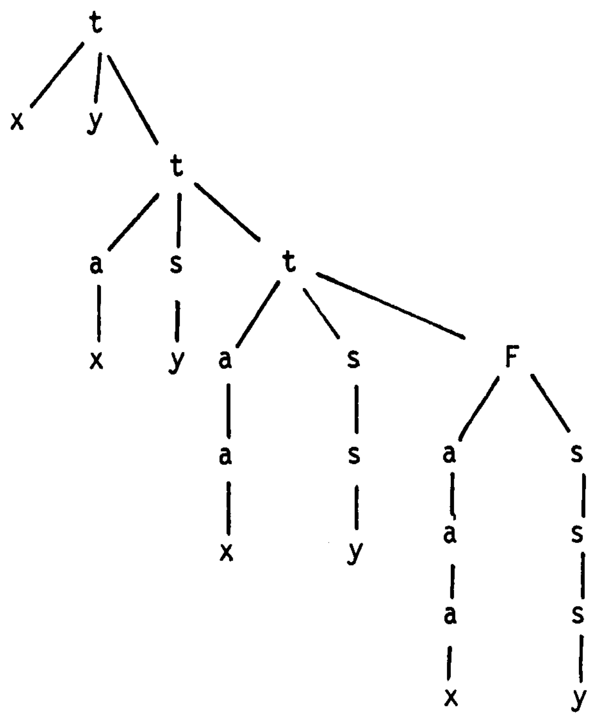
$$t(x,y,F(a(x),s(y)))$$
$$t(x,y,t(a(x),s(y),F(a(a(x)),s(s(y)))$$
$$t(x,y,t(a(x),s(y),t(a(a(x)),s(s(y)),F(a(a(a(x))),s(s(s(y))))$$

que l'on peut représenter par les arbres :

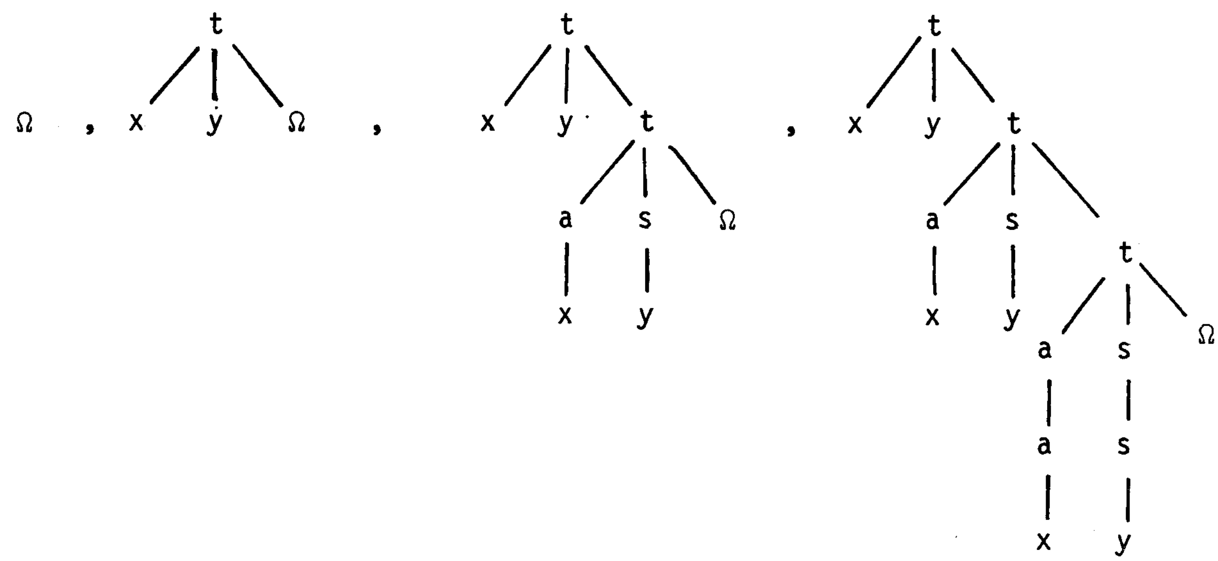








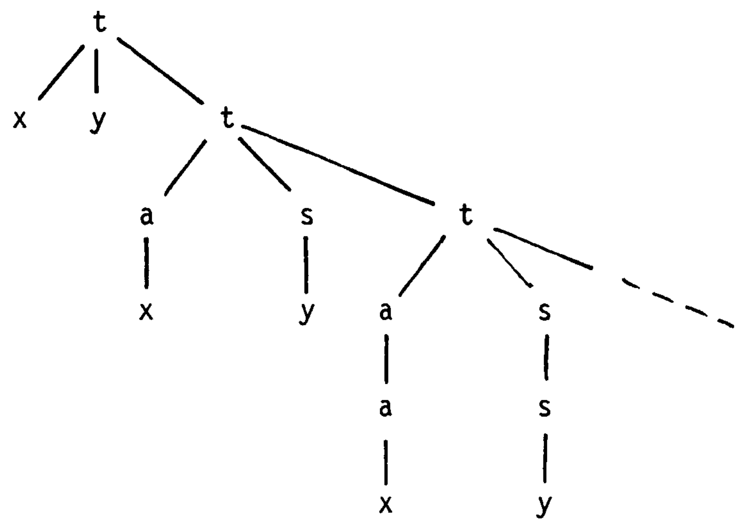
Dans la mesure où F est un symbole de fonction inconnu, on peut lui associer un symbole syntaxique indéfini noté Ω (qui correspond à l'élément $\perp$ précédemment utilisé, c'est-à-dire à une absence d'information). On peut ainsi associer à la suite d'arbres précédente la suite :



croissante pour l'ordre :

$A \leq A'$ <u>ssi</u> A' est obtenu à partir de A par remplacement d'un ou plusieurs Ω's par d'autres termes.

Comme précédemment, le supremum d'une telle chaîne nécessite que l'espace des arbres soit muni d'une structure de CPO; chaque élément de cette chaîne est une approximation de l'arbre infini :



qui contient toute l'information désirable en ce sens que les calculs des programmes obtenus en interprétant le schéma initial sont images, dans une application convenable, de cet arbre infini.

I.B.- APPROXIMATIONS DANS LE LAMBDA-CALCUL

Le lambda-calcul donne un parfait exemple de la notion d'approximation et de calcul infini. Tous les exemples de programmes utilisés jusqu'à présent ne comportaient que des variables et des fonctions; or, de nombreux langages de programmation ont la particularité de permettre la manipulation de symboles de fonctions en tant qu'objets du langage, c'est-à-dire de permettre de définir des fonctionnelles d'ordre quelconque. Le Lambda-calcul de CHURCH [25] est un système formel utilisant fonctions et fonctionnelles; une fonction est dénotée par une expression et un mécanisme de réduction (noté $\rightarrow$) appliqué à cette expression suivie des arguments de la fonction en calcule la valeur pour ces arguments. Le Lambda-calcul a été utilisé pour l'étude des langages de programmation par traduction en Lambda-calcul des programmes et utilisation des propriétés des systèmes formels bien connues des logiciens [8,9] .

Les λ-termes sont généralement divisés en deux classes; ceux qui possèdent une forme normale (dont les "valeurs" sont définies) et ceux qui n'en possèdent pas, que l'on a longtemps considérés comme indéfinis.

On doit à WADSWORTH [139] une remise en cause de cette classification : En effet, un terme ne peut être considéré comme indéfini s'il n'a pas une forme normale; ainsi, si A est un λ-terme sous forme normale et si l'on définit $M = \lambda x.x\ IA$ et $N = \lambda x.x\ KA$, il est clair que M et N n'ont pas de forme normale, mais :

$$MK \xrightarrow{*} I \quad \text{et} \quad NK \xrightarrow{*} K \ .$$

En identifiant M et N, on obtiendrait $I = K$, ce qui rendrait le λ-calcul inconsistant.

WADSWORTH montra qu'il était possible de distinguer parmi les termes n'ayant pas de forme normale :

- Les termes appelés "non solvables" tels que :

  $M_1 = \Delta\ \Delta$ avec $\Delta = \lambda x.xx$

  ou

  $M_2 = \Delta\ T$ avec $T = \lambda x.xxx$

  tels que :

  $M_1 \xrightarrow{*} M_1$ et $M_2 \xrightarrow{*} ((\lambda x.xxx)T)TT \ldots$

  Si de tels termes sont considérés comme des fonctions, on peut leur appliquer des arguments; quelle que soit la manière de procéder, on n'obtiendra pas une forme normale et le calcul se prolongera indéfiniment. De tels termes, dont la forme commune est :

  $$\lambda x_1\ x_2 \ldots x_n \ .\ ((\lambda x.M)N)\ X_1\ X_2 \ldots X_m$$

  sont aussi appelés *"non en forme normale gauche"* (ou *"non en forme normale de tête"*).

- Les termes dits *"solvables"* tels que l'opérateur de point fixe Y défini par :

  $$Y = \lambda f.f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))$$

  tels que :

  $$Y(KA) \xrightarrow{*} A \quad \text{pour tout terme } A$$

  Autrement dit, l'application d'arguments à ces fonctions permet d'aboutir à une forme normale; leur forme générale étant :

$$\lambda x_1\ x_2 \dots x_n .\ Z\ N_1\ N_2 \dots N_m$$

ils sont également appelés *"en forme normale gauche"* (ou *"forme normale de tête"*).

Les termes non solvables sont représentés par le $\perp$ (totalement indéfini) dans le modèle D_∞ de SCOTT [124,9] ce qui correspond au fait que de tels termes ne pourront être évalués; par contre les formes normales gauches seront évaluées par un programme sans fin, mais ne sont pas associées à l'élément indéterminé.

On doit à WADSWORTH [139] puis à J.J. LEVY [79] une définition claire des *approximations dans le λ-calcul* utilisant les arbres de BÖHM : Si l'on introduit en effet le terme Ω (pour l'indéfini) dans les λ-termes, tout rédex (de la forme $(\lambda x.M)N$) sera "représenté" par Ω ; ainsi, on associera au terme :

$$M = \lambda xy.y(x(\lambda z.P)Q))(xy)((\lambda w.R)S)$$

la β-normale forme gauche :

$$M' = \lambda xy.y(x(\Omega))(xy)(\Omega)$$

qui peut être considérée comme une *forme normale gauche approchée* de M . On voit ainsi que tout terme non solvable sera représenté par Ω ; par contre l'opérateur de point fixe Y donne, par réduction, des termes de la forme :

$$\lambda f.f^n(XX) \qquad \text{avec} \qquad X = \lambda x.f(xx)$$

ses formes normales *approchées* sont donc :

$$\{\lambda f.f^n(\Omega) | n \geq 0\}$$

Ces approximations successives peuvent être représentées par la suite d'arbres (de BÖHM) :

```
Ω  ,  λf.f  ,  λf.f  ,  λf.f
       |        |        |
       Ω        f        f
                |        |
                Ω        f
                         |
                         Ω
```

qui tend, dans un espace approprié, vers l'arbre infini :

```
λf.f
   |
   f
   |
   f
   :
```

On trouvera dans [79] une étude complète des propriétés de ces approximants et de l'espace complété qui doit avoir une structure de CPO pour que la limite des approximations puisse être définie.

I.c.- CPO'S ET SÉMANTIQUE DE LANGAGES TYPÉS.

L'intérêt de la structure de CPO apparaît plus nettement encore dans l'étude de la sémantique de langages typés, et plus particulièrement de λ-calculs typés (tels que LCF [94,105]) pour lesquels divers modèles ([124,50,43]) ont été proposés dans le cadre de la théorie des CPO's.

Notons en effet que les CPO's possèdent des propriétés permettant la construction de fonctions de type fini : Ainsi, si D et D' sont des CPO's, l'ensemble $[D \to D']$ des fonctions continues de D dans D' est un CPO; il en est de même du produit cartésien fini $\underset{i \in I}{X} D_i$, où $\{D_i | i \in I\}$ est une famille de CPO's; enfin, l'isomorphisme $[D \times D' \to D''] \simeq [D \to [D' \to D'']]$ qui associe, à tout $f \in [D \times D' \to D'']$, l'élément $\lambda x(\lambda y.f(x,y))$, permet de ne considérer que des fonctions à un seul argument.

Dans la définition de la sémantique d'un λ-calcul typé, une *interprétation* consistera à associer, aux termes typés définis inductivement par :

$$x^{\tau} \text{ est un terme de type } \tau$$
$$t^{(\tau \to \sigma)}\, s^{\tau} \text{ est un terme de type } \sigma$$
$$\lambda x^{\tau}.t^{\sigma} \text{ est un terme de type } (\tau \to \sigma)$$

une valeur appartenant à un domaine (= CPO) associé au type correspondant : Ainsi on associera à un terme x^{τ} un élément du CPO D_{τ}, où les CPO's D_{τ} sont définis inductivement par :

$$D_{(\tau \to \sigma)} = [D_{\tau} \to D_{\sigma}]$$

Si 0 est un type de base et D_0 un CPO donné (par exemple, le CPO $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$) , on peut ainsi construire une sémantique pour les fonctionnelles d'ordre supérieur; ainsi, si f est une fonction de type $(0 \to 0)$, son plus petit point fixe λf est de type 0 : Y est donc de type $((0 \to 0) \to 0)$ et une interprétation lui associera un élément de $[[D_0 \to D_0] \to D_0]$ qui est un CPO d'après les propriétés énoncées auparavant.

I.c.- CPO'S ET DOMAINES CALCULABLES.

Dans la sémantique des langages de programmation, les constructions proposées doivent être réalisables par des machines; autrement dit, on ne peut retenir que des interprétations associant, à des objets syntaxiques donnés (symboles de fonctions, de fonctionnelles dans LCF) des fonctions ou fonctionnelles calculables. La sémantique proposée pour les langages typés doit donc être adaptée à cette nouvelle contrainte et doit conduire à une définition de CPO's particuliers, appelés *domaines calculables*, dont les propriétés algébriques et calculables demeurent stables par passage aux fonctionnelles d'ordre supérieur.

En théorie classique de la calculabilité, le domaine calculable utilisé est la famille $\mathbb{RE} \subset P(\mathbb{N})$ des ensembles récursivement énumérables construits à partir de $\mathbb{N}$ par une "procédure effective" [95,113] ou algorithme. Dans ce domaine, les parties finies de $\mathbb{N}$ jouent un rôle privilégié et permettent d'engendrer effectivement $\mathbb{RE}$ (chaque ensemble récursivement énumérable est point fixe d'un opérateur d'énumération) : L'ensemble $P_\omega(\mathbb{N})$ de ces parties finies joue le rôle de *base effective*.

Cette théorie fut étendue aux domaines du λ-calcul typé de deux façons différentes : certains auteurs ([121,119,44,128]) modifièrent la sémantique du λ-calcul typé en donnant à chaque CPO D_τ une base effective; d'autres ([48,49,50,30]), s'inspirant de la théorie des ensembles énumérés de MALCEV [85,86], se sont attachés à définir de tels domaines en tant que familles effectives d'ensembles récursivement énumérables.

Dans les deux cas, les éléments calculables sont définis en tant que sup's de chaînes croissantes effectives d'éléments de la base effective qui constituent des approximations des éléments calculables engendrés : Cette construction est réalisable par programme ; d'autre part, si D et D' sont des domaines calculables, l'ensemble des fonctions continues calculables de D dans D' est encore un domaine calculable : Cette définition des éléments calculables est donc valable pour tout type (fini) de fonctionnelle.

II - CPO's ET ESPACES METRIQUES.

La topologie de CPO couramment utilisée [124,145] est telle que tout ouvert contienne avec un élément tous ceux qui l'approchent et ne puisse contenir une limite d'approximants sans contenir au moins l'un d'entr'eux; cette topologie a l'intérêt de faire coïncider la définition topologique classique de la continuité avec celle que nous avons évoquée précédemment (préservation des sup's de chaînes croissantes). Les ouverts de base de cette topologie sont formés d'objets infinitaires possédant en commun une "information positive" telle que "x contient un élément finitaire e" : Une telle topologie n'est pas séparée.

Il n'est pas étonnant qu'en l'enrichissant d'ouverts de base associés à une "information négative" telle que "x ne contient pas tel élément finitaire e", on parvienne à la rendre séparée : C'est la démarche suivie par PLOTKIN [108] (la topologie obtenue est dite "de Cantor" ou "de Lawson") et par BETREMA [17] . D'autre part, une sémantique des programmes récursifs non déterministes a été entreprise dans [3,102,103] dans des espaces d'arbres considérés, non en tant que CPO's , mais en tant qu'espaces métriques complets : Il était donc naturel de chercher à *définir une métrique sur des CPO's afin de faire de ces derniers des espaces métriques complets.*

II.A.- SUITES DE CAUCHY ET CHAÎNES CROISSANTES.

Outre les avantages, bien connus des numériciens, de l'utilisation d'une métrique (aspects quantitatifs : Précision des calculs, vitesse de convergence, etc...), on peut citer bien des exemples où une approche ordonnée s'avère insuffisante. Ainsi, dans [124] , SCOTT donne l'exemple d'un cercle, considéré en tant que limite d'une suite croissante (pour l'inclusion) de polygônes; or, il existe bien d'autres façons de réaliser des approximations : On peut par exemple considérer une figure quelconque dessinée sur un écran (lequel peut être considéré comme l'élément bottom dans une suite d'approximants); puis réaliser une partition de l'écran en ne gardant que les rectangles dont la surface de l'intersection avec la figure est supérieure à la moitié de la surface de ces rectangles : En réalisant des partitions de plus en plus fines de l'écran, on obtient ainsi une suite qui n'est ni croissante, ni dirigée au sens des CPO's, mais qui tend vers la figure initiale.

De façon plus précise, la littérature propose des exemples d'approximations non ordonnées. Ainsi, pour la métrique de BOASSON-NIVAT [20] définie sur le monoïde libre Σ^* :

$$d(\alpha,\beta) \begin{cases} = 0 \text{ si } \alpha = \beta \\ = 2^{-\mu n[\alpha[n] \neq \beta[n]]} \end{cases}$$

on peut définir des suites (telles que $x_i = a^i b$, avec $\Sigma = \{a,b\}$) qui convergent (vers a^ω lorsque i tend vers l'infini), mais qui ne sont pas croissantes : Il est intuitivement clair que, pour toute suite croissante (x_i) (pour l'ordre : "être facteur gauche de"), on a :

$$x = \text{SUP } x_i \Longrightarrow x = \lim x_i$$

alors que le contraire est faux : On peut donc dire que <u>les suites de Cauchy</u> qui tendent vers les éléments de Σ^∞ , ensemble des mots finis ou infinis, <u>offrent "plus d'approximations" que les suites ordonnées</u>. Nous associons de façon générale à toute suite de Cauchy une suite croissante ayant même limite : Ainsi en associant à la suite $x_i = a^i b$, la suite croissante (y_i) appelée *direction* associée à $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et définie par :

y_i = information commune aux éléments de la suite (x_i) d'indice supérieur à i

$= a^i$

on a évidemment :

$$\text{SUP } y_i = \lim x_i = a^\omega$$

Ces résultats sont également explicités dans [3] dans le cadre de la sémantique algébrique, les arbres infinis pouvant être considérés comme limites de suites de Cauchy ou Sup's de chaînes croissantes d'arbres finis.

De façon générale, CPO infinitaire (ω-algébrique et "consistently complete" au sens de [107]) et espace métrique complet peuvent être mis en bijection par la définition d'une métrique appropriée, équivalente à celle de NIVAT [102] sur les arbres et sur les mots : Si l'on définit une énumération de l'ensemble (supposé dénombrable) des objets finitaires, cette métrique consistera à rendre proches des éléments infinitaires qui ne sont "séparés" que par des éléments finitaires énumérés suffisamment loin.

II.B.- ESPACE DE FONCTIONS.

L'ensemble des fonctions continues d'un CPO infinitaire dans un autre étant lui-même un CPO infinitaire, les réflexions précédentes s'appliquent aussi aux espaces de fonctions continues. Les outils métriques apportent des propriétés intéressantes exprimées en termes de convergence : Nous en illustrons l'intérêt sur l'exemple simple du CPO noté $\mathcal{D}$ des représentations décimales de réels compris entre deux valeurs finies a et b et considérées comme sous-ensemble de Σ^∞, avec $\Sigma = \{0,1,2,\dots,9\} \cup \{,\}$.

Les éléments finitaires de l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{D}$ dans lui-même sont les fonctions en escalier de la forme :

$$(x,y)(z) = \begin{cases} y & \underline{\text{si}} \quad z \geq x \\ \varepsilon & \underline{\text{sinon}} \end{cases}$$

On montre que si f et g sont des fonctions continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ une fonction en escalier (x,y) "sépare" f et g si et seulement si y "sépare" $f(x)$ et $g(x)$. Si l'on considère une énumération des éléments finitaires de $\mathcal{D}$ telle que toutes les représentations de réels comportant n chiffres après la virgule soient énumérées avant celles qui en comportent $n+1$, on peut associer effectivement à tout entier n le rang $r(n)$ à partir duquel $\mathcal{D}$ ne comporte plus que des représentations à plus de n chiffres significatifs. On a donc :

$d(f,g) < \frac{1}{r(n)} \Longrightarrow$ pour tout réel x donné à 10^{-n} près , $f(x)$ et $g(x)$ ont au moins n chiffres significatifs en commun.

Autrement dit, la convergence au sens de notre métrique implique la convergence simple (et inversement) : Ce résultat est obtenu dans le cas général de l'ensemble des fonctions continues d'un CPO infinitaire dans un CPO infinitaire.

Dans cet espace de fonctions, il est facile de trouver des exemples de suites de Cauchy de fonctions qui convergent, mais n'ont aucune "bonne" propriété du point de vue de l'ordre. Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

converge simplement, et au sens de notre métrique, vers e^x. Le calcul de e se fera par limite d'une suite de Cauchy $(f_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ d'approximants, mais on peut remarquer que cette suite :

$$f_0(1) = 1 \ , \ f_1(1) = 2 \ , \ f_2(1) = 2{,}5 \ , \ f_3(1) = 2{,}66 \ , \ f_4(1) = 2{,}707$$

n'est par ordonnée, au sens de l'ordre "être facteur gauche de " sur Σ^* . La suite dirigée associée (a_i) à cette suite de Cauchy permet d'obtenir, pour tout n , le sous-mot correct dans la représentation $f_n(1)$; autrement dit,

$$a_0 = \varepsilon \quad , \quad a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 2{,}7 \quad \text{etc...}$$

II.B.- CRITÈRES DE CALCULABILITÉ

Un objet infinitaire calculable est donné, dans un CPO infinitaire, par un programme d'énumération des objets finitaires qui l'engendrent; par contre, dans un espace métrique récursif [23,73,96,104,142] , un objet infinitaire x est calculé par deux programmes :

- le premier énumère les éléments de la suite qui tend vers x
- le second calcule la "vitesse de convergence"; c'est-à-dire associe à tout entier n le rang $\psi(n)$ à partir duquel les éléments de la suite sont à une distance inférieure à $\frac{1}{n}$.

Autrement dit, si $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy effective, on peut calculer le rang $\psi(n)$ tel que, pour tout $i,j > \psi(n)$, b_i et b_j se comportent de la même façon par rapport aux n premiers éléments finitaires énumérés. Soit donc f un élément finitaire énuméré (pour la première fois) à l'indice n ; on peut donc dire que :

- ou bien $f \leq b_i$ <u>et</u> $f \leq b_j$ $\quad i,j > \psi(n)$
- ou bien $f \not\leq b_i$ <u>et</u> $f \not\leq b_j$

Puisque b_i et b_j sont finitaires, on peut décider si $f \leq b_i$: la donnée de la fonction ψ permet donc de décider si $f \leq \lim b_i$; en d'autres termes, si l'on convient d'appeler <u>décidables</u> les éléments y tels que , pour tout f finitaire, la relation $f \leq y$ soit décidable, on obtient donc que les limites effectives de suites de Cauchy effectives sont décidables. Si l'on se place dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, les objets infinitaires calculables des CPO's (SUP's de chaînes croissantes effectives) correspondent aux récursivement énumérables; et les objets infinitaires calculables des espaces métriques correspondent aux récursifs.

III - PLAN

Dans un premier chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés relatives aux CPO's et à leur topologie; nous nous intéressons plus particulièrement aux CPO's infinitaires (ω-algébriques et "consistently complete", au sens de PLOTKIN [107]) dont la base dite *finitaire* est composée d'éléments associés à une quantité finie d'information (Cf. Théorème 2); nous montrons que de tels CPO's correspondent exactement aux domaines traités dans la sémantique des langages de programmation.

Dans le second chapitre, nous définissons une ultramétrique sur ces CPO's infinitaires, associée à une énumération de la base finitaire; cette ultramétrique s'avère en fait indépendante de l'énumération choisie (Théorème 1) et uniformément équivalente aux métriques de BOASSON-NIVAT [20] sur les mots et d'ARNOLD-NIVAT [3] sur les arbres (Théorème 2); par contre, elle n'est équivalente ni à la métrique de WEIHRAUCH [140,141] , ni à la métrique de Baire sur les fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Le théorème 3 montre que toute suite de Cauchy d'éléments finitaires converge vers un élément du CPO infinitaire; à l'inverse, toute suite croissante est de Cauchy. Cette métrique permet donc d'engendrer les mêmes éléments infinitaires que par les suites croissantes, mais en utilisant plus de "chemins de calcul" puisque toute suite de Cauchy n'est pas nécessairement croissante.

Le Chapitre III étend ces résultats aux espaces de fonctions continues. Après avoir caractérisé les espaces de fonctions continues en tant que CPO's infinitaires (Théorème 2), nous montrons (Proposition 4) que toute fonction continue au sens métrique et croissante est aussi continue au sens des CPO's; étant donné que le complété métrique de notre base finitaire est compact pour notre métrique (Théorème 3), toute fonction continue devient uniformément continue. De plus, nous prouvons que la convervence pour notre métrique équivaut à la convergence simple (Théorème 4 et 5) et à la convergence uniforme dans le cas de suites croissantes de fonctions (Théorème 6 et 7).

Nous reprenons dans le chapitre IV une version effective des notions de CPO infinitaire et d'espace métrique: tout d'abord, nous définissons la notion de *base effective* et donnons deux façons de construire à partir d'une telle base les éléments infinitaires calculables : La première consiste à clore algébriquement cette base effective (domaines "effectively given" de SMYTH [128] et KANDA [64]) pour en extraire les seuls éléments calculables; la seconde consiste à donner une version effective de la complétion par idéaux : La Proposition 2 montre que les espaces ainsi obtenus sont effectivement isomorphes. Nous rappelons ensuite la définition des domaines calculables en tant qu'ensembles énumérés et montrons que la construction précédente coïncide avec l'approche de ERSHOV [50]. Nous concluons ce chapitre par un rappel des travaux relatifs aux espaces métriques récursifs et utilisons essentiellement les définitions et propriétés de LACOMBE [75] et MOSCHOVAKIS [96].

Enfin, le Chapitre V permet de prouver que les limites de suites de Cauchy effectives correspondent aux éléments décidables des domaines calculables (Théorème 1); une version intéressante de ce résultat est obtenue dans le cas de CPO's infinitaires dans lesquels l'énumération de la base "respecte" l'ordre (Proposition 5).
Enfin, dans le cas d'ordres arborescents (introduits par RIGUET [112], KUREPA [71] et SCHMIDT [51,116,117]) , il est montré que les éléments infinitaires calculables sont décidables (Théorème 3) : c'est le cas des mots et des arbres infinitaires; ce n'est pas celui des réels, ni des éléments de $\mathbf{T}^{\omega}$.

Une liste de problèmes ouverts et de développements possibles conclut ce travail.

CHAPITRE I

-=-=-=-=-=-

B A S E S F I N I T A I R E S

C P O ' s I N F I N I T A I R E S

-=-=-=-=-=-

Nous reprenons dans ce chapitre des notions abordées dans la littérature de façons très diverses et généralement associées à des termes différents. L'un des objectifs de ce travail étant d'étudier les liens entre propriétés métriques et propriétés liées à une structure d'ordre, nous sommes parfois contraints de créer de nouveaux termes afin d'éviter toute confusion entre des concepts voisins relatifs à l'ordre ou à la métrique.

I - COMPLETION DANS LES CPO's

I.A.- QUELQUES DÉFINITIONS.

Soit D un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel notée $\leq$.
Nous dirons que :

DEFINITION 1.- Un sous-ensemble $\Delta \subseteq D$ est dit *dirigé* ssi toute partie finie de Δ est majorée; autrement dit :

$$\forall\, d_1,d_2 \in \Delta \ , \ \exists\, d_3 \in \Delta \ , \ d_1 \leq d_3 \ \& \ d_2 \leq d_3 \ .$$

DEFINITION 2.- Un ensemble $(D,\leq)$ partiellement ordonné est appelé CPO (Complete Partial Order) ssi tout sous-ensemble dirigé de D admet un plus petit majorant (ou SUP) et s'il existe un plus petit élément dans D noté $\perp$.

Nous noterons $(D,\leq,\perp)$ l'ensemble partiellement ordonné muni de son élément minimal. Notons que le terme de IPO (Inductive Partial Order) est parfois utilisé à la place de CPO, notamment dans [108] . Enfin :

DEFINITION 3.- Un sous-ensemble C de D est appelé chaîne de D ssi il est totalement ordonné; chaîne croissante ssi C est dénombrable, $C = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $x_i \leq x_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

La littérature propose souvent [105,16,65,44] à la place de la définition 2 : *"Un ensemble* $(D,\leq,\perp)$ *est appelé CPO ssi toute chaîne croissante de* D *non vide a un SUP"*. Ces deux définitions ne sont pas contradictoires comme le montre la proposition suivante [28] :

PROPOSITION 1.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un ensemble partiellement ordonné; les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout sous-ensemble dirigé dénombrable non vide de D a un SUP,

(ii) Toute chaîne croissante non vide de D a un SUP.

Il est clair que (i) implique (ii) puisque toute chaîne croissante est dirigée; d'autre part, il résulte de la définition 2 le lemme suivant :

LEMME.- *Soit* Δ *une partie dirigée,* $F \subseteq \Delta$ *une partie finie de* Δ *; alors* $\exists\, b \in \Delta$ *tel que* b *majore* F .

On peut alors, à partir d'une suite dirigée $\Delta = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, définir par récurrence une suite croissante $(b'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 \\ b'_{i+1} \text{ est un majorant de } \{b_1,\ldots,b_i,b'_i\} \text{ dans } \Delta . \end{cases}$$

Il est clair que (b'_i) croit par construction et que l'on a :

$$\underset{i}{\mathrm{SUP}}\ (b_i) = \underset{i}{\mathrm{SUP}}\ (b'_i)$$

Une adaptation de cette construction sera reprise ultérieurement dans l'étude des CPO's calculables et la définition d'une énumération des éléments obtenus en tant que SUP's d'ensembles dirigés ([44],[64]).

On peut résumer la proposition 1 en notant que les objets obtenus par supremum d'ensemble dirigé ou de chaîne croissante sont les mêmes mais que les façons d'approcher ces objets ne sont pas identiques.

Enfin, lors du passage aux fonctions continues, la clôture par SUP d'ensemble dirigé est conservée, ce qui explique l'intérêt porté aux CPO's dans l'étude de la sémantique des langages de programmation. Rappelons :

DEFINITION 4.- Soient $(D,\leq,\perp)$ et $(D',\leq,\perp')$ deux CPO's; une fonction $f : D \to D'$ est dite continue ssi elle vérifie :

$$f(\mathrm{SUP}\ \Delta) = \mathrm{SUP}(f(\Delta)) \quad \forall\ \Delta \text{ dirigé},\ \Delta \subseteq D .$$

Il convient de remarquer que cette définition de continuité coïncide avec la définition topologique, au sens de la topologie induite par la structure de CPO (voir § III); d'autre part, cette définition n'a de sens que si $f(\Delta)$ est également une partie dirigée dans D' : Cette propriété résulte du fait que la continuité implique la monotonicité et que (Δ dirigé et f monotone) $\Longrightarrow f(\Delta)$ dirigé.

On montre alors que :

PROPOSITION 2.- L'espace noté $[D \to D']$ des fonctions continues du CPO $(D,\leq,\perp)$ dans le CPO $(D',\leq,\perp')$ est lui-même un CPO.

En effet, l'ordre sur $[D \to D']$ est défini par :

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall\ x \in D$$

d'élément minimal $\lambda x.\perp'$.

D'autre part, il est facile de vérifier que, pour tout sous-ensemble dirigé $\Delta \subseteq [D \to D']$, $\mathrm{SUP}(\Delta)$ est défini, avec :

$$\mathrm{SUP}(\Delta)(x) = \mathrm{SUP}\{f(x) \mid f \in \Delta\} \quad \forall\ x \in D$$

Cette proposition permet, comme nous le ferons dans le troisième chapitre, d'étendre aux espaces de fonctions les propriétés définies sur les CPO's domaines de ces fonctions.

I.B.- BASES ET COMPLÉTIONS DE BASES :

La notion d'approximation requiert celle de base à partir de laquelle on engendre une famille d'objets formant un CPO; plus précisément :

DEFINITION 5.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO; un sous-ensemble $B \subseteq D$ est appelé base de D ssi $\forall\ x \in B$, $\exists\ \Delta \subseteq B$, Δ dirigé, tel que $x = \mathrm{SUP}\ \Delta$.

Il est clair que, si une base de CPO existe, elle n'est pas nécessairement unique (ainsi, avec $(D,\leq,\perp) = (\bar{\mathbb{R}}_+,\leq,0)$, une base est $\mathbb{Q}^+$, mais aussi $\mathbb{Q}^+ \cup F$ pour tout $F \subseteq \bar{\mathbb{R}}_+$).

Inversement, il est intéressant de compléter un ensemble partiellement ordonné $(B,\leq,\perp)$ en un CPO tel que :

a) B soit (isomorphe à) un sous-ensemble de ce CPO;

b) Tout élément du complété soit le supremum d'une partie dirigée de B .

On ne peut définir sans hypothèse complémentaire un complété canonique [90] . Nous donnons ci-dessous deux procédés classiques de complétion [57,90,89,18,101] , le premier par idéaux, le second par classes d'équivalence d'ensembles dirigés; ces deux procédés sont équivalents dans la mesure où les complétés obtenus sont isomorphes :

a) Complétion par idéaux

Définissons d'abord :

DEFINITION 6.- Un sous-ensemble $I \subseteq B$ est appelé *idéal* de B ssi

a) I est dirigé,

b) $x \in I$ & $y \leq x \Longrightarrow y \in I$

Parmi l'ensemble des idéaux de B , le sous-ensemble des idéaux principaux de la forme :

$$\tilde{y} = \{x \mid x \in B \;\&\; x \leq y\} \qquad y \in B$$

est isomorphe à la base B . Il est alors facile de montrer le théorème suivant (voir [89]) :

THEOREME 1.- *Soit* $(B,\leq,\perp)$ *un ensemble partiellement ordonné; il existe un CPO noté* $I(B)$ *et une application* $j : B \to I(B)$ *telle que :*

. $\forall\, x,y \in B$, $x \leq y$ *ssi* $j(x) \leq j(y)$ *dans* $I(B)$

. *Pour tout* $x \in I(B)$, *l'ensemble :*

$$J_x = \{j(a) \mid a \in B \ \& \ j(a) \leq x\}$$

est dirigé et l'on a : $x = \mathrm{SUP}\ J_x$.

L'ensemble $I(B)$ est l'ensemble des idéaux de B et l'injection j associe à chaque élément $x \in B$ son idéal principal $\tilde{x}$.
Il est clair que l'ordre partiel sur $I(B)$ est l'inclusion ensembliste et que :

$$\Delta \subseteq I(B) \ \& \ \Delta \text{ dirigé} \Longrightarrow \mathrm{SUP}(\Delta) = \cup \Delta \text{ existe dans } I(B)$$

$I(B)$ a donc une structure de CPO.

b) <u>Complétion par classes d'équivalence d'ensembles dirigés</u> :

La relation d'ordre sur D peut être étendue à l'ensemble noté DIR(B) des parties dirigées de B comme suit :

$$\Delta \lesssim \Delta' \ \underline{\text{ssi}} \ \forall b \in \Delta ,\ \exists b' \in \Delta' \text{ tel que } b \leq b'$$
$$\text{avec } \Delta, \Delta' \in \mathrm{DIR}(B)$$

Il est clair que cette relation n'est qu'un préordre sur DIR(B) ; associons lui canoniquement l'équivalence suivante :

$$\Delta \equiv \Delta' \ \underline{\text{ssi}} \ \Delta \lesssim \Delta' \text{ et } \Delta' \lesssim \Delta \qquad \Delta, \Delta' \in \mathrm{DIR}(B)$$

(Δ et Δ' sont parfois appelés *cofinaux* [58])

L'ensemble DIR(B)/≡ est alors ordonné et a une structure de CPO; un élément de cet ensemble correspond à une approximation; un représentant canonique pour une classe d'équivalence C de DIR(B)/≡ est défini par :

$$R_C = \cup \{x \mid x \in \Delta ,\ \Delta \in C\}$$

On peut alors énoncer :

<u>THEOREME 1</u> (bis).- *Soit* $(B,\leq,\perp)$ *un ensemble partiellement ordonné. Il existe un CPO noté* DIR(B)/≡ *et une application* $j : B \to \mathrm{DIR}(B)/\equiv$ *telle que :*

. $\forall x,y \in B$, $x \leq y$ <u>*ssi*</u> $j(x) \lesssim j(y)$ *dans* DIR(B)/≡
. *Pour tout* $C \in \mathrm{DIR}(B)/\equiv$, *l'ensemble* $R_C = \cup \{x \mid x \in \Delta,\ \Delta \in C\}$ *est dirigé avec* $C = \mathrm{SUP}\ R_C$

L'injection j est celle qui associe à tout $x \in B$, la classe d'équivalence de l'idéal principal $\tilde{x}$ et l'ordre sur $DIR(B)/\equiv$ est canoniquement associé au préordre $\lesssim$ défini précédemment sur $DIR(B)$.

D'autre part, il est facile de montrer que R_C est dirigé :
Soient x et x' appartenant respectivement à Δ et Δ', avec $\Delta \in R_C$, $\Delta' \in R_C$

$$\Delta \equiv \Delta' \Longrightarrow \exists\, x'',\ x'' \in \Delta' \text{ et } x \leq x''$$

D'autre part, $x'' \in \Delta'$ et $x' \in \Delta'$ et Δ' dirigé $\Longrightarrow \exists\, x'''$ tel que

$$x'' \leq x'''$$
$$x' \leq x'''$$

$$\Longrightarrow \{x,x'\} \text{ est majoré dans } R_C .$$

De plus, R_C est un idéal : on obtient ainsi un isomorphisme entre les complétés B^∞ et $DIR(B)/\equiv$.

<u>NOTATION</u> : Conformément à [102], *nous noterons* B^∞ *le complété de* B (sans spécifier s'il s'agit de $I(B)$ ou de $DIR(B)/\equiv$).

II.- CPO's INFINITAIRES.

De nombreux auteurs [124,102,128,119] ont étudié le cas de bases associées à des éléments d'information "finie" (mots de longueur finie, arbres de hauteur finie, représentations décimales finies, parties finies de $\mathbb{N}$, etc...); nous définissons la notion de base finitaire et les propriétés qui en résultent pour le complété :

II.A.- ÉLÉMENTS FINITAIRES

Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO. Nous définissons de façon intrinsèque la notion d'élément finitaire comme suit :

<u>DEFINITION 7.-</u> Un élément $b \in D$ est dit *finitaire* ssi, pour toute partie dirigée $\Delta \subseteq D$, $b \leq SUP\ \Delta \Longrightarrow \exists c$, $c \in \Delta\ \&\ b \leq c$.

(Un tel élément est parfois appelé compact, fini, algébrique, ou isolé dans les références précédemment citées).

On trouve également dans ([119,133]) la définition de la relation suivante :

$$x \underline{\sqsubset} y \text{ \underline{ssi}, pour tout ensemble dirigé } \Delta,\ \Delta \subseteq D,$$

$$(y \leq SUP\ \Delta \Longrightarrow \exists\, c \in \Delta,\ x \leq c)$$

On vérifie facilement que cette relation n'est pas en général réflexive; les éléments finitaires sont précisément ceux pour lesquels la relation $x \underline{\sqsubset} x$ est vraie.

Notons la propriété suivante :

<u>PROPRIETE 1</u>.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO; soient a et b deux éléments finitaires de D ; alors :

$$SUP(a,b) \text{ défini} \Longrightarrow SUP(a,b) \text{ est finitaire.}$$

A montrer : $SUP(a,b) \leq SUP\ \Delta$, Δ dirigé $\Longrightarrow \exists\, c \in \Delta$, $SUP(a,b) \leq c$

or, $SUP(a,b) \leq SUP(\Delta) \Longrightarrow \begin{cases} a \leq SUP\ \Delta \\ b \leq SUP\ \Delta \end{cases}$

Or, a et b sont finitaires

$$\Longrightarrow \begin{cases} \exists\, x \in \Delta,\ a \leq x \\ \exists\, y \in \Delta,\ b \leq y \end{cases}$$

De plus, Δ est dirigé $\Longrightarrow \exists\, c \in \Delta$ tel que $\begin{cases} x \leq c \\ y \leq c \end{cases}$

$$\Longrightarrow SUP(a,b) \leq c \text{ avec } c \in \Delta.$$

<u>QUELQUES EXEMPLES</u>

a) Considérons le CPO des représentations décimales de réels [144] avec l'ordre classique sur $\mathbb{R}$; il est clair que les représentations décimales finies ne sont pas des éléments finitaires car :

$$2 \leq SUP\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec } x_i = 1.\underbrace{999\ldots9}_{i \text{ fois}}$$

alors qu'il n'existe aucun $j \in \mathbb{N}$ tel que : $2 \leq x_j$.

b) Notons (α,β) un intervalle à bornes réelles (ouvert, semi-ouvert ou fermé); l'ensemble de ces intervalles est ordonné par :

$$(\alpha,\beta) \leq (\alpha',\beta') \ \underline{\text{ssi}} \ (\alpha,\beta) \supseteq (\alpha',\beta')$$

Notons d'abord que tout intervalle de la forme $[\alpha,\beta)$ ne peut être finitaire; en effet :

$$[\alpha,\beta) = \text{SUP}\{]\alpha - \frac{1}{n},\beta) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$= \cap\{]\alpha - \frac{1}{n},\beta) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

alors qu'il n'existe aucun entier j tel que :

$$[\alpha,\beta) \supseteq]\alpha - \frac{1}{j},\beta)$$

Par contre, tout intervalle de la forme $]\alpha,\beta[$ est finitaire :
Soit en effet $\Delta = \{(\alpha_i,\beta_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dirigé d'intervalles.

Alors, $]\alpha,\beta[\leq \text{SUP}\ \Delta$

$$\Longrightarrow \exists\ (\alpha_i,\beta_i) \in \Delta \text{ tel que } \alpha \notin (\alpha_i,\beta_i)$$
$$\text{et } \exists\ (\alpha_j,\beta_j) \in \Delta \text{ tel que } \beta \notin (\alpha_j,\beta_j)$$
$$\Longrightarrow \exists_i \text{ tel que } \alpha < \alpha_i$$
$$\exists_j \text{ tel que } \beta > \beta_j$$

Or, Δ dirigé $\Longrightarrow \exists\ h$ tel que :

$$\begin{cases} (\alpha_i,\beta_i) \supseteq (\alpha_h,\beta_h) \\ (\alpha_j,\beta_j) \supseteq (\alpha_h,\beta_h) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \exists\ h \text{ tel que } \alpha < \alpha_h \text{ et } \beta > \beta_h$$

Il en résulte que :

$$\exists\ h \text{ tel que } (\alpha_h,\beta_h) \in \Delta \ \& \ ]\alpha,\beta[\supset]\alpha_h,\beta_h[$$
$$\Longrightarrow]\alpha,\beta[\text{ est finitaire.}$$

Nous développerons, dans le paragraphe IV, d'autres exemples d'éléments finitaires.

II.B.- BASE FINITAIRE

En reprenant la définition 5 du § I.2, nous posons :

DEFINITION 8.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO; soit B une base de D ;
B est dite finitaire si elle est constituée d'éléments finitaires de D .

L'importance de telles bases est montrée par le théorème suivant, pour lequel nous introduisons la notion suivante :

DEFINITION 9.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO; B une base finitaire de D .
Un élément $x \in D$ est dit *purement infinitaire* s'il est le SUP d'une chaîne infinie strictement croissante d'éléments de B .

Nous noterons B^{ω} l'ensemble des éléments purement infinitaires.
Nous montrons alors :

THEOREME 2.- *Soit* B *une base finitaire dénombrable; alors :*
$B^{\omega} = B^{\infty} - B$.

PREUVE.- a) Montrons d'abord que $B^{\omega} \subseteq B^{\infty} - B$

Soit $a = \mathrm{SUP}\{a_i \mid a_i \in B \;\&\; a_i \leq a\}$

avec $a_i < a_{i+1} \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$

Supposons que a appartienne à B

alors , $a \leq a \Longrightarrow \exists\, i\,,\; a \leq a_i$ (B est base finitaire)

$\Longrightarrow \exists\, i\,,\; a \leq a_i < a_{i+1} \leq a$

$\Longrightarrow$ on ne peut avoir $a \in B$

b) Inversement :

$a \in B^{\infty} - B \Longrightarrow a = \mathrm{SUP}\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec (a_i) chaîne croissante dans B

Si cette chaîne n'est pas strictement croissante, alors :

$\exists\, i$ tel que $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_i = a_{i+1} = \ldots = a$

$\Longrightarrow a_i = a$, avec $a \in B \Longrightarrow$ contradiction

$\Longrightarrow B^{\infty} - B \subseteq B^{\omega}$.

Autrement dit, tout élément d'une base finitaire ne peut être limite (au sens du supremum) d'une chaîne infinie strictement croissante d'éléments de cette base (dans les exemples précédents, la base des représentations décimales finies n'est pas finitaire; il en est de même de la base des intervalles fermés à bornes réelles).

Ce théorème est fondamental pour la suite de ce travail et permet en particulier de prouver :

PROPOSITION 3.- Si un CPO $(D,\leq,\bot)$ a une base finitaire dénombrable, alors elle est unique.

Soient en effet B et B', bases finitaires de D.

Supposons qu'il existe $a \in B$ et $a \notin B'$

$a \notin B' \Longrightarrow \exists\ \Delta \subseteq B'$ tel que $a = \mathrm{SUP}\ \Delta$ (d'après le théorème précédent)

$\Longrightarrow$ puisque B' est finitaire, $\exists\ c \in \Delta$ tel que $a \leq c$

D'autre part, $a = \mathrm{SUP}\ \Delta \Longrightarrow a \geq x$, pour tout $x \in \Delta$

$\Longrightarrow a = c$ avec $c \in B'$

$\Longrightarrow$ contradiction.

Le Théorème 2 et la proposition 3 nous permettent donc d'appeler, pour un CPO $(D,\leq,\bot)$ donné :

- finitaires les éléments de la base finitaire B
- infinitaires les éléments du complété B^{∞}
- purement infinitaires les éléments de $B^{\omega} = B^{\infty} - B$

La notion de base finitaire permet également de donner un sens à l'extension continue, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 4.- Toute fonction monotone $f : B \to B$, B une base finitaire du CPO $(D,\leq,\bot)$, peut être étendue de façon unique en une fonction continue $f^{\infty} : B^{\infty} \to B^{\infty}$.

Il suffit en effet de poser :

$$f^{\infty}(I) = \cup\ \{f(d) \mid d \in I\} \quad , \quad I \text{ un idéal de } B^{\infty}$$

où la fonction f^{∞} n'est définie que grâce à la propriété de base finitaire de B.

Cette proposition explique les résultats de [144,96] qui montrent que les représentations décimales des réels sont de "mauvaises" représentations : En effet, les représentations décimales finies ne constituant pas une base finitaire, l'extension de l'addition, par exemple, aux représentations décimales infinies, n'est pas continue. De même, si l'on considère la fonction $f : B \to B$ définie par :

$$f(x)\begin{cases} = 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $$f(1) = 1$$

mais $f^{\infty}(0.9999\ldots) = 0$: f^{∞} n'est donc pas continue.

Montrons enfin la proposition suivante qui donne une autre caractérisation des bases finitaires.

PROPOSITION 5.- Soit B une base finitaire pour un CPO $(D,\leq,\perp)$; alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x$, $x \leq \mathrm{SUP}\ \Delta$ & $\Delta \subseteq B^{\infty}$ & Δ dirigé $\Longrightarrow \exists y \in \Delta$ tel que $x \leq y$

(ii) $\forall x$, $x \leq \mathrm{SUP}\ \Delta$ & $\Delta \subseteq B$ & Δ dirigé $\Longrightarrow \exists z \in \Delta$ tel que $x \leq z$

D'abord, il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii) puisque $B \subseteq B^{\infty}$

Montrons que (ii) $\Longrightarrow$ (i) :
Soit $x \leq \mathrm{SUP}(x_i)$ avec $(x_i)_{i\in I}$ partie dirigée, $x_i \in B^{\infty}$;
chaque x_i est le supremum d'une partie dirigée $\Delta_i \subseteq B$ (par construction de B^{∞}).

Il faut donc montrer qu'il existe un j tel que $x \leq x_j$.

Montrons pour cela les deux lemmes suivants en notant :

$$\bigcup_i \Delta_i \quad \text{pour} \quad \cup\ \{y \mid y \in \Delta_i \ ,\ i \in I\}$$

LEMME 1.- *Soit* $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ *une partie dirigée de* B^{∞} , *avec* $\Delta_i \subseteq B$ *pour tout* $i \in I$
Alors $\bigcup_i \Delta_i$ *est dirigée dans* B.

Soient en effet $x,y \in \bigcup_i \Delta_i$.

$$\Longrightarrow \exists i \ \text{tel que}\ x \in \Delta_i \ \text{et}\ \exists j \ \text{tel que}\ y \in \Delta_j .$$

$(\Delta_i)_{i\in I}$ dirigée $\Longrightarrow \exists k$ tel que $\begin{matrix}\Delta_i \\ \Delta_j\end{matrix} \lesssim \Delta_k$ avec Δ_k dirigée dans B

$$\Longrightarrow \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leq x_k = \text{SUP } \Delta_k \quad \text{avec} \quad x_k \in B^\infty$$

Or, B est finitaire : D'après (ii) on obtient donc :

$$\begin{cases} \exists z \in \Delta_k \text{ tel que } x \leq z \\ \exists z' \in \Delta_k \text{ tel que } y \leq z' \end{cases}$$

et Δ_k dirigée dans B $\Longrightarrow \exists z'' \in \Delta_k$ tel que $\begin{cases} z \leq z'' \\ z' \leq z'' \end{cases}$

$$\Longrightarrow \exists z'' \in \Delta_k \text{ tel que } x \leq z'' \text{ et } y \leq z''$$

$$\Longrightarrow \bigcup_i \Delta_i \text{ est dirigée dans B .}$$

D'autre part ,

LEMME 2.- *Pour tout* $i \in I$, $x_i = \text{SUP } \Delta_i$, Δ_i *dirigée dans* B

$\Longrightarrow \text{SUP}(x_i) = \text{SUP}(\cup \Delta_i)$

Le lemme précédent montre que $\text{SUP}(\cup \Delta_i)$ existe.

On sait que $\text{SUP}(\cup \Delta_i)$ majore $x_i \ \forall i \in I$

$\Longrightarrow \text{SUP}(x_i) \leq \text{SUP}(\cup \Delta_i)$

D'autre part, $x_i = \text{SUP } \Delta_i$

$\Longrightarrow \forall y \in \Delta_i , \ x_i \geq y$

$\Longrightarrow \text{SUP}(x_i) \geq \text{SUP}\{y \mid y \in \cup \Delta_i\}$

d'où le lemme.

La proposition 4 en résulte immédiatement puisque :

$x \leq \text{SUP}\{x_i \mid i \in I\}$ $\qquad x_i \in B^\infty$

$\qquad x_i = \text{SUP } \Delta_i \ , \ \Delta_i \subseteq B$

$\cup \Delta_i$ est dirigée dans B (Lemme 1)

d'après le lemme 2, on a :

$x \leq \text{SUP}(\cup \Delta_i)$ avec $\cup \Delta_i$ dirigée dans B .

Il en résulte, d'après (i) :

$\exists y , y \in \cup \Delta_i$ tel que $x \leq y$

$\Longrightarrow \exists y , y \in B^\infty$ tel que $x \leq y$ c.q.f.d.

Une conséquence de cette proposition est en particulier que, si B est, en tant qu'ensemble partiellement ordonné, finitaire par rapport à lui-même (tout élément de B vérifie (ii) dans la proposition 5), alors il est base finitaire pour son complété B^∞.

REMARQUES.-

1.- L'existence d'une base finitaire n'est pas toujours assurée, comme le montre l'exemple des représentations décimales de réels.

2.- Etant donné un élément $b \in B$, B base finitaire, il peut exister un $x \in B^\infty$ tel que $x \leq b$.
Ainsi, l'intervalle $[\Pi,2\Pi]$ contient $]3.5,4.5[$
($[\Pi,2\Pi] \in B^\omega$, où B est l'ensemble des intervalles ouverts à bornes rationnelles : on a donc $]3.5,4.5[\in B$)
De même : soit $B = \{\pm \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$
avec $B^\infty = B \cup \{0\}$
On a donc : $0 \in B^\omega$ et $0 < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3.- Dans la construction d'une base finitaire B à partir d'un CPO $(D,\leq,\perp)$, appelons h l'application qui fait correspondre à D le complété B^∞ :

$$D \xrightarrow{h_1} B \xrightarrow{h_2} B^\infty \qquad h = h_2 \circ h_1$$

De façon générale, on a :

- $h(D) \subseteq D$ (dans l'exemple des représentations décimales de réels, on a $B = B^\infty = \emptyset$)
- $D \subseteq D' \Longrightarrow h(D) \subseteq h(D')$
- $h(h(D)) = h(D)$

(h est parfois appelé "fermeture inférieure" [18])

Nous nous intéresserons par la suite aux fermés relativement à cette application h et définirons dans ce but la notion de CPO's infinitaires.

II.C.- CPO'S INFINITAIRES

1) Dans les divers travaux relatifs aux CPO's, certaines hypothèses complémentaires relatives à la base (dénombrable, close par SUP fini, treillis, etc...) sont parfois introduites.

On définit ainsi [106] :

DEFINITION 10.- Un CPO $(D,\leq,\perp)$ est dit *algébrique* (resp. ω-algébrique) s'il possède une base finitaire (resp. finitaire et dénombrable).

Notons qu'il en résulte immédiatement la propriété suivante, généralement citée dans la définition même :

PROPRIETE : Dans tout CPO $(D,\leq,\perp)$ algébrique, de base finitaire B, l'ensemble B_x défini, pour tout $x \in D$, par :

$$B_x = \{b \mid b \in B \ \& \ b \leq x\}$$

est dirigé et vérifie $x = \text{SUP } B_x$.

Soit $x \in D$; B étant base de D, $\exists \Delta \subseteq B$, Δ dirigé tel que

$$x = \text{SUP } \Delta$$

Soient b et b' appartenant à B_x.

A montrer : $\exists e$, $e \in B_x$ tel que e majore b et b'.

Or, $b \in B$, B finitaire et $b \leq x \Longrightarrow \exists c \in \Delta$ tel que $b \leq c$
$b' \in B$, B finitaire et $b' \leq x \Longrightarrow \exists d \in \Delta$ tel que $b' \leq d$

Or, Δ dirigé $\Longrightarrow \exists e \in \Delta$ tel que $c \leq e$ et $d \leq e$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b \leq e \\ & \text{avec } e \in \Delta \subseteq B \text{ et } e \leq x \\ b' \leq e \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $e \in B_x$ et majore b et b'

$\Longrightarrow$ B_x est dirigé.

Quant au fait que $x = \text{SUP } B_x$, il est évident puisque B_x est partie dirigée de la base B.

Notons que les CPO's ω-algébriques sont appelés CPO's continus et séparables dans [119].

On peut montrer [106] que cette propriété d' ω-algébricité n'est pas conservée par passage aux fonctions continues, mais que, si l'on définit :

DEFINITION 11.- Un CPO $(D,\leq,\perp)$ est dit *conditionnellement complet* ssi tout sous-ensemble $X \subseteq D$ majoré dans D possède un SUP.

Alors la complétude conditionnelle est préservée lors du passage aux espaces de fonctions continues; les éléments nécessaires à la démonstration seront développés dans le chapitre III lors de l'étude des propriétés des espaces fonctionnels. Notons que la littérature anglo-saxonne utilise, pour désigner les CPO's conditionnellement complets, tantôt le terme *consistently complete* [107], tantôt *bounded complete* [64,90].

Nous étudions plus particulièrement les CPO's ayant les propriétés citées dans les définitions 10 et 11, et posons :

DEFINITION 12.- Un CPO est dit *infinitaire* ssi il est ω-algébrique et conditionnellement complet.

Par la suite, pour simplifier les notations, nous noterons directement B^∞ les CPO's isomorphes au complété de leur base B. On peut alors prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 6.- Un CPO B^∞ est infinitaire ssi

(i) sa base B finitaire est dénombrable

(ii) B est close par SUP conditionnel : Pour tout $a,b \in B$, $\exists\, c \in B$, $a \leq c \;\&\; b \leq c \Longrightarrow \mathrm{SUP}(a,b)$ existe et appartient à B .

PREUVE :

a) Soit B^∞ un CPO infinitaire.

Alors (i) résulte de l'ω-algébricité

D'autre part, soient a et $b \in B^\infty$

Soit $c = \mathrm{SUP}\, \Delta^{<\, a}_{<\, b}$ avec $\Delta \subseteq B$

Alors, d'après la définition 11, SUP(a,b) existe

$\Longrightarrow$ d'après la propriété 1, SUP(a,b) est finitaire.

b) Inversement, montrons d'abord que (i) et (ii) impliquent l'ω-algébricité.

Soit $B_x = \{b \mid b \in B \ \&\ b \leq x\} \quad \forall x \in B^\infty$

Il suffit de montrer que B_x est dirigé.

Prouvons d'abord que :

<u>LEMME</u>.- *Les deux conditions suivantes sont équivalentes, pour tout* $a,b \in B$ *:*

a) $\exists c \in B$, $a \leq c \ \&\ b \leq c \Longrightarrow \mathrm{SUP}(a,b)$ *est défini*

b) $\exists c \in B^\infty$, $a \leq c \ \&\ b \leq c \Longrightarrow \mathrm{SUP}(a,b)$ *est défini.*

Il est d'abord évident que $a \Longrightarrow b$

Inversement, soit $x = \mathrm{SUP}\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ où (x_i) est dirigée
$x_i \in B \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Supposons que $\begin{cases} a \leq x \\ b \leq x \end{cases}$

Alors, $\exists i$ tel que $a \leq x_i$

$\exists j$ tel que $b \leq x_j$

(x_i) dirigée $\Longrightarrow \exists k$ tel que $a \leq x_i$
$\leq x_k$
$b \leq x_j$

$\Longrightarrow$ On obtient par b) que $\mathrm{SUP}(a,b)$ est défini.

La preuve de la proposition 6 est alors évidente puisque tout couple d'éléments de B_x est majoré par $x \in B^\infty$; le lemme et la propriété (ii) de la proposition 6 permettent de prouver l'ω-algébricité.

Montrons aussi que (i) et (ii) impliquent la complétude conditionnelle :

Soit $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots\} \subset B^\infty$

Soit $y \in B^\infty$ tel que $y \geq x$, pour tout $x \in X$

A montrer : SUP(X) existe.

Or, $x^i \in B^\infty \Longrightarrow x^i = \mathrm{SUP}\ x^i_j$ où $(x^i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une partie dirigée de B .

Soit S l'ensemble des sup's finis des x^i_j .

a) S existe (en effet, y majore X : Il suffit alors d'utiliser le lemme précédent)

b) S est dirigée (par construction)
$\Longrightarrow$ SUP S = T existe
Montrons que T = SUP(X)
1.- $T \geq SUP\{x_1^i, \ldots, x_n^i, \ldots\} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow T \geq x_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

2.- Tout autre majorant de X majore les x_j^i et majore T
$\Longrightarrow$ T = SUP(X) c.q.f.d.

Remarquons enfin :

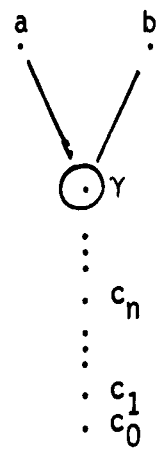
<u>PROPRIETE 2</u>.- Dans tout CPO infinitaire B^∞, INF(a,b) est défini pour tout $a,b \in B$

La preuve est évidente puisque l'ensemble :

$\{x \mid x \leq a \text{ et } x \leq b\}$ est majoré.
$\Longrightarrow$ B^∞ étant conditionnellement complet, son SUP existe, <u>mais il n'appartient pas nécessairement à B</u>.

Un exemple simple : $B = \{a,b\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
$B^\infty = \{\gamma\}$ avec $\gamma = SUP(c_i)$
avec : $a \leq c_i$, $b \leq c_i$ $\forall i$
et $a \leq \gamma$, $b \leq \gamma$

Ce CPO est infinitaire mais $INF(a,b) \notin B$



Nous définissons une classe particulière de CPO's infinitaires dans lesquels la base finitaire B a une structure d'inf-demi-treillis :

<u>DEFINITION 13</u>.- Un CPO infinitaire B est dit *filtré* ssi :
$\forall x \in B^\omega$, $y > x \Longrightarrow y \in B^\omega$.

Montrons d'abord :

PROPRIETE 3.- Un CPO infinitaire B^∞ est filtré ssi
$\forall x \in B \;,\; y < x \Longrightarrow y \in B$.

La preuve en est immédiate puisque :

. Soit $x \in B$ & $y < x$
Si $y \notin B$, alors $y \in B^\infty$ (d'après le théorème 2)
or, $y < x \Longrightarrow x \in B^\omega$ ce qui est impossible.

. Inversement :
Soit $x \in B^\omega$ & $y > x$
Supposons $y \notin B^\omega$; alors $y \in B$
or, $x < y \Longrightarrow x \in B$ ce qui est impossible.

Il en résulte :

PROPRIETE 4.- Dans tout CPO infinitaire B^∞ *filtré*, B a une structure d'inf-demi-treillis.

Cette propriété résulte immédiatement de la précédente puisque :

a) d'après la propriété 2, INF(a,b) est défini pour tout couple (a,b) de B
b) INF(a,b) < a et INF(a,b) < b
$\Longrightarrow$ d'après la propriété 3, INF(a,b) $\in$ B

Cette classe de CPO's infinitaires filtrés est importante car elle correspond aux ensembles d'objets "syntaxiques" (mots, arbres), comme nous le verrons ultérieurement.

III - TOPOLOGIES ET CPO's.

Nous rappelons ici quelques propriétés et définitions relatives à la topologie induite par une structure de CPO [114,119]; la topologie proposée a l'avantage (Cf. proposition 9) de faire coïncider la définition proposée pour la continuité (Def. 4) avec la définition topologique.

PROPOSITION 8.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO.
Alors $\mathcal{T}_D = \{\mathcal{O} \subseteq D \mid \forall\, a,b(a \in \mathcal{O}\ \&\ a \leq b \Longrightarrow b \in \mathcal{O})$
et $\forall\, C$, $C \subseteq D$ chaîne croissante telle que
$\mathrm{SUP}\ C \in \mathcal{O}$,
on a $C \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}$
est une topologie sur D.

On vérifie en effet facilement que $\emptyset \in \mathcal{T}_D$ et que $D \in \mathcal{T}_D$.

Montrons d'autre part que toute réunion (finie ou non) d'éléments de $\mathcal{T}_D$ appartient à $\mathcal{T}_D$: Soit $R \subseteq \mathcal{T}_D$; $Q = \cup\, \{\mathcal{O} \mid \mathcal{O} \in R\}$

a) soit $a \in Q$ et soit $b \geq a$

$$a \in \mathcal{O} \Longrightarrow \exists\, \mathcal{O}_i \text{ tel que } \mathcal{O}_i \in R\ \&\ a \in \mathcal{O}_i$$
$$\Longrightarrow b \in \mathcal{O}_i \Longrightarrow b \in Q$$

b) Soit d'autre part une chaîne $a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \leq \ldots$
telle que $\mathrm{SUP}\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \in Q$

$$\Longrightarrow \exists\, \mathcal{O}_i \text{ tel que } \mathcal{O}_i \in R\ \&\ \mathrm{SUP}\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{O}_i$$
$$\Longrightarrow \exists\, j \text{ tel que } a_j \in \mathcal{O}_i$$
$$\Longrightarrow \exists\, j \text{ tel que } a_j \in Q$$

Montrons enfin que $\mathcal{T}_D$ est close par intersection finie : Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux éléments de $\mathcal{T}_D$; à montrer : $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_D$.

a) Soient a et b tels que $a \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ et $b \geq a$
Il est évident que $b \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$

b) Soit $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ une chaîne croissante telle que $\mathrm{SUP}\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$,
alors, $\mathrm{SUP}\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{O}_1 \Longrightarrow \exists\, i_1$ tel que $a_{i_1} \in \mathcal{O}_1$
$\mathrm{SUP}\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{O}_2 \Longrightarrow \exists\, i_2$ tel que $a_{i_2} \in \mathcal{O}_2$.
Soit $j = \max\{i_1, i_2\}$
alors, $a_j \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$.

Notons que, dans le cas de CPO's infinitaires ($D = B^\infty$, B finitaire) le système fondamental de voisinages peut être défini par :

$$\mathcal{V}(x) = \cup\, \{\mathcal{V}_z(x) \mid z \in B\ \&\ z \leq x\} \qquad \forall\, x \in B^\infty$$

avec : $\mathcal{V}_z(x) = \{t \mid t \in B^\infty\ \&\ t \geq z\}$

Un voisinage de x contient donc un élément du système fondamental de voisinages contenant x : Il contient en conséquence l'ensemble des éléments ayant en commun de l'information avec x .

On retrouve alors la définition de la topologie contenue dans la proposition 8 en définissant tout ouvert comme voisinage de chacun de ses points.

Rappelons enfin [144] la caractérisation importante :

<u>PROPOSITION 9</u>.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO.
Alors $f : D \to D$ est continue par rapport à $\mathcal{T}_D$ <u>ssi</u>
$f(\mathrm{SUP}\ \Delta) = \mathrm{SUP}\ f(\Delta)$
avec Δ dirigé, $\Delta \subseteq D$.

Montrons d'abord que :

$$f(\mathrm{SUP}\ \Delta) = \mathrm{SUP}(f(\Delta)) \qquad \Delta \text{ dirigé, } \Delta \subseteq D$$
$$\text{implique : } \forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}_D\,,\ f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_D$$

a) Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_D$, $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$ et $a \leq b$

$a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$ puisque f est monotone

or, $a \in f^{-1}(\mathcal{O}) \Longrightarrow f(a) \in \mathcal{O}$

$\Longrightarrow f(b) \in \mathcal{O}$ par définition de $\mathcal{T}_D$

$\Longrightarrow b \in f^{-1}(\mathcal{O})$

b) Soit $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ une chaîne croissante telle que l'on ait :

$$\mathrm{SUP}(a_i) \in f^{-1}(\mathcal{O})$$

$$\begin{aligned} \mathrm{SUP}(a_i) \in f^{-1}(\mathcal{O}) &\Longrightarrow f(\mathrm{SUP}(a_i)) \in \mathcal{O} \\ &\Longrightarrow \mathrm{SUP}(f(a_i)) \in \mathcal{O} \\ &\Longrightarrow \exists\, a_j \text{ tel que } f(a_j) \in \mathcal{O} \\ &\Longrightarrow \exists\, a_j \text{ tel que } a_j \in f^{-1}(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

<u>Inversement</u>, soit f continue par rapport à $\mathcal{T}_D$.

Soit $\Delta \subset B^{\infty}$ une suite dirigée , $\Delta = \{x_i \mid x_i \in D \ , \ i \in \mathbb{N}\}$

Soit $\Delta' = \{x_i' \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec $x_i' = \mathrm{SUP}\{x_j \mid j \leq i\}$

Montrons que $f(\mathrm{SUP}\ \Delta') = \mathrm{SUP}(f(\Delta'))$

a) $\mathrm{SUP}(f(\Delta')) \leq f(\mathrm{SUP}\ \Delta')$

Montrons pour cela que f est monotone

Soit $x_1 \leq x_2 \qquad x_1, x_2 \in D$

Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_D$ tel que $f(x_1) \in \mathcal{O}$

f continue par rapport à $\mathcal{T}_D \Longrightarrow x_1 \in f^{-1}(\mathcal{O})$
avec $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_D$

or, $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow x_2 \in f^{-1}(\mathcal{O})$
$\Longrightarrow f(x_2) \in \mathcal{O}$

or, montrons le :

LEMME.- *Pour tout* $x,x' \in D'$
$x \leq x'$ *ssi* $\forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}_D \quad (x \in \mathcal{O} \Longrightarrow x' \in \mathcal{O})$

D'abord, $x \leq x'$ & $x \in \mathcal{O} \Longrightarrow x' \in \mathcal{O}$ par définition de $\mathcal{T}_D$.
Inversement : Supposons que, pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}_D$, on ait :

$$x \in \mathcal{O} \Longrightarrow x' \in \mathcal{O}$$

Il s'agit de montrer que $x \leq x'$.
Supposons qu'il n'en soit pas ainsi : Il existerait donc un élément $b \in B$ tel que $b \leq x$ & $b \not\leq x'$.

Soit $X = \{z \mid z \in B^\infty \;\&\; z \geq b\}$
On aurait donc : $x \in X$ et $x' \notin X$
ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Revenons à la preuve de la proposition précédente : on a donc montré que $f(x_1) \in \mathcal{O} \Longrightarrow f(x_2) \in \mathcal{O}$ pour tout ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_D$
$\Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
$\Longrightarrow$ f monotone
$\Longrightarrow \mathrm{SUP}(f(\Delta')) \leq f(\mathrm{SUP}\, \Delta')$

b) Montrons inversement que $\mathrm{SUP}(f(\Delta')) \geq f(\mathrm{SUP}\, \Delta')$

Prouvons d'abord le lemme suivant :

LEMME.- *Soit* (x_i) *une chaîne croissante dans* D ; *soit* $x \in D$
alors : $\forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}_D (x \in \mathcal{O} \Longrightarrow \exists\, i$ *tel que* $x_i \in \mathcal{O})$ *ssi*
$x \leq \mathrm{SUP}_{i \in \mathbb{N}}(x_i)$.

Si $x \leq \mathrm{SUP}(x_i)$, alors pour tout ouvert $\mathcal{O}$, $x \in \mathcal{O} \Longrightarrow \exists\, i$ tel que $x_i \in \mathcal{O}$ par définition de la topologie.

Inversement : on a évidemment $x_j \leq \mathrm{SUP}(x_i) \;\; \forall\, j \in \mathbb{N}$

donc : $\forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}_D \; (x \in \mathcal{O} \Longrightarrow SUP(x_i) \in \mathcal{O})$

$\Longrightarrow$ d'après le lemme précédent, $x \leq SUP_{i \in \mathbb{N}}(x_i)$

Il suffit alors de prouver que :

$\forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}_D (f(SUP\ \Delta') \in \mathcal{O} \Longrightarrow \exists\, x'_i\ ,\ x'_i \in \Delta' \cap \mathcal{O})$

$f(SUP\ \Delta') \in \mathcal{O} \Longrightarrow SUP\ \Delta' \in f^{-1}(\mathcal{O})$

avec $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_D$ puisque f est continue

$\Longrightarrow$ d'après la définition de $\mathcal{T}_D$, $\exists\, x'_i$ tel que $x'_i \in f^{-1}(\mathcal{O})$

$\Longrightarrow \exists\, i$ tel que $f(x'_i) \in \mathcal{O}$, avec $x'_i \in \Delta'$

$\Longrightarrow$ d'après le lemme : $f(SUP\ \Delta') \leq SUP(f(\Delta'))$

Rappelons enfin, pour clore ce paragraphe relatif aux topologies associées aux CPO's, que les topologies d'ordre vérifient seulement l'axiome de séparation T_0 [41] : Pour deux points distincts, il existe au moins un voisinage de l'un ne contenant pas l'autre.
Cet axiome de séparation (formulé dans [18] sous la forme : $\bar{x} = \bar{y} \Longrightarrow x = y$) nous permettra ultérieurement de mieux préciser les contours d'une étude comparative des complétés au sens métrique et au sens de l'ordre.

IV - QUELQUES EXEMPLES DE CPO's INFINITAIRES.

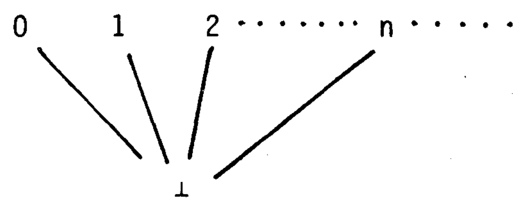
Nous exposons, dans ce paragraphe, plusieurs exemples de CPO's infinitaires couramment utilisés dans l'étude des propriétés des domaines sémantiques. Ces exemples seront importants dans la suite de ce travail car ils permettront d'illustrer les propriétés relatives à certaines approximations (éléments purement infinitaires et éléments maximaux; éléments infinitaires décidables ou semi-décidables, etc...)

a) $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \leq, 0)$

Dans ce CPO, la base finitaire B n'est autre que $\mathbb{N}$; avec $B^{\omega} = \{+\infty\}$; la relation d'ordre est l'ordre naturel sur les entiers.

b) $(\mathbb{N} \cup \{\perp\}, \sqsubseteq, \perp)$

Il s'agit du "domaine plat" [124] dont l'élément minimal est l'indéfini $\perp$:



avec l'ordre partiel défini par : $x \sqsubseteq y$ <u>ssi</u> $x = \perp$ ou $x = y$
Il est clair que, dans cet exemple, la base finitaire B est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$, avec $B^{\omega} = \emptyset$.

c) $(P(\mathbb{N}), \subseteq, \emptyset)$

Utilisé par SCOTT [123] en tant que domaine d'interprétation (appelé *S-domain* dans [119]), il a $P_{\omega}(\mathbb{N})$ (sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$) comme base finitaire.

d) $(F, \leq, f_0)$

Considérons [113] l'ensemble I^* des séquences finies d'entiers ordonné par :

$a \leq b$ <u>ssi</u> a est segment initial de b

(I^* est appelé *function tree* dans [113]).

L'ensemble F des fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ peut être considéré comme l'ensemble des chemins infinis générés à partir de I^* : En posant $B = I^*$, on a donc $B^{\omega} = F$; quant à f_0 , il s'agit de la séquence d'entiers vide .

Il est à noter que cette définition diffère de celle de l'ensemble des fonctions partielles de $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ dans $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$, muni de l'ordre par point : $f \leq g$ <u>ssi</u> $f(x) \leq g(x)$, et dont l'élément minimal est la fonction $\lambda x.\perp$ partout indéfinie; il s'agit encore d'un CPO infinitaire dont les propriétés seront étudiées dans les paragraphes relatifs aux espaces fonctionnels.

e) $(\Sigma^{\infty}, \leq, \varepsilon)$

Soit Σ un alphabet; Σ^* l'ensemble des mots de longueur finie définis sur l'alphabet Σ ; Σ^{∞} l'ensemble des mots de longueur finie ou infinie.

Il est bien connu [20] que Σ^{∞} est le complété de Σ^* au sens de la relation d'ordre.:

$$x \leq y \ \underline{\text{ssi}} \ \exists j \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = y[j]$$

où $y[j]$ désigne le sous-mot initial de y de longueur j.

Le mot vide ε, de longueur nulle, est inférieur à tout autre mot au sens de la relation précédente; l'ensemble Σ^{ω} est parfois appelé *adhérence* de Σ^*. Notons que, dans la complétion de Σ^* par classe d'équivalence d'ensembles dirigés, il est possible de choisir un représentant canonique x pour chaque classe d'équivalence $D \in DIR(\Sigma^*)/\equiv$, caractérisé par :

$$\forall i, i \in \mathbb{N} - \{0\}, \exists r \in D \text{ tel que } x[i] = r[i]$$

Rappelons enfin que, dans Σ^*, toute partie dirigée est totalement ordonnée.

f) $(M^{\infty}_{\Omega}(F,E), \leq, \Omega)$

Soit F un alphabet gradué (ensemble fini de symboles de fonctions) avec, associée à chaque $f \in F$, une arité $\rho(f) \in \mathbb{N}$; soit $F_i = \{f \in F \mid \rho(f) = i\}$; soit E un ensemble disjoint de F.

On définit alors le F-<u>magma libre</u> engendré par F de façon inductive par :

. $E \cup F_0 \subset M(F,E)$

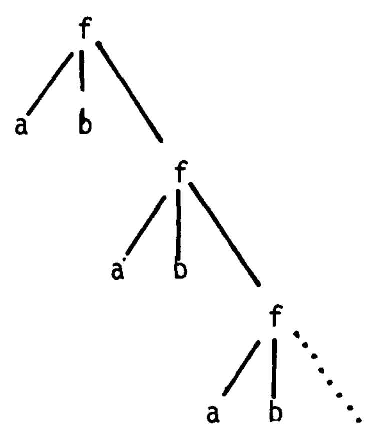
. si $f \in F_n$, $n > 0$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in M(F,E)$, alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in M(F,E)$.

Les éléments de $M(F,E)$ sont généralement considérés comme des arbres finis. On définit habituellement l'ordre dit "syntaxique" entre ces arbres en introduisant un symbole spécial noté Ω, de arité nulle ; Un ordre est alors défini sur $M_{\Omega}(F,E) = M(F,E \cup \{\Omega\})$ par :

1) $\Omega \leq t \quad \forall t \in M(F,E)$

2) $f(t_1, \ldots, t_k) \leq t'$ <u>ssi</u> $t' = f(t'_1, \ldots, t'_k)$
avec $f \in F_k$, $t_i \leq t'_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq k$

Le complété $M_\Omega^\infty(F,E)$ de $M(F,E)$ est appelé [34] F-magma libre complet dont les éléments peuvent être assimilés à des arbres infinitaires. Ainsi, dans $M_\Omega(F,E)$, l'ensemble $\{\Omega, f(a,b,\Omega), f(a,b,f(a,b,\Omega))\ldots\}$ n'a pas de SUP; dans $M_\Omega^\infty(F,E)$, il a pour SUP l'arbre infini suivant :



Une définition équivalente de $M^\infty(F,E)$ est la suivante :

$M_\Omega^\infty(F,E) = \{\Omega\} \cup \{f(t_1,t_2,\ldots,t_{\rho(f)}) | t_i \in M_\Omega^\infty(F,E), f \in F\}$

Notons enfin que dans cet exemple les éléments purement infinitaires (arbres infinis sans Ω à hauteur finie) sont maximaux (il en est de même dans Σ^∞).

g) Dans [78,79], on trouve d'autres types d'arbres définis de la façon suivante : Les approximations de WADSWORTH [139] permettent d'associer, à une λ-expression M, une ω-β forme normale par l'application ϕ telle que :

$$\begin{cases} \phi(\lambda x.M) = \lambda x.\phi(M) \\ \phi(x\, M_1\, M_2\, \ldots\, M_n) = x(\phi(M_1))(\phi(M_2))\ldots(\phi(M_n)) \\ \phi((\lambda x.M)\, M_1\, M_2\, \ldots\, M_n) = \Omega \end{cases}$$

L'ensemble des approximations, noté N, est ordonné par :

$$\begin{cases} \Omega < a \\ \lambda x.a < \lambda x.b \quad \text{si} \quad a < b \\ x\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n < x\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_n \quad \text{si} \quad a_i < b_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le n \end{cases}$$

Chaque élément de N étant, soit égal à Ω, soit une forme normale de tête, on peut le représenter par un arbre de Böhm ; ainsi, au λ-terme $M = \lambda z.z\ TX$, avec $T = (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$ et X une λ-expression quelconque, on associera l'arbre

$$\begin{array}{ccc} & \lambda z.z & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Omega & & BT(\phi(X)) \end{array}$$

où $BT(\phi(X))$ est l'arbre de Böhm associé à l'approximation $\phi(X)$.

Il est clair que tout λ-terme n'a pas un "meilleur" approximant. Ainsi, les approximants de $Y = \lambda f(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ sont :

$\{\Omega, \lambda f.f\Omega, \lambda f(f(f\Omega)), \ldots\}$ qui n'a pas de SUP dans N.

N est donc complété (par classes d'équivalence d'ensembles dirigés dans [79]) et le complété N^{∞} peut être assimilé à un ensemble infinitaire d'arbres de Böhm; ainsi, l'ensemble d'arbres finis :

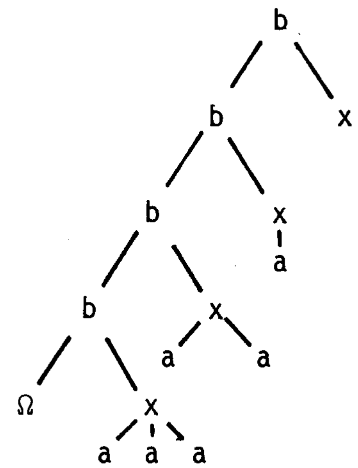
$$\Omega \quad , \quad \lambda f.\ \begin{array}{c} f \\ | \\ \Omega \end{array} \quad , \quad \lambda f.\ \begin{array}{c} f \\ | \\ f \\ | \\ \Omega \end{array} \quad ; \quad \ldots$$

a pour SUP dans N^{∞} l'arbre infini $\lambda f.\ \begin{array}{c} f \\ | \\ f \\ \vdots \end{array}$

<u>Mais</u> il est à noter que ces arbres ne sont pas identiques à ceux de l'exemple précédent dans la mesure où il n'est pas possible de borner leur arité; il suffit de considérer le terme :

$$M = Y.\ \lambda f\ \lambda x(b(f(xa))x)$$

auquel on associe les approximants de la forme :



L'arbre infini qui est limite de ces approximants n'a manifestement pas une largeur bornée, l'arité du sommet marqué x croissant avec la hauteur de l'arbre.

Nous utiliserons parfois la notation des magmoïdes [5] pour travailler sur des arbres où chaque symbole de fonction, comme c'est le cas dans l'exemple précédent, peut recevoir plusieurs arités : l'alphabet gradué Σ est alors un ensemble de couples de la forme (f,i) , où $i \in \mathbb{N}$ est une arité pour f. Les arbres finitaires ainsi construits constituent l'ensemble des arbres indexés sur Σ , et notés $T(\Sigma)^1$ dans [4] (où, de façon générale, $T(\Sigma)^p$ désigne l'ensemble des p-uples d'arbres indexés sur Σ); par simplification, nous noterons $T(\Sigma)$ à la place de $T(\Sigma)^1$ et, pour le complété muni de l'élément minimal Ω , $T^{\infty}_{\Omega}(\Sigma)$.

Dans cet ensemble, nous noterons $H_n(t)$, avec $t \in T(\Sigma)$, la coupure de l'arbre t à la hauteur n , définie inductivement sur n pas :

. $H_0(t) = \Omega \qquad \forall\, t \in T(\Sigma)$

$n \geq 1$. $H_n(t) = t \qquad \forall\, t \in \Sigma_0 \cup X$ avec $\begin{cases} \Sigma_0 : & \text{ensemble des éléments de } \Sigma \text{ de degré } 0 \\ X : & \text{ensemble de variables} \end{cases}$

. $H_n(f(t_1,t_2,\ldots,t_k)) = f(H_{n-1}(t_1),\ldots,H_{n-1}(t_k))$

Cette définition permet en particulier la définition d'une métrique sur les arbres, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

h) $(\mathcal{R},\leq,\mathbb{R})$ est (Cf. § II-&) le CPO des intervalles (ouverts ou fermés) à bornes réelles, dont la base finitaire dénombrable est l'ensemble des intervalles <u>ouverts</u> à bornes rationnelles ordonné par :

$$]\alpha,\beta[\ \leq\ ]\alpha',\beta'[\quad \underline{\text{ssi}} \quad]\alpha,\beta[\ \supseteq\ ]\alpha',\beta'[$$

Dans ce CPO, B^{ω} est l'ensemble des intervalles fermés (ou semi-fermés) à bornes réelles; les éléments de $\mathbb{R}$ sont maximaux dans cet exemple. De plus, les éléments de $\mathcal{R}$ de la forme $]\alpha,\beta[$, où α est rationnel, sont tels que α est point d'accumulation d'une suite α_i.

Ainsi,

$$[0,\beta[\ = \cap\ \{]\tfrac{1}{n}\ ,\beta[\ |\, n \in \mathbb{N}\}$$

Notons que SCOTT donne dans [124] l'ensemble des intervalles fermés à bornes rationnelles comme exemple d'approximation des réels; nous avons expliqué dans le § II-b pourquoi cet ensemble ne pouvait constituer une base finitaire.

Remarquons aussi que l'ensemble des intervalles ouverts à bornes réelles $\{]\alpha,\beta[\ |\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ est une base finitaire pour l'ensemble des intervalles de la forme (x,y) , x et $y \in \mathbb{R}$; mais ce CPO est algébrique, et non ω-algébrique, contrairement au CPO cité précédemment.

i) Enfin, PLOTKIN [107] traite un exemple de domaine universel : si $\mathbb{T}$ est le CPO correspondant au type booléen et ordonné comme suit :

$$\mathbb{T} = \begin{tikzcd} \underline{\text{vrai}} & & \underline{\text{faux}} \\ & \perp \arrow[ul, no head] \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$$

le produit cartésien $\mathbb{T}^{\omega}$ est ordonné par :

$$(t_0,t_1,\ldots,t_i,\ldots) \leq (t'_0,t'_1,\ldots,t'_i,\ldots)$$
$$\underline{\text{ssi}}\ \ \forall\, i \geq 0\ ,\ t_i \leq t'_i$$

Il est clair que $\mathbb{T}^{\omega}$ peut être interprété en tant que classe de couples d'entiers disjoints :

$$\mathbb{T}^{\omega} = \{(A,B) \mid A \subseteq \mathbb{N} \ \& \ B \subseteq \mathbb{N} \ \& \ A \cap B = \emptyset\}$$

ordonné par :

$$(A,B) \leq (A',B') \ \underline{\text{ssi}} \ A \subseteq B \ \& \ A' \subseteq B'$$

Notons que tout élément de $P(\mathbb{N})$ peut être considéré comme apportant une information positive relative à un ensemble d'entiers; de ce point de vue, tout couple (A,B) de $\mathbb{T}^{\omega}$ peut être considéré comme apportant une information positive et négative.

Soit $t \in \mathbb{T}^{\omega}$; nous notons $(t)_0$ et $(t)_1$ les ensembles d'entiers disjoints tels que $t = ((t)_0,(t)_1)$. PLOTKIN montre alors que $\mathbb{T}^{\omega}$ est un CPO infinitaire, donc la base est constituée des éléments b tels que $(b)_0 \cup (b)_1$ soit fini.

$\mathbb{T}^{\omega}$ est utilisé en tant que domaine universel dans la définition d'une sémantique dénotationnelle pour le langage LAMBDA introduit par SCOTT dans [123] : les propriétés intéressantes des fonctions continues de $\mathbb{T}^{\omega}$ dans lui-même seront retrouvées dans le Chapitre III relatif à l'étude des espaces de fonctions continues.

CHAPITRE II

COMPLETION METRIQUE

ET

CPO's INFINITAIRES

La plupart des exemples qui viennent d'être cités sont souvent étudiés en tant qu'espaces métriques et les objets infinitaires y sont alors définis en tant que limites de suites de Cauchy. On peut dès lors s'interroger sur le lien existant entre la structure de CPO de ces espaces et les propriétés métriques généralement utilisées (séparation de la topologie, complétion métrique de la base, etc...)

Nous rappelons dans un premier paragraphe les définitions et notations utilisées pour la complétion métrique d'un espace (B,d) et définissons ensuite une métrique sur les CPO's infinitaires; nous montrons enfin que cette métrique permet de mettre en bijection les complétés au sens métrique et au sens CPO obtenus à partir d'une même base finitaire.

I - COMPLETION METRIQUE.

Les notions définies dans ce paragraphe et les propriétés énoncées sont essentiellement issues de [3] et [41] :

I.A.- ESPACES ULTRAMÉTRIQUES.

Soit B un ensemble quelconque.

DEFINITION 1.- Une application $d : B \times B \to \mathbb{R}^+$ est appelée *distance* (ou métrique) sur B ssi l'on a, pour tout x,y,z dans B :

1) $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

L'ensemble B, muni de sa distance d, est appelé *espace métrique* et noté (B,d).

De plus :

<u>DEFINITION 2</u>.- Une distance d sur B est dite *ultramétrique* si elle vérifie, en outre :

$$d(x,z) \leq \mathrm{Max}\{d(x,y),d(y,z)\}$$

L'espace métrique (B,d) est alors appelé *espace ultramétrique*.
Ainsi, dans les exemples précédents :

. (Σ^*,δ_1) (Exemple IV-e, Ch. 1)

avec :

$$\delta_1(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ \dfrac{1}{\mu n[x[n] \neq y[n]]} \end{cases} \qquad x,y \in \Sigma^*$$

. $(M(F,E),\delta_2)$ (Exemple IV-f, Ch. 1)

avec

$$\delta_2(t,t') = \begin{cases} 0 \text{ si } t = t' \\ \dfrac{1}{\mu n[H_n(t) \neq H_n(t')]} \end{cases} \qquad t,t' \in M(F,E)$$

sont des espaces ultramétriques [102]

Il en est de même de :

. (F,δ_B) (Exemple IV-d, Ch. 1)

avec

$$\delta_B(f,g) = \begin{cases} 0 \text{ si } f = g & f,g \in F \\ \dfrac{1}{1 + \mu x[f(x) \neq g(x)]} & \text{sinon} \end{cases}$$

en effet, soit $h \in F$, $x_0 = \mu x[h(x) \neq f(x)]$

$x_1 = \mu x[h(x) \neq g(x)]$

$x_2 = \mu x[f(x) \neq g(x)]$

à montrer : $x_2 \geq \mathrm{Min}\{x_0, x_1\}$

supposons $x_0 \geq x_1$

$$\Longrightarrow \forall x \; (x \leq x_1 \Longrightarrow h(x) = g(x) \;\; \& \;\; f(x) = h(x)$$

$$\Longrightarrow \forall x \; (x \leq x_0 \Longrightarrow h(x) = f(x))$$

$$\Longrightarrow x_2 \geq x_0 \geq x_1$$

On montre de même que :

$$x_0 \leq x_1 \Longrightarrow x_2 \geq x_1 \geq x_0$$

$$\Longrightarrow x_2 \geq \mathrm{Min}\{x_0, x_1\}$$

$$\Longrightarrow \delta_3 \text{ est une ultramétrique sur } F .$$

I.B.- COMPLÉTION MÉTRIQUE

I.B.1.- Rappelons d'abord qu'une suite $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B est dite convergente ssi il existe un élément $b \in B$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq n , \; d(b_p, b) < \varepsilon$$

L'élément $b \in B$ est alors appelé limite de la suite (b_i) et noté : $b = \lim\limits_{i \to \infty} b_i$.

D'autre part :

DEFINITION 3.- Une suite $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B est dite de Cauchy ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n \in \mathbb{N} , \forall p \geq n , \forall q \geq n , \; d(b_p, b_q) < \varepsilon$$

Notons qu'une caractérisation simple [3] des suites de Cauchy est obtenue dans le cas d'un espace ultramétrique :

PROPOSITION 1.- Soit (B,d) un espace ultramétrique; une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ssi $\lim\limits_{n\to\infty} d(b_n,b_{n+1}) = 0$

La preuve est évidente puisque :

$$(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy} \Longrightarrow \forall\ \varepsilon < 0\ ,\ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que : }$$
$$\forall\ p \geq n\ ,\ \forall\ q \geq n\ ,\ d(b_q,b_q) < \varepsilon$$

$$(B,d) \text{ ultramétrique} \Longrightarrow d(b_p,b_{p+1}) \leq \mathrm{Max}\{d(b_p,b_q),d(b_q,b_{p+1})\}$$
$$\leq \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} d(b_n,b_{n+1}) = 0$$

Inversement :

$$\lim_{n\to\infty} d(b_n,b_{n+1}) = 0$$
$$\Longrightarrow \forall\ \varepsilon\ ,\ \exists\, n \text{ tel que } \forall\ p \geq n\ ,\ d(b_p,b_{p+1}) < \varepsilon$$
$$p \geq n\ ,\ q \geq n \Longrightarrow d(b_p,b_q) \leq \mathrm{Max}\{d(b_i,b_{i+1})\,|\,p \leq i < q\}$$
$$\leq \varepsilon \quad \text{(en supposant } p < q)$$

Notons également qu'une formulation équivalente de la définition 3 est la suivante :

DEFINITION 4.- Une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B est dite de Cauchy ssi $\exists\, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\ n > 0\ ,\ \forall\ p \geq \psi(n)\ ,\ \forall\ q \geq \psi(n)\ ,\ d(b_p,b_q) < \frac{1}{n}$$

Il suffit de reprendre la définition 3 avec :

$$\varepsilon = \frac{1}{1+m} \quad \text{et} \quad n = \psi(m)$$

La définition 4 est notamment utilisée dans les travaux relatifs à l'analyse constructive [96,75,109] ; ψ est appelé *régulateur de convergence* de la suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Enfin, nous serons parfois amenés à spécifier la métrique employée lors de l'utilisation des notions précédentes : Nous utiliserons alors les termes d-limite et d-suites de Cauchy (ou d-Cauchy) respectivement pour limite au sens de d et suites de Cauchy pour la métrique d .

I.B.2.- Il est bien connu que toute suite convergente est de Cauchy; mais l'inverse est évidemment faux (ainsi, dans $B =]0,1]$, avec la distance euclidienne, la suite $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ est de Cauchy mais ne converge vers aucun élément de B).

Nous dirons que :

DEFINITION 5.- Un espace métrique (B,d) est appelé *espace métrique complet* ssi toute suite de Cauchy d'éléments de B converge dans B .

Il est alors possible de compléter tout espace métrique (B,d) en lui adjoignant les limites de ses suites de Cauchy; plus précisément :

THEOREME DE COMPLETION [41]

Tout espace métrique (B,d) *peut être isométriquement plongé dans un espace métrique complet* $(\hat{B},\hat{d})$ *unique (à une isométrie près) et tel que* B *soit dense dans* $\hat{B}$.

L'ensemble $\hat{B}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de suites de Cauchy d'éléments de B , avec la définition suivante de l'équivalence :

$$x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \equiv y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \underline{\text{ssi}} \quad \lim_{i\to\infty} d(x_i,y_i) = 0$$

L'ensemble B est dense dans $\hat{B}$ (autrement dit : $\hat{B} = \bar{B}$) , tout élément de $\hat{B}$ étant limite d'une suite convergente d'éléments de B .

Notons enfin que, si (B,d) est un espace ultramétrique, on montre [3] que son complété $(\hat{B},\hat{d})$ l'est également.

I.C.- TOPOLOGIE MÉTRIQUE.

Rappelons que l'on nomme *boule ouverte* de centre x et de rayon r l'ensemble noté $\mathcal{B}(x,r)$ défini par :

$$\mathcal{B}(x,r) = \{y | y \in B \ \& \ d(x,y) < r\}$$

et que l'on a, dans le cas particulier où (B,d) est ultramétrique, les deux propriétés suivantes :

. Toute boule ouverte est fermée.

. Si $y \in B(x,r)$, alors $B(x,r) = B(y,r)$

On appelle *topologie induite par* d la famille T_d constituée de l'ensemble vide et des parties A de B telles que :

$$A \in T_d \ \& \ A \neq \emptyset \iff \forall x \in A , \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subseteq A$$

Une telle topologie vérifie l'axiome de séparation T_2 (espace de HAUSDORFF) : Si $p \neq q$, p et $q \in B$, il existe un voisinage U de p et un voisinage V de q tels que $U \cap V = \emptyset$; en effet, soit $r = d(p,q)$;

$$p \neq q \Longrightarrow r > 0 \Longrightarrow B(p,\tfrac{r}{2}) \cap B(q,\tfrac{r}{2}) = \emptyset$$

Rappelons enfin les définitions et propriétés suivantes utilisées ultérieurement :

DEFINITION 5.- Deux distances d_1 et d_2 sur B sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels m et M strictement positifs tels que :

$$md_2 \leq d_1 \leq Md_2$$

On a évidemment :

PROPOSITION 2.- Deux distances équivalentes sur B induisent la même topologie sur B.

(L'inverse est faux : deux métriques peuvent induire la même topologie sans être équivalentes; il en est ainsi des métriques d_1 et d_2 sur $\mathbb{R}$ définies par :

$$d_1(x,y) = |x-y| \qquad \text{(métrique euclidienne)}$$

et

$$d_2(x,y) = \frac{d_1(x,y)}{1 + d_1(x,y)} \quad).$$

D'autre part, si (B,d) et (B',d') sont deux espaces métriques, on définit les propriétés suivantes :

<u>DEFINITION 6</u>.- Une application $f : (B,d) \to (B',d')$ est dite *continue* si :

$$\forall x \in B , \forall \varepsilon > 0 , \exists \eta > 0 \text{ tel que}$$

$$\forall y \in B , d(x,y) < \eta \Longrightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Si η ne dépend que de ε , et non du choix de x , f est dite *uniformément continue.*

Cette notion permet d'introduire un autre type d'équivalence entre distances :

<u>DEFINITION 7</u>.- Deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble B sont dites uniformément équivalentes si l'application identique $i : (B,d_1) \to (B,d_2)$ est uniformément continue, ainsi que i^{-1} (i est biuniformément continue).

Ainsi, sur tout espace métrique (B,d) , les métriques d et $\frac{d}{1+d}$ sont uniformément équivalentes; deux métriques équivalentes (Cf. Déf. 5) sont uniformément équivalentes, mais l'inverse est faux (voir exemple précédent avec la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$). Notons aussi que la proposition 2 est vraie avec des métriques u-équivalentes.

Enfin, l'uniforme équivalence a le gros intérêt de conserver les suites de Cauchy et leurs limites : Si d_1 et d_2 sont u-équivalentes, toute d_1-suite de Cauchy est aussi d_2-suite de Cauchy et a même limite (et inversement).

On a donc, en résumé : Si d_1 et d_2 sont deux métriques sur B , induisant les topologies T_1 et T_2 , d_1 équivalente à $d_2 \Longrightarrow d_1$ uniformément équivalente à $d_2 \Longrightarrow d_1$ topologiquement équivalent à d_2 (c'est-à-dire les topologies T_1 et T_2 sont identiques).

D'autres propriétés métriques seront nécessaires ultérieurement, mais nous les rappellerons lors de leur utilisation (compacité et convergence uniforme, théorème de Dini, etc...) afin d'éviter de trop nombreux renvois à ce paragraphe.

II - UNE METRIQUE SUR UN CPO INFINITAIRE.

Notre objectif est de définir une métrique sur un CPO infinitaire et de retrouver en particulier les résultats de [102] relatifs aux espaces d'arbres et de mots infinis.

II.A.- DÉFINITION DE LA MÉTRIQUE.

Soit B^∞ un CPO infinitaire, B sa base finitaire; B étant dénombrable, on peut définir une *énumération* de B :

DEFINITION 8.- Une application $\nu : \mathbb{N} \to B$, B dénombrable, est dite énumération de B ssi ν est surjective.

Nous appellerons (ν)-*indice* de $b \in B$ tout entier n tel que $\nu(n) = b$.

D'autre part, étant donné x et x' dans B^∞ , définissons l'ensemble $x \,\Delta\, x'$ des éléments de B qui "séparent" x et x' ; pour des raisons typographiques, nous notons $\neg\, b \leq x$ pour "b non inférieur à x " :

$$x \,\Delta\, x' = \{b \in B | b \leq x \;\;\&\;\; \neg\, b \leq x' \;\; \underline{\text{ou}} \;\; b \leq x' \;\;\&\;\; \neg\, b \leq x\}$$

Autrement dit, si $I(x) = \{b | b \in B \;\;\&\;\; b \leq x\}$

$$I(x') = \{b | b \in B \;\;\&\;\; b \leq x'\}$$

alors $x \,\Delta\, x'$ est la différence symétrique entre $I(x)$ et $I(x')$, ou :

$$x \,\Delta\, x' = (I(x) - I(x')) \cup (I(x') - I(x))$$

Notons $\mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x']$ pour : "le plus petit n tel que $\nu(n) \in x \,\Delta\, x'$ " en convenant que $\mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x'] = +\infty$ ssi $x \,\Delta\, x' = \emptyset$, c'est-à-dire si les éléments infinitaires x et x' sont identiques : on sait en effet [119] que tout élément d'un CPO infinitaire est déterminé de façon unique par les éléments finitaires plus petits que lui, autrement dit :

$x = x'$ <u>ssi</u> $\forall\, b\,,\, b \in B\,,\, (b \leq x$ <u>ssi</u> $b \leq x')$ $\quad x, x' \in B^\infty$

On peut alors définir l'application $d_\nu : B^\infty \times B^\infty \to \mathbb{R}^+$ par :

$$\boxed{d_\nu(x,x') = \frac{1}{1 + \mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x']}}$$

On montre :

<u>PROPOSITION 3</u>.- d_ν est une ultramétrique sur B^∞

En effet :

a) $\mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x'] = +\infty \Longrightarrow x = x'$ (Cf remarque précédente relative à l'égalité des éléments de B^∞)

D'autre part, l'égalité de x et x' correspond à l'appartenance à une même classe d'équivalence d'ensembles dirigés :

$$\forall\, b \in B\,,\, b \leq x \Longrightarrow \exists\, b' \in B\,,\, b' \leq b \;\&\; b' \leq x'$$

$$\forall\, b' \in B\,,\, b' \leq x' \Longrightarrow \exists\, b \in B\,,\, b \leq b' \;\&\; b \leq x$$

$$\Longrightarrow x \,\Delta\, x' = \emptyset \Longrightarrow d\,(x,x') = 0$$

b) $d_\nu(x,x') = d_\nu(x',x)$ puisque $x \,\Delta\, x' = x' \,\Delta\, x$

c) Enfin, $d_\nu(x,x') \leq \mathrm{Max}\{d_\nu(x,x''), d_\nu(x',x'')\}$

pour tout $x, x', x'' \in B^\infty$

Montrons pour cela que :

$$\mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x'] \geq \mathrm{Min}\{\mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x''] \,,\, \mu n[\nu(n) \in x' \,\Delta\, x'']\}$$

Soit en effet :

$$n_0 = \mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x']$$

posons $\quad u = \nu(n_0)$

. Supposons $u \leq x \;\&\; \neg\, u \leq x'$

.. si $u \leq x''$ alors :

$$u \leq x'' \;\&\; \neg\, u \leq x' \Longrightarrow u \in x' \,\Delta\, x''$$

$$\Longrightarrow n_0 \geq \mu n[\nu(n) \in x' \,\Delta\, x'']$$

.. si $\neg\, u \leq x''$, alors :

$$u \leq x \ \& \ \neg\, u \leq x'' \Longrightarrow u \in x \,\Delta\, x''$$
$$\Longrightarrow n_0 \geq \mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x'']$$

. si $u \leq x'$ & $\neg\, u \leq x$

.. si $u \leq x''$ alors

$$u \leq x'' \ \& \ \neg\, u \leq x \Longrightarrow u \in x \,\Delta\, x''$$
$$\Longrightarrow n_0 \geq \mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x'']$$

.. si $\neg\, u \leq x''$ alors

$$\neg\, u \leq x'' \ \& \ u \leq x' \Longrightarrow u \in x'' \,\Delta\, x'$$
$$\Longrightarrow n_0 \geq \mu n[\nu(n) \in x' \,\Delta\, x'']$$

$$\Longrightarrow \quad n_0 \geq \mathrm{Min}\{\mu n[\nu(n) \in x \,\Delta\, x''] \, , \ \mu n[\nu(n) \in x' \,\Delta\, x'']\}$$

II.B.- PROPRIÉTÉS DE d_ν :

Montrons d'abord :

PROPRIETE 1.- Pour tout $a,b,c,d \in B^\infty$,

$$a \leq b \leq c \leq d \Longrightarrow d_\nu(b,c) \leq d_\nu(a,d)$$

Prouvons pour cela que :

$$\mu n[\nu(n) \in b \,\Delta\, c] \geq \mu n[\nu(n) \in a \,\Delta\, d]$$

avec

$$\nu(n) \in b \,\Delta\, c \Longrightarrow \nu(n) \leq c \ \& \ \neg\, \nu(n) \leq b$$

puisque $b \leq c$

Soit $\begin{cases} n_0 = \mu n[\nu(n) \leq c \ \& \ \neg\, \nu(n) \leq b] \\ n_1 = \mu n[\nu(n) \leq d \ \& \ \neg\, \nu(n) \leq a] \end{cases}$

Or, $a \leq b \Longrightarrow (\nu(n) \leq a \Longrightarrow \nu(n) \leq b)$

$$\Longrightarrow (\neg\, \nu(n) \leq b \Longrightarrow \neg\, \nu(n) \leq a)$$

donc : $\nu(n_0) \leq c \ \& \ \neg\, \nu(n_0) \leq b \Longrightarrow \nu(n_0) \leq d \ \& \ \neg\, \nu(n_0) \leq a$

$$\Longrightarrow \quad n_0 \geq n_1 \quad \text{par définition de } n_1 .$$

D'autre part :

PROPOSITION 4.- Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une d_ν-suite de Cauchy de régulateur de convergence ψ . Alors ψ est croissant.

A prouver : $n \geq n' \Longrightarrow \psi(n) \geq \psi(n')$

par définition du régulateur de convergence (Cf. définition 4 du § II-1.B) on a :

$$\psi(n') = \mu p[\forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ , \ i \geq p \ , \ j \geq p \ , \ d_\nu(b_i,b_j) < \frac{1}{n'}]$$

autrement dit :

$$\psi(n') = \mu p[\forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ , \ i \geq p \ , j \geq p \ , \ \mu m[\nu(m) \in b_i \ \Delta \ b_j] \geq n']$$

Puisque (b_i) est de Cauchy, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$i \geq \psi(n) \ , \ j \geq \psi(n) \Longrightarrow d(b_i,b_j) < \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \mu \, m[\nu(m) \in b_i \ \Delta \ b_j] \geq n$$

$$\Longrightarrow \mu \, m[\nu(m) \in b_i \ \Delta \ b_j] \geq n'$$

puisque $n \geq n'$

alors, par la définition précédente de $\psi(n')$, on obtient :

$$\psi(n) \geq \psi(n') \ .$$

Une propriété fondamentale est que la *topologie induite par* d_ν *et même la notion de suite de Cauchy ne dépend pas de l'énumération* ν *:* On montre pour cela :

<u>THEOREME 1</u>.- *Soient* ν_1 *et* ν_2 *deux énumérations d'une base finitaire* B , d_{ν_1} *et* d_{ν_2} *les métriques associées;* $\bar{B}_1$ *et* $\bar{B}_2$ *les complétés métriques respectifs; alors l'extension canonique*

$$\bar{i} : \bar{B}_1 \rightarrow \bar{B}_2$$

de l'identité i *sur* B *est biuniformément continue.*

Montrons d'abord le lemme suivant qui exprime qu'un ν_1-indice ne peut être arbitrairement grand sans que le ν_2-indice correspondant le devienne : Dans ce lemme , $A_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est tel que $A_1(i) \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} + \infty$

LEMME.- *Pour tout* n , *il existe* $A_1(n)$ *tel que :*

$$\forall\ t \in B \ ,\ \mu n[\nu_1(n) = t] \geq A_1(n) \Longrightarrow \mu n[\nu_2(n) = t] \geq n$$

Montrons pour cela que le contraire est impossible, à savoir :

$\exists\ n\ ,\ \forall\ A_1(n)\ ,\ \exists\ t \in B\ :\ \mu i[\nu_1(i) = t] \geq A_1(n)\ \ \&\ \ \mu i[\nu_2(i) = t] < n$

Cette propriété devant être vraie pour tout $A_1(n)$, il existerait une infinité de $t \in B$ tels que $\mu i[\nu_1(i) = t] \geq A_1(n)$; ce qui est impossible puisque $\mu i[\nu_2(i) = t] < n$.

On montrerait de même que :

$\forall\ n\ ,\ \exists\ A_2(n)$ tel que ,

$\forall\ t \in B\ ,\ \mu n[\nu_2(n) = t] \geq A_2(n) \Longrightarrow \mu n[\nu_1(n) = t] \geq n$

Il en résulte :

COROLLAIRE.- $\bar{1}$ *est uniformément continue.*

En effet, le lemme précédent appliqué à :

$$t = \nu_1(i_1)$$

avec $\quad i_1 = \mu i[\nu_1(i) \in a \Delta b]$

permet d'écrire :

Pour tout $a,b \in B$, B base finitaire de B^∞ , et pout tout $n \in \mathbb{N}$;

$$\exists\ A_1(n) \text{ tel que } \mu i[\nu_1(i) \in a \Delta b] \geq A_1(n)$$
$$\Longrightarrow \mu i[\nu_2(i) \in a \Delta b] \geq n$$

On en déduit alors immédiatement :

$$d_{\nu_1}(a,b) \leq \frac{1}{1 + A_1(n)} \Longrightarrow d_{\nu_2}(a,b) \leq \frac{1}{1+n}$$

ce qui montre l'uniforme continuité de i sur B .

Or, B est dense sur $\bar{B}$: il en résulte donc (résultat classique en analyse), que $\bar{1}$ est uniformément continue.

Le même raisonnement permettrait de montrer que $\bar{1}^{-1}$ est uniformément continue. Le théorème 1 est donc prouvé. Il résulte également de la démonstration de ce théorème que toute suite de Cauchy pour d_{ν_1} l'est aussi pour d_{ν_2} et inversement.

Par la suite, nous omettrons (sauf en cas d'ambiguïté) de spécifier l'énumération utilisée pour la définition de notre métrique et noterons donc d à la place de d_ν ; le théorème 1 permet aussi de parler de $\bar{B}$ en tant *qu'espace métrique associé au CPO infinitaire* B^∞ sans faire référence à l'énumération.

II.C.- ÉLÉMENTS ISOLÉS; ÉLÉMENTS FINITAIRES.

Rappelons d'abord que :

DEFINITION 8.- Un élément $x \in \bar{B}$ est dit *point isolé* de A, $A \subseteq \bar{B}$, s'il appartient à A et s'il existe un voisinage de x ne contenant aucun autre élément de A autre que x.

Autrement dit, un point isolé ne peut être point d'accumulation : Cette propriété est à rapprocher du théorème 2 du chapitre I ($B^\omega = B^\infty - B$) et a incité sans doute à qualifier d'éléments isolés [120] les éléments finitaires de B^∞.

Or, pour la métrique introduite, les notions d'éléments isolés et finitaires ne coïncident généralement pas. Montrons plus précisèment la propriété suivante :

PROPRIETE 2.- Pour la métrique d définie précédemment,
a) tout élément isolé est finitaire
b) tout élément finitaire n'est pas nécessairement isolé.

PREUVE :

a) Soit $\nu : \mathbb{N} \to B$ une énumération de B, base finitaire
Soit $x \in B^\infty$, avec et $\begin{cases} x = \mathrm{SUP}\{b_i \mid i \in I\}, & I \text{ fini ou infini,} \\ b_i < b_{i+1} \\ b_i \in B \text{ pour tout } i \end{cases}$

x isolé $\Longrightarrow \exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d(b,x) \leq \frac{1}{i_0} \Longrightarrow b = x$$

On a donc :

$$b \in B \ \& \ b < x \Longrightarrow \text{Pour tout } b' \in B \text{ tel que } b \leq b' < x ,$$
$$\text{on a } \mu i[\nu(i) = b'] < i_0$$

Si nous notons $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ les éléments de $\{b_i | i \in I\}$, on peut appliquer le résultat précédent à b_1 : Pour tout b' tel que

$b_1 \leq b' < x$, on a $\mu i[\nu(i) = b'] < i_0$

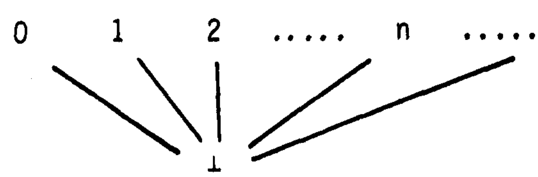
$\Longrightarrow$ l'ensemble des $b' \in B$ tels que $b_1 \leq b' < x$ est fini,

$\Longrightarrow$ la suite $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ est nécessairement finie

$\Longrightarrow$ d'après le théorème 2, du chapitre I, x ne peut être purement infinitaire,

$\Longrightarrow$ $x \in B$ c.q.f.d.

b) Par contre, tout élément finitaire n'est pas nécessairement isolé; Considérons en effet $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ muni de l'ordre plat :



avec l'énumération :
$$\begin{cases} \nu(0) = \perp \\ \nu(i) = i+1 \quad i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Il est clair que :

$$d(\perp, i) = \frac{1}{1 + (i+1)} \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

(en effet, $\perp \notin \perp \Delta i$ et $i \in \perp \Delta i$

$\Longrightarrow$ $i+1 = \mu n[\nu(n) \in \perp \Delta i]$)

$\Longrightarrow$ $\perp$ n'est pas isolé, alors qu'il est finitaire.

De même, avec les intervalles ouverts de la forme $]0, 1 + \frac{1}{n}[$, on voit que l'intervalle $]0,1[$ est finitaire, alors que :

$$d(]0,1[,]0,1+\frac{1}{n}[) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc n'est pas isolé au sens de notre métrique.

Notons cependant que, dans certains exemples ($\Sigma^*, T(\Sigma)$ avec $Card(\Sigma)$ fini) le nombre de successeurs immédiats de tout élément de la base est fini (les successeurs immédiats de b, $b \in B$, étant les éléments minimaux de l'ensemble des majorants de b).

Dans ce cas particulier, cette propriété suffit à faire de B une base isolée (au sens topologique) : Soit en effet $n(b)$ le nombre de successeurs immédiats de b, pour tout $b \in B$; désignons par :

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n(b)} \text{ ces successeurs immédiats.}$$

Soit $i_j = \mu i[\nu(i) = b_j]$ $\qquad j = 1,2,\ldots,n(b)$

ν une énumération quelconque de B.

Soit $i_k = Min\{i_j \mid 1 \le j \le n(b)\}$

Alors la boule ouverte de centre b et de rayon $\dfrac{1}{1+i_k}$ ne contient pas d'autre élément que b

$\Longrightarrow$ b est isolé.

Dans ce cas particulier, tout élément finitaire est donc isolé.

III - COMPARAISON AVEC D'AUTRES METRIQUES.

Nous reprenons, dans ce paragraphe, quelques exemples de CPO's infinitaires sur lesquels on a coutume de définir une métrique et comparons cette dernière avec celle que nous avons proposée dans le paragraphe précédent. Mais nous étudions d'abord celle de WEIHRAUCH qui, dans une optique comparable à la nôtre, a défini une métrique sur un CPO muni d'une fonction de poids.

III.A.- MÉTRIQUE DE WEIHRAUCH [140,141]

Nous ne faisons apparaître ici que les éléments nécessaires à la compréhension de cette métrique et des différences par rapport à celle du § II.

Soit B base finitaire de B^∞ , $|\,| : B \to \mathbb{R}_+ = [0,+\infty]$ une fonction de poids et $\delta : B \times B \to \mathbb{R}_+$ une fonction vérifiant :

1) $x \leq y \Longrightarrow |x| \geq |y| \geq 0$

2) $x \leq y \Longrightarrow \delta(x,z) \leq \delta(y,z) \qquad \forall\, x,y,z \in B$

3) $\delta(x,y) = \delta(y,x) \geq 0$

4) $\delta(x,x) = 0$

5) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(y,z) + |z|$

Il en résulte que, dans B :

$$\begin{cases} x \leq y \Longrightarrow \delta(x,y) = 0 \\ \exists\, z,\ x \leq z \ \&\ y \leq z \Longrightarrow \delta(x,y) = 0 \end{cases}$$

De plus, pour traduire le fait que B doit être base de B^∞ :

6) $\forall\, b \in B \ , \ |b| > 0$

7) $|\ | : (B^\infty,\leq) \to (\mathbb{R}_+,\geq)$ est continu

8) $\delta : (B^\infty,\leq) \times (B^\infty,\leq) \to (\mathbb{R}_+,\geq)$ est continue

Il convient de noter tout de suite que δ *n'est pas une métrique sur* B^∞ *puisque* $\delta(x,y) = 0$ *n'implique pas* $x = y$.

On peut vérifier également que, pour notre métrique d introduite précédemment, $SUP(x,y)$ existe $\not\Longrightarrow$ $d(x,y) = 0$.

La différence essentielle entre l'approche de Weihrauch et la nôtre réside dans la notion même d'approximation : Pour définir une notion proche de celle d'élément purement infinitaire, Weihrauch introduit les relations suivantes :

$$x \underset{\varepsilon}{<} y \Longleftrightarrow x \leq y \ \ \& \ \ (\forall\, b \in B \ , \ \delta(y,b) + |b| < \varepsilon \Longrightarrow x \leq b)$$

et

$$x \sqsubset y \Longleftrightarrow (\exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ tel que } \ x \underset{\varepsilon}{<} y)$$

(x est alors dit "approximation stricte" de y)

On montre alors que :

Si $B_S^\infty = \{x \in B^\infty | x = SUP(b_i)$, avec $b_i \in B$ et

$b_i \sqsubset b_{i+1}\}$, et si $M = \{x \in B_S^\infty | |x| = 0\}$

alors, pour tout $x,y \in M$, $\delta(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

Il en résulte que δ est une métrique sur M, ensemble des limites strictement croissantes d'éléments de B (pour $\sqsubset$) et dont le poids est nul; (M joue donc le rôle de B^ω dans les CPO's infinitaires).

On peut noter que cette métrique n'est pas indépendante de la définition de la fonction de poids, et que, si l'objectif de Weihrauch était comparable au nôtre, la métrique obtenue n'est pas équivalente (de plus, toutes les métriques δ , pour des fonctions de poids différentes, ne sont pas équivalentes entre elles).

III.B.- MÉTRIQUES SUR LES MOTS ET SUR LES ARBRES INFINITAIRES [102] :

Considérons les ultramétriques δ_1 et δ_2 définies respectivement sur Σ^∞ et sur l'ensemble $T_\Omega^\infty(\Sigma)$ des arbres finis ou infinis indexés sur Σ :

$$\delta_1(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ \dfrac{1}{\mu n[x[n] \neq y[x]]} \end{cases} \qquad x,y \in \Sigma^\infty$$

$$\delta_2(t,t') = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ \dfrac{1}{\mu n[H_n(t) \neq H_n(t')]} \end{cases} \qquad t,t' \in T_\Omega^\infty(\Sigma)$$

Nous montrons alors :

<u>THEOREME 2.-</u> *Dans le cas où le cardinal de* Σ *est fini, la métrique* d *est uniformément équivalente aux métriques* δ_1 *sur* Σ^∞ *et* δ_2 *sur* $T_\Omega^\infty(\Sigma)$.

Nous prouvons ce théorème pour δ_2 ; la preuve est identique pour la métrique δ_1 .

Notons que le théorème 1 permet de faire la preuve avec une énumération particulière des CPO's considérés; soit en particulier ν telle que :

$$t \leq t' \Longrightarrow \mu n[\nu(n) = t] \leq \mu n[\nu(n) = t']$$

(on peut énumérer par exemple les arbres dont le nombre de noeuds est inférieur ou égal à i avant ceux dont le nombre de noeuds est inférieur ou égal à $i+1$: il est facile de vérifier que cette énumération a la propriété requise).

On montre alors :

a) Il existe une fonction $A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $A(i)$ tende vers l'infini avec i et que :

$$\mu n[H_n(t) \neq H_n(t')] = i \Longrightarrow \mu n[\nu(n) \in t \,\Delta\, t'] \geq A(i)$$

en effet,

$$\mu n[H_n(t) \neq H_n(t')] = i \Longrightarrow H_{i-1}(t) = H_{i-1}(t')$$
$$\Longrightarrow \mu n[\nu(n) \in t \,\Delta\, t'] \geq i$$

b) inversement, il existe une fonction $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\underset{i \to \infty}{B(i) \to +\infty}$

et que :

$$\mu n[\nu(n) \in t \,\Delta\, t'] \geq i \Longrightarrow \mu n[H_n(t) \neq H_n(t')] \geq B(i)$$

Soit e_n le nombre d'arbres de profondeur inférieure ou égale à n (Σ étant fini, e_n est également fini).

Soit $n(i)$ tel que $e_{n(i)} < i \leq e_{n(i)+1}$

Montrons alors que $\qquad H_{n(i)}(t) = H_{n(i)}(t')$

On a d'abord le résultat suivant, en notant $\pi(t)$ la profondeur de l'arbre t :

<u>LEMME</u> : *Pour tout* $a,b \in T^{\infty}_{\Omega}(\Sigma)$,

$$a \leq b \ \ \& \ \ \pi(a) = n \Longrightarrow a \leq H_n(b)$$

Or, $\quad H_{n(i)}(t) \not\leq t \,\Delta\, t' \;\&\; H_{n(i)}(t) \leq t$

$\Longrightarrow H_{n(i)}(t) \leq t'$

$\Longrightarrow$ d'après le lemme précédent,

$$H_{n(i)}(t) \leq H_{n(i)}(t')$$

Le même raisonnement pouvant être tenu à partir de $H_{n(i)}(t')$, on obtient :

$$H_{n(i)}(t') \leq H_{n(i)}(t)$$

et finalement :

$$H_{n(i)}(t) = H_{n(i)}(t')$$

$$\Longrightarrow \mu n[H_n(t) \neq H_n(t')] > e_{n(i)}$$

on obtient donc le résultat cherché avec $B(i) = e_{n(i)}$.

On peut alors reprendre la preuve du théorème 1 pour montrer que toute δ_1- (resp. δ_2) suite de Cauchy est aussi d-suite de Cauchy et inversement, et que δ_1 (resp. δ_2) et d sont uniformément équivalentes.

<u>REMARQUES</u> :

1.- Ce théorème n'est valide que si $\mathrm{Card}(\Sigma)$ est fini; ainsi, dans le cas des arbres de LEVY [79], notre métrique peut être utilisée mais n'équivaut pas à la métrique δ_2.

2.- Nous donnerons dans le chapitre IV une caractérisation des CPO's infinitaires pour lesquels il est possible de définir une énumération de la base vérifiant la propriété énoncée au début de la preuve.

3.- Il convient enfin de noter que le Théorème 2 montre que la métrique d aurait pu être définie, comme dans [3], sur la base finitaire B, puis être étendue au complété $\bar{B}$: le § I.B.2 de ce chapitre montre alors que l'espace complété est ultramétrique, dès lors que (B,d) l'est également.

III.C.- MÉTRIQUE DE BAIRE

Rappelons que la métrique de Baire sur les fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est définie par :

$$\delta_B(f,g) = \begin{cases} 0 \text{ si } f = g \\ \dfrac{1}{1 + \mu n[f(n) \neq g(n)]} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

L'espace des fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ étant considéré, en tant que CPO infinitaire , comme l'ensemble des mots purement infinitaires engendrés à partir de l'alphabet $\mathbb{N}$, la métrique de Baire n'est donc pas équivalente à la nôtre (puisque Card($\mathbb{N}$) n'est pas fini : Cf. remarque du paragraphe III-B.)

REMARQUE : La suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

n'est pas de Cauchy pour δ_B , avec $\mathbb{N}$ muni de son ordre naturel; par contre, sur $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ muni de l'ordre plat, cette suite converge au sens de d vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \perp \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Une étude plus approfondie de ce résultat est entreprise dans le chapitre III, § III, dans l'étude de la convergence simple des suites de fonctions.

IV - CPO's INFINITAIRES ET ESPACES METRIQUES COMPLETS

IV.A.- B^{∞} ET $\bar{B}$

Etant donné une base finitaire B , nous nous proposons d'étudier les relations entre le complété B^{∞} , CPO infinitaire isomorphe à l'ensemble des idéaux de B , et le complété métrique $\bar{B}$.
Le théorème qui suit est une généralisation aux CPO's infinitaires des résultats de BOASSON-NIVAT [20] relatifs aux mots, et de ARNOLD-NIVAT [3] relatifs aux arbres infinitaires.

THEOREME 3.- *Soit* $i : (B,\leq,\perp) \to (B,d_{\nu})$, *avec* B *finitaire, l'application identique sur* B .

1) i *s'étend de facon unique en* $\bar{i} : B^{\infty} \to \bar{B}$ *telle que*

$$\bar{i}(\mathrm{SUP}_j(b_j)) = \lim_{j\to\infty}(i(b_j))$$

où (b_j) *est une chaîne croissante d'éléments de* B .

2) $\bar{i}$ *est bijective.*

PREUVE :

1) Montrons que l'application $\bar{i}$ est bien définie :
Montrons pour cela que tout élément de B^{ω} est limite d'une suite de Cauchy d'éléments de B .

Soit $b = \mathrm{SUP}\{b_j \in B \mid j \in \mathbb{N}\}$

avec $b_j < b_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}$

or, $b_j < b_{j+1} < b_{j+2} \Longrightarrow d(b_{j+1},b_{j+2}) \leq d(b_j,b_{j+2})$

d'après la propriété 1 du § II.B.

$\Longrightarrow$ la suite $(d(b_i,b))_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Supposons que $d(b_i,b) \xrightarrow[i\to\infty]{} \varepsilon > 0$,

Dans ce cas, la suite

$$\beta_n = \mu i[\neg\, \nu(i) \leq b_n \ \&\ \nu(i) \leq b]$$

est croissante.

De plus, $\exists\ n_0$ tel que : $n \geq n_0 \Longrightarrow \beta_n = \beta_{n_0}$

$\Longrightarrow \exists\ i_0$ tel que $(n \geq n_0 \Longrightarrow \mu i[\neg\, \nu(i) \leq b_n \ \ \&\ \ \nu(i) \leq b]$

$= \mu i[\neg\, \nu(i) \leq b_{n_0} \ \ \&\ \ \nu(i) \leq b] = i_0)$

On aurait donc :

$\nu(i_0) < b \ \ \&\ \ \neg\, \nu(i_0) < b_i$ pour tous les indices i tels que $i \geq i_0$

ce qui contredit le fait que B soit finitaire .

$\Longrightarrow$ La suite (b_i) converge vers b : Elle donc de Cauchy.

D'autre part, ce résultat ne dépend pas du choix de la suite (b_i) : L'extension $\hat{\ }$ est donc bien définie.

2) Montrons que <u>$\hat{\ }$ est surjective</u>

c'est-à-dire que <u>toute suite de Cauchy d'éléments de B converge vers un élément de B^∞</u>

Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de B de régulateur de convergence ψ ;

<u>DEFINITION 9</u>.- On appellera *direction associée à* $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_i = \mathrm{SUP}\{\nu(m) \mid m \leq i \ \ \&\ \ \nu(m) \leq b_{\psi(i)}\}$$

Montrons alors la propriété suivante :

<u>PROPRIETE 3</u>.- La direction associée à une suite de Cauchy d'éléments de B est dans B .

En effet, soit $A_i = \{\nu(m) \mid m \leq i \ \ \&\ \ \nu(m) \leq b_{\psi(i)}\}$

Cet ensemble est dirigé et possède donc un SUP (Cf. proposition 6 du § II.C, chapitre I : B est close par SUP (conditionnel) fini)

$\Longrightarrow a_i = \mathrm{SUP}\ A_i$ appartient à B , $\forall\ i \in \mathbb{N}$

(avec $a_i = \perp$ si $A_i = \emptyset$)

Notons que, intuitivement, a_i représente le SUP des éléments de la base compatibles avec $b_{\psi(i)}$ jusqu'au rang i : Il contient en quelque sorte toute l'information commune finie de la suite (b_i) à partir du rang $\psi(i)$.

Montrons également :

<u>PROPRIETE 4</u>.- La direction (a_i) associée à $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons pour cela :

$$n \le n' \Longrightarrow (m \le n \ \& \ \nu(m) \le b_{\psi(n)} \Longrightarrow m \le n' \ \& \ \nu(m) \le b_{\psi(n')})$$

Il est d'abord évident que :

$$n \le n' \Longrightarrow (m \le n \Longrightarrow m \le n')$$

Montrons, d'autre part, que l'on ne peut pas avoir :

$$\nu(m) \le b_{\psi(n)} \ \& \ \neg\, \nu(m) \le b_{\psi(n')}$$

On sait, (par définition du régulateur ψ) que :

$$\forall\, i \in \mathbb{N} ,\ \forall\, j \in \mathbb{N} ,\ i \ge \psi(n') ,\ j \ge \psi(n') \Longrightarrow \mu m[\nu(m) \in b_i \ \Delta\ b_j] \ge n'$$

or, (proposition 5 du § II.B), ψ est croissant.

Donc, $$n \le n' \Longrightarrow \psi(n) \le \psi(n')$$

Il en résulte que :

$$\mu m[\nu(m) \in b_{\psi(n)} \ \Delta\ b_{\psi(n')}] \ge n' > n$$

$$\Longrightarrow \forall\, m ,\ m < n \Longrightarrow \nu(m) \notin b_{\psi(n)} \ \Delta\ b_{\psi(n')}$$

autrement dit :

$$m < n \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu(m) \le b_{\psi(n)} \ \& \ \nu(m) \le b_{\psi(n')} \\ \underline{\text{ou}} \\ \neg\, \nu(m) \le b_{\psi(n)} \ \& \ \neg\, \nu(m) \le b_{\psi(n')} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow (m < n \ \& \ \nu(m) \le b_{\psi(n)} \Longrightarrow m \le n' \ \& \ \nu(m) \le b_{\psi(n')})$$

$$\Longrightarrow (n \leq n' \Longrightarrow A_n \subseteq A_{n'})$$

$$\Longrightarrow (n \leq n' \Longrightarrow a_n \leq a_{n'}) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Il résulte de la propriété 4 que $SUP(a_i)$ existe et appartient à B^∞.

Soit $a = SUP(a_i) \quad a \in B^\infty$

Il reste à montrer que :

PROPOSITION 5.- Soit (b_i) une suite de Cauchy, (a_i) la direction associée; alors $\underset{i}{SUP}\, a_i = \lim\limits_{i\to\infty} b_i$

Nous prouvons pour cela que :

$$\forall\, n\ ,\ i \geq \psi(n) \longrightarrow \mu j[\nu(j) \in b_i \,\Delta\, a_n] \geq n$$

(on obtient alors que $d(b_i,a) \to 0$ par continuité).

Or, $\mu j[\nu(j) \in b_i \,\Delta\, a_n] \geq Min\{n_0,n_1\}$ (d ultramétrique)

avec $\begin{cases} n_0 = \mu j[\nu(j) \in b_i \,\Delta\, b_{\psi(n)}] \\ n_1 = \mu j[\nu(j) \in b_{\psi(n)} \,\Delta\, a_n] \end{cases}$

$\forall\, n\ ,\ i \geq \psi(n) \longrightarrow n_0 \geq n$

puisque la suite (b_i) est de Cauchy, de régulateur de convergence ψ.

D'autre part, on a :

$a_n = SUP\{\nu(m)\,|\,m \leq n \ \&\ \nu(m) \leq b_{\psi(n)}\} = SUP\, A_n$

$\longrightarrow a_n \leq b_{\psi(n)}$

$\longrightarrow a_n \,\Delta\, b_{\psi(n)} = \{\nu(i)\,|\,\nu(i) \leq b_{\psi(n)} \ \&\ \neg\, \nu(i) \leq a_n\}$

Supposons que l'on ait :

$$n_1 = \mu j[\nu(j) \in a_n \,\Delta\, b_{\psi(n)}] < n$$

Dans ce cas, on obtiendrait :

$$\nu(n_1) \in a_n \,\Delta\, b_{\psi(n)} \quad \& \quad n_1 < n$$

$$\Longrightarrow \quad \nu(n_1) \le b_{\psi(n)} \quad \& \quad \neg\, \nu(n_1) \le a_n \quad \& \quad n_1 < n$$

or, $\qquad \nu(n_1) \le b_{\psi(n)} \quad \& \quad n_1 < n \Longrightarrow \nu(n_1) \in A_n$

$$\Longrightarrow \nu(n_1) \le a_n$$

ce qui est impossible

$$\Longrightarrow \quad n_1 \ge n \ .$$

Il en résulte :

$$\forall\, n \quad , \quad i \ge \psi(n) \Longrightarrow \mu j[\nu(j) \in b_i \,\Delta\, a_n] \ge n$$

donc : $\qquad \forall\, n \quad , \quad i \ge \psi(n) \Longrightarrow d(b_i, a_n) < \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ par continuité de d ,
on obtient le résultat cherché.

3) Montrons enfin que <u>f est injective</u> :

Soit $a = \mathrm{SUP}\ a_i$

$b = \mathrm{SUP}\ b_i$

avec (a_i) et (b_i) des suites croissantes (strictement ou non) d'éléments de B

A montrer : $d(f(a), f(b)) = 0 \Longrightarrow a = b$

(a et b étant infinitaires, ils peuvent être assimilés à des classes d'équivalence de parties dirigées; autrement dit, $a = b$ <u>ssi</u> tout approximant de a peut être majoré par un approximant de b , et inversement)

$$f(a) = f(\mathrm{SUP}\ a_i) = \lim_i\ (a_i)$$

$$f(b) = f(\mathrm{SUP}\ b_i) = \lim_i\ (b_i)$$

Il en résulte que :

$$d(f(a), f(b)) = 0 \Longleftrightarrow d(\lim_i(a_i)\ ,\ \lim_i(b_i)) = 0$$

d étant continue, il en résulte :

$$\lim_{i \to \infty} d(a_i, b_i) = 0$$

Autrement dit, $\forall\, n_0$, $\exists\, k(n_0)$ tel que :

$$k \geq k(n_0) \Longrightarrow d(a_k,b_k) \leq \frac{1}{1+n_0}$$

soit encore, en explicitant la métrique d :

$$(*) \quad \begin{cases} \forall\, n_0 \text{ , } \exists\, k(n_0) \text{ tel que } k \geq k(n_0) \text{ implique :} \\ \forall\, n \text{ , } n \leq n_0 \Longrightarrow (\nu(n) \leq a_k \;\&\; \nu(n) \leq b_k \\ \qquad \underline{\text{ou}} \;\; \neg\, \nu(n) \leq a_k \;\&\; \neg\, \nu(n) \leq b_k) \end{cases}$$

Montrons alors, que, pour tout j , $\exists\, i$ tel que $a_j \leq b_i$; reprenons la propriété $(*)$ avec n_0 tel que $\nu(n_0) = a_j$

$$\exists\, k(n_0) \text{ tel que } k \geq k(n_0) \Longrightarrow \nu(n_0) = a_j \leq a_k \;\&\; \nu(n_0) \leq b_k$$

$$\underline{\text{ou}} \;\; \neg\, \nu(n_0) \leq a_k \;\&\; \neg\, \nu(n_0) \leq b_k$$

$\Longrightarrow$ En particulier, avec $k \geq SUP\{k(n_0),j\}$ et puisque (a_i) est croissante, on obtient :

$$\nu(n_0) \leq a_k \;\&\; \nu(n_0) = a_j \leq b_k$$

On a donc, pour tout j , montré qu'il existait un k tel que

$$a_j \leq b_k$$

On montrerait, en reprenant le même raisonnement, que pour tout j , $\exists\, k$ tel que :

$$b_j \leq a_k$$

Il en résulte, en définitive, que $a = b$

$\Longrightarrow$ f est injective.

Le théorème 3 est donc prouvé avec cette dernière partie; nous donnons dans les pages qui suivent diverses remarques qui illustrent l'importance du résultat ainsi que celle des hypothèses relatives aux CPO's sur lesquels la métrique d a été définie.

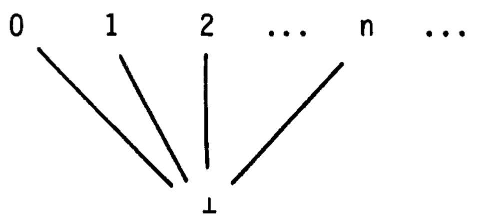
IV.B.- COROLLAIRES ET REMARQUES.

1) Notons d'abord le corollaire suivant qui résulte de la première partie de la démonstration :

COROLLAIRE 1.- *Dans un CPO infinitaire* B^∞ *, toute chaîne croissante d'éléments de la base finitaire* B *est de Cauchy.*

Mais l'inverse est manifestement faux, comme le montrent les deux exemples suivants :

a) Considérons $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ muni de l'ordre plat (Cf. exemple b, § IV, Chapitre I) :



avec l'énumération

$$\begin{cases} \nu(0) = \perp \\ \nu(i+1) = i \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Considérons la suite définie par :

$$b_0 = \perp$$
$$b_i = (i-1) \quad \forall\, i \geq 1 \text{ , } i \in \mathbb{N}$$

Dans cet exemple, $B = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ et $B^\infty = B$, $B^\omega = \emptyset$; la direction associée à $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dont on vérifie facilement qu'elle est de Cauchy

$$(d(n,n') = \frac{1}{1 + \inf(n,n')})$$

est définie par :

$a_i = \perp \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$ (les éléments de (b_i) n'ont en commun que l'information de $\perp$)

(b_i) est donc de Cauchy, mais n'est pas croissante; on vérifie que $\lim\limits_{i \to \infty}(b_i) = \mathop{SUP}\limits_i a_i = \perp$.

On note donc en passant, sur cet exemple, que :

PROPRIETE 5.- Toute suite de Cauchy d'éléments de B convergeant vers un élément de B n'est pas nécessairement stationnaire.

b) Un autre exemple est le suivant : Soit $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$; considérons l'ensemble Σ^{∞} des mots finis ou infinis (voir exemple e du § IV, chapitre I); considérons la suite $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$b_i = \alpha^i \beta \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

Cette suite est de Cauchy (quelle que soit l'énumération choisie) et converge vers α^{ω} ; mais n'est manifestement pas croissante pour l'ordre "être facteur gauche de" sur Σ^*. Notons que la direction associée à (b_i) est définie par :

$$a_i = \alpha^i \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

(a_i) est croissante et $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = \operatorname{SUP}\limits_{i \to \infty} a_i = \alpha^{\omega}$

On peut résumer cette remarque comme suit :

$$b = \lim_{j \to \infty} b_j \quad , \quad b \in \bar{\bar{B}} \not\Longrightarrow \operatorname{SUP}_j \, \bar{\imath}^{-1}(b_j) \text{ existe}$$

(dans le dernier exemple, $\lim b_i = \alpha^{\omega}$, mais $\operatorname{SUP} b_i$ n'est pas défini).

2) Il convient également de remarquer que la définition de $\bar{\imath}$:

$$\bar{\imath}(\operatorname{SUP}_j b_j) = \lim_{j \to \infty}(i(b_j))$$

n'est possible que si $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une chaîne croissante d'éléments de B ; Si (b_j) est dirigée, l'application $\bar{\imath}$ n'est pas définie comme le montre l'exemple suivant :

Considérons le CPO infinitaire Σ^{∞}, avec $\Sigma = \{a\}$; soit (b_j) la suite dirigée définie par :

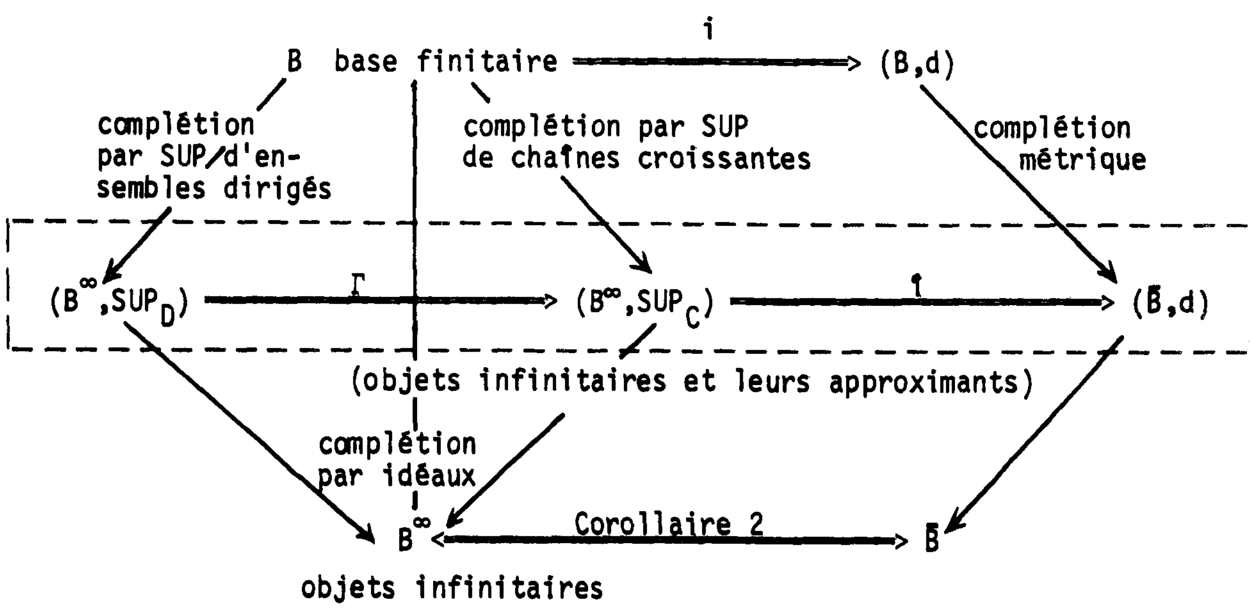
$$\left\{ \begin{array}{l} b_{2p+1} = a \\ \\ b_{2p} = a^p \end{array} \right. \qquad p \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Il est clair que $SUP(b_i) = a^\omega$, alors que (b_i) n'est manifestement pas de Cauchy : l'application f ne peut dont être définie avec une telle suite dirigée.

Cette remarque n'est pas gênante puisque la complétion d'une même base B par supremum des chaînes croissantes et supremum des ensembles dirigés conduit aux mêmes objets infinitaires, autrement dit au même espace infinitaire B^∞ ; Il résulte donc du Théorème 3 le corollaire suivant :

<u>COROLLAIRE 2</u>.- *Tout CPO infinitaire* B^∞ *peut être mis en bijection avec l'espace métrique associé* $\bar{B}$.

On peut résumer par le schéma suivant ce dernier résultat, ainsi que le théorème 3 :



Dans ce diagramme, SUP_C et SUP_D désignent respectivement les SUP's par ensembles dirigés et par chaînes croissantes; l'application Γ associe classiquement à la suite dirigée (b_i) la suite croissante (b'_i)

avec $b'_i = SUP_D\{b_j | j \leq i\}$

telle que : $SUP_D(b_i) = SUP_C(b'_i)$

Notons également que (B^∞, SUP_D) , (B^∞, SUP_C) et $(\bar{B}, d)$ peuvent être considérés comme les espaces infinitaires des objets infinitaires munis de leurs approximations (resp. par les ensembles dirigés, les chaînes croissantes et les d-suites de Cauchy), alors que les approximations dans B^∞ et dans $\bar{B}$ sont "oubliées".

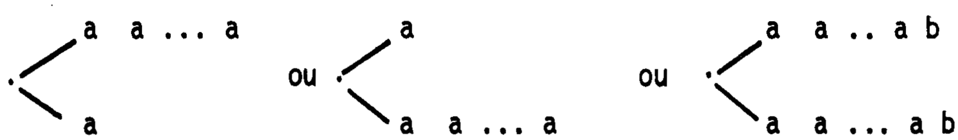
Dans ce schéma, notons que l'on n'a pas nécessairement :

$$f(B^\omega) \subseteq \bar{B} - B$$

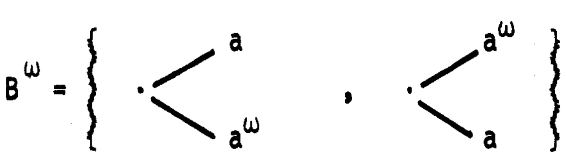
puisque, comme nous l'avons vu dans le § II-C de ce chapitre, tout élément finitaire n'est pas nécessairement isolé.

3) Le Théorème 3 ne peut être utilisé que dans le contexte des CPO's infinitaires définis dans le premier chapitre; ainsi l'exemple suivant montre l'importance de la complétude conditionnelle (CPO's consistently complete, au sens de [107]) :

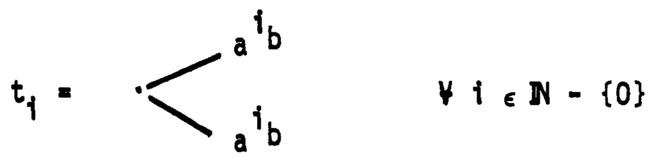
Soit en effet une base B d'arbres finis de la forme :



Il est clair que :



or, la suite de Cauchy (t_i) d'arbres finis définie par :



converge vers l'arbre infini $\cdot\!\!<\!\!\begin{array}{l}a^{\omega}\\ a^{\omega}\end{array}$ qui n'appartient pas à B^{ω}.

Le théorème 3 n'est plus valable dans ce cas; notons que, sur cet exemple, la base B n'est pas close par SUP conditionnel fini puisque :

$$\text{si } t = \cdot\!\!<\!\!\begin{array}{l}a^{i}\\ a\end{array} \quad , \quad t' = \cdot\!\!<\!\!\begin{array}{l}a\\ a^{i}\end{array}$$

alors tout arbre de la forme

$$\cdot\!\!<\!\!\begin{array}{l}a^{j}b\\ a^{j}b\end{array} \qquad \text{avec } j \geq i$$

majore t et t' ; mais t et t' n'ont pas de supremum : la complétude conditionnelle n'est donc pas vérifiée dans ce cas (Cf. chapitre I, définition 10 et proposition 6).

4) Une autre conséquence du théorème 3 et du corollaire 2 est la suivante : notre métrique d est définie sur B^{∞} ; on peut aussi définir d sur la base finitaire B ; puis, utilisant la même technique que dans [3] , définir son extension $\bar{d}$ à $\bar{B}$: cette extension est encore ultramétrique (Cf. § I-B-2). Le théorème 3 permet alors de prouver que les métriques d (sur B^{∞}) et $\bar{d}$ (sur $\bar{B}$) sont équivalentes.

En effet, soient (b_i) et $b'_j)$ deux suites de Cauchy d'éléments de B , avec $b = \lim\limits_{i\to\infty} b_i$; $b' = \lim\limits_{j\to\infty} b'_j$

alors,

$$\bar{d}(b,b') = \bar{d}(\lim b_i \, , \lim b'_j) = \lim_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}} d(b_i,b_j)$$

or, d'après le théorème 3 :

$\lim b_i = \mathrm{SUP}\ a_i$ où (a_i) est la direction associée à (b_i)

$\lim b'_j = \mathrm{SUP}\ a'_j$ où (a'_j) est la direction associée à (b'_j)

$\Longrightarrow \bar{d}(b,b') = d(\mathrm{SUP}\ a_i\ ,\ \mathrm{SUP}\ a'_j)$

Inversement, étant donné des suites (a_i) et (a'_j) croissantes :

$$\bar{d}(\uparrow(\mathrm{SUP}\ a_i),\uparrow(\mathrm{SUP}\ a'_j)) = \bar{d}(\lim a_i,\ \lim a'_j)$$
$$= \lim_{i,j\to\infty} d(a_i,a'_j)$$

5) Notons enfin que la métrique d permet d'obtenir des suites "avec parasites" qui ne convergeraient pas au sens des CPO's mais qui, en tant que suites de Cauchy, ont une limite dans $\bar{B}$ (et donc dans B^{∞}) : Il en est ainsi de l'exemple cité précédemment dans Σ^{∞} , avec $\Sigma = \{\alpha,\beta\}$, avec la suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_i = \alpha^i \beta \qquad \forall\ i \in \mathbb{N}$$

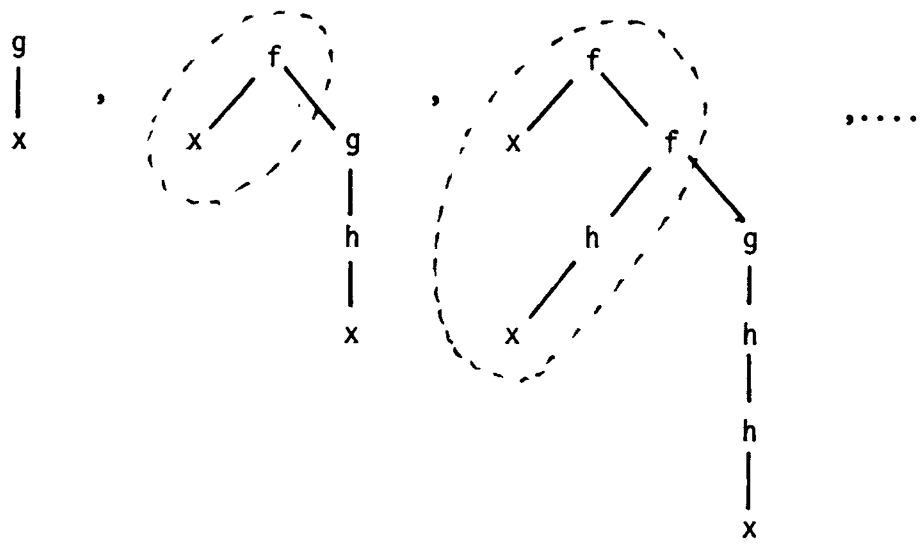
qui converge vers $\alpha^{\omega} \in \Sigma^{\omega}$

Il est intéressant de noter que la direction associée à de telles suites ($a_i = \alpha^i$ dans cet exemple) a pour effet de supprimer ces "parasites" en ne conservant que l'information commune à partir d'un certain rang.

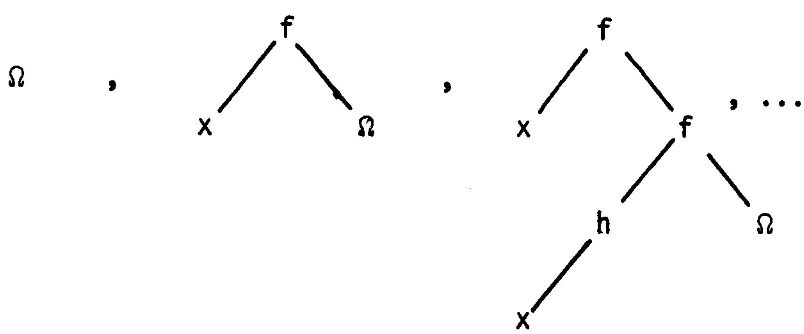
Cette construction de la direction correspond tout à fait à la démarche adoptée dans la sémantique algébrique [16,34] pour définir une suite croissante d'arbres finis convergente associée à une suite de Cauchy : Considérons par exemple le schéma de programme :

$$g(x) = f(x,g(h(x)))$$

auquel est associée la suite (de Cauchy) des réécritures successives :



dans laquelle les sous-arbres entourés constituent les arbres finis communs jusqu'à un rang donné; or, la construction de la suite croissante (pour l'ordre syntaxique sur les arbres) conduit précisément à :



c'est-à-dire à la définition de l'information commune, donc de la direction associée à la suite initiale.

IV.C.- AUTRES MÉTRIQUES SUR B^{∞}

Nous avons montré, dans le paragraphe précédent, que les hypothèses relatives aux CPO's infinitaires étaient indispensables pour l'obtention du théorème 3. Nous montrons maintenant qu'il n'est pas possible d'obtenir une métrique telle que la topologie induite soit plus "proche" de la topologie du CPO; autrement dit, parmi les métriques vérifiant le théorème 3, aucune ne peut être considérée comme "initiale".

a) Considérons d'abord une métrique d_1 définie sur B telle que le prolongement $\hat{i}_1 : B^\infty \to \bar{B}_1$ défini dans le théorème 3 soit bijectif; Montrons d'abord qu'il n'existe pas d'application α uniformément continue telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & (\bar{B},d) \arrow[d, "\alpha"] \\
(B^\infty,\leq,\perp) \arrow[ur, "\hat{i}"] \arrow[r, "\hat{i}_1"'] & (\bar{B}_1,d_1)
\end{tikzcd}$$

où $(\bar{B},d)$ est le complété métrique de B pour la métrique définie dans le § I,

$(\bar{B}_1,d_1)$ est le complété de B pour la métrique d_1

Si un tel α existait, nous aurions donc :

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{i}(x)) &= \hat{i}_1(x) \\ &= \lim_{j\to\infty}(i_1(x_j)) \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} x &= \mathrm{SUP}(x_j) \\ x &\in B^\infty \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \alpha(\lim_{j\to\infty} i(x_j)) = \lim_{j\to\infty}(i_1(x_j))$$

Pour construire un tel α, il faudrait obtenir, à partir d'une suite de Cauchy pour d, une sous-suite convergente (au sens du CPO B^∞), ce qui n'est pas le cas en général (il suffit de voir la construction de la direction associée à une suite de Cauchy et qui n'en est pas une sous-suite).

Fournissons d'ailleurs un contre-exemple :

Soit $B = \{a,b,aa,ab,\ldots,a^i,a^ib,\ldots\}$

avec l'ordre classique sur les ensembles de mots.

Il est clair que :

- toute partie dirigée ne comporte que des puissances de a
- $B^\omega = \{a^\omega\}$

Considérons, d'autre part, la suite (b_i) définie par :

$$b_{2i} = a^i \qquad\qquad b_{2i+1} = a^i b$$

Pour notre métrique (quelle que soit l'énumération choisie pour la base B), la suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et vérifie :

$$\lim_{i\to\infty} b_i = a^\omega$$

Considérons par ailleurs la métrique d_1 définie par :

$$\begin{cases} d_1(a^i,a^j) = \dfrac{1}{\inf(i,j)} \\ d_1(a^i,a^jb) = 1 \\ d_1(a^ib,a^jb) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \qquad \forall\, i,j \in \mathbb{N}$$

Il est clair que les d_1-suites de Cauchy :

- ou bien sont stationnaires en a^ib
- ou bien ne comportent que des puissances de a à partir d'un certain rang

$\Longrightarrow$ $\bar{B} - B = \{a^\omega\}$

Mais on peut voir que les suites convergentes au sens de d ne le sont pas au sens de d_1 : ce contre-exemple montre donc qu'il n'est pas possible de construire un α qui conserve les suites de Cauchy et leurs limites.

b) De façon générale, existe-t-il un espace métrique $(\bar{B}_2,d_2)$ "initial" tel que $\bar{B}_2$ soit en bijection avec B^∞ et tel qu'il existe un α uniformément continu tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & (\bar{B}_2,d_2) \arrow[d, "\alpha"] \\ (B^\infty,\leq,\perp) \arrow[ur, "f_2"] \arrow[r, "f"'] & (\bar{B},d) \end{tikzcd}$$

S'il était possible de construire un tel α , on pourrait extraire de toute d_2-suite de Cauchy convergente une sous-suite convergeant, au sens du SUP, vers la même limite; ceci reviendrait donc à construire une bijection biuniformément contenue entre $(\bar{B}_2, d_2)$ et $(B^\infty, \leq, \perp)$; or, nous avons vu que *les topologies associées à la métrique et au CPO ont des propriétés de séparation différentes;* autrement dit, l'espace topologique (B^∞, T_{B^∞}) n'est pas métrisable, ce qui rend impossible l'existence d'une application α uniformément continue, et donc d'un espace métrique initial parmi tous ceux dont la complétion métrique est en bijection avec le CPO infinitaire B^∞.

IV.D.- AUTRES TOPOLOGIES SÉPARÉES.

Il existe, à notre connaissance, deux topologies séparées sur les CPO's : L'une(appelée "topologie gauche") a été proposée par J. BETREMA [17] et admet pour sous-base la famille des $G(u)$ et des $\tilde{G}(u)$, pour tout $u \in B^\infty$, avec :

$$G(u) = \{x \in B^\infty | x \leq u\} \quad \text{et} \quad \tilde{G}(u) = \{x \in B^\infty | \neg x \leq u\}$$

Cette topologie est plus fine que la topologie dite "de Cantor" utilisée par PLOTKIN dans [108] dont une sous-base est constituée des $P(b)$ et $N(b)$ avec :

$$P(b) = \{x \in B^\infty | x \geq b\} \quad \text{et} \quad N(b) = \{x \in B^\infty | \neg x \geq b\} \quad \forall\, b \in B$$

Il est facile de montrer :

PROPOSITION 6.- La topologie induite par la métrique d coïncide avec la topologie dite "de Cantor".

En effet, soit $x \in B^\infty$; soit $B(x,n)$ une boule de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$, définie par :

$$\mathcal{B}(x,n) = \{y \in B^{\infty} | \mu i[\nu(i) \leq x \ \& \ \neg\, \nu(i) \leq y$$
$$\underline{\text{ou}} \ \ \nu(i) \leq y \ \& \ \neg\, \nu(i) \leq x] > n\}$$

Autrement dit, pour tout $b \in B$,

$$\mu i[\nu(i) = b] \leq n \Longrightarrow \begin{array}{c} b \leq x \ \& \ b \leq y \\ \underline{\text{ou}} \\ \neg\, b \leq x \ \& \ \neg\, b \leq y \end{array} \qquad \forall\, y \in \mathcal{B}(x,n)$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{B}(x,n) = (\ \cap \{P(b) | \mu i[\nu(i) = b] \leq n \ \& \ b \leq x\})$$
$$\cap\ (\ \cap \{N(b) | \mu i[\nu(i) = b] \leq n \ \& \ \neg\, b \leq x\})$$

Ce qui prouve la proposition 6 .

PLOTKIN montre dans [108] la compacité de la topologie ; de plus, l'existence d'une base dénombrable montre (Cf.Théorème de NAGATA et SMIRNOV dans [41]) que l'espace topologique associé est métrisable. L'existence de métriques associées à cette topologie n'est donc pas surprenante, mais les métriques que l'on pourrait proposer (par exemple celle qui est donnée dans la preuve du Théorème précité) ne sont pas généralement uniformément équivalentes à la nôtre.

Parmi les résultats que nous présentons dans les chapitres suivants, il en est que nous aurions pu obtenir par une approche topologique (convergence simple, compacité,...). Pour des raisons de clarté et d'homogénéïté, nous avons préféré une présentation purement métrique.

CHAPITRE III

-=-=-=-=-=-=-

E S P A C E S   D E   F O N C T I O N S

-=-=-=-=-=-=-=-

L'intérêt des CPO's dans la sémantique des langages de programmation réside essentiellement dans le fait que l'espace des fonctions continues d'un CPO dans un autre CPO reste lui-même un CPO : Cette propriété est à la base des travaux réalisés sur le λ-calcul typé [94,42,48] ou non typé [43, 9,124], et reste vraie dans le cas particulier des CPO's infinitaires : L'espace des fonctions continues d'un CPO infinitaire dans un autre CPO infinitaire étant lui-même un CPO infinitaire, on peut donc lui appliquer tous les résultats du paragraphe précédent, et en particulier le munir d'une métrique pour laquelle le théorème 3 reste vrai. Il est alors possible d'étudier les propriétés métriques des espaces de fonctions continues, et en particulier de donner un sens à la notion de convergence simple et de convergence uniforme de fonctions continues au sens des CPO's, de lier la continuité au sens des CPO's à la continuité métrique et à l'uniforme continuité.

Nous montrons dans ce chapitre que le complété $\bar{B}$ d'une base finitaire B est compact *pour notre métrique :* Il en résulte donc que toute fonction continue sur $\bar{B}$ est uniformément continue. D'autre part, nous prouvons que la convergence au sens de notre métrique équivaut à la convergence simple ; enfin, la convergence uniforme implique la convergence au sens de notre métrique et la compacité de $\bar{B}$ permet de prouver qu'à l'inverse toute suite croissante de fonctions qui converge au sens de notre métrique converge uniformément.

I - CPO's DE FONCTIONS CONTINUES

Nous donnons dans ce paragraphe quelques propriétés, généralement prouvées par ailleurs, relatives aux espaces de fonctions continues.

Rappelons d'abord que si D et D' sont deux CPO's, une fonction $f : D \to D'$ est dite continue ssi :

$$f(\mathrm{SUP}\ \Delta) = \mathrm{SUP}\ f(\Delta) \qquad \Delta \text{ dirigé}, \ \Delta \subseteq D$$
$$= \mathrm{SUP}\{f(x) \mid x \in \Delta\}$$

où l'on note de la même façon, pour simplifier, le SUP dans D et le SUP dans D' ; nous avons montré dans le premier chapitre que cette définition équivalait à celle de la continuité au sens de la topologie associée aux CPO's.

Nous notons $[D \to D']$ l'ensemble des fonctions continues de D dans D'.

I.A.- PROPRIÉTÉS DE $[D \to D']$

De façon classique , $[D \to D']$ est muni de l'ordre "par points" défini par :

$$f \leq g \quad \underline{\text{ssi}} \quad \forall x \ , \ f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in D$$

Pour cet ordre, la fonction $\lambda x.\bot$ prenant partout la valeur indéterminée est minimale; on montre de plus (en convenant, par souci de simplification, de noter de façon identique l'ordre et l'élément minimal de D et D') :

PROPOSITION 1.- Soient $(D,\leq,\bot)$, $(D',\leq,\bot)$ deux CPO's; alors, l'espace des fonctions continues $([D \to D'],\leq,\lambda x.\bot)$ muni de l'ordre par points est lui-même un CPO.

Soit en effet Δ dirigé, $\Delta \subseteq [D \to D']$.

Considérons la fonction définie par

$$F(x) = \mathrm{SUP}\{f(x) \mid f \in \Delta\} \qquad \forall x \in D$$

D'abord, cette fonction est définie puisque $\{f(x) \mid f \in \Delta\}$ est dirigé. F majore tous les éléments de Δ , par définition de l'ordre sur $[D \to D']$

D'autre part, toute autre fonction majorant Δ majore F .

$\Longrightarrow$ F est le SUP de Δ

$\Longrightarrow$ $[D \to D']$ est un CPO

D'autre part, il est classique de définir la sémantique d'un programme par le plus petit point fixe de l'opérateur associé à ce programme; la continuité joue un rôle fondamental dans cette définition car elle permet de donner un sens à la notion de plus petit point fixe :

<u>PROPOSITION 2</u>.- Soit $(D,\leq,\perp)$ un CPO
Soit $f \in [D \to D]$
Alors, $\underset{n}{\mathrm{SUP}}\{f^n(\perp)\}$ est le plus petit point fixe de f .

Notons d'abord que, puisque $\perp$ est minimal, on $\perp \leq f(\perp)$.
Mais, f continue $\Longrightarrow$ f monotone

$\Longrightarrow f(\perp) \leq f^2(\perp)$

et, de façon générale ;

$$f^n(\perp) \leq f^{n+1}(\perp)$$

Il en résulte que $\{f^n(\perp)|n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dirigée et admet donc un SUP dans le CPO $(D,\leq,\perp)$.

Montrons que $x = \mathrm{SUP}\{f^n(\perp)|n \in \mathbb{N}\}$ est un point fixe, c'est-à-dire vérifie $f(x) = x$.

Or, $f(x) = f(\mathrm{SUP}\{f^n(\perp)|x \in \mathbb{N}\}$

$= \mathrm{SUP}\{f(f^n(\perp))|n \in \mathbb{N}\}$ puisque f est continue

$= x$ puisque $\perp \leq f^n(\perp)$ pour tout $n \geq 0$.

Montrons enfin que ce point fixe est minimal : Soit $a \in D$ tel que $f(a) = a$.

$\perp \leq a$ puisque $\perp$ est l'élément minimal de D

$\Longrightarrow$ $f(\perp) \leq f(a)$ (monotonicité de f)

$\Longrightarrow$ $f(\perp) \leq a$ (puisque $a = f(a)$)

Ainsi, par induction, on obtient :

$$f^n(\perp) \leq a \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \ \mathrm{SUP}\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq a \qquad\qquad \text{c.q.f.d.}$$

Notons que l'opérateur Y de point fixe qui associe à f son plus petit point fixe est lui-même continu et appartient donc à l'espace des fonctions continues $[[D \to D] \to D]$.

I.B.- BASES DE FONCTIONS CONTINUES.

Etant donné que $[D \to D']$ hérite de la propriété de CPO de D et D' , il est naturel de se demander si l'ω-algébricité et la complétude conditionnelle sont héritées de la même façon.

Montrons d'abord que la notion d'élément finitaire est étroitement liée à la notion de continuité :

THEOREME 1.-[106] *Soient* $(D,\leq,\perp)$ *et* $(D',\leq,\perp)$ *deux CPO's ω-algébriques; alors* $f : D \to D'$ *est continue* *ssi* *pour tout* $x \in D$ *et tout élément finitaire* b' *de* D' , *on a :*

$$b' \leq f(x) \Longleftrightarrow \exists\, b\ ,\ b \textit{ finitaire},\ b \in D \textit{ tel que } b \leq x \ \&\ b' \leq f(b)$$

a) Supposons d'abord que f soit continue et que $b' \leq f(x)$, avec b' finitaire et $b' \in D'$.

   D étant ω-algébrique, $x = \mathrm{SUP}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ où (b_i) est un ensemble dirigé d'éléments finitaires de D .

   Il en résulte que $b' \leq \mathrm{SUP}\{f(b_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ par continuité de f.

   Or, b' finitaire $\Longrightarrow \exists\, j$ tel que $b' \leq f(b_j)$

   D'autre part, si $b \leq x$ & $b' \leq f(b)$, b finitaire et $b \in D$, alors f monotone $\Longrightarrow b' \leq f(b) \leq f(x)$.

b) Inversement, supposons que :

$b' \leq f(x) \Longleftrightarrow \exists\, b$, b finitaire , $b \in D$ tel que

$$b \leq x \ \& \ b' \leq f(b)$$

. Montrons d'abord que f est monotone.

Soient x et y deux éléments de D tels que $x \leq y$;
soit b' finitaire , $b' \in D'$, tel que $b' \leq f(x)$.

D'après les hypothèses, $\exists\, b$ finitaire , $b \in D$ tel que
$b \leq x \ \& \ b' \leq f(b)$

$\Longrightarrow b \leq y \ \& \ b' \leq f(b)$

$\Longrightarrow b' \leq f(y)$

Ainsi, pour tout b' finitaire dans D' , $b' \leq f(x) \Longrightarrow b' \leq f(y)$

$$\Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$\Longrightarrow f \text{ monotone}$$

. Montrons maintenant la continuité.

Soit $\Delta = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ une partie dirigée, $\Delta \subseteq D$.

f monotone $\Longrightarrow \mathrm{SUP}\{f(x_i) | i \in \mathbb{N}\} \leq f(\mathrm{SUP}\{x_i | i \in \mathbb{N}\})$

Pour montrer l'inégalité inverse, considérons b' finitaire,
$b' \in D'$, tel que $b' \leq f(\mathrm{SUP}\{x_i | i \in \mathbb{N}\})$

Par hypothèse, $\exists\, b$ finitaire, $b \in D$ tel que

$$b \leq \mathrm{SUP}\{x_i | i \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{et } b' \leq f(b)$$

b finitaire $\Longrightarrow \exists j$ tel que $b \leq x_j$

$\Longrightarrow b' \leq f(b) \leq f(x_j)$ par monotonicité.

Ceci étant vrai pour tout b' finitaire tel que

$$b' \leq f(\mathrm{SUP}\{x_i | i \in \mathbb{N}\}) ,$$

on obtient donc :

$$f(\mathrm{SUP}\{x_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq \mathrm{SUP}\{f(x_i) | i \in \mathbb{N}\}$$

et donc finalement :

$$f(SUP\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = SUP\{f(x_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$$
$$\Longrightarrow f \text{ est continue}$$

On obtient alors le corollaire suivant [21] dont la preuve résulte du théorème 1 :

<u>COROLLAIRE</u>.- *Soient* $(D,\leq,\perp)$ *et* $(D',\leq,\perp)$ *deux CPO's* ω*-algébriques. Alors* $f : D \to D'$ *est continue* <u>*ssi*</u>

1) f *monotone*

2) $\forall\, x \in D$, $\forall\, b'$ *finitaire*, $b' \in D'$ $(b' \leq f(x) \Longrightarrow \exists\, b$ *finitaire* $b \in D$ *tel que* $b \leq x$ & $b' \leq f(b))$

Ce corollaire apporte donc une autre façon de définir la notion de continuité : Une fonction continue doit d'abord préserver la "direction" de l'information; d'autre part, elle doit préserver les approximations par éléments finitaires. Cette expression de la continuité est à rapprocher de celle de ROGERS [113] dans la définition de la réductibilité par énumération.

Il est à remarquer que le Théorème 1 et son corollaire restent valables dans le cas des CPO's infinitaires (Cf. proposition 6 du § II.C, chapitre I); mais on peut montrer que, de plus :

<u>THEOREME 2</u>.- *Soient* $(B^\infty,\leq,\perp)$ *et* $(B'^\infty,\leq,\perp)$ *deux CPO's infinitaires de bases finitaires respectives* B *et* B' .
Alors l'espace des fonctions continues

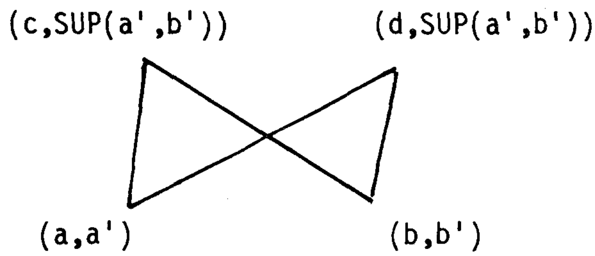
$$([B^\infty \to B'^\infty],\leq,\lambda x.\perp)$$

est un CPO infinitaire et a pour base finitaire l'ensemble des fonctions obtenues par clôture par SUP conditionnel fini des fonctions de la forme (b,b') , *définies par :*

$$(b,b')(x) = \begin{cases} b' & \text{si } x \geq b \\ \perp & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall\, b \in B ,\ \forall\, b' \in B'$$

Les fonctions de la forme (b,b') seront appelées *fonctions en escalier* ("step functions" dans [106]). L'ensemble de ces fonctions n'est pas clos par SUP fini : Il suffit de considérer un couple (a',b') dans $B' \times B'$ tel que $SUP(a',b')$ soit défini, ainsi que a,b,c et d dans B tels que :

$$\begin{cases} c \leq a \text{ et } c \leq b \\ d \leq a \text{ et } d \leq b \end{cases}$$



Il est clair que les fonctions en escalier $(c,SUP(a',b'))$ et $(d,SUP(a',b'))$ majorent (a,a') et (b,b') mais il n'existe pas nécessairement une plus petite fonction en escalier majorant (a,a') et (b,b').

Notons également que le SUP de deux fonctions en escalier est défini par :

$$SUP((a,a'),(b,b'))(x) = \begin{cases} a' \text{ si } x \geq a \ \& \ \neg\, x \geq b \\ b' \text{ si } x \geq b \ \& \ \neg\, x \geq a \\ SUP(a',b') \text{ si } SUP(a',b') \text{ est} \\ \text{défini } \& \ x \geq a \ \& \ x \geq b \\ \perp \text{ sinon} \end{cases}$$

<u>NOTATION</u> : Nous conviendrons de noter $[B \rightarrow B']$ la clôture par SUP fini des fonctions en escalier construites à partir des bases finitaires B et B' .

Pour prouver le Théorème 2 , montrons d'abord :

<u>LEMME 1</u>.- *Toute fonction en escalier* (b,b') , $b \in B$ et $b' \in B$, *est un élément finitaire de* $[B^\infty \rightarrow B'^\infty]$

A montrer :

$$(b,b') \leq \text{SUP}\ \Delta \qquad \Delta \text{ dirigé} \ , \quad \Delta \subseteq [B^{\infty} \to B'^{\infty}]$$
$$\Longrightarrow \exists\, f \in \Delta \ , \quad (b,b') \leq f$$

Soit $\Delta = \{f_i \mid i \in I\}$ $\qquad I \subseteq \mathbb{N}$

$$(b,b') \leq \text{SUP}\ \Delta \Longleftrightarrow (b,b')(x) \leq \text{SUP}\{f_i(x) \mid i \in I\} \qquad \forall\, x \in B^{\infty}$$
$$\Longleftrightarrow b' \leq \text{SUP}\{f_i(x) \mid i \in I\} \qquad \forall\, x \in B^{\infty}$$
$$b' \text{ finitaire} \Longrightarrow \exists j \text{ tel que } b' \leq f_j(x) \qquad \forall\, x \in B^{\infty}$$
$$\Longrightarrow (b,b') \leq f_j$$
$$\Longrightarrow (b,b') \text{ finitaire dans } [B^{\infty} \to B'^{\infty}]$$

Montrons d'autre part que $[B \to B']$ constitue une base pour $[B^{\infty} \to B'^{\infty}]$ c'est-à-dire que :

<u>LEMME 2</u>.- *Pour tout* $f \in [B^{\infty} \to B'^{\infty}]$, *on a*

$$f = \text{SUP}\ E_f$$

avec $E_f = \{\text{SUP}\{(b_i,b_i') \mid b_i' \leq f(b_i) \ , \ i \in I \ \& \ I \text{ fini}\}\}$

Notons d'abord que E_f est dirigé puisque, pour tout $(b_i,b_i') \in E_f$, on a :

$$(b_i,b_i')(x) = \begin{cases} b_i' & \text{si } x \geq b_i \\ \perp & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad f(x) \geq b_i' \quad \text{si} \quad x \geq b_i$$

$\Longrightarrow$ E_f est majoré par f : Les SUP's finis sont donc tous définis et E_f dirigé.

On a évidemment $\text{SUP}\ E_f \leq f$; reste donc à montrer l'inégalité inverse.

Soit $x = \text{SUP}(x_i)$ $\qquad x_i \in B$

$\Longrightarrow$ $f(x) = f(\text{SUP}_i\ x_i) = \text{SUP}_i(f(x_i))$ $\qquad$ (f continue)

or, $f(x_i) = (\text{SUP}\ E_f)(x_i)$

En effet, $(\text{SUP } E_f)(x_i) = \underset{j}{\text{SUP}}\{b'_j | x_i \geq b_j \;\&\; b'_j \leq f(b_j)\}$

$= \underset{j}{\text{SUP}}\{f(b_j) | b_j \leq x_i\}$

$= f(x_i)$ par continuité de f

$\Longrightarrow \quad f(x) = \underset{i}{\text{SUP}}((\text{SUP } E_f)(x_i)) \leq E_f(x)$

et donc finalement : $\qquad f = \text{SUP } E_f$.

Il résulte de ce lemme que $[B \to B']$ est une base pour l'espace des fonctions continues $[B^\infty \to B'^\infty]$. Or, il résulte de la propriété 1 du § II, chapitre I, que $[B \to B']$ est finitaire : Il s'agit donc de la base finitaire de $[B^\infty \to B'^\infty]$; cette base est dénombrable puisque B et B' le sont également : On en déduit donc que l'espace des fonctions $[B^\infty \to B'^\infty]$ est ω-algébrique.

Montrons enfin :

<u>LEMME 3</u>.- *Si* B^∞ *et* B'^∞ *sont des CPO's infinitaires, alors l'espace* $[B^\infty \to B'^\infty]$ *est conditionnellement complet.*

Soit en effet $F \subseteq [B^\infty \to B'^\infty]$ tel qu'il existe une borne supérieure g pour F ; montrons alors que SUP F existe.

Or, F majoré par g dans $[B^\infty \to B'^\infty]$

$\Longrightarrow \quad \forall f \in F \;,\; f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in B^\infty$

or, B'^∞ est conditionnellement complet

$\Longrightarrow \quad \text{SUP}\{f(x) | f \in F\}$ existe, $\forall x \in B^\infty$

$\Longrightarrow \quad$ SUP F existe

Il résulte donc des lemmes 2 et 3 et de la proposition 6 du chapitre I que $[B^\infty \to B'^\infty]$ est un CPO infinitaire dès lors que B^∞ et B'^∞ le sont, et que sa base infinitaire est l'ensemble $[B \to B']$ défini précédemment; on a donc, par application de la complétion définie au § I :

COROLLAIRE.- $[B^\infty \to B'^\infty]$ *est isomorphe au complété* $[B \to B']^\infty$ *de la base finitaire* $[B \to B']$

Les résultats du chapitre II peuvent donc être appliqués à ce CPO infinitaire : Nous étudions dans le paragraphe suivant les conséquences du Théorème 3 du chapitre précédent et le lien existant entre fonctions continues au sens des CPO's et fonctions continues au sens métrique.

II - CONTINUITE AU SENS DE L'ORDRE ET CONTINUITE METRIQUE.

Le paragraphe précédent montre que $[B^\infty \to B'^\infty]$ est un CPO infinitaire : la métrique du chapitre II peut donc lui être appliquée à partir d'une énumération quelconque de la base dénombrable $[B \to B']$; Rappelons qu'une énumération des couples (b,b') , $b \in B$ et $b' \in B'$, peut être classiquement construite à partir d'une "pairing function" (Cf. ROGERS [113] , p. 64) et d'une énumération ν (resp. ν') de la base finitaire B (resp. B') : Soit par exemple la fonction $< > : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (dite de Cantor) définie par :

$$<x,y> = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y)$$

De cette application injective, on peut en déduire une énumération e des couples (b,b') telle que :

$$e(<x,y>) = (\nu(x) , \nu'(y)) \quad x,y \in \mathbb{N}$$

II.A.- EXTENSION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

La définition de la métrique du chapitre II est alors possible ainsi que la construction de la complétion métrique notée $[\overline{B \to B'}]$ de la base finitaire $[B \to B']$.

Il résulte alors du théorème 3 du chapitre II :

PROPOSITION 3.- Il existe une application bijective $\uparrow$, extension de l'identité sur $[B \to B']$, entre $[B^\infty \to B'^\infty]$ et $[\overline{B \to B'}]$.

Cette bijection Υ est définie naturellement comme dans le Théorème 3 , par :

$$\Upsilon(\mathrm{SUP}_i\ \beta_i) = \lim_{i\to\infty} \beta_i$$

$$\text{avec} \begin{cases} \beta_i \in [B \to B'] & \forall\, i \in \mathbb{N} \\ \text{et la suite } (\beta_i) \text{ croissante .} \end{cases}$$

On peut donc résumer les résultats obtenus précédemment de la façon suivante :

$$[B^{\infty} \to B'^{\infty}] \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} [B \to B']^{\infty} \underset{\Upsilon-1}{\overset{\Upsilon}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}} [B \to B']$$

Notons $C(\bar{B},\bar{B}')$ l'ensemble des fonctions continues (au sens métrique) de $\bar{B}$ dans $\bar{B}'$, où $\bar{B}$ et $\bar{B}'$ désignent les complétés respectifs des bases B et B' au sens des métriques d et d' à partir d'une énumération de B et de B' .

Montrons alors :

PROPOSITION 4.- Soit $f \in C(\bar{B},\bar{B}')$.
Une condition suffisante pour que f appartienne à $[B^{\infty} \to B'^{\infty}]$ est que f soit monotone croissante

Soit en effet une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dirigée dans B . f étant croissante, on a :

$$b_i \le \mathrm{SUP}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow f(b_i) \le f(\mathrm{SUP}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\})$$

$$\Longrightarrow \mathrm{SUP}\{f(b_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \le f(\mathrm{SUP}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\})$$

Associons à (b_i) la suite (b'_j) croissante définie par :

$$b'_j = \mathrm{SUP}\{b_i \mid i \le j\}$$

On a évidemment : $\mathrm{SUP}\{b'_j \mid j \in \mathbb{N}\} = \mathrm{SUP}\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

La suite (b'_i) étant croissante, elle est aussi de Cauchy; soit (a_i) sa direction, définie par :

$$a_i = \mathrm{SUP}\{\nu(m) \mid m \le i \ \ \&\ \ \nu(m) \le b'_{\psi(i)}\}$$

où ψ est le régulateur de (b'_i) et ν une énumération quelconque de la base B .

La suite (a_i) étant croissante, elle est aussi de Cauchy , f étant continue (au sens métrique), on a donc :

$$f(\lim_{i\to\infty} a_i) = \lim_{i\to\infty} f(a_i)$$

$$\Longrightarrow \quad f(\mathrm{SUP}_i\, a_i) = \mathrm{SUP}_i\, f(a_i)$$

$$\Longrightarrow \quad f(\mathrm{SUP}_i\, b_i) = \mathrm{SUP}_i\, f(a_i)$$

or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\exists\, j \in \mathbb{N}$ tel que $a_i \leq b_j$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{SUP}\{f(b_i)\,|\,i \in \mathbb{N}\} \geq \mathrm{SUP}\{f(a_i)\,|\,i \in \mathbb{N}\}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{SUP}\{f(b_i)\,|\,i \in \mathbb{N}\} \geq f(\mathrm{SUP}\{b_i\,|\,i \in \mathbb{N}\})$$

On a donc finalement :

$$\mathrm{SUP}\{f(b_i)\,|\,i \in \mathbb{N}\} = f(\mathrm{SUP}\{b_i\,|\,i \in \mathbb{N}\})$$

pour toute suite (b_i) dirigée dans B

$$\Longrightarrow \quad f \in [B^\infty \to B'^\infty]$$

<u>REMARQUE</u> : Inversement, toute fonction $f \in [B^\infty \to B'^\infty]$ n'appartient pas nécessairement à $C(\bar{B},\bar{B}')$; considérons par exemple la fonction $f \in [B^\infty \to B^\infty]$ définie comme suit :

Soit $\Sigma = \{a,b,c\}$ avec un alphabet

$$B = \{a^n b\,|\,n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n c\,|\,n \in \mathbb{N}\}$$

$$B^\omega = \{a^\omega\}$$

avec $f(a^n b) = b$ et $f(a^n c) = c \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Il est clair que f est croissante et continue avec :

$$f(a^\omega) = \varepsilon \qquad \text{où } \varepsilon \text{ est le mot vide sur } \Sigma$$

Or, la suite (x_i) définie par :

$$x_{2n} = a^n b \qquad x_{2n+1} = a^n c$$

est manifestement de Cauchy; mais :

$$f(x_{2n}) = b \qquad f(x_{2n+1}) = c$$

et $\lim_i f(x_i)$ n'est pas définie.

Notons cependant que, si (x_i) est une suite croissante, alors on a :

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\lim_{i\to\infty} x_i)$$

En effet, $f \in [B^\infty \to B'^\infty] \Longrightarrow f(\mathrm{SUP}_i\, x_i) = \mathrm{SUP}_i\, f(x_i)$.

Le Théorème 3 du chapitre II montre que toute suite croissante est de Cauchy pour la métrique d définie sur B

$$\Longrightarrow \mathrm{SUP}_i(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_i$$

D'autre part, f continue $\Longrightarrow f$ monotone

$\Longrightarrow$ la suite $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante

$\Longrightarrow \mathrm{SUP}_i(f(x_i)) = \lim_{i\to\infty} f(x_i)$

Il en résulte que :

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\lim_{i\to\infty} x_i)$$

Une propriété plus intéressante que la continuité (métrique) simple est celle de continuité uniforme puisqu'elle préserve les suites de Cauchy; afin de mettre en évidence le lien entre continuité (au sens des CPO's) et uniforme continuité (au sens métrique), nous étudions d'abord les propriétés de compacité du complété $\bar{B}$:

II.B.- COMPACITÉ ET UNIFORME CONTINUITÉ.

Dans la plupart des exemples traités à la fin du premier chapitre, des propriétés de compacité ont été étudiées : Ainsi, dans [3] , on montre que $M^\infty(F,E)$ est compact si Card(E) et Card(F) sont finis; il est également prouvé dans [113] que l'espace F des fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, muni de la métrique de Baire, n'est pas compact.

Rappelons d'abord les deux définitions équivalentes de la compacité :

<u>DEFINITION 1</u>.- Soit E un espace topologique; une partie $A \subseteq E$ est dite compacte si, de toute famille d'ouverts constituant un recouvrement de A , on peut extraire une famille finie ayant la même propriété.

Plus brièvement, on dit que de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un recouvrement ouvert fini de A .

Le passage au complémentaire conduit à la définition équivalente :

<u>DEFINITION 2</u>.- Soit E un espace topologique; une partie $A \subseteq E$ est dite compacte si, de toute famille de fermés de A dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.

Notons d'abord que l'étude de la compacité d'un espace muni d'une topologie de CPO ne présente pas beaucoup d'intérêt, puisque tout voisinage de l'élément minimal $\perp$ recouvre B^{∞} : Il en résulte la propriété (triviale) que B^{∞} , muni de sa topologie de CPO, est compact.

Par contre, le résultat suivant est une généralisation de celui de [3] relatif au magma complet et illustre une nouvelle différence par rapport à la métrique de Baire :

<u>THEOREME 3</u>.- *Le complété métrique* $\bar{B}$ *, muni de la topologie métrique* T_{d_ν} *,* ν *une énumération quelconque de* B *, est compact.*

Rappelons d'abord qu'un espace topologique métrique est compact si et seulement si toute partie infinie $E \subseteq \bar{B}$ admet un point d'accumulation.

Associons à tout $x \in E$, E partie infinie de $\bar{B}$, le mot infini $m(x) \in \{0,1\}^{\infty}$ défini par :

$$m(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu(i) \leq x \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Construisons une suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ décroissante, telle que :

. $E_i \subseteq E$ pour tout $i \in \mathbb{N}$

. $\exists\, m_i \in \{0,1\}^*$ tel que :

$$[m(x)]_i = m_i$$

Supposons E_i construit; on peut alors définir E_{i+1} à partir de E_i de la façon suivante : Etant donné que l'ensemble des mots de $\{0,1\}^*$ de longueur $i+1$ est fini, il existe un mot m_{i+1} commun à une infinité de mots $m(x)$, pour tout $x \in E_i$.

Soit $$E_{i+1} = \{x | x \in E_i \ \& \ [m(x)]_{i+1} = m_{i+1}\}$$

Il est clair que la suite (E_i) ainsi construite est décroissante.

Considérons maintenant un élément $x_i' \in E_i$: Etant donné que la longueur de $m(x_i')$ est supérieure à i , il existe une infinité d'éléments différents de x_i' ; on peut donc constituer ainsi une suite infinie (x_i) d'éléments deux à deux distincts (Lemme de KÖNIG [102]).

D'autre part, par construction :

$$\mu n[\nu(n) \in x_p' \,\Delta\, x_q'] \geq \inf(p,q) \qquad \forall\, p,q \in \mathbb{N}$$

La suite infinie $(x_i')_{i\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, puisque $\bar{B}$ est complet; elle converge vers un élément infinitaire qui est point d'accumulation de E par construction.

<u>REMARQUES</u> :

1) F (Cf. Chapitre I, § IV-D) muni de la métrique de Baire n'est pas compact, mais cela ne contredit pas le théorème précédent puisque notre métrique n'équivaut pas à celle de Baire. Par contre, $F \cup I^*$ est un CPO infinitaire de base I^* , ensemble des séquences finies d'entiers; muni de notre distance, le complété $\bar{B}$, avec $B = I^*$, est compact, en application du théorème précédent.

2) L'ensemble infinitaire $T(\Sigma)$ des arbres de Böhm associés aux λ-expressions (Cf. LEVY [79] et § IV.G du chapitre I) est compact lorsqu'il est muni de la métrique d du chapitre II, mais pas avec la métrique δ_2 (Cf. chapitre II, § I.A) puisque $\mathrm{Card}(\Sigma)$ n'est pas nécessairement fini.

Il résulte du Théorème 3 le corollaire suivant :

COROLLAIRE.- *Toute fonction* $f \in C(\bar{B},\bar{B}')$ *est uniformément continue.*

Etant donné que $\bar{B}$ est compact, le corollaire résulte immédiatement du Théorème de HEINE (Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue).

La propriété de compacité de l'espace topologique $(\bar{B},\mathcal{T}_d)$ est aussi importante pour l'étude des propriétés de convergence, comme nous le montrons dans le paragraphe suivant.

III - CONVERGENCE SIMPLE; CONVERGENCE UNIFORME

Nous étudions, dans ce paragraphe, les propriétés de convergence classiques de fonctions de $C(\bar{B},\bar{B}')$ croissantes pour l'ordre sur $[B^\infty \to B'^\infty]$: D'après la proposition 4, il s'agit donc de fonctions particulières de $[B^\infty \to B'^\infty]$.

Notre métrique paraît a priori très éloignée des critères de convergence habituels : En effet, si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convergeant vers g, l'expression de la convergence de (f_i) vers g, notée :

$$d(f_i,g) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

indique en fait que :

$$\forall \varepsilon \; , \; \exists\, n(\varepsilon) \text{ tel que } i \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow d(f_i,f) < \varepsilon$$

autrement dit, si $e : \mathbb{N} \to [B \to B']$ est une énumération de la base de $[B^\infty \to B'^\infty]$:

$$\forall n \; , \; i \geq n \Longrightarrow \mu j[e_j \in f_i \,\Delta\, g] > n$$

Or, la convergence simple et la convergence uniforme sont définies par référence aux valeurs prises par les fonctions comme le rappelle la définition suivante :

DEFINITION 3.- Soient B et B' bases finitaires respectives des CPO's infinitaires B^∞ et B'^∞ .
Une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\bar{B}$ dans $\bar{B}'$ converge *simplement* vers $g : \bar{B} \to \bar{B}'$ si :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \forall\ x \in \bar{B}\ ,\ \exists\ n(\varepsilon,x) \in \mathbb{N} \text{ tel que :}$$
$$i \geq n(\varepsilon,x) \Longrightarrow d(f_i(x),f(x)) < \varepsilon$$

Dans les mêmes conditions, la suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers g si l'entier $n(\varepsilon,x)$ peut être remplacé par un entier $n(\varepsilon)$ indépendant de x .

III.A.- d_e-CONVERGENCE ET CONVERGENCE SIMPLE.

Montrons d'abord que la convergence au sens de la métrique d_e , e une énumération de $[B \to B']$, implique la convergence simple; de façon plus précise :

THEOREME 4.- *Soit* $e : \mathbb{N} \to [B \to B']$ *une énumération de la base du CPO infinitaire* $[B^\infty \to B'^\infty]$ *; soient* ν *et* ν' *des énumérations respectives des bases* B *et* B' . *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions croissantes de* $C(\bar{B},\bar{B}')$, *g une fonction croissante de* $C(\bar{B},\bar{B}')$; *alors :*

$$d_e(f_n,g) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow \forall\ x \in B^\infty\ ,\ d_{\nu'}(f_n(x),g(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Montrons pour cela le lemme suivant :

LEMME.- *Pour tout* $b \in B$, $b' \in B'$, *et tout couple de fonctions* f *et* g *de* $[B^\infty \to B'^\infty]$

$$b' \in f(b)\ \Delta\ g(b) \Longrightarrow (b,b') \in f\ \Delta\ g$$

Soit en effet $b' \in B'$, tel que $b' \in f(b) \Delta g(b)$

Supposons $b' \leq f(b) \;\&\; \neg\, b' \leq g(b)$

(le cas où $b' \leq g(b) \;\&\; \neg\, b' \leq g(b)$ donne lieu à une démonstration identique)

$$(b,b')(b) \leq g(b) \Longrightarrow b' \leq g(b) \quad \text{par définition de } (b,b')$$

ce qui implique $\neg\, b' \leq g(b) \Longrightarrow \neg\,(b,b')(b) \leq g(b)$

$$\Longrightarrow \neg\,(b,b') \leq g$$

D'autre part, $x \geq b \Longrightarrow (b,b')(x) = b' \leq f(b) \leq f(x)$

puisque f est croissante

et $\neg\, x \geq b \Longrightarrow (b,b')(x) = \bot \leq f(x)$

Il en résulte que, pour tout $x \in B^{\infty}$, on a :

$$(b,b')(x) \leq f(x)$$

et, finalement, $\neg\,(b,b') \leq g \;\&\; (b,b') \leq f$

c'est-à-dire : $(b,b') \in f \Delta g$

Ce lemme permet de prouver le théorème pour les éléments finitaires; montrons en effet que :

$$\exists\, x_0 \,,\, x_0 \in B \;\&\; d_{\nu'}(f_n(x_0),g(x_0)) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

$$\Longrightarrow d_e(f_n,g) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

S'il existe un $x_0 \in B$ tel que :

$$\exists\, N \text{ tel que } \forall\, n \,,\, \exists m \geq n \,,\; b' \in f_m(x_0) \Delta g(x_0)$$

$$\text{avec } \mu j[\nu'(j) = b'] < N$$

alors, d'après le lemme qui précède :

$$\exists\, N \text{ tel que, } \forall\, n \,,\, \exists m \geq n : (x_0,b') \in f_m \Delta g$$

$$\& \;\mu j[\nu'(j) = b'] < N$$

$$\Longrightarrow d(f_n,g) > \frac{1}{1+N}$$

Etendons ce résultat à tous les éléments infinitaires en montrant que :

$$\forall x \in B\ ,\ d_{\nu'}(f_n(x),g(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \forall x \in B^{\infty}\ ,\ d_{\nu'}(f_n(x),g(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il suffit, pour cela, de montrer (résultat classique) :

<u>LEMME</u>.- *Si* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions dans* $C(\bar{B},\bar{B}')$ *convergeant simplement sur* B *vers une fonction* $f \in C(\bar{B},\bar{B}')$ *et si* $\bar{B}$ *est compact, alors* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f *sur* $\bar{B}$.

Notons d'abord que, de l'inégalité :

$$d_{\nu'}(f_n(b_i),f(b)) \leq \mathrm{Max}\{d_{\nu'}(f_n(b_i),f(b_i)),d_{\nu'}(f(b_i),f(b))\}$$

il résulte

$$(*)\ \left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon\ ,\quad b_i \in B\ ,\ \exists\, r(\varepsilon,b_i)\ ,\ \exists\, n(\varepsilon,b_i)\ \text{ tels que :} \\ \left.\begin{array}{l} n > n(\varepsilon,b_i) \\ \\ d_{\nu}(b,b_i) < r(\varepsilon,b_i) \end{array}\right\} \Longrightarrow d_{\nu'}(f_n(b_i),f(b)) < \varepsilon \quad b \in \bar{B} \end{array}\right.$$

Or, B est dense sur $\bar{B}$

$\Longrightarrow$ pour ε fixé, l'ensemble de boules $B(b_i,r(\varepsilon,b_i))$ de centre b_i et de rayon $r(\varepsilon,b_i)$ recouvre $\bar{B}$

$\bar{B}$ étant compact, on peut en extraire un sous-ensemble fini F qui recouvre $\bar{B}$

Soit $n(\varepsilon) = \mathrm{SUP}\{n(\varepsilon,b_i) \mid B(b_i,r(\varepsilon,b_i)) \in F\}$

Pour tout $x \in \bar{B}$, $\exists\, b_i$ tel que $x \in B(b_i,r(\varepsilon,b_i))$,

c'est-à-dire : $d_\nu(x,b_i) < r(\varepsilon,b_i)$

On a donc, d'après $(*)$, pour tout $x \in \bar{B}$:

$$\forall\, n\ ,\ n \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow d_{\nu'}(f_n(b_i),f(x)) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } \bar{B}$$

ce qui termine la preuve du théorème 4 .

<u>REMARQUE</u> : Ce résultat était évident dans le cas particulier de suites de Cauchy associées à des suites croissantes :

Soit en effet $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions pour l'ordre défini sur $[B \to B']$.

Soit $g = \mathrm{SUP}_n f_n$, $g \in [B^\infty \to B'^\infty]$ par définition du complété $[B \to B']^\infty$

$= \lim_{n\to\infty} f_n$ puisque toute suite croissante dans $[B \to B']$ est d_e-Cauchy, où e est une énumération de $[B \to B']$

$$\Longrightarrow g(x) = (\mathrm{SUP}\, f_n)(x) \quad \forall\, x \in B^\infty$$

$$= \mathrm{SUP}\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall\, x \in B^\infty$$

$$\Longrightarrow \forall\, x\ ,\ d_{\nu'}(g(x),f_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Inversement, dans ce cas particulier, il est facile de montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions, alors :

$$\forall\, x\ ,\ d_{\nu'}(g(x),f_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow d_e(f_n,g) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(le raisonnement précédent peut être effectué de la même façon)

Montrons que, de façon générale :

<u>THEOREME 5</u>.- *Soient* B^{∞} *et* B'^{∞} *deux CPO's infinitaires de bases respectives* B *et* B' *énumérées respectivement par* ν *et* ν' *; soit* e *une énumération de* $[B \to B']$ *. Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions croissantes de* $C(\bar{B},\bar{B}')$ *et* g *croissante,* $g \in C(\bar{B},\bar{B}')$ *; alors :*

$$\forall x \in B^{\infty}, \quad d_{\nu'}(f_n(x),g(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow d_e(f_n,g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Etant donné que le choix de l'énumération n'influe pas sur les propriétés topologiques (Cf. chapitre II, § II.B, théorème 1); choisissons des énumérations $\nu : \mathbb{N} \to B$ et $\nu' : \mathbb{N} \to B'$ injectives et une énumération $e : \mathbb{N} \to [B \to B']$ obtenue à partir de ν et ν' par le procédé de Cantor. On a alors la propriété évidente suivante :

$$(P_1) : \quad \mu i[e(i) = (b,b')] \geq \mathrm{Max}\{\mu i[\nu(i) = b] \ , \ \mu i[\nu'(i) = b']\}$$

D'autre part, la convergence simple implique :

$$\forall p \ , \forall n \ , \exists \ \varepsilon(n,p) \ \text{ tel que :}$$

$$m \geq \varepsilon(n,p) \Longrightarrow d_{\nu'}(f_m(\nu(n)),f(\nu(n))) \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{Soit } \ \varepsilon(p) = \mathrm{SUP}\{\varepsilon(n,p) \mid n \leq p\}$$

On obtient alors la propriété suivante :

$$(P_2) : \quad \forall p \ , \forall m \geq \varepsilon(p) \ , \ i \leq p \Longrightarrow d(f_m(\nu(i)),f(\nu(i))) \leq \frac{1}{p}$$

Montrons alors que :

$$\forall p \ , \forall m \geq \varepsilon(p) \ , \ d_e(f_m,f) \leq \frac{1}{p}$$

en utilisant le lemme suivant :

<u>LEMME</u>.- *Pour tout* $b \in B$, $b' \in B'$, f_m *et* $f \in [B^{\infty} \to B'^{\infty}]$

$$((b,b') \in f_m \,\Delta\, f \Longrightarrow b' \in f_m(b) \,\Delta\, f(b))$$

Ce lemme se prouve facilement puisque :

. $(b,b') \leq f_m \iff \forall x \in B^\infty,\ (b,b')(x) \leq f_m(x)$

or,

$$(b,b')(x) = \begin{cases} b' & \text{si } x \geq b \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (b,b')(b) = b' \leq f_m(b)$$

. d'autre part, $b' \leq f(b) \Longrightarrow (b,b')(x) \leq f(x) \quad \forall x \in B^\infty$

en effet, $(b,b')(x) = b'$ si $x \geq b$

$\leq f(b) \leq f(x)$ puisque f est continue

et $(b,b')(x) = \perp$ sinon

$\leq f(x)$ pour tout x

$\Longrightarrow \quad (b' \leq f(x) \Longrightarrow (b,b') \leq f)$

$\Longrightarrow \quad (\neg(b,b') \leq f \Longrightarrow \neg\, b' \leq f(b))$

En résumé : $(b,b') \leq f_m \ \&\ \neg\,(b,b') \leq f \Longrightarrow b' \leq f_m(b)\ \&\ \neg\, b' \leq f(b)$

$$\Longrightarrow b' \in f_m(b)\ \Delta\ f(b)$$

On prouve de façon identique que :

$$(b,b') \leq f\ \&\ \neg(b,b') \leq f_m \Longrightarrow b' \in f_m(b)\ \Delta\ f(b)$$

d'où le lemme énoncé.

Montrons maintenant le Théorème 5 :

Soient $b \in B^\infty$ et $b' \in B'^\infty$ tels que $(b,b') \in f_m \Delta f$, avec $m \geq \varepsilon(p)$

. si $\mu i[\nu(i) = b] \geq p$

alors, d'après la propriété (P_1) :

$$\mu i[e(i) = (b,b')] \geq p$$

. si $\mu i[\nu(i) = b] \leq p$

alors, $(b,b') \in f_m \Delta f \Longrightarrow b' \in f_m(b)\ \Delta\ f(b)$

d'après le lemme précédent

$\Longrightarrow \ \mu i[\nu'(i) = b'] \geq p$

d'après (P_2)

$\Longrightarrow \ \mu i\,[e(i) = (b,b')] \geq p$

d'après (P_1)

On a donc finalement :

$$\forall\, p \ , \ \forall\, m > \varepsilon(p) \ , \ (b,b') \in f_m \,\Delta\, f \Longrightarrow \mu i[e(i) = (b,b')] \geq p$$

$$\Longrightarrow \ \forall\, p \ , \ \forall\, m > \varepsilon(p) \ , \ d_e(f_m,f) < \frac{1}{p}$$

ce qui prouve le théorème 5 .

REMARQUES ET CONSEQUENCES.-

1.- Etant donné deux espaces métriques E_1 et E_2 , on définit généralement la convergence simple à l'aide de la topologie de E_2 (par définition même du critère de convergence simple), sans utiliser de topologie sur l'ensemble $F(E_1,E_2)$ des applications de E_1 dans E_2; mais il est possible de munir $F(E_1,E_2)$ d'une topologie T telle que la convergence simple soit la convergence dans l'espace topologique $(F(E_1,E_2),T)$

Néanmoins, cet espace $(F(E_1,E_2),T)$ n'est pas en général métrisable; autrement dit, il n'existe pas en général de métrique δ telle que la topologie T_δ induite par δ soit identique à T .

Les résultats qui précèdent montrent donc qu'il est possible de définir une métrique sur $[B_1^\infty \to B_2^\infty] \subseteq F(\bar{B}_1,\bar{B}_2)$ et que cette métrique d_e , où e est une énumération de $[B_1 \to B_2]$, peut être considérée comme une métrique de la convergence simple.

2.- On peut aussi considérer la métrique δ_B (de Baire) comme une métrique de la convergence simple sur l'ensemble F des fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}$ est muni de la métrique induite par la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$) en ce sens que :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} g \qquad \underline{\text{ssi}} \qquad \delta_B(f_n,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Rappelons en effet (ce résultat est classique) que :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f \Longrightarrow \forall\, i \;,\; \forall\, n \;,\; \exists\, \alpha(i) \quad \text{tel que :}$$

$$m \geq \alpha(i) \Longrightarrow |f_m(i) - f(i)| < \frac{1}{n}$$

Ce qui implique, compte tenu de la topologie sur $\mathbb{N}$:

$$\forall\, i \;,\; \exists\, \alpha(i) \quad \text{tel que} \quad m \geq \alpha(i) \Longrightarrow f_m(i) = f(i)$$

Soit $\beta(i) = \text{Sup}\{\alpha(j) \mid j \leq i\}$

alors , $\forall\, n \;,\; m \geq \beta(n) \Longrightarrow \delta_B(f_m,f) < \frac{1}{n}$

en effet, $m > \beta(n) \Longrightarrow (\forall\, i \;,\; i \leq n \Longrightarrow f_m(i) = f(i))$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1 + \mu i[f_m(i) \neq f(i)]} < \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \delta_B(f_n,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Inversement :

Supposons que $\forall\, n \;,\; \exists\, \beta(n)$ tel que $m \geq \beta(n) \Longrightarrow \delta_B(f_m,f) < \frac{1}{n}$

Alors, pour tout entier n , on a :

$$m \geq \beta(n) \Longrightarrow f_m(n) = f(n)$$

$$\Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f$$

3.- On peut donc considérer que la métrique d_e est une extension de la métrique de Baire dans la mesure où :

$$\cdot\;\; f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f \Longleftrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\delta_B} f$$

$$\Longleftrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{d_e} f$$

. Notre métrique d_e n'est pas équivalente à δ_B sur F (mais le résultat précédent indique que les topologies sont les mêmes, ce qui n'est pas contradictoire : Cf. Chapitre II, § II, et § III.C).

. Enfin, sur les fonctions de $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ dans $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$, la métrique d_e est encore telle que :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f \iff f_n \xrightarrow[n\to\infty]{d_e} f$$

mais ce résultat est faux pour la métrique de Baire : (il suffit de considérer l'exemple du § III.C, chapitre II).

III.B.- d_e-CONVERGENCE ET CONVERGENCE UNIFORME

Rappelons tout d'abord que, si (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont des espaces métriques, l'ensemble $F(E_1,E_2)$ des applications de E_1 dans E_2 peut être muni d'une distance d' dite *"de la convergence uniforme"* définie par :

$$d'(f,g) = \mathrm{SUP}\{d(f(x),g(x)) \mid x \in E_1\}$$

(Certaines hypothèses complémentaires sont en fait nécessaires pour faire de d' une véritable distance : on peut par exemple supposer E_1 compact; ou ne considérer que des applications bornées de E_1 dans E_2).

Soit $T_{d'}$ la topologie induite par d' : la justification du nom donné à d' réside dans le fait qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $F(E_1,E_2)$ converge *uniformément* vers $f \in F(E_1,E_2)$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace topologique $(F(E_1,E_2),T_{d'})$.

La topologie associée à la convergence uniforme est donc métrisable, contrairement à celle de la convergence simple (Cf. remarques précédentes).

La définition 3 de ce paragraphe montre clairement que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.

Il en résulte immédiatement :

<u>THEOREME 6.-</u> *Soient* B^∞ *et* B'^∞ *deux CPO's infinitaires; soit* e *une énumération quelconque de la base* $[B \to B']$ *de l'espace de fonctions continues* $[B^\infty \to B'^\infty]$. *Toute suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissantes,* $f_n \in C(\bar{B},\bar{B}')$ *pour tout* n *, qui converge uniformément vers* $f \in C(\bar{B},\bar{B}')$ *,* d_e*-converge vers* f .

En effet,
$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.u} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f$$

d'après le théorème 5
$$\Longrightarrow d_e(f_n,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Inversement, toute suite de fonctions croissantes de $(\bar{B},\bar{B}')$ qui d_e-converge vers une fonction f ne converge pas nécessairement uniformément: mais nous montrons le théorème suivant (adaptation du Théorème de DINI) :

<u>THEOREME 7.-</u> *Soient* B^∞ *et* B'^∞ *deux CPO's infinitaires; soit* e *une énumération quelconque de la base* $[B \to B']$ *Alors, toute suite* <u>*croissante*</u> *de fonctions* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *croissantes avec* $f_i \in C(\bar{B},\bar{B}')$ *pour tout* i *, qui* d_e*-converge vers* $f \in C(\bar{B},\bar{B}')$ *converge uniformément vers* f .

Notons d'abord que, par application du théorème 4 :

$$d_e(f_i,f) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \Longrightarrow \forall x \ , \ d_{\nu'}(f_i(x),f(x)) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

où ν' est une énumération quelconque de B'

Posons :
$$A_n^\varepsilon = \{x \in B^\infty | d_{\nu'}(f(x),f_i(x)) \geq \varepsilon\}$$

Par hypothèse, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers f

$\Longrightarrow (p \geq q \Longrightarrow f_q(x) \leq f_p(x) \leq f(x) \quad , \quad \forall\, x \in B^\infty)$

$\Longrightarrow$ d'après la propriété 1, du chapitre II ,

$$d_{\nu'}(f_q(x)\ ,\ f(x)) \geq d_{\nu'}(f_p(x)\ ,\ f(x)) \quad \forall\, x \in B^\infty$$

$\Longrightarrow (p \geq q \Longrightarrow A_p^\varepsilon \subseteq A_q^\varepsilon)$

or, A_n^ε est fermé (en effet, l'application h définie par :

$$h(x) = d_{\nu'}(f(x)\ ,\ f_n(x)) \quad \text{est continue}$$

$$\Longrightarrow \quad A_n^\varepsilon = h^{-1}([\varepsilon,+\infty]) \quad \text{est fermé).}$$

D'autre part :

$$\cap\ \{A_n^\varepsilon | n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

en effet, dans le cas contraire, il existerait un $x \in B^\infty$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ d_{\nu'}(f(x),f_n(x)) > \varepsilon$$

ce qui contredirait l'hypothèse de convergence simple.

On sait d'autre part que $\bar{B}$ est compact : on peut donc extraire (Cf. II.B, définition 2) de la famille des A_n^ε une famille finie ayant la même propriété, soit :

$$\{\mathring{A}_{n_i}^\varepsilon | 1 \leq i \leq p \quad , \quad \text{avec } n_1 \leq n_2 \ldots \leq n_p\}$$

telle que $\quad \cap\ \{A_{n_i}^\varepsilon | 1 \leq i \leq p\} = A_{n_p}^\varepsilon = \emptyset$

autrement dit, en explicitant la définition des A_n^ε :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, n_p \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall\, x \in B^\infty\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,$$

$$n \geq n_p \Longrightarrow d_{\nu'}(f(x),f_n(x)) < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

On peut enfin résumer les résultats relatifs à ce paragraphe de la façon suivante :

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $C(\bar{B},\bar{B}')$, $f \in C(\bar{B},\bar{B}')$, e une énumération de $[B \to B']$; alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.u} f \Longrightarrow d_e(f_n,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longleftrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f \\ \qquad\qquad \Longleftarrow \text{si } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.} \end{array}}$$

CHAPITRE IV

CPO's INFINITAIRES EFFECTIFS

ET

ESPACES METRIQUES RECURSIFS

Les CPO's infinitaires étudiés dans les paragraphes précédents sont fréquemment utilisés en tant que modèles dans la sémantique (algébrique ou dénotationnelle) des langages de programmation. Or, la signification d'un programme doit être compatible avec le fonctionnement d'une machine; autrement dit, des propriétés de calculabilité (ou d'effectivité) doivent être imposées aux objets infinitaires considérés en tant qu'objets sémantiques.

Nous nous attachons, dans ce chapitre, à rendre effectifs les résultats des chapitres précédents : propriétés effectives de la base finitaire, complétion effective de cette base, propriétés de calculabilité de l'espace complété, définition de la notion d'espace métrique récursif. Nous présentons une synthèse de différents travaux traitant, soit de domaines calculables [44,50,64,65,119] , soit d'espaces métriques récursifs [73,96] et développons plus particulièrement certaines propriétés nécessaires dans le cadre d'un rapprochement entre les complétés effectifs notés $COMP(B^{\infty})$ et $COMP(\bar{B})$ d'une base finitaire B .

I - CPO's INFINITAIRES EFFECTIFS.

La théorie classique de la récursivité [69,113] traite essentiellement des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, ainsi que des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ calculables par ces fonctions; nous en rappelons certaines notations utilisées par la suite : Nous désignerons par ϕ_x la fonction récursive partielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ d'indice x et par $w_x = \phi_x(\mathbb{N})$ le sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbb{N}$ énuméré par la fonction ϕ_x ; les indices utilisés correspondent à un codage des programmes d'une machine de TUring universelle [95,40] : D'autres caractérisations des fonctions calculables (par systèmes d'équations selon KLEENE [69] , par programme [7,88]) conduisent à la même classe de fonctions, selon la célèbre thèse de CHURCH :

Dans le chapitre I, nous avons défini les CPO's infinitaires (notés B^{∞}) en tant que complétés (par idéaux ou classe d'équivalence d'ensembles dirigés) d'une base finitaire B ; pour rendre effective cette complétion, nous donnons d'abord un sens à la notion de *base finitaire effective :*

I.A.- BASE FINITAIRE EFFECTIVE

Soit B une base finitaire, soit ν une énumération de B.

DEFINITION 1.- B est dite *base finitaire effective* par rapport à ν si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) Le prédicat $[\{\nu(n),\nu(m)\}$ borné$]$ est récursif en n et m

b) La relation $\nu(n) = \mathrm{SUP}\{\nu(k),\nu(\ell)\}$ est récursive en $n,k,$ et ℓ.

Pour simplifier, nous noterons $\nu(n) \uparrow \nu(m)$ pour $[\{\nu(n),\nu(m)\}$ borné$]$. Notons que, étant donné les propriétés des bases finitaires (et en particulier la proposition 6 et la définition 11 du chapitre I), cette définition équivaut à celle de [64] :
si $\nu_{fin} : \mathbb{N} \to P_{\omega}(\mathbb{N})$ est la numérotation canonique des parties finies de $\mathbb{N}$ définie par :

$$\nu_{fin}(x) = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \qquad x_i \in \mathbb{N} \text{ pour tout } i, \; 1 \le i \le n$$

$$\text{avec} \quad x = \sum_{i=1}^{n} 2^{x_i}$$

alors :

PROPRIETE 1.- Une base B finitaire est effective par rapport à une énumération ν ssi :

a) le prédicat $[\nu(\nu_{fin}(x))$ borné$]$ est récursif en x;

b) le prédicat $\nu(y) = \mathrm{SUP}\{\nu(\nu_{fin}(x))\}$ est récursif en x et en y.

Le preuve en est immédiate : elle résulte directement de la complétude conditionnelle de B . KANDA nomme ces prédicats *"couple caractéristique"* de B (par rapport à l'énumération ν); Notons également que la structure de B , B effective, est celle d'un sup-demi-treillis partiel récursif [30].

EXEMPLES DE BASES FINITAIRES RECURSIVES :

1.- $P_\omega(\mathbb{N})$ est base finitaire récursive par rapport à l'énumération canonique ν_{fin} : tout couple d'éléments de $P_\omega(\mathbb{N})$ est majoré; d'autre part, l'inclusion entre ensembles finis, ainsi que le graphe de la réunion, sont décidables et peuvent être exprimés en termes d'opérations effectives (programmes) sur les indices :

$$\nu_{fin}(z) = \nu_{fin}(x) \cup \nu_{fin}(y) \Longrightarrow \exists f \text{ récursive, } z = f(x,y)$$

2.- $\mathbb{N} \cup \{\bot\}$, muni de l'énumération déjà utilisée :

$$\nu(0) = \bot$$

$$\nu(i) = i+1$$

est une base finitaire effective.

En effet, $\nu(m) \leq \nu(n) \equiv (m=0) \vee (n=m)$

$$\nu(m) \uparrow \nu(n) \equiv (\nu(m) \leq \nu(n)) \vee (\nu(n) \leq \nu(m))$$

$$\nu(k) = \mathrm{SUP}\{\nu(i),\nu(j)\} \equiv (\nu(i) \uparrow \nu(j)) \wedge (\nu(k) = \nu(\max\{i,j\}))$$

Le premier exemple montre que le complété B^∞ d'une base finitaire effective ne comporte pas que des éléments calculables : Nous définissons dans ce but la notion de complété effectif d'une base finitaire effective.

I.B.- ÉLÉMENTS INFINITAIRES CALCULABLES (OU EFFECTIFS)

Soit B une base finitaire effective (pour une énumération ν); pour compléter B de façon effective, nous pouvons :

- soit sélectionner, parmi le complété algébrique B^∞ , des éléments calculables,

- soit définir une complétion effective, version effective de la complétion par idéaux exposée au chapitre I.

I.B.1.- DEFINITION DES ELEMENTS INFINITAIRES CALCULABLES.

Posons d'abord :

DEFINITION 2.- Soit B une base finitaire effective énumérée par ν , B^∞ le CPO infinitaire associé.
Un élément $x \in B^\infty$ est dit calculable (par rapport à ν) s'il existe un ensemble récursivement énumérable w_z tel que $\nu(w_z)$ soit dirigé et que $x = SUP\{\nu(w_z)\}$.

Dans cette définition, $\nu(w_z)$ désigne l'ensemble $\{\nu(i) | i \in w_z\}$; z est dit un *indice* pour x (ou indice de x), si l'on a :

$$x = SUP\{\nu(w_z)\}$$

Autrement dit, un élément infinitaire est calculable <u>ssi</u> il existe une fonction récursive partielle (programme) ϕ_z telle que $x = SUP\{\nu(\phi_z(\mathbb{N}))\}$: Ce programme apporte donc *"de plus en plus d'information"* (finie) sur x .

Désignons par $COMP(B^\infty)$ l'ensemble des éléments calculables du CPO infinitaire B^∞ engendrés à partir de la base finitaire B effective pour l'énumération ν . La proposition suivante permet d'obtenir d'autres caractérisations des éléments infinitaires calculables :

PROPOSITION 1.- Les propriétés suivantes sont (effectivement) équivalentes :

a) $x \in COMP(B^\infty)$

b) $\{n | \nu(n) \leq x\}$ est récursivement énumérable.

c) $\exists\, z \in \mathbb{N}$, tel que $\nu(w_z)$ soit une chaîne croissante,
avec : $x = SUP\{\nu(w_z)\}$

Il est d'abord clair que $c \Longrightarrow a$

. Montrons donc que $b \Longrightarrow c$
Soit $w_y = \{n | \nu(n) \leq x\}$ $\qquad y \in \mathbb{N}$

Posons $w_y = \alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots$ $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout i,
et définissons un programme associant à w_y l'ensemble $w_{f(y)}$
où f est une fonction récursive; posons $w_{f(y)} = \beta_0,\beta_1,\ldots$

Soit $\beta_0 = a_0$,

$$\beta_{i+1} = \begin{cases} \text{Un indice de } \mathrm{SUP}\{\nu(\beta_i),\nu(\alpha_{i+1})\} & \text{si } \nu(\beta_i) \uparrow \nu(\alpha_{i+1}) \\ \beta_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $\{\nu(\beta_i)|i \in \mathbb{N}\}$ est croissant et que l'ensemble des indices β_i est récursivement énumérable : Cet ensemble $w_{f(z)}$ obtenu par l'algorithme précédent à partir de w_z est tel que $w_{f(z)} = w_z$ si $\nu(w_z)$ était déjà une chaîne croissante; notons que f n'est pas un opérateur puisque :

$$w_z = w_{z'} \not\Longrightarrow w_{f(z)} = w_{f(z')}$$

(l'algorithme précédent montre qu'une énumération différente du même ensemble d'indices conduit à un résultat différent).

. Montrons enfin que $a \Longrightarrow b$. Rappelons d'abord que :
$x \in \mathrm{COMP}(B^\infty) \Longrightarrow \exists\, w_z$ tel que $\nu(w_z)$ soit dirigé, avec $x = \mathrm{SUP}\{\nu(w_z)\}$

De plus, B finitaire $\Longrightarrow (\forall\, b,\ b \in B \ \&\ b \leq x \Longleftrightarrow \exists\, i,$
$b_i \in \nu(w_z) \ \&\ b_i \leq b)$

Associons, à chaque $b_i \in \nu(w_z)$, l'ensemble

$$\tilde{b}_i = \{y|y \in B \quad \&\quad y \leq b_i\} .$$

Cet ensemble est récursivement énumérable

$$\Longrightarrow \exists\, j(i) \text{ tel que } \tilde{b}_i = \nu(w_{j(i)})$$

$$\{n|\nu(n) \leq x\} = \bigcup\{w_{j(i)}|i \in w_z\}$$

Cette réunion étant récursivement énumérable, il en résulte que $a \Longrightarrow b$.

Cette proposition est à l'origine d'autres définitions des éléments infinitaires calculables (par exemple [106,44]) ; elle permet également de mieux percevoir ce que sont ces éléments infinitaires calculables.

Ainsi, dans les exemples utilisés dans les chapitres précédents, il est facile de voir que :

- les éléments infinitaires calculables de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont les ensembles récursivement énumérables : la proposition précédente s'interprète facilement dans ce cas puisque :

  . $\forall z$, $\cup \{\nu_{fin}(x) \mid x \in w_z\}$ est récursivement énumérable

  . $\forall z$, $\{x \mid \nu_{fin}(x) \subseteq w_z\}$ est récursivement énumérable.

- les éléments infinitaires calculables de Σ^∞ (resp. $M^\infty(F,E)$) sont les mots (resp. les arbres) infinitaires obtenus par SUP's effectifs d'ensembles dirigés de mots (resp. d'arbres) finis.

- les réels calculables peuvent également être obtenus de cette façon : cette approche est voisine de celle de ROGERS [113, p. 371] pour lequel un réel α est calculable s'il est "représenté" par une fonction récursive f telle que :

$$\alpha = \lim_{i \to \infty} f(i)$$

  où $f(i)$ est un code de couple de rationnels, l'ensemble de ces couples de rationnels formant une suite convergente (Cf. exemple h , § IV, chapitre I).

I.B.2.- ENUMERATION ν^∞ DE COMP(B^∞) :

La proposition précédente conduit à deux façons distinctes d'énumérer les éléments calculables de B^∞ : la première repose sur une "fonctionnalisation" (single-value : Cf. [113p. 71; 44]) des récursivement énumérables par rapport à l'énumération de la base finitaire effective B ; la seconde est dite dirigée [106, 64] et utilise la caractérisation de COMP(B^∞) par ensembles dirigés : La proposition 1 permet de passer effectivement d'une énumération à l'autre.

a) Enumération par fonctionnalisation.

L'ensemble des récursivement énumérables peut être effectivement énuméré (par l'énumération standard de Post par exemple :

$\pi(x) = w_x$). On peut donc parcourir l'ensemble de tous les ensembles énumérables d'indices pour ν (ν énumération effective de B finitaire).

On construit alors, à partir d'un ensemble w_j r.e. d'indices, un sous-ensemble $w_{f(j)}$, f récursive, tel que $SUP(\nu(w_{f(j)}))$ soit défini, ($\nu(w_{f(j)})$ est dit "compatible" dans [44]).

L'algorithme de construction se présente alors comme suit :

<u>Pour tout</u> $j \in \mathbb{N}$ <u>répéter</u>

{Soit $w_j = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$

à définir : $w_{f(j)} = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \dots$ }

$\beta_1 \leftarrow \alpha_1$

<u>Pour tout</u> $k > 1$ <u>répéter</u>

$$\beta_{k+1} \leftarrow \begin{cases} \underline{\text{Si}} \uparrow \{\nu(\beta_1), \dots, \nu(\beta_k), \nu(\alpha_{k+1})\} \text{ alors } \alpha_{k+1} \\ \underline{\text{Sinon}}\ \alpha_k \end{cases}$$

<u>fin</u>

<u>fin</u>

Il est clair que $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \dots\}$ est récursivement énumérable et peut être mis sous la forme $w_{f(j)}$, où la fonction récursive f "représente" l'algorithme précédent; d'autre part, les hypothèses de complétude conditionnelle sur B (Cf. proposition 6, Chapitre I), font que $\nu(w_{f(j)})$ a un SUP dans B^∞.

Il convient de noter que, si w_j était tel que $\nu(w_j)$ ait un SUP, on obtiendrait $w_{f(j)} = w_j$ (mais de nouveau f n'est pas un opérateur).

Il est facile de voir, en outre, que :

$$w_j \subseteq w_k \Longrightarrow w_{f(j)} \subseteq w_{f(k)}$$

et que :

$$w_{f(f_j))} = w_{f(j)}$$

On obtient donc finalement, avec la fonction récursive f associée à l'algorithme précédent :

$$\begin{aligned} COMP(B^\infty) &= \{SUP\{\nu(w_{f(j)})\} \mid j \in \mathbb{N}\} \\ &= \{SUP\{\nu(w_j)\} \mid j \in f(\mathbb{N})\} \end{aligned}$$

où $f(\mathbb{N})$ représente l'ensemble des sous-ensembles récursivement énumérables d'indices (pour ν) que l'on peut facilement associer à des chaînes croissantes d'éléments de la base finitaire effective B .

b) Enumération dirigée :

On peut également sélectionner les ensembles récursivement énumérables d'indices associés à des parties dirigées dans B . Définissons pour cela un indice u tel que $\nu(u) = \perp$ et associons à tout entier x un entier x' tel que :

$$\phi_{x'}(\mathbb{N}) = \phi_x(\mathbb{N}) \cup \{u\}$$

Soit $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$h(0) = u$$

$$\begin{array}{l} h(n+1) = \\ n > 0 \end{array} \begin{cases} r \quad \text{tel que} \quad \nu(r) = SUP\{\nu(h(n)), \nu(\phi_{x'}(n+1)) \\ \qquad\qquad \text{si} \quad \nu(h(n)) \uparrow \nu(\phi_{x'}(n+1)) \\ h(n) \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que la fonction h ainsi définie est récursive; si f est la fonction récursive associée à l'algorithme précédent, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un indice $f(n)$ d'élément calculable de B^∞ . La caractérisation de $COMP(B^\infty)$ se fait alors comme précédemment.

REMARQUE : La proposition 1 qui précède montre l'équivalence (effective) de ces procédés d'énumération; on note aussi que $x \in COMP(B^\infty) \Longleftrightarrow \{n \mid \nu(n) \le x\}$ est récursivement énumérable : Autrement dit, si $w_{f(z)}$ est un ensemble d'indices associé à une chaîne croissante dont le supremum $x \in COMP(B^\infty)$,

$$\exists\, k \text{ tel que } w_k = \{f(z) \mid x = SUP\{w_{f(z)}\} \ , \ z \in \mathbb{N}\})$$

Nous noterons ν^{∞} l'énumération de $COMP(B^{\infty})$ ainsi obtenue.

$\nu^{\infty}(i) = SUP\{\nu(w_{f(i)}) | i \in \mathbb{N}\}$ $\quad \nu(w_{f(i)})$ dirigé dans B .

Une autre façon de définir les éléments calculables de B^{∞} est de donner une version effective de la complétion d'une base finitaire effective B par rapport à une énumération :

I.B.3.- COMPLETION EFFECTIVE.

Soit $\nu_0 = \mathbb{N} \to I_0(B)$ l'énumération des idéaux principaux de B (Cf. chapitre I, § I.2.) avec :

$$\nu_0(x) = \widetilde{\nu(x)} = \{b | b \in B \ \& \ b \leq \nu(x)\}$$

Etant donné que $I_0(B)$ est base finitaire pour $I(B)$, ensemble des idéaux de la base finitaire B , on peut considérer les éléments calculables de $I(B)$, notés $COMP(I(B))$, définis par :

$$COMP(I(B)) = \{\nu_0(w_z) | \nu_0(w_z) \text{ dirigé, } z \in \mathbb{N}\}$$

DEFINITION 3.- $COMP(I(B))$ est appelé *complété effectif* de la base finitaire B effective par rapport à l'énumération ν .

Il s'agit de montrer, pour que la démarche précédente soit cohérente, que $COMP(I(B))$ est effectivement isomorphe à $COMP(B^{\infty})$; définissons pour cela la notion d'isomorphisme effectif :

DEFINITION 4.- Soient B et B' des bases finitaires effectives respectivement par rapport aux énumérations ν et ν' ; une fonction $i : B \to B'$ est dite *effectivement injective* ssi :

1) i est injective,
2) $\exists$ f récursive telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & B' \\ \nu \uparrow & & \uparrow \nu' \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \end{array}$$

c'est-à-dire $i \circ \nu = \nu' \circ f$

3) $\nu(x) \uparrow \nu(y)$ <u>ssi</u> $i(\nu(x)) \uparrow i(\nu(y))$

pour tout $x,v \in \mathbb{N}$

4) $i(SUP(\nu(x),\nu(y))) = SUP(i(\nu(x)),i(\nu(y)))$

Il est alors logique de poser :

<u>DEFINITION 5</u>.- Soient B et B' des bases finitaires effectives respectivement par rapport aux énumérations ν et ν' ; une fonction $i : B \to B'$ est dite *isomorphisme effectif* <u>ssi</u> f est effectivement injective, ainsi que f^{-1}.

Etant donné que B et $I_0(B)$ sont bases finitaires respectivement effectives par rapport aux énumérations ν et ν_0 (définie précédemment) on a immédiatement :

<u>PROPRIETE 2</u>.- B et $I_0(B)$ sont effectivement isomorphes pour les énumérations ν et ν_0.

En effet, la proposition 1 montre que, pour tout $x \in COMP(B^{\infty})$, $\{y|\nu(y) \leq x\}$ est récursivement énumérable.

Or, tout élément de la base finitaire est calculable,

$\Longrightarrow \forall b \in B$, $\{y|\nu(y) \in b\}$ est récursivement énumérable.

Il en résulte que l'application qui, à $b \in B$, associe son idéal principal $i(b) = \check{b}$, vérifie les conditions de la définition 5; en particulier l'existence d'une fonction récursive f telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N} \;,\; i(\nu(j)) = \nu_0(f(j))$$
$$= \{b|b \in B \;\&\; b \leq \nu(f(j))\}$$

Il est clair que f n'est autre que l'identité sur $\mathbb{N}$; les autres propriétés résultent de la définition de i .

L'isomorphisme effectif $i : B \to I_0(B)$ peut être étendu de facon effective en $\check{i} : COMP(B^{\infty}) \to COMP(I(B))$ comme suit :

$$\bar{i}(\mathrm{SUP}(\nu(w_z))) = \cup\, \{i(\nu(w_z))\}$$

pour tout ensemble récursivement énumérable w_z tel que $\nu(w_z)$ soit dirigé dans B : Etant donné que i est effectivement injectif, $\bar{i}$ est défini. D'autre part, il est possible de définir une application $k : \mathrm{COMP}(I(B)) \to \mathrm{COMP}(B^\infty)$ telle que :

$$\bar{i} \circ k = \mathrm{id}_{\mathrm{COMP}(I(B))} \quad \text{et} \quad k \circ \bar{i} = \mathrm{id}_{\mathrm{COMP}(B^\infty)}$$

Considérons en effet l'application définie par :

$$k(A) = \mathrm{SUP}\{\nu(x) \mid \nu(x) \subseteq A\} \qquad A \in \mathrm{COMP}(I(B))$$

Alors :

$$\begin{aligned} i(k(A)) &= \bar{i}\,(\mathrm{SUP}\{\nu(x) \mid \nu(x) \subseteq A\}) \\ &= \cup\, \{i(\nu(x)) \mid i(\nu(x)) \subseteq A\} \quad \text{par définition de } \bar{i} \\ &= A \quad \text{puisque } I_0(B) \text{ est base finitaire effective.} \end{aligned}$$

De même, pour tout $x \in B^\infty$:

$$\begin{aligned} k(\bar{i}(x)) &= k(\bar{i}(\mathrm{SUP}(\nu(w_z))) \quad \text{avec } w_z = \{y \mid \nu(y) \leq x\} \\ &= k(\cup\, \{i(\nu(w_z))\}) \\ &= \mathrm{SUP}\{\nu(y) \mid i(\nu(y)) \subseteq \cup\, \{i(\nu(w_z))\}\} \\ &= x \qquad \text{puisque } B \text{ est base finitaire de } B^\infty \end{aligned}$$

Pour montrer que $\bar{i}$ est effective, montrons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{COMP}(B^\infty) \arrow[r, "\bar{i}"] & \mathrm{COMP}(I(B)) \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\nu^\infty"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{N} \arrow[u, "\nu_0^\infty"'] \end{tikzcd}$$

où ν^∞ et ν_0^∞ sont les énumérations respectives de $\mathrm{COMP}(B^\infty)$ et $\mathrm{COMP}(I(B))$ construites respectivement à partir des énumérations ν de B et ν_0 de $I_0(B)$ (voir § I.B.2) et où g est une fonction récursive.

Il s'agit de prouver qu'il existe g récursive telle que :

$$\bar{i}(\nu^{\infty}(x)) = \nu_0^{\infty}(g(x)) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{N}$$

or, $\quad \bar{i}(\nu^{\infty}(x)) = \bar{i}(\mathrm{SUP}(\nu(w_x)))$

où $\nu(w_x)$ est un ensemble r.e. dirigé.

Par définition de l'isomorphisme effectif entre les bases B et $I_0(B)$ (Cf. déf. 4), on a donc :

$$\bar{i}(\nu^{\infty}(x)) = \cup \{\nu_0(f(w_x))\} \qquad \text{avec } f \text{ récursif.}$$

$$= \cup \{\nu_0(w_{g(x)})\}$$

avec $\nu_0(w_{g(x)})$ dirigé dans $I_0(B)$

$$\Longrightarrow \quad \bar{i}(\nu^{\infty}(x)) = \nu_0^{\infty}(g(x)) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{N}$$

par construction de l'énumération ν_0^{∞} à partir de ν_0 (Cf. § I.B.2)

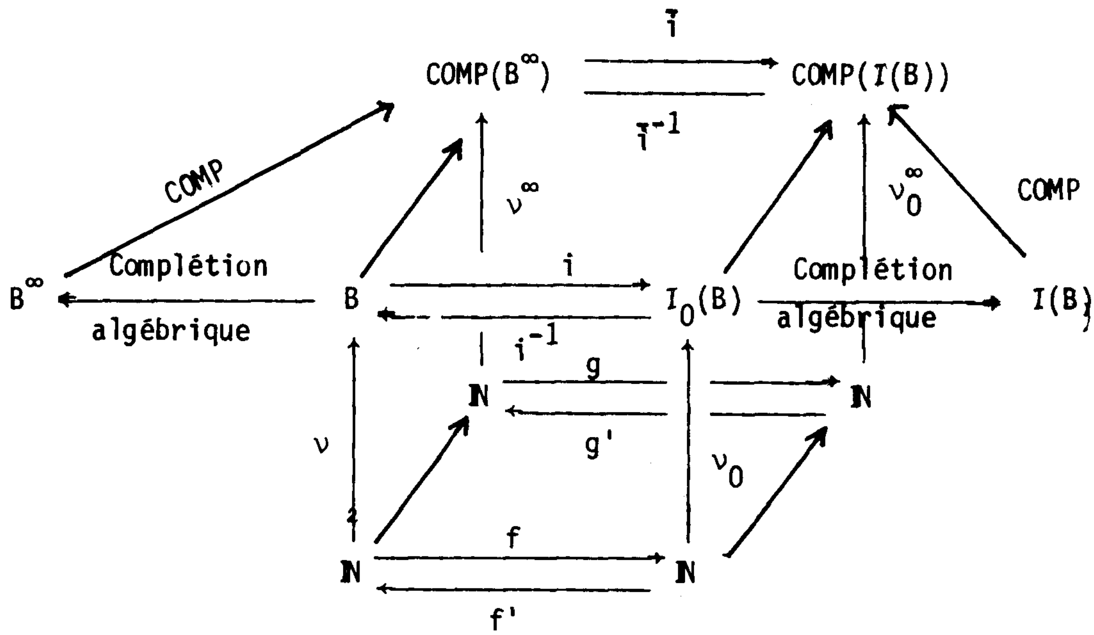
Il en résulte :

<u>PROPOSITION 2</u>.- Le complété effectif $\mathrm{COMP}(I(B))$ de la base finitaire effective est effectivement isomorphe à l'ensemble $\mathrm{COMP}(B^{\infty})$ des éléments infinitaires calculables.

Autrement dit, la construction proposée pour $\mathrm{COMP}(B^{\infty})$ est compatible avec une complétion effective de B ; Le diagramme suivant résume donc la démarche suivie (et les propriétés qui précèdent).:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\text{Complétion}", "\text{algébrique}"'] \arrow[dr, "\text{Complétion effective (§ I.B.3)}"'] & B^{\infty} \arrow[d, "\text{Sélection des éléments calculables (§ I.B.2)}"] \\
 & \mathrm{COMP}(B^{\infty})
\end{tikzcd}$$

Pour être complet, ce diagramme devrait comporter les constructions des énumérations (rappelons que la notion d'effectivité est toujours relative à une énumération donnée); on obtiendrait ainsi le schéma général suivant :



REMARQUES :

1) Il apparaît clairement que la définition d'une base finitaire B effective n'a de sens que par rapport à une énumération ν donnée. Il faudrait en toute rigueur travailler sur des objets de la forme (B,ν) ; par souci de simplification, nous avons repoussé cette présentation moins intuitive à une étape ultérieure (Cf. § III).

2) Les notions qui ont été définies précédemment existent dans la littérature sous la dénomination suivante :

   - La complétion *algébrique* d'une base finitaire effective est appelée *domaine effectivement donné* [64,65,106,128]

   - La complétion *effective* d'une base finitaire effective est appelée *domaine effectif* dans [64]

   Les résultats comparables sont obtenus [119] dans le cas de S-domaines (domaines de SCOTT), c'est-à-dire de treillis continus effectifs.

Etant donné que nous avons appelé CPO infinitaire (noté B^∞) la complétion algébrique d'une base finitaire B , nous poserons donc pour utiliser une même terminologie au long de ce travail :

DEFINITION 6.- Soit B une base finitaire effective (relativement à une énumération donnée). L'ensemble $COMP(B^\infty)$ des éléments infinitaires calculables est appelé CPO INFINITAIRE CALCULABLE (ou effectif) relativement à l'énumération ν^∞ construite à partir de ν .

Il résulte de la proposition 1 que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{y|\nu(y) \leq \nu^\infty(i)\}$ est récursivement énumérable (ou semi-décidable) : Il est donc impossible de décider dans le cas général si, pour un $x \in COMP(B^\infty)$ et un $y \in \mathbb{N}$, on a $\nu(y) \leq x$. Cette remarque nous conduit à définir les éléments récursifs de $COMP(B^\infty)$.

I.C.- ÉLÉMENTS INFINITAIRES DÉCIDABLES (OU RÉCURSIFS)

Définissons la notion d'élément infinitaire décidable par analogie avec $P(\mathbb{N})$: on sait que $A \subseteq \mathbb{N}$ est dit récursif si et seulement si, étant donné $x \in \mathbb{N}$, il existe une procédure effective (programme) de décision de l'appartenance de x à A .

Il est clair que, si A est récursif et si $F \in P_\omega(\mathbb{N})$, alors il existe une procédure effective (déduite de la procédure de définition) permettant de décider si $F \subseteq A$; inversement, si pour tout fini $F \in P_\omega(\mathbb{N})$ on peut décider si $F \subseteq A$, alors A est récursif (la définition précédente est obtenue avec les finis particuliers de la forme $\{x\}$, $x \in \mathbb{N}$).

Les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ forment une base finitaire effective par rapport à l'énumération canonique $\nu_{fin} : \mathbb{N} \to P_\omega(\mathbb{N})$, nous poserons donc :

DEFINITION 7.- Un élément $x \in COMP(B^\infty)$ est dit *décidable* si et seulement si, pour tout élément finitaire $b \in B$, il existe une procédure effective permettant de décider si $b \leq x$.

Nous avons noté que, pour tout $x \in COMP(B^\infty)$, l'ensemble $\{y|\nu(y) \leq x\}$ était semi-décidable; une autre caractérisation immédiate de la récursivité est donc la suivante :

PROPOSITION 3.- Soit B une base finitaire effective relativement à une énumération ν . Un élément $x \in B^\infty$ est décidable ssi $\{y | y \in \mathbb{N}$ & $\nu(y) \leq x\}$ est récursif.

Notons d'abord que, si :

$$\{y | y \in \mathbb{N} \ \& \ \nu(y) \leq x\} \text{ est récursif,}$$

alors $x \in COMP(B^\infty)$ (Cf. proposition 2)

de plus, x est décidable (y étant donné, on peut effectivement décider si $\nu(y) \leq x$).

Inversement, si x est décidable, on peut décider effectivement, pour tout $y \in \mathbb{N}$, si $\nu(y) \leq x$; il en résulte que :

$$\{y | \nu(y) \leq x\} \text{ est récursif.}$$

On note immédiatement les deux propriétés évidentes :

1) Tout élément de la base finitaire effective B est décidable : En effet, soit $b \in B$; alors $b' \leq b$ ssi $SUP(b',b) = b$, ce qui est effectivement décidable (Cf. définition de la base finitaire effective).

2) Un élément infinitaire $x \in B^\infty$ est décidable ssi l'ensemble $A = \{y | \nu(y) \leq x\}$ est récursivement énumérable, ainsi que son complémentaire $\bar{A}$.

Rappelons [113] enfin que, si $R = \{x | w_x$ récursif$\}$, alors $R \in \Sigma_3$ (dans la hiérarchie arithmétique) : la propriété "être décidable" n'est donc ni semi-décidable, ni, a fortiori, décidable.

Comme dans les chapitres précédents, l'utilisation de ces résultats dans la définition d'une sémantique des langages de programmation conduit à leur extension aux fonctions et fonctionnelles calculables. Nous entreprenons ce travail dans le paragraphe suivant dans le même esprit qu'auparavant, c'est-à-dire en partant des résultats obtenus dans le cas algébrique et en introduisant les contraintes de la calculabilité.

II - ESPACES DE FONCTIONS CALCULABLES.

La notion de fonction continue calculable doit permettre de rendre effective la définition proposée pour la continuité (Cf. Chapitre III) : Etant donné un argument x d'information finie, on doit pouvoir énumérer toutes les quantités finies d'information relatives au résultat $f(x)$ de la fonction continue calculable f appliquée à l'argument x (Cette notion est à rapprocher de la définition des opérateurs d'énumération à la ROGERS [13]).

Or, nous avons vu (Cf Chapitre III), que l'espace $[B^{\infty} \to B'^{\infty}]$ possède une base finitaire notée $[B \to B']$. Il est donc naturel de poser, pour rester cohérent avec le paragraphe précédent :

DEFINITION 8.- Une fonction continue $f \in [B^{\infty} \to B'^{\infty}]$ est calculable
ssi $f \in COMP([B^{\infty} \to B'^{\infty}])$.
(ou, ce qui revient au même,
ssi $f \in COMP([B \to B']^{\infty})$.)

Il convient de vérifier que notre intuition de ce que doit être une fonction calculable est compatible avec cette définition.

II.A.- Soient ν et ν' des énumérations rendant effectives les bases finitaires respectives B et B' . Notons (Cf. chapitre III, § III-2) $\langle x,y\rangle$ la fonction de Cantor et montrons :

PROPOSITION 4.- $f \in COMP([B^{\infty} \to B'^{\infty}])$ ssi le graphe de f défini par :

$$\text{graphe}(f) = \{\langle x,y\rangle \mid \nu'(x) \leq f(\nu(x))\}$$

est récursivement énumérable.

La preuve de cette proposition requiert la définition d'une énumération β de la base finitaire $[B \to B']$ telle que $[B \to B']$ devienne effective par rapport à β .

Soit (b,b') un élément de $[B \to B']$ défini par

$$(b,b')(x) = \begin{cases} b' & \text{si } x \geq b \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que l'ensemble de ces fonctions peut être énuméré par :

$$e(\langle x,y\rangle) = (\nu(x)\ ,\ \nu'(y)) \qquad x,y \in \mathbb{N}$$

Montrons que :

<u>LEMME 1</u>.- *L'énumération* e *vérifie :*

1) $e(x) \uparrow e(y)$ *récursif en* x,y

2) La relation $e(z) \leq \mathrm{SUP}(e(x),e(y))$ *est récursive en* x,y *et* z

Définissons en effet les projections suivantes :

$$\pi_0(\langle x,y\rangle) = (\langle x,y\rangle)_0 = x$$
$$\pi_1(\langle x,y\rangle) = (\langle x,y\rangle)_1 = y$$

et donc : $\langle (x)_0\ ,\ (x)_1\rangle = x$

On a, avec ces notations :

$$e(x) = \langle \nu((x)_0)\ ,\ \nu'((x)_1)\rangle$$

et

$$e(y) = \langle \nu((y)_0)\ ,\ \nu'((y)_1)\rangle$$

et $e(x) \uparrow e(y)$ <u>ssi</u> $\nu'((x)_1) \uparrow \nu'((y)_1)$

(qui est récursif puisque B' est base effective par rapport à ν')

D'autre part :

$$\mathrm{SUP}(e(x),e(y))(a) = \begin{cases} \nu'((x)_1) & \text{si } a \geq \nu((x)_0) \ \& \ \neg\, a \geq \nu((y)_0) \\ \nu'((y)_1) & \text{si } a \geq \nu((y)_0) \ \& \ \neg\, a \geq \nu((x)_0) \\ \mathrm{SUP}(\nu'((y)_1),\nu'((x)_1)) & \text{si } \nu'((x)_1) \uparrow \nu'((y)_1) \\ \text{et } a \geq \nu((x)_0),\ a \geq \nu((y)_0) & \\ \perp \text{ sinon} & \end{cases}$$

Il en résulte que :

$e(z) \leq \mathrm{SUP}(e(x),e(y))$ <u>ssi</u>

$\forall a\ , < \nu((z)_0),\ \nu'((z)_1) > (a) \leq \mathrm{SUP}(e(x),e(y))(a)$

c'est-à-dire ssi :

- soit $\nu((z)_0) \geq \nu((x)_0)$ & $\nu'((z)_1) \leq \nu'((x)_1)$
- soit $\nu((z)_0) \geq \nu((y)_0)$ & $\nu'((z)_1) \leq \nu'((y)_1)$
- soit $\nu((x)_0) \uparrow \nu((y)_0)$ & $\nu'((x)_1) \uparrow \nu'((y)_1)$ &

  $\nu((z)_0) \geq \mathrm{SUP}\{\nu((x)_0),\ \nu((y)_0)\}$ & $\nu'((z)_1) \leq \mathrm{SUP}\{\nu'((x)_1),\nu'((y)_1)\}$

Les conditions relatives à l'effectivité des bases B et B' rendent donc récursive la relation $e(z) \leq \mathrm{SUP}(e(x),e(y))$

On étend sans problème cette démonstration au résultat suivant :

. $\uparrow \{e(x_0),\ldots,e(x_n)\}$ est un prédicat récursif en x ,

avec $\nu_{fin}(x) = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$

. La relation $e(y) \leq \mathrm{SUP}\{e(x_0),\ldots,e(x_n)\}$ est récursive

en y et en x tel que

$\nu_{fin}(x) = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$.

Il est alors possible de construire une énumération β de $[B \to B']$ à partir de l'énumération e : On sait en effet que $[B \to B']$ est obtenu par SUP fini d'ensembles bornés de fonctions de la forme (b,b') , $b \in B$ et $b' \in B'$. Or, les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ sont énumérés par ν_{fin} . On en déduit la construction suivante :

$$\beta(x) = \begin{cases} \text{SUP}\{e_i \mid i \in \nu_{fin}(x)\} & \text{si } \uparrow\{e_i \mid i \in \nu_{fin}(x)\} \\ \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $e(i) = <\nu((i)_0)\ ,\ \nu'((i)_1)> \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$

Il est clair que les propriétés de e permettent de prouver que $[B \to B']$ est effective pour l'énumération β. On a donc :

<u>LEMME 2.-</u> $f \in \text{COMP}([B \to B']^\infty)$ ***<u>ssi</u>*** $\exists\ z$ *tel que* $\beta(w_z)$ *dirigé* & $f = \text{SUP}\ \beta(w_z)$ ***<u>ssi</u>*** $\{i \mid \beta(i) \leq f\}$ *est récursivement énumérable.*

Ce lemme résulte immédiatement de la proposition 1 du § I.B ; nous pouvons maintenant terminer la preuve de la proposition 4 ; En effet, nous avons montré (Cf. Lemme 2 du § I.B, chapitre III), que :

$\forall\ f \in [B^\infty \to B'^\infty]$, on a :

$f = \text{SUP}\ E_f$

avec $E_f = \{\text{SUP}\{(b_i, b'_i) \mid b'_i \leq f(b_i)\ ,\ i \in I\ \&\ I \in P_\omega(\mathbb{N})\}\}$

Si le graphe de f est récursivement énumérable, alors $\exists\ z$ tel que :

$$E_f = \beta(w_z)$$

$\Longrightarrow$ D'après le lemme 2 , il en résulte que f est calculable.

A l'inverse, supposons que $f \in \text{COMP}([B^\infty \to B'^\infty])$ et montrons que le graphe de f est récursivement énumérable.

En effet, $f \in \text{COMP}([B \to B']^\infty)$

$\Longrightarrow$ (Lemme 2) : $\exists\ z$ tel que $\{i \mid \beta(i) \leq f\} = w_z$

$\Longrightarrow$ $\exists\ z'$ tel que $\{i \mid e(i) \leq f\} = w_{z'}$

(il suffit d'associer à chaque $\beta(i)$ l'ensemble des $e(j)$ tels que $e(j) \leq \beta(i)$)

$\Longrightarrow$ $\{i \mid \nu'((i)_1) \leq f(\nu((i)_0))\}$ est récursivement énumérable

$\Longrightarrow$ le graphe de f est récursivement énumérable

II.B.- Une autre approche de la notion de fonction calculable est proposée dans [44] : En effet, la proposition 4 correspond au calcul d'un opérateur par morceaux finis de son graphe (sémantique mathématique au sens de [44]) : on peut aussi considérer qu'une fonction calculable transforme effectivement les programmes (d'énumération) de ses arguments (sémantique opérationnelle) et donc la caractériser par une fonction récursive partielle : Nous montrons alors la proposition suivante, qui correspond dans [44] au théorème d'isomorphisme entre opérateurs calculables et opérateurs effectifs (une définition et comparaison des différents types d'opérateurs est développée dans [109]) :

PROPOSITION 5.- [106] : Soient B^∞ et B'^∞ deux CPO's infinitaires de bases finitaires B et B' effectives par rapport aux énumérations ν et ν'.

Alors toute fonction $f \in [B^\infty \to B'^\infty]$ est calculable (pour les énumérations ν et ν') ssi il existe une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ récursive telle que :

$$f(\nu^\infty(i)) = \nu'^\infty(g(i)) \quad \text{pour tout} \quad i \in \mathbb{N}$$

où ν^∞ et ν'^∞ sont énumérations respectives de $COMP(B^\infty)$ et $COMP(B'^\infty)$ construites à partir de ν et ν' (cette proposition exprime également le fait que toute fonction calculable préserve la calculabilité).

. Supposons d'abord que f soit calculable; considérons l'ensemble défini par :

$$E = \{j \mid \nu'(j) \leq f(\nu^\infty(i))\} \qquad i \in \mathbb{N}$$

$$= \{j \mid \exists <k,j> \in \text{Graphe}(f) \text{ tel que } \nu(k) \leq \nu^\infty(i)\}$$

Or, on a évidemment :

LEMME : *La relation* $\nu(k) \leq \nu^\infty(i)$ *est récursivement énumérable en* i *et* k .

En effet, $\exists\, z$ tel que $\nu^{\infty}(i) = \mathrm{SUP}\{\nu(w_z)\}$

B étant finitaire, on obtient donc :

$\nu(k) \leq \nu^{\infty}(i)$ <u>ssi</u> $\exists\, j(\nu(k) \leq \nu(i)\ \&\ \nu(k) \in \nu(w_z))$

$\Longrightarrow$ $\nu(k) \leq \nu^{\infty}(i)$ est r.e. en i et k .

Il en résulte que, si u est un indice tel que $\mathrm{Graphe}(f) = w_u$, il existe une fonction récursive h telle que $E = w_{h(u,i)}$

D'autre part, $f(\nu^{\infty}(i)) = \mathrm{SUP}\{\nu'(j) \mid j \in w_{h(u,i)}\}$

or, par construction de ν'^{∞} , $\exists\, g'$ récursive telle que :

$$\mathrm{SUP}\{\nu'(j) \mid j \in w_x) = \nu'^{\infty}(g'(x))$$

et donc finalement :

$\exists\, g$ récursive telle que $f(\nu^{\infty}(i)) = \nu'^{\infty}(g(i)) \quad i \in \mathbb{N}$

. Supposons à l'inverse que $\exists\, g$ récursive telle que :

$$f(\nu^{\infty}(i)) = \nu'^{\infty}(g(i)) \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}$$

Montrons que la relation $\langle i,j\rangle \in \mathrm{Graphe}(f)$ est récursive partielle.

En effet, $\langle i,j\rangle \in \mathrm{Graphe}(f)$

$$\Longleftrightarrow \nu'(j) \leq f(\nu(i))$$

or, la base B peut être effectivement plongée dans B^{∞}

$\Longrightarrow \exists\, k$ récursive telle que $\nu(i) = \nu^{\infty}(k(i))$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \langle i,j\rangle \in \mathrm{Graphe}(f) &\Longleftrightarrow \nu'(j) \leq f(\nu^{\infty}(k(i))) \\ &\Longleftrightarrow \nu'(j) \leq \nu'^{\infty}(g(k(i))) \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Or, le lemme précédent montre que cette relation est récursive partielle : Le Graphe de f est donc récursivement énumérable.

REMARQUES :

1) Les résultats qui précèdent permettent de définir la notion de calculabilité pour des opérateurs de type supérieur (Cf. travaux relatifs à la sémantique du λ-calcul typé [94,105,44,43]).

2) La dernière proposition permet d'obtenir immédiatement une version effective de la construction du point fixe minimal : En effet, si $f : B^\infty \to B^\infty$ est une fonction continue et calculable, alors :

soit i tel que $\nu^\infty(i) = \perp$ (un tel indice peut être effectivement obtenu)

alors : $f(\perp) = f(\nu^\infty(i)) = \nu^\infty(g(i))$ pour g récursif

par application de la proposition 5.

Soit j tel que $j = g(i)$

$$
\begin{aligned}
\text{alors , } f^2(\perp) &= f(f(\perp)) \\
&= f(\nu^\infty(j)) = \nu^\infty(g(i) \\
&\qquad\qquad\qquad = \nu^\infty(g^2(i))
\end{aligned}
$$

Il en résulte, de façon générale :

$$f^n(\perp) = \nu^\infty(g^n(i)) \quad \text{avec } i \text{ tel que } \nu^\infty(i) = \perp$$

En tant que limite effective d'une chaîne croissante d'éléments calculables, le plus petit point fixe peut donc être effectivement obtenu.

3) En tant qu'éléments de $COMP([B \to B']^\infty)$, les fonctions calculables de $[B^\infty \to B'^\infty]$ peuvent être énumérées : La construction de leur énumération β^∞ à partir de l'énumération β de $[B \to B']$ s'effectue comme dans le § I.B.2 de ce chapitre.

Toutes les notions d'effectivité présentées jusqu'à présent sont relatives à des énumérations rendant effectives les bases finitaires. Il est donc naturel de rapprocher les résultats obtenus jusqu'à présent de ceux qui concernent les problèmes de calculabilité et de définition d'une sémantique effective du λ-calcul typé à partir d'une théorie des ensembles énumérés.

III - CPO's INFINITAIRES EFFECTIFS ET THEORIE DES ENUMERATIONS :

Une sémantique du λ-calcul typé a été proposée par ERSHOV [49,50] dans le cadre de la construction énumérative de la classe des fonctionnelles calculables de tous les types finis. Les premiers travaux de systématisation des notions principales de la théorie des énumérations furent effectués par A.I. MALCEV [85,86]. Ce paragraphe a pour but de montrer que les résultats qui précèdent font des CPO's infinitaires effectifs des domaines calculables [30,31] .

Nous avons déjà souligné l'importance des propriétés des énumérations : La notion de base finitaire effective n'a de sens que par rapport à une énumération donnée; de plus, la proposition 5 montre que la définition des fonctions calculables peut être donnée en termes de propriétés d'ensembles énumérés (nous verrons qu'en fait, une fonction est calculable ssi elle peut être définie en termes de morphisme d'ensembles énumérés).

III.A. - ENSEMBLES ÉNUMÉRÉS ET MORPHISMES CALCULABLES .

1) Si $\nu : \mathbb{N} \to A$, A dénombrable, est une énumération d'un ensemble A , nous appellerons *ensemble énuméré* le couple (A,ν). L'ensemble des énumérations de A peut être muni d'un préordre défini par :

$$\nu \leq \nu' \quad \underline{\text{ssi}} \quad \exists\, f \text{ récursive telle que } \nu = \nu' \circ f$$

Diverses propriétés [49] résultent de cette définition; en particulier, ce préordre induit l'équivalence :

$$\nu \equiv \nu' \quad \underline{\text{ssi}} \quad \nu \leq \nu' \text{ et } \nu' \leq \nu$$

On peut alors munir l'ensemble des classes d'équivalence d'énumérations d'une structure de sup-demi-treillis.

Notons que cette relation sur les énumérations joue un rôle important dans la théorie de la récursion : Les énumérations "maximales" sont les gödélisations; les énumérations minimales (injectives, lorsqu'elles existent [110]) sont dites de FRIEDBERG.

2) Une énumération induit un ordre sur l'ensemble énuméré :

$\forall\ (a_0,a_1) \in A \times A$, $a_0 \underset{\nu}{\leq} a_1$ <u>ssi</u>
$\forall\ B$, $B \subseteq A$ ($\nu^{-1}(B)$r.e. & $a_0 \in B \Longrightarrow a_1 \in B$)

Nous verrons ultérieurement que cet ordre coïncide, moyennant certaines conditions, avec l'inclusion sur $\mathbb{R}\mathrm{E}$, famille des ensembles récursivement énumérables, lorsque A est une famille particulière d'ensembles r.e.

3) On peut alors poser :

<u>DEFINITION 9</u>.- Soient (A,ν) et (A',ν') deux ensembles énumérés. Une application $\mu : A \to A'$ est dite morphisme effectif <u>ssi</u> $\exists\, f$ récursive telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] & A' \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\nu"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \arrow[u, "\nu'"'] \end{tikzcd}$$

On dire dans ce cas que f "calcule" μ

Nous noterons $\mathrm{MOR}((A,\nu),(A',\nu'))$ l'ensemble des morphismes effectifs de (A,ν) vers (A',ν').

Un exemple de morphisme effectif est immédiatement fourni par la Proposition 5 dans laquelle $f : \mathrm{COMP}(B^{\infty}) \to \mathrm{COMP}(B'^{\infty})$ est calculable si et seulement si $f \in \mathrm{MOR}((\mathrm{COMP}(B^{\infty}),\nu^{\infty}),(\mathrm{COMP}(B'^{\infty}),\nu'^{\infty}))$

Notons alors que :

PROPRIETE : Tout morphisme effectif est monotone pour la relation d'ordre induite par l'énumération :

$$a_0 \underset{\nu}{\leq} a_1 \Longrightarrow \mu(a_0) \underset{\nu'}{\leq} \mu(a_1) \qquad \forall\, a_0, a_1 \in A$$

Supposons en effet que cette propriété soit fausse. Il existerait alors $C \subseteq A'$ tel que $\nu'^{-1}(C)$ soit r.e., $\mu(a_0) \in C$ et $\mu(a_1) \notin C$, pour a_0 et a_1 tels que $a_0 \underset{\nu}{\leq} a_1$.

Pour obtenir une contradiction, il suffit de montrer que $\nu^{-1}(\mu^{-1}(C))$ est récursivement énumérable puisque, dans ce cas, $a_0 \in \mu^{-1}(C)$ et $a_1 \notin \mu^{-1}(C)$ ce qui contredit $a_0 \underset{\nu}{\leq} a_1$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } \mu^{-1}(C) &= \{a \in A \,|\, \mu(a) \in C\} \\ &= \{\nu(x) \,|\, x \in \mathbb{N},\ \mu\nu(x) \in C\} \\ &= \{\nu(x) \,|\, x \in \mathbb{N},\ \nu' f(x) \in C\} \\ &= \{\nu(x) \,|\, x \in \mathbb{N},\ f(x) \in \nu^{-1}(C)\} \end{aligned}$$

or, $\nu^{-1}(C)$ est récursivement énumérable par hypothèse; il en est donc de même de $\nu^{-1}(\mu^{-1}(C))$; d'où la contradiction.

III.B.- FAMILLES D'ENSEMBLES RÉCURSIVEMENT ÉNUMÉRABLES.

Nous montrons, dans ce paragraphe, que les familles d'éléments calculables peuvent être assimilées à des sous-familles (effectivement obtenues à partir) de $\mathbb{R}$E ; en d'autres termes que tout CPO infinitaire effectif peut être effectivement plongé dans $\mathbb{R}$E ou, ce qui revient au même, est effectivement isomorphe à une sous-famille de $\mathbb{R}$E.

1.- Définissons d'abord ce que sont des sous-familles effectives d'ensembles r.e. .

Soit π l'énumération de POST de $\mathbb{R}$E, avec $\pi(x) = w_x$; notons $R = (\mathbb{R}\text{E}, \pi)$; alors :

DEFINITION 10.- Un ensemble énuméré (S,ν) d'ensembles récursivement énumérables est une R-famille s'il existe un monomorphisme $\mu \in MOR((S,\nu),(\mathbb{R}E,\pi))$ et si $\nu \leq \pi$

Dans [49] une telle R-famille est notée (S,μ) avec $S = (S,\nu)$. On note que $\mu(S) \subseteq \mathbb{R}E$ est isomorphe (effectivement) à S pour la structure d'ordre induite par l'énumération et que $\mu(S)$, muni du morphisme identité le plongeant dans $\mathbb{R}E$, est une R-famille.

Ces R-familles sont donc des sous-ensembles de $\mathbb{R}E$, énumérés par ν avec $\nu \leq \pi$, à une équivalence d'énumération près. Parmi les R-familles étudiées, nous nous intéresserons plus particulièrement à celles qui ont toutes les propriétés algébriques (ordre, clôture par union effective, etc...) et récursives (théorèmes de récursion, existence d'une Gődelisation) de $\mathbb{R}E$ et qui furent nommées "classes spéciales-standard" par LACHLAN [72], s_n-parties par ERSHOV [50], s-classes (pour simplifier les notations) dans [30].

2.- S-classes et CPO's infinitaires effectifs :

Posons d'abord :

DEFINITION 11.- Une R-partie $((S,\nu),\mu)$ est appelée s-classe s'il existe une fonction récursive g telle que :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{R}E \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\nu"] \arrow[r, shift left, "r"] & \mathbb{N} \arrow[u, "\pi"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

(i) $\forall x \in \pi^{-1}\mu(S)$; $\mu\nu g(x) = \pi(x)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{N}$, $\mu\nu g(x) \subseteq \pi(x)$

Dans le diagramme de cette définition, r est une fonction récursive qui "calcule" μ (Cf. définition 9), c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\mu(\nu(x)) = \pi(r(x))$

$$= W_{r(x)}$$

Il en résulte que la définition 11 peut également être formulée comme suit :

$$\forall\ x \in \pi^{-1}(\mu(S)) \quad , \quad \pi(r(g(x)) = \pi(x)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall\ x \in \pi^{-1}(\mu(S)) & , \quad w_{rg(x)} = w_x \\ \forall\ x \in \mathbb{N} & , \quad w_{rg(x)} \subseteq w_x \end{cases}$$

Une caractérisation intéressante de ces s-classes a été donnée par LACHLAN : Si l'on définit la notion d'ensemble canoniquement r.e. par :

<u>DEFINITION</u> 12.- Un ensemble $\Phi \subseteq P_\omega(\mathbb{N})$ est dit *canoniquement récursivement énumérable* s'il est de la forme :

$$\Phi = \{\nu_{fin}\ (x)\,|\,x \in w_z\} \qquad z \in \mathbb{N}$$

Cette caractérisation est la suivante :

Une R-famille $((S,\nu),\mu)$ est une s-classe <u>ssi</u> elle contient un ensemble $\Phi \subseteq P_\omega(\mathbb{N})$ canonique tel que :

1) $\emptyset \in \Phi$

2) $R \in S \Longleftrightarrow R \in \mathbb{RE}$ & il existe une séquence (F_i) croissante d'éléments de Φ , $F_0 \subseteq F_1 \dots \subseteq F_n \subseteq \dots$, telle que :

$$R = \cup\ \{F_i\,|\,i \in \mathbb{N}\}$$

On vérifie alors que [50] ;

$$\forall\ R \in S\ ,\ \forall\ f \subseteq \mathbb{N}\ \ (F \subseteq R\ \ \&\ \ F\ \text{ fini} \longrightarrow \exists\ F_0 \in \Phi\ \text{ tel que :}$$

$$F \subseteq F_0 \subseteq R\ )$$

(Une preuve exhaustive de cette caractérisation est donnée dans [29]).

Il est clair que Φ constitue une base (au sens défini dans le chapitre I) pour S . D'autre part, de façon générale, Φ n'est pas une base effective au sens de la définition 1, § I.A; l'expression de l'effectivité de Φ est la suivante : si $\phi : \mathbb{N} \to \Phi$ est une énumération de Φ telle que $\phi \leq \nu_{fin}$, alors Φ est effective ssi :

1) le prédicat

$$\phi(x) \uparrow \phi(y) \equiv \exists z(\phi(z) \sqsupseteq \phi(x) \ \& \ \phi(z) \sqsupseteq \phi(y))$$

est récursif sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2) $\forall x, \forall y , \phi(x) \uparrow \phi(z) \Longrightarrow SUP(\phi(x),\phi(y))$ est défini et

$\Gamma_{\Phi} = \{<x,y,z> | \phi(z) = SUP(\phi(x),\phi(y))\}$ est récursif.

Montrons alors :

PROPOSITION 6.- Tout CPO infinitaire effectif $COMP(B^{\infty})$ de base finitaire B effective par rapport à une énumération ν est (effectivement isomorphe à) une s-classe.

Nous avons en effet montré dans le § I.B.2 qu'il était possible de construire une énumération β^{∞} de $COMP(B^{\infty})$ à partir d'une énumération β de B : La construction associe à tout w_x un sous-ensemble $w_{f(x)}$, f récursif, tel que (construction par fonctionnalisation) $\beta(w_{f(x)})$ ait un SUP dans $COMP(B^{\infty})$.

Montrons que $\{w_{f(x)} | x \in \mathbb{N}\}$ est une s-classe (autrement dit, que la famille des ensembles r.e. d'indices de chaînes croissantes associées aux éléments infinitaires d'un CPO infinitaire effectif est une s-classe). Il est clair que $\{w_{f(x)} | x \in \mathbb{N}\}$ est effectivement isomorphe à $COMP(B^{\infty})$.

Définissons pour cela les diverses fonctions qui interviennent dans la caractérisation d'une s-classe : Notons d'abord que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S = \{w_{f(x)} \mid x \in \mathbb{N}\} & \xrightarrow{\quad id \quad} & \mathbb{RE} \\ \nu = \pi \circ f \uparrow & & \uparrow \pi \\ \mathbb{N} & \underset{id}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & f(\mathbb{N}) \end{array}$$

Rappelons de plus que, par définition de l'algorithme associé à f :

- si $w_x \in S$ (c'est-à-dire si $SUP(\beta(w_x))$ est défini) alors $w_{f(x)} = w_x$
- De façon générale, on a :

$$\forall x \in \mathbb{N} \;, \quad w_{f(x)} \subseteq w_x$$

Or, $\quad S = \{w_x \mid x \in f(\mathbb{N})\}$

$$\Longrightarrow \quad f(\mathbb{N}) = \pi^{-1}(S)$$

Il en résulte que :

$$\begin{cases} w_{f(x)} = w_x & \forall x \in \pi^{-1}(S) \\ w_{f(x)} \subseteq w_x & \forall x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et donc que la $\mathcal{R}$-famille S est une s-classe.

Une conséquence est que l'énumération $\nu = \pi \circ f$ (et donc β^∞ pour $COMP(B^\infty)$) est "principale" dans la mesure où, si ν' est une autre énumération de S telle que $\nu' \leq \pi$, alors $\nu' \leq \nu$ (ν est maximal dans le sup-demi-treillis des énumérations de S réductibles à π).

Notons enfin que les s-classes dont la base est effective sont précisément les domaines d'interprétation (appelés *domaines calculables* [30]) utilisés dans la définition d'une sémantique effective du λ-calcul typé dans [48] et servant de base à la définition d'une théorie des fonctionnelles calculables et des types effectifs [30].

Dans le cadre de l'étude de la catégorie des objets énumérés et de leurs morphismes, ERSHOV étudie d'autres $\mathbb{R}$-familles (telles que les retracts) et d'autres approximations que celles par sous-ensembles finis d'entiers. Nous ne cherchons ici qu'à mieux cerner la notion de CPO infinitaire effectif et ne développons dans ce but que les propriétés relatives aux topologies effectives induites par cette structure (d'autres résultats relatifs aux retracts et aux types effectifs ont été obtenus dans [30]).

III.C.- CARACTÉRISATION TOPOLOGIQUE DES S-CLASSES.

L'approche par topologie effective associée à une s-classe consiste à approcher tout élément de la s-classe par une séquence récursivement énumérable d'ouverts le contenant. Cette démarche, qui est d'ailleurs également celle de SCIORE & TANG [119] , est également applicable aux CPO's infinitaires effectifs en raison de la proposition 6.

a) Montrons d'abord :

PROPOSITION 7.- Pour toute s-classe $((s,\nu),\mu)$, les relations d'ordre $\underset{\nu}{\leq}$ et $\subseteq$ coïncident.

a) Prouvons que $\nu(i) \underset{\nu}{\leq} \nu(j) \Longrightarrow \nu(i) \subseteq \nu(j)$

Pour tout i , construisons un ensemble fini $F_i \subseteq \nu(i)$ tel que :

(i) $F_i \subseteq F_j \Longleftrightarrow \nu(i) \subseteq \nu(j)$

(ii) $F_i \subseteq \nu(j) \Longrightarrow \nu(i) \subseteq \nu(j)$

Supposons que $\nu(i) \underset{\nu}{\leq} \nu(j)$ et $\neg\, \nu(i) \subseteq \nu(j)$

D'après (i) , on a $\neg\, F_i \subseteq F_j$

Soit $S_0 = \{R \mid R \in S \;\&\; F_i \subseteq R\}$

alors $\nu^{-1}(S_0) = \{x \mid F_i \subseteq \nu(x)\}$ est r.e.

(Cf. proposition 1, §I.B)

Or, $\nu(i) \in S_0$ et $\nu(j) \notin S_0$ puisque, d'après (ii) :

$$\neg\, \nu(i) \subseteq \nu(j) \Longrightarrow \neg\, F_i \subseteq \nu(j)$$

Il en résulte que $\neg\, \nu(i) \underset{\nu}{\leq} \nu(j)$, ce qui contredit l'hypothèse initiale,

b) Inversement, supposons $\nu(i) \subseteq \nu(j)$ & $\neg\, \nu(i) \underset{\nu}{\leq} \nu(j)$ alors $\exists\, S_0 \subseteq S$ $(\nu^{-1}(S_0)$ r.e. & $\nu(i) \in S_0$ & $\nu(j) \notin S_0)$
Soit A un ensemble r.e. non récursif; soit $\nu' : \mathbb{N} \to S$ défini par :

$$\nu'(x) = \begin{cases} \nu(i) & \text{si } x \in \mathbb{N} - A \\ \nu(j) & \text{si } x \in A . \end{cases}$$

Etant donné que S est une s-classe, $\exists\, f$ récursive telle que $\nu' = \nu f$.

On a donc :

$$\begin{aligned} x \notin A \iff \nu'(x) = \nu(i) &\iff \nu f(x) = \nu(i) \\ &\iff \nu f(x) \in S_0 \\ &\iff f(x) \in \nu^{-1}(S_0) \end{aligned}$$

Autrement dit, f réduit $\mathbb{N}$-A à $\nu^{-1}(S_0)$; or, A est non récursif et donc, $\mathbb{N}$-A n'est pas récursivement énumérable : On ne peut donc pas avoir :

$$x \in \mathbb{N} - A \ \underline{\text{ssi}}\ f(x) \in \nu^{-1}(S_0) \quad \text{avec} \quad \nu^{-1}(S_0) \text{ r.e.}$$

b) <u>Avec l'ordre ainsi précisé</u>, les s-classes peuvent être munies d'une topologie (version effective de la topologie des CPO's) (Cf. chapitre I) définie par :

<u>DEFINITION 13</u>.- La topologie T_S associée à une s-classe $((S,\nu),\mu)$ est définie par :

$$T_S = \{O \mid O \subseteq S \ \& \ \forall R_1 \forall R_2 \ (R_1 \in O \ \& \ R_1 \subseteq R_2 \Longrightarrow R_2 \in O)$$
$$\& \ \forall C ,\ C \subseteq S \text{ une chaîne calculable,}$$
$$\text{Sup } C \in O \Longrightarrow O \cap C \neq \emptyset\}$$

Le Théorème de RICE-SHAPIRO [49] et la proposition suivante permettent de caractériser les ouverts de cette topologie.

THEOREME DE RICE-SHAPIRO.-

Soit $((S,\nu),\mu)$ *une s-classe de* R , (Φ,ϕ) *sa base avec* $\phi \leq \nu_{fin}$ *; alors* $S' \subseteq S$ *possède un ensemble récursivement énumérable d'indices par rapport à* ν *(c'est-à-dire* $\nu^{-1}(S')$ *r.e.) si et seulement s'il existe* $\Phi' \subseteq \Phi$ *canoniquement r.e. tel que* $\phi^{-1}(\Phi')$ *r.e. et*
$S' = \{\nu(x) \mid \exists z \in N ,\ \phi(z) \in \Phi' \ \&\ \phi(z) \subseteq \nu(x)\}$

DEMONSTRATION.-

1) Soit $\{\phi(f(x)) | x \in N\}$ un ensemble récursivement énumérable d'éléments de Φ et soit $S' = \{\nu(x) \mid \exists z(\phi(f(z)) \subseteq \nu(x))\}$ alors l'ensemble $\{<z,x> | \phi(f(z)) \subseteq \nu(x)\}$ est r.e.
$\Longrightarrow$ $\nu^{-1}(S') = \{x \mid \exists z(\phi(f(x)) \subseteq \nu(x))\}$ est également r.e.

2) Soit $\Phi' : S' \cap \Phi$: montrons que $\phi^{-1}(\Phi')$ est r.e.
Soit f récursive telle que $\nu f = \phi$
$\nu^{-1}(S')$ r.e. $\Longrightarrow f^{-1}(\nu^{-1}(S'))$ r.e.
Or, $x \in f^{-1}(\nu^{-1}(S')) \Longleftrightarrow \nu f(x) \in S' \Longleftrightarrow \phi(x) \in S'$
$\Longleftrightarrow \phi(x) \in S' \cap \Phi$

Il vient : $\phi^{-1}(S' \cap \Phi) = f^{-1}(\nu^{-1}(S'))$

Donc, $\Phi' = S \cap \Phi$ est tel que $\phi^{-1}(\Phi')$ soit r.e. c.q.f.d.

Il résulte du théorème de RICE-SHAPIRO la proposition suivante :

PROPOSITION 8.- Soit $((S,\nu),\mu)$ une s-classe ; soit $S' \subseteq S$ tel que $\nu^{-1}(S')$ soit récursivement énumérable;
On a les deux propriétés suivantes :

1) $\forall R_0$, $R_0 \in S'$ & $R_1 \in \mathbb{R}E$ & $R_0 \subseteq R_1 \Longrightarrow R_1 \in S'$

2) $\forall R$, $R \in S'$, R infini et $R = \bigcup\{F_x \mid x \in \mathbb{N}\}$ avec $\{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble canoniquement r.e., tel que $F_i \subseteq F_{i+1}$

$\Longrightarrow \exists x_0 [F_{x_0} \in \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ & $F_{x_0} \in S'$

DEMONSTRATION :

1) Supposons que $R_0 \in S'$, $R_1 \in \mathbb{R}E$, $R_0 \subseteq R_1 \not\Longrightarrow R_1 \in S'$
Soit A un ensemble récursivement énumérable et non récursif; définissons :

$$\nu'(x) = \begin{cases} R_0 & \text{si } x \in N-A \\ R_1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Etant donné que ν' est calculable, il existe une fonction f récursive telle que $\nu' = \nu \circ f$.

Or, $x \notin A \Longleftrightarrow \nu'(x) = R_0 \Longleftrightarrow \nu f(x) = R_0$
$\Longleftrightarrow \nu f(x) \in S' \Longleftrightarrow f(x) \in \nu^{-1}(S')$

Donc, f réduit $N-A$ (non récursivement énumérable) à $\nu^{-1}(S')$ qui est récursivement énumérable; ce qui est impossible.

2) Soit $R \in S'$, R infini.
Soit $\{F_x \mid x \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de finis canoniquement r.e , avec $F_x \subseteq F_{x+1}$ et $R = \bigcup\{F_x \mid x \in \mathbb{N}\}$; il s'agit de montrer qu'il existe un indice x_0 tel que $F_{x_0} \in S'$.

Supposons le contraire : Soit donc un ensemble de finis $\{F_x \mid x \in \mathbb{N}\}$ tel que $F_x \notin S'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tel que $\bigcup \{F_x \mid x \in \mathbb{N}\} \in S'$.

Soit $\{A_x \mid x \in \mathbb{N}\}$, avec $A_x \subseteq A_{x+1}$ un ensemble de r.e. non récursifs.

Posons $A = \bigcup\{A_x \mid x \in \mathbb{N}\}$

$$\text{Soit } \nu_0'(x) = \begin{cases} F_y & \text{si } x \in A_y - A_{y-1} \\ R & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

(ν'_0 énumère un ensemble S'_0 tel que

$$S'_0 \subseteq \{R\} \cup \{F_x | x \in N\} \text{)}$$

$x \notin A \iff \nu'_0(x) = R$

$\iff \nu f(x) \in R$ pour un f récursif tel que $\nu'_0 = \nu \circ f$

$\iff \nu f(x) \in S' \implies f(x) \in \nu^{-1}(S')$

$x \in A \implies \exists y(x \in A_y - A_{y-1}) \implies \exists y(\nu'_0(x) = F_y)$

$\implies \exists y(\nu f(x) = F_y)$

$\implies \nu f(x) \notin S'$ (par hypothèse)

$\implies f(x) \notin \nu^{-1}(S')$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin A \iff f(x) \in \nu^{-1}(S')$:

Ainsi, f récursive réduit $(N-A)$ non récursivement énumérable en $\nu^{-1}(S')$ r.e., ce qui est impossible.

En rapprochant cette dernière proposition de la définition de la topologie T_S associée à une s-classe $((S,\nu),\mu)$, on obtient donc :

COROLLAIRE.- *L'ensemble* $B_S = \{S' | S' \subseteq S \ \& \ \nu^{-1}(S') \text{ r.e.}\}$ *est une base calculable pour la topologie* T_S *associée au CPO* $(S, \subseteq, \emptyset)$

Cette caractérisation topologique des s-classes permet d'étudier le lien entre la structure de la base de finis Φ et les propriétés de la structure engendrée; nous montrons ainsi la :

PROPOSITION 9.- Soit $((S,\nu),\mu)$ une s-classe de R
Soit $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ sa base topologique
Alors le prédicat $\lambda_{ij}[\nu(i) \in B_j]$ est récursivement énumérable.

Soit en effet $\Phi_j = B_j \cap P_\omega(\mathbb{N})$; par application du théorème de RICE-SHAPIRO, Φ_j est énuméré par $\phi_j = \nu_{fin} f_j$ avec f_j récursive.

Or, $\{<i,j> | \exists u [\phi_i(u) \subseteq \nu(i)]\}$ est récursivement énumérable

$$\Longleftrightarrow \lambda_{ij}[\nu(i) \in B_j] \quad \text{est r.e.} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Cette proposition montre donc qu'il existe un procédé effectif d'énumération des voisinages calculables de tout élément d'une s-classe.

Notons que, si B_ℓ et B_j sont deux éléments de $\mathcal{B}_S$, alors :

$$\nu(i) \in B_j \Longleftrightarrow \exists\, u\ ,\ \phi(u) \in \Phi_j = B_j \cap \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}) \ \ \&\ \ \phi(u) \subseteq \nu(i)$$

$$\nu(i) \in B_\ell \Longleftrightarrow \exists\, v\ ,\ \phi(v) \in \Phi_\ell = B_\ell \cap \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}) \ \ \&\ \ \phi(v) \subseteq \nu(i)$$

Etant donné que $B_j \cap B_\ell \in \mathcal{B}_S$, nous avons :

$$\begin{aligned} B_j \cap B_\ell &= \{R | R \in S \ \ \&\ \ \exists\, u\, \exists\, v\ ,\ \phi(u) \in \Phi_j\ ,\ \Phi(v) \in \Phi_\ell\ ; \\ &\qquad [\phi(u) \subseteq R \ \ \&\ \ \phi(v) \subseteq R]\} \\ &= \{R | R \in S \ \ \&\ \ \exists\, u\, \exists\, v\ ,\ \phi(u) \in \Phi_j\ ,\ \phi(v) \in \Phi_\ell \\ &\qquad [\phi(u) \cup \phi(v) \subseteq R]\} \end{aligned}$$

L'existence d'un SUP dans Φ n'est assurée que dans le cas d'une base finitaire effective : Si l'on pose :

$$\Phi_j \vee \Phi_\ell = \{SUP(\phi(x),\phi(y)) | \phi(x) \in \Phi_j \ \ \&\ \ \phi(y) \in \Phi_\ell\}$$

alors :

$$B_j \cap B_\ell = \{R | R \in S \ \ \&\ \ \exists\, w\ ,\ \phi(w) \in \Phi_j \vee \Phi_\ell \ \ \&\ \ \phi(w) \subseteq R\}$$

Le résultat qui suit montre comment, dans le cas de CPO's infinitaires effectifs considérés comme R-familles de $\mathbb{RE}$, on retrouve par la topologie les approximations utilisées dans le § I, pour la définition d'une énumération des éléments infinitaires effectifs :

<u>PROPOSITION 10</u>.- Pour tout CPO infinitaire effectif $((S,\nu),\mu)$, il existe une fonction récursive s telle que

$$\nu(i) = \{\phi(s(i,n)) | n \in \mathbb{N}\} \qquad i \in \mathbb{N}$$

En effet, d'après la proposition 9 :

$\{<i,j>|\nu(i) \in B_j\}$ est r.e.

$\iff \{<i,j>|\exists k , \phi(k) \in \Phi_j \ [\phi(k) \subseteq \nu(i)]\}$ est r.e.

$\iff \{<i,j,k>| \ \phi(k) \in \Phi_j \ \& \ \phi(k) \subseteq \nu(i)\}$ est r.e.

Soit $w_{g(i)}$ l'ensemble r.e. $\lambda_j\{<i,j>|\nu(i) \in B_j\}$

$$w_{g(i)} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists h \quad \text{récursive telle que}$$

$$w_{g(i)} = h(i,\mathbb{N})$$

Définissons la fonction partielle suivante :

$$k(i,j) = \begin{cases} \mu m[\phi(m) \in \Phi_j \ \& \ \phi(m) \subseteq \nu(i)] & \text{si } j \in w_{g(i)} \\ \\ \text{indéfini sinon} \end{cases}$$

Soit $h_1(i,n) = k(i,h(i,n))$: Il s'agit d'une fonction totale d'après la définition des fonctions h et k : cette fonction injective si $w_{g(i)}$ est infini, c'est-à-dire si $\nu(i)$ est infini, permet d'associer à $\nu(i)$ les indices des ensembles finis qui l'engendrent :

$$\begin{aligned} \nu(i) &= \text{SUP}\{\phi(h_1 \ (i,n))|n \in \mathbb{N}\} \\ &= \text{SUP}\{\phi(x)|x \in w_{g_1(i)}\} \qquad \text{avec } g_1(i) = h_1(i,\mathbb{N}) \\ &= \cup \ \{\phi(x)|x \in w_{fg_1(i)}\} \end{aligned}$$

où f est la fonction récursive définie dans le § I.B.2 et qui associe, à tout w_x, un ensemble $w_{f(x)}$ totalement ordonné. Il en résulte que :

$$\nu(i) = \cup \ \{\phi(s(i,n))|n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{avec } s(i,\mathbb{N}) = w_{fg_1(i)}$$

On retrouve donc l'ensemble des indices d'une chaîne croissante de finis dont le SUP est $\nu(i)$; Cette approche topologique par énumération des voisinages calculables contenant un élément infinitaire donné est donc équivalente à l'approche par SUP de chaîne calculable utilisée dans le paragraphe I.B.2

La notion d'effectivité introduite au niveau de l'ordre doit maintenant l'être au niveau de la métrique afin que les complétés effectifs au sens de l'ordre et de la métrique puissent être comparés. Nous présentons dans les principales notions relatives aux espaces métriques récursifs en nous restreignant aux seuls résultats nécessaires à cette comparaison.

IV - ESPACES METRIQUES RECURSIFS.

La notion d'espace métrique récursif fut introduite dans le cadre de l'analyse constructive; les définitions et propriétés qui suivent sont issues essentiellement des travaux de LACOMBE [73,74,75] et MOSCHOVAKIS [96].

Le point de vue que nous présentons est très proche de celui de LACOMBE, les résultats de MOSCHOVAKIS relatifs aux systèmes de notation introduisant d'autres concepts et risquant d'alourdir notre présentation.

A.- Définissons tout d'abord une version effective de la définition d'espace métrique.

DEFINITION 13.- Un espace métrique (E,d) est dit *récursif* s'il existe un sous-ensemble dénombrable B de E effectivement énuméré par $\nu : \mathbb{N} \to B$ et si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) E est complet
b) B est dense dans E
c) La fonction $\nu : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\delta(n,n') = d(\nu(n),\nu(n'))$ est récursive.

autrement dit, il doit exister une procédure effective (programme) qui, à partir d'un couple (n,n') d'entiers, fournit la valeur de $d(\nu(n),\nu(n'))$. LACOMBE [73] montre ainsi que dans l'espace des fonctions (totales) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut prendre pour sous-ensemble B les fonctions qui sont nulles à partir d'un certain rang; dans $\mathbb{R}$, on peut prendre pour sous-ensemble dense l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et comme énumération celle des couples d'entiers.

Enfin, certains exemples utilisés dans le chapitre I peuvent également être définis en tant qu'espaces métriques récursifs; Ainsi Σ^∞ est complet et Σ^* dense dans Σ^∞ ; d'autre part, si l'on utilise la distance de [20] , il est clair que la condition c) est également vérifiée.

Ces exemples montrent que les éléments de tels espaces métriques récursifs ne sont pas nécessairement effectifs. Il convient donc d'introduire la notion d'élément effectif dans un espace métrique récursif : Il est nécessaire pour cela de définir les suites effectives (dans un espace métrique récursif) convergeant effectivement vers de tels éléments.

<u>DEFINITION 14</u>.- Soit (E,d) un espace métrique récursif ; B dense dans E énuméré par ν . Une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B est dite *effective* s'il existe une fonction récursive Θ telle que :

$$b_i = \nu(\Theta(i)) \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Autrement dit, il doit exister un programme d'énumération des éléments d'une telle suite. Notons que cette définition correspond à celle des chaînes croissantes effectives utilisées dans la complétion d'une base effective.

D'autre part :

<u>DEFINITION 15</u>.- Une suite (x_i) d'éléments d'un espace métrique récursif est dite *"de Cauchy effective"* s'il existe une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ récursive telle que :

$$\forall\, n,n',p\ [n \geq \psi(p)\ \&\ n' \geq \psi(p)] \Longrightarrow d(x_n,x_{n'}) < \frac{1}{p}$$

La notion de critère de Cauchy effectif est inchangée lorsqu'on remplace la fonction $\frac{1}{p}$ par une fonction récursive strictement décroissante.

On peut alors définir la notion d'élément calculable (effectif) dans un espace métrique récursif :

DEFINITION 16.- Un élément x d'un espace métrique récursif (E,d) est dit effectif (ou calculable) s'il existe une suite effective, de Cauchy effective, d'éléments de B dense dans E qui converge vers x .

La lourdeur de la définition nous conduira à utiliser ultérieurement le terme "suite de Cauchy effective" pour "suite effective de Cauchy effective"; mais en toute rigueur, et cette remarque est fondamentale pour les résultats du chapitre suivant, un élément calculable dans un espace métrique récursif est caractérisé par la donnée de deux fonctions récursives :

- une fonction récursive Θ qui "énumère" effectivement les éléments de la suite,
- une fonction récursive ψ qui définit effectivement le rang à partir duquel la distance entre les éléments de la suite effective devient arbitrairement petite.

L'ensemble des couples de fonctions (totales) récursives (Θ,ψ) n'étant pas récursivement énumérable, il en résulte que l'ensemble des éléments calculables d'un espace métrique récursif n'est pas en général récursivement énumérable.

NOTATION : Pour éviter la prolifération des notations, nous noterons $\mathrm{COMP}(\bar{B})$ l'ensemble des éléments calculables d'un espace métrique récursif (E,d) muni d'un sous-ensemble B dense dans E .

Remarquons que, si une suite de Cauchy effective (x_n) converge vers un $x \in \mathrm{COMP}(\bar{B})$, alors elle converge effectivement vers x ; autrement dit, pour tout n , $\exists\, p$ tel que :

$$n \geq \psi(p) \Longrightarrow d(x_n,x) < \frac{1}{p} \quad \text{avec } \psi \text{ récursive}$$

$COMP(\bar{B})$ est un espace métrique récursif complet dans la mesure où toute suite de Cauchy effective y converge effectivement.

Notre objectif étant de donner une version effective des résultats des trois premiers chapitres, nous ne développons pas les définitions et propriétés topologiques qui résultent des définitions précédentes; Rappelons simplement que MARTIN-LÖF [91] définit la notion de topologie effective comme suit : Un ouvert dans une telle topologie est un ensemble récursivement énumérable O de voisinages satisfaisant les conditions suivantes :

. Si I et J sont des voisinages, alors :

$$(I \in O \ \ \& \ \ J \supseteq I \Longrightarrow J \in O)$$

. Pour tout $I \in O$, $\exists\, J \in O$ tel que $I \supseteq J$

L'ensemble des ouverts, dans une telle topologie, peut être énuméré de façon effective.

Il est facile de montrer que les espaces métriques récursifs sont des espaces topologiques effectifs : En effet, le système fondamental des voisinages est l'ensemble des boules de centre b , $b \in B$, et de rayon $1/n$; les hypothèses relatives à l'énumération effective de B permettent d'énumérer effectivement ces boules et, de ce fait, d'obtenir une énumération effective des ouverts obtenus par réunion effective de ces voisinages. On trouvera dans [91,135,104,23,73,142] des développements relatifs à ces notions : Il faudrait, pour être complet, parler des résultats relatifs aux espaces basés, aux approximations effectives, aux points constructifs et aux diverses notions de convergence. Etant donné que ces résultats ne sont pas utilisés ultérieurement, nous préférons renvoyer aux auteurs cités précédemment afin d'éviter d'alourdir inutilement la présentation de ce travail.

CHAPITRE V

-=-=-=-=-=-

O B J E T S   I N F I N I T A I R E S   D E C I D A B L E S

E T   L I M I T E S   D E   S U I T E S

D E   C A U C H Y   E F F E C T I V E S

-=-=-=-=-=-=-

Les notions de complétion effective d'un ensemble dénombrable B étant définies, au sens de l'ordre $(COMP(B^\infty))$ et au sens métrique $(COMP(\bar{B}))$, il convient maintenant de s'interroger sur la version effective des résultats des chapitres II et III : Un élément infinitaire calculable au sens des CPO's effectifs l'est-il au sens des espaces métriques récursifs, et inversement ? Toute suite croissante effective est-elle de Cauchy effective pour notre métrique ? Que deviennent ces résultats lors du passage aux espaces de fonctions ?

Il convient d'abord de vérifier que les conditions de définition des CPO's infinitaires effectifs et des espaces métriques récursifs sont compatibles, afin de valider la définition de la métrique du chapitre II sur un CPO infinitaire effectif.

I - DEFINITION D'UNE METRIQUE SUR UN CPO INFINITAIRE EFFECTIF.

I.A.- Soit B une base finitaire effective par rapport à une énumération $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$; soit B^∞ son espace complété algébrique ("effectivement donné" au sens de [128]); $COMP(B^\infty)$ son espace complété effectif ("domaine effectif" au sens de [64]), que nous avons convenu d'appeler CPO infinitaire effectif associé à B .

Considérons alors la métrique d_ν du chapitre II, définie par :

$$d_\nu(x,y) = \frac{1}{1 + \mu i[\nu(i) \in x \Delta y]} \qquad x,y \in B^\infty$$

Il est facile de montrer que :

PROPOSITION 1.- Le CPO infinitaire B^∞ de base finitaire *effective* B et muni de la distance d_ν est un espace métrique récursif.

Montrons en effet que les conditions de la définition 13 (Ch. IV du chapitre IV) sont vérifiées :

a) B^∞ est complet : Nous avons montré en effet (chapitre II) que toute B-suite de Cauchy (non nécessairement effective) pour d_ν convergeait vers un élément de B^∞ ; rappelons que si $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de B , elle converge vers un élément $a \in B^\infty$ tel que

$$a = \mathrm{SUP}\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \qquad a_i \in B$$

avec

$$a_i = \mathrm{SUP}\{\nu(j) \mid j \leq i \ \ \& \ \ \nu(j) \leq b_{\psi(i)}\}$$

où ψ est le régulateur de convergence associé à la suite de Cauchy (b_i) : la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a été nommée direction associée à $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

b) B est dense dans B^∞ : Ce résultat résulte également de la démonstration du théorème 3, § IV, du chapitre II puisque tout élément de B^∞ peut être défini en tant que limite d'une suite de Cauchy (non nécessairement effective) d'éléments de B ; de façon générale, toute suite croissante d'éléments de B est de Cauchy;

c) Enfin, l'application $\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\delta(n,n') = d_\nu(\nu(n),\nu(n')) \quad \text{est récursive.}$$

Autrement dit, il existe une procédure effective qui permet, à partir de tout couple $(n,n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d'obtenir la valeur de $d_\nu(\nu(n),\nu(n'))$. En effet, si l'on considère la définition de l'opérateur Δ :

$$\nu(n) \,\Delta\, \nu(n') = \{\nu(i) \mid \nu(i) \leq \nu(n) \ \& \ \neg\, \nu(i) \leq \nu(n') \ \ \underline{\text{ou}} \ \ \nu(i) \leq \nu(n') \ \& \ \neg\, \nu(i) \leq \nu(n)\}$$

les éléments de la base finitaire effective étant décidables (récursifs) au sens de la définition 7 (chapitre IV, § I.C), l'existence d'une telle procédure effective en résulte immédiatement.

Notons que ce résultat n'autorise aucune déduction relative aux éléments calculables de B^∞ : Nous avons effet mentionné dans le chapitre précédent que les éléments d'un espace métrique récursif ne sont pas nécessairement effectifs et qu'il en est de même du complété B^∞ de la base finitaire récursive B (ainsi, Σ^∞ est un espace métrique récursif pour la métrique de [20] et pour l'énumération définie dans le chapitre II, alors que manifestement tous ses éléments ne sont pas effectifs).

I.B.- Certains résultats obtenus dans le chapitre I sont immédiatement obtenus dans leur forme effective, ainsi :

PROPOSITION 2.- Soit B une base finitaire effective par rapport aux énumérations $\nu : \mathbb{N} \to B$ et $\nu' : \mathbb{N} \to B$. Alors les métriques associées d_ν et $d_{\nu'}$ sont uniformément effectivement équivalentes.

Nous avons montré en effet (de façon non constructive) qu'il existait, pour tout n, un entier $A(n)$ tel que :

$$\forall b \in B , \quad \mu i[\nu(i) = b] \geq A(n) \Longrightarrow \mu i[\nu'(i) = b] \geq n$$

Pour montrer que $A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est récursive, construisons un algorithme pour définir cette fonction :

```
Pour tout  n  répéter
|    i ← 0
|     jusqu'à  ν'(i) = b  &  i ≥ n  répéter
|     |      i ← i + 1
|     finjusqu'à
|    A(n) ← i
finpourtout
```

Les propriétés de B (finitaire effective) permettent d'atteindre en un temps fini le premier i tel que $i \geq n$ et $\nu'(i) = b$.

On obtient, de façon identique, l'existence d'une fonction récursive A' telle que, pour tout n :

$$\forall\, b \in B\ ,\ \mu i[\nu'(i) = b] \geq A'(n) \Longrightarrow \mu i[\nu(i) = b] \geq n$$

Il en résulte, comme dans le théorème 1 du chapitre II, en posant :

$$i_0 = \mu i[\nu(i) \in x \,\Delta\, y] \qquad x,y \in B$$

et $\quad b = \nu(i_0)$:

$$\mu i[\nu(i) \in x \,\Delta\, y] \geq A(n) \Longrightarrow \mu i[\nu'(i) \in x \,\Delta\, y] \geq n$$

et, de façon identique :

$$\mu i[\nu'(i) \in x \,\Delta\, y] \geq A'(n) \Longrightarrow \mu i[\nu(i) \in x \,\Delta\, y] \geq n$$

Il en résulte donc l'équivalence effective entre suites de Cauchy pour d_ν et suites de Cauchy pour $d_{\nu'}$ et la continuité effective biuniforme de l'extension $\bar{i}$ de l'identité $i : (B,d_\nu) \to (B,d_{\nu'})$.

On montre de même, avec δ_1 et δ_2 définies au § III-2 du chapitre II :

<u>PROPOSITION 3</u>.- La métrique d_ν est effectivement uniformément équivalente aux métriques δ_1 sur Σ^∞ et δ_2 sur $T^\infty_\Omega(\Sigma)$, avec $\mathrm{Card}(\Sigma)$ fini.

Il n'y a pas besoin de preuve particulière; il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2 du chapitre II pour constater que :

$$\mu n[H_n(t) \neq H_n(t')] = i \Longrightarrow \mu n[\nu(n) \in t \,\Delta\, t'] \geq A(i)$$

avec, pour A , la fonction identité sur $\mathbb{N}$: A est donc récursive.

Inversement, il a été montré qu'il existait B tel que :

$$\mu n[\nu(n) \in t \,\Delta\, t'] \geq i \Longrightarrow \mu n[H_n(t) \neq H_n(t')] \geq B(i)$$

avec $\qquad B(i) = e_{n(i)}$

où e_n est le nombre d'arbres de profondeur inférieure ou égale à n et où $n(i)$ est tel que :

$$e_{n(i)} < i \leq e_{n(i)+1}$$

L'hypothèse de finitude de Σ rend récursive la fonction B ; le reste de la démonstration est identique.

II - ELEMENTS INFINITAIRES EFFECTIFS DANS B^∞ ET $\bar{B}$

L'un des résultats importants du chapitre II est l'existence d'une bijection entre les complétés B^∞ et $\bar{B}$; mais avec les définitions du Chapitre IV , on peut se demander si ce résultat est encore valable lorsqu'on restreint les complétés aux seuls éléments infinitaires effectifs; plus formellement, si B est une base finitaire effective par rapport à une énumération ν , les complétés effectifs $COMP(B^\infty)$ et $COMP(\bar{B})$ sont-ils encore en bijection ?

La réponse à cette question requiert l'étude des propriétés d'effectivité de la direction $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_i = SUP\{\nu(j) \mid j \leq i \ \& \ \nu(j) \leq b_{\psi(i)}\}$$

associée à la suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B , de Cauchy effective et de régulateur de convergence récursif ψ .

Montrons tout d'abord :

<u>PROPOSITION 4</u>.- La direction $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, associée à une suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de Cauchy effective dans B , et aussi de Cauchy effective, de régulateur de convergence l'identité sur $\mathbb{N}$.

Nous avons déjà montré dans le théorème 3 du chapitre I, que toute suite croissante était de Cauchy; pour montrer qu'elle est effective, il faut prouver :

- qu'il existe une fonction α récursive telle que :

$$a_i = \nu(\alpha(i)) \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

- que son régulateur de convergence est récursif.

a) L'existence d'un α récursif est évident : En effet, la suite (b_i) étant de Cauchy effective, il en résulte que :

$$\exists\, \beta \ , \ \beta \text{ récursif, tel que } b_i = \nu(\beta(i)) \quad i \in \mathbb{N}$$

d'autre part, $A_i = \{\nu(j) \mid j \leq i \ \& \ \nu(j) \leq b_{\psi(i)}\}$ est un sous-ensemble fini de B ; autrement dit, $\exists\, x(i)$ tel que :

$$A_i = \nu(\nu_{fin}(x(i))) \qquad \text{avec } x \text{ récursive.}$$

Or, le graphe du SUP est récursif (hypothèses relatives à la base effective B) ; il en résulte qu'il existe une fonction g récursive telle que :

$$\text{SUP } \nu(\nu_{fin}(j)) = \nu(g(j)) \qquad \begin{cases} \forall\, j \in \mathbb{N} \text{ et} \\ \text{si } \downarrow \nu(\nu_{fin}(j)) \end{cases}$$

et donc finalement :

$$a = \text{SUP } A_i = \nu(\alpha(i))$$
$$\text{avec } \alpha = g(x(i))$$

b) Il reste donc à prouver que le régulateur de convergence de la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est récursif.

Montrons pour cela le lemme suivant :

<u>LEMME</u>.- *Pour tout* $b \in B$;

$$a_i < b \leq a_j \Longrightarrow \mu k[\nu(k) = b] \geq i$$

Supposons que l'on ait :

$$a_i < b \leq a_j \quad \text{et} \quad \mu k[\nu(k) = b] < i$$

D'après la définition de la direction (a_i) , il est clair que :

$$b \leq a_j \Longrightarrow b \leq b_{\psi(j)}$$

On ne peut pas avoir $b \leq b_{\psi(i)}$: en effet, dans ce cas, on aurait :

$$b \in A_i = \{\nu(j) | j \leq i \ \& \ \nu(j) \leq b_{\psi(i)}$$

et donc

$$b \leq a_i = \text{SUP } A_i$$

ce qui serait contraire à l'hypothèse initiale.

Il en résulte donc que :

$$b \leq b_{\psi(j)} \ \& \ \neg\, b \leq b_{\psi(i)}$$
$$\Longrightarrow b \in b_{\psi(i)} \,\Delta\, b_{\psi(j)}$$

et, puisque $\mu k[\nu(k) = b] < i$, on obtiendrait donc :

$$d(b_{\psi(i)}, b_{\psi(j)}) > \frac{1}{1+i}$$

ce qui contredit l'hypothèse (b_i) de Cauchy.

On ne peut donc pas avoir, pour tout $b \in B$,

$$a_i < b \leq a_j \quad \text{et} \quad \mu k[\nu(k) = b] < i \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Il résulte de ce lemme que, pout tout i,j , on a :

$$d(a_i, a_j) < \frac{1}{1+i}$$

En d'autres termes, le régulateur de convergence de la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'est autre que l'identité sur $\mathbb{N}$: La suite de Cauchy (a_i) est donc effective.

Il est clair que, de façon générale, toute suite croissante effective d'éléments de B n'est pas de Cauchy effective : En effet, on aura toujours une fonction récursive pour le parcours de la suite, mais pas l'effectivité du régulateur de convergence. La proposition précédente, ne concernant que les suites croissantes construites à partir de suites de Cauchy effectives, ne peut donc être étendue à des suites croissantes quelconques.

Autrement dit, les éléments infinitaires effectifs ne sont pas nécessairement limites de suites de Cauchy effectives d'éléments de B .

Nous montrons en fait le théorème suivant, qui doit être considéré comme la version effective du théorème 3 du chapitre II :

THEOREME 1.- *Soit* $COMP(B^{\infty})$ *un CPO infinitaire effectif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in COMP(B^{\infty})$ *est décidable*

(ii) x *est limite effective d'une suite de Cauchy effective d'éléments de* B *, base finitaire de* B^{∞} *effective par rapport à une énumération* ν .

PREUVE :

1.- Montrons d'abord que (ii) $\Longrightarrow$ (i) , autrement dit que toute suite de Cauchy effective $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans B converge effectivement vers un élément décidable.

Associons à $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sa direction $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et montrons que :

$$a = SUP\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{est récursif.}$$

(le théorème 3 du chapitre II montre que $a = \lim\limits_{i \to \infty} b_i$)

Montrons le lemme suivant, en désignant par ψ le régulateur de convergence de la suite $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$

LEMME 1.- $\nu(n) \leq b_{\psi(n')}$ *ssi* $\nu(n) \leq a_{n'}$ *pour tout* n *tel que* $n \leq n'$.

En effet, on a :

$$a_{n'} = \mathrm{SUP}\{\nu(i) \mid i \le n' \;\&\; \nu(i) \le b_{\psi(n')}\}$$

$$\Longrightarrow a_{n'} \le b_{\psi(n')}$$

$$\Longrightarrow (\nu(n) \le a_{n'} \Longrightarrow \nu(n) \le b_{\psi(n')})$$

Inversement,

supposons que $\nu(n) \le b_{\psi(n')}$ pour tout $n \le n'$

alors

$$\nu(n) \in A_{n'} = \{\nu(i) \mid i \le n' \;\&\; \nu(i) \le b_{\psi(n')}\}$$

$$\Longrightarrow \nu(n) \le \mathrm{SUP}\ A_{n'}$$

$$\Longrightarrow \nu(n) \le a_{n'}$$

Il en résulte :

LEMME 2.- $\nu(n) \le a$ *ssi* $\nu(n) \le a_n$

D'abord, $\nu(n) \le a_n \Longrightarrow \nu(n) \le a$ par définition de a

Montrons qu'à l'inverse, $\nu(n) \le a \Longrightarrow \nu(n) \le a_n$

ou, ce qui est identique :

$$\neg\, \nu(n) \le a_n \Longrightarrow \neg\, \nu(n) \le a$$

On sait, d'après le lemme 1, que :

$$\neg\, \nu(n) \le a_n \Longrightarrow \neg\, \nu(n) \le b_{\psi(n)}$$

$$\Longrightarrow \forall\, n'(n' \ge n \Longrightarrow \neg\, \nu(n) \le b_{\psi(n')})$$

Supposons en effet le contraire; on aurait alors, pour un $n' > n$:

$$\neg\, \nu(n) \le b_{\psi(n)} \;\&\; \nu(n) \le b_{\psi(n')}$$

$$\Longrightarrow \nu(n) \in b_{\psi(n)} \,\Delta\, b_{\psi(n')}$$

$$\Longrightarrow \mu i[\nu(i) \in b_{\psi(n)} \,\Delta\, b_{\psi(n')}] \ge n$$

$$\Longrightarrow d(b_{\psi(n)}, b_{\psi(n')}) > \frac{1}{1+n}$$

ce qui est impossible puisque (b_i) est de Cauchy, de régulateur de convergence ψ .

On a donc :

$$\forall\, n'(n' \geq n \Longrightarrow \neg\, \nu(n) \leq b_{\psi(n')})$$

or, d'après le lemme 1, cela implique :

$$\forall\, n'(n' \geq n \Longrightarrow \neg\, \nu(n) \leq a_{n'})$$

de plus, on sait que la direction $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante : Il en résulte donc :

$$\forall\, n' \quad , \quad \neg\, \nu(n) \leq a_{n'}$$

et, puisque $a = \mathrm{SUP}\{a_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ est infinitaire, on en déduit donc que

$$\neg\, \nu(n) \leq a$$

Le lemme 2 permet donc de conclure : En effet, il permet d'établir que :

$$\begin{aligned} \nu(n) \leq a &\Longleftrightarrow \nu(n) \leq a_n \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{SUP}\{\nu(n), a_n\} = a_n \end{aligned}$$

La base B étant effective , le graphe du SUP est décidable : La relation $\nu(n) \leq a$ est donc décidable : a est donc décidable.

2.- Montrons qu'à l'inverse, a décidable $\Longrightarrow$ a est limite effective d'une suite de Cauchy effective.

Associons à la suite (a_i) effective et croissante, telle que $a = \mathrm{SUP}\{a_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ la suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \mathrm{SUP}\{\nu(i) \,|\, i \leq n \;\; \& \;\; \nu(i) \leq a\}$$

Cette suite est effective puisque :

. a décidable $\Longrightarrow \nu(i) \leq a$ décidable

. le graphe du SUP est récursif

Montrons d'autre part que (b_i) est de Cauchy, et que son régulateur de convergence est la fonction identité; autrement dit que :

$$\forall\, n,p,q,\quad i \leq n \Longrightarrow \nu(i) \notin b_{n+p} \,\Delta\, b_{n+q}$$

Supposons $p \leq q$; il suffit de montrer, puisque la suite (b_i) est croissante :

$$i \leq n \Longrightarrow (\neg\, \nu(i) \in b_{n+q}) \text{ ou } (\nu(i) \leq b_{n+p})$$

. si $\nu(i) \leq b_{n+p}$, ou si $\neg\, \nu(i) \leq b_{n+q}$, le résultat est évident.

. si $\nu(i) \leq b_{n+q}$, alors $\nu(i) \leq a$ (par définition de b_i)

$$\Longrightarrow \nu(i) \leq b_{n+p} \text{ puisque } i \leq n$$

On a donc :

$$i \leq n \Longrightarrow \nu(i) \notin b_{n+p} \,\Delta\, b_{n+q}$$
$$\Longrightarrow d(b_{n+p}, b_{n+q}) \leq \frac{1}{1+n}$$

On conclut la preuve en remarquant que :

$$\mathrm{SUP}\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{SUP}\{\nu(i) \mid \nu(i) \leq a\}$$
$$\Longrightarrow a = \mathrm{SUP}\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

De plus :

$$\mu i[\nu(i) \in b_n \,\Delta\, a = \mu i[\nu(i) \leq a \;\&\; \neg\, \nu(i) \leq b_n]$$
$$> n \text{ par définition de } b_n$$
$$\Longrightarrow d(a, b_n) < \frac{1}{1+n}$$
$$\Longrightarrow a = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{avec } (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy effective .}$$

Ce théorème appelle plusieurs remarques :

REMARQUES ET CONSEQUENCES :

a) Nous avions remarqué, dans le chapitre précédent, que l'ensemble des objets infinitaires définis comme limite effective de suite de Cauchy effective n'était pas nécessairement récursivement énumérable : Le théorème 1 en donne la raison, l'ensemble des décidables n'étant pas récursivement énumérable.

   On note également qu'il n'est pas possible (pour cette même raison) de définir une énumération effective de $COMP(\bar{B})$ à partir de l'énumération ν^{∞} de $COMP(B^{\infty})$ définie dans le chapitre précédent.

b) Le théorème 3 du chapitre II qui établit l'existence d'une bijection entre les complétés B^{∞} et $\bar{B}$, ainsi que le théorème précédent peuvent être résumés comme suit, en désignant par $DEC(B^{\infty})$ l'ensemble des éléments décidables de B^{∞}

$$
\begin{tikzcd}
 & B^{\infty} \arrow[r, "\text{Sélection des}", "\text{éléments calculables}"'] \arrow[dd, leftrightarrow] & COMP(B^{\infty}) \arrow[r] & DEC(B^{\infty}) \arrow[dd, leftrightarrow] \\
\begin{array}{l} B \\ \text{finitaire} \\ \text{et} \\ \text{effective} \\ \text{par rapport} \\ \text{à } \nu \end{array} \arrow[ur, "\text{Complétion algébrique}"] \arrow[urr, "\text{Complétion effective}"'] \arrow[dr, "\text{Complétion métrique}"'] & & & \\
 & \bar{B} \arrow[rr, "\text{Sélection des limites effectives}", "\text{des suites de Cauchy effectives}"'] & & COMP(\bar{B})
\end{tikzcd}
$$

Il en résulte que l'identité sur B :

$$i : (B,\leq,\perp) \rightarrow (B,\ d_{\nu})$$

ne peut être étendue de façon effective en une application continue $\bar{\imath}$:

$$\bar{\imath} : COMP(B^{\infty}) \rightarrow COMP(\bar{B})$$

c) Les ensembles d'éléments infinitaires effectifs $DEC(B^{\infty})$ et $COMP(\bar{B})$ sont mis en correspondance bijective de façon *effective*, comme le montre la preuve du théorème 1 . Mais cela n'implique pas pour autant que $COMP(\bar{B})$ soit retract effectif de $COMP(B^{\infty})$, au sens de [49] .

Nous avons présenté dans le premier chapitre plusieurs exemples de CPO's infinitaires; certains sont munis d'une relation d'ordre "syntaxique" (c'est le cas de $T^{\infty}_{\Omega}(\Sigma)$ et de Σ^{∞} en particulier); certains encore sont "Peano-finis" (c'est le cas de $M^{\infty}(F,E)$, de Σ^{∞} lorsque $Card(\Sigma)$ est fini, contrairement à $T^{\infty}_{\Omega}(\Sigma)$ dans le cas général ou à l'ensemble des intervalles ouverts à bornes rationnelles). Il est donc naturel d'étudier les conséquences que peuvent avoir ces propriétés sur les éléments infinitaires effectifs obtenus; les questions qui se posent sont essentiellement les suivantes :

- Existe-t-il des énumérations particulières permettant d'obtenir des propriétés de calculabilité spécifiques ?
- Existe-t-il des structures d'ordre pour lesquelles les notions d'éléments infinitaires effectifs et d'éléments infinitaires décidables coïncident ?

Nous donnons dans le paragraphe suivant des éléments de réponse à ces questions, ce qui nous permet d'aboutir à une sorte de classification de ces différents exemples.

III - ENUMERATIONS ET ORDRES PARTICULIERS.

Définissons d'abord un type d'énumération couramment utilisé :

III.A.- ÉNUMÉRATIONS COMPATIBLES AVEC UNE STRUCTURE D'ORDRE.

Nous avons déjà défini, dans certaines démonstrations ou exemples, des énumérations d'ensembles finitaires effectifs : Ainsi, dans la démonstration du théorème 2 du chapitre II, nous utilisons une énumération ν de $T_\Omega(\Sigma)$ lorsque $Card(\Sigma)$ est fini, telle que tout arbre ayant un nombre de noeuds inférieur ou égal à i soit énuméré avant ceux dont le nombre de noeuds est supérieur ou égal à j , avec $j > i$. Ce type d'énumération est donc, en quelque sorte compatible avec l'ordre syntaxique défini sur $T_\Omega(\Sigma)$; nous dirons plus précisément que :

<u>DEFINITION 1.-</u> Une énumération $\nu : \mathbb{N} \to (B,\leq,\perp)$ est dite compatible avec l'ordre sur B si :

$$\forall\, a,b \in B \quad , \quad a \leq b \Longrightarrow \mu i[\nu(i) = a] \leq \mu i[\nu(i) = b]$$

Ainsi, l'exemple précédent répond à cette condition puisque, si t et t' appartiennent à $T_\Omega(\Sigma)$, $t \leq t' \Longrightarrow n(t) \leq n(t')$, où $n(t)$ désigne le nombre de noeuds de t : l'arbre t est donc dans ce cas énuméré (pour la première fois) avant l'arbre t' .

III.A.1.- QUELQUES EXEMPLES

Les CPO's infinitaires évoqués dans le premier chapitre sont souvent munis de telles énumérations :

a) Nous avons déjà utilisé dans le chapitre précédent l'énumération canonique des sous-ensembles finis de $P(\mathbb{N})$ désignée par ν_{fin} et définie par :

$$\nu_{fin}(x) = \{x_1,x_2,\dots,x_n\} \qquad x_i \in \mathbb{N} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

avec :

$$x = \sum_{i=1}^{n} 2^{x_i}$$

Cette énumération, qui fait de $P_\omega(\mathbb{N})$ une base finitaire effective de $P(\mathbb{N})$, vérifie la propriété :

$$\nu_{fin}(x) \subseteq \nu_{fin}(x') \Longrightarrow x \leq x'$$

Elle est donc compatible avec l'ordre sur $P(\mathbb{N})$

b) Différents auteurs [137,6,118] ont muni Σ^* d'une énumération bijective et ont fait jouer à Σ^* le rôle de $\mathbb{N}$ en théorie des fonctions récursives. Cette énumération définie par :

$$\nu(n) = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \Sigma = \{a_1,a_2,\dots,a_r\} \\ n = \sum_{j=1}^{p} i_j \, r^{j-1} \end{cases}$$

est telle que, en notant $\ulcorner x \urcorner$ le mot de Σ^* dont l'indice pour ν est x :

$$\ulcorner x \urcorner \leq \ulcorner y \urcorner \Longrightarrow x \leq y \qquad x,y \in \Sigma^*$$

Elle est donc compatible avec l'ordre d'inclusion des facteurs gauches sur Σ^*.

c) Citons enfin une énumération des arbres finitaires de $M(F,E)$ utilisée dans [31] permettant de construire $COMP(M^{\infty}(F,E))$ en tant que retract effectif de $(\mathbb{R}E,\pi)$:

Notons $M = Max\{a(f) | f \in F\}$

et $[M] = \{1,2,\dots,M\}$

Les noeuds des arbres finis peuvent être considérés comme des mots de $[M]^*$ (Cf. construction des arbres finis dans [102]); soit donc :

$\nu : \mathbb{N} \to [M]^*$ l'énumération de $[M]^*$ définie dans l'exemple précédent.

Pour un entier $x \in \mathbb{N}$, $\nu(\nu_{fin}(x))$ est donc un ensemble fini de mots de $[M]^*$; pour définir la notion de sous-arbre, il faut rendre cet ensemble de mots compatible avec la structure d'arbre, par exemple en définissant la clôture suivante :

$$cl(\nu_{fin}(x)) = \{\nu^{-1}(u) | p,q \in \nu(\nu_{fin}(x)) \Longrightarrow (p \wedge q \leq u \leq p \;\; \underline{\text{ou}} \;\; p \wedge q \leq u \leq q)\}$$

Notons $\nu_{fin}(f(x)) = cl(\nu_{fin}(x))$, avec f récursive
Il est clair que $\nu(\nu_{fin}(f(x)))$ est un arbre et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
P_\omega(\mathbb{N}) \arrow[r, "cl"] & cl(P_\omega(\mathbb{N})) \arrow[r, "\nu"] & M(F,E) \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\nu_{fin}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[u, "\nu_{fin} \circ f"'] \arrow[r, "id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[u, "\nu'"']
\end{tikzcd}$$

L'énumération $\nu' : \mathbb{N} \to M(F,E)$ résultant de cette construction est donc définie par :

$$\nu'(x) = \nu(\nu_{fin}(f(x)))$$

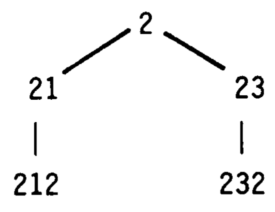
Ainsi, soit $\begin{cases} \nu_{fin}(x) = \{\alpha,\beta\} \\ \nu(\nu_{fin}(x)) = \{212,232\} \end{cases}$ $\qquad \alpha,\beta \in \mathbb{N}$

$212 \wedge 232 = 2$

$\Longrightarrow \quad cl(\nu_{fin}(x)) = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$

avec $\nu(\gamma) = 2$
$\nu(\delta) = 21 \qquad \gamma,\delta,\varepsilon \in \mathbb{N}$
$\nu(\varepsilon) = 23$

$\overset{\bullet}{212} \quad \overset{\bullet}{232} \xrightarrow{\quad cl \quad} \nu'(x) =$



Or, $\nu'(x) \le \nu'(y) \Longrightarrow \nu_{fin}(f(x)) \le \nu_{fin}(f(y)) \qquad x,y \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \quad x \le y$

Il en résulte que cette énumération du magma libre est compatible avec l'ordre "être sous-arbre de" utilisé dans la définition de la clôture cl.

d) Enfin, l'ordre plat sur $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$, énuméré par :

$$\nu(0) = \perp$$

$$\nu(i) = i+1$$

est manifestement compatible avec l'ordre plat.

Il semble donc que ce type d'énumération compatible avec un ordre soit courant dans la littérature et même naturel dans le cadre des exemples précédents. Nous essayons en conséquence de caractériser les CPO's infinitaires pour lesquels une énumération de la base compatible avec l'ordre peut être trouvée.

III.A.2.- CARACTERISATION DES BASES ENUMERABLES DE FAÇON COMPATIBLE AVEC L'ORDRE

Cette caractérisation est donnée par le théorème suivant :

THEOREME 2.- *Soit* B^{∞} *un CPO infinitaire.*
Alors il existe une énumération $\nu : \mathbb{N} \to B$
compatible avec l'ordre ssi pour tout $b \in B$,
$\mathrm{Card}(\{c \mid c \in B \ \& \ c \leq b\})$ *est fini.*

PREUVE :

a) Soit B finitaire, $\nu : \mathbb{N} \to B$ compatible avec l'ordre sur B

Soit $n(b) = \mu i[\nu(i) = b] \quad \forall\, b \in B$

ν étant compatible avec l'ordre, il existe, par définition, au plus $n(b)-1$ éléments qui précèdent b :

$$\Longrightarrow \mathrm{Card}(\{c \mid c \in B \ \& \ c \leq b\}) \leq n(b) - 1$$

b) Inversement, supposons que $\mathrm{Card}(\{c \mid c \in B \ \& \ c \leq b\})$ soit fini pour tout $b \in B$.

Soit ν une énumération quelconque de B ; montrons qu'il est possible de construire, à partir de ν , une énumération ν'' de B compatible avec l'ordre.

Soit $\nu' : \mathbb{N} \to B$ construite à partir de ν de la façon suivante :

$\nu'(0) = \nu(0)$

$\nu'(1) = \nu(0) \quad \nu'(2) = \nu(1)$

$\nu'(3) = \nu(0) \quad \nu'(4) = \nu(1) \quad \nu'(5) = \nu(2)$

$\nu'(n') = \nu(0) \quad \nu'(n'+1) = \nu(1) \; \ldots\ldots \; \nu'(n'+n) = \nu(n)$

$$\text{avec } n' = \frac{n(n+1)}{2}$$

Intuitivement, cette énumération est intéressante car elle comporte "plus d'indices" pour chaque élément de B que l'énumération ν : Pour tout indice $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $\nu'(p) = \nu(n)$, il existe $p' > p$ tel que $\nu'(p') = \nu(n)$.

Construisons, à partir de ν' une énumération ν'' par l'algorithme suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conserve $\nu'(n)$ si (et seulement si) tous les éléments de B inférieurs (au sens de l'ordre sur B) à $\nu'(n)$ sont déjà énumérés.

Plus précisément, soit $P(x) = \{y | y \in B \;\&\; y \leq x\} \quad x \in B$

Par hypothèse, Card(P(x)) est fini, $\forall x \in B$.

L'algorithme de construction de ν'' peut alors être défini comme suit :

```
i ← 0
Pour tout  n ≥ 0  répéter
|     Si  P(ν'(n)) ⊆ {ν'(0),...,ν'(n)}  alors
|     |  ν"(i) ← ν'(n)
|     |  i ← i+1
|     Finsi
Finpourtout
```

(Soit par exemple $B = \{a,b,c\}$ avec $a \leq b \leq c$

Soit $\nu : \mathbb{N} \to B$ défini par :

$$\nu(0) = c$$
$$\nu(1) = a$$
$$\nu(2) = b$$

puis $\nu(i+3) = \nu(i) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$

ν n'est manifestement pas compatible avec l'ordre.

La construction de ν' revient à énumérer :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\nu(0), & \nu(0), & \nu(1), & \nu(0), & \nu(1), & \nu(2), & \nu(0), & \nu(1), & \nu(2), & \nu(3), & \nu(0), \ldots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\
 & & \nu''(0) & & \nu''(1) & \nu''(2) & \nu''(3) & \nu''(4) \; \ldots & & &
\end{array}$$

On obtiendra donc finalement :

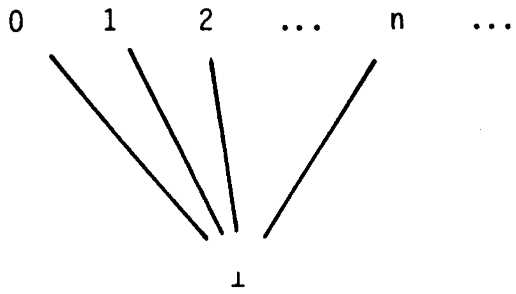
$$\nu''(0) = \nu(1) = a$$
$$\nu''(1) = \nu(1) = a$$
$$\nu''(2) = \nu(2) = b$$
$$\nu''(3) = \nu(0) = c$$

puis $\nu''(i) = \nu'(i+4)$ pour $i \geq 4$)

L'hypothèse relative à $P(x)$ rend possible la construction de ν'' par l'algorithme précédent; il est clair que l'énumération ν'' obtenue est compatible avec l'ordre sur B.

Il est important de noter que le théorème qui précède est vrai en particulier dans le cas des algèbres de Peano pour lesquelles le nombre de successeurs immédiats est fini (Cf. § II-C, chapitre II) : c'est donc le cas en particulier des mots et des arbres construits sur un alphabet fini.

Mais, inversement, l'existence d'une énumération de la base finitaire compatible avec l'ordre n'implique pas la propriété d'être "Peano-fini"; comme le montre l'exemple suivant :



L'énumération ν définie par :

$\nu(0) =$

$\nu(i) = i+1 \quad i \in \mathbb{N} - \{0\}$

est compatible avec l'ordre mais $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ n'est pas "Peano-fini".

Le théorème 2 est important dans la mesure où il permet de caractériser également des CPO's infinitaires pour lesquels la base ne peut pas être énumérée de façon compatible avec l'ordre :

a) Dans le cas du CPO infinitaire des intervalles à bornes réelles (Cf. chapitre I), il est clair que l'ensemble des intervalles ouverts à bornes rationnelles contenant un intervalle ouvert à bornes rationnelles n'est pas de cardinal fini : Il n'est donc pas possible de trouver une énumération de la base finitaire des intervalles ouverts à bornes rationnelles compatible avec l'ordre sur cette base.

   Il en est de même des deux exemples suivants :

b) $B = \{ \pm \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ (qui engendre le CPO infinitaire $B \cup \{0\}$) car il existe une infinité d'éléments inférieurs à $\frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Si B et B' sont deux bases finitaires dont l'énumération est compatible avec l'ordre, il n'en est pas de même de la base $[B \to B']$ (Ch. chapitre III) du CPO infinitaire $[B^{\infty} \to B'^{\infty}]$ car :

$$a \geq b \ \ \& \ \ a' \leq b' \Longrightarrow (a,a') \leq (b,b')$$

Il apparaît ainsi clairement que le théorème 2 introduit un critère permettant une première classification des CPO's infinitaires; ce critère induit en outre des propriétés intéressantes au niveau de l'ordre, de notre métrique et de la récursivité.

III.A.3.- PROPRIETES DE CES ENUMERATIONS.

a) Rappelons d'abord que nous avions défini (chapitre I, déf. 12) la notion de CPO infinitaire *filtré*, tel que :

$$\forall x \in B^{\omega} \quad , \quad y > x \Longrightarrow y \in B^{\omega}$$

Montrons d'abord :

PROPOSITION 5.- Soit B une base finitaire, ν une énumération de B compatible avec l'ordre :
Alors B^{∞} est un CPO infinitaire filtré.

En effet, d'après le théorème 2, l'existence d'une énumération compatible avec l'ordre implique, pour tout $b \in B$:

$$\mathrm{Card}(\{c | c \in B \ \& \ c \leq b\}) \text{ est fini.}$$

Soit $c \in B$ & $c \leq b$, avec $b \in B$.

c ne peut appartenir à B^{ω}, sinon, d'après le théorème 2 du chapitre I, c serait le supremum d'une chaîne infinie strictement croissante d'éléments de B .

Il en résulte donc que, pour tout $b \in B$,

$$c \leq b \Longrightarrow c \in B$$

d'après le propriété 3 du chapitre I, B^{∞} est filtré.

COROLLAIRE.- *Si une base finitaire* B *admet une énumération compatible avec l'ordre, elle a une structure d'inf-demi-treillis.*

Ce corollaire résulte de la proposition précédente et de la propriété 4 du chapitre I. Pour rester cohérent avec les notations relatives au SUP, nous noterons $\mathrm{INF}(a,b)$ l'infimum de a et b dans B .

Rappelons que la propriété 2 du chapitre I montrait déjà que,

a et b étant deux éléments quelconques d'une base finitaire B, alors $INF(a,b)$ était défini dans B^{∞} ; l'existence d'une énumération compatible avec l'ordre permet donc d'obtenir que $INF(a,b) \in B$.

b) Au niveau de la métrique d_{ν} associée à une énumération ν de B compatible avec l'ordre, notons également les deux propriétés suivantes dans lesquelles nous notons, pour simplifier :

$$\mu(c) \quad \text{pour} \quad \mu i[\nu(i) = c] \qquad \forall\, c \in B$$

<u>PROPRIETE 1</u>.- Soit ν une énumération de B finitaire, compatible avec l'ordre.
Alors, pour tout $a,b,c \in B$,

$$d_{\nu}(a,b) < \frac{1}{1 + \mu(c)} \Longrightarrow INF(a,c) = INF(b,c)$$

Cette propriété peut encore être formulée :

$$\mu i[\nu(i) \in a \,\Delta\, b] > \mu(c) \Longrightarrow INF(a,c) = INF(b,c)$$

<u>PREUVE</u> : Montrons d'abord que :

$$\mu i[\nu(i) \in a \,\Delta\, b] > \mu(c) \Longrightarrow INF(a,c) \notin a \,\Delta\, b$$

En effet, $INF(a,c) \in a \,\Delta\, b \Longrightarrow \mu i[\nu(i) \in a \,\Delta\, b] \leq \mu(INF(a,c))$

or, par hypothèse ; $\mu i[\nu(i) \in a \,\Delta\, b] > \mu(c)$

et $\mu(c) \geq \mu(INF(a,c))$ puisque ν est compatible avec l'ordre

$\Longrightarrow \mu i[\nu(i) \in a \,\Delta\, b] > \mu(INF(a,c))$

$\Longrightarrow$ on ne peut pas avoir $INF(a,c) \in a \,\Delta\, b$

or, $INF(a,c) \leq a$ & $INF(a,c) \notin a \,\Delta\, b \Longrightarrow INF(a,c) \leq b$

on obtient donc :

$$INF(a,c) \leq INF(b,c)$$

On montrerait de façon identique que $INF(b,c) \notin a \,\Delta\, b$

et donc que $\qquad INF(b,c) \leq INF(a,c)$

finalement $\qquad INF(a,c) = INF(b,c)$

Comme nous le montrerons dans la proposition suivante, il est intéressant, à partir d'une information relative à la métrique, d'en déduire des propriétés relatives à l'ordre.

On peut également montrer que :

PROPRIETE 2.- Soit ν une énumération de B finitaire, compatible avec l'ordre sur B .
Pour tout $x,y \in B$, avec $x < y$, on a :

$$d_\nu(x,y) < \frac{1}{I+n} \text{ \underline{ssi} } \forall c[\mu(c) \leq n \Longrightarrow INF(c,x) = INF(c,y)]$$

Montrons d'abord que :

$$\forall x,y \in B \ , \ x < y \ \& \ d(x,y) < \frac{1}{I+n} \Longrightarrow [\mu(c) \leq n \Longrightarrow INF(c,x) = INF(c,y)]$$

Supposons qu'il existe $c \in B$ tel que :

$$\mu(c) \leq n \ \& \ INF(c,x) \neq INF(c,y)$$

Alors :

$$x < y \Longrightarrow INF(c,x) < INF(c,y)$$

$$\Longrightarrow INF(c,y) \in INF(c,y) \Delta INF(c,x)$$

$$\Longrightarrow \mu(INF(c,y)) \geq \mu i[\nu(i) \in INF(c,y) \Delta INF(c,x)]$$

or, $\qquad \nu(i) \in INF(c,y) \Delta INF(c,x) \Longrightarrow \nu(i) \in x \Delta y$

en effet $\qquad \nu(i) \leq INF(c,x) \ \& \ \neg \nu(i) \leq INF(c,y)$

$$\Longrightarrow \nu(i) \leq x \ \& \ \neg \nu(i) \leq INF(c,y)$$

or, $\qquad \nu(i) \leq c \ \& \ \neg \nu(i) \leq INF(c,y) \Longrightarrow \neg \nu(i) \leq y$

car, si $\qquad \nu(i) \leq y$, alors $\nu(i) \leq INF(c,y)$

Il en résulte que :

$$\nu(i) \leq INF(c,x) \ \& \ \neg \nu(i) \leq INF(c,y)$$

$$\Longrightarrow \nu(i) \leq x \ \& \ \neg \nu(i) \leq y \Longrightarrow \nu(i) \in x \Delta y$$

Il en résulte que :

$$\mu(\mathrm{INF}(c,y)) > n$$

Or, l'énumération ν de B est compatible avec l'ordre sur B

$$\Longrightarrow \mu(c) \geq \mu(\mathrm{INF}(c,y)) > n$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale.

Inversement, montrons que :

$$\forall\, c[\mu(c) \leq n \Longrightarrow \mathrm{INF}(c,x) = \mathrm{INF}(c,y)] \Longrightarrow d_\nu(x,y) < \frac{1}{1+n}$$

pour tout $x,y \in B$ tel que $x < y$

soit encore que :

$$d_\nu(x,y) > \frac{1}{1+n} \ \& \ x < y \Longrightarrow \exists\, c \text{ tel que } \mu(c) \leq n \ \& \ \mathrm{INF}(c,y) \neq \mathrm{INF}(c,x)$$

En effet, $d_\nu(x,y) > \frac{1}{1+n} \Longrightarrow \exists\, c$ tel que $\mu(c) \leq n$ & $c \in x \Delta y$

or, $x < y \Longrightarrow x \Delta y = \{b \in B | b \leq y \ \& \ \neg b \leq x\}$

$$\Longrightarrow \exists\, c \text{ tel que } \mu(c) \leq n \ \& \ c \leq y \ \& \neg\ c \leq x$$

$$\Longrightarrow \exists\, c \text{ tel que } \mu(c) \leq n \ \& \ \mathrm{INF}(c,y) = c \ \& \ \mathrm{INF}(c,x) \neq c$$

c.q.f.d.

Les propriétés énoncées jusqu'à présent semblent sans rapport avec la calculabilité; notons pourtant que :

<u>PROPRIETE 3</u>.- Soit B une base finitaire *effective* pour une énumération ν compatible avec l'ordre sur B. Alors, la relation : $\nu(z) = \mathrm{INF}(\nu(x),\nu(y))$ est récursive en x, y et z.

En effet, $\nu(z) = \mathrm{INF}(\nu(x),\nu(y))$

$$\Longleftrightarrow \quad \nu(z) = \mathrm{SUP}\{\nu(t) | \nu(t) \leq \nu(x) \ \& \ \nu(t) \leq \nu(y)\}$$

Or, il ressort du théorème 2 que :

$\{\nu(t) | \nu(t) \leq \nu(x) \ \& \ \nu(t) \leq \nu(y)\}$ est fini.

Etant donné que la relation :

$$\nu(z) = \mathrm{SUP}\{\nu(\nu_{fin}(x))\} .$$

est récursive, la propriété 3 en résulte immédiatement.

On peut alors prouver, en utilisant ces propriétés :

<u>PROPOSITION 5</u>.- Soit B une base finitaire effective pour une énumération ν compatible avec l'ordre sur B ; soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy effective, de régulateur de convergence récursif ψ et de limite effective $b \in \mathrm{COMP}(\bar{B})$; alors, pour tout $c \in B$:

$$c \leq b \ \underline{\text{ssi}} \ c = \mathrm{INF}(c, b_{\psi(\mu(c))}) .$$

En effet, montrons d'abord que si $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy effective, il en est de même de la suite $(\mathrm{INF}(c,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$.

Or, nous avons vu, dans la preuve de la propriété 2, que :

$$\mathrm{INF}(c,b_i) \,\Delta\, \mathrm{INF}(c,b_j) \subseteq b_i \,\Delta\, b_j \qquad \forall\, i \in \mathbb{N} .$$

Il en résulte que :

$$\mu k[\nu(k) \in \mathrm{INF}(c,b_i) \,\Delta\, \mathrm{INF}(c,b_j)] \geq \mu k[\nu(k) \in b_i \,\Delta\, b_j]$$

$$\Longrightarrow d_\nu(\mathrm{INF}(c,b_i),\mathrm{INF}(c,b_j)) \leq d_\nu(b_i,b_j)$$

Or, (b_i) est de Cauchy effective :

$$\Longrightarrow \forall\, i,j \geq \psi(n) \text{ , } d_\nu(b_i,b_j) \leq \frac{1}{1+n}$$

$$\Longrightarrow d_\nu(\mathrm{INF}(c,b_i),\mathrm{INF}(c,b_j)) \leq \frac{1}{1+n}$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{INF}(c,b_i))_{i\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy effective, de régulateur } \psi .$$

D'autre part, pour tout $c \in B$;

$$\left.\begin{array}{l} i \geq \psi(\mu(c)) \\ j \geq \psi(\mu(c)) \end{array}\right. \Longrightarrow d_\nu(b_i,b_j) \leq \frac{1}{1+\mu(c)}$$

$$\Longrightarrow \text{d'après la propriété 1, } \mathrm{INF}(c,b_i) = \mathrm{INF}(c,b_j) .$$

La suite $(\mathrm{INF}(c,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ devient stationnaire à partir du rang $\mu(c)$ et on a donc :

$$\mathrm{INF}(c,b) = \lim_i \mathrm{INF}(c,b_i) = \mathrm{INF}(c,b_{\psi(\mu(c))}) .$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} c \le b &\iff \mathrm{INF}(c,b) = c \\ &\iff \mathrm{INF}(c,\lim_i bi) = c \\ &\iff \lim_i \mathrm{INF}(c,b_i) = c \end{aligned}$$

autrement dit :

$$c \le b \quad \underline{\text{ssi}} \quad c = \mathrm{INF}(c,b_{\psi(\mu(c))}) \qquad\qquad \text{c.q.f.d.}$$

Il est clair que cette proposition explicite le théorème 1 dans le cas de bases finitaires effectives ayant une structure d'inf-demi-treillis effectif. Il résulte de la propriété 1 de ce chapitre le corollaire immédiat suivant :

<u>COROLLAIRE</u>.- *Dans les conditions de la proposition 5, si* $(a_i)_{i\in I}$ *est la direction associée à la suite de Cauchy effective* $(b_i)_{i\in I}$ *, on a :*

$$c \le \mathrm{SUP}_i\, a_i \quad \underline{\mathit{ssi}} \quad c = \mathrm{INF}(c,a_{\mu(c)})$$

La preuve en est immédiate puisque :

- $\lim_i b_i = \mathrm{SUP}_i\, a_i$
- la suite (a_i) est de Cauchy, de régulateur l'identité sur $\mathbb{N}$.

Il en résulte que :

$$\left.\begin{array}{l} i \ge \mu(c) \\ j \ge \mu(c) \end{array}\right\} \Longrightarrow d_\nu(a_i,a_j) \le \frac{1}{1+\mu(c)}$$

$$\Longrightarrow \text{(propriété 1) : } \mathrm{INF}(c,a_i) = \mathrm{INF}(c,b_j) .$$

On obtient donc, par le même raisonnement que précédemment :

$$c \wedge \underset{i}{\mathrm{SUP}}\, a_i = \lim_i(\mathrm{INF}(c,a_i)) = \mathrm{INF}(c,a_{\mu(c)})$$

et donc finalement :

$$c \leq \underset{i}{\mathrm{SUP}}\, a_i \quad \underline{\text{ssi}} \quad c = \mathrm{INF}(c,a_{\mu(c)})$$

L'intérêt de la proposition 5 et de son corollaire est évidemment de donner une caractérisation simple des éléments décidables dans le cas des bases énumérées de façon compatible avec l'ordre; c'est à dire en particulier dans le cas des CPO's infinitaires effectifs répondant aux conditions du théorème 2.

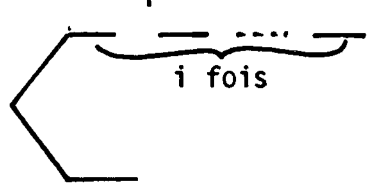
Ce premier critère d'existence d'une énumération compatible avec l'ordre a donc permis une première classification des CPO's infinitaires étudiés dans le chapitre I.

La paragraphe qui suit introduit un second critère destiné à caractériser les CPO's infinitaires pour lesquels les notions d'éléments infinitaires effectifs et d'éléments infinitaires décidables coïncident.

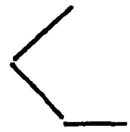
III.B.- CPO'S INFINITAIRES ARBORESCENTS.

Il est intuitivement évident que, si $x \in \mathrm{COMP}(\Sigma^{\infty})$ est un mot infinitaire effectif, on peut toujours décider si $b \in \Sigma^{*}$ est tel que $b \leq x$; de même, si t est un arbre infinitaire effectif n'ayant pas de Ω à profondeur finie, on peut écrire un algorithme de décision pour $b \leq t$, où b est un arbre fini.

Par contre, si l'on considère l'ensemble des supports d'arbres d'arité inférieure ou égale à 2 , soit $t = \underset{i}{\mathrm{SUP}}(t_i)$ un élément infinitaire obtenu à partir des t_i définis par :

$t_i =$ 

Il est clair que l'on ne peut pas décider dans ce cas si l'arbre fini :

b = 

est "inclus" ou non dans t : On ne peut en effet décider si la branche finie dans t doit être ou non prolongée.

Nous définissons dans ce paragraphe la notion de CPO infinitaire arborescent destinée à mettre en évidence les structures particulières dans lesquels tout élément infinitaire effectif est décidable.

III.B.1.- QUELQUES RAPPELS ET DEFINITIONS :

Afin de mieux définir la notion de "successeur immédiat" dans une relation et de l'associer à la définition d'un système de Peano [56] , nous rappelons la construction de J. SCHMIDT [116] inspirée des travaux de RIGUET [112] .

Soit R une relation définie sur un ensemble E . On peut lui associer sa clôture transitive par un opérateur de clôture supérieure nommé *trans*, classiquement défini par :

$$\mathrm{trans}(R) = R \cup RR \cup RRR \cup \ldots \qquad \forall\, R \in P(E \times E)$$

On peut aussi extraire d'une relation $R \subseteq E \times E$ tous les couples (x,y) tels que :

$$(x,y) \in R \;\;\&\; \exists\, z((x,z) \in R \;\;\&\;\; (z,y) \in \mathrm{trans}(R));$$

autrement dit, définir un opérateur nommé *Cons* (pour consécutif) par :

$$\mathrm{Cons}(R) = R - RT = R - TR = R - TT$$

Il est clair que cet opérateur est une fermeture inférieure sur $P(E \times E)$; On a :

> $(x,y) \in \mathrm{Cons}(R)$ <u>ssi</u> y est successeur immédiat de x,
>
> ou y "domine" x (les deux dénominations sont couramment utilisées en théorie des ensembles ordonnés).

On peut alors définir deux ensembles de relations en correspondance biunivoque (par une correspondance de Galois) :

- les relations dites *"consécutives"* [116] ou *"de voisinage"* [51]

$$R = \mathrm{Cons}(R)$$

- les relations dites *"à saut"* [116] ou *"discrètes"* [51] pour lesquelles il existe une relation consécutive c telle que :

$$R = \mathrm{trans}(c)$$

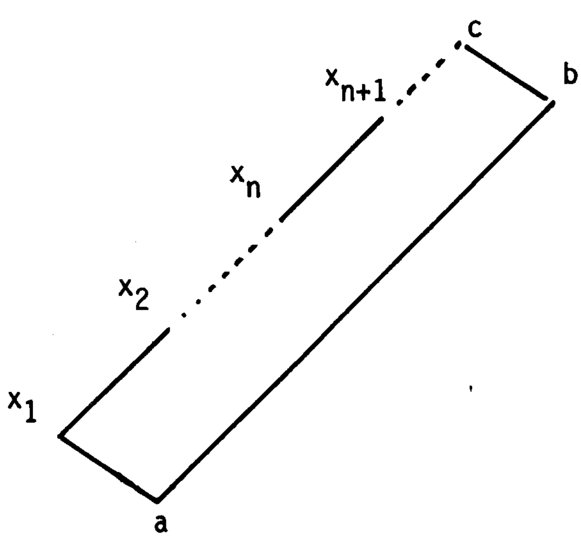
On a donc :

$$\begin{cases} R \text{ consécutive } \underline{\text{ssi}} \ R = \mathrm{Cons}(\mathrm{trans}(R)) \\ R \text{ à saut } \underline{\text{ssi}} \ R = \mathrm{trans}(\mathrm{Cons}(R)) \end{cases}$$

Nous dirons, d'autre part, qu'une relation $R \subseteq E \times E$ vérifie les axiomes de Peano si :

1) $(x_1,y) \in R \ \& \ (x_2,y) \in R \Longrightarrow x_1 = x_2$
2) E est la clôture finie (par R) de l'ensemble A des éléments de E sans prédécesseur :
$\forall a \in A , \nexists x \ (x \in E \ \& \ (x,a) \in R)$

Notons qu'une ordre peut vérifier ces deux axiomes sans être un ordre à saut, comme le montre l'exemple suivant :



dans lequel les axiomes 1 et 2 de Peano sont bien vérifiés, mais où l'on ne peut, par clôture finie de la relation de succession immédiate, arriver à c par les x_i.

Enfin, un ensemble ordonné $(E,\leq)$ est dit *arborescent* s'il vérifie la condition suivante :

$$\forall x\ (x \in E \Longrightarrow \{y|y \in E\ \ \&\ \ y \leq x\}\ \text{est totalement ordonné}).$$

(Dans les travaux relatifs aux ensembles ordonnés, on dit alors que $(E,\leq)$ est un "ensemble ramifié" [71] ou "arbre" [116, 62], et "arbre de Peano" si de plus les deux axiomes de Peano cités auparavant sont vérifiés; pour éviter toute confusion avec les éléments du magma libre, nous utiliserons uniquement le terme "ordre arborescent" ou "ensemble ordonné arborescent" précédemment défini).

Notons que tout ordre arborescent vérifie l'axiome 1 du Peano (unicité du prédécesseur) mais pas nécessairement l'axiome 2 de clôture finie à partir d'un ensemble d'éléments minimaux : Ainsi, par exemple, l'ensemble des réels $\{1 - 1/n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$, muni de l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$, ne vérifie pas cet axiome.

On doit à J. SCHMIDT la proposition importante qui suit :

PROPOSITION 6.- [116] : Soit $(E,\leq)$ un exemple ordonné, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) E est ordonné par saut et vérifie les axiomes de Peano,
2) $\forall x\ (x \in E \longrightarrow \{y|y \in E\ \ \&\ \ y \leq x\})$ est doublement bien ordonné,
3) $(E,\leq)$ est arborescent et vérifie les axiomes de Peano.

Dans cette proposition, nous utilisons la caractérisation de [117] des ensembles bien ordonnés : Un ensemble C est dit bien ordonné (resp. doublement bien ordonné) ssi il est totalement ordonné et vérifie la condition du minimum (resp. la condition du minimum et du maximum) c'est-à-dire si toute partie de C possède un élément minimal (resp. un élément minimal et un élément maximal).

PREUVE :

a) Montrons d'abord que $1 \Longrightarrow 2$ par induction.
Notons, pour simplifier $]\leftarrow,x]$ l'ensemble :

$$\{y | y \in E \ \& \ y \leq x\}$$

Il est clair que, si $e \in E$ est un élément minimal de E (axiome 2 de Peano), alors $]\leftarrow,e] = \{e\}$ est doublement bien ordonné; montrons que, si $]\leftarrow,x]$ est doublement bien ordonné, $\forall x \in E$, et si y domine x (ou : $(x,y) \in \mathrm{Cons}(\leq))$, alors $]\leftarrow,y] =]\leftarrow,x] \cup \{y\}$.
Etant donné que $\leq$ est un ordre à saut, on a :

$$w < y \Longrightarrow (w,y) \in \mathrm{Cons}(\leq)$$

$$\underline{\text{ou}} \ \exists z \in E \text{ tel que } w < z \ \& \ (z,y) \in \mathrm{Cons}(\leq)$$

Or, d'après le premier axiome de Peano (le prédécesseur est unique) ceci entraîne : $w = x$ dans le premier cas,
$z = x$ dans le second.

Il en résulte que $w < y \Longrightarrow w \leq x$
et, plus généralement, $w \leq y \Longrightarrow w \leq x$

On a donc, immédiatement :

$$]\leftarrow,y] \subseteq]\leftarrow,x] \cup \{y\}$$

L'inclusion inverse est immédiate puisque $(x,y) \in \mathrm{Cons}(\leq)$

$$\Longrightarrow ((x,y) \in \mathrm{Cons}(\leq) \Longrightarrow]\leftarrow,y] =]\leftarrow,x] \cup \{y\}),$$

il en résulte donc que $]\leftarrow,y]$ est doublement bien ordonné, ce qui montre que $1 \Longrightarrow 2$.

b) Montrons maintenant que $2 \Longrightarrow 3$.

Le fait que $]\leftarrow,x]$ soit totalement ordonné, pour tout $x \in E$, résulte de la définition du bon ordre. Il reste donc à prouver que les axiomes de Peano sont vérifiés.

- L'unicité du prédécesseur résulte du fait que $]\leftarrow, y[$, avec y non minimal, possède un élément maximal.
- Montrons que E est la clôture (transitive) de l'ensemble $A \subseteq E$ des éléments minimaux (par rapport à $\mathrm{Cons}(\leq)$); notons d'abord que tout élément minimal de E appartient à E ; puis, par induction, supposons que $x \in E$ et montrons que $(x,y) \in \mathrm{Cons}(\leq) \Longrightarrow y \in E$: s'il n'en était pas ainsi, E ne serait pas ordonné par saut, ce qui contredirait le fait que $1 \Longrightarrow 2$.

(On peut aussi ne pas utiliser le fait que $1 \Longrightarrow 2$ en notant que, si M est la clôture de l'ensemble A des éléments minimaux de E , alors $]\leftarrow, x] \subseteq M \Longrightarrow x \in M$; or SCHMIDT [117] a montré que, si E vérifiait la condition du minimum, alors il coïncidait avec M ; d'où le résultat).

c) Montrons enfin que $3 \Longrightarrow 1$.

Il suffit de montrer que $\leq \; = \mathrm{trans}(\mathrm{Cons}(\leq))$, autrement dit que $x \leq y$ <u>ssi</u> $(x,y) \in \mathrm{trans}(\mathrm{Cons}(\leq))$; d'abord, il est évident que :

$$(x,y) \in \mathrm{trans}(\mathrm{Cons}(\leq)) \Longrightarrow x \leq y$$

Montrons la propriété inverse par induction sur y ; notons d'abord qu'elle est trivialement vraie si $y \in A$ (y minimal); supposons maintenant que :

$$z < y \Longrightarrow (z,y) \in \mathrm{trans}(\mathrm{Cons}(\leq))$$

Soit t tel que $(y,t) \in \mathrm{Cons}(\leq)$ et montrons que :

$$z < t \Longrightarrow (z,t) \in \mathrm{trans}(\mathrm{Cons}(\leq))$$

Or, $]\leftarrow, t]$ est totalement ordonné $\Longrightarrow$ on a , soit $y \leq z$, soit $z < y$.

. Si $y \leq z$, alors

$$\left.\begin{array}{r} y \leq z < t \\ (y,t) \in \mathrm{Cons}(\leq) \end{array}\right\} \Longrightarrow y = z$$

$$\Longrightarrow (z,t) \in \mathrm{Cons}(\leq)$$

$$\Longrightarrow (z,t) \in \mathrm{trans}(\mathrm{Cons}(\leq))$$

. si $z < y$, alors, par hypothèse :

$$(z,y) \in \text{trans}(\text{Cons}(\leq))$$

et, puisque $(y,t) \in \text{Cons}(\leq)$, on a également (par définition de trans) :

$$(z,t) \in \text{trans}(\text{Cons}(\leq))$$

Il en résulte que $\leq$ est un ordre à saut, ce qui conclut la preuve de la proposition 6 .

Cette proposition s'avérera très utile par la suite dans le cadre de l'étude de CPO's infinitaires arborescents définis par :

DEFINITION 2.- Un CPO infinitaire B^∞ est dit *arborescent* si sa base finitaire B vérifie l'une des trois propriétés énoncées dans le proposition 6.

Ainsi, parmi les exemples traités dans le chapitre I :

- Σ^∞ est un CPO infinitaire arborescent : Les successeurs immédiats de x , $x \in \Sigma^*$, sont de la forme $x\alpha$, avec $\alpha \in \Sigma$. Autrement dit, si $\leq$ est la relation "être facteur gauche de", alors :

$$\forall\, x,y \in \Sigma^*,\ (x,y) \in \text{Cons}(\leq) \ \underline{\text{ssi}}\ \exists\, \alpha , \alpha \in \Sigma \ \text{tel que} \ y = x\alpha$$

  Les éléments minimaux sont les mots de longueur 1 et il est clair que :

$$y \in \Sigma^* \ \underline{\text{ssi}}\ \exists\, x \ \text{tel que} \ \ell(x) = 1 \ \& \ (x,y) \in \text{trans}(\text{Cons}(\leq))$$

- Dans le cas des arbres, on peut considérer l'ensemble des arbres infinis maximaux (pour l'ordre "syntaxique") en tant qu'éléments purement infinitaires générés :
  . soit par l'ensemble $T(\Sigma \cup \{\Omega\})$ des arbres finis,
  . soit par $T'(\Sigma \cup \{\Omega\})$, ensemble des arbres finis,

où les Ω n'apparaissent qu'à une profondeur maximale.

L'ensemble des arbres où les Ω n'apparaissent qu'à une profondeur maximale (finie ou infinie) constitue également un CPO infinitaire arborescent.

III.B.2.- PROPRIETES DES CPO's INFINITAIRES ARBORESCENTS.

Il résulte de la proposition 6 les propriétés importantes suivantes :

PROPRIETE 4.- Dans un CPO infinitaire B^{∞} arborescent, toute partie dirigée Δ , $\Delta \subseteq B$, est totalement ordonnée.

En effet, soit $z = SUP\ \Delta$, $\Delta \subseteq B$ dirigée.

Il résulte de la proposition 6 que $]\leftarrow, z]$ est totalement ordonné, d'où la propriété.

Il en résulte également :

PROPRIETE 5.- Dans un CPO infinitaire B^{∞} arborescent, l'ordre sur B est distributif.

A montrer : $INF(a,SUP(b,c)) = SUP(INF(a,b),INF(a,c))$

Notons d'abord que si $z = SUP(b,c)$ est défini, alors z majore $INF(a,b)$ et $INF(a,c)$: $SUP(INF(a,c),INF(a,b))$ existe donc.

D'autre part, il résulte de la propriété précédente, que :

$$INF(a,SUP(b,c)) = \begin{cases} INF(a,b) & \text{si } SUP(b,c) = b \\ INF(a,c) & \text{si } SUP(b,c) = c \end{cases}$$

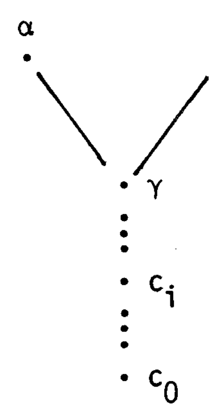
d'autre part :

$$SUP(INF(a,b),INF(a,c)) = \begin{cases} INF(a,b) & \text{si } INF(a,c) \leq INF(a,b) \\ INF(a,c) & \text{si } INF(a,b) \leq INF(a,c) \end{cases}$$

d'où le résultat.

PROPRIETE 6.- Dans un CPO infinitaire arborescent B^{∞}, toute chaîne croissante majorée dans B est finie.

Cette propriété est une conséquence immédiate du 2 de la proposition 6 ; elle interdit des situations telles que :



$B = \{c_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha,\beta\}$

avec $B^{\omega} = \{\gamma\}$

Notons d'ailleurs que l'existence d'une énumération de B compatible avec l'ordre implique la propriété 6 ; alors que le contraire est faux, comme le montre l'exemple de l'ordre plat sur $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$

Il résulte de cette propriété :

PROPRIETE 7.- *Dans un CPO infinitaire arborescent, tout élément purement infinitaire est maximal.*

En effet, $x \in B^{\omega}$ ssi x est le SUP d'une chaîne infinie d'éléments de B deux à deux distincts (Cf. th. 2, chapitre I) : la propriété 6 implique que x ne peut être majoré dans B .

Cette dernière propriété est évidente dans le cas des mots et des arbres infinis; elle est manifestement fausse par exemple dans le cas du CPO (non arborescent) des intervalles réels.

En matière de calculabilité, le théorème suivant montre l'intérêt des CPO's infinitaires arborescents :

THEOREME 3.- *Dans un CPO infinitaire arborescent, tout élément effectif est décidable.*

Soit en effet B une base finitaire effective pour une énumération ν.
Soit $a \in COMP(B^{\infty})$.

- si a est finitaire, alors il est décidable,
- si a est purement infinitaire, alors il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a = SUP\{\nu(i) \mid i \in w_x\}$$

où la suite $(\nu(i))_{i \in w_x}$ est croissante; construisons une suite effective strictement croissante et ayant pour SUP l'élément a, c'est-à-dire un ensemble w_y tel que :

$$a = SUP\{\nu(i) \mid i \in w_y\} \quad \text{avec :} \quad \nu(\phi_y(i)) < \nu(\phi_y(i+1)) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Définissons pour cela l'algorithme suivant en posant :

$w_x = x_0, x_1, \ldots$

$w_y = y_0, y_1, \ldots$

$y_0 \leftarrow x_0$

$j \leftarrow 0$

<u>Pour tout</u> $n \geq 1$ <u>répéter</u>

    <u>tantque</u> $\nu(x_j) \leq \nu(y_{n-1})$ <u>répéter</u>

        $j \leftarrow j+1$

    <u>fintantque</u>

    $y_n \leftarrow g(y_{n-1}, x_j)$

<u>Fin pourtout</u>

où g calcule la fonction SUP (g récursive par définition de la base effective).

Il en résulte que :

$$a = SUP\{\nu(i) \mid i \in w_z\}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} w_z = w_{f(x)} & f \text{ récursive} \\ \text{la suite } \nu(i) \text{ strictement croissante.} \end{cases}$$

Soit alors $b \in B$; montrons que a est décidable en construisant un algorithme de décision pour $b \leq a$:

$n \leftarrow 0$

<u>tantque</u> $\nu(y_n) < b$ <u>répéter</u>

  $n \leftarrow n+1$

<u>fintantque</u>

Montrons d'abord que cet algorithme fournit un résultat en un temps fini : Ceci résulte immédiatement de la propriété 6 .

On obtient alors à la sortie :

$$\exists\ n_0 \text{ tel que } \neg\ \nu(y_{n_0}) < b$$

- si $\nu(y_{n_0}) \geq b$ alors :

  $b \leq a$ puisque $\nu(y_i) < a$ pour tout i

- sinon, $\nu(y_{n_0})$ et b sont incomparables,

  $\Longrightarrow$ l'ensemble $\{\nu(y_{n_0}),b,a\}$ n'est pas dirigé,

  on a $\neg\ b \leq a$

Il résulte de ce théorème les corollaires suivants :

<u>COROLLAIRE 1</u>.- *Tout mot infinitaire effectif est décidable.*

<u>COROLLAIRE 2</u>.- *Tout arbre infinitaire effectif maximal est décidable.*

Ces corollaires résultent immédiatement des remarques suivant la définition 2; de même, en utilisant le théorème 2 :

<u>COROLLAIRE 3</u>.- *Tout mot infinitaire de* $\mathrm{COMP}(\Sigma^\infty)$ *est limite effective d'une suite de Cauchy effective d'éléments de* Σ^* .

et enfin :

COROLLAIRE 4.- *Tout arbre infinitaire effectif maximal est limite effective d'une suite de Cauchy effective d'arbres finis.*

Notons que la démonstration du théorème 3 et les corollaires qui le suivent restent vrais dans le cas plus général de CPO's infinitaires effectifs dans lesquels :

- toute partie dirigée est totalement ordonnée,
- toute chaîne croissante majorée par un élément de la base est finie.

Nous concluons ce chapitre par quelques résultats relatifs aux fonctions (et fonctionnelles) calculables.

IV - FONCTIONS CALCULABLES

Nous avons montré dans le chapitre précédent, que les fonctions continues calculables de B^∞ dans B'^∞ pouvaient être définies :

- en tant qu'éléments de $COMP([B^\infty \to B'^\infty])$
- en tant que morphismes effectifs de $(COMP(B^\infty),\nu^\infty)$ vers $(COMP(B'^\infty),\nu'^\infty)$ où ν^∞ (resp. ν'^∞) est l'énumération effective de B^∞ (resp. B'^∞) construite à partir d'une énumération effective ν (resp. ν') de la base finitaire B (resp. B').

Ceci étant valable pour tous les CPO's infinitaires effectifs B^∞ et B'^∞, on peut étendre ces résultats à des fonctions continues de "type" supérieur, c'est-à-dire généralement aux fonctionnelles; la première caractérisation correspond à celle des fonctionnelles calculables, et la seconde à celle des fonctionnelles effectives dont EGLI et CONSTABLE [44] , puis SCIORE et TANG [119] ont montré l'équivalence. Notons aussi qu'il est possible de caractériser toute fonctionnelle effective en tant qu'élément d'une s-classe (au sens de [50]) : On peut alors définir une telle fonctionnelle en tant que plus petit point fixe (effectif) d'un opérateur d'énumération (à la ROGERS [113]) , ce qui correspond à une troisième caractérisation de telles fonctionnelles; on pourra se reporter alors généralement aux travaux de POUR-EL [109] pour une étude comparative exhaustive des diverses caractérisations d'opérateurs calculables.

Nous nous attachons plus particulièrement dans la suite de ce travail à la version effective du chapitre III : Notions de convergence effective d'une suite de fonctions, de compacité effective, de continuité (uniforme) effective. Nous donnons auparavant une première conséquence des résultats qui précèdent dans le cas de fonctions contractantes.

IV.A.- POINT FIXE DE FONCTION CONTRACTANTE.

Soit $f \in \mathrm{COMP}([B^\infty \to B^\infty])$, avec B^∞ CPO infinitaire effectif de base finitaire effective B par rapport à une énumération ν . Rappelons que f est dite *contractante* [41] pour la métrique d_ν (ou d_ν-contractante) s'il existe $k < 1$ tel que :

$$d_\nu(f(x),f(y)) \leq k.d_\nu(x,y) \qquad x,y \in B^\infty$$

On montre alors facilement :

PROPOSITION 7.- Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy effective d'éléments de B , de limite b ; soit $f \in \mathrm{COMP}([B^\infty \to B^\infty])$ d_ν-contractante; alors la suite $(f(b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy effective et converge effectivement vers $f(b)$.

En effet, par définition des suites de Cauchy, si ψ est le régulateur de convergence effectif de (b_i) , on a :

$$\forall p \,,\quad i \geq \psi(p) \ \&\ j \geq \psi(p) \Longrightarrow d_\nu(b_i,b_j) \leq \frac{1}{1+p}$$
$$\Longrightarrow d_\nu(f(b_i),f(b_j)) < \frac{1}{1+p}$$

$\Longrightarrow$ la suite $(f(b_i))$ est de Cauchy, de régulateur de convergence ψ .

D'autre part, la suite $(f(b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est effective car :

$$b_i = \nu(\Theta(i)) \text{ avec } \Theta \text{ récursif,}$$

$$\Longrightarrow f(b_i) = \nu(\Theta'(i)) \text{ avec } \Theta' \text{ récursif}$$

par application de la proposition 5 du chapitre IV.

Il en résulte que $(f(b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy effective; elle converge donc effectivement dans $COMP(\bar{B})$; le fait qu'elle converge vers $f(b)$ est évident (la preuve est la même que celle qui a permis de montrer que $(f(b_i))$ est de Cauchy).

Il résulte immédiatement du théorème 1 le corollaire suivant :

<u>COROLLAIRE 1</u>.- *Soit* $COMP(B^\infty)$ *un CPO infinitaire effectif,* $f \in COMP([B^\infty \to B^\infty])$ *une fonction* d_ν*-contractante. Alors, pour tout* $x \in COMP(B^\infty)$,

$$x \textit{ décidable} \Longrightarrow f(x) \textit{ décidable.}$$

Il suffit de reprendre la proposition 7, avec $x = \lim\limits_{i\to\infty} b_i$, $b_i \in B$

Enfin, le théorème de BANACH [41] relatif au plus petit point fixe dans des espaces métriques complets conduit à :

<u>COROLLAIRE 2</u>.- *Soit* $f \in COMP([B^\infty \to B^\infty])$ *une fonction continue calculable* d_ν*-contractante; alors* f *a un seul point fixe qui est décidable.*

En effet, il suffit de remarquer que, pour tout $b \in B$, on a pour tout $m > n$:

$$d_\nu(f^n(b), f^m(b)) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d_\nu(b, f(b))$$

Il en résulte que la suite $(f^i(b))_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy effective et converge donc dans $COMP(\bar{B})$ vers le point fixe de f , qui est décidable en application du théorème 1. Le fait que cette limite soit unique et point fixe de f résulte du théorème de Banach sur les espaces métriques complets.

Il resterait à s'interroger sur la signification de la d_ν-contractance pour des fonctions continues calculables au sens des CPO's. En fait, une étude plus générale des propriétés de points fixes dans les CPO's et les espaces métriques associés doit pouvoir être entreprise à partir de la définition de la métrique proposés dans le chapitre II et des résultats obtenus dans le cas des CPO's infinitaires effectifs.

IV.B.- FONCTIONS CONTINUES EFFECTIVES AU SENS MÉTRIQUE.

Etant donné deux bases finitaires effectives B et B' par rapport aux énumérations respectives ν et ν' , il est clair que les complétés $COMP(\overline{[B \to B']})$ et $COMP([B^\infty \to B'^\infty])$ de la base finitaire $[B \to B']$ (Cf. chapitre IV) ne sont plus reliés que par l'inclusion (non effective) :

$$COMP(\overline{[B \to B']}) \subset COMP([B^\infty \to B'^\infty])$$

les éléments effectifs du complété métrique étant les éléments décidablrs du complété $[B^\infty \to B'^\infty]$, c'est-à-dire les fonctions à graphe décidable. Nous nous intéressons plus particulièrement à ces dernières et, afin d'obtenir des résultats comparables à ceux du chapitre III, montrons que $COMP(\bar{B})$ est, pour notre métrique, effectivement compact.

Définissons d'abord ce qu'est un recouvrement effectif de boules ouvertes de $COMP(\bar{B})$ avec B finitaire effective.

DEFINITION 3.- Un recouvrement R_z de boules ouvertes $O_i(x_i,n_i)$, $n_i \in \mathbb{N}$ et x_i décidable, est dit *effectif* s'il existe un programme ϕ_z d'énumération de ces boules.

Notons que l'appartenance d'un élément de $COMP(\bar{B})$ à une de ces boules est décidable (par définition de notre métrique); d'autre part, notre définition privilégie le point de vue métrique, puisque nous considérons des recouvrements par des boules et non par des ouverts.

Posons alors :

<u>DEFINITION 4</u>.- Un espace métrique récursif est dit effectivement compact si, de tout recouvrement effectif, on peut extraire par une procédure effective un recouvrement fini.

Montrons alors le :

<u>THEOREME 4</u>.- $COMP(\bar{B})$ *est effectivement compact.*

Soit B une base finitaire effective par rapport à une énumération ν . Associons à chaque élément $x \in \bar{B}$ le mot infini $m(x) \in \{0,1\}^{\infty}$ défini par :

$$
\begin{aligned}
[m(x)]_i &= 1 \quad \text{si} \quad \nu(i) \leq x \\
&= 0 \quad \text{sinon.}
\end{aligned}
$$

Considérons l'arbre infini binaire complet A où un élément de $\bar{B}$ est représenté, même s'il est fini, par une branche infinie.

Parmi les branches infinies de A , certaines représentent des éléments de $\bar{B}$; d'autres, dites "incohérentes", sont incompatibles avec les propriétés des CPO's infinitaires : Pour prouver le théorème 4, nous allons montrer que l'on peut effectivement associer à toute branche infinie de A une sous-branche <u>finie</u> incohérente ou associée à un élément de $\bar{B}$.

Définissons, pour toute branche infinie $\alpha \in A$, le "support" de α par :

$$\sigma(\alpha) = \{i \mid \alpha_i = 1\}$$

Montrons alors :

<u>LEMME 1</u>.- $\exists\ x \in \bar{B}$ *tel que* $\alpha = m(x)$

$$
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
\forall\ i,j \in \sigma(\alpha)\ ,\ \nu(i) \uparrow \nu(j)\ \& \\
\qquad\qquad \&\ \mu k[\nu(k) = SUP(\nu(i),\nu(j))] \in \sigma(\alpha) \\
\underline{\text{et}} \\
\forall\ i,j(i \in \sigma(\alpha)\ \&\ \nu(j) \leq \nu(i)) \Longrightarrow j \in \sigma(\alpha))
\end{cases}
$$

Montrons d'abord $\Longrightarrow$

Soit $x \in \bar{B}$ tel que $\alpha = m(x)$

Par définition de $m(x)$ et du complété, il existe un idéal $I \in B$ tel que :

$$\sigma(\alpha) = \{i \mid \nu(i) \in I\}$$

Les propriétés de $\sigma(\alpha)$ résultent alors directement de celles de l'idéal associé à x .

$\Longleftarrow$: De la même façon, les propriétés de $\sigma(\alpha)$ permettent de définir un idéal $I \subseteq B$ tel que $\sigma(\alpha) = \{i \mid \nu(i) \in I\}$; on a donc $\alpha = m(x)$, avec $x = SUP\ I$

Nous dirons qu'une branche infinie $\alpha \in A$ est incohérente <u>ssi</u> $\nexists\, x \in \bar{B}$ tel que $\alpha = m(x)$. Montrons alors

<u>LEMME 2</u>.- *Une branche* $\alpha \in A$ *est incohérente <u>ssi</u> il existe une sous-branche fini* β *telle que la branche* $\beta \| 0^\omega$ *soit incohérente.*

où $\beta \| 0^\omega$ représente la sous-branche finie β suivie d'une infinité de 0 .

Notons d'abord que, si α admet une sous-branche finie β telle que $\beta \| 0^\omega$ soit incohérente, alors la branche α est incohérente.

A l'inverse, il suffit d'expliciter la définition de l'incohérence :

En effet, $\alpha \notin m(\bar{B}) \Longleftrightarrow$ a) $\exists\, i,j \in \sigma(\alpha)$ tel que :

1) ou $\neg\, \nu(i) \uparrow \nu(j)$

2) ou $\nu(i) \uparrow \nu(j)$ mais

$\mu k[\nu(k) = SUP(\nu(i),\nu(j))] \notin \sigma(\alpha)$

<u>ou</u>

b) $\exists\, i,j$ tels que :

$i \in \sigma(\alpha)$, $\nu(j) \leq \nu(i)$ et $j \notin \sigma(\alpha)$

Dans les cas a-1 et b , posons $\ell = SUP(i,j)$; il suffit alors de prendre pour β la sous-branche de α de longueur ℓ . Dans le cas a-2 , il suffit de poser $\ell = SUP(i,j,k)$ et de définir β de la même façon : Dans ces trois cas, l'incohérence d'une branche infinie est donc caractérisée par l'incohérence d'une sous-branche finie; il en résulte donc que l'incohérence est semi-décidable.

Montrons enfin :

LEMME 3.- *Il existe un procédé effectif uniforme qui, pour toute boule* $O_i(x_i,n_i)$ *de centre* x_i *décidable et de rayon* $\frac{1}{n_i}$ *permet d'obtenir un mot fini* m_i *tel que*

$x \in O_i(x_i,n_i)$ *ssi* m_i *est sous-mot initial de* $m(x)$.

Soit en effet le sous-mot initial de $m(x_i)$ de longueur n_i . Pour construire m_i , il suffit de tester, pour tout $j \leq n_i$, si l'on a $\nu(j) \leq x_i$: Etant donné que x_i est décidable, ce test est décidable.

Il existe donc un algorithme permettant de construire :

$$
\begin{aligned}
[m_i]_j &= 1 \text{ si } \nu(j) \leq x_i \\
&= 0 \text{ sinon}
\end{aligned}
$$

Soit $R_z = \{O_i(x_i,n_i) \mid i \in w_z\}$ un recouvrement effectif de $COMP(\bar{B})$ (notons d'ailleurs qu'il s'agit également d'un recouvrement de $\bar{B}$). Soit $\alpha \in A$ une branche infinie quelconque :

- si $\alpha \in m(\bar{B})$, $\exists$ i tel que $m_i \leq \beta$

  où m_i est défini dans le lemme 3
  (l'existence de ce i est assurée par le fait que R_z est un recouvrement).

- si $\alpha \notin m(\bar{B})$, il existe d'après le lemme 2 une sous-branche finie incohérente.

Toute branche de A admet donc, soit une sous-branche finie incohérente, soit une sous-branche finie m_i : On peut donc extraire de A un sous-arbre n'ayant pas de branche infinie : Il résulte alors du lemme de finitude (Endlichkeitslemma, ou fan theorem dans [113]) que ce sous-arbre est fini : Le nombre des m_i est donc fini et définit un recouvrement fini de $COMP(\bar{B})$ (formé des éléments infinitaires x tels que $m(x)$ ait un m_i pour mot initial) : La compacité de $COMP(\bar{B})$ est donc prouvée.

Il reste donc à en assurer l'effectivité : Construisons pour cela un algorithme permettant de construire un arbre complet (chaque noeud admet deux successeurs) contenant toutes les branches m_i .

Soit $w_z = x_0, x_1, \ldots$ l'ensemble r.e. des indices des boules du recouvrement effectif.

Considérons l'algorithme suivant :

```
i ← 0
tantque arbre non complet répéter
    calculer m_i  (algorithme du lemme 3)
    calculer M  (ensemble des m_i minimaux au sens
                 des segments initiaux de {0,1}*)
    tester l'incohérence des branches jusqu'à la
                 hauteur i+1
fintantque
```

Le raisonnement précédent montre que cet algorithme s'arrêtera en un temps fini, lorsqu'un sous-arbre complet dont les branches seront, soit des m_i, soit des branches incohérentes, sera obtenu.

Ce théorème permet d'étendre les résultats du chapitre II aux fonctions calculables : continuité simple effective, continuité uniforme effective, convergence simple effective et convergence uniforme effective peuvent être étudiées de la même façon. Il est facile de voir que, dans le chapitre III, le théorème de compacité était à la base des résultats obtenus.

CONCLUSION

A la lecture des chapitres qui composent ce travail, on ne peut éviter de noter des questions laissées en suspens ainsi que des problèmes ouverts que nous n'avons pas encore évoqués : Nous présentons donc un bilan des développements nécessaires et qui paraissent une extension tout à fait logique du travail présenté; nous donnons ensuite une liste de problèmes ouverts, parfois abordés dans la littérature, qui requièrent des définitions de notions nouvelles.

1.- DÉVELOPPEMENTS NÉCESSAIRES.

1.a.- POINTS FIXES

Si, d'un point de vue algébrique et effectif, le rapprochement entre les complétés B^{∞} et $\bar{B}$ semble résolu, il n'en est pas de même de l'ensemble des points fixes des fonctions continues définies sur ces complétés : Dans le cadre de la théorie du point fixe utilisée pour la sémantique des langages de programmation, on peut citer les travaux relatifs aux points fixes de fonctions continues définies sur des treillis complets [37,121] ou des CPO's [111,133,138] . En ce qui concerne les points fixes métriques, le résultat le plus classique (et le plus simple) est le théorème de BANACH [41] sur les espaces complets, pour des fonctions contractantes par rapport à une métrique donnée; la propriété de contractance est très contraignante et difficilement interprétable en termes d'ordre. Bien qu'elle conduise à des propriétés intéressantes du point de vue effectif (Cf. Chapitre V) elle a l'inconvénient de n'être pas conservée par passage aux fonctionnelles d'ordre supérieur. Il existe bien entendu de nombreuses propriétés de point fixe métrique, mais leur interprétation en termes d'ordre semble plus difficile encore.

Il reste donc à entreprendre une étude des propriétés de point fixe du double point de vue métrique et ordonné; cette étude a été abordée dans [3] sur le CPO infinitaire des arbres : Elle mérite, nous semble-t-il, d'être prolongée dans le cas général des CPO's infinitaires à l'aide de notre métrique.

1.b.- SCHEMAS DE GREIBACH

L'étude de points fixes associés à des schémas de programme (déterministe ou non) [3,33,34,35] est facilitée par l'hypothèse de GREIBACH (l'arbre associé au schéma de programme a pour sommet un symbole terminal). Une telle propriété n'est exploitable qu'à l'aide de résultats issus de la théorie des langages; nous pensons qu'elle doit pouvoir s'exprimer en termes de propriétés métriques, à l'aide de la distance introduite dans le chapitre II : Elle devrait alors être d'une exploitation plus commode dans l'étude des propriétés de schémas de programmes.

1.c.- FONCTIONNELLES CALCULABLES

Nous avons annoncé dans le chapitre V une étude des fonctionnelles calculables; de nombreux auteurs ont déjà travaillé sur cette question (citons en particulier [111,70,109,68,50]). Le résultat obtenu à la fin du chapitre V (COMP($\bar{B}$) est effectivement compact) conduit à une définition des notions d'effective continuité (simple et uniforme) et d'effective convergence (simple et uniforme); les résultats du chapitre III sont alors facilement étendus au cas des fonctionnelles effectives (sur COMP($\bar{B}$)) moyennant une version effective des théorèmes de DINI et de HEINE. Notons les résultats de [143] dans le cas des réels calculables.

1.d.- CALCULABILITE PAR MACHINES DE TÜRING.

Les critères de calculabilité foisonnent dans la littérature : Citons en particulier les fonctions λ-définissables [9], calculables par des machines à programme [7] , par des machines de Tûring [95]. Dans le cadre de cette dernière approche, divers auteurs ont étudié les ω-langages [26,27,24,76,82] et les critères de décision relatifs aux ω-automates. De façon plus générale, WIEDMER [144,145] a défini des critères de calculabilité des fonctions à partir de machines de Tûring à plusieurs bandes, ces critères étant toujours définis par rapport à une codification donnée.

Une extension de ce travail est l'utilisation de machines (de type machines de Tûring) pour définir un type d'approximation et aboutir à l'obtention d'une hiérarchie de fonctions calculables correspondant à des contraintes relatives aux machines utilisées. Notons d'ailleurs que les preuves relatives à la compacité (Chapitre III et chapitre V) utilisent un codage sous forme de mots de $\{0,1\}^*$: il est naturel de se demander si les autres résultats ne peuvent pas être obtenus à partir de codages des éléments infinitaires.

Il nous semble que les problèmes évoqués jusqu'à présent relèvent simplement d'une extension (parfois non triviale) des résultats obtenus. Les questions que nous posons maintenant paraissent plus complexes; des réponses partielles ont été apportées dans la littérature.

2.- PROBLÈMES OUVERTS.

2.1.- TYPES EFFECTIFS.

Les CPO's infinitaires effectifs, que nous avons définis (Cf. chapitre IV) sont des domaines de calculabilité (les fonctions "interprétées" dans ces domaines sont effectives) et des types effectifs particuliers ([50,64,44,29,39,31]) . Dès lors se posent des problèmes concernant l'utilisation de ces types : Comment définir la (sémantique de) notion d'intersection de types effectifs, d'union de types effectifs, nécessaires dans les langages de programmation. Ce problème nous semble complexe : Notons par exemple que l'intersection de deux CPO's infinitaires peut ne contenir que des éléments purement infinitaires. Si comme on l'affirme dans [66] dans le cadre de l'inférence de types, les types ont une structure de treillis, il nous semble que la définition claire et rigoureuse de l'infimum et du supremum de types effectifs reste un problème ouvert; par contre, la notion de sous-type se règle facilement (sauf au niveau de l'implémentation) par l'utilisation de retracts calculables (au sens de [50,125]).

Un autre problème relatif aux types effectifs est la définition même de ce qui a été parfois appelé les "types finis"; autrement dit, existe-t-il des types finitaires permettant d'engendrer l'ensemble des types en tant qu'éléments infinitaires ? (citons des approches dans [127,92]). En termes de domaines énumérés, ce problème doit être rapproché de la définition des énumérations des CPO's infinitaires effectifs : Existe-t-il une base effective, d'énumération ν, pour l'ensemble des CPO's infinitaires effectifs; une réponse positive (à notre avis peu probable) permettrait de construire le ν^{∞} (Cf. chapitre IV) correspondant. Notons que KANDA [64] définit la notion d'énumération "acceptable" des CPO's infinitaires effectifs, ce qui présuppose l'énumération des couples $<i,j>$ tels que $<\phi_i,\phi_j>$ soient les fonctions récursives associées aux prédicats respectifs "être majoré" et "être SUP de". Cette énumération répond partiellement au problème posé, mais a l'inconvénient de n'être ni effective, ni totale.

2.2.- SEMANTIQUE METRIQUE

Peut-on donner un sens à la notion de "sémantique métrique" ?
Le fait de disposer d'un plus grand nombre de suites pour engendrer les mêmes éléments infinitaires conduit en effet à s'intéresser à cette question. La réponse est en fait complexe, pour les raisons suivantes :

a) L'intérêt serait de donner un sens à des programmes correspondant à des éléments de $C(\bar{B},\bar{B}')$ (non nécessairement croissants puisque f croissante et $f \in C(\bar{B},\bar{B}')$ implique $f \in [B^{\infty} \to B'^{\infty}]$. Sans doute faudrait-il regarder du côté du non-déterminisme pour trouver de tels exemples mettant en échec la sémantique classique des CPO's.

b) Il faudrait, pour donner un sens à une sémantique métrique, obtenir des propriétés des éléments de $C(\bar{B},\bar{B}')$ stables par passage aux fonctionnelles d'ordre supérieur; quels seraient, pour de telles propriétés, les théorèmes de points fixes (à supposer qu'ils aient encore un sens...).

c) On rencontrerait des problèmes au niveau de l'effectivité puisque les éléments des "domaines de calculabilité" seraient décidables; or, les éléments décidables posent des problèmes non triviaux (Cf. [113]).

d) On aboutit de façon inévitable au problèmes des domaines universels abordés, dans le cadre des CPO(s, (an tant que modèle du λ-calcul non typé), dans [124,42,129,107,108].

On sait, en effet, que, si l'on veut utiliser les fonctions en tant qu'objets d'un langage de programmation, la sémantique dénotationnelle de ce dernier conduit à la définition d'un domaine D qui contient son propre espace de fonctions; autrement dit tel que $D \simeq [D \to D]$. Un tel domaine est évidemment une façon de résoudre la fameuse querelle des types : "data types as objects" [127] ou "data types as functions" [92] ; la distinction entre éléments du domaine et fonctions n'ayant plus lieu d'être.

La définition d'une sémantique métrique requiert alors la mise en oeuvre d'une théorie métrique des domaines universels (dans laquelle le point b est fondamental) passant par l'utilisation de résultats relatifs à la théorie des catégories intervenant dans les travaux cités précédemment, ainsi que dans [1] . La définition d'une telle sémantique (avec les problèmes relatifs aux équations de domaines qui en résultent) semble donc, pour les raisons qui viennent d'être évoquées, particulièrement délicate.

2.3.- POWER DOMAINS

Dans le cadre du non-déterminisme, une étude métrique de la sémantique des schémas de programmes non-déterministes a été proposée dans [3,102] ; PLOTKIN a développé dans [108] une théorie des "power domains" , modèles ordonnés pour le non-déterminisme : Un travail intéressant serait l'extension de notre métrique à ces structures infinitaires dont le problème est qu'elles ne vérifient pas les propriétés requises dans le chapitre I pour la définition des CPO's infinitaires; les résultats de PLOTKIN relatifs à la définition d'une topologie séparée sur les SFP (Sequences of Finite inductive Partial Orders) sont déjà une étape importante dans cette direction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. ADAMEK, V. KOUBEK
LEAST FIXED POINT OF A FUNCTOR
Journal of Computer and System Sciences, 19,
pp. 163-178 (1979)

[2] ADJ
A UNIFORM APPROACH TO INDUCTIVE POSETS AND INDUCTIVE CLOSURE
MFCS 1977, Lect. Notes, Comp. Sciences, n° 53
Springer Verlag (1977), pp. 192-212

[3] A. ARNOLD, M. NIVAT
THE METRIC SPACE OF INFINITE TREES; ALGEBRAIC AND TOPOLOGICAL PROPERTIES
Annales Societatis Mathematicae Polonae
Series IV : Fundamenta Informaticae III-4 (1980)
pp. 445-476

[4] A. ARNOLD, M. DAUCHET
CARACTERISATION ALGEBRIQUE DES ENSEMBLES RECURSIVEMENT ENUMERABLES D'ARBRES
Colloque A.F.C.E.T.-S.M.F., (1978), pp. 1-13

[5] A. ARNOLD, M. DAUCHET
THEORIE DES MAGMOÏDES
RAIRO Informatique Théorique, Vol. 12, n° 3, (1978)

[6] G. ASSER
REKURSIVE WORTFUNKTIONEN
Zeitschrift f. Math. logik. und Grundlagen d. Math.
Bd 6, S. 258-278 (1960)

[7] J.P. AZRA, B. JAULIN
RECURSIVITE
Gauthier-Villars (1973)

[8] H. BARENDREGT, G. LONGO
EQUALITY OF λ-TERMS AND RECURSION THEORETIC REDUCIBILITY IN THE MODEL $\mathbf{T}^{\omega}$
University Utrecht - Dept of Mathematics
preprint n° 107, January 1979

[9] H. BARENDREGT
THE TYPE FREE LAMBDA CALCULUS
Handbook of Mathematical Logic. (1977), pp. 1092-1132
North Holland Company

[10] H. BARENDREGT

A GLOBAL REPRESENTATION OF THE RECURSIVE FUNCTIONS IN THE λ-CALCULUS
Theoretical Computer Science 3 (1976) pp. 225-242

[11] W. BAUR

REKURSIVE ALGEBREN MIT KETTEN BEDINGUNGEN
Zeitschrift fü Math. logik und Grundlagen der Math. Bd 20, S. 37-46 (1974)

[12] G. BERRY

STABLE MODELS OF TYPED λ-CALCULI
Lambda Calcul et Sémantique formelle des langages de Programmation
Actes de la 6ème Ecole de Printemps d'Informatique Théorique, LA CHATRE (1978)

[13] G. BERRY

BOTTOM-UP COMPUTATIONS OF RECURSIVE PROGRAMS
RAIRO Info. Theorique 10, 3 (1976), pp. 47-82

[14] G. BERRY

SEQUENTIALITE DE L'EVALUATION FORMELLE DES λ-EXPRESSION
3ème Colloque International sur la programmation
Ed. Dunod (1978)

[15] G. BERRY, J.J. LEVY

MINIMAL AND OPTIMAL COMPUTATIONS OF RECURSIVE PROGRAMS
J.A.C.M., Vol. 26, n° 1, January 1979, pp.148-175

[16] G. BERRY, J.J. LEVY

A SURVEY OF SOME SYNTACTIC RESULTS IN THE λ-CALCULUS
Math. Found. of Comp.Science, (1979)
Proc. Olomouc, Czechoslovaquia,
Lecture Notes in Computer Science, n° 74, pp. 552-566

[17] J. BETREMA

TOPOLOGIES SUR DES ESPACES ORDONNES
Rapport de Recherche n° 9, Avril 1981
Université de POITIERS

[18] G. BIRKHOFF

LATTICE THEORY
A.M.S. Colloquium Publications, 3rd Edition (1973)

[19] S.L. BLOOM, R. TINDELL

COMPATIBLE ORDERINGS ON THE METRIC THEORY OF TREES
Dept of Pure and Applied Mathematics
Stevens Institute of Technology, Hoboken, N.J. 07030 (1979)

[20] L. BOASSON, M. NIVAT

ADHERENCES OF LANGUAGES
JCSS 20, (1980), pp. 285-309

[21] F. BRACHO

FINITARY RETRACTS AND FIXED POINTS
Comunicaciones Técnicas, n° 257, Febrero 1981
Instituto de investigaciones en mathematica aplicades
y en sistemas. Univ. nacional autonoma de Mexico. Communication
présentée au Colloqie International de PENISCOLA, Avril 1981

[22] J.R. BUCHI

ON A DECISION METHOD IN RESTRICTED SECOND ORDER ARITHMETIC
International Congress Logic Methodology of Science
Stanford, California, (1960)

[23] G.S. CEITIN

ALGORITHMIC OPERATORS IN CONSTRUCTIVE COMPLETE SEPARABLE METRIC SPACES
Doklady. Akad. Nauk 128 (1959), pp. 49-52, 49 MR ≠ 6708

[24] Y. CHOUEKA

THEORIES OF AUTOMATA ON ω-TAPES : A SIMPLIFIED APPROACH
JCSS 8, (1974) pp. 117-141

[25] A. CHURCH

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC
Princeton University Press, Princeton N.J., (1956)

[26] R.S. COHEN, A.Y. GOLD

ω-COMPUTATIONS ON TÜRING MACHINES
Theoretical Computer Science 6 (1978) pp. 1-23

[27] R.S. COHEN, A.Y. GOLD

THEORY OF ω-LANGUAGES
JCSS 15, pp. 169-184 et pp. 185-208 (1977) Harpers & Rox Publishers

[28] P.H. COHN

UNIVERSAL ALGEBRA
Harper's Series in Modern Mathematics

[29] G. COMYN, G. WERNER

UNE DEFINITION DE TYPES DE DONNEES EFFECTIFS
Rapport Technique n° I.T.-8-78, Université de Lille
Décembre 1978

[30] G. COMYN, G. WERNER

COMPUTABLE DATA TYPES
Mathematical Foundations of Computer Science - Olomouc, 1979 - Lecture Notes in Computer Science 74, pp. 228-236

[31] G. COMYN, G. WERNER

DIVERSES CATACTERISATIONS DE TYPES DE DONNEES EFFECTIFS
Actes de l'Ecole d'Eté A.F.C.E.T. à MONASTIR (Tunisie)
Juillet 1979

[32] B. COURCELLE

FRONTIERS OF INFINITE TREES
RAIRO Informatique Théorique, Vol. 12 (1978) pp. 319-337

[33] B. COURCELLE

ON RECURSIVE EQUATIONS HAVING A UNIQUE SOLUTION
Rapport de Recherche I.R.I.A., n° 285, Mars 1978

[34] B. COURCELLE, M. NIVAT

ALGEBRAIC FAMILIES OF INTERPRETATIONS
Proc. 17th Annual Symp. Foundations Comp. Science
Houston, Texas, (1976)

[35] B. COURCELLE, I. GUESSARIAN

ON SOME CLASSES OF INTERPRETATIONS
Rapport de Recherche I.R.I.A., n° 253, Sept. 1977

[36] B. COURCELLE, M. NIVAT

THE ALGEBRAIC SEMANTICS OF RECURSIVE PROGRAM SCHEMES
In 7th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, n° 64
Springer Verlag (1978), pp. 16-30

[37] P. COUSOT

METHODES ITERATIVES DE CONSTRUCTION ET D'APPROXIMATION DE POINTS FIXES, D'OPERATEURS MONOTONES SUR UN TREILLIS; ANALYSE SEMANTIQUE DES PROGRAMMES
Thèse d'Etat, GRENOBLE, Mars 1978

[38] H.B. CURRY

FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL LOGIC
Mc Graw Hill Book Company, New York (1963)

[39] M. DAUCHET

TRANSDUCTIONS DE FORETS; BIMORPHISMES DE MAGMOÏDES
Thèse d'Etat, LILLE, Juin 1977

[40] M. DAVIS

COMPUTABILITY AND UNSOLVABILITY
Mc Graw Hill Book Company, New York, (1958)

[41] T. DUGUNDJI

TOPOLOGY
Allyn and Bacon, Boston (1966)

[42] H. EGLI

PROGRAMMING LANGUAGE SEMANTICS USING EXTENSIONAL λ-CALCULUS MODELS
TR 74-206, April 1979
Dept of Computer Science, Cornell University
Ithaca, New York 14850

[43] H. EGLI

TYPED MEANING IN SCOTT's λ-CALCULUS MODEL
λ-Calculus and Computer Science Theory
Proc. of the Symposium Held in Rome
March 25-27, 1975
Springer Verlag n° 37, pp. 220-239

[44] H. EGLI, R. CONSTABLE

COMPUTABILITY CONCEPTS FOR PROGRAMMING LANGUAGE SEMANTICS
7th Annual Symposium on Theory of Computing (1975), pp. 98-106

[45] S. EILENBERG

AUTOMATA, LANGUAGES AND MACHINES
Vol. A, Academic Press, New York, (1974)

[46] S. EILENBERG, C. ELGOT

RECURSIVENESS
Academic Press (1970)

[47] J. ENGELFRIET

BOTTOM-UP AND TOP-DOWN TREE TRANSFORMATIONS; A COMPARISON
Mathematical Systems Theory, Vol. 9, pp. 203-242

[48] Yu. L. ERSHOV

COMPUTABLE FUNCTIONALS OF FINITE TYPE
Algebra and Logic, 11, (1972), pp. 203-242

[49] Yu. L. ERSHOV

THEORIE DER NUMERIERUNGEN I
Zeitschr. f. math. Logik and Grundlagen der Math.
Bd. 19, S. 289-388 (1973)

[50] Yu.L. ERSHOV

THEORIE DER NUMERIERUNGEN II
Zeitschr. f. Math. und Grundlagen der Math.
Bd. 21, S. 473-584 (1975)

[51] W. FELSCHER, J. SCHMIDT

NATÜRLICHE ZAHLEN, ORDNUNG, NACHFOLGE
Arch. Math. Logik Grundl. Forsch. 4 (1958) pp. 81-94

[52] J.B. FLORENCE

STRONG ENUMERATION PROPERTIES OF RECURSIVELY ENUMERABLE CLASSES
Zeitschrift f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 15, S. 185-192 (1969)

[53] R.M. FRIEDBERG

THREE THEOREMS ON RECURSIVE ENUMERATION :
1) DECOMPOSITION - 2) MAXIMAL SET -
3) ENUMERATION WITHOUT DUPLICATION
The Journal of Symbolic Logic
Vol. 23, n° 3, Sept. 1958

[54] B. GOETZE

DIE STRUKTUR DES HALBVERBANDES DER EFFEKTIVEN NUMERIERUNGEN
Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd 20, S. 183-188 (1974)

[55] J.A. GOGUEN, J. THATCHER, E. WAGNER & J. WRIGHT

INITIAL ALGEBRA SEMANTICS AND CONTINUOUS ALGEBRAS
Journ. Assoc. Comp. Math., Vol. 24 (1977) pp. 68-95

[56] S. GOTTWALD

VERALLGEMEINERTE PEANO-SYSTEME
Zeitschr. f. Math. und Grundlagen d. Math.
Bd. 18, S. 19-30 (1972)

[57] I. GUESSARIAN

ALGEBRAIC SEMANTICS
Rapport LITP, n° 80-13, Mars 1980

[58] I. GUESSARIAN

ON CONTINUOUS COMPLETIONS
Theoretical Computer Science - 4ème G.I. Conference
AACHEN, March 1979
Lecture Notes in Computer Science n° 67, Springer Verlag

[59] J. HAUCK

KONSTRUKTIVE DARSTELLUNGEN REELLEN FOLGEN UND ZAHLEN
Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 24, S 366-374 (1978)

[60] J. HAUCK

BERECHENBARE REELLE FUNKTIONEN
Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 19, S. 121-149 (1973)

[61] E. HERRMANN

THE LATTICE STRUCTURE OF THE RECURSIVELY ENUMERABLE SETS
FCT 79 - Mathematical Research
AKademic Verlag, Berlin, pp. 175-181

[62] G. HOHEISEL, J. SCHMIDT

ÜBER DIE KONSTRUKTION EINER GEWISSEN TOTALEN ORDNUNG IN BAÜMEN
Arch. Math, VOL IV, (1953), pp. 261-266

[63] G. HUET

CONFLUENT REDUCTIONS
In 18th Symposium on Foundations of Computer Science,
Providence (1977), pp. 30-47

[64] A. KANDA

FULLY EFFECTIVE SOLUTIONS OF RECURSIVE DOMAIN EQUATIONS
Math. Foundations of Computer Science, (1979)
Proc. Olomouc, Czechoslovaquia
Lecture Notes in Computer Science, n° 74, pp. 326-336
Springer Verlag

[65] A. KANDA, D. PARK

WHEN ARE TWO EFFECTIVELY GIVEN DOMAINS IDENTICAL ?
Theoretical Computer Science- 4th G.I. Conference
Aachen, March 1979
Lecture Notes in Computer Science n° 67, pp. 170-181,
Springer Verlag

[66] M.A. KAPLAN, J.D. ULLMAN

A GENERAL SCHEME FOR THE AUTOMATIC INFERENCE OF VARIABLES TYPES.
Conference Record on the Firth Annual Symposium on Principles of Programming Languages. TUCSON, Arizona, Jan. 1978,
pp. 60-75

[67] J. KARASEK

SETS OF SEQUENCES CONSTRUCTED BY NONDETERMINISTIC k-MACHINES AND DETERMINISTIC k-MACHINES
Annales Societatis Mathematicae Polonae
Fundamenta Informaticae I (1977), pp. 243-250

[68] S.C. KLEENE

COUNTABLE FUNCTIONALS
Constructivity in Mathematics, North Holland Publishing Co. (1969)

[69] S.C. KLEENE

GENERAL RECURSIVE FUNCTIONS OF NATURAL NUMBERS
Math. Annalen 112, pp. 340-353 (1936)

[70] G. KREISEL, D. LACOMBE et J.R. SCHOENFIELD

PARTIAL RECURSIVE FUNCTIONALS AND EFFECTIVE OPERATIONS
Constructivity in Mathematics. Proc. of the Colloquium Held at Amsterdam (1957), North Holland, pp. 290-297

[71] G. KUREPA

ÜBER DIE EIGENSCHAFT VON SYSTEMEN LINEARER WOHLGEORDNETER MENGEN
Math. Ann. 118 (1942), pp. 578-587

[72] A.H. LACHLAN

STANDARD CLASSES OF RECURSIVELY ENUMERABLE SETS
Zeitsch. f. math. Logik une Grundlagen d. Math. Bd 10, S. 23-42 (1964)

[73] D. LACOMBE

QUELQUES PROCEDES DE DEFINITION EN TOPOLOGIE RECURSIVE
Constructivity in Mathematics. Proc. of the Colloquium held at Amsterdam, (1957)
Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (1959)

[74] D. LACOMBE

REMARQUES SUR LES OPERATEURS RECURSIFS ET SUR LES FONCTIONS RECURSIVES D'UNE VARIABLE REELLE.
Comptes rendus Académie des Sciences, 241, (1955), pp. 1250-1252

[75] D. LACOMBE

QUELQUES PROPRIETES D'ANALYSE RECURSIVE
Comptes rendus Académie des Sciences, 244 (1957) pp. 838-840

[76] L.H. LANDWEBER

DECISION PROBLEMS FOR ω-AUTOMATA
Math. systems Theory 3 (1969), pp. 376-384

[77] D.J. LEHMANN, M.B. SMYTH

DATA TYPES
18th Ann. Symp. Foundations of Computer Science (1977) pp. 7-12

[78] J.J. LEVY

REDUCTIONS CORRECTES ET OPTIMALES DANS LE λ-CALCUL
Thèse de Doctorat d'Etat, Université PARIS VII, PARIS (1978)

[79] J.J. LEVY

APPROXIMATIONS ET ARBRES DE BÖHM DANS LE LAMBDA CALCUL
Lambda-calcul et Sémantique formelle des langages de Programmation
Actes de la 6ème Ecole d'Informatique Théorique,
La Châtre, (1978)

[80] J.J. LEVY

AN ALGEBRAIC INTERPRETATION OF THE λβK-CALCULUS AND A LABELLED λ-CALCULUS
Theoret. Comp. Sci. 2, 1(1976), pp. 97-114

[81] C.H. LEWIS, B.K. ROSEN

RECURSIVELY DEFINED DATA TYPES; PART I
A.C.M. Symposium on Principles of Programming Languages (1973), pp. 125-138

[82] M. LINNA

ON ω-SETS ASSOCIATED WITH CONTEXT FREE LANGUAGES
AUTOMATA, LANGUAGES AND PROGRAMMING
Third international colloquium at the University of Edinburgh, July 1976, Ed. Michaelson and R. Milner
Edinburgh University Press

[83] J. Mc CARTHY

A BASIS FOR A MATHEMATICAL THEORY OF COMPUTATION
Computer Programming and Formal Systems. Ed. Braffort and Hischberg. North Holland (1963)

[84] Mc NAUGHTON

TESTING AND GENERATING INFINITE SEQUENCES BY A FINITE AUTOMATON
Inform. Control 9 (1966), pp. 521-530

[85] A.I. MALCEV

THE MATHEMATICS OF ALGEBRAIC SYSTEMS
Studies in logic and the foundations of mathematics
North Holland Publ. Com. (1971)

[86] A.I. MALCEV

ENSEMBLES COMPLETEMENT ENUMERES
Algèbre et logique, 2, N° 2 (1963) pp. 4-29

[87] Z. MANNA, J. VUILLEMIN
FIXPOINT APPROACH TO THE THEORY OF COMPUTATION
Comm. Assoc. Comp. Mach. Vol. 15 (1972) pp. 528-536

[88] A.A. MARKOV
THE THEORY OF ALGORITHMS
Trudy Math. Inst. Imeni V.A. Steklova,
Vol. 38, pp. 176-189

[89] G. MARKOWSKY
CHAIN COMPLETE POSETS AND DIRECTED SETS WITH APPLICATIONS
Algebra Univers. 6 (1976); pp. 53-68

[90] G. MARKOWSKY, B. ROSEN
BASES FOR CHAIN-COMPLETE POSETS
I.B.M. J. RES. Develop. 20 (1976)

[91] P. MARTIN LÖF
NOTES ON CONSTRUCTIVE MATHEMATICS
ALmquist & Wiksell - Stockholm (1970)

[92] B.H. MAYOH
DATA TYPES AS FUNCTIONS
Proceedings MFCS' 78, Springer Lectures Notes in
Computer Science, pp. 56-70

[93] R. MILNER
IMPLEMENTATION AND APPLICATIONS OF SCOTT's LOGIC FOR COMPUTABLE FUNCTIONS
Proc. of an ACM conference on proving assertions
about programs
New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico,
January 6-7, (1972), pp. 1-6

[94] R. MILNER
MODELS OF LCF
Standard artificial intelligence laboratory
Memo AIM, 186, January 1973

[95] M. MINSKY
COMPUTATION : FINITE AND INFINITE MACHINES
Prentice Hall Series in Automatic Computation (1967)

[96] Y. MOSCHOVAKIS
RECURSIVE METRIC SPACES
Fundamenta Mathematicae - LV (1964)

[97] J. MYHILL, J. SHERPHERDSON

EFFECTIVE OPERATIONS ON PARTIAL RECURSIVE FUNCTIONS
Zeitschrift f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.
Vol. 1, pp. 310-317 (1955)

[98] R. NAKAJIMA

INFINITE NORMAL FORMS FOR THE λ-CALCULUS
λ-calculus and Computer Science Theory. Proc. of the Symp. held in Rome, March 25-27 (1975)
Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, 37

[99] M. NIVAT

MOTS INFINIS ENGENDRES PAR UNE GRAMMAIRE ALGEBRIQUE
RAIRO Informatique Théorique
Vol. 11, n° 4, (1977), pp. 311-327

[100] M. NIVAT

SUR LES ENSEMBLES DE MOTS INFINIS ENGENDRES PAR UNE GRAMMAIRE ALGEBRIQUE
RAIRO Informatique Théorique, Vol. 12, n° 3 (1978) pp. 259-278

[101] M. NIVAT

ON THE INTERPRETATIONS OF RECURSIVE PROGRAMS SCHEMES
Symposia Matematica, Vol. XV, Inst. Nazionale di Alta Matematica, Rome, Italy, (1975), pp. 225-281

[102] M. NIVAT

INFINITE WORDS, INFINITE TREES, INFINITE COMPUTATIONS
Reprint form : Foundations of computer Science III - Part 2 : LANGUAGES, LOGIC, SEMANTICS.
Ed. J.W. BAKKER, J. VAN LEEUWEN
Mathematical Centre Tract 109 (1979), pp. 1-52

[103] M. NIVAT, A. ARNOLD

CALCULS INFINIS, INTERPRETATIONS METRIQUES ET PLUS GRANDS POINTS FIXES
1er Colloque A.F.C.E.T.-S.M.F. de Mathématiques Appliquées
4-8 Septembre 1978, PALAISEAU

[104] E. Ju. NOGINA

ON EFFECTIVELY TOPOLOGICAL SPACES
Soviet Math. Dokl. Vol. 7 (1966), n° 4, pp. 865-868

[105] G.D. PLOTKIN

LCF CONSIDERED AS A PROGRAMMING LANGUAGE
Memorandum SAI-RM-8, University of Edinburgh, July 1974

[106] G.D. PLOTKIN

ALGEBRAIC DOMAINS (GDP/6)
COMPUTABILITY (GDP/7)
Mathematical Theory of Programming Languages
CS-PG Course

[107] G.D. PLOTKIN

$\mathbb{T}^{\omega}$ AS AN UNIVERSAL DOMAIN
Journal of computer and System Sciences 17, (1978) pp. 209-236

[108] G.D. PLOTKIN

A POWERDOMAIN CONSTRUCTION
SIAM J. Computing 5 (1976), pp. 452-487

[109] M.B. POUR-EL

A COMPARISON OF FIVE COMPUTABLE OPERATORS
Zeitschrift f. Math. Logik und Grandlagen d. Math.
Bd 5, S. 325-340 (1960)

[110] M.B. POUR-EL, W.A. HOWARD

A STRUCTURAL CRITERION FOR RECURSIVE ENUMERATION WITHOUT REPETITION
Zeitschr. f. Math. Logik and Grundlagen d. Math
Bd 10, S. 105-114 (1964)

[111] RAVI SETHI

SEMANTICS OF COMPUTER PROGRAMS : OVERVIEW OF LANGUAGE DEFINITION METHODS
Murray Hill, New Jersey, Sept. 1977

[112] J. RIGUET

RELATIONS BINAIRES, FERMETURES, CORRESPONDANCES DE GALOIS
Bull. Soc. Math. France 76 (1948), pp. 114-155

[113] H. ROGERS, Jr

THEORY OF RECURSIVE FUNCTIONS AND EFFECTIVE COMPUTABILITY
Mc Graw Hill Book Company (1967)

[114] B. ROSEN

TREE MANIPULATING SYSTEMS AND CHURCH-ROSSER THEOREMS
Journ. Assoc. Comp. Mach. Vol 20 (1973) pp. 160-188

[115] A. SALOMAA

THEORY OF AUTOMATA
Pergamon Press, New York, (1969)

[116] J. SCHMIDT

PEANO-BÄUME
Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math
Bd. 6 - S. 225-239 (1960)

[117] J. SCHMIDT

ÜBER DIE MINIMALBEDINGUNG
Arch. Math. 4 (1953), pp. 172-181

[118] F. SCHWENKEL

REKURSIVE WORTFUNKTIONEN ÜBER UNENDLICHEN ALPHABETEN
Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Math
Bd 11, S. 133-147 (1965)

[119] E. SCIORE, A. TANG

COMPUTABILITY THEORY IN ADMISSIBLE DOMAINS
Proc. of the 10 th. ACM Symposium on the Theory of Computing
San Diego, alifornia, Mai 1978

[120] E. SCIORE, A. TANG

ADMISSIBLE COHERENT CPO's
Princeton University (1978)

[121] D. SCOTT

CONTINUOUS LATTICES
Lecture Notes in Mathematics, n° 274, Springer Verlag
pp. 97-136 (1971)

[122] D. SCOTT

OUTLINE OF A MATHEMATICAL THEORY OF COMPUTATION
Proc. 4th Annual Princeton Conference on Information
Science and Systems (1970)

[123] D. SCOTT

DATA TYPES AS LATTICES
Siam Journal of Computing 5 (1976), pp. 522-587

[124] D. SCOTT

LATTICE THEORY, DATA TYPES AND SEMANTICS
Symposium on Formal Semantics of Programming Languages
Sept. 1970, Ed. by Randall Rustin
Prentice Hall, Series in Automatic Computation, pp. 65-106

[125] D. SCOTT

LOGIC AND PROGRAMMING LANGUAGES
Communications of ACM, Sept. 1977, Vol 20, N° 9, pp.634-641

[126] D. SCOTT, C. STRACHEY

TOWARDS A MATHEMATICAL SEMANTICS FOR COMPUTER LANGUAGES
Proceedings of the symposium in Computers and Automata;
Microwave Research Institute Symposia Series, Vol. 21 (1971)

[127] A. SHAMIR, W.W.WADGE

DATA TYPES AS OBJECTS
Automata, Languages and Programming
4th Colloquium Lecture Notes in Computer Science n° 52
(Turku 1977), pp. 465-479

[128] M. SMYTH

EFFECTIVELY GIVEN DOMAINS
J. Theoret. Comput. Sci. 5 (1977), pp. 257-274

[129] M. SMYTH

POWER DOMAINS
J. Comp. Syst. Sciences 16 (1978); pp. 23-36

[130] M. SMYTH

CATEGORY THEORETICAL SOLUTION OF RECURSIVE DOMAIN EQUATIONS
Theory of Computation
Report N° 14, University of Warwick, (1976)

[131] M.B. SMYTH, G.D. PLOTKIN

THE CATEGORY THEORETIC SOLUTIONS OF RECURSIVE DOMAIN EQUATIONS
18th Ann. Symp. of Computer Science, (1977), pp. 13-17

[132] M. SOLOMON

MODES, VALUES and EXPRESSIONS
Second ACM Symposium on Principles of Programming Languages
Palo Alto - California, (1975)

[133] J.E. STOY

DENOTATIONAL SEMANTICS : THE SCOTT STRACHEY APPROACH TO PROGRAMMING LANGUAGE THEORY
The MIT Press - Series In Computer Science (1977)

[134] A. TANG

BOREL SETS IN $P\omega$ *: 1*
Rapport de Rechèrche IRIA N° 137, Oct. 1975

[135] Ju. R. VAINBERG

ON THE DOMAINS OF DEFINITION OF COMPUTABLE MAPPINGS OF METRIC SPACES
Dokl. Akad. Nauk. SSSR
Tom 227 (1976) N° 5

[136] F.W. VONHENKE, K. INDERMARK, K. WEIHRAUCH

HIERARCHIES OF PRIMITIVE WORDFUNCTIONS AND TRANSDUCTIONS DEFINED BY AUTOMATA
Automata, Languages and Programming
Proc. of a symp. organized by IRIA, July 1972
Ed. by NIVAT, North Holland Publishing Company

[137] V. VUCOVIC

RECURSIVE WORD FUNCTIONS OVER INFINITE ALPHABETS
Zeitschrift f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd 16, S. 123-138 (1970)

[138] J. VUILLEMIN

CORRECT AND OPTIMAL IMPLEMENTATIONS OF RECURSION IN A SIMPLE PROGRAMMING LANGUAGE.
Proc. 5th Ann. ACM Symp. on Thoery of Computing
pp. 224-239 (1973)

[139] C.P. WADSWORTH

THE RELATION BETWEEN LAMBDA-EXPRESSIONS AND THEIR DENOTATIONS
SIAM J. Computing 5 (1976), pp. 488-521

[140] K. WEIHRAUCH

EMBEDDING METRIC SPACES INTO CPO's
Informatik berichte n° 2 - 4/1980

[141] K. WEIHRAUCH, U. SCHREIBER

METRIC SPACES DEFINED BY WEIGHTED ALGEBRAIC CPO's
FCT 79, Math. Research, Akademic Verlag, pp. 516-522

[142] G. WERNER

REPRESENTATION OF EFFECTIVELY COMPUTABLE LIMITS
Technical Report IT LILLE, n° IT-3081 (1981)

[143] G. WERNER

UN CADRE GENERAL POUR LE CALCUL DES NOMBRES REELS
Colloque A.F.C.E.T. 1981

[144] E. WIEDMER

EXAKTEN RECHNEN MIT REELLEN ZAHLEN UND ANDEREN UNENDLICHEN OBJEKTEN
Thèse ETH - ZURICH (1977)

[145] E. WIEDMER

COMPUTING WITH INFINITE OBJECTS
Theoretical Computer Science 10 (1980), pp. 133-155

[146] J.B. WRIGHT, F.A. WAGNER, J.X. THATCHER

A UNIFORM APPROACH TO INDUCTIVE POSETS AND INDUCTIVE CLOSURE
Lecture Notes in Computer Science, 53, pp. 192-212
MFCS, (1977).