

N° d'ordre : 998

50376
1982
149

50376
1982
149

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

par

Abdallah TALHAOUI



CONDITIONS SUFFISANTES DE SOUS-ELLIPTICITÉ POUR $\bar{\partial}$

Membres du Jury : PARREAU M., *Président*

CŒURÉ G., *Rapporteur*

ANTOINE Ph.

DERRIDJ M.

HECTOR G.

} *Examineurs*

à mes parents,

à mes frères et soeurs,

Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ m'a initié aux techniques et méthodes de l'Analyse Complexe. C'est sous sa direction et grâce à ses conseils et encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail. Je saisis donc cette occasion pour lui exprimer ma profonde gratitude.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Makhlouf DERRIDJ pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour l'honneur qu'il me fait en participant au jury de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Michel PARREAU d'avoir bien voulu présider cette thèse, ainsi que Messieurs les Professeurs Philippe ANTOINE et Gilbert HECTOR qui ont accepté de faire partie du jury.

Que tous les enseignants et étudiants chercheurs d'Analyse Fonctionnelle trouvent ici l'expression de ma gratitude, en particulier, Monsieur Daniel BOICHU avec qui j'ai eu des discussions fructueuses.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont rendu possible la réalisation matérielle de ce travail, particulièrement, Madame Raymonde BÉRAT qui a dactylographié cette thèse avec célérité et gentillesse.

RESUMÉ

L'existence d'estimations sous-elliptiques pour le problème $\bar{\partial}$ de Neumann dans les domaines pseudo-convexes a été l'objet d'importants résultats obtenus à partir des travaux de J.J. Kohn.

Lorsque la frontière est strictement pseudo-convexe ou analytique réelle, on constate (cf. Chapitre I) que les problèmes les plus importants sont résolus.

Soit donc Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ faiblement pseudo-convexe à frontière C^∞ .

Ce travail porte sur l'existence de ces estimations sous-elliptiques en un point frontière z_0 de Ω où le rang de la forme de Lévi est $\geq n-2$.

Le second chapitre a pour objet d'établir une condition suffisante de nature algébrique portant sur le type d'un champ de vecteurs canonique ; on en déduit une condition suffisante, portant sur le développement taylorien de la fonction r définissant Ω , qui peut se formuler ainsi : il existe un système de coordonnées locales d'origine z_0 pour lequel :

$$- r(z) = \operatorname{Re}(z_n) + (F = \sum_{\alpha > 0, \beta > 0} C_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta) + O(|z|^{m+1}) ;$$

- La forme de Lévi est diagonale en z_0 ;

- F est un polynôme en z_{n-1} et $\bar{z}_{n-1}$ de degré m

$$- \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^\beta \frac{\partial^2 r}{\partial z_{n-1} \partial \bar{z}_j} (z_0) = 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha + \beta| \leq m-2 \\ j = 1, \dots, n-2 .$$

Ce résultat est à rapprocher de celui de J.J. Kohn dans (14.b) où aucune hypothèse sur le rang de la forme de Lévi n'est faite mais où l'on suppose qu'elle est diagonalisable localement.

Dans un article récent (5), David Catlin a établi qu'à un point de sous-ellipticité les ordres de contact avec $\partial\Omega$ des courbes analytiques complexes étaient bornés supérieurement.

Dans le chapitre III, sous l'hypothèse de rang $\geq n-2$ pour la forme de Lévi, nous établissons une conjecture de T. Bloom selon laquelle cette borne supérieure est égale au $\sup\{c^I(T, z_0)\}$ des champs de vecteurs T holomorphes non nulles en z_0 et tangents à $\partial\Omega$; ce qui démontre du même coup la réciproque du théorème de Catlin et donne ainsi une caractérisation géométrique des points de sous-ellipticité. Ce résultat est spécifique du rang $n-2$ comme le montre un exemple.

Ces deux chapitres sont précédés d'un chapitre introductif où l'on présente les résultats les plus importants sur le sujet et les notions qui sont utilisés.

SOMMAIRE

<u>CHAPITRE I</u>	- INTRODUCTION.	
	. Le problème $\bar{\partial}$ de Neumann.	1
	. Estimation sous-elliptique.	3
	. Ordres de contacts.	4
	. Cas analytique réel.	6
<u>CHAPITRE II</u>	- CONDITION SUFFISANTE DE NATURE ALGEBRIQUE DE SOUS-ELLIPTICITE POUR LES $(0,1)$ FORMES DIFFERENTIELLES.	9
	. Théorème principal.	13
	. Théorème 2.	17
	. Exemple.	18
<u>CHAPITRE III</u>	- CARACTERISATION GEOMETRIQUE DES POINTS DE SOUS- ELLIPTICITE.	21
	. Enoncé du théorème 3 (condition nécessaire et suffisante de sous-ellipticité).	22
	. Enoncé du théorème 4 (conjecture de T. Bloom).	22
	. Système de coordonnées à poids.	22
	. Démonstration du théorème 4.	41
	. Remarque importante.	49
	. Corollaire 1.	49
	. Corollaire 2 (généralisation d'un résultat de J. D'Angelo).	50
<u>APPENDICE</u>	- INTEGRATION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS ANALYTIQUES AVEC SINGULARITES.	51
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>		66

CHAPITRE I

LE PROBLEME $\bar{\partial}$ DE NEUMANN ET SES ESTIMATIONS SOUS-ELLIPTIQUES

Soit Ω_1, Ω_2 deux domaines p -convexes bornés de $\mathbb{C}^n$, ayant leur bord C^∞ on sait d'après [2] que si dans chacun de ces deux domaines le projecteur de Bergman est régulier (i.e : $P_i : C^\infty(\bar{\Omega}_i) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega}_i)$ $i = 1, 2$), alors toute fonction $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biholomorphe se prolonge au bord de manière régulière.

On s'intéresse donc aux domaines Ω , pour lesquels le projecteur (P) est régulier. Il est bien connu que les domaines strictement p -convexes possèdent cette propriété.

Le problème se pose donc pour les domaines faiblement p -convexes. Dans [1], on montre que si Ω est un domaine de Reinhardt borné, complet, dont le bord est C^∞ , alors le projecteur de Bergman associé à Ω est régulier. L'une des méthodes pour étudier ce problème est due à J.J. Kohn ; elle consiste à exprimer le projecteur de Bergman à l'aide de l'opérateur de Neumann et par suite on est amené à étudier le problème de la régularité du problème de Neumann.

Le problème $\bar{\partial}$ de Neumann.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$.

On note par $L_2^{p,q}(\Omega)$ l'espace des (p,q) formes différentielles de carré intégrables sur Ω , et on définit sur cet espace

de manière naturelle le produit scalaire $(\alpha, \beta) = \sum_{I,J} \int_{\Omega} \alpha_{IJ} \bar{\beta}_{IJ} dv$,
 $||\alpha||^2 = (\alpha, \alpha)$

$$\alpha = \sum_{IJ} \alpha_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad \beta = \sum_{IJ} \beta_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$I = (i_1, \dots, i_p) \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$$

$$J = (j_1, \dots, j_q) \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$$

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \quad dz_J = dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_q}$$

$$\text{on a } L_2^{p,q-1} \xrightleftharpoons[\bar{\partial}^*]{\bar{\partial}} L_2^{p,q} \xrightleftharpoons[\bar{\partial}^*]{\bar{\partial}} L_2^{p,q+1}$$

$\bar{\partial}$ désigne l'opérateur hilbertien fermé maximal qui prolonge l'opérateur différentiel $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$ désigne l'adjoint hilbertien de $\bar{\partial}$. On désigne $H^{p,q} = \{\psi \in \text{Dom}(\bar{\partial}) \cap \text{Dom}(\bar{\partial}^*) / \bar{\partial}\psi = 0 = \bar{\partial}^*\psi\}$.

$H^{0,0}$ n'est autre que l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrables. On dit que le problème $\bar{\partial}$ - de Neumann est soluble pour les (p,q) formes différentielles si pour $\alpha \in L_2^{p,q}(\Omega)$, $\alpha \perp H^{p,q}$, il existe $\psi \in \text{Dom}(\bar{\partial}) \cap \text{Dom}(\bar{\partial}^*)$ telle que :

$$(1) \quad \bar{\partial}\psi \in \text{Dom}(\bar{\partial}^*) \quad \text{et} \quad \bar{\partial}^*\psi \in \text{Dom}(\bar{\partial}) \quad \text{et} \quad \bar{\partial}\bar{\partial}^*\psi + \bar{\partial}^*\bar{\partial}\psi = \alpha.$$

On remarque que si l'équation (1) admet une solution, alors il existe une solution unique $\psi \perp H^{p,q}$, on note cette solution $N\alpha$.

Par suite, si l'équation (1) admet une solution pour tout $\alpha \perp H^{p,q}$, on peut définir un opérateur $N : L_2^{p,q}(\Omega) \rightarrow (H^{p,q}(\Omega))^\perp$ en posant $N\alpha = 0$, si $\alpha \in H^{p,q}$.

N est appelé l'opérateur de Neumann, on démontre qu'il est borné est autoadjoint (voir [14], a).

$$\text{De plus : } \bar{\partial}\alpha = 0 \Rightarrow \bar{\partial}\bar{\partial}^*N\alpha = 0$$

$$\text{d'où } (\bar{\partial}\bar{\partial}^*N\alpha, \bar{\partial}N\alpha) = 0 \iff \|\bar{\partial}^*N\alpha\|^2 = 0.$$

Ce qui entraîne :

$$(2) \quad \bar{\partial}\bar{\partial}^*N\alpha = \alpha \quad ; \quad \text{ainsi} \quad u = \bar{\partial}^*N\alpha \quad \text{est l'unique solution du problème} \quad \bar{\partial}u = \alpha \quad \text{qui est orthogonale à l'espace} \quad \{\psi, \bar{\partial}\psi = 0\}.$$

Maintenant, on suppose que le problème $\bar{\partial}$ - de Neumann est soluble pour les $(0,1)$ formes différentielles et soit $f \in L_2(\Omega) \cap \text{Dom}(\bar{\partial})$

alors en appliquant (2) à $\alpha = \bar{\partial}f$ il vient que

$Pf = f - \bar{\partial}^* N \bar{\partial}f$, où P est le projecteur de Bergman.

J.J. Kohn a montré le théorème suivant (voir [10]).

Théorème 1. - Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine p -convexe borné.

Alors le problème $\bar{\partial}$ de Neumann est soluble pour tous les (p,q) formes différentielles et on a $H^{p,q} = 0$ si $q > 0$.

Estimation sous-elliptique.

On dit qu'une estimation sous-elliptique est vérifiée au point $z_0 \in b\Omega$ pour le problème $\bar{\partial}$ de Neumann pour les (p,q) formes différentielles si :

Il existe un voisinage U de z_0 et des constantes $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$(3) \quad |||\psi|||_{\varepsilon}^2 \leq C(||\bar{\partial}\psi||^2 + ||\bar{\partial}^*\psi||^2 + ||\psi||^2) \text{ pour tout } \psi \in D_U^{p,q}$$

où $D_U^{p,q}$ désigne l'espace des (p,q) formes $\in \text{Dom}(\bar{\partial}^*)$ telles que pour tout I, J $\psi_{IJ} \in C_0^\infty(U \cap \bar{\Omega})$

et $|||\psi|||_{\varepsilon}^2 = \sum_{I,J} ||\psi_{IJ}||_{\varepsilon}^2$ est la ε -norme tangentielle de Sobolev.

Kohn a montré le théorème suivant (voir [10] et [15]).

Théorème 2. - Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ p -convexe, dont le bord est C^∞ ,

on suppose que l'estimation (3) est vérifiée au point $z_0 \in b\Omega$.

Alors si $\alpha \in L_2^{p,q}(\Omega)$, α régulière dans un voisinage de z_0 dans $\bar{\Omega}$ on a de même $N\alpha$, C^∞ dans un voisinage de z_0 dans $\bar{\Omega}$, et le projecteur de Bergman P est régulier dans ce voisinage.

Dans un récent article (voir [14], d), Kohn a introduit la notion de multiplicateur sous-elliptique.

Définition : On dit qu'une fonction f est un multiplicateur s -elliptique si elle est définie et C^∞ dans un voisinage U de z_0 et telle qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$|||f\psi|||_\varepsilon \leq C(||\bar{\partial}\psi||^2 + ||\bar{\partial}^*\psi||^2 + ||\psi||^2) \text{ pour tout } \psi \in D_U^{p,q}.$$

On montre (voir [14], d)) que si f est un multipliteur sous-elliptique pour les $(0,q)$ formes différentielles, alors f est aussi un multiplicateur s -elliptique pour les (p,q) formes différentielles pour tout $0 \leq p \leq n$. De plus, les germes en z_0 de ces multiplicateurs forment un idéal noté $I^q(z_0)$ dans l'anneau des germes des fonctions C^∞ .

Il est alors clair que l'estimation (3) est vérifiée au point z_0 si et seulement si $1 \in I^q(z_0)$.

Ordres de contacts.

Soit V un germe d'ensemble analytique complexe au point z_0 ; on définit l'ordre de contact de V au bord de Ω au point z_0 par :

$$O(z_0, V) = \max_{g \in F_{z_0}(V)} O(r-g)$$

où $F_{z_0}(V)$ désigne l'idéal des germes des fonctions analytiques réelles (à valeurs complexes) s'annulant sur V et $O_{z_0}(f)$ désigne l'ordre d'annulation de f au point z_0 .

On définit le $q^{\text{ième}}$ ordre total au point z_0 par

$$O^q(z_0) = \max_{V \in V^q(z_0)} O(z_0, V)$$

où $V^q(z_0)$ est l'ensemble des germes des ensembles analytiques complexes irréductibles, de dimension q , contenant z_0 .

Soit $W^q(z_0)$ l'ensemble des germes des sous-variétés ana-

lytiques complexes de dimension q , contenant z_0 .

On définit le $q^{\text{ième}}$ ordre régularisé au point z_0 par

$$\text{reg } O^q(z_0) = \max_{V \in W^q(z_0)} O(z_0, V)$$

on a $\text{reg } O^q(z_0) \leq O^q(z_0)$. L'inégalité est stricte en général, en effet, on considère dans C^3 , Ω défini par $r(z) = \text{Re}(z_3) + |z_1^2 - z_2^3|^2$ on a $\text{reg } O^1(0) = 6$ et $O^1(0) = \infty$.

On a le théorème suivant :

Théorème 3. - Soit Ω p -convexe, dont le bord est C^∞ ,

$z_0 \in b\Omega$, alors on a

(a) $I^q(z_0)$ est un idéal ;

(b) $I^q(z_0) = \sqrt[q]{I^q(z_0)}^R$ ou $\sqrt[q]{I^q(z_0)}^R = \{f / \exists g \in I^q(z_0) \text{ et } m \geq 0 : |f|^m \leq |g|\}$

(c) si $r = 0$ sur $b\Omega$, alors $r \in I^q(z_0)$ et les coefficients de $(\partial r) \wedge (\bar{\partial} r) \wedge (\partial \bar{\partial} r)^{n-q}$ sont dans $I^q(z_0)$.

(d) si $f_1, \dots, f_{n-q} \in I^q(z_0)$, alors les coefficients de $\partial f_1 \wedge \dots \wedge \partial f_j \wedge \partial r \wedge \bar{\partial} r \wedge (\partial \bar{\partial} r)^{n-q-j}$ sont dans $I^q(z_0)$ ou $j \leq n-q$.

Ainsi, il paraît naturel de définir par récurrence une suite croissante d'idéaux $I_k^q(z_0)$ en posant $I_1^q(z_0) = \text{rad}(r, \text{coeff}\{\partial r \wedge \bar{\partial} r \wedge (\partial \bar{\partial} r)^{n-q}\})$

$$I_{k+1}^q(z_0) = (I_k^q(z_0), A_k^q(z_0))$$

où $A_k^q(z_0) = \text{coeff}\{\partial f_1 \wedge \dots \wedge \partial f_j \wedge \partial r \wedge \bar{\partial} r \wedge (\partial \bar{\partial} r)^{n-q-j}\}$

où $f_1, \dots, f_{n-q} \in I_k^q(z_0)$ et $j \leq n-q$

et où $\text{coeff}\{\}$ désigne les germes des coefficients de l'ensemble des formes $\{\}$ et $(\)$ désigne l'idéal engendré par l'ensemble des fonctions qui apparaissent à l'intérieur des parenthèses.

En s'appuyant sur ce théorème principal ci-dessus, Kohn a obtenu le résultat suivant :

Proposition 1. - Soit Ω p -convexe, dont le bord est C^∞ , alors on a les équivalences suivantes :

- (a) $1 \in I_1^q(z_0)$;
- (b) la forme de Levi à $(n-q)$ valeurs propres non nulles en z_0 ;
- (c) $\text{reg } O^q(z_0) = 2$
- (d) $O^q(z_0) = 2$.

Si l'une des assertions de cette proposition est vérifiée, alors il existe un voisinage U de z_0 tel que :
 $P : C^\infty(U \cap \bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(U \cap \bar{\Omega})$. En appliquant cette proposition lorsque $q=1$, on retrouve la régularité du projecteur de Bergman en tout point de stricte pseudo-convexité.

Cas analytique réel.

Si $b\Omega$ est analytique réelle (i.e. r est analytique réelle), le résultat suivant donne une caractérisation satisfaisante des points en lesquels une estimation sous-elliptique est vérifiée pour les (p,q) formes différentielles.

Théorème 4. - Soit Ω p -convexe, $z_0 \in b\Omega$, r analytique réelle dans un voisinage de z_0 alors on a les équivalences suivantes :

- (a) $\exists k$ tel que $1 \in I_k^q(z_0)$;
- (b) Il existe un voisinage U de z_0 tel que $U \cap b\Omega$ ne contient aucun ensemble analytique complexe de dimension q ;
- (c) Si W est un germe au point z_0 d'un ensemble analytique complexe tel que $W \subset b\Omega$ alors $\dim W < q$.

Dans [9], Diederich et Fornaess ont montré le théorème suivant :

Théorème 5. - Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine p -convexe borné dont la frontière est analytique réelle. Alors $b\Omega$ ne contient aucun ensemble analytique complexe de dimension > 0 .

L'adjonction des théorèmes 4 et 5 entraînent la régularité du projecteur de Bergman P dans le cas d'un domaine Ω borné p -convexe à frontière analytique réelle.

Définitions. - $\mathbb{C}T_{z_0}$ est le complexifié de l'espace tangent en z_0 à $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$; si Ω est un ouvert à bord C^∞ , $T_{z_0}^{1,0}(b\Omega)$ et $T_{z_0}^{0,1}(b\Omega)$ désignant respectivement les champs de vecteurs engendrés par $(\frac{\partial}{\partial z_i})$ et $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i})$ et tangents à $b\Omega$ en z_0 ; on définit de même $\mathbb{C}T_{z_0}(b\Omega)$ le complexifié des champs de vecteurs tangent à $b\Omega$ en z_0 .

Un champ de vecteurs L est dit admissible s'il existe un voisinage U de z_0 tel que $\langle \partial r, L \rangle = \langle \bar{\partial} r, L \rangle = 0$ sur U .

On définit par récurrence $L^k(z_0) \subset \mathbb{C}T_{z_0}(b\Omega)$ en posant :

$$L^1(z_0) = \text{le module engendré par les vecteurs admissibles} \\ = T_{z_0}^{1,0}(b\Omega) \oplus T_{z_0}^{0,1}(b\Omega)$$

$L^k(z_0) = L^{k-1}(z_0) + [L^1(z_0), L^{k-1}(z_0)]$, ou $[,]$ désigne le crochet de Lie.

On dit que z_0 est un point de type m si m est le plus petit entier tel que $L^m(z_0) = \mathbb{C}T_{z_0}(b\Omega)$.

Les points pour lesquels une estimation s -elliptique est vérifiée sont presque complètement caractérisés, pour les formes $(0, n-1)$, par les deux propositions suivantes ([14], d).

Proposition 2. - $1 \in I_m^{n-1}(z_0)$ si et seulement si z_0 est de type fini.

Proposition 3. - z_0 est de type m si et seulement si $\text{reg } 0^{n-1}(z_0) = m$.

Remarque : L'étude des points de type ∞ est sans doute complexe, d'autre part si $n > 2$ les propositions 2 et 3 ne donnent pas de renseignements sur la régularité du projecteur de Bergman P . Sur $\mathbb{C}^2$, on obtient la régularité de P en des points de type fini ce résultat est généralisé de la façon suivante pour $n > 2$, ($[14]$, b)) :

Théorème 6. - Soit M une variété complexe p -convexe de $\dim n$, dont le bord est C^∞ , soit $z_0 \in \bar{M}$, on suppose qu'il existe un voisinage U de z_0 et une base orthonormée $(L_1, \dots, L_{n-1})$ de champs de vecteurs holomorphes tangents à bM telle que la matrice de Levi $(c_{ij})_{i,j < n}$ est diagonale sur U et on suppose qu'il existe des entiers m_k , $k = 1, \dots, n-1$ vérifiant $\langle \partial r, L_k^{(i_0, \dots, i_{m_k})} \rangle \neq 0$ sur U .

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{||D\psi_k||^2}{2^{-m_k-1}} + ||\psi_n||_1 \leq C(||\bar{\partial}\psi||^2 + ||\bar{\partial}^*\psi||^2 + ||\psi||^2).$$

$$\text{Pour tout } \psi = \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k d\bar{z}_k, \quad \psi_k \in C^\infty_0(U \cap \bar{M}) \quad \text{et} \quad \psi_n|_{bM \cap U} = 0$$

où $i_0, \dots, i_{m_k} \in \{0, 1\}$ et $L_k^{(i_0, \dots, i_{m_k})}$ est défini par récurrence par

$$L_k^{(0)} = L_k \quad L_k^{(1)} = \bar{L}_k \quad \text{et} \quad L_k^{(i_0, \dots, i_m)} = \begin{bmatrix} L_k^{(i_m)} & L_k^{(i_0, \dots, i_{m-1})} \end{bmatrix} \quad m \leq m_k.$$

On remarque qu'une hypothèse qualifiée de non naturelle sur la diagonalité de $(c_{ij})_{i,j < n}$ est utilisée.

Le chapitre qui suit a pour objet de trouver une condition suffisante de sous-ellipticité pour les $(0,1)$ formes différentielles ne faisant pas intervenir la diagonalité de la matrice de Lévi.

CHAPITRE II

CONDITION SUFFISANTE DE NATURE ALGEBRIQUE DE SOUS-ELLIPTICITE
POUR LES $(0,1)$ FORMES DIFFERENTIELLES

Dans ce qui suit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n, r(z) < 0\}$ est un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord C^∞ .

Soit z_0 un point de $b\Omega$. On suppose Ω pseudo-convexe dans un voisinage U de z_0 , c'est-à-dire la positivité de la forme de Levi $\partial\bar{\partial}r$ restreinte à l'espace tangent $T^{1,0}(b\Omega \cap U)$.

Soit $(L_1, \dots, L_{n-1})$ une base orthonormée de $T^{1,0}(b\Omega \cap U)$ et $(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1})$ la base conjuguée de $T^{0,1}(b\Omega \cap U)$; on complète ces bases par L_n et $\bar{L}_n$ conjugués l'un de l'autre dans $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ et $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ respectivement vérifiant $L_n(r) = \bar{L}_n(r) = 1$ sur $b\Omega \cap U$. Soit $(\omega_i, \bar{\omega}_i)_{i=1, \dots, n}$ la base duale, on remarque que $\omega_n = \partial r$ et $\bar{\omega}_n = \bar{\partial} r$. On pose $T = L_n - \bar{L}_n$, les champs $(L_1, \dots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}, T)$ forment une base de $\mathbb{C}T(b\Omega \cap U)$.

On a $\partial\bar{\partial}r = \sum_{i,j} c_{i,j} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j$; la matrice $(c_{i,j})_{i,j \leq n-1}$ de Levi est notée (C) . On note $\det_{j,k}(C)$ le mineur de la matrice (C) obtenu en supprimant la $j^{\text{ième}}$ ligne et le $k^{\text{ième}}$ colonne.

Proposition 1. - $\det(C) \in I_1^1(z_0)$.

Preuve : En effet, on a $\partial r \wedge \bar{\partial} r \wedge (\partial\bar{\partial}r)^{n-1} = \omega_n \wedge \bar{\omega}_n \wedge (\sum_{i,j < n} c_{i,j} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j)^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)! \det(C) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_n$.

Proposition 2. -

$$(a) \quad [\bar{L}_i, \bar{L}_j] = c_{i,j} T + \sum_{k=1}^{n-1} a_{ij}^k L_k + \sum_{k=1}^n b_{ij}^k \bar{L}_k \quad \text{pour tout } i, j < n$$

$$(b) \quad \text{soit } A_k = \sum_{j \leq n-1} (-1)^j \det_{j,k}(C) L_j \quad k \leq n-1$$

$$\text{alors } A_k(I_m^1) \subset I_{m+1}^1 \quad \forall m \geq 1.$$

Preuve :

$$(a) \quad \text{pour } i, j < n, \text{ on a } c_{ij} = \langle \partial\bar{\partial}r, L_i \wedge \bar{L}_j \rangle = \langle d\bar{\partial}r, L_i \wedge \bar{L}_j \rangle \\ = L_i(\langle \bar{\partial}r, \bar{L}_j \rangle) - \bar{L}_j(\langle \bar{\partial}r, L_i \rangle) - \langle \bar{\partial}r, [L_i, \bar{L}_j] \rangle$$

or $\langle \bar{\partial}r, L_i \rangle = 0$ et $\langle \bar{\partial}r, \bar{L}_j \rangle = 0$ car $j < n$; ainsi $c_{ij} = -\langle \bar{\partial}r, [\bar{L}_i, \bar{L}_j] \rangle$.

D'autre part, $[\bar{L}_i, \bar{L}_j]$ est un vecteur tangent à $b\Omega$ et s'exprime donc sous la forme (a) ; en appliquant aux deux membres la forme $\bar{\partial}r$, on obtient la valeur annoncée du coefficient de T.

(b) soit $f \in I_m^1(z_0)$

$$\text{on a } \partial f \wedge \partial r \wedge \bar{\partial}r \wedge (\partial \bar{\partial}r)^{n-2} = \sum_{j=1}^{n-1} L_j(f) \omega_j \wedge \omega_n \wedge \bar{\omega}_n \wedge \left(\sum_{i,j < n} c_{ij} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j \right)^{n-2}$$

$$\sum_{I,j} (n-2)! c_{1i_1}, \dots, \hat{c}_{ji_j} \dots c_{n-1i_{n-1}} L_j(f) \omega_j \wedge \omega_n \wedge \bar{\omega}_n \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \hat{\bar{\omega}}_{i_j} \wedge \dots \wedge \omega_{n-1} \wedge \bar{\omega}_{i_{n-1}} =$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-2)! \sum_{j,k} (-1)^{j-1} \det_{j,k}(c) L_j(f) \omega \wedge \bar{\omega}_{I_k} \wedge \bar{\omega}_n$$

où $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$; $I_k = \{1, \dots, \hat{k}, \dots, n-1\}$ et

$$\omega_{I_k} = \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_{n-1} \text{ donc } A_k(f) \in I_{m+1}^1(z_0) \quad \forall k \leq n-1.$$

Dans la suite, on s'intéresse au champ de vecteurs $A = A_{n-1}$.

Lemme 1. - Pour tout $i < n-1$, on a $[A, \bar{L}_i]$ est un champ de vecteurs admissible et $[A, \bar{L}_{n-1}] = (-1)^{n-1} \det(C) T + \text{vecteurs admissibles}$.

Preuve : On pose $A = \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j L_j$ ou $\psi_j = (-1)^j \det_{j,k}(C)$

on a $[A, \bar{L}_i] = \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j c_{ji} T + \text{vecteurs admissibles}$ où $i < n-1$

$$\text{or } \sum_j \psi_j c_{ji} = (-1)^{n-1} \sum_{j \leq n-1} (-1)^{n-1+j} \det_{j,n-1}(C) c_{ji} = 0$$

puisque $\sum_j (-1)^{n-1+j} \det_{j,n-1}(C) c_{ji}$ n'est autre que le déterminant de la matrice c' obtenu à partir de C en remplaçant la $(n-1)^{\text{ème}}$ colonne par la $i^{\text{ème}}$ colonne.

$$\text{Par contre } [A, \bar{L}_{n-1}] = (-1)^{n-1} \sum_{j \leq n-1} (-1)^{j+(n-1)} c_{j,n-1} \det_{j,n-1}(C)^T +$$

vecteurs admissibles

$$= (-1)^{n-1} \det(C)^T + \text{vecteurs admissibles.}$$

On définit par récurrence :

$$A^{(i_0, \dots, i_m)} = \left[A^{(i_m)}, A^{(i_0, \dots, i_{m-1})} \right] \quad \text{avec } A^{(i_m)} = A \text{ ou } \bar{A}$$

selon que $i_m = 1$ ou 0 .

Lemme 2. Soit $i_0, \dots, i_m$, $(m+1)$ entiers égaux à 0 ou 1

tels que $i_0 = 0$, $i_1 = 1$ alors

$$A^{(i_0, \dots, i_m)} = A^{(i_m)} \dots A^{(i_2)} \overline{(\det_{n-1, n-1}(C)) \times \det(C)^T} + P_m L_n + R_m \bar{L}_m + \text{vecteurs admissibles}$$

où P_m et R_m sont de la forme $\sum_{m' \leq m-2} c_{m', A}^{(j_1)} \dots A^{(j_{m'})} (\det(C))^{j_1, \dots, j_m} \in \{i_2, \dots, i_m\}$

$$\text{Preuve : On a } [A, \bar{A}] = \left[\sum_j \psi_j L_j, \sum_j \bar{\psi}_j \bar{L}_j \right]$$

$$= \sum_{j, \ell \leq n} \psi_j \bar{\psi}_\ell c_{j\ell}^T + \text{vecteurs admissibles}$$

$$\text{or pour } \ell \leq n-2 \text{ on a } \sum_{j \leq n-1} \psi_j c_{j\ell} = (-1)^{n-1} \sum_{j \leq n-1} (-1)^{(n-1)+j} \det_{j,n-1}(C) c_{j\ell} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{par contre } \bar{\psi}_{n-1} \sum_j \psi_j c_{j,n-1} &= \overline{\det_{n-1, n-1}(C)} \sum_{j \leq n-1} (-1)^{(n-1)+j} \det_{j,n-1}(C) c_{j,n-1} \\ &= \overline{\det_{n-1, n-1}(C)} \det(C). \end{aligned}$$

Maintenant, on démontre le lemme par récurrence.

On suppose que la formule est vérifiée à l'ordre $m \geq 2$ et montrons qu'elle est vérifiée à l'ordre $m+1$, on prend $i_{m+1} = 0$, le calcul est semblable pour $i_{m+1} = 1$

$$\begin{aligned} A^{(i_0, \dots, i_{m+1})} &= \left[A, A^{(i_0, \dots, i_m)} \right] \\ &= \left[A, A^{(i_m)} \dots A^{(i_2)} (\det(C) \overline{\det_{n-1, n-1}(C)})^{T+P_m L_n + R_m \bar{L}_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \bar{L}_j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on a } & \left[A, A^{(i_m)} \dots A^{(i_2)} (\det(C) \overline{\det_{n-1, n-1}(C)})^T \right] \\ &= A A^{(i_m)} \dots A^{(i_2)} (\det(C) \overline{\det_{n-1, n-1}(C)})^{T+A} A^{(i_m)} \dots A^{(i_2)} (\det(C) \overline{\det_{n-1, n-1}(C)}) [A, T] \end{aligned}$$

$$\text{et } [A, P_m L_n + R_m \bar{L}_n] = A(P_m) L_n + A(R_m) \bar{L}_n + P_m [A, L_n] + R_m [A, \bar{L}_n]$$

d'autre part, on a $[A, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j]$ est un champ de vecteurs admissibles

$$\text{et } [A, \sum_{j \leq n-1} \beta_j \bar{L}_j] = (-1)^{n-1} \beta_{n-1} \det(C) T + \text{vecteurs admissibles (d'après le lemme 1).}$$

$$\text{Ainsi } A^{(i_0, \dots, i_{m+1})} = A^{(i_{m+1})} \dots A^{(i_2)} (\det(C) \overline{\det_{n-1, n-1}(C)})^{T+P_{m+1} L_n + R_{m+1} \bar{L}_n} + \text{vecteurs admissibles}$$

où P_{m+1} et R_{m+1} sont de la forme annoncée.

Définition : Soit L un champ de vecteurs holomorphes tangent à $b\Omega$. On dit que L est de type fini en z_0 s'il existe $(m+1)$ entiers $i_0, \dots, i_m \in \{0, 1\}$ tels que $\langle \partial r, L^{(i_0, \dots, i_m)} \rangle_{z_0} \neq 0$.

On dit que L est de type m si m est le plus petit entier vérifiant cette propriété.

Théorème 1. - Supposons que le champ de vecteurs A est de type m en z_0 , alors $1 \in I_m^1(z_0)$.

Preuve : En effet, il existe $(i_0, \dots, i_m)$ tel que $\langle \partial r, A^{(i_0, \dots, i_m)} \rangle_{z_0} \neq 0$, deux cas sont possibles
ou bien $1 \in I_{m-1}^1(z_0)$ ce qui entraîne $1 \in I_m^1(z_0)$
ou bien $1 \notin I_{m-1}^1(z_0)$; d'après les propositions 1 et 2 on a $P_m = R_m = 0$ en z_0 ce qui entraîne d'après la formule du lemme 2 que

$$A^{(i_m)} \dots A^{(i_2)} (\det(C) \det_{n-1, n-1}(C))(z_0) \neq 0 ; \text{ ainsi } 1 \in I_m^1(z_0).$$

Lemme 3. - Soit I_m le module engendré par $L_{n-1}^{(j_1)} \dots L_{n-1}^{(j_m)} (c_{n-1, k})$ lorsque $(k, m_k) \in \{1, \dots, n-2\} \times \{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{n-1\} \times \{0, 1, \dots, m-2\}$.
Soit I le sous-espace de $\mathcal{CT}(b\Omega \cap U)$ engendré par L_j et $\bar{L}_j$ lorsque $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

On pose $J_m = I_m \cdot L_n + I_m \cdot \bar{L}_n + I$.

Alors pour tout $(i_0, \dots, i_m) \in \{0, 1\}^{(m+1)}$ on a la formule suivante

$$A^{(i_0, \dots, i_m)} = \psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)} \cdot L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_n^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) \cdot T \quad (\text{modulo } J_m)$$

$$\text{Preuve : On a } A = \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j L_j \quad \text{où } \psi_j = (-1)^{j \det_{j, n-1}(c)}$$

On remarque que $\psi_j \in I_1$ pour $j \leq n-2$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } m = 1 ; \quad [A, \bar{A}] &= \sum_{j, k} \psi_j \cdot \bar{\psi}_k c_{jk} \cdot T \quad (\text{modulo } I) \\ &= |\psi_{n-1}|^2 \cdot c_{n-1, n-1} \cdot T \quad (\text{modulo } J_1). \end{aligned}$$

On raisonne par récurrence de m à $m+1$; on suppose $i_{m+1} = 0$,
le calcul est semblable pour $i_{m+1} = 1$. On remarque que la suite I_m
est croissante. Pour tout X dans $\mathcal{CT}(b\Omega \cap U)$, on a

$$\left[\sum_{j \leq n-2} \psi_j L_j, X \right] = \left(\sum_{j \leq n-2} \psi_j [L_j, X] - X(\psi_j) L_j \right) \in J_1.$$

Ainsi on est réduit à vérifier la formule pour $\left[\psi_{n-1} L_{n-1}, A^{(i_0, \dots, i_m)} \right]$

$$\begin{aligned} \text{on a } A^{(i_0, \dots, i_m)} &= \psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)} L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_{n-1}^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) + f \cdot L_n + g \cdot \bar{L}_n \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \bar{L}_j \quad \text{où } f, g \in I_m \end{aligned}$$

$$[\psi_{n-1} L_{n-1}, f \cdot L_n] = (f [\psi_{n-1} L_{n-1}, L_n] + \psi_{n-1} L_{n-1} (f) L_n) \in J_{m+1}$$

le calcul est le même pour $[\psi_{n-1} L_{n-1}, g \cdot \bar{L}_n]$;

d'autre part, il est facile de voir que $[\psi_{n-1} L_{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \bar{L}_j] \in J_2$

enfin on a

$$\begin{aligned} &[\psi_{n-1} L_{n-1}, \psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)} L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_{n-1}^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) \cdot T] \\ &= \psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)} L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_{n-1}^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) \cdot [\psi_{n-1} L_{n-1}, T] + \\ &\quad \psi_{n-1} \cdot L_{n-1} (\psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)}) \cdot L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_{n-1}^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) \cdot T + \\ &\quad \psi_{n-1} \psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)} L_{n-1} L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_{n-1}^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) \cdot T \end{aligned}$$

$$\text{ainsi } [\psi_{n-1} L_{n-1}, \psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)} L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_{n-1}^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) \cdot T]$$

$$= \psi_{n-1} \psi_{n-1}^{(i_m)} \dots \psi_{n-1}^{(i_0)} L_{n-1} L_{n-1}^{(i_m)} \dots L_{n-1}^{(i_2)} (c_{n-1, n-1}) \cdot T \quad (\text{module } J_m)$$

et par suite la formule est vérifiée à l'ordre $m+1$.

Dans la suite, on choisit un numérotage des coordonnées tel que $\frac{\partial r}{\partial z_n}(z_0) \neq 0$; on note r_i (resp. $r_{\bar{i}}$) pour $\frac{\partial r}{\partial z_i}$ (resp. $\frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i}$).

Les calculs sont faits dans la base, associée aux champs de vecteurs suivants, qui répond aux conditions imposées précédemment

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{r_j}{r_n} \frac{\partial}{\partial z_n} \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$L_n = \frac{1}{r_n} \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Lemme 4. - On a la formule suivante :

$$\begin{aligned} L_{n-1}^{(i_k)} \dots L_{n-1}^{(i_1)}(c_{n-1,i}) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\alpha_2} r_{n-1,\bar{i}} + \sum_{|\beta| \leq k} f_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\beta_2} r_{n-1} \\ &\quad + \sum_{|\beta| \leq k} g_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\beta_2} r_{\bar{i}}. \end{aligned}$$

Les fonctions f_β et g_β sont C^∞ dans un voisinage de z_0 ;
 $\alpha_1 = \text{card}\{i_p; i_p = 0\}$, $\alpha_2 = \text{card}\{i_p; i_p = 1\}$ pour $p = 1, 2, \dots, k$.

Preuve : Pour $k = 0$

$$\begin{aligned} c_{n-1,i} &= r_{n-1,\bar{i}} - r_{n-1,\bar{n}} \frac{r_{\bar{i}}}{r_{\bar{n}}} - r_{n,\bar{i}} \frac{r_{n-1}}{r_n} + r_{n,\bar{n}} \frac{r_{n-1} \cdot r_{\bar{i}}}{|r_n|^2} \\ &= r_{n-1,\bar{i}} + f_i r_{n-1} + g_i r_{\bar{i}} \end{aligned}$$

on vérifie ensuite la formule par récurrence k vers $k+1$

on suppose $i_{k+1} = 0$, le calcul est pareil si $i_{k+1} = 1$

$$\begin{aligned} L_{n-1}^{(i_k)} L_{n-1}^{(i_1)} \dots L_{n-1}^{(i_1)} (c_{n-1,i}) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} - \frac{r_{n-1}}{r_n} \frac{\partial}{\partial z_n} \right) (L_{n-1}^{(i_k)} \dots L_{n-1}^{(i_1)} (c_{n-1,i})) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\alpha_1+1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\alpha_2} r_{n-1,i} + \sum_{|\beta| \leq k} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} (f_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} r_{n-1} + \\ &\quad g_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} r_i) \\ &\quad - \frac{r_{n-1}}{r_n} \frac{\partial}{\partial z_n} (L_{n-1}^{(i_k)} \dots L_{n-1}^{(i_1)} (c_{n-1,i})) \end{aligned}$$

ainsi la formule est vérifiée à l'ordre $k+1$.

Définition : Un système de coordonnées locales analytiques

en z_0 est dit adapté à r à l'ordre m si dans ce système r s'exprime sous la forme $r(z) = \text{Re } z_n + F_m(z) + O(|z|^{m+1})$

$$\text{avec } F_m(z) = \sum_{\substack{|\alpha| > 0, |\beta| > 0 \\ |\alpha+\beta| \leq m}} c_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

$$\partial \bar{\partial} r(z_0) = \sum_{i=1}^r c_{ii}(z_0) dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

ou r est le rang de la forme de Levi.

Pour chaque $m \geq 2$ un tel système existe :

en effet soit $(w_1, \dots, w_n)$ un système de coordonnées locales holomorphes d'origine z_0 en développant $r(w)$ en série de Taylor il vient que

$$r(w) = \text{Re} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha w^\alpha \right) + \sum_{\substack{|\alpha| > 0, |\beta| > 0 \\ |\alpha+\beta| \leq m}} b_{\alpha\beta} w^\alpha \bar{w}^\beta + O(|w|^{m+1}).$$

Soit $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ un système de coordonnées locales holomorphes

d'origine z_0 tel que $\xi_n = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha w^\alpha$, on a alors

$$r(\xi) = \operatorname{Re}(\xi_n) + \sum_{\substack{|\alpha| > 0, |\beta| > 0 \\ |\alpha + \beta| \leq m}} a_{\alpha\beta} \xi_n^{\alpha} \bar{\xi}_n^{\beta} + O(|\xi|^{m+1})$$

comme la forme de Levi $\partial \bar{\partial} r(0)$ restreinte à l'espace tangent à $b\Omega$ à l'origine définit par $\xi_n = 0$, est positive, on déduit que la matrice $(r_{\xi_i \bar{\xi}_j}(0))_{i,j \leq n-1}$ est diagonalisable, et par suite il existe un changement de coordonnées linéaire : $(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$ tel que $\xi_n = z_n$ et $(r_{z_i \bar{z}_j}(0))_{i,j \leq n-1}$ est diagonale.

Ce qui entraîne que $r(z) = \operatorname{Re}(z_n) + F_m + O(|z|^{m+1})$

où F_m est de la forme annoncée.

Théorème 2. - On suppose que le rang de la forme de Levi de r en z_0 est $\geq n-2$. Supposons qu'il existe un système de coordonnées locales adapté à r à l'ordre m pour lequel F_m est un polynôme en z_{n-1} et $\bar{z}_{n-1}$ de degré total égal à m . Soit alors m_0 le plus petit entier répondant à cette condition.

Si (1) $\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^\beta r_{n-1, \bar{j}}(0) = 0$ pour $\alpha + \beta \leq m_0 - 2$
et $j = 1, \dots, n-2$

alors $1 \in I_{m_0-1}^1(z_0)$.

Preuve : Soit $k \leq m_0 - 2$ et $(i_1, \dots, i_k)$ à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Pour $\beta_1 + \beta_2 \leq k$, on a :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_1} r_{n-1}(0) = 0 \text{ car chaque monôme de } F_{m_0} \text{ contient un } \bar{z}_i$$

$$\text{si } \beta_2 > 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\beta_2} r_{n-1}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\beta_2-1} r_{n-1, \bar{n-1}}(0) = 0$$

d'après le caractère minimal de m_0 .

$(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}})^{\beta_2} r_{\bar{i}}(0) = 0$ car chaque monôme de F_{m_0} contient un z_i .

Si $\beta_1 > 0$, $(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}})^{\beta_1} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}})^{\beta_2} r_{\bar{i}}(0) = (\frac{\partial}{\partial z_{n-1}})^{\beta_1-1} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}})^{\beta_2} r_{n-1, \bar{i}}(0) = 0$

d'après (1).

Aussi a-t-on : d'après le lemme 4

$$(2) \quad L_{n-1}^{(i_1)} \dots L_{n-1}^{(i_k)} (c_{n-1, i})(0) = (\frac{\partial}{\partial z_{n-1}})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}})^{\alpha_2} r_{n-1, \bar{i}}(0) \quad \text{avec} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = k$$

Maintenant si l'on se reporte aux modules I_k définis dans le lemme 3

on a $f(z_0) = 0$, $\forall f \in I_k$ pour $k \leq m_0 - 2$ et :

$$\langle A^{(i_0, i_1, \dots, i_k)}, \partial r \rangle_{z_0} = |\psi_{n-1}|^2 \psi_{n-1}^{(i_k)} \dots \psi_{n-1}^{(i_2)}(z_0) \cdot (\frac{\partial}{\partial z_{n-1}})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}})^{\alpha_2} r_{n-1, \bar{n}-1}(z_0)$$

avec $\alpha_1 = \text{card}\{i_p; p \geq 2 \quad i_p = 0\}$, $\alpha_2 = \text{card}\{i_p; p \geq 2 \quad i_p = 1\}$.

D'autre part, il existe α_0 et β_0 avec $\alpha_0 + \beta_0 = m_0 - 2$ tel

que

$$(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}})^{\alpha_0} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}})^{\beta_0} r_{n-1, \bar{n}-1}(z_0) \neq 0. \quad \text{Choisissons } (i_2, \dots, i_{m_0-1}) \text{ tel}$$

que $\text{card}\{i_p; i_p = 0\} = \alpha_0$ et $\text{card}\{i_p; i_p = 1\} = \beta_0$.

Puisque le rang de la forme de Levi est $\geq n-2$, on a

$\psi_{n-1}(z_0) \neq 0$, ainsi $\langle A^{(i_0, i_1, \dots, i_{m_0-1})}, \partial r \rangle_{z_0} \neq 0$, et le champ A est donc de type $m_0 - 1$ ce qui entraîne d'après le théorème 1 que $1 \in I_{m_0-1}^1$.

Exemple : On donne maintenant un exemple de domaine faiblement pseudo-convexe de dimension 4 tel que la matrice de Levi ne soit pas diagonalisable dans un voisinage de z_0 , et où par conséquent le théorème 6 de J.J. Kohn ne s'applique pas et tel que $1 \in I_3^1(0)$ par application du théorème 2.

On considère dans $\mathbb{C}^4$, Ω définit par

$$r(z) = \operatorname{Re}(z_4) + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^4 + e^{-\frac{1}{|z_1|^2}} (z_2 + \bar{z}_2).$$

On vérifie facilement que Ω est pseudo-convexe au voisinage de l'origine, de plus Ω n'est pas à frontière analytique réelle.

On considère le système standard (L_1, L_2, L_3, L_4) définit par

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{r_j}{r_4} \frac{\partial}{\partial z_4} \quad j = 1, 2, 3$$

$$L_4 = \frac{1}{r_4} \frac{\partial}{\partial z_4}$$

on a alors $c_{ij} = r_{z_i \bar{z}_j} \quad \forall i, j \leq 3$ au voisinage de l'origine

$$c_{11} = 1 + b \quad \text{ou} \quad b = (z + \bar{z}_2) e^{-\frac{1}{|z_1|^2}} \frac{1}{|z_1|^6} (1 - |z_1|^2) ;$$

$$c_{12} = a = e^{-\frac{1}{|z_1|^2}} \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^4} \quad c_{21} = \bar{a}$$

$$c_{22} = 1.$$

Montrons qu'il n'existe aucune base locale orthonormée (L'_1, L'_2, L'_3) de $T^{1,0}(b\Omega \cap U)$ telle que la matrice de Levi associée soit diagonale dans un voisinage de l'origine. Comme la forme de Levi est hermitienne, on a pour tout champs de vecteurs L, M

$$\partial \bar{\partial} r(L, M) = \langle H(L), M \rangle$$

où H est un endomorphisme de $T^{1,0}(b\Omega \cap U)$ dans lui-même

on a pour z assez voisin de l'origine et pour tout $i, j \leq 3$

$$\begin{aligned} \langle H(L'_i), L'_j \rangle_z &= 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ &= \lambda_i(z) & \text{si} \quad i = j \end{aligned}$$

Comme la base (L_1', L_2', L_3') est orthonormée, il vient que pour tout

$$i = 1, 2, 3 \text{ on a } H(L_i') = \lambda_i L_i'.$$

et par suite les vecteurs L_i' sont des vecteurs propres de l'endomorphisme H

$$\text{on pose } L_1' = xL_1 + yL_2 + zL_3 \text{ et } \lambda_1 = \lambda$$

$$\text{on a alors } (1+b-\lambda)x + \bar{a}y = 0$$

au voisinage de l'origine.

$$ax + (1-\lambda)y = 0$$

Soit z un point assez voisin de l'origine tel que $z_2 = z_3 = 0$

$$\begin{aligned} \text{on a } (1-\lambda)x + \bar{a}y = 0 & \quad \text{ce qui entraîne} & \quad x = -\frac{(1-\lambda)}{a} y = \frac{k}{a} y \\ ax + (1-\lambda)y = 0 & & \quad y = -\frac{(1-\lambda)}{\bar{a}} x = \frac{k}{\bar{a}} x \end{aligned}$$

ou k est une fonction qui se prolonge régulièrement à l'origine.

On peut toujours supposer que $y(z) \neq 0$ (sinon on utilise L_2')

ce qui entraîne que $x(z) \neq 0$

$$\frac{x(z)}{y(z)} = \frac{\bar{a}}{a} \frac{y(z)}{x(z)} \text{ et donc } \frac{\bar{a}}{a} \text{ se prolonge de manière régulière à l'origine}$$

$$\text{ce qui est absurde car } \frac{\bar{a}}{a} = \frac{|a|^2}{a^2} = \frac{|z_1|^2}{z_1^2}.$$

Remarque : Les hypothèses du théorème 2 portent sur la variable située dans le noyau de la forme de Levi en z_0 aussi m_0 s'il existe, est majoré par $\text{reg } 0^1(z_0)$; en effet, m_0 est l'ordre de contact en z_0 de Ω avec la variété d'équations

$$z_1 = z_2 = \dots = z_{n-2} = z_n = 0.$$

CHAPITRE III

CARACTERISATION GEOMETRIQUE DES POINTS DE SOUS-ELLIPTICITE

Soit M une hypersurface réelle dans $\mathbb{C}^n$ et soit z_0 un point de M .

Pour tout champ de vecteurs L de $T^{1,0}(M)$, on définit $c(L, z_0)$ par la règle suivante : $c(L, z_0) = m$ si pour tout $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$ tels que $k \leq m-3$, on a $(L)^{(i_1)} \dots L^{(i_k)} (<[L, \bar{L}], \partial r>)(z_0) = 0$ et il existe $i_1, \dots, i_{m-2} \in \{0, 1\}$ tels que $(L)^{(i_1)} \dots (L)^{(i_{m-2})} (<[L, \bar{L}], \partial r>)(z_0) \neq 0$.

Posons $c^1(M, z_0) = \sup\{c(L, z_0) ; L \in T^{1,0}(M), L(z_0) \neq 0\}$.

D'après un résultat de T. Bloom ([3], c, lemme 2.19), on a $\text{reg } 0^1(M, z_0) \leq c^1(M, z_0)$ pour toute hypersurface réelle M , $\mathbb{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}^n$, et passant par z_0 . Sur l'hypersurface $M = \{z \in \mathbb{C}^3 ; 2\text{Re}(z_3) + (z_2 + \bar{z}_2 + |z_1|^2)^2 = 0\}$ qui n'est pas pseudo-convexe à l'origine, Bloom montre que $\text{reg } 0^1(M, 0) = 4$ et $c^1(M, 0) = +\infty$; ainsi la pseudo-convexité en z_0 de M est un cadre naturel dans lequel on peut étudier la conjecture $\text{reg } 0^1(M, z_0) = c^1(M, z_0)$.

Dans l'article cité plus haut, T. Bloom vérifie l'exactitude de cette conjecture lorsque M est de dimension 3 [Théorème 2.14]. L'adjonction de ce résultat et du théorème 1 du paragraphe précédent donne alors une caractérisation géométrique des points de sous-ellipticité en dimension 3.

Lorsque n est quelconque et le rang de la matrice de Levi est au moins égal à $(n-2)$ le théorème 2 du chapitre précédent donne une condition suffisante de sous-ellipticité en z_0 portant sur le développement taylorien de r en z_0 dans un système de coordonnées locales holomorphes convenable. Or, il a été noté dans la remarque terminant le chapitre II que cette condition est naturellement liée à

$\text{reg } 0^1(z_0)$, d'où l'idée de généraliser la caractérisation géométrique des points de sous-ellipticité en dimension quelconque.

On a le théorème suivant :

Théorème 3. - On suppose que la forme de Levi est de rang $n-2$ en z_0 , alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une estimation sous-elliptique soit vérifiée en z_0 pour les $(0,1)$ formes différentielles est que $\text{reg } 0^1(z_0) < +\infty$.

• En fait la démonstration de la nécessité de la condition est due à D. Catlin ([5], th. 4) et ne suppose aucune restriction sur le rang de la forme de Levi, il démontre en fait plus en vérifiant que nécessairement $0^1(z_0) < +\infty$.

La suffisance dans le théorème 3 est une conséquence du résultat plus précis suivant dont la démonstration est l'objet de ce chapitre.

Théorème 4. - On suppose que la forme de Lévi est de rang $> n-2$ en z_0 . Alors $\text{reg } 0^1(z_0) = c^1(M, z_0)$

. Avant de montrer ce théorème, on commencera par préciser quelques définitions et notations.

• Système de coordonnées à poids.

Un système de coordonnées holomorphes à poids est la donnée d'un système de coordonnées locales holomorphes en $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $(z_1, \dots, z_n)$ et des entiers $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

On donne un poids à chaque fonction ϕ de classe C^∞ au

voisinage de z_0 par la règle suivante :

on a $pd(z_i) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$.

On donne le même poids aux conjugués des coordonnées holomorphes c'est-à-dire $pd(\bar{z}_i) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$.

Pour un monôme en $z, \bar{z}$, on donne le poids somme des poids des facteurs.

Pour une fonction ϕ de classe C^∞ , on pose $pd(\phi) =$ minimum des poids de monômes dans la série de Taylor de ϕ en z_0 .

On note alors par ϕ^0 la somme de monômes de poids minimum égal à $pd(\phi)$ dans la série de Taylor de ϕ en z_0 .

Ainsi ϕ^0 est un polynôme homogène de poids égal à $pd(\phi)$.

On a immédiatement les propriétés suivantes (ϕ et ψ étant deux fonctions C^∞ dans un voisinage de z_0).

- i) $pd(\phi \cdot \psi) = pd(\phi) + pd(\psi)$
- ii) $pd(\phi + \psi) \geq \min(pd(\phi), pd(\psi))$
- iii) $pd\left(\frac{\partial \phi}{\partial z_i}\right) \geq pd(\phi) - \alpha_i$, de même $pd\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_i}\right) \geq pd(\phi) - \alpha_i$
- iv) si $pd(\phi) > 0$ alors $\phi(z_0) = 0$.

Maintenant , on donne un poids à chaque opérateur différentiel à coefficients C^∞ dans un voisinage de z_0 par la règle suivante :

on affecte à $\frac{\partial}{\partial z_i}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ le poids $-\alpha_i$.

On affecte à l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^I \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^J$ le poids somme des poids des facteurs $\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right)$.

Pour un opérateur $Q = \sum_{I,J} \phi_{IJ} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^I \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^J$ à coefficients C^∞ ,

on donne le poids $\min_{I,J} \{ \text{pd}(\phi_{IJ}) + \text{pd}((\frac{\partial}{\partial z})^I (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^J) \}$.

Soit $S = \{(I,J) / \text{pd}(Q) = \text{pd}(\phi_{IJ}) + \text{pd}((\frac{\partial}{\partial z})^I (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^J)\}$, alors on note

$$Q^0 = \sum_{I,J \in S} \phi_{IJ}^0 (\frac{\partial}{\partial z})^I (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^J.$$

Un opérateur différentiel $Q = \sum_{I,J} \phi_{IJ} (\frac{\partial}{\partial z})^I (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^J$ est

dit homogène si tous les coefficients ϕ_{IJ} sont des polynômes homogènes et tous les termes $\phi_{IJ} (\frac{\partial}{\partial z})^I (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^J$ possèdent le même poids.

On a immédiatement les propriétés suivantes (Q_1, Q_2 étant deux opérateurs différentiels à coefficients C^∞ dans un voisinage de z_0)

- i) $\text{pd}(Q_1 Q_2) \geq \text{pd}(Q_1) + \text{pd}(Q_2)$,
- ii) si Q_1, Q_2 sont homogènes, alors Q_1, Q_2 est homogène, et si $Q_1, Q_2 \neq 0$ alors $\text{pd}(Q_1 Q_2) = \text{pd}(Q_1) + \text{pd}(Q_2)$,
- iii) soit $Q = \sum_{I,J} \phi_{IJ} (\frac{\partial}{\partial z})^I (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^J$, alors Q^0 est un opérateur différentiel homogène.

Notations : Soit M une sous-variété réelle d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$; soit $p \in M$. On pose $T^h(M, p) = \{ \text{Re}(T) / T \in T^{1,0}(M, p) \}$. $T^h(M, p)$ et $T^{1,0}(M, p)$ sont canoniquement isomorphes (voir [3], c) si M est une hypersurface réelle d'un ouvert de U de $\mathbb{C}^n$. Soit $p \in M$ alors $T^h(M, p)$ est de codimension (réelle) 1 dans $T(M, p)$ qui est l'espace tangent réel de M en p .

$\bigcup_{q \in M} T^h(M, q)$ est un fibré complexe noté $T^h(M)$.

La forme de Levi associée à M sera notée $L_M(q, T)$ où $q \in M$ et $T \in T^{1,0}(M, q)$; si L est un champ de vecteurs holomorphe tangent à l'hypersurface M que l'on suppose définie par $\{z/r(z) = 0\}$

alors $L_M(q, L(q)) = \langle [L, \bar{L}], \partial r \rangle(q)$.

Soit $H \in T^h(M, q)$, alors il existe un unique $T \in T^{1,0}(M, q)$ tel que $\text{Re}(T) = H$, on pose $L_M(q, H) = L_M(q, T)$.

Soit Z une sous-variété réelle de M , on définit

$$T^N(Z, q) = \{H \in T^h(M, q) \cap T(Z, q), L_M(q, H) = 0\}$$

et le fibré $T^N(Z) = \bigcup_{q \in Z} T^N(Z, q)$.

Définition. - Soit $F = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j$ un champ de vecteurs de

$T^{1,0}(M)$; on posera dans la suite, pour simplifier les écritures $L = L_{n-1}$ et $\alpha = \alpha_{n-1}$. On désigne par I_m le module (sur l'anneau des germes des fonctions C^∞ au voisinage de z_0) engendré par les produits du type :

$$L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} (C_{n-1, n-1}) ;$$

$$L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} (\alpha_i) L^{(j_1)} \dots L^{(j_{n_2})} (\alpha_j) ;$$

$$L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} (\alpha_i) L^{(j_1)} \dots L^{(j_{p-1})} L_k^{(j_p)} L^{(j_{p+1})} \dots L^{(j_{n_2})} (C_{k_1, j_1})$$

lorsque $i, j \leq n-2$, $k \leq n-1$, $0 \leq n_1 + n_2 \leq m-1$

$$i_1, \dots, i_{n_1}, j_1, \dots, j_{n_2+1} \in \{0, 1\}$$

$$(k_1, j_1, k) \in \begin{cases} \{n-1\} \times \{n-1\} \times \{1, \dots, n-1\} \\ \cup \\ \{n-1\} \times \{1, \dots, n-2\} \times \{n-1\} \\ \cup \\ \{1, \dots, n-2\} \times \{n-1\} \times \{n-1\} \end{cases}$$

avec $\alpha_j^{(0)} = \alpha_j$ et $\alpha_j^{(1)} = \bar{\alpha}_j$ pour tout $j \leq n-1$.

Remarque : Lorsque $\alpha_j = (-1)^j \det_{j,n-1}(C)$, c'est-à-dire lorsque $F = A$, désignons par $(-1)^{i+j+1} f_{i,j}$ le cofacteur de $C_{n-1,i} \cdot C_{j,n-1}$ dans le développement de $\det(C)$; ainsi a-t-on $f_{i,j}(z_0) = 0$ si $i \neq j$ et $f_{i,i}(z_0) > 0$ pour tout $i \leq n-2$.

Le module I_m est alors engendré par les produits du type

$$L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} (C_{n-1,n-1}) ;$$

$$L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} (C_{k_1,j_1}) \cdot L^{(j_1)} \dots L^{(j_{p-1})} L_k^{(j_p)} L^{(j_{p+1})} \dots L^{(j_{n_2})} (C_{k_2,j_2})$$

avec $(k_1, j_1) \in \{n-1\} \times \{1, \dots, n-2\} \cup \{1, \dots, n-2\} \times \{n-1\}$

$$(k_2, j_2, k) \in \left\{ \begin{array}{l} \{n-1\} \times \{n-1\} \times \{1, \dots, n-1\} \\ \cup \\ \{n-1\} \times \{1, \dots, n-2\} \times \{n-1\} \\ \cup \\ \{1, \dots, n-2\} \times \{n-1\} \times \{n-1\} \end{array} \right.$$

Lemme 5. - Pour tout $i_1, \dots, i_m \in \{0, 1\}$, on a la formule suivante :

$$F^{(i_m)} \dots F^{(i_1)} (\langle |F, \bar{F}|, \partial r \rangle) = \alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_1)} L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1,n-1})$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leq p \leq m \\ j \leq n-2}} \alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_p)} \dots \alpha^{(i_1)} |\alpha|^2 L^{(i_m)} \dots L^{(i_{p+1})} (\alpha_{j,L_j}^{(i_p)} L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1,n-1}))$$

$$+ \sum_{j \leq n-2} \alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_1)} L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)} (\operatorname{Re}(\alpha \bar{\alpha}_j C_{n-1,j}))$$

$$+ \sum_{i,j \leq n-2} \alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_1)} C_{i,j} L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)} (\alpha_i \bar{\alpha}_j) \pmod{I_m} .$$

En particulier si $F = A = \sum_{j \leq n-1} (-1)^j \det_{j,n-1} (C) L_j$,

on a pour tout $i_1, \dots, i_m \in \{0,1\}$ la forme suivante :

$$\begin{aligned} A^{(i_m)} \dots A^{(i_1)} (< |A, \bar{A}|, \partial r >) &= \psi^{(i_m)} \dots \psi^{(i_1)} |\psi|^2 L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1,n-1}) \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq p \leq m \\ j \leq n-2}} \psi^{(i_m)} \dots \widehat{\psi^{(i_p)}} \dots \psi^{(i_1)} |\psi|^2 L^{(i_m)} \dots L^{(i_{p+1})} (\psi_{j,L_j}^{(i_p)} L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)}) (C_{n-1,n-1}) \\ &+ \sum_{i,j \leq n-2} (-1)^{i+j+n} \psi^{(i_m)} \dots \psi^{(i_1)} \bar{\psi}_{i,j} L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1,i} C_{j,n-1}) \pmod{I_m} \end{aligned}$$

Démonstration : Pour $m = 1$, on prend $i_1 = 0$, le calcul est semblable si $i_1 = 1$, on a

$$\begin{aligned} < [F, \bar{F}], \partial r > = \sum_{i,j \leq n-1} \alpha_i \bar{\alpha}_j C_{ij} = |\alpha|^2 C_{n-1,n-1} + \operatorname{Re} \left(\sum_{j \leq n-2} \alpha \bar{\alpha}_j C_{n-1,j} \right) \\ &+ \sum_{i,j \leq n-2} C_{ij} \alpha_i \bar{\alpha}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(< [F, \bar{F}], \partial r >) &= (\alpha L + \sum_{j \leq n-2} \alpha_j L_j) (< [F, \bar{F}], \partial r >) \\ &= \alpha |\alpha|^2 L(C_{n-1,n-1}) + \alpha L \left(\sum_{j \leq n-2} \operatorname{Re}(C_{n-1,j} \alpha \bar{\alpha}_j) \right) + \sum_{i,j \leq n-2} \alpha C_{ij} L(\alpha_i \bar{\alpha}_j) \\ &+ \sum_{j \leq n-2} |\alpha|^2 (\alpha_j L_j) (C_{n-1,n-1}) \pmod{I_1} \end{aligned}$$

ainsi la formule est vérifiée à l'ordre 1.

Maintenant on raisonne par récurrence de m à $m+1$.

Désignons par L^γ un produit de longueur γ d'opérateurs L et $\bar{L}$; on constate par la formule de Leibnitz l'appartenance à I_{m+1} des fonctions suivantes :

$$L^\gamma(\alpha_j L_j) L^\beta(C_{n-1, n-1})$$

lorsque $\gamma + \beta < m$ et $j \leq n-2$

$$L^\gamma(\text{Re}(\bar{\alpha}_j C_{n-1, j})), L^\gamma(\alpha_i \bar{\alpha}_j)$$

$\gamma \leq m$ et $i, j \leq n-2$

$$\alpha_k L_k L^\gamma(\alpha_j L_j) L^\beta(C_{n-1, n-1})$$

$\gamma + \beta < m$ et $j, k \leq n-2$

$$\alpha_k L_k L^\gamma(\text{Re}(\bar{\alpha}_j C_{n-1, j})), \alpha_k L_k L^\gamma(\alpha_i \bar{\alpha}_j)$$

$\gamma \leq m$ et $i, j, k \leq n-2$

On constate aussi facilement que $F^{(i_{m+1})}(I_m) \subset I_{m+1}$

ainsi a-t-on $F^{(i_{m+1})} \dots F^{(i_1)}(<[F, \bar{F}], \partial r>) =$

$$\begin{aligned} & \left[(\alpha L)^{(i_{m+1})} + \sum_{j \leq n-2} (\alpha_j L_j)^{(i_{m+1})} \right] \left[F^{(i_m)} \dots F^{(i_1)}(<[F, \bar{F}], \partial r>) \right] \\ &= \left[(\alpha L)^{(i_{m+1})} + \sum_{j \leq n-2} (\alpha_j L_j)^{(i_{m+1})} \right] \left[\alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_1)} |\alpha|^2 L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)}(C_{n-1, n-1}) \right. \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq p \leq m \\ j \leq n-2}} \alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_p)} \widehat{\alpha^{(i_p)}} \dots \alpha^{(i_1)} |\alpha|^2 L^{(i_m)} \dots L^{(i_{p+1})} (\alpha_j L_j)^{(i_p)} L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)}(C_{n-1, n-1}) \\ &+ \sum_{i, j \leq n-2} C_{ij} \alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_1)} L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)}(\alpha_i \bar{\alpha}_j) \\ &+ \left. \sum_{j \leq n-2} \alpha^{(i_m)} \dots \alpha^{(i_1)} L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)}(\text{Re}(\alpha \bar{\alpha}_j C_{n-1, j})) + I_m \right] \\ &= \alpha^{(i_{m+1})} \dots \alpha^{(i_1)} |\alpha|^2 L^{(i_{m+1})} \dots L^{(i_1)}(C_{n-1, n-1}) \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq p \leq m+1 \\ j \leq n-2}} \alpha^{(i_{m+1})} \dots \alpha^{(i_p)} \widehat{\alpha^{(i_p)}} \dots \alpha^{(i_1)} L^{(i_{m+1})} \dots L^{(i_{p+1})} (\alpha_j L_j)^{(i_p)} L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)}(C_{n-1, n-1}) \\ &+ \sum_{j \leq n-2} \alpha^{(i_{m+1})} \dots \alpha^{(i_1)} (\text{Re}(C_{n-1, j} \alpha \bar{\alpha}_j)) \\ &+ \sum_{i, j \leq n-2} C_{ij} \alpha^{(i_{m+1})} \alpha^{(i_{m+1})} \dots \alpha^{(i_1)} L^{(i_{m+1})} \dots L^{(i_1)}(\alpha_i \bar{\alpha}_j) \pmod{I_{m+1}} \end{aligned}$$

par suite la formule est vérifiée pour tout entier $m \geq 1$.

Il reste à considérer le cas particulier $F = A = \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j L_j$.

En utilisant le fait que $\psi_j = (-1)^j \det_{j,n-1}(C)$ pour tout $j \leq n-1$, on a $\langle [A, \bar{A}], \partial r \rangle = \det C \overline{\det_{n-1,n-1}(C)} =$

$$|\psi|^2 C_{n-1,n-1} + \sum_{i,j \leq n-2} (-1)^{i+j+n} \bar{\psi} f_{i,j} C_{n-1,i} C_{j,n-1}.$$

On obtient facilement la formule annoncée en suivant un raisonnement par récurrence analogue à celui utilisé dans le cas où F est quelconque.

Lemme 6. Soit f une fonction C^∞ au voisinage de z_0 et $i_1, \dots, i_m \in \{0, 1\}$, alors on a

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & L^{(i_m)} \dots L^{(i_{p+1})} L_j^{(i_p)} L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1,n-1}) = \\ & \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\gamma_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\gamma_2} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{(i_p)} r_{n-1,n-1} + \sum_{|\beta| \leq m} f_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{(i_p)} (r) + \\ & + \sum_{|\beta| \leq m} g_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (r) \quad \text{où } j \leq n-1, \quad 1 \leq p \leq m \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \text{card}\{i_k ; i_k = 0, k \neq p\}, \quad \gamma_2 = m - \gamma_1 - 1$$

f_β et g_β sont des fonctions C^∞ dans un voisinage de z_0 pour tout $|\beta| \leq m$.

$$\text{ii)} \quad L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)} (f) = \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\alpha_2} (f) + \sum_{|\beta| \leq m} f_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (r)$$

où $\alpha_1 = \text{card}\{i_k ; i_k = 0\}$, $\alpha_2 = m - \alpha_1$

et f_β est une fonction C^∞ au voisinage de z_0 pour tout $|\beta| \leq m$.

Démonstration :

i) on a d'après le lemme 4 :

$$L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1, n-1}) = \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{v_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{v_2} r_{n-1, \bar{n}-1} +$$

$$+ \sum_{|\beta| \leq p} h_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (r) \quad \text{où } v_1 = \text{card}\{i_k ; i_k = 0, k < p\},$$

$$v_2 = p-1-v_1$$

h_β est une fonction C^∞ au voisinage de z_0 pour tout $|\beta| \leq p$.

$$L_j^{(i_p)} L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1, n-1}) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{(i_p)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{v_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{v_2} r_{n-1, \bar{n}-1}$$

$$+ \sum_{|\beta| \leq p} f'_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{(i_p)} \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (r) + \sum_{|\beta| \leq p} g'_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (r)$$

avec f'_β, g'_β des fonctions C^∞ dans un voisinage de z_0 .

Maintenant, en raisonnant par récurrence sur $m \geq p$, on obtient facilement la formule annoncée.

ii) Par récurrence sur m :

. La formule est vérifiée à l'ordre 1 : en effet, on a

$$L(f) = \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}} - \frac{f_{z_n}}{r_n} \frac{\partial r}{z_{n-1}}, \quad \bar{L}(f) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{n-1}} - \frac{f_{\bar{z}_n}}{r_{\bar{n}}} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_{n-1}}.$$

. On suppose que la formule est vérifiée à l'ordre m et montrons qu'elle est vérifiée à l'ordre $m+1$, on a : $L^{(i_{m+1})} \dots L^{(i_1)} (f) =$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{(i_{m+1})} - \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{(i_{m+1})} \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\alpha_2} (f) + \sum_{|\beta| \leq m} h_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (r) \right]$$

où $\alpha_1 = \text{card}\{i_k ; i_k = 0, k \leq m\}$, $\alpha_2 = m - \alpha_1$

et h_β est une fonction C^∞ dans un voisinage de z_0

$$\begin{aligned} L^{(i_{m+1})} \dots L^{(i_1)}(f) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{(i_{m+1})} \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\alpha_2}(f) \\ &+ \sum_{|\beta| \leq m+1} f_\beta \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\beta_2}(r) - \\ &- \left(\frac{1}{r_n} \frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{(i_{m+1})} (L^{(i_m)} \dots L^{(i_1)}(f)) \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{(i_{m+1})}(r) \end{aligned}$$

ainsi la formule est vérifiée pour tout m .

Lemme 7.- (voir [3] a, Proposition 2.2.).

Soit (z, α) un système de coordonnées à poids d'origine z_0 tel que $\text{pd}(r) = \text{pd}(z_n) = \alpha_n$ et $r(z) = 2\text{Re}(z_n) + h(z, \bar{z}) + f$ où

- (a) l'ordre d'annulation de h et f à l'origine est ≥ 2 ;
- (b) h est un polynôme homogène de poids égal à α_n ;
- (c) $\text{pd}(f) > \alpha_n$;

Alors l'hypersurface M^0 définie par l'équation $r^0(z) = 0$ est pseudo-convexe dans un voisinage de l'origine.

Démonstration :

On a $r(z) = r^0(z) + f$ avec $\text{pd}(r^0) = \alpha_n$ et $\text{pd}(f) > \alpha_n$

Soit U un voisinage de z_0 et $p \in U$.

Pour tout champ de vecteur F de $T_p^{1,0}$, $F = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ où

$(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, on écrit $F = \tau_p(F) + \nu_p(F)$

$$\text{où } \nu_p(F) = \frac{\sum_i \xi_i r_i(p)}{\sum_i |r_i(p)|^2} \sum_j r_j(p) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

ainsi $\tau_p(F)$ est un champ de vecteurs holomorphe tangent à l'hypersurface définie par l'équation $r = r(p)$.

La pseudo-convexité de $M = b\Omega$ à l'origine entraîne l'existence de $\varepsilon > 0$, $A > 0$ tels que

$$(1) \quad \sum_{j,k \leq n} r_{j,\bar{k}}(p) (\tau_p(F))_j (\overline{\tau_p(F)})_{\bar{k}} \geq -A|F|^2 |r(p)|$$

dès que $|r(p)| < \varepsilon$ et $p \in U$ avec $|F|^2 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$.

$$\text{En effet : on pose } k(p) = \sum_{j,k \leq n} r_{j,\bar{k}}(p) (\tau_p(F))_j (\overline{\tau_p(F)})_{\bar{k}}.$$

On note par π une projection normale sur la frontière M définie au voisinage de z_0 au moyen d'une carte locale (ε étant choisit assez petit pour que $\{p \in U / |r(p)| < \varepsilon\}$ s'identifie à un produit d'ouverts dans $\mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R}$).

Comme $k(p)$ est C^∞ au voisinage de l'origine, il vient que $k(p) - k(\pi(p)) = O(|F|^2 |p - \pi(p)|) = O(|F|^2 |r(p)|)$ or $k(\pi(p)) \geq 0$ puisque M est pseudo-convexe ; on déduit qu'il existe un voisinage U de z_0 , $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que si $p \in U$, $|r(p)| < \varepsilon$, on a $k(p) \geq -A|r(p)| |F|^2$.

En particulier si $F = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ est un champ de vecteurs tangent à l'hypersurface $r = r(p)$, alors $\sum_{j,k \leq n} r_{j,\bar{k}}(p) \xi_i \bar{\xi}_j \geq -A|F|^2 |r(p)|$ dès que $p \in U$ et $|r(p)| < \varepsilon$.

On vérifie maintenant l'assertion du lemme 7.

Soit P un point de M^0 assez voisin de z_0 que pour (1) s'applique. Pour tout champ de vecteur $F = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ avec $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ on pose $L(P, \xi) = \sum_{j,k \leq n} r_{j,\bar{k}}(P) \xi_i \bar{\xi}_k + A|F|^2 |r(P)|$.

Il s'agit de vérifier que $\sum_{j,k \leq n-1} r_{j,k}^0(P) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0$ pour tout $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Soit $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ assez petit, il existe $\xi_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i} \xi_i \frac{\partial r}{\partial z_i} (\lambda^{\alpha_P}) = 0 \text{ par suite } \frac{L(\lambda^{\alpha_P}, \lambda^{\alpha} \xi)}{\lambda^{\alpha_n}} \geq 0 \text{ d'après la première}$$

partie.

$$\text{Or } \frac{L(\lambda^{\alpha_P}, \lambda^{\alpha} \xi)}{\lambda^{\alpha_n}} = \sum_{j,k \leq n} \frac{r_{j,k}(\lambda^{\alpha_P}) \xi_j \bar{\xi}_k}{\lambda^{\alpha_n - \alpha_j - \alpha_k}} + A|F|^2 \frac{|r(\lambda^{\alpha_P})|}{\lambda^{\alpha_n}}$$

$$\text{où } F = \sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i} \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Comme $\text{pd}(r_{j,k}) \geq \alpha_n - \alpha_j - \alpha_k$, il vient en passant à la limite

quand $\lambda \rightarrow 0$ que $\sum_{j,k \leq n-1} r_{j,k}^0(P) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0$ pour tout $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

c.q.f.d.

Lemme 8. - On suppose $\text{reg } O^1(z_0) = m$. Soit $(z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées locales holomorphes adaptées à r à l'ordre m ; soit V la sous-variété analytique complexe définie par les équations $z_1 = \dots = z_{n-2} = z_n = 0$.

Alors

$$k_0 = \min_{j \leq n-2} \{\text{ordre d'annulation de } r_{n-1,j}(0, \dots, 0, z_{n-1}, 0)\} \geq \frac{m_0 - 2}{2}$$

avec $m_0 = O(z_0, V)$.

Démonstration :

On raisonne par l'absurde : supposons que $k_o < \frac{m_o - 2}{2}$.

On sait que la fonction r de définition de Ω s'écrit sous la forme $r(z) = 2 \operatorname{Re}(z_n) + F + O(|z|^{m+1})$, où F est un polynôme mixte s'annulant à l'origine.

Ainsi $k_o = \min_{j \leq n-2} \{\text{ordre d'annulation de } F_{n-1, \bar{j}}(0, \dots, 0, z_{n-1}, 0)\}$.

On pose $\operatorname{pd}(z_i) = (k_o + 1)$ pour $i = 1, \dots, n-2$

$$\operatorname{pd}(z_{n-1}) = 1$$

$$\operatorname{pd}(z_n) = 2(k_o + 1).$$

Soit $J_o = \{j / \text{ordre d'annulation de } F_{n-1, \bar{j}}(0, \dots, 0, z_{n-1}, 0) = k_o\}$.

La relation supposée entre k_o et $\frac{m_o - 2}{2}$ entraîne que :

$$r^o(z) = 2\operatorname{Re}(z_n) + \sum_{i \leq n-2} \lambda_i |z_i|^2 + \operatorname{Re} \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = k_o \\ j \in J_o}} a_{\beta, j} z_{n-1}^{\beta_1} \bar{z}_{n-1}^{\beta_2} \bar{z}_j.$$

On a $(-1)^j \varphi_j = \det_{j, n-1}(C) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} C_{1, \sigma(1)} \dots C_{j-1, \sigma(j-1)} C_{j+1, \sigma(j)} \dots C_{n-1, \sigma(n-2)}$

où σ décrit les permutations sur $\{1, \dots, n-2\}$;

désignons par σ_o la permutation définie par

$$\begin{aligned} \sigma_o(i) &= i & \text{si } i < j \\ \sigma_o(i) &= i+1 & \text{si } j \leq i \leq n-2 \\ \sigma_o(n-2) &= j \end{aligned}$$

Comme la matrice de Lévi est diagonale à l'origine

et pour tout $i \leq n-2$, on a $(C_{n-1, i})^o = r_{n-1, i}^o$, il vient que

pour tout $\sigma \neq \sigma_o$ on a

$$\operatorname{pd}(C_{1, \sigma(1)} \dots C_{j-1, \sigma(j-1)} C_{j+1, \sigma(j)} \dots C_{n-1, \sigma(n-2)}) > k_o.$$

En revanche $\text{pd}(C_{1,1} \dots \hat{C}_{j,j} \dots C_{n-2,n-2} C_{n-1,j}) = \text{pd}(C_{n-1,j}) = k_0$
pour $j \in J_0$.

Désignons par C^0 la matrice de Lévi associée à r^0 ; on a :
 $\text{pd}(\psi_j) = k_0$ et $\psi_j^0 = (-1)^j \det_{j,n-1}(C^0) = (-1)^{n_{f,j,j}}(z_0) r_{n-1,j}^0$ pour tout
 $j \in J_0$.

Soit $A = \sum_{j \leq n-1} \psi_j L_j$ le champ de vecteurs canonique associé
au système $(z_1, \dots, z_n)$, on pose $A^0 = \psi(z_0) L^0 + \sum_{j \in J_0} \psi_j^0 L_j^0$ avec

$$L_j^0 = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{r_j^0}{r_n^0} \frac{\partial}{\partial z_n} \quad \text{pour } j \leq n-1$$

Ainsi A^0 est un champ de vecteurs non nul, tangent à M^0 ,
homogène de poids -1 , et on a démontré ci-dessus que A^0 est le
champ de vecteurs associé canoniquement à r^0 . Montrons que A^0 est
de type fini.

Soit $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$, désignons par $(L_j^0)^\alpha$ (resp. $(\frac{\partial}{\partial z_j})^\alpha$)
le produit d'opérateurs L_j^0 et $\bar{L}_j^0$ définie par $(L_j^0)^\alpha =$
 $(L_j^0)^{(i_k)} \dots (L_j^0)^{(i_1)}$ (resp. $(\frac{\partial}{\partial z_j})^\alpha = (\frac{\partial}{\partial z_j})^{(i_k)} \dots (\frac{\partial}{\partial z_j})^{(i_1)}$), on a
 $(L^0)^\alpha (C_{n-1,j}^0)(z_0) = (L^0)^\alpha (r_{n-1,j}^0)(z_0) = (\frac{\partial}{\partial z_{n-1}})^\alpha (r_{n-1,j}^0)(z_0)$ pour
tout $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$ avec $k \leq k_0$ d'après le lemme 4 et la définition
de k_0 .

Choisissons $\alpha = (i_1, \dots, i_{2k_0})$ tel que
 $\{\text{card } i_k ; i_k = 0\} = \text{card}\{i_k ; i_k = 1\} = k_0$; on a

$(L^0)^\alpha (C_{n-1,n-1}^0)(z_0) = 0$ car r^0 ne contient pas de monômes en

$$z_{n-1}^{\gamma_1} z_{n-1}^{\gamma_2} \quad \text{avec } (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2.$$

D'autre part, d'après la formule de Leibnitz,

$(L^0)^\alpha (C_{n-1,j}^0 \cdot C_{j,n-1}^0)$ est une somme de produits du type

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_1} (r_{n-1,j}^0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\beta_2} (r_{j,n-1}^0) \quad \text{où } \alpha \text{ est une réunion disjointe}$$

de β_1 et β_2 . On peut se limiter au cas où $\text{card } \beta_1 = \text{card } \beta_2 = k_0$

car sinon l'un des facteurs est nul ; alors on a

$$\gamma_1 = \{i_p \in \beta_1 ; i_p = 0\} = \text{card}\{i_p \in \beta_2 ; i_p = 1\}$$

$$\gamma_2 = \{i_p \in \beta_1 ; i_p = 1\} = \text{card}\{i_p \in \beta_2 ; i_p = 0\}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (L^0)^\alpha (C_{n-1,j}^0 \cdot C_{j,n-1}^0)(z_0) &= \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = k_0} C_{\gamma_1, \gamma_2} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\gamma_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\gamma_2} r_{n-1,j}^0(z_0) \right|^2 \\ &= \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = k_0} C_{\gamma_1, \gamma_2} |a_{\gamma,j}|^2, \end{aligned}$$

où les constantes binomiales C_{γ_1, γ_2} sont strictement positives et

au moins l'un des $a_{\gamma,j}$ est non nul.

Considérons enfin les termes du type

$$\begin{aligned} &(L^0)^{(i_{2k_0})} \dots (L^0)^{(i_{p+1})} (\psi_{j,j}^0 L_j^0)^{(i_p)} (L^0)^{(i_{p-1})} \dots (L^0)^{(i_1)} (C_{n-1,n-1}^0)(z_0) \\ &= (-1)^n f_{j,j}(z_0) (L^0)^{(i_{2k_0})} \dots (L^0)^{(i_{p+1})} (r_{n-1,j}^0)^{(i_p)} (L^0)^{(i_{p-1})} \dots (L^0)^{(i_1)} (r_{n-1,n-1}^0)(z_0). \end{aligned}$$

On constate que le même calcul que celui du terme précédent s'applique à celui-ci et conduit au produit de $(-1)^n$ par une valeur strictement positive.

Comme $I_{2k_0}(z_0) = 0$, on obtient d'après le lemme 5 :

$$(A^0)^{(i_{2k_0})} \dots (A^0)^{(i_1)} (<[A^0, \bar{A}^0], \partial r^0>)(z_0) \neq 0 \text{ puisque } \psi(z_0) > 0$$

et $f_{j,j}(z_0) > 0$ pour tout $j \leq n-2$.

D'après le lemme 2, cette expression ne diffère de

$$(A^0)^{(0,1,i_1,\dots,i_{2k_0})}(r^0)(z_0) \text{ que par une combinaison linéaire de termes}$$

de la forme $(A^0)^\alpha (\det C)(z_0)$ où $(A^0)^\alpha$ est un produit d'opérateurs

$A^0, \bar{A}^0$ de longueur strictement inférieure à $2k_0$; ces termes sont donc nuls. Ainsi le champ de vecteurs A^0 est de type $2k_0+1$, ce qui

entraîne d'après le théorème 1 qu'une estimation sous-elliptique est

vérifiée au voisinage de $z_0 \in M^0$, plus précisément il existe $k \geq 1$

tel que $1 \in I_k^1(z_0)$. Or vu l'expression de r^0 , on déduit que M^0

est analytique réelle et contient la sous-variété analytique complexe

$V = \{z/z_1 = \dots = z_{n-2} = z_n = 0\}$. On obtient ainsi une contradiction

avec le théorème 4 rappelé dans l'introduction.

Lemme 9. - On suppose $\text{reg } 0^1(z_0) = m < +\infty$ et le rang de la forme de Lévi égal $n-2$. Soit $(z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées locales holomorphes d'origine z_0 adaptées à r à l'ordre m .

Soit $F = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j$ un champ de vecteurs holomorphes vérifiant

$c(F, z_0) > m_0$ avec $m_0 = 0(z_0, V)$ alors

$$\mu_0 = \min_{j \leq n-2} \{\text{ordre d'annulation de } \alpha_j(0, \dots, 0, z_{n-1}, 0)\} = \frac{m_0 - 2}{2} \text{ en}$$

particulier m_0 est pair.

Démonstration : On va démontrer le lemme en deux étapes

(1) $\mu_o \leq \frac{m_o-2}{2}$, en effet on raisonne par l'absurde : supposons que

$\mu_o > \frac{m_o-2}{2}$. On sait qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = m_o - 2$ et

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\alpha_2} r_{n-1, n-1}(z_o) \neq 0.$$

On choisit $i_1, \dots, i_{m_o-2} \in \{0, 1\}$ tels que $\text{card}\{i_k ; i_k = 0\} = \alpha_1$
 $\text{card}\{i_k ; i_k = 1\} = \alpha_2$.

On a d'une part $L^{(i_{m_o-2})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1, n-1})(z_o) =$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\right)^{\alpha_2} r_{n-1, n-1}(z_o) \neq 0.$$

D'autre part en utilisant la formule de Leibnitz, les lemmes 4 et 6 et le fait que $k_o \geq \frac{m_o-2}{2}$ (lemme 8), on voit facilement que

$$L^{(i_{m_o-2})} \dots L^{(i_1)} (\text{Re}(\bar{\alpha}_j C_{n-1, j}))(z_o) = 0 \text{ et } L^{(i_{m_o-2})} \dots L^{(i_1)} (\alpha_i \bar{\alpha}_j)(z_o) = 0$$

pour tout $i, j \leq n-2$, de même d'après les lemmes 4 et 6 et le fait que

$$k_o \geq \frac{m_o-2}{2}, \mu_o > \frac{m_o-2}{2} \text{ il vient que pour tout } j \leq n-2,$$

$1 \leq p \leq m_o-2$ on a

$$L^{(i_{m_o-2})} \dots L^{(i_{p+1})} (\alpha_j L_j) L^{(i_p)} \dots L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1, n-1})(z_o) = 0.$$

Enfin, remarquons que $I_{m_o-2}(z_o) = 0$.

En effet soit f un générateur de I_{m_o-2} , trois cas sont possibles :

$$(a) \quad f = L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} (\alpha_i) L^{(j_1)} \dots L^{(j_{n_2})} (\alpha_j L_{n_2+1})$$

d'où $f(z_o) = 0$ car $n_1 + n_2 < m_o - 2 < 2\mu_o$

$$(b) \quad f = L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} L^{(j_1)} \dots L^{(j_{p-1})} L^{(j_p)} L^{(j_{p+1})} \dots L^{(j_{n_2})} (C_{k_1, j_1})$$

avec $0 \leq n_1 + n_2 < m_o - 2$

si $(k_1, j_1) \neq (n-1, n-1)$ alors $k = n-1$ et donc $f(z_o) = 0$

car $n_1 + n_2 < m_o - 2 < k_o + \mu_o$

si $(k_1, j_1) = (n-1, n-1)$

. ou bien $k = n-1$ d'où $L^{(j_1)} \dots L^{(j_{n_2})} (C_{n-1, n-1})(z_o) = 0$ car $n_2 < m_o - 2$

. ou bien $k \leq n-2$ et dans ce cas $f(z_o) = 0$ d'après les lemmes 4 et 6 et le fait que $n_1 + n_2 < m_o - 2 < k_o + \mu_o$.

$$(c) \quad f = L^{(i_1)} \dots L^{(i_{n_1})} (C_{n-1, n-1}) \text{ avec } n_1 < m_o - 2$$

et donc $f(z_o) = 0$ d'après le lemme 4 et la définition de m_o .

Ainsi, en appliquant le lemme 5, on a

$F^{(i_{m_o-2})} \dots F^{(i_1)} (<[F, \bar{F}], \partial r>)(z_o) \neq 0$ ce qui est absurde puisqu'on a par hypothèse $c(F, z_o) > m_o$.

(2) $\mu_o \geq \frac{m_o - 2}{2}$, on raisonne toujours par l'absurde : supposons

$2\mu_o < m_o - 2$. On choisit $i_1, \dots, i_{2\mu_o} \in \{0, 1\}$ tels que

$$\begin{aligned} \text{card}\{i_k ; i_k = 0\} &= \text{card}\{i_k ; i_k = 1\} \\ &= \mu_o \end{aligned}$$

On a d'une part $L^{(i_{2\mu_o})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1, n-1})(z_o) = 0$ d'après le lemme 4 et l'inégalité $2\mu_o < m_o - 2$.

D'autre part, en utilisant la formule de Leibnitz, les lemmes 4 et 6 et le fait que $k_o \geq \frac{m_o - 2}{2} > \mu_o$ il vient facilement que

$$L^{(i_{2\mu_o})} \dots L^{(i_1)} (Re(C_{n-1,j} \bar{\alpha}_j))(z_o) = 0 \text{ pour tout } j \leq n-2$$

$$\text{et } L^{(i_{2\mu_o})} \dots L^{(i_{p+1})} (\alpha_{j,L_j})^{(i_p)} L^{(i_{p-1})} \dots L^{(i_1)} (C_{n-1,n-1})(z_o) = 0$$

pour tout $j \leq n-1$, $1 \leq p \leq 2\mu_o$.

Maintenant vu la formule du lemme 5, il reste à considérer les termes du type

$$\alpha^{(i_{2\mu_o})} \dots \alpha^{(i_1)} C_{i,j} L^{(i_{2\mu_o})} \dots L^{(i_1)} (\alpha_i \bar{\alpha}_j)$$

comme $C_{i,j}(z_o) = 0$ si $i \neq j$, on s'intéresse uniquement au cas $i = j$ d'après la formule de Leibnitz on a pour tout $j \leq n-2$

$$L^{(i_{2\mu_o})} \dots L^{(i_1)} (\alpha_j \bar{\alpha}_j) \text{ est une somme de produits de la forme } L^{(j_1)} \dots L^{(j_{k_1})} (\alpha_j) L^{(j'_1)} \dots L^{(j'_{k_2})} (\bar{\alpha}_j) \text{ avec } k_1 + k_2 = 2\mu_o$$

et $J = \{j_1, \dots, j_{k_1}\}$ décrit tous les ensembles ordonnés de $\{i_1, \dots, i_{2\mu_o}\}$.

On peut se limiter au cas $k_1 = k_2 = \mu_o$ car sinon l'un des facteurs est nul si l'on se reporte à l'expression donnée au lemme 6 et en utilisant le fait que $2\mu_o < m_o - 2$.

Dans ce cas, on remarque que

$$\beta_1 = \text{card}\{j_p ; j_p = 0\} = \text{card}\{j'_p ; j'_p = 1\}$$

$$\beta_2 = \text{card}\{j_p ; j_p = 1\} = \text{card}\{j'_p ; j'_p = 0\}.$$

On déduit que

$$L^{(j_1)} \dots L^{(j_{\mu_0})} (\alpha_j) L^{(j'_1)} \dots L^{(j'_{\mu_0})} (\bar{\alpha}_j)(z_0) = \left| \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (\alpha_j) \right|^2.$$

Ainsi d'après le lemme 5 et le fait que $C_{j,j}(z_0) > 0$

$\forall j \leq n-2$ et $I_{2\mu_0}(z_0) = 0$, on obtient

$$F^{(i_{2\mu_0})} \dots F^{(i_1)} (<[F, \bar{F}], \partial r>)(z_0) = \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \mu_0 \\ j \leq n-2}} C_{\beta,j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (\alpha_j)(z_0) \right|^2$$

où les $C_{\beta,j}$ sont des constantes strictement positives.

Or, de par la définition de μ_0 , il existe $j_0 \leq n-2$

et $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ tels que $\beta_1 + \beta_2 = \mu_0$ et

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}} \right)^{\beta_2} (\alpha_{j_0}) \neq 0 \text{ ainsi on a } F^{(i_{2\mu_0})} \dots F^{(i_1)} (<[F, \bar{F}], \partial r>)(z_0) \neq 0.$$

On conclut que $c(F, z_0) \leq 2(\mu_0 + 1) \leq m_0$ ce qui est absurde.

c.q.f.d.

Démonstration du théorème 4 :

Si M est strictement pseudo-convexe alors la matrice de Lévi

à $n-1$ valeurs propres non nulles à l'origine ; d'après la proposition 1

rappelée dans l'introduction on a $\text{reg } 0^1(z_0) = 2$, d'autre part, on

vérifie facilement dans ce cas que $c^1(M, z_0) = 2$.

Par suite l'égalité $\text{reg } 0^1(z_0) = c^1(M, z_0)$ est vérifiée.

Il reste donc à considérer le cas où la forme de Lévi est de rang $n-2$.

On sait d'après ([3] c, lemme 2.19.) que $\text{reg } 0^1(z_0) \leq c^1(M, z_0)$.

Il suffit de montrer l'inégalité inverse.

On raisonne par l'absurde : supposons que $\text{reg } 0^1(z_0) = m < c^1(M, z_0)$. Soit $(S_1) = (z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées locales holomorphes d'origine z_0 adaptées à r à l'ordre m ; soit $F_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j$ un champ de vecteurs holomorphes non nul à l'origine tel que $c(F_1, z_0) \geq m_0$ avec $m_0 = 0(z_0, V)$ où V est la sous-variété analytique complexe définie par les équations $z_1 = \dots = z_{n-2} = z_n = 0$.

Soient $k_0 = \min_{j \leq n-2} \{\text{ordre d'annulation de } r_{n-1, j}(0, \dots, 0, z_{n-1}, 0)\}$
 $\mu_0 = \min_{j \leq n-2} \{\text{ordre d'annulation de } \alpha_j(0, \dots, 0, z_{n-1}, 0)\}.$

On sait d'après les lemmes 8 et 9 ci-dessus que $k_0 \geq \frac{m_0 - 2}{2}$
 et $\mu_0 = \frac{m_0 - 2}{2}.$

On pose $\text{pd}(z_i) = \frac{m_0}{2}$ pour $i = 1, \dots, n-2$
 $\text{pd}(z_{n-1}) = 1$
 $\text{pd}(z_n) = m_0,$
 ainsi on a $\text{pd}(r) = m_0,$ $\text{pd}(\alpha_j) \geq \frac{m_0 - 2}{2}$ pour tout $j \leq n-2,$
 et $r^0(z) = 2\text{Re}(z_n) + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i |z_i|^2 + \text{Re} \left(\sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \mu_0 \\ i \leq n-2}} a_{\beta, i} z_{n-1}^{\beta_1+1} \bar{z}_{n-1}^{\beta_2} \bar{z}_i + \right.$

$$\left. \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m_0} a_{\alpha} z_{n-1}^{\alpha_1} \bar{z}_{n-1}^{\alpha_2} \right).$$

$$\text{Posons } F_1^0 = \alpha(z_0) L^0 + \sum_{j \in J_0} \alpha_j^0 L_j^0$$

$$\text{avec } L_j^0 = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{r_j^0}{r_n^0} \frac{\partial}{\partial z_n} \quad \text{pour tout } j \leq n-1$$

et $J_0 = \{j \leq n-2, \text{pd}(\alpha_j) = \frac{m_0-2}{2}\}$.

On remarque que $\alpha(z_0) \neq 0$: en effet, comme $\langle [F_1, \bar{F}_1], \partial r \rangle(z_0) = 0$, on constate en se reportant au développement du membre de gauche calculé au début de la démonstration du lemme 5 que $\alpha_i(z_0) = 0$ pour tout $i \leq n-2$; mais puisque $F_1(z_0) \neq 0$, on a nécessairement $\alpha(z_0) \neq 0$.

Ainsi le champ de vecteurs F_1^0 est non nul à l'origine, homogène de poids -1 , puisque $\text{pd}(L_j^0)$ vaut $-\frac{m_0}{2}$ ou -1 suivant que $j \leq n-2$ ou $j = n-1$, de plus F_1^0 est tangent à l'hypersurface réelle $M^0 = \{z/r^0(z) = 0\}$ qui est pseudo-convexe d'après le lemme 7.

Montrons que $c(F_1^0, z_0) = +\infty$.

En effet, comme r^0 est algébrique et de poids m_0 , on a

. ou bien $\langle [F_1^0, \bar{F}_1^0], \partial r^0 \rangle \equiv 0$ ce qui entraîne que $c(F_1^0, z_0) = +\infty$

. ou bien $\langle [F_1^0, \bar{F}_1^0], \partial r^0 \rangle$ est homogène de poids m_0-2

Dans ce cas on vérifie facilement que $\langle [F_1, \bar{F}_1], \partial r \rangle^0 = \langle [\bar{F}_1^0, \bar{F}_1^0], \partial r^0 \rangle$

ce qui entraîne que $(F_1)^{(i_1)} \dots (F_1)^{(i_p)} (\langle [F_1, \bar{F}_1], \partial r \rangle)(z_0)$

$$= (F_1^0)^{(i_1)} \dots (F_1^0)^{(i_p)} (\langle [\bar{F}_1^0, \bar{F}_1^0], \partial r^0 \rangle)(z_0)$$

$$= 0$$

pour tout $i_1, \dots, i_p \in \{0, 1\}$ tels que $p \leq m_0-2$ car $c(F_1, z_0) > m_0$

et pour tout $p > m_0-2$ car r^0 est algébrique de poids m_0 ;

ainsi $c(F_1^0; z_0) = +\infty$.

Maintenant, on désigne par $\mathfrak{m}$ le module (sur l'anneau des fonctions analytiques réelles à valeurs complexes) engendré par F_1^0 et $\bar{F}_1^0$ et leurs commutateurs de tout ordre. On a $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{m}}$, ce qui entraîne que $\text{Re}(\mathfrak{m}) = \{\text{Re}(D)/D \in \mathfrak{m}\}$ est aussi une algèbre de Lie.

Ainsi d'après un théorème de Nagano [11], il existe une unique sous-variété analytique réelle de M notée Z_1 passant par z_0 telle que pour tout q assez voisin de z_0 on a

$$T(Z_1, q) = \{ \operatorname{Re}(D)(q) / D \in \mathcal{M} \}$$

et $\mathbb{C}T(Z_1, q) \simeq \{ D(q) / D \in \mathcal{M} \}.$

On déduit que $\dim_{\mathbb{R}} Z_1 = \dim_{\mathbb{R}} \{ \operatorname{Re}(D(z_0)) / D \in \mathcal{M} \} = \dim_{\mathbb{C}} \{ D(z_0) / D \in \mathcal{M} \}.$
Montrons que Z_1 est en fait une sous-variété analytique complexe de dimension 1, vérifiant $O(z_0, Z_1) > m_0.$

En effet, comme $c(F_1^0, z_0) = +\infty$, on a pour tout $i_1, \dots, i_p \in \{0, 1\}, \quad p \geq 0$

$$(F_1^0)^{(i_1)} \dots (F_1^0)^{(i_p)} \langle [F_1^0, \bar{F}_1^0], \partial r^0 \rangle (z_0) = 0$$

ce qui implique que $\langle [F_1^0, \bar{F}_1^0], \partial r^0 \rangle \equiv 0$ sur Z_1 et par suite $\operatorname{Re}(F_1^0), \operatorname{Im}(F_1^0) \in T^N(Z_1).$

D'autre part, on remarque que $\operatorname{Re}(\mathcal{M})$ n'est autre que le module (sur l'anneau des fonctions analytiques réelles à valeurs réelles) engendré par $\operatorname{Re}(F_1^0), \operatorname{Im}(F_1^0)$ et leurs crochets de Lie de tout ordre. Maintenant comme $\operatorname{Re}(F_1^0), \operatorname{Im}(F_1^0) \in T^N(Z_1)$ et M^0 est pseudo-convexe on a d'après ([6], proposition 2) $\operatorname{Re}(\mathcal{M}) \subset T^N(Z_1).$

$$\text{Or } T^N(Z_1, z_0) \subset \{ D \in T^h(M^0, z_0) / L_{M^0}(D, z_0) = 0 \},$$

et $\{ D \in T^h(M^0, z_0) / L_{M^0}(D, z_0) = 0 \}$ est de dimension réelle égale à 2 puisque la forme de Lévi est exactement de rang $n-2$. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Re}, \mathcal{M})$ est déjà au plus deux ; mais $\operatorname{Re} F_1^0(z_0)$ et $\operatorname{Im} F_1^0(z_0)$ sont indépendants car $F_1^0(z_0)$ est un champ de vecteurs holomorphe non nul. La variété analytique Z_1 est donc de dimension réelle égale à deux dans un voisinage de z_0 .

Ainsi $\{D(q)/D \in \mathfrak{m}\}$ est nécessairement engendré par $F_1^0, \bar{F}_1^0$ lorsque $q \in Z_1$ dans un voisinage de z_0 , ce qui implique que $\mathbb{C}T(Z_1)$ est intégrable ; en effet, on a $\mathbb{C}T(Z_1) = [F_1^0] \oplus [\bar{F}_1^0]$ où $[F_1^0], [\bar{F}_1^0]$ sont les sous-espaces engendrés par F_1^0 et $\bar{F}_1^0$ respectivement. Notons par $\pi_{1,0}$ et $\pi_{0,1}$ les projections de $\mathbb{C}T(Z_1)$ sur les sous-espaces $[F_1^0], [\bar{F}_1^0]$ respectivement et définissons sur $\mathbb{C}T(Z_1)$ l'application bilinéaire suivante :

$$T(X,Y) = \pi_{1,0}[\pi_{0,1} X, \pi_{0,1} Y] + \pi_{0,1}[\pi_{1,0} X, \pi_{1,0} Y]$$

vérifions que $T \equiv 0$

Soient $X, Y \in \mathbb{C}T(Z_1)$ on a $X = \alpha_X F_1^0 + \beta_X \bar{F}_1^0$, $Y = \alpha_Y F_1^0 + \beta_Y \bar{F}_1^0$

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \pi_{1,0}[\beta_X \bar{F}_1^0, \beta_Y \bar{F}_1^0] + \pi_{0,1}[\alpha_X F_1^0, \alpha_Y F_1^0] \\ &= \pi_{1,0}((\beta_X \bar{F}_1^0(\beta_Y) - \beta_Y \bar{F}_1^0(\beta_X))\bar{F}_1^0 + \beta_X \beta_Y [\bar{F}_1^0, \bar{F}_1^0]) \\ &\quad + \pi_{0,1}((\alpha_X F_1^0(\alpha_Y) - \alpha_Y F_1^0(\alpha_X))F_1^0 + \alpha_X \alpha_Y [F_1^0, F_1^0]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite, $\mathbb{C}T(Z_1)$ est intégrable et Z_1 est une sous-variété analytique complexe d'après le théorème de Newlander-Nirenberg ;

de plus, Z_1 est de dimension complexe égal à 1.

Il reste à vérifier que $0(z_0, Z_1) > m_0$.

Soit $(w_1, \dots, w_n)$ un système de coordonnées locales holomorphes d'origine z_0 tel que $Z_1 = \{w/w_1 = \dots = w_{n-2}/w_{n-1} = 0\}$. On a $r^0(z) = 2\operatorname{Re}(z_n) + h(z, \bar{z})$ où $h(z, \bar{z})$ est un polynôme mixte homogène de poids m_0 .

Comme $r^0/Z_1 \equiv 0$, il vient que $2\operatorname{Re}(z_n(w_{n-1})) = -h(w_{n-1}, \bar{w}_{n-1})$

$$\text{d'où } \frac{\partial^\alpha z_n}{\partial w_{n-1}^\alpha}(z_0) = -\frac{\partial^\alpha h}{\partial w_{n-1}^\alpha}(z_0) = 0 \text{ pour tout } \alpha \geq 0,$$

ainsi on a $z_n/Z_1 \equiv 0$, en particulier $\frac{\partial z_n}{\partial w_{n-1}}(z_0) = 0$.

On déduit qu'il existe $i \in \{1, \dots, n-2, n\}$ tel que $\frac{\partial z_n}{\partial w_i} (z_0) \neq 0$.

En changeant le numérotage des coordonnées, on peut supposer $\frac{\partial z_n}{\partial w_n} (z_0) \neq 0$,
par suite $(w_1, \dots, w_{n-1}, z_n)$ forme bien un système de coordonnées locales
holomorphes d'origine z_0 , tel que la sous-variété Z_1 peut être
définie par les équations $w_1 = \dots = w_{n-2} = z_n = 0$.

Maintenant montrons par récurrence que $\frac{\partial^\alpha z_i}{\partial w_{n-1}^\alpha} (z_0) = 0$

pour $\alpha < \frac{m_0}{2}$, $i \leq n-2$; en effet, pour $\alpha = 1$, on a

$r^0(z) = 2\text{Re}(z_n) + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i |z_i|^2 + h_1(z, \bar{z})$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ sont les
valeurs propres non nulles de la forme de Lévi à l'origine.

Ainsi $\lambda_i > 0$, pour $i = 1, \dots, n-2$

et $h_1(z, \bar{z}) = \text{Re} \left(\sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = m_0 \\ i \leq n-2}} a_{\beta, i} z_{n-1}^{\beta_1+1} \bar{z}_{n-1}^{\beta_2} \bar{z}_i + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m_0} a_{\alpha} z_{n-1}^{\alpha_1} \bar{z}_{n-1}^{\alpha_2} \right)$

comme $m_0 > 2$ il vient que $\frac{\partial^2}{\partial w_{n-1} \partial \bar{w}_{n-1}} h_1(z_0) = 0$

or $\frac{\partial^2 r^0}{\partial w_{n-1} \partial \bar{w}_{n-1}} (z_0) = 0$ car $r^0/Z_1 \equiv 0$.

On déduit que $\frac{\partial z_i}{\partial w_{n-1}} (z_0) = 0$ pour tout $i \leq n-2$.

Maintenant, on suppose que $\frac{\partial^\alpha z_i}{\partial w_{n-1}^\alpha} (z_0) = 0$ pour $\alpha = 1, \dots, \alpha_0$

et $i = 1, \dots, n-2$, où $\alpha_0 < \frac{m_0}{2} - 1$ et montrons que $\frac{\partial^{\alpha_0+1} z_i}{\partial w_{n-1}^{\alpha_0+1}} (z_0) = 0$.

En effet, on a d'une part $(\frac{\partial}{\partial w_{n-1}})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial \bar{w}_{n-1}})^{\alpha_2} (r^0)(z_0) = 0$

pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ puisque $r^0/Z_1 \equiv 0$.

D'autre part $(\frac{\partial}{\partial w_{n-1}})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial \bar{w}_{n-1}})^{\alpha_2} (h_1)(z_0) = 0$ pour

$\alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{m_0}{2} + \alpha_0$ d'après l'hypothèse de récurrence et du fait que

$\alpha_0 < \frac{m_0}{2} - 1$; en particulier $(\frac{\partial}{\partial w_{n-1}})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial \bar{w}_{n-1}})^{\alpha_2} (h_1)(z_0) = 0$

pour $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2(\alpha_0 + 1)$.

On déduit que $\frac{\partial^{\alpha_0+1} z_i}{\partial w_{n-1}^{\alpha_0+1}} (z_0) = 0$ pour $i = 1, \dots, n-2$.

Ainsi, on a $\frac{\partial^\alpha z_i}{\partial w_{n-1}^\alpha} (z_0) = 0$ pour $i = 1, \dots, n-2$ et

$\alpha = 1, \dots, \frac{m_0}{2} - 1$.

On conclut en remarquant que $r(z) = r^0(z) + f$, avec $\text{pd}(f) > m_0$. Par suite, on a nécessairement $f/Z_1 = O(|w_{n-1}|^{m_0+1})$ ce qui entraîne que $r/Z_1 = O(|w_{n-1}|^{m_0+1})$ c'est-à-dire que $O(z_0, Z_1) > m_0$.

Ainsi le système $(\tilde{S}_2) = (w_1, \dots, w_{n-1}, z_n)$ est un système de coordonnées locales holomorphes, d'origine z_0 , pour lequel la sous-variété Z_1 vérifie $O(z_0, Z_1) > O(z_0, V)$.

Ce système $(\tilde{S}_2)$ n'est pas nécessairement adaptés à r à l'ordre m puisque la forme de Lévi associée n'est pas nécessairement diagonale à l'origine.

On remarque que $\frac{\partial^2 r}{\partial w_{n-1} \partial \bar{w}_i} (z_0) = 0$, $\forall i = 1, \dots, n-1$

car $\frac{\partial^\alpha z_i}{\partial w_{n-1}^\alpha} (z_0) = 0$ pour tout $i \leq n-2$ et $\alpha < \frac{m_0}{2}$.

Ainsi la matrice $\left(\frac{\partial^2 r}{\partial w_i \partial \bar{w}_j} \right)_{i,j=1}^{n-2}$ est de rang $n-2$, il existe

donc une matrice unitaire $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n-2}$ vérifiant

$$(a_{i,j}) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial w_i \partial \bar{w}_j} \right) (\bar{a}_{j,i}) = (\lambda_{i,j} \delta_{i,j}), \quad i,j \leq n-2, \quad \text{avec } \delta_{i,j} \text{ symbole}$$

de Kröneckner et $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{n-2,n-2}$ sont les valeurs propres non nulles de la forme de Lévi à l'origine.

$$\text{On pose alors : } \xi_i = \sum_{j=1}^{n-2} a_{i,j} w_j, \quad i = 1, \dots, n-2$$

$$\xi_{n-1} = w_{n-1},$$

$$\xi_n = z_n.$$

Ainsi le système $(S_2) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est adapté à r à l'ordre m ; en effet, on a $r(\xi) = 2\text{Re}(\xi_n) + F + O(|\xi|^{m+1})$ où $F(\xi, \bar{\xi})$ est un polynôme mixte s'annulant à l'origine, et la forme de Lévi est diagonale à l'origine.

De plus la sous-variété Z_1 peut être définie relativement au système (S_2) par les équations $\xi_1 = \dots = \xi_{n-2} = \xi_n = 0$.

Maintenant comme $c^1(M, z_0) > m$, il existe un champ de vecteur F_2 tel que $c(F_2, z_0) > 0(z_0, Z_1)$; en suivant un raisonnement analogue à celui utilisé ci-dessus pour obtenir la sous-variété Z_1 ; on déduit qu'il existe une sous-variété analytique complexe Z_2 de dimension 1 vérifiant $0(z_0, Z_2) > 0(z_0, Z_1)$.

On construit ainsi une suite de sous-variétés analytiques complexes de dimension 1 dont les ordres de contacts sont strictement croissants, ce qui est absurde.

c.q.f.d.

Remarque : L'hypothèse ($n-2$ valeurs propres non nulles à l'origine) qui figure dans le théorème 3 est essentielle.

En effet, considérons dans $\mathbb{C}^3$ le domaine Ω pseudo-convexe défini par

$$r(z) = 2\operatorname{Re}(z_3) + |z_1^2 - z_2^3|^2 + \exp\left[-(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)^{-1}\right]$$

on a $\operatorname{reg} 0^1(0) = 6$

Mais $0^1(0) = +\infty$ car l'ensemble analytique défini par $z_3 = 0$, $z_1^2 = z_2^3$ a un ordre de contact infini avec la frontière de Ω ; par conséquent aucune estimation sous-elliptique n'est vérifiée à l'origine pour les $(0,1)$ formes différentielles d'après le théorème de David Catlin [5].



Corollaire 1. - On suppose que le rang de la forme de Lévi est $\geq n-2$ en z_0 . Alors une estimation sous-elliptique pour les $(0,1)$ formes différentielles est vérifiée en z_0 si et seulement si il existe un entier $k \geq 1$ tel que $1 \in I_k^1(z_0)$.

Démonstration :

Supposons qu'une estimation sous-elliptique est vérifiée en z_0 pour les $(0,1)$ formes différentielles, alors $c^1(M, z_0) < +\infty$ d'après les théorèmes 3 et 4 ; en particulier, le champ de vecteurs A est de type fini, ce qui implique d'après le théorème 1 l'existence d'un entier $k \geq 1$ tel que $1 \in I_k^1(z_0)$.

L'implication dans l'autre sens est évidente. ■

• Il a été noté à l'aide d'un exemple cité au chapitre I que l'inégalité $\text{reg } O^1(z_0) \leq O^1(z_0)$ est stricte en général.

J. D'Angelo a montré dans [7] que si $\text{reg } O^1(z_0) \leq 4$ alors $O^1(z_0) = \text{reg } O^1(z_0)$.

Ce résultat se généralise dans le cas où la forme de Lévi est de rang $\geq n-2$ par le corollaire suivant.

Corollaire 2. - On suppose que le rang de la forme de Lévi est $\geq n-2$ en z_0 . Alors, on a $O^1(z_0) < +\infty \iff \text{reg } O^1(z_0) < +\infty$.

Démonstration :

L'implication $O^1(z_0) < +\infty \implies \text{reg } O^1(z_0) < +\infty$ est évidente.

Supposons que $\text{reg } O^1(z_0) < +\infty$. Alors une estimation sous-elliptique est vérifiée en z_0 pour les $(0,1)$ formes différentielles d'après le théorème 3 et par suite $O^1(z_0) < +\infty$ d'après le théorème de David Catlin [5]. ■

APPENDICE

INTEGRATION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS ANALYTIQUES
AVEC SINGULARITÉS

1. Introduction.

Soit D un module (sur l'espace des fonctions analytiques réelles) de champ de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^n$.

En tout point $y \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $D(y) = \{X(y) : X \in D\}$ est un sous-espace de l'espace tangent à $\mathbb{R}^n$ au point y .

Soit M une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^n$; on dit que M est une sous-variété intégrale de D si :

$$(1.1.) \quad T_y M = D(y), \quad \forall y \in M$$

où $T_y M$ désigne l'espace tangent à M en y .

Nagano a montré que si D est une algèbre de Lie alors il existe une sous-variété intégrale passant par un point donné p de $\mathbb{R}^n$.

Ce résultat généralise dans le cas analytique réel le théorème classique de Frobenius qui suppose en plus que la dimension de $D(y)$ est constante ; la suite en propose une démonstration d'après M. Freeman [11].

2. Théorème d'intégration.

Dans tout ce qui suit p est un point fixe de $\mathbb{R}^n$. $C^{(\omega)}$ désigne l'anneau des germes au point p des fonctions analytiques réelles. On prendra comme origine ce point p .

$\mathbb{TR}^n$ est le $C^{(\omega)}$ -module des champs de vecteurs analytiques réels dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Soit M une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, on note par I_M l'idéal de $C^{(\omega)}$ des fonctions analytiques réelles s'annulant sur l'intersection de M avec un voisinage de l'origine.

On vérifie facilement que $M \supset N$ si et seulement si $I_M \subset I_N$.
Soit I un idéal dans C^ω ; on désigne par $V(I)$ l'ensemble analytique défini par $\{y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) = 0, \forall f \in I\}$.

On note par $(f_{\ell+1}, \dots, f_n)$ l'idéal engendré par les fonctions $f_{\ell+1}, \dots, f_n$. Si ces fonctions sont indépendantes au point p (dans le sens où leur jacobien n'est pas nul au point p) alors elles définissent une sous-variété analytique réelle notée $V(f_{\ell+1}, \dots, f_n)$ et on a :

$$(2.1.) \quad M = V(f_{\ell+1}, \dots, f_n) \iff I_M = (f_{\ell+1}, \dots, f_n) .$$

La dimension de M est alors ℓ .

On dit qu'un champ de vecteur X est tangent à M si $X(y) \in T_y M$, $\forall y \in M$.

On vérifie que cette définition est équivalente à $X(f_j) \in I_M$ pour $j = \ell+1, \dots, n$; il en résulte que :

$$(2.2.) \quad X \text{ est tangent à } M \text{ si et seulement si } I_M \text{ contient } X(I_M).$$

Comme C^ω est Noetherien, D est de type fini, en tant que C^ω -module.

Soient $(X_1, \dots, X_k)$ un système de générateurs de D sur C^ω .

Pour tout k -indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ $\alpha_i \geq 0$, on pose :

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k}, \quad X^0(f) = f.$$

Dans l'expression de X^α les X_j sont toujours considérés de manière ordonnée. Si M est une sous-variété intégrale de D , (1.1.) et (2.2.) entraînent que $D(I_M) \subset I_M$; on déduit que I_M est contenu dans :

$$(2.3.) \quad I_D = \{g \in C^\omega : X^\alpha(g)(0) = 0 \text{ pour tout } \alpha\}$$

I_D est un idéal de C^ω et si D est une algèbre de Lie, le lemme 2.3. ci-dessous montrent que I_D est indépendant du choix du système de générateurs de D .

Théorème de Nagano. - On suppose que D est une algèbre de Lie. Alors $V(I_D)$ est l'unique germe de sous-variété intégrale de D passant par l'origine.

Démonstration :

Pour montrer que $V(I_D)$ est une sous-variété, il suffit qu'il existe un système de fonctions indépendantes $\{f_{\ell+1}, \dots, f_n\}$ tel que $I_D = (f_{\ell+1}, \dots, f_n)$ et si $V(I_D)$ est une sous-variété intégrale de D , on a nécessairement $\ell = \dim D(0)$.

On va montrer dans un premier temps qu'un tel système de fonctions existe et, ensuite, que $V(I_D)$ est bien une sous-variété intégrale de D .

$$\text{On a } X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad i = 1, \dots, k$$

où les b_{ij} sont des fonctions analytiques réelles et la matrice (b_{ij}) est de rang $= \ell = \dim D(0)$, à l'origine.

En changeant le numérotage des indices, on peut supposer que la matrice $(b_{ij})_{i,j=1}^\ell$ est non singulière à l'origine, et que $\{X_1(0), \dots, X_\ell(0)\}$ forment une base de $D(0)$.

De plus, on peut supposer que les générateurs $X_1, \dots, X_k$ de D sont de la forme :

$$(2.4.) \quad \left| \begin{array}{ll} X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=\ell+1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} & i = 1, \dots, \ell \\ X_i = \sum_{j=\ell+1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} & i = \ell+1, \dots, k \end{array} \right.$$

avec $a_{ij}(0) = 0$ pour $i, j > \ell$.

En effet, soit $(b_{ij}^{-1})_{i,j=1}^{\ell}$ la matrice inverse de $(b_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$,
on pose $y_i = \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij}^{-1} X_j$ $i = 1, \dots, \ell$

ce qui entraîne que $y_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=\ell+1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $i = 1, \dots, \ell$

où les a_{ij} sont des fonctions analytiques réelles au voisinage de l'origine ; maintenant, soit $i > \ell$

$$\begin{aligned} \text{on a } X_i &= \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij} (Y_j - \sum_{s=\ell+1}^n a_{js} \frac{\partial}{\partial x_s}) + \sum_{s=\ell+1}^n b_{is} \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij} Y_j + \sum_{s=\ell+1}^n (b_{is} - \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij} a_{js}) \frac{\partial}{\partial x_s} . \end{aligned}$$

$$\text{On pose } Y_i = \sum_{s=\ell+1}^n (b_{is} - \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij} a_{js}) \frac{\partial}{\partial x_s} = \sum_{s=\ell+1}^n a_{is} \frac{\partial}{\partial x_s} .$$

Les champs de vecteurs $Y_1, \dots, Y_k$ forment bien un système de générateurs de D ; ils sont de la forme annoncée en (2.4.) et comme $\dim D(0) = \ell$, on a nécessairement $a_{ij}(0) = 0$ pour $i, j > \ell$.

Vue l'expression (2.4.) des champs de vecteurs X_i engendrant le module D , il paraît naturel de chercher les fonctions $f_{\ell+1}, \dots, f_n$ sous la forme :

$$(2.5.) \quad f_i = x_i - g_i(x_1, \dots, x_\ell) \quad i = \ell+1, \dots, n$$

où chaque fonction g_i est analytique réelle.

Soit g une fonction analytique réelle dépendant uniquement des coordonnées $x_1, \dots, x_\ell$, elle s'écrit sous la forme $g = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ où le prime signifie que la sommation porte seulement sur les multi-indices α tels que $\alpha_{\ell+1} = \dots = \alpha_k = 0$.

D'après (2.4.), on a $X_i(g) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$, pour $i \leq \ell$ et donc :

$$(2.6.) \quad X^{\alpha}(g)(0) = \frac{\partial^{\alpha} g}{\partial x^{\alpha}}(0) = a_{\alpha} \alpha! \quad \text{si} \quad \alpha_{\ell+1} = \dots = \alpha_k = 0.$$

Ainsi pour que la formule (2.5.) définisse des fonctions f_i appartenant à I_D , il est nécessaire de poser :

$$(2.7.) \quad g_i = \sum_{\alpha} (\alpha!)^{-1} X^{\alpha}(x_i)(0) x^{\alpha}.$$

Lemme 2.2.- La série (2.7.) converge dans un voisinage de l'origine.

Ce lemme sera démontré plus tard ; il s'agit de montrer que $I_D = (f_{\ell+1}, \dots, f_n)$ où les fonctions f sont associées par (2.5.) aux fonctions g de (2.7.).

Vérifions d'abord que les fonctions f sont dans I_D . On s'appuie sur le lemme suivant qui sera démontré plus loin.

Lemme 2.3. - Lorsque D est une algèbre de Lie, alors pour tout multi-indices α et β on a :

$$X^\alpha X^\beta - X^{\alpha+\beta} = \text{polynôme en } X \text{ de degré } < |\alpha+\beta|, \text{ à coefficients dans } C^\omega.$$

Il s'agit donc de vérifier par récurrence sur la longueur $|\gamma|$ du multi-indice γ que :

$$(2.8.) \quad X^\gamma(f_j)(0) = 0, \text{ pour } j = \ell+1, \dots, n.$$

On notera $\gamma \pm j$ le multi-indice γ augmenté de ± 1 à la $j^{\text{ième}}$ place.

Lorsque $|\gamma| = 1$, la relation (2.8.) est vérifiée d'après (2.4.), (2.5.) et (2.7.).

Soit maintenant $m > 1$ et supposons (2.8.) vérifiée pour tout $|\gamma| < m$.

Soit $|\gamma| = m$, si $\gamma_{\ell+1} = \dots = \gamma_n = 0$ (2.8.) est vérifiée d'après (2.4.), (2.5.), (2.7.).

Sinon, on pose $\gamma = \beta + i$ ou $i > \ell$ et on applique le lemme 2.3. ainsi $X^\gamma = X_i X^\beta + (\text{polynôme de degré } < m)$ et par suite (2.8.) est vérifié d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que $X_i(f)(0) = 0$ pour tout f et $i > \ell$. Ainsi a-t-on $(f_{\ell+1}, \dots, f_n) \subset I_D$.

Il reste à montrer l'inclusion inverse, on va utiliser le théorème suivant :

Théorème de division de Weierstrass. -

On désigne par $k\{x_1, \dots, x_i\}$ l'anneau des germes à l'origine des fonctions analytiques réelles par rapport aux variables $x_1, \dots, x_i$. Soit $f \in k\{x_1, \dots, x_n\}$, on suppose que $g(x_n) = f(0, \dots, 0, x_n) \in k\{x_n\}$.

n'est pas identiquement nulle.

On a $g(x_n) = x_n^p h(x_n)$ où $p \geq 0$ et $h(0) \neq 0$.

Alors, pour tout $\psi \in k\{x_1, \dots, x_n\}$, il existe $a \in k\{x_1, \dots, x_n\}$ et $b_1, \dots, b_p$ dans $k\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ tels que

$$\psi = a.b + \sum_{v=1}^p b_v x_n^{p-v}$$

de plus a et b_v sont uniquement déterminés.

Soit $f \in I_D$, en appliquant le théorème ci-dessus, il vient que $f = a_{l+1} f_{l+1} + r_{l+1}$ où r_{l+1} est un polynôme en x_{l+1} de degré strictement inférieur à l'ordre d'annulation à l'origine de la fonction $x_{l+1} \rightarrow f_{l+1}(0, \dots, 0, x_{l+1}, 0, \dots, 0) = x_{l+1}$.

On en déduit que r_{l+1} est indépendant de x_{l+1} .

Or, f_{l+2} est aussi indépendant de x_{l+1} , par suite r_{l+1} est divisible (au sens du théorème ci-dessus) par f_{l+2} dans le sous-anneau des fonctions analytiques réelles indépendantes de x_{l+1} .

On obtient $f = a_{l+1} f_{l+1} + a_{l+2} f_{l+2} + r_{l+2}$

où r_{l+2} est un polynôme indépendant de x_{l+1}, x_{l+2} .

Par itération, il vient que $f = a_{l+1} f_{l+1} + \dots + a_n f_n + r_n$ où r_n ne dépend que des variables $x_1, \dots, x_l$.

Comme $f, f_{l+1}, \dots, f_n$ appartiennent à I_D alors on a de même

$r_n \in I_D$ et donc d'après (2.6.) $\frac{\partial r_n}{\partial x^\alpha}(0) = X^\alpha(r_n)(0) = 0$, pour tout

α vérifiant $\alpha_{l+1} = \dots = \alpha_k = 0$.

Par suite $r_n = 0$.

Ainsi $M = V(I_D) = V(f_{\ell+1}, \dots, f_n)$ est une sous-variété analytique réelle.

Montrons maintenant que :

$$(2.9.) \quad D(I_D) \subset I_D$$

comme D est engendré par $X_1, \dots, X_k$, il suffit de montrer que

$X_j(f) \in I_D$ pour tout $f \in I_D$ et $j = 1, \dots, k$.

Soit α un multi-indice, on applique le lemme 2.3. avec $\beta = e^j$ on a $X^\alpha X_j(f) = X^{\alpha+\beta}(f) + (\text{polynôme de degré } < |\alpha+\beta|)(f)$, on déduit que $X^\alpha X_j(f)(0) = 0$ car $f \in I_D$.

Par suite, M est bien une sous-variété intégrale de D .

En effet, (2.2.) et (2.9) entraînent que tout champ de vecteurs de D est tangent à M ; donc $D_y \subset T_y M$ pour tout y assez voisin de 0 or $\dim D(y) \geq \dim D(0) = \ell = \dim T_y M$.

On déduit que $D_y = T_y M$ pour tout y assez voisin de 0 .

Il reste à montrer l'unicité.

Soit N une autre sous-variété intégrale de D passant par l'origine, (1.1.) implique que $D \subset TN$.

D'autre part, $I_M = I_D \supset I_{TN} \supset I_N$ ce qui entraîne que $M \subset N$ or $\dim M = \dim N = \ell$, donc $M = N$.

Ce qui termine la démonstration du théorème 2.1.

Démonstration du lemme 2.2. :

Il s'agit de montrer la convergence de la série

$$g_i = \sum_{\alpha} (\alpha!)^{-1} X^\alpha(x_i)(0) x^\alpha \quad \text{pour tout } i = \ell+1, \dots, n.$$

Soient $a_{i,j} = \sum_{\gamma} a_{\gamma} x^{\gamma}$ et $X^{\alpha}(x_i) = \sum_{\beta} \mu_{\beta,\alpha} x^{\beta}$ les développements en séries entières des fonctions analytiques $a_{i,j}$ et $X^{\alpha}(x_i)$.

Posons $t = |x|$ et désignons par $G(t)$ et $G_{\alpha}(t)$ des séries majorantes de ces développements dans le sens que $\sum_{|\gamma|=n} |a_{\gamma}| |x|^n$ et $\sum_{|\beta|=n} |\mu_{\beta,\alpha}| |x|^n$ sont majorés par les termes généraux de G et de G_{α} ;

on suppose que $G \geq 1$ dans un voisinage de l'origine.

Fixons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $r \leq \ell$; pour tout entier j tel que

$r \leq j \leq \ell$, on a : $X^{\alpha+j}(x_i) = X_j X^{\alpha}(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} X^{\alpha}(x_i) +$

$\sum_{m=\ell+1}^j a_{j,m} \frac{\partial}{\partial x_m} X^{\alpha}(x_i)$ il vient que $|X^{\alpha+j}(x_i)|$ est majoré par

$$\sum_n (1 + \sum_{m=\ell+1}^k |a_{j,m}|) (\sum_{|\beta|=n} |\mu_{\beta,\alpha}|) n |x|^{n-1}.$$

Ainsi $G \frac{d}{dt} G_{\alpha}$ est une série majorante de $X^{\alpha+j}(x_i)$ ce qui entraîne que les G_{α} sont déterminés par la relation $G_{\alpha+j} = G \frac{d}{dt} G_{\alpha}$; si l'on désigne par Δ l'opérateur $\Delta(u) = G \frac{du}{dt}$, on obtient par itération $G_{\alpha} = \Delta^{|\alpha|-1} G$.

D'autre part, $a_{i,j}$ étant analytique, on peut prendre pour G le développement en série géométrique de la fonction $G(t) = M(1 - \frac{t}{\rho})^{-1}$ pour M et ρ convenablement choisis.

$$\text{Ainsi } G_{\alpha}(t) = \frac{M^{|\alpha|}}{\rho^{|\alpha|-1}} (1.3.5. \dots (2|\alpha|-3)) (1 - \frac{t}{\rho})^{-(2|\alpha|-1)}$$

et par suite la série g_i admet comme majorante

$$\rho \sum_{\alpha} (\alpha!)^{-1} \left(\frac{M}{\rho}\right)^{|\alpha|} (1.3.5. \dots (2|\alpha|-3)) \cdot |x|^{|\alpha|}$$

cette série est majorée par $\rho \sum_{\alpha} \left(\frac{2M}{\rho}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |x|^{\alpha}$ qui est le développement

en série entière de la fonction $\frac{\rho}{1 - \left[\frac{2M}{\rho} (|x_1| + \dots + |x_\ell|) \right]}$ elle converge

donc pour $|x|$ assez petit. ■

Démonstration du lemme 2.3. : on raisonne par récurrence

si $|\alpha + \beta| = 2$, on distingue deux cas :

. $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, le lemme est alors trivial ;

. $\alpha = e^i$, $\beta = e^j$ dans ce cas on a $X_i X_j - X_j X_i = \sum_{q=1}^k a_{ij}^q X_q$

car D est une algèbre de Lie.

Soit $m \geq 2$ et supposons que le lemme est vérifié pour tout α, β tels que $|\alpha + \beta| \leq m$.

On remarque que si $|\alpha| + q \leq m$ et P est un polynôme de degré $\leq q$, alors $X^\alpha P$ et PX^α sont des polynômes de degré $\leq |\alpha| + q$ d'après la règle de Leibniz et l'hypothèse de récurrence.

Maintenant on suppose que $|\alpha + \beta| = m+1$, où $\beta \neq 0$ (si $\beta = 0$ le lemme est trivial).

• cas $|\beta| = 1$, on prend $\beta = e^j$; soit i le plus grand entier r tel que $\alpha_r \neq 0$:

si $i \leq j$, alors $X^\alpha X^\beta = X^\alpha X_j = X^{\alpha+j} = X^{\alpha+\beta}$

si $i > j$, $X^\alpha X_j = X^{\alpha-i} X_i X_j = X^{\alpha-i} X_j X_i + X^{\alpha-i} P$ où P est un polynôme de degré 1

comme $|\alpha-i| = m-1$ l'hypothèse de récurrence entraîne que

$$X^{\alpha-i} X_j = X^{\alpha-i+j} + Q \text{ où } Q \text{ est un polynôme de degré } \leq m-1 ;$$

$$\begin{aligned} \text{On déduit que } X^\alpha X_j &= X^{\alpha-i+j} X_i + QX_i + X^{\alpha-i} P \\ &= X^{\alpha+j} + (\text{polynôme de degré } \leq m) \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $QX_i + X^{\alpha-i} P$, et le fait que $i > j$.

• cas $|\beta| \geq 1$, dans ce cas, on a $\beta = \gamma + e^j$ où j est le plus grand entier r tel que $\beta_r \neq 0$, et $|\alpha + \gamma| = m$.

Ainsi a-t-on $X^\alpha X^\beta = X^\alpha X^\gamma X_j = X^{\alpha+\gamma} X_j + PX_j$ où P est un polynôme de degré $\leq m-1$:

D'après le cas $|\beta| = 1$ appliqué à $X^{\alpha+\gamma} X_j$ et l'hypothèse de récurrence appliquée à PX_j , il vient que $X^\alpha X^\beta = X^{\alpha+\gamma+j} + Q = X^{\alpha+\beta} + Q$ où Q est un polynôme de degré $\leq m$. ■

Remarque 1. - La condition (1.1.) peut être remplacée par

$$(2.10.) \quad TM = D + O(M)$$

où $O(M)$ désigne l'ensemble de tous les champs de vecteurs qui s'annulent sur M et TM est le module des champs de vecteurs tangent à M .

En effet, il est clair que (2.10.) implique (1.1.) :

réciroquement si (1.1.) est vérifiée, on a $D \subset TM$; soit $X \in TM$ d'après (2.4.) il existe des fonctions $c_1, \dots, c_\ell$ de $C^{(w)}$ telles que

$$Y = X - \sum_{i=1}^{\ell} c_i X_i \text{ s'écrit sous la forme } Y = \sum_{i=\ell+1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ comme } Y \text{ est}$$

tangent à M , il vient que $Y(f_i)(y) = a_i(y) = 0$. Pour tout $y \in M$, donc $Y \in O(M)$.

Remarque 2.- La condition "D est une algèbre de Lie" n'est pas nécessaire dans le théorème 2.1. comme le montre l'exemple suivant :
On considère dans $\mathbb{R}^3$, (x,y,z) un système de coordonnées locales d'origine p ; on pose $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial y} + xz \frac{\partial}{\partial z}$.

On a $V = \{z = 0\}$ est une sous-variété intégrale du module D engendré par X et Y, mais D n'est pas une algèbre de Lie car il ne contient pas $[X,Y] = z \frac{\partial}{\partial z}$.

Soit D un sous-module de TR^n , on désigne par $\tilde{D}$ le plus petit sous-module de TR^n contenant tous les champs de vecteurs de D et leurs crochets de Lie de tout ordre.

Corollaire 2.4.- Pour qu'il existe une sous-variété intégrale de D passant par p il faut et il suffit que

$$(2.11.) \quad \tilde{D}(P) = D(P)$$

de plus la sous-variété intégrale est unique.

Démonstration :

Soit M une sous-variété intégrale de D, on a $D \subset TM$ par définition de $\tilde{D}$ il vient que $D \subset \tilde{D} \subset TM = D + O(M)$. Ce qui implique (2.11.) ; et du même coup, on a montré que M est une sous-variété intégrale de $\tilde{D}$; par suite, elle est unique d'après le théorème (2.1.)

Réciproquement, supposons $\tilde{D}(p) = D(p)$.

D'après le théorème (2.1.) appliqué à $\tilde{D}$ il existe une sous-variété intégrale passant par p vérifiant $T_y M = \tilde{D}(y) \supset D(y)$ pour tout y assez voisin de p. La relation (2.11.) entraîne que

$T_p M = D(p)$ ainsi a-t-on pour y assez voisin de p, $\dim D(y) \geq \dim T_y M$

et par suite $T_y M = D(y)$, ce qui termine la démonstration du corollaire.

Remarque 3 : dans l'exemple ci-dessus, $[X, [X, Y]] = 0 = [Y, [X, Y]]$
donc $\tilde{D}$ est engendré par $X, Y, [X, Y]$

et on a $\tilde{D}(0) = D(0) =$ sous-espace engendré par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

3. Existence de sous-variétés intégrales complexes.

Dans ce qui suit $C_c^\omega = C^\omega + i C^\omega$ désigne l'anneau des germes au point p des fonctions analytiques réelles à valeurs complexes.

$\mathbb{C}TR^n = TR^n + i TR^n$ est le complexifié du fibré tangent à $\mathbb{R}^n$.

Soit M une sous-variété analytique réelle, on note par I_M l'idéal des fonctions de C_c s'annulant sur M et $\mathbb{C}TM = TM + i TM$ est le fibré complexifié du fibré tangent à M .

Il est clair que $\mathbb{C}TM$ peut être défini par (2.2.) et qu'il possède une structure d'algèbre de Lie sur C_c^ω .

On définit de manière naturelle sur $\mathbb{C}TR^n$ la conjugaison $Z = X + i Y \rightarrow \bar{Z} = X - i Y$ où X, Y sont dans TR^n .

Par définition un sous-module D de $\mathbb{C}TR^n$ est réel si $D = \bar{D}$ on pose $\text{Re } D = D \cap TR^n$, il est alors facile de vérifier que :

- D est réel si et seulement si $D = \text{Re } D + i \text{Re } D$;
- D est une algèbre de Lie si et seulement si $\text{Re } D$ est une algèbre de Lie.

Soit $\tilde{D}$ le plus petit sous-module de $\mathbb{C}TR^n$ contenant tous les champs de vecteurs de D et leurs crochets de Lie de tout ordre.

Si D est réel on vérifie facilement que $\tilde{D} = \text{Re } D + i \text{Re } D$; ce qui entraîne que $\tilde{D}$ est réel et on a $\text{Re } \tilde{D} = \text{Re } D$.

On dit qu'une sous-variété M est intégrale de D si

$$(3.1.) \quad \mathbb{C}TM = D + O(M)$$

où $O(M)$ désigne le C_c -module de champ de vecteurs s'annulant sur M . Comme CTM et $O(M)$ sont réels, alors D est réel si (3.1.) est vérifiée. On montre facilement que (3.1.) est vérifiée si et seulement si $TM = \text{Re } D + \text{Re } O(M)$; par suite M est une sous-variété intégrale de D si et seulement si M est une sous-variété intégrale de $\text{Re } D$. On déduit le théorème suivant :

Théorème 3.1. - Soit D un sous-module réel de CTR^n , on suppose que D est une algèbre de Lie alors il existe une unique sous-variété intégrale de D passant par p .

D'autre part, on sait que $CTC^n = CTR^{2n}$ peut être muni d'une structure complexe standard induite par C^n , $CTC^n = T' \oplus T''$ où T' désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes tangent à R^{2n} et T'' désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs anti-holomorphes tangent à R^{2n} .

Soit H un sous-module de CTC^n .

On dit que H est J -invariant si H est engendré par les sous-modules $H' = H \cap T'$, $H'' = H \cap T''$.

Une sous-variété M est complexe si et seulement si CTM est J -invariant d'après le théorème de Newlander Nirenberg.

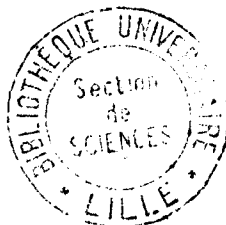
Par suite d'après (3.1.), il vient

Corollaire 3.1. - Une sous-variété intégrale de D est complexe si D est J -invariant.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] BELL S., BOAS H., Regularity of the Bergmann projection in weakly pseudoconvex domains. Math. Ann. 257 (1981), 23-30.
- [2] BELL S., LIGOCKA E., A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings. Inventiones math., 57 (1980), 283-289.
- [3] BLOOM T.,
 - (a) Remarks on type conditions for real hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$. Proc. of Int. Conf. on several complex variables. Cortona Italy, 1976-77. Sc. Norm. Sup. Pisa (1978), 14-24.
 - (b) Sur le contact entre sous-variétés réelles et sous-variétés complexes de $\mathbb{C}^n$. Séminaire Pierre Lelong, 1975-76. Lectures Notes in Math., n° 578, Springer-Verlag, Berlin and New York 1977, 28-43.
 - (c) On the contact between complex manifolds and real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$. Trans. Am. Vol. 263, n° 2 (1981), 515-529.
- [4] BLOOM T., GRAHAM I.,
 - (a) A geometric characterization of points of type m on real submanifolds on $\mathbb{C}^n$. J. Differential Geometry 12 (1977), 171-182.
 - (b) On "type" conditions for generic real submanifolds of $\mathbb{C}^n$, Inventiones Math. 40 (1977), 217-243.
- [5] CATLIN D., Necessary conditions for subellipticity and hypoellipticity for the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains. Proc. Conference on Several Complex Variables, Princeton April, 1979.
- [6] COEURE G.,
 - (a) Cours de DEA, 1977-78.
 - (b) Cours de DEA, 1979-80.
- [7] D'ANGELO J., Finite type conditions for real hypersurfaces. J. Diff. Geometry 14 (1979), 59-66.
- [8] DERRIDJ M.,
 - (a) Sur la régularité des solutions des problèmes de Neumann pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudoconvex. J. Differential Geometry 13 (1978) 559-576.
 - (b) Estimations pour $\bar{\partial}$ dans des domaines non pseudoconvexes. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978), 239-254.

- [9] DIEDERICH K., FORNAESS J.E., Pseudoconvex domains with real analytic boundary. Ann. of Math., 107 (1978), 371-384.
- [10] FOLLAND G.B., KOHN J.J., The Neumann problem for the Cauchy Riemann Complex. Ann. of Math. Studies n° 75, Princeton Univ. Press (1972).
- [11] FREEMAN M., Integration of analytic differential systems with singularities and some applications to real submanifolds of $\mathbb{C}^n$. J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 571-578.
- [12] HÖRMANDER L., Introduction to complex analysis in several variables, North Holland, Amsterdam (1973).
- [13] KERZMAN N., The Bergman-kernel function : differentiability at the boundary. Math. Ann., 195 (1972), 149-158.
- [14] KOHN J.J.,
- (a) Formes intégrô-différentielles non coercives. Les presses de l'université de Montréal (1966).
 - (b) Boundary behaviour of $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds of dimension 2. J. Differential Geometry 6 (1972), 523-542.
 - (c) Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 181 (1973), 273-292.
 - (d) Subellipticity of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudo-convex domains : sufficient conditions, Acta Math., 142 (1979), 79-122.
- [15] KOHN J.J., NIREMBERG L., Non coercive boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 443-492.
- [16] NARASIMHAN, R., Introduction to the theory of analytic spaces. Lectures Notes in Math. N° 25, Springer-Verlag, 1966.



R É S U M É

L'existence d'estimations sous-elliptiques pour le problème $\bar{\partial}$ de Neumann dans les domaines pseudo-convexes a été l'objet d'importants résultats obtenus à partir des travaux de J.J. Kohn. Lorsque la frontière est strictement pseudo-convexe ou analytique réelle, on constate (cf. Chapitre I) que les problèmes les plus importants sont résolus. Soit donc Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ faiblement pseudo-convexe à frontière C^∞ . Ce travail porte sur l'existence de ces estimations sous-elliptiques en un point frontière z_0 de Ω où le rang de la forme de Lévi est $\geq n-2$.

Le second chapitre a pour objet d'établir une condition suffisante de nature algébrique portant sur le type d'un champ de vecteurs canonique ; on en déduit une condition suffisante, portant sur le développement taylorien de la fonction r définissant Ω , qui peut se formuler ainsi : il existe un système de coordonnées locales d'origine z_0 pour lequel :

- $r(z) = \operatorname{Re}(z_n) + (F = \sum_{\alpha>0, \beta>0} C_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta) + O(|z|^{m+1})$;
- La forme de Lévi est diagonale en z_0 ;
- F est un polynôme en z_{n-1} et $\bar{z}_{n-1}$ de degré m
- $(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}) (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}) \frac{\partial^2 r}{\partial z_{n-1} \partial \bar{z}_j} (z_0) = 0$ pour $|\alpha + \beta| \leq m-2$
 $j = 1, \dots, n-2$.

Ce résultat est à rapprocher de celui de J.J. Kohn dans (14.b) où aucune hypothèse sur le rang de la forme de Lévi n'est faite mais où l'on suppose qu'elle est diagonale localement. Dans un article récent (5), David Catlin a établi qu'à un point de sous-ellipticité les ordres de contact avec $\partial\Omega$ des courbes analytiques complexes étaient bornés supérieurement. Dans le chapitre III, sous l'hypothèse de rang $\geq n-2$ pour la forme de Lévi, nous établissons une conjecture de T. Bloom selon laquelle cette borne supérieure est égale au $\sup\{c^1(T, z_0)\}$ des champs de vecteurs T holomorphes non nulles en z_0 et tangents à $\partial\Omega$; ce qui démontre du même coup la réciproque du théorème de Catlin et donne ainsi une caractérisation géométrique des points de sous-ellipticité. Ce résultat est spécifique du rang $n-2$ comme le montre un exemple.

Ces deux chapitres sont précédés d'un chapitre introductif où l'on présente les résultats les plus importants sur le sujet et les notions qui sont utilisés.

- MOTS CLES : - PROBLEME DE NEUMANN POUR $\bar{\partial}$.
 - HYPERSURFACE PSEUDO-CONVEXE.
 - CHAMP DE VECTEURS HOLOMORPHE TANGENT.