

N° d'ordre : 562

50376
1982
180

50376
1982
180

*Exclu du
P&H*

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Henry SCHOORENS

Ingénieur H.E.I., Docteur-Ingénieur

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE ANALYTIQUE APPROCHÉE
DES MACHINES À RÉLUCTANCE VARIABLE,
NOTAMMENT DE CELLES À CONFIGURATION AXISYMETRIQUE.
APPLICATION AUX ACTIONNEURS LINÉAIRES.**



Soutenu le 29 octobre 1982 devant la Commission d'Examen

| | |
|---------------|---|
| Président : | M. JUFER |
| Rapporteurs : | A. MAILFERT C. RIOUX G. SEGUIER |
| Examineurs : | F. NOTELET J.P. PASCAL B. TRANNOY A. WIART |

**
** AVANT-PROPOS **
**
**

Les travaux de recherche sur l'étude analytique approchée des machines à réluctance variable et notamment celles à configuration axisymétrique dont ce mémoire résume les résultats ont été effectués au Laboratoire "Applications des redresseurs de puissance" de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I, sous la direction de Monsieur le Professeur G. SEGUIER. Nous tenons à témoigner à Monsieur SEGUIER notre très profonde reconnaissance pour l'attention bienveillante avec laquelle il nous a guidé tout au long de ce travail.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur Extraordinaire M. JUFER de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne d'avoir accepté de présider le Jury auquel nous soumettons notre mémoire.

Nous exprimons notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur C. RIOUX de l'Université de Paris XI, à Monsieur le Professeur B. TRANNOY de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, à Monsieur le Professeur A. MAILFERT de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique de Nancy et à Monsieur le Professeur F. NOTELET de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I qui ont accepté d'évaluer les résultats que nous présentons.

Monsieur A. WIART, Directeur Scientifique de la Société Jeumont-Schneider, a suivi avec la plus grande attention les résultats de nos travaux et nous a apporté une aide précieuse pour la réalisation de la machine expérimentale, dans le cadre d'un contrat aidé par la D.G.R.S.T. Monsieur J.P. PASCAL, de l'Institut de Recherche des Transports, a été rapporteur du contrat et à ce titre a été vivement intéressé par nos travaux. Nous sommes heureux qu'ils soient présents au moment où nous dressons le bilan complet de nos résultats.

Nous remercions Messieurs RUYANT, DEFAUCHEUX et GUEJ de la Société Jeumont-Schneider sans l'aide desquels l'étude expérimentale n'aurait pu être menée à bien dans d'aussi bonnes conditions.

Nous remercions beaucoup Monsieur le Professeur C. MAIZIERES de l'aide précieuse que nous avons trouvée, grâce à lui, auprès du Service Electrotechnique de l'U.E.R. d'I.E.E.A. de l'Université de Lille.

Nous remercions Monsieur le Professeur M. BRIDOUX Directeur de l'I.U.T. de Béthune qui nous a permis d'effectuer sur place les vérifications expérimentales.

Nous remercions notre collègue, Monsieur V. GUEGAN, Maître-Assistant, pour l'aide très efficace qu'il nous a apporté lors des études expérimentales.

Nous remercions particulièrement tous nos collègues Enseignants et Techniciens du Département Génie Mécanique de l'I.U.T. de Béthune pour l'aide matérielle permanente qu'ils nous ont apporté.

Nos remerciements vont spécialement à Monsieur G. DAUBELCOUR, Professeur Certifié, pour l'aide constante qu'il nous a apporté dans l'illustration de ce mémoire.

Nous exprimons notre vive gratitude à Mademoiselle B. FIEVET et à Monsieur J. HOUZE qui ont assuré la frappe, la mise en page du texte et permis la réalisation pratique de ce mémoire.

```

*****
*****
**
** INTRODUCTION **
**
**
*****
*****

```

Les machines à réluctance variable, qui ont déjà donné lieu à beaucoup de réalisations dans le domaine des faibles puissances, continuent à faire l'objet de nombreuses études et expérimentations en laboratoire car leur domaine d'emploi semble susceptible d'importants développements.

Partant des équations fondamentales de l'électromagnétisme et du tenseur des contraintes de Maxwell, Ch. RIOUX [1]⁽¹⁾ a établi une théorie générale des machines électrotechniques conduisant à la distinction de quatre classes de machines dont il compare la puissance et le rendement. La classe 1 correspond aux machines sans fer, la classe 2 aux machines classiques, la classe 3 aux machines à réluctance variable. Une réflexion sur les pertes conduit à situer les machines sans fer dont le champ magnétique est créé par un aimant permanent ou un bobinage cryogénique, c'est la classe 4 qui correspond à des machines de construction et d'emploi spéciaux.

Un calcul paramétrique général des différentes classes, fondé sur l'évaluation de la puissance et des pertes, le conduit à cerner les domaines d'emplois les plus favorables pour chaque classe. Il montre ainsi que le rendement des machines sans fer est indépendant de la puissance mais augmente avec la vitesse et la taille de la machine. Les machines classi-

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire. Les études consacrées aux machines à réluctance sont si nombreuses, qu'il est hors de question de donner une bibliographie exhaustive. Nous ne citerons que les travaux qui ont guidé notre approche analytique du calcul des machines ou qui étayaient la méthode avancée.

ques sont d'autant meilleures que le champ d'induction est plus voisin de l'induction de saturation et que la vitesse est plus élevée. Quant à la machine à réluctance variable : si L désigne l'ordre de grandeur de ses dimensions géométriques et ℓ le déplacement de la partie mobile par cycle élémentaire de fonctionnement, il montre qu'à conditions de travail des matériaux (densité de courant, induction dans le fer, vitesse...) identiques à celles des machines classiques la puissance volumique est multipliée par L/ℓ ; on peut donc obtenir un rapport des puissances très supérieur à l'unité à condition d'utiliser des fréquences élevées.

Si la machine à réluctance permet des performances exceptionnelles quand on sait l'alimenter convenablement à fréquence élevée, elle est aussi particulièrement bien adaptée à la réalisation de machines lentes, donc alimentées à très basse fréquence, assurant des déplacements de faible amplitude mais développant des couples ou des efforts importants.

C'est dans ce domaine d'applications, d'ordinaire pour de petites puissances, que les machines à réluctance connaissent actuellement un essor important. Elles sont de construction simple et grâce à une électronique de commande adaptée, elles peuvent être utilisées en moteur à rotation permanente ou en rotation incrémentable, pas à pas.

Quand le déplacement de la partie mobile d'une machine obéit à des contraintes, on donne souvent à cette machine le nom d'actionneur, comme pour indiquer son utilisation comme élément d'un automatisme. La robotique moderne offre de vastes débouchés aux actionneurs à réluctance variable, rotatifs ou linéaires [2].

C'est la conception puis l'étude expérimentale d'actionneurs linéaires lents et puissants qui a servi de guide au travail sur les machines à réluctance dont nous présentons les résultats dans ce mémoire.

Désirant étudier la possibilité de transmettre, à travers une enceinte tubulaire épaisse, un effort important correspondant à un déplacement linéaire incrémental lent, la Société Jeumont-Sneider et le Laboratoire de l'Université des Sciences et Techniques de Lille dans lequel nous travaillons ont décidé de collaborer étroitement. Ils ont bénéficié pour cette étude d'un contrat d'aide de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique.

Dès le départ, les réflexions menées en commun ont naturellement conduit au recours à la réluctance variable. Mais la spécificité du problème a nécessité le recours à une configuration originale et a montré l'insuffisance des moyens analytiques disponibles pour dégrossir le dimensionnement d'un actionneur prototype. En effet la nécessité de limiter la profondeur des encoches et la nature annulaire de celles-ci ne permettent pas l'utilisation des relations simplifiées établies pour des encoches très profondes et droites.

Cela nous a amené à développer une méthode d'évaluation des performances des machines à réluctance, certes approchée, mais analytique. Le bref rappel des principales étapes (du moins celles qui se sont révélées fructueuses) de notre réflexion explique le plan de ce mémoire.

LES ETAPES SUCCESSIVES

On peut schématiquement décomposer en étapes successives la synthèse des résultats antérieurs et les compléments que nous leur avons apportés afin d'arriver à une méthode analytique approchée d'étude des machines à réluctance à denture droite puis annulaire.

La première étape nous a amené à dégager les résultats essentiels des travaux effectués sur les transducteurs électromagnétiques. Ainsi nous avons rappelé le caractère suffisant, sous réserve de certaines hypothèses, du recours aux efforts moyens pour connaître les efforts développés

par une machine. Que celle-ci soit alimentée à courant constant ou à flux constant, la connaissance des perméances maximale et minimale suffit pour évaluer l'effort moyen. Lorsque l'effort s'exerce entre deux dentures, la perméance maximale correspond à la position alignée des dents, la perméance minimale à leur position en quinconce. Pour une machine non saturée, quand on suppose la perméabilité du fer infinie, seules les perméances d'entrefer en position alignée des dents et en quinconce interviennent ; nous avons convenu d'appeler ces quantités *fonctions caractéristiques de dentures*. Notre modèle, pour une machine linéaire, visera à déterminer ces fonctions caractéristiques.

Dans une seconde étape, nous avons recensé les méthodes de calculs des champs susceptibles de conduire à l'évaluation des performances. Outre la classification en vue du calcul analytique général, nous avons remarqué que l'on cherche toujours à illustrer les résultats obtenus par des représentations graphiques des lignes de champ et des équipotentielles. On constate que ces graphiques peuvent se structurer en domaines connexes à l'intérieur desquels les lignes de champ ont toutes la même forme. Nous avons appelé cette propriété la "*ressemblance par zone*" et avons proposé une règle topologique facilitant la structuration d'un domaine en sous-domaines possédant la "*ressemblance par zone*". Nous avons alors pu proposer une méthode d'étude analytique approchée des machines à réluctance.

La troisième étape a consisté à appliquer cette méthode, pour voir la qualité des résultats qu'elle donnait, aux machines à double denture droite symétrique. Nous avons pu montrer que dans ce cas les mêmes sous-domaines interviennent dans la structuration de l'entrefer pour les positions alignées et en quinconce des deux dentures ; seul change leur arrangement. Nous avons donc proposé des expressions simples de formules génératrices des fonctions caractéristiques, les facteurs intervenant dans les formules correspondant aux réluctances des sous-domaines.

Pour poursuivre notre projet d'aboutir à une expression analytique des fonctions caractéristiques nous avons choisi d'évaluer les réluctances composantes par les règles de Forbes. Nous avons dû *compléter les règles de Forbes* car il manquait celle donnant la réluctance des domaines reliant deux surfaces équipotentielle orthogonales mais de largeurs différentes, or ces domaines correspondent aux lignes de champ arrivant sur les flancs des dents. Assimilant ces lignes à des courbes elliptiques en anses de panier nous avons établi une expression de la réluctance de tels domaines. La comparaison des résultats donnés par la formule proposée avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis fait apparaître des écarts tout-à-fait acceptables.

A l'aide de cette nouvelle règle nous avons pu calculer les fonctions caractéristiques d'une machine à double denture symétrique. Les résultats globaux obtenus ont été comparés à ceux disponibles dans la littérature scientifique. L'accord étant satisfaisant, nous avons été conforté dans notre idée de l'intérêt d'une étude analytique approchée mais complète des efforts moyens.

Il restait à appliquer la méthode ainsi testée aux actionneurs faisant directement l'objet de définition puis d'expérimentation. Nous avons donc cherché à *transposer aux machines ayant la symétrie de révolution* la méthode générale proposée.

Si la transposition de la démarche aboutissant aux fonctions caractéristiques de denture est simple, les méthodes de calcul analytique des réluctances des sous-domaines axisymétriques présentant "la ressemblance par zone" se sont avérées inexistantes. Après avoir montré qu'on pouvait transposer la méthode graphique de Lehmann, ce qui peut dans les cas délicats faciliter les choix sur l'idéalisation des lignes de champ, nous avons transposé une par une les règles de Forbes, les classiques et celle que nous avons établie.

Nous avons ensuite modélisé une double denture axisymétrique linéaire où la profondeur des gorges du noyau et de l'inducteur fixe sont

différentes et établi l'expression analytique de ses fonctions caractéristiques. Nous disposons ainsi de l'outil nécessaire pour définir le prototype expérimental, interpréter les résultats relevés, évaluer l'influence des modifications des divers paramètres sur l'évolution des caractéristiques.

PLAN DU MEMOIRE

Les trois premiers chapitres du présent mémoire rendent compte des détails de la démarche adoptée, le quatrième est consacré à l'actionneur expérimental.

Le premier chapitre présente les fondements de la méthode choisie. Après quelques rappels sur la réluctance, il insiste sur l'intérêt de la notion de fonctions caractéristiques de denture et montre comment celle-ci jointe à l'utilisation de la "ressemblance par zone" conduit à une méthode d'étude analytique approchée des machines à réluctance variable.

Le deuxième chapitre est consacré à l'application de la méthode aux machines à dentures droites. La structuration de l'entrefer fait apparaître la nécessité de compléter les règles de Forbes. Une grande partie de ce chapitre est consacré à l'établissement de la règle manquante. La modélisation d'une machine à double denture symétrique est proposée et testée.

Le troisième chapitre montre l'application de la méthode aux machines axisymétriques. Pour pouvoir mettre en oeuvre la méthode proposée il est nécessaire de transposer les diverses règles de Forbes. Ensuite on indique comment modéliser la denture, délimiter les diverses zones, exprimer les diverses réluctances et les fonctions caractéristiques de denture.

Le dernier chapitre est consacré au prototype d'actionneur expérimenté. Destiné à la transmission d'efforts importants à travers une enceinte d'étanchéité épaisse, il a nécessité une longue réflexion quant à

la configuration à adopter. Finalement on a retenu la configuration dite "*à flux transversal*" avec des pièces fixes de reprise du flux à l'intérieur de l'enceinte. Les résultats obtenus sont intéressants et montrent la possibilité de transmettre des efforts très importants. La comparaison entre les efforts moyens mesurés et ceux calculés par la méthode proposée se révèle satisfaisante⁽¹⁾.

(1) L'établissement de la nouvelle règle de Forbes, la transposition de l'ensemble des règles de Forbes aux systèmes axisymétriques et la délimitation des domaines connexes donnent lieu à des calculs algébriques souvent très longs ; nous avons cru bon d'en réduire au maximum la présentation.

De même nous n'avons pas jugé utile de reproduire tout ce qui a trait à l'établissement des programmes et à leur exploitation sur ordinateur.

CHAPITRE I

INTERET DE LA NOTION DE "RESSEMBLANCE PAR ZONE"
DANS LE CALCUL DES MACHINES A RELUCTANCE VARIABLE

La première partie de notre étude se propose, à partir de résultats connus, de dégager l'idée directrice de la méthode d'étude analytique des performances des machines à réluctance variable à laquelle ce mémoire est consacré.

- Nous commencerons par un bref rappel sur les machines à réluctance variable et la notion même de réluctance, puis sur la structure des machines à réluctance variable pure.

- La présentation des simplifications généralement adoptées pour l'étude du fonctionnement linéaire montre que, à flux constant comme à courant constant, l'évaluation des efforts moyens fournit des renseignements suffisants pour une approximation acceptable des efforts instantanés.

Pour une denture donnée, l'expression de l'effort moyen ne fait apparaître les perméances que pour deux positions relatives des dents, la position alignée ou en regard et la position en quinconce. Ces deux perméances particulières définissent *la fonction caractéristique de denture*.

Dans le cas linéaire, l'étude de cette fonction peut se réduire à celle de la fonction caractéristique de l'entrefer. Nous donnerons d'ailleurs quelques exemples de fonctions caractéristiques d'entrefer.

- L'évaluation des fonctions caractéristiques de denture relève du domaine du calcul des champs électromagnétiques. Diverses méthodes de calcul sont possibles, nous les classifions en mettant en évidence leur aptitude au traitement analytique général.

Mais toutes les méthodes classiques de calcul des champs conduisent à des représentations graphiques. Celles-ci font apparaître des domaines dans lesquels les lignes de champ ont des formes semblables, ce que nous appelons "*la ressemblance par zone*".

- C'est le rapprochement de la notion de "ressemblance par zone" et des méthodes graphiques de détermination approchée des champs magnétiques qui nous a conduit à proposer une méthode analytique approchée des fonctions caractéristiques de denture.

Cette méthode s'appuie pour les problèmes à deux dimensions sur les règles de Forbes. Nous rappellerons les plus connues ; l'objet des chapitres suivants sera de les compléter, d'en étendre le domaine d'applications et de les utiliser.

I. GENERALITES SUR LA RELUCTANCE VARIABLE

I.1. Principe de fonctionnement d'une machine à réluctance

La place des machines à réluctance variable dans l'ensemble des convertisseurs électromagnétiques et leur principe de fonctionnement ont été clairement présentés. On peut citer notamment l'ouvrage de M. JUFER [3] consacré aux transducteurs électromécaniques.

Le fonctionnement d'une machine à réluctance variable repose sur le fait qu'un dispositif électromécanique, excité par un champ magnétique et possédant un ou plusieurs degrés de liberté, tend à se déplacer ou à se déformer pour rendre maximal le flux dans le circuit magnétique.

Dans de nombreuses applications les dispositifs utilisés ne possèdent qu'un seul degré de liberté correspondant soit à une translation, soit à une rotation autour d'un axe, comme le schématise la figure 1.

Dans les deux cas présentés, une source d'énergie électrique fait circuler un courant i dans un bobinage de n spires entourant un circuit magnétique formé d'une partie fixe et d'une partie mobile.

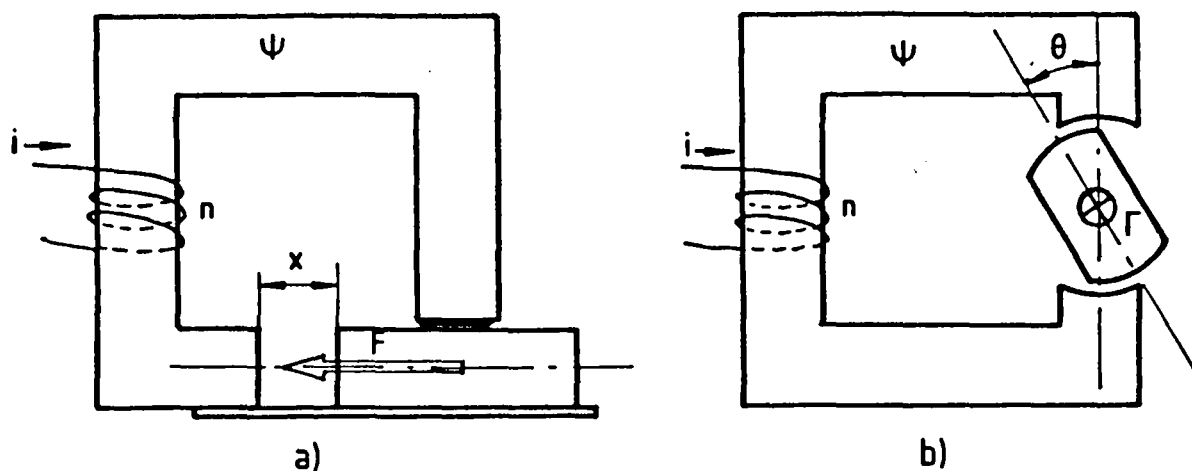


Figure 1 : Mode d'action des machines à réluctance variable

- a) en translation
b) en rotation

1.1.1. Relations générales

- Pour une position donnée de la pièce mobile, le circuit magnétique est le siège d'un flux d'induction totalisé ψ . Dans le cas de la machine agissant en translation, si x désigne le paramètre de position de l'armature mobile, le flux totalisé est une fonction de i et de x . Dans le cas d'une machine en rotation, si θ désigne la position angulaire du rotor, le flux totalisé est une fonction de i et de θ .

$$\psi = \psi(i, x) \quad \text{ou} \quad \psi = \psi(i, \theta)$$

- Pour étudier les transducteurs électromécaniques, en plus des équations électriques et mécaniques, on fait appel à des notions énergétiques [4], [5] :

Ainsi on définit

- l'énergie magnétique $W_m = \int_0^\psi i \, d\psi$

• la coénergie magnétique $W'_m = \int_0^i \psi \, di$.

- Selon que l'on considère le flux totalisé ψ ou le courant d'alimentation i , on obtient l'une ou l'autre des expressions de la force ou du couple développé.

Dans le cas d'une machine en translation, la force électromagnétique a pour valeur :

$$F = - \frac{\delta W_m(\psi, x)}{\delta x} = + \frac{\delta W'_m(i, x)}{\delta x}$$

Dans le cas d'une machine en rotation, le couple électromagnétique vaut

$$\Gamma = - \frac{\delta W_m(\psi, \theta)}{\delta \theta} = + \frac{\delta W'_m(i, \theta)}{\delta \theta}$$

On voit que les machines alimentées à flux constant seront plus facilement étudiées à l'aide des premières expressions, les machines alimentées à courant constant à l'aide des secondes.

1.1.2. Cas des circuits linéaires

Dans le cas des circuits magnétiques linéaires, le flux totalisé ψ est proportionnel au courant i et l'énergie magnétique W_m est égale à la coénergie magnétique W'_m .

L'inductance L du bobinage ne dépend alors que du paramètre de position géométrique :

$$\psi = L(x) i \quad \text{ou} \quad \psi = L(\theta) i.$$

Si R est la réluctance du circuit magnétique et P sa perméance, on peut également écrire dans ce cas :

$$L(x) = \frac{n^2}{R(x)} = n^2 P(x) \quad \text{ou} \quad L(\theta) = \frac{n^2}{R(\theta)} = n^2 P(\theta)$$

Les expressions de la force ou du couple peuvent donc, dans le cas des circuits linéaires, se présenter sous les formes simplifiées suivantes

$$F = - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{n} \frac{d R(x)}{dx} = \frac{1}{2} n^2 i^2 \frac{d P(x)}{dx}$$

$$\Gamma = - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{n} \frac{d R(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2} n^2 i^2 \frac{d P(\theta)}{d\theta}$$

Ces expressions mettent clairement en évidence le fait qu'un transducteur électromécanique ne peut exercer un effort moteur que si la réluctance de son circuit magnétique est variable, justifiant ainsi l'appellation de machine à réluctance variable.

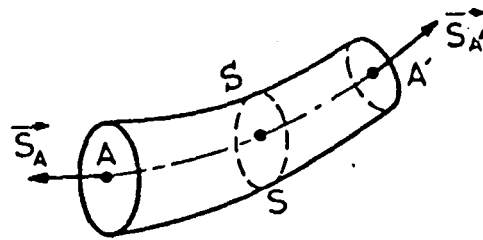
Pour bien situer les démonstrations ultérieures il est nécessaire de rappeler la définition de la réluctance.

I.2. La notion de réluctance

La réluctance est définie en magnéto-statique [6].

I.2.1. Relation entre flux et différence de potentiel magnétiques

- Soit un tube de champ d'induction \vec{B} s'appuyant sur un contour fermé, limité par deux sections S_A et $S_{A'}$, perpendiculaires aux lignes de champ (fig. 2), dans un milieu de perméabilité magnétique μ .



En l'absence de courant, on peut appliquer le théorème de la conservation du flux à travers la surface fermée S formée par un tube et les surfaces S_A et $S_{A'}$: le

Figure 2 : Surfaces limitant un tube de champ.

flux à travers une section S quelconque est égal au flux à travers S_A .

$$\Phi = \int_{S_A} \vec{B}_{S_A} \cdot d\vec{S}_A = \int_S \vec{B}_S \cdot d\vec{S}$$

- Si les surfaces S_A et $S_{A'}$ sont perpendiculaires aux lignes du champ d'induction, elles constituent des surfaces équipotentiellles. La différence de potentiel magnétique entre ces deux surfaces s'obtient en intégrant la circulation du champ magnétique \vec{H} sur une ligne joignant un point de la surface S_A à un point de $S_{A'}$.

$$\theta_{A'} - \theta_A = \oint_{AA'} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

- La réluctance du domaine S est la quantité positive définie par

$$R = \left| \frac{\theta_{A'} - \theta_A}{\Phi} \right|$$

En supposant les diverses orientations choisies pour donner directement une quantité positive, cette expression devient

$$R = \frac{\oint_{AA'} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}}{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

1.2.2. Conditions de passage à la forme usuelle

- Si on suppose le tube de champ suffisamment étroit, on peut choisir comme ligne AA' la ligne moyenne du tube, elle-même ligne de champ, de sorte que sur cette ligne

$$\vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \cdot d\ell$$

La section S d'aire S étant supposée équipotentielle, donc perpendiculaire aux lignes de champ, on peut exprimer le flux d'induction dans S à partir de l'induction moyenne \bar{B}_S dans S

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \bar{B}_S \cdot S$$

Dans ces conditions, l'expression de la réluctance se réduit à

$$R = \int_A^{A'} \frac{H \, d\ell}{\bar{B}_S S}$$

- La section S étant supposée petite, en milieu linéaire, si \bar{H}_S est le champ moyen dans S, on a

$$\bar{B}_S = \mu \bar{H}_S$$

D'où

$$R = \int_A^{A'} \frac{\bar{H}_S \, d\ell}{\mu \bar{H}_S S}$$

En simplifiant on trouve la forme habituelle de l'expression de la réluctance :

$$R = \int_A^{A'} \frac{d\ell}{\mu S} ,$$

expression dans laquelle μ et S peuvent dépendre de l'abscisse curviligne ℓ sur AA'.

La réluctance, exprimée en Henry⁻¹, ne dépend donc que de la géométrie du circuit magnétique et de sa perméabilité magnétique.

- Le calcul de la réluctance est évidemment beaucoup facilité si la perméabilité magnétique est constante, ce qui est le cas des tubes de champ dans les entrefers des machines.

L'utilisation de la notion de réluctance est donc particulièrement judicieuse lorsque les phénomènes d'entrefer sont prépondérants, ce qui est le cas pour les machines à réluctance variable.

1.3. Structure des machines à réluctance variable (M.R.V.)

Pour abrégé nous limiterons la présentation qui suit aux machines tournantes car la transposition aux machines linéaire est généralement immédiate.

La structure des machines à réluctance variable a été étudiée d'une façon très exhaustive par F.M. SARGOS [7] qui a montré que ces machines pouvaient se ramener à un modèle justifiant d'une étude unique. Nous avons d'ailleurs utilisé directement certaines de ses figures pour illustrer ce bref rappel.

1.3.1. Le rotor

Le rotor ne porte généralement aucun bobinage ; il est constitué d'un cylindre, de même axe que l'arbre de la machine, à la surface duquel se trouvent des dents, toutes identiques et régulièrement réparties. Les dents sont chacune pourvues d'un plan de symétrie radial. Le rotor est réalisé en matériau massif ou par empilage de tôles magnétiques.

1.3.2. Le stator

Le stator des machines à réluctance variable porte les bobinages et le "système inducteur". Il peut être lisse, denté de façon continue ou par plots.

- *Stator lisse*

Le stator est un cylindre de révolution dans lequel sont creusées des encoches contenant les conducteurs, comme dans les machines asynchrones ou synchrones classiques. Les encoches sont en général semi-fermées (fig. 3).

Comme pour ces machines l'interaction dents du rotor - dents du stator n'intervient que comme un phénomène parasite. Le "pas dentaire" du rotor (en réalité il faudrait parler ici de pas polaire) est en général beaucoup plus grand que le pas dentaire du stator.

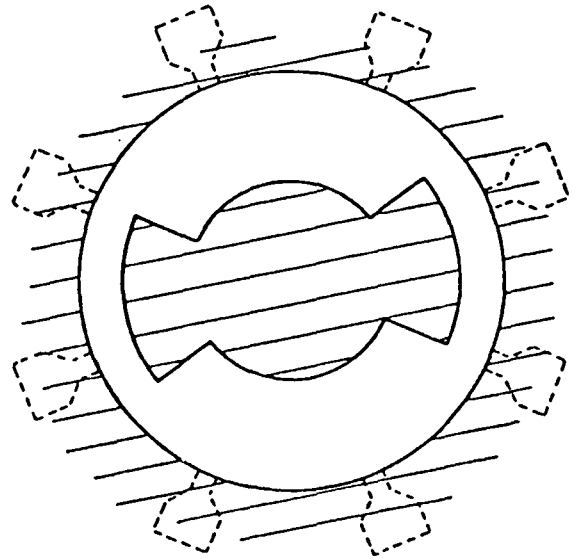


Figure 3 : M.R.V. à stator lisse.

Cette configuration est rarement utilisée pour la réalisation de moteurs à réluctance. On l'utilise plutôt pour générer des tensions de fréquence élevées, mais elle présente l'inconvénient de nécessiter des artifices pour permettre le réglage des tensions produites.

Il s'agit en fait d'une machine synchrone à pôles saillants à rotor non bobiné. D'ordinaire on réserve le nom de machine à réluctance à celles dont le stator est denté.

- *Stator denté*

Le stator porte des dents, dont les paramètres géométriques ne sont pas nécessairement identiques à ceux des dents du rotor, mais qui interviennent dans la variation de perméance origine du couple. Ces machines sont appelées machines "à double denture". Une carcasse extérieure, massive ou feuilletée, permet la fermeture des lignes de champ magnétique.

On appelle *pôle* de la machine la partie ferromagnétique active, située au regard de l'entrefer, qui est entourée par une bobine d'excitation constituant une unité de bobinage.

A un pôle correspond une [8] ou plusieurs dents [9], [10] le long de l'entrefer. Les pôles de la machine sont réalisés soit par "ilotage" des dents, soit par "plots" (fig. 4).

- La réalisation des pôles par "ilottage" des dents conduit à un encochage régulier du stator identique à celui des machines classiques (on parle parfois de denture répartie). Dans ce cas les bobines sont logées dans des encoches identiques à celles vides de conducteurs.

- La réalisation des pôles par "plots" consiste à regrouper les dents par paquets sur des pièces polaires autour desquelles on peut placer des bobines de section supérieure à celle des bobines logées dans les encoches, on peut en outre les éloigner de l'entrefer.

Si l'intervalle entre plots est un multiple du pas dentaire statorique on parle de "plots isopériodiques", sinon les plots sont dits "allopériodiques".

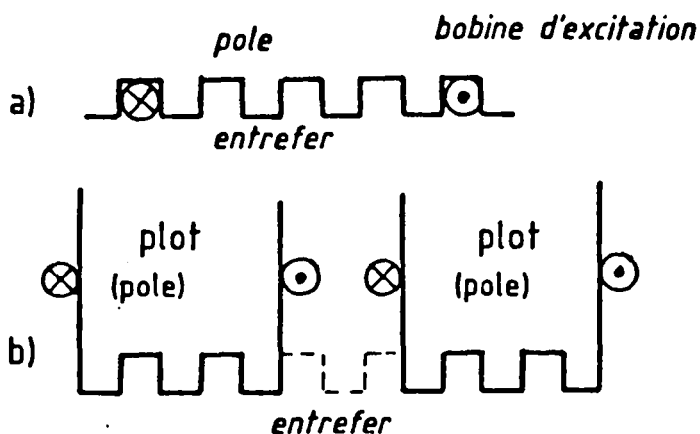


Figure 4 : - Réalisation des pôles

a) par ilottage

b) par plots

1.3.3. Les bobinages

Les bobines situées au stator sont assemblées en "phases" qui correspondent à des unités de commande de l'alimentation.

Si une seule phase est alimentée à la fois on parle d'alimentation homopolaire, si plusieurs phases sont excitées simultanément on dit que l'alimentation est hétéropolaire. Le mode de commande des machines cylindriques permet aisément de passer d'un mode à l'autre, ce qui permet par exemple de fonctionner en demi-pas dans la marche en moteur pas-à-pas et d'augmenter sensiblement le couple développé [11].

1.3.4. Le système de denture

Sur les machines destinées à fonctionner en moteur, les pôles correspondant à des phases alimentées successivement sont régulièrement décalées d'une fraction de pas dentaire.

On désigne par système de denture la définition des caractéristiques relatives des dentures du rotor et du stator. Le choix de cette définition dépend essentiellement du mode de fonctionnement de la machine et de son mode d'excitation. A noter que le nombre de dents est en général différent au stator et au rotor.

On distingue trois types principaux de systèmes de denture (fig. 5) :

- le système "à pas égal" [12]

Dans ce système les pas dentaires et les largeurs des dents sont les mêmes au stator et au rotor. Le rotor est uniformément denté ; il y a discontinuité dans le rythme des dents du stator quand on passe d'un pôle au suivant. Ce système est utilisé pour les fonctionnements rapides.

- le système en "simple vernier" [13], [14], [15]

Dans ce système la largeur des dents est encore la même au stator et au rotor, mais le pas dentaire statorique est supérieur au pas dentaire rotorique. La largeur des encoches du stator est donc supérieure à celle des encoches du rotor, elle est égale à la distance entre plots (plots isopériodiques). Cette disposition facilite le recouvrement partiel des dents des plots successifs correspondant à des phases différentes. Elle est utilisée aussi bien pour les moteurs destinés à fonctionner en pas-à-pas que pour les moteurs à rotation permanente avec alimentation hétéropolaire.

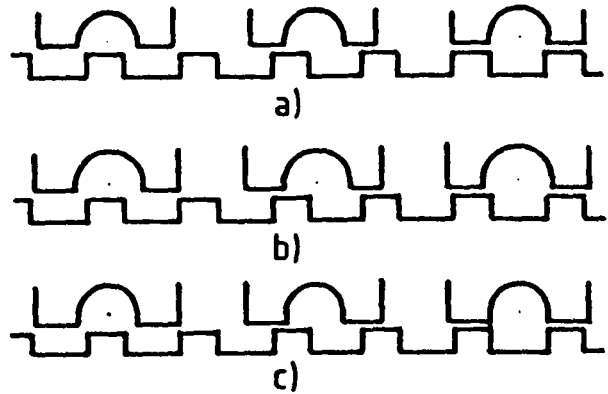


Figure 5 : Les différents systèmes de denture (16 dents au stator, 18 au rotor)

- le système en "vernier amélioré"

Dans ce système à plots allo-périodiques, la largeur des dents est plus grande au stator qu'au rotor de sorte que les têtes de dents au rotor soient en regard, sur leur totalité, avec les têtes des dents du stator. Cette disposition favorise la vitesse au détriment du couple.

- a) à pas égal
b) en simple vernier
c) en vernier amélioré

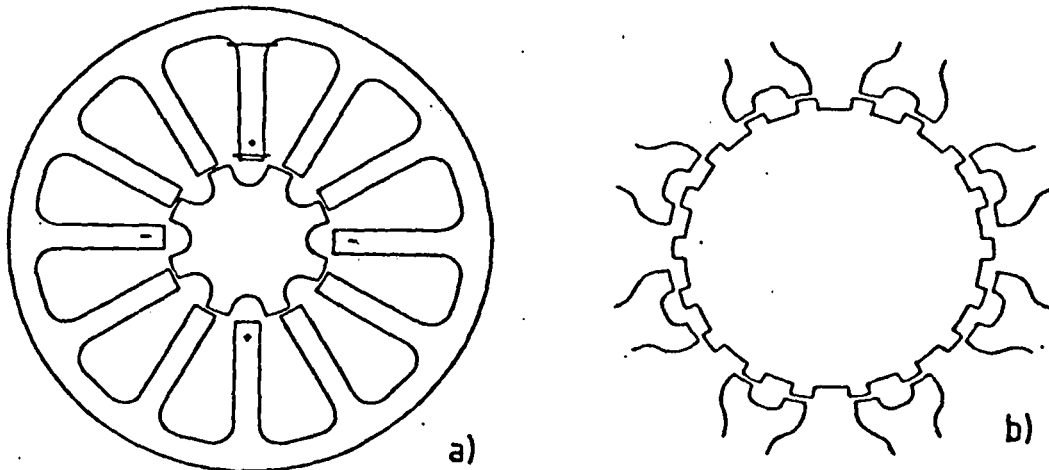


Figure 6 : Exemples de machines à réluctance variable

- a) machine à une dent par pôle, 12 dents au stator, 8 au rotor
b) machine à plots, 16 dents au stator, 18 au rotor.

La figure 6 donne deux exemples extrêmes de machines à réluctance variable répondant aux règles de construction que nous venons de rappeler. Dans le premier cas la machine est à une dent par pôle et il y a plus de dents au stator qu'au rotor ; dans le second, la machine possède des plots allopériodiques et compte moins de dents au stator qu'au rotor.

1.3.5. Notes sur les machines multicircuits ("multistack")

Les machines que nous venons de présenter sommairement comportent qu'un circuit magnétique statorique. Dans les machines multicircuits il y a une armature statorique complète par phase d'alimentation et à chaque stator est associé un rotor ou une partie de rotor.

Les pas dentaires ainsi que la largeur des têtes de dents sont identiques au stator et au rotor ; s'il y a des plots ceux-ci doivent être isopériodiques. Les circuits statoriques empilés sont décalés deux à deux de α/m , en désignant par α le pas dentaire angulaire et par m le nombre de phases. La commande de rotation se fait par la séquence d'alimentation des différentes phases.

Cette conception, pénalisante du point de vue du volume de la machine, a l'avantage de supprimer le problème de l'influence mutuelle des différentes phases et facilite ainsi la commande en régime dynamique.

1.3.6. Notes sur les machines à disques

A côté des machines à entrefer radial, l'équipe de C. RIOUX [16] a développé des machines à entrefer axial à disques (fig. 7). Elles sont formées d'un empilage de disques successivement fixes et mobiles séparés par des entrefers. Chaque disque est formé d'un matériau non magnétique portant une série régulière de plots magnétiques. L'excitation est obtenue par une bobine cylindrique de même axe que le rotor. L'injection de courant dans la bobine crée un couple qui tend à aligner plots fixes et plots mobiles. Telle qu'elle est schématisée la machine est monophasée ; on passe à une structure polyphasée en empilant le long de l'axe plusieurs phases.

Cette configuration est destinée à l'obtention de couples massiques très importants.

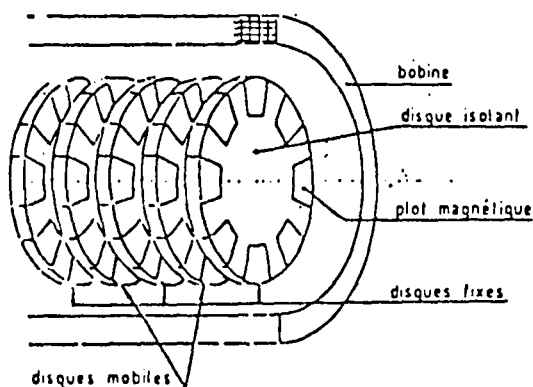


Figure 7 : Schéma d'une machine polydiscoïdale.

II. FONCTIONS CARACTERISTIQUES D'UN ENTREFER

Cette brève description des machines à réluctance variable montre que la force ou le couple développé prennent pratiquement toujours naissance entre deux structures dentées, l'une sur la partie fixe, l'autre sur la partie mobile.

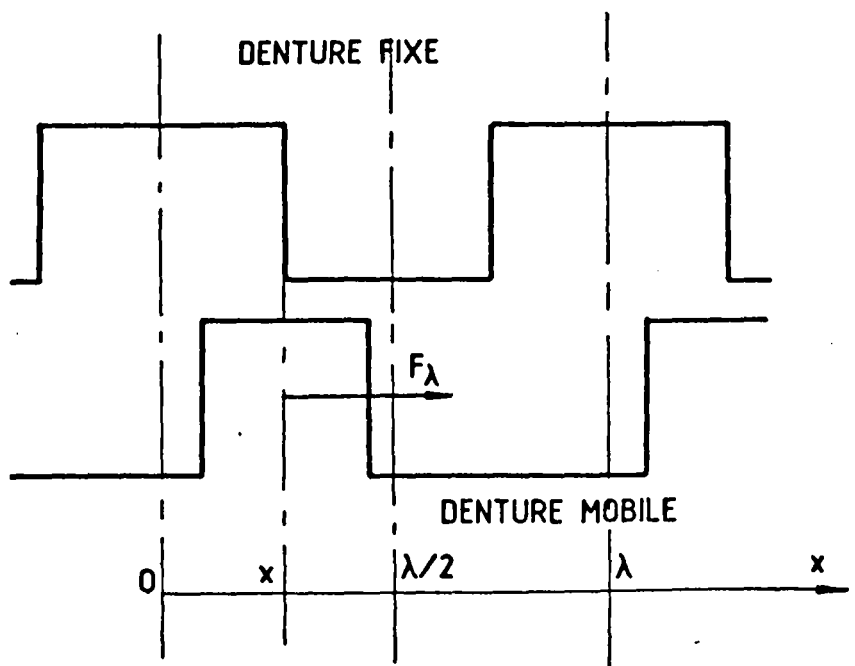
Dans tous les cas on peut se ramener à une structure à pas dentaire unique, l'effort exercé étant proportionnel au nombre N de pas dentaires actifs. Pour déterminer l'effort total F on se contente généralement d'étudier l'effort F_λ développé par pas dentaire λ . S'il n'y a pas d'effets de bords.

$$F = N F_\lambda$$

II.1. Effort exercé par pas dentaire

Sans que cela affecte la généralité de cette étude, on se contentera de la présenter dans le cas des mouvements de translation. Pour cela on évalue l'effort F_λ exercé par pas dentaire à partir des relations utilisant tantôt l'énergie, tantôt la coénergie magnétique.

La figure 8 montre la position relative de deux dentures de même pas dentaire λ . L'axe d'une dent mobile est repéré par son écart x avec l'axe d'une encoche fixe.



II.1.1. Effort instantané

- Dans le cas général où le moteur est alimenté par un courant i , on peut exprimer l'effort par

$$F_\lambda = \frac{\delta W'_{\lambda m}(i, x)}{\delta x},$$

où $W'_{\lambda m}$ est la coénergie emmagasinée dans le circuit par pas dentaire.

Figure 8 : Repérage de la position mutuelle des dentures.

En prenant une définition non linéaire de la perméance P_λ par pas dentaire, le flux par pas s'écrit

$$\phi = n^2 P_\lambda(i, x) \cdot i$$

On en déduit

$$W'_{\lambda m} = n^2 \int_0^i P_\lambda(i, x) i \, di$$

et donc

$$F_\lambda = n^2 \int_0^i \frac{\delta P_\lambda(i, x)}{\delta x} i \, di$$

- De la même façon, si la machine est alimentée par un flux ϕ , l'effort par pas a pour expression

$$F_\lambda = - \frac{\delta W_{\lambda m}(\phi, x)}{\delta x},$$

$W_{\lambda m}$ désignant l'énergie emmagasinée par pas dentaire.

Partant d'une définition non linéaire de la réductance pour un pas,

$$i = \frac{1}{n^2} R_\lambda(\phi, x) \cdot \phi$$

on en déduit

$$W_{\lambda m} = \frac{1}{n^2} \int_0^\phi R_\lambda(\phi, x) \phi \, d\phi$$

Donc

$$F_\lambda = - \frac{1}{n^2} \int_0^\phi \frac{\delta R_\lambda(\phi, x)}{\delta x} \phi \, d\phi$$

II.1.2. Effort à courant constant

Si le courant i est constant, l'effort instantané peut s'écrire

$$F_{\lambda i} = \frac{n^2 i^2}{2} \frac{\delta P_\lambda(i, x)}{\delta x}$$

- La perméance $P_\lambda(i, x)$ est une fonction périodique de x , de période égale au pas dentaire λ .

La perméance est minimale quand les dents sont en quinconce ($x = 0$), on pose

$$P_{\lambda i Q} = P_{\lambda}(i, 0) ;$$

elle est maximale quand les dents sont en position alignée ($x = \lambda/2$), on pose

$$P_{\lambda i A} = P_{\lambda}(i, \lambda/2)$$

La figure 9 donne l'allure de la courbe de perméance $P_{\lambda}(i, x)$; elle est symétrique par rapport à l'axe d'abscisse $\lambda/2$.

Le développement en série de Fourier de la fonction $P_{\lambda}(i, x)$ est donc formé d'un terme moyen $P_{\lambda 0}$ et d'une somme d'harmoniques pairs ou impairs d'amplitude $P_{\lambda k}$:

$$P_{\lambda}(i, x) = P_{\lambda 0} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\lambda k} \cos k \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

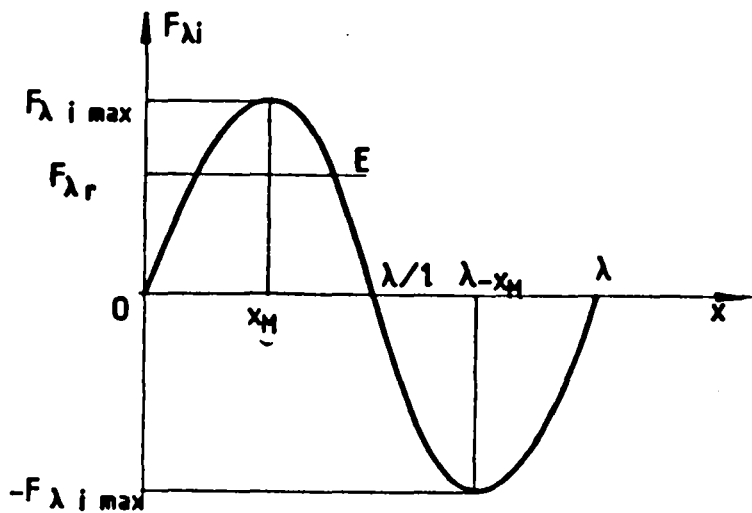
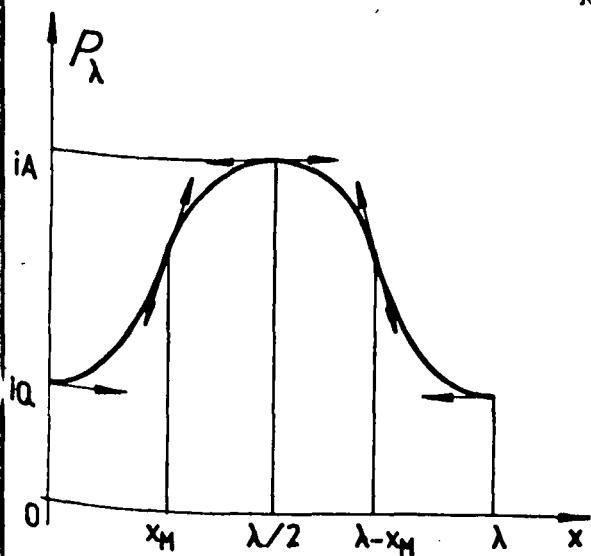


Figure 9 : Perméance par pas dentaire à i constant.

Figure 10 : Force par pas dentaire à i constant.

- L'effort par pas dentaire à courant constant a un développement en série se déduisant de celui de la perméance par dérivation des termes successifs.

$$F_{\lambda i} = \frac{n^2 i^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} - \frac{2k\pi}{\lambda} P_{\lambda k} \sin k \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

La figure 10 donne l'allure de la courbe $F_{\lambda i}$; elle correspond à une sinusoïde déformée par la présence d'harmoniques.

La courbe $F_{\lambda i}$ passe par un maximum $F_{\lambda i \max}$ pour $x = x_M$ et par un minimum, de même valeur absolue, pour $x = \lambda - x_M$.

Ces extrema sont obtenus

$$\text{pour } \frac{\delta F_{\lambda i}}{\delta x} = 0, \text{ soit pour } \frac{\delta^2 P_{\lambda}(i, x)}{\delta x^2} = 0,$$

ils correspondent donc aux points d'inflexion de la courbe de perméance.

- Si la machine est soumise à un effort résistant constant par pas dentaire $F_{\lambda r}$, le point d'équilibre stable est donné :

$$\text{par } F_{\lambda i} = F_{\lambda r}, \text{ avec } \frac{\delta(F_{\lambda i} - F_{\lambda r})}{\delta x} < 0.$$

Il correspond à l'intersection E de la courbe $F_{\lambda i}$ avec la droite $F_{\lambda r}$ dans l'intervalle $[x_M, \lambda - x_M]$.

II.1.3. Effort à flux constant

Si le flux est constant, l'expression de l'effort déduite de la variation de l'énergie s'écrit

$$F_{\lambda \phi} = - \frac{\phi^2}{2n^2} \frac{\delta R_{\lambda}(\phi, x)}{\delta x}$$

- La réluctance $R_{\lambda}(\phi, x)$ est une fonction périodique de x , de période λ ; elle est maximale quand les dents sont en quinconce ($x = 0$), minimale quand elles sont en position alignée ($x = \lambda/2$). On pose

$$R_{\lambda \phi Q} = R_{\lambda}(\phi, 0) ; R_{\lambda \phi A} = R_{\lambda}(\phi, \lambda/2)$$

La figure 11 montre comment la réluctance varie en fonction de x , cette courbe est symétrique par rapport à l'axe d'abscisse $\lambda/2$.

Le développement en série de la fonction $R_{\lambda}(\phi, x)$ est de la forme

$$R_{\lambda}(\phi, x) = R_{\lambda 0} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{\lambda k} \cos k \frac{2\pi}{\lambda} x$$

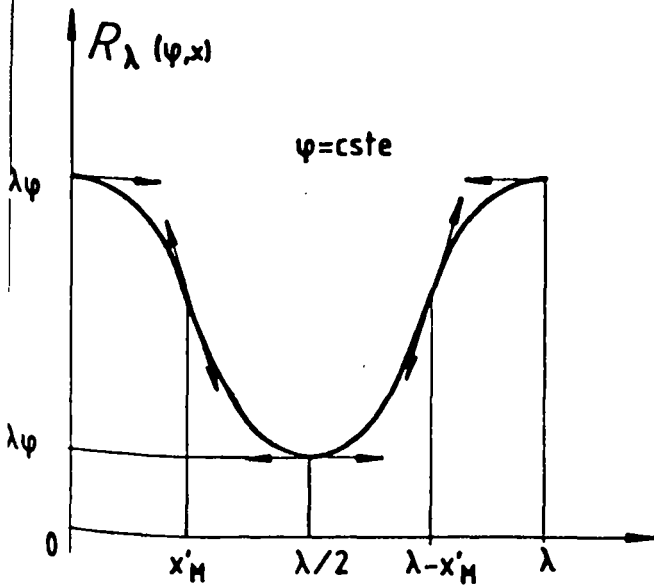


Figure 11 : Réductance par pas dentaire, à ϕ constant.

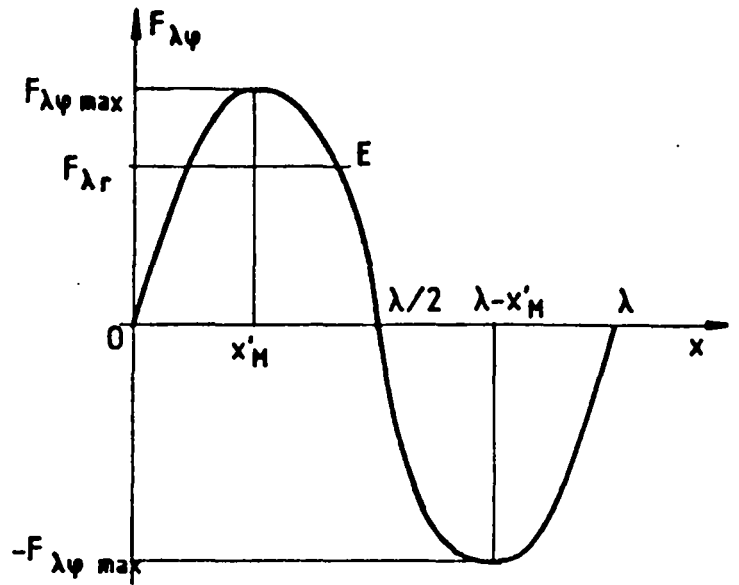


Figure 12 : Force par pas dentaire, à ϕ constant.

- L'effort se déduisant de la dérivée de la réductance par rapport à x , son développement en série s'écrit

$$F_{\lambda\phi} = \frac{\phi^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi}{\lambda} R_{\lambda k} \sin k \frac{2\pi x}{\lambda}$$

et l'allure de la courbe $F_{\lambda\phi}$ est telle qu'indiqué sur la figure 12 ; il s'agit d'une sinusoïde déformée par la présence d'harmoniques.

L'effort passe par un maximum, égal à $F_{\lambda\phi \max}$, pour $x = x'_M$ et par un minimum, égal à $-F_{\lambda\phi \max}$, pour $x = \lambda - x'_M$.

Ces extrema correspondent à

$$\frac{\delta F_{\lambda\phi}}{\delta x} = 0 \quad \text{donc à} \quad \frac{\delta^2 R_{\lambda}(\phi, x)}{\delta x^2} = 0$$

c'est-à-dire aux points d'inflexion de la courbe de réductance.

- Si la machine est soumise à un effort résistant par pas dentaire $F_{\lambda r}$ constant, le point d'équilibre stable, donné par

$$F_{\lambda\phi} = F_{\lambda r} \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{\delta x} (F_{\lambda\phi} - F_{\lambda r}) < 0$$

se trouve en E à l'intersection de la courbe $F_{\lambda\phi}$ avec la droite $F_{\lambda r}$ dans l'intervalle $[x'_M, \lambda - x'_M]$.

II.2. Les simplifications usuelles

Les calculs qui précèdent sont valables, en l'absence d'hystérésis, que le circuit magnétique soit saturé ou non. Dans la pratique le calcul des perméances ou des réluctances, pour un circuit magnétique complet comportant un entrefer de profil variable, nécessite le recours aux calculs de champs en utilisant des modèles prenant éventuellement en compte le phénomène de saturation. Nous indiquerons au paragraphe III les méthodes de détermination adoptées.

Mais, pour de très nombreuses applications, on se contente d'une étude simplifiée. Les simplifications usuelles, que nous allons présenter, peuvent être utilisées soit séparément, soit à la suite les unes des autres.

II.2.1. Non prise en compte de la saturation

- Une première simplification consiste à supposer le circuit magnétique non saturé ; la perméance et la réluctance du circuit complet sont indépendantes du courant et du flux, elles ne dépendent que de sa géométrie.

$$F_{\lambda} = \frac{n^2 i^2}{2} \frac{d P_{\lambda}(x)}{dx} \quad \text{ou} \quad F_{\lambda} = - \frac{\phi^2}{2n^2} \frac{d R_{\lambda}(x)}{dx},$$

$$\text{avec } P_{\lambda}(x) = \frac{1}{R_{\lambda}(x)}.$$

- D'ordinaire on suppose non plus constante mais infinie la perméabilité magnétique du fer. Dans ce cas le fer est supposé équipotentiel et les lignes de champ qui en sortent sont perpendiculaires à son contour. Dans les relations donnant la force F_{λ} seules la perméance $P_{\lambda e}$ ou la réluctance $R_{\lambda e}$ d'entrefer interviennent encore

$$F_{\lambda} = \frac{n^2 i^2}{2} \frac{d P_{\lambda e}(x)}{dx} \quad \text{ou} \quad F_{\lambda} = - \frac{\phi^2}{2n^2} \frac{d R_{\lambda e}(x)}{dx},$$

$$\text{avec } P_{\lambda e}(x) = \frac{1}{R_{\lambda e}(x)}.$$

Cette simplification permet de ramener l'étude de la force à celle de la perméance ou de la réluctance d'entrefer, donc d'un milieu de perméabilité constante et connue.

II.2.2. Schématisation de la courbe force-déplacement

• Une autre voie consiste à passer par la valeur moyenne de la force et à en déduire ensuite la valeur de celle-ci pour une position x quelconque.

La valeur moyenne \bar{F}_λ correspond à la partie positive des courbes des figures 10 et 12.

$$\bar{F}_\lambda = \frac{2n^2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \left[\int_0^i \frac{\delta P_\lambda(i, x)}{\delta x} i \, di \right] dx$$

$$\text{ou } \bar{F}_\lambda = -\frac{2}{\lambda n^2} \int_0^{\lambda/2} \left[\int_0^\phi \frac{\delta R_\lambda(\phi, x)}{\delta x} \phi \, d\phi \right] dx$$

Ces relations peuvent encore être simplifiées dans le cas d'une alimentation à courant constant ($\bar{F}_{\lambda i}$) ou d'une alimentation à flux constant ($\bar{F}_{\lambda \phi}$) :

$$\bar{F}_{\lambda i} = \frac{n^2 i^2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \frac{\delta P_\lambda(i, x)}{\delta x} dx = \frac{n^2 i^2}{\lambda} (P_{\lambda i A} - P_{\lambda i Q})$$

$$\bar{F}_{\lambda \phi} = -\frac{\phi^2}{n^2 \lambda} \int_0^{\lambda/2} \frac{\delta R_\lambda(\phi, x)}{\delta x} dx = \frac{\phi^2}{n^2 \lambda} (R_{\lambda \phi Q} - R_{\lambda \phi A})$$

On constate que les forces moyennes développées à courant constant ou à flux constant ne dépendent que des perméances ou des réluctances en position alignée et en quinconce.

- Si, reprenant la première simplification, on suppose que le circuit magnétique n'est pas saturé, les perméances et réluctances sont indépendantes des courants et des flux. On peut alors écrire

$$\bar{F}_{\lambda i} = \frac{n^2 i^2}{\lambda} (P_{\lambda A} - P_{\lambda Q}) ; \bar{F}_{\lambda \phi} = \frac{\phi^2}{n^2 \lambda} (R_{\lambda Q} - R_{\lambda A}),$$

$$\text{avec } P_{\lambda A} = \frac{1}{R_{\lambda A}} \text{ et } P_{\lambda Q} = \frac{1}{R_{\lambda Q}}$$

- Si on suppose la perméabilité du fer infinie, seules les perméances et réluctances d'entrefer interviennent

$$\bar{F}_{\lambda i} = \frac{n^2 i^2}{\lambda} (P_{\lambda eA} - P_{\lambda eQ}) ; \bar{F}_{\lambda \phi} = \frac{\phi^2}{n^2 \lambda} (R_{\lambda eQ} - R_{\lambda eA}),$$

$$\text{avec } P_{\lambda eA} = \frac{1}{R_{\lambda eA}} \text{ et } P_{\lambda eQ} = \frac{1}{R_{\lambda eQ}}.$$

Les courbes $F_{\lambda i}(i, x)$ et $F_{\lambda \phi}(\phi, x)$, à courant et à flux constant ayant une allure sinusoïdale, on peut, avec une approximation raisonnable, supposer que ces courbes sont des sinusoïdes. On peut alors déduire la valeur de l'effort de $\bar{F}_{\lambda i}$ et $\bar{F}_{\lambda \phi}$, en écrivant

$$F_{\lambda i} \approx \frac{\pi}{2} \bar{F}_{\lambda i} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \quad \text{et} \quad F_{\lambda \phi} \approx \frac{\pi}{2} \bar{F}_{\lambda \phi} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

ou, en remplaçant $\bar{F}_{\lambda i}$ et $\bar{F}_{\lambda \phi}$ par leur valeur,

$$F_{\lambda i} \approx \frac{n^2 i^2 \pi}{2\lambda} (P_{\lambda iA} - P_{\lambda iQ}) \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$$F_{\lambda \phi} \approx \frac{\phi^2 \pi}{2n^2 \lambda} (R_{\lambda \phi Q} - R_{\lambda \phi A}) \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Ces expressions sont évidemment simplifiables si on fait de plus l'hypothèse que le circuit magnétique n'est pas saturé ou que la perméabilité du fer est infinie. On obtient ainsi

- dans le premier cas,

$$F_{\lambda i} \approx \frac{n i^2 \pi}{2\lambda} (P_{\lambda A} - P_{\lambda Q}) \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$$F_{\lambda \phi} \approx \frac{\phi^2 \pi}{2n^2 \lambda} (R_{\lambda Q} - R_{\lambda A}) \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

- dans le second cas,

$$F_{\lambda i} \approx \frac{n i^2 \pi}{2\lambda} (P_{\lambda eA} - P_{\lambda eQ}) \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$$F_{\lambda \phi} \approx \frac{\phi^2 \pi}{2n^2 \lambda} (R_{\lambda eQ} - R_{\lambda eA}) \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

II.3. Les fonctions caractéristiques de denture

II.3.1. Définition

Le calcul de l'effort par pas dentaire et les simplifications usuelles que nous venons de rappeler montrent que les valeurs maximale $P_{\lambda iA}$ et minimale $P_{\lambda iQ}$ de la perméance ou $R_{\lambda\phi Q}$ et $R_{\lambda\phi A}$ de la réluctance par pas constituent les *fonctions caractéristiques d'une denture*.

La connaissance de ces fonctions permet de calculer facilement la valeur moyenne de l'effort et d'en déduire une expression approchée de l'effort local.

De plus ces valeurs extrêmes de la perméance et de la réluctance sont liées entre-elles dans le cas des circuits linéaires et dans celui où on se limite à des calculs dans l'entrefer. La détermination ainsi approchée des "fonctions caractéristiques de dentures" est alors particulièrement intéressante car elle débouche aussi bien sur l'étude du fonctionnement à courant constant que sur celle du fonctionnement à flux constant.

On peut remarquer que cette approche rejoint celle communément adoptée pour l'étude des machines synchrones à pôles saillants. Dans la méthode des deux axes (direct, en quadrature), on évalue la perméance de l'entrefer suivant l'axe direct puis suivant l'axe en quadrature pour en déduire les inductances puis les flux correspondants et passer des composantes des flux et des courants à l'expression du couple [5], [17]. Ici au lieu de travailler par distance polaire, on travaille par pas dentaire.

Pour illustrer cette mise en évidence de l'intérêt des fonctions caractéristiques de denture, rappelons quelques exemples d'utilisation et les résultats couramment admis qu'ils ont permis d'établir.

II.3.2. Exemples d'utilisation

* Un premier exemple d'utilisation des fonctions caractéristiques de dentures est donné par J.M. KAUFFMAN [18]. Dans l'étude des machines "multistacks", il adopte pour caractériser la denture les notations indiquées sur la figure 13 et fait les hypothèses suivantes :

- la fraction du flux traversant l'entrefer en dehors de la zone où l'épaisseur d'entrefer est égale à e est négligée devant celle qui va de sommet de dent à sommet de dent.
- l'induction dans l'entrefer est purement radiale. Par pas dentaire, la seule perméance prise en compte est donc celle du tube de flux hachuré sur la figure.

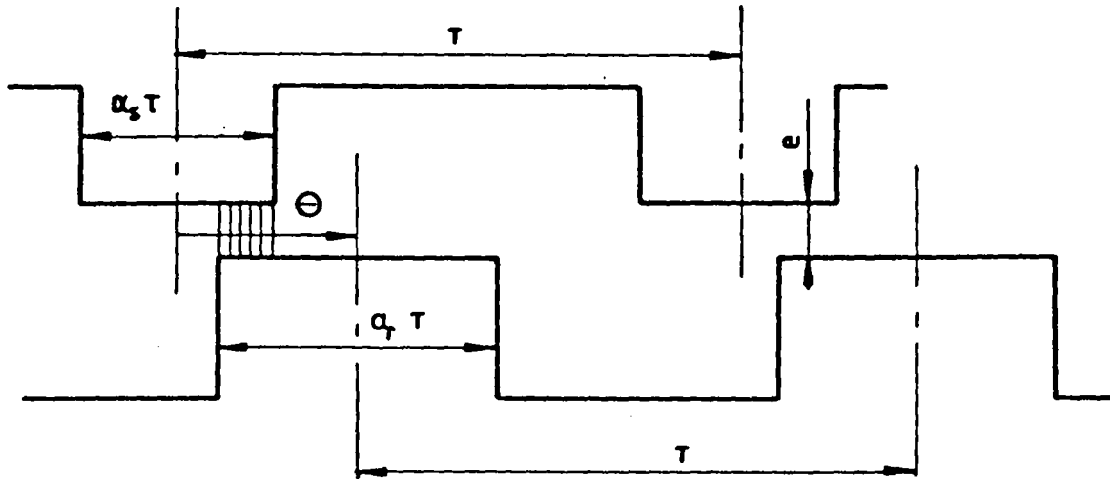


Figure 13 : Modélisation de la denture.

Dans ces conditions, l'auteur montre que quelles que soient les valeurs des rapports α_s et α_r qui caractérisent la largeur relative des dents du stator et du rotor, la perméance totale \mathcal{P} de l'entrefer varie en fonction de l'écart angulaire "électrique" θ suivant la courbe en trapèze de la figure 14.

Si \textcircled{H} est l'écart angulaire géométrique

$$\theta = Z_r \textcircled{H} ,$$

Z_r désignant le nombre de dents.

Les rapports α_1 et α_2 sont des fonctions de α_s et α_r .

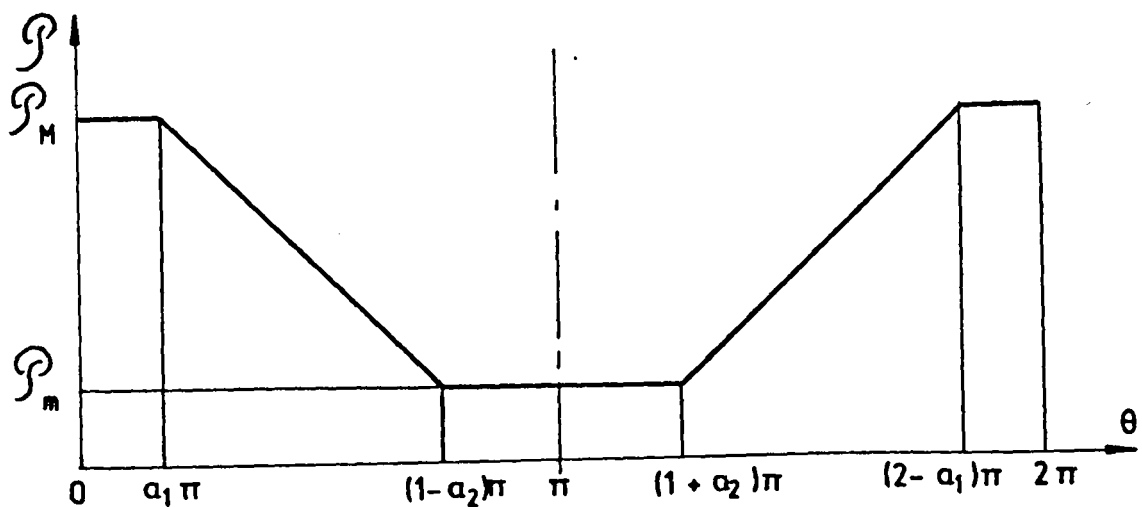


Figure 14 : Courbe de perméance.

Le développement en série de la perméance $P(\theta)$ s'écrit :

$$P(\theta) = P_0 + \sum_k P_k \cos k\theta$$

$$\text{avec } P_0 = \frac{P_M - P_m}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} (P_M - P_m)$$

$$P_k = \frac{2}{k^2 \pi^2} \frac{P_M - P_m}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} [\cos k \alpha_1 \pi - (-1)^k \cos k \alpha_2 \pi],$$

P_M étant la réluctance dans la position alignée, P_m dans la position en quinconce.

Pour une alimentation à courant i constant et à un seul stack alimenté, le couple C a pour expression, si on se limite aux termes en θ et en 2θ ,

$$C = -Z_r n^2 i^2 P_1 (\sin \theta + 2 \frac{P_2}{P_1} \sin 2\theta)$$

On voit l'intérêt qu'il y a à connaître P_M et P_m pour déterminer le couple.

* Un second exemple est offert par les travaux de HARRIS [8], [12] qui l'ont conduit à une approche unifiée du couple statique des machines pas à pas [19].

Dans l'article référencé [12], cet auteur s'intéresse au couple moyen \bar{T} développé par une machine de base ayant des dents identiques au stator et au rotor alimentée par des créneaux de courant.

Il suppose les encoches "infiniment" profondes, ce qui correspond au profil d'entrefer dont le développement linéaire est représenté sur la figure 15 avec les notations qu'il adopte.

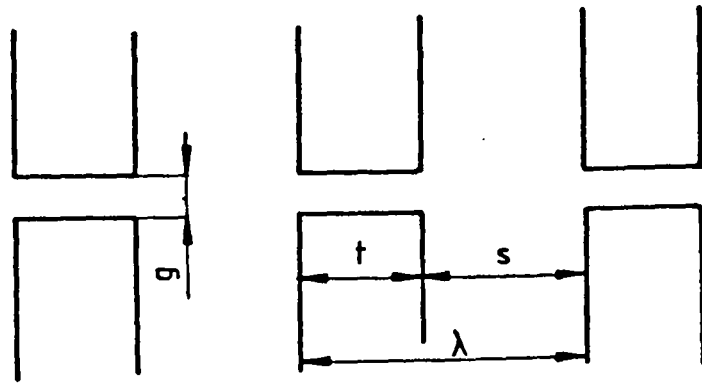


Figure 15 : Géométrie de l'entrefer.

Il désigne par

N , le nombre de dents, le même au stator et au rotor,

L , la longueur de la machine,

R , le diamètre extérieur du rotor,

V_r , le volume actif du rotor $\pi R^2 L$,

F , la force magnétomotrice homopolaire appliquée entre stator et rotor,

Φ_1 et Φ_2 , les flux totaux à travers l'entrefer en position alignée et en quinconce.

Si F est suffisamment faible, les surfaces métalliques au stator et au rotor peuvent être considérées comme équipotentielles : les flux sont liés aux coefficients de perméance d'entrefer dans les positions correspondantes par

$$\Phi_1 = \mu_0 N P_1 L F$$

$$\Phi_2 = \mu_0 N P_2 L F$$

- Dans une première étude linéaire simplifiée, en négligeant le flux passant par le flanc des dents et en posant

$$B = \mu_0 F/g,$$

l'auteur établit, par la théorie électromagnétique habituelle, la valeur du couple moyen

$$\bar{T} = \frac{2 V_r B^2}{\mu_0} \left[\frac{P_1 - P_2}{(\lambda/g)^2} \right]$$

- Puis il donne une approche simplifiée de la prise en compte de la saturation.

Supposant l'induction maximale égale à l'induction B_S dans les dents en position alignée, il obtient

$$\mu_0 P_1 L F = B_S t L$$

d'où l'induction dans l'entrefer

$$B = \frac{B_S t}{P_1 g}$$

et la nouvelle expression du couple moyen

$$\bar{T} = \frac{2 V_r B_S^2}{\mu_0} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{P_1 - P_2}{P_1^2} \right]$$

- Il montre enfin comment tenir compte d'une façon plus précise de la saturation. Pour cela il propose de modéliser les caractéristiques (F) pour les positions alignée et en quinconce des dentures :

La réluctance totale du circuit magnétique est prise égale à la somme

- de la réluctance linéaire de l'entrefer calculable à partir de P_1 et P_2
- d'une réluctance non linéaire représentant la consommation de f.m.m. dans le corps des dents et dans les autres parties métalliques.

Cette réluctance non linéaire est supposée fonction du flux dans l'entrefer mais la même pour les deux positions.

Des hypothèses sur la forme des courbes $\Phi(F)$ en permettent de proposer comme couple moyen *maximum* \bar{T}' .

$$\bar{T}' = \frac{2 V_r B_S^2}{\mu_0} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{P_1 - P_2}{P_1 P_2} \right]$$

- Quelle que soit l'approche envisagée on constate que le couple moyen est déterminé à partir de la seule connaissance de la géométrie des dents et des coefficients de perméance P_1 et P_2 .

La dernière relation est particulièrement utile puisqu'elle permet de tenir compte de la saturation tout en conservant P_1 et P_2 comme paramètres.

* *Le dernier exemple* que nous citerons est celui donné par ATHANI et KHURANA [20] qui reprennent les résultats concordants de MUKHERJI et NEVILLE [21] d'une part, de BEKHUISEN et DEBOER [22] d'autre part.

En désignant par Φ le flux totalisé, F la force magnétomotrice, λ le pas dentaire, D le diamètre de la machine, P_1 et P_2 les perméances en position alignée et en quinconce des dentures, ces auteurs proposent comme valeur \bar{C} du couple moyen

$$\bar{C} = \frac{D \Phi F}{2\lambda} \cdot \frac{P_1 - P_2}{P_1}$$

* Les exemples précédents montrent la convergence de vue de nombreux auteurs sur l'intérêt de connaître les fonctions caractéristiques de denture.

Pour évaluer ces fonctions les approches sont très différentes mais relèvent toutes, en fait, des méthodes de calcul de champs.

III. CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES DE CHAMPS

L'étude théorique des champs électromagnétiques repose essentiellement sur les lois de Maxwell. Dans la pratique, en électrotechnique les phénomènes mettent en jeu des fréquences peu élevées et les lois de Maxwell se réduisent à celles du régime quasi-statique, écrites sous forme différentielle ou intégrale [23]. Les équations de ce régime se trouvent encore simplifiées dans le cas des dispositifs linéaires, en l'absence de charge ou en l'absence de courant.

Les méthodes de résolution des problèmes d'électromagnétisme sont connues et ont donné lieu à une abondante littérature. Dans leur ouvrage [24], BINNS et LAWRENSON ont présenté et analysé toutes les méthodes couramment employées.

Plutôt que de comparer ces méthodes quant à leurs résultats, nous nous proposons ici de rappeler rapidement les différentes hypothèses qu'elles supposent, les difficultés qu'elles présentent quant à leur emploi et la nature des conclusions que l'on peut en tirer. En fait on s'intéressera essentiellement à l'apport qu'elles peuvent fournir à l'évaluation des fonctions caractéristiques de denture.

On distinguera les méthodes de résolution algébrique, les méthodes de simulation et les méthodes approchées [25].

III.1. Les méthodes de résolution algébriques

Les méthodes algébriques ne peuvent être utilisées que pour un milieu linéaire ; elles s'appliquent donc aux problèmes d'entrefer. Dans ce cas particulier, l'équation à résoudre est l'équation de Laplace

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

III.1.1. Résolution analytique directe

L'équation de Laplace étant une équation aux dérivées partielles en termes de coordonnées spatiales, on cherche à en réduire la complexité en choisissant un système de coordonnées qui permette à la fois d'exprimer le potentiel sous forme d'un produit de fonctions de chacune des coordonnées et de tenir facilement compte des conditions aux limites [26].

Cette méthode parfaitement rigoureuse n'est malheureusement utilisable que lorsque le système de coordonnées épouse le domaine étudié. Ce n'est pas le cas des entrefers de machines dentées dont les contours sont au moins formés de lignes brisées.

III.1.2. Méthode de la transformation conforme

La méthode des transformations conformes [27] permet de générer une infinité de systèmes de coordonnées orthogonales pour les problèmes à deux dimensions, en utilisant les propriétés des fonctions de la variable complexe.

Pour obtenir la solution d'un problème de champ par cette méthode, il faut d'une part qu'on puisse transformer le champ donné en un champ plus simple, d'autre part qu'on puisse résoudre les équations correspondant à ce champ plus simple.

Le recours à cette méthode n'est possible que si les limites du champ étudié coïncident avec des lignes équipotentielles ou des lignes de champ ou bien si cela correspond à une approximation acceptable. La perméabilité magnétique doit en outre être constante dans le domaine étudié.

Très souvent la transformation fait intervenir des courbes définies jusqu'à l'infini ; il faut donc vérifier que les conséquences de ce type d'hypothèse n'affecte pas la valeur du résultat obtenu.

La méthode de la transformation conforme n'est en fait applicable qu'à un nombre limité de problèmes et sa mise en oeuvre nécessite beaucoup de calculs analytiques.

Cette méthode se révèle bien adaptée à l'étude des domaines limités par des lignes brisées, ce qui explique qu'elle ait été très utilisée pour des problèmes de dentures [21], [28], [29], [30], [31]. Son principal atout, quand elle peut être valablement appliquée, est qu'elle aboutit à une présentation des résultats sous forme analytique. C'est la forme qui réduit au minimum le recours au calcul numérique et le coût de la solution.

III.2. Les méthodes de simulation

Les méthodes de simulation cherchent à résoudre par la voie expérimentale, sur un modèle simple, des problèmes décrits par les équations de Laplace. Le problème d'électrostatique ou de magnétostatique est alors remplacé par l'étude des courants dans un milieu homogène. Les raisons expérimentales limitent pratiquement l'emploi de ces méthodes à des problèmes à deux dimensions.

- La méthode rhéographique consiste à placer des électrodes, dont la forme est imposée par le problème à résoudre, dans une cuve remplie d'électrolyte et à déterminer les équipotentielles. Sur le même principe on peut utiliser du papier graphité sur lequel les électrodes sont dessinées par un dépôt d'argent [32] ou divers procédés analogues (papier télédeltos...).

- Une autre méthode utilise des réseaux de résistances. Sur la surface on place un grand nombre de points équidistants, chaque point est relié à ses quatre voisins par des résistances de même valeur. Le courant dans chaque résistance étant proportionnel à la différence de potentiel entre ses extrémités, si on applique des tensions convenables aux limites du réseau simulant le problème à résoudre, on peut mesurer directement le potentiel de chaque point.

- Une méthode récente utilise un modèle en tôle mince de grande résistivité [33], [34]. Le modèle a la forme du domaine plan étudié et permet de déterminer, par des mesures de résistances au pont de Thomson, la perméance d'une section d'entrefer.

Toutes les méthodes de simulation nécessitent la mise au point d'un dispositif expérimental valable pour une seule configuration et dont l'exploitation peut être assez longue. Ces méthodes sont parfois précises mais elles se prêtent mal à la recherche paramétrique, caractéristique des problèmes d'optimisation.

III.3. Les méthodes de résolution approchée

Suivant la démarche utilisée les méthodes de résolution approchée peuvent être classées en méthodes numériques et en méthodes "graphiques".

III.3.1. Les méthodes numériques

Quand la résolution analytique des problèmes de champ est impossible, on a le plus souvent recours à des techniques d'analyse numérique qui substituent au problème réel un problème approché et fournissent un algorithme de calcul adapté au traitement par ordinateur.

Deux catégories de méthodes, qui se distinguent par le mode d'approximation, sont utilisées. La première, la plus ancienne en électromagnétisme, est la méthode des différences finies [35] : c'est l'opérateur laplacien lui-même qui est alors approché ; on cherche la solution du système simplifié. La seconde, d'emploi plus récent, est la méthode des éléments finis [36] : la solution est approchée dès le départ, le problème devient de trouver la meilleure approximation possible de la solution en conservant l'opérateur différentiel.

Ces méthodes ont été comparées [37] quant à leurs algorithmes, leur mise en oeuvre sur ordinateur et leur efficacité tant pour la taille des problèmes à résoudre que pour la durée du temps de calcul sur machine.

Avant la résolution proprement dite, ces méthodes nécessitent la préparation du maillage et cette opération, selon les logiciels disponibles, peut se révéler assez longue, d'autant que les premiers résultats conduisent souvent à retoucher le maillage initial.

La précision des résultats dépend à la fois de l'algorithme de résolution et du maillage choisi. Leur justesse dépend essentiellement du choix des conditions aux limites, ce qui implique une appréhension globale du problème à résoudre y compris de l'importance des zones saturées. Enfin la durée d'exécution des programmes de calcul sur ordinateur est relativement longue, donc onéreuse, surtout si on recherche une grande précision par un maillage très serré.

Ces méthodes, fondées sur la notion de potentiel vecteur, permettent d'obtenir les différents champs vectoriels mais la détermination des grandeurs intégrales, comme la circulation, le flux ou la perméance, nécessitent des calculs annexes.

Aussi ces méthodes semblent plus adaptées à l'étude fine d'une solution quasi-optimale qu'à la recherche itérative de la solution optimale d'un problème donné.

L'augmentation des performances des ordinateurs laisse néanmoins présager un usage de plus en plus grand de codes interactifs, spécialement conçus pour l'électrotechnique [38], [39], [40], utilisant soit les méthodes des éléments finis soit celles des différences finies et rendus disponibles au plus grand nombre d'utilisateurs par l'intermédiaire des réseaux informatiques.

III.3.2. Les méthodes "graphiques"

La caractéristique des méthodes approchées d'inspiration "graphique" est le tracé approximatif, supposé suffisamment proche de la réalité, des lignes de champ et des équipotentielles. Ce tracé étant arbitraire, pour des raisons de calculabilité la forme choisie, dans un milieu de perméabilité constante, est le plus souvent une succession de segments de droites et d'arcs de cercle [41], [42].

En fait, en un point donné, les équations de Maxwell ne sont plus vérifiées et il est impossible de déterminer exactement la valeur des différents champs. Pour que la méthode puisse être utilisée, on substitue aux grandeurs vectorielles des grandeurs intégrales, comme les flux ou les perméances, généralement suffisantes pour déterminer les paramètres électriques du problème posé, en particulier les forces magnétomotrices.

L'inconvénient de ces méthodes est soit qu'elles n'aboutissent pas à une formulation systématique, soit qu'elles ne permettent d'aborder qu'un petit nombre de problèmes. Les plus connues sont celles de LEHMANN [43] et de FORBES sur lesquelles nous reviendrons, cette dernière est à rapprocher de la méthode de POHL [42].

IV. INTRODUCTION A LA NOTION DE "RESSEMBLANCE PAR ZONE"

La solution des équations de Maxwell peut être présentée sous forme de champ, de potentiel, de flux... Les résultats sont ensuite généralement présentés sous forme de graphiques parmi lesquels figure, essentiellement, le tracé des lignes de champ et des équipotentielles.

La cohérence et la cohésion des résultats des différentes méthodes de résolution des problèmes de champs permettent de formuler des réflexions de portée générale sur la topologie des champs électromagnétiques.

- A partir des équations, il est facile de montrer que les lignes de champ, d'une part, et les lignes équipotentielles, d'autre part, ne peuvent se couper ; chaque famille est orthogonale à l'autre.

- Dans une machine électrique, les lignes de champ peuvent, en première approximation, être réparties en deux familles distinctes :

- * l'une correspond aux flux de fuites et aux effets de bords ; on les groupe sous le nom de *franges*,
- * l'autre correspond aux *flux actifs* de la machine, généralement canalisés par son circuit magnétique, et répond au principe qu'on veut mettre en oeuvre.

La caractéristique essentielle de la zone des franges est l'extrême variété des formes des lignes de champ qui, en s'épanouissant, tendent à occuper au maximum l'espace qui environne la machine. Dans les graphiques habituels, la densité des lignes de champ dans la zone des franges est faible.

La caractéristique essentielle de la zone des flux actifs est la grande densité des lignes de champ. Contrairement à ce qu'on avait dans la zone des franges, les lignes de champ ont un dessin qui *évolue lentement* au fur et à mesure qu'on s'éloigne d'une ligne choisie comme référence, même quand la perméabilité magnétique du milieu évolue.

- Compte-tenu des symétries des machines, les champs électromagnétiques sont souvent tracés sur des graphiques à deux dimensions auxquels s'appliquent directement les remarques précédentes.

- Les caractéristiques des lignes de champ dans la zone des flux actifs montrent qu'on peut structurer le dessin des lignes de champ et des équipotentielles en domaines connexes s'appuyant sur ces lignes, à l'intérieur desquels les lignes de champ respectent certaines lois topologiques simples.

Autrement dit on peut décomposer l'ensemble du domaine étudié en un certain nombre de domaines où toutes les lignes de champ ont même forme (rectiligne ou courbe, avec ou sans point d'inflexion). Chaque domaine

ainsi défini est donc caractérisé par la "RESSEMBLANCE PAR ZONE" ou par l'homogénéité de l'allure de ses lignes de champ intérieures.

Pour aider à la délimitation de ces domaines on peut retenir le critère de la "satisfaction marginale" de l'allure des lignes du tracé : une ligne limite bien deux domaines si elle vérifie à la fois les allures des lignes de champ dans les deux domaines alors que ces allures sont différentes.

La figure 15 illustre par un exemple cette délimitation ; elle montre la structuration de l'entrefer par pas dentaire d'une machine à double denture en huit domaines. Ces domaines sont limités par des lignes en traits pleins, l'allure des lignes à l'intérieur de chacun d'eux est indiqué en traits interrompus. On a supposé que la surface du fer était équipotentielle. On constate qu'ainsi les limites des domaines passent par les points anguleux des équipotentielles.

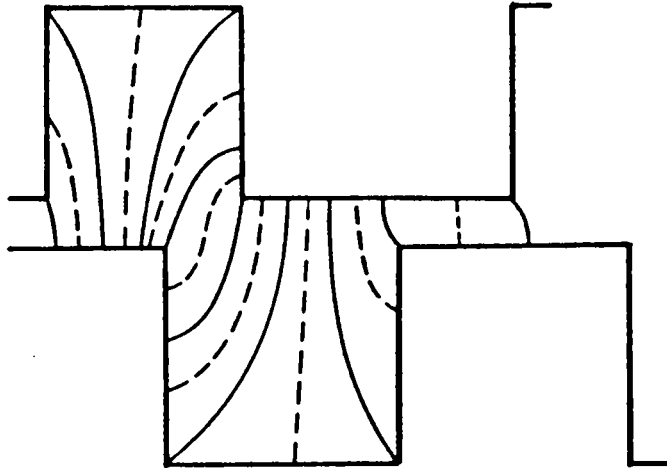


Figure 15 : Structuration d'un entrefer.

- La règle de la "ressemblance par zone", jusqu'ici peu explicitée, est en fait très largement utilisée comme justification des méthodes de résolution approchée des problèmes de champ qui présupposent l'allure des lignes de champ et des équipotentielles.

V. PROJET D'ETUDE ANALYTIQUE APPROCHEE

Les rappels de résultats connus et les réflexions qui précèdent nous ont conduit à proposer un projet d'étude analytique approchée des machines à réluctance variable.

V.1. Intérêt d'une étude analytique approchée

L'idéal pour concevoir et étudier une machine serait d'en avoir un modèle analytique parfait intégrant tous ses paramètres et permettant d'en optimiser les performances, conduisant à des calculs numériques réduits en nombre et en coût. Au contraire une étude purement numérique, adaptée à la particularité de chaque cas, permet l'étude fine d'une machine donnée mais entraînerait des frais prohibitifs si on voulait l'utiliser pour optimiser un type de machine ou comparer globalement des machines de types différents.

Dans le processus de définition d'une machine, un modèle analytique approché, fondé sur une modélisation adaptable à de nombreuses variantes, permet de mettre en évidence l'influence des paramètres. Lors de l'emploi d'un tel modèle, seule l'influence qualitative des paramètres peut être dégagée avec suffisamment de certitude. Cependant des études expérimentales ou des vérifications ponctuelles par des méthodes plus précises permettent d'évaluer la précision du projet théorique et parfois de mettre en évidence des coefficients correcteurs systématiques susceptibles de l'améliorer.

Finalement une étude analytique approchée peut permettre, à moindre frais, de définir l'ordre de grandeur des performances d'une machine de dimensions imposées. Une telle méthode apparaît ainsi comme un outil de conception bien adapté aux premières études et aux comparaisons sommaires.

C'est dans cette optique que le projet qui suit a été mûri.

V.2. Description de la méthode proposée

L'idée directrice de la méthode proposée est que la connaissance des expressions analytiques des fonctions caractéristiques calculées dans l'entrefer en régime linéaire est suffisante pour obtenir, par la méthode de HARRIS, une expression de la force moyenne ou du couple moyen en présence de saturation. La connaissance de cette force ou de ce couple est à son tour suffisante pour donner une expression approchée de la valeur locale, en admettant l'hypothèse sinusoïdale.

La difficulté de la méthode est dans la recherche d'une expression analytique approchée des fonctions caractéristiques de denture qui puisse s'adapter facilement à tous les types de profils d'entrefer.

Pour faciliter la présentation de la démarche proposée, il est commode de la décomposer en étapes qui font directement référence aux résultats présentés auparavant :

- 1^{ère} étape :

L'entrefer, limité par le fer supposé équipotentiel, est structuré en domaines possédant la ressemblance par zone. Cette opération n'est effectuée que pour les positions relatives des parties fixe et mobile donnant la perméance maximale et la perméance minimale.

- 2^{ème} étape

Pour chaque domaine ainsi délimité de l'entrefer on calcule, à l'aide de méthodes "graphiques" de résolution des problèmes de champ, l'expression analytique de la perméance.

- 3^{ème} étape

Les fonctions caractéristiques de denture sont calculées analytiquement, à partir des expressions obtenues à l'étape précédente, par les lois de mise en série ou en parallèle des perméances des domaines voisins dans l'entrefer structuré.

- 4^{ème} étape

La force ou le couple moyen sont déterminés par les formules habituelles dans le cas des machines pas ou très peu saturées, par la formule de HARRIS dans le cas des machines saturées.

- 5^{ème} étape

Supposant que la force ou le couple est une fonction sinusoïdale du déplacement, de la valeur moyenne on passe à l'expression analytique approchée de la valeur instantanée de la force ou du couple.

V.3. Les lacunes à combler

Pour la mise en oeuvre de cette méthode, c'est au niveau de la deuxième étape (calcul de la perméance des domaines possédant la "ressemblance par zone") qu'il nous manquait des éléments.

En effet, comme nous l'avons indiqué, les méthodes "graphiques" de résolution des problèmes de champ ne traitent que de problèmes se ramenant à des problèmes plans et certains problèmes plans n'étaient pas résolus.

Nous consacrerons une importante partie des deux chapitres suivants

- * à compléter les règles applicables dans le plan,
- * à étendre ces règles aux problèmes possédant la symétrie de révolution.

VI. RAPPEL DES METHODES "GRAPHIQUES" UTILISABLES

Avant d'aborder l'étude de ce complément et de cette extension, rappelons rapidement les résultats déjà disponibles pour les problèmes se ramenant à deux dimensions.

Comme nous l'avons vu, les méthodes graphiques utilisables sont essentiellement celles de LEHMANN et de FORBES.

VI.1. La méthode de LEHMANN

- La méthode de LEHMANN consiste à partir des surfaces équipotentielles qui limitent le domaine étudié, à tracer approximativement les surfaces équipotentielles correspondant aux fractions $1/2, 1/4, \dots$ de la différence de potentiel magnétique totale. On trace ensuite les surfaces, orthogonales aux précédentes, correspondant aux lignes du champ d'induction. Apparaissent ainsi des volumes qui, dans le cas habituel des dispositifs de longueur constante L , sont des parallélépipèdes curvilignes tel celui représenté à la figure 16.

Si on fait de plus l'hypothèse que le milieu est homogène, isotrope et de perméabilité constante μ , la réluctance du domaine vaut

$$R = \frac{\ell'}{\mu L \ell} = \frac{1}{\mu L} \frac{\ell'}{\ell}$$

ℓ' étant la longueur moyenne des lignes de champ, ℓ la largeur de la surface équipotentielle moyenne.

- On voit qu'on peut sortir de la relation le coefficient constant $1/\mu L$. Le tracé des lignes de champ et des équipotentielles peut donc se faire dans un plan perpendiculaire à la direction de L . LEHMANN préconise de faire $\ell' = \ell$, c'est-à-dire de faire apparaître des "carrés curvilignes" ; chaque domaine ainsi délimité a alors, au coefficient constant $1/\mu L$ près, une réluctance unité.

Les règles de mise en série et en parallèle de telles réluctances unitaires permet de calculer la réluctance totale de la zone à étudier.

- Cette méthode est en général utilisée, dans l'étude des machines, à l'évaluation de phénomènes de frange. Les domaines considérés se situent dans l'air vérifiant ainsi l'hypothèse de la perméabilité constante. Les surfaces des matériaux à haute perméabilité magnétique limitant ces domaines sont considérés comme des équipotentielles.

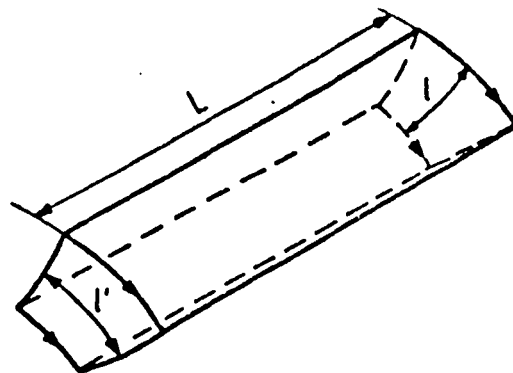


Figure 16 : Parallélépipède curviligne élémentaire.

Les conditions de continuité des lignes de champ et des équipotentiellles limitant les carrés voisins, celle d'orthogonalité des deux types de lignes, celle d'égale longueur et largeur moyennes de chacun des carrés guident très étroitement le tracé et assurent à la méthode une bonne précision relative.

- Puisque systématiquement graphique la méthode de LEHMANN n'aboutit pas à des calculs pouvant être présentés, même partiellement, sous forme analytique. Elle n'entre donc pas, en tant que telle, dans la méthode que nous proposons. Elle est toutefois très commode pour déterminer l'allure des lignes de champ dans les cas difficiles et guider ainsi le choix à opérer pour délimiter les domaines possédant la "ressemblance par zone". Aussi indiquerons-nous sa transposition des problèmes à deux dimensions aux problèmes axisymétriques.

VI.2. Les règles de FORBES

Les règles de FORBES sont souvent présentées à des fins didactiques et les plus classiques sont rappelées dans l'ouvrage de J. HOFFMANN [44].

Ces règles reposent sur l'hypothèse simplificatrice suivante : les lignes d'induction sont approchées par des segments de droites ou des arcs de cercles. Les surfaces équipotentiellles limitant le tube, d'aires S_1 et S_2 sont soit parallèles, soit dans le même plan, soit orthogonales mais toujours suffisamment proches l'une de l'autre. La perméabilité magnétique est supposée constante et égale à μ .

VI.2.1. Cas où S_1 et S_2 sont parallèles et en regard

On admet que la section de passage du flux est égale à la moyenne des surfaces S_1 et S_2 (figure 17) et on écrit :

$$R = \frac{2l}{\mu(S_1 + S_2)}$$

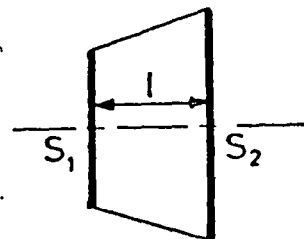


Figure 17 : Trace de deux surfaces parallèles et en regard.

VI.2.2. Cas où S_1 et S_2 sont égales et coplanaires

Il faut ici distinguer deux cas suivant que les surfaces sont très proches ou plus éloignées vis-à-vis de leurs dimensions.

- Si les surfaces sont très proches vis-à-vis de leurs dimensions.

On assimile les lignes d'induction à des demi-circonférences s'appuyant sur les deux surfaces (figure 18).

- Si celles-ci sont rectangulaires et de même longueur L , le tube élémentaire correspondant à x a pour longueur πx et pour section Ldx . Sa réluctance vaut donc :

$$dR = \frac{\pi x}{\mu L dx} = \frac{\pi}{\mu L} \frac{1}{x}$$

La réluctance totale s'obtient en intégrant cette expression pour x variant de R_1 à R_2

$$R = \frac{\pi}{\mu L \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

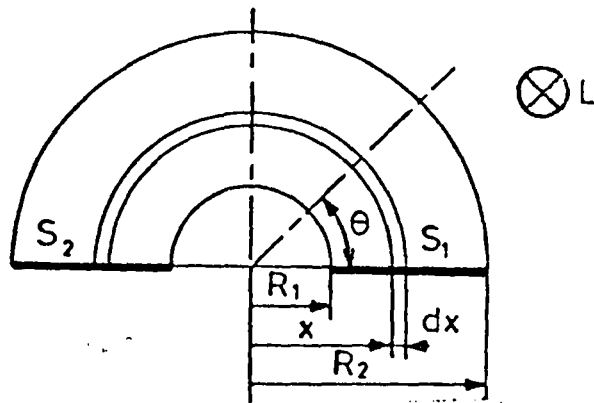


Figure 18 : Schématisation du tube de flux allant de S_1 à S_2 .

- Si S_1 et S_2 étaient décalées d'un angle θ , différent de π , on aurait :

$$R_{\theta} = \frac{\theta}{\mu L \ln (R_2/R_1)}$$

Quand S_1 et S_2 sont orthogonales, on prend donc

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\mu L \ln (R_2/R_1)}$$

- Si les surfaces sont éloignées vis-à-vis de leur dimension transversale.

Dans ce cas, on assimile chaque ligne de champ à un segment de droite prolongé par deux quarts de circonférence (figure 19).

La réluctance du tube élémentaire vaut :

$$dR = \frac{d + \pi x}{\mu L dx} = \frac{1}{\mu L} \frac{1}{d + \pi x}$$

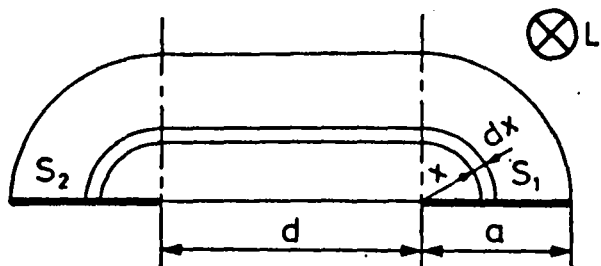


Figure 19 : Schématisation du tube de flux allant de S_1 à S_2 .

En intégrant de 0 à a, il vient

$$R = \frac{\pi}{\mu L \ln \frac{\pi a + d}{d}}$$

Remarques

- Si les surfaces S_1 et S_2 égales correspondent aux tracés de la figure 20, on obtient la réluctance totale en ajoutant les deux ou trois réluctances données par les relations précédentes.

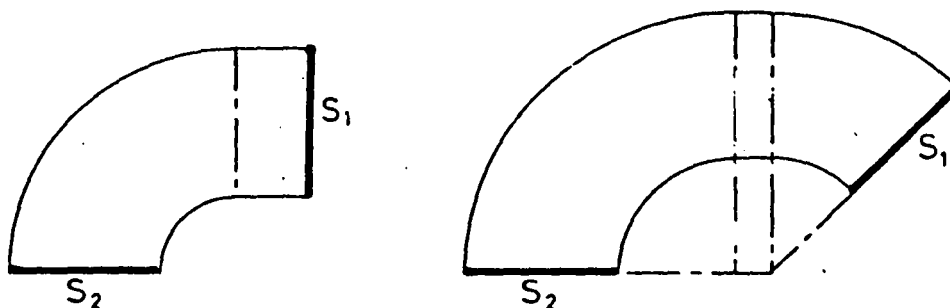


Figure 20 : Mise en série de réluctances données par les règles de FORBES.

- Les règles de FORBES donnent, dans tous les cas étudiés, des résultats sous forme analytique. Puisque dans la démarche proposée on désire une expression analytique des réluctances, on aura systématiquement recours à ces règles, après les avoir complétées puisque ce sera nécessaire.

```

** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** **
** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** **
** ** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **
** ** **     ** ** **

```

CHAPITRE II

APPLICATION AUX MACHINES A DOUBLE

DENTURE DROITE SYMETRIQUE

Nous avons appliqué la méthode d'étude analytique approchée présentée au chapitre précédent à la détermination des fonctions caractéristiques de denture des machines à double denture droite symétrique [45].

- Après avoir l'intérêt de la "ressemblance par zone" pour évaluer les fonctions caractéristiques pour ces machines, nous verrons que les règles de Forbes classiques doivent être complétées pour que le calcul analytique puisse être effectué.

- Une nouvelle règle, donnant la réluctance d'un tube de champ d'induction s'appuyant sur deux surfaces rectangulaires orthogonales de même longueur mais de largeurs différentes, est établie en assimilant les lignes de champ à des courbes elliptiques en anse de panier.

Les résultats de cette nouvelle règle ont été comparés à ceux obtenus, sur les mêmes exemples, par la méthode des éléments finis. L'excellente concordance des résultats conduit à retenir cette règle pour la modélisation de l'entrefer de la machine étudiée.

- Revenant à la machine à double denture droite symétrique, on peut à partir des résultats précédents structurer avec précision l'entrefer, puis calculer analytiquement les réluctances des différents domaines.

Une application numérique de synthèse est alors effectuée dans le but de mettre en évidence l'influence de la hauteur des dents sur la différence entre les fonctions caractéristiques de denture. Nous pourrions comparer les résultats de cette étude à ceux, plus classiques, fondés sur l'hypothèse de la profondeur infinie des encoches.

Si nous avons retenu le problème des machines à double denture droite symétrique, c'est que cette configuration de l'entrefer a été très souvent étudiée par les méthodes de transformation conforme [20], [21], [22]. On dispose donc là, d'une bonne base de comparaison pour la méthode d'étude que nous proposons.

I. APPLICATION DE LA RESSEMBLANCE PAR ZONE A LA DETERMINATION DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES

I.1. Hypothèses et notations adoptées

La figure 21 indique les notations que nous adopterons. Négligeant le rayon de courbure de la machine, on désignera par

- λ , le pas dentaire,
- t , la largeur des dents,
- s , la largeur des encoches,
- d , la profondeur des encoches,

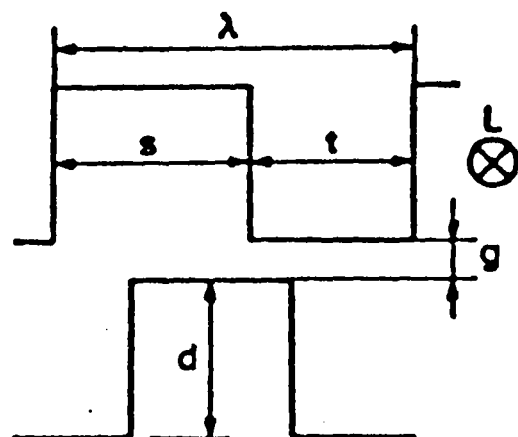


Figure 21 : Géométrie de l'entrefer.

g , l'épaisseur d'entrefer,
 L , la longueur de la denture.

(g sera supposé faible par rapport aux autres dimensions).

La détermination des fonctions caractéristiques de denture se faisant en régime non saturé, le fer est supposé de perméabilité magnétique infinie et ses limites extérieures équipotentielles.

Les symétries qui apparaissent lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux positions alignée et en quinconce des dents permettent de se limiter à l'étude d'un demi-pas dentaire. C'est ce que nous ferons pour les figures et les calculs qui suivent.

1.2. Structuration de l'entrefer (fig. 22)

Le contour des dents étant équipotentiel, les lignes de champ qui partent des points anguleux déterminent des domaines dans lesquels les lignes tracées obéissent à une loi unique de raccordement à deux plans.

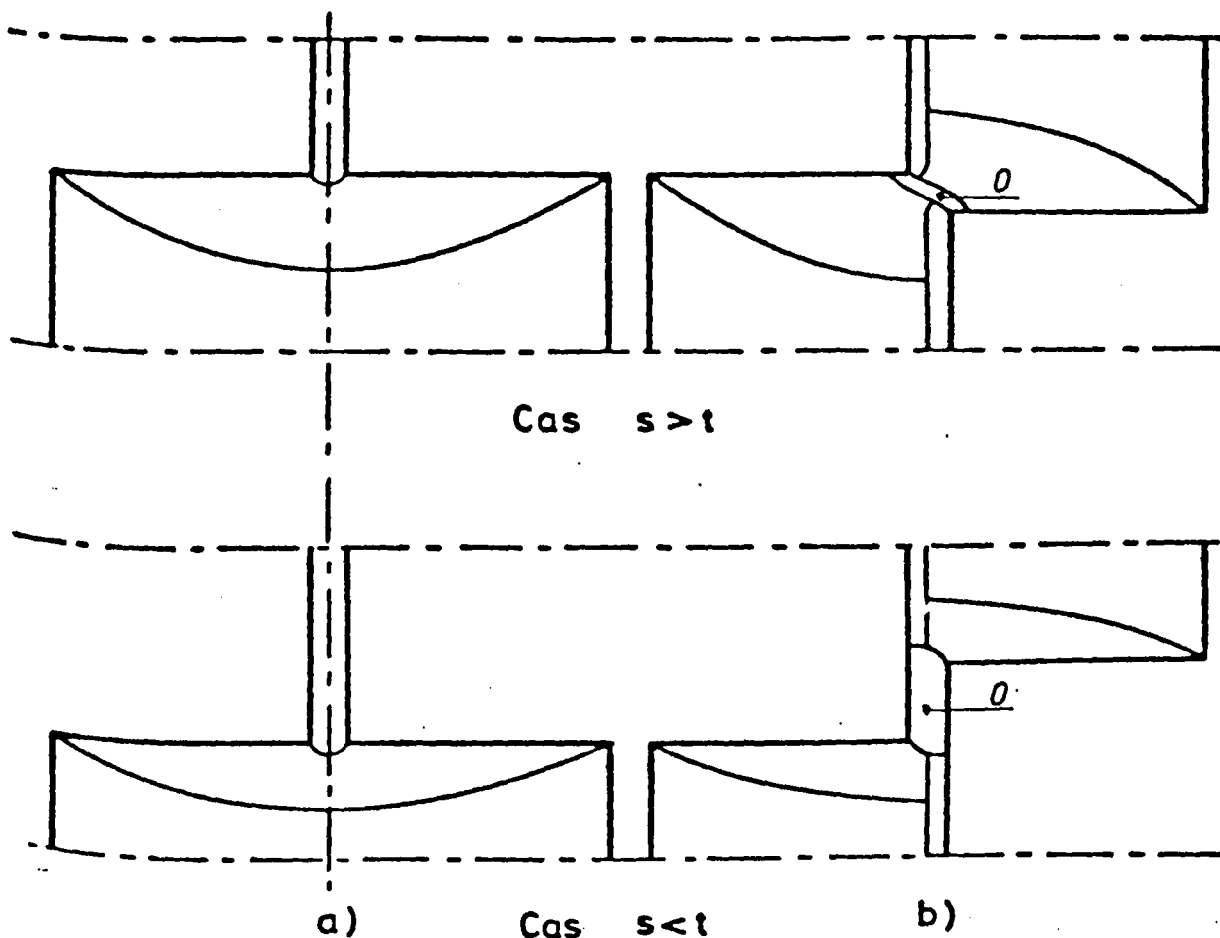


Figure 22 : Délimitation des zones où les lignes de champ ont la même forme.

a) dents face à face.

b) dents en quinconce.

D'autre part les deux dentures étant identiques, le tracé des lignes limitant les zones doit être symétrique par rapport à l'axe médian de l'entrefer quand les dents sont en position alignée, par rapport au point O équidistant de l'angle des deux demi-dents considérées quand on considère la position en quinconce.

Enfin, l'entrefer étant supposé étroit, les lignes de champ arrivant au sommet des dents restent sensiblement perpendiculaires à ces sommets au voisinage immédiat de ces derniers. Devant les dents, la ligne correspondant au milieu de l'entrefer est une équipotentielle.

L'ensemble des considérations qui précède conduit, suivant que les dents sont plus étroites ou plus larges que les encoches, suivant que les dents sont face à face ou en quinconce, aux quatre tracés de la figure 22. Ils correspondent tous à un demi-pas dentaire.

Pour ne pas alourdir l'exposé de la méthode, on se limitera, par la suite, à l'étude du cas où la dent est plus large que l'encoche. Cette restriction n'est guère gênante puisque les formules conservent dans les deux cas une présentation voisine.

1.3. Simplification de la structuration

Partant de la figure 22 ($s < t$), on a repris (figure 23) le découpage en zones, en en subdivisant certaines pour faciliter la comparaison entre les deux tracés, en repérant par une lettre chaque zone.

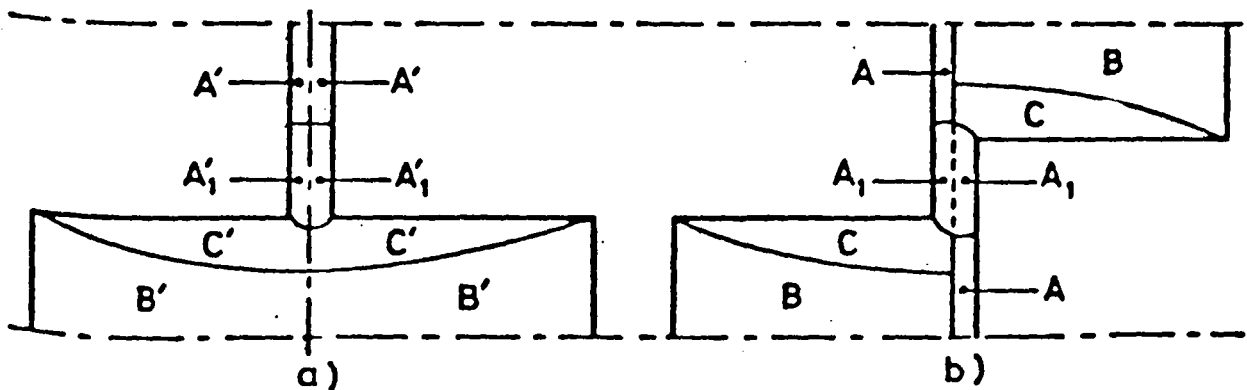


Figure 23 : Repérage des zones considérées

La comparaison des figures 23 a) et 23 b) permet de faire les approximations suivantes :

- L'entrefer étant étroit, la juxtaposition des zones B' et C' donne la même réluctance que la juxtaposition des zones B et C qu'on appellera zone G à la figure 24.
- Si les zones A' occupent la même largeur, face aux dents que les zones A, il en sera de même pour les zones A₁' et A₁. On est ainsi conduit à supposer que les zones A₁ et A₁' ont même réluctance bien que la ligne en traits interrompus séparant les deux zones A₁ de la figure 23 a) ne soit pas réellement une équipotentielle. On désignera par H sur la figure 24 la zone équivalente aux deux zones A₁, ou A₁' associées en série.

On arrive ainsi à la nouvelle configuration topologique de la figure 24.

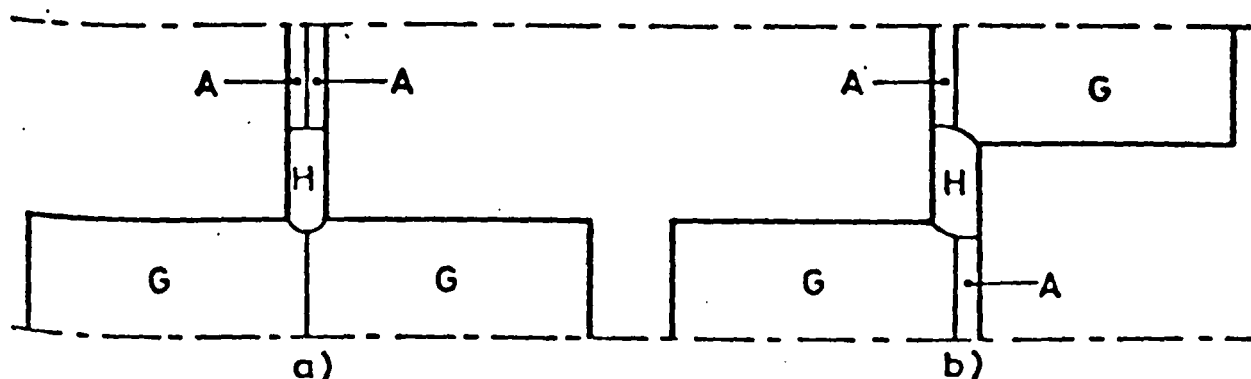


Figure 24 : Nouvelle structuration de l'entrefer.

1.4. Formules génératrices des fonctions caractéristiques de denture

De l'examen de la figure 24 on peut facilement déduire les formules génératrices donnant $P_{\lambda eA}$, perméance de l'entrefer en position alignée (fig. 24 a)), et $P_{\lambda eQ}$, perméance de l'entrefer en position en quinconce (fig. 24 b)), par pas dentaire.

Sur la figure 24 a), la zone H de perméance P_H est en parallèle, d'un côté avec deux zones A de perméance P_A chacune mises en série, de l'autre côté avec deux zones G de perméance P_G chacune également en série. On en déduit

$$P_{\lambda eA} = 2 \left[P_H + \frac{P_A}{2} + \frac{P_G}{2} \right] = 2 P_H + P_A + P_G$$

De même sur la figure 24 b), la zone H est placée en parallèle avec deux groupements identiques formés chacun d'une zone A en série avec une zone G. On en déduit :

$$P_{\lambda eQ} = 2 \left[P_H + 2 \frac{P_A P_G}{P_A + P_G} \right] = 2 P_H + 4 \frac{P_A P_G}{P_A + P_G}$$

On remarque l'extrême simplicité des formules génératrices de $P_{\lambda eA}$ et $P_{\lambda eQ}$, toute la difficulté a en effet été reportée sur la détermination de P_A , P_G et P_H .

I.5. Nécessité de compléter les règles de Forbes

C'est en fait la détermination de P_G qui soulève des difficultés, or c'est cette perméance qui permet d'évaluer l'influence des tubes de champ s'appuyant sur les côtés des dents et sur les fonds d'encoche, donc de ne pas tenir compte seulement des surfaces des dents directement en regard.

Le domaine G est formé de deux domaines, B et C, en parallèle. La perméance du domaine B peut être aisément calculée à partir de la règle de Forbes correspondant à la figure 17, à condition que l'on sache déterminer la surface d'appui au niveau du milieu de l'entrefer. Par contre la perméance du domaine C, qui est celle d'un tube joignant deux surfaces équipotentielles orthogonales d'aires différentes, ne correspond à aucune formule connue.

Cela nous a amené à proposer une extension des règles de Forbes au cas où les surfaces S_1 et S_2 sont rectangulaires, de même longueur L mais de largeurs différentes.

On établira la nouvelle règle dans le cas où S_1 et S_2 sont orthogonales. Mais, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait se ramener à des combinaisons de la nouvelle règle et des règles classiques comme on l'avait montré sur la figure 20 dans le cas où les surfaces S_1 et S_2 étaient égales.

II. EXTENSION DES REGLES DE FORBES [46]

II.1. Présentation des cas possibles

On désigne par x_1 et x_2 (fig. 25) les abscisses limitant la largeur de S_1 , par y_1 et y_2 les ordonnées limitant la largeur de S_2 . Puisque y_1 peut être inférieur, égal ou supérieur à x_1 , que y_2 peut, de même, être inférieur, égal ou supérieur à x_2 , il y a 3^2 soit 9 cas à étudier.

Si on tient compte de toutes les symétries et du cas qui correspond à une règle classique ($x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$) il ne reste que trois cas à examiner :

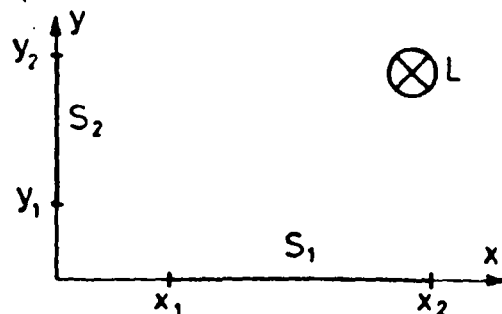


Figure 25 : Délimitation des surfaces S_1 et S_2 .

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } y_1 > x_1, \quad y_2 < x_2$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } y_1 = x_1, \quad y_2 < x_2$$

$$3^{\text{ème}} \text{ cas : } y_1 < x_1, \quad y_2 < x_2$$

Pour des raisons de calculabilité, on n'a étudié que le deuxième cas. On pourrait y ramener les deux autres en prolongeant la partie étudiée par un petit domaine à champ uniforme, ce qui est d'autant plus admissible que, dans les applications usuelles des règles de Forbes, x_1 et y_1 sont voisins.

II.2. Schématisation des lignes de champ

Il s'est avéré que les lignes de champ d'allure elliptique pouvaient être approchées par des arcs de cercles dont la construction est celle de l'anse de panier.

La figure 26 rappelle cette construction. Sur le segment DB, liant les points les plus éloignés des deux surfaces, on porte $DA = x_2 - y_2$. La médiatrice de AB coupe les axes Ox et Oy en C_1 et C_2 : C_1 est le centre de l'arc de cercle donnant la partie basse (BP) de l'anse de panier, C_2 est le centre du cercle donnant la partie haute (PD). Le raccordement se fait en P sur C_1C_2 .

La dernière anse de panier est dégénérée en un arc de cercle de centre O et de rayon $x_1 = y_1$. On désigne par Q le point d'intersection avec ce cercle de la parallèle à C_1C_2 passant par O.

Pour assurer la continuité de la forme des lignes de champ, nous avons imposé que chacune soit une anse de panier dont les arcs de cercles se raccordent sur la droite QP. Les centres C'_1 et C'_2 des cercles se raccordant en P_1 sont obtenus par les intersections avec Ox et Oy de la parallèle à C_1C_2 passant par P_1 .

II.3. Calculs préliminaires

Pour mener à bien le calcul de la réluctance, il faut au préalable déterminer quelques grandeurs géométriques et même discuter le signe de certaines.

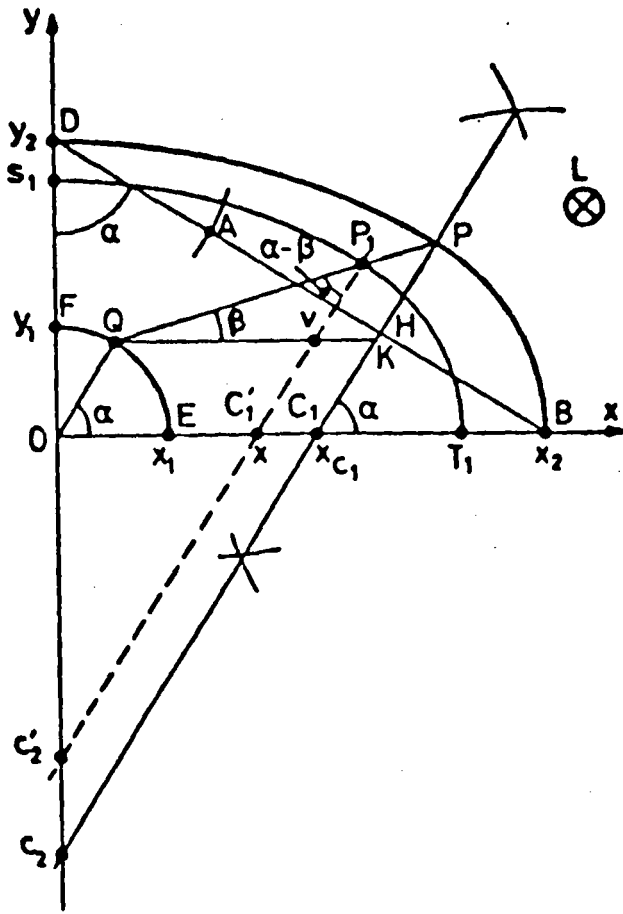


Figure 26 : Tracé des anses de panier.

On désigne par α l'angle ODB

$$\alpha = \text{Arc tg } \frac{x_2}{y_2}$$

il est supérieur à $\pi/4$ puisque x_2 est supérieur à y_2 .

L'angle que fait QP avec l'axe des x est désigné par β .

On pose :

$$A = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$B = A + \frac{1}{\cos \alpha}$$

} (1)

II.3.1. Expression de x_{C_1} , de r et de R

Par construction $AB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - (x_2 - y_2)$

$$= \sqrt{x_2^2 + y_2^2} (1 - \sin\alpha + \cos\alpha)$$

d'où l'abscisse x_{C_1} du point C_1

$$x_{C_1} = x_2 - \frac{AB/2}{\sin\alpha} = x_2 \left[1 - \frac{1}{2\sin^2\alpha} (1 - \sin\alpha + \cos\alpha) \right] \quad (2)$$

- Dans le triangle QKP, on a $KP = x_{C_1} \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = A x_{C_1}$

d'où le rayon r de l'arc de cercle de la partie basse (BP)

$$r = C_1P = OQ + KP$$

$$r = x_1 + Ax_{C_1} \quad (3)$$

- Le rayon r étant d'autre part égal à $x_2 - x_{C_1}$, de l'égalité

$$x_1 + Ax_{C_1} = x_2 - x_{C_1}$$

on déduit :

$$(1+A)x_{C_1} = x_2 - x_1$$

$$A = \frac{x_2 - x_1}{x_{C_1}} - 1$$

D'où, en reportant la valeur de x_{C_1} donnée par la relation (2),

une nouvelle expression de A ne faisant plus intervenir β :

$$A = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) - \cos 2\alpha} \left(1 - \frac{x_1}{x_2} \right) - 1 \quad (4)$$

- Pour trouver le rayon R de la partie haute (DP) de la ligne de champ, on remarque que :

$$FD = C_2D - OC_2 - OF = C_2C_1 + C_1P - OC_2 - OF$$

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= x_{C_1} / \cos\alpha + x_1 + Ax_{C_1} - x_{C_1} \operatorname{tg}\alpha - x_1 \\ &= x_{C_1} \left(A + \frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \right) \end{aligned}$$

ou, compte tenu de la seconde des relations (1),

$$y_2 - y_1 = x_{C_1} (B - \operatorname{tg}\alpha)$$

Donc

$$B - \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_{C_1}} \quad (5)$$

D'où le rayon R :

$$R = OC_2 + OF + FD = x_{C_1} \operatorname{tg}\alpha + x_1 + x_{C_1} (B - \operatorname{tg}\alpha)$$

$$R = x_1 + B x_{C_1} \quad (6)$$

II.3.2. Signe de $A^2 - 1$ et de $B^2 - \operatorname{tg}^2\alpha$

• $A^2 - 1$ peut s'écrire $(A+1)(A-1)$, ou compte tenu de (4),

$$\left[\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) - \cos 2\alpha} \left(1 - \frac{x_1}{x_2} \right) \right] \left[\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) - \cos 2\alpha} \left(1 - \frac{x_1}{x_2} \right) - 2 \right]$$

Puisque α est compris entre $\pi/4$ et $\pi/2$, la quantité située à l'intérieur du premier crochet est toujours positive ; le signe de $A^2 - 1$ est donc celui de $A - 1$.

On peut montrer que $A - 1$ a une seule racine $\alpha = \alpha_0$ quand α varie de son minimum ($\alpha = \pi/4$) à son maximum qui correspond à $y_2 = y_1 = x_1$.

Le tableau 1 donne pour quelques valeurs de x_2/x_1 les valeurs de y_2/y_1 correspondant à α_0 . La figure 27 montre la séparation de la zone où $A^2 - 1$ est positif de celle où il est négatif.

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|------|---|------|-----|------|------|------|-----|-----|------|
| x_2/x_1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 | 500 | 1000 |
| y_2/y_1 | 1,35 | 1,68 | 2,34 | 3 | 3,65 | 6,9 | 13,4 | 32,8 | 65,2 | 130 | 324 | 648 |

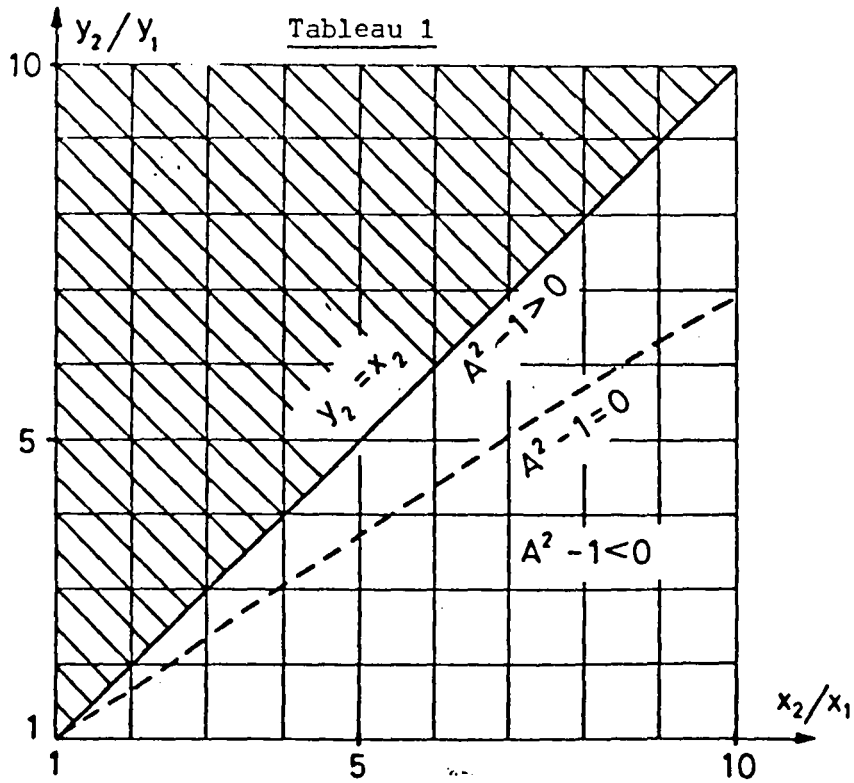


Figure 27 : Délimitation de la zone à $A^2 - 1$ positif.

• Pour évaluer le signe de $B^2 - \text{tg}^2\alpha$, on remarque que B , défini par

$B = A + \frac{1}{\cos\alpha}$ peut s'écrire :

$$B = A + 1 + \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$$

Puisque $A+1$ et $\cos\alpha$ sont toujours positifs, B l'est également.

Le signe de $B^2 - \text{tg}^2\alpha = (B + \text{tg}\alpha)(B - \text{tg}\alpha)$ est donc celui de $B - \text{tg}\alpha$.

La relation (5) donne $B - \text{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_{C_1}}$; cette quantité est tou-

jours positive, il en est de même de $B^2 - \text{tg}^2\alpha$.

II.4. Calcul de la réluctance

II.4.1. Réluctance du tube élémentaire

On considère le tube élémentaire centré sur l'anse de panier $S_1P_1T_1$ (fig. 28) ; C'_1 et C'_2 sont les centres de la partie basse T_1P_1 et de la partie haute P_1S_1 .

Si x est l'abscisse de C'_1 , $x - (dx/2)$ et $x + (dx/2)$ les abscisses des points D_1 et D_2 , les parallèles à C'_1P_1 passant par D_1 et D_2 donnent par leurs intersections avec Ox et Oy les centres des arcs de cercles formant les anses de panier limites du tube élémentaire.

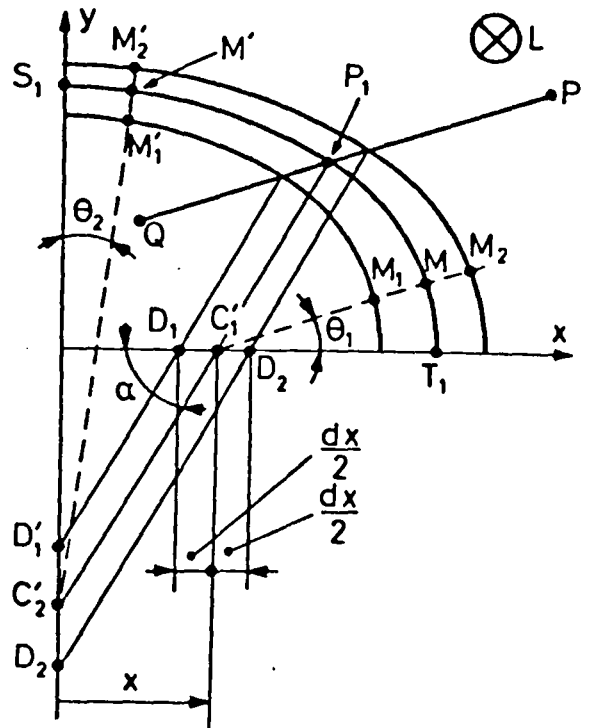


Figure 28 : Tube élémentaire situé de part et d'autre de la ligne $S_1P_1T_1$.

Les figures 29 et 30 permettent d'évaluer les sections $s_1 = M_1M_2$ et $s_2 = M'_1M'_2$.

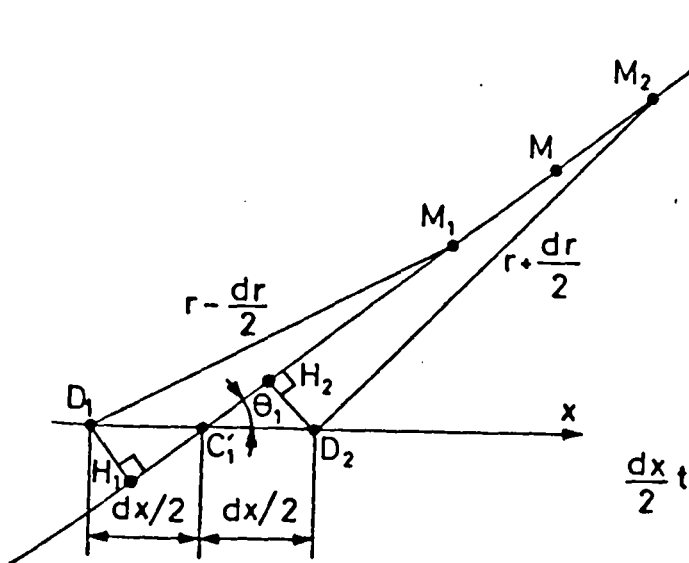


Figure 29 : Détermination de M_1M_2 .

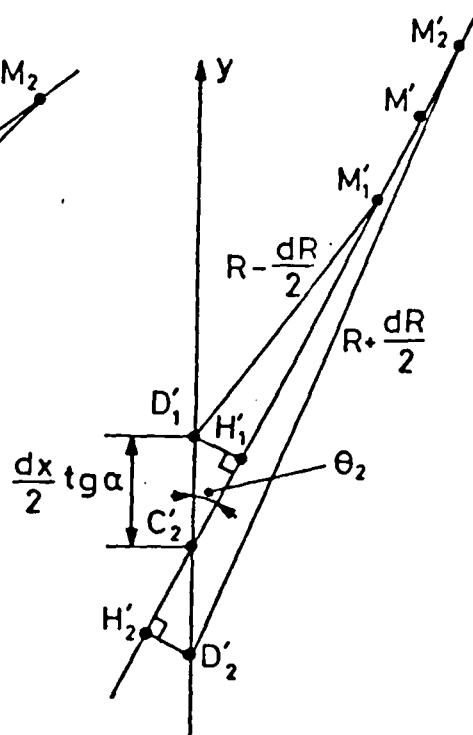


Figure 30 : Détermination de $M'_1M'_2$.

Les rayons r et R des arcs de cercles T_1P_1 et P_1S_1 sont donnés par les relations (3) et (6) où on remplace x_{C_1} par x

$$\left. \begin{aligned} r &= C_1'M = x_1 + Ax \\ R &= C_2'M' = x_1 + Bx \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

On en déduit :

$$\left. \begin{aligned} dr &= A dx \\ dR &= B dx \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

- La figure 29 montre qu'en confondant D_1M_1 et D_2M_2 avec leurs projections H_1M_1 et H_2M_2 sur $C_1'M$ il vient :

$$C_1'M_1 = D_1M_1 - D_1C_1' \cos\theta_1 = r - \frac{dr}{2} - \frac{dx}{2} \cos\theta_1$$

$$C_1'M_2 = D_2M_2 + C_1'D_2 \cos\theta_2 = r + \frac{dr}{2} + \frac{dx}{2} \cos\theta_1$$

D'où

$$s_1 = M_1M_2 = C_1'M_2 - C_1'M_1 = dr + dx \cos\theta_1$$

et, en tenant compte de (7'),

$$s_1 = dx(A + \cos\theta_1) \quad (8)$$

De même de la figure 30, où on confond $D_1'M'_1$ et $D_2'M'_2$ avec $H_2'M'_2$ on déduit :

$$C_2'M'_1 = R - \frac{dR}{2} + \frac{dx}{2} \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2$$

$$C_2'M'_2 = R + \frac{dR}{2} - \frac{dx}{2} \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2$$

$$s_2 = M'_1M'_2 = dR - dx \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2$$

$$s_2 = dx (B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2) \quad (9)$$

- D'autre part l'élément de longueur de la ligne moyenne vaut :

$$dl_1 = r d\theta_1, \text{ pour la partie basse}$$

$$dl_2 = R d\theta_2, \text{ pour la partie haute.}$$

Les réluctances des éléments de longueur du tube élémentaire

$$dR_1 = \frac{dl_1}{\mu L s_1}, \text{ dans la partie basse}$$

$$dR_2 = \frac{dl_2}{\mu L s_2}, \text{ dans la partie haute,}$$

s'écrivent en exprimant dl_1 , dl_2 , s_1 , s_2 en fonction de x :

$$\left. \begin{aligned} dR_1 &= \frac{(x_1 + Ax) d\theta_1}{\mu L dx(A + \cos\theta_1)} \\ dR_2 &= \frac{(x_1 + Bx) d\theta_2}{\mu L dx(B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

II.4.2. Réluctance du domaine complet

Pour obtenir la réluctance R du domaine complet il faut intégrer x de 0 à x_{C_1} et pour la partie basse θ_1 de 0 à α , pour la partie haute θ_2 de 0 à $\pi/2 - \alpha$.

• Dans dR_1 les variable x et θ_1 étant séparables, la réluctance R_1 de la partie basse peut s'écrire :

$$R_1 = \frac{1}{\mu L} \int_0^{x_{C_1}} \frac{1}{\frac{dx}{x_1 + Ax}} \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{A + \cos\theta_1}$$

ce qui donne

$$R_1 = \frac{1}{\mu L} \frac{1}{x_1 + Ax_{C1}} I, \text{ avec } I = \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{A + \cos\theta_1}$$

$$\frac{1}{A} \ln \frac{x_1}{x_1}$$

L'expression de l'intégrale I dépend du signe de $A^2 - 1$. Nous avons vu au paragraphe II.3. que lorsque y_2 est nettement inférieur à x_2 , $A^2 - 1$ est négatif.

Par ordre de probabilité décroissante, on trouve :

- si $A^2 - 1 > 0$,

$$I = \frac{1}{\sqrt{1-A^2}} \ln \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{1+A}{1-A}}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{1+A}{1-A}}} \right]$$

- si $A^2 - 1 < 0$,

$$I = \frac{2}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{A-1}{A+1}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

- si $A^2 - 1 = 0$

$$I = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

• Dans dR_2 , les variables x et θ_2 sont encore séparables. La réductance R_2 de la partie haute s'écrit :

$$R_2 = \frac{1}{\mu L} \frac{1}{x_{C1}} \int_0^{x_{C1}} \frac{dx}{x_1 + Bx} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{d\theta_2}{B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2}$$

Comme $B^2 - \operatorname{tg}^2\alpha$ est toujours positif, la seconde intégrale a toujours la même expression :

$$R_2 = \frac{1}{\mu L} \frac{1}{x_1 + Bx_{C1}} J$$

$$\frac{1}{B} \ln \frac{x_1}{x_1}$$

avec

$$J = \frac{2}{\sqrt{B^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{B + \operatorname{tg} \alpha}{B - \operatorname{tg} \alpha}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

II.4.3. Abaque facilitant l'emploi des formules proposées

Pour faciliter l'emploi des formules proposées, nous avons comparé la réluctance calculée à celle $R_{\pi/2}$ qu'on obtiendrait si y_2 égalait x_2

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2 \mu L \ln \frac{x_2}{x_1}}$$

On a caractérisé la configuration étudiée par deux rapports :

* la largeur relative de la surface S_1

$$k_1 = (x_2 - x_1)/x_1,$$

* la largeur relative de la surface S_2

$$k_2 = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1).$$

Puis on a ramené la réluctance obtenue par les formules proposées à celle qu'on obtiendrait en faisant $y_2 - y_1 = x_2 - x_1$; c'est-à-dire qu'on a calculé :

$$R^*(k_1, k_2) = \frac{R_1(k_1, k_2) + R_2(k_1, k_2)}{R_{\frac{\pi}{2}}(k_1, 1)}$$

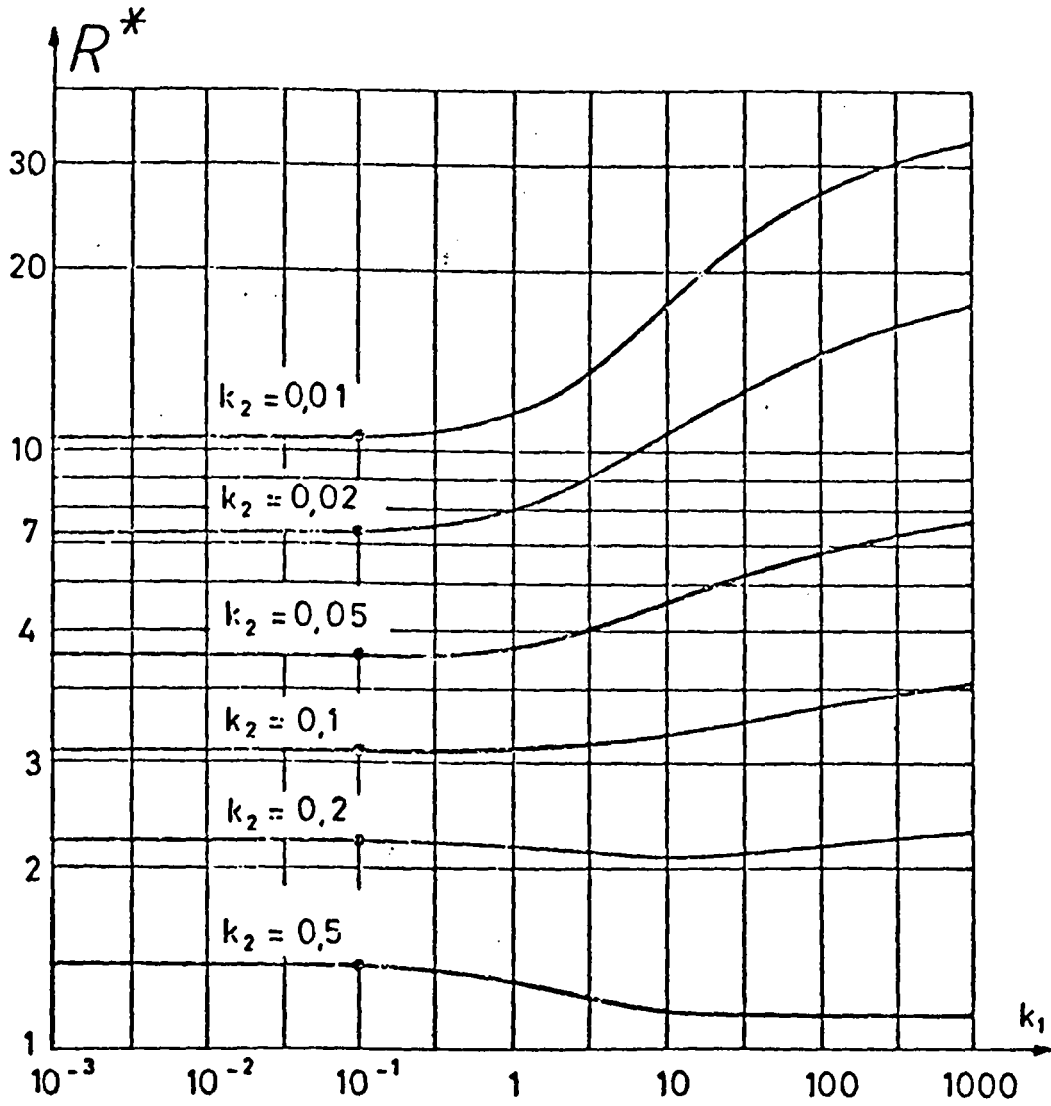


Figure 31 : Variation de R^* en fonction de k_1 pour divers k_2

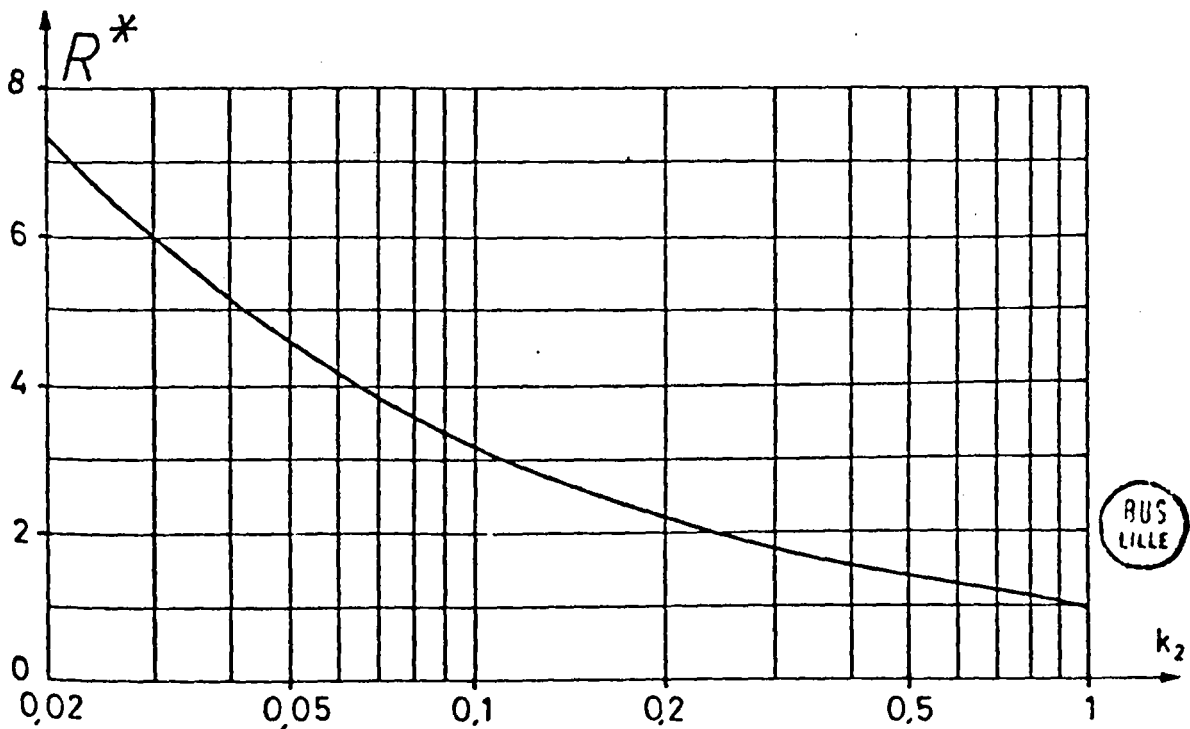


Figure 32 : Variation de R^* en fonction de k_2 pour les faibles valeurs de k_1 .

BUS LILLE

La figure 31 montre les variations de R^* en fonction de k_1 pour les valeurs de k_2 suivantes : 0,01 ; 0,02 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,5. Pour k_2 égal à 0,9, R^* varie de 1,05 à 1,01 quand k_1 va de 10^{-3} à 10^3 ; la courbe correspondante, qui serait pratiquement confondue avec l'axe horizontal, n'a pas été tracée.

On constate que R^* reste pratiquement constant, à k_2 donné, tant que k_1 reste inférieur à 1. Aussi on a tracé, sur la figure 32, la courbe donnant R^* en fonction de k_2 quand k_1 est faible devant l'unité. L'examen de cette courbe montre qu'on ne commet pas alors une grosse erreur en prenant :

$$R^* \approx \sqrt{1/k_2}$$

c'est-à-dire

$$R \approx \sqrt{\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}} \frac{\pi}{2\mu L \ln \frac{x_2}{x_1}}$$

II.5. Vérification numérique de la règle proposée

La vérification numérique de la règle proposée a été réalisée, en coopération avec la Société Jeumont-Schneider, sur ordinateur en utilisant la méthode des éléments finis.

II.5.1. Modèle choisi pour assurer l'hypothèse de la "ressemblance par zone"

Pour assurer l'hypothèse de la "ressemblance par zone" on a choisi d'étudier un domaine rectangulaire (fig. 33) dont les conditions aux limites ont été définies comme suit :

- les segments AB et CD sont équipotentiels et sur chacun d'eux la perméabilité magnétique est très grande.

- CA est un arc de cercle correspondant à une ligne de champ imposée.

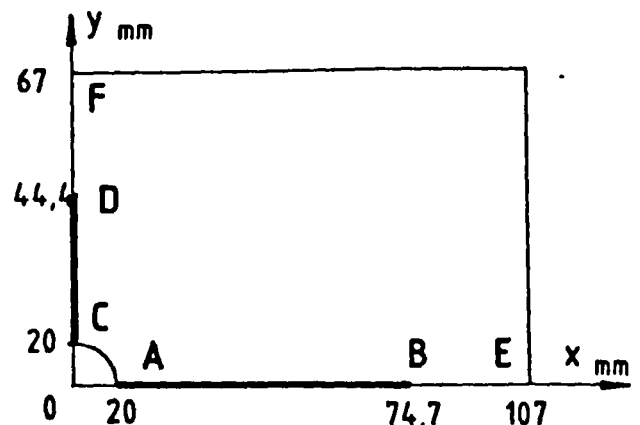


Figure 33 : Délimitation du domaine.

- BE et DF correspondent à des zones de perméabilité nulle ce qui accélère la déformation des lignes de champ. Cette hypothèse - non physique - permet de s'assurer que les lignes de champ, qui servent à la vérification de la formule, ne sont pas trop proches de celles étudiées.

- partout ailleurs dans le domaine la perméabilité relative est prise égale à 1.

Les calculs ont été effectués pour diverses valeurs de AB, AE, CD et CF rapportés à OA. Les résultats qui suivent se rapportent aux dimensions indiquées sur la figure 33 ; ces dimensions correspondent à des proportions de la zone à lignes de champ elliptiques de l'ordre de celles qu'interviennent dans les calculs de perméances d'encoches.

II.5.2. Résultats fournis par l'ordinateur

Le domaine a été couvert par un maillage rectangulaire du second ordre partiellement représenté sur la figure 34.

Pour chaque point du maillage, l'ordinateur a donné la valeur du potentiel vecteur et les composantes de l'induction.

Sur table traçante, l'ordinateur a également dressé la carte des lignes de champ (figure 35) en indiquant les flux par mètre de longueur (L est pris égal à 1 dans tous ces calculs).

En faisant le calcul de la circulation du vecteur induction entre AB et CD par 9 chemins différents on obtient dans tous les cas

$$\int_{AB}^{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0,700 \text{ à } 1,2 \% \text{ près.}$$

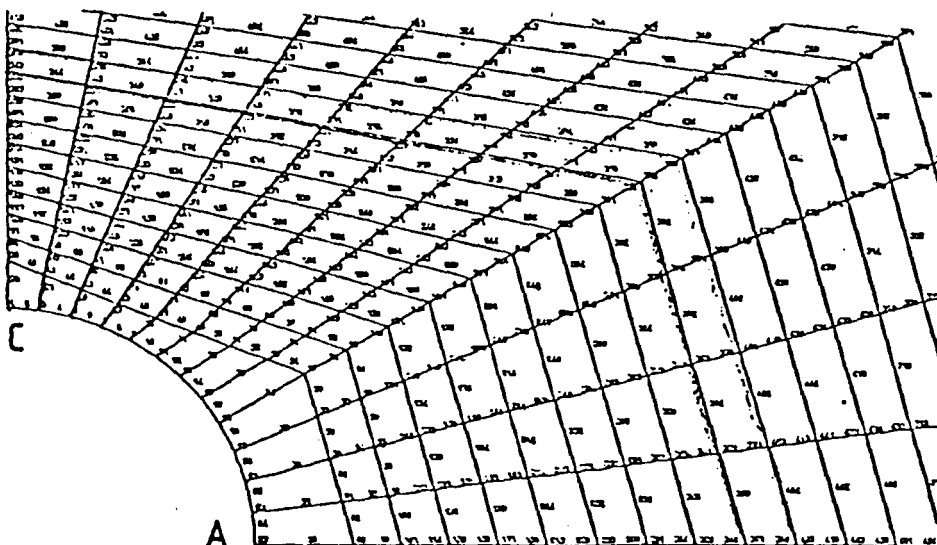


Figure 34 : Maillage du domaine (échelle 1,5).

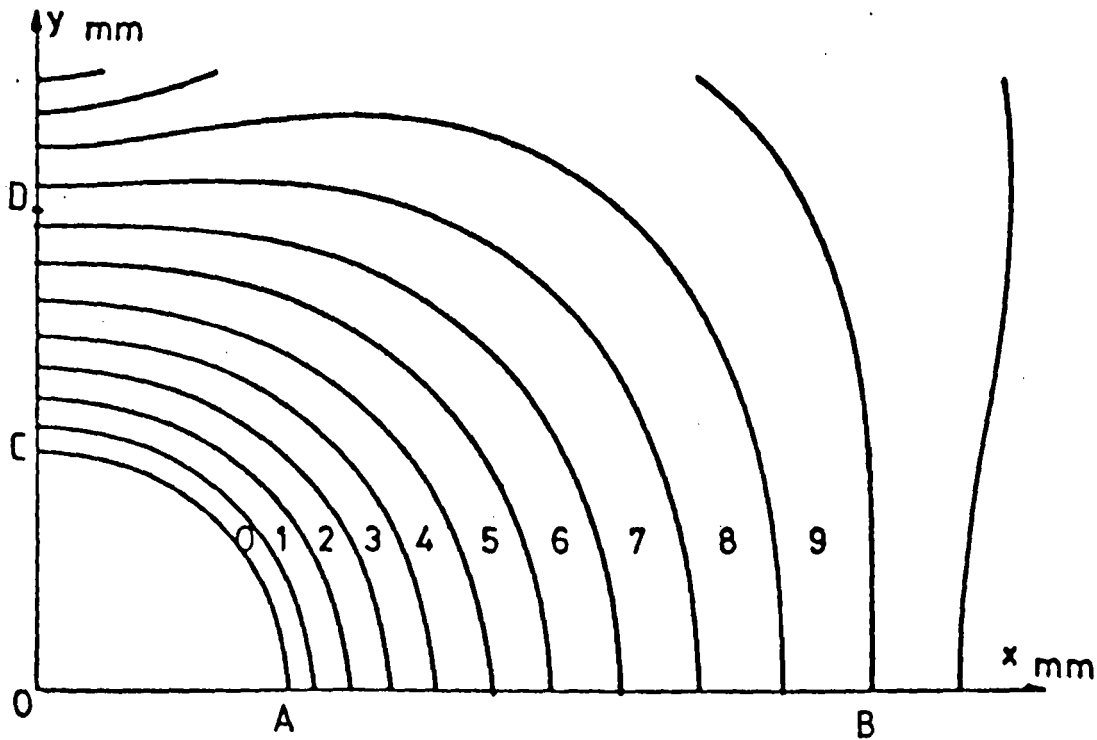


Figure 35 : Tracé des lignes de champ.

II.5.3. Résultats donnés par la règle proposée

Sur le tracé fourni par l'ordinateur, on constate que le domaine où est assurée la ressemblance par zone est limité par les lignes de champ numérotées 0 et 7.

Partant de ce réseau de lignes de champ 0, 1, 2, ..., 7, en tenant compte des échelles du graphique et du flux Φ donné par l'ordinateur, on a calculé la réluctance par mètre de longueur des 7 domaines limités par l'arc de cercle AC d'une part, par la ligne de champ 1, 2, ..., 7 d'autre part. Ces réluctances sont calculées par la règle proposée et notées $R(x_1, x_2, y_2)$.

Les résultats, exprimés en unités du système international, sont groupés dans le tableau 2.



| $x_1 = y_1$ | x_2 | y_2 | $\mu_0 R(x_1, x_2, y_2)$ | Φ | $\int B d\ell$ |
|-------------|--------|--------|--------------------------|--------|----------------|
| 0,02 | 0,0227 | 0,0220 | 14,322 | 0,05 | 0,716 |
| 0,02 | 0,0255 | 0,0243 | 7,234 | 0,10 | 0,723 |
| 0,02 | 0,0288 | 0,0270 | 4,758 | 0,15 | 0,714 |
| 0,02 | 0,0327 | 0,0298 | 3,559 | 0,20 | 0,712 |
| 0,02 | 0,0383 | 0,0327 | 2,802 | 0,25 | 0,700 |
| 0,02 | 0,0420 | 0,0358 | 2,408 | 0,30 | 0,722 |
| 0,02 | 0,0475 | 0,0390 | 2,088 | 0,35 | 0,731 |

Tableau 2 : Résultats donnés par la règle proposée.

II.5.4. Conclusions de la vérification

La circulation du vecteur induction déduite, pour chacun des sept domaines, du flux et de la réluctance calculée par la règle proposée montre que celle-ci conduit à des résultats tout-à-fait cohérents. L'écart maximal par rapport à la circulation (0,700) calculée par l'ordinateur reste inférieure à 4,5 %.

Compte tenu de la façon dont sont déterminés les paramètres géométriques x_1 , x_2 et y_2 des domaines on peut considérer qu'en fait l'erreur sur les réluctances calculées sur des paramètres exacts serait du même ordre de grandeur.

Par souci de réalisme on peut donc admettre que, lorsque la nouvelle règle proposée est utilisée pour évaluer des réluctances de domaines remplissant bien les conditions d'établissement de cette règle, l'incertitude sur les réluctances est de l'ordre de 5 %.



III. EXEMPLE D'APPLICATION

Nous allons utiliser cette nouvelle règle et les règles de Forbes antérieurement connues pour évaluer l'influence de la profondeur des encoches sur les fonctions caractéristiques d'une double denture droite symétrique.

N'ayant pas l'intention de faire de l'optimisation de denture mais désirant simplement pouvoir comparer le résultat obtenu avec d'autres disponibles dans la littérature, nous avons pris le cas de la largeur des dents égale à la largeur des encoches.

III.1. Structuration de l'entrefer

A partir de la méthode indiquée dans la première partie de ce chapitre, on a tracé (fig. 36) les diverses zones, pour la position en quinconce des dents. Les lignes de champ séparant les zones partent des points anguleux des contours des dents.

Les notations sont celles indiquées au début du chapitre, avec maintenant $t = s$.

La zone H est supposée limitée par des arcs de cercle de rayon $g/2$ prolongés par des segments de droite de longueur égale à $g/2$.

La séparation entre les zones B et C est une anse de panier aboutissant au point Y qu'il faut déterminer.

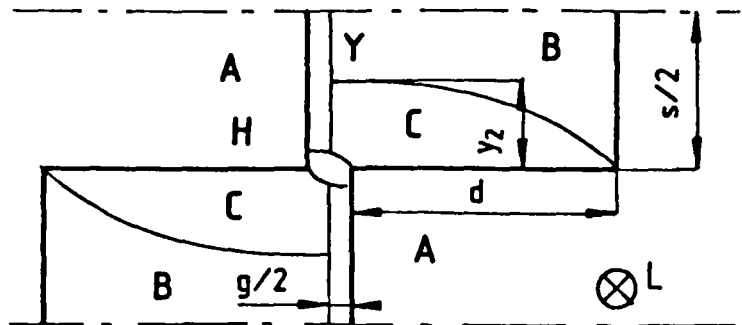


Figure 36 : Structuration de l'entrefer.

III.2. Détermination de la séparation des zones B et C

III.2.1. Principe

Pour déterminer la position du point Y sur la droite médiane de l'entrefer, on écrit que l'induction ne peut y subir de discontinuité quand on passe du domaine B au domaine C.

Pour cela (fig. 37), de part et d'autre de Y on considère deux petites surfaces adjacentes de même largeur δ (petite) notées δ_B et δ_C . A l'égalité d'induction correspond l'égalité des flux Φ_{δ_B} et Φ_{δ_C} . La différence de potentiel magnétique appliquée aux deux tubes de champ des zones B et C s'appuyant sur δ_B et δ_C étant la même, l'égalité des flux implique l'égalité des réluctances R_{δ_B} et R_{δ_C} de ces tubes.

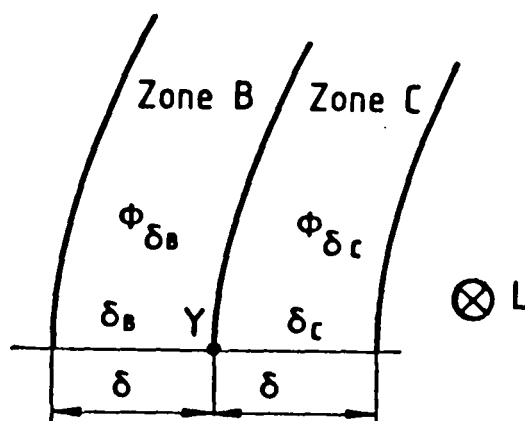


Figure 37 : Détermination de Y.

On détermine la position de Y par $R_{\delta_B} = R_{\delta_C}$. La connaissance de donnera le paramètre y_2 de la formule permettant de calculer la réluctance de la zone C.

III.2.2. Calcul de la réluctance R_{δ_B}

Si l'on suppose constante l'induction sur l'équipotentielle séparant les zones A et B, à différence de potentiel magnétique constante, la réluctance totale R_B du domaine B et la réluctance R_{δ_B} du tube élémentaire sont proportionnelles à leur surface d'appui sur l'équipotentielle.

$$R_{\delta_B} = R_B \frac{s - 2y_2}{2\delta}$$

La réluctance R_B , correspondant à la moitié d'un domaine limité par deux surfaces équipotentielles parallèles et en regard, on peut la calculer à l'aide de la première règle de Forbes classique

$$R_B = \frac{2(d + g/2)}{\mu_0 L \left[\frac{s}{2} + \left(\frac{s}{2} - y_2 \right) \right]} = \frac{2d + g}{\mu_0 L (s - y_2)}$$

D'où l'expression donnant R_{δ_B}

$$R_{\delta_B} = \frac{(2d + g)(s - 2y_2)}{2\mu_0 L \delta (s - y_2)}$$

R_{δ_B} apparaît ainsi comme une fonction de la variable y_2 , à déterminer, et du paramètre arbitraire δ .

III.2.3. Calcul de la réductance $R_{\delta C}$

Pour pouvoir appliquer la méthode de calcul du paragraphe II à la détermination de la réductance du domaine s'appuyant sur la surface élémentaire δC (fig. 38), il faut exprimer les bornes d'intégration en fonction de δ .

Des définitions de B et α (§ II.3.1.), on déduit

$$x_{C_1} - x_{\delta} = \frac{\delta}{B - \operatorname{tg}\alpha}$$

D'où

$$x_{\delta} = x_{C_1} - \frac{\delta}{B - \operatorname{tg}\alpha}$$

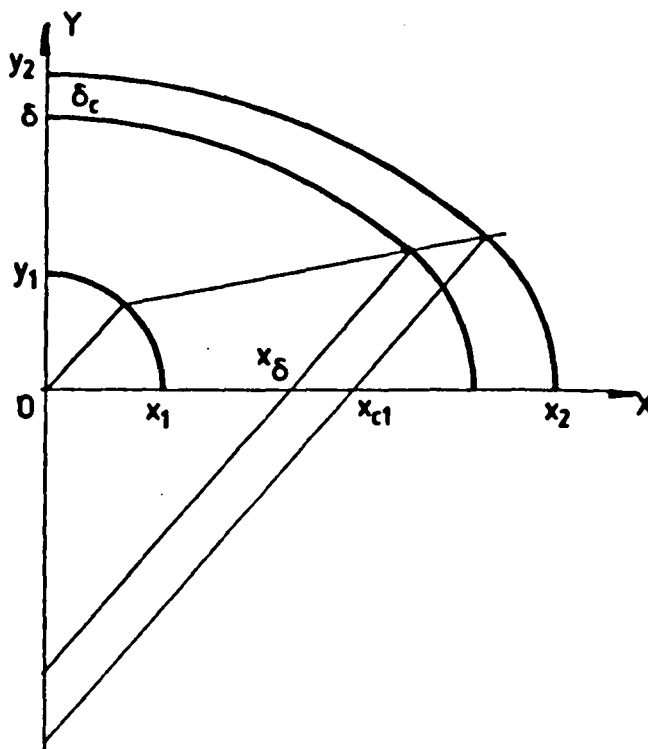


Figure 38 : Réductance $R_{\delta C}$.

Compte tenu des résultats du paragraphe II.4.2, la réductance du tube de champ s'appuyant sur δC vaut

$$R_{\delta C} = \frac{1}{\mu_0 L} \left[\int_{x_{\delta}}^{x_{C_1}} \frac{I}{x_1 + Ax} dx + \int_{x_{\delta}}^{x_{C_1}} \frac{J}{x_1 + Bx} dx \right]$$

ce qui donne

$$R_{\delta C} = \frac{1}{\mu_0 L} \left[\frac{I}{A} \ln \left| \frac{x_1 + Ax_{C_1}}{x_1 + Ax_{\delta}} \right| + \frac{J}{B} \ln \left| \frac{x_1 + Bx_{C_1}}{x_1 + Bx_{\delta}} \right| \right]$$

Dans cette relation A , B , I et J sont des fonctions de x_1 , x_2 , y_2 dont les valeurs s'expriment en fonction des paramètres s , d , g , t comme nous l'indiquerons au paragraphe suivant.

L'égalité $R_{\delta B} = R_{\delta C}$ est une fonction implicite de y_2 qu'on peut résoudre après avoir choisi la valeur du paramètre δ .

III.3. Evaluation des différentes réductances

A partir du paramétrage des différentes zones rappelé à la figure 38, à l'aide de toutes les formules connues ou établies, on peut donner l'expression analytique de la réductance de chacune des zones.

• La réductance de la zone A s'obtient directement

$$R_A = \frac{1}{\mu_0 L} \frac{g}{s-g}$$

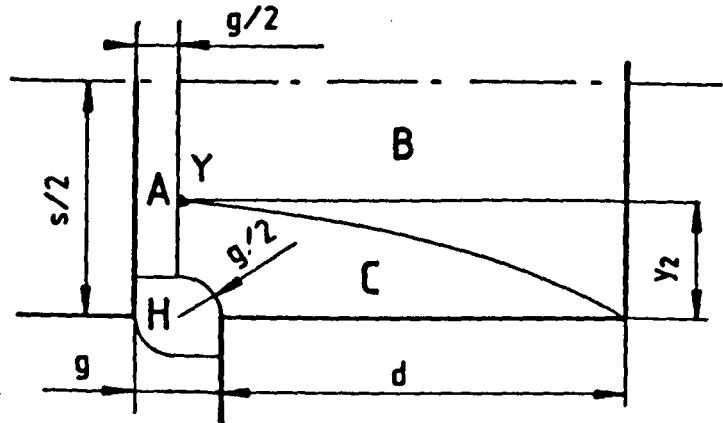


Figure 39 : Paramétrage des zones.

• La réductance de la zone H peut être calculée, à partir des règles de Forbes, en l'assimilant, pour tenir compte de l'épanouissement des lignes de champ au centre de la zone, à la mise en série de deux zones de section trapézoïdale.

$$R_H = 2 \frac{1}{\mu_0 L} \frac{g/2}{\frac{1}{2} (g + \frac{g}{2})} = \frac{1}{\mu_0 L} \frac{4}{3}$$

• La réductance de la zone B peut être calculée, quand on a déterminé la valeur du paramètre y_2 , à partir de la première règle de Forbes.

$$R_B = \frac{1}{\mu_0 L} \frac{2 d + g}{s - y_2}$$

• Enfin la réductance de la zone C est calculée à l'aide de la formule que nous avons proposée

$$R_C = R(x_1, x_2, y_2)$$

avec $x_1 = \frac{g}{2}$, $x_2 = d + \frac{g}{2}$,

et y_2 déterminé comme nous l'avons indiqué.

III.4. Fonctions caractéristiques de l'entrefer

Connaissant les diverses réluctances on peut définir l'expression analytique approchée des fonctions caractéristiques de l'entrefer.

La figure 40 rappelle la structuration de l'entrefer.

Les formules génériques des fonctions caractéristiques, écrites sous forme de perméances et ramenées à un pas dentaire sont :

* pour la position alignée,

$$P_{\lambda eA} = 2 \left[P_H + \frac{1}{2} (P_A + P_B + P_C) \right]$$

* pour la position en quinconce,

$$P_{\lambda eQ} = 2 \left[P_H + 2 \frac{(P_B + P_C) P_A}{P_B + P_C + P_A} \right]$$

III.5. Application numérique

Pour tester l'ensemble de la méthode proposée, dans le cadre de l'étude de dentures pour lesquelles l'hypothèse de la profondeur infinie des encoches n'est pas acceptable, nous avons pris comme valeur des paramètres fixes.

$$g = 1 \text{ mm,}$$

$$s = t = 20 \text{ mm,}$$

donc un rapport $\lambda/g = 40$.

Pour étudier des dentures de faible profondeur on a fait varier la valeur du paramètre d de 1 à 10 mm.

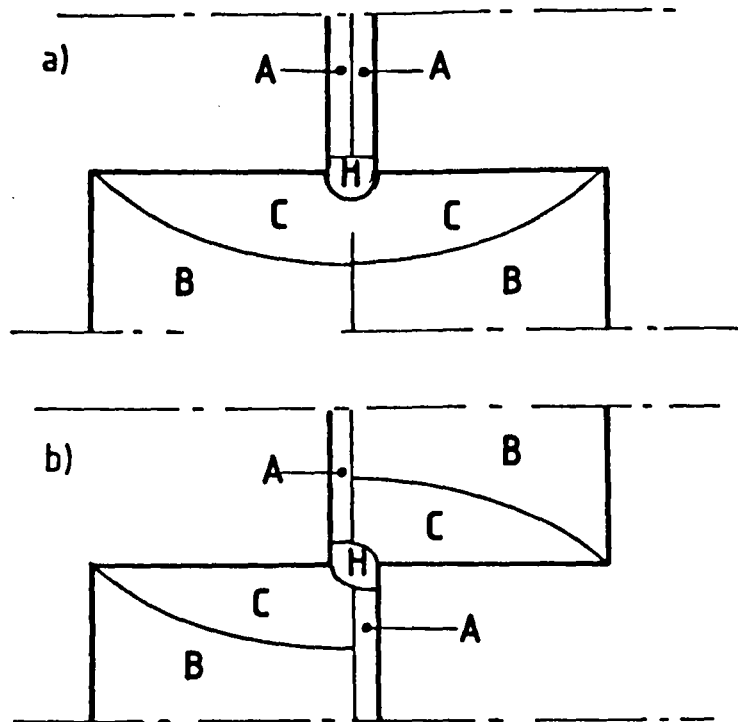


Figure 40 : Structuration de l'entrefer pour un demi-pas dentaire.

a) dents alignées,
b) dents en quinconce.

Pour chaque valeur de d , on a commencé par le calcul de la valeur de y_2 qui est nécessaire pour calculer les réluctances R_B et R_C . La résolution de l'équation implicite donnant y_2 a été menée en fixant la valeur de δ à 0,01 mm et en faisant une détermination de y_2 au micron près.

La figure 41 montre comment y_2 , égal à $g/2$ pour d nul, tendant vers $s/2$ quand d devient lui-même très grand, varie dans l'intervalle considéré.

Ensuite, ayant évalué les différentes réluctances, on a déterminé la valeur des fonctions caractéristiques d'entrefer par pas dentaire, à $\mu_0 L$ près. On en déduit la différence des fonctions caractéristiques qui permet, grâce à la relation présentée au chapitre I, d'obtenir la force moyenne par pas dentaire pour une alimentation à courant constant.

$$\frac{1}{\mu_0 L} (P_{\lambda eA} - P_{\lambda eQ}) = \frac{\lambda}{\mu_0 L n^2 i^2} \overline{F_{\lambda i}}$$

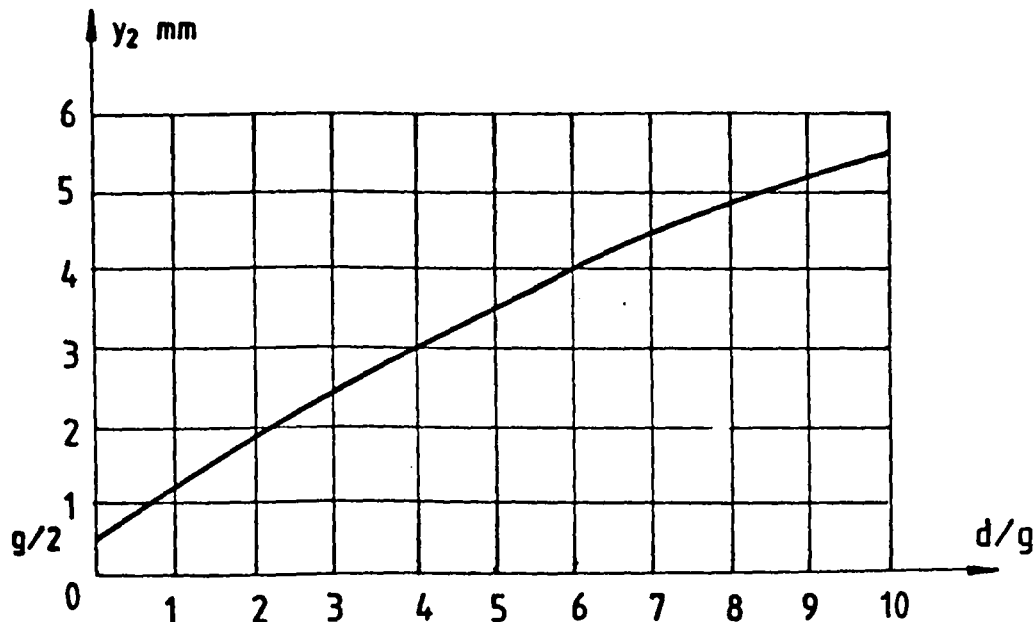


Figure 41 : Variation de la position du point Y.

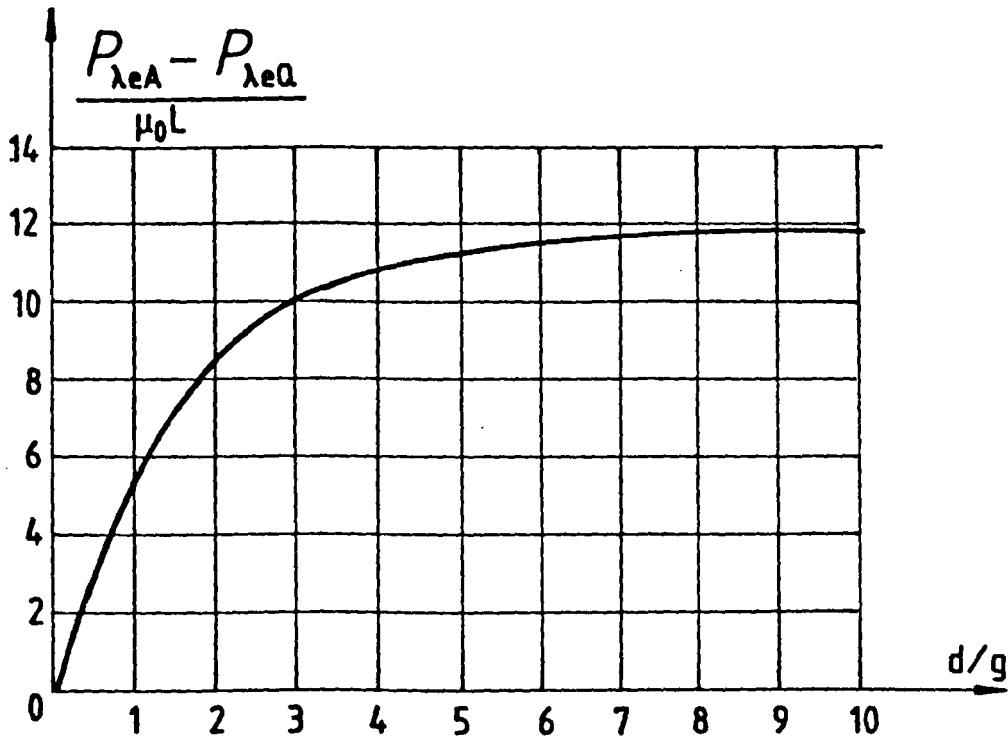


Figure 42 : Présentation des résultats

La figure 42 donne la courbe $\frac{P_{\lambda e A} - P_{\lambda e Q}}{\mu_0 L}$ en fonction du rapport d/g

telle que nous l'avons calculée.

Bien que le modèle adopté ne soit utilisable ni pour $d/g = 0$, ni pour $d/g = \infty$, on constate que la courbe représentée se raccorde bien aux résultats correspondant à ces deux limites :



- pour $d/g = 0$, la variation de perméance tend bien vers zéro.

- pour d/g grand, on trouve 11,8 alors que WARD et LAWRENSON [47] trouvent 14 quand d/g est infini. Cette différence s'explique aisément par le fait que nous avons tenu compte du flux provenant du fond des encoches alors qu'ils le négligent, or il ne fait pas de doute que ce flux correspond à une diminution de l'écart de perméance entre les deux positions extrêmes.

A noter que si on ne tenait compte que des surfaces des dents directement en regard on trouverait 20, ce qui montre la nécessité d'une étude plus poussée.

On peut donc conclure à la bonne validité du modèle proposé quand, les dents ne peuvent être considérées comme infiniment profondes, il apparaît des zones limitées par les flancs des dents où toutes les lignes de champ se "ressemblent" et peuvent être assimilées à des anses de panier.

Ce travail effectué sur des dentures droites montre qu'il est possible de mener à bien des calculs analytiques approchés de perméances de dentures à l'aide de règles du type de celles énoncées par Forbes ; les résultats obtenus permettent en particulier d'étudier les dentures à encoches peu profondes. La méthode préconisée permet notamment de déterminer le sens de variation des phénomènes lorsqu'on modifie plusieurs paramètres.

**
*
CHAPITRE III
*
**

APPLICATION AUX MACHINES AXISYMETRIQUES

Après avoir présenté la méthode que nous proposons pour l'étude analytique approchée des machines à réluctance variable, l'avoir appliquée afin d'en montrer l'intérêt et la précision aux machines à double denture droite symétrique, nous allons transposer la méthode et les règles permettant son application aux machines possédant la symétrie de révolution.

- La notion de "ressemblance par zone" est transposable aux machines axisymétriques. Les différentes voies possibles pour en déduire une étude approchée des fonctions caractéristiques de denture sont d'abord recensées. Deux méthodes d'inspiration "graphique" sont utilisables.

- * La première voie possible pour une étude graphique approchée consiste à transposer la méthode de LEHMANN. Après justification de la notion de domaine unitaire et établissement de la façon de tracer de tels domaines, la méthode est appliquée à un exemple calculable par ailleurs afin d'en tester la précision, elle est ensuite utilisée pour évaluer un phénomène de franges.
- * La seconde voie possible, la seule permettant une étude analytique approchée relativement simple, utilise la transposition aux systèmes axisymétriques des règles de Forbes et de la règle complémentaire. La transposition de chacune des règles est effectuée en tenant compte des différentes positions du domaine considérée par rapport à l'axe de symétrie.

- Il est alors possible, pour une double denture axisymétrique, de structurer l'entrefer en zones où les lignes de champ se ressemblent, de délimiter ces zones, d'évaluer la perméance de chacune d'elles et d'en déduire l'expression analytique des fonctions caractéristiques. Les relations établies seront utilisées à la fin du chapitre suivant pour calculer l'effort développé par un actionneur linéaire et le comparer à l'effort expérimentalement relevé.

I. TRANSPOSITION DE LA STRUCTURATION DE L'ENTREFER

Nous n'étudierons que les machines à réluctance variable à mouvement axial pour lesquelles les fonds d'encoches et les sommets des dents sont situés sur des cylindres de rayons constants, comme indiqué sur la figure 43. Cette disposition est en effet la seule pouvant être envisagée pour une machine à déplacement réversible, susceptible de développer le même effort dans toutes les positions et dont la réalisation ne soit pas trop complexe.

Avec une telle disposition, pour des raisons de masse à déplacer, c'est le noyau central qui

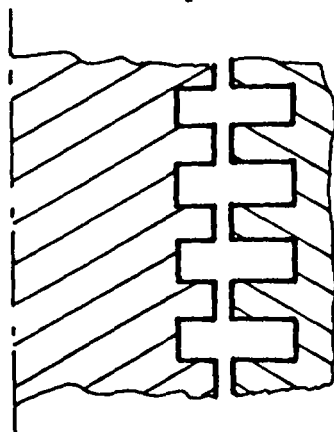


Figure 43 : Demi-coupe partielle du circuit magnétique d'une machine axisymétrique.

constitue la partie mobile et qui glisse le long de l'axe de symétrie. La partie fixe entoure le noyau et amène à l'entrefer le flux de la (ou des) bobine inductrice.

Bien que la méthode proposée puisse être adaptée à d'autre cas, nous adopterons pour les exemples d'applications le même pas dentaire et la même largeur relative des dents pour la partie mobile et pour la partie fixe, la hauteur des dents n'étant pas nécessairement la même.

1.1. Application de la ressemblance par zone

Pour transposer aux machines axisymétriques la méthode d'évaluation des fonctions caractéristiques de denture, on se placera, comme précédemment, dans le cadre de l'hypothèse où le fer a une perméabilité magnétique infinie, ses limites correspondant à des surfaces équipotentielles. Alors seul l'entrefer intervient dans le calcul des fonctions caractéristiques de denture.

Les surfaces équipotentiels et les tubes de champ admettent tous l'axe de symétrie de la machine comme axe de symétrie. Leur forme peut donc être parfaitement définie par leur trace dans un demi-plan passant par l'axe de symétrie.

Compte tenu des autres symétries, pour les positions alignée et en quinconce des deux dentures, il est possible de ne représenter la section du réseau des équipotentielles et des tubes de champ que pour un demi-pas dentaire (figure 44).

Les équipotentielles constituées par les contours du fer sont des lignes brisées. Les lignes de champ orthogonales aux précédentes permettent encore d'envisager la décomposition de l'entrefer en domaines possédant la "ressemblance par zone". Les lignes de champ séparant les zones partent encore des points anguleux des équipotentielles.

Pour évaluer les fonctions caractéristiques de denture, on peut donc calquer point par point la méthode mise au point pour les dentures droites, à condition de savoir délimiter les zones et de savoir exprimer la perméance de chacune d'elles. Pour voir quelles sont les expres-

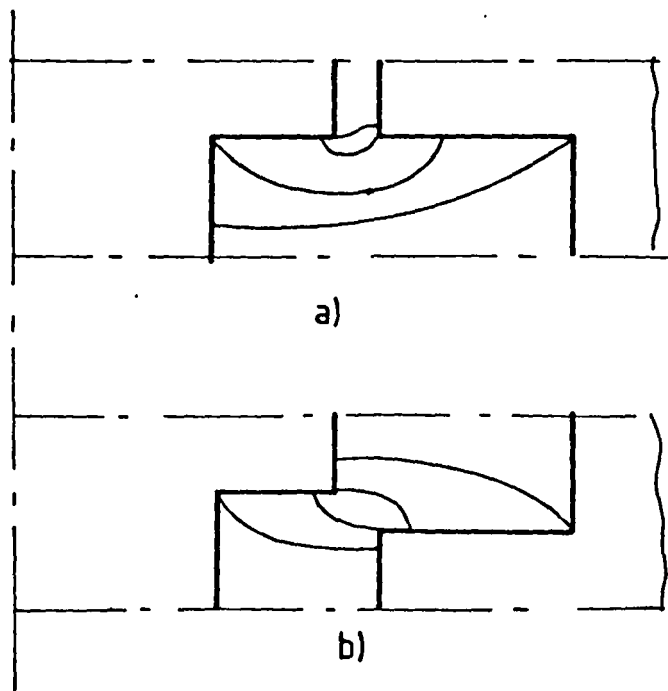


Figure 44 : Structuration de l'entrefer par demi-pas dentaire

- a) position alignée,
b) position en quinconce.

sions de perméances à établir, on remarque que tous les domaines correspondent à des équipotentielles limites parallèles ou perpendiculaires à l'axe de symétrie.

1.2. Les voies d'étude analytique approchée

Les méthodes numériques de résolution des problèmes de champ à trois dimensions sont évidemment utilisables pour déterminer les fonctions caractéristiques de denture. L'axisymétrie permet d'ailleurs de simplifier ces méthodes et d'utiliser les procédés d'études de champs à deux dimensions à condition d'effectuer des adaptations. Mais, comme nous l'avons déjà indiqué, les résultats ne peuvent se mettre sous forme analytique aussi ces méthodes n'entrent pas dans le cadre de notre étude.

Les méthodes d'inspiration "graphique", fondées sur l'idéalisation des lignes de champ peuvent elles aussi être transposées des systèmes à deux dimensions aux systèmes axisymétriques et c'est à cette transposition qu'est consacrée la plus grande partie de ce chapitre.

La première méthode d'inspiration "graphique" transposable est la méthode de LEHMANN dont les résultats ne peuvent pas non plus être mis sous forme analytique.

Pour obtenir une expression analytique des fonctions caractéristiques de denture, nous chercherons à transposer les règles de Forbes. Cette démarche directement liée à l'utilisation des résultats de la "ressemblance par zone" sera effectuée pour tous les cas de figure rencontrés dans l'étude des machines axisymétriques.

II. TRANSPOSITION DE LA METHODE DE LEHMANN [48]

II.1. Généralités

Conservant l'hypothèse initiale de LEHMANN de la constance de la perméabilité magnétique du milieu, on peut chercher à construire des domaines de même réluctance servant au calcul de la réluctance totale.

Le tracé des surfaces équipotentielles et des surfaces correspondant aux lignes de champ fait apparaître (fig. 45 a)) des domaines ayant la forme de morceaux de cylindres curvilignes. Par la suite on se contentera de représenter un tel domaine par sa demi-coupe par un plan passant par l'axe Δ (fig. 45 b)). On ramène ainsi le réseau graphique, initialement à trois dimensions, à un réseau à deux dimensions.

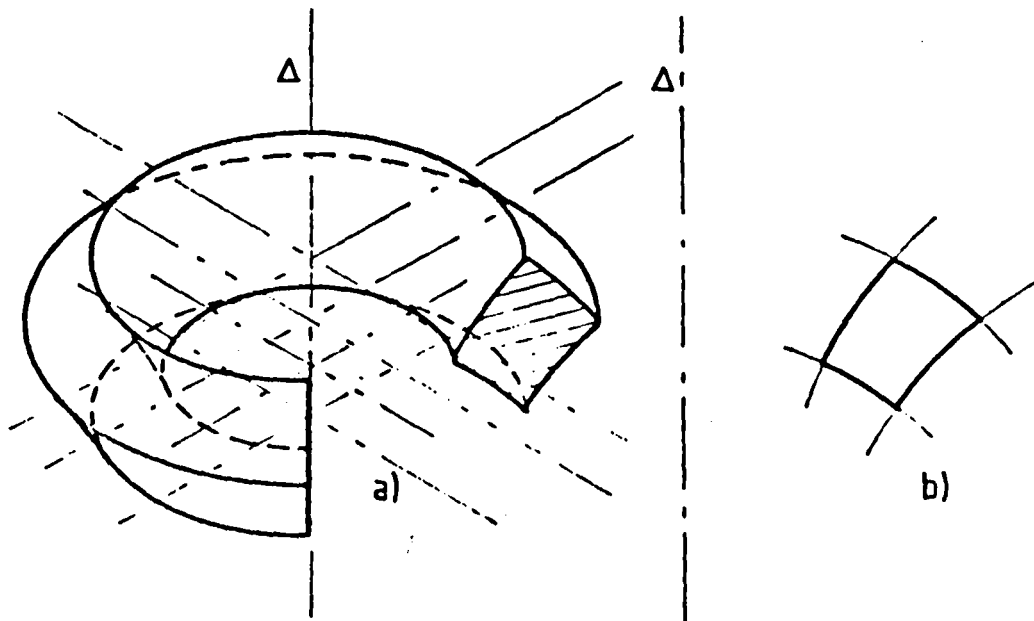


Figure 45 : Élément d'un tube de champ axisymétrique

- a) tracé,
b) représentation.

La transposition de la méthode de LEHMANN nécessite cependant un développement préalable car le paramètre correspondant à la profondeur L perpendiculaire au tracé n'est plus constant, c'est maintenant le périmètre d'un cercle de rayon variable.

Pour conserver l'intérêt de la méthode de LEHMANN, on va chercher s'il existe des cylindres dont les sections sont des rectangles curvilignes et dont la réluctance soit unitaire. On ramène ainsi le problème au cas classique, la difficulté opératoire étant reportée sur le tracé du réseau de courbes servant au calcul.

II.2. Réluctance d'un domaine cylindrique de section rectangulaire

II.2.1. Expression de la réluctance

La figure 46 a) représente le domaine de perméabilité constante μ considéré. Il est caractérisé par la constance, dans toute la section rectangulaire $A C E F$, de l'écart angulaire α entre les lignes d'induction et l'axe de symétrie Δ . L'induction \vec{B} est supposée constante sur AC et FE .

Si l est la longueur de la trace des équipotentielles, l' la longueur des lignes de champ et R_1 la distance à l'axe du sommet du rectangle le plus voisin de Δ , les distances des sommets C, E et F se déduisent facilement des paramètres R_1 , l , l' et α .

Pour déterminer la réluctance du domaine étudié, on considère l'élément de longueur du tube élémentaire (fig. 46 b)) en forme de tronc de cylindre conique de longueur dl'_1 et d'épaisseur dl_1 .

Ce tube a pour section

$$S = 2 \pi r dl_1,$$

avec $r = R_1 + l_1 \cos \alpha + l'_1 \sin \alpha$

et sa réluctance est donnée par

$$dR = \frac{dl'_1}{2 \pi \mu r dl_1} = \frac{dl'_1}{2 \pi \mu (R_1 + l_1 \cos \alpha + l'_1 \sin \alpha) dl_1}$$

La réluctance totale du domaine défini à la figure 46 a) est obtenue en intégrant l'expression précédente pour l_1 variant de 0 à l et l'_1 de 0 à l' .

Tous calculs effectués on trouve

$$R = \frac{1}{2 \pi \mu l \sin \alpha} \ln \left| \frac{2R_1 + l \cos \alpha + 2 l' \sin \alpha}{2R_1 + l \cos \alpha} \right|$$

11.2.2. Condition pour que la réluctance soit unitaire

La grandeur réluctance a comme dimension H^{-1} , où H désigne l'unité d'inductance, le henry. La relation donnant la réluctance que nous venons d'établir est écrite sur des symboles représentant des nombres correspon-

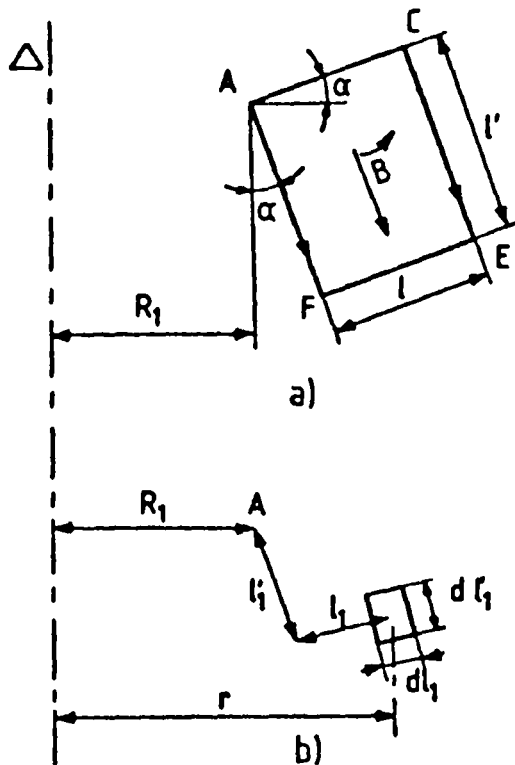


Figure 46 : Paramétrage du domaine de section rectangulaire

a) domaine,
b) domaine élémentaire.

dant aux mesures des grandeurs mises en jeu par un système cohérent d'unités, ici le système I.S.O.

Pour assurer le parallélisme avec la méthode de LEHMANN, on cherche la condition pour que, au facteur $1/\mu$ près, la réluctance déterminée au paragraphe précédent soit numériquement unitaire.

Cette condition s'écrit simplement

$$2 \mu l \sin \alpha = \ln \left| \frac{2R_1 + l \cos \alpha + 2 l' \sin \alpha}{2R_1 + l \cos \alpha} \right|$$

elle peut se mettre sous la forme équivalente suivante

$$l' = \frac{2R_1 + l \cos \alpha}{2 \sin \alpha} (e^{2 \pi l \sin \alpha} - 1)$$

On voit que, connaissant R_1 , l et α , on peut facilement calculer l' . Par contre la détermination de l en fonction de R_1 , l' et α nécessite la résolution d'une équation implicite.

II.2.3. Simplification dans un cas particulier fréquent

Il est fréquent que $2 \pi l$ soit petit devant 1 ; on peut alors développer le terme exponentiel en se limitant au premier ordre, ce qui permet d'écrire

$$e^{2 \pi l \sin \alpha} - 1 \approx 2 \pi l \sin \alpha$$

Une application numérique simple donne l'ordre de grandeur de l'erreur commise pour chaque cas particulier. Pour l inférieur à 0,024 m, l'erreur commise est inférieure à 1 %, quel que soit α .

$$l' \approx \pi l (2R_1 + l \cos \alpha)$$

ce qui permet de donner à l une forme analytique :

$$l \approx \frac{1}{\cos \alpha} \left(-R_1 + \sqrt{R_1^2 + \frac{l'}{\pi} \cos \alpha} \right)$$

Remarque :

Si on limitait le développement en série du terme exponentiel à l'ordre 2, on aurait

$$l' \approx \pi l (2R_1 + l \cos \alpha) (1 + \pi l \sin \alpha) ;$$

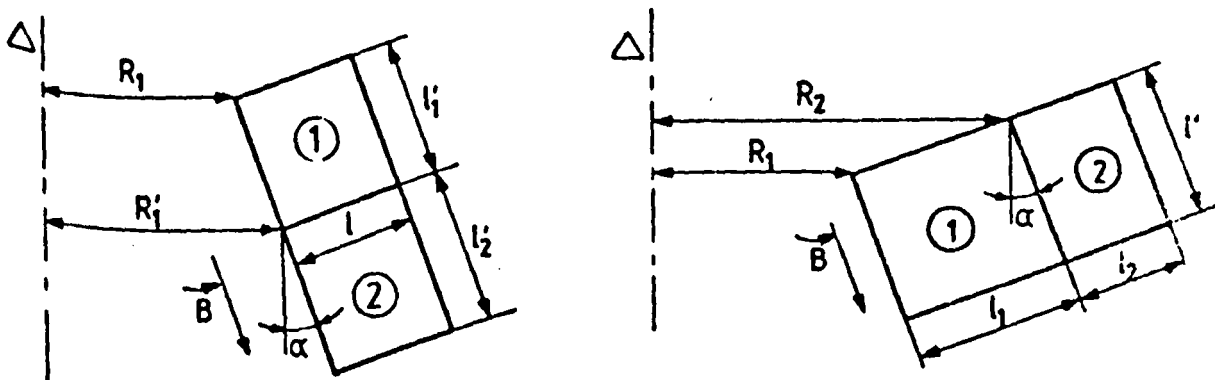
pour l' inférieur à 0,05 m, l'erreur serait toujours inférieure à $4 \cdot 10^{-3}$. Mais l'intérêt de ce développement est très mince car l'équation permettant de calculer l à partir de R_1 , l' et α est du troisième degré.

II.2.4. Arrangement des domaines unitaires

Pour pouvoir affirmer qu'on a bien étendu la méthode de LEHMANN aux systèmes possédant la symétrie de révolution, il faut vérifier que la mise en série de deux domaines unitaires donne bien une réluctance double, que leur mise en parallèle donne bien une réluctance moitié.

- Mise en série de deux domaines unitaires.

La figure 47 a) représente les sections de deux domaines unitaires montés en série, c'est-à-dire ayant les mêmes valeurs de α et de l .



a) en série.

b) en parallèle.

Figure 47 : Arrangement de deux domaines unitaires.

Pour que la réductance de chacun d'eux soit unitaire, il faut que

$$\ell'_1 = \frac{2R_1 + \ell \cos\alpha}{2 \sin\alpha} (e^{2\pi\ell \sin\alpha} - 1)$$

$$\ell'_2 = \frac{2R_1 + \ell \cos\alpha}{2 \sin\alpha} (e^{2\pi\ell \sin\alpha} - 1)$$

Puisque $R'_1 = R_1 + \ell'_1 \sin\alpha$, on peut montrer que

$$\ell'_1 + \ell'_2 = \frac{2R_1 + \ell \cos\alpha}{2 \sin\alpha} (e^{4\pi\ell \sin\alpha} - 1),$$

le tube de longueur $\ell' = \ell'_1 + \ell'_2$ remplit bien la condition pour que, au facteur $1/\mu$ près, sa réductance vaille 2.

- Mise en parallèle de deux domaines unitaires.

La figure 47 b) schématise deux domaines unitaires placés en parallèle, c'est-à-dire ayant les mêmes valeurs de ℓ' et de α .

Puisque ces domaines sont unitaires,

$$\ell' = \frac{2R_1 + \ell_1 \cos\alpha}{2 \sin\alpha} (e^{2\pi\ell_1 \sin\alpha} - 1)$$

$$\ell' = \frac{2R_2 + \ell_2 \cos\alpha}{2 \sin\alpha} (e^{2\pi\ell_2 \sin\alpha} - 1)$$

Sachant que $R_2 = R_1 + \ell_1 \cos\alpha$, on peut montrer que

$$\ell' = \frac{2R_1 + (\ell_1 + \ell_2) \cos\alpha}{2 \sin\alpha} (e^{(\ell_1 + \ell_2) \sin\alpha} - 1).$$

Le domaine total, de largeur égale à $\ell_1 + \ell_2$, remplit bien la condition pour que sa réductance vaille $1/2$, au facteur $1/\mu$ près.

II.2.5. Etude des cas limites

La condition pour que la réluctance soit unitaire, énoncée au paragraphe II.2.2, doit être précisée lorsque α est nul ou vaut $\pi/2$ car alors $\sin\alpha$ ou $\cos\alpha$ est nul.

- Cas où α est nul.

Quand α est nul (fig. 48 a)), la réluctance du domaine torique, dont la section est un rectangle de côtés l et l'_1 vaut

$$R = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{l'}{l(R_1 + \frac{l}{2})}$$

ce qui correspond bien à la limite de l'expression générale de R , établie au paragraphe II.2.1, quand α tend vers zéro.

La condition pour que, à $1/\mu$ près, la réluctance soit unitaire est donc

$$l' = \pi l(2R_1 + l)$$

qui correspond également à la formule simplifiée du paragraphe II.2.3.

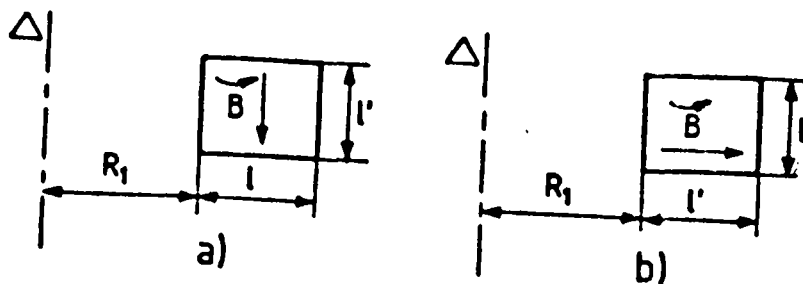


Figure 48 : Cas limites : a) α est nul,
b) α est égal à $\pi/2$

- Cas où α égale $\pi/2$.

Si α égale $\pi/2$, la réluctance du tube de champ torique dont la section est un rectangle de côtés ℓ' et ℓ (fig. 48 b)), a pour expression

$$R = \frac{1}{2 \pi \mu \ell} \ln\left(\frac{R_1 + \ell'}{R_1}\right)$$

La condition pour que cette réluctance soit unitaire, au facteur $1/\mu$ près, est donc

$$\ell' = R_1(e^{2 \pi \ell} - 1)$$

L'expression de R et la condition pour qu'elle soit égale à $1/\mu$ correspondent aux limites de l'expression et de la condition générales quand $\cos\alpha$ tend vers zéro et $\sin\alpha$ vers 1.

II.3. Application de la méthode à un exemple calculable

Avant de présenter une application de la méthode à un exemple quelconque, il est intéressant d'en vérifier la facilité de mise en oeuvre et la précision sur un domaine dont la réluctance est calculable analytiquement

II.3.1. Valeur exacte de la réluctance

On considère un tube de champ en forme de cylindre sphérique dont les paramètres géométriques sont présentés à la figure 49.

Les lignes de champ sont supposées être des arcs de cercle de centre O et les équipotentielles des troncs de cônes de sommet O .

La section du tube de champ défini par l'angle α vaut

$$S = 2 \pi \ell \left(R + \frac{\ell}{2}\right) \cos\alpha$$

L'élément de longueur de la ligne de champ moyenne est

$$dl' = \left(R + \frac{\ell}{2}\right) d\alpha$$

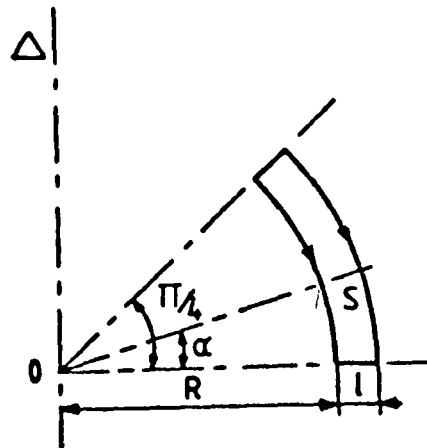


Figure 49 : Domaine axisymétrique à réluctance calculable.

La réluctance totale du tube de champ considéré vaut donc

$$R = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\mu} \frac{(R + \frac{\ell}{2}) d\alpha}{2 \pi \ell (R + \frac{\ell}{2}) \cos \alpha} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2 \pi \mu \ell} \frac{d\alpha}{\cos \alpha}$$

$$R = \frac{1}{2 \pi \mu \ell} \ln(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8})$$

En vue de tester la méthode, on a pris $R = 0,1$ m et $\ell = 0,02$ m, ce qui donne pour valeur calculée de la réluctance

$$R = \frac{7,014}{\mu} \text{ H}^{-1}$$

II.3.2. Application de la méthode

• La figure 50 a) illustre la mise en oeuvre directe de la méthode.

A partir de R , de ℓ et d'un angle α_0 , on calcule, par la relation établie au paragraphe II.2.2, la longueur ℓ' donnant une réluctance unitaire, au facteur $1/\mu$ près.

On porte alors sur la ligne de champ moyenne un arc de cercle de longueur égale à ℓ' , qui donne la trace de la seconde équipotentielle limitant le rectangle curviligne.

On détermine ainsi α_1 qui sert au calcul de ℓ' pour le rectangle suivant.

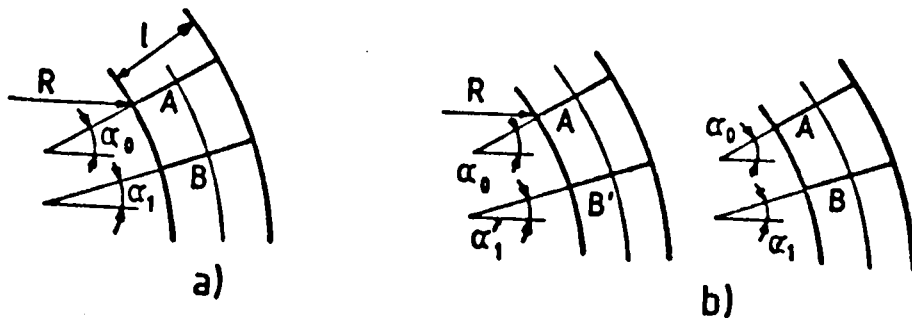


Figure 50 : Mise en oeuvre de la méthode

- a) directe,
b) améliorée,

En procédant ainsi de proche en proche, nous avons trouvé

$$R = \frac{6,992}{\mu} H^{-1}, \text{ soit une erreur par défaut de } 3 \text{ \%}.$$

• On peut améliorer la mise en oeuvre de la méthode en remarquant que la longueur l' calculée à partir d'une équipotentielle diffère de celle qu'on déterminerait à partir de l'autre équipotentielle limitant le même rectangle.

Partant de R , l et α_0 on détermine comme précédemment la longueur l' de l'arc AB' . on en déduit α'_1 .

On définit alors un angle moyen $\alpha = (\alpha_0 + \alpha'_1)/2$. C'est à l'aide de cet angle α , de R et de l qu'on calcule une valeur plus précise de l' qu'on porte en AB pour tracer l'équipotentielle limitant le rectangle et déterminer l'angle α_1 qui servira de point de départ au calcul du rectangle suivant.

En procédant de cette manière, on a trouvé $R = \frac{7,004}{\mu} H^{-1}$, soit une erreur par défaut de 1,5 %.

• Cette façon d'améliorer la précision revient à celle bien connue des utilisateurs de la méthode de LEHMANN classique : quand on hésite sur le tracé d'un "carré" ou quand les dimensions de celui-ci tendent à devenir trop importantes, on le fractionne en carrés plus petits mis en série ou en parallèle. Les rappels sur la notion de réluctance faits au Chapitre I ont montré que plus la section d'un tube de champ est faible, plus la constante de l'induction y est vérifiée et plus le calcul de la réluctance est exact.

II.4. Application à un phénomène de frange

Dans les machines électriques, le domaine des franges correspond aux effets de bords et aux fuites magnétiques. L'appréciation de tels effets se fait en recourant aux mêmes méthodes que celles utilisées pour l'étude des flux actifs, mais elles sont d'autant moins précises que les conditions aux limites sont plus floues.

Par la méthode améliorée que nous venons de décrire, nous avons cherché à déterminer le réseau des rectangles curvilignes unitaires dans le cas d'une figure possédant une symétrie de révolution autour d'un axe Δ . Les limites équipotentielles choisies sont, d'une part une couronne circulaire plane perpendiculaire à Δ et centrée sur cet axe, d'autre part un morceau de cylindre de révolution d'axe Δ .

Le domaine étudié est schématisé par la trace AB et CD des équipotentielles (fig. 51).

Pour la suite de l'étude on a choisi

$$AB = 0,055 \text{ m}$$

$$BH = 0,018 \text{ m}$$

$$HC = 0,016 \text{ m}$$

$$CD = 0,074 \text{ m.}$$

Pour mettre en évidence l'influence de la position de la section étudiée par rapport à l'axe Δ , on a effectué deux tracés :

l'un avec $OA = 0,030 \text{ m}$,
l'autre avec $OA = 0,300 \text{ m}$.

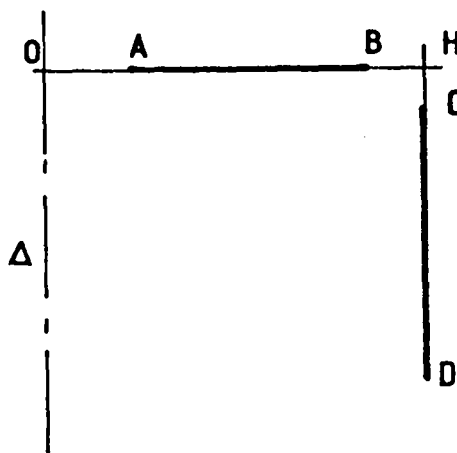


Figure 51 : Délimitation du domaine étudié.

La figure 52 reproduit les deux tracés :

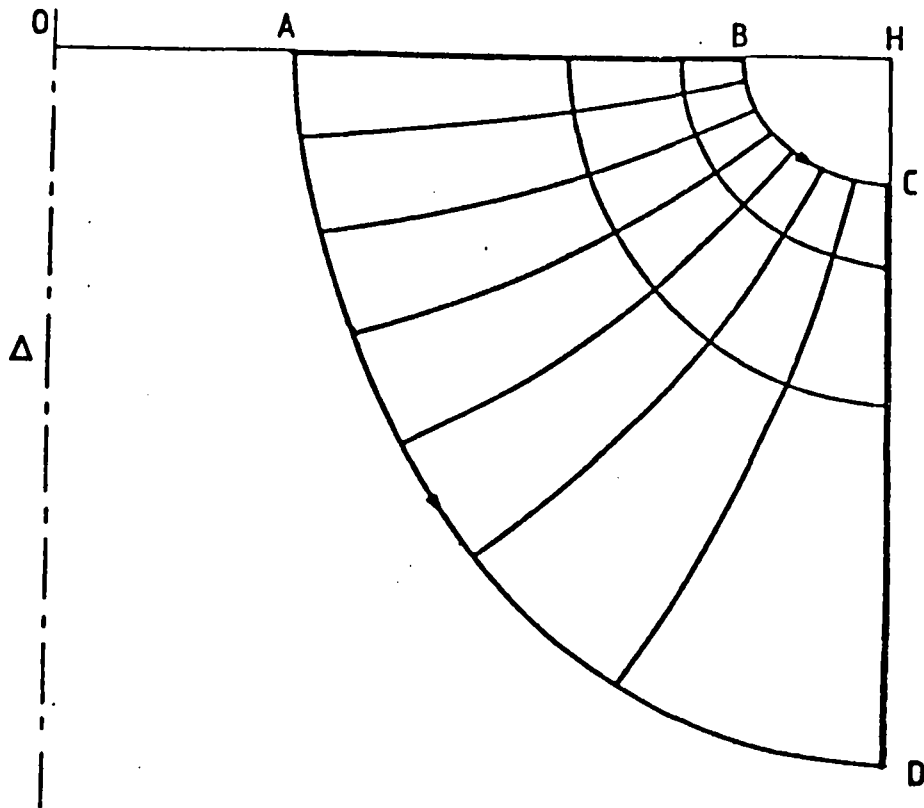
- Pour $OA = 0,030 \text{ m}$, l'examen du réseau conduit à une réluctance voisine de $\frac{7}{3\mu} = \frac{2,33}{\mu} \text{ H}^{-1}$.
- Pour $OA = 0,300 \text{ m}$, le réseau tracé donne une réluctance voisine de $\frac{0,5}{\mu} \text{ H}^{-1}$.

La comparaison entre ces deux valeurs (rapport 4,66) met en évidence l'importance de l'erreur qu'on commettrait en considérant la réluctance comme inversement proportionnelle au diamètre moyen du disque (cela donnerait un rapport de 5,70) où à celui du cylindre (on obtiendrait 3,62).

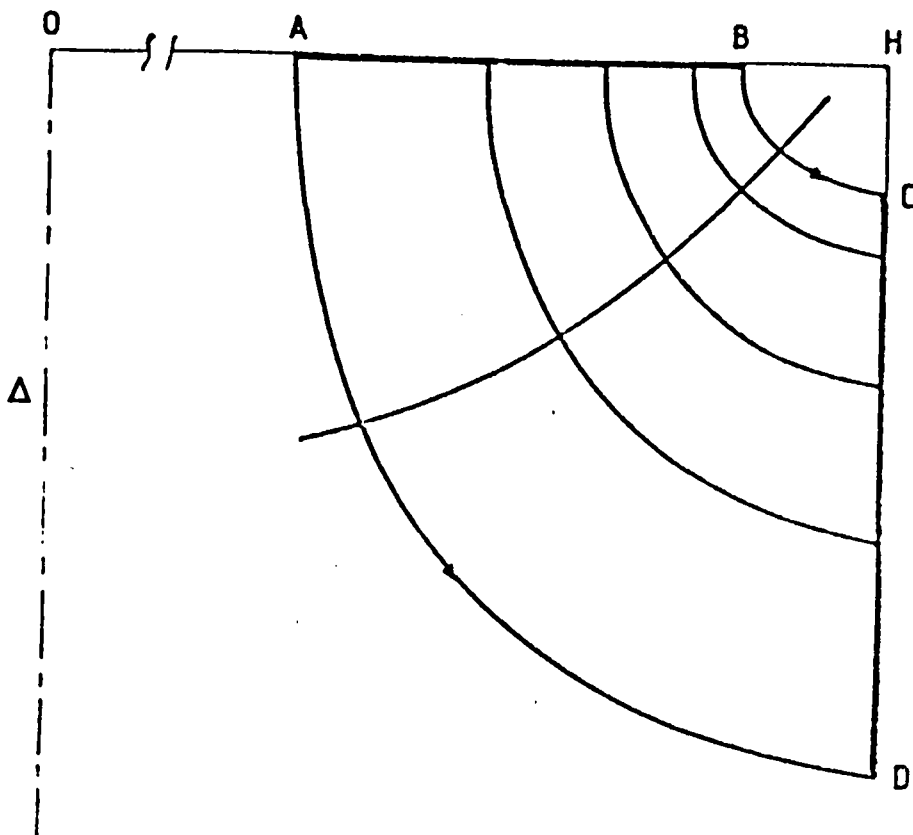
II.5. Conclusion

La bonne précision des résultats obtenus et la facilité relative de la mise en oeuvre justifient la transposition de la méthode de LEHMANN aux systèmes linéaires à symétrie de révolution.

Cette méthode n'a certes pas l'ambition de se substituer aux procédés plus précis, analytiques ou numériques, de calcul des réluctances. Elle constitue néanmoins un complément utile lorsque certaines conditions aux limites sont mal définies ; elle fournit alors, à la fois, une bonne



a)



b)

Figure 52 : Exemples d'application de la méthode de LEHMANN transposée

- a) $OA = 0,030$ m,
 b) $OA = 0,300$ m.



estimation de la réluctance et de la structure topologique du champ. C'est par ce dernier point qu'elle rejoint la méthode de la structuration en zones où les lignes de champ se ressemblent et de l'expression analytique de la réluctance de ces diverses zones : quand la structuration n'est pas évidente, la méthode de LEHMANN permet de l'établir.

La méthode de LEHMANN transposée trouve une application directe dans l'évaluation des flux de fuites correspondant aux lignes de champ situées dans les plans passant par l'axe des machines tournantes classiques ou à réluctance.

III. TRANSPOSITION DES REGLES DE FORBES ETENDUES

On s'est limité ici à transposer les règles correspondant aux cas les plus fréquemment rencontrés dans l'étude des machines à réluctance variable ; ils correspondent à des surfaces équipotentielles limitant le domaine dont on cherche la perméance soit parallèles soit perpendiculaires à l'axe de symétrie.

III.1. Cas des surfaces équipotentielles parallèles [45]

Si les surfaces équipotentielles sont parallèles, il faut distinguer le cas où l'axe de symétrie est parallèle à la direction du champ d'induction du cas où il lui est perpendiculaire.

III.1.1. L'axe de symétrie est parallèle à la direction du champ d'induction

III.1.1.1. Cas général

Il s'agit d'exprimer la réluctance du domaine situé entre deux surfaces équipotentielles constituées de couronnes circulaires perpendiculaires à l'axe de symétrie et centrées sur celui-ci.

La figure 53 donne les paramètres géométriques de la section :

R_1 et R_2 , rayon interne des couronnes,

l_1 et l_2 , largeur des couronnes,

Δ distance entre couronnes.

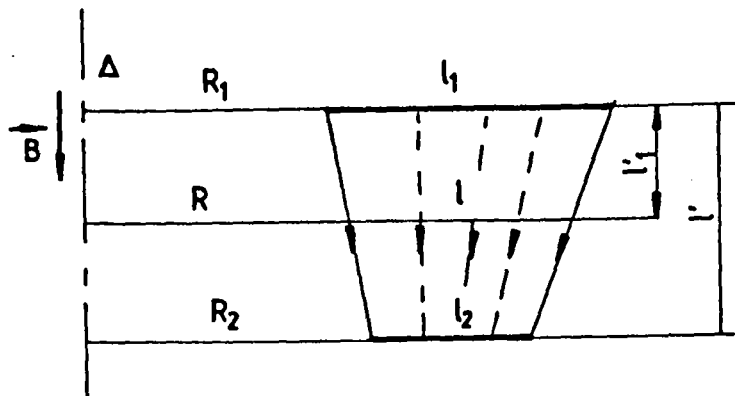


Figure 53 : Paramétrage de la section du tube considéré.

Puisque l'emploi du résultat à établir se fera exclusivement lorsque sera vérifiée l'hypothèse de la "ressemblance par zone", on peut faire l'approximation que les lignes de champ sont des segments de droites, comme représenté sur la figure 53.

- Réluctance du tube de longueur élémentaire.

La réluctance d'un tube de champ de longueur $d\ell'_1$ situé à la distance ℓ'_1 du disque supérieur est celle d'un cylindre de longueur $d\ell'_1$, de rayon intérieur R , de rayon extérieur $R + \ell$. Elle est donc approchée par

$$dR = \frac{d\ell'_1}{\mu \pi [(R + \ell)^2 - R^2]} = \frac{d\ell'_1}{\mu \pi \ell (2R + \ell)}$$

Compte tenu de l'hypothèse de la linéarité des lignes de champ, ℓ et R se déduisent des paramètres $R_1, R_2, \ell_1, \ell_2, \ell'$ et de la position ℓ'_1 du cylindre considéré par

$$R = \frac{R_1 \ell' + \ell'_1 (R_2 - R_1)}{\ell'}$$

$$\ell = \frac{\ell_1 \ell' + \ell'_1 (\ell_2 - \ell_1)}{\ell'}$$

L'expression de la réluctance élémentaire devient alors

$$dR = \frac{\ell'^2}{\mu \pi} \frac{d\ell'_1}{(A^* \ell'^2 + B^* \ell'_1 + C^*)}$$

en posant

$$A^* = (\ell_2 - \ell_1) [2(R_2 - R_1) + (\ell_2 - \ell_1)]$$

$$B^* = [(2R_1 + \ell_1) (\ell_2 - \ell_1) + 2\ell_1 (R_2 - R_1) + \ell_1 (\ell_2 - \ell_1)] \ell'$$

$$C^* = (2R_1 + \ell_1) \ell_1 \ell'^2$$

Avant d'intégrer de 0 à l' , il faut discuter du signe de $B^{*2} - 4 A^* C^*$.

On montre assez aisément que cette quantité, nulle si $R_1 l_2$ égale $R_2 l_1$, ne peut être négative.

- Cas où $B^{*2} - 4 A^* C^*$ est positif.

Si $B^{*2} - 4 A^* C^*$ est positif, on peut poser

$$\sqrt{B^{*2} - 4 A^* C^*} = l' D$$

avec

$$D = |(2R_1 + l_1)(l_2 - l_1) - l_1[2(R_2 - R_1) + (l_2 - l_1)]|$$

La réluctance totale du domaine envisagé, soit

$$R = \int_0^{l'} dR(l'_1) = \frac{l'^2}{\mu\pi} \int_0^{l'} \frac{dl'_1}{A^* l'^2_1 + B^* l'_1 + C^*}$$

pour valeur, tous calculs effectués, avec les notations indiquées,

$$R = \frac{l'}{\mu \pi D} \left[\ln \frac{(2A^* - D) l' + B^*}{(2A^* + D) l' + B^*} - \ln \frac{B^* - D l'}{B^* + D l'} \right]$$

- Cas où $B^{*2} - 4 A^* C^*$ est nul.

Si $B^{*2} - 4 A^* C^*$ est nul, la réluctance élémentaire peut s'écrire

$$dR = \frac{l'^2}{\mu\pi} \frac{dl'_1}{A^* (l'_1 + E)^2}$$

en posant $E = \frac{-B^*}{2A^*}$.

En intégrant de 0 à l' , on obtient comme expression de la réluctance totale du domaine

$$R = \frac{l'^2}{\mu \pi A^*} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{l' + E} \right)$$

III.1.1.2. Cas où R_1 égale R_2 et l_1 égale l_2

Dans le cas particulier mais fréquent où la section du tube est rectangulaire (fig. 54), la réluctance du domaine a pour expression

$$R = \frac{l'}{\mu \pi (R_2^2 - R_1^2)}$$

On retrouve évidemment, mise sous une autre forme, l'expression de R établie au paragraphe II.2.5. dans le cas où α est nul.

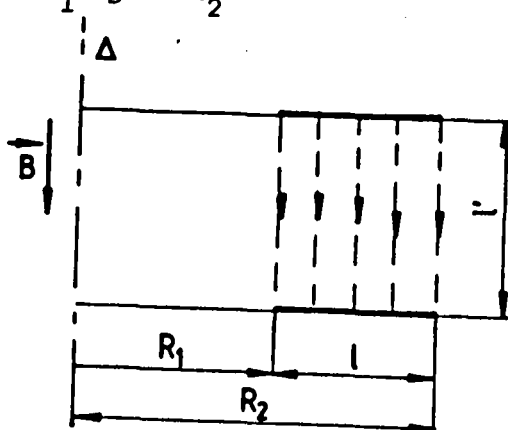


Figure 54 : Paramétrage de la section dans le cas particulier.

III.1.1.2. L'axe de symétrie est perpendiculaire à la direction du champ d'induction

- Cas général

La figure 55 montre la demi-coupe par un plan passant par l'axe du domaine considéré. Celui-ci est limité par deux cylindres coaxiaux, l'un de rayon R_1 et de longueur l_1 , l'autre de rayon R_2 , et de longueur l_2 , situés l'un face à l'autre.

Ici encore, compte tenu de l'utilisation qui sera faite de l'expression de la réluctance, on admet que les lignes de champ sont des segments de droite.

La réluctance du cylindre élémentaire de rayon R est d'épaisseur dR vaut

$$dR = \frac{dR}{\mu 2\pi R l}$$

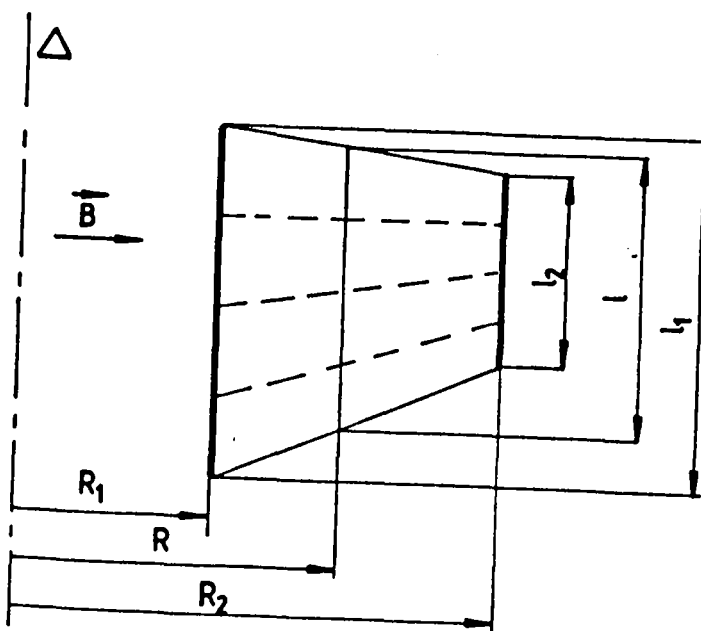


Figure 55 : Demi-coupe du domaine compris entre deux cylindres coaxiaux.

Dans cette expression ℓ a pour valeur, en fonction de R_1 , R_2 , ℓ_1 , ℓ_2 et de la variable R ,

$$\ell = \frac{\ell_2 - \ell_1}{R_2 - R_1} R + \frac{R_2 \ell_1 - R_1 \ell_2}{R_2 - R_1}$$

et est donc de la forme $\ell = A_1 R + B_1$.

La réductance élémentaire s'écrit donc

$$dR = \frac{dR}{2 \mu \pi (A_1 R^2 + B_1 R)}$$

En intégrant cette expression pour R variant de R_1 à R_2 on obtient comme réductance du domaine complet

$$R = \left| \frac{R_2 - R_1}{2 \mu \pi (R_2 \ell_1 - R_1 \ell_2)} \ln \left(\frac{R_2 \ell_1}{R_1 \ell_2} \right) \right|$$

- Cas particulier

Dans le cas particulier où $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ (fig. 56) la formule précédente se simplifie pour donner

$$R = \frac{1}{2 \mu \pi \ell} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

On retrouve le résultat établi au paragraphe II.2.5. dans le cas où α égale $\pi/2$.

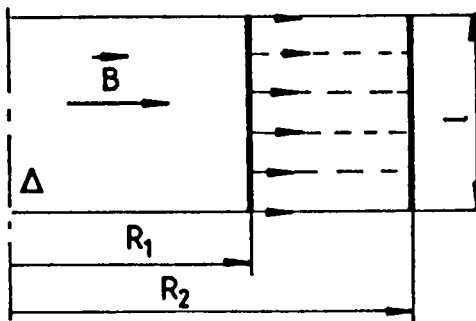


Figure 56 : Paramétrage de la section dans le cas particulier.

III.2. Cas de surfaces équipotentielles orthogonales de même largeur

Pour établir l'expression de la réductance des domaines axisymétriques dont les lignes de champ sont des quarts de cercle, on considère deux surfaces équipotentielles en forme de disques coaxiaux, de même largeur ℓ_1 , situés dans le même plan perpendiculaire à l'axe (fig. 57).

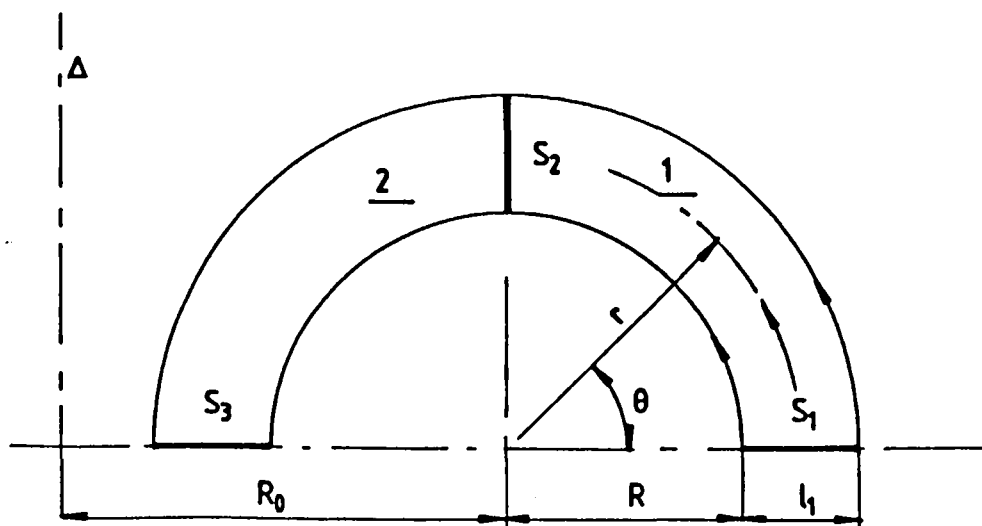


Figure 57 : Paramétrage des domaines ① et ②.

Les surfaces S_1 et S_3 sont raccordées par des lignes de champ ayant la forme de demi-cercles. La réluctance totale est la somme de deux réluctances :

- la réluctance du domaine ①, allant de la surface équipotentielle S_1 , de trace perpendiculaire à Δ , à la surface de trace S_2 , parallèle à l'axe Δ et plus proche de celui-ci,
- la réluctance du domaine ②, allant de S_2 à S_3 , de trace perpendiculaire à l'axe mais plus proche de celui-ci que la trace de S_2 .

Suivant la distance par rapport à l'axe des deux surfaces orthogonales considérées on utilisera l'expression de la réluctance de l'un ou l'autre des domaines.

La réluctance de la longueur élémentaire du tube reliant S_1 à S_3 est

$$dR = \frac{r \, d\theta}{\mu \, 2\pi(R_0 + r \cos\theta) \, l_1},$$

en posant $r = R + \frac{l_1}{2}$.

En intégrant cette expression de 0 à $\pi/2$ on obtient la réluctance du domaine ①, en intégrant de $\pi/2$ à π la réluctance du domaine ②.

- Réductance du domaine (1).

La réductance, calculée par

$$R = \frac{r}{2 \pi \mu \ell_1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{R_0 + r \cos\theta}$$

a pour expression

$$R = \frac{r}{2 \pi \mu \ell_1} \frac{2}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R_0 - r}{R_0 + r}} \left[\text{tg} \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

D'où

$$R = \frac{r}{\mu \pi \ell_1 \sqrt{R_0^2 - r^2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R_0 - r}{R_0 + r}}$$

- Réductance du domaine (2).

En intégrant dR pour θ allant de $\pi/2$ à π , on trouve

$$R = \frac{r}{2 \mu \pi \ell_1} \frac{2}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R_0 + r}{R_0 - r}} \left[\text{tg} \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

Soit

$$R = \frac{r}{\mu \pi \ell_1 \sqrt{R_0^2 - r^2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R_0 + r}{R_0 - r}}$$

III.3. Cas de surfaces équipotentielles orthogonales raccordées par des cylindres en anses de panier

On peut transposer aux systèmes axisymétriques l'étude faite en coordonnées cartésiennes au chapitre II, paragraphe II. Quand les traces, sur le demi-plan passant par Δ , des deux surfaces équipotentielles orthogonales ont des largeurs différentes, on assimile les lignes de champ, dans chaque section, à des anses de panier.

Comme précédemment, il faut distinguer deux cas (fig. 58) :

- Le cas a : L'axe de symétrie est du côté convexe des lignes de champ,
- Le cas b : L'axe de symétrie est du côté concave des lignes de champ.

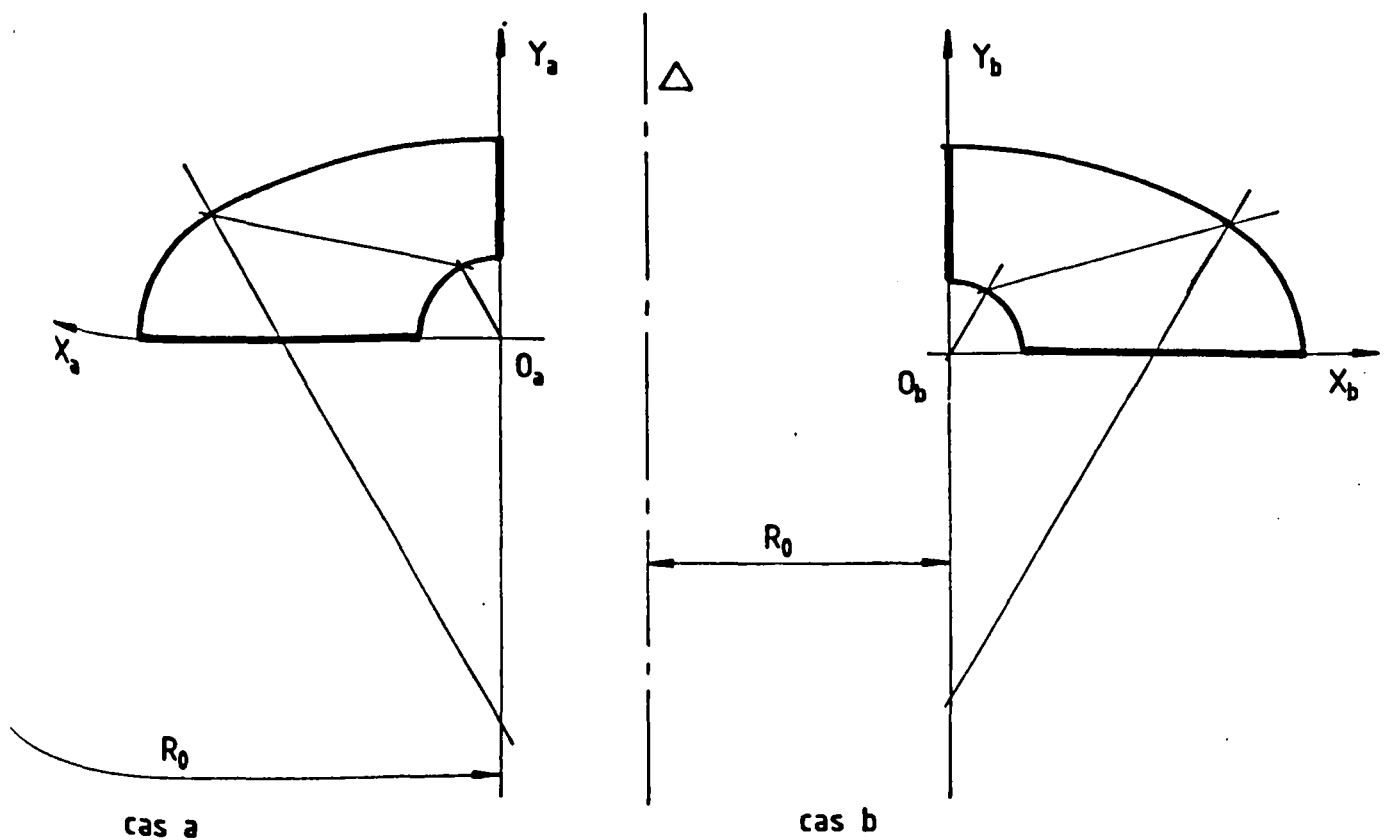


Figure 58 : Représentation des deux cas étudiés.

III.3.1. Etude du cas a

L'étude géométrique du premier cas se déduit directement de celle effectuée au chapitre II. La construction des lignes de champ, rappelée sur la figure 39, est la même. Les expressions de l'angle α , des rapports A et B, de l'abscisse x_{C_1} du centre de la partie basse de la plus grande des anses, la valeur des rayons r et R des deux parties de l'anse correspondant à $x\dots$, en fonction de x_1 (ou y_1), x_2 et y_2 sont les mêmes.

Seule change la section des tubes de champ puisqu'on est dans un système axisymétrique et non plus dans un système de dimensions perpendiculaires à la figure constantes.

Ici encore on doit étudier séparément la partie basse et la partie haute du tube de champ joignant les deux surfaces équipotentielles.

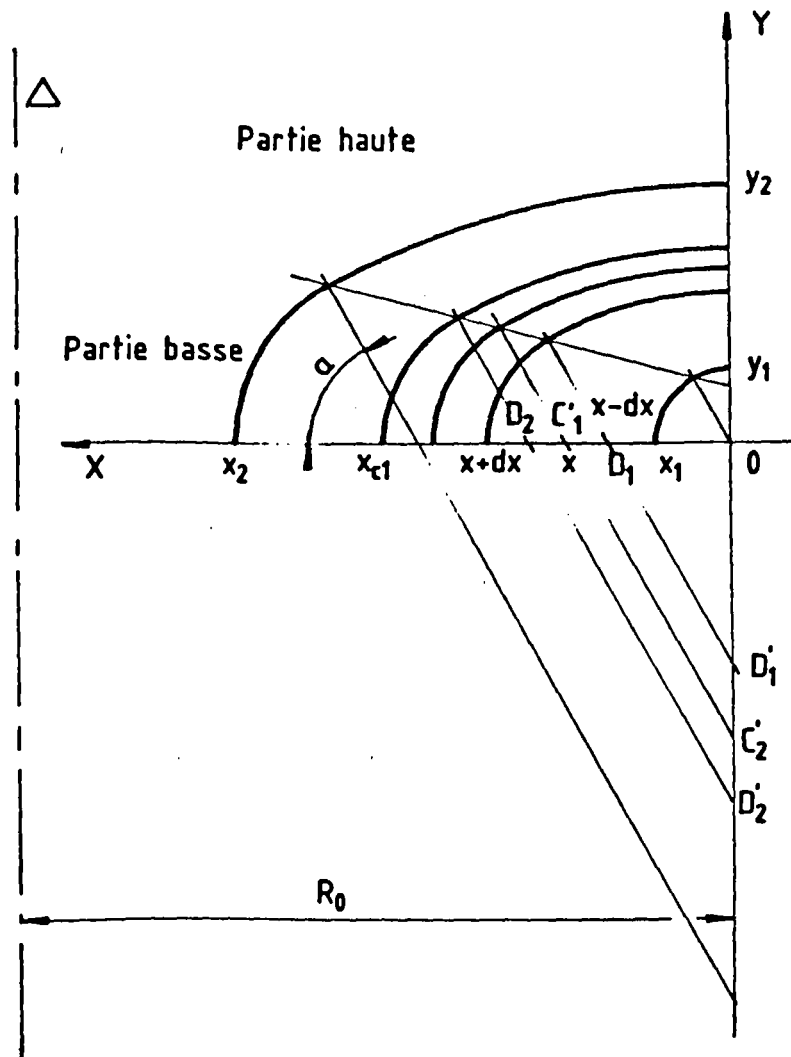


Figure 59 : Etude géométrique du cas a.

III.3.1.1. Calcul de la réductance de la partie basse du tube de champ

La figure 60, reprenant les notations de la figure 29, permet le calcul de l'aire S_1 de la section

formée sur $M_1 M_2$ de largeur

s_1 et tournant autour de Δ :

$$S_1 = 2\pi[R_0 - (x + r \cos\theta_1)] s_1]$$

avec encore

$$r = x_1 + Ax$$

$$s_1 = dx(A + \cos\theta_1)$$

La réductance élémentaire d'un domaine de longueur $d\ell_1$ et de section s_1 dans la partie basse d'un tube de champ a pour valeur

$$dR = \frac{d\ell_1}{\mu S_1}$$

Comme on a encore

$$d\ell_1 = (x_1 + Ax) d\theta_1,$$

on en déduit

$$dR = \frac{(x_1 + Ax) d\theta_1}{2 \pi \mu [R_0 - x - (x_1 + Ax) \cos\theta_1] (A + \cos\theta_1) dx}$$

Cette relation peut se mettre sous la forme

$$dR = \frac{1}{2 \pi \mu} \frac{d\theta_1}{A + \cos\theta_1} \left[\frac{R_0 - x}{x_1 + Ax} - \cos\theta_1 \right] dx$$

Le calcul de la réductance de l'ensemble de la partie basse s'effectue en intégrant cette expression entre 0 et x_{C_1} sur x , entre 0 et α sur θ_1 .

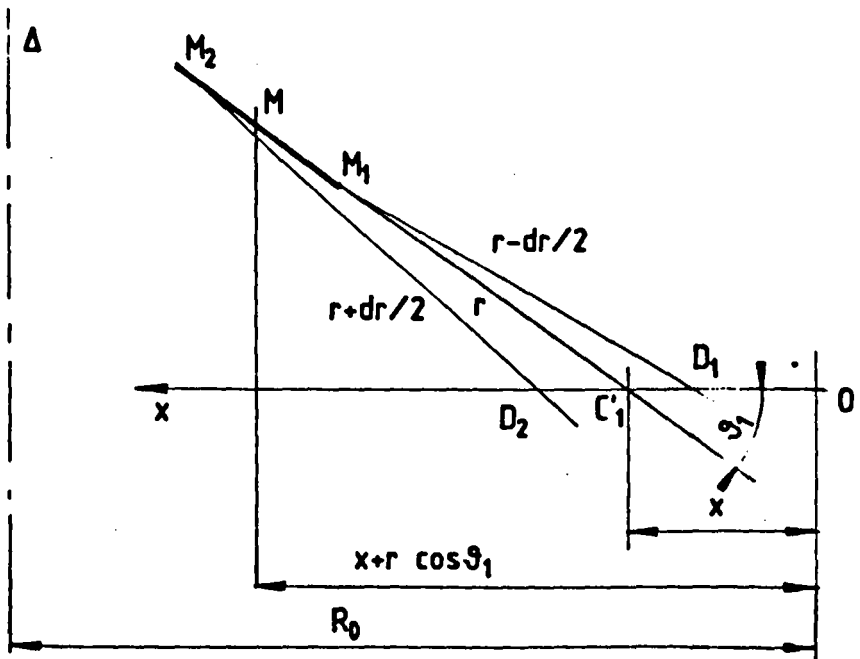


Figure 60 : Rappel des notations pour le calcul de la section de la partie basse du tube élémentaire.

Soit

$$R = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{A + \cos\theta_1} \frac{1}{\int_0^{x_{C1}} \left(\frac{R_0 - x}{x_1 + Ax} - \cos\theta_1 \right) dx} \right) d\theta_1$$

Les variables n'étant pas séparables, il faut intégrer d'abord en x puis en θ_1 .

- Calcul de l'intégrale en x .

Pour simplifier les notations ultérieures, on posera

$$I_{aBx} = \int_0^{x_{C1}} \left(\frac{R_0 - x}{x_1 + Ax} - \cos\theta_1 \right) dx,$$

I signifiant intégrale et les indices a, B, x indiquant respectivement qu'il s'agit du cas a , de la partie basse, de l'intégrale en x .

On peut développer I_{aBx} ainsi

$$I_{aBx} = \int_0^{x_{C1}} \left[\frac{R_0}{Ax + x_1} - \frac{x}{Ax + x_1} - \cos\theta_1 \right] dx$$

I_{aBx} est la somme de trois termes correspondant chacun à l'une des intégrales composantes.

$$I_{aBx} = I_{aBx1} - I_{aBx2} - I_{aBx3}$$

avec

$$I_{aBx1} = \int_0^{x_{C1}} \frac{R_0 dx}{Ax + x_1} = \frac{R_0}{A} \ln \frac{Ax_{C1} + x_1}{x_1}$$

$$I_{aBx2} = \int_0^{x_{C1}} \frac{x dx}{Ax + x_1} = \frac{x_{C1}}{A} - \frac{x_1}{A^2} \ln \frac{Ax_{C1} + x_1}{x_1}$$

$$I_{aBx3} = \int_0^{x_{C1}} \cos\theta_1 dx = x_{C1} \cos\theta_1$$

Au total l'intégrale cherchée vaut donc

$$I_{aBx} = \frac{A R_0 + x_1}{A^2} \ln \frac{Ax_{C1} + x_1}{x_1} - \frac{x_{C1}}{A} - x_{C1} \cos\theta_1$$

Posant

$$D_{aB} = \frac{A R_0 + x_1}{A^2 x_{C1}} \ln \frac{Ax_{C1} + x_1}{x_1} - \frac{1}{A}$$

On notera

$$I_{aBx} = x_{C1} (D_{aB} - \cos\theta_1)$$



- Calcul de l'intégrale en θ_1 .

$$R = \frac{1}{2 \pi \mu} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{A + \cos\theta_1} \frac{1}{x_{C1} (D_{aB} - \cos\theta_1)} \right) d\theta_1$$

peut s'écrire

$$R = \frac{1}{2 \pi \mu x_{C1} (A + D_{aB})} [I_{aB\theta_1 1} + O_{aB\theta_1 2}]$$

en adoptant le système de repérage des intégrales indiqué précédemment

* La première intégrale

$$I_{aB\theta_1 1} = \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{A + \cos\theta_1}$$

a été calculée au chapitre II, paragraphe II.4.2 où elle est désignée par I. Nous avons indiqué alors les trois expressions qu'elle prend suivant que $A^2 - 1$ est négatif, positif ou nul.

* La seconde intégrale

$$I_{aB\theta_1 2} = \int_0^\alpha \frac{1}{D_{aB} - \cos\theta_1} d\theta_1$$

reste à calculer.

• si $D_{aB}^2 - 1$ est négatif,

$$I_{aB\theta_1 2} = \frac{1}{\sqrt{1 - D_{aB}^2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{1 - D_{aB}}{1 + D_{aB}}}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{1 - D_{aB}}{1 + D_{aB}}}} \right|$$

• si $D_{aB}^2 - 1$ est positif,

$$I_{aB\theta_1 2} = \frac{2}{\sqrt{D_{aB}^2 - 1}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{D_{aB} + 1}{D_{aB} - 1}} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \right)$$

• si $D_{aB}^2 - 1$ est nul, avec $D_{aB} = -1$, seul cas possible

$$I_{aB\theta_1 2} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

- Expression proposée.

Avec les notations indiquées, la réluctance de la partie basse du tube sera donc

$$R_{aB} = \frac{1}{2 \pi \mu} \frac{1}{x_{C_1} (A + D_{aB})} (I_{aB \theta_1 1} + I_{aB \theta_1 2})$$

en prenant pour la première intégrale l'expression correspondant au signe de $A^2 - 1$, pour la seconde celle correspondant au signe de $D_{aB}^2 - 1$.

III.3.1.2. Calcul de la réluctance de la partie haute du tube de champ

La figure 61, reprenant les éléments de la figure 30 permet de calculer l'aire S_2 de la section formée sur $M'_1 M'_2$ de largeur s_2 tournant autour de Δ :

$$S_2 = 2\pi(R_0 - R \sin\theta_2) s_2$$

avec

$$R = x_1 + Bx$$

$$s_2 = (B - \text{tg}\alpha \cos\theta_2) dx$$

La réluctance élémentaire d'un élément de partie haute (indice H) du tube de champ a pour valeur

$$dR_{aH} = \frac{dl_2}{\mu S_2}$$

Comme on a encore

$$dl_2 = R d\theta_2$$

Cette réluctance s'écrit

$$dR_{aH} = \frac{(x_1 + Bx) d\theta_2}{2 \pi \mu [R_0 - (x_1 + Bx) \sin\theta_2] (B - \text{tg}\alpha \cos\theta_2) dx}$$

On peut la mettre sous la forme

$$dR_{aH} = \frac{1}{2 \pi \mu} \frac{d\theta_2}{B - \text{tg}\alpha \cos\theta_2} \frac{1}{\left(\frac{R_0}{x_1 + Bx} - \sin\theta_2\right) dx}$$

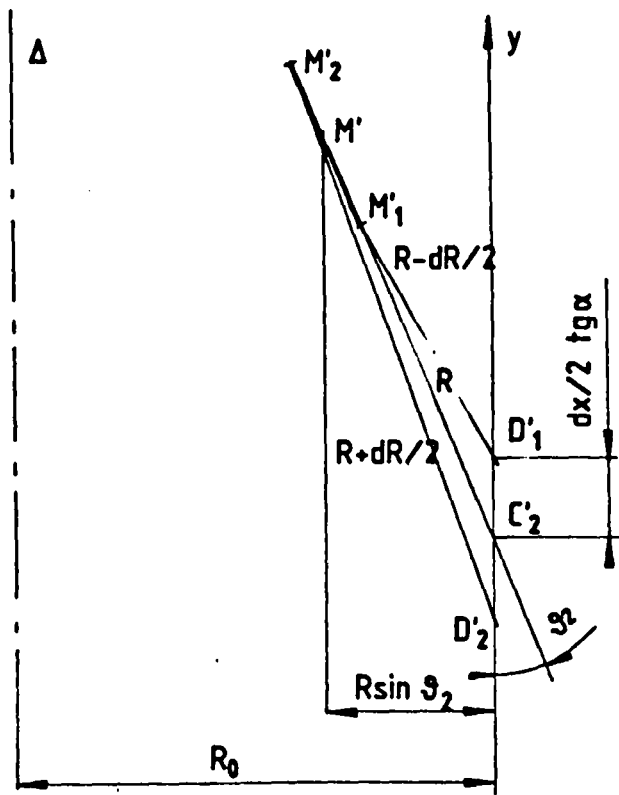


Figure 61 : Notations permettant le calcul de la section de la partie haute du tube élémentaire.

Pour obtenir la valeur R_{aH} de la réluctance de toute la partie haute du tube de champ, il faut intégrer de 0 à x_{C_1} sur x et de 0 à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sur θ_2

$$R_{aH} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \left(\frac{1}{B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2} \int_0^{x_{C_1}} \frac{1}{\left(\frac{R_0}{x_1 + Bx} - \sin\theta_2\right)} dx \right) d\theta_2$$

- Calcul de l'intégrale en x .

Avec les notations retenues, on calcule

$$I_{aHx} = \int_0^{x_{C_1}} \left(\frac{R_0}{x_1 + Bx} - \sin\theta_2 \right) dx$$

ce qui donne

$$I_{aHx} = \frac{R_0}{B} \ln \frac{x_1 + Bx_{C_1}}{x_1} - x_{C_1} \sin\theta_2$$

En désignant par D_{aH} la quantité positive suivante

$$D_{aH} = \frac{R_0}{Bx_{C_1}} \ln \frac{x_1 + Bx_{C_1}}{x_1},$$

on écrira

$$I_{aHx} = x_{C_1} (D_{aH} - \sin\theta_2)$$

- Calcul de l'intégrale en θ_2 .

$$R_{aH} = \frac{1}{2\pi\mu x_{C_1}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{1}{B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2} \frac{1}{D_{aH} - \sin\theta_2} d\theta_2$$

ou, en posant $B_{aH} = \frac{B}{\operatorname{tg}\alpha}$ (toujours positif),

$$R_{aH} = \frac{1}{2 \pi \mu} \frac{1}{x_{C_1} \operatorname{tg} \alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{1}{B_{aH} - \cos \theta_2} \frac{1}{D_{aH} - \sin \theta_2} d\theta_2$$

ou encore

$$R_{aH} = \frac{1}{2 \pi \mu} \frac{1}{x_{C_1} \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{1 - B_{aH}^2 - D_{aH}^2} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \left(\frac{D_{aH} + \sin \theta_2}{B_{aH} - \cos \theta_2} - \frac{B_{aH} + \cos \theta_2}{D_{aH} - \sin \theta_2} \right) d\theta_2$$

Cette intégrale est calculée en quatre fois

$$R_{aH} = \frac{1}{2 \pi \mu x_{C_1} \operatorname{tg} \alpha (1 - B_{aH}^2 - D_{aH}^2)} (I_{aH\theta_2 1} + I_{aH\theta_2 2} + I_{aH\theta_2 3} + I_{aH\theta_2 4})$$

* La première intégrale

$$I_{aH\theta_2 1} = -D_{aH} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{d\theta_2}{B_{aH} - \cos \theta_2} = -D_{aH} \operatorname{tg} \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{d\theta_2}{B - \operatorname{tg} \alpha \cos \theta_2}$$

n'est autre, à $-D_{aH} \operatorname{tg} \alpha$ près, que l'intégrale J calculée au chapitre II, paragraphe II.4.2.

Donc

$$I_{aH\theta_2 1} = \frac{-2 D_{aH} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{B^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{B + \operatorname{tg} \alpha}{B - \operatorname{tg} \alpha}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

* La seconde intégrale

$$I_{aH\theta_2 2} = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{-\sin \theta_2}{B_{aH} - \cos \theta_2} d\theta_2$$

donne, compte tenu de la définition de B_{aH} ,

$$I_{aH\theta_2 2} = \ln \left| \frac{B - \operatorname{tg}\alpha}{B - \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha} \right|$$

* La troisième intégrale

$$I_{aH\theta_2 3} = -B_{aH} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{d\theta_2}{D_{aH} - \sin\theta_2}$$

nécessite la distinction de trois cas, suivant le signe de $D_{aH}^2 - 1$.

• Si $D_{aH}^2 - 1$ est positif,

$$I_{aH\theta_2 3} = \frac{-2B_{aH}}{\sqrt{D_{aH}^2 - 1}} \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{D_{aH} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - 1}{\sqrt{D_{aH}^2 - 1}} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{D_{aH}^2 - 1}} \right]$$

• Si $D_{aH}^2 - 1$ est nul,

$$I_{aH\theta_2 3} = B_{aH} \left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

• Si $D_{aH}^2 - 1$ est négatif,

$$I_{aH\theta_2 3} = \frac{-B_{aH}}{\sqrt{1 - D_{aH}^2}} \ln \left| \frac{\frac{D_{aH} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 - \sqrt{1 - D_{aH}^2}}{D_{aH} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 + \sqrt{1 - D_{aH}^2}}}{\frac{1 + \sqrt{1 - D_{aH}^2}}{1 - \sqrt{1 - D_{aH}^2}}} \right|$$

• La quatrième intégrale

$$I_{aH\theta_2 4} = \int_0^{\pi - \alpha} \frac{-\cos\theta_2 d\theta_2}{D_{aH} - \sin\theta_2}$$

donne

$$I_{aH\theta_2 4} = \ln \left| \frac{D_{aH} - \cos\alpha}{D_{aH}} \right|$$

- Expression proposée.

On peut donc calculer la réluctance totale de la partie haute du tube de champ par

$$R_{aH} = \frac{1}{2 \mu \pi x_{C_1} \operatorname{tg}\alpha (1 - B_{aH}^2 - D_{aH}^2)} (I_{aH\theta_2 1} + I_{aH\theta_2 2} + I_{aH\theta_2 3} + I_{aH\theta_2 4})$$

en prenant pour $I_{aH\theta_2 3}$ l'expression correspondant au signe de $D_{aH}^2 - 1$.

III.3.1.3. Réluctance totale pour le cas a

L'expression globale de la réluctance du domaine à symétrie de révolution est donnée, pour le cas a, par

$$R_a = R_{aB} + R_{aH}$$

Il serait trop long de rappeler l'expression littérale complète car elle présente des variantes suivant les signes de $A^2 - 1$, de $D_{aB}^2 - 1$ et de $D_{aH}^2 - 1$.

III.3.2. Etude du cas b

L'étude géométrique du cas où les lignes de champ ont leur concavité du côté de l'axe de symétrie se déduit à la fois de l'étude précédente et de celle menée en coordonnées cartésiennes.

La méthode et les bornes d'intégration sont encore définies dans un plan passant par l'axe de symétrie Δ (fig. 62).

On étudiera encore séparément la réluctance de la partie basse et de la partie haute du tube de champ qui ont des formes de portions de cylindres formées sur des parties de tores.

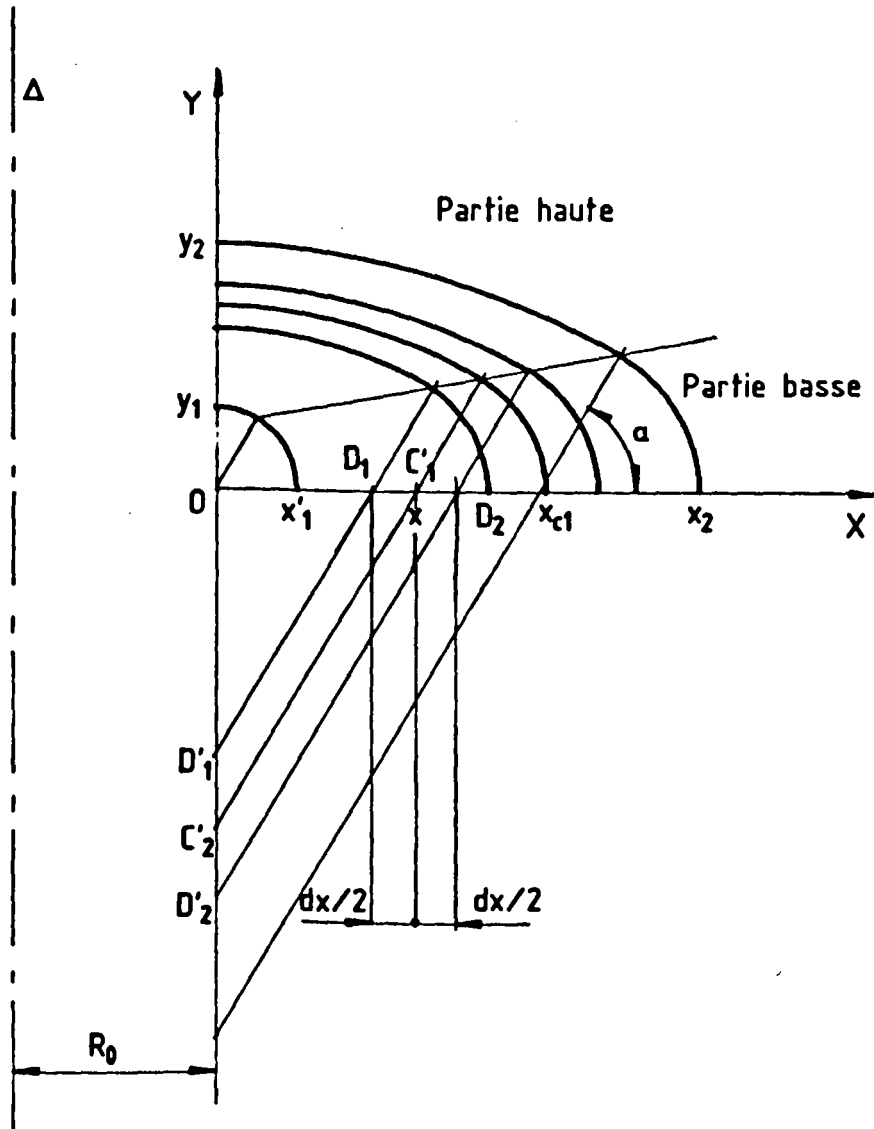


Figure 62 : Etude géométrique du cas b.

III.3.2.1. Calcul de la réluctance de la partie basse du tube de champ

La figure 63 montre comment on calcule l'aire S_1 de la section du tube élémentaire générée par la rotation autour de l'axe Δ du segment $M_1 M_2$ de largeur s_1 .

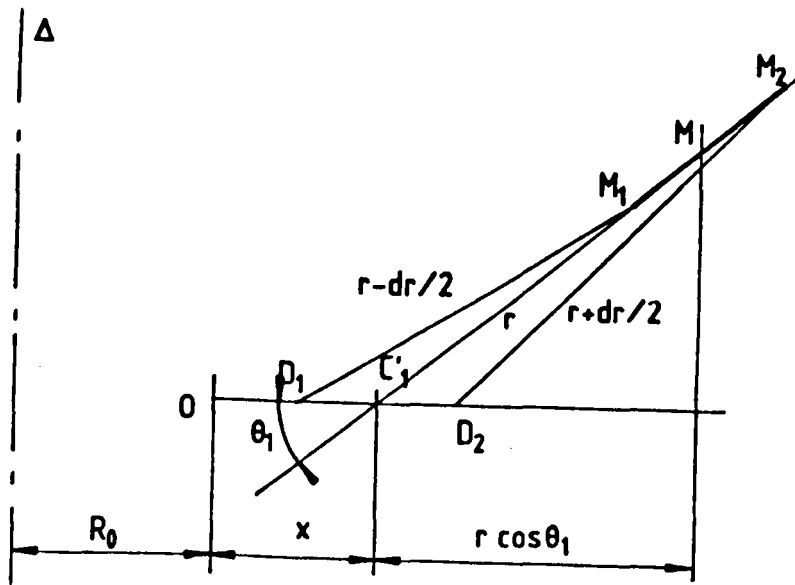


Figure 63 : Notation utilisées pour le calcul de la section de la partie basse du tube élémentaire.

$$S_1 = 2\pi(R_0 + x + r \cos\theta_1) s_1$$

Comme on a toujours

$$r = x_1 + Ax$$

$$s_1 = dx(A + \cos\theta_1)$$

et que la longueur de l'élément du tube vaut

$$dl_1 = r d\theta_1$$

la réductance de l'élément de partie basse du tube de champ

$$dR_{dB} = \frac{dl_1}{\mu S_1}$$

s'écrit

$$dR_{dB} = \frac{(x_1 + Ax) d\theta_1}{2 \pi \mu [R_0 + x + (x_1 + Ax) \cos\theta_1] (A + \cos\theta_1) dx}$$

ou

$$dR_{dB} = \frac{1}{2 \pi \mu} \frac{d\theta_1}{A + \cos\theta_1} \frac{1}{\left(\frac{R_0 + x}{x_1 + Ax} + \cos\theta_1\right) dx}$$

La réluctance totale de la partie basse est donnée par

$$R_{bB} = \frac{1}{2 \pi \mu} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{A + \cos \theta_1} \frac{1}{\int_0^{x_{C1}} \left(\frac{R_0 + x}{x_1 + A} + \cos \theta_1 \right) dx} \right) d\theta_1$$

- Calcul de l'intégrale en x.

$$I_{bBx} = \int_0^{x_{C1}} \left(\frac{R_0 + x}{x_1 + A} + \cos \theta_1 \right) dx$$

peut s'écrire

$$I_{bBx} = \int_0^{x_{C1}} \left[\frac{R_0}{x_1 + A} + \frac{x}{x_1 + A} + \cos \theta_1 \right] dx$$

ce qui donne

$$I_{bBx} = \frac{AR_0 - x_1}{A^2} \ln \frac{Ax_{C1} + x_1}{x_1} + \frac{x_{C1}}{A} + x_{C1} \cos \theta_1$$

En posant

$$D_{bB} = \frac{AR_0 - x_1}{A^2 x_{C1}} \ln \frac{Ax_{C1} + x_1}{x_1} + \frac{1}{A},$$

cette intégrale peut s'écrire

$$I_{bBx} = x_{C1} (D_{bB} + \cos \theta_1)$$

- Calcul de l'intégrale en θ_1 .

$$R_{bB} = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{1}{x_{C_1}} \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{(A + \cos\theta_1)(D_{bB} + \cos\theta_1)}$$

ou, en décomposant,

$$R_{bB} = \frac{1}{2\pi\mu x_{C_1} (D_{bB} - A)} \left[\int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{A + \cos\theta_1} - \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{D_{bB} + \cos\theta_1} \right]$$

On reconnaît deux intégrales du même type. La première, désignée par $I_{aB\theta_1 1}$ ou par $I_{aB\theta_1 1}$ au paragraphe précédent, présente trois expressions suivant le signe de $A^2 - 1$.

La seconde,

$$I_{bB\theta_1 2} = \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{D_{bB} + \cos\theta_1},$$

a une valeur qui dépend du signe de $D_{bB}^2 - 1$.

• Si $D_{bB}^2 - 1$ est négatif,

$$I_{bB\theta_1 2} = \frac{1}{\sqrt{1 - D_{bB}^2}} \ln \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{1 + D_{bB}}{1 - D_{bB}}}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{1 + D_{bB}}{1 - D_{bB}}}} \right]$$

• Si $D_{bB}^2 - 1$ est nul,

$$I_{bB\theta_1 2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

- Si $D_{bB}^2 - 1$ est positif,

$$I_{bB\theta_1 2} = \frac{2}{\sqrt{D_{bB}^2 - 1}} \text{Arc tg} \left(\sqrt{\frac{D_{bB} - 1}{D_{bB} + 1}} \text{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

- Expression proposée.

La réluctance de la partie basse du tube de champ vaut

$$R_{bB} = \frac{1}{2 \pi \mu \times C_1 (D_{bB} - A) (I_{aB\theta_1 1} + I_{bB\theta_1 2})}$$

III.3.2.2. Calcul de la réluctance de la partie haute du tube de champ

La figure 64 reprend les éléments de la figure 30 permettant de calculer l'aire S_2 de la section du tube élémentaire obtenue en faisant tourner autour de l'axe Δ l'élément $M'_1 M'_2$ de largeur s_2 .

$$S_2 = 2\pi(R_0 + R \sin\theta_2) s_2$$

Puisque

$$r = x_1 + Bx$$

$$s_2 = (B - \text{tg}\alpha \cos\theta_2) dx$$

$$d\ell_2 = R d\theta_2$$

la réluctance de l'élément du tube élémentaire

$$dR_{bH} = \frac{d\ell_2}{\pi S_2}$$

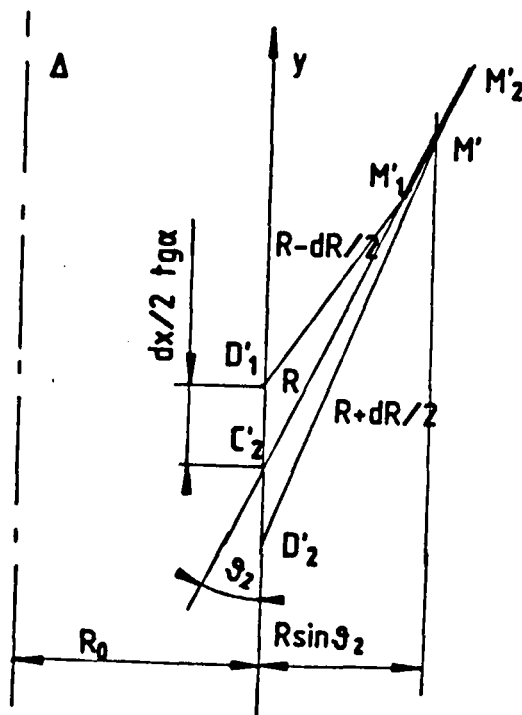


Figure 64 : Détermination de $M'_1 M'_2$.

s'écrit

$$dR_{bH} = \frac{(x_1 + Bx) d\theta_2}{2 \pi \mu [R_0 + (x_1 + Bx) \sin\theta_2] (B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2) dx}$$

On obtient la réductance de l'ensemble de la partie haute en intégrant sur x de 0 à x_{C_1} , sur θ_2 de 0 à $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$R_{bH} = \frac{1}{2 \pi \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \left(\frac{1}{(B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2)} \frac{1}{\int_0^{x_{C_1}} \left(\frac{R_0}{x_1 + Bx} + \sin\theta_2 \right) dx} \right) d\theta_2$$

- L'intégrale en x

$$I_{bHx} = \int_0^{x_{C_1}} \left(\frac{R_0}{x_1 + Bx} + \sin\theta_2 \right) dx$$

est la même que I_{aHx} au signe de θ_2 près. On a donc

$$I_{bHx} = x_{C_1} (D_{aH} + \sin\theta_2),$$

D_{aH} étant le facteur indiqué dans le cas a.

- La réductance devient

$$R_{bH} = \frac{1}{2 \pi \mu \operatorname{tg}\alpha x_{C_1}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{d\theta_2}{(B_{aH} - \cos\theta_2)(D_{aH} + \sin\theta_2)}$$

$$R_{bH} = \frac{1}{2 \pi \mu \operatorname{tg}\alpha x_{C_1} (1 - B_{aH}^2 - D_{aH}^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \left(\frac{-D_{aH} + \sin\theta_2}{B_{aH} - \cos\theta_2} - \frac{B_{aH} + \cos\theta_2}{D_{aH} + \sin\theta_2} \right) d\theta_2$$

En calculant cette intégrale en quatre fois on obtient :

$$R_{bH} = \frac{1}{2 \pi \mu \operatorname{tg} \alpha \times C_1 (1 - B_{aH}^2 - D_{aH}^2)} (I_{bH\theta_2 1} + I_{bH\theta_2 2} + I_{bH\theta_2 3} + I_{bH\theta_2 4})$$

avec

$$I_{bH\theta_2 1} = I_{aH\theta_2 1}$$

$$I_{bH\theta_2 2} = - I_{aH\theta_2 2}$$

$$I_{bH\theta_2 3} \text{ donné par}$$

- Si $D_{aH}^2 - 1$ est positif,

$$I_{bH\theta_2 3} = \frac{-2 B_{aH}}{\sqrt{D_{aH}^2 - 1}} \left[\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{D_{aH} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) + 1}{\sqrt{D_{aH}^2 - 1}} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{D_{aH}^2 - 1}} \right]$$

- Si $D_{aH}^2 - 1$ est nul,

$$I_{bH\theta_2 3} = B_{aH} (\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1)$$

- Si $D_{aH}^2 - 1$ est négatif,

$$I_{bH\theta_2 3} = \frac{-B_{aH}}{\sqrt{1 - D_{aH}^2}} \ln \left| \frac{\frac{D_{aH} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) + 1 - \sqrt{1 - D_{aH}^2}}{D_{aH} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) + 1 + \sqrt{1 - D_{aH}^2}}}{\frac{1 - \sqrt{1 - D_{aH}^2}}{1 + \sqrt{1 - D_{aH}^2}}} \right|$$

$$I_{bH\theta_2 4} = \ln \left| \frac{D_{aH}}{D_{aH} + \cos \alpha} \right|$$

III.3.2.3. Réductance totale pour le cas b

L'expression globale de la réductance du domaine à symétrie de révolution est donnée pour le cas b, par

$$R_d = R_{dB} + R_{dH}$$

en reportant les expressions que nous venons d'établir compte tenu du signe de $A^2 - 1$, de $D_{dB}^2 - 1$ et de $D_{aH}^2 - 1$.

IV. APPLICATION A L'EVALUATION DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES D'UNE DENTURE AXISYMETRIQUE

L'extension de la notion de "ressemblance par zone" aux systèmes axisymétriques et l'établissement des formules d'évaluation des réductances utilisables pour ces systèmes permettent d'établir les expressions analytiques des fonctions caractéristiques d'une denture axisymétrique analogues à celles proposées pour les dentures droites.

IV.1. Modélisation de la denture

IV.1.1. Choix d'une denture

Le type de denture choisi correspond à celui utilisé dans les études expérimentales menées parallèlement et décrites au chapitre IV.

On a ainsi choisi des dentures de même pas dentaire et de même largeur des dents pour le noyau correspondant à la partie mobile et pour l'inducteur qui constitue la partie fixe du circuit magnétique.

Ces choix permettent ici, comme pour les dentures droites, d'utiliser les symétries obtenues quand les dents sont en position alignée ou en quinconce. On peut se contenter de structurer l'entrefer sur un demi-pas dentaire.

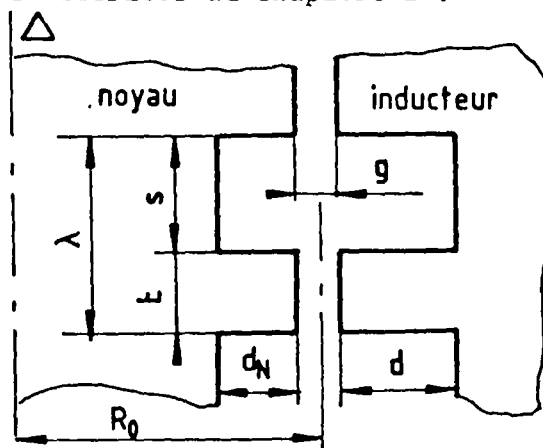


Figure 65 : Paramètres de la denture étudiée.

La profondeur des gorges est supposée plus faible sur le noyau que sur l'inducteur.

La figure 65 précise les notations utilisées :

- R_0 , rayon du cylindre correspondant au milieu de l'entrefer,
- λ , pas dentaire,
- s , largeur des gorges,
- t , largeur des dents,
- d_N , profondeur des gorges du noyau,
- d , profondeur des gorges de l'inducteur,
- g , épaisseur de l'entrefer.

IV.1.2. Structuration de l'entrefer

La structuration de l'entrefer est effectuée, de la même manière que pour un système à deux dimensions, sur la base des hypothèses suivantes :

- * L'épaisseur de l'entrefer est faible par rapport à toutes les autres dimensions.
- * La perméabilité du fer est infinie, ses limites sont équipotentielles et les lignes de champ qui en partent leur sont orthogonales.
- * Le mi-entrefer est supposé équipotentiel dans sa partie située immédiatement face à une dent.
- * Le découpage en domaines assurant la "ressemblance par zone" se fait sur les lignes de champ partant des points anguleux.
- * Les raccordements courts sont représentés en coupe par des arcs de cercles de rayon $g/2$.

On peut ainsi faire apparaître des zones qui se retrouvent dans la position alignée et dans la position en quinconce des dents, mais avec des arrangements différents.

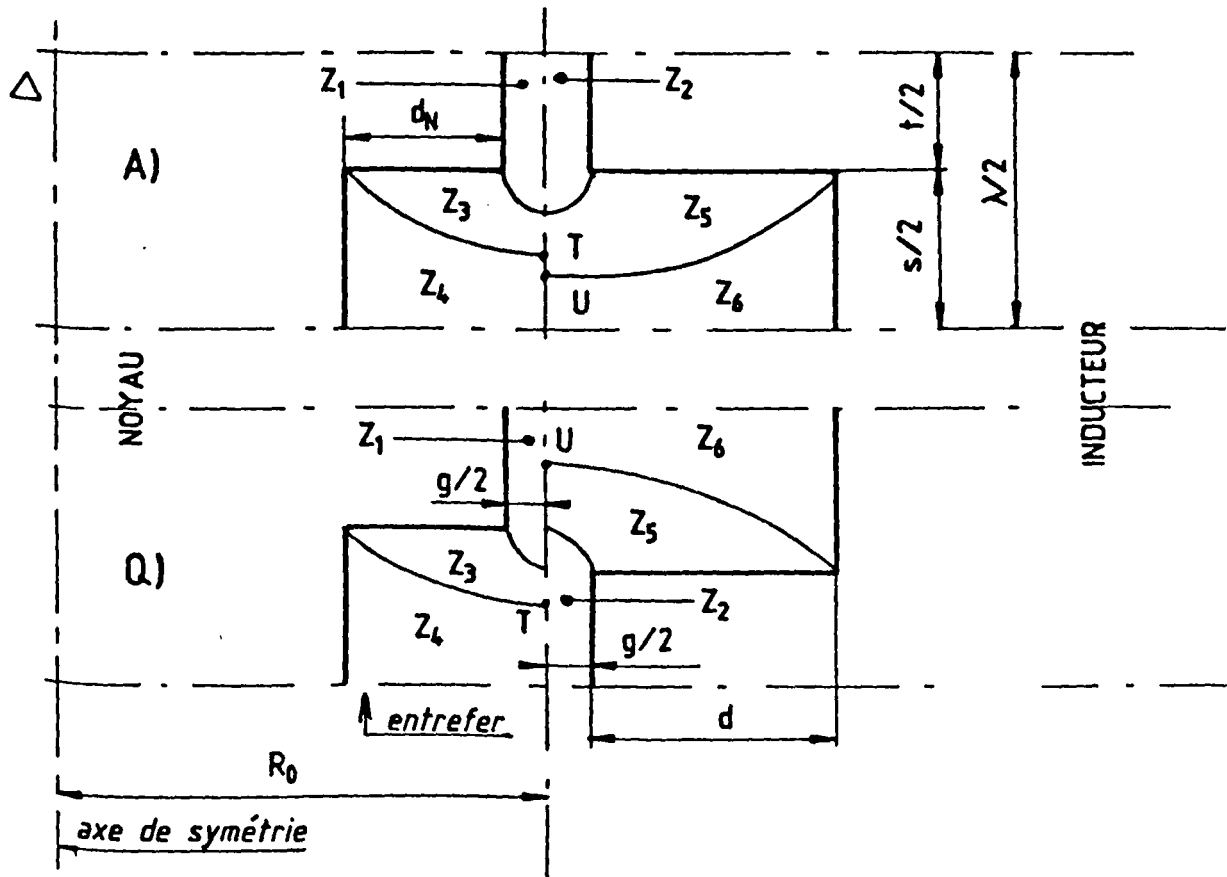


Figure 66 : Structuration de l'entrefer.

A dents en position alignée,
Q dents en quinconce.

La figure 66 montre les six zones, notées Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 , Z_5 et Z_6 , qu'on est amené à considérer. On désignera par R_{Z_1} , R_{Z_2} , R_{Z_3} , R_{Z_4} , R_{Z_5} et R_{Z_6} leurs réluctances. Quatre de ces zones, Z_1 , Z_2 , Z_4 et Z_6 , sont limitées par des équipotentiels parallèles ; les deux autres Z_3 et Z_5 , par des équipotentiels orthogonaux de largeurs différentes. On pourra donc évaluer les six réluctances à l'aide des règles que nous venons détablir ; mais au préalable il faut déterminer avec précision les points T et U correspondant aux points de raccordement, sur le cylindre de mi-entrefer, des zones Z_3 et Z_4 d'une part, Z_5 et Z_6 d'autre part.

L'utilisation de la figure 66 montre que, dans la position en quinconce, les zones Z_1 et Z_2 ont, sur une largeur g , une délimitation commune. Cela revient à confondre, sur une zone, il est vrai très étroite, des équipotentiels qui visiblement correspondent à deux valeurs différentes du potentiel. On ne tiendra pas compte de ce fait dans l'étude approchée envisagée.

IV.2. Délimitation précise des différentes zones

La figure 66 montre que les points T et U doivent être déterminés séparément car la zone 3 correspond au cas a des règles que nous venons d'établir (axe de symétrie du côté convexe des lignes de champ) tandis que la zone 5 relève du cas b (concavité des lignes de champ tournée vers l'axe de symétrie).

IV.2.1. Principe

Pour calculer la position des points T et U, on écrit que l'induction sur le cylindre de mi-entrefer ne subit pas de discontinuité quand on passe de la zone 3 à la zone 4 d'une part, de la zone 5 à la zone 6 d'autre part.

Pour le point T par exemple, on considère sur le cylindre de mi-entrefer deux petites surfaces adjacentes (fig. 67), de même hauteur δ (arbitraire mais très petite), et les deux tubes de champ appartenant aux zones 3 et 4 qui s'appuient sur ces surfaces. A l'égalité d'induction correspond l'égalité des flux dans ces deux tubes de champ. Ces tubes étant limités par les mêmes surfaces équipotentielles, leurs réluctances doivent être égales. Si on note $R_{\delta 3}$ et $R_{\delta 4}$ ces réluctances, le point T doit être tel qu'il vérifie l'égalité

$$R_{\delta 3} = R_{\delta 4}$$

De la même façon la position du point U doit être telle que

$$R_{\delta 5} = R_{\delta 6}$$

IV.2.2. Détermination du point T

La détermination du point T passe par l'évaluation de $R_{\delta 3}$ et $R_{\delta 4}$ en fonction du paramètre y_T (dans un repère OXY comme indiqué à la figure 58) et par la résolution de l'équation implicite déduite de leur égalité.

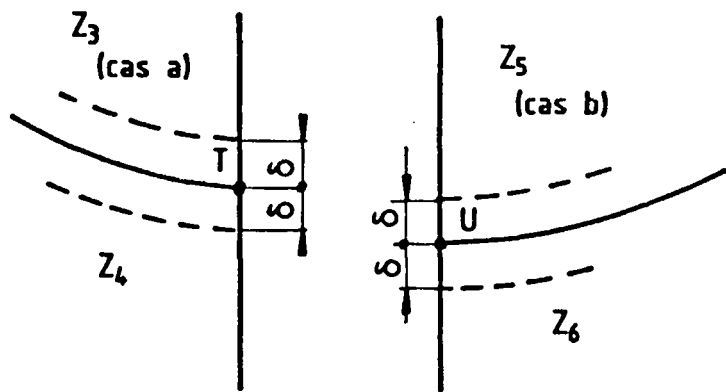


Figure 67 : Principe de la détermination des points T et U.

IV.2.2.1. Evaluation de $R_{\delta 3}$

La connaissance de δ , petit et arbitraire, permet, par la construction rappelée à la figure 68, de déterminer la valeur du paramètre x_{δ} nécessaire au calcul de la réluctance.

La mise en équations habituelle, conservant les notations du chapitre II, permet d'écrire

$$x_{C_1} - x_{\delta} = \frac{\delta}{B - \operatorname{tg} \alpha}$$

Donc

$$x_{\delta} = x_{C_1} - \frac{\delta}{B - \operatorname{tg} \alpha}$$

Les paramètres intervenant dans cette expression sont calculés à partir de x_1 (ou y_1), x_2 et y_2 comme indiqué au chapitre II.

La particularité est qu'ici $y_2 = y_T$ est inconnu.

La réluctance $R_{\delta 3}$ se calcule de la même façon que R_a (voir paragraphe III.3.1.) mais l'intégration en x est modifiée.

On notera donc ici

$$R_{\delta 3} = R_{a B \delta} + R_{a H \delta}$$

- Réluctance de la partie basse $R_{a B \delta}$

La réluctance de la partie basse se calcule comme précédemment mais x varie de x_{δ} à x_{C_1} et non plus de 0 à x_{C_1} .

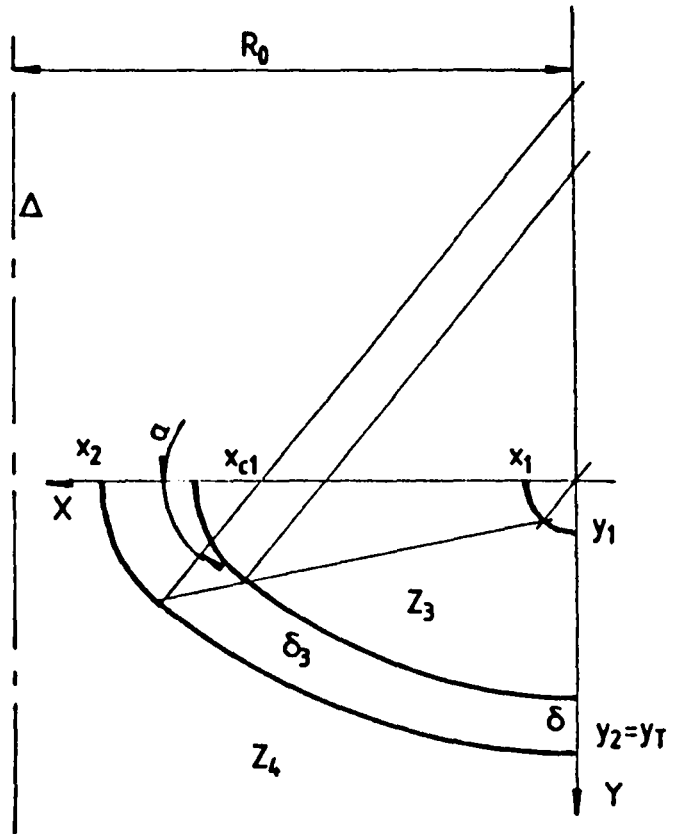


Figure 68 : Notations utilisées pour le tube δ_3 .

$$R_{aB\delta} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{A + \cos\theta_1} \times \frac{1}{\int_{x_\delta}^{x_{C_1}} \left(\frac{R_0 - x}{x_1 + Ax} - \cos\theta_1 \right) dx} \right) d\theta_1$$

L'intégrale en x peut s'écrire

$$I_{aB\delta x} = \int_{x_\delta}^{x_{C_1}} \left(\frac{R_0}{Ax + x_1} - \frac{x}{Ax + x_1} - \cos\theta_1 \right) dx$$

Elle donne, après regroupement des termes obtenus

$$I_{aB\delta x} = (x_{C_1} - x_\delta)(D_{aB\delta} - \cos\theta_1)$$

avec

$$D_{aB\delta} = \frac{AR_0 + x_1}{A^2(x_{C_1} - x_\delta)} \ln \frac{Ax_{C_1} + x_1}{Ax_\delta + x_1} - \frac{1}{A}$$

La réluctance vaut donc

$$R_{aB\delta} = \frac{1}{2\pi\mu(x_{C_1} - x_\delta)(A + D_{aB\delta})} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{A + \cos\theta_1} + \frac{1}{D_{aB\delta} - \cos\theta_1} \right) d\theta_1$$

Par rapport au calcul effectué au paragraphe III.3.1.1., la première intégrale en θ_1 n'est pas modifiée. Dans la seconde D_{aB} est simplement remplacée par $D_{aB\delta}$; on notera par $I_{aB\delta\theta_1 2}$ le résultat qu'elle donne

On obtient donc

$$R_{aB\delta} = \frac{1}{2\pi\mu(x_{C_1} - x_\delta)(A + D_{aB})} (I_{aB\theta_1 1} + I_{aB\delta\theta_1 2})$$

- Réductance de la partie haute $R_{aH\delta}$

Avec les notations choisies,

$$R_{aH\delta} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \left(\frac{1}{B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2} \times \frac{1}{\int_{x_\delta}^{x_{C_1}} \left(\frac{R_0}{x_1 + Bx} - \sin\theta_2 \right) dx} \right) d\theta_2$$

L'intégrale en x donne

$$I_{aH\delta x} = (x_{C_1} - x_\delta)(D_{aH\delta} - \sin\theta_2)$$

avec

$$D_{aH\delta} = \frac{R_0}{B(x_{C_1} - x_\delta)} \ln \frac{x_1 + Bx_{C_1}}{x_1 + Bx_\delta}$$

En reportant, il vient

$$R_{aH\delta} = \frac{1}{2\pi\mu(x_{C_1} - x_\delta) \operatorname{tg}\alpha(1 - B_{aH}^2 - D_{aH\delta}^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \left(\frac{-D_{aH\delta} - \sin\theta_2}{B_{aH} - \cos\theta_2} + \frac{-B_{aH} - \cos\theta_2}{D_{aH\delta} - \sin\theta_2} \right) d\theta_2$$

Par rapport à l'intégrale en θ du paragraphe III.3.1.2. seule la quantité D_{aH} est remplacée par $D_{aH\delta}$. En insérant l'indice δ dans les intégrales concernées, il vient

$$R_{aH\delta} = \frac{1}{2\pi\mu(x_{C_1} - x_\delta) \operatorname{tg}\alpha(1 - B_{aH}^2 - D_{aH\delta}^2)}$$

$$(I_{aH\delta\theta_2 1} + I_{aH\delta\theta_2 2} + I_{aH\delta\theta_2 3} + I_{aH\delta\theta_2 4})$$

IV.2.2.2. Evaluation de R_{δ_4}

Le calcul de la réluctance du tube de la zone 4 ayant une trace de largeur δ sur l'équipotentielle située à mi-entrefer s'effectue, à partir des éléments de la figure 69, en appliquant la formule établie au paragraphe III.1.2.

Compte tenu des hypothèses sur la forme des lignes de champ

$$\frac{2\delta_a}{s} = \frac{2\delta}{s - 2y_T}$$

$$\text{D'où } \delta_a = \frac{s\delta}{s - 2y_T}$$

La réluctance de la zone δ_4 a pour expression

$$R_{\delta_4} = \frac{2d_N + g}{2\pi\mu[2R_0\delta_a - (2R_0 - 2d_N - g)\delta]} \ln \frac{2R_0\delta_a}{(2R_0 - 2d_N - g)\delta}$$

C'est une fonction de y_T par l'intermédiaire de δ_a .

IV.2.3. Détermination du point U

La détermination de la position du point U s'effectue exactement comme celle indiquée pour le point T, mais la zone 5 est du type b.

On évalue les réluctances R_{δ_5} et R_{δ_6} en fonction de $y_U = y_2$ et on résoud l'équation implicite obtenue en les égalant.

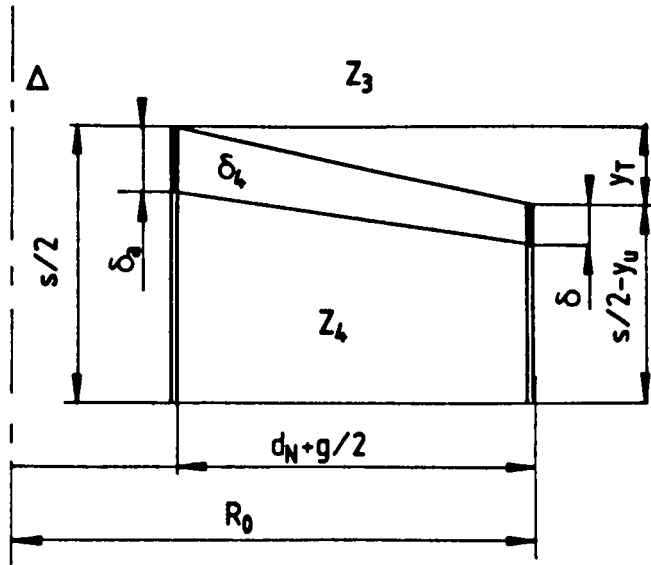


Figure 69 : Définition de la zone δ_4 .

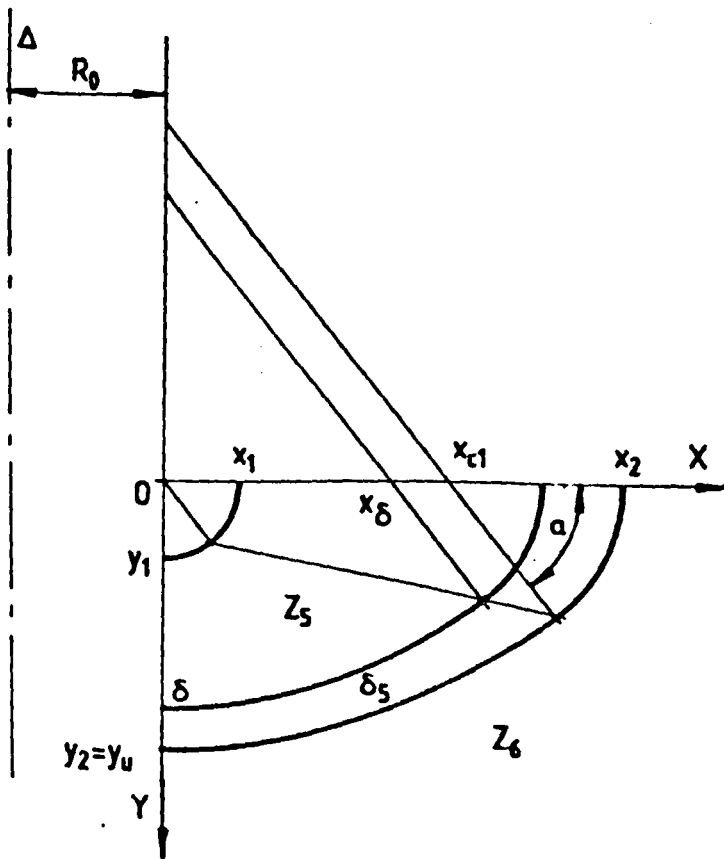


Figure 70 : Notations utilisées pour la zone δ_5 .

2.3.1. Evaluation de R_{δ_5}

La détermination de R_{δ_5} utilise les notations indiquées sur la figure 70.

On a encore deux réluctances à calculer, celle de la partie basse et celle de la partie haute

$$R_{\delta_5} = R_{dB\delta} + R_{dH\delta}$$

- Réluctance de la partie basse

Les calculs antérieurement effectués permettent d'écrire

$$R_{dB\delta} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{A + \cos\theta_1} \frac{1}{\int_{x_\delta}^{x_{c1}} \left(\frac{R_0 + x}{x_1 + Ax} + \cos\theta_1 \right) dx} \right) d\theta_1$$

Après avoir calculé l'intégrale en x , en posant

$$D_{bB\delta} = \frac{AR_0 - x_1}{A^2(x_{C_1} - x_\delta)} \ln \frac{Ax_{C_1} + x_1}{Ax_\delta + x_1} + \frac{1}{A}$$

il vient

$$R_{bB\delta} = \frac{1}{2\pi\mu} \times \frac{1}{x_{C_1} - x_\delta} \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{(A + \cos\theta_1)(D_{bB\delta} + \cos\theta_1)}$$

qu'on peut écrire

$$R_{bB\delta} = \frac{1}{2\pi\mu(x_{C_1} - x_\delta)(D_{bB\delta} - A)} \left[\int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{A + \cos\theta_1} - \int_0^\alpha \frac{d\theta_1}{D_{bB\delta} + \cos\theta_1} \right]$$

La première intégrale est connue, on l'a désignée par $I_{aB\theta_1 1}$; la seconde se déduit de $I_{bB\theta_1 2}$ en remplaçant D_{bB} par $D_{bB\delta}$, on la notera $I_{bB\delta\theta_1 2}$.

Au total,

$$R_{bB\delta} = \frac{1}{2\pi\mu(x_{C_1} - x_\delta)(D_{bB\delta} - A)} (I_{aB\theta_1 1} + I_{bB\delta\theta_1 2})$$

- Réluctance de la partie haute

Le calcul de la réluctance de la partie haute par

$$R_{bH\delta} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \left(\frac{1}{B - \operatorname{tg}\alpha \cos\theta_2} \times \frac{1}{\int_{x_\delta}^{x_{C_1}} \left(\frac{R_0}{x_1 + Bx} + \sin\theta_2 \right) dx} \right) d\theta_2$$

donne

$$R_{bH\delta} = \frac{1}{2 \pi \mu (x_{C_1} - x_{\delta}) \operatorname{tg} \alpha (1 - B_{aH}^2 - D_{aH\delta}^2)}$$

$$(I_{bH\delta\theta_2 1} + I_{bH\delta\theta_2 2} + I_{bH\delta\theta_2 3} + I_{bH\delta\theta_2 4})$$

$D_{aH\delta}$ ayant la valeur indiquée au paragraphe IV.2.2.1, les intégrales qui diffèrent de celles indiquées au paragraphe III.3.2.1. par le remplacement de D_{aH} par $D_{aH\delta}$ ayant l'indice supplémentaire δ .

IV.2.3.2. Evaluation de $R_{\delta 6}$

Le calcul de la réluctance de la zone $\delta 6$ se fait, à partir des dimensions indiquées à la figure 71, en utilisant la formule du paragraphe III.1.2.

Avec nos hypothèses,

$$\frac{2\delta_b}{s} = \frac{2\delta}{s - 2y_U}$$

donc

$$\delta_b = \frac{s\delta}{s - 2y_U}$$

En reportant, il vient

$$R_{\delta 6} = \left| \frac{2d + g}{2 \pi \mu L (2R_0 + 2d + g)\delta - 2R_0 \delta_b} \right| \ln \left| \frac{(2R_0 + 2d + g)\delta}{2R_0 \delta_b} \right|,$$

cette réluctance est une fonction de y_U par l'intermédiaire de δ_b .

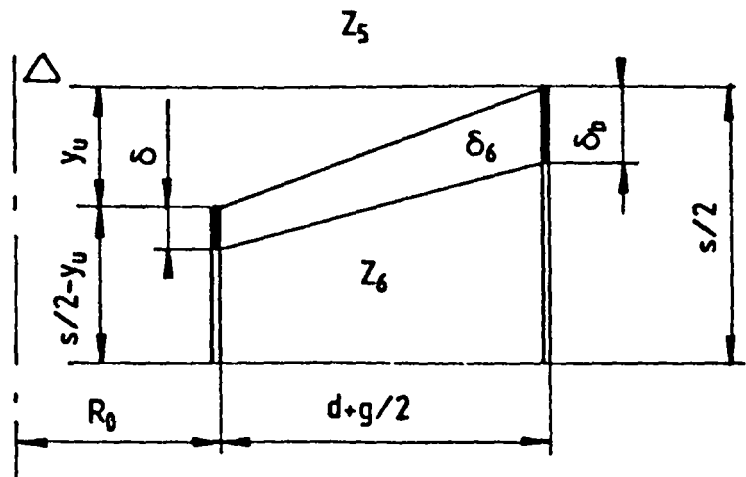


Figure 71 : Définition de la zone $\delta 6$.

IV.3. Evaluation des réluctances des différentes zones

Ayant déterminé y_T et y_U en fonction des paramètres définissant une denture axisymétrique, on peut évaluer les réluctances de 6 zones intervenant dans les fonctions caractéristiques.

La figure 72 rappelle les paramètres définissant ces six zones à partir de R_0 , s , t , d_N , d , g et y_T , y_U et permettant ainsi l'utilisation des formules établies dans la troisième partie de ce chapitre.

Il faut s'assurer que toutes les réluctances sont bien toujours positives.

IV.3.1. Réluctance de la zone 1

Tous calculs effectués la formule établie au paragraphe III.1.2. donne

$$R_{Z1} = \left| \frac{g}{\pi \mu [(2R_0 t - (2R_0 - g)(t + g))]} \right| \ln \left| \frac{2R_0 t}{(2R_0 - g)(t + g)} \right|$$

IV.3.2. Réluctance de la zone 2

Tous calculs effectués, la même formule donne

$$R_{Z2} = \frac{g}{\pi \mu [(2R_0 + g)(t + g) - 2R_0 t]} \ln \frac{(2R_0 + g)(t + g)}{2R_0 t}$$

IV.3.3. Réluctance de la zone 3

Il faut utiliser les résultats établis au paragraphe III.3.1. pour une zone avec lignes de champ en anses de panier du type a.

On peut noter symboliquement

$$R_{Z3} = R_a(R_0, x_1, x_2, y_1, y_2)$$

en prenant $x_1 = y_1 = g/2$
 $x_2 = d_N + g/2$
 $y_2 = y_T$, calculé préalablement

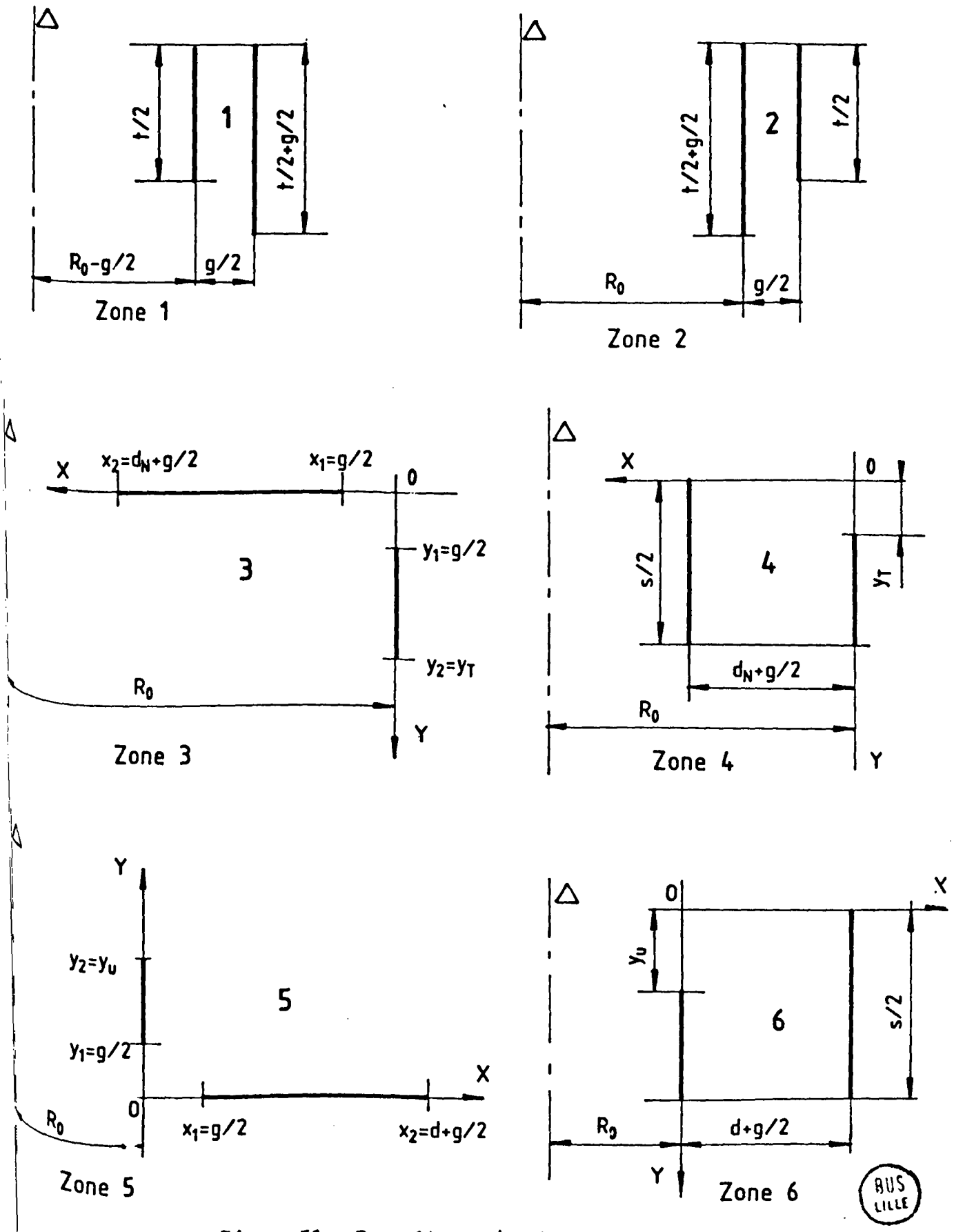


Figure 72 : Paramétrage des 6 zones.

BUS LILLE

IV.3.4. Réductance de la zone 4

Elle se déduit de la formule établie au paragraphe III.1.2.

$$R_{Z4} = \frac{2d_N + g}{\pi\mu[2R_0s - (2R_0 - 2d_N - g)(s - 2y_T)]} \ln \frac{2R_0s}{(2R_0 - 2d_N - g)(s - 2y_T)}$$

IV.3.5. Réductance de la zone 5

Il s'agit d'une zone à lignes de champ en anses de panier du type b. On utilise les expressions établies en III.3.2.

$$R_{Z5} = R_D(R_0, x_1, x_2, y_1, y_2)$$

en prenant $x_1 = y_1 = g/2$
 $x_2 = d + g/2$
 $y_2 = y_U$, calculé préalablement.

IV.3.6. Réductance de la zone 6

Elle correspond, comme les zones 1, 2 et 4, à la relation calculée au paragraphe III.1.2.

$$R_{Z6} = \left| \frac{2d + g}{\pi\mu [(2R_0 + 2d + g)(s - 2y_U) - 2R_0s]} \right| \ln \left| \frac{(2R_0 + 2d + g)(s - 2y_U)}{2R_0s} \right|$$

IV.4. Fonctions caractéristiques de denture

Les six réductances ainsi déterminées permettent, en examinant la structuration de l'entrefer représentée à la figure 66, de calculer les fonctions caractéristiques de denture.

Il est en réalité plus commode de travailler sur les perméances que sur leurs inverses, les réductances.

D'autre part les formules donnant les efforts moyens font intervenir la perméance par pas dentaire, il faut donc multiplier par deux le résultat établi sur un demi-pas dentaire.

IV.4.1. Position alignée des dents

Le haut de la figure 66 montre qu'en position alignée, les zones Z_1 , Z_3 et Z_4 sont en parallèle de même que les zones Z_2 , Z_5 et Z_6 alors que ces deux ensembles sont en série.

D'où la perméance d'entrefer par pas dentaire

$$P_{\lambda eA} = 2 \frac{(P_{Z1} + P_{Z3} + P_{Z4})(P_{Z2} + P_{Z5} + P_{Z6})}{P_{Z1} + P_{Z2} + P_{Z3} + P_{Z4} + P_{Z5} + P_{Z6}}$$

IV.4.2. Position en quinconce des dents

Le bas de la figure 66 montre que lorsque les dents sont en quinconce, les zones forment deux groupes en parallèle. Le premier est formé de $Z1$ en série avec $Z5$ et $Z6$ en parallèle ; la seconde par $Z2$ en série avec $Z3$ et $Z4$ en parallèle.

D'où la perméance d'entrefer par pas dentaire

$$P_{\lambda eQ} = 2 \left[\frac{P_{Z1}(P_{Z5} + P_{Z6})}{P_{Z1} + P_{Z5} + P_{Z6}} + \frac{P_{Z2}(P_{Z3} + P_{Z4})}{P_{Z2} + P_{Z3} + P_{Z4}} \right]$$

CHAPITRE IV

ETUDE D'UN ACTIONNEUR LINEAIRE DE FORTE PUISSANCE
AGISSANT A TRAVERS UNE ENCEINTE ETANCHE

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à la présentation d'un actionneur pas à pas capable de transmettre un effort de translation pure de plusieurs centaines de daN à travers une enceinte tubulaire résistant à des pressions importantes, de l'ordre de l'hectobar.

L'étude théorique de la faisabilité d'un tel actionneur et sa vérification sur une maquette ont été effectuées conjointement par la Société Jeumont-Schneider et le Laboratoire dans lequel nous travaillons. Nous avons bénéficié d'un contrat d'aide de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique [49].

Nous présenterons l'intérêt du recours à la réluctance pour réaliser un tel actionneur, les raisons du choix du système de denture, du pas dentaire et du nombre d'inducteurs et surtout de la configuration originale, dite "à flux transversal" que nous avons retenue.

La présentation de la machine et des courbes expérimentales qu'elle a permis de relever montrent l'intérêt de cette configuration.

L'application de la méthode analytique d'étude des machines à réluctance axisymétriques donne des résultats recoupant bien ceux de l'expérience [50], [51], [52].

I. RECOURS A LA RELUCTANCE VARIABLE

La commande des vannes et timoneries à grand débattement, en atmosphère dangereuse ou sous pression, nécessite une réflexion particulière.

Dans la plupart des applications, les efforts nécessaires sont importants (quelques centaines de daN), les déplacements sont relativement lents (quelques mm/s) mais parfois de longueur importante (quelques m). L'organe à mouvoir est nécessairement dans une enceinte close (fluide sous pression, atmosphère corrosive, risque de contamination ou d'irradiation). Le problème crucial est celui des *joint*s d'étanchéité.

Il existe quantités de moyens de générer et de transmettre un mouvement rectiligne dans une direction donnée. On peut citer par exemple, le système bielle-manivelle ou le système vis-écrou adaptés aux efforts moyens, les verins pneumatiques ou hydrauliques pour les efforts plus importants. Tous ces procédés ont l'inconvénient soit de transmettre des efforts non constants, soit d'avoir des courses relativement faibles. Mais surtout se posent des problèmes d'étanchéité soit au niveau de la génération de l'effort, soit au niveau de sa transmission.

D'où l'idée de transmettre, sans liaison mécanique ou par fluide, le mouvement de translation à travers une enceinte étanche à l'aide d'une machine électromagnétique linéaire.

Pour des raisons de résistance mécanique et de facilité de construction l'enceinte, ayant à résister à une forte pression, doit avoir la forme d'un cylindre de révolution métallique d'épaisseur constante d'autant plus importante que le rayon est plus grand.

Afin de n'avoir aucun problème d'étanchéité, mais aussi pour faciliter la maintenance et éviter les risques de corrosion, on est amené à rejeter toute solution mettant un bobinage dans l'enceinte. Pour que le champ magnétique puisse s'établir à l'intérieur de celle-ci, on doit la réaliser en un matériau métallique mais amagnétique.

L'enceinte correspond à un entrefer épais mais électriquement conducteur ; on ne peut donc guère compter sur l'utilisation des courants de Foucault. On est ainsi amené à choisir une machine à réluctance variable possédant ses bobinages inducteurs à l'extérieur de l'enceinte.

Puisqu'on veut utiliser le phénomène de la réluctance variable et agir à travers une enceinte tubulaire sur la partie mobile, celle-ci doit être constituée par une tige cylindrique magnétique, portant des encoches perpendiculairement à son axe. Pour pouvoir être utilisée dans un fluide, la tige mobile doit permettre, lors d'un déplacement, le passage du fluide de la cavité amont vers la cavité aval ou vice-versa, on est donc amené à la prévoir munie d'un canal central.

La figure 73 montre la configuration retenue pour la tige mobile percée de son canal central.

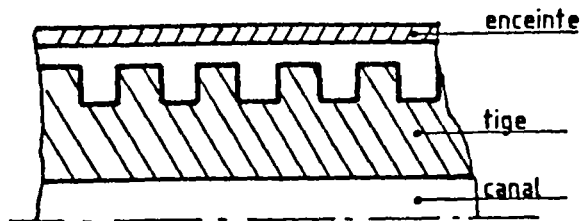


Figure 73 : Coupe de l'intérieur de l'enceinte.

La longueur de la tige va permettre de déterminer la longueur du déplacement possible. Les dimensions du canal vont permettre de définir une vitesse limite de déplacement. La saturation magnétique de la tige va en déterminer le diamètre extérieur et la pression va déterminer l'épaisseur de l'enceinte. Pour déterminer le reste de la machine il faut prendre en compte les différentes voies possibles et les comparer afin d'effectuer les choix convenant le mieux au problème posé.

II. LE CHOIX DES CARACTERISTIQUES DE CONSTRUCTION

Ayant choisi le principe mis en oeuvre et sachant que la machine doit fonctionner en pas à pas, la disposition générale de la machine est pratiquement imposée. Mais la détermination de tout ce qui caractérise sa construction nécessite une série de choix successifs.

II.1. Disposition générale

Un actionneur répondant au problème posé doit comprendre (fig. : 74) :

- Une tige mobile T sur laquelle sont usinées des gorges régulièrement espacées de façon à créer une succession de dents annulaires de pas λ .
- L'enceinte d'étanchéité E.
- Autour de celle-ci, n inducteurs I_1, I_2, I_3, \dots décalés entre-eux de $\lambda/n + k\lambda$ (avec k entier) agissant à tour de rôle ou par paire. Chaque inducteur doit comporter un bobinage et un circuit magnétique présentant une partie dentée située face à la denture de la tige mobile.

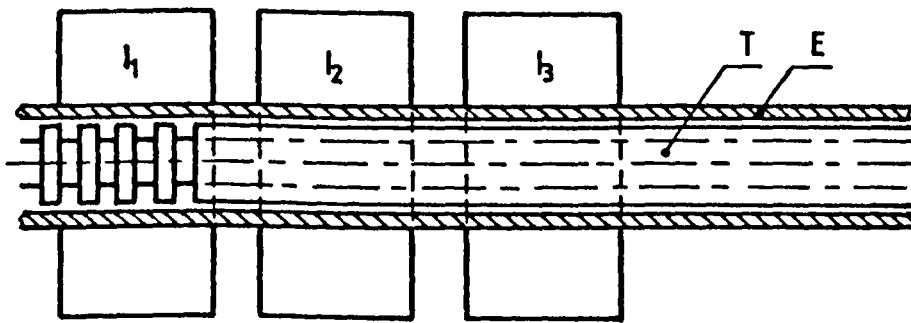


Figure 74 : Coupe schématique de la machine.

II.2. Choix d'un système mobile

La figure 75 rappelle, en les appliquant au système tige mobile-Inducteur fixe

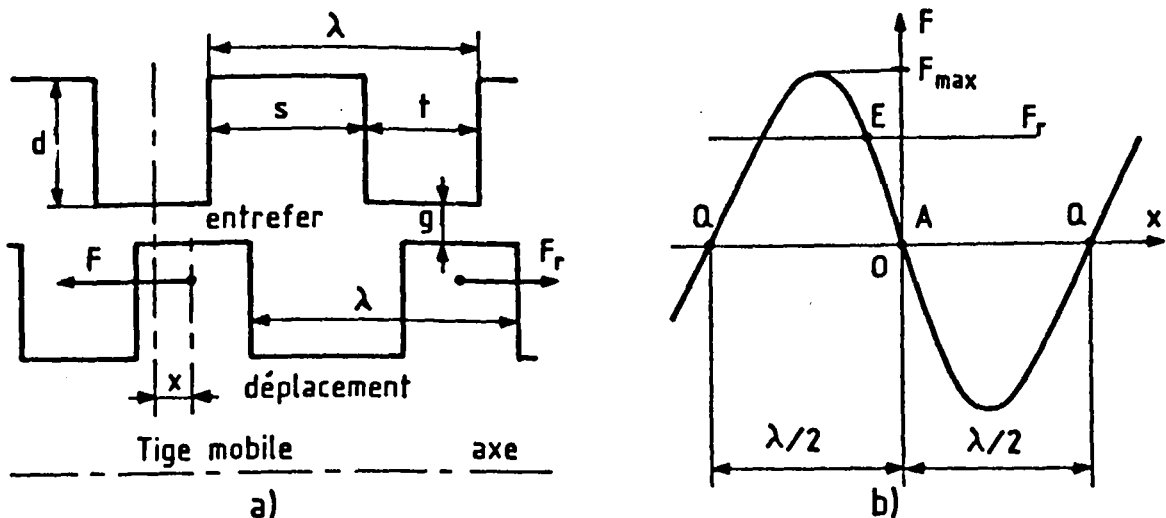


Figure 75 : Rappels : a) des notations utilisées, b) de l'allure de la courbe effort-déplacement.

inducteur fixe, les notations utilisées pour définir les dentures, puis l'allure de la courbe donnant l'effort développé en fonction du déplacement.

Par la suite on supposera que la machine est prévue pour fonctionner à courant constant.

11.2.1. Choix du rapport largeur des dents/largeur des encoches

L'actionneur devant avoir un fonctionnement réversible en pas à pas, il faut que la courbe $F(x)$ soit périodique. Pour que ses performances soient élevées il faut, comme nous le montrerons au paragraphe suivant, que la pente de cette courbe au voisinage des points A et Q soit aussi grande que possible.

- Pour que $F(x)$ ait la période la plus courte possible, on est conduit à adopter le même pas dentaire pour l'inducteur fixe et la tige mobile.
- La force développée par pas dentaire pour une machine alimentée à courant constant étant de forme

$$F_{\lambda i} = \frac{n^2 i^2 \delta P_{\lambda}(i, x)}{2 \delta x}$$

pour que l'effort soit important au voisinage des points A et Q, il suffit que la perméance varie rapidement autour de ces points. Comme la perméance est surtout due à l'entrefer, c'est sur le profil de celui-ci qu'il faut agir.

Pour assurer une forte variation de la perméance au voisinage des positions A et Q, il faut d'abord que la largeur t des dents soit grande devant l'épaisseur s de l'entrefer.

Si on ne tient compte que des lignes de champ passant face aux têtes des dents en regard, on constate que la perméance ne varie pratiquement pas, autour de la position en quinconce (Q), que les dents soient plus larges (fig. 76 a)) ou plus étroites (fig. 76 b)) que les encoches. On doit donc se rapprocher d'un système de denture où dents et encoches aient des largeurs voisines.

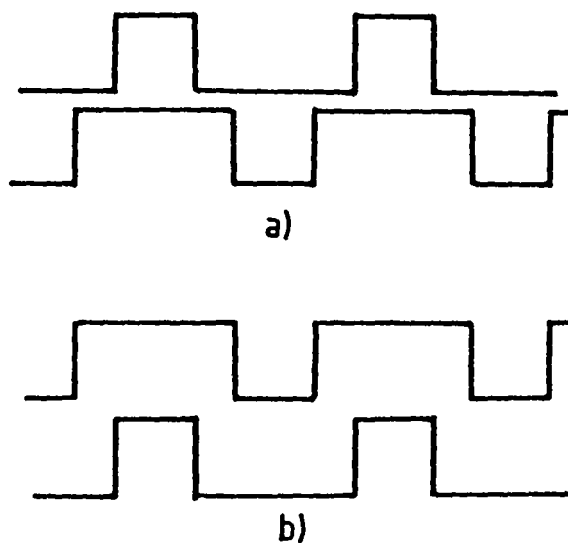


Figure 76 : Profils d'entrefer, position en quinconce

a) $t > s$ b) $t < s$

En fait, pour tenir compte des lignes de champ partant du flanc des dents et du fond des encoches, on est amené à choisir une dent un peu moins large que l'encoche. Un rapport t/s voisin de $3/5$ constitue une bonne base de départ pour un prototype dont la profondeur des encoches n'est pas choisie à l'avance.

II.2.2. Choix du pas dentaire

Considérons deux moteurs élémentaires, de pas dentaires respectifs λ_1 et λ_2 , susceptibles d'emmagasiner la même coénergie. La variation de cette coénergie est la même lorsqu'ils passent de la position en quinconce à la position alignée : les deux courbes $F_1(x)$ et $F_2(x)$ pour un même déplacement x (fig. 77) sont donc telles que

$$\Delta W' = \int_0^{\lambda_1/2} F_1 dx = \int_0^{\lambda_2/2} F_2 dx$$

Les aires délimitées par les deux courbes sont donc égales. Ces deux courbes ayant la même forme, celle qui correspond au pas dentaire le plus faible donne l'effort maximum le plus élevé :

$$F_{1\max} > F_{2\max}, \text{ si } \lambda_1 < \lambda_2.$$

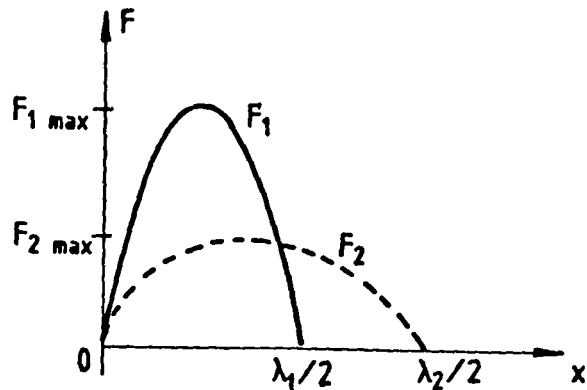


Figure 77 : Courbes $F(x)$ correspondant à la même variation de coénergie mais à des pas différents.

La réduction du pas dentaire aboutit donc à une augmentation de la force, à un déplacement plus faible et à un positionnement plus précis dans la marche en pas à pas.

Mais la réduction du pas dentaire nécessite une augmentation de la précision de l'usinage des pièces et, pour obtenir une vitesse de déplacement donnée, un accroissement de la fréquence des courants d'alimentation des inducteurs.

L'amélioration des performances mécaniques passe donc par un surcoût de construction qu'il faut prendre en compte dans l'étude globale. Dans l'application envisagée, où la vitesse de déplacement prévue est faible mais où la force doit être importante, un faible pas dentaire est nécessaire.

II.3. Choix du nombre d'inducteurs

L'utilisation de la machine en pas à pas nécessite l'emploi de plusieurs inducteurs identiques décalés, à un nombre entier de pas dentaires près, de la période géométrique souhaitée. A pas dentaire donné, plus le nombre d'inducteurs est grand, plus le fonctionnement de la machine est précis, mais plus la machine est longue et sa commande complexe.

Dans tous les cas on souhaite en outre un démarrage sans ambiguïté et l'inversion possible du sens du déplacement.

Pour assurer la périodicité du déplacement, les n inducteurs doivent être décalés géométriquement de la fraction λ/n du pas dentaire, à un nombre entier de pas dentaires près, donc de

$$\frac{\lambda}{n} + k \lambda, \text{ avec } k \text{ entier.}$$

II.3.1. Cas de deux inducteurs

Si on n'utilise que deux inducteurs, ils doivent être décalés entre-eux de $\lambda/2 + k \lambda$; quand l'un voit la denture mobile en position alignée, l'autre la voit en quinconce. On peut tracer la courbe des efforts que développe chacun des deux inducteurs agissant séparément, en prenant comme référence géométrique la position alignée pour le premier inducteur (fig. 78).

Sous l'action de l'effort résistant F_r , le premier inducteur étant alimenté maintient la tige mobile en équilibre stable en position, E_1 . Dans cette position, si on coupe l'alimentation du premier inducteur et si on excite le second seul, l'effort F_2 est négatif et agit dans le même sens que F_r pour déplacer la tige ; celle-ci s'arrête dans la position stable représentée par E_2 , distance de $\lambda/2$ par rapport à E_1 . Dans cette nouvelle position, si on cesse d'ex-

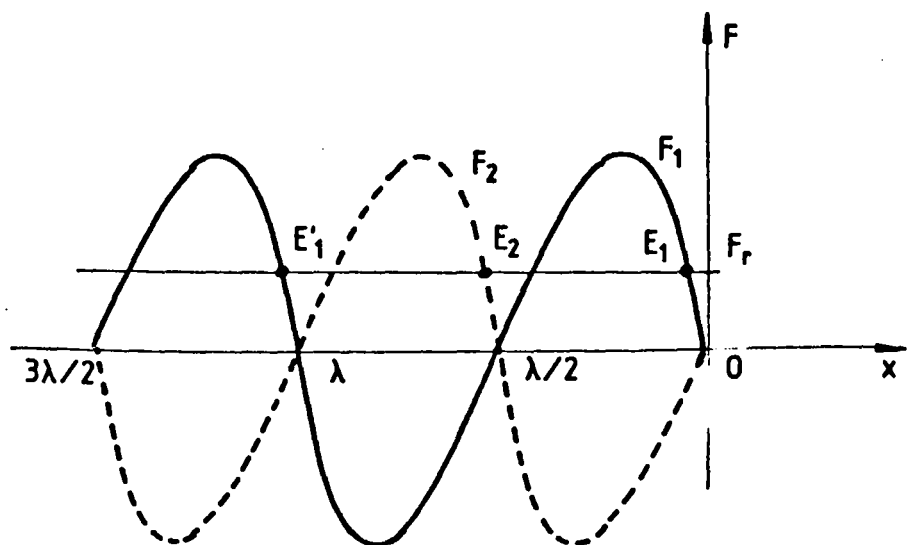


Figure 78 : Courbes $F(x)$ pour deux inducteurs.

citer l'inducteur 2 pour exciter l'inducteur 1, l'effort F_1 est également négatif et agit aussi dans le sens de l'effort résistant F_r pour déplacer la tige jusqu'à la position stable représentée par E'_1 .

On constate que, quelle que soit la commande et bien qu'on atteigne des points d'équilibre stable, le mouvement ne peut se faire que dans la seule direction de l'effort résistant. Une telle machine est donc impropre à produire un mouvement bidirectionnel ; elle ne peut qu'arrêter tous les demi-pas dentaires la chute d'une charge.

Ces remarques sur la machines à deux inducteurs montrent qu'à partir d'une position d'équilibre stable, pour pouvoir relever une charge, il faut que la courbe relative à l'inducteur alimenté corresponde à un effort positif supérieur à F_r ; de même, pour descendre une charge, il faut que la courbe relative à l'inducteur de commande corresponde à un effort inférieur à F_r . Une machine bidirectionnelle nécessite donc au moins trois inducteurs décalés de $\frac{\lambda}{3} + k\lambda$.

II.3.2. Cas des trois inducteurs

La figure 79 montre les forces F_1, F_2, F_3 développées par les inducteurs 1, 2, 3, agissant séparément. La force correspondant à l'intersection de deux courbes successives peut être considérée comme la force nominale F_{nom} de l'actionneur. En effet, si on applique un effort résistant F_{r1} inférieur à F_{nom} , quand l'inducteur 1 est alimenté, la position d'équilibre stable est E_1 .

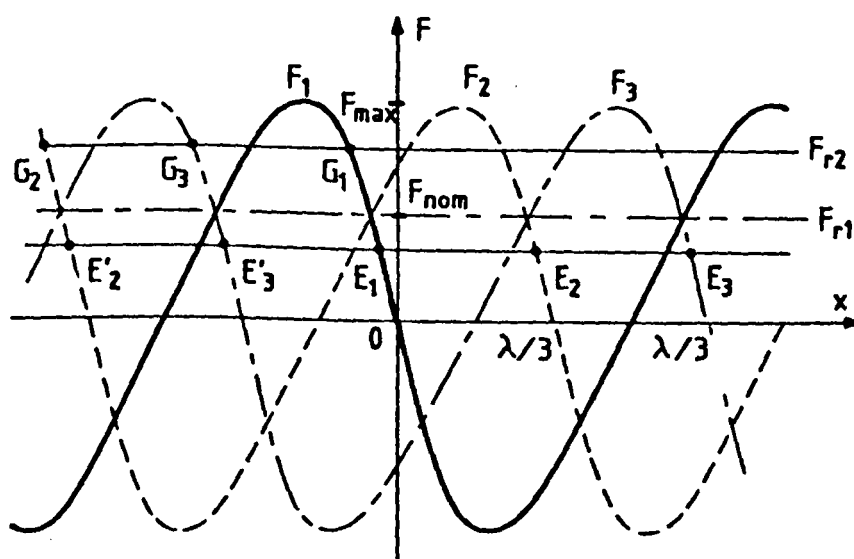


Figure 79 : Courbes $F(x)$ de trois inducteurs.

Si on alimente le bobinage de l'inducteur 2 tout en coupant l'alimentation de l'inducteur 1, F_2 supérieur à F_{r1} amène la tige à la position stable E_2 . Quand l'inducteur 3 est alimenté à son tour, il amène la tige en E_3 et ainsi de suite. La séquence d'alimentation dans l'ordre 1, 3, 2, permet de déplacer la tige en sens inverse de E_1 en E_3' puis en E_2' . A chaque changement d'inducteur le déplacement est de $\lambda/3$.

Si on applique un effort résistant F_{r2} supérieur à F_{nom} , lorsque l'inducteur 1 est excité, la position d'équilibre est G_1 . Si on alimente l'inducteur 2 après avoir coupé l'inducteur 1, F_2 est inférieur à F_{r2} et la tige glisse sous l'effet de F_{r2} jusqu'en G_2 etc... Avec un seul inducteur alimenté à la fois il est impossible dans ce cas d'obtenir la réversibilité du mouvement

Pour assurer la réversibilité du mouvement il faut donc opérer avec un effort résistant F_r inférieur à l'effort nominal F_{nom} . Pour améliorer les performances on cherche à augmenter F_{nom}

- soit en changeant le profil des dents pour que la courbe $F(x)$ soit aussi carrée que possible (cf. choix du système de denture),
- soit en multipliant le nombre d'inducteurs.

II.3.3. Augmentation du nombre d'inducteurs

Si on prend un nombre n d'inducteurs supérieur à trois, à forme donnée des courbes $F(x)$, l'intersection de deux courbes successives, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ par exemple, décalées de λ/n donne F_{nom} d'autant plus proche de F_{max} que n est plus grand.

L'augmentation de n entraîne l'augmentation de la force nominale et la précision du fonctionnement, mais aussi la taille et le coût de la machine et de son alimentation.

Si on suppose $F(x)$ sinusoïdal,

$$F_{nom} = F_{max} \cos \frac{\pi}{n}$$

On peut évaluer, en première approximation, la performance obtenue avec n inducteurs en calculant le rapport $F_{nom}/n F_{max}$ qui traduit en quelque sorte l'utilisation faite des possibilités des n inducteurs. Si $F(x)$ est sinusoïdal, ce rapport est égal à $\frac{1}{n} \cos \frac{\pi}{n}$, il prend successivement les valeurs 0 ; 0,167 ; 0,177 ; 0,162 ; 0,144... quand n vaut 2, 3, 4, 5...

Le gain obtenu en passant de 3 à 4 inducteurs est trop faible pour compenser les inconvénients liés à cette augmentation. Pour l'application envisagée on adoptera un dispositif à trois inducteurs.

Remarque

Une autre solution pour augmenter la force nominale consisterait à alimenter les inducteurs tantôt seuls, tantôt par deux ou même par trois. En ajoutant les forces dues aux inducteurs voisins on pourrait augmenter F_{nom} , mais cette solution présente l'inconvénient majeure de doubler ou même de tripler la puissance consommée.

II.4. Choix du mode d'action du flux inducteur

La machine envisagée, d'axe vertical, doit assurer un mouvement dans les deux sens, à faible vitesse, de l'ordre de quelques centimètres à la seconde, avec une précision de positionnement de l'ordre de 3 mm.

La première difficulté spécifique est que l'effort doit s'exercer à travers une enceinte étanche devant résister à une pression élevée. Il faut travailler avec une tige de diamètre réduit car plus on augmente le diamètre, plus l'épaisseur de l'enveloppe croît.

La seconde difficulté tient à l'axe du déplacement : la machine doit soulever la charge de sa propre tige en plus de sa charge utile. A effort donné, plus le diamètre de la tige est faible, plus la charge utile qu'on peut soulever est importante. Finalement il faut transmettre un effort important à une tige de faible diamètre.

Ces difficultés nous ont beaucoup fait réfléchir sur la façon dont on doit faire agir les inducteurs sur la tige (certaines solutions ne permettraient même pas à la tige de soulever son propre poids) avant d'arriver à la solution retenue.

Dans ce qui suit nous appellerons "entrefer fonctionnel" l'espace occupé par le fluide et situé entre les pièces fixes et les pièces mobiles ; il assure le jeu mécanique nécessaire au déplacement.

On peut classer les solutions possibles par la position de l'entrefer fonctionnel par rapport à l'enceinte étanche.

II.4.1. Entrefer fonctionnel accolé à l'enceinte

Quand la denture fixe est placée à l'extérieur de l'enveloppe, l'entrefer g entre les dentures est très épais (> 1 cm) puisqu'il comprend l'épaisseur de l'enceinte augmentée du jeu fonctionnel.

Cette forte valeur de g conduit à adopter un pas dentaire de plusieurs centimètres, ce qui, on l'a vu, entraîne un positionnement peu précis dans la marche en pas à pas et surtout une force faible.

Selon l'orientation du champ magnétique dans la tige on peut distinguer deux configurations.

a) Configuration "à flux longitudinal"

Cette configuration correspond à la transposition directe de la configuration classique des machines à réluctance variable. La figure 80 a) montre un schéma où un seul inducteur a été représenté. La bobine, de même axe que la tige, crée un flux qui traverse l'enveloppe grâce à deux pièces polaires dentées accolées à l'enceinte. Le flux se referme par la culasse de l'inducteur d'une part et suivant l'axe de la tige d'autre part, d'où le nom d'actionneur "à flux longitudinal".

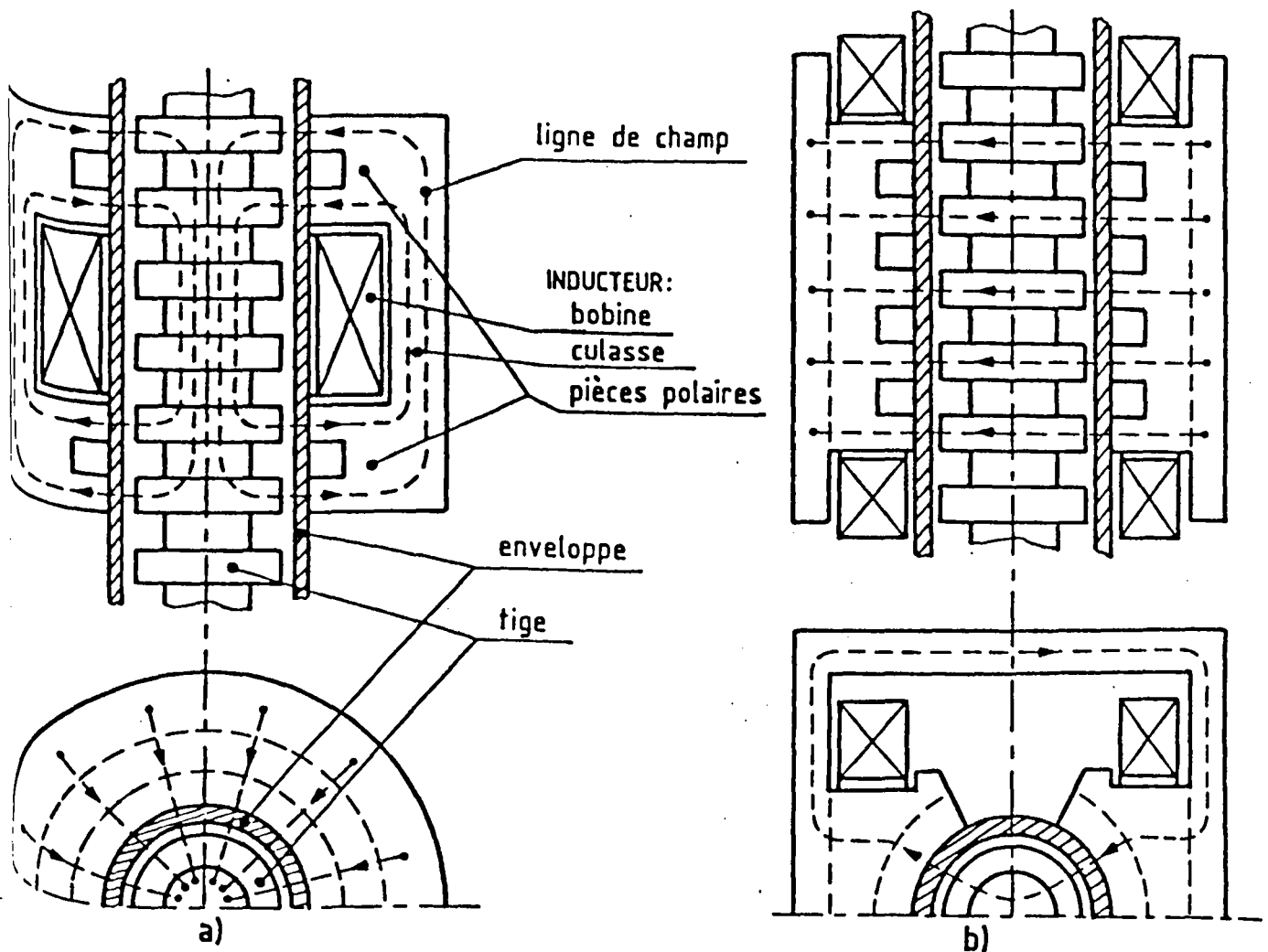


Figure 80 : Configurations avec entrefer fonctionnel accolé à l'enceinte
a) à flux longitudinal, b) à flux transversal.

Cette disposition présente deux inconvénients :

- si le circuit magnétique est nécessairement formé de plusieurs parties, la bobine doit être enfilée sur l'enveloppe cylindrique qui peut être très longue. Cela peut entraîner des difficultés au montage ou au démontage. Cet inconvénient peut être tourné en prenant un circuit magnétique non centré sur l'axe de la tige,
- tout le flux doit passer dans la section de la tige qui est faible de par le diamètre et diminuée de la section du canal. La tige se sature donc très rapidement ce qui limite la force développable par inducteur.

b) Configuration "à flux transversal"

Dans cette disposition les spires inductrices assurent le passage du flux dans une direction perpendiculaire à l'axe de la machine. Cette disposition, plus simple que la précédente au niveau de la construction, ne permet pas aux pièces polaires d'occuper toute la périphérie de l'enceinte étanche et rend nécessaire la présence d'une enveloppe magnétique extérieure (fig. 80 b)) assurant la fermeture des lignes de champ. Cette enveloppe magnétique est bénéfique dans la mesure où elle rigidifie la construction mais elle est pénalisante par l'augmentation du volume extérieur de la machine et de son poids.

Cette configuration n'apporte rien quant au pas dentaire élevé mais résout mieux le problème de la saturation de la tige. L'effort exercé est rendu proportionnel à la hauteur des pièces polaires.

Pour pouvoir améliorer les performances de la machine il faut trouver un moyen de réduire le pas dentaire λ qui est fonction de l'entrefer g . Pour y parvenir il faut réduire g à l'entrefer fonctionnel et donc rejeter celui-ci à l'intérieur de l'enceinte étanche, ceci n'est possible qu'en reprenant le flux par des pièces magnétiques fixes placées à l'intérieur de l'enveloppe. Ces pièces portent la denture fixe. L'enveloppe constitue un entrefer auxiliaire qui n'intervient qu'au niveau du dimensionnement du bobinage.

II.4.2. Disposition avec pièces de reprise du flux à l'intérieur de l'enceinte

D'après ce qui précède cette disposition est adaptable aussi bien à la configuration "à flux longitudinal" qu'à la configuration "à flux transversal".

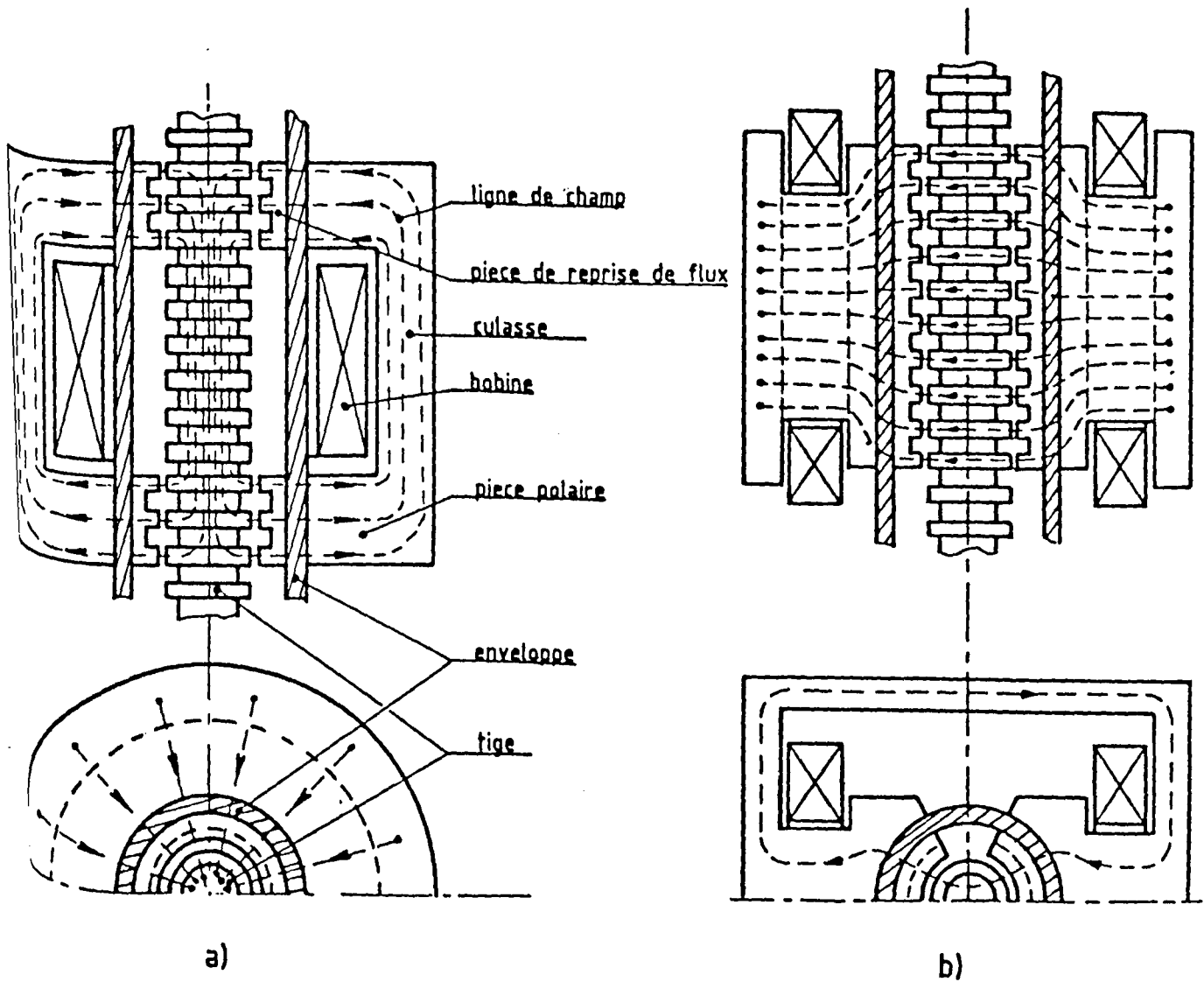


Figure 81 : Emploi de pièces de reprise du flux

a) configuration "à flux longitudinal",

b) configuration "à flux transversal".

a) Configuration "à flux longitudinal"

Dans cette configuration schématisée à la figure 81 a), le pas dentaire est bien réduit mais il subsiste le problème de la saturation rapide de la tige.



La difficulté de construction et le maintien de l'écartement des deux pièces de reprise du flux ne sont pas suffisamment compensées par l'amélioration de performance obtenue pour que cette configuration ait été retenue.

b) Configuration "à flux transversal"

La configuration, schématisée à la figure 81 b), est la plus complexe du point de vue de la construction. Les pièces polaires situées à l'extérieur de l'enceinte étanche sont lisses et à l'intérieur de celle-ci sont disposées des pièces magnétiques de reprise de flux en forme de coquilles cylindriques dentées.

L'entrefer entre les dentures est réduit à l'entrefer fonctionnel, simplement lié au guidage de la tige mobile, et peut être faible ; le pas dentaire peut donc également être faible ce qui permet à la fois la transmission d'un effort important et un positionnement précis.

A diamètre intérieur de l'enceinte étanche donné, cette solution aboutit à un diamètre de tige faible et permet un gain de poids. Ce gain ne peut cependant pas être trop important sous peine d'aboutir rapidement à la saturation de la tige.

C'est cette solution originale, qui a donné lieu à plusieurs brevets, qu'on retiendra pour l'actionneur envisagé. Cette pétition de principe posée il ne faut pas minimiser les problèmes pratiques tels que le guidage de la tige sur des grandes longueurs, la précision des usinages, la fixation en position correcte des pièces de reprise du flux, le refroidissement de la machine. Compte-tenu de ce qui précède, si on voulait augmenter la vitesse de fonctionnement on ne pourrait, raisonnablement, feuilleter que les parties magnétiques situées hors de l'enceinte étanche.

III. LE PROTOTYPE REALISE ET LES ESSAIS EFFECTUES

III.1. Présentation de la machine

La machine construite a été conçue pour satisfaire plusieurs objectifs. Prévue pour étudier les machines linéaires "à flux transversal", elle a été réalisée de façon modulaire pour pouvoir réutiliser le maximum de pièces, pour tester dans un premier temps la configuration sans pièces de reprise de flux (version I), la configuration avec pièces de reprise de flux (version II) dans une seconde étape.

III.1.1. Parties communes aux deux versions. Dispositifs de mesure

Pour les deux versions, la machine bipolaire possède une seule phase correspondant à deux bobines de 468 spires chacune, alimentées en série, montées sur deux noyaux principaux de 130 mm de hauteur et 110mm de large. La culasse extérieure de retour du flux est formée de tôles magnétiques de 40 mm d'épaisseur. Pour les essais la tige coulissante est guidée par des pièces d'extrémité amagnétiques glissant dans des paliers à billes.

Un capteur, dont la capacité maximale est 1000 daN et la classe de précision 0,2 % au delà de 50 daN, permet dans tous les cas de mesurer l'effort exercé sur le bâti par la tige guide inférieure. La position relative des dentures en hauteur est réglée par un système vis-écrou blocable sur le bâti.

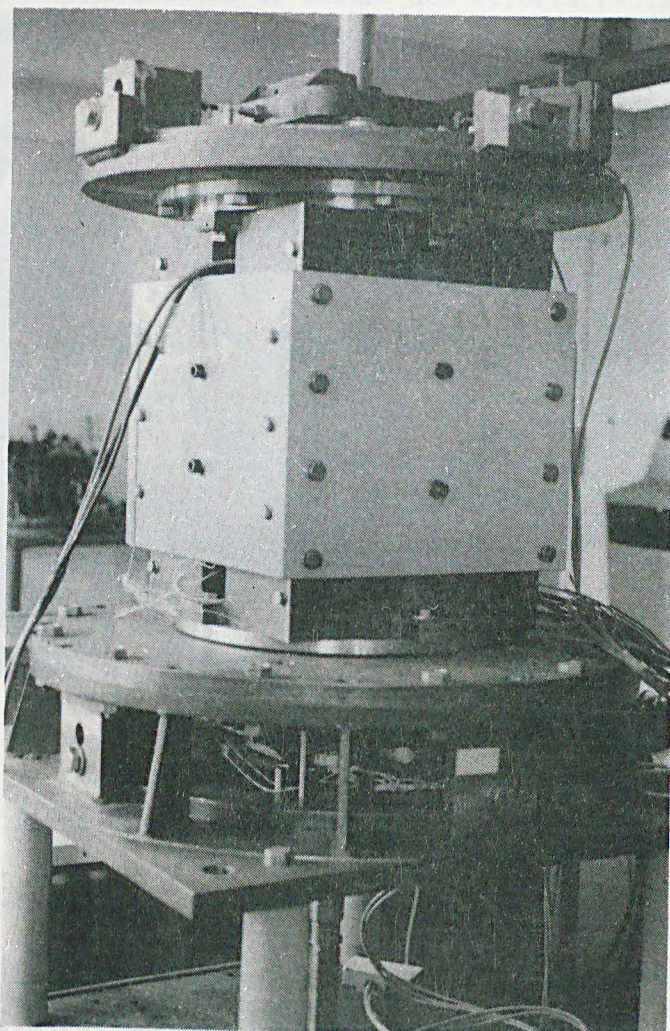


Figure 82 : Vue générale de la machine.

Le dispositif expérimental permet donc de relever les courbes $F(x)$, dans un essai statique, pour diverses valeurs du courant d'excitation, mettant ainsi en évidence les effets de la saturation.

Afin de permettre aussi l'étude de force radiale en cas de décentrement. Chaque palier à billes est fixé par trois biellettes de mesure d'effort, équipées de jauges de contraintes, et disposées à 120° les unes des autres, sur un plateau déplaçable, permettant de décentrer l'axe de la tige mobile par rapport à l'axe de l'enceinte étanche.

Pour suivre l'état de la machine pendant les manipulations, les bobines inductrices sont équipées de sondes à thermocouples et les différentes pièces magnétiques sont munies de bobines exploratrices reliées à un fluxmètre.

La figure 82 donne une vue générale de la machine ; la figure 83 permet de voir la partie inférieure de celle-ci avec le guidage par palier à billes, le dispositif de décentrement du noyau par rapport à l'axe de l'enceinte, les biellettes de mesure des efforts radiaux.

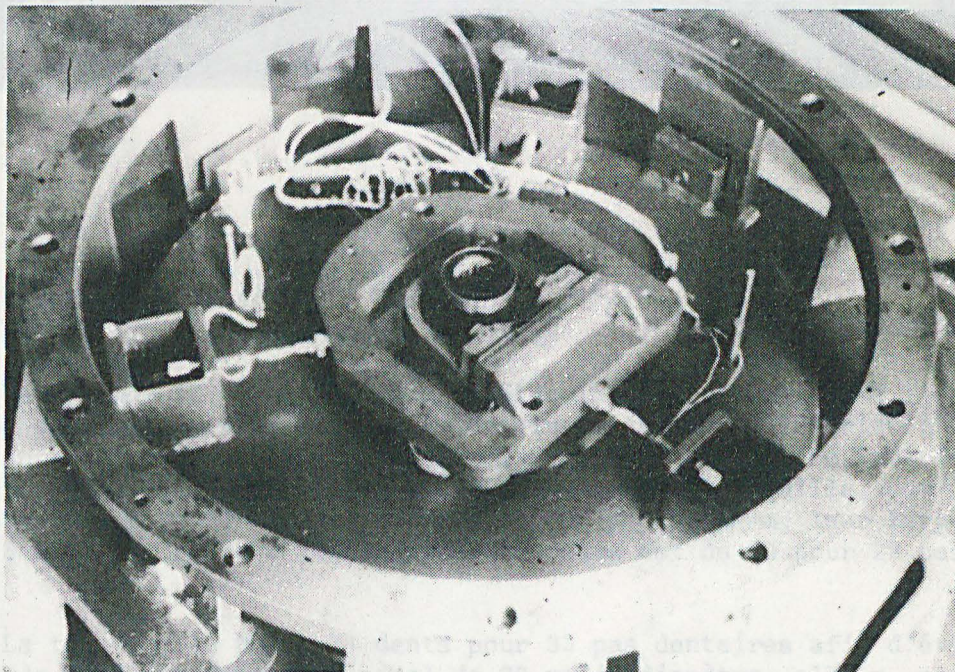


Figure 83 : Palier à billes et dispositif de décentrement.

III.1.2. Spécification des deux versions

Dans les deux cas, l'entrefer fonctionnel a été choisi égal à 1 mm.

La version I correspond à la denture fixe portée par les pôles, à l'extérieur de l'enceinte étanche de 7 mm d'épaisseur, en acier inoxydable, et de diamètre intérieur de 80 mm. Le pas dentaire choisi est de 51 mm pour une largeur de dent de 19 mm. La tige mobile dont le canal a 20 mm de diamètre possède 6 dents, le pôle fixe possède 5 dents ; la hauteur des dents est de 20 mm sur la tige et de 30 mm sur le pôle. La figure 84 montre la tige et un pôle de la machine.

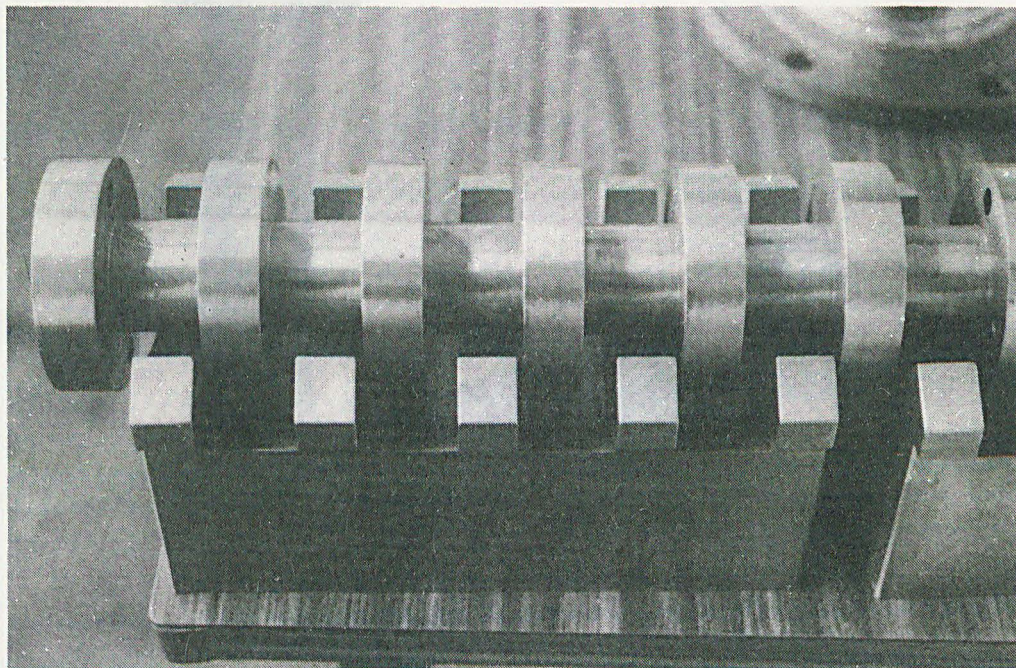


Figure 84 : Version I : Tige mobile et pièce polaire.

La version II correspond à des pôles lisses, extérieurs à l'enceinte étanche, et des pièces de reprise de flux situées à l'intérieur. L'enceinte en acier inoxydable a 8 mm d'épaisseur et son diamètre intérieur est de 100 mm. Les pièces de reprise de flux, en forme de coquille, ont une épaisseur totale de 10 mm, les dents y ont un pas de 8 mm, leur largeur est de 3 mm, leur hauteur 7,5 mm et leur nombre est de 30 pour 29 pas dentaires.

La tige mobile porte 34 dents pour 33 pas dentaires afin d'éviter l'effet de bord. Creusée d'un canal de 20 mm de diamètre, elle a, comme dans la version I, un diamètre extérieur de 78 mm ; ses dents ont la même largeur et le même pas que celles des pièces de reprise de flux. Sur la première tige essayée les dents avaient une hauteur de 7,5 mm. Sur la seconde, pour étudier l'influence de ce paramètre, on a fait varier par tournages successifs la profondeur des rainures de 0,5 à 7,5 mm.

La figure 85 montre l'enceinte étanche, la tige mobile flanquée des pièces de reprise de flux et une pièce de blocage de ces dernières.

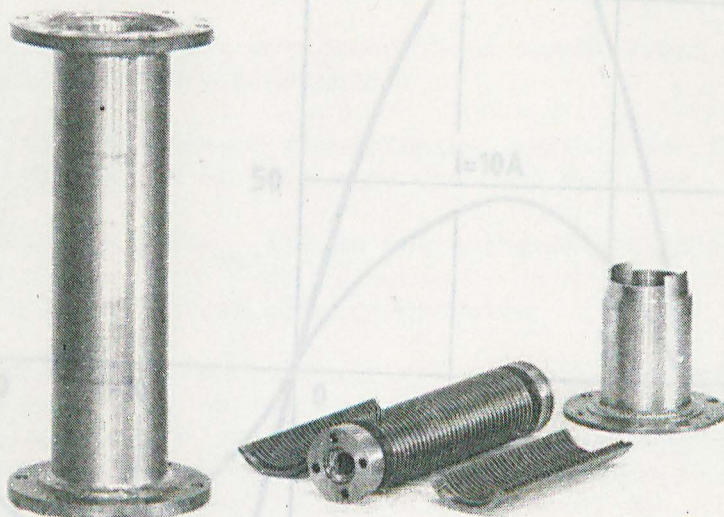


Figure 85 : Composants propres à la version II.

III.2. Résultats expérimentaux obtenus

Les essais sur la version I ont été assez brefs puisque l'autre s'est immédiatement révélée supérieure.

Sur la version II nous avons utilisé successivement trois tiges. Avec la première, dont la profondeur des gorges est de 7,5 mm, nous avons montré la supériorité de cette version. Sur la seconde nous avons fait varier la profondeur des gorges de 0,5 mm en 0,5 mm de 0,5 mm à 7,5 mm pour étudier l'influence de cette dimension. Sur la troisième, présentant la profondeur optimale, nous avons mesuré les efforts sur les paliers lorsque l'axe de la tige est décentré soit dans l'axe des pôles, soit dans l'axe interpolaire par rapport à l'axe de l'enceinte.

III.2.1. Essais de la version I

Nous nous sommes limités au relevé des courbes $F(x)$ pour diverses valeurs de l'intensité du courant I dans les enroulements, puis au relevé de la force maximum obtenue pour diverses valeurs de I allant de 0 à 35 A.

La figure 86 montre, par exemple, les courbes $F(x)$ relevées pour I égal à 10 A et I égal à 25 A. On constate que ces courbes sont très sensiblement sinusoïdales, que les symétries et la période ($\lambda = 51$ mm) sont bien respectées.

La figure 87 donne la courbe $F_{\max}(I)$; elle s'écarte, dès 10 A de la parabole qu'on obtiendrait en l'absence de saturation et s'incurve rapidement en sens inverse.

Figure 87 : Caractéristique $F_{\max}(I)$
(version I).

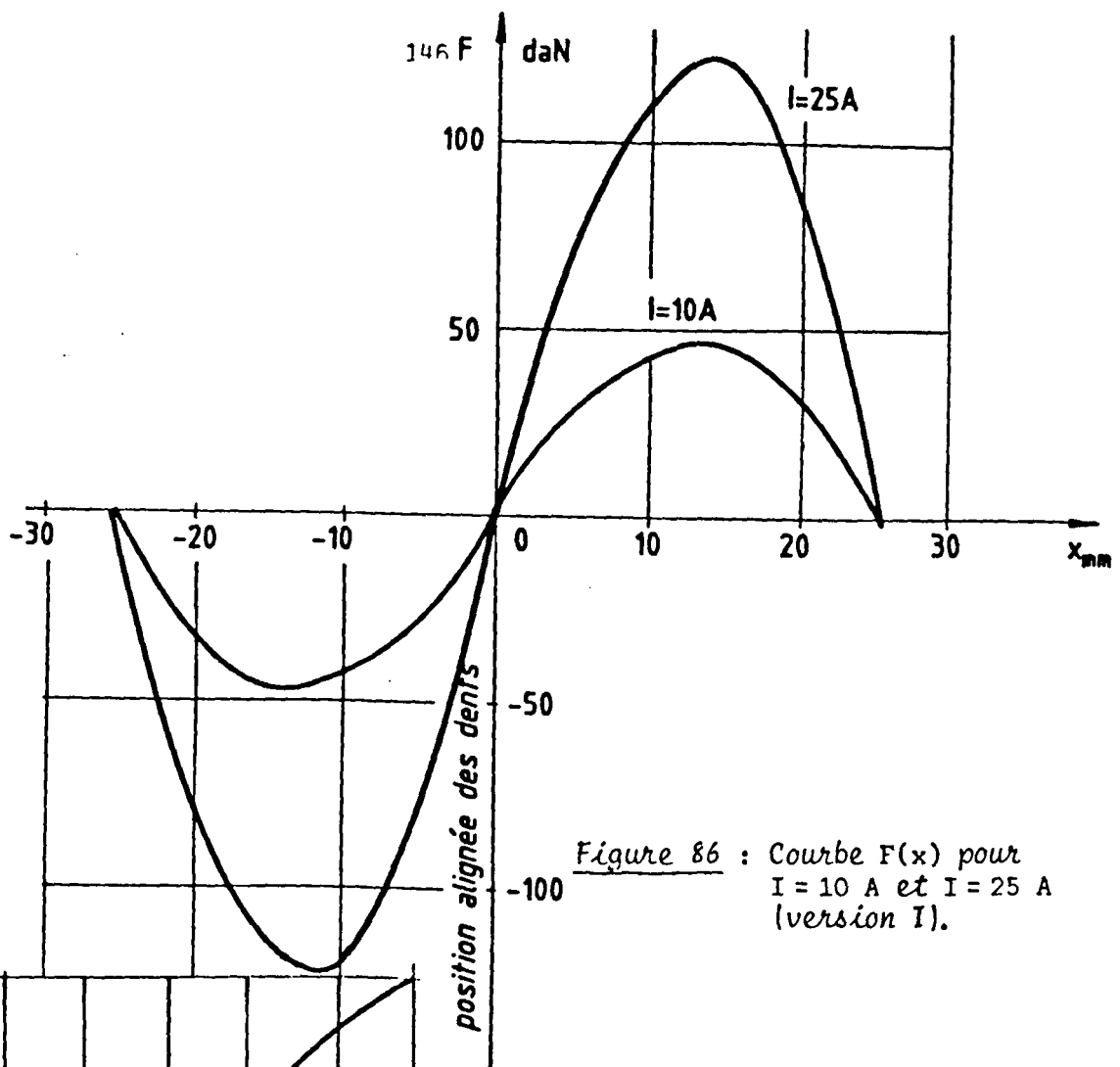


Figure 86 : Courbe $F(x)$ pour $I = 10 A$ et $I = 25 A$ (version I).

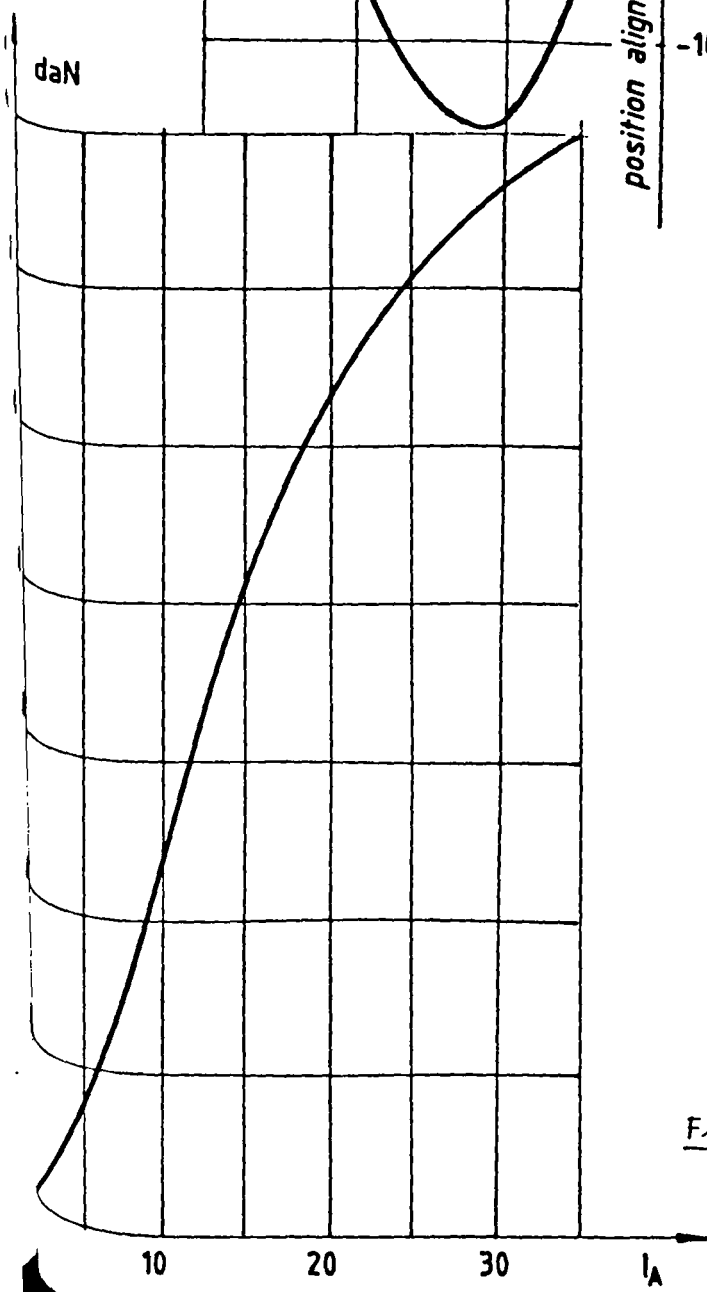


Figure 87 : Caractéristique $F_{\max}(I)$ (version I).



On peut remarquer que cet actionneur a un comportement qui correspond bien aux conclusions de l'étude préalable :

- courbes $F(x)$ sensiblement sinusoïdales, passant par zéro pour les positions alignée et en quinconce des deux dentures,
- mise en évidence par $F_{\max}(I)$ du phénomène de saturation,
- valeur assez limitée des efforts produits.

Avec trois inducteurs, en limitant I à 25 A, on n'atteindrait une force nominale que de 70 daN, ce qui est nettement insuffisant vis-à-vis des quelques centaines de daN attendus. L'ordre de grandeur souhaité ne pourrait être atteint que par un allongement prohibitif de la machine.

III.2.2. Essais de la version II

Alors qu'il était assez facile de modifier la tige mobile, pour des raisons évidentes de prix de revient on conserve toujours les mêmes coquilles, bien que la suite des essais ait montré la profondeur de leurs gorges (7,5 mm) soit très nettement excessive.

- * *La première série d'essais, avec une tige ayant des gorges de 7,5 mm de profondeur, avait pour but de comparer les versions I et II.*

Nous ne reproduirons pas les courbes relevées dans ces conditions analogues à celles des figures 86 et 87. On les trouvera ultérieurement.

A courant donné, l'effort maximum obtenu avec la version II est plus du double de celui que donne la version I, ce qui montre indubitablement sa supériorité.

Avec cette tige nous avons vérifié que, lorsqu'on inverse le sens du courant, on retrouve le même effort maximum. Quand on modifie les conditions préalables d'un essai, on trouve des écarts sur F_{\max} à I donné ; ce qui montre qu'il y a hystérésis, mais les écarts n'excèdent guère 10 daN dans les cas où ils sont les plus forts. Cela nous a conduit, dans les essais suivants, à ne pas chercher à relever l'importance de ce phénomène.

- * *La seconde série d'essais, avec un noyau à profondeur de gorges portée de 0,5 mm à 7,5 mm par usinages successifs, avait pour but de recherche la profondeur optimale, c'est-à-dire celle donnant la force la plus grande possible.*

- La profondeur d des gorges a été modifiée de 0,5 mm entre chaque série de relevés par une opération de tournage contrôlée au centième de mm.

Pour éviter des efforts parasites sur le capteur, dûs au serrage du pied de l'écrou de positionnement, tous les essais ont été faits dans le sens de la compression du capteur ce qui ne nécessitait aucun serrage supplémentaire sur le bâti.

Enfin tous les relevés ont été effectués à partir de la position alignée des dents, après une désaimantation complète de la machine réalisée en courant continu par inversion et décroissance du courant d'excitation.

Ces nombreuses précautions étaient nécessaires pour pouvoir comparer avec assez de certitude les relevés successifs.

- La figure 88 présente les courbes $F(x)$ ainsi relevées pour I égal à 7, 10 et 25 A et les 15 valeurs successives données à d . On voit que toutes ces courbes sont très sensiblement sinusoïdales ce qui permet d'estimer que, pour un actionneur à trois inducteurs, la force nominale est égale à la moitié de F_{\max} .

Sur chacune de ces courbes on a pointé l'effort maximum F_{\max} . On a reporté les points correspondants sur la figure 89.

Enfin, toujours à partir de ces relevés, on a calculé, par la méthode de Simpson, la valeur moyenne F_{moy} de la force pour chaque couple de valeurs de I et de d ; les résultats sont reportés sur la figure 90.

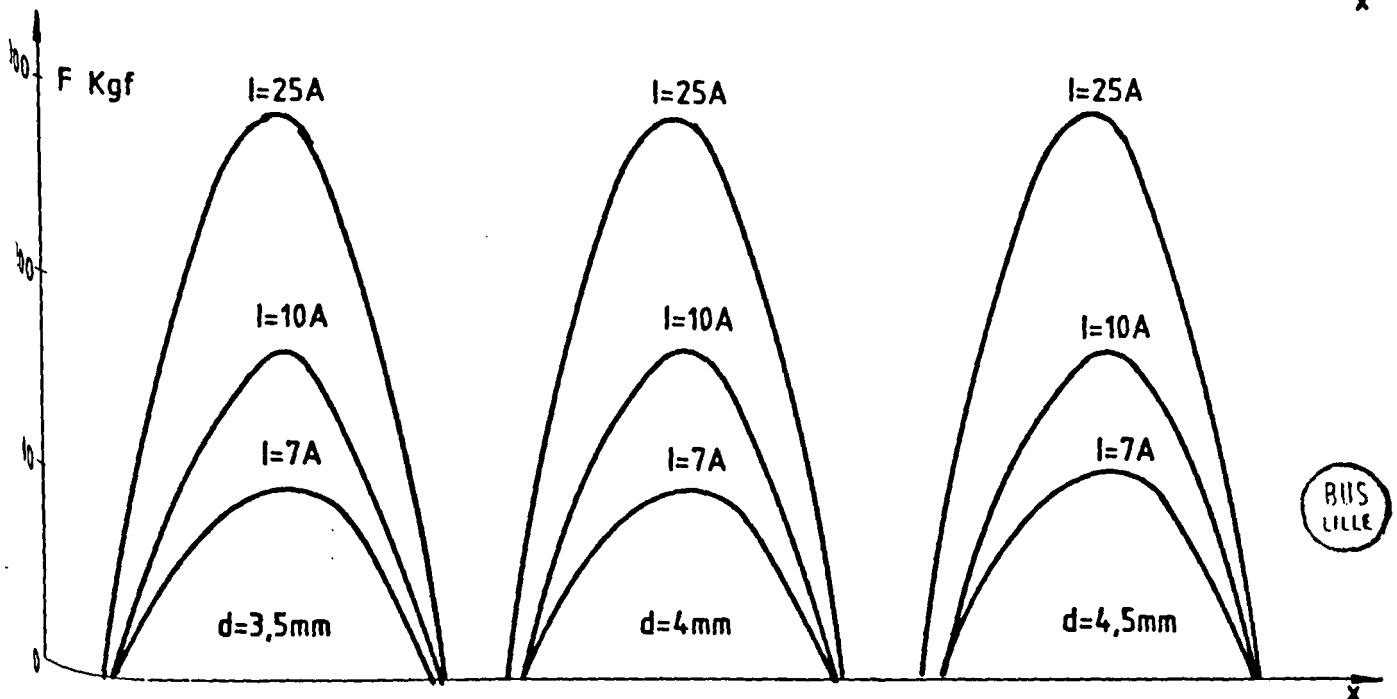
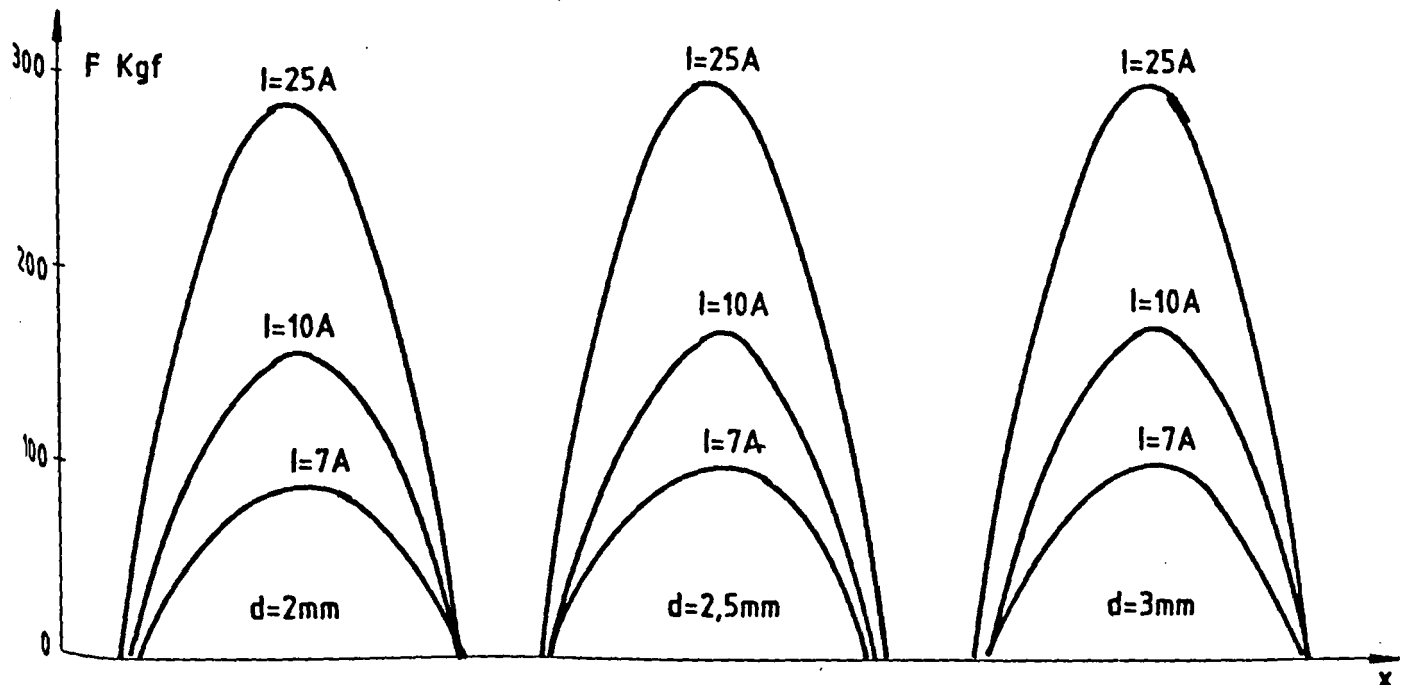
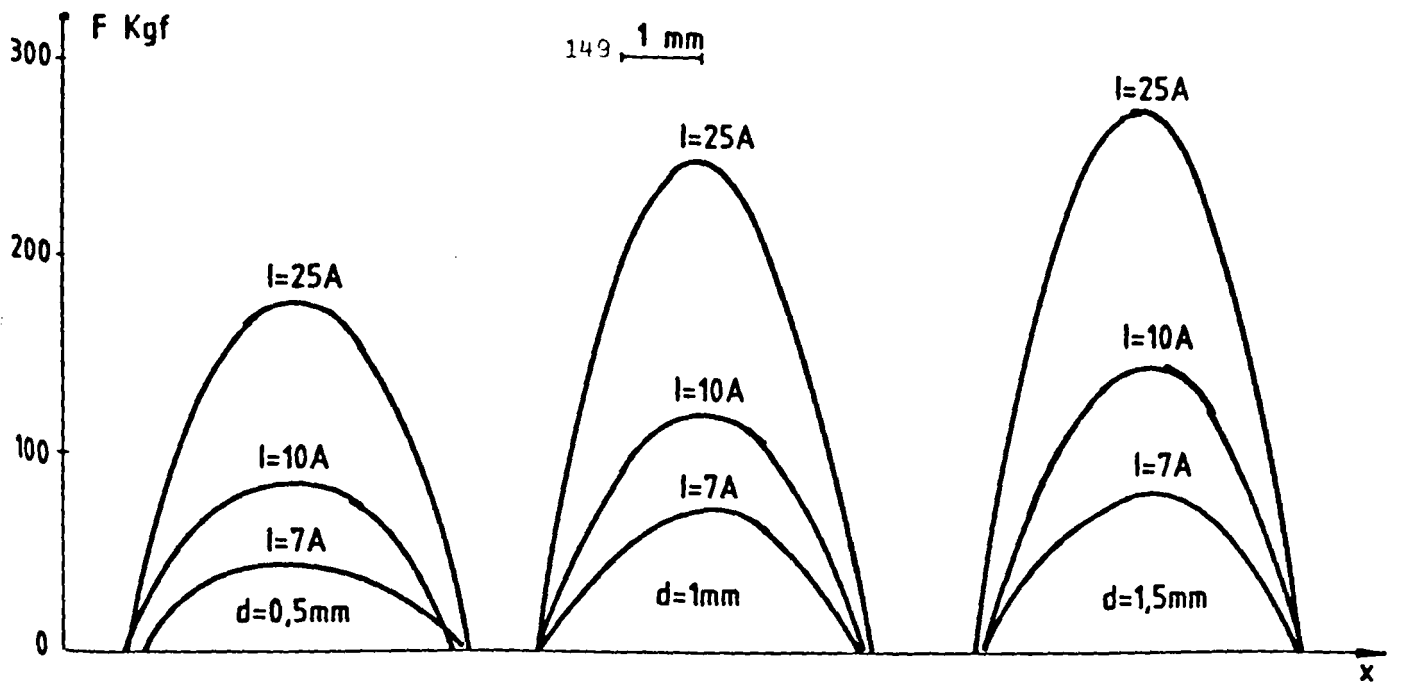
Si les courbes $F(x)$ étaient des sinusoïdes le rapport F_{moy}/F_{\max} vaudrait $2/\pi$ soit 0,637. Or on trouve en moyenne 0,643 pour I égal à 7 A ; 0,647 pour I égal à 10 A et 0,682 pour I égal à 25 A.

Ce calcul confirme donc que l'allure des courbes $F(x)$ est proche de la sinusoïde mais qu'elle s'en éloigne sensiblement quand la saturation augmente.

L'intersection de deux courbes $F(x)$ identiques et décalées de 8/3 mm, correspondant à une machine à trois inducteurs effectuée à partir des 45 courbes de la figure 86 donne en moyenne une force nominale égale à $0,54 F_{\max}$. La déformation des courbes est donc bénéfique puisqu'une sinusoïde parfaite donnerait $0,5 F_{\max}$.

- Pour chaque valeur de d , en se plaçant à la position géométrique donnant la force maximale, on a relevé la courbe $F_{\max}(I)$. La figure 91 montre les courbes les plus séparables et rappelle les résultats de la version I.

On constate que la machine commence à se saturer à partir de I égal à 10 A, ce qui justifie le choix de cette valeur particulière dans les essais.



BUS LILLE

Figure 88 : (1ère partie)

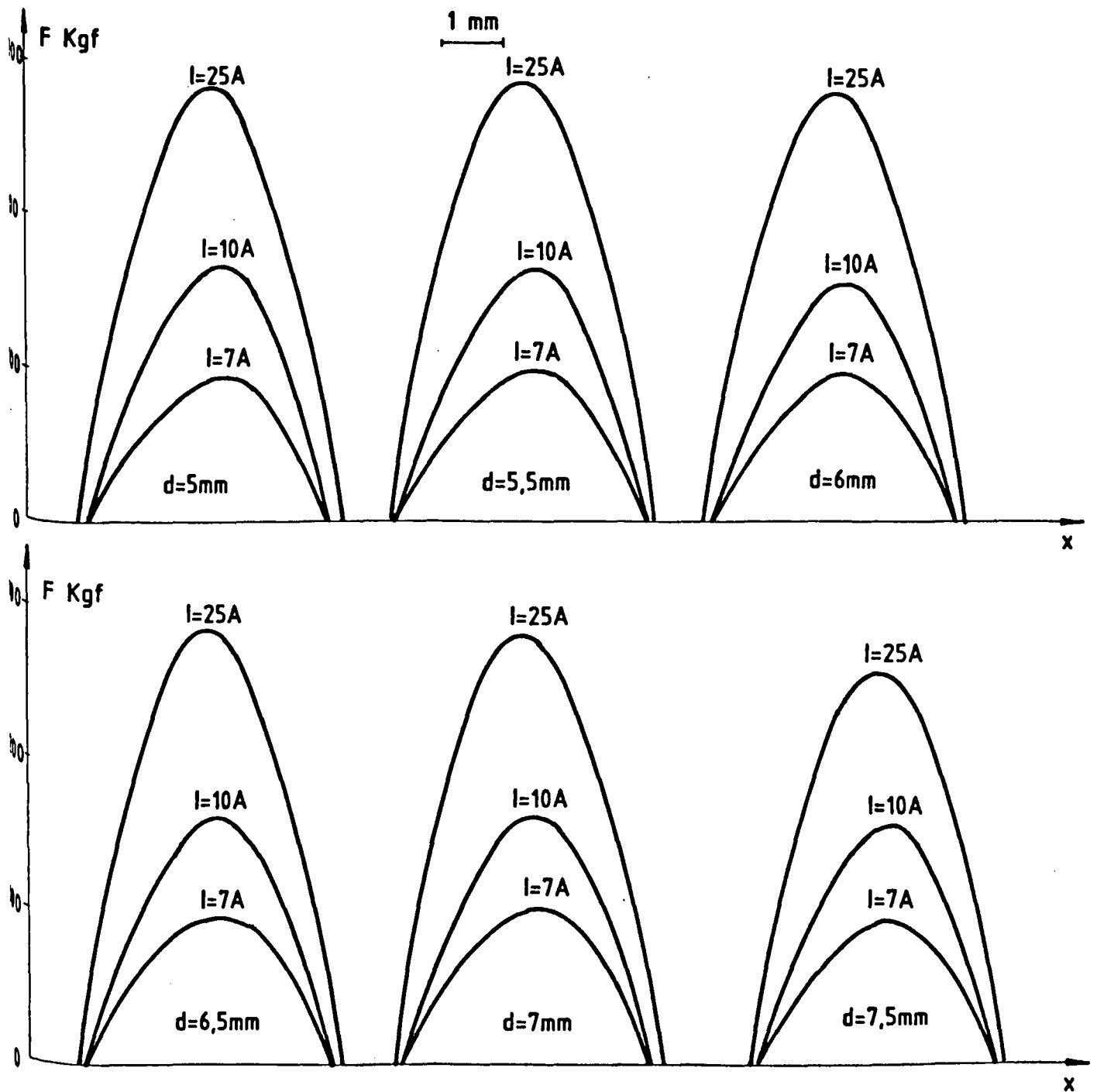


Figure 88 : (2^{ème} partie) - Courbes $F(x)$ relevées pour I égal à 7, 10 et 25 A et quinze valeurs de la profondeur d des gorges.

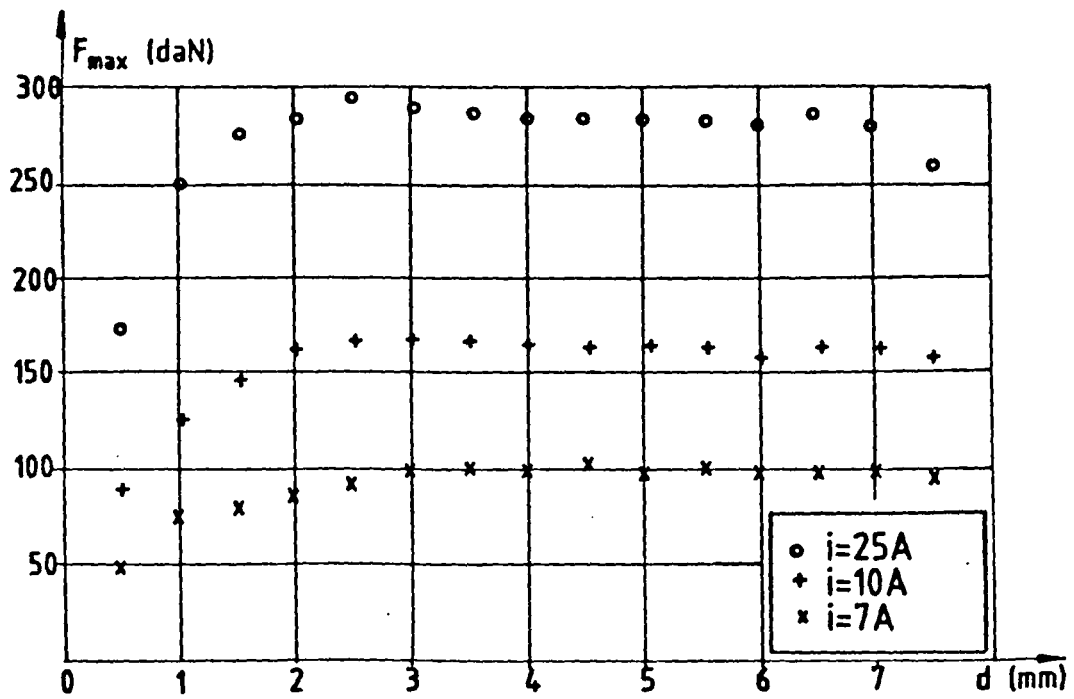


Figure 89 : Valeurs de l'effort maximal lues sur les courbes de la figure 88.

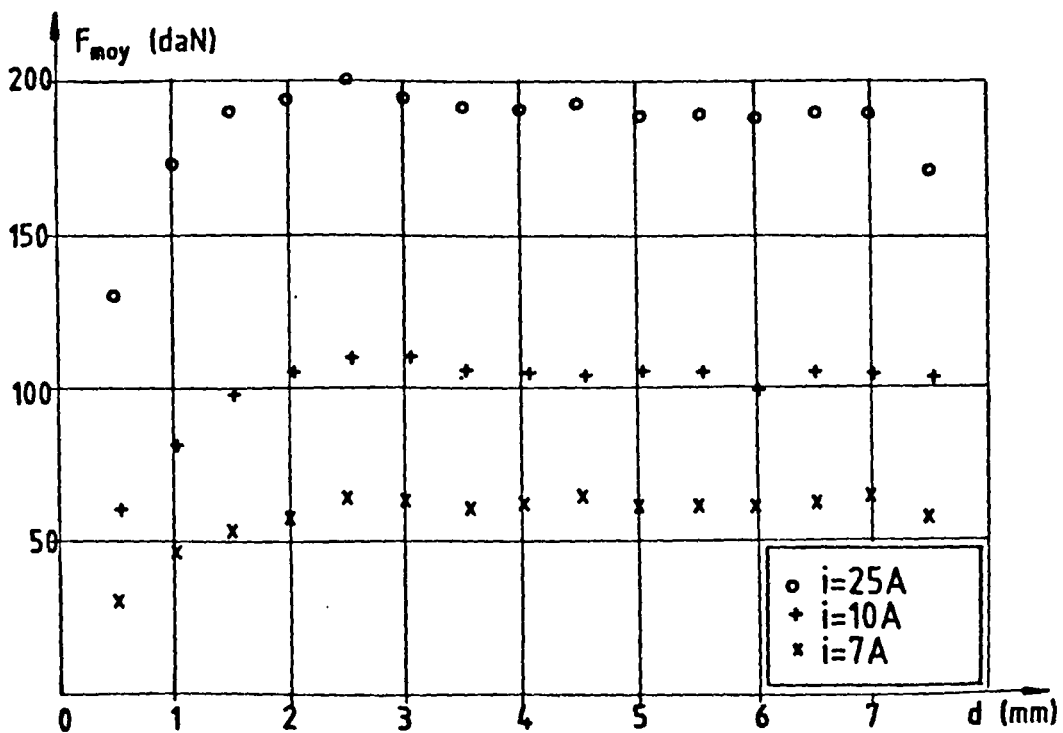


Figure 90 : Valeurs de l'effort moyen calculées à partir des courbes de la figure 88.

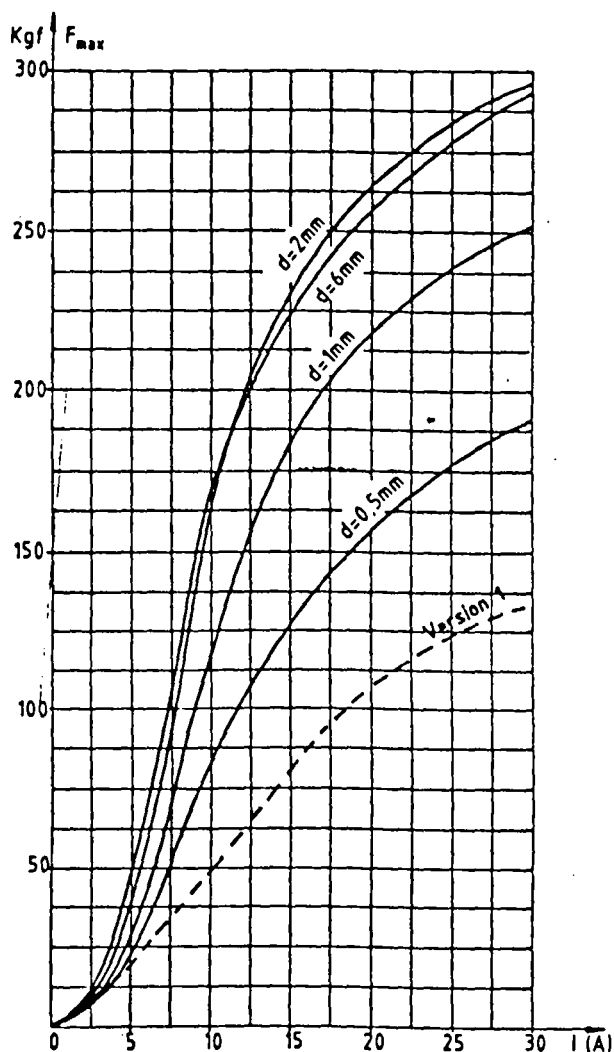


Figure 91 : Courbes F_{max} (I) pour différentes valeurs de d .

Cette figure montre que pour d égal à 0,5 mm la version II est déjà supérieure à la version I ; pour d égal à 1 mm les performances sont pratiquement égales au double de celles de la version I.

Mais le principal résultat de cette série de relevés, tel qu'il apparaît sur les figures 89, 90 et 91, est qu'à courant donné la force atteint son maximum pour une profondeur des gorges relativement faible, voisine de 2,5 mm. Ensuite quand d continue à croître, la force diminue un peu ; ce n'est qu'à partir de 7 mm que la décroissance s'accroît.

On peut remarquer que la force maximale n'a pas exactement la même valeur selon qu'on la relève sur les courbes $F(x)$ ou directement (comparaison des figures 89 et 91) ; les écarts peuvent atteindre 10 daN. Cela explique la méticulosité avec laquelle nous avons dû opérer pour relever les courbes que nous voulions comparer.

La troisième série d'essais, avec un noyau à profondeur optimale des gorges ($d = 2,5$ mm) avait pour but d'évaluer les efforts radiaux dûs au décentrement.

Avec cette tige, les essais de décentrement symétriques en haut et en bas, d'abord dans l'axe des pôles d'abord puis dans l'axe interpolaire, sur une distance atteignant 0,8 mm, c'est-à-dire ne laissant que 0,2 mm d'entrefer fonctionnel, n'ont donné qu'un effort maximal par biellette de 15 daN. L'effort pour palier n'excédant jamais 30 daN, le guidage de la tige est théoriquement facile à assurer.

Sans présumer de la complexité de la technologie de guidage utilisée, on peut prévoir la possibilité d'une diminution de l'épaisseur de l'entrefer fonctionnel très au-dessous du millimètre (0,4 mm par exemple) entraînant un accroissement sensible des performances de la machine.

III.3. Conclusions de l'étude du prototype

La réalisation d'un actionneur linéaire devant transmettre un effort important à travers une enceinte étanche est possible en utilisant une machine à réluctance variable construite en retenant le principe d'un "flux transversal" et d'une reprise du flux par des pièces magnétiques à l'intérieur de l'enceinte. La construction "à flux transversal" permet de rendre *l'effort développé proportionnel à la hauteur des pôles*, il est donc théoriquement toujours possible de produire l'effort désiré. L'étude expérimentale menée indique qu'il est relativement facile de créer un effort de 12 daN par centimètre de machine.

L'absence d'effort de décentrement permet d'envisager des entrefers fonctionnels très inférieurs au millimètre et par là de raccourcir les pas dentaires ce qui aura pour effet d'augmenter encore les performances de la machine. Au-delà de certaines limites il reste cependant prévisible que les machines de ce type seront coûteuses à cause des qualités de réalisation mécanique nécessaires.

IV. APPLICATION DE LA METHODE ANALYTIQUE PROPOSEE

IV.1. Présentation

Pour tester la validité de la méthode de calcul de l'effort moyen proposée dans les chapitres précédents, nous avons fait une série d'applications numériques des relations données à la fin du chapitre III en prenant les paramètres de la machine prototype.

Nous nous sommes toutefois limité au domaine de validité des hypothèses retenues pour le calcul. Ainsi, faisant varier la profondeur d_N des gorges du noyau de 0,5 mm en 0,5 mm, nous n'avons pas dépassé 3 mm. On peut alors négliger le fait que la tige mobile possède un canal central et on peut considérer que les franges transversales ne modifient pas l'allure axisymétrique des lignes de champ.

- On a d'abord supposé l'*axisymétrie complète*, c'est-à-dire la force magnétomotrice totale appliquée à l'enceinte cylindrique en série avec l'entrefer fonctionnel, donc des lignes de champ convergeant toutes radialement du fer de l'inducteur au fer de la partie pleine de la tige.

On a calculé ainsi, pour chaque valeur de d_N , les réluctances des différentes zones puis les fonctions caractéristiques de denture $P'_{\lambda eA}$ et $P'_{\lambda eQ}$.

On en a déduit le coefficient C'_i liant la force fictive moyenne \bar{F}'_i au carré du courant

$$\bar{F}'_i = \frac{N n^2}{\lambda} (P'_{\lambda eA} - P'_{\lambda eQ}) i^2 = C'_i i^2$$

en prenant pour N le nombre de gorges du noyau, soit 29, et pour n le nombre total de spires, soit 2×468 .

Les perméances sont calculées en utilisant les valeurs numériques suivantes

| | |
|--|---------|
| t , largeur des dents, | 3 mm |
| s , largeur des gorges, | 5 mm |
| g , épaisseur d'entrefer, | 1 mm |
| d , profondeur des gorges des pièces de reprise du flux, | 7,5 mm |
| R_0 , rayon de l'entrefer moyen, | 39,5 mm |
| R_1 , rayon intérieur de l'enceinte, | 51 mm |
| R_2 , rayon extérieur de l'enceinte. | 59 mm |

Pour délimiter les zones, δ a été choisi égal à 1/100 de mm et ϵ donne y avec une précision du dixième de micron.

- Pour passer ensuite à la *configuration réelle* où chaque pôle ne couvre que le tiers de la périphérie et où les lignes de champ traversent deux fois l'enceinte et deux fois l'entrefer, on utilise

le schéma magnétique de la figure 92. R_c représente la réluctance d'un tiers d'enceinte cylindrique, R_e la réluctance d'un tiers de l'entrefer denté total.

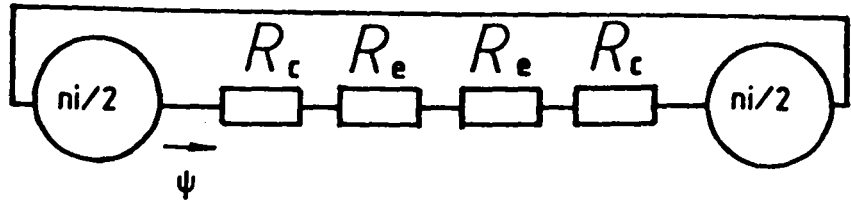


Figure 92 : Schéma des réluctances et f.m.m.

La perméance totale du dispositif réel est donc égale au sixième de la perméance calculée en supposant l'axisymétrie complète.

IV.2. Résultats

La méthode proposée au chapitre III conduit à une valeur constante de l'ordonnée y_U du point de séparation des zones dans les gorges des pièces de reprise du flux. On trouve

$$y_U = 2,489 \text{ mm.}$$

Puisqu'on fait varier d_N , la position y_T du point de séparation des zones dans les gorges du noyau varie. Sur la figure 93 on a pointé les valeurs calculées. On voit que, dès que d_N approche de 2,5 mm, y_T est très voisin de $s/2$: le flux provenant du fond de gorge devient très faible, négligeable devant celui venant des flancs des dents.

Le tableau III permet de comparer les résultats fournis par le calcul (C_i calculé) à ceux (C_i exp) déduits de l'expérience (voir figure 90) pour 7 et 10 A et les mêmes valeurs de d_N .

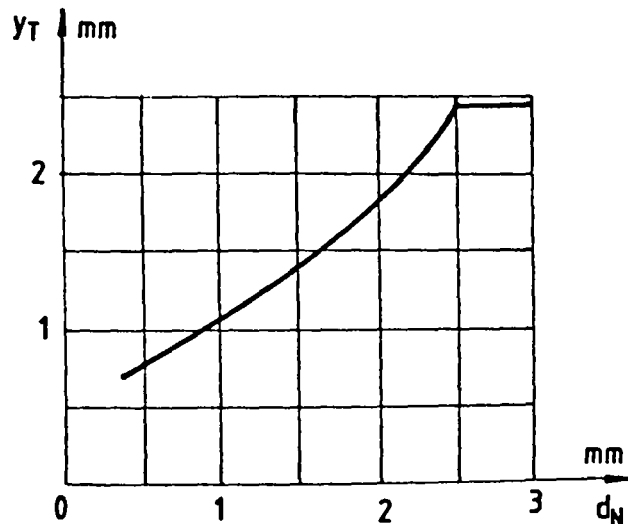


Figure 93 : Position du point T.

On a tracé (fig. 94), à partir de ces points, les variations de C_i en fonctions de d_N obtenues par le calcul et par l'expérience.

| mm d_N | C_i exp. | | N/A^2 | N/A^2 C_i calculé | C_i cal. |
|-------------|------------|------------|---------|-----------------------------|---------------------|
| | $i = 7 A$ | $i = 10 A$ | moyenne | | ----- C_i exp. |
| 0,5 | 5,99 | 5,76 | 5,875 | 5,28 | 0,898 |
| 1 | 9,21 | 7,94 | 8,575 | 7,99 | 0,931 |
| 1,5 | 10,71 | 9,50 | 10,105 | 9,66 | 0,956 |
| 2 | 11,46 | 10,27 | 10,865 | 10,72 | 0,986 |
| 2,5 | 12,91 | 10,65 | 11,78 | 12,93 | 1,09 |
| 3 | 12,74 | 10,69 | 11,715 | 12,92 | 1,10 |

Tableau III : Comparaison entre les valeurs relevées et calculées.

On constate que les deux courbes ont même allure et, en particulier, elles font toutes les deux apparaître un maximum pour d_N voisin de 2,5 mm.

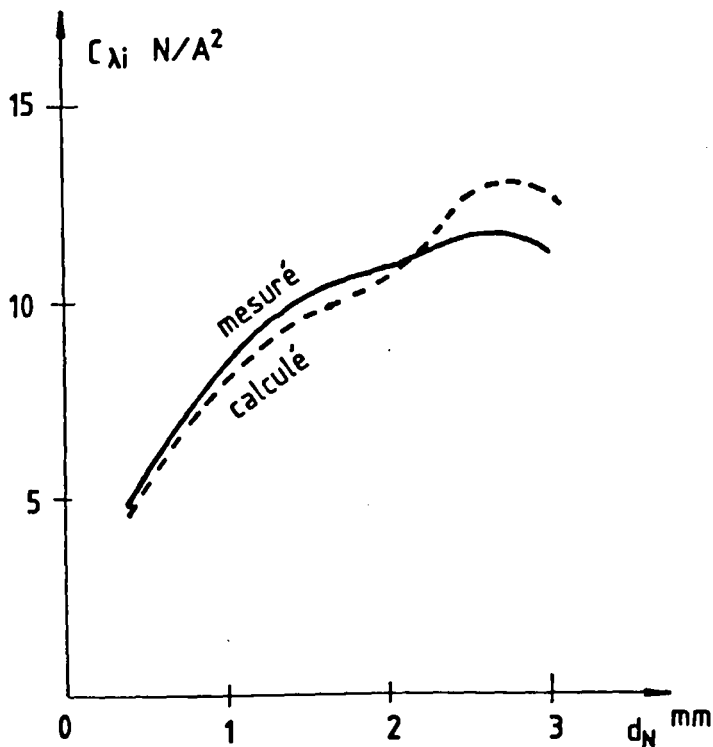


Figure 94 : Variation, en fonction de d_N , des coefficients $C_{\lambda i}$ calculé et mesuré.

L'écart entre le coefficient calculé et le coefficient mesuré n'ex-
cède jamais 11 %, ce qui est remarquable vu les nombreuses sources d'erreurs :

- erreur sur la mesure des forces aux faibles valeurs du courant,
- saturation négligée,
- phénomènes de frange négligés,
- effet du canal central négligé.

Cette application nous semble une bonne illustration de l'intérêt
de la méthode d'étude analytique approchée des machines à réluctance que nous
avons proposée.

 ** BIBLIOGRAPHIE **
 **

1. C. RIOUX, *"Théorie générale comparative des machines établie à partir des équations du champ électromagnétique"*.
Revue Générale de l'Electricité, n° 5, Mai 1970, pp. 415-421.
2. A. MAILFERT, Programme d'action 1981-1982 sur le thème de la réluctance variable du GRECO n° 22.
3. M. JUFER, *"Transducteurs électromécanique"*.
Traité EPFL, vol. IV, Editions Giorgi, 1979.
4. J. LESENNE, F. NOTELET, G. SEGUIER, *"Introduction à l'électrotechnique approfondie"*.
Technique et Documentation, Paris, 1981.
5. D.C. WHITE, H. H. WOODSON, *"Electromechanical energy conversion"*.
J. Wiley and sons, New-York, 1959.
6. E. DURANT, *"Magnétostatique"*.
Masson, Paris 1968.
7. F.M. SARGOS, *"Etude théorique des performances des machines à réluctance variable"*.
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Nancy, Mars 1981.
8. M.R. HARRIS, K.S. Mc INTOSH, K.J. TAYLOR,
"V.R motors with large step angle : magnetic circuit design and static performance".
International Conference on stepping Motors and Systems.
Université de Leeds, Juillet 1976, Proceedings pp. 1-10.

9. E. GUDEFIN, J.M. KAUFFMANN, F.M. SARGOS, J. ZEISSER,
"Study of the variable reluctance motor with slotted poles".
I.C.E.M. Athènes, Sept. 1980.
Proceedings, Part. I, pp. 435-442.
10. J. ZEISSER, *"Contribution à l'étude des machines à réluctance à plots dentés"*.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Nancy, 1980.
11. P.J. LAWRENSON, L.A. AGU, *"Theory and performance of polyphase reluctance machines"*.
Proceedings I.E.E, vol. 111, Août 1964.
12. M.R. HARRIS, A. HUGHES, P.J. LAWRENSON,
"Static torque production in doubly-salient machines".
Proceedings I.E.E, vol. 122, n° 10, Octobre 1975,
pp. 1121-1127.
13. C.H. LEE, *"Vernier motor and its design"*.
I.E.E.E. Trans., 1963, PAS 82, pp. 343-349.
14. A. WRIGHT, D.J. RHODES, *"Vernier reluctance motors"*.
Conference on Electrical Machines in the seventies.
Université de Dundee, Juillet 1970.
15. K.C. MUKHERJI, A. TUSTIN, *"Vernier reluctance motor"*.
Proceedings I.E.E, vol. 121, n° 9, Sept. 1974,
pp. 965-974.
16. R. GOYET, *"Contribution à l'études des machines à réluctance variable à disques imbriqués"*.
Thèse Doctorat ès Sciences Physiques, Orsay, Juin 1981.
17. B. SAINT-JEAN, *"Electrotechnique et machines électriques"*.
Eyrolles, Paris, 1976.

18. J.M. KAUFFMANN, *"Caractéristiques internes et externes des différents types de moteurs pas à pas."*
Journées d'Etudes sur les moteurs pas à pas et leurs applications, Nancy, Juin 1979, Actes pp. III-III51.
19. M.R. HARRIS, V. ANDJARGHOLI, P.J. LAWRENSON, A. HUGHES, B. ERTAN, *"Unifying approach of the static torque of stepping motor structures"*.
Proceedings I.E.E, vol. 124, n° 12, Déc. 1977, pp. 1215-1224.
20. V.V. ATHANI, S.K. KHURANA, *"Optimal design of a variable reluctance stepping motor"*.
I.C.E.M. Bruxelles 1978.
Proceedings, pp. SP5/2 - 1 à 17.
21. K.C. MUKHERJI, S. NEVILLE, *"Magnetic performance of identical double slotting"*.
Proceedings I.E.E, vol. 118, n° 9, Sept 1971, pp. 1258-1268.
22. A.J.C. BAKHUIZEN, R. DEBOER, *"On the calculation of permeances and forces between doubly slotted structures"*.
TH-Report 76-E-65, Eindhoven Technical University, Netherlands, Septembre 1976.
23. G. FOURNET, *"Electromagnétisme à partir des équations locales"*.
Masson, Paris, 1979.
24. K.J. BINNS, P.J. LAWRENSON, *"Analysis and computation of electric and magnetic field problem"*.
Pergamon Presse, Oxford, 2^{ème} éd., 1973.
25. F. GARDIOL, *"Electromagnétisme"*.
Traité E.P.F.L, vol. III, Editions Giorgi, 1977.
26. A. ANGOT, *"Compléments de Mathématiques"*.
Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1965.

27. M. LAVRENTIEV, B. CHABAT, *"Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe"*.
Editions MIR, Moscou, 1972.
28. J.M. KAUFMANN, *"Contribution au calcul des inductances d'une machine à pôles saillants"*.
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Nancy, 1974.
29. J.M. KAUFFMANN, *"Correspondance entre une machine à réluctance variable et une machine à pôles lisses par transformation conforme. Application au calcul des inductances"*.
C.R. Acad. Sc., Paris, 1975, T.280, série B, pp. 315-318.
30. F.M. SARGOS, *"Calcul numérique des inductances d'une machine à réluctance variable par transformation conforme et identification"*.
C.R. Acad. Sc., Paris, 1977, T.284, série B, pp. 515-518.
31. J.W. FINCH, M.R. HARRIS, A. MUSOKE, *"Normal force in linear stepping motor"*.
Conference Small and Special Electrical Machines, Londres, Septembre 1981.
Proceedings n° 202, pp. 78-81.
32. J. CHATELAIN, E. HAMBURGER, *"Dispositif pour le relevé de champs laplaciens et poissonniens par méthode rhéographique"*.
E.P.F.L, Publication n° 113, 1970.
33. K. OBERRETL, *"Le calcul précis du courant magnétisant de machines asynchrones triphasées"*.
Bulletin Oerlikon, Août 1979, pp. 66-84.
34. A. NICOLAIDE, V. BUNEA, *"Calcul précis des perméances. Application aux alternateurs à moyenne fréquence"*.
Revue Générale d'Electricité, n° 9, Septembre 1981, pp. 623-633.

35. G.F. FORSYTHE, W.R. WASON, *"Finite difference methods for partial differential operations"*.
Wiley, New-York, 1960.
36. O.C. ZIENKIEWICZ, *"The Finite Element Method"*.
Mac Graw-Hill, New-York, Ed. 3, 1977.
37. N.A. DEMERDASH, T.W. NEHL, *"An evaluation of the methods of Finite Element and Finite Differences in the solution of non-linear electromagnetic fields in electrical machines"*.
I.E.E.E. Trans., 1979, PAS 98, pp. 74-81.
38. M. LAJOIE-MAZENC, J. HECTOR, J. FAUCHER, Notice d'utilisation de DIFIMEDI.
Code conversationnel de calcul du champ dans les systèmes électromagnétiques.
Journées du Club E.E.A, Grenoble, Mars 1980.
39. J. FAUCHER, *"Contribution à l'étude des machines à réluctance variable à commutation électronique"*.
Thèse de Doctorat ès Sciences Physique, Toulouse, Juin 1981.
40. J.C. SABONNADIÈRE, J.L. COULOMB, G. MEUNIER, B. ANCELLE, P. MASSE,
B. MOREL, Présentation du logiciel FLUX de l'ENSIEG.
Journées du Club E.E.A, Grenoble, Mars 1980.
41. H.C. ROTERS, *"Electromagnetic devices"*.
Wiley, 1941.
42. R. POHL, *"Theory of pulsating field machines"*.
Journal of I.E.E., 1946, vol. 37, pp. 37-47.
43. TH. LEHMANN, *"Formules permettant de calculer la perméance entre un pôle arrondi avec plusieurs rayons de courbure et un induit cylindrique lisse ou denté"*.
Revue Générale d'Electricité, Septembre 1929, pp. 477-484.
Octobre 1929, pp. 521-528.

44. J. HOFFMANN, "*Machines Electriques*". (T.1)
Eyrolles, Paris-Bruxelles, 1969.
45. H. SCHOORENS, J. DEFAUCHEUX, "*A practical method to estimate the static mean torque of a reluctance machine with identical double slotting*".
I.C.E.M., Athènes, Sept. 1980.
Proceedings, Part I, pp. 369-379.
46. H. SCHOORENS, G. SEGUIER, "*Calcul des réductances : extension des règles de Forbes au cas de deux surfaces orthogonales de largeurs différentes*".
Revue Générale d'Electricité, Tome 89, n° 10,
Octobre 1980, pp. 696-698.
47. P.A. WARD, P.J. LAWRENSON, "*Magnetic permeance of doubly-salient air-gaps*".
Proceedings I.E.E., vol. 124, n° 6, June 1977.
pp. 542-544.
48. H. SCHOORENS, "*Extension aux systèmes à symétrie de révolution de la méthode de Lehmann de calcul des réductances*".
Revue "E" de la Société Royale Belge des Electriciens,
n° 2, vol. X, 1982, pp. 109-115.
49. G. SEGUIER, H. SCHOORENS, A. WIART, "*Transmission d'un mouvement de translation pure à travers une enceinte tubulaire...*".
Rapport du Contrat D.G.R.S.T. n° 79-7-0651, 1981.
50. H. SCHOORENS, Y. GUEGAN, G. SEGUIER, "*Cross-field linear reluctance actuator with relake of the field on the inside of a non-magnetic casing*".
Symposium on Electrical Machines for Special Purposes,
Bologne, Septembre 1981.
Proceedings, pp. 23-32.

51. H. SCHOORENS, Y. GUEGAN, A. WIART, "*Reluctance actuator operating through a thick casing*".

Conference Small and Special Electrical Machines, Londres, Septembre 1981.

Proceedings n° 202, pp. 74-77.

52. H. SCHOORENS, "*Actionneur pas à pas linéaire de forte puissance*".

Deuxièmes journées d'Etudes sur "Les moteurs pas à pas - développement et réalisations", E.P.F.L., Lausanne, Avril 1982.

Compte-rendu pp. 163-177.

```

*****
*****
**
**
** TABLE DES MATIERES **
**
**
*****
*****

```

| | |
|--|----|
| INTRODUCTION | 1 |
| <u>CHAPITRE I</u> | |
| INTERET DE LA NOTION DE "RESSEMBLANCE PAR ZONE" DANS LE CALCUL DES MACHINES A RELUCTANCE VARIABLE | 8 |
| I. GENERALITES SUR LA RELUCTANCE VARIABLE | 9 |
| I.1. Principe de fonctionnement d'une machine à réluctance | 9 |
| I.1.1. Relations générales | 10 |
| I.1.2. Cas des circuits linéaires | 11 |
| I.2. La notion de réluctance | 12 |
| I.2.1. Relation entre flux et différence de potentiel magnétique | 12 |
| I.2.2. Conditions de passage à la forme usuelle | 13 |
| I.3. Structure des machines à réluctance variable | 14 |
| I.3.1. Le rotor | 14 |
| I.3.2. Le stator | 14 |
| I.3.3. Les bobinages | 15 |
| I.3.4. Le système de denture | 15 |
| I.3.5. Notes sur les machines multicircuits ("multistack") | 18 |
| I.3.6. Notes sur les machines à disques | 18 |

| | | |
|----------|---|----|
| II. | FONCTIONS CARACTERISTIQUES D'UN ENTREFER | 19 |
| II.1. | Effort exercé par pas dentaire | 19 |
| II.1.1. | <i>Effort instantané</i> | 19 |
| II.1.2. | <i>Effort à courant constant</i> | 20 |
| II.1.3. | <i>Effort à flux constant</i> | 22 |
| II.2. | Les simplifications usuelles | 24 |
| II.2.1. | <i>Non prise en compte de la saturation</i> | 24 |
| II.2.2. | <i>Schématisation de la courbe force-déplacement</i> | 25 |
| II.3. | Les fonctions caractéristiques de denture | 27 |
| II.3.1. | <i>Définition</i> | 27 |
| II.3.2. | <i>Exemples d'utilisation</i> | 27 |
| III. | CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES DE CHAMPS | 32 |
| III.1. | Les méthodes de résolution algébriques | 32 |
| III.1.1. | <i>Résolution analytique directe</i> | 32 |
| III.1.2. | <i>Méthode de la transformation conforme</i> | 33 |
| III.2. | Les méthodes de simulation | 33 |
| III.3. | Les méthodes de résolution approchée | 34 |
| III.3.1. | <i>Les méthodes numériques</i> | 34 |
| III.3.2. | <i>Les méthodes "graphiques"</i> | 35 |
| IV. | INTRODUCTION DE LA NOTION DE "RESSEMBLANCE PAR ZONE" | 36 |
| V. | PROJET D'ETUDE ANALYTIQUE APPROCHEE | 37 |
| V.1. | Intérêt d'une étude analytique approchée | 37 |
| V.2. | Description de la méthode proposée | 38 |
| V.3. | Les lacunes à combler | 39 |
| VI. | RAPPEL DES METHODES "GRAPHIQUES" UTILISABLES | 40 |
| VI.1. | La méthode de LEHMANN | 40 |
| VI.2. | Les règles de FORBES | 41 |
| VI.2.1. | <i>Cas où S_1 et S_2 sont parallèles et en regard</i> | 41 |
| VI.2.2. | <i>Cas où S_1 et S_2 sont égales et coplanaires</i> | 41 |

CHAPITRE II

| | |
|---|----|
| APPLICATION AUX MACHINES A DOUBLE DENTURE DROITE SYMETRIQUE | 44 |
| I. APPLICATION DE LA "RESSEMBLANCE PAR ZONE" A LA DETERMINATION DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES | 45 |
| I.1. Hypothèses et notations adoptées | 45 |
| I.2. Structuration de l'entrefer | 46 |
| I.3. Simplification de la structuration | 47 |
| I.4. Formules génératrices des fonctions caractéristiques de denture | 48 |
| I.5. Nécessité de compléter les règles de FORBES | 49 |
| II. EXTENSION DES REGLES DE FORBES | 49 |
| II.1. Présentation des cas possibles | 49 |
| II.2. Schématisation des lignes de champ | 50 |
| II.3. Calculs préliminaires | 50 |
| II.3.1. Expressions de x_{C_1} , de r et de R | 52 |
| II.3.2. Signe de $A^2 - 1$ et $B^2 - \text{tg}^2\alpha$ | 53 |
| II.4. Calcul de la réluctance | 55 |
| II.4.1. Réluctance du tube élémentaire | 55 |
| II.4.2. Réluctance du domaine complet | 57 |
| II.4.3. Abaque facilitant l'emploi des formules proposées | 59 |
| II.5. Vérification numérique de la règle proposée | 61 |
| II.5.1. Modèle choisi pour assurer l'hypothèse de la "ressemblance par zone" | 61 |
| II.5.2. Résultats fournis par l'ordinateur | 62 |
| II.5.3. Résultats donnés par la règle proposée | 63 |
| II.5.4. Conclusions de la vérification | 64 |
| III. EXEMPLE D'APPLICATION | 65 |
| III.1. Structuration de l'entrefer | 65 |
| III.2. Détermination de la séparation des zones B et C | 65 |

| | |
|---|----|
| III.2.1. Principe | 65 |
| III.2.2. Calcul de la réluctance $R_{\delta B}$ | 66 |
| III.2.3. Calcul de la réluctance $R_{\delta C}$ | 67 |
| III.3. Evaluation des différentes réluctances | 68 |
| III.4. Fonctions caractéristiques de l'entrefer | 69 |
| III.5. Application numérique | 69 |

CHAPITRE III

| | |
|--|----|
| APPLICATION AUX MACHINES AXISYMETRIQUES | 73 |
| I. TRANSPOSITION DE LA STRUCTURATION DE L'ENTREFER | 74 |
| I.1. Application de la "ressemblance par zone" | 75 |
| I.2. Les voies d'étude analytique approchée | 76 |
| II. TRANSPOSITION DE LA METHODE DE LEHMANN | 76 |
| II.1. Généralités | 76 |
| II.2. Réluctance d'un domaine cylindrique de section rectangulaire | 77 |
| II.2.1. Expression de la réluctance | 77 |
| II.2.2. Condition pour que la réluctance soit unitaire | 78 |
| II.2.3. Simplification dans un cas particulier fréquent | 79 |
| II.2.4. Arrangement des domaines unitaires | 80 |
| II.2.5. Etude des cas limites | 82 |
| II.3. Application de la méthode à un exemple calculable | 83 |
| II.3.1. Valeur exacte de la réluctance | 83 |
| II.3.2. Application de la méthode | 84 |
| II.4. Application à un phénomène de frange | 85 |
| II.5. Conclusion | 86 |
| III. TRANSPOSITION DES REGLES DE FORBES ETENDUES | 88 |
| III.1. Cas des surfaces équipotentiellles parallèles | 88 |

| | |
|---|-----|
| III.1.1. L'axe de symétrie est parallèle à la direction du champ d'induction | 88 |
| III.1.1.1. Cas général | 88 |
| III.1.1.2. Cas où R_1 égale R_2 et l_1 égale l_2 | 91 |
| III.1.2. L'axe de symétrie est perpendiculaire à la direction du champ d'induction | 91 |
| III.2. Cas de surfaces équipotentiellles orthogonales de même largeur | 92 |
| III.3. Cas de surfaces équipotentiellles orthogonales raccordées par des cylindres en anses de panier | 95 |
| III.3.1. Etude du cas a | 96 |
| III.3.1.1. Calcul de la réluctance de la partie basse du tube de champ | 97 |
| III.3.1.2. Calcul de la réluctance de la partie haute du tube de champ | 101 |
| III.3.1.3. Réluctance totale pour le cas a | 105 |
| III.3.2. Etude du cas b | 105 |
| III.3.2.1. Calcul de la réluctance de la partie basse du tube de champ | 106 |
| III.3.2.2. Calcul de la réluctance de la partie haute du tube de champ | 110 |
| III.3.2.3. Réluctance totale pour le cas b | 113 |
| IV. APPLICATION A L'EVALUATION DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES D'UNE DENTURE AXISYMETRIQUE | 113 |
| IV.1. Modélisation de la denture | 113 |
| IV.1.1. Choix d'une denture | 113 |
| IV.1.2. Structuration de l'entrefer | 114 |
| IV.2. Délimitation précise des différentes zones | 115 |
| IV.2.1. Principe | 115 |
| IV.2.2. Détermination du point T | 115 |
| IV.2.2.1. Evaluation de $R_{\delta 3}$ | 117 |
| IV.2.2.2. Evaluation de $R_{\delta 4}$ | 120 |

| | |
|--|-----|
| IV.2.3. Détermination du point U | 120 |
| IV.2.3.1. Evaluation de $R_{\delta 5}$ | 121 |
| IV.2.3.1. Evaluation de $R_{\delta 6}$ | 123 |
| IV.3. Evaluation des réluctances des différentes zones | 124 |
| IV.3.1. Réluctance de la zone 1 | 124 |
| IV.3.2. Réluctance de la zone 2 | 124 |
| IV.3.3. Réluctance de la zone 3 | 124 |
| IV.3.4. Réluctance de la zone 4 | 126 |
| IV.3.5. Réluctance de la zone 5 | 126 |
| IV.3.6. Réluctance de la zone 6 | 126 |
| IV.4. Fonctions caractéristiques de denture | 126 |
| IV.4.1. Position alignée des dents | 127 |
| IV.4.2. Position en quinconce des dents | 127 |

CHAPITRE IV

| | |
|--|-----|
| ETUDE D'UN ACTIONNEUR LINEAIRE DE FORTE PUISSANCE AGIS- SANT A TRAVERS UNE ENCEINTE ETANCHE | 128 |
| I. RECOURS A LA RELUCTANCE VARIABLE | 129 |
| II. LE CHOIX DES CARACTERISTIQUES DE CONSTRUCTION | 130 |
| II.1. Disposition générale | 130 |
| II.2. Choix d'un système mobile | 131 |
| II.2.1. Choix du rapport largeur des dents/ largeur des encoches | 132 |
| II.2.2. Choix du pas dentaire | 133 |
| II.3. Choix du nombre d'inducteurs | 134 |
| II.3.1. Cas de deux inducteurs | 134 |
| II.3.2. Cas de trois inducteurs | 135 |
| II.3.3. Augmentation du nombre d'inducteurs | 136 |
| II.4. Choix du mode d'action du flux inducteur | 137 |
| II.4.1. Entrefer fonctionnel accolé à l'enceinte | 137 |
| II.4.2. Disposition avec pièces de reprise du flux à l'intérieur de l'enceinte | 139 |

| | |
|---|---------|
| III. LE PROTOTYPE REALISE ET LES ESSAIS EFFECTUES | 141 |
| III.1. Présentation de la machine | 141 |
| III.1.1. <i>Parties communes aux deux versions.</i> | |
| <i>Dispositifs de mesure</i> | 142 |
| III.1.2. <i>Spécifications des deux versions</i> | 143 |
| III.2. Résultats expérimentaux obtenus | 145 |
| III.2.1. <i>Essais de la version I</i> | 145 |
| III.2.2. <i>Essais de la version II</i> | 147 |
| III.3. Conclusions de l'étude du prototype | 153 |
| IV. APPLICATION DE LA METHODE ANALYTIQUE PROPOSEE | 153 |
| IV.1. Présentation | 153 |
| IV.2. Résultats | 155 |
| BIBLIOGRAPHIE | 158 |
| TABLE DES MATIERES | 165 |



Nom du Candidat : SCHOORENS Henry

JURY : Président : M. JUFER, Professeur, Ecole Polytechnique Fédérale de
Lausanne

Rapporteurs : A. MAILFERT, Professeur, E.N.S.E.M. de Nancy
C. RIOUX, Professeur, Université de Paris XI
G. SEGUIER, Professeur, Université de Lille I

Examineurs : J.P. PASCAL, Chef de Division, Institut de Recherche
sur les Transports
B. TRANNOY, Professeur, I.N.P. de Toulouse
A. WIART, Directeur Scientifique, Jeumont-Schneider.
M. NOTELET, professeur.

Titre de la Thèse :

CONTRIBUTION A L'ETUDE ANALYTIQUE APPROCHEE DES MACHINES A RELUCTANCE,
NOTAMMENT DE CELLES A CONFIGURATION AXISYMETRIQUE
APPLICATION AUX ACTIONNEURS LINEAIRES

Monsieur SCHOORENS présente une méthode approchée, mais entièrement analytique, d'étude des machines à réluctance variable. L'effort ou le couple moyen peut se déduire des perméances en position alignée et en position en quinconce des deux dentures. Pour calculer ces perméances on peut décomposer l'entrefer en domaines où les lignes de champ sont isomorphes. Ces domaines se trouvent dans les deux positions mais avec des arrangements différents ; il reste à délimiter ces domaines et à donner l'expression de leurs perméances.

Il applique d'abord sa méthode aux machines à dentures droites. Pour cela il complète les relations antérieurement connues en donnant l'expression de la perméance des domaines limités par des équipotentielles orthogonales de largeurs différentes. Les résultats qu'il obtient, notamment sur l'influence de la profondeur des encoches, recourent bien ceux établis par les méthodes usuelles de calcul des champs.

Il transpose ensuite l'ensemble des relations donnant les perméances aux domaines axisymétriques.

La réalisation d'actionneurs linéaires transmettant un effort important à travers une enceinte d'étanchéité épaisse a conduit à une configuration axisymétrique nouvelle dite "à flux transversal" avec pièces de reprise du flux à l'intérieur de l'enceinte. Un prototype a été construit et a donné lieu à de nombreux relevés. La méthode, préconisée par M. SCHOORENS, appliquée aux machines axisymétriques permet de retrouver avec une bonne précision les résultats expérimentaux.

Soutenance prévue le : Vendredi 29 octobre 1982

à : 10 h 30

Bâtiment : P3

Amphithéâtre : MAXWELL