

N° d'ordre : 551

50376  
1982  
189

50376  
1982  
189

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES**

par

Robert BAUSIÈRE

Ingénieur H.E.I., Docteur-Ingénieur

## MULTIPLICATEURS STATIQUES DE FRÉQUENCES FONCTIONNANT EN COMMUTATION NATURELLE



Soutenue le 4 juin 1982 devant la Commission d'Examen :

Président :	W. LEGROS
Rapporteurs :	M. IVANÈS G. SEGUIER B. TRANNOY
Examineurs :	C. MAIZIERES J. PICHOIR C. ROMBAUT A. WIART

## AVANT-PROPOS

Les travaux de recherche sur les multiplicateurs statiques de fréquence dont ce mémoire résume les résultats ont été effectués au Laboratoire "Applications des redresseurs de puissance" de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur G. SEGUIER. Nous tenons à témoigner à Monsieur SEGUIER notre très profonde reconnaissance pour l'attention bienveillante avec laquelle il nous a guidé tout au long de ce travail.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur W. LEGROS de l'Institut Montefiore de l'Université de Liège d'avoir accepté de présider le jury auquel nous soumettons notre mémoire.

Nous exprimons notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur M. IVANES de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, et à Monsieur le Professeur B. TRANNOY, de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, qui ont accepté d'évaluer les résultats que nous présentons.

Nous remercions beaucoup Monsieur le Professeur C. MAIZIERES de l'intérêt avec lequel il a suivi l'avancement de notre étude et de l'aide précieuse que nous avons trouvée, grâce à lui, auprès du Service Electrotechnique de l'U.E.R. d'I.E.E.A. de l'Université de Lille.

La présence dans ce jury de Monsieur J. PICHOT, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries de Strasbourg, nous honore beaucoup. Notre travail se situe dans le prolongement de celui effectué par notre ami, Monsieur C. ROMBAUT; nous le remercions de son aide efficace.

Monsieur A. WIART, Directeur Scientifique de la Société Jeumont-Schneider, a suivi nos premières réalisations en matière de multiplicateurs de fréquence et nous a encouragé à poursuivre dans cette voie. Nous sommes heureux qu'il soit là au moment où nous dressons le bilan des résultats obtenus.

Nous remercions tous nos collègues de l'I.U.T. de Béthune et de l'U.E.R. d'I.E.E.A. et plus particulièrement Monsieur le Professeur F. NOTELET, Chef du Département Génie Electrique, qui nous a permis d'effectuer sur place les vérifications expérimentales, et Monsieur J.P. SIX qui nous a aidé à résoudre tous les problèmes matériels.

Nous exprimons notre vive gratitude à Mademoiselle B. FIEVET, à Monsieur P. LEROY et à Monsieur J. HOUZE qui ont assuré la frappe et la mise en page du texte, aidé à la réalisation des figures, permis la réalisation pratique de ce mémoire.

```

*****
*****
**          **
**  INTRODUCTION  **
**          **
**          **
**          **
**          **
*****
*****

```

Certaines applications de l'énergie électrique nécessitent que celle-ci soit fournie sous la forme de tensions alternatives de fréquence supérieure à celle du réseau industriel. Il s'agit notamment de l'entraînement de moteurs à courants alternatifs de vitesse élevée et de l'alimentation des fours à induction.

Après avoir rappelé la place prise par les semi-conducteurs dans les convertisseurs de fréquence et les divers modes de commutation des redresseurs, nous présenterons les deux grandes classes de convertisseurs de fréquence à thyristors. Cela nous permettra de situer les multiplicateurs de fréquence à commutation libre qui font l'objet de notre étude, et de présenter le plan de celle-ci.

## I. LES CONVERTISSEURS DE FREQUENCE

Le terme de convertisseur de fréquence peut s'appliquer à n'importe quel dispositif qui, à partir d'une source alternative à une certaine fréquence, réalise une source alternative à une fréquence différente. Dans le domaine de l'électrotechnique, la puissance dont la présentation est ainsi transformée a une valeur notable et il faut, de ce fait, attacher de l'importance au rendement de la transformation.

- *Les groupes tournants* formés par l'association d'un moteur asynchrone alimenté directement par le réseau industriel et d'un alternateur monophasé constituèrent pendant longtemps la solution la plus utilisée. Ces groupes conservent encore leur intérêt, à côté des convertisseurs statiques, comme sources pour le chauffage par induction et donnent encore lieu à des études [1]\*

Selon la construction de l'alternateur [2] la gamme des fréquences obtenues est comprise entre 500 Hz et 10 kHz. Cette fréquence est fixe et, dans le cas d'un réseau d'alimentation à 50 Hz, les fréquences les plus courantes sont 500 Hz, 1 kHz, 3 kHz et 10 kHz. L'entraînement à vitesse variable des alternateurs permettrait d'obtenir des fréquences variables.

- *Les oscillateurs* utilisant des tubes à vide se sont rapidement substitués aux alternateurs à moyenne fréquence qui furent d'abord uti-

\* Les chiffres, entre crochets renvoient à la bibliographie annexée en fin de mémoire.

lisés pour obtenir les signaux de fréquence élevée des émetteurs radio-électriques. Mais pour les fréquences inférieures à 10 kHz nécessaires en électrotechnique, le rendement de ce type d'installations est assez faible et leur emploi pour de fortes puissances ne s'est jamais développé.

- Les multiplicateurs de fréquence magnétiques à *transformateur saturable* [3] sont limités, dans leurs applications industrielles, à la multiplication par 3, par 5 et quelquefois par 9 [4]. Mais cette technique, comme celle des amplificateurs magnétiques dont elle est voisine, a mal résisté à la concurrence des montages à semi-conducteurs de puissance.

Les *thyristors de puissance* au silicium apparurent dans les années 1950. Il se substituèrent progressivement dans des montages utilisant les mêmes schémas [5], aux redresseurs à vapeur de mercure (thyratrons, ignitrons, excitrons, redresseurs polyanodiques...) antérieurement utilisés. Cette substitution, en améliorant les performances, devait donner un puissant essor aux montages redresseurs, aux gradateurs, aux hacheurs et aux divers types d'onduleurs.

Les convertisseurs de fréquence n'ont pas échappé à cette évolution et, grâce aux thyristors, leur domaine de fréquence a pu s'étendre jusqu'à 10 kHz [6], [7]. Le principe mis en oeuvre dans ces convertisseurs statiques à thyristors avait été utilisé avant l'apparition de ces derniers. Des équipements [8] avaient été réalisés avec des ignitrons mais sans grand développement industriel à cause de la durée relativement importante du temps de recouvrement des redresseurs à vapeur de mercure et de la durée de vie très limitée des anodes. Les fréquences obtenues ne dépassaient pas 1 kHz.

Le thyristor, plus rapide, de chute de tension directe plus faible et de mise en oeuvre beaucoup plus simple, a permis d'augmenter de façon très importante l'efficacité et la fiabilité de tous les convertisseurs statiques de puissance.

## II. LA COMMUTATION

Le thyristor est un redresseur à amorçage commandé. Si la tension entre son anode et sa cathode a une valeur positive suffisante, une impulsion positive envoyée sur sa gâchette déclenche un phénomène d'avalanche qui rend le thyristor conducteur en réduisant sa résistance dans le sens direct à une valeur très faible.

Lorsqu'un thyristor est conducteur, l'action sur la gâchette ne permet pas de le bloquer. Pour l'éteindre il faut que le courant direct redevienne inférieur à une valeur minimale, assez faible, appelée courant de maintien de la conduction.

Après l'extinction il faut éviter de réappliquer trop rapidement une tension positive entre l'anode et la cathode car le thyristor a besoin d'un bref intervalle, appelé temps de blocage, pour retrouver son pouvoir de blocage.

Le problème essentiel dans les convertisseurs statiques à thyristors est celui de la commutation, c'est-à-dire du transfert du courant de la voie à couper, quand on a décidé d'interrompre la conduction du redresseur qui fermait cette voie, à la voie où on veut le faire passer durant l'intervalle suivant. On peut distinguer trois modes de commutation [9].

- *La commutation naturelle libre.*

Dans ce cas, le courant dans la voie à couper s'éteint de lui-même avant qu'on ferme la voie suivante. C'est ainsi que fonctionnent les gradateurs ou les montages redresseurs lorsque la conduction est discontinue.

- *La commutation naturelle assistée.*

Lorsque le courant dans la voie à couper n'est pas nul mais est transféré à la voie suivante sous l'effet de la source ou du récepteur, la commutation est encore naturelle car elle ne nécessite pas l'addition d'éléments spéciaux au schéma de principe du montage.

La commutation est assurée par la source dans les montages redresseurs. Quand on enclenche un redresseur, le réseau d'alimentation fait apparaître, dans le circuit fermé que constituent la voie comportant le redresseur précédemment conducteur et celle comportant celui qu'on vient de débloquent, une tension qui annule rapidement le courant dans la première et le transfère à la seconde.

La commutation peut être assurée par la charge. C'est le cas des variateurs de vitesse à moteur synchrone autopiloté. C'est la f.e.m. de la machine synchrone qui, lors des commutations, crée le courant de circulation annulant le courant dans la branche à ouvrir et le transférant à celle qu'on vient de fermer.

- *La commutation forcée.*

Lorsque le courant à transférer lors d'une commutation n'est pas nul et que ni la source, ni le récepteur, ne peuvent assurer ce transfert, il faut forcer la commutation, c'est-à-dire ajouter au schéma de principe des circuits auxiliaires qui réalisent la commutation. Ces circuits qui nécessitent des condensateurs, des inductances, un ou plusieurs redresseurs auxiliaires, commandés ou non, augmentent beaucoup le prix du convertisseur.

La définition du but d'un convertisseur et le choix du mode de commutation utilisé suffisent à caractériser ce convertisseur du moins lors d'une première approche.

### III. LES DEUX GROUPES DE CONVERTISSEURS DE FREQUENCE A THYRISTORS

Pour passer d'une fréquence à une autre on peut utiliser ou ne pas utiliser un étage intermédiaire à courant continu.

#### III.1. Convertisseurs avec circuit intermédiaire à courant continu

Ce type de convertisseur comprend essentiellement un montage redresseur alimenté par le réseau industriel, un étage intermédiaire à courant continu, qui découple l'entrée de la sortie et joue le rôle de volant d'énergie, et un onduleur autonome qui délivre les signaux alternatifs de fréquence voulue.

Chacun des trois éléments est susceptible de variantes :

- Le montage redresseur peut être à diodes ou à thyristors suivant qu'à tensions d'entrée données il doit fournir une tension fixe ou variable.

- L'étage intermédiaire peut se comporter vis-à-vis de l'onduleur qu'il alimente comme une source de courant ou comme une source de tension ; il comprend parfois un hacheur pour faire varier la tension entre son entrée et sa sortie.

- L'onduleur peut être un onduleur de tension ou un commutateur de courant, travailler à fréquence fixe ou variable, fonctionner en commutation naturelle ou forcée...

La combinaison des variantes possibles pour chacun des éléments conduit à un très grand nombre de configurations possibles. Toutefois l'expérience industrielle a conduit à une forte limitation du nombre de solutions retenues\*.

- *Les convertisseurs à moyenne fréquence* employés pour le chauffage par induction utilisent le fait que tout onduleur de tension peut fonctionner

- en commutation libre s'il débite sur une charge se comportant en circuit oscillant peu amorti dont la pseudo-période est inférieure à la période de la tension de sortie,
- en commutation naturelle assistée par la charge si celle-ci est, à la fréquence où on l'alimente, plutôt capacitive [10].

\* La bibliographie correspondant aux convertisseurs indirects, aux cyclo-convertisseurs et à leurs applications nécessiterait plusieurs centaines de références. Nous nous sommes limités à quelques ouvrages, à quelques publications présentant les recherches en cours et contenant elles-mêmes une intéressante bibliographie.

Ces convertisseurs utilisent donc des condensateurs qui associés au récepteur proprement dit forment un circuit oscillant amorti. L'onduleur a pour rôle d'entretenir les oscillations [11], [12], le choix porte en fait sur le groupement en série ou en parallèle des condensateurs et de la charge ; les études en cours portent sur l'amélioration de l'utilisation des composants et les possibilités de montée en fréquence.

- *Les variateurs de vitesse pour moteurs à courant alternatif* ne peuvent avoir recours au même principe car les fréquences désirées sont beaucoup plus basses. D'autre part la fréquence de sortie doit varier beaucoup de part et d'autre de sa valeur moyenne, entre 5 et 100 Hz par exemple. Enfin la tension d'alimentation de la machine doit varier en même temps que la fréquence.

Les équipements le plus souvent adoptés sont de trois types [13] :

- a) Onduleur de tension fonctionnant en commutation forcée et alimentant un moteur asynchrone à cage.  
 Cette solution est d'ordinaire celle retenue pour les équipements de faible puissance, jusqu'à quelques dizaines de kW. Les thyristors sont d'ailleurs de plus en plus souvent remplacés par des transistors de puissance [14]. Il y a diverses variantes suivant la façon dont on fait varier la tension, soit par la tension d'entrée de l'onduleur (montage redresseur à thyristors, montage redresseur à diodes suivi d'un hacheur), soit par l'onduleur lui-même (onduleur à Modulation de Largeur d'Impulsions).
- b) Commutateur de courant fonctionnant en commutation forcée et alimentant un moteur asynchrone à cage.  
 Cette solution est adoptée pour les équipements de moyenne puissance [15]. Les tensions du réseau sont redressées par un montage à thyristors ; une forte inductance lisse le courant redressé à partir duquel l'onduleur de courant délivre trois ondes rectangulaires de courant. La machine doit être construite pour minimiser les pulsations du couple [16].
- c) Commutateur de courant fonctionnant en commutation naturelle assurée par le moteur synchrone alimenté.  
 La machine synchrone surexcitée, alimentée par une source de courant, fournit grâce à sa f.e.m. les tensions de commutation. Des équipements de très forte puissance, plusieurs MW, ont été ainsi réalisés [17].

Les recherches en cours [18] portent sur l'optimisation de l'ensemble convertisseur-moteur et sur des alimentations à fréquence variable adaptées aux nouveaux types de machines, machines à réluctance variable, machines à aimants permanents.

### III.2 Convertisseurs directs

Ces convertisseurs utilisent directement les tensions de la source triphasée en réunissant l'entrée et la sortie par des thyristors convenablement débloqués. On "bâtit" la tension de sortie avec des portions des six sinusoïdes correspondant aux trois tensions du réseau et à leurs inverses afin d'approcher la sinusoïde de fréquence souhaitée.

Connus sous le nom de *cycloconvertisseurs*, ces montages fonctionnent comme des montages redresseurs et les commutations sont assurées par la source. Seule diffère la loi de commande des redresseurs [19], [20].

Les cycloconvertisseurs permettent l'alimentation à tension et fréquence variables des moteurs synchrones ou asynchrones. Ils donnent encore lieu à des travaux portant sur l'adaptation convertisseur-machine [21], sur les pulsations du couple [22], sur le comportement dynamique de l'ensemble convertisseur-machine-charge [23].

Une approximation convenable de la sinusoïde de sortie suppose que la fréquence de celle-ci soit nettement inférieure à celle de l'entrée. D'ordinaire partant du réseau à 50 Hz, on se limite à la sortie à 25 Hz ou même à 16 Hz. Mais la théorie des signaux échantillonnés montre qu'il est possible d'obtenir des fréquences de sortie supérieures à celle d'entrée ; cela a été vérifié expérimentalement mais n'a pas donné lieu à des applications industrielles [24].

De même la possibilité d'utiliser le cycloconvertisseur en commutation forcée pour obtenir des fréquences de sortie supérieures à celles des tensions d'entrée a été signalée [25] mais n'a pas débouché sur des réalisations significatives.

## IV. LES MULTIPLICATEURS STATIQUES DE FREQUENCE

Pour de nombreuses applications il serait intéressant de disposer de l'énergie électrique sous une fréquence supérieure à celle des réseaux industriels, même si elle est fixe. Il s'agit notamment de l'entraînement d'appareils utilisant la force centrifuge (pompes, ventilateurs, compresseurs).

Pour obtenir des vitesses supérieures aux 3000 t/min que donne le moteur synchrone alimenté à 50 Hz, on a parfois recours à des groupes convertisseurs tournants assurant le passage à 150, 200 ou 250 Hz. Il serait intéressant de remplacer ces groupes par des convertisseurs statiques, ce qui entraînerait une réduction de poids, d'encombrement, un fonctionnement plus silencieux et une maintenance réduite.

Le recours aux convertisseurs de fréquence indirects se révèle trop onéreux quand on n'a pas besoin de la variation de fréquence qu'ils permettent. D'où l'idée de chercher des *convertisseurs directs multipliant*

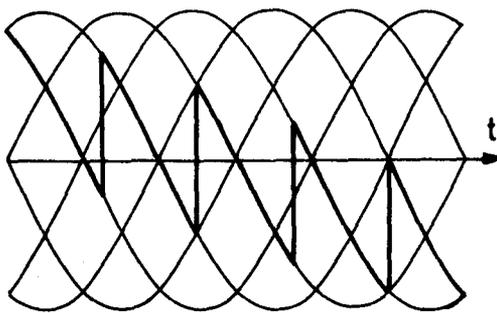
la fréquence dans un rapport fixe, permettant ou non le réglage de la valeur des tensions de sortie, fonctionnant en commutation libre ou naturelle pour éviter le coût des convertisseurs à commutation forcée.

- La première voie dans laquelle se sont engagées les études sur ce thème effectuées dans notre Laboratoire [26], [27] utilisait une des propriétés des montages redresseurs. Si un tel montage, alimenté à la fréquence  $f$ , délivrant une tension redressée d'ordre  $n$ , fonctionne avec un retard à l'amorçage voisin de  $90^\circ$ , dans la tension redressée on trouve une composante de fréquence  $nf$  très importante. Ces montages se sont révélés trop onéreux à cause du prix des condensateurs nécessaires à la sortie, pour arrêter la composante continue du courant redressé, et à l'entrée, pour améliorer le facteur de puissance.

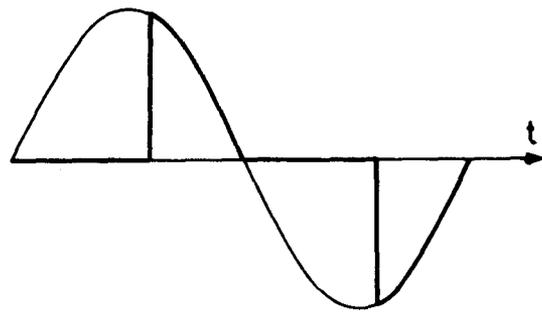
- La seconde voie, développée dans ce mémoire, utilise, du moins au départ, un principe voisin de celui des cycloconvertisseurs. On construit la tension de sortie à partir de portions de sinusoïdes représentant les tensions fournies par le réseau. Pour limiter le nombre de tensions nécessaires, on se limite à une portion de sinusoïde par alternance de la tension de sortie. Il est alors aisé de montrer qu'on ne peut plus travailler en commutation naturelle assistée par la source, mais qu'on doit opérer en *commutation libre* comme pour les gradateurs.

La figure schématise les 4 façons d'utiliser directement les tensions fournies par le réseau :

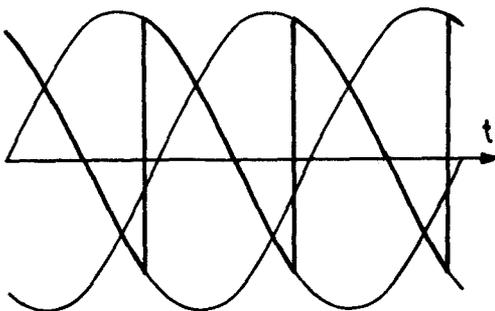
- a) cycloconvertisseur (commutation par le réseau),
- b) montage redresseur (commutation par le réseau),
- c) gradateur (commutation libre),
- d) multiplicateur de fréquence (commutation libre).



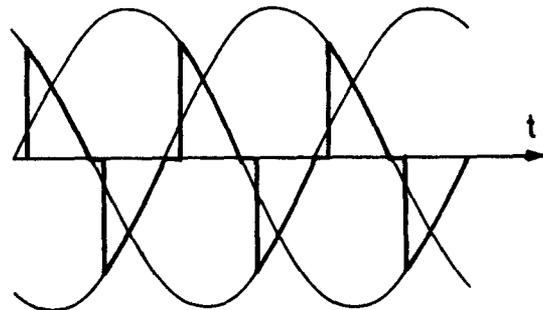
a)



c)



b)



d)

L'étude de ces multiplicateurs de fréquence à commutation libre n'avait jamais été poussée très loin. Tout au plus, dans certains ouvrages [25], [28], [29], trouve-t-on le schéma et la description du fonctionnement du tripleur de fréquence monophasé.

Dans ces multiplicateurs tous les redresseurs sont débloqués avec le même angle de retard, comme dans un montage redresseur, ils s'éteignent d'eux-mêmes, comme dans les gradateurs. Aussi avons-nous bénéficié pour leur étude de l'expérience acquise en matière de redresseurs [30], de gradateurs [31] et de propriétés générales de montages à commutation naturelle [32], [33] acquises dans notre Laboratoire. Nous avons pu utiliser des modes de raisonnement voisins.

Ces montages sont simples puisqu'ils n'ont pas recours à la commutation forcée. Mais cette simplicité ne s'étend pas à leur étude car, en dehors du débit sur charges purement résistives, la durée de conduction des thyristors n'est pas toujours facile à déterminer. Nous n'avons pu reproduire ici, même en les abrégeant, tous les calculs effectués pour arriver aux caractéristiques, cela aurait rendu notre mémoire trop volumineux. Nous ne détaillons un type de raisonnement que la première fois où nous l'utilisons, ensuite nous en abrégeons de plus en plus la présentation ou nous contentons de donner les résultats obtenus.

## V. PRESENTATION DU MEMOIRE

- *La première partie* est consacrée à la famille générale des multiplicateurs de fréquence permettant de multiplier la fréquence des tensions d'entrée par un nombre entier, pair ou impair, ou par un nombre fractionnaire supérieur à un.

La présentation du principe utilisé (Chapitre I) montre que malgré la diversité apparente des schémas et des séquences de déclenchement des thyristors, des règles générales peuvent être dégagées et qu'il s'agit bien d'une même famille de montages.

Cela permet (Chapitre II) une étude analytique globale du fonctionnement lors du débit sur les divers types de récepteurs. On en déduit (Chapitre III) les caractéristiques et une évaluation de l'intérêt de ce type de montage en fonction du facteur de multiplication désiré [34].

- *La deuxième partie* traite des variantes des montages multiplicateurs de la famille générale, visant à atténuer l'un ou l'autre des défauts mis en évidence dans la première partie. La démarche est assez voisine de celle effectuée pour les montages redresseurs.

Il s'agit d'abord de l'utilisation du montage des thyristors en pont (Chapitre I) afin d'améliorer les facteurs de puissance.

Le groupement en étoile sans conducteur neutre (Chapitre II) des multiplicateurs à sortie triphasée permet d'améliorer la qualité des signaux délivrés par le montage et de mieux utiliser les éléments constitutifs de celui-ci.

Le passage d'une source en étoile à une source en polygone (Chapitre III) est bénéfique comme pour toute source à grand nombre de phases alimentant un montage à thyristors.

Il est possible de réduire le nombre de thyristors nécessaires (Chapitre IV) mais au détriment des performances.

• *La troisième partie* présente deux montages doubleurs de fréquence à sortie triphasée permettant de diviser par 2 à la fois le nombre de phases du transformateur et le nombre de thyristors nécessaires.

Le premier (Chapitre I) utilise un transformateur hexaphasé et six thyristors disposés entre la source d'alimentation et les bornes primaires du transformateur [35], [36].

Le second (Chapitre II) utilise les propriétés des montages redresseurs mixtes [31] ; il nécessite un transformateur triphasé-hexaphasé, six thyristors et six diodes. Il permet de remplacer le transformateur par les enroulements statoriques d'un moteur de construction spéciale et de doubler ainsi directement la vitesse synchrone de celui-ci (Chapitre III).

Pour ces deux montages, les performances de la meilleure des variantes du multiplicateur de même rapport de la famille générale servent de base de référence. Il pourra en être de même pour les nouveaux schémas que l'imagination des chercheurs ne manquera pas de proposer.



```

*****
*                                     *
*   CHAPITRE I                       *
*                                     *
*****

```

PRINCIPE

Avec des montages à thyristors fonctionnant en commutation naturelle, il est possible de multiplier la fréquence

- par un nombre entier impair,
- par un nombre entier pair,
- par un nombre fractionnaire.

Pour chacun de ces trois cas, afin de montrer le principe utilisé, nous donnerons dans ce chapitre deux exemples avant de généraliser.

Nous supposerons que le récepteur de fréquence multipliée est une résistance pure, réservant au chapitre suivant l'étude du débit des multiplicateurs sur les divers types de récepteurs.

## I. MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE IMPAIR

### I.1. Multiplication par 3

#### I.1.1. Principe. Multiplicateur à sortie monophasée

Considérons 3 signaux  $x_{1A}$ ,  $x_{1B}$ ,  $x_{1C}$  de même pulsation  $\omega$ , ayant des formes d'ondes identiques et déphasés de  $2\pi/3$  entre-eux :

$$x_{1A} = X_{1m} \sin \omega t + X_{2m} \sin 2(\omega t + \xi_2) + X_{3m} \sin 3(\omega t + \xi_3) + \dots$$

$$x_{1B} = X_{1m} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + X_{2m} \sin 2(\omega t + \xi_2 - \frac{2\pi}{3}) + X_{3m} \sin 3(\omega t + \xi_3 - \frac{2\pi}{3}) + \dots$$

$$x_{1C} = X_{1m} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) + X_{2m} \sin 2(\omega t + \xi_2 - \frac{4\pi}{3}) + X_{3m} \sin 3(\omega t + \xi_3 - \frac{4\pi}{3}) + \dots$$

En ajoutant ces 3 signaux, on obtient un signal  $x'_1$  de pulsation fondamentale égale à  $3\omega$ . En effet

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \\ &= 3X_{3m} \sin 3(\omega t + \xi_3) + 3X_{6m} \sin 6(\omega t + \xi_6) + 3X_{9m} \sin 9(\omega t + \xi_9) + \dots \end{aligned}$$

Si  $x_{1A}$ ,  $x_{1B}$ ,  $x_{1C}$  ne contiennent pas d'harmoniques pairs, les termes de pulsation  $6\omega$ ,  $12\omega$ ,... disparaissent de l'expression de  $x'_1$ .

• Pour mettre en oeuvre ce principe, on peut partir des 3 tensions sinusoïdales équilibrées  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $v_{1C}$  de fréquence  $f$  obtenues au secondaire en étoile d'un transformateur triphasé alimenté par le réseau (fig. I.1.1.).

On utilise 6 thyristors déclenchés dans l'ordre suivant :

$Th_{1A}$ ,  $Th'_{1C}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th_{1C}$ ,  $Th'_{1B}$ .

Leurs conductions successives rendent la tension  $v'_1$  aux bornes du récepteur successivement égale à  $v_{1A}$ ,  $v_{1C}$ ,  $v_{1B}$  puis à nouveau à  $v_{1A}$ ,  $v_{1C}$ ,  $v_{1B}$ . La fréquence de  $v'_1$  est triple de celle du réseau.

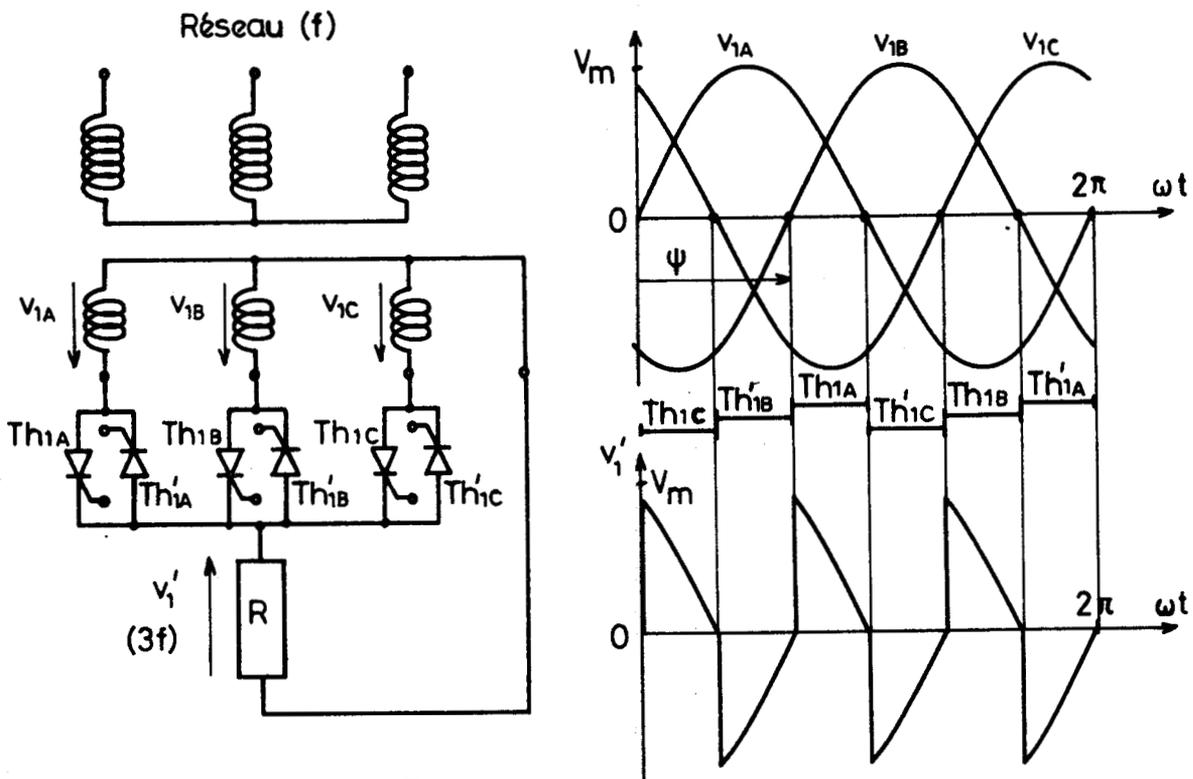


FIG. I.1.1

• Le diagramme des conductions des redresseurs et la forme d'onde de la tension  $v_1'$  correspondent au débit sur résistance pure  $R$  : le thyristor passant cesse de conduire lorsque la tension  $v_1'$  et donc le courant  $v_1'/R$  qui le traverse s'annulent.

Pour que le montage fonctionne en commutation naturelle il faut attendre que  $Th_{1A}$  soit éteint avant de débloquent  $Th'_{1C}$ . Sinon le débit simultané de  $Th'_{1C}$  et  $Th_{1A}$  sous l'effet de la tension  $v_{1A} - v_{1C}$  met deux enroulements secondaires en court-circuit et entretient la conduction de  $Th_{1A}$ . La figure correspond au cas théorique où l'intervalle entre la fin de la conduction de  $Th_{1A}$  et le début de celle de  $Th'_{1C}$  est nul ; la tension  $v_1'$  est alors maximum. On peut faire varier celle-ci en augmentant le retard au déblocage  $\psi$  des thyristors.

Dans ce chapitre, nous tracerons toujours les formes d'ondes en supposant  $\psi$  réduit au minimum. Nous n'indiquerons pas en outre comment sont obtenues les tensions secondaires du transformateur, réservant à ce problème quelques remarques en fin de chapitre.

### 1.1.2. Tripleur de fréquence à sortie polyphasée

• Pour obtenir un système diphasé se fréquence  $3f$ , il faut 2 groupes de 3 tensions de fréquence  $f$  déphasés entre-eux de  $\pi/2$  à l'échelle des  $3\omega$  donc de  $\pi/6$  à l'échelle de la pulsation de ces tensions. Le nombre de thyristors nécessaires est égal à 12.

La figure I.1.2. montre le schéma de principe, les deux groupes de tensions  $v_{1A}, v_{1B}, v_{1C}$  et  $v_{2A}, v_{2B}, v_{2C}$ , les diagrammes de conduction

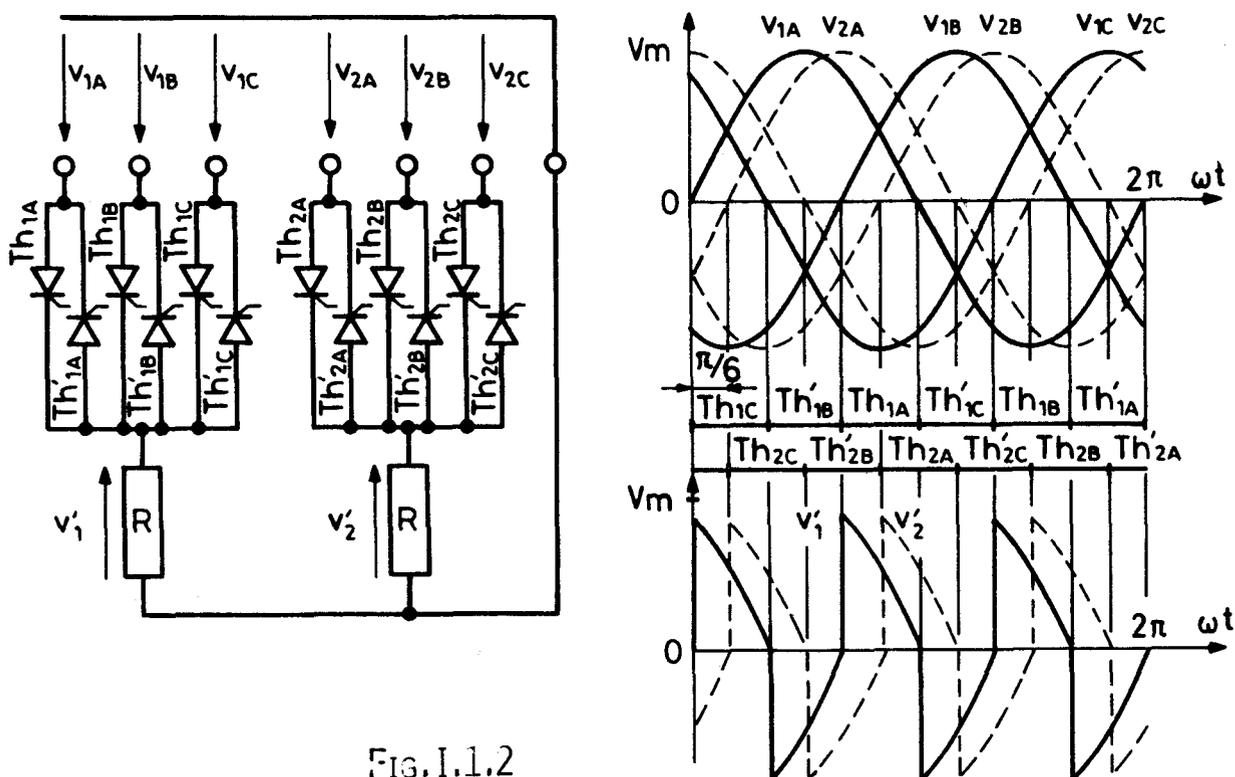


FIG. I.1.2

des thyristors  $Th_{1A}, Th_{1B}, Th_{1C}, Th'_{1A}, Th'_{1B}, Th'_{1C}$ , qui donnent la tension de sortie  $v'_1$ , et  $Th_{2A}, Th_{2B}, Th_{2C}, Th'_{2A}, Th'_{2B}, Th'_{2C}$  qui donnent la tension de sortie  $v'_2$ .

• Pour obtenir un *système triphasé* de tensions de fréquence  $3f$ , il faut

- 3 groupes de 3 tensions :  $v_{1A}, v_{1B}, v_{1C}$

$v_{2A}, v_{2B}, v_{2C}$

$v_{3A}, v_{3B}, v_{3C}$

déphasés entre-eux de  $2\pi/9$ .

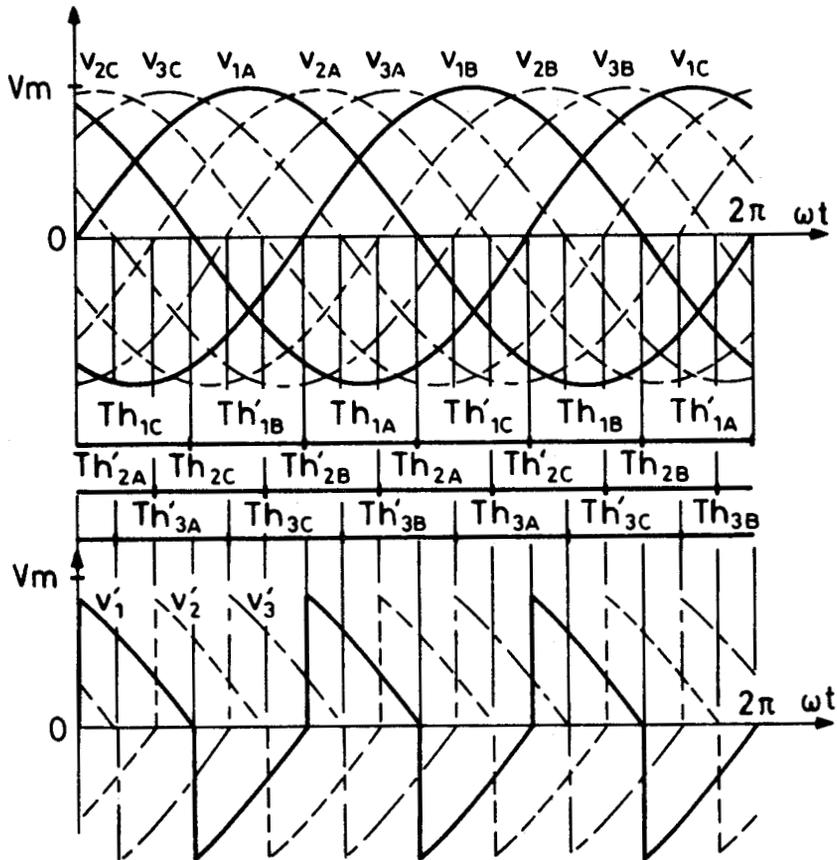


FIG. I.1.3

- 3 groupes de 6 thyristors :  $Th_{1A}, Th_{1B}, Th_{1C}, Th'_{1A}, Th'_{1B}, Th'_{1C}$

$Th_{2A}, Th_{2B}, Th_{2C}, Th'_{2A}, Th'_{2B}, Th'_{2C}$

$Th_{3A}, Th_{3B}, Th_{3C}, Th'_{3A}, Th'_{3B}, Th'_{3C}$

La figure I.1.3. montre comment sont obtenues les tensions de sortie  $v'_1, v'_2, v'_3$ .

• L'obtention d'un *système qphasé équilibré* de fréquence  $3f$  s'obtient en généralisant ce que nous venons de voir en triphasé (le diphasé n'est pas un système équilibré).

- Sont nécessaires :

$q$  groupes de 3 tensions :  $v_{1A}, v_{1B}, v_{1C},$

$$\frac{\text{-----}}{v_{qA}, v_{qB}, v_{qC}} ;$$

chaque groupe, formé de tensions déphasées de  $2\pi/3$  entre-elles, étant déphasé de  $2\pi/3q$  par rapport au précédent ;

$q$  groupes de 6 thyristors :  $Th_{1A}, Th_{1B}, Th_{1C}, Th'_{1A}, Th'_{1B}, Th'_{1C},$

$$\frac{\text{-----}}{Th_{qA}, Th_{qB}, Th_{qC}, Th'_{qA}, Th'_{qB}, Th'_{qC}} ;$$

- Si  $q$  est impair, les 6  $q$  thyristors sont déclenchés un par un de  $\pi/3q$  en  $\pi/3q$ . Si  $q$  est pair, les thyristors sont débloqués deux par deux de  $2\pi/3q$  en  $2\pi/3q$ .

## I.2. Multiplication par 5

Le principe de la multiplication par 3 de la fréquence s'étend sans difficulté à la multiplication par 5 : au lieu de 3 tensions formant un système triphasé équilibré il faut disposer de 5 tensions formant un système pentaphasé équilibré ; le nombre de thyristors nécessaires passe de 6 à 10.

La figure I.1.4. donne le schéma de principe du multiplicateur monophasé, le diagramme des conductions permettant de passer des tensions de fréquence  $f$  à la tension  $v'_1$  de fréquence  $5f$ , et la forme d'onde de toutes ces tensions. (Le tracé est encore effectué pour  $\psi$  minimum)

Dans le cas d'une sortie  $q$ phasée, il faut disposer de  $q$  systèmes pentaphasés équilibrés déphasés entre-eux de  $2\pi/5q$  et de  $q$  ensembles de  $10q$  thyristors.

## I.3. Généralisation : multiplication par un nombre impair quelconque

L'étude des exemples précédents permet la généralisation du principe de la multiplication par un nombre impair quelconque  $k$ .

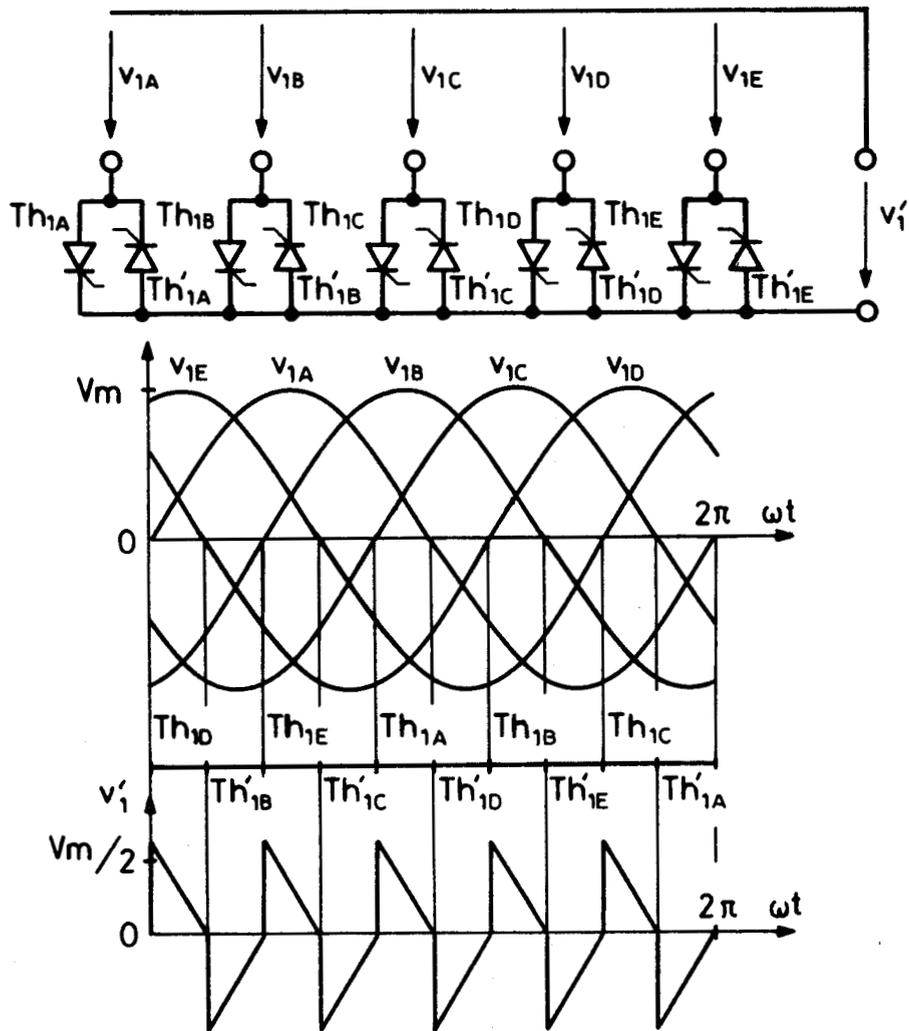


FIG. I.1.4

Si la sortie est monophasée, pour obtenir une tension de fréquence  $kf$ , il faut  $k$  tensions équilibrées déphasées entre-elles de  $2\pi/k$  et  $2k$  thyristors.

Si la sortie est qphasée, il faut  $q$  groupes de  $k$  tensions chacun déphasés entre-eux de  $2\pi/kq$ , et  $2kq$  thyristors.

## II. MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE PAIR

Si on appliquait le principe précédent à la multiplication de la fréquence par un nombre pair quelconque  $k$ , pour une tension de sortie de fréquence  $kf$  il faudrait  $k$  tensions de fréquence  $f$  déphasées de  $2\pi/k$  les unes par rapport aux autres et  $2k$  thyristors. Mais ces  $k$  tensions sont deux à deux en opposition de phase et, par période des tensions d'alimentation, elles ne donnent que  $k$  passages par zéro distincts. C'est insuffisant pour éteindre les  $2k$  thyristors que l'on veut faire travailler en commutation naturelle.

Il faut ajouter  $k$  tensions de fréquence  $f$  supplémentaires, déphasées de  $\pi/k$  par rapport aux précédentes, pour pouvoir bloquer tous les thyristors comme vont l'illustrer les deux exemples suivants.

### II.1. Multiplication par 2

#### II.1.1. Doubleur de fréquence à sortie monophasée

Si on n'utilise que 2 tensions,  $v_{1A}$  et  $-v_{1A}$  (fig. I.1.5.) de pulsation  $\omega$  déphasées de  $\pi$ , ces tensions s'annulent simultanément 2 fois par période.

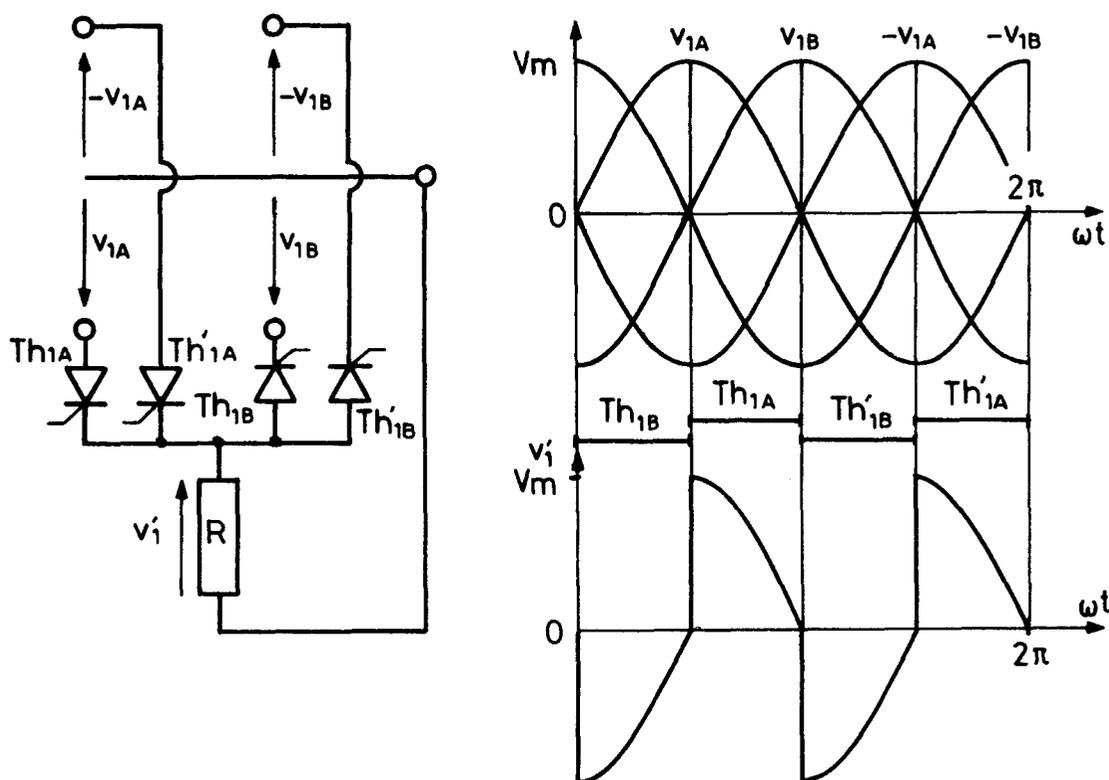


FIG. I.1.5

On n'a pas les 4 zéros distincts nécessaires pour l'extinction des 4 thyristors correspondant aux 4 alternances que doit présenter la tension de sortie  $v_1$  par période des tensions d'entrée.

On utilise donc 4 thyristors mais 4, et non 2, tensions  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $-v_{1A}$ ,  $-v_{1B}$  de pulsation  $\omega$  et déphasées entre-elles de  $\pi/2$ . La figure I.1.5. montre comment, à partir de ces 4 tensions, en amorçant successivement les thyristors  $Th_{1A}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th'_{1B}$ , on obtient  $v_1$ . Comme il faut attendre que le redresseur conducteur s'éteigne avant de déclencher le suivant, le tracé ici effectué correspond à la conduction maximale de chaque thyristor.

### II.1.2. Doubleur de fréquence à sortie polyphasée

• Pour obtenir deux tensions de fréquence  $2f$  déphasées entre-elles de  $\pi/2$  à la pulsation  $2\omega$ , donc de  $\pi/4$  à la pulsation  $\omega$ , il faut

deux groupes de 4 tensions :  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $-v_{1A}$ ,  $-v_{1B}$ ,

$v_{2A}$ ,  $v_{2B}$ ,  $-v_{2A}$ ,  $-v_{2B}$ ,

déphasés entre-eux de  $\pi/4$

et deux groupes de 4 thyristors :  $Th_{1A}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th'_{1B}$ ,

$Th_{2A}$ ,  $Th_{2B}$ ,  $Th'_{2A}$ ,  $Th'_{2B}$ ,

amorçés de  $\pi/4$  en  $\pi/4$  dans l'ordre suivant

$Th_{1A}$ ,  $Th_{2A}$ ,  $Th'_{1B}$ ,  $Th'_{2B}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th'_{2A}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th_{2B}$ .

• Pour obtenir un système triphasé de fréquence  $2f$ , il faut 12 tensions de fréquence  $f$  et 12 thyristors déclenchés de  $\pi/6$  en  $\pi/6$ . La figure I.1.6. donne le schéma de principe du doubleur triphasé et montre le passage des tensions secondaires aux tensions de sortie dans le cas où le retard au débloquage des redresseurs est minimum.

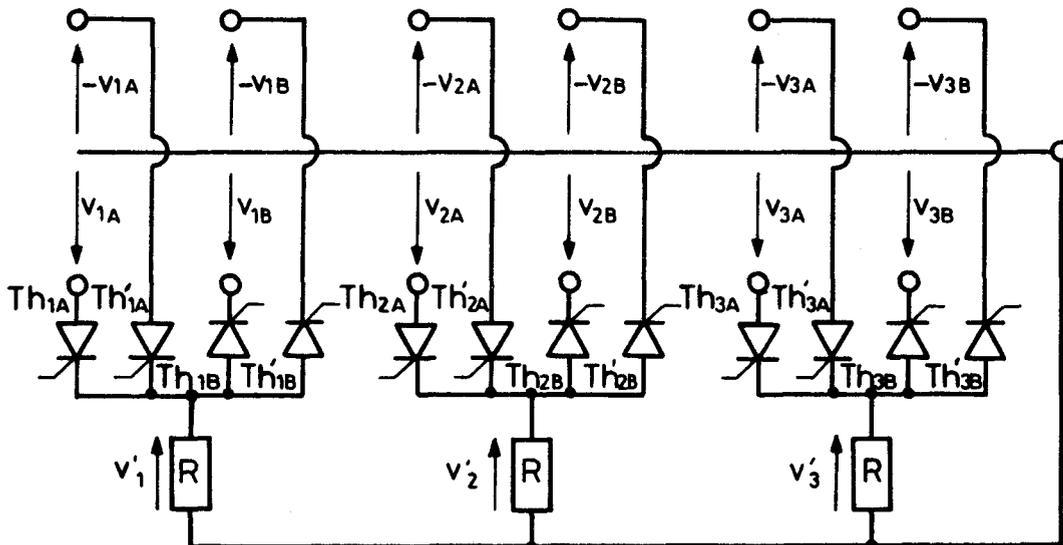


FIG. I.1.6.A

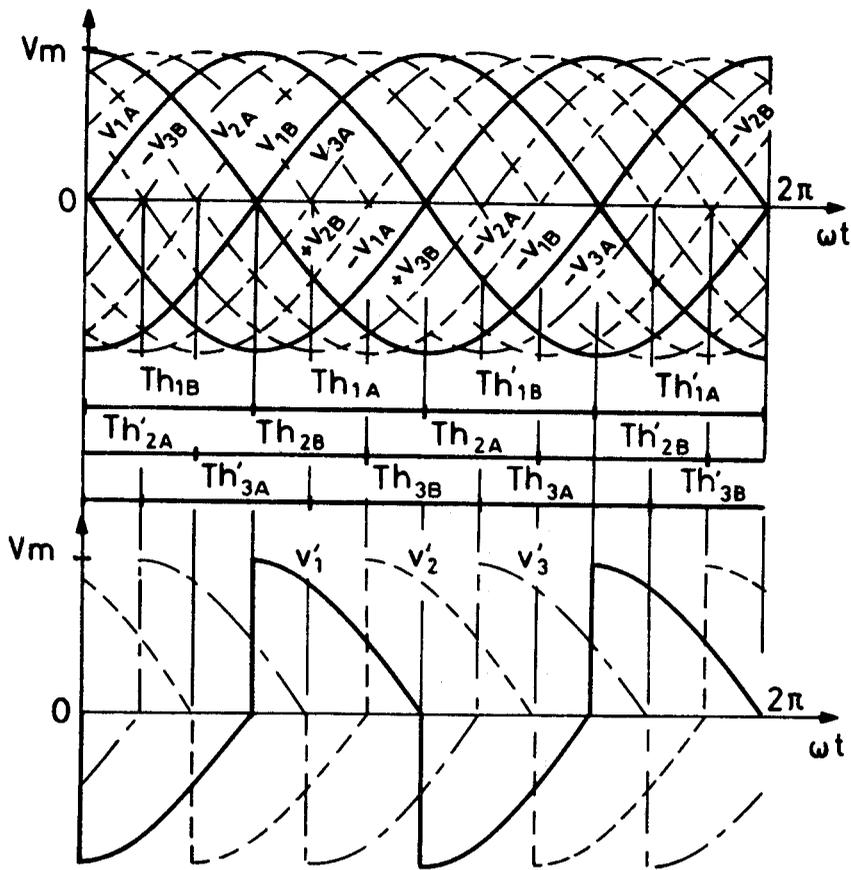


FIG. I.1.6.B

• Pour obtenir un système *q*phasé équilibré, il faut *q* groupes de 4 tensions :  $v_{1A}, v_{1B}, -v_{1A}, -v_{1B}$

$$\frac{v_{qA}, v_{qB}, -v_{qA}, -v_{qB},}{-----}$$

déphasés entre-eux de  $\pi/q$

*q* groupes de 4 thyristors :  $Th_{1A}, Th_{1B}, Th'_{1A}, Th'_{1B},$

$$\frac{Th_{qA}, Th_{qB}, Th'_{qA}, Th'_{qB},}{-----}$$

déclenchés un par un de  $\pi/2q$  en  $\pi/2q$  si *q* est impair, deux par deux de  $\pi/q$  en  $\pi/q$  si *q* est pair.

## II.2. Multiplication par 4

La multiplication par 4 de la fréquence nécessite, par tension de sortie, 8 tensions deux à deux égales et opposées formant un système

équilibré et 8 thyristors prenant l'une après l'autre les portions convenables de ces 8 tensions.

La figure I.1.7. indique le schéma de principe et donne le tracé de la forme d'onde de la tension de sortie  $v'_i$  dans le cas d'une charge purement résistive et de l'intervalle maximum de conduction des redresseurs.

Pour alimenter une charge qphasée, il faudrait  $8q$  tensions et  $8q$  thyristors.

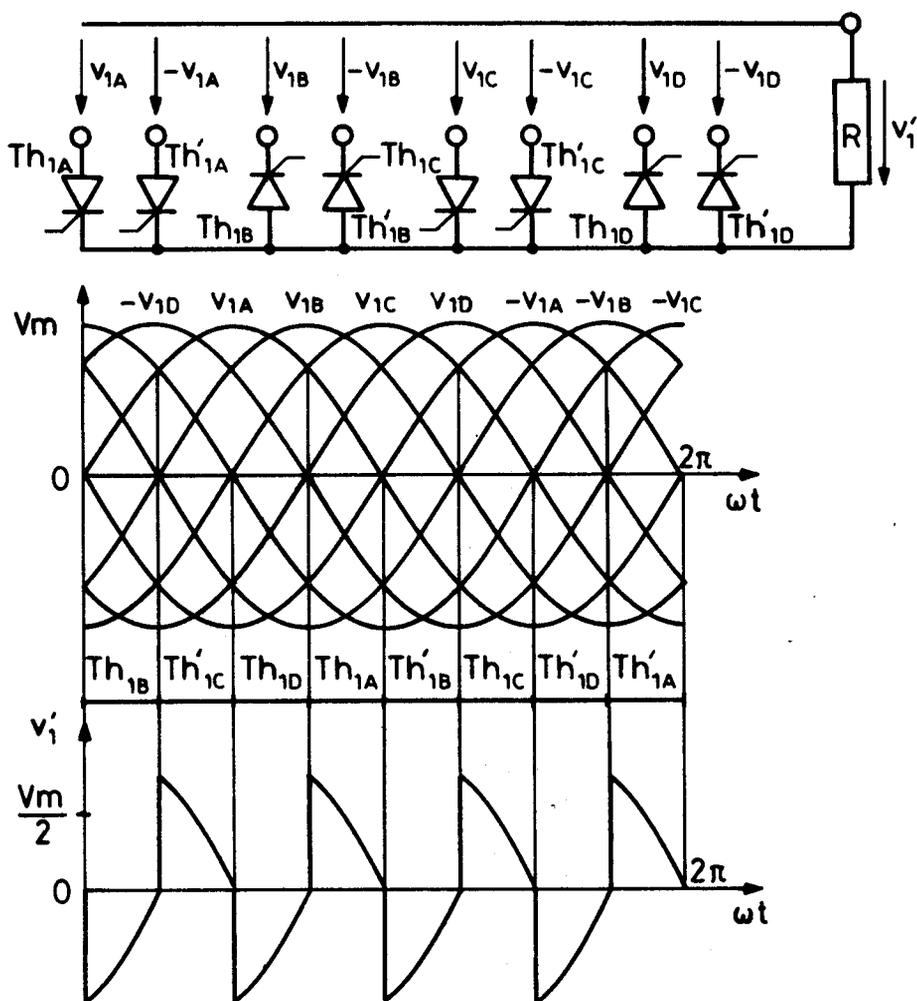


FIG. I.1.7

### II.3. Généralisation : multiplication par un nombre pair quelconque

A partir de la multiplication par 2 puis par 4 on peut généraliser à la multiplication de fréquence par un nombre pair quelconque  $k$ .

- Pour une tension de fréquence  $kf$ , il faut
  - $2k$  tensions de fréquence  $f$  formant un système équilibré,
  - $2k$  thyristors.
- Pour un système  $q$ phasé de tensions de fréquence  $kf$ , il faut
  - $2kq$  tensions de fréquence  $f$  régulièrement déphasées,
  - $2kq$  thyristors.

### III. MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE FRACTIONNAIRE

#### III.1. Multiplication par $3/2$

Pour obtenir 3 alternances de la tension de sortie  $v'_1$  par période des tensions de pulsation  $\omega$ , celles-ci doivent être au nombre de 6,  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $v_{1C}$ ,  $-v_{1A}$ ,  $-v_{1B}$ ,  $-v_{1C}$ , et 6 thyristors sont nécessaires pour réunir à la sortie celle des 6 tensions qui convient (fig. I.1.8.).

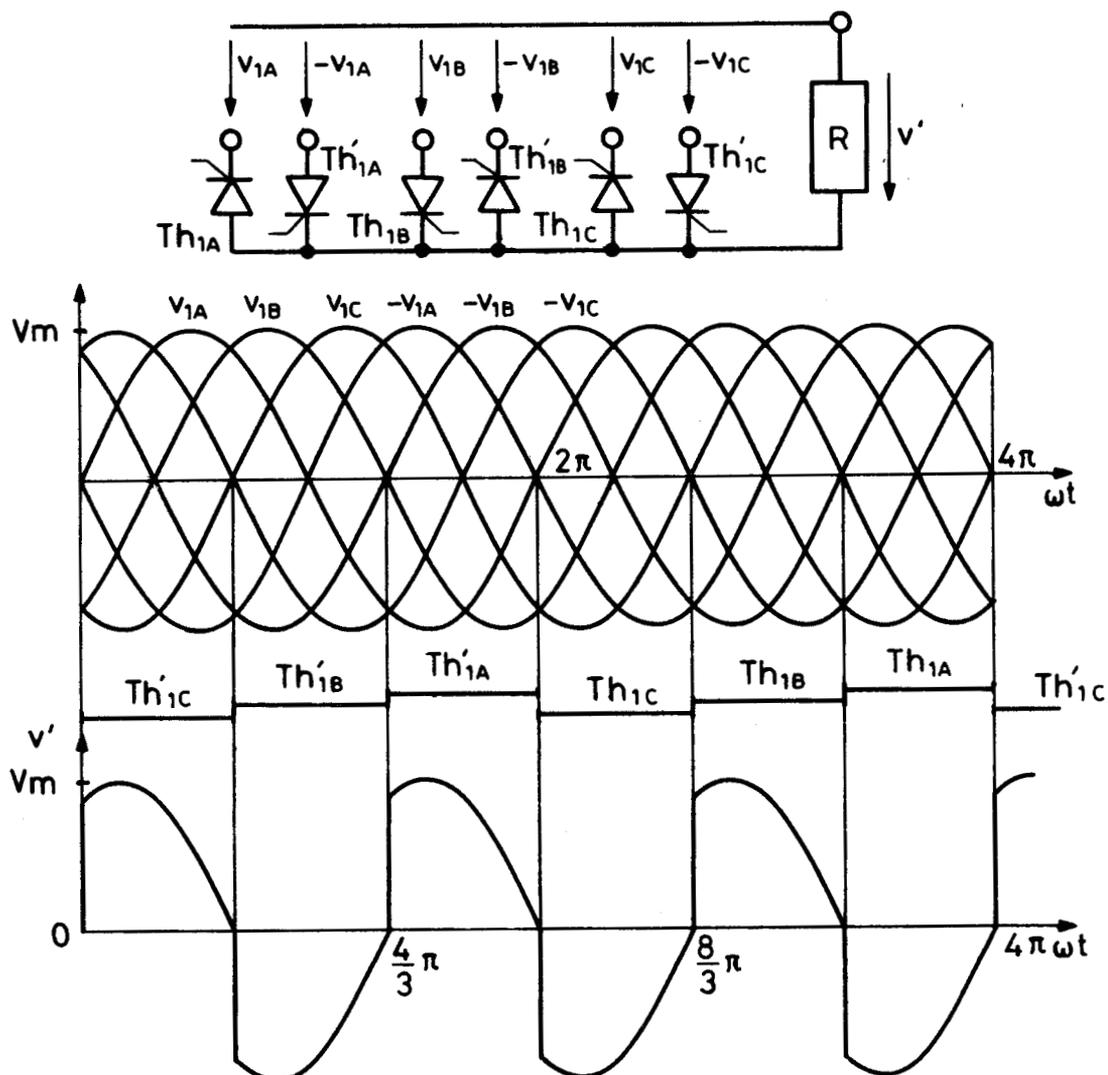


FIG. I.1.8

A l'échelle des  $\omega t$ , les thyristors sont débloqués de  $2\pi/3$  en  $2\pi/3$  et l'intervalle entre deux débloqués successifs d'un même redresseur est égal à  $4\pi$ .

### III.2. Multiplication par $4/3$

Avec 8 tensions de fréquence  $f$  formant un système équilibré et 8 thyristors, on peut obtenir une tension  $v'_1$  de fréquence  $4f/3$ . La figure I.1.9. montre successivement le schéma de principe, les 8 tensions de fréquence  $f$ , le diagramme de conduction des thyristors et la tension  $v'_1$ .

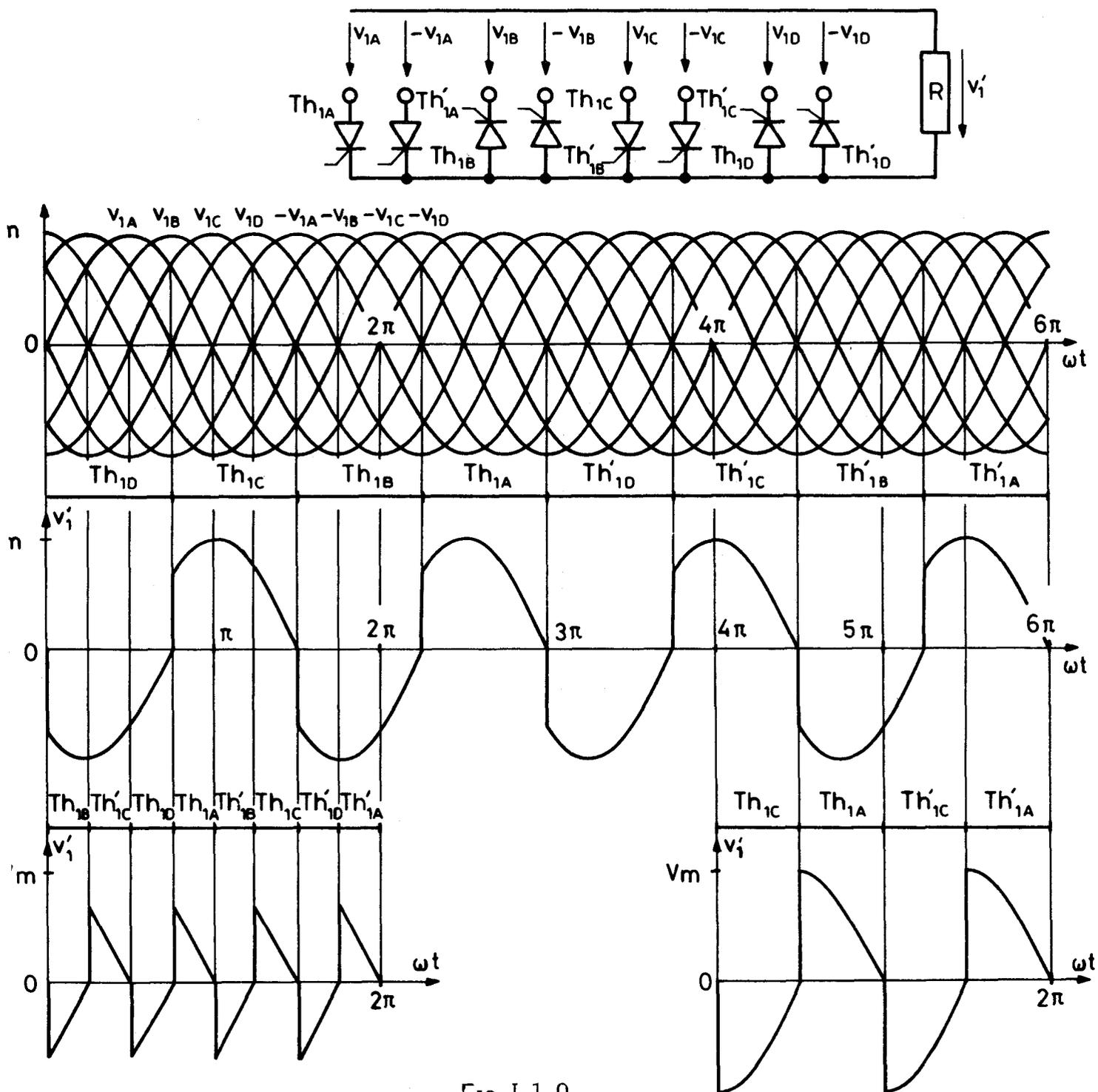


FIG. I.1.9

On remarque que l'écart entre deux amorçages successifs d'un redresseur est égal à 3 périodes des tensions d'alimentation.

Le schéma de ce multiplicateur par  $4/3$  est le même que celui du quadrupleur de la figure I.1.7.. Seule varie la séquence de déblocage des thyristors et la durée maximale de leur conduction. La partie inférieure gauche de la figure I.1.9. rappelle cette possibilité de multiplication par 4.

La partie inférieure droite montre que si on ne débloquent que 4 des 8 thyristors, le même montage fonctionnerait en doubleur de fréquence.

### III.3. Généralisation : multiplication par une fraction quelconque

- Les deux exemples qui précèdent montrent que, d'une façon générale, si on veut passer de la fréquence  $f$  à la fréquence  $(N/D)f$ , où  $N$  et  $D$  désignent des nombres entiers,

- c'est le *numérateur*  $N$  qui indique le nombre de tensions de fréquence  $f$  et de thyristors nécessaires,

- c'est le *dénominateur*  $D$  qui indique la cadence de déblocage des redresseurs.

Pour multiplier la fréquence par  $N/D$ , il faut

- $2N$  tensions formant un système équilibré, donc déphasées entre-elles de  $\pi/N$ ,
- $2N$  thyristors débloqués de  $D\pi/N$  en  $D\pi/N$ .

- Trois remarques s'imposent :

- Le générateur d'impulsions de commande des thyristors ne doit permettre leur déblocage que toutes les  $D$  périodes des tensions d'alimentation.

- Avec un montage donné ( $2N$  tensions,  $2N$  redresseurs) on peut, par un choix convenable de l'ordre et de la cadence de déblocage des redresseurs, obtenir divers rapports de multiplication.

- On pourrait envisager, avec un principe similaire, le passage de  $f$  à  $(N/D)f$  avec  $N/D$  inférieur à 1. Mais on quitterait alors le domaine de la multiplication de fréquence pour tomber dans celui, plus connu, des diviseurs de fréquence.

- Le passage du monophasé au *qphasé* s'effectue comme pour la multiplication par un nombre entier.

Pour obtenir un système *qphasé* équilibré de tensions dont la fréquence est multipliée par  $N/D$ , il faut

- $q$  groupes de  $2N$  tensions déphasés entre-eux de  $\pi/qN$ ,
- $2qN$  thyristors amorcés un par un de  $D\pi/qN$  en  $D\pi/qN$  si  $q$  est impair, deux par deux de  $2D\pi/qN$  en  $2D\pi/qN$  si  $q$  est pair.

#### IV. NOTES SUR L'OBTENTION DES TENSIONS SECONDAIRES

L'obtention des systèmes polyphasés de tensions à appliquer aux thyristors dans les montages multiplicateurs ne soulève pas de difficulté particulière. On sait, à l'aide d'un transformateur alimenté en triphasé, obtenir un système polyphasé quelconque.

- Il suffit de tracer le diagramme vectoriel des *tensions* secondaires souhaitées et de composer les vecteurs représentatifs à l'aide de vecteurs en phase ou en opposition de phase avec les trois tensions primaires. Il n'y a plus alors qu'à monter sur les trois noyaux les enroulements correspondants et à les connecter convenablement.

On utilise ici des diagrammes avec "fourches" car le secondaire doit présenter un point neutre.

Il faut s'attacher à prendre des schémas de configuration symétrique pour que, si le multiplicateur de fréquence débite un système polyphasé de courants équilibrés, les courants triphasés pris au réseau forment eux aussi un système équilibré.

Pour réduire le nombre de spires nécessaires, on recherche les diagrammes avec le plus possible de vecteurs entrant dans la composition de plusieurs tensions secondaires. En effet ici la durée des alternances des courants débités par les phases secondaires est courte ; les alternances ont au maximum une durée relative de  $1/2k$  si le rapport de multiplication est pair ou impair, de  $1/2N$  s'il est fractionnaire. De plus, quand  $k$  est pair ou fractionnaire, chaque phase secondaire ne débite qu'une alternance par période.

Pour évaluer l'intérêt d'un schéma, la difficulté de sa réalisation mise à part, on peut définir un "*facteur d'utilisation des spires secondaires*". C'est le rapport entre le nombre de spires qu'on utiliserait si on créait directement les tensions secondaires par addition de tensions en phase et le nombre de spires réellement utilisées.

Il faut toutefois corriger le nombre réel pour tenir compte des enroulements communs à plusieurs phases et de ce fait traversés par un courant différent des autres. On peut multiplier les spires correspondantes par le rapport de la valeur efficace du courant total qui les

traverse à la valeur efficace du courant dans les spires normales.

L'établissement de ce rapport de valeurs efficaces est compliqué ici par le fait que les courants ne sont pas sinusoïdaux et que ce rapport varie pour un même montage avec l'angle de commande des thyristors et la nature du récepteur. On le calculera ici en supposant que le transformateur débite des courants sinusoïdaux.

L'étude du premier exemple montrera plus clairement comment on établit ce facteur d'utilisation.

• Pour tracer la forme d'onde et calculer la valeur des *courants* primaires et en ligne, à partir de ceux des courants débités par les phases secondaires, on utilise la méthode bien connue [10] employée pour l'étude des transformateurs des montages redresseurs.

a) On fait la somme des ampères-tours secondaires pour chacun des trois noyaux :

$$\sum_{N_1} n_2 i_S, \sum_{N_2} n_2 i_S, \sum_{N_3} n_2 i_S.$$

b) Si ces sommes présentaient des valeurs moyennes non nulles, il faudrait soustraire ces valeurs moyennes car la composante continue des f.m.m. secondaires ne peut être compensée par les f.m.m. primaires.

c) Si le primaire est en triangle, les ampères-tours primaires compensent sur chaque noyau les ampères-tours secondaires

$$n_1 i_A = \sum_{N_1} n_2 i_S ; n_1 i_B = \sum_{N_2} n_2 i_S ; n_1 i_C = \sum_{N_3} n_2 i_S.$$

D'où les courants  $i_A, i_B, i_C$  dans les enroulements. Les différences de ces courants pris deux à deux donnent les courants dans la ligne d'alimentation.

d) Si le primaire est en étoile sans conducteur neutre, la somme des courants primaires donc celle des f.m.m. primaires est forcément nulle. La composante homopolaire des ampères-tours secondaires,

$$AT_h = \frac{1}{3}(\sum_{N_1} n_2 i_S + \sum_{N_2} n_2 i_S + \sum_{N_3} n_2 i_S)$$

ne peut être compensée.

On obtient donc les courants primaires par

$$n_1 i_A = \sum_{N_1} n_2 i_S - AT_h ; n_1 i_B = \sum_{N_2} n_2 i_S - AT_h ; n_1 i_C = \sum_{N_3} n_2 i_S - AT_h.$$

• Nous limiterons ici l'application de ces méthodes générales à deux exemples, celui du tripleur de fréquence à sortie triphasée, celui du doubleur de fréquence à sortie triphasée. Il s'agit en effet des montages pratiquement les plus importants ; nous proposerons d'ailleurs par la suite des variantes permettant d'en améliorer les performances.

#### IV.1. Cas du tripleur de fréquence triphasé

- Pour obtenir 3 tensions de fréquence  $3f$ , il faut (voir fig. I.1.3.) 9 tensions secondaires régulièrement déphasées. Le diagramme vectoriel de la figure I.1.10. montre comment obtenir ces 9 tensions à l'aide de vecteurs en phase ou en opposition de phase avec les tensions  $v_A, v_B, v_C$  appliquées aux 3 enroulements primaires.

$v_{1A}$  est obtenu directement ;  $v_{2A}$  est la somme d'une tension en opposition avec  $v_C$  et d'une tension en phase avec  $v_A$  ;  $v_{3A}$  s'obtient en ajoutant à la première tension servant pour  $v_{2A}$  une tension en phase avec  $v_B$ ...

Il faut donc 3 enroulements de  $n_2$  tours (production de  $v_{1A}, v_{1B}, v_{1C}$ ), 3 enroulements de  $n_2'$  tours (partie commune des 3 fourches), 6 enroulements de  $n_2''$  tours (deux branches de chacune des fourches). La figure I.1.10. montre comment on répartit ces 12 enroulements secondaires, 4 par 4, sur chacun des trois noyaux  $N_1, N_2, N_3$ .

Pour que les 9 tensions forment un système équilibré, il faut

$$n_2' = 0,743 n_2$$

$$n_2'' = 0,395 n_2$$

- Si les 9 tensions étaient créées directement, on aurait 9 enroulements de  $n_2$  tours traversés par les courants secondaires de valeur efficace  $I_S$ .

En fait on a :

3 enroulements de  $n_2$  tours parcourus par  $I_S$ ,

6 enroulements de  $n_2''$  tours parcourus par  $I_S$ ,

3 enroulements de  $n_2'$  tours traversés par la somme des courants de deux phases consécutives. Dans le premier, par exemple, il passe  $i_{2A} + i_{3A}$ .

Les courants  $i_{2A}$  et  $i_{3A}$  sont déphasés de  $2\pi/9$ . Si on les suppose sinusoïdaux, leur somme a une valeur efficace :

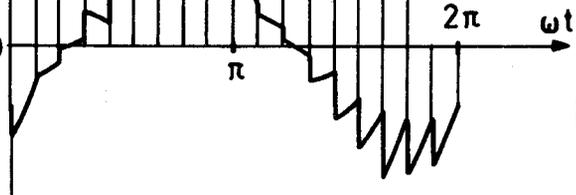
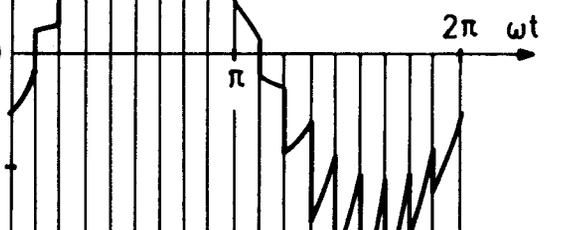
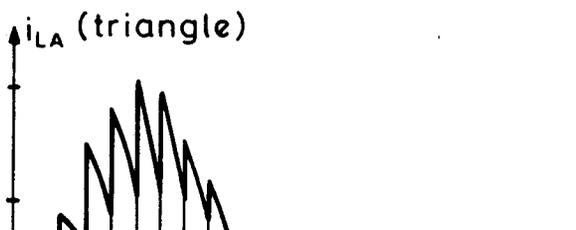
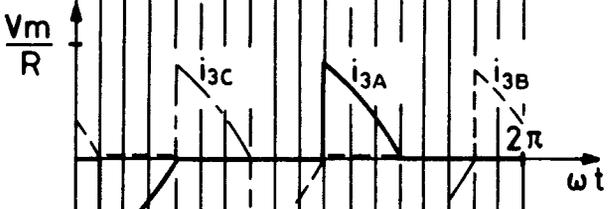
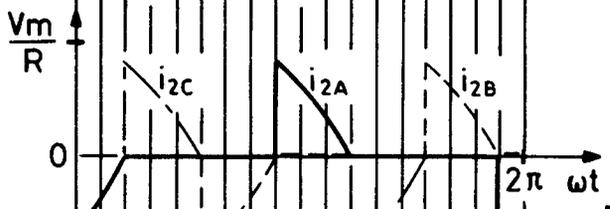
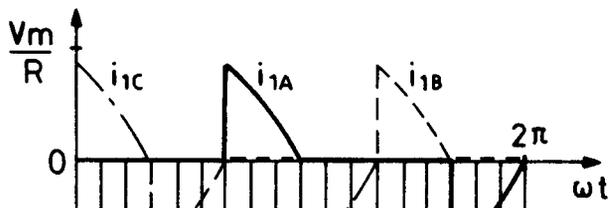
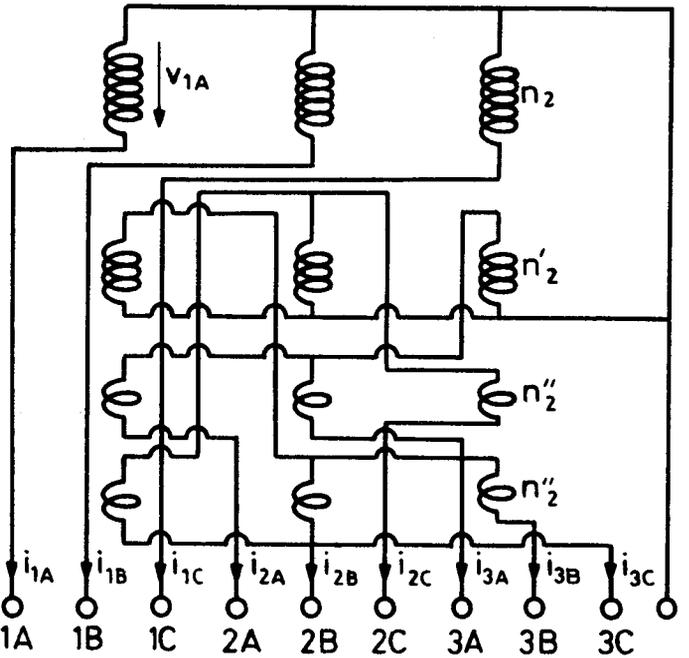
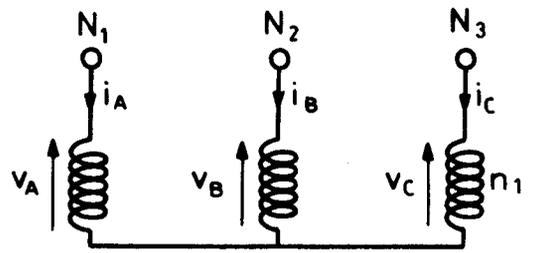
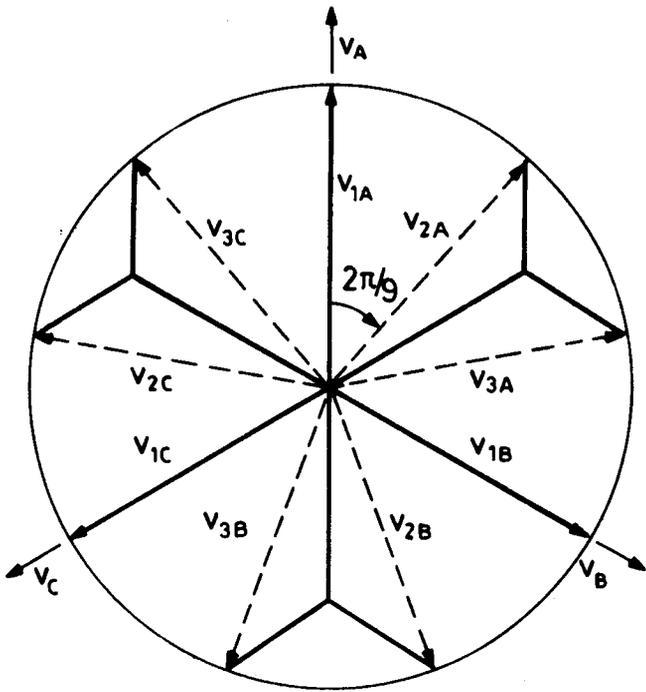


FIG. I.1.10

$$2 I_S \cos \frac{\pi}{9} = 1,88 I_S$$

D'où le facteur d'utilisation des spires secondaires

$$K_{spS} = \frac{9 n_2}{3n_2 + 6n_2'' + 3 \times 1,88 n_2'} \\ = \frac{3}{1 + 2 \times 0,395 + 1,88 \times 0,743} = 0,941$$

- Les courants secondaires,  $i_{1A}$ ,  $i_{1B}$ ,  $i_{1C}$ ,  $i_{2A}$ ,  $i_{2B}$ ,  $i_{2C}$ ,  $i_{3A}$ ,  $i_{3B}$ ,  $i_{3C}$  ont été représentés pour un débit sur résistances pures et un retard minimum au déblocage des redresseurs. On passe aux ampères-tours secondaires sur chacun des noyaux par

$$\Sigma_{N_1} n_2 i_S = n_2 i_{1A} - n_2'(i_{2B} + i_{3B}) + n_2''(i_{2A} + i_{3C})$$

$$\Sigma_{N_2} n_2 i_S = n_2 i_{1B} - n_2'(i_{2C} + i_{3C}) + n_2''(i_{2B} + i_{3A})$$

$$\Sigma_{N_3} n_2 i_S = n_2 i_{1C} - n_2'(i_{2A} + i_{3A}) + n_2''(i_{2C} + i_{3B})$$

Chacune de ces sommes, comme d'ailleurs chacun des courants secondaires a une valeur moyenne nulle.

• Si le primaire est en triangle, les courants dans les enroulements se déduisent directement des ampères-tours secondaires. Ainsi

$$i_A = \frac{1}{n_1} \Sigma_{N_1} n_2 i_S.$$

Les courants en ligne, donnés par

$$i_{LA} = i_A - i_B, \quad i_{LB} = i_B - i_C, \quad i_{LC} = i_C - i_A,$$

sont exempts des harmoniques de rang 3 et multiple de 3 et leur forme d'onde est plus voisine de la sinusoïde que celle des courants polygonaux ; on a représenté la forme d'onde de  $i_{LA}$ .

• Si le primaire est en étoile sans conducteur neutre, la somme instantanée des f.m.m. secondaires diffère de zéro. Il faut supprimer leur composante homopolaire, ce qui correspond à la suppression des harmoniques de rang 3 et multiple de 3 dans les courants en ligne. On a ainsi tracé, en bas à droite de la figure I.1.10, la forme d'onde de  $i_A$ .

### IV.2. Cas du doubleur de fréquence triphasé

Pour obtenir les 12 tensions nécessitées par le doubleur de fréquence à sortie triphasée schématisé sur la figure I.1.6. on peut utiliser le transformateur correspondant au diagramme vectoriel de la figure I.1.11. à six fourches avec deux branches chacune. Il y a donc 6 enroulements sur chaque noyau, deux de  $n_2'$  tours, quatre de  $n_2''$ .

Si les tensions étaient engendrées directement, elle nécessiteraient  $n_2$  tours chacune. Les nombres de spires  $n_2$ ,  $n_2'$  et  $n_2''$  sont liés par

$$n_2' = 0,816 n_2 ; n_2'' = 0,299 n_2$$

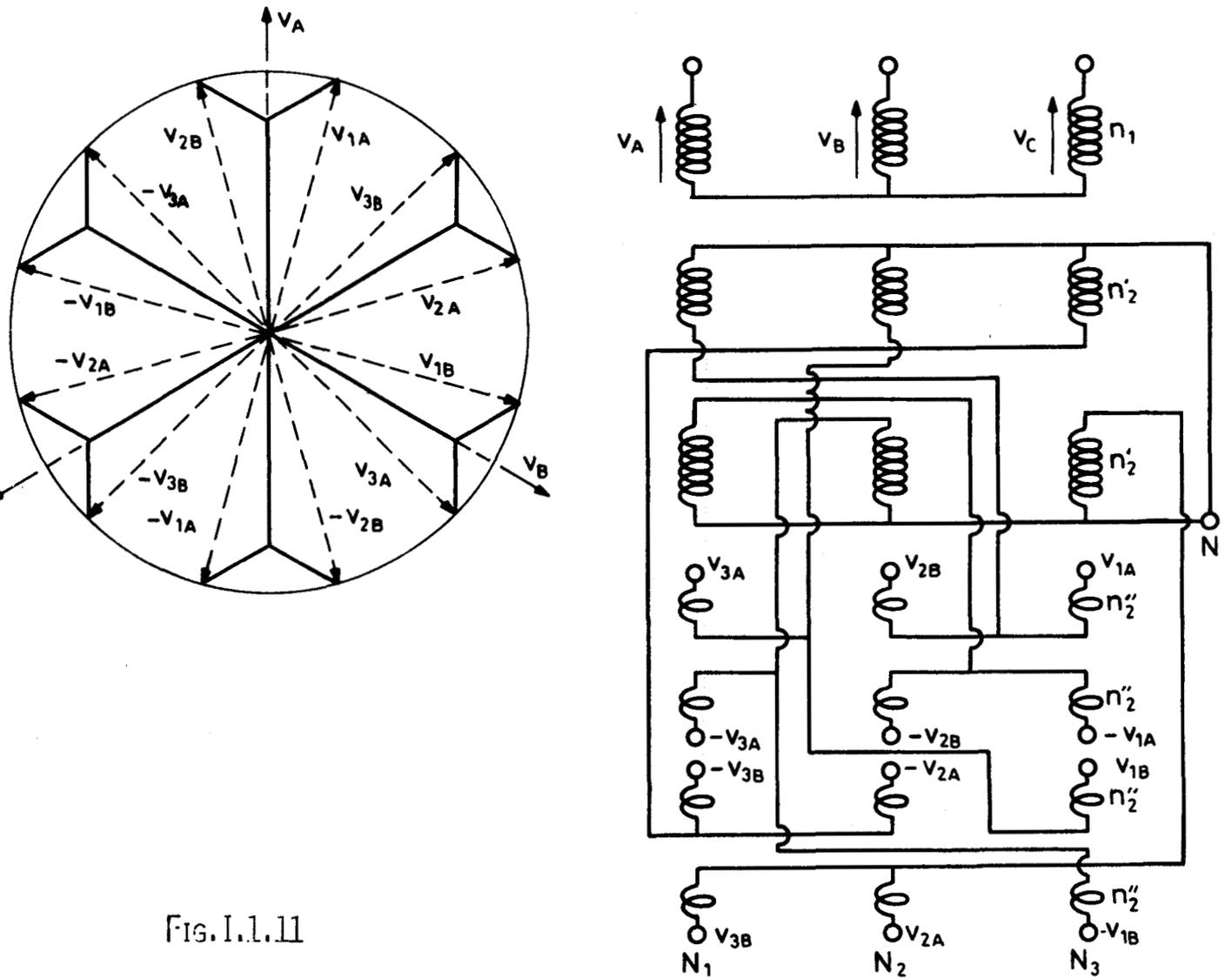


FIG. I.1.11

Si  $I_S$  est le courant débité par les phases, le courant dans les spires communes est, avec l'hypothèse faite :

$$2I_S \cos \frac{\pi}{12} = 1,932 I_S$$

D'où le facteur d'utilisation des spires secondaires

$$K_{spS} = \frac{12n_2}{6n_2' \times 1,932 + 12n_2''} = \frac{2}{0,816 \times 1,932 + 2 \times 0,299} = 0,92 ;$$

Le passage des courants secondaires aux courants primaires et en ligne s'opère comme pour le tripleur de fréquence.

```

*****
*                                     *
*   CHAPITRE II                       *
*                                     *
*****

```

ETUDE ANALYTIQUE DU FONCTIONNEMENT

• La présentation que nous venons de faire des multiplicateurs de fréquence, par ses aspects répétitifs et ses généralisations, montre bien qu'il s'agit d'une famille générale de montages. On peut donc chercher des *relations générales* applicables à tous les montages, qui permettront le tracé direct des caractéristiques de chacun d'eux.

La démarche est analogue à celle effectuée pour les montages redresseurs [30] où l'on sait établir des relations générales applicables à tous les montages d'une même famille. Seul le passage des courants secondaires aux courants dans les enroulements primaires du transformateur doit être effectué cas par cas. Les remarques faites à la fin du chapitre précédent montrent qu'il en est de même pour les multiplicateurs de fréquence.

• L'étude des convertisseurs statiques doit tenir compte de la *nature du récepteur* qui influe non seulement sur les caractéristiques des montages mais sur leur fonctionnement même.

Dans l'étude des montages redresseurs, on suppose le courant redressé parfaitement lisse, ce qui entraîne le fonctionnement en conduction continue.

Ici les grandeurs de sorties sont alternatives. On pourrait faire une étude générale en confondant avec leurs fondamentaux les tensions et les courants. Mais les formes d'ondes des tensions tracées au chapitre précédent montrent que, notamment à cause des discontinuités, cette hypothèse serait trop grossière et conduirait à des conclusions pratiquement erronées.

Il faut procéder comme pour les gradateurs [31] qui eux aussi fonctionnent par "sélection" des tensions d'entrée.

• Nous étudierons donc le débit d'un multiplicateur *monophasé* successivement

- sur une résistance pure  $R$ ,
- sur une inductance pure  $L$ ,
- sur une charge résistante et inductive de constantes  $R$  et  $L$ .

Chaque fois nous envisagerons d'abord les cas simples de la multiplication par 3, 2, 3/2 et 5/2 avant de généraliser à la multiplication par un nombre quelconque  $k$  entier, impair ou pair, ou fractionnaire supérieur à 1.

On suppose sinusoïdales et d'amplitude constante les tensions secondaires du transformateur, c'est-à-dire qu'on néglige les chutes de tension dans celui-ci et dans le réseau d'alimentation. De même on néglige la chute de tension directe des thyristors passants.

Il est suffisant d'étudier un *multiplicateur monophasé* car, avec les hypothèses faites, les productions des diverses tensions de fréquence  $kf$  sont indépendantes.

Pour éviter toute confusion nous ajouterons un caractère prime aux angles lorsqu'ils sont ramenés à la pulsation  $\omega$  des grandeurs de sortie.

## I. DEBIT SUR CHARGE PUREMENT RESISTIVE

### I.1. Multiplication par $k$ impair

La figure I.2.1.a. donne le schéma général du montage avec les  $k$  tensions secondaires  $v_{1A}, v_{1B}, \dots, v_{1k}$  d'amplitude  $V_m$  régulièrement décalées, les  $k$  groupes de thyristors  $Th_{1A}$  et  $Th'_{1A}, Th_{1B}$  et  $Th'_{1B}, \dots, Th_{1k}$  et  $Th'_{1k}$  montés tête-bêche et indique les notations adoptées pour les courants et les tensions.

#### I.1.1. Multiplication par 3 (fig. I.2.1.b.)

La tension de sortie  $v'_1$  et le courant débité  $i'_1$ , égal à  $v'_1/R$ , ont même forme d'onde. Le thyristor conducteur s'éteint lorsque  $v'_1$  et  $i'_1$  passent par zéro, soit pour  $3\omega t$  égal à  $\pi, 2\pi, 3\pi \dots$

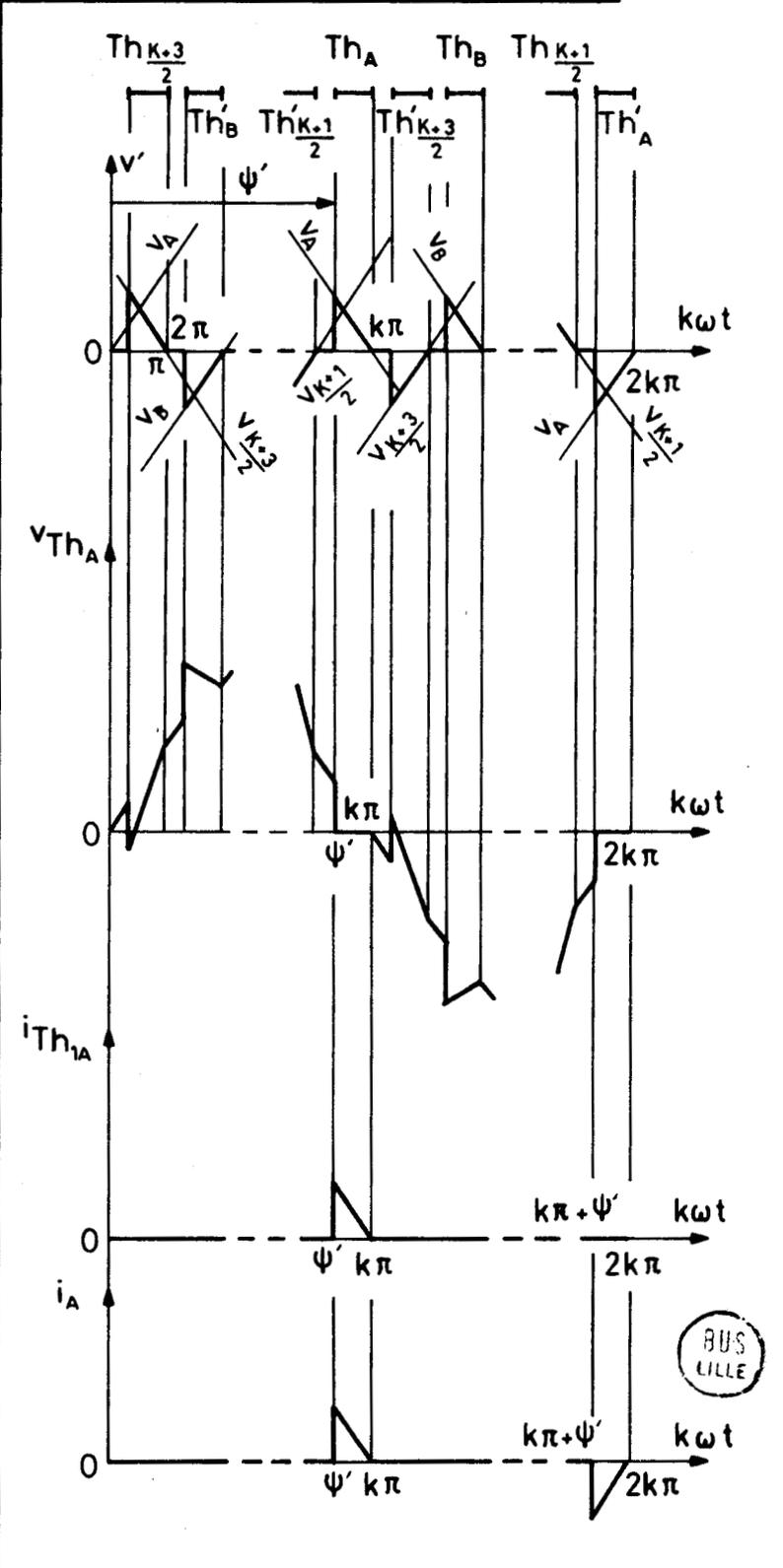
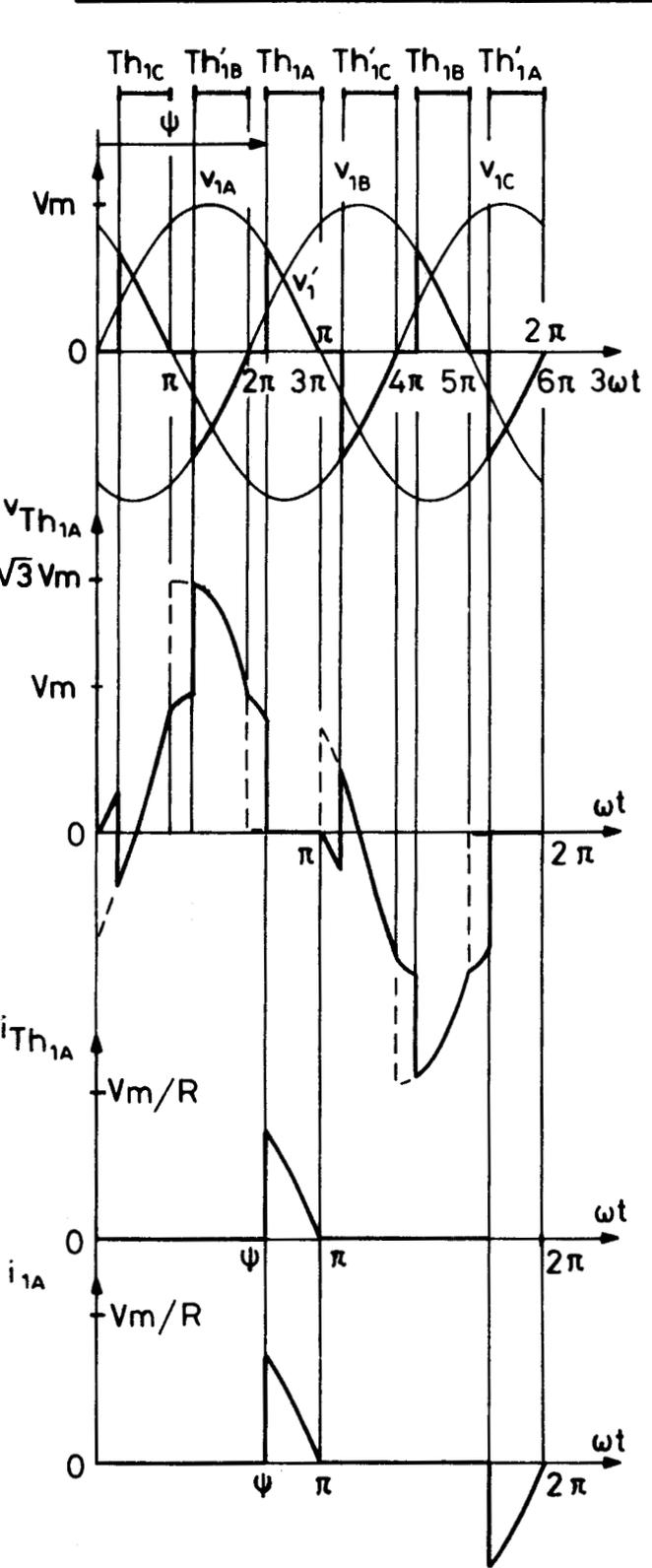
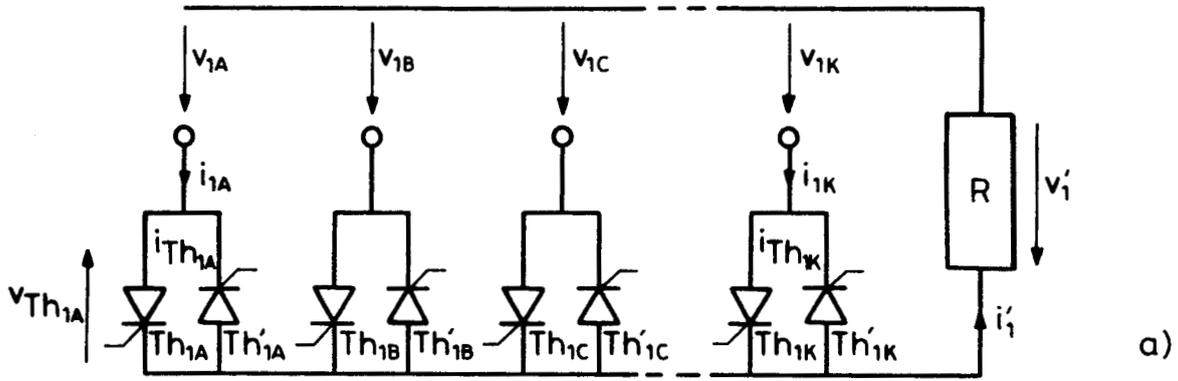


FIG. I.2.1

BUS LILLE

Pour éviter le court-circuit des enroulements secondaires du transformateur, un seul thyristor doit conduire à la fois. L'angle de conduction  $\theta$  de chacun des 6 thyristors doit donc être inférieur à  $\theta_{\max}$  tel que

$$\theta_{\max} = \pi/3.$$

La tension  $v_{1A}$  de période  $T$  étant toujours prise égale à

$$v_{1A} = V_m \sin \omega t.$$

le thyristor  $Th_{1A}$  s'éteint pour  $\omega t = \pi$ . Il faut donc le débloquent au plus tôt pour

$$\psi_{\min} = \pi - \theta_{\max} = 2\pi/3.$$

- La tension  $v_1'$  a pour expressions au cours d'une de ses périodes de durée  $T/3$  :

$$2\pi/3 < \omega t < \psi, \quad v_1' = 0$$

$$\psi < \omega t < \pi, \quad v_1' = v_{1A} = V_m \sin \omega t$$

$$\pi < \omega t < \psi + \pi/3, \quad v_1' = 0$$

$$\psi + \pi/3 < \omega t < 4\pi/3, \quad v_1' = v_{1C} = V_m \sin(\omega t + 2\pi/3).$$

- La tension aux bornes d'un thyristor,  $Th_{1A}$  par exemple, est donnée par

$$v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v_1';$$

En dehors des intervalles où,  $v_1'$  étant nul, elle est égale à  $v_{1A}$ , elle a donc pour expressions successives :

$$\psi < \omega t < \pi, \quad v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v_{1A} = 0$$

$$\psi + \pi/3 < \omega t < 4\pi/3, \quad v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v_{1C}$$

$$\psi + 2\pi/3 < \omega t < 5\pi/3, \quad v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v_{1B}$$

$$\psi + \pi < \omega t < 2\pi, \quad v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v_{1A} = 0$$

$$\psi + 4\pi/3 < \omega t < 7\pi/3, \quad v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v_{1C}$$

$$\psi + 5\pi/3 < \omega t < 8\pi/3, \quad v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v_{1B}$$

De période égale à  $T$ , la tension  $v_{Th_{1A}}$  est maximale quand  $v_{1A} - v_{1B}$  est maximum.

Or  $v_{1A} - v_{1B}$ , égal à  $\sqrt{3} V_m \sin(\omega t + \pi/6)$ , passe par son maximum pour  $\omega t = \pi/3$  ou  $7\pi/3$  c'est-à-dire au début de la conduction de  $Th'_{1B}$  si  $\psi$  est égal à son minimum  $2\pi/3$ .

Les thyristors  $Th_{1A}$  et  $Th'_{1A}$  étant montés tête-bêche, la tension directe maximum est égale à la tension inverse maximum

$$v_{dmax} = v_{imax} = \sqrt{3} V_m.$$

- Les courants dans les thyristors ont pour période  $T$ .

$i_{Th_{1A}}$  par exemple est égal à  $\frac{V_m}{R} \sin \omega t$  pour  $\psi < \omega t < \pi$  et nul durant tout le reste de la période.

- Les courants secondaires ont aussi pour période  $T$ .

$$i'_{1A} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t \text{ pour } \psi < \omega t < \pi \\ \text{et pour } \psi + \pi < \omega t < 2\pi ;$$

il est nul pendant tout le reste de la période.

La figure I.2.1.b. correspond à  $\theta$  égal à  $3\theta_{max}/4$ . On a tracé en traits interrompus ce que deviendrait la forme d'onde de  $v_{Th_{1A}}$  si  $\theta$  égalait  $\theta_{max}$  ou si  $\psi$  égalait  $\psi_{min}$  ; on voit que l'intervalle d'application d'une tension négative à un thyristor qui cesse de conduire disparaîtrait.

### I.1.2. Multiplication par un nombre impair quelconque (fig. I.2.1.c.)

Les  $k$  tensions secondaires sont déphasées de  $2\pi/k$  à l'échelle des  $\omega t$  ou de  $2\pi$  à celle des  $k\omega t$ . A cette échelle il y a un passage par zéro tous les  $\pi$ . Entre les passages par zéro dans un sens de la tension  $v_{1A}$  et de la tension suivante  $v_{1B}$  se placent les passages par zéro en sens inverse de la tension  $v_{1, \frac{k+3}{2}}$ .

L'angle de conduction maximum est  $\theta'_{max} = \pi$ , le thyristor  $Th_{1A}$  s'éteint pour  $k\omega t = k\pi$  ; d'où le retard minimum au débloqué

$$\psi'_{min} = k\pi - \pi ; \psi_{min} = \pi - \frac{\pi}{k} \quad (I.1)$$

- La tension de sortie, de période  $T/k$ , a pour expressions successives au cours de l'une de ses périodes :

$$\left. \begin{aligned} \pi - \pi/k < \omega t < \psi, & \quad v'_1 = 0 \\ \psi < \omega t < \pi, & \quad v'_1 = v_{1A} = V_m \sin \omega t \\ \pi < \omega t < \psi + \pi/k, & \quad v'_1 = 0 \\ \psi + \pi/k < \omega t < \pi + \pi/k, & \quad v'_1 = v_{1, \frac{k+3}{2}} = -V_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{k}) \end{aligned} \right\} \quad (I.2)$$

- La tension aux bornes du thyristor  $Th_{1A}$ , de période  $T$ , toujours donnée par

$$v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v'_1$$

est égale à  $v_{1A}$  pendant les  $k$  intervalles où  $v'_1$  est nul ; pendant les  $k$  autres intervalles, elle prend successivement les expressions  $v_{1A} - v_{1A}$ ,  $v_{1A} - v_{1, \frac{k+3}{2}}$ ,  $v_{1A} - v_{1B}$ ,  $v_{1A} - v_{1, \frac{k+5}{2}}$ , ...

Le maximum de tension directe est obtenu pour le minimum de  $\psi$  et se produit lors de la pointe négative de  $v'_1$  la plus voisine du maximum ( $\omega t = \pi/2$ ) de la tension  $v_{1A}$ . Pour  $\psi$  minimum, la valeur négative maximale de  $v'_1$  est  $-V_m \sin \pi/k$  et on trouve cette valeur pour  $k\omega t$ , égal à  $\pi, 3\pi, 5\pi \dots$

L'instant du maximum correspond donc au multiple impair de  $\pi$  le plus voisin de  $k\omega t = k\pi/2$ .

Si  $\frac{k+1}{2}$  est pair, le maximum de  $v_{Th_{1A}}$  se produit pour  $k\omega t = \frac{k-1}{2}\pi$ .

Si  $\frac{k+1}{2}$  est impair, il se produit pour  $k\omega t = \frac{k+1}{2}\pi$ .

Dans les deux cas  $v_{1A}$  est alors égal à  $V_m \sin(\frac{k+1}{2} \frac{\pi}{q}) = V_m \cos \frac{\pi}{2k}$

La valeur maximale de la tension appliquée aux redresseurs, en direct ou en inverse, est donc :

$$v_{dmax} = v_{imax} = V_m (\cos \frac{\pi}{2k} + \sin \frac{\pi}{k}) \quad (I.3)$$

- Les courants  $i_{1ThA}$  et  $i_{1A}$  ont pour période  $T$ .

$i_{1ThA}$  est égal à  $\frac{V_m}{R} \sin \omega t$  pour  $\psi < \omega t < \pi$  et est nul durant tout le reste de la période.

$i_{1A}$  est égal à  $\frac{V_m}{R} \sin \omega t$  pour  $\psi < \omega t < \pi$  et  $\pi + \psi < \omega t < 2\pi$  ;

il est nul pendant tout le reste de la période.

La figure I.2.1.c. montre la détermination pour  $k$  impair quelconque de  $v_1'$ ,  $v_{Th_{1A}}$ ,  $i_{Th_{1A}}$ ,  $i_{1A}$ . On a fait les tracés en prenant  $\theta' = 2\theta'_{max}/3$ .

Pour simplifier les notations on n'a pas reproduit les indices 1 qui rappellent que l'on étudie la première phase d'un multiplicateur qui peut en comporter plusieurs.

## I.2. Multiplication par $k$ pair

Pour obtenir une tension  $v_1'$  de fréquence  $kf$ , avec  $k$  pair, il faut  $2k$  tensions de fréquence  $f$ ,  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}, \dots, v_{1k}$ ,  $-v_{1A}$ ,  $-v_{1B}, \dots, -v_{1k}$  et  $2k$  thyristors  $Th_{1A}$ ,  $Th_{1B}, \dots, Th_{1k}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th'_{1B}, \dots, Th'_{1k}$  montés tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre comme indiqué sur la figure I.2.2.a.

### I.2.1. Multiplication par 2 (Fig. I.2.2.b.)

Pour que deux redresseurs ne débitent pas simultanément, leur angle de conduction  $\theta$  doit être inférieur à

$$\theta_{max} = \pi/2.$$

Le thyristor  $Th_{1A}$  cessant de conduire pour  $\omega t = \pi$ , son retard au déblocage  $\psi$  doit être supérieur à

$$\psi_{min} = \pi/2.$$

- La tension de sortie  $v_1'$ , de fréquence  $2f$ , a pour expressions au cours de l'une de ses périodes :

$$\pi/2 < \omega t < \psi, \quad v_1' = 0$$

$$\psi < \omega t < \pi, \quad v_1' = v_{1A} = V_m \sin \omega t$$

$$\pi < \omega t < \pi + \psi, \quad v_1' = 0$$

$$\pi + \psi < \omega t < 3\pi/2, \quad v_1' = -v_{1B} = V_m \sin(\omega t + \pi/2).$$

- La tension aux bornes du thyristor  $Th_{1A}$  a une valeur directe maximale inférieure à la valeur inverse maximale. Le maximum de celle-ci est obtenu pour  $\psi_{min}$  (tracé en traits interrompus) et vaut :

$$v_{imax} = 2V_m.$$

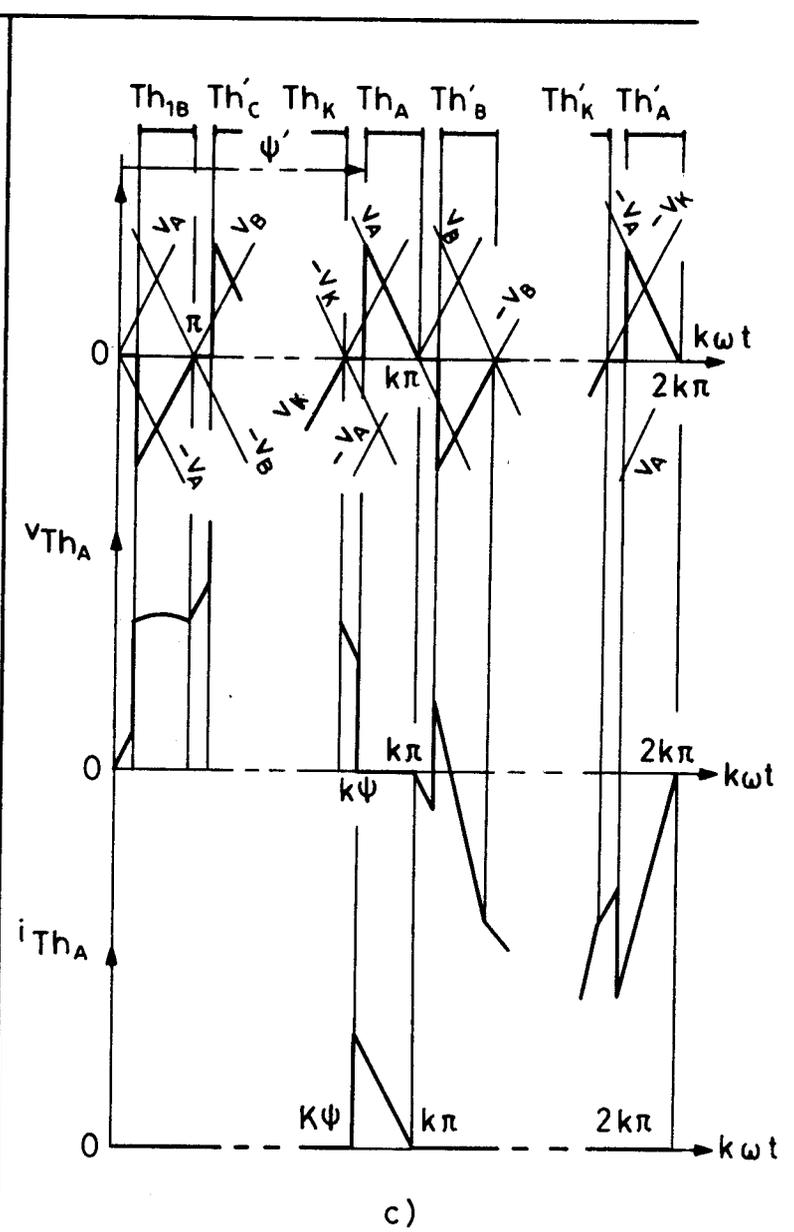
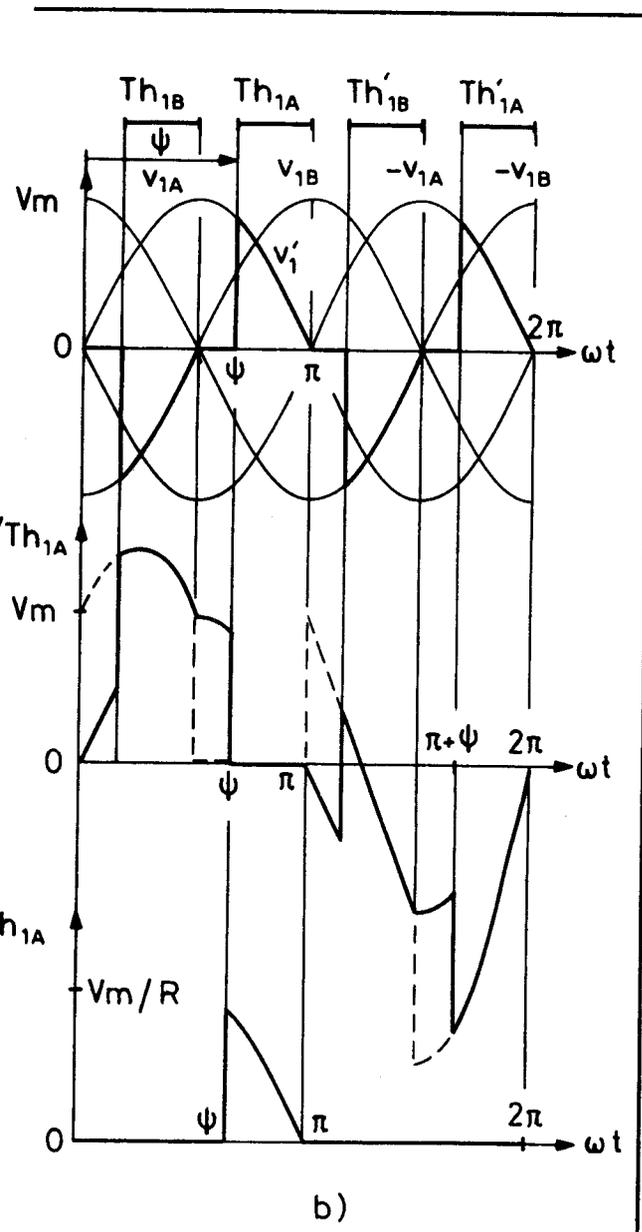
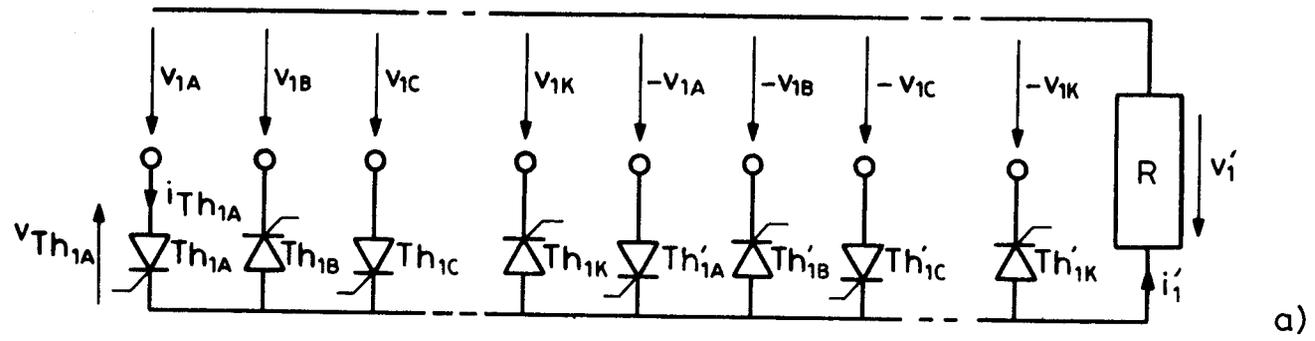


FIG. I.2.2



- Le courant  $i_{Th_{1A}}$  dans le premier thyristor et dans la première phase secondaire égale  $\frac{V_m}{R} \sin \omega t$  pour  $\psi < \omega t < \pi$  ; il est nul durant tout le reste de la période  $T$ .

### 1.2.2. Multiplication par un nombre pair quelconque (fig. 1.2.2.c.)

L'angle maximum de conduction de chacun des  $2k$  thyristors est égal à  $\pi/k$  ; le redresseur  $Th_{1A}$  s'éteignant pour  $\omega t = \pi$ , il doit être amorcé avec un retard au moins égal à

$$\psi_{\min} = \pi - \frac{\pi}{k} \quad (I.1)$$

- La tension de sortie  $v'_1$ , de période  $T/k$ , a pour expressions au cours d'une de ses périodes

$$\left. \begin{array}{ll} \pi - \pi/k < \omega t < \psi & v'_1 = 0 \\ \psi < \omega t < \pi, & v'_1 = v_{1A} = V_m \sin \omega t \\ \pi < \omega t < \psi + \pi/k, & v'_1 = 0 \\ \psi + \pi/k < \omega t < \pi + \pi/k, & v'_1 = -v_{2B} = -V_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{k}) \end{array} \right\} \quad (I.2)$$

On remarque que les relations (I.1) et (I.2) sont les mêmes que celles établies pour  $k$  impair.

Le maximum de  $v'_1$  correspond à  $\psi_{\min}$  et vaut  $V_m \sin \pi/k$ .

- La tension aux bornes d'un thyristor,  $Th_{1A}$  par exemple, est donnée par

$$v_{Th_{1A}} = v_{1A} - v'_1.$$

Lors du passage de  $v_{1A}$  par  $V_m$ , pour  $k\omega t = k\pi/2$ , et par  $-V_m$ , pour  $k\omega t = k3\pi/2$ , se produit, si  $\psi = \psi_{\min}$ , une pointe de  $v_{Th_{1A}}$ , car on a alors des pointes de  $v'_1$  pour  $k\omega t$  égal à  $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$ . Puisque  $k$  est pair,  $k\pi/2$  et  $3k\pi/2$  correspondent à un nombre entier de fois  $\pi$ .

Si  $k/2$  est pair et  $\psi$  égal à  $\psi_{\min}$ ,

pour  $k\omega t = k\pi/2$ ,  $v_{Th_{1A}}$  prend la valeur  $V_m - (-V_m \sin \pi/k)$

pour  $k\omega t = 3k\pi/2$ ,  $v_{Th_{1A}}$  prend la valeur  $-V_m - (V_m \sin \pi/k)$ .

Si  $k/2$  est impair et  $\psi$  égal à  $\psi_{\min}$ ,

pour  $k\omega t = k\pi/2$ ,  $v_{Th_{1A}}$  prend la valeur  $V_m - (V_m \sin \pi/k)$

pour  $k\omega t = 3k\pi/2$ ,  $v_{Th_{1A}}$  prend la valeur  $-V_m - (V_m \sin \pi/k)$ .

Donc que  $k/2$  soit pair ou impair, la valeur maximale positive ou négative de la tension aux bornes des thyristors est

$$v_{imax} \text{ ou } v_{dmax} = V_m \left(1 + \sin \frac{\pi}{k}\right) \quad (\text{I.4})$$

- Le courant dans un redresseur,  $Th_{1A}$  par exemple, est encore égal à  $\frac{V}{R} \sin \omega t$ , pour  $\psi < \omega t < \pi$  et nul pendant tout le reste de la période  $T$ .

### I.3. Multiplication par un nombre fractionnaire

La multiplication de la fréquence  $f$  par un nombre  $k$  fractionnaire, égal à  $N/D$ , supérieur à 1 conduit au même schéma de principe (fig. I.2.2.a.) que la multiplication par un nombre pair. Il faut  $2N$  tensions de fréquence  $f$  et  $2N$  thyristors. Seuls varient le sens de branchement des thyristors, donc l'utilisation qui est faite de ces  $2N$  tensions, et la séquence de déblocage de ces redresseurs.

A cause des relations donnant la tension maximale aux bornes des redresseurs, il faut distinguer le cas où  $k$  est compris entre 1 et 2 de celui où il est supérieur à 2. Sur la figure I.2.3, on a tracé la forme d'onde de la tension de sortie et de la tension  $v_{Th_{1A}}$  aux bornes d'un thyristor, pour  $k$  égal à  $3/2$ , puis pour  $k$  égal à  $5/2$ .

- Retard minimum au déblocage.

Pour qu'un seul redresseur soit simultanément conducteur, l'angle de conduction doit être inférieur à une alternance de la tension de fréquence  $kf$

$$\theta'_{max} = \pi$$

$$\theta_{max} = \pi/k.$$

Si l'on compte le retard au déblocage par rapport au début de l'alternance de la tension secondaire dont le redresseur appliquera la fin entre les bornes de sortie, le retard au déblocage doit être supérieur à

$$\psi_{min} = \pi - \pi/k \quad (\text{I.1})$$

Pour  $k = 3/2$ ,  $\psi_{min} = \pi/3$  ; pour  $k = 5/2$ ,  $\psi_{min} = 3\pi/5$ .

- Tension de sortie  $v_1'$

La tension de sortie est toujours formée de portions de sinusôides de fréquence  $f$  et sa période est  $T/k$ .

Si l'on prend comme origine des temps le début d'une alternance positive d'une tension secondaire dont la partie finale constitue une alternance positive de  $v_1'$ , on a encore

$$\left. \begin{aligned} \psi < \omega t < \pi, & \quad v_1' = V_m \sin \omega t \\ \pi < \omega t < \psi + \pi/k, & \quad v_1' = 0 \\ \psi + \pi/k < \omega t < \pi + \pi/k, & \quad v_1' = -V_m \sin(\omega t - \pi/k) \\ \pi + \pi/k < \omega t < \psi + 2\pi/k, & \quad v_1' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (I.2)$$

Les tracés de la figure I.2.3. montrent bien que la forme d'onde de la tension de sortie est la même que pour  $k$  entier, impair ou pair ; seul varie l'écart angulaire ( $\pi$  à l'échelle des  $k\omega t$ ,  $\pi/k$  à l'échelle des  $\omega t$ ) entre alternances successives.

- Tension aux bornes des redresseurs

• Si  $k$  est compris entre 1 et 2,  $\psi_{\min}$  est inférieur à  $\pi/2$  et l'amplitude de  $v_1'$  est égale à  $V_m$  si  $\psi_{\min} < \psi < \pi/2$ .

Sur la figure I.2.3, on a tracé pour  $k = 3/2$  la forme d'onde de  $v_{Th_{1A}}$  égal à  $v_1' - v_{1A}$ . Pour  $\omega t = 3\pi/2$ ,  $v_1' = V_m$  et  $v_{1A} = -V_m$ , la tension aux bornes de  $Th_{1A}$  atteint  $+2V_m$ . Il en serait de même si  $N$  égalait 5, 7, ... ou un nombre impair quelconque.

Si  $N$  est pair, c'est la tension inverse maximale qui atteint  $2V_m$

Dans les deux cas

$$v_{i\max} \text{ ou } v_{d\max} = 2V_m \quad (I.5)$$

• Si  $k$  est supérieur à 2, les pointes de  $v_1'$  obtenues pour le fonctionnement à  $\psi_{\min}$  n'atteignent que  $V_m \sin \pi/k$ .

Pour  $k = 5/2$ , la figure I.2.3. montre que  $v_{Th_{1A}}$ , égal à  $v_1' - v_{1A}$  vaudrait, si  $\psi$  était minimum,

$$- \left( \cos \frac{\pi}{2N} + \sin \frac{\pi}{k} \right) V_m, \text{ pour } k\omega t = \pi$$

$$+ \left( \cos \frac{\pi}{2N} + \sin \frac{\pi}{k} \right) V_m, \text{ pour } k\omega t = 3\pi.$$

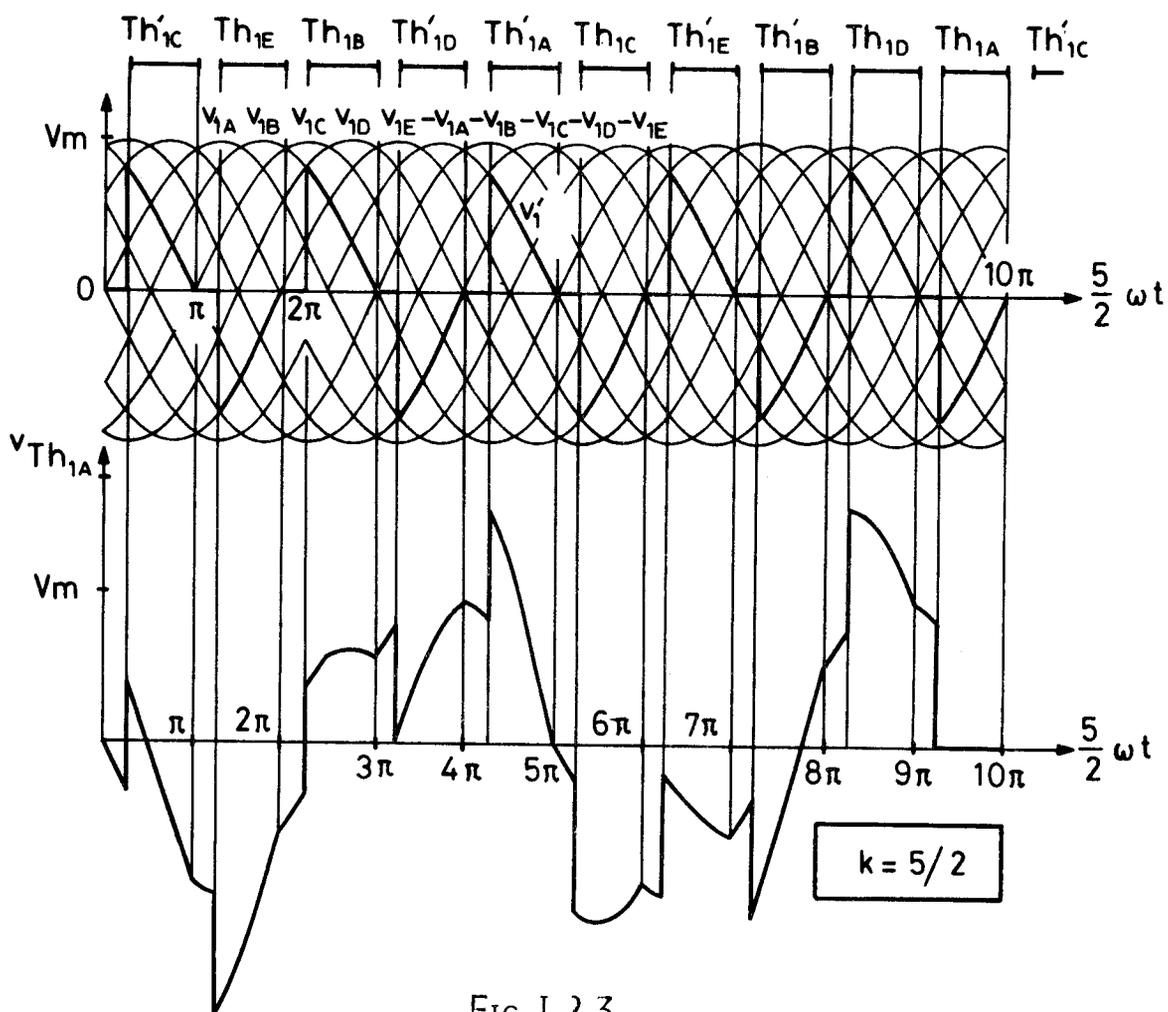
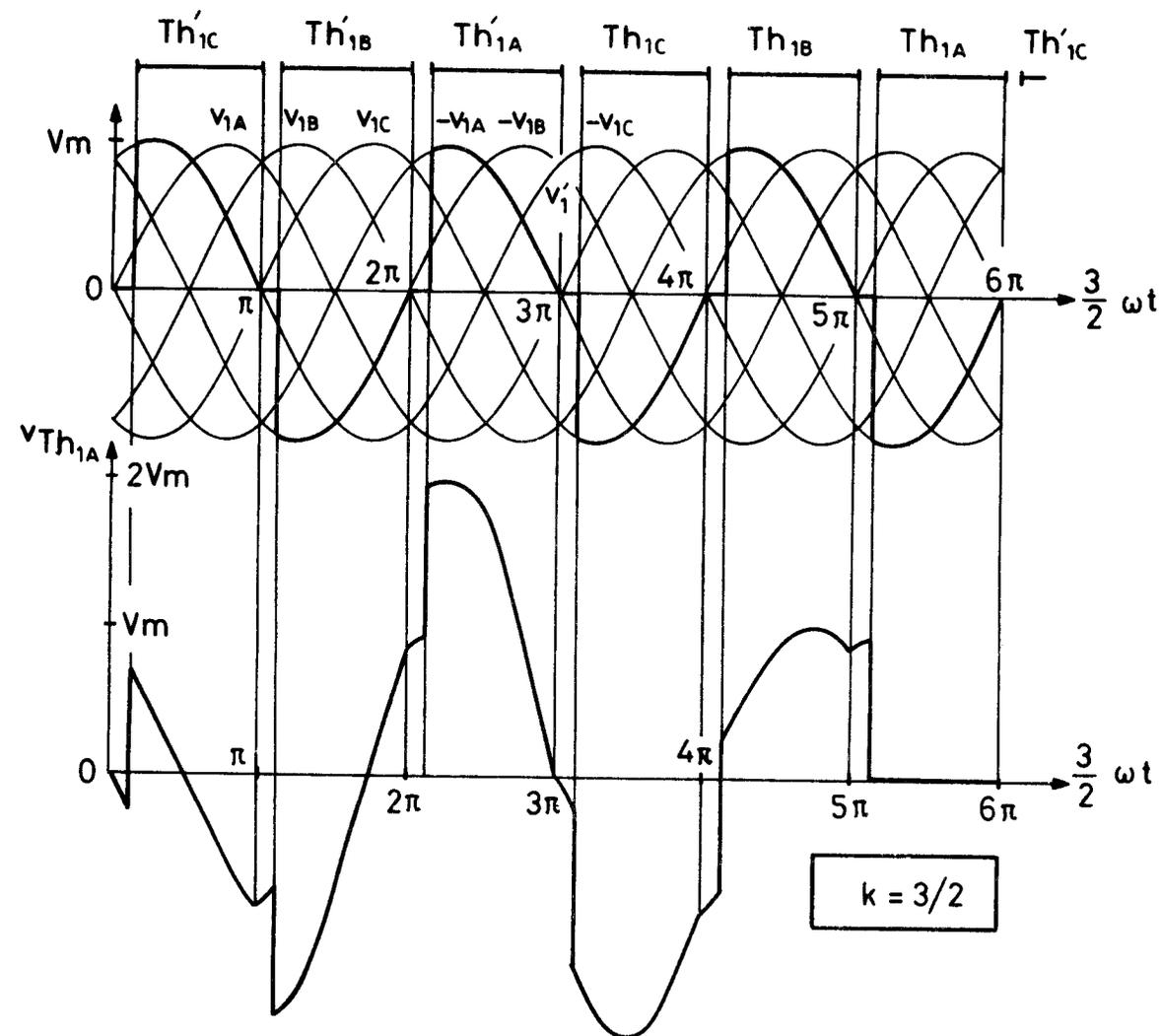


FIG. I.2.3

Il en est de même pour tous les multiplicateurs à  $k$  fractionnaire si  $N$  est impair.

Mais si  $N$  est pair, l'une au moins des pointes de  $v_1'$  se situe lors du passage de  $v_{1A}$  par  $V_m$ .

Donc

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{imax}} \text{ ou } v_{\text{dmax}} &= V_m \left( \cos \frac{\pi}{2N} + \sin \frac{\pi}{k} \right) ; \text{ si } N \text{ est impair} \\ &= V_m \left( 1 + \sin \frac{\pi}{k} \right) ; \text{ si } N \text{ est pair} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.6})$$

- Courant dans les redresseurs.

Puisqu'il faut  $2N$  redresseurs pour écouler les  $2N$  alternances du courant  $i_1'$  correspondant à  $N$  périodes de celui-ci, les courants dans les redresseurs ont comme les tensions à leurs bornes une période égale à

$$N \frac{T}{k} = DT,$$

soit  $2T$  pour les deux tracés de la figure I.2.3.

En prenant une origine des temps convenable, comme on l'a fait pour établir l'expression de  $v_1'$ , on peut écrire

$$\left. \begin{aligned} \psi < \omega t < \pi, & \quad i_{\text{Th}1A} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t \\ \pi < \omega t < 2D\pi + \psi, & \quad i_{\text{Th}1A} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.7})$$

#### I.4. Remarque en vue de simplifications ultérieures

Après l'examen du principe des multiplicateurs, l'étude du débit sur résistance pure montre que ces montages conduisent à trois types d'études.

##### I.4.1. Etudes communes à tous les multiplicateurs

L'examen de la tension de sortie  $v_1'$  et du courant débité  $i_1'$  peut être menée *simultanément* pour tous les montages, que  $k$  soit entier pair ou impair ou qu'il soit fractionnaire.

La tension  $v_1'$  est formée, au cours d'une de ses périodes  $T/k$ ,

- d'une fin d'alternance sinusoïdale de pulsation  $\omega$ ,

- d'une fin d'alternance sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , de signe contraire à la précédente et déphasée de  $\pi/k$  à l'échelle des  $\omega t$  (fig. I.2.4.).

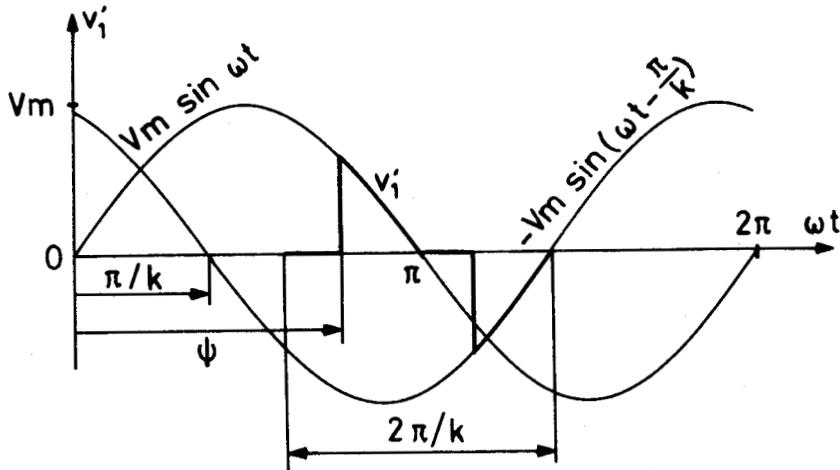


FIG. I.2.4

Le début de l'alternance positive de  $v_1'$  est imposé par le retard au déblocage  $\psi$ .

La fin de cette alternance est liée à l'annulation du courant  $i_1'$ . Dans le cas du débit sur charge purement résistive, elle se produit pour  $\omega t = \pi$ .

Dans ce cas, quel que soit  $k$ , pour éviter le débit simultané de deux redresseurs, le minimum de  $\psi$  est donné par

$$\psi_{\min} = \pi - \pi/k \quad (\text{I.1})$$

et, à condition de prendre une origine des temps convenable, on a toujours

$$\left. \begin{array}{l} \pi - \pi/k < \omega t < \psi, \quad v_1' = 0 \\ \psi < \omega t < \pi, \quad v_1' = V_m \sin \omega t \\ \pi < \omega t < \psi + \pi/k, \quad v_1' = 0 \\ \psi + \pi/k < \omega t < \pi + \pi/k, \quad v_1' = -V_m \sin(\omega t - \pi/k) \end{array} \right\} \quad (\text{I.2})$$

Quand la nature du récepteur sera modifiée, la relation entre  $i_1'$  et  $v_1'$  conduira à une annulation de  $i_1'$  pour  $\omega t$  différent de  $\pi$ , donc à une valeur de  $\psi_{\min}$  différente de  $\pi - \pi/k$ . Mais les quatre expressions que présente  $v_1'$  au cours de l'une de ses périodes seront les mêmes.

#### I.4.2. Etudes communes aux multiplicateurs d'un même groupe

Pour ce qui est des tensions aux bornes des redresseurs et du nombre d'alternances du courant  $i_1'$  qu'ils écoulent, l'étude des divers cas possibles a montré qu'il existait des relations générales, mais qu'il y en avait plusieurs.

- Si  $k$  est entier et impair,  $v_{Th_{1A}}$  et  $i_{Th_{1A}}$  ont pour période  $T$ .

La valeur maximale que peut présenter la tension aux bornes des redresseurs est donnée par la relation (I.3). Le courant  $i_1'$  présente  $2k$  alternances pendant la période  $T$ , et  $i_{Th_{1A}}$  égale  $i_1'$  pendant une de ces alternances. Le courant  $i_{1A}$  débité par une phase secondaire est formé, pendant sa période  $T$ , de deux alternances de  $i_1'$ , l'une positive, l'autre négative retardée de  $\pi$ , à l'échelle des  $\omega t$ , par rapport à la précédente.

- Si  $k$  est entier et pair, les courants dans les thyristors et les tensions à leurs bornes ont encore pour période  $T$ . Le maximum possible de ces tensions est maintenant donné par la relation (I.4). Chaque thyristor écoule une alternance de  $i_1'$  sur  $2k$ .

- Si  $k$ , de la forme  $N/D$ , est un nombre fractionnaire supérieur à 1, la période des courants et des tensions aux bornes des redresseurs est  $DT$ .

Le maximum de ces tensions est donné par (I.5) si  $k$  est inférieur à 2, par (I.6) si  $k$  est supérieur à 2.

Chaque redresseur écoule une alternance de  $i_1'$  sur  $2N$ .

Quand la nature du récepteur sera modifiée, le nombre d'alternances du courant  $i_1'$  passant dans les redresseurs et dans les phases secondaires ne changera pas. Il suffira de prendre l'expression convenable de  $i_1'$ .

La tension maximale aux bornes des redresseurs sera, comme nous le verrons, au plus égale à celle trouvée lors du débit sur résistance pure.

### I.4.3. Etudes propres à chacun des montages

Pour trouver les courants dans les enroulements du transformateur et dans la ligne d'alimentation d'un multiplicateur à sortie monophasée ou polyphasée, il faut

- partir du schéma de principe qui indique la succession de redresseurs conducteurs,
- à l'aide du schéma du transformateur et des relations d'ampères-tours, déduire des courants secondaires les courants primaires et en ligne.

Quand la nature du récepteur est modifiée, seule varie l'expression du courant durant la ou les alternances de débit de chaque phase secondaire.

## II. DEBIT SUR CHARGE PUREMENT INDUCTIVE

### II.1. Relations générales

Pendant le débit du thyristor, débloqué pour  $\omega t = \psi$ , qui rend la tension de sortie  $v_1'$  égale à  $V_m \sin \omega t$ , le courant  $i_1'$  dans le récepteur d'inductance  $L$  est donné par

$$L \frac{di_1'}{dt} = V_m \sin \omega t$$

$$\text{Donc } i_1' = - \frac{V_m}{L\omega} \cos \omega t + A$$

On détermine la constante d'intégration  $A$  en écrivant que  $i_1'$  est nul pour  $\omega t = \psi$ .

$$\text{D'où } A = \frac{V_m}{L\omega} \cos \psi$$

et l'expression du courant  $i_1'$

$$i_1' = \frac{V_m}{L\omega} (\cos \psi - \cos \omega t) \quad (\text{I.7})$$

Le thyristor qui rend  $v_1'$  égal à  $V_m \sin \omega t$  s'éteint, pour  $\omega t = \psi + \theta$ , quand  $i_1'$  repasse par la valeur zéro (fig. I.2.5.).

L'angle d'extinction  $\psi + \theta$ , tel que  $\cos(\psi + \theta) = \cos \psi$ , est donc donné par

$$\psi + \theta = 2\pi - \psi ;$$

il est symétrique de  $\psi$  par rapport à  $\omega t = \pi$ . Le courant  $i'_1$  est formé de calottes de sinusoides, la tension  $v'_1$  de portions de sinusoides symétriques par rapport aux passages par zéro.

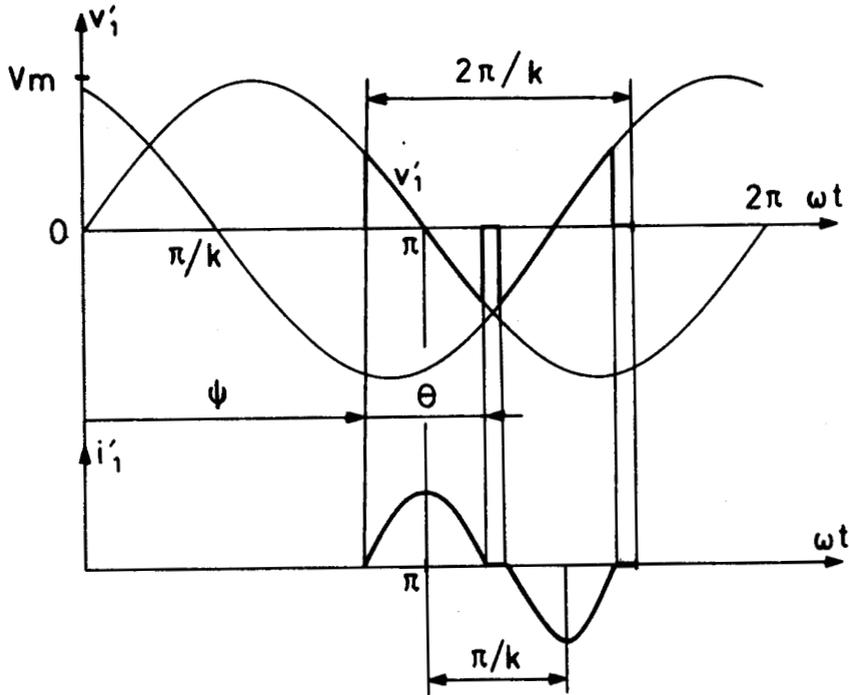


FIG. I.2.5

- Dans les relations (I.2) seules changent les limites des intervalles de validité des quatre expressions successives de  $v'_1$  au cours de l'une de ses périodes

$$\left. \begin{aligned}
 \psi < \omega t < 2\pi - \psi, & \quad v'_1 = V_m \sin \omega t \\
 2\pi - \psi < \omega t < \psi + \pi/k, & \quad v'_1 = 0 \\
 \psi + \pi/k < \omega t < 2\pi - \psi + \pi/k, & \quad v'_1 = -V_m \sin(\omega t - \pi/k) \\
 2\pi - \psi + \pi/k < \omega t < \psi + 2\pi/k, & \quad v'_1 = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

- Le retard au débloccage doit toujours être tel que deux redresseurs ne débitent pas simultanément.

L'angle de conduction de chacun est

$$\theta = (\psi + \theta) - \psi = 2\pi - \psi - \psi = 2(\pi - \psi)$$

il doit être inférieur à  $2\pi/2k$ . Donc  $\psi$  doit être supérieur à  $\psi_{\min}$  tel que

$$\psi_{\min} = \pi - \frac{\pi}{2k} \quad (I.9)$$

L'écart entre  $\psi_{\min}$  et  $\pi$  est moitié moindre que lors du débit sur résistance pure.

A valeurs données de  $V_m$  et de  $L\omega$ , c'est pour  $\psi_{\min}$  qu'on a les valeurs instantanées de  $v'_1$  et de  $i'_1$  les plus fortes.

$$v'_{1\max} = V_m \sin \frac{\pi}{2k}, \quad i'_{1\max} = \frac{V_m}{L\omega} (1 - \cos \frac{\pi}{2k}).$$

## II.2. Exemple. Multiplication par 2

La figure I.2.6. donne pour  $k$  égal à 2 et  $\psi = 5\pi/6$  (supérieur à  $\psi_{\min}$  qui vaut  $3\pi/4$ ) les formes d'ondes de  $v'_1$ ,  $i'_1$ ,  $v_{Th_{1A}}$  et  $i_{Th_{1A}}$ .

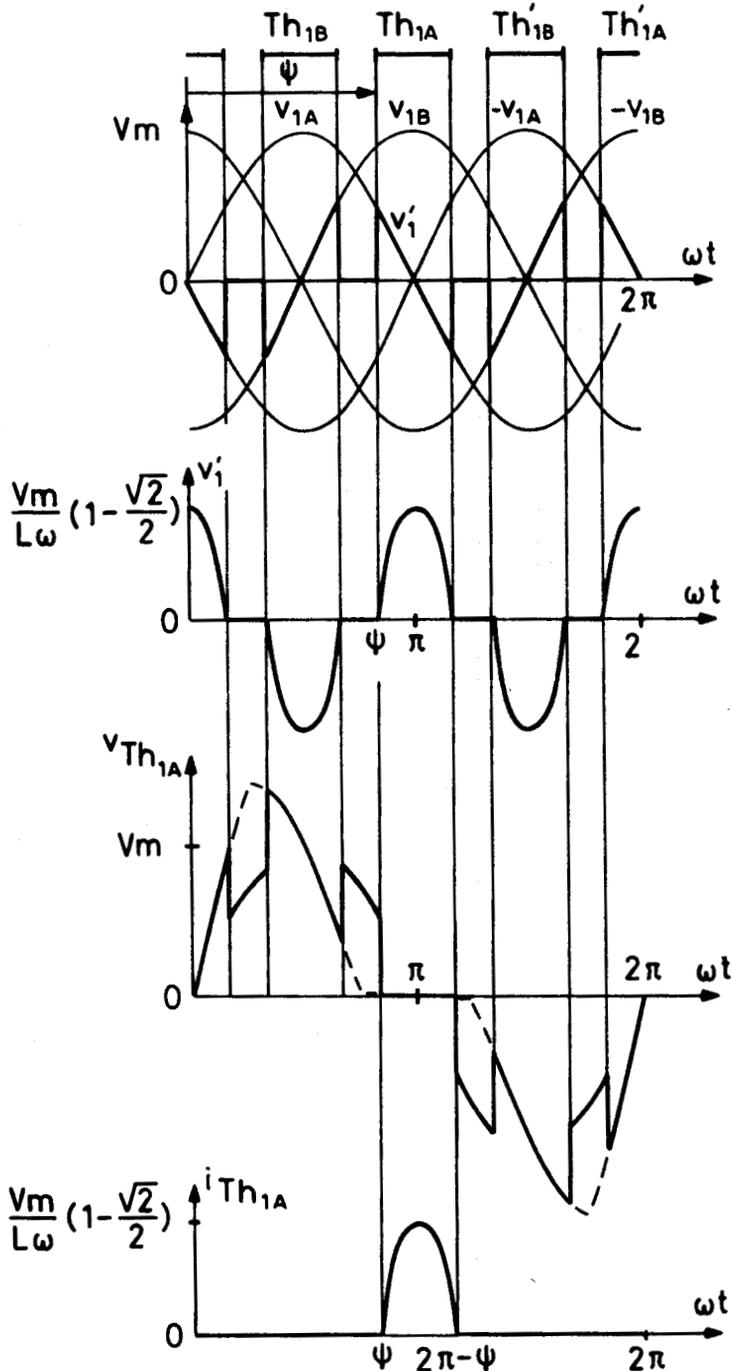


FIG. I.2.6

La comparaison de la forme d'onde de la tension aux bornes du thyristor  $Th_{1A}$  avec celle tracée lors du débit sur résistance pure (fig. I.2.2.b.) montre que les valeurs extrêmes de cette tension sont réduites. Dans le cas où  $\psi$  est minimum (tracé en traits interrompus),  $v_{dmax}$  et  $v_{imax}$  atteignent seulement  $\sqrt{2} V_m$ .

Il en est ainsi pour tous les montages : les valeurs extrêmes de la tension aux bornes des redresseurs sont inférieures ou tout au plus égales à celles trouvées pour le débit sur résistance. Cela tient :

- à la réduction des pointes de la tension  $v'_1$ , si  $k \geq 2$ , qui passent de  $V_m \sin\pi/k$  à  $V_m \sin\pi/2k$ ,

- à la suppression de certaines coïncidences qui ne peuvent plus se produire à cause de l'augmentation de  $\psi_{min}$ .

### III. DEBIT SUR CHARGE RESISTANTE ET INDUCTIVE

#### III.1. Relations générales

Pendant l'intervalle où la tension  $v'_1$  aux bornes du récepteur de fréquence multipliée est égale à  $V_m \sin\omega t$ , le courant  $i'_1$  dans celui-ci est donné par

$$L \frac{di'_1}{dt} + R i'_1 = V_m \sin\omega t,$$

en désignant par R et L la résistance et l'inductance de la charge.

D'où

$$i'_1 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (\sin\omega t - Q \cos\omega t) + A e^{-\omega t/Q},$$

en posant

$$Q = \frac{L\omega}{R}$$

Pour trouver A, on écrit que  $i'_1$  est nul à l'instant  $t = \psi/\omega$  où on débloque le thyristor qui applique  $V_m \sin\omega t$  au récepteur.

$$D'où A = - \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (\sin\psi - Q \cos\psi) e^{\psi/Q}$$

et, en reportant,

$$i'_1 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [\sin\omega t - Q \cos\omega t - (\sin\psi - Q \cos\psi) e^{\frac{\psi-\omega t}{Q}}] \quad (I.10)$$

Le thyristor qui écoule  $i_1'$  après l'instant  $t = \psi/\omega$  se bloque pour  $\omega t = \psi + \theta$  lorsque  $i_1'$  redevient nul. D'où la relation permettant, à  $\psi$  et  $Q$  donnés, de déterminer l'angle de conduction  $\theta$  :

$$\sin(\psi + \theta) - Q \cos(\psi + \theta) - (\sin \psi - Q \cos \psi)e^{-\theta/Q} = 0 ; \quad (\text{I.11})$$

A  $\psi$  donné, l'angle  $\theta$  croît quand  $Q$  augmente : l'angle de fin de conduction  $\psi + \theta$  croît de  $\pi$  à  $2\pi - \psi$  quand  $Q$  va de 0 (récepteur purement résistif) à l'infini (récepteur purement inductif).

La figure I.2.7. montre, pour  $k$  quelconque, l'allure de la tension  $v_1'$  et du courant  $i_1'$  au cours d'une de leurs périodes.

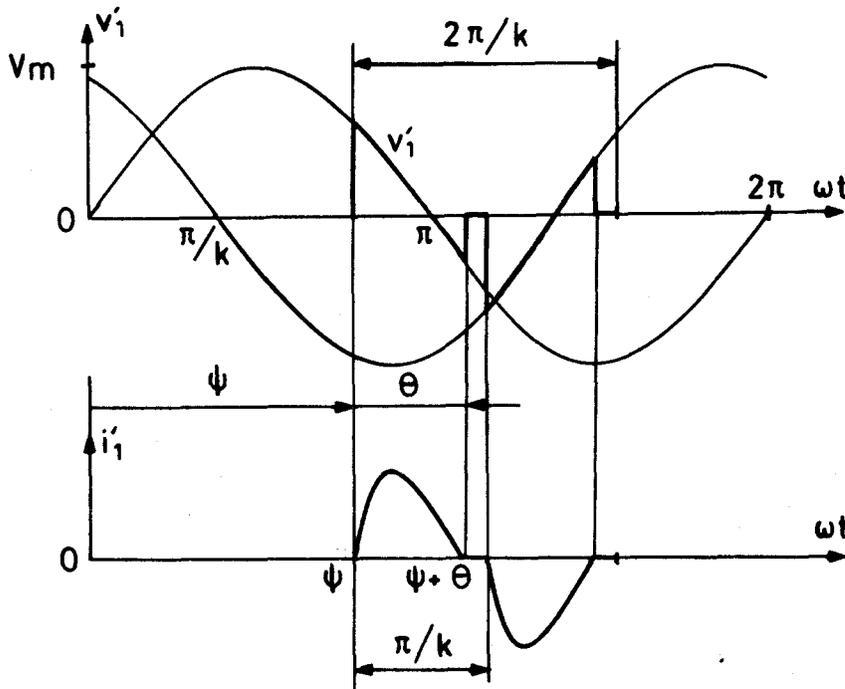


FIG. I.2.7

- Au cours d'une de leurs périodes, la tension et le courant de sortie ont donc pour expressions

$$\psi < \omega t < \psi + \theta, \quad v_1' = V_m \sin \omega t,$$

$$i_1' = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \sin \omega t - Q \cos \omega t - (\sin \psi - Q \cos \psi) e^{-\frac{\psi - \omega t}{Q}} \right];$$

$$\psi + \theta < \omega t < \psi + \pi/k, \quad v_1' = i_1' = 0 ;$$

$$\psi + \pi/k < \omega t < \psi + 2\pi/k, \quad v_1' = -v_1'(\omega t - \pi/k), \quad i_1' = -i_1'(\omega t - \pi/k) ;$$

l'angle  $\theta$  étant donné par (I.11)

(I.12)

Les relations (I.2) puis (I.7) et (I.8) ne sont que des applications particulières correspondant à Q nul, puis à Q infini et R nul.

- Le retard minimum au déblocage  $\psi_{\min}$  correspond à un angle de conduction  $\theta$  égal à  $\pi/k$ . En reportant cette valeur de  $\theta$  dans (I.11), il vient

$$\sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{k}) - Q \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{k}) - (\sin\psi_{\min} - Q \cos\psi_{\min})e^{-\frac{\pi}{kQ}} = 0$$

ou, en développant les deux premiers termes et en regroupant les termes en  $\sin\psi_{\min}$  et  $\cos\psi_{\min}$ .

$$\sin\psi_{\min} (\cos\frac{\pi}{k} + Q \sin\frac{\pi}{k} - e^{-\frac{\pi}{kQ}}) + \cos\psi_{\min} (\sin\frac{\pi}{k} - Q \cos\frac{\pi}{k} + Q e^{-\frac{\pi}{kQ}}) = 0$$

$$\boxed{\text{tg } \psi_{\min} = \frac{\sin\frac{\pi}{k} - Q \cos\frac{\pi}{k} + Q e^{-\frac{\pi}{kQ}}}{e^{-\frac{\pi}{kQ}} - \cos\frac{\pi}{k} - Q \sin\frac{\pi}{k}}} \quad (\text{I.13})$$

L'angle  $\psi_{\min}$  passe de  $\pi - \pi/k$  à  $\pi - \pi/2k$  quand Q va de zéro à l'infini.

La planche I.1.\* montre, pour k égal à 3/2 ; 2 ; 5/2 ; 3 ; 4 et 5, comment varie  $\psi_{\min}$  en fonction du facteur de puissance  $\cos\varphi'$  du récepteur à la pulsation  $k\omega$ .

Ce facteur, défini par

$$\cos\varphi' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 k^2 \omega^2}}$$

est lié à Q par

$$\cos\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 Q^2}}$$

\* Pour en faciliter la consultation, les diverses planches de caractéristiques relatives à une partie sont regroupées à la fin de celle-ci.

III.3. Exemple. Vérifications expérimentales

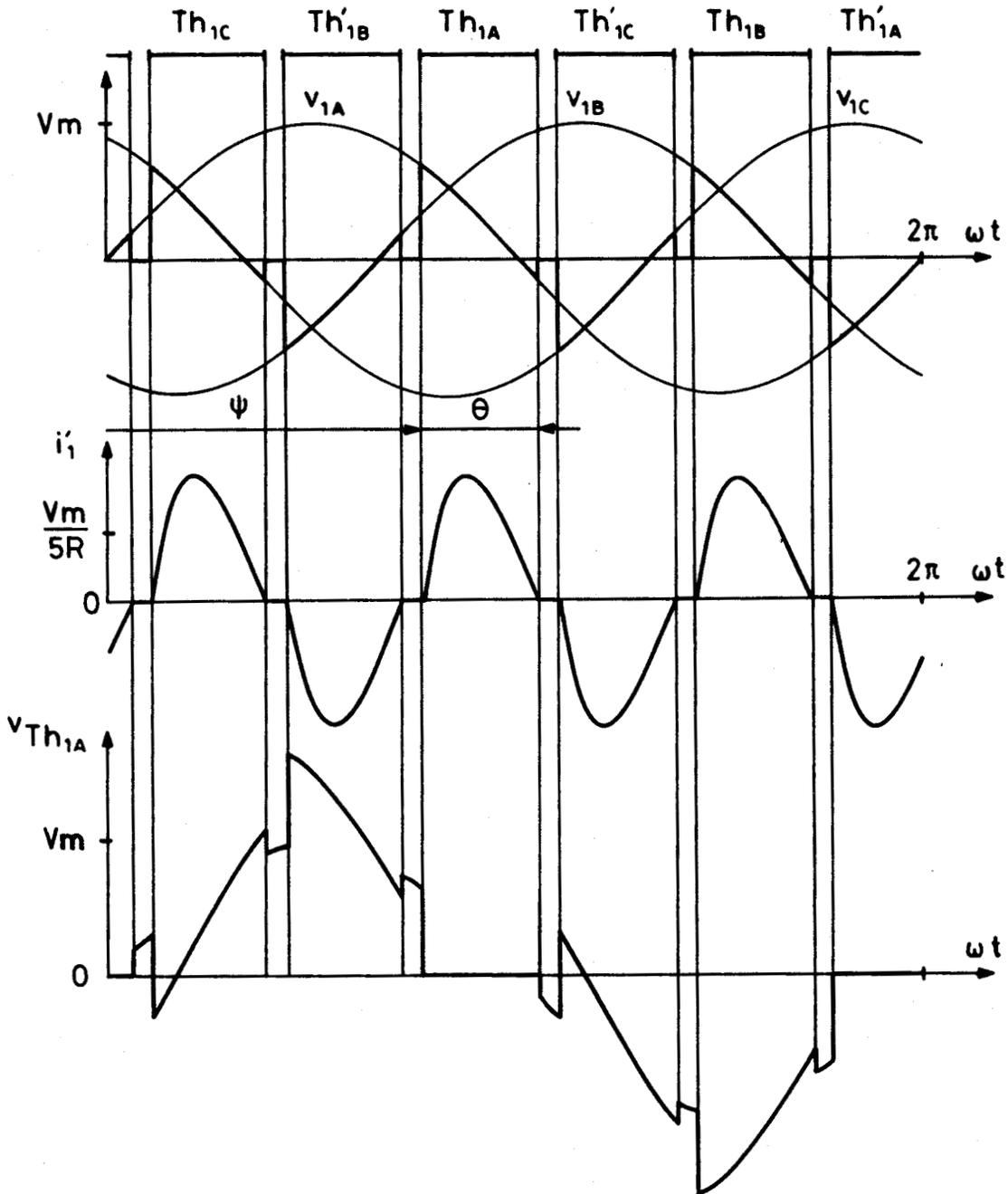
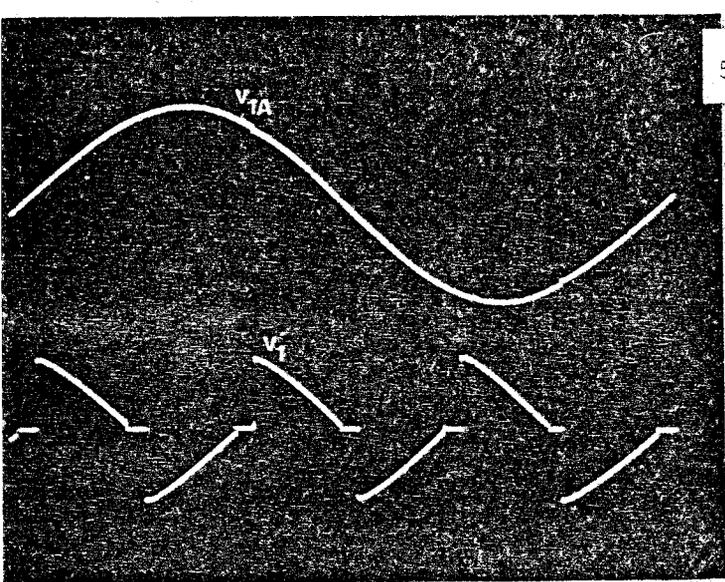


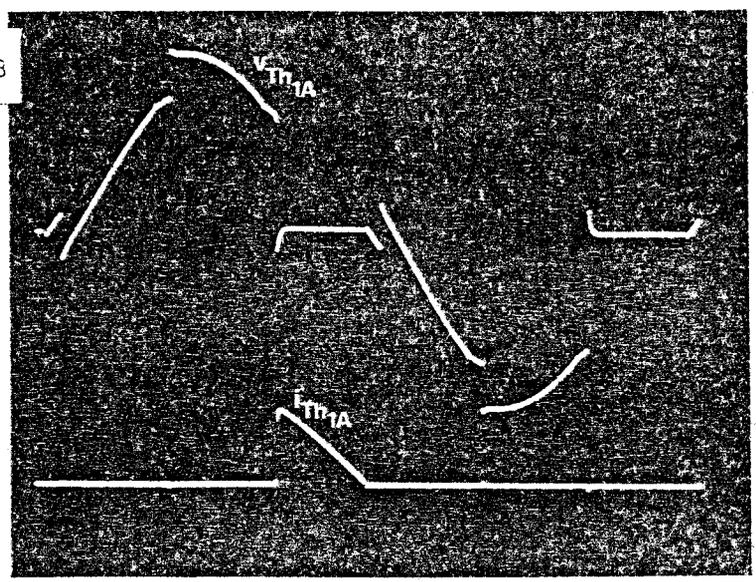
FIG. I.2.8

- La figure I.2.8. montre, par exemple, pour un tripleur de fréquence le tracé de la tension  $v_1'$ , du courant  $i_1'$  et de la tension  $v_{Th_{1A}}$  dans le cas suivant

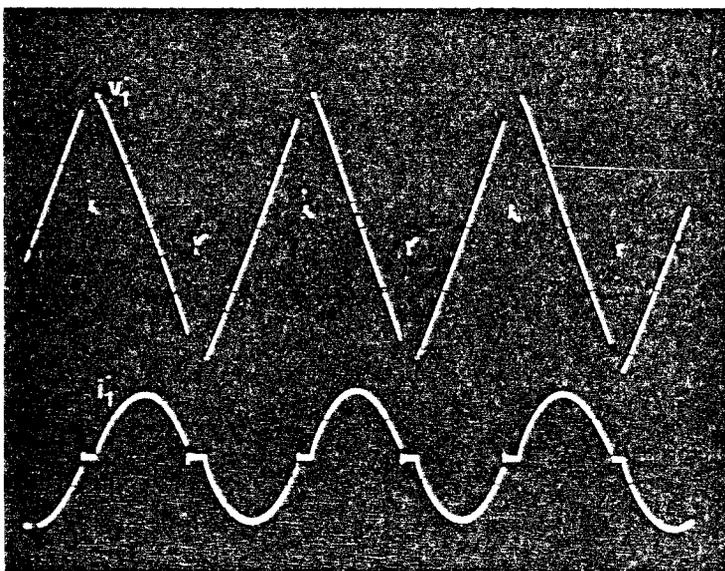




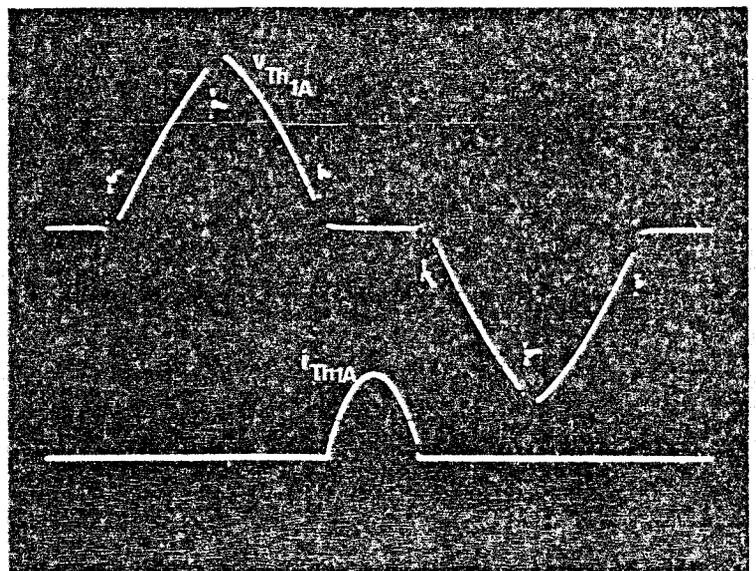
1A



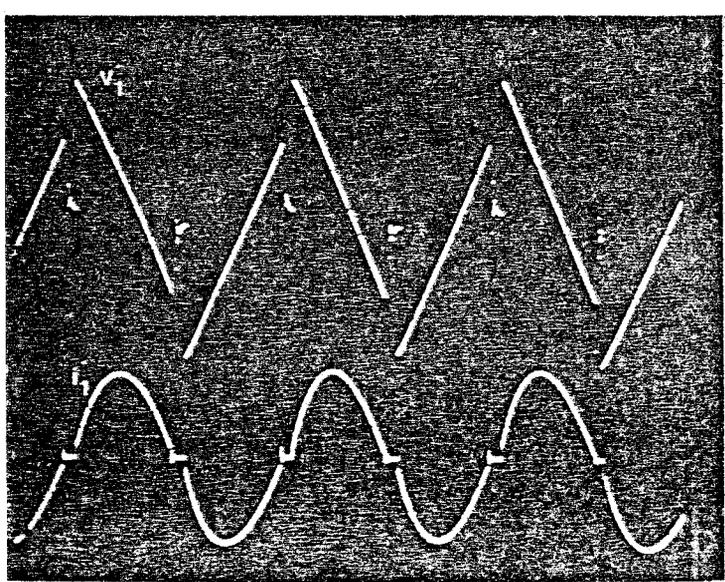
1B



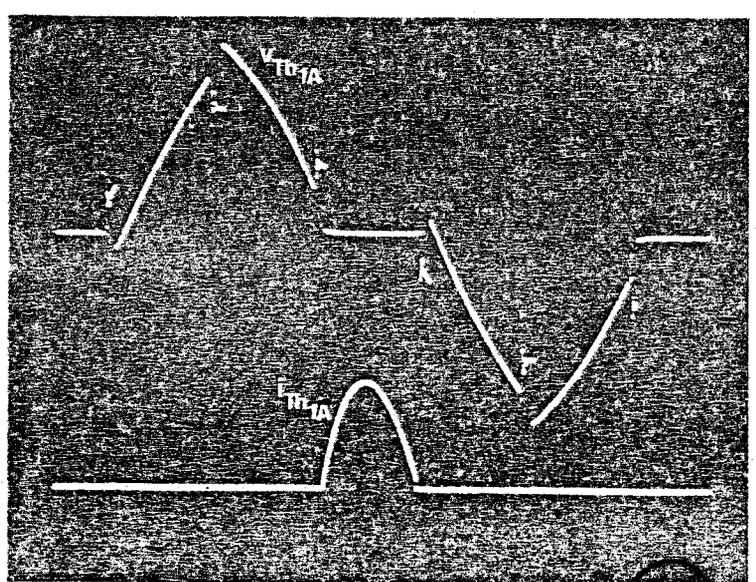
2A



2B



3A



3B



FIG. I.2.9

$$\psi = 140^\circ$$

$$Q = 0,2$$

L'angle de conduction est alors  $\theta = 30^\circ$ .

On retrouve la remarque faite à propos du débit sur inductance pure. Le maximum de la tension aux bornes des redresseurs est inférieur ou au plus égal à celui observé sur résistance pure. Ici les pointes de cette tension sont de  $1,628 V_m$  au lieu de  $\sqrt{3} V_m$ .

- Tous les relevés expérimentaux effectués sur divers multiplificateurs de fréquence alimentés à partir du réseau à 50 Hz confirment pleinement les descriptions du fonctionnement et les tracés de formes d'ondes que nous avons présentés dans ce chapitre.

A titre d'exemple nous reproduisons (fig. I.2.9.) quelques relevés oscillographiques effectués sur le tripleur de fréquence. Ce montage a l'avantage, du moins lorsque la sortie est monophasée, de pouvoir utiliser directement les tensions du réseau industriel. A condition de débiter des courants assez faibles, on retrouve exactement les formes d'ondes établies en négligeant les impédances en amont des redresseurs. Dans les montages où un transformateur est interposé entre le réseau et les thyristors, la réactance de fuites du transformateur atténue la rapidité de certaines variations, par exemple les discontinuités de  $v'_1$  et  $i'_1$  lors de l'amorçage des thyristors lorsqu'on débite sur résistance pure.

Les clichés 1a et 1b sont relatifs au débit sur résistance pure, le premier montre  $v_{1A}$  et  $v'_1$ , le second montre  $v_{Th_{1A}}$  et  $i_{Th_{1A}}$ .

Les clichés 2a et 2b ont été relevés lors du débit sur une bobine ( $Q$  mesuré en sinusoïdal à 50 Hz est égal à 12) ; le premier cliché donne les formes d'ondes de  $v'_1$  et  $i'_1$ , le second celles du courant dans un thyristor et la tension à ses bornes.

Les clichés 3a et 3b correspondent à une charge résistante et inductive ( $Q$  mesuré en sinusoïdal à 50 Hz est égal à 1). Ils montrent successivement  $v'_1$  et  $i'_1$  puis  $v_{Th_{1A}}$  et  $i_{Th_{1A}}$ .

```

*****
*
*   CHAPITRE III
*
*
*****

```

CARACTERISTIQUES

Connaissant le fonctionnement des montages multiplicateurs de la famille générale, les expressions des tensions et courants de sortie permettent d'établir les diverses caractéristiques.

Les premières ont trait aux grandeurs de sortie. Elles donnent leurs valeurs efficaces et leur développement en série de Fourier. Ce développement montre la *qualité* des signaux fournis par le multiplificateur.

Les secondes donnent les facteurs d'utilisation des thyristors et des enroulements secondaires du transformateur. Elles indiquent la puissance de dimensionnement à donner aux éléments du montage donc leur *coût*.

Les deux séries de caractéristiques débouchent tout naturellement sur des conclusions quant à l'intérêt de ces montages pour obtenir divers facteurs de multiplication.

## I. CARACTERISTIQUES DES GRANDEURS DE SORTIE

### I.1. Tensions de sortie

Les tensions de sortie de fréquence  $kf$  ne sont pas sinusoïdales mais formées de portions de sinusoïdes de fréquence  $f$ . Le calcul de leur développement en série permet d'évaluer l'importance des harmoniques de fréquence multiple de  $kf$ , le calcul de leur valeur efficace indique, par comparaison avec le fondamental, le taux global d'harmoniques.

### 1.1.1. Débit sur charge purement résistive

Quel que soit  $k$ , la tension  $v_1'$  aux bornes d'une phase de la charge est donnée par

$$\left. \begin{aligned} \psi < \omega t < \pi, & \quad v_1' = V_m \sin \omega t \\ \psi + \pi/k < \omega t < \pi + \pi/k, & \quad v_1' = -V_m \sin(\omega t - \pi/k) \\ v_1' = 0 & \text{ pendant le reste de la période } T/k \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.2})$$

#### • Développement en série

Les deux alternances de  $v_1'$  étant identiques au signe près, le développement en série ne comporte que des harmoniques de rang impair, le fondamental ayant une pulsation égale à  $k\omega$ .

$$\begin{aligned} v_1' &= A_1' \sin k\omega t + B_1' \cos k\omega t + A_3' \sin 3k\omega t + B_3' \cos 3k\omega t + \dots \\ &+ A_p' \sin pk\omega t + B_p' \cos pk\omega t + \dots \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} v_1' &= V_1' \sqrt{2} \sin(k\omega t + \xi_1) + V_3' \sqrt{2} \sin(3k\omega t + \xi_3) + \dots \\ &+ V_p' \sqrt{2} \sin(pk\omega t + \xi_p) + \dots \end{aligned}$$

avec

$$V_p' \sqrt{2} = \sqrt{A_p'^2 + B_p'^2}, \quad \xi_p = \text{arc tg } \frac{B_p'}{A_p'}$$

- Le terme  $A_p'$  peut se calculer à partir d'une seule alternance par

$$\begin{aligned} A_p' &= \frac{2 V_m}{\pi/k} \int_{\psi}^{\pi} \sin \omega t \sin pk\omega t \, d\omega t \\ &= V_m \frac{k}{\pi} \left[ \frac{1}{pk-1} \sin(pk-1)\omega t - \frac{1}{pk+1} \sin(pk+1)\omega t \right]_{\psi}^{\pi} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A_p' &= V_m \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{1}{pk-1} [\sin(pk-1)\pi - \sin(pk-1)\psi] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{pk+1} [\sin(pk+1)\pi - \sin(pk+1)\psi] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

- De même le terme  $B'_p$ , défini par

$$B'_p = \frac{2 V_m}{\pi/k} \int_{\psi}^{\pi} \sin \omega t \cos p k \omega t \, d\omega t$$

s'écrit

$$B'_p = V_m \frac{k}{\pi} \int_{\psi}^{\pi} -\sin(pk-1)\omega t \, d\omega t + \sin(pk+1)\omega t \, d\omega t$$

$$B'_p = V_m \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{1}{pk-1} [\cos(pk-1)\pi - \cos(pk-1)\psi] \right. \\ \left. - \frac{1}{pk+1} [\cos(pk+1)\pi - \cos(pk+1)\psi] \right\} \quad (I.15)$$

Les expressions de  $A'_p$  et  $B'_p$  se simplifient quand  $k$  est un nombre entier ;  $(pk+1)\pi$  et  $(pk-1)\pi$  sont alors en effet des multiples entiers de  $\pi$ .

#### • Valeur efficace

La valeur efficace  $V'$  de la tension  $v'_1$  est donnée par

$$V'^2 = \frac{1}{2\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+2\pi/k} v'^2_1 \, d\omega t = \frac{k}{\pi} V_m^2 \int_{\psi}^{\pi} \sin^2 \omega t \, d\omega t = \frac{k}{2\pi} V_m^2 \int_{\psi}^{\pi} (1 - \cos 2\omega t) \, d\omega t \\ V'^2 = \frac{V_m^2 k}{2\pi} \left( \pi - \psi + \frac{1}{2} \sin 2\psi \right) \quad (I.16)$$

$V'$  décroît quand  $\psi$  augmente. Pour  $\psi_{\min}$ , égal à  $\pi - \frac{\pi}{k}$ ,  $V'$  est maximum et vaut

$$V'_{\max} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{k}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{k}} \quad (I.17)$$

Pour  $\psi$  égal à  $\pi$ ,  $V'$  est nul.

#### I.1.2. Débit sur charge purement inductive

Quel que soit  $k$ , pendant une de ses alternances la tension  $v'_1$  est donnée par

$$\psi < \omega t < 2\pi - \psi, \quad v'_1 = V_m \sin \omega t \quad (I.8)$$

et l'autre alternance est identique au signe près.

• *Développement en série.*

La forme d'onde de  $v'_1$  (fig. I.2.5.) présentant à la fois la symétrie "de glissement" et la symétrie par rapport aux zéros, à condition de prendre un passage par zéro comme origine des temps, le développement en série ne comporte que des sinus impairs.

On peut calculer  $A'_p$  en intégrant sur un quart de période

$$A'_p = 4 \frac{V_m}{\pi/k} \int_{\psi}^{\pi} \sin \omega t \sin p k \omega t \, d\omega t$$

$$A'_p = V'_p \sqrt{2} = V_m \frac{2k}{\pi} \left\{ \frac{1}{pk-1} [\sin(pk-1) \pi - \sin(pk-1) \psi] \right. \\ \left. - \frac{1}{pk+1} [\sin(pk+1) \pi - \sin(pk+1) \psi] \right\} \quad (I.18)$$

Cette relation se simplifie si  $k$  est entier.

• *Valeur efficace.*

On peut également calculer  $V'$  sur un quart de période

$$V'^2 = \frac{4V_m^2}{2\pi/k} \int_{\psi}^{\pi} \sin^2 \omega t \, d\omega t = V_m^2 \frac{k}{\pi} \int_{\psi}^{\pi} (1 - \cos 2\omega t) \, d\omega t$$

$$V'^2 = \frac{V_m^2}{2} \frac{k}{\pi} (2\pi - 2\psi + \sin 2\psi) \quad (I.19)$$

Pour  $\psi_{\min}$ , soit pour  $\psi = \pi - \pi/2k$ ,  $V'$  est maximum et a pour valeur

$$V'_{\max} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{k}{\pi} \sin \frac{\pi}{k}} \quad (I.20)$$

I.1.3. Débit sur un récepteur résistif et inductif

Pendant sa période qui va de  $\omega t = \psi$  à  $\omega t = \psi + 2\pi/k$ , la tension  $v'_1$  est donnée par

$$\left. \begin{aligned} \psi < \omega t < \psi + \theta, & \quad v'_1 = V_m \sin \omega t \\ \psi + \pi/k < \omega t < \psi + \theta + \pi/k, & \quad v'_1 = -V_m \sin(\omega t - \pi/k) \end{aligned} \right\} \quad (I.12)$$

• Développement en série.

Le terme  $A'_p$  calculé à partir d'une demi-période a pour valeur

$$\begin{aligned}
 A'_p &= \frac{2V_m}{\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+\theta} \sin \omega t \sin p k \omega t \, d\omega t \\
 &= V_m \frac{k}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\theta} [\cos(pk-1) \omega t - \cos(pk+1) \omega t] \, d\omega t \\
 &= V_m \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{1}{pk-1} [\sin(pk-1)(\psi + \theta) - \sin(pk-1) \psi] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{pk+1} [\sin(pk+1)(\psi + \theta) - \sin(pk+1) \psi] \right\} \quad (I.21)
 \end{aligned}$$

De même le terme  $B'_p$  s'obtient en remplaçant  $\pi$  par  $\psi + \theta$  dans la relation (I.15) et s'écrit  $P$

$$\begin{aligned}
 B'_p &= V_m \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{1}{pk-1} [\cos(pk-1)(\psi + \theta) - \cos(pk-1) \psi] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{pk+1} [\cos(pk+1)(\psi + \theta) - \cos(pk+1) \psi] \right\} \quad (I.22)
 \end{aligned}$$

L'angle de conduction  $\theta$  étant donné par (I.11).

• Valeur efficace.

$$\begin{aligned}
 V'^2 &= \frac{1}{\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+\theta} V_m^2 \sin^2 \omega t \, d\omega t = \frac{k}{2\pi} V_m^2 \int_{\psi}^{\psi+\theta} (1 - \cos 2\omega t) \, d\omega t \\
 V'^2 &= \frac{V_m^2}{2} \frac{k}{\pi} \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2(\psi + \theta) + \frac{1}{2} \sin 2\psi \right] \quad (I.23)
 \end{aligned}$$

$V'$  varie toujours de  $V'_{\max}$  à zéro quand  $\psi$  va de  $\psi_{\min}$  à  $\pi$ .

Pour  $\psi_{\min}$ ,  $\theta = \pi/k$ , donc

$$V'_{\max} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{k}{2\pi} \sin 2\left(\psi_{\min} + \frac{\pi}{k}\right) + \frac{k}{2\pi} \sin 2\psi_{\min}} \quad (I.24)$$

#### I.1.4. Résultats. Caractéristiques

• On a représenté sur la planche I.2. les variations de la valeur efficace  $V'$  de la tension de sortie  $v'_1$  rapportée à celle  $V$ , égale à  $V_m/\sqrt{2}$ , des tensions de fréquence  $f$ , en fonction de  $\psi$ , pour diverses valeurs du coefficient de multiplication et de  $\cos \phi'$ .

Ces courbes montrent comment diminue  $V'$  quand  $\psi$  va de  $\psi_{\min}$  à  $\pi$ .

- A *facteur de multiplication*  $k$  donné, c'est pour le débit sur résistance ( $\cos\phi' = 1$ ) qu'on obtient  $\psi_{\min}$  le plus faible et la plus grande valeur possible de  $V'$ .

Mais à  $\psi$  donné, lorsque le fonctionnement est possible,  $V'$  croît quand  $\cos\phi'$  diminue. Cela est dû au "traînage" du courant qui prolonge la durée des conceptions : la tension  $v'_1$  égale  $V_m \sin\omega t$  seulement entre  $\omega t = \psi$  et  $\omega t = \pi$  quand le récepteur est purement résistif, entre  $\omega t = \psi$  et un angle supérieur à  $\pi$  quand la charge est inductive.

- Quand le *facteur de multiplication*  $k$  augmente,  $\psi_{\min}$  croît et le maximum possible pour  $V'$  diminue.

Mais ici encore, quand  $\psi$  est suffisant pour que le fonctionnement soit possible, à  $\psi$  et  $\cos\phi'$  donnés, la tension  $V'$  croît avec  $k$ . On a en effet  $2k$  portions de sinusoides par période  $T$  des tensions d'alimentation.

• Les planches I.3, I.4. et I.5. donnent les résultats de l'*analyse harmonique* respectivement pour  $k$  égal à  $3/2$ , à 2 et à 3.

En fonction de  $\psi$  et pour diverses valeurs de  $\cos\phi'$ , on a rappelé la valeur efficace  $V'$  de la tension  $v'_1$  et indiqué :

\* la valeur efficace  $V'_1$  du fondamental,

\* la valeur efficace  $V'_3$ ,  $V'_5$  et  $V'_7$  des harmoniques 3, 5 et 7.

Toutes ces tensions sont rapportées à  $V$ .

- A *facteur*  $k$  donné, le rapport  $V'_1/V$  décroît sans cesse quand  $\psi$  va de  $\psi_{\min}$  à  $\pi$ . Les valeurs des harmoniques varient beaucoup avec  $\psi$ , mais le maximum présenté par chaque harmonique est d'autant plus faible que son rang est plus élevé.

Pour  $\psi_{\min}$  le taux d'harmoniques est plus faible sur charge inductive que sur charge résistive. Mais pour les valeurs intermédiaires de  $\psi$ , on obtient des taux d'harmoniques comparables.

- La comparaison des courbes tracées pour divers *facteurs de multiplication* montre qu'elles ont la même allure générale.

C'est d'autant plus vrai que  $k$  est plus grand, car alors les portions de sinusoides formant la tension  $v'_1$  sont assimilables à des segments de droites. Quand  $k$  augmente, ces segments sont de plus en plus courts et de plus en plus voisins les uns des autres ; la forme d'onde de la tension  $v'_1$  et donc la valeur relative des harmoniques dépendent de  $\psi$  et de  $\cos\phi'$  mais plus guère de  $k$ .

C'est pour cela que nous avons limité à  $k = 3$  la reproduction des planches montrant l'*analyse harmonique* de la tension de sortie.

- On ne peut manquer de remarquer l'analogie entre ces caractéristiques et celles obtenues avec les gradateurs monophasés [10].

## I.2. Courants de sortie

Les tensions que peut délivrer un multiplicateur de fréquence étant fonctions du facteur de multiplication  $k$  mais aussi des caractéristiques du récepteur, il est nécessaire de calculer le courant qu'un montage peut fournir à un récepteur donné. Cela nous donnera en outre les contraintes en courant à prévoir pour les thyristors et les enroulements du transformateur.

Nous nous en tiendrons au calcul de la *valeur efficace*  $I'$  du courant  $i'_1$  et, plus particulièrement, de la valeur efficace maximum  $I'_{\max}$  c'est-à-dire correspondant à  $\psi_{\min}$ .

### I.2.1. Débit sur charge purement résistive

Lors du débit sur une résistance  $R$ , le courant  $i'_1$  est toujours égal à  $v'_1/R$ .

Donc

$$I'_{\max} = \frac{V'_{\max}}{R} = \frac{V}{R} \sqrt{1 - \frac{k}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{k}} \quad (I.25)$$

### I.2.2. Débit sur charge purement inductive

Le courant  $i'_1$  est donné, pendant son alternance positive, par

$$\psi < \omega t < 2\pi - \psi, \quad i'_1 = \frac{V_m}{L\omega} (\cos\psi - \cos\omega t) \quad (I.7)$$

Son alternance négative reproduit,  $\pi/k$  plus tard, son alternance positive.

Puisque  $\psi_{\min} = \pi - \pi/2k$ , pour le calcul de  $I'_{\max}$  on utilise l'expression suivante

$$\pi - \pi/2k < \omega t < \pi + \pi/2k, \quad i'_1 = -\frac{V_m}{L\omega} \left( \cos \frac{\pi}{2k} + \cos\omega t \right)$$

et

$$\begin{aligned}
 I'_{\max}{}^2 &= \frac{2}{2\pi/k} \frac{V_m^2}{L^2 \omega^2} \int_{\pi-\pi/2k}^{\pi+\pi/2k} (\cos \frac{\pi}{2k} + \cos \omega t)^2 dt \\
 &= \frac{k}{\pi} \frac{V_m^2}{L^2 \omega^2} \left[ \omega t \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2k} + 2 \cos \frac{\pi}{2k} \sin \omega t + \frac{\omega t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_{\pi-\pi/2k}^{\pi+\pi/2k} \\
 &= \frac{k}{\pi} \frac{V_m^2}{L^2 \omega^2} \left( \frac{\pi}{k} \cos^2 \frac{\pi}{2k} - 4 \cos \frac{\pi}{2k} \sin \frac{\pi}{2k} + \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{k} \right) \\
 &= \frac{V_m^2}{L^2 \omega^2} \left( \cos \frac{2\pi}{k} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{k}{\pi} \sin \frac{\pi}{k} \right) \\
 I'_{\max} &= \frac{V}{kL\omega} \sqrt{k^2 + 2k^2 \cos^2 \frac{\pi}{2k} - 3 \frac{k^3}{\pi} \sin \frac{\pi}{k}} \quad (I.26)
 \end{aligned}$$

### 1.2.3. Débit sur charge résistance et inductive

L'expression du courant  $i'_1$ , pendant son alternance positive, est donnée par la relation (I.10) :

$$i'_1 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (\sin \omega t - Q \cos \omega t + B e^{-\omega t/Q}),$$

$$\text{en posant } B = -(\sin \psi - Q \cos \psi) e^{\psi/Q},$$

et si  $\psi$  égale  $\psi_{\min}$ , cette alternance va de  $\omega t = \psi_{\min}$  à  $\omega t = \psi_{\min} + \pi/k$ .

D'où le calcul de  $I'_{\max}$

$$\begin{aligned}
 I'_{\max}{}^2 &= \frac{k}{\pi} \left( \frac{V_m}{R(1+Q^2)} \right)^2 \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min} + \pi/k} (\sin \omega t - Q \cos \omega t + B e^{-\omega t/Q})^2 dt \\
 &= \frac{k}{\pi} \left( \frac{V_m}{R(1+Q^2)} \right)^2 \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min} + \pi/k} \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} + Q^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} + B^2 e^{-2\omega t/Q} \right. \\
 &\quad \left. - Q \sin 2\omega t + 2B \sin \omega t e^{-\omega t/Q} \right. \\
 &\quad \left. - 2BQ \cos \omega t e^{-\omega t/Q} \right) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{\pi} \left( \frac{V_m}{R(1+Q^2)} \right)^2 \left[ \frac{1+Q^2}{2} \omega t - \frac{1-Q^2}{4} \sin 2\omega t - \frac{Q}{2} B^2 e^{-2\omega t/Q} \right. \\
&\quad \left. + \frac{Q}{2} \cos 2\omega t + 2B \frac{e^{-\frac{\omega t}{Q}}}{1 + \frac{1}{Q^2}} \left( -\frac{1}{Q} \sin \omega t - \cos \omega t \right) \right. \\
&\quad \left. - 2BQ \frac{e^{-\frac{\omega t}{Q}}}{1 + \frac{1}{Q^2}} \left( -\frac{1}{Q} \cos \omega t + \sin \omega t \right) \right]_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min} + \pi/k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\max}^2 &= \frac{k}{\pi} \left( \frac{V_m}{R(1+Q^2)} \right)^2 \left\{ \frac{1+Q^2}{2} \frac{\pi}{k} - \frac{1-Q^2}{2} \sin \frac{\pi}{k} \cos \left( 2\psi_{\min} + \frac{\pi}{k} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{Q}{2} B^2 \left( e^{-2\pi/kQ} - 1 \right) e^{-2\psi_{\min}/Q} \right. \\
&\quad \left. - Q \sin \frac{\pi}{k} \sin \left( 2\psi_{\min} + \frac{\pi}{k} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2QB \left[ \sin \psi_{\min} - \sin \left( \psi_{\min} + \frac{\pi}{k} \right) e^{-\pi/kQ} \right] e^{-\psi_{\min}/Q} \right\}
\end{aligned}$$

avec  $B = - (\sin \psi_{\min} - Q \cos \psi_{\min}) e^{\psi_{\min}/Q}$

Si on met en évidence l'impédance  $Z'$  à la pulsation  $k\omega$

$$Z' = \sqrt{R^2 + L^2 k^2 \omega^2} = R \sqrt{1 + k^2 Q^2}, \quad (\text{I.27})$$

en posant

$$A = - \sin \psi_{\min} + Q \cos \psi_{\min} \quad (\text{I.28})$$

il vient

$$\begin{aligned}
I_{\max}^2 &= \frac{V^2}{Z'^2} \frac{1+k^2 Q^2}{(1+Q^2)^2} \left\{ 1 + Q^2 - (1-Q^2) \frac{k}{\pi} \sin \frac{\pi}{k} \cos \left( 2\psi_{\min} + \frac{\pi}{k} \right) \right. \\
&\quad \left. + Q \frac{k}{\pi} A^2 (1 - e^{-2\pi/k}) - 2Q \frac{k}{\pi} \sin \frac{\pi}{k} \sin \left( 2\psi_{\min} + \frac{\pi}{k} \right) \right. \\
&\quad \left. + 4Q \frac{k}{\pi} A \left[ \sin \psi_{\min} - \sin \left( \psi_{\min} + \frac{\pi}{k} \right) e^{-\pi/kQ} \right] \right\} \quad (\text{I.29})
\end{aligned}$$

#### 1.2.4. Résultats. Caractéristiques. Remarque

• Pour diverses valeurs de  $k$ , en fonction de  $\cos\phi'$ , on a tracé, sur la planche I.6, les variations du maximum du courant efficace dans la charge  $I'_{\max}$ . Cette valeur efficace est rapportée à celle  $V/Z'$  qu'on obtiendrait si le récepteur était alimenté par des tensions sinusoïdales de pulsation  $k\omega$  et d'amplitude  $V_m$ .

$$Z' = R \text{ ou } kL\omega \text{ ou } R \sqrt{1 + k^2 Q^2}$$

$$\cos\phi' = \frac{R}{Z'} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 Q^2}}$$

On a rappelé (en traits interrompus) le maximum de valeur efficace des tensions de sortie  $V'$  [(relations (I.17), (I.20) et (I.24)].

- A facteur de multiplication donné,  $I'_{\max}/V/Z'$  est, comme  $V'_{\max}/V$ , maximum pour  $\cos\phi'$  égal à 1. Ces deux rapports diminuent d'abord rapidement quand  $\cos\phi'$  diminue puis varient peu pour les faibles  $\cos\phi'$ . Cela tient à l'allure des courbes  $\psi_{\min} = f(\cos\phi')$  de la planche I.1.

- A  $\cos\phi'$  donné,  $I'_{\max}/V/Z'$  diminue quand  $k$  augmente, à cause de la diminution de  $V'_{\max}/V$ .

- Le rapport  $I'_{\max}/V/Z'$  est égal à  $V'_{\max}/V$  lorsque  $\cos\phi'$  vaut 1, puis il lui est inférieur car l'impédance présentée par le récepteur aux harmoniques est plus grande que celle qu'il présente au fondamental. Il tend à retrouver la valeur de  $V'_{\max}/V$  lorsque  $\cos\phi'$  tend vers 0 car l'amplitude relative des harmoniques correspondant au fonctionnement à  $\psi_{\min}$  est de plus en plus faible.

• *Remarque.* Il n'est pas utile d'effectuer l'analyse harmonique des courants de sortie ; elle se déduit directement de celle des tensions.

Si  $V'_1, V'_3, V'_5, \dots, V'_p$  sont les valeurs efficaces des harmoniques des tensions,  $I'_1, I'_3, I'_5, \dots, I'_p$  celles des harmoniques des courants,

$$I'_1 = \frac{V'_1}{\sqrt{R^2 + L^2 k^2 \omega^2}} = \frac{V'_1}{R \sqrt{1 + k^2 Q^2}}$$

$$I'_p = \frac{V'_p}{\sqrt{R^2 + L^2 k_p^2 \omega^2}} = \frac{V'_p}{R \sqrt{1 + k_p^2 Q^2}}$$

$$\frac{I'_p}{I'_1} = \frac{V'_p}{V'_1} \sqrt{\frac{1 + k^2 Q^2}{1 + k_p^2 Q^2}}$$

Plus  $Q$  et  $p$  sont grands, plus l'importance relative d'un harmonique du courant est faible devant celle de l'harmonique correspondant de la tension.

• Les *vérifications expérimentales* des caractéristiques tracées pour les tensions et courants de sortie ne soulèvent pas de difficulté particulière. Les écarts entre les valeurs mesurées et celles calculées sont faibles et s'expliquent facilement par l'imperfection des éléments du montage et des appareils de mesure.

A titre d'illustration nous reproduisons (fig. I.3.1.) les oscillogrammes relevés pour  $k$  égal à 3, lors du débit sur une charge très inductive pour trois valeurs de  $\psi$ . A côté de chaque cliché donnant la forme d'onde de la tension  $v_1'$  et du courant  $i_1'$  nous reproduisons le spectre de la tension  $v_1'$

La première série de clichés a été effectuée pour  $\psi_{\min}$ ,

La seconde pour le maximum de l'harmonique 3,

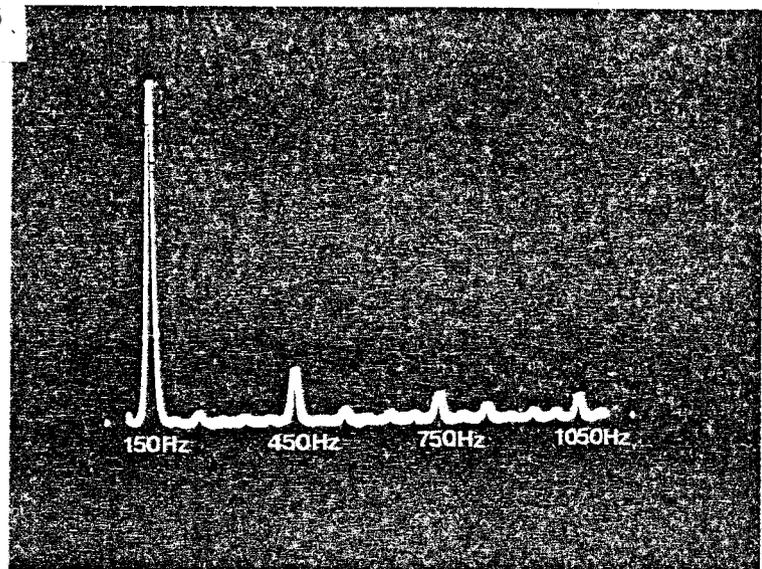
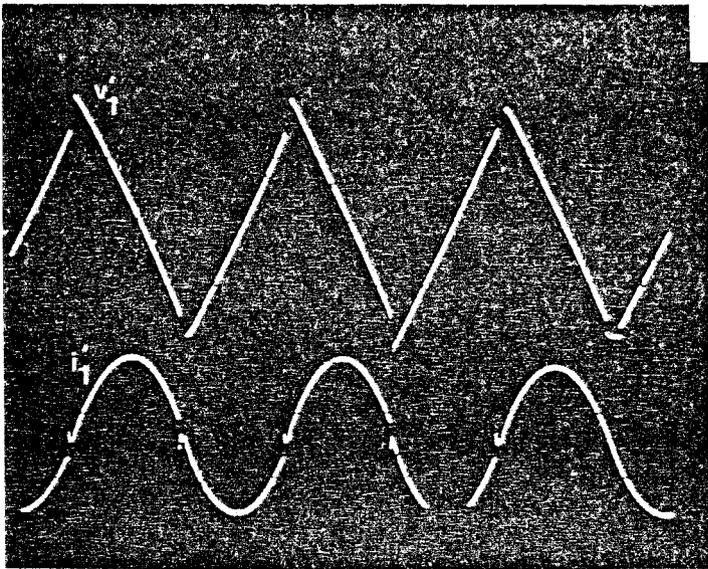
La troisième pour le premier minimum de l'harmonique 5.

Les valeurs de  $\psi$  lues sur ces relevés et les amplitudes correspondantes sont très voisines de celles données sur la planche I.5. pour  $\cos\phi'$  nul.

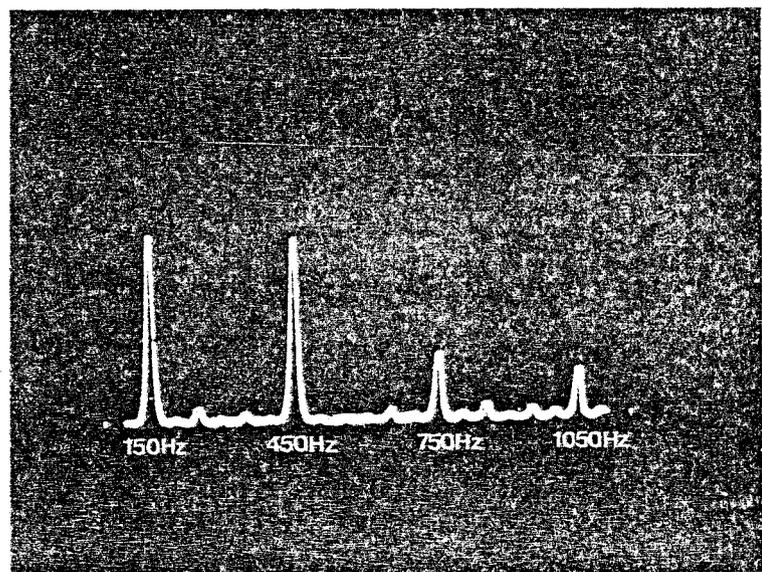
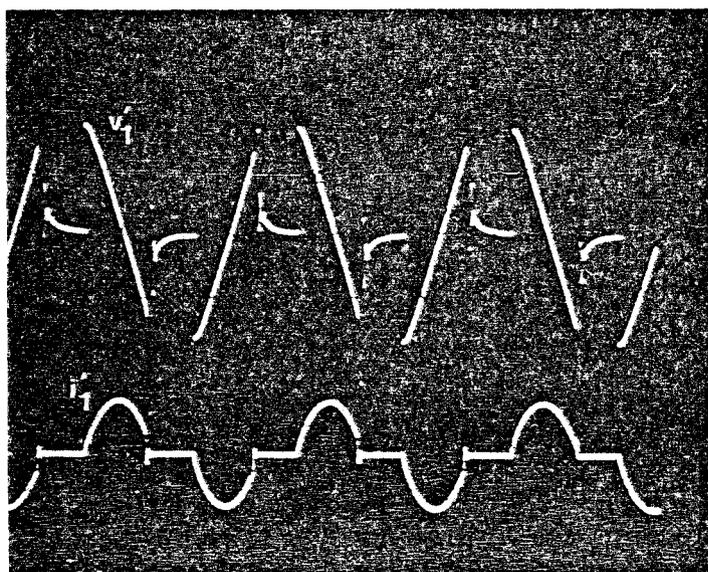
## II. FACTEURS D'UTILISATION

Les multiplicateurs de fréquence que nous étudions nécessitent la fourniture par les enroulements secondaires du transformateur de beaucoup de tensions secondaires et l'emploi de beaucoup de thyristors. Ils n'utilisent ces tensions et ces redresseurs que par intermittence, donc pas dans les meilleures conditions. D'où la nécessité de calculer des facteurs d'utilisation, comme on le fait par exemple pour les montages redresseurs [30], afin de voir quels facteurs de multiplication on peut obtenir dans des conditions économiques acceptables.

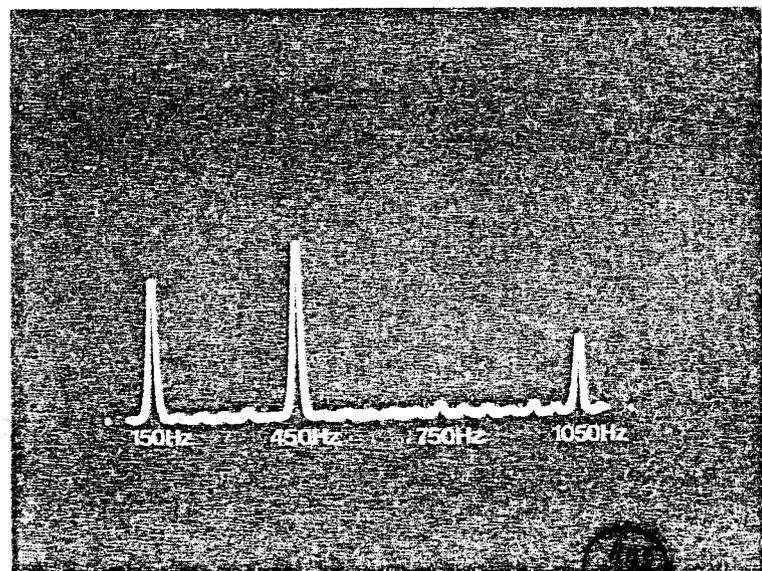
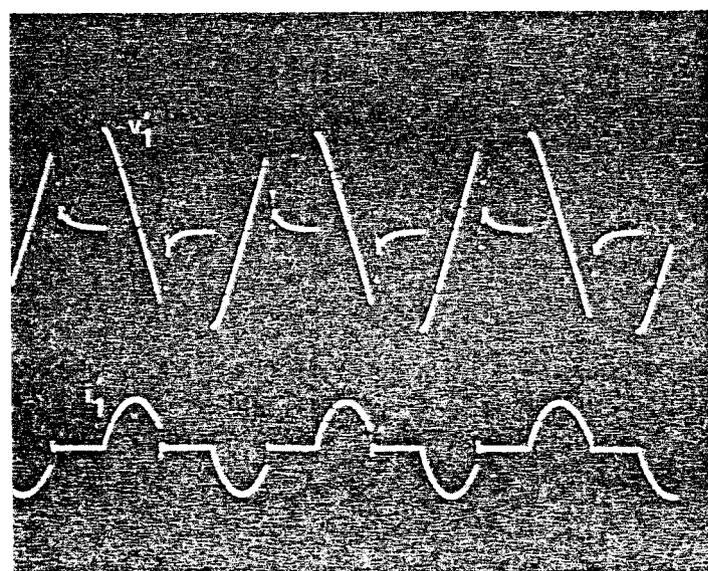
Cette étude présente une petite difficulté. Comme nous venons de le voir, un montage donné alimenté sous tension constante délivre des tensions de sortie dont le maximum dépend des caractéristiques du récepteur. Les facteurs d'utilisation dépendent non seulement du montage considéré mais de la nature de la charge.



$\psi \approx 151^\circ$



$\psi \approx 160^\circ$



$\psi \approx 162,5^\circ$



FIG. I.3.1

## II.1. Facteur d'utilisation des enroulements secondaires

### II.1.1. Définition. Expressions

Nous désignerons par facteur d'utilisation des enroulements secondaires  $f_S$  le rapport entre la puissance apparente maximale que peut débiter le montage multiplicateur et la puissance apparente que pourrait débiter le transformateur si, relié à un récepteur  $q$ phasé équilibré, il débitait des courants sinusoïdaux.

$$f_S = \frac{q \cdot V'_{\max} I'_{\max}}{qn_S V I_{Snom}}$$

avec

- $q$  nombre de phases du multiplicateur,
- $qn_S$  nombre de phases secondaires du transformateur,
- $V$  valeur efficace des tensions secondaires,
- $I_{Snom}$  valeur efficace nominale des courants secondaires,
- $V'_{\max}$  et  $I'_{\max}$  valeurs efficaces des grandeurs de sortie du multiplicateur pour  $\psi_{\min}$ .

Le nombre de phases secondaires étant un multiple du nombre de phases du multiplicateur, on peut raisonner sur une seule phase de celui-ci

$$f_S = \frac{1}{n_S} \frac{V'_{\max}}{V} \frac{I'_{\max}}{I_{Snom}} \quad (I.30)$$

- Si  $k$  est entier et impair,

il faut  $k$  tensions secondaires par tension de sortie, telle  $v'_1$  ;  
chaque phase débite 2 alternances du courant  $i'_1$  sur  $2k$ .

Donc  $n_S = k$

et, quand une phase débite  $I_{Snom}$ ,  $I'_{\max} = \sqrt{k} I_{Snom}$

$$f_S = \frac{1}{k} \frac{V'_{\max}}{V} \cdot \frac{\sqrt{k} I_{Snom}}{I_{Snom}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{V'_{\max}}{V} \quad (I.31)$$

- Si  $k$  est entier et pair,

il faut  $2k$  tensions secondaires par tension de sortie,

chaque phase débite une alternance de  $i_1'$  sur  $2k$

$$n_S = 2k ; I'_{\max} = \sqrt{2k} I_{Snom}$$

$$f_S = \frac{1}{2k} \frac{V'_{\max}}{V} \frac{\sqrt{2k} I_{Snom}}{I_{Snom}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \frac{V'_{\max}}{V} \quad (I.32)$$

- Si  $k$  est fractionnaire égal à  $N/D$ ,

il faut  $2N$  phases secondaires et  $2N$  thyristors par tension de sortie

$$n_S = 2N ; I'_{\max} = \sqrt{2N} I_{Snom}$$

Le facteur d'utilisation est donc égal à

$$f_S = \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{V'_{\max}}{V} \quad (I.33)$$

### 11.1.2. Valeurs obtenues. Remarque

• Le haut de la planche I.7. donne, pour quelques valeurs de  $k$ , les variations de  $f_S$  en fonction de  $\cos\phi'$ . Les courbes ont la même allure que celles donnant  $V'_{\max}/V$  puisqu'elles s'en déduisent par un changement d'échelle.

Pour  $k$  entier impair la multiplication par  $1/\sqrt{k}$  réduit d'autant plus  $f_S$  que  $k$  est plus grand.

Pour  $k$  entier pair, la multiplication par  $1/\sqrt{2k}$  est encore plus défavorable. Ainsi le facteur d'utilisation obtenu pour  $k = 2$  est peu supérieur à celui obtenu pour  $k = 3$ .

Pour  $k$  fractionnaire, alors que c'est  $N/D$  qui donne le rapport  $V'_{\max}/V$ , c'est  $N$  seulement qui affecte le passage de ce rapport à  $f_S$ . La réduction est plus sensible que pour les valeurs entières de  $k$  voisines.

• On peut déjà remarquer que lorsque  $k$  est entier et faible (2 et 3 par exemple) on obtient des valeurs de  $f_S$  assez bonnes et cela d'autant plus que, comme nous l'avons signalé à la fin du premier chapitre, on peut obtenir les tensions secondaires avec un excellent facteur d'utilisation des spires.

## II.2. Facteur d'utilisation des thyristors

### II.2.1. Définition. Expressions

- Les deux principaux facteurs intervenant dans le choix des thyristors sont :

$v_{Th_{max}}$ , valeur instantanée maximale de la tension qu'ils doivent pouvoir bloquer en direct ou en inverse,

$I_{Th_{max}}$ , valeur efficace maximale du courant qu'ils doivent débiter.

Aussi définit-on le facteur d'utilisation des thyristors par

$$f_{Th} = \frac{V'_{max} I'_{max}}{n_{Th} v_{Th_{max}} I_{Th_{max}}}, \quad (I.34)$$

$n_{Th}$  désignant le nombre de thyristors nécessaires pour obtenir une tension de sortie.

- Nous avons vu au chapitre 2 que  $v_{Th_{max}}$  dépend, pour un montage multiplicateur donné, de l'angle  $\psi$  du déblocage des thyristors. En pratique on choisit le calibre en tension de ceux-ci en prenant le cas le plus défavorable, or nous avons vu qu'on ne pouvait trouver de valeur de  $v_{Th_{max}}$  supérieure à celle rencontrée pour  $\cos\phi'$  égal à 1 et la valeur minimale de  $\psi$  correspondant à ce type de récepteur. C'est donc cette valeur de la tension que nous adoptons pour le calcul de  $f_{Th}$ .

- Si  $k$  est entier et impair,

$$n_{Th} = 2k ; I_{Th_{max}} = I'_{max} / \sqrt{2k} ;$$

$$v_{Th_{max}} = V \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{2k} + \sin \frac{\pi}{k} \right). \quad (I.3)$$

Donc

$$f_{Th} = \frac{1}{n_{Th}} \frac{V'_{max}}{V} \frac{V}{v_{Th_{max}}} \frac{I'_{max}}{I_{Th_{max}}}$$

a pour expression

$$f_{Th} = \frac{1}{2k} \frac{V'_{max}}{V} \frac{V}{V \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{2k} + \sin \frac{\pi}{k})} \sqrt{2k}$$

$$f_{Th} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2k} + \sin \frac{\pi}{k}} \frac{V'_{max}}{V} \quad (I.35)$$

- Si  $k$  est entier et pair,

$$n_{Th} = 2k ; I_{Th_{max}} = I'_{max} / \sqrt{2k} ;$$

$$v_{Th_{max}} = V \sqrt{2} (1 + \sin \frac{\pi}{k}) \quad (I.4)$$

On en déduit

$$f_{Th} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{k}} \frac{V'_{max}}{V} \quad (I.36)$$

- Si  $k$  est fractionnaire, de la forme  $k = N/D$ ,

$$n_{Th} = 2N, I_{Th_{max}} = I'_{max} / \sqrt{2N}$$

Les relations (I.5) et (I.6) donnent :

$$\text{pour } k < 2, v_{Th_{max}} = 2 V \sqrt{2},$$

$$\text{pour } k > 2 \text{ et } N \text{ impair, } v_{Th_{max}} = V \sqrt{2} (\sin \frac{\pi}{k} + \cos \frac{\pi}{2N}),$$

$$\text{pour } k > 2 \text{ et } N \text{ pair, } v_{Th_{max}} = V \sqrt{2} (1 + \sin \frac{\pi}{k}).$$

D'où les expressions de  $f_{Th}$  :

$$\left. \begin{aligned} k < 2, f_{Th} &= \frac{1}{4\sqrt{N}} \frac{V'_{max}}{V} \\ k > 2, N \text{ impair, } f_{Th} &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k} + \cos \frac{\pi}{2N}} \frac{V'_{max}}{V} \\ k > 2, N \text{ pair, } f_{Th} &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{k}} \frac{V'_{max}}{V} \end{aligned} \right\} \quad (I.37)$$

### 11.2.2. Caractéristiques

Les caractéristiques donnant  $f_{Th}$  en fonction de  $\cos\phi'$ , pour diverses valeurs de  $k$  (bas de la planche I.7) ont encore l'allure des caractéristiques donnant  $V'_{max}/V$  puisque chacune s'en déduit grâce à la multiplication par un facteur constant.

Pour  $k$  entier ce facteur est d'autant plus faible que  $k$  est plus grand avec toutefois une légère supériorité lorsque  $k$  est impair.

Pour  $k$  fractionnaire, c'est le numérateur de la fraction qui intervient le plus nettement dans le passage de  $V'_{max}/V$  à  $f_{Th}$ .

Les valeurs relativement faibles trouvées pour  $f_{Th}$  ne doivent pas surprendre ; elles tiennent à la définition adoptée pour ce facteur. Avec cette définition, le facteur d'utilisation des bons montages redresseurs est inférieur à 0,30.

### III. COMPARAISON DES DIVERS MULTIPLICATEURS

• A la fin de cette première partie, il est intéressant de comparer les divers multiplicateurs de la famille générale que nous venons d'étudier.

Un montage est d'autant plus performant :

- qu'il délivre des tensions de fréquence multiple de meilleure qualité, c'est-à-dire comportant moins d'harmoniques,
- qu'il nécessite un transformateur plus facile à construire, c'est-à-dire ayant un nombre de phases plus réduit,
- qu'il nécessite moins de thyristors,
- qu'il utilise mieux les enroulements secondaires du transformateur,
- qu'il utilise mieux les thyristors.

L'étude des caractéristiques des tensions a montré que leur qualité était voisine quel que soit le facteur de multiplication  $k$ . La comparaison doit donc porter sur

$n_S$  et  $n_{Th}$  qui doivent être aussi faibles que possible

$f_S$  et  $f_{Th}$  qui doivent être aussi grands que possible

en étant d'autant plus tolérant qu'un montage multiplicateur remplit plus sa mission, c'est-à-dire que  $k$  est plus grand.

- Nous avons été amenés à distinguer trois groupes

ceux donnant  $k$  entier et impair,

ceux donnant  $k$  entier et pair,

ceux donnant  $k$  fractionnaire.

Les deux premiers ont des performances qui varient de façon comparable : plus  $k$  est grand, plus  $n_S$  et  $n_{Th}$  sont grands, plus  $f_S$  et  $f_{Th}$  sont faibles. Sauf cas particulier, l'obtention de valeurs élevées de  $k$  entraîne un coût trop élevé et il faut s'orienter vers d'autres types de convertisseurs.

Les montages à  $k$  entier impair ont une supériorité sur ceux à  $k$  pair, ils nécessitent  $k$  tensions secondaires au lieu de  $2k$  et la relation donnant  $f_S$  leur est plus favorable. On peut donc envisager d'utiliser ce type de montage pour des valeurs de  $k$  plus grandes si  $k$  est impair.

Les montages à  $k$  fractionnaire, de la forme  $k = N/D$ , sont a priori peu intéressants : la plupart de leurs performances évoluent comme celles des multiplicateurs à  $k$  entier pair et égal à  $N$  alors qu'ils ne multiplient la fréquence que par  $N/D$ . Toutefois la marche à  $k = N/D$  peut n'être qu'un mode particulier de fonctionnement d'un montage pouvant assurer la multiplication par  $N$ .

• Pour illustrer ces remarques générales nous avons, pour quelques valeurs de  $k$ , reporté dans le tableau I.1. les valeurs de  $n_S$ , de  $n_{Th}$  et celles de  $f_S$  et  $f_{Th}$  obtenues lorsque  $\cos\phi'$  est égal à 1.

Nous avons mis sur la même ligne les valeurs correspondant à des montages du même groupe (impair, pair, fractionnaire).

Tableau I.1.

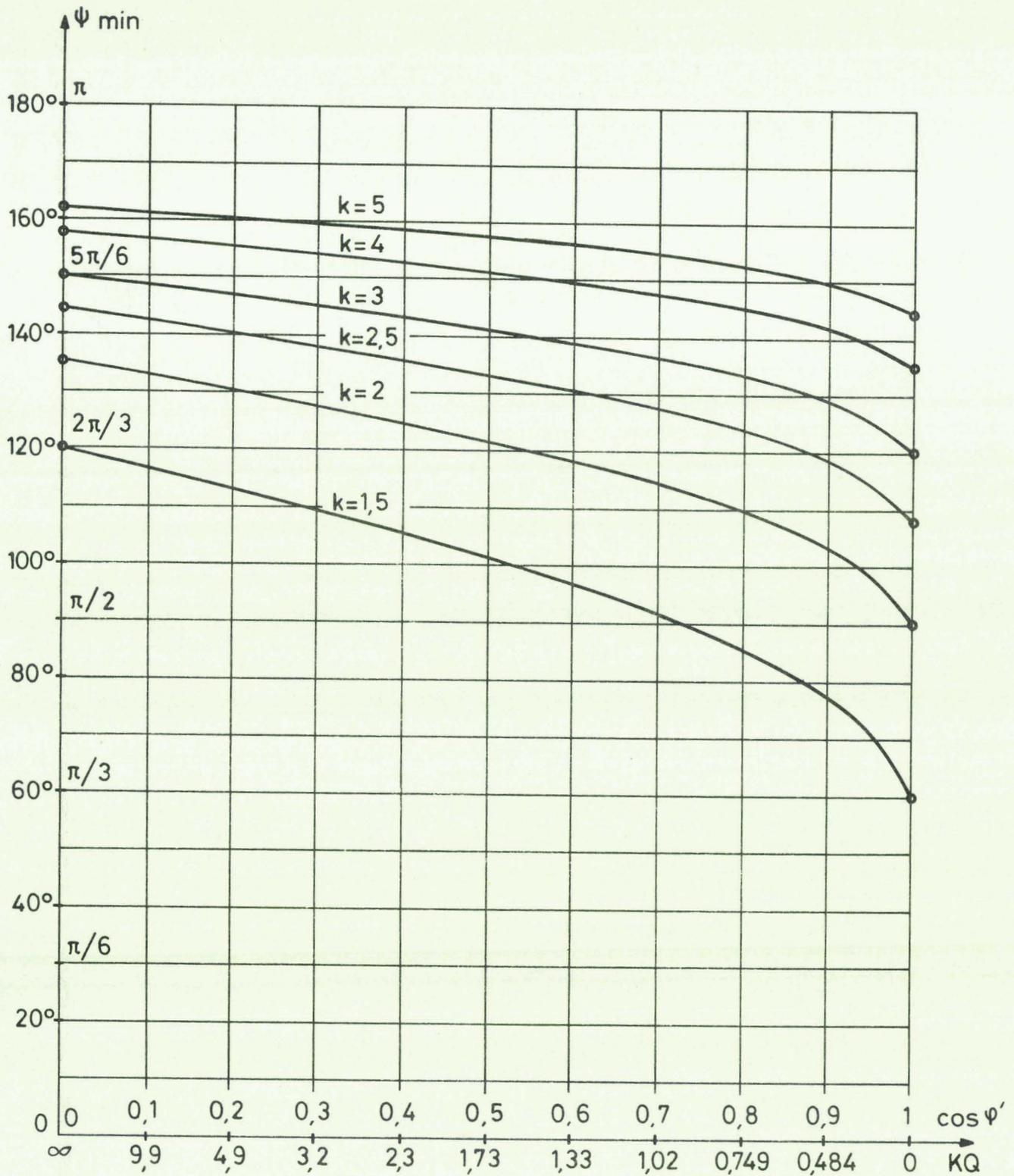
$k$	4/3	3/2	2	5/2	3	7/2	4	5	6	7	8	9
$n_S$	8	6	4	10	3	14	8	5	12	7	16	9
$n_{Th}$	8	6	4	10	6	14	8	10	12	14	16	18
$f_S$	0,39	0,45	0,50	0,277	0,442	0,181	0,213	0,221	0,120	0,136	0,079	0,094
$f_{Th}$	0,138	0,159	0,177	0,103	0,128	0,073	0,088	0,072	0,057	0,048	0,040	0,035

Ce tableau montre bien la dégradation générale des performances quand  $k$  augmente et les résultats médiocres obtenus pour les valeurs fractionnaires de  $k$  compte-tenu du facteur de multiplication obtenu.

Trois montages présentent un réel intérêt.

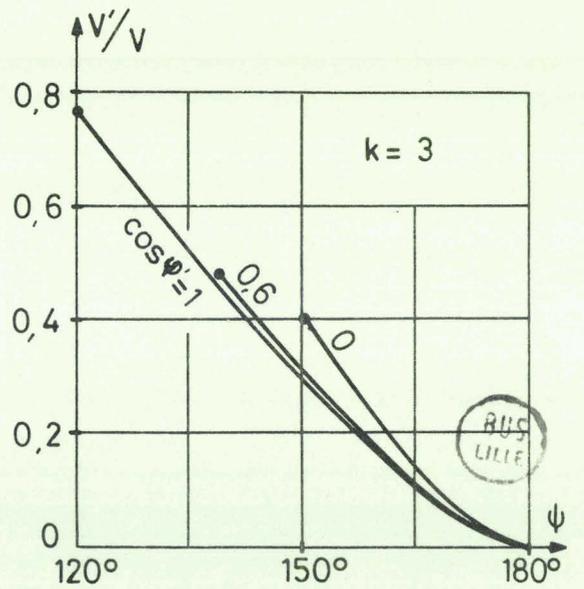
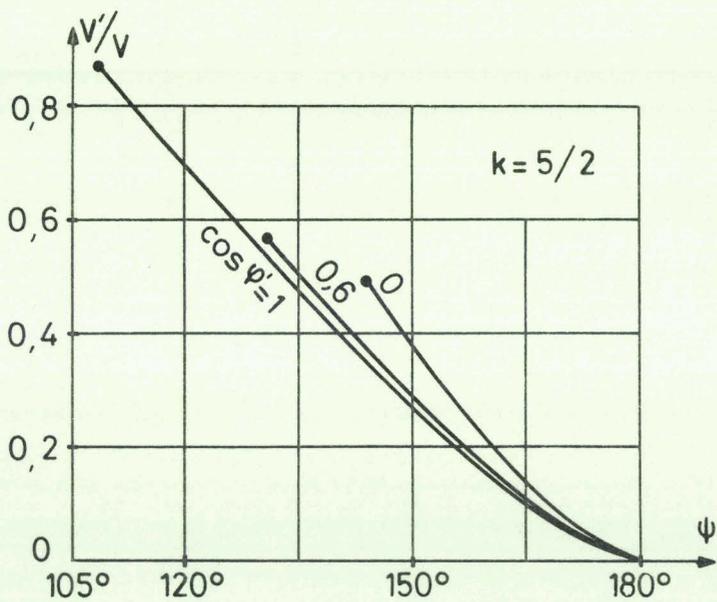
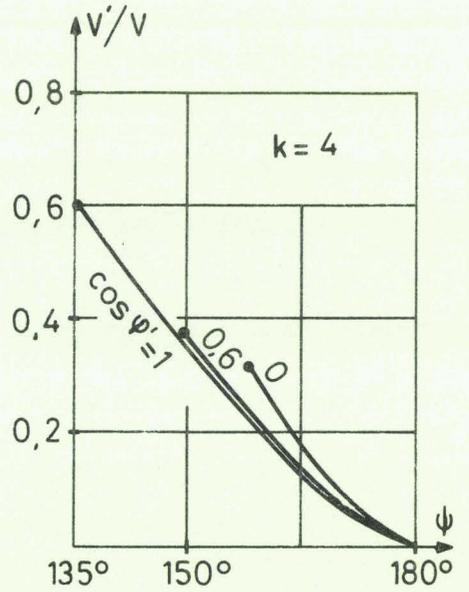
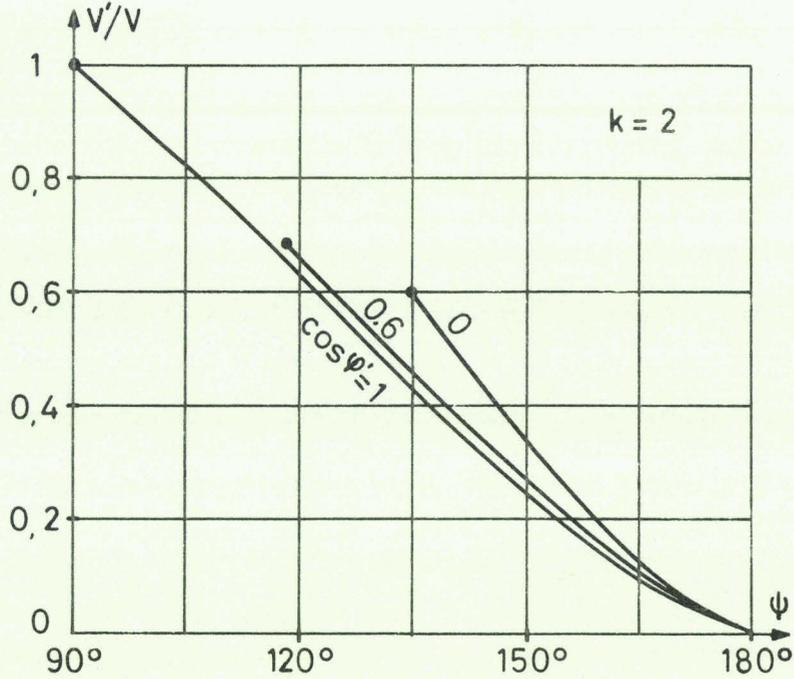
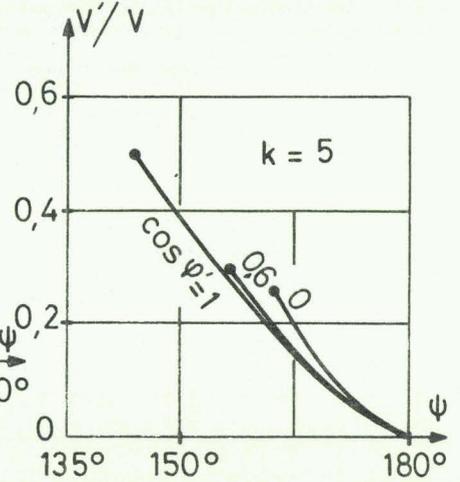
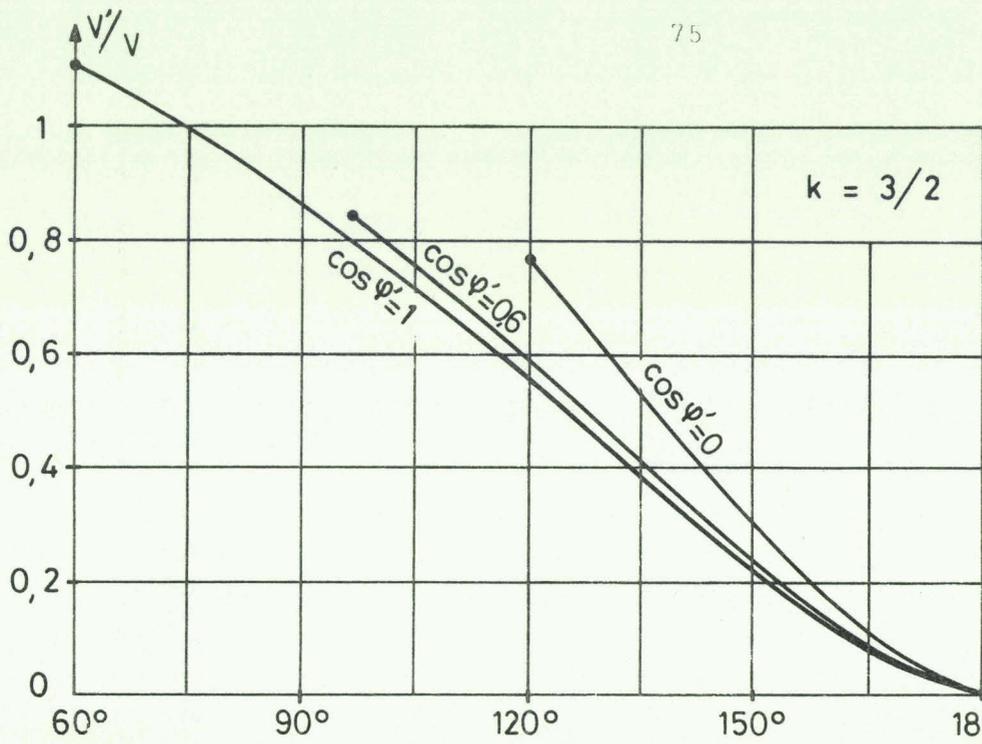
- Le doubleur de fréquence. C'est normal ; 2 est le plus faible des nombres entiers supérieur à 1.
- Le tripleur de fréquence. Comparé au précédent, il nécessite 6 thyristors au lieu de 4 mais 3 tensions secondaires au lieu de 4. Ses valeurs de  $f_S$  et  $f_{Th}$  ne sont que légèrement inférieures. Cela tient au fait que 3 est impair.
- Le quadrupleur de fréquence, à un titre moindre il est vrai. Ses caractéristiques sont nettement moins bonnes que celles des deux autres. Mais il permet d'obtenir, outre  $k = 4$ , les deux autres rapports  $k = 2$  et  $k = 4/3$ .

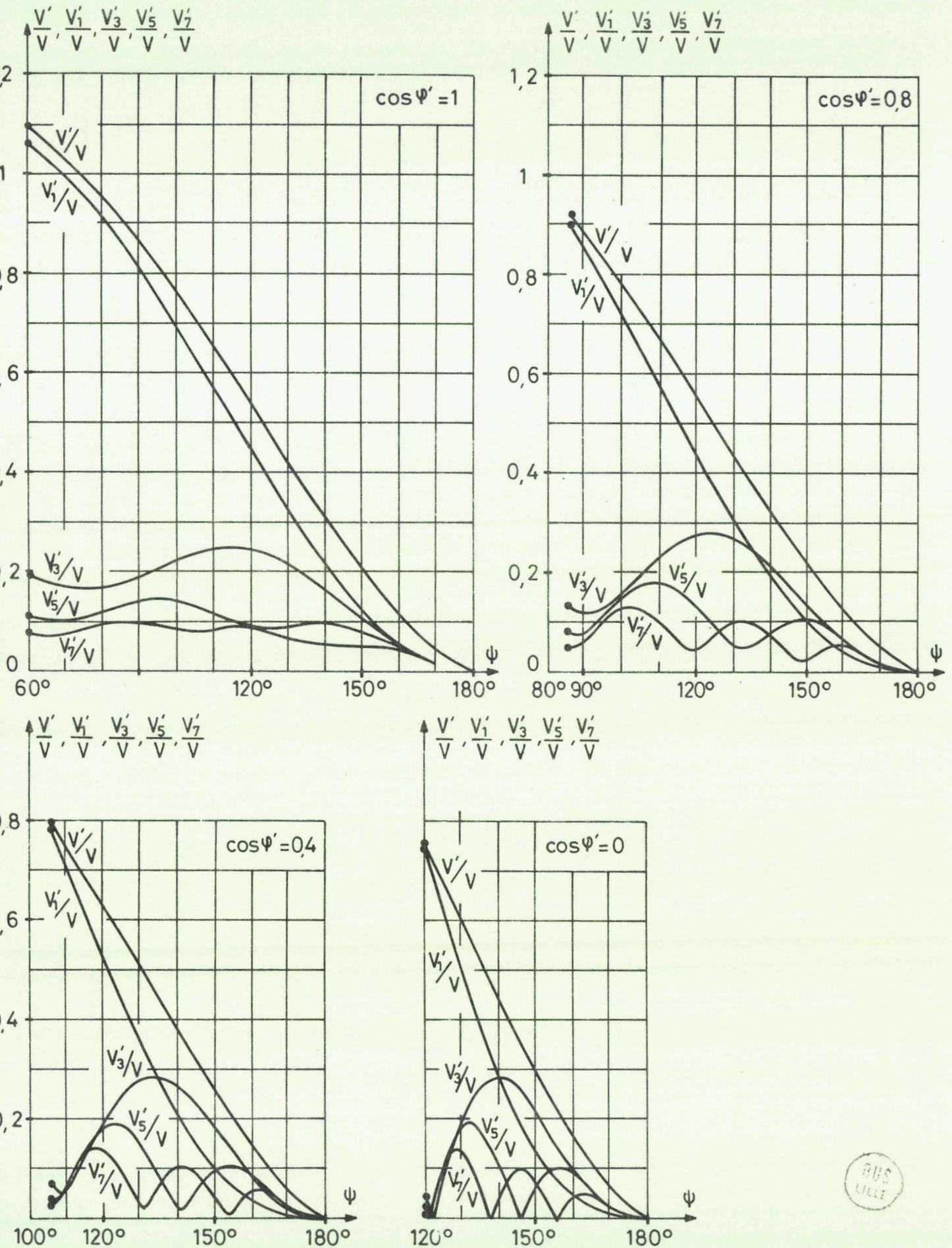
Cette étude de la famille générale va nous servir de base de référence pour juger de la qualité des autres montages, essentiellement des doubleurs ou des tripleurs de fréquence, que nous allons examiner dans les deux autres parties de ce mémoire.



PL. I.1. ANGLE MINIMUM DE RETARD AU DEBLOCAGE EN FONCTION DU FACTEUR DE PUISSANCE  
DU RECEPTEUR POUR DIVERSES VALEURS DU FACTEUR DE MULTIPLICATION.

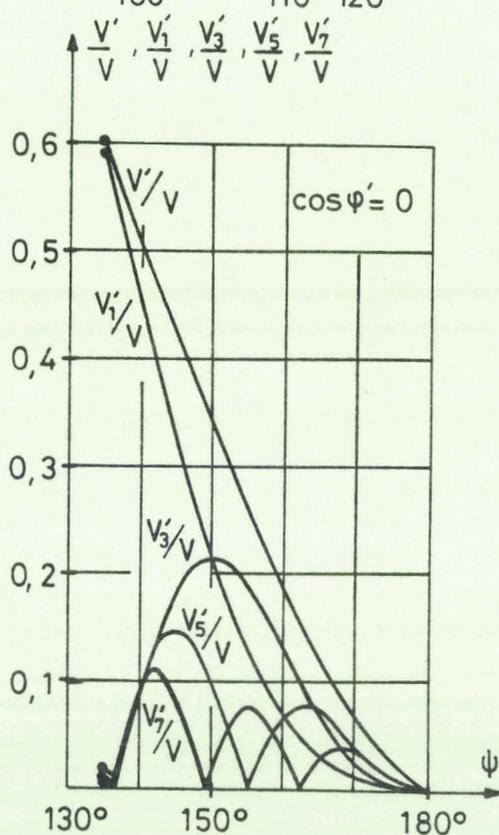
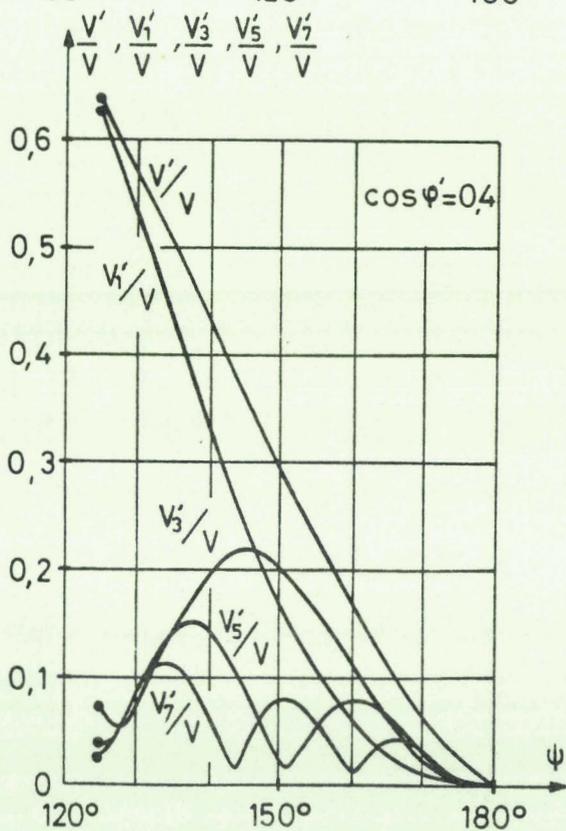
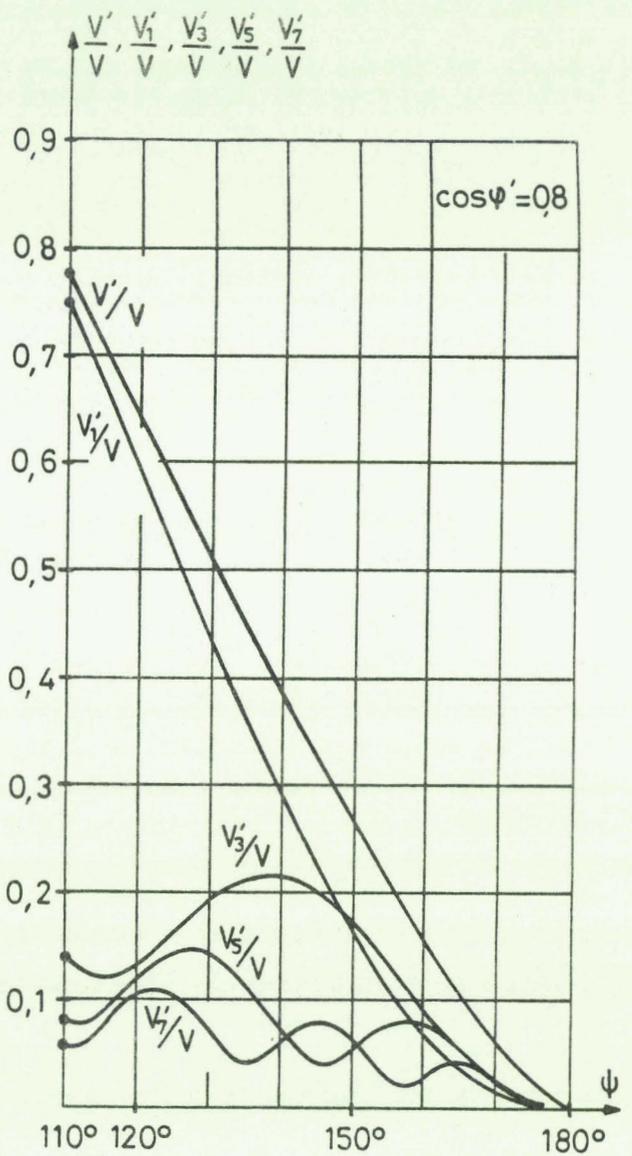
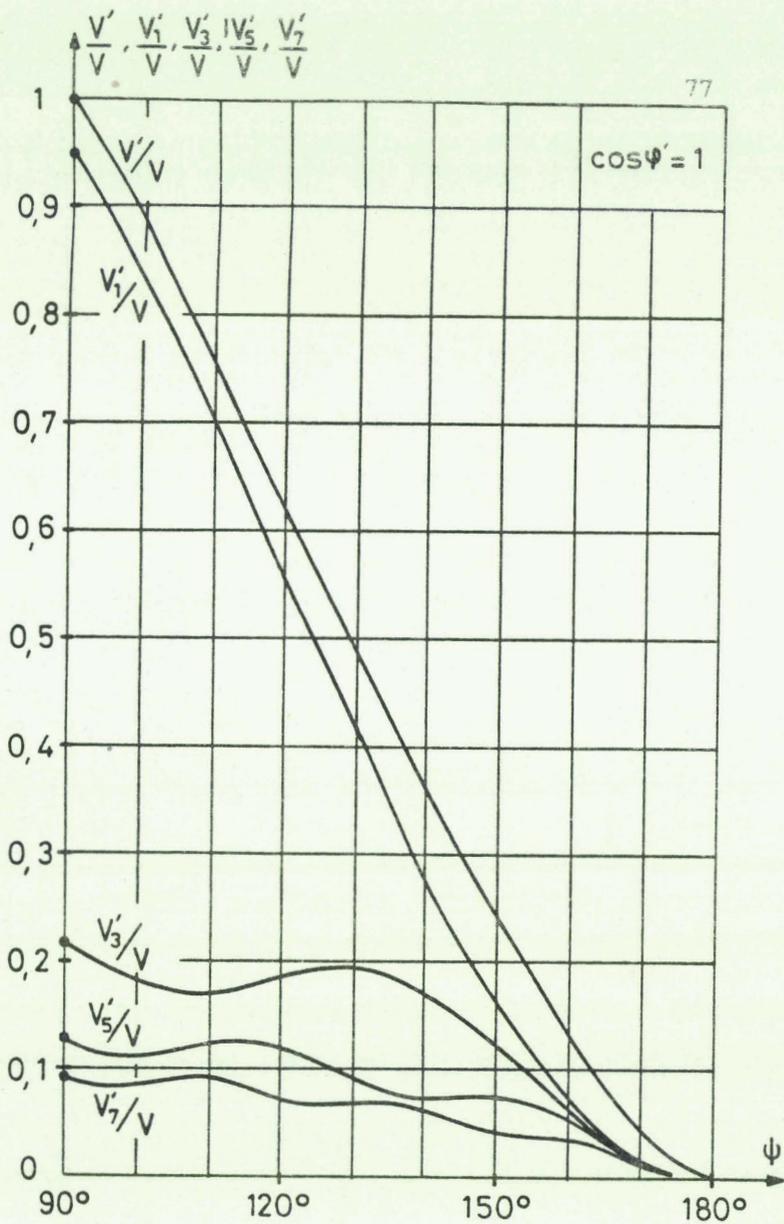
MULTIPLICATEURS. FAMILLE GENERALE.



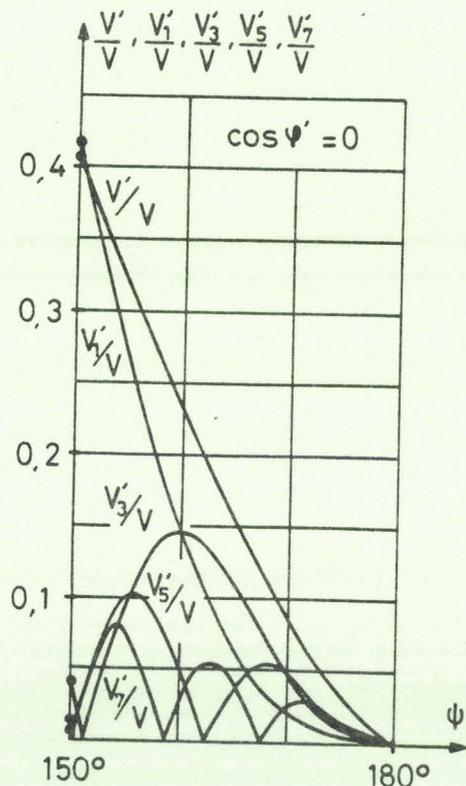
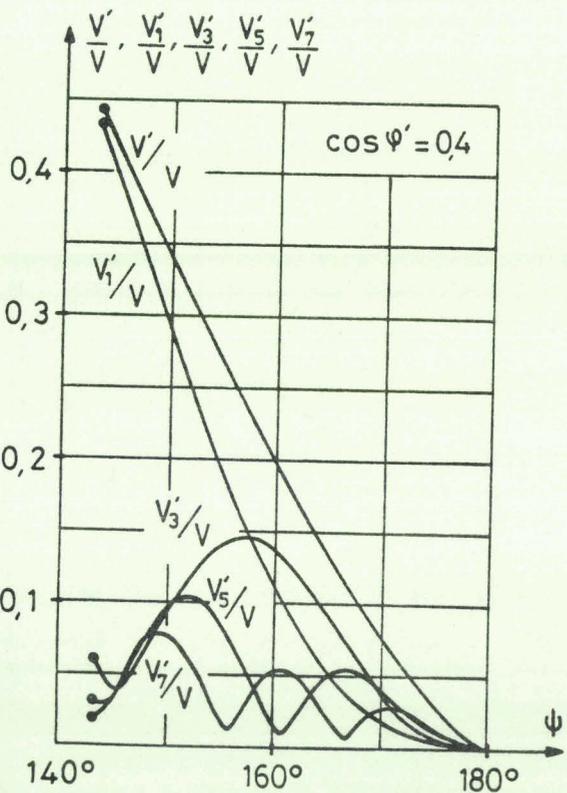
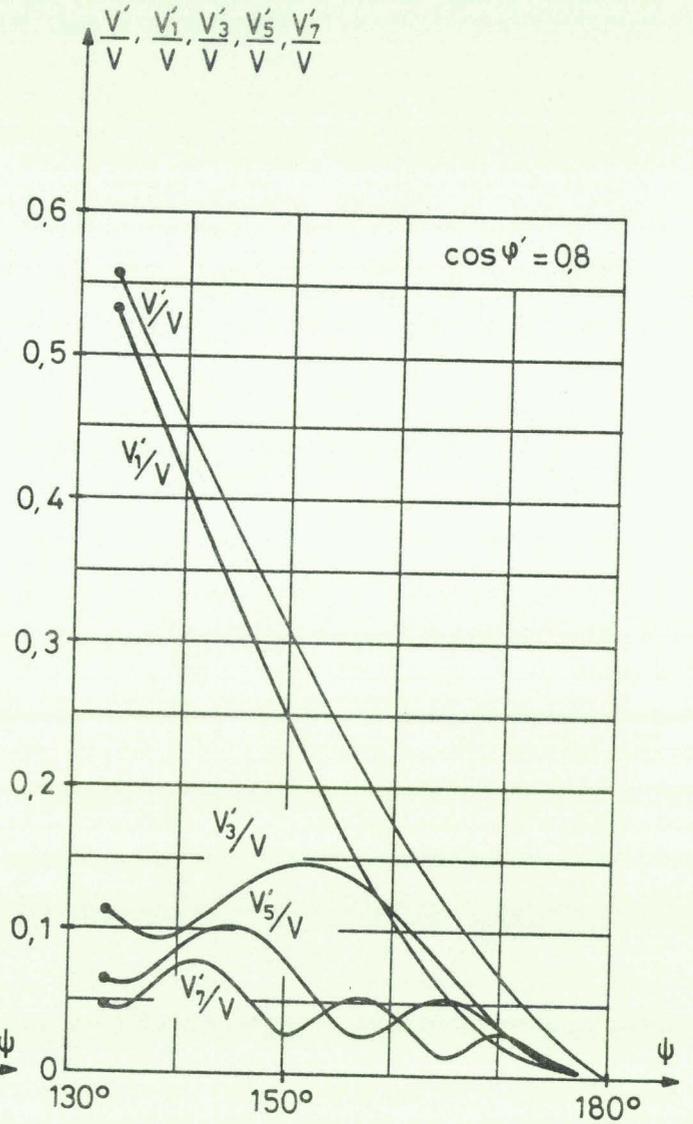
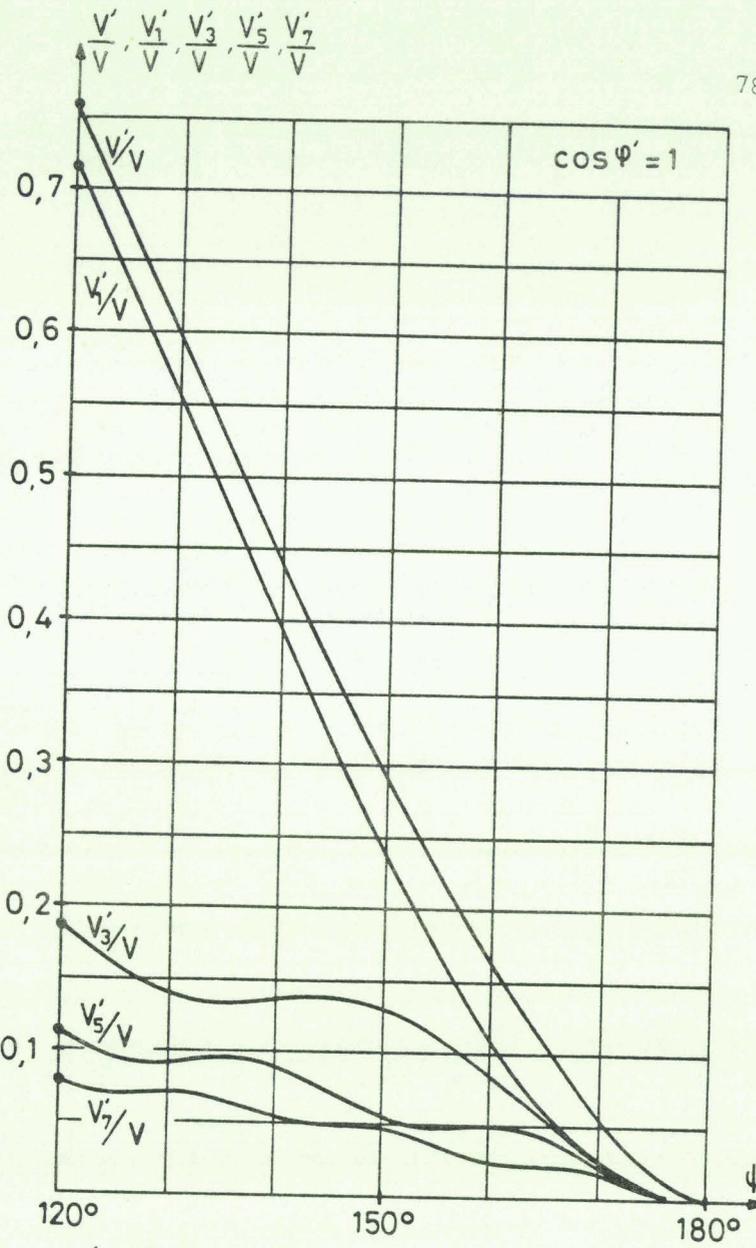


PL. I. 3. ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE POUR  $k = 3/2$

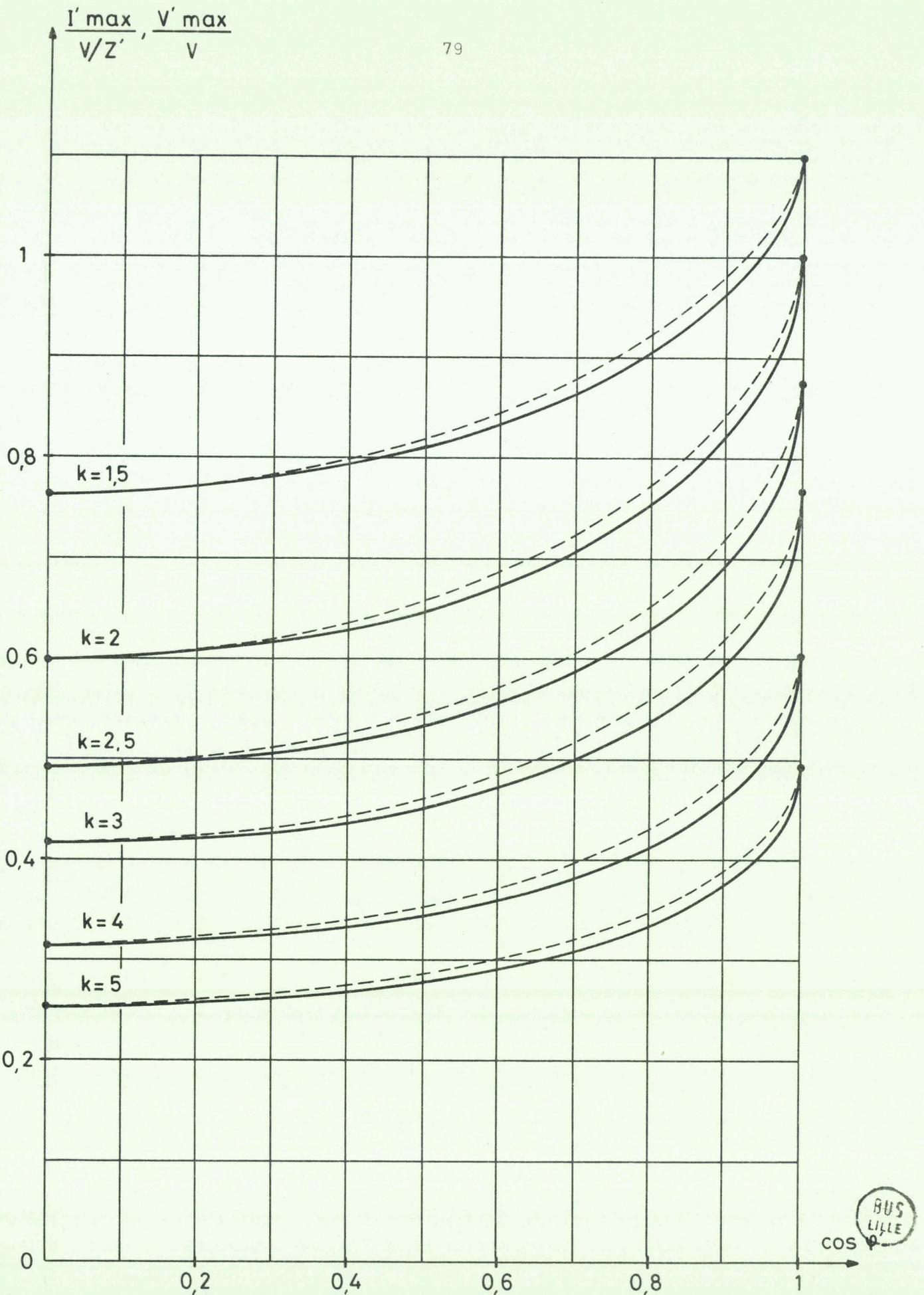
MULTIPLICATEURS. FAMILLE GENERALE.



PL. I.4. ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE POUR  $K = 2$

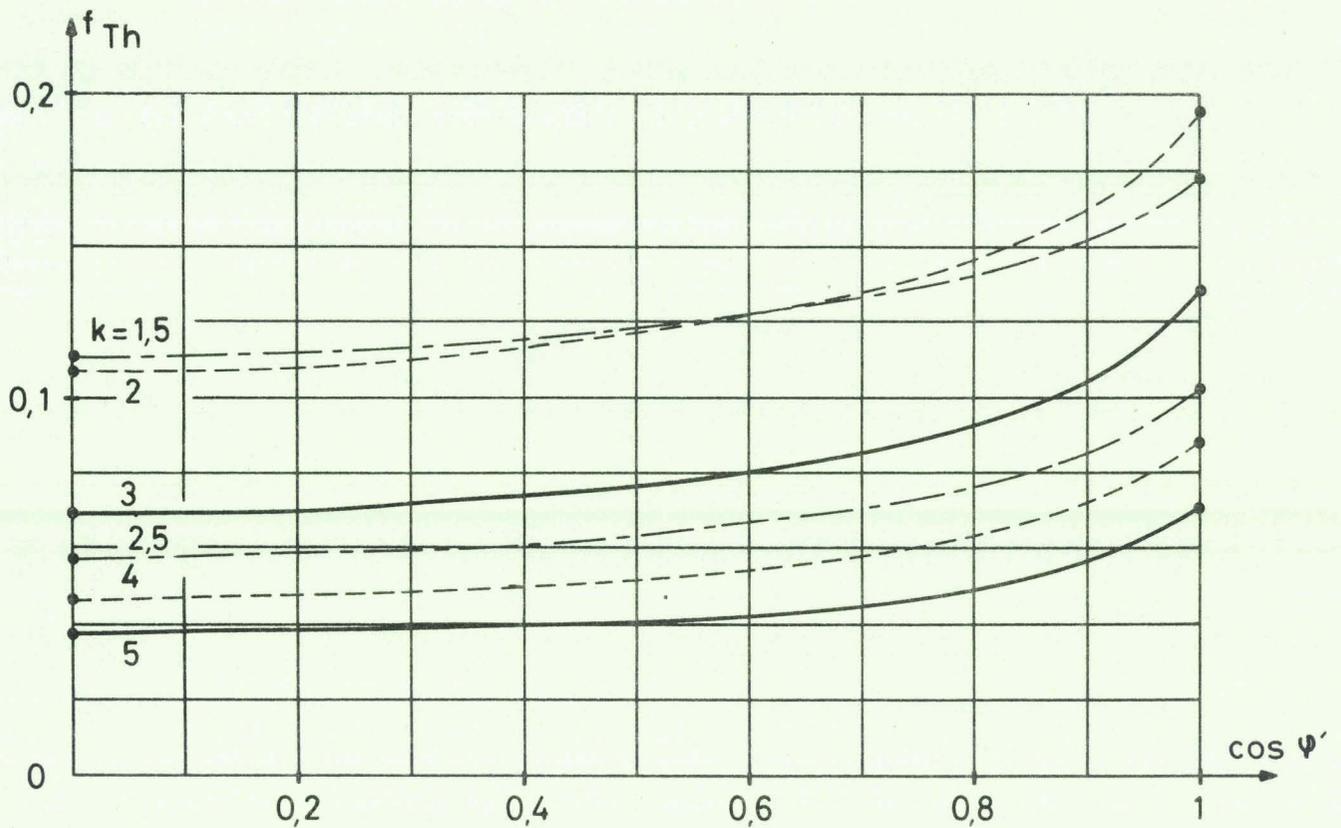
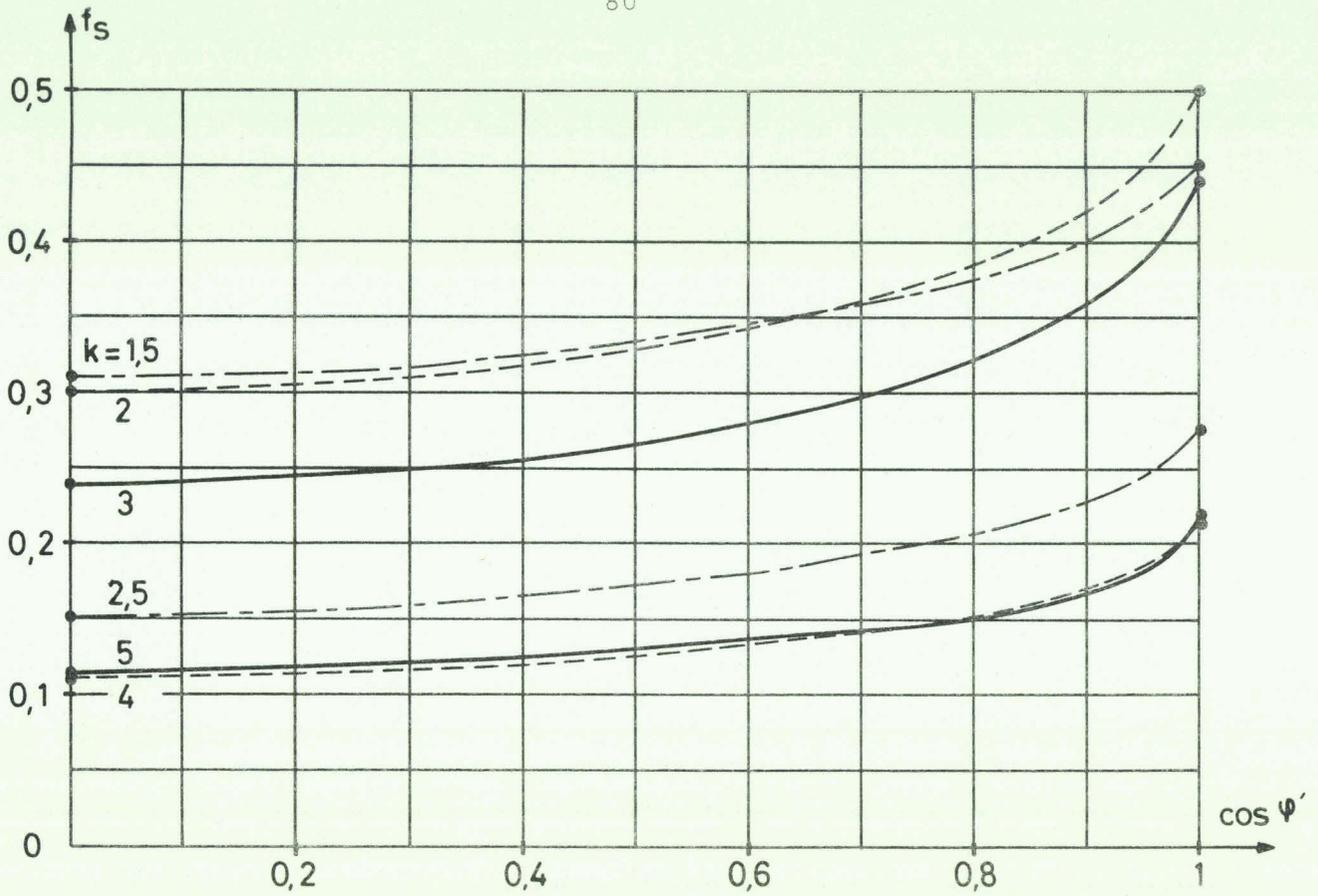


PL. I. 5. ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE POUR  $K = 3$



PL. I. 6. VALEURS EFFICACES MAXIMALES DES COURANTS (COURBES EN TRAIT PLEIN) ET DES TENSIONS (COURBES EN TRAIT INTERROMPU) DE SORTIE.

MULTIPLICATEURS. FAMILLE GENERALE.



PL.I.7. FACTEURS D'UTILISATION: -DES ENROULEMENTS SECONDAIRES  $F_S$

-DES THYRISTORS  $F_{TH}$

MULTIPLICATEURS. FAMILLE GENERALE.





\*\*\*\*\*  
 \* CHAPITRE I \*  
 \* \* \* \* \*  
 \*\*\*\*\*

MONTAGE DES THYRISTORS EN PONTS

Les multiplicateurs de fréquence étudiés dans cette deuxième partie utilisent le même principe que ceux de la famille générale : la sélection, par des thyristors fonctionnant en commutation naturelle, de portions de sinusoides. Mais ils visent à atténuer l'un ou l'autre des défauts des montages de la famille générale.

Dans ce chapitre, nous allons rapidement examiner comment en doublant le nombre de thyristors, on peut former la tension de sortie non plus de portions de tensions simples mais de portions de tensions composées et améliorer ainsi le facteur d'utilisation des enroulements secondaires.

Cette démarche ressemble à celle effectuée pour les montages redresseurs lorsqu'on passe des "montages à commutation parallèle" à ceux fonctionnant en "commutation parallèle double".

## I. MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE IMPAIR

### I.1. Multiplication par 3

#### I.1.1. Principe. Formes d'ondes

La figure II.1.1. indique le schéma du montage à 12 thyristors donnant, à partir des tensions  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $v_{1C}$  de fréquence  $f$ , la tension  $v_1'$  de fréquence  $3f$ . Aux six thyristors  $Th_{1A}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th'_{1B}$ ,  $Th_{1C}$ ,  $Th'_{1C}$  du schéma de la figure I.1.1. on a ajouté ceux indiqués par  $th_{1A}$ ,  $th'_{1A}$ ,  $th_{1B}$ ,  $th'_{1B}$ ,  $th_{1C}$ ,  $th'_{1C}$ .

- Le débit simultané de deux thyristors, un de chaque série, permet de rendre  $v_1'$  successivement égal à chacune des tensions composées. La forme d'onde de la tension de sortie, tracée sur la figure pour  $\psi_{min}$  et un débit sur résistance, est la même que pour le tripleur de la famille générale ; mais sa valeur est  $\sqrt{3}$  fois plus forte.

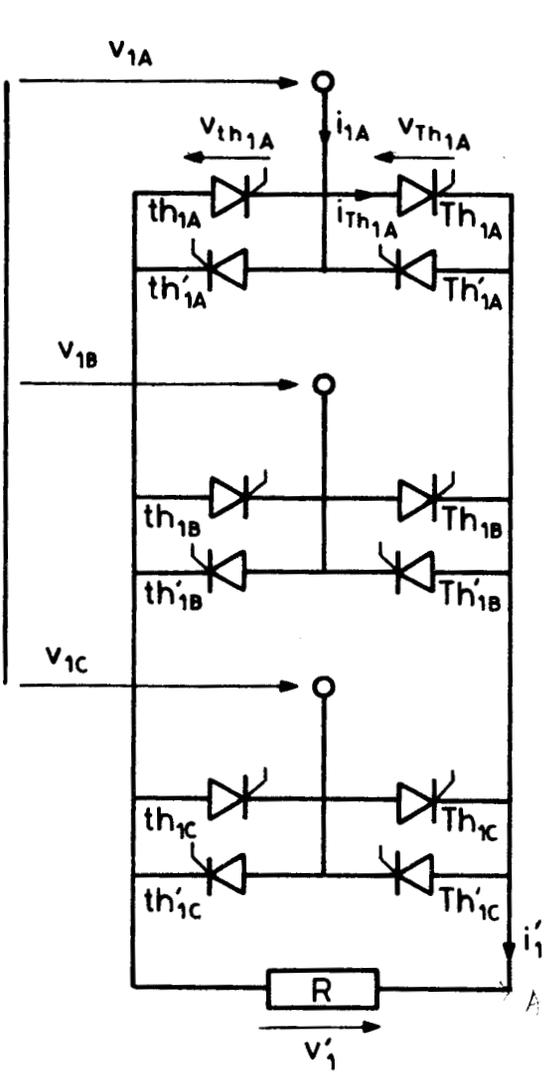
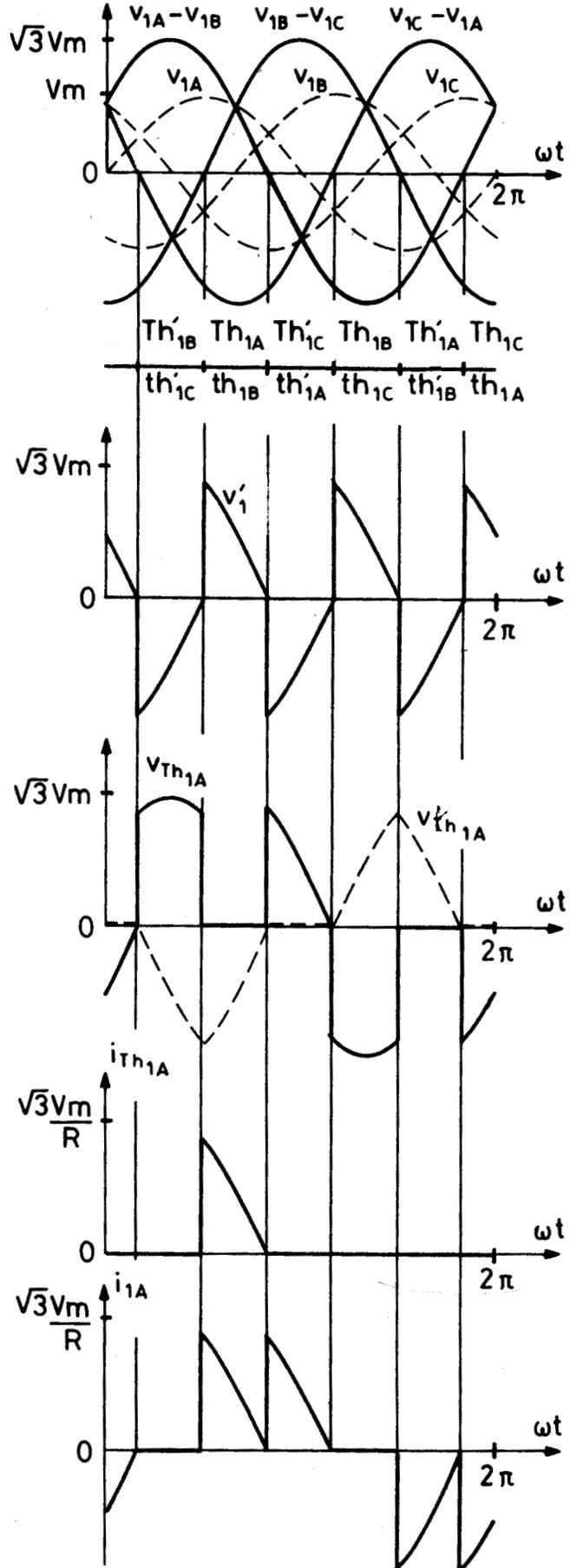


FIG.II.1.1



- Les tensions aux bornes des thyristors des deux séries,  $v_{Th_{1A}}$  et  $v_{th_{1A}}$  par exemple, ont des formes d'ondes différentes. Aux bornes des redresseurs où le maximum de cette tension est le plus élevé, ce maximum est égal à  $\sqrt{3} V_m$ .

On vérifie que, dès que  $\psi$  est inférieur à  $\psi_{min}$ , la somme des tensions directes aux bornes des deux thyristors qu'on débloque simultanément est positive, la somme des tensions aux bornes des deux thyristors qui s'éteignent simultanément est négative.

- Chaque thyristor écoule une alternance du courant  $i'_1$  sur six. Chaque phase de la source débite pendant 4 des 6 alternances correspondant à une période de la source, et non plus pendant 2 sur 6, cette meilleure utilisation des enroulements secondaires étant le but recherché.

### 1.1.2. Facteurs d'utilisation

Toutes les relations et caractéristiques établies pour la tension  $v'_1$  et le courant  $i'_1$  du tripleur de fréquence de la famille générale restent valables, à la seule condition de remplacer  $V_m$  par  $\sqrt{3} V_m$ .

A valeurs données de  $V_m$ , de  $\psi$  et à récepteur donné,

- la tension de sortie est multipliée par  $\sqrt{3}$ ,
- le courant dans la charge et dans chaque redresseur est multiplié par  $\sqrt{3}$ ,
- le courant dans les enroulements secondaires est multiplié par  $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ .

- Le *facteur d'utilisation des enroulements secondaires* est multiplié par  $\sqrt{3/2}$ , puisque pour le même transformateur, la même charge et le même  $\psi$ , la puissance apparente de sortie est multipliée par 3 et le courant dans les phases secondaires par  $\sqrt{6}$ .

Pour  $\psi_{min}$ , lors du débit sur résistance pure, on passe ainsi de  $f_S = 0,44$  à  $f'_S = 0,54$ .

- Le *facteur d'utilisation des thyristors* est lui diminué. Leur nombre est multiplié par 2 ; la tension maximale à leurs bornes reste égale à  $\sqrt{3} V_m$  ; le courant qui les traverse, dans les conditions envi-

sagées pour le calcul de  $f_S$ , est multiplié par  $\sqrt{3}$ . La puissance apparente de sortie étant multipliée par 3, on passe du facteur  $f_{Th}$  du montage à 6 thyristors à  $f'_{Th}$  du montage à 12 thyristors en multipliant le premier par

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour  $\psi_{\min}$  et une charge purement résistive, on avait  $f_{Th} = 0,128$  ; on obtient maintenant  $f'_{Th} = 0,111$ .

Dans le cas de la multiplication par 3, la variante étudiée est moyennement intéressante : l'augmentation de  $f_S$  s'accompagne d'une diminution de  $f_{Th}$  dont la modicité ne doit pas cacher les inconvénients liés au doublement du nombre de thyristors.

## I.2. Multiplication par un nombre impair quelconque

On peut généraliser aisément à la multiplication par  $k$  impair quelconque ce que nous venons d'indiquer pour  $k$  égal à 3.

On part du montage de la famille générale avec ses  $k$  tensions simples de fréquence  $f$  et ses  $2k$  thyristors  $Th_{1A}, Th'_{1A}, Th_{1B}, Th'_{1B}, \dots, Th_{1k}, Th'_{1k}$  reliés à une borne de la sortie. L'autre borne de celle-ci, au lieu d'être reliée au neutre, est maintenant reliée elle aussi aux bornes des phases secondaires par une nouvelle série de  $2k$  thyristors,  $th_{1A}, th'_{1A}, th_{1B}, th'_{1B}, \dots, th_{1k}, th'_{1k}$ .

Pour obtenir la tension de sortie  $v'_1$  aussi grande que possible, on associe, par le déblocage des redresseurs correspondants, les tensions simples les plus en opposition de phase.

Ainsi pour  $k = 5$ , aux dix thyristors de la figure I.1.4. reliant les cinq bornes secondaires à l'une des bornes de sortie on en ajoute dix autres  $th_{1A}, th'_{1A}, th_{1B}, th'_{1B}, \dots, th_{1E}, th'_{1E}$  permettant de relier les cinq bornes secondaires à l'autre borne de sortie. On rend  $v'_1$  successivement égal à  $v_{1A} - v_{1C}$ , à  $v_{1B} - v_{1A}$ , à  $v_{1B} - v_{1D}$ , à  $v_{1E} - v_{1B}$ ... par le déblocage simultané de  $Th_{1A}$  et  $th_{1C}$ , de  $Th'_{1D}$  et  $th'_{1A}$ , de  $Th_{1B}$  et  $th_{1D}$ , de  $Th'_{1E}$  et  $th'_{1B}$ ... Les tensions composées servant à former  $v'_1$  ont une amplitude égale à  $2 V_m \cos \frac{\pi}{10}$ , soit  $1,90 V_m$ .

D'une façon générale en associant les tensions simples déphasées de  $\frac{k \pm 1}{2} \frac{2\pi}{k}$ , on obtient des tensions composées d'amplitude  $2V_m \cos \frac{\pi}{2k}$ .

- Par rapport au montage de même  $k$  de la famille générale, à  $V_m$ ,  $\psi$  et récepteur donnés,

- le nombre de thyristors est multiplié par 2,
- la tension de sortie, le courant de sortie et le courant dans chaque thyristor sont multipliés par

$$2 \cos \frac{\pi}{2k},$$

- les courants secondaires ont leur valeur efficace multipliée par

$$\sqrt{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2k}$$

- Les tensions aux bornes des redresseurs des deux familles ont des formes d'ondes différentes. Le maximum est obtenu pour les thyristors de la famille  $Th_{1A}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th'_{1B}$ ... Les expressions successives de  $v_{Th_{1A}}$  par exemple sont les mêmes que pour le montage correspondant de la famille générale. Toutefois à cause du déphasage (de  $\pi/2k$ ) entre tension simple et tension composée, l'intervalle de validité de chacune de ces expressions est légèrement décalé.

La tension maximale aux bornes des thyristors pour lesquels elle est la plus forte peut au maximum être égale à l'amplitude,  $2 V_m \cos \pi/2k$ , des plus fortes tensions composées. Toutefois pour faciliter la comparaison avec les montages de la famille générale on supposera que  $v_{Th_{max}}$  reste égal à

$$V_m (\cos \frac{\pi}{2k} + \sin \frac{\pi}{k}) \quad (I.3)$$

- On passe donc des valeurs des facteurs d'utilisation  $f_S$  et  $f_{Th}$  du montage de la famille générale [relations (I.31) et (I.35)] à celles  $f'_S$  et  $f'_{Th}$  obtenues avec la variante par

$$f'_S = f_S \frac{(2 \cos \frac{\pi}{2k})^2}{\sqrt{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2k}} = f_S \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2k} \quad (II.1)$$

$$f'_{Th} = f_{Th} \frac{(2 \cos \frac{\pi}{2k})^2}{2 \times 2 \cos \frac{\pi}{2k}} = f_{Th} \cos \frac{\pi}{2k} \quad (II.2)$$

On voit que dès que la valeur de  $k$  entier impair est supérieure à 3,  $f'_S$  diffère peu de  $\sqrt{2} f_S$  et  $f'_{Th}$  de  $f_{Th}$ .

## II. MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE PAIR

### II.1. Multiplication par 2

• Pour multiplier la fréquence par 2, il faut 4 tensions simples  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $-v_{1A}$ ,  $-v_{1B}$ . Si on utilise 8 thyristors deux schémas de montages sont possibles :

- Le premier (fig. II.1.2.a.) part du schéma de la figure I.1.5. ; aux quatre thyristors  $Th_{1A}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th'_{1A}$ ,  $Th'_{1B}$ , qui permettent de réunir une borne du récepteur à l'une ou l'autre des quatre bornes secondaires, on ajoute les quatre thyristors  $th_{1A}$ ,  $th_{1B}$ ,  $th'_{1A}$ ,  $th'_{1B}$  qui permettent de faire la même chose pour l'autre borne du récepteur.

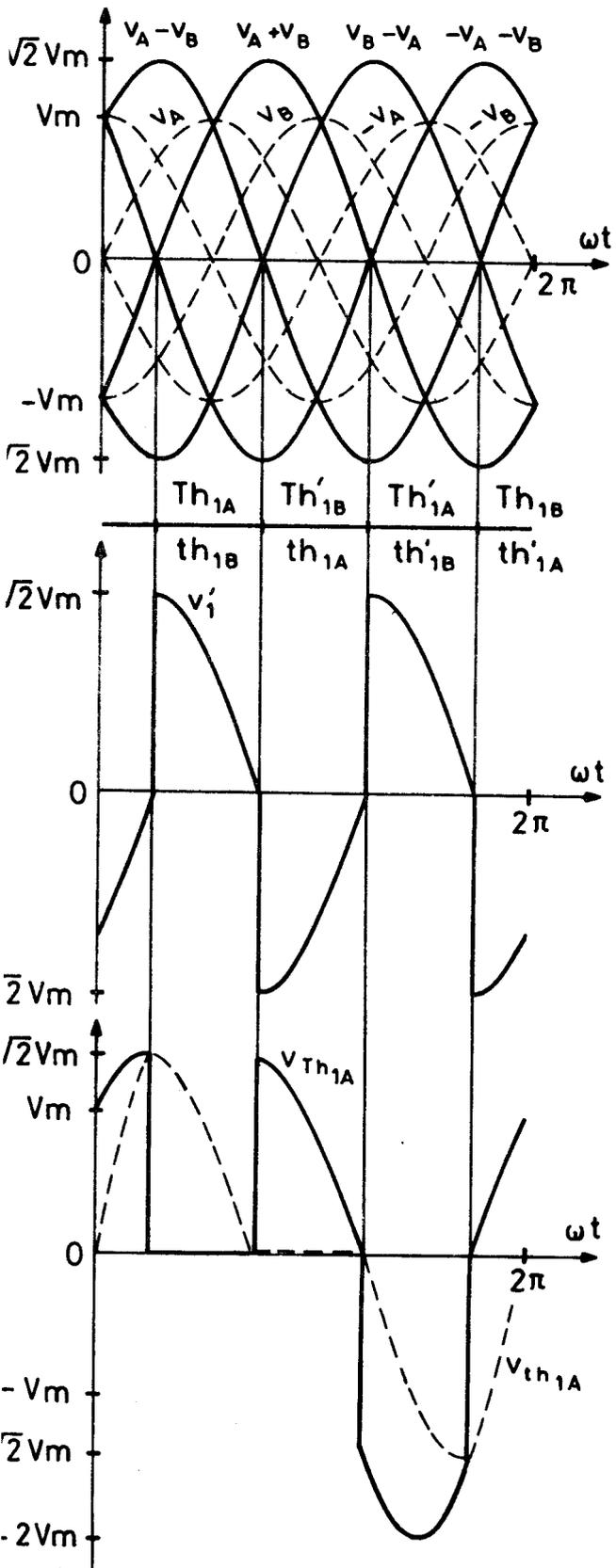
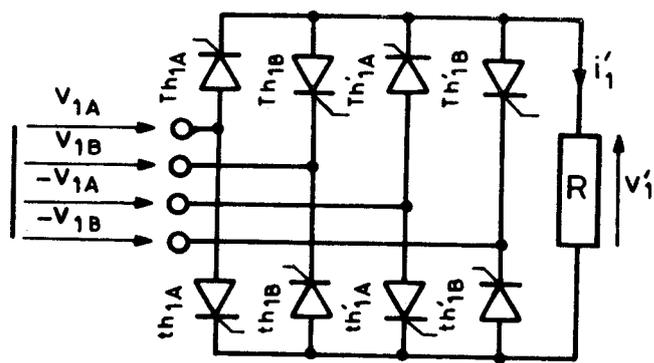
- Le second (fig. II.1.2.b.) est plus particulier et ne peut être transposé aux cas où  $k$  diffère de 2. Les tensions  $v_{1A}$  et  $-v_{1A}$  peuvent être appliquées à une seule borne du récepteur, les tensions  $v_{1B}$  et  $-v_{1B}$  seulement à l'autre ; mais le courant débité par chaque phase secondaire devant pouvoir passer dans les deux sens, 8 thyristors sont encore nécessaires.

• Pour chacun de ces montages, on a représenté, lors du débit sur résistance et du fonctionnement à  $\psi$  minimum, les formes d'ondes de la tension de sortie  $v'_1$  et des tensions  $v_{Th_{1A}}$ ,  $v_{th_{1A}}$  aux bornes d'un thyristor de chaque série.

Dans les deux cas, la tension de sortie  $v'_1$  est  $\sqrt{2}$  fois plus forte que pour le doubleur de la famille générale, la tension maximale aux bornes des thyristors reste égale à  $2 V_m$ .

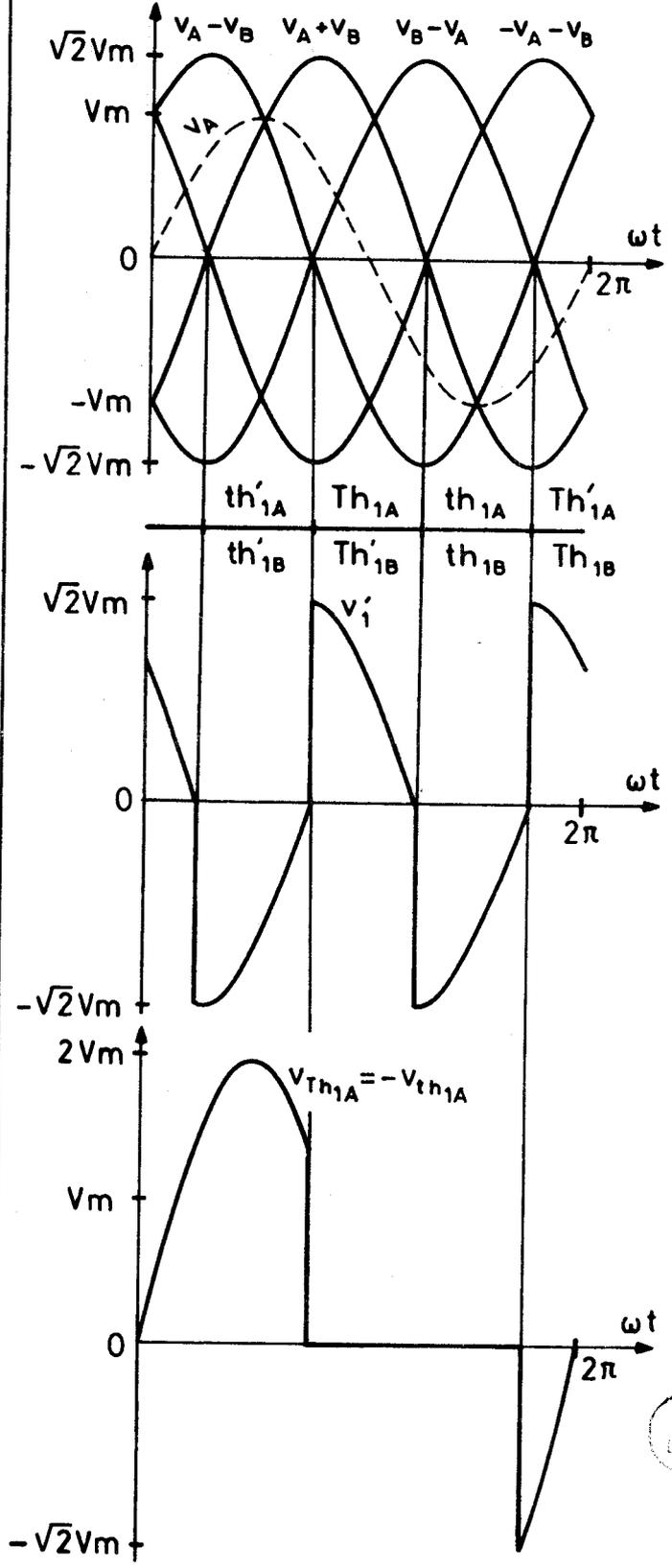
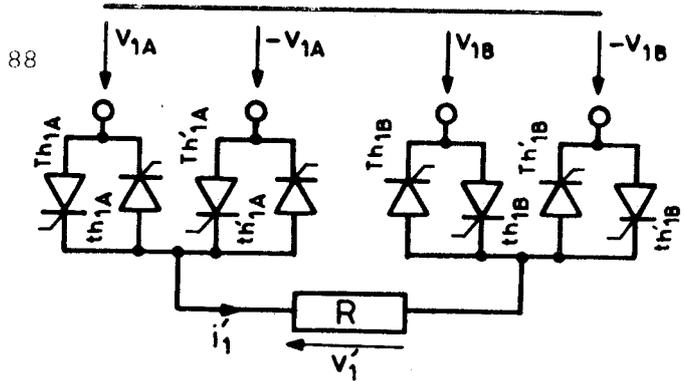
Le schéma de la figure II.1.2.a. conduit à une forme d'onde de la tension aux bornes des redresseurs de la seconde série un peu particulière, du même type que celle trouvée pour le montage de la figure II.1.1.

Dans les deux cas, chaque redresseur écoule une alternance sur quatre du courant de sortie. Chaque phase secondaire est traversée par deux alternances sur quatre de ce courant. Ces deux alternances sont consécutives et de même signe pour le premier schéma, de signes contraires et décalées de  $\pi$  pour le second qui, de ce point de vue, semble donc supérieur en pratique.



a)

FIG. II.1.2



b)



• Si on compare au doubleur de fréquence de la famille générale, à  $V_m$ ,  $\psi$  et récepteur donnés :

- la tension de sortie, le courant de sortie et le courant dans les thyristors sont multipliés par  $\sqrt{2}$ .
- le courant efficace dans les phases secondaires est  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ , soit 2 fois plus fort.
- il y a 2 fois plus de thyristors ; leur tension maximale est inchangée.

D'où les relations entre les facteurs d'utilisation  $f'_S$ ,  $f'_{Th}$  et ceux  $f_S$ ,  $f_{Th}$  du doubleur de la famille générale

$$f'_S = f_S \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = f_S$$

$$f'_{Th} = f_{Th} \frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{2 \sqrt{2}} = f_{Th} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dans le cas particulier où  $k = 2$ , la variante n'apporte aucune amélioration au facteur d'utilisation des enroulements secondaires, elle réduit le facteur d'utilisation des thyristors ; elle ne présente donc pas d'intérêt.

## II.2. Multiplication par un nombre pair quelconque

- Pour multiplier la fréquence par  $k$  entier pair, le montage de la famille générale utilise  $2k$  tensions  $v_{1A}, v_{1B}, \dots, v_{1K}, -v_{1A}, -v_{1B}, \dots, -v_{1K}$  et  $2k$  thyristors appliquant à tour de rôle ces tensions à l'une des bornes du récepteur, l'autre étant reliée au neutre. En ajoutant  $2k$  thyristors on peut relier cette seconde borne aux diverses bornes secondaires et former la tension de sortie  $v'_1$  non plus de portions de tensions simples mais de portions de tensions composées.

Les déblocages des redresseurs permettent de choisir le système  $k$ phasé de tensions de plus grande amplitude présentant  $2k$  passages par zéro distincts. Ainsi pour  $k$  égal à 4, on rendra  $v'_1$  successivement égal à  $v_{1A} - v_{1D}, -v_{1B} - v_{1A}, v_{1C} + v_{1B}, -v_{1D} - v_{1C}, -v_{1A} + v_{1D}, \dots$

D'une façon générale on fait la différence de tensions d'amplitude  $V_m$  déphasées de  $\pi \pm \frac{\pi}{k}$ . L'amplitude des tensions composées est donc

$$2 V_m \cos \frac{\pi}{2k}$$

- La comparaison avec le montage de même  $k$  de la famille générale s'effectue toujours à  $V_m$ ,  $\psi$  et récepteur donnés :

- La tension et le courant de sortie, le courant dans les redresseurs sont multipliés par  $2 \cos(\pi/2k)$
- la valeur efficace des courants secondaires qui débitent 2 alternances sur  $2k$ , au lieu d'une seule, est multipliée par  $\sqrt{2} \cdot 2 \cos(\pi/2k)$ .
- la valeur maximale de la tension aux bornes des thyristors reste inchangée. La relation (I.4) qui la donne indique d'ailleurs une valeur voisine de l'amplitude des tensions composées utilisées

$$v_{Th_{max}} = V_m (1 + \sin \frac{\pi}{k}) \approx 2 V_m \cos \frac{\pi}{2k}, \text{ si } k \text{ est grand.}$$

- D'où les relations liant les nouvelles valeurs des facteurs d'utilisation à celles du montage de même  $k$  de la famille générale.

$$f'_S = f_S \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2k} \quad (\text{II.1})$$

$$f'_{Th} = f_{Th} \cos \frac{\pi}{2k} \quad (\text{II.2})$$

Dès que  $k$  est supérieur à 2,  $f'_S$  devient supérieur à  $f_S$ .

### III. MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE FRACTIONNAIRE

#### III.1. Multiplication par 3/2

Le montage présenté en haut de la figure II.1.3. permet de multiplier par 3/2 la fréquence de la tension  $v'_1$ . Il ne diffère de celui de la figure I.1.8. que par l'addition des thyristors  $th_{1A}$ ,  $th'_{1A}$ ,  $th_{1B}$ ,  $th'_{1B}$ ,  $th_{1C}$ ,  $th'_{1C}$  qui permettent d'appliquer une des six tensions secondaires à la borne du récepteur qui était précédemment reliée au neutre.

Les 12 thyristors sont débloqués deux par deux une fois toutes les 2 périodes des tensions d'alimentation.

Les formes d'ondes des tensions  $v'_1$ ,  $v_{Th_{1A}}$  et  $v_{th_{1A}}$  tracées pour  $\psi_{min}$  et une charge purement résistive montrent que l'amplitude de la tension de sortie est passée de  $V_m$  à  $\sqrt{3} V_m$ , que l'amplitude de la tension aux bornes des thyristors est restée égale à  $2 V_m$ .

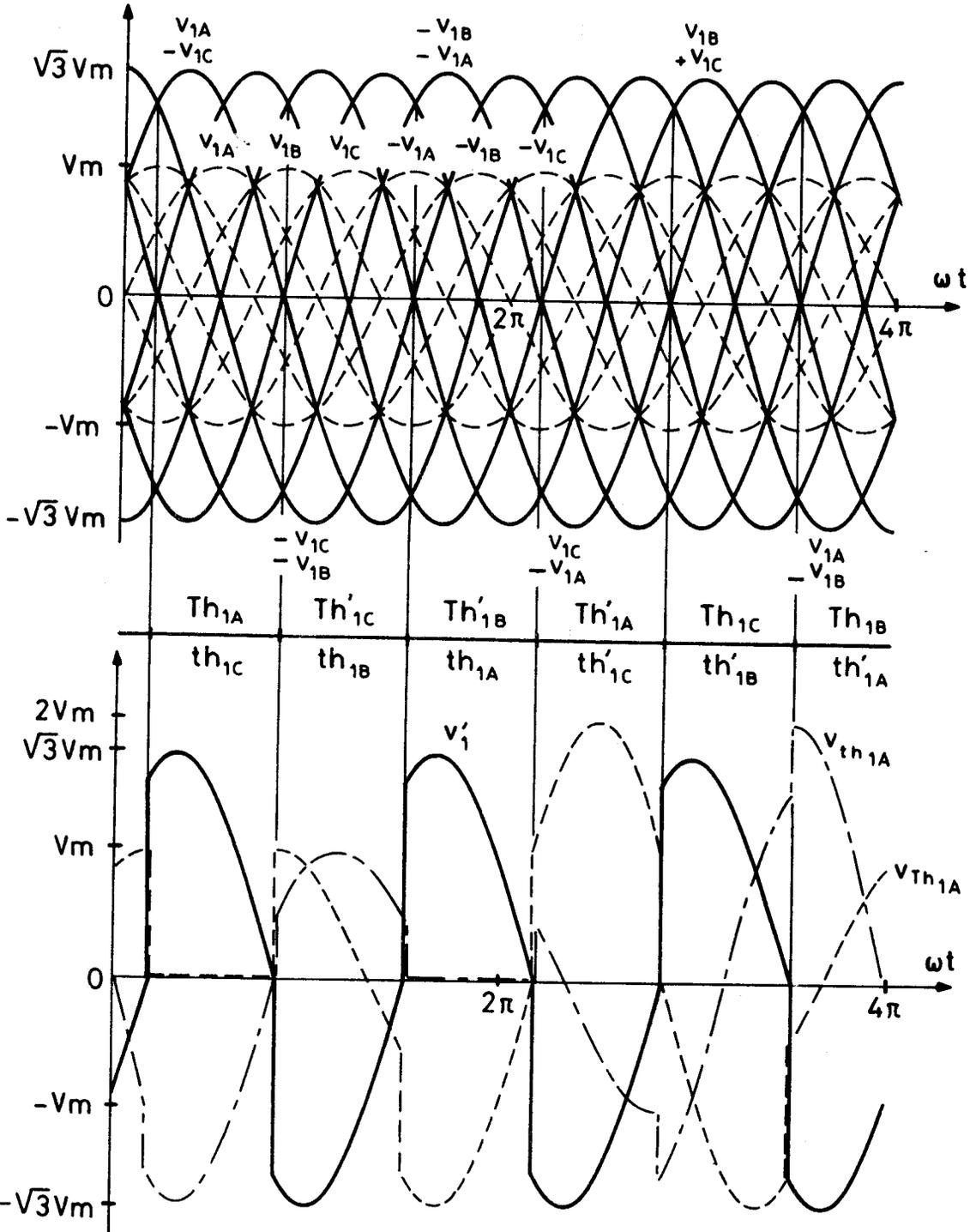
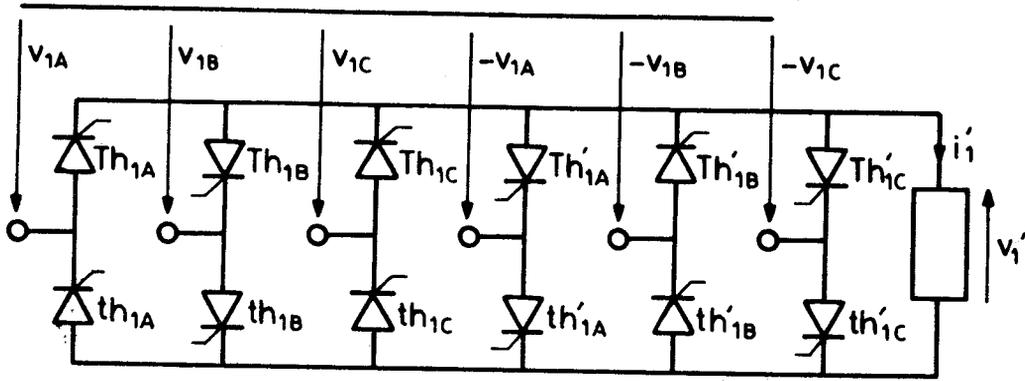


FIG. II.1.3

Le facteur d'utilisation des enroulements secondaires, qui débilitent 2 fois plus souvent, de  $f_S$  devient  $f'_S$  tel que

$$f'_S = f_S \frac{\sqrt{3} \sqrt{3}}{\sqrt{2} \sqrt{3}} = f_S \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Le facteur d'utilisation des thyristors, dont le nombre a doublé, devient

$$f'_{Th} = f_{Th} \frac{\sqrt{3} \sqrt{3}}{2 \sqrt{3}} = f_{Th} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les variations sont les mêmes que pour  $k$  égal à 3.

### III.2. Multiplication par un nombre fractionnaire quelconque

Lorsque  $k$  égale  $N/D$  pour appliquer à la sortie, non pas une des  $2N$  tensions simples déphasées entre elles de  $\pi/N$ , mais une des  $2N$  tensions composées, il faut utiliser  $4N$  thyristors.

Pour que les tensions composées soient aussi grandes que possible, on associe des tensions simples déphasées entre elles de  $\pi \pm \frac{\pi}{N}$ ; on obtient ainsi des tensions d'amplitude  $2 V_m \cos \frac{\pi}{2N}$ .

Le rapport  $2 \cos(\pi/2N)$  remplace  $2 \cos(\pi/2k)$  dans les relations établies pour les valeurs entières de  $k$ ; on passera de  $f_S$  et  $f_{Th}$  calculés pour le montage de la famille générale aux valeurs  $f'_S$  et  $f'_{Th}$  de ces facteurs pour la variante par

$$f'_S = f_S \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2N} \quad (\text{II.3})$$

$$f'_{Th} = f_{Th} \cos \frac{\pi}{2N} \quad (\text{II.4})$$

## IV. CARACTERISTIQUES. INTERET DE CES MONTAGES

### IV.1. Caractéristiques de tension et de courant de sortie

- Les formes d'ondes de la tension de sortie avec les montages examinés dans le chapitre sont identiques, aux changements d'échelle  $2 \cos(\pi/2k)$  ou  $2 \cos(\pi/2N)$  près, à celles obtenues avec les montages de la famille générale. Les caractéristiques relatives à la tension et au courant de sortie (Planches I.2. à I.6.) sont donc utilisables.

- Une petite différence pourrait venir de la forme d'onde de la tension aux bornes des thyristors d'une série qui fait apparaître, pour  $\psi_{\min}$  et un débit sur résistance pure, une tension nulle au moment du déblocage (voir  $v_{th_{1A}}$  des figures II.1.1. et II.1.2.). Cela entraîne une augmentation de  $\psi_{\min}$  lors du débit sur résistance pure, augmentation minimale pour les montages alimentés à la fréquence industrielle. Les clichés de la figure II.1.4.a. montrant  $v_{th_{1A}}$  et  $v'_1$ , pour  $k = 3$  lors du débit sur R, au voisinage immédiat de la valeur de  $\psi$  en-deçà de laquelle le montage cesse d'avoir le fonctionnement normal, font apparaître les brefs intervalles à  $v'_1$  nul correspondant à l'écart entre les valeurs théorique et pratique de  $\psi_{\min}$ . Lors du débit sur récepteur résistant et inductif (clichés de la figure II.1.4.b. réalisés également pour  $k = 3$ ) ces intervalles à  $v'_1$  nul ont pu être supprimés.

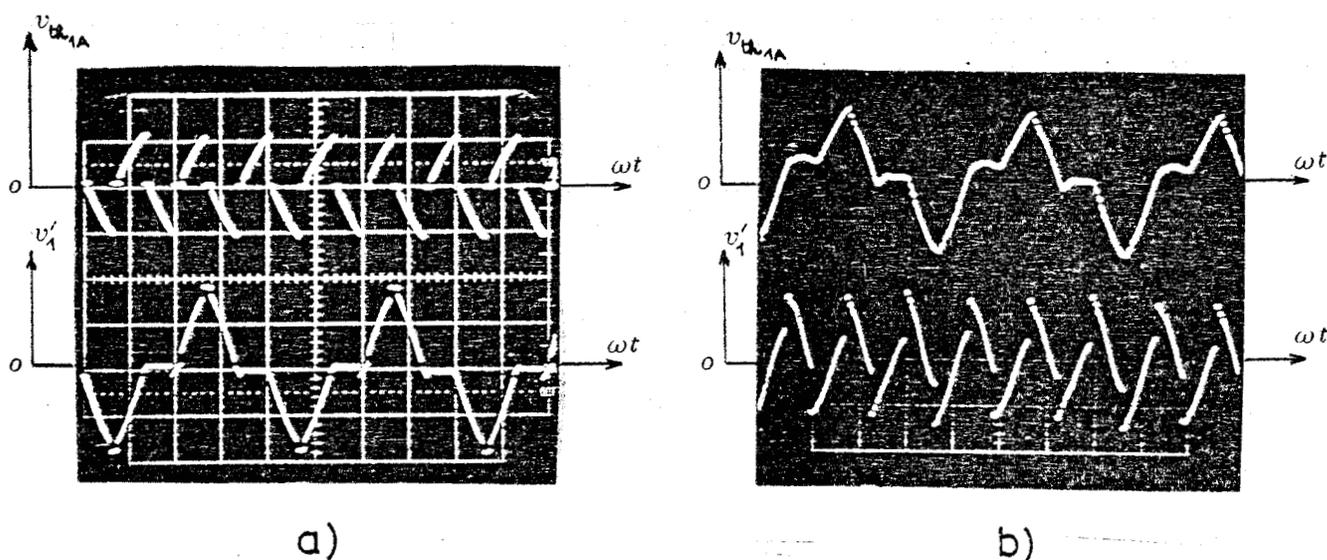


FIG. II.1.4

#### IV.2. Caractéristiques de facteurs d'utilisation

- Le facteur d'utilisation des enroulements secondaires, dont l'accroissement était l'objectif de cette variante, est celui de la famille générale multiplié par

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2k} \text{ ou } \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2N}$$

Il y a effectivement augmentation de ce facteur sauf pour  $k$  égal à 2. L'augmentation est de 22 % pour  $k$  ou  $N$  égal à 3, de 32 % pour  $k$  ou  $N$  égal à 4, 34 % pour  $k$  ou  $N$  égal à 5,...

Le haut de la planche II.1. donne, pour quelques valeurs de  $k$ , les variations de  $f'_S$  en fonction de  $\cos\phi'$ .

- Le facteur d'utilisation des thyristors est celui du montage de même rapport de multiplication de la famille générale multiplié par

$$\cos\frac{\pi}{2k} \text{ ou } \cos\frac{\pi}{2N}$$

Il est donc diminué. C'est pour  $k$  égal à 2 que la diminution est la plus forte. Quand  $k$  ou  $N$  augmente, cette réduction des performances s'atténue.

Le bas de la planche II.1. donne, pour quelques valeurs de  $k$ , les variations de  $f'_{Th}$  en fonction de  $\cos\phi'$ .

#### IV.3. Domaine d'intérêt de cette variante

Cette variante, qui consiste à substituer des tensions composées aux tensions simples pour former les tensions de sortie, ne modifie ni le fonctionnement des multiplicateurs de la famille générale, ni l'intérêt que présentent ces derniers pour l'obtention des divers facteurs de multiplication (voir I, chapitre 3, § III).

Le doublement du nombre des thyristors nécessaire est en lui-même un inconvénient, toutefois limité par le fait que les thyristors sont toujours débloqués deux par deux. Le coût de l'électronique de commande n'est que peu accru, chaque générateur d'impulsions devant être à deux sorties et non plus à une seule.

Cet inconvénient en entraîne un autre, la réduction du facteur d'utilisation des thyristors qui de  $f'_{Th}$  devient  $f'_{Th}$ .

La variante présente un avantage, c'est l'accroissement du facteur d'utilisation des enroulements secondaires qui de  $f_S$  passe à  $f'_S$ .

k	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	6	7	8	9
$n'_{Th}$	16	12	8	15	12	28	16	20	24	28	32	36
$f'_S$	0,51 (0,39)	0,55 (0,45)	0,50 (0,50)	0,373 (0,277)	0,541 (0,442)	0,250 (0,181)	0,278 (0,213)	0,297 (0,221)	0,164 (0,120)	0,138 (0,136)	0,110 (0,079)	0,131 (0,094)
$f'_{Th}$	0,127 (0,138)	0,137 (0,159)	0,125 (0,177)	0,098 (0,103)	0,111 (0,128)	0,080 (0,082)	0,081 (0,088)	0,058 (0,072)	0,055 (0,057)	0,047 (0,048)	0,039 (0,040)	0,034 (0,035)

Tableau II.1.

La réduction de  $f_{Th}$  est d'autant plus faible que  $k$  (ou  $N$  si  $k$  est fractionnaire) est plus grand. De même l'accroissement de  $f_S$  est d'autant plus proche de  $\sqrt{2}$  que  $k$  (ou  $N$ ) est plus grand.

Sur le tableau II.1, on a indiqué pour quelques valeurs de  $k$ , les maxima de  $f'_S$  et  $f'_{Th}$  (débit sur résistance, fonctionnement à  $\psi_{min}$ ) et rappelé, entre parenthèses, les valeurs obtenues avec le montage correspondant de la famille générale.

Ce tableau et les caractéristiques de la planche II.1. montrent qu'il serait absurde d'utiliser la variante pour  $k$  égal à 2, puisqu'avec plus de thyristors on diminue  $f_{Th}$  sans augmenter  $f_S$ . Au contraire pour  $k$  égal à 3, on obtient une valeur de  $f_S$  nettement accrue et une réduction de  $f_{Th}$  inférieure à l'accroissement de  $f_S$ . Pour  $k$  égal à 4 ou plus, l'amélioration des performances est encore plus sensible.

La substitution de la variante au montage correspondant de la famille générale est donc susceptible d'intérêt

pour  $k = 3$  et  $k = 3/2$   
pour  $k = 4$

mais elle n'apporte jamais des performances remarquables.

\*\*\*\*\*  
 \* CHAPITRE II \*  
 \*\*\*\*\*

SUPPRESSION DU CONDUCTEUR NEUTRE  
 DES MULTIPLICATEURS A SORTIE TRIPHASEE

• Les montages étudiés dans ce chapitre utilisent les mêmes schémas que ceux de la famille générale, même tensions de pulsation  $\omega$  fournies par une source en étoile, mêmes thyristors groupés de la même façon. Mais on supprime le conducteur neutre entre le point neutre des phases réceptrices et le point neutre de la source. Cette suppression a pour but de *faire disparaître certains harmoniques* des tensions de pulsation  $k\omega$  et de rendre ainsi la forme d'onde de celles-ci plus voisine de la sinusoïde.

- Si par exemple le récepteur est triphasé, le développement en série des tensions  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$  appliquées aux trois phases par le multiplicateur de la famille générale comporte les termes de pulsation

$k\omega$ ,  $3k\omega$ ,  $5k\omega$ ,  $7k\omega$ ,  $9k\omega$ ,  $11k\omega$ ,...

En supprimant le conducteur neutre, on empêche les harmoniques de somme instantanée non nulle de passer dans les phases réceptrices. Les expressions de  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$  sont modifiées de telle sorte que leur développement en série ne comporte plus que des termes en

$k\omega$ ,  $5k\omega$ ,  $7k\omega$ ,  $11k\omega$ ,...

- Si le récepteur est qphasé la suppression du neutre entraîne celle des harmoniques impairs de rang  $kq$  ou multiple de  $kq$ .

• L'étude de ces montages sans conducteur neutre est beaucoup *plus compliquée* que celle des multiplicateurs de la famille générale car les fonctionnements des  $q$  phases ne sont plus indépendants.

Aussi nous limiterons-nous à l'étude détaillée d'un seul montage, le tripleur de fréquence à sortie triphasée. La nature et la complexité des calculs sont comparables à celles rencontrées [31] dans l'étude du gradateur triphasé tout thyristors.

Nous montrerons ensuite que, au moins en ce qui concerne les grandeurs de sortie, les relations établies sont transposables aux multiplicateurs triphasés de rapport de multiplication différent de 3. Cela nous permettra de tracer les caractéristiques pour diverses valeurs de  $k$ .

Il ne nous a pas semblé utile d'étudier les montages à nombre  $q$  de phases différent de 3.

## I. TRIPLEUR DE FREQUENCE

La figure II.2.1. donne le schéma du tripleur de fréquence à sortie triphasée sans conducteur neutre.

Les tensions secondaires forment trois systèmes triphasés équilibrés décalés entre-eux de  $2\pi/9$ . On a donc en tout 9 tensions  $v_{1A}$ ,  $v_{2A}$ ,  $v_{3A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $v_{2B}$ ,  $v_{3B}$ ,  $v_{1C}$ ,  $v_{2C}$ ,  $v_{3C}$  (voir figure I.1.3.) et comme pour le montage correspondant de la famille générale les thyristors sont débloqués dans l'ordre suivant :

$$Th_{1A}, Th'_{3B}, Th_{2A}, Th'_{1C}, Th_{3A}, Th'_{2C}, Th_{1B}, Th'_{3C}, Th_{2B},$$

$$Th'_{1A}, Th_{3B}, Th'_{2A}, Th_{1C}, Th'_{3A}, Th_{2C}, Th'_{1B}, Th_{3C}, Th'_{2B}.$$

On prend toujours pour  $v_{1A}$  l'expression

$$v_{1A} = V_m \sin \omega t$$

et on caractérise le retard au déblocage des thyristors par  $\psi$ , tel que  $Th_{1A}$  soit débloqué pour  $\omega t = \psi$ .

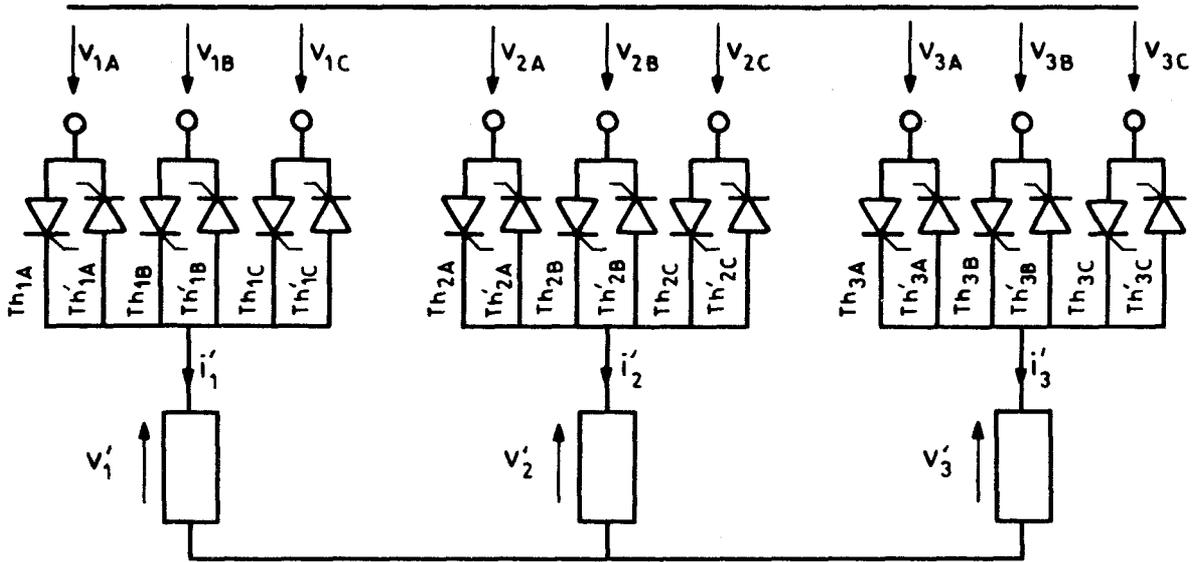


FIG. II.2.1

### I.1. Limitation de l'intervalle d'étude

#### I.1.1. Tensions de sortie

Quand le thyristor  $Th_{1A}$  conduit, la tension  $v'_1$  a la même expression que  $v'_2$  pendant la conduction de  $Th_{2A}$  ou que  $v'_3$  pendant la conduction de  $Th_{3A}$ , or ces trois intervalles de conduction sont décalés entre eux de  $2\pi/9$ .

$$v'_1(\omega t) = v'_2(\omega t + \frac{2\pi}{9}) = v'_3(\omega t + \frac{4\pi}{9}).$$

ou, ces trois tensions ayant une période égale à  $\frac{2\pi}{3\omega}$ ,

$$\left. \begin{aligned} v'_1(\omega t + \frac{4\pi}{9}) &= v'_2(\omega t + \frac{6\pi}{9}) = v'_2(\omega t) \\ v'_1(\omega t + \frac{2\pi}{9}) &= v'_3(\omega t + \frac{6\pi}{9}) = v'_3(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.5})$$

De plus  $v'_1, v'_2, v'_3$  ont leurs alternances négative et positive identiques, au signe près :

$$\left. \begin{aligned} v'_1(\omega t) &= -v'_1(\omega t \pm \frac{\pi}{3}) \\ v'_2(\omega t) &= -v'_2(\omega t \pm \frac{\pi}{3}) \\ v'_3(\omega t) &= -v'_3(\omega t \pm \frac{\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.6})$$

Des relations (II.5) et (II.6) on déduit

$$\left. \begin{aligned} v'_1(\omega t) &= +v'_1(\omega t) \\ v'_1(\omega t + \frac{\pi}{9}) &= -v'_1(\omega t + \frac{4\pi}{9}) = -v'_2(\omega t) \\ v'_1(\omega t + \frac{2\pi}{9}) &= +v'_3(\omega t) \\ v'_1(\omega t + \frac{3\pi}{9}) &= -v'_1(\omega t) \\ v'_1(\omega t + \frac{4\pi}{9}) &= +v'_2(\omega t) \\ v'_1(\omega t + \frac{5\pi}{9}) &= -v'_3(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.7})$$

Si on connaît  $v'_1, v'_2, v'_3$  pour  $\omega t$ , on en déduit  $v'_1$  pour  $\omega t + \frac{\pi}{9}, \omega t + \frac{2\pi}{9}, \omega t + \frac{3\pi}{9}, \dots$  Il suffit donc d'étudier le fonctionnement pen-

*dant un sixième de la période des tensions de sortie ou un dix-huitième de la période des tensions d'entrée.*

Les courants  $i'_1, i'_2, i'_3$  dans les trois phases de la charge vérifient les mêmes relations de périodicité et de symétrie des alternances que les tensions  $v'_1, v'_2, v'_3$ . On pourra donc déduire les expressions de ces courants tout au long de leur période de la seule étude d'un sixième de celle-ci

$$\left. \begin{aligned} i'_1(\omega t + \frac{\pi}{9}) &= -i'_2(\omega t) \\ i'_1(\omega t + \frac{2\pi}{9}) &= -i'_3(\omega t) \\ i'_1(\omega t + \frac{\pi}{3}) &= -i'_1(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.8})$$



### I.1.2. Tensions aux bornes des thyristors

Les tensions aux bornes des thyristors, de période  $2\pi/\omega$ , sont décalées de  $\pi/9$  les unes par rapport aux autres.

$$v_{Th_{1A}}(\omega t) = v_{Th_{3B}}(\omega t + \pi/9)$$

$$v_{Th_{3B}}(\omega t) = v_{Th_{2A}}(\omega t + \pi/9)$$

$$v_{Th_{2A}}(\omega t) = v_{Th_{1C}}(\omega t + \pi/9) \dots$$

On peut donc écrire

$$\left. \begin{aligned} v_{Th_{1A}}(\omega t) &= v_{Th_{1A}}(\omega t) \\ v_{Th_{1A}}(\omega t + \frac{\pi}{9}) &= v_{Th_{2B}}(\omega t) \\ v_{Th_{1A}}(\omega t + \frac{2\pi}{9}) &= v_{Th_{3C}}(\omega t) \dots \end{aligned} \right\} \quad (II.9)$$

$$\text{De plus } v_{Th_{1A}}(\omega t) = -v_{Th_{1A}}(\omega t) = -v_{Th_{1A}}(\omega t + \pi)$$

L'alternance négative de  $v_{Th_{1A}}$  est identique au signe près à son alternance positive.

Il suffit donc de connaître les tensions aux bornes de neuf thyristors pendant un sixième de la période des tensions de sortie pour pouvoir exprimer la tension aux bornes d'un thyristor tout au long de sa période.

### I.2. Débit sur résistances pures

Lors du débit sur 3 résistances pures d'égale valeur  $R$ , quand l'angle de déblocage  $\psi$  croît, trois modes de fonctionnement se succèdent :

- pour le premier, il y a tantôt 3 thyristors passants, tantôt 2,
- pour le second, il y en a toujours 2,
- pour le troisième, tantôt 2, tantôt 0.

1.2.1. Fonctionnement suivant le premier mode (Fig. II.2.2.b.)

• Intervalle à 3 thyristors conducteurs.

- Quand pour  $\omega t = \psi$  on débloque  $\text{Th}_{1A}$ , les thyristors  $\text{Th}_{3C}$  et  $\text{Th}'_{2B}$  conduisent encore.

La conduction simultanée de  $\text{Th}_{1A}$ ,  $\text{Th}_{3C}$  et  $\text{Th}'_{2B}$  donne

$$v_{1A} - v'_1 = v_{2B} - v'_2 = v_{3C} - v'_3.$$

$$\text{D'où on tire } v'_2 = v'_1 - v_{1A} + v_{2B}$$

$$v'_3 = v'_1 - v_{1A} + v_{3C}$$

et, puisque  $v'_1 + v'_2 + v'_3 = 0$ ,

$$v'_1 + v'_1 - v_{1A} + v_{2B} + v'_1 - v_{1A} + v_{3C} = 0$$

$$v'_1 = \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{v_{2B} + v_{3C}}{3}$$

En reportant, on obtient  $v'_2$  et  $v'_3$ .

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{v_{2B} + v_{3C}}{3} \\ v'_2 &= \frac{2}{3} v_{2B} - \frac{v_{3C} + v_{1A}}{3} \\ v'_3 &= \frac{2}{3} v_{3C} - \frac{v_{1A} + v_{2B}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.10})$$

- Si on remplace  $v_{1A}$ ,  $v_{2B}$  et  $v_{3C}$  par leurs expressions, soit

$$v_{1A} = V_m \sin \omega t$$

$$v_{2B} = V_m \sin(\omega t - \frac{8\pi}{9}) = -V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{9})$$

$$v_{3C} = V_m \sin(\omega t - \frac{16\pi}{9}) = V_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{9})$$

il vient

$$v'_1 = \frac{V_m}{3} [2 \sin \omega t + \sin(\omega t + \frac{\pi}{9}) - \sin(\omega t + \frac{2\pi}{9})]$$

$$= \frac{V_m}{3} [2 \sin \omega t + \cos \frac{\pi}{9} \sin \omega t + \sin \frac{\pi}{9} \cos \omega t - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \omega t - \sin \frac{2\pi}{9} \cos \omega t]$$

$$v'_2 = \frac{V_m}{3} [-2 \cos \frac{\pi}{9} \sin \omega t - 2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \omega t - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \omega t - \sin \frac{2\pi}{9} \cos \omega t - \sin \omega t]$$

$$v'_3 = \frac{V_m}{3} [2 \cos \frac{2\pi}{9} \sin \omega t + 2 \sin \frac{2\pi}{9} \cos \omega t - \sin \omega t + \cos \frac{\pi}{9} \sin \omega t + \sin \frac{\pi}{9} \cos \omega t]$$

qu'on peut écrire

$$v'_1 = V_m (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t),$$

$$v'_2 = V_m (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t),$$

$$v'_3 = V_m (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t),$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{3}(2 + \cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{2\pi}{9}) = 0,7245 ; B_1 = \frac{1}{3}(\sin \frac{2\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9}) = 0,1003$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(-2 \cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{2\pi}{9} - 1) = -1,2151 ; B_2 = \frac{1}{3}(2 \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9}) = 0,4423$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(2 \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{\pi}{9} - 1) = 0,4906 ; B_3 = \frac{1}{3}(-2 \sin \frac{2\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9}) = -0,5425$$

(II.11)

- Pendant cet intervalle,

$$\left. \begin{aligned} v_{Th_{1A}} &= 0 ; v_{Th'_{2B}} = 0 ; v_{Th_{3C}} = 0 ; \\ v_{Th'_{1B}} &= v_{1A} - v_{1B} ; v_{Th_{2C}} = v_{2C} - v_{2B} ; \\ v_{Th'_{3A}} &= v_{3C} - v_{3A} ; v_{Th_{1C}} = v_{1C} - v_{1A} ; \\ v_{Th'_{2A}} &= v_{2B} - v_{2A} ; v_{Th_{3B}} = v_{3B} - v_{3C} ; \end{aligned} \right\}$$

(II.12)

- Le premier des trois courants  $v'_1/R$ ,  $v'_2/R$ ,  $v'_3/R$  à s'annuler est  $v'_3/R$ .

Le thyristor  $Th_{3C}$  se bloque pour  $\omega t$  tel que

$$\text{tg } \omega t = \frac{B_3}{A_3}, \text{ soit pour } \underline{\omega t = 132^\circ, 122}$$

• *Intervalle à 2 thyristors conducteurs*

- Pour  $\omega t > 132^\circ, 122$ , seuls  $Th_{1A}$  et  $Th'_{2B}$  conduisent, le courant  $i'_1$  débité par  $Th_{1A}$  revient par  $Th'_{2B}$

$$i'_1 = -i'_2 ; v'_1 = -v'_2 ; i'_3 = v'_3 = 0$$

Puisque  $v_{1A} - v'_1 = v_{2B} - v'_2$ ,

$$v'_1 = -v'_2 = \frac{v_{1A} - v_{2B}}{2} \quad (\text{II.13})$$

$$v'_1 = -v'_2 = \frac{V_m}{2} [\sin \omega t + \sin(\omega t + \frac{\pi}{9})]$$

$$v'_1 = -v'_2 = V_m [A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t]$$

$$\text{avec } A_4 = \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi}{9}) = 0,9698 ; B_4 = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{9} = -0,171 \quad (\text{II.14})$$

- Pendant cet intervalle,

$$\left. \begin{aligned} v_{Th_{1A}} &= 0 ; v_{Th'_{2B}} = 0 ; v_{Th_{3C}} = v_{3C} - (v_{1A} - v'_1) = v_{3C} - \frac{v_{1A} + v_{2B}}{2} \\ v_{Th'_{1B}} &= v_{1A} - v_{1B} ; v_{Th_{2C}} = v_{2C} - v_{2B} ; v_{Th'_{3A}} = \frac{v_{1A} + v_{2B}}{2} - v_{3A} \\ v_{Th_{1C}} &= v_{1A} - v_{1C} ; v_{Th'_{2A}} = v_{2B} - v_{2A} ; v_{Th_{3B}} = v_{3B} - \frac{v_{1A} + v_{2B}}{2} \end{aligned} \right\} (\text{II.15})$$

- Cet intervalle cesse lorsque, pour  $\omega t = \psi + \pi/9$ , on débloque  $Th'_{3B}$  ; un nouvel intervalle à trois thyristors simultanément conducteurs débute alors.

• *Limites de ce mode de fonctionnement*

- L'angle  $\psi$  doit être suffisant pour qu'il n'y ait pas plus d'un thyristor conducteur par phase de sortie, sinon on mettrait en court-circuit les enroulements secondaires du transformateur.

Avant d'amorcer  $Th_{1A}$ , il faut attendre que  $Th'_{1B}$  soit éteint, or ce redresseur se bloque  $\pi/9$  avant  $Th_{3C}$  donc pour

$$\omega t = 132^\circ, 122 - 20^\circ = 112^\circ, 122$$

$$\underline{\psi_{\min} = 112^\circ, 122}$$

- Le premier mode de fonctionnement cesse quand l'intervalle à trois thyristors passants ( $\psi < \omega t < 132^\circ, 122$ ) disparaît. D'où la valeur  $\psi_{1,2}$  de  $\psi$  pour laquelle on passe du premier au second mode

$$\underline{\psi_{1,2} = 132^\circ, 122}$$

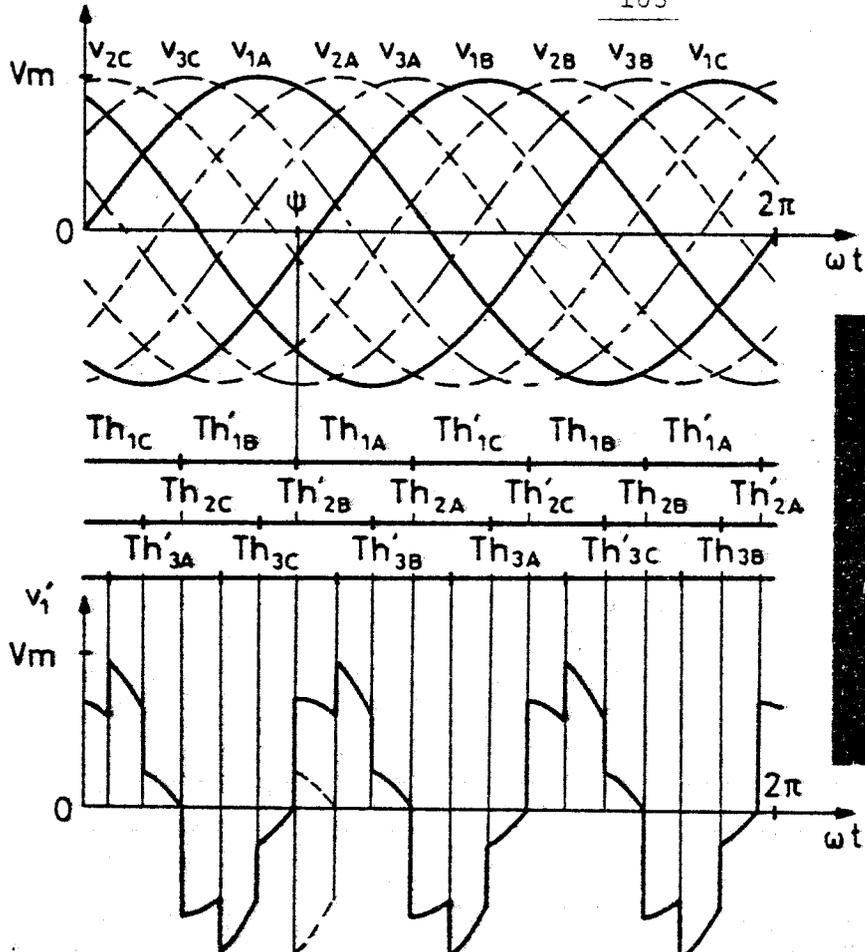
Sur la figure II.2.2. on a tracé, en haut, la forme d'onde de la tension de sortie  $v'_1$  pour  $\psi_{\min}$ . Le tracé de  $v_{Th_{1A}}$  est inutile, puisque les expressions successives de cette tension sont les mêmes que pour le montage avec conducteur neutre ; en particulier

$$v_{Th_{\max}} = \sqrt{3} V_m$$

Le bas de la figure II.2.2. correspond à  $\psi = 120^\circ$ . On voit comment le tracé de  $v'_1$  tout au long de sa période se déduit de celui de  $v'_1, v'_2, v'_3$  pendant l'intervalle  $\psi, \psi + \pi/9$ . On a tracé la forme d'onde de  $v_{Th_{1A}}$  dont le maximum reste égal à  $\sqrt{3} V_m$ .

I.2.2. Fonctionnement suivant le deuxième mode (fig. II.2.3.b.)

Quand  $\psi$  devient supérieur à  $\psi_{1,2}$ , le nombre de redresseurs en débit simultané reste constant et égal à 2, mais leur intervalle de conduction se décale



a) 1ère limite :  $\psi = \psi_{min} = 112^\circ, 1$

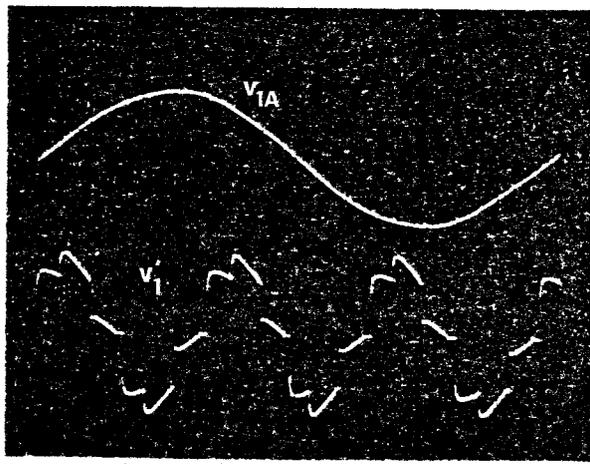
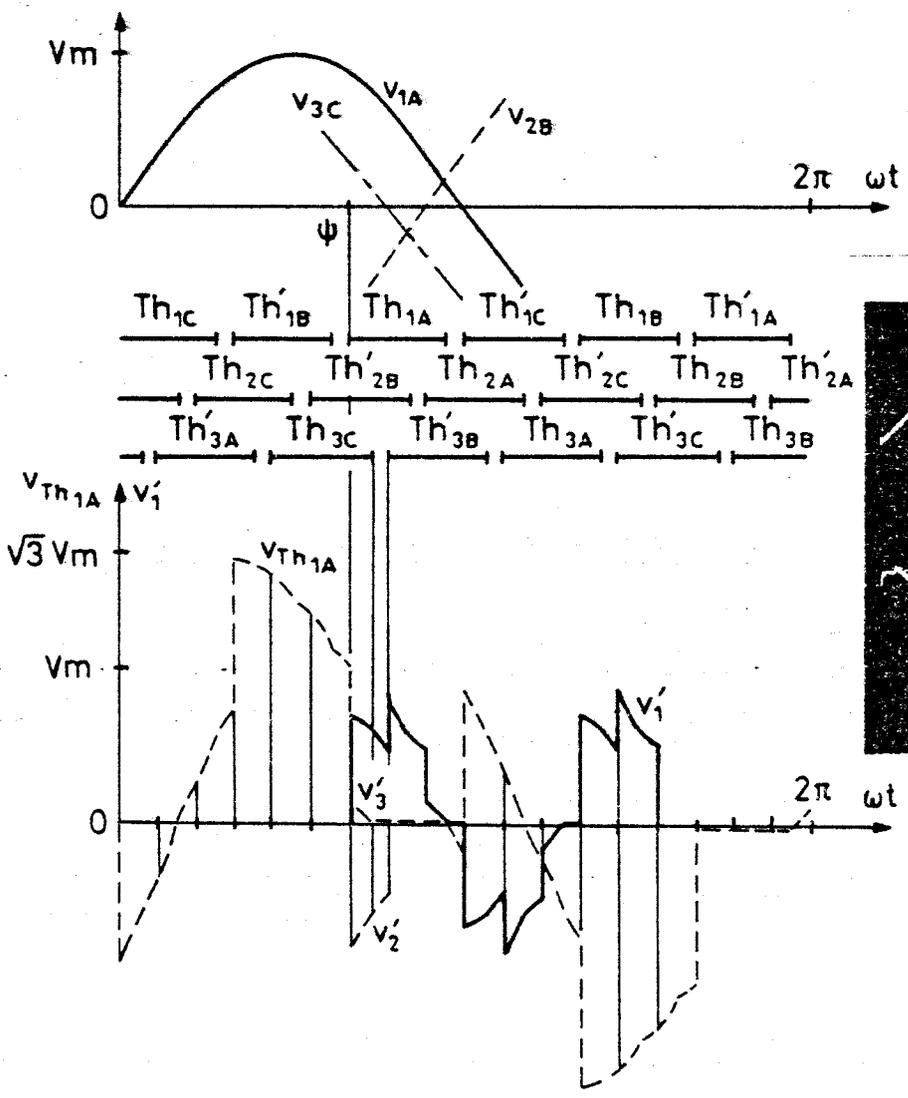
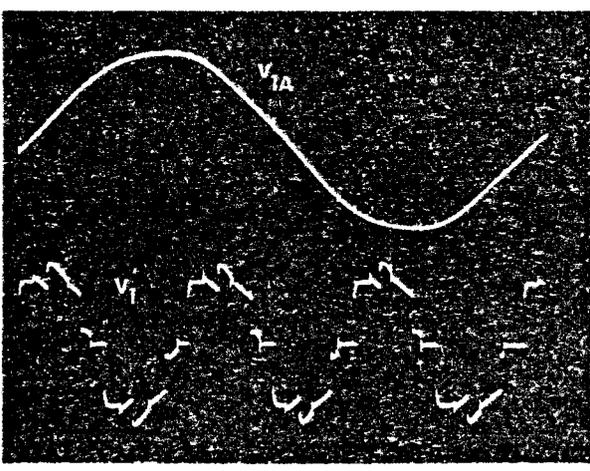
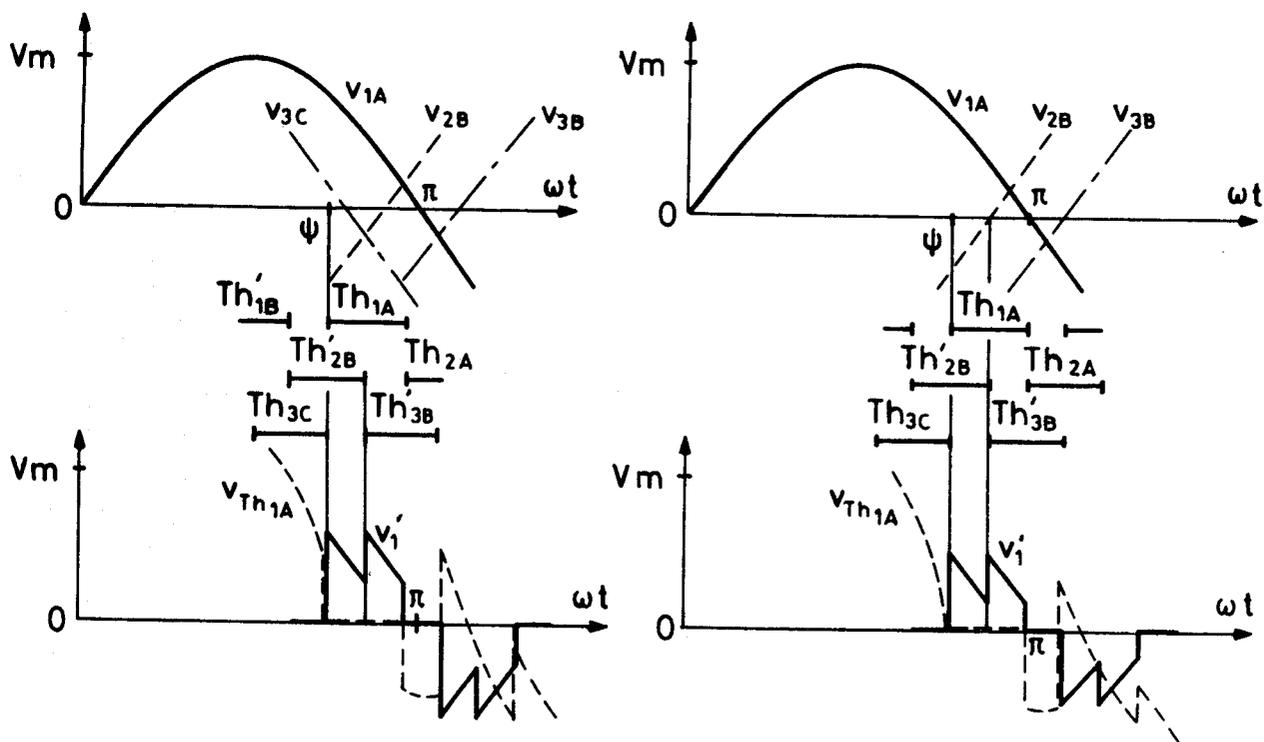


FIG. II.2.2



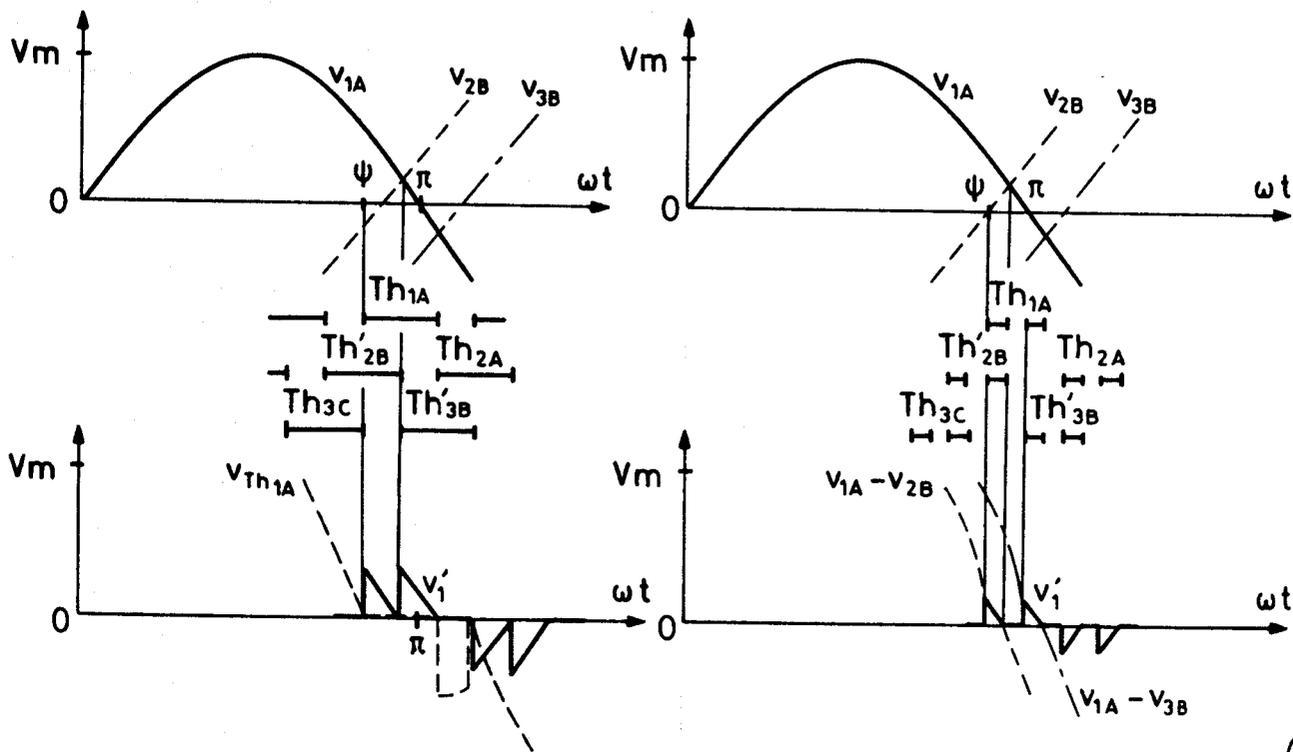
b) 1er mode :  $\psi = 120^\circ$





a) 2<sup>ème</sup> limite :  $\psi = \psi_{12} = 132^\circ,1$

b) 2<sup>ème</sup> mode :  $\psi = 140^\circ$



c) 3<sup>ème</sup> limite :  $\psi = \psi_{23} = 150^\circ$

d) 3<sup>ème</sup> mode :  $\psi = 160^\circ$



FIG. II.2.3

- Pour  $\psi < \omega t < \psi + \pi/9$ ,  $Th_{1A}$  et  $Th'_{2B}$  conduisent

$$v'_3 = 0 ; v'_1 = -v'_2 = \frac{v_{1A} - v_{2B}}{2} \quad (II.13)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{Th_{1A}} &= 0 ; v_{Th'_{2B}} = 0 ; v_{Th_{3C}} = v_{3C} - \frac{v_{1A} + v_{2B}}{2} \\ v_{Th'_{1B}} &= v_{1A} - v_{1B} ; v_{Th_{2C}} = v_{2C} - v_{2B} ; v_{Th'_{3A}} = \frac{v_{1A} + v_{2B}}{2} - v_{3A} \\ v_{Th_{1C}} &= v_{1A} - v_{1C} ; v_{Th'_{2A}} = v_{2B} - v_{2A} ; v_{Th_{3B}} = v_{2B} - \frac{v_{1A} + v_{2B}}{2} \end{aligned} \right\} (II.15)$$

- Ce mode de fonctionnement cesse quand  $i'_1$  et  $i'_2$  s'annulent à la fin de l'intervalle  $\psi + \pi/9$ . La valeur limite  $\psi_{2,3}$  est donc telle que

$$v_{1A}(\psi_{2,3} + \pi/9) = v_{2B}(\psi_{2,3} + \pi/9)$$

$$\sin(\psi_{2,3} + \pi/9) = -\sin(\psi_{2,3} + 2\pi/9)$$

$$\underline{\psi_{2,3} = 150^\circ}$$

- Sur la figure II.2.3. on a tracé la forme d'onde des tensions  $v'_1$  et  $v_{Th_{1A}}$  au voisinage de l'intervalle de conduction de  $Th_{1A}$

a) pour le début du second mode,  $\psi = \psi_{1,2}$

b) pour un fonctionnement typique du second mode,  $\psi = 140^\circ$ ,

c) pour la fin de ce mode de fonctionnement,  $\psi = \psi_{2,3}$ .

### 1.2.3. Fonctionnement suivant le troisième mode (fig. II.2.3.d.)

Lorsque  $\psi$  va de  $150^\circ$  à  $170^\circ$ , il y a tantôt 2, tantôt 0 thyristors passants. Ce fonctionnement nécessite, même en régime établi, la commande des thyristors par des signaux d'une largeur supérieure ou égale à  $\pi/9$  ou bien l'envoi d'impulsions de confirmation.

$Th_{1A}$  doit entrer en conduction pour  $\omega t = \psi$  et  $\omega t = \psi + \pi/9$

$Th'_{3B}$  pour  $\omega t = \psi + \pi/9$  et  $\omega t = \psi + 2\pi/9 \dots$

- Pour  $\psi < \omega t < 170^\circ$ ,  $Th'_{2B}$  et  $Th_{1A}$  conduisent :

Les tensions de sortie  $v'_1$ ,  $v'_2$ ,  $v'_3$  sont encore données par les relations (II.13) ou (II.14), les tensions aux bornes des thyristors par (II.15).

- Pour  $170^\circ < \omega t < \psi + \pi/9$ , aucun redresseur ne conduit :

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = 0 ; i'_1 = i'_2 = i'_3 = 0$$

La tension aux bornes des thyristors est difficile à déterminer puisque plus aucun redresseur ne relie la source au récepteur.

Si on suppose égales les résistances de fuites de tous les thyristors

$$v_{Th_{1A}} = -v_{Th'_{1A}} = v_{1A} ; v_{Th_{1B}} = -v_{Th'_{1B}} = v_{1B} \dots$$

De toute façon, quelle que soit l'hypothèse faite, la tension aux bornes d'un thyristor ne peut excéder l'amplitude de la tension composée,  $\sqrt{3} V_m$ , correspondant aux trois tensions simples alimentant le même groupe de redresseurs.

L'important est de vérifier que la tension aux bornes de l'ensemble des deux thyristors qui doivent entrer en débit simultanément,

c'est-à-dire  $v_{1A} - v_{2B}$  pour  $Th_{1A}$  et  $Th'_{2B}$

$$v_{1A} - v_{3C} \text{ pour } Th_{1A} \text{ et } Th'_{3C} \dots,$$

est positive au moment où on les débloque, négative lorsqu'ils cessent de conduire.

La figure II.2.3.d. montre, pour  $\psi = 160^\circ$ , le tracé de la tension  $v'_1$ , de la tension  $v_{1A} - v_{2B}$  juste avant  $\omega t = \psi$  et juste après  $\omega t = 170^\circ$ , de la tension  $v_{1A} - v_{3C}$  avant  $\omega t = \psi + \pi/9$  et après  $\omega t = 170^\circ + \pi/9$ .

### I.3. Débit sur inductances pures

Lorsqu'on débite sur un récepteur résistant et inductif, et a fortiori sur 3 inductances pures  $L$ , le second mode de fonctionnement disparaît car les courants  $i'_1$ ,  $i'_2$  et  $i'_3$  ne peuvent subir de discontinuité.

Pour  $\omega t = \psi$ , quand on débloque  $Th_{1A}$ , si  $Th_{3C}$  et  $Th'_2$  conduisent, le débit de  $Th_{1A}$  ne peut bloquer l'un ou l'autre des deux thyristors passants, sinon  $i'_3$  ou  $i'_2$  subirait une discontinuité. C'est un intervalle à trois redresseurs conducteurs, caractéristique du premier mode.

Si pour  $\omega t = \psi$ , aucun redresseur n'est conducteur, il faut débloquer simultanément  $Th_{1A}$  et  $Th'_{2B}$ . C'est le fonctionnement à 0 ou 2 redresseurs passants, donc le troisième mode.

On passe donc directement du premier au troisième mode.

### 1.3.1. Fonctionnement suivant le premier mode (fig. II.2.4.a.)

#### • Intervalle à 3 thyristors conducteurs

Après le déblocage de  $Th_{1A}$  pour  $\omega t = \psi$ ,  $Th_{3C}$ ,  $Th'_{2B}$  et  $Th_{1A}$  débitent simultanément.

- Les tensions  $v'_1$ ,  $v'_2$  et  $v'_3$  sont données par les mêmes relations que lors du débit sur résistances, puisqu'on a encore

$$v_{1A} - v'_1 = v_{2B} - v'_2 = v_{3C} - v'_3$$

avec 
$$v'_1 + v'_2 + v'_3 = L \left( \frac{di'_1}{dt} + \frac{di'_2}{dt} + \frac{di'_3}{dt} \right) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{v_{2B} + v_{3C}}{3} = V_m (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t) \\ v'_2 &= \frac{2}{3} v_{2B} - \frac{v_{3C} + v_{1A}}{3} = V_m (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t) \\ v'_3 &= \frac{2}{3} v_{3C} - \frac{v_{1A} + v_{2B}}{3} = V_m (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.10 et 11})$$

Les tensions aux bornes des redresseurs sont toujours données par les relations (II.12).

- Les courants  $i'_1$ ,  $i'_2$ ,  $i'_3$  se déduisent des tensions par

$$i'_1 = \frac{1}{L} \int v'_1 dt ; i'_2 = \frac{1}{L} \int v'_2 dt ; i'_3 = \frac{1}{L} \int v'_3 dt$$

ce qui donne

$$\left. \begin{aligned} i'_1 &= -\frac{V_m}{L\omega} (A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t) + I_1, \\ i'_2 &= -\frac{V_m}{L\omega} (A_2 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) + I_2, \\ i'_3 &= -\frac{V_m}{L\omega} (A_3 \cos\omega t + B_3 \sin\omega t) + I_3, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

en désignant par  $I_1, I_2, I_3$  les constantes d'intégration.

- Cet intervalle se termine pour  $\omega t = \psi + \delta$ , lorsque  $i'_3$  passe par zéro. Ensuite seuls  $\text{Th}'_{2B}$  et  $\text{Th}'_{1A}$  conduisent.

• *Intervalle à 2 thyristors conducteurs*

Les tensions sont encore données par les relations (II.13)

$$v'_3 = 0 ; v'_1 = -v'_2 = \frac{v_{1A} - v_{2B}}{2} = V_m (A_4 \sin\omega t - B_4 \sin\omega t)$$

D'où les courants :

$$i'_3 = 0 ; i'_1 = -i'_2 = -\frac{V_m}{L\omega} (A_4 \cos\omega t + B_4 \sin\omega t) + I_4 \quad (\text{II.17})$$

Les relations (II.15) donnent les tensions aux bornes des redresseurs.

Cet intervalle se termine pour  $\omega t = \psi + \pi/9$  quand on débloque  $\text{Th}'_{3B}$ .

• *Calcul des constantes d'intégration*

- On détermine  $I_1$  en écrivant que  $i'_1$  part d'une valeur nulle pour  $\omega t = \psi$  lors du déblocage de  $\text{Th}'_{1A}$

$$I_1 = \frac{V_m}{L\omega} (A_1 \cos\psi + B_1 \sin\psi) \quad (\text{II.18})$$

- On détermine  $I_4$  en écrivant que la valeur du courant  $i'_1$  est la même à la fin de l'intervalle à 3 thyristors conducteurs et au début de l'intervalle à 2 thyristors passants :

$$-\frac{V}{L\omega}[A_1 \cos(\psi+\delta)+B_1 \sin(\psi+\delta)] + I_1 = -\frac{V}{L\omega}[A_4 \cos(\psi+\delta)+B_4 \sin(\psi+\delta)] + I_4$$

$$I_4 = I_1 + \frac{V}{L\omega}[(A_4-A_1) \cos(\psi+\delta)+(B_4-B_1) \sin(\psi+\delta)] \quad (\text{II.19})$$

- Pour déterminer  $I_2$  on utilise les relations générales (II.8)

$$i_2'(\psi) = -i_1'(\psi + \frac{\pi}{9})$$

$$-\frac{V}{L\omega}(A_2 \cos\psi + B_2 \sin\psi) + I_2 = \frac{V}{L\omega}[A_4 \cos(\psi + \frac{\pi}{9}) + B_4 \sin(\psi + \frac{\pi}{9})] - I_4$$

$$I_2 = -I_4 + \frac{V}{L\omega}[A_2 \cos\psi + A_4 \cos(\psi + \frac{\pi}{9}) + B_2 \sin\psi + B_4 \sin(\psi + \frac{\pi}{9})] \quad (\text{II.20})$$

- La constante  $I_3$  se déduit de  $I_1$  et  $I_2$ .

Puisque  $i_1' + i_2' + i_3' = 0$

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{L\omega}[(A_1 + A_2 + A_3) \cos\psi + (B_1 + B_2 + B_3) \sin\psi] \quad (\text{II.21})$$

or  $A_1 + A_2 + A_3 = 0$  ;  $B_1 + B_2 + B_3 = 0$

$$I_3 = -I_1 - I_2$$

#### • Détermination de l'angle $\delta$

La durée  $\delta/\omega$  du premier intervalle intervient dans l'expression de  $I_4$ , donc dans celle de  $I_2$  et  $I_3$ . Pour trouver  $\delta$  on écrit que, au changement d'intervalle, le courant  $i_2'$  ne peut subir de discontinuité.

$$I_2 - \frac{V}{L\omega}[A_2 \cos(\psi+\delta)+B_2 \sin(\psi+\delta)] = -I_4 + \frac{V}{L\omega}[A_4 \cos(\psi+\delta) + B_4 \sin(\psi+\delta)]$$

D'où

$$I_2 + I_4 = \frac{V}{L\omega}[(A_2 + A_4) \cos(\psi+\delta) + (B_2 + B_4) \sin(\psi+\delta)]$$

Or la relation (II.20) donne

$$I_2 + I_4 = \frac{V}{L\omega}[A_2 \cos\psi + A_4 \cos(\psi + \frac{\pi}{9}) + B_2 \sin\psi + B_4 \sin(\psi + \frac{\pi}{9})]$$

En égalant les deux expressions de  $I_2 + I_4$  il vient

$$(A_2+A_4) \cos(\psi+\delta)+(B_2+B_4) \sin(\psi+\delta) = A_2 \cos\psi + A_4 \cos(\psi+\frac{\pi}{9})+B_2 \sin\psi + B_4 \sin(\psi+\frac{\pi}{9}) \quad (\text{II.22})$$

Cette équation permet de déterminer  $\delta$  pour chaque valeur de  $\psi$ .

• *Limites de ce mode de fonctionnement*

- Si  $\delta = \pi/9$ , on a toujours 3 thyristors conducteurs,  $\psi$  est égal au minimum au-dessous duquel on court-circuite les phases secondaires du transformateur.

On obtient donc  $\psi_{\min}$  en faisant  $\delta = \pi/9$  dans l'équation (II.22) :

$$\begin{aligned} (A_2+A_4) \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) + (B_2+B_4) \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) \\ = A_2 \cos\psi_{\min} + A_4 \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) + B_2 \sin\psi_{\min} + B_4 \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) \end{aligned}$$

$$A_2[\cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) - \cos\psi_{\min}] + B_2[\sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) - \sin\psi_{\min}] = 0$$

$$A_2 \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{18}) = B_2 \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{18})$$

$$\underline{\psi_{\min}} = \text{Arc tg } \frac{B_2}{A_2} - \frac{\pi}{18} = 160^\circ - 10^\circ = \underline{150^\circ}$$

- Si  $\delta = 0$ , on aura toujours 2 thyristors conducteurs. D'où la valeur  $\psi_{1,3}$  de  $\psi$  marquant le passage du premier au troisième mode de fonctionnement

$$\begin{aligned} (A_2+A_4) \cos\psi_{1,3} + (B_2 + B_4) \sin\psi_{1,3} \\ = A_2 \cos\psi_{1,3} + A_4 \cos(\psi_{1,3} + \frac{\pi}{9}) + B_2 \sin\psi_{1,3} + B_4 \sin(\psi_{1,3} + \frac{\pi}{9}) \end{aligned}$$

$$A_4[\cos\psi_{1,3} - \cos(\psi_{1,3} + \frac{\pi}{9})] + B_4[\sin\psi_{1,3} - \sin(\psi_{1,3} + \frac{\pi}{9})] = 0$$

$$A_4 \sin(\psi_{1,3} + \frac{\pi}{18}) = B_4 \cos(\psi_{1,3} + \frac{\pi}{18})$$

$$\underline{\psi_{1,3}} = \text{Arc tg } \frac{B_4}{A_4} - \frac{\pi}{18} = 170^\circ - 10^\circ = \underline{160^\circ}$$

La figure II.2.4.a montre le tracé de  $v_1'$  et de  $i_1'$  pour  $\psi$  égal à  $152^\circ,5$  ; l'angle  $\delta$  est alors égal à  $15^\circ$ .

### I.3.2. Fonctionnement suivant le troisième mode (fig. II.2.4.b.)

Quand  $\psi$  est compris entre  $160^\circ$  et  $170^\circ$ , il y a tantôt 0, tantôt 2 thyristors conducteurs.

- Pour  $\psi < \omega t < \psi + \gamma$ ,  $Th_{2B}'$  et  $Th_{1A}$  conduisent.

Les tensions sont données par les relations (II.13)

$$v_3' = 0 ; v_1' = -v_2' = \frac{v_{1A} - v_{2B}}{2} = V_m (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)$$

D'où les courants, sachant que  $i_1'$  et  $i_2'$  partent d'une valeur nulle pour  $\omega t = \psi$ ,

$$i_3' = 0 ; i_1' = -i_2' = \frac{V_m}{L\omega} [A_4 (\cos \omega t - \cos \psi) + B_4 (\sin \omega t - \sin \psi)] \quad (\text{II.23})$$

Les courants redeviennent nuls pour  $\omega t = \psi + \gamma$  tel que

$$A_4 [\cos(\psi + \gamma) - \cos \psi] + B_4 [\sin(\psi + \gamma) - \sin \psi] = 0$$

$$A_4 \sin(\psi + \frac{\gamma}{2}) = B_4 \cos(\psi + \frac{\gamma}{2})$$

$$\gamma = 2 \text{ Arc tg } \frac{B_4}{A_4} - 2\psi = 340^\circ - 2\psi \quad (\text{II.24})$$

- Pour  $\psi + \gamma < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3}$ , aucun redresseur ne conduit :

$$v_1' = v_2' = v_3' = 0 ; \quad i_1' = i_2' = i_3' = 0$$

• Lorsque  $\psi$  devient supérieur à  $170^\circ$ , la tension  $v_{1A} - v_{1B}$  aux bornes des deux thyristors  $Th_{1A}$  et  $Th_{2B}'$  qu'on veut débloquent simultanément cesse d'être positive. Les tensions et courants de sortie sont constamment nuls.

La figure II.2.4.b montre le tracé de la forme d'onde de  $v_1'$  et  $i_1'$  pour  $\psi$  égal à  $165^\circ$  ; l'angle  $\gamma$  est alors de  $10^\circ$ .

Sur cette figure et sa voisine, on n'a pas reproduit la forme d'onde de la tension  $v_{Th_{1A}}$  ; celle-ci a une amplitude inférieure au maximum,

$\sqrt{3} V_m$ , trouvé lors du débit sur résistances pures.

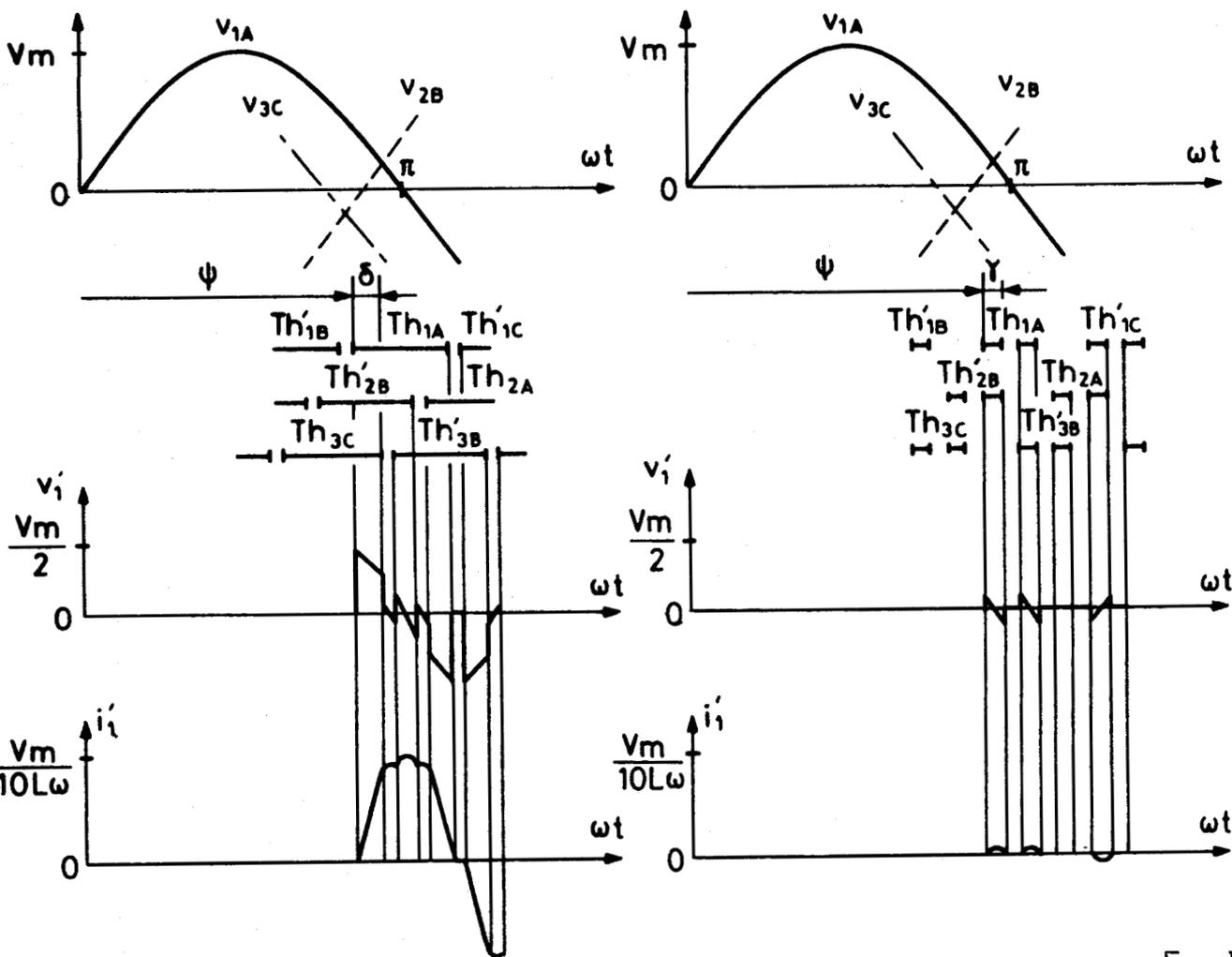


FIG. II.2.4

a) 1<sup>er</sup> mode :  $\psi = 152^{\circ},5$

b) 3<sup>ème</sup> mode :  $\psi = 165^{\circ}$

I.4. Débit sur récepteur résistant et inductif

I.4.1. Fonctionnement suivant le premier mode (fig. II.2.5.)

Quand  $\psi$  est voisin de  $\psi_{min}$ , l'amorçage de  $Th_{1A}$  pour  $\omega t = \psi$  trouve  $Th_{3C}$  et  $Th'_{2B}$  encore conducteurs et un intervalle à trois redresseurs passants débute. Il cesse lorsque pour  $\omega t = \psi + \delta$ ,  $Th_{3C}$  s'éteint.



• Intervalle à 3 thyristors conducteurs

- Les tensions  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$ , pendant le débit simultané de  $Th_{1A}$ ,  $Th_{3C}$  et  $Th_{2B}$ , sont encore données par les relations (II.10 et 11) car

$$v_{1A} - v_1' = v_{2B} - v_2' = v_{2C} - v_3'$$

et, si R et L désignent les constantes des phases réceptrices,

$$v_1' + v_2' + v_3' = R(i_1' + i_2' + i_3') + L \frac{d}{dt}(i_1' + i_2' + i_3') = 0$$

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{v_{2B} + v_{3C}}{3} = V_m (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t) \\ v_2' &= \frac{2}{3} v_{2B} - \frac{v_{3C} + v_{1A}}{3} = V_m (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t) \\ v_3' &= \frac{2}{3} v_{3C} - \frac{v_{1A} + v_{2B}}{3} = V_m (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.10 et 11})$$

- Les courants  $i_1'$ ,  $i_2'$ ,  $i_3'$ , solutions des équations

$$L \frac{di_1'}{dt} + R i_1' = v_1' ; \quad L \frac{di_2'}{dt} + R i_2' = v_2' ; \quad L \frac{di_3'}{dt} + R i_3' = v_3',$$

ont pour expressions

$$\left. \begin{aligned} i_1' &= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_1'' \cos \omega t + B_1'' \sin \omega t) + I_1' e^{-\omega t/Q} \\ i_2' &= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_2'' \cos \omega t + B_2'' \sin \omega t) + I_2' e^{-\omega t/Q} \\ i_3' &= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_3'' \cos \omega t + B_3'' \sin \omega t) + I_3' e^{-\omega t/Q} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.25})$$

avec

$$\begin{aligned} A_1'' &= -B_1 - Q A_1 ; & B_1'' &= A_1 - Q B_1 \\ A_2'' &= -B_2 - Q A_2 ; & B_2'' &= A_2 - Q B_2 \\ A_3'' &= -B_3 - Q A_3 ; & B_3'' &= A_3 - Q B_3 \end{aligned}$$

et  $Q = L\omega/R$

- Cet intervalle cesse, pour  $\omega t = \psi + \delta$ , quand  $i_3'$  passe par zéro

• *Intervalle à 2 thyristors conducteurs*

Quand  $Th_{1A}$  et  $Th_{2B}'$  conduisent seuls, les tensions sont toujours données par les relations (II.13) :

$$v_3' = 0 ; v_1' = -v_2' = \frac{v_{1A} - v_{2B}}{2} = V_m (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)$$

D'où les courants

$$i_3' = 0 ; i_1' = -i_2' = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (A_4'' \cos \omega t + B_4'' \sin \omega t) + I_4' e^{-\omega t/Q} \quad (II.26)$$

avec  $A_4'' = -B_4 - Q A_4 ; B_4'' = A_4 - Q B_4$

Cet intervalle cesse, pour  $\omega t = \psi + \pi/9$ , quand on amorce  $Th_{3B}'$ .

• *Calcul des constantes d'intégration*

- Puisque  $i_1'$  part de 0 pour  $\omega t = \psi$

$$I_1' = -\frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (A_1'' \cos \psi + B_1'' \sin \psi) e^{\psi/Q} \quad (II.27)$$

- Puisque  $i_1'$  doit avoir la même valeur à la fin du premier intervalle et au début du second

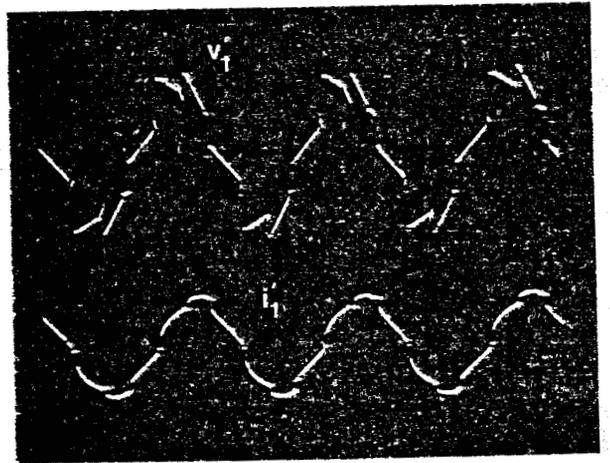
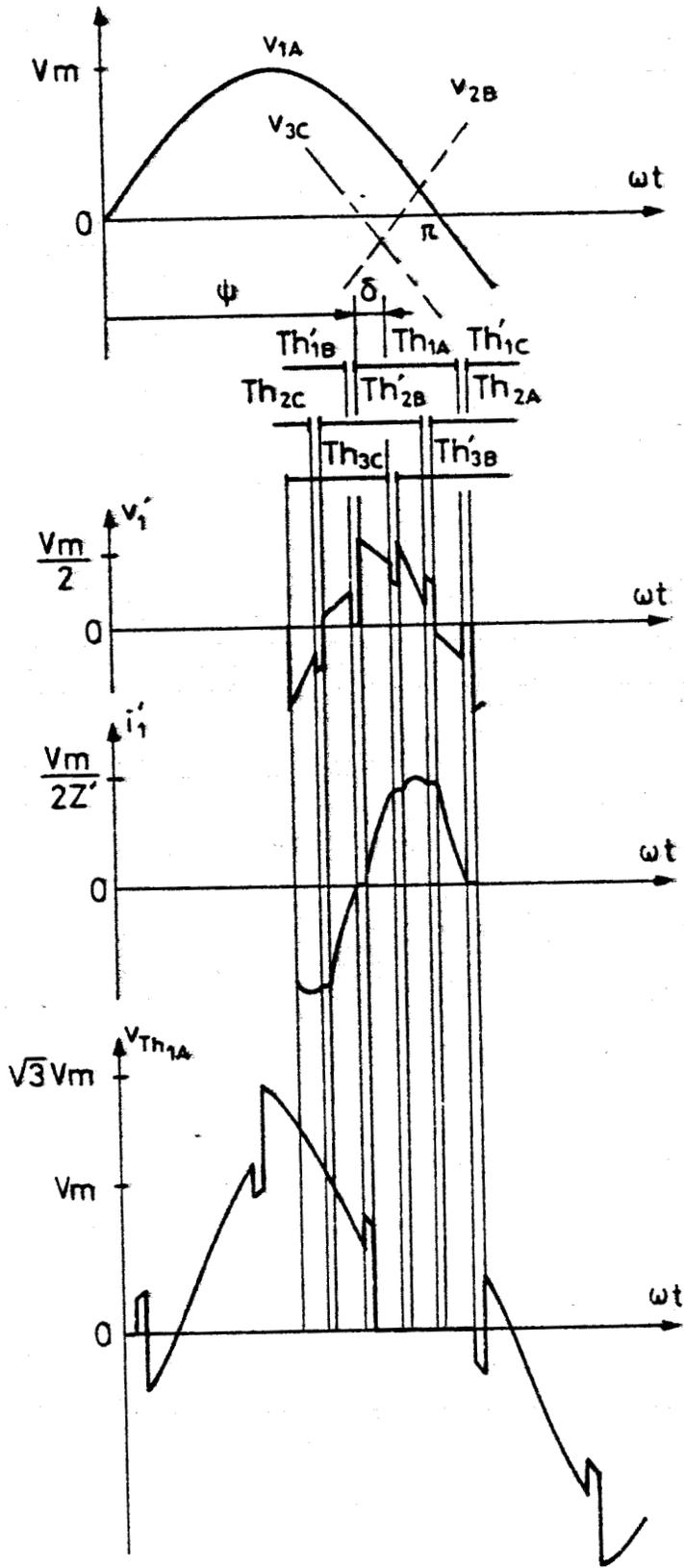
$$\frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [A_1'' \cos(\psi+\delta) + B_1'' \sin(\psi+\delta)] + I_1' e^{-(\psi+\delta)/Q}$$

$$= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [A_4'' \cos(\psi+\delta) + B_4'' \sin(\psi+\delta)] + I_4' e^{-(\psi+\delta)/Q}$$

Donc

$$I_4' = I_1' + \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [(A_1'' - A_4'') \cos(\psi+\delta) + (B_1'' - B_4'') \sin(\psi+\delta)] e^{\frac{\psi+\delta}{Q}} \quad (II.28)$$

- Puisque  $i_2'(\psi)$  égale  $-i_1'(\psi + \pi/9)$ ,



1<sup>er</sup> mode :  $\psi = 135^\circ$  ;  $\cos\phi' = 0,80$



FIG. II.2.5

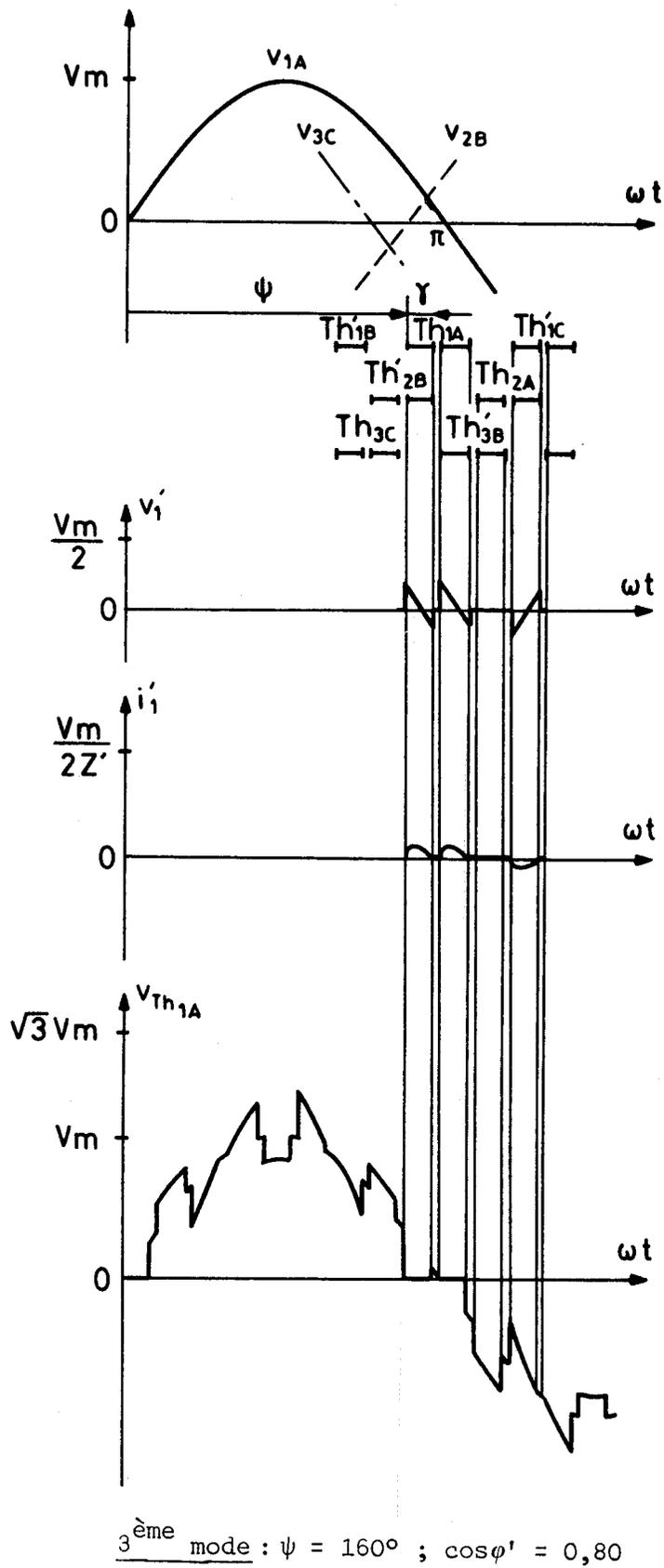


FIG. II.2.6

$$\begin{aligned} & \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_2'' \cos\psi + B_2'' \sin\psi) + I_2' e^{-\psi/Q} \\ &= - \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [A_4'' \cos(\psi + \frac{\pi}{9}) + B_4'' \sin(\psi + \frac{\pi}{9})] - I_4' e^{-(\psi + \frac{\pi}{9})/Q} \end{aligned}$$

Donc

$$I_2' = - I_4' e^{-\frac{\pi}{9Q}} - \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [A_2'' \cos\psi + A_4'' \cos(\psi + \frac{\pi}{9}) + B_2'' \sin\psi + B_4'' \sin(\psi + \frac{\pi}{9})] e^{\frac{\psi}{Q}} \quad (\text{II.29})$$

- Enfin on a toujours

$$I_3' = - I_1' - I_2'$$

• Détermination de l'angle  $\delta$

On détermine la largeur  $\delta$  du premier intervalle, en écrivant que, pour  $\omega t = \psi + \delta$ , le courant  $i_2'$  ne subit pas de discontinuité

$$\begin{aligned} & \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [A_2'' \cos(\psi+\delta) + B_2'' \sin(\psi+\delta)] + I_2' e^{-(\psi+\delta)/Q} \\ &= - \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [A_4'' \cos(\psi+\delta) + B_4'' \sin(\psi+\delta)] - I_4' e^{-(\psi+\delta)/Q} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [(A_2'' + A_4'') \cos(\psi+\delta) + (B_2'' + B_4'') \sin(\psi+\delta)] = - (I_2' + I_4') e^{-(\psi+\delta)/Q}$$

ou, compte-tenu des relations précédentes

$$\{(A_2'' + A_4'') \cos(\psi+\delta) + (B_2'' + B_4'') \sin(\psi+\delta) + (1 - e^{\pi/9Q}) [(A_1'' - A_4'') \cos(\psi+\delta)$$

$$+ (B_1'' - B_4'') \sin(\psi+\delta)]\} e^{\delta/Q} = (1 - e^{-\pi/9Q}) (A_1'' \cos\psi + B_1'' \sin\psi)$$

$$+ A_2'' \cos\psi + A_4'' \cos(\psi + \frac{\pi}{9}) + B_2'' \sin\psi + B_4'' \sin(\psi + \frac{\pi}{9}) \quad (\text{II.30})$$

Cette relation permet de déterminer la valeur de  $\delta$  à partir de celles de  $\psi$  et  $Q$ .

Sur la figure II.2.7.a. on a tracé les caractéristiques  $\delta(\psi)$  pour diverses valeurs de  $\cos\varphi'$ ,

$$\text{avec } \varphi' = \text{Art tg } \frac{3L\omega}{R} = \text{Arc tg } 3Q.$$

Les limites du premier mode de fonctionnement sont directement lisibles sur ces caractéristiques :

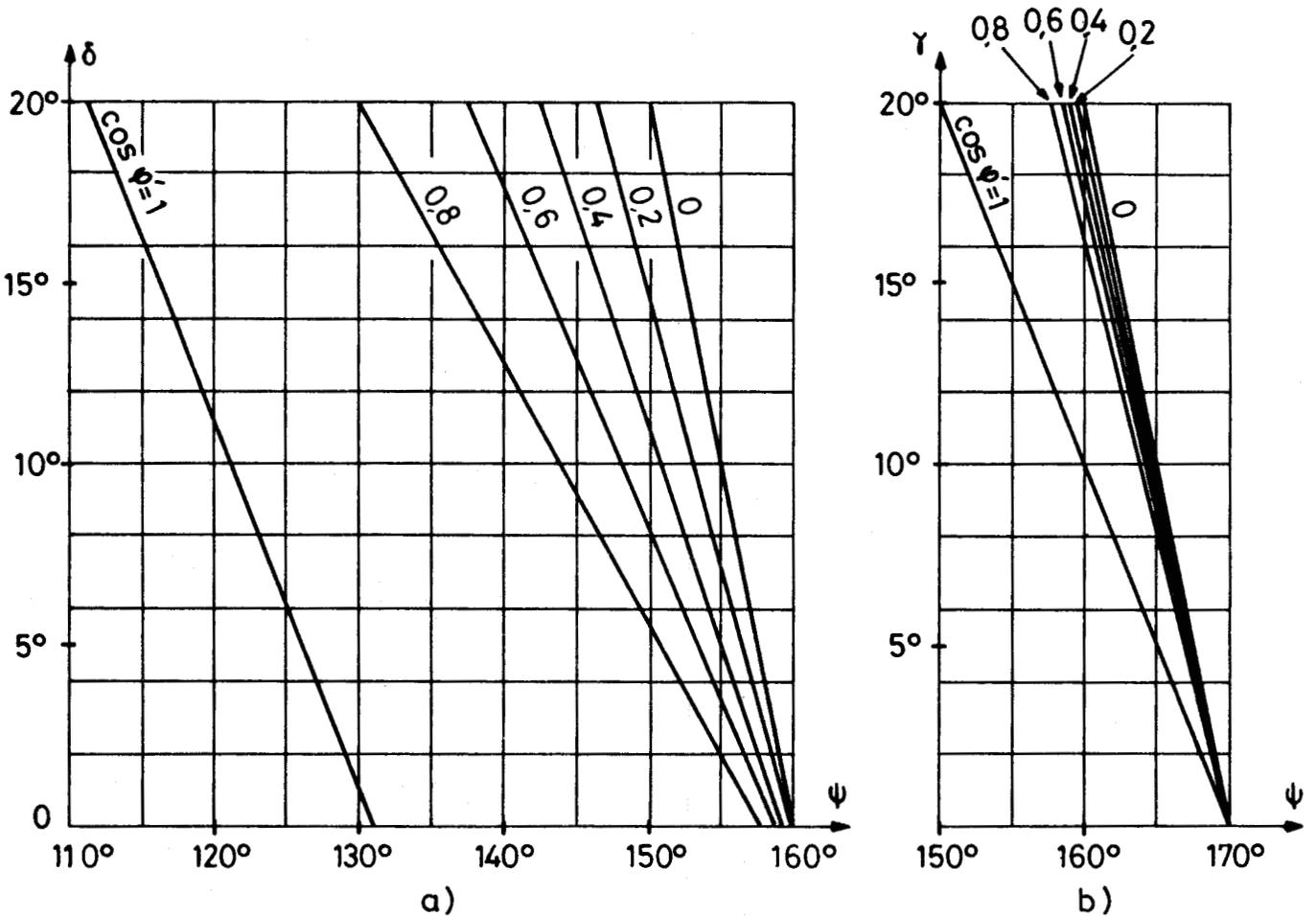


FIG. II.2.7

$\psi_{\min}$  est la valeur de  $\psi$  correspondant à  $\delta = 20^\circ$

$\psi_{1,3}$  celle correspondant à  $\delta = 0$ .

La figure II.2.5. montre le tracé pour  $\psi = 135^\circ$  et  $\cos\varphi' = 0,80$  ( $\delta$  est alors égal à  $16^\circ$ ) de la forme d'onde des tensions  $v'_1$ ,  $v_{Th_{1A}}$  et

du courant  $i'_1$  ; celui-ci est rapporté à  $Z' = \sqrt{R^2 + 9 L^2 \omega^2}$ .

On voit que, dès que  $Q$  cesse d'être négligeable, la forme d'onde des courants diffère peu de celle trouvée pour  $Q$  infini.

#### I.4.2. Fonctionnement suivant le troisième mode (fig. II.2.6.)

Si  $\psi$  est compris entre  $\psi_{1,3}$  et  $170^\circ$ , il y a tantôt 2 redresseurs conducteurs, tantôt zéro.

Pour  $\psi < \omega t < \psi + \gamma$ ,  $Th'_{2B}$  et  $Th_{1A}$  conduisent :

$$v'_3 = 0 ; v'_1 = -v'_2 = \frac{v_{1A} - v_{2B}}{2} = V_m (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t) \quad (\text{II.13})$$

$$i'_3 = 0 ; i'_1 = -i'_2 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (A''_4 \cos \omega t + B''_4 \sin \omega t) + I''_4 e^{-\omega t/Q}$$

Puisque  $i'_1$  est nul pour  $\omega t = \psi$ ,

$$I''_4 = -\frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (A''_4 \cos \psi + B''_4 \sin \psi) e^{\psi/Q}$$

et

$$i'_1 = -i'_2 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [A''_4 \cos \omega t + B''_4 \sin \omega t - (A''_4 \cos \psi + B''_4 \sin \psi) e^{-(\omega t - \psi)/Q}] \quad (\text{II.31})$$

• Ces deux thyristors s'éteignent pour  $\omega t = \psi + \gamma$  tel que

$$[A''_4 \cos(\psi + \gamma) + B''_4 \sin(\psi + \gamma)] e^{\gamma/Q} = A''_4 \cos \psi + B''_4 \sin \psi \quad (\text{II.32})$$

Cette relation permet de tracer les caractéristiques  $\gamma(\psi)$  pour diverses valeurs de  $Q$  ou de  $\cos \phi'$  (fig. II.2.7.b.).

• Pour  $\psi + \gamma < \omega t < \psi + \frac{\pi}{9}$ , aucun redresseur ne conduit

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = 0 ; \quad i'_1 = i'_2 = i'_3 = 0$$

Lorsque  $\psi$  devient supérieur à  $170^\circ$ , on ne peut plus débloquenter les thyristors 2 à 2 ; les tensions et courants de sortie restent constamment nuls.

Les tracés de la figure II.2.6. ont été effectués pour  $\psi = 160^\circ$

et  $\cos \varphi' = 0,80$ . L'angle  $\gamma$  est alors de  $16,8^\circ$ . Pour tracer  $v_{Th_{1A}}$ , on a supposé que la résistance de fuites de tous les thyristors est égale, donc que lorsque tous les thyristors sont bloqués  $v_{Th_{1A}} = v_{1A}$ .

## II. GENERALISATION

### II.1. Multiplication par k impair

#### II.1.1. Multiplication par 5

Comme pour la multiplication par 3, les tensions d'alimentation et l'ordre d'amorçage des thyristors sont les mêmes que pour le multiplicateur par 5 de la famille générale.

La figure II.2.8. montre les 15 tensions secondaires, le diagramme des conductions et la forme d'onde de la tension  $v_1'$  lors du fonctionnement à  $\psi_{min}$  et du débit sur résistances pures.

L'étude d'un sixième de la période des grandeurs de sortie est encore suffisant puisque les tensions  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$  sont identiques à  $2\pi/15$  et  $4\pi/15$  près et que leurs alternances négatives reproduisent au signe près,  $\pi/5$  radians plus tard, leurs alternances positives.

• S'il y a des *intervalles à 3 thyristors conducteurs*, pendant celui qui débute par le déblocage, pour  $\omega t = \psi$ , de  $Th_{1A}$ , les redresseurs simultanément passants sont  $Th_{3E}$ ,  $Th_{2C}$  et  $Th_{1A}$ .

$$\text{De } v_{1A} - v_1' = v_{2C} - v_2' = v_{3E} - v_3' \text{ et } v_1' + v_2' + v_3' = 0$$

on déduit

$$v_1' = \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{v_{2C} + v_{3E}}{3}$$

$$v_2' = \frac{2}{3} v_{2C} - \frac{v_{3E} + v_{1A}}{3}$$

$$v_3' = \frac{2}{3} v_{3E} - \frac{v_{1A} + v_{2C}}{3}$$

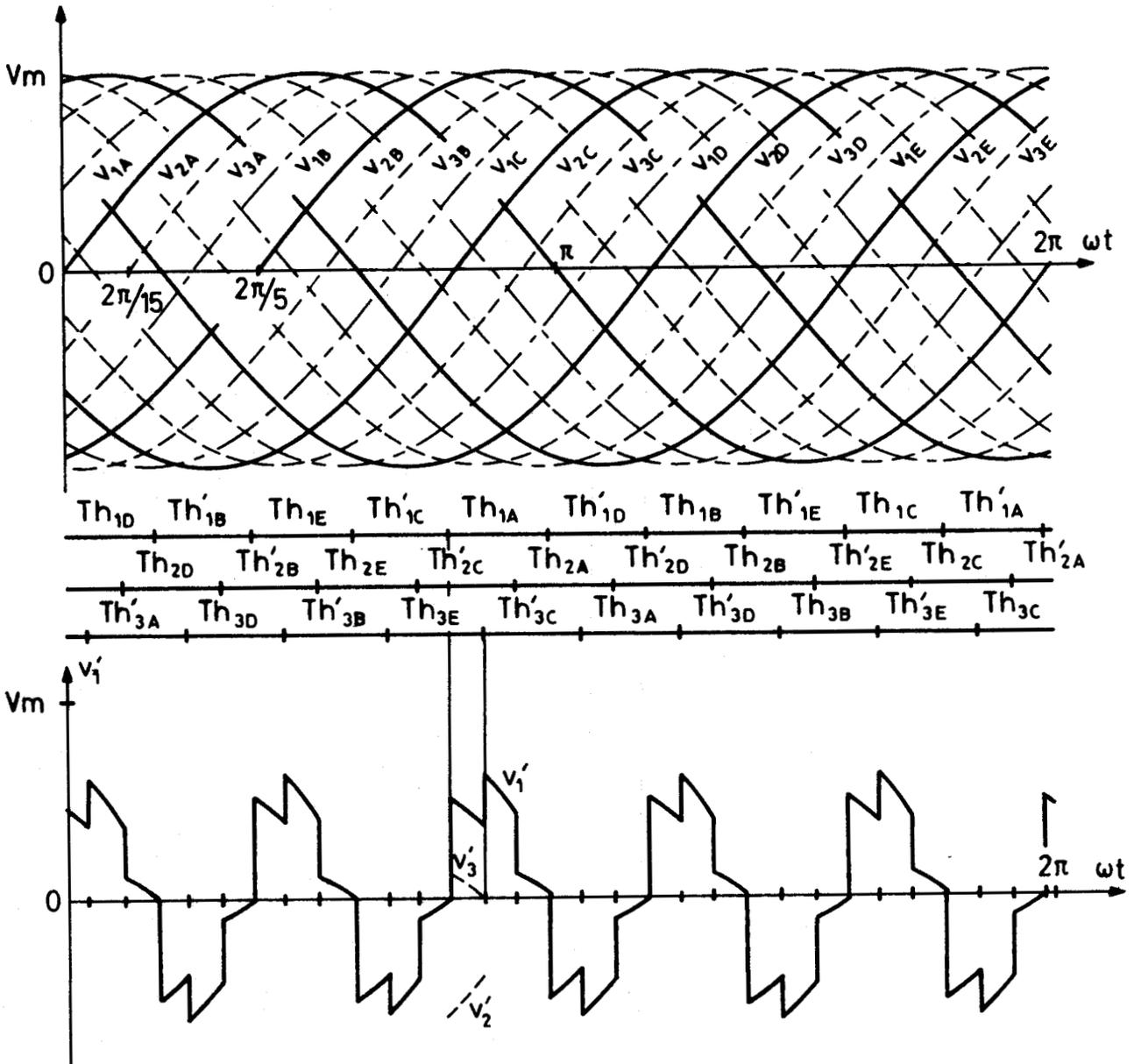


FIG. II.2.8

Puisque  $v_{1A} = V_m \sin \omega t$

$$v_{2C} = -V_m \sin(\omega t + \pi/15)$$

$$v_{3E} = V_m \sin(\omega t + 2\pi/15)$$

on peut mettre  $v'_1$ ,  $v'_2$  et  $v'_3$  sous la forme :



$$v'_1 = V_m [A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t]$$

$$v'_2 = V_m [A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t]$$

$$v'_3 = V_m [A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t]$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{3} (2 + \cos \frac{\pi}{15} - \cos \frac{2\pi}{15}) ; B_1 = \frac{1}{3} (\sin \frac{2\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{15})$$

$$A_2 = \frac{1}{3} (-2 \cos \frac{\pi}{15} - \cos \frac{2\pi}{15} - 1) ; B_2 = \frac{1}{3} (2 \sin \frac{\pi}{15} + \sin \frac{2\pi}{15})$$

$$A_3 = \frac{1}{3} (2 \cos \frac{2\pi}{15} + \cos \frac{\pi}{15} - 1) ; B_3 = \frac{1}{3} (-2 \sin \frac{2\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{15})$$

• Durant les *intervalles à 2 thyristors conducteurs*, si le débit de  $Th_{1A}$  est associé à celui de  $Th'_{2C}$  par exemple, les tensions de sortie sont alors données par

$$v'_3 = 0 ; v'_1 = -v'_2 = \frac{v_{1A} - v_{2C}}{2} = V_m (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)$$

avec  $A_4 = \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi}{15})$ ,  $B_4 = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{15}$

• Le calcul de l'angle  $\delta$  de débit de 3 redresseurs lors du premier mode de fonctionnement, celui de l'angle  $\gamma$  de débit de 2 redresseurs lors du troisième s'effectuent comme pour le tripleur de fréquence à condition de remplacer dans les relations (II.30) et (II.32) l'angle  $\pi/9$  par  $\pi/15$  et de prendre pour  $A''_1, B''_1, A''_2, B''_2, A''_3, B''_3, A''_4, B''_4$  les valeurs déduites de  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4$  correspondant à la multiplication par 5 de la fréquence.

L'angle minimum de retard au débloqué  $\psi_{\min}$  est tel que  $\delta = \pi/15$  ; le passage du premier au troisième mode de fonctionnement est obtenu pour la valeur de  $\psi$  qui rend  $\delta$  nul ou  $\gamma$  égal à  $\pi/15$ .

Au-delà de  $\psi = \pi - \pi/30$ , on ne peut amorcer simultanément  $Th_{1A}$  et  $Th'_{2C}$  ; les trois tensions sont constamment nulles.

### II.1.2. Multiplication par k impair quelconque

• Si le retard au débloqué  $\psi$  est compris entre  $\psi_{\min}$  et  $\psi_{1,3}$  (ou  $\psi_{1,2}$  lors du débit sur résistances pures), l'entrée en conduction de  $Th_{1A}$ , pour  $\omega t = \psi$ , marque le début d'un *intervalle à 3 redresseurs passants*. Ces trois redresseurs sont  $Th_{3,k}$ ,  $Th'_{2,\frac{k+1}{2}}$  et  $Th_{1A}$ .

Les tensions de sortie sont alors

$$v'_1 = \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{1}{3} \left( v_{2,\frac{k+1}{2}} + v_{3,k} \right)$$

$$v'_2 = \frac{2}{3} v_{2,\frac{k+1}{2}} - \frac{1}{3} \left( v_{3,k} + v_{1A} \right)$$

$$v'_3 = \frac{2}{3} v_{3,k} - \frac{1}{3} \left( v_{1A} + v_{2,\frac{k+1}{2}} \right)$$

avec  $v_{1A} = V_m \sin \omega t$

$$v_{2,\frac{k+1}{2}} = V_m \sin \left[ \omega t - \left( \frac{k-1}{2} \right) \frac{2\pi}{k} - \frac{2\pi}{3k} \right] = -V_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{3k} \right)$$

$$v_{3,k} = V_m \sin \left[ \omega t - (k-1) \frac{2\pi}{k} - \frac{4\pi}{3k} \right] = V_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3k} \right)$$

Les trois tensions servant à l'établissement des expressions de  $v'_1$ ,  $v'_2$ ,  $v'_3$  sont les mêmes que celles trouvées pour  $k = 3$  ou  $k = 5$  à condition de remplacer 3 ou 5 par  $k$ .

• Pendant l'*intervalle à 2 redresseurs passants* où  $Th_{1A}$  et  $Th'_{2,\frac{k+1}{2}}$  débitent simultanément

$$\begin{aligned} v'_3 &= 0 ; v'_1 = -v'_2 = \frac{1}{2} \left( v_{1A} - v_{2,\frac{k+1}{2}} \right) \\ &= V_m \left( A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t \right), \end{aligned}$$

avec  $A_4 = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{3k} \right)$ ,  $B_4 = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3k}$

Les expressions sont celles trouvées pour  $k = 3$  et  $k = 5$ , au remplacement de  $\frac{\pi}{9}$  ou  $\frac{\pi}{15}$  par  $\frac{\pi}{3k}$  près.

## II.2. Multiplication par k pair

### II.2.1. Multiplication par 2

Le schéma et l'ordre de déclenchement des 12 thyristors sont les mêmes que ceux indiqués pour le doubleur triphasé de la famille générale (voir fig. I.1.6.).

• Quand  $Th_{1A}$  est débloqué, alors que  $Th'_{3A}$  et  $Th_{2B}$  sont encore conducteurs, un *intervalle à 3 redresseurs passants* débute pour  $\omega t = \psi$ .

$$\text{De } v_{1A} - v'_1 = v_{2B} - v'_2 = -v_{3A} - v'_3 \text{ et } v'_1 + v'_2 + v'_3 = 0$$

on déduit

$$v'_1 = \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{1}{3} v_{2B} + \frac{1}{3} v_{3A}$$

$$v'_2 = \frac{2}{3} v_{2B} + \frac{1}{3} v_{3A} - \frac{1}{3} v_{1A}$$

$$v'_3 = -\frac{2}{3} v_{3A} - \frac{1}{3} v_{1A} - \frac{1}{3} v_{2B}$$

avec  $v_{1A} = V_m \sin \omega t$

$$v_{2B} = -V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$-v_{3A} = V_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{6})$$

Si l'on met  $v'_1, v'_2, v'_3$  sous la forme

$$v'_1 = V_m (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t)$$

$$v'_2 = V_m (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t)$$

$$v'_3 = V_m (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t)$$

on trouve pour  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ , les valeurs données par (II.11) si on remplace dans celles-ci  $\pi/9$  par  $\pi/3k$ .

• Durant l'intervalle à 2 redresseurs passants correspondant au débit de  $Th_{1A}$  et  $Th_{2B}$ ,

$$v_1' = -v_2' = \frac{v_{1A} - v_{2B}}{2} = V_m(A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)$$

où  $A_4$  et  $B_4$  sont les coefficients donnés par (II.14) au remplacement de  $\pi/9$  par  $\pi/3$  k près.

La figure II.2.9. montre le tracé de  $v_1'$ , à partir des variations de  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$  durant l'intervalle  $\psi$ ,  $\psi + \pi/6$ , dans le cas d'un récepteur purement résistant, avec  $\psi = \pi/2$ ; le fonctionnement s'effectue suivant le premier mode et l'angle  $\delta$  est alors voisin de  $20^\circ$ .

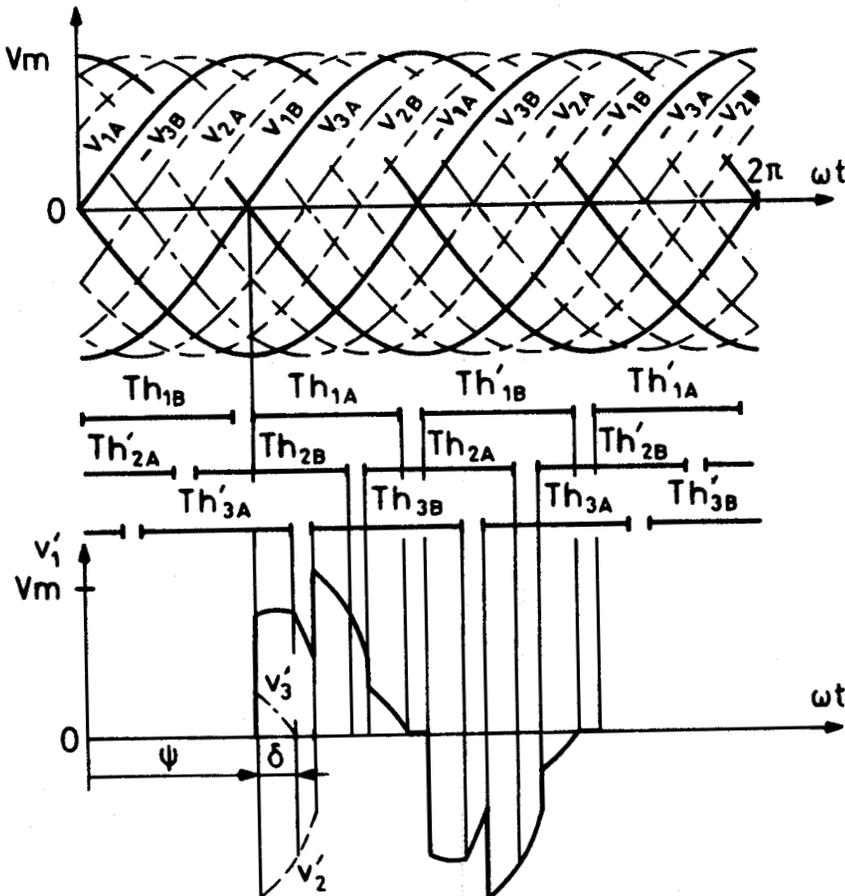


FIG. II.2.9

### II.2.2. Multiplication par k pair quelconque

A l'entrée de chacune des trois phases réceptrices, les thyristors peuvent appliquer l'une des  $2k$  tensions déphasées entre-elles de  $2\pi/2k$ . Les trois systèmes de  $2k$  tensions sont déphasés entre-eux de  $2\pi/3k$ .

Le passage par zéro, par valeurs décroissantes de  $v_{1A}$ , est précédé de  $\pi/3k$  par le passage par zéro de  $v_{2,k}$  croissant et de  $2\pi/3k$  par le passage par zéro de  $-v_{3,k-1}$  décroissant.

- La conduction simultanée des trois redresseurs appliquant à l'entrée des trois phases réceptrices  $v_{1A}$ ,  $v_{2,k}$ ,  $-v_{3,k-1}$  donne

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{2}{3} v_{1A} - \frac{1}{3} v_{2,k} + \frac{1}{3} v_{3,k-1} \\ v'_2 = \frac{2}{3} v_{2,k} + \frac{1}{3} v_{3,k-1} - \frac{1}{3} v_{1A} \\ v'_3 = -\frac{2}{3} v_{3,k-1} - \frac{1}{3} v_{1A} - \frac{1}{3} v_{2,k} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} v_{1A} = V_m \sin \omega t \\ v_{2,k} = V_m \sin \left[ \omega t - (k-1) \frac{\pi}{k} - \frac{2\pi}{3k} \right] = -V_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{3k} \right) \\ -v_{3,k-1} = -V_m \left[ \sin \omega t - (k-2) \frac{\pi}{k} - \frac{4\pi}{3k} \right] = +V_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3k} \right) \end{cases}$$

- La conduction simultanée des deux redresseurs appliquant  $v_{1A}$  et  $v_{2,k}$  à l'entrée des phases 1 et 2, la troisième n'étant pas alimentée, donne

$$v'_3 = 0, \quad v'_1 = -v'_2 = \frac{v_{1A} - v_{2,k}}{2}$$

- On retrouve toujours les mêmes expressions à condition de remplacer les  $\pi/9$  du tripleur de fréquence par  $\pi/3k$ .

### II.3. Relations applicables à tous les multiplicateurs triphasés à k entier

#### II.3.1. Fonctionnement suivant le premier mode

• Pendant l'intervalle à 3 redresseurs passants débutant pour  $\omega t = \psi$ .

- Les tensions de sortie  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$  sont donc données, quel que soit  $k$ , par

$$\begin{aligned}
 v_1' &= V_m (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t), \\
 v_2' &= V_m (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t), \\
 v_3' &= V_m (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t),
 \end{aligned}
 \tag{II.33}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{3} (2 + \cos \frac{\pi}{3k} - \cos \frac{2\pi}{3k}) & ; B_1 &= \frac{1}{3} (\sin \frac{2\pi}{3k} - \sin \frac{\pi}{3k}) \\
 A_2 &= \frac{1}{3} (-2 \cos \frac{\pi}{3k} - \cos \frac{2\pi}{3k} - 1) & ; B_2 &= \frac{1}{3} (2 \sin \frac{\pi}{3k} + \sin \frac{2\pi}{3k}) \\
 A_3 &= \frac{1}{3} (2 \cos \frac{2\pi}{3k} + \cos \frac{\pi}{3k} - 1) & ; B_3 &= \frac{1}{3} (-2 \sin \frac{2\pi}{3k} - \sin \frac{\pi}{3k})
 \end{aligned}$$

- Les courants de sortie  $i_1'$ ,  $i_2'$ ,  $i_3'$  se déduisent des tensions par les relations (II.25) où seules changent les expressions des constantes d'intégration faisant intervenir la durée du sixième de la période des grandeurs de sortie

$$i'_1 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A''_1 \cos \omega t + B''_1 \sin \omega t) + I'_1 e^{-\omega t/Q}$$

$$i'_2 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A''_2 \cos \omega t + B''_2 \sin \omega t) + I'_2 e^{-\omega t/Q}$$

$$i'_3 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A''_3 \cos \omega t + B''_3 \sin \omega t) + I'_3 e^{-\omega t/Q}$$

avec  $Q = L\omega/R$  ;  $A''_1 = -B_1 - QA_1$  ;  $A''_2 = -B_2 - QA_2$  ;  $A''_3 = -B_3 - QA_3$

$$B''_1 = A_1 - QB_1$$
 ;  $B''_2 = A_2 - QB_2$  ;  $B''_3 = A_3 - QB_3$

$$I'_1 = -\frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A''_1 \cos \psi + B''_1 \sin \psi) e^{\psi/Q}$$

$$I'_2 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} \{ (A''_1 \cos \psi + B''_1 \sin \psi) e^{\frac{\psi}{Q}} e^{-\frac{\pi}{3kQ}}$$

$$- [(A''_1 - A''_4) \cos(\psi + \delta) + (B''_1 - B''_4) \sin(\psi + \delta)] e^{\frac{\psi + \delta}{Q}} e^{-\frac{\pi}{3kQ}}$$

$$- [A''_2 \cos \psi + A''_4 \cos(\psi + \frac{\pi}{3k}) + B''_2 \sin \psi + B''_4 \sin(\psi + \frac{\pi}{3k})] e^{\frac{\pi}{Q}}$$

$$I'_3 = -I'_1 - I'_2$$

$$A''_4 = -B_4 - QA_4$$
 ;  $B''_4 = A_4 - QB_4$

(II.34)

- *l'angle*  $\delta$  qui donne la durée des intervalles à trois redresseurs passants et intervient dans le calcul de  $I'_2$  s'obtient à l'aide de la relation

$$\{ (A''_2 + A''_4) \cos(\psi + \delta) + (B''_2 + B''_4) \sin(\psi + \delta) + (1 - e^{-\pi/3kQ}) [(A''_1 - A''_4) \cos(\psi + \delta)$$

$$+ (B''_1 - B''_4) \sin(\psi + \delta)] \} e^{\delta/Q} = (1 - e^{-\pi/3kQ}) (A''_1 \cos \psi + B''_1 \sin \psi)$$

$$+ A''_2 \cos \psi + A''_4 \cos(\psi + \frac{\pi}{3k}) + B''_2 \sin \psi + B''_4 \sin(\psi + \frac{\pi}{3k})$$

(II.35)

• Pendant l'intervalle à 2 redresseurs passants qui débute pour  $\omega t = \psi + \delta$ ,

$$\left. \begin{aligned} v_3' &= 0 ; v_1' = -v_2' = V_m (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t), \\ \text{avec } A_4 &= \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi}{3k}) ; B_4 = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.36})$$

$$\left. \begin{aligned} i_3' &= 0 ; i_1' = -i_2' = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (A_4'' \cos \omega t + B_4'' \sin \omega t) + I_4' e^{-\omega t/Q}, \\ \text{avec } A_4'' &= -B_4 - Q A_4 ; B_4'' = A_4 - Q B_4 \\ I_4' &= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} \left\{ -(A_1'' \cos \psi + B_1'' \sin \psi) e^{\psi/Q} + [(A_1'' - A_4'') \cos(\psi + \delta) + (B_1'' - B_4'') \sin(\psi + \delta)] e^{\frac{\psi + \delta}{Q}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.37})$$

• Les limites de ce mode de fonctionnement se déduisent de l'étude de  $\delta$ .

$\psi_{\min}$  est la valeur de  $\psi$  pour laquelle  $\delta = \frac{\pi}{3k}$ .

Lorsque la croissance de  $\psi$  annule  $\delta$  on passe au troisième mode de fonctionnement (ou au deuxième lors du débit sur résistances pures).

### II.3.2. Fonctionnement suivant le deuxième mode ( $Q = 0$ )

Ce fonctionnement correspond aux valeurs de  $\psi$  comprises entre

$$\psi_{\min} = \text{Arc tg } B_3/A_3$$

$$\text{et } \psi_{2,3} \text{ tel que } \sin(\psi_{2,3} + \frac{\pi}{3k}) = -\sin(\psi_{2,3} + \frac{2\pi}{3k})$$

Pendant l'intervalle  $\psi, \psi + \frac{\pi}{3k}$ ,

$$v_3' = 0 ; v_1' = -v_2' = V_m (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t) ; i_3' = 0 ; i_1' = -i_2' = \frac{v_1'}{R} \quad (\text{II.38})$$

### II.3.3. Fonctionnement suivant le troisième mode

- Pour  $\psi < \omega t < \psi + \gamma$ ,

$$\left. \begin{aligned} v_3' &= 0 ; v_1' = -v_2' = V_m (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t) ; \\ i_3' &= 0 ; i_1' = -i_2' = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (A_4'' \cos \omega t + B_4'' \sin \omega t) + I_4' e^{-\omega t/Q} \\ \text{avec } I_4' &= -\frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} (A_4'' \cos \psi + B_4'' \sin \psi) e^{\psi/Q} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.39})$$

- L'angle  $\gamma$  est encore donné par la relation (II.32)

$$[A_4'' \cos(\psi + \gamma) + B_4'' \sin(\psi + \gamma)] e^{\gamma/Q} = A_4'' \cos \psi + B_4'' \sin \psi \quad (\text{II.32})$$

- Pour  $\psi + \gamma < \omega t < \psi + \pi/3k$ , les courants et les tensions de sortie sont nuls.

• Quand le troisième mode succède au premier (ou au second)  $\gamma$  est égal à  $\pi/3 k$ . Quand  $\psi$  atteint  $\pi - \pi/6 k$ ,  $\gamma$  est égal à zéro, les grandeurs de sortie sont constamment nulles.

## II.4. Multiplication par K fractionnaire supérieur à 1

### II.4.1. Multiplication par $k = 3/2$

On a repris pour la première phase le schéma et l'ordre de déclenchement de la figure I.1.8. La figure II.2.10 montre les trois systèmes décalés entre-eux de  $4\pi/9$ , formés chacun de six tensions décalées entre-elles de  $\pi/3$ . Les thyristors des phases 2 et 3 sont déclenchés avec un retard de  $4\pi/9$  par rapport à ceux de la phase 1.

- Si, à partir de  $\omega t = 3\pi + \psi$ , trois redresseurs conduisent à la fois, il s'agit de  $Th_{1A}$ ,  $Th_{2B}$ ,  $Th_{3C}$ .

Ils appliquent respectivement à l'entrée des phases 1, 2 et 3,

$$\left\{ \begin{aligned} v_{1A} &= V_m \sin \omega t \\ v_{2B} &= V_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{9}) = -V_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{9}) \\ v_{3C} &= V_m \sin(\omega t - 2\frac{\pi}{3} - \frac{8\pi}{9}) = V_m \sin(\omega t + \frac{4\pi}{9}) \end{aligned} \right.$$

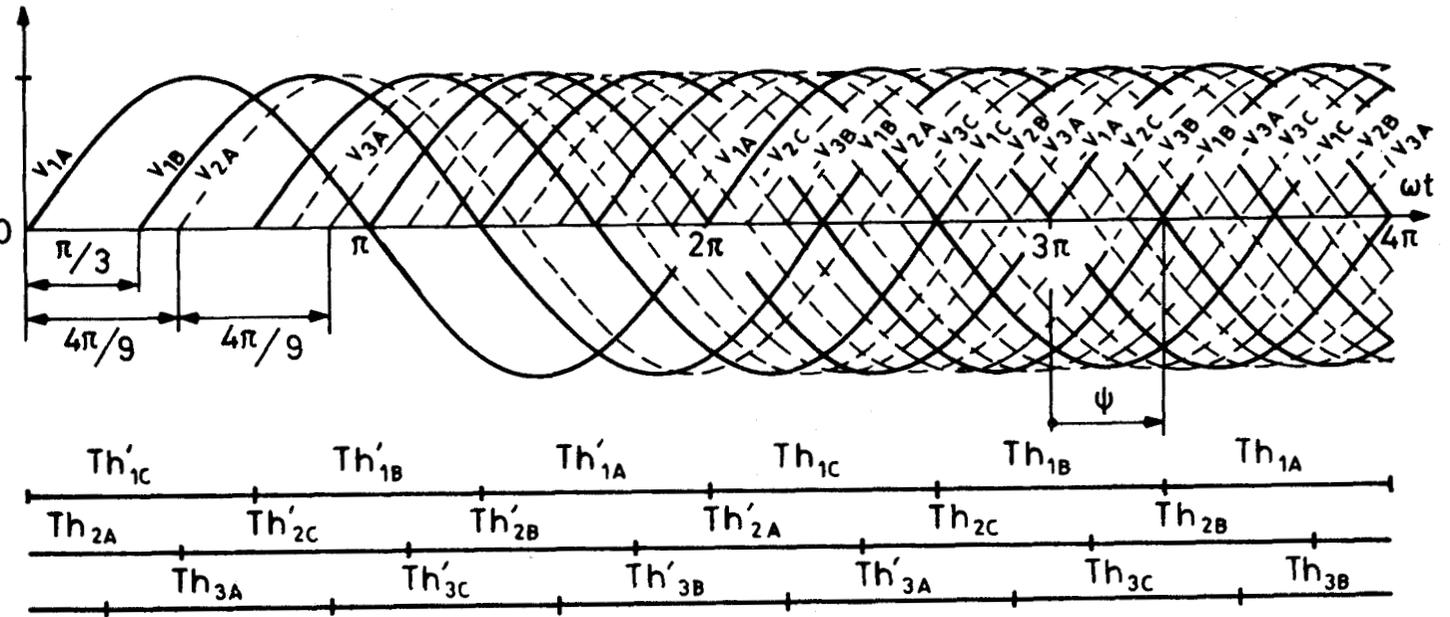


FIG. II.2.10

- Pendant le débit simultan e de  $Th_{1A}$  et  $Th_{2B}$ , les tensions appliquées à l'entrée des phases 1 et 2 sont

$$\begin{cases} v_{1A} = V_m \sin \omega t \\ v_{2B} = -V_m \sin(\omega t + 2 \frac{\pi}{9}) \end{cases}$$

#### II.4.2. Généralisation. Application des relations établies pour k entier

- Dans le cas général de la multiplication par un nombre fractionnaire égal à  $N/D$ , par tension de sortie il faut  $2N$  tensions déphasées entre-elles de  $\pi/N$  et  $2N$  thyristors déclenchés de  $2\pi D/N$  en  $2\pi D/N$ .

Les trois systèmes de  $2N$  tensions sont d phas es entre-eux de  $2\pi D/3N$  et  $4\pi D/3N$ . Les thyristors reliés aux phases 2 et 3 sont débloqués  $2\pi D/3N$  et  $4\pi D/3N$  après ceux de même rang de la phase 1.

Quand  $Th_{1A}$  et deux autres thyristors conduisent, ils appliquent respectivement à l'entrée des phases 1, 2, 3

$$\begin{cases} v_{1A} = V_m \sin \omega t \\ v_{2, N-D+1} = V_m \sin[\omega t - (N-D) \frac{\pi}{N} - \frac{2\pi D}{3N}] = -V_m \sin(\omega t + D \frac{\pi}{3N}) \\ v_{3, 2(N-D)+1} = V_m \sin[\omega t - 2(N-D) \frac{\pi}{N} - \frac{4\pi D}{3N}] = V_m \sin(\omega t + D \frac{2\pi}{3N}) \end{cases}$$

Quand  $Th_{1A}$  et  $Th_{2,N-D+1}$  conduisent, les tensions appliquées à l'entrée des phases 1 et 2 sont donc encore

$$\begin{cases} v_{1A} = V_m \sin \omega t \\ v_{1,N-D+1} = -V_m \sin(\omega t - D \frac{\pi}{3} N) \end{cases}$$

- Puisque  $D \frac{\pi}{3N} = \frac{\pi}{3k}$  et  $D \frac{2\pi}{3N} = \frac{2\pi}{3k}$  on trouve, pour  $k$  fractionnaire,

les mêmes expressions des tensions appliquées aux phases réceptrices que pour  $k$  entier. *Toutes les relations indiquées pour  $k$  entier sont donc encore utilisables* (voir § II.3).

### III. CARACTERISTIQUES

#### III.1. Caractéristiques des grandeurs de sortie

La présentation des expressions des tensions et courants de sortie données dans les paragraphes précédents permet d'établir des relations valables quel que soit le facteur de multiplication.

##### III.1.1. Tensions de sortie. Développement en série

• Pour le premier mode de fonctionnement,

la tension  $v_1'$  a pour expressions successives

- pour  $\psi < \omega t < \psi + \delta$ ,  $v_1' = V_m(A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t)$

- pour  $\psi + \delta < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3k}$ ,  $v_1' = V_m(A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)$

- pour  $\psi + \frac{\pi}{3k} < \omega t < \psi + \delta + \frac{\pi}{3k}$ ,  $v_1' = -V_m[A_2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3k}) - B_2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3k})]$

- pour  $\psi + \delta + \frac{\pi}{3k} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3k}$ ,  $v_1' = V_m[A_4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3k}) - B_4 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3k})]$

- pour  $\psi + \frac{2\pi}{3k} < \omega t < \psi + \delta + \frac{2\pi}{3k}$ ,  $v_1' = V_m[A_3 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3k}) - B_3 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3k})]$

- pour  $\psi + \delta + \frac{2\pi}{3k} < \omega t < \psi + \frac{\pi}{k}$ ,  $v_1' = 0$

$$\text{De plus } v_1'(\omega t + \frac{\pi}{k}) = -v_1'(\omega t)$$

A cause de l'identité, au signe près, des deux alternances, le développement en série ne comporte que des harmoniques de rang  $p$  impair de pulsation multiple de  $k\omega$ .

Le calcul de  $A_p'$  par

$$A_p' = \frac{2}{\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+\pi/k} v_1' \sin p k \omega t \, d\omega t$$

donne

$$\begin{aligned} A_p' = \frac{v_m}{\pi/k} \{ & A_1 \left[ \frac{\sin(pk-1)(\psi+\delta) - \sin(pk-1)\psi}{pk-1} - \frac{\sin(pk+1)(\psi+\delta) - \sin(pk+1)\psi}{pk+1} \right] \\ & + B_1 \left[ \frac{\cos(pk-1)(\psi+\delta) - \cos(pk-1)\psi}{pk-1} + \frac{\cos(pk+1)(\psi+\delta) - \cos(pk+1)\psi}{pk+1} \right] \\ & + A_4 \left[ \frac{\sin(pk-1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) - \sin(pk-1)(\psi+\delta)}{pk-1} - \frac{\sin(pk+1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) - \sin(pk+1)(\psi+\delta)}{pk+1} \right] \\ & + B_4 \left[ \frac{\cos(pk-1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) - \cos(pk-1)(\psi+\delta)}{pk-1} + \frac{\cos(pk+1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) - \cos(pk+1)(\psi+\delta)}{pk+1} \right] \\ & - A_2 \left[ \frac{\sin[(pk-1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk-1)\psi + p\frac{\pi}{3}]}{pk-1} - \frac{\sin[(pk+1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi + p\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & - B_2 \left[ \frac{\cos[(pk-1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk-1)\psi + p\frac{\pi}{3}]}{pk-1} + \frac{\cos[(pk+1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi + p\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & + A_4 \left[ \frac{\sin[(pk-1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) + p\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk-1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}]}{pk-1} - \frac{\sin[(pk+1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) + p\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk+1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & + B_4 \left[ \frac{\cos[(pk-1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) + p\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk-1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}]}{pk-1} + \frac{\cos[(pk+1)(\psi + \frac{\pi}{3k}) + p\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk+1)(\psi+\delta) + p\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & + A_3 \left[ \frac{\sin[(pk-1)(\psi+\delta) + \frac{2p\pi}{3}] - \sin[(pk-1)\psi + \frac{2p\pi}{3}]}{pk-1} - \frac{\sin[(pk+1)(\psi+\delta) + \frac{2p\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi + \frac{2p\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & + B_3 \left[ \frac{\cos[(pk-1)(\psi+\delta) + \frac{2p\pi}{3}] - \cos[(pk-1)\psi + \frac{2p\pi}{3}]}{pk-1} + \frac{\cos[(pk+1)(\psi+\delta) + \frac{2p\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi + \frac{2p\pi}{3}]}{pk+1} \right] \} \end{aligned}$$

De la même façon, le calcul de  $B'_p$  par

$$B'_p = \frac{2}{\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+\pi/k} v'_1 \cos pk\omega t \, d\omega t$$

donne

$$\begin{aligned} B'_p = & \frac{V_m}{\pi/k} \left\{ A_1 \left[ \frac{\cos(pk-1)(\psi+\delta) - \cos(pk-1)\psi}{pk-1} - \frac{\cos(pk+1)(\psi+\delta) - \cos(pk+1)\psi}{pk+1} \right] \right. \\ & - B_1 \left[ \frac{\sin(pk-1)(\psi+\delta) - \sin(pk-1)\psi}{pk-1} + \frac{\sin(pk+1)(\psi+\delta) - \sin(pk+1)\psi}{pk+1} \right] \\ & + A_4 \left[ \frac{\cos(pk-1)(\psi+\frac{\pi}{3k}) - \cos(pk-1)(\psi+\delta)}{pk-1} - \frac{\cos(pk+1)(\psi+\frac{\pi}{3k}) - \cos(pk+1)(\psi+\delta)}{pk+1} \right] \\ & - B_4 \left[ \frac{\sin(pk-1)(\psi+\frac{\pi}{3k}) - \sin(pk-1)(\psi+\delta)}{pk-1} + \frac{\sin(pk+1)(\psi+\frac{\pi}{3k}) - \sin(pk+1)(\psi+\delta)}{pk+1} \right] \\ & - A_2 \left[ \frac{\cos[(pk-1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk-1)\psi+\frac{\pi}{3}]}{pk-1} - \frac{\cos[(pk+1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi+\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & + B_2 \left[ \frac{\sin[(pk-1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk-1)\psi+\frac{\pi}{3}]}{pk-1} + \frac{\sin[(pk+1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi+\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & + A_4 \left[ \frac{\cos[(pk-1)(\psi+\frac{\pi}{3k})+\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk-1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}]}{pk-1} - \frac{\cos[(pk+1)(\psi+\frac{\pi}{3k})+\frac{\pi}{3}] - \cos[(pk+1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & - B_4 \left[ \frac{\sin[(pk-1)(\psi+\frac{\pi}{3k})+\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk-1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}]}{pk-1} + \frac{\sin[(pk+1)(\psi+\frac{\pi}{3k})+\frac{\pi}{3}] - \sin[(pk+1)(\psi+\delta)+\frac{\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & + A_3 \left[ \frac{\cos[(pk-1)(\psi+\delta)+\frac{2p\pi}{3}] - \cos[(pk-1)\psi+\frac{2p\pi}{3}]}{pk-1} - \frac{\cos[(pk+1)(\psi+\delta)+\frac{2p\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi+\frac{2p\pi}{3}]}{pk+1} \right] \\ & - B_3 \left[ \frac{\sin[(pk-1)(\psi+\delta)+\frac{2p\pi}{3}] - \sin[(pk-1)\psi+\frac{2p\pi}{3}]}{pk-1} + \frac{\sin[(pk+1)(\psi+\delta)+\frac{2p\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi+\frac{2p\pi}{3}]}{pk+1} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

• Pour le troisième mode de fonctionnement,

La tension  $v'_1$  a pour expressions successives pendant une alternance,

- pour  $\psi < \omega t < \psi + \gamma$ ,  $v_1' = V_m(A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)$
- pour  $\psi + \gamma < \omega t < \psi + \pi/3k$ ,  $v_1' = 0$
- pour  $\psi + \pi/3k < \omega t < \psi + \gamma + \pi/3k$ ,  $v_1' = V_m[A_4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3k}) - B_4 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3k})]$
- pour  $\psi + \gamma + \pi/3k < \omega t < \psi + \pi/k$ ,  $v_1' = 0$

D'où les composantes de son harmonique de pulsation  $pk\omega$

$$\frac{\frac{A'_p}{V_m}}{\frac{\pi}{k}} = A_4 \left\{ \frac{1}{pk-1} [\sin(pk-1)(\psi+\gamma) - \sin(pk-1)\psi + \sin[(pk-1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \sin[(pk-1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right. \\ \left. - \frac{1}{pk+1} [\sin(pk+1)(\psi+\gamma) - \sin(pk+1)\psi + \sin[(pk+1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right\}$$

$$+ B_4 \left\{ \frac{1}{pk-1} [\cos(pk-1)(\psi+\gamma) - \cos(pk-1)\psi + \cos[(pk-1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \cos[(pk-1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right. \\ \left. + \frac{1}{pk+1} [\cos(pk+1)(\psi+\gamma) - \cos(pk+1)\psi + \cos[(pk+1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right\}$$

$$\frac{B'_p}{V_m} = A_4 \left\{ \frac{1}{pk-1} [\cos(pk-1)(\psi+\gamma) - \cos(pk-1)\psi + \cos[(pk-1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \cos[(pk-1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right. \\ \left. - \frac{1}{pk+1} [\cos(pk+1)(\psi+\gamma) - \cos(pk+1)\psi + \cos[(pk+1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right\}$$

$$- B_4 \left\{ \frac{1}{pk-1} [\sin(pk-1)(\psi+\gamma) - \sin(pk-1)\psi + \sin[(pk-1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \sin[(pk-1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right. \\ \left. + \frac{1}{pk+1} [\sin(pk+1)(\psi+\gamma) - \sin(pk+1)\psi + \sin[(pk+1)(\psi+\gamma) + \frac{p\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi + \frac{p\pi}{3}]] \right\}$$

• *Remarques*

- On vérifie dans les expressions précédentes de  $A'_p$  et  $B'_p$ , qui sont susceptibles de simplifications par regroupements de termes, que  $A'_p$  et  $B'_p$  sont nuls pour  $p$  impair égal à 3 ou à un multiple de 3.

- Pour le deuxième mode, on peut utiliser les mêmes relations que pour le troisième, à condition de prendre  $\gamma = \pi/3k$ .

III.1.2. Tensions de sortie. Valeur efficace

• Pour le premier mode de fonctionnement,

la valeur efficace  $V'$  de la tension de sortie  $v'_1$  est calculée par

$$\begin{aligned}
 V'^2 = \frac{V_m^2}{\pi/k} & \left\{ \int_{\psi}^{\psi+\delta} (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t)^2 d\omega t \right. \\
 & + \int_{\psi+\delta}^{\psi+\pi/3k} (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)^2 d\omega t \\
 & + \int_{\psi+\pi/3k}^{\psi+\delta+\pi/3k} [A_2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3k}) - B_2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3k})]^2 d\omega t \\
 & + \int_{\pi+\delta+\pi/3k}^{\psi+2\pi/3k} [A_4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3k}) - B_4 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3k})]^2 d\omega t \\
 & \left. + \int_{\psi+2\pi/3k}^{\psi+\delta+2\pi/3k} [A_3 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3k}) - B_3 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3k})]^2 d\omega t \right\} ;
 \end{aligned}$$

ce qui, tous calculs faits donne :

$$\begin{aligned}
 V'^2 = \frac{kV_m^2}{2\pi} & \left[ (A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2 + A_3^2 + B_3^2) \delta - \frac{A_1^2 - B_1^2 + A_2^2 - B_2^2 + A_3^2 - B_3^2}{2} [\sin 2(\psi + \delta) - \sin 2\psi] \right. \\
 & + (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) [\cos 2(\psi + \delta) - \cos 2\psi] + 2(A_4^2 + B_4^2) \left( \frac{\pi}{3k} - \delta \right) \\
 & - (A_4^2 - B_4^2) \left[ \sin 2\left(\psi + \frac{\pi}{3k}\right) - \sin 2(\psi + \delta) \right] \\
 & \left. + 2A_4 B_4 \left[ \cos 2\left(\psi + \frac{\pi}{3k}\right) - \cos 2(\psi + \delta) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Lorsque  $\psi$  a sa valeur minimale, l'angle  $\delta$  égale  $\pi/3k$  ; la valeur efficace  $V'$  est alors maximum et vaut  $V'_{\max}$  tel que

$$V'_{\max}{}^2 = \frac{kV_m^2}{2\pi} \left[ (A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2 + A_3^2 + B_3^2) \frac{\pi}{3k} - \frac{A_1^2 - B_1^2 + A_2^2 - B_2^2 + A_3^2 - B_3^2}{2} \cdot [\sin 2(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3k}) - \sin 2\psi_{\min}] + (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) [\cos 2(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3k}) - \cos 2\psi_{\min}] \right]$$

• Pour le troisième mode de fonctionnement,

la valeur efficace  $V'$  se calcule par

$$V'{}^2 = \frac{V_m^2}{\pi/k} \left\{ \int_{\psi}^{\psi+\gamma} (A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t)^2 dt + \int_{\psi+\pi/3k}^{\psi+\gamma+\pi/3k} [A_4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3k}) - B_4 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3k})]^2 dt \right\} ;$$

ce qui donne

$$V'{}^2 = \frac{kV_m^2}{\pi} \left[ (A_4^2 + B_4^2) \gamma - \frac{A_4^2 - B_4^2}{2} [\sin 2(\psi + \gamma) - \sin 2\psi] + A_4 B_4 [\cos 2(\psi + \gamma) - \cos 2\psi] \right]$$

On vérifie que pour  $\psi = \pi - \pi/6k$ ,  $V'$  est nul.

### III.1.3. Tensions de sortie. Caractéristiques. Remarques

• La planche II.2.\* montre les variations, en fonction de  $\cos \phi'$ , de  $\psi_{\min}$ , angle minimum de retard au déblocage, pour diverses valeurs de  $k$ . On y a ajouté, tracées en traits interrompus, les courbes donnant  $\psi_{1,3}$ , c'est-à-dire la valeur de  $\psi$  au-delà de laquelle le fonctionnement s'opère suivant le troisième mode

\* Pour faciliter les comparaisons, on a pris, pour tracer les caractéristiques des multiplicateurs de fréquence triphasés sans neutre, les mêmes échelles que pour celles des montages de la famille générale (Planches I.1. à I.7.).

• La planche II.3. donne les variations de la valeur efficace  $V'$  des tensions de sortie, rapportée à la valeur efficace  $V$  des tensions secondaires du transformateur, en fonction de l'angle  $\psi$ , pour quelques valeurs de  $k$  et de  $\cos\phi'$ .

On a marqué par un point le passage d'un mode de fonctionnement au suivant.

Ces courbes montrent que, pour  $\cos\phi'$  égal à 1, on obtient par rapport au montage de même  $k$  de la famille générale, une augmentation du maximum de  $V'/V$  d'autant plus nette que  $k$  est plus grand. Mais cet avantage s'estompe quand  $\cos\phi'$  diminue.

• Les résultats de l'analyse harmonique des tensions de sortie sont indiqués successivement pour  $k = 3/2$ ,  $k = 2$  et  $k = 3$  sur les planches II.4, II.5 et II.6.

En fonction de l'angle  $\psi$ , pour quatre valeurs de  $\cos\phi'$ , on a indiqué

- la valeur efficace  $V'$ ,
- la valeur efficace  $V'_1$  du fondamental,
- les valeurs efficaces  $V'_5$ ,  $V'_7$  et  $V'_{11}$  des harmoniques 5, 7 et 11, toutes ces valeurs étant rapportées à  $V$ .

La comparaison de ces courbes avec celles tracées pour les montages de même  $k$  de la famille générale montre que, sauf pour  $\cos\phi'$  égal ou voisin de 1, le taux d'harmoniques (donné par l'écart relatif entre  $V'$  et  $V'_1$ ) n'est guère réduit. Si les harmoniques 3, 9... ont disparu, ceux qui restent ont tendance à augmenter.

#### III.1.4. Courants de sortie

Le calcul de la valeur efficace  $I'$  des courants  $i'_1$ ,  $i'_2$ ,  $i'_3$  à partir des expressions générales regroupées au paragraphe II.3. est long et conduit à une relation très lourde. Aussi, nous limiterons-nous au calcul du maximum  $I'_{\max}$  de  $I'$ , seule valeur nécessaire pour la détermination des éléments du convertisseur.

$I'_{\max}$  correspond, pour un récepteur donné, au fonctionnement à  $\psi$  minimum. Le courant  $i'_1$  a alors pour expressions successives :

$$\psi < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3k}, \quad i'_1 = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A''_1 \cos\omega t + B''_1 \sin\omega t) + I'_1 e^{-\frac{\omega t}{Q}}$$

$$\psi + \frac{\pi}{3k} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3k}, \quad i_1' = -\frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [A_2'' \cos(\omega t - \frac{\pi}{3k}) + B_2'' \sin(\omega t - \frac{\pi}{3k})] - I_2' e^{-\frac{\omega t - \frac{\pi}{3k}}{Q}}$$

$$\psi + \frac{2\pi}{3k} < \omega t < \psi + \frac{\pi}{k}, \quad i_1' = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [A_3'' \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3k}) + B_3'' \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3k})] + I_3' e^{-\frac{\omega t - \frac{2\pi}{3k}}{Q}}$$

Le calcul de  $I_{\max}'$  par

$$I_{\max}'^2 = \frac{k}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\pi} i_1'^2 d\omega t$$

donne

$$\begin{aligned} I_{\max}'^2 = & \frac{k}{\pi} \frac{V_m^2}{Z'^2} \frac{1+k^2 Q^2}{(1+Q^2)^2} \left\{ \frac{A_1''^2 + A_2''^2 + A_3''^2 + B_1''^2 + B_2''^2 + B_3''^2}{2} \frac{\pi}{3k} \right. \\ & + \frac{A_1''^2 + A_2''^2 + A_3''^2 - B_1''^2 - B_2''^2 - B_3''^2}{4} [\sin 2(\psi + \frac{\pi}{3k}) - \sin 2\psi] \\ & \left. - \frac{A_1'' B_1'' + A_2'' B_2'' + A_3'' B_3''}{2} [\cos 2(\psi + \frac{\pi}{3k}) - \cos 2\psi] \right\} \\ & + \frac{k}{\pi} \frac{V_m^2}{Z'^2} \frac{R^2}{V_m^2} \frac{Q(1+k^2 Q^2)}{2} (I_1'^2 + I_2'^2 + I_3'^2) (1 - e^{-\frac{2\pi}{3kQ}}) e^{-\frac{2\psi}{Q}} \\ & + \frac{k}{\pi} \frac{V_m^2}{Z'^2} \frac{R}{V_m} \frac{2Q(1+k^2 Q^2)}{(1+Q^2)^2} e^{-\frac{\pi}{Q}} \{ (I_1' A_1'' + I_2' A_2'' + I_3' A_3'') [\cos \psi - Q \sin \psi \\ & + [Q \sin(\psi + \frac{\pi}{3k}) - \cos(\psi + \frac{\pi}{3k})] e^{-\frac{\pi}{3kQ}} \} + (I_1' B_1'' + I_2' B_2'' + I_3' B_3'') \\ & [\sin \psi + Q \cos \psi - [Q \cos(\psi + \frac{\pi}{3k}) + \sin(\psi + \frac{\pi}{3k})] e^{-\frac{\pi}{3kQ}} \}. \end{aligned}$$

La planche II.7. montre, pour diverses valeurs de  $k$ , les variations de  $I_{\max}'$  en fonction de  $\cos \psi'$ .

Ces courbes ont la même allure que celles des montages de la famille générale (Planche I.6.). En les comparant on voit:

- que la suppression du conducteur neutre accroît  $I'_{\max}$  pour les valeurs de  $\cos\phi'$  voisines de 1, alors que pour  $\cos\phi'$  voisin de zéro on retrouve pratiquement les mêmes valeurs,
- que l'augmentation de  $I'_{\max}$  pour  $\cos\phi'$  voisin de 1 est d'autant plus sensible de  $k$  est plus grand.

On retrouve bien les remarques faites pour  $V'_{\max}$ . On a d'ailleurs tracé sur la planche II.7, en traits interrompus, les courbes donnant la valeur efficace maximale des tensions de sortie.

### III.2. Facteurs d'utilisation

#### III.2.1. Facteur d'utilisation des enroulements secondaires

Les relations (I.31), (I.32), (I.33) donnant le facteur d'utilisation  $f_S$  des montages de la famille générale sont encore utilisables.

$$\text{Si } k \text{ est entier et impair, } f_S = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{V'_{\max}}{V};$$

$$\text{Si } k \text{ est entier et pair, } f_S = \frac{1}{\sqrt{2k}} \frac{V'_{\max}}{V};$$

$$\text{Si } k \text{ est fractionnaire, } f_S = \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{V'_{\max}}{V}.$$

Le haut de la planche II.8. donne les variations de  $f_S$  en fonction de  $\cos\phi'$  pour différentes valeurs de  $k$ .

#### III.2.2. Facteur d'utilisation des thyristors

De la relation (I.34) qui donne l'expression générale de  $f_{Th}$  on déduit

$$\text{si } k \text{ est entier, } f_{Th} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \frac{V'_{\max}}{V} \frac{V_m}{v_{Th_{\max}}},$$

$$\text{et si } k \text{ est fractionnaire, } f_{Th} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{V'_{\max}}{V} \frac{V_m}{v_{Th_{\max}}}.$$

Pour un rapport de multiplication  $k$  donné,  $v_{Th_{max}}/V_m$  a la même valeur que pour le montage correspondant de la famille générale.

Le bas de la planche II.8. montre, pour diverses valeurs de  $k$ , les variations de  $f_{Th}$  en fonction de  $\cos\phi'$ .

L'augmentation de  $f_s$  et de  $f_{Th}$  résultant de la suppression du conducteur neutre est donc directement liée à l'augmentation de  $V'_{max}/V_m$ . Pour  $\cos\phi'$  égal à 1, on obtient, pour  $k$  égal à 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3, un accroissement de 1,4 % ; 5,6 % ; 8 % ; 10 %. Mais cet accroissement diminue quand  $\cos\phi'$  décroît et devient négligeable quand ce facteur de puissance devient inférieur à 0,5.

### III.3. Intérêt de la suppression du neutre

La suppression du conducteur neutre présente deux petits inconvénients :

- les thyristors ne peuvent plus être commandés par de simples impulsions, il faut utiliser des trains d'impulsions de largeur supérieure à  $\pi/3k$  ou des impulsions de confirmation.
- la variation de l'angle de retard  $\psi$  faisant passer les tensions de leur maximum à zéro est sensiblement diminuée, la commande est donc plus sensible.

Mais cette suppression du neutre présente deux avantages importants :

- le premier est évidemment la disparition des harmoniques de rang 3 ou multiple de 3, donc l'amélioration de la qualité des signaux fournis par le multiplicateur.
- le second est une augmentation des facteurs d'utilisation des enroulements de la source et des thyristors, d'autant plus nette que  $k$  est plus grand.

Parmi les montages jugés intéressants à la fin de l'étude de la famille générale, c'est donc le tripleur de fréquence qui bénéficie le plus de la suppression du neutre\*

\* La substitution au récepteur en étoile sans conducteur neutre du récepteur en triangle équivalent ne modifie ni le fonctionnement des thyristors ni les courants qu'ils fournissent à la charge [32]. Malgré la différence des formes d'ondes des tensions aux bornes des trois phases de celle-ci, les caractéristiques ne sont pas changées.

```

*****
*
* CHAPITRE III
*
*
*****

```

EMPLOI D'UNE SOURCE EN POLYGONE  
POUR LES MULTIPLICATEURS A SORTIE TRIPHASEE

Le chapitre précédent a montré les conséquences de la suppression du conducteur neutre des multiplicateurs à sortie triphasée. Quel que soit le coefficient de multiplication  $k$ , les tensions alternatives sinusoïdales que doit fournir le transformateur forment un système équilibré. Au lieu de grouper en étoile les enroulements sièges de ces tensions on peut donc les grouper en polygone.

Le passage d'une source en étoile à une source en polygone est intéressant pour les montages redresseurs quand le nombre de phases de la source est élevé [38] ; on obtient un facteur d'utilisation secondaire excellent et pratiquement indépendant du nombre de phases alors que pour une source en étoile ce facteur diminue quand le nombre de phases croît.

Il nous a semblé intéressant d'examiner si cette amélioration due au passage en polygone se retrouvait dans le cas des montages multiplicateurs de fréquence ici étudiés car eux aussi nécessitent beaucoup de phases.

Nous nous limiterons au cas des montages à sortie triphasée et à un facteur de multiplication

- impair : 3,
- pair : 2,
- fractionnaire :  $3/2$ .

### I. MULTIPLICATION DE LA FREQUENCE PAR 3

La figure II.3.1. schématise la façon d'obtenir les 9 tensions de sortie nécessaires par rapport à un point neutre fictif et montre comment les 18 thyristors sont montés deux par deux entre les 9 bornes de sortie du transformateur et les 3 bornes du récepteur.

Ce montage nécessite 5 enroulements secondaires par noyau :

un de  $n_2$  spires

deux de  $\beta n_2$  spires

$$\text{avec } \beta = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{18} \approx 0,743$$

deux de  $\alpha n_2$  spires

$$\text{avec } \alpha = \cos \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{18} \approx 0,395$$

On retrouve les rapports indiqués pour la source en étoile (1<sup>ère</sup> partie, Chapitre I, § IV.1.) mais ici les tensions générées constituent les côtés du polygone et non plus les branches de l'étoile de mêmes sommets.

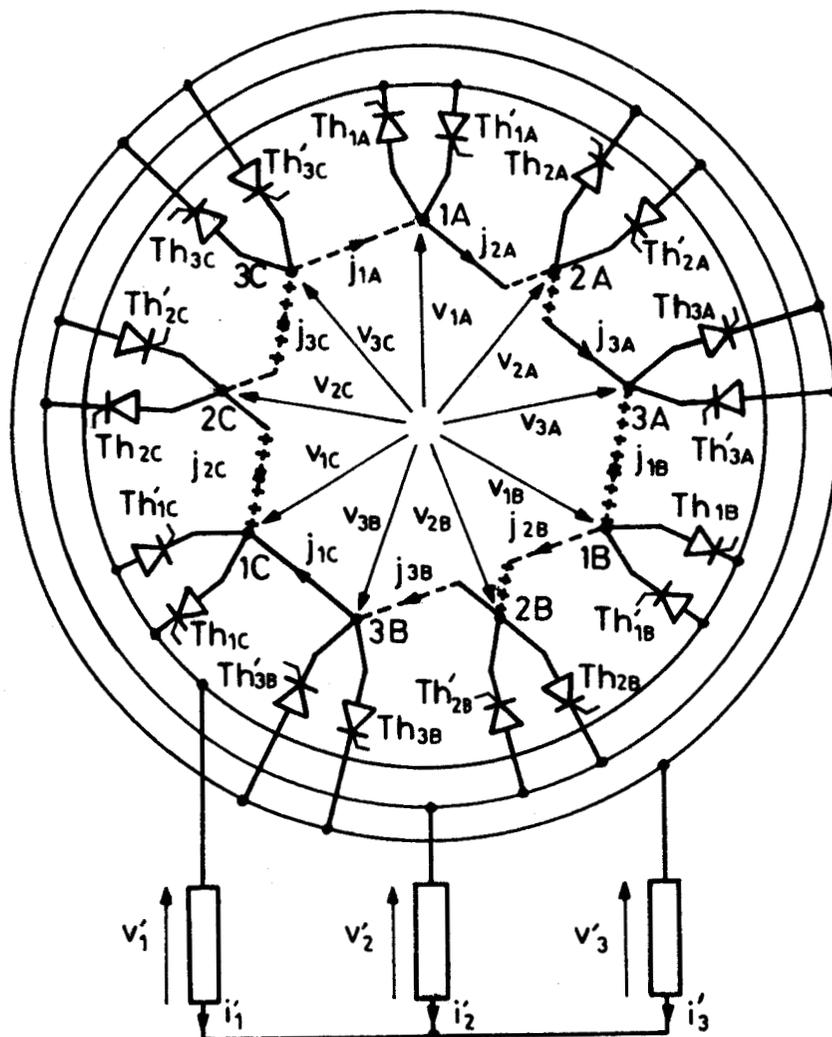


FIG. II.3.1

Si on désigne encore par  $V_m$  l'amplitude des tensions simples  $v_{1A}$ ,  $v_{2A}$ , ..., celle des tensions aux bornes des enroulements de  $n_2$  spires est

$$2 \sin \frac{\pi}{9} V_m \approx 0,684 V_m.$$

Ce montage fonctionne exactement comme le tripleur de fréquence à sortie triphasée de la figure II.2.1. A valeurs données de  $V_m$  et de  $\psi$ , et à récepteur donné, les expressions des courants et des tensions aux bornes de la charge, des courants et des tensions aux bornes des thyristors sont les mêmes. Seuls varient les courants dans les enroulements secondaires et le facteur d'utilisation de ces enroulements.

Nous aurons donc largement recours aux résultats du chapitre précédent.

Comme nous cherchons à voir si le facteur d'utilisation  $f_S$  est augmenté nous nous limiterons au fonctionnement qui rend maximum ce facteur ( $\psi = \psi_{\min}$  ; début du premier mode de fonctionnement ; toujours trois redresseurs conducteurs ; angle de conduction des redresseurs égal à  $\pi/3$ ).

## I.1. Débit sur résistances pures

### I.1.1. Répartition du courant dans les enroulements secondaires pendant un intervalle

- Considérons l'intervalle ( $\psi_{\min} < \omega t < \psi_{\min} + \pi/9$ ) durant lequel  $Th_{1A}$ ,  $Th'_{2B}$  et  $Th_{3C}$  débitent simultanément.

Les courants dans les phases réceptrices ont pour expression :

$$i'_1 = \frac{v'_1}{R} = \frac{V_m}{R} (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t)$$

$$i'_2 = \frac{v'_2}{R} = \frac{V_m}{R} (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t)$$

$$i'_3 = \frac{v'_3}{R} = \frac{V_m}{R} (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t)$$

où les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  sont ceux indiqués au chapitre précédent [(voir (II.11))].

- Pour passer de  $i'_1, i'_2, i'_3$  aux courants  $j_{1A}, j_{2A}, j_{3A}, j_{1B}, \dots, j_{2C}, j_{3C}$  dans les enroulements des neuf phases secondaires on suppose que toutes les phases secondaires ont la même "impédance"  $Z$ . La conduction de  $Th_{1A}, Th'_{2B}, Th_{3C}$  fait que le polygone est formé de trois groupes de phases parcourues par le même courant ou de trois voies (figure II.3.2.). Pour répartir les courants  $i'_1, i'_2, i'_3$  à l'intérieur du polygone dont ils sont issus, on admet que la répartition se fait en raison inverse du nombre de phases que compte chaque voie.

C'est de cette façon qu'a opéré G. SEGUIER pour étudier les courants secondaires des montages redresseurs "à commutation série". Ici aussi l'expérience montre que cette hypothèse conduit à des résultats très satisfaisants.

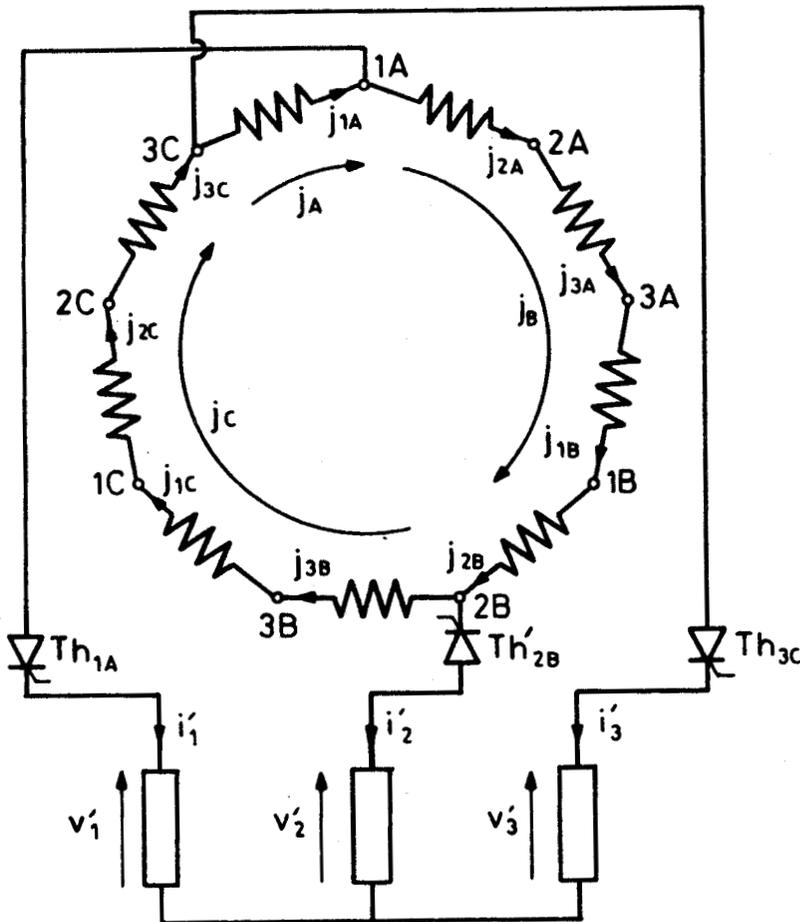


FIG. II.3.2

- En désignant par  $j_A$ ,  $j_B$ ,  $j_C$  les courants dans les trois voies, on écrira donc

$$Z j_A + 4Z j_B + 4Z j_C = 0 \quad (\text{III.1})$$

Si dans (III.1) on remplace  $j_B$  par  $j_A - i'_1$  et  $j_C$  par  $j_A + i'_3$ , il vient

$$Z j_A + 4Z(j_A - i'_1) + 4Z(j_A + i'_3) = 0$$

ou

$$j_A = \frac{4 i'_1 - 4 i'_3}{9}$$

Pour obtenir  $j_B$  on remplace dans (III.1)  $j_A$  par  $j_B + i'_1$  et  $j_C$  par  $j_B - i'_2$ . Pour obtenir  $j_C$  on remplace  $j_A$  par  $j_C - i'_3$  et  $j_B$  par  $j_C - i'_2$ .

Donc, durant cet intervalle,

$$\left. \begin{aligned} j_A = j_{1A} &= \frac{1}{9} (4 i'_1 - 4 i'_3) \\ j_B = j_{2A} = j_{3A} = j_{1B} = j_{2B} &= \frac{1}{9} (4 i'_2 - i'_1) \\ j_C = j_{3B} = j_{1C} = j_{2C} = j_{3C} &= \frac{1}{9} (i'_3 - 4 i'_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.2})$$

Compte-tenu de (II.11) les courants dans les neuf enroulements ont pour expression :

$$\left. \begin{aligned} j_{1A} &= \frac{V_m}{9R} 4[(A_1 - A_3) \sin \omega t - (B_1 - B_3) \cos \omega t] \\ j_{2A} = j_{3A} = j_{1B} = j_{2B} &= \frac{V_m}{9R} [(4 A_2 - A_1) \sin \omega t - (4 B_2 - B_1) \cos \omega t] \\ j_{3B} = j_{1C} = j_{2C} = j_{3C} &= \frac{V_m}{9R} [(A_3 - 4 A_2) \sin \omega t - (B_3 - 4 B_2) \cos \omega t] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3})$$

### 1.1.2. Forme d'onde du courant dans un enroulement

Les relations (III.3) sont suffisantes pour calculer la valeur efficace des courants secondaires et le facteur d'utilisation  $f_S$ . Il est toutefois intéressant de calculer les expressions d'un même courant secondaire durant les divers intervalles d'une période ; cela permet de

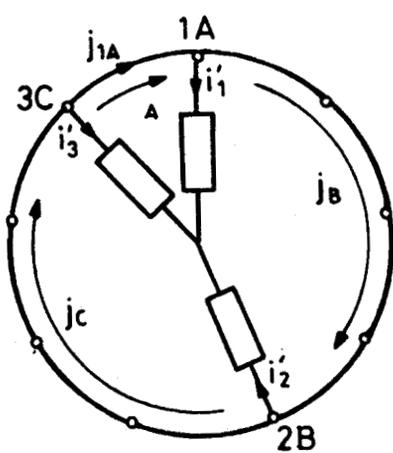
tracer la forme d'onde de ce courant et par là de vérifier l'hypothèse adoptée au paragraphe précédent ; cela permet aussi de passer, si on le désire, aux courants primaires du transformateur.

• Pour cela on reprend, en la schématisant plus encore, la figure III.3.2. et on trace les schémas correspondant aux intervalles suivants (fig. III.3.3.).

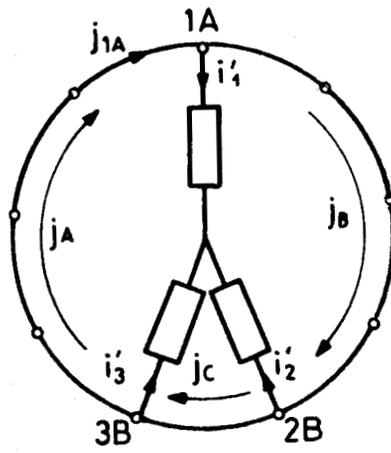
- Durant l'intervalle  $\psi_{\min} + \pi/9, \psi_{\min} + 2\pi/9,$

$Th_{1A}, Th'_{2B}$  et  $Th'_{3B}$  conduisent :

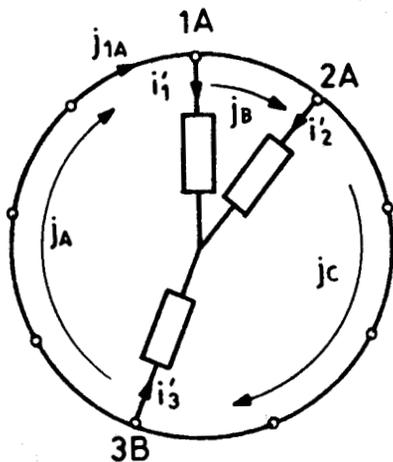
$$\left. \begin{aligned} j_A &= \frac{1}{9} (4 i'_1 - i'_3) \\ j_B &= \frac{1}{9} (i'_2 - 4 i'_1) \\ j_C &= \frac{1}{9} (4 i'_3 - 4 i'_2) \end{aligned} \right\} \quad (III.3)$$



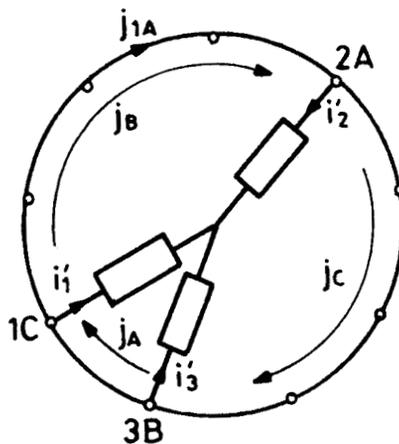
$\psi < \omega t < \psi + \pi/9$



$\psi + \pi/9 < \omega t < \psi + 2\pi/9$



$\psi + 2\pi/9 < \omega t < \psi + \pi/3$



$\psi + \pi/3 < \omega t < \psi + 4\pi/9$

FIG. II.3.3

- Durant l'intervalle  $\psi_{\min} + 2\pi/9, \psi_{\min} + \pi/3,$

$Th_{1A}, Th_{2A}$  et  $Th'_{3B}$  conduisent.

$$\left. \begin{aligned} j_A &= \frac{1}{9} (i'_1 - 4 i'_3) \\ j_B &= \frac{1}{9} (4 i'_2 - 4 i'_1) \\ j_C &= \frac{1}{9} (4 i'_3 - i'_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4})$$

- Durant l'intervalle  $\psi_{\min} + \pi/3, \psi_{\min} + 4\pi/9, Th'_{1C}, Th_{2A}$  et  $Th'_{3B}$  conduisent, on retrouve les mêmes relations que pendant le premier intervalle

$$j_A = \frac{1}{9} (4 i'_1 - 4 i'_3)$$

$$j_B = \frac{1}{9} (4 i'_2 - i'_1)$$

$$j_C = \frac{1}{9} (i'_3 - 4 i'_2)$$

Chaque fois que  $\omega t$  augmente de  $\pi/3$ , on retrouve les mêmes relations entre les courants polygonaux  $j_A, j_B, j_C$  et les courants débités  $i'_1, i'_2, i'_3$ . Comme  $\pi/3$  correspond à une demi-période de ces derniers, les courants polygonaux ont la même période que les courants fournis à la charge.

$$j_A(\omega t + \frac{\pi}{3}) = -j_A(\omega t) ; j_A(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = j_A(\omega t)$$

$$j_B(\omega t + \frac{\pi}{3}) = -j_B(\omega t) ; j_B(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = j_B(\omega t)$$

$$j_C(\omega t + \frac{\pi}{3}) = -j_C(\omega t) ; j_C(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = j_C(\omega t)$$

• Pour trouver les expressions successives du courant dans un enroulement secondaire il suffit de voir quel est le courant polygonal qui le traverse durant chaque intervalle.

Ainsi le courant  $j_{1A}$ , dans le secondaire monté entre les bornes 3C et 1A a pour valeurs :

$$\psi_{\min} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{\pi}{9}, \quad j_{1A} = j_A(\omega t)$$

$$\psi_{\min} + \frac{\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{2\pi}{9}, \quad j_{1A} = j_A(\omega t)$$

$$\psi_{\min} + \frac{2\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{\pi}{3}, \quad j_{1A} = j_A(\omega t)$$

$$\psi_{\min} + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{4\pi}{9}, \quad j_{1A} = j_B(\omega t) = -j_B(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$\psi_{\min} + \frac{4\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{5\pi}{9}, \quad j_{1A} = j_B(\omega t) = -j_B(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$\psi_{\min} + \frac{5\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{2\pi}{3}, \quad j_{1A} = j_C(\omega t) = -j_C(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$\psi_{\min} + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{7\pi}{9}, \quad j_{1A} = j_C(\omega t) = j_C(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$\psi_{\min} + \frac{7\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{8\pi}{9}, \quad j_{1A} = j_A(\omega t) = j_A(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$\psi_{\min} + \frac{8\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \pi, \quad j_{1A} = j_A(\omega t) = -j_A(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$\psi_{\min} + \pi < \omega t < \psi_{\min} + \frac{10\pi}{9}, \quad j_{1A} = j_A(\omega t) = -j_A(\omega t - \pi) \dots$$

Les courants dans les enroulements ont la même période que les tensions d'alimentation ; leur alternance négative reproduit au signe près leur alternance positive.

Les courants dans les enroulements secondaires successifs ont même forme d'onde au décalage de  $2\pi/9$  près.

La figure II.3.4. montre la forme d'onde des courants polygonaux  $j_A$ ,  $j_B$ ,  $j_C$  et du courant  $j_{1A}$  dans un enroulement.

## I.2. Débit sur récepteur résistif et inductif

Les relations (III.2), (III.3), (III.4) donnant les courants  $j_A$ ,  $j_B$ ,  $j_C$  dans le polygone en fonction des courants débités  $i'_1$ ,  $i'_2$ ,  $i'_3$  restent les mêmes. Mais les expressions de ces courants sont maintenant celles établies au chapitre précédent pour le débit sur un récepteur dont les constantes par phase sont R et L [relations (II.25)].

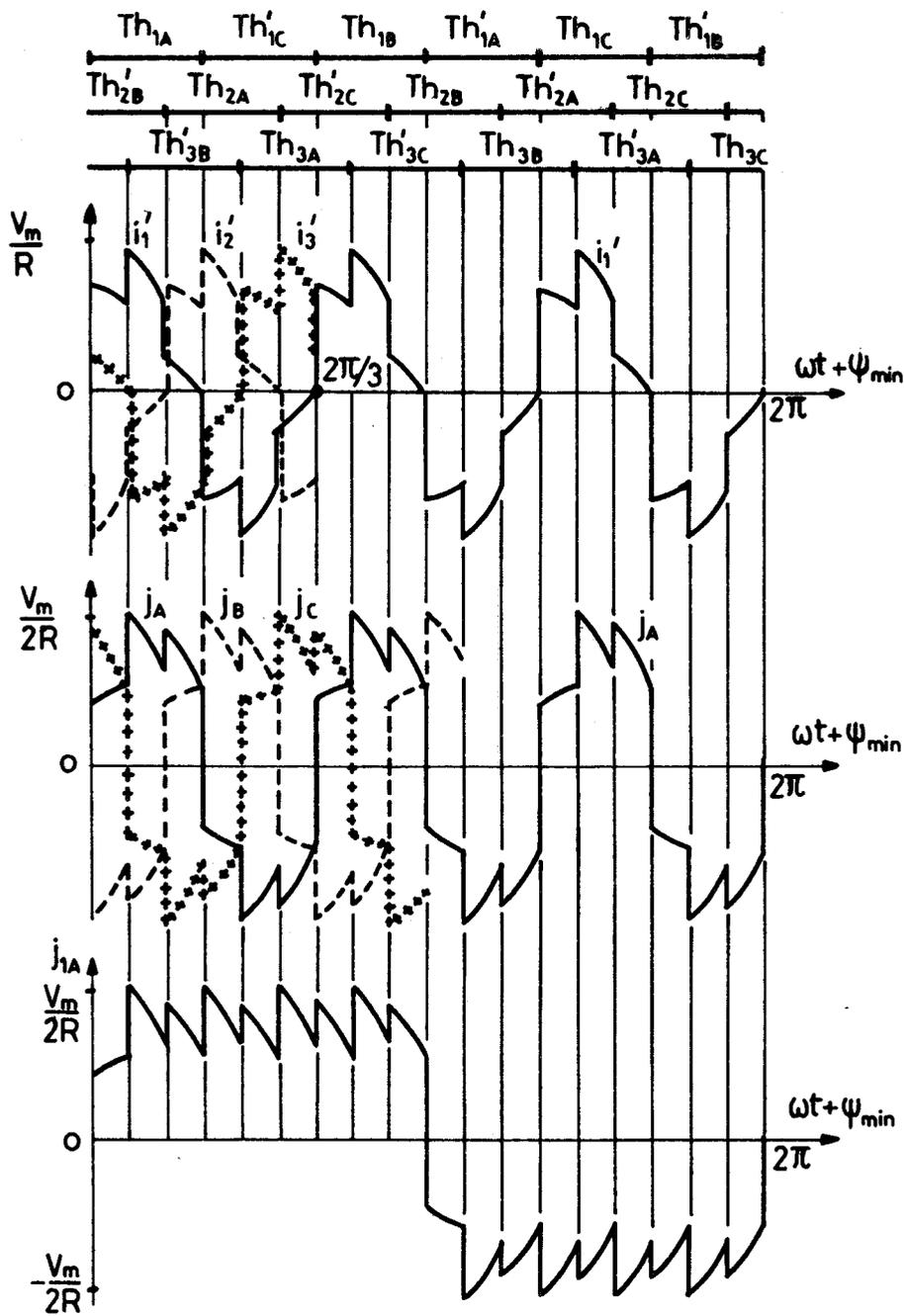


FIG.II.3.4



Ainsi, pendant l'intervalle  $\psi_{\min} < \omega t < \psi_{\min} + \pi/9$  où  $Th_{1A}$ ,  $Th_{2B}$  et  $Th_{3C}$  débitent :

$$j_A = j_{1A} = \frac{1}{9}(4 i_1' - 4 i_3') = \frac{V_m}{9R} \frac{4}{1+Q^2} [(A_1'' - A_3'') \cos \omega t + (B_1'' - B_3'') \sin \omega t] + \frac{4}{9}(I_1' - I_3') e^{-\omega t/Q}$$

$$j_B = j_{2A} = j_{3A} = j_{1B} = j_{2B} = \frac{1}{9}(4i_2' - i_1') = \frac{V_m}{9R} \frac{1}{1+Q^2} [(4A_2'' - A_1'') \cos\omega t + (4B_2'' - B_1'') \sin\omega t] + \frac{1}{9}(4I_2' - I_1') e^{-\omega t/Q}$$

$$j_C = j_{3B} = j_{1C} = j_{2C} = j_{3C} = \frac{1}{9}(i_3' - 4i_2') = \frac{V_m}{9R} \frac{1}{1+Q^2} [(A_3'' - 4A_2'') \cos\omega t + (B_3'' - 4B_2'') \sin\omega t] + \frac{1}{9}(I_3' - 4I_2') e^{-\omega t/Q}$$

Il est commode, pour les calculs ultérieurs de mettre ces expressions sous la forme

$$\left. \begin{aligned} j_A &= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [A_A \cos\omega t + B_A \sin\omega t + J_A e^{-\omega t/Q}] \\ j_B &= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [A_B \cos\omega t + B_B \sin\omega t + J_B e^{-\omega t/Q}] \\ j_C &= \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [A_C \cos\omega t + B_C \sin\omega t + J_C e^{-\omega t/Q}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5})$$

en posant

$$A_A = \frac{4}{9}(A_1'' - A_3'') ; B_A = \frac{4}{9}(B_1'' - B_3'') ; J_A = \frac{4}{9}(I_1' - I_3') \cdot \frac{R}{V_m} \cdot (1 + Q^2)$$

$$A_B = \frac{1}{9}(4A_2'' - A_1'') ; B_B = \frac{1}{9}(4B_2'' - B_1'') ; J_B = \frac{1}{9}(4I_2' - I_1') \cdot \frac{R}{V_m} \cdot (1 + Q^2)$$

$$A_C = \frac{1}{9}(A_3'' - 4A_2'') ; B_C = \frac{1}{9}(B_3'' - 4B_2'') ; J_C = \frac{1}{9}(I_3' - 4I_2') \cdot \frac{R}{V_m} \cdot (1 + Q^2)$$

On peut, comme on l'a fait pour le débit sur résistances pures, déduire des expressions successives de  $j_A$ ,  $j_B$ ,  $j_C$ , les expressions d'un courant secondaire,  $i_{1A}$  par exemple, tout au long de la période T de celui-ci.

### I.3. Facteur d'utilisation des enroulements secondaires

#### I.3.1. Valeur efficace maximale des courants secondaires

Les courants dans les neuf phases secondaires sont identiques à  $2\pi/9$  près ; le courant dans une phase prend au cours des intervalles successifs les mêmes valeurs que les courants dans les diverses phases durant un même intervalle.

Pour  $\psi_{\min}$  qui correspond à la valeur efficace maximale des courants secondaires  $J_{\max}$ , il y a, pendant le premier intervalle, une phase parcourue par  $j_A$ , quatre par  $j_B$  et quatre par  $j_C$ .

$$J_{\max}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min} + \pi/9} (j_A^2 + 4 j_B^2 + 4 j_C^2) d\omega t$$

Les courants  $j_A$ ,  $j_B$  et  $j_C$  sont de la forme

$$j = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A \cos \omega t + B \sin \omega t + J e^{-\omega t/Q})$$

Le calcul de

$$\int_{\psi}^{\psi + \pi/9} (A \cos \omega t + B \sin \omega t + J e^{-\omega t/Q})^2 d\omega t$$

donne

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{18} (A^2 + B^2) + \frac{A^2 - B^2}{4} [\sin 2(\psi + \frac{\pi}{9}) - \sin 2\psi] - \frac{AB}{2} [\cos 2(\psi + \frac{\pi}{9}) - \cos 2\psi] + \frac{QJ^2}{2} (1 - e^{-\frac{2\pi}{9Q}}) e^{-\frac{2\psi}{Q}} \\ & + \frac{2Q}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi}{Q}} \{ AJ(\cos \psi - Q \sin \psi + e^{-\frac{\pi}{9Q}} [Q \sin(\psi + \frac{\pi}{9}) - \cos(\psi + \frac{\pi}{9})]) \\ & + BJ(\sin \psi + Q \cos \psi - e^{-\frac{\pi}{9Q}} [Q \cos(\psi + \frac{\pi}{9}) + \sin(\psi + \frac{\pi}{9})]) \} \end{aligned}$$

D'où la relation donnant  $J_{\max}$  :

$$\begin{aligned}
J_{\max}^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} \right)^2 & \left\{ \frac{\pi}{18} (A_A^2 + 4A_B^2 + 4A_C^2 + B_A^2 + 4B_B^2 + 4B_C^2) \right. \\
& + \frac{1}{4} (A_A^2 + 4A_B^2 + 4A_C^2 - B_A^2 - 4B_B^2 - 4B_C^2) [\sin 2(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) - \sin 2\psi_{\min}] \\
& - \frac{1}{2} (A_A B_A + 4A_B B_B + 4A_C B_C) [\cos 2(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) - \cos 2\psi_{\min}] \\
& + \frac{Q}{2} (J_A^2 + 4J_B^2 + 4J_C^2) (1 - e^{-\frac{2\pi}{9Q}}) e^{-2\psi_{\min}/Q} \\
& + \frac{2Q}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi_{\min}}{Q}} [(A_A J_A + 4A_B J_B + 4A_C J_C) (\cos \psi_{\min} - Q \sin \psi_{\min} \\
& \quad + e^{-\frac{\pi}{9Q}} [Q \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) - \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9})]) \\
& \quad + (B_A J_A + 4B_B J_B + 4B_C J_C) (\sin \psi_{\min} + Q \cos \psi_{\min} \\
& \quad - e^{-\frac{\pi}{9Q}} [Q \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9}) + \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{9})]) \left. \right\}
\end{aligned}$$

A l'aide de cette relation on a tracé les variations de  $J_{\max}$  rapporté à  $V/Z'$  en fonction de  $\cos \phi'$  (caractéristique de la planche II.9 relative à  $k = 3$ ).

### 1.3.2. Facteur d'utilisation. Intérêt du montage

La puissance apparente maximale que peut débiter le montage est la même que celle du montage multiplicateur sans neutre avec source en étoile.

Par contre la puissance apparente que pourrait fournir le transformateur s'il débitait des courants sinusoïdaux dans un récepteur à neuf phases équilibré est maintenant donnée par

$$9 \times 2 \sin \frac{\pi}{9} V \times J_{\max}$$

D'où le facteur d'utilisation du secondaire

$$f_S = \frac{3 V'_{\max} I'_{\max}}{18 \sin \frac{\pi}{9} V J_{\max}}$$

$$= \frac{\frac{V'_{\max} I'_{\max}}{V \frac{V}{Z'}}}{6 \sin \frac{\pi}{9} \frac{J_{\max}}{V/Z'}}$$

Les variations de  $f_S$  en fonction de  $\cos \varphi'$  sont indiquées sur la planche II.10. La comparaison avec la courbe en traits interrompus relative au même facteur de multiplication montre que le passage de la source en étoile à la source polygone entraîne une amélioration sensible de l'utilisation du secondaire surtout pour les faibles valeurs de  $\cos \varphi'$ .

Cette conclusion doit être toutefois nuancée : la source en étoile permet l'utilisation d'enroulements communs à plusieurs phases, ce qui conduit (voir Partie I, chapitre I, § IV.2.) à un facteur d'utilisation des spires secondaires  $k_{\text{spS}}$  de 0,941. Pour la source en polygone ce facteur vaut

$$k_{\text{spS}} = \frac{9}{3 + 6 \times 0,743 + 6 \times 0,395} = 0,916$$

Cette diminution de  $k_{\text{spS}}$  réduit un peu l'amélioration due au couplage en polygone de la source, mais cette amélioration reste importante.

### 1.3.3. Vérifications expérimentales

Nous avons réalisé un transformateur triphasé-ennéphasé correspondant au diagramme vectoriel de la figure II.31 et l'ensemble des 18 thyristors munis de leurs déclencheurs complétant le montage schématisé par cette figure.

Les clichés de la figure II.3.5.a. sont relatifs à un débit sur résistances pures avec  $\psi$  très voisin de  $\psi_{\min}$ . Ils montrent

- en haut, la tension aux bornes d'une phase secondaire et le courant dans celle-ci,
- en bas, la tension simple d'une phase de la source triphasée et le courant en ligne correspondant.

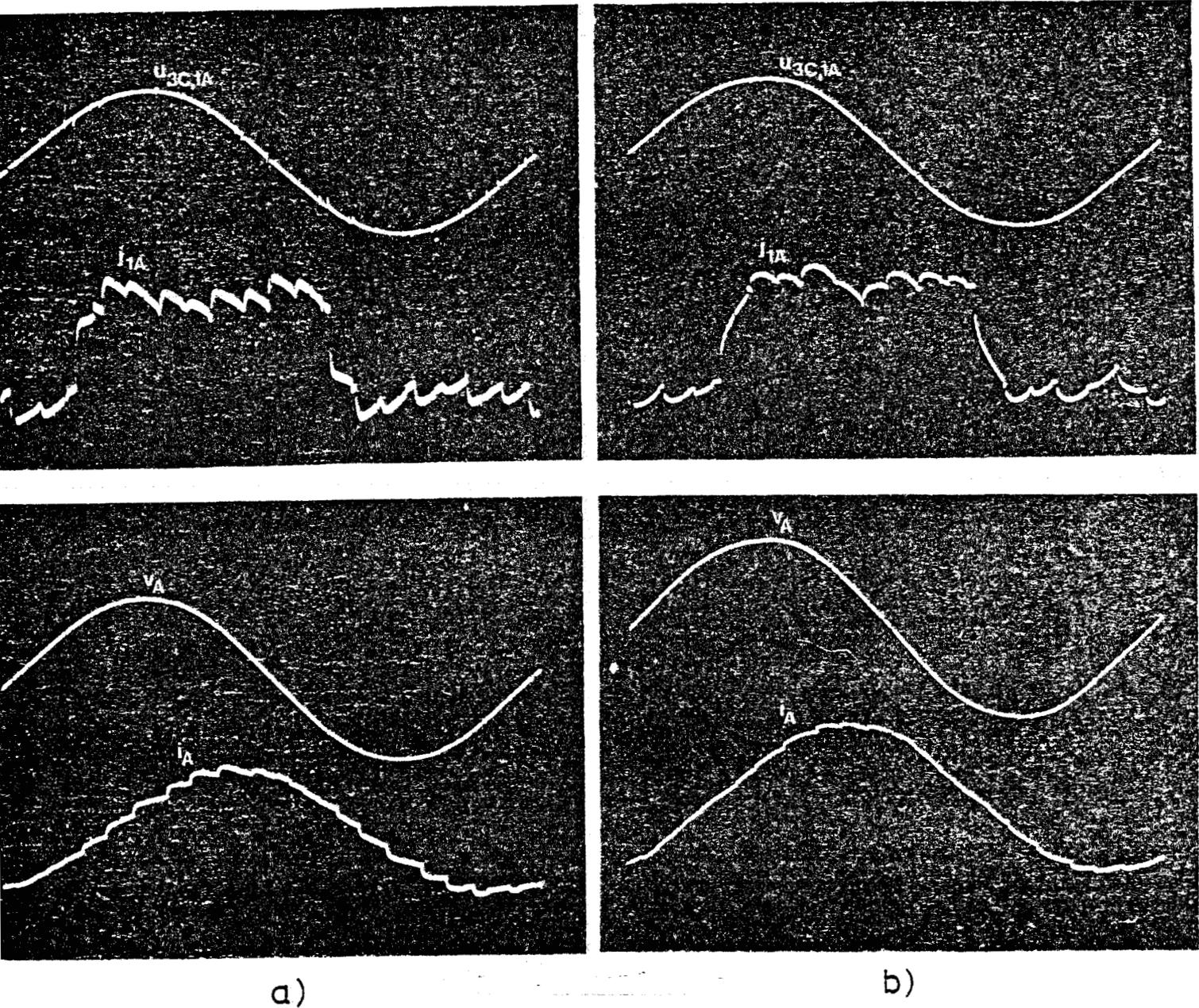


FIG. II.3.5

Les clichés de la figure II.3.5.b. donnent les formes d'ondes de ces mêmes grandeurs, toujours pour  $\psi$  voisin de  $\psi_{\min}$ , mais pour un récepteur inductif.

La forme d'onde de  $j_{1A}$  lors du débit sur résistances est bien celle que nous avons prévue ; elle vérifie la légitimité de la méthode proposée pour répartir les courants à l'intérieur du polygone.



Les formes d'ondes des courants pris à la source ont une allure générale sinusoïdale.

Avec ce montage, pour  $\psi$  voisin de  $\psi_{\min}$ , lors du débit sur résistances, de la mesure de la puissance active fournie à la charge, des valeurs efficaces des tensions et des courants des phases secondaires nous avons déduit le facteur de puissance secondaire  $f_S$  ; de la mesure de la puissance active fournie au transformateur, des valeurs efficaces des tensions et des courants primaires nous avons déduit le facteur de puissance primaire  $f_P$ .

Nous avons ainsi obtenu :

$$f_S \approx 0,58 \qquad f_P \approx 0,64$$

## II. MULTIPLICATION DE LA FREQUENCE PAR 2

La figure II.3.6. schématise l'obtention des 12 tensions nécessaires pour un doubleur de fréquence à sortie triphasée et montre le branchement des 12 thyristors.

Ce montage nécessite 8 enroulements sur chacun des trois noyaux du transformateur :

$$4 \text{ de } \alpha' n_2 \text{ spires, avec } \alpha' = \frac{\cos 5\pi/12}{\cos \pi/3} \approx 0,299$$

$$4 \text{ de } \beta' n_2 \text{ spires, avec } \beta' = \cos \frac{\pi}{12} - \alpha' \cos \frac{\pi}{6} \approx 0,816$$

en désignant par  $n_2$  le nombre de spires qui donneraient les tensions secondaires si toutes les tensions induites y étaient en phase.

Si  $V_m$  désigne l'amplitude des tensions simples  $v_{1A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $v_{2A}$ , ...,  $v_{3A}$ ,  $v_{3B}$ , celle des tensions aux bornes des phases secondaires est

$$2 \sin \frac{\pi}{12} V_m \approx 0,518 V_m.$$

Comme pour le tripleur de fréquence, les modes de fonctionnement et les caractéristiques relatives aux grandeurs de sortie ou aux redresseurs sont les mêmes que lorsque la source est en étoile.

Nous n'étudierons ici encore que les courants dans les enroulements secondaires, en nous limitant au cas où  $\psi$  est minimum. L'angle de conduction des thyristors est alors égal à  $\pi/2$ .

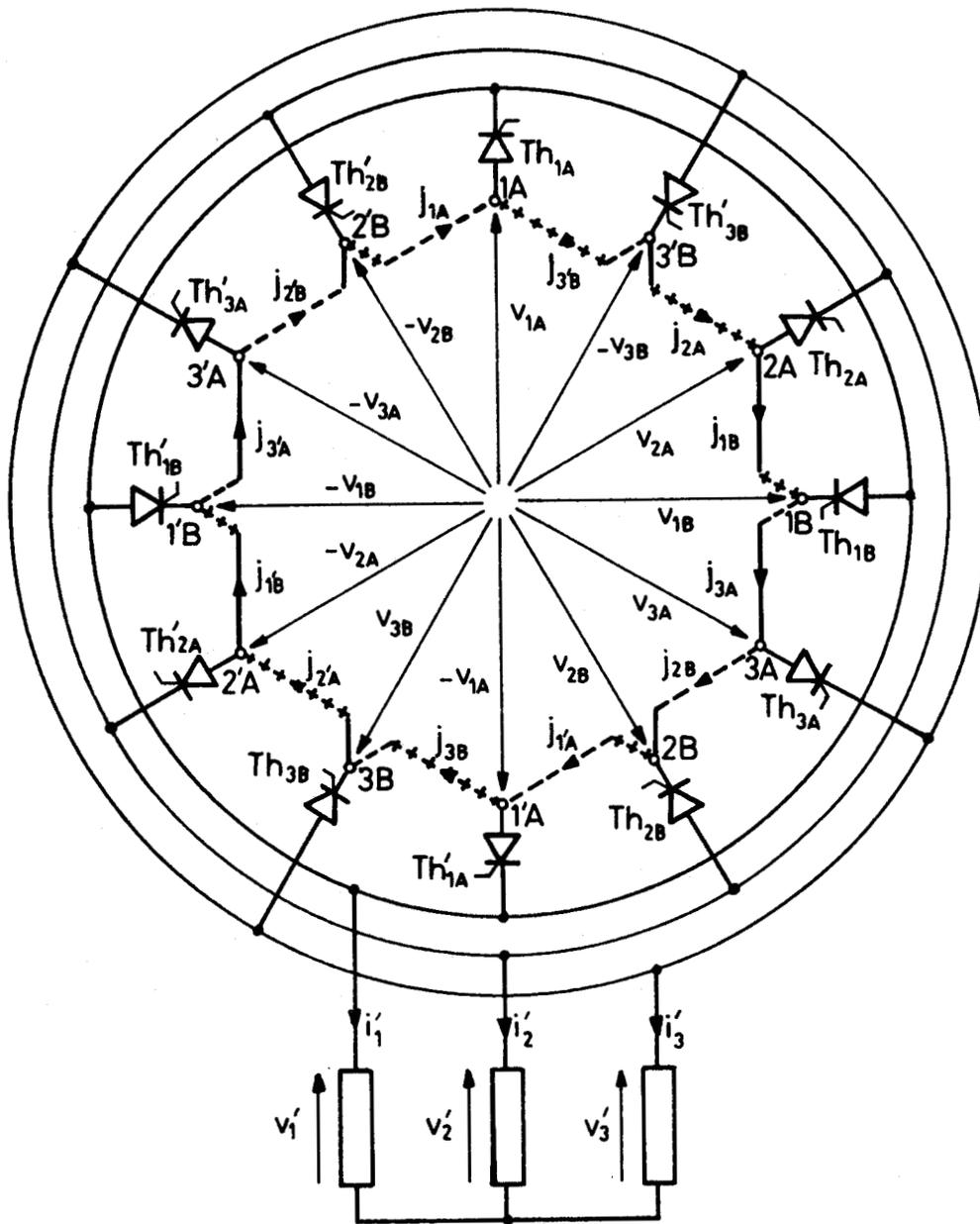


FIG. II.3.6

### II.1. Débit sur résistances pures

- Pendant l'intervalle  $\psi_{\min}$ ,  $\psi_{\min} + \frac{\pi}{6}$ ,

les redresseurs  $Th_{1A}$ ,  $Th_{2B}$  et  $Th'_{3A}$  débitent simultanément, (voir 2<sup>ème</sup> Partie, chapitre II, § II.2.1.).



Les courants fournis à la charge ont pour expression :

$$i'_1 = \frac{V}{R} (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t)$$

$$i'_2 = \frac{V}{R} (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t)$$

$$i'_3 = \frac{V}{R} (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t)$$

- Pour trouver les trois courants polygonaux, on remarque que  $j_A$ , égal à  $j_{2'B}$  et à  $j_{1A}$ , traverse 2 phases,  $j_B$ , égal à  $j_{3'B}$ , à  $j_{2A}$ , à  $j_{1B}$ , à  $j_{3A}$ , à  $j_{2B}$ , en traverse 5,  $j_C$ , égal à  $j_{1'A}$ , à  $j_{3B}$ , à  $j_{2'A}$ , à  $j_{1'B}$ , à  $j_{3'A}$ , en traverse 5 également.

Adoptant la même hypothèse que pour l'étude du tripleur de fréquence, on écrit

$$2 j_A + 5 j_B + 5 j_C = 0$$

et on remplace d'abord  $j_B$  par  $j_A - i'_1$  et  $j_C$  par  $j_A + i'_3$   
 puis  $j_A$  par  $j_B + i'_1$  et  $j_C$  par  $j_B - i'_2$ ,  
 enfin  $j_A$  par  $j_C - i'_3$  et  $j_B$  par  $j_C + i'_2$  ;

ce qui donne

$$\left. \begin{aligned} j_A &= \frac{1}{12}(5 i'_1 - 5 i'_3) = \frac{1}{12} \frac{V}{R} [(5 A_1 - 5 A_3) \sin \omega t - (5 B_1 - 5 B_3) \cos \omega t] \\ j_B &= \frac{1}{12}(5 i'_2 - 2 i'_1) = \frac{1}{12} \frac{V}{R} [(5 A_2 - 2 A_1) \sin \omega t - (5 B_2 - 2 B_1) \cos \omega t] \\ j_C &= \frac{1}{12}(2 i'_3 - 5 i'_2) = \frac{1}{12} \frac{V}{R} [(2 A_3 - 5 A_2) \sin \omega t - (2 B_3 - 5 B_2) \cos \omega t] \end{aligned} \right\} \text{(III.6)}$$

• L'étude de la multiplication par 3 a montré qu'on pouvait réduire à un seul intervalle l'étude des courants  $j_A$ ,  $j_B$ ,  $j_C$  à l'intérieur du polygone. Durant chaque intervalle on retrouve la même configuration : une voie avec 2 phases, les deux autres avec 5 ; les courants  $i'_1$ ,  $i'_2$  et  $i'_3$  sont identiques au déphasage de  $2 \frac{\pi}{6}$  près.

$$\text{On a donc } j_A(\omega t + \frac{\pi}{6}) = -j_B(\omega t)$$

$$j_B(\omega t + \frac{\pi}{6}) = -j_C(\omega t)$$

$$j_C(\omega t + \frac{\pi}{6}) = -j_A(\omega t)$$

Les formes d'ondes de ces 3 courants sont représentées en haut de la figure II.3.7.

• Pour déterminer les expressions successives du courant dans un même enroulement secondaire, il suffit d'indiquer lequel des courants polygonaux  $j_A$ ,  $j_B$  ou  $j_C$  le traverse durant les divers intervalles.

Ainsi  $j_{1A}$  et  $j_{2'B}$  sont successivement donnés par :

$$\psi_{\min} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{\pi}{6}, \quad j_{1A} = j_A, \quad j_{2'B} = j_A$$

$$\psi_{\min} + \frac{\pi}{6} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{\pi}{3}, \quad j_{1A} = j_A, \quad j_{2'B} = j_A$$

$$\psi_{\min} + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{\pi}{2}, \quad j_{1A} = j_A, \quad j_{2'B} = j_A$$

$$\psi_{\min} + \frac{\pi}{2} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{2\pi}{3}, \quad j_{1A} = j_B, \quad j_{2'B} = j_B$$

$$\psi_{\min} + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{5\pi}{6}, \quad j_{1A} = j_B, \quad j_{2'B} = j_B$$

$$\psi_{\min} + \frac{5\pi}{6} < \omega t < \psi_{\min} + \pi, \quad j_{1A} = j_C, \quad j_{2'B} = j_B$$

$$\psi_{\min} + \pi < \omega t < \psi_{\min} + \frac{7\pi}{6}, \quad j_{1A} = j_C, \quad j_{2'B} = j_B$$

$$\psi_{\min} + \frac{7\pi}{6} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{4\pi}{3}, \quad j_{1A} = j_C, \quad j_{2'B} = j_B$$

$$\psi_{\min} + \frac{4\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{3\pi}{2}, \quad j_{1A} = j_C, \quad j_{2'B} = j_C$$

$$\psi_{\min} + \frac{3\pi}{2} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{5\pi}{3}, \quad j_{1A} = j_C, \quad j_{2'B} = j_C$$

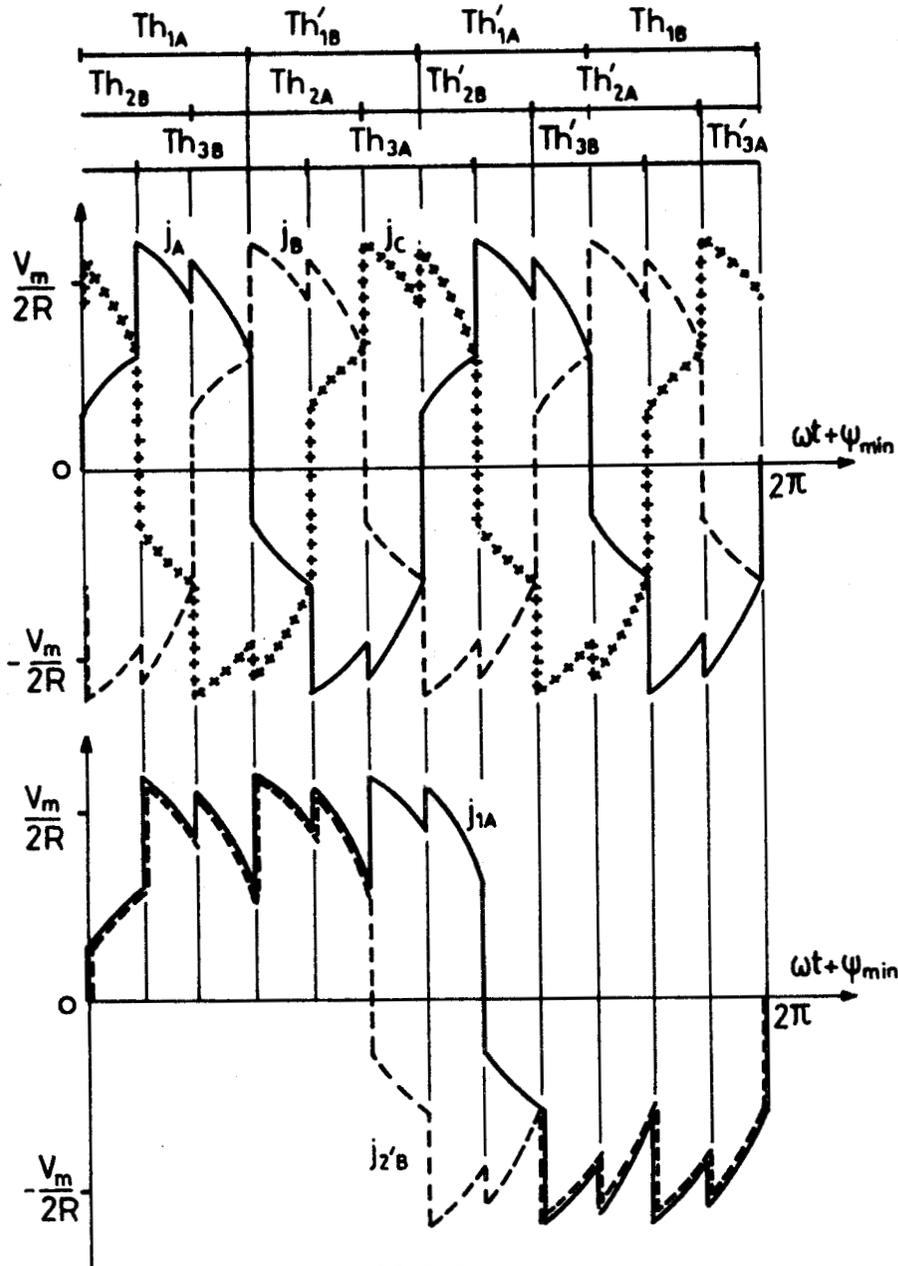


FIG. II.3.7

$$\psi_{\min} + \frac{5\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{11\pi}{6}, j_{1A} = j_A, j_{2'B} = j_A$$

$$\psi_{\min} + \frac{11\pi}{6} < \omega t < \psi_{\min} + 2\pi, j_{1A} = j_A, j_{2'B} = j_A$$

Les formes d'ondes de ces deux courants sont représentées à la figure II.3.7. On remarque que la valeur moyenne de chacun d'eux n'est pas nulle, mais que celle de leur somme  $j_{1A} + j_{2'B}$  l'est. Ces deux cou-



rants passent dans deux enroulements de même nombre de spires montés sur le même noyau. On peut réunir ainsi deux par deux les enroulements pour montrer que les ampères-tours secondaires par noyau ont une valeur moyenne nulle.

## II.2. Débit sur récepteur résistant et inductif

Les relations liant, durant les divers intervalles, les courants  $j_A, j_B, j_C$  aux courants débités  $i_1', i_2', i_3'$  puis les courants dans les enroulements secondaires  $j_{1A}, j_{3'B}, j_{2A} \dots$  à  $j_A, j_B, j_C$  sont les mêmes que lors du débit sur résistances. Seules diffèrent les expressions de  $i_1', i_2', i_3'$ ; elles ont été établies au chapitre précédent, § II.3.1.

Comme pour la multiplication par 3, on peut présenter  $j_A, j_B, j_C$ , pendant l'intervalle  $\psi_{\min}, \psi_{\min} + \pi/6$ , sous la forme :

$$j_A = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_A \cos \omega t + B_A \sin \omega t + J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}})$$

$$j_B = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_B \cos \omega t + B_B \sin \omega t + J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}})$$

$$j_C = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_C \cos \omega t + B_C \sin \omega t + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}})$$

avec

$$A_A = \frac{5}{12} (A_1'' - A_3''); B_A = \frac{5}{12} (B_1'' - B_3''); J_A = \frac{5}{12} (I_1' - I_3') \frac{R}{V_m} (1+Q^2)$$

$$A_B = \frac{1}{12} (5 A_2'' - 2 A_1''); B_B = \frac{1}{12} (5 B_2'' - 2 B_1''); J_B = \frac{1}{12} (5 I_2' - 2 I_1') \frac{R}{V_m} (1+Q^2)$$

$$A_C = \frac{1}{12} (2 A_3'' - 5 A_2''); B_C = \frac{1}{12} (2 B_3'' - 5 B_2''); J_C = \frac{1}{2} (2 I_3' - 5 I_2') \frac{R}{V_m} (1+Q^2)$$

## II.3. Valeur efficace maximale. Facteur d'utilisation

• Chaque courant polygonal prenant, pendant les 12 intervalles de la période, les valeurs qu'ont les 12 courants pendant un intervalle, la valeur efficace maximale  $J_{\max}$  des courants secondaires est donnée par :

$$J_{\max}^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} \right]^2 \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min} + \pi/6} [2(A_A \cos\omega t + B_A \sin\omega t + J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2 + 5(A_B \cos\omega t + B_B \sin\omega t + J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2 + 5(A_C \cos\omega t + B_C \sin\omega t + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2] d\omega t$$

Nous avons calculé précédemment

$$\int_{\psi}^{\psi + \pi/9} (A \cos\omega t + B \sin\omega t + J e^{-\frac{\omega t}{Q}}) d\omega t ;$$

on peut utiliser le résultat obtenu ; il suffit de remplacer  $\pi/9$  par  $\pi/6$ .

On obtient :

$$J_{\max}^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} \right]^2 \left\{ \frac{\pi}{12} (2 A_A^2 + 5 A_B^2 + 5 A_C^2 + 2 B_A^2 + 5 B_B^2 + 5 B_C^2) + \frac{1}{4} (2 A_A^2 + 5 A_B^2 + 5 A_C^2 - 2 B_A^2 - 5 B_B^2 - 5 B_C^2) [\sin 2(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6}) - \sin 2\psi_{\min}] - \frac{1}{2} (2 A_A B_A + 5 A_B B_B + 5 A_C B_C) [\cos 2(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6}) - \cos 2\psi_{\min}] + \frac{Q}{2} (2 J_A^2 + 5 J_B^2 + 5 J_C^2) (1 - e^{-\pi/3Q}) e^{-2\psi_{\min}/Q} + \frac{2Q}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi_{\min}}{Q}} [(2 A_A J_A + 5 A_B J_B + 5 A_C J_C) (\cos\psi_{\min} - Q \sin\psi_{\min}) + e^{-\frac{\pi}{6Q}} [Q \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6}) - \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6})]] + (2 B_A J_A + 5 B_B J_B + 5 B_C J_C) (\sin\psi_{\min} + Q \cos\psi_{\min}) - e^{-\frac{\pi}{6Q}} [Q \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6}) + \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6})] \right\}$$

Les variations de  $J_{\max}$  rapporté à  $V/Z'$ , en fonction de  $\cos\phi'$ , sont indiquées à la planche II.9.

• Le facteur d'utilisation des enroulements secondaires est donné par :

$$f_S = \frac{3 V'_{\max} I'_{\max}}{12 \times 2 \sin\frac{\pi}{12} V \times J_{\max}}$$

$$= \frac{\frac{V'_{\max}}{V} \frac{I'_{\max}}{V/Z'}}{8 \sin\frac{\pi}{12} \frac{J_{\max}}{V/Z'}}$$

Les variations de  $f_S$  en fonction de  $\cos\phi'$  sont indiquées sur la planche II.10. On voit que l'augmentation du facteur d'utilisation des enroulements secondaires due au passage d'une source en étoile à une source en polygone est encore plus nette que pour  $k$  égal à 3.

### III. MULTIPLICATION DE LA FREQUENCE PAR 3/2

Le montage permettant de multiplier par 3/2 la fréquence des tensions appliquées à un récepteur triphasé est schématisé à la figure II.3.8. Il nécessite 10 enroulements par noyau du transformateur :

2 enroulements de  $n_2$  spires,

4 enroulements de  $\alpha n_2$  spires,

4 enroulements de  $\beta n_2$  spires,

$\alpha$  et  $\beta$  ont les mêmes valeurs que lors de la multiplication par 3, mais il faut deux fois plus d'enroulements ; le secondaire étant à 18 phases et non plus à 9.

Si  $V_m$  désigne l'amplitude des tensions simples secondaires  $v_{1A}$ ,  $v_{2C}$ ,  $v_{3B}$ ,  $v_{1B}$ , ..., celle des tensions composées est :

$$2 \sin\frac{\pi}{18} V_m \approx 0,347 V_m.$$

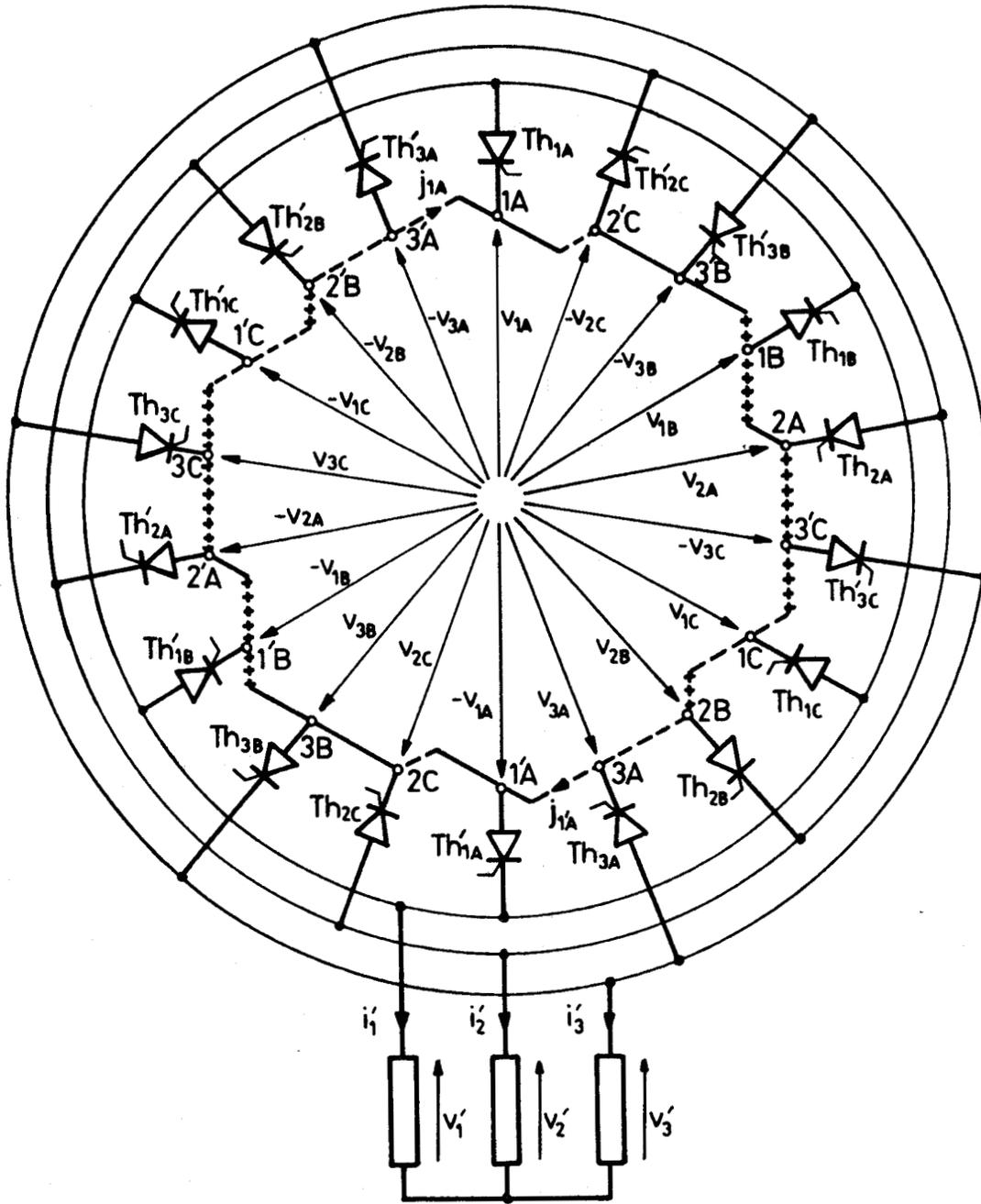


FIG. II.3.8

Comme pour les deux montages précédents, nous n'étudierons que les courants dans les enroulements secondaires et le facteur d'utilisation de ces derniers en nous limitant au cas où  $\psi$  est minimum ; chaque redresseur a alors un angle de conduction de  $4\pi/6$  ou de  $2\pi/3$  (voir chapitre II, figure II.2.9.), chaque intervalle correspond à  $2\pi/9$ .



### III.1. Débit sur résistances pures

• Pour  $\psi_{\min} < \omega t < \psi_{\min} + 2\pi/9$ ,  $Th_{1A}$ ,  $Th'_{2B}$  et  $Th_{3C}$  conduisent :

les relations du paragraphe II.3.1. du chapitre précédent donnent :

$$i'_1 = \frac{v'_1}{R} = \frac{V_m}{R} (A_1 \sin \omega t - B_1 \cos \omega t)$$

$$i'_2 = \frac{v'_2}{R} = \frac{V_m}{R} (A_2 \sin \omega t - B_2 \cos \omega t)$$

$$i'_3 = \frac{v'_3}{R} = \frac{V_m}{R} (A_3 \sin \omega t - B_3 \cos \omega t)$$

• Dans le polygone, durant cet intervalle,

le courant  $j_A$ , qui va du sommet 3C au sommet 1A, traverse 4 phases,

le courant  $j_B$ , qui va du sommet 1A au sommet 2B, en traverse 7,

le courant  $j_C$ , qui va de 2B à 3C en traverse 7.

Dans la relation

$$4 j_A + 7 j_B + 7 j_C,$$

en faisant successivement  $j_C = j_A + i'_3$ ,  $j_B = j_A - i'_1$ ,

$$\text{puis } j_A = j_B + i'_1, j_C = j_B - i'_2,$$

$$\text{et } j_B = j_C + i'_2, j_A = j_C - i'_3,$$

on obtient :

$$j_A = \frac{7}{18}(i'_1 - i'_3) ; j_B = \frac{1}{18} (7 i'_2 - 4 i'_1) ; j_C = \frac{1}{18} (4 i'_3 - 7 i'_2)$$

• Les expressions de  $j_A$ ,  $j_B$ ,  $j_C$  durant les intervalles suivants s'obtiennent en remarquant que

$$j_A(\omega t + \frac{2\pi}{9}) = - j_B(\omega t)$$

$$j_B(\omega t + \frac{2\pi}{9}) = - j_C(\omega t)$$

$$j_C(\omega t + \frac{2\pi}{9}) = - j_A(\omega t)$$

Ces trois courants, de pulsation fondamentale  $\frac{3}{2} \omega$ , sont représentés en haut de la figure II.3.9.

• En notant, durant chaque intervalle, lequel des courants  $j_A$ ,  $j_B$  ou  $j_C$  passe dans une phase déterminée, on obtient les expressions successives du courant dans celle-ci. Ainsi  $j_{1A}$  et  $j_{1'A}$  seront donnés par

$$\begin{array}{lll}
 \psi_{\min} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{2\pi}{9}, & j_{1A} = j_A, & j_{1'A} = j_C \\
 \psi_{\min} + \frac{2\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{4\pi}{9}, & j_{1A} = j_A, & j_{1'A} = j_C \\
 \psi_{\min} + \frac{4\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{2\pi}{3}, & j_{1A} = j_A, & j_{1'A} = j_C \\
 \psi_{\min} + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{8\pi}{9}, & j_{1A} = j_B, & j_{1'A} = j_C \\
 \psi_{\min} + \frac{8\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{10\pi}{9}, & j_{1A} = j_B, & j_{1'A} = j_A \\
 \psi_{\min} + \frac{10\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{4\pi}{3}, & j_{1A} = j_B, & j_{1'A} = j_A \\
 \psi_{\min} + \frac{4\pi}{3} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{14\pi}{9}, & j_{1A} = j_B, & j_{1'A} = j_A \\
 \psi_{\min} + \frac{14\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{16\pi}{9}, & j_{1A} = j_B, & j_{1'A} = j_A \\
 \dots\dots\dots & & \\
 \psi_{\min} + \frac{32\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + \frac{34\pi}{9}, & j_{1A} = j_A, & j_{1'A} = j_B \\
 \psi_{\min} + \frac{34\pi}{9} < \omega t < \psi_{\min} + 4\pi, & j_{1A} = j_A, & j_{1'A} = j_C
 \end{array}$$

Les formes d'ondes de ces deux courants secondaires sont représentées sur la figure II.3.9. On remarque que ces courants ont pour période  $2T$  car ils sont formés de quatre alternances, deux positives, deux négatives, dont l'une dure moitié moins que les trois autres.

Si le courant  $j_{1A}$  a, de ce fait, une valeur moyenne positive, le courant  $j_{1'A}$  qui passe dans un enroulement monté sur le même noyau a une valeur moyenne égale et opposée. En associant ainsi deux à deux les bobinages on voit que les ampères-tours secondaires par noyau ne présentent pas de composante continue.

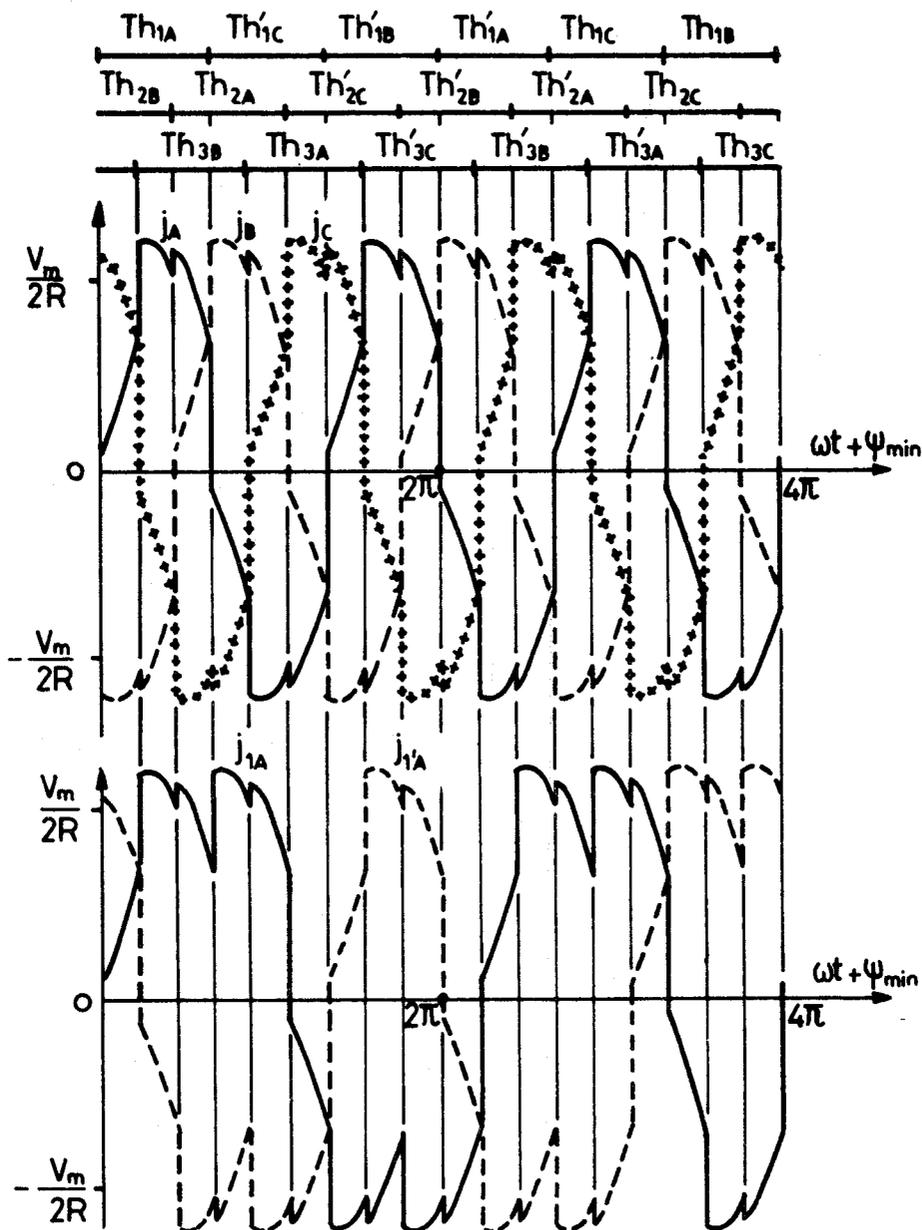


FIG. II.3.9

### III.2. Débit sur récepteur résistant et inductif

Partant des expressions des courants  $i'_1, i'_2, i'_3$  établies au chapitre précédent et des relations entre  $i'_1, i'_2, i'_3$  et  $j_A, j_B, j_C$  que nous venons d'établir, on peut écrire ces courants, durant l'intervalle  $\psi_{\min} < \omega t < \psi_{\min} + 2\pi/9$ , sous la forme:

BUS  
LILLE

$$j_A = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_A \cos \omega t + B_A \sin \omega t + J_A e^{-\omega t/Q})$$

$$j_B = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_B \cos \omega t + B_B \sin \omega t + J_B e^{-\omega t/Q})$$

$$j_C = \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} (A_C \cos \omega t + B_C \sin \omega t + J_C e^{-\omega t/Q})$$

avec

$$A_A = \frac{7}{18} (A_1'' - A_3''); B_A = \frac{7}{18} (B_1'' - B_3''); J_A = \frac{7}{18} (I_1' - I_3') \frac{R}{V_m} (1+Q^2)$$

$$A_B = \frac{1}{18} (7 A_2'' - 4 A_1''); B_B = \frac{1}{18} (7 B_2'' - 4 B_1''); J_B = \frac{1}{18} (7 I_2' - 4 I_1') \frac{R}{V_m} (1+Q^2)$$

$$A_C = \frac{1}{18} (4 A_3'' - 7 A_2''); B_C = \frac{1}{18} (4 A_3'' - 7 A_2''); J_C = \frac{1}{18} (4 I_3' - 7 I_2') \frac{R}{V_m} (1+Q^2)$$

On passe de  $j_A$ ,  $j_B$ ,  $j_C$  aux expressions successives du courant dans une même phase secondaire comme lors du débit sur résistances pures.

### III.3. Valeur efficace maximale. Facteur d'utilisation

• La valeur efficace maximale  $J_{\max}$  des courants dans les enroulements secondaires correspond au fonctionnement à  $\psi_{\min}$  et se calcule par :

$$J_{\max}^2 = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} \right]^2 \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min} + 2\pi/9} [4(A_A \cos \omega t + B_A \sin \omega t + J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2 + 7(A_B \cos \omega t + B_B \sin \omega t + J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2 + 7(A_C \cos \omega t + B_C \sin \omega t + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2] d\omega t$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 J_{\max}^2 = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} \right]^2 & \left\{ \frac{\pi}{9} (4 A_A^2 + 7 A_B^2 + 7 A_C^2 + 4 B_A^2 + 7 B_B^2 + 7 B_C^2) \right. \\
 & + \frac{1}{4} (4 A_A^2 + 7 A_B^2 + 7 A_C^2 - 4 B_A^2 - 7 B_B^2 - 7 B_C^2) [\sin 2(\psi_{\min} + \frac{2\pi}{9}) - \sin 2\psi_{\min}] \\
 & - \frac{1}{2} (4 A_A B_A + 7 A_B B_B + 7 A_C B_C) [\cos 2(\psi_{\min} + \frac{2\pi}{9}) - \cos 2\psi_{\min}] \\
 & + \frac{Q}{2} (4 J_A^2 + 7 J_B^2 + 7 J_C^2) (1 - e^{-4\pi/9Q}) e^{-2\psi_{\min}/Q} \\
 & + \frac{2Q}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi_{\min}}{Q}} [(4 A_A J_A + 7 A_B J_B + 7 A_C J_C) (\cos \psi_{\min} - Q \sin \psi_{\min} \\
 & \quad + e^{-\frac{2\pi}{9Q}} [Q \sin(\psi_{\min} + \frac{2\pi}{9}) - \cos(\psi_{\min} + \frac{2\pi}{9})]) \\
 & \quad + (4 B_A J_A + 7 B_B J_B + 7 B_C J_C) (\sin \psi_{\min} + Q \cos \psi_{\min} \\
 & \quad - e^{-\frac{2\pi}{9Q}} [Q \cos(\psi_{\min} + \frac{2\pi}{9}) + \sin(\psi_{\min} + \frac{2\pi}{9})]) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

D'où la caractéristique  $J_{\max}/V/Z' = f(\cos \varphi')$  tracée sur la planche II.9.

• Le facteur d'utilisation des enroulements secondaires a pour expression

$$\begin{aligned}
 f_S &= \frac{3 V'_{\max} I'_{\max}}{18 \times 2 \sin \frac{\pi}{18} V \times J_{\max}} \\
 &= \frac{\frac{V'_{\max}}{V} \frac{I'_{\max}}{V/Z'}}{12 \sin \frac{\pi}{18} \frac{J_{\max}}{V/Z'}} ;
 \end{aligned}$$

ses variations, en fonction de  $\cos \varphi'$ , sont indiquées sur la planche II.10.

#### IV. CONCLUSION

Le remplacement de la source en étoile par la source en polygone nécessite un plus grand nombre de bobinages pour obtenir le même système de tensions secondaires. Mais les phases secondaires sont constamment parcourues par un courant et sont par conséquent mieux utilisées.

Cela se traduit par une augmentation du facteur d'utilisation des enroulements secondaires importante pour les trois facteurs de multiplication considérés. Cette augmentation est d'autant plus nette qu'il y a plus de phases secondaires (9 pour  $k$  égal à 3, 12 pour  $k$  égal à 2, 18 pour  $k$  égal à  $3/2$ ).

```

*****
*
*   CHAPITRE IV
*
*
*****

```

**MONTAGES A NOMBRE DE THYRISTORS REDUIT**

Les montages étudiés dans les deux chapitres précédents nécessitent le même nombre de thyristors que ceux de la famille générale.

Nous allons examiner ici un type de schéma de multiplicateurs à *sortie triphasée* permettant de réduire le nombre de redresseurs nécessaires.

On peut distinguer dans ces montages deux groupes de thyristors, les thyristors "aller", un par phase secondaire du transformateur, et les thyristors "retour", un par phase du récepteur. Ces derniers permettent d'obtenir les alternances négatives des tensions de sortie, les premiers donnant les alternances positives.

Suivant qu'on provoque la conduction simultanée de deux thyristors de retour ou qu'un seul de ces thyristors débite à la fois, on est amené à distinguer deux cas.

## I. DEUX THYRISTORS DE RETOUR SIMULTANEMENT CONDUCTEURS

### I.1. Multiplication par 3

La figure II.4.1. donne le schéma du tripleur de fréquence triphasé à trois thyristors de retour. Les tensions sont les mêmes que celles de la figure II.2.1. mais il n'y a plus qu'un thyristor aller par phase secondaire. Le nombre de redresseurs commandés est passé de 18 à 12.

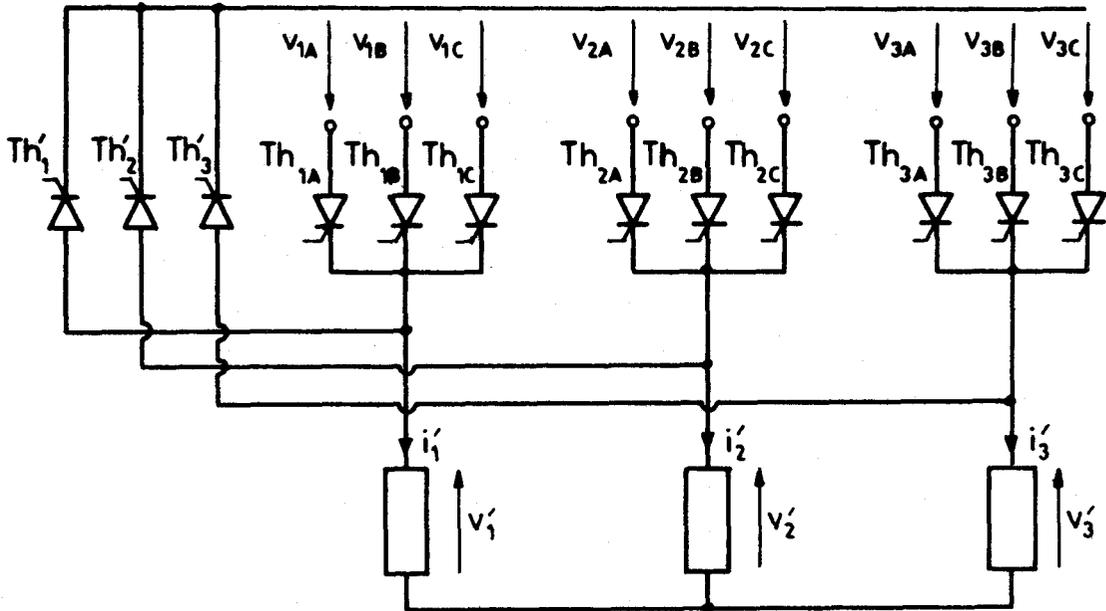


FIG.II.4.1

Les neuf tensions secondaires  $v_{1A}$ ,  $v_{2A}$ ,  $v_{3A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $v_{2B}$ , ..., sont régulièrement déphasées de  $2\pi/9$  ; les neuf thyristors aller  $Th_{1A}$ ,  $Th_{2A}$ ,  $Th_{3A}$ ,  $Th_{1B}$ , ..., sont déclenchés de  $2\pi/9$  en  $2\pi/9$ .

Chacun des trois thyristors de retour est déclenché six fois par période des tensions d'alimentation, chaque fois qu'un thyristor aller des deux autres phases est débloqué. Ainsi  $Th'_1$  conduit en même temps que  $Th_{2A}$ ,  $Th_{2B}$ ,  $Th_{2C}$ ,  $Th_{3A}$ ,  $Th_{3B}$  et  $Th_{3C}$ .

### 1.1.1. Fonctionnement sur charge purement résistive

La figure II.4.2. donne le diagramme des conductions et les formes d'ondes des tensions dans le cas où le récepteur est formé de trois résistances pures d'égale valeur.

- Pour  $\psi < \omega t < \pi$ ,  $Th_{1A}$ ,  $Th'_2$  et  $Th'_3$  conduisent.

De  $v'_2 = v'_3 = v'_1 - v_{1A}$  et  $v'_1 + v'_2 + v'_3 = 0$

on déduit

$$v'_1 = \frac{2}{3} v_{1A} ; v'_2 = v'_3 = -\frac{1}{3} v_{1A} \quad (\text{IV.1})$$

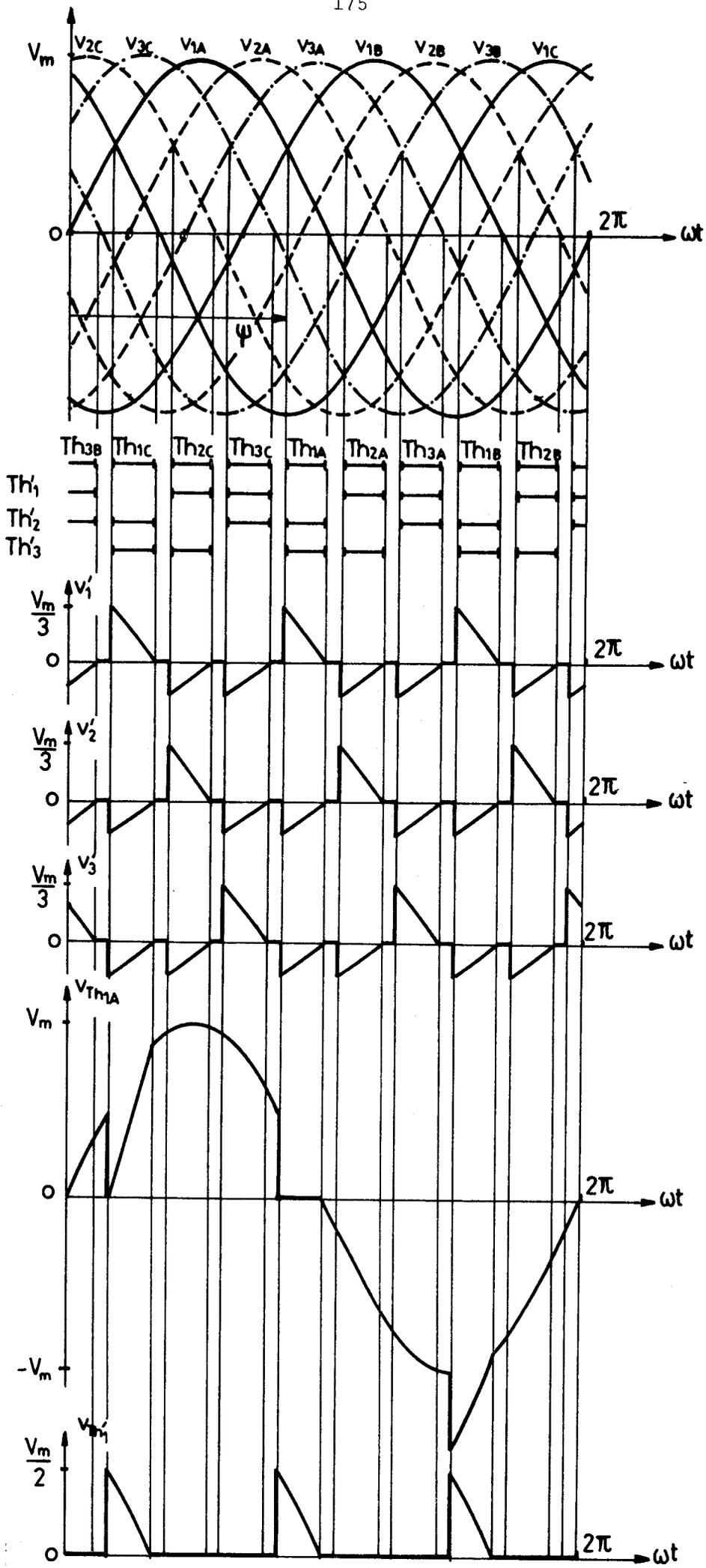


FIG. II.4.2

Les tensions aux bornes des thyristors ont respectivement pour expression

$$\left. \begin{array}{lll}
 v_{Th_{1A}} = 0 & v_{Th_{1B}} = v_{1B} - v_{1A} & v_{Th_{1C}} = v_{1C} - v_{1A} \\
 v_{Th_{2A}} = -v_{2A} & v_{Th_{2B}} = -v_{2B} & v_{Th_{2C}} = -v_{2C} \\
 v_{Th_{3A}} = -v_{3A} & v_{Th_{3B}} = -v_{3B} & v_{Th_{3C}} = -v_{3C} \\
 v_{Th'_1} = v_{1A} & v_{Th'_2} = 0 & v_{Th'_3} = 0
 \end{array} \right\} \text{(IV.2)}$$

- Pour  $\pi < \omega t < \psi + 2\pi/9$ , aucun thyristor ne conduit :

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = 0 \quad \text{(IV.3)}$$

Si on admet que les résistances de fuites des neuf thyristors aller sont égales, on a

$$\left. \begin{array}{l}
 v_{Th_{1A}} = -v_{1A}, v_{Th_{1B}} = -v_{1B}, v_{Th_{1C}} = -v_{1C}, v_{Th_{2A}} = -v_{2A}, \dots \\
 v_{Th'_1} = v_{Th'_2} = v_{Th'_3} = 0
 \end{array} \right\} \text{(IV.4)}$$

- Pour  $\psi + 2\pi/9 < \omega t < \pi + 2\pi/9$ ,  $Th_{2A}$ ,  $Th'_1$  et  $Th'_3$  conduisent

$$v'_2 = \frac{2}{3} v_{2A} ; v'_1 = v'_3 = -\frac{1}{3} v_{2A}$$

$$\begin{array}{lll}
 v_{Th_{1A}} = -v_{1A} & v_{Th_{1B}} = -v_{1B} & v_{Th_{1C}} = -v_{1C} \\
 v_{Th_{2A}} = 0 & v_{Th_{2B}} = v_{2B} - v_{2A} & v_{Th_{2C}} = v_{2C} - v_{2A} \\
 v_{Th_{3A}} = -v_{3A} & v_{Th_{3B}} = -v_{3B} & v_{Th_{3C}} = -v_{3C} \\
 v_{Th'_1} = v_{Th'_3} = 0 ; v_{Th'_2} = v_{2A}
 \end{array}$$

et ainsi de suite.

Pour éviter de court-circuiter deux enroulements secondaires, il faut que  $\psi$  soit supérieur à  $\psi_{\min}$  tel que

$$\psi_{\min} = \pi - 2\pi/9 = 7\pi/9$$

C'est pour  $\psi_{\min}$  que les tensions aux bornes des thyristors présentent leur valeur instantanée maximale :

$$- V_m \left( \sin \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{4\pi}{9} \right), \text{ pour les thyristors aller,}$$

$$V_m \sin 2\pi/3, \text{ pour les thyristors retour.}$$

### 1.1.2. Fonctionnement sur charge purement inductive

Si le récepteur est formé de trois inductances d'égale valeur  $L$ , pendant l'intervalle où les thyristors  $Th_{1A}$ ,  $Th_2'$  et  $Th_3'$  débitent, les tensions de sortie sont encore :

$$v_1' = \frac{2}{3} v_{1A} = \frac{2}{3} V_m \sin \omega t ; v_2' = v_3' = - \frac{1}{3} v_{1A}$$

et les courants dans les phases réceptrices ont pour expression :

$$i_1' = \frac{2}{3} \frac{V_m}{L\omega} (\cos \psi - \cos \omega t) = - 2 i_2' = - 2 i_3'$$

Ces courants s'annulent pour  $\omega t = 2\pi - \psi$ . Pour que l'angle de conduction soit inférieur à  $2\pi/9$ , il faut que  $\psi$  soit supérieur à  $\psi_{\min}$  tel que  $\psi_{\min} = 8\pi/9$ .

### 1.1.3. Fonctionnement sur récepteur résistif et inductif

La figure II.4.3. indique le diagramme des conductions et les formes d'ondes de  $v_1'$ ,  $i_1'$ ,  $v_{Th_{1A}}$  et  $v_{Th_1}'$  lors du débit sur une charge équilibrée de constantes  $R$ ,  $L$  par phase.

- Pendant l'intervalle où  $Th_{1A}$ ,  $Th_2'$  et  $Th_3'$  conduisent, les tensions aux bornes du récepteur et aux bornes des thyristors sont toujours données par les relations (IV.1) et (IV.2).

Les courants  $i_1'$ ,  $i_2'$ ,  $i_3'$  ont pour expressions :

$$i_1' = -2 i_2' = -2 i_3' = \frac{2}{3} \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [\sin \omega t - Q \cos \omega t - (\sin \psi - Q \cos \psi) e^{\frac{\psi - \omega t}{Q}}] \quad (IV.5)$$

Cet intervalle se termine pour  $\omega t = \psi + \theta$  tel que

$$\sin(\psi + \theta) - Q \cos(\psi + \theta) = (\sin \psi - Q \cos \psi) e^{-\theta/Q} \quad (IV.6)$$

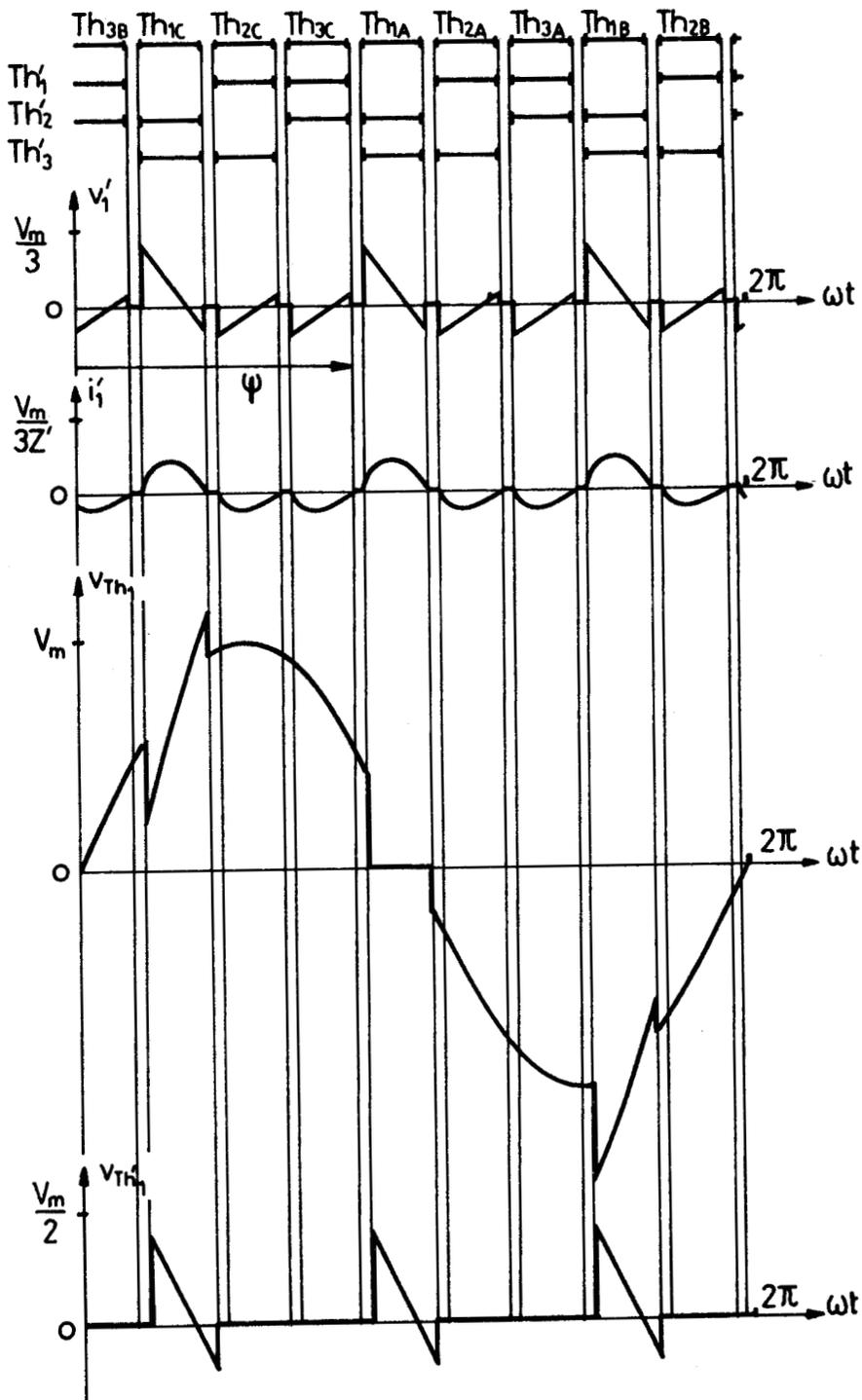


FIG. II.4.3

- Pendant l'intervalle  $\psi + \theta$ ,  $\psi + 2\pi/9$ , aucun redresseur ne conduit ; les tensions aux bornes des thyristors sont données par les relations (IV.4).

- La valeur minimum de  $\psi$  correspond à  $\theta = 2\pi/9$  et se calcule par

$$\psi_{\min} = \text{Arc tg} \frac{-\sin 2\pi/9 + Q \cos 2\pi/9 - Q e^{-2\pi/9Q}}{\cos 2\pi/9 + Q \sin 2\pi/9 - e^{-2\pi/9Q}} \quad (\text{IV.7})$$

Quelle que soit la valeur de l'angle d'amorçage, comprise entre  $\psi_{\min}$  et  $\pi$ , la valeur maximale de la tension inverse aux bornes des thyristors aller n'excède jamais  $V_m (\sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{9})$  ; le maximum de tension directe aux bornes des thyristors retour n'excède jamais  $V_m \sin 2\pi/3$ .

Le fait que la tension aux bornes des thyristors  $Th'_1$ ,  $Th'_2$ ,  $Th'_3$  soit négative au moment du déblocage n'empêche pas celui-ci de s'amorcer. En effet c'est la somme des tensions aux bornes des redresseurs en série qu'on déclenche simultanément qu'il faut considérer ; or cette somme est bien positive.

## I.2. Généralisation

### I.2.1. Multiplication par k impair quelconque

Le montage nécessite  $3k$  tensions d'alimentation  $v_{1A}$ ,  $v_{2A}$ ,  $v_{3A}$ ,  $v_{1B}$ ,  $v_{2B}$ , ...,  $v_{1k}$ ,  $v_{2k}$ ,  $v_{3k}$  auxquelles correspondent les  $3k$  thyristors aller  $Th_{1A}$ ,  $Th_{2A}$ ,  $Th_{3A}$ ,  $Th_{1B}$ ,  $Th_{2B}$ , ...,  $Th_{1k}$ ,  $Th_{2k}$ ,  $Th_{3k}$  déclenchés de  $2\pi/3k$  en  $2\pi/3k$ . Il y a toujours  $3$  thyristors de retour, un par phase  $Th'_1$ ,  $Th'_2$ ,  $Th'_3$ .

Il suffit d'étudier un intervalle de largeur  $2\pi/3k$ .

Pour  $\psi < \omega t < \psi + \theta$ , quand  $Th_{1A}$ ,  $Th'_2$  et  $Th'_3$  conduisent,

$$v'_1 = \frac{2}{3} V_m \sin \omega t = -2 v'_2 = -2 v'_3 \quad (\text{IV.1})$$

$$i_1' = -2 i_2' = -2 i_3' = \frac{2}{3} \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} [\sin\omega t - Q \cos\omega t - (\sin\psi - Q \cos\psi) e^{\frac{\psi-\omega t}{Q}}] \quad (\text{IV.5})$$

L'angle de conduction  $\theta$  est encore donné par

$$\sin(\psi+\theta) - Q \cos(\psi+\theta) = (\sin\psi - Q \cos\psi) e^{-\theta/Q} \quad (\text{IV.6})$$

Cet angle est nul pour  $\psi = \pi$ , son maximum  $2\pi/3k$  correspond à  $\psi_{\min}$  tel que

$$\psi_{\min} = \text{Arc tg} \frac{-\sin\frac{2\pi}{3k} + Q \cos\frac{2\pi}{3k} - Q e^{-2\pi/3kQ}}{\cos\frac{2\pi}{3k} + Q \sin\frac{2\pi}{3k} - e^{-2\pi/3kQ}} \quad (\text{IV.8})$$

La valeur maximale de la tension inverse aux bornes des thyristors aller correspond au débit sur charge purement résistive et à  $\psi_{\min}$  ; elle est donnée par

$$V_m \left( \sin k' \frac{2\pi}{3k} + \sin \frac{2\pi}{3k} \right), \quad (\text{IV.9})$$

où  $k'$  est pris dans le tableau suivant :

k	3	5	7	9	11	13	15	17 ...
k'	2	5	5	8	8	11	11	14 ...

La valeur maximale de la tension directe aux bornes de  $Th_1'$ ,  $Th_2'$ ,  $Th_3'$  vaut

$$V_m \sin \frac{2\pi}{3k}. \quad (\text{IV.10})$$

### 1.2.2. Multiplication par k pair

La principale différence qui existait entre les multiplicateurs de la famille générale suivant que  $k$  est impair ou pair, à savoir qu'il fallait  $k$  tensions secondaires par tension de sortie pour les premiers,  $2k$  pour les seconds, disparaît.

Pour  $k$  pair, comme pour  $k$  impair,  $3k$  tensions secondaires suffisent. Il faut  $3k$  thyristors aller,  $3$  thyristors retour.

La figure II.4.4. donne le schéma du doubleur de fréquence, qui nécessite 9 thyristors et non plus 12, et montre, lors du débit à  $\psi_{\min}$  sur résistances pures, le tracé des formes d'ondes des tensions  $v'_1$ ,  $v_{Th_{1A}}$  et  $v_{Th'_1}$ .

Toutes les relations établies pour  $k$  impair sont valables pour  $k$  pair.

La tension inverse maximale aux bornes des thyristors aller est toujours donnée par

$$V_m \left( \sin k' \frac{2\pi}{3k} + \sin \frac{2\pi}{3k} \right) \tag{IV.9}$$

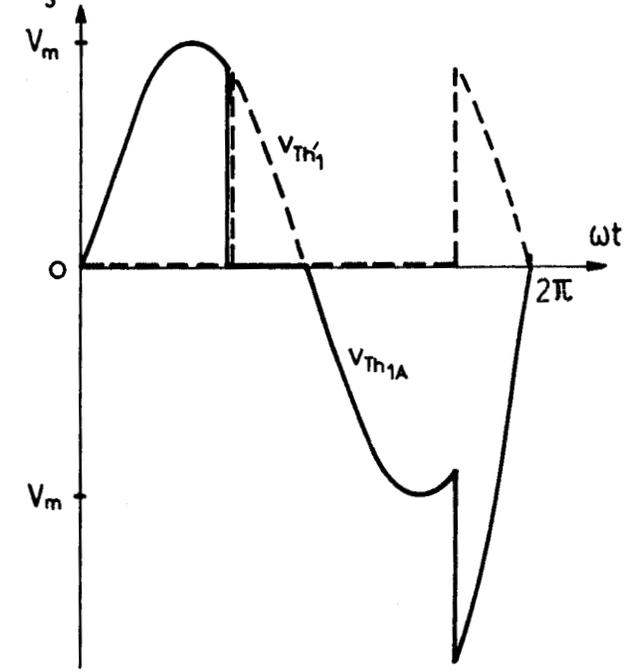
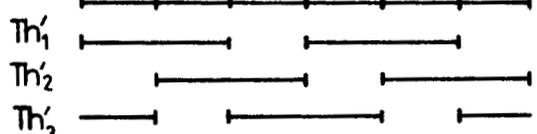
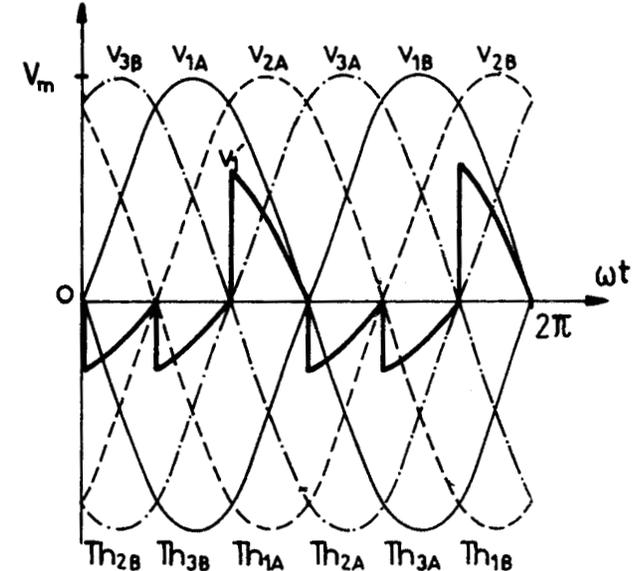
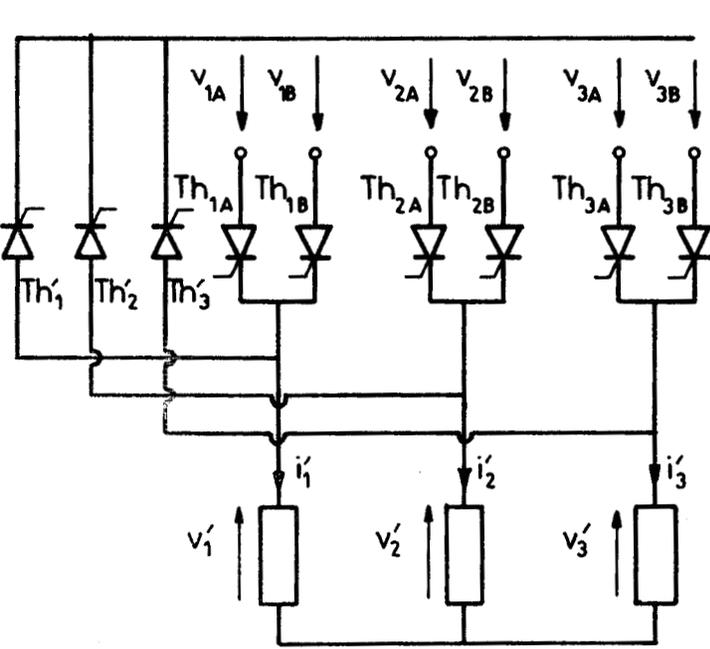


FIG. II.4.4

où  $k'$  est maintenant pris dans le tableau suivant :

$k$	2	4	6	8	10	12	14	16 ...
$k'$	2	2	5	5	8	8	11	11

### I.2.3. Multiplication par $k$ fractionnaire supérieur à 1

Pour multiplier la fréquence par  $k$ , égal à  $N/D$ , avec un schéma analogue à ceux des figures II.4.1. et II.4.2., il suffit de  $N$  tensions secondaires (et non plus de  $2N$ ). Les  $N$  thyristors aller sont réunis aux bornes secondaires, les 3 thyristors de retour aux bornes du récepteur triphasé.

La figure II.4.5. montre l'obtention de la tension de sortie  $v_1'$  pour  $k = 3/2$ , lors d'un débit sur résistances à  $\psi$  minimum.

Quel que soit  $k$ , pendant l'intervalle de conduction simultanée de  $Th_{1A}$ ,  $Th_2'$  et  $Th_3'$ , les tensions  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$  sont données par les relations (IV.1), les courants  $i_1'$ ,  $i_2'$ ,  $i_3'$  par (IV.5).

L'angle de conduction  $\theta$  donné par la relation (IV.6) vaut au maximum  $2\pi/3k$  et on peut calculer  $\psi_{\min}$  par (IV.7).

Seules varient les expressions de la tension inverse maximale aux bornes des thyristors aller. Cette tension est donnée par

$$2 V_m \sin \frac{2\pi}{N}, \text{ si } 1 < k < 2,$$

$$V_m \left( \sin \frac{2\pi}{3k} + \sin \frac{4\pi}{3k} \right), \text{ si } k > 2.$$

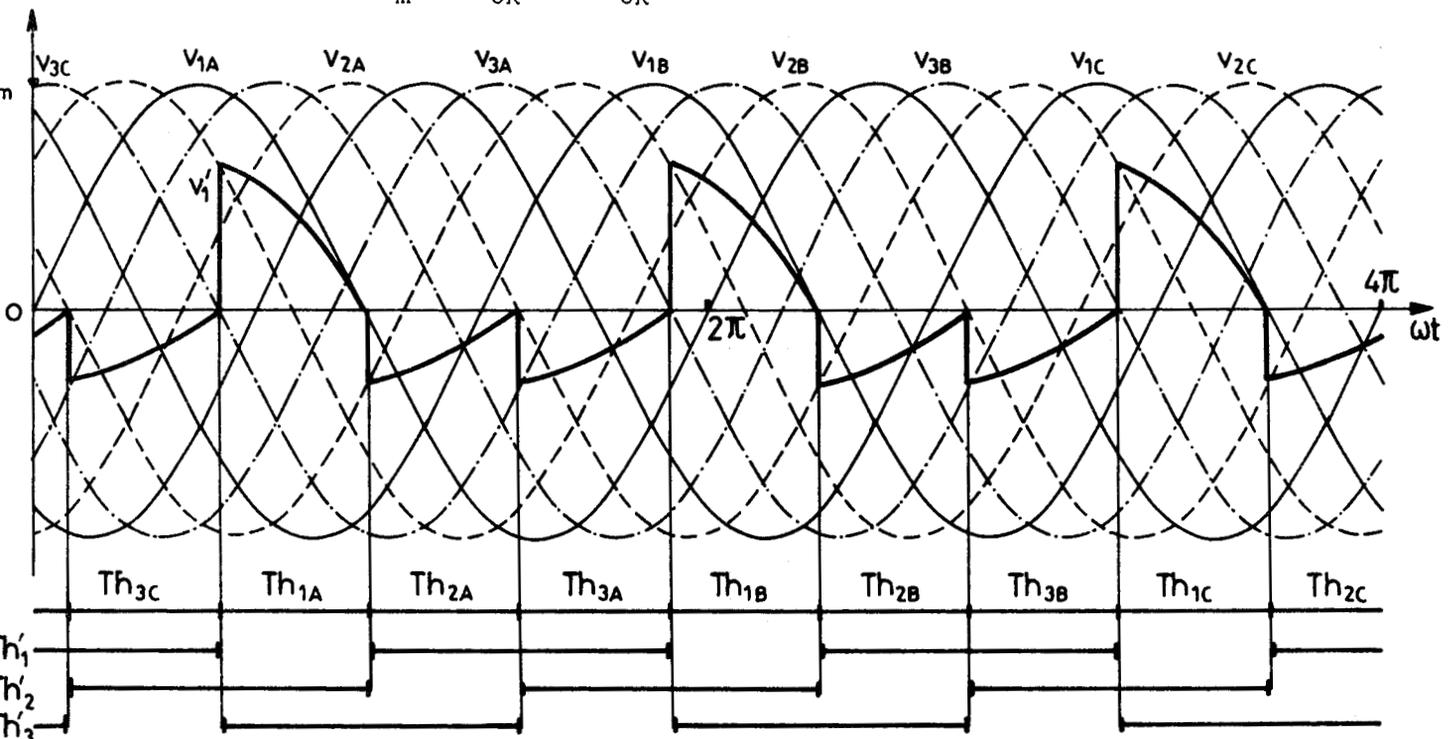


FIG. II.4.5

### I.3. Caractéristiques

#### I.3.1. Grandeurs de sortie

##### *I.3.1.1. Tensions de sortie. Développement en série*

La tension  $v_1'$  a pour expressions successives pendant une de ses périodes :

$$\psi < \omega t < \psi + \theta \quad , \quad v_1' = \frac{2}{3} V_m \sin \omega t$$

$$\psi + \theta < \omega t < \psi + 2\pi/3k \quad , \quad v_1' = 0$$

$$\psi + 2\pi/3k < \omega t < \psi + \theta + 2\pi/3k \quad , \quad v_1' = -\frac{1}{3} V_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3k})$$

$$\psi + \theta + 2\pi/3k < \omega t < \psi + 4\pi/3k \quad , \quad v_1' = 0$$

$$\psi + 4\pi/3k < \omega t < \psi + \theta + 4\pi/3k \quad , \quad v_1' = -\frac{1}{3} V_m \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3k})$$

$$\psi + \theta + 4\pi/3k < \omega t < \psi + 2\pi/k \quad , \quad v_1' = 0$$

Le terme de pulsation  $pk\omega$  a une amplitude

$$\sqrt{A_p'^2 + B_p'^2} ,$$

où  $A_p'$  et  $B_p'$  calculés par

$$A_p' = \frac{2}{2\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+2\pi/k} v_1' \sin pk\omega t \, d\omega t$$

$$B_p' = \frac{2}{2\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+2\pi/k} v_1' \cos pk\omega t \, d\omega t ,$$

ont pour expression:

$$\begin{aligned}
A'_p = \frac{k}{6\pi} V_m \left[ \frac{1}{pk-1} \{ & 2 \sin(pk-1)(\psi+\theta) - 2 \sin(pk-1)\psi \\ & - \sin[(pk-1)(\psi+\theta) + 2p \frac{\pi}{3}] + \sin[(pk-1)\psi + 2p \frac{\pi}{3}] \\ & - \sin[(pk-1)(\psi+\theta) + 4p \frac{\pi}{3}] + \sin[(pk-1)\psi + 4p \frac{\pi}{3}] \} \right. \\ & + \frac{1}{pk+1} \{ - 2 \sin(pk+1)(\psi+\theta) + 2 \sin(pk+1)\psi \\ & + \sin[(pk+1)(\psi+\theta) + 2p \frac{\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi + 2p \frac{\pi}{3}] \\ & \left. + \sin[(pk+1)(\psi+\theta) + 4p \frac{\pi}{3}] - \sin[(pk+1)\psi + 4p \frac{\pi}{3}] \} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_p = \frac{k}{6\pi} V_m \left[ \frac{1}{pk-1} \{ & 2 \cos(pk-1)(\psi+\theta) - 2 \cos(pk-1)\psi \\ & - \cos[(pk-1)(\psi+\theta) + 2p \frac{\pi}{3}] + \cos[(pk-1)\psi + 2p \frac{\pi}{3}] \\ & - \cos[(pk-1)(\psi+\theta) + 4p \frac{\pi}{3}] + \cos[(pk-1)\psi + 4p \frac{\pi}{3}] \} \right. \\ & + \frac{1}{pk+1} \{ - 2 \cos(pk+1)(\psi+\theta) + 2 \cos(pk+1)\psi \\ & + \cos[(pk+1)(\psi+\theta) + 2p \frac{\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi + 2p \frac{\pi}{3}] \\ & \left. + \cos[(pk+1)(\psi+\theta) + 4p \frac{\pi}{3}] - \cos[(pk+1)\psi + 4p \frac{\pi}{3}] \} \right]
\end{aligned}$$

### 1.3.1.2. Tensions de sortie. Valeur efficace

Vu leur forme d'onde, la valeur efficace  $V'$  des tensions de sortie peut se calculer par

$$V'^2 = \frac{1}{2\pi/k} \int_{\psi}^{\psi+2\pi/k} v_1'^2 dt = \frac{kV_m^2}{3\pi} \int_{\psi}^{\psi+\theta} \sin^2 \omega t dt$$

ce qui donne

$$V'^2 = \frac{kV_m^2}{6\pi} [\theta - \cos(2\psi+\theta) \sin\theta]$$

Lorsque  $\psi$  est minimum,  $\theta$  égale  $2\pi/3k$  et  $V'$  alors maximum a pour valeur

$$V'_{\max} = \frac{V^2}{3} \left[ \frac{1}{3} - \frac{k}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{3k} \cos 2\left(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3k}\right) \right]$$

### 1.3.1.3. Tensions de sortie. Caractéristiques. Remarques

La planche II.11 donne les variations de l'angle minimum de retard au déblocage en fonction de  $\cos\varphi'$ . La comparaison avec les courbes de la planche II.2 montre que  $\psi_{\min}$  est beaucoup plus voisin de  $\pi$ ; cela tient à ce que  $\theta_{\max}$  est maintenant égal à  $2\pi/3k$  et non plus à  $\pi/k$ .

Pour trois valeurs de  $\cos\varphi'$  et diverses valeurs de  $k$ , la planche II.12 donne les variations, en fonction de  $\psi$ , de la valeur efficace  $V'$  des tensions de sortie rapportée à celle  $V$  des tensions secondaires.

Afin de comparer à ce que donne le montage normal (Planche II.3) on a conservé la même échelle pour le rapport  $V'/V$ . On voit que les valeurs de  $V'/V$  maintenant obtenues sont très inférieures.

La planche II.13 donne les résultats de l'analyse harmonique des tensions de sortie, pour  $k = 3/2$  et  $k = 2$ . Pour les autres valeurs de  $k$  les courbes ont la même allure.

Les tensions de sortie ne comportent pas d'harmonique 3 ou de rang multiple de 3, mais elles contiennent les *harmoniques pairs* 2, 4, 8... en plus des harmoniques impairs habituels. L'harmonique 2 devient supérieur au fondamental dès que le facteur de puissance s'écarte notablement de l'unité. Lorsque  $\psi$  tend vers  $\pi$ , les harmoniques de rang élevé deviennent prépondérants.

### 1.3.1.4. Courants de sortie

Le courant  $i'_1$  a pour expressions successives

$$\psi < \omega t < \psi + \theta, i'_1 = \frac{2}{3} \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q} \left[ \sin\omega t - Q \cos\omega t - (\sin\psi - Q \cos\psi) e^{\frac{\psi-\omega t}{Q}} \right]$$

$$\psi + \theta < \omega t < \psi + 2\pi/3k, i'_1 = 0$$

$$\psi + 2\pi/3k < \omega t < \psi + 4\pi/3k, i'_1(\omega t) = -\frac{i'_1}{2} \left( \omega t - \frac{2\pi}{3k} \right)$$

$$\psi + 4\pi/3k < \omega t < \psi + 2\pi/k, i'_1(\omega t) = -\frac{i'_1}{2} \left( \omega t - \frac{4\pi}{3k} \right)$$

De sorte qu'on peut calculer sa valeur efficace  $I'$  par

$$I'^2 = \frac{1}{2\pi/k} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \int_{\psi}^{\psi+\theta} i_1'^2 dt.$$

La valeur efficace maximum  $I'_{\max}$  correspondant à  $\psi_{\min}$  est donnée par

$$I'_{\max}{}^2 = \frac{k}{\pi} \frac{V^2}{Z'^2} \frac{1+k^2Q^2}{(1+Q^2)^2} \left\{ (1+Q^2)\frac{2\pi}{3k} - (1-Q^2) \sin\frac{2\pi}{3k} \cos 2\left(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3k}\right) \right. \\ \left. + Q A^2 \left(1 - e^{-\frac{4\pi}{3kQ}}\right) - 2Q \sin\frac{2\pi}{3k} \sin 2\left(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3k}\right) \right. \\ \left. - 4AQ \left[ \sin\psi_{\min} - \sin\left(\psi_{\min} + \frac{2\pi}{3k}\right) e^{-\frac{2\pi}{3kQ}} \right] \right\}$$

avec  $A = \sin\psi - Q \cos\psi$

et  $Z' = R \sqrt{1 + k^2 Q^2}$ .

Le haut de la planche II.14 donne les variations du maximum du courant efficace dans la charge en fonction de  $\cos\phi'$  pour diverses valeurs de  $k$ . Le rapport  $I'_{\max}/V/Z'$  est beaucoup plus faible que celui des montages précédents (Planche II.7).

### 1.3.2. Facteurs d'utilisation

#### *Facteur d'utilisation des enroulements secondaires*

- Si  $k$  est entier, pair ou impair, il faut  $3k$  enroulements secondaires. La valeur efficace  $I_S$  du courant dans ces enroulements correspond à une seule alternance positive sur les  $k$  qui comptent les courants  $i_1'$ ,  $i_2'$  ou  $i_3'$  pendant une période des tensions d'alimentation

$$\text{Donc } I_S^2 = I'^2 \frac{1}{k} \frac{(2/3)^2}{(2/3)^2 + 2(1/3)} = \frac{I'^2}{k} \times \frac{2}{3}$$

$$I_S = \sqrt{\frac{2}{3k}} I'$$

D'où l'expression du facteur d'utilisation

$$f_S = \frac{3 V'_{\max} I'_{\max}}{3k V I_{S\max}} = \frac{1}{k} \frac{V'_{\max}}{V} \sqrt{\frac{3k}{2}}$$

$$f_S = \sqrt{\frac{3}{2k}} \frac{V'_{\max}}{V}$$

- Si  $k$  est fractionnaire, il faut  $3N$  enroulements secondaires, chacun d'eux débite une alternance positive d'un courant  $i'_1$ ,  $i'_2$  ou  $i'_3$  sur  $N$ .

$$I_S = \sqrt{\frac{2}{3N}} I' ;$$

$$f_S = \sqrt{\frac{3}{2N}} \frac{V'_{\max}}{V}$$

Le milieu de la planche II.14 donne les variations de  $f_S$  en fonction de  $\cos\phi'$  pour différentes valeurs de  $k$ .

### Facteur d'utilisation des thyristors

Le montage utilise  $3k$  (ou  $3N$ ) thyristors aller (tension inverse maximale  $v_{Th\max}$ , courant efficace  $I_{Th}$ ) et  $3$  thyristors de retour (tension directe maximale  $v_{Th'\max}$ , courant efficace  $I_{Th'}$ ). D'où l'expression du facteur d'utilisation des thyristors

$$f_{Th} = \frac{3 V'_{\max} I'_{\max}}{3 k(\text{ou } N) v_{Th\max} I_{Th\max} + 3 v_{Th'\max} I_{Th'\max}}$$

Le courant dans un thyristor aller a la même valeur que le courant dans un enroulement secondaire.

$$I_{Th} = I_S = \sqrt{\frac{2}{3k}} I' \text{ ou } \sqrt{\frac{2}{3N}} I'$$

Chaque thyristor retour écoule les alternances négatives du courant d'une phase réceptrice.

$$I_{Th'} = I'^2 \frac{2(1/3)^2}{(2/3)^2 + 2(1/3)^2} ; I_{Th'} = \frac{I'}{\sqrt{3}}$$

D'où, d'après les diverses expressions des tensions maximales aux bornes des thyristors, les diverses expressions du facteur d'utilisation de ces derniers.

- Si  $k$  est entier

$$f_{Th} = \frac{\sqrt{3} V'_{max}/V}{2\sqrt{k}(\sin k' \frac{2\pi}{3k} + \sin \frac{2\pi}{3k}) + \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{3k}}$$

$k'$  étant pris dans le tableau du paragraphe I.2.1. si  $k$  est impair, ou dans celui du paragraphe I.2.2. si  $k$  est pair.

- Si  $k$  est fractionnaire et inférieur à 2,

$$f_{Th} = \frac{\sqrt{3} V'_{max}/V}{4\sqrt{N} \sin \frac{2\pi}{N} + \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{3k}}$$

- Si  $k$  est fractionnaire et supérieur à 2,

$$f_{Th} = \frac{\sqrt{3} V'_{max}/V}{2\sqrt{N}(\sin \frac{2\pi}{3k} + \sin \frac{4\pi}{3k}) + \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{3k}}$$

Le bas de la planche II.14 donne, pour diverses valeurs de  $k$ , les variations de  $f_{Th}$  en fonction de  $\cos \phi'$ .

La comparaison des valeurs de  $f_S$  et de  $f_{Th}$  ainsi obtenues avec celles indiquées par la planche II.8 et, a fortiori, avec celles de la planche II.10 montre que les montages étudiés dans ce chapitre utilisent beaucoup moins bien leurs éléments constitutifs.

## II. UN SEUL THYRISTOR DE RETOUR CONDUCTEUR A LA FOIS

On peut utiliser les schémas présentés dans la première partie de ce chapitre en ne déclenchant qu'un thyristor de retour à la fois et non plus deux.

La figure II.4.6. donne les formes d'ondes des tensions aux bornes de la charge et des thyristors dans le cas du tripleur de fréquence débitant sur une charge purement résistive avec un angle de conduction maximum.

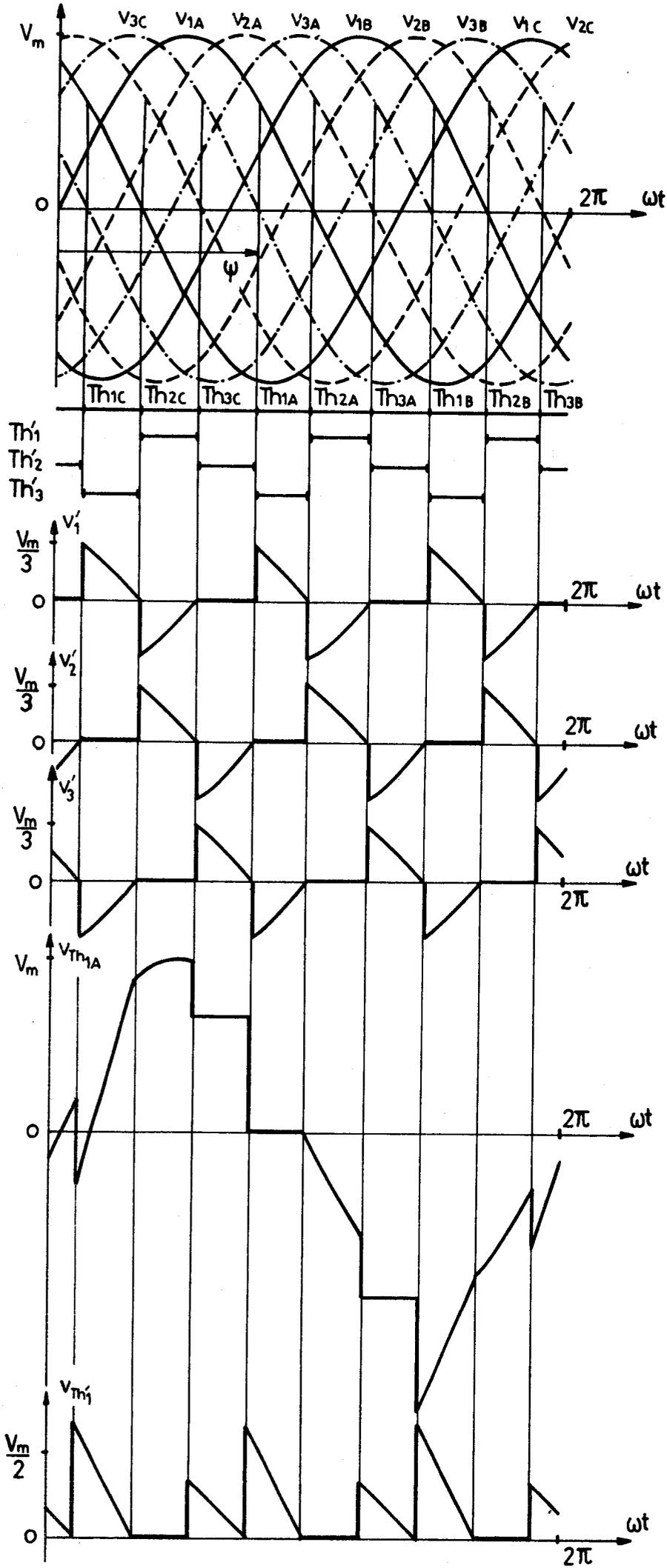


FIG.II.4.6

Lorsque les thyristors  $Th_{1A}$  et  $Th'_3$  débitent,

$$v'_1 = \frac{v_{1A}}{2} ; v'_2 = 0 ; v'_3 = -\frac{v_{1A}}{2}$$

On peut sans difficulté généraliser aux autres valeurs de  $k$ .

## II.1. Fonctionnement

Les résultats obtenus dans la première partie de ce chapitre permettent de passer directement à ceux que donne la marche à un seul thyristor de retour.

- Pendant l'intervalle  $\psi < \omega t < \psi + \theta$ ,

$$v'_1 = -v'_3 = \frac{V_m}{2} \sin \omega t ; v'_2 = 0 ; i'_2 = 0$$

$$i'_1 = -i'_3 = \frac{1}{2} \frac{V_m}{R} \frac{1}{1+Q^2} [\sin \omega t - Q \cos \omega t - (\sin \psi - Q \cos \psi) e^{\frac{\psi - \omega t}{Q}}]$$

- Pendant l'intervalle  $\psi + \theta < \omega t < \psi + 2\pi/k$

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = 0 ; i'_1 = i'_2 = i'_3 = 0$$

L'angle de conduction  $\theta$  est encore donné par la relation (IV.6), l'angle minimum de retard au déblocage  $\psi_{\min}$  par la relation (IV.8).

Les formes d'ondes des tensions aux bornes des thyristors sont différentes, mais l'examen des divers cas possibles montre que les valeurs maximales de ces tensions restent les mêmes.

## II.2. Caractéristiques

### II.2.1. Grandeurs de sortie

- La valeur efficace  $(V')_1$  des tensions de sortie peut se déduire de celle  $(V')_2$  calculée lorsque deux thyristors de retour conduisaient simultanément.

Au lieu d'une alternance positive formée d'une portion de sinussoïde d'amplitude  $2 V_m/3$  et d'une alternance négative formée de deux portions de sinussoïdes d'amplitude  $V_m/3$ , on a une alternance positive et une alternance négative formées d'arcs de sinussoïdes d'amplitude  $V_m/2$ .

A valeurs données de  $V_m$ , de  $k$ , de  $\psi$  et de  $Q$  ou de  $\cos\phi'$  on a donc

$$\frac{(V')_1}{(V')_2} = \sqrt{\frac{2(1/2)^2}{(2/3)^2 + 2(1/3)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En particulier, à  $k$  et  $\cos\phi'$  donnés,

$$\frac{(V'_{\max})_1}{(V'_{\max})_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Les taux d'harmoniques des tensions de sortie sont les mêmes car on peut remarquer (fig. II.4.7.) que la forme d'onde des tensions composées données par le fonctionnement à 2 thyristors de retour est la même que celle de la tension simple dans la marche à un thyristor de retour, et réciproquement. Or quand il n'y a pas d'harmonique 3 ou multiple de 3 les taux d'harmoniques des tensions simples et des tensions composées sont égaux.

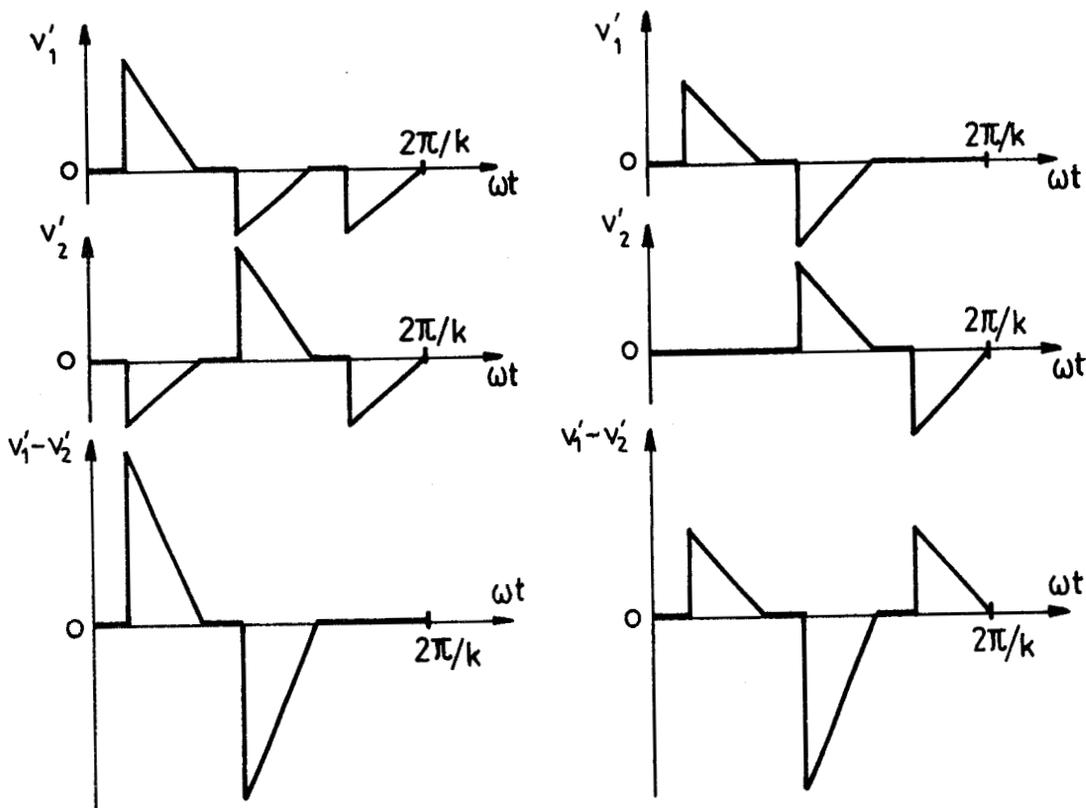


FIG. II.4.7

- Les courants de sortie ont, à valeurs données de  $V_m$ ,  $k$ ,  $\psi$  et à récepteur donné, des valeurs efficaces proportionnelles à celles des tensions. En particulier,

$$\left(\frac{I'_{\max}}{V/Z'}\right)_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{I'_{\max}}{V/Z'}\right)_2$$

Les courbes de la planche II.11 sont directement utilisables, celles des planches II.12, II.13 et du haut de la planche II.14 peuvent être utilisées à condition de multiplier par  $\sqrt{3}/2$  tous les rapports dont elles donnent les variations.

### II.2.2. Facteurs d'utilisation

- Le facteur d'utilisation des enroulements secondaires se déduit de celui précédemment calculé par

$$(f_S)_1 = (f_S)_2 \frac{(V'_{\max})_1}{(V'_{\max})_2} \times \frac{(I_S/I')_2}{(I_S/I')_1}$$

Puisque chaque enroulement secondaire débite une alternance sur les  $2k$  alternances identiques, au signe près, formant un courant de sortie pendant une période de celui-ci

$$(I_S/I')_2 = \sqrt{1/2k}$$

$$(f_S)_1 = (f_S)_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{1}{2k}} \frac{3k}{2} = (f_S)_2$$

- Le facteur d'utilisation des thyristors est lui diminué. Si, pour les thyristors aller, le rapport  $I_{Th}/I'$  est comme  $I_S/I'$ , réduit dans le même rapport que  $V'_{\max}/V$ , le rapport  $I_{Th}/I'$  est au contraire augmenté

$$(I_{Th}/I')_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ alors que } (I_{Th}/I')_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

### III. CONCLUSION

- Les multiplicateurs examinés dans ce chapitre, outre le fait qu'ils sont plus faciles à étudier, présentent l'avantage de *nécessiter moins d'éléments* que ceux vus dans les deux chapitres précédents.

- au lieu de  $6k$  thyristors si le facteur de multiplication de la fréquence est entier ou  $6N$  s'il est fractionnaire, ils n'en utilisent que  $3k + 3$  ou  $3N + 3$ .

- Si  $k$  est entier et pair ou s'il est fractionnaire, le nombre de phases secondaires nécessaires est divisé par 2. Il en faut  $3k$  ou  $3N$  au lieu de  $6k$  ou  $6N$ .

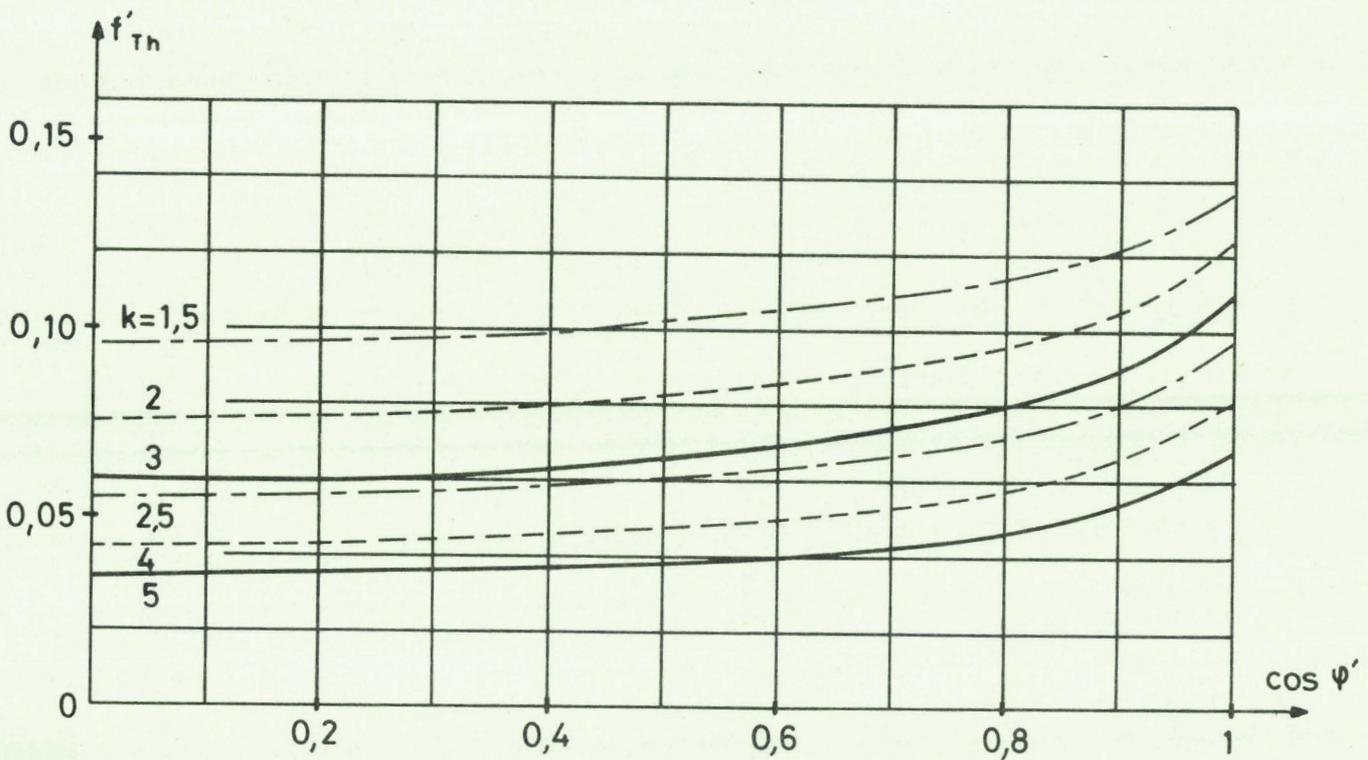
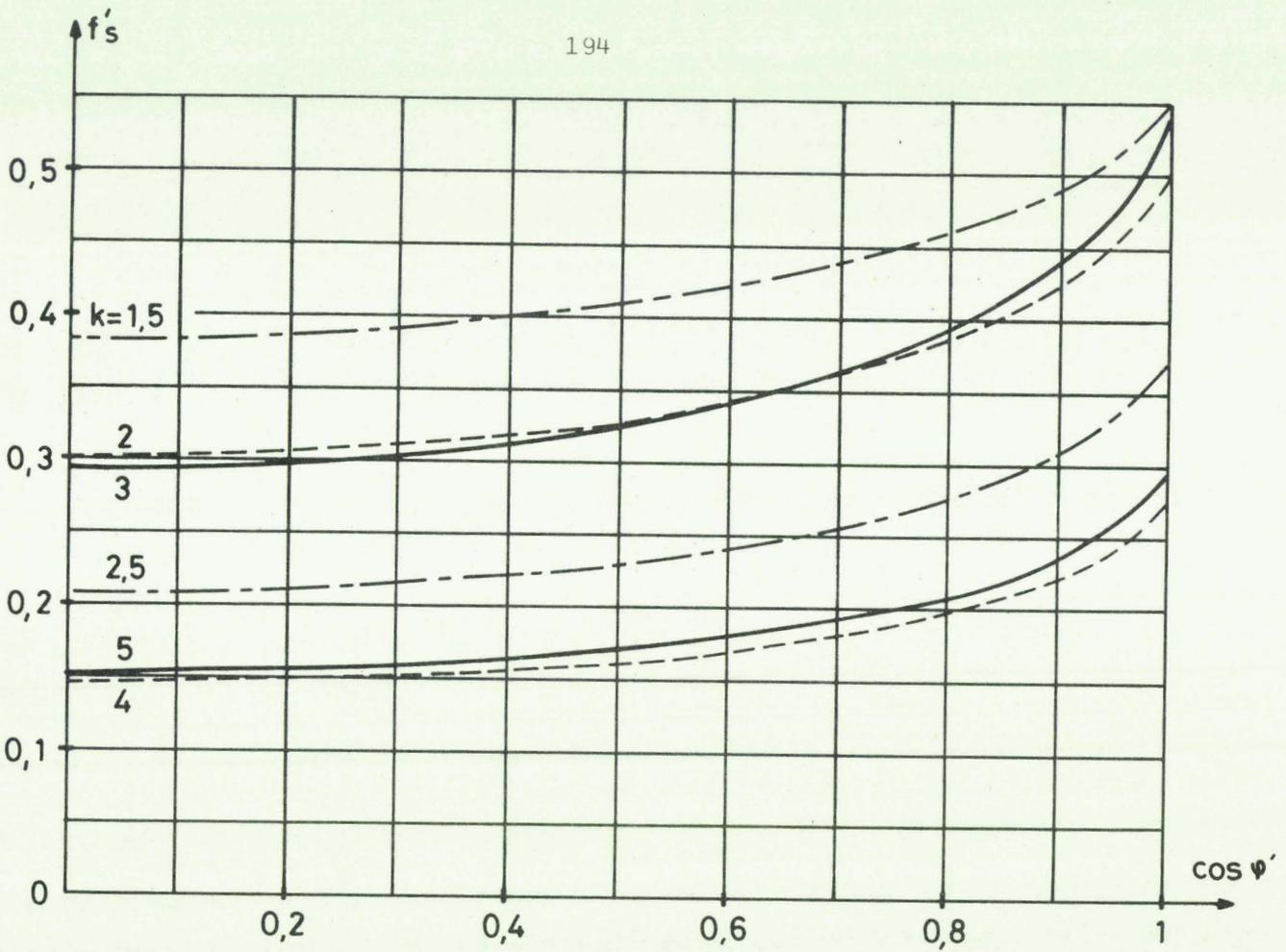
- Mais cette simplification s'accompagne d'une *forte dégradation des performances*.

- Le taux d'harmoniques des tensions fournies au récepteur est beaucoup plus grand ; en particulier l'harmonique 2 a une importance relative notable alors que le premier harmonique qu'on trouvait dans les tensions des multiplicateurs précédents était l'harmonique 5. Il était moins important et son rang le rendait plus facile à éliminer par filtrage ou minimisait le courant correspondant dans le cas usuel d'un récepteur inductif.

- Les facteurs d'utilisation des enroulements secondaires et des thyristors sont très faibles. Avec les montages précédents on obtenait pour ces facteurs des valeurs deux à trois fois plus élevées.

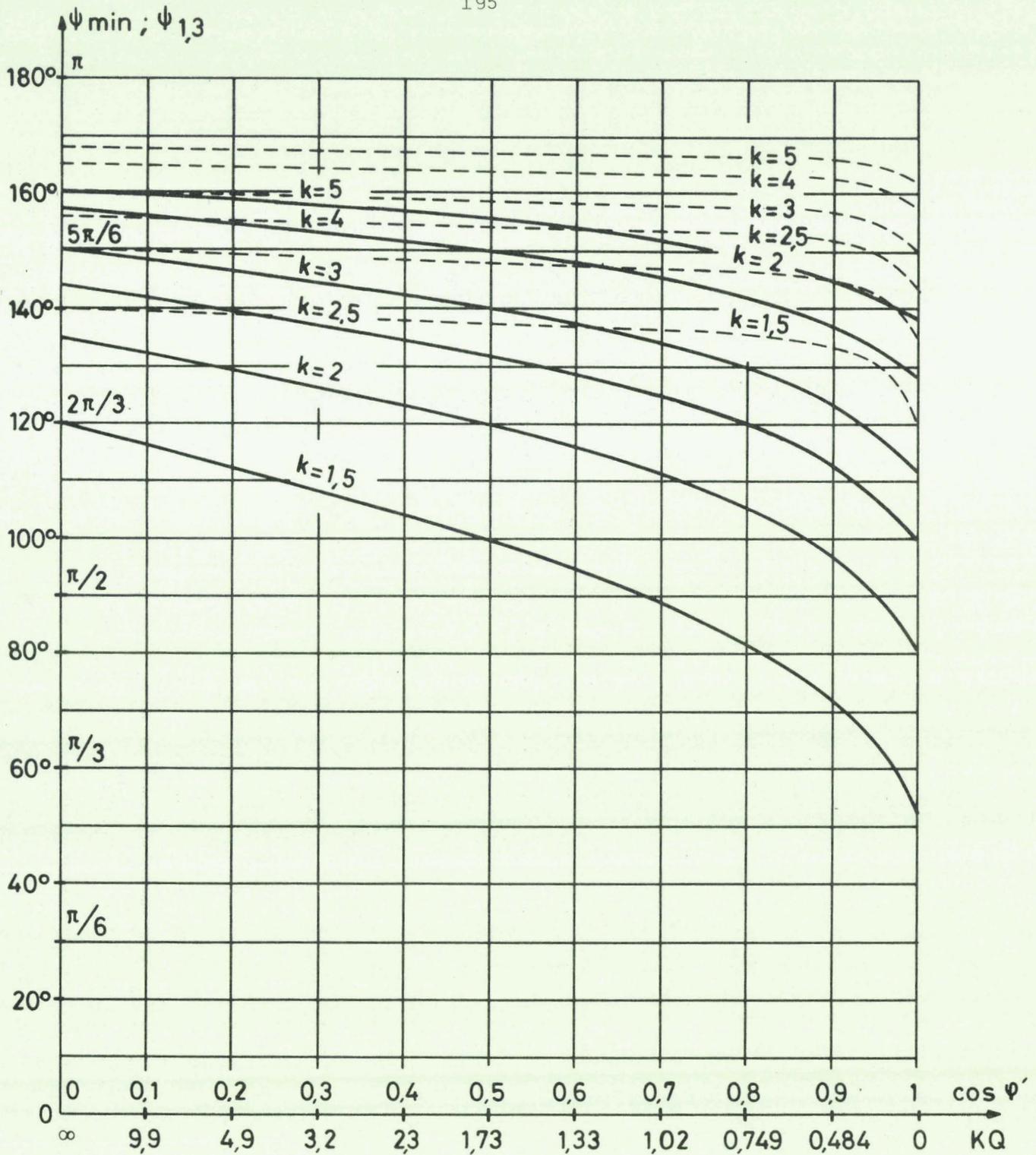
Les multiplicateurs étudiés dans ce chapitre nécessitent moins d'éléments mais les utilisent très mal.

- Deux modes de commande ont été examinés, l'une d'elles est un peu plus simple mais dégrade encore un peu plus les performances.



PL.II.1 FACTEURS D'UTILISATION:  
 - DES ENROULEMENTS SECONDAIRES  $F'_S$   
 - DES THYRISTORS  $F'_{TH}$





PL. II.2 ANGLE MINIMUM DE RETARD AU DÉBLOCAGE

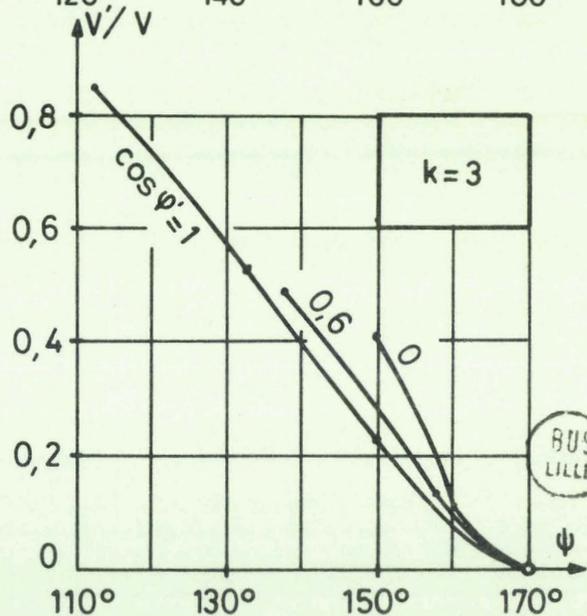
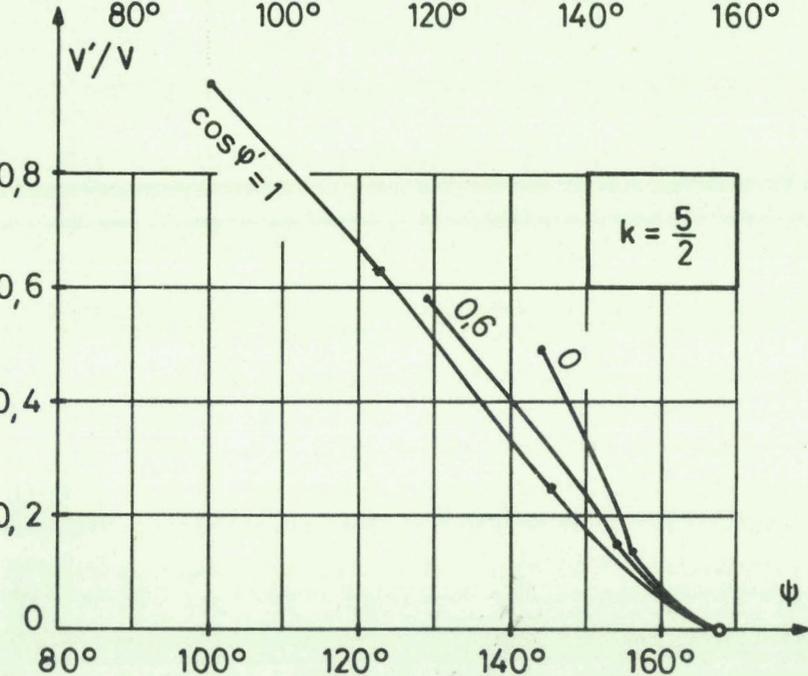
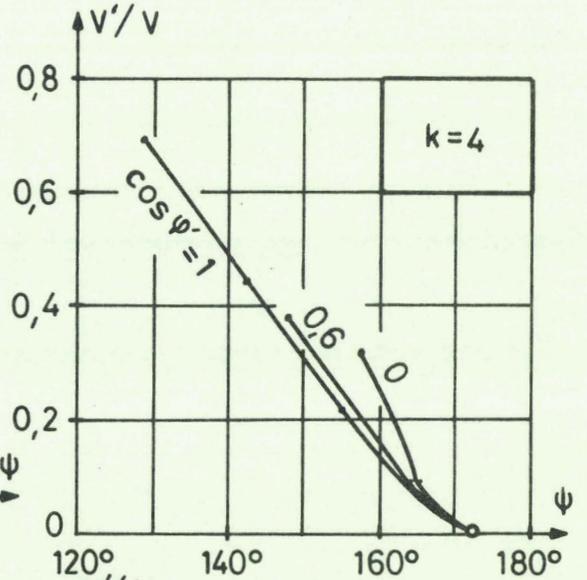
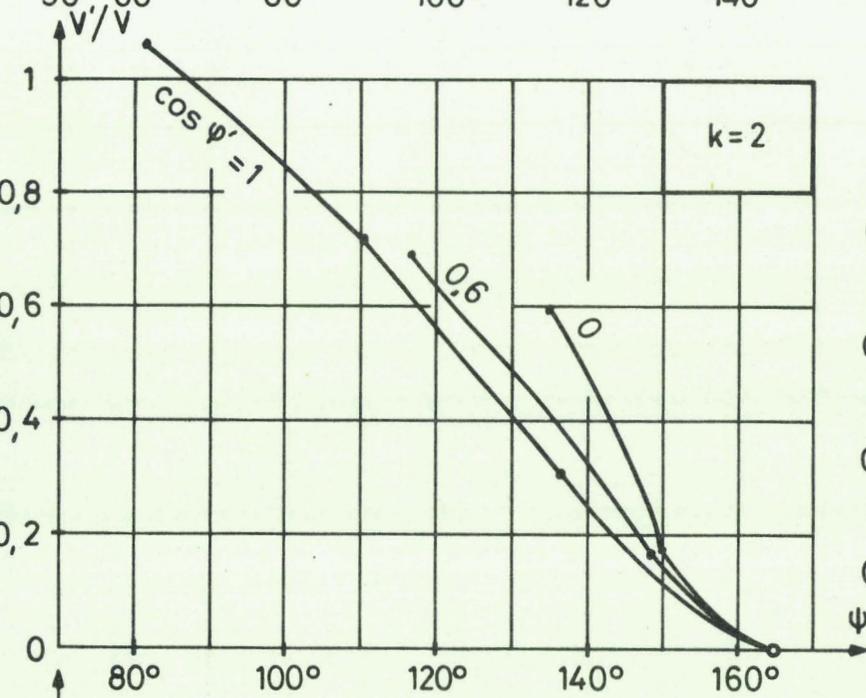
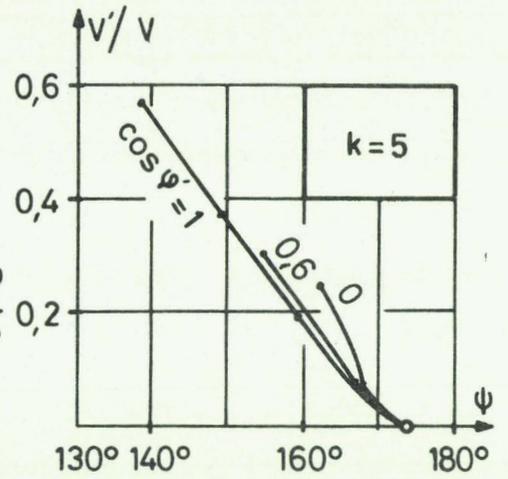
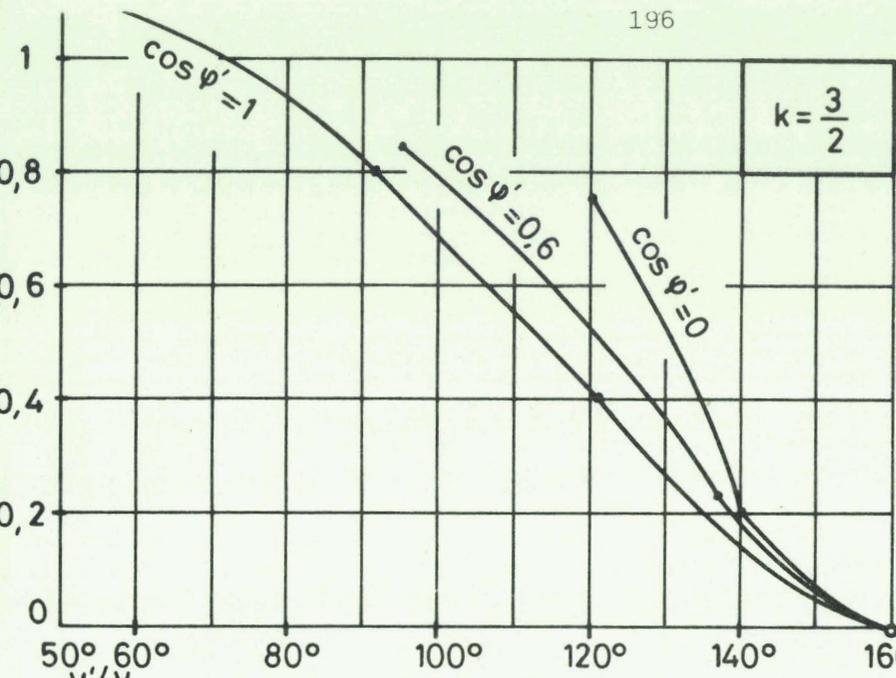
( COURBES EN TRAIT CONTINU )

ANGLE DE PASSAGE AU TROISIÈME MODE

( COURBES EN TRAIT INTERROMPU )

MULTIPLICATEURS TRIPHASES EN ÉTOILE SANS NEUTRE

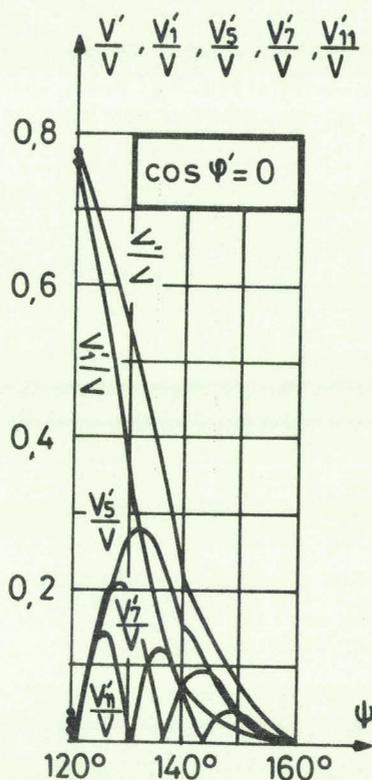
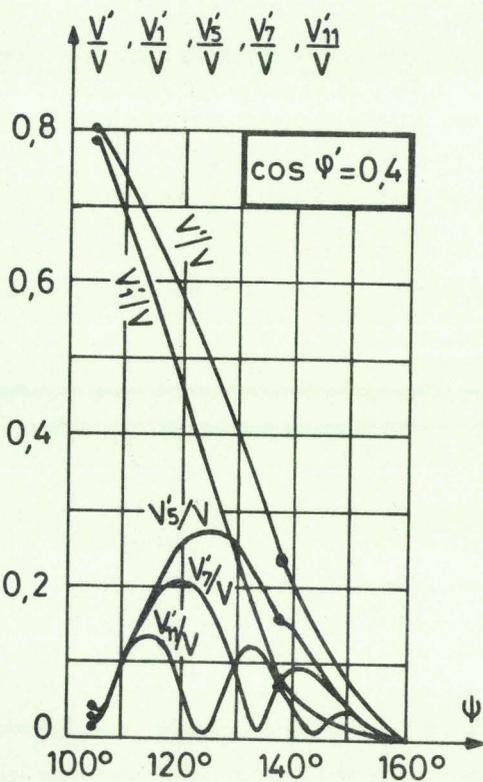
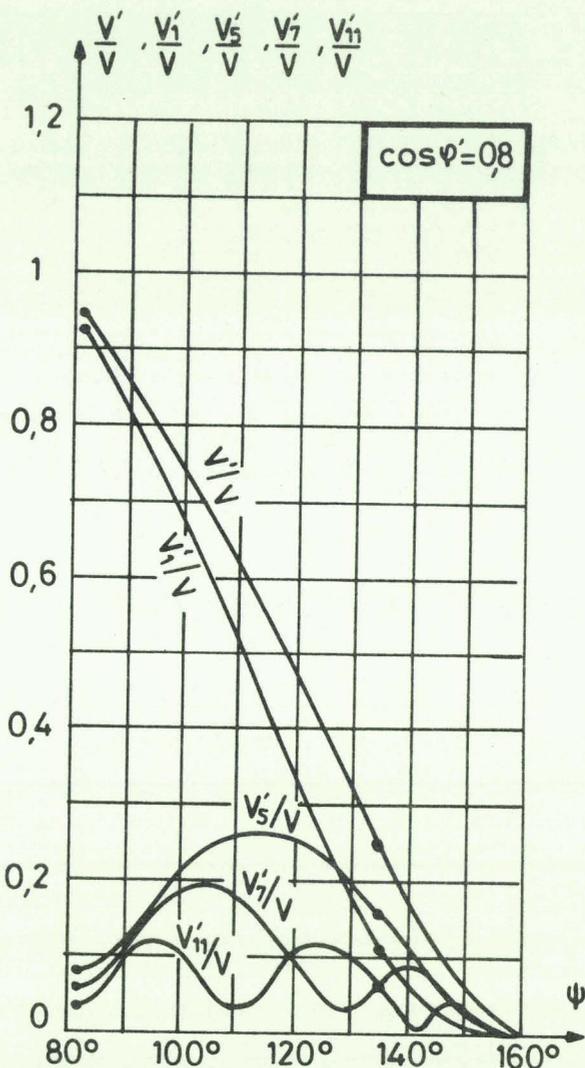
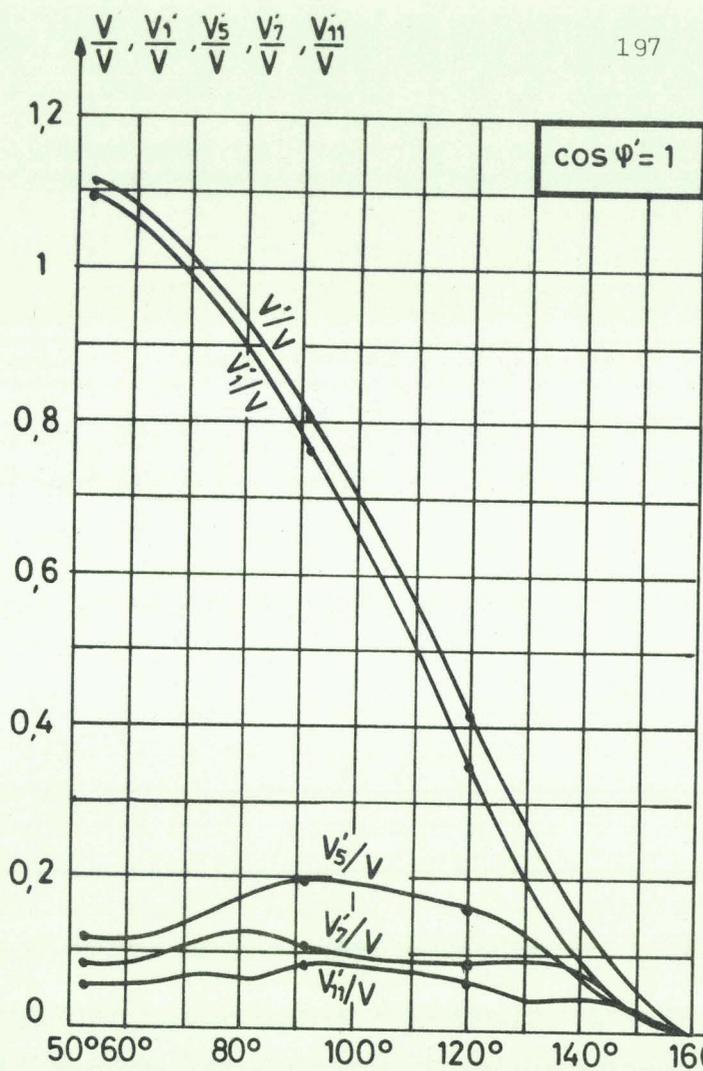




PL. II.3 VALEUR EFFICACE DES TENSIONS DE SORTIE

MULTIPLICATEURS TRIPHASES EN ETOILE SANS NEUTRE

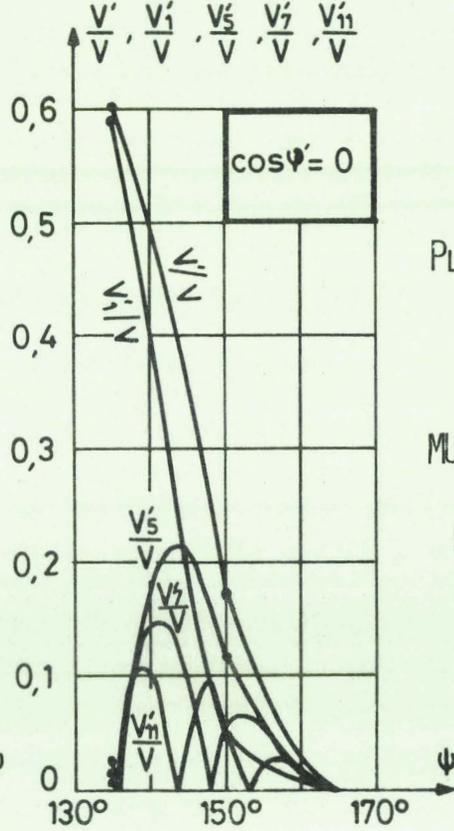
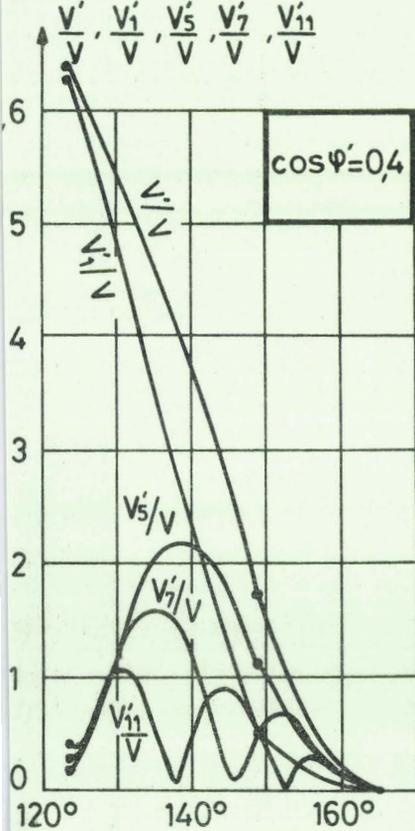
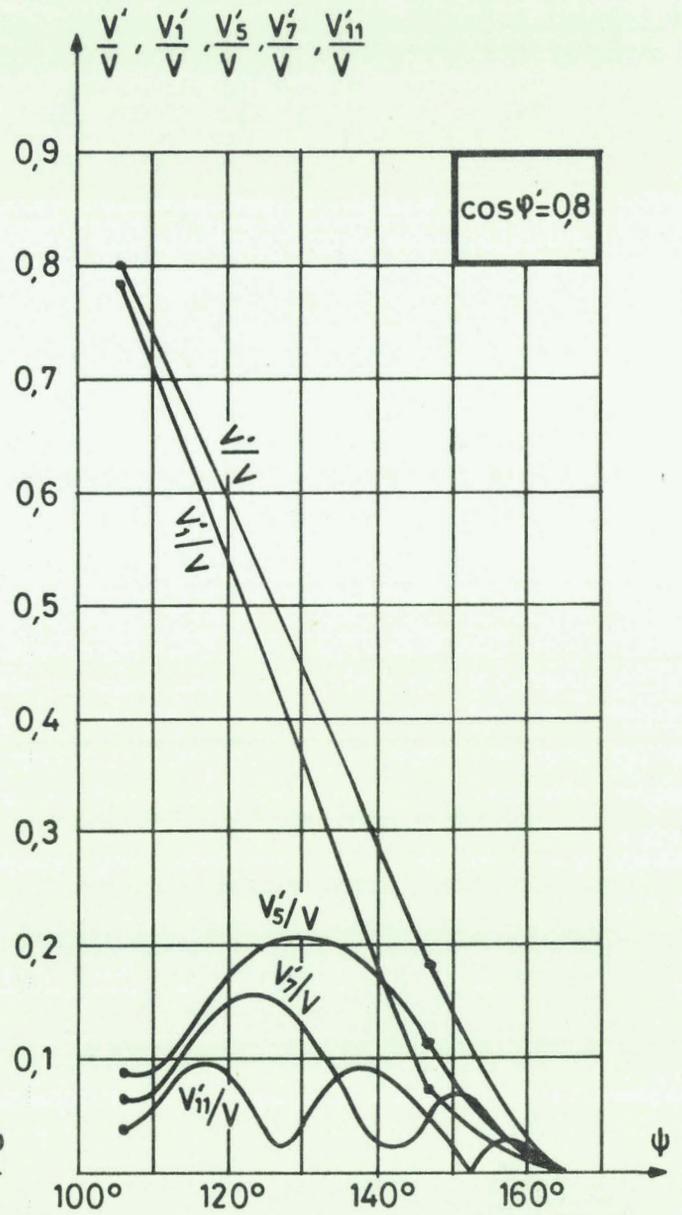
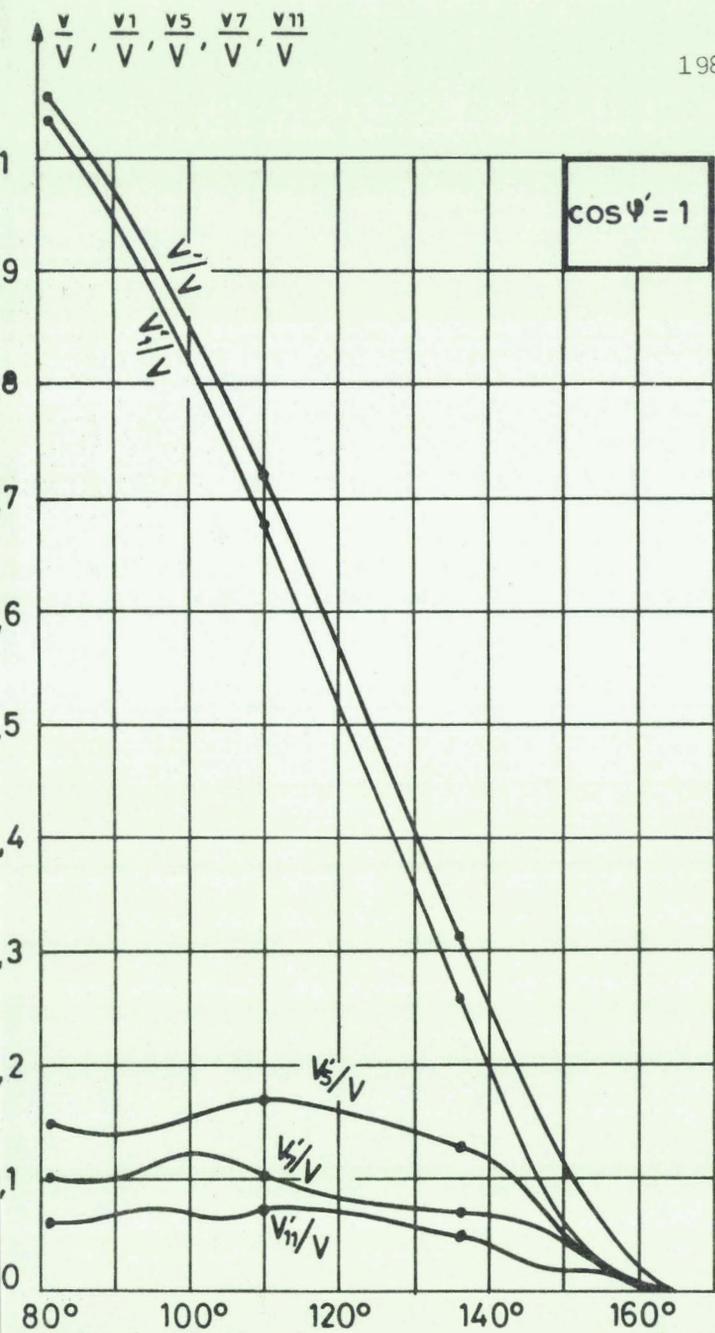
BUS LILLE



PL. II.4 ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE  $K = 3/2$

MULTIPLICATEURS TRIPHASES EN ETOILE SANS NEUTRE

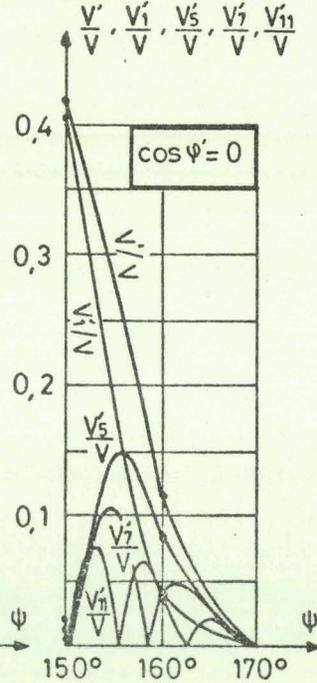
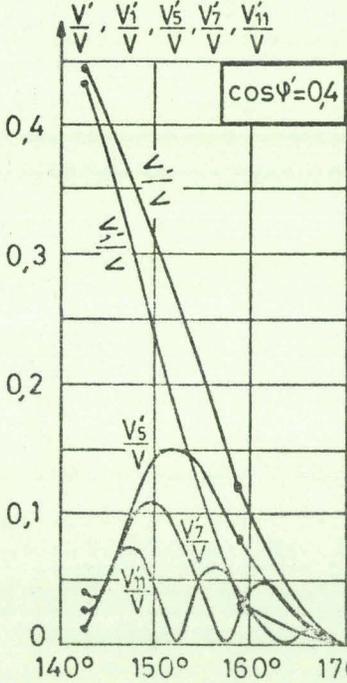
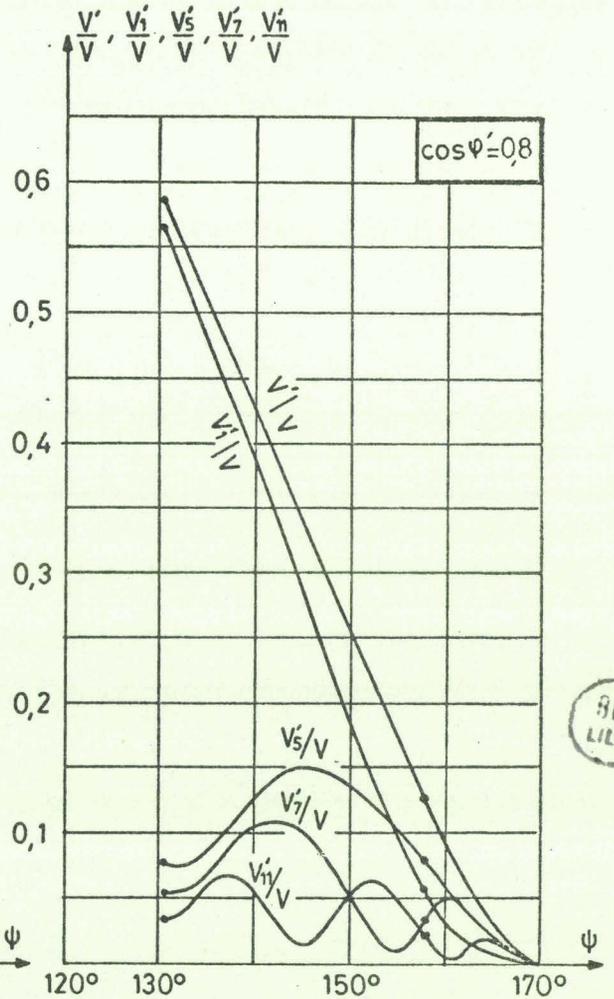
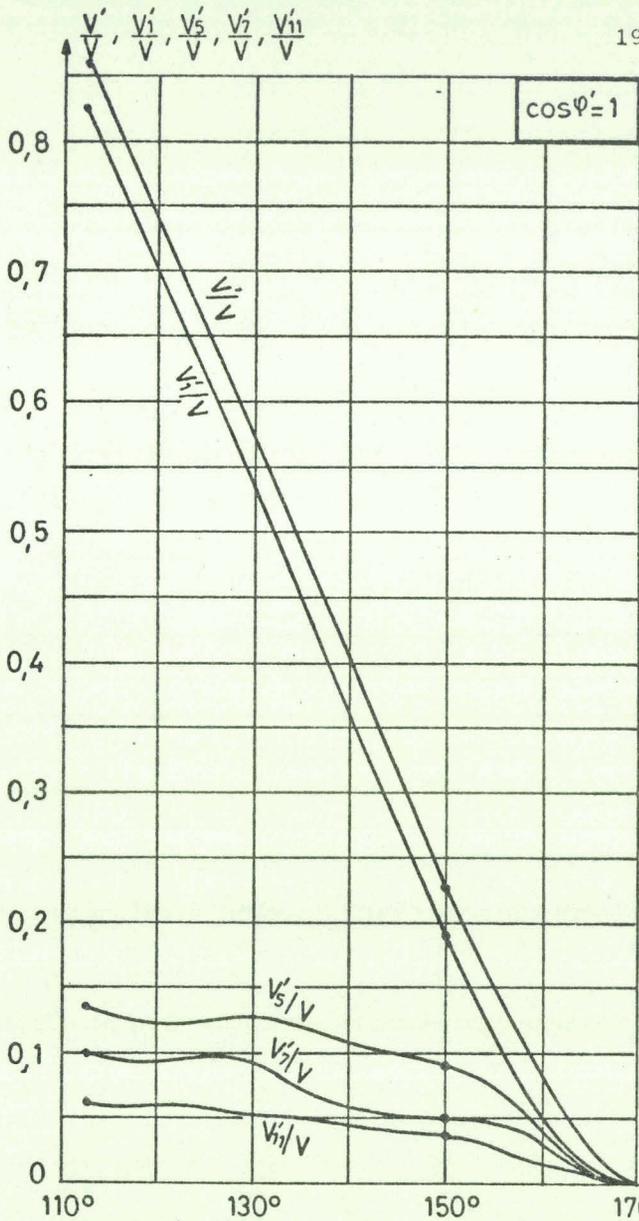




PL. II.5 ANALYSE HARMONIQUE DES  
DES TENSIONS DE SORTIE  
 $K = 2$

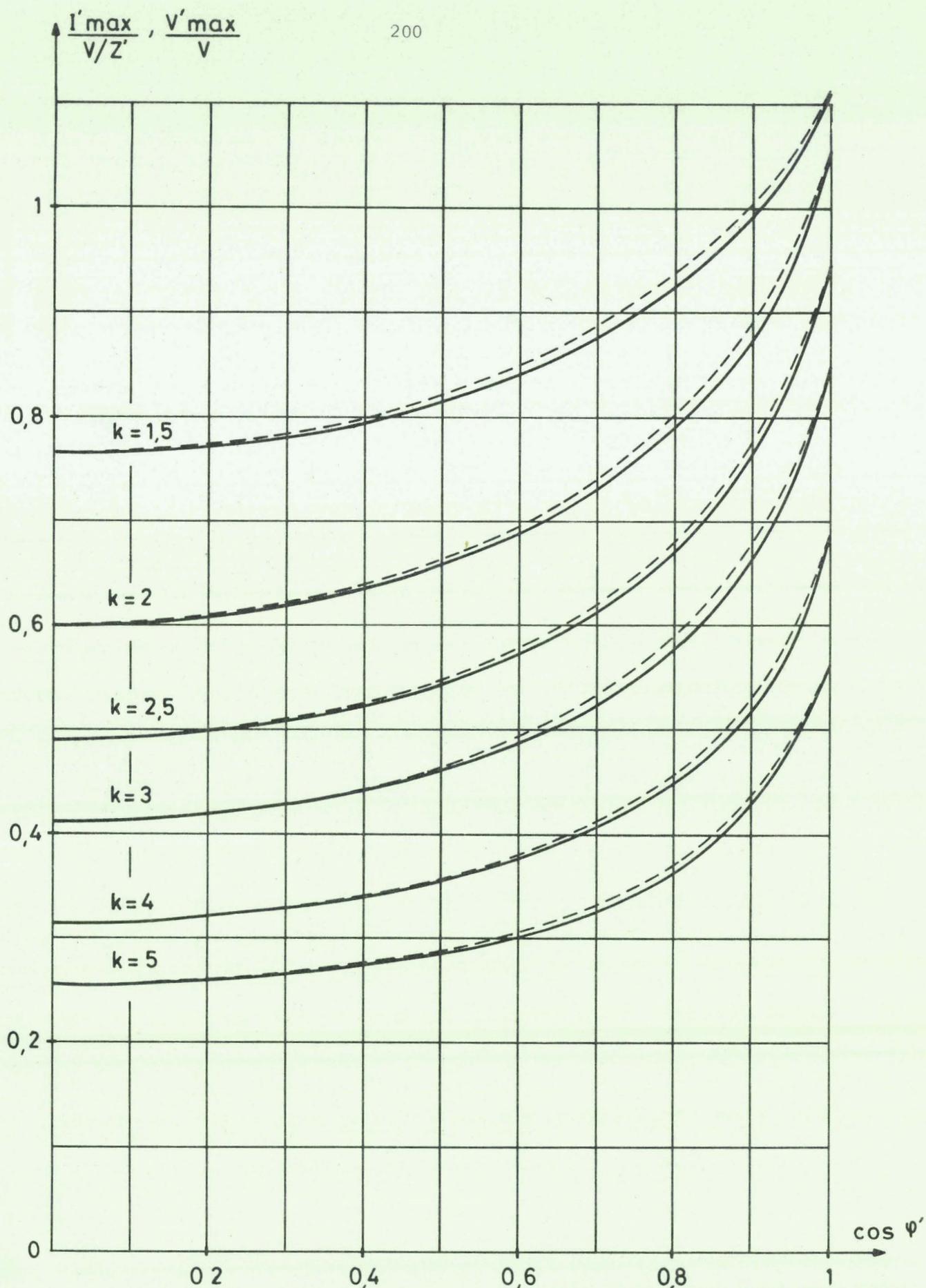
MULTIPLICATEURS TRIPHASES  
EN ETOILE SANS NEUTRE





PL.II.6 ANALYSE HARMONIQUE  
DES TENSIONS DE SORTIE  
 $K = 3$

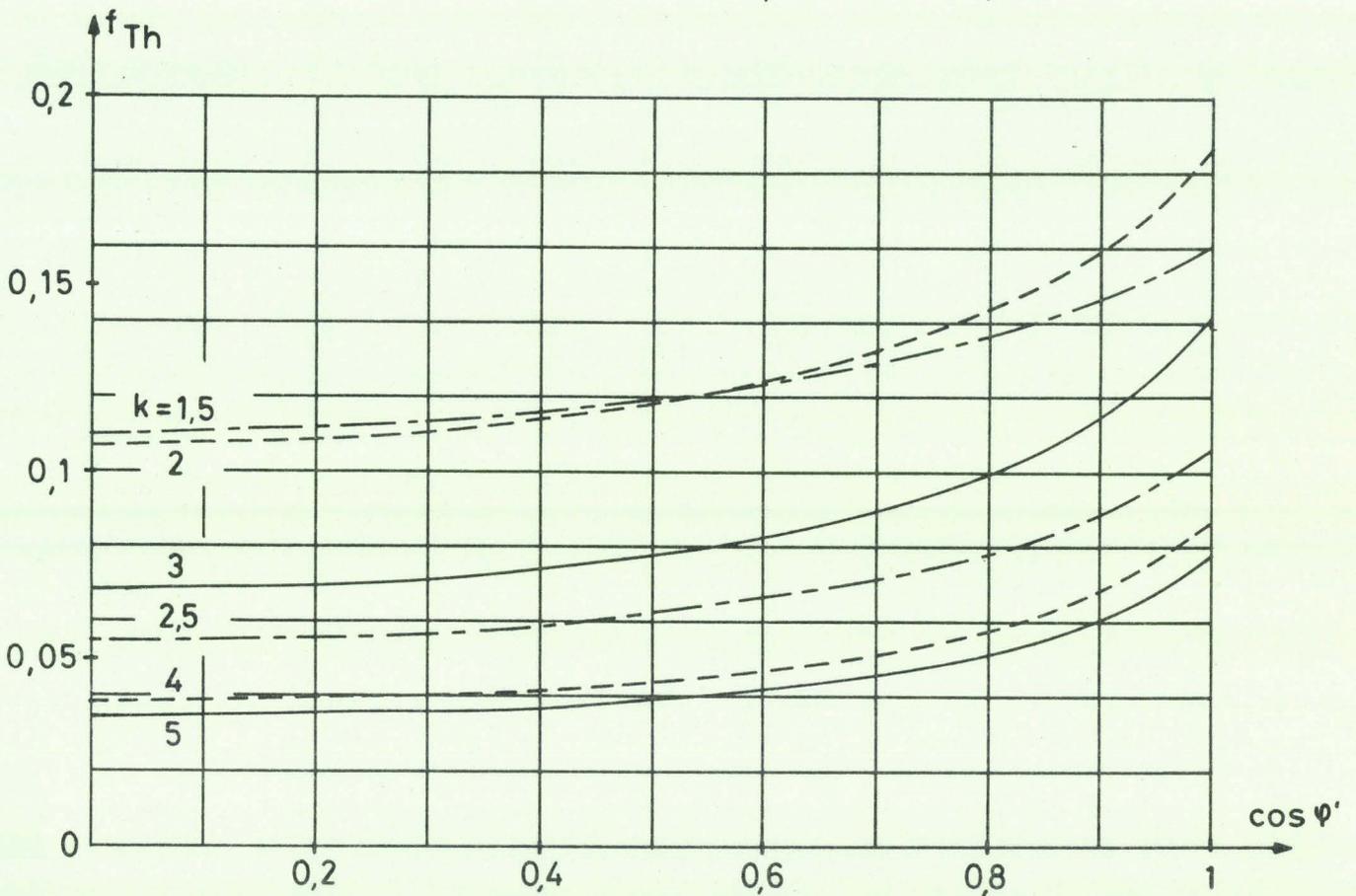
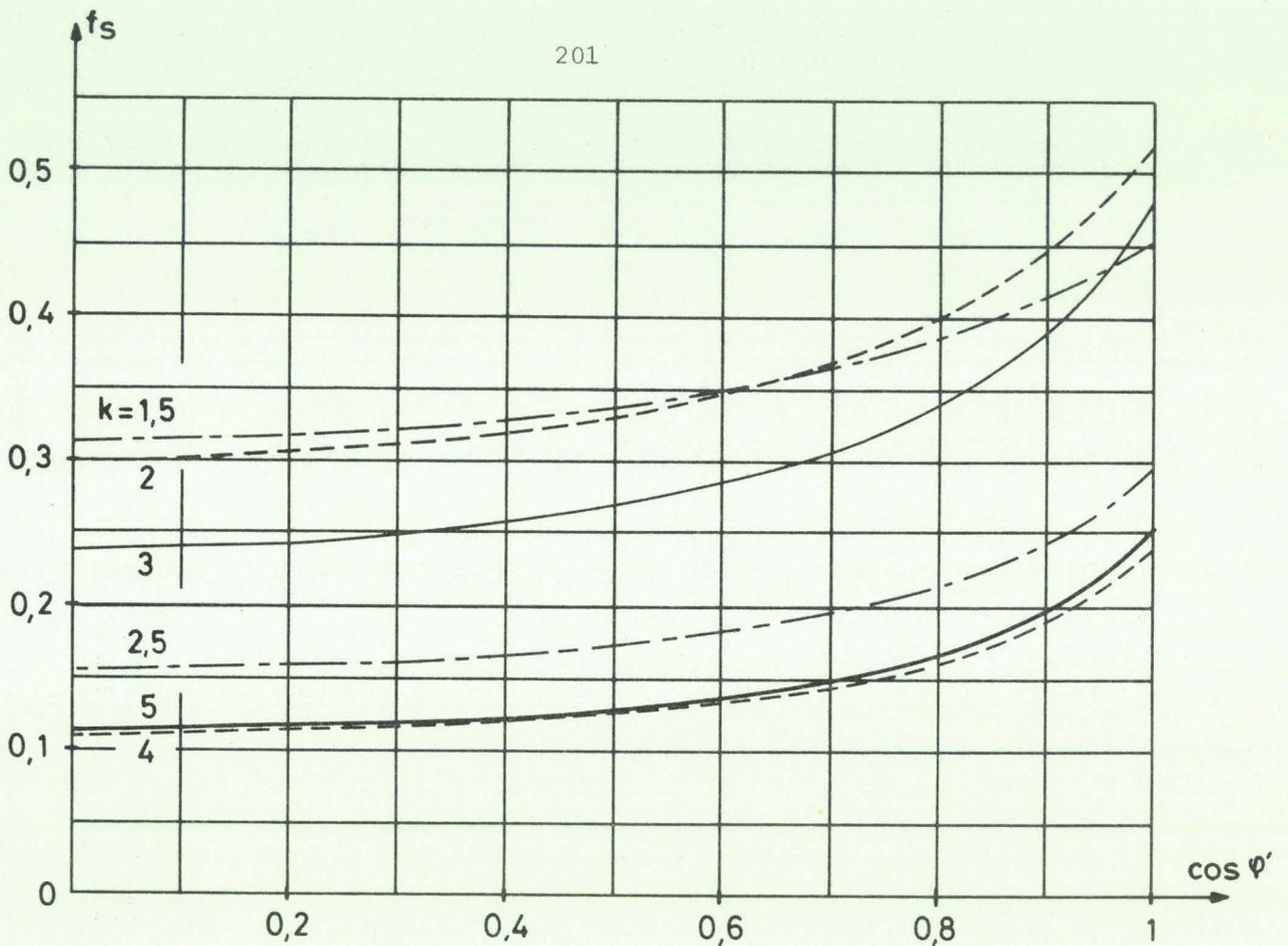
MULTIPLICATEURS TRIPHASES  
EN ETOILE SANS NEUTRE



PL. II.7 VALEURS EFFICACES MAXIMALES DES COURANTS ( COURBES EN TRAIT PLEIN )  
ET DES TENSIONS ( COURBES EN TRAIT INTERROMPU ) DE SORTIE

MULTIPLICATEURS TRIPHASES EN ETOILE SANS NEUTRE



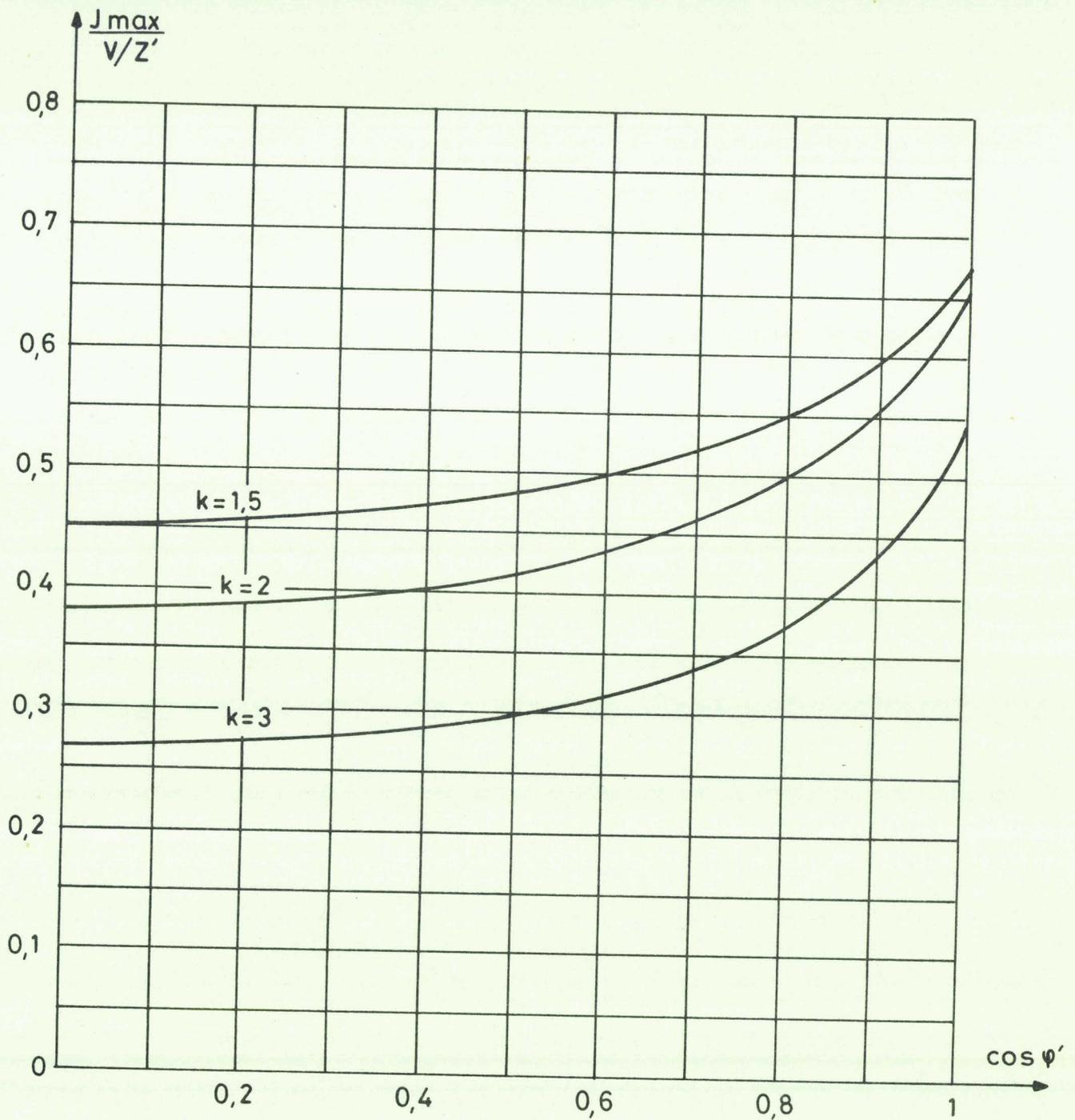


PL.II.8 FACTEURS D'UTILISATION:

- DES ENROULEMENTS SECONDAIRES  $F_S$
- DES THYRISTORS  $F_{TH}$



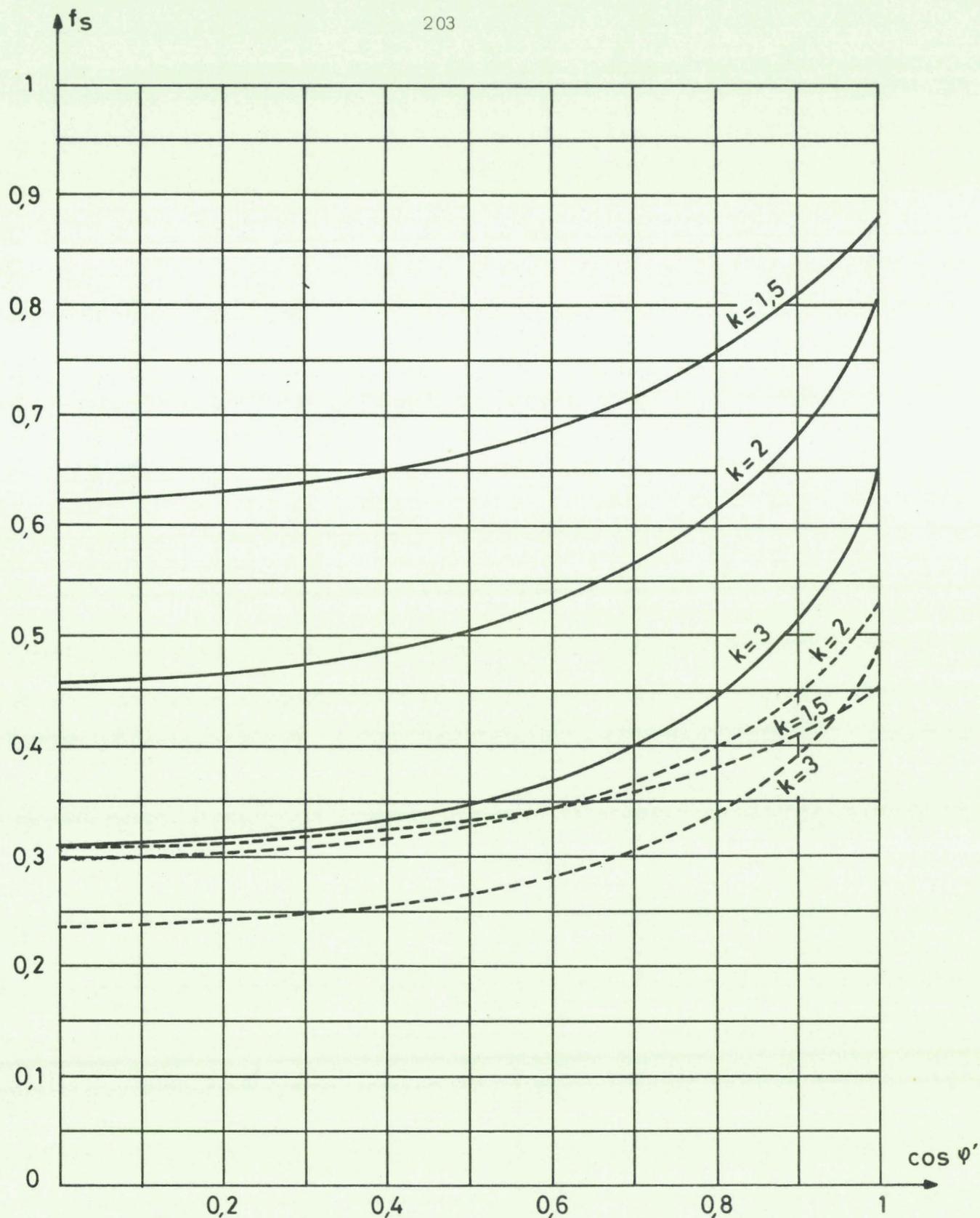
MULTIPLICATEURS TRIPHASES EN ETOILE SANS NEUTRE



PL.II.9 VALEUR EFFICACE MAXIMALE DES COURANTS SECONDAIRES

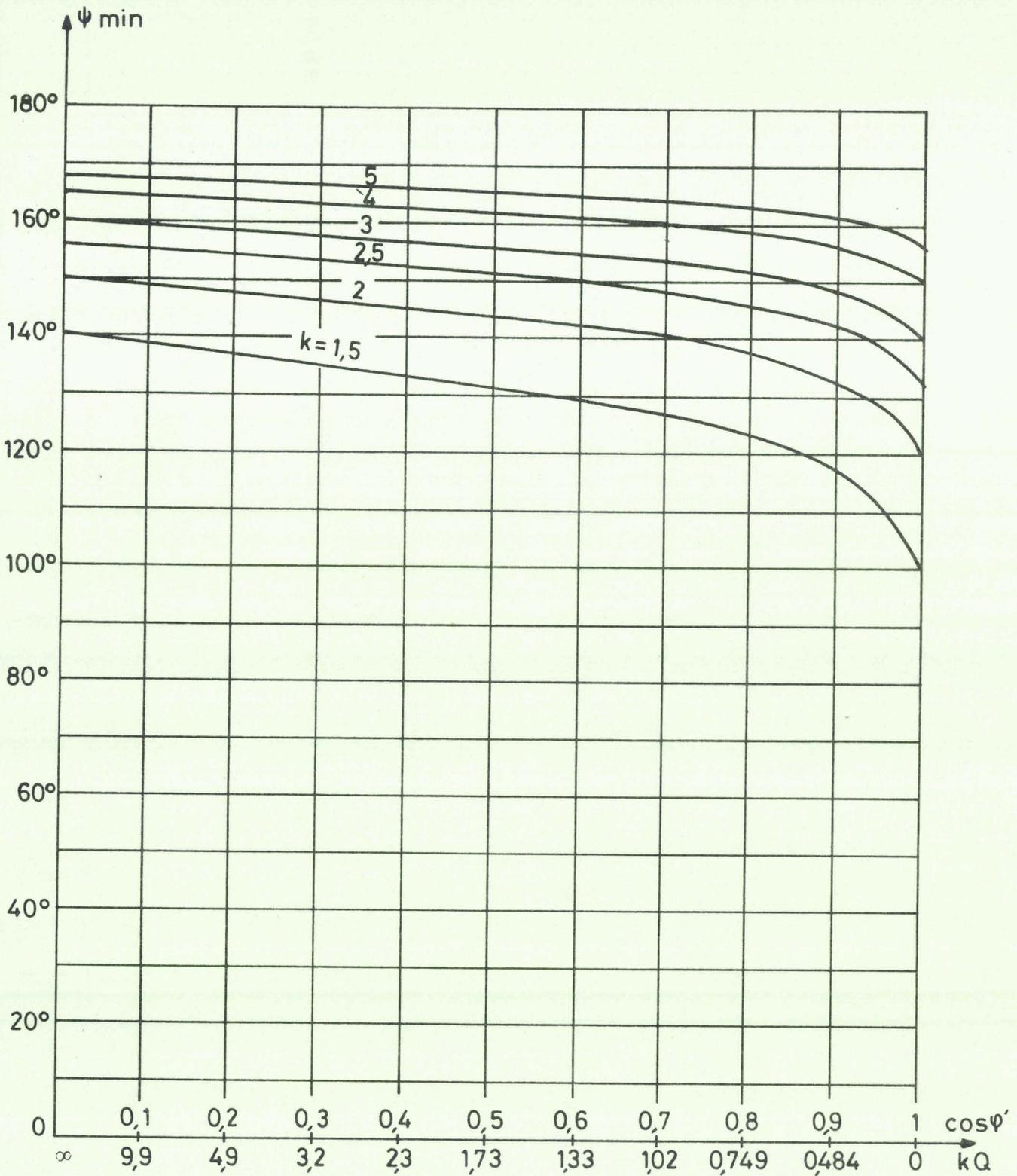


MULTIPLICATEURS TRIPHASES AVEC SOURCE EN POLYGONE



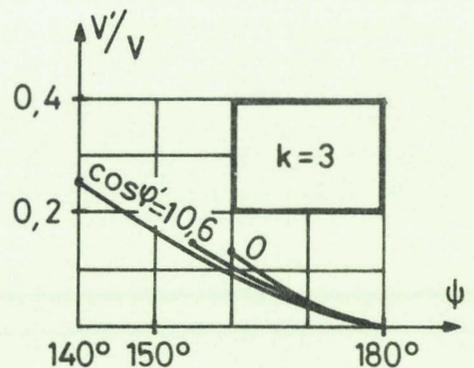
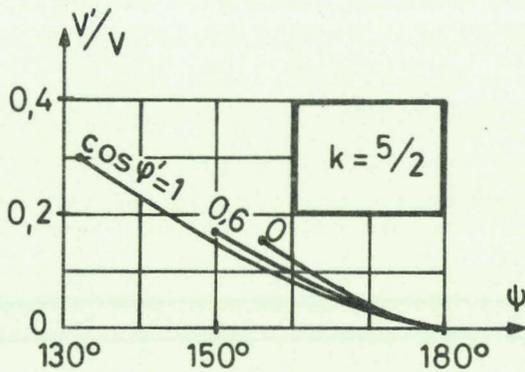
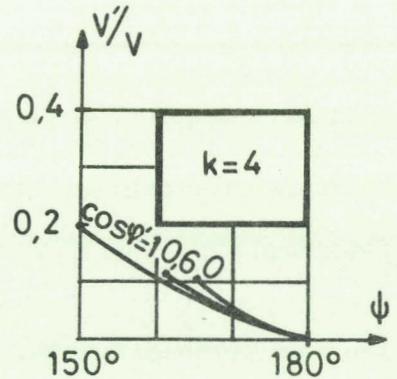
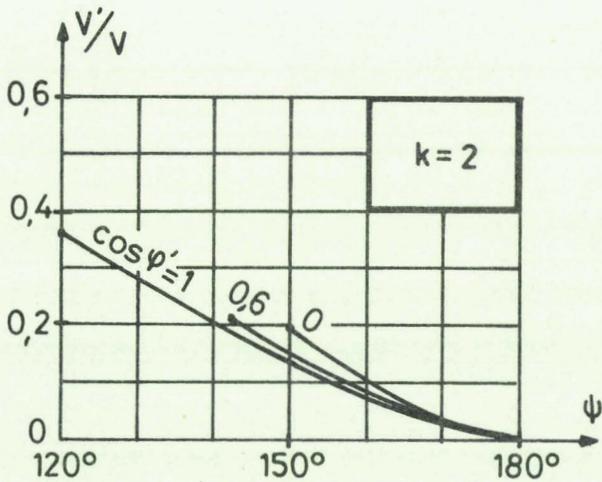
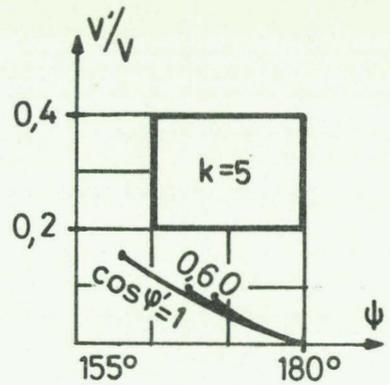
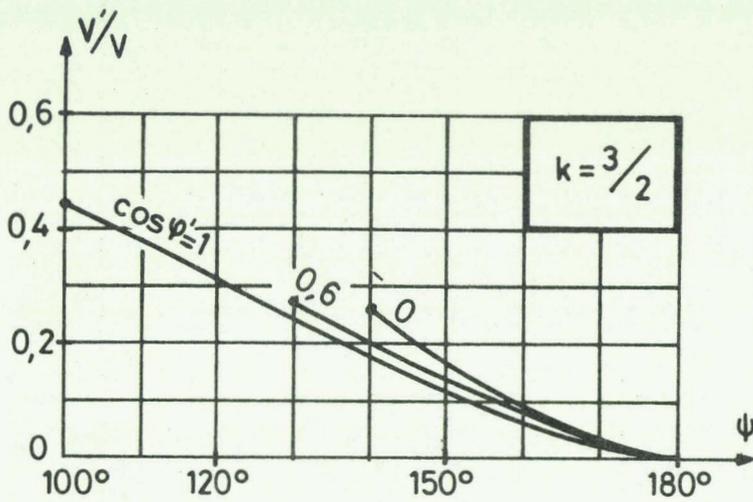
PL.II.10 FACTEUR D'UTILISATION DES ENROULEMENTS SECONDAIRES  
 ( EN TRAITS INTERROMPUS, RAPPEL DE  $F_S$  DONNÉ PAR UNE SOURCE EN ÉTOILE )





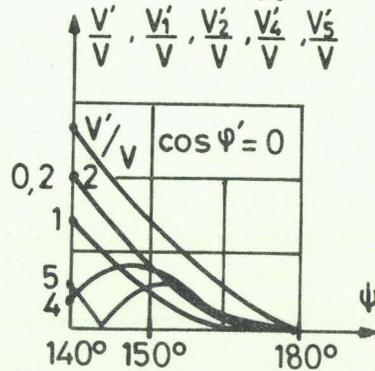
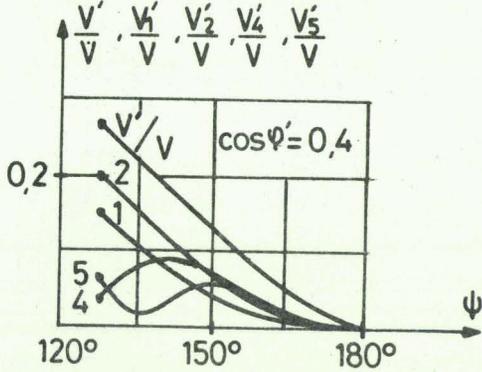
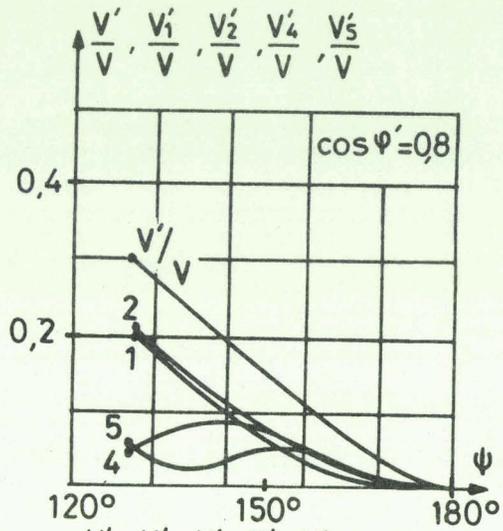
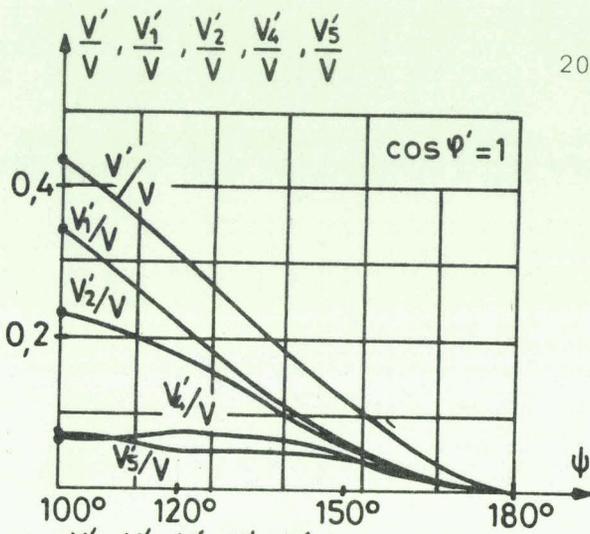
PL. II.11. ANGLE MINIMUM DE RETARD AU DÉBLOCAGE



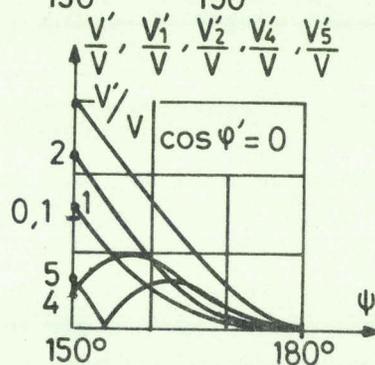
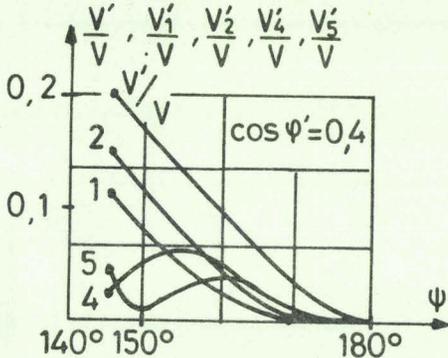
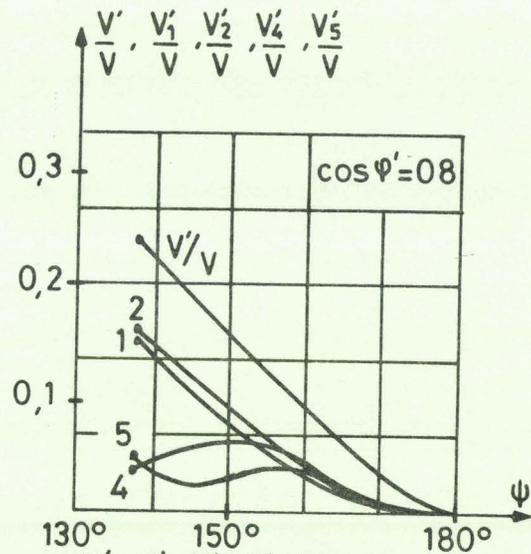
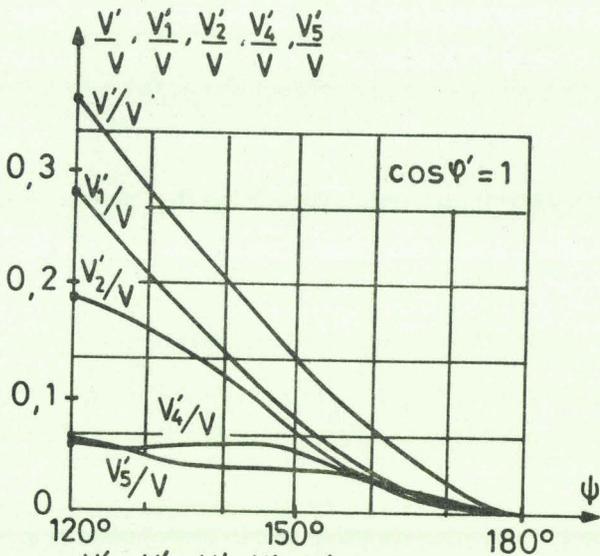


PL.II.12 VALEUR EFFICACE DES TENSIONS DE SORTIE





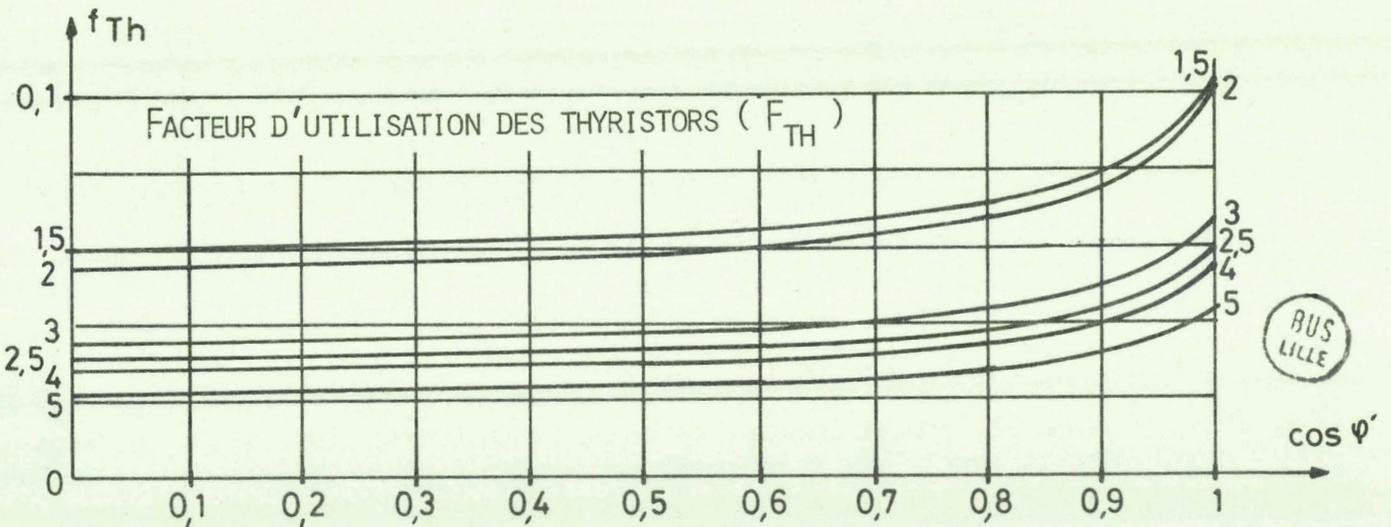
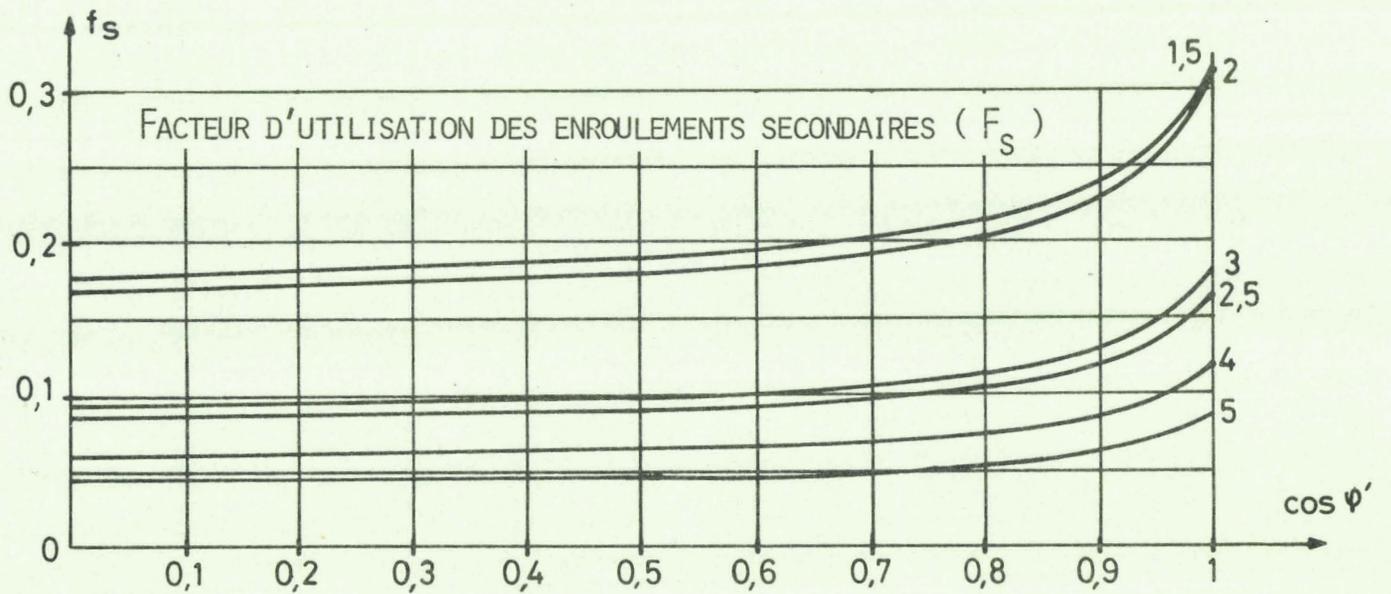
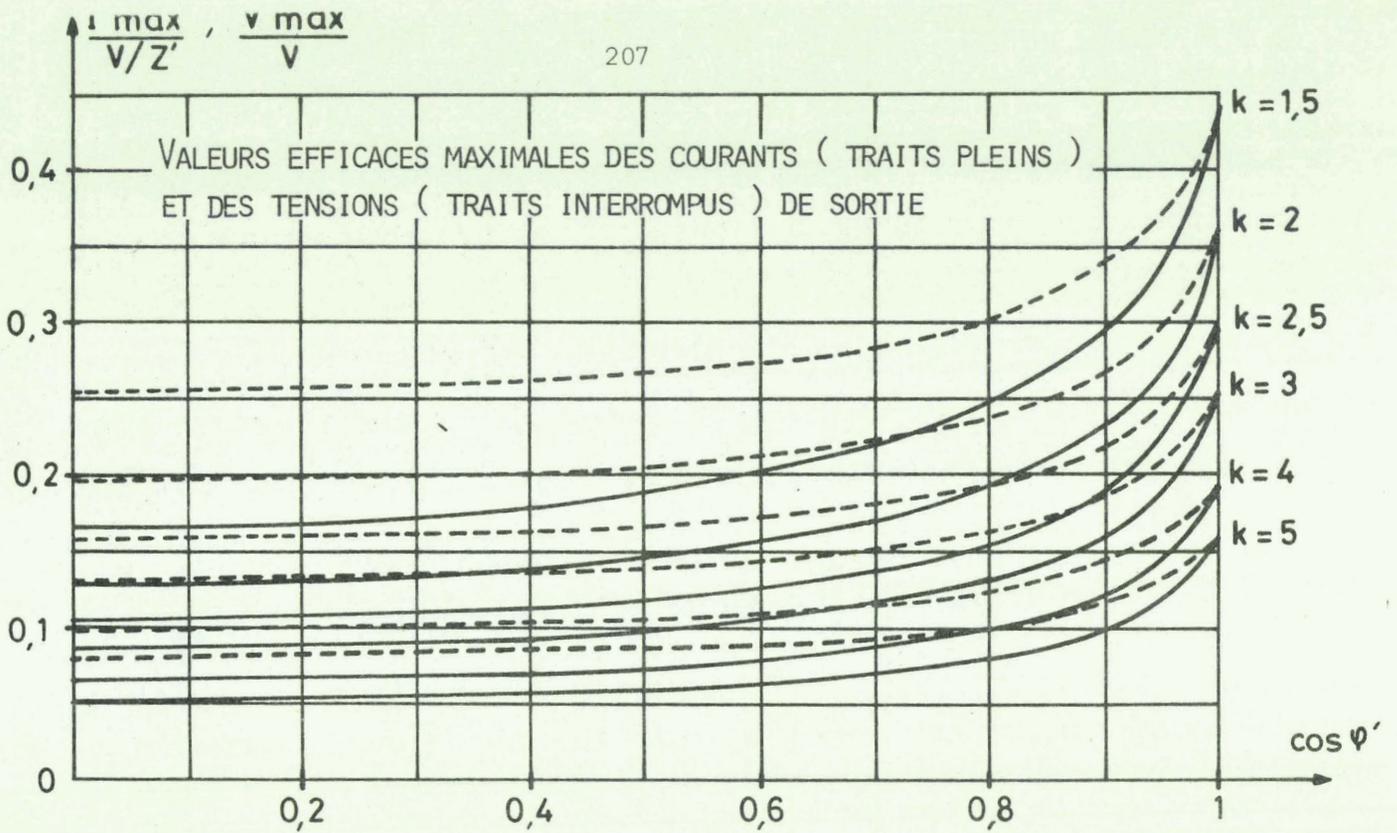
$k = 3/2$



$k = 2$



PL.II.13 ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE POUR  $K = 3/2$  ET  $K = 2$



PL.II.14

TROISIEME PARTIE

```
*****  
*****  
**  
**  
** DOUBLEURS DE FREQUENCE TRIPHASES **  
**  
** A NOMBRE REDUIT DE THYRISTORS **  
**  
*****  
*****
```

```
*****  
*          *  
*  CHAPITRE I  *  
*          *  
*****
```

<p>DOUBLEUR DE FREQUENCE TRIPHASE A 6 THYRISTORS EN AMONT DU TRANSFORMATEUR</p>
---

Dans la première et la deuxième partie, nous avons étudié des multiplicateurs de fréquence dont le principe même nécessite un nombre important de redresseurs et de phases secondaires, et ceci pour un facteur de puissance secondaire relativement faible malgré les améliorations que peuvent apporter la suppression du neutre et l'utilisation d'une source en polygone.

En constatant que les montages multiplicateurs de fréquence les plus intéressants correspondent aux plus faibles valeurs de  $k$ , nous avons cherché comment, à partir de principes voisins, améliorer ces montages : nous avons ainsi trouvé, dans le cas du doubleur de fréquence à sortie triphasée, deux montages qui permettent de réduire de 12 à 6 à la fois le nombre de phases du transformateur et le nombre de thyristors nécessaires.

- le premier [35] utilise un transformateur hexaphasé-triphasé ; les 6 thyristors sont placés entre le réseau et les bornes primaires du transformateur.

- le second utilise les propriétés des gradateurs triphasés mixtes [31] ; il comporte un transformateur triphasé-hexaphasé, 6 thyristors et 6 diodes.

Ce chapitre est consacré à l'étude du premier montage.

## I. PRINCIPE

Le schéma du montage est indiqué à la figure III.1.1.

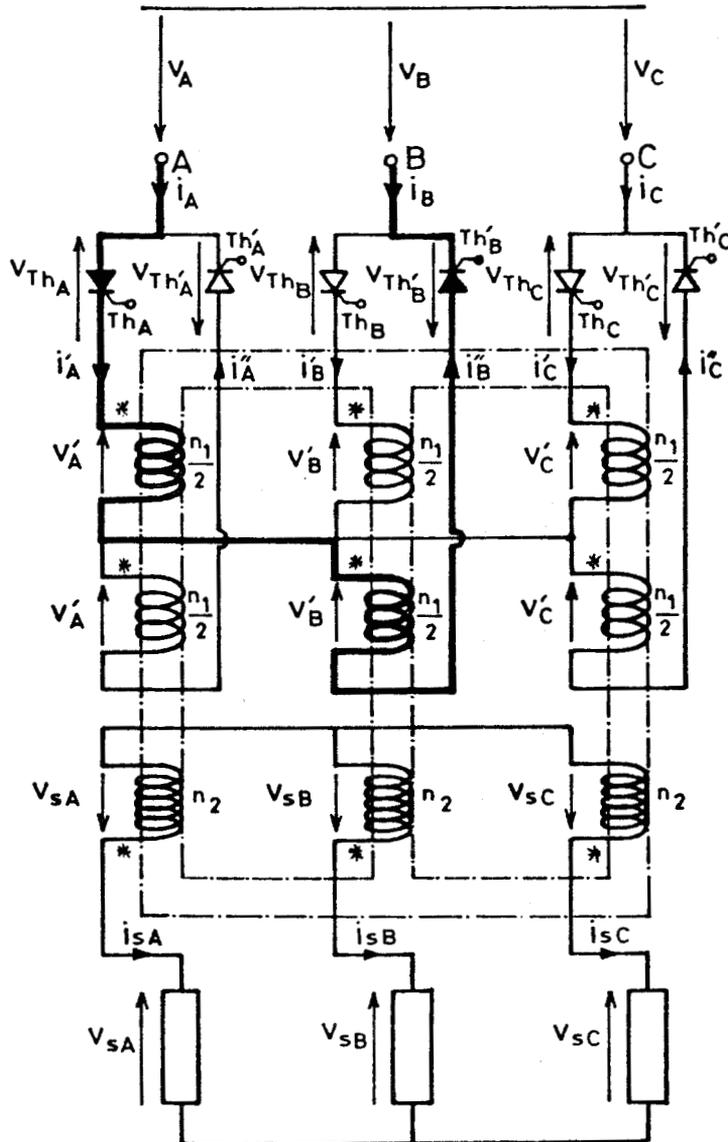


FIG. III.1.1

Il comporte :

- un transformateur triphasé dont les points milieux des 3 enroulements primaires sont réunis ; les enroulements secondaires sont couplés en étoile et branchés directement sur la charge.

- 6 thyristors branchés en série avec chaque demi-enroulement primaire, de façon à réaliser 3 boucles comprenant chacune les 2 demi-enroulements d'une même phase et 2 thyristors.



Les thyristors sont déclenchés dans l'ordre suivant :

$$\text{Th}_A, \text{Th}'_C, \text{Th}_B, \text{Th}'_A, \text{Th}_C, \text{Th}'_B$$

Les tensions simples de la source ont pour expression :

$$v_A = V_m \sin \omega t$$

$$v_B = V_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_C = V_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

On désignera par  $\psi$  l'angle d'amorçage du thyristor  $\text{Th}_A$ .

### I.1. Fonctionnement

Pour rendre plus claire l'explication du fonctionnement, nous envisagerons le cas du débit sur charge équilibrée purement résistive.

Considérons l'ensemble pendant l'intervalle de temps qui suit l'amorçage de  $\text{Th}_A$  et pendant lequel  $\text{Th}'_B$  est encore conducteur (fig. III.1.1.) : le courant  $i_A$  fourni par la tension d'alimentation  $v_A$  traverse  $\text{Th}_A$ , un demi-enroulement primaire du noyau A, un demi-enroulement primaire du noyau B, et le thyristor  $\text{Th}'_B$ . Le courant en ligne  $i_B$  est donc égal à  $-i_A$ .

Ce courant  $i_A = -i_B$  crée dans les 2 demi-enroulements primaires qu'il traverse des flux égaux et dirigés dans le même sens, qui sont à l'origine de 2 courants égaux  $is_A$  et  $is_B$  dans les enroulements secondaires des noyaux A et B. Puisque la somme instantanée des 3 courants secondaires est nulle, on a :

$$is_C = -2is_A = -2is_B$$

#### I.1.1. Equations des tensions

Dans le cas d'une charge purement résistive, les tensions secondaires  $vs_A$ ,  $vs_B$  et  $vs_C$  vérifient les mêmes équations que les courants secondaires. On a donc

$$vs_C = -2vs_A = -2vs_B$$

Les formes d'onde des tensions  $vs_A$  et  $vs_B$  sont les mêmes que celles des tension  $v'_A$  et  $v'_B$  qui sont appliquées aux bornes des demi-enroulements primaires actifs des noyaux A et B par l'intermédiaire de  $Th_A$  et  $Th'_B$ .

Au primaire, on a :

$$v'_A + v'_B = v_A - v_B$$

Puisque les 2 demi-enroulements primaires sont identiques et parcourus par le même courant, les tensions à leurs bornes sont identiques, et  $v'_A = v'_B$ .

$$\text{Donc : } v'_A + v'_B = 2v'_A = 2v'_B = v_A - v_B$$

$$v'_A = v'_B = \frac{v_A - v_B}{2}$$

On en déduit les expressions des tensions secondaires en posant

$$n = \frac{n_1}{2n_2} \text{ rapport de transformation}$$

$$\text{On obtient } vs_A = vs_B = \frac{v'_A}{n} = \frac{v'_B}{n} = \frac{v_A - v_B}{2n}$$

$$\text{et } vs_C = - \frac{v_A - v_B}{n}$$

Cette expression de  $vs_C$  permet d'obtenir  $v'_C$

$$v'_C = n vs_C = - (v_A - v_B)$$

### 1.1.2. Equations des courants

Dans le cas du débit sur charge purement résistive, les expressions des courants secondaires se déduisent immédiatement de celles des tensions

$$is_A = is_B = \frac{vs_A}{R} = \frac{vs_B}{R} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{v_A - v_B}{R}$$

$$is_C = \frac{vs_C}{R} = - \frac{1}{n} \cdot \frac{v_A - v_B}{R}$$

L'expression du courant primaire  $i_A$  s'obtient en écrivant que le long d'un circuit fermé parcouru par le flux dans le transformateur, la somme des ampères-tours est nulle :

$$\frac{n_1}{2} i_A - n_2 i_{s_A} + n_2 i_{s_C} = 0$$

$$\frac{n_1}{2} i_A = n_2 i_{s_A} - n_2 i_{s_C} = 3n_2 i_{s_A}$$

$$i_A = \frac{3}{n} i_{s_A} = \frac{3}{2n^2} \frac{v_A - v_B}{R}$$

$$i_B = -i_A = -\frac{3}{2n^2} \frac{v_A - v_B}{R}$$

$$i_C = 0$$

### 1.1.3. Formes d'ondes

Ce montage fonctionne en commutation naturelle : les thyristors  $Th_A$  et  $Th'_B$  s'éteignent lorsque le courant  $i_A$  s'annule. Dans le cas du débit sur charge purement résistive, cela correspond à  $\omega t = \frac{5\pi}{6}$ , valeur pour laquelle la tension  $v_B$  devient égale à  $v_A$ , ce qui annule  $v_{s_A}$ ,  $i_{s_A}$ , et par conséquent  $i_A$ .

Pour  $\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}$ , on amorce le thyristor  $Th'_C$  et on réamorce  $Th_A$  : le fonctionnement est analogue au précédent, et les tensions de sortie ont pour expressions :

$$v_{s_A} = \frac{v_A - v_C}{2n} \quad v_{s_B} = -\frac{v_A - v_C}{n} \quad v_{s_C} = \frac{v_A - v_C}{2n}$$

Le courant dans  $Th_A$  et  $Th'_C$  s'annule dès que  $v_C$  devient égale à  $v_A$  pour  $\omega t = \frac{7\pi}{6}$ . Pour  $\omega t = \psi + \frac{2\pi}{3}$ , on amorce  $Th_B$  et on réamorce  $Th'_C$ .

Les tensions de sortie ont pour expressions :

$$v_{s_A} = -\frac{v_B - v_C}{n} \quad v_{s_B} = \frac{v_B - v_C}{2n} \quad v_{s_C} = \frac{v_B - v_C}{2n}$$

Les thyristors  $Th_B$  et  $Th'_A$ ,  $Th_C$  et  $Th'_A$  et enfin  $Th_C$  et  $Th'_B$  sont ensuite amorcés successivement deux par deux, à intervalles réguliers de  $\frac{\pi}{3}$ .

La figure III.1.2. donne les formes d'ondes des tensions de sortie dans le cas où l'intervalle de conduction des thyristors est maximum et égal à  $\frac{\pi}{3}$ . Elle met en évidence le doublement de la fréquence des tensions de sortie par rapport à celle des tensions d'alimentation.

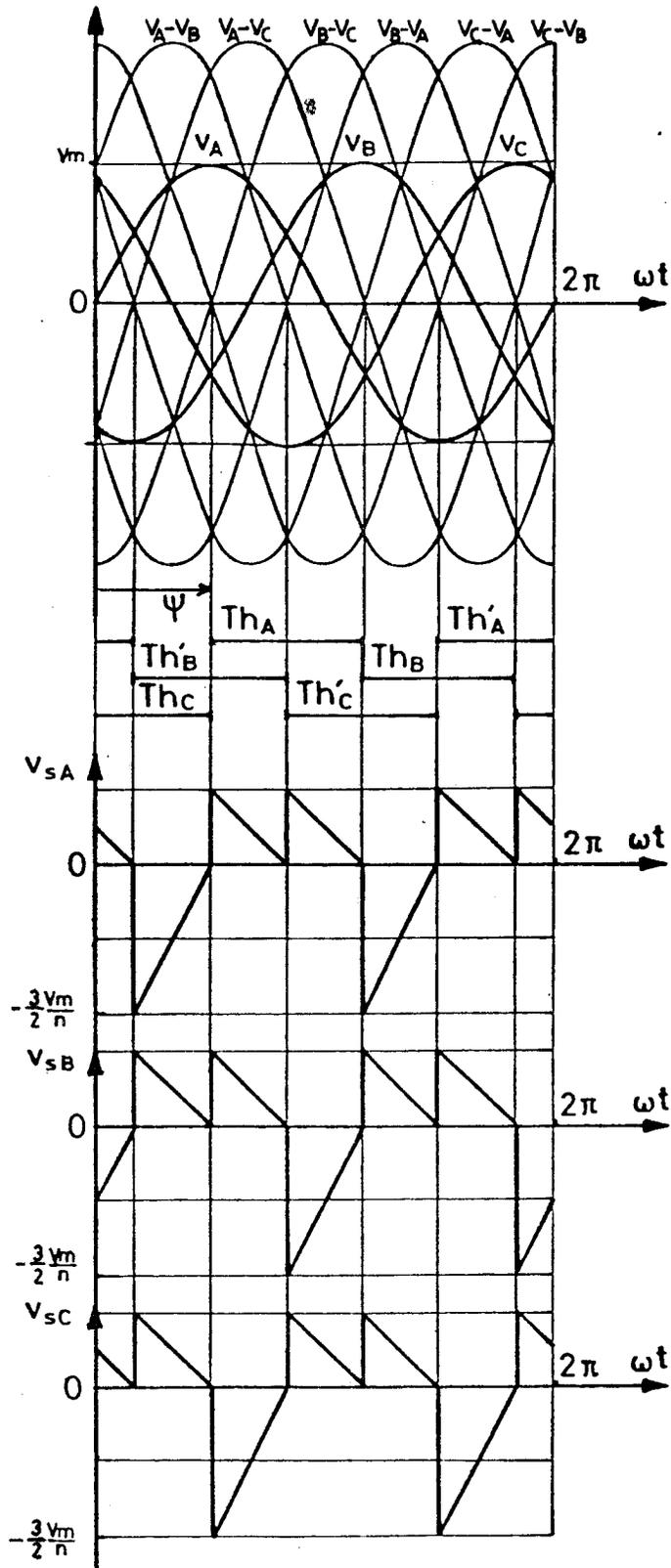


FIG. III.1.2

1.2. Relations générales

1.2.1. Tensions primaires

• Les tensions aux bornes des 2 demi-enroulements primaires montés sur le même noyau sont identiques.



• Les thyristors sont débloqués périodiquement : pendant la conduction de  $Th_A$ , l'expression de  $v'_A$  est la même que celle de  $v'_B$  pendant la conduction de  $Th_B$ , et que celle de  $v'_C$  pendant la conduction de  $Th_C$ .

Comme l'amorçage de  $Th_A$  précède celui de  $Th_B$  de  $\frac{2\pi}{3}$  et celui de  $Th_C$  de  $\frac{4\pi}{3}$ , on peut écrire :

$$v'_A(\omega t) = v'_B(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = v'_C(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \quad (\text{III.1})$$

• Pendant la conduction de  $Th_A$  et  $Th'_B$ , la tension aux bornes d'un demi-enroulement primaire est donnée par :

$$v'_A(\omega t) = \frac{v_A(\omega t) - v_B(\omega t)}{2}$$

Lorsque, après une demi-période de la tension d'alimentation,  $Th'_A$  et  $Th_B$  sont conducteurs, cette même tension  $v'_A$  est donnée par :

$$\begin{aligned} v'_A(\omega t + \pi) &= \frac{v_B(\omega t + \pi) - v_A(\omega t + \pi)}{2} \\ &= \frac{-v_B(\omega t) + v_A(\omega t)}{2} = v'_A(\omega t) \end{aligned}$$

De la même façon  $v'_B(\omega t + \pi) = v'_B(\omega t)$

$$\text{et } v'_C(\omega t + \pi) = v'_C(\omega t)$$

(III.2)

• En combinant les relations (III.1) et (III.2) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} v'_A(\omega t) &= v'_A(\omega t + \pi) \\ v'_B(\omega t) &= v'_A(\omega t + \frac{4\pi}{3}) = v'_A(\omega t + \frac{\pi}{3}) \\ v'_C(\omega t) &= v'_A(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = v'_A(\omega t + \frac{5\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3})$$

Ainsi, connaissant  $v'_A$ ,  $v'_B$  et  $v'_C$  à l'instant  $t$ , on peut en déduire  $v'_A$  et donc  $v'_B$  et  $v'_C$  tout au long d'une période de la tension d'alimentation. L'étude du fonctionnement peut donc se réduire à celle d'un sixième de la période.

### 1.2.2. Tensions secondaires

Les tensions au secondaire du transformateur ont pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} v_{s_A} &= \frac{v'_A}{n} & v_{s_B} &= \frac{v'_B}{n} & v_{s_C} &= \frac{v'_C}{n} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4})$$

Quelle que soit la charge, les tensions secondaires, comme les tensions primaires, auront une fréquence double de celle des tensions d'alimentation.

### 1.2.3. Tensions aux bornes des thyristors

A cause de la symétrie des déclenchements des thyristors, les tensions aux bornes de  $Th_A$ ,  $Th_B$  et  $Th_C$  sont identiques à  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$  près.

$$v_{Th_B}(\omega t) = v_{Th_A}\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$v_{Th_C}(\omega t) = v_{Th_A}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Les tensions aux bornes de  $Th'_A$ ,  $Th'_B$  et  $Th'_C$  reproduisent celles aux bornes de  $Th_A$ ,  $Th_B$ ,  $Th_C$  avec un retard de  $\pi$  :

$$v_{Th'_A}(\omega t + \pi) = v_{Th_A}(\omega t)$$

$$v_{Th'_B}(\omega t + \pi) = v_{Th_B}(\omega t)$$

$$v_{Th'_C}(\omega t + \pi) = v_{Th_C}(\omega t)$$

Il suffit donc de connaître les tensions aux bornes des 6 thyristors pendant un sixième de période pour pouvoir exprimer la tension aux bornes d'un thyristor pendant toute la période.

Pour  $Th_A$  on obtient :

$$\left. \begin{aligned}
 v_{Th_A}(\omega t + \frac{\pi}{3}) &= v_{Th'_B}(\omega t) & v_{Th_A}(\omega t + \frac{4\pi}{3}) &= v_{Th_B}(\omega t) \\
 v_{Th_A}(\omega t + \frac{2\pi}{3}) &= v_{Th_C}(\omega t) & v_{Th_A}(\omega t + \frac{5\pi}{3}) &= v_{Th'_C}(\omega t) \\
 v_{Th_A}(\omega t + \pi) &= v_{Th'_A}(\omega t)
 \end{aligned} \right\} \quad (III.5)$$

#### 1.2.4. Courants primaires

Les courants  $i'_A$ ,  $i'_B$ ,  $i'_C$  sont identiques au décalage de  $\frac{2\pi}{3}$  près.

Les courants  $i''_A$ ,  $i''_B$ ,  $i''_C$  reproduisent  $i'_A$ ,  $i'_B$ ,  $i'_C$  avec un retard de  $\pi$ .

Pour  $i'_A$  on obtient :

$$\left. \begin{aligned}
 i'_A(\omega t + \frac{\pi}{3}) &= i''_B(\omega t) & i'_A(\omega t + \frac{4\pi}{3}) &= i'_B(\omega t) \\
 i'_A(\omega t + \frac{2\pi}{3}) &= i'_C(\omega t) & i'_A(\omega t + \frac{5\pi}{3}) &= i''_C(\omega t) \\
 i'_A(\omega t + \pi) &= i''_A(\omega t)
 \end{aligned} \right\} \quad (III.6)$$

#### 1.2.5. Courants en ligne

Ces courants se déduisent des courants primaires par les relations

$$i_A = i'_A - i''_A \quad i_B = i'_B - i''_B \quad i_C = i'_C - i''_C \quad \} \quad (III.7)$$

Chaque courant en ligne  $i$  est égal à  $+i'$  ou  $-i''$  suivant que c'est  $Th$  ou  $Th'$  qui conduit :  $i'$  et  $i''$  étant positifs ou nuls,  $i$  sera tantôt positif, tantôt négatif. Les courants débités par la source sont donc alternatifs. Comme chaque thyristor conduit pendant deux intervalles successifs décalés de  $\frac{\pi}{3}$ , ces courants ont la même fréquence que les tensions d'alimentation et sont décalés de  $\frac{2\pi}{3}$  les uns par rapport aux autres.

### I.2.6. Courants secondaires

Ils ont la même période que les tensions secondaires. Comme pour celles-ci, on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} i_{s_A}(\omega t) &= i_{s_A}(\omega t + \pi) \\ i_{s_B}(\omega t) &= i_{s_A}(\omega t + \frac{4\pi}{3}) = i_{s_A}(\omega t + \frac{\pi}{3}) \\ i_{s_C}(\omega t) &= i_{s_A}(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = i_{s_A}(\omega t + \frac{5\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8})$$

## II. ETUDE ANALYTIQUE DU FONCTIONNEMENT

### II.1. Débit sur charge purement résistive

Deux types de fonctionnement sont à considérer suivant que, durant les états successifs du système, on trouve soit tantôt 2, tantôt 0 thyristors conducteurs, soit tantôt 3, tantôt 2 thyristors conducteurs.

#### II.1.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs

On étudie l'intervalle de temps pendant lequel  $Th_A$  et  $Th'_B$  conduisent simultanément. Juste avant l'amorçage de ces thyristors, tous les courants sont nuls. Si on admet que tous les thyristors sont identiques, la tension  $v_A - v_B$  se répartit également aux bornes de  $Th_A$  et  $Th'_B$  ; pour amorcer simultanément ces 2 thyristors, il faut donc que la tension  $v_A - v_B$  soit positive. En partant de  $\omega t = 0$ ,  $v_A$  reste supérieure à  $v_B$  jusque  $\omega t = 5\pi/6$  : l'angle d'amorçage  $\psi$  du thyristor  $Th_A$  doit donc être inférieur à  $5\pi/6$ .

#### • Tensions primaires

$$\begin{aligned} v'_A = v'_B &= \frac{v_A - v_B}{2} = \frac{V_m}{2} [\sin \omega t - \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})] \\ &= V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

$$v'_C = -(v_A - v_B) = -V_m \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

• Tensions secondaires

$$v_{s_A} = v_{s_B} = \frac{v'_A}{n} = \frac{V_m}{n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$v_{s_C} = -2v_{s_A} = -\frac{V_m}{n} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

• Tensions aux bornes des thyristors

$$v_{Th_A} = 0 \qquad v_{Th'_A} = -v'_A = -V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$v_{Th_B} = -v'_B = -V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \qquad v_{Th'_B} = 0$$

$$\begin{aligned} v_{Th_C} &= v_C - v_A + v'_A - v'_C \\ &= v_C - v_A + \frac{v_A - v_B}{2} + v_A - v_B \\ &= \frac{v_C}{2} - 2v_B \\ &= V_m \left[ \frac{1}{2} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) - 2\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{Th'_C} &= -v_{Th_C} - 2v'_C \\ &= -\frac{v_C}{2} + 2v_B + 2v_A - 2v_B \\ &= -\frac{v_C}{2} + 2v_A \\ &= V_m \left[ -\frac{1}{2} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) + 2\sin\omega t \right] \end{aligned}$$

• Courants secondaires

$$i_{s_A} = i_{s_B} = \frac{v_{s_A}}{R} = \frac{V_m}{nR} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$i_{s_C} = \frac{v_{s_C}}{R} = -\frac{V_m}{nR} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

• Courants primaires et en ligne

$$\left. \begin{aligned} i_A &= \frac{3}{n} i_{sA} = i'_A = -i_B = i''_B \\ i_C &= i'_C = i''_C = i''_A = i'_B = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9})$$

• Fin de l'intervalle

$\text{Th}_A$  et  $\text{Th}'_B$  cessent de conduire lorsque  $i_A$  et  $i_B$  passent simultanément par zéro, pour  $\omega t = \frac{5\pi}{6}$ .

Tous les courants sont alors nuls, ainsi que les flux dans les enroulements et les tensions à leurs bornes. Si on suppose égales les impédances des thyristors bloqués, le potentiel des points milieux des enroulements primaires est égal à celui du point neutre de la source.

On en déduit les tensions aux bornes des thyristors bloqués

$$v_{\text{Th}_A} = -v_{\text{Th}'_A} = v_A$$

$$v_{\text{Th}_B} = -v_{\text{Th}'_B} = v_B$$

$$v_{\text{Th}_C} = -v_{\text{Th}'_C} = v_C$$

Ce type de fonctionnement reste valable tant que l'angle d'amorçage  $\psi$  reste supérieur ou égal à  $\frac{\pi}{2}$  : si  $\psi$  devient inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , le thyristor  $\text{Th}_A$  est amorcé alors que  $\text{Th}'_B$  et  $\text{Th}_C$  sont encore conducteurs. On a alors le fonctionnement à 3 ou 2 thyristors passants.

Sur la figure III.1.3.a. on a tracé les formes d'ondes des tensions  $v_{sA}$  et  $v_{\text{Th}_A}$ , et celle du courant  $i_A$  pour  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ . Les courbes en pointillé donnent ces formes d'ondes dans le cas limite où  $\psi = \frac{\pi}{2}$ .

II.1.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs

Si l'angle d'amorçage  $\psi$  du thyristor  $\text{Th}_A$  devient inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , on aura un fonctionnement avec tantôt 3 tantôt 2 thyristors conducteurs.

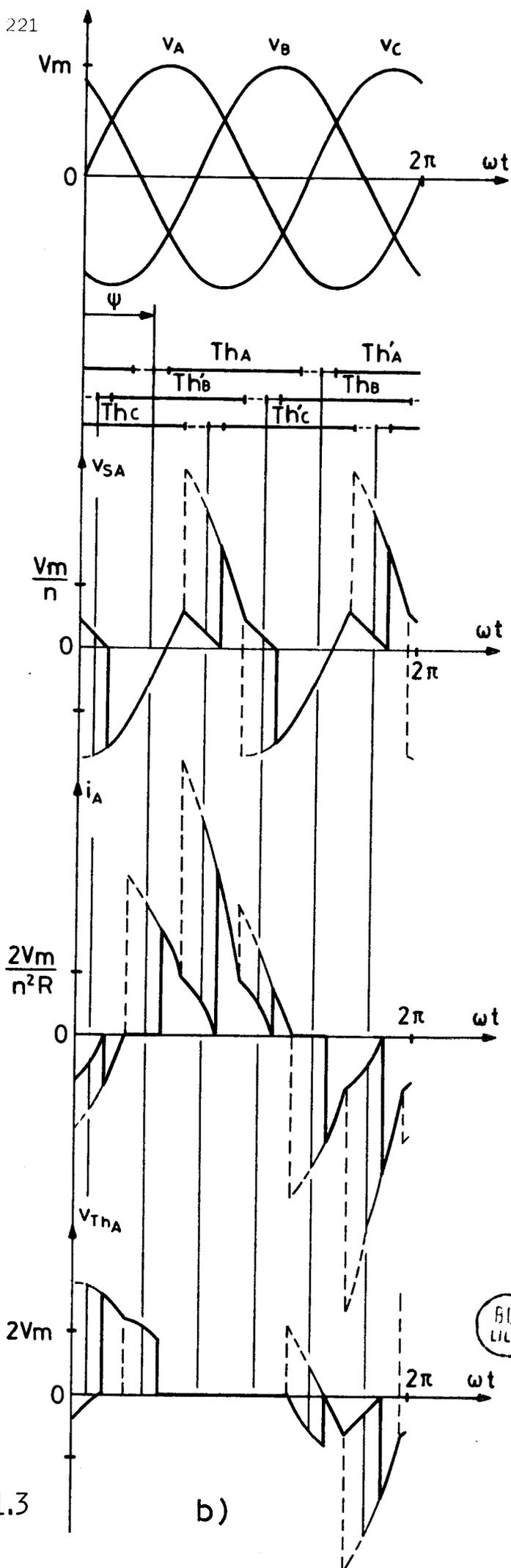
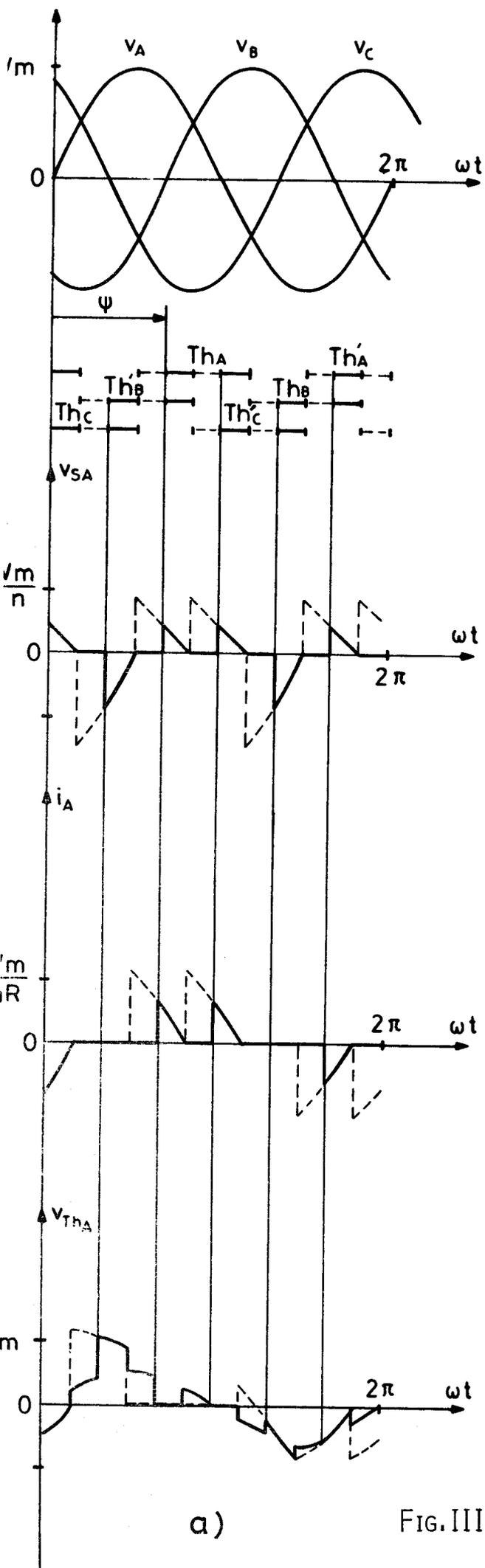


FIG. III.1.3

BUS LILLE

### Intervalle à 3 thyristors conducteurs

On étudie l'intervalle pendant lequel  $Th_A$ ,  $Th_B$  et  $Th_C$  conduisent ensemble.

#### • Tensions primaires

$$\text{On peut écrire } v_A - v'_A - v'_B - v_B = 0$$

$$\text{et } v_A - v'_A + v'_C - v_C = 0$$

$$\text{d'où on tire } v'_A + v'_B = v_A - v_B$$

$$\text{et } v'_A - v'_C = v_A - v_C$$

et puisque la somme des tensions  $v'_A$ ,  $v'_B$  et  $v'_C$  doit être nulle, on a :

$$v'_C = -v'_A - v'_B = v_B - v_A$$

$$v'_A = (v_A - v_C) + v'_C = v_B - v_C$$

$$v'_B = -v'_A - v'_C = -3v_B$$

Les tensions primaires ont donc pour expressions

$$v'_A = v_B - v_C = -V_m \sqrt{3} \cos \omega t$$

$$v'_B = -3v_B = -3V_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$v'_C = v_B - v_A = -V_m \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

#### • Tensions secondaires

$$v_{sA} = \frac{v'_A}{n} = -\frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t$$

$$v_{sB} = \frac{v'_B}{n} = -3 \frac{V_m}{n} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$v_{sC} = \frac{v'_C}{n} = -\frac{V_m}{n} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

• Tensions aux bornes des thyristors

$$v_{Th_A} = 0 \qquad v_{Th'_A} = -2v'_A = 2 V_m \sqrt{3} \cos \omega t$$

$$v_{Th_B} = -2v'_B = 6 V_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \qquad v_{Th'_B} = 0$$

$$v_{Th_C} = 0 \qquad v_{Th'_C} = -2v'_C = 2 V_m \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

• Courants secondaires

$$i_{s_A} = \frac{v_{s_A}}{R} = -\frac{V_m}{nR} \sqrt{3} \cos \omega t$$

$$i_{s_B} = \frac{v_{s_B}}{R} = -3 \frac{V_m}{nR} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$i_{s_C} = \frac{v_{s_C}}{R} = -\frac{V_m}{nR} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

• Courants primaires

Les équations d'ampères-tours permettent d'exprimer les courants primaires en fonction des courants secondaires.

$$\text{Ainsi les équations } \frac{n_1}{2} i'_A - n_2 i_{s_A} + n_2 i_{s_C} - \frac{n_1}{2} i'_C = 0$$

$$\text{et } \frac{n_1}{2} i'_A - n_2 i_{s_A} + n_2 i_{s_B} - \frac{n_1}{2} i''_B = 0$$

peuvent s'écrire respectivement

$$i'_A - i'_C = \frac{i_{s_A} - i_{s_C}}{n}$$

$$\text{et } i'_A - i''_B = \frac{i_{s_A} - i_{s_B}}{n}$$

On obtient ainsi directement l'expression de  $i'_C$

$$i'_C = i''_B - i'_A = \frac{is_B - is_A}{n}$$

Il s'ensuit :

$$i'_A = \frac{is_A - is_C}{n} + i'_C = \frac{is_B - is_C}{n} \text{ et } i''_B = i'_A + i'_C = \frac{3is_B}{n}$$

(III.10)

D'où les expressions des courants primaires

$$i'_A = \frac{is_B - is_C}{n} = \frac{V_m}{n^2 R} \sqrt{3} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \right]$$

$$i''_B = \frac{3is_B}{n} = -9 \frac{V_m}{n^2 R} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$i'_C = \frac{is_B - is_A}{n} = \frac{V_m}{n^2 R} \sqrt{3} \left[ \cos \omega t - \sqrt{3} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \right]$$

#### • Fin de l'intervalle

Cet intervalle de fonctionnement se termine lorsque l'un des courants  $i'_A$ ,  $i''_B$  ou  $i'_C$  passe par zéro.

$i'_C$  est le premier de ces courants à s'annuler pour :

$$\omega t = \text{Arc tg}\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right) \approx 109,1^\circ$$

Le thyristor  $Th_C$  s'éteint alors, laissant  $Th_A$  et  $Th'_B$  seuls conducteurs.

#### Intervalle à 2 thyristors conducteurs

Toutes les équations correspondant à ce type de fonctionnement, et les expressions qui en découlent sont exactement les mêmes que celles qui ont été établies au paragraphe II.1.1.

### Limites de ce mode de fonctionnement

Le thyristor  $Th_A$  conduit de  $\omega t = \psi$  à  $\text{Arc tg} \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{3} \approx 229,1^\circ$ .

Or son angle de conduction ne peut dépasser  $\pi$  car alors  $Th_A$  et  $Th'_A$  conduiraient simultanément, ce qui mettrait les deux demi-enroulements primaires en court-circuit. Il faut donc que

$$\text{Arc tg} \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{3} - \psi \leq \pi$$

$$\psi \geq \text{Arc tg} \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3} \approx 49,1^\circ$$

Donc pour  $\psi$  compris entre  $49,1^\circ$  et  $90^\circ$ , on aura un fonctionnement à 3 ou 2 thyristors passants. Pour  $\psi = 49,1^\circ$ , l'angle de conduction simultanée de 3 thyristors,  $\theta'$ , est maximum et égal à  $\frac{\pi}{3}$ . Pour  $\psi = 90^\circ$ , cet angle est réduit à  $109,1 - 90 = 19,1^\circ$ . Au dessus de  $90^\circ$  on retrouve le fonctionnement à 0 ou 2 thyristors passants.

Sur la figure III.1.3.b. on a tracé en traits gras les formes d'ondes de  $v_{s_A}$ ,  $i_{s_A}$  et  $v_{Th_A}$  pour  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , limite supérieure de ce mode de fonctionnement. Les courbes en pointillés correspondent à l'angle d'amorçage minimal voisin de  $49,1^\circ$  alors que celles en traits fins correspondent à  $\psi = 70^\circ$ .

On constate que les formes d'ondes varient brutalement lorsque l'angle d'amorçage  $\psi$  passe par  $\frac{\pi}{2}$  et que le montage passe d'un mode de fonctionnement à l'autre.

## II.2. Débit sur charge purement selfique

On retrouve les deux modes de fonctionnement rencontrés lors de l'étude précédente. Les tensions primaires, secondaires et aux bornes des thyristors gardent les mêmes expressions et les relations (III.9) et (III.10) entre courants primaires et secondaires ne changent pas.

### II.2.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs

• Quand  $Th_A$  et  $Th'_B$  conduisent, les courants secondaires sont les solutions des équations suivantes :

$$vs_A = L \frac{dis_A}{dt} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$vs_B = L \frac{dis_B}{dt} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$vs_C = L \frac{dis_C}{dt} = - \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

Ils ont donc pour expression

$$is_A = - \frac{V_m}{nL\omega} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J_A \right]$$

$$is_B = - \frac{V_m}{nL\omega} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J_B \right]$$

$$is_C = \frac{V_m}{nL\omega} \left[ \sqrt{3} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_C \right]$$

où  $J_A$ ,  $J_B$  et  $J_C$  représentent les constantes d'intégration.

Pour les déterminer, on écrit que les courants de sortie ne peuvent pas subir de discontinuité et doivent donc être nuls pour  $\omega t = \psi$ .

$$\text{Ainsi } is_A(\omega t = \psi) = 0 = - \frac{V_m}{nL\omega} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\psi + \frac{\pi}{6}) + J_A \right]$$

$$\text{donne } J_A = - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\psi + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{On détermine de la même façon } J_B = - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\psi + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{et } J_C = \sqrt{3} \cos(\psi + \frac{\pi}{6})$$

• Les expressions des courants secondaires permettent de passer aux courants primaires à partir des relations (III.9) :

$$i_A = \frac{3}{n} is_A = i'_A = - i_B = i''_B = - 3 \frac{V_m}{nL\omega} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J_A \right]$$

$$i_C = i'_C = i''_C = i'''_A = i'_B = 0$$

• Cet intervalle de fonctionnement se termine lorsque  $i'_A$  et  $i''_B$  passent par zéro, pour  $\omega t = \frac{5\pi}{3} - \psi$ .

$Th_A$  et  $Th'_B$  seront donc conducteurs pour  $\omega t$  compris entre  $\psi$  et  $\frac{5\pi}{3} - \psi$ .

Pour  $\omega t$  compris entre  $\frac{5\pi}{3} - \psi$  et  $\psi + \frac{\pi}{3}$  tous les thyristors sont bloqués.

Pour  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ , ce dernier intervalle est réduit à zéro et pour une valeur de  $\psi$  inférieure à  $\frac{2\pi}{3}$ , on amorcerait un 3<sup>ème</sup> thyristor alors que  $Th_A$  et  $Th'_B$  conduisent encore : on n'aurait plus le même mode de fonctionnement.

Au dessus de  $\frac{2\pi}{3}$ , on peut augmenter  $\psi$  jusqu'à ce que l'angle de conduction des thyristors s'annule, ce qui se produit pour  $\psi = \frac{5\pi}{6}$ .

On aura donc un fonctionnement à 2 ou 0 thyristors passants si l'angle d'amorçage  $\psi$  de  $Th_A$  reste compris entre  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{6}$ .

### II.2.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs

#### Intervalle à 3 thyristors conducteurs

On étudie l'intervalle pendant lequel  $Th_A$ ,  $Th'_B$  et  $Th_C$  conduisent ensemble. Les courants secondaires sont les solutions des équations :

$$v_{s_A} = L \frac{di_{s_A}}{dt} = - \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t$$

$$v_{s_B} = L \frac{di_{s_B}}{dt} = - 3 \frac{V_m}{n} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$v_{s_C} = L \frac{di_{s_C}}{dt} = - \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

et sont donc de la forme :

$$is_A = -\frac{V_m}{nL\omega} [\sqrt{3} \sin\omega t + J'_A]$$

$$is_B = \frac{V_m}{nL\omega} [3 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - J'_B]$$

$$is_C = \frac{V_m}{nL\omega} [\sqrt{3} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J'_C]$$

### Intervalle à 2 thyristors conducteurs

Les expressions des courants secondaires sont les mêmes qu'au paragraphe II.2.1. mais les constantes d'intégration  $J'_A$ ,  $J'_B$ ,  $J'_C$  n'ont plus les mêmes valeurs car les courants secondaires ne sont pas nuls au début de l'intervalle.

$$is_A = -\frac{V_m}{nL\omega} [\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J'_A]$$

$$is_B = -\frac{V_m}{nL\omega} [\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J'_B]$$

$$is_C = \frac{V_m}{nL\omega} [\sqrt{3} \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J'_C]$$

### Calcul des constantes d'intégration

- Pour  $\omega t = \psi$  on amorce  $Th_A$  : on doit avoir  $i'_A = 0$  et donc  $is_B = is_C$

$$is_B(\omega t = \psi) = is_C(\omega t = \psi)$$

$$3 \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) - J'_B = \sqrt{3} \cos(\psi + \frac{\pi}{6}) - J'_C$$

$$\text{d'où} \quad J'_B - J'_C = 3 \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos(\psi + \frac{\pi}{6})$$

$$= \sqrt{3} (\sqrt{3} \cos\psi - 2\sin\psi) \quad (\text{III.11})$$

• A partir des relations (III.8) du paragraphe I.2.6. on peut écrire que la valeur de  $is_A$  au début de l'intervalle où  $Th_A$ ,  $Th'_B$  et  $Th_C$  conduisent est égale à celle de  $is_C$  à la fin de l'intervalle où  $Th_A$  et  $Th'_B$  conduisent seuls.

$$\begin{aligned}
 i_{s_A}(\omega t = \psi) &= i_{s_C}(\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}) \\
 -\sqrt{3} \sin\psi - J'_A &= \sqrt{3} \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) - J'_C
 \end{aligned}$$

et donc  $J'_A = J'_C$  (III.12)

• On désigne par  $\psi + \theta'$  la valeur de  $\omega t$  pour laquelle le thyristor  $Th_C$  s'éteint. Puisque les courants secondaires ne peuvent pas subir de discontinuité, la valeur de  $i_{s_C}$  à la fin de l'intervalle où  $Th_A$ ,  $Th'_B$  et  $Th_C$  conduisent doit être égale à celle de  $i_{s_C}$  au début de l'intervalle où  $Th_A$  et  $Th'_B$  conduisent seuls.

$$i_{s_C}(\omega t = \psi + \theta') = \frac{V_m}{nL\omega} [\sqrt{3} \cos(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}) - J'_C] = \frac{V_m}{nL\omega} [\sqrt{3} \cos(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}) - J'_C]$$

et donc  $J'_C = J'_C$  (III.13)

• Pour  $\omega t = \psi + \theta'$  le courant  $i'_C$  dans le thyristor  $Th_C$  s'annule : on doit donc avoir pour cette valeur de  $\omega t$ ,  $i_{s_A} = i_{s_B}$

$$\begin{aligned}
 i_{s_A}(\omega t = \psi + \theta') &= i_{s_B}(\omega t = \psi + \theta') \\
 -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}) - J'_A &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}) - J'_B
 \end{aligned}$$

et donc  $J'_A = J'_B$  (III.14)

• La condition  $i_{s_A} + i_{s_B} + i_{s_C} = 0$

entraîne  $J'_A + J'_B + J'_C = 0$

et  $J_A + J_B + J_C = 0$

De la première relation on peut tirer, en utilisant (III.12) et (III.13)

$$J'_B = -2 J'_C$$

et avec la deuxième relation, en utilisant (III.14), on obtient

$$J'_C = -2 J'_A$$

On peut alors exprimer toutes les constantes en fonction de  $J_A$  :

$$J_B = J_A ; J_C = -2 J_A ; J'_A = -2 J_A ; J'_B = 4 J_A ; J'_C = -2 J_A$$

et reporter les valeurs de  $J'_B$  et  $J'_C$  dans la relation (III.11) pour obtenir :

$$J_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} \cos\psi - 2\sin\psi)$$

### Durée de chaque intervalle

Pour connaître la durée de chaque intervalle, il faut calculer  $\theta'$  : l'intervalle pendant lequel  $Th_A$ ,  $Th'_B$  et  $Th_C$  conduisent ensemble se termine pour  $\omega t = \psi + \theta'$  lorsque  $i'_C = 0$ , c'est-à-dire pour  $is_A = is_B$ , qui s'écrit :

$$-\sqrt{3} \sin(\psi + \theta') - J'_A = 3 \cos(\psi + \theta' - \frac{2\pi}{3}) - J'_B$$

En remplaçant  $J'_A$  et  $J'_B$  par leurs valeurs et en regroupant les termes, on obtient :

$$\sqrt{3} \cos(\psi + \theta') - 5 \sin(\psi + \theta') = 2\sqrt{3} \cos\psi - 4 \sin\psi \quad (\text{III.15})$$

et  $\theta'$  doit être solution de cette équation.

• Si on remplace  $\theta'$  par  $\frac{\pi}{3}$  dans (III.15), la valeur de  $\psi$  qui vérifie l'égalité est la valeur minimale de l'angle d'amorçage de  $Th_A$

$$\sqrt{3} \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3} \cos\psi_{\min} - 4 \sin\psi_{\min}$$

On obtient :

$$\psi_{\min} = \frac{\pi}{2}$$

• Si on remplace  $\theta'$  par 0 dans (III.15), la valeur de  $\psi$  qui vérifie l'égalité est la valeur maximale pour laquelle on a un fonctionnement à 3 ou 2 redresseurs passants.

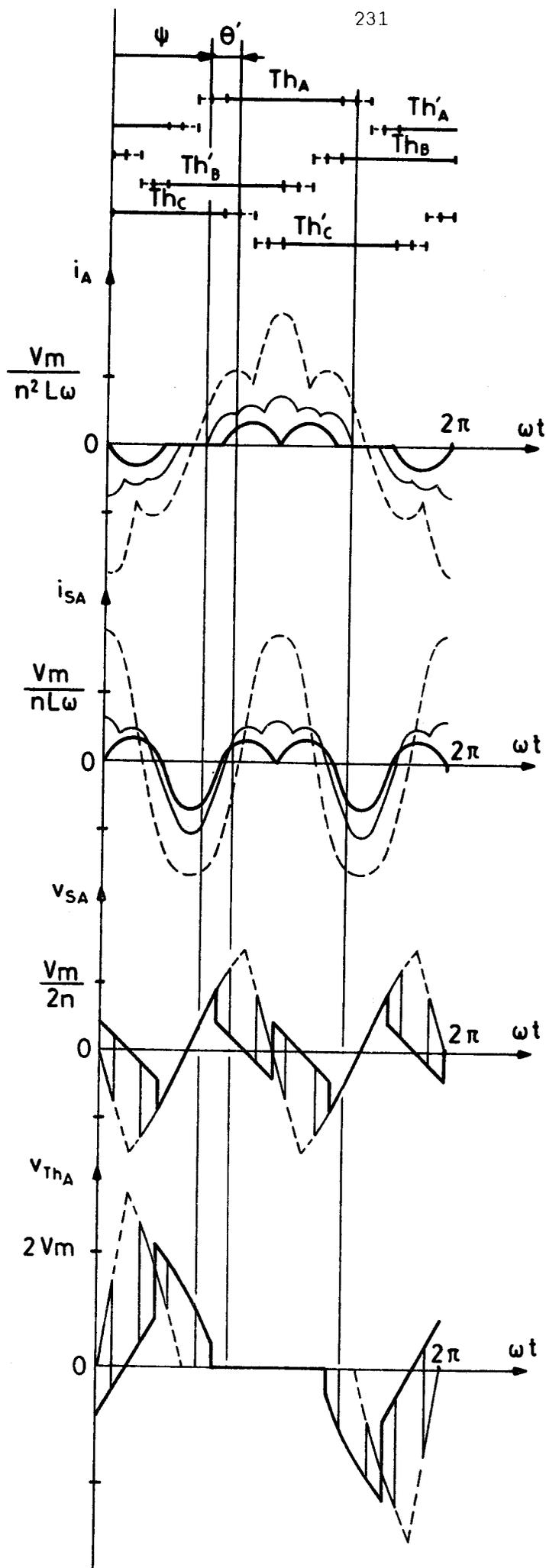


FIG. III.1.4



$$\sqrt{3} \cos \psi_{\max} - 5 \sin \psi_{\max} = 2\sqrt{3} \cos \psi_{\max} - 4 \sin \psi_{\max}$$

On obtient

$$\psi_{\max} = \frac{2\pi}{3}$$

Pour  $\psi$  compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ , dans le cas du débit sur charge purement inductive, on aura donc un fonctionnement à 3 ou 2 redresseurs passants.

### Formes d'ondes

On a tracé sur la figure III.1.4. les formes d'ondes de  $i_A$ ,  $is_A$ ,  $vs_A$  et  $v_{Th_A}$  pour  $\psi = 90^\circ$  (traits gras),  $\psi = 105^\circ$  (traits fins) et  $\psi = 120^\circ$  (traits interrompus) dans le cas du débit sur inductances pures.

## II.3. Débit sur charge R, L

---

Comme précédemment on retrouve les deux modes de fonctionnement.

Les tensions primaires, secondaires, et aux bornes des thyristors gardent les mêmes expressions et les relations entre courants primaires et secondaires ne changent pas.

### II.3.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs

• Lorsque  $Th_A$  et  $Th'_B$  sont conducteurs, les courants secondaires sont les solutions des équations :

$$vs_A = R is_A + L \frac{dis_A}{dt} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$vs_B = R is_B + L \frac{dis_B}{dt} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$vs_C = R is_C + L \frac{dis_C}{dt} = \frac{-V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

avec  $R$  et  $L$  résistance et inductance d'une phase de la charge.

Les courants  $i_{s_A}$ ,  $i_{s_B}$  et  $i_{s_C}$  seront donc de la forme :

$$i_{s_A} = \frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{V_m}{n} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

$$i_{s_B} = \frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{V_m}{n} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

$$i_{s_C} = -\frac{\sqrt{3}}{R} \frac{V_m}{n} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

avec  $Q = L\omega/R$

et  $J_A$ ,  $J_B$ ,  $J_C$  constantes d'intégration.

On détermine les constantes d'intégration en écrivant que les courants secondaires ne peuvent pas présenter de discontinuité et qu'ils doivent donc être nuls pour  $\omega t = \psi$ .

$$\text{Ainsi } i_{s_A}(\omega t = \psi) = 0 = \frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{V_m}{n} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \sin(\psi + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi + \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\psi}{Q}} \right]$$

$$\text{donne } J_A = \left[ \sin(\psi + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi + \frac{\pi}{6}) \right] e^{\frac{\psi}{Q}}$$

On obtient de la même façon :  $J_B = J_A$  et  $J_C = -J_A$ .

• Cet intervalle se termine lorsque  $i'_A$  et  $i''_B$  s'annulent simultanément c'est-à-dire, puisque  $i'_A = \frac{3}{n} i_{s_A}$ , lorsqu'on a :

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - \left[ \sin(\psi + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi + \frac{\pi}{6}) \right] e^{\frac{\psi - \omega t}{Q}} = 0$$

Si on désigne par  $\psi + \theta$  la valeur de  $\omega t$  qui vérifie cette équation, à chaque valeur de l'angle d'amorçage  $\psi$  correspond une valeur de  $\theta$  l'angle de conduction simultanée de  $Th_A$  et  $Th'_B$  qui est solution de l'équation :

$$\sin(\psi + \theta + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi + \theta + \frac{\pi}{6}) = \left[ \sin(\psi + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi + \frac{\pi}{6}) \right] e^{-\frac{\theta}{Q}}$$

• Pour toutes les valeurs de  $\omega t$  comprises entre  $\psi + \theta$  et  $\psi + \frac{\pi}{3}$ , tous les thyristors sont bloqués : on a alors pour cet intervalle les mêmes relations que lors de l'étude du débit sur charge purement résistive.

• Lorsque  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , la durée de l'intervalle pendant lequel tous les thyristors sont bloqués est réduite à zéro. La valeur minimale correspondante de l'angle d'amorçage est solution de l'équation :

$$\sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{2}) - Q \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{2}) = [\sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{6})] e^{-\frac{\pi}{3Q}}$$

$$\text{On obtient } \psi_{\min} = \text{Arc tg } \frac{Q \sqrt{3} - (1 - 2 e^{-\pi/3Q})}{Q(1 - 2 e^{-\pi/3Q}) + \sqrt{3}}$$

En augmentant l'angle d'amorçage  $\psi$  on diminue  $\theta$  l'angle de conduction simultanée de 2 thyristors, et on l'annule en envoyant l'impulsion de déclenchement de  $\text{Th}_A$  à l'instant où  $v_{s_A}$  passe par zéro, pour

$$\omega t = \frac{5\pi}{6}.$$

C'est la valeur maximale de  $\psi$ , quel que soit  $Q$ .

• On a tracé dans la partie inférieure de la planche III.1, pour différentes valeurs de  $\cos \varphi' = \frac{1}{\sqrt{1+4Q^2}}$  les variations de  $\theta$  en fonction de  $\psi$ .

On constate que la plage des variations de  $\psi$  est de plus en plus réduite au fur et à mesure que  $\cos \varphi'$  diminue.

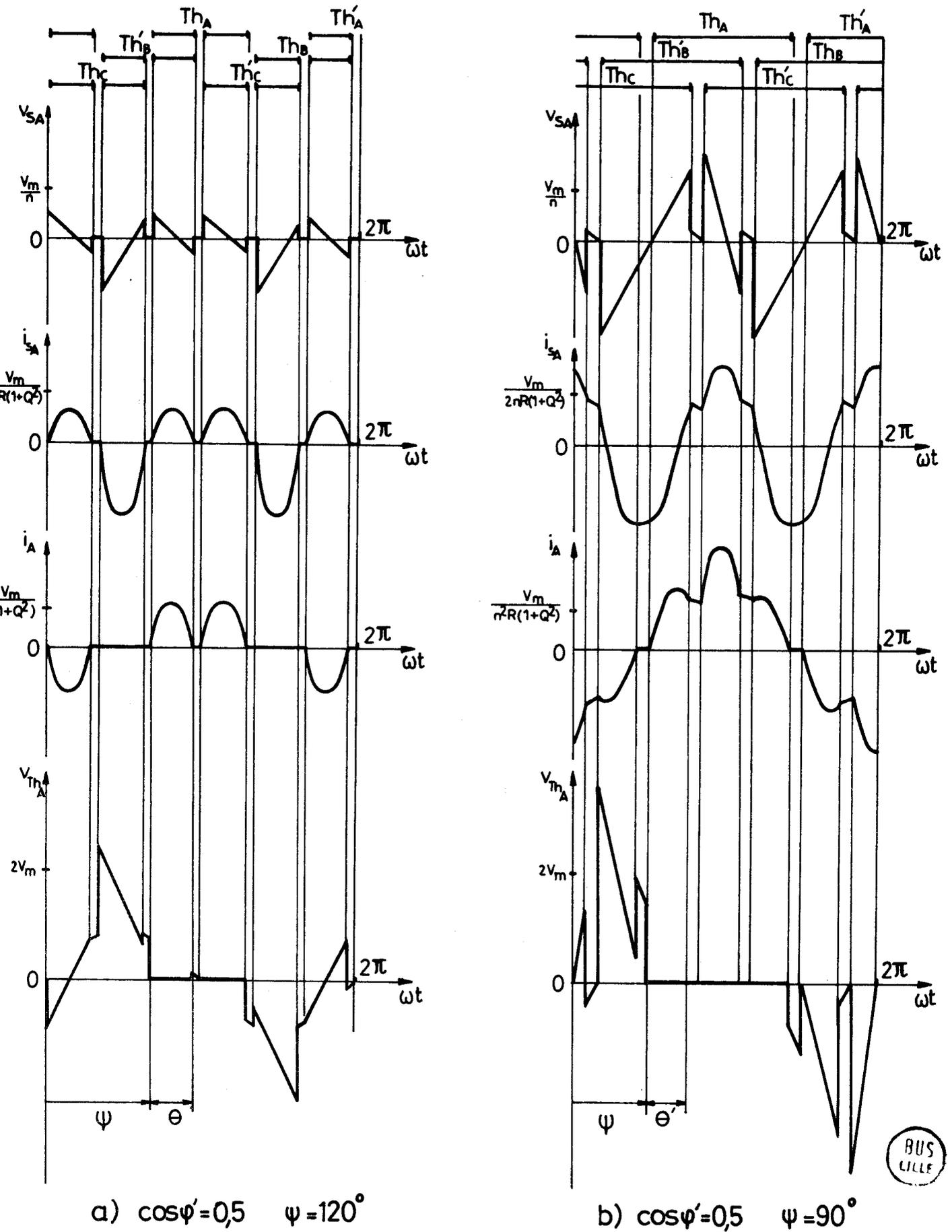
• La figure III.1.5.a donne les diagrammes de conduction des différents redresseurs et les formes d'ondes des tensions  $v_{s_A}$ ,  $v_{\text{Th}_A}$ , et des courants  $i_A$ ,  $i_{s_A}$  pour  $\cos \varphi' = 0,5$  et  $\psi = 120^\circ$ .

### 11.3.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs

Si on donne à  $\psi$  une valeur inférieure à la valeur minimale définie plus haut,  $\text{Th}_A$  est amorcé alors que  $\text{Th}'_B$  et  $\text{Th}_C$  conduisent encore.

#### Intervalle à 3 thyristors conducteurs

Les tensions primaires et secondaires, et les tensions aux bornes des thyristors ont les mêmes expressions que lors de l'étude du débit sur charge purement résistive. Il en est de même des relations (III.9) et (III.10) entre courants primaires et secondaires.



BUS LILLE

FIG. III.1.5

Les courants secondaires sont les solutions des équations :

$$vs_A = Ris_A + L \frac{dis_A}{dt} = - \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t$$

$$vs_B = Ris_B + L \frac{dis_B}{dt} = - 3 \frac{V_m}{n} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$vs_C = Ris_C + L \frac{dis_C}{dt} = - \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

Les courants seront donc de la forme :

$$is_A = - \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} (\cos \omega t + Q \sin \omega t + J'_A e^{-\frac{\omega t}{Q}})$$

$$is_B = - \frac{3}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} [\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - Q \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + J'_B e^{-\frac{\omega t}{Q}}]$$

$$is_C = - \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} [\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J'_C e^{-\frac{\omega t}{Q}}]$$

où  $J'_A$ ,  $J'_B$ ,  $J'_C$  sont les constantes d'intégration qui restent à déterminer.

### Intervalle à 2 thyristors conducteurs

Les expressions de ces courants sont les mêmes qu'au paragraphe II.3.1.

$$is_A = \frac{\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{nR} [\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}}]$$

$$is_B = \frac{\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{nR} [\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}}]$$

$$is_C = - \frac{\sqrt{3}}{(1+Q^2)} \frac{V_m}{nR} [\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}}]$$

mais dans celles-ci les valeurs des constantes d'intégration ont changé.

### Calcul des constantes d'intégration

• Pour  $\omega t = \psi$  on amorce  $Th_A$  : on doit avoir  $i'_A = 0$  et donc

$$is_B = is_C$$

$$is_B(\omega t = \psi) = is_C(\omega t = \psi)$$

$$\sqrt{3} \left[ \sin\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) - Q \cos\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) + J'_B e^{-\frac{\psi}{Q}} \right] = \sin\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) - Q \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) + J'_C e^{-\frac{\psi}{Q}}$$

De cette égalité, on tire :

$$\sqrt{3} J'_B - J'_C = [(Q\sqrt{3} - 2) \cos\psi - (2Q + \sqrt{3}) \sin\psi] e^{\frac{\psi}{Q}} \quad (\text{III.16})$$

• A partir des relations (III.8) du paragraphe I.2.6. on peut écrire que la valeur de  $is_A$  au début de l'intervalle pendant lequel  $Th_A$ ,  $Th'_B$  et  $Th_C$  conduisent est égale à celle de  $is_C$  à la fin de l'intervalle pendant lequel  $Th_A$  et  $Th'_B$  conduisent seuls.

$$is_A(\omega t = \psi) = is_C(\omega t = \psi + \frac{\pi}{3})$$

$$\cos\psi + Q \sin\psi + J'_A e^{-\frac{\psi}{Q}} = \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) - Q \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + J'_C e^{-\frac{\psi + \frac{\pi}{3}}{Q}}$$

On en déduit :

$$J'_A = J'_C e^{-\frac{\pi}{3Q}} \quad (\text{III.17})$$

• On désigne toujours par  $\psi + \theta'$  la valeur de  $\omega t$  pour laquelle le thyristor  $Th_C$  s'éteint. Comme dans le cas d'une charge purement inductive, on peut écrire que la valeur de  $is_C$  à la fin de l'intervalle à 3 thyristors conducteurs doit être égale à celle de  $is_C$  au début de l'intervalle à 2 thyristors conducteurs :

$$\begin{aligned} is_C(\omega t = \psi + \theta') &= -\frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} \left[ \sin\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) - Q \cos\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) + J'_C e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} \left[ \sin\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) - Q \cos\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) + J'_C e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} \right] \end{aligned}$$

On aura donc :  $J'_C = J_C$  (III.18)

• Pour  $\omega t = \psi + \theta'$  le courant  $i'_C$  dans le thyristor  $Th_C$  s'annule : on doit donc avoir pour cette valeur de  $\omega t$ ,  $is_A = is_B$ .

$$is_A(\omega t = \psi + \theta') = is_B(\omega t = \psi + \theta')$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) - Q \cos\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) - J'_A e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} &= \sin\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) - Q \cos\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) \\ &\quad - J'_B e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} \end{aligned}$$

et donc 
$$J_A = J_B \quad (\text{III.19})$$

La condition  $is_A + is_B + is_C = 0$

entraîne 
$$J'_A + \sqrt{3} J'_B + J'_C = 0$$

et 
$$J_A + J_B + 2 J_C = 0$$

De la première relation, en utilisant les relations (III.17) et (III.18) on obtient

$$J'_B = - J'_A \frac{1 + e^{\frac{\pi}{3Q}}}{\sqrt{3}}$$

et avec la deuxième relation, en utilisant (III.19) on obtient

$$J_C = - J_A$$

On peut alors exprimer toutes les constantes en fonction de  $J_A$  :

$$J_B = J_A ; J_C = - J_A ; J'_A = - J'_A e^{-\frac{\pi}{3Q}} ; J'_B = J'_A \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{3Q}}}{\sqrt{3}} ; J'_C = - J'_A$$

et reporter les valeurs de  $J'_B$  et  $J'_C$  dans la relation (III.16) pour obtenir :

$$J_A = [(2Q + \sqrt{3}) \sin\psi - (Q\sqrt{3} - 2) \cos\psi] \frac{e^{\psi/Q}}{2 + e^{-\pi/3Q}}$$

### Durée de chaque intervalle

• Pour déterminer  $\theta'$ , on écrit que pour  $\omega t = \psi + \theta'$ , le courant  $i'_C$  doit s'annuler, ce qui correspond à  $is_A = is_B$  et qui s'écrit :

$$\cos(\psi + \theta') + Q \sin(\psi + \theta') + J'_A e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} = \sqrt{3} \left[ \sin(\psi + \theta' - \frac{2\pi}{3}) - Q \cos(\psi + \theta' - \frac{2\pi}{3}) + J'_B e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} \right]$$

En remplaçant  $J'_A$  et  $J'_B$  par leurs valeurs, et en regroupant les termes, on obtient l'équation dont  $\theta'$  doit être la solution :

$$(5 - Q\sqrt{3}) \cos(\psi + \theta') + (\sqrt{3} + 5Q) \sin(\psi + \theta') =$$

$$2[(2Q + \sqrt{3}) \sin\psi - (Q\sqrt{3} - 2) \cos\psi] \frac{1 + 2e^{-\pi/3Q}}{2 + e^{-\pi/3Q}} e^{-\frac{\theta'}{Q}} \quad (\text{III.20})$$

•  $\theta'$  ne doit pas dépasser  $\frac{\pi}{3}$  si on veut éviter de court-circuiter les enroulements primaires du transformateur. En remplaçant  $\theta'$  par  $\frac{\pi}{3}$  dans (III.20) on obtient la valeur minimale de  $\psi$  :

$$(5 - Q\sqrt{3}) \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}) + (\sqrt{3} + 5Q) \sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}) =$$

$$2[(2Q + \sqrt{3}) \sin\psi_{\min} - (Q\sqrt{3} - 2) \cos\psi_{\min}] \frac{1 + 2e^{-\pi/3Q}}{2 + e^{-\pi/3Q}} e^{-\frac{\pi}{3Q}}$$

$$\text{ce qui donne } \psi_{\min} = \text{Arc tg } \frac{(2 + Q\sqrt{3})(1 + 2e^{\pi/3Q}) + (Q\sqrt{3} - 2)(1 + 2e^{-\pi/3Q})}{(\sqrt{3} - 2Q)(1 + 2e^{\pi/3Q}) + (2Q + \sqrt{3})(1 + 2e^{-\pi/3Q})}$$

• Lorsque la valeur de  $Q$  est élevée, le passage d'un mode de fonctionnement à l'autre se fait lorsque  $\theta'$  devient égal à zéro. Mais pour les faibles valeurs de  $Q$ , ce passage se fait avant l'annulation de  $\theta'$ , car les courants dans les 3 thyristors conducteurs s'annulent simultanément pour une valeur positive de  $\theta'$  : on a ainsi vu que, dans le cas d'une charge purement résistive,  $\theta'$  ne peut pas descendre en dessous de  $19,1^\circ$  car on passe alors au fonctionnement à 2 ou 0 thyristors conducteurs.

Pour rester dans le mode de fonctionnement à 3 ou 2 redresseurs passants il faut que, lorsque 2 thyristors sont conducteurs, le courant dans ces thyristors soit encore positif à l'instant où on amorce le troisième thyristor. Donc, si  $Th'_A$  et  $Th'_B$  conduisent, il faut que  $is_A = is_B$  soit positif pour  $\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}$ , quand le thyristor  $Th'_C$  est amorcé.

Cette condition s'écrit :

$$is_A(\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2(1 + Q^2)} \frac{V_m}{nR} [\sin(\psi + \frac{\pi}{2}) - Q \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) - J_A e^{-\frac{\psi + \frac{\pi}{3}}{Q}}] \geq 0$$

La valeur maximale de  $\psi$  est donc solution de l'équation :

$$\sin(\psi_{\max} + \frac{\pi}{2}) - Q \cos(\psi_{\max} + \frac{\pi}{2}) - J_A e^{-\frac{\psi_{\max} + \frac{\pi}{3}}{Q}} = 0$$

$$\text{ce qui donne } \psi_{\max} = \text{Arc tg } \frac{(Q\sqrt{3}-1) e^{-\frac{\pi}{3Q}} + 2}{(Q+\sqrt{3}) e^{-\frac{\pi}{3Q}} - 2Q}$$

Si  $\psi$  dépasse cette valeur, on retrouve un fonctionnement à 2 ou 0 thyristors passants.

• On a tracé dans la partie supérieure de la planche III.1. pour différentes valeurs de  $\cos\varphi'$ , les variations de  $\theta'$  en fonction de  $\psi$ . On constate que, pour les valeurs de  $\cos\varphi'$  voisines de 1, le passage d'un mode de fonctionnement à l'autre se fait pour une valeur de  $\theta'$  différente de zéro.

La figure III.1.5.b donne les diagrammes de conduction des différents redresseurs et les formes d'ondes des tensions  $v_{s_A}$ ,  $v_{Th_A}$  et des courants  $i_A$ ,  $i_{s_A}$  pour  $\cos\varphi' = 0,5$  et  $\psi = 90^\circ$ .

### III. CARACTERISTIQUES

#### III.1. Analyse harmonique et valeur efficace des tensions secondaires

La somme des 3 tensions de sortie étant toujours nulle, il n'y aura pas d'harmonique multiple de 3 dans la décomposition en série de Fourier de ces tensions.

En outre, le principe de la multiplication par 2 élimine tous les harmoniques d'ordre impair. On ne trouvera donc dans la décomposition en série de Fourier des tensions de sortie que des harmoniques pairs non multiples de 3.

##### III.1.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs

Au cours d'une période, la tension de sortie  $v_{s_A}$  a successivement les expressions suivantes :

$$\text{- pour } \psi < \omega t < \psi + \theta \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{- pour } \psi + \theta < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3} \quad v_{s_A} = 0$$

$$\text{- pour } \psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{\pi}{3} \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$$

$$\text{- pour } \psi + \theta + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3} \quad v_{s_A} = 0$$

$$- \text{ pour } \psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t$$

$$- \text{ pour } \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi \quad v_{s_A} = 0$$

Le calcul des termes en sinus du développement de  $v_{s_A}$  en série de Fourier par

$$A'_P = \frac{2}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\pi} v_{s_A} \sin 2p\omega t \, d\omega t$$

$$\text{donne } A'_P = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\sin[(2p-1)(\psi+\theta) - \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p-1)\psi - \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin[(2p+1)(\psi+\theta) + \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p+1)\psi + \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin[(2p-1)(\psi+\theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p-1)(\psi + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin[(2p+1)(\psi+\theta + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p+1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \right) \right. \\ \left. - \frac{\cos[(2p+1)(\psi+\theta + \frac{2\pi}{3})] - \cos[(2p+1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p+1} \right. \\ \left. - \frac{\cos[(2p-1)(\psi+\theta + \frac{2\pi}{3})] - \cos[(2p-1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p-1} \right\}$$

et le calcul des termes en cosinus par

$$B'_P = \frac{2}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\pi} v_{s_A} \cos 2p\omega t \, d\omega t$$

$$\begin{aligned}
\text{donne } B'_p = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{\pi} & \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{-\cos[(2p+1)(\psi+\theta) + \frac{\pi}{6}] + \cos[(2p+1)\psi + \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \right. \right. \\
& + \left. \frac{\cos[(2p-1)(\psi+\theta) + \frac{\pi}{6}] - \cos[(2p-1)\psi + \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{-\cos[(2p+1)(\psi+\theta + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] + \cos[(2p+1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \right. \\
& + \left. \frac{\cos[(2p-1)(\psi+\theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] - \cos[(2p-1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right) \\
& + \frac{\sin[(2p+1)(\psi+\theta + \frac{2\pi}{3})] - \sin[(2p+1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p+1} \\
& \left. + \frac{\sin[(2p-1)(\psi+\theta + \frac{2\pi}{3})] - \sin[(2p-1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p-1} \right\}
\end{aligned}$$

La valeur efficace de  $v_{s_A}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
V_S^2 &= \frac{V_m^2}{n^2} \cdot \frac{1}{\pi} \left[ \frac{3}{4} \int_{\psi}^{\psi+\theta} \sin^2(\omega t + \frac{\pi}{6}) d\omega t + \frac{3}{4} \int_{\psi+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\theta+\frac{\pi}{3}} \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{6}) d\omega t + 3 \int_{\psi+\frac{2\pi}{3}}^{\psi+\theta+\frac{2\pi}{3}} \cos^2 \omega t d\omega t \right] \\
&= \frac{V_m^2}{n^2} \cdot \frac{9}{4\pi} \left[ \theta - \sin\theta \cos(2\psi + \theta + \frac{\pi}{3}) \right]
\end{aligned}$$

### III.1.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs

Au cours d'une période, la tension de sortie  $v_{s_A}$  a pour expressions successives :

$$\begin{aligned}
- \text{ pour } \psi < \omega t < \psi + \theta' & \quad v_{s_A} = -\frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t \\
- \text{ pour } \psi + \theta' < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3} & \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \\
- \text{ pour } \psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{\pi}{3} & \quad v_{s_A} = 3 \frac{V_m}{n} \sin \omega t \\
- \text{ pour } \psi + \theta' + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3} & \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) \\
- \text{ pour } \psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{2\pi}{3} & \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t \\
- \text{ pour } \psi + \theta' + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi & \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t
\end{aligned}$$

On peut simplifier les calculs qui vont suivre en notant que

$$- \text{ pour } \psi + \pi < \omega t < \psi + \theta' + \pi \quad v_{s_A} = \frac{V_m}{n} \sqrt{3} \cos \omega t$$

et donc que  $v_{s_A}$  garde la même expression lorsque  $\omega t$  varie de  $\psi + \frac{2\pi}{3}$  à  $\psi + \theta' + \pi$ .

Ainsi, dans le développement de  $v_{s_A}$  en série de Fourier, le calcul des termes en sinus par :

$$A'_p = \frac{2}{\pi} \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\pi+\theta'} v_{s_A} \sin 2p\omega t \, d\omega t$$

$$\begin{aligned}
\text{donne } A'_p = \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{\pi} & \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\sin[(2p-1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p-1)(\psi + \theta') - \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sin[(2p+1)(\psi + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p+1)(\psi + \theta') + \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \right) \right. \\
& + \sqrt{3} \left( \frac{\sin[(2p-1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3})] - \sin[(2p-1)(\psi + \frac{\pi}{3})]}{2p-1} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sin[(2p+1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3})] - \sin[(2p+1)(\psi + \frac{\pi}{3})]}{2p+1} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin[(2p-1)(\psi + \frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p-1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right. \\
& \quad - \frac{\sin[(2p+1)(\psi + \frac{2\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] - \sin[(2p+1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \\
& \quad - \frac{\cos[(2p+1)(\psi + \theta' + \pi)] - \cos[(2p+1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p+1} \\
& \quad \left. - \frac{\cos[(2p-1)(\psi + \theta' + \pi)] - \cos[(2p-1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p-1} \right)
\end{aligned}$$

Le calcul des termes en cosinus par :

$$\begin{aligned}
B'_p &= \frac{2}{\pi} \int_{\psi + \theta'}^{\psi + \pi + \theta'} v s_A \cos 2p\omega t \, d\omega t \\
\text{donne } B'_p &= \frac{V_m}{n} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\cos[(2p-1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] - \cos[(2p-1)(\psi + \theta') - \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right) \right. \\
& \quad - \frac{\cos[(2p+1)(\psi + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] - \cos[(2p+1)(\psi + \theta') + \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \\
& \quad + \sqrt{3} \left( \frac{\cos[(2p-1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3})] - \cos[(2p-1)(\psi + \frac{\pi}{3})]}{2p-1} \right) \\
& \quad - \frac{\cos[(2p+1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3})] - \cos[(2p+1)(\psi + \frac{\pi}{3})]}{2p+1} \\
& \quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\cos[(2p-1)(\psi + \frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] - \cos[(2p-1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}]}{2p-1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos[(2p+1)(\psi + \frac{2\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] - \cos[(2p+1)(\psi + \theta' + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}]}{2p+1} \right) \\
& \quad + \frac{\sin[(2p+1)(\psi + \theta' + \pi)] - \sin[(2p+1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p+1} \\
& \quad \left. - \frac{\sin[(2p-1)(\psi + \theta' + \pi)] - \sin[(2p-1)(\psi + \frac{2\pi}{3})]}{2p-1} \right\}
\end{aligned}$$

La valeur efficace de la tension  $v_{S_A}$  est donnée par :

$$V_S^2 = \frac{V_m^2}{n^2} \cdot \frac{1}{\pi} \left[ \frac{3}{4} \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\pi/3} \sin^2(\omega t + \frac{\pi}{6}) d\omega t + 9 \int_{\psi+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\pi/3} \sin^2 \omega t d\omega t + \frac{3}{4} \int_{\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\frac{2\pi}{3}} \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{6}) d\omega t \right. \\ \left. + 3 \int_{\psi+\frac{2\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\pi} \cos^2 \omega t d\omega t \right] \\ = \frac{V_m^2}{n^2} \frac{3}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi}{4} + 7 \frac{\theta'}{4} - \left[ \frac{1}{4} \sin(\frac{\pi}{3} - \theta') + \frac{3}{2} \sin \theta' \right] \cos(2\psi + \theta' + \frac{2\pi}{3}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3} + \theta') \cos(2\psi + \theta' + \frac{5\pi}{3}) \right\}$$

Pour  $\theta' = \frac{\pi}{3}$  et  $\psi = \psi_{\min}$ , on obtient :

$$V_{S_{\max}}^2 = \frac{V_m^2}{n^2} \left( \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\psi_{\min} \right)$$

### III.1.3. Caractéristiques

Sur la planche III.2. les notations suivantes ont été utilisées :

- $n = \frac{n_1}{2n_2}$  rapport de transformation du transformateur,
- $V$  = valeur efficace de la tension simple d'alimentation  $v_A$ ,
- $V_S$  : valeur efficace de la tension de sortie  $v_{S_A}$ ,
- $V_{S_1}$ ,  $V_{S_2}$ ,  $V_{S_4}$  : valeurs efficaces du fondamental et des harmoniques 2 et 4 de  $v_{S_A}$ .

Ces caractéristiques montrent que, pour obtenir un bon fonctionnement du montage en multiplicateur par 2, c'est-à-dire pour avoir un terme de fréquence  $2f$  d'amplitude bien supérieure à celle de ses harmoniques, il faut utiliser la zone de fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs en donnant à l'angle d'amorçage  $\psi$  une valeur aussi proche que possible de sa valeur minimale. Le passage d'un type de fonctionnement à l'autre est indiqué par un trait gras vertical sur ces caractéristiques.

La planche III.3. donne les variations de la valeur efficace de la tension de sortie ramenée à  $V/n$ , en fonction de  $\psi$ .

### III.2. Courants secondaires

#### III.2.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs

Au cours d'une période, le courant de sortie  $i_{s_A}$  a pour expression successives :

$$\begin{aligned}
 & \text{- pour } \psi < \omega t < \psi + \theta & i_{s_A} &= \frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{V_m}{n} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right] \\
 & \text{- pour } \psi + \theta < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3} & i_{s_A} &= 0 \\
 & \text{- pour } \psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{\pi}{3} & i_{s_A} &= \frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{V_m}{n} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t - \frac{\pi}{3}}{Q}} \right] \\
 & \text{- pour } \psi + \theta + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3} & i_{s_A} &= 0 \\
 & \text{- pour } \psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} & i_{s_A} &= \frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{V_m}{n} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \cos \omega t + Q \sin \omega t + J_A e^{-\frac{\omega t - \frac{2\pi}{3}}{Q}} \right] \\
 & \text{- pour } \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi & i_{s_A} &= 0
 \end{aligned}$$

La valeur efficace de  $i_{s_A}$  s'obtient à partir de

$$\begin{aligned}
 I_S^2 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\psi}^{\psi+\theta} i_{s_A}^2 dt + \int_{\psi+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\theta+\frac{\pi}{3}} i_{s_A}^2 dt + \int_{\psi+\frac{2\pi}{3}}^{\psi+\theta+\frac{2\pi}{3}} i_{s_A}^2 dt \right] \\
 &= \frac{6}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\theta} i_{s_A}^2 dt
 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$I_S^2 = \frac{9}{2} \frac{V_m^2}{n^2 Z'^2} \frac{1+4Q^2}{1+Q} \left\{ \frac{\theta}{2}(1+Q^2) - \frac{1-Q^2}{2} \sin\theta \cos(2\psi + \theta + \frac{\pi}{3}) \right. \\ \left. - Q \sin\theta \sin(2\psi + \theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{Q}{2} J_A^2 e^{-\frac{2\pi}{Q}} (1 - e^{-\frac{2\theta}{Q}}) \right. \\ \left. + 2 J_A Q e^{-\frac{\psi}{Q}} \left[ e^{-\frac{\theta}{Q}} \sin(\psi + \theta + \frac{\pi}{6}) - \sin(\psi + \frac{\pi}{6}) \right] \right\}$$

$$\text{avec } Z' = \sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2} = R \sqrt{1+4Q^2}$$

### III.2.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs

Au cours d'une période le courant de sortie est donné par les expressions :

$$\begin{aligned} - \text{pour } \psi < \omega t < \psi + \theta' & \quad i_{s_A} = \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} (\cos\omega t + Q\sin\omega t + J'_A e^{-\frac{\omega t}{Q}}) \\ - \text{pour } \psi + \theta' < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3} & \quad i_{s_A} = \frac{\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{nR} [\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J'_A e^{-\frac{\omega t}{Q}}] \\ - \text{pour } \psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{\pi}{3} & \quad i_{s_A} = \frac{3}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} [\sin\omega t - Q\cos\omega t - J'_B e^{-\frac{\omega t - \pi/3}{Q}}] \\ - \text{pour } \psi + \theta' + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3} & \quad i_{s_A} = \frac{\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{nR} [\sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q\cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) - J'_B e^{-\frac{\omega t - \pi/3}{Q}}] \\ - \text{pour } \psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{2\pi}{3} & \quad i_{s_A} = \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} [\cos\omega t + Q\sin\omega t - J'_C e^{-\frac{\omega t - 2\pi/3}{Q}}] \\ - \text{pour } \psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi & \quad i_{s_A} = \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} [\cos\omega t + Q\sin\omega t - J'_C e^{-\frac{\omega t - 2\pi/3}{Q}}] \end{aligned}$$

On peut en outre remarquer que

$$- \text{pour } \psi + \pi < \omega t < \psi + \theta' + \pi \quad i_{s_A} = \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{nR} (\cos\omega t + Q \sin\omega t + J'_A e^{-\frac{\omega t - \pi}{Q}})$$

et que puisque  $J'_C = J'_C = -J'_A$  et que  $J'_A = -J'_A e^{-\frac{\pi}{3Q}}$ , l'expression de  $i_{s_A}$

reste la même pour  $\omega t$  compris entre  $\psi + \frac{2\pi}{3}$  et  $\psi + \theta' + \pi$ .

La valeur efficace du courant de sortie  $i_{sA}$  peut donc s'obtenir à partir de :

$$I_S^2 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\frac{\pi}{3}} i_{sA}^2 dt + \int_{\psi+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}} i_{sA}^2 dt + \int_{\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\frac{2\pi}{3}} i_{sA}^2 dt + \int_{\psi+\frac{2\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\pi} i_{sA}^2 dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ 2 \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\frac{\pi}{3}} i_{sA}^2 dt + \int_{\psi+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}} i_{sA}^2 dt + \int_{\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\pi} i_{sA}^2 dt \right]$$

ce qui donne :

$$I_S^2 = \frac{3}{\pi} \frac{V_m^2}{n^2 Z'^2} \frac{1+4Q^2}{1+Q^2} \left\{ (1+Q^2) \cdot \frac{\pi-7\theta'}{4} \right.$$

$$- \left[ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta'\right) + 3 \sin\theta' - \sin\left(\theta' - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \left[ \frac{1-Q^2}{2} \cos\left(2\psi+\theta'+\frac{2\pi}{3}\right) + Q \sin\left(2\psi+\theta'+\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$- J_A^2 \frac{Q}{2} e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left[ \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{2\psi}{3Q}} - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \right) - \left( 1 + e^{-\frac{\pi}{3Q}} \right)^2 \left( 1 - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \right) - \left( 1 - e^{-\frac{2\theta'+2\pi/3}{Q}} \right) \right]$$

$$+ 2 J_A Q e^{-\frac{\psi}{Q}} \left[ \frac{1}{2} e^{-\frac{\psi}{3Q}} \cos\psi - \frac{1}{2} e^{-\frac{\theta'}{Q}} \sin\left(\psi+\theta'+\frac{\pi}{6}\right) \right.$$

$$+ \sqrt{3} \left( 1 + e^{-\frac{\pi}{3Q}} \right) \left[ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \sin\left(\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\psi+\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$\left. \left. - e^{-\frac{\theta'+\pi/3}{Q}} \cos\left(\psi+\theta'\right) - \cos\left(\psi+\frac{2\pi}{3}\right) \right] \right\}$$

Lorsque  $\theta' = \frac{\pi}{3}$  et  $\psi = \psi_{\min}$ , on obtient

$$I_{S_{\max}}^2 = \frac{3}{\pi} \frac{V_m^2}{n^2 Z'^2} \frac{1+4Q^2}{1+Q^2} \left\{ -(1+Q^2) \frac{\pi}{3} + (1-Q^2) \sqrt{3} \cos 2\psi_{\min} + 2Q \sqrt{3} \sin 2\psi_{\min} \right.$$

$$+ J_A^2 Q e^{-\frac{2\psi_{\min}}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{\pi}{Q}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{\pi}{3Q}} \right)$$

$$\left. - 2J_A Q e^{-\frac{\psi_{\min}}{Q}} \left[ \sqrt{3} \sin\psi_{\min} e^{-\frac{\pi}{3Q}} + \cos\psi_{\min} \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{3Q}} \right) \right] \right\}$$

On a tracé sur la planche III.4. les variations de  $I_{S_{\text{maxi}}}$  ramené à  $V/nZ'$  en fonction de  $\cos\phi'$ , en trait continu. On a rappelé en pointillé les variations de  $nV_{S_{\text{maxi}}}/V$ .

### III.3. Courants en ligne

#### III.3.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs

Les courants en ligne fournis par la source de fréquence  $f$  ont la même période que les tensions de celle-ci.

Au cours d'une période, le courant  $i_A$  a successivement pour expressions :

- pour $\psi < \omega t < \psi + \theta$	$i_A = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3}$	$i_A = 0$
- pour $\psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{\pi}{3}$	$i_A = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t - \pi/3}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi$	$i_A = 0$
- pour $\psi + \pi < \omega t < \psi + \theta + \pi$	$i_A = -\frac{3\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t - \pi}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta + \pi < \omega t < \psi + \frac{4\pi}{3}$	$i_A = 0$
- pour $\psi + \frac{4\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{4\pi}{3}$	$i_A = -\frac{3\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t - 4\pi/3}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta + \frac{4\pi}{3} < \omega t < \psi + 2\pi$	$i_A = 0$

Grâce à la symétrie des alternances positive et négative de  $i_A$ , et à celles des 2 moitiés de chaque alternance, la valeur efficace  $I$  du courant en ligne  $i_A$  est donnée par

$$I^2 = \frac{2}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\theta} i_A^2 d\omega t$$

$$= \frac{3}{n} I_S^2$$

Pour ce type de fonctionnement, on aura donc :

$$I = \frac{\sqrt{3}}{n} I_S$$

### III.3.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs

• Pendant l'intervalle où les thyristors  $Th_A$ ,  $Th_B$  et  $Th_C$  sont conducteurs les courants en ligne primaires ont pour expressions

$$i_A = \frac{i_{s_B} - i_{s_C}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ (\sqrt{3}+2Q) \sin\omega t + (2-Q\sqrt{3}) \cos\omega t - J_A (2e^{-\frac{\pi}{3Q}}) e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

$$i_B = -3 \frac{i_{s_B}}{n}$$

$$= -\frac{9}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ (1+Q\sqrt{3}) \sin\omega t + (\sqrt{3}-Q) \cos\omega t - \frac{2}{\sqrt{3}} J_A (1e^{-\frac{\pi}{3Q}}) e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

$$i_C = \frac{i_{s_B} - i_{s_A}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ (5Q+\sqrt{3}) \sin\omega t + (5-Q\sqrt{3}) \cos\omega t - 2J_A (1+2e^{-\frac{\pi}{3Q}}) e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

• Pendant une demi période de la tension d'alimentation, le courant en ligne primaire  $i_A$  a successivement pour expressions :

- pour  $\psi < \omega t < \psi + \theta'$

$$i_A = \frac{\sqrt{3}}{1+Q^2} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ (\sqrt{3}+2Q) \sin \omega t + (2-Q\sqrt{3}) \cos \omega t - J_A (2 + e^{-\frac{\pi}{3Q}}) e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

- pour  $\psi + \theta' < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3}$

$$i_A = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

- pour  $\psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{\pi}{3}$

$$i_A = \frac{9}{2(1+Q^2)} \cdot \frac{V_m}{n^2 R} \left[ (1+Q\sqrt{3}) \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) + (\sqrt{3}-Q) \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}} J_A (1 + e^{-\frac{\pi}{3Q}}) e^{-\frac{\omega t - \pi/3}{Q}} \right]$$

- pour  $\psi + \theta' + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3}$

$$i_A = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \cdot \frac{V_m}{n^2 R} \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) - J_A e^{-\frac{\omega t - \pi/3}{Q}} \right]$$

- pour  $\psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{2\pi}{3}$

$$i_A = \frac{\sqrt{3}}{2(1+Q^2)} \frac{V_m}{n^2 R} \left[ (5Q+\sqrt{3}) \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + (5Q-\sqrt{3}) \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - 2J_A (1 + 2e^{-\frac{\pi}{3Q}}) e^{-\frac{\omega t - 2\pi/3}{Q}} \right]$$

- pour  $\psi + \theta' + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi$

$$i_A = 0$$

• La valeur efficace I du courant en ligne primaire  $i_A$  s'obtient à partir de :

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\psi}^{\psi+\theta'} i_A^2 d\omega t + \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\frac{\pi}{3}} i_A^2 d\omega t + \int_{\psi+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}} i_A^2 d\omega t + \int_{\psi+\theta'+\frac{\pi}{3}}^{\psi+\frac{2\pi}{3}} i_A^2 d\omega t + \int_{\psi+\frac{2\pi}{3}}^{\psi+\theta'+\frac{2\pi}{3}} i_A^2 d\omega t \right]$$

qui peut s'écrire, en utilisant les relations (III.6) et (III.7)

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\psi}^{\psi+\theta'} (i_A^2 + i_B^2 + i_C^2) d\omega t + 2 \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\frac{\pi}{3}} i_A^2 d\omega t \right]$$

ce qui donne :

$$I^2 = \frac{3}{\pi} \frac{v_m^2}{n^4 Z'^2} \frac{1+4Q^2}{1+Q^2} \left\{ \frac{41}{2}(1+Q^2) \theta' + 10 \sin \theta' [(1-2\sqrt{3}Q-Q^2) \cos(2\psi+\theta') + (\sqrt{3}+2Q-3Q^2) \sin(2\psi+\theta')] + J_A^2 (7+13 e^{-\frac{\pi}{3Q}} + 7 e^{-\frac{2\pi}{3Q}}) Q e^{-\frac{2\psi}{Q}} (1 - e^{-\frac{2\theta'}{Q}}) - J_A Q e^{-\frac{\psi}{Q}} (\sqrt{3}(14+13 e^{-\frac{\pi}{3Q}}) [\sin \psi - e^{-\frac{\theta'}{Q}} \sin(\psi+\theta')]) + (40+41 e^{-\frac{\pi}{3Q}}) [\cos \psi - e^{-\frac{\theta'}{Q}} \cos(\psi+\theta')] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9}{2} \left( (1+Q^2) \left( \frac{\pi}{6} - \theta' \right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \left[ \frac{1-Q^2}{2} \cos\left(2\psi + \theta' + \frac{2\pi}{3}\right) + Q \sin\left(2\psi + \theta' + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \right. \\
& \quad - J_A^2 \frac{Q}{2} e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left( e^{-\frac{2\pi}{3Q}} - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \right) \\
& \quad \left. + 2 J_A Q e^{-\frac{\psi}{Q}} \left[ e^{-\frac{\pi}{3Q}} \cos\psi - e^{-\frac{\theta'}{Q}} \sin\left(\psi + \theta' + \frac{\pi}{6}\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Pour  $\psi = \psi_{\min}$  et  $\theta' = \frac{\pi}{3}$  on a :

$$\begin{aligned}
I_{\max}^2 &= \frac{3}{\pi} \frac{V_m^2}{n^4 Z'^2} \frac{1+4Q^2}{1+Q^2} \left\{ \frac{41}{6} (1+Q^2) \right. \\
& \quad + \frac{10\sqrt{3}}{2} \left[ (1-2\sqrt{3}Q-Q^2) \cos\left(2\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}\right) + (\sqrt{3}+2Q-\sqrt{3}Q^2) \sin\left(2\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}\right) \right] \\
& \quad + J_A^2 \left( 7 + 13 e^{-\frac{\pi}{3Q}} + 7 e^{-\frac{2\pi}{3Q}} \right) Q e^{-\frac{2\psi_{\min}}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{3Q}} \right) \\
& \quad \left. J_A Q e^{-\frac{\psi_{\min}}{Q}} \left( \sqrt{3} \left( 14 + 13 e^{-\frac{\pi}{3Q}} \right) \left[ \sin\psi_{\min} - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \sin\left(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \left( 40 + 41 e^{-\frac{\pi}{3Q}} \right) \left[ \cos\psi_{\min} - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \cos\left(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right) \right\}
\end{aligned}$$

• On a tracé en haut de la planche III.4. les variations de la valeur efficace maximale de I ramenée à  $V/n^2 Z'$ , en fonction de  $\cos\theta'$ .

### III.4. Facteur de dimensionnement des enroulements primaires

Si on néglige les pertes du transformateur, on peut définir le facteur de dimensionnement des enroulements primaires par le rapport entre la puissance apparente maximale disponible au secondaire du transformateur et la puissance apparente correspondante qu'il faut fournir au primaire.

$$f_p = \frac{3 V_{S \max} I_{S \max}}{6 V'_{\max} I'_{\max}}$$

avec  $V_{S \max}$  et  $I_{S \max}$  : valeurs efficaces maximales de la tension et du courant dans la charge

$V'_{\max}$  et  $I'_{\max}$  : valeurs efficaces maximales de la tension et du courant dans un demi-enroulement primaire.

Bien que les thyristors soient en amont du transformateur, on peut comparer ce facteur de dimensionnement des enroulements primaires au facteur d'utilisation  $f_S$  des enroulements secondaires des montages étudiés précédemment, puisqu'on néglige toutes les pertes. On a tracé en haut de la planche III.5. en trait discontinu les variations de  $f_S$  pour le meilleur des montages doubleurs de fréquence à 12 thyristors (enroulements secondaires du transformateur branchés en polygone) et en trait plein les variations de  $f_p$ .

Le courant circule dans les demi-enroulements primaires pendant toute une demi-période des tensions d'alimentation lorsque l'angle d'amorçage des thyristors est minimum : la valeur de  $f_p$  est donc relativement faible.

Elle varie très peu avec  $\cos \phi'$  et reste pratiquement égale à 0,25 : il faudra donc dimensionner le primaire du transformateur pour une puissance apparente 4 fois plus élevée que celle du secondaire.

#### Remarques :

- a) Il n'y a pas lieu ici de calculer les facteurs d'utilisation des enroulements secondaires, puisque leur puissance apparente a la même valeur que celle fournie au récepteur.
- b) Le transformateur est alimenté à la fréquence  $2f$ , ce qui permet de réduire le dimensionnement par rapport à celui d'un transformateur de même puissance apparente qui serait alimenté à la fréquence  $f$ .

### III.5. Dimensionnement et facteur d'utilisation des thyristors

#### III.5.1. Tension maximale instantanée

C'est lorsque le doubleur de fréquence débite sur une charge purement résistive et lorsque l'angle d'amorçage  $\psi$  est minimum que la ten-

sion inverse aux bornes des thyristors atteint la valeur la plus élevée.

Pour le thyristor  $Th_A$ , cette tension est maximale pour  $\omega t = \psi_{\min} + \frac{4\pi}{3}$  lorsqu'on vient d'amorcer  $Th_C$  alors que  $Th'_A$  et  $Th_B$  sont encore conducteurs.

On a alors, en utilisant les relations (III.5)

$$\begin{aligned} v_{Th_A}(\psi_{\min} + \frac{4\pi}{3}) &= v_{Th_B}(\psi_{\min}) \\ &= 6 V_m \sin(\psi_{\min} - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \psi_{\min} = \text{Arc tg}(-\frac{5}{\sqrt{3}}) - \frac{\pi}{3}$$

On obtient :

$$v_{Th_{A \max}} = -6 V_m \sin[\text{Arc tg}(-\frac{5}{\sqrt{3}})] \approx 5,67 V_m$$

### III.5.2. Courant efficace maximum

La valeur maximale du courant efficace dans un thyristor s'obtient à partir de :

$$I_{th_{\max}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\min} + \pi} i_A^2 d\omega t = \frac{1}{2} I_{\max}^2$$

$$\text{et donc } I_{th_{\max}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

### III.5.3. Facteur d'utilisation

La relation (I.4) donne l'expression générale de  $f_{th}$  qui s'écrit ici

$$f_{th} = \frac{3 V_{S_{\max}} I_{S_{\max}}}{6 v_{th_{\max}} I_{th_{\max}}}$$

Le bas de la planche III.5. donne les variations de  $f_{th}$  en fonction de  $\cos\phi'$ . On a tracé en trait discontinu les variations du facteur d'utilisation des thyristors pour le meilleur des doubleurs de fréquence à 12 thyristors. Bien que le nombre de thyristors soit ici réduit à 6, le facteur d'utilisation est sensiblement plus faible car les thyristors sont conducteurs pendant toute une demi-période des tensions d'alimentation et que la valeur maximale de la tension instantanée à leurs bornes est grande devant les tensions d'alimentation.

#### IV. APPLICATION : MULTIPLICATION PAR 2 DE LA VITESSE D'UN MOTEUR ASYNCHRONE

Nous avons utilisé ce montage pour doubler la vitesse de rotation d'un moteur asynchrone d'une puissance de 4 Ch. ( $U_{nom} = 380V$ ), en utilisant un transformateur spécial dont les enroulements primaires étaient dimensionnés en fonction des résultats obtenus au paragraphe précédent.

Les résultats et les grandeurs déduites des mesures sont indiqués sur la figure III.1.6. Pour chaque mesure l'angle d'amorçage des thyristors a été retouché afin que leur intervalle de conduction reste toujours aussi grand que possible, la tension composée efficace aux bornes du moteur reste alors toujours très voisine de  $760V$ .

Pour comparer les caractéristiques obtenues à celles du moteur alimenté à 50 Hz, nous avons relevé les caractéristiques du moteur à 50 Hz alimenté sous une tension de  $380V$ , donc égale à la moitié de celle obtenue avec le doubleur de fréquence. Ces caractéristiques figurent en pointillés sur la planche III.1.6.

On peut ainsi remarquer qu'à couple utile égal :

- le courant absorbé par le moteur à 100 Hz est un peu plus important qu'à 50 Hz.
- le glissement à 100 Hz est sensiblement égal à la moitié de celui obtenu à 50 Hz.
- la puissance utile à 100 Hz est sensiblement égale au double de celle mesurée à 50 Hz.

Les variations du facteur d'utilisation des enroulements primaires sont tout à fait compatibles avec celles obtenues à la planche III.5. Avec une tension composée d'alimentation de  $380V$ , la tension maximale instantanée aux bornes des thyristors ne dépasse jamais  $1000V$ , alors que la valeur théorique serait de  $1765V$  pour une charge purement résistive : en fait dès qu'on s'écarte de  $\cos\phi' = 1$  la valeur maximale de la tension instantanée aux bornes des thyristors diminue rapidement.

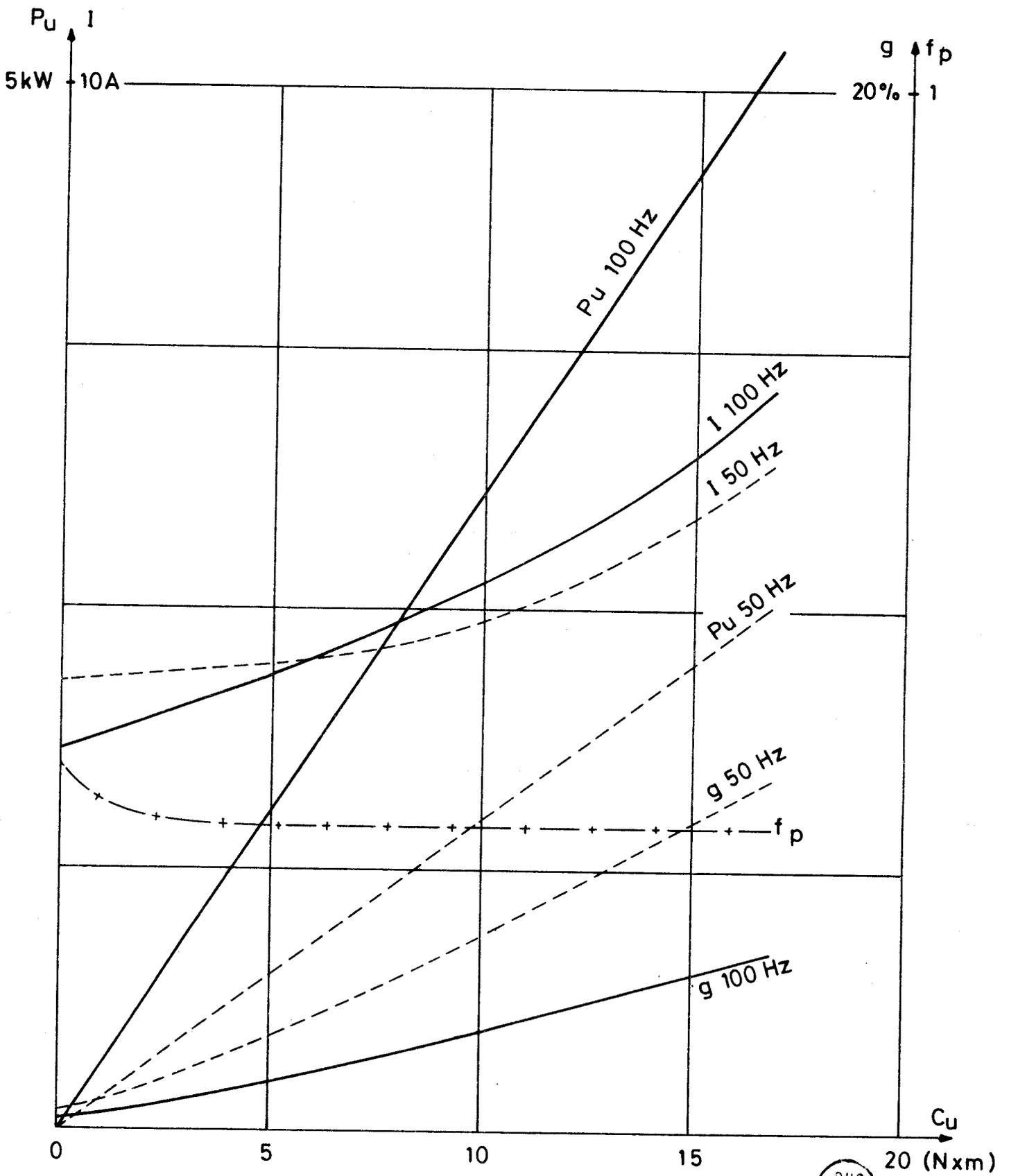


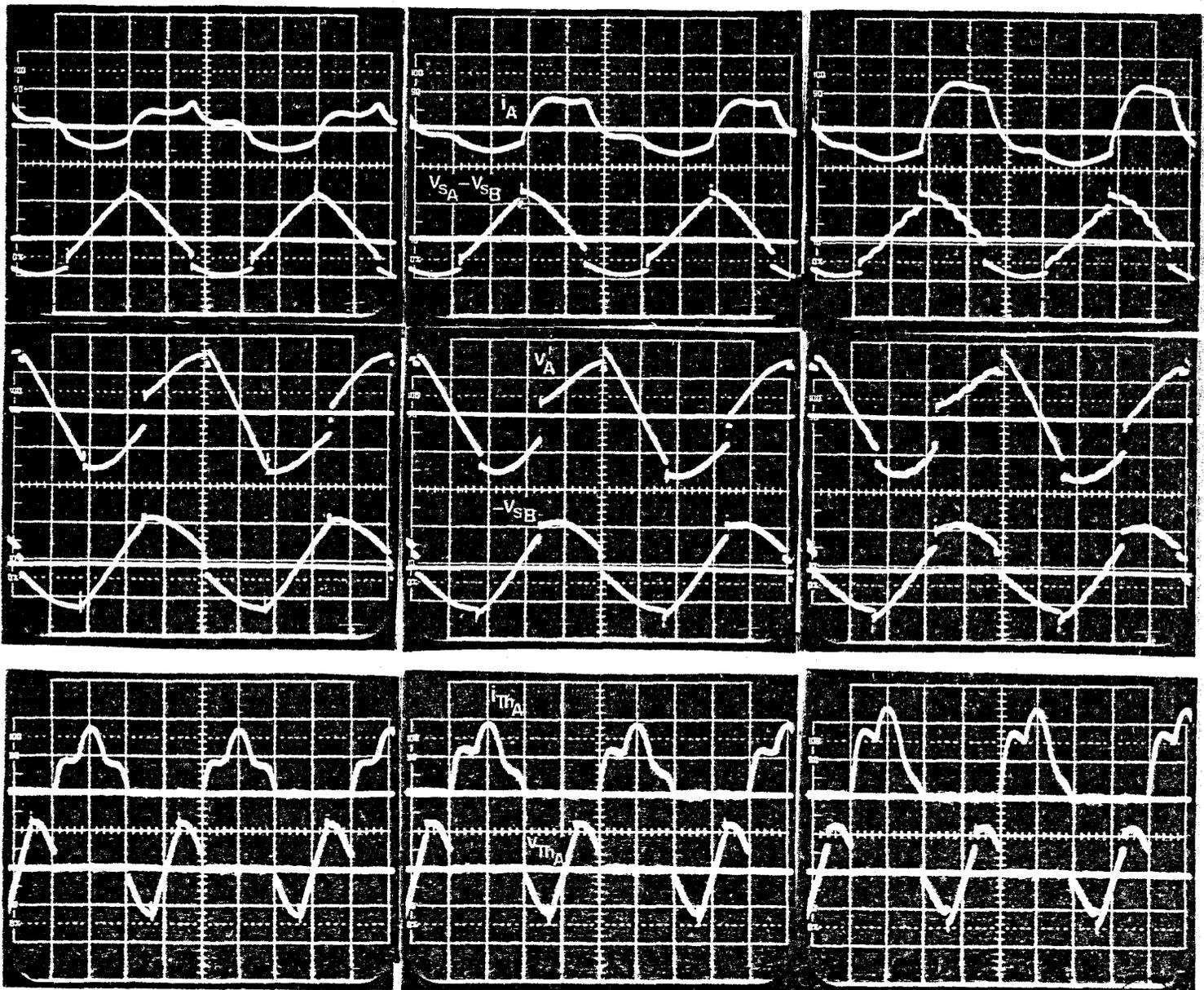
FIG. III.1.6

La figure II.1.7. donne des exemples de relevés de formes d'ondes lors du fonctionnement:

à vide (clichés de gauche),  
à demi-charge (clichés du centre),  
à pleine charge (clichés de droite).

Pour chaque fonctionnement on trouve de haut en bas les formes d'ondes

- du courant dans le moteur et de la tension à ses bornes,
- des tensions primaires et secondaires du transformateur,
- du courant dans un thyristor et de la tension à ses bornes (avec une échelle des temps multipliée par deux).



- à vide

- à demi-charge

- à pleine charge

De haut en bas:  $i_A$  ( $10^A/\text{div}$ ),  $v_S - v_B$  ( $1000^V/\text{div}$ ),  $v'_A$  ( $200^V/\text{div}$ ),  $-v_{SB}$  ( $500^V/\text{div}$ ),  
 $i_{ThA}$  ( $25^A/\text{div}$ ),  $v_{ThA}$  ( $500^V/\text{div}$ ).

FIG. III.1.7

## V. CONCLUSION

Le principal avantage de ce montage réside dans la diminution de moitié du nombre de thyristors nécessaires par rapport aux doubleurs de fréquence rencontrés jusqu'ici.

On peut trouver un autre avantage dans le fait que la tension maximale instantanée aux bornes des thyristors ne dépend que de la valeur maximale des tensions simples de la source.

Mais ce montage nécessite un transformateur spécial, le primaire étant fortement surdimensionné par rapport au secondaire.

En outre, par rapport aux montages précédents, le rang et l'importance relative des harmoniques au voisinage de  $\psi_{\text{mini}}$  sont plus élevés, et le facteur d'utilisation des thyristors est plus faible.

\*\*\*\*\*  
 \* CHAPITRE II \*  
 \*\*\*\*\*

DOUBLEUR DE FREQUENCE TRIPHASE A 3 GRADATEURS  
 MIXTES EN AVAL DU TRANSFORMATEUR

Le procédé de multiplication par deux de la fréquence que nous étudions dans ce chapitre a déjà été présenté [31] aussi nous limiterons-nous à un rappel du principe de fonctionnement du montage. Nous déterminerons ensuite les caractéristiques qui permettront de le situer par rapport aux autres doubleurs de fréquence étudiés précédemment.

Deux remarques ont été à l'origine de l'élaboration du schéma de ce montage :

- un gradateur triphasé mixte délivre des tensions contenant, outre le fondamental, tous les harmoniques pairs ou impairs sauf ceux de rang 3 ou multiple de 3. L'harmonique 2 présente, pour certaines valeurs de l'angle de retard au débloqué des thyristors, une importance relative très grande.

- si on ajoute deux tensions identiques, mais décalées entre-elles d'une demi-période, dans la somme le fondamental et tous les harmoniques impairs disparaissent ; seuls s'ajoutent les harmoniques pairs.

## I. DESCRIPTION ET FONCTIONNEMENT

Le montage est indiqué à la figure III.2.1. Il comporte :

- un transformateur triphasé alimenté par des tensions à la fréquence  $f$  de la source. Il y a deux secondaires par phase de façon à disposer de deux systèmes triphasés équilibrés  $v_{s_A}$ ,  $v_{s_B}$ ,  $v_{s_C}$  et  $-v_{s_A}$ ,  $-v_{s_B}$ ,  $-v_{s_C}$ .

- deux gradateurs triphasés mixtes, chacun à trois diodes et trois thyristors. Le premier, formé par l'ensemble  $Th_A, D_A, Th_B, D_B, Th_C, D_C$  est alimenté par  $v_{sA}, v_{sB}, v_{sC}$  le second, formé par l'ensemble  $Th'_A, D'_A, Th'_B, D'_B, Th'_C, D'_C$  est alimenté par  $-v_{sA}, -v_{sB}, -v_{sC}$

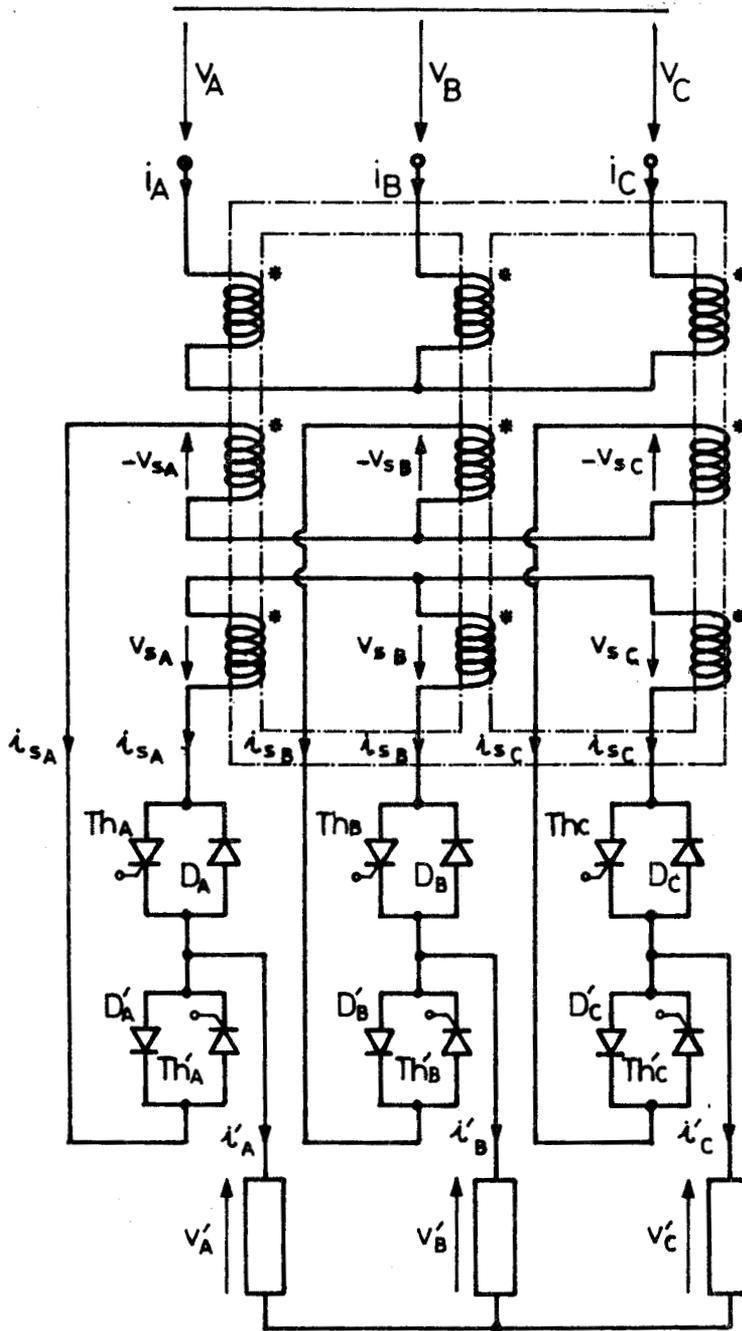


FIG. III.2.1

Les sorties des deux gradateurs triphasés mixtes sont réunies deux à deux et reliées aux trois bornes du récepteur. Les thyristors sont débloqués de sixième de période en sixième de période dans l'ordre suivant :  $Th_A$ ,  $Th'_C$ ,  $Th_B$ ,  $Th'_A$ ,  $Th_C$ ,  $Th'_B$ .

On désignera par  $\psi$  l'angle d'amorçage du thyristor  $Th_A$ .

### I.1. Conduction des diodes

Lorsqu'aucun des thyristors ne conduit, on admet que leurs faibles courants de fuite se bouclent, pour chaque ensemble, par celle des trois diodes dont la conduction rend négative la tension anode-cathode des deux autres.

Il y a donc dans chaque ensemble une diode prête à conduire sitôt qu'on amorcera l'un des deux thyristors qui ne lui sont pas associés.

La figure III.2.2. indique les tensions aux bornes des diodes quand aucun thyristor ne conduit. Si c'est la diode  $D_A$  qui écoule les courants de fuite des thyristors du premier ensemble, on a :

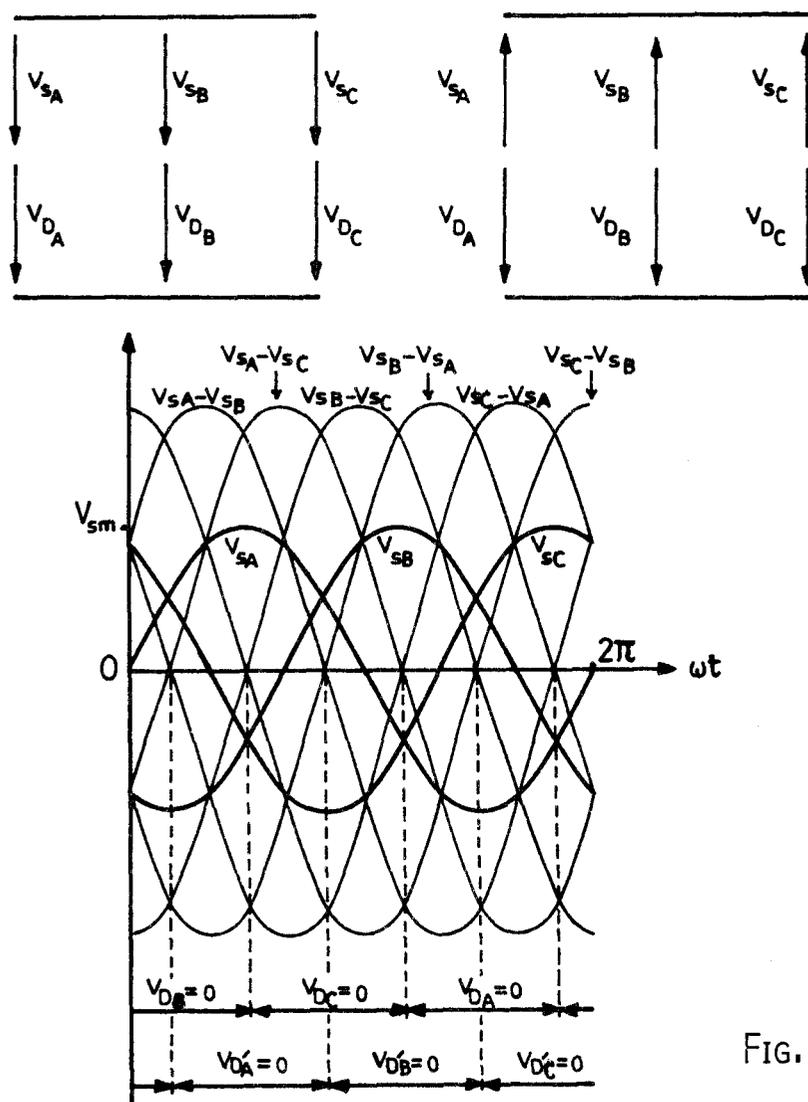


FIG. III.2.2

$$v_{DA} = 0$$

$$v_{DB} = v_{sA} - v_{sB}$$

$$v_{DC} = v_{sA} - v_{sC}$$

Pour que les tensions  $v_{DB}$  et  $v_{DC}$  soient effectivement négatives il faut que  $\omega t$  soit compris entre  $7\pi/6$  et  $11\pi/6$ . On procède de la même façon pour les cinq autres diodes.

## I.2. Conduction des thyristors

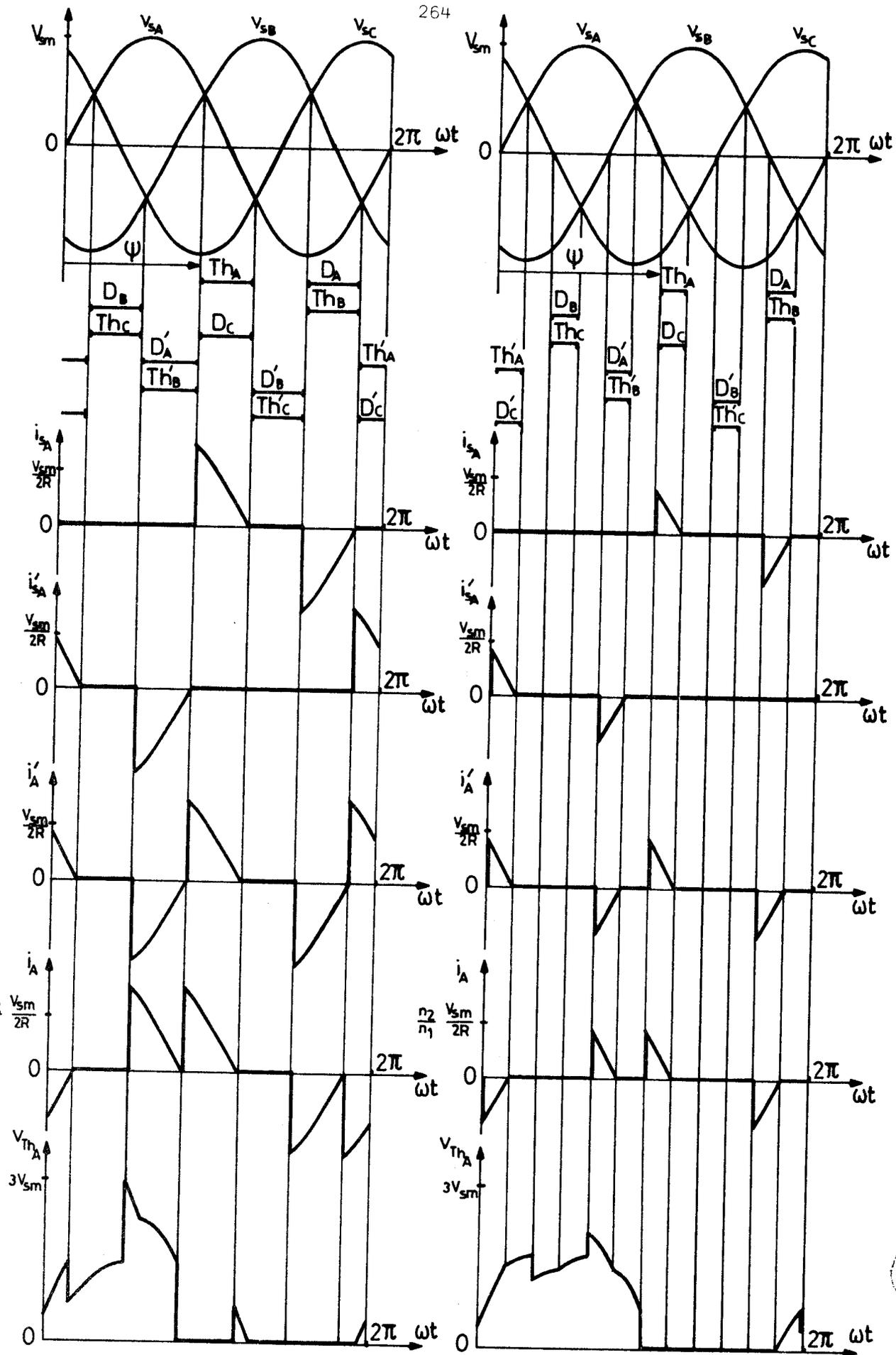
Pour  $\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{7\pi}{6}$ , la diode  $D_C$  conduit : on peut amorcer les thyristors  $Th_A$  ou  $Th_B$ .

Si on amorce  $Th_A$  lorsque  $\omega t$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{5\pi}{6}$ , dans le second ensemble la diode  $D'_A$  est alors conductrice, ainsi que  $Th'_B$  qui a été amorcé un sixième de période avant  $Th_A$ . La conduction de  $Th_A$  rend la tension entre les points neutres des deux étoiles formées par les enroulements secondaires égale à  $2 v_{sA} > 0$ . Mais cette tension est appliquée, par l'intermédiaire de  $Th'_B$ , entre l'anode et la cathode de  $D_B$  qui se met à conduire et court-circuite les enroulements des noyaux A et B du transformateur.

Donc lorsque  $D_C$  conduit, il ne faut amorcer  $Th_A$  qu'après l'extinction de  $D'_A$  qui correspond à  $\omega t = 5\pi/6$ . La valeur minimale de l'angle de retard au débloqué des thyristors est donc  $\psi_{\text{mini}} = 5\pi/6$ , quelle que soit la charge.

## I.3. Fonctionnement sur charge résistive

La figure III.2.3. montre les formes d'ondes des courants et des tensions aux bornes des thyristors lors du débit sur un récepteur formé de trois résistances d'égale valeur  $R$ , pour  $\psi = \frac{5\pi}{6}$  et  $\psi = \pi$ . L'amplitude des tensions secondaires est désignée par  $V_{sm}$ .



a)

FIG. III.2.3

b)



Quand  $Th_A$  et  $D_C$  conduisent :

$$v'_A = -v'_C = (vs_A - vs_C)/2$$

$$v'_B = 0$$

Quand  $Th'_B$  et  $D'_B$  conduisent :

$$v'_A = 0$$

$$v'_B = -v'_C = (vs_C - vs_B)/2$$

Quand  $Th_B$  et  $D_A$  conduisent :

$$v'_A = -v'_B = (vs_A - vs_B)/2$$

$$v'_C = 0 \dots$$

$Th_A$  ne peut pas être amorcé avant  $\omega t = \frac{5\pi}{6}$ , qui correspond à l'extinction de  $Th'_B$  : sur charge purement résistive, les deux gradateurs triphasés mixtes ne conduisent jamais simultanément.

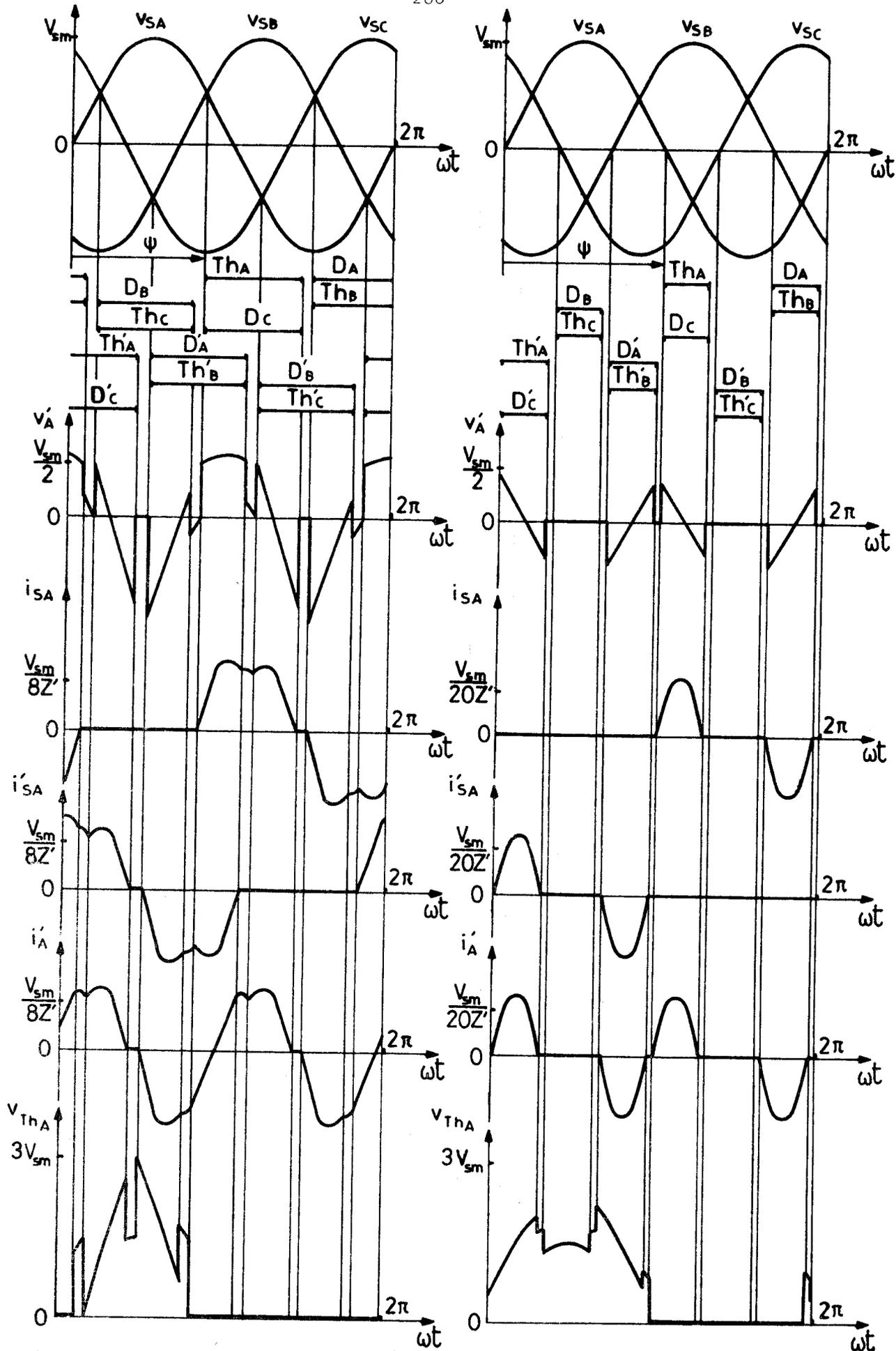
#### I.4. Fonctionnement sur charge résistante et inductive

Si chaque phase du récepteur est formée d'une résistance  $R$  et d'une inductance  $L$ , lorsque  $\psi$  varie de  $\frac{5\pi}{6}$  à  $\frac{7\pi}{6}$  on rencontre deux modes de fonctionnement :

- le premier mode, pour  $\frac{5\pi}{6} < \psi < \psi_\ell$  correspond au débit simultané des deux gradateurs triphasés mixtes pendant certains intervalles.

La figure III.2.4.a correspond à ce cas et donne pour  $\psi = \frac{5\pi}{6}$  et  $\cos\varphi' = 0,3$  les formes d'ondes :

- de la tension  $v'_A$  aux bornes d'une phase de la charge,
- du courant  $i'_A$  dans une phase de la charge,
- des courants  $is_A$  et  $is'_A$  dans les enroulements secondaires du transformateur,



a)

FIG. III.2.4

b)



- de la tension  $v_{Th_A}$  entre l'anode et la cathode du thyristor  $Th_A$ .

On a posé  $Z' = \sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}$  et  $\text{tg } \varphi' = \frac{2L\omega}{R}$ .

• le second mode, pour  $\psi_\ell < \psi < \frac{7\pi}{6}$  correspond au débit séparé des deux gradateurs comme lors du débit sur résistances pures. La figure III.2.4.b correspond à ce cas et donne pour  $\psi = \pi$  et  $\cos \varphi' = 0,3$  les formes d'ondes des mêmes grandeurs que précédemment.

L'angle  $\psi_\ell$  qui correspond au passage d'un mode de fonctionnement à l'autre, est donné par :

$$\psi_\ell = \text{Arc tg} \frac{(Q\sqrt{3}-1) e^{\pi/3Q} - 1 - Q\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+Q) e^{\pi/3Q} - \sqrt{3}+Q} \quad \text{avec } Q = \frac{L\omega}{R}$$

Il croît de  $\frac{5\pi}{6}$  à  $\psi$  lorsque  $\cos \varphi'$  passe de 1 à 0 (figure III.2.5.).

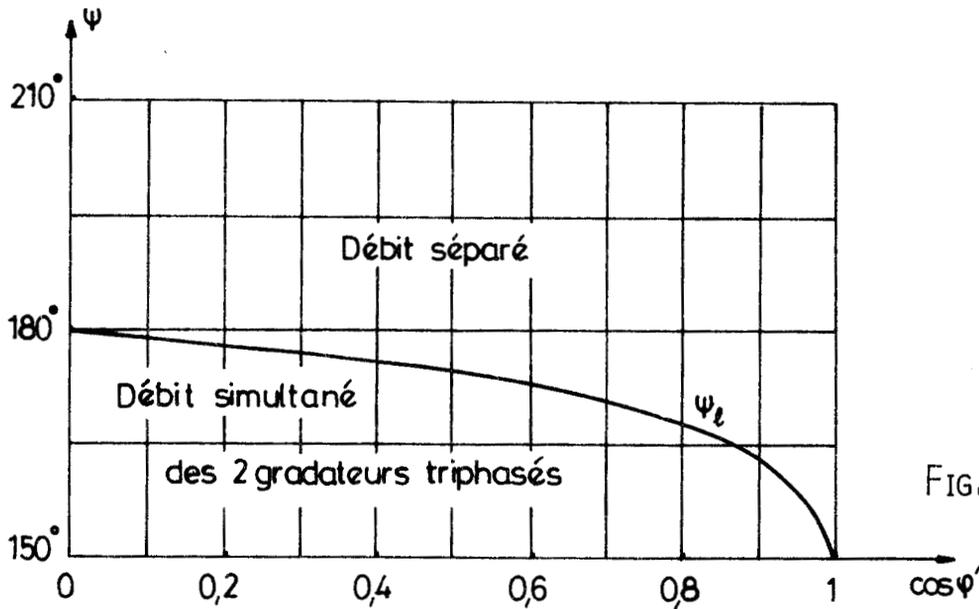


FIG. III.2.5

## II. ETUDE ANALYTIQUE

L'analyse harmonique des tensions aux bornes du récepteur ayant déjà été traitée [31], nous nous sommes limités, pour ce montage, au calcul des valeurs maximales du facteur d'utilisation des enroulements secondaires et du facteur d'utilisation des thyristors afin de pouvoir établir une comparaison avec les autres montages multiplicateurs par 2.

## II.1. Fonctionnement à $\psi$ minimum

Quelle que soit la charge, l'angle de conduction des thyristors est maximum lorsque l'angle d'amorçage  $\psi$  du thyristor  $Th_A$  est minimum et égal à  $\frac{5\pi}{6}$  : les valeurs efficaces des courants et des tensions sont alors maximales.

### II.1.1. Débit simultané des gradateurs

Lorsque  $Th_A$ ,  $D_C$ ,  $Th'_B$  et  $D'_A$  sont simultanément conducteurs, les tensions  $v'_A$ ,  $v'_B$  et  $v'_C$  aux bornes de la charge se déduisent des relations suivantes :

$$v'_A - v_{sA} = v'_C - v_{sC}$$

$$v'_A + v_{sA} = v'_B + v_{sB}$$

$$v'_A + v'_B + v'_C = 0$$

Si les tensions  $v_{sA}$ ,  $v_{sB}$  et  $v_{sC}$  sont de la forme :

$$v_{sA} = V_{sm} \sin \omega t$$

$$v_{sB} = V_{sm} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$v_{sC} = V_{sm} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})$$

les tensions aux bornes de la charge auront alors pour expressions

$$v'_A = -\frac{\sqrt{3}}{3} V_{sm} \cos \omega t$$

$$v'_B = \frac{\sqrt{3}}{6} V_{sm} (\cos \omega t + 3\sqrt{3} \sin \omega t)$$

$$v'_C = \frac{\sqrt{3}}{6} V_{sm} (\cos \omega t - 3\sqrt{3} \sin \omega t)$$

et les courants  $i'_A$ ,  $i'_B$  et  $i'_C$  dans chaque phase du récepteur seront les solutions des équations suivantes :

$$Ri'_A + L \frac{di'_A}{dt} = v'_A = -\frac{\sqrt{3}}{3} V_{sm} \cos \omega t$$

$$Ri'_B + L \frac{di'_B}{dt} = v'_B = \frac{\sqrt{3}}{6} V_{sm} (\cos \omega t + 3\sqrt{3} \sin \omega t)$$

$$Ri'_C + L \frac{di'_C}{dt} = v'_C = \frac{\sqrt{3}}{6} V_{sm} (\cos \omega t - 3\sqrt{3} \sin \omega t)$$

Ils seront donc de la forme :

$$i'_A = -\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{V_{sm}}{R} \frac{1}{1+Q^2} \left[ 2\cos \omega t + 2Q \sin \omega t + J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

$$i'_B = -\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{V_{sm}}{R} \frac{1}{1+Q^2} \left[ (3\sqrt{3}Q - 1) \cos \omega t - (3\sqrt{3} + Q) \sin \omega t + J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

$$i'_C = -\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{V_{sm}}{R} \frac{1}{1+Q^2} \left[ -(1 + 3\sqrt{3}Q) \cos \omega t + (3\sqrt{3} - Q) \sin \omega t + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

où  $Q = \frac{L\omega}{R}$  et  $J_A, J_B, J_C$  sont des constantes d'intégration à déterminer.

### II.1.2. Débit séparé des gradateurs

Lorsque  $Th_A$  et  $D_C$  conduisent seuls, les tensions aux bornes de la charge se déduisent des relations suivantes :

$$v'_A - v_{sA} = v'_C - v_{sC}$$

et  $v'_A = -v'_C$

On obtient ainsi  $v'_A = -v'_C = \frac{\sqrt{3}}{4} V_{sm} (\sqrt{3} \sin \omega t - \cos \omega t)$

$$\text{et } v'_B = 0$$

Les courants dans chaque phase du récepteur sont alors de la forme

$$i'_A = -i'_C = -\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{V_{sm}}{R} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \frac{3}{2}(Q-\sqrt{3}) \sin \omega t + \frac{3}{2}(1+Q\sqrt{3}) \cos \omega t + J'_A e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

où  $J'_A$  est une constante d'intégration à déterminer.

### II.1.3. Détermination des constantes d'intégration et de l'angle de conduction simultanée des deux gradateurs triphasés

\* On détermine  $J_C$  en écrivant que pour  $\omega t = \psi_{\min} = \frac{5\pi}{6}$ , le courant dans le thyristor  $Th_A$  est nul :

$$i_{s_A}(\omega t = \frac{5\pi}{6}) = -i'_C(\omega t = \frac{5\pi}{6}) = 0$$

$$-(1+3\sqrt{3}Q) \cos\frac{5\pi}{6} + (3\sqrt{3}-Q) \sin\frac{5\pi}{6} + J_C e^{-\frac{5\pi}{6Q}} = 0$$

$$\text{On obtient } J_C = -2(\sqrt{3} + 2Q) e^{\frac{5\pi}{6Q}}$$

\* Si on désigne par  $\theta$  l'angle de conduction simultanée des deux gradateurs triphasés mixtes, on détermine  $J'_A$  en écrivant que, pour  $\omega t = \frac{5\pi}{6} + \theta$ , le courant  $i'_C$  ne doit pas subir de discontinuité :

$$i'_C(\omega t = \frac{5\pi}{6} + \theta) = -\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{V_{sm}}{R} \frac{1}{1+Q^2} \left[ -(1+3\sqrt{3}Q) \cos(\frac{5\pi}{6} + \theta) + (3\sqrt{3}-Q) \sin(\frac{5\pi}{6} + \theta) + J_C e^{-\frac{5\pi}{6} + \frac{\theta}{Q}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{V_{sm}}{R} \frac{1}{1+Q^2} \left[ \frac{3}{2}(Q-\sqrt{3}) \sin(\frac{5\pi}{6} + \theta) + \frac{3}{2}(1+Q\sqrt{3}) \cos(\frac{5\pi}{6} + \theta) + J'_A e^{-\frac{5\pi}{6} + \frac{\theta}{Q}} \right]$$

$$\text{On obtient } J'_A = \frac{1}{2} [(5-\sqrt{3}Q) \sin\theta - (\sqrt{3}+5Q) \cos\theta] e^{\frac{5\pi}{6} + \frac{\theta}{Q}} - J_C$$

\* Par symétrie, et d'après le principe du doubleur de fréquence, la valeur de  $i'_A$  pour  $\omega t = \psi_{\min} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$  lorsqu'on amorce  $Th'_C$  doit être la même que celle de  $i'_B$  pour  $\omega t = \psi_{\min} = \frac{5\pi}{6}$  lorsqu'on amorce  $Th_A$ .

$$i'_A(\omega t = \frac{7\pi}{6}) = i'_B(\omega t = \frac{5\pi}{6})$$

$$\frac{3}{2}(Q-\sqrt{3}) \sin\frac{7\pi}{6} + \frac{3}{2}(1+Q\sqrt{3}) \cos\frac{7\pi}{6} + J'_A e^{-\frac{7\pi}{6Q}} =$$

$$(3\sqrt{3}Q-1) \cos\frac{5\pi}{6} - (3\sqrt{3}+Q) \sin\frac{5\pi}{6} + J_B e^{-\frac{5\pi}{6Q}}$$

$$\text{On obtient } J_B = (2Q+\sqrt{3}) e^{\frac{5\pi}{6Q}} + J'_A e^{-\frac{\pi}{3Q}}$$

\* La constante  $J_A$  s'obtient en écrivant que  $J_A + J_B + J_C = 0$

$$J_A = -J_B - J_C$$

\* Pour  $\omega t = \psi_{\min} + \theta = \frac{5\pi}{6} + \theta$ , le courant  $i'_B$  s'annule et interrompt la conduction de  $Th'_B$  et  $D'_A$ . On obtient donc  $\theta$  en écrivant que

$$i'_B(\omega t = \frac{5\pi}{6} + \theta) = 0$$

$$(3\sqrt{3}Q-1) \cos(\frac{5\pi}{6} + \theta) - (3\sqrt{3}+Q) \sin(\frac{5\pi}{6} + \theta) + J_B e^{-\frac{5\pi}{6} + \theta} = 0$$

En remplaçant  $J_B$  par son expression en fonction de  $\theta$  et de  $Q$ , on obtient l'équation que doit vérifier  $\theta$ , angle de conduction simultanée des deux gradateurs triphasés :

$$(5Q+\sqrt{3}) \cos\theta - (5-Q\sqrt{3}) \sin\theta = 2 \frac{1+2e^{-\frac{\pi}{3Q}}}{2+e^{-\frac{\pi}{3Q}}} (2Q+\sqrt{3}) e^{-\frac{\theta}{Q}}$$

## II.2 Valeur efficace maximale de la tension de sortie

Si on désigne par  $V'_{\max}$  la valeur efficace maximale de la tension aux bornes d'une phase du récepteur, on a :

$$V'_{\max}{}^2 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6} + \theta} (v'_A{}^2 + v'_B{}^2 + v'_C{}^2) dt + 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} v'_A{}^2 dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{V_{sm}^2}{3} \left[ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6} + \theta} [\cos^2 \omega t + \frac{1}{4}(\cos \omega t + 3\sqrt{3} \sin \omega t)^2 + \frac{1}{4}(\cos \omega t - 3\sqrt{3} \sin \omega t)^2] dt \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{9}{16} (\sqrt{3} \sin \omega t - \cos \omega t)^2 dt \right]$$

ce qui donne, après avoir effectué les calculs :

$$V'_{\max}{}^2 = \frac{V_S^2}{2\pi} \left\{ 7\theta + \pi - \cos\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right) [8 \sin\theta + 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)] \right\}$$

en posant  $V_S = \frac{V_{sm}}{\sqrt{2}}$  valeur efficace des tensions secondaires du transformateur.

### II.3. Valeur efficace maximale du courant dans une phase du récepteur

Si on désigne par  $I'_{\max}$  la valeur efficace maximale du courant dans une phase du récepteur, on a :

$$I'_{\max}{}^2 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}+\theta} (i_A'^2 + i_B'^2 + i_C'^2) dt + 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} i_A'^2 dt \right]$$

$$\begin{aligned} I'_{\max}{}^2 &= \frac{1}{\pi} \frac{V_{sm}^2}{12R^2} \frac{1}{(1+Q^2)^2} \left\{ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}+\theta} \left\{ (2 \cos\omega t + 2Q \sin\omega t + J_A e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2 \right. \right. \\ &\quad + [(3\sqrt{3}Q-1) \cos\omega t - (3\sqrt{3}+Q) \sin\omega t + J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}}]^2 \\ &\quad \left. \left. + [-(1+3\sqrt{3}Q) \cos\omega t + (3\sqrt{3}-Q) \sin\omega t + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}}]^2 \right\} dt \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \left[ \frac{3}{2}(Q-\sqrt{3}) \sin\omega t + \frac{3}{2}(1+Q\sqrt{3}) \cos\omega t + J_A' e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]^2 dt \right\} \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} I'_{\max}{}^2 &= \frac{1}{\pi} \frac{V_S^2}{Z'^2} \cdot \frac{1+4Q^2}{(1+Q^2)^2} \left\{ \frac{1+Q^2}{2} (7\theta + \pi) + [4\sin\theta + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)] \right. \\ &\quad \left. [(1-Q^2) \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2Q \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q}{12} e^{-\frac{5\pi}{3Q}} [(J_A^2 + J_B^2 + J_C^2)(1 - e^{-\frac{2\theta}{Q}}) + 2J_A'^2 (e^{-\frac{2\theta}{Q}} - e^{-\frac{2\pi}{3Q}})] \right. \\ &\quad \left. + Q e^{-\frac{5\pi}{6Q}} \left[ J_C \sqrt{3} - e^{-\frac{\theta}{Q}} [J_C \sqrt{3} \cos\theta + (2J_B - J_C) \sin\theta + 2J_A' \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)] \right] \right\} \end{aligned}$$

#### II.4. Valeur efficace maximale du courant dans un enroulement secondaire

Lorsque  $Th_A$ ,  $D_C$ ,  $Th'_B$  et  $D'_A$  sont simultanément conducteurs, le courant  $i_{S_A}$  dans le demi-enroulement secondaire relié à  $Th_A$  est égal à  $-i'_C$ .

Il devient égal à  $i'_A$  lorsque  $Th_A$  et  $D_C$  restent seuls conducteurs, et ceci jusqu'à la fin de la conduction de  $Th_A$  où il s'annule. Le courant  $i_{S_A}$  est à la même fréquence que les tensions d'alimentation (fig. III.2.4.a) et ses deux alternances sont identiques au signe près.

En désignant par  $I_{S_{\max}}$  la valeur efficace maximale du courant dans un enroulement secondaire, on a :

$$\begin{aligned}
 I_{S_{\max}}^2 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}+\theta} (i_B'^2 + i_C'^2) \, d\omega t + \int_{\frac{5\pi}{6}+\theta}^{\frac{7\pi}{6}} i_A'^2 \, d\omega t \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{v_{sm}^2}{12R^2} \frac{1}{(1+Q^2)^2} \left\{ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}+\theta} \left[ [(3\sqrt{3}Q-1) \cos\omega t - (3\sqrt{3}+Q) \sin\omega t + J_B e^{-\frac{\omega t}{Q}}]^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + [-(1+3\sqrt{3}Q) \cos\omega t + (3\sqrt{3}-Q) \sin\omega t + J_C e^{-\frac{\omega t}{Q}}]^2 \right] \, d\omega t \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\frac{5\pi}{6}+\theta}^{\frac{7\pi}{6}} \left[ \frac{3}{2}(Q-\sqrt{3}) \sin\omega t + \frac{3}{2}(1+Q\sqrt{3}) \cos\omega t + J'_A e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]^2 \, d\omega t \right\}
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
 I_{S_{\max}}^2 &= \frac{1}{\pi} \frac{v_S^2}{Z^2} \frac{1+4Q^2}{(1+Q^2)^2} \left\{ (1+Q^2) \left( \frac{\pi}{4} + \frac{47}{12} \theta \right) + \left[ \frac{13}{3} \sin\theta + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) \right] \left[ (1-Q^2) \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) + 2Q \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Q}{12} e^{-\frac{5\pi}{3Q}} \left[ (J_B^2 + J_C^2) \left( 1 - e^{-\frac{2\theta}{Q}} \right) + J_A'^2 \left( e^{-\frac{2\theta}{Q}} - e^{-\frac{2\pi}{3Q}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Q}{3} e^{-\frac{5\pi}{6Q}} \left[ \sqrt{3}(2J_C - J_B) + e^{-\frac{\theta}{Q}} \left[ \sqrt{3}(J_B - 2J_C) \cos\theta + (4J_C - 5J_B) \sin\theta - 3J'_A \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) \right] \right] \right\}
 \end{aligned}$$

### II.5. Valeur maximale de la tension instantanée entre l'anode et la cathode d'un thyristor

Quel que soit le type de charge, l'angle d'amorçage minimal du thyristor  $Th_A$  reste égal à  $\frac{5\pi}{6}$  : la tension instantanée entre l'anode et la cathode de ce thyristor est maximale pour  $\omega t = \psi_{\text{mini}} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$  (fig. III.2.4.a).

Cette valeur de  $\omega t$  correspond à l'amorçage de  $Th'_B$  alors que  $Th_C$  et  $D_B$  sont déjà conducteurs et que  $D'_A$  est prête à conduire. La tension  $v_{Th_A}$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} v_{Th_A} &= 2(v_{s_A} - v_{s_B}) \\ &= 2 V_{sm} [\sin \omega t - \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})] \end{aligned}$$

Pour  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , on obtient :

$$v_{Th_A \text{ maxi}} = 2 V_{sm} [1 - \sin(-\frac{\pi}{6})] = 3 V_{sm} = 3\sqrt{2} V_S$$

Les thyristors utilisés devront donc pouvoir supporter au moins trois fois la tension de sortie maximale au secondaire du transformateur.

## III. CARACTERISTIQUES

### III.1. Analyse harmonique des tensions de sortie

Nous avons reporté à la planche III.6. les résultats obtenus de façon à pouvoir les comparer à ceux des autres multiplicateurs de fréquence. Les notations suivantes ont été utilisées :

$V_S$  : valeur efficace de la tension aux bornes d'un demi-enroulement secondaire,

$V'$  : valeur efficace de la tension aux bornes de la charge,

$V'_1$  : valeur efficace du fondamental de la tension aux bornes de la charge,

$V'_2, V'_4$  : valeurs efficaces des harmoniques 2 et 4 de la tension aux bornes de la charge.

Comme pour tous les montages précédents, c'est pour les plus faibles valeurs de l'angle d'amorçage  $\psi$  que les harmoniques de la tension de sortie ont une valeur relative minimale.

Par rapport aux montages à 12 thyristors, les harmoniques sont plus importants et les premiers sont de rang moins élevé.

Par rapport au montage étudié au chapitre précédent, on retrouve les mêmes harmoniques, mais, pour  $\psi_{\text{mini}}$ , avec une importance relative de plus en plus grande au fur et à mesure que la charge devient moins inductive car ici la valeur minimale de  $\psi$  reste fixe.

### III.2. Valeurs efficaces maximales du courant et de la tension de sortie

On a tracé en haut de la planche III.7. les variations de  $V'_{\text{max}}/V_S$ , valeur efficace maximale de la tension aux bornes de la charge ramenée à la valeur efficace de la tension aux bornes d'un demi-enroulement secondaire du transformateur, en fonction de  $\cos\varphi'$ .

On voit que dans le cas de charges fortement inductives, ce rapport est supérieur à celui obtenu avec le meilleur montage avec 12 thyristors (montage sans neutre). Mais ce rapport diminue quand  $\cos\varphi'$  augmente car la valeur minimale de  $\psi$  reste fixe.

Le bas de la planche III.7. donne les variations de  $I'_{\text{max}}/V_S/Z'$  en fonction de  $\cos\varphi'$ . A  $V_S/Z'$  donné, si la charge est fortement inductive, on obtient un courant dans la charge supérieur à celui que donnerait le meilleur montage à 12 thyristors.

### III.3. Facteur d'utilisation des enroulements secondaires

La puissance apparente maximale disponible à la sortie du montage est donnée par

$$S = 3 \times V'_{\text{max}} \times I'_{\text{max}}$$

Les 6 enroulements secondaires ont chacun à leurs bornes une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace  $V_S$ , et sont parcourus par un courant dont la valeur efficace est maximale lorsque  $\psi$  est minimum, et égale à  $I_S$ .

Le facteur d'utilisation des enroulements secondaires a donc pour expression

$$f_S = \frac{3 \times V'_{\max} \times I'_{\max}}{6 \times V_S \times I_S} = \frac{1}{2} \times \frac{V'_{\max}}{V_S} \times \frac{I'_{\max}}{I_S}$$

Le haut de la planche III. 8. donne les variations de  $f_S$  en fonction de  $\cos\varphi'$  : il est inférieur à celui obtenu avec 12 thyristors et des enroulements secondaires branchés en polygone, car ici chaque enroulement n'est parcouru par un courant que pendant les 2/3 de la période des tensions d'alimentation, dans le meilleur des cas. Pour les charges fortement inductives, l'écart n'est cependant pas très important.

#### III.4. Facteur d'utilisation des thyristors

Chaque thyristor laisse passer une alternance du courant qui traverse chaque demi-enroulement secondaire. La valeur efficace maximale du courant à travers un thyristor est donc égale à  $I_S/\sqrt{2}$ .

Le facteur d'utilisation des thyristors est donc égal à :

$$f_{Th} = \frac{3 \times V'_{\max} \times I'_{\max}}{6 \times v_{Th_{\max i}} \times \frac{I_S}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{6} \times \frac{V'_{\max}}{V_S} \times \frac{I'_{\max}}{I_S}$$

Le bas de la planche III. 8. donne les variations de  $f_{th}$  en fonction de  $\cos\varphi'$  : il est comparable à celui des doubleurs de fréquence à 12 thyristors et lui est supérieur pour les faibles valeurs de  $\cos\varphi'$ . Il bénéficie bien entendu de la réduction du nombre de thyristors, mais ne tient pas compte des 6 diodes qu'il faut leur associer.

#### III.5. Conclusion

Ce montage présente plusieurs avantages :

- l'angle minimal d'amorçage des thyristors, correspondant aux meilleures performances, est indépendant de la charge : cela facilite beaucoup la réalisation de la commande des thyristors,
- le nombre de thyristors est divisé par 2 par rapport aux schémas classiques,
- les performances lors du débit sur charge fortement inductive sont satisfaisantes si on les compare à celles des meilleurs montages à 12 thyristors.

Mais les premiers harmoniques sont d'ordre 2 et 4, et leur importance relative augmente au fur et à mesure que la charge devient plus résistive : la valeur fixe de  $\psi_{\text{mini}}$  pénalise le montage pour les valeurs de  $\cos\varphi'$  proches de 1. Ce montage est donc plus particulièrement intéressant pour des charges fortement inductives.

```

*****
*                                     *
*   CHAPITRE III                     *
*                                     *
*****

```

DOUBLEUR DE FREQUENCE TRIPHASE SANS TRANSFORMATEUR

Tous les montages que nous avons étudiés jusqu'ici utilisent un transformateur qui réalise la multiplication du nombre des tensions disponibles sur lesquelles les portions adéquates seront choisies par les thyristors pour construire les tensions de fréquence multipliée. Le transformateur constitue le procédé normal de multiplication du nombre de tensions.

Mais si chaque phase de la charge peut être formée de deux parties fortement couplées entre elles, la tension dans une partie est due successivement à son alimentation par la source, puis à l'induction d'une tension par l'autre partie. Cela équivaut au doublement des effets de la source donc à la division par deux du nombre des tensions nécessaires. Si on peut réduire ce nombre à 3 on n'a plus besoin de transformateur.

Ainsi les doubleurs de fréquence triphasés vus dans les deux chapitres précédents ont permis de réduire à 6 le nombre de thyristors et de tensions nécessaires. Si chacune des phases de la charge est formée de deux branches identiques fortement couplées, on peut réduire à 3 le nombre de tensions distinctes et donc supprimer le transformateur.

Dans le montage à 6 thyristors en amont du transformateur, on pourrait ainsi remplacer les enroulements primaires du transformateur par 6 branches identiques qui, branchées en étoile et couplées deux par deux constitueraient les 3 phases de la charge. Mais l'implantation des thyristors (figure III.1.1.) impose alors dans chaque phase de la charge un courant unidirectionnel ce qui constitue un gros désavantage.

Par contre le montage à 3 gradateurs mixtes en aval du transformateur que nous venons de présenter et qui permet la circulation de courants alternatifs dans chaque demi-enroulement secondaire se prête bien à cette transformation. L'effet escompté du couplage de deux branches qui forment une même phase disparaît si ce couplage disparaît lui-même : ce montage ne peut donc pas fonctionner en doubleur de fréquence avec une charge purement résistive. Nous décrivons donc le fonctionnement dans le cas d'une charge purement inductive. Nous calculerons ensuite les caractéristiques lorsque la charge est à la fois résistive et inductive, et nous donnerons les résultats obtenus en alimentant par ce montage un moteur asynchrone dont l'enroulement a été spécialement réalisé pour cette application.

## I. FONCTIONNEMENT

### I.1. Description

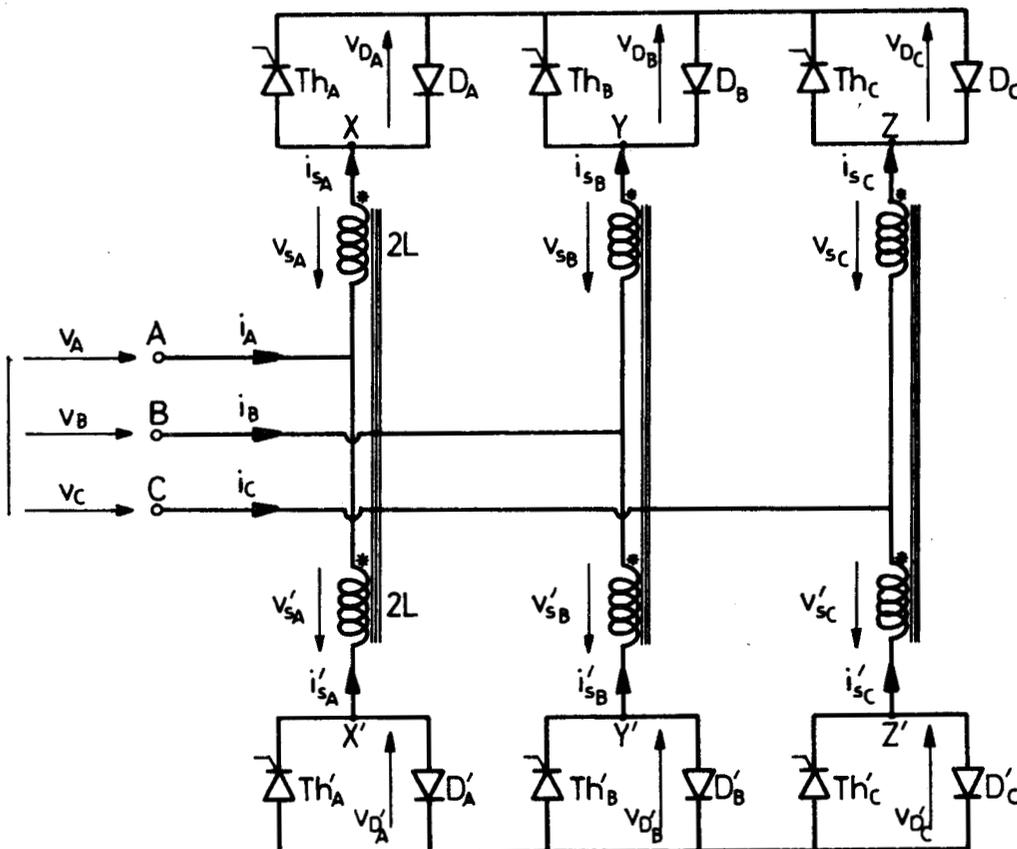


FIG. III.3.1

Le montage est indiqué à la figure III.3.1. et comporte :

- 2 gradateurs triphasés mixtes formés, le premier par  $Th_A, D_A, Th_B, D_B, Th_C, D_C$ , et le second par  $Th'_A, D'_A, Th'_B, D'_B, Th'_C, D'_C$  ;

- 6 branches AX, AX', BY, BY', CZ, CZ' montées en étoile et couplées deux à deux pour former les trois phases de la charge. On suppose le couplage parfait.

## I.2. Relations générales

Les thyristors sont débloqués, comme dans le chapitre précédent, périodiquement dans l'ordre suivant :  $Th_A, Th'_C, Th_B, Th'_A, Th_C, Th'_B$ . L'expression de la tension  $vs_A$  pendant la conduction du thyristor  $Th_A$  sera la même que celle de  $vs'_C$  pendant la conduction de  $Th'_C$ , que celle de  $vs_B$  pendant la conduction de  $Th_B$ , et ainsi de suite. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} vs_A(\omega t) &= vs'_C(\omega t + \frac{\pi}{3}) \\ &= vs_B(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ &= vs'_A(\omega t + \pi) \\ &= vs_C(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \\ &= vs'_B(\omega t + \frac{5\pi}{3}) \end{aligned}$$

De ces relations, on peut déduire les expressions de  $vs_A$  tout au long d'une période des tensions d'entrée :

$$\left. \begin{aligned} vs_A(\omega t) &= vs_A(\omega t) & vs_A(\omega t + \pi) &= vs'_A(\omega t) \\ vs_A(\omega t + \frac{\pi}{3}) &= vs'_B(\omega t) & vs_A(\omega t + \frac{4\pi}{3}) &= vs_B(\omega t) \\ vs_A(\omega t + \frac{2\pi}{3}) &= vs_C(\omega t) & vs_A(\omega t + \frac{5\pi}{3}) &= vs'_C(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{(III.21)}$$

le même raisonnement peut s'appliquer aux tensions aux bornes des thyristors et aux courants dans les enroulements. On obtient alors :

$$\left. \begin{aligned} v_{Th_A}(\omega t) &= v_{Th_A}(\omega t) & v_{Th_A}(\omega t + \pi) &= v_{Th'_A}(\omega t) \\ v_{Th_A}(\omega t + \frac{\pi}{3}) &= v_{Th'_B}(\omega t) & v_{Th_A}(\omega t + \frac{4\pi}{3}) &= v_{Th_B}(\omega t) \\ v_{Th_A}(\omega t + \frac{2\pi}{3}) &= v_{Th_C}(\omega t) & v_{Th_A}(\omega t + \frac{5\pi}{3}) &= v_{Th'_C}(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{(III.22)}$$

et

$$\left. \begin{aligned} is_A(\omega t) &= is_A(\omega t) & is_A(\omega t + \pi) &= is'_A(\omega t) \\ is_A(\omega t + \frac{\pi}{3}) &= is'_B(\omega t) & is_A(\omega t + \frac{4\pi}{3}) &= is_B(\omega t) \\ is_A(\omega t + \frac{2\pi}{3}) &= is_C(\omega t) & is_A(\omega t + \frac{5\pi}{3}) &= is'_C(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.23})$$

L'étude du fonctionnement peut donc se réduire, comme pour les montages précédents, à celle d'un sixième de la période.

Les courants en ligne se déduisent des courants dans les enroulements par

$$\left. \begin{aligned} i_A &= is_A - is'_A & i_B &= is_B - is'_B & i_C &= is_C - is'_C \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.24})$$

### 1.3. Fonctionnement sur charge purement inductive

Chaque phase de la charge est alors formée de deux enroulements ayant chacun une inductance égale à  $2L$  et que nous supposons parfaitement couplés. On aura ainsi :

$$vs_A = vs'_A \quad vs_B = vs'_B \quad vs_C = vs'_C$$

#### 1.3.1. Conduction des diodes

Lorsqu'aucun des thyristors ne conduit, leurs faibles courants de fuites se bouclent, pour chaque gradateur triphasé, par celle des trois diodes dont la conduction rend négative la tension anode-cathode des deux autres. Si les tensions  $v_A$ ,  $v_B$  et  $v_C$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} v_A &= V_m \sin \omega t \\ v_B &= V_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ v_C &= V_m \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

pour  $v_{DA} = 0$ , on aura :

$$\begin{aligned} v_{DB} &= v_A - v_B \\ \text{et } v_{DC} &= v_A - v_C \end{aligned}$$

Ces deux tensions sont négatives pour  $\frac{7\pi}{6} < \omega t < \frac{11\pi}{6}$  : la diode  $D_A$  est alors prête à conduire. De la même façon on obtient

$$v_{DB} = 0 \text{ pour } 0 < \omega t < \frac{\pi}{2} \text{ et pour } \frac{11\pi}{6} < \omega t < 2\pi$$

$$v_{DC} = 0 \text{ pour } \frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{7\pi}{6}$$

$$v'_{DA} = 0 \text{ pour } \frac{\pi}{6} < \omega t < \frac{5\pi}{6}$$

$$v'_{DB} = 0 \text{ pour } \frac{5\pi}{6} < \omega t < \frac{3\pi}{2}$$

$$v'_{DC} = 0 \text{ pour } 0 < \omega t < \frac{\pi}{6} \text{ et pour } \frac{3\pi}{2} < \omega t < 2\pi$$

### 1.3.2. Débit séparé des gradateurs

• On amorce le thyristor  $Th_A$  pour  $\omega t = \psi$ , pendant que la diode  $D_C$  est prête à conduire, donc entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{7\pi}{6}$ . Les tensions aux bornes des enroulements s'obtiennent à partir de :

$$v_A - v_{sA} + v_{sC} - v_C = 0$$

$$\text{et } v_{sA} = -v_{sC}$$

puisque les enroulements en série avec  $Th_A$  et  $D_C$  sont parcourus par les mêmes courants. On a donc :

$$v_{sA} = \frac{v_A - v_C}{2} \quad v_{sB} = 0 \quad v_{sC} = \frac{v_C - v_A}{2} \quad (\text{III.25})$$

• Le courant  $i_{sA}$  qui circule alors dans  $Th_A$  et  $D_C$  correspond à l'application de la tension  $v_{sA}$  à l'enroulement d'inductance  $2L$  monté entre A et X.

Donné par :

$$v_{sA} = \frac{v_A - v_C}{2} = 2L \frac{di_{sA}}{dt},$$

il est de la forme :

$$i_{s_A} = \frac{V_m}{4L\omega} [\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) - \cos\omega t + K] \quad (\text{III.26})$$

où  $K$  est une constante d'intégration que l'on détermine en écrivant que  $i_{s_A}$  doit être nul pour  $\omega t = \psi$  quand on amorce  $\text{Th}_A$  :

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } K &= \cos\psi - \cos(\psi - \frac{4\pi}{3}) \\ \text{et donc : } i_{s_A} &= \frac{V_m}{4L\omega} [\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) - \cos\omega t + \cos\psi - \cos(\psi - \frac{4\pi}{3})] \end{aligned}$$

. Le thyristor  $\text{Th}_A$  reste conducteur jusqu'à ce que  $i_{s_A}$  s'annule, pour  $\omega t = \psi + \theta$ , où  $\theta$  représente l'angle de conduction de  $\text{Th}_A$  qui ne doit pas dépasser  $\frac{\pi}{3}$  pour éviter que deux thyristors soient simultanément conducteurs.

On obtient donc la valeur minimale de  $\psi$  correspondant à un fonctionnement à 0 ou 1 gradateur passant en écrivant que  $i_{s_A}$  doit s'annuler pour  $\omega t = \psi_{\text{mini}} + \frac{\pi}{3}$ . L'angle d'amorçage  $\psi_{\text{mini}}$  est donc solution de :

$$i_{s_A}(\omega t = \psi_{\text{mini}} + \frac{\pi}{3}) = \frac{V_m}{4L\omega} [\cos(\psi_{\text{mini}} + \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}) - \cos(\psi_{\text{mini}} + \frac{\pi}{3}) + \cos(\psi_{\text{mini}}) - \cos(\psi_{\text{mini}} - \frac{4\pi}{3})] = 0$$

$$\text{On obtient : } \psi_{\text{mini}} = \pi$$

Comme il faut amorcer  $\text{Th}_A$  avant  $\omega t = \frac{7\pi}{6}$ , on aura un fonctionnement à 0 ou 1 gradateur passant si :  $\pi < \psi < \frac{7\pi}{6}$

. Pendant que  $\text{Th}_A$  et  $D_C$  conduisent, les tensions  $v_{\text{Th}_A}$  et  $v_{\text{Th}_C}$  sont nulles. La tension  $v_{\text{Th}_B}$  s'obtient à partir de :

$$v_A - v_{s_A} - v_{\text{Th}_A} + v_{\text{Th}_B} + v_{s_B} - v_B = 0$$

Puisque  $v_{\text{Th}_A}$  et  $v_{s_B}$  sont nulles, on a :

$$v_{\text{Th}_B} = v_B - v_A + v_{s_A} = \frac{3}{2} v_B$$

Dans le gradateur triphasé qui ne conduit pas, c'est la diode  $D'_B$  qui écoule les courants de fuite des thyristors bloqués : en effet, seule l'hypothèse  $v_{D'_B} = 0$  permet d'obtenir des tensions négatives entre l'anode et la cathode de  $D'_A$  et  $D'_C$  pendant l'intervalle considéré. Les tensions aux bornes de  $\text{Th}'_A$  et  $\text{Th}'_C$  s'obtiennent alors à partir de :

$$v_A + v_{s_A} + v_{\text{Th}'_A} = v_B + v_{s_B} + v_{\text{Th}'_B} = v_C + v_{s_C} + v_{\text{Th}'_C}$$

Puisque  $v_{Th'_B}$  et  $v_{s_B}$  sont nulles, on a

$$v_{Th'_A} = \frac{v_B - 4v_A}{2} \quad \text{et} \quad v_{Th'_C} = \frac{v_B - 4v_C}{2}$$

Lorsque  $Th_A$  et  $D_C$  conduisent seuls, les tensions aux bornes des thyristors sont donc données par :

$$\left. \begin{array}{l} v_{Th_A} = 0 \\ v_{Th_B} = \frac{3}{2} v_B \\ v_{Th_C} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_{Th'_A} = \frac{v_B - 4v_A}{2} \\ v_{Th'_B} = 0 \\ v_{Th'_C} = \frac{v_B - 4v_C}{2} \end{array} \quad \text{(III.27)}$$

• Le thyristor  $Th_A$  est amorcé pour  $\omega t = \psi$  et il s'éteint pour  $\omega t = \psi + \theta$ , alors que le thyristor  $Th'_C$  n'est pas amorcé avant  $\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}$ . Pour  $\omega t$  compris entre  $\psi + \theta$  et  $\psi + \frac{\pi}{3}$ , aucun thyristor ne conduit : tous les courants sont nuls, ainsi que les tensions aux bornes des enroulements. Ce sont les diodes  $D_A$  et  $D'_B$  qui écoulent les courants de fuite des thyristors bloqués.

Entre l'extinction de  $Th_A$  et l'amorçage de  $Th'_C$ , les tensions aux bornes des thyristors sont donc données par :

$$\left. \begin{array}{l} v_{Th_A} = 0 \\ v_{Th_B} = v_B - v_A \\ v_{Th_C} = v_C - v_A \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_{Th'_A} = v_B - v_A \\ v_{Th'_B} = 0 \\ v_{Th'_C} = v_B - v_C \end{array} \quad \text{(III.28)}$$

### 1.3.3. Débit simultané des gradateurs

#### \* Intervalle à 2 gradateurs passants

Si on amorce le thyristor  $Th_A$  avant  $\omega t = \pi$ , le thyristor  $Th'_B$  et la diode  $D'_A$  de l'autre gradateur sont encore conducteurs. On aura donc  $Th_A$ ,  $D_C$ ,  $Th'_B$ ,  $D'_A$  simultanément conducteurs.

• Tensions aux bornes des enroulements.

Les courants  $is_A$  et  $is_C$  sont égaux et de signes contraires ; il en est de même des courants  $is'_A$  et  $is'_B$ . On peut exprimer les tensions aux bornes des enroulements en fonction de ces courants, en admettant que les différents enroulements sont parfaitement couplés deux à deux :

$$vs_A = 2L \frac{dis_A}{dt} + 2L \frac{dis'_A}{dt} ; vs_B = 2L \frac{dis'_B}{dt} = -2L \frac{dis'_A}{dt} ; vs_C = 2L \frac{dis_C}{dt} = -2L \frac{dis_A}{dt}$$

$$\text{Donc } vs_A = -vs_B - vs_C$$

En écrivant que les chutes de tension aux bornes des semi-conducteurs passants sont nulles, on obtient aussi :

$$v_A - vs_A + vs_C - v_C = 0$$

$$\text{et } v_A + vs_A - vs_B - v_B = 0$$

Ces relations permettent d'obtenir les expressions des tensions aux bornes des enroulements :

$$vs_A = \frac{v_B - v_C}{3} \quad vs_B = \frac{4v_A - v_B}{3} \quad vs_C = \frac{v_C - 4v_A}{3} \quad (\text{III.29})$$

• Expressions des courants.

Les courants  $is_A$  et  $is'_A$  sont les solutions des équations :

$$vs_C = \frac{v_C - 4v_A}{3} = -2L \frac{dis_A}{dt}$$

$$\text{et } vs_B = \frac{4v_A - v_B}{3} = -2L \frac{dis'_A}{dt}$$

Ils sont donc de la forme

$$\left. \begin{aligned} is_A &= \frac{V_m}{6L\omega} \left[ \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) - 4 \cos \omega t + J \right] \\ \text{et } is'_A &= \frac{V_m}{6L\omega} \left[ 4 \cos \omega t - \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + J' \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.30})$$

où  $J$  et  $J'$  sont des constantes d'intégration à déterminer.

Les courants en ligne s'obtiennent à partir des relations suivantes :

$$i_A = is_A - is'_A$$

$$i_B = - is'_B = is'_A$$

$$i_C = is_C = - is_A$$

- Tensions aux bornes des thyristors.

Les thyristors conducteurs et ceux qui sont en parallèle sur une diode passante ont une tension nulle à leurs bornes. Les tensions aux bornes des thyristors  $Th_B$  et  $Th'_C$  se déduisent des relations :

$$v_A - vs_A + v_{Th_B} + vs_B - v_B = 0$$

$$\text{et } v_C + vs_C + v_{Th'_C} - vs_A - v_A = 0$$

On obtient

$$v_{Th_B} = 2(v_B - v_A) \quad \text{et} \quad v_{Th'_C} = 2(v_A - v_C) \quad (\text{III.31})$$

• Ces tensions doivent être positives pour que le fonctionnement soit correct :  $v_{Th'_C}$  sera positive pour  $\frac{\pi}{6} < \omega t < \frac{7\pi}{6}$ , ce qui ne pose pas de problème, mais  $v_{Th_B}$  ne sera positive que pour  $\frac{5\pi}{6} < \omega t < \frac{11\pi}{6}$ , ce qui impose une valeur minimale à l'angle d'amorçage  $\psi$  du thyristor  $Th_A$  pour ce type de fonctionnement. Si  $\psi$  est inférieur à  $\frac{5\pi}{6}$ , la diode  $D_B$  devient conductrice en même temps que  $Th_A$  et  $D_C$ , alors que  $Th'_B$  et  $D'_A$  sont encore passants : chaque demi-enroulement des phases A et B a alors la même tension à ses bornes, ce qui correspond à un court-circuit des points A et B.

Ce type de fonctionnement ne sera donc possible que pour

$$\frac{5\pi}{6} < \psi < \pi$$

Dans le cas d'une charge purement inductive, on retrouve pour l'angle d'amorçage  $\psi$  les mêmes contraintes que dans le chapitre précédent.

\* Intervalle à 1 gradateur passant

Le thyristor  $Th'_B$  s'éteint lorsque  $is'_B$  passe par 0, pour  $\omega t = \psi + \theta'$ . Le thyristor  $Th_A$  et la diode  $D_C$  restent seuls conducteurs, et les tensions aux bornes des enroulements et des thyristors sont données par les relations (III.25) et (III.27).

L'expression du courant  $is_A$  est toujours donnée par (III.26) mais la constante d'intégration  $K$  n'a plus la même valeur.

\* Détermination des constantes d'intégration

On détermine  $J$  en écrivant que pour  $\omega t = \psi$ , le courant  $is_A$  donné par (III.30) doit partir de zéro. On obtient :

$$J = 4 \cos \psi - \cos\left(\psi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

On détermine  $K$  en écrivant que pour  $\omega t = \psi + \theta'$ , le courant  $is_A$  ne doit pas subir de discontinuité, et donc que pour cette valeur de  $\omega t$ , les expressions données par (III.30) et (III.26) doivent être égales

$$\frac{V_m}{6L\omega} \left[ \cos\left(\psi + \theta' - \frac{4\pi}{3}\right) - 4 \cos(\psi + \theta') + 4 \cos \psi - \cos\left(\psi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] =$$

$$\frac{V_m}{4L\omega} \left[ \cos\left(\psi + \theta' - \frac{4\pi}{3}\right) - \cos(\psi + \theta') + K \right]$$

On obtient :

$$K = \frac{8 \cos \psi - 2 \cos\left(\psi - \frac{4\pi}{3}\right) - 5 \cos(\psi + \theta') - \cos\left(\psi + \theta' - \frac{4\pi}{3}\right)}{3}$$

On détermine ensuite  $J'$  en écrivant que, par symétrie, la valeur de  $is_A$  pour  $\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}$  doit être égale à celle de  $is'_B = -is'_A$  pour  $\omega t = \psi$  :

$$i_{s_A}(\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}) = \frac{V_m}{4L\omega} [\cos(\psi + \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}) - \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) + K]$$

$$= - i_{s'_A}(\omega t = \psi) = - \frac{V_m}{6L\omega} [4 \cos\psi - \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) + J']$$

On obtient :

$$J' = \frac{- 13 \cos\psi - \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) + 2 \cos(\psi - \frac{4\pi}{3}) + \cos(\psi + \theta' - \frac{4\pi}{3}) + 5 \cos(\psi + \theta')}{2}$$

\* Calcul de l'angle de conduction  $\theta'$

Le thyristor  $Th'_B$  s'éteint lorsque le courant  $i_{s'_A}$  s'annule, pour  $\omega t = \psi + \theta'$ .

L'angle de conduction  $\theta'$  est donc solution de l'équation :

$$i_{s'_A}(\omega t = \psi + \theta') = 0 = \frac{V_m}{6L\omega} [4 \cos(\psi + \theta') - \cos(\psi + \theta' - \frac{2\pi}{3}) + J']$$

En remplaçant  $J'$  par sa valeur et en regroupant les termes, cette équation peut se mettre sous la forme :

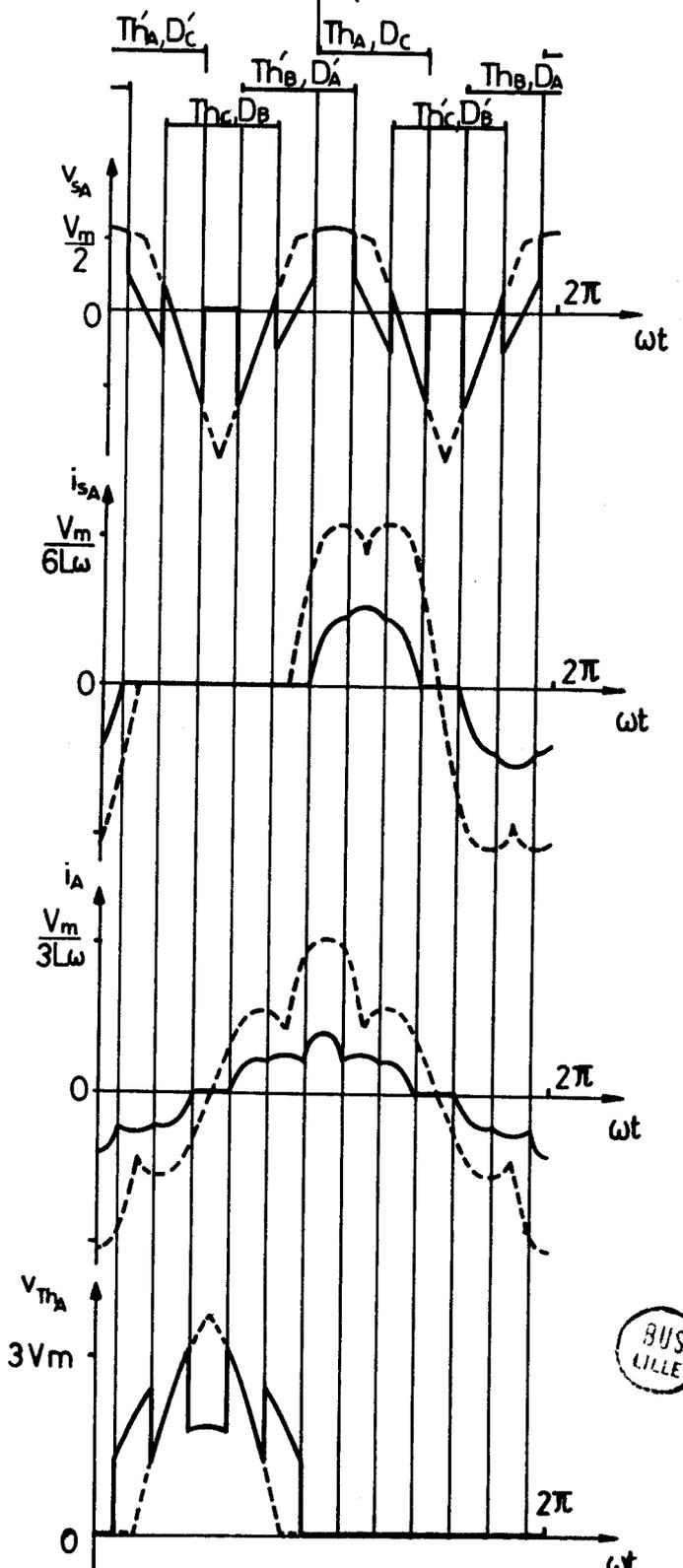
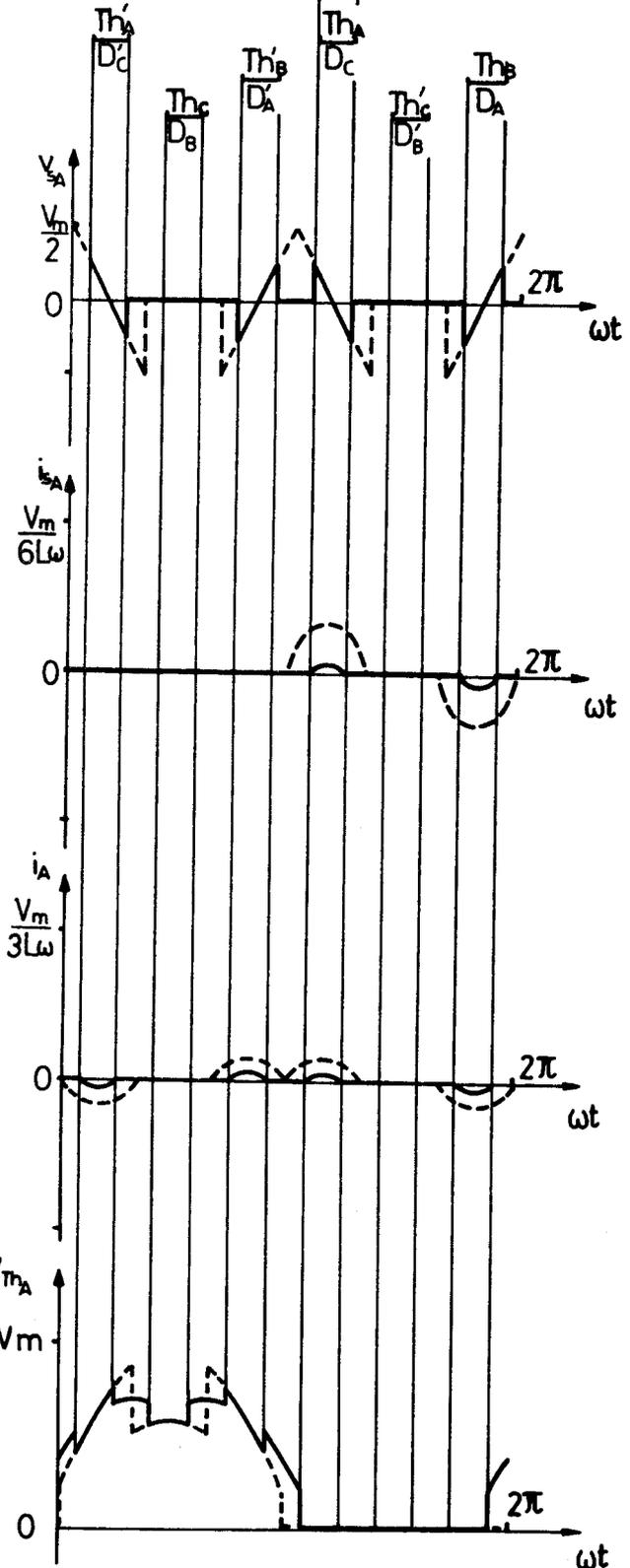
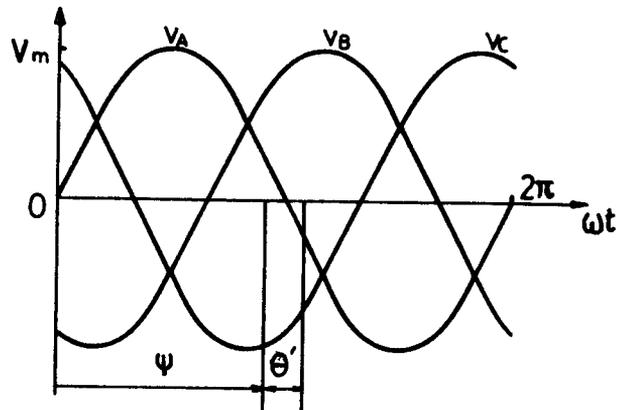
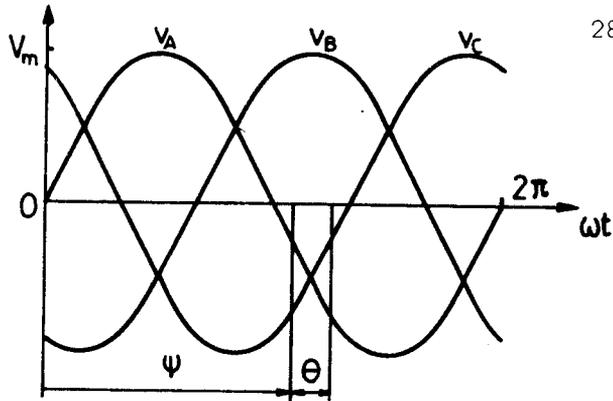
$$\cos\theta'(3\sqrt{3} - \text{tg}\psi) - \sin\theta'(1 + 3\sqrt{3} \text{tg}\psi) - (3\sqrt{3} + \text{tg}\psi) = 0$$

$\theta'$  varie linéairement de  $\frac{\pi}{3}$  à 0 lorsque  $\psi$  passe de  $\frac{5\pi}{6}$  à  $\pi$ .

On a tracé sur la figure III.3.2. les formes d'ondes des tensions de la source, aux bornes d'un enroulement, et aux bornes d'un thyristor, ainsi que celles des courants en ligne et dans un enroulement.

- la figure III.3.2.a correspond à un fonctionnement à 0 ou 1 gradateur passant : les courbes en trait plein sont tracées pour  $\psi = 195^\circ$  alors que celles en trait discontinu sont tracées pour  $\psi = 180^\circ$  qui est la plus petite valeur de  $\psi$  pour laquelle on obtient ce mode de fonctionnement,

- la figure III.3.2.b correspond à un fonctionnement à 1 ou 2 gradateurs passants : les courbes en trait plein sont tracées pour  $\psi = 165^\circ$ , et celles en trait discontinu sont tracées pour  $\psi = 150^\circ$  : l'angle de conduction  $\theta'$  des thyristors est alors maximum et vaut  $60^\circ$ .



a)

b)

FIG. III.3.2



La tension  $v_{s_A}$  aux bornes d'un enroulement a bien une fréquence double de celle des tensions de la source, mais celle du courant  $i_{s_A}$  dans chaque enroulement n'est pas multipliée par 2.

## II. ETUDE DU DEBIT SUR CHARGE RESISTANTE ET INDUCTIVE

Chaque phase est formée de 2 branches identiques de résistance  $2R$  et d'inductance  $2L$ , et les 2 inductances d'une même phase sont supposées parfaitement couplées. A moins que le même courant ne circule dans les deux branches d'une même phase, on ne pourra donc plus écrire que leurs tensions aux bornes sont toujours égales, comme c'était le cas pour une charge purement résistive.

### II.1. Débit séparé des gradateurs

Lorsque le thyristor  $Th_A$  et la diode  $D_C$  sont seuls à conduire, le montage est dans la configuration de la figure III.3.3.

#### II.1.1. Courants dans les enroulements, tensions aux bornes des enroulements alimentés

Les branches AX et CZ ont la même impédance : comme elles sont parcourues par le même courant, elles auront à leurs bornes la même tension  $v_{s_A} = -v_{s_C}$ .

On aura donc :

$$v_A - v_{s_A} + v_{s_C} - v_C = 0$$

Ce qui donne :

$$v_{s_A} = -v_{s_C} = \frac{v_A - v_C}{2} = V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$$

Le courant  $i_{s_A} = -i_{s_C}$  dans les enroulements vérifie l'équation

$$v_{s_A} = \frac{v_A - v_C}{2} = 2R i_{s_A} + 2L \frac{di_{s_A}}{dt}$$

Il est donc de la forme :

$$i_{s_A} = \frac{\sqrt{3} V_m}{4R(1+Q^2)} \cdot \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) - K e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right] \quad (\text{III.32})$$

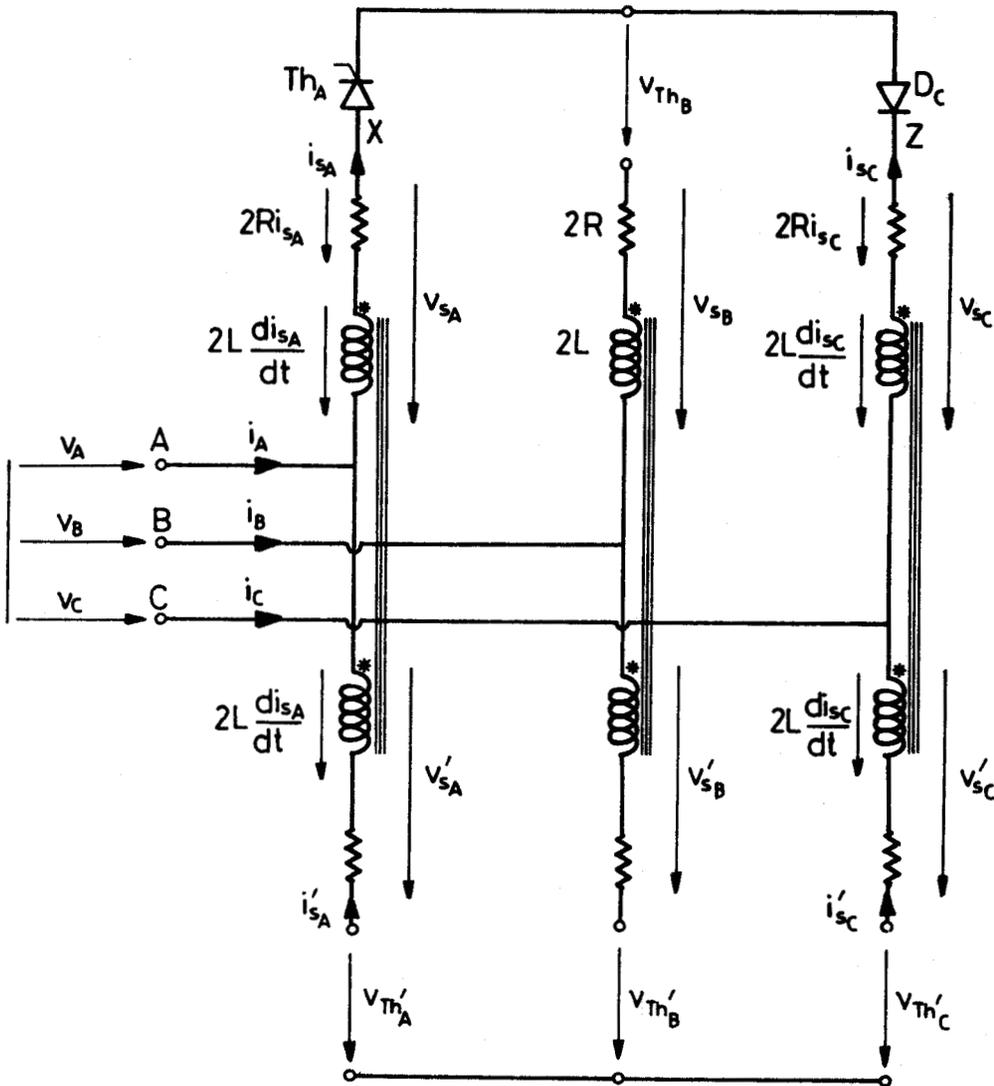


FIG. III.3.3

où  $Q = \frac{L\omega}{R}$  et  $K$  est une constante d'intégration que l'on détermine en écrivant que pour  $\omega t = \psi$  le courant  $i_{sA}$  doit partir de zéro.

On obtient ainsi :

$$K = \left[ \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) - Q \cos\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) \right] e^{\frac{\psi}{Q}}$$

Les courants en ligne se déduisent des relations (III.24).



### II.1.2. Tensions aux bornes des enroulements non alimentés

Les tensions  $v_{s_B}$  et  $v_{s'_B}$  sont nulles puisqu'aucune des deux branches de cette phase n'est parcourue par un courant.

Les tensions  $v_{s'_A}$  et  $v_{s'_C}$  sont données par :

$$v_{s'_A} = 2L \frac{di_{s_A}}{dt} = -v_{s'_C} = -2L \frac{di_{s_A}}{dt}$$

En remplaçant  $i_{s_A}$  par sa valeur, on obtient :

$$v_{s'_A} = -v_{s'_C} = V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Q}{1+Q^2} \left[ \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) + Q \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) + \frac{K}{Q} e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

### II.1.3. Tensions aux bornes des thyristors

La tension aux bornes de  $Th_B$  s'obtient à partir de l'équation :

$$v_A - v_{s_A} - v_{Th_A} = v_B - v_{s_B} - v_{Th_B}$$

qui donne, puisque  $v_{Th_A}$  et  $v_{s_B}$  sont nuls :

$$v_{Th_B} = v_B - v_A + v_{s_A} = \frac{3}{2} v_B$$

Dans le second gradateur, on a les équations suivantes :

$$v_A + v_{s'_A} + v_{Th'_A} = v_B + v_{s'_B} + v_{Th'_B} = v_C + v_{s'_C} + v_{Th'_C}$$

qui s'écrivent, puisque  $v_{s'_B} = 0$  et que  $v_{s'_A} = -v_{s'_C} = 2L \frac{di_{s_A}}{dt}$

$$v_A + 2L \frac{di_{s_A}}{dt} + v_{Th'_A} = v_B + v_{Th'_B} = v_C - 2L \frac{di_{s_A}}{dt} + v_{Th'_C}$$

Puisqu'on admet que les courants de fuite des thyristors bloqués se bouclent par l'une des diodes  $D'_A$ ,  $D'_B$  ou  $D'_C$ , l'une des tensions  $v_{Th'_A}$ ,  $v_{Th'_B}$  ou  $v_{Th'_C}$  est nulle ; seule l'hypothèse  $v_{Th'_B} = 0$  rend les deux autres tensions  $v_{Th'_A}$  et  $v_{Th'_C}$  positives. C'est donc la diode  $D'_B$  qui est passante. D'où les expressions des tensions aux bornes des thyristors :

$$v_{Th'_A} = v_B - v_A - 2L \frac{di_{sA}}{dt}$$

$$v_{Th'_B} = 0$$

$$v_{Th'_C} = v_B - v_C + 2L \frac{di_{sA}}{dt}$$

#### 11.1.4. Limite de ce type de fonctionnement

Le thyristor  $Th_A$  s'éteint pour  $\omega t = \psi + \theta$ , où  $\theta$  représente l'angle de conduction de  $Th_A$ , lorsque le courant  $i_{sA}$  s'annule :

$$i_{sA}(\omega t = \psi + \theta) = \frac{\sqrt{3} V_m}{4R(1+Q^2)} \left[ \sin(\psi + \theta - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi + \theta - \frac{\pi}{6}) - K e^{-\frac{\psi+\theta}{Q}} \right]$$

L'angle  $\theta$  est donc solution de l'équation

$$\sin(\psi + \theta - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi + \theta - \frac{\pi}{6}) = [\sin(\psi - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi - \frac{\pi}{6})] e^{-\frac{\theta}{Q}}$$

Pour qu'on n'ait qu'un seul thyristor conducteur à la fois,  $\theta$  ne doit pas dépasser  $\frac{\pi}{3}$ . La valeur minimale de  $\psi$  correspondant à ce type de fonctionnement est donc solution de l'équation :

$$\sin(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi_{\min} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = [\sin(\psi_{\min} - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\psi_{\min} - \frac{\pi}{6})] e^{-\frac{\pi}{3Q}}$$

Elle a pour expression :

$$\psi_{\min} = \text{Arc tg} \frac{(Q\sqrt{3}-1)e^{\frac{\pi}{3Q}} - Q\sqrt{3}-1}{(Q+\sqrt{3})e^{\frac{\pi}{3Q}} + Q - \sqrt{3}}$$

On a indiqué sur la planche III.9. les variations de l'angle de conduction  $\theta$  en fonction de l'angle d'amorçage  $\psi$  pour différentes valeurs de  $\cos\phi'$  défini par  $\cos\phi' = \frac{1}{\sqrt{1+4Q^2}}$

#### II.1.5. Intervalle sans aucun thyristor conducteur

Si l'angle d'amorçage  $\psi$  reste supérieur à la valeur minimale calculée ci-dessus, le thyristor  $\text{Th}'_C$  n'est pas encore amorcé lorsque  $\text{Th}_A$  s'éteint.

Si on néglige les courants de fuite des thyristors, tous les courants sont nuls ainsi que les tensions aux bornes des enroulements. Les tensions aux bornes des thyristors sont données par les relations (III.28) comme lors du débit sur charge purement inductive.

#### II.1.6. Formes d'ondes

On a tracé sur la figure III.3.4.a les formes d'ondes :

- de la tension  $v_{s_A}$  aux bornes de la branche AX de la charge,
- du courant  $i_{s_A}$  dans cette branche,
- du courant  $i_A$  dans la ligne alimentée par la tension  $v_A$ ,
- de la tension  $v_{\text{Th}_A}$  aux bornes du thyristor  $\text{Th}_A$ ,

pour  $\cos\phi' = 0,5$  et  $\psi = 180^\circ$ .

Les courbes en trait discontinu correspondent à  $\psi_{\min}$ .

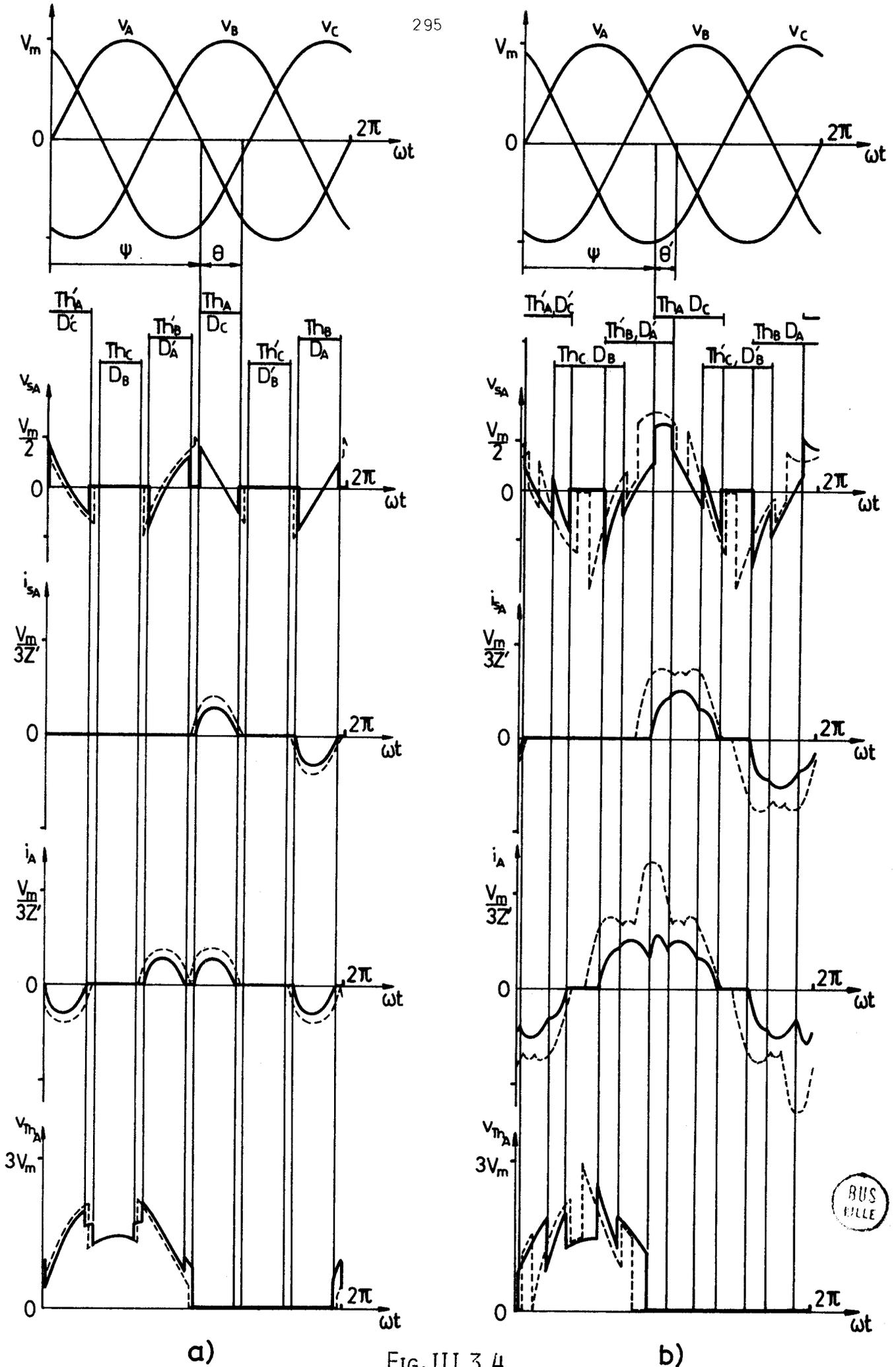


FIG. III.3.4

BUS  
ILLE

II.2. Débit simultané des gradateurs

Lorsqu'on amorce  $Th'_C$  alors que  $Th_A$  est encore conducteur, le montage est dans la configuration de la figure III.3.5.

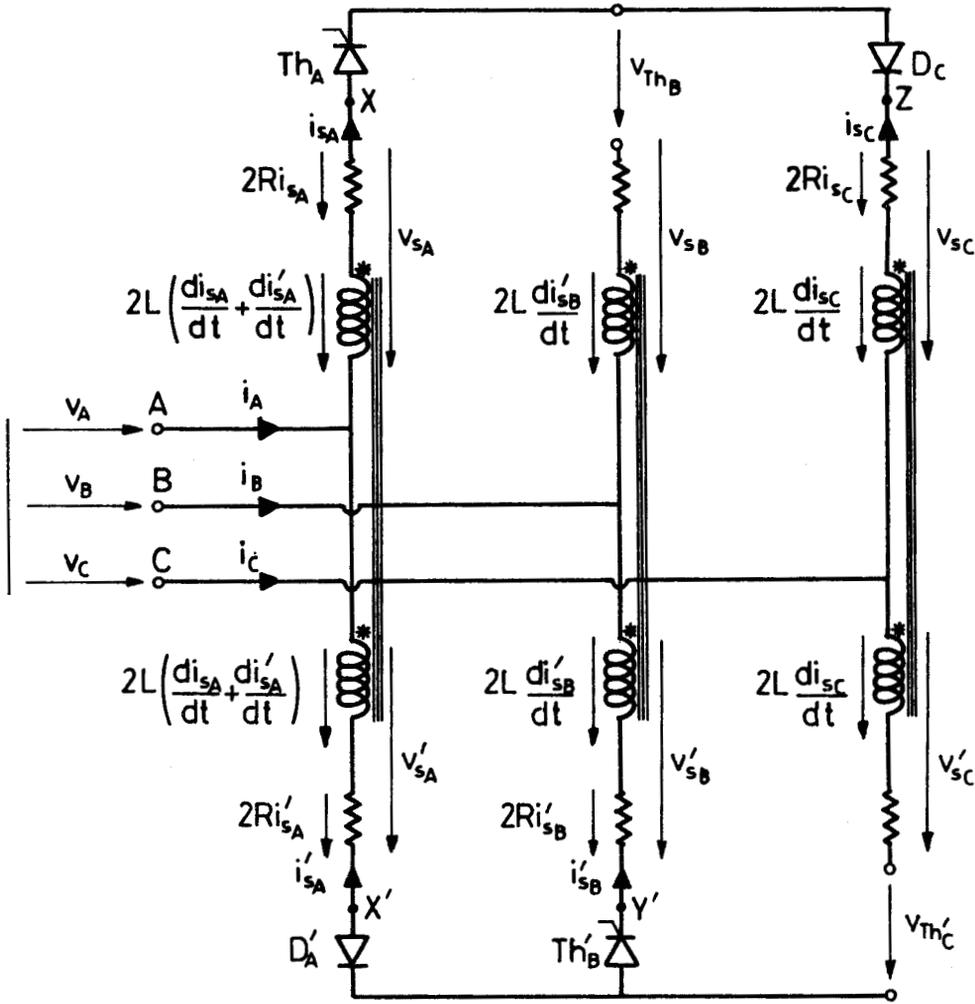


FIG. III.3.5

II.2.1.  $Th_A, D_C, Th'_B, D'_A$  conducteurs : courants en ligne

Lorsque  $Th_A$  et  $D_C$  conduisent, on peut écrire :

$$v_A - v_{sA} - v_{Th_A} = v_C - v_{sC} - v_{Th_C}$$



ce qui donne, puisque  $v_{Th_A}$  et  $v_{Th_C}$  sont nuls

$$v_A - v_C = vs_A - vs_C \quad (\text{III.33})$$

De même, lorsque  $Th'_B$  et  $D'_B$  conduisent, on peut écrire :

$$v_A + vs'_A + v_{Th'_A} = v_B + vs'_B + v_{Th'_B}$$

ce qui donne, puisque  $v_{Th'_A}$  et  $v_{Th'_B}$  sont nuls

$$v_A - v_B = vs'_B - vs'_A \quad (\text{III.34})$$

En additionnant membre à membre les équations (III.33) et (III.34) on obtient :

$$(v_A - v_C) + (v_A - v_B) = (vs_A - vs_C) + (vs'_B - vs'_A)$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} 3v_A &= 2Ris_A + 2L \left( \frac{dis_A}{dt} + \frac{dis'_A}{dt} \right) - 2Ris_C - 2L \frac{dis_C}{dt} \\ &+ 2Ris'_B + 2L \frac{dis'_B}{dt} - 2Ris'_A - 2L \left( \frac{dis_A}{dt} + \frac{dis'_A}{dt} \right) \\ &= 2R(is_A - is_C + is'_B - is'_A) + 2L \left( \frac{dis'_B}{dt} - \frac{dis_C}{dt} \right) \end{aligned}$$

Puisque  $is_C = -is_A$  et que  $is'_A = -is'_B = i_B$  on obtient :

$$3v_A = -4R(i_B + i_C) - 2L \frac{d(i_B + i_C)}{dt} \quad (\text{III.35})$$

En soustrayant membre à membre les équations (III.33) et (III.34) on obtient

$$(v_A - v_C) - (v_A - v_B) = (vs_A - vs_C) - (vs'_B - vs'_A)$$

$$v_B - v_C = 2R(is_A - is_C - is'_B + is'_A) + 2L \left( \frac{2dis_A}{dt} + \frac{2dis'_A}{dt} - \frac{dis_C}{dt} - \frac{dis'_B}{dt} \right)$$

qui peut s'écrire

$$v_B - v_C = 4R(i_B - i_C) + 6L \frac{d(i_B - i_C)}{dt} \quad (\text{III.36})$$

La somme  $i_B + i_C$  est solution de l'équation (III.35). Elle est de la forme :

$$i_B + i_C = \frac{-3 V_m}{4R(1 + \frac{Q^2}{4})} \left[ \sin \omega t - \frac{Q}{2} \cos \omega t + J_A e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \quad (\text{III.37})$$

où  $J_A$  est une constante d'intégration.

La différence  $i_B - i_C$  est solution de l'équation (III.36). Elle est de la forme :

$$i_B - i_C = \frac{-\sqrt{3} V_m}{4R(1 + \frac{9}{4} Q^2)} \left[ \cos \omega t + \frac{3}{2} Q \sin \omega t + K_A e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} \right] \quad (\text{III.38})$$

Les relations (III.37) et (III.38) permettent d'obtenir les expressions des courants en ligne  $i_B$  et  $i_C$  :

$$i_B = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_B \cos \omega t + B_B \sin \omega t + C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \quad (\text{III.39})$$

avec  $A_B = \frac{1}{1 + \frac{9}{4} Q^2} - \frac{Q\sqrt{3}}{2(1 + \frac{Q}{4})^2}$   $C = \frac{K_A}{1 + \frac{9}{4} Q^2}$

$B_B = \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{Q}{4}} + \frac{3Q}{2(1 + \frac{9Q^2}{4})}$   $D = \frac{\sqrt{3} J_A}{1 + \frac{Q}{4}}$

$$i_C = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_C \cos \omega t + B_C \sin \omega t - C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \quad (\text{III.40})$$

avec  $A_C = -\frac{Q\sqrt{3}}{2(1 + \frac{Q}{4})} - \frac{1}{1 + \frac{9Q^2}{4}}$

$$B_C = \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{Q^2}{4}} - \frac{3Q}{2(1 + \frac{9}{4}Q^2)}$$

On obtient  $i_A$  à partir de  $i_A = -i_B - i_C$

### II.2.2. $Th_A, D_C$ conducteurs : courants en ligne

Le thyristor  $Th_B'$  s'éteint lorsque  $is_B' = -i_B$  passe par zéro, pour  $\omega t = \psi + \theta'$ , où  $\theta'$  représente l'angle de conduction simultanée de  $Th_A$  et  $Th_B'$ . Lorsque  $Th_A$  et  $D_C$  se retrouvent seuls conducteurs, le montage est dans la configuration de la figure III.3.3. et l'expression du courant  $is_A = i_A = -i_C$  donnée par la relation (III.32) reste valable, mais la valeur de la constante d'intégration a changé. Pour plus de commodité on peut mettre cette expression sous la forme :

$$is_A = i_A = -i_C = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_A \cos \omega t + B_A \sin \omega t + K' e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$$

avec

$$A_A = \frac{Q - \sqrt{3}}{1 + Q^2} \quad B_A = \frac{1 + Q\sqrt{3}}{1 + Q^2} \quad K' = \frac{2K}{1 + Q^2}$$



### II.2.3. Détermination des constantes $C, D, K'$ et de l'angle $\theta'$

Les trois constantes d'intégration  $C, D, K'$  et l'angle de conduction simultanée de deux thyristors  $\theta'$  sont interdépendants. Quatre équations permettent de les déterminer.

On obtient la première équation en écrivant que pour  $\omega t = \psi$ , le courant  $is_A = -i_C$  dans le thyristor  $Th_A$  doit partir de zéro :

$$-i_C(\omega t = \psi) = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_C \cos \psi + B_C \sin \psi - C e^{-\frac{2\psi}{3Q}} + D e^{-\frac{2\psi}{Q}} \right] = 0$$

$$A_C \cos \psi + B_C \sin \psi = C e^{-\frac{2\psi}{3Q}} - D e^{-\frac{2\psi}{Q}} \quad (\text{III.41})$$

On obtient la deuxième équation en écrivant que pour  $\omega t = \psi + \theta'$ ,

lorsque le thyristor  $Th'_B$  s'éteint, le courant  $is_A = -i_C$  dans le thyristor  $Th_A$  ne doit pas subir de discontinuité :

$$-i_C(\omega t = \psi + \theta') = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_C \cos(\psi + \theta') + B_C \sin(\psi + \theta') - C e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{3Q}} + D e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{Q}} \right]$$

$$= is_A(\omega t = \psi + \theta') = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_A \cos(\psi + \theta') + B_A \sin(\psi + \theta') + K' e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} \right]$$

$$(A_A + A_C) \cos(\psi + \theta') + (B_A + B_C) \sin(\psi + \theta') =$$

$$C e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{3Q}} - D e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{Q}} - K' e^{-\frac{\psi + \theta'}{Q}} \quad (\text{III.42})$$

Les relations (III.23) permettent d'obtenir la troisième équation grâce à la symétrie de fonctionnement du montage : la valeur du courant  $is_A$  pour  $\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}$  doit être égale à celle du courant  $is'_B = -i_B$  pour  $\omega t = \psi$ .

$$is_A(\omega t = \psi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_A \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) + B_A \sin(\psi + \frac{\pi}{3}) + K' e^{-\frac{\psi + \pi/3}{Q}} \right]$$

$$= -i_B(\omega t = \psi) = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_B \cos \psi + B_B \sin \psi + C e^{-\frac{2\psi}{3Q}} + D e^{-\frac{2\psi}{Q}} \right]$$

$$A_B \cos \psi + B_B \sin \psi + A_A \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) + B_A \sin(\psi + \frac{\pi}{3}) =$$

$$C e^{-\frac{2\psi}{3Q}} - D e^{-\frac{2\psi}{Q}} - K' e^{-\frac{\psi + \pi/3}{Q}} \quad (\text{III.43})$$

La dernière équation s'obtient en écrivant que pour  $\omega t = \psi + \theta'$  le courant  $is'_B = -i_B$  dans le thyristor  $Th'_B$  doit s'annuler :

$$-i_B(\omega t = \psi + \theta') = 0 = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_B \cos(\psi + \theta') + B_B \sin(\psi + \theta') + C e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{3Q}} + D e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{Q}} \right] = 0$$

$$A_B \cos(\psi + \theta') + B_B \sin(\psi + \theta') = -C e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{3Q}} - D e^{-\frac{2(\psi + \theta')}{Q}} \quad (\text{III.44})$$

Les relations (III.41) et (III.44) permettent d'exprimer C et D en fonction de  $\theta'$ . On obtient :

$$C = \frac{(A_C \cos\psi + B_C \sin\psi) e^{-\frac{2\theta'}{Q}} - A_B \cos(\psi+\theta') - B_B \sin(\psi+\theta')}{1 + e^{-\frac{4\theta'}{3Q}}} \times e^{\frac{2(\psi+\theta')}{3Q}}$$

$$D = \frac{A_B \cos(\psi+\theta') + B_B \sin(\psi+\theta') + (A_C \cos\psi + B_C \sin\psi) e^{-\frac{2\theta'}{3Q}}}{1 + e^{-\frac{4\theta'}{3Q}}} \times e^{\frac{2(3\psi+\theta')}{3Q}}$$

En remplaçant C et D par leurs valeurs dans l'équation (III.43), on obtient l'expression de  $K'$  en fonction de  $\theta'$

$$K' = 2 \times \frac{[A_B \cos(\psi+\theta') + B_B \sin(\psi+\theta')] e^{\frac{2\theta'}{3Q}} - A_C \cos\psi - B_C \sin\psi}{1 + e^{-\frac{4\theta'}{3Q}}}$$

$$+ (A_C - A_B) \cos\psi + (B_C - B_B) \sin\psi - A_A \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) - B_A \sin(\psi + \frac{\pi}{3})$$

L'angle  $\theta'$  est solution de l'équation (III.42) dans laquelle on remplace les constantes d'intégration C, D et  $K'$  par leurs expressions en fonction de  $\theta'$ . On a indiqué sur la planche III.9. les variations de  $\theta'$  en fonction de l'angle d'amorçage  $\psi$  pour différentes valeurs de  $\cos\varphi'$ .

#### II.2.4. $Th_A, D_C, Th'_B, D'_A$ conducteurs : expressions des tensions et des courants

Tous les courants et toutes les tensions peuvent être déduits des expressions de  $i_B$  et  $i_C$  données par (III.39) et (III.40). On obtient ainsi

$$i_A = -i_B - i_C = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ (A_B + A_C) \cos\omega t + (B_B + B_C) \sin\omega t + 2D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$is_A = -is_C = -i_C = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_C \cos\omega t + B_C \sin\omega t - C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$is_B = is'_C = 0$$

$$is'_A = -is'_B = i_B = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_B \cos\omega t + B_B \sin\omega t + C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

On peut en déduire les tensions aux bornes des enroulements :

$$vs'_C = 2L \frac{dis'_C}{dt} = -2L \frac{dis'_A}{dt} = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ Q A_C \sin\omega t - Q B_C \cos\omega t - \frac{2C}{3} e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + 2D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$vs_B = 2L \frac{dis'_B}{dt} = -2L \frac{dis'_A}{dt} = -V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ Q A_B \sin\omega t - Q B_B \cos\omega t + \frac{2C}{3} e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + 2D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$2L \left( \frac{dis'_A}{dt} + \frac{dis'_A}{dt} \right) = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ Q(A_B - A_C) \sin\omega t + Q(B_C - B_B) \cos\omega t + \frac{4C}{3} e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} \right]$$

ainsi que les tensions aux bornes des branches de la charge qui sont parcourues par un courant :

$$\begin{aligned} vs_A &= 2Ris_A + 2L \left( \frac{dis'_A}{dt} + \frac{dis'_A}{dt} \right) \\ &= V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ (B_C + Q A_B - Q A_C) \sin\omega t + (A_C + Q B_C - Q B_B) \cos\omega t + \frac{C}{3} e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vs_C &= 2Ris_C + 2L \frac{dis'_C}{dt} \\ &= V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ (Q A_C - B_C) \sin\omega t - (Q B_C + A_C) \cos\omega t + \frac{C}{3} e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vs'_A &= 2Ris'_A + 2L \left( \frac{dis'_A}{dt} + \frac{dis'_A}{dt} \right) \\ &= V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ (Q A_B - Q A_C - B_B) \sin\omega t + (Q B_C - Q B_B - A_B) \cos\omega t + \frac{C}{3} e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} - D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vs'_B &= 2Ris'_B + 2L \frac{dis'_B}{dt} \\ &= V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ (B_B - Q A_B) \sin\omega t + (A_B + Q B_B) \cos\omega t + \frac{C}{3} e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} - D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \end{aligned}$$

Les tensions aux bornes des thyristors conducteurs, et aux bornes de ceux qui sont en parallèle sur une diode conductrice, sont nulles. Les tensions aux bornes de  $Th_B$  et de  $Th'_C$  se déduisent des équations suivantes :

$$vs_A + vs'_A = v_{Th_B} + vs_B + vs'_B$$

$$vs_A + vs'_A = vs_C + vs'_C + v_{Th'_C}$$

qui donnent successivement :

$$\begin{aligned} v_{Th_B} &= vs_A + vs'_A - vs_B - vs'_B \\ &= V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ (4QA_B - 2QA_C - 2B_B + B_C) \sin\omega t + (2QB_C - 4QB_B - 2A_B + A_C) \cos\omega t \right. \\ &\quad \left. + C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + 3D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } v_{Th'_C} &= vs_A + vs'_A - vs_C - vs'_C \\ &= V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ (2QA_B - 4QA_C + 2B_C - B_B) \sin\omega t + (4QB_C - 2QB_B + 2A_C - A_B) \cos\omega t \right. \\ &\quad \left. + C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} - 3D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right] \end{aligned}$$

### II.2.5. $Th_A$ , $D_C$ conducteurs : expressions des tensions et des courants

---

Pendant l'intervalle où  $Th_A$  et  $D_C$  conduisent, toutes les tensions et tous les courants ont les mêmes expressions que celles obtenues au paragraphe II.1. lorsque le montage est dans la même configuration. Seule la valeur de la constante  $K$  a changé dans l'expression de  $is_A$  ; on l'obtient à partir de

$$K = (1+Q^2) \frac{K'}{2}$$

### II.2.6. Limite de ce type de fonctionnement

Lorsque l'angle d'amorçage  $\psi$  augmente, l'angle  $\theta'$  de conduction simultanée de deux thyristors diminue et on se rapproche du fonctionnement à 0 ou 1 gradateur passant.

Lorsque l'angle  $\psi$  diminue,  $\theta'$  augmente et théoriquement, ce type de fonctionnement reste possible tant que l'angle de conduction simultanée de deux thyristors ne dépasse pas  $\pi/3$ . Mais dès que la charge n'est plus purement inductive, et pour les plus faibles valeurs de  $\psi$ , la tension aux bornes du thyristor  $Th_B$  tend à devenir négative à l'instant où on amorce le thyristor  $Th_A$ , ce qui rend la diode  $D_B$  conductrice et court-circuite les points A et B à l'entrée. Pour chaque valeur de  $\cos\varphi'$ , il existe pour  $\psi$  une valeur minimale pour laquelle la tension  $v_{Th_B}$  est égale à zéro à l'instant où on amorce  $Th_A$ . Cette valeur minimale de  $\psi$  s'obtient à partir de l'expression de  $v_{Th_B}$  à l'amorçage de  $Th_A$ , et elle est solution de l'équation :

$$(4Q_{A_B} - 2Q_{A_C} - 2B_B + B_C) \sin\psi_{\min} + (2Q_{B_C} - 4Q_{B_B} - 2A_B + A_C) \cos\psi_{\min} + C e^{-\frac{2\psi_{\min}}{3Q}} + 3 D e^{-\frac{2\psi_{\min}}{3Q}} = 0 \quad (\text{III.45})$$

On a tracé en trait discontinu, sur la planche III.9, la courbe donnant la valeur minimale de  $\psi$  en fonction de  $\cos\varphi'$  : plus la charge est résistive et plus cette valeur minimale est proche de celle qui correspond au passage d'un type de fonctionnement à l'autre. Dans le cas théorique d'une charge purement résistive, le fonctionnement à 1 ou 2 gradateurs passants est impossible.

### II.2.7. Formes d'ondes

On a tracé sur la figure III.3.4.b les formes d'ondes des tensions et des courants pour  $\cos\varphi' = 0,5$  et  $\psi = 160^\circ$ . Les courbes en trait discontinu correspondent à  $\psi_{\min}$ . Il apparait nettement que la période de la tension  $v_{s_A}$  reste égale à celle des tensions d'entrée mais que le terme le plus important du développement en série de  $v_{s_A}$  a une fréquence double de celle des tensions d'entrée.

### III. CARACTERISTIQUES

#### III.1. Analyse harmonique et valeur efficace des tensions de sortie

Contrairement à tous les montages étudiés jusqu'ici, la période des tensions de sortie est la même que celle des tensions d'entrée. Pour le calcul de la valeur efficace et de l'amplitude des harmoniques de la tension de sortie, il faudra faire les intégrations sur toute une période des tensions d'entrée.

Il n'y aura pas d'harmonique multiple de 3 dans les tensions de sortie puisque la somme des tensions  $vs_A$ ,  $vs_B$ ,  $vs_C$  est nulle, ainsi que celle des tensions  $vs'_A$ ,  $vs'_B$ ,  $vs'_C$ . Mais les harmoniques d'ordre impair ne sont pas éliminés.

##### III.1.1. Débit séparé des gradateurs

Au cours d'une période, la tension  $vs_A$  a successivement pour expressions :

$$\text{- pour } \psi < \omega t < \psi + \theta \quad vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$$

$$\text{- pour } \psi + \theta < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3} \quad vs_A = 0$$

$$\text{- pour } \psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} \quad vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{- pour } \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi \quad vs_A = 0$$

$$\text{- pour } \psi + \pi < \omega t < \psi + \theta + \pi \quad vs_A = -V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Q}{1+Q^2} \left[ \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) + Q \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - \frac{K}{Q} e^{-\frac{\omega t - \pi}{Q}} \right]$$

$$\text{- pour } \psi + \theta + \pi < \omega t < \psi + \frac{5\pi}{3} \quad vs_A = 0$$

$$\text{- pour } \psi + \frac{5\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{5\pi}{3} \quad vs_A = -V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Q}{1+Q^2} \left[ \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + Q \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + \frac{K}{Q} e^{-\frac{\omega t - \frac{5\pi}{3}}{Q}} \right]$$

$$\text{- pour } \psi + \theta + \frac{5\pi}{3} < \omega t < \psi + 2\pi \quad vs_A = 0$$

Le calcul des termes en sinus du développement en série de Fourier par

$$A'_p = \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} v s_A \sin p \omega t \, d\omega t$$

$$\begin{aligned} \text{donne } A'_p = V_m \frac{\sqrt{3}}{4\pi} & \left\{ (1 - \cos \frac{2p\pi}{3}) (\sqrt{3} L_1 - L_2) - \sin \frac{2p\pi}{3} (\sqrt{3} L_3 - L_4) \right. \\ & + \frac{Q}{1+Q^2} \left[ (\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3}) [(1+Q\sqrt{3})L_1 + (\sqrt{3}-Q)L_2 + \frac{2K}{Q} L_5] \right. \\ & \left. \left. - \sin \frac{5p\pi}{3} [(1+Q\sqrt{3})L_3 + (\sqrt{3}-Q)L_4 + \frac{2K}{Q} L_6] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{avec } L_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(p-1)(\psi+\theta) - \sin(p-1)\psi}{p-1} - \frac{\sin(p+1)(\psi+\theta) - \sin(p+1)\psi}{p+1} \right]$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(p+1)\psi - \cos(p+1)(\psi+\theta)}{p+1} + \frac{\cos(p-1)\psi - \cos(p-1)(\psi+\theta)}{p-1} \right]$$

$$L_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(p-1)(\psi+\theta) - \cos(p-1)\psi}{p-1} - \frac{\cos(p+1)(\psi+\theta) - \cos(p+1)\psi}{p+1} \right]$$

$$L_4 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(p+1)(\psi+\theta) - \sin(p+1)\psi}{p+1} + \frac{\sin(p-1)(\psi+\theta) - \sin(p-1)\psi}{p-1} \right]$$

$$L_5 = \frac{e^{-\frac{2\psi}{Q}}}{p^2 + \frac{4}{Q^2}} \left\{ \frac{2}{Q} \sin p\psi + p \cos p\psi - e^{-\frac{2\theta}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \sin p(\psi+\theta) + p \cos p(\psi+\theta) \right] \right\}$$

$$L_6 = \frac{e^{-\frac{2\psi}{Q}}}{p^2 + \frac{4}{Q^2}} \left\{ \frac{2}{Q} \cos p\psi - p \sin p\psi - e^{-\frac{2\theta}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \cos p(\psi+\theta) - p \sin p(\psi+\theta) \right] \right\}$$

De la même façon, le calcul des termes en cosinus par

$$B'_p = \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} v_{s_A} \cos p\omega t \, d\omega t$$

$$\begin{aligned} \text{donne } B'_p = V_m \frac{\sqrt{3}}{4\pi} & \left\{ (1 - \cos \frac{2p\pi}{3})(\sqrt{3}L_3 - L_4) + \sin \frac{2p\pi}{3}(\sqrt{3}L_1 - L_2) \right. \\ & + \frac{Q}{1+Q^2} \left[ (\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3}) \left[ (1+Q\sqrt{3})L_3 + (\sqrt{3}-Q)L_4 + \frac{2K}{Q}L_6 \right] \right. \\ & \left. \left. + \sin \frac{5p\pi}{3} \left[ (1+Q\sqrt{3})L_1 + (\sqrt{3}-Q)L_2 + \frac{2K}{Q}L_5 \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

La valeur efficace de  $v_{s_A}$  peut se calculer sur une demi-période car lorsque  $\omega t$  est compris entre  $\psi$  et  $\psi + \theta$  et que  $Th_A$  et  $D_C$  sont seuls conducteurs, les tensions  $v_{s_A}$  et  $-v_{s_C}$  sont égales, ainsi que les tensions  $v'_A$  et  $-v'_C$ . Cette valeur efficace s'obtient à partir de :

$$\begin{aligned} v_S^2 = V_m^2 \frac{3}{4\pi} & \left[ \int_{\psi}^{\psi+\theta} \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{6}) \, d\omega t \right. \\ & \left. + \frac{Q^2}{(1+Q^2)^2} \int_{\psi}^{\psi+\theta} \left[ \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) + Q \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) + \frac{K}{Q} e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]^2 \, d\omega t \right] \end{aligned}$$

qui donne :

$$\begin{aligned} v_S^2 = V_m^2 \frac{3}{4\pi} & \left\{ \frac{1}{2} [\theta + \sin\theta \cos(2\psi + \theta - \frac{4\pi}{3})] \right. \\ & + \frac{Q^2}{(1+Q^2)^2} \left( \frac{\theta}{2}(1+Q^2) + \frac{1-Q^2}{2} \sin\theta \cos(2\psi + \theta - \frac{\pi}{3}) + Q \sin\theta \sin(2\psi + \theta - \frac{\pi}{3}) \right) \\ & \left. + \frac{K^2}{2Q} e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{2\theta}{Q}} \right) + 2K e^{-\frac{\psi}{Q}} \left[ \cos(\psi - \frac{\pi}{6}) - e^{-\frac{\theta}{Q}} \cos(\psi + \theta - \frac{\pi}{6}) \right] \right\} \end{aligned}$$

### III.1.2. Débit simultané des gradateurs

Pour simplifier les expressions, lorsque  $Th_A$ ,  $D_C$ ,  $Th'_B$  et  $D'_A$  sont conducteurs on peut mettre les tensions de sortie sous la forme :

$$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t + C_1 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_1 e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$\text{avec } A_1 = B_C + Q A_B - Q A_C \quad C_1 = \frac{C}{3}$$

$$B_1 = A_C + Q B_C - Q B_B \quad D_1 = D$$

$$vs_B = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_2 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t + C_2 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_2 e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$\text{avec } A_2 = -Q A_B \quad C_2 = -\frac{2C}{3}$$

$$B_2 = Q B_B \quad D_2 = -2D$$

$$vs_C = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_3 \sin\omega t + B_3 \cos\omega t + C_3 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_3 e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$\text{avec } A_3 = Q A_C - B_C \quad C_3 = \frac{C}{3}$$

$$B_3 = -Q B_C - A_C \quad D_3 = D$$

$$vs'_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_4 \sin\omega t + B_4 \cos\omega t + C_4 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_4 e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$\text{avec } A_4 = Q A_B - Q A_C - B_B \quad C_4 = \frac{C}{3}$$

$$B_4 = Q B_C - Q B_B - A_B \quad D_4 = -D$$

$$vs'_B = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_5 \sin\omega t + B_5 \cos\omega t + C_5 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_5 e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$\text{avec } A_5 = B_B - Q A_B \quad C_5 = \frac{C}{3}$$

$$B_5 = A_B + Q B_B \quad D_5 = -D$$

$$vs'_C = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_6 \sin \omega t + B_6 \cos \omega t + C_6 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_6 e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$$

$$\text{avec } A_6 = Q A_C \qquad C_6 = -\frac{2C}{3}$$

$$B_6 = -Q B_C \qquad D_6 = 2D$$

Au cours d'une période la tension  $vs_A$  a alors pour expressions successives :

- pour $\psi < \omega t < \psi + \theta'$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + C_1 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_1 e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3}$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$
- pour $\psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{\pi}{3}$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_5 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) + B_5 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) + C_5 e^{-\frac{2\omega t - \pi/3}{Q}} + D_5 e^{-\frac{2\omega t - \pi/3}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3}$	$vs_A = 0$
- pour $\psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{2\pi}{3}$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_3 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + B_3 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + C_3 e^{-\frac{2\omega t - 2\pi/3}{Q}} + D_3 e^{-\frac{2\omega t - 2\pi/3}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$
- pour $\psi + \pi < \omega t < \psi + \theta' + \pi$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ -A_4 \sin \omega t - B_4 \cos \omega t + C_1 e^{-\frac{2\omega t - \pi}{3Q}} + D_1 e^{-\frac{2\omega t - \pi}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \pi < \omega t < \psi + \frac{4\pi}{3}$	$vs_A = -V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Q}{1+Q^2} \left[ \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) + Q \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - \frac{K}{Q} e^{-\frac{\omega t - \pi}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \frac{4\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{4\pi}{3}$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_2 \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) + B_2 \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) + C_2 e^{-\frac{2\omega t - 4\pi/3}{Q}} + D_2 e^{-\frac{2\omega t - 4\pi/3}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \frac{4\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{5\pi}{3}$	$vs_A = 0$
- pour $\psi + \frac{5\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{5\pi}{3}$	$vs_A = V_m \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ A_6 \sin(\omega t - \frac{5\pi}{3}) + B_6 \cos(\omega t - \frac{5\pi}{3}) + C_6 e^{-\frac{2\omega t - 5\pi/3}{Q}} + D_6 e^{-\frac{2\omega t - 5\pi/3}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \frac{5\pi}{3} < \omega t < \psi + 2\pi$	$vs_A = -V_m \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Q}{1+Q^2} \left[ \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + Q \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + \frac{K}{Q} e^{-\frac{\omega t - 5\pi/3}{Q}} \right]$

Dans le développement de la tension  $vs_A$  en série de Fourier, le calcul des termes en sinus s'obtient à partir de

$$A'_P = \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} vs_A \sin p \omega t \, d\omega t$$

Aucune simplification n'apparaît et il faut considérer séparément les dix intervalles pendant lesquels la tension  $vs_A$  n'est pas nulle.

On obtient :

$$\begin{aligned}
A'_p = V_m \frac{\sqrt{3}}{4\pi} & \left\{ (A_1 + A_5 \cos \frac{p\pi}{3} + A_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + A_4 \cos p\pi + A_2 \cos \frac{4p\pi}{3} + A_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_1 \right. \\
& + (A_5 \sin \frac{p\pi}{3} + A_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + A_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + A_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_3 \\
& + (B_1 + B_5 \cos \frac{p\pi}{3} + B_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + B_4 \cos p\pi + B_2 \cos \frac{4p\pi}{3} + B_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_2 \\
& + (B_5 \sin \frac{p\pi}{3} + B_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + B_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + B_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_4 \\
& + (C'_1 + C'_5 \cos \frac{p\pi}{3} + C'_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + C'_4 \cos p\pi + C'_2 \cos \frac{4p\pi}{3} + C'_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_7 \\
& + (C'_5 \sin \frac{p\pi}{3} + C'_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + C'_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + C'_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_8 \\
& + (D'_1 + D'_5 \cos \frac{p\pi}{3} + D'_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + D'_4 \cos \frac{4p\pi}{3} + D'_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_5 \\
& + (D'_5 \sin \frac{p\pi}{3} + D'_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + D'_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + D'_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_6 \\
& + [\sqrt{3}(1 - \cos \frac{2p\pi}{3}) + Q \cdot \frac{1+Q\sqrt{3}}{1+Q^2} (\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3})] M_1 \\
& - [(1 - \cos \frac{2p\pi}{3}) + Q \frac{Q-\sqrt{3}}{1+Q^2} (\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3})] M_2 \\
& - (\sqrt{3} \sin \frac{2p\pi}{3} + Q \frac{1+Q\sqrt{3}}{1+Q^2} \sin \frac{5p\pi}{3}) M_3 \\
& + (\sin \frac{2p\pi}{3} + Q \frac{Q-\sqrt{3}}{1+Q^2} \sin \frac{5p\pi}{3}) M_4 \\
& + \frac{2K}{1+Q^2} [(\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3}) M_5 - \sin \frac{5p\pi}{3} M_6] \left. \right\} \\
\text{avec } L_7 = \frac{e^{-\frac{2\psi}{3Q}}}{p + \frac{4}{9Q^2}} & \left\{ \frac{2}{3Q} \sin p\psi + p \cos p\psi - e^{-\frac{2\theta'}{3Q}} \left[ \frac{2}{3Q} \sin p(\psi + \theta') + p \cos p(\psi + \theta') \right] \right\} \\
L_8 = \frac{e^{-\frac{2\psi}{3Q}}}{p + \frac{4}{9Q^2}} & \left\{ \frac{2}{3Q} \cos p\psi - p \sin p\psi - e^{-\frac{2\theta'}{3Q}} \left[ \frac{2}{3Q} \cos p(\psi + \theta') - p \sin p(\psi + \theta') \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(p-1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \sin(p-1)(\psi + \theta')}{p-1} - \frac{\sin(p+1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \sin(p+1)(\psi + \theta')}{p+1} \right)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos(p+1)(\psi + \theta') - \cos(p+1)(\psi + \frac{\pi}{3})}{p+1} + \frac{\cos(p-1)(\psi + \theta') - \cos(p-1)(\psi + \frac{\pi}{3})}{p-1} \right)$$

$$M_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos(p-1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \cos(p-1)(\psi + \theta')}{p-1} - \frac{\cos(p+1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \cos(p+1)(\psi + \theta')}{p+1} \right)$$

$$M_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(p+1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \sin(p+1)(\psi + \theta')}{p+1} + \frac{\sin(p-1)(\psi + \frac{\pi}{3}) - \sin(p-1)(\psi + \theta')}{p-1} \right)$$

$$M_5 = \frac{e^{-\frac{\psi}{Q}}}{p^2 + \frac{1}{Q^2}} \left\{ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \left[ \frac{1}{Q} \sin p(\psi + \theta') + p \cos p(\psi + \theta') \right] - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \left[ \frac{1}{Q} \sin p(\psi + \frac{\pi}{3}) + p \cos p(\psi + \frac{\pi}{3}) \right] \right\}$$

$$M_6 = \frac{e^{-\frac{\psi}{Q}}}{p^2 + \frac{1}{Q^2}} \left\{ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \left[ \frac{1}{Q} \cos p(\psi + \theta') - p \sin p(\psi + \theta') \right] - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \left[ \frac{1}{Q} \cos p(\psi + \frac{\pi}{3}) - p \sin p(\psi + \frac{\pi}{3}) \right] \right\}$$

De la même manière, le calcul des termes en cosinus par

$$B'_p = \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} v s_A \cos p \omega t \, d\omega t$$

donne :

$$\begin{aligned} B'_p = V_m \frac{\sqrt{3}}{4\pi} & \left\{ (A_1 + A_5 \cos \frac{p\pi}{3} + A_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + A_4 \cos p\pi + A_2 \cos \frac{4p\pi}{3} + A_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_3 \right. \\ & - (A_5 \sin \frac{p\pi}{3} + A_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + A_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + A_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_1 \\ & + (B_1 + B_5 \cos \frac{p\pi}{3} + B_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + B_4 \cos p\pi + B_2 \cos \frac{4p\pi}{3} + B_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_4 \\ & \left. - (B_5 \sin \frac{p\pi}{3} + B_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + B_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + B_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (C_1 + C_5 \cos \frac{p\pi}{3} + C_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + C_4 \cos p\pi + C_2 \cos \frac{4p\pi}{3} + C_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_8 \\
& - (C_5 \sin \frac{p\pi}{3} + C_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + C_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + C_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_7 \\
& + (D_1 + D_5 \cos \frac{p\pi}{3} + D_3 \cos \frac{2p\pi}{3} + D_4 \cos p\pi + D_2 \cos \frac{4p\pi}{3} + D_6 \cos \frac{5p\pi}{3}) L_6 \\
& - (D_5 \sin \frac{p\pi}{3} + D_3 \sin \frac{2p\pi}{3} + D_2 \sin \frac{4p\pi}{3} + D_6 \sin \frac{5p\pi}{3}) L_5 \\
& + \left[ \sqrt{3} (1 - \cos \frac{2p\pi}{3}) + Q \frac{1+Q\sqrt{3}}{1+Q^2} (\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3}) \right] M_3 \\
& - \left[ (1 - \cos \frac{2p\pi}{3}) + Q \frac{Q-\sqrt{3}}{1+Q^2} (\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3}) \right] M_4 \\
& + (\sqrt{3} \sin \frac{2p\pi}{3} + Q \frac{1+Q\sqrt{3}}{1+Q^2} \sin \frac{5p\pi}{3}) M_1 \\
& - (\sin \frac{2p\pi}{3} + Q \cdot \frac{Q-\sqrt{3}}{1+Q^2} \sin \frac{5p\pi}{3}) M_2 \\
& + \frac{2K}{1+Q^2} \left[ (\cos p\pi - \cos \frac{5p\pi}{3}) M_6 + \sin \frac{5p\pi}{3} M_5 \right] \Big\}
\end{aligned}$$

Le calcul de la valeur efficace s'opère à partir de :

$$\begin{aligned}
V_S^2 = V_m^2 \frac{3}{8\pi} \left\{ \frac{1}{4} \int_{\psi}^{\psi+\theta'} \right. & \left[ (A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + C_1 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_1 e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \right. \\
& + (A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + C_2 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_2 e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \\
& + (A_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t + C_3 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_3 e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \\
& + (A_4 \sin \omega t + B_4 \cos \omega t + C_4 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_4 e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \\
& + (A_5 \sin \omega t + B_5 \cos \omega t + C_5 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_5 e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \\
& \left. \left. + (A_6 \sin \omega t + B_6 \cos \omega t + C_6 e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D_6 e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \right] d\omega t \right.
\end{aligned}$$

$$+ 2 \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\frac{\pi}{3}} \left( \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{6}) + \frac{Q^2}{(1+Q^2)^2} \left[ \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) + Q \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) + \frac{K}{Q} e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]^2 \right) d\omega t \Bigg\}$$

et donne :

$$\begin{aligned} V_S^2 = V_m \frac{3}{8\pi} \Bigg[ & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^6 \left\{ A_i^2 \frac{\theta' - \sin\theta' \cos(2\psi+\theta')}{2} + B_i^2 \cdot \frac{\theta' + \sin\theta' \cdot \cos(2\psi+\theta')}{2} \right. \\ & + A_i B_i \sin\theta' \sin(2\psi+\theta') + C_i^2 \frac{3Q}{4} e^{-\frac{4\psi}{3Q}} \left( 1 - e^{-\frac{4\theta'}{3Q}} \right) \\ & + D_i^2 \frac{Q}{4} e^{-\frac{4\psi}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{4\theta'}{Q}} \right) + C_i D_i \frac{3Q}{4} e^{-\frac{8\psi}{3Q}} \left( 1 - e^{-\frac{8\theta'}{3Q}} \right) \\ & + \frac{2e^{-\frac{2\psi}{3Q}}}{1 + \frac{4}{3Q^2}} \left[ A_i C_i \left( \cos\psi + \frac{2}{3Q} \sin\psi - e^{-\frac{2\theta'}{3Q}} \left[ \frac{2}{3Q} \sin(\psi+\theta') + \cos(\psi+\theta') \right] \right) \right. \\ & \quad \left. + B_i C_i \left( -\sin\psi + \frac{2}{3Q} \cos\psi - e^{-\frac{2\theta'}{3Q}} \left[ \frac{2}{3Q} \cos(\psi+\theta') - \sin(\psi+\theta') \right] \right) \right] \\ & + \frac{2e^{-\frac{2\psi}{Q}}}{1 + \frac{4}{Q^2}} \left[ A_i D_i \left( \cos\psi + \frac{2}{Q} \sin\psi - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \sin(\psi+\theta') + \cos(\psi+\theta') \right] \right) \right. \\ & \quad \left. + B_i D_i \left( -\sin\psi + \frac{2}{Q} \cos\psi - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \cos(\psi+\theta') - \sin(\psi+\theta') \right] \right) \right] \Bigg\} \\ & + \left[ \frac{\pi}{3} - \theta' - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \cos(2\psi + \theta') \right] \\ & + \frac{Q^2}{(1+Q^2)^2} \left( \left( \frac{\pi}{3} - \theta' \right) (1+Q^2) + (1-Q^2) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \cos(2\psi+\theta') \right. \\ & \quad + 2Q \sin(2\psi+\theta') \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) + \frac{K^2}{Q} e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left( e^{-\frac{2\theta'}{Q}} - e^{-\frac{2\pi}{3Q}} \right) \\ & \quad \left. + 4K e^{-\frac{\psi}{Q}} \left[ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \cos\left(\psi + \theta' - \frac{\pi}{6}\right) - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) \right] \right) \Bigg] \end{aligned}$$

On obtient  $V_{S_{\max}}^2$  en remplaçant dans cette expression  $\psi$  et  $\theta'$  par leurs valeurs limites déduites de la relation (III.45).

### III.1.3. Caractéristiques

Les caractéristiques déduites de l'analyse harmonique sont tracées sur la planche III.11. On a utilisé les notations suivantes :

- $V$  : valeur efficace de la tension simple d'alimentation  $v_A$ ,
- $V_S$  : valeur efficace de la tension de sortie  $v_{sA}$ ,
- $V_{S_1}, V_{S_2}, V_{S_4}, V_{S_5}, V_{S_7}, V_{S_8}$  : valeurs efficaces du fondamental et des harmoniques 2, 4, 5, 7 et 8 de la tension de sortie.

On constate sur ces caractéristiques que la suppression du transformateur entraîne l'apparition, dans la décomposition en série de Fourier de la tension de sortie, d'un terme de même fréquence que celle des tensions d'alimentation, et d'amplitude relative d'autant plus importante que la charge est moins inductive. Pour  $\cos\phi' = 1$ , le fondamental est prépondérant et le montage ne peut plus être considéré comme un doubleur de fréquence.

Les harmoniques 5 et 7 n'ont par ailleurs une valeur sensible que pour cette valeur de  $\cos\phi'$  : dès que la charge devient légèrement inductive ils deviennent très inférieurs aux harmoniques 2, 4 et 8 et c'est pourquoi on ne les a pas représentés pour les valeurs de  $\cos\phi'$  différentes de 1.

Comme pour le doubleur de fréquence à gradateurs mixtes au secondaire d'un transformateur, c'est lorsque la charge est fortement inductive que la tension de sortie a la meilleure qualité et que sa valeur efficace est la plus élevée lorsque l'angle de conduction est maximum, bien que l'angle d'amorçage correspondant à ce type de fonctionnement diminue lorsque  $\cos\phi'$  passe de 0 à 0,8 contrairement au montage à transformateur cité plus haut.

## III.2. Courant dans une branche de la charge

Chaque phase de la charge est formée de deux branches et les deux branches d'une même phase sont parcourues par deux courants ayant la même forme d'onde, la même fréquence que les tensions d'entrée mais déphasés de  $\pi$  l'un par rapport à l'autre.

### III.2.1. Débit séparé des gradateurs

Au cours d'une période, le courant  $i_{sA}$  dans la branche AX de la charge a pour expressions successives :

$$\begin{aligned}
 & - \text{pour } \psi < \omega t < \psi + \theta & i_{s_A} &= \frac{\sqrt{3} V_m}{4R(1+Q^2)} \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - K e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right] \\
 & - \text{pour } \psi + \theta < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3} & i_{s_A} &= 0 \\
 & - \text{pour } \psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} & i_{s_A} &= -\frac{\sqrt{3} V_m}{4R(1+Q^2)} \left[ \sin(\omega t - \frac{5\pi}{6}) - Q \cos(\omega t - \frac{5\pi}{6}) - K e^{-\frac{\omega t - \frac{2\pi}{3}}{Q}} \right] \\
 & - \text{pour } \psi + \theta + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + 2\pi & i_{s_A} &= 0
 \end{aligned}$$

Puisque les deux alternances de ce courant sont symétriques, sa valeur efficace peut se calculer à partir de

$$\begin{aligned}
 I_S^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\theta} i_{s_A}^2 d\omega t \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{3 V_m^2}{16R^2(1+Q^2)^2} \int_{\psi}^{\psi+\theta} \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) - Q \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) - K e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]^2 d\omega t
 \end{aligned}$$

qui donne :

$$\begin{aligned}
 I_S^2 &= \frac{V_m^2}{Z'^2} \frac{3}{16\pi} \frac{1+4Q^2}{(1+Q^2)^2} \left\{ \frac{1+Q^2}{2} \cdot \theta + \frac{1-Q^2}{2} \cdot \sin\theta \cos(2\psi + \theta - \frac{\pi}{3}) - Q \sin\theta \sin(2\psi + \theta - \frac{\pi}{3}) \right. \\
 &\quad \left. + K^2 \frac{Q}{2} e^{-\frac{2\psi}{Q}} (1 - e^{-\frac{2\theta}{Q}}) - 2KQ e^{-\frac{\psi}{Q}} \left[ \sin(\psi - \frac{\pi}{6}) - e^{-\frac{\theta}{Q}} \sin(\psi + \theta - \frac{\pi}{6}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } Z' = R \sqrt{1+4Q^2}$$

### III.2.2. Débit simultané des gradateurs

Le courant  $i_{s_A}$  est maintenant donné au long d'une période par les expressions suivantes :

- pour $\psi < \omega t < \psi + \theta'$	$i_{s_A} = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_C \cos \omega t + B_C \sin \omega t - C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' < \omega t < \psi + \frac{\pi}{3}$	$i_{s_A} = \frac{-\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_A \cos \omega t + B_A \sin \omega t + K' e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{\pi}{3}$	$i_{s_A} = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_B \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) + B_B \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) + C e^{-\frac{2(\omega t - \frac{\pi}{3})}{3Q}} + D e^{-\frac{2(\omega t - \frac{\pi}{3})}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \frac{\pi}{3} < \omega t < \psi + \frac{2\pi}{3}$	$i_{s_A} = 0$
- pour $\psi + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \theta' + \frac{2\pi}{3}$	$i_{s_A} = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_C \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + B_C \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - C e^{-\frac{2(\omega t - \frac{2\pi}{3})}{3Q}} + D e^{-\frac{2(\omega t - \frac{2\pi}{3})}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \frac{2\pi}{3} < \omega t < \psi + \pi$	$i_{s_A} = \frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + B_A \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + K' e^{-\frac{\omega t - \frac{2\pi}{3}}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \pi < \omega t < \psi + \theta' + \pi$	$i_{s_A} = -\frac{\sqrt{3} V_m}{8R} \left[ A_B \cos \omega t + B_B \sin \omega t + C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$
- pour $\psi + \theta' + \pi < \omega t < \psi + 2\pi$	$i_{s_A} = 0$

Comme dans le cas précédent, les deux alternances du courant sont symétriques et sa valeur efficace peut se calculer sur une demi-période par

$$\begin{aligned}
 I_S^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi + \theta' + \frac{\pi}{3}} i_{s_A}^2 d\omega t \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{3 V_m^2}{64 R^2} \left\{ \int_{\psi}^{\psi + \theta'} \left[ (A_C \cos \omega t + B_C \sin \omega t - C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (A_B \cos \omega t + B_B \sin \omega t + C e^{-\frac{2\omega t}{3Q}} + D e^{-\frac{2\omega t}{Q}})^2 \right] d\omega t \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\psi + \theta'}^{\psi + \frac{\pi}{3}} (A_A \cos \omega t + B_A \sin \omega t + K' e^{-\frac{\omega t}{Q}})^2 d\omega t \right\}
 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
I_S^2 = & \frac{v_m^2}{Z'2} \cdot \frac{3(1+4Q^2)}{64\pi} \left[ (A_B^2 + A_C^2) \frac{\theta' + \sin\theta' \cos(2\psi + \theta')}{2} + (B_B^2 + B_C^2) \frac{\theta' - \sin\theta' \cos(2\psi + \theta')}{2} \right. \\
& + (A_B B_B + A_C B_C) \sin\theta' \sin(2\psi + \theta') + \frac{3}{2} Q C^2 e^{-\frac{4\psi}{3Q}} \left( 1 - e^{-\frac{4\theta'}{3Q}} \right) \\
& + \frac{Q}{2} D^2 e^{-\frac{4\psi}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{4\theta'}{Q}} \right) \\
& + \frac{2(A_B - A_C)}{1 + \frac{4}{9Q^2}} C e^{-\frac{2\psi}{3Q}} \left\{ \frac{2}{3Q} \cos\psi - \sin\psi - e^{-\frac{2\theta'}{3Q}} \left[ \frac{2}{3Q} \cos(\psi + \theta') - \sin(\psi + \theta') \right] \right\} \\
& + \frac{2(B_B - B_C)}{1 + \frac{4}{9Q^2}} C e^{-\frac{2\psi}{3Q}} \left\{ \frac{2}{3Q} \sin\psi + \cos\psi - e^{-\frac{2\theta'}{3Q}} \left[ \frac{2}{3Q} \sin(\psi + \theta') + \cos(\psi + \theta') \right] \right\} \\
& + \frac{2(A_B + A_C)}{1 + \frac{4}{Q^2}} D e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left\{ \frac{2}{Q} \sin\psi + \cos\psi - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \sin(\psi + \theta') + \cos(\psi + \theta') \right] \right\} \\
& + \frac{2(B_B + B_C)}{1 + \frac{4}{Q^2}} D e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left\{ \frac{2}{Q} \cos\psi - \sin\psi - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \cos(\psi + \theta') - \sin(\psi + \theta') \right] \right\} \\
& + \frac{A_A^2}{2} \left[ \frac{\pi}{3} - \theta' + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \cos\left(2\psi + \frac{\pi}{3} + \theta'\right) \right] \\
& + \frac{B_A^2}{2} \left[ \frac{\pi}{3} - \theta' - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \cos\left(2\psi + \frac{\pi}{3} + \theta'\right) \right] \\
& + A_A B_A \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \sin\left(2\psi + \frac{\pi}{3} + \theta'\right) + \frac{Q}{2} K'^2 e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left( e^{-\frac{2\theta'}{Q}} - e^{-\frac{2\pi}{3Q}} \right) \\
& + \frac{2QK'A_A}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi}{Q}} \left\{ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \left[ \cos(\psi + \theta') - Q \sin(\psi + \theta') \right] - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \left[ \cos\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) - Q \sin\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right\} \\
& + \frac{2QK'B_A}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi}{Q}} \left\{ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \left[ \sin(\psi + \theta') + Q \cos(\psi + \theta') \right] - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \left[ \sin\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) + Q \cos\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right\} \Big]
\end{aligned}$$

On obtient  $I_{S_{\max}}^2$  en remplaçant dans cette expression  $\psi$  et  $\theta'$  par

leurs valeurs limites déduites de la relation (III.45). On a tracé sur la planche III.12 les variations de  $I_{S_{\max}}$  rapportées à  $V/2Z'$  en fonction

de  $\cos\varphi'$ , et on a rappelé en trait discontinu les variations correspondantes de  $V_{S_{\max}}/V$ .

### III.3. Courants en ligne

Le courant en ligne  $i_A$  est donné par :

$$i_A = is_A - is'_A = -i_B - i_C$$

#### III.3.1. Fonctionnement à 0 ou 1 gradateur passant

Au cours d'une période, le courant  $i_A$  a pour expressions successives :

- pour  $\psi < \omega t < \psi + \pi$   $i_A(\omega t) = is_A(\omega t)$
- pour  $\psi + \pi < \omega t < \psi + 2\pi$   $i_A(\omega t) = -is_A(\omega t)$

Sa valeur efficace  $I$  s'obtient donc directement à partir de celle de  $is_A$  :

$$I = \sqrt{2} I_S$$

#### III.3.2. Fonctionnement à 1 ou 2 gradateurs passants

Au cours d'une période, le courant  $i_A$  a pour expressions successives :

- pour  $\psi < \omega t < \psi + \theta'$   $i_A(\omega t) = \frac{\sqrt{3}V_m}{8R} \left[ (A_B + A_C) \cos \omega t + (B_B + B_C) \sin \omega t + 2De^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]$
- pour  $\psi + \theta' < \omega t < \psi + \pi$   $i_A(\omega t) = is_A(\omega t)$
- pour  $\psi + \pi < \omega t < \psi + \theta' + \pi$   $i_A(\omega t) = -\frac{\sqrt{3}V_m}{8R} \left[ (A_B + A_C) \cos \omega t + (B_B + B_C) \sin \omega t - 2De^{-\frac{2(\omega t - \pi)}{Q}} \right]$
- pour  $\psi + \theta' + \pi < \omega t < \psi + 2\pi$   $i_A(\omega t) = -is_A(\omega t)$

Les deux alternances de  $i_A$  sont symétriques et on peut calculer sa valeur efficace sur une demi-période.

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\pi} i_A^2 d\omega t \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+\frac{\pi}{3}} i_A^2 d\omega t + I_S^2 \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{3 V_m^2}{64 R^2} \left\{ \int_{\psi}^{\psi+\theta'} \left[ (A_B+A_C) \cos \omega t + (B_B+B_C) \sin \omega t + 2D e^{-\frac{2\omega t}{Q}} \right]^2 d\omega t \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\psi+\theta'}^{\psi+\frac{\pi}{3}} \left[ A_A \cos \omega t + B_A \sin \omega t + K' e^{-\frac{\omega t}{Q}} \right]^2 d\omega t \right\} + I_S^2
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 I^2 &= I_S^2 + \frac{V_m^2}{Z^2} \cdot \frac{3(1+4Q^2)}{64} \left[ \left[ (A_B+A_C)^2 \cdot \frac{\theta'+\sin\theta' \cdot \cos(2\psi+\theta')}{2} + (B_B+B_C)^2 \cdot \frac{\theta'-\sin\theta' \cdot \cos(2\psi+\theta')}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(A_B+A_C)(B_B+B_C) \sin\theta' \cdot \sin(2\psi+\theta') + Q D^2 e^{-\frac{4\psi}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{4\theta'}{Q}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4(A_B+A_C)}{1+\frac{4}{Q^2}} D e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left\{ \frac{2}{Q} \cos\psi - \sin\psi - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \cos(\psi+\theta') - \sin(\psi+\theta') \right] \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4(B_B+B_C)}{1+\frac{4}{Q^2}} D e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left\{ \frac{2}{Q} \sin\psi + \cos\psi - e^{-\frac{2\theta'}{Q}} \left[ \frac{2}{Q} \sin(\psi+\theta') - \cos(\psi+\theta') \right] \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{A_A^2}{2} \left[ \frac{\pi}{3} - \theta' + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \cos\left(2\psi + \frac{\pi}{3} + \theta'\right) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{B_A^2}{2} \left[ \frac{\pi}{3} - \theta' - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \cos\left(2\psi + \frac{\pi}{3} + \theta'\right) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + A_A B_A \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta'\right) \sin\left(2\psi + \frac{\pi}{3} + \theta'\right) + \frac{Q}{2} K'^2 e^{-\frac{2\psi}{Q}} \left( e^{-\frac{2\theta'}{Q}} - e^{-\frac{2\pi}{3Q}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2QK'A_A}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi}{Q}} \left\{ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \left[ \cos(\psi+\theta') - Q \sin(\psi+\theta') \right] - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \left[ \cos\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) - Q \sin\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2QK'B_A}{1+Q^2} e^{-\frac{\psi}{Q}} \left\{ e^{-\frac{\theta'}{Q}} \left[ \sin(\psi+\theta') + Q \cos(\psi+\theta') \right] - e^{-\frac{\pi}{3Q}} \left[ \sin\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) + Q \cos\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right\} \right] \right]
 \end{aligned}$$

On obtient  $I_{\max}^2$  en remplaçant dans cette expression  $\psi$  et  $\theta'$  par leurs valeurs limites déduites de la relation (III.45). On a tracé sur la planche III.12. les variations de  $I_{\max}$  rapportées à  $V/Z'$ , en fonction de  $\cos\phi'$ .

### III.4. Facteur d'utilisation des thyristors

La tension aux bornes des thyristors est toujours positive. On voit sur la figure III.3.4.b qu'elle est maximale pour la valeur de  $\omega t$  qui précède de  $\frac{\pi}{3}$  celle de son amorçage, et que la plus grande valeur de la tension instantanée maximale est obtenue lorsque l'angle d'amorçage des thyristors est minimum. Cette valeur minimale correspond à une valeur nulle de la tension aux bornes de  $Th'_B$  à l'instant où on amorce  $Th_A$  et elle est donnée par la relation (III.45) : la valeur de la tension aux bornes de  $Th_C$  à cet instant permet de calculer la tension instantanée maximale que doivent supporter les thyristors. On vérifie qu'elle ne varie pratiquement pas avec  $\cos\phi'$  et qu'elle est maximale pour  $\cos\phi' = 0$  quand on a  $\psi_{\min} = \frac{5\pi}{6}$  et  $v_{Th_{\max}} = 3 V_m$ . C'est donc cette valeur qu'on utilisera pour le calcul du facteur d'utilisation des thyristors défini par

$$f_{th} = \frac{6 V_{S_{\max}} I_{S_{\max}}}{6 v_{Th_{\max}} I_{th_{\max}}}$$

où  $I_{th_{\max}}$  représente la valeur efficace maximale du courant qui traverse les thyristors: celui-ci est formé par l'une des deux alternances qui traversent une branche d'une phase de la charge. On a donc

$$I_{th_{\max}} = \frac{I_{S_{\max}}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{et } f_{th} = \sqrt{2} \frac{V_{S_{\max}}}{v_{Th_{\max}}} = \frac{1}{3} \frac{V_{S_{\max}}}{V}$$

On a tracé sur la planche III.13. les variations de  $f_{th}$  avec  $\cos\phi'$ . On a rappelé en trait discontinu les valeurs de  $f_{th}$  correspondant au meilleur montage à 12 thyristors. Le facteur d'utilisation est ici pratiquement

toujours supérieur grâce au nombre réduit de thyristors mais surtout parce que chaque thyristor n'est traversé que par une alternance du courant dans une branche d'une phase de la charge : par rapport aux autres montages, à charge donnée, la puissance de dimensionnement des thyristors sera réduite. Il faut cependant ici encore rappeler que six diodes doivent être associées aux six thyristors.

#### IV. APPLICATION : MULTIPLICATION PAR 2 DE LA VITESSE D'UN MOTEUR

##### ASYNCHRONE DE CONSTRUCTION SPECIALE

Nous avons utilisé le schéma de la figure III.3.1. pour alimenter un moteur asynchrone de construction spéciale, dont chaque phase est formée de deux enroulements identiques logés dans les mêmes encoches. Cela permet de doubler sa vitesse synchrone.

Les essais ont été effectués sur un petit moteur réalisé d'origine pour une puissance de 3 Ch et dont le stator a été rebobiné pour la constance. La figure III.3.6. montre les caractéristiques de glissement  $g$ , de puissance utile  $P_u$  et de courant  $I_S$  dans les enroulements obtenues en alimentant le moteur par le doubleur de fréquence avec un angle d'amorçage minimum pour les thyristors et une tension  $V_S = 140V$  aux bornes d'une phase (courbes en traits continus), puis directement par le réseau à 50 Hz (courbes en traits discontinus). Dans ce cas la tension d'alimentation était telle que la valeur efficace de la tension aux bornes des enroulements soit voisine de  $70V$ , ce qui correspond à une induction sensiblement égale.

On voit que pour obtenir le même couple utile, il faut à 100 Hz un courant  $I_S$  dans les enroulements beaucoup plus important qu'à 50 Hz, car le facteur de puissance de l'ensemble moteur-doubleur de fréquence est faible ; cela tient, comme nous l'avons montré dès le début, au principe même des multiplicateurs de fréquence à thyristors commutés par la source.

La figure III.3.7. montre les oscillogrammes relevés. Les formes d'ondes des tensions et des courants ressemblent beaucoup à celles de la figure III.3.4.b.

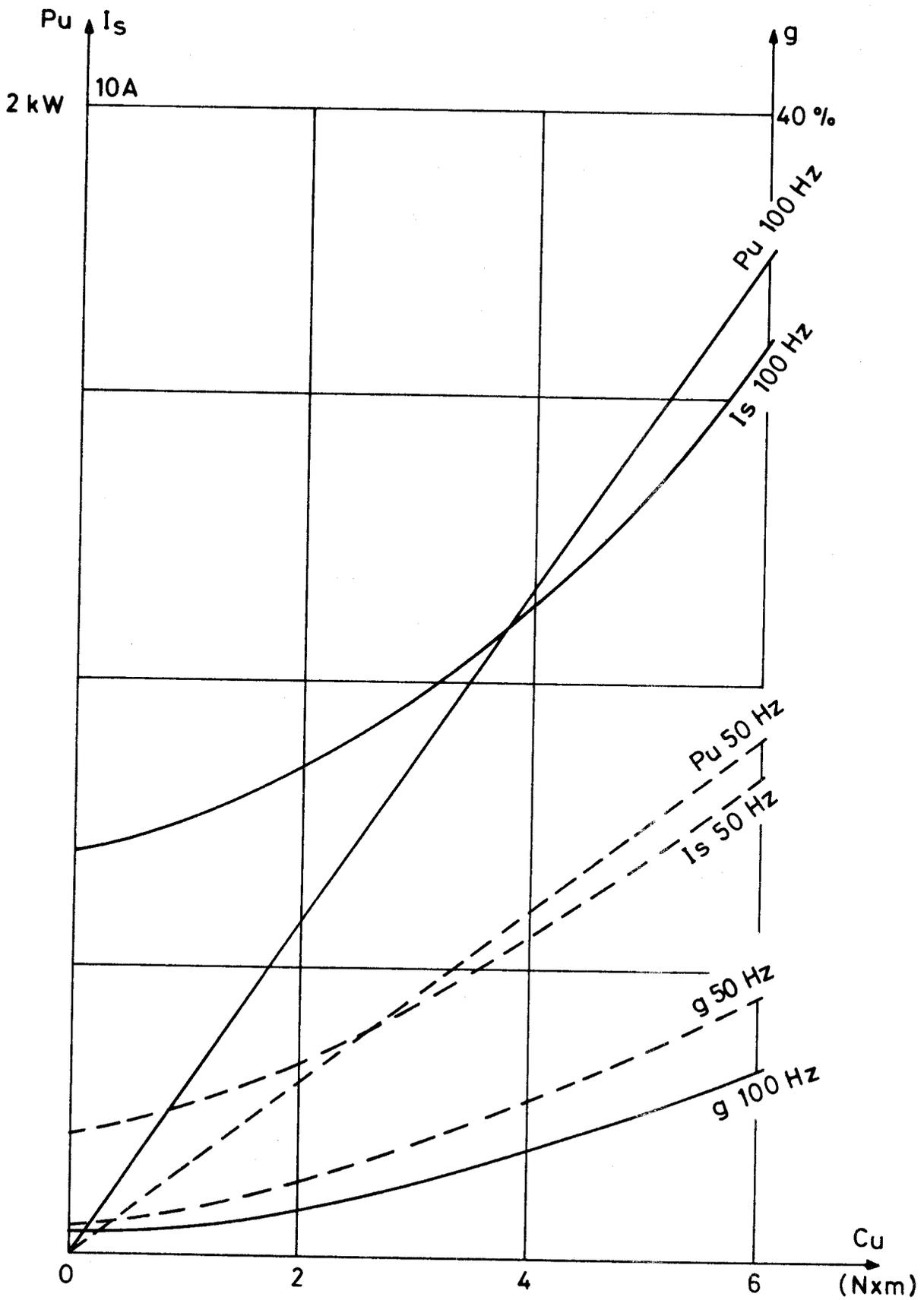
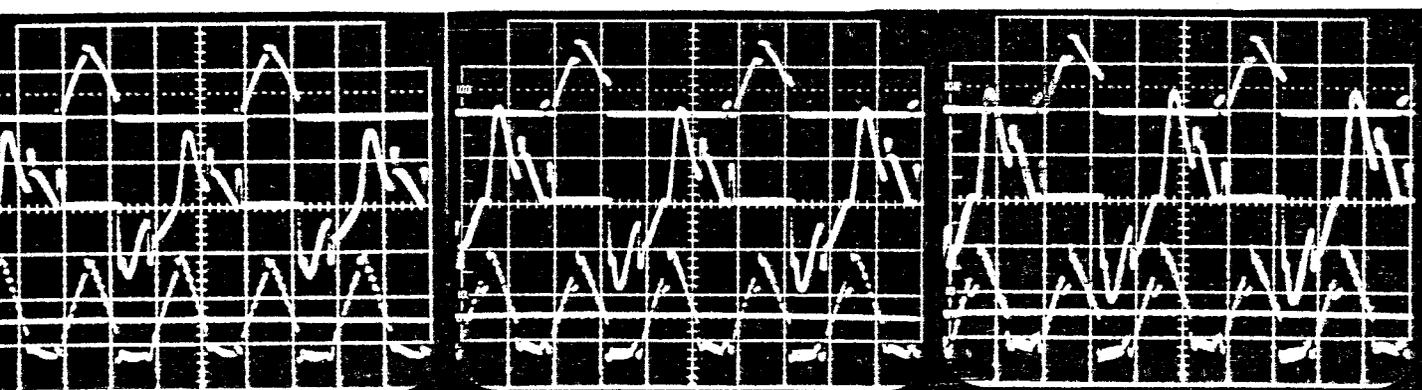


FIG. III.3.6





- à vide

- à demi-charge

- à pleine charge

FIG. III.3.7

EDe haut en bas: - tension  $v_{ThA}$  aux bornes d'un thyristor ( $500^V/div$ )

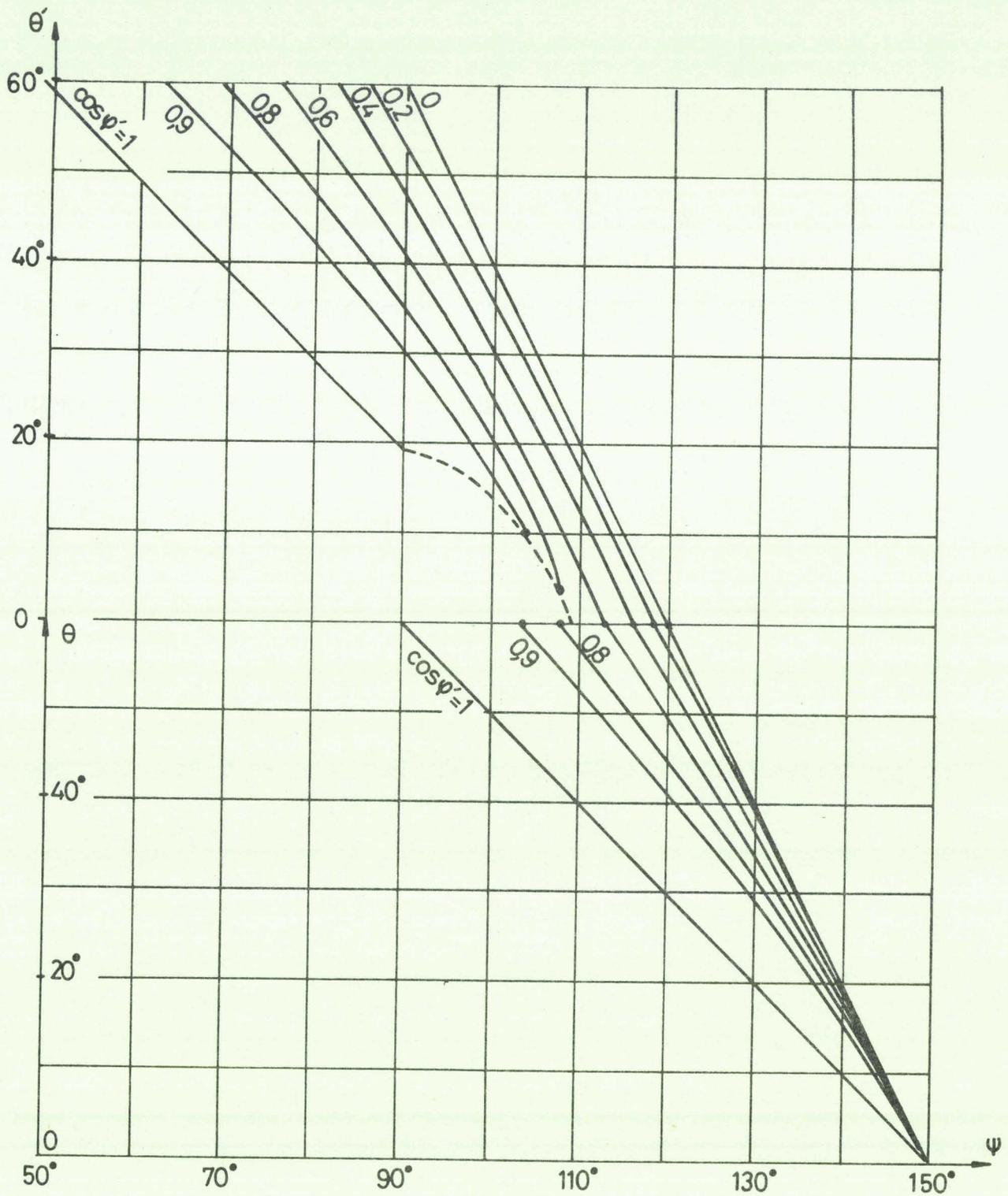
- courant  $-i_{sA}$  dans une branche d'une phase ( $10^A/div$ )

- tension  $-v_{sA}$  aux bornes d'une branche d'une phase ( $200^V/div$ )

## V. CONCLUSION

Ce montage présente l'avantage considérable de pouvoir utiliser directement le réseau triphasé pour réaliser la multiplication par deux de la fréquence de ce réseau. Le doubleur proprement dit ne comporte que les six diodes, les six thyristors et leur électronique de commande. Le facteur d'utilisation des thyristors est bon et les harmoniques des tensions de sortie suffisamment faibles si la charge n'est pas trop résistive.

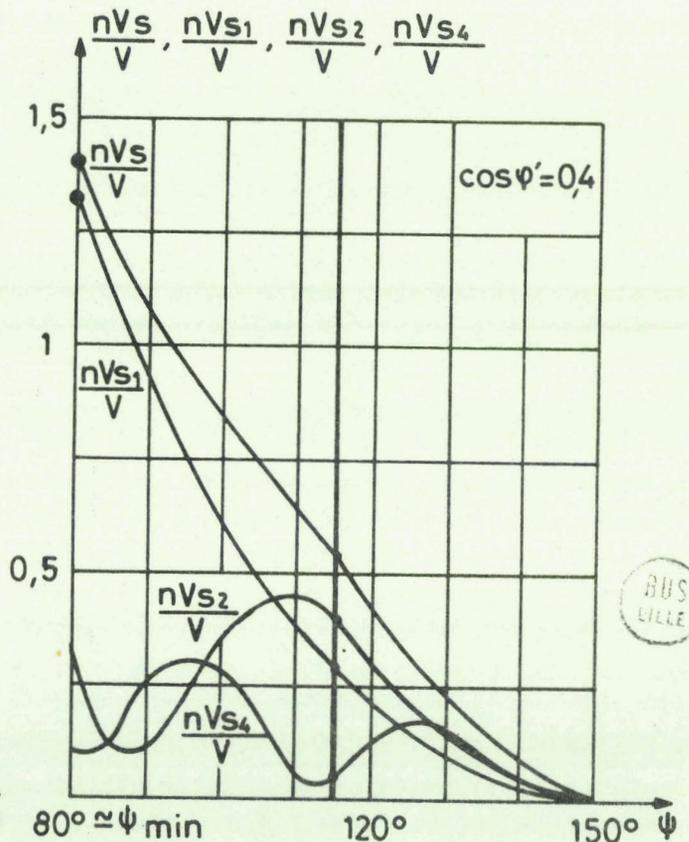
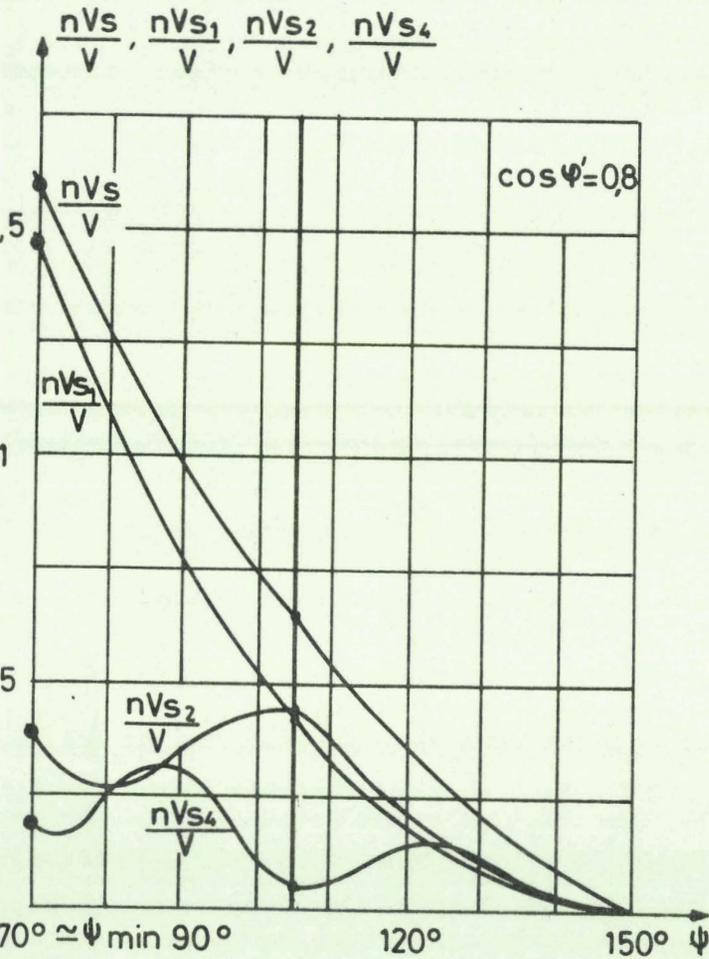
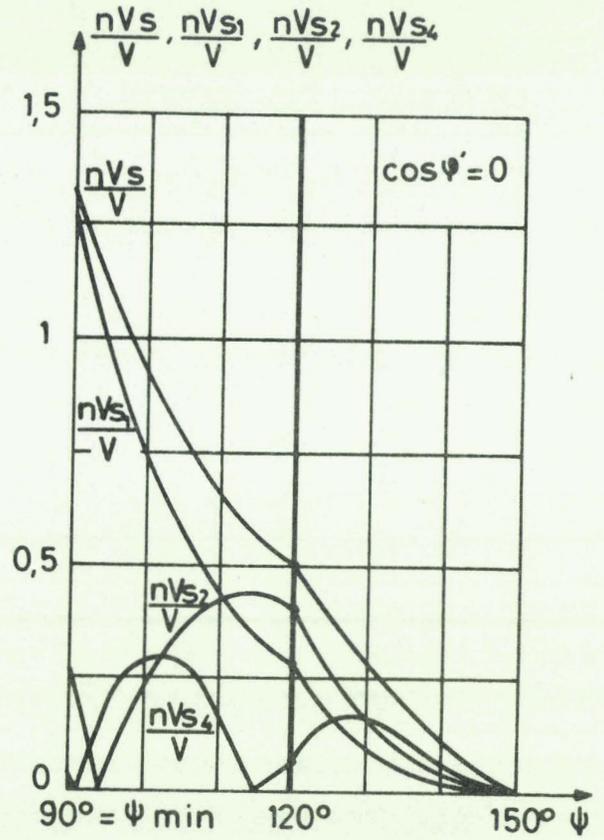
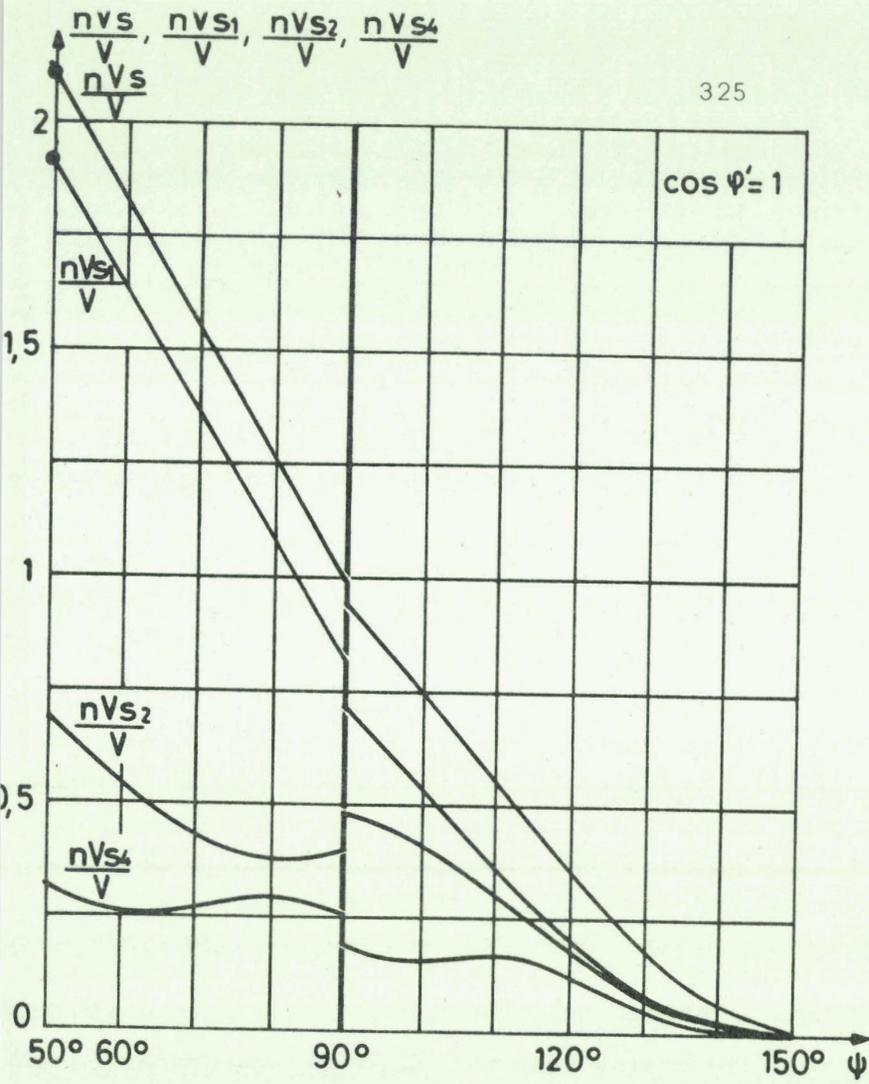
Mais cette charge doit être conçue en fonction de son utilisation par ce type de montage. Ce sont ses propres éléments qui jouent le rôle du transformateur des montages précédents et son facteur de puissance est par conséquent assez faible.



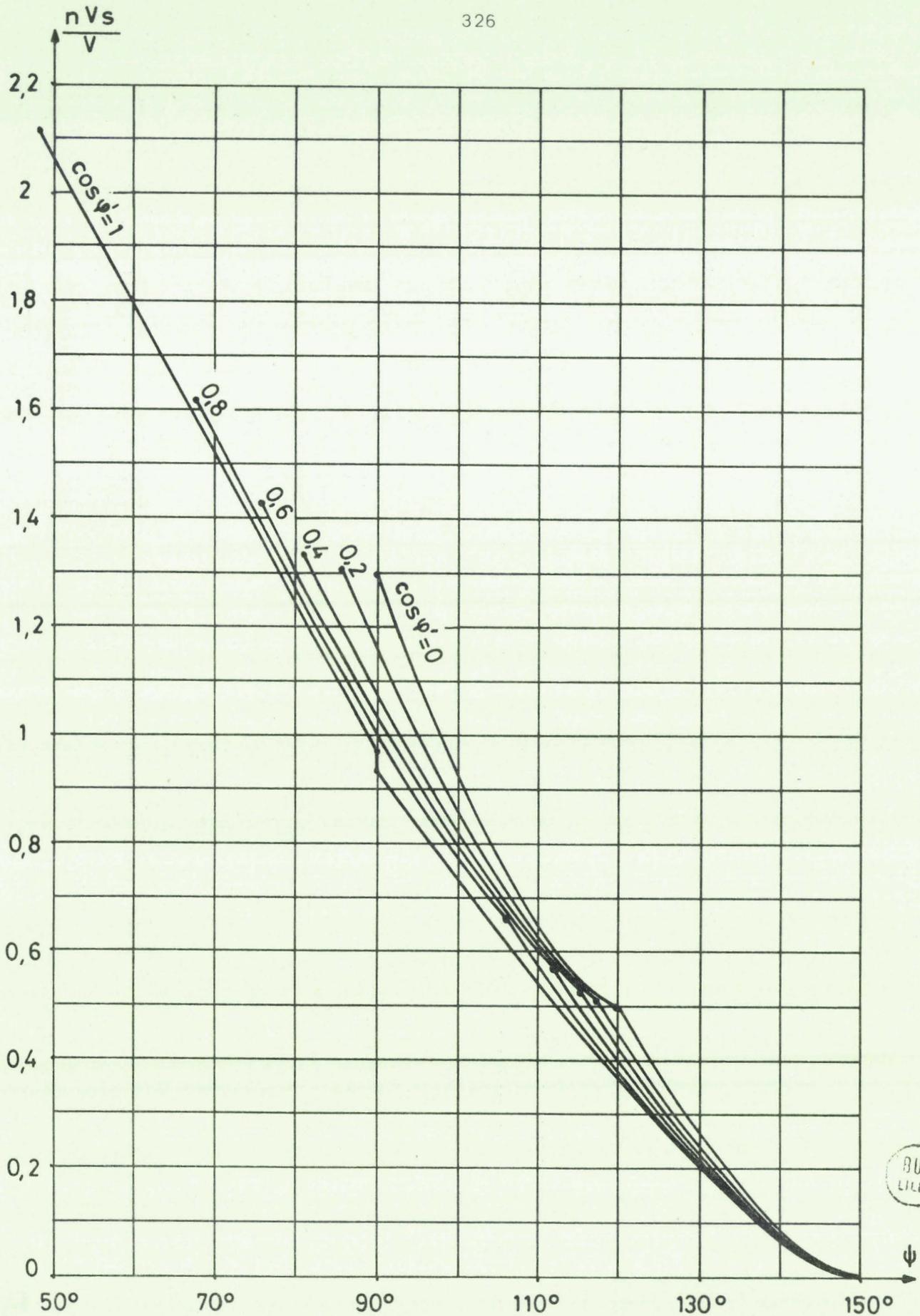
PL. III.1. VARIATIONS, EN FONCTION DE  $\psi$ ,  
 - DE L'ANGLE  $\theta'$  DE CONDUCTION SIMULTANÉE DE 3 THYRISTORS  
 - DE L'ANGLE  $\theta$  DE CONDUCTION SIMULTANÉE DE 2 THYRISTORS.

BUS  
LILLE

DOUBLEUR TRIPHASE A 6 THYRISTORS EN AMONT DU TRANSFORMATEUR

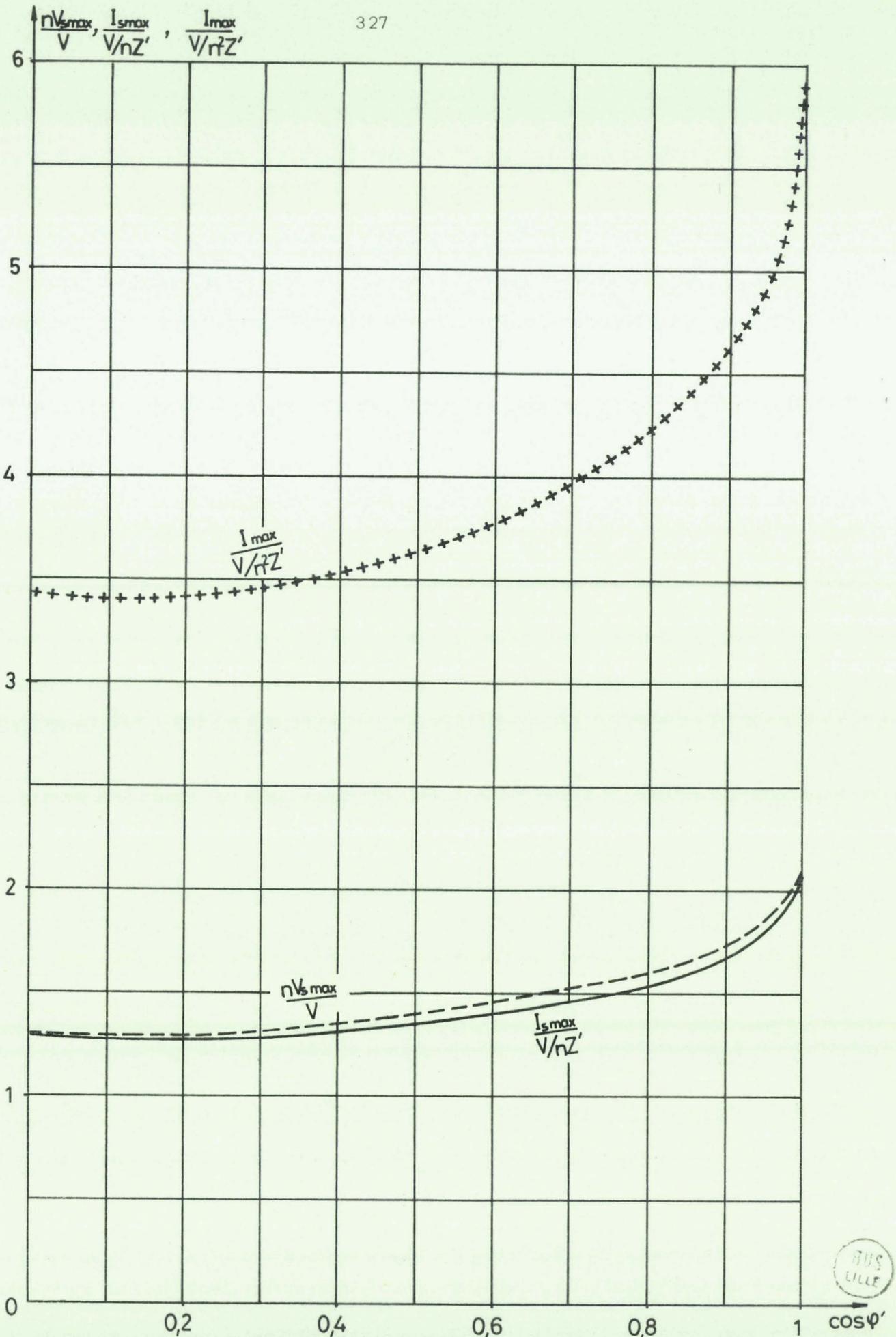


PL.III.2. ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE.  
DOUBLEUR TRIPHASE A 6 THYRISTORS EN AMONT DU TRANSFORMATEUR



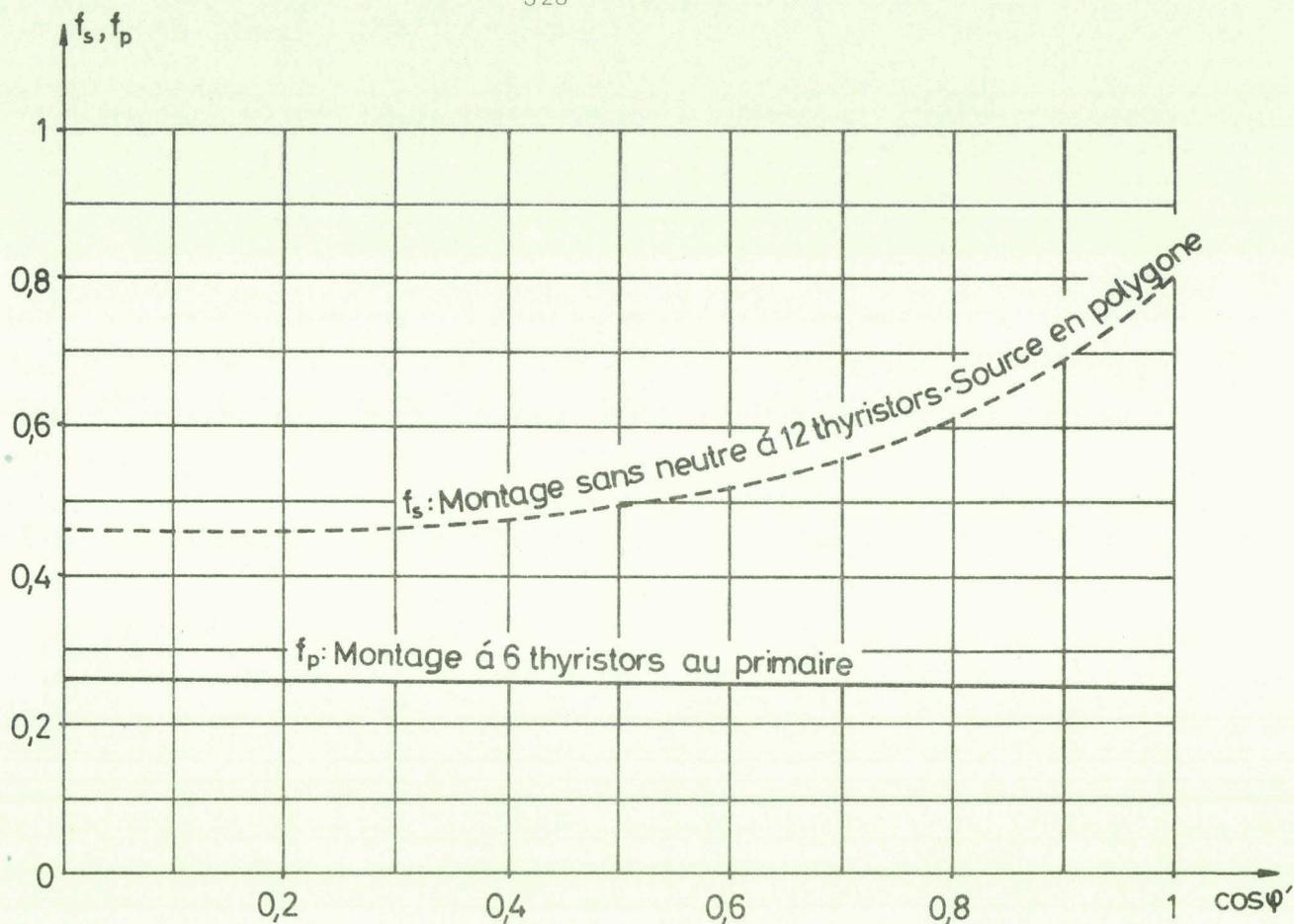
PL. III.3. VARIATIONS DE LA VALEUR EFFICACE DES TENSIONS DE SORTIE EN FONCTION DE  $\psi$  POUR DIVERS  $\cos \varphi'$

DOUBLEUR TRIPHASE A 6 THYRISTORS EN AMONT DU TRANSFORMATEUR



.III.4. VARIATIONS EN FONCTION DE  $\cos \varphi'$  DES VALEURS EFFICACES MAXIMALES DE LA TENSION AUX BORNES DE LA CHARGE, DU COURANT DANS LA CHARGE ET DU COURANT DÉBITÉ PAR LA SOURCE.

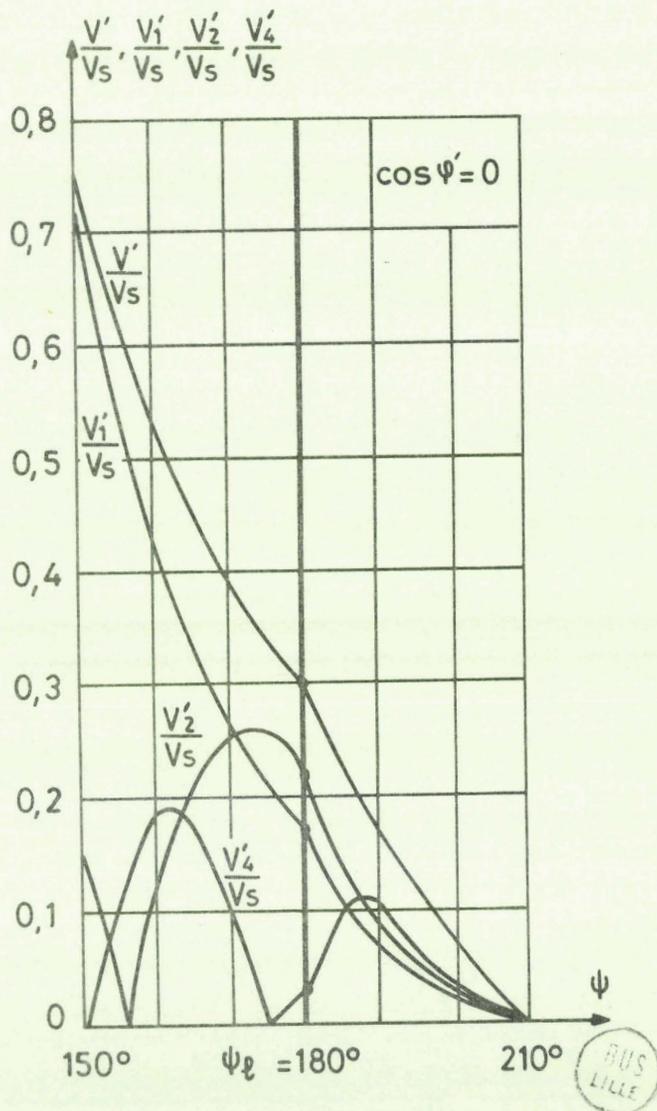
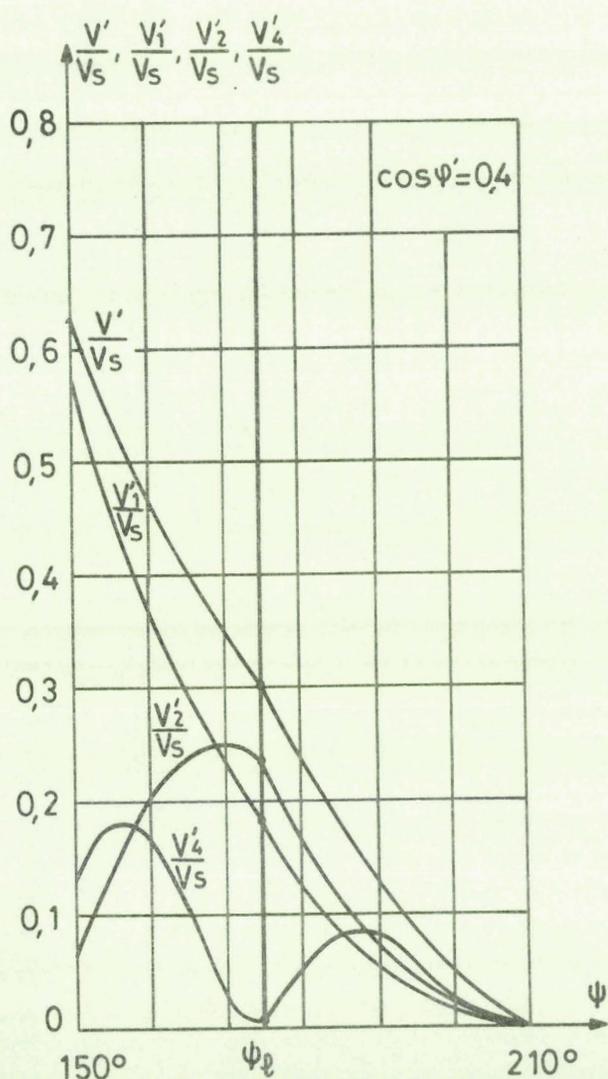
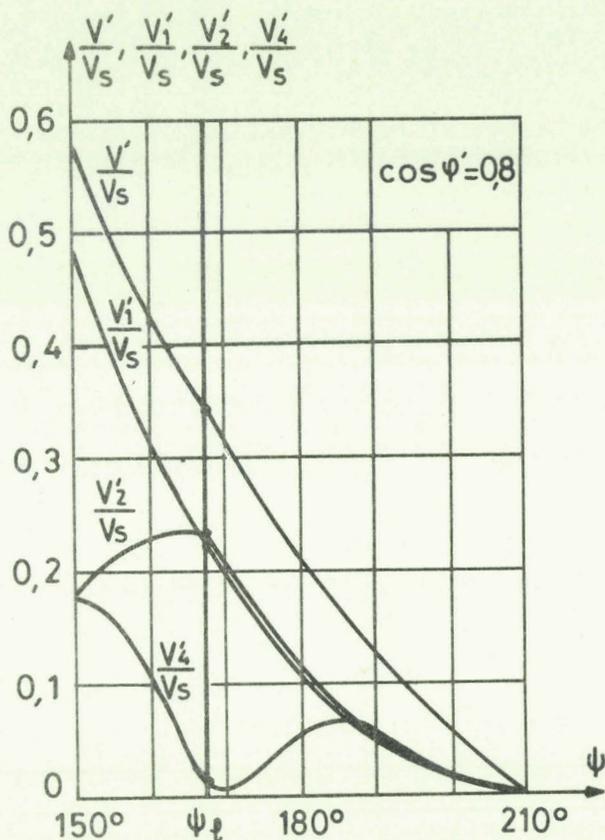
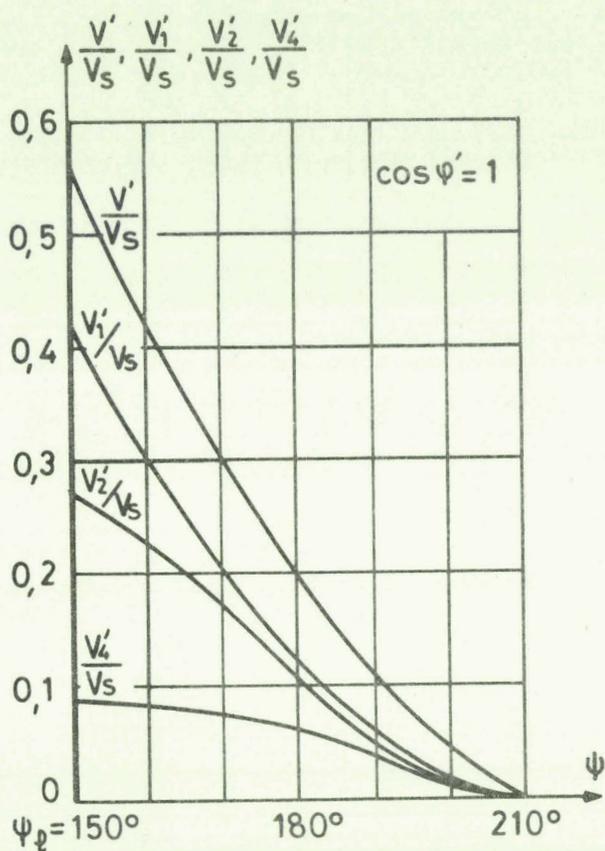
DOUBLEUR TRIPHASE A 6 THYRISTORS EN AMONT DU TRANSFORMATEUR



Pl. III.5. VARIATIONS DU FACTEUR D'UTILISATION DES ENROULEMENTS PRIMAIRES ET DU FACTEUR D'UTILISATION DES THYRISTORS.



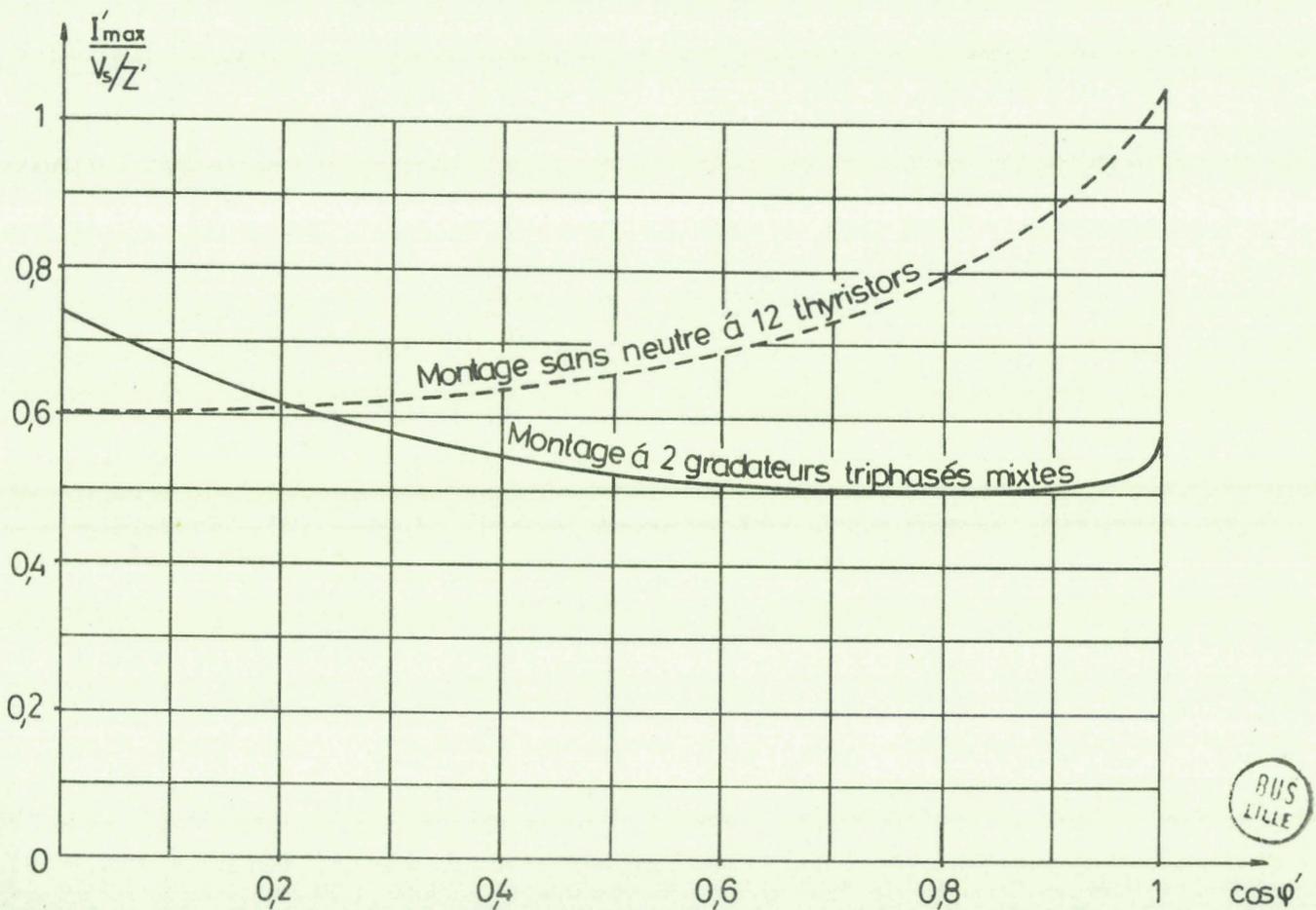
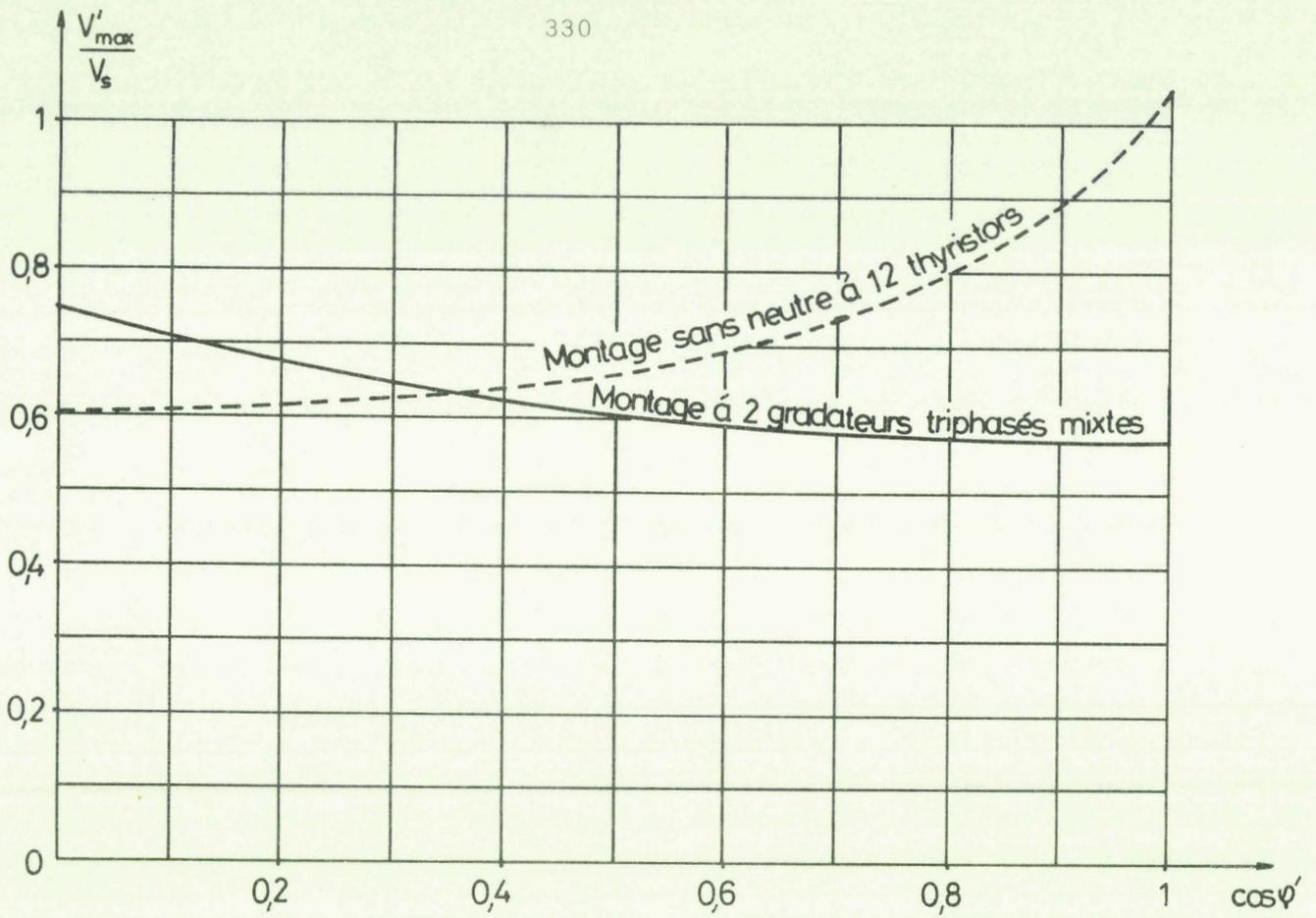
DOUBLEUR TRIPHASE A 6 THYRISTORS EN AMONT DU TRANSFORMATEUR



PL. III.6. ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE.

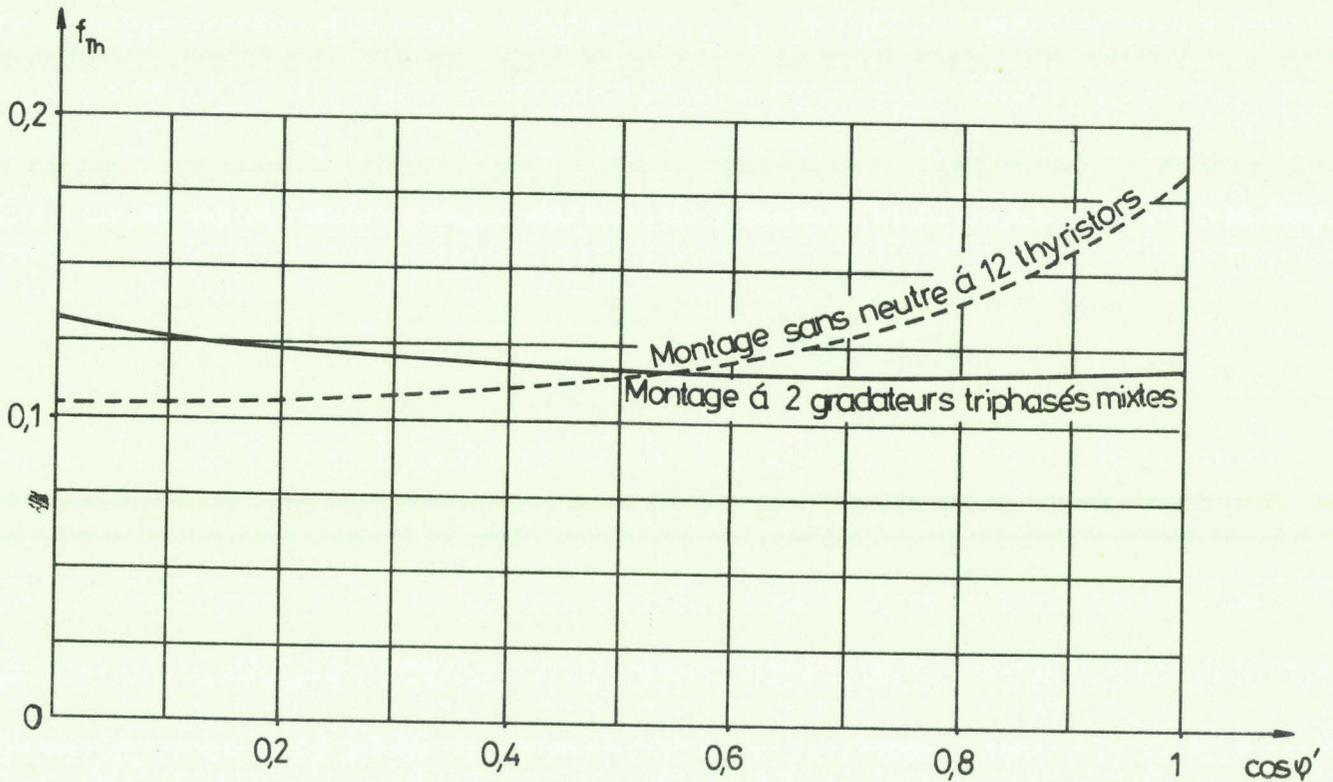
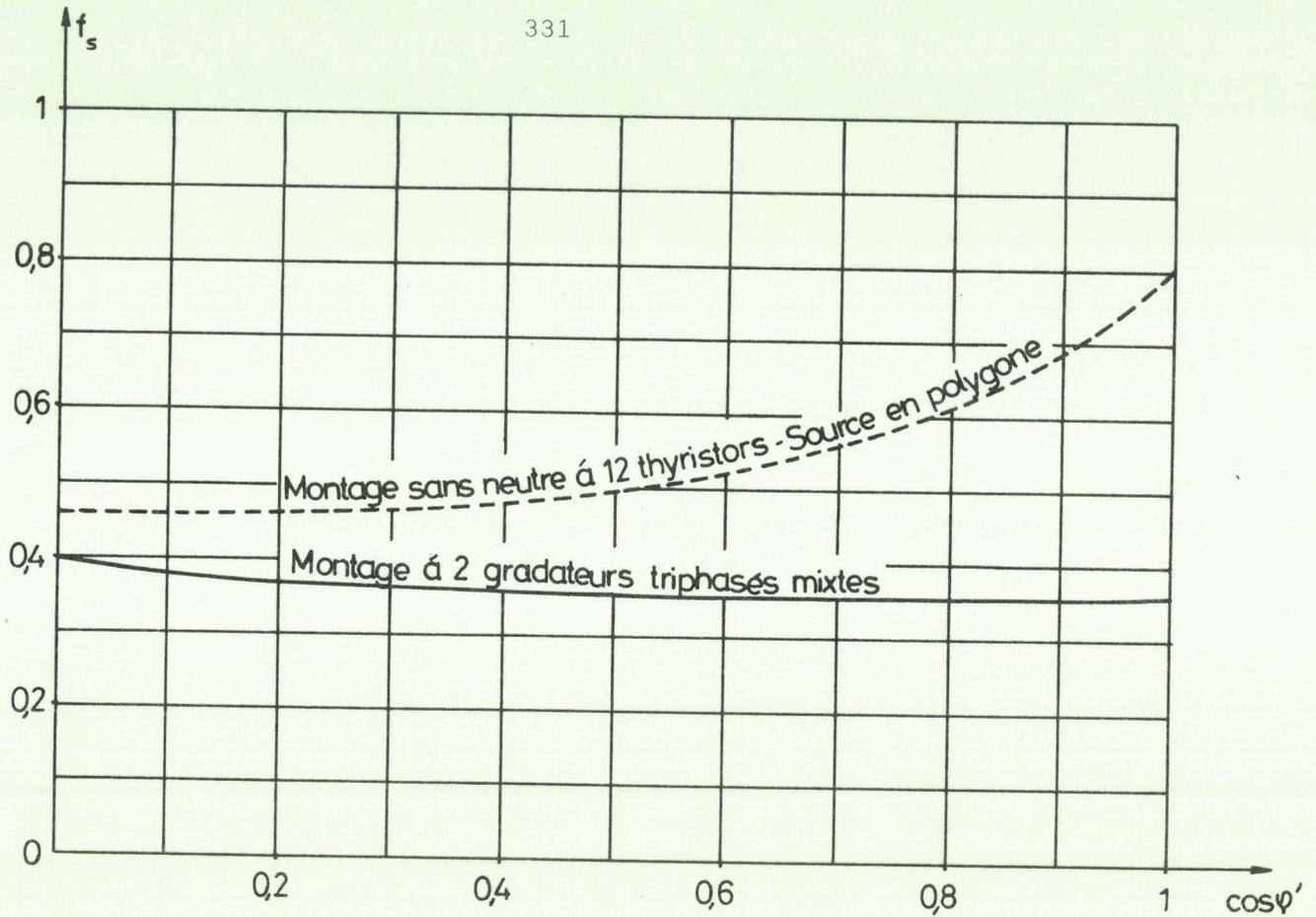
DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRIPHASES MIXTES AU SECONDAIRE DU TRANSFORMATEUR





PL. III.7. VARIATIONS DE LA VALEUR EFFICACE MAXIMALE DE LA TENSION ET DU COURANT DANS UNE PHASE DE LA CHARGE.

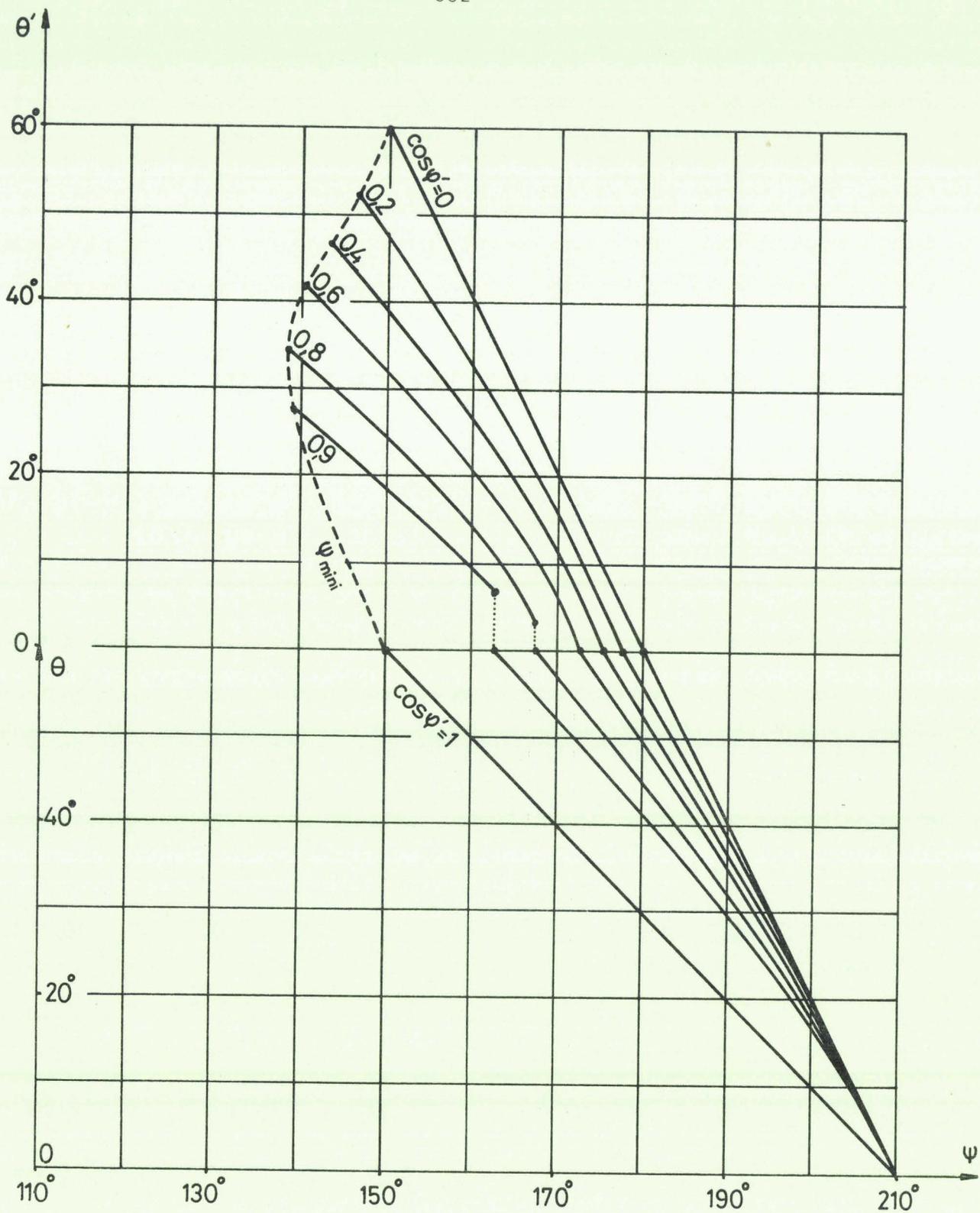
DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRI-PHASES MIXTES AU SECONDAIRE DU TRANSFORMATEUR



PL. III.8. VARIATIONS DU FACTEUR D'UTILISATION DES ENROULEMENTS SECONDAIRES ET DU FACTEUR D'UTILISATION DES THYRISTORS.



DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRIPHASES MIXTES AU SECONDAIRE DU TRANSFORMATEUR

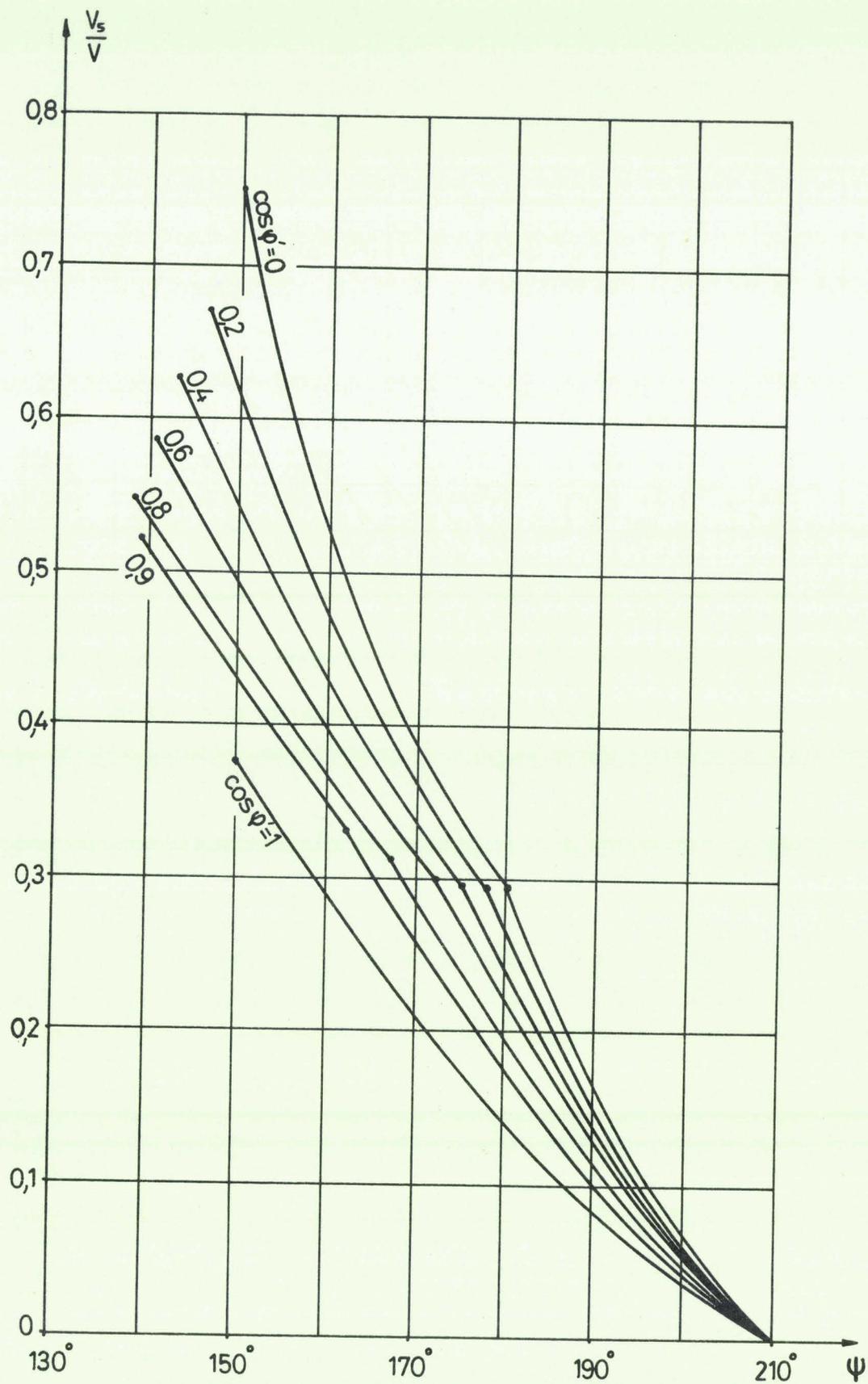


PL. III.9. VARIATIONS, EN FONCTION DE  $\psi$ ,

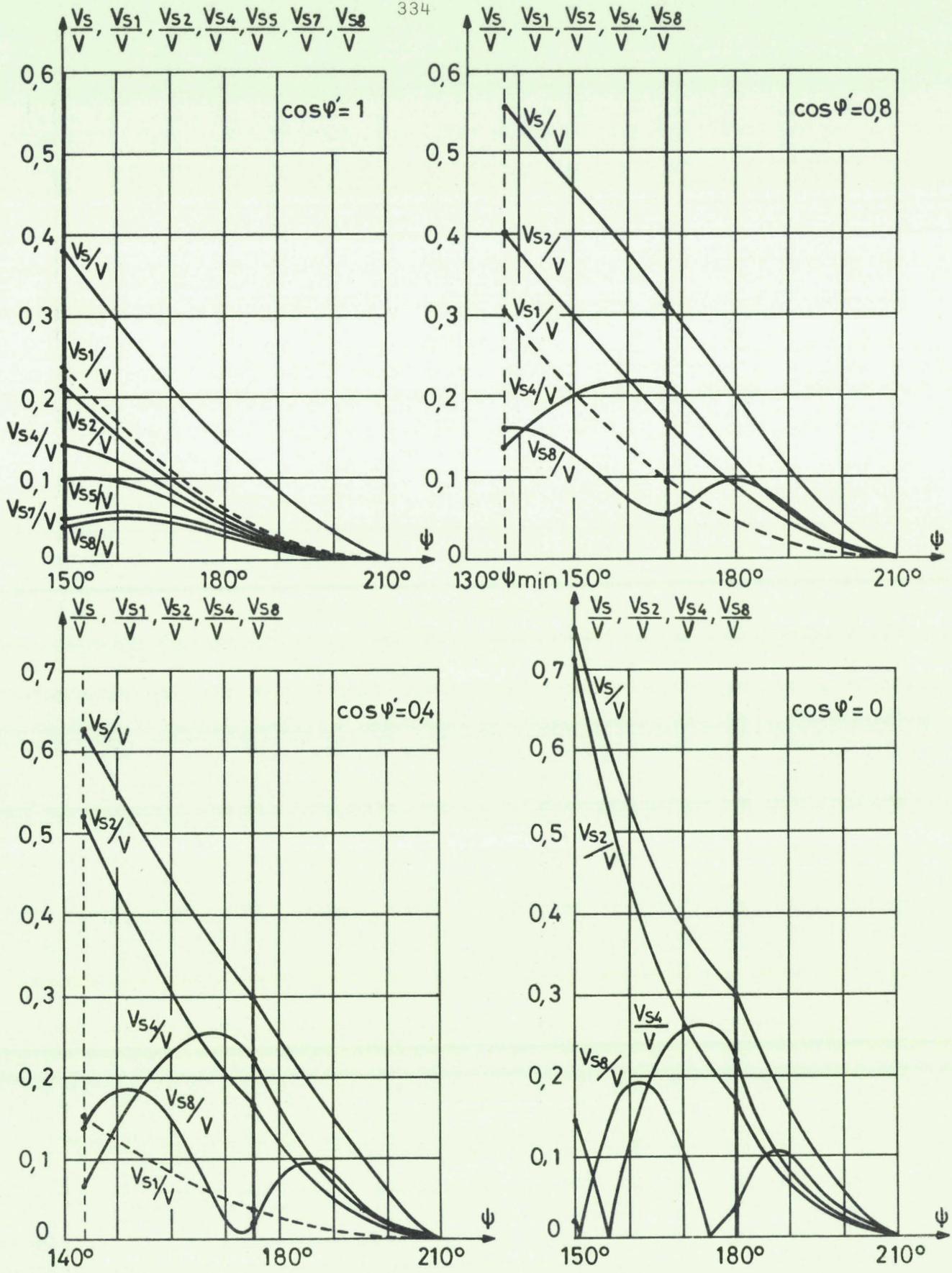
- DE L'ANGLE  $\theta'$  DE CONDUCTION SIMULTANÉE DE 2 GRADATEURS TRIPHASÉS
- DE L'ANGLE  $\theta$  DE CONDUCTION D'UN SEUL GRADATEUR TRIPHASÉ À LA FOIS.



DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRIPHASES MIXTES SANS TRANSFORMATEUR



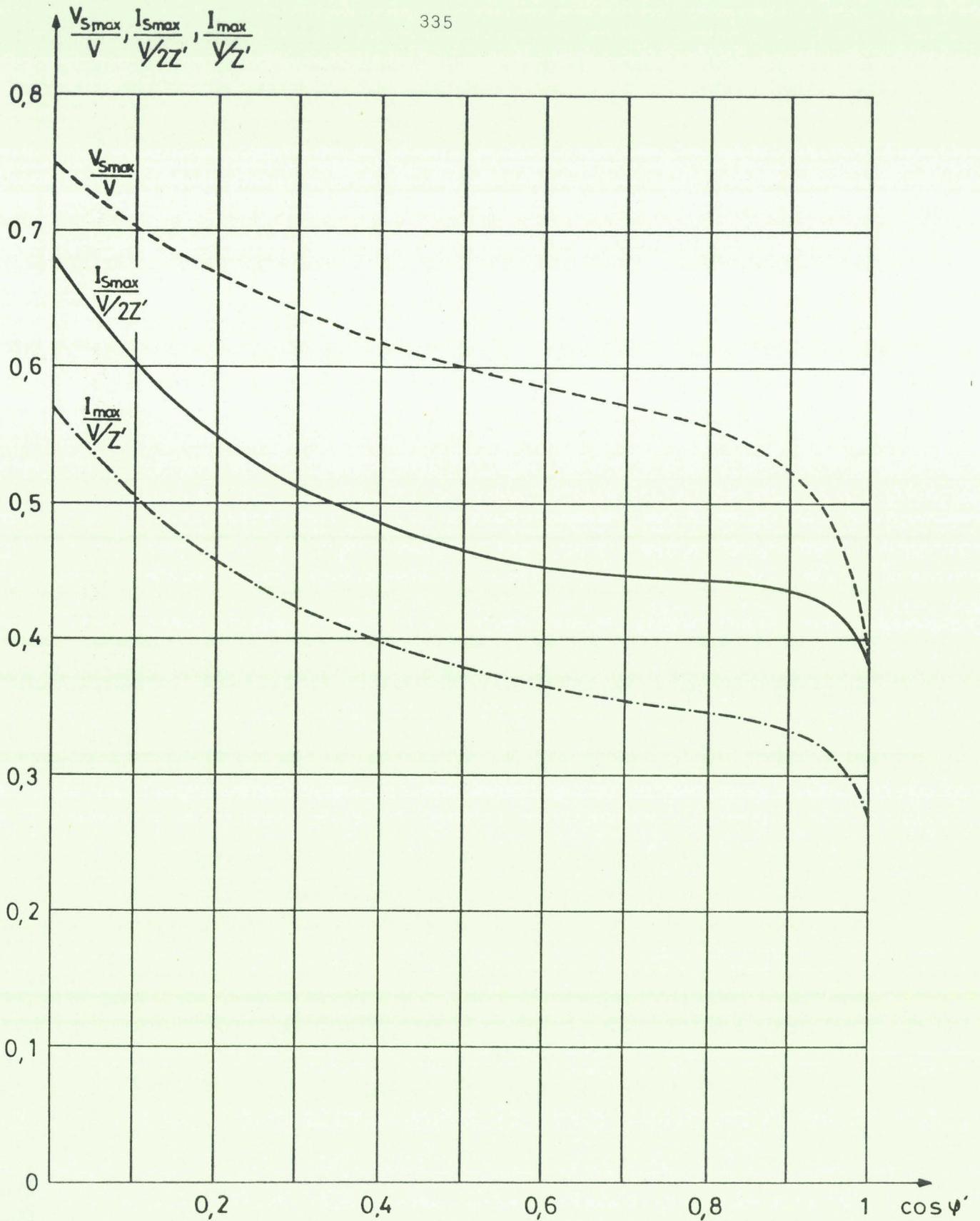
PL. III.10. VARIATIONS DE LA VALEUR EFFICACE DES TENSIONS DE SORTIE.  
 DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRIPHASES MIXTES SANS TRANSFORMATEUR



PL. III. 11. ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE.

DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRIPHASES MIXTES SANS TRANSFORMATEUR

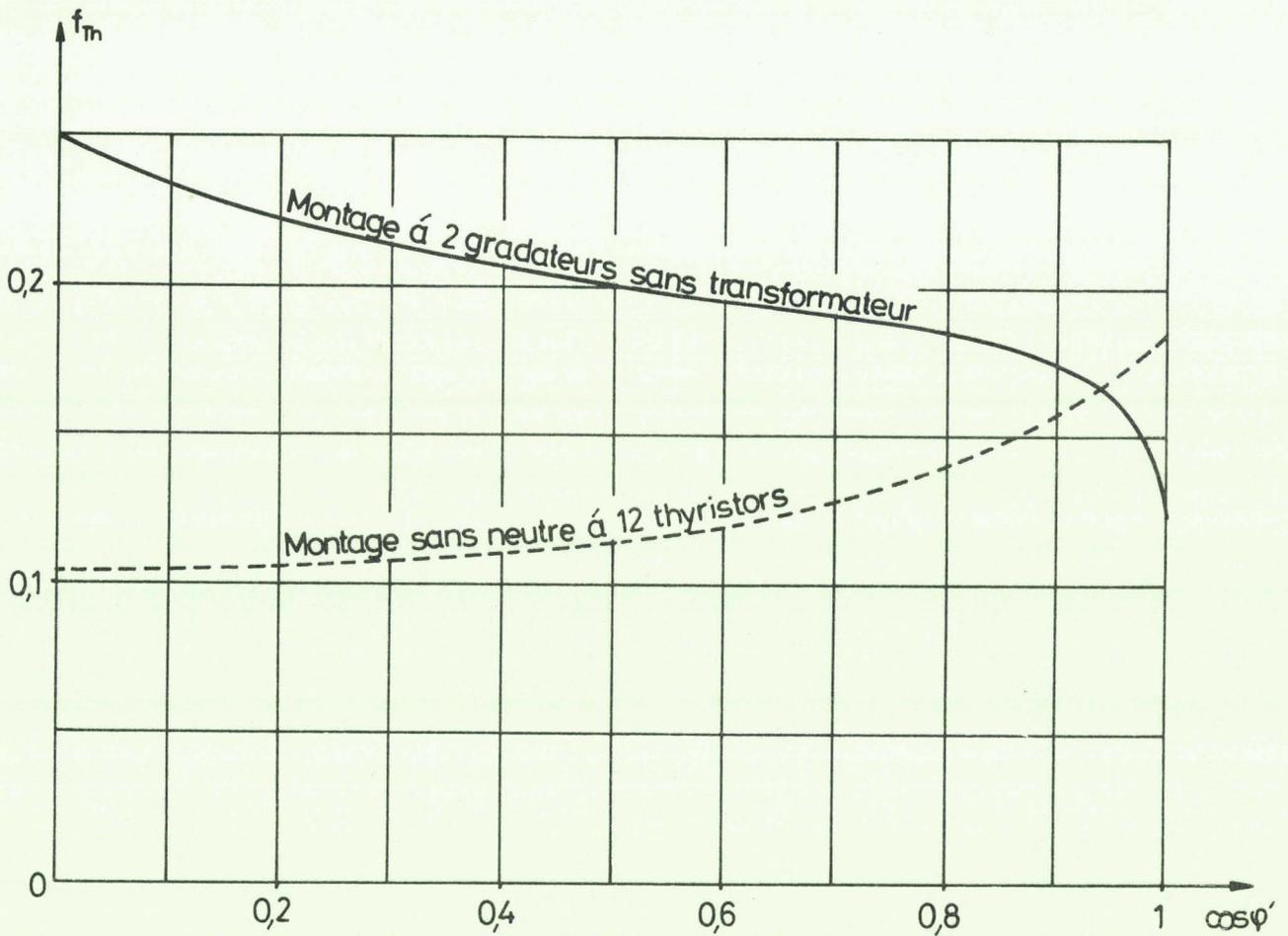




PL. III.12. VARIATIONS DE LA VALEUR EFFICACE MAXIMALE DE LA TENSION ET DU COURANT DANS UNE BRANCHE D'UNE PHASE DE LA CHARGE, ET DU COURANT EN LIGNE.

BUS  
LILLE

DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRIPHASES MIXTES SANS TRANSFORMATEUR



PL. III.13. VARIATIONS DU FACTEUR D'UTILISATION DES THYRISTORS.

DOUBLEUR DE FREQUENCE A 2 GRADATEURS TRIPHASES MIXTES SANS TRANSFORMATEUR



\*\*\*\*\*  
 \*  
 \* BIBLIOGRAPHIE \*  
 \*  
 \*\*\*\*\*

- [1] A. NICOLAIDE, V. BUNEA,  
*"Calcul précis des perméances. Applications aux alternateurs à moyenne fréquence"*.  
 Revue Générale de l'Electricité, Sept. 1981, pp. 623-633.
- [2] P.J. TSIVITSE, R.J. KASPER,  
*"Construction, operation and maintenance of modern high frequency alternators"*.  
 5<sup>th</sup> Biennial AIEE Conference on Electric Heating, 1961, pp. 51-73.
- [3] W. Mc. MURRAY,  
*"Magnetic frequency multipliers and their ratings"*.  
 AIEE Trans., Vol. 75, 1956, pp. 384-390.
- [4] D. SCHLUCKERBIER,  
*"Weiterentwicklung der Magnetischen Frequenzumformung auf 450 Hz"*.  
 Electrowärme International 37, B.1, February 1979, pp. B.21-B.27.
- [5] J. LECORGUILLIER,  
*"Les vannes électroniques à électrodes de déclenchement"*.  
 Dunod, Paris, 1966.
- [6] R.A. SOMMER,  
*"Solid state frequency converters. A survey"*.  
 10<sup>th</sup> Biennial IEEE Conference on electric process heating in industry, 1971, pp. 5-9.
- [7] B.R. PELLY,  
*"Latest developments in static high frequency power sources for induction heating"*.  
 IEEE Trans., Vol. IECI-17, n° 4, 1970, pp. 297-312.

- [8] S.R. DURAND, J.B. BRICE,  
*"Mercury arc frequency converter for induction heating"*.  
IEEE Trans., Vol. 67.
- [9] H. FOCH, C. GLAIZE, J.P. LOUIS, R. LE DOEUFF, J. PERARD, G. SEGUIER,  
*"Classification et caractérisation des convertisseurs statiques"*.  
Rapport GRECO "Machines électriques à hautes performances", Mars 1979.
- [10] G. SEGUIER,  
*"L'électronique de puissance"*.  
Dunod, Paris, (4ème Edition), 1981.
- [11] F. BRICHANT,  
*"L'ondistor"*.  
Dunod, Paris, 1970.
- [12] J. LOVENS,  
*"L'électrothermie par induction et les semi-conducteurs en 1980"*.  
Journées Internationales d'Etude sur l'utilisation des semi-conducteurs de puissance en Electrotechnique, Liège, Oct. 1980, Rapport n° 24.
- [13] R. CHAUPRADE, F. MILSANT,  
*"Commande électronique des moteurs à courant alternatif"*.  
Eyrolles, Paris, 1980.
- [14] H. FOCH, B. TRANNOY, J. ROUX,  
*"Utilisation rationnelle des transistors de puissance haute tension pour l'alimentation d'une machine asynchrone à partir du réseau 380<sup>V</sup>, 50 Hz"*.  
Utilisation des semi-conducteurs de puissance en électrotechnique, Liège, Nov. 1978, 4ème Partie, Rapport n° 4.
- [15] R. BOIDIN,  
*"Static and dynamic control of a current-fed asynchronous machine"*.  
Power Conversion 80, Munich, Sept. 1981.

- [16] J. LESENNE, G. RAVALITERA, G. SEGUIER,  
*"Les composantes relatives de V.H. KU. Application à l'étude analytique du moteur asynchrone alimenté par un onduleur autonome fonctionnant en commutateur de courant"*.  
Revue Générale de l'Electricité, Mars 1978, pp. 216-224.
- [17] J.P. CHASSANDE,  
*"Etude analytique complète d'une machine synchrone auto-pilotée à caractéristiques linéaires et à commutation naturelle de courant"*.  
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Grenoble, Juin 1981.
- [18] B. TRANNOY,  
*"Machines électriques à hautes performances dans le domaine des entraînements à vitesse variable"*.  
Colloque Européen "Au rendez-vous de la force motrice", Paris, Déc. 1981.
- [19] W. Mc. MURRAY,  
*"Theory and design of cycloconverters"*.  
The MIT Press, Cambridge (Massachusetts), 1972.
- [20] B.R. PELLY,  
*"Thyristor phase-controlled converters and cyclo-converters"*.  
Wiley and sons, New-York, 1971.
- [21] E. DESTOBELER,  
*"Paramètres et régimes optimaux du moteur asynchrone alimenté par cycloconvertisseurs"*.  
Thèse de 3ème Cycle, Lille, Juin 1976.
- [22] J.M. BODSON, J.M. HANSOUL, W. LEGROS,  
*"Analyse des contraintes électromécaniques engendrées par un cycloconvertisseur"*.  
Utilisation des semi-conducteurs de puissance en électrotechnique, Liège, Oct. 1980, Rapport n° 15.

- [23] R. LE DOEUFF,  
*"Contribution à la modélisation et à la simulation d'ensembles convertisseurs statiques - machines tournantes"*.  
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Nancy, Juin 1981.
- [24] G. LEHMANN, C. HAGLON,  
*"Note sur la fréquence maximale du courant sortant d'un cyclo-convertisseur"*.  
Revue Générale de l'Electricité, Déc. 1978, p. II et III.
- [25] F.F. MAZDA,  
*"Thyristor control"*.  
Newnes-Butterworths, Londres, 1973.
- [26] G. SEGUIER, J. LESENNE,  
*"Multiplication de fréquence par un montage redresseur"*.  
C.R. Acad. des Sciences, Paris, t. 269, pp. 188-190.
- [27] J. LESENNE,  
*"Multiplication de fréquence par un montage redresseur fonctionnant en commutation retardée"*.  
Thèse de Docteur-Ingénieur, Lille, Juin 1969.
- [28] S.B. DEWAN, A. STRAUGHEN,  
*"Power SemiConductors Circuits"*.  
J. Wiley Interscience, New-York, 1975.
- [29] P.C. SABATON,  
*"Les convertisseurs de fréquence à thyristors dans la commande électrique"*.  
Energia, Moscou, 1980.
- [30] G. SEGUIER,  
*"Les montages redresseurs"*.  
Dunod, Paris, 1971.

- [31] C. ROMBAUT,  
*"Etude des gradateurs triphasés et d'autres convertisseurs alternatif fonctionnant en commutation naturelle"*.  
 Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, Juillet 1979.
- [32] C. ROMBAUT, G. SEGUIER,  
*"Condition d'application de la transfiguration étoile-triangle aux récepteurs triphasés alimentés par un montage à redresseurs contrôlés"*.  
 C.R. Acad. des Sciences, Paris, t.277, Nov. 1973, pp. 607-609.
- [33] G. SEGUIER,  
*"Transfiguration étoile-triangle d'une source triphasée alimentant un montage à redresseurs commandés"*.  
 C.R. Acad. des Sciences, Paris, t. 279, Déc. 1974, pp. 585-588.
- [34] R. BAUSIERE, G. SEGUIER, C. ROMBAUT,  
*"Multiplicateurs statiques de fréquence"*.  
 Utilisation des semi-conducteurs de puissance en électrotechnique, Liège, Oct. 1980, Rapport n° 18.
- [35] *"Doubleur statique de fréquence pour courant alternatif triphasé"*.  
 Brevet français, n° 79.03187, Février 1979.
- [36] R. BAUSIERE, G. SEGUIER,  
*"Amélioration du doubleur statique de fréquence"*.  
 C.R. Acad. des Sciences, Paris, t. 291, série B, Déc. 1980, pp. 311-314.
- [37] G. SEGUIER, R. BAUSIERE,  
*"A circuit with or without transformer for frequency multiplication by 2 of the voltages"*.  
 Small and special Electrical Machines, 2<sup>d</sup> Intern. Conf. IEE, Londres, Sept. 1981, Proceedings, pp. 146-149.

\*\*\*\*\*  
 \*  
 \* TABLE DES MATIERES \*  
 \*  
 \*\*\*\*\*

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>PREMIERE PARTIE : FAMILLE GENERALE DE MULTIPLICATEURS</u>	10
<u>Chapitre 1 : Principe</u>	11
I. Multiplication par un nombre impair	11
I.1. Multiplication par 3	11
I.1.1. Principe. Multiplicateur à sortie monophasée	11
I.1.2. Tripleur de fréquence à sortie polyphasée	13
I.2. Multiplication par 5	15
I.3. Généralisation : multiplication par un nombre impair quelconque	15
II. Multiplication par un nombre pair	17
II.1. Multiplication par 2	17
II.1.1. Doubleur de fréquence à sortie monophasée	17
II.1.2. Doubleur de fréquence à sortie polyphasée	18
II.2. Multiplication par 4	19
II.3. Généralisation : multiplication par un nombre pair quelconque	20
III. Multiplication par un nombre fractionnaire	21
III.1. Multiplication par 3/2	21
III.2. Multiplication par 4/3	22
III.3. Généralisation. Multiplication par une fraction quelconque	23

IV. Notes sur l'obtention des tensions secondaires	24
IV.1. Cas du tripleur de fréquence triphasé	26
IV.2. Cas du doubleur de fréquence triphasé	29
<u>Chapitre 2</u> : Etude analytique du fonctionnement	31
I. Débit sur charge purement résistive	31
I.1. Multiplication par k impair	32
I.1.1. <i>Multiplication par 3</i>	32
I.1.2. <i>Multiplication par un nombre impair quelconque</i>	35
I.2. Multiplication par k pair	37
I.2.1. <i>Multiplication par 2</i>	37
I.2.2. <i>Multiplication par un nombre pair quelconque</i>	39
I.3. Multiplication par un nombre fractionnaire	40
I.4. Remarque en vue de simplifications ultérieures	43
I.4.1. <i>Etudes communes à tous les multiplicateurs</i>	43
I.4.2. <i>Etudes communes aux multiplicateurs d'un même groupe</i>	45
I.4.3. <i>Etudes propres à chacun des montages</i>	46
II. Débit sur charge purement inductive	46
II.1. Relations générales	46
II.2. Exemple : multiplication par 2	48
III. Débit sur charge résistante et inductive	49
III.1. Relations générales	49
III.2. Exemple. Vérifications expérimentales	52
<u>Chapitre 3</u> : Caractéristiques	55
I. Caractéristiques des grandeurs de sortie	55
I.1. Tensions de sortie	55
I.1.1. <i>Débit sur charge purement résistive</i>	56
I.1.2. <i>Débit sur charge purement inductive</i>	57

I.1.3. Débit sur un récepteur résistant et inductif	58
I.1.4. Résultats. Caractéristiques	59
I.2. Courants de sortie	61
I.2.1. Débit sur charge purement résistive	61
I.2.2. Débit sur charge purement inductive	61
I.2.3. Débit sur charge résistante et inductive	62
I.2.4. Résultats. Caractéristiques. Remarques	64
II. Facteurs d'utilisation	65
II.1. Facteur d'utilisation des enroulements secondaires	67
II.1.1. Définition. Expression	67
II.1.2. Valeurs obtenues. Remarque	68
II.2. Facteur d'utilisation des thyristors	69
II.2.1. Définition. Expressions	69
II.2.2. Caractéristiques	70
III. Comparaison des divers multiplicateurs	71
Planches relatives à la première partie	74
<u>DEUXIEME PARTIE : VARIANTES DES MULTIPLICATEURS DE LA FAMILLE GENERALE</u>	81
<u>Chapitre 1 : Montage des thyristors en pont</u>	82
I. Multiplication par un nombre impair	82
I.1. Multiplication par 3	82
I.1.1. Principe. Formes d'ondes	82
I.1.2. Facteurs d'utilisation	84
I.2. Multiplication par un nombre impair quelconque	85
II. Multiplication par un nombre pair	87
II.1. Multiplication par 2	87
II.2. Multiplication par un nombre pair quelconque	89

III. Multiplication par un nombre fractionnaire	90
III.1. Multiplication par $3/2$	90
III.2. Multiplication par un nombre fractionnaire quelconque	92
IV. Caractéristiques. Intérêt de ces montages	92
IV.1. Caractéristiques de tension et de courants de sortie	92
IV.2. Caractéristiques de facteurs d'utilisation	93
IV.3. Domaine d'intérêt de cette variante	94
<u>Chapitre 2</u> : Suppression du conducteur neutre des multiplificateurs à sortie triphasée	96
I. Tripleur de fréquence	97
I.1. Limitation de l'intervalle d'étude	98
I.1.1. Tensions de sortie	98
I.1.2. Tensions aux bornes des thyristors	100
I.2. Débit sur résistances pures	100
I.2.1. Fonctionnement suivant le premier mode	101
I.2.2. Fonctionnement suivant le deuxième mode	104
I.2.3. Fonctionnement suivant le troisième mode	107
I.3. Débit sur inductance pures	108
I.3.1. Fonctionnement suivant le premier mode	109
I.3.2. Fonctionnement suivant le troisième mode	113
I.4. Débit sur récepteur résistant et inductif	114
I.4.1. Fonctionnement suivant le premier mode	114
I.4.2. Fonctionnement suivant le troisième mode	121
II. Généralisation	122
II.1. Multiplication par $k$ impair	122
II.1.1. Multiplication par 5	122
II.1.2. Multiplication par $k$ impair quelconque	125
II.2. Multiplication par $k$ pair	126
II.2.1. Multiplication par 2	126
II.2.2. Multiplication par $k$ pair quelconque	128

II.3. Relations applicables à tous les multiplicateurs triphasés à $k$ entier	129
II.3.1. <i>Fonctionnement suivant le premier mode</i>	129
II.3.2. <i>Fonctionnement suivant le deuxième mode</i>	131
II.3.3. <i>Fonctionnement suivant le troisième mode</i>	131
II.4. Multiplication par $k$ fractionnaire supérieur à 1	132
II.4.1. <i>Multiplication par <math>k = 3/2</math></i>	132
II.4.2. <i>Généralisation. Application des relations établies pour <math>k</math> entier</i>	133
 III. Caractéristiques	 134
III.1. Caractéristiques des grandeurs de sortie	134
III.1.1. <i>Tensions de sortie. Développement en série</i>	134
III.1.2. <i>Tensions de sortie. Valeur efficace</i>	138
III.1.3. <i>Tensions de sortie. Caractéristiques. Remarques</i>	139
III.1.4. <i>Courants de sortie</i>	140
III.2. Facteurs d'utilisation	142
III.2.1. <i>Facteur d'utilisation des enroulements secondaires</i>	142
III.2.2. <i>Facteur d'utilisation des thyristors</i>	142
III.3. Intérêt de la suppression du neutre	143
 <u>Chapitre 3 : Emploi d'une source en polygone pour les multiplicateurs à sortie triphasée</u>	 144
 I. Multiplication de la fréquence par 3	 145
I.1. Débit sur résistances pures	146
I.1.1. <i>Répartition du courant dans les enroulements secondaires pendant un intervalle</i>	146
I.1.2. <i>Forme d'onde du courant dans un enroulement</i>	
I.2. Débit sur récepteur résistant et inductif	151
I.3. Facteur d'utilisation des enroulements secondaires	154
I.3.1. <i>Valeur efficace maximale des courants secondaires</i>	154
I.3.2. <i>Facteur d'utilisation. Intérêt du montage</i>	155
I.3.3. <i>Vérifications expérimentales</i>	156

II. Multiplication de la fréquence par 2	158
II.1. Débit sur résistances pures	159
II.2. Débit sur récepteur résistant et inductif	163
II.3. Valeur efficace maximale. Facteur d'utilisation	163
III. Multiplication de la fréquence par 3/2	165
III.1. Débit sur résistances pures	167
III.2. Débit sur récepteur résistant et inductif	169
III.3. Valeur efficace maximale. Facteur d'utilisation	170
IV. Conclusion	172
<u>Chapitre 4</u> : Montages à nombre de thyristors réduit	173
I. Deux thyristors de retour simultanément conducteur	173
I.1. Multiplication par 3	173
I.1.1. <i>Fonctionnement sur charge purement résistive</i>	174
I.1.2. <i>Fonctionnement sur charge purement inductive</i>	177
I.1.3. <i>Fonctionnement sur récepteur résistant et inductif</i>	177
I.2. Généralisation	179
I.2.1. <i>Multiplication par k impair quelconque</i>	179
I.2.2. <i>Multiplication par k pair</i>	180
I.2.3. <i>Multiplication par k fractionnaire supérieur à 1</i>	182
I.3. Caractéristiques	183
I.3.1. <i>Grandeurs de sortie</i>	183
I.3.2. <i>Facteurs d'utilisation</i>	186
II. Un seul thyristor de retour conducteur à la fois	188
II.1. Fonctionnement	190
II.2. Caractéristiques	190
II.2.1. <i>Grandeurs de sortie</i>	190
II.2.2. <i>Facteurs d'utilisation</i>	192
III. Conclusion	193
Planches relatives à la deuxième partie	194

TROISIEME PARTIE : DOUBLEURS DE FREQUENCE TRIPHASE A NOMBRE  
REDUIT DE THYRISTORS

208

Chapitre 1 : Doubleur de fréquence triphasé à 6 thyristors  
en amont du transformateur

209

I. Principe

210

I.1. Fonctionnement

211

1.1.1. Equations des tensions

211

1.1.2. Equations des courants

212

1.1.3. Formes d'ondes

213

I.2. Relations générales

214

1.2.1. Tensions primaires

214

1.2.2. Tensions secondaires

216

1.2.3. Tensions aux bornes des thyristors

216

1.2.4. Courants primaires

217

1.2.5. Courants en ligne

217

1.2.6. Courants secondaires

218

II. Etude analytique du fonctionnement

218

II.1. Débit sur charge purement résistive

218

II.1.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors  
conducteurs

218

II.1.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors  
conducteurs

220

II.2. Débit sur charge purement selfique

225

II.2.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors  
conducteurs

225

II.2.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors  
conducteurs

227

II.3. Débit sur charge R, L

232

II.3.1. Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors  
conducteurs

232

II.3.2. Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors  
conducteurs

234

III. Caractéristiques	240
III.1. Analyse harmonique et valeur efficace des tensions secondaires	240
III.1.1. <i>Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs</i>	240
III.1.2. <i>Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs</i>	242
III.3.3. <i>Caractéristiques</i>	245
III.2. Courants secondaires	246
III.2.1. <i>Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs</i>	246
III.2.2. <i>Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs</i>	247
III.3. Courants en ligne	249
III.3.1. <i>Fonctionnement à 0 ou 2 thyristors conducteurs</i>	249
III.3.2. <i>Fonctionnement à 3 ou 2 thyristors conducteurs</i>	250
III.4. Facteur de dimensionnement des enroulements primaires	253
III.5. Dimensionnement et facteur d'utilisation des thyristors	254
III.5.1. <i>Tension maximale instantanée</i>	254
III.5.2. <i>Courant efficace maximum</i>	255
III.5.3. <i>Facteur d'utilisation</i>	255
IV. Application : multiplication par 2 de la vitesse d'un moteur asynchrone	256
V. Conclusion	259

<b>Chapitre 2 : Doubleur de fréquence triphasé à 3 gradateurs mixte en aval du transformateur</b>	260
<b>I. Description et fonctionnement</b>	260
I.1. Conduction des diodes	262
I.2. Conduction des thyristors	263
I.3. Fonctionnement sur charge résistive	263
I.4. Fonctionnement sur charge résistante et inductive	265
<b>II. Etude analytique</b>	267
II.1. Fonctionnement à $\psi$ minimum	268
II.1.1. Débit simultané des gradateurs	268
II.1.2. Débit séparé des gradateurs	269
II.1.3. Détermination des constantes d'intégration et de l'angle de conduction simultanée des 2 gradateurs triphasés	270
II.2. Valeur efficace maximale de la tension de sortie	271
II.3. Valeur efficace maximale du courant dans une phase du récepteur	272
II.4. Valeur efficace maximale du courant dans un enroulement secondaire	273
II.5. Valeur maximale de la tension instantanée aux bornes d'un thyristor	274
<b>III. Caractéristiques</b>	274
III.1. Analyse harmonique des tensions de sortie	274
III.2. Valeurs efficaces maximales du courant et de la tension de sortie	274
III.3. Facteur d'utilisation des enroulements secondaires	275
III.4. Facteur d'utilisation des thyristors	276
III.5. Conclusion	276

<b>Chapitre 3 : Doubleur de fréquence triphasé sans transformateur</b>	278
<b>I. Fonctionnement</b>	279
I.1. Description	279
I.2. Relations générales	280
I.3. Fonctionnement sur charge purement inductive	281
II.3.1. Conduction des diodes	281
II.3.2. Débit séparé des gradateurs	282
II.3.3. Débit simultané des gradateurs	284
<b>II. Etude du débit sur charge résistive et inductive</b>	290
II.1. Débit séparé des gradateurs	290
II.1.1. Courants dans les enroulements, tensions aux bornes des enroulements alimentés	290
II.1.2. Tensions aux bornes des enroulements non alimentés	292
II.1.3. Tensions aux bornes des thyristors	292
II.1.4. Limite de ce type de fonctionnement	293
II.1.5. Intervalle sans aucun thyristor conducteur	294
II.1.6. Formes d'ondes	294
II.2. Débit simultané des gradateurs	296
II.2.1. $Th_A, D_C, Th'_B, D'_A$ conducteurs : courants en ligne	296
II.2.2. $Th_A, D_C$ conducteurs : courants en ligne	299
II.2.3. Détermination des constantes et de l'angle $\theta'$	299
II.2.4. $Th_A, D_C, Th'_B, D'_A$ conducteurs : expressions des tensions et des courants	301
II.2.5. $Th_A, D_C$ conducteurs : expressions des tensions et des courants	303
II.2.6. Limite de ce type de fonctionnement	304
II.2.7. Formes d'ondes	304
<b>III. Caractéristiques</b>	305
III.1. Analyse harmonique et valeur efficace des tensions de sortie	305
III.1.1. Débit séparé des gradateurs	305

III.1.2. Débit simultané des gradateurs	308
III.1.3. Caractéristiques	314
III.2. Courant dans une branche de la charge	314
III.2.1. Débit séparé des gradateurs	314
III.2.2. Débit simultané des gradateurs	315
III.3. Courants en ligne	318
III.3.1. Débit séparé des gradateurs	318
III.3.2. Débit simultané des gradateurs	318
III.4. Facteur d'utilisation des thyristors	320
 IV. Application : multiplication par 2 de la vitesse d'un moteur asynchrone de construction spé- ciale	   321
 V. Conclusion	 323
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u>	 337
 <u>TABLE DES MATIERES</u>	 342

