50376 1982 197

le d'ordre : 568

50376 19**82** 197

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Jean-Paul DELAHAYE



THEORIE DES TRANSFORMATIONS DE SUITES EN ANALYSE NUMERIQUE. APPLICATIONS.

Thèse Soutenue le 10 décembre 1982 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury:

Président

P. POUZET

Rapporteurs

C. BREZINSKI

I. GASTINEL

P. HUARD

F. ROBERT

R.S. VARGA

PROFESSEURS lère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
Μ.	BIAYS Pierre	G.A.S.
М.	BILLARD Jean	Physique
М.	BONNOT Ernest	Biologie
М.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
М.	BOURIQUET Robert	Biologie
М.	CELET Paul	Sciences de la Terre
М.	COEURE Gérard	Mathématiques
Μ.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
М.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
Μ.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
Μ.	DURCHON Maurice	Biologie
Μ.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
Μ.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
Μ.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
М.	LACOSTE Louis	Biologie
М.	LANSRAUX Guy	Physique
М.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
М.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
М.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
М.	LHOMME Jean	Chimie
М.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
Μ.	LOUCHEUX Claude	Chimie

Chimie

M. LUCQUIN Michel

MAILLET Pierre Μ.

M. MONTREUIL Jean

M. PAQUET Jacques

M. PARREAU Michel

M. PROUVOST Jean

M. SALMER Georges

Mme SCHWARTZ Marie-Hélène

M. SEGUIER Guy

M. STANKIEWICZ François

M. TILLIEU Jacques

TRIDOT Gabriel М.

VIDAL Pierre M.

M. VIVIER Emile

M. WERTHEIMER Raymond

M. ZEYTOUNIAN Radyadour

S.E.S.

Biologie

Sciences de la Terre

Mathématiques

Sciences de la Terre

I.E.E.A.

Mathématiques

I.E.E.A.

Sciences Economiques

Physique

Chimie

I.E.E.A.

Biologie

Physique

Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M. AL FAKIR Sabah

М. ANTOINE Philippe

M. BART André

Mme BATTIAU Yvonne

M. BEGUIN Paul

M. BELLET Jean

M. BKOUCHE Rudolphe

M. BOBE Bernard

M. BODART Marcel

Μ. BOILLY Bénoni

M. BONNELLE Jean-Pierre

BOSO Denis M.

M. BREZINSKI Claude

M. BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement) Géographie

M. CAPURON Alfred

M. CARREZ Christian

CHAMLEY Hervé M.

Mathématiques

Mathématiques

Biologie

Géographie

Mathématiques

Physique

Mathématiques.

S.E.S.

Biologie

Biologie

Chimie

Mathématiques

I.E.E.A.

Biologie

I.E.E.A.

E.U.D.I.L.

M. CHAPOTON Alain

M. COOUERY Jean-Marie

Mme CORSIN Paule

M. CORTOIS Jean

M. COUTURIER Daniel

Mle DACHARRY Monique

M. DEBRABANT Pierre

M. DEGAUOUE Pierre

M. DELORME Pierre

M. DEMUNTER Paul

M. DE PARIS Jean-Claude

M. DEVRAINNE Pierre

M. DHAINAUT André

M. DORMARD Serge

M. DOUKHAN Jean-Claude

M. DUBOIS Henri

M. DUBRULLE Alain

M. DUEE Gérard

M. DYMENT Arthur

M. FLAMME Jean-Marie

M. FONTAINE Hubert

M. GERVAIS Michel

M. GOBLOT Rémi

M. GOSSELIN Gabriel

M. GOUDMAND Pierre

M. GREVET Patrice

M. GUILBAULT Pierre

M. HANGAN Théodore

M. HERMAN Maurice

M. JACOB Gérard

M. JACOB Pierre

M. JOURNEL Gérard

M. KREMBEL Jean

M. LAURENT François

Mle LEGRAND Denise

Mle LEGRAND Solange

Mme LEHMANN Josiane

C.U.E.E.P.

Biologie

Sciences de la Terre

Physique

Chimie

Géographie

E.U.D.I.L.

I.E.E.A.

Biologie

C.U.E.E.P.

Mathématiques

Chimie

Biologie

S.E.S.

E.U.D.I.L.

Physique

Physique

Sciences de la Terre

Mathématiques

E.U.D.T.L.

Physique

S.E.S.

Mathématiques

S.E.S.

Chimie

S.E.S.

Biologie

Mathématiques

Physique

I.E.E.A.

Mathématiques

E.U.D.I.L.

Biologie

I.E.E.A.

Mathématiques

Mathématiques (Calais)

Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	B.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.B.B.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
М.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
М.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
М.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
Μ.	RICHARD Alain	Biologie
М.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie

E.U.D.I.L.

Institut Agricole

STERBOUL François

TAILLIEZ Roger

M.

M.

M. TOULOTTE Jean-Marc

M. VANDORPE Bernard

M. WALLART Francis

M. WATERLOT Michel

M. ZINN JUSTIN Nicole

M. P.A.

CHARGES DE COURS

M. TOP GérardM. ADAM MichelS.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

М.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	Aq.i
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.B.S.
K.	OPIGER Philippe	S.B.S.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur POUZET du grand honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Monsieur HUARD a été mon initiateur dans le domaine de la recherche, il m'a guidé, conseillé et aidé; qu'il trouve exprimée ici ma plus profonde gratitude.

Monsieur le Professeur GASTINEL a suivi et encouragé mes recherches presqu'à leur début; je l'en remercie très vivement.

Monsieur le Professeur VARGA a accepté de s'intéresser et de juger mon travail; je lui en suis très reconnaissant.

Monsieur le Professeur ROBERT est l'un de ceux à qui je dois d'avoir poursuivi mes recherches après ma thèse de troisième cycle, je le remercie de tout l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Monsieur le Professeur BREZINSKI a suivi et soutenu le développement des résultats exposés ici ; je le remercie du temps qu'il m'a consacré, de son dynamisme communicatif et de ses nombreuses remarques.

Je n'oublie pas Bernard GERMAIN-BONNE qui a participé activement à l'élaboration de plusieurs des résultats de cette thèse et dont le soutien amical et constant m'a été d'une grande aide. Je le remercie vivement, ainsi d'ailleurs que Paul SABLONNIERE et tous les membres de l'équipe d'analyse numérique de Lille pour les échanges souvent fructueux que nous avons eus ensemble.

La compétence de Patricia CARON a été démontrée une fois de plus et je la remercie vivement pour son travail rapide et précis de dactylographie. Je remercie aussi Madame DEBOCK qui a su malgré un lourd travail, imprimer et relier cette thèse.

Cette thèse a été partiellement réalisée dans le cadre de la subvention OTAN 027-81.

THÉORIE DES TRANSFORMATIONS DE SUITES EN ANALYSE NUMÉRIQUE. APPLICATIONS

TABLE DES MATIERES

Introduction	p.	1
Références		5
Notations générales		6
Chapitre 1 : Les divers types de transformations algorithmiques de sui	tes	8
Introduction		9
§ 1 Transformations de suites	1	1
§ 2 Algorithmes pour suites et transformations algorithmiques	1	3
§ 3 Algorithmes k-normaux et transformations k-normales	2	2
§ 4 Algorithmes à k-mémoires et transformations à k-mémoires	2	8
§ 5 Algorithmes k-stationnaires et transformations k-stationnaires	3	3
§ 6 Transformations rationnelles et transformations linéaires	3	5
§ 7 Schéma d'inclusion	3	7
Références	3	8
<u>Chapitre 2</u> : Décidabilité et indécidabilité à la limite pour les probl de suites	èmes 4	1
Introduction	4	2
§ 1 Définition et théorème de normalisation	4	5
§ 2 Problème de la nature convergente, turbulente ou périodique d'une	suite 4	9
§ 3 Algorithmes de recherche du nombre de points d'accumulation	5	8
§ 4 Algorithmes de recherche de la période d'une suite asymptotiquemen périodique	it 6	4
(a) Méthodes de coefficients détecteurs	6	5
(b) Méthodes par barycentres	7	6
(c) Résultats de limitation	8	2
§ 5 Familles de suites d'itérés	8	5
§ 6 Deux résultats généraux sur la décidabilité à la limite	9	5
Annexe 1 Force d'un point d'accumulation et rapidité d'une suite	9	8
(a) Force d'accumulation	9	8
(b) Rapidité d'une suite	10	0
Annexe 2 Décidabilité à la limite et récursivité	10	2
Annexe 3 Problème de la nature convergente, turbulente ou asymptotique périodique d'une fonction continue	ment 10	5
Références	10	19

Chapitre 3 : Algorithmes d'extraction de sous-suites convergentes	p.	113
Introduction		114
§ 1 Les algorithmes T		116
§ 2 Les algorithmes S		130
§ 3 Les algorithmes U		134
§ 4 Résultats de limitations		139
Références		145
Chapitre 4 : Systèmes ordonnés de familles accélérables		148
Introduction		149
§ 1 Vitesse d'accélération, accélération, devination		150
§ 2 Transformations pour l'accélération de la convergence ; familles accélérables		151
§ 3 Exemples de familles accélérables		154
§ 4 Relations entre les différents systèmes ordonnés de familles accélérables		156
§ 5 Familles accélérables maximales		166
Références		171
Chapitre 5 : Familles de suites non accélérables		173
Introduction		174
§ 1 Rémanence et premières applications		177
§ 2 Familles de suites monotones		188
§ 3 Familles de suites alternées et oscillantes		194
§ 4 Familles de suites à convergence linéaire		199
§ 5 Familles de suites à convergence logarithmique		206
§ 6 Résumé		211
Références		213
Chapitre 6 : Accélération de la convergence linéaire		216
Introduction		217
§ 1 Suites à convergence linéaire et périodico-linéaire		217
(a) Problèmes de convergence		218
(b) Problèmes de pseudo-périodicité		226
(c) Exemples d'applications		231
§ 2 Accélération de la convergence des suites périodico-linéaires		233
\S 3 Optimalité du procédé Δ^2 d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire		238
(a) Optimalité algébrique du procédé Δ^2		239
(b) Impossibilité de l'agrandissement de Lin		240
(c) Impossibilité d'une accélération de degré 1+s sur Lin		241

Références	p.	245
Chapitre 7 : Sélection automatique entre transformations de suites		248
Introduction		249
§ 1 Méthodes générales de sélection automatique		249
(a) Définition des méthodes de sélection		250
(b) Deux résultats généraux sur les méthodes de sélection		254
(c) Expériences numériques		259
§ 2 Choix automatique entre suites de paramètres dans l'extrapolation de Richardson		262
 (a) Propriétés d'exactitude des transformations obtenues par le procédé de Richardson 		263
(b) Sélection entre k-ièmes colonnes		266
(c) Sélection entre k-ièmes diagonales descendantes		270
(d) Sélection entre diagonales rapides		272
Références		275
Conclusion		277

INTRODUCTION

La notion de transformation de suites telle qu'elle est utilisée en analyse numérique (et plus particulièrement en accélération de la convergence), a déjà été plusieurs fois formalisée ([1] [3] [5] [6]).

Cependant ces formalisations ne sont que partielles et très loin de recouvrir tous les types de transformations effectivement utilisés. D'autre part, la notion de transformation de suites telle qu'elle peut être introduite en théorie de la récursivité, outre des aspects techniques assez lourds (machine de Turing, réels calculables) est trop éloignée des préoccupations des numériciens, et de la forme qu'ils donnent à leurs problèmes.

Cette situation a pour inconvénient l'impossibilité de formuler et de démontrer des résultats qui paraissent pourtant naturels et à peu près certains concernant les limitations intrinsèques de toutes les transformations de suites utilisables en analyse numérique; elle a aussi pour inconvénient l'inexistence (ou le peu de développement) de méthodes permettant la classification des transformations de suites.

De même qu'en optimisation où la théorie des algorithmes généraux [2] [4] [7] (qui est une théorie algorithmique propre à l'optimisation et indépendante de toute théorie de la récursivité) a permis de formaliser et de synthétiser la plupart des méthodes d'optimisation existantes, tout en fournissant une compréhension théorique améliorée des problèmes, il semblait utile de développer une théorie algorithmique des transformations de suites propre à l'analyse numérique et à l'accélération de la convergence. C'est là le but principal de notre thèse.

La partie la plus importante de notre travail est donc une tentative pour formuler, commencer à développer et tirer les premières applications d'une théorie des transformations de suites aussi proche que possible des préoccupations des numériciens et qui permette l'énoncé de résultats de limitation et

de classification. Sans prétendre avoir créé une théorie définitive des transformations de suites de l'analyse numérique, nous pensons avoir introduit les
concepts et posé les bases d'un système cohérent de notions, et nous croyons
en avoir montré dans ces pages, l'utilité, autant pour la compréhension profonde
des méthodes anciennes que pour la conception de méthodes nouvelles.

Voici le plan que nous avons suivi :

Au chapitre 1, reprenant en les complétant et les unifiant les diverses formalisations de la notion de transformation de suites, nous introduisons plusieurs
définitions qui font apparaître un système de sous-classes de la classe de
toutes les transformations de suites (voir le schéma d'inclusion de la page 37).
Nous étudions ce système en nous attachant surtout à établir l'intérêt de
chacune des classes envisagées, relativement aux autres ; nous montrons en particulier que, sauf dans des cas triviaux, la classe des transformations algorithmiques est strictement incluse dans la classe de toutes les transformations,
ce qui signifie (et les résultats négatifs ultérieurs préciseront cette idée)
qu'avec des transformations algorithmiques les possibilités sont strictement
moindres qu'avec les transformations abstraites.

Le chapitre 2, à propos de problèmes relativement simples concernant le traitement des suites, illustre certaines des notions introduites au chapitre 1, et surtout en montre l'utilité. Sans avoir à faire intervenir de notions de récursivité nous établissons des résultats concernant la décidabilité de questions élémentaires du traitement des suites en analyse numérique. Par exemple nous étudions les possibilités algorithmiques de déterminer la convergence d'une suite, d'en compter les points d'accumulation, d'en trouver la période (quand on sait que les suites à traiter sont asymptotiquement périodiques). Des résultats positifs (constructions d'algorithmes) et négatifs (démonstrations d'impossibilité) sont donnés.

Au chapitre 3 nous reprenons un des problèmes que nous avions abordé dans notre thèse de 3e cycle, celui de l'extraction de sous-suites convergentes d'une suite non convergente. Aux méthodes d'extraction simultanées que nous réexposons brièvement au § 3 de ce chapitre, nous avons depuis lors ajouté diverses méthodes d'extraction (peut-être plus naturelles) qui ne construisent qu'une seule sous-suite à la fois, et que nous présentons aux §1 et 2. Les algorithmes décrits sont envisagés en détail et nous énonçons en particulier pour chacun d'eux des conditions de convergence. Cette étude positive des problèmes d'extraction est complétée au § 4 par deux résultats négatifs qui marquent bien les limites absolues des possibilités des algorithmes pour suites face à ce type de questions.

Le chapitre 4 aborde les problèmes d'accélération de la convergence auxquels est consacré tout le reste de notre thèse. Comme nous l'avions déjà remarqué avec B. Germain-Bonne tous les problèmes d'accélération de la convergence peuvent se formuler en termes de familles de suites, ce type de formulation permettant de traiter plus en détail les questions qui se posent, que le seul point de vue des descriptions de méthodes. Présenté donc, en termes de familles de suites nous exposons les définitions fondamentales de l'accélération, puis nous étudions les divers systèmes de familles de suites ainsi introduits. En particulier nous envisageons le problème des familles accélérables maximales, et donnons des conditions suffisantes pour qu'une famille de suites soit dans une classe donnée.

Le chapitre 5 est sans doute l'illustration la plus claire de l'utilité des notions du chapitre 1. Il consiste en une étude, que nous avons essayé de faire aussi fine que possible, du système des familles accélérables, abordé du point de vue de résultats négatifs. Avec B. Germain-Bonne, nous avons mis au point il y a quelques années une technique de démonstration permettant d'établir que certaines familles de suites ne sont pas accélérables. Cette technique (de la rémanence) est ici reprise, détaillée puis appliquée à divers types de suites fréquemment rencontrés en analyse numérique : suites monotones,

suites à convergence linéaire, suites à convergence logarithmique.

Le chapitre 6 visant des problèmes plus directement pratiques que le précédent, reprend du point de vue positif la question de l'accélération des suites à convergence linéaire ou de "type linéaire". Après quelques pages consacrées aux suites périodico-linéaires, nous proposons des algorithmes nouveaux permettant d'accélérer ces suites (certains sont basés sur les méthodes de détermination de la période exposées au chapitre 2). Nous terminons en montrant que de plusieurs points de vue différents, le procédé Δ^2 d'Aitken peut être considéré comme la meilleure transformation de suites pour l'accélération de la famille des suites à convergence linéaire.

Le chapitre 7 conclut notre thèse avec la présentation de méthodes concrètes d'accélération. La multitude d'algorithmes d'accélération (et au chapitre 6 nous en avons introduit encore quelques-uns !) rend très difficile le choix de celui à appliquer face à un problème précis, aussi avons-nous pensé que des méthodes automatiques permettant la mise en compétition de plusieurs algorithmes et le choix à chaque étape de calcul de celui semblant devoir être le meilleur, pouvaient être intéressantes. Nous présentons un schéma général pour ces méthodes automatiques de choix, étudions leurs propriétés et donnons quelques résultats d'essais numériques.

Références

- [1] BREZINSKI C. "Accélération de la convergence en analyse numérique", Lecture Notes in Mathematics 584, Springer-Verlag, Heidelberg 1977.
- [2] DENEL J. "Contribution à la synthèse des algorithmes d'optimisation", Thèse d'Etat, Lille, 1979.
- [3] GERMAIN-BONNE B. "Estimation de la limite des suites et formalisation de procédés d'accélération de la convergence", Thèse d'Etat, Lille 1978.
- [4] HUARD P. "Optimisation dans Rⁿ: Algorithmes Généraux", Cours polycopié de D.E.A. Uni. des Sc. et Tech. de Lille, 1972.
- [5] PENNACCHI R. "Le transformazioni rationali di una successione", Calcolo, 5, 1968, pp 37-50.
- [6] WIMP J. "Sequence transformations and their applications", Academic Press,
 New York 1981.
- [7] ZANGWILL W. "Nonlinear programming: a unified approach" Prentice Hall, Englewood Cliffs 1969.

NOTATIONS GÉNÉRALES

IN : ensemble des entiers positifs ou nuls ; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} ;$ $\mathbb{R} : \text{corps des nombres réels } ;$ $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\} ; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} ;$

 $\mathbb{R}^{+\star} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \} ;$

 \mathbb{C} : corps des nombres complexes ; $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Lorsque A et B sont deux ensembles quelconques

f : A \rightarrow B : fonction de A vers B ; dom f : domaine de définition de la fonction f dom f = $\{x \in A \mid f(x) \text{ est défini}\}$ Si dom f = A nous disons que f est une application.

Lorsque E est un ensemble quelconque

P(E) : ensemble des parties de E;

ensemble des n-uplets (ou suites finies de longueur n) d'éléments de E ;

 $E^{n} = \{(x_{1}, x_{2}, ..., x_{n}) \mid v \in \{1, 2, ..., n\}: x_{i} \in E\};$

E : ensemble de toutes les suites finies d'éléments de E, y compris la

suite vide notée Ø ;

 $E^{(IN)} = \cup E^{n}$;

 $\stackrel{\mathbb{N}}{\text{E}}$: ensemble des suites (infinies) d'éléments de E ;

Lorsque E est un espace métrique dont la distance est notée d

 \mathbf{E}^{α} : ensemble des points d'accumulation de E ;

 $E^{\alpha} = \{x \in E \mid \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists y \in E : 0 < d(x, y) \le \epsilon\}$

Conv(E) : ensemble des suites convergentes de E ;

```
Conv*(E): ensemble des suites convergentes de E différentes de leur limite à partir d'un certain rang: \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ et } \exists \ n_o \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_o : \ x_n \neq x \ ; avec x \in E, \ r \in \mathbb{R}^+: B(x, \ r) = \{y \in E \ | \ d(x, \ y) < r\} \ ; avec A \subset E, B \subset E: d(A, B) = \inf \{d(x, \ y) \ | \ x \in A, \ y \in B\} \ ; \delta(A, B) = \sup \{\sup \{d(x, B) \ | \ x \in A\}, \ \sup \{d(A, y) \ | \ y \in B\}\}.
```

CHAPITRE 1

LES DIVERS TYPES DE TRANSFORMATIONS
ALGORITHMIQUES DE SUITES

INTRODUCTION

Les transformations de suites servant en analyse numérique ne sont pas toutes du même type. Certaines, pour calculer le n^e terme t_n de la suite transformée, utilisent toujours la même formule à partir d'un nombre fini, constant, de termes de la suite initiale (x_n) (par exemple x_{n-2} , x_{n-1} , x_n). Certaines, pour calculer t_n , utilisent un nombre fini, constant, de termes de la suite initiale mais changent de formule à chaque étape (la formule dépendant de n). D'autres utilisent tout le "passé" x_0 , x_1 , ..., x_n , d'autres encore changent de formule selon la nature de la suite (les procédés de choix automatique sont basés sur cette idée [3], [9], [10] chapitre 7).

Cependant, des plus particulières aux plus générales, toutes les transformations de suites utilisées en analyse numérique respectent le principe suivant : le n^e terme de la suite transformée ne dépend que d'un nombre fini de termes de la suite initiale.

La notion d'algorithme pour suites exprime cette idée générale et nous appelons transformation algorithmique toute transformation de suites pour laquelle il existe un algorithme pour suites qui en effectue le calcul.

D'autres notions plus simples (mais aussi plus maniables) d'algorithmes fournissent des classes particulières de transformations de suites :

transformations k-normales ; transformations à k mémoires ; transformations k-stationnaires etc ...

C'est à la définition et à l'étude générale de ces divers types d'algorithmes et de transformations qu'est consacré ce chapitre. Pour des exemples de transformations destinées à l'accélération de la convergence voir [1] [2] [23], pour des exemples de transformations destinées à l'extraction voir [5] [6] [7] [8] [13].

Nous nous intéressons ici principalement à deux problèmes :

- celui de la classification : quand est-ce que deux types différents d'algorithmes engendrent la même classe de transformations ? quelles sont les relations d'inclusions entre classes de transformations ? (propositions 3, 4, 5, 8, 11)
- celui de l'étude des familles de suites pouvant être domaine de définition d'une transformation : caractérisation de ces familles, recherche de conditions pour qu'une transformation soit définie partout (propositions 1, 2, 6, 7, 9, 10, 12, 13).

Un schéma d'inclusion résume les différents résultats.

Les problèmes de noyau de régularité et plus généralement les problèmes spécifiques aux transformations de suites destinées à l'accélération de la convergence ne sont pas abordés ici (se reporter à [4] [16] [17] [18] [23] chapitre 4

Ce comporte beaucoup de définitions générales dont certaines sont parfois un peu lourdes et peuvent sembler compliquées. Cependant il nous a paru indispensable de disposer d'un jeu complet de notions à propos des transformations de suites. D'une part, cela nous permet de mieux comprendre et de classer les transformations rencontrées dans les problèmes d'extraction de sous-suites convergentes, et d'accélération de la convergence ; d'autre part, cela nous autorisera à formuler et à démontrer des résultats négatifs (non existence d'algorithme pour tel ou tel type de problèmes [5] [7] [8] [11] [12] [13] [14] [15] [21]) dont l'intérêt, ne serait-ce qu'en accélération de la convergence est maintenant évident ([19] [20] [22]).

Les définitions formulées ici, pour la plupart, l'ont déjà été (parfois sous des formes légèrement différentes) dans divers travaux antérieurs [1] [5] [7] [11] [12] [14] [16] [17] [21]. Par contre, la classification systématique des transformations et les résultats concernant les domaines de définition sont nouveaux.

NOTATIONS GÉNÉRALES

 $\stackrel{\mathbb{N}}{\mathbb{E}}$: ensemble des suites (infinies) d'éléments de l'ensemble $\stackrel{\mathbb{E}}{\mathbb{E}}$;

 ${f E}^{m{(\!N\!)}}$: ensemble des suites finies d'éléments de l'ensemble ${f E}$:

$$E^{(IN)} = \bigcup_{n \in IN} E^n;$$

Ø : l'ensemble vide, ou la suite vide ;

Per (E) : ensemble des suites périodiques d'éléments de E ;

card E : cardinal de l'ensemble E ;

dom f : domaine de définition de la fonction f;

Conv (E): ensemble des suites convergentes de E. Si $(x_n) \in Conv$ (E)

nous noterons x sa limite, de même si (y_n) ϵ Conv (E), y sera sa limite etc..

P(E): ensemble des parties de E.

1 - Transformations de suites

Avant de parler de transformation algorithmique de suites, il nous faut préciser ce que nous entendons par transformation de suites.

Définitions et notations

Soient E et F deux ensembles.

Nous appellerons transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ toute fonction T de l'espace de suites $E^{\mathbb{N}}$ dans l'espace de suites $F^{\mathbb{N}}$.

Nous appellerons <u>domaine de définition de T</u> l'ensemble des suites (x_n) de E^N pour lesquelles $T(x_n)$ est défini^(*). Cet ensemble sera noté : dom T.

Nous dirons que \underline{T} est défini sur $S \subset \underline{\mathbb{F}}^{\mathbb{N}}$ lorsque : dom $T \supset S$.

Nous noterons Trans (E, F) l'ensemble des transformations de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

Si T et T' sont deux transformations de suites, on dira que $\underline{\text{T}}$ est contenue dans $\underline{\text{T'}}$ si :

$$\begin{cases} \text{dom } T \subset \text{dom } T' \text{ et} \\ \\ \forall (x_n) \in \text{dom } T : T(x_n) = T'(x_n) . \end{cases}$$

Si $(x_n) \in \text{dom } T$, $T(x_n)$ est une suite de $F^{\mathbb{N}}$ que nous noterons $(T^{(m)}(x_n))_m$.

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur (x_n) , la suite $T(x_n)$ sera notée $(T^{(n)})$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur (x_n) et sur T la suite $T(x_n)$ sera notée (t_n) .

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur T et que plusieurs suites (x_n^0) , (x_n^1) , ..., (x_n^i) , ... de dom T seront considérées simultanément (situation qui se produira fréquemment dans les démonstrations de résultats négatifs) les suites $T(x_n^0)$, $T(x_n^1)$, ..., $T(x_n^i)$, ... seront respectivement notées (t_n^0) , (t_n^1) , ..., (t_n^i) , ...

(*) c'est-à-dire le domaine de définition de la fonction $T: \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$.

Exemples

1°) Transformation identique : $\mathbf{T}_1 \cdot$

E = F quelconque;

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : T_1(x_n) = (x_n),$$

c'est-à-dire :

$$\forall (x_n) \in \mathbb{I}^N, \forall n \in \mathbb{N} : t_n = x_n.$$

2°) Transformation Δ^2 d'Aitken : T₂

$$E = F = C$$
;

si
$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0$$
: $t_n = (x_{n+2} x_n - x_{n+1}^2)/(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)$, sinon: $t_n = 0$

 3°) Transformation pour l'extraction : T_3

E = F espace métrique ; a ϵ E

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, t_n = x_i \text{ où}$$

$$i = max \{ j \mid n \le j \le 2n, d(x_j, a) = min \{ d(x_k, a) n \le k \le 2n \} \}.$$

4°) Transformation indicatrice des suites périodiques : T_4 .

E quelconque, $F = \{0, 1\}$.

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$$
:

$$T_{\mu}(x_{n}) = (1, 1, ..., 1, ...)$$
 si (x_{n}) est périodique,

 $T_{4}(x_{n}) = (0, 0, ..., 0, ...)$ si (x_{n}) n'est pas périodique.

2 - ALGORITHMES POUR SUITES ET TRANSFORMATIONS ALGORITHMIQUES

Une transformation de suites n'est effectivement utilisable en analyse numérique que si elle satisfait à la condition suivante énoncée dans l'introduction :

(*) { le n^e terme de la suite transformée ne dépend que d'un nombre fini de termes de la suite initiale.

Les notions de transformations normales [11] [12] [15] et de transformations stationnaires [16] [17] expriment cette idée mais certaines transformations de suites en analyse numérique ne sont ni normales, ni stationnaires (1). Aussi nous a-t-il semblé nécessaire de disposer d'une notion englobant toutes les transformations de suites satisfaisant la condition ci-dessus.

Voici cette définition (introduite dans [5] et utilisée depuis dans [7] [8] [11] [12] [13] [14] [15]):

Définitions et notations

Nous appellerons algorithme pour suites de $\stackrel{\mathbb{N}}{E}$ à valeurs dans $\stackrel{\mathbb{N}}{F}$ la donnée :

- i) d'une fonction $R : \mathbb{N} \times E^{(\mathbb{N})} \times F^{(\mathbb{N})} \to F$
- ii) d'une fonction $C = (\alpha, \beta) : \mathbb{N} \times E^{(\mathbb{N})} \times F^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Appliqué à la suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, l'algorithme A = (R, C) fonctionne de la façon suivante :

Etape 0

- . Calculer $C(0, \emptyset, \emptyset) = (\alpha(0), \beta(0)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
- . Demander les points : $x_{\alpha(o)}$, $x_{\alpha(o)+1}$, ..., $x_{\beta(o)}$,
- . Calculer $R(0, (x_{\alpha(0)}, x_{\alpha(0)+1}, \dots, x_{\beta(0)}), \emptyset) = t_0 \in F$

(t est le premier point de la suite transformée ou "première réponse"),

Etape i

- . Calculer $C(i, (x_{\alpha(i-1)}, x_{\alpha(i-1)+1}, \dots, x_{\beta(i-1)}), (t_0, t_1, \dots, t_{i-1}))$ $= (\alpha(i), \beta(i)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$
- . Demander les points : $x_{\alpha(i)}$, $x_{\alpha(i)+1}$, ..., $x_{\beta(i)}$,
- (1) La transformation \mathbf{T}_3 par exemple.

. Calculer $R(i, (x_{\alpha(i)}, x_{\alpha(i)+1}, \dots, x_{\beta(i)}), (t_o, t_1, \dots, t_{i-1}))$ $= t_i \in F,$ (t_ est le (i+1)-ème point de la suite transformée ou "(i+1)-ème réponse"),

L'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ pour lesquelles ce calcul peut se poursuivre indéfiniment (c'est-à-dire sans jamais sortir du domaine de définition des fonctions C et R) sera appelé domaine de définition de l'algorithme A = (R, C) et sera noté dom A.

L'ensemble des algorithmes pour suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ sera noté : Alg (E, F).

Si (x_n) ϵ dom A, nous noterons $A(x_n)$ la suite obtenue par A à partir de (x_n) . Comme pour les transformations, nous noterons cette suite $(A^m(x_n))_m$ et parfois (A^n) ou (t_n) .

A tout algorithme A = $(R, C) \in Alg(E, F)$ on associe la transformation $^TA \in Trans(E, F)$ dont le domaine de définition est dom A et qui, à la suite $(x_n) \in dom(A)$, fait correspondre la suite $(t_n) \in F^N$, calculée par A étape par étape.

Soit T ϵ Trans (E, F), s'il existe A ϵ Alg (E, F) tel que ^TA = T, nous dirons que T est une transformation algorithmique.

L'ensemble des transformations algorithmiques de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ sera noté : ${}^{\mathbb{T}}$ Alg (E, F).

Par définition, on a évidemment : T Alg (E, F) \subset Trans (E, F).

Remarque

Dans la définition,C détermine la "tranche" de la suite initiale qui va servir à calculer t, R calcule quel est le ne point transformé.

On pourrait modifier la formulation de notre définition tout en obtenant finalement le même ensemble de transformations algorithmiques.

Par exemple, on pourrait donner une définition où le calcul de $(\alpha(n), \beta(n))$ et de t se ferait en utilisant comme données non pas une "tranche" de la suite initiale, mais une "partie" finie quelconque de cette suite. On pourrait à l'inverse pour simplifier la définition, admettre que le calcul de t_n ne dépend que de "tranches commençantes" $(x_0, x_1, \ldots, x_{\alpha(n)})$; on pourrait aussi ne pas faire intervenir les réponses antérieures (car elles ont été calculées à partir de points de la suite).

Exemples

Reprenons les exemples du paragraphe précédent.

1°) Transformation identique : T₁.

 T_1 est algorithmique; en effet $T_1 = {}^{T}A_1$ où $A_1 = (R, C)$ est défini de la façon suivante :

$$\forall$$
 i \in \mathbb{N} , \forall s \in E^(\mathbb{N}), \forall s' \in E^(\mathbb{N}), \forall x \in E:
$$C_1(i, s, s') = (i, i),$$

$$R_1(i, (x), s') = x.$$

(\mathcal{C}_1 et \mathcal{R}_1 n'étant pas définis ailleurs, ou étant définis arbitrairement)

2°) Transformation Δ^2 d'Aitken : T₂ T_2 est algorithmique, en effet $T_2 = {}^TA_2$ où $A_2 = (R_2, C_2)$ est défini de la façon suivante :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ \forall s \in E^{(\mathbb{N})}, \ \forall s' \in E^{(\mathbb{N})}, \ \forall (x, y, z) \in E^{3},$$

$$C_{2}(i, s, s') = (i, i+2),$$

$$R_{2}(i, (x,y,z),s') = (zx - y^{2})/(z - 2y + x) \text{ si } z - 2y + x = 0,$$

$$= 0 \qquad \text{sinon.}$$

sinon.

- (c_2 et c_2 n'étant pas définis ailleurs ou étant définis arbitrairement)
- 3°) Transformation pour l'extraction : T_3 .

 T_3 est algorithmique en effet $T_3 = {}^TA_3$ où $A_3 = (R_3, C_3)$ est défini de la façon suivante :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall s \in E^{(\mathbb{N})}, \forall s' \in E^{(\mathbb{N})}, \forall (y_0, y_1, ..., y_i) \in E^{i+1} :$$

$$C_3(i, s, s') = (i, 2i),$$

$$R_3(i, (y_0, y_1, ..., y_i), s') = y_\ell$$
où $\ell = \max \{j \mid 0 \le j \le i, d(y_j, a) = \min \{d(y_k, a) \}$

$$0 \le k \le i\}\},$$

(${\it C}_{\it 3}$ et ${\it R}_{\it 3}$ n'étant pas définis ailleurs ou étant définis arbitrairement).

- 4°) Transformation indicatrice des suites périodiques : $\mathbf{T}_{\mathbf{\mu}}$.
- Il résultera de la proposition 4 démontrée plus loin que dès que card E \geq 2, T_{μ} n'est pas algorithmique.

Ce résultat peut d'ailleurs être amélioré de la façon suivante :

Si card E \geq 2 il n'existe pas de transformation algorithmique T telle que :

$$\forall (x_n) \in Per (E), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : t_n = 1,$$
et
$$\forall (x_n) \notin Per (E), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : t_n = 0,$$
et
$$dom T = E^{\mathbb{N}}.$$

Proposition 1

Soit
$$S \subset E^{\mathbb{N}}$$
, $S \neq \emptyset$. Soit $F \neq \emptyset$:

$$(\exists T \in {}^{\mathsf{T}} Alg (E, F) : dom T = S)$$

$$<=>$$

$$(\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : [\forall k \in \mathbb{N}, \exists (x_n^k) \in S : (x_0, ..., x_k) = (x_0^k, ..., x_k^k)] => (x_n) \in S).$$

Démonstration

(i) Soit T ϵ^{T} Alg (E, F), montrons que S = dom T v'erifie bien la propriété voulue. Soit (x_n) ϵ E^{N} telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists (x_n^k) \in S : (x_0, \ldots, x_k) = (x_0^k, \ldots, x_k^k).$$

On se donne A = (R, C) tel que $^{T}A = T$.

Montrons par récurrence que to, ..., t, ... sont définis.

Soit $C(0, \emptyset, \emptyset) = (\alpha(0), \beta(0))$

Puisqu'il existe $(x_n^{\beta(o)}) \in S$ telle que $(x_o^{\beta(o)}, \ldots, x_{\beta(o)}^{\beta(o)}) = (x_o, \ldots, x_{\beta(o)}),$ $(0, (x_{\alpha(o)}, \ldots, x_{\beta(o)}), \emptyset) \in \text{dom } R, \text{ et donc t est défini.}$

Supposons que t_0 , t_1 , ..., t_p sont définis.

Posons $\gamma(p) = \max \{\beta(0), \ldots, \beta(p)\}.$

Puisqu'il existe $(x_n^{\gamma(p)}) \in S$ telle que $(x_0^{\gamma(p)}, \ldots, x_{\gamma(p)}^{\gamma(p)}) = (x_0, \ldots, x_{\gamma(p)})$ $(p+1, (x_{\alpha(p)}, \ldots, x_{\beta(p)}), (t_0, \ldots, t_p)) \in \text{dom } C,$

donc ($\alpha(p+1)$, $\beta(p+1)$) est défini.

Puisqu'il existe $(x_n^{\gamma(p+1)}) \in S$ telle que $(x_0^{\gamma(p+1)}, \ldots, x_{\gamma(p+1)}^{\gamma(p+1)}) = (x_0, \ldots, x_{\gamma(p+1)})$ (p+1, $(x_{\alpha(p+1)}, \ldots, x_{\beta(p+1)})$, (t_0, \ldots, t_p)) $\in \text{dom } R$, donc t_{p+1} est défini. La suite (t_n) est donc définie ce qui signifie que $(x_n) \in S$.

ii) Soit S ⊂ E satisfaisant la propriété :

$$\forall (x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : [\forall k \in \mathbb{N}, \exists (x_n^k) \in S(x_0, \dots, x_k) = (x_0^k, \dots, x_k^k)] \Rightarrow (x_n) \in S.$$

Soit $f \in F$. Définissons $A = (R, C)$ en posant :

bott i e i. belinissons n - (k, c

 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x_n) \in S:$

$$C(k, (x_0, ..., x_{k-1}), (f, ..., f)) = (0, k),$$
 $k \text{ fois}$

$$R(k, (x_0, ..., x_k), (f, ..., f)) = f,$$
 $\frac{k^{\text{fois}}}{k}$

 ${\cal R}$ et ${\cal C}$ n'étant pas définis ailleurs.

On a :

dom
$$C = \{(k, s, s') \in \mathbb{N} \times E^{(\mathbb{N})} \times F^{(\mathbb{N})} \mid \exists (x_n) \in S :$$

$$s = (x_0, \dots, x_{k-1}), s' = (f, \dots, f)\},$$

$$k^{\vee} fois$$

d'om
$$R = \{(k, s, s') \in \mathbb{N} \times E^{(\mathbb{N})} \times F^{(\mathbb{N})} \mid \exists (x_n) \in S : s = (x_0, \dots, x_k), s' = (f, \dots, f)\}.$$

Montrons que dom A = S.

Il est clair que $S \subset \text{dom } A$.

Montrons que : dom A \subset S.

Soit (x_n) **∉** S. Par hypothèse :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall (y_n) \in S : (x_0, \dots, x_k) \neq (y_0, \dots, y_k).$$

Donc:
$$(k, (x_0, ..., x_k), (f, ..., f)) \notin \text{dom } R$$
.

Donc: $(x_n) \notin \text{dom } A$.

Remarques

1°)La propriété caractéristique des ensembles de suites qui sont domaines de définition d'une transformation algorithmique énoncée à la proposition 1 peut aussi s'exprimer de la façon suivante :

S est un fermé de $\overline{\mathbb{E}^{\mathbb{N}}}$ pour la topologie produit des $\overline{\mathbb{E}}$ munis de la topologie discrète.

2°)Si E = R, l'ensemble des suites convergentes (resp. l'ensemble des suites convergentes à convergence linéaire, resp. l'ensemble des suites convergentes à convergence logarithmique) ne possède pas la propriété caractéristique des familles de suites pouvant être domaine de définition d'une transformation algorithmique. Ceci signifie que les transformations (par exemple destinées à l'accélération) qui fournissent des réponses pour les suites convergentes en fourniront aussi pour d'autres suites non convergentes et que ceci est irrémédiable (parfois cela est intéressant).

Soit $S \subset E^{\mathbb{N}}$, nous noterons \widehat{S} le sous-ensemble de $E^{(\mathbb{N})}$ constitué des débuts de suites de S :

$$\hat{S} = \{(x_0, \ldots, x_D) \mid (x_n) \in S\} \subset E^{(N)}$$

Une conséquence immédiate de la proposition 1 est :

Proposition 2

Soit
$$T \in {}^{T}Alg (E, F)$$
. Soit $S = dom T$.
 $(\hat{S} = E^{(IN)}) \iff (S = E^{IN})$

Cette proposition est importante car elle va nous permettre de démontrer que, sauf dans des cas triviaux, il existe toujours des transformations de suites qui ne sont pas algorithmiques, (la condition (*) de la page 13 est donc vraiment restrictive).

Proposition 3

Démonstration

a) Supposons que card E = 0 ou card F = 0.

Trans (E, F) ne contient que la fonction de domaine vide qui est algorithmique (on prend A = (R, C) avec dom (R) = dom (C) = \emptyset).

b) Supposons que card E = 1, $E = \{e\}$.

Soit T ϵ Trans (E, F). Ou bien dom (T) = Ø et alors nous venons de voir que T est algorithmique, ou bien dom (T) contient la suite (e, e, ..., e, ...) qui est la seule suite de $E^{\mathbb{N}}$, on pose alors (t_n) = T(e, e, ..., e, ...) et on vérifie que T = $^{\mathsf{T}}$ A où A = ($^{\mathsf{R}}$, $^{\mathsf{C}}$) est défini par :

$$\forall i \in \mathbb{N} : C(i, (e, e, ..., e), (t_0, t_1, ..., t_{i-1})) = (0, i)$$

$$\frac{i^{\sqrt{fois}}}{i^{\sqrt{fois}}}$$
 $\Re(i, (e, e, ..., e), (t_0, t_1, ..., t_{i-1})) = t_i$

$$\frac{i+1^{\sqrt{fois}}}{i+1^{\sqrt{fois}}}$$

R et C n'étant définis nulle part ailleurs.

c) Supposons que : card $F \ge 1$ et card $E \ge 2$.

L'hypothèse card E ≥ 2 implique :

Per (E)
$$\neq E^{\mathbb{N}}$$

Per (E) = $E^{(\mathbb{N})}$

et donc aucune des transformations de suites ayant Per(E) comme domaine de définition ne sera algorithmique (proposition 2).

Proposition 4

Démonstration

- a) Si card E < 2 ou si card F < 1, le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 3.
- b) Si card F = 1, toute transformation T est contenue dans la transformation T de domaine $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : T(x_n) = (f, f, ..., f, ...)$$
(F = {f})

Or cette transformation est algorithmique car $T' = {}^{T}A$, où A = (R, C) est défini par :

$$\forall$$
 i \in \mathbb{N} , \forall s \in $\mathbb{E}^{(\mathbb{N})}$, \forall s' \in $\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}$:

$$C(i, s, s') = (0, i) \text{ et}$$

 $R(i, s, s') = f.$

c) Supposons que : card $E \ge 2$ et card $F \ge 2$.

Soient f_1 , $f_2 \in F$, $f_1 \neq f_2$. Soit T la transformation suivante de domaine $E^{\mathbb{N}}$.

$$T(x_n) = (f_1, f_1, ..., f_1, ...) si (x_n) \epsilon Per (E)$$

$$T(x_n) = (f_2, f_2, ..., f_2, ...) si (x_n) \notin Per (E)$$

Si T est contenue dans une transformation algorithmique, alors T est elle-même algorithmique (car dom T = $E^{\mathbb{N}}$), il existe donc : A = (R, C) tel que : $E^{\mathbb{N}}$ A = T. Soit ($\alpha(0)$, $\beta(0)$) = C(0, \emptyset , \emptyset) ϵ $E^{\mathbb{N}}$. L'hypothèse card $E^{\mathbb{N}}$ 2 permet de construire deux suites ($E^{\mathbb{N}}$) et ($E^{\mathbb{N}}$) telles que :

(i)
$$(x_n^0) \in Per(E)$$
,

(iii)
$$x_n^0 = x_n^1$$
 pour tout $n \in \{\alpha(0), \alpha(0) + 1, \ldots, \beta(0)\}.$

De (i) et (ii), on déduit :
$$T^{(0)}(x_n^0) = f_1, T^{(0)}(x_n^1) = f_2.$$

De (iii), on déduit : $A^{\circ}(x_n^{\circ}) = A^{\circ}(x_n^{1})$, il est donc impossible que $A^{\circ} = T$.

Remarque

Les propositions 3 et 4 signifient les choses suivantes :

Dès que E et F ne sont pas trop petits, il existe des transformations de suites qui ne sont pas algorithmiques (proposition 3), et même des transformations de suites T telles qu'aucune transformation algorithmique éventuellement définie sur un domaine plus grand ne corresponde à T sur dom T (proposition 4).

3 - ALGORITHMES K-NORMAUX ET TRANSFORMATIONS K-NORMALES

Dans les problèmes d'accélération de la convergence, il est essentiel de considérer des transformations de suites n'utilisant pour le calcul de t_n que les points :

$$x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}$$

où k est une constante fixée (en fait, par un changement dans les indices, on peut même se ramener au cas où t_n est calculé uniquement grâce à : x_0 , x_1 ,..., x_n)

Ceci nous conduit à définir ce que nous appelons des algorithmes k-normaux. De la même façon que les algorithmes pour suites ont donné la notion de transformation algorithmique, nous obtenons ici la notion de transformation k-normale.

Toute transformation k-normale est une transformation algorithmique, la réciproque n'étant vraie qu'exceptionnellement (proposition 5). Moins évident : les familles de suites qui peuvent être domaines de définition d'une transformation k-normale sont les mêmes que celles qui peuvent être domaines de définition d'une transformation algorithmique (proposition 6).

Définitions et notations

Soit $k \in \mathbb{N}$

Nous appellerons algorithme k-normal de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ la donnée d'une suite de fonctions (f_n) telle que : \mathbb{V} n $\in \mathbb{N}$: f_n : $E^{n+k+1} \to F$.

Appliquée à la suite $(x_n) \in E^N$, l'algorithme k-normal A = (f_n) fonctionne de la façon suivante :

$$\begin{cases} t_{o} = f_{o}(x_{o}, \dots, x_{k}) \\ t_{1} = f_{1}(x_{o}, \dots, x_{1+k}) \\ \dots \\ t_{n} = f_{n}(x_{o}, \dots, x_{n+k}) \\ \dots \end{cases}$$

Lorsque k = 0 au lieu d'algorithme k-normal, nous dirons algorithme normal.

L'ensemble des suites (x_n) ϵ $\stackrel{\mathbb{N}}{E}$ pour lesquelles ce calcul peut se poursuivre indéfiniment, c'est-à-dire l'ensemble des suites (x_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x_0, x_1, \ldots, x_{n+k}) \in \text{dom } f_n,$$

sera appelé domaine de définition de l'algorithme $A = (f_n)$ et sera noté : dom A.

L'ensemble des algorithmes k-normaux de $\overline{E}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\overline{F}^{\mathbb{N}}$ sera noté : Norm (E, F).

A tout algorithme k-normal, A ϵ Norm $_k$ (E, F), on associe la transformation T A ϵ Trans (E, F) dont le domaine de définition est dom A et qui à toute suite, (\mathbf{x}_n) ϵ dom A, fait correspondre la suite (\mathbf{t}_n) ϵ $^{\mathbf{N}}$ définie plus haut.

Soit T ϵ Trans (E, F), s'il existe A ϵ Norm_k(E, F) tel que T = ^TA nous dirons que T est une <u>transformation k-normale</u>.

L'ensemble des transformations k-normales de $E^{{\bf N}}$ à valeurs dans $F^{{\bf N}}$ sera noté : ${}^{T}Norm_k$ (E, F).

Par définition on a évidemment : ${}^{T}Norm_{k}$ (E, F) \subset Trans (E, F). (En fait, si la définition de transformation algorithmique est bien aussi générale que nous l'avons affirmé, on doit avoir : ${}^{T}Norm_{k}$ (E, F) \subset ${}^{T}Alg(E, F)$, ce que nous montrons à la proposition 5).

Exemples

Reprenons les exemples du § 1.

- 1°) Transformation identique : T₁.
- T_1 est une transformation normale car $T_1 = {}^TN_1$ où $N_1 = (f_n)$ est défini par : $V \in \mathbb{N}, V (x_0, \ldots, x_n) \in E : f_n(x_0, \ldots, x_n) = x_n$.
- 2°) Transformation Δ^2 d'Aitken : T $_2$.

 T_2 est une transformation 2-normale car $T_2 = {}^TN_2$ où $N_2 = (f_n)$ est défini par : $f_n(x_0, x_1, ..., x_{n+2}) = (x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2)/(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)$ si $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0$ sinon

Comme nous le disions au début du paragraphe, il est possible de normaliser la transformation ${\bf T}_{2}$ en posant :

$$\begin{aligned} &t_{n}^{1} = x_{n} \sin n = 0 \text{ ou } n = 1, \\ &t_{n}^{1} = (x_{n}x_{n-2} - x_{n-1}^{2})/(x_{n} - 2x_{n-1} + x_{n-2}) \sin x_{n} - 2x_{n-1} + x_{n-2} \neq 0 \text{ et } n \geq 2, \\ &t_{n}^{1} = 0 \sin x_{n} - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \text{ et } n \geq 2. \end{aligned}$$

Cette transformation T' $_2$, que nous appellerons transformation Δ^2 normalisée, est normale (i.e. 0-normale)

Dans toute la suite, il sera sous-entendu, lorsque nous définirons une transformation par une formule du type :

$$t_n = h_n (x_{n-p}, \ldots, x_n),$$

que l'algorithme normal associé à cette transformation est donné par :

$$\begin{cases} t_{n} = x_{n} \sin x & p \\ t_{n} = h_{n} (x_{n-p}, x_{n-p+1}, \dots, x_{n}) = f_{n} (x_{0}, \dots, x_{n}) \sin x & p. \end{cases}$$

3°) et 4°)

 T_3 et T_4 ne sont pas des transformations normales (ni même k-normales, quel que soit k).

Pour T_3 on le montre à l'aide d'un raisonnement par l'absurde (pour tout espace métrique dans lequel il existe b et c tels que : d (a, b) \neq d(a, c)). Pour T_4 cela résulte de la proposition 5 et du fait que T_4 n'est pas algorithmique (dès que card $E \ge 2$).

Proposition 5

- i) $\forall k \in \mathbb{N} : {}^{\mathsf{T}} \operatorname{Norm}_{k} (E, F) \subset {}^{\mathsf{T}} \operatorname{Norm}_{k+1} (E, F) \subset {}^{\mathsf{T}} \operatorname{Alg} (E, F)$, $\cup {}^{\mathsf{T}} \operatorname{Norm}_{k} (E, F) \subset {}^{\mathsf{T}} \operatorname{Alg} (E, F).$ $k \in \mathbb{N}$
- ii) Il y a égalité si et seulement si :

 card E < 2 ou card F < 2.

Démonstration

- a) La première inclusion est évidente.
- b) Pour montrer la deuxième, donnons-nous $A = (f_n) \in Norm_k$ (E, F). Définissons $B = (R, C) \in Alg$ (E, F) en posant :

$$C(0, \emptyset, \emptyset) = (0, k)$$
 et

$$\forall$$
 (x) ϵ dom A, \forall n ϵ \mathbb{N} :

$$C(n,(x_0,...,x_{n+k-1}),(f_0(x_0,...,x_k),...,f_{n-1}(x_0,...,x_{n+k-1}))) = (0, n+k)$$

$$R(n,(x_0,...,x_{n+k}),(f_0(x_0,...,x_k),...,f_{n-1}(x_0,...,x_{n+k-1}))) = f_n(x_0,...,x_{n+k})$$

R et C n'étant définis nulle part ailleurs.

On vérifie que ${}^{T}B = {}^{T}A$ (en particulier : dom B = dom A)

- c) La troisième inclusion résulte de la seconde.
- d) Lorsque card E < 2 ou card F < 2, il est facile de voir que les inclusions sont des égalités (dans le cas card F = 1, on utilise la proposition 1)
- e) Supposons que; card $E \ge 2$ et card $F \ge 2$.

La transformation "translation d'ordre k+1":

$$T : (x_n) \to (t_n) ; t_n = x_{n+k+1}$$

appartient clairement à $^TNorm_{k+1}(E, F)$ et un simple raisonnement par l'absurde montre qu'elle n'appartient pas à TNorm_k (E, F).

De la même façon, on voit que la transformation :

$$T: (x_n) \rightarrow (t_n) ; t_n = x_{2n}$$

n'appartient à aucun ${}^{\mathsf{T}}\mathsf{Norm}_{\mathsf{k}}(\mathsf{E},\,\mathsf{F})$, alors que bien sûr, c'est une transformation algorithmique.

Remarque

Il y a égalité entre

- . l'ensemble des transformations contenues dans une transformation algorithmique et
- . l'ensemble des transformations contenues dans une transformation k-normale, si et seulement si :

card E < 2 ou card F < 2.

(l'implication "<=" est évidente, pour "=>" on utilise les deux transformations de la démonstration de la proposition 5).

Les familles de suites qui peuvent être des domaines de définition de transformations k-normales peuvent (d'après la proposition 5) l'être aussi de transformations algorithmiques. Il est remarquable que l'inverse soit vrai :

Proposition 6

Soit
$$S \subset E^{\mathbb{N}}$$
. On a l'équivalence suivante :

$$(\exists T \in {}^{\mathsf{T}} \operatorname{Norm}_{\mathsf{k}} (E, F) : \operatorname{dom} T = S)$$

$$<=>$$

$$(\exists T \in {}^{\mathsf{T}} \operatorname{Alg} (E, F) : \operatorname{dom} T = S)$$

Démonstration

- . => . Proposition 5 .
- . <= . Soit $S \subset E^{\mathbb{N}}$ tel qu'il existe $T \in {}^{\mathbb{T}}$ Alg (E, F) vérifiant dom T = S.

Le cas F = \emptyset est évident, soit donc f ϵ F.

On définit N = $(f_n) \in Norm_k$ (E, F) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_n) \in S$$
:

$$f_n(x_0, ..., x_{n+k}) = f.$$

La proposition 1 donne que : dom N = dom T.

Les propositions 2 et 6 permettent alors d'énoncer :

Proposition 7

Soit
$$T \in {}^{T}Norm_{k}$$
 (E, F). Soit $S = dom T$. On a l'équivalence suivante : $(\hat{S} = E^{(IN)}) \iff (\hat{S} = E^{N})$.

4 - ALGORITHMES À K MÉMOIRES ET TRANSFORMATIONS À K MÉMOIRES

Parfois les calculs à effectuer à l'étape n d'un algorithme pour suites ne dépendent que du numéro de l'étape et des termes $\mathbf{x}_{n-k+1},\dots,\mathbf{x}_n$ de la suite à transformer. Ce type d'algorithme étant particulièrement important en accélération de la convergence, nous lui donnons un nom, et l'étudions ici.

Bien sûr, une transformation à k mémoires est une transformation normale (proposition 8), mais contrairement à ce qui s'est passé pour les transformations k-normales, nous constatons que les familles de suites pouvant être domaines de définition d'une transformation à k-mémoires sont moins nombreuses que celles pouvant l'être pour une transformation algorithmique. (proposition 9).

Définitions et notations

Soit k ϵ **IN**.

Nous appellerons algorithme à k mémoires de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ la donnée :

. d'une suite de fonctions (f_n) avec :

$$f_n : E^{n+1} \rightarrow F \text{ si } n < k,$$

$$f_n : E^k \rightarrow F \sin k \ge k-1.$$

Appliqué à la suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, l'algorithme à k mémoires $M = (f_n)$ fonctionne de la façon suivante :

$$t_n = f_n(x_0, x_1, ..., x_n) \sin k,$$

$$t_n = f_n(x_{n-k+1}, ..., x_n) \text{ si } n \ge k-1.$$

Lorsque E = F, sauf indication contraire, on conviendra de prendre f_0 , f_1 ,..., f_{k-2} définis par :

$$\forall n < k-1 : f_n(x_0, ..., x_n) = x_n$$

L'ensemble des suites (x_n) ϵ E^N pour lesquelles (t_n) est définie, c'est-à-dire l'ensemble des suites (x_n) telles que :

$$v_n < k: (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f_n \text{ et}$$

$$\forall n \ge k-1: (x_{n-k+1}, \ldots, x_n) \in \text{dom } f_n,$$

sera appelé domaine de définition de l'algorithme $M = (f_n)$, et sera noté dom M. L'ensemble des algorithmes à k mémoires sera noté : $M\acute{e}m_k(E, F)$.

A tout algorithme à k mémoires M ϵ Mém_k (E, F), on associe la transformation ^TM ϵ Trans (E, F) dont le domaine de définition est dom M et qui, à toute suite (x_n) ϵ dom M, fait correspondre la suite (t_n) ϵ F définie plus haut.

Soit T ϵ Trans (E, F), s'il existe M ϵ Mém_k (E, F) tel que ^TM = T nous dirons que T est <u>une transformation à k mémoires</u>.

L'ensemble des transformations à k mémoires de E^{N} à valeurs dans F^{N} sera noté : ${}^{T}M\acute{e}m_{k}$ (E, F).

Par définition, on a évidemment : $Mém_k$ (E, F) \subset Trans (E, F).

Exemples

Reprenons les exemples des § 1, 2 et 3 :

 T_1 est une transformation à 1 mémoire ;

 T'_{2} est une transformation à 3 mémoires.

Par contre, on établit que ni T_2 , ni T_3 , ni T_4 ne sont des transformations à k mémoires et cela quel que soit k ϵ \mathbb{N} .

Proposition 8

Démonstration

- i) Evident.
- ii) Si card E < 2 ou card F < 1, alors bien sûr il y a des égalités ; pour montrer la réciproque, supposons que card $E \ge 2$ et card $F \ge 1$ et soit $f \in F$. Considérons la transformation suivante :

$$\begin{cases} T(x_n) = (f, f, ..., f, ...) \text{ si } (x_n) \text{ vérifie } : \\ \forall n \in \mathbb{N} : x_n = x_{2n} \\ T(x_n) \text{ non défini sinon.} \end{cases}$$

T est une transformation normale car T = ${}^{T}A$ où A = (f_{n}) est définie par :

$$\forall$$
 $n \in \mathbb{N}$, \forall $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$

$$(\forall p : 2p \le n \Rightarrow x_p = x_{2p}) \Rightarrow [(x_0, \dots, x_n) \in \text{dom } f_n \text{ et } f_n(x_0, \dots, x_n) = f]$$

Pour montrer que T n'est pas une transformation à k mémoires, supposons le contraire et donnons-nous $M = (g_n) \in \text{Mém}_k(E, F)$ tel que $^TM = T$.

Soit k' impair, k' \geq k. Soient e_1 , $e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$.

Les suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_n = e_1$$
 s'il existe i ϵ N tel que $n = 2^i$ k',

$$x_n = e_2 \text{ sinon}$$

$$y_n = e_2$$
 pour tout $n \in \mathbb{N}$

sont dans dom T, donc dans dom M. Il en résulte que la suite (z,) définie par :

$$z_{k'} = e_1, z_n = e_2$$
 pour tout $n \neq k'$

est aussi dans dom M. Mais $(z_n) \notin \text{dom T, donc} \overset{\tau_M}{\neq} T$.

Nous venons de montrer que lorsque card $E \ge 2$ et card $F \ge 1$, alors il existait des transformations normales qui n'étaient pas des transformations k stationnaires, quel que soit k.

Par un raisonnement analogue, on montre que la transformation définie par :

$$\begin{cases} T(x_n) = (f, f, ..., f ...) \text{ si } \forall n \in \mathbb{N} : x_n = x_{n+k}, \\ \\ T(x_n) \text{ non défini sinon,} \end{cases}$$

est une transformation à k+1 mémoires mais pas une transformation à k mémoires.

Proposition 9

Soit
$$k \in \mathbb{N}$$
, $S \subset \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$. Si $F \neq \emptyset$ on a l'équivalence suivante :

$$(\exists T \in {}^{\mathbb{N}} \text{Mém}_{k} (E, F) : \text{dom } T = S)$$

$$<=>$$

$$(\exists V (x_{n}) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}} (V i \in \mathbb{N}, \exists (x_{n}^{i}) \in S : (x_{i}^{i}, x_{i+1}^{i}, \dots, x_{i+k-1}^{i}) = (x_{i}, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}^{i}))$$

$$=> (x_{n}) \in S].$$

Démonstration

.=>.

Soit $M = (f_n) \in Mém_k(E, F)$ tel que dom M = S.

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists (x_n^i) \in \mathbb{S} : (x_i^i, x_{i+1}^i, ..., x_{i+k-1}^i) = (x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}^i).$$

En prenant i = 0, on en déduit que :

$$\forall n \leq k-1 : (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \text{dom } f_n.$$

En prenant i ϵ N, on en déduit que :

$$\forall n \geq k-1 : (x_{n-k+1}, \ldots, x_n) \in \text{dom } f_n.$$

Il en résulte que (x_n) ϵ S.

.<=.

Soit S ayant la propriété entre crochets. Soit f ϵ F.

Définissons $M = (f_n)$ de la façon suivante :

$$\forall (x_n) \in S : \forall m \le k-1 : f_m(x_0, ..., x_n) = f;$$

 $\forall m \ge k-1 : f_m(x_{m-k+1}, ..., x_m) = f,$

les f_m n'étant pas définies ailleurs.

Par construction, on a dom $M \supset S$; l'hypothèse faite sur S assure que dom $M \subset S$

Proposition 10

Soit
$$T \in {}^{\mathsf{T}}\mathsf{M\'em}_{k}(E, F)$$
. Soit $S = \mathsf{dom} T$.

Proposition 10

Soit
$$T \in {}^{T}M\acute{e}m_{k}(E, F)$$
. Soit $S = dom T$.

Si $F \neq \emptyset$, on a les équivalences suivantes :

$$[\forall i \in \mathbb{N} : \{(x_{i}, ..., x_{i+k-1}) \mid (x_{n}) \in S\} = E^{k}]$$
 $<=> [\hat{S} = E^{(\mathbb{N})}]$

$$\langle = \rangle [\hat{S} = E^{(IN)}]$$

Par définition, on a évidemment : $^{\mathsf{T}}\mathsf{Stat}(\mathsf{E},\;\mathsf{F}) \subset \mathsf{Trans}(\mathsf{E},\;\mathsf{F}).$

Exemples

Reprenons les exemples des § 1, 2, 3 et 4.

 \mathbf{T}_1 est une transformation 1-stationnaire.

 T'_{2} est une transformation 3-stationnaire.

 $\mathbf{T}_{2},~\mathbf{T}_{3}$ et \mathbf{T}_{4} ne sont pas k-stationnaires et cela quel que soit k ϵ $\mathrm{I\!N}.$

Proposition 11

¥ k ∈ IN*:

(i)
$$^{\mathsf{T}}\mathsf{Stat}_{k}$$
 (E, F) \subset $^{\mathsf{T}}\mathsf{Stat}_{k+1}$ (E, F) \subset $^{\mathsf{T}}\mathsf{M\'em}_{k+1}$ (E, F)

(ii) Il y a égalité si et seulement sî :

card E < 2 ou card F < 1.

Démonstration

- (i) Evident.
- (ii) Si card E < 2 ou card F < 1, alors bien sûr, il y a des égalités.

Supposons que card E ≥ 2 et card F ≥ 1 et montrons qu'il n'y a plus d'égalité.

La transformation définie par :

.
$$T(x_n) = (f, f, ..., f, ...)$$
 si \forall n pair : $x_n = x_{n+k-1}$ et \forall n impair : $x_n \neq x_{n+k-1}$

. $T(x_n)$ non définie sinon,

est une transformation à k mémoires, mais n'est pas une transformation k-stationnaire.

La transformation définie par :

$$T(x_n) = (f, f, ..., f, ...)$$
 si $\forall n : x_n = x_{n+k}$

 $T(x_n)$ non définie sinon,

5 - ALGORITHMES K-STATIONNAIRES ET TRANSFORMATIONS K-STATIONNAIRES

Un grand nombre des transformations de suites en accélération de la convergence n'utilise pour calculer t_n que les points x_{n-k+1}, \ldots, x_n sans que le numéro de l'étape intervienne. Ce sont ces transformations-là que nous étudions maintenant, et, suivant la terminologie usuelle ([16]) nous les appelons transformations k-stationnaires.

Définitions et notations

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Nous appellerons algorithme k-stationnaire de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$ tout algorithme à k mémoires (f_n) vérifiant :

$$\forall n \ge k-1 : f_n = f_{k-1}.$$

Lorsque E = F, sauf indication contraire, on conviendra de prendre f_0 , f_1 , ..., f_{k-2} définis par :

$$\forall n \leq k-2, \ \forall (x_0, ..., x_n) : f_n(x_0, ..., x_n) = x_n.$$

Dans une telle situation, un algorithme k-stationnaire se réduit donc à la donnée d'une fonction $f: E^k \to E$ et la suite transformée de (x_n) est définie par :

$$t_n = x_n \text{ si } n < k-1; t_n = f(x_{n-k+1}, ..., x_n) \text{ si } n \ge k-1.$$

L'ensemble des algorithmes k-stationnaires sera noté $\operatorname{Stat}_k(E, F)$.

A tout algorithme k-stationnaire A ϵ Stat_k(E, F),on associe la transformation ^TA ϵ Trans(E, F) dont le domaine de définition est dom A et qui à toute suite (x_n) ϵ dom (A) fait correspondre la suite (t_n) ϵ F définie plus haut.

Soit T ϵ Trans (E, F),s'il existe A ϵ Stat_k(E, F) tel que ^TA = T nous dirons que T est une transformation k-stationnaire.

L'ensemble des transformations k-stationnaires de E^{N} à valeurs dans F^{N} sera noté : T Stat $_{k}(E, F)$.

est une transformation (k+1) stationnaire mais n'est pas une transformation k-stationnaire.

| Soit
$$S \subset E^{\mathbb{N}}$$
.
S'il existe $S \in {}^{\mathbb{T}}Stat_k(E, F)$ telle que dom $S = S$
alors:
 $\exists A \subset E^k, \forall (x_n) \in S, \forall i \in \mathbb{N} : (x_i, ..., x_{i+k-1}) \in A$.

Proposition 13

Soit
$$S \in {}^{T}Stat_{k}$$
 (E, F). Soit $S = dom S$.

$$[\{(x_{0}, ..., x_{k-1}) \mid (x_{n}) \in S\} = E^{k}] \iff \{S = E^{N}\}.$$

6 - TRANSFORMATIONS RATIONNELLES, TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

Supposons que E = F = IK, IK étant un corps. On dira que l'algorithme k-normal N = (f_n) est rationnel si pour tout n ϵ N, f_n est une fraction rationnelle des variables x_o , x_1 , x_{n+k} . On notera Norm_k^r (E, F) l'ensemble des algorithmes k-normaux rationnels. Soit T ϵ Trans (E, F); s'il existe un algorithme k-normal rationnel N = (f_n) tel que $^{\mathsf{T}} N$ = T,on dira que T est une transformation k-normale rationnelle. On notera ${}^{\tau}Norm_k^r$ (E, F) l'ensemble des transformations k-normales rationnelles. De la même façon, on définit :

les algorithmes à k mémoires rationnels ; les algorithmes k-stationnaires rationnels; les transformations à k mémoires rationnelles; les transformations k-stationnaires rationnelles, et on introduit les notations :

$$\underline{\text{Mém}}_{k}^{r}(E, F), \underline{\text{TMém}}_{k}^{r}(E, F), \underline{\text{Stat}}_{k}^{r}(E, F), \underline{\text{TStat}}_{k}^{r}(E, F).$$

Supposons que E et F soient des espaces vectoriels sur le corps IK.

On dira que l'algorithme k-normal N = (f_n) est linéaire si pour tout n ϵ N, f_n est une application linéaire de E^{n+k+1} dans F.

Comme précédemment, on définit aussi :

les algorithmes à k mémoires linéaires;

les algorithmes k-stationnaires linéaires;

les transformations k-normales linéaires;

les transformations à k mémoires linéaires;

les transformations k-stationnaires linéaires,

et on introduit les notations :

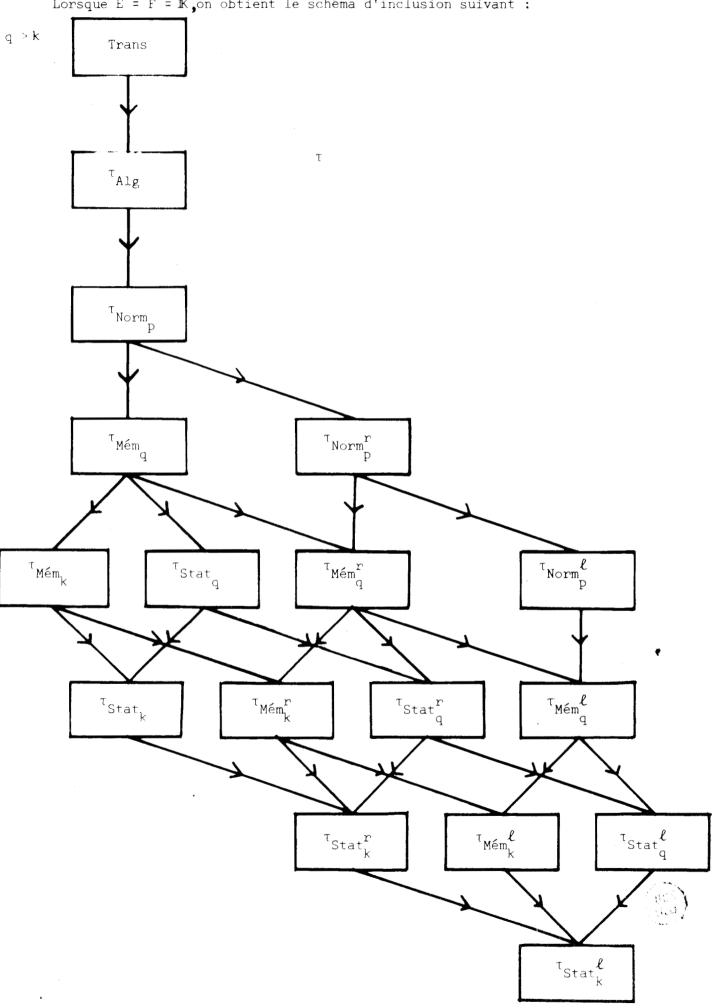
$$\operatorname{Norm}_{k}^{\boldsymbol{\ell}}\left(\mathsf{E},\,\mathsf{F}\right),\,\,^{\mathsf{T}}\operatorname{Norm}_{k}^{\boldsymbol{\ell}}\left(\mathsf{E},\,\mathsf{F}\right),\,\,^{\mathsf{M}}\operatorname{\acute{em}}_{k}^{\boldsymbol{\ell}}\left(\mathsf{E},\,\mathsf{F}\right),\,^{\mathsf{T}}\operatorname{M\acute{em}}_{k}^{\boldsymbol{\ell}}\left(\mathsf{E},\,\mathsf{F}\right),\,\,^{\mathsf{Stat}}_{k}^{\boldsymbol{\ell}}\left(\mathsf{E},\,\mathsf{F}\right),\,\,^{\mathsf{T}}\operatorname{Stat}_{k}^{\boldsymbol{\ell}}\left(\mathsf{E},\,\mathsf{F}\right).$$

Exemples

Les transformations T_1 , T_2 , T'_2 sont des transformations rationnelles, ainsi que toutes les transformations utilisées en accélération de la convergence une fois écrites sous forme normale (ε , ρ , θ -algorithmes), à l'exception des transformations obtenues par sélection.

7 - Schéma d'Inclusion

Lorsque E = F = \mathbb{K} , on obtient le schéma d'inclusion suivant :



RÉFÉRENCES

- [1] BREZINSKI C. "Accélération de la convergence en analyse numérique", Lecture Notes in Mathematics 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [2] BREZINSKI C. "Algorithmes d'accélération de la convergence; Etude Numérique", Technip, Paris, 1978.
- [3] BREZINSKI C. "Asymptotic error estimates in convergence acceleration method", A paraître.
- [4] CORDELLIER F. "Sur la régularité des procédés δ^2 et W. de Lubkin. Padé Approximation and its Applications", Lecture Notes in Mathematics 765, Springer Verlag, Heidelberg, 1980, pp. 20-35.
- [5] DELAHAYE J.P. "Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites", Thèse de 3ème cycle, Lille, 1979.
- [6] DELAHAYE J.P. "Expériences numériques sur les algorithmes d'extraction pour suites non convergentes", Publication A.N.O. n° 5 Université des Sciences et Techniques de Lille 1979.
- [7] DELAHAYE J.P. "Algorithmes powr suites non convergentes", Numer. Math., 34, 1980, pp. 333-347.
- [8] DELAHAYE J.P. "Détermination de la période d'une suite pseudo-périodique", Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'E.D.F., C, n° 1, 1980, pp. 65-80.
- [9] DELAHAYE J.P. "Choix automatique entre suites de paramètres dans l'extrapolation de Richardson. Padé Approximation and its Applications", Lecture Notes in Mathematics 888, Springer Verlag, Heidelberg, 1981, pp. 158-172.
- [10] DELAHAYE J.P. "Automatic selection of sequence transformation", Math. Comp., 37, 1981, pp 197-204.

- [11] DELAHAYE J.P. "Optimalité du procédé Δ^2 d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire", RAIRO Analyse Numérique, 15, 1981, pp 321-330.
- [12] DELAHAYE J.P. "Accélération des suites dont le rapport des erreurs est borné", Calcolo, 18, 1981, pp. 103-116.
- [13] DELAHAYE J.P. "Algorithmes pour extraire une sous-suite convergente d'une suite non convergente", Conference Optimization: Theory and Algorithms.

 16-20 mars 1981. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Marcel Dekker, New-York.
- [14] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Résultats négatifs en accélération de la convergence", Numer. Math., 35, 1980, pp. 443-457.
- [15] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated", SIAM J. Numer. Anal., 19, 1982, pp 840-844.
- [16] GERMAIN-BONNE B. "Estimation de la limite de suites et formalisation des procédés d'accélération de convergence", Thèse, Lille, 1978.
- [17] GERMAIN-BONNE B. "Transformations de suites" RAIRO, R-1, 1973, pp 84-90.
- [18] GERMAIN-BONNE B. "Conditions suffisantes d'accélérabilité", Publication ANO n° 32 Université des Sciences et Techniques de Lille, 1981.
- [19] KOWALEWSKI C. "Possibilités d'accélération de la convergence logarithmique", Thèse de 3ème cycle, Lille, 1981.
- [20] KOWALEWSKI C. "Accélération de la convergence pour certaines suites à convergence logarithmique", Padé Approximation and its Applications.

 Lecture Notes in Mathematics 888, Springer Verlag, Heidelberg, 1981, pp 263-272.
- [21] PENNACCHI R. "Le Transformazioni rationali di una successione", Calcolo, 5, 1968, pp. 35-50.
- [22] TROJAN J.M. "An upper bound on the acceleration of convergence", First French-Polish Meeting on Padé Approximation and Convergence Acceleration Techniques. Varsovie Pologne 1-4 juin 1981.

[23] WIMP J. "Sequence transformations and their applications", Academic Press, New-York, 1981.

CHAPITRE 2

DÉCIDABILITÉ ET INDÉCIDABILITÉ À LA LIMITE POUR DES PROBLÈMES DE SUITES

INTRODUCTION

Dans un certain nombre de problèmes d'analyse numérique et d'optimisation on rencontre des suites non convergentes dont il est utile de tirer des informations (*): nature de la non-convergence, nombre de points d'accumulation, période (si les suites sont asymptotiquement périodiques). Notre but, ici, est d'étudier ce type de problèmes, en cherchant en particulier à déterminer ceux qui sont décidables à la limite et ceux qui ne le sont pas.

Pour pouvoir parler de décidabilité à la limite, nous utilisons la notion d'algorithme pour suites du chapitre 1 et reprenons dans son principe l'idée de Gold [28] [29]: Une question Q étant fixée (par exemple "la suite (x_n) est-elle convergente ?") une classe S de suites étant donnée, nous disons que Q est décidable à la limite sur S, s'il existe un algorithme qui, pour toute suite (x_n) ϵ S fournit une suite de réponses (r_n) exacte à partir d'un certain rang. Si un tel algorithme ne peut pas exister, nous disons que Q est indécidable à la limite sur S.

Au paragraphe 1 après avoir détaillé et commenté cette définition nous établissons le théorème de normalisation qui énonce l'équivalence entre la décidabilité à la limite par des algorithmes pour suites et la décidabilité à la limite par des algorithmes normaux. C'est là un résultat théorique essentiel car dans les résultats positifs il nous dispensera de nous occuper de la normalité des algorithmes utilisés, et dans les résultats négatifs nous pourrons grâce à lui nous contenter d'établir les énoncés avec des algorithmes normaux.

Au paragraphe 2 nous commençons à appliquer les notions introduites sur quelques questions simples concernant la convergence, la périodicité et la turbulence des suites.

(*) Voir par exemple [23] [24] [26] [30] [31] [37].

Le paragraphe 3 s'occupe plus particulièrement du problème du dénombrement à la limite des points d'accumulation d'une suite non convergente; nous y décrivons quelques algorithmes qui, sous des hypothèses que nous détaillons, effectuent ce dénombrement.

Le paragraphe 4, lui, est consacré à un problème relativement plus facile : celui de la détermination de la période d'une suite asymptotiquement périodique. Nous décrivons et étudions deux familles d'algorithmes et montrons que si aucune de ces deux familles ne résoud entièrement le problème c'est parce qu'il est indécidable.

Le cas des familles de suites obtenues par itération, présente des particularités qu'il est intéressant de considérer à part ; c'est ce que nous faisons au paragraphe 5.

Au paragraphe 6 nous établissons deux résultats généraux concernant la décidabilité à la limite, puis nous terminons ce chapitre par trois annexes consacrées respectivement, à la notion de force d'un point d'accumulation, à la possibilité d'imposer des conditions de calculabilité à nos algorithmes, à l'application de nos méthodes à des problèmes de fonctions.

La plupart des résultats présentés ici l'ont déjà été dans des publications de l'auteur [10]-[15], [19]-[22].

Seuls le théorème de normalisation du paragraphe 1 et les énoncés das paragraphe 6 sont entièrement nouveaux.

NOTATIONS:

E: Espace métrique dont la distance sera notée d;

B(y, ε): Boule ouverte de centre y et de rayon ε :
B(y, ε) = {x ε E | d(x, y) < ε };

```
E(IN) .
                Ensemble des suites finies d'éléments de E :
               E^{(DN)} = v E^{m};
EN :
                Ensemble des suites (infinies) d'éléments de E ;
                Tranche des points de la suite (x_n) \epsilon E^{\mathbf{N}} dont les indices sont
x_{D}^{Q}:
                compris entre p et q :
               X_{p}^{q} = (x_{p}, x_{p+1}, ..., x_{q});
A(x_n):
               Ensemble des points d'accumulation (ou valeurs d'adhérence) de la
               suite (x<sub>n</sub>) :
               y \in A(x_n) \iff \forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n : x_m \in B(y, \epsilon);
Alg(E, F): Ensemble des algorithmes pour suites de E à valeurs dans F
                (voir chapitre 1);
Norm(E,F): Ensemble des algorithmes normaux pour suites de \stackrel{
m N}{
m E} à valeurs dans
                fN (voir chapitre 1);
             Famille des suites convergentes de points de E ;
Conv (E) : Famille des suites convergentes vers 0 de points de E
                (lorsque E = IR ou IR<sup>m</sup>);
Stati(E): Famille des suites stationnaires de points de E:
               ((x_n) \in Stati(E)) \iff (\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = x_n);
UStati(E) : Famille des suites ultérieurement stationnaires de points de E :
                ((x_n) \in UStati(E)) \iff (\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p : x_{n+1} = x_n);
               Famille des suites périodiques de période p de points de E :
                ((x_n) \in Per_p(E)) \iff (p \text{ est le plus petit entier} > 0 \text{ tel que} :
                                            \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+p} = x_n);
Per(E) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} Per(E) ;
\operatorname{Per}_{p}^{*}(E) = \{(x_{n}) \in \operatorname{Per}_{p}(E) \mid \forall i, j \in \{0, 1, ..., p-1\} : i \neq j \Rightarrow x_{i} \neq x_{j}\};
Per^*(E) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} Per^*(E) ;
```

```
\label{eq:points} \begin{tabular}{ll} $\operatorname{UPer}_p(E):$ & Famille des suites ultérieurement périodiques de période p de points de E: \\ & ((x_n) \in \operatorname{UPer}_p(E)) \leq = (p \text{ est le plus petit entier} > 0 \text{ tel que}: \\ & & \exists n_o \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_o: \ x_n = x_{n+p}) \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{UPer}(E): & \cup & \operatorname{UPer}_p(E) \ ; \\ \operatorname{pell}^*(E): & \in ((x_n) \in \operatorname{UPer}_p(E)) \ | \ \exists \ n_o \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_o, \ \forall \ i, \ j \in \{n, \ n+1, \ \dots, \ n+p-1\}: \\ & i \neq j = > x_i \neq x_j \} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{UPer}^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E) \ ; \\ \operatorname{pell}^* & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{UPer}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{Per}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{Per}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{Per}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{Per}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{Per}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{Per}_p^*(E): \\ & & p \in \mathbb{N} \ ; \\ \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \operatorname{Per}_p^*(E): & = \bigcup & \operatorname{Per}_p^*(E): \\ \end{tabular} \begin{tabula
```

$$APer(E) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} APer_p(E) ;$$

$$APer_p^*(E) = \{(x_n) \in APer_p(E) \mid card \land (x_n) = p\} ;$$

$$APer^*(E) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} APer_p^*(E) ;$$

$$p \in \mathbb{N}^* = \{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} \mid card \land (x_n) = p\} ;$$

$$Fini(E) = \{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} \mid card \land (x_n) = p\} ;$$

$$Turb(E) = \{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} \mid A(x_n) \text{ est infini}\}.$$

1 - DÉFINITIONS ET THÉORÈME DE NORMALISATION

Dans un cadre assez différent et dans d'autres buts, la notion de décidabilité à la limite a été introduite et utilisée par Gold [28] [29].

Adaptée à notre propos grâce aux diverses notions d'algorithmes du chapitre 1, la définition de décidabilité à la limite que nous donnons ici, nous permettra

de formuler facilement les résultats positifs que nous obtiendrons (toujours par la description explicite d'algorithmes) et les résultats négatifs qui nous indiqueront les limites des possibilités des algorithmes en matière de traitement de suites. Le vocabulaire et les définitions donnés ici sont les mêmes que ceux de [19].

<u>Définitions</u>

Soit Q une question définie sur $S \subset E^{\mathbb{N}}$ (par exemple "(\mathbf{x}_n) est-elle convergente ?" "quel est le nombre de points d'accumulation de (\mathbf{x}_n) ?"). Soit R l'ensemble des réponses possibles (par exemple : {OUI, NON}, {0, 1, ... n, ...}). Soit T ϵ Trans (E, R) une transformation de suites de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$, nous dirons que T'est satisfaisante pour Q sur $E^{\mathbb{N}}$ si pour toute suite ($E^{\mathbb{N}}$) données par T est exacte à partir d'un certain rang.

Nous dirons que la question Q est décidable à la limite sur S s'il existe une transformation algorithmique (T ϵ Alg (E, R)) satisfaisante pour Q sur S.

Dans le cas contraire nous dirons que Q est indécidable à la limite sur S.

Remarques

- 1°) Dans le cas où R = {OUI, NON}, à la place de questions nous pourrions parler de prédicats conformément au vocabulaire de la logique mathématique. Mais parce que nous avons en vue des ensembles de réponses R plus grands, nous avons préféré utiliser le terme de question.
- 2°) Nous n'envisagerons ici que la décidabilité à la limite car pour les problèmes de suites que nous considérons, une décidabilité tout court ne peut être espérée. Lorsque la question Q n'admet que deux réponses possibles (par exemple OUI ou NON) on peut aussi parler de semi-décidabilité à la limite : Q est semi-décidable à la limite sur S s'il existe une transformation algorithmique A telle que pour
- (1) R sera toujours supposé muni de la distance discrète.

toute suite $(x_n) \in S$:

[La suite des réponses (r_n) est constamment OUI à partir d'un certain rang] :

<=>

[La réponse exacte est OUI]

Avec cette notion plus faible sur laquelle nous n'insisterons pas, on peut établir que la question Q est décidable à la limite sur S si et seulement si Q et non Q sont semi-décidables à la limite sur S.

- 3°) Nous parlons ici de décidabilité à la limite sans imposer de conditions de calculabilité aux algorithmes que nous envisageons. Nous avons en cela suivi l'usage qu'il est fait du mot algorithme en analyse numérique et en particulier en optimisation, mais notre point de vue n'est pas limitatif car :
- a) Comme nous le verrons, les résultats positifs sont établis constructivement en proposant des algorithmes qui, à chaque fois, sont calculables (si on choisit un espace E où on puisse donner un sens à la calculabilité).
- b) Les résultats négatifs démontrés restent a fortiori vrais si on impose des conditions de calculabilité, car cela ne fait que diminuer la classe des algorithmes autorisés (voir annexe 2)

Notre point de vue nous permet d'autre part de donner un sens à la notion de décidabilité dans un plus grand nombre de cas (par exemple sans imposer à E et R d'être dénombrables), et il a aussi l'avantage de nous éviter d'avoir à manier des notions assez complexes qui ne sont pas vraiment nécessaires ici. Enfin notre point de vue met bien en avant la nature de l'impossibilité de la résolution de certaines questions, qui tient non pas au nombre limité de fonctions calculables mais au manque d'information dont nos algorithmes disposent à l'étape n du calcul.

Théorème 1 (Théorème de Normalisation)

Il y a équivalence entre :

[il existe une transformation normale satisfaisante pour Q sur S] et

[il existe une transformation algorithmique satisfaisante pour Q sur S]

Démonstration

|=>| Evident car : $^{\mathsf{T}}$ Norm (E, R) \subset $^{\mathsf{T}}$ Alg (E, R).

Soit A = $(R, C) \in Alg(E, R)$ satisfaisant pour Q sur $S \subset E^{N}$.

Soit r un élément quelconque de R.

Nous allons définir un algorithme normal $N = (f_n)$ qui sera satisfaisant pour Q sur S.

A toute suite $(x_n) \in S$ on fait correspondre la suite (n_i) donnée par :

"n_i est le plus grand indice des points intervenus dans le calcul de $A^{(o)}(x_n)$, $A^{(1)}(x_n)$, ..., $A^{(i)}(x_n)$ "

Pour tout j on pose :

On s'assure que les f_j sont bien définis,c'est-à-dire que la définition que nous donnons de $f_j(x_0, x_1, \ldots, x_j)$ ne dépend que de j et de (x_0, x_1, \ldots, x_j) et non pas du reste de la suite (x_n) . La suite des réponses fournies par N pour (x_n) est la même que celle donnée par A pour (x_n) mis à part éventuellement des r ajoutés en début et la répétition de termes. N est donc satisfaisant pour Q sur S.

Remarque

Ce théorème signifie que pour tous les problèmes de décidabilité à la limite, on peut se contenter d'utiliser les algorithmes normaux : ce qu'on peut faire avec un algorithme général pour suites (i.e. de Alg (E, R)), on peut aussi le faire avec un algorithme normal (i.e. de Norm (E, R)). Par contre il est facile de voir que la question " (x_n) est-elle stationnaire ?" est décidable à la limite sur E^N alors qu'aucun algorithme à k mémoires (quel que soit k) n'est satisfaisant sur E^N dès que card $E \ge 2$: les algorithmes à k mémoires permettent donc de résoudre strictement moins de problèmes de décidabilité à la limite que les algorithmes normaux.

On peut sans difficulté imaginer des questions :

- décidables à la limite par des algorithmes à k+1 mémoires et indécidables
 à la limite par des algorithmes à k mémoires;
- décidables à la limite par des algorithmes à k mémoires et indécidables à la limite par des algorithmes k'-stationnaires;
- décidables à la limite par des algorithmes k+1-stationnaires et indécidables
 à la limite par des algorithmes k-stationnaires.

2 - Problèmes de la nature convergente, turbulente ou périodique D'une suite

Une transformation algorithmique de suites, à chaque étape (c'est à dire pour chaque réponse) ne peut utiliser qu'un nombre fini de points de la suite traitée (\mathbf{x}_n) , aussi est-il bien clair que dans le cas général, elle ne peut pas être satisfaisante pour des questions du type "la suite (\mathbf{x}_n) est-elle convergente ?"; une information supplémentaire de nature globale est nécessaire. Donner cette information, revient à préciser (\mathbf{x}_n) ϵ S, où S est une famille plus ou moins grande de suites ; et plus la famille S est petite, plus

cette information globale supplémentaire est précise, donc plus il est facile de trouver une transformation algorithmique satisfaisante pour la question sur S.

Rechercher pour une question Q fixée quelle doit être la précision de l'information globale supplémentaire revient finalement au même que rechercher pour quelle famille $S \subset E^{\mathbb{N}}$, il existe une transformation algorithmique satisfaisante pour Q sur S: c'est ce que nous faisons ici.

Les résultats que nous établissons à propos des questions de convergence, de périodicité et de turbulence montrent que, bien souvent, l'information globale nécessaire est assez fine.

Déjà abordé dans [10] notre travail fut complété dans [19] dont nous reprenons ici la présentation, en lui adjoignant notamment des résultats de [14].

Théorème 2

```
La question : "(x_n) est-elle convergente ?" est décidable à la limite (i) sur UPer(E) ; (ii) sur APer_{\epsilon}(E) pour tout \epsilon > 0 ; et est indécidable à la limite
```

- (j) sur APer(E) si $E^{\alpha} \neq \emptyset$;
- (jj) sur UStati(E) v Turb(E) si E est infini;
- (jjj) sur Fini,(E) si E n'est pas compact;
 - (jw) sur UStati(E) U $Fini_p(E)$ pour tout p > 1 si E possède au moins p éléments.
- . \textbf{E}^{α} désigne l'ensemble des points d'accumulation de E ;
- . $APer_{\varepsilon}(E) = \{(x_n) \in APer(E) \mid \forall x, y \in A(x_n) : x \neq y \Rightarrow d(x, y) \geq \varepsilon\}.$

Remarques

- 1°) Le résultat (i) indique que, savoir d'une suite (\mathbf{x}_n) qu'elle est ultérieurement périodique, permet de décider de sa convergence, alors que d'après (j), savoir que (\mathbf{x}_n) est asymptotiquement périodique est insuffisant en général. Le résultat (ii) signifie que, si en plus du fait que (\mathbf{x}_n) est asymptotiquement périodique, on sait que ses valeurs d'adhérence sont mutuellement distantes de plus de ε (ε > 0 fixé), alors à nouveau la convergence est décidable à la limite. Le résultat (jj) montre qu'il est impossible de distinguer, à la limite, entre une suite ultérieurement stationnaire est une suite turbulente.
- 2°) Bien évidemment, si une famille S est contenue dans une famille où la question de la convergence est décidable à la limite, alors la question de la convergence est aussi décidable à la limite sur S. Inversement si S contient une famille de suites où la question de la convergence est indécidable à la limite, il en est de même pour S. Cette remarque avec le théorème 2 et les lemmes (parfois plus précis) de la démonstration permet de répondre à la question de la décidabilité à la limite de la convergence pour toutes les familles de suites étudiées ici.
- 3°) Les conditions portant sur E, énoncées dans (j), (jj), (jjj) et (jw) sont en fait nécessaires et suffisantes.

En effet :

- . si $E^{\alpha} = \emptyset$, alors APer(E) = UPer(E), donc, d'après (i), la question est décidable sur APer(E);
 - . si E est fini : UStati(E) U Turb(E) = Conv(E);
 - . si E est compact : Fini (E) = Conv(E);
 - . si E possède moins de p éléments alors :
 UStati(E) U Fini_D(E) = UStati(E).

Démonstration

(i) Du lemme suivant, on déduit immédiatement (i).

Lemme 1

La question : " (x_n) est-elle convergente ?" est décidable à la limite sur UStati(E) \cup (APer(E)-Conv(E)).

Démonstration du lemme 1

Soit l'algorithme normal défini par :

$$f_{i}(x_{0}, x_{1}, ..., x_{i}) = OUI \iff (x_{[i/2]} = x_{[i/2]+1} = ... = x_{i})$$

([a] désigne la partie entière de a)

Montrons que cet algorithme est satisfaisant pour la question de la convergence sur la famille considérée.

Soit $(x_n) \in UStati(E) \cup (APer(E) - Conv(E))$

- ou bien (\mathbf{x}_n) est ultérieurement stationnaire et alors il existe $\mathbf{i} \in \mathbb{N} \text{ tel que si } \mathbf{i} \geq \mathbf{i} \quad :$

$$x_{[i/2]} = x_{[i/2]+1} = ... = x_{i}$$

et donc l'algorithme est satisfaisant pour (x_n) ;

- ou bien (x_n) est asymptotiquement périodique de période p \geq 2 et alors il existe j_0 tel que :

$$\forall$$
 n \in \mathbb{N} : $x_{j_0+np} \neq x_{j_0+np+1}$

donc pour tout $i > max(2p, 2j_0)$ on a :

$$f_{i}(x_{0}, x_{1}, ..., x_{i}) = NON$$

et donc l'algorithme est satisfaisant pour (x_n) .

- (ii) C'est une conséquence de la proposition 2 démontrée plus loin au paragraphe 2.
- (j) Du lemme suivant, on déduit immédiatement (j).

Lemme 2

Soit E vérifiant $E^{\alpha} \neq \emptyset$.

La question : " (x_n) est-elle convergente ?" est indécidable à la limite sur Conv(E) \cup $UPer_p(E)$ pour tout $p \in \mathbb{N}, \ p \geq 2$.

Démonstration du lemme 2

Supposons donné un algorithme normal (f_n) satisfaisant pour la convergence sur Conv(E) \cup $UPer_D(E)$ avec $p \ge 2$ fixé.

Soit (a_i) une suite de points de E, deux à deux distincts, convergente vers $a~\epsilon~E^{\alpha}~avec:~\forall~n~\epsilon~I\!N~:~a_{_{\mathring{1}}}~\neq~a.$

Pour tout i $\in \mathbb{N}$, on définit la suite (y_n^i) de la façon suivante :

$$y_n^i = a_i$$
 si i est pair et si n est un multiple de p,
 $y_n^i = a$ sinon,

Posons $(x_n^0) = (y_n^0)$. Cette suite étant périodique de période p, il existe

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que} : f_{n_0}(x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0) = \text{NON}.$$

Posons: $x_n^1 = x_n^0 \sin n \le n_0$,

$$x_n^1 = y_n^1 \sin n > n_o$$
.

La suite (x_n^1) est convergente, donc il existe $n_1 > n_0$ tel que :

$$f_{n_1}(x_0^1, x_1^1, \dots, x_{n_1}^1) = OUI.$$

Posons $x_n^2 = x_n^1$ si $n \le n_1$,

$$x_n^2 = y_n^2$$
 si $n > n_1$.

La suite (x_n^2) est périodique de période p, il existe donc $n_2 > n_1$ tel que : $f_{n_0}(x_0^2, x_1^2, \dots, x_{n_0}^2) = \text{NON}.$

En continuant ainsi indéfiniment, on obtient des suites (x_n^0) , (x_n^1) , (x_n^2) ,...,

 (x_n^i) , ... et des indices $n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_i < ...$ tels que :

si i est pair $f_{n_i}(x_0^i, x_1^i, ..., x_n^i) = NON$,

si i est impair $f_{n_i}(x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n_i}^i) = OUI$.

La suite $(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^2, \dots)$ vérifie donc que :

si i est pair $f_{n_i}(x_0, x_1, \dots, x_{n_i}) = NON$, si i est impair $f_{n_i}(x_0, x_1, \dots, x_{n_i}) = OUI$.

Par construction la suite (x_n) est pourtant convergente ce qui montre que l'algorithme (f_n) n'est pas satisfaisant sur Conv(E) \cup $UPer_p(E)$.

Remarques

- 1°) La démonstration du lemme 2 établit en fait que la question " (\mathbf{x}_n) est-elle convergente ?" n'est pas semi-décidable à l'infini sur Conv(E) \cup UPer (E). Une étude complémentaire montre que la question " (\mathbf{x}_n) est-elle non convergente ?" est semi-décidable à l'infini sur Conv (E) \cup UPer (E) et même sur Conv(E) \cup UPer (E).
- 2°) En modifiant un peu la démonstration du lemme 2, on obtient que la question de la convergence est indécidable à la limite sur Conv (E) U UPer (E). Dans le théorème (j) on peut donc remplacer APer(E) par APer (E).

 Suite de la démonstration du théorème 2.
- (jj) Soient (y_n^0) , (y_n^1) , ..., (y_n^1) , ... des suites définies de la façon suivante : on prend (β_i) une suite de points deux à deux distincts de E $((\beta_i)$ existe car on a supposé que E était infini) on pose :

$$\begin{cases} y_n^i = \beta_{h(n)} & \text{si i est pair,} \\ y_n^i = \beta_0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où h(n) est donnée par :

(h(o), h(1), ...) = (0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, ...) A partir de ces suites
$$(y_n^i)$$
 on procède comme pour le lemme 2 en imposant en plus la condition :

$$n_{i} > 2n_{i-1}$$

Lorsque i est pair (\mathbf{x}_n^i) est turbulente, et lorsque i est impair (\mathbf{x}_n^i) est ultérieurement stationnaire. La condition $\mathbf{n}_i^{>2n}_{i-1}$ assure que la suite finale (\mathbf{x}_n) est turbulente alors que pourtant par construction pour tout i impair:

$$f_{n_{i}}(x_{0}, x_{1}, ..., x_{n_{i}}) = OUI.$$

(jjj) Soient (y_n^0) , (y_n^1) , ..., (y_n^i) , ... des suites définies de la façon suivante. On prend (γ_i) une suite n'ayant aucun point d'accumulation, et on pose $y_n^i = \gamma_n$ si i est pair et si n est pair, $y_n^i = \gamma_o \text{ sinon.}$

On procède alors comme pour (j).

(jw) Soient (y_n^0) , (y_n^1) , ..., (y_n^i) , ... des suites définies de la façon suivante : on note δ_1 , δ_2 , ..., δ_p , p points distincts de E et on pose :

$$y_n^i = \delta_{n}^{-p}$$
 si i est pair,

$$y_n^i = \delta_o$$
 sinon.

où \bar{n}^{p} désigne le reste de la division euclidienne de n par p.

En imposant la condition $n_i > n_{i-1}^+p$ on raisonne comme pour (jj).

Théorème 3

(i) Q est décidable à la limite sur :

n
UPer (E) U Turb(E) pour tout entier n;
p=1

- (ii) Q' et Q" sont décidables à la limite sur : U Per E U TurbE pour tout entier E ; E E E
- (j) Q est indécidable à la limite sur : Per(E) U Turb(E) si E est infini ;
- (jjj) Q, Q' et Q" sont indécidables à la limite sur : Fini(E) si E a plus d'un élément.

Indications pour la démonstration du théorème 3

(i) (ii)
$$f_{i}(x_{0}, x_{1}, ..., x_{i}) = OUI \iff \begin{bmatrix} \text{la suite finie } (x_{0}, x_{1}, ..., x_{i}) \\ \text{est périodique de période } p \leq n \end{bmatrix}$$

(j) On procède comme dans les démonstrations de (j) (jj) (jjj) et (jw) du théorème 2, en utilisant les suites (x_n^0) , (x_n^1) , ..., (x_n^i) , ... suivantes : $(x_n^0) = (\beta_0, \beta_0, \beta_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \beta_0, \ldots)$; $(x_n^1) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n_0}^0, x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n_0}^0, x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n_0}^0, \ldots)$; $(x_n^2) = (x_0^1, x_1^1, \ldots, x_n^1, \beta_0, \beta_0, \beta_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots)$; $(x_n^3) = (x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots)$; etc ...

$$(\mathbf{x}_{n}^{o}) = (\beta_{o}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{2}, \dots, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{2}, \dots, \beta_{i}, \beta_{o}, \dots) ;$$

$$(\mathbf{x}_{n}^{1}) = (\mathbf{x}_{o}^{o}, \mathbf{x}_{1}^{o}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{o}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{o}, \beta_{1}, \dots) ;$$

$$(\mathbf{x}_{n}^{2}) = (\mathbf{x}_{o}^{1}, \mathbf{x}_{1}^{1}, \dots, \mathbf{x}_{n_{1}}^{1}, \beta_{o}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{2}, \dots) ;$$

$$(\mathbf{x}_{n}^{3}) = (\mathbf{x}_{o}^{2}, \mathbf{x}_{1}^{2}, \dots, \mathbf{x}_{n_{2}}^{2}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{o}, \beta_{1}, \beta_{o}, \beta_{1}, \dots) ;$$

$$\text{etc} \dots$$

(jjj)
$$(\mathbf{x}_{n}^{\circ}) = (\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \dots) ;$$

$$(\mathbf{x}_{n}^{1}) = (\mathbf{x}_{o}^{\circ}, \mathbf{x}_{1}^{\circ}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{\circ}, \mathbf{x}_{o}^{\circ}, \mathbf{x}_{1}^{\circ}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{\circ}, \mathbf{x}_{o}^{\circ}, \mathbf{x}_{1}^{\circ}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{\circ}, \mathbf{x}_{o}^{\circ}, \mathbf{x}_{1}^{\circ}, \dots) ;$$

$$(\mathbf{x}_{n}^{2}) = (\mathbf{x}_{o}^{1}, \mathbf{x}_{1}^{1}, \dots, \mathbf{x}_{n_{1}}^{1}, \alpha, \beta, \alpha, \alpha, \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \dots) ;$$

$$(\mathbf{x}_{n}^{3}) = (\mathbf{x}_{o}^{2}, \mathbf{x}_{1}^{2}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{2}, \mathbf{x}_{o}^{2}, \mathbf{x}_{1}^{2}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{2}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{2}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{2}, \dots, \mathbf{x}_{n_{o}}^{2}, \dots) ;$$

etc ...

Remarques

- 1°) Le théorème 3 peut sembler très décevant car finalement les familles de suites pour lesquelles Q, Q' ou Q" sont décidables à la limite sont très petites et l'algorithme permettant la décision est presque évident. Cependant les parties (j), (jj) et (jjj) du théorème montrent que ce n'est pas la peine de chercher des résultats positifs plus élaborés car dès qu'on grossit un petit peu la famille considérée en (i), Q devient indécidable, et, de même, dès qu'on grossit un petit peu la famille considérée en (ii) Q' et Q" deviennent indécidables.
- 2°) Les conditions énoncées en (j) (jj) et (jjj) sont en fait nécessaires et suffisantes.
- 3°) Les démonstrations suggérées pour (j) (jj) et (jjj) permettent si on le veut de montrer plus précisément que sur les 3 familles de suites envisagées, Q, Q' et Q" sont non semi-décidables à la limite, ainsi que leurs négations.

Théorème 4

La question "(x_n) est-elle turbulente ?" est décidable à la limite sur (i) u Per_(E) u Turb(E) pour tout entier n ; p=i et est indécidable à la limite sur

- (j) UStati (E) u Turb(E) si E est infini;
- (jj) Per(E) U Turb(E) si E est infini.

Démonstration

- (i) : résulte du théorème 3 (ii)
- (j) : résulte du théorème 2 (jj)
- (jj) : résulte du théorème 3 (j).

3 - ALGORITHMES DE RECHERCHE DU NOMBRE DE POINTS D'ACCUMULATION

Nous présentons dans ce paragraphe deux algorithmes permettant de déterminer le nombre de points d'accumulation pour des suites appartenant à des familles que nous explicitons. Les domaines d'efficacité de ces deux algorithmes sont distincts et pour les définir, nous avons du utiliser les notions de force d'un point d'accumulation et de rapidité d'une suite (voir annexe 1). Les deux algorithmes sont assez simples et naturels ; avec les résultats négatifs concernant ce type de problème (voir § 4) on est amené à conclure que pour ce qui est de la question du nombre de points d'accumulation ou bien les algorithmes existent et alors sont naturels et simples ou bien ils sont impossibles. Ce type de problème avait déjà été abordé dans [10] [11] [13].

E est un espace métrique dont la distance est notée d.

Soit $\varepsilon(p) \in Conv_o(\mathbb{R}^+)$.

Soit $(\beta(p))$ une suite d'entiers telle que :

 $\forall p \in \mathbb{N} : \beta(p) > p.$

Algorithme NPA $[\epsilon(p), \beta(p)]$

Etape p

On dispose des points x_p , x_{p+1} , ..., $x_{\beta(p)}$.

On propose la réponse r_p , où r_p désigne le nombre de composantes connexes du graphe (non orienté) dont les sommets sont les points x_p , x_{p+1} , ..., $x_{\beta(p)}$ et dont les arcs sont définis par les paires $\{x_i, x_j\}$, telles que :

$$d(x_i, x_j) \le \epsilon(i) + \epsilon(j).$$

Exemple de fonctionnement de l'algorithme NPA[$\epsilon(p)$, $\beta(p)$]

E =
$$\mathbb{R}$$
; $\varepsilon(p) = \frac{1}{p+1}$; $\beta(p) = 2p$;
 $(x_n) = (1, 2 + \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{5}, 4 + \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, 2 + \frac{1}{8}, \dots)$

Etape 0

Le graphe a un seul sommet x_0 , et aucun arc.

Etape 1

Le graphe a deux sommets $x_1^{}$, $x_2^{}$, et aucun arc :

$$r_1 = 2.$$

Etape 2

Le graphe a trois sommets x_2 , x_3 , x_4 et aucun arc :

$$r_2 = 3.$$

Etape 3

Le graphe a quatre sommets x_3 , x_4 , x_5 , x_6 et un arc unique $\{x_3, x_6\}$: $x_3 = 3$.

Etape 4

Le graphe a cinq sommets x_4 , x_5 , x_6 , x_7 , x_8 et deux arcs $\{x_4$, $x_7\}$ et $\{x_5$, $x_8\}$: r_4 = 3.

On vérifie que pour tout $p \ge 3$: $r_p = 3$. Le choix de la suite d'indices $\beta(p)$ est essentiel, et selon que (\mathbf{x}_n) possède des points d'accumulation plus ou moins difficiles à détecter (par exemple de force nulle ou non) il faut choisir $\beta(p)$ rapidement croissante ou lentement croissante. On peut obtenir en particulier:

Proposition 1

Soit $\beta(p)$ telle que : $\exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \ge p_0 : \beta(p) \ge p^2$. Soit $\epsilon(p) \in \text{Conv}(\mathbb{R}^+)$.

L'algorithme NPA[$\epsilon(p)$, $\beta(p)$] est satisfaisant pour la question "quel est le nombre de point d'accumulation de (x_n) ?" sur $\mathrm{Fini}_{\epsilon(p)}^+(E)$.

Fini $\epsilon^+_{(\Sigma)}(E)$ est la famille de suites définie par :

Démonstration

Soit $(x_n) \in \text{Fini}_{\epsilon(p)}^+$ ayant k points d'accumulation que nous noterons $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_k$

Soit ϵ > 0, défini par :

$$\varepsilon = \min \{d(\hat{y}_i, \hat{y}_j) \mid i, j \in \{1, 2, ..., k\} i \neq j\}.$$

Soit p_0 tel que pour tout $p \ge p_0$:

$$\begin{cases} d(x_{p}, \{\hat{y}_{1}, \hat{y}_{2}, \dots, \hat{y}_{k}\}) \leq \varepsilon(p) < \frac{\varepsilon}{5}, \\ \forall \ell \in \{1, 2, \dots, k\} : B(\hat{y}, \frac{\varepsilon}{5}) \cap X_{p}^{\beta(p)} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Montrons que pour tout $p \ge p_0$, $r_p = k$.

Pour cela, on établit que :

(a)
$$\forall \ell_1, \ell_2 \in \{1, 2, ..., k\} : \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow$$

 $d(B(\hat{y}_{\ell_1}, \epsilon/5) \cap X_p^{\beta(p)}, B(\hat{y}_{\ell_2}, \epsilon/5) \cap X_p^{\beta(p)}) > 2\frac{\epsilon}{5};$

(b)
$$v_{n_1, n_2} \in \{p, p+1, ..., \beta(p)\}, n_1 \neq n_2,$$

$$\exists \ell \begin{cases} x_{n_1} \in B(\hat{y}_{\ell}, \epsilon/5) \\ x_{n_2} \in B(\hat{y}_{\ell}, \epsilon/5) \end{cases} \Rightarrow d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \epsilon(n_1) + \epsilon(n_2).$$

La relation (a) montre que le nombre de composantes connexes du graphe est au moins k ; la relation (b) montre qu'il est au plus k.

 \Box

Soit $\rho \in \mathbb{R}^+$. Soient $\alpha(p)$, $\beta(p)$ deux suites d'entiers telles que : $\forall \ p \in \mathbb{N} \ : \ \beta(p) \ge \alpha(p) \ge p.$

Algorithme NPA'[ρ , $\alpha(p)$ $\beta(p)$]

Etape p

On dispose des points $x_{\alpha(p)}$, $x_{\alpha(p)+1}$, ..., $x_{\beta(p)}$.

On propose la réponse r_p , où r_p désigne le nombre de composantes connexes du graphe (non orienté) dont les sommets sont les points $x_{\alpha(p)}$, $x_{\alpha(p)+1}$, ..., $x_{\beta(p)}$, et dont les arcs sont les paires $\{x_i, x_i\}$ telles que :

$$d(x_i, x_i) \le 2\rho/5.$$

Exemple de fonctionnement de l'algorithme NPA[ρ , $\alpha(p)$, $\beta(p)$]

E =
$$\mathbb{R}$$
; $\rho = 1$; $\alpha(p) = 5p$; $\beta(p) = 5p + 4$;
 $(y_n) = (3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, ...)$;
 $(z_n) = (2, -2, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, ...)$;
 $(x_n) = (y_n + z_n)$.

Etape 0

Le graphe a 5 sommets qui sont :

$$x_0 = 5$$
; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2,5$,

il y a 1 arc :
$$\{x_1, x_3\}$$
; et donc $r_0 = 4$.

Etape 1

Le graphe a 5 sommets qui sont :

$$x_5 = 2,5$$
; $x_6 = 2,25$; $x_7 = 2,75$; $x_8 = 1,125$; $x_9 = 1,875$,

il y a 3 arcs :
$$\{x_5, x_6\}, \{x_5, x_7\}, \{x_9, x_6\}$$
; et donc $r_1 = 2$.

Etape 2

Le graphe a 5 sommets qui sont :

$$x_{10} = 3,0625$$
; $x_{11} = 1,9375$; $x_{12} = 3,03125$; $x_{13} = 0,96875$; $x_{14} = 2,015625$,

il y a 2 arcs :
$$\{x_{11}, x_{14}\}$$
 $\{x_{10}, x_{12}\}$; et donc $r_2 = 3$.

etc ...

On vérifie qu'à l'étape $p \ge 2$, il y a 5 sommets et 2 arcs et donc $r_p = 3$.

Proposition 2

Soit $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit E une partie compacte de \mathbb{R}^m . L'algorithme NPA'[ρ , ρ , ρ^2] est satisfaisant pour la question "quel est le nombre de points d'accumulation de (x_n) ?" sur Fini_{ρ}^+ (E).

 $\operatorname{Fini}_{\mathcal{O}}^{+}$ (E) est la famille de suites définie par :

$$(\mathbf{x_n}) \; \epsilon \; \mathrm{Fini}_{\rho}^{\dagger} \; (\mathrm{E}) \; \stackrel{<=>}{\leftarrow} \; \begin{cases} (\mathbf{x_n}) \; \mathrm{a} \; \mathrm{un} \; \mathrm{nombre} \; \mathrm{fini} \; \mathrm{de} \; \mathrm{points} \; \mathrm{d'accumulation} \\ \\ \hat{\mathbf{y_1}}, \hat{\mathbf{y_2}}, \dots, \hat{\mathbf{y_\ell}}, \mathrm{chacun} \; \mathrm{d'eux} \; \mathrm{est} \; \mathrm{de} \; \mathrm{force} \; \mathrm{strictement} \\ \\ \mathrm{positive} \; \mathrm{et} \; : \; \forall \; \mathrm{i}, \; \mathrm{j} \; \epsilon \; \{1, \dots, \ell\} \; : \; \mathrm{i} \; \neq \; \mathrm{j} \; \Rightarrow \; \mathrm{d}(\mathbf{y_i}, \mathbf{y_j}) \; > \; \rho. \end{cases}$$

Démonstration

Soit $(x_n) \in \operatorname{Fini}_{\rho}^{\dagger}(E)$. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_{\ell}$ ses points d'accumulation. Posons :

$$V = B(\hat{y}_1, \rho/5) \cup ... \cup B(\hat{y}_{\ell}, \rho/5).$$

Il existe p_0 tel que : $\forall p \ge p_0 : x_p \in V$.

 $(p_{O} \text{ existe car on a supposé que E était une partie compacte de <math>\mathbb{R}^{m})$

Il existe $p_1 \ge p_0$ tel que pour tout i $\epsilon \{1, 2, ..., \ell\}$:

$$\forall p \ge p_1 : X_p^{p^2} \cap B(y_i, \rho/5) \ne \emptyset$$
 (**)

Soit $p \ge p_1$, la relation (*) entraı̂ne que :

$$\begin{array}{l} \forall \ \ell_{1}, \ \ell_{2} \ \epsilon \ \{1, \ 2, \ \ldots, \ \ell\} \ : \ \ell_{1} \neq \ell_{2} \Rightarrow \\ \text{d}(B(\hat{y}_{\ell_{1}}, \ \rho/5) \ \cap \ X_{p}^{p}, \ B(\hat{y}_{\ell_{2}}, \ \rho/5) \ \cap \ X_{p}^{p}) \ \geq \ 2\rho/5, \end{array}$$

ce qui avec la relation (**) montre que $r_p \ge \ell$.

La relation (*) donne aussi que :

$$\forall n_1, n_2 \in \{p, p+1, ..., p^2\}, n_1 \neq n_2,$$

$$\exists \ell' \begin{cases} x_{n_1} \in B(\hat{y}_{\ell}, \rho/5) \\ x_{n_2} \in B(\hat{y}_{\ell}, \rho/5) \end{cases} \Rightarrow d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq 2\rho/5,$$

ce qui montre que $r_{D} \leq \ell$, et donc finalement que $r_{D} = \ell$.

(*)

Remarque

Le coefficient $2\rho/5$ qui apparaît dans la définition de l'algorithme NPA' pourrait être remplacé par $h\rho$ avec 0 < h < 1/2.

Théorème 5

La question : "Quel est le nombre de points d'accumulation de (x_n) ?" est décidable à la limite

décidable à la limite

(i) sur
$$\operatorname{Fini}_{\varepsilon(p)}^+$$
 (E) (quel que soit $\varepsilon(p) \in \operatorname{Conv}_{\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$)

(ii) sur
$$\operatorname{Fini}_{\rho}^{+}(E)$$
 (quel que soit $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et E compact de \mathbb{R}^{m})

et est indécidable à la limite (j) sur $APer^*(E)$ (si $E^{\alpha\alpha} \neq \emptyset$).

Démonstration

- (i) Proposition 1.
- (ii) Proposition 2.
- (iii) voir Proposition 5 du § 4.

4 - ALGORITHMES DE RECHERCHE DE LA PÉRIODE D'UNE SUITE

ASYMPTOTIQUEMENT PÉRIODIQUE

Le problème de la détermination algorithmique de la période de suites est intéressant car sans être résoluble globalement (voir proposition 5), il est abordable de manières variées, chaque méthode donnant lieu à des algorithmes relativement efficaces de domaines d'efficacité différents.

La première méthode que nous présentons (méthode des coefficients détecteurs) est basée sur des calculs de moyenne de distances mutuelles entre points de la suite; l'étude de ces différentes moyennes permettant de trouver (ou plutôt de présumer) de la période de la suite traitée. Selon la nature de l'information globale dont on dispose, quatre algorithmes peuvent être utilisés chacun fonctionnant correctement pour des familles de suites bien déterminées (voir les expériences numériques). La seconde méthode envisagée (méthode par barycentres) est fondée sur l'idée que lorsqu'une suite est asymptotiquement périodique, tous les points de la suite sont proches de certains barycentres bien particuliers de familles des points de la suite. Bien que nécessitant sensiblement plus de calculs que la première méthode, ces algorithmes par barycentres sont très efficaces comme l'établissent nos expériences numériques.

Le texte de ce paragraphe est une synthèse de diverses publications de l'auteur sur le sujet : [10] [11] [12] [13] [14] [19] [20].

Notations

Si k et n sont deux entiers donnés ($k \ge 1$) on notera \overline{n}^k (où \overline{n} quand il ne peut y avoir d'ambigüité sur k) le reste de la division euclidienne de n par k (par exemple $\overline{20}^7 = 6$)

a) Méthodes de coefficients détecteurs

Soit (x_n) une suite de points de l'espace métrique E.

On pose:

$$i_{1}(p) = \sum_{i=1}^{2p-1} d(x_{i}, x_{i+1})/(2p-1),$$

$$i_{2}(p) = \sum_{i=1}^{2p-2} d(x_{i}, x_{i+2})/(2p-2),$$
...
$$i_{p}(p) = \sum_{i=1}^{p} d(x_{i}, x_{i+p})/p.$$

Le lemme suivant indique les propriétés des coefficients i (p) qui nous permettront d'établir plus loin la convergence des algorithmes II, I2, I3, I4.

Lemme 1

Si
$$(x_n) \in APer_k^*(E)$$
 alors:

(i) pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $i_r(p)$ est convergente;

si r est un multiple de k alors: $\lim_{p \to \infty} i_r(p) = 0$

si r n'est pas un multiple de k alors:

$$\lim_{p \to \infty} i_r(p) \ge \varepsilon_0 = \min\{d(y_j, y_j,) \mid j \neq j'\} > 0$$

$$\le \varepsilon_1 = \max\{d(y_j, y_j,) \mid j \neq j'\}$$
 $(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1} \text{ désignent les limites des sous-suites}$
 $(x_{nk}), (x_{nk+1}), \ldots, (x_{nk+k-1})),$

(ii) il existe $p' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \ge p'$:

$$(P_{k}) \qquad \forall j' \in \{2, 3, ..., p\} \quad k | j' \} \\ \forall j'' \in \{2, 3, ..., p\} \quad k \not | j'' \} => i_{j'}(p) \leq i_{j''}(p) .$$

Démonstration

(i) Soit r un multiple de k, la suite $(d(x_i, x_{i+r}))_i$ converge vers 0, donc la suite :

$$(\sum_{i=1}^{2p-1} d(x_i, x_{i+r})/(2p-r))_p$$

converge vers 0 (c'est une conséquence du résultat classique :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n U_i/n = \ell).$$

Soit maintenant r un entier non multiple de k ; les suites

sont convergentes respectivement vers $d(y_0, y_r^-)$, $d(y_1, y_{r+1}^-)$, ..., $d(y_{k-1}, y_{r+k-1}^-)$ et donc la suite :

$$((\sum_{n} d(x_{nk}, x_{nk+r})/(2p-r))_{p} = 1 \le nk \le 2p-r$$

$$(\sum_{n} d(x_{nk}, x_{nk+r}))/(\frac{2p-r}{k})) \times \frac{1}{k})_{p}$$

$$1 \le nk \le 2p-r$$

converge vers $d(y_0, y_n^-)/k$ (toujours en vertu du résultat rappelé plus haut).

De même :

$$\left(\sum_{\substack{n\\1\leq nk+1\leq 2p-r}}d(x_{nk+1},x_{nk+1+r})/(2p-r)\right)_{p}$$

converge vers $d(y_1, y_{\overline{1+r}})/k$,

etc ...

En sommant, on obtient donc :

$$\lim_{p \to +\infty} i_r(p) = \sum_{i=0}^{k-1} d(y_i, y_{\overline{i+r}})/k \ge \epsilon_0$$

$$\le \epsilon_1.$$

(ii) Soit p_o tel que :

$$\Psi p \ge p_o : d(x_p, y_p^-) \le \varepsilon = \varepsilon_o/8.$$

Soit $p_1 \ge p_0$ tel que :

$$\forall p \ge p_1 : \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{p_0} d(x_i, y_j)/p \le \varepsilon' = \varepsilon_0/16,$$

et
$$\sum_{i < j \le p_0} d(x_i, x_j)/p \le \varepsilon'' = \varepsilon_0/16$$
.

Soit p' \geq 4p₁. Donnons-nous p \geq p' quelconque et r ϵ {2, 3, ..., p} non multiple de k. Puisque p \geq p₀ on a :

$$\begin{array}{l} d(x_{i}, \ x_{i+r}) \geq d(y_{i}, \ x_{i+r}) - d(x_{i}, \ y_{i}) \\ \\ \geq d(y_{i}, \ y_{i+r}) - d(y_{i+r}, \ x_{i+r}) - d(x_{i}, \ y_{i}) \\ \\ \geq \varepsilon_{o} - 2\varepsilon = 3\varepsilon_{o}/4, \end{array}$$

et donc :

$$i_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{2p-\mathbf{r}} d(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}, \mathbf{x}_{\mathbf{i+r}})}{2p-\mathbf{r}} \ge \frac{\sum_{\mathbf{i=p_0}}^{2p-\mathbf{r}} d(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}, \mathbf{x}_{\mathbf{i+r}})}{2p-\mathbf{r}}$$

$$\ge \frac{2p-\mathbf{r}-\mathbf{p_0}}{2p-\mathbf{r}} \frac{3}{4} \varepsilon_0 \ge (1 - \frac{\mathbf{p_0}}{p}) \frac{3}{4} \varepsilon_0$$

$$\ge \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \varepsilon_0 > \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (*)$$

Prenons maintenant pour r un multiple de k. On a :

$$i_r(p) = \frac{\sum_{i=1}^{2p-r} d(x_i, x_{i+r})}{2p-r}$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{p_{0}-r} d(x_{i}, x_{i+r})}{p} + \frac{\sum_{i=p_{0}-r+1}^{p_{0}} d(x_{i}, x_{i+r})}{p} + \frac{\sum_{i=p_{0}+1}^{p_{0}-r+1} d(x_{i}, x_{i+r})}{p} + \frac{\sum_{i=p_{0}+1}^{p_{0}-r+1} d(x_{i}, x_{i+r})}{2p-r}$$

$$\leq \epsilon'' + \frac{\sum_{i=p_{0}-r+1}^{p_{0}-r+1} d(x_{i}, y_{\overline{i+r}})}{p} + \frac{\sum_{i=p_{0}-r+1}^{p_{0}-r+1} d(y_{\overline{i+r}}, x_{i+r})}{p} + \frac{\sum_{i=p_{0}+1}^{p_{0}-r} d(x_{i}, x_{i+r})}{2p-r}$$

$$\leq \epsilon'' + \epsilon' + \frac{p_{0}-p_{0}+r-1+1}{p} \epsilon + \frac{\sum_{i=p_{0}+1}^{p_{0}-r+1} d(x_{i}, y_{\overline{i}}) + d(y_{\overline{i}}, x_{i+r})}{2p-r}$$

(Comme r est un multiple de k :
$$\overline{i+r} = \overline{i}$$
 et donc $y_{\overline{i+r}} = y_{\overline{i}}$)
$$\leq \varepsilon'' + \varepsilon' + \varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon_0/16 + \varepsilon_0/16 + \varepsilon_0/8 + \varepsilon_0/4 = \varepsilon_0/2 \qquad (**)$$

Les relations (*) et (**) montrent que pour $p \ge p'$, (P_k) est vérifié.

Pour déterminer la période d'une suite, le lemme précédent suggère de calculer les coefficients $i_r(p)$ (p fixé r ϵ {1, 2, ..., p}); les plus petits donneront soit la période recherchée, soit des multiples de cette période. Toute la difficulté est de distinguer ce qui est multiple de ce qui ne l'est pas. Les différentes "stratégies" possibles définissent des algorithmes.

Avant de les décrire de façon précise, exposons de manière imagée le principe de leurs fonctionnements.

Supposons par exemple (tableau 1 p 75) que nous disposions des points x_0, x_1, \ldots, x_{20} (p = 10), nous pouvons calculer $i_1(10), i_2(10), \ldots i_{10}(10)$ et obtenir un graphique comme le suivant :

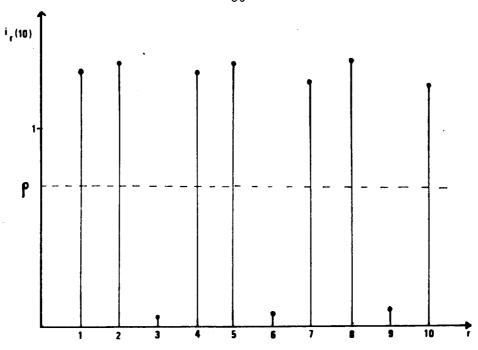


Figure 1

D'après le lemme 1 les coefficients $i_3(10)$, $i_6(10)$, $i_9(10)$ qui sont plus petits que les autres ont des indices qui doivent être des multiples de la période (ici 3).

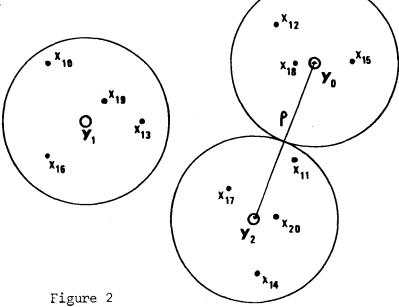
L'idée la plus simple consiste à proposer comme réponse l'indice r du plus petit $i_r(10)$, $r \in \{1, 2, ..., 10\}$, mais le **le**mme 1 ne nous garantit que l'obtention d'un multiple de la période k et non pas la période elle-même. Si l'on dispose d'une information supplémentaire par exemple que k est un nombre premier ($k \in M = \{2, 3, 5, 7, ...\}$) alors la méthode consistant à proposer l'indice r du plus petit $i_r(p)$ avec $r \in M \cap \{1, 2, ..., p\}$ pourra être intéressante (voir théorème 2). C'est l'algorithme I1(M).

Sans information spéciale sur k, la partie ii) du lemme 1 suggère de regarder s'il n'existe pas une ligne horizontale (en pointillés sur le dessin) séparant les points en deux ensembles, celui du bas correspondant à des multiples d'un même entier.

Dans notre exemple il n'y a qu'une seule façon de faire cette séparation et elle correspond à l'entier k=3.

C'est le principe de l'algorithme I2 qui propose le plus petit entier $k \geq 2$, tel qu'une telle ligne existe.

A défaut d'information sur la période k il se peut que l'on ait une idée a priori de la distance mutuelle des points d'accumulation de la suite traitée.



Si cette distance mutuelle est supérieure à $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, toujours d'après le lemme 1, on sait qu'à partir d'une certaine étape les coefficients correspondant aux multiples de k seront plus petits que ρ et les autres plus grands. En traçant donc une ligne horizontale au niveau ρ et en proposant comme réponse à l'étape p le plus petit indice r des $i_r(p)$ en dessous de cette ligne, on finira par obtenir la période. C'est le principe de l'algorithme I3(ρ).

L'algorithme I4(ϵ) est basé sur une idée semblable, sauf que d'une étape à l'autre on ne prend pas nécessairement la même ligne pointillée. On fait dépendre celle-ci du calcul de $i_1(p)$ et par exemple on place la ligne pointillée à hauteur $i_1(p)/10$.

```
Algorithme I1 (M) (M sous-ensemble fixé de IN*)
Etape p:
On dispose des points (x_1, x_2, ..., x_{2p});
On calcule i_r(p) pour r \in M \cap \{1, 2, ..., p\};
On propose la réponse N1(p) = j avec j tel que :
        i_{i}(p) = \min\{i_{i}(p) \mid j' \in M \cap \{1, 2, ..., p\}\}.
Algorithme I2
Etape p:
On dispose des points (x_1, x_2, ..., x_{2p});
On calcule i_1(p), i_2(p), ..., i_p(p);
On propose la réponse N2(p) = min \{j \in \{2, 3, ..., p\} \mid (P_j)\}
(s'il n'existe aucun j vérifiant (P_j) on pose N2(p) = 1).
Algorithme I3 (\rho) (\rho : constante > 0 fixée)
Etape p:
On dispose des points (x_1, x_2, \dots, x_{2p});
On calcule i_1(p), i_2(p), ..., i_p(p);
On propose la réponse N3(p) = min {j \in \{1, 2, ..., p\} \mid i_j(p) \le \rho\}
(s'il n'existe aucun j tel que i_{i}(p) \le \rho on pose N3(p) = 1).
Algorithme I4 (\epsilon) (\epsilon : constante > 0 fixée)
Etape p:
On dispose des points (x_1, x_2, ..., x_{2D});
On calcule i_1(p), i_2(p), ..., i_p(p);
On propose la réponse N4(p) = min {j \in {1, 2, ..., p} | i_1(p) \le \varepsilon i_1(p)}
(s'il n'existe aucun j tel que i_{j}(p) \le \epsilon i_{1}(p) on pose N4(p) = 1).
```

Soient
$$M \in \mathbb{N}^*$$
, $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$APer_M^*(E) = \bigcup_{m \in M} APer_m^*(E) ;$$

$$APer^{**}(E) = \{(x_n) \in APer^*(E) \mid (x_n) \text{ est de période } \geq 2 \text{ et }$$

$$\exists n_o \in \mathbb{N}, \exists ! j \geq 2, \forall n \geq n_o : (P_j)\}^{(1)} ;$$

$$APer_\rho^*(E) = \{(x_n) \in APer^*(E) \mid \rho < \min \{d(y_i, y_j) \mid i \neq j\}\} ;$$

$$APer_{[\varepsilon]}^*(E) = \{(x_n) \in APer^*(E) \mid$$

$$\min \{d(y_i, y_j) \mid i \neq j\} \geq \varepsilon \max \{d(y_i, y_j) \mid i \neq j\}\}.$$

Proposition 3

Soit Q la question "quelle est la période de la suite (x_n) ?". Soient $M \subset \mathbb{N}^+$, $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

- (i) II(M) est satisfaisant pour Q sur $APer_M^*(E)$ si M ne contient pas deux entiers multiples l'un de l'autre,
- (ii) I2 est satisfaisant pour Q sur APer**(E),
- (iii) I3(ρ) est satisfaisant pour Q sur APer $_{\rho}^{*}(E)$,
- (iv) I4(ε) est satisfaisant pour Q sur APer $_{[\varepsilon]}^{\star}$ (E).

Démonstration

- (i) Soit $(x_n) \in APer_M^*(E)$. Soit $k \in M$ la période de (x_n) . D'après le lemme 1 (ii), à partir d'une certaine étape p_1 , la propriété (P_k) sera vérifiée et on aura donc N1(p) = k.
- (ii) Soit $(x_n) \in APer^{**}(E)$. Soit k la période de (x_n) . D'après le lemme 1 (ii), il existe p_1 tel que : $\forall p \geq p_1 : (P_k)$
- (1) La propriété (P_i) est définie au lemme 1 p 65.

Par hypothèse, il existe p_2 tel que :

$$\forall p \ge p_2 : \exists ! j : (P_j),$$

il en résulte que pour tout $p \ge \max \{p_1, p_2\}$, on a N2(p) = k.

(iii) Soit $(x_n) \in APer_0^*(E)$. Soit k la période de (x_n) .

D'après le lemme 1 (i), on a :

$$\begin{cases} \lim_{p \to \infty} i_k(p) = 0; \\ r < k \Rightarrow \lim_{p \to \infty} i_r(p) \ge \varepsilon_0 = \min \{d(y_i, y_j) \mid i \neq j\} > \rho \end{cases}$$

A partir d'une certaine étape p₁, on aura donc :

$$i_k(p) \leq \rho;$$

$$r < k => i_{r}(p) > \rho,$$

et donc N3(p) = k.

(iv) Soit $(x_n) \in APer_{[\epsilon]}^*(E)$. Soit k la période de (x_n) .

Le lemme 1 (i) nous donne que :

$$\begin{cases} \lim_{p \to \infty} i_k(p) = 0; \\ r < k = \lim_{p \to \infty} i_r(p) \ge \varepsilon_0 = \min\{d(y_i, y_j) \mid i \ne j\} \\ \le \varepsilon_i = \max\{d(y_i, y_j) \mid i \ne j\}. \end{cases}$$

A partir d'une certaine étape
$$p_1$$
, on aura donc :
$$\begin{cases} r < k \Rightarrow i_r(p) - \epsilon i_1(p) \ge \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{2} > 0 ; \\ \\ \epsilon_1(p) - i_{k(p)} \ge \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} > 0 ; \end{cases}$$

et donc : N4(p) = k.

Remarques

1°) Si à partir d'une certaine étape il semble que M(p) = P.G.C.D. (N1(q)|q>p) est constant alors M(p) est un multiple de la période cherchée et donc si M(p)

est un nombre premier c'est la période cherchée. En particulier, si dans la suite (N1(p)) apparaît régulièrement un même nombre premier q, c'est la période cherchée.

2°) Si l'espace E est discret et qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que \forall (x,y) ϵ E² : x \neq y => d(x, y) > \rho (ce qui est vérifié quand E est fini) alors l'application de l'algorithme I3(\rho) sera satisfaisante pour toute suite (x_n) ϵ APer*(E) (ceci ne contredit pas la proposition 5 qui ne s'applique pas quand E est trop simple : voir remarque 1 de la proposition 5).

Si donc on cherche à déterminer la période d'une suite $(x_n) \in UPer^*(E)$ il suffira de munir E de la distance discrète $(d(x, y) = 0 \text{ si } x = y, d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y)$ et d'appliquer I3 (ρ) avec $\rho < 1$.

Divers essais numériques ont été faits, en particulier à partir des suites engendrées par l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$.

Nous avons par exemple considéré les fonctions $f_{k,g}$ définies par :

$$f_{k,g}(x) = g(x - E(x + 1/2)) + \overline{E(x + 1/2) + 1}^k$$

où E(x) désigne la partie entière de x, et où g est une fonction de [-1/4,+1/4] dans lui-même, contractante.

De telles fonctions $f_{k,g}$ sont continues sur $A = \bigcup_{\substack{0 \le i < k \\ \text{et pour toute valeur } x \in A}$. La suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est asymptotiquement périodique de période k.

Avec k = 5, $g(x) = x^{1,1}$, $x_0 = 0$, 2 les premiers points de la suite sont :

Tableau nº 1 ⁽¹⁾				
n	× _n	n	x _n	
0	0,2	10	1,01538	
1	1,17026	11	2,01013	
2	2,14264	12	0,00640	
3	0,11740	13	1,00386	
4	1,09476	14	2,00221	
5	2,07486	15	0,00120	
6	0,07777	16	1,00061	
7	1,04344	17	2,00029	
8	2,03174	18	0,00012	
9	0,02248	19	1,00005	

A l'étape p = 10 les coefficients détecteurs sont :

Tableau nº 2 ⁽¹⁾				
j	i _j (10)	j	i _j (10)	
1	1,31277	6	0,04681	
2	1,34114	7	1,28936	
3	0,02238	8	1,36180	
4	1,30141	9	0,06732	
5	1,35180	10	1,27372	

(1) Calculs effectués sur micro-ordinateurs P.E.T. Commodore en collaboration avec M. Le Helloco.

ce qui en les classant par ordre croissant donne :

$$i_3(10) \le i_6(10) \le i_9(10) \le i_{10}(10) \le i_7(10) \le i_4(10) \le i_1(10) \le i_2(10) \le i_5(10) \le i_8(10)$$

Sur cet exemple, on le voit donc, les algorithmes I1(N), I2, I3(ρ) (pour ρ < 1,3) et I4(ϵ) (pour ϵ < 1) fournissent la bonne réponse.

Cependant diverses autres expériences nous permettent de conclure que :

- I1(N) peut parfois être mis en défaut, en particulier quand la suite (x_n) oscille autour de ses points d'accumulation.
- I2 bien que moins souvent mis en défaut que I1(\mathbb{N}) peut l'être et surtout en dimension m \geq 2.
- I3(ρ) peut toujours s'adapter, la difficulté étant le choix de ρ qui nécessite une évaluation a priori de la distance mutuelle des points d'accumulation de (x_n) .
- I4(ϵ) peut toujours s'adapter et le choix ϵ = 0,2 (ou plus rarement ϵ = 0, 1) se révéle satisfaisant. D'un point de vue numérique I4(ϵ) semble donc être le meilleur des quatre algorithmes.

b) Méthodes par barycentres

Donnons d'abord la définition suivante qui va nous servir à construire nos algorithmes.

Définition

Soit $(x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$ une suite finie d'éléments d'un espace vectoriel normé E (dont on notera d la distance associée à la norme).

Soit $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ et k ϵ \mathbb{N} . On dit que k est une période à ϵ près de $(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \ldots, \mathbf{x}_m)$ si (1):

$$(P_{k,\epsilon}) \begin{cases} \forall i \in \{0, 1, ..., k-1\} \\ \vdots \end{cases} = i \Rightarrow d(x_{j}, G(k, i)) \leq \epsilon$$

$$\forall j \in \{n, n+1, ..., m\}$$

où on a posé :

$$G(k, i) = \sum_{\substack{j=n \ j=i}}^{m} x_{j} / \operatorname{card} \{j \mid n \leq j \leq m, \overline{j} = i\}$$

(En prenant un point tous les k points on constitue k paquets dont on considère les barycentres G(k, i) puis on regarde si les points d'un paquet sont proches du barycentre de ce paquet).

(1) Les notations $\bar{\gamma}^k$, $\bar{\gamma}$ sont été introduites page 65.

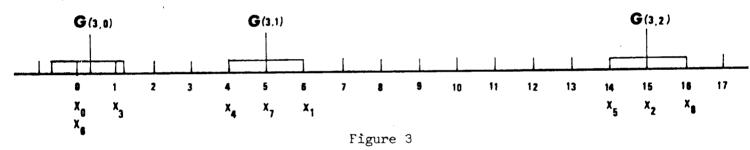
Remarque

Tout entier $k \ge m-n+1$ est période à 0 près (et donc à ϵ près pour $\epsilon \in \mathbb{R}^+$) de la suite $(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$; aussi seules les périodes < m-n+1 ont-elles un intérêt.

Exemple

Soit la suite (0, 6, 15, 1, 4, 14, 0, 5, 16).

- . 3 est période à 1 près car $G(3, 0) = \frac{1}{3}$, G(3, 1) = 5, G(3, 2) = 15.
- . de même 6 est période à 1 près.
- . par contre 1, 2, 4, 5, 7, 8 ne sont pas périodes à 1 près.



Algorithme J1 ($\epsilon(p)$, $\alpha(p)$, $\beta(p)$)

 $(\epsilon(p))$ est une suite de nombres réels positifs convergeant vers 0 (i.e.

$$\varepsilon(p) \in Conv_{\Omega}(\mathbb{R}^+))$$
;

 $(\alpha(p))$ et $(\beta(p))$ sont des suites d'entiers telles que :

$$\lim_{p \to +\infty} \alpha(p) = +\infty, \beta(p) \ge \alpha(p)$$

Etape p

On prend les points $x_{\alpha(p)}$, $x_{\alpha(p)+1}$, ..., $x_{\beta(p)}$.

On propose la réponse N1(p) : la plus petite période à ϵ (p) près de la suite .

$$(x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)}).$$

Algorithme J2 (ε , α (p), β (p))

ε est un nombre réel positif donné;

 $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont des suites d'entiers telles que :

$$\lim_{p\to\infty}\alpha(p)=+\infty,\;\beta(p)\geq\alpha(p).$$

Etape p

On prend les points $x_{\alpha(p)}$, $x_{\alpha(p)+1}$, ..., $x_{\beta(p)}$.

On propose la réponse N2(p) : plus petite période à ϵ près de la suite $(x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)}).$

Soit $(\varepsilon(p)) \in \operatorname{Conv}_{O}(\mathbb{R}^{+*})$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose :

 $APer_{\varepsilon(p)}$ (E) = $APer(E) \cap Fini_{\varepsilon(p)}$ (E),

 $APer_{0}(E) = APer(E) \cap Fini_{0}(E)$

Proposition 4

Soit Q la question "quelle est la période de la suite (x_n) ?"

- Soient $\varepsilon(p) \in \operatorname{Conv}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^+)$, $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$. (i) J1 $(\varepsilon(p), p, 2p)$ est satisfaisant pour Q sur $\operatorname{APer}_{\varepsilon(p)}(E)$,
 - (ii) J2 (ρ /5, p, 2p) est satisfaisant pour Q sur APer_{ρ}(E).

Démonstration

(i) Soit $(x_n) \in APer_{\varepsilon(n)}$ (E), soit k sa période.

On note $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ les limites des suites $(x_{nk}), (x_{nk+1}), \ldots, (x_{nk+k-1}),$ et on note z_1, z_2, \ldots, z_k , les points d'accumulation de (x_n) $(k' \le k)$.

Par hypothèse, il existe p_1 tel que :

$$\forall p \ge p_1 : d(x_p, x_p) \le \varepsilon(p).$$

Si $p \ge p_1$, alors:

$$d(G(k, i), y_i) \le \sum_{\substack{j=p\\ j=i}}^{2p} d(x_j, y_i) / card \{j \mid p \le j \le 2p, \overline{j} = i\},$$

ce qui signifie que $(P_{k,\epsilon(p)})$ est vérifiée, et que donc à partir de l'étape p_1 , k sera une période à $\epsilon(p)$ près de (x_p, \ldots, x_{2p}) .

Soit r < k, il nous suffit maintenant de montrer qu'à partir d'une certaine étape p, r n'est plus période à $\epsilon(p)$ près de (x_p, \ldots, x_{2p}) .

L'une des suites (x_{nr}) , (x_{nr+1}) , ..., (x_{nr+r-1}) n'est pas convergente, soit (x_{nr+i}) . Cette suite est asymptotiquement périodique de période au plus k. Soient :

$$z_1, z_2 \in \{y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}\}, z_1 \neq z_2,$$

deux de ses points d'accumulation. On pose :

$$\varepsilon_1 = d(z_1, z_2)$$

Soit $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 \geq k, \\ \\ \forall \ p \geq p_1 \ : \ \epsilon(p) \leq \epsilon_1/4 \ \text{et d}(x_p, \ y_p^-) \leq \epsilon(p) \ . \end{array} \right.$$

Si $p \ge p_1$ d'après ce que l'on vient de voir :

$$\begin{cases} \exists \ j_1 \in \{p, p+1, \dots, 2p\} : \overline{j}_1^r = i \text{ et } d(x_{j_1}, z_1) \le \varepsilon_1/4 \\ \\ \exists \ j_2 \in \{p, p+1, \dots, 2p\} : \overline{j}_2^r = i \text{ et } d(x_{j_2}, z_2) \le \varepsilon_1/4 \end{cases}$$

et donc soit j_1 , soit j_2 vérifie :

$$d(x_j, G(r, i)) \ge \epsilon_1/2 > \epsilon(p).$$

On a donc montré que :

$$\begin{cases} \exists \ i \in \{0, 1, ..., k-1\} \\ \\ \exists \ j \in \{p, p+1, ..., 2p\} \end{cases}$$

ce qui signifie qu'à l'étape p (pour p \geq p₁), r n'est pas période à $\epsilon(p)$ près de $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{2p})$.

(ii) On procède de manière analogue.

Remarques

1°) La proposition 4 reste vraie si, au lieu de prendre les algorithmes $J1(\epsilon(p), p, 2p)$ et $J2(\epsilon, p, 2p)$ on prend les algorithmes $J1(\epsilon(p), \alpha(p), \beta(p))$ et $J2(\epsilon, \alpha(p), \beta(p))$ avec :

$$\lim_{p\to +\infty} \alpha(p) = \lim_{p\to +\infty} (\beta(p) - \alpha(p)) = \lim_{p\to +\infty} (\beta(p-1) - \alpha(p))) = +\infty .$$

2°) Il est possible de définir une autre notion de période à ϵ près pour une suite finie en remplaçant ($P_{k,\epsilon}$) par :

$$(P_{k,\varepsilon}) \begin{cases} \forall j_1 \in \{n, n+1, \dots, m\} \\ \\ \forall j_2 \in \{n, n+1, \dots, m\} \end{cases}$$

$$\ddot{j}_1^k = \ddot{j}_2^k \Rightarrow d(x_j, x_j) \leq \varepsilon .$$

Avec cette définition qui évite le calcul de barycentres (mais nécessite en général plus de tests : $a \le b$) on obtient les mêmes résultats que ceux énoncés ci-dessus. On peut d'ailleurs, si on utilise cette notion se placer seulement dans un espace métrique.

Divers essais numériques ont été faits pour tester les algorithmes J1 et J2 en particulier avec des suites dont le nombre de points d'accumulation est plus petit que la période $(k' \le k)$.

Par exemple pour la suite :

$$x_n = E((n^7+1)/2) + 1/(n+5)$$

qui est de période 7 et dont les sous-suites (x_{7n}) , (x_{7n+1}) , ..., (x_{7n+6}) convergent respectivement vers 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3. L'étape p = 21 de l'algorithme J2(1/5, p, p+19) a donné lieu aux calculs suivants :

G(2, 1) = 1,9392 G(7, 0) = 0,0319

G(3, 0) = 1,9055 G(7, 1) = 1,0309

G(4, 1) = 1,8649 G(7, 2) = 1,0299

G(5, 1) = 1,8322 G(7, 3) = 2,0291

G(6, 3) = 2,6314 G(7, 4) = 2,0282

G(7, 6) = 3,0330 G(7, 5) = 3,0229

Les calculs de G(2, 0), G(3, 1), G(3, 2), G(4, 0), G(4, 2), G(4, 3), G(5, 0), G(5, 2), G(5, 3), G(5, 4), G(6, 0), G(6, 1), G(6, 2), G(6, 4), G(6, 5) n'ont pas été nécessaires.

7 est donc la plus petite période à 1/5 près et c'est la réponse proposée.

Même lorsque k' est assez petit devant k il semble que le calcul de la plus petite période à ϵ près pour une tranche assez longue $(\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_m)$ permette de déterminer la période.

Par exemple pour la suite :

$$x_n = E(\bar{n}^{20}/20) + 1/(n+5)$$

dont les sous-suites (x_{20n}) , x_{20n+1} , ..., (x_{20n+18}) , (x_{20n+19}) convergent respectivement vers 0, 0, ..., 0, 1 et qui est donc de période 20, le calcul de la plus petite période de $(x_{20}, \ldots, x_{200})$ à 1/5 près donne 20.

De même pour la suite :

$$x_n = E(n^{-27}/27) + 1/(n+5) + n^3$$

dont les sous-suites (x_{27n}) , (x_{27n+1}) , ..., (x_{27n+26}) convergent respectivement vers 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, ..., 0, 1, 2, 0, 1, 3 et qui est donc de période 27, le calcul de la plus petite période de $(x_{20}, \ldots, x_{200})$ à 1/5 près donne 27.

Ces essais montrent donc que la notion de plus petite période à ϵ près est très efficace en pratique et donc aussi les algorithmes J1 et J2.

c) Résultats de limitations

Proposition 5

Soit $M \subset \mathbb{N}^*$. Si M contient deux entiers multiples l'un de l'autre alors la question "quelle est la période de (x_n) ?" est indécidable à la limite sur $APer_M^*(\mathbb{R}^m)$.

 $\mathsf{APer}^{\bigstar}_{\mathbf{M}}(\mathbf{R}^{\mathbf{m}})$ est la famille de suites définie par :

$$(\mathbf{x}_n) \in APer_{\mathbf{M}}^{\star}(\mathbf{R}^m) \iff \begin{cases} (\mathbf{x}_n) \in APer^{\star}(\mathbf{R}^n) \text{ et} \\ \\ \text{la période de } (\mathbf{x}_n) \text{ est un entier de } \mathbf{M} \end{cases}$$

Démonstration

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $r \neq 1$, tel que $k \in M$ et $k r \in M$.

Pour des commodités de notations, nous nous plaçons dans \mathbb{R}^2 .

Supposons qu'il existe un algorithme normal A satisfaisant à la limite sur ${\rm APer}_{M}^{\star}({\rm I\!R}^2) \ {\rm pour} \ {\rm la} \ {\rm question} \ {\rm de} \ {\rm la} \ {\rm période}.$

Soit la suite (x_n°) définie par :

$$(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots) = ((1, 0), (2, 0), \ldots, (r, 0), \ldots)$$

(les derniers ... signifiant que l'on reprend dans le même ordre, indéfiniment, les mêmes r points).

Par hypothèse, il existe n_o tel que $N^O(n_o)$ = r et r | (n_o+1) (on note $N^O(p)$ la suite des réponses données par A pour (x_n^O)).

Soit la suite (x_n^1) définie par :

$$x_{n}^{1} = x_{n}^{0} \text{ si } n \leq n_{0}^{0},$$
 $(x_{n_{0}+1}^{1}, x_{n_{0}+2}^{1}, \dots) = ((1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{2}), \dots, (r, \frac{1}{2}), (1, \frac{2}{2}), (2, \frac{2}{2}), \dots, (r, \frac{2}{2})$
 $(1, \frac{3}{2}), \dots, (1, \frac{k}{2}), \dots, (r, \frac{k}{2}), \dots)$

(les derniers ... signifiant que l'on reprend dans le même ordre indéfiniment les mêmes rk points).

Cette suite est asymptotiquement périodique de période rk, il existe donc n_1 tel que $N^1(n_1)$ = rk et r | (n_1+1) (on note $N^1(p)$ la suite des réponses données par A pour (x_p^1)).

Soit la suite (x_n^2) définie par :

$$x_n^2 = x_n^1 \text{ si } n \le n_1,$$

 $(x_{n_1+1}^2, x_{n_1+2}^2, \dots) = ((1, 0), (2, 0), \dots, (r, 0), \dots)$

(les derniers ... signifiant que l'on reprend dans le même ordre indéfiniment les mêmes points).

On continue de la même façon :

$$(x_{n_{i}+1}^{i+1}, x_{n_{i}+2}^{i+1}, \dots) = ((1, 0), (2, 0), \dots (r, 0), \dots) \text{ si i impair };$$

$$(x_{n_{i}+1}^{i+1}, x_{n_{i}+2}^{i+1}, \dots) = ((1, \frac{1}{2^{i+1}}), (2, \frac{1}{2^{i+1}}), \dots, (r, \frac{1}{2^{i+1}}), (1, \frac{2}{2^{i+1}}),$$

$$(2, \frac{2}{2^{i+1}}), \dots, (r, \frac{2}{2^{i+1}}), (1, \frac{3}{2^{i+1}}), \dots, (1, \frac{k}{2^{i+1}}), \dots, (r, \frac{k}{2^{i+1}}), \dots),$$
si i est pair.

On considère alors la suite :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^2, \dots)$$

Cette suite est asymptotiquement périodique de période r et pourtant :

$$N(n_1) = rk, N(n_3) = rk, ...$$

Remarques

- 1°) La proposition 5 reste vraie quand on remplace $\mathbb R$ par n'importe quel espace métrique tel que $\mathbb E^{\alpha\alpha} \neq \emptyset$ ($\mathbb E^{\alpha}$ désigne l'ensemble des points d'accumulation de $\mathbb E$, et $\mathbb E^{\alpha\alpha} = (\mathbb E^{\alpha})^{\alpha}$).
- 2°) Le résultat de la proposition 5 est en fait très fin ; il nous indique en particulier :
- . qu'il est impossible de distinguer à la limite entre une suite asymptotiquement périodique de période 2 (par exemple) et une suite convergente.
- . que le fait de savoir que les points d'accumulation d'une suite $(\mathbf{x}_n) \ \epsilon \ \text{Fini (E) ont tous une force strictement positive n'est pas suffisant}$ pour pouvoir les compter algorithmiquement.
- 3°) Avec la proposition 2(i) on voit que la condition "M ne contient pas deux entiers multiples l'un de l'autre" est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un algorithme de détermination de la période sur $APer_{\mathbf{M}}^{\star}(\mathbb{R}^{m})$.

Le théorème suivant résume les résultats des propositions 3, 4 et 5.

Théorème 6

La question : "Quelle est la période de la suite (x_n) ?" est décidable à la limite sur :

- (i) $A \operatorname{Per}_{M}^{*}(E)$ pour tout $M \subset \mathbb{N}^{*}$ ne contenant pas deux entiers multiples l'un de l'autre.
- (ii) APer**(E);
- (iii) APer (E) pour tout $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$;
- (iv) $AP \operatorname{er}_{[\varepsilon]}^{\star}(E)$ powr tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+\star}$;
- (v) $A \operatorname{Per}_{\varepsilon(p)} powr tout \varepsilon(p) \in \operatorname{Conv}_{o}(\mathbb{R}^{+})$;

et est indécidable à la limite sur :

 $|(j)| APer_{\underline{M}}^{*}(\mathbb{R}^{m})$ pour tout $\underline{M} \subset \underline{N}^{*}$ contenant deux entiers multiples l'un de l'autre.

5 - FAMILLES DE SUITES D'ITÉRÉS

Nous allons maintenant considérer l'ensemble $IE^{\mathbf{N}}$ des suites (\mathbf{x}_n) d'éléments de E engendrées par les fonctions continues $\mathbf{f}: \mathbf{E} \to \mathbf{E}$.

$$(x_n) \in \mathbf{TE}^{\mathbb{N}} \iff \begin{cases} \text{Il existe une application continue } f : E \to E \\ \\ \text{telle que } : \mathbb{V} \text{ n } \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Nous nous intéresserons principalement au cas E = [0, 1] en indiquant quelques généralisations.

Nos notations seront les suivantes :

IStati(E) =
$$(IE^{\mathbb{N}})$$
 n Stati(E);
IPer(E) = $(IE^{\mathbb{N}})$ n Per(E);
IUPer(E) = $(IE^{\mathbb{N}})$ n UPer(E);
etc ...

Par rapport à la situation précédente, on doit remarquer les trois caractérisations :

(a)
$$\begin{cases} (x_n) \text{ est ultérieurement} \\ \\ \text{stationnaire} \end{cases} <=> [] m \in \mathbb{N} : x_m = x_{m+1}]$$

(b)
$$\begin{cases} (x_n) \text{ est ultérieurement} \\ \\ périodique \end{cases} <=> [] m, p \in IN : m \neq p \text{ et } x_m = x_p]$$

(c)
$$\left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{x}_n) \text{ est asymptotiquement} \\ \\ p\text{\'e}\text{riodique de p\'e}\text{riode p} \end{array} \right\} <=> \left[(\mathbf{x}_n) \text{ a p points d'accumulation} \right]$$

Nous reprenons les théorèmes des § 2, 3 et 4. Du fait de l'information supplémentaire constituée par l'hypothèse que (x_n) est une suite d'itérés, la partie positive des théorèmes augmente. Du fait de (c) (qui peut s'interpréter : $IFini_p(E) = IAPer_p(E)$), certaines parties des théorèmes perdent leur sens. Les résultats négatifs qui persistent, nécessitent de nouvelles démonstrations qui sont plus complexes car il faut montrer que toutes les suites utilisées sont des suites d'itérés (voir par exemple la démonstration du lemme 2).

Théorème 7

```
La question "(x_n) est-elle convergente?" est décidable à la limite (i) sur IUPer [0, 1] \cup IConv [0, 1]; (ii) sur IAPer_{\epsilon}[0, 1] pour tout \epsilon > 0; (iii) sur IUStati [0, 1] \cup ITurb [0, 1]; et est indécidable à la limite (j) sur IAPer [0, 1]; (jj) sur IConv [0, 1] \cup ITurb [0, 1].
```

Remarques

- 1°) Le théorème reste vrai pour toute partie dense de [0, 1] et donc en particulier pour [0, 1] n \mathbb{Q} et [0, 1] n $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{R}_{\mathbb{C}}$ ensemble des réels calculables).
- 2°) Si, en plus d'imposer aux fonctions engendrant les suites d'être continues, on imposait qu'elles soient lipschitziennes, il est possible que la partie positive du théorème 7 augmente encore, car on remarquera que les fonctions utilisées dans la démonstration de (j) et (jj) sont non lipschitziennes.

Démonstration

(i) il suffit de prendre l'algorithme normal N défini par :

$$f_{i}(x_{o}, x_{1}, ..., x_{i}) = NON \iff \begin{cases} \exists j, k \in \{0, 1, ..., i\} : x_{j} = x_{k} \text{ et} \\ \\ \exists n, m \in \{\lceil i/2 \rceil, \lceil i/2 \rceil + 1, ..., i\} : x_{n} \neq x_{m} \end{cases}$$

- En effet: . ou bien (x_n) n'est pas ultérieurement périodique (donc (x_n)) est convergente), et alors j et k ne peuvent exister (d'après (b)) et donc, la réponse donnée par N est toujours juste ;
 - . ou bien (x_n) est ultérieurement périodique, et alors j et k finissent par exister, et n et m existent à partir d'un certain rang si et seulement si (x_n) n'est pas ultérieurement stationnaire.
- (ii) C'est une conséquence du théorème 2 (ii) car bien sûr : IAPer $_{\epsilon}$ [0, 1] $^{<}$ APer $_{\epsilon}$ (E).
- (iii) C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 1

La question " (x_n) est-elle convergente ?" est décidable à la limite sur $IUPer[0, 1] \cup (I[0, 1]^N - IConv[0, 1])$.

Démonstration

On prend:

$$f_i(x_0, x_1, ..., x_i) = OUI \iff \exists n \in \{0, 1, ..., i-1\} : x_n = x_{n+1}.$$

(j) Cette partie du théorème va résulter du lemme suivant :

Lemme 2

La question " (x_n) est-elle convergente ?" est indécidable à la limite sur IConv [0, 1] \cup IAPer $_2$ [0, 1].

Pour démontrer ce lemme, nous utiliserons : (α) la notion d'insertion d'une fonction sur une autre, (β) deux fonctions particulières.

(α) Insertion d'une fonction sur une autre

Soient f et g deux fonctions continues de [0, 1] dans [0, 1] et soient a, b avec $0 \le a < b \le 1$.

On définit la fonction h suivante (voir figure 4) :

$$h(x) = f(x) \text{ si } x \in [0, 1] - [2a-b, 2b-a];$$

$$h(x) = a+(b-a) g(\frac{1}{b-a}(x-a)) \text{ si } x \in [a, b];$$

$$h(x) \text{ est linéaire sur } [2a-b, a] \cap [0,1] \text{ et sur } [b, 2b-a] \cap [0, 1];$$

$$h(x) \text{ est continue sur } [0, 1].$$

Nous dirons que h est obtenue par insertion de g sur f dans l'intervalle [a, b]

Des méthodes semblables à celle de l'insertion ont déjà été utilisées à propos

de l'étude des suites d'itérés ([4] [16] [17] [32]).

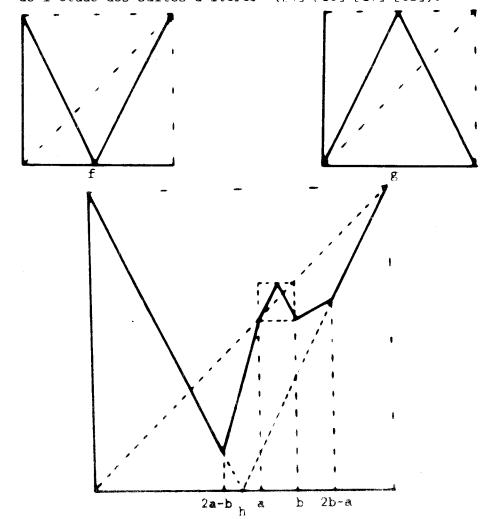


figure 4

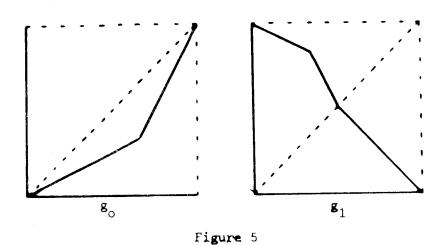
(β) Deux fonctions particulières

Soient g_0 et g_1 les deux fonctions continues suivantes : $g_0(x) = x/2 \text{ si } x \in [0, 2/3]$; $g_0(x) = 2x-1 \text{ si } x \in [2/3, 1]$; $g_1(x) = 1-x/2 \text{ si } x \in [0, 1/3]$; $g_1 = 3/2-2x \text{ si } x \in [1/3, 1/2]$; $g_1(x) = 1-x \text{ si } x \in [1/2, 1]$.

On vérifie que :

- . pour tout $x_0 \in [0, 1]$, la suite des itérés de x_0 par g_0 est convergente ;
- . pour tout $x_0 \in [0, 1] \{1/2\}$, la suite des itérés de x_0 par g_1 est asymptotiquement périodique de période 2.

(ces fonctions ou des fonctions analogues sont souvent utilisées en particulier dans [4] [7] [16] [18] [32] [33]).



Démonstration du lemme

Supposons donné un algorithme normal A = (a_i) satisfaisant pour la convergence sur IConv [0, 1] n IAPer₂[0, 1].

On pose : $h_O(x) = x$.

Soit f ola fonction obtenue par insertion de g sur h dans l'intervalle [0, 1/3] (voir figure 6).

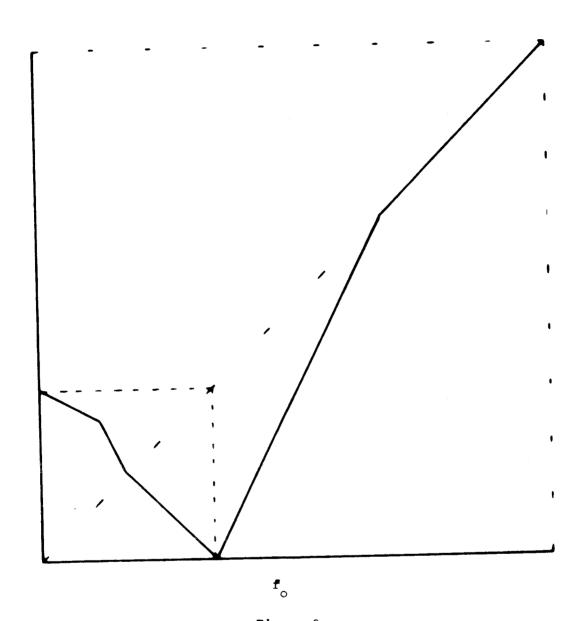


Figure 6



Soit (x_n^0) la suite des itérés de $x_n = 2/9$ par f_n .

Cette suite est asymptotiquement périodique de période 2, il existe donc n ϵ N tel que :

$$a_{n_0}(x_0^0, x_1^0, ..., x_{n_0}^0) = NON.$$

Considérons a_1 , b_1 un petit intervalle contenant x_n^0 et ne contenant aucun autre x_i^0 pour i ϵ {0, 1, ..., n_0 -1}.

On définit une fonction h₁ par les conditions suivantes :

$$h_1(x_{n_0}^{\circ}) = 2/3 + 2/27$$
;
 $h_1(x) = f_0(x) \text{ sur } [0, 1] -]a_1, b_1[$;
 $h_1 \text{ est linéaire et continue sur } [a_1, x_{n_0}^{\circ}] \text{ et sur } [x_{n_0}^{\circ}, b_1]$

Soit f_1 la fonction obtenue par insertion de g_1 sur h_1 dans l'intervalle [2/3, 2/3 + 1/9] (voir figure 7).

Soit (x_n^1) la suite des itérés de $x_0 = 2/9$ par f_1 .

Par construction: $x_n^1 = x_n^0$ pour tout $n \in \{0, 1, ..., n_0\}$.

Par construction aussi, (x_n^1) est convergente. Il existe donc n_1 tel que :

$$a_{n_1}(x_0^1, x_1^1, \dots, x_{n_1}^1) = OUI.$$

Considérons $]a_2, b_2[$, un petit intervalle contenant $x_{n_1}^1$ et ne contenant aucum x_1^1 pour i ϵ {0, 1, ..., n_1 - 1}. On définit une fonction h_2 par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} h_2(x_{n_1}^1) = 8/9 + 2/81; \\ h_2(x) = f_1(x) \text{ sur } [0, 1] -]a_2, b_2[; \\ h_2 \text{ est linéaire et continue sur } [a_2, x_{n_1}^1] \text{ et } [x_{n_1}^1, b_2]. \end{cases}$$

Soit f_2 la fonction obtenue par insertion de g_1 sur h_1 dans l'intervalle [8/9, 8/9 + 1/27] (voir figure 8).

Soit (x_n^2) la suite des itérés de $x_0 = 2/9$ par f_2 . Par construction, $x_n^2 = x_n^1$ pour tout $n \in \{0, 1, ..., n_1\}$.

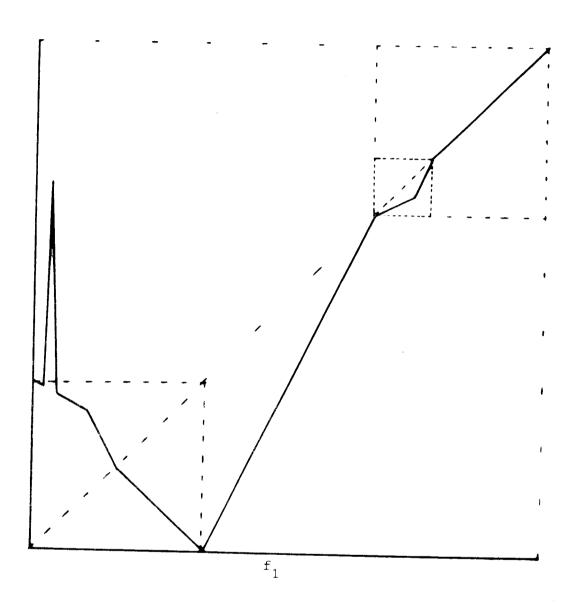


Figure 7

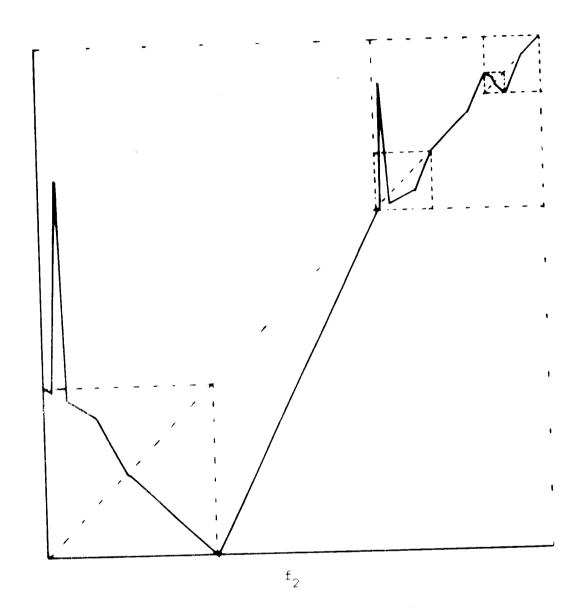


Figure 8



Par construction aussi, (x_n^2) est asymptotiquement périodique de période 2.

Il existe donc n, tel que :

$$a_{n_2}(x_0^2, x_1^2, \dots, x_{n_2}^2) = NON.$$

Etc ...

La suite de fonctions (f_i) converge uniformément vers une fonction f qui, par construction, engendre à partir de $x_0 = 2/9$ la suite (x_n) suivante :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^2, \dots)$$

On a donc :

$$a_{n_{i}}(x_{0}, x_{1}, ..., x_{n_{i}}) = \begin{cases} \text{OUI si i est impair,} \\ \text{NON si i est pair.} \end{cases}$$

La suite (x_n) est convergente (vers ℓ = 1), ce qui contredit l'hypothèse faite sur A.

(jj) On utilise exactement la même méthode que pour (j) en remplaçant la fonction \mathbf{g}_1 par une fonction turbulente, par exemple \mathbf{g}_2 :

$$g_2(x) = 2x \text{ si } x \epsilon [0, 1/2];$$

 $g_2(x) = 2(1-x) \text{ si } x \epsilon [1/2, 1].$

Toujours par des techniques analogues, on montre :

Théorème 8

- (i) Les questions " (x_n) est-elle périodique ?" et " (x_n) est-elle ultérieurement périodique ?" sont décidables à la limite sur I[0, 1].
- (ii) La question " (x_n) est-elle asymptotiquement périodique ?" est décidable à la limite sur IPer $[0,\,1]$ u ITurb $[0,\,1]$.
- (j) La question " (x_n) est-elle asymptotiquement périodique ?" est indécidable à la limite sur IAPer $[0, 1] \cap ITurb [0, 1]$.

Théorème 9

```
La question : "(x<sub>n</sub>) est-elle turbulente ?" est décidable à la limite sur :

(i) IUPer [0, 1] ∪ ITurb [0, 1] :

et est indécidable à la limite sur :

(j) IAPer [0, 1] ∪ ITurb [0, 1].
```

Remarque

Le problème de la décidabilité à la limite de cette question sur IAPer [0, 1] U ITurb [0, 1] ($p \ge 2$ fixé) n'est pas résolu ; des résultats comme le théorème II.3 de [8] font penser qu'une réponse positive est possible.

Théorème 10

```
La question : "quelle est la période de (x_n)?" est décidable à la limite sur : 

(i) IUPer [0, 1]; 

(ii) IAPer [0, 1] pour tout \varepsilon > 0; 

et est indécidable à la limite sur : 

(j) IAPer [0, 1].
```

6 - Deux résultats généraux sur la décidabilité à la limite

Nous donnons ici deux résultats généraux concernant les problèmes de décidabilité à la limite tels que nous les avons formulés au \S 1. Le premier énonce une condition suffisante pour qu'une question soit décidable à la limite sur une famille de suites S, le second énonce une condition suffisante pour qu'une question soit indécidable à la limite sur une famille de suites S. Malheureusement, aucune de ces conditions n'est nécessaire.

Soit Q une question ayant un sens sur $S \subset E^{\mathbb{N}}$ et dont l'ensemble des réponses est R. Cette question définit une fonction $F_{\mathbb{Q}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ sur R dont l'ensemble de définition est S et qui pour $(\mathbf{x}_{\mathbb{D}})$ $\in S$ vaut la bonne réponse.

Posons:

$$\hat{S} = \{ s \in E^{(\mathbb{N})} \mid \exists (x_n) \in S, \exists n_0 \in \mathbb{N} : s = (x_0, x_1, \dots, x_n) \}$$

$$\hat{S} = \{ s \in E^{(\mathbb{N})} \mid \exists (x_n) \in S, \exists n_0 \in \mathbb{N} : s = (x_0, x_1, \dots, x_n) \}$$

Considérons sur $E^{\mathbb{N}} \cup E^{\mathbb{N}}$ la topologie définie par la base de voisinages suivante :

$$(x_{n}) \in E^{N}, n_{0} \in I^{N},$$

$$V((x_{n}), n_{0}) = \{(y_{n}) \in E^{N} \mid \forall n \leq n_{0} : y_{n} = x_{n}\}$$

$$\cup \{(y_{n}) \in E^{(N)} \mid \text{longueur de } (y_{n}) \geq n_{0} + 1 \text{ et }$$

$$\forall n \leq n_{0} : y_{n} = x_{n}\}$$

$$(x'_{n}) \in E^{(N)}, n'_{0} \in I^{N}, n_{0} + 1 \leq \text{longueur de } (x'_{n})$$

$$V((x'_{n}), n'_{0}) = \{(y'_{n}) \in E^{N} \mid \forall n \leq n'_{0} y'_{n} = x'_{n}\}$$

$$\cup \{(y'_{n}) \in E^{(N)} \mid \text{longueur de } (y'_{n}) \geq n_{0} + 1 \text{ et }$$

$$\forall n \leq n' : y'_{n} = x'_{n}\}$$

Cette topologie est définissable comme complétée de la topologie sur E (N) donnée par la distance :

Démonstration

Soit F'_{0} le prolongement continu de F_{0} à \hat{S} . On définit l'algorithme normal (f_{1}) en posant pour tout $(x_n) \in S$:

$$f_i(x_0, x_i, ..., x_i) = F'((x_0, x_1, ..., x_i))$$

Ceci nous donne un algorithme normal qui est satisfaisant pour Q sur ${\cal S}$ car la suite:

$$(x_{o}), (x_{o}, x_{1}), (x_{o}, x_{1}, x_{2}), \dots, (x_{o}, x_{1}, \dots, x_{i}), \dots$$
 converge vers $(x_{o}, x_{1}, \dots, x_{n}, \dots)$; donc puisque F'_{Q} est continue sur \mathring{S} : $\exists \ i_{o} \in \mathbb{N}, \ \forall \ i \geq i_{o} : \ f_{i}(x_{o}, x_{1}, \dots, x_{i}) = F_{Q}((x_{o}, \dots, x_{i}, \dots)).$

Remarque

Cette condition suffisante de décidabilité à la limite, n'est pas nécessaire. En effet, considérons la question Q : " (x_n) comporte-t-elle un 1" définie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Q est clairement décidable à la limite sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et pourtant $F_{\mathbb{N}}$ n'est pas continuement prolongeable à {0, 1} $^{\mathbb{N}}$ \cup {0, 1} $^{(\mathbb{N})}$ car \mathbb{F}_0 n'est même pas continue sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (il suffit pour le voir de prendre $(1, 0, 0, 0, \ldots)$, $(0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots) \dots)).$

Proposition B (Condition suffisante de non-décidabilité à la limite)

Si la famille S vérifie la propriété suivante :

Démonstration

On procède comme dans la démonstration du lemme 2 du § 2.

Remarque

On pourra noter l'analogie entre la propriété supposée de la famille S et la propriété de rémanence développée au chapitre 5 (voir aussi [22]), qui est une condition suffisante de non accélérabilité.

ANNEXE 1 : FORCE D'UN POINT D'ACCUMULATION ET RAPIDITE D'UNE SUITE

(a) Force d'un point d'accumulation

La notion de "force d'un point d'accumulation" a pour but de mesurer le nombre moyen de retours de la suite (x_n) au voisinage d'un point d'accumulation donné (ou d'un point quelconque de E).

Définition

Soit (x_n) une suite de l'espace métrique (E, d), soit y ϵ E.

On appelle force de y par rapport à (x_n) le nombre réel :

$$\alpha(y, (x_n)) = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{m \to \infty} \operatorname{card}\{n \in \{0, 1, ..., m-1\} \mid d(y, x_n) \le \epsilon\} / m$$
 $\epsilon > 0$

(i) On a toujours : $0 \le \alpha(y, (x_n)) \le 1$.

En effet, posons :
$$N_m^{\varepsilon} = \text{card } \{n \in \{0, 1, ..., m-1\} \mid d(y, x_n) \le \varepsilon\} / m$$

$$N^{\varepsilon} = \lim_{m \to \infty} \inf N_m^{\varepsilon},$$

On a :

$$1 \le N_m^{\varepsilon} \le 1$$
, donc $0 \le N^{\varepsilon} \le 1$ et donc $0 \le \alpha(y, (x_n)) \le 1$.

(ii) Si (x_n) converge vers y alors :

$$\alpha(y, (x_n)) = 1 \text{ et } \forall z \neq y : \alpha(z, (x_n)) = 0.$$

En effet, soit $\epsilon > 0$, il existe n_o tel que si $m \ge n_o$ alors $d(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}) \le \epsilon$; donc pour $m \ge n_o$, on a $(m-n_o)$ / $m \le N_m^{\epsilon} \le 1$; ce qui donne $N^{\epsilon} = 1$ et finalement $\alpha(\mathbf{y}, (\mathbf{x}_n)) = 1$. L'autre partie se démontre de la même façon.

(iii) Si $\alpha(y, (x_n)) > 0$; alors y est un point d'accumulation de la suite (x_n) et :

 $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_0 \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_2\} \cap B(y, \epsilon) \neq \emptyset.$

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe ϵ ϵ \mathbb{R}^{+*} tel que :

$$\forall p_0 \in \mathbb{N}, \exists p \ge p_0 : \{x_p, x_{p+1}, ..., x_{p^2}\} \cap B(y, \epsilon) = \emptyset.$$

On peut donc construire une suite strictement croissante d'entiers $\mathbf{p}_{\mathbf{n}}$ tels que :

$$\{x_{p_n}, x_{p_n+1}, ..., x_{p_n^2}\} \cap B(y, \epsilon) = \emptyset,$$

ce qui implique :

$$N_{p_n}^{\epsilon} \leq \frac{p_n}{p_n},$$

donc : $N^{\varepsilon} = 0$ et donc $\alpha(y, (x_n)) = 0$.

- (iv) Si $(x_n) \in APer_p^*(E)$ alors chacun de ses points d'accumulation y vérifie : $\alpha(y, (x_n)) = \frac{1}{p}$.
- (v) Si $(y_i)_{i \in I}$ désigne la famille (finie ou infinie) des points d'accumulation de la suite (x_n) alors :

$$0 \le \sum_{i \in I} \alpha(y_i, (x_n)) \le 1.$$

Remarques

1°) Il n'est pas vrai que si y est un point d'accumulation de (x_n) alors $\alpha(y,(x_n))>0.$ Pour la suite :

$$(x_n) = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

on établit que : $\alpha(0, (x_n)) = 1, \alpha(1, (x_n)) = 0.$

2°) La deuxième inégalité de (v) peut être une inégalité stricte (même quand il y a un nombre fini de points d'accumulation). Pour la suite :

$$(x_n) = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ...),$$

on a : $\alpha(0, (x_n)) = \alpha(1, (x_n)) = 1/3.$

La première des inégalités de (v) peut même être une égalité. Pour la suite :

$$(x_n) = (0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, ...),$$
 on a:
$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha(\mathbf{n}, (x_n)) = 0.$$

3°) Une généralisation de la notion de force d'un point d'accumulation a été formulée et étudiée dans [21].

b) Rapidité d'une suite

Définition

Soit (x_n) une suite de points de l'espace métrique E dont l'ensemble des points d'accumulation est $A(x_n)$.

Soit
$$(\varepsilon_n) \in Conv_{\Omega}(\mathbb{R}^+)$$
.

On dit que (ε_n) est une rapidité de la suite (x_n) si :

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \ge m_0 : d(x_m, A(x_n)) \le \varepsilon_m$$
.

Exemple :

Posons $x_n = 1 + 1 / (n+1)$ si n est pair,

$$x_n = 1/2^n$$
 sin est impair.

La suite (x_n) admet la rapidité (1 / (n+1)).

Remarques

- 1°) Il se peut qu'une suite (x_n) n'admette aucune rapidité. C'est le cas par exemple pour : $(x_n) = (n + (-1)^n n)$.
- 2°) Les notions de force d'un point d'accumulation et de rapidité sont sans rapport l'une avec l'autre. On vérifie facilement qu'il existe des suites dont tous les points sont de force strictement positive et qui sont sans

rapidité, et qu'inversement, il existe des suites ayant des rapidités dont aucun point d'accumulation n'a une force strictement positive.

Proposition

Soit (x_n) une suite de points de l'espace métrique E.

(i) si on a :

(T) $\forall v \in V(A(x_n)), \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n : x_n \in v$

 $(V(A(x_n))$ désigne l'ensemble des voisinages de $A(x_n)$)

alors la suite ε_m = $d(x_m, A(x_n))$ converge vers 0 et est une rapidité de la suite (x_n) .

(ii) si la suite (x_n) admet la rapidité $\epsilon(m)$ et si $A(x_n)$ est compact alors (T) est vérifiée.

Démonstration

- i) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+\star}$, posons $\mathbf{v} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{A}_{n}(\mathbf{x}_{n})) < \varepsilon\}$; \mathbf{v} est un voisinage de $\mathbf{A}(\mathbf{x}_{n})$ donc d'après (T) il existe $\mathbf{m}_{0} \in \mathbb{N}$, tel que : $\mathbf{m} \ge \mathbf{m}_{0} \Rightarrow \mathbf{x}_{m} \in \mathbf{v}$; ce qui démontre que : $d(\mathbf{x}_{m}, \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n})) \to 0$
- ii) Soit v un voisinage ouvert de $A(x_n)$;

C v est un fermé donc :

$$d((v, A(x_n)) > 0$$

(ceci parce que $A(x_n)$ est compact), donc si on prend n_0 tel que :

$$n \ge n_0 \implies \varepsilon(n) < d((v, (x_n)))$$

on est assuré que :

$$n \ge n_0 \Longrightarrow x_n \in v.$$

Remarque

Dans ii), l'hypothèse $\mbox{\tt 'A}(\mbox{\tt x}_n)$ compact est essentielle ; voici un exemple le montrant :

$$(x_n) = (0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, ...);$$

$$(y_n) = (x_n + \frac{1}{n+1});$$

$$A(y_n) = N.$$

On prend pour v l'ensemble : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - \frac{1}{2^n}$, $n + \frac{1}{2^n} []$.

ANNEXE 2 : DECIDABILITE A LA LIMITE ET RECURSIVITE

Comme nous l'avons déjà expliqué (§ 2 remarque 3) il ne nous a pas semblé nécessaire pour parler de décidabilité à la limite d'imposer des conditions de calculabilité à nos algorithmes. A titre d'exemple : après avoir montré comment il serait possible d'introduire des conditions de calculabilité dans nos définitions nous allons traduire les lemmes 1 et 2 du § 2 dans ce cadre plus restrictif.

Pour pouvoir parler de calculabilité, nous sommes obligés de supposer que E est dénombrable. Nous allons prendre $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ que nous noterons $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$. De même R doit être dénombrable ; nous supposerons $R \subset \mathbb{N}$.

Nous désignerons par a une bijection récursive de $\mathbb N$ dans $[0, 1]_{\mathbb Q}$ (c'est-à-dire $a = (a_1, a_2, a_3)$ est une application de $\mathbb N$ dans $\mathbb N^3$ telle que l'application : $a_1(p)$ $p \to (-1)$ $a_2(p) / (a_3(p)+1)$ soit bijective de $\mathbb N$ sur $\mathbb Q$ \cap [0, 1]).

Nous désignerons par α_i une bijection récursive de N^i sur N. Les α_i peuvent, par exemple, être définies par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} &\alpha_2(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1^2 + 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^2 + 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \ / \ 2, \\ &\alpha_{\mathbf{i}+1}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_{\mathbf{i}+1}) = \alpha_2(\alpha_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_{\mathbf{i}}),\ \mathbf{x}_{\mathbf{i}+1}). \end{aligned}$$

Soit maintenant un algorithme normal N = (f_i), on dira que N est calculable sur $S \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ s'il existe une fonction récursive f : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall (x_n) \in S, \forall i \in \mathbb{N} : f(i, \alpha_{i+1}(a^{-1}(x_0), ..., a^{-1}(x_i))) = f_i(x_0, x_1, ..., x_i)$$

Ceci est équivalent à l'existence d'une machine de Turing qui, lorsqu'on inscrit x_0, x_1, \ldots, x_i sur son ruban, s'arrête après un temps fini avec $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_i)$ inscrit sur le ruban.

Pour les notions de fonction récursive et de machine de Turing, on pourra se reporter à [1] [2] [9] [27] [34] [36]. La notion de décidabilité à la limite, seule intéressante lorsqu'on veut aborder les problèmes de suites numériques connues de façon finie à chaque instant, a été introduite par Gold [28] [29].

Le lemme 1 du § 1 peut s'énoncer de façon équivalente sous la forme :

Lemme 1

Il existe un algorithme normal satisfaisant pour la question "(x $_{\!\!\! n}$) est-elle convergente ?" sur :

UStati ([0, 1]_{$$\mathbb{Q}$$}) u (APer ([0, 1] _{\mathbb{Q}}) - Conv([0, 1] _{\mathbb{Q}}))

L'algorithme normal (f.) décrit dans la démonstration est clairement calculable, le lemme 1 peut donc se traduire :

Lemme 1'

It exists un algorithms normal calculable satisfaisant pour la question " (\mathbf{x}_n) est-elle convergente ?" sur :

UStati ([0, 1]_{$$\mathbb{Q}$$}) u (APer ([0, 1] _{\mathbb{Q}}) - Conv ([0, 1] _{\mathbb{Q}})).

Le lemme 2 utilisé dans la démonstration du théorème 2 peut s'énoncer :

Lemme 2

Il n'existe aucun algorithme normal satisfaisant pour la question " (x_n) estelle convergente ?" sur $\text{Conv } ([0, 1]_{\overline{\bf p}}) \text{ U Per } ([0, 1]_{\overline{\bf p}}) \text{ pour tout } {\bf p} \geq 2.$

Conv ([0, 1]
$$_{\overline{\mathbf{p}}}$$
) \cup UPer ([0, 1] $_{\overline{\mathbf{p}}}$) powr tout $_{\overline{\mathbf{p}}} \geq 2$.

Les algorithmes normaux calculables forment une sous-classe de la classe des algorithmes normaux, on a donc évidemment :

Lemme 2'

Il n'existe aucun algorithme normal calculable satisfaisant pour la question " $(\mathbf{x}_{_{\Pi}})$ est-elle convergente ?" sur : Conv ([0, 1]_D) \cup UPer ([0, 1]_D) pour tout $p \ge 2$.

En fait, ce résultat peut être encore amélioré. Notons $\mathcal C$ l'ensemble de suites calculables de rationnels de [0, 1]. Une étude attentive de la démonstration du lemme 2 montre que si on prend $\alpha_i = 1/2^i$, alors les suites (x_n^0) , (x_n^1) , ..., (x_n^i) , ... sont calculables, et que si l'algorithme normal utilisé dans le raisonnement par l'absurde est supposé calculable alors la suite (x_n) sera calculable et donc :

Il n'existe aucun algorithme normal calculable satisfaisant pour la question " (\mathbf{x}_n) est-elle convergente ?" sur : C n [Conv ([0, 1]_D u UPer ([0, 1]_Q)] pour tout $p \ge 2$.

ANNEXE 3 : PROBLEME DE LA NATURE CONVERGENTE, TURBULENTE OU ASYMPTOTIQUEMENT PERIODIQUE D'UNE FONCTION CONTINUE

Sur le modèle des définitions du chapitre 1 nous introduisons la notion d'algorithme pour des fonctions numériques. Nous posons alors le problème de la détermination algorithmique de la nature d'une fonction continue de [0, 1] dans lui-même, et nous donnons deux résultats partiels sur ce problème.

Soit E un espace métrique, et R un ensemble quelconque.

Définitions

On appelle <u>algorithme pour fonctions de E dans E</u> (n'effectuant que des évaluations ponctuelles), toute suite $A = (a_i, b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $a_i : E^{2i} \to E$, $b_i : E^{2i+2} \to \mathbb{R}$.

On appelle <u>suite des réponses fournies par A</u> pour la fonction f, et suite des points utilisés par A pour la fonction f, les deux suites (r_i) et (x_i) définies par :

$$\begin{cases} x_{o} = a_{o} & r_{o} = b_{o}(x_{o}, f(x_{o})) \\ x_{1} = a_{1}(x_{o}, f(x_{o})) & r_{1} = b_{1}(x_{o}, f(x_{o}), x_{1}, f(x_{1})) \\ x_{2} = a_{2}(x_{o}, f(x_{o}), x_{1}, f(x_{1})) & r_{2} = b_{2}(x_{o}, f(x_{o}), x_{1}, f(x_{1}), x_{2}, f(x_{2})) \\ \text{etc} \dots \end{cases}$$

On dit que l'algorithme A est satisfaisant pour Q sur F (une famille de fonctions de E dans E), si pour toute f ϵ F, la suite des réponses fournies par A pour f est exacte à partir d'un certain rang. On dit alors que Q est décidable à la limite sur F.

Diverses études menées ces dernières années [3], [4], [5], [6], [7], [8], [14], [15], [16], [17], [18], [32], [33], [35] amènent à considérer les sous-ensembles suivants de l'ensemble des fonctions continues de [0, 1] dans luimême.

- 1°) Sous-ensemble des fonctions (que nous appellerons convergentes) telles que, quel que soit $x_0 \in [0, 1]$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ soit convergente.
- 2°) Sous-ensemble des fonctions (que nous appellerons asymptotiquement périodiques) telles que, quel que soit $x_0 \in [0, 1]$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ soit asymptotiquement périodique.
- 3°) Sous-ensemble des fonctions (que nous appellerons turbulentes) telles qu'il existe un x ϵ [0, 1] pour lequel la suite définie par x $_{n+1} = f(x)$ soit turbulente.

Les théorèmes qui mettent en relation la nature d'une fonction f et l'existence de cycles d'ordre donné pour f [8], [16], [17], [35], conduisent à penser que pour certaines classes assez grandes de l'ensemble des fonctions continues de [0, 1] dans [0, 1], il doit être possible de déterminer algorithmiquement la nature de chacune des fonctions de ces classes.

Fateman [25] a même écrit un programme de calcul qui permet pour certaines fractions rationnelles f de déterminer si, oui ou non, f est convergente. Malheureusement le domaine exact d'efficacité de son programme n'est pas bien délimité.

En nous inspirant de son idée, nous donnons ce résultat théorique positif :

Proposition 1

La question "f est-elle convergente?" est décidable à la limite sur $\mathbb{Q}[x]$ (l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients rationnels).

Indications pour la démonstration

A l'étape n, on cherche le seul polynôme P_n de degré \leq n coı̈ncidant avec f en (n+1) points (par exemple 1, 1/2, ..., 1 / (n+1)).

On effectue la division de $(P_n(X)-X)^{n^2}$ par P_n o $P_n(X)$ - X; si le reste est nul, on répond oui et si le reste est non nul, on répond non.

Il est clair que le reste est nul si et seulement si $P_n(x)$ n'a pas de cycle d'ordre 2 donc d'après [3], [5], [6] si et seulement si $P_n(x)$ est convergente.

Comme à partir d'un certain rang : $P_n(x) = f(x)$, la réponse fournie sera juste à partir d'un certain rang.

Remarque

Si l'on supposait le polynôme f ϵ $\mathbb{Q}[x]$ donné par ses coefficients, il est clair que l'algorithme proposé permettrait de décider en un temps fini (et non pas à la limite) de la nature de f.

Proposition 2

La question : "f est-elle turbulente ?" est indécidable à la limite sur C[0, 1].

Indications pour la démonstration

On utilise la fonction définie dans [16], [17] qui est turbulente et qui vérifie que :

 \forall n ϵ N, \forall x₁, x₂, ..., x_n ϵ [0, 1], \exists f asymptotiquement périodique telle que : $f(x_1) = g(x_1)$ et ... et $f(x_n) = g(x_n)$.

Remarque

Beaucoup de résultats restent à établir dans cette voie ; en particulier, l'utilisation de théorèmes comme le "snail theorem" [7] est sans doute susceptible de donner des énoncés positifs de décidabilité (à la limite ou non).

Références

- [1] ABERT O. "Analysis in the computable number field", J.A.C.M., 15, 1968, pp 275-299.
- [2] AZRA J.P. et JAULIN B. "Récursivité", Gauthier-Villars, Paris, 1973.
- [3] BASHUROV V.V. et OGIBIN V.N. "Conditions for the convergence of iterative processes on the real axis", U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. 6, 5, 1966, pp. 178-184.
- [4] BUTLER G.J. et PIANIGIANI G. "Periodic points and chaotic functions in the unit interval", Bull. Australian Math. Soc. 8, 1978.
- [5] CHU S.E. et MOYER R.D. "On continuous functions, commuting functions and fixed points", Fundamenta Mathematicae LIX 1966 pp. 91-95.
- [6] COPPEL W.A. "The solution of equations by iteration", Trans. Cambridge Phil. Soc. 51, 1955, pp. 41-43.
- [7] COSNARD M.Y. "On the behavior of successive approximations", S.I.A.M. J. Numer. Anal. 16, 2, 1979, pp. 300-310.
- [8] COSNARD M.Y. et EBERHARD A. "Sur les cycles d'une application continue de la variable réelle", Séminaire d'Analyse Numérique de Grenoble n° 274, 1977.
- [9] DAVIS M. "Computability and Unsolvability", Mac Graw Hill, New-York, 1959.
- [10] DELAHAYE J.P. "Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites", Thèse de 3e cycle, Lille, 1979.
- [11] DELAHAYE J.P. "Algorithmes-questions et algorithmes d'extraction pour suites non convergentes", Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'EDF, C, 1, 1979, pp. 17-34.

- [12] DELAHAYE J.P. "Expériences numériques sur les algorithmes d'extraction pour suites non convergentes", Publication ANO n° 5 Université des Sciences et Techniques de Lille, 1979.
- [13] DELAHAYE J.P. "Algorithmes pour suites non convergentes", Numer. Math. 34, 1980, pp. 333-347.
- [14] DELAHAYE J.P. "Détermination de la période d'une suite pseudo-périodique", Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'EDF, C, 1, 1980, pp. 65-80.
- [15] DELAHAYE J.P. "A conterexample concerning iteratively generated sequences", J.M.A.A., 75, 1980, pp 236-241.
- [16] DELAHAYE J.P. "Cycles d'ordre 2ⁱ et convergence cyclique de la méthode des approximations successives", Publication ANO n° 21 Université des Sciences et Techniques de Lille, 1980.
- [17] DELAHAYE J.P. "Fonctions admettant des cylces d'ordre n'importe quelle puissance du 2 et aucun autre cycle", C.R. Acad. Sc. Paris, 291, A, 1980, pp. 323-325.
- [18] DELAHAYE J.P. "The set of périodic points", The Amer. Math. Monthly, 88, 9, 1981 pp 646-651.
- [19] DELAHAYE J.P. "Décidabilité et indécidabilité à la limite de certains problèmes de suites", Séminaire d'Analyse Numérique de Grenoble n° 360, 1981.
- [20] DELAHAYE J.P. "Algorithmes pour extraire une sous-suite convergente d'une suite non convergente", Proceeding of "Conference optimization: theory and algorithms". Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, A paraître.
- [21] DELAHAYE J.P. "The cluster point set of a non convergent sequence",
 Publications ANO N° 68. Université des Sciences et Techniques de Lille,
 1982.

- [22] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Résultats négatifs en accélération de la convergence", Numer. Math., 35, 1980 pp. 443-457
- [23] DENEL J. "Extensions of the continuity of point-to-set maps: applications to fixed point algorithms", Mathematical Programming Study 10, 1979, pp. 48-68.
- [24] EAVES B.C. "Computing Kakutani Fixed Points", SIAM J. Appl. Math. 21, 1971, pp. 236-244.
- [25] FATEMAN R.J. "An algorithm for deciding the convergence of the rational iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ ", ACM Trans. on Math. Soft. 3, 1977 pp 272-278.
- [26] FIOROT J.C. et HUARD P. "Composition and union of general algorithms of optimization", Mathematical Programming Study, 10, 1979, pp. 69-85.
- [27] GASTINEL N. "Introduction à l'analyse calculable", Cours polycopié de DEA, Grenoble 1973.
- [28] GOLD E.M. "Limiting recursion", The journal of symbolic logic. 30, 1965, pp. 28-48.
- [29] GOLD E.M. "Language identification in the limit", Information and Control 10, 1967, pp. 447-474.
- [30] HUARD P. "Optimisation dans R", Cours de DEA Polycopié, Université de Sc. et Techn. de Lille, 1972.
- [31] HUARD P. "Extensions of Zangwill's Theorem", Mathematical Programming Study 10, 1979, pp. 98-103.
- [32] KLOEDEN P.E. "Chaotic difference equations are dense", Bull. Austral. Math. Soc. 15, 1976, pp. 371-379.
- [33] LI T.Y. et YORKE J.A. "Period three implies chaos", The Amer. Math.

 Monthly 82, 1975 pp 985-992.

- [34] ROGERS H. "Recursive Functions and Effective Computability", Mac Graw Hill, New-York, 1967.
- [35] SHARKOVSKII A.N. "Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself" Ukrain. M.Z. 16, 1, 1964, pp. 61-71.
- [36] TURING A.M. "On computable numbers, with an application to the entscheidunsproblem", Proc. London Math. Soc. 42, 1936-7,pp 230-265.
- [37] ZANGWILL W.I. "Nonlinear programming: A unified approach", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.

CHAPITRE 3

ALGORITHMES D'EXTRACTION
DE SOUS-SUITES CONVERGENTES

Introduction

Il est fréquent en analyse numérique de rencontrer des algorithmes itératifs infinis donnant des suites de points non nécessairement convergentes, mais dont on sait que les valeurs d'adhérence possèdent des propriétés intéressantes. Cela se produit en optimisation, où bien des résultats ne valent que pour les points d'accumulation des suites engendrées ([12] [17] [18] [23] [29] ...). Cela se produit aussi avec l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$ (f application continue d'un espace localement compact dans lui-même) dont on sait qu'elle donne des suites dont chacun des points d'accumulation, quand ils sont en nombre fini, vérifie : $x = f^p(x)$ ([16] [21] [22] [26] [28]...). Cela se produit encore pour les algorithmes de recherche de points fixes d'applications multivoques ([7] [13] [14] [15] [19] [20] [24] [25] [27] ...).

Ce sont ces raisons, en particulier, qui nous ont conduits à définir et à étudier des algorithmes, qui, à partir d'une suite non convergente, donnée progressivement extraient, des sous-suites convergentes.

Principalement deux points de vue peuvent être adoptés :

- 1°) On essaye d'extraire une sous-suite convergente.
- 2°) On essaye d'extraire simultanément une famille de sous-suites convergentes telle qu'à chaque point d'accumulation corresponde au moins une sous-suite extraite.

Le premier point de vue donne lieu à deux types d'algorithmes qui sont décrits et étudiés aux paragraphes 1 et 2 et qui fonctionnent sur le principe très simple suivant :

a) On découpe la suite (x_n) en tranches :

b) On prend un point dans chacune des tranches de ce découpage, ce qui donne une sous-suite (notée (t_i) ou (s_i)) de la suite (x_n) . Dans le premier type d'algorithmes (algorithmes T, § 1) on choisit t_{i+1} de façon à rendre $d(t_{i+1}, t_i)$ petit. Dans le second type d'algorithmes (algorithmes S, § 2) on choisit s_{i+1} de façon à rendre $d(s_i)$, a) petit (a est un point fixé).

Nos résultats établissent des conditions suffisantes de convergence pour les algorithmes T ou S, ils montrent qu'il existe toujours des découpages (c'est-à-dire des suites $\alpha(n)$, $\beta(n)$) pour lesquels T et S sont convergents et ils indiquent aussi pour certains types particuliers de suites, comment choisir $(\alpha(n), \beta(n))$.

Le second point de vue donne lieu à un type d'algorithmes (algorithmes U, § 3) qui procèdent selon le schéma suivant :

- a) On découpe la suite (x_n) en tranches, comme pour les algorithmes T et S.
- b) On sélectionne plusieurs points (dans chacune des tranches) que l'on choisit les plus éloignés possible les uns des autres, puis on utilise ces points pour prolonger les sous-suites dont la construction a été commencée aux étapes précédentes.

Nous donnons quelques résultats de convergence pour les algorithmes U.

Les hypothèses que nous sommes obligés de faire pour formuler nos résultats de convergence, peuvent sembler un peu trop fortes, le but du dernier paragraphe est de montrer qu'en fait on ne peut pas supprimer ces hypothèses. Pour cela comme dans le chapitre 2 nous établissons des résultats d'impossibilité.

Tous les résultats de ce chapitre ont déjà été présentés dans des travaux de l'auteur. Ceux des paragraphes 1, 2 et 4 dans [8] ceux du paragraphe 3 dans [3] [5] [6] (la référence [3] contient d'ailleurs une étude plus complète des algorithmes U). Divers essais numériques ont été réalisés, on les trouvera dans [4] et [5].

NOTATIONS

partie fermée de IRⁿ ; E : d(x, y): distance entre deux points de E (nous ne supposerons pas que d est la distance euclidienne); d(A, B) =inf $\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$; $B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) < r \};$ $\delta(A, B) = \max\{\sup d(A, y) \mid y \in B\}, \sup \{d(x, B) \mid x \in A\}$ (distance de Hausdorff entre deux ensembles voir [1]); EN : ensemble des suites infinies de points de E; $A(x_n)$: ensemble des points d'accumulation de la suite $(x_n) \in E^{N}$; A(x_n) est toujours un fermé ([1] [3] [9]) et, puisqu'ici E est à base dénombrable de voisinages, on a que ([1][3][9]):

 $\hat{\mathbf{x}} \in A(\mathbf{x}_n) \iff \text{illexiste une sous-suite de } (\mathbf{x}_n), \text{ convergeant vers } \mathbf{x}.$

Lorsque (x) est fixée on notera :

$$x_n^p = (x_n, x_{n+1}, ..., x_p)$$

Si (\mathbf{A}_{n}) est une suite de parties de E on notera :

$$\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \{\hat{x} \mid \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \ge n_0, \exists x \in A_n : d(x, \hat{x}) \le \epsilon\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \{\hat{x} \mid \forall \epsilon > 0, \forall n_0, \exists n \ge n_0, \exists x \in A_n : d(x, \hat{x}) \le \epsilon\}$$

Lorsque $\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \lim_{n\to\infty}\sup A_n = A$ on dit que A_n converge vers A et on note $\lim_{n\to\infty}A_n = A$ (voir [1] [10] [11]).

1 - LES ALGORITHMES T

Basés sur un principe naturel particulièrement simple les algorithmes

T que nous présentons ici possèdent des propriétés de convergence que nous

analysons en détail aux théorèmes 1, 2 et 3. On remarquera en particulier

qu'il est possible (à condition de bien choisir $\alpha(n)$ et $\beta(n)$) d'extraire des sous-suites convergentes même lorsque la suite de départ a une infinité de points d'accumulation ; cette possibilité ne se retrouvera pas avec les algorithmes S et U.

En plus de la suite (x_n) de points de E, on suppose donnée dans tout le reste du paragraphe des suites d'entiers $\alpha(n)$, $\beta(n)$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(0) = 0 \ ; \\ \\ \forall \ n \in \mathbb{N} \ : \ \alpha(n+1) > \alpha(n), \\ \\ \beta(n) \ \geq \alpha(n+1)-1. \end{array} \right.$$

Ces conditions impliquent bien sûr que :

$$\lim_{n\to\infty}\alpha(n) = \lim_{n\to\infty}\beta(n) = +\infty \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}: \beta(n) \geq \alpha(n).$$

Les suites $(\alpha(n), \beta(n))$ nous permettent de découper la suite (x_n) en "tranches".

Figure 1

Les sous-suites construites par l'algorithme T seront obtenues en premant un point dans chacune des tranches.

Soit
$$i_0 \in \mathbb{N}$$

Algorithme $T(i_{\circ}, \alpha(p), \beta(p))$

Etape 0

Soit
$$p_0$$
 le plus petit entier tel que :
$$\alpha(p_0) \le i_0 \le \beta(p_0)$$

Etape j

Soit I 1'ensemble des entiers ℓ tels que :

$$\begin{cases} \alpha(p_{o} + j) \le \ell \le \beta(p_{o} + j), \\ \\ d(x_{\ell}, t_{j-1}) = \min \{d(x_{m}, t_{j-1}) \mid \alpha(p_{o} + j) \le m \le \beta(p_{o} + j)\}. \end{cases}$$

Soit i, = max I;

On pose $t_j = x_i$.

Une fois les paramètres i_0 , $(\alpha(n), \beta(n))$ fixés, l'algorithme T extrait une sous-suite (t_i) commençant par $t_0 = x_i$, en prenant un point dans chacune des tranches définies par $(\alpha(n), \beta(n))$ et en minimisant la distance de deux points successifs de la sous-suite construite.

Nous prenons $i_j = \max_j I_j$ pour les cas où I_j a plus d'un élément, mais ce choix n'est pas essentiel et les résultats établis resteraient valables avec une autre convention de choix (pourvu que $i_j \in I_j$).

Figure 2

Si la sous-suite
$$(x_i) = (t_j)$$
 converge vers \hat{x} , on écrira : $(i_o, \alpha(n), \beta(n)) + \hat{x}$ ou même : $i_o + \hat{x}$ Pour exprimer que $(x_i) = (t_j)$ converge, on écrira : $(i_o, \alpha(n), \beta(n)) + \hat{x}$ ou même : $i_o + \hat{x}$

Exemple 1

Prenons E = \mathbb{R} , et considérons (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_{3n} = 1/2^{n} \\ x_{3n+1} = 1+1/2^{n} \\ x_{3n+2} = 2+1/2^{n} \end{cases}$$

Fixons dans un premier temps $\alpha(n) = 3n$, $\beta(n) = 3n+2$.

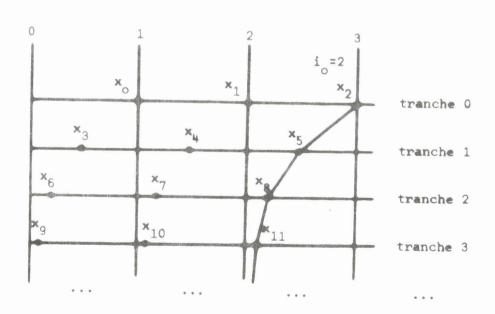


Figure 3

Si on prend i_o = 0, on obtient la suite extraite (x_0 , x_4 , x_7 , x_{10} , ...) qui converge vers 1 ϵ $A(x_n)$.

Ce que nous notons :

$$i_0 = 0 + 1$$

De même : $i_0 = 1 + 2$

Il est évident pour cet exemple que :

et que :

(**)
$$\forall \hat{x} \in A(x_n), \exists i_0 \in \mathbb{N} : i_0 \neq \hat{x}$$
.

Fixons maintenant $\alpha(n) = 4n$, $\beta(n) = 4n+3$.

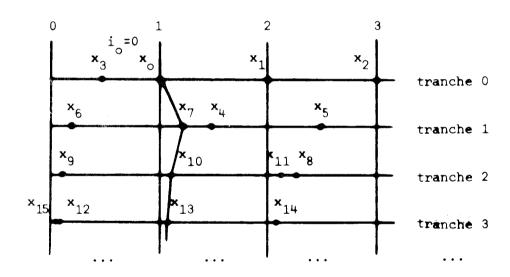


Figure 4

Avec ce nouveau découpage, on a :

Les propriétés (*) et (**) sont encore satisfaites.

Sur cet exemple, on peut d'ailleurs établir sans difficulté qu'elles seront satisfaites dès que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha(n+1) \ge \alpha(n) + 3$$
.

Exemple 2

Toujours avec E = IR, considérons maintenant

$$(x_n) = (0, 0, 1/2, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 0, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 5/8, 3/4, 7/8, ...)$$

Il est clair que :

$$A(x_n) = [0, 1].$$

Pour que l'algorithme T extrait effectivement des sous-suites convergentes, il faut prendre des tranches de plus en plus longues. Par exemple, on peut fixer : $\alpha(p)$ = 2^p-1 , $\beta(p)$ = $2^{p+1}-2$.

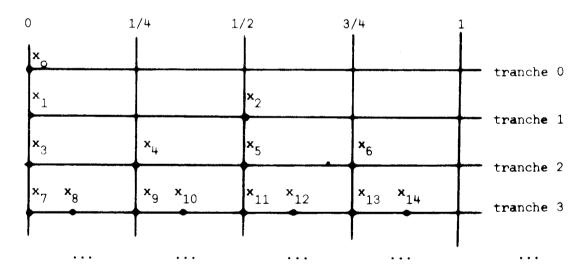


Figure 5

On voit que (*) est encore vraie, par contre (**) n'est plus vraie. Les points $\hat{x} \in A(x_n)$ tels que $\exists i_0 : i_0 \neq \hat{x}$, peuvent être caractérisés : ce sont les points de la forme $\frac{k}{2^i}$ avec k impair, $0 \le k \le 2^i-1$. Les points limites des sous-suites extraites par T ne peuvent constituer qu'un sous-ensemble dénombrable de $A(x_n)$ (car les i_0 possibles sont dénombrables) et ceci même en prenant des

tranches plus grandes. Remarquons qu'avec la suite de l'exemple 2, si $\beta(n) - \alpha(n)$ est borné, alors quel que soit le choix de i, la suite $(x_i) = (t_i)$ ne convergera pas (et même, sera telle que $A(t_i) = [0, 1]$). Prendre des tranches grandes est donc, pour de telles suites, une nécessité absolue.

Les différents exemples que nous venons de voir montrent que l'algorithme T ne converge pas toujours, et que, lorsqu'il converge, il ne donne pas forcément n'importe quel point \hat{x} \in A(x).

Pour obtenir des sous-suites convergentes, il est donc nécessaire de bien choisir $(\alpha(n), \beta(n))$.

Théorème 1

Si la condition suivante est vérifiée:

(o)
$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \delta(X_{\alpha(i)}^{\beta(i)}, X_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}) < \infty,$$

alors:

- (i) pour tout $i_0 \in \mathbb{N}$: $i_0 \neq \{c' \text{ est \tilde{a} dire : $\ell' \text{ algorithme T fournit toujours une sous-suite convergente}\},$
- (ii) pour tout point \hat{x} isolé dans $A(x_n)$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que : $i \neq \hat{x}$.

Remarques

- 1°) La condition (σ) ne fait intervenir que la suite (x_n) (et pas $A(x_n)$ comme certaines des conditions rencontrées plus loin).
- 2°) Les hypothèses de convergence pour les algorithmes d'extraction simultanée (voir § 3) excluent les cas où $A(x_n)$ est infini. Ici notre hypothèse n'est pas restrictive pour $A(x_n)$, il est tout à fait possible (comme dans l'exemple 2) de considérer une suite (x_n) ayant une infinité de points d'accumulation.

Démonstration

(i) Par définition de T :

$$d(t_{i}, t_{i+1}) = \min \{d(t_{i}, x) \mid x \in X_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}\}$$
$$= d(t_{i}, X_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}).$$

Donc :

$$\begin{split} \mathtt{d}(\mathtt{t_i},\ \mathtt{t_{i+1}}) &\leq \sup \ \{\mathtt{d}(\mathtt{y},\ \mathtt{X}_{\alpha(\mathtt{i}+1)}^{\beta(\mathtt{i}+1)}) \ | \ \mathtt{y} \in \mathtt{X}_{\alpha(\mathtt{i})}^{\beta(\mathtt{i})} \} \\ &\leq \delta(\mathtt{X}_{\alpha(\mathtt{i})}^{\beta(\mathtt{i})},\ \mathtt{X}_{\alpha(\mathtt{i}+1)}^{\beta(\mathtt{i}+1)}) \ . \end{split}$$

Ce qui donne : $\sum_{i \in \mathbb{N}} d(t_i, t_{i+1}) < \infty$; la suite (t_i) est donc une suite de Cauchy et par conséquent converge.

(ii) Soit
$$\varepsilon$$
 = d(\hat{x} , A(x_n) - { \hat{x} }) > 0.

Soit i tel que :

$$\sum_{\mathbf{i} \geq \mathbf{i}_0} \delta(\mathbf{X}_{\alpha(\mathbf{i})}^{\beta(\mathbf{i})}, \ \mathbf{X}_{\alpha(\mathbf{i}+1)}^{\beta(\mathbf{i}+1)}) < \epsilon/3 \text{ et } \mathbf{X}_{\mathbf{i}_0} \in B(\hat{\mathbf{x}}, \ \epsilon/3).$$

La suite (t_i) converge (d'après (i)) vers une limite $\hat{y} \in A(x_n)$. On a nécessairement :

$$d(x_{i_0}, \hat{y}) < 2\epsilon/3,$$
 donc $\hat{y} = \hat{x}$.

Le théorème 1 suggère immédiatement la question : est-il toujours possible de trouver $(\alpha(n), \beta(n))$ satisfaisant (σ) (et $(\alpha\beta)$) ? La réponse à cette question est donnée ici :

Proposition 1

Soit (x) une suite bornée de points de E. Il existe des suites d'entiers $(\alpha(n), \beta(n))$ telles que (σ) soit vérifiée $(ainsi que (\alpha\beta))$.

Démonstration

Pour tout $\epsilon > 0$, nous noterons :

$$V_{\varepsilon} = \{x \mid d(x, A(x_n)) < \varepsilon\}.$$

Puisque (x_n) est une suite bornée de E, $A(x_n)$ est compact et on a donc:

$$\forall \ \epsilon > 0, \ \exists \ n(\epsilon), \ \forall \ m \ge n(\epsilon) : x_m \in V_{\epsilon}$$
.

Donnons-nous $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$, une suite de paramètres tels que :

$$\varepsilon_{i} > 0$$
, $\sum_{i>1} \varepsilon_{i} < \infty$.

On définit : $\alpha(0)$ = 0, $\beta(0)$ = $n(\epsilon_1)$, $\alpha(1)$ = $\beta(0)+1$.

 $A(\mathbf{x}_n)$ qui est compact, peut être recouvert à l'aide d'un nombre fini de boules de rayon $\epsilon_1/2$:

$$\begin{cases} B(y_0^1, \epsilon_1/2), \dots, B(y_{\ell_1}^1, \epsilon_1/2) \\ y_0^1, \dots, y_{\ell_1}^1 \in A(x_n). \end{cases}$$

Prenons k_1 tel que pour tout $i = 0, \ldots, \ell_1$ il existe $n \in \{\alpha(1), \ldots, k_1\}$ tel que $x_n \in B(y_1^1, \epsilon_1/2)$. On définit : $\beta(1) = \max\{k_1, \alpha(1), n(\epsilon_2)\}, \alpha(2) = \beta(1)+1$. Montrons que :

$$(\star)$$
 $\delta(X_{\alpha(1)}^{\beta(1)}, A(x_n)) \leq \varepsilon_1.$

Soit $x \in X_{\alpha(1)}^{\beta(1)}$, on a $d(x, A(x_n)) \le \varepsilon_1 (\operatorname{car} \alpha(1) \ge \operatorname{n}(\varepsilon_1))$.

Soit $\hat{x} \in A(x_n)$, il existe y_r^1 tel que :

 $d(\hat{x}, y_r^1) \le \varepsilon_1/2$ (par hypothèse sur les y_i^1).

Il existe donc : $n \in \{\alpha(1), \ldots, \beta(1)\}$ tel que : $d(y_r^1, x_n) \le \epsilon_1/2$;

donc, tel que : $d(\hat{x}, x_n) \le \epsilon_1$.

Ce qui signifie que : $d(\hat{x}, X_{\alpha(1)}^{\beta(1)}) \le \varepsilon_1$.

Ce qui montre (*).

On recouvre alors $A(x_n)$ à l'aide de boules de rayon $\epsilon_2/2$:

$$\begin{cases} B(y_0^2, \epsilon_2/2) \dots, B(y_{\ell_2}^2, \epsilon_2/2) \\ y_0^2, \dots, y_{\ell_2}^2 \epsilon A(x_n). \end{cases}$$

On prend k_2 tel que pour tout i ϵ {0, 1, ..., ℓ_2 }, il existe n ϵ { $\alpha(2), \ldots, k_2$ } tel que x_n ϵ B(y_1^2 , $\epsilon_2/2$). On définit alors $\beta(2) = \max\{k_2, \alpha(2), n(\epsilon_3)\}$. $\alpha(3) = \beta(2)+1$ et on montre que :

$$\delta(x_{\alpha(2)}^{\beta(2)}, A(x_n)) \leq \varepsilon_2$$
.

La construction se poursuit de façon analogue, et on obtient finalement :

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}} \delta(x_{\alpha(\mathbf{i})}^{\beta(\mathbf{i})}, \ x_{\alpha(\mathbf{i}+1)}^{\beta(\mathbf{i}+1)}) \leq 2 \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}} \delta(x_{\alpha(\mathbf{i})}^{\beta(\mathbf{i})}, \ A(\mathbf{x}_n)) < \infty \ .$$

Remarques

1°) En fait la démonstration de la proposition établit le résultat plus précis suivant :

$$\begin{cases} \text{si } (\mathbf{x}_n) \text{ est bornée et si } (\boldsymbol{\epsilon}_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite de réels > 0,} \\ \\ \text{alors il existe } \alpha(n) \text{ tel que } \forall \ m \geq 1 : \delta(X_{\alpha(m)}^{\alpha(m+1)-1}, \ \mathbf{A}(\mathbf{x}_n)) \leq \boldsymbol{\epsilon}_m \end{cases}$$

Ceci signifie que l'ensemble d'accumulation de (x_n) peut être approché aussi finement que l'on veut avec des tranches complémentaires de la suite (x_n) . Ces résultats sont à rapprocher de certains résultats de [3].

 2°) Si, à la place de (σ) , on suppose seulement :

(o')
$$\lim_{i \to +\infty} \delta(x_{\alpha(i)}^{\beta(i)}, x_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}) = 0$$

ou:

$$(\sigma'')$$
 $\lim_{i\to\infty} X_{\alpha(i)}^{\beta(i)} = A(x_n),$

le théorème 1 ne reste plus vrai. C'est ce qu'établit le contre-exemple suivant :

Contre-exemple

Considérons la suite (x_n) représentée à la figure 6 :

$$(x_n) = (0, 1/4, 1/2, 3/4, 0, 1/2, 1, 3/8, 7/8, 1/4, 3/4, ...)$$

Prenons $\alpha(n) = (0, 1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 13, ...)$ (voir figure 6)

$$\beta(n) = \alpha(n+1) - 1$$

On a
$$A(x_n) = [0, 1]$$

Les conditions (σ') et (σ'') sont vérifiées mais pas la condition (σ).

Il est clair que pour tout $i_0 \in \mathbb{N}$, la suite (x_i) est une suite non convergente vérifiant : $A(x_i) = [0, 1]$.

Théorème 2

Si (x_n) est bornée et n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation et si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(o')
$$\lim_{i\to\infty} \delta(x_{\alpha(i)}^{\beta(i)}, x_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}) = 0$$

$$(\sigma'')$$
 $\lim_{i\to\infty} X_{\alpha(i)}^{\beta(i)} = A(x_n),$

alors:

- (i) powr tout $i_0 \in \mathbb{N} : i_0 \downarrow$
- (ii) pour tout $\hat{x} \in A(x_n)$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $i + \hat{x}$.

Remarque

 $(\sigma) \Rightarrow (\sigma')$; $(\sigma) \Rightarrow (\sigma'')$. Les hypothèses (σ') et (σ'') sont donc plus faciles à satisfaire que l'hypothèse (σ) . Il résulte aussi de la proposition 1 que (x_n) étant donnée, il est toujours possible de trouver $(\alpha(n), \beta(n))$ satisfaisant (σ') , (σ'') .

Démonstration

Notons $\mathbf{y}_1, \ \mathbf{y}_2, \ \dots, \ \mathbf{y}_\ell$ les points d'accumulation de $(\mathbf{x}_n).$

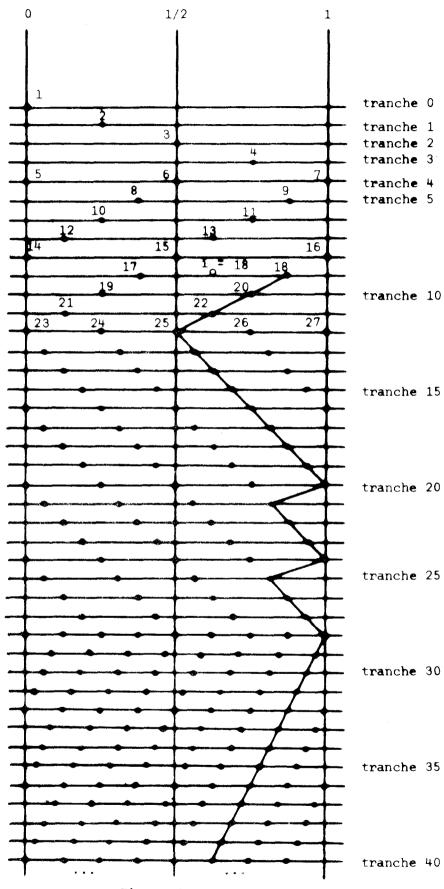




Figure 6

Posons $\varepsilon_0 = \min \{d(y_i, y_j) ; i \neq j\}.$

Montrons d'abord que puisque (x_n) est bornée et n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation :

$$(\sigma^1) \iff (\sigma^n).$$

a) $(\sigma') => (\sigma'')$.

Soit i tel que :

$$\begin{cases} \forall i \geq i_{o} : \delta(X_{\alpha(i)}^{\beta(i)}, X_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}) \leq \epsilon_{o}/4, \\ \\ \forall m \geq \alpha(i_{o}) : d(x_{m}, A(x_{n})) \leq \epsilon_{o}/4. \end{cases}$$

En raisonnant par l'absurde, on établit que :

$$\forall i \geq i_0, \forall j \in \{1, 2, ..., \ell\} : B(y_j, \epsilon/4) \cap X_{\alpha(i)}^{\beta(i)} \neq \emptyset.$$

Ceci permet alors de montrer que :

$$\lim_{i\to\infty}\inf X_{\alpha(i)}^{\beta(i)}\supset A(x_n).$$

Comme l'inclusion :

$$\lim_{i \to \infty} \sup X_{\alpha(i)}^{\beta(i)} \subset A(x_n),$$

est toujours vérifiée, on peut conclure.

b)
$$(\sigma'') => (\sigma')$$

Pour tout r ϵ {1, ..., ℓ }, soit $(x_{k_r(i)})$ une sous-suite de (x_n) convergeant vers y_r avec $k_r(i)$ ϵ { $\alpha(i)$, ..., $\beta(i)$ }.

Soit $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ donné, il existe $n(\epsilon)$ tel que :

$$\begin{cases} \forall m \geq n(\epsilon) : d(x_m, A(x_n)) \leq \epsilon, \\ \\ \forall r \in \{1, ..., \ell\} : k_r(m) \geq n(\epsilon) \Rightarrow d(x_{k_r(m)}, y_i) \leq \epsilon. \end{cases}$$

Il est clair alors que pour tout i tel que $\alpha(i) \ge n(\epsilon)$ on a :

$$\delta(X_{\alpha(i)}^{\beta(i)}, X_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}) \le 2\varepsilon,$$

ce qui démontre donc (σ')

c) Partie (i) du théorème 2 :

Un raisonnement semblable à celui fait pour le théorème 1 montre que quel que soit $i \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{i\to\infty} d(t_i, t_{i+1}) = 0$$

Il en résulte que $A(t_i)$ est connexe [2] [7]. D'autre part, $A(t_i) \subset A(x_n)$. Donc (t_i) converge.

d) Partie (ii) du théorème 2 :

Soit y_r un point d'accumulation de (x_n) .

On prend i_{O} de la façon suivante :

$$\begin{cases} \alpha(i) \geq i_{o} \Rightarrow \delta(X_{\alpha(i)}^{\beta(i)}, X_{\alpha(i+1)}^{\beta(i+1)}) \leq \epsilon_{o}/4; \\ m \geq i_{o} \Rightarrow d(x_{m}, A(x_{n})) \leq \epsilon_{o}/4; \\ d(x_{i_{o}}, y_{r}) \leq \epsilon_{o}/4. \end{cases}$$

Théorème 3

(i) Si (x_n) est asymptotiquement périodique alors en prenant : $\alpha(n) = n$,

$$\beta(n) = 2n$$
, on a:

$$\forall \hat{\mathbf{x}} \in A(\mathbf{x}_n), \exists \mathbf{i}_o : \mathbf{i}_o \neq \hat{\mathbf{x}}.$$

 \forall i_0 : $i_0 + et$ \forall $\hat{x} \in A(x_n)$, \exists i_0 : $i_0 + \hat{x}$.

(ii) So \hat{x} est un point d'accumulation isolé de (x_n) et ayant une force strictement positive, alors en prenant: $\alpha(n) = n$, $\beta(n) = n^2$, on a:

$$\alpha(n) = n$$
, $\beta(n) = n^2$, on α :

Démonstration

- (i) Les conditions du théorème 2 sont satisfaites.
- (ii) Soit $\varepsilon = d(\hat{x}, A(x_n) \{\hat{x}\}) > 0$.

il existe
$$n_0$$
 tel que si $n \ge n_0$ alors :

$$\begin{cases} x_n^{n^2} \cap B(\hat{x}, \epsilon/5) \neq \emptyset \\ \text{et} \\ x_n \in B(\hat{x}, \epsilon/5) \text{ ou } x_n \notin B(\hat{x}, 3\epsilon/5). \end{cases}$$

On prend alors : $i_0 \ge n_0$ tel que $d(x_{i_0}, \hat{x}) \le \epsilon/5$.

2 - Les algorithmes S

On se donne (\mathbf{x}_n) , $(\alpha(n), \beta(n))$ comme dans le paragraphe 1. Soit a ϵ E.

Algorithme $S(a, \alpha(n), \beta(n))$

Etape j

Soit I, l'ensemble des entiers ℓ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(j) \leq \ell \leq \beta(j) \\ \\ d(x_{\ell}, a) = \min \left\{ d(x_{m}, a) \; \middle| \; \alpha(j) \leq m \leq \beta(j) \right\}. \end{array} \right.$$

Soit i = max I .

On pose : $s_j = x_{i_j}$.

Une fois les paramètres a, $(\alpha(n), \beta(n))$ fixés, l'algorithme S extrait une sous-suite (s_i) en prenant, dans chacune des tranches définies par $\alpha(n)$, $\beta(n)$, le point le plus proche de a (lorsqu'il y a plusieurs points réalisant le minimum, il choisit celui de plus grand indice).

Si la sous-suite
$$(x_i) = (s_j)$$
 converge vers \hat{x} , on écrira : $(a, \alpha(n), \beta(n)) \uparrow \hat{x}$

ou même a † x

Pour exprimer que $(x_i) = (s_i)$ converge, on écrira : $(a, \alpha(n), \beta(n)) \uparrow$

ou même a 🕇

Exemple 1

Prenons E = \mathbb{R} et considérons (\mathbf{x}_n) définie par :

$$x_{2n} = -(1 + 1/2^n)$$

$$x_{2n+1} = + (1 + 1/2^n).$$

Fixons dans un premier temps : $\alpha(n) = 2n$, $\beta(n) = 2n+1$.

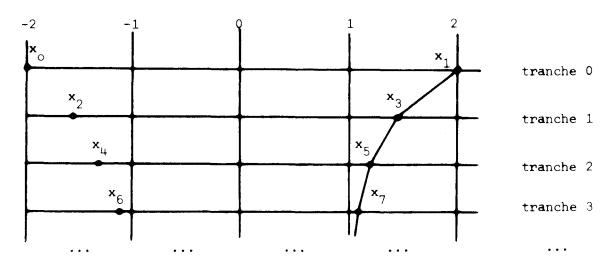


Figure 7

Si on prend $a \ge 0$, on obtient : $a \uparrow +1$.

Si on prend a < 0, on obtient : $a \uparrow -1$.

On a donc :

(*) ¥a:a↑

$$(**) \ \ \hat{x} \in A(x_n) \ \ \exists \ a : a \land \hat{x}$$

Fixons maintenant :

$$\alpha(n) = 3n, \beta(n) = 3n+2.$$

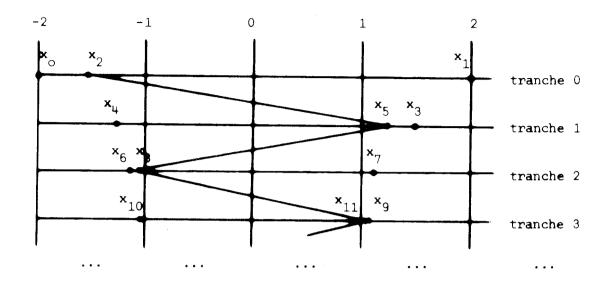


Figure 8

Si on prend : a > 0, on obtient : $a \uparrow +1$.

Si on prend : a < 0, on obtient : a \uparrow -1.

Si on prend : a = 0, on obtient :

$$(s_i) = (x_2, x_5, x_8, x_{11}, \dots)$$

et donc (s.) ne converge pas.

Exemple 2

E = C (le corps des nombres complexes).

$$x_n = e^{in}(1 + 1/2^n)$$

$$A(x_n) = \{z \in C \mid |z| = 1\}.$$

Si on choisit $\beta(n)$ - $\alpha(n)$ < C (C étant une constante fixée), alors aucun point a ne fournira de suite convergente.

Si on choisit : $\alpha(n) = 2^n$,

$$\beta(n) = \alpha(n+1) - 1,$$

alors avec: arg a = θ , on aura : a \uparrow e θ ,

et avec : a = 0, on aura : $A(s_i) = A(x_n)$.



Théorème 4

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(o")
$$\lim_{i \in \mathbb{N}} X_{\alpha(i)}^{\beta(i)} = A(x_n)$$

(o") $\lim_{i \in \mathbb{N}} X_{\alpha(i)}^{\beta(i)} = A(x_n)$ (\gamma) $\operatorname{card} \{x \in A(x_n) \mid d(a, x) = d(a, A(x_n))\} = 1,$

Remarque

D'après la proposition 1 (voir aussi [2]), il est toujours possible de choisir $(\alpha(n), \beta(n))$ pour que (σ'') soit vérifiée.

De même il est clair qu'il est toujours possible de prendre a vérifiant (γ) . Les conditions de ce théorème sont malgré tout moins commodes à utiliser que celles du théorème 1, car elles font intervenir de façon essentielle $A(x_n)$.

Démonstration

Soit \hat{x} le seul élément de $A(x_n)$ tel que :

$$d(a, \hat{x}) = d(a, A(x_n)).$$

Montrons que : $\lim_{j\to\infty} s_j = \hat{x}$.

Par hypothèse : $\hat{\mathbf{x}} \in \lim_{j \to \infty} \inf_{\alpha(j)} X_{\alpha(j)}^{\beta(j)}$.

Il existe donc une sous-suite (x_k) convergente vers \hat{x} et telle que :

$$\forall$$
 $j \in \mathbb{N} : x_{k_{j}} \in X_{\alpha(j)}^{\beta(j)}$.

Donc:

$$\lim_{j\to\infty} d(a, x_i) = d(a, \hat{x}).$$

Cette dernière relation avec le fait que les boules fermées de E sont compactes, implique que :

$$\lim_{j\to\infty} x = \hat{x}.$$

3 - LES ALGORITHMES U

Fondés sur des idées plus complexes que les algorithmes T et S, les algorithmes U sont destinés à fournir des résultats plus fins sur la suite initiale (\mathbf{x}_n) : ils doivent extraire simultanément plusieurs sous-suites convergentes.

Soit k un entier fixé (c'est le nombre de sous-suites que l'on extrait). Soient $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ deux suites d'entiers vérifiant :

$$\forall p \in \mathbb{N} : \beta(p) \ge \alpha(p) + k-1,$$

$$\alpha(p) \ge p.$$

Algorithme $U(k, \alpha(p), \beta(p))$

Etape p

Les étapes précédentes ont déterminé k sous-suites finies $(x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{p-1}^1)$, $(x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{p-1}^2)$, \ldots , $(x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{p-1}^k)$; l'étape p va déterminer k points $x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^k$ qui vont les allonger chacune d'un point.

Phase de recherche de k points mutuellement éloignés

Pas 1 On pose $a_1 = x_{\beta(p)}$,

- Pas 2 On pose $A_1 = \{a_1\}$ et on cherche le point x_i , i ϵ $\{\alpha(p), \alpha(p)+1, \ldots, \beta(p)\}$ le plus éloigné de A_1 (s'il y a des ex-aequo, on choisit par exemple le x_i d'indice le plus grand). Ceci détermine le point a_2 .
- Pas 3 On pose $A_2 = \{a_1, a_2\}$ et on cherche le point x_i , i ϵ $\{\alpha(p), \alpha(p) + 1, \ldots, \beta(p)\}$ le plus éloigné de A_2 . Ceci détermine le point a_3 .

Pas k On pose $A_{k-1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ et on cherche le point $x_i \in \{\alpha(p), \alpha(p)+1, \ldots, \beta(p)\}$ le plus éloigné de A_{k-1} . Ceci détermine le point a_k .

Phase d'allongement des sous-suites finies

Pas 1 On prend pour x_p^1 le a_i le plus proche de x_{p-1}^1 (s'il y a des ex-aequo, on choisit par exemple le a_i d'indice le plus grand).

Pas 2 On prend pour x_p^2 le a_i ($i \in \{1, 2, ..., k\}$, $a_i \neq x_p^1$) le plus proche de x_{p-1}^2 .

...

Pas k On prend pour x_p^k le seul a qui reste dans $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ - $\{x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^{k-1}\}$

(A l'étape 0, la phase d'allongement des sous-suites finies se réduit à poser : $x_p^1 = a_1, x_p^2 = a_2, \ldots, x_p^k = a_k$).

Exemple 1

Soient les suites (y_n) , (z_n) et (x_n) définies par :

$$(y_n) = (3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, ...);$$

 $(z_n) = (2, -2, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/4, -1/4, 1/8, -1/8, ...);$
 $(x_n) = (y_n + z_n).$

On applique à (x) l'algorithme U(3, 5p, 5p+4); les premières étapes sont :

Etape 0 Points traités : x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , x_4 .

$$a_1 = x_4$$
; $a_2 = x_3$; $a_3 = x_0$;
 $x_0^1 = a_1$; $x_0^2 = a_2$; $x_0^3 = a_3$.

Etape 1 Points traités : x_5 , x_6 , x_7 , x_8 , x_9 .

$$a_1 = x_9$$
; $a_2 = x_7$; $a_3 = x_8$;
 $x_1^1 = a_2$; $x_1^2 = a_3$; $x_1^3 = a_1$.

Etape 2 Points traités : x_{10} , x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{14} .

$$a_1 = x_{14}$$
; $a_2 = x_{13}$; $a_3 = x_{12}$;
 $x_2^1 = a_3$; $x_2^2 = a_2$; $x_2^3 = a_1$.

Il est clair que les suites (x_p^1) , (x_p^2) , (x_p^3) convergent respectivement vers 3, 1 et 2 qui sont les trois points d'accumulation de (x_p) .

Exemple 2

Il se peut que certaines des sous-suites construites ne soient pas convergentes ; en voici un exemple :

soient
$$(y_n) = (0, 0, 5, 0, 5, 5, 0, 0, 5, 0, 5, 5, ...)$$
, $(z_n) = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, ...)$, $(x_n) = (y_n + z_n)$.

On applique l'algorithme U(3, 3p, 3p+2) :

Etape 0:
$$x_0^1 = x_2$$
, $x_0^2 = x_0$, $x_0^3 = x_1$.

Etape 1:
$$x_1^1 = x_4$$
, $x_1^2 = x_3$, $x_1^3 = x_5$.

Etape 2:
$$x_2^1 = x_8$$
, $x_2^2 = x_6$, $x_2^3 = x_7$.

Etape 3:
$$x_3^1 = x_{10}$$
, $x_3^2 = x_{9}$, $x_3^3 = x_{11}$.

Etape
$$\frac{4}{4}$$
: $x_{4}^{1} = x_{14}^{1}$, $x_{4}^{2} = x_{12}^{2}$, $x_{4}^{3} = x_{13}^{2}$.

Etape 5:
$$x_5^1 = x_{16}$$
, $x_5^2 = x_{15}$, $x_5^3 = x_{17}$.

Les sous-suites (x_n^1) et (x_n^2) sont convergentes. La sous-suite (x_n^3) , elle, ne converge pas.

Théorème 5

Pour toute suite bornée (x_n) de points de \mathbb{R}^m ayant k' points d'accumulation y_1, y_2, \ldots, y_k , de force strictement positive, avec $k' \leq k$, l'algorithme. $U(k, p, p^2+k)$ construit k sous-suites dont l'une au moins converge vers $y_1(resp, y_2, y_3, \ldots, y_k)$. En particulier lorsque k = k', toutes les sous-suites sont convergentes (vers y_1, y_2, \ldots, y_k).

Remarques

- 1°) Le théorème 5 peut être généralisé de diverses manières :
- (a) à la place de \mathbb{R}^m , on peut prendre n'importe quel espace métrique localement compact, la suite (x_n) étant alors supposée contenue dans un compact.
- (b) à la place de U(k, p, p²+k) on peut prendre U(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$) avec $\lim_{p\to\infty} \alpha(p) = +\infty,$ $p \neq \mathbb{N} : \beta(p) \geq \alpha(p) + k,$ $\exists \lambda > 1, \exists c \in \mathbb{R}^{+*}, \exists p_o \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_o : \beta(p) \geq c(\alpha(p))^{\lambda}.$
- (c) La phase de recherche de k points mutuellement éloignés peut se faire de manière différente de la nôtre (que nous avons choisie pour des raisons d'économie de calculs). Par exemple, on peut d'abord rechercher une partition naturelle de l'ensemble $\{x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)}\}$ à l'aide des méthodes de classification automatique (voir [2] [3]) puis prendre un a dans chaque ensemble de la partition obtenue (voir [3]).
- 2°) Les expériences numériques qui ont été faites concernant ces algorithmes montrent que, outre une bonne efficacité, les temps de calculs nécessités sont relativement petits [4].

Démonstration

Soit (x_n) une suite satisfaisant les hypothèses du théorème.

Posons :
$$\varepsilon = \min \{d(y_i, y_j) \mid i, j \in \{1, 2, ..., k'\} i \neq j\}$$
;
 $V = B(y_1, \epsilon/5) \cup ... \cup B(y_k', \epsilon/5)$.

Soit $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \ge p_o : x_p \in V.$$

Soit $p_1 \ge p_0$ tel que :

$$\forall p \ge p_1, \forall i \in \{1, 2, ..., k'\} : \{x_p, x_{p+1}, ..., x_{\beta(p)}\} \cap B(y_i, \epsilon/5) \neq \emptyset$$

où $\beta(p) = p^2 + k$.

Pour tout $p \ge p_1$, les ensembles :

 $\{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)}\}$ of $B(y_i, \epsilon/5)$, if ϵ $\{1, 2, \ldots, k'\}$ forment une partition de l'ensemble $\{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)}\}$. Il est alors évident que la phase de recherche de points mutuellement éloignés donnera à l'étape p, k points : a_1, a_2, \ldots, a_k , tels que chaque boule $B(y_i, \epsilon/5)$ (if ϵ $\{1, 2, \ldots, k'\}$) contiendra au moins l'un d'eux.

Soit i(1) ϵ {1, 2, ..., k'} tel que : $x_{p_1}^1 \in B(y_{i(1)}, \epsilon/5)$.

Par récurrence, il est clair que : $\forall p \ge p_1 : x_p^1 \in B(y_{i(1)}, \epsilon/5)$; la sous-suite (x_p^1) est donc convergente vers $y_{i(1)}$.

Soit i(2) ϵ {1, 2, ..., k'} tel que : $x_{p_2}^2 \epsilon B(y_{i(2)}, \epsilon/5)$. Trois cas peuvent se présenter :

(a) $i(2) \neq i(1)$.

On établit alors par récurrence que : $\forall p \ge p_1 : x_p^2 \in B(y_{i(2)}, \epsilon/5);$ la sous-suite (x_p^2) est donc convergente vers $y_{i(2)}$.

(b) i(2) = i(1) et pour tout $p \ge p_1$:

il y a plus de deux points a $(i \in \{1, 2, ..., k\})$ dans la boule $B(y_{i(p)}, \epsilon/5)$. On établit alors par récurrence que :

$$\Psi p \ge p_1 : x_2^2 \in B(y_{i(1)}, \epsilon/5)$$

la sous-suite (x_p^2) est donc convergente vers $y_{i(1)}$.

(c) i(2) = i(1) et il existe $p \ge p_1$:

la boule $B(y_{i(1)}, \epsilon/5)$ ne contient qu'un seul a_i ($i \in \{1, 2, ..., k\}$)

Désignons par p_2 le plus petit de ces p, et soit i'(2) ϵ {1, 2, ..., k'} tel que $x_{p_0}^2$ ϵ $B(y_{i'(2)}, \epsilon/5)$.

On a i'(2) \(\neq \) i(1) ce qui par récurrence nous donne :

$$\forall p \ge p_2 : x_p^2 \in B(y_{i'(2)}, \epsilon/5),$$

la suite (x_p^2) converge donc vers $y_{i'(2)}$.

On continue de façon analogue. On montre que la suite (x_p^3) , ou bien est convergente, ou bien admet deux points d'accumulation $y_{i(1)}$ et $y_{i(2)}$ (ou $y_{i'(2)}$), et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait trouvé k' suites convergentes.

On remarquera que parmi les k' suites convergentes, il y a toujours (x^{2}_{p}) , et (x^{2}_{p}) . Cette dissymétrie entre les deux premières sous-suites extraites et les autres a son origine dans la dissymétrie de la phase d'allongement.

Remarque

En "composant" un algorithme de recherche du nombre de points d'accumulation et un algorithme du type U, on peut extraire exactement autant de sous-suites infinies de la suite initiale que de points d'accumulation. On peut aussi dans ce but utiliser l'algorithme basé sur une méthode plus directe, décrit dans [3] p. 166-174.

4 - Résultats de limitation

Nous présentons ici deux résultats de limitation: le premier (théorème 6) concerne les algorithmes d'extraction d'une sous-suite, le second (théorème 7) concerne les algorithmes d'extraction simultanée. Les conséquences de ces énoncés sont nombreuses et permettent entre autres de voir que les hypothèses formulées dans les paragraphes 1, 2 et 3 pour obtenir la convergence de nos algorithmes ne peuvent pas être supprimées (il n'est pas impossible par contre que certaines puissent être remplacées par d'autres, de natures différentes).

Théorème 6

Si E possède deux points ou plus, il n'existe aucun algorithme pour suites A tel que pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ ayant des points d'accumulation, la suite transformée (t_n) soit une sous-suite convergente de (x_n) .

Remarques

- 1°) On peut améliorer ce théorème de diverses façons :
- (a) en remplaçant "pour toute suite $(x_n) \in E^{N_n}$ par "pour toute suite ayant 1 ou 2 points d'accumulation";
- (b) en remplaçant "pour toute suite $(x_n) \in E^{N_n}$ par "pour toute suite ayant 2 points d'accumulation";
- (c) en remplaçant "soit une sous-suite convergente de (x_n) " par "soit une suite de points de E convergente vers l'un des points d'accumulation de (x_n) ". Pour (a) et (c), la démonstration donnée plus bas s'adapte facilement. Pour (b) une technique un peu différente est nécessaire.
- 2°) Ce résultat montre en particulier qu'aucun choix de i_0 , $\alpha(n)$, $\beta(n)$ ne pourra être satisfaisant pour toute suite (x_n) (chose qui était intuitivement assez claire), mais il montre aussi qu'aucun algorithme (aussi compliqué soit-il, et même basé sur des principes totalement différents de ceux étudiés dans les paragraphes précédents) ne pourra extraire une sous-suite convergente de toute suite ayant des points d'accumulation.

Démonstration

Soient a, b ϵ E, a \neq b.

Raisonnons par l'absurde en supposant donné F un algorithme pour suites tel que pour toute suite (x_n) ϵ $\stackrel{\mathbb{N}}{E}$ ayant des points d'accumulation, la suite transformée par F de (x_n) soit une sous-suite convergente de (x_n) .

Soit
$$(x_n^0) = (a, a, a, ...)$$
.

Notons (t_n^0) la suite obtenue par F avec (x_n^0) . On a nécessairement :

 $t_n^0 = a pour tout n.$

Posons m(0) = 0. Soit n(0) le plus grand indice des points de (x_n^0) ayant servi au calcul de $t_{m(0)}^0$.

Soit la suite :

$$(x_n^1) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n(0)}^0, b, b, \ldots)$$

Notons (t_n^1) la suite obtenue par F avec (x_n^1) . On a nécessairement :

 $t_{m(o)}^{1} = a \operatorname{car}(x_{m}^{1}) \operatorname{commence} \operatorname{par} \operatorname{les} \widehat{\operatorname{memes}}(n(0)+1) \operatorname{premiers} \operatorname{points} \operatorname{que}(x_{n}^{o})).$

D'autre part (par hypothèse sur F), il existe m(1) > m(0) tel que : $t_{m(1)}^{1} = b$.

Soit n(1) le plus grand indice des points de (x_n^1) ayant servi au calcul des t_i^1 , i ϵ {0, 1, ..., m(1)}.

Soit la suite :

$$(x_n^2) = (x_0^1, x_1^1, ..., x_{n(1)}^1, a, a, ...)$$

Notons (t_n^2) la suite obtenue par F avec (x_n^2) . On a nécessairement :

$$t_{m(o)}^2 = a, t_{m(1)}^2 = b.$$

Il existe m(2) > m(1) tel que $t_{m(2)}^2 = a$.

etc ...

Considérons la suite :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n(0)}^0, x_{n(0)+1}^1, \dots, x_{n(1)}^1, x_{n(1)+1}^2, \dots, x_{n(2)}^2, \dots)$$
Notons (t_n) la suite obtenue par F avec (x_n) .

Par construction :

 (t_n) n'est donc pas convergente, ce qui contredit l'hypothèse faite sur F.

Théorème 7

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$. Soit E un espace métrique ayant au moins un point d'accumumution. Il n'existe aucun algorithme pour suites (de $E^{\mathbb{N}}$ dans $(E^k)^{\mathbb{N}}$) tel que : pour toute suite bornée (\mathbf{x}_n) ayant k points d'accumulation l'algorithme construise k sous-suites (\mathbf{x}_n^1) , (\mathbf{x}_n^2) , ..., (\mathbf{x}_n^k) chacune convergente vers un point d'accumulation différent de (\mathbf{x}_n) .

Remarques

1°) Ce résultat montre que, même si l'on connaît le nombre de points d'accumulation d'une suite il n'est pas possible en général de construire des sous-suites convergentes vers tous ces points d'accumulation; ceci signifie que les hypothèses supplémentaires que nous avons du faire pour obtenir des résultats sur les algorithmes U ne peuvent pas être supprimées (même en envisageant d'autres méthodes d'extraction).

2°) Le théorème 7 n'est plus vrai lorsque E n'admet pas de points d'accumulation, c'est-à-dire lorsque tous les points de E sont isolés. En effet on construit facilement l'algorithme voulu en utilisant que dans un espace où tous les points sont isolés : y est point d'accumulation de (x_n) si et seulement si : $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y\}$ est infini.

Démonstration

On suppose que k = 2; pour les autres valeurs de k, à des complications de notations près, la démonstration est la même.

Soit (R, C) un algorithme pour suites tel que pour toute suite (\mathbf{x}_n) ayant 2 points d'accumulation l'algorithme (R, C) construise deux sous-suites (\mathbf{y}_n) , (\mathbf{z}_n) chacune convergente vers un point d'accumulation différent de (\mathbf{x}_n) .

Nous allons obtenir une contradiction.

Désignons par a, un point d'accumulation de E et soit (a_o, a₁, a₂, ...) une suite de points distincts de a, convergente vers a. Soit b un point distinct de a. Nous allons construire successivement des suites que nous noterons :

$$(x_n^0), (x_n^1), \ldots, (x_n^m), \ldots$$

0 - la suite (x_n^0) est définie par :

$$(x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots) = (a, a_0, a, a_0, a, a_0, \dots).$$

Les suites (y_n^0) et (z_n^0) construites par l'algorithme sont convergentes l'une vers a, l'autre vers a .

Soit $\theta(0)$ le plus petit entier i tel que : $y_i^0 \neq z_i^0$. Jusqu'à l'étape $\theta(0)$, l'algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (x_n^0) ; soit $\gamma(0)$ le plus grand indice des points intervenus.

Pour toute suite (x_n) commençant par les mêmes $(\gamma(0)+1)$ -premiers points que (x_n^0) l'algorithme donnera les mêmes $(\theta(0)+1)$ -premières réponses et donc :

$$\{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_{0}\}.$$

1 - La suite (x_n^1) est définie par :

$$\begin{cases} x_{i}^{1} = x_{i}^{0} \text{ pour tout } i \leq \gamma(0), \\ (x_{\gamma(0)+1}^{1}, x_{\gamma(0)+2}^{1}, \dots) = (b, a, a_{1}, a, a_{1}, a, a_{1}, \dots). \end{cases}$$

Cette suite admet bien deux points d'accumulation a et a_1 . Les suites (y_n^1) et (z_n^1) construites par l'algorithme seront des sous-suites de (x_n^1) , chacune convergente, l'une vers a_1 ; il existe donc un entier $\theta(1) \geq \theta(0)$

$$\{y_{\theta(1)}^1, z_{\theta(1)}^1\} \subset \{a, a_1\}$$

Jusqu'à l'étape $\theta(1)$, l'algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (\mathbf{x}_n^1) ; soit $\gamma(1)$, le plus grand indice des points intervenus. (On a : $\gamma(1) \geq \gamma(0)$).

Pour toute suite (x_n) commençant par les mêmes $(\gamma(1)+1)$ -premiers points que (x_n^1) , l'algorithme donnera les mêmes $(\theta(1)+1)$ -premières réponses et donc :

$$\{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_0\},\$$
 $\{y_{\theta(1)}, z_{\theta(1)}\} \subset \{a, a_1\}.$

2 - La suite (x_n^2) est définie par :

$$\begin{cases} x_{i}^{2} = x_{i}^{1} \text{ pour tout } i \leq \gamma(1), \\ (x_{\gamma(1)+1}^{2}, x_{\gamma(1)+2}^{2}, \dots) = (b, a, a_{2}, a, a_{2}, a, a_{2}, \dots) \end{cases}$$

Cette suite admet bien deux points d'accumulation a et a_2 . Les suites (y_n^2) et (z_n^2) construites par l'algorithme seront des sous-suites de (x_n^2) , chacune convergente, l'une vers a, l'autre vers a2; il existe donc un entier $\theta(2) \ge \theta(1)$, tel que :

$$\{y_{\theta(2)}^2, z_{\theta(2)}^2\} \subset \{a, a_2\}.$$

Jusqu'à l'étape $\theta(2)$, l'algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (x_n^2) ; soit $\gamma(2)$, le plus grand indice des points intervenus. (On a : $\gamma(2) \ge \gamma(1)$).

Pour toute suite (x_n) commençant par les mêmes $(\gamma(2)+1)$ -premiers points que (\mathbf{x}_n^1) , l'algorithme donnera les mêmes $(\theta(2)+1)$ -premières réponses et donc : $\{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{\mathbf{a}, \mathbf{a}_0\}, \\ \{y_{\theta(1)}, z_{\theta(1)}\} \subset \{\mathbf{a}, \mathbf{a}_1\},$

$$\{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_{o}\},\$$

$$\{y_{\theta(1)}, z_{\theta(1)}\} \subset \{a, a_1\}$$

$$\{y_{\theta(2)}, z_{\theta(2)}\} \subset \{a, a_2\}$$

etc ...

Lorsque les suites (x_n^0) , (x_n^1) , ... sont construites, que les indices $\theta(0)$, $\theta(1)$,... et les indices $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, ... sont déterminés, on construit la suite (x_n) : $(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{\gamma(0)}^0, x_{\gamma(0)+1}^1, \dots, x_{\gamma(1)}^1, x_{\gamma(1)+1}^2, \dots)$

Cette suite a deux points d'accumulation a et b, donc les suites (y_n) et (z_n) construites par l'algorithme devraient toutes les deux converger, l'une vers a, l'autre vers b ce qui est impossible car :

$$\{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_0\}$$
 $\{y_{\theta(1)}, z_{\theta(1)}\} \subset \{a, a_1\}$
 $\{y_{\theta(2)}, z_{\theta(2)}\} \subset \{a, a_2\}$

RÉFÉRENCES

- [1] BERGE C. "Espaces topologiques Fonctions multivoques", Dunod, Paris, 1966.
- [2] BERTIER P. et BOUROCHE J.M. "Analyse des données multidimensionnelles", Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
- [3] DELAHAYE J.P. "Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites", Thèse de 3ème cycle, Lille, 1979.
- [4] DELAHAYE J.P. "Expériences numériques sur les algorithmes d'extraction pour suites non convergentes", Publication ANO n° 5, Université des Sc. et Tech. de Lille 1979.
- [5] DELAHAYE J.P. "Algorithmes-questions et algorithmes d'extraction pour suites non convergentes", Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'EDF, C, n° 1, 1979 pp. 17-34.
- [6] DELAHAYE J.P. "Algorithmes pour suites non convergentes", Numer. Math., 34, 1980, pp 333-347.
- [7] DELAHAYE J.P. "Théorèmes de points fixes centrés", Publication ANO n° 25. Université des Sc. et Tech. de Lille, 1980.
- [8] DELAHAYE J.P. "Algorithmes pour extraire une sous-suite convergente d'une suite non convergente", Proceeding of "Conference optimization: theory and algorithms" Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, à paraître.
- [9] DELAHAYE J.P. "The cluster point set of a non-convergent sequence", Publication ANO no 68, Université des Sc. et Tech. de Lille, 1982.
- [10] DELAHAYE J.P. et DENEL J. "Equivalence des continuités des applications multivoques dans des espaces topologiques", Publication nº 111 du Laboratoire de Calcul de l'Uni. des Sc. et Tech. de Lille, 1978.

- [11] DELAHAYE J.P. et DENEL J. "The continuities of point-to-set maps; definitions and equivalences", Mathematical Programming Study, 10, 1979, pp. 8-12.
- [12] DENEL J. "Extension of the continuity of point-to-set maps: applications to fixed point algorithms", Mathematical Programming Study 10, 1979, pp 48-
- [13] EAVES B.C. "Non linear programming via Kakutani fixed points", Working paper no 294, Center for Research in Management Science. Univ. of California, Berkeley, 1976.
- [14] EAVES B.C. "Computing Kakutani Fixed Points", SIAM J. Appl. Math. 21, 1971, pp. 236-244.
- [15] EAVES B.C. "Homotopies for computation of fixed points", Mathematical Programming 3, 1972, pp 1-22.
- [16] EDELSTEIN M. "On fixed and periodic point under constructive mapping", Jour. London Math. Soc. 37, 1962, pp. 74-79.
- [17] FIOROT J.C. et HUARD P. "Composition and union of general algorithms of optimization", Mathematical Programming Study, 10, 1979, pp. 69-85.
- [18] HUARD P. "Optimisation dans \mathbb{R}^{n} ", Cours de DEA Polycopié. Université des Sc. et Tech. de Lille 1972.
- [19] HUARD P. "Extensions of Zangwill's Theorem", Mathematical Programming Study 10, 1979, pp. 98-103.
- [20] KAKUTANI S. "A generalisation of Brouwer's fixed point theorem", Duke Math. J. 8, 1941, pp. 457-459.
- [21] MEYER G.G.L. "Asymptotic Properties of Sequences Iteratively Generated by Point-to-set Maps", Mathematical Programming Study 10, 1979, pp. 115-125
- [22] MEYER G.G.L. et RAUP R.C. "On the structure of cluster point sets of iteratively generated sequences", Jour of Optimization Theory and Applications, 28, 1979 pp. 353-362.

- [23] POLAK E. "Computational Methods in Optimization: A Unified Approach", Academic Press, New-York, 1971.
- [24] SAIGAL R. "The fixed point approach to nonlinear programming", Mathematical Programming Study 10, 1979 pp. 142-157.
- [25] SCARF A. "The approximation of fixed points of a continuous mapping", SIAM J. Appl. Math. 15, 1967, pp. 1328-1343.
- [26] SHARKOVSKII A.N. "Attracting and Attracted Sets", Soviet Math. 6, 1965, pp. 268-270.
- [27] TODD M.J. "The computation of fixed points and applications", Springer-Verlag, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 124, 1976.
- [28] ULAM S. et STEIN P. "Non-linear Transformation Studies on Electronic Computers", Rozprawy Matematyczne 39, 1964, pp. 3-66.
- [29] ZANGWILL W.E. "Nonlinear programming: A unified approach", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.

CHAPITRE 4 Systèmes ordonnés de familles ACCÉLÉRABLES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous introduisons et étudions sous leur aspect général diverses notions pouvant être utiles dans les problèmes d'accélération de la convergence.

Nous commençons au § 1 par définir la vitesse d'accélération, et la vitesse asymptotique d'accélération (qui nous redonne l'accélération telle qu'elle est introduite habituellement [1] [14]). Nous rappelons aussi les définitions de degré d'accélération [11] et de suite devinée.

Au § 2, grâce à la notion de transformation normale, nous adaptons les définitions du § 1 aux familles de suites, ce qui introduit divers systèmes ordonnés de familles de suites.

Après le § 3, destiné à fournir quelques exemples, nous menons au § 4 une étude détaillée des relations entre les divers systèmes ordonnés du § 2.

Les résultats obtenus montrent qu'aucune des définitions du § 1 ne peut être réduite à une autre, ce qui en justifie a posteriorî l'intérêt.

Le § 5 est consacré à l'étude de l'existence de familles accélérables maximales et aux problèmes liés.

Mis à part le théorème 2 du § 4, tous les résultats présentés ici sont nouveaux (un exposé oral en a été fait dans [6]).

Notations

 $\mathbf{E}^{\mathbf{N}}$: Ensemble des suites (infinies) d'éléments de E ;

E^(IN) : Ensemble des suites finies d'éléments de E ;

Conv (E): Ensemble des suites convergentes d'éléments de E; Soient: (x_n) , (y_n) , (x_n^0) , (x_n^1) , ..., (x_n^i) , ..., ϵ Conv (E), nous noterons leurs limites: x, y, x^0 , x^1 , ..., x^i ,

 $\operatorname{Conv}^{\star}$ (E): Ensemble des suites $(\mathbf{x}_{n}) \in \operatorname{Conv}$ (E) telles que : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n : \mathbf{x}_{n} \neq \mathbf{x}.$

 $\operatorname{Conv}_{o}(\mathbb{R}^{+})$: Ensemble des suites $(x_{n}) \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}^{+})$ telles que : x = 0;

P(E) : Ensemble des parties de E .

I - VITESSE D'ACCÉLÉRATION, ACCÉLÉRATION, DEVINATION.

Ce paragraphe est consacré à la définition des cinq notions d'accélération que nous utiliserons ensuite. A celle habituelle ([1] [11] [14]) d'accélération, nous avons ajouté celle d'accélération avec une vitesse (ε_n) et celle d'accélération avec une vitesse asymptotique (ε_n), qui nous permettent de mesurer la qualité de l'accélération fournie par une suite (t_n) relativement à une autre suite (x_n).

Les deux autres notions sont celle de degré d'accélération que nous reprenons de [11], et celle de devination qui traduit pour les suites ce qu'on appelle habituellement l'exactitude pour les transformations de suites.

Définitions

E désignera toujours un espace métrique, dont la distance sera notée d. Soit (x_n) ϵ Conv (E), soit (ϵ_n) ϵ Conv (R^{\dagger}) .

Nous dirons que <u>la suite (t) ϵ Conv (E) converge plus vite que la suite (x) avec la vitesse (ϵ) (resp. <u>avec la vitesse asymtotique (ϵ))</u> si et seulement si (x désigne la limite de x):</u>

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(t_n, x) \leq \varepsilon_n d(x_n, x)$$

$$(resp. \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n : d(t_n, x) \leq \varepsilon_n d(x_n, x)).$$

Nous dirons que <u>la suite (t</u>) ϵ Conv (E) converge plus vite que <u>la suite (x</u>) si et seulement si, il existe (ϵ _n) ϵ Conv (\mathbb{R}^+) telle que (t_n) converge plus vite que <u>la suite (x</u>_n) avec <u>la vitesse (ϵ _n) (1). Cette condition peut aussi s'écrire :</u>

$$\forall \ \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \ \exists \ n_o \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_o : \ d \ (t_n, x) \leq \epsilon \ d(x_n, x).$$
 Lorsque $(x_n) \in \operatorname{Conv}^*(E)$, cette condition s'écrit encore :

⁽¹⁾ On obtient une définition équivalente en écrivant "avec la vitesse asymptotique ($\epsilon_{\rm n}$)".

$$\lim_{n\to\infty} d(t_n, x) / d(x_n, x) = 0.$$

Nous dirons que <u>la suite (t</u>) devine la limite de la suite (\mathbf{x}_n) ϵ Con $\mathbf{v}(E)$ (on devine (\mathbf{x}_n)) si et seulement si :

 $(t_n) \quad \text{converge plus vite quella suite } (x_n) \text{ avec la vitesse asymptotique } (\epsilon_n) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots).$

Cette condition peut s'écrire :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n : t_n = x.$$

Pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \ge 1$, nous dirons que <u>la suite (t)</u> ϵ Conv (E) converge plus vite que (x) avec le degré λ si et seulement si :

$$\forall \ \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \ \exists \ n_o \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_o : \ d(t_n, x) \leq \epsilon \ (d(x_n, x))^{\lambda}.$$

L'accélération avec le degré 1 coïncide donc simplement avec l'accélération.

Exemples

La suite $(\frac{1}{2^n})$ converge plus vite que $(\frac{1}{n+1})$ avec la vitesse $(\varepsilon_n) = (\frac{n+1}{2^n})$, et avec par exemple la vitesse asymptotique $((\frac{2}{3})^n)$.

La suite $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, \dots)$ devine la limite $(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$.

La suite $(\frac{1}{5^n})$ converge plus vite que la suite $(\frac{1}{2^n})$ avec le degré 2.

2 - Transformations pour l'accélération de la convergence ; familles Accélérables

Chacune des définitions données au § 1 pour les suites, s'adapte (grâce à la notion de transformation normale), aux familles de suites. Ceci va nous permettre de parler de familles accélérables avec la vitesse (ε_n) , de familles devinables etc ... Les systèmes ordonnés (par l'inclusion) de familles de suites ainsi définis seront étudiés plus loin.

Définitions

Soit T une transformation de $E^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ définie sur $S \in Conv$ (E) (T ϵ Trans (E, E)).

Nous dirons que T est régulière sur S, si pour toute suite (x_n) ϵ S, la suite transformée de (x_n) par T est convergente de même limite que (x_n) . Soit en plus (ϵ_n) ϵ $\operatorname{Conv}_{O}(\mathbb{R}^+)$.

Nous dirons que <u>T accélère la convergence de S</u> (resp. accélère la convergence de S avec la vitesse (ε_n); resp. accélère la convergence de S avec la vitesse asymptotique (ε_n); resp. accélère la convergence de S avec le degré λ ; resp. devine S) si pour toute suite (x_n) ϵ S, la suite transformée de (x_n) par T converge plus vite que (x_n) (resp. converge plus vite que (x_n) avec la vitesse (ε_n); resp. converge plus vite que (x_n) avec la vitesse asymptotique (ε_n); resp. converge plus vite que (x_n) avec la vitesse asymptotique (ε_n); resp. converge plus vite que (x_n) avec le degré λ ; resp. devine la limite de la suite (x_n)).

Si T est une transformation qui devine S, nous dirons aussi que T est exacte sur S.

Remarque

Par définition, si T accélère S alors T est régulière sur S.

Nous dirons que la famille $S \subset \operatorname{Conv}(E)$ est <u>accélérable</u> (resp. est <u>accélérable avec la vitesse asymptotique</u> (ε_n) , resp. est <u>accélérable avec la vitesse asymptotique</u> (ε_n) , resp. est <u>accélérable avec le degré λ </u>, resp. est <u>devinable</u>) s'il existe une transformation normale accélérant la convergence de S (resp. accélérant la convergence de S avec la vitesse (ε_n) ; resp. accélérant la convergence de S avec la vitesse asymptotique (ε_n) ; resp. accélérant la convergence de S avec le degré λ ; resp. devinant S).

L'ensemble des familles accélérables de Conv (E) sera noté :

$$A(E)^{(1)}$$

L'ensemble des familles accélérables avec la vitesse (ϵ_n) sera noté :

$$A_{(\varepsilon_n)}$$
 (E).

L'ensemble des familles accélérables avec la vitesse asymptotique (ϵ_n) sera noté :

$$A'(\varepsilon_n)$$
 (E).

L'ensemble des familles accélérables avec le degré λ sera noté :

$$A_{\lambda}(E)$$
.

L'ensemble des familles devinables sera noté :

 $\mathcal{D}(E)$.

Remarques

- 1°) Il est très important de noter que dans notre définition, nous ne considérons que les transformations normales (c'est-à-dire 0-normales). Ce point de vue nous semble naturel, car dans tout ce qui est en rapport avec l'accélération de la convergence ce qui importe c'est le "progrès" que donne t_n comparé au dernier des termes utilisés pour calculer t_n , et moyennant ce que nous appelons une normalisation on peut toujours supposer que ce dernier terme utilisé est x_n . Le cas du procédé Δ^2 d'Aitken illustre bien ce problème (voir [5] la remarque p. 324).
- 2°) Chercher à deviner une famille $S \subset \operatorname{Conv}(E)$ est équivalent à chercher un algorithme question satisfaisant pour la question "quelle est la limite de (x_n) ?" Le théorème de la p. 44 nous permet d'affirmer qu'il y a équivalence entre : .
 - il existe A ϵ TAlg (E, E) devinant S
- et il existe A ϵ TNorm (E, E) devinant S .

Mais cette situation est tout à fait particulière et, comme nous le verrons plus loin, ne se reproduit pas pour les autres notions.

(1) La notation A(E) ne doit pas être confondue avec la notation $A(x_n)$ qui désigne l'ensemble des points d'accumulation de (x_n) .

3°) Nous ne définissons pas la notion de famille "régularisable" car la transformation identique est régulière sur Conv (E) et donc toute famille $S \subset \text{Conv}$ (E) serait "régularisable".

3 - Exemples de familles accélérables de suites

a) Soit IK = IR ou C.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ on pose :

Lin (\mathbb{K}) = $\cup \{ \text{Lin}_{\lambda} (\mathbb{K}) \mid 0 < |\lambda| \le 1, \lambda \ne 1 \}$;

Chaque $\operatorname{Lin}_{\lambda}$ (TK) pour 0 < $|\lambda| \le 1$, $\lambda \ne 1$ est accélérable, et même Lin (TK) est accélérable par le procédé Δ^2 d'Aitken.

Avec nos notations, on a donc :

Lin
$$(\mathbb{K}) \in A (\mathbb{K})$$
.

b) Soit
$$(\varepsilon_n) \in \text{Conv}_0(\mathbb{R}^+)$$
. Posons:
$$S = \{(x_n) \in \text{Conv}(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}^+ : x_{n-1} - x \neq 0 \text{ et } \left| \frac{x_n^{-x}}{x_{n-1}^{-x}} + 1 \right| \leq 2\varepsilon_n \}$$

La transformation normale définie par :

$$t_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2},$$

accélère S avec la vitesse (ε_n) . En effet :

$$\left| \frac{t_n^{-x}}{x_n^{-x}} \right| = \left| \frac{(x_n^{-x}) + (x_{n-1}^{-x})}{2(x_n^{-x})} \right| \le \varepsilon_n$$

Avec nos notations, on a donc :

$$S \in A_{(\varepsilon_n)}$$
 (R).

c) Soit $(\alpha_n) \in \text{Conv}_0$ (\mathbb{R}^+) telle que $n \neq m \Rightarrow \alpha_n \neq \alpha_m$. Posons :

$$S = \{(\mathbf{x}_{n}) \in \text{Conv}(\mathbb{R}) \mid \\ \exists \ \mathbb{N} \in \mathbb{N}, \ \exists \ (\lambda_{0}, \ \dots, \ \lambda_{N}) \in \mathbb{R}^{N+1}, \ \forall \ \mathbf{n} \in \mathbb{N} : \ \mathbf{x}_{n} = \sum_{i=0}^{N} \lambda_{i} \ \alpha_{n}^{i} \}$$

Le procédé de Richardson [1] [2] est une transformation exacte pour S. Avec nos notations, on a donc :

$$S \in \mathcal{D}$$
 (IR).

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$S \in A'_{(\varepsilon_n)}(\mathbb{R}),$$

où (ϵ_n) désigne la suite constante et égale à zéro.

d) Soit $S = \{(x_n^i) \mid i \in \mathbb{N}\} \subset Conv$ (E) une famille dénombrable quelconque de suites convergentes.

Définissons l'algorithme normal (f_n) suivant :

$$\begin{cases} \cdot f_i(x_0, x_1, \dots, x_i) = x^j \text{ où j est le plus petit entier } k \leq i \\ \text{tel que } (x_0, x_1, \dots, x_i) = (x_0^k, x_1^k, \dots, x_i^k) \text{ si un tel entier } k \text{ existe.} \end{cases}$$

$$\cdot f_i(x_0, x_1, \dots, x_i) = x_i \text{ sinon}.$$

On voit facilement que cet algorithme est exact sur S ce qui signifie avec nos notations que :

On peut remarquer que l'algorithme ici défini est régulier sur Conv (E) tout entier, et que plus qu'un véritable algorithme d'accélération, c'est un algorithme "d'identification", en ce sens, qu'en fait il reconnait laquelle des suites de S on est en train de lui proposer, puis, une fois cette identification effectuée, il donne comme réponse la limite de la suite reconnue.

e) On trouvera des exemples de familles accélérables avec un degré $\lambda \neq 1$ dans [11].

4 - Relations entre les différents systèmes ordonnés de familles

ACCÉLÉRABLES

Parmi les définitions introduites, certaines se laissent-elles réduire à d'autres ? par exemple :

- . Toute famille accélérable est-elle accélérable avec une vitesse donnée ? (resp. avec une vitesse asymptotique donnée ?)
- . Les familles accélérables avec une vitesse asymptotique (ϵ_n) sont-elles accélérables avec une vitesse (ϵ'_n) ?

Quels rapports y a-t-il entre les familles accélérées avec une vitesse donnée et les familles devinées ?

C'est à ce type de questions que nous allons essayer de répondre ici. En même temps, nous donnerons des exemples montrant l'intérêt des cinq notions introduites, et nous serons aussi amenés à énoncer des conditions nécessaires pour qu'une famille S soit dans une catégorie donnée.

Le théorème suivant résulte immédiatement des définitions.

Théorème 1

$$(i) \ \forall \ (\varepsilon_n) \in \operatorname{Conv}_o(\mathbb{R}^+), \ \forall \ \lambda \in [1, \infty[:]] :$$

$$P(\operatorname{Conv}_o(\mathbb{R}))$$

$$U$$

$$A(\mathbb{R}) \Rightarrow A_{\lambda}(\mathbb{R})$$

$$U$$

$$U$$

$$V(\mathbb{R}) \subset A'_{(\varepsilon_n)}(\mathbb{R}) \Rightarrow A'_{(\varepsilon_n)}(\mathbb{R})$$

$$(iii) \ \forall \ (\epsilon_{n}), \ (\eta_{n}) \in \operatorname{Conv}_{o} \ (\mathbb{R}^{+}) :$$

$$(\forall \ n \in \mathbb{N} : \epsilon_{n} \geq \eta_{n}) \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{(\epsilon_{n})} & (\mathbb{R}) \supset A_{(\eta_{n})} & (\mathbb{R}) \\ A'_{(\epsilon_{n})} & (\mathbb{R}) \supset A'_{(\eta_{n})} & (\mathbb{R}) \end{pmatrix}$$

$$(iii) \ \forall \ \lambda, \ \lambda' \in [1, \infty[\ ; \ \lambda < \lambda' : : \\ A_{\lambda} & (\mathbb{R}) \supset A_{\lambda'} & (\mathbb{R}) .$$

$$(iv) \ \forall \ S \in A \ (\mathbb{R}) : \ S' \subset S \Rightarrow S \in A \ (\mathbb{R})$$

$$(\text{De même avec} : \ A'_{(\epsilon_{n})} & (\mathbb{R}), \ A_{(\epsilon_{n})} & (\mathbb{R}), \ A_{\lambda}(\mathbb{R}), \ \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

A partir d'ici, nous supposerons que $E=\mathbb{R}$ et nous nous contenterons d'indiquer en remarque les extensions possibles de nos résultats.

Théorème 2

Il existe des familles de suites réelles convergentes non accélérables : $A(\mathbb{R}) \neq P \ (\texttt{Conv} \ (\mathbb{R})).$

Nous ne démontrons pas ce théorème ici (voir [9] [10] et chapitre 5).

Remarque

Le théorème 2 s'étend à tous les espaces métriques ayant au moins un point d'accumulation.

Une famille accélérable étant donnée : y a-t-il une vitesse d'accélération (asymptotique ou non) naturellement associée à cette famille ? En général
la réponse est non :

Théorème 3

Remarque

Une famille appartenant à $A(\mathbb{R})$ mais à aucun $A_{(\epsilon_n)}$ (\mathbb{R}) (le lemme 1 en donne un exemple) est une famille accélérable mais qui (relativement à n'importe quel algorithme normal) contient des suites mal accélérées (et même aussi mal accélérées que l'on veut).

Démonstration

Elle résulte immédiatement du lemme suivant qui est intéressant en soi :

Lemme 1

$$| \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}, \ 0 < \lambda < 1, \ \forall \ (\varepsilon_n) \in \operatorname{Conv}_0 \ (\mathbb{R}^+) \ : \ \operatorname{Lin}_{\lambda} \ (\mathbb{R}) \notin A'_{(\varepsilon_n)} \ (\mathbb{R}).$$

Démonstration du lemme 1

Supposons donné (ε_n) ϵ Conv_o (\mathbb{R}^+) et A = (f_n) une transformation normale telle que pour toute suite (\mathbf{x}_n) ϵ Lin_{λ} (\mathbb{R}) , la suite transformée (t_n) accélère (\mathbf{x}_n) avec la vitesse asymptotique (ε_n) .

(0°) Soit (x_n^0) ϵ Lin $_{\lambda}$ (TR) définie par la donnée de x_0^0 , x_1^0 , tels que $x_0^0 < x_1^0$ et par la relation :

$$(x_{n+2}^{\circ} - x_{n+1}^{\circ})/(x_{n+1}^{\circ} - x_{n}^{\circ}) = \lambda$$

Cette suite converge vers $x^0 = x_0 + (x_1 - x_0) / (1 - \lambda)$.

Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| t_{n_0}^{\circ} - x^{\circ} \right| \le \varepsilon_{n_0} \left| x_{n_0}^{\circ} - x^{\circ} \right| \text{ et } \varepsilon_{n_0} < 1/2^{1}$$

(1°) Soit $(x_n^1) \in \operatorname{Lin}_{\lambda}(\mathbb{R})$ définie par :

$$x_{n}^{1} = x_{n}^{0} \text{ pour } n \leq n,$$

$$x_{n}^{0} - x_{n}^{0},$$

$$x_{n}^{1} = x_{n}^{0} + 4 \left(\frac{0}{2^{1}}\right).$$

Cette suite (x_n^1) converge vers : $x^1 = x^0 + 4 \cdot (\frac{0}{2^1})$

Et on montre que pour tout $x \ge x^1$:

$$\left| t_{n}^{\circ} - x \right| / \left| x_{n}^{\circ} - x \right| \ge \frac{1}{2^{1}} > \varepsilon_{n}.$$

Par hypothèse, il existe $n_1 > n_2$ tel que :

$$|t_{n_1}^1 - x^1| \le \varepsilon_{n_1} |x_{n_1}^1 - x^1| \text{ et } \varepsilon_{n_1} \le 1/2^2.$$

(2°) Soit
$$(x_n^2) \in \text{Lin}_{\lambda}$$
 (R) définie par : $x^1 - x_n^1$ $x_n^2 = x_n^1$ pour $n \le n_1$; $x_n^2 = x_n^1 + 4$ $(\frac{1}{2^2})$

Cette suite (x_n^2) converge vers $x^2 = x^1 + 4 \left(\frac{x^1 - x_n^1}{2^2}\right)$

Et on montre que pour tout $x \ge x^2$:

$$|t_{n_1}^1 - x| / |x_{n_1}^1 - x| \ge \frac{1}{2^2} > \epsilon_{n_1}.$$

Par hypothèse, il existe $n_2 > n_1$ tel que :

$$|t_{n_2}^2 - x^2| \le \varepsilon_{n_2} |x_{n_2}^2 - x^2| \text{ et } \varepsilon_{n_2} < 1/2^3.$$

(i+1°) Soit $(x_n^{i+1}) \in \text{Lin}_{\lambda}$ (IR) définie par : $x_n^{i+1} = x_n^{i} \text{ pour } n \leq n, \quad x_n^{i+1} = x_n^{i} + 4 \cdot (\frac{x_n^{i-1}}{n}).$

Cette suite (x_n^{i+1}) converge vers $x^{i+1} = x^i + 4$ $(\frac{x^i - x_n^i}{2^{i+1}})$, et on montre que pour tout $\dot{x} \ge x^{i+1}$:

$$|t_{n_{i}}^{i} - x| / |x_{n_{i}}^{i} - x| \ge \frac{1}{2^{i+1}} > \epsilon_{n_{i}}.$$

Par hypothèse, il existe $n_{i+1} > n_i$ tel que :

$$|t_{n_{i+1}}^{i+1} - x^{i+1}| \le \varepsilon_{n_{i+1}} |x_{n_{i+1}}^{i+1} - x^{i+1}| \text{ et } \varepsilon_{n_{i+1}} < 1/2^{i+2}.$$

La suite $(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^2, \dots)$ est transformée en la suite :

$$(t_n) = (t_0^0, t_1^0, \dots, t_{n_0}^0, t_{n_0+1}^1, \dots, t_{n_1+1}^1, t_{n_1+1}^2, \dots)$$

La suite (x_n) converge vers x qui vérifie :

$$x > x^i$$
 pour tout $i \in \mathbb{N}$,

et on a donc :

$$|t_{n_i} - x| / |x_n - x| > \epsilon_{n_i}$$
 pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Comme il est facile de voir que (x_n) $\in \text{Lin}_{\lambda}$, ceci contredit les hypothèses sur A.

Г

Remarque

Le théorème 3 reste vrai lorsqu'on remplace $\mathbb R$ par $\mathbb E\subset\mathbb R^n$, $\mathbb E\neq\emptyset$.

Une famille S accélérable avec une certaine vitesse asymptotique (ϵ_n) (quitte à prendre une suite (η_n) "plus lente") est-elle accélérable avec une certaine vitesse (η_n) ?

Là encore la réponse est négative en général :

Théorème 4

Quel que soit
$$(\varepsilon_n) \in \text{Conv}_0(\mathbb{R}^+)$$
:
$$\cup \{A_{(\eta_n)}(\mathbb{R}) \mid (\eta_n) \in \text{Conv}_0(\mathbb{R}^+), (\varepsilon_n) \leq (\eta_n)\} \notin A'(\varepsilon_n)(\mathbb{R}).$$

Démonstration

Soit $(\varepsilon_n) \in Conv_o$ (\mathbb{R}^+) . Posons :

$$T_{(\varepsilon_n)} = \{(x_n) \in \text{Conv}(\mathbb{R}) \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 : |x_n + \frac{1}{n+1} - x| \\ \le \varepsilon_n |x_n - x| \}$$

La transformation T définie par $t_n = x_n + \frac{1}{n+1}$ accélère $T_{(\epsilon_n)}$ avec la vitesse asymptotique (ϵ_n) , ce qui signifie avec nos notations que :

$$T_{(\varepsilon_n)} \in A^*_{(\varepsilon_n)} (\mathbb{R})$$

Le lemme suivant va nous permettre d'établir que $T_{(\epsilon_n)}$ n'appartient à aucun $A_{(\eta_n)}$ (R).

<u>Lemme 2</u>: (Condition nécessaire pour l'appartenance à $A_{(\eta_n)}$ (R)).

Soient
$$S \in A_{(\eta_n)}$$
 (IR), $k \in \mathbb{N}$, (x_n) , $(x'_n) \in S$ alors:
$$(\forall n \leq k : x_n = x'_n) \Rightarrow (|x-x'| \leq \eta_k (|x_k-x| + |x'_k-x'|))$$

Démonstration du lemme

Soit T une transformation normale accélérant $\textbf{A}_{(\eta_n)}$ (R) avec la vitesse $(\eta_n).$ Par hypothèse,on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \mathsf{t}_{k} - \mathsf{x} \right| \leq \mathsf{\eta}_{k} \left| \mathsf{x}_{k} - \mathsf{x} \right| \\ \left| \mathsf{t'}_{k} - \mathsf{x'} \right| \leq \mathsf{\eta}_{k} \left| \mathsf{x'}_{k} - \mathsf{x'} \right| \\ \mathsf{t}_{k} = \mathsf{t'}_{k} \end{array} \right.$$

Donc : $|x-x'| \le |x-t_k| + |t_k'-x'| \le \eta_k(|x_k'-x| + |x_k'-x'|)$

Pour terminer la démonstration du théorème, donnons-nous $(\eta_n) \in \text{Conv}_0$ (IR) et montrons que $T_{(\epsilon_n)} \notin A_{(\eta_n)}$ (IR).

Soit n tel que η_n < 1. Soient a, b $\in \mathbb{R}$, a \neq b; considérons les suites (x_n) et (x_n') définies par :

$$x_n = a = x_n' pour n \le n_0,$$

 $x_n = a - \frac{1}{n+1}, x_n' = b - \frac{1}{n+1} pour n > n_0.$

On peut appliquer le lemme avec k = n et on obtient que :

$$|a-b| \leq \eta_{n_0} |a-b|,$$

ce qui est impossible car nous avons choisi $\eta_n < 1$.

Remarque

Le théorème 4 reste vrai lorsqu'on remplace \mathbb{R} par $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E} \neq \emptyset$.

Selon les propriétés de la suite (ϵ_n) , une famille de suites S accélérable avec la vitesse asymptotique (ϵ_n) , est devinable ou ne l'est pas :

Théorème 5

Soit $(\varepsilon_n) \in \text{Conv}_0(\mathbb{R}^+)$:

(i) S'il existe une infinité d'entiers n tels que $\varepsilon_n = 0$ alors : $A'_{(\varepsilon_n)}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}),$ (ii) Sinon : $A'_{(\varepsilon_n)}(\mathbb{R}) \not\supseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}).$

$$A'(\varepsilon_n)$$
 (IR) = \mathcal{D} (IR),

$$A'_{(\varepsilon_n)}$$
 (R) $\neq \mathcal{D}$ (R).

Démonstration

(i) Supposons que ε_n = 0 pour n ϵ {n_o, n₁, ..., n_i, ...} avec n_o < n₁ < ... < n; <

Soit $S \in A'_{(\varepsilon_{-})}$ (R), nous allons montrer que $S \in \mathcal{D}$ (R).

Il existe $T = (f_n)$ un algorithme normal accélérant la convergence de S avec la vitesse asymptotique (ε_n) .

Définissons $T' = (f'_n)$ l'algorithme normal suivant :

Montrons que T' devine S . Soit (x_n) \in S, l'hypothèse sur T nous donne que :

$$t_{n_i} = x \text{ pour } i \ge i_0$$

et donc d'après la définition de T':

$$t'_j = x \text{ pour } j \ge n_i$$
.

(ii) Soit (ε_n) ϵ Conv_o (\mathbb{R}^+) tel que : \exists N ϵ N, \forall n \geq N : $\varepsilon_n \neq 0$.

On peut supposer sans perte de généralité que :

$$\forall$$
 $n \in \mathbb{N}$: $0 < \epsilon_n < 1$;

et que (ε_n) est décroissante.

En effet : si (ϵ_n) et (ϵ_n') ne diffèrent que par un nombre fini de termes

alors:
$$A'(\varepsilon_n)$$
 (R) = $A'(\varepsilon'_n)$ (R);

$$\text{. si } (\epsilon^{\prime}_{n}) \leq (\epsilon_{n}) \text{ alors: } A^{\prime}(\epsilon^{\prime}_{n}) \text{ (\mathbb{R}) } \subset A^{\prime}(\epsilon_{n}) \text{ (\mathbb{R}).}$$

Considérons la famille :

$$V_{(\varepsilon_n)} = \{(x_n) \in \text{Conv}(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n < x \text{ et } |x_n + \frac{1}{n+1} - x| < \varepsilon_n |x_n - x| \}.$$

On montre que pour toute suite $(x_n) \in Conv(\mathbb{R})$:

$$(x_n) \in V_{(\varepsilon_n)} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : \\ x_n + \frac{1}{(n+1)(1+\varepsilon_n)} < x < x_n + \frac{1}{(n+1)(1-\varepsilon_n)} \end{cases}$$

La transformation définie par :

$$t_n = x_n + \frac{1}{n+1}$$

montre que : $V_{(\varepsilon_n)} \in A_{(\varepsilon_n)}$ (\mathbb{R}) et donc que :

$$V(\varepsilon_n) \in A^{\dagger}(\varepsilon_n)$$
 (IR).

Nous allons établir que $V_{(\varepsilon_n)} \notin \mathcal{D}$ (R). Pour cela supposons donné T = (f_n) un algorithme normal devinant $V_{(\varepsilon_n)}$.

Soit $(x_n^0) \in V_{(\varepsilon_n)}$ définie par : $x_n^0 = x^0 - \frac{1}{n+1}$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n : t_n^0 = x^0$.

Soit l'intervalle ouvert :

$$\exists \alpha_{\circ}, \ \beta_{\circ} [\ = \ \underset{n \leq n_{\circ}}{\cap} \] \ x_{n}^{\circ} + \frac{1}{(n+1)(1+\epsilon_{n})}, \ x_{n}^{\circ} + \frac{1}{(n+1)(1-\epsilon_{n})} [\ \cdot$$

Cet intervalle est non vide car $x_0 \in \alpha_0$, β_0 .

Soit
$$x^1 \in \left[\frac{2\alpha + \beta_0}{3}, \frac{\alpha + 2\beta_0}{3} \right], x^1 \neq x^0$$
.

Soit $(x_n^1) \in V_{(\varepsilon_n)}$ définie par :

$$x_n^1 = x_n^0 \text{ pour } n \le n_0,$$

 $x_n^1 = x_n^1 - \frac{1}{n+1} \text{ pour } n > n_0.$

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n_1 : t_n^1 = x^1$.

Soit l'intervalle ouvert :

$$]\alpha_1, \beta_1[= \bigcap_{n \le n_1} x_n^1 + \frac{1}{(n+1)(1+\epsilon_n)}, x_n^1 + \frac{1}{(n+1)(1-\epsilon_n)}[$$

Cet intervalle est non vide, car \mathbf{x}_1 $\boldsymbol{\epsilon}$] $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ [.

Soit
$$x^2 \in \frac{2\alpha_1 + \beta_1}{3}, \frac{\alpha_1 + 2\beta_1}{3}[$$
, $x^2 \neq x^1, x^2 \neq x^0$.

...

La suite $(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^2, \dots)$ est transformée en la suite :

$$(t_n) = (t_0^{\circ}, t_1^{\circ}, \dots t_{n_0}^{\circ}, t_{n_0+1}^{1}, \dots, t_{n_1}^{1}, t_{n_1+1}^{2}, \dots).$$

La suite (x_n) converge vers x qui appartient à :

$$\int_{n \in \mathbb{N}} x_n + \frac{1}{(n+1)(1+\epsilon_n)}, x_n + \frac{1}{(n+1)(1-\epsilon_n)}$$

et donc $(\mathbf{x}_n) \in V_{(\epsilon_n)}$.

La suite (t_n) par construction n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang donc (x_n) n'est pas devinée par T.

Comme dans le théorème 5 à propos de $A'(\varepsilon_n)$ (IR) nous voyons ici que, sauf dans des cas particuliers, $A_{(\varepsilon_n)}$ (IR) est différent de $\mathcal V$ (IR).

Théorème 6

Soit $(\varepsilon_n) \in Conv_{\Omega}(\mathbb{R}^+)$.

(i) S'il existe un entier N tel que $\epsilon_N = 0$ alors : $A_{(\epsilon_n)} (\mathbb{R}) \neq D(\mathbb{R}).$

(ii) Sinon:

$$A_{(\varepsilon_n)}$$
 (TR) \cap (TR) \neq Ø et D(TR) \cap (\cap $A_{(\varepsilon_n)}$ (TR) \neq Ø.

Démonstration

(i) Soit N tel que ε_N = 0. Soit $S \in A_{(\varepsilon_n)}$ (TR), nous allons montrer que $S \in \mathcal{D}$ (TR). Il existe T = (f_n) un algorithme normal accélérant la convergence de S avec la vitesse (ε_n) .

Définissons $T^{\dagger} = (f^{\dagger}_{n})$ l'algorithme normal suivant :

$$f'_{j} = f_{j} \operatorname{si}_{j} < N,$$

$$f'_{j} = f_{N} \text{ si } j \ge N.$$

Il est clair que T' devine S.

(ii) Soit (ϵ_n) tel que pour tout n : $\epsilon_n \neq 0$.

La partie (ii) de la démonstration du théorème 4 montre que :

$$\label{eq:continuous_problem} {}^{A}(\epsilon_{n}) \ (\text{IR}) \ \cap \ (\text{D} \ (\text{IR}) \neq \emptyset \ .$$

Le lemme 2 (dans la démonstration du théorème 3) permet d'établir facilement que :

$$\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right) \ \cap \ \left(\ \mathsf{A}_{\left(\varepsilon_{_{_{\boldsymbol{n}}}}\right)} \ \left(\mathbb{R}\right) \ \neq \ \emptyset \, .$$

Remarques

- 1°) Les théorèmes 5 et 6 restent vrais lorsqu'on remplace \mathbb{R} par n'importe quel $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}^0 \neq \emptyset$.
- 2°) La notion d'accélération avec le degré λ ne se laisse pas réduire aux autres notions. De manière précise, on verra que certaines familles sont accélérables avec le degré 1 et pas avec le degré 1+ ϵ (ϵ > 0).

5 - FAMILLES ACCÉLÉRABLES MAXIMALES

Très naturellement se pose la question : existe-t-il des algorithmes d'accélération qu'on ne puisse améliorer, c'est-à-dire tels que toute famille de suites contenant strictement la famille des suites qu'ils accélèrent ne soit plus accélérable ? ([12]). C'est à ce problème des familles accélérables maximales que nous nous intéressons ici.

Nous allons voir que le plus souvent, il n'existe pas de familles accélérables maximales ou encore que tout procédé d'accélération de la convergence peut être transformé de façon à accélérer une famille de suites strictement plus grande.

Théorème 6

A(IR) ne possède pas de famille maximale:

$$\forall S \in A (\mathbb{R}), \exists S' \in A (\mathbb{R}) : S' \supset S \text{ et } S \neq S.$$

Démonstration 1 ([13])

Soit $S \in A(\mathbb{R})$.

Soit $F = (f_n)$ un algorithme normal accélérant S.

Soit $(y_n) \notin S$, $(y_n) \in Conv$ (IR) (une telle suite (y_n) existe car Conv (IR) n'est pas accélérable et donc $S \neq Conv$ (IR)).

Définissons $G = (g_n)$ l'algorithme normal suivant :

$$g_n(x_0, x_1, ..., x_n) = y \text{ si } (x_0, x_1, ..., x_n) = (y_0, y_1, ..., y_n),$$
 $g_n(x_0, x_1, ..., x_n) = f_n(x_0, x_1, ..., x_n) \text{ sinon.}$

Montrons que G accélère $S \cup \{(y_n)\}.$

Soit $(x_n) \in S$; il existe n tel que $n \ge n$.

 $(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq (y_0, y_1, \dots, y_n)$ donc F et G se comportent de la même façon avec (x_n) à partir de n et donc G accélère (x_n) .

Pour la suite (y_n) , G est exact dès le début, donc G accélère (y_n) . Ceci montre que S, n'est pas maximal.

Démonstration 2

Soit $S \in A(\mathbb{R})$.

Soit $F = (f_n)$ un algorithme normal accélérant S.

Soit $(y_n) \notin S$, $(y_n) \in Conv (\mathbb{R})$.

Définissons $G = (g_n)$ l'algorithme normal suivant :

$$g_n(x_0, x_1, ..., x_n) = y \sin |y - x_n| \le |y - y_n|,$$

$$g_n(x_0, x_1, ..., x_n) = f_n(x_0, x_1, ..., x_n)$$
 sinon.

Montrons que G accélère $S \cup \{(y_n)\}.$

Soit $(x_n) \in S$. Si x \neq y alors (x_n) est accélérée par G.

Si x = y alors la suite (t'_n) donnée par G pour (x_n) sera telle que :

 \forall n : t'_n = y ou t'_n = t_n (où (t_n) désigne la suite donnée par F pour (x_n)), et donc G accélérera aussi (x_n).

Pour la suite (y_n) , G est exact dès le début, donc G accélère (y_n) .

Remarque

Les deux "procédés de grossissement" utilisés dans les démonstrations 1 et 2 du théorème 6 possèdent la même propriété qu'ils permettent d'étendre le domaine d'efficacité de F,ils détériorent l'accélération de certaines des suites de S.

Pour le premier des procédés, cette détérioration se fera sur les suites dont le début ressemble à celui de (y_n) .

Pour le second des procédés, la détérioration se fera sur les suites qui ont des termes passant près de y.

Le second procédé en général permet non seulement d'ajouter une suite à S, mais en réalité une infinité non dénombrable. En effet,G accélère toutes les suites S et toutes les suites convergeant vers y de telle façon que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |x_n - x| \leq |y_n - y|.$$

La procédure θ [12] est aussi un procédé de grossissement mais nous n'avons pas pu l'utiliser pour établir les résultats précédents car il n'est pas certain qu'il grossisse S strictement, quel que soit S.

Corollaire [13]

Il n'existe pas de famille non accélérable minimale: $\forall \ S \not\in A(\mathbb{R}), \ \exists \ S' \not\in A(\mathbb{R}) \ : \ S' \subset S \ et \ S' \not\in S.$

Démonstration

Supposons que S soit une famille non accélérable minimale :

$$\forall S' \subset S, S' \neq S \Rightarrow S' \in A$$

Soit $(y_n) \in S$. En prenant $S' = S - \{(y_n)\}$, on obtient une famille accélérable, donc en utilisant le procédé de grossissement de la démonstration 1 ou celui de la démonstration 2, on obtient que $S' \cup \{(y_n)\} = S \in A$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème 7

Théorème 8

$$P$$
 (IR) ne possède pas de famille maximale : $\forall S \in P(IR), \exists S' \in P(IR) : S' \supset S \text{ et } S' \neq S$.

Théorème 9

Soit
$$\lambda \in [1, +\infty[$$
.
 $A_{\lambda}(\mathbb{R})$ ne possède pas de famille maximale :
$$\forall \ S \in A_{\lambda}(\mathbb{R}), \ \exists \ S' \in A_{\lambda}(\mathbb{R}) : \ S' \supset S \ \text{et} \ S' \neq S \ .$$

Ces trois théorèmes se démontrent comme le théorème 6, et on en déduit des corollaires analogues à celui énoncé juste après le théorème 6.

Remarque

Les théorèmes 6, 7, 8 et 9 restent vrais lorsqu'on remplace \mathbb{R} par $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, o $\mathbb{E} \neq \emptyset$.

Aucun théorème n'a été énoncé pour $A_{(\varepsilon_n)}(\mathbb{R})$, car pour certaines suites (ε_n) ϵ Convo (\mathbb{R}) , en fait $A_{(\varepsilon_n)}(\mathbb{R})$ possède des familles maximales. Prenons par exemple :

$$S = \{(x_n) \in Conv(\mathbb{R}) \mid x_0 = x\}$$

 $\varepsilon_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$

L'algorithme normal défini par $t_n = x_o$ accélère S et donc $S \in A_{(\epsilon_n)}$ (TR). Montrons que S est maximale ; pour cela supposons qu'il existe $S' \supset S$, $S' \neq S$ et $F = (f_n)$ un algorithme normal accélérant S' avec la vitesse (ϵ_n) . Soit $(y_n) \in S'$, $(y_n) \notin S$. On a : $y_o \neq y$, donc $f_o(y_o) = y$, mais $(y_o, y_o, \ldots, y_o, \ldots) \in S$ donc $f_o(y_o) = y_o$ ce qui est une contradiction. La famille maximale S que nous venons de définir vérifie que $\hat{S} = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, ceci est général :

Proposition

Soit
$$(\varepsilon_n) \in \text{Conv}_0$$
 (R). Si S est une famille maximale de $A_{(\varepsilon_n)}$ (R) alors : $\hat{S} = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

Rappelons que :
$$\hat{S} = \{s \in E^{(N)} \mid \exists (x_n) \in S ; \exists n_o \in \mathbb{N} : s = (x_o, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Supposons que $\hat{S} \neq \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Soit (a_0, a_1, \ldots, a_n) une suite de longueur minimale n'appartenant pas à \hat{S} .

La suite $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \hat{S}$, il existe donc :

$$(a_0, a_1, ..., a_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...) \in S.$$

La suite $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \notin S$ car elle commence par (a_0, a_1, \ldots, a_n) .

Soit F = $(f_n) \in Norm (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ accélérant S avec la vitesse (ϵ_n) .

Définissons G = $(g_n) \in Norm (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en posant :

$$\begin{split} & g_{0} = f_{0}, \, \ldots, \, g_{n-1} = f_{n-1} ; \\ & g_{n+p} \, (a_{0}, \, a_{1}, \, \ldots, \, a_{n}, \, x_{n+1}, \, \ldots, \, x_{n+p}) = x \text{ pour tout p } \epsilon \, \mathbb{N} ; \\ & g_{n+p} (z_{0}, \, z_{1}, \, \ldots, \, z_{n+p}) = f_{n+p} (z_{0}, \, z_{1}, \, \ldots, \, z_{n+p}) \text{ si} \\ & (z_{0}, \, z_{1}, \, \ldots, \, z_{n}) \neq (a_{0}, \, a_{1}, \, \ldots, \, \alpha_{n}) \end{split}$$

L'algorithme normal G accélère $S \cup \{(a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}, \ldots)\}$ avec la vitesse (ϵ_n) et donc S n'est pas maximal.

RÉFÉRENCES

- [1] BREZINSKI C. "Accélération de la convergence en analyse numérique", Lecture Notes in Mathematics, 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [2] BREZINSKI C. "Algorithmes d'accélération de la convergence : Etude numérique", Technip, Paris, 1978.
- [3] DELAHAYE J.P. "Liens entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des différences : démonstrations", Pulbication A.N.O. nº 14.

 Université des Sciences et Techniques de Lille, 1979.
- [4] DELAHAYE J.P. "Liens entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des différences", C.R. Acad. Sc. Paris, 290 A, 1980, pp. 343-346.
- [5] DELAHAYE J.P. "Optimalité du procédé Δ^2 d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire", RAIRO Analyse Numérique, 15, 1981, pp 321-330.
- [6] DELAHAYE J.P. "The partially ordered system of accelerable families", 85th Summer Meeting of the A.M.S., Pittsburgh (USA), aout 1981.
- [7] DELAHAYE J.P. "Les divers types de transformations algorithmiques",
 Publication ANO nº 69 Université des Sciences et Techniques de Lille,
 1982.
- [8] DELAHAYE J.P. "Systèmes ordonnés de familles accélérables" Publication ANO n° 73. Université des Sciens et Techniques de Lille, 1982.
- [9] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Résultats négatifs en accélération de la convergence", Numer. Math., 35, 1980, pp. 443-457.
- [10] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated", SIAM Num. Anal. 19, 1982, pp 840-844.
- [11] GERMAIN-BONNE B. "Estimation de la limite de suites et formalisation des procédés d'accélération de convergence", Thèse d'Etat, Lille, 1978.
- [12] GERMAIN-BONNE B. "Conditions suffisantes d'accélérabilité", Publications ANO n° 32 Université des Sciences et Techniques de Lille, 1981.

- [13] GERMAIN-BONNE B. Communication personnelle, 1981.
- [14] WIMP J. "Sequence transformations and their applications", Academic Press, New-York, 1981.

CHAPITRE 5

FAMILLES DE SUITES NON ACCÉLÉRABLES

INTRODUCTION

Une famille S de suites convergentes étant donnée, le problème d'accélération de la convergence le plus simple qu'on puisse se poser est : existe-t-il une transformation (algorithmique, normale, etc ...) qui accélère S?

Deux types de réponses peuvent être donnés :

- 1°) Les réponses positives : on prend une transformation déjà connue (ou on en construit une nouvelle) et on montre qu'elle accélère toutes les suites de la famille S. Ce type de résultats a déjà été énoncé à propos de pratiquement toutes les méthodes d'accélération existantes ([3] [4] [5] [25] ...), c'est lui qui les justifie.
- 2°) Les réponses négatives : à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et en considérant des types de transformations plus ou moins généraux, on montre l'impossibilité d'une transformation accélérant toutes les suites de S. Ces résultats indiquent, soit qu'il faut envisager une famille de transformations plus grande (certains résultats de Pennacchi [23] et Germain-Bonne [17] doivent s'interpréter ainsi) soit qu'il faut renoncer à accélérer S entièrement et n'essayer d'accélérer que certaines sous-familles de S (les familles de transformations considérées dans ce travail étant très grandes, ce sera le sens à donner à nos résultats).

Nous nous consacrons ici exclusivement à l'étude des familles de suites non accélérables et à la démonstration des résultats de non-accélérabilité.

L'outil qu'est la rémanence lorsqu'on veut étudier des familles de suites relativement grandes est un outil très efficace. En effet, cette condition suffisante de non-accélérabilité s'applique directement à bien des familles de suites et permet d'éviter le long détour des démonstrations négatives. Nous présentons au § 1 de manière détaillée la rémanence, ses variantes et ses applications les plus simples.

Les suites convergentes monotones semblent pouvoir être assez facilement accélérées; pourtant nous montrons au § 2 que bien des familles de suites monotones (et même certaines "assez petites") ne sont pas accélérables. Dans la démonstration de ces résultats la rémanence nous est d'une grande aide, mais elle se révèle cependant insuffisante pour le dernier des théorèmes que nous sommes obligés d'établir directement.

La même chose se produit au § 3 où est envisagé le problème des familles de suites à convergence alternée ou oscillante. Les résultats que nous obtenons (avec ou sans la rémanence) sont moins complets que ceux des § 1 et 2 car la situation est devenue trop complexe pour qu'il soit possible d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes d'accélérabilité.

Au § 4 où nous traitons des familles de suites à convergence de type linéaire, la rémanence ne nous est d'aucune aide et il nous faut pour chaque résultat établir une démonstration directe. Au § 5 par contre la rémanence nous fournit les résultats cherchés à propos des familles de suites à convergence logarithmique.

Les méthodes de démonstration, que ce soit celles utilisées pour les résultats sur les familles rémanentes ou que ce soit celles pour les résultats qui ne s'y laissent pas réduire, sont basées sur une technique assez analogue à la diagonalisation utilisée en théorie des cardinaux ou en logique mathématique. La puissance de ces méthodes, nous pensons, est en mesure de fournir encore d'autres résultats concernant l'efficacité des algorithmes d'analyse numérique (voir [24]) en particulier en optimisation.

La plupart des résultats démontrés ici l'ont déjà été dans des articles de l'auteur ([9], [10]) ou dans des articles écrits en collaboration avec B. Germain-Bonne ([13] [14] [15] [16]). Cependant la présentation a été

complétement remaniée et systématisée. C'est vrai pour la rémanence au § 1 où les résultats concernant Conv(E) et Conv*(E) sont pour la moitié au moins nouveaux. C'est vrai aussi pour les résultats du § 2 sur les familles de suites monotones où, là encore, le résultat unique de [15] a été repris et amélioré. Les résultats sur les familles de suites alternées ou oscillantes eux, sont totalement nouveaux. Les résultats sur les familles de suites de type linéaire ou à convergence logarithmique par contre reprennent simplement ceux de [9] [10] [16].

Notations

```
E
                 espace métrique dont la distance est notée d ;
E(IN)
                 ensemble des suites finies d'éléments de E ;
_IN
                 ensemble des suites (infinies) d'éléments de E;
Conv(E)
                ensemble des suites convergentes de E ;
                si (x_n) \in Conv(E) on note \lim_{n\to\infty} x_n = x
Conv*(E)
                ensemble des (x_n) \epsilon Conv(E) telles que :
                \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : x_n \neq x;
\mathtt{E}^{\alpha}
                 ensemble des points d'accumulation de E:
                E^{\alpha} = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, \exists y \in E : 0 < d(x, y) \le \varepsilon\}
Lorsque E ⊂ IR :
E^{\gamma}
                ensemble des points d'accumulation à gauche de E :
                E^{\gamma} = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, \exists y \in E : x - \epsilon < y < x\};
E_{Q}
                 ensemble des points d'accumulation à droite de E :
                E^{\delta} = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, \exists y \in E : x < y < x + \epsilon\};
```

TNorm_k(E, F) ensemble des transformations normales de E dans F (voir chapitre 1)

Alg (E, F) ensemble des transformations algorithmiques de E dans F (voir chapitre 1)

1 - Rémanences et premières applications

Mise au point successivement dans [13] [15] [16], la rémanence s'est révélée être l'outil principal pour la démonstration de résultats négatifs en accélération de la convergence. Cette condition suffisante de non-accélérabilité est présentée ici sous trois formes différentes que nous appelons rémanence généralisée (RG), rémanence (R) et rémanence restreinte (RR). La rémanence généralisée est la plus importante en ce sens qu'elle est la plus facile à satisfaire (proposition 1) : il y a plus de familles vérifiant (RG) que de familles vérifiant (R) ou (RR). Cependant la relative complexité de la formulation de (RG) la rend moins commode à utiliser que (R) ou (RR).

Le résultat le plus important est bien évidemment le théorème 1 qui énonce que si la famille S vérifie (RG) alors elle n'est pas accélérable, et qui a pour corollaires des énoncés analogues avec (R) et (RR). La démonstration du théorème 1 est présentée ici pour la première fois mais elle a été obtenue simplement en généralisant celle de [15] qui n'envisageait que (R). Les remarques qui suivent cette démonstration, nous pensons, sont essentielles et certaines mériteront peut-être des développements ultérieurs.

Les propositions 2 et 3 et les théorèmes 4 et 5 sont des applications directes du théorème 1 qui permettent de montrer les premières familles de suites non accélérables dont certaines sont simples et relativement petites.

Définitions

(RG)

Soit $S \in Conv(E)$.

Nous dirons que S est rémanente au sens général si S vérifie la condition suivante (appelée rémanence généralisée) :

- (a) il existe $(x^n) \in Conv^*(E)$ telle que :
- (0°) il existe $(x_n^0) \in S$ telle que $(x_n^0) \neq x^0$; (1°) pour tout $m \ge 0$, il existe $p_0 \ge m_0$ et $(x_n^1) \in S$ tels que $(x_n^1) \neq x^1$ et : $\forall m \le p_0 : x_m^1 = x_m^0$;
- (2°) pour tout $m_1 > p_0$, il existe $p_1 \ge m_1$ et $(x_n^2) \in S$ tels que $(x_n^2) \to x^2$ et : $\forall m \le p_1 : x_m^2 = x_m^1$;
 - (i°) pour tout $m_{i-1} > p_{i-2}$, il existe $p_{i-1} \ge m_{i-1}$ et $(x_n^i) \in S$ tels que $(x_n^i) \rightarrow x^i$ et : $\forall m \le p_{i-1} : x_m^i = x_m^{i-1}$;
- (b) $(x_0^0, x_1^0, \dots, x_{p_0}^0, x_{p_0+1}^1, \dots, x_{p_1}^1, x_{p_1+1}^2, \dots, x_{p_{i-1}}^{i-1}, \dots, x_{p_{i-1}+1}^{i-1}, \dots, x_{p_i+1}^{i-1}, \dots) \in S.$

Nous dirons que S est <u>rémanente</u> si S vérifie la condition suivante (appelée rémanence) :

(a) il existe $(\mathbf{x}^{n}) \in \mathrm{Conv}^{\star}$ (E) telle que : $(0^{\circ}) \text{ il existe } (\mathbf{x}_{n}^{\circ}) \in S \text{ telle que } (\mathbf{x}_{n}^{\circ}) + \mathbf{x}^{\circ};$ $(1^{\circ}) \text{ pour tout } \mathbf{m}_{o} \geq 0, \text{ il existe } (\mathbf{x}_{n}^{1}) \in S \text{ telle que }$ $(\mathbf{x}_{n}^{1}) + \mathbf{x}^{1} \text{ et } : \forall \mathbf{m} \leq \mathbf{m}_{o} : \mathbf{x}_{m}^{1} = \mathbf{x}_{m}^{\circ};$ $(2^{\circ}) \text{ pour tout } \mathbf{m}_{1} > \mathbf{m}_{o}, \text{ il existe } (\mathbf{x}_{n}^{2}) \in S \text{ telle que }$ $(\mathbf{x}_{n}^{2}) + \mathbf{x}^{2} \text{ et } : \forall \mathbf{m} \leq \mathbf{m}_{1} : \mathbf{x}_{m}^{2} = \mathbf{x}_{m}^{1};$ $\dots \qquad \dots \qquad \dots$ $(i^{\circ}) \text{ pour tout } \mathbf{m}_{i-1} > \mathbf{m}_{i-2}, \text{ il existe } (\mathbf{x}_{n}^{i}) \in S \text{ telle que }$ $(\mathbf{x}_{n}^{i}) + \mathbf{x}^{i} \text{ et } : \forall \mathbf{m} \leq \mathbf{m}_{i-1} : \mathbf{x}_{m}^{i} = \mathbf{x}_{m}^{i-1};$ $\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$ $(b) (\mathbf{x}_{o}^{\circ}, \mathbf{x}_{1}^{\circ}, \dots, \mathbf{x}_{m_{o}}^{\circ}, \mathbf{x}_{n+1}^{1}, \dots, \mathbf{x}_{m_{1}}^{1}, \mathbf{x}_{m_{1}+1}^{2}, \dots, \mathbf{x}_{m_{1}-1}^{i-1},$ $\mathbf{x}_{m_{i-1}+1}^{i}, \dots, \mathbf{x}_{m_{i}}^{i}, \mathbf{x}_{m_{i}+1}^{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{m_{i}+1}^{i}, \dots) \in S.$

Nous dirons que S est <u>rémanente au sens restreint</u> si S vérifie la condition suivante (appelée rémanence restreinte) :

$$\text{(a) il existe } (x^{n}) \in \text{Conv}^{\star} (E) ; \\ \text{(b) il existe } (x^{\circ}_{n}), (x^{1}_{n}), \dots, (x^{i}_{n}), \dots \text{ telles que} \\ (x^{\circ}_{n}) \neq x^{\circ}, (x^{1}_{n}) \neq x^{1}, \dots, (x^{i}_{n}) \neq x^{i}, \dots ; \\ \text{(c) pour toute suite strictement croissante d'entiers } (m_{i}) : \\ (x^{\circ}_{o}, x^{\circ}_{1}, \dots, x^{\circ}_{m}, \dots) \in S \\ (x^{\circ}_{o}, x^{\circ}_{1}, \dots, x^{\circ}_{m^{\circ}_{o}}, x^{1}_{m+1}, \dots, x^{1}_{m}, \dots) \in S ; \\ \dots \dots \\ (x^{\circ}_{o}, x^{\circ}_{1}, \dots, x^{\circ}_{m^{\circ}_{o}}, x^{1}_{m+1}, \dots, x^{1}_{m_{1}}, x^{2}_{m_{1}+1}, \dots, x^{i-1}_{m_{i-1}}, \\ x^{i}_{m_{i-1}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}}, x^{i}_{m+1}, \dots, x^{1}_{m_{1}}, x^{2}_{m_{1}+1}, \dots, x^{i-1}_{m_{i-1}}, \\ x^{i}_{m_{i-1}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}}, x^{i+1}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i-1}_{m^{\circ}_{i-1}}, \\ x^{i}_{m_{i-1}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}}, x^{i+1}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i-1}_{m^{\circ}_{i-1}}, \\ x^{i}_{m_{i-1}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}}, x^{i+1}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i-1}_{m^{\circ}_{i-1}}, \\ x^{i}_{m^{\circ}_{i-1}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}}, x^{i+1}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i-1}_{m^{\circ}_{i-1}}, \\ x^{i}_{m^{\circ}_{i-1}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}}, x^{i+1}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i-1}_{m^{\circ}_{i-1}}, \\ x^{i}_{m^{\circ}_{i-1}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}}, x^{i+1}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}+1}, \dots, x^{i}_{m^{\circ}_{i}$$

Remarque

La différence entre (R) et (RR) tient à une inversion de quantificateurs. On sait bien que :

$$[\frac{1}{3} a, \forall b : P(a, b)] \Rightarrow [\frac{1}{4} b, \frac{1}{3} a : P(a, b)]$$

et que la réciproque est fausse (à partir d'un énoncé donné en remontant vers l'avant des quantificateurs $\frac{1}{3}$, on obtient un énoncé plus fort). Ici c'est ce qui se produit on a remonté vers l'avant les $\frac{1}{3}$ (x_n^0) , $\frac{1}{3}$ (x_n^1) , ..., $\frac{1}{3}$ (x_n^1) , ...

Proposition 1

Sage of

$$| (RR) => (R) => (RG).$$

"(RR) => (R)" : On construit la suite (x_n^i) de (R) à partir de la suite (x_n^i) de (RR) et de (R(c)).

Théorème 1

Si la famille $S \subseteq Conv$ (E) est rémanente au sens général alors S n'est accélérable par aucune transformation algorithmique.

Avec la proposition 1 nous en déduirons immédiatement :

Théorème 2

Si la famille $S \subseteq Conv$ (E) est rémanente alors S n'est accélérable par aucune transformation algorithmique.

Théorème 3

Si la famille $S \subset Conv$ (E) est rémanente au sens restreint alors S n'est accélérable par aucune transformation algorithmique.

Démonstration du théorème 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$.

Soit $S \subset \text{Conv}$ (E), vérifiant la propriété de rémanence généralisée (RG).

Supposons qu'il existe un algorithme pour suites A = (R, C) accélérant la convergence de toutes les suites de S.

Soit $(x^n) \in Conv^*$ (E) donné par (RG(a)).

Pas 0

Soit $(x_n^0) \in S$ donné par (RG(a) (0°)). Par hypothèse A transforme (x_n^0) en une suite (t_n^0) qui accélère la convergence de (x_n^0) , et donc de même limite que (x_n^0) .

Si
$$x^{\circ} = x$$
 on pose $m_{\circ} = 0$;
Si $x^{\circ} \neq x$, soit $n_{\circ} \ge 0$ tel que :

$$d(t_{n_{o}}^{o}, \mathbf{x}) \; / \; d(\mathbf{x}_{n_{o}}^{o}, \mathbf{x}) \; > \; \lambda \; \text{et } \forall \; n \; \geq \; n_{o} \; : \; d(\mathbf{x}_{n}^{o}, \mathbf{x}^{o}) \; \leq \; 1/2.$$
 Jusqu'à l'étape n_{o} l'algorithme A n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (\mathbf{x}_{n}^{o}) . Soit $m_{o} \geq n_{o}$, plus grand que le plus grand des indices des points utilisés. Pour toute suite (\mathbf{x}_{n}) commençant par les mêmes $m_{o}+1$ premiers points que (\mathbf{x}_{n}^{o}) , l'algorithme A donnera les mêmes $n_{o}+1$ premières réponses t_{o} , t_{n} , ..., t_{n} et donc :

$$d(t_{n_0}, x) / d(x_{n_0}, x) > \lambda.$$
 (P₀)

Pas i

Soit $p_{i-1} \ge m_{i-1}$ et $(x_n^i) \in S$ donné par $(RG(a) (i^o))$.

Par hypothèse, A transforme (x_n^i) en une suite (t_n^i) qui accélère la convergence de (x_n^i) , et donc de même limite que (x_n^i) .

Si
$$x^i = x$$
 on pose $m_i = p_{i-1} + 1$;

Si $x^{i} \neq x$ soit $n_{i} > n_{i-1}$ tel que :

$$d(t_{n_{i}}^{i}, x) / d(x_{n_{i}}^{i}, x) > \lambda \text{ et } \forall n \geq n_{i} : d(x_{n}^{i}, x^{i}) \leq 1/2^{i}.$$

Jusqu'à l'étape n_i , l'algorithme A n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (\mathbf{x}_n^i) . Soit $\mathbf{m}_i > \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{m}_i > \mathbf{n}_i$ plus grand que le plus grand des indices des points utilisés. Pour toute suite (\mathbf{x}_n) commençant par les mêmes $\mathbf{m}_i + 1$ premiers points que (\mathbf{x}_n^1) l'algorithme A donnera les mêmes $\mathbf{n}_i + 1$ premières réponses \mathbf{t}_0 , \mathbf{t}_1 , ..., \mathbf{t}_n et donc :

$$d(t_{n_{i}}, x) / d(x_{n_{i}}, x) > \lambda$$
 (P_i)

Soit maintenant la suite (x_n) donnée par (RG(b)). Cette suite est dans S et converge vers x par construction. Elle vérifie les relations $(P_o), \ldots, (P_i), \ldots$ à partir d'un certain rang $(\operatorname{car} x^i \neq x$ à partir d'un certain rang), ceci implique que l'algorithme A n'accélère pas la convergence de (x_n) , ce qui est contraire aux hypothèses.

Remarques

1°) Il est important de bien noter que la conclusion des théorèmes 1, 2 et 3 est "alors S n'est accélérable par aucune transformation algorithmique" et non pas seulement "alors S n'est pas accélérable" (ce qui par définition signifie : il n'existe aucune transformation normale accélérant S). C'est là quelque chose qui est assez étonnant car la définition de transformation algorithmique est très tolérante et autorise entre autres choses t_n à dépendre de points bien au delà de x_n : même avec une transformation où t_n serait calculé avec x_0, x_1, \ldots, x_{2n} (ou x_0, x_1, \ldots, x_{2n} , ou même x_0, x_1, \ldots, x_n) la suite (t_n) n'accélérera pas (x_n) pour tout (x_n) ϵ S, si S est rémanente.

Cette force des résultats négatifs obtenus avec les propriétés (RG), (R) et (RR) se révélera être une faiblesse dans le cas de certaines familles "délicates", que de toute évidence une transformation du type $t_n = x_{2n}$ ou $t_n = x_{2n}$ accélérerait, mais qui malgré tout ne sont pas véritablement accélérables (i.e. accélérables par une transformation normale), car alors pour ces familles, il faudra refaire entièrement une démonstration négative. Les différentes tentatives que nous avons faites pour rapprocher la rémanence d'une condition nécessaire et suffisante de non-accélérabilité n'ont pas abouti et les formulations (RG), (R) et (RR) restent des conditions suffisantes mais loin d'être nécessaires de non-accélérabilité.

2°) Les relations (P_0), ..., (P_i), ... expriment non seulement que (x_n) n'est pas accélérée par (t_n), mais que (x_n) n'est même pas améliorée de λ par (t_n) en convenant de dire que (t_n) améliore la convergence de (x_n) de λ si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(t_n, x) \leq \lambda d(x_n, x).$$

Une famille S vérifiant (RG) non seulement ne peut pas être accélérée mais il est impossible d'améliorer sa convergence de λ , quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$.

3°) En fait dans la démonstration, nous n'utilisons l'hypothèse que A accélère la convergence des suites de S que pour la suite (x_n) ; pour les suites $(x_n^{\circ}), \ldots, (x_n^{i}), \ldots$ nous utilisons seulement que A est régulière.

Nous pouvons donc énoncer le résultat plus général suivant :

Si (S', S) vérifie (RG') alors il n'existe aucun algorithme pour suite A ϵ Alg (E, E) régulier sur S' et accélérant S.

(RG') désignant la propriété obtenue à partir de (RG) en remplaçant S par S' dans (RG(a)).

On obtient des résultats analogues à partir de (R) et (RR).

Ces énoncés confirment l'idée exprimée par Jet Wimp [25] "the size of the domain of regularity of a transformation and its efficiency seem to be inversely related".

A partir d'une suite convergente $(x_n) \in Conv^*(E)$ on peut, par "étiration" construire des suites convergentes aussi lentes que l'on veut ; par exemple : $(y_n) = (x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, \dots)$ $(z_n) = (x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2, x_3, x_3, x_3, x_4, \dots)$ Cette méthode très simple et très naturelle de construction de suites lentement

Définition :

Soit $(x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$. Nous noterons Eti (x_n) l'ensemble <u>des suites étirées</u> de (x_n) , c'est-à-dire de la forme $(y_n) = (x_n)$ où (i_n) est une suite d'entiers vérifiant :

convergentes va nous donner une première famille non accélérable.

$$\forall n \in \mathbb{N} : i_{n+1} = i_n \text{ ou } i_n^{+1}.$$

Proposition 2

| Si $(x_n) \in Conv^*(E)$ alors Eti (x_n) est rémanent au sens restreint.

Démonstration

Dans (RR(a)) on prend
$$(x^n) = (x_n)$$
.

Dans (RR(b)) on prend

$$(x_n^0) = (x_0, x_0, ..., x_0, ...)$$

$$(x_n^i) = (x_i, x_i, ..., x_i, ...)$$

...

Corollaire

La réunion de deux familles accélérables n'est pas toujours accélérable.

Démonstration

Soit $(x_n) \in Conv^*$ (E).

Posons:

$$\begin{split} &\text{EtiA}(\mathbf{x}_n) = \{(\mathbf{x}_{\mathbf{i}_n}) \mid \mathbf{i}_{n+1} = \mathbf{i}_n \text{ ou } \mathbf{i}_{n} + 1 \text{ et } \lim_{n \to \infty} \mathbf{i}_n = + \infty\} \\ &\text{EtiB}(\mathbf{x}_n) = \{(\mathbf{x}_{\mathbf{i}_n}) \mid \mathbf{i}_{n+1} = \mathbf{i}_n \text{ ou } \mathbf{i}_n + 1 \text{ et } \exists \ N, \ \forall \ n \ge N : \mathbf{i}_n \le N\} \end{split}$$

Chacune de ces deux familles est accélérable (la première avec $t_n = x$, la seconde avec $t_n = x_n$) et cependant leur réunion qui est Eti (x_n) n'est pas accélérable.

La proposition 2 nous permet maintenant d'énoncer le théorème suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un algorithme universel d'accélération sur un ensemble E (i.e. d'un algorithme accélérant Conv (E) tout entier). La condition rencontrée est très simple et le résultat

signifie que dès que E contient beaucoup d'éléments ($E = \mathbb{R}^n$ ou E = [a, b] par exemple) il n'y a pas d'algorithme universel d'accélération.

Théorème 4

| Conv (E) est accélérable \iff E^{α} = \emptyset

Démonstration

La condition est suffisante car si E^{α} = \emptyset alors les seules suites convergentes sont les suites ultérieurement stationnaires (i.e. Conv (E) = U Stati (E)) qui sont accélérées (et même devinées) par la transformation identique.

La condition est nécessaire si $E^{\alpha} \neq \emptyset$ alors il existe $(x_n) \in Conv^*(E)$ et on a Eti $(x_n) \subset Conv$ (E).

De même qu'il est intéressant de savoir quand Conv (E) est accélérable, il est intéressant de savoir quand Conv (E) est accélérable. Puisque Conv (E) est plus petit que Conv (E), Conv (E) doit être plus souvent accélérable que Conv (E). Le théorème 5 nous montre que c'est effectivement ce qui se produit. Analogue à la notion d'étirement, la notion de diagonalisation d'une famille dénombrable de suites nous sert de base pour raisonner :

Définition

Soient (x_n^o) , ..., (x_n^i) , ... dans E^N . Nous noterons $\mathrm{Dia}((x_n^o), \ldots, (x_n^i), \ldots)$ l'ensemble des suites obtenues par diagonalisation de (x_n^o) , ..., (x_n^i) , ..., $(x_n^$

Proposition 3

| Soient
$$(x_n^0)$$
, ..., (x_n^i) , ... dans Conv (E),

 $|Si(\mathbf{x}^n) \in Conv^*(E)|$ et si $Dia((\mathbf{x}_n^o), \ldots, (\mathbf{x}_n^i), \ldots) \subset Conv(E)$ alors $Dia((\mathbf{x}_n^o), \ldots, (\mathbf{x}_n^i), \ldots)|$ est rémanent au sens restreint.

Démonstration

Dans (RR(o)) on prend (x^n) .

Dans (RR(b)) on prend (x_n^0) , ..., (x_n^i) , ...

Théorème 5

 $\mid \operatorname{Conv}^*(E) \text{ est accélérable} \iff (E^{\alpha})^{\alpha} = \emptyset.$

Démonstration

(a) Supposons que $(E^{\alpha})^{\alpha} = \emptyset$.

Pour tout n ϵ N soit f_n : E \rightarrow E ayant la propriété suivante :

$$\forall$$
 t ϵ E : $f_n(t)$ ϵ E ^{α} et d(t, $f_n(t)$) \leq d(t, E^{α}) + 1/n

La famille (f_n) constitue un algorithme à une mémoire qui accélère (et même devine) toutes les suites de $Conv^*(E)$. En effet si (x_n) ϵ $Conv^*(E)$ alors : $x \in E^{\alpha}$ et $d(x, E^{\alpha} - \{x\}) > 0$ ce qui implique que :

$$\forall n > 2/d(x, E^{\alpha} - \{x\}) : f_n(x_n) = x.$$

(b) Supposons que $(E^{\alpha})^{\alpha} \neq \emptyset$.

Soit $(x^n) \in Conv^*$ (E) tel que $x \in (E^{\alpha})^{\alpha}$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{x}^n \in \mathbb{E}^{\alpha}$$
.

Pour tout i ϵ **IN** considérons (x_n^i) ϵ Conv^{*} (E) telle que :

$$\forall$$
 n \in \mathbb{N} : $x_n^i \neq x^i$ et $d(x_n^i, x^i) \leq 1/(i+1)$.

On a alors : Dia $((x_n^0), \ldots, (x_n^i), \ldots) \subset Conv^*$ (E) et donc $Conv^*$ (E) n'est pas accélérable (proposition 3).

Remarque

Si un algorithme A ϵ Alg (E, E) ne suffit pas pour accélérer S, peut-être que deux algorithmes A₁, A₂ ϵ Alg (E, E) pourraient suffire (A₁ accélérait S₁ A₂ accélérait S₂ et S₁ \cup S₂ = S). A propos de Conv*(E) (E = R) dans [15], nous avons montré (moyennant quelques restrictions sur les algorithmes considérés) que deux algorithmes ne suffisaient pas, ni même une infinité dénombrable.

2 - Familles de suites monotones

Les familles de suites convergentes les plus naturelles à envisager après Conv (E) et Conv*(E) sont les familles de suites monotones. Comme au § 1 et parce que la situation reste relativement simple, nous réussissons à trouver des conditions nécessaires et suffisantes d'accélérabilité pour certaines familles de suites monotones (théorème 6, 7), la partie négative des résultats étant obtenue par application directe de la rémanence.

Au théorème 8, les familles de suites considérées sont sensiblement plus petites, aussi n'obtenons-nous qu'une condition suffisante de non-accélérabilité qui d'ailleurs nécessite un raisonnement complet, la rémanence ne semblant pas être applicable.

Définitions, notations

Soit E ⊂ IR.

de même :

- Nous noterons Mon⁺(E) la famille des suites convergentes de E, croissantes (au sens large) :

$$\operatorname{Mon}^{+}(E) = \{(x_n) \in \operatorname{Conv}(E) \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \ge x_n\}$$

- famille des suites convergentes décroissantes :

$$Mon^{-}(E) = \{(x_n) \in Conv(E) \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \leq x_n\};$$

- famille des suites convergentes monotones :

Mon
$$(E) = Mon^{\dagger}(E) \cup Mon^{-}(E)$$
;

- famille des suites convergentes strictement croissantes :

$$Mon^{+\star}(E) = \{(x_n) \in Conv(E) \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} > x_n\};$$

On définit sur le même modèle :

$$Mon^{-*}(E)$$
; $Mon^{*}(E)$;

- famille des suites convergentes ultérieurement croissantes :

$$U \text{ Mon}^{+}(E) = \{(x_n) \in Conv(E) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \ge n : x_{n+1} \ge x_n\};$$

On définit sur le même modèle :

- familles de suites convergentes croissantes d'ordre k (k ϵ \mathbb{N}^{\star}) :

$$\operatorname{Mon}_{k}^{+}(E) = \{(x_{n}) \in \operatorname{Conv}(E) \mid \forall i \in \{1, ..., k\}, \forall n \in \mathbb{N} : (-1)^{i} \Delta^{i} x_{n} \leq 0\};$$

On définit sur le même modèle :

$$\operatorname{Mon}_{k}^{-}(E)$$
; $\operatorname{Mon}_{k}^{+}(E)$; $\operatorname{Mon}_{k}^{+}(E)$; $\operatorname{Mon}_{k}^{-}(E)$; $\operatorname{Mon}_{k}^{+}(E)$.

Parmi les relations évidentes entre ces différentes familles de suites citons :

$$Mon_{k+1} \subset Mon_k \subset Mon_1 = Mon.$$

Théorème 6

- (i) $Mon^{-}(E)$ est accélérable $<=> E^{\delta} = \emptyset$; (ii) $Mon^{+}(E)$ est accélérable $<=> E^{\gamma} = \emptyset$; (iii) $Mon^{-}(E)$ est accélérable $<=> E^{\alpha} = \emptyset$.

(i) Si E^{δ} = \emptyset les seules suites convergentes décroissantes de $E^{\mathbb{N}}$ sont les suites décroissantes ultérieurement stationnaires qui sont accélérées (et même devinées) par la transformation identique.

Si $E^{\delta} \neq \emptyset$ il existe $(x^n) \in Mon^{-*}(E)$ avec $x \in E^{\delta}$. Eti $(x^n) \in Mon^{-}(E)$ et donc, d'après la proposition 1, $Mon^{-}(E)$ n'est pas accélérable.

- (ii) Même méthode que pour (i).
- (iii) Immédiat à partir de (i) et (ii).

Théorème 7

- (i) $Mon^{-*}(E)$ est accélérable \iff $(E^{\delta})^{\delta} = \emptyset$;
- (ii) $Mon^{+*}(E)$ est accélérable \iff $(E^{\Upsilon})^{\Upsilon} = \emptyset$;
- (iii) $Mon^*(E)$ est accélérable \iff $(E^{\delta})^{\delta} \cup (E^{\gamma})^{\gamma} = \emptyset$.

П

Démonstration

(i) Si $(\mathbf{E}^{\delta})^{\delta} = \emptyset$ on définit l'algorithme 1-stationnaire suivant :

$$f(x_n) = \max \{t \in E^{\delta} \mid t \leq x_n\},$$

et on vérifie facilement que cet algorithme 1-stationnaire accélère (et même devine) Mon^{-*}(E).

Si $(E^{\delta})^{\delta} \neq \emptyset$, il existe $(x^n) \in Mon^{-*}(E^{\delta})$ de limite $x \in (E^{\delta})^{\delta}$ et pour chaque i $\in \mathbb{N}$ il existe $(x_n^i) \in Mon^{-*}(E)$ telle que :

$$\forall$$
 n \in \mathbb{N} : $x^{i} < x_{n}^{i} < x^{i-1}$.

On vérifie alors que $Mon^{-*}(E) \supset Dia\ ((x_n^0),\ \dots,\ (x_n^i),\ \dots)$ et donc d'après la proposition 3, $Mon^{-*}(E)$ n'est pas accélérable.

- (ii) Même méthode que pour (i).
- (iii) Si $(E^{\delta})^{\delta} \cup (E^{\gamma})^{\gamma} \neq \emptyset$ il résulte de (i) et (ii) que Mon*(E) n'est pas accélérable.

Si
$$(E^{\delta})^{\delta} \cup (E^{\gamma})^{\gamma} = \emptyset$$
, on prend f l'algorithme 2-stationnaire suivant :
$$f(x_{n-1}, x_n) = \max \{t \in E^{\delta} \mid t \leq x_n\} \text{ si } x_n < x_{n-1},$$

$$f(x_{n-1}, x_n) = \min \{t \in E^{\gamma} \mid t \geq x_n\} \text{ si } x_n > x_{n-1}.$$

Remarques

1°) Il est tout à fait possible que $(E^{\alpha})^{\alpha} \neq \emptyset$ et que $(E^{\delta})^{\delta} \cup (E^{\gamma})^{\gamma} = \emptyset$, c'est par exemple le cas avec :

$$E = \{1 - 1/2^n + 1/2^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n + 1 < m\} \cup \{1 - 1/2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

- 2°) Les théorèmes 6 et 7 se généralisent sans difficulté aux familles U Mon⁺(E), U Mon⁻(E), U Mon(E), U Mon⁺*(E), U Mon⁻*(E), U Mon^{*}(E).
- 3°) On notera que les algorithmes 1-stationnaires et 2-stationnaires définis dans la démonstration du théorème 7 ne sont pas réguliers sur Conv (E) : une fois encore, de bonnes propriétés d'accélérabilité ont été obtenues aux dépens des propriétés de régularité.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $E \subset \mathbb{R}$ vérifiant $E \neq \emptyset$.

Aucun des ensembles suivants n'est accélérable par un procédé normal: $\mathsf{Mon}^{+*}_k(E), \; \mathsf{Mon}^+_k(E), \; \mathsf{Mon}^{-*}_k(E), \; \mathsf{Mon}^-_k(E), \; \mathsf{Mon}^*_k(E), \; \mathsf{Mon}^-_k(E).$

Lemme 1

Powr tout
$$k \in \mathbb{N}^*$$
, il existe $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que toute suite (x_n) vérifiant :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) = 1/2 \text{ ou } (1 - \varepsilon_k)/2. \\ x_1 > x_0, \end{cases}$$
 soit une suite de $\text{Mon}_k^{+*}(\mathbb{R})$.

Soit (x_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) = 1/2 \text{ ou } (1-\epsilon)/2,$$

 $x_1 > x_0$.

Par récurrence sur i on montre que :

$$\forall$$
 i \in \mathbb{N} , \forall n \in \mathbb{N} : \triangle^{i} \times_{n} = $(\times_{n+1} - \times_{n})$ $f_{i,J}(\varepsilon)(-1)^{i+1}$

où J désigne le sous-ensemble des j ϵ {1, ..., i-1} pour lesquels

 $(x_{n+j+1} - x_{n+j})/(x_{n+j} - x_{n+j-1}) = (1-\epsilon)/2$, et où $f_{i,J}$ est une fonction continue en 0 pour laquelle :

$$f_{i,J}(0) = \frac{1}{2^{i-1}} > 0$$

(par exemple : $f_{1,\emptyset}(\varepsilon) = 1$; $f_{2,\emptyset}(\varepsilon) = 1/2$; $f_{2,\{1\}} = 1-(1-\varepsilon)/2$;

$$f_{3,\emptyset}(\varepsilon) = 1/4 ; f_{3,\{1\}}(\varepsilon) = 1-2(\frac{1-\varepsilon}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1-\varepsilon}{2}) ;$$

$$f_{3,\{4\}}(\varepsilon) = 1 - 1 + \frac{1}{2} (\frac{1-\varepsilon}{2}) ; f_{3,\{1,2\}}(\varepsilon) = 1-2 (\frac{1-\varepsilon}{2}) + (\frac{1-\varepsilon}{2})^2$$

Il existe donc $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que :

 $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} > x_n,$

 $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}, \forall J \subset \{1, ..., i-1\} : f_{i,j}(\epsilon_k) > 0.$

Avec ce ϵ_k on a alors :

 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}: (-1)^{i} \Delta^{i} x_{n} < 0,$

ce qui signifie que $(x_n) \in Mon_k^{+*}(\mathbb{R})$.

Soit
$$\varepsilon \in \mathbb{R}^n$$
, $\varepsilon < 1$.

La famille des suites telles que :
$$(S_{\varepsilon}) \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) = 1/2 \text{ ou } (1-\varepsilon)/2, \\ x_1 > x_0, \end{cases}$$

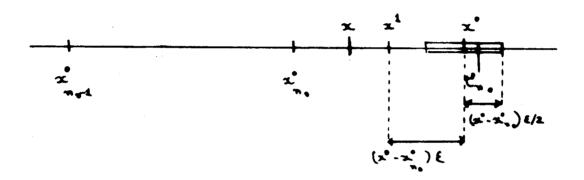
n'est accélérable par aucun procédé normal.

Supposons donnée T une transformation normale accélérant la famille des suites vérifiant $(S_{_{\rm F}})$.

Soit
$$(x_n^0) = -1/2^n$$
.

Par hypothèse il existe n_0 tel que :

$$(t_{n_{o}}^{\circ} - x^{\circ})/(x_{n_{o}}^{\circ} - x^{\circ}) \le \varepsilon/2.$$



Pour tout
$$x \in [x_{n_0}^0, x^1]$$
 où $x^1 = x^0 - \varepsilon(x^0 - x_{n_0}^0)$, on a:
$$(t_{n_0}^0 - x)/(x_{n_0}^0 - x) \ge \varepsilon/2(1-\varepsilon) > 0.$$
(A₀)

Soit (x_n^1) définie par :

$$x_n^1 = x_n^0 \sin n \le n_0$$
 $(x_{n+1}^1 - x_{n}^1)/(x_{n-1}^1 - x_{n-1}^1) = (1-\epsilon)/2,$
 $(x_{n+1}^1 - x_{n}^1)/(x_{n-1}^1 - x_{n-1}^1) = 1/2 \sin n \ge n_0+1.$

On s'assure que (x_n^1) converge vers x^1 .

Par hypothèse il existe $n_1 > n_0$ tel que :

$$(t_{n_1}^1 - x^1)/(x_{n_1}^1 - x^1) \le \varepsilon/2.$$

etc ...

On considère alors la suite :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^1, \dots)$$

Cette suite est croissante et converge vers une limite x, qui appartient à n $[x_n^i, x^{i+1}]$ on a donc $(A_0), \ldots, (A_i), \ldots$ ce qui signifie que T n'accélère pas la convergence de (x_n) .

Démonstration du théorème 8

Il suffit de démontrer que $\mathrm{Mon}_{k}^{+*}(E)$ n'est pas accélérable, car les autres familles considérées sont, ou bien contenues dans $\mathrm{Mon}_{k}^{+*}(E)$, ou bien contenues dans $\mathrm{Mon}_{k}^{-*}(E)$ pour laquelle la démonstration est semblable.

Nous supposerons que E = IR, le cas d'un ensemble d'intérieur non vide s'en déduit facilement.

D'après le lemme 1,il existe $\epsilon_k \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que la famille des suites vérifiant (S_{ϵ_k}) soit contenue dans $\mathrm{Mon}_{k}^{+\star}(\mathbb{R})$, mais d'après le lemme 2 cette dernière famille n'est pas accélérable, donc $\mathrm{Mon}_{k}^{+\star}(\mathbb{R})$ n'est pas accélérable.

Remarque

La démonstration du théorème ne fait pas appel à la rémanence, (il n'est pas sûr d'ailleurs que les familles considérées soit rémanentes). C'est le premier raisonnement où on utilise de façon essentielle la "normalité" des transformations envisagées.

3 - FAMILLES DE SUITES ALTERNÉES ET OSCILLANTES

Les suites qu'il semble le plus facile d'accélérer sont les suites alternées ou oscillantes. Et, effectivement, même de simples procédés linéaires accélèrent certaines suites alternées [3] [5]. Cependant parmi les familles de suites alternées qu'il est naturel de définir, on va voir que rares sont celles qui sont accélérables globalement. L'information qu'une suite est

alternée est donc en général insuffisante pour qu'on puisse l'accélérer.

Les résultats de ce paragraphe ont été présentés au Colloque annuel d'Analyse

Numérique de Belgodère [12].

Définitions

Soit $(x_n) \in Conv (TR)$.

Considérons les propriétés suivantes :

(ALT.A): La suite $(-1)^n$ $(x_{n+1}-x_n)$ est de signe constant,

(ALT.B) : La suite $(-1)^n$ $(x_{n+1}^{-1}-x_n)$ est monotone et de signe constant,

(OSC.A): La suite $(-1)^n$ $(x_n - x)$ est de signe constant,

(OSC.B): La suite $(-1)^n$ $(x_n - x)$ est monotone et de signe constant,

(LIN) : $\exists \ \ell \in [-1, \ 0[\ : \ \lim_{n+1} (x_{n+1} - x)/(x_{n} - x) = \ell$

 $(\text{Lin}^{-1}) : \lim_{n \to \infty} (x_{n+1}^{-1} - x) / (x_{n}^{-1} - x) = -1$

Ceci permet de définir 6 familles de suites convergentes que nous noterons respectivement : Alt.A ; Alt.B, Osc.A, Osc.B, Lin, Lin.

Proposition

Démonstration

La démonstration est évidente, notons cependant qu'aucune égalité n'a lieu ; en effet :

. la suite $(\mathbf{x}_{\mathbf{n}})$ définie par :

$$x_{n+1} = x_n + (-1)^n / (n^{3+(-1)^n})$$

est dans Alt.A mais pas dans Osc.A;

. la suite (x_n) définie par :

$$x_n = x + (-1)^n/(n+1+2\cos(n\pi/2))$$

est dans Osc.A mais pas dans Alt.B;

. la suite (x_n) définie par :

$$x_n = x + (-1)^n / (n^{2+(-1)^n})$$

est dans Alt.B mais pas dans Osc.B;

. la suite (x_n) définie par :

$$x_n = x + (-1)^n \quad \begin{cases} n \\ \pi \end{cases} \quad \lambda_i$$

avec $\lambda_i = (1/2, 1/3, 1/2, 1/3, \dots)$

est dans Osc.B mais pas dans Lin ;

. la suite (x) définie par :

$$x_n = x + (-1)^n \lambda^n$$
 avec $0 < \lambda < 1$,

est dans Lin mais pas dans Lin.

La famille Lin est accélérable, par exemple, par le plus simple des procédés d'accélération :

$$t_n = (x_{n-1} + x_n)/2.$$

La famille Lin est accélérable par le procédé Δ^2 d'Aitken ([3] [19]) qui cette fois-ci n'est pas un procédé linéaire ; Lin est aussi accélérable par d'autres procédés ([3] [17]).

La famille des suites totalement oscillantes (voir [2] [3] [18]) est une sousfamille de Lin ([4]); elle est donc aussi accélérable.

Pour les quatre familles qui restent et qu'a priori il ne semble pas déraisonnable de vouloir accélérer, aucun résultat global n'a jamais été établi.

Pour la plus grande de ces familles le problème est assez facile à régler, en effet :

Théorème 9

Alt.A est rémanent au sens généralisé.

- (a) Prenons $(x^n) = 1/2^n$.
- (0°) Soit (x_n^0) défini par : $x_n^0 = 1 + (-1)^n/2^{n+1}$.
- (1°) Soit m_o ϵ N, prenons p_o le premier nombre pair \geq m_o et (\mathbf{x}_n^1) défini par : $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n^0 \sin \leq \mathbf{p}_o$; $\mathbf{x}_n^1 = \mathbf{x}_n^1 + (-1)^n/2^{n+2}$.
- (2°) Soit $m_1 > p_0$, prenons p_1 le premier nombre pair $\geq m_1$ et (\mathbf{x}_n^2) défini par : $\mathbf{x}_n^2 = \mathbf{x}_n^1$ si $n \leq p_1$; $\mathbf{x}_n^2 = \mathbf{x}^2 + (-1)/2^{n+3}$.

. . .

(i°) Soit $m_{i-1} > p_{i-2}$, prenons p_{i-1} le premier nombre pair $\geq m_{i-1}$ et (x_n^i) défini par :

$$x_n^i = x_n^{i-1} \text{ si } n \le p_{i-1};$$

 $x_n^i = x^i + (-1)^n/2^{n+i+1}.$

. . .

(b) On vérifie que :

$$(x_0^0, x_1^0, \dots, x_{p_0}^0, x_{p_0+1}^1, \dots, x_{p_1+1}^2, \dots, x_{p_{i-1}}^{i-1}, x_{p_{i-1}+1}^i, \dots, x_{p_i}^i, x_{p_i+1}^{i-1}, \dots)$$
 $\in Alt. A.$

Théorème 10

Il n'existe aucune transformation normale accélérant Osc. B.

Démonstration

Supposons donnée (f_n) ϵ Norm (IR, IR) accélérant Osc.B.

Nous allons construire étape par étape une suite (x_n) ϵ Osc.B qui ne sera pas accélérée par (f_n) .

Etape 0

On prend x_0 , x_1 dans \mathbb{R} satisfaisant $x_1 > x_0$.

. . .

Etape k

On suppose construits x_0 , x_1 , ..., x_{2k-2} , x_{2k-1} vérifiant que :

(a k-1)
$$x_0 < x_2 < \dots < x_{2k-4} < x_{2k-2} < x_{2k-1} < x_{2k-3} < \dots < x_3 < x_1$$

(b k-1)
$$L_{k-1} = \{x^* \in \mathbb{R} \mid (-1)^{n+1} (x_n - x^*) \ge 0 \text{ et décroissant pour}$$

 $n = 0, 1, ..., 2k-1\} = [(x_{2k-2} + x_{2k-1})/2, x_{2k-1}]$

(c k-1)
$$\forall x^* \in L_{k-1} : (t_{2k-3} - x^*)/(x_{2k-3} - x^*) \ge 1/2$$

Il existe des suites (x_n) ϵ Osc.B commençant par $(x_0, x_1, \dots, x_{2k-1})$, donc

$$(x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}) \in \text{dom } f_{2k-1}$$
; donc $t_{2k-1} = f_{2k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{2k-1})$ existe.

Deux cas peuvent se produire :

$$\frac{\text{cas 1}}{2k-1}$$
 $\frac{1}{2k-1}$ $\frac{1}{2k-2}$ $\frac{1}{2k-2}$ $\frac{1}{2k-1}$

on pose alors :

$$x_{2k} = (x_{2k-2} + x_{2k-1})/2, x_{2k+1} = (3x_{2k-2} + 5x_{2k-1})/8.$$

$$\frac{\text{cas 2}}{2k-1} t_{2k-1} \le (x_{2k-2} + 3x_{2k-1})/4$$

on pose alors :

$$x_{2k} = (x_{2k-2} + 7x_{2k-1})/8, x_{2k+1} = (x_{2k-2} + 15x_{2k-1})/16.$$

Il est clair que (a k) est satisfaite.

Dans le cas 1 et dans le cas 2 on a :

(b k)
$$L_k = [(x_{2k} + x_{2k+1})/2, x_{2k+1}].$$

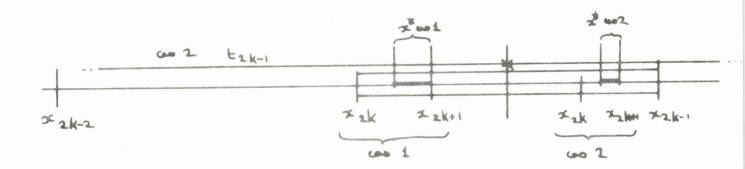
Dans le cas 1 :

$$\forall x^* \in L_k : (t_{2k-1} - x^*)/(x_{2k-1} - x^*) \ge 4/7.$$

Dans le cas 2 :

$$\forall x^* \in L_k : (t_{2k-1} - x^*)/(x_{2k-1} - x^*) \ge 5/3$$

Donc (c k) est satisfaite.



La suite (x_n) ainsi construite est convergente vers une limite $x \in \cap L_k$ (on a même : $\{x\} = \cap L_k$). $k \in \mathbb{N}$

Puisque : \forall k \in N : x \in L_k, on en déduit que (x_n) \in Osc. B, mais les relations (c k) montrent que (x_n) n'est pas accélérée par (f_n).

Remarque

- 1) Dans cette démonstration l'impossibilité d'accélération ne vient pas de la régularité de l'algorithme sur une certaine famille, elle vient de ce que la famille Osc.B possède des suites ayant des débuts très variés et de ce qu'une suite composée de ces débuts est encore dans Osc. B.
- 2) La suite (x_n) de la démonstration vérifie que :

$$(x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) \in \{-1/2, -1/4, -1/8\}$$

On peut donc affirmer que :

L'ensemble des suites (x_n) telles que :

 $(x_{n+2}-x_{n+1})/(x_{n+1}-x_n) \in \{-1/2, -1/4, -1/8\}$ n'est pas accélérable.

4 - FAMILLES DE SUITES À CONVERGENCE LINÉAIRE

La famille des suites à convergence linéaire est l'une des plus grandes familles de suites que l'on puisse accélérer. Nous le montrons ici en établissant que certaines familles très proches mais un peu plus grandes ne sont pas accélérables

(théorèmes 11 et 12). Ces résultats ont déjà été présentés dans [9] et [10].

Notations et définitions

Rappelons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$:

$$\operatorname{Lin}_{\lambda} (\mathbb{R}) = \{(x_n) \in \operatorname{Conv}^{\star} (\mathbb{R}) \mid \lim_{n \to \infty} (x_{n+1}^{-} x) / (x_n^{-} x) = \lambda \}$$

Soient λ , $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda < \mu$. On définit aussi :

$$\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu} (\mathbb{R}) = \{(\mathbf{x}_n) \in \operatorname{Conv}^*(\mathbb{R}) \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \lambda \leq (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}) / (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) \leq \mu \}$$

S Lin (R) = {
$$(x_n) \in Conv^*(R) \mid \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x) / (x_n - x) = 0$$
}

(famille des suites à convergence super-linéaire).

- Soient λ , $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \mu < 1$: (i) Il n'existe aucune transformation normale accélérant $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}(\mathbb{R})$.
 - (ii) Il n'existe aucune transformation normale accélérant $\operatorname{Lin}_{\lambda_{-1,1}}(\mathbb{R})$.

Le résultat évident suivant va nous servir :

Lemme

Soit
$$(x_n)$$
 une suite de nombres réels. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $(|\lambda| < 1)$ tels que :

$$\forall n \geq n_{0} : x_{n+1} - x_{n} = \lambda(x_{n} - x_{n-1}),$$
alons i) $\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_{0}+k+1} = x_{n_{0}} + \frac{\lambda(1-\lambda^{k+1})}{1-\lambda} (x_{n_{0}} - x_{n_{0}-1}),$
ii) $\lim_{n \to \infty} x_{n} = x_{n_{0}} + \frac{\lambda}{1-\lambda} (x_{n_{0}} - x_{n_{0}-1}).$

Démonstration du théorème

(i) Supposons qu'il existe une transformation normale A = (f_n) accélérant $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}(\mathbb{R})$.

On pose : $\alpha = \frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\lambda}{1-\lambda} > 0$; $\beta = \min \left\{ \frac{\alpha - \alpha \lambda}{4\lambda} \right\}$; 1} > 0 ;

$$\delta = \frac{1}{2} \alpha - \frac{\lambda \beta}{1 - \lambda} > 0$$
; $\theta = \frac{\delta}{\lambda/(1 - \lambda) + \alpha/2} > 0$.

Soit (x_n^0) la suite définie par :

$$x_{0}^{\circ} = 0 ; x_{1}^{\circ} > x_{0}^{\circ} ; \forall n \in \mathbb{N} : (x_{n+2}^{\circ} - x_{n+1}^{\circ})/(x_{n+1}^{\circ} - x_{n}^{\circ}) = \lambda.$$

Par hypothèse la suite transformée de (x_n^0) par A accélère (x_n^0) . Il existe donc

 $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|t_{n_{o}}^{o} - x_{n_{o}}^{\lambda}| / |x_{n_{o}}^{o} - x_{n_{o}}^{\lambda}| \le \beta$$
,

où on a posé : $x_{n_0}^{\lambda} = x_{n_0}^{0} + \frac{\lambda}{1-\lambda} (x_{n_0}^{0} - x_{n_0-1}^{0})$.

(d'après le lemme $x_{n}^{\lambda} = \lim_{n \to \infty} x_{n}^{0}$)

Soit (x_n^1) la suite définie par :

$$x_n^1 = x_n^0 \sin n \le n_0$$

$$(x_n^1 - x_{n-1}^1)/(x_{n-1}^1 - x_{n-2}^1) = \mu \sin n > n_0$$
.

Cette suite est croissante et d'après le lemme elle converge vers :

$$x_{n_0}^{\mu} = x_{n_0}^{\circ} + \frac{\mu}{1-\mu} (x_{n_0}^{\circ} - x_{n_0-1}^{\circ}) > x_{n_0}^{\lambda}$$
.

Il existe donc $n_1 > n_0$ tel que :

$$x_{n_1}^1 \geq x_{n_0}^{\lambda \mu}$$

où on a posé :
$$x_{n_0}^{\lambda\mu} = (x_{n_0}^{\mu} + x_{n_0}^{\lambda})/2 = x_{n_0}^{\lambda} + \alpha(x_{n_0}^{0} - x_{n_0}^{0})/2$$
.

On définit alors (x_n^2) par :

$$x_n^2 = x_n^1 \sin n \le n_1$$

$$(x_n^2 - x_{n-1}^2)/(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2) = \lambda \sin n > n_1.$$

Par hypothèse la suite transformée de (x_n^2) par A accélère (x_n^2) . il existe donc $n_2 > n_1$ tel que :

$$|t_{n_2}^2 - x_{n_2}^{\lambda}| / |x_{n_2}^2 - x_{n_2}^{\lambda}| \le \beta,$$

où on a posé
$$x_{n_2}^{\lambda} = x_{n_2}^2 + \frac{\lambda}{1-\lambda} (x_{n_2}^2 - x_{n_2}^2)$$

(d'après le lemme :
$$x_{n_2}^{\lambda} = \lim_{n \to \infty} x_n^2$$
)

De la même manière on définit des suites (x_n^3) , (x_n^4) etc.

Soit alors la suite :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0+1}^1, x_{n_0+2}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^1, \dots).$$

Cette suite converge car

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x_{n+2} - x_{n+1}) / (x_{n+1} - x_n) \in \{\lambda, \mu\}.$$

Sa limite x vérifie $x \ge x_{n_0}^{\lambda \mu}, x \ge x_{n_0}^{\lambda \mu}, \dots$

Par construction on a :
$$t_{n}^{00} \ge x_{n}^{00}$$
 (resp. $t_{n_{2}}^{2} \ge x_{n_{2}}^{2}$, ...) car : $t_{n_{0}}^{0} = x_{n_{0}}^{0} + x_{n_{0}}^{\lambda} - x_{n_{0}}^{0} + t_{n_{0}}^{0} - x_{n_{0}}^{\lambda}$ $\ge x_{n_{0}}^{0} + (x_{n_{0}}^{\lambda} - x_{n_{0}}^{0}) - |t_{n_{0}}^{0} - x_{n_{0}}^{\lambda}|$ $\ge x_{n_{0}}^{0} + (x_{n_{0}}^{\lambda} - x_{n_{0}}^{0}) - \beta|x_{n_{0}}^{0} - x_{n_{0}}^{\lambda}|$ $= x_{n_{0}}^{0} + (1-\beta)(x_{n_{0}}^{\lambda} - x_{n_{0}}^{0}) \ge x_{n_{0}}^{0}$.

La fonction homographique $z \rightarrow (z - t_{n_0}^0)/(z - x_{n_0}^0)$ est donc croissante, et donc :

$$(x - t_{n_0}^{\circ})/(x - x_{n_0}^{\circ}) \ge (x_{n_0}^{\lambda\mu} - t_{n_0}^{\circ})/(x_{n_0}^{\lambda\mu} - x_{n_0}^{\circ})$$

 $(\mathbf{x} - \mathbf{t}_{\underline{n}}^{\circ}) / (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\underline{n}}^{\circ}) \ge (\mathbf{x}_{\underline{n}}^{\lambda \mu} - \mathbf{t}_{\underline{n}}^{\circ}) / (\mathbf{x}_{\underline{n}}^{\lambda \mu} - \mathbf{x}_{\underline{n}}^{\circ})$ Les suites $(\mathbf{x}_{\underline{n}}^{\circ})$ et $(\mathbf{x}_{\underline{n}})$ coı̈ncident pour tout $\underline{n} \le \underline{n}_{\underline{n}}$; et donc $\underline{t}_{\underline{n}} = \underline{t}_{\underline{n}}^{\circ}$;

nous pouvons donc écrire :

$$(x - t_{n_0})/(x - x_{n_0}) \ge (x_{n_0}^{\lambda \mu} - t_{n_0}) / (x_{n_0}^{\lambda \mu} - x_{n_0})$$
 (*)

D'autre part :

$$\begin{aligned} x_{n_{o}}^{\lambda\mu} - t_{n_{o}} &= x_{n_{o}}^{\lambda\mu} - x_{n_{o}}^{\lambda} + x_{n_{o}}^{\lambda} - t_{n_{o}} \\ &\geq \alpha (x_{n_{o}}^{o} - x_{n_{o}-1}^{o})/2 - |x_{n_{o}}^{\lambda} - t_{n_{o}}^{o}| \\ &\geq \alpha (x_{n_{o}}^{o} - x_{n_{o}-1}^{o})/2 - \beta |x_{n_{o}}^{\lambda} - x_{n_{o}}^{\lambda}| \\ &= \delta (x_{n_{o}}^{o} - x_{n_{o}-1}^{o}) \end{aligned}$$

$$\begin{split} \operatorname{donc} \; : \; (x_{n_{o}}^{\lambda\mu} - t_{n_{o}}^{\circ})/(x_{n_{o}}^{\lambda\mu} - x_{n_{o}}^{\circ}) \; & \geq \; \delta(x_{n_{o}}^{\circ} - x_{n_{o}-1}^{\circ})/(x_{n_{o}}^{\lambda\mu} - x_{n_{o}}^{\circ}) \\ & = \frac{\delta(x_{n_{o}}^{\circ} - x_{n_{o}-1}^{\circ})}{x_{n_{o}}^{\lambda} - x_{n_{o}}^{\circ} + \alpha(x_{n_{o}}^{\circ} - x_{n_{o}-1}^{\circ})/2} = \theta \quad . \end{split}$$

Avec l'inégalité (*) cela nous donne :

$$(x - t_n)/(x - x_n) \ge \theta$$

De la même manière on a :

$$(x - t_{n_2})/(x - x_{n_2}) \ge \theta,$$

 $(x - t_{n_1})/(x - x_{n_2}) \ge \theta, \text{ etc } ...$

Ce qui montre que A n'accélère pas (x_n) .

Nous avons donc une contradiction car la suite (x_n) par construction vérifie que \forall n $\in \mathbb{N}$: $(x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) \in \{\lambda, \mu\}$,

ce qui implique :

$$(x_n) \in Lin_{\lambda,\mu}^{\Delta}$$
 (IR).

(ii) La démonstration précédente est aussi valable pour $\text{Lin}_{\lambda,\mu}$ (R) car toutes les suites (x_n^0) , (x_n^1) , ... et la suite (x_n) vérifient que :

$$\lambda = \frac{\frac{x_n - x_n^{\lambda}}{x_{n-1} - x_n^{\lambda}} \le \frac{x_n - x}{x_{n-1} - x} \le \frac{x_n - x_n^{\mu}}{x_{n-1} - x_n^{\mu}} = \mu$$

où :
$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$
, $x_n^{\lambda} = x_n + \frac{\lambda}{1-\lambda} (x_n - x_{n-1})$

$$x_n^{\mu} = x_n + \frac{\mu}{1-\mu} (x_n - x_{n-1})$$
.

Remarques

1°) En fait, la démonstration établit un résultat légèrement plus fin que celui énoncé au théorème 11 :

Soient λ , $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < \mu < 1$.

Il n'existe aucune transformation normale accélérant toutes les suites de Conv (TR) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x_{n+2} - x_{n+1}) / (x_{n+1} - x_n) \in \{\lambda, \mu\}.$$

2°) On vérifie que si :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda \le (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) \le \mu,$$
 (A)

alors:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda' \le (x_{n+1} - x)/(x_n - x) \le \mu'$$
(B)

avec $\lambda' = (\lambda \mu - \lambda)/(\lambda-1)$, $\mu' = (\lambda \mu - \mu)/(\mu-1)$,

et qu'inversement si (B) est vrai avec λ' , μ' alors (A) est vrai avec λ = $(\lambda' \mu' - \lambda')/(\lambda' - 1)$, μ = $(\lambda' \mu' - \mu')/(\mu' - 1)$.

- 3°) Le résultat du théorème 11 peut être étendu sous la forme suivante : Soient λ , μ ϵ \mathbb{R} , 0 < λ < μ < 1, k ϵ \mathbb{N} .
- Il n'existe aucune transformation k-normale accélérant $\lim_{\lambda \downarrow 0}^{\Delta}$ (TR), ou $\lim_{\lambda \downarrow 0}$ (TR).
- 4°) Nous n'avons pas établi que les familles, $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}(\mathbb{R})$ vérifiaient une propriété de rémanence et en réalité, elles n'en vérifient pas. En effet si c'était le cas alors, non seulement aucune transformation normale ou k-normale n'accélérerait $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}(\mathbb{R})$ mais (ce qui est beaucoup plus fort) aucune transformation algorithmique n'accélérerait $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}(\mathbb{R})$. Or justement si λ , μ sont tels que 0 < λ < μ < 1 la transformation algorithmique définie par $t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{accélère} \operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}(\mathbb{R})$.
- 5°) La famille des suites obtenues par une itération $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est une fonction lipschitzienne de rapport $\alpha < 1$ (α fixé) contient toutes les suites utilisées dans la démonstration du théorème 1. Les résultats négatifs énoncés valent donc pour cette famille de suites.

Théorème 12

Il n'existe aucune transformation normale accélérant S Lin (IR).

Supposons donnée une transformation normale $N = (f_n)$ accélérant, S Lin (\mathbb{R}) .

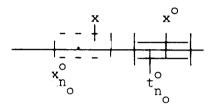
Soit (\mathbf{x}_n°) la suite définie par : $\mathbf{x}_n^{\circ} = \sum_{i=0}^{n} 1/i!$ La suite $(\mathbf{x}_n^{\circ}) \in S$ Lin (\mathbb{R}) et sa limite est $\mathbf{x}^{\circ} = e$.

Par hypothèse N accélère (x_n^0) , il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|t_{n}^{o} - x^{o}| / |x_{n}^{o} - x^{o}| \le 1/4.$$

Pour tout réel $x \in]x_n^0, (x_n^0 + x^0)/2]$ on a :

$$|t_n^{\circ} - x| \le |x_n^{\circ} - x| \le 1/2$$



$$(\operatorname{car}: |t_{n_{0}}^{\circ} - x| \ge |x - x^{\circ}| - |t_{n_{0}}^{\circ} - x^{\circ}| \ge |x_{n_{0}}^{\circ} - x^{\circ}|/2 - |x_{n_{0}}^{\circ} - x^{\circ}|/4$$

$$= |x_{n_{0}}^{\circ} - x^{\circ}|/4 \ge |x_{n_{0}}^{\circ} - x|/2)$$

On définit maintenant la suite (x_n^1) par :

$$x_n^1 = x_n^0$$
 pour tout $n \le n_0$,

$$x_n^1 = x_{n-1}^1 + 1/2 \text{ n! pour tout } n > n_0$$
.

$$x_n^1 = x_{n-1}^1 + 1/2$$
 n! pour tout $n > n_0$. $x^0 + x_n^0$
La suite $(x_n^1) \in S$ Lin (\mathbb{R}) et sa limite est : $x^1 = \frac{n_0}{2}$.

Par hypothèse N accélère (x_n^1) , il existe donc $n_1 > n_0$ tel que :

$$|t_{n_1}^1 - x^1| / |x_{n_1}^1 - x^1| \le 1/4.$$

Pour tout réel $x \in [x_{n_1}^1, (x_{n_1}^1 + x_1^1)/2]$ on a :

$$|t_{n_1}^1 - x| / |x_{n_1}^1 - x| \ge 1/2.$$

On continue de la même manière.

Soit alors la suite (x_n) définie par :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_{n_0}^1, x_{n_0+1}^1, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^2, \dots)$$

Cette suite est croissante et converge vers x tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N} : x \in]x_{n_i}^i, (x_{n_i}^i + x^i)/2].$$

Cette suite est dans S Lin (TR) et pourtant par construction :

 \forall i \in \mathbb{N} : $\left| t_{n} - x \right| / \left| x_{n} - x \right| \ge 1/2$

ce qui signifie que (t_n) n'accélère pas (x_n) .

Remarque

Pour S Lin (TR) il se produit quelque chose de très particulier que nous n'avons pas rencontré jusqu'à présent. S Lin (TR) n'est pas accélérable par des transformations normales, mais contrairement à ce qui se passe pour $\text{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}$ (TR) ou $\text{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}$ (TR) cette impossibilité ne se transmet pas aux transformations k-normales, k \geq 1 pour la simple raison que t_n = x_{n+1} accélère S Lin(TR).

5 - FAMILLES DE SUITES À CONVERGENCE LOGARITHMIQUE

Dans [23] D.A. Smith et W.F. Ford ont étudié de manière assez détaillée les problèmes numériques de l'accélération des suites à convergence logarithmique. En conclusion de leur article, ils affirment qu'une évidence empirique est qu'une bonne condition d'applicabilité d'une transformation de suites pour l'accélération de la convergence logarithmique est son exactitude sur les suites de [6], et ils se demandent s'il est possible d'établir rigoureusement un tel résultat (analogue à celui de B. Germain-Bonne concernant la convergence linéaire [17]).

Nous voyons ici que la méthode de la rémanence permet de répondre que non : un tel résultat ne peut pas exister car la famille des suites à convergence logarithmique est rémanente au sens général (théorème 13). On pourra remarquer que bien qu'utilisant le "raccourci" de la rémanence le résultat négatif sur la convergence logarithmique nécessite une démonstration assez compliquée.

La conclusion de ce paragraphe est que les suites à convergence logarithmique sont difficiles à accélérer : on ne peut les accélérer toutes, simultanément ; et en conséquence si l'on veut accélérer de telles suites il faut n'essayer que des sous-ensembles stricts de la famille Log SF.

Les résultats exposés ici ont été publiés dans [16] et ils constituent une généralisation d'un résultat de [14]. Le travail de C. Kowalewski [20][21] a précisé le problème.

Définitions

Suivant en cela les notations de [20] nous désignerons par Log la famille des suites (x_n) ϵ Conv $^*(\mathbb{R})$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{-x}}{x_n^{-x}}=1;$$

et par Log SF la famille des suites (x_n) ϵ Con v^* (\mathbb{R}) telles que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}^{-x}}{x_n^{-x}} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+2}^{-x}}{x_{n+1}^{-x}} = 1.$$

Théorème 13

La famille Log SF est rémanente au sens général, il n'existe donc aucune transformation algorithmique de suites accélérant Log SF ou Log.

Lemme

Soit
$$p_0 \in \mathbb{N}$$
, a, b, c, $r \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b < c$; $0 < r < 1$; $(c-b)/(1-r) < (c-a)$.

Il existe une suite (x_n) telle que :

(i) $x_p = c$, $x_{p_0+1} = b$;

(ii) $(x_n) + a$;

(iii) $\forall n \ge p_0$: $r \le (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n) \le 1$;

(iv) $(x_{n+2} - x_{n+1}) / (x_{n+1} - x_n) + 1$;

Démonstration du lemme

Sans perte de généralité on peut supposer que p = 0.

Soit (r_n) une suite réelle, croissante, convergeant vers 1 et telle que : $r_0 = r$.

Nous allons construire des suites convergentes (x_n^0) , (x_n^1) , ..., (x_n^i) , ... de limites respectives x^0 , x^1 , ..., x^i , ... puis nous définirons la suite voulue (x_n) .

Construction de (x^o)

Posons: $s_0 = r$, $x_0^0 = c$ et pour tout $n \ge 1$: $x_n^0 = c - (c-b)(1 + x_0 + s_0^2 + ... + s_0^{n-1}).$ On a: $x^0 = c - (c-b)/(1-s_0)$ = c - (c-b)/(1-r) > c - (c-a) = a.

Posons aussi $m_{-1} = 0$.

Construction de (xⁱ⁺¹_n)

Il existe un entier $m_i \ge m_{i-1}$, et un réel s_{i+1} tels que :

$$(a_{i+1})$$
 $r_{i+1} \le s_{i+1} \le 1$,
 (b_{i+1}) $|x_{m_{i}}^{i} - x_{i}^{i}| \le 1/2^{i}$,
 (c_{i+1}) $x_{m_{i}}^{i} - (x_{m_{i}}^{i} - x_{m_{i}}^{i})/(1-s_{i+1}) = (x_{m_{i}}^{i})/(1-s_{i+1})$

(On commence par choisir m_i de façon que :

$$|x_{m_{i}}^{i} - x^{i}| \le 1/2^{i}$$
 et
 $x_{m_{i}-1}^{i} - (x_{m_{i}-1}^{i} - x_{m_{i}}^{i})/(1-r_{i+1}) \ge (x^{i}+a)/2,$

puis, ensuite, on détermine s_{i+1})

La suite (x_n^{i+1}) est alors définie par : $x_n^{i+1} = x_n$ pour tout $n \in \{0, 1, ..., m_i\},$

$$x_n^{i+1} = x_{m_i-1}^{i} - (x_{m_i-1}^{i} - x_{m_i}^{i})(1 + s_{i+1} + s_{i+1}^{2} + \dots + s_{i+1}^{n-m_i})$$

pour $n > m_i$.

On a :
$$x^{i+1} = x^{i}_{m_{i}-1} - (x^{i}_{m_{i}-1} - x^{i}_{m_{i}})/(1-s_{i+1}) = (x^{i}+a)/2 > a$$
.

Une fois toutes les suites (x_n^0) , (x_n^1) , ..., (x_n^i) , ... définies, on pose :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}, \dots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \dots).$$

Démontrons maintenant que (i), (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont vraies :

- (i) Par construction $x_0^0 = c$, $x_1^0 = b$; et, puisqu'on a pris $p_0 = 0$, (i) est vérifiée.
- (ii) La suite (x_n) est décroissante ; les relations (b_1) , (b_2) , ..., (b_i) , ... nous donnent que :

$$\forall i \ge 1 : |x^i - x_{m_i}| \le 1/2^i ;$$

par définition :

$$\forall i \ge 1 : x^i = (x^{i-1} + a)/2;$$

et donc (ii) est vraie.

(iii) et (iv).

Si
$$m \in \{m_i^{-1}, m_i^{-1}, \dots, m_{i+1}^{-1} - 2\}$$
 on a :

$$(x_{m+2} - x_{m+1})/(x_{m+1} - x_m) = s_{i+1};$$

de
$$(a_1)$$
, (a_2) , ..., (a_i) , ... on tire :

$$\forall i \in \mathbb{N} : r_i \leq s_i \leq 1;$$

et donc (iii) et (iv) sont satisfaites.

(v) et (vi)

Si
$$m \in \{m_i, m_i+1, ..., m_{i+1} - 1\}$$
 on a :

$$(x_{m+1} - x^{i+1})/(x_m - x^{i+1}) = s_{i+1};$$

des inégalités a $< x^{i+1} < x_{m+1} < x_m$ on déduit :

$$s_{i+1} \le (x_{m+1} - a)/(x_m - a) < 1$$
; ce qui donne (v) et (vi).

Démonstration du théorème

Dans (RG(a)) nous prenons : $(x^n) = (1/(n+1))$

Soit (v_n) une suite croissante de nombres réels positifs convergente de limite 1.

 $(RG(a)(0^\circ))$ On définit (x_n°) en posant $(x_n^\circ) = 1 + 1/(n+1)$

 $(RG(a)(1^{\circ}))$ Soit m \geq 0. Il existe p \geq m tel que :

(A1)
$$(x_{p_0}^{\circ} - x_{p_0+1}^{\circ}) / (x_{p_0}^{\circ} - x^{1}) \le 1 - v_{o}$$

(B1)
$$|x_{p_0}^{\circ} - x_{o}| \le 1/2^{\circ}$$
.

Soit (y_n^1) la suite donnée par le lemme avec p_o , $a = x^1$, $b = x_{p_o+1}^o$, $c = x_{p_o}^o$, $r = v_o$. (Cette suite existe car (A1) est vérifiée).

La suite (x_n^1) est alors définie par :

 $x_n^1 = x_n^0$ pour tout $n \in \{0, 1, ..., p_o\},$

 $x_n^1 = y'_n \text{ pour } n > p_0.$

 $(RG(a)(i^{\circ}))$ Soit $m_{i-1} > p_{i-2}$. Il existe $p_{i-1} > m_{i-1}$ tel que :

$$(A_i)$$
 $(x_{p_{i-1}}^{i-1} - x_{p_{i-1}+1}^{i-1})/(x_{p_{i-1}}^{i-1} - x^i) < 1 - v_{i-1}$

$$(B_i)$$
 $|x_{p_{i-1}}^{i-1} - x_{i-1}| \le 1/2^{i-1}$

Soit (y_n^i) la suite donnée par le lemme avec p_{i-1} , $a = x^i$, $b = x_{p_{i-1}+1}^{i-1}$, $c = x_{p_{i-1}}^{i-1}$, $r = v_{i-1}$.

1-1 - . . i.

La suite (x_n^i) est alors définie par :

$$x_n^i = x_n^{i-1}$$
 pour tout $n \in \{0, 1, ..., p_{i-1}\},$

$$x_n^i = y_n^i$$
 pour $n > p_{i-1}$.

(RG(b)) Il faut maintenant établir que la suite

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{p_0}^0, x_{p_0+1}^1, \dots, x_{p_1}^1, x_{p_1+1}^1, \dots)$$

est encore une suite de Log SF.

De (B1), (B2), ..., (Bi) ... on déduit que (\mathbf{x}_n) converge vers 0

De (A1), (A2), ..., (Ai) ... et des propriétés (i) et (iii) du lemme, on tire que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = 1$$

Un raisonnement analogue à celui du lemme (v) (vi) donne que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x}{x_n-x}=1.$$

Remarque

Log SF n'est pas accélérable globalement et malgré tout, nombre de suites de Log SF sont accélérables par des procédés spécifiques [1] [3] [5] [6] [23] [25]. Le problème se trouve donc naturellement posé : quelles sont les sous-familles de Log SF qui sont accélérables ? (par quel procédés ?), et quelles sont celles qui ne le sont pas ? Le travail de C. Kowalewski [20] [21] contribue à répondre à ces questions, cependant bien des problèmes (et parfois assez simples) sont aujourd'hui sans réponse et nécessiteront des études détaillées.

6 - Résumé

Lorsque E = IR toutes les familles suivantes sont non accélérables.

	page de la définition	énoncé et page de l'énoncé
Conv	p. 176	Thé. 4 p. 186
Conv*	p. 176	Thé. 5 p. 187
Mon ⁻ , Mon ⁺ , Mon	p. 188	Thé. 6 p. 189
Mon ^{-*} , Mon ^{**} , Mon [*]	p. 189	Thé. 7 p. 190
$\operatorname{Mon}_{k}^{-}$, $\operatorname{Mon}_{k}^{+}$, $\operatorname{Mon}_{k}^{+}$	p. 189	Thé. 8 p. 191
Alt A, Alt B, Osc A, Osc B	p. 195	Thé. 9 et Thé. 10 p.196-7
$ \operatorname{Lin}_{\lambda,\mu}^{\Delta}, \operatorname{Lin}_{\lambda,\mu} $ $0 \le \lambda < \mu \le 1$	p. 200	Thé. 11 p. 200
S Lin	p. 200	Thé. 12 p. 204
Log, Log SF	p. 207	Thé. 13 p. 207

CONCLUSION

Pour chaque type de familles de suites, les résultats d'accélération de la convergence se doivent de déterminer le plus finement possible la frontière entre l'accélérable et le non accélérable. Les résultats positifs tentent de trouver les familles les plus grandes possible qui soient accélérables, et les résultats négatifs, eux, essaient de trouver des familles les plus petites possible qui soient non accélérables. Jamais les deux types de résultats ne peuvent se rejoindre complètement (car on sait qu'il n'existe pas de familles accélérables maximales, ni de familles non accélérables minimales) mais malgré tout, au fur et à mesure des énoncés, la frontière se dessine avec plus de précision. Dans le cas des familles de suites monotones, des familles de suites alternées, des familles de suites de type linéaire ou logarithmique la localisation commence à être assez fine. Après une période de résultats relativement faciles, nous entrons maintenant dans une période où chaque pas nouveau coûte plus cher (démonstrations plus longues, plus complexes, algorithmes plus difficiles) cependant ce travail de localisation de la frontière entre l'accélérable et le non accélérable doit se poursuivre car il est vraisemblable que comme cela s'est produit ces dernières années, il fournira des idées nouvelles intéressantes.

Références

- [1] BREZINSKI C. "Accélération des suites à convergence logarithmique", C.R. Acad. Sc. Paris, A, 273, 1971, pp. 772-774.
- [2] BREZINSKI C. "Génération de suites totalement monotones et oscillantes", C.R. Acad. Sc. Paris, A, 280, 1975, pp. 729-731.
- [3] BREZINSKI C. "Accélération de la convergence en analyse numérique", Lecture Notes in Mathematics, 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [4] BREZINSKI C. "Convergence Acceleration of Some Sequences by the ε -Algorithm", Numer. Math. 29, 1978, pp. 173-177.
- [5] BREZINSKI C. "Algorithmes d'accélération de la convergence, étude numérique", Technip, Paris, 1978.
- [6] CORDELLIER F. "Caractérisation des suites que la première étape du θ-algorithme transforme en suites constantes", C.R. Acad. Sc. Paris, A, 284, 1977, pp. 389-392.
- [7] DELAHAYE J.P. "Liens entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des différences : démonstrations", Publication ANO n° 14, Univ. des Sc. et Tech. de Lille.
- [8] DELAHAYE J.P. "Liens entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des différences", C.R. Acad. Sc. Paris A, 290, 1980, pp. 343-346.
- [9] DELAHAYE J.P. "Accélération des suites dont le rapport des erreurs est borné", Calcolo, 18, 1981, pp. 103-116.
- [10] DELAHAYE J.P. "Optimalité du procédé Δ^2 d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire", RAIRO An. Num. 15, 1981, pp. 321-330.
- [11] DELAHAYE J.P. "Les divers types de transformations algorithmiques de suites", Publication A.N.O. nº 69 Uni. Sc. et Tech. de Lille, 1982.

- [12] DELAHAYE J.P. "Familles de suites alternées et propriétés de rémanence", Colloque d'Analyse Numérique de Belgodère, mai 1982.
- [13] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Quelques résultats négatifs en accélération de la convergence", Publication ANO n° 6, Univ. Sc. et Tech. de Lille, 1979
- [14] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Résultats négatifs concernant les algorithmes d'accélération de la convergence", Publication n° 337 du Labo. IMAG de l'Uni. Sc. et Méd. de Grenoble, 1980.
- [15] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Résultats négatifs en accélération de la convergence", Num. Math., 35, 1980, pp. 443-457.
- [16] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated", SIAM, Num. An. 19, 1982 pp 840-844.
- [17] GERMAIN-BONNE B. "Estimation de la límite de suites et formalisation des procédés d'accélération de convergence", Thèse, Lille 1978.
- [18] GILEWICZ J. "Approximants de Padé", Lecture Notes in Mathematics, 667, Springer-Verlag, Heidelberg, 1978.
- [19] HILLION P. "Méthode d'Aithen Itérée pour suites oscillantes d'approximation", C.R. Acad. Sc. Paris, A. 280, 1975, pp. 1701-1703.
- [20] KOWALEWSKI C. "Possibilités d'accélération de la convergence logarithmique", Thèse de 3° cylce, Lille, 1981.
- [21] KOWALEWSKI C. "Accélération de la convergence pour certaines suites à convergence logarithmique", in Padé Approximation and its Applications Amsterdam 1980, Lecture Notes in Mathematics, 888, Springer-Verlag, Heidelberg, 1981, pp. 263-272.
- [22] PENNACCHI R. "Le Transformazioni rationali di una successione", Calcolo, 5, 1968, pp. 37-50.

- [23] SMITH D.A. et FORD W.F. "Accélération of linear and logarithmic convergence", S.I.A.M. Numer. An., 16, 1979, pp. 223-240.
- [24] TROJAN J.M. "An upper bound on the acceleration of convergence", First French-Polish Meeting on Padé Approximation and convergence acceleration techniques, Varsovie Pologne 1-4 juin 1981.
- [25] WIMP J. "Sequence transformations and their applications", Academic Press, New-York, 1981.

CHAPITRE 6

ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE LINÉAIRE

Introduction

Dans ce chapitre nous étudions quelques uns des problèmes posés par l'accélération de la famille des suites à convergence linéaire et des familles voisines.

Les résultats du § 1 ont pour but de fournir des caractérisations des suites à convergence linéaire et des suites à convergence périodicolinéaire. Ces caractérisations nous permettent au § 2 d'utiliser les algorithmes de détermination de la période du chapitre 2 qui combinés avec une généralisation du procédé Δ^2 d'Aitken donnent diverses méthodes nouvelles d'accélération de la convergence, particulièrement adaptées aux suites périodico-linéaires.

Les difficultés rencontrées au § 2 nous ont conduits à penser que la famille des suites à convergence linéaire ne pouvait pas être sensiblement agrandie tout en restant accélérable. En fait au § 3 nous montrons que le procédé Δ^2 d'Aitken est optimal en trois sens différents au moins pour l'accélération de la convergence linéaire. Premièrement, c'est algébriquement la plus simple des transformations de suites accélérant la convergence linéaire ; deuxièmement son domaine d'efficacité, la famille des suites à convergence linéaire, ne peut guère être agrandi ; troisièmement, le degré d'accélération qu'il donne pour la convergence linéaire est le meilleur possible.

Les résultats de § 1 ont déjà été publiés dans [11] [14] ceux du § 2 dans [10] [15] et ceux du § 3 dans [16].

1 - Suites à convergence linéaire et périodico-linéaire.

Une suite (x_n) réelle ou complexe étant donnée, on considère les deux suites $(x_{n+1}-x)/(x_n-x)$ (x sera la limite de (x_n) quand elle convergera) et $(x_{n+2}-x_{n+1})/(x_{n+1}-x_n)$.

On étudie leurs comportements relatifs, d'abord à propos des problèmes de convergence (a) puis à propos des problèmes de pseudo-périodicité (b).

Les résultats établis montrent que le plus souvent les deux suites ont des comportements équivalents.

Ces résultats permettent de transformer certains énoncés d'accélération de la convergence, en remplaçant une hypothèse incontrôlable dans la pratique (parce que faisant intervenir la limite x, justement recherchée!) par une hypothèse plus facilement vérifiable.

Nous donnons divers exemples de telles transformations (c).

(a) Problèmes de convergence

Soit (x_n) une suite réelle ou complexe donnée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \neq x_n$$
.

Notre but va être d'établir le théorème suivant :

Théorème 1

Soit
$$\lambda \in \mathbb{C}$$
, $|\lambda| \neq 1$, alors:
$$\begin{bmatrix} \text{il existe } x \in \mathbb{C} \text{ tel que } \frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n}^{-x}} \text{ converge} \\ \text{et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n}^{-x}} = \lambda \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \frac{x_{n+2}^{-x}}{x_{n+1}^{-x}} & \text{converge et} \\ \frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n+1}^{-x}} & \text{converge et} \\ \frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n+1}^{-x}} & \text{converge et} \end{bmatrix}$$

Remarques

- 1°) Si $|\lambda|$ = 1 le théorème n'est plus vrai, en effet :
- a) Contre-exemple pour "<=" :

$$x_{2n} = \frac{1}{n^2}, x_{2n+1} = \frac{-1}{n}.$$

b) Contre-exemple pour "=>" :

$$x_{2n} = \frac{1}{3n}, x_{2n+1} = \frac{1}{3n+1}$$

Ce théorème va résulter des propositions 1, 2 et 3 (démontrées plus loin) qui donnent quelques précisions supplémentaires (par exemple que si $|\lambda|$ > 1 alors dans l'implication "<=" on peut remplacer "il existe x ϵ C" par "pour tout x ϵ C").

2°) Simultanément à l'auteur, Jet Wimp a trouvé une autre démonstation du théorème 1 (voir [30]).

Proposition 1 (voir par exemple [20])

S'il existe
$$x \in \mathbb{C}$$
 et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$, tels que :

$$\frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n}^{-x}} \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n}^{-x}} = \lambda$$

alors:
$$\frac{x_{n+2}^{-x} - x_{n+1}}{x_{n+1}^{-x} - x_{n}} \text{ converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+2}^{-x} - x_{n+1}}{x_{n+1}^{-x} - x_{n}} = \lambda.$$

Démonstration

$$\frac{x_{n+2}^{-x} - x_{n+1}}{x_{n+1}^{-x} - x_{n}} = \frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n}^{-x}} = \frac{\frac{x_{n+2}^{-x}}{x_{n+1}^{-x}} - 1}{\frac{x_{n+1}^{-x}}{x_{n}^{-x}} - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = \lambda.$$

Remarque

Cette démonstration est valable dans un cadre plus général, on peut par exemple seulement supposer que (x_n) est une suite de points d'un corps topologique; en particulier en prenant un corps quelconque $\mathbb K$ muni de la topologie discrète on obtient que :

[
$$\exists \lambda \in \mathbb{N}, \lambda \neq 1, \exists \overset{\star}{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}, \exists \mathbf{N} \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{N} : \frac{\overset{\mathsf{x}}{\mathbf{n}+1}^{-\mathsf{x}}}{\overset{\mathsf{x}}{\mathbf{n}}^{-\mathsf{x}}} = \lambda$$
] =>
[$\exists \mathbf{N} \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{N} : \frac{\overset{\mathsf{x}}{\mathbf{n}+2}^{-\mathsf{x}}}{\overset{\mathsf{x}}{\mathbf{n}+1}^{-\mathsf{x}}} = \lambda$].

Posons pour tout
$$n \in \mathbb{N}$$
: $\lambda_n = \frac{x_{n+2}^{-x}_{n+1}}{x_{n+1}^{-x}_n}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$: $\mu_n^k = \lambda_n + \lambda_n \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_n \lambda_{n+1} \dots \lambda_{n+k}$
$$= \sum_{j=0}^k \prod_{i=0}^j \lambda_{n+i}.$$

Lemme 1

a) Powr tout
$$n \in \mathbb{N}$$
, $k \in \mathbb{N}$: $x_{n+k+2} = x_{n+1} + \mu_n^k(x_{n+1} - x_n)$

b) Si pour m fixé la suite $(\mu_m^k)_{k\in I\!\!N}$ converge vers μ_m alors $(x_n)_{n\in I\!\!N}$ converge vers une limite x telle que : $x = x_{m+1} + \mu_m(x_{m+1} - x_m)$ et $\mu_m \neq -1 \Rightarrow \frac{x_{m+1}^{-x}}{x_m^{-x}} = \frac{\mu_m}{1+\mu_m} \ .$

$$x = x_{m+1} + \mu_m(x_{m+1} - x_m)$$

$$\mu_{\rm m} \neq -1 \implies \frac{{\mathsf x}_{\rm m+1}^{-{\mathsf x}}}{{\mathsf x}_{\rm m}^{-{\mathsf x}}} = \frac{\mu_{\rm m}}{1+\mu_{\rm m}}$$

Démonstration

On a :
$$x_{n+2} - x_{n+1} = \lambda_n (x_{n+1} - x_n)$$
;
 $x_{n+3} - x_{n+2} = \lambda_{n+1} \lambda_n (x_{n+1} - x_n)$;
... ... $x_{n+k+2} - x_{n+k+1} = \lambda_{n+k} \lambda_{n+k-1} ... \lambda_n (x_{n+1} - x_n)$.

Ce qui en sommant donne :

$$x_{n+k+2} = x_{n+1} + \mu_n^k (x_{n+1} - x_n)$$

La partie b) du lemme résulte immédiatement de cette relation.

Remarque

La démonstration, et donc le lemme 1, restent vrais sans aucune modification pour toute suite (x_n) d'éléments d'un corps topologique.

Lemme 2

Soit (λ_n) une suite réelle ou complexe convergente de limite λ avec $|\lambda| < 1$. On pose : $\mu_n^k = \lambda_n + \lambda_n \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_n \lambda_{n+1} \dots \lambda_{n+k}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\mu_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente (et absolument convergente si on la considère comme une série).

De plus si on pose : $\mu_n = \lim_{k \to \infty} \mu_n^k$, alors la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\lambda/(1-\lambda)$.

Démonstration

La propriété de convergence absolue est évidente ; établissons l'autre affirmation.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ donné.

Soit $\lambda' \in \mathbb{R}$ tel que : $|\lambda| < \lambda' < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \ge n = |\lambda_n| \le \lambda'$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que :

i)
$$\left| \frac{\lambda^{0}}{\lambda^{-1}} \right| \leq \varepsilon/3$$
,

ii) \forall $n \ge n_0$, \forall $k \ge k_0 | \lambda_n | \lambda_{n+1} | \dots | \lambda_{n+k_0} | + \dots + | \lambda_n | \lambda_{n+1} | \dots | \lambda_{n+k} | \le \epsilon/3$, k_0 existe car pour tout $n \ge n_0$:

Soit maintenant $n_1 \ge n_0$ tel que pour tout $n \ge n_1$:

$$\left| \left(\lambda_{\rm n} - \lambda \right) + \left(\lambda_{\rm n} \ \lambda_{\rm n+1} - \lambda^2 \right) + \ldots + \left(\lambda_{\rm n} \ \lambda_{\rm n+1} \ \ldots \ \lambda_{\rm n+k} - 1} - \lambda^{\rm o} \right) \right| \le \varepsilon/3$$

 n_1 existe car la suite λ_n converge vers λ , la suite $\lambda_n \lambda_{n+1}$ converge vers λ^2 , ..., la suite $\lambda_n \lambda_{n+1}$... λ_{n+k-1} converge vers λ^n .

Alors pour tout $n \ge n_1$ et pour tout $k \ge k_0$ on a :

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_{n} + \lambda_{n} \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{n} \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{n+k} - \frac{\lambda}{1-\lambda} \right| \\ & = \left| (\lambda_{n} - \lambda) + (\lambda_{n} \lambda_{n+1} - \lambda^{2}) + \dots + (\lambda_{n} \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{n+k} - 1 - \lambda^{k}) - \frac{\lambda^{k} + 1}{1-\lambda} \right| \\ & + \left| \lambda_{n} \lambda_{n+1} + \dots \lambda_{n+k} + \dots + \lambda_{n} \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{n+k} \right| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

Remarque

La démonstration, et donc le lemme 2, restent vrais sans aucune modification pour toute suite (x_n) d'éléments d'un corps valué.

Proposition 2

Soit
$$\lambda \in \mathbb{C}$$
, $|\lambda| < 1$ si:

$$\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \text{ converge et si } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \lambda$$

$$\frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} \text{ converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda .$$

Démonstration

En reprenant les notations fixées juste avant le lemme 1, et en utilisant le lemme 2 on obtient que pour tout n $\in \mathbb{N}$:

-
$$(\mu_n^k)_{k \in \hat{N}}$$
 est convergente vers une limite μ_n ;

- il existe n tel que : $n \ge n => \mu_n \ne -1$

Donc par application du lemme 1 et du lemme 2 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{-x}}{x_n^{-x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{1+\mu_n}=\lambda.$$

Remarques

- 1°) D'après les remarques faites après les lemmes 1 et 2 la proposition vraie pour toute suite (x_n) d'éléments d'un corps valué.
- 2°) Dans le cas 0 < λ < 1 la proposition 2 résulte de [7] (voir aussi [4])
- 3°) Dans le cas des suites réelles la proposition 2 est utilisée (sans démonstration) dans [27].

Lemme 3

Soit (α_n) une suite réelle ou complexe convergente de limite α , $|\alpha| < 1$.

Alors la suite : $y_n = \alpha_n + \alpha_n \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_n \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_1$ converge vers $\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Démonstration

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ donné.

Soit $\alpha' \in \mathbb{R}$ tel que : $|\alpha| < \alpha' < 1$.

Il existe n_0 tel que : $n \ge n_0 \Rightarrow |\alpha_n| \le \alpha'$.

Soit $k_0 \ge n_0$ tel que :

i)
$$\left| \frac{\alpha}{\alpha-1} \right| \le \varepsilon/3$$

ii) \forall $n \ge k_0$ $|\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_{n-k_0+1} + \dots + \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1| \le \epsilon/3$, k_0 existe car pour tout $n \ge n_0$:

$$|\alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n-k_{0}+1} + \cdots + \alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n-k_{0}+1} + \cdots + \alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n_{0}+1}| + |\alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n_{0}}|$$

$$|1 + \alpha_{n_{0}-1} + \cdots + \alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n_{0}+1}| + |\alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n_{0}+1}| + |\alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n_{0}+1}| + |\alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n} \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

$$|\alpha_{n_{0}-1} \cdots \alpha_{1}|$$

Soit $n_1 \ge k_0$ tel que pour tout $n \ge n_1$:

$$\left| (\alpha_{n} - \alpha) + (\alpha_{n} \alpha_{n-1} - \alpha^{2}) + \dots + (\alpha_{n} \alpha_{n-1} \dots \alpha_{n-k} + 2 - \alpha^{2}) \right| \le \varepsilon/3,$$

 $\mathbf{n_1} \text{ existe car la suite } \mathbf{\alpha_n} + \mathbf{\alpha_n} \mathbf{\alpha_{n-1}} + \ldots + \mathbf{\alpha_n} \mathbf{\alpha_{n-1}} \ldots \mathbf{\alpha_{n-k_0+2}} \text{ est convergente}$

(comme somme de suites convergentes) vers :

$$\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{k} \circ^{-1}$$
.

Pour tout $n \ge n_1$ on a alors :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n} + \alpha_{n} & \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_{n} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \end{vmatrix}$$

$$= |(\alpha_{n} - \alpha) + (\alpha_{n} & \alpha_{n-1} - \alpha^{2}) + \dots + (\alpha_{n} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{n-k_{0}+2} - \alpha^{k_{0}-1})$$

$$+ (\alpha_{n} & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{n-k_{0}+1} + \dots + \alpha_{n} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{1}) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \end{vmatrix}$$

$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Remarque

Cette démonstration, et donc le lemme 3, restent vrais sans aucune modification pour toute suite (x_n) d'éléments d'un corps valué.

Proposition 3

Soit
$$\lambda \in \mathbb{C}$$
, $|\lambda| > 1$ si:
$$\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \text{ converge et si } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \lambda,$$

la suite
$$(x_n)$$
 est telle que : $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$:
$$\frac{x_{n+1} - x}{x_n - x}$$
 converge avec $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda$.

Avec les notations du lemme 1 :

$$\frac{\mathbf{x}_{n+2} - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_1} = \frac{(\lambda_0 + \lambda_0 \lambda_1 + \dots + \lambda_0 \lambda_1 + \dots + \lambda_n)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{(\lambda_0 + \lambda_0 \lambda_1 + \dots + \lambda_0 \lambda_1 + \dots + \lambda_n)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}$$

en posant $\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n}$ on obtient : $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha = \frac{1}{\lambda}$, et :

$$\frac{\mathbf{x}_{n+2} - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_1} = \frac{1 + \alpha_n + \alpha_n \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_n \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1}{\alpha_n + \alpha_n \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_n \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1}$$

ce qui d'après le lemme 3 converge vers :

$$\frac{1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha}}{\frac{\alpha}{1 - \alpha}} = \frac{1}{\alpha} = \lambda .$$

D'autre part :

$$\frac{(x_{n+2} - x_1)}{(x_1 - x_0)(\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n)} = \frac{\lambda_0 + \lambda_0 \lambda_1 + \dots + \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n} = 1 + \alpha_n + \alpha_n \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$$

donc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_1}{(x_1 - x_0)(\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n)} = \frac{1}{1-\alpha} \neq 0 ;$$

donc (en utilisant que : $\lim_{n\to\infty} |\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_n| = +\infty$) on obtient que :

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+2} - x_1| = +\infty ;$$

ce qui implique :

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+2}| = +\infty \text{ et } \forall x \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda.$$

Remarque

D'après les remarques faites après les lemmes 1 et 3 la proposition est vraie pour toute suite (x_n) d'éléments d'un corps valué.

(b) Problèmes de pseudo-périodicité

Dans ce paragraphe k $\epsilon \, {
m I\! N}^{\star}$ et $({
m x}_{
m n})$ est toujours une suite réelle ou complexe donnée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} - x_n \neq 0.$$

Théorème 2

(B)
$$\beta^{\circ} \neq 1, \beta^{1} \neq 1, ..., \beta^{k-1} \neq 1$$

et liés entre eux par les relations :
$$(LB) \Big\{ \lambda^{\circ} = \beta^{\circ} \frac{\beta^{1}-1}{\beta^{\circ}-1} , \lambda^{1} = \beta^{1} \frac{\beta^{2}-1}{\beta^{1}-1} , \ldots, \lambda^{k-2} = \beta^{k-2} \frac{\beta^{k-1}-1}{\beta^{k-2}-1} , \lambda^{k-1} = \beta^{k-1} \frac{\beta^{\circ}-1}{\beta^{k-1}-1} \Big\}$$

$$(BL) \Big\{ \beta^{\circ} = (\lambda^{\circ} + \lambda^{\circ}\lambda^{1} + \ldots + \lambda^{\circ}\lambda^{1} \ldots \lambda^{k-1}) / (1 + \lambda^{\circ} + \lambda^{\circ}\lambda^{1} + \ldots + \lambda^{\circ}\lambda^{1} \ldots \lambda^{k-2}) \\ \beta^{1} = (\lambda^{1} + \lambda^{1}\lambda^{2} + \ldots + \lambda^{1}\lambda^{2} \ldots \lambda^{\circ}) / (1 + \lambda^{1} + \lambda^{1}\lambda^{2} + \ldots + \lambda^{1}\lambda^{2} \ldots \lambda^{k-1}) \Big\}$$

$$(BL) \Big\{ \beta^{k-1} = (\lambda^{k-1} + \lambda^{k-1}\lambda^{\circ} + \ldots + \lambda^{k-1}\lambda^{\circ} \ldots \lambda^{k-2}) / (1 + \lambda^{k-1} + \lambda^{k-1}\lambda^{\circ} + \ldots + \lambda^{k-1}\lambda^{\circ} \ldots \lambda^{k-3}) \Big\}$$

(1) L'entier i dans la notation λ^i représente ici un indice et non pas un exposant ; de même pour β^{1} .

[il existe
$$x \in \mathbb{C}$$
 tel que pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ $\frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i} - x}$ converge et $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i} - x} = \beta^{i}$.

| pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ | $\frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}}$ converge | et $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} = \lambda^{i}$.

Proposition 1'

S'il existe $x \in \mathbb{C}$ et $(\beta^{\circ}, \beta^{1}, ..., \beta^{k-1}) \in \mathbb{C}^{k}$ satisfaisant (B) et tels que pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$:

$$\begin{cases} \frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i} - x} \text{ converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i} - x} = \beta^{i} \end{cases}$$

alors pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$:

$$\begin{cases} \frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} & \text{converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} = \lambda^{i} \\ \text{où les } \lambda^{i} & \text{sont donnés par (LB)}. \end{cases}$$

Démonstration

Soit $i \in \{0, 1, ..., k-2\}$:

$$\frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} = \frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i-1} - x} = \frac{x_{nk+i+2} - x}{x_{nk+i+1} - x} = \frac{x_{nk+i+2} - x}{x_{nk+i+1} - x} - 1}{x_{nk+i-1} - x} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \frac{\beta^{i+1} - 1}{\beta^{i} - 1} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i+1} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} \quad \beta^{i} - \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} = \beta^{i} = \beta^{i} \quad \Rightarrow \beta^{i} = \beta$$

pour i = k-1 on procède de même.

Remarque

Comme pour la proposition 1, la proposition 1' reste vraie pour toute suite (x_n) de points d'un corps topologique.

Proposition 2'

S'il existe $(\lambda^{\circ}, \lambda^{1}, \ldots, \lambda^{k-1}) \in \mathbb{C}^{k}$ tels que $|\lambda^{\circ}\lambda^{1}, \ldots, \lambda^{k-1}| < 1$, vérifiant

(L) et si pour tout
$$i \in \{0, 1, ..., k-1\}$$
:
$$\begin{cases} \frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} & \text{converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} = \lambda^{i}, \end{cases}$$

alors la suite (x_n) converge vers une limite x telle que :

$$\begin{cases} \text{powr tout i } \in \{0, 1, \dots, k-1\} \\ \\ \frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i} - x} \text{ converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i} - x} = \beta^{i} \\ \\ \text{les } \beta^{i} \text{ étant donnés par (BL).} \end{cases}$$

Démonstration

On pose $\lambda = \lambda^{\circ} \lambda^{1} \dots \lambda^{k-1}$.

Soit n ϵ ${
m I\!N}$ fixé ; d'après le lemme 2 les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{*}} \lambda_{\mathbf{nk}} \lambda_{\mathbf{nk+1}} \cdots \lambda_{\mathbf{nk+pk-1}} \xrightarrow{\mathbf{n} + \infty} \frac{\lambda}{1 - \lambda} ;$$

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{*}} \lambda_{\mathbf{nk+1}} \lambda_{\mathbf{nk+2}} \cdots \lambda_{\mathbf{nk+pk}} \xrightarrow{\mathbf{n} + \infty} \frac{\lambda}{1 - \lambda} ;$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda_{nk+k-1} \lambda_{nk+k} \cdots \lambda_{nk+pk+k-2} \xrightarrow[n \to \infty]{\lambda} \cdot$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} \lambda_{nk} \lambda_{nk+1} \cdots \lambda_{nk+p} = \mu_{nk}$ est absolument convergente (comme combinaison linéaire des précédentes).

On a donc:

$$\mu_{nk} = \lambda_{nk} + \lambda_{nk}\lambda_{nk+1} + \dots + \lambda_{nk}\lambda_{nk+1} + \dots \lambda_{nk+k-2} + \dots$$

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \lambda_{nk}\lambda_{nk+1} + \dots \lambda_{nk+pk-1} + \dots$$

Et donc :

$$\begin{split} &\lim_{n\to\infty} \, \mu_{nk} \, = \, \lambda^\circ \, + \, \lambda^\circ \lambda^1 \, + \, \ldots \, + \, \lambda^\circ \lambda^1 \, \ldots \, \lambda^{k-2} \, + \, \frac{\lambda}{1-\lambda} \, \left[\, 1 + \lambda^\circ + \lambda^\circ \lambda^1 + \ldots + \lambda^\circ \lambda^1 \, \ldots \, \lambda^{k-2} \, \right] \\ &= \, \left[\, 1 \, + \, \frac{\lambda}{1-\lambda} \, \right] \, \left(\lambda^\circ \, + \, \lambda^\circ \lambda^1 \, + \, \ldots \, + \, \lambda^\circ \lambda^1 \, \ldots \, \lambda^{k-2} \right) \, + \, \frac{\lambda}{1-\lambda} \\ &= \, \frac{\lambda^\circ \, + \, \lambda^\circ \lambda^1 \, + \, \ldots \, + \, \lambda^\circ \lambda^1 \, \ldots \, \lambda^{k-1}}{1-\lambda} \quad . \end{split}$$

Puisque $(\mu_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente il résulte du lemme 1 que (\mathbf{x}_m) converge vers \mathbf{x} . Puisque (L) est vérifiée $\mu_{nk} \neq -1$ (au moins à partir d'un certain rang) et donc (toujours d'après le lemme 1) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{nk+1} - x}{x_{nk} - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{nk}}{1+\mu_{nk}} = \frac{\lambda^{\circ} + \lambda^{\circ}\lambda^{1} + \dots + \lambda^{\circ}\lambda^{1} \dots \lambda^{k-1}}{1 + \lambda^{\circ} + \lambda^{\circ}\lambda^{1} + \dots + \lambda^{\circ}\lambda^{1} \dots \lambda^{k-2}} = \beta^{\circ}$$

On procède de la même manière pour β^1 , β^2 , ..., β^{k-1} .

Remarque

Comme pour la proposition 2, la proposition 2' reste vraie pour toute suite (x_n) de points d'un corps valué.

Proposition 3'

S'il existe $(\lambda^{\circ}, \lambda^{1}, \ldots, \lambda^{k-1}) \in \mathbb{C}^{k}$ tel que $|\lambda^{\circ}\lambda^{1}, \ldots, \lambda^{k-1}| > 1$, vérifiant (L) et tel que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$:

$$\begin{cases} \frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} \text{ converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+i+2} - x_{nk+i+1}}{x_{nk+i+1} - x_{nk+i}} = \lambda^{i} \end{cases}$$

Alors la suite (x_n) est telle que $\lim_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$ et pour tout $x\in\mathbb{C}$ et tout $i\in\{0,1,\ldots,k-1\}$:

$$\begin{cases} \frac{x_{nk+i+1} - x}{x_{nk+i} - x} & \text{converge et } \lim_{n \to \infty} \frac{x_{kn+i+1} - x}{x_{nk+i} - x} = \beta^{i} \\ \text{les } \beta^{i} & \text{étant donnés par (BL)} \end{cases}$$

Démonstration

Reprenons les notations des lemmes 1 et 3 en posant en plus :

$$\alpha^{\circ} = \frac{1}{\lambda^{\circ}}$$
, ..., $\alpha^{k-1} = \frac{1}{\lambda^{k-1}}$, $\alpha = \frac{1}{\lambda^{\circ}} \frac{1}{\lambda^{1}} \dots \frac{1}{\lambda^{k-1}}$, $\alpha_{n} = \frac{1}{\lambda_{n}}$

On a :

$$\frac{\mathbf{x}_{nk+1} - \mathbf{x}_{1}}{\mathbf{x}_{nk} - \mathbf{x}_{1}} = \frac{\lambda_{0} + \lambda_{0}\lambda_{1} + \dots + \lambda_{0}\lambda_{1} \dots \lambda_{nk-1}}{\lambda_{0} + \lambda_{0}\lambda_{1} + \dots + \lambda_{0}\lambda_{1} \dots \lambda_{nk-2}}$$

$$= \frac{1 + \alpha_{nk-1} + \alpha_{nk-1} \alpha_{nk-2} + \dots + \alpha_{nk-1} \alpha_{nk-2} \dots \alpha_{1}}{\alpha_{nk-1} + \alpha_{nk-1} \alpha_{nk-2} + \dots + \alpha_{nk-1} \alpha_{nk-2} \dots \alpha_{1}}$$

par des mises en facteurs analogues à celles de la démonstration de la proposition 2' et en utilisant le lemme 3 on obtient :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+1} - x_1}{x_{nk} - x_1} = \frac{1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} + \alpha^{k-1} \frac{1}{1 - \alpha} + \alpha^{k-1} \alpha^{k-2} \frac{1}{1 - \alpha} + \dots + \alpha^{k-1} \dots \alpha^{1} \frac{1}{1 - \alpha}}{\frac{\alpha}{1 - \alpha} + \alpha^{k-1} \frac{1}{1 - \alpha} + \alpha^{k-1} \alpha^{k-2} \frac{1}{1 - \alpha} + \dots + \alpha^{k-1} \dots \alpha^{1} \frac{1}{1 - \alpha}}$$

$$= \frac{1 + \alpha^{k-1} + \alpha^{k-1} \alpha^{k-2} + \dots + \alpha^{k-1} \alpha^{k-2} \dots \alpha^{1}}{\alpha + \alpha^{k-1} + \alpha^{k-1} \alpha^{k-2} + \dots + \alpha^{k-1} \alpha^{k-2} \dots \alpha^{1}}$$

$$= \frac{\lambda^{0} \lambda^{1} \dots \lambda^{k-1} + \lambda^{0} \lambda^{1} \dots \lambda^{k-2} + \dots + \lambda^{0} \lambda^{1} + \lambda^{0}}{1 + \lambda^{0} \lambda^{1} \dots \lambda^{k-2} + \dots + \lambda^{0} \lambda^{1} + \lambda^{0}} = \beta^{0}$$

de même pour β^1 , β^2 , ..., β^{k-1} .

D'autre part :

$$\frac{\mathbf{x}_{kn+1} - \mathbf{x}_{1}}{(\mathbf{x}_{1} - \mathbf{x}_{0})\lambda_{0}\lambda_{1} \cdots \lambda_{kn-1}} = \frac{\lambda_{0} + \lambda_{0}\lambda_{1} + \cdots + \lambda_{0}\lambda_{1} \cdots \lambda_{kn-1}}{\lambda_{0}\lambda_{1} \cdots \lambda_{kn-1}}$$

$$= 1 + \alpha_{kn-1} + \alpha_{kn-1} \alpha_{kn-2} + \dots + \alpha_{kn-1} \dots \alpha_1$$

donc (toujours par des méthodes de mises en facteurs) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{kn+1} - x_1}{(x_1 - x_0)(\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{kn-1})} = \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{\alpha^{k-1}}{1 - \alpha} + \frac{\alpha^{k-1}\alpha^{k-2}}{1 - \alpha} + \dots + \frac{\alpha^{k-1}\alpha^{k-2} \dots \alpha^1}{1 - \alpha}$$

$$= \frac{1 + \alpha^{k-1} + \alpha^{k-1}\alpha^{k-2} + \dots + \alpha^{k-1}\alpha^{k-2} \dots \alpha^1}{1 - \alpha}$$

$$= \frac{\lambda + \lambda^0 \lambda^1 \dots \lambda^{k-2} + \lambda^0 \lambda^1 \dots \lambda^{k-3} + \dots + \lambda^0}{\lambda - 1}$$

$$= \frac{\lambda^0 (1 + \lambda^1 + \lambda^1 \lambda^2 + \dots + \lambda^1 \lambda^2 \dots \lambda^{k-1})}{\lambda - 1} \neq 0$$

donc : $\lim_{n\to\infty} |x_{kn+1} - x_1| = +\infty$,

donc : $\lim_{n\to\infty} |x_{kn+1}| = +\infty$,

de même pour (x_{kn+2}) , (x_{kn+3}) , ..., (x_{kn+k}) donc :

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty,$$

le reste de la démonstration se fait comme pour la proposition 3.

Remarque

Comme pour la proposition 3, la proposition 3' reste vraie pour toute suite (x_n) de points d'un corps valué.

(c) Exemples d'applications

L'algorithme général d'extrapolation présenté par T. Havie [23] et par

C. Brezinski [6] appelé E-algorithme est défini par :

où les g_i sont des suites de coefficients, que l'on peut choisir de façon à retrouver, le procédé d'extrapolation de Richardson, ou la transformation G [22], ou la transformation de Shanks [28], ou la transformation de Germain-Bonne [21], ou la transformation généralisée de Levin [26], ou la première généralisation de l'E-algorithme [4] [5] ou le procédé p. [4]. En plus d'un algorithme récursif de calcul de $E_k(S_n)$ C. Brezinski propose le théorème suivant [6] :

Par une simple utilisation du théorème 1 on en déduit l'énoncé suivant :

Sis s converge vers s, si pour tout i, $g_i(n+1)/g_i(n)$ converge vers $b_i \neq 1$ (deux à deux distincts) et si: $(E_{k-1}(S_{n+1})-E_{k-1}(S_n))/(E_{k-1}(S_n)-E_{k-1}(S_{n-1})) \text{ converge vers } b_k$ alors: $E_k(S_n) - S = o(E_{k-1}(S_n) - S)$

Dans le cas très particulier du procédé Δ^2 d'A $\overline{\mbox{i}}$ tken on obtient :

Ces résultats peuvent dans la pratique donner lieu à des programmes de calcul de tableaux d'accélération (comme celui de l'ɛ-algorithme) dans lesquels on ne calculera la k-ième colonne que si la condition portant sur la (k-1)-ième colonne semble satisfaite. Ils peuvent aussi amener à construire des tests simples pour savoir si la méthode d'accélération utilisée mérite d'être réitérée ou pas.

Une autre application est donnée au § 2.

2 - ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DES SUITES PÉRIODICO-LINÉAIRES

Les résultats du § 1 nous conduisent à définir la famille des suites de type périodico-linéaire et à étudier les possibilités d'accélération de cette famille.

Définitions

On dit que la suite (x_n) de nombres réels est de <u>type périodico-linéaire</u> s'il existe k $\in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\begin{cases} \exists \ x \in \mathbb{R}, \ \exists \ (\beta^{\circ}, \ \beta^{1}, \ \dots, \ \beta^{k-1}) \in \mathbb{R}^{k}, \ \beta^{\circ}, \ \beta^{1}, \ \dots, \ \beta^{k-1} \notin \{0, \ 1\} : \\ \lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+1} - x}{x_{nk} - x} = \beta^{\circ}, \ \lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk+2} - x}{x_{nk+1} - x} = \beta^{\prime}, \ \dots, \ \lim \frac{x_{nk+k} - x}{x_{nk+k-1} - x} = \beta^{k-1}. \end{cases}$$

Le plus petit entier k ϵ \mathbb{N}^{\star} satisfaisant cette relation est appelé période de la suite, et les nombres β° , β^{1} , ... β^{k-1} sont appelés les rapports de la suite⁽¹⁾.

(1) Il faut noter que le i de β^{i} est ici un indice et non pas un exposant.

Remarques

- 1°) Dire que la suite (x_n) est de type périodico-linéaire est équivalent à dire que la suite $(x_{n+1}^{-x})/(x_n^{-x})$ est asymptotiquement périodique de période k.
- 2°) Une suite de type périodico-linéaire de période k = 1 est une suite de type linéaire. Si $|\beta^{\circ}|$ < 1, elle converge vers x et c'est donc une suite à convergence linéaire. La notion de suite de type périodico-linéaire est donc une généralisation de la notion de suite à convergence linéaire.

Proposition 4

Soit (x_n) une suite de type périodico-linéaire de période k et de rapports

 $\beta^{\circ}, \ \beta^{1}, \ldots, \ \beta^{k-1}.$ Si $|\beta^{\circ} \beta^{1} \ldots \beta^{k-1}| < 1$ alors (x_{n}) est convergente (on dira qu'elle est à convergence périodico-linéaire).

Si $|\beta^{\circ} \beta^{1} \ldots \beta^{k-1}| > 1$ alors : $\lim_{n \to \infty} x_{n} = +\infty$.

$$Si \mid \beta^{\circ} \beta^{1} \dots \beta^{k-1} \mid \geq 1 \text{ alors } : \lim_{n \to \infty} x_{n} = +\infty$$

Démonstration

Si $|\beta^0 \beta^1 \dots \beta^{k-1}| > 1$ alors pour tout i $\epsilon \{0, 1, \dots, k-1\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{nk+k+1}-x}{x_{nk+1}-x} = \beta^{\circ} \beta^{1} \dots \beta^{k-1};$$

donc : $\lim_{n\to\infty} |x_{nk+i} - x| = +\infty$; donc $\lim_{n\to\infty} |x_{nk+i}| = +\infty$;

donc : $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

De même si $|\beta^{\circ} \beta^{1} \ldots \beta^{k-1}|$ < 1 alors pour tout i ϵ {0, 1, ..., k-1} la suite $(x_{nk+i})_{n \in \mathbb{N}}$ est à convergence linéaire de rapport $\beta = \beta^0 \beta^1 \dots \beta^{k-1}$, et de limite x; la suite (x_n) est donc convergente vers x.

Proposition 5

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. La transformation de suites définie par :

$$(\Delta_k^2)$$
 $t_n = x_n - \frac{(x_n - x_{n-k})^2}{x_n - 2x_{n-k} + x_{n-2k}}$ $n \ge 2k$

accélère la convergence de toute suite à convergence périodico-linéaire de période k, et donne la limite exacte (pour tout $n \geq 2k$: t_n = x) de toute suite de la forme :

$$x_n = x + a \pi \beta_i$$

où β_i est une suite périodique de période k.

Démonstration

$$\frac{t_n - x}{x_n - x} = 1 + (\frac{x_{n-k} - x}{x_n - x} - 1) \frac{1}{1 - \frac{x_{n-k} - x_{n-2k}}{x_n - x_{n-k}}},$$

ce qui nous donne :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t_n - x}{x_n - x} = 0$$

Si $x_n = x + a$ π β_i avec β_i périodique de période k; on a : i=0

$$t_n = x + (a \overset{n-2k}{\pi} \beta_i) \beta^2 - (a \overset{n-2k}{\pi} \beta_i) \frac{(\beta^2 - \beta)^2}{\beta^2 - 2\beta + 1} = x$$

où on a posé $\beta = \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_{i+k-1}$ (ne dépend pas de i).

Remarque

Les procédés Δ_k^2 qui généralisent en un certain sens le procédé Δ^2 d'Aitken ne sont eux-mêmes que des cas particuliers des transformations définies par :

$$t_n = x_n - (x_{n+p+r} - x_n)/((x_{n+2p+r+q} - x_{n+p+r+q})/(x_{n+p+q} - x_{n+q}) - 1)$$
où p, q, r sont trois paramètres dans \mathbb{Z} avec p + r \neq 0.

Pour p = 1, r = q = 0 on obtient le procédé Δ^2 d'Aitken, pour p = -k, r = q = 0 on obtient le procédé Δ_k^2 décrit ci-dessus. D'une manière générale (quelles que soient les valeurs données à p, q, r) (t_n) accélère toute suite (x_n) à convergence linéaire. Une autre généralisation du Δ^2 d'Aitken ayant des propriétés analogues au Δ_k^2 a été donnée dans [31] (voir aussi [32]).

Les procédés Δ_k^2 sont difficiles à utiliser en pratique car leur mise en oeuvre nécessite la connaissance de k. Les procédés de transformation de suites que nous allons proposer maintenant ne nécessiteront pas cette connaissance ; ils vont être obtenus par combinaison des Δ_k^2 et d'algorithmes de détermination de la période du chapitre 2 \$ 4. De façon à n'avoir que des algorithmes normaux nous supposerons ici que les algorithmes du chapitre 2 \$ 4 ont été normalisés.

Algorithme Δ I3(ρ)

Etape p $(p \ge 2)$

L'étape p de l'algorithme I3(ρ) est appliquée à la suite

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$
 n ϵ {2, 3, ..., p}

et donne la réponse k(p). On prend alors :

$$t_p = x_p - (x_p - x_{p-k(p)})^2 / (x_p - 2x_{p-k(p)} + x_{n-2k(p)}).$$

Notations

Soient $\rho \in \mathbb{R}^{t*}$, $k \in \mathbb{N}^{t*}$; on note $P_{\rho,k}$ l'ensemble des suites (\mathbf{x}_n) à convergence périodico-linéaire de période k, dont les rapports β^0 , β^1 , ..., β^{k-1} vérifient que :

$$\beta^{\circ} \frac{\beta^{1} - 1}{\beta^{\circ} - 1}$$
, $\beta^{1} \frac{\beta^{2} - 1}{\beta^{1} - 1}$, ..., $\beta^{k-1} \frac{\beta^{\circ} - 1}{\beta^{k-1} - 1}$

sont mutuellement distants de plus de p.

Pour k = 1, $P_{p,k}$ est l'ensemble des suites à convergence linéaire.

On pose :
$$P_{\rho} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} P_{\rho,k}$$
.

Les inclusions suivantes sont évidentes :

$$\rho < \rho' \Rightarrow (P_{\rho',k} \subset P_{\rho,k}, P_{\rho'} \subset P_{\rho}).$$

Théorème 3

- i) Pour toute suite $(x_n) \in P_\rho$ l'algorithme $\Delta I3(\rho)$ donne une suite (t_n) qui accélère la convergence de (x_n) ;
 - ii) Pour toute suite $(x_n) \in P_{\rho}$ de la forme :

$$x_n = x + a \pi \beta_i$$
 avec β_i périodique.

la suite (t_n) donnée par $\Delta I3(\rho)$ vérifie :

$$\exists p_o \in \mathbb{N}, \forall p \ge p_o : t_n = x.$$

Démonstration

- i) Si $(x_n) \in P_\rho$, il existe $p_o \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \ge p_o$, k(p) soit la période de (x_n) et donc d'après la proposition 3, (t_n) accélère la convergence de (x_n) .
- ii) De la même manière à partir de la proposition 3.

Remarques

- 1°) Appliqué à une suite à convergence linéaire, l'algorithme $\Delta I3(\rho)$ (quel que soit $\rho \in \mathbb{R}^{++}$) finit par se comporter comme le procédé d'Aitken. On n'a donc pas spécialement intérêt à l'utiliser pour une suite à convergence linéaire. Par contre, face à une suite périodico-linéaire (par exemple de période 2) alors que le procédé d'Aitken n'accélère pas, l'algorithme $\Delta I3(\rho)$ accélère la convergence.
- 2°) Sur le même modèle et en utilisant les divers algorithmes de détermination de la période I1, I2, I3, I4, J1, J2, J'1, J'2 [13], on peut définir d'autres algorithmes d'accélération; chacun d'eux satisfaisant pour des classes spécifiques de suites à convergence périodico-linéaire. (I4 et J1 particulièrement, donnent des résultats intéressants).

- 3°) A la vue des inclusions entre P_{ρ} et P_{ρ} , on peut être tenté de fixer une très petite valeur à la constante ρ . Cependant une telle attitude n'est pas conseillée car plus ρ est petit, plus p_{ρ} risque d'être grand. Aussi a-t-on intérêt à choisir : $1/100 \le \rho \le 1/10$, en se réservant de le prendre plus petit seulement si on dispose de beaucoup de points de (x_{ρ}) .
- 4°) Certaines suites très particulières à convergence périodico-linéaire sont accélérées par l' ϵ -algorithme ; de façon précise on montre [19] que les suites de la forme S + a λ^n (où $|\lambda|$ < 1, a est k-périodique) sont accélérées par la 2k-ième colonne de l' ϵ -algorithme.

3 - Optimalité du procédé & d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire

Toutes les suites envisagées ici sont des suites de nombres complexes. La famille $\text{Lin}(\mathfrak{C})$ sera notée simplement Lin.

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'en trois sens différents au moins le procédé Δ^2 d'Aitken [1] est optimal (non améliorable) pour le problème de l'accélération de la convergence de la famille de suites à convergence linéaire.

- En (a) les résultats de Pennacchi et Germain-Bonne que nous rappelons brièvement, établissent qu'algébriquement le Δ^2 d'Aitken est la plus simple des transformations de suites accélérant Lin.
- En (b) nous donnons trois propositions qui signifient que, lorsque l'on étend un peu la famille Lin on obtient une famille non accélérable (aux trois propositions correspondent trois tentatives d'élargissement de Lin).
- En (c) nous montrons que, quel que soit s > 0, il est impossible d'obtenir une accélération de degré 1+s pour la famille Lin. Puisque le Δ^2 d'Aitken fournit une accélération de degré 1 de Lin cela signifie encore que le Δ^2 n'est pas améliorable relativement à Lin.

Ces résultats ne doivent pas être compris comme affirmant que le Δ^2 est le meilleur de tous les algorithmes d'accélération possibles, ils indiquent seulement que pour l'accélération de la famille Lin toute entière, le Δ^2 est la plus simple et la plus efficace possible des transformations de suites. Cela n'empêche pas, par exemple, qu'il puisse exister des transformations accélérant avec le degré 2 certaines sous-familles de Lin (c'est d'ailleurs le cas [20]). Cela n'empêche pas non plus que d'autres transformations moins simples puissent être aussi efficaces sur Lin (c'est le cas, par exemple, pour la première colonne du θ -algorithme [2], [3], [8] qui possède des propriétés supplémentaires justifiant sont intérêt propre).

(a) Optimalité algébrique du procédé Δ^2

Nous rappelons brièvement les résultats obtenus par Pennacchi [27].

Par définition, une transformation rationnelle de type (p, m) est une transformation de suites de la forme :

 $t_n = x_n + P(x_{n+1} - x_n, \dots, x_{n+p} - x_{n+p-1})/Q(x_{n+1} - x_n, \dots, x_{n+p} - x_{n+p-1})$ où P et Q sont des polynômes homogènes de degré m et m-1.

Les résultats suivants sont établis dans [27] :

- . Aucune transformation rationnelle de type (1, m) ou (p, 1) n'accélère Lin,
- . Le Δ^2 est la seule transformation rationnelle de type (2, 2) qui accélère Lin,
- . Les transformations rationnelles de type (2, m), m \geq 2 qui accélèrent Lin sont toutes équivalentes au Δ^2 (en ce sens que pour toute suite (x_n), elles donnent la même suite (t_n) que le Δ^2).

Le procédé Δ^2 est donc la plus simple des transformations rationnelles accélérant la famille Lin. Le résultat suivant de Germain-Bonne [20] confirme qu'algébriquement, les transformations efficaces sur Lin ne peuvent pas être plus simples que le Δ^2 :

. Il n'existe aucune transformation de la forme :

$$t_n = x_n + g(x_{n+1} - x_n),$$

(g fonction continue en 0) accélérant la famille Lin.

(b) Impossibilité de l'agrandissement de Lin

Rappelons la définition de Lin :

$$\operatorname{Lin} = \left\{ (\mathbf{x}_{n}) \in \operatorname{Conv}(\mathbf{C}) \mid \frac{1}{2} \lambda, \ 0 < \left| \lambda \right| \le 1, \ \lambda \ne 1 \ \text{et } \lim_{n \to \infty} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}) / (\mathbf{x}_{n} - \mathbf{x}) = \lambda \right\}$$

Nous pouvons agrandir cette famille de trois manières différentes :

$$\begin{split} \operatorname{Lin} \ a &= \{(\mathbf{x}_n) \ \epsilon \ \operatorname{Conv}(\mathbf{C}) \ \big| \ \exists \ \lambda, \ 0 \le \big| \lambda \big| \le 1, \ \lambda \ne 1, \ \lim_{n \to \infty} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x})/(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) = \lambda \} \ ; \\ \operatorname{Lin} \ b &= \{(\mathbf{x}_n) \ \epsilon \ \operatorname{Conv}(\mathbf{C}) \ \big| \ \exists \ \lambda, \ 0 < \big| \lambda \big| \le 1, \ \operatorname{et} \ \lim_{n \to \infty} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x})/(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) = \lambda \} \ ; \\ \operatorname{Lin} \ c &= \{(\mathbf{x}_n) \ \epsilon \ \operatorname{Conv}(\mathbf{C}) \ \big| \ \exists \ \lambda, \ \lambda', \ 0 < \lambda < \lambda' < 1 \ \operatorname{et} \ \forall \ n \ \epsilon \ \mathbb{N} \\ \lambda < \big| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x} \big| \ / \ \big| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \big| < \lambda' \} \ \cup \ \operatorname{Lin}. \end{split}$$

Proposition 6

Il n'existe aucune transformation normale accélérant la convergence de toutes les suites de Lin a.

Proposition 7

Il n'existe aucune transformation normale ou k-normale accélérant la convergence de toutes les suites de Lin b.

Proposition 8

Il n'existe aucune transformation normale ou k-normale accélérant la convergence de toutes les suites de Lin c.

Remarques

- 1°) La proposition 6 ne concerne que le Δ^2 normalisé. Elle signifie que si le Δ^2 non normalisé accélère les suites telles que $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} x)/(x_n x) = 0$ (ce qui est vrai), c'est justement parce qu'il n'est pas normalisé. Puisqu'une suite telle que $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} x)/(x_n x) = 0$ est accélérée par (x_{n+1}) , il est clair alors que l'accélération que le Δ^2 (non normalisé) donne de Lin a est illusoire : en réalité le Δ^2 n'accélère que Lin, Lin a lui, est impossible à accélérer.
- 2°) Les résultats de ce paragraphe ne doivent pas être interprétés dans un sens trop strict. Si les extensions les plus naturelles de Lin ne sont pas accélérables, cela ne signifie pas que certaines autres extensions ne le sont pas. Le procédé Δ^2 lui-même, les ϵ et θ -algorithmes, la transformation u de Levin par exemple, en plus des suites à convergence linéaire accélèrent certaines suites à convergence logarithmique [2], [18], [24], [25], [29].

Démonstrations

Les trois propositions résultent immédiatement des résultats du chapitre 5 § 4.

(c) Impossibilité d'une accélération de degré 1+s sur Lin

Une question naturelle à propos du Δ^2 est la suivante : puisque le Δ^2 accélère avec le degré 1 la famille Lin ne peut-on pas faire mieux, et accélérer avec le degré 2 par exemple la famille Lin ? La réponse négative établie dans cette section, montre qu'en un certain sens encore, le Δ^2 est optimal relativement à Lin. La définition du degré d'accélération se trouve page 151.

Théorème 4

Soit s>0. Il n'existe aucune transformation normale ou k-normale accélérant avec le degré 1+s toutes les suites de Lin.

Démonstration

Nous établissons le résultat pour k = 0. Lorsque k > 0, on se ramène à k = 0 en utilisant une technique analogue à celle de [10].

Nous raisonnons par l'absurde en supposant donnée une transformation normale N accélérant avec le degré 1 + s (s > 0) la famille Lin.

Soit (ℓ_n) une suite strictement décroissante de nombres réels, convergente vers une limite ℓ , et telle que :

$$0 < \ell < 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \ell_n < 1.$$

Soit (x_n^0) une suite définie par la donnée de x_0^0 et x_1^0 , $x_1^0 > x_0^0$, et telle que pour tout entier n :

$$(x_{n+2}^{\circ} - x_{n+1}^{\circ})/(x_{n+1}^{\circ} - x_{n}^{\circ}) = \ell_{\circ}.$$

Sa limite est :

$$x^{\circ} = x^{\circ}_{\circ} + (x^{\circ}_{1} - x^{\circ}_{\circ})(1 + \ell_{\circ} + \ell^{2}_{\circ} + \dots + \ell^{n}_{\circ} + \dots) = x^{\circ}_{\circ} + (x^{\circ}_{1} - x^{\circ}_{\circ})/(1 - \ell_{\circ}).$$

Nous noterons (t_n^0) la suite transformée de (x_n^0) par N.

Pour tout entier m on pose :

$$y_{m}^{\circ} = x_{m-1}^{\circ} + (x_{m}^{\circ} - x_{m-1}^{\circ})/(1 - \ell_{1}).$$

On vérifie facilement que :

$$y_{m}^{\circ} < x^{\circ} = x_{m-1}^{\circ} + (x_{m}^{\circ} - x_{m-1}^{\circ})/(1 - \ell_{\circ}).$$

Il existe un certain mo tel que :

$$|t_{m_{0}}^{\circ} - y_{m_{0}}^{\circ}| / |x_{m_{0}}^{\circ} - y_{m_{0}}^{\circ}| \ge |x_{m_{0}}^{\circ} - y_{m_{0}}^{\circ}|^{s}$$
et $t_{m_{0}}^{\circ} > y_{m_{0}}^{\circ}$.

En effet pour tout entier m on a :

$$(x^{\circ} - y_{m}^{\circ}) / (x^{\circ} - x_{m}^{\circ}) = (\ell_{o} - \ell_{1}) / (\ell_{o} - \ell_{1} \ell_{o}) = u > 0$$

$$|t_{m}^{\circ} - y_{m}^{\circ}| / |x_{m}^{\circ} - y_{m}^{\circ}| \ge |t_{m}^{\circ} - y_{m}^{\circ}| / |x_{m}^{\circ} - x^{\circ}|$$

$$\ge |x^{\circ} - y_{m}^{\circ} + t_{m}^{\circ} - x^{\circ}| / |x_{m}^{\circ} - x^{\circ}|$$

$$\geq u - |t_{m}^{\circ} - x^{\circ}| / |x_{m}^{\circ} - x^{\circ}|$$

$$t_{m}^{\circ} - y_{m}^{\circ} = ((t_{m}^{\circ} - x^{\circ}) / (x^{\circ} - x_{m}^{\circ}) + u)(x^{\circ} - x_{m}^{\circ}).$$

Il suffit donc de prendre m tel que :

$$\left|t_{m_{o}}^{\circ}-x^{\circ}\right|$$
 / $\left|x_{m_{o}}^{\circ}-x^{\circ}\right|$ \leq u/2 et $\left|x_{m_{o}}^{\circ}-y_{m_{o}}^{\circ}\right|^{s}\leq$ u/2

ce qui est possible car par hypothèse :

$$\lim_{m\to\infty} \left| t_m^{\circ} - x^{\circ} \right| \; / \; \left| x_m^{\circ} - x^{\circ} \right| \; = \; 0 \; \; \text{et} \; \; \lim_{m\to\infty} \; (x_m^{\circ} - y_m^{\circ}) \; = \; 0 \, .$$

Soit maintenant la suite (x_n^1) définie par :

$$x_m^1 = x_m^0$$
 pour tout $m \le m_0$,

$$(x_{m+1}^1 - x_m^1)/(x_m^1 - x_{m-1}^1) = \ell_1$$
 pour tout $m \ge m_0$.

La suite (x_n^1) converge vers la limite $x^1 = y_m^0$.

Pour tout entier m, on pose :

$$y_m^1 = x_{m-1}^1 + (x_m^1 - x_{m-1}^1)/(1 - \ell_2)$$
.

Il existe un certain m₁ > m tel que :

$$\begin{vmatrix} t_{m_{1}}^{1} - y_{m_{1}}^{1} \middle / |x_{m_{1}}^{1} - y_{m_{1}}^{1}| \ge |x_{m_{1}}^{1} - y_{m_{1}}^{1}|^{s}$$

$$et t_{m_{1}}^{1} > y_{m_{1}}^{1}.$$

$$(1)$$

On définit ensuite (x_n^2) en posant :

$$x_n^2 = x_n^1$$
 pour tout $m \le m_1$

$$(x_{m+1}^2 - x_m^2)/(x_m^2 - x_{m-1}^2) = \ell_2$$
 pour tout $m \ge m_1$.

La suite (x_n^2) converge vers la limite $x^2 = y_{m_1}^1$ etc ...

Soit alors la suite (x_n) définie par :

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \dots, x_{m_1+1}^2, \dots).$$

Cette suite converge vers $x = \lim_{i \to \infty} x^i$. On remarquera que la suite (x^i) est décroissante et que la suite (x_n) est croissante et à convergence linéaire car :

$$\forall m \in \{m_{i-1}, m_{i+1}-2\} : (x_{m+2}-x_{m+1})/(x_{m+1}-x_{m}) = \ell_{i+1}.$$

Les relations (0), (1), ... montrent que pour tout entier i, on a :

$$|t_{m_{i}}^{i} - y_{m_{i}}^{i}| / |x_{m_{i}}^{i} - y_{m_{i}}^{i}|^{1+s} \ge 1.$$

Puisque $x^{i+1} = y_{m_i}^i$, on a donc :

$$|t_{m_i}^i - x^{i+1}| / |x_{m_i}^i - x^{i+1}|^{1+s} \ge 1.$$

Les inégalités : $x_{m_i}^i < x < x^{i+1} < t_{m_i}^i$, permettent alors d'obtenir :

$$|t_{m_{i}}^{i} - x| / |x_{m_{i}}^{i} - x|^{1+s} \ge 1$$
;

ce qui montre que la suite $(\mathbf{x}_{_{\mathrm{D}}})$ qui est transformée par N en la suite:

$$(t_0^{\circ}, t_1^{\circ}, \ldots, t_{m_0}^{\circ}, t_{m_0+1}^{1}, \ldots, t_{m_1}^{1}, t_{m_1+1}^{2}, \ldots)$$

n'est pas accélérée avec le degré 1+s par N. Puisque (x_n) ϵ Lin ceci est en contradiction avec l'hypothèse faite sur N.

Remarque

Par sa technique, cette démonstration est à rapprocher de celle des résultats négatifs obtenus aux chapitres 2 et 3 ([9] [12]) et au chapitre 5 ([17] [18]).

Références

- [1] AITKEN A.C. "On Bernouilli's numerical solution of algebraic equations", Proc. Roy. Soc. Edinburg 46, 1926, pp. 289-305.
- [2] BREZINSKI C. "Accélération des suites à convergence logarithmique", C.R. Acad. Sc., Paris, A, 273, 1971, pp 772-774.
- [3] BREZINSKI C. "Conditions d'application et de convergence de procédés d'extrapolation", Numer. Math., 20, 1972, pp. 64-79.
- [4] BREZINSKI C. "Accélération de la convergence en analyse numérique", Lecture Notes in Mathematics 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [5] BREZINSKI C. "Algorithmes d'accélération de la convergence : étude numérique", Technip, Paris, 1978.
- [6] BREZINSKI C. "A general extrapolation algorithm", Numer. Math.,
- [7] BROMWICH T.J. "An introduction to the theory of infinite series", Macmillan, London, 1949 2nd ed.
- [8] CORDELLIER F. "Caractérisation des suites que la première étape du θ-algorithme transforme en suites constantes", C.R. Acad. Sc. Paris, 284, A, 1977, pp 389-392.
- [9] DELAHAYE J.P. "Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites", Thèse de 3e cycle, Lille, 1979.
- [10] DELAHAYE J.P. "Accélération des suites telles que $\lambda \leq \Delta x_{n+1} / \Delta x_n \leq \mu$ ", Publication ANO N° 17, Uni. des Sc. et Tech. de Lille, 1979.
- [11] DELAHAYE J.P. "Liens entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des différences : démonstrations", Publication ANO N° 14, Uni. des Sc. et Tech. de Lille, 1979.

- [12] DELAHAYE J.P. "Algorithmes pour suites non convergentes", Numer. Math., 34, 1980, pp 333-347.
- [13] DELAHAYE J.P. "Détermination de la période d'une suite pseudo-périodique", Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'EDF, C, n° 1, 1980, pp 65-80.
- [14] DELAHAYE J.P. "Liens entre la suite du rapport des erreurs et celle du rapport des différences", C.R. Acad. Sc. Paris, 290, 1980, pp. 343-346.
- [15] DELAHAYE J.P. "Accélération des suites dont le rapport des erreurs est borné", Calcolo, 81, 1981, pp. 103-116.
- [16] DELAHAYE J.P. "Optimalité du procédé Δ^2 d'Aitken pour l'accélération de la convergence linéaire", RAIRO Analyse Numérique, 15, 1981, pp 321-330.
- [17] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Résultats négatifs en accélération de la convergence", Numer. Math., 35, 1980, pp 443-457.
- [18] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated" SIAM Numerical Anal., 1982, pp 840-844.
- [19] GENZ A. "Application of the \(\varepsilon\)-algorithm to quadrature problems", in "Padé approximants and their applications", Graves-Morris ed., Academic Press, New York, 1973.
- [20] GERMAIN-BONNE B. "Estimation de la limite de suites et formalisation des procédés d'accélération de convergence" Thèse Lille, 1978.
- [21] GERMAIN-BONNE B. "Transformations de suites", RAIRO, R-1, 1973, pp. 84-90.
- [22] GRAY H.L. and ATCHISON T.A. "The generalised G transform" Math. Comp. 22, 1968, pp 595-606.
- [23] HAVIE T. "Generalized Neville Type extrapolation schemes" BIT 19, 1979, pp 204-213.

- [24] KOWALEWSKI C. "Accélération de la convergence pour certaines suites à convergence logarithmique", Lecture Notes in Mathematics 888, Springer-Verlag, Heidelberg, 1981, pp 263-272.
- [25] KOWALEWSKI C. "Possibilités d'accélération de la convergence logarithmique", Thèse de 3e cycle, Lille, 1981.
- [26] LEVIN D. "Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences", Intern. J. Comp. Math. B3, 1973, pp. 371-388.
- [27] PENNACCHI R. "Le transformazioni rationali di una successione", Calcolo, 5, 1968, pp 37-50.
- [28] SHANKS D.I. "Non linear transformations of divergent and slowly convergent sequences", J. Math. Phys. 36, 1955, pp 1-42.
- [29] SMITH D.A. et FORD W.F. "Accélération of linear and logarithmic convergence", SIAM J. Numer. Anal. 16, 1979, pp 223-240.
- [30] WIMP J. "Sequence transformations and their applications" Academic Press, New-York, 1981.
- [31] GRAY H.L. et CLARK W.D. "On a class of Non linear transformations and their Application to the evaluation of infinite series", Journal of Research of the N.B.S., 73B, 1969 pp 251-274.
- [32] JONES B. "A note on the T_{+m} transformation", Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Ap. 6, 1982 pp 303-305

CHAPITRE 7

SÉLECTION AUTOMATIQUE ENTRE TRANSFORMATIONS DE SUITES

INTRODUCTION

Confronté à un grand nombre de méthodes d'accélération de la convergence ([3] [4] [6] [18]) et au problème du choix des paramètres pour certaines d'entre elles, l'utilisateur se trouve en position difficile. Si des informations précises concernant le comportement des suites à accélérer sont données, il est possible, parfois, de déterminer les méthodes ayant le plus de chances d'être efficaces; l'utilisateur peut aussi essayer plusieurs méthodes et choisir l'une d'elles à l'aide de problèmes tests; cependant en pratique c'est le plus souvent un choix arbitraire qui est fait. Notre but dans ce chapitre est de présenter des méthodes de choix automatique (i.e. algorithmique) entre transformations de suites destinées à l'accélération de la convergence.

Au § 1 nous définissons et étudions des procédés de choix pouvant opérer sur des transformations de suites quelconques, alors qu'au § 2, nous nous intéressons spécifiquement aux problèmes du choix automatique entre suites de paramètres dans l'extrapolation de Richardson.

Le contenu du § 1 est tiré de [10] et celui du § 2 de [11].

1 - Les méthodes générales de sélection automatique

Tous les procédés de choix automatique que nous étudions dans ce paragraphe fonctionnent selon le schéma général suivant :

A l'étape n les diverses transformations en compétition A_1, A_2, \ldots, A_k sont appliquées à la suite (\mathbf{x}_n) que l'on cherche à accélérer. Des points transformés $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_k^{(n)}$ sont obtenus. Un de ces points est choisi à l'aide de tests (plusieurs sont définis et étudiés) qui essaient de déterminer le meilleur pour cette étape. L'utilisation de ces méthodes de sélection est plus coûteuse en calcul que l'utilisation d'une seule méthode (car pour que la sélection se fasse il faut faire fonctionner simultanément plusieurs transformations de

suites). Cependant ceci n'est pas vraiment gênant car les méthodes d'accélération sont en général très peu coûteuses en calcul. Nous commençons par formuler les schémas généraux de nos méthodes de sélection (a), puis nous donnons des résultats sur ces méthodes (b), et nous concluons par quelques résultats numériques (c).

(a) Définition générale des méthodes de sélection

Soit $R_i^{(n)}$ une relation (vraie ou fausse selon i et n) définie pour i ϵ {1, 2, ..., k} et pour n ϵ N, n \geq n_o.

Nous posons :

$$\begin{array}{lll}
\circ_{\mathbf{r_i^{(n)}}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
1 & \sin n \ge n_o & \text{et si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est vraie,} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \text{card } \{q \in \{0, 1, \dots, n\} \mid q \ge n_o & \text{et } R_{\mathbf{i}}^{(q)} & \text{est vraie}\} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est fausse} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{r_i^{(n)}} = & \begin{array}{lll}
0 & \sin n < n_o & \text{ou si } R_{\mathbf{i}}^{(n)} & \text{est vraie.} \\
\end{array}$$

Remarquons que même lorsque $R_i^{(n)}$ n'est pas définie les coefficients $r_i^{(n)}$, $r_i^{(n)}$, $r_i^{(n)}$, $r_i^{(n)}$ (que nous appelons coefficients de décompte) sont définis et valent zéro. Les propriétés suivantes sont évidentes :

$$\forall$$
 i \in {1, 2, ..., k}, \forall n \in \mathbb{N} :

$${}^{1}\mathbf{r}_{i}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} {}^{0}\mathbf{r}_{i}^{(n)} ; 0 \le {}^{0}\mathbf{r}_{i}^{(n)} \le {}^{2}\mathbf{r}_{i}^{(n)} \le {}^{i}\mathbf{r}_{i}^{(n)} ; n \ge n_{0} \Rightarrow {}^{1}\mathbf{r}_{i}^{(n)} \le n - n_{0} + 1.$$

Il serait possible de définir d'autres coefficients de décomptes tout en concervant les résultats donnés plus loin. Par exemple des coefficients pourraient être définis donnant plus d'importance à $R_{i}^{(n)}$ qu'à $R_{i}^{(n-1)}$, et plus d'importance à $R_{i}^{(n-1)}$ qu'à $R_{i}^{(n-2)}$ etc ...

Soient A_1 , A_2 , ..., A_k ; k transformations de suites définies sur l'espace métrique (E, d) et à valeurs dans (E, d). Comme convenu (voir ch. 1) nous noterons par $A_1^{(n)}$ (x_m), $A_2^{(n)}$ (x_m), ..., $A_k^{(n)}$ (x_m) les suites données par ces transformations quand on les applique à la suite (x_n) ϵ E^N ; le plus souvent nous écrirons même simplement $A_1^{(n)}$ au lieu de $A_1^{(n)}$ (x_m).

Si on particularise la relation $R_i^{(n)}$ par la relation :

$$(C_{i}^{(n)}) : A_{i}^{(n)} = A_{i}^{(n-1)},$$

qui n'est définie que pour $n \ge 1$, on obtient des coefficients de décompte que nous noterons $c_i^{(n)}$, $c_i^{(n)}$, $c_i^{(n)}$.

Soit ℓ fixé, ℓ ϵ t N. Si on particularise la relation $t R_{ exttt{i}}^{ ext{(n)}}$ par la relation :

$$(\ell^{\mathcal{D}_{i}^{(n)}}) \max_{0 \le q \le \ell} d(A_{i}^{(n-q)}, A_{i}^{(n-q-1)}) = \min_{1 \le j \le k} \max_{0 \le q \le \ell} d(A_{j}^{(n-q)}, A_{j}^{(n-q-1)})$$

qui n'est définie que pour $n \ge \ell + 1$, on obtient des coefficients de décompte que nous noterons $\ell^{(n)}$, $\ell^{(n)}$, $\ell^{(n)}$. Quand ℓ = 0 on notera $\ell^{(n)}$ la relation $\ell^{(n)}$ et $\ell^{(n)}$, $\ell^{(n)}$ les coefficients de décompte associés.

Nous sommes maintenant en mesure à partir de k transformations de suites A_1, A_2, \ldots, A_k et en utilisant des coefficients de décompte $f_i^{(n)}$, de définir une nouvelle transformation de suites $A = f_R(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

Etape n de la transformation $A = {}^{f}R(A_1, A_2, ..., A_k)$

On calcule $f_{r_1}^{(n)}$, $f_{r_2}^{(n)}$, ..., $f_{r_k}^{(n)}$.

Soit i(n) le plus petit i tel que :

$$f_{r_i}^{(n)} = \max_{\substack{i \leq i \leq k}} f_{r_i}^{(o)},$$

on choisit : $A^{(n)} = A_{i(n)}^{(n)}$.

Appliqué avec les coefficients de décompte définis plus haut, ce schéma nous donne de nouvelles transformations de suites :

$${}^{\circ}C(A_1, A_2, ..., A_k), {}^{1}C(A_1, A_2, ..., A_k), {}^{2}C(A_1, A_2, ..., A_k),$$
 ${}^{\circ}D(A_1, A_2, ..., A_k), {}^{1}D(A_1, A_2, ..., A_k), {}^{2}D(A_1, A_2, ..., A_k).$

Si ℓ = 0, les trois dernières transformations sont notées:

$${}^{\circ}D(A_1, A_2, ..., A_k), {}^{1}D(A_1, A_2, ..., A_k), {}^{2}D(A_1, A_2, ..., A_k).$$

Remarques

1°) Il est parfois possible de calculer récursivement les coefficients de décompte. Par exemple le calcul de ${}^{1}c^{(n)}_{i}$ semble nécessiter $A^{(o)}_{i}$, $A^{(1)}_{i}$,..., $A^{(n)}_{i}$ mais en fait ce calcul peut se faire uniquement avec ${}^{1}c^{(n-1)}_{i}$, $A^{(n)}_{i}$ et $A^{(n-1)}_{i}$ grâce aux relations évidentes suivantes :

$${}^{1}c_{i}^{(n)} = {}^{1}c_{i}^{(n-1)} \quad \text{si } A_{i}^{(n)} \neq A_{i}^{(n-1)},$$

$${}^{1}c_{i}^{(n)} = {}^{1}c_{i}^{(n-1)} + 1 \text{ si } A_{i}^{(n)} = A_{i}^{(n-1)}.$$

- 2°) Nous n'avons pas supposé que les transformations A_1, A_2, \ldots, A_k étaient normales (ou même seulement algorithmiques) car nos définitions valent pour des transformations quelconques. Cependant il est clair que :
- . Si les transformations A_1 , A_2 , ..., A_k sont algorithmiques la transformation $A = {}^fR(A_1, A_2, \ldots, A_k) \text{ est aussi algorithmique.}$
- . Si les transformations A_1 , A_2 , ..., A_k sont k-normales alors la transformation $A = {}^fR(A_1, A_2, \ldots, A_k) \text{ est aussi k-normale.}$
- Il semble malgré tout raisonnable de mettre toutes les transformations de suites en compétition sur un "pied d'égalité", par exemple en les normalisant toutes (c'est ce que nous ferons dans les exemples numériques).
- 3°) Il se produit parfois que l'une des transformations utilisées soit bloquée (à cause par exemple d'une division par zéro). Dans de tels cas deux types de stratégies peuvent être employées :

si la transformation A, est bloquée à l'étape n :

- (a) pour tout $n \ge n_0$, ne plus considérer que les transformations A_i $i \ne j$;
- (β) pour tout $n \ge n$ prendre :

$$A_{j}^{(n)} = A_{j}^{(n_0-1)} ; R_{j}^{(n)} \iff R_{j}^{(n_0-1)}$$

- 4°) Nous n'avons envisagé ici que le cas où un nombre fini de transformations de suites étaient en compétition mais il est possible d'adapter certaines définitions et certains résultats au cas d'une infinité de transformations de suites.
- 5°) Une méthode de sélection basée sur une idée assez proche de celle présentée ici a été développée par C. Brezinski dans [7].

Exemple 1

Soient A_1 , A_2 deux transformations de suites données. $^{O}D(A_1$, $A_2)$ est la transformation de suites A qui, à l'étape n, propose la réponse de la plus stable des deux transformations A_1 ou A_2 :

$$A^{(n)} = A_1^{(n)} \text{ si } d(A_1^{(n)}, A_1^{(n-1)}) \le d(A_2^{(n)}, A_2^{(n-1)}),$$

$$A^{(n)} = A_2^{(n)} \text{ si } d(A_2^{(n)}, A_2^{(n-1)}) \le d(A_1^{(n)}, A_1^{(n-1)}).$$

 1 C(A₁, A₂) est la transformation de suites qui propose la réponse de la transformation A₁ ou A₂ qui a le moins souvent changé de réponse dans les n premières étapes.

$$A^{(n)} = A_1^{(n)}$$
 si $A_1^{(q)} = A_1^{(q-1)}$ a été plus fréquemment vrai que $A_2^{(q)} = A_2^{(q-1)}$ pour $q = 0, 1, ..., n-1$

$$A^{(n)} = A_2^{(n)}$$
 sinon.

Exemple 2

Pratiquement, les méthodes les plus intéressantes sont les sélections entre des transformations de suites aussi variées que possible.

Nous verrons plus loin quelques résultats numériques réalisés sur

$$_{\ell}^{f}D(A_{1}, A_{2}, A_{3}, A_{4}, A_{5}, A_{6})$$
 où

 A_1 est le procédé de Richardson (noté R), [3] [4] [5] [14] [16]

 A_2 est l' ϵ -algorithme (notée ϵ), [2] [3] [4] [17] [18] [19]

 A_{q} est le p-algorithme (notée p), [2] [4] [5] [18]

 A_{μ} est le procédé d'Overholt (notée Ov), [3] [15]

 A_5 est le θ -algorithme (noté θ), [1] [3] [4] [8] [9]

 A_6 est le Δ^2 itéré (noté Δ^2 it.), [3].

(b) Deux résultats généraux sur les méthodes de sélection

Une transformation de suites A est dite <u>régulière</u> sur la famille de suites $S \subset Conv$ (E) si :

$$\forall (x_n) \in S : \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} A^{(n)}.$$

Une transformation de suites A est dite <u>semi-régulière</u> sur la famille de suites $S \subset \text{Conv}(E)$ si :

$$\forall (x_n) \in S [\exists n \in \mathbb{N}, \forall n \ge n] : A^{(n)} = A^{(n+1)}] \Rightarrow [\exists m \in \mathbb{N}, \forall m \ge m] : A^{(m)} = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Une transformation de suites A est dite exacte sur la famille de suites

 $S \subset Conv(E)$ si:

$$\forall (x_n) \in S, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \ge m_0 : A^{(m)} = \lim_{n \to \infty} (x_n)$$

On a bien sûr:

[A exacte] => [A régulière] => [A semi-régulière]

Des résultats concernant ces propriétés sont connus pour beaucoup de transformations d'accélération de la convergence ([3] [4] [9]).

Théorème 1

Soient S_1 , S_2 , ..., S_k , k familles de suites convergentes. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, soit A_i une transformation de suites exacte sur S_i et semi-régulière sur $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k$. Alors les transformations ${}^1{}_{C(A_1, A_2, ..., A_k)}, {}^2{}_{C(A_1, A_2,$

Démonstration

Nous indiquons la démonstration pour ${}^{1}C(A_{1}, A_{1}, \ldots, A_{k})$ notée ici A. Les autres cas s'en déduisent facilement.

Soit $(x_n) \in S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$. Soit I_o l'ensemble des entiers i_o tels que A_i soit exacte pour (x_n) . Par l'hypothèse I_o contient au moins un élément, mais il n'est pas impossible qu'il en contienne plusieurs (les S_i n'ont pas été supposés disjoints).

Puisque I est fini il existe p ϵ N tel que :

$$\forall i_0 \in I_0, \forall p \ge p_0 : A_{i_0} = x,$$

donc, pour tout $p \ge p_0$ et pour tout $i_0 \in I_0$ on a :

$${}^{1}c_{i_{0}}^{(p)} \geq p - p_{o}.$$

Inversement si i $\not\in I_o$ il existe alors un ensemble infini d'entiers p tels que : $A_i^{(p)} \not= A_i^{(p-1)}$ (ceci d'après l'hypothèse de semi-régularité) ; on peut donc trouver un entier $p_1 \ge p_0$ tel que pour i $\not\in I_o$ et $p \ge p_1$:

$${}^{1}c_{i}^{(p)}$$

Avec l'inégalité démontrée juste au-dessus cela nous donne que pour tout $p \ge p_1 : i(p) \in I_0$, et donc : $A^{(p)} = x$.

Remarques

- 1°) Le théorème 1 n'affirme rien concernant les méthodes de sélection $^{\circ}$ C et $_{\ell}^{\circ}$ D; en fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples que le théorème 1 n'est pas vrai en général pour $^{\circ}$ C et $_{\ell}^{\circ}$ D.
- 2°) L'entier p_1 de la démonstration ne peut pas être déterminé sans hypothèses supplémentaires sur les transformations de suites, mais, en pratique, on constate qu'il est proche du plus petit indice p pour lequel il existe i tel que $A_i^{(p)} = x$.
- 3°) Le corollaire de la proposition 2 du chapitre 5 montre que l'hypothèse de semi-régularité ne peut pas être supprimée.

Toutes les suites que nous envisagerons maintenant seront supposées telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 : x_n \ne x \text{ et } x_n \ne x_{n+1}$$
.

Rappelons que la transformation de suites A accélère la suite (x_n) (resp.

 Δ -accélère la suite (x_n)) si :

$$\lim_{n\to\infty} d(A^{(n)}, x) / d(x_n, x) = 0$$

(resp.
$$\lim_{n\to\infty} d(A^{(n+1)}, A^{(n)}) / d(x_{n+1}, x_n) = 0$$
)

Nous dirons que la transformation de suites A est <u>nette</u> sur S si pour toute suite (x_n) $\in S$:

ou bien : A accélère et
$$\Delta$$
 accélère (x_n) ,
$$\begin{cases} \text{ou bien} : \exists \ \epsilon > 0, \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_0 : \ d(A^{(n+1)}, \ A^{(n)}) \ / \ d(x_{n+1}, \ x_n) \geq \epsilon. \end{cases}$$

Quand E = \mathbb{R} , une condition suffisante pour que A soit nette sur S est que toutes les suites de S soient monotones et que le suite $d(A^{(n+1)}, A^{(n)})/d(x_{n+1}, x_n)$ soit toujours convergente vers une limite ℓ . En effet ou bien ℓ = 0 et alors

A accélère et Δ accélère (d'après [3]) ou bien ℓ > 0 et alors l'autre condition est satisfaite.

Théorème 2

Soient A_1, A_2, \ldots, A_k , k transformations de suites. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ on suppose que A_i accélère et Δ accélère $S_i \subset \text{Conv}(E)$ et que A_i est nette sur $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$. Alors les transformations $\mathcal{L}^0(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $\mathcal{L}^0(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $\mathcal{L}^0(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, accélèrent $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$.

Lemme

Soient (x_n) une suite convergente. Soient $(A_1^{(n)}), (A_2^{(n)}), \ldots, (A_k^n)$ k suites accélérant la convergence de (x_n) . Alors pour tout $i: \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ la suite $(A_{i(n)}^{(n)})$ accélère la convergence de (x_n) .

Démonstration

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout i ε {1, 2, ..., k} il existe $m_i \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall m \ge m_i : d(A_i^{(m)}, x)/d(x_m, x) \le \varepsilon$. En prenant $M = \max \{m_i \mid i = 1, 2, ..., k\}$ on obtient :

$$\forall m \ge M : d(A_{i(m)}^m, x)/d(x_m, x) \le \varepsilon.$$

Remarques

1°) Le lemme n'est pas vrai avec la Δ -accélération. Voici un contre-exemple : $\mathbf{x}_n = 1/n$, $\mathbf{A}_1^{(n)} = 1/n^2$, $\mathbf{A}_2^{(n)} = 1/2n^2$ i(n) = $(3+(-1)^n)/2$. On a : $\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{A}_1^{(n+1)}, \mathbf{A}_1^{(n)})/d(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) = 0,$ $\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{A}_2^{(n+1)}, \mathbf{A}_2^{(n)})/d(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) = 0,$ $\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{A}_2^{(n+1)}, \mathbf{A}_2^{(n)})/d(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) = 1/2.$ $\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{A}_1^{(n+1)}, \mathbf{A}_1^{(n)})/d(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) = 1/2.$

2°) La possibilité d'accélérer une famille obtenue comme réunion de familles accélérables n'existe pas toujours. Les résultats négatifs concernant les transformations de suites[12] [13] au contraire, permettent de construire des exemples de situations où la réunion de deux familles accélérables n'est pas accélérable (un tel exemple est donné au chapitre 5 p. 185).

Démonstration du théorème 2

Nous ne démonstrons le théorème 2 que pour $_{\ell}^{\circ}$ D (A $_1$, A $_2$, ..., A $_k$) noté A. Les autres cas s'adaptent facilement.

Soit $(x_n) \in S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$. Soit I_0 l'ensemble des entiers i tels que A_i accélère et Δ -accélère (x_n) . Par hypothèse I_0 est non-vide.

Si j
$$\notin$$
 I_o, il existe $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^{+*}$ et n_j \in \mathbb{N} tels que :
$$\forall n \geq n_j : d(A_j^{(n+1)}, A_j^{(n)}) / d(x_{n+1}, x_n) \geq \varepsilon_j.$$

Posons $\varepsilon = \min \{ \varepsilon_{j} \mid j \notin I_{0} \}$, $N = \max \{ n_{j} \mid j \notin I_{0} \}$; on obtient :

$$\forall$$
 n \geq N, \forall j \notin I₀ d(A_j⁽ⁿ⁺¹⁾, A_j⁽ⁿ⁾) / d(x_{n+1}, x_n) \geq ϵ .

De même il existe N' ≥ N tel que :

$$\forall n \ge N', \forall i \in I_o : d(A_i^{(n+1)}, A_i^{(n)}) / d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon.$$

Ceci implique que pour tout $n \ge N' + \ell$, $i(n) \in I_0$. D'après le lemme on en conclut que :

$$\lim_{n\to\infty} d(A_{i(n)}^{(n)}, x) / d(x_n, x) = 0$$

Remarques

1°) Les hypothèses du théorème 2 sont souvent vérifiées en pratique mais généralement il est difficile de l'établir pour des transformations particulières $\mathbf{A}_{\mathbf{i}}$ et de grandes familles $\mathbf{S}_{\mathbf{i}}$. Néanmoins, ce théorème justifie et explique l'efficacité des méthodes de sélection ℓ^{D} que nous constaterons dans les expériences présentées plus loin :

2°) La notion de transformation nette peut se généraliser ; on dira que la transformation A est h-nette (h ϵ N) sur S si, pour toute suite (x_n) ϵ S

$$\begin{cases} \text{ ou bien A accélère et } \Delta\text{-accélère }(\mathbf{x}_n), \\ \text{ ou bien } \exists \; \epsilon > 0, \; \exists \; n_0 \; \epsilon \; \mathbb{N}, \; \forall \; n \geq n_0 \\ \max \; d(\mathbf{A}^{(n-r+1)}, \; \mathbf{A}^{(n-r)})/d(\mathbf{x}_{n+1}, \; \mathbf{x}_n) \; \geq \; \epsilon. \\ \text{o} \leq r \leq h \end{cases}$$

On obtient [A nette] <=> [A 0-nette] et si h \geq h' [A h'-nette] => [A h-nette]. L'hypothèse "A h-nette" est donc plus facilement satisfaite que l'hypothèse "A-nette", pourtant on montre que le théorème 2 reste vrai avec $\ell \geq h$, lorsqu'on ne fait sur les A, que l'hypothèse "A, h-nette".

(c) Expériences numériques

Les expériences numériques présentées ici ont été réalisées avec les programmes de calculs de C. Brezinski [4].

Exemple 1

Au tableau 1 nous indiquons les 10 premières étapes des 6 transformations de suites (voir (a) exemple 2) appliquées à la suite (x_n) définie par :

$$x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{2n} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}\right)^2 \rightarrow 0,22005074 \dots$$

La méthode O D sélectionne une transformation que nous avons indiquée par "X" dans le tableau. On voit que la transformation choisie l'est toujours parmi les transformations R, ρ et θ qui, pour la suite considérée, sont les transformations l'accélérant. La méthode 1 D fonctionne elle aussi correctement ; à partir de l'étape 3, 1 D choisit toujours le ρ algorithme. La méthode 2 D donne les mêmes résultats que la méthode O D.

S _n	R(1/n)	ε	ρ(n)	0 v .	Ө	Δ^2 it.
.125	.125	.125	.125	.125	.125	.125
.16015625	.19531250	.16015625	.16015625	.16015625	.16015625	.16015625
.17643229	.21582031	.19046336 3	.2207 7 047	.19046336 5	.17643229 6	.19046336
.18577830	.21959093	.19838255 5	X .22033281 (1)	.20227823	.21918327	.19838255
.19183451	.22002856	.20570155 6	X .22004511 (1)	.20782237	.21966574	.20936274 4
.19607526	.22005258	.20871905 6	X .22004902 (1)	.21095162	.21984779	.21158726 4
.19920946	X .22005113 (3)	.21158833	.22005079 2	.21293141 5	.22005077	.21590176
.20161980	.22005076	.21305538 6	.22005076	.21428050 5	X .22005078 (3)	.21659597 4
.20353087	.22005074	.21447121	X .22005074 (1)	.21524960 5	.22005077	.21839937 4
.20508314	.22005074	.21529441 6	X .22005074 (1)	.21597391	.22005078	.21861073

Pour les notations R(1/n), ϵ , etc voir page 254.





Puisque nous connaissons x = 0,22005074 ... nous pouvons déterminer à chaque étape le rang exact de chacune des transformations (ce rang est indiqué au tableau 1 par un nombre placé sous chaque point transformé). Par exemple à l'étape 4 (la première étape ayant une signification) le ρ-algorithme donne 0,22033281 ce qui est le meilleur point transformé (le plus proche de la limite), le rang du ρ-algorithme est donc 1 à l'étape 4. La méthode D choisit le ρ-algorithme à l'étape 4, elle réalise donc le meilleur choix possible. Aux étapes 5 et 6, le choix est encore le meilleur possible ; à l'étape 7, par contre D choisit le procédé de Richardson qui est le 3 ême. La suite des rangs des transformations choisies par la méthode D est (1, 1, 1, 3, 3, 1, 1,...). Ce n'est pas la meilleure suite de rangs possible qui serait (1, 1, 1, 1, ...) cependant ces résultats sont tout à fait satisfaisants puisque tous les rangs sont ≤ 3 et que trois transformations accélèrent la convergence de (x_n). Dans les deux exemples suivants, nous indiquons seulement la suite des rangs des transformations choisies par le D.

Exemple 2 $(x_n) = \exp(-\sqrt{n} / 10 \sqrt{2})/n.$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
			2	1	1	3	3	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2
	=	_	_	_	=		=	=	_	_	_		_	=			=	=	=	=	=	_	_	_
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
3	3	2	3	3	1	1	1	4	2	3	3	2	1	3	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2

Tableau 2

Seules trois transformations accélèrent (x_n) , l'E-algorithme, le ρ -algorithme et le Δ^2 itéré. Quand n est assez grand, à chaque étape ^OD choisit l'une de ces trois transformations.

Exemple 3

$$x_{2n} = (1/2n)$$
; $x_{2n+1} = (4n+5)/(2n+2)^2$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
			5	2	2	2	3	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	2	3	2	3
<u></u>	26	 27	 28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	<u> </u>		42				 46			
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tableau 3

Seules deux transformations accélèrent (x_n) : l' ϵ -algorithme et le ρ -algorithme. La meilleure des deux (l' ϵ -algorithme) n'est pas choisie (car la suite transformée est alternée), mais cependant pour n assez grand le ρ -algorithme est toujours choisi.

2 - CHOIX AUTOMATIQUE ENTRE SUITES DE PARAMÈTRES DANS L'EXTRAPOLATION DE RICHARDSON

Le procédé de Richardson [3], [4], [14], [16] qui permet l'extrapolation polynomiale d'une suite est utilisé pour accélérer la convergence des suites (par exemple : méthode de Romberg). Pour le mettre en oeuvre, il faut fixer une suite de paramètres (qui sont les abscisses des points d'interpolation). Si parfois, on a de bonnes raisons de choisir telle suite de paramètres, il arrive souvent que l'on ne sache pas comment déterminer cette suite.

Nous proposons ici des méthodes permettant le choix automatique de la suite des paramètres dans l'extrapolation de Richardson entre plusieurs suites de paramètres données.

Le point de vue adopté est le suivant : nous considérons les propriétés d'exactitude des transformations de suites obtenues par le procédé de Richardson et nous définissons des méthodes de choix ayant les meilleures propriétés d'exactitude possible.

On sait, en accélération de la convergence, qu'une transformation exacte sur une grande famille de suites, accélère efficacement une famille de suites encore plus grande. En conséquence, les méthodes définies ici peuvent être utilisées pour l'accélération de la convergence.

Dans la section (a), nous étudions les propriétés d'exactitude des transformations de suites que l'on peut définir à partir du procédé de Richardson.

Dans la section (b), nous proposons un procédé de sélection entre les transforamations "K-ième colonne" (K fixé) des procédés de Richardson correspondant à des suites de paramètres différentes.

Les sections (c) et (d) envisagent les sélections entre transformations "diagonales descendantes" et "diagonales rapides".

(a) Propriétés d'exactitude des transformations obtenues par le procédé de Richardson

Dans cette section nous étudions quelles sont les différentes transformations (au sens du chapitre I : à une suite, on fait correspondre <u>une</u> suite transformée) que le tableau donné par l'extrapolation de Richardson permet de définir. Nous indiquons à la proposition 1 les propriétés d'exactitude de ces transformations.

Toutes les suites considérées dans le reste du texte sont des suites de nombres réels ou complexes (ou plus généralement d'éléments d'un corps quelconque). Soit (a_n) une suite de paramètres deux à deux distincts, convergente vers 0. Pour toute suite donnée (x_n) on considère $P_k^{(n)}$ le polynôme d'interpolation de degré $\leq k$ défini par :

$$P_k^{(n)}(a_n) = x_n, ..., P_k^{(n)}(a_{n+k}) = x_{n+k}.$$

Le schéma de Neville-Aïtken permet le calcul rapide des valeurs de ces polynômes [3], [5]:

$$\begin{cases} P_o^{(n)}(x) = x_n \\ P_{k+1}^{(n)}(x) = \frac{(a_{n+k+1}^{-n} - x) P_k^{(n)}(x) - (a_n^{-n} - x) P_k^{(n+1)}(x)}{a_{n+k+1}^{-n} - a_n} \end{cases}$$

On pose $T_k^{(n)} = P_k^{(n)}(0)$ et ces quantités peuvent être disposées en tableau de la façon suivante :

$$x_{0} = T_{0}^{(0)}$$

$$x_{1} = T_{0}^{(1)}$$

$$x_{1} = T_{0}^{(1)}$$

$$T_{1}^{(1)}$$

$$T_{2}^{(0)}$$

$$T_{1}^{(0)}$$

$$T_{2}^{(0)}$$

$$T_{1}^{(0)}$$

$$T_{2}^{(1)}$$

$$T_{1}^{(1)}$$

$$T_{2}^{(1)}$$

$$T_{1}^{(2)}$$

$$T_{1}^{(2)}$$

$$T_{1}^{(2)}$$

$$T_{1}^{(2)}$$

$$T_{1}^{(2)}$$

$$T_{2}^{(2)}$$

$$T_{1}^{(2)}$$

$$T_{3}^{(2)}$$
...

Soient $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ deux suites d'entiers, nous notons T_{α}^{β} la transformation de suites qui à la suite (x_m) fait correspondre la suite $(T_{\alpha(n)}^{(\beta(n))})$.

Si $\alpha(n) = k$ (k entier fixé) et $\beta(n) = n$, on obtient la transformation "k-ième colonne" que nous noterons T_k .

Si $\alpha(n)$ = n et $\beta(n)$ = k (k entier fixé), on obtient la transformation "k-ième diagonale descendante" que noterons $T^{(k)}$.

Si $\alpha(n) = \beta(n) = n$, on obtient une transformation que l'on peut appeler "diagonale descendante rapide" et dont nous allons voir qu'elle présente un certain
intérêt, nous la noterons $T^{()}$.

Considérons les familles de suites suivantes :

$$S_{k} = \{(x_{n}) \mid \exists \alpha_{0}, \alpha_{1}, \dots, \alpha_{k}, \forall n, x_{n} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{j} a_{n}^{j} \}$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{k}$$

$$C_{k} = \{(x_{n}) \mid \exists \alpha_{0}, \alpha_{1}, \dots, \alpha_{k}, \exists n_{0}, \forall n \geq n_{0} : x_{n} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{j} a_{n}^{j} \}$$

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_{k}$$

Elles sont liées entre elles par les relations d'inclusions suivantes :

$$S_k \in S_{k+1} \in S$$

 $n \quad n \quad n$
 $C_k \in C_{k+1} \in C$

La proposition suivante est une généralisation du théorème 23 de [3]. C'est une conséquence de ce que les transformations T_{α}^{β} sont bâties à partir du polynôme d'interpolation.

Proposition 1

1) Si:
$$\lim_{n\to\infty}\inf \alpha(n) \ge k$$
 (k entier fixé) et si $\lim_{n\to\infty}\beta(n) = +\infty$, alors:
$$\prod_{n\to\infty}^{\beta} \text{ est une transformation exacte sur } C_k$$
 (en particulier la transformation "k-ième colonne" est exacte sur C_k). 2) Si: $\lim_{n\to\infty}\alpha(n) = +\infty$ alors:
$$\prod_{n\to\infty}^{\beta} \text{ est une transformation exacte sur S}$$

(en particulier la transformation "k-ième diagonale descendante" est exacte sur S).

3) Si:
$$\lim_{n\to\infty}\alpha(n)=\lim_{n\to\infty}\beta(n)=+\infty$$
 alors:
$$T_{\alpha}^{\beta} \ \text{est une transformation exacte sur C}$$
 (en particulier la transformation "diagonale descendante rapide" est exacte sur C).

Remarque:

On voit donc que, en un certain sens, la plus efficace des transformations est la "diagonale descendante rapide"; cela est dû au fait qu'elle interpole sur un nombre de plus en plus grand de points tout en oubliant petit à petit les premiers points de la suite qui n'étaient peut-être pas exacts. Cependant, dans le cas d'une suite régulière dès le début, ce sera la lère diagonale descendante (qui n'oublie pas le passé) qui sera la plus efficace.

Démonstration

Etablissons à titre d'exemple la partie 3°.

Soit (x_m) ϵ C. Il existe k ϵ ${\rm I\! N}$ et n ϵ ${\rm I\! N}$ tels que :

$$\forall n \ge n_0 : x_n = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_n^i = P(a_n).$$

Soit $n_1 \ge n_0$ tel que : $\forall n \ge n_1 : \alpha(n) \ge k, \beta(n) \ge n_0$.

Pour tout $n \ge n_1$, $P_{\alpha(n)}^{(\beta(n))}$ est un polynôme de degré $\le \alpha(n)$ tel que :

$$P_{\alpha(n)}^{(\beta(n))}(a_i) = x_i \text{ pour tout } i \in \{\beta(n), \beta(n)+1, \ldots, \beta(n)+\alpha(n)\}.$$

Puisque les (a_i) ont été supposés deux à deux distincts, on a nécessairement

$$P_{\alpha(n)}^{(\beta(n))} = P$$
, et donc $T_{\alpha(n)}^{(\beta(n))} = \alpha_0 = \lim_{m \to \infty} x_m$.

(b) Sélection entre k-ièmes colonnes

Dans cette section nous définissons une méthode qui permet le choix automatique entre les k-ièmes colonnes (k entier fixé) obtenues à partir de ℓ suites différentes de paramètres (ℓ entier fixé).

Soient k et l deux entiers fixés.

Soient $\binom{1}{a_n}$, $\binom{2}{a_n}$, ..., $\binom{\ell}{a_n}$ ℓ suites de paramètres convergentes vers 0, dans chaque suite les paramètres étant deux à deux distincts.

Pour toute suite donnée (x_n) on considère les polynômes d'interpolation de degré $\leq k$, ${}^1P_k^{(n)}$, ${}^2P_k^{(n)}$, ..., ${}^\ell P_k^{(n)}$ définis par :

$${}^{i}P_{k}^{(n)}({}^{i}a_{n}) = x_{n}, \dots, {}^{i}P_{k}^{(n)}({}^{i}a_{n+k}) = x_{n+k}.$$

Le schéma de Neville-Aïtken (voir (a)) en permet l'utilisation facile.

On pose ${}^iT_k^{(n)} = {}^iP_k^{(n)}(0)$. Les quantités ${}^iT_k^{(n)}$ peuvent être disposées en ℓ tableaux semblables à celui de (a).

Pour tout i ϵ {1, 2, ..., ℓ } on définit :

$$\begin{split} ^{\mathbf{i}}S_{\mathbf{k}} &= \{(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}) \mid \exists \alpha_{\mathbf{0}}, \alpha_{\mathbf{1}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{k}}, \forall \mathbf{n} : \mathbf{x}_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{k} \alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} \mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}} \} \\ ^{\mathbf{i}}S &= \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}} ^{\mathbf{i}} S_{\mathbf{k}} \\ ^{\mathbf{i}}C_{\mathbf{k}} &= \{(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}) \mid \exists \alpha_{\mathbf{0}}, \alpha_{\mathbf{1}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{k}}, \exists \mathbf{n}_{\mathbf{0}}, \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{n}_{\mathbf{0}} : \mathbf{x}_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{k} \alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} \mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{j}} \} \\ ^{\mathbf{i}}C &= \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}} ^{\mathbf{i}}C_{\mathbf{k}} \end{split}$$

Bien évidemment la transformation k-ième colonne 1T_k est exacte sur 1C_k ; de même 2T_k sur 2C_k , ..., ${}^\ell T_k$ sur ${}^\ell C_k$.

La nouvelle transformation A = S($^1\text{T}_k$, $^2\text{T}_k$, ..., $^l\text{T}_k$) que nous définissons sera exacte sur $^1\text{C}_k$ u $^2\text{C}_k$ u ... u $^l\text{C}_k$.

Transformation $S(^{1}T_{k}, ^{2}T_{k}, \dots, ^{\ell}T_{k}) = A$

Etape n

Pour tout i ϵ {1, 2, ..., ℓ } calculer :

$$i_{C}(n) = card \{j \in \{1, 2, ..., n\} \mid i_{k}(j)(i_{a_{j+k+1}}) = x_{j+k+1}\}$$

Déterminer
$$i(n) \in \{1, 2, ..., \ell\}$$
 tel que :
$$i(n) c^{(n)} = \max_{i \in \{1, 2, ..., \ell\}} i c^{(n)}$$

Poser:
$$A^{(n)} = i(n)_{T_k}^{(n)}$$
.

Remarques

1°) L'idée de la méthode, peut-être un peu cachée par le formalisme, est la suivante :

à l'étape n, on détermine la suite de coefficients qui dans les étapes précédentes a permis le plus souvent (à l'aide de (k+1) points consécutifs) de deviner le (k+2)-ième; puis on propose le transformé par la k-ième colonne correspondant à cette suite de paramètres.

2°) Les ${}^{\mathbf{i}}C^{(n)}$ sont calculables par récurrence en posant :

$$i_{C^{(n)}} = i_{C^{(n-1)}} + 1 \text{ si } i_{R^{(n)}} (i_{a_{n+k+1}}) = x_{n+k+1}$$

 $i_{C^{(n)}} = i_{C^{(n-1)}} \text{ sinon.}$

3°) La méthode présentée ici entre dans le cadre général du § 1, les coefficients de décompte utilisés sont ceux de type 1 (ceux de type 0 ne donneraient rien). Cependant le théorème 3 énoncé plus loin évite l'hypothèse de mutuelle régularité des théorèmes 1, 2. Dans le cas du procédé de Richardson, c'est là l'avantage de la méthode de sélection présentée ici sur les méthodes proposées au § 1.

4°) Diverses modifications et généralisations de la méthode de sélection ici décrite sont possibles.

 (α) Dans la définition de ${}^{i}C^{(n)}$ on peut remplacer la relation :

$${}^{i}P_{k}^{(j)}({}^{i}a_{j+k+1}) = x_{j+k+1}$$

par la relation :

$$|i_{(k)}^{(j)}(i_{a_{j+k+1}}) - x_{j+k+1}| = \min_{h \in \{1,2,...,\ell\}} |i_{p_{k}}^{(j)}(i_{a_{j+k+1}}) - x_{j+k+1}|$$

La méthode qu'on obtient ainsi sera mieux adaptée aux problèmes d'accélération.

- (β) Ici la sélection s'est réalisée à l'aide d'un test sur l'interpolation par le polynôme de Lagrange au point a_{n+k+1} . Il est facile d'imaginer des variantes (préservant les résultats du théorème 1) où on utiliserait le point a_{n+k+2} , ou bien le point a_{n-1} , ou bien même encore plusieurs points (par exemple a_{n+k+1} et a_{n+k+2}).
- (γ) Moyennant certaines modifications (introduction progressive des diverses transformations) il est possible d'envisager une sélection entre une infinité (dénombrable) de transformations.
- (δ) Au lieu de considérer des polynômes on peut prendre d'autres fonctions d'interpolation.

Théorème 3

| La transformation $S(^{1}T_{k}, ^{2}T_{k}, \ldots, ^{\ell}T_{k})$ est exacte sur $^{1}C_{k} \cup ^{2}C_{k} \cup \ldots \cup ^{\ell}C_{k}$.

Démonstration

Soit $(x_n) \in {}^1C_k \cup {}^2C_k \cup \ldots \cup {}^lC_k$. Soit i_0 tel que $(x_n) \in {}^i{}^oC_k$; on pose $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. D'après la proposition 1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$: ${}^i{}^oT^{(n)} = x$ et ${}^i{}^oP_k = {}^i{}^oP_k$, où ${}^i{}^oP_k$ est le polynôme tel qu'à partir d'un certain rang $x_n = {}^i{}^oP_k ({}^i{}^oa_n)$.

Pour tout $n \ge n_0$ on a donc : ${}^{i}O_{C}^{(n)} > n-n_0$.

Soit maintenant I l'ensemble des entiers i ϵ {1, 2, ..., ℓ } tels qu'il existe m, vérifiant :

$$\forall n \ge m_i : {}^{i}P_k^{(n)} ({}^{i}a_{n+k+1}) = x_{n+k+1}$$

Soit j & I ; il existe une infinité d'entiers n tels que :

$${}^{j}p_{k}^{(n)}({}^{i}a_{n+k+1}) \neq x_{n+k+1}$$

donc il existe $p_j \ge n$ tel que pour tout $n \ge p_j$:

$$j_{C}(n) \leq n-n_{C}.$$

Ceci étant vrai pour tout j $\not\in$ I, il existe n_1 = max $\{p_j \mid j \not\in$ I $\}$ tel que pour tout $n \ge n_1$:

(*) $i(n) \in I$.

Soit $i \in I$; pour tout $n \ge m_i$:

$$\begin{cases} {}^{i}P_{k}^{(n)}({}^{i}a_{n}) = x_{n}, & {}^{i}P_{k}^{(n)}({}^{i}a_{n+1}) = x_{n+1}, \dots, & {}^{i}P_{k}^{(n)}({}^{i}a_{n+k+1}) = x_{n+k+1} \\ \\ {}^{i}P_{k}^{(n+1)}({}^{i}a_{n+1}) = x_{n+1}, & {}^{i}P_{k}^{(n+1)}({}^{i}a_{n+2}) = x_{n+2}, \dots, & {}^{i}P_{k}^{(n+1)}({}^{i}a_{n+k+2}) = x_{n+k+2} \end{cases}.$$

Les polynômes ${}^iP_k^{(n+1)}$ et ${}^iP_k^{(n)}$ correspondent donc sur k+1 points, ils sont donc égaux à un polynôme iP_k ne dépendant pas de n. Pour $n \geq m$ on a :

$$x_n = {}^{i}P_k({}^{i}a_n).$$

En prenant la limite quand n tend vers $+\infty$ on a :

$$x = {}^{i}P_{\nu}(0).$$

Avec (*) on obtient que pour tout $n \ge n_1$, $n \ge \max \{m_i \mid i \in I\}$

$$i(n)T_k^{(n)} = i(n)P_k^{(n)}(0) = i(n)P_k^{(n)}(0) = x.$$

(c) Sélection entre k-ième diagonales descendantes

Une technique tout à fait semblable à celle de la section précédente est utilisée ici pour permettre le choix automatique entre les k-ièmes diagonales descendantes (k entier fixé) obtenues à partir de ℓ suites différentes de paramètres (ℓ entier fixé).

Soient k et ℓ deux entiers fixés.

Soient $\binom{1}{a_n}$, $\binom{2}{a_n}$, ..., $\binom{\ell}{a_n}$ ℓ suites de paramètres comme à la section (b).

Pour toute suite donnée (x_n) on considère les polynômes d'interpolation de degré $\leq n; {}^1P_n^{(k)}, {}^2P_n^{(k)}, \ldots, {}^\ellP_n^{(k)}$ définis par :

$${}^{i}P_{n}^{(k)}({}^{i}a_{k}) = x_{k}, \dots, {}^{i}P_{n}^{(k)}({}^{i}a_{n+k}) = x_{n+k}.$$

On obtient ℓ transformations k-ièmes diagonales descendantes que, conformément à la section (a), on note $^1T^{(k)}$, ..., $\ell_T^{(k)}$.

D'après la proposition 1 la transformation $^1T^{(k)}$ est exacte sur 1S ; de même $^2T^{(k)}$ sur 2S , ..., $\ell_T^{(k)}$ sur ℓ_S .

La nouvelle transformation A = $S(^1T^{(k)}, ^2T^{(k)}, \ldots, ^\ell T^{(k)})$ que nous définissons sera exacte sur $^1S \cup ^2S \cup \ldots \cup ^\ell S$.

Transformation $S(^{1}T^{(k)}, ^{2}T^{(k)}, \dots, ^{\ell}T^{(k)}) = A$

Etape n

Pour tout i ϵ {1, 2, ..., ℓ } calculer :

$$i_{C}^{(n)} = card \{j \in \{1, 2, ..., n\} \mid i_{j}^{(k)}(i_{a_{j+k+1}}) = x_{j+k+1}\}$$

Déterminer $i(n) \in \{1, 2, ..., \ell\}$ tel que :

$$i(n)_{C}(n) = \max_{i \in \{1,2,\ldots,\ell\}} i_{C}(n)$$

Poser :
$$A^{(n)} = i^{(n)}T_n^{(k)}$$
.

Des remarques semblables à celles faites à la section précédente peuvent être répétées.

Théorème 4

| La transformation $S(^{1}T^{(k)}, ^{2}T^{(k)}, ..., ^{l}T^{(k)})$ est exacte sur $^{1}S \cup ^{2}S \cup ... \cup ^{l}S$.

Démonstration

Soit $(x_n) \in {}^1S \cup {}^2S \cup ... \cup {}^\ell S$. Soit i_0 tel que $(x_n) \in {}^{i_0}S$; on pose $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. D'après la proposition 1 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$: ${}^{i_0}T_n^{(k)} = x \text{ et } {}^{i_0}P_n^{(k)} = {}^{i_0}P_n^{(k)}, \text{ où } {}^{i_0}P_n^{(k)} \text{ est le polynôme tel que pour tout } n$ $x_n = {}^{i_0}P_n^{(k)}({}^{i_0}a_n).$

Pour tout $n \ge n_0$ on a donc : ${}^i_0C^{(n)} \ge n-n_0$. Comme pour le théorème 3 on établit qu'à partir d'un certain rang n_1 :

 $i(n) \in I$

où I désigne l'ensemble des indices i tels qu'il existe m, vérifiant :

$$\forall n \ge m_i : {}^{i}P_n^{(k)} ({}^{i}a_{n+k+1}) = x_{n+k+1}$$

Soit $i \in I$: pour tout $n \ge m_i$:

$${}^{i}P_{n}^{(k)}({}^{i}a_{k}) = x_{k}, {}^{i}P_{n}^{(k)}({}^{i}a_{k+1}) = a_{k+1}, ..., {}^{i}P_{n}^{(k)}({}^{i}a_{n+k+1}) = x_{n+k+1}$$

$${}^{i}P_{n+1}^{(k)}({}^{i}a_{k}) = x_{k}, {}^{i}P_{n+1}^{(k)}({}^{i}a_{k+1}) = a_{k+1}, ..., {}^{i}P_{n+1}^{(k)}({}^{i}a_{n+k+2}) = x_{n+k+2}$$

Le polynôme $i_{n+1}^{(k)}$ (de d° ≤ n+1) correspond donc au polynôme $i_n^{(k)}$ (de d° ≤ n) sur n+2 points ; il en résulte que ces deux polynômes sont égaux à un polynôme $i_n^{(k)}$ ne dépendant pas de n.

On conclut comme pour le théorème 3.

(d) Sélection entre diagonales rapides

En basant le test de choix sur deux points et non plus sur un seul, on définit une méthode de choix automatique entre les diagonales rapides

obtenues à partir de ℓ suites différentes de paramètres (ℓ entier fixé).

Comme précédemment on se fixe un entier ℓ , et (^1a_n) , (^2a_n) , ..., $(^\ell a_n)$ ℓ suites de paramètres.

Pour toute suite donnée (x_n) on considère les polynômes d'interpolation de $d^o \le n$, ${}^1P_n^{(n)}$, ${}^2P_n^{(n)}$, ..., ${}^\ellP_n^{(n)}$ définis par :

$$i_{p_n}^{(n)}(i_{a_n}) = x_n, ..., i_{p_n}^{(n)}(i_{a_{2n}}) = x_{2n}.$$

On obtient ℓ transformations diagonales rapides, que conformément à la section (a) on note $^1T^{()}, \ldots, \, ^\ell T^{()}.$

D'après la proposition 1 la transformation $^{1}T^{()}$ est exacte sur ^{1}C ; de même $^{2}T^{()}$ sur ^{2}C , ..., $\ell_{T}^{()}$ sur ℓ_{C} .

La nouvelle transformation A = S'($^{1}T^{()}$, $^{2}T^{()}$, ..., $^{\ell}T^{()}$) que nous définissons sera exacte sur ^{1}C \cup ^{2}C \cup ... \cup $^{\ell}C$.

Transformation S'($^{1}T^{()}$, $^{2}T^{()}$, ..., $\ell_{T}^{()}$) = A

Etape n

Pour tout i ϵ {1, 2, ..., ℓ } calculer:

$$i_{C}^{(n)} = card \{j \in \{1, 2, ..., n\} \mid i_{P_{j}^{(j)}}(i_{a_{2j+1}}) = x_{2j+1}$$

$$et i_{P_{j}^{(j)}}(i_{a_{2j+2}}) = x_{2j+2}\}$$

Déterminer i(n) ϵ {1, 2, ..., ℓ } tel que :

$$i(n)_{C}(n) = \max_{i \in \{1,2,\ldots,\ell\}} i_{C}(n)$$

Poser
$$A^{(n)} = i^{(n)}T_n^{(n)}$$
.

Théorème 5

| La transformation $S'(^{1}T^{()}, ^{2}T^{()}, \ldots, ^{l}T^{()})$ est exacte sur $^{1}C \cup ^{2}C \cup \ldots \cup ^{l}C$.

Démonstration

Soit $(x_n) \in {}^1C \cup {}^2C \cup ... \cup {}^\ell C$. Soit i_0 tel que $(x_n) \in {}^iC$. On pose $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. D'après la proposition 1 il existe n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$: ${}^iO_T^{(n)} = x$ et ${}^iO_T^{(n)} = {}^iO_T^{(n)} = x$ et ${}^iO_T^{(n)} = x$ e

Pour tout $n \ge n$ on a donc : $i_{C}(n) > n-n_{o}$.

Comme pour le théorème 1 on établit qu'à partir d'un certain rang n_1 : $i(n) \in I$

où I désigne l'ensemble des indices i tels qu'il existe m, vérifiant :

$$\forall n \ge m_i : {}^{i}P_n^{(n)}({}^{i}a_{2n+1}) = x_{2n+1}, {}^{i}P_n^{(n)}({}^{i}a_{2n+2}) = x_{2n+2}.$$

Soit i ϵ I ; pour tout $n \ge m_i$:

$$i_{p_{n}}^{(n)}(i_{a_{n}}) = x_{n}, i_{p_{n}}^{(n)}(i_{a_{n+1}}) = x_{n+1}, \dots, i_{p_{n}}^{(n)}(i_{a_{2n+2}}) = x_{2n+2}$$

$$i_{p_{n+1}}^{(n+1)}(i_{a_{n+1}}) = x_{n+1}, i_{p_{n+1}}^{(n+1)}(i_{a_{n+2}}) = x_{n+2}, \dots, i_{p_{n+1}}^{(n+1)}(i_{a_{2n+4}}) = x_{2n+4}$$

Le polynôme ${}^iP_{n+1}^{(n+1)}$ (de d° \leq n+1) correspond au polynôme ${}^iP_n^{(n)}$ (de d° \leq n) sur n+2 points ; il en résulte que ces deux polynômes sont égaux à un polynôme iP ne dépendant pas de n.

On conclut comme pour le théorème 3.

RÉFÉRENCES

- [1] BREZINSKI C. "Accélération de suites à convergence logarithmique", C.R. Acad. Sc. Paris, A 273, 1971, pp 727-730.
- [2] BREZINSKI C. "Etudes sur les ε et p-algorithmes", Numer. Math., 17, 1971, pp 153-162.
- [3] BREZINSKI C. "Accélération de la convergence en analyse numérique", Lecture Notes in Mathematics, 582, Springer-Verlang Heidelberg, 1977.
- [4] BREZINSKI C. "Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique", Technip, Paris 1978.
- [5] BREZINSKI C. "Analyse numérique discrète" Cours polycopié, Lille 1978.
- [6] BREZINSKI C. "A general extrapolation algorithm", Numer. Math. 35, 1980, pp 175-187.
- [7] BREZINSKI C. "Error control in convergence acceleration processes", I.M.A. J. Num. Anal. à paraître.
- [8] CORDELLIER F. "Caractérisation des suites que la première étape θ -algorithme transforme en suites constantes", C.R. Acad. Sc. Paris T 284 (1977) pp 389-392.
- [9] CORDELLIER F. "Sur la régularité des procédés & d'Aitken et W. de Lubkin", Padé Approximation and its Applications. Lecture Notes in Mathematics 765, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980, pp 20-35.
- [10] DELAHAYE J.P. "Automatic selection of sequence transformations", Math. of Computation 37, 1981 pp 197-204.
- [11] DELAHAYE J.P. "Choix automatique entre suites de paramètres dans l'extrapolation de Richardson", Padé Approximation and its Applications,
 Lecture Notes in Mathematics 888, Springer-Verlag, Heidelberg, 1981,
 pp 158-172.

- [12] DELAHAYE J.P. "Algorithmes pour suites non convergentes", Numer. Math. 34, 1980, pp 333-347.
- [13] DELAHAYE J.P. et GERMAIN-BONNE B. "Résultats négatifs en accélération de la convergence", Numer. Math. 35, 1980, pp 443-457.
- [14] LAURENT P.J. "Etudes des procédés d'extrapolation en analyse numérique", Thèse, Grenoble, 1964.
- [15] OVERHOLT K.J. "Extended Aithen Acceleration", B.I.T. V. 6, 1965, pp 122-132.
- [16] RICHARDSON L.F. "The deferred approach to the limit", Trans. Phil. Roy. Soc. 226, 1927, pp 261-299.
- [17] SHANKS D. "Non linear transformations of divergent and slowly convergent sequences", J. Math. Phys. 34, 1955, pp. 1-42.
- [18] WIMP J. "Sequence Transformations and Their Applications", Academic Press, New York, 1981.
- [19] WYNN P. "On a device for computing the $e_m(s_n)$ transformation", MTAC 16, 1956, pp 91-96.

CONCLUSION

Les différentes notions de transformations algorithmiques de suites introduites au chapitre 1 ont permis de poser de manière nouvelle le problème du traitement numérique des suites :

D'abord en décrivant mathématiquement les contraintes qu'il faut imposer aux méthodes de transformations de suites pour qu'elles puissent être considérées comme utilisables en analyse numérique; cette description étant formulée de façon très large suggère de nouveaux procédés plutôt qu'elle n'en interdit (par exemple les problèmes posés aux chapitres 2, 3 et 7 en sont directement issus).

Ensuite les notions introduites au chapitre 1 ont permis d'établir des résultats négatifs (nous disons aussi de limitation). Ces résultats négatifs avec les résultats positifs qui les accompagnent règlent de façon presque définitive certains des problèmes abordés aux chapitres 2 et 3. Par contre ces résultats négatifs en accélération de la convergence ont ouvert une voie de recherche qui vraisemblablement va pouvoir encore se développer (divers étudiants de Lille ont travaillé ou travaillent sur des sujets qui sont nés des résultats présentés dans cette thèse). On peut même dire sans exagérer qu'en accélération de la convergence une nouvelle problèmatique est apparue ; citons quelques exemples de questions ainsi ouvertes :

- Puisque les plus grosses des familles de suites à convergence logarithmique, ou alternée ne sont pas accélérables, quelles sont celles qui le sont ?

 où précisément passe la frontière entre l'accélérable et le non-accélérable ?
- Dans quels cas la réunion de plusieurs familles accélérables l'est-elle encore ? (le chapitre 7 ne répond que partiellement à cette question).
- Quelles doivent être les propriétés réciproques de plusieurs transformations de suites pour qu'on puisse en définir une nouvelle cumulant leurs bonnes propriétés ?

- Comment construire des procédés de grossissement vraiment efficaces, et comment éviter que l'amélioration du domaine d'accélération ne soit compensée par une détérioration de l'accélération de certaines suites ? est-ce d'ailleurs évitable ?

A plus longue échéance se posera le problème de la traduction récursive des résultats de la thèse, et ce sera sans doute là l'occasion de rencontrer des problèmes très difficiles.

L'adaptation de nos méthodes à des problèmes d'optimisation peut être faite et les quelques résultats dont je dispose aujourd'hui sur ce sujet me laissent pressentir des possibilités très grandes.

