

50376  
1982  
215

N° d'ordre : 1019

50376  
1982  
215

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE  
EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Thierry LAFOUGE



**APPLICATIONS DE L'HOMOGÉNÉISATION  
A UN PROBLÈME D'OPTIMUM DESIGN**

Membres du Jury : J.C. DE PARIS, *Président*  
F. MIGNOT, *Rapporteur*  
J. DENEL  
F. MURAT } *Examineurs*  
J.M. DUPUY }

Soutenu le 20 décembre 1982

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur MIGNOT pour l'aide constante et ses encouragements qui ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur le Professeur MURAT pour l'aide qu'il m'a apportée dans ce travail.

Je remercie vivement Messieurs les Professeurs DE PARIS et DENEL de l'Université de Lille I d'avoir bien voulu accepter de juger cette thèse.

Je remercie Messieurs DUPUY et VAN INGELANDT pour l'aide qu'ils m'ont apportée sur la partie numérique.

J'exprime également ma profonde gratitude à Madame DOCLOT pour les multiples services qu'elle m'a rendus.

Je n'oublierai pas ceux et celles qui ont permis la réalisation matérielle de ce mémoire : Madame EVRARD qui en assurée la frappe avec compétence, ainsi que les techniciens de l'imprimerie Messieurs GOURNAV et PROVOST, de la reliure et de la photocopie Mesdames WDOWCZYK et LLORET qui en ont réalisé le tirage et la présentation définitive.

## T A B L E D E S M A T I E R E S

<u>Introduction</u>	1
<u>CHAPITRE I : Résultats généraux sur la H convergence</u>	6
1) Théorème fondamental de la H convergence	7
2) Caractère local et Topologie de la H convergence	9
3) Théorèmes de comparaison	12
4) Termes correcteurs	16
5) Exemple de calcul	19
6) Matrices admissibles	33
<u>CHAPITRE II : Problème de contrôle optimal</u>	43
1) Théorèmes d'existence dans le cas elliptique	45
2) Conditions nécessaires pour avoir un optimum	53
3) Problème de contrôle où la fonction coût est donnée sur la frontière	68
4) Contrôle sur un problème de valeurs propres	72
<u>CHAPITRE III : Méthode de descente pour la recherche du contrôle optimal</u>	78
1) Méthode de descente pour le problème "semi-relaxé"	79
2) Méthode de descente pour le problème "relaxé"	81
3) Méthodes numériques utilisées	91
<u>CHAPITRE IV : Résultats numériques</u>	95
1) Etude numérique des cas où le minimum est isotrope	96
2) Etude numérique des cas où le minimum est anisotrope	134
3) Etude d'un cas mixte	143
4) Conclusion	150
ANNEXE	152
BIBLIOGRAPHIE	153

---

I N T R O D U C T I O N

La Théorie du contrôle optimal se fait à partir des données suivantes :

- (1) Un contrôle  $A$  "à notre disposition" dans un ensemble  $U_{ad}$  (ensemble des "contrôles admissibles") ;
- (2) l'état  $U_A$  du système qui, pour  $A$  choisi, est donné par la résolution d'une équation aux dérivées partielles ;
- (3) l'observation  $Z_A$  qui est une fonction de  $U_A$  qui appartient à "l'espace des observations" ;
- (4) une fonction "coût"  $J(A)$  qui est définie à partir d'une fonction  $Z \rightarrow I(Z)$  numérique  $\geq 0$  sur l'espace des observations par  $J(A) = I(Z_A)$ . On cherche

$$\text{Inf } J(A) \quad A \in U_{ad}$$

Dans ce travail on étudie des problèmes de contrôle du type suivant

( $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels  $0 < \alpha < \beta$ ) :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad U_{ad} = \{ \omega / \omega \text{ ouvert } \omega \subset \Omega \} \\ (2) \quad \text{l'état } U_\omega : \begin{cases} -\text{div}(a_\omega(x) \text{ grad } U_\omega(x)) = f \text{ dans } \Omega, \\ U_\omega \in H_0^1(\Omega) . \end{cases} \\ \text{où } a_\omega(x) = \beta \text{ sur } \omega \text{ et } \alpha \text{ sur } \Omega - \omega \\ (3) \quad Z_\omega = U_\omega \\ (4) \quad J(\omega) = \int_\Omega F(x, U_\omega(x)) dx \end{array} \right.$$

Les problèmes sont les suivants :

(i) il n'y a pas nécessairement d'ensemble  $\omega_0$  qui réalise l'inf (cf. Murat [1]) ;

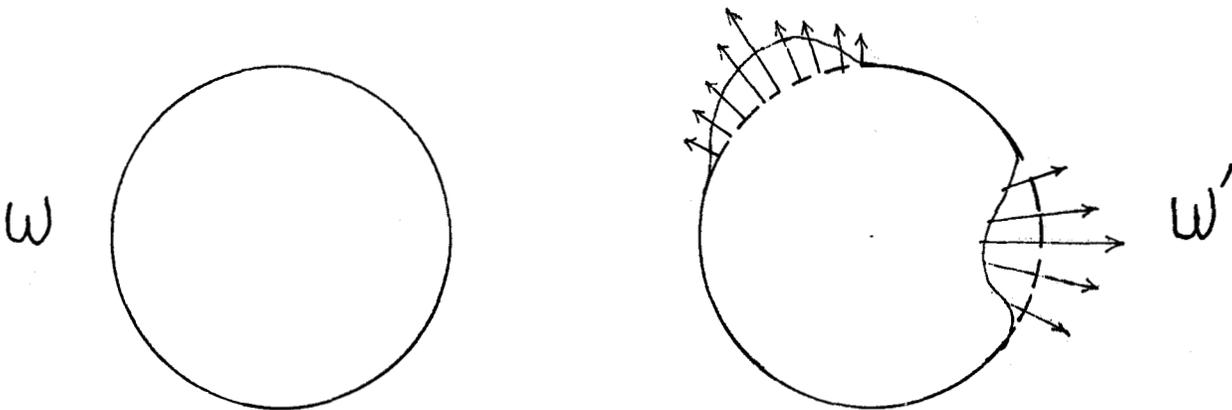
(ii) Si on considère les suites minimisantes  $J(\omega_n)$  du problème (I) quelle topologie faut-il mettre sur  $U_{ad}$  pour une description complète de toutes ces suites ?

(iii) Si il y a un optimum comment l'obtenir numériquement ?

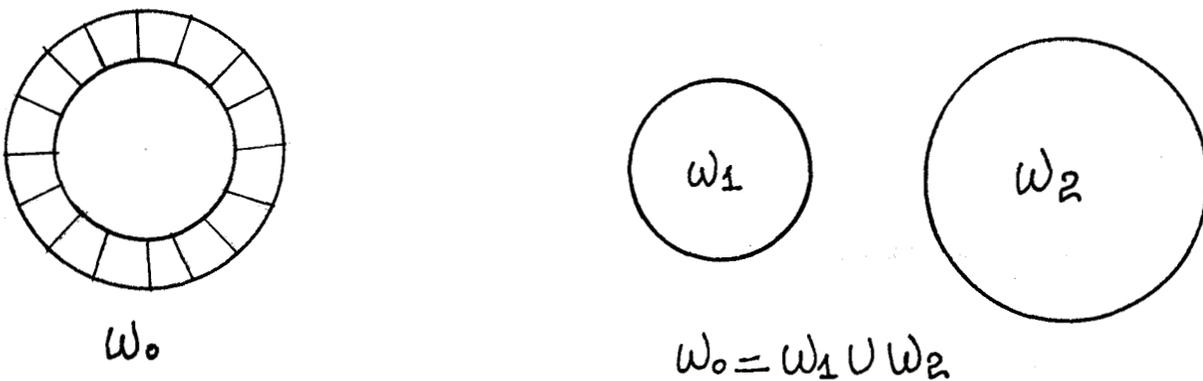
Dans le cas où l'on a un  $\omega_0$  optimum la technique classique consiste à déformer l'ouvert  $\omega$ , on choisit  $\omega'$  proche de  $\omega$

$$\omega' = \{x + \alpha(x) \cdot n(x) \mid x \in \omega, n(x) \text{ normale de } \partial\omega \text{ en } x\}$$

$\alpha$  petit [cf. B. Mercier O. Pirronneau problème "d'optimum design" p.144 [16]]



cette technique se heurte à des difficultés si l'optimum  $\omega_0$  est de la forme ci-dessous par exemple ;



On va utiliser un nouvel outil : "l'homogénéisation".

Cette méthode consiste en physique ou mécanique à remplacer dans l'opérateur d'une équation aux dérivées partielles les coefficients discontinus de matériaux composites par des coefficients équivalents (cf. Benoussan [7], J.H.Mc Connel [9]).

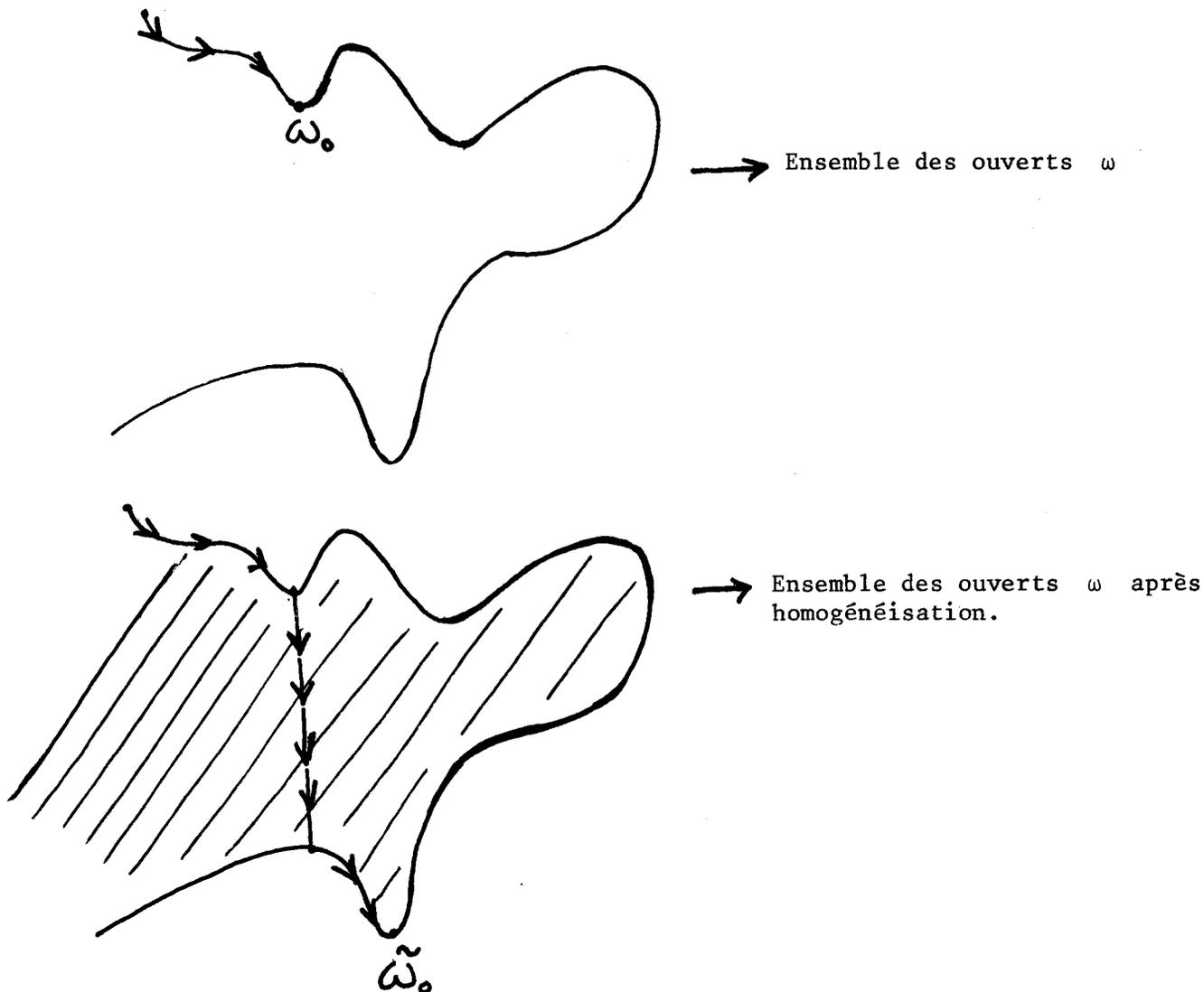
En 1976 L. Tartar [5] précise ce type de problème sous la forme de convergence d'opérateur et introduit la "H convergence", ce sera l'objet du chapitre I.

Les résultats obtenus par Tartar [6] et Murat [4] permettent de décrire tous les opérateurs associés aux limites des suites  $a_{\omega_n}$ , ce résultat fondamental est démontré dans le théorème VI.3 du chapitre I, on appelle  $K$  cet ensemble (ensemble des "matrices admissibles") obtenu après homogénéisation.

Notre objectif est alors :

- (i) obtention de Théorèmes d'existence sur  $K$  pour avoir un (ou des) optimum ;
  - (ii) obtention de conditions nécessaires sur  $K$  pour avoir un (ou des) optimum ;
  - (iii) obtention d'algorithmes sur  $K$  en vue d'applications numériques pour l'approximation du (ou d'un)  $A \in K$  réalisant l'inf.
- (i) et (ii) sera l'objet du chapitre II.

Dans le chapitre III différents algorithmes sont alors mis en oeuvre ; on utilise des méthodes de descente de type "gradient avec contrainte" et "gradient avec projection" ; même dans le cas où l'optimum est un  $\omega_0$  l'homogénéisation permet d'avoir plusieurs chemins de descente comme le visualise le dessin de la page suivante.



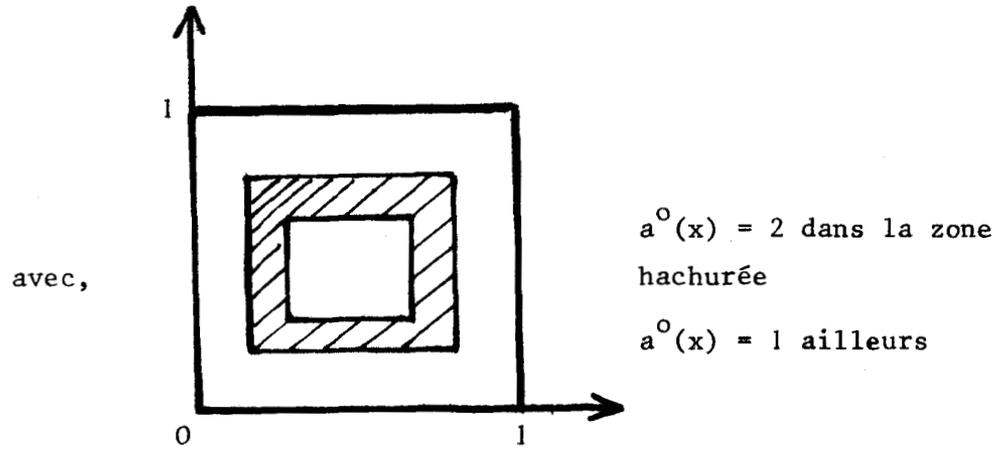
Pour résoudre numériquement les systèmes d'équations aux dérivées partielles des différents algorithmes on a utilisé des éléments finis "P<sub>2</sub> conforme" et le "P<sub>2</sub> mixte" [cf. J.M. Dupuy [15]].

On étudie au chapitre IV plusieurs exemples dont voici l'un d'eux :

Minimiser  $J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_A - Z_d|^2$ , où  $Z_d$  est solution de ,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a^0 \operatorname{IV}U] = 10 & \text{dans } \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ , \\ U \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$





et  $U_A$  ( $A \in K$ ) solution de,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}[A \nabla U_A] = 10 \text{ dans } \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ , \\ U_A \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Le minimum cherché est 0 et correspond alors à  $U^0 = Z_d$  et  $A^0 = a^0 I$ . La méthode de descente dite "relaxée", où le contrôle  $A$  parcourt l'ensemble  $K$ , donne des résultats satisfaisants sur cet exemple académique.

## CHAPITRE I

### RESULTATS GENERAUX SUR LA H CONVERGENCE

#### Contenu

La H convergence a été définie en 1976 par Tartar, ses résultats forment l'essentiel de ce chapitre.

Elle généralise la G convergence définie en 1968 par Spagnolo et D. Giorgi.

Le cas périodique a été étudié par Benoussan, Lions et Papanicolaou.

#### Référence

Paragraphe I	F. Murat [1]	L. Tartar [5]
Paragraphe III	F. Murat [4]	
Paragraphe IV	F. Murat [1]	
Paragraphe V	F. Murat [1]	W.H Mc Connell [9]
Paragraphe VI	F. Murat [3]	A. Benoussan [7]
	Bourgat Dervieux [8]	

Notation

$\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$

$\alpha, \beta$  deux réels :  $0 < \alpha < \beta$

$M(\alpha, \beta, \Omega) = \{A \in L^\infty(\Omega)^{N \times N} / \alpha \|\xi\|^2 \leq (A(x)\xi, \xi) \text{ et}$

$|A(x)\xi| \leq \beta \|\xi\|, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ presque partout dans } \Omega\}$ .

I - Théorème fondamental de la H convergence

Soit une suite  $A^n, A^n \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ ,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  on désigne par  $U^n(f)$

la solution du problème

$$\begin{cases} - \operatorname{div} (A^n \nabla U^n(f)) = f \\ U^n(f) \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

on a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème I.1. De toute suite  $A^n \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  on peut extraire une sous-suite et trouver une matrice  $A^0$  telle  $\forall f$  les solutions précédentes  $U^n(f)$  vérifient

- (a)  $U^n(f) \rightarrow U^0(f)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible,
- (b)  $A^n \nabla U^n(f) \rightarrow A^0 \nabla U^0(f)$  dans  $(L^2(\Omega))^N$  faible,

où  $U^0(f)$  est la solution du problème

$$\begin{cases} - \operatorname{div}(A^0 \nabla U^0(f)) = f, \\ U^0(f) \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

De plus on a :  $A^0 \in M(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega)$ . On dit alors que  $A^n$  H converge vers  $A^0$ , on note :  $A^n \xrightarrow{H} A^0$ .

On démontre les résultats suivant :

(1) Si  $A^n \xrightarrow{H} A^0 \implies t_{A^n} \xrightarrow{H} t_{A^0}$ ,

(2) de (b) on déduit le résultat d'unicité suivant : soient deux suites

$A^n, B^n \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  vérifiant  $A^n = B^n$  sur un ouvert  $\omega, \bar{\omega} \subset \Omega$ , si  $A^n \xrightarrow{H} A^0$  et  $B^n \xrightarrow{H} B^0$  alors  $A^0 = B^0$  sur  $\omega$ ,

(3) de (1) et (2) on déduit que si  $A^n$  est symétrique  $A^0$  l'est également,

(4) On montre enfin que si  $A^n$  est symétrique,  $A^0 \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ .

Les démonstration précédentes reposent principalement sur la "compacité par compensation" dont voici deux lemmes.

Lemme I.1. Soient deux suites,  $\xi^n \in (L^2(\Omega))^N, v^n \in H^1(\Omega)$  vérifiant

- i)  $\xi^n \rightharpoonup \xi^0$  dans  $(L^2(\Omega))^N$  faible
- ii)  $-\text{div } \xi^n \rightharpoonup -\text{div } \xi^0$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  fort
- iii)  $v^n \rightharpoonup v^0$  dans  $H^1(\Omega)$  faible

Alors on a  $(\xi^n, \nabla v^n) \rightharpoonup (\xi^0, \nabla v^0)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Du lemme précédent on déduit le résultat appelé convergence de l'énergie.

Proposition I.1. On prend les notations du théorème I.1.

Si  $A^n \xrightarrow{H} A^0$  alors  $(A^n \nabla v^n, \nabla v^n) \rightarrow (A^0 \nabla v^0, \nabla v^0)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Lemme I.2. Soient deux suites,  $\xi^n \in (L^2(\Omega))^N, v^n \in (L^2(\Omega))^N$  vérifiant

- i)  $\xi^n \rightharpoonup \xi^0$  dans  $(L^2(\Omega))^N$  faible
- ii)  $v^n \rightharpoonup v^0$  dans  $(L^2(\Omega))^N$  faible

Si  $\text{div } \xi^n$  et  $\text{rot } v^n$  sont bornés dans  $L^2(\Omega)$  et  $(L^2(\Omega))^N$  alors on a  $(\xi^n, v^n) \rightharpoonup (\xi^0, v^0)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

On va montrer que la convergence forte sur les coefficients implique la H convergence.

Proposition I.2. Si  $A^n \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  converge fortement vers  $A^0$  dans  $(L^2(\Omega))^{N^2}$  alors on a le résultat :

$$A^n \xrightarrow{H} A^0$$

Démonstration : Soit  $U^n$  la solution de

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}^n \frac{\partial U^n}{\partial x_j}) = f \\ U^n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On sait alors d'après un résultat classique que  $U^n \rightarrow U^0$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible ; de l'hypothèse  $a_{ij}^n$  converge fortement vers  $a_{ij}^0$  et du résultat  $\frac{\partial U^n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial U^0}{\partial x_i}$  dans  $L^2(\Omega)$  faible on tire :

$$\forall i, j, \quad a_{ij}^n \frac{\partial U^n}{\partial x_i} \longrightarrow a_{ij}^0 \frac{\partial U^0}{\partial x_i}$$

dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on peut alors passer à la limite et conclure.

## II - Caractère local et Topologie de la H convergence

On va montrer que la H convergence est une propriété locale et que le choix de l'ouvert  $\Omega$  n'a donc pas d'importance.

Proposition II.1. Soit une suite  $A^n \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  telle que  $A^n \xrightarrow{H} A^0$ , soit  $Q$  un ouvert vérifiant,  $\bar{\Omega} \subset Q$  ; on définit la suite  $B^n$  par  $B^n = A^n$  dans  $\Omega$  et  $B^n = I$  dans  $Q - \bar{\Omega}$ , alors  $B^n \xrightarrow{H} B^0$  avec  $B^0 = A^0$  dans  $\Omega$  et  $B^0 = I$  dans  $Q - \bar{\Omega}$ .

Démonstration : On a d'après le théorème I.1  $B^n \xrightarrow{H} B^0$  dans  $Q$ .

Soit  $\omega_1$  un ouvert,  $\bar{\omega}_1 \subset \Omega'$  où  $\Omega' = Q - \bar{\Omega}$ , soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$  avec  $\phi = 1$  sur  $\omega_1$ . On pose :

$$f = - \operatorname{div}(B^0 \nabla(\xi, x) \phi)$$

Soit  $U^n$  la solution de 
$$\begin{cases} - \operatorname{div}(B^n \nabla U^n) = f \\ U^n \in H_0^1(Q) \end{cases}$$

- On a  $U^n \longrightarrow U^0$  dans  $H_0^1(Q)$  faible d'où  $\nabla U^n \longrightarrow \nabla U^0$  dans  $(L^2(Q))^N$  faible, on a  $B^n \nabla U^n \longrightarrow B^0 \nabla U^0$  dans  $(L^2(Q))^N$  faible d'où on déduit que  $B^0 \nabla U^0 = U^0$  sur  $\omega_1$  et puisque  $U^0 = \langle \xi, x \rangle \phi$  on a  $B^0 \xi = \xi$  sur  $\omega_1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$ . Soit  $B^0 = I$  sur  $\Omega'$  presque partout.

- Soient  $U^n$  et  $V^n$  solutions de

$$\begin{cases} - \operatorname{div}({}^t A^n \nabla V^n) = g \\ V^n \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} - \operatorname{div}(B^n \nabla U^n) = f \\ U^n \in H_0^1(Q) \end{cases}$$

où  $g = - \operatorname{div}({}^t A^0 \nabla \langle \xi, x \rangle \phi)$  sur  $\Omega$  on peut écrire  $(B^n \nabla U^n, \nabla V^n) = (\nabla U^n, {}^t A^n \nabla V^n)$ , on passe à la limite en utilisant le lemme I.1, on a alors l'égalité ponctuelle  $(B^0 \nabla U^0, \nabla V^0) = (\nabla U^0, {}^t A^0 \nabla V^0) = (A^0 \nabla U^0, \nabla V^0)$ , d'où  $\forall \omega_1 \quad \bar{\omega}_1 \subset \Omega$ , on a  $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$   $(B^0 \xi, \xi) = (A^0 \xi, \xi)$  sur  $\omega_1$  d'où l'on a  $B^0 = A^0$  presque partout.

Proposition II.2. Soit  $\Omega$  un ouvert,  $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{\omega}_j$ ,  $\omega_j$  ouvert vérifiant  $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  et  $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \bigcup \omega_j) = 0$ ; soit  $A_i^n$  une suite de matrices  $A_i^n \in M(\alpha_i, \beta_i, \omega_i)$  vérifiant  $A_i^n \xrightarrow{H} A_i^0$ ; on définit alors  $A^n$  par  $A^n = A_i^n$  sur  $\omega_i$ , on a le résultat  $A^n \xrightarrow{H} A^0$ , avec  $A^n, A^0 \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  où  $A^0 = A_i^0$  sur  $\omega_i$ .

Démonstration : Soit  $\alpha = \inf \alpha_i$ ,  $\beta = \sup \beta_i$  on définit

$A_i^n = \begin{cases} A_i^n & \text{sur } \omega_i \\ \alpha I & \text{sur } \Omega - \omega_i \end{cases}$ . On a  $A_i^n \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  et d'après la proposition précédente

$A_i^n \xrightarrow{H} A_i^0$  où  $A_i^0 = \begin{cases} A_i^0 & \text{sur } \omega_i \\ I & \text{sur } \Omega - \omega_i \end{cases}$ . D'autre part  $A^n \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  donc

$A^n \xrightarrow{H} A^0$  on a  $A_i^n = A^n$  sur  $\omega_i$  d'où, d'après l'unicité :  $A^0 = A_i^0$  sur  $\omega_i$ .

Topologie de la H convergence

On peut tout d'abord sans restriction sur la définition de la H convergence supposer l'ouvert  $\Omega$  fixé.

- Soit A une matrice appartenant à  $M(\alpha, \beta, \Omega)$ , on définit un opérateur B :  $B = -\text{div}(A\nabla)$ ,  $B^{-1}$  appartient à  $L(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))$ , en effet  $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$

$$\| (B)^{-1}(f) \|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)}$$

- D'autre part A n'est pas défini de façon unique par l'opérateur B. (soit C une matrice constante et antisymétrique U est solution des deux problèmes,

$$\begin{cases} -\text{div}[AVU] = f, \\ U \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad \begin{cases} -\text{div}((A+C)\nabla U) = f, \\ U \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

en effet on a :  $-\text{div}(CVU) = 0$ .

- On définit alors  $A \in L(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^N)$  par

$$A(f) = ((B)^{-1}(f), A\nabla((B)^{-1}(f)))$$

En effet si on pose  $(\xi_i^n)_{1 \leq i \leq N} = A\nabla((B)^{-1}(f))$  on a bien  $\xi_i^n$  borné dans  $L^2(\Omega)$   $1 \leq i \leq N$ .

Donc la matrice A définit d'une façon biunivoque un opérateur A et on a  $\| \| A \| \| \leq C$ .

La H convergence peut alors se reformuler de la façon suivante :

$$A^n \xrightarrow{H} A^0 \iff \forall f \in H^{-1}(\Omega), \quad A^n(f) \rightarrow A^0(f)$$

dans  $H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^N$  faible.

rappelons le lemme : soit  $F$  un espace vectoriel normé séparable,  $G$  un hilbert séparable, la boule unité de  $L(F,G)$  est métrisable pour la topologie faible.

On est alors dans les conditions d'application de ce lemme pour conclure.

Proposition II.3. Il existe une distance  $d$  sur  $L(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^N)$  telle que :

$$A^n \xrightarrow{H} A^0 \iff d(A^n, A^0) \rightarrow 0.$$

Dans ce qui suit on va donner des théorèmes de comparaison qui vont nous donner des renseignements sur la matrice limite de la  $H$  convergence.

### III - Théorèmes de comparaison

On va d'abord démontrer un lemme utile pour la démonstration de ces théorèmes.

Lemme III.1. Soit  $A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2}$  vérifiant :

$$\forall U \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} (A(x) \nabla U(x), \nabla U(x)) \geq 0$$

alors on a :  $(A(x)\xi, \xi) \geq 0$  presque partout sur  $\Omega$  et  $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ .

Démonstration : Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  on pose :

$$U^n(x) = \frac{\psi(x)}{n} \sin(n \langle \xi, x \rangle)$$

on fait tendre  $n$  vers  $\infty$  et on obtient  $\int_{\Omega} \psi^2(x) (A(x)\xi, \xi) \geq 0$ , on peut alors conclure.

Théorème III.1. Soit  $A^n$  une suite de matrices symétriques vérifiant :

- i)  $A^n \xrightarrow{H} A^0$ ,
- ii)  $A^n \longrightarrow A^\infty$  dans  $(L^\infty(\Omega))^{N^2}$  faible,
- iii)  $(A^n)^{-1} \longrightarrow B^{-1}$  dans  $(L^\infty(\Omega))^{N^2}$  faible,

on a alors l'inégalité :  $B \leq A^0 \leq A^\infty$ .

Démonstration :

- Montrons que  $A^0 \leq A^\infty$ . Soit  $U \in H^1_0(\Omega)$  fixé et soit  $U^n$  la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^n \nabla U^n) = -\operatorname{div}(A^0 \nabla U), \\ U^n \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Par définition de la H convergence on sait que :  $U^n \rightarrow V$  dans  $H^1_0(\Omega)$  faible, et d'après l'unicité on a  $V = U$ .

On a  $\int_{\Omega} (A^n \nabla U^n, \nabla U) = \int_{\Omega} (A^0 \nabla U, \nabla U)$  d'où on tire ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (A^n \nabla U, \nabla U) &= \int_{\Omega} (A^0 \nabla U, \nabla U) + \int_{\Omega} (A^n (\nabla U - \nabla U^n), \nabla U) \\ &= \int_{\Omega} (A^0 \nabla U, \nabla U) + \int_{\Omega} (A^n (\nabla U - \nabla U^n), \nabla U - \nabla U^n) + \int_{\Omega} (A^n (\nabla U - \nabla U^n), \nabla U^n) \end{aligned}$$

Soit

$$\int_{\Omega} (A^n \nabla U, \nabla U) \geq \int_{\Omega} (A^0 \nabla U, \nabla U) - \int_{\Omega} (A^n \nabla U^n, \nabla U^n) + \int_{\Omega} (A^n \nabla U, \nabla U^n)$$

$A^n$  étant symétrique on a :

$$\int_{\Omega} (A^n \nabla U, \nabla U^n) = \int_{\Omega} (A^n \nabla U^n, \nabla U) = \int_{\Omega} (A^0 \nabla U, \nabla U)$$

On passe à la limite en utilisant la proposition I.1

$$\int_{\Omega} (A^\infty \nabla U, \nabla U) \geq \int_{\Omega} (A^0 \nabla U, \nabla U)$$

on conclut en utilisant le lemme III.1

- Montrons que  $B \leq A^0$ .

Soit  $U \in H_0^1(\Omega)$  fixé et  $U^n$  définie comme précédemment on a :

$$\int_{\Omega} ((A^n)^{-1} (A^n \nabla U^{n-\mu}), A^n \nabla U^{n-\mu}) \geq 0 \quad \mu \in \mathbb{R}^N$$

soit encore :

$$\int_{\Omega} [(A^n \nabla U^n, \nabla U^n) - 2(\nabla U^n, \mu) + ((A^n)^{-1} \mu, \mu)] \geq 0$$

Soit en passant à la limite

$$\int_{\Omega} [(A^0 \nabla U, \nabla U) - 2(\nabla U, \mu) + (B^{-1} \mu, \mu)] \geq 0$$

On prend  $\mu = B \nabla U$  on obtient alors :

$$\int_{\Omega} [A^0 \nabla U, \nabla U] - [B \nabla U, \nabla U] \geq 0$$

on conclut en utilisant le lemme III.1.

Le résultat qui suit est une conséquence algébrique du théorème III.1.

Corollaire III.1. Sous les mêmes hypothèses que le théorème III.1 on a le résultat  $B^{-1} \geq (A^0)^{-1}$ .

Démonstration : On a le résultat algébrique suivant : soient  $C$  et  $D$  deux matrices symétriques et définies positives telles que  $C \geq D$  alors  $C^{-1} \leq D^{-1}$ .

Soit  $(x_i)$  une base de valeurs propres de  $D$ ,  $C \geq D$  s'écrit alors :  
 $\sum_{ij=1}^N c_{ij} x_i x_j \geq \sum_{i=1}^N d_i x_i^2$  on pose  $y_i = \sqrt{d_i} x_i$  l'inégalité précédente s'écrit

$$\sum_{ij=1}^N c_{ij} \frac{1}{\sqrt{d_i}} y_i \frac{1}{\sqrt{d_j}} y_j \geq |y|^2$$

d'où on tire  $D^{-1/2} \cdot C \cdot D^{-1/2} \geq I$  on déduit que la plus grande valeur propre de  $(D^{-1/2} \cdot C \cdot D^{-1/2})^{-1}$  est inférieure ou égale à 1, d'où  $D^{1/2} \cdot C^{-1} \cdot D^{1/2} \leq I$  ; En faisant le même raisonnement que précédemment on déduit  $C^{-1} \leq D^{-1}$ .

On va donner un exemple d'application de ce 1er théorème de comparaison.

On a besoin du lemme suivant.

Lemme III.2. Soit une suite  $A^n \in (L^\infty(\Omega))^{N^2}$  telle que  $A^n \rightarrow A^\infty$  dans  $(L^\infty(\Omega))^{N^2}$  faible on a alors  $\text{trace}(A^n) \rightarrow \text{trace}(A^\infty)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible.

Démonstration : Soit  $(e_i)$  une base orthonormée on a alors  $\text{trace}(A^n) = \sum_{i=1}^N (A^n e_i, e_i)$  on peut alors passer à la limite.

Exemple III.1. Soit  $A^n$  une suite de matrices symétriques vérifiant

- i)  $A^n \xrightarrow{H} A^0$
- ii)  $A^n \longrightarrow A^\infty$  dans  $(L^\infty(\Omega))^{N^2}$  faible
- iii)  $(A^n)^{-1} \longrightarrow B^{-1}$  dans  $(L^\infty(\Omega))^{N^2}$  faible
- iv)  $\forall n \text{ trace}(A^n) = C \quad C \in \mathbb{R}$ .

On a alors :

$$\text{trace}(A^0) \leq C \text{ et } \text{trace}((A^0)^{-1}) \leq K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Du théorème III.1, on tire  $A^0 \leq A^\infty$  d'où  $\text{trace}(A^0) \leq \text{trace}(A^\infty)$ , on conclut en utilisant le lemme précédent, on démontre de même l'autre inégalité à l'aide du corollaire III.1.

On va démontrer un autre théorème de comparaison.

Théorème III.2. Soient deux suites de matrices  $A^n, B^n, B^n$  symétrique vérifiant :

- i)  $A^n \xrightarrow{H} A^0$
- ii)  $B^n \xrightarrow{H} B^0$
- iii)  $B^n \leq A^n$

On a alors :  $B^0 \leq A^0$ .

Démonstration : Soit  $U \in H^1_0(\Omega)$  et soient  $U^n$  et  $V^n$  les solutions de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^n \nabla U^n) = -\operatorname{div}(A^0 \nabla U) \\ U^n \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(B^n \nabla V^n) = -\operatorname{div}(B^0 \nabla U) \\ V^n \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

On sait que l'on a alors  $U^n \rightarrow U$  et  $V^n \rightarrow U$  dans  $H^1_0(\Omega)$  faible.

On a  $\int_{\Omega} (B^n (\nabla V^n - \nabla U^n), \nabla V^n - \nabla U^n) \geq 0$  soit en utilisant la symétrie de  $B^n$  :  $\int_{\Omega} (B^n \nabla V^n, \nabla V^n) - 2 \int_{\Omega} (B^n \nabla V^n, \nabla U^n) + \int_{\Omega} (B^n \nabla U^n, \nabla U^n) \geq 0$  de  $B^n \leq A^n$  on tire :

$$\int_{\Omega} (B^n \nabla V^n, \nabla V^n) - 2 \int_{\Omega} (B^n \nabla V^n, \nabla U^n) + \int_{\Omega} (A^n \nabla U^n, \nabla U^n) \geq 0$$

on passe à la limite en utilisant le lemme I.1, soit

$$\int_{\Omega} (B^0 \nabla U, \nabla U) - 2 \int_{\Omega} (B^0 \nabla U, \nabla U) + \int_{\Omega} (A^0 \nabla U, \nabla U) \geq 0$$

on conclut en utilisant le lemme III.1.

#### IV - Termes correcteurs.

Nous allons maintenant introduire des correcteurs de la suite  $U^n$  définie par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^n \nabla U^n) = f \text{ dans } \Omega \\ U^n \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

Soit  $A^0$  la H limite de  $A^n$  ; soit  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  on se propose de construire des fonctions  $W_\lambda^n$  vérifiant

- i)  $W_\lambda^n \in H^1(\Omega)$ ,
- ii)  $W_\lambda^n \rightarrow (\lambda, x)$  dans  $H^1(\Omega)$  faible,
- iii)  $-\operatorname{div}(A^n \nabla W_\lambda^n) \rightarrow -\operatorname{div}(A^0 \lambda)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  fort.

On considère un ouvert  $Q$  tel que  $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset Q$  on définit alors  $\tilde{A}^n$  par :

$$\tilde{A}^n = \begin{cases} A^n & \text{sur } \Omega \\ I & \text{sur } Q - \bar{\Omega} \end{cases}$$

On sait alors [cf. Proposition II.1] que  $\tilde{A}^n \xrightarrow{H} \tilde{A}^0$  où  $\tilde{A}^0 = A^0$  sur  $\Omega$ ,  $\tilde{A}^0 = I$  sur  $Q - \bar{\Omega}$ .

Soit  $\omega$  un ouvert tel que  $\Omega \subset \bar{\omega} \subset Q$  ; soit  $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$ ,  $\phi \equiv 1$  sur  $\Omega$  on pose  $\psi = \phi \cdot \langle \lambda, x \rangle$ .

Soient  $W_\lambda^n$  solutions de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}^n \nabla W_\lambda^n) = -\operatorname{div}(A^0 \nabla \psi) & \text{dans } \omega \\ W_\lambda^n \in H_0^1(\omega). \end{cases}$$

Le théorème I.1 et la proposition II.1 nous permettent de dire que :

$$\begin{cases} A^n \nabla W_\lambda^n \rightarrow A^0 \nabla \tilde{W} & \text{dans } (L^2(\omega))^N \text{ faible} \\ W_\lambda^n \rightarrow \tilde{W} & \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible} \end{cases}$$

où  $\tilde{W}$  est solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla \tilde{W}) = -\operatorname{div}(A^0 \nabla \psi) & \text{dans } \omega \\ \tilde{W} \in H_0^1(\omega) \end{cases}$$

L'unicité nous permet de déduire que  $\tilde{W} = \psi$ . On déduit alors (i), (ii), (iii).

On définit alors des matrices  $P_\lambda^n \in (L^2(\Omega))^{N^2}$  par  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^N$ ,

$$P_\lambda^n = \nabla W_\lambda^n.$$

De ce qui précède on déduit immédiatement le théorème.

Théorème IV.1. Sous les hypothèses précédentes on a :

- i)  $P^n \longrightarrow I$  dans  $(L^2(\Omega))^{N^2}$  faible.  
 ii)  $A^n P^n \longrightarrow A^0$  dans  $(L^2(\Omega))^{N^2}$  faible.

On va donner une application de ces matrices de termes correcteurs.

Démontrons tout d'abord un lemme valable uniquement en dimension 2.

Lemme IV.1. Si  $(\psi_1^n, \psi_2^n) \longrightarrow (\psi_1, \psi_2)$  dans  $(H^1(\Omega))^2$  faible on a alors

$$\det(\nabla\psi_1^n, \nabla\psi_2^n) \longrightarrow \det(\nabla\psi_1, \nabla\psi_2)$$

dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Démonstration : Soit  $\Pi$  la rotation de  $\frac{\Pi}{2}$  on a l'égalité suivante

$$\det(\nabla\psi_1^n, \nabla\psi_2^n) = (\Pi\nabla\psi_1^n, \nabla\psi_2^n)$$

on a

$$\operatorname{div}[\Pi \cdot \nabla\psi_1^n] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ -\frac{\partial\psi_1^n}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial\psi_1^n}{\partial x_1} \right] = 0$$

On utilise alors le lemme I.1 pour passer à la limite.

Théorème IV.2. Soit une suite  $A^n \in M(\alpha, B, \Omega)$ ,  $A^n \xrightarrow{H} A^0$  si  $\det A^n = g^n$  vérifie  $g^n \longrightarrow g^0$  dans  $L^\infty(\Omega)$  fort, alors on a  $\det A^0 = g^0$ .

Remarque. Ce résultat est uniquement valable en dimension 2.

Démonstration : Soit  $P^n$  la matrice des termes correcteurs,  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  on a l'égalité :

$$\det(A^n P^n) = (\Pi A^n P^n e_1, A^n P^n e_2)$$

où  $\Pi$  désigne la rotation d'angle  $\frac{\Pi}{2}$ .

On sait d'après le théorème IV.1 que :

$$\operatorname{div}(A^n P^n e_2) \rightarrow \operatorname{div}(A^0 e_2) \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.}$$

$$\operatorname{rot}(\Pi A^n P^n e_1) = -\operatorname{div}[A^n P^n e_1] \rightarrow -\operatorname{div}[A^0 e_1] \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.}$$

D'après le lemme I.2 on peut écrire :  $\det(A^n P^n) \rightarrow (\Pi A^0 e_1, A^0 e_2) = \det A^0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

$$\text{D'autre part on a : } \det(A^n P^n) = g^n \cdot \det P^n$$

$$\det P^n = \det(\nabla W_1^n, \nabla W_2^n) \rightarrow \det(e_1, e_2) = 1 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

d'après le lemme IV.1.

Comme  $A^0 \lambda \in (L^\infty(\Omega))^N$ ,  $-\operatorname{div}(A^0 \lambda) \in W^{-1p}(\Omega)$  pour tout réel  $p$ .

D'après le théorème de Meyers, il existe un réel  $p_0$ ,  $p_0 > 2$ , tel que la suite  $W_\lambda^n$  soit bornée dans  $W^{1,p_0}(\Omega)$  : on déduit alors que  $\nabla W_i^n$  est borné dans  $L^{p_0}(\Omega)$ , soit  $\det P^n$  borné dans  $L^{p_0/2}(\Omega)$  ; on déduit alors que  $\det P_n \rightarrow 1$  dans  $L^{p_0/2}(\Omega)$  faible ; d'où on peut passer à la limite et on a alors  $\det A^0 = g^0$ .

#### V - Exemple de calcul.

Le but de ce paragraphe est de faire un calcul explicite de 'H limite'. On se propose d'étudier le cas des couches sur un problème plus général, celui de l'élasticité [9] et de retrouver ainsi les résultats sur les couches dans le cas elliptique [1].

On va tout d'abord démontrer un résultat de convergence.

Lemme V.1. Soit  $\Omega = ]a_1, b_1[ \times \omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , soient deux suites,  $\xi^n \in L^2(]a_1, b_1[, H^{-1}(\omega))$ ,  $v^n \in L^\infty(]a_1, b_1[)$  vérifiant :

$$\text{i) } \xi^n \longrightarrow \xi^0 \text{ dans } L^2(]a_1, b_1[, H^{-1}(\omega)) \text{ fort,}$$

$$\text{ii) } v^n \longrightarrow v^0 \text{ dans } L^\infty(]a_1, b_1[) \text{ faible,}$$

alors on a le résultat :  $\xi^n v^n \longrightarrow \xi^0 v^0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Démonstration : Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  on a :

$$\left| \int_{\Omega} [\xi^n v^n \phi - \xi^0 v^0 \phi] \right| \leq |\langle \xi^n - \xi^0, v^n \phi \rangle| + \left| \int_{\Omega} [v^n - v^0] \phi \xi^0 \right|$$

$\langle \cdot \rangle$  désigne le crochet de la dualité  $L^2(\cdot) a_1 b_1[\cdot, H^{-1}(\omega))$ ,  $L^2(\cdot) a_1 b_1[\cdot, H^1_0(\omega))$ .

On peut alors passer à la limite.

### A. MODELE EN COUCHE POUR UN PROBLEME D'ELASTICITE [9]

1. Rappel et Notation.  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) de frontière  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$  une partie de  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ .  $\text{mes } \Gamma_0 > 0$

$$f = (f_1 \dots f_N) \in (L^2(\Omega))^N,$$

$$g = (g_1 \dots g_N) \in (L^2(\Gamma_1))^N.$$

On désignera par :  $\| \cdot \|_{0\Omega}$  la norme usuelle de  $(L^2(\Omega))^N$ ,  $\| \cdot \|_{1\Omega}$  la norme usuelle de  $(H^1(\Omega))^N$ .  $U \in (H^1(\Omega))^N$  on pose :

$$\epsilon_{k\ell}(U) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k} \right]$$

On a l'inégalité de Korn :

$$\forall v \in (H^1(\Omega))^N, \quad \sum_{ij=1}^N \|\epsilon_{ij}(v)\|_{0\Omega}^2 + \|v\|_{0\Omega}^2 \geq c \|v\|_{1\Omega}^2.$$

Soient les fonctions  $a_{ijkl}^\epsilon \in \epsilon \left\{ \frac{1}{n} \right\}$   $n \in \mathbb{N}^*$   $1 \leq i, j, k, \ell \leq N$

vérifiant

i)  $a_{ijk}^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\max_{ijkl} \sup_{x \in \Omega} a_{ijkl}^\epsilon(x) \leq \beta$ , avec  $\beta > 0$ , sur presque tout  $\Omega$ .

ii)  $a_{ijkl}^\epsilon(x) = a_{ijkl}^\epsilon(x_1)$ , on a donc des matériaux disposés en couches.

iii)  $a_{ijkl}^\epsilon = a_{ijlk}^\epsilon$  ;  $a_{ijkl}^\epsilon = a_{jikl}^\epsilon$

iv)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\sum_{ijk} a_{ijkl}^\epsilon \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \alpha \sum_{ij=1}^N |\xi_{ij}|^2 \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}^{N \times N}$

avec  $\xi_{ij} = \xi_{ji}$  sur presque tout  $\Omega$ .

Soit  $R = \{v \in (H^1(\Omega))^N : \varepsilon_{ij}(v) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq 1\}$  on rappelle que

$$R = \{v / v_1(x) = a_1 + bx_2, v_2(x) = a_2 - bx_1\} \quad \text{si } N = 2$$

et

$$R = \{v / v(x) = \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x}\} \quad \text{si } N = 3, \text{ avec } a_1, b_1, b \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3.$$

## 2. Mise en équation du problème.

Soit le problème :

$$(I) \quad \begin{cases} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(U^\varepsilon) = f_i & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq N. \\ \text{avec la loi de comportement } \sigma_{ij}(U^\varepsilon) = \sum_{kl=1}^N a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(U^\varepsilon) \end{cases}$$

avec les conditions au bord suivantes :

$$(A) \quad U_1^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(U^\varepsilon) v_j = g_i \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad 1 \leq i \leq N$$

On va mettre sous forme variationnelle le problème (I) (A).

On pose  $V = \{v \in (H^1(\Omega))^N / v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ ,  $V$  sous-espace fermé de  $(H^1(\Omega))^N$ . De la caractérisation de  $R$  on tire que  $\sum_{ij=1}^N \|\varepsilon_{ij}(v)\|_{0\Omega}^2$  est une norme sur  $V$  qui est équivalente d'après l'inégalité de Korn à  $\|v\|_{1\Omega}$ .

Le problème (I) (A) est équivalent au problème variationnel,

$U^\varepsilon \in V$  solution de :

$$(II) \quad \forall v \in V \quad \sum_{ijkl=1}^N \int_{\Omega} a_{ijkl}^\varepsilon \varepsilon_{ij}(U^\varepsilon) \varepsilon_{kl}(v) = \sum_{i=1}^N \left( \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \right).$$

La condition (iv) nous permet d'écrire à partir de (II) :

$$\alpha \int_{\Omega} \sum_{U=1}^N \|\varepsilon_{ij}\|_{0\Omega}^2 \leq K \cdot \|v\|_V$$

$U^\varepsilon$  est donc borné dans  $V$ , d'où il existe une sous-suite  $U^\varepsilon$ ,  $U^\varepsilon \rightarrow U^0$  dans  $V$  faible. Notre problème est le suivant : que peut-on dire de ce  $U^0$  ?  
Vérifie-t-il une équation du type de celle vérifiée par  $U^\varepsilon$  ?

### 3. Recherche de la limite.

- Soit  $c_{ik}^\varepsilon$ ,  $1 \leq i, k \leq N$  la matrice inverse de  $a_{ilk}^\varepsilon$ , cette matrice existe d'après (iv) : on choisit  $\xi_{ij} = 0$  si  $i > 1$  et  $j > 1$  et on utilise les relations de symétrie (iii).

- La relation (i) nous permet d'extraire des sous-suites convergences dans  $L^\infty(\Omega)$  faible :

$$\begin{aligned} c_{ik}^\varepsilon &\longrightarrow c_{ik}^0 \\ c_{ik}^\varepsilon \cdot a_{ilk}^\varepsilon &\longrightarrow (c_{ik} \cdot a_{ilk})^0 \\ a_{ijkl}^\varepsilon &\longrightarrow (a_{ijkl})^0 \\ a_{ijkl}^\varepsilon c_{tk}^\varepsilon &\longrightarrow (a_{ijkl} \cdot c_{tk})^0 \\ a_{ijkl}^\varepsilon c_{tk}^\varepsilon \cdot a_{tlm}^\varepsilon &\longrightarrow (a_{ijkl} \cdot c_{tk} \cdot a_{tlm})^0 \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} A_{ijm}^0 &= (a_{ijm})^0 - \sum_{t,k} (a_{ijkl} \cdot c_{tk} \cdot a_{tlm})^0 \\ &\quad + \sum_{t,k,s,r} (a_{ijkl} c_{tk})^0 (c_{tr}^0)^{-1} (c_{sr} a_{slm})^0 \end{aligned}$$

Théorème V.1. Il existe une sous-suite  $(U^\varepsilon)$  solution de (I) (A) convergent dans  $(L^2(\Omega))^N$  fort solution du problème (I) (A) avec

$$a_{ijkl} = A_{ijkl}^0 \cdot$$

Démonstration :  $U^\varepsilon$  étant borné dans  $V$  on peut extraire une sous-suite convergent vers  $U^0$  dans  $(L^2(\Omega))^N$  fort.  $\forall i, 1 \leq i \leq N$  on peut écrire

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{il}^\varepsilon = f_i + \sum_{j \geq 2} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\varepsilon .$$

On suppose pour simplifier que  $\Omega = ]a_1, b_1[ \times \omega$ , de l'expression précédente on tire que  $\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{il}^\varepsilon$  est borné dans  $L^2(]a_1, b_1[, H^{-1}(\omega))$ .

En appliquant le théorème d'Aubin [avec  $A = L^2(\omega)$ ,  $B = C = H^{-1}(\omega)$  l'injection de  $L^2(\omega)$  dans  $H^{-1}(\omega)$  étant compacte]. On peut extraire,

$\forall i \in \{1, N\}$ , une sous suite telle que  $\sigma_{il}^\varepsilon \rightarrow \sigma_{il}^0$  dans  $L^2(]a_1, b_1[, H^{-1}(\omega))$  fort.

On a  $\sigma_{il}^\varepsilon = \sum_{k=1}^N a_{ilk}^\varepsilon \left( \frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_1} \right) + \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=2}^N a_{ilk\ell}^\varepsilon \frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_\ell}$ , soit en inversant :

$$\frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^N c_{ik}^\varepsilon \sigma_{il}^\varepsilon - \sum_{i, k'=1}^N \sum_{\ell=2}^N c_{ik}^\varepsilon a_{ilk'\ell}^\varepsilon \frac{\partial U_{k'}^\varepsilon}{\partial x_\ell}$$

soit encore,  $c_{ik}^\varepsilon a_{ilk'\ell}^\varepsilon$  ne dépendant que de  $x_1$  :

$$\frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^N c_{ik}^\varepsilon \sigma_{il}^\varepsilon - \sum_{i, k'=1}^N \sum_{\ell=2}^N \frac{\partial}{\partial x_\ell} [c_{ik}^\varepsilon a_{ilk'\ell}^\varepsilon U_{k'}^\varepsilon]$$

On peut passer à la limite en utilisant le lemme V.1 pour le second membre.

Soit :

$$\frac{\partial U_k^0}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^N c_{ik}^0 \sigma_{il}^0 - \sum_{i, k'=1}^N \sum_{\ell=2}^N (c_{ik}^0 a_{ilk'\ell}^0) \frac{\partial U_{k'}^0}{\partial x_\ell}$$

Soit :

$$\sigma_{il}^0 = \sum_{k=1}^N (c_{ik}^0)^{-1} \frac{\partial U_k^0}{\partial x_1} + \sum_{j, k'=1}^N \sum_{\ell=2}^N (c_{ik}^0)^{-1} (c_{jk}^0 a_{jlk'\ell}^0) \frac{\partial U_{k'}^0}{\partial x_\ell} \quad (1)$$

$(c_{ik}^0)^{-1}$  est la matrice inverse de  $c_{ik}^0$ .

Pour  $j \geq 2$ , on a ( $i=1 \dots N$ ) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^\varepsilon &= \sum_{\ell=2}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk\ell}^\varepsilon \frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_\ell} + \sum_{k=1}^N a_{ijk1}^\varepsilon \frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_1} \\ \sigma_{ij}^\varepsilon &= \sum_{\ell=2}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk\ell}^\varepsilon \frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_\ell} + \sum_{k=1}^N a_{ijk1}^\varepsilon \left[ \sum_{t=1}^N c_{tk}^\varepsilon \sigma_{t1}^\varepsilon - \sum_{tk'=1}^N \sum_{\ell=2}^N c_{tk}^\varepsilon a_{tk'\ell}^\varepsilon \frac{\partial U_{k'}^\varepsilon}{\partial x_\ell} \right] \\ \sigma_{ij}^\varepsilon &= \sum_{kt=1}^N (a_{ijk1}^\varepsilon c_{tk}^\varepsilon) (\sigma_{t1}^\varepsilon) + \sum_{\ell=2}^N \sum_{k=1}^N (a_{ijk\ell}^\varepsilon \frac{\partial U_k^\varepsilon}{\partial x_\ell} - \sum_{tm=1}^N (a_{ijk1}^\varepsilon c_{tk}^\varepsilon a_{t1m\ell}^\varepsilon) \frac{\partial U_m^\varepsilon}{\partial x_\ell}) \end{aligned}$$

$j \geq 2$ ,  $\sigma_{ij}^\varepsilon$  étant borné dans  $L^2(\Omega)$  on peut extraire une sous-suite convergent vers  $\sigma_{ij}^0$  dans  $L^2(\Omega)$  faible. Etant donné que  $a_{ijk\ell}^\varepsilon$  et  $a_{ijk1}^\varepsilon c_{tk}^\varepsilon$  ne dépendent que de  $x_1$  on peut passer à la limite en utilisant le lemme V.1 pour le ler membre :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= \sum_{kt=1}^N (a_{ijk1} c_{tk})^0 \sigma_{t1}^0 + \sum_{\ell=2}^N \sum_{k=1}^N (a_{ijk\ell})^0 \frac{\partial U_k^0}{\partial x_\ell} - \\ &\quad - \sum_{t,m=1}^N (a_{ijk1} c_{tk} a_{t1m\ell})^0 \frac{\partial U_m^0}{\partial x_\ell} \end{aligned}$$

Soit en utilisant (1) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= \sum_{kt=1}^N (a_{ijk1} c_{tk})^0 \sum_{rs\ell m=1}^N (c_{tr}^0)^{-1} (c_{sr} a_{stm\ell})^0 \frac{\partial U_m^0}{\partial x_\ell} + \\ &\quad + \sum_{\ell=2}^N \sum_{k=1}^N \left( (a_{ijk\ell})^0 \frac{\partial U_k^0}{\partial x_\ell} - \sum_{t,m=1}^N (a_{ijk1} c_{tk} a_{t1m\ell})^0 \frac{\partial U_m^0}{\partial x_\ell} \right) \end{aligned}$$

Soit :

$$\sigma_{ij}^0 = \sum_{m,l,t,k,s,r=1}^N (a_{ijml})^0 - (a_{ijkt} c_{tk} a_{tlml})^0 + (a_{ijkl} c_{tk})^0 \times (c_{tr}^0)^{-1} \times (c_{sr} a_{slml})^0 \times \frac{\partial U^0}{\partial x_l} ;$$

d'où la relation cherchée.

On va donner deux exemples.

Exemple V.1. : Cas d'un matériau isotrope en dimension 2.

On a alors  $a_{ijkl}^E = \mu^E (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda^E \delta_{ij} \delta_{kl}$

$$\lambda^E = \lambda^E(x_1) \quad \mu^E = \mu^E(x_1) \quad \lambda^E, \mu^E \in L^\infty(\Omega)$$

La condition (iii) est vérifiée.

(i)  $\Leftrightarrow \exists \beta > 0$  tel que :  $\lambda^E(x) < \beta$  ,  $\mu^E(x) < \beta$  presque partout sur  $\Omega$ .

On va traduire la condition (iv) de coercivité :

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} [\mu^E (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda^E \delta_{ij} \delta_{kl}] \xi_{ij} \xi_{kl} &= \sum_{ij} 2\mu^E (\xi_{ij})^2 + \sum_{ij} \lambda^E \xi_{ii} \xi_{jj} = \\ &= 2\mu^E \sum_{ij} \xi_{ij}^2 + \lambda^E (\sum_i \xi_{ii})^2 . \end{aligned}$$

On obtient la condition  $\lambda^E \geq 0$  et  $\mu^E > \frac{\alpha}{2}$  .

On va traiter directement cet exemple dans le cas  $N = 2$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda+2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial x_2} , \quad \sigma_{21} = \sigma_{11} = \mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \\ \sigma_{22} &= (\lambda+2\mu) \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x_1} . \end{aligned}$$

On a  $\sigma_{11} \rightarrow \tilde{\sigma}_{11}$  dans  $L^2(\]a_1b_1[, H^{-1}(\omega))$  fort

$\sigma_{12} \rightarrow \tilde{\sigma}_{12}$ ,  $\sigma_{22} \rightarrow \tilde{\sigma}_{22}$  dans  $L^2(\Omega)$  faible

$U \rightarrow \tilde{U}$  dans  $L^2(\Omega)$  fort.

Des équations précédentes on tire :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\lambda+2\mu} \sigma_{11} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{1}{\mu} \sigma_{21} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{(\lambda+2\mu)^2 - \lambda^2}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \sigma_{11}$$

On pose :

$$\frac{1}{\lambda+2\mu} \rightarrow \frac{1}{\tilde{\lambda}} \quad ; \quad \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \rightarrow \frac{1}{\tilde{k}} \quad ; \quad \frac{1}{\mu} \rightarrow \frac{1}{\tilde{\mu}} \quad ; \quad \frac{(\lambda+2\mu)^2 - \lambda^2}{\lambda+2\mu} \rightarrow \tilde{h}$$

On passe à la limite dans les équations précédentes :

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{k}} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial x_2} \qquad \sigma_{21} = \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial x_2} + \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{22} = \tilde{h} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\tilde{k}} \tilde{\sigma}_{11} \qquad \text{soit}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{k}} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial x_1} + \left( \tilde{h} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{k}^2} \right) \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial x_2} .$$

La matrice limite obtenue est alors

$$A^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & 0 & 0 & \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{k}} \\ 0 & \tilde{\mu} & \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu} & \tilde{\mu} & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{k}} & 0 & 0 & \tilde{h} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{k}^2} \end{pmatrix}$$

Si on a par exemple  $\lambda^n(x) = \lambda(x + \frac{T}{n})$ ,  $\mu^n(x) = \mu(x + \frac{T}{n})$

$$\lambda^n(x) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } x \in [0, \frac{T}{2n}[ \\ \lambda_2 & \text{si } x \in [\frac{T}{2n}, \frac{T}{n}] \end{cases} \quad \mu^n(x) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } x \in [0, \frac{T}{2n}[ \\ \mu_2 & \text{si } x \in [\frac{T}{2n}, \frac{T}{n}] \end{cases}$$

On a

$$\tilde{\lambda} = \frac{2[\lambda_1 + 2\mu_1][\lambda_2 + 2\mu_1]}{\lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_2 + 2\mu_2} \quad \tilde{\mu} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$\tilde{k} = \frac{2[\lambda_1 + 2\mu_1][\lambda_2 + 2\mu_2]}{\lambda_1[\lambda_2 + 2\mu_2] + \lambda_2[\lambda_1 + 2\mu_1]}$$

Exemple V.2. Cet exemple traite le problème des couches dans le cas elliptique.

$$\begin{cases} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_j(U^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ U^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec  $\xi_j(U^\varepsilon) = a_{j1} \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_1} + \sum_{k \geq 2} a_{jk}^\varepsilon \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial x_k} \quad j \in \{1, N\}$ .

On fait le même raisonnement que précédemment on pose :

$$s = \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \quad ; \quad \lim \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} = \frac{1}{a_{11}^0} = s^0.$$

Le tenseur défini au théorème VI.1 s'écrit alors :

$$A_{ij}^0 = (a_{ij})^0 - (a_{i1} \cdot s \cdot a_{1j})^0 + (a_{i1} \cdot s)^0 \cdot (s^0)^{-1} \cdot (s \cdot a_{1j})^0.$$

Soit :

$$- A_{11}^0 = (a_{11})^0 - \lim(a_{11}^\varepsilon \cdot \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \cdot a_{11}^\varepsilon) + \lim(a_{11}^\varepsilon \cdot \frac{1}{a_{11}^\varepsilon}) \cdot a_{11}^0 \cdot \lim(a_{11}^\varepsilon \cdot \frac{1}{a_{11}^\varepsilon})$$

$$A_{11}^0 = a_{11}^0$$

$$- j > 1 : A_{1j}^0 = (a_{1j})^0 - \lim(a_{11}^\varepsilon \cdot \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \cdot a_{1j}^\varepsilon) + \lim(a_{11}^\varepsilon \cdot \frac{1}{a_{11}^\varepsilon}) \times a_{11}^0 \times \lim(a_{1j}^\varepsilon \cdot \frac{1}{a_{11}^\varepsilon})$$

$$A_{1j}^0 = a_{11}^0 \times \lim(\frac{a_{1j}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon}).$$

De même pour  $i > 1$ , on a :  $A_{i1}^0 = a_{11}^0 \times \lim(\frac{a_{i1}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon})$

$$- i > 1, j > 1$$

$$A_{ij}^0 = (a_{ij})^0 - \lim(a_{i1}^\varepsilon \cdot \frac{1}{a_{11}^\varepsilon} \cdot a_{1j}^\varepsilon) + \lim(\frac{a_{i1}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon}) \cdot a_{11}^0 \cdot \lim(\frac{a_{1j}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon})$$

$$A_{ij}^0 = (a_{ij})^0 - \lim(\frac{a_{i1}^\varepsilon \cdot a_{1j}^\varepsilon}{a_{11}^\varepsilon}) + \frac{A_{1j}^0 \cdot A_{i1}^0}{a_{11}^0}$$

On retrouve bien les formules connues [cf. Murat (1)].

### B. ACTION D'UN CHANGEMENT DE VARIABLE

On se propose d'étudier l'action d'un changement de variable dans la H-convergence et de donner deux exemples d'application de ce résultat.

Si  $T$  désigne un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  envoie  $Q$  dans  $\Omega$ .

On a alors le résultat suivant :

Théorème V.2. Si  $A^n \xrightarrow{H} A^0$  alors

$$|\det T'| \cdot T'^{-1} \cdot A^n [T(x)]^t T'^{-1} \xrightarrow{H} |\det T'| \cdot T'^{-1} \cdot A^0 [T(x)] \cdot {}^t T'^{-1}.$$

Démonstration : Soit  $U$  la solution de :

$$\int_{\Omega} (A \nabla U, \nabla W) = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

soit en effectuant un changement de variable :

$$\int_{\Omega} [A(T(x)) \cdot (\nabla U)(T(x)), (\nabla v)(T(x))] |\det T'| = \int_{\Omega} f[T(x)] \cdot v[T(x)] |\det T'|$$

on a :  $\nabla(U(T(x))) = {}^t T' (\nabla U)(T(x))$  d'où le 1er membre s'écrit :

$$\int_{\Omega} [A(T(x)) \cdot {}^t T'^{-1} \cdot \nabla(U(T(x))), {}^t T'^{-1} \cdot \nabla(v(T(x)))] |\det T'|$$

On pose  $B = |\det T'| \cdot T'^{-1} \cdot A[T(x)] \cdot {}^t T'^{-1}$  d'où on déduit que

$U \circ T$  est solution du problème :

$$\begin{cases} - \operatorname{div}(B \cdot \nabla(U \circ T)) = f \circ T \cdot |\det T'| & \text{dans } Q \\ U \circ T \in H_0^1(Q) . \end{cases}$$

Si  $A^n \xrightarrow{H} A^0$  on a  $U^n \rightarrow U^0$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible d'où on déduit :  
 $U^n \circ T \rightarrow U^0 \circ T$  dans  $H_0^1(Q)$  faible. D'autre part on a  $B^n \xrightarrow{H} \tilde{B}$  et d'après  
 l'unicité de  $H$  limite on déduit que sur presque tout  $Q$  on a

$$\tilde{B} = |\det T'| \cdot T'^{-1} \cdot A^0[T(x)] \cdot {}^t T'^{-1}$$

c'est-à-dire on a

$$T'^{-1} \cdot A^n[T(x)] \cdot {}^t T'^{-1} \nabla(U^n \circ T)(x) \rightarrow T'^{-1} \cdot A^0[T(x)] \cdot {}^t T'^{-1} \nabla(U^0 \circ T)(x)$$

dans  $L^2(Q)^N$  faible où  $U^0$  est solution de :

$$\begin{cases} - \operatorname{div}(A^0(y) \nabla U^0(y)) = f \\ U^0 \in H_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

Remarque V.1. Si  $T$  désigne une transformation orthogonale on a alors

$$T' = T, \quad T'^{-1} = {}^t T, \quad |\det T'| = +1 \quad \text{et on a alors}$$

$${}^t T \cdot A^n[T(x)] \cdot T \xrightarrow{H} {}^t T \cdot A^0[T(x)] \cdot T$$

Exemple V.3. Application au système de couches dans une direction.

On se place dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  une base orthonormée,  $\vec{\xi}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{\xi} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , on étudie le cas où la fonction  $a^n(x)$  est de la forme :  $a^n(x) = a^n((x, \xi)) = a^n(\cos \theta x_1 + \sin \theta x_2)$  avec  $a^n(x) \in \{\alpha, \beta\}$ .

Soit  $T$  la rotation d'angle  $-\theta$  ; on a les nouvelles coordonnées

$$X_1 = \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2, \quad X_2 = -\sin \theta x_1 + \cos \theta x_2. \quad \text{On sait [cf. Exemple V.2]}$$

$$\text{que : } a^n(X_1) \cdot I \xrightarrow{H} A^0(X_1) \quad \text{où}$$

$$A^0(X_1) = \begin{pmatrix} \tilde{b}(X_1) & 0 \\ 0 & \tilde{a}(X_1) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \tilde{a}(X_1) = \lim a^n(X_1) \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \quad \text{faible}$$

$$\frac{1}{\tilde{b}(X_1)} = \lim \frac{1}{a^n(X_1)} \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \quad \text{faible}.$$

Du théorème V.2 il résulte :

$${}^t T \cdot a^n[(\xi, x)] \cdot I \cdot T \xrightarrow{H} A^0(X_1)$$

$$\text{soit } a^n[(\xi, x)] \cdot I \xrightarrow{H} T \cdot A^0[(\xi, x)] \cdot {}^t T = B^0, \quad \text{avec}$$

$$B^0 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \tilde{b}(X_1) + \sin^2 \theta \tilde{a}(X_1) & \cos \theta \sin \theta [\tilde{b}(X_1) - \tilde{a}(X_1)] \\ \cos \theta \sin \theta (\tilde{b}(X_1) - \tilde{a}(X_1)) & \sin^2 \theta \tilde{b}(X_1) + \cos^2 \theta \tilde{a}(X_1) \end{pmatrix}$$

On remarquera que la matrice limite est bien symétrique et appartient

à  $M(\alpha, B, \Omega)$ .

Exemple V.4. Cas des coordonnées polaires.

Soit  $\Omega$  une partie de disque délimité par ces coordonnées polaires,  
 $r_1 < r < r_2$  et  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ .

Soit  $T$  la transformation :  $Q = ]r_1, r_2[ \times ]\theta_1, \theta_2[ \xrightarrow{T} \Omega$ ,

$x = r \cos \theta$  ;  $y = r \sin \theta$ .

On a :

$$T' = \begin{pmatrix} \cos \theta, & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \det T' = r$$

On se propose d'étudier le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a^n(r) \cdot I \cdot \nabla U^n] = f \\ U^n \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \text{avec } a^n(r) \in \{\alpha, \beta\}$$

On a :

$$T'^{-1} \cdot a^n(r) I \cdot t_{T'}^{-1} = \begin{pmatrix} a^n(r) & 0 \\ 0 & \frac{a^n(r)}{r^2} \end{pmatrix}$$

$U^n(r, \theta)$  est alors solution de :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r} \left[ r a^n(r) \frac{\partial U^n}{\partial r} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{a^n(r)}{r} \cdot \frac{\partial U^n}{\partial \theta} \right] = f \cdot r \\ U^n \in H_0^1(Q) \end{cases}$$

On pose :  $\xi_r^n = r a^n(r) \frac{\partial U^n}{\partial r}$  ;  $\xi_\theta^n = \frac{a^n(r)}{r} \frac{\partial U^n}{\partial \theta}$ . Ces deux suites sont bornées dans  $L^2(Q)$  et vérifient :

$$-\frac{\partial}{\partial r} \xi_r^n = fr + \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_\theta^n$$

d'où on tire que  $\frac{\partial}{\partial r} \xi_r^n$  est borné dans  $L^2(\]r_1 r_2[, H^{-1})_{\theta_1 \theta_2}$ , d'où on peut extraire des sous suites convergentes :

$$\begin{aligned} \xi_r &\longrightarrow \xi_r^0 \text{ dans } L^2(\]r_1 r_2[, H^{-1})_{\theta_1 \theta_2} \text{ fort [cf. Théorème d'Aubin]} \\ \xi_\theta^n &\longrightarrow \xi_\theta^0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible} \\ U^n &\longrightarrow U^0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort} \\ a^n &\longrightarrow \tilde{a} \text{ dans } L^\infty]r_1 r_2[ \text{ faible.} \end{aligned}$$

D'où on peut passer à la limite d'après le lemme V.1

$$\xi_\theta^0 = \frac{\tilde{a}}{r} \frac{\partial U^0}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\lim a^n(r)} \xi_r^0 = \frac{\partial U^0}{\partial r}$$

soit

$$\xi_r^0 = r \tilde{b} \frac{\partial U^0}{\partial r} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tilde{b}} = \lim \frac{1}{a^n(r)} \quad \text{et} \quad \tilde{a} = \lim a^n(r)$$

$U^0(r, \theta)$  est alors solution de :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r} \left[ r \tilde{b} \frac{\partial U^0}{\partial r} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\tilde{a}}{r} \frac{\partial U^0}{\partial \theta} \right] = fr \\ U^0 \in H_0^1(Q) \end{cases}$$

On a montré que :  $|\det T'| \cdot T'^{-1} a^n(r) T \cdot t_{T'}^{-1} \xrightarrow{H} B$  avec

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{r}\tilde{b} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{a}}{r} \end{pmatrix}$$

VI - Matrices admissibles.

Le but de ce chapitre est de déterminer la H fermeture d'ensembles de matrices  $U$  et  $U_0$ , correspondant à des matériaux isotropes, où l'on a :  $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$   $(\Omega_1$  ouvert,  $\Omega_1 \subset \Omega)$ .

$$U_0 = \{a \in L(\Omega) / a(x) = \alpha \text{ sur } \Omega_1, a(x) = \beta \text{ sur } \Omega - \Omega_1\}$$

$$U = \{a \in L^\infty(\Omega) / \alpha \leq a(x) \leq \beta\}$$

On note  $K$  et  $K_0$  la H fermeture de  $U$  et  $U_0$

$$K_0 = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2} / \exists a^n \in U_0, a^n I \xrightarrow{H} A\}$$

$$K = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2} / \exists a^n \in U, a^n I \xrightarrow{H} A\}$$

On définit les ensembles  $K_1$  et  $K'$  :

$$K' = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2}$$

symétriques dont les valeurs propres  $\lambda_1(x) \dots \lambda_N(x)$  indexées par ordre croissant vérifient :

$$\alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \lambda_N(x)} \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \dots \leq \lambda_N(x) \leq \beta$$

presque partout dans  $\Omega$

De la même façon on définit  $K_1 = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2}$  symétriques dont les valeurs propres  $\lambda_1(x) \dots \lambda_N(x)$  indexées par ordre croissant vérifient :

$$\alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \lambda_N(x)} \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) = \dots \lambda_N(x) \leq \beta$$

presque partout dans  $\Omega$ .

On se propose de montrer que  $K_0 = K = K'$  c'est-à-dire caractériser explicitement l'ensemble de matrice  $K_0 = K$  au moyen de leurs valeurs propres.

Enonçons tout d'abord un lemme qui est une reformulation des résultats du paragraphe I.

Lemme VI.1.  $K$  (resp.  $K_0$ ) est fermé et compact dans  $M(\alpha, \beta, \Omega)$  pour la topologie de H convergence.

1. Matériaux isotropes.

Rappel sur l'homogénéisation.

- Soit  $Y = \prod_{i=1}^N ]0, p_i[$  le parallélogramme des périodes ; une fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^M$  est dite "Y périodique" si elle admet comme période,  $p_i$ , dans la direction  $Y_i \quad \forall i \in \{1, N\}$ .

- Soit  $a \in U_0$  et Y périodique, on sait alors [cf. A. Benoussan (2)] que  $a(\frac{x}{\varepsilon})I \xrightarrow{H} A^0$  où  $A^0 = (q_{ij})$  avec  $A^0$  matrice constante et symétrique. D'autre part  $q_{ij}$  est donné par :

$$q_{ij} = \frac{1}{\text{mes } Y} \left[ \int_Y a(y) dy - \int_Y a(y) \frac{\partial U_a^j}{\partial y_i} dy \right]$$

où  $U_a^j$  est solution du système :

$$(1) \quad \begin{cases} - \text{div}[a(y) \cdot I \nabla U_a^j] = - \frac{\partial}{\partial y_j} a(y) \\ U_a^j \in W(Y) \end{cases}$$

$$W(Y) = \{v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N), v(x+p_i) = v(x) \text{ et } \int_Y v dy = 0\}$$

W est un espace de Hilbert muni de la norme,  $v \in W, \quad \|v\|_W = \|\nabla v\|_{L^2(Y)}$ .

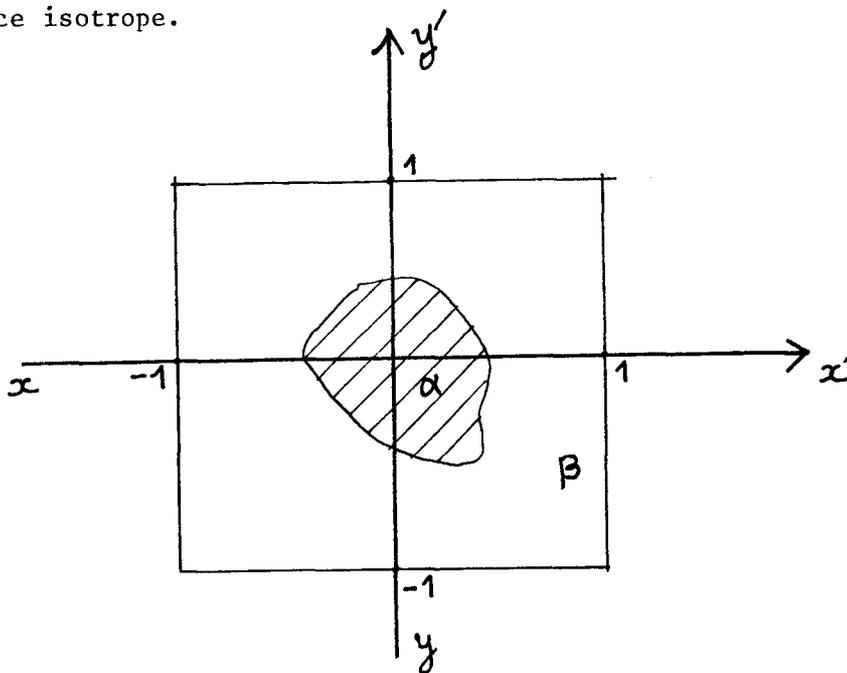
D'après l'alternative de Fredholm il existe une solution de (1).

On remarquera qu'en général  $A^0$  n'est pas isotrope ni même diagonale.

Homogénéisation avec des cellules ayant des propriétés de symétrie.

On suppose désormais jusqu'à la fin de ce paragraphe que l'on travaille dans  $\mathbb{R}^2$ .

On opère localement : soit  $Y = ]-1 + 1[ ]^2$  une cellule de base ; on se donne une base de directions  $(x, x'), (y, y')$  plan médian de  $Y$  et on cherche les symétries que doit posséder  $a(x)$  sur  $(Y, xx', yy')$  pour que  $A^0$  soit une matrice isotrope.



On pose :  $A^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot I$ . On sait d'après la remarque V.1 que si  $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A^0$ , et si  $A^\varepsilon$  vérifie pour une transformation orthogonale  $\Pi$ ,  ${}^t \Pi \cdot A^\varepsilon[\Pi(x)] \cdot \Pi = A^\varepsilon$ , ce qui est vérifié ici puisque  $A^\varepsilon$  est isotrope, on a d'après l'unicité de la  $H$  limite  ${}^t \Pi \cdot A^0[\Pi(x)] \cdot \Pi = A^0$ .

$A^0$  étant constante on cherche l'ensemble des transformations orthogonales telles que  ${}^t \Pi \cdot A^0 \cdot \Pi = A^0$ .

On remarquera que ces transformations forment un groupe et que la symétrie par rapport à l'origine  $y$  appartient.

On pose :  $A^0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ;  $\Pi_1 =$  symétrie par rapport à  $xx'$

$\Pi_2 =$  symétrie par rapport à  $yy'$ ,  $\Pi_3 =$  symétrie par rapport à la ligne bissectrice.

On obtient :

$${}^t_{\Pi_1} \cdot A^0 \cdot \Pi_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad (\alpha)$$

$${}^t_{\Pi_2} \cdot A^0 \cdot \Pi_2 = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (\beta)$$

$${}^t_{\Pi_3} \cdot A^0 \cdot \Pi_3 = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \quad (\gamma)$$

Donc :

- $(\alpha)$  et  $(\beta)$  nous donnent le même renseignement : si la cellule possède une symétrie par rapport à un hyperplan médian  $A^0$  est diagonale. En fait si l'on a une symétrie par rapport à un hyperplan on a également une symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal.
- $(\gamma)$  Si on suppose de plus que la cellule possède une symétrie par rapport à la ligne bissectrice  $A^0$  est alors isotrope.

Théorème VI.1.  $K_0$  contient toutes les matrices  $a_0 I$  isotropes où  $a_0(x) \in [\alpha, \beta]$  presque partout sur  $\Omega$ .

Démonstration :

1. Cas où  $a_0$  est constant.

Soit  $Y$  la cellule de base définie précédemment on pose alors

$$\begin{cases} a_\theta(y) = \alpha & \text{si } y \in ]-\theta \theta[ \times ]-\theta \theta[, \theta \in [0, 1] \\ a_\theta(y) = \beta & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On définit l'application  $H$  de  $[0, 1]$  dans  $[\alpha, \beta]$ ,  $H(\theta) = q_\theta$  où  $q_\theta$  est le coefficient de  $A^0$ , matrice isotrope obtenue après homogénéisation

avec la cellule définie par  $a_\theta$ . On a :  $H(1) = \alpha$ ,  $H(0) = \beta$ .

Montrons que  $H$  est continue.

$$H(\theta) = \frac{1}{\text{mes } Y} \left[ \int_Y a_\theta(y) dy - \int_Y a_\theta(y) \frac{\partial U_\theta^j}{\partial y_i} dy \right]$$

Soit une suite  $\theta^n$  convergent vers  $\theta^0$  dans  $[0, 1]$ , il est trivial que  $a_{\theta^n} \rightarrow a_{\theta^0}$  dans  $L^2(Y)$  fort d'où dans  $L^1(Y)$ .

Examinons la convergence du 2ème terme.

$$\begin{aligned} \left| \int_Y a_{\theta^n} \frac{\partial U_{\theta^n}^j}{\partial y_i} dy - \int_Y a_{\theta^0} \frac{\partial U_{\theta^0}^j}{\partial y_i} dy \right| &\leq \left| \int_Y (a_{\theta^n} - a_{\theta^0}) \frac{\partial U_{\theta^n}^j}{\partial y_i} dy \right| + \\ &+ \left| \int_Y a_{\theta^0} \left( \frac{\partial U_{\theta^n}^j}{\partial y_i} - \frac{\partial U_{\theta^0}^j}{\partial y_i} \right) dy \right| \end{aligned}$$

On a  $U_{\theta^n}^j$  solution de :

$$\begin{cases} - \operatorname{div} [a_{\theta^n} \cdot I \nabla U_{\theta^n}^j] = - \frac{\partial}{\partial y_j} a_{\theta^n}(y) \\ U_{\theta^n}^j \in W(Y) \end{cases} \quad (2)$$

On a  $U_{\theta^0}^j$  solution de :

$$\begin{cases} - \operatorname{div} [a_{\theta^0} \cdot I \nabla U_{\theta^0}^j] = - \frac{\partial}{\partial y_j} a_{\theta^0}(y) \\ U_{\theta^0}^j \in W(Y) \end{cases} \quad (3)$$

de (2) on tire

$$\alpha \| U_{\theta^n}^j \|_W \leq \left\| \frac{\partial}{\partial y_j} a_{\theta^n} \right\|_{W'} \leq K,$$

d'où il existe une sous suite  $U_n^j$  convergeant vers  $\tilde{U}^j$  dans  $W$  faible. En passant à la limite dans (2) on obtient (unicité de la solution de (3))

$\tilde{U}^j = U_0^j$ . On peut alors conclure en utilisant l'inégalité de Schwartz pour le 1er terme et la convergence faible de

$$\frac{\partial U_n^j}{\partial y_i} \text{ vers } \frac{\partial U_0^j}{\partial y_i} \text{ dans } L^2(Y)$$

pour le 2ème terme.

2ème cas :  $a_0$  non constant.

On a  $\forall x \in \Omega$ ,  $\alpha \leq a_0(x) \leq \beta$  ; on fait alors une partition de  $\Omega$  en pavés  $\omega_i^n$  de coté  $\frac{1}{n}$  : on définit alors  $b^n$  par

$$\forall x \in \omega_i^n, \quad b^n(x) = b_i^n = \frac{1}{\text{mes } \omega_i^n} \int_{\omega_i^n} a_0(x) dx \in [\alpha, \beta]$$

$b^n$  est une fonction constante sur chaque pavé ; d'après ce qui précède on peut homogénéiser sur chaque pavé, puis on utilise la proposition II.2, donc  $\forall n \quad b^n \in K_0$  ; or  $b^n$  converge fortement dans  $L^q(\Omega) \quad \forall q, \quad q < +\infty$  vers  $a_0$ , d'où d'après la proposition I.2  $b^n \xrightarrow{H} a_0$ .

On conclut en utilisant le lemme VI.1 que  $a_0 \in K_0$ .

Théorème VI.2. On a l'égalité  $K = K_0$ .

Démonstration : Il suffit de montrer que  $K \subset K_0$ .

• Pour  $N = 1$ , ceci est évident :  $a^n \in U$ ,  $a^n \xrightarrow{H} a^0$  est équivalent à :  $\frac{1}{a^n} \longrightarrow \frac{1}{a^0}$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible et on a d'après le théorème de Lyapounov :

$$L^\infty(\Omega, [\alpha, \beta]) = \text{fermeture faible dans } L^\infty(\Omega) \text{ de } L^\infty(\Omega, \{\alpha, \beta\}).$$

• Pour  $N \geq 2$  :  $A \in K$  est équivalent à :  $\exists a^n \in U$  tel que  $a^n I \xrightarrow{H} A$  ; d'après le théorème VI.1,  $\forall n$ ,  $\exists a_m^n \in U_0$  tel que  $a_m^n \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{H} a^n I$ . On peut conclure grâce au lemme VI.1.

2. Caractérisation des matrices admissibles.

On sait résoudre ce problème uniquement pour  $N = 2$ .

On va démontrer le résultat fondamental de ce paragraphe.

Théorème VI.3. [3]. On a l'égalité  $K = K'$ .

Démonstration :

1. Montrons que  $K \subset K'$  (cette inclusion est vraie  $\forall N$ ). Soit  $A \in K$ ,  $\exists a^n \in U$  tel que  $a^n I \xrightarrow{H} A$ . On a  $a^n$  et  $\frac{1}{a^n}$  borné dans  $L^\infty(\Omega)$ , d'où il existe une sous suite telle que  $a^n \rightarrow \tilde{a}$  et  $\frac{1}{a^n} \rightarrow \frac{1}{\tilde{b}}$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible.

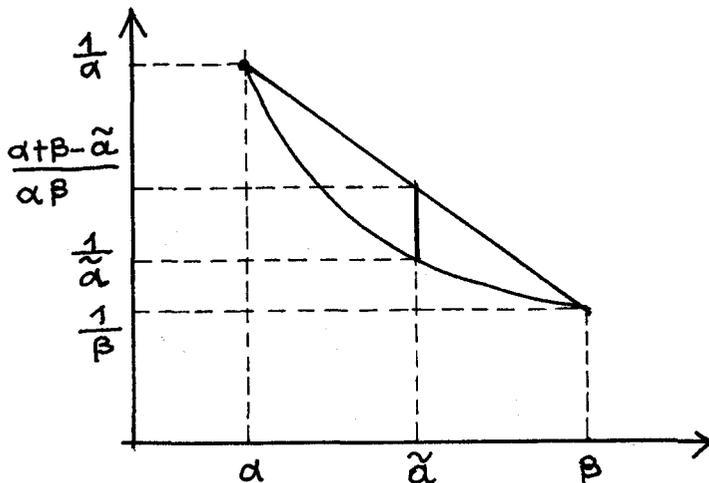
On sait que l'on a d'après le théorème III.1.  $\tilde{b} \cdot I \leq A \leq \tilde{a} \cdot I$ . Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_N$  désignent la plus petite et la plus grande valeur propre de  $A$  on a donc presque partout sur  $\Omega$

$$\tilde{b} \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_N(x) \leq \tilde{a}$$

On sait d'autre part d'après le théorème I.1 que presque partout sur  $\Omega$  on a :

$$\alpha \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_N(x) \leq \beta$$

D'après le théorème de Lyapounov  $\{\tilde{a}, \frac{1}{\tilde{b}}\}$  appartient à l'enveloppe convexe de  $\{(t, \frac{1}{t}), \alpha \leq t \leq \beta\}$  d'où on tire  $\frac{\alpha + \beta - \tilde{a}}{\alpha\beta} \geq \frac{1}{\tilde{b}} \geq \frac{1}{\tilde{a}}$  soit pour les valeurs propres  $\alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \lambda(x)} \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_N(x) \leq \beta$  presque partout sur  $\Omega$ .



2. On a  $K' \subset K$  (ici  $N = 2$ ). Dans tout ce qui suit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  désigneront respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre d'une matrice  $A \in K'$ .

Etude du cas où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux valeurs propres constantes avec des vecteurs propres constants  $V_1, V_2$  orthogonaux normalisés.

1<sup>ier</sup> cas :  $\lambda_1, \lambda_2$  vérifient :  $\lambda_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2}$ , on sait alors que si  $x$  et  $y$  désignent les coordonnées dans la base  $V_1, V_2$  il existe une suite  $a^n(x)$ ,  $a^n \in U_0$ , telle que l'on ait

$$a^n(x) \text{ I } \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

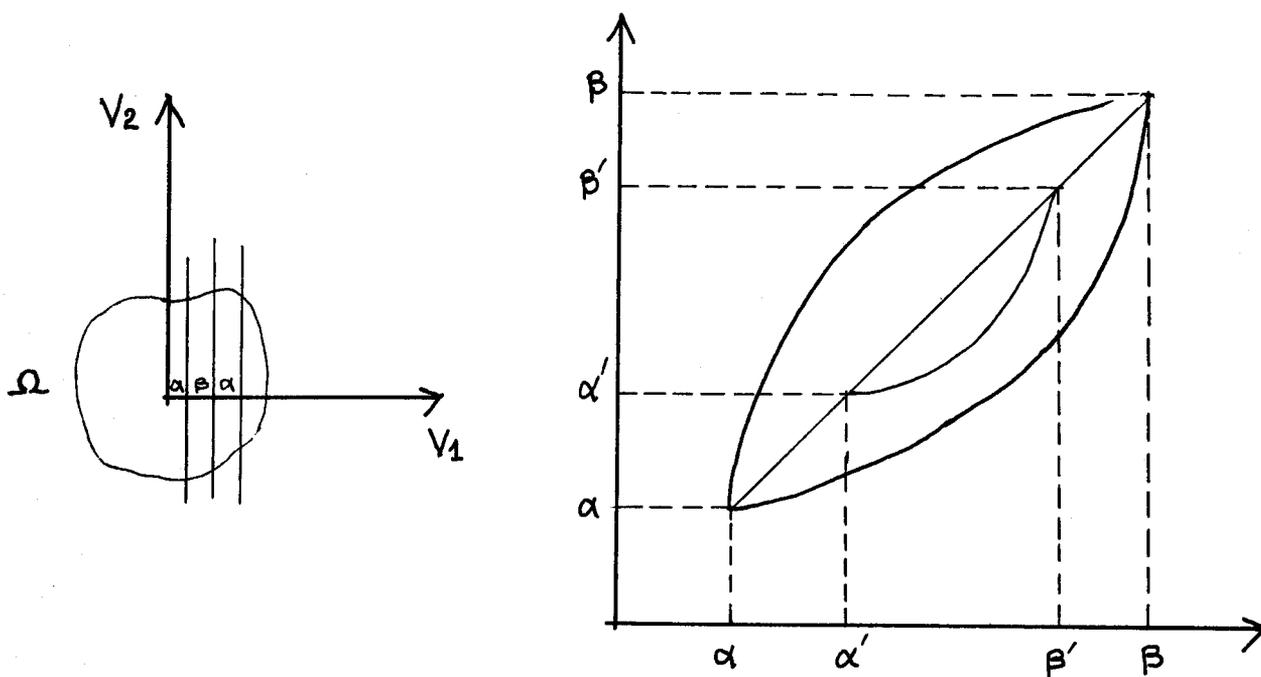
$\lambda_2$  peut alors s'écrire sous la forme  $\lambda_2 = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$  avec  $0 \leq \theta \leq 1$ , et lorsque  $\theta$  parcourt  $[0,1]$ ,  $\lambda_1$  parcourt la courbe  $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2}$ .

Pour travailler dans la base d'origine il suffit de faire une rotation [cf. Exemple V.3].

2<sup>ème</sup> cas :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  vérifient l'inégalité  $\alpha < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2} < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta$  il existe alors  $\alpha'$  et  $\beta'$ ,  $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$  tel que l'on ait

$$\alpha' \leq \frac{\alpha'\beta'}{\alpha'+\beta'-\lambda_2} = \lambda_1 < \lambda_2 < \beta' ,$$

on est alors ramené au 1<sup>er</sup> cas en prenant des couches de matériaux  $\alpha'$  et  $\beta'$  que l'on sait obtenir par le théorème VI.1.



Etude du cas général.

On suppose  $\Omega$  divisé en pavés disjoints  $\omega_n^i$  de côtés  $\frac{1}{n}$ . Pour chaque  $n$  on définit une matrice  $B^n$  par

$$B^n(x) = (b_i^n)(x) = \frac{1}{\text{mes } \omega_n^i} \int_{\omega_n^i} A(x) dx, \quad \text{sur } \omega_n^i.$$

$B_i^n$  est donc une matrice constante sur chaque pavé.

Montrons que  $B^n \in K'$ , il suffit de montrer que  $B_i^n$  y appartient.

Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les valeurs propres de  $B_i^n$ ,  $\mu_1 \leq \mu_2$ ; on a,

$\alpha I \leq A \leq \beta I$  d'où en intégrant sur  $\omega_n^i$  on tire :  $\alpha \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \beta$ .

On montrera ci-dessous :

$$\begin{cases} \mu_1 \geq \frac{1}{\text{mes } \omega_n^i} \int_{\omega_n^i} \lambda_1(x) dx & (1) \\ \mu_2 \leq \frac{1}{\text{mes } \omega_n^i} \int_{\omega_n^i} \lambda_2(x) dx & (2) \end{cases}$$

On a alors :

$$\mu_1 \geq \frac{1}{\text{mes } \omega_n^i} \int_{\omega_n^i} \lambda_1(x) dx \geq \frac{1}{\text{mes } \omega_n^i} \int_{\omega} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2(x)} dx$$

La fonction :  $[\alpha, \beta] \xrightarrow{G} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-t}$  étant convexe l'inégalité de Jensen nous permet d'écrire

$$\mu_1 \geq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta - \frac{1}{\text{mes } \omega_i^n} \int_{\omega_i^n} \lambda_2(x) dx} \geq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\mu_2}$$

(d'après la croissance de G).

Démonstration de (1) et (2) : Soit  $W \in \mathbb{R}^2$  fixé. On a d'après la caractérisation de la plus petite valeur propre

$$\lambda_1(x) = \inf_{W(x)} \frac{(A(x)W(x), W(x))}{|W(x)|^2} \leq \frac{(A(x)W, W)}{|W|^2}$$

d'où en intégrant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{mes } \omega_i^n} \int_{\omega_i^n} \lambda_1(x) dx &\leq \frac{1}{\text{mes } \omega_i^n} \int_{\omega_i^n} \frac{(A(x)W, W)}{|W|^2} = \\ &= \left( \frac{1}{\text{mes } \omega_i^n} \int_{\omega_i^n} (A(x)W, W) \right) \frac{1}{|W|^2} = \frac{1}{|W|^2} (BW, W) \end{aligned}$$

d'où en passant à l'inf on trouve

$$\frac{1}{\text{mes } \omega_i^n} \int_{\omega_i^n} \lambda_1(x) dx \leq \mu_1.$$

On démontre de même (2).

n étant fixé  $\mu_1^{\text{in}}, \mu_2^{\text{in}}, V_1^{\text{in}}, V_2^{\text{in}}$  désignant les valeurs propres et les vecteurs propres de  $B_i^n$  on sait qu'il existe [cf. ce qui précède] une suite  $a_{\text{in}}^\varepsilon$  telle que  $a_{\text{in}}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{H} B_i^n$  dans  $\omega_{\text{in}}^n$   $a_{\text{in}}^\varepsilon$  ne dépendant que de la direction  $V_1^{\text{in}}$ . On rapporte toutes ces fonctions dans une base puis on conclut en utilisant la proposition II.2. On a donc montré que  $\forall n, B^n \in K$ .

On conclut de la même façon qu'au théorème VI.1.

C H A P I T R E II

PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL

On a vu dans l'introduction à partir de quelles données se fait la théorie du contrôle optimal, dans le cas étudié, ici on a :

- (1)  $U_{ad} = K$  (ensemble des matrices admissibles)
- (2) l'état  $U_A$  : 
$$\begin{cases} -\text{div}(AVU_A) = f, \\ U_A \in H^1_0(\Omega). \end{cases} \quad f \in L^2(\Omega)$$
- (3)  $Z_A = U_A$
- (4) On choisira différentes fonctions coûts :  $J(A) = \|U_A - Z_d\|_{H^1(\Omega)}$  ;

$$J(A) = \|U_A - Z_d\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{où } Z_d \in L^\infty(\Omega).$$

Dans le paragraphe II, on étudiera également le cas où l'espace des observations est  $L^2(\Gamma)$  avec  $J(A) = \left\| \frac{\partial U_A}{\partial V_A} - Z_d \right\|_{L^2(\Gamma)}$ ,  $Z_d \in L^2(\Gamma)$ .

[Dans le cas où  $\frac{\partial U_A}{\partial V_A}$  n'est pas défini on posera

$$J(A) = \left\| \frac{\partial U_A}{\partial V_A} - Z_d \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad ] .$$

Enfin dans le paragraphe III, on étudiera un exemple de contrôle sur un problème de valeurs propres.

Notre objectif est :

- (i) obtention de théorèmes d'existence pour avoir un (ou des optimum)
- (ii) obtention de conditions nécessaires pour avoir un (ou des optimum)

Référence

- Paragraphe I      L. Tartar [6], F. Murat [3], UE Raïtum [10]
- Paragraphe II     Chapitre II. J.L. Lions [7]
- Paragraphe III    F. Mignot [12].

I - Théorèmes d'existence dans le cas elliptique

Notation.

$H$  désignant l'un des ensembles  $U, U_0, K (=K'), K_1$  défini au chapitre (I.VI), on note  $Z_H$  l'ensemble suivant :

$$Z_H = \{U \in H_0^1(\Omega) / U = U_A \text{ solution de (1)}\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \operatorname{div}(A \nabla U_A) = f \text{ dans } \Omega \\ U_A \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad A \in H \quad (1)$$

Le théorème qui suit formule d'une façon différente les résultats obtenus sur les matrices admissibles.

Théorème I.1.  $Z_K$  est identique à la fermeture faible de  $Z_U$  et de  $Z_{U_0}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Démonstration :

. Soit  $\tilde{U} \in \overline{Z_U}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible,  $\exists U^n \in Z_U$  telle que  $U^n \longrightarrow \tilde{U}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible, on a  $U^n = U_{a^n}$ ,  $a^n \in U$ , on sait qu'il existe une sous suite  $a^{n_k} \in U$  telle que  $a^{n_k} \cdot I \xrightarrow{a^H} A^0$ ,  $A^0 \in K$ , d'où  $\tilde{U} = U_{A^0}$  c'est-à-dire  $\tilde{U} \in Z_K$ , donc  $\overline{Z_U} \subset Z_K$ .

. Soit  $U \in Z_K$ , on a  $U = U_A$ ,  $A \in K$ , il existe  $a^n \in U$  telle que  $a^n \cdot I \xrightarrow{H} A$  d'où  $U_{a^n} \longrightarrow U_A$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible, soit  $U \in \overline{Z_U}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible, donc  $Z_K \subset \overline{Z_U}$ .

D'autre part, d'après le théorème VI.2 chapitre I, on peut remplacer  $U$  par  $U_0$ . On a donc

$$\overline{Z_{U_0}} = \overline{Z_U} = Z_K.$$

Théorème I.2. On a l'égalité :  $Z_{K'} = Z_{K_1}$ . C'est-à-dire étant donné  $U \in H_0^1(\Omega)$  solution de  $-\text{div}(A\nabla U) = f$ ,  $A \in K (=K')$ , il existe  $A_1 \in K_1$ , tel que  $U$  vérifie  $-\text{div}(A_1\nabla U) = f$ .

Démonstration : Il suffit de montrer que  $Z_{K'} \subset Z_{K_1}$ . Soit  $U \in Z_{K'}$ , on a :

$$-\text{div}(A\nabla U) = f \text{ dans } \Omega, \quad A \in K', \quad U \in H_0^1(\Omega) ;$$

il suffit de montrer qu'il existe  $B \in K_1$  telle que pour presque tout  $x \in \Omega$  on ait :

$$A(x)\nabla U(x) = B(x) \nabla U(x).$$

Soit  $x$  un point fixé de  $\Omega$  on pose  $A(x)\nabla U(x) = F$ ,  $A(x) = A$ ,  $B(x) = B$  et  $\nabla U(x) = \lambda$ , d'où le problème,  $A$ ,  $\lambda$  et  $F$ ,  $F = A\lambda$  étant fixés, construire  $B \in K_1$ , telle que  $B\lambda = F$ .

1<sup>ier</sup> cas :  $N = 2$ .

On choisit  $\lambda$  comme 1<sup>ier</sup> vecteur de base, si  $F = (f_1, f_2)$  l'égalité  $B\lambda = F$  s'écrit :  $\exists z \in \mathbb{R}$  tel que

$$B = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & z \end{pmatrix}$$

car  $B$  est symétrique.

Les valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de  $B$  vérifient alors

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = f_1 + z, \\ \mu_1 \cdot \mu_2 = f_1 z - f_2^2. \end{cases} \quad \text{d'où } \mu_1 \cdot \mu_2 = f_1 [\mu_1 + \mu_2 - f_1] - f_2^2,$$

$(\mu_1, \mu_2)$  décrit une hyperbole  $(\Lambda)$ .

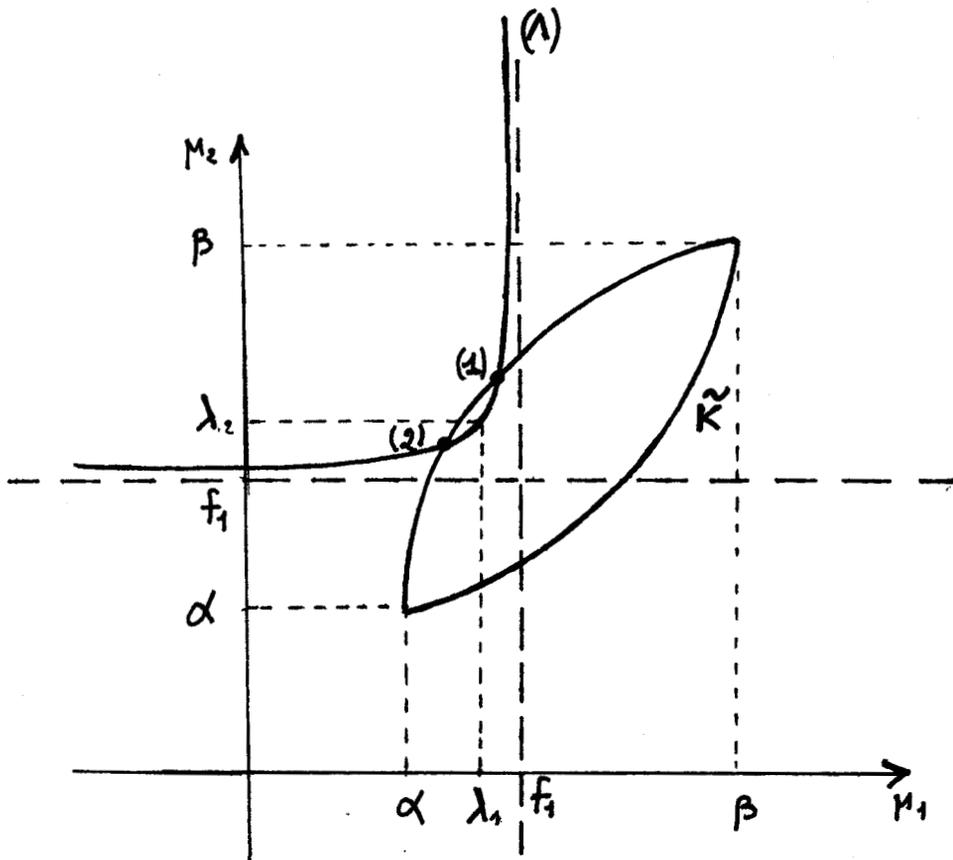


FIGURE 1

Soient  $(\lambda_1, \lambda_2)$  les valeurs propres de  $A$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2)$  appartiennent au convexe  $\tilde{K}$ .

$$\tilde{K} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \beta \text{ ou } \alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_1} \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \beta\}$$

Or on a par hypothèse  $A\lambda = F$  ; il suffit alors de choisir  $\mu_1$  et  $\mu_2$  à l'intersection de  $\Lambda$  et  $\tilde{K}$ , il y a d'ailleurs deux choix possibles. [cf. points (1) et (2) de la figure 1].

2ème cas :  $N \geq 3$ .

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_N)$  une base de  $\mathbb{R}^N$  où  $e_1 = \lambda$ , on prend  $e_2$  dans le plan défini par  $(\lambda, F)$ , on a  $F = (f_1, f_2, 0 \dots 0)$ .  $B$  étant symétrique et vérifiant  $B\lambda = F$  on a :

$$B = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & Z & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & & & & \\ \vdots & \times & & & & \\ \vdots & \times & & & & \\ 0 & \times & & & & \end{pmatrix}$$

On va choisir alors B sous la forme

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & Z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \mu I & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Dans ce cas B aura pour valeurs propres (N-2) fois  $\mu$  et  $(\mu_1, \mu_2)$  valeurs propres de  $\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & Z \end{pmatrix}$ . Dans la base précédente la matrice A s'écrit sous

la forme

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & a_{22} & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & & & & \\ \vdots & \times & & & & \\ \vdots & \times & & & & \\ 0 & \times & & & & \end{pmatrix}$$

Soient  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & a_{22} \end{pmatrix}$ , si  $\lambda_1, \lambda_N$  désignent la plus petite et la plus grande valeur propre de A on a  $\lambda_1 \leq \tilde{a}$ ,  $\tilde{b} \leq \lambda_N$ .

Preuve : Soit  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$  le vecteur propre associé à  $\tilde{a}$ , on pose  $v = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, 0 \dots 0)$ , on vérifie immédiatement que l'on a  $(Av, v) = \tilde{a}|v|^2$ . On sait que  $|v|^2 \lambda_1 \leq (Av, v) \leq \lambda_N |v|^2$  d'où on tire que  $\lambda_1 \leq \tilde{a}$ , et de même  $\tilde{b} \leq \lambda_N$ .

On sait par hypothèse que  $(\lambda_1, \lambda_N) \in \tilde{K}$ . De ce qui précède on tire que  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in [\lambda_1, \lambda_N] \times [\lambda_1, \lambda_N]$ . On fait alors le même raisonnement que pour le cas  $N = 2$  en faisant passer une hyperbole  $(\Lambda)$  par le point  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ .

On choisit alors un point  $(\mu_1, \mu_2)$  [cf. Figure 2] tel que

$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\mu_2} = \mu_1 \leq \mu_2$  qui correspond à un certain  $Z$ , on choisit alors  $B$  sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & Z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \mu_2 I \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

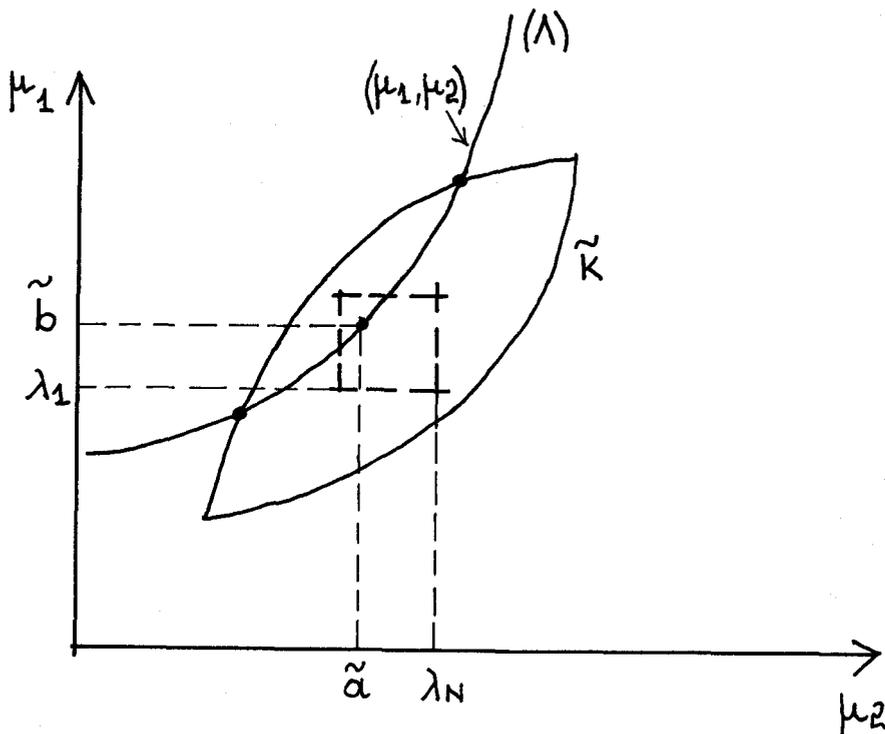


FIGURE 2

Grâce à ce théorème on peut se limiter à la recherche des matériaux feuilletés dans la recherche de matériaux optimaux.

On va énoncer maintenant le théorème principal d'existence d'un optimum.

Théorème 1.3. Soit  $I$  une fonctionnelle semi-continue inférieurement pour la topologie, faible de  $H^1_0(\Omega)$  alors il existe au moins un élément  $A^0$ ,  $A^0 \in K$ , tel que la fonction  $J$  définie par :  $J(A) = I(U_A)$  vérifie :

- 1)  $\inf_{A \in K} J(A) = J(A^0)$
- 2)  $\inf_{A \in K} J(A) = \inf_{a \in U} J(a) = \inf_{a \in U_0} J(a) = \inf_{a \in K_1} J(A)$

Démonstration : 1) est évident car  $J$  est semi-continue inférieurement pour la topologie de la  $H$  convergence sur le compact  $K$ .

2) est une conséquence immédiate des théorèmes I.2 et I.1 précédents.

Remarque I.1. F. Murat a exhibé des exemples dans [2] pour lesquels il n'y a pas de solution optimale dans  $U$  d'où la nécessité d'introduire un problème relaxé. Par contre L. Tartar a montré l'existence de solution optimale dans  $U$  pour un certain type de fonctionnelle que nous allons voir.

Énonçons tout d'abord un lemme.

Lemme I.1.  $Z_U$  est sous ensemble fermé dans  $H^1_0(\Omega)$  fort.

Démonstration : Soit  $U_n$  une suite,  $U_n \longrightarrow U$  dans  $H^1_0(\Omega)$  fort, on peut extraire une sous suite  $A^n, A^n \longrightarrow A^0$  dans  $(L^\infty(\Omega))^{N^2}$  faible, d'où on peut passer à la limite,

$$-\text{div}(A^n \nabla U_n) \longrightarrow -\text{div}(A^0 \nabla U)$$

dans  $H^{-1}(\Omega)$  fort, et  $U = U_{A^0}$ .

Nous avons également besoin d'un lemme du à Edelstein [13].

Lemme I.2. Soit  $S$  un sous-ensemble non vide fermé d'un espace de Banach uniformément convexe  $X$ ,  $\inf_{s \in S} \|s - Zd\|$  admet une solution dans  $S$  pour tout  $Zd$  appartenant à un sous-espace dense de  $X$ .

Nous pouvons alors énoncer le résultat annoncé :

Proposition I.1.  $\inf_{a \in U} \|U_a - Zd\|_{H^1(\Omega)}$  admet au moins une solution dans  $U$  pour un sous-ensemble dense de  $Zd$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Démonstration :

$$\inf_{a \in U} \|U_a - Zd\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{U_a \in Z_u} \|U_a - Zd\|_{H^1(\Omega)},$$

on applique alors le lemme I.2 avec  $S = Z_u$  et  $X = H^1(\Omega)$ .

On n'a pas en général unicité d'un tel problème ; déjà l'application qui à  $A \in K$  associe  $U_A$  solution de (1) n'est pas injective, en effet soit  $U_A \in Z_K$  avec  $A \notin K_1$ , d'après le théorème I.2  $\exists A^1 \in K_1$  telle que  $U_A = U_{A^1}$ .

Y-a-t-il unicité lorsque  $A \in K_1$  ? en général non, on va le voir sur plusieurs exemples.

Exemple 1. Cas isotrope.

Soit  $\Omega_1$  un ouvert,  $\Omega_1 \subset \Omega$  et  $U$  une fonction de  $\mathcal{D}(\Omega)$  avec  $\text{supp } U \subset \Omega_1$ . Soit  $a^1 \in U$ ,  $a^1(x) = \alpha$  si  $x \in \Omega_1$ ,  $a^1(x) = \beta$  si  $x \notin \Omega_1$ , on pose  $f = -\text{div}(a^1 \nabla U)$  ; alors  $\forall a \in U$  vérifiant  $a(x) = \alpha$  si  $x \in \text{supp } U$ , et  $\beta$  ailleurs vérifie aussi

$$\begin{cases} -\text{div}(a \nabla U) = f \\ U \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Exemple 2. cas anisotrope et constant.

Soit  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 6$ ,  $A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  et  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$   $A^1$  et  $A^2$  ont les

mêmes valeurs propres et on a  $A^1, A^2 \in K_1$ . Soit  $\Omega$  le disque de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^2$  et  $U = x^2 + y^2 - 1$  on a alors :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^i \nabla U) = -12 \\ U \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

En fait ici toute matrice ayant 2 et 4 pour valeurs propres est solution.

On va montrer par contre qu'en dimension un l'application qui à  $a \in U$  associe  $U_a$  est injective lorsque l'on a des conditions sur la fonction  $f$ .

Démonstration :  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $f \neq 0$  presque partout sur  $\Omega$ . Soit  $a^1, a^2 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $a^1 \neq a^2$  solutions des problèmes :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[ a^1(x) \frac{du}{dx} \right] = f & U \in H_0^1(\Omega) & (1) \\ -\frac{d}{dx} \left[ a^2(x) \frac{du}{dx} \right] = f & U \in H_0^1(\Omega) & (2) \end{cases}$$

de (1) et (2) on tire  $-\frac{d}{dx} \left[ b(x) \frac{du}{dx} \right] = 0$  où l'on a posé  $b = a^2 - a^1$ .

Soit  $b(x) \frac{du}{dx} = K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

$\frac{du}{dx}$  étant différent de 0 presque partout car  $f$  est différent de 0 presque partout on tire que si  $K = 0$  on a  $b = 0$  presque partout.

Si  $K \neq 0$  on tire  $U(x) = \int_0^x \frac{K}{b(t)} dt + H$ ,  $H \in \mathbb{R}$ .

$$U(0) = 1 \Rightarrow H = 0$$

$$U(1) = 0 \Rightarrow U(1) = K \int_0^1 \frac{dt}{b(t)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{b(t)} dt = 0,$$

$K$  est donc indéterminé et on n'a pas unicité du problème (1).

II - Conditions nécessaires pour avoir un optimum.

Position du problème.

On cherche à minimiser la fonction  $J$  définie sur  $K$  par :

$J(A) = \int_{\Omega} F(x, U_A) dx$ ,  $U_A \in Z_K$  ; ici on a pris  $I(U) = \int_{\Omega} F(x, U) dx$  ; on supposera que  $I$  vérifie les conditions du théorème 1.3, on pourra choisir par exemple

$$I(U) = \int_{\Omega} |U - Z_d|^2 dx, \quad Z_d \in L^{\infty}(\Omega).$$

On supposera de plus que  $F$  est dérivable par rapport à  $U$ .

Rappelons le lemme de J.L. Lions [11].

Lemme II.1. Soit  $H$  un hilbert,  $K$  fermé de  $H$ ,  $J$  une fonction différentiable de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  et  $U$  un élément (supposé existé) de  $K$  vérifiant  $J(U) \leq J(v) \quad \forall v \in K$  on a alors :

$$J'(U)(W) \geq 0 \quad \forall W \in C_U(K)$$

où  $C_U(K) = \{W/W \in H, \exists t_n > 0, t_n \rightarrow 0 \exists U_n \in K \text{ tel que } \frac{U - U_n}{t_n} \rightarrow W \text{ dans } H\}$

En fait ici l'ensemble  $K$  des matrices admissibles est convexe donc le cône  $C_U(K)$  est convexe.

Lemme II.2. L'ensemble  $K$  est convexe.

Démonstration : Ce résultat est une conséquence du théorème 5.1 de J. Ball [14].

On va donner ici une démonstration directe dans le cas où l'on est en dimension 2.

On pose :

$$\tilde{K} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \beta \quad \text{ou}$$

$$\alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_1} \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \beta\} \quad \tilde{K} \text{ est bien sur convexe.}$$

- Soit  $A \in K$  :  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix}$  avec

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_1 \cdot a_2 - b^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{cases} \quad \text{et } (\lambda_1, \lambda_2) \in \tilde{K}$$

on déduit :  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$  ; la plus grande valeur possible de  $b^2$  est

$\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{2}$ . D'autre part si on calcule  $a_1$  et  $a_2$  on a :

$$a_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 4b^2}}{2} \quad a_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 4b^2}}{2}$$

on vérifie immédiatement que  $(a_1, a_2) \in \tilde{K}$ .

- Montrons maintenant directement que  $K$  est convexe.

Soit  $A \in K$ ,  $B \in K$ ,  $t \in [0, 1]$  ; calculons les valeurs propres de  $tA + (1-t)B$ .

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a_1 + a_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_1 \cdot a_2 - b^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \tilde{K}$$

$$B = \begin{pmatrix} a'_1 & b' \\ b' & a'_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a'_1 + a'_2 = \lambda'_1 + \lambda'_2 \\ a'_1 \cdot a'_2 - b'^2 = \lambda'_1 \cdot \lambda'_2 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda'_1, \lambda'_2) \in \tilde{K}$$

On pose :

$$\begin{aligned} H &= t(a_1 + a_2) & C' &= 2(1-t)b' & D &= t(a_2 - a_1) \\ H' &= (1-t)(a'_1 + a'_2) & C &= 2tb & D' &= (1-t)(a'_2 - a'_1) \end{aligned}$$

$\tilde{K}$  étant convexe on a :  $(t\lambda_1+(1-t)\lambda'_1, t\lambda_2+(1-t)\lambda'_2) \in \tilde{K}$  soit après calcul :

$$\frac{H+H'-\sqrt{C^2+D^2+C'^2+D'^2}}{2}, \frac{H+H'+\sqrt{C^2+D^2+C'^2+D'^2}}{2} \in \tilde{K}$$

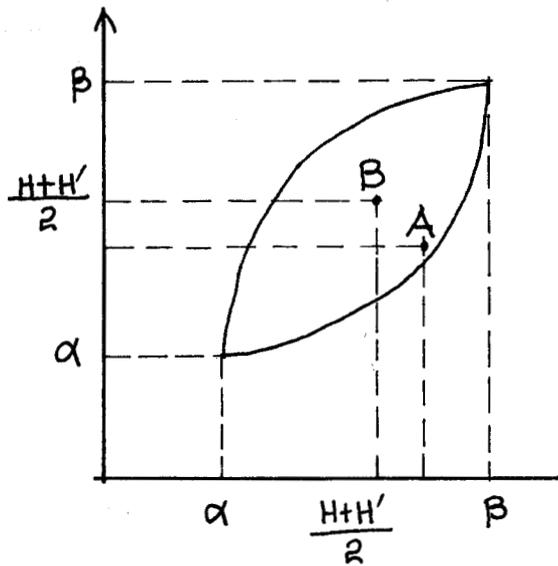
Soient  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  les valeurs propres de  $tA+(1-t)B$  on a :

$$\Lambda_2 = \frac{H+H'-\sqrt{[C+C']^2+[D+D']^2}}{2}$$

$$\Lambda_1 = \frac{H+H'+\sqrt{[C+C']^2+[D+D']^2}}{2}$$

On sait d'après ce qui précède que  $\frac{H+H'}{2} \in [\alpha, \beta]$ , d'autre part on vérifie que  $\sqrt{[C+C']^2+[D+D']^2} \leq \sqrt{C^2+D^2} + \sqrt{C'^2+D'^2}$ .

On déduit alors que  $(\Lambda_1, \Lambda_2) \in \tilde{K}$



$$A = (t\lambda_1 + (1-t)\lambda'_1, t\lambda_2 + (1-t)\lambda'_2)$$

$$(\Lambda_1, \Lambda_2) \in [A, B]$$

On applique alors le lemme II.1 à notre problème avec  $H = (L^2(\Omega))^{N^2}$  et  $K$  l'ensemble convexe des matrices admissibles ;  $K$  est fermé dans  $H$  car la convergence des coefficients dans  $L^2(\Omega)$  implique la  $H$  convergence et que  $K$  est fermé pour la topologie de la  $H$  convergence.

On doit donc calculer la dérivée de la fonction coût puis déterminer le cône des directions admissibles qui est dans notre cas convexe.

A. CALCUL DE LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION COÛT  $\hat{J}$ .

Soit  $A \in K$  et  $J(A) = I(U_A)$ . On va d'abord calculer la dérivée de la fonction :  $A \in K \rightarrow U_A \in H^1_0(\Omega)$ .

-  $f$  étant fixée dans  $H^{-1}(\Omega)$ , considérons l'application bilinéaire de  $(L^\infty(\Omega))^{N^2} \times H^1_0(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  :  $\phi(A,U) = -\text{div}(AVU)$ , cette application est bilinéaire continue : on peut la décomposer de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L^\infty(\Omega))^{N^2} \times H^1_0(\Omega) \longrightarrow (L^\infty(\Omega))^{N^2} \times (L^2(\Omega))^N \longrightarrow (L^2(\Omega))^N \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ (A,U) \longrightarrow (A,\nabla U) \longrightarrow (A.\nabla U) \longrightarrow -\text{div}(AVU) \end{array} \right.$$

On applique le théorème des fonctions implicites à la fonction  $H$  définie par :  $H(A,U) = \phi(A,U) - f$ . Soit  $(A^0, U^0)$  tels que  $\phi(A^0, U^0) = f$ ,  $U \in H^1_0(\Omega)$  on a

$$\frac{\partial H}{\partial H^0}(A^0, U^0)(U) = -\text{div}(A^0 \nabla U),$$

donc  $\frac{\partial H}{\partial H^0}$  est un isomorphisme entre  $H^1_0(\Omega)$  et  $H^{-1}(\Omega)$ .

On en déduit qu'il existe un voisinage  $W$  de  $A^0$  et  $U$  une application de classe  $C^1$ ,  $U : W \rightarrow H^1_0(\Omega)$  dont la dérivée donnée sous forme implicite vérifie :

$$\frac{\partial U}{\partial A^0} \cdot \delta A = V, \quad \delta A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2}$$

où  $V$  vérifie :

$$(1) \quad \int_{\Omega} (A^0 \nabla V, \nabla \psi) = - \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla \psi), \quad \forall \psi \in H^1_0(\Omega).$$

On introduit  $W^0$  solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla W^0) = \frac{\partial F}{\partial U}(x, U^0) \\ W^0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

soit sous forme variationnelle :

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (A^0 \nabla W^0, \nabla \psi) = \int \frac{\partial F}{\partial U}(x, U^0) \psi \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \\ W^0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

on a :  $J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial U}(x, U^0) V$  où  $V$  est solution de (1) d'où on tire de (1) et (2) :

$$J'(A^0)(\delta A) = - \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0)$$

car  $A^0$  est symétrique.

En résumé, on a donc le système d'optimalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'état } U^0 : \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla U^0) = f \\ U^0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \\ \\ \text{l'état adjoint } W^0 : \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla W^0) = \frac{\partial F}{\partial U}(x, U^0) \\ W^0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \\ \\ \text{la condition d'optimalité : } \forall \delta A \in C_{A^0}(\Omega) \quad \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) \leq 0. \end{array} \right.$$

Remarque II.2. Si  $A^0$  n'est pas symétrique, on définit l'état adjoint  $W^0$  par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}({}^t A^0 \nabla W^0) = \frac{\partial F}{\partial U}(x, U^0) \\ W^0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et on obtient la même condition d'optimalité.

On va maintenant déterminer  $C_{A^0}(K)$ , on travaille d'abord dans le plan des valeurs propres puis dans l'espace des matrices  $2 \times 2$ .

B. DETERMINATION DU CÔNE DES DIRECTIONS ADMISSIBLES.

On désigne par  $\tilde{K}$  le même ensemble qu'au lemme II.2.

Déterminons tout d'abord le cône tangent à  $\tilde{K}$  en un point.

Soit  $A^0$  le minimum et  $\lambda_1^0(x)$ ,  $\lambda_2^0(x)$  les valeurs propres de  $A^0(x)$ , on sait d'après ce qui précède que pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$  on a  $(\lambda_1^0(x), \lambda_2^0(x)) \in \tilde{K}$ .

On définit le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ,  $C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)}$

$$C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} = \{(\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbb{R}^2 / \exists t_n > 0, t_n \rightarrow 0 / (\lambda_1^0 + t_n \Delta_1 + o(t_n), \lambda_2^0 + t_n \Delta_2 + o(t_n)) \in \tilde{K}\}.$$

Cet ensemble décrit le cône tangent à  $\tilde{K}$  en  $(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$ , plusieurs cas sont à étudier.

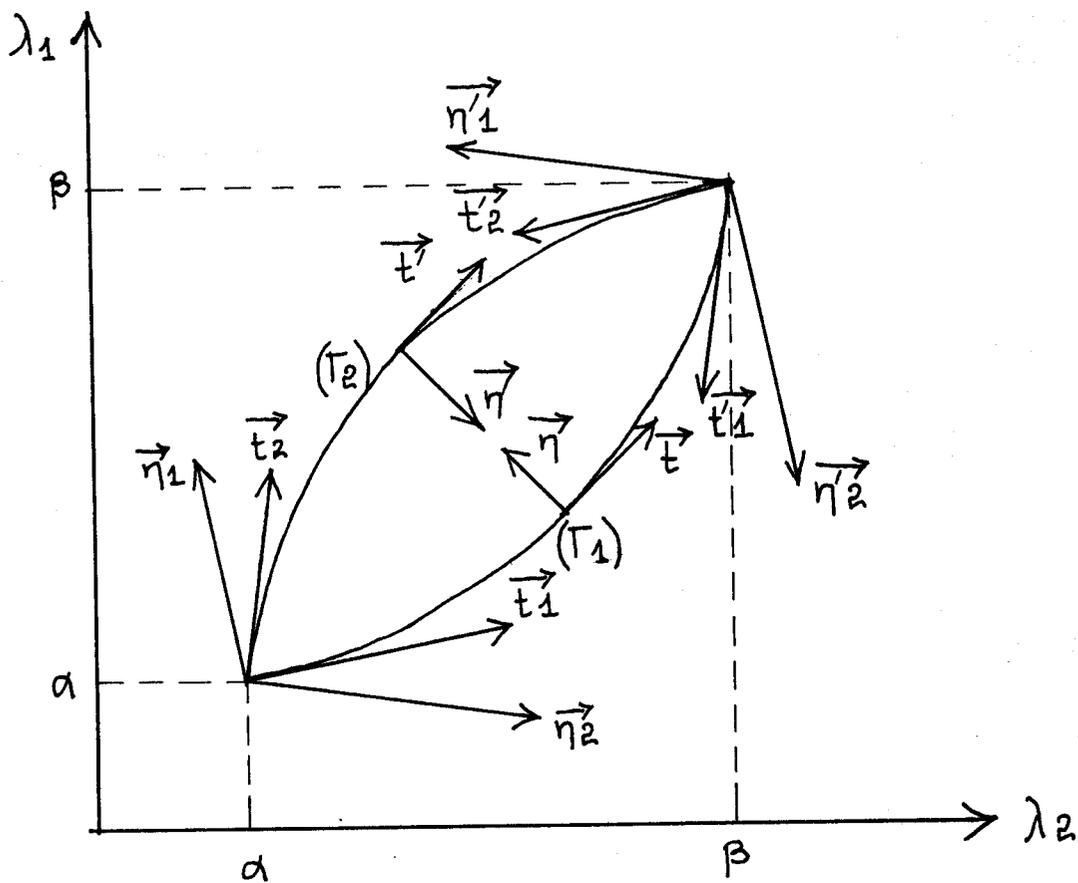
1<sup>ier</sup> cas :  $\lambda_1^0(x) = \lambda_2^0(x) = \alpha$ .

Soient  $\vec{t}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix}$  les vecteurs tangents à  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et

$\vec{\eta}_1 \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\eta}_2 \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} \\ -1 \end{pmatrix}$  les vecteurs normaux à  $\vec{t}_1, \vec{t}_2$  orientés.

On a :

$$C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} = \{(\Delta_2, \Delta_1) \in \mathbb{R}^2 / (\Delta_2, \Delta_1) \cdot \vec{\eta}_1 \geq 0 \text{ et } (\Delta_2, \Delta_1) \cdot \vec{\eta}_2 \geq 0\}$$



$$C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} = \{(\Delta_2, \Delta_1) \in \mathbb{R}^2 / \frac{\alpha}{\beta} \Delta_2 \leq \Delta_1 \leq \frac{\beta}{\alpha} \Delta_2\}$$

soit

$$C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} = \{(\Delta_2, \Delta_1) \in \mathbb{R}^2 / \Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \leq \frac{\beta}{\alpha}\}$$

2ème cas :  $\lambda_1^0(x) = \lambda_2^0(x) = \beta$

Le même calcul donne :

$$C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} = \{(\Delta_2, \Delta_1) \in \mathbb{R}^2 / \Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \leq 0, \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \leq \frac{\beta}{\alpha}\}$$



3ème cas :  $\lambda_1^0(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2^0(x)}$

Soit  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ (\lambda_1^0)^2 \\ \alpha\beta \end{pmatrix}$  le vecteur tangent à  $\Gamma_1$ , et  $\vec{n}$  le vecteur normal

à  $\vec{t}$  orienté à l'intérieur de  $\tilde{K}$  on a :

$$\begin{aligned} C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} &= \{(\Delta_2, \Delta_1) \in \mathbb{R}^2 / (\Delta_2, \Delta_1) \cdot \vec{n} \geq 0\} \\ &= \{(\Delta_2, \Delta_1) \in \mathbb{R}^2 / \Delta_1 \geq \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} \cdot \Delta_2\} \end{aligned}$$

4ème cas :  $\lambda_2^0(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_1^0(x)}$

Le même calcul que précédemment donne :

$$C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} = \{(\Delta_2, \Delta_1) \in \mathbb{R}^2 / \Delta_2 \cdot \frac{\alpha\beta}{(\lambda_1^0)^2} \geq \Delta_1\}.$$

On va maintenant déterminer le cône dans l'espace des matrices.

On fixe un point  $x$ ,  $x \in \Omega$  et on va étudier  $C_{A^0(x)}(K)$  le cône des directions admissibles, plusieurs cas sont à envisager suivant les valeurs de  $A^0(x)$ .

a) cas où  $A^0 = a_0 \delta_{ij}$   $a_0 \in \{\alpha, \beta\}$

Dans ce cas la matrice étant isotrope donc invariante dans tout changement de base toute matrice  $\delta A$  symétrique dont les valeurs propres sont dans  $C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)}$  appartient à  $C_{A^0}(K)$ .

b) Cas où  $\alpha < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2^0} < \lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 < \beta$  (ou l'inverse en permutant  $\lambda_1^0$  et  $\lambda_2^0$ ). Dans ce cas on a :  $C_{(\lambda_1^0, \lambda_2^0)} = \mathbb{R}^2$  d'où on déduit que toute matrice symétrique appartient à  $C_{A^0}(K)$  car les valeurs propres de  $A+t\delta A$  sont admissibles pour  $t$  petit.

c) Cas où  $\alpha < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2^0} = \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \beta$

Soit  $\{e_1, e_2\}$  une base de vecteurs propres associés à  $\lambda_1^0, \lambda_2^0$ ,  $\mu, t \in \mathbb{R}$   
 on pose,  $P(\mu, t) = \det [A^0 + t\delta A - \mu I]$

$$P(\mu, t) = [\mu - (\lambda_1^0 + tb_1)] [\mu - (\lambda_2^0 + tb_2)] - t^2 b^2$$

où l'on a posé  $\delta A = \begin{pmatrix} b_1 & b \\ & b_2 \end{pmatrix}$  dans la base  $\{e_1, e_2\}$ .

On a :  $P(\lambda_1^0, 0) = 0$ .

On a :  $\frac{\partial P}{\partial \mu}(\lambda_1^0, 0) = \lambda_1^0 - \lambda_2^0 \neq 0$ .

Le théorème des fonctions implicites nous donne alors

$$\mu = \lambda_1^0 - t \frac{\frac{\partial P}{\partial t}(\lambda_1^0, 0)}{\frac{\partial P}{\partial \mu}(\lambda_2^0, 0)} + o(t) = \lambda_1^0 + tb_1 + o(t).$$

Les valeurs propres de  $A^0 + t\delta A$  sont donc :

$$\mu_1 = \lambda_1^0 + t(\delta A e_1, e_1) + o(t)$$

$$\mu_2 = \lambda_2^0 + t(\delta A e_2, e_2) + o(t)$$

D'où on obtient une caractérisation du cône  $C_{A^0}(K)$  :  $C_{A^0}(K) = \{\delta A \in (L^\infty(\Omega))^4$ ,  
 symétriques tels que  $\{e_1, e_2\}$  vecteurs propres de  $A$  associés à  $\lambda_1^0, \lambda_2^0$ ,  
 $(\delta A e_1, e_1) \geq \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} (\delta A e_2, e_2)\}$ .

Pour l'autre cas on a immédiatement :

$C_{A^0}(K) = \{\delta A \in (L^\infty(\Omega))^4$ , symétriques tels que, si  $\{e_1, e_2\}$  vecteurs propres  
 de  $A$  associés à  $\lambda_1^0, \lambda_2^0$ ,  $(\delta A e_1, e_1) \leq \frac{\alpha\beta}{(\lambda_1^0)^2} (\delta A e_2, e_2)\}$ .

Remarque II.1. Par la suite lorsque l'on dira  $\delta A \in C_{A^0}^0(K)$  cela signifiera  $\delta A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2}$  et  $\delta A(x) \in C_{A^0(x)}^0(K)$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

On a une propriété évidente de localisation :

Lemme II.2. Soit  $\delta A \in C_{A^0}^0(K)$ ,  $\omega_1$  un ensemble mesurable on définit  $\delta \tilde{A}$  par :  $\delta \tilde{A}(x) = \delta A(x)$  sur  $\omega_1$  ;  $\delta \tilde{A}(x) = 0$  sur  $\Omega - \omega_1$  alors on a

$$\delta \tilde{A} \in C_{A^0}^0(K).$$

On va traduire maintenant la condition d'optimalité :

$$\forall \delta A \in C_{A^0}^0(K), \quad \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) \leq 0.$$

Grâce au lemme II.2, on peut localiser la condition et écrire :  $\forall \omega$ ,  $\omega$  ensemble mesurable de  $\Omega$ ,  $\forall \delta A \in C_{A^0}^0(K)$  on a :

$$\int_{\omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) \leq 0,$$

d'où on déduit la condition (A) d'optimalité :

$$(A) \quad \begin{cases} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) \leq 0, & \forall \delta A \in C_{A^0}^0(K) \\ \text{pour presque tout } x \text{ appartenant à } \Omega. \end{cases}$$

### C. CALCUL DES CONDITIONS NECESSAIRES.

1. Cas où le minimum est de la forme  $a_0 \delta_{ij}$  avec  $a_0(x) = \alpha$  sur  $\Omega_1$   
 $a_0(x) = \beta$  sur  $\Omega - \Omega_1$ .

On raisonne localement ; soit  $\delta A$  une direction admissible ayant pour valeur propre  $(\alpha', 1)$ ,  $\alpha' \in [\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}]$  sur  $\Omega_1$  et  $(\beta', -1)$ ,  $\beta' \in [-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\alpha}{\beta}]$  sur  $\Omega - \Omega_1$ .

. Sur  $\Omega_1$  la condition (A) s'écrit : soit  $e$  un vecteur propre unitaire de  $\delta A$  correspond à la valeur propre  $\alpha'$ , on peut écrire :  $\nabla U^0 = \xi + (\nabla U^0, e)e$ ,  $\nabla W^0 = \xi' + (\nabla W^0, e)e$  ( $\xi$  correspond à la valeur propre 1)  $\delta A \nabla U^0 = \xi + \alpha'(\nabla U^0, e)e$

$$\begin{aligned} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) &= (\delta A \nabla U^0 - \nabla U^0, \nabla W^0) + (\nabla U^0, \nabla W^0) \\ &= ((\nabla U^0, e)(\alpha' - 2)e, \xi' + (\nabla W^0, e)e) + (\nabla U^0, \nabla W^0) = (\nabla U^0, e)(\nabla W^0, e)(\alpha' - 1) \\ &\quad + (\nabla U^0, \nabla W^0). \end{aligned}$$

Soit  $\theta = \text{angle}(\nabla U^0, \nabla W^0)$ ,  $\theta_1 = \text{angle}(\nabla U^0, e)$ ,  $\theta_2 = \text{angle}(\nabla W^0, e)$ .

Sur  $\Omega_1$  la condition (A) s'écrit :

$$\forall \theta_1 \in [0, 2\pi], \forall \alpha' \in \left[\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right] : |\nabla U^0| \cdot |\nabla W^0| [\cos \theta + (\alpha' - 1) \cos \theta_1 \cos \theta_2] \leq 0$$

On cherche une condition sur  $\theta$ .

Si  $|\nabla U^0| |\nabla W^0| \neq 0$  on choisit  $e$  de telle sorte (le choix de  $e$  est libre) que la quantité  $[\cos \theta + (\alpha' - 1) \cos \theta_1 \cos \theta_2]$  soit maximum. Pour cela on étudie les extremum de  $Z(\theta_1) = \cos(\theta_1 - \theta) \cos \theta_1$  (on a  $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ )

$$\text{On trouve : } \begin{cases} Z(\theta_1) \text{ maximum pour } \theta_1 = \frac{\theta}{2} \\ Z(\theta_1) \text{ minimum pour } \theta_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Il reste à tenir compte du signe de  $(\alpha' - 1)$ .

. Si  $\alpha' - 1 \leq 0$  on choisit la valeur  $\theta_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ ,  $e$  est alors la bissectrice extérieure. La condition (A) s'écrit alors :

$$\forall \alpha' \in \left[\frac{\alpha}{\beta}, 1\right], \cos \theta \leq \frac{\alpha' - 1}{\alpha' + 1}$$

on trouve la condition optimum en prenant  $\alpha' = \frac{\alpha}{\beta}$  ; soit  $\cos \theta \leq \frac{\alpha - \beta}{\beta + \alpha}$ .

. Si  $\alpha' - 1 \geq 0$  on choisit la valeur  $\theta_1 = \frac{\theta}{2}$ ,  $e$  est alors la bissectrice intérieure. La condition (A) s'écrit alors :

$$\forall \alpha' \in [1, \frac{\beta}{\alpha}], \quad \cos \theta \leq \frac{1-\alpha'}{\alpha'+1}$$

on trouve la condition optimum en prenant  $\alpha' = \frac{\beta}{\alpha}$  ; soit  $\cos \theta \leq \frac{\alpha-\beta}{\beta+\alpha}$

En résumé, sur  $\Omega_1$  on obtient :  $|\nabla U^0| \cdot |\nabla W^0| = 0$  ou bien  $\cos \theta \leq \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ .

. Sur  $\Omega - \Omega_1$  on obtient en faisant le même calcul

$$|\nabla U^0| \cdot |\nabla W^0| = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \theta \geq \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}.$$

Remarque II.3. On suppose  $I(U) = \int_{\Omega} |U - Z_d|^2$  avec  $Z_d \in L^{\infty}(\Omega)$ , on suppose  $f \in L^2(\Omega)$  avec  $f \neq 0$  presque partout sur  $\Omega$ . Supposons alors la condition  $|\nabla U^0| |\nabla W^0| = 0$  vérifiée sur  $\Omega'$ ,  $\Omega' \subset \Omega$  : on a  $|\nabla U^0| \neq 0$ , en effet si il existe  $\Omega_1$  ouvert  $\Omega_1 \subset \Omega$  tel que  $\forall x \in \Omega_1 \quad |\nabla U^0| = 0$  alors  $f$  est nulle sur  $\Omega_1$ . On a donc  $U^0 = Z_d$  presque partout sur  $\Omega'$ .

Remarque II.4. Etude du problème semi-relaxé. On rappelle que

$$U = \{a \in L^{\infty}(\Omega), \quad \alpha \leq a(x) \leq \beta \text{ presque partout sur } \Omega\}$$

$U$  est un convexe fermé de  $L^2(\Omega)$ . Soit  $J$  une fonctionnelle vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème I.3., définie sur  $U$ .

Supposons qu'il existe  $a^0 \in U$  vérifiant  $J(a^0) = \inf_{a \in U} J(a)$ .

On définit  $W^0$  l'état adjoint de la même manière que précédemment ; on sait que l'on a nécessairement :  $\forall a \in U, \quad J'(a^0)(a - a^0) \geq 0$  soit dans le cas présent,

$$\forall a \in U \quad \int_{\Omega} (a(x) - a^0(x)) (\nabla U^0, \nabla W^0) \leq 0.$$

On déduit alors que  $\forall \xi \in [\alpha, \beta]$  on a :  $(\xi - a^0(x)) (\nabla U^0, \nabla W^0) \leq 0$  presque partout sur  $\Omega$ .

Là où  $a^0(x) = \alpha$  on obtient  $|\nabla U^0| \cdot |\nabla W^0| = 0$  ou bien  $\cos \theta \leq 0$ .

Là où  $a^0(x) = \beta$  on obtient  $|\nabla U^0| \cdot |\nabla W^0| = 0$  ou bien  $\cos \theta \geq 0$ .

L'information obtenue dans le problème relaxé est donc beaucoup plus riche.

2. Cas où le minimum est de la forme :  $\alpha < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2^0} = \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \beta$ .

Soit  $x \in \Omega$ ,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  une base orthonormée correspondant aux valeurs propres  $\lambda_1^0(x) < \lambda_2^0(x)$ . Soit  $\delta A$  une direction admissible qui s'écrit

$\delta A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  dans la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . On va traduire la condition (A) ; on suppose  $|\nabla U^0| \neq 0$  et  $|\nabla W^0| \neq 0$  et on les norme :

$$\frac{\nabla U^0}{|\nabla U^0|} = \cos \theta_1 \vec{e}_1 + \sin \theta_1 \vec{e}_2 \quad , \quad \frac{\nabla W^0}{|\nabla W^0|} = \cos \theta_2 \vec{e}_1 + \sin \theta_2 \vec{e}_2$$

La condition (A) s'écrit alors :

$$(A) \quad \begin{cases} a \cos \theta_1 \cos \theta_2 + c \sin \theta_1 \sin \theta_2 + b \sin(\theta_1 + \theta_2) \leq 0 \\ \forall b \in \mathbb{R}, \forall a, c \text{ vérifiant } a - \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} c \geq 0 \end{cases}$$

C'est une forme linéaire en  $(a, b, c)$  négative sur un demi plan donc

(A) est équivalent à la condition suivante :

$$(B) \quad \begin{cases} (i) & \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = 0 \\ (ii) & \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ (iii) & a \cos \theta_1 \cos \theta_2 + c \sin \theta_1 \sin \theta_2 \leq 0, \quad \forall (a, c) \text{ vérifiant} \\ & a - \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} c \geq 0 \end{cases}$$

Précisons :

$$(A) \Rightarrow (B) \text{ il suffit de prendre } \delta A = \pm \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B) \Rightarrow (A) \text{ on pose } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a \text{ et } c$$

vérifiant

$$a - \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} c \geq 0.$$

On obtient alors :

$$(\delta AVU^0, \nabla W^0) = [a \cos \theta_1 \cos \theta_2 + c \sin \theta_1 \sin \theta_2] + b \sin(\theta_1 + \theta_2) \leq 0.$$

Explicitons la condition (B)

$$(ii) \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 0 \text{ ou } \theta_1 + \theta_2 = \pi$$

$$\text{Si } \theta_1 + \theta_2 = 0 \text{ (i) } \Rightarrow \text{tg}^2 \theta_1 = \frac{(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} \text{ on a alors d'après (iii)}$$

$$a \cos^2 \theta_1 - c \sin^2 \theta_1 \leq 0 \text{ soit } a - \frac{c(\lambda_1^0)^2}{\alpha\beta} \leq 0$$

ce qui est impossible.

$$\text{La condition (B) se traduit par } \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = \pi \\ \text{tg } \theta_1 = \pm \frac{\lambda_1^0}{\sqrt{\alpha\beta}} \end{cases}$$

$$\text{de } \theta = \theta_2 - \theta_1 \text{ on tire } \cos \theta = \frac{(\lambda_1^0)^2 - \alpha\beta}{(\lambda_1^0)^2 + \alpha\beta}.$$

En résumé, on obtient  $|\nabla U^0| \cdot |\nabla W^0| = 0$  ou la bissectrice intérieure de l'angle formé par  $\nabla U^0$  et  $\nabla W^0$  est vecteur propre pour  $\lambda_2^0$  et l'angle  $\theta$  formé par ces vecteurs vérifie :

$$\cos \theta = \frac{(\lambda_1^0)^2 - \alpha\beta}{(\lambda_1^0)^2 + \alpha\beta} \quad [\text{cf. Figure 3}]$$

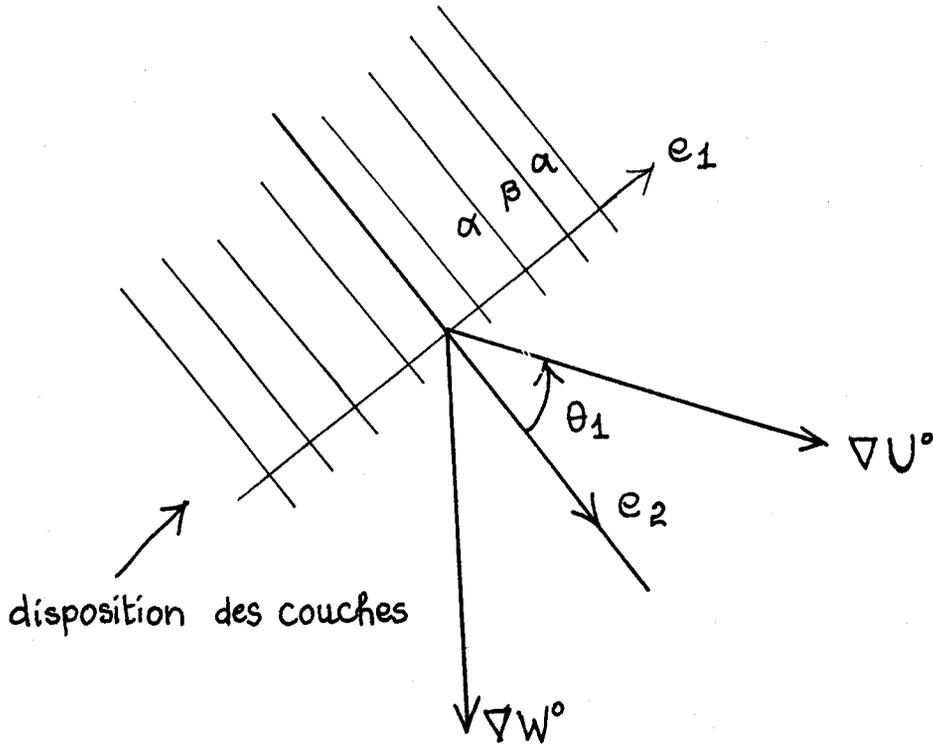


FIGURE 3

3. Cas où le minimum est de la forme  $\alpha < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2^0} < \lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 < \beta$ .

Toutes les directions étant admissibles on obtient la condition

$$|\nabla U^0| \cdot |\nabla W^0| = 0.$$

Remarque II.5. Les résultats précédents s'appliquent au cas non homogène. On étudie le même problème que précédemment,  $A \in K$ ,  $f \in H^{-1}(\Omega)$ .

On supposera  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{cases} -\text{div}(A\nabla U_A) = f \\ U_A/\Gamma = g \end{cases}$$

On prolongera  $g$  sur  $\Omega$ , on note encore  $g$  le prolongement ; la frontière de  $\Omega$  étant supposée régulière  $U_A - g \in H_0^1(\Omega)$  équivaut à  $U_A \in H^1(\Omega)$  et  $U_A/\Gamma = g/\Gamma$ .

On sait qu'il existe une fonction unique  $U_A \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant :

$$\begin{cases} (U_A - g) \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} (A \nabla U_A, \nabla v) = \int_{\Omega} f v . \end{cases}$$

On pose avec les mêmes hypothèses que précédemment

$$J(A) = \int_{\Omega} F(x, U_A) dx$$

$\delta A \in C_A(K)$  on a,  $J'(A)(\delta A) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial U}(x, U_A) V$  où  $V$  vérifie :

$$\begin{cases} V \in H_0^1(\Omega) \\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} (A \nabla V, \nabla \psi) = - \int_{\Omega} (\delta A \nabla U_A, \nabla \psi) \end{cases}$$

On introduit  $W_A$  l'état adjoint défini par :

$$\begin{cases} -\text{div}(A \nabla W_A) = \frac{\partial F}{\partial U}(x, U_A) \\ W_A \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On obtient alors  $J'(A)(\delta A) = \int_{\Omega} (\delta A \nabla U_A, \nabla W_A)$ . On remarquera que  $U_A \in H^1(\Omega)$  et  $W_A \in H_0^1(\Omega)$ .

On peut alors faire la même discussion que précédemment.

### III - Problème de contrôle où la fonction coût est donnée sur la frontière.

On étudie le même problème que précédemment :

$$(1) \quad \begin{cases} A \in K \\ -\text{div}(A \nabla U_A) = f \quad \text{dans } \Omega \\ U_A / \Gamma = 0 \end{cases}$$

1. On suppose tout d'abord, ce qui n'est pas en général le cas, que les coefficients de  $A$  appartiennent à  $C^1(\bar{\Omega})$ , on a alors d'après le théorème de régularité :

$$U_A \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Soit  $M \in L^\infty(\Gamma)$  et  $Z_d \in L^2(\Gamma)$  on pose :

$$J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( M \frac{\partial U_A}{\partial V_A} - Z_d \right)^2 d\Gamma,$$

ceci a bien un sens car

$$\frac{\partial U_A}{\partial V_A} \in H^{1/2}(\Gamma),$$

et on a

$$M \frac{\partial U_A}{\partial V_A} \in L^2(\Gamma),$$

l'application affine de  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  qui à  $U_A$  associe  $(M \frac{\partial U}{\partial V_A} - Z_d)$  est alors bien définie et continue de  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$ , on est alors ramené au théorème d'existence de I.

Calculons la dérivée de la fonction coût.

$$A^0 \in K, \quad \delta A \in C_{A^0}^0(K) \text{ on a : } J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Gamma} M \left( M \frac{\partial U^0}{\partial V_{A^0}} - Z_d \right) \frac{\partial V}{\partial V_{A^0}} \quad \text{où}$$

$V$  vérifie

$$\begin{cases} -\text{div}(A^0 \nabla V) = + \text{div}(\delta A \nabla U^0) \\ V/\Gamma = 0 \end{cases}$$

On définit l'état adjoint par :

$$(2) \quad \begin{cases} -\text{div}(A^0 \nabla W^0) = 0 \\ W^0/\Gamma = M \left( M \frac{\partial U^0}{\partial V_{A^0}} - Z_d \right). \end{cases}$$

Le problème précédent nécessite une formulation faible, en effet  $w^0$  ne peut appartenir à  $H^1(\Omega)$  car  $w^0/\Gamma$  n'appartient pas en général à  $H^{1/2}(\Omega)$ .

L'état adjoint  $w^0$  définit formellement précédemment est déterminé comme la solution dans  $L^2(\Omega)$  de

$$\int_{\Omega} w^0 (\operatorname{div} A^0 \nabla \psi) = - \int_{\Gamma} M(M \frac{\partial U^0}{\partial A^0} - Z_d) \frac{\partial \psi}{\partial A^0} \quad \forall \psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

En prenant  $\psi = v$  on obtient

$$J'(A^0)(\delta A) = - \int_{\Omega} w^0 (\operatorname{div} A^0 \nabla v)$$

soit

$$J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Omega} w^0 \operatorname{div}(\delta A \nabla U^0),$$

en appliquant la formule de Green on obtient alors

$$(3) \quad J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla w^0) - \int_{\Gamma} \frac{\partial U^0}{\partial \delta A} w^0.$$

Pour la formulation faible précédente on a utilisé le théorème 4.1. [cf. Lions (7)].

Deux façons sont possibles pour résoudre ce problème lorsque les coefficients ne sont pas dans  $C^1(\bar{\Omega})$ . Dans un premier temps pour simplifier on va se limiter à  $\Omega_0, \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ .

2. Soit  $\Omega_0$  un ouvert,  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ , on pose :

$$U_{ad} = \{a \in L^\infty(\Omega) / a(x) = \beta \text{ sur } \Omega - \Omega_0, \alpha \leq a(x) \leq \beta \text{ sur } \Omega_0\}.$$

La  $H$  convergence étant une propriété locale on montre de la même façon qu'au chapitre I que la  $H$  fermeture de cet ensemble est :

$$K_{ad} = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{N^2} \mid A \text{ symétrique, } A(x) = \beta I \text{ sur } \Omega - \Omega_0,$$

sur presque tout  $x \in \Omega_0$  les valeurs propres de  $A$  indexés par ordre croissant vérifient :

$$\alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2(x)} \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \beta .$$

L'état du système  $U_A$  est toujours défini par (1) et on pose de même

$$J(A) = \int_{\Gamma} \left( M \frac{\partial U_A}{\partial V_A} - Z_d \right)^2 d\Gamma$$

avec  $M \in L^\infty(\Gamma)$  et  $Z_d \in L^2(\Gamma)$ .

Il n'y a plus de problème de régularité pour définir  $\frac{\partial U_A}{\partial V_A}$  car  $U_A$  appartient à  $H^2$  dans un voisinage du bord de  $\Omega$ .

L'état adjoint est défini comme précédemment par (2).

La condition d'optimalité (3) s'écrit alors :

$$A^0 \in K_{ad}, \quad \delta A \in C_{A^0}^0(K_{ad}), \quad J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Omega_0} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0)$$

3. Si les coefficients de  $A$  ne sont pas réguliers on peut par dualité définir  $\frac{\partial U}{\partial V_A} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

On définit alors la fonction coût par :

$$J(A) = \frac{1}{2} \left\| M \frac{\partial U}{\partial V_A} - Z_d \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 ,$$

On a alors ,  $A^0 \in K$ ,  $\delta A \in C_{A^0}^0(K)$

$$J'(A^0)(\delta A) = \left( M \left( M \frac{\partial U^0}{\partial V_{A^0}} - Z_d \right), \frac{\partial V}{\partial V_{A^0}} \right)_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

où  $V$  est défini comme précédemment.

Pour  $\psi, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  on choisit le produit scalaire

$$(\psi, \psi)_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \int_{\Gamma} ((-\Delta_r)^{-1/2} \psi) \psi$$

L'état adjoint  $W^0$  est défini par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla W^0) = 0 \\ W^0 / \Gamma = (-\Delta_\Gamma)^{-1/2} [M(M \frac{\partial U^0}{\partial A^0} - Z_d)] \end{cases}$$

on a  $W^0 / \Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $W^0$  est donc régulier.

On a alors  $J'(A^0)(\delta A) = \int_\Gamma W^0 \frac{\partial V}{\partial A^0}$ , on a en appliquant la formule de Green

$$\begin{aligned} J'(A^0)(\delta A) &= \int_\Omega \operatorname{div}(A^0 \nabla V) W^0 + \int_\Omega (A^0 \nabla V, W^0) = \int_\Omega \operatorname{div}(A^0 \nabla V) W^0 \\ &\quad - \int_\Omega \operatorname{div}(A^0 \nabla W^0) V + \int_\Gamma \frac{\partial W^0}{\partial V_A} V \end{aligned}$$

(car  $A^0$  est symétrique).

Les conditions sur  $V/\Gamma$  et  $\operatorname{div}(A^0 \nabla W^0)$  dans  $\Omega$  nous donne alors :

$$J'(A^0)(\delta A) = \int_\Omega \operatorname{div}(A^0 \nabla V) W^0$$

soit

$$J'(A^0)(\delta A) = - \int_\Omega \operatorname{div}(\delta A \nabla U^0) W^0 .$$

On est ramené au 1<sup>ier</sup> cas et on a la même condition d'optimalité.

#### IV - Contrôle sur un problème de valeurs propres.

On étudie le problème suivant :

Soit  $\lambda^n$  la plus petite valeur propre et  $\psi^n$  le vecteur propre positif associé du problème :

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^n \nabla \psi^n) = \lambda^n \psi^n \\ \|\psi^n\|_{L^2(\Omega)} = 1 ; \psi^n \geq 0 \text{ où } A^n \in M(\alpha, \beta, \Omega) \\ \psi^n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On va démontrer des résultats identiques au paragraphe I.

Proposition IV.1. Si  $A^n \xrightarrow{H} A^0$ , alors  $\lambda^n \longrightarrow \lambda^0$  dans  $\mathbb{R}$  où  $\lambda^0$  est la plus petite valeur propre de l'opérateur  $-\text{div}(A^0 \nabla)$  dans  $H^1_0(\Omega)$ .

Démonstration : Soit  $\lambda, U, U \in H^1_0(\Omega)$   $\|U\|_{L^2(\Omega)} = 1$  la valeur propre et un vecteur propre fixé, de (1) on tire :

$$\int_{\Omega} (A^n \nabla U, \nabla U) = \lambda$$

d'où on tire que  $\lambda^n < \int_{\Omega} (A^n \nabla U, \nabla U) \leq \beta |\nabla U|^2$ . De (1) on peut écrire :

$$\alpha \|\varphi^n\|_{H^1_0(\Omega)}^2 \leq \lambda^n,$$

$\lambda^n$  étant une suite bornée on déduit les résultats : il existe une sous-suite vérifiant :  $\varphi^n \longrightarrow \varphi^0$  dans  $L^2(\Omega)$  fort,  $\lambda^n \longrightarrow \lambda^0$  dans  $\mathbb{R}$  ; d'autre part, on a  $\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} = 1$  donc  $\varphi^0 \neq 0$  et  $\varphi^0 \in H^1_0(\Omega)$ .

En utilisant le fait que  $A^n \xrightarrow{H} A^0$  on peut passer à la limite dans (1) et montrer que toute la suite  $\lambda^n$  converge vers  $\lambda^0$  ;

$$(2) \quad \begin{cases} -\text{div}(A^0 \nabla \varphi^0) = \lambda^0 \varphi^0, \\ \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \varphi^0 \geq 0, \\ \varphi^0 \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Montrons que  $\lambda^0$  est la plus petite valeur propre.

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , soient  $U^n(f)$  et  $U(f)$  les solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\text{div}(A^n \nabla U^n(f)) = f, \\ U^n \in H^1_0(\Omega). \end{cases} \quad \begin{cases} -\text{div}(A^0 \nabla U^0(f)) = f, \\ U^0 \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

On a d'après la caractérisation de la plus petite valeur propre :

$$\lambda^n = \inf_{W \in H^1_0(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (A^n \nabla W, \nabla W)}{\int_{\Omega} |W|^2}$$

$$\lambda^n \leq \frac{\int_{\Omega} (A^n \nabla U^n(f), \nabla U^n(f))}{\int_{\Omega} |U^n(f)|^2} \quad \text{soit en passant à la limite}$$

$$\lambda^0 \leq \frac{\int_{\Omega} (A^0 \nabla U^0(f), \nabla U^0(f))}{\int_{\Omega} |U^0(f)|^2} \quad \text{ceci étant vrai pour tout } f,$$

$f \in L^2$  on déduit le résultat :

$$\lambda^0 \leq \inf_{W \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (A^0 \nabla W, \nabla W)}{\int_{\Omega} |W|^2}$$

ce qui démontre le résultat cherché.

Notation.

On note  $Z_{\lambda U}$  [resp.  $Z_{\lambda K}$ ] l'ensemble suivant :

$$Z_{\lambda U} = \{(\lambda, \psi) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \cap S^1 / (\lambda, \psi) = (\lambda_A, \psi_A) \text{ solution de (1)}\}$$

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}[A \nabla \psi_A] = \lambda_A \psi_A, \\ \|\psi_A\|_{L^2(\Omega)} = 1 ; \quad \psi_A \geq 0, \\ \psi_A \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \text{où } \lambda_A \text{ est la plus petite valeur propre de l'opérateur } -\operatorname{div}[A \nabla]$$

avec  $A \in U$  (resp.  $K$ ).

.  $S^1$  désigne la sphère unité de  $L^2(\Omega)$

. Soit  $I$  une fonctionnelle de  $\mathbb{R} \times (H_0^1(\Omega) \cap S^1)$  continue sur  $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$  faible : on a alors des résultats identiques au paragraphe I.

Théorème IV.1.  $Z_{\lambda K}$  est identique à la fermeture faible de  $Z_{\lambda U}$  dans  $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$  faible.

La démonstration est identique au théorème I.1 : on utilise la proposition IV.1 et le fait que  $\psi^n \longrightarrow \psi$  dans  $L^2(\Omega)$  fort implique

$$\|\psi\|_{L^2} = 1.$$

Théorème IV.2. Il existe un élément  $A^0 \in K$  tel que la fonction  $J$  définie par  $J(A) = I(\lambda_A, \psi_A)$ ,  $A \in K$ , vérifie

$$\inf_{A \in K} J(A) = \inf_{a \in U} J(a) = \inf_{a \in U_0} J(a) = \inf_{A \in K_1} J(A) = J(A^0)$$

On va donner deux exemples d'applications du théorème III.2.

Exemple I.1.  $J(A) = \frac{1}{2} \left( \alpha \int_{\Omega} |U_A - Z_d|^2 dx + \beta (\lambda_A - \lambda_d)^2 \right)$  où  $\lambda_d$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $Z_d \in L^2(\Omega)$ .

Calcul de la dérivée de la fonction coût.

On considère l'application  $F$  de  $(L^\infty(\Omega))^{N^2} \times (H_0^1(\Omega) \cap S^1) \times \mathbb{R}$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ ,  $F(A, U, \lambda) = -\text{div}(A \nabla U) - \lambda U$  et on applique le théorème des fonctions implicites en un point  $(A^0, U^0, \lambda^0)$  solution de (1).

$$F(A^0, U^0, \lambda^0) = 0.$$

La différentielle de l'application  $(U, \lambda) \rightarrow F(A, U, \lambda)$  est inversible, il résulte que l'application  $H : A \xrightarrow{H} (U, \lambda)$  est différentiable au voisinage de  $A^0$  et on a  $\frac{\partial H}{\partial A}(A^0)(\delta A) = (V, \lambda)$  où  $(V, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \cap (U^0)^\perp \times \mathbb{R}$  définis implicitement par :

$$(2) \quad \begin{cases} -\text{div}(A^0 \nabla V) - \lambda^0 V = \text{div}(\delta A \nabla U^0) + \Lambda U^0 \\ \text{où } \Lambda \text{ est défini par } \Lambda = - \int_{\Omega} \text{div}(\delta A \nabla U^0) U^0 \text{ soit} \end{cases}$$

$$\Lambda = \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla U^0)$$

On a :

$$J'(A^0)(\delta A) = \alpha \int_{\Omega} (U^0 - Z_d, V) dx + \beta(\lambda^0 - \lambda_d, \Lambda)$$

On définit  $W^0$  l'état adjoint comme la solution du problème de Fredholm

$$-\text{div}(A^0 \nabla W^0) - \lambda^0 W^0 = -(Z_d - (\int_{\Omega} (Z_d, U^0) dx) U^0)$$

$$W^0 \in (U^0)^{\perp} \quad (\text{orthogonalité dans } L^2(\Omega)).$$

Ceci a bien un sens car le 2ème membre est orthogonal à  $U^0$ , le 1<sup>ier</sup> membre de  $J'(A^0)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} [U^0 - \text{div}(A^0 \nabla W^0) - \lambda^0 W^0 - (\int_{\Omega} (Z_d, U^0) dx) \cdot U^0] V dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} [-\text{div}(A^0 \nabla W^0) V - \lambda^0 W^0 V] dx = \alpha \int_{\Omega} [(A^0 \nabla W^0, \nabla V) - \lambda^0 W^0 V] dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} [(A^0 \nabla \nabla, \nabla W^0) - \lambda^0 W^0 V] \end{aligned}$$

Par comparaison avec (2) on obtient :

$$= \alpha \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) + \Lambda U^0 W^0 dx = \alpha \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) dx$$

d'où

$$J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Omega} [\alpha (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) + \beta (\lambda^0 - \lambda_d) (\delta A \nabla U^0, \nabla U^0)] dx .$$

Exemple 2. On pose

$$\bar{U}(A) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} U(A) dx \quad J(A) = \int_{\Omega} |U(A) - \bar{U}(A)|^2 dx$$

On a :

$$J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Omega} (U(A) - \bar{U}(A)) V dx \quad V \text{ solution de } \textcircled{3} .$$

On définit  $W^0$  l'état adjoint solution du problème de Fredholm

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla W^0) - \lambda^0 W^0 = -(\bar{U}^0 - \int_{\Omega} U^0 \cdot \bar{U}^0 dx \cdot U^0) \\ W^0 \in (U^0)^\perp \end{cases}$$

Le même calcul que précédemment nous donne :

$$J'(A^0)(\delta A) = \int_{\Omega} (\delta A \nabla U^0, \nabla W^0) dx .$$

### C H A P I T R E III

#### METHODE DE DESCENTE POUR LA RECHERCHE DU CONTROLE OPTIMAL

##### Contenu

On donne dans ce chapitre des méthodes numériques de type "méthode du gradient" pour résoudre les problèmes de contrôle optimal posés au chapitre II.

On étudiera ce type de problème dans deux cas "semi-relaxé" et "relaxé".

##### Référence

Paragraphe I : B. Mercier, O. Pirronneau [16]

Paragraphe II : J.M. Dupuy [15].

Nous allons expliciter les algorithmes de descente pour le problème "relaxé" puis "semi-relaxé".

Puis nous donnerons les détails des méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles.

Dans les deux cas, le problème est discrétisé, on a fait une triangulation régulière de l'ouvert  $\Omega$ , la valeur du contrôle  $A$  est supposée constante sur chaque triangle.

I - Méthode de descente pour le problème "semi-relaxé"

Dans ce paragraphe on donne une méthode de descente où le contrôle reste dans l'ensemble  $U$ .

$$U = \{a \in L^\infty(\Omega) / \alpha \leq a(x) \leq \beta \text{ presque partout sur } \Omega\}$$

On se place dans le cas où le minimum existe et est isotrope [cf. Chapitre II - remarque II.4].

On étudie le problème :

$$\text{Minimiser } J : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_a - Z_d|^2, \quad Z_d \in L^\infty(\Omega),$$

où  $U_a$  est solution de :

$$\begin{cases} -\text{div}[a(x) \nabla U_a] = f & \text{dans } \Omega, \\ U_a \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

l'état adjoint est solution de :

$$\begin{cases} -\text{div}[a(x) \nabla W_a] = (U_a - Z_d) & \text{dans } \Omega, \\ W_a \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On a la condition d'optimalité :

$$\forall \delta a \in U, \quad J'(a)(\delta a) = - \int_{\Omega} \delta a (\nabla U_a, \nabla W_a).$$

On va utiliser une méthode de type "gradient avec contrainte" pour minimiser la fonctionnelle  $J$ .

Algorithme de descente : gradient simple

1. Initialisation : on se donne  $a^i \in U$
2. Résolution du système avec des éléments  $P_2$  conforme ;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a^i \nabla U_a^i) = f, \\ U_a^i \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

3. Calcul de  $J(a^i)$

4. Résolution des systèmes avec des éléments "P<sub>2</sub> mixte".

[cf. paragraphe III].

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a^i \nabla U_a^i) = f \text{ dans } \Omega, \\ U_a^i \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a^i \nabla W_a^i) = (U_a^i - Z_d) \text{ dans } \Omega, \\ W_a^i \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

5. Boucle sur le nombre des triangles.

- calcul de  $\nabla U_a^i$  et  $\nabla W_a^i$  au barycentre de chaque triangle.

6. On pose  $D_a^i = (\nabla U_a^i, \nabla W_a^i)$  : on calcule alors  $\lambda^i$  réalisant

$$\inf J(a^i + \lambda D_a^i), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. On calcule  $\tilde{a}^i = a^i + \lambda^i D_a^i$ , on tronque si nécessaire en posant :

$$\begin{aligned} a^{i+1} &= \alpha & \text{si} & \quad \tilde{a}^i < \alpha \\ a^{i+1} &= \tilde{a}^i & \text{si} & \quad \alpha \leq \tilde{a}^i \leq \beta \\ a^{i+1} &= \beta & \text{si} & \quad \tilde{a}^i > \beta \end{aligned}$$

8. On retourne en (2).

Algorithme de descente : "gradient conjugué"

On modifie la direction de descente  $D_a^i$  de la manière suivante :

pour la l<sup>ième</sup> itération  $D_a^i$  est inchangé, pour les autres on pose

$$D_a^i = D_a^i + \theta D_a^i \quad \text{où} \quad \theta = \frac{(D_a^i - D_a^{i-1}, D_a^i)}{(D_a^{i-1}, D_a^{i-1})}$$

## II - Méthode de descente pour le problème "relaxé"

Dans ce paragraphe on donne une méthode de descente où le contrôle  $A$  parcourt l'ensemble  $K$  des matrices admissibles. [cf. Chapitre I, paragraphe VI].

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \{A \in (L^\infty(\Omega))^4 \text{ symétriques dont les valeurs propres indexées} \\ \text{par ordre croissant vérifient : } \alpha \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2(x)} \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \beta \\ \text{presque partout dans } \Omega\} \end{array} \right.$$

[en fait on se restreindra à la moitié symétrique de l'ensemble  $K$ ].

On étudie le problème :

$$\text{minimiser } J : K \rightarrow \mathbb{R} \quad J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_A - Z_d|^2, \quad Z_d \in L^\infty(\Omega)$$

où  $U_A$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(AVU_A) = f \text{ dans } \Omega, \\ U_A \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

L'état adjoint est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(AVW_A) = (U_A - Z_d) \text{ dans } \Omega, \\ W_A \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

On a la condition d'optimalité :

$$\forall \delta A \in C_A(K) \quad J'(A)(\delta A) = - \int_{\Omega} (\delta A \nabla U_A, \nabla W_A).$$

On va utiliser une méthode de "type gradient avec projection" pour minimiser la fonctionnelle  $J$ .

On va donner le diagramme général de l'algorithme puis on explicitera ses différentes parties.

A. DIAGRAMME DE L'ALGORITHME DE DESCENTE.

1. Initialisation : on se donne une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et une matrice  $A^i \in K$  de valeurs propres  $\lambda_1^i, \lambda_2^i$  avec pour vecteurs propres  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

2. Résolution du système avec des "éléments  $P_2$  Conformés"

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^i \nabla U_A^i) = f & \text{dans } \Omega, \\ U_A^i \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

3. Calcul de  $J(A^i)$

4. Résolution des systèmes [cf. paragraphe III] avec des "éléments  $P_2$ -mixtes".

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^i \nabla U_A^i) = f & \text{dans } \Omega, \\ U_A^i \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^i \nabla W_A^i) = (U_A^i - Z_d) & \text{dans } \Omega, \\ W_A^i \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

5. 1<sup>ière</sup> boucle sur le nombre de triangles

a) calcul de  $\nabla U_A^i$  et  $\nabla W_A^i$  au barycentre de chaque triangle.

b) choix et calcul d'une direction admissible  $\delta A^i$

6. Calcul de  $\lambda^i$ , réalisant l'inf de  $J(A^i + \lambda \delta A^i)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

7. 2<sup>ème</sup> boucle sur les triangles.

a) calcul des valeurs propres et vecteurs propres de  $A^i + \lambda^i \delta A^i$

b) calcul de la "projection" de  $A^i + \lambda^i \delta A^i$ , on pose  $A^{i+1}$  cette projection.

8. On retourne en (2).

Maintenant nous allons développer les parties 5b et 7b de cet algorithme.

Explicitons tout d'abord le choix des directions admissibles.

B. CHOIX DES DIRECTIONS DE DESCENTE.

Le problème est le suivant : à chaque itération on cherche  $\delta A$  direction admissible telle que la forme linéaire  $\phi$ , définie par :  $\phi(\delta A) = (\delta A \nabla U, \nabla W)$  soit maximum.

On supposera  $\nabla U \neq 0$  et  $\nabla W \neq 0$  et on normalisera ces deux vecteurs.

Pour donner un sens à ce problème il faut le normaliser, cette direction dépend de la norme choisie sur l'espace des matrices  $2 \times 2$ . On écrit  $\delta A$  dans la base  $(e_1, e_2)$  de vecteurs propres de  $A$

$$\delta A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

soient  $vp_1, vp_2$  les valeurs propres de  $\delta A$ .

On munit  $C_A(K)$  de la norme hilbertienne  $\| \cdot \|_1$

$$\|\delta A\|_1^2 = a^2 + c^2 + 2b^2$$

on a :  $\|\delta A\|_1^2 = (a+c)^2 + 2[b^2 - ac] = (vp_1 + vp_2)^2 - 2vp_1 \cdot vp_2$ . Soit  $\|\delta A\|_1^2 = vp_1^2 + vp_2^2$ .

La direction de plus grande descente est alors définie par  $\delta A^0$  telle que :

$$(I) \quad \begin{cases} (\delta A^0 \nabla U, \nabla W) = \max_{\delta A \in \tilde{K}_1} (\delta A \nabla U, \nabla W), & \delta A^0 \in K_1 \\ \text{avec} \\ \tilde{K}_1 = \{ \delta A, \|\delta A\|_1 = 1 \} \quad \text{et} \quad \delta A \in C_A(K) \end{cases}$$

L'autre possibilité est de munir  $C_A(K)$  de la norme  $\| \cdot \|_2$  induite par les application linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\|\delta A\|_2 = \sup_{\|X\| \leq 1} |(\delta A X, X)| \quad (\text{en effet } \delta A \text{ est symétrique})$$

On a :

$$\|\delta A\|_2 = \sup(|v_{p_1}|, |v_{p_2}|).$$

On remarquera que ces deux normes sont équivalentes.

La direction de plus grande descente est alors définie par  $\delta A^1$  telle que :

$$(II) \quad \begin{cases} (\delta A^1 \nabla U, \nabla W) = \max_{\delta A \in \tilde{K}_2} (\delta A \nabla U, \nabla W), & \delta A^1 \in \tilde{K}_2 \quad \text{avec} \\ \tilde{K}_2 = \{\delta A, \|\delta A\|_2 = 1 \text{ et } \delta A \in C_A(K)\} \end{cases}$$

Comme on cherche seulement une direction de descente (pas nécessairement optimum) on peut utiliser une norme différente suivant les régions où l'on se trouve.

Dans tout ce qui suit on désignera par  $\lambda_1, \lambda_2$  les valeurs propres de  $A$  et  $(e_1, e_2)$  une base de vecteurs propres orthonormés.

Dans cette base  $A$  s'écrit :  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , on a

$$\frac{\nabla U}{\|\nabla U\|} = \cos \theta_1 e_1 + \sin \theta_1 e_2, \quad \frac{\nabla W}{\|\nabla W\|} = \cos \theta_2 e_1 + \sin \theta_2 e_2.$$

1<sup>ier</sup> cas : Cas où  $\lambda_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2}$ ,  $\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta$ .

On maximise suivant la condition (I).

$\phi$  peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(a, b, c) = a \cos \theta_1 \cos \theta_2 + b \sin(\theta_1 + \theta_2) + c \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

On cherche à maximiser  $\phi(a, b, c)$  sur l'ensemble  $\tilde{K}_1$ , suivant :

$$\tilde{K}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a^2 + c^2 + 2b^2 = 1, a - \frac{\lambda_1^2}{\alpha\beta} c \geq 0\}.$$

Si  $(a,b,c)$  est un optimum il existe alors  $\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  multiplicateur de Lagrange vérifiant :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \mu a \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) = 2\mu b \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \mu c \end{cases}$$

On calcule  $\mu$  :

$$a^2 + c^2 + b^2 = \frac{1}{\mu^2} \left[ \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \frac{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \right] = 1.$$

Soit  $\mu^2 = \frac{\cos^2 \theta + 1}{2}$  où  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ . On a alors :

$$\phi(a,b,c) = \frac{1}{\mu} \left[ \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \frac{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \right] = \mu$$

d'où on tire  $\mu > 0$ . [car  $\sup \phi > 0$ ].

Si la condition  $a - \frac{\lambda_1^2}{\alpha\beta} c \geq 0$  est vérifiée on peut choisir la direction définie par :

$$(DA_1) \quad \begin{cases} a = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\mu} \\ b = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\mu} \\ c = \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\mu} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}}$$

Si la condition  $a - \frac{\lambda_1^2}{\alpha\beta} c \geq 0$  n'est pas vérifiée, on est ramené à chercher le maximum de  $\phi$  sur l'ellipse :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + c^2 = 1 \\ a - \frac{\lambda_1^2}{\alpha\beta} c = 0 \end{cases}$$

On pose :  $\gamma = \frac{\lambda_1^2}{\alpha\beta}$  en éliminant le paramètre  $a$  on obtient

$$\phi(a,b,c) = \psi(b,c) = (\gamma \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)c + b \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Si  $(b,c)$  est un optimum il existe alors  $\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  multiplicateur de Lagrange vérifiant :

$$\begin{cases} \gamma \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \mu(1+\gamma^2)c \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) = 2\mu b \end{cases}$$

On obtient alors  $\mu^2 = \frac{(\gamma \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)^2}{1 + \gamma^2} + \frac{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{2}$

On a alors :

$$\psi(b,c) = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{(\gamma \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)^2}{1 + \gamma^2} + \frac{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right]$$

soit  $\psi(b,c) = \mu$ , d'où on tire  $\mu > 0$  [car  $\sup \phi$  est  $> 0$ ].

La direction optimum est alors définie dans ce cas par

$$(DB_1) \begin{cases} c = \frac{\gamma \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2}{(1 + \gamma^2)\mu} \\ b = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{2\mu} \\ a = \gamma c \\ \text{avec } \mu = \left( \frac{(\gamma \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)^2}{1 + \gamma^2} + \frac{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right)^{1/2} \end{cases}$$

2ème cas : Cas où  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ , ou  $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta$

On maximise suivant la condition (II).

Soit  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$

On fait le même calcul qu'au chapitre II, paragraphe I.C, on a

$$\phi(\delta A) = [\cos \theta + (vp_1 - 1) \cos \theta'_1 \cos \theta'_2] \text{ où l'on a posé :}$$

$$\theta = \text{angle } (\nabla U, \nabla W)$$

$$\theta'_1 = \text{angle } (\nabla U, e)$$

$$\theta'_2 = \text{angle } (\nabla W, e)$$

avec  $e$  un vecteur propre unitaire de  $\delta A$  correspondant à la valeur propre  $vp_1$ , l'autre étant égale à 1. Etant donné l'ensemble de contrôle choisi la condition (II) s'écrit alors :

$$\text{maximiser } \phi(vp_1, \theta'_1) = [\cos \theta + (vp_1 - 1) \cos \theta'_1 \cos (\theta + \theta'_1)]$$

$$\text{avec } vp_1 \in \left[\frac{\alpha}{\beta}, 1\right] \quad \text{et } \theta'_1 \in [0, 2\pi].$$

La direction optimum  $\delta A^1$  choisie est alors définie par :

$$(DA_\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \delta A^1 e' = e' \\ \delta A^1 e = \frac{\alpha}{\beta} e \end{array} \right. \quad \text{avec } (e, e') \text{ base orthonormée de vecteurs propres}$$

où  $e'$  est la bissectrice intérieure de  $(\nabla U, \nabla W)$ .

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \beta$$

Le même calcul que précédemment nous donne la direction optimum  $\delta A^1$  définie par :

$$(DA_\beta) \left\{ \begin{array}{l} \delta A^1 e' = -e' \\ \delta A^1 e = -\frac{\alpha}{\beta} e \end{array} \right. \quad \text{avec } (e, e') \text{ base orthonormée de vecteurs}$$

propres où  $e$  est la bissectrice intérieure de  $(\nabla U, \nabla W)$ .

Pour la condition  $(DA_\alpha)$  on obtient :

$$\phi(\delta A^1) = \left[ \cos \theta \left( \frac{\beta + \alpha}{2\beta} \right) + \frac{\beta - \alpha}{2\beta} \right]$$

Pour la condition  $(DA_\beta)$  on obtient :

$$\phi(\delta A^1) = \left[ \cos \theta \left( \frac{-\alpha-\beta}{2\beta} \right) + \frac{\beta-\alpha}{2\beta} \right]$$

3ème cas : cas où  $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2} < \lambda_1$  ,  $\alpha < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \beta$ .

Dans ce cas on va déterminer une direction suivant les conditions

(I) et (II).

- Pour la condition (I) on a une maximisation sur l'ellipsoïde complète et on obtient une direction optimum définie par  $(DA_1)$ .

- Pour la condition (II) on refait les mêmes calculs qu'au 2ème cas et on obtient puisque le choix de  $vp_1$  est libre,  $vp_1 \in [-1,1]$ , la direction optimum suivante :

$$(DA_2) \quad \begin{cases} \delta A^1 e' = e' \\ \delta A^1 e = -e \quad \text{avec } (e, e') \text{ base orthonormée de vecteurs propres où} \\ e' \text{ est la bissectrice intérieure de } (\nabla U, \nabla W) \end{cases}$$

Dans ce cas on obtient :

$$\phi(\delta A) = \left[ \cos \theta + 2 \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right) \right] = 1$$

On remarquera que pour les directions définies par  $(DA_1)$ ,  $(DA_\alpha)$ ,  $(DA_\beta)$   $\phi(\delta A)$  est maximum lorsque  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

### C. CALCUL DE LA PROJECTION.

On sait d'après le lemme II.2 que  $K$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^3$ , on peut alors définir la "projection" de  $A + \tilde{\lambda} \delta A$  [où  $\tilde{\lambda}$  vérifie  $J(A + \tilde{\lambda} \delta A) = \inf J(A + \lambda \delta A)$ ] sur l'ensemble  $K$  pour la norme hilbertienne des matrices. Il y a deux situations possibles :

1<sup>ier</sup> cas :  $(A + \tilde{\lambda}\delta A)(x) \notin K$ , on définit la "projection" de  $A + \tilde{\lambda}\delta A$  de la manière suivante : soit  $B = A + \tilde{\lambda}\delta A$ ,  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  les valeurs propres de  $B$  ; on définit alors  $\tilde{A}$  "projection" de  $B$  comme étant la matrice de  $K_1$  [cf. chapitre I, paragraphe VI] ayant pour valeurs propres la projection dans  $\mathbb{R}^2$  de  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  sur  $\tilde{K}_1$  où l'on a :

$$\tilde{K}_1 = \{(\lambda_2, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2 / \lambda_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2}, \alpha \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \beta\}$$

et pour vecteurs propres ceux de  $B$ .

Cette "projection" n'est pas en général équivalente à la projection pour la norme hilbertienne. En effet, soit  $\bar{A} \in K_1$ , ayant pour valeurs propres celles de  $\tilde{A}$ , dans la base des vecteurs propres de  $B$   $\bar{A}$  s'écrit,  $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ .

On a :

$$\|\tilde{A}-B\|_1^2 = [\Lambda_1 - \tilde{\lambda}_1^2] + [\Lambda_2 - \tilde{\lambda}_2^2]^2$$

où  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  désignent les valeurs propres de  $\tilde{A}$ .

D'autre part, on a :  $\|\bar{A}-B\|_1^2 = \|A\|_1^2 + \|B\|_1^2 - 2(A,B)_1$  soit

$$\|\bar{A}-B\|_1^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 - 2[a\Lambda_1 + d\Lambda_2].$$

On n'a pas en général

$$\|\tilde{A}-B\|_1^2 \leq \|\bar{A}-B\|_1^2.$$

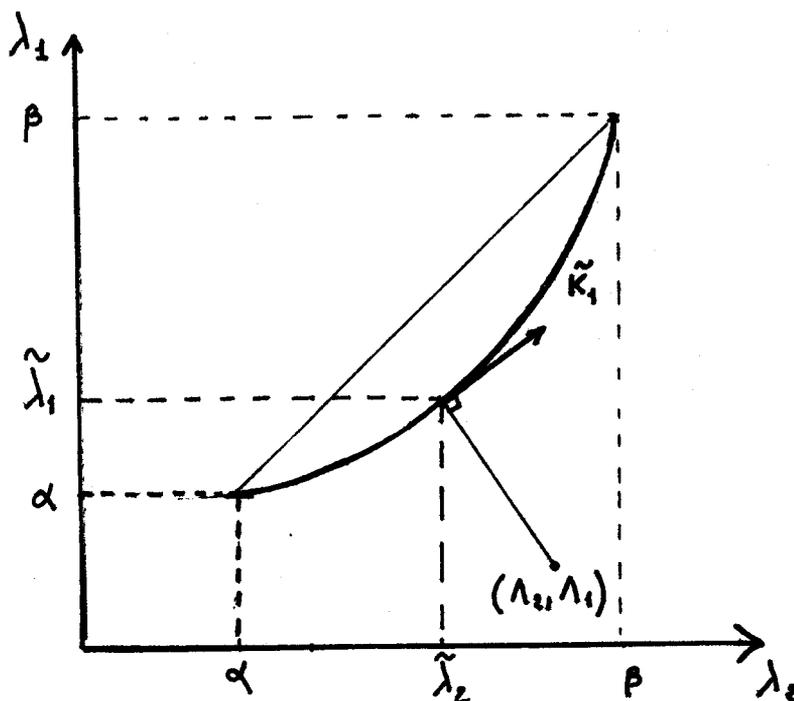
On a vu que l'on se limitait en fait à une "projection" sur une moitié symétrique du convexe  $K_1$ .

D'un point de vue pratique on est ramené à résoudre une équation du 4<sup>ème</sup> degré pour la projection de  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  sur  $\tilde{K}_1$ .

$$\lambda_1^4 - \Lambda_1 \lambda_1^3 + \lambda_1 [\alpha \cdot \beta (\alpha \beta - \Lambda_2)] - (\alpha \beta)^2 = 0.$$

Cette équation a deux solutions réelles l'une positive, l'autre négative.

On choisit la racine positive  $\tilde{\lambda}_1$  ; si  $\tilde{\lambda}_1$  est supérieure à  $\beta$  on pose  $\tilde{\lambda}_1 = \beta$ , si  $\tilde{\lambda}_1$  est inférieure à  $\alpha$  on pose  $\tilde{\lambda}_1 = \alpha$ .



2ème cas :  $B(x) = (A + \tilde{\lambda} \delta A)(x) \in K$ , on a deux choix possibles :

- on reste à l'intérieur de  $K$ ,  $\tilde{A} = B$
- on projette  $B$  sur le bord de  $K$ ,  $K_1$ , de la même manière que dans le 1<sup>ier</sup> cas.

Remarque II.1. On peut initialiser le problème en choisissant  $A^i \in K$

avec

$$\alpha < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2^i} < \lambda_1^i < \lambda_2^i < \beta.$$

On est amené à choisir comme direction  $\delta A^i$  optimum celle définie par  $(DA_1)$  ou  $(DA_2)$ .

Bien que la direction  $(DA_2)$  rende maximum  $(\delta A^i \nabla U^i, \nabla W^i)$  on ne l'utilisera pas en effet on a :  $\text{Trace}(A^i + \lambda^i \delta A^i) = \text{Trace}(A^i) + \lambda^i \text{Trace}(\delta A^i) = \text{Trace}(A^i)$ , d'où les valeurs propres de  $A^i + \lambda^i \delta A^i$  sont situées sur une droite

dépendant uniquement de l'initialisation  $A^i$ , et si par exemple on prend  $A^i$  isotrope  $A^i = \frac{\alpha+\beta}{2}$ , la "projection" de  $(A^i + \lambda^i \delta A^i)$  sera la même quelque soit le problème envisagé.

Remarque II.2. On utilisera des directions de descente définies suivant des normes différentes pour chaque région de  $K_1$ .

$$(DA_1) \text{ ou } (DB_1) \text{ pour } \alpha < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda_2} = \lambda_1 < \lambda_2 < \beta$$

$$(DA_\alpha) \text{ et } (DA_\beta) \text{ pour } \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \beta.$$

D'un point de vue numérique on choisira les direction  $(DA_\alpha)$  ou  $(DA_\beta)$  lorsque  $A^i$  est dans un voisinage de  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  et on essaiera de voir l'influence de ce choix dans les résultats numériques.

Remarque II.3. Une difficulté générale des méthodes de descente est le choix de la valeur initiale du contrôle.

Si on initialise l'algorithme avec  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , respectivement  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ , sur  $\Omega$  tout entier, les valeurs propres de la projection de  $A + \tilde{\lambda} \delta A$  (où  $\delta A = DA_\alpha$  respectivement  $\delta A = DA_\beta$ ) sont identiques sur  $\Omega$  tout entier (en effet  $A$  étant isotrope et  $\delta A$  ayant des valeurs propres fixées, les valeurs propres de  $A + \tilde{\lambda} \delta A$  sont identiques).

Ce type d'initialisation "homogénise" les valeurs propres du contrôle  $A$  à la première itération de l'algorithme.

### III - Méthodes numériques utilisées

1. Pour calculer  $U_a^i$  à l'étape (2) des deux algorithmes on a utilisé des éléments finis triangulaires d'interpolation d'ordre 2 conformes : la valeur de  $U_a^i$  est calculée aux 3 sommets des triangles ainsi qu'au milieu de chaque arête.

2. Pour calculer  $\nabla U_a^i$  et  $\nabla W_a^i$  à l'étape (3) des deux algorithmes on a utilisé une formulation mixte pénalisée, cf. Dupuy [15].

Rappel. Soit le problème :

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla U) = f & \text{dans } \Omega \\ U \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

La formulation variationnelle pénalisée du problème (1) est :

Déterminer  $U \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (A\nabla U, \nabla v) + \varepsilon \int_{\Omega} Uv = \int_{\Omega} fv & \varepsilon > 0 \end{cases}$$

La formulation mixte du problème (2) est :

Déterminer  $(p, U) \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  solution de :

$$(3) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (\tilde{A}p, q) + \int_{\Omega} U \operatorname{div} q = 0 & \forall q \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ \int_{\Omega} v \operatorname{div} p - \varepsilon \int_{\Omega} Uv = - \int_{\Omega} fv & \forall v \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

où  $\tilde{A} =$  matrice inverse de  $A$

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{q \in (L^2(\Omega))^N, \operatorname{div} q \in L^2(\Omega)\}$$

(3) admet une solution unique  $(U, p)$  où  $U$  est solution de (2) et  $p = A\nabla U$ .

Cette méthode a été utilisée avec un élément triangulaire d'interpolation d'ordre 2 qui a été testé par J.M. Dupuy dans sa thèse.

Nous avons testé ici la différence de précision pour le calcul du gradient entre un élément  $p_2$  conforme et un élément  $p_2$  mixte.

Dans le cas du  $p_2$  conforme le gradient sera calculé par interpolation sur chaque triangle.

Dans le cas du  $p_2$  mixte le gradient sera calculé après récupération des degrés de libertés "internes" sur chaque triangle.

La précision des deux méthodes a été testée sur le problème :

$$\begin{cases} -\Delta U = f & \text{dans } \Omega \\ U \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ .$$

Nous avons calculé l'erreur moyenne relative

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^{NT} \frac{1}{2} \left[ \frac{|X(a^i) - X_n(a^i)|}{|X(a^i)|} + \frac{|Y(a^i) - Y_n(a^i)|}{|Y(a^i)|} \right] \right) / NT,$$

où NT désigne le nombre total de triangles  $X(a^i)$ ,  $Y(a^i)$  et  $X_n(a^i)$ ,  $Y_n(a^i)$  respectivement valeur exacte et valeur approchée du gradient au barycentre de chaque triangle.

Fonction test choisie  $U = XY(X-1)(Y-1)$

Nombre de triangles	Erreur $P_2$ -mixte	Erreur $P_2$ -conforme
72	1.8 $10^{-2}$	2.9 $10^{-2}$
162	1.4 $10^{-2}$	2.2 $10^{-2}$

Fonction test choisie  $U = y(y-1)(x-1) \text{Log}(1+x^2)$

Nombre de triangles	Erreur $P_2$ -mixte	Erreur $P_2$ -conforme
72	3.7 $10^{-2}$	6.15 $10^{-2}$
162	2.8 $10^{-2}$	4.7 $10^{-2}$

3. La recherche du  $\lambda$  réalisant l'inf du coût  $J$  dans une direction utilise une méthode de dichotomie pour localiser le minimum suivie d'une interpolation parabolique.

Pour calculer la solution  $U$  dans la recherche de  $\lambda$  on a utilisé des éléments finis triangulaires d'interpolation d'ordre 1 conforme, la valeur de  $U$  est calculée aux 3 sommets des triangles.

A chaque étape de l'algorithme la méthode de recherche de l'inf dans une direction sera en général initialisée avec la valeur du  $\lambda$  calculé à l'itération précédente.

C H A P I T R E I V

R E S U L T A T S N U M E R I Q U E S

Contenu

Les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont une application directe des algorithmes du chapitre précédent.

I - Etude numérique des cas où le minimum est isotrope

Les cas étudiés sont académiques, c'est-à-dire que

$$J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_A - ZD|^2, \quad \text{où } U^0 = ZD$$

est solution du problème suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} -\text{div}(a^0 I \nabla U^0) = 10 & \text{dans } \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ , \\ U^0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

où,  $a^0 I = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  suivant les régions de  $\Omega$ . Donc le minimum de  $J(A)$  est zéro et l'optimum  $a^0$ .

Le problème étudié est alors :

$$\text{Minimiser } J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_A - ZD|^2$$

où  $U_A$  est solution du problème :

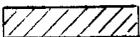
$$(2) \quad \begin{cases} -\text{div}(A \nabla U_A) = 10 & \text{dans } \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ , \\ U_A \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } \inf_{A \in K} J(A) = \inf_{a \in U} J(a) = \inf_{a \in U_0} J(a) = J(a^0)$$

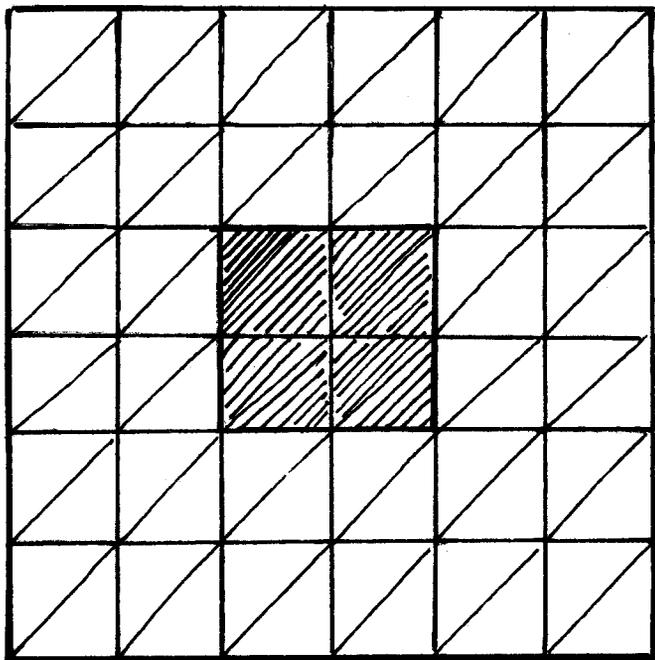
On va donner maintenant des configurations géométriques différentes à  $a^0$  l'optimum que l'on choisit.

Pour cela  $]0,1[ \times ]0,1[$  est maillé en 72 triangles rectangles isocèles de côté  $1/6$ . La solution  $ZD$  est calculée avec des éléments finis "P<sub>2</sub> conforme" et "P<sub>1</sub> conforme".

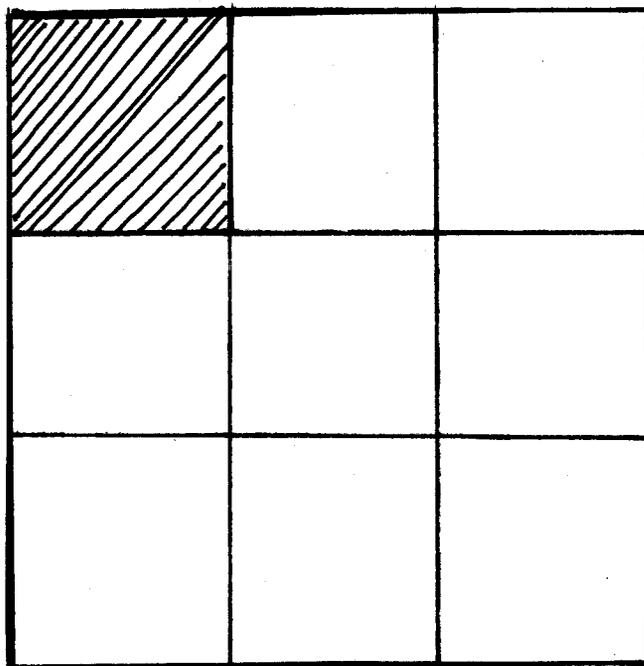
On a choisi  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ .

Zone  :  $A^0 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  , ailleurs  $A^0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

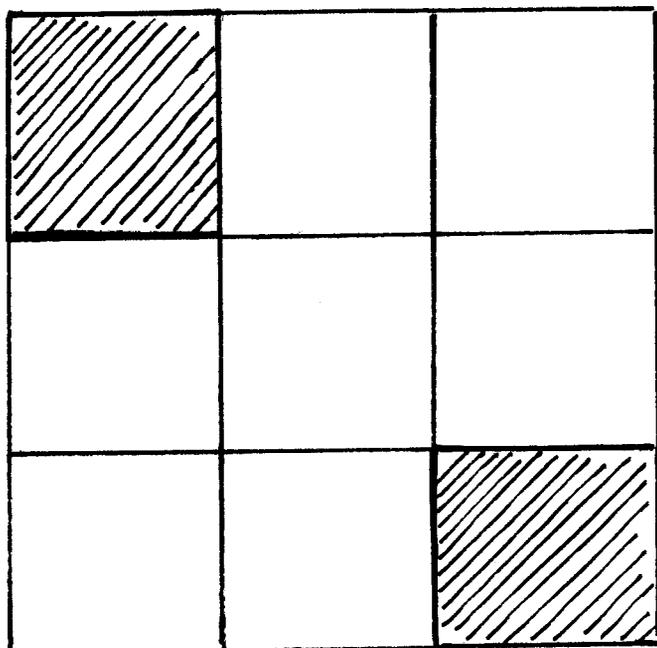
ZD<sup>1</sup>



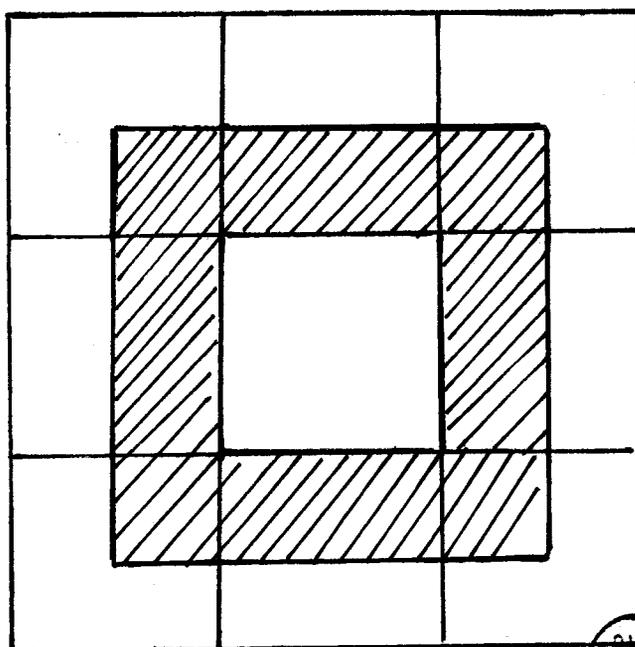
ZD<sup>2</sup>



ZD<sup>3</sup>



ZD<sup>4</sup>



Avant d'étudier le problème de contrôle nous avons calculé les solutions des deux problèmes :

$$\begin{cases} -\text{div}(aIVU_a) = 10 & \text{dans } \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ \\ U_a \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Lorsque  $a = \alpha$  ou  $a = \beta$  sur  $\Omega$  tout entier, et on a comparé les solutions obtenues  $ZD^\alpha$  et  $ZD^\beta$  avec celles calculées précédemment avec les différents choix de  $a^0$  ( $i = 1,2,3,4$ ) ; Nous voulons ainsi mesurer numériquement la sensibilité de la solution par rapport aux coefficients de  $A$  ; on a alors calculé :

$$\|ZD^\alpha - ZD^i\|_{L^2(\Omega)} = L^{2\alpha}$$

$$\|ZD^\beta - ZD^i\|_{L^2(\Omega)} = L^{2\beta}$$

$$L^{\infty\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|ZD^\alpha(a_i) - ZD^i(a_i)|}{|ZD^\alpha(a_i)|}$$

où  $ZD^\alpha(a_i)$  respectivement  $ZD^i(a_i)$  représente la valeur de  $ZD^\alpha$  et  $ZD^i$  au noeud  $a_i$ ,  $N$  représente le nombre de noeuds. (On définit de même  $L^{\infty\beta}$ ).

[On a tracé les courbes  $ZD^i$ ,  $i = 1,4$ ,  $ZD^\alpha$ ,  $ZD^\beta$  dans le plan  $Y = X$ , cf. figure 1, figure 4].

	$ZD^1$	$ZD^2$	$ZD^3$	$ZD^4$
$L^{2\alpha}$	$9.2 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$5. \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$
$L^{2\beta}$	0.17	0.15	0.13	0.13
$L^{\infty\alpha}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$8.3 \cdot 10^{-2}$	0.16	$8.2 \cdot 10^{-2}$
$L^{\infty\beta}$	0.99	0.83	0.67	0.87

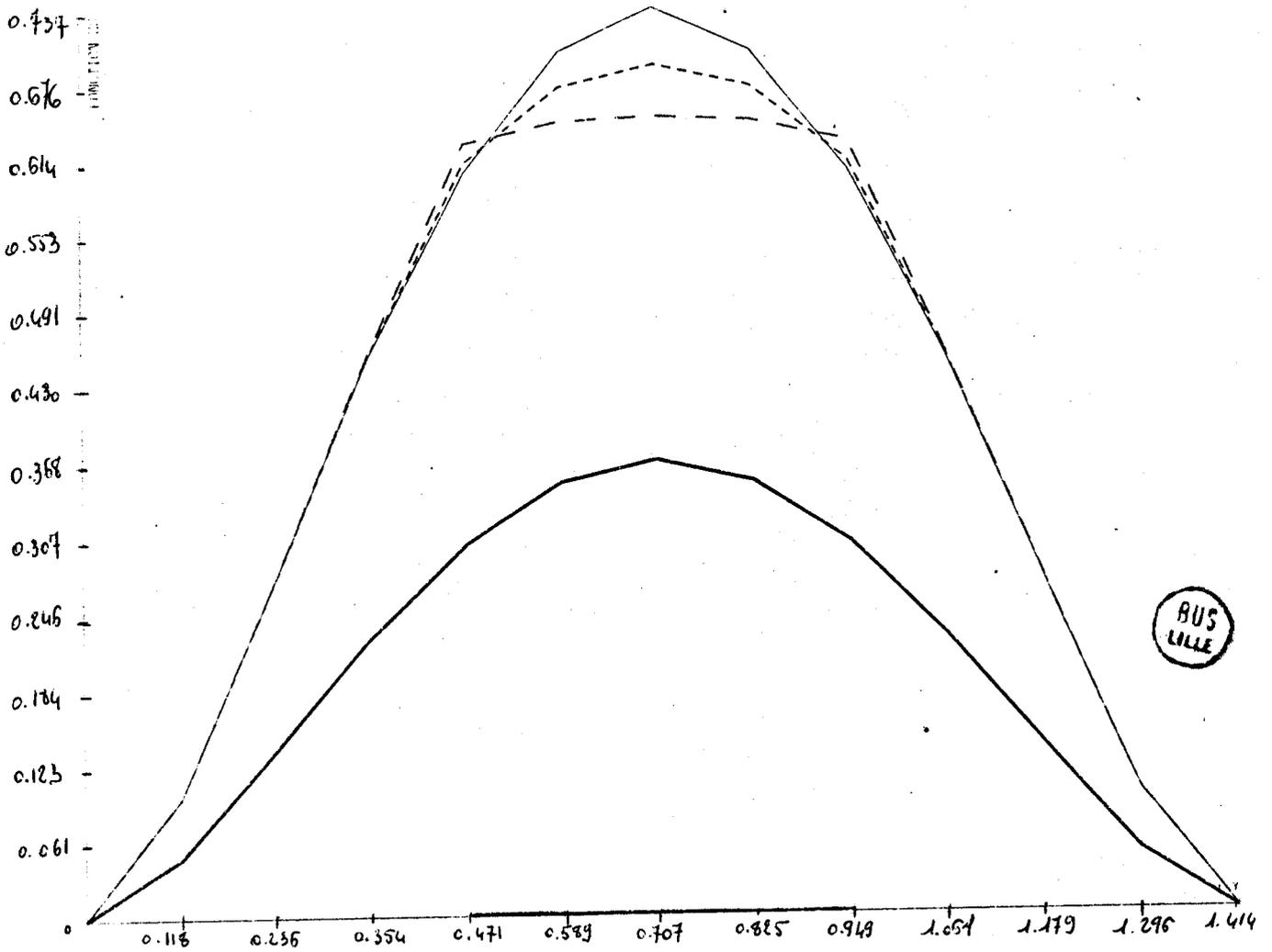
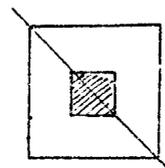


figure 1

- $U^{\circ} = Z D^{\beta}$   $\beta=2$
- -  $U^{\circ} = Z D_{1*}$
- · -  $U^{\circ} = Z D_1$
- $U^{\circ} = Z D^{\alpha}$   $\alpha=1$



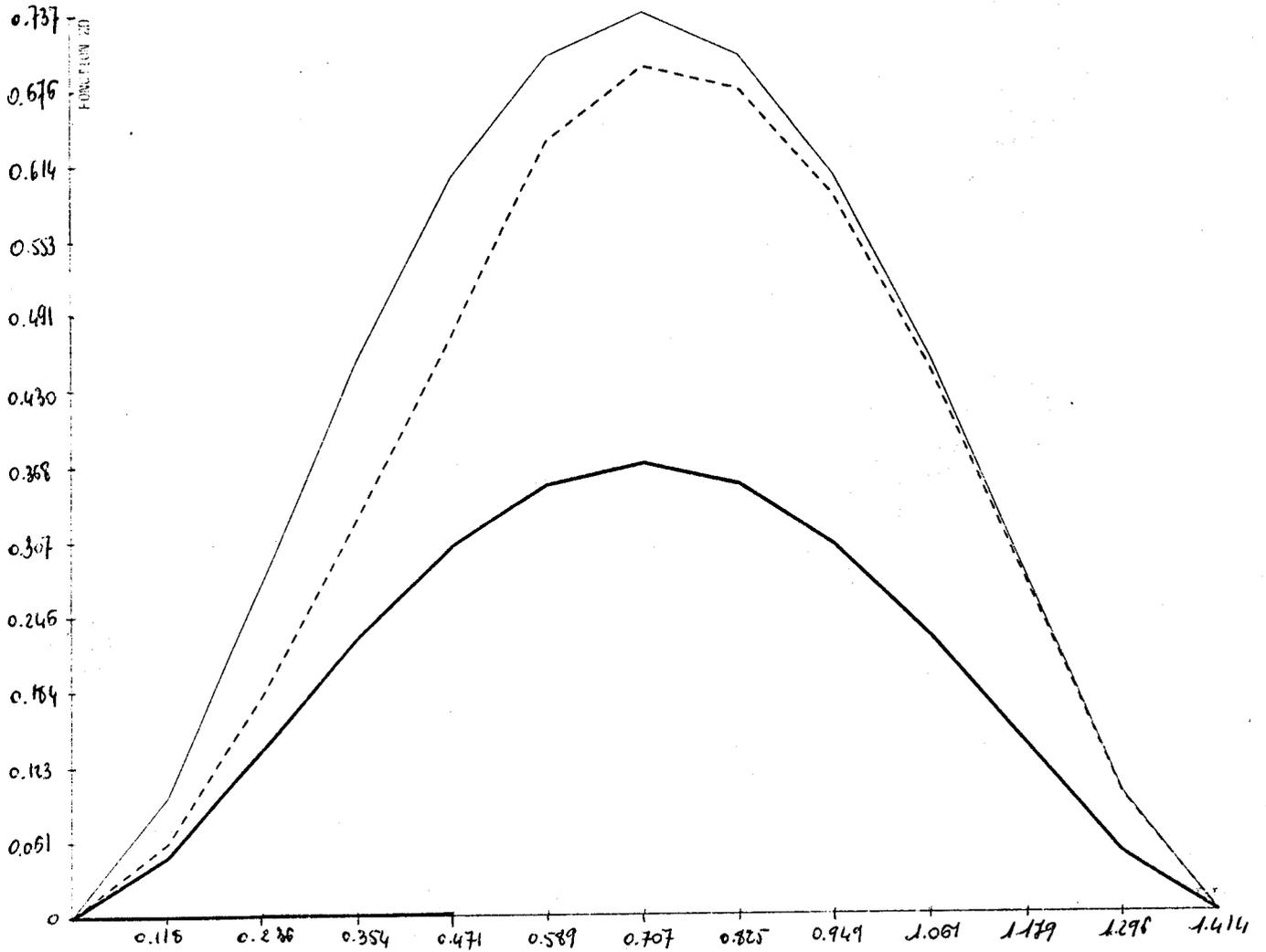
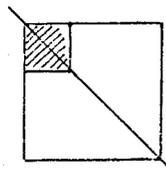


figure 2

- $U^{\circ} = Z D_2^{\beta}$        $\beta=2$
- - -  $U^{\circ} = Z D^{\alpha}$
- $U^{\circ} = Z D^{\alpha}$        $\alpha=1$



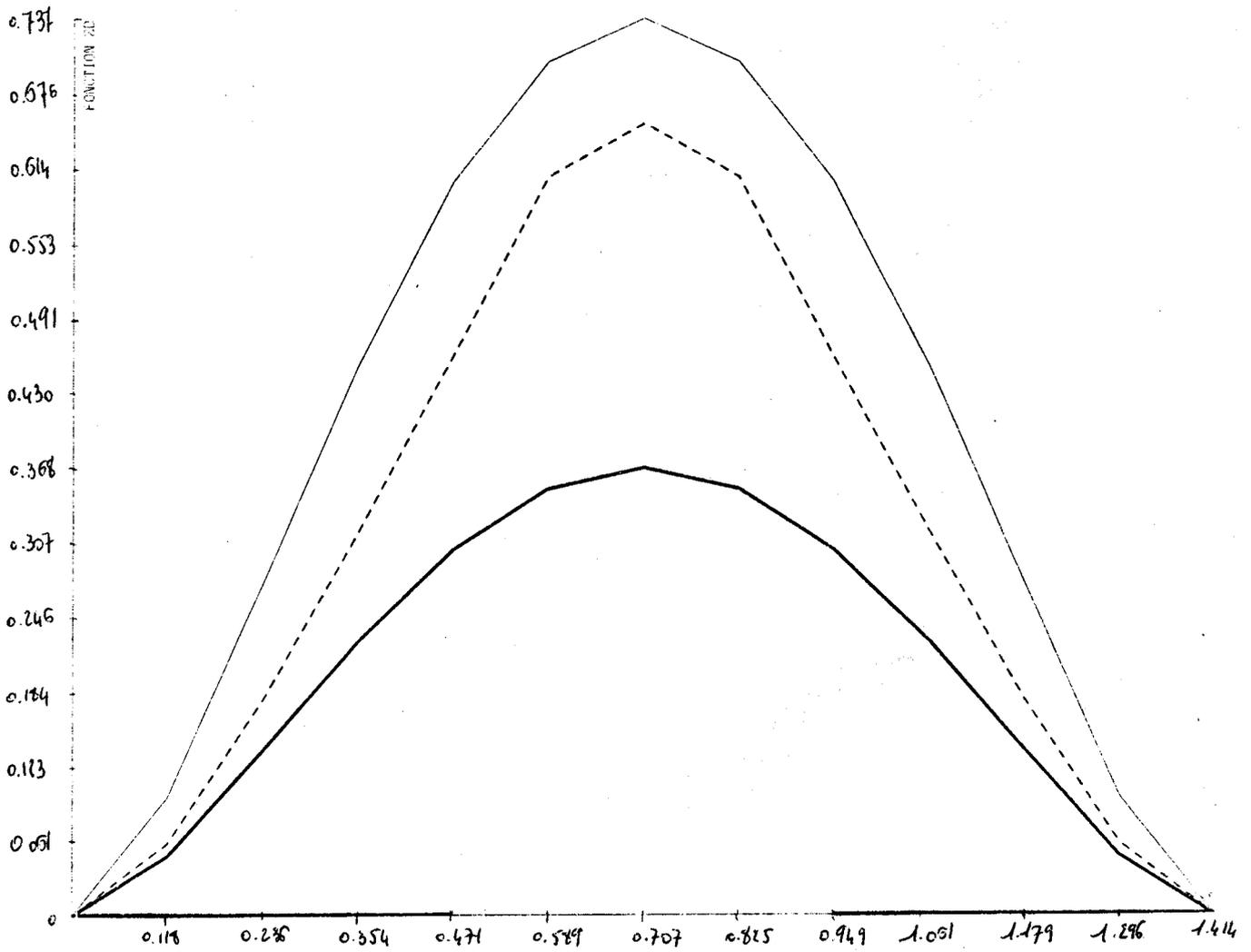
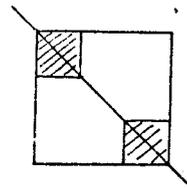


figure 3

———  $U^{\circ} = Z D_3^{\beta}$        $\beta=2$   
 - - - -  $U^{\circ} = Z D_3^{\alpha}$   
 ———  $U^{\circ} = Z D^{\alpha}$        $\alpha=1$



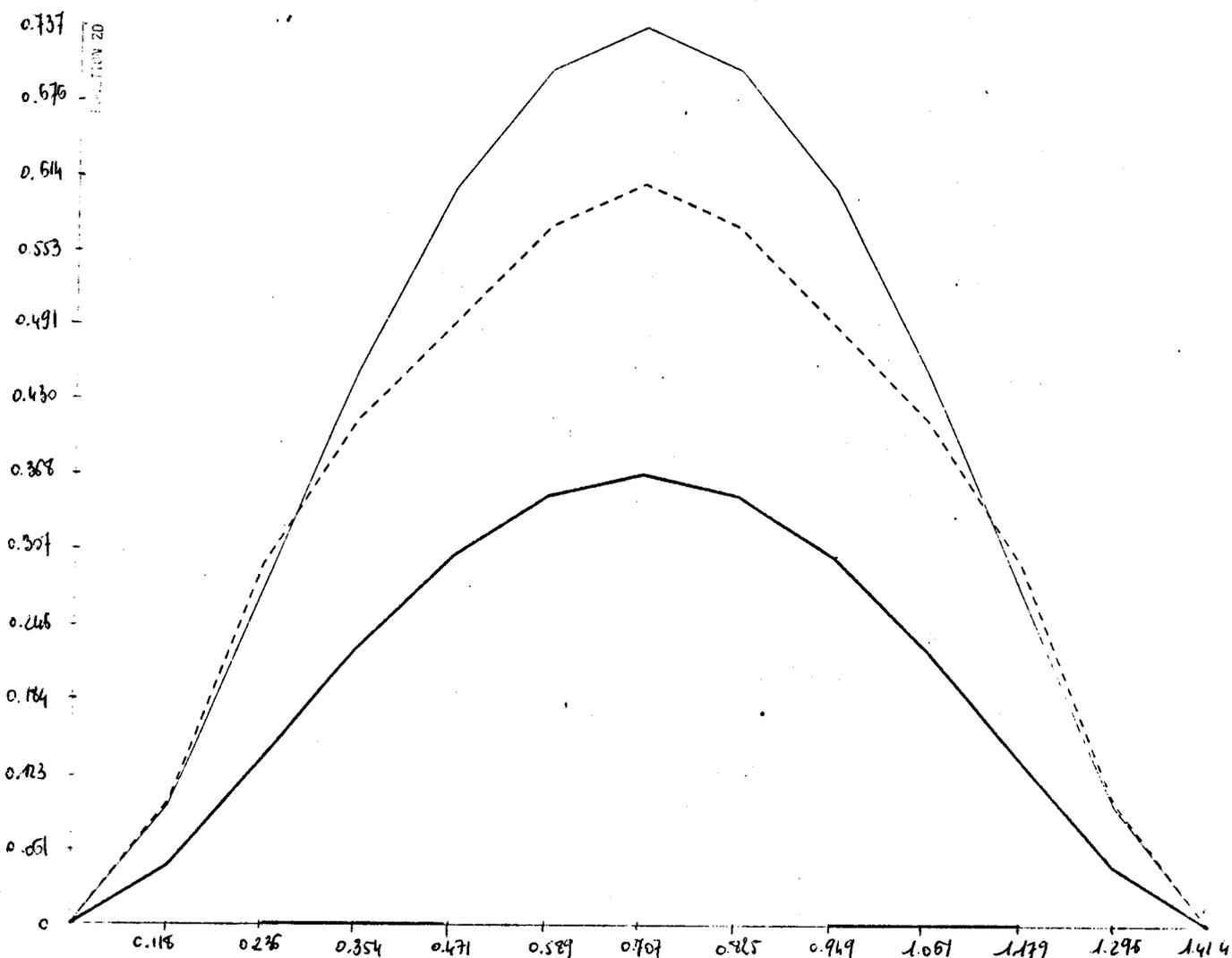
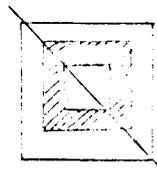


figure 4

———  $U^\circ = ZD^\beta$   
 - - -  $U^\circ = ZD^4$   
 ———  $U^\circ = ZD^\alpha$

$\beta = 2$

$\alpha = 1$



On remarquera que pour  $ZD^1$ ,  $L^{\infty\alpha}$  est très faible, la configuration géométrique de l'optimum  $a^0$ , c'est-à-dire la zone où  $a^0 = \beta$ , modifie très peu  $ZD^1$  par rapport à  $ZD^\alpha$ .

1. Etude numérique des cas où le minimum est  $U^0 = ZD^i$ ,  $i = 1,4$ .

. On se propose de comparer les deux méthodes "relaxée" et "semi-relaxée" dans le cas où le minimum est  $U^0 = ZD^i$ ,  $i = 1,4$ .

. Dans les quatre cas la valeur de  $A$  est initialisée à  $\beta$  sur  $\Omega$  tout entier.

. On a tracé les variations de  $J$  en fonction du nombre des itérations. [cf. Courbe 1... courbe 4 dans le cas relaxé et courbe  $1_s$  ... courbe  $4_s$  dans le cas semi-relaxé].

. D'autre part on a donné dans un tableau à la  $i$ ème itération les valeurs de  $\lambda_2^i$  et  $a^i$ , sur chaque triangle dans les deux cas, méthode "relaxée" et "semi-relaxée" : la valeur de  $\lambda_2^i$  (respectivement de  $a^i$ ) est lue en haut à gauche de chaque tableau. [cf. Tableau 1... tableau 4 dans le cas relaxé et Tableau  $1_s$ ... tableau  $4_s$  dans le cas semi-relaxé].

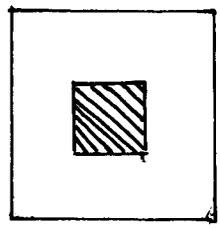
L'erreur moyenne relative donnée a été définie par :

$$\left( \sum_{i=1}^{NT} \frac{|a^i - a_i^0|}{|a^i|} \right) / NT, \text{ où } a^i \text{ (respectivement } a_i^0) \text{ désigne la valeur approchée}$$

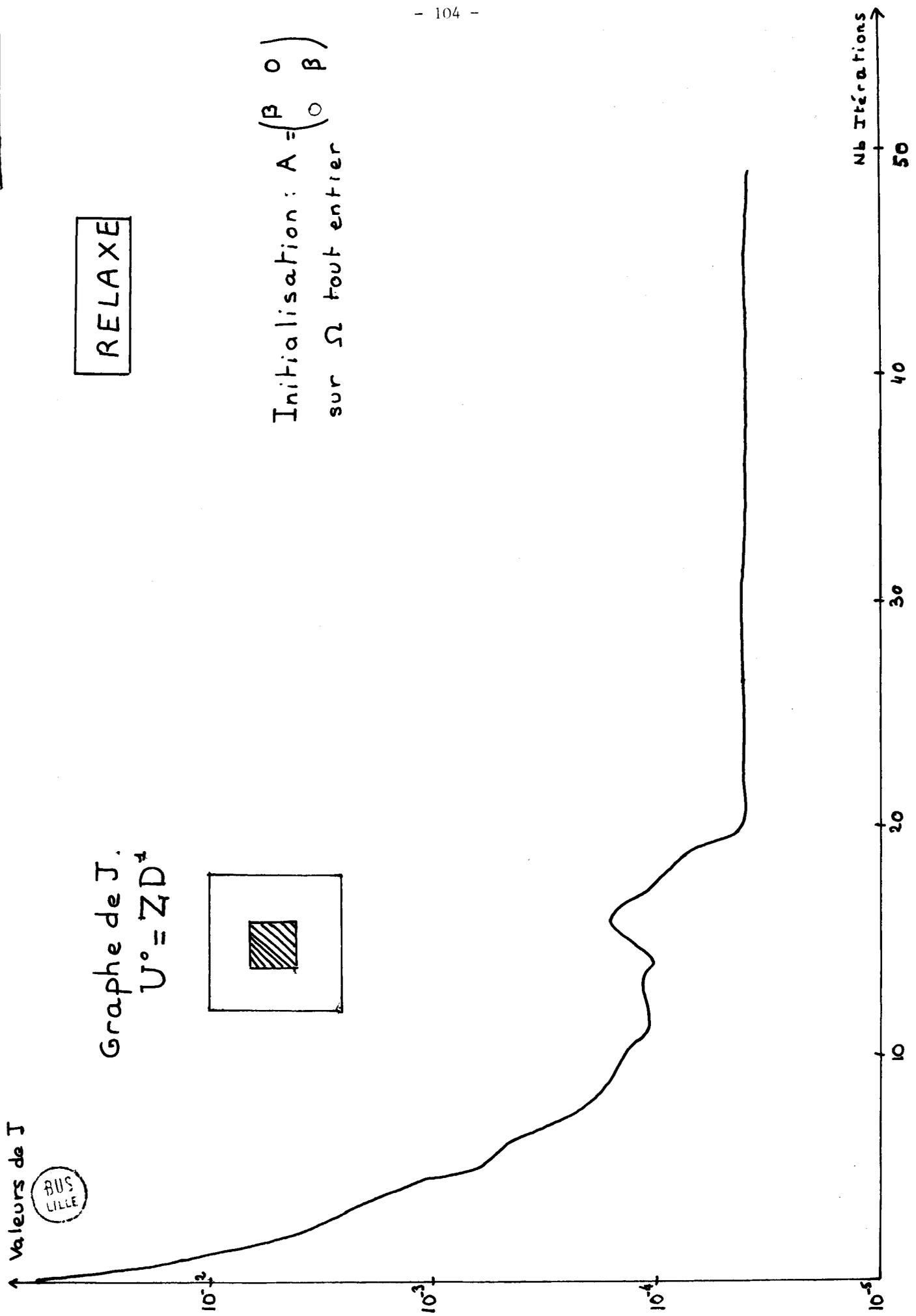
(respectivement la valeur exacte de  $a^0$ ) dans le  $i$ ème triangle, et  $NT$  le nombre de triangles.

RELAXE

Graphe de J.  
 $U^0 = ZD^4$



Initialisation:  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$   
sur  $\Omega$  tout entier



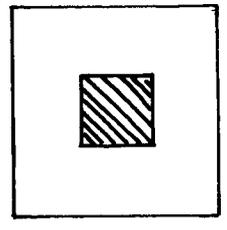
BUS LILLE



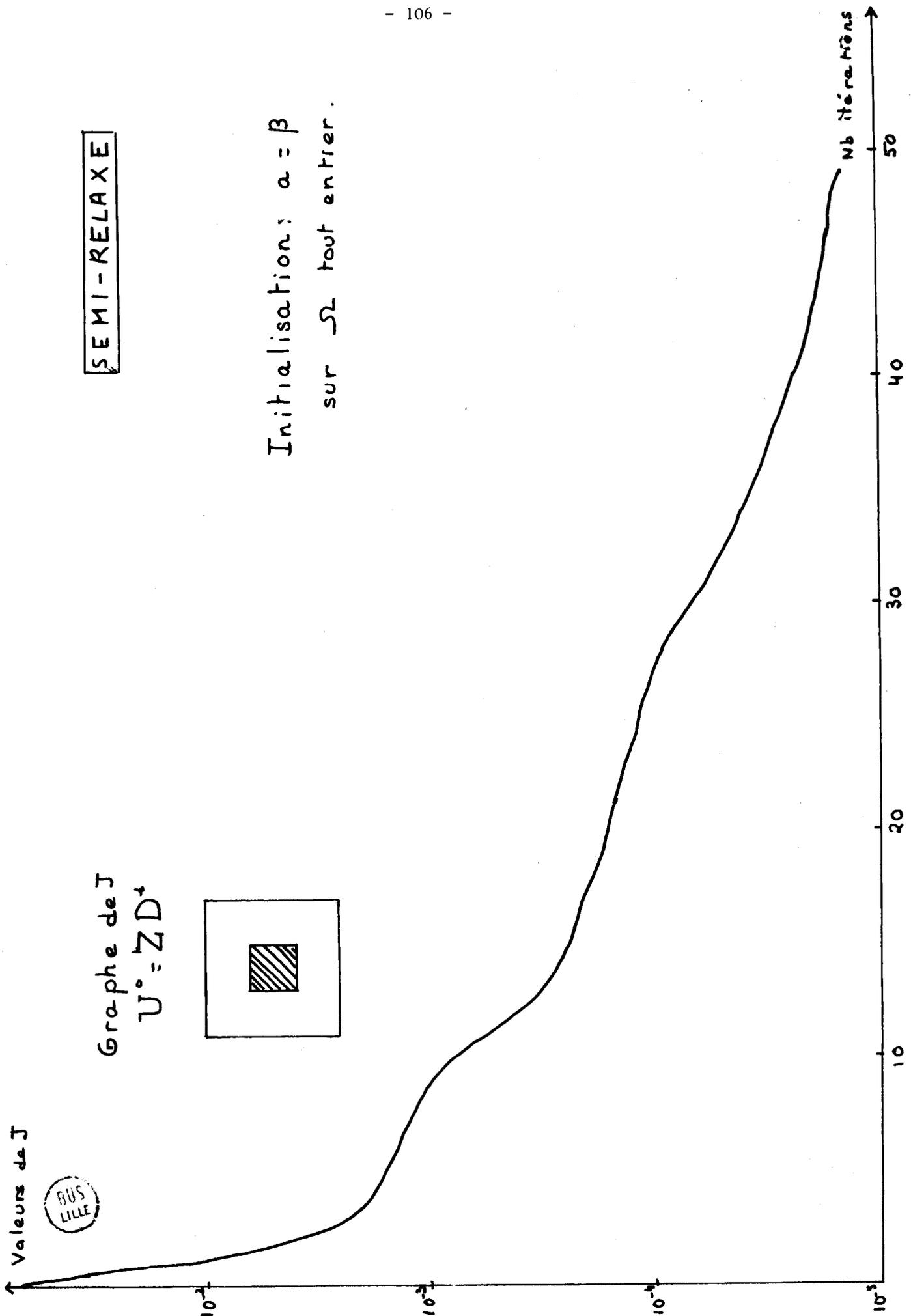
SEMI-RELAXE

Initialisation:  $a = \beta$   
sur  $\Omega$  tout entier.

Graphe de J  
 $U^0 = ZD^+$



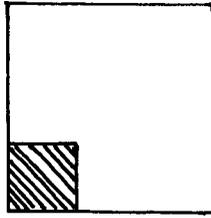
Valeurs de J





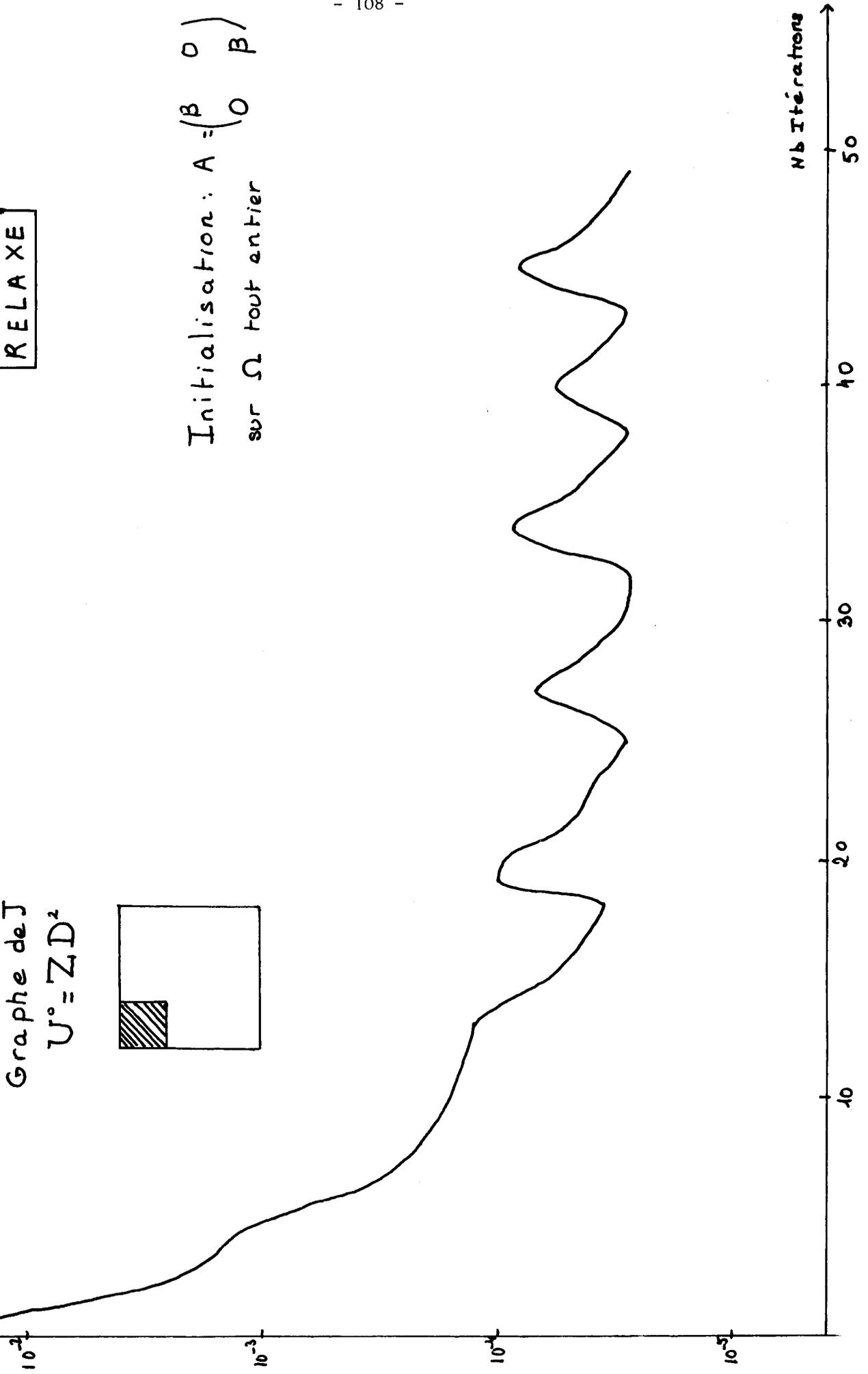


Graphe de J  
 $U^0 = ZD^2$



RELAXE

Initialisation:  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$   
sur  $\Omega$  tout entier



Nb Itérations

TABLEAU n° 2

Itération: 7

$J^* = 4.2 \cdot 10^{-4}$

RELAXE -  $U^0 = ZD^0$

Initialisation  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ sur } \Omega$  tout entier

VALEUR	PROPRE	RELATIVE	VALEUR	PROPRE	RELATIVE
1.504*	1.512*	1.603*	1.698*	1.215*	1.258*
1.301*	1.350*	1.224*	1.215*	1.225*	1.258*
1.147*	1.083*	1.223*	1.142*	1.220*	1.216*
1.034*	1.031*	1.007*	1.028*	1.000*	1.163*
1.086*	1.063*	1.216*	1.214*	1.219*	1.215*
1.212*	1.212*	1.213*	1.212*	1.212*	1.212*
ERREUR	MOYENNE	RELATIVE	VALEUR	PROPRE	**
1.69E-01					

Itération: 18

$J^* = 5.4 \cdot 10^{-5}$

VALEUR	PROPRE	RELATIVE	VALEUR	PROPRE	RELATIVE
1.723*	1.696*	1.994*	1.994*	1.994*	1.171*
1.541*	1.529*	1.994*	1.062*	1.123*	1.091*
1.166*	1.078*	1.068*	1.059*	1.065*	1.053*
1.054*	1.058*	1.050*	1.046*	1.039*	1.052*
1.051*	1.049*	1.040*	1.055*	1.068*	1.055*
1.048*	1.048*	1.049*	1.048*	1.048*	1.048*
ERREUR	MOYENNE	RELATIVE	VALEUR	PROPRE	**
8.06E-01					

Itération: 44

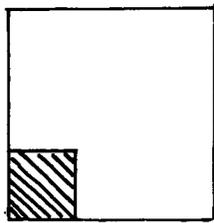
$J^* = 7.8 \cdot 10^{-5}$

VALEUR	PROPRE	RELATIVE	VALEUR	PROPRE	RELATIVE
1.717*	1.911*	2.000*	2.000*	1.047*	1.055*
1.689*	1.769*	2.000*	1.130*	1.044*	1.048*
1.042*	1.038*	1.050*	1.041*	1.046*	1.099*
1.020*	1.096*	1.103*	1.020*	1.085*	1.009*
1.103*	1.098*	1.032*	1.034*	1.047*	1.035*
1.098*	1.045*	1.099*	1.098*	1.098*	1.045*
ERREUR	MOYENNE	RELATIVE	VALEUR	PROPRE	**
7.44E-01					



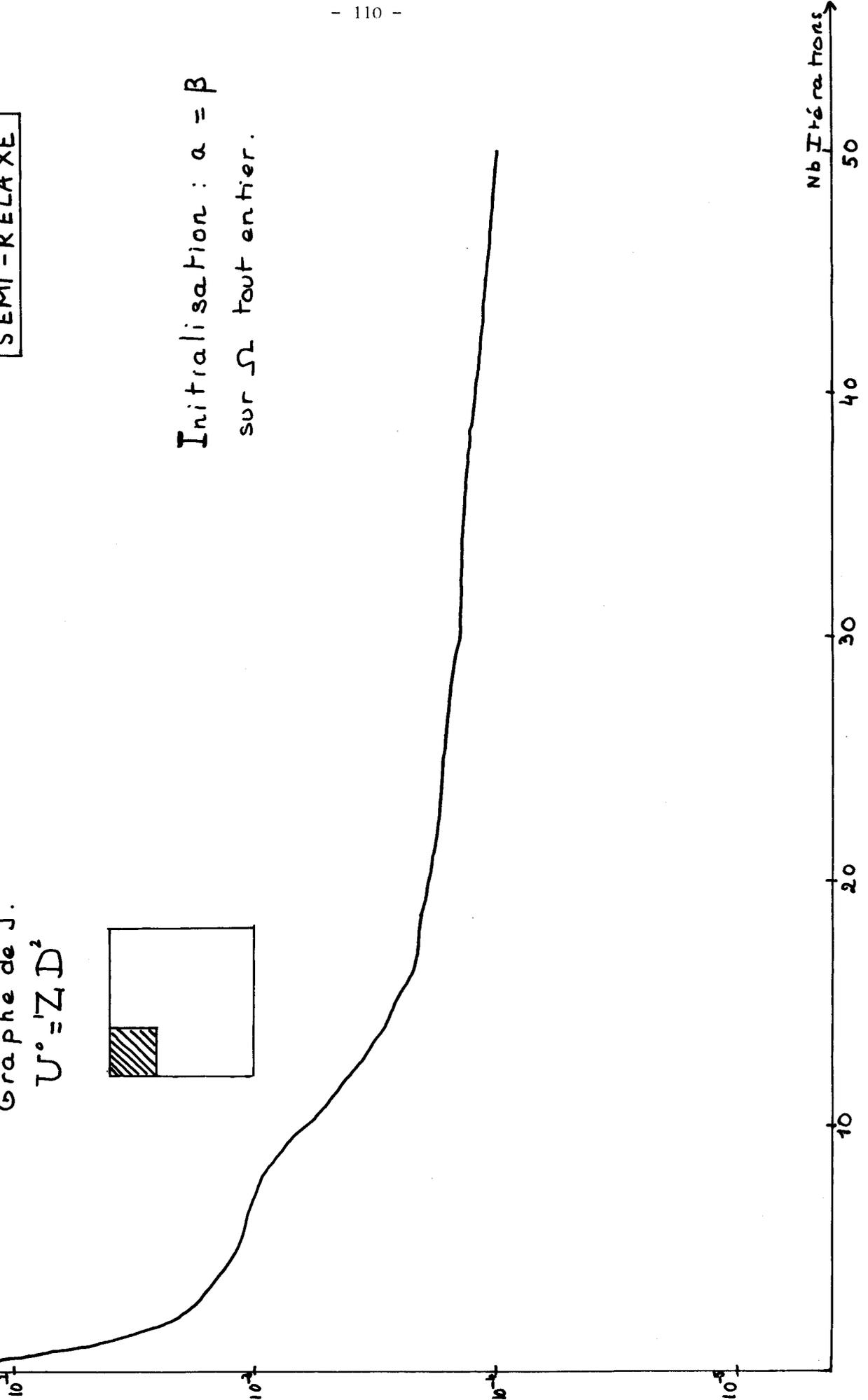
SEMI-RELAXE

Graphes de J.  
 $U^0 = Z D^2$



Initialisation :  $a = \beta$   
sur  $\Omega$  tout entier.

↑ Valeurs de J.

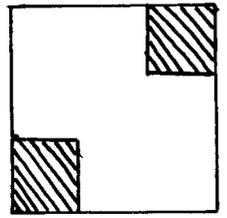


Nb Itérations



RELAXE

Graph e d J.  
 $U^0 = ZD^3$



Initialisation:  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$   
sur  $\Omega$  tout entier.



Valeurs de J

$10^{-2}$   $10^{-3}$   $10^{-4}$   $10^{-5}$

Nb Iterations.

10 20 30 40 50

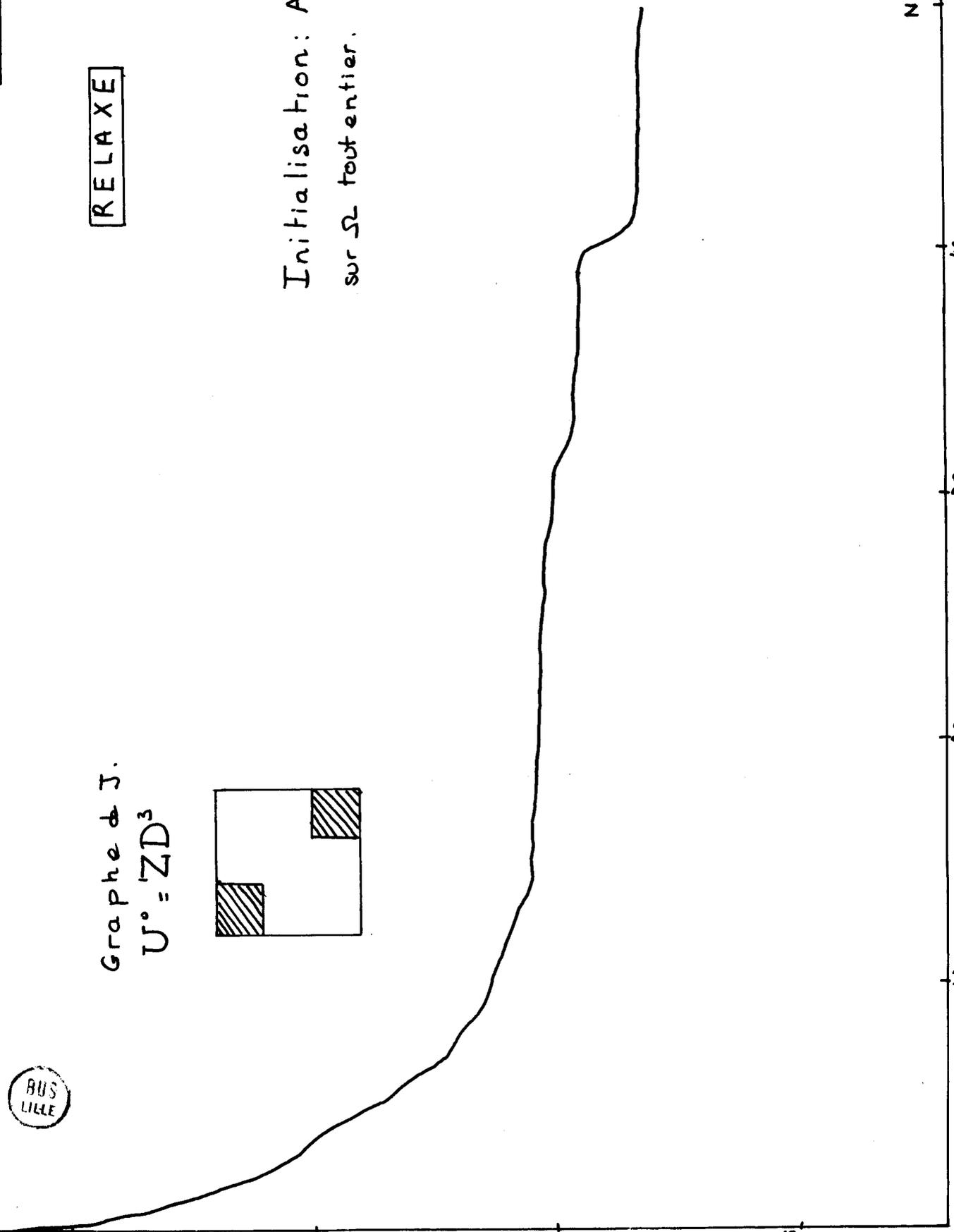


TABLEAU n°3

RELAXE - U<sup>2</sup> = Z D<sup>3</sup>

Itération : 6

J<sup>6</sup> = 6.10<sup>-4</sup>

Initialisation A =  $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$  tout entier

VALEUR PROPRE	ERREUR MOYENNE RELATIVE	VALEUR PROPRE	ERREUR MOYENNE RELATIVE
1.518*	1.469*	1.415*	1.375*
1.393*	1.353*	1.351*	1.349*
1.295*	1.247*	1.355*	1.296*
1.279*	1.241*	1.220*	1.251*
1.277*	1.259*	1.347*	1.347*
1.277*	1.347*	1.347*	1.347*

\*\*\*\*\*ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE \*\*\*\*\*

.284E+00

Itération: 17

J<sup>17</sup> = 1.5 10<sup>-4</sup>

VALEUR PROPRE	ERREUR MOYENNE RELATIVE	VALEUR PROPRE	ERREUR MOYENNE RELATIVE
1.702*	1.626*	1.814*	1.881*
1.556*	1.526*	1.370*	1.195*
1.243*	1.144*	1.226*	1.180*
1.100*	1.091*	1.088*	1.029*
1.067*	1.020*	1.207*	1.205*
1.204*	1.204*	1.204*	1.204*

\*\*\*\*\*ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE \*\*\*\*\*

.185E+00

Itération: 48

J<sup>48</sup> = 6.3 10<sup>-5</sup>

VALEUR PROPRE	ERREUR MOYENNE RELATIVE	VALEUR PROPRE	ERREUR MOYENNE RELATIVE
1.202*	1.729*	1.965*	1.992*
1.649*	1.644*	1.522*	1.166*
1.227*	1.103*	1.126*	1.111*
1.059*	1.052*	1.055*	1.052*
1.055*	1.054*	1.108*	1.103*
1.100*	1.100*	1.101*	1.100*

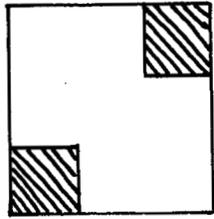
\*\*\*\*\*ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE \*\*\*\*\*

.129E+00

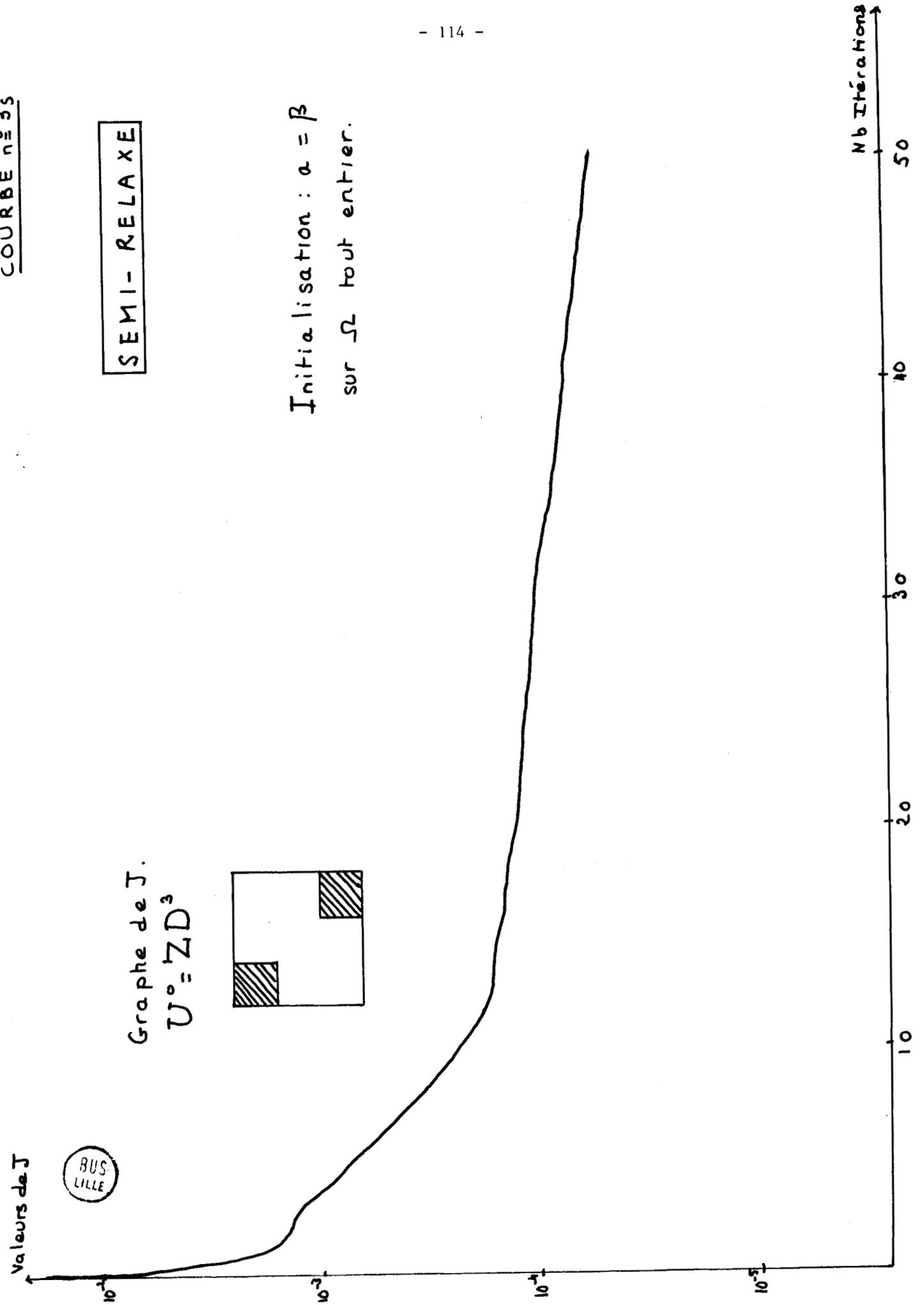


SEMI-RELAXE

Graphe de J.  
 $U^0 = ZD^3$



Initialisation :  $a = \beta$   
sur  $\Omega$  tout entier.



BUS LILLE

Initialisation  $\Omega = \beta$  sur  $\Omega$  tout entier

Itération: 7 J = 6.4 10<sup>-4</sup>

VALEUR	CONTROLE	APRES	PROJECTION
1.850*	1.850*	1.375*	1.554*
1.556*	1.373*	1.354*	1.356*
1.000*	1.012*	1.392*	1.275*
1.000*	1.000*	1.595*	1.354*
1.000*	1.000*	1.468*	1.335*
1.489*	1.786*	1.000*	1.000*

256 E+00

\*\*\*\*\*

Itération: 24 J = 1.4 10<sup>-4</sup>

VALEUR	CONTROLE	APRES	PROJECTION
1.970*	1.970*	1.803*	1.301*
1.805*	1.803*	1.357*	1.356*
1.073*	1.087*	1.000*	1.000*
1.000*	1.000*	1.229*	1.000*
1.000*	1.000*	1.251*	1.084*
1.174*	1.643*	1.000*	1.000*

208 E+00

\*\*\*\*\*

Itération: 43 J = 7.8 10<sup>-5</sup>

VALEUR	CONTROLE	APRES	PROJECTION
1.989*	1.989*	1.909*	1.880*
1.885*	1.905*	1.487*	1.484*
1.094*	1.051*	1.000*	1.000*
1.000*	1.000*	1.055*	1.000*
1.000*	1.000*	1.151*	1.016*
1.026*	1.494*	1.000*	1.000*

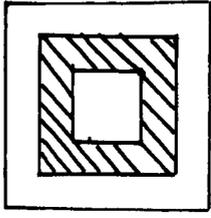
104 E+00

\*\*\*\*\*



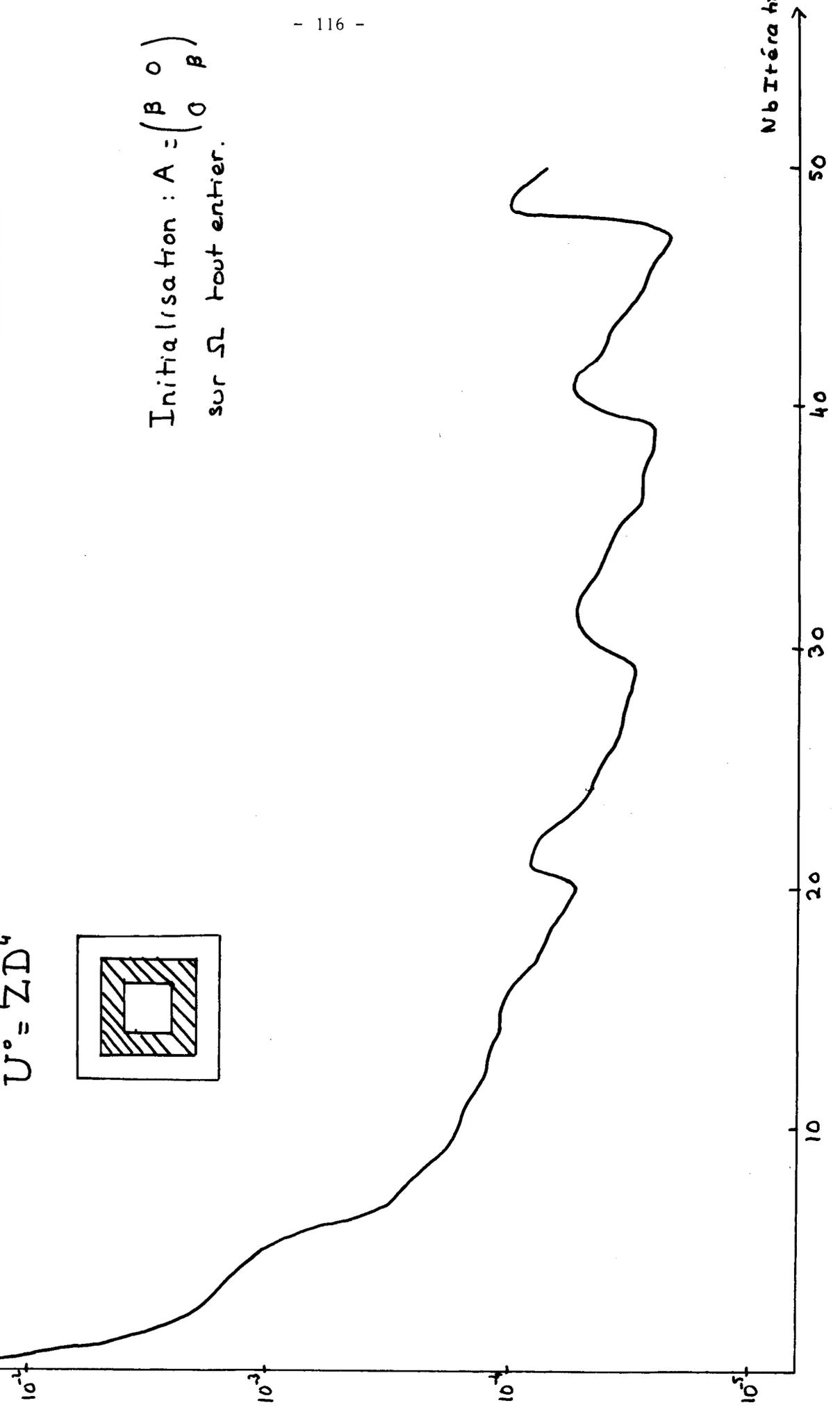
RELAXE

Graphe de J.  
 $U^0 = ZD^4$



Initialisation :  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$   
sur  $\Omega$  tout entier.

Valeurs de J  
BUS LILLE



Nb Itérations

Itération: 7

J<sup>7</sup> = 4.7 10<sup>-4</sup>

Initialisation A = (P<sub>0</sub> / P<sub>1</sub>) sur n tout entier

```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.244* * 1.204* * 1.243* * 1.243* * 1.243* * 1.244* * 1.243* * 1.243* * 1.243* *
* 1.168* * 1.087* * 1.630* * 1.615* * 1.546* * 1.843* * 1.305* * 1.418* * 1.102* * 1.117* *
* 1.084* * 1.080* * 1.926* * 1.391* * 1.551* * 1.368* * 1.326* * 1.456* * 1.080* * 1.080* *
* 1.080* * 1.080* * 1.368* * 1.531* * 1.391* * 1.926* * 1.332* * 1.497* * 1.080* * 1.084* *
* 1.117* * 1.102* * 1.843* * 1.546* * 1.615* * 1.630* * 1.394* * 1.421* * 1.087* * 1.168* *
* 1.243* * 1.243* * 1.244* * 1.243* * 1.243* * 1.243* * 1.244* * 1.243* * 1.204* * 1.244* *
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.244E+00
*****

```

Itération: 23

J<sup>23</sup> = 7.4 10<sup>-5</sup>

```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.085* * 1.086* * 1.094* * 1.085* * 1.069* * 1.090* * 1.087* * 1.077* * 1.085* * 1.085* *
* 1.052* * 1.050* * 1.587* * 1.989* * 1.804* * 1.894* * 1.494* * 1.690* * 1.061* * 1.045* *
* 1.060* * 1.053* * 1.635* * 1.057* * 1.213* * 1.063* * 1.640* * 1.707* * 1.052* * 1.070* *
* 1.070* * 1.052* * 1.063* * 1.213* * 1.057* * 1.629* * 1.635* * 1.746* * 1.053* * 1.060* *
* 1.045* * 1.061* * 1.939* * 1.894* * 1.804* * 1.989* * 1.587* * 1.673* * 1.050* * 1.052* *
* 1.085* * 1.085* * 1.087* * 1.073* * 1.090* * 1.085* * 1.094* * 1.087* * 1.086* * 1.085* *
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.109E+00
*****

```

Itération: 36

J<sup>36</sup> = 5 10<sup>-5</sup>

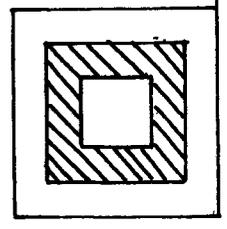
```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.057* * 1.063* * 1.073* * 1.057* * 1.050* * 1.071* * 1.094* * 1.027* * 1.057* * 1.057* *
* 1.058* * 1.060* * 1.650* * 1.989* * 1.890* * 1.890* * 1.580* * 1.728* * 1.059* * 1.052* *
* 1.056* * 1.060* * 1.718* * 1.477* * 1.061* * 1.096* * 1.720* * 1.782* * 1.059* * 1.053* *
* 1.053* * 1.059* * 1.720* * 1.061* * 1.096* * 1.061* * 1.718* * 1.813* * 1.060* * 1.056* *
* 1.052* * 1.059* * 1.728* * 1.580* * 1.890* * 1.890* * 1.656* * 1.729* * 1.060* * 1.058* *
* 1.057* * 1.057* * 1.059* * 1.064* * 1.071* * 1.056* * 1.073* * 1.059* * 1.063* * 1.057* *
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.865E-01
*****

```

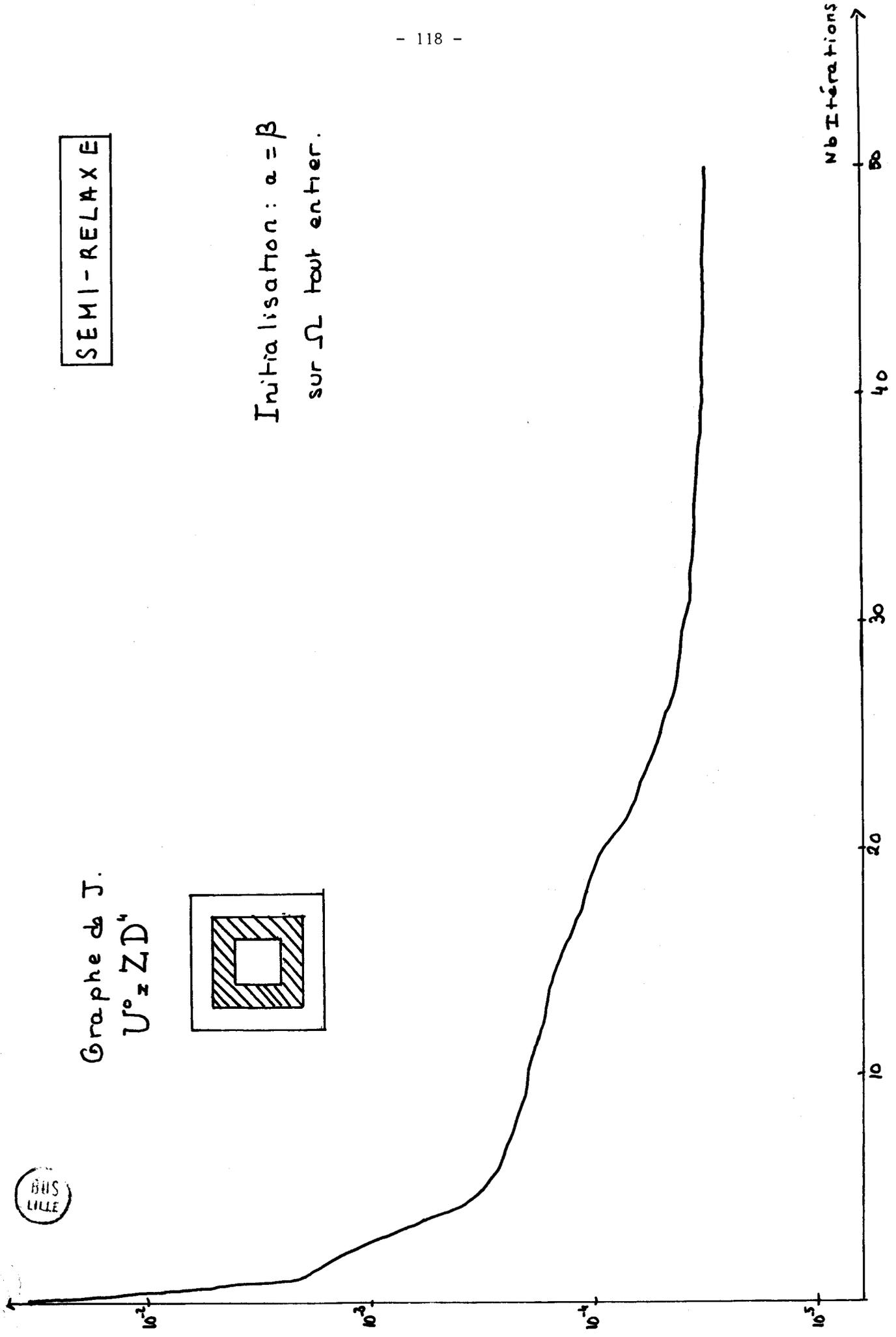
SEMI-RELAXE

Graphique de J.  
 $U^o Z D^4$



Initialisation:  $a = \beta$   
sur  $\Omega$  tout entier.

valeurs de J



Nb Iterations

Itération : 6

$J^4 = 4,4 \cdot 10^{-4}$

Initialisation  $\alpha = \beta$  sur  $\Omega$  tout entier

VALEUR	CONTROLE	APRES PROJECTION	ERREUR MOYENNE	RELATIVE	VA
1,617*	1,000*	1,263*	1,000*	1,000*	1,803*
1,261*	1,000*	1,552*	1,545*	1,767*	1,507*
1,000*	1,000*	1,545*	1,916*	1,873*	1,965*
1,000*	1,000*	1,549*	1,965*	1,873*	1,916*
1,057*	1,011*	1,207*	1,716*	1,549*	1,545*
1,535*	1,803*	1,011*	1,000*	1,000*	1,000*
1,94E+00	ERREUR MOYENNE	RELATIVE	VA		

Itération : 24

$J^4 = 7,2 \cdot 10^{-5}$

VALEUR	CONTROLE	APRES PROJECTION	ERREUR MOYENNE	RELATIVE	VA
1,161*	1,163*	1,000*	1,000*	1,006*	1,000*
1,000*	1,000*	1,770*	1,632*	1,774*	1,676*
1,008*	1,000*	1,634*	1,863*	1,813*	1,937*
1,076*	1,000*	1,683*	1,937*	1,813*	1,863*
1,000*	1,000*	1,737*	1,742*	1,676*	1,774*
1,080*	1,533*	1,000*	1,022*	1,000*	1,000*
1,125E+00	ERREUR MOYENNE	RELATIVE	VA		

Itération : 47

$J^4 = 5,2 \cdot 10^{-5}$

VALEUR	CONTROLE	APRES PROJECTION	ERREUR MOYENNE	RELATIVE	VA
1,080*	1,082*	1,000*	1,000*	1,015*	1,000*
1,000*	1,000*	1,818*	1,658*	1,781*	1,713*
1,017*	1,000*	1,660*	1,835*	1,836*	1,782*
1,073*	1,000*	1,722*	1,925*	1,782*	1,836*
1,000*	1,000*	1,798*	1,745*	1,713*	1,658*
1,006*	1,451*	1,000*	1,029*	1,000*	1,000*
1,13E+00	ERREUR MOYENNE	RELATIVE	VA		



A l'analyse des résultats de ces quatre exemples, on peut constater que pour 50 itérations :

- Dans le problème "semi-relaxé"  $J$  décroît régulièrement jusqu'à environ  $10^{-5}$ .

- Dans le problème "relaxé"  $J$  devient instable au environ de  $10^{-4}$  et oscille ensuite entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ .

- La configuration géométrique de l'optimum  $a^0$ , c'est-à-dire la délimitation de l'ouvert  $\omega$ , où  $a^0(x) = \alpha$  sur  $\omega$  et  $a^0(x) = \beta$  sur  $\Omega - \omega$ , est meilleure dans le cas relaxé pour les exemples (2), (3) et (4) ; plus précisément on constate que dans les exemples (2), (3) et (4) la méthode "semi-relaxée" donne de mauvaises valeurs au centre du carré  $]0,1[ \times ]0,1[$ , ce résultat est particulièrement visible dans l'exemple (4) ; néanmoins ces valeurs s'améliorent à chaque itération.

- Dans la méthode semi-relaxée, là où la configuration géométrique de  $a^0$  est respectée, les valeurs de  $a$ , où  $a^0(x) = \beta$  sont meilleures.

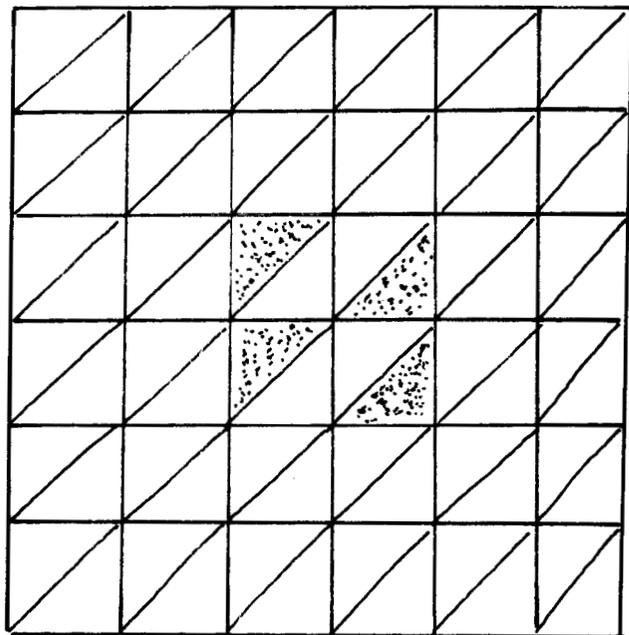
La configuration géométrique de l'optimum  $a^0$  est visualisée aux figure I et I<sub>s</sub> pages 121 et 122.

RELAXE

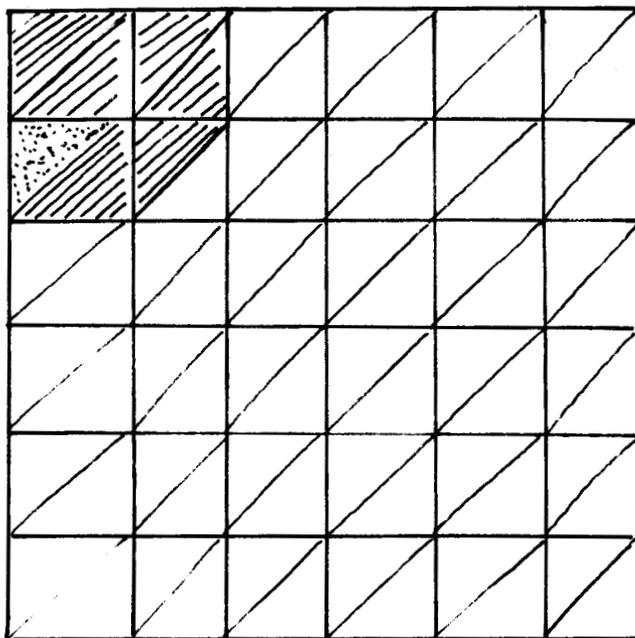
Initialisation  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$  tout entier

-   $\lambda^e > 1.7$
-   $1.2 \leq \lambda^e \leq 1.7$
-   $\lambda^e < 1.2$

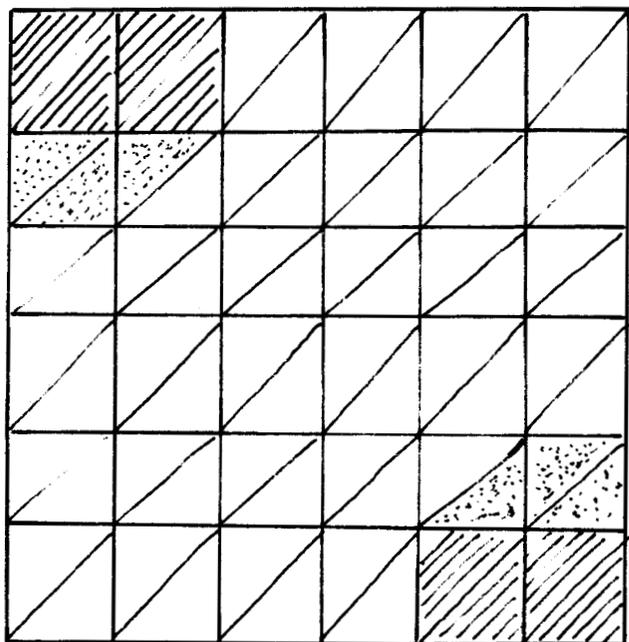
$U^0 = Z D^4$  30<sup>ème</sup> itération



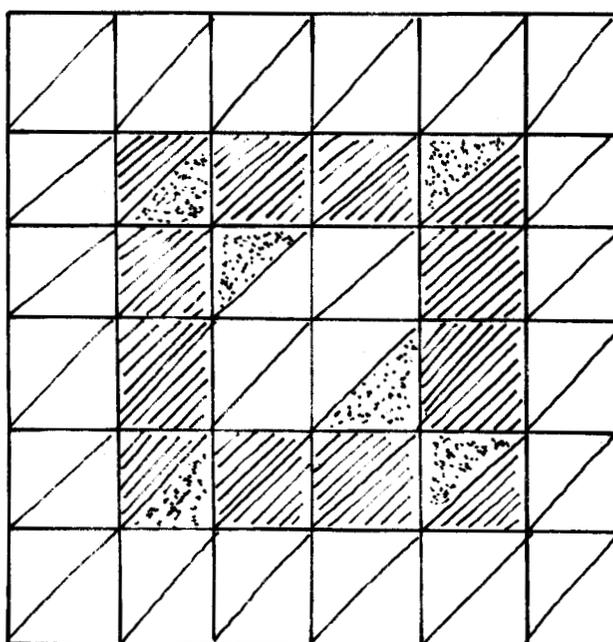
$U^0 = Z D^2$  44<sup>ème</sup> itération



$U^0 = Z D^3$  48<sup>ème</sup> itération



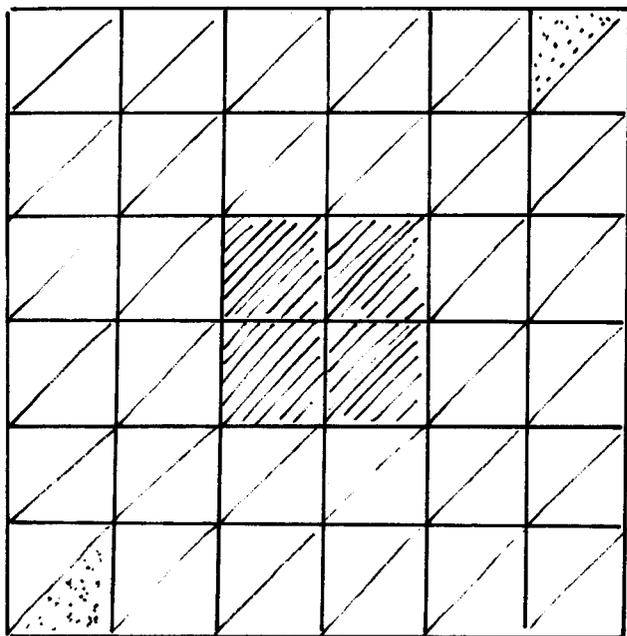
$U^0 = Z D^4$  36<sup>ème</sup> itération



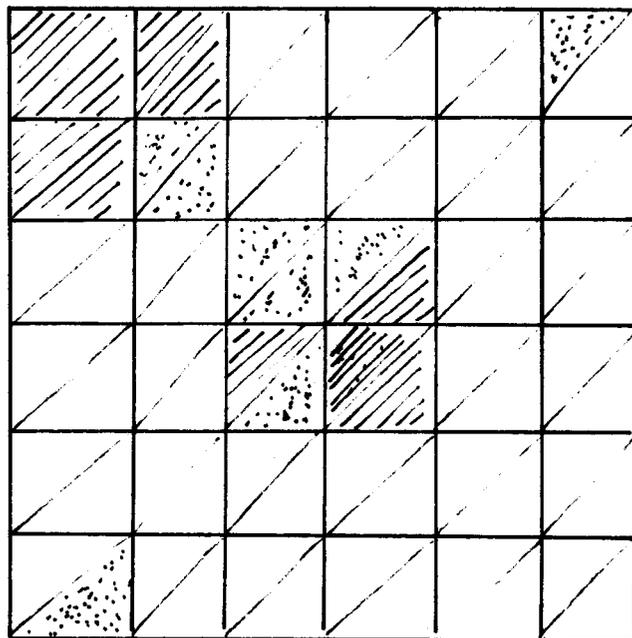
Initialisation  $a = \beta$  sur  $\Omega$  tout entier

-   $a > 1.7$
-   $1.2 \leq a \leq 1.7$
-   $a < 1.2$

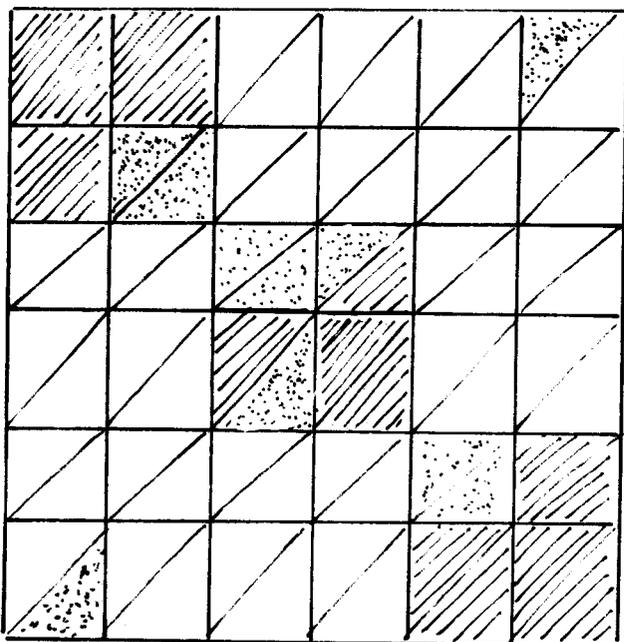
$U^0 = Z D^1$  48<sup>ème</sup> itération



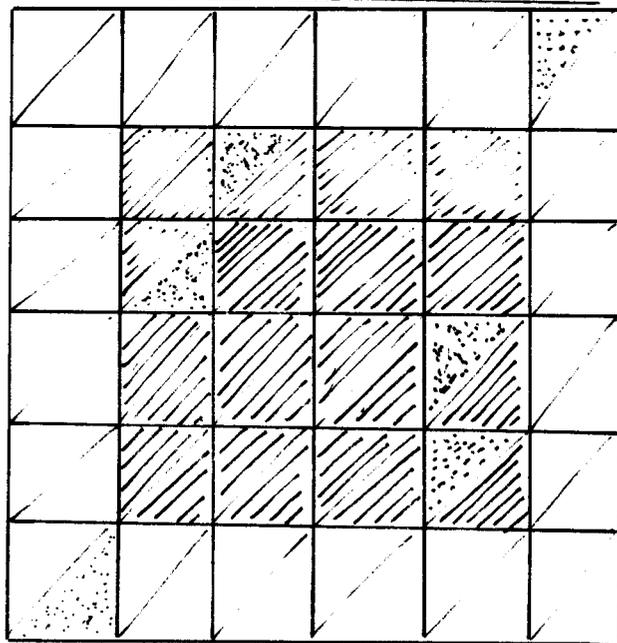
$U^0 = Z D^2$  49<sup>ème</sup> itération



$U^0 = Z D^3$  49<sup>ème</sup> itération



$U^0 = Z D^4$  47<sup>ème</sup> itération



2. Exemple d'application du gradient conjugué dans le cas semi-relaxé.

Cette méthode ne donne pas en général sur les cas précédents de résultat ; l'algorithme est très instable ; on se heurte au problème suivant : la matrice de rigidité solution du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}((a^i + \lambda W^i) \nabla U^i) = 10 \\ U^i \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

n'est plus coercive pour les valeurs de  $\lambda$  obtenues pour minimiser la fonctionnelle  $J$  dans la direction  $W^i$ .

A chaque itération on doit initialiser  $\lambda$  à 0. [cf. Chapitre III - paragraphe 3.3].

Nous donnons ci-dessous un exemple où cette méthode du gradient conjugué donne des résultats très performants.

L'exemple étudié [Tableau n°5, 5 bis] est le même que  $ZD^1$  où l'on a permuté  $\alpha$  et  $\beta$ .



Initialisation  $\alpha = \alpha$  sur  $\Omega$ -tout entier

Itération : 10  $J^0 = 1.9 \cdot 10^{-5}$

VALEUR		CONTROLE		APRES		PROJECTION		*****	
1.854*	2.000*	1.804*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	1.852*
2.000*	2.000*	1.995*	1.994*	1.871*	2.000*	1.823*	2.000*	1.935*	2.000*
2.000*	2.000*	1.851*	2.000*	1.592*	1.584*	1.503*	2.000*	1.821*	2.000*
2.000*	2.000*	1.821*	2.000*	1.544*	1.522*	1.521*	2.000*	1.831*	2.000*
2.000*	2.000*	1.955*	2.000*	2.000*	1.831*	2.000*	1.894*	1.995*	2.000*
1.852*	2.000*	1.676*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	1.804*

Itération : 17  $J^1 = 4.5 \cdot 10^{-5}$

VALEUR		CONTROLE		APRES		PROJECTION		*****	
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	1.975*	2.000*	1.959*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	2.000*	1.975*	2.000*	1.429*	1.481*	1.453*	2.000*	1.753*	2.000*
2.000*	2.000*	1.955*	2.000*	1.481*	1.429*	1.427*	2.000*	1.775*	2.000*
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	1.975*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	1.810*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*

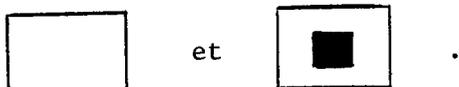
Itération : 18  $J^2 = 3.8 \cdot 10^{-7}$

VALEUR		CONTROLE		APRES		PROJECTION		*****	
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	1.000*	1.000*	1.115*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	1.113*	1.000*	1.000*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*
2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*	2.000*



3. Exemple avec des fonctions construites avec des paramètres différents.

On a vu que pour  $U^0 = ZD^1$ , on a  $L^{\infty\alpha}$  très faible ; d'un point de vue numérique pour l'algorithme relaxé tout se passe comme si  $a^0$  l'optimum vaut  $\alpha$  sur  $\Omega$  tout entier, c'est-à-dire il ne distingue pas les configurations



On considère alors un autre problème de contrôle ; soit  $U^0 = ZD^{1*}$  solution de :

$$\begin{cases} -\text{div}(a^0 \text{IV}U^0) = 10 & \text{dans } \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ , \\ U^0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

où  $a^0$  a la même configuration géométrique que pour  $ZD^1$  avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = 10$ . [cf. figure 1].

Remarquons que dans ce cas on ne connaît pas toujours exactement l'optimum en particulier on ne sait pas s'il est de la forme :  $a^0(x) = \alpha$  sur  $\omega$ ,  $a^0(x) = \beta$  sur  $\Omega - \omega$ .

On calcule les normes définies de la même façon que précédemment avec les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $\beta = 10$ .

$\alpha=1$	$\beta = 10$
$L^{2\alpha}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
$L^{2\beta}$	0.3
$L^{\infty\beta}$	$1.39 \cdot 10^{-2}$
$L^{\infty\beta}$	8.9

$\beta = 2$	
$L^{2\beta}$	0.16
$L^{\infty\beta}$	0.98

On remarque  $L^{\infty\alpha}$  est encore très faible.

On cherche alors à minimiser  $J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_A - ZD^{1*}|^2$  où  $U_A$  solution de (1) en utilisant les méthodes de descentes relaxées et semi-relaxées dans les cas suivants :

1<sup>ier</sup> cas :  $\alpha = 1, \beta = 10$ , semi relaxé, initialisation  $a = 10$  sur  $\Omega$  tout entier [ $ZD^{1*}$  est la solution exacte] [cf. Tableau 1\*]

2<sup>ème</sup> cas :  $\alpha = 1, \beta = 2$ , semi relaxé, initialisation  $a = 2$  sur  $\Omega$  tout entier [ $ZD^{1*}$  n'est pas la solution exacte] [cf. Tableau 2\*]

3<sup>ème</sup> cas :  $\alpha = 1, \beta = 2$ , relaxé, initialisation  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$  tout entier [ $ZD^{1*}$  n'est pas la solution exacte] [cf. Tableau 3\*]

[cf. figure 5, 6, 7,  $U^i$  représente la valeur de  $U_A$  solution de (2) à la  $i^{\text{ième}}$  itération dans le plan  $Y = X$ ].

A l'analyse des résultats on constate :

- Dans le 1<sup>ier</sup> cas sur les 50 itérations  $J$  décroît régulièrement mais beaucoup moins vite que dans le cas où  $U^0 = ZD^1$ .
- Dans le 2<sup>ème</sup> cas pour 50 itérations, on obtient des résultats semblables pour les valeurs de  $a^0$  que dans le cas où  $U^0 = ZD^1$ .
- Dans le 3<sup>ème</sup> cas  $J$  décroît régulièrement jusqu'à la 17<sup>ème</sup> itération puis reste constant, les valeurs obtenues pour  $A^0$  sont "meilleurs" que dans le cas où  $U^0 = ZD^1$ .

SEMI-RELAXE  $U^0 = ZD^m$   
 $\alpha = 1, \beta = 10$

Initialisation  $a = \beta \text{ sur } \Omega$  tout entier

$J^2 = 3.1 \cdot 10^{-2}$

Itération : 12

VALEUR	CONTROLE	APRES	PROJECTION	RELATIVE	MOYENNE	ERREUR
6.625*	6.628*	1.000*	1.000*	1.000*	1.000*	6.625*
1.000*	1.000*	4.237*	4.968*	6.572*	6.572*	1.000*
1.000*	1.000*	6.573*	9.137*	9.136*	9.136*	1.000*
1.000*	1.000*	6.796*	9.651*	8.670*	8.670*	1.000*
1.000*	1.000*	5.509*	6.791*	4.876*	4.876*	1.000*
6.000*	8.486*	1.000*	1.000*	1.000*	1.000*	6.625*
374E+00						

$J^0 = 2.4 \cdot 10^{-2}$

Itération : 30

VALEUR	CONTROLE	APRES	PROJECTION	RELATIVE	MOYENNE	ERREUR
6.007*	6.001*	1.000*	1.000*	1.000*	1.000*	6.007*
1.000*	1.000*	3.189*	4.752*	6.388*	6.388*	1.000*
1.000*	1.000*	6.388*	9.117*	9.117*	9.117*	1.000*
1.000*	1.000*	6.633*	9.644*	8.634*	8.634*	1.000*
1.000*	1.000*	5.098*	1.933*	1.933*	1.933*	1.000*
5.079*	8.744*	1.000*	1.000*	1.000*	1.000*	5.079*
359E+00						

$J^4 = 1.9 \cdot 10^{-2}$

Itération : 48

VALEUR	CONTROLE	APRES	PROJECTION	RELATIVE	MOYENNE	ERREUR
5.754*	5.758*	1.000*	1.000*	1.000*	1.000*	5.754*
1.000*	1.000*	2.192*	4.588*	6.258*	6.258*	1.000*
1.000*	1.000*	6.258*	9.104*	9.104*	9.104*	1.000*
1.000*	1.000*	6.608*	9.641*	8.615*	8.615*	1.000*
1.000*	1.000*	4.914*	1.000*	1.000*	1.000*	1.000*
4.520*	8.272*	1.000*	1.000*	1.000*	1.000*	4.520*
335E+00						







RELAXE  $U^0 = ZD^{1*}$

$\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$

Initialisation  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$  tout entier.

Itération: 12

J = 2.3 10<sup>-4</sup>

```

*****VALEUR PROPKE *****
* 1.069* * 1.044* * 1.069* * 1.068* * 1.069* * 1.009* * 1.008* * 1.068*
* 1.060* * 1.056* * 1.063* * 1.070* * 1.110* * 1.069* * 1.052* * 1.055*
* 1.053* * 1.039* * 1.066* * 1.307* * 1.405* * 1.058* * 1.082* * 1.041*
* 1.042* * 1.041* * 1.038* * 1.398* * 1.507* * 1.066* * 1.065* * 1.053*
* 1.055* * 1.052* * 1.069* * 1.091* * 1.069* * 1.063* * 1.069* * 1.060*
* 1.068* * 1.068* * 1.069* * 1.068* * 1.068* * 1.069* * 1.069* * 1.069*
*****EDREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.128E+00
    
```

Itération: 17

J = 1.9 10<sup>-4</sup>

```

*****VALEUR PROPKE *****
* 1.037* * 1.062* * 1.037* * 1.036* * 1.036* * 1.030* * 1.030* * 1.036*
* 1.076* * 1.067* * 1.037* * 1.037* * 1.041* * 1.163* * 1.037* * 1.068*
* 1.064* * 1.041* * 1.076* * 1.435* * 1.374* * 1.738* * 1.038* * 1.044*
* 1.044* * 1.043* * 1.038* * 1.344* * 1.435* * 1.543* * 1.076* * 1.064*
* 1.068* * 1.065* * 1.037* * 1.163* * 1.137* * 1.037* * 1.037* * 1.076*
* 1.036* * 1.036* * 1.037* * 1.036* * 1.036* * 1.036* * 1.037* * 1.037*
*****EDREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.119E+00
    
```

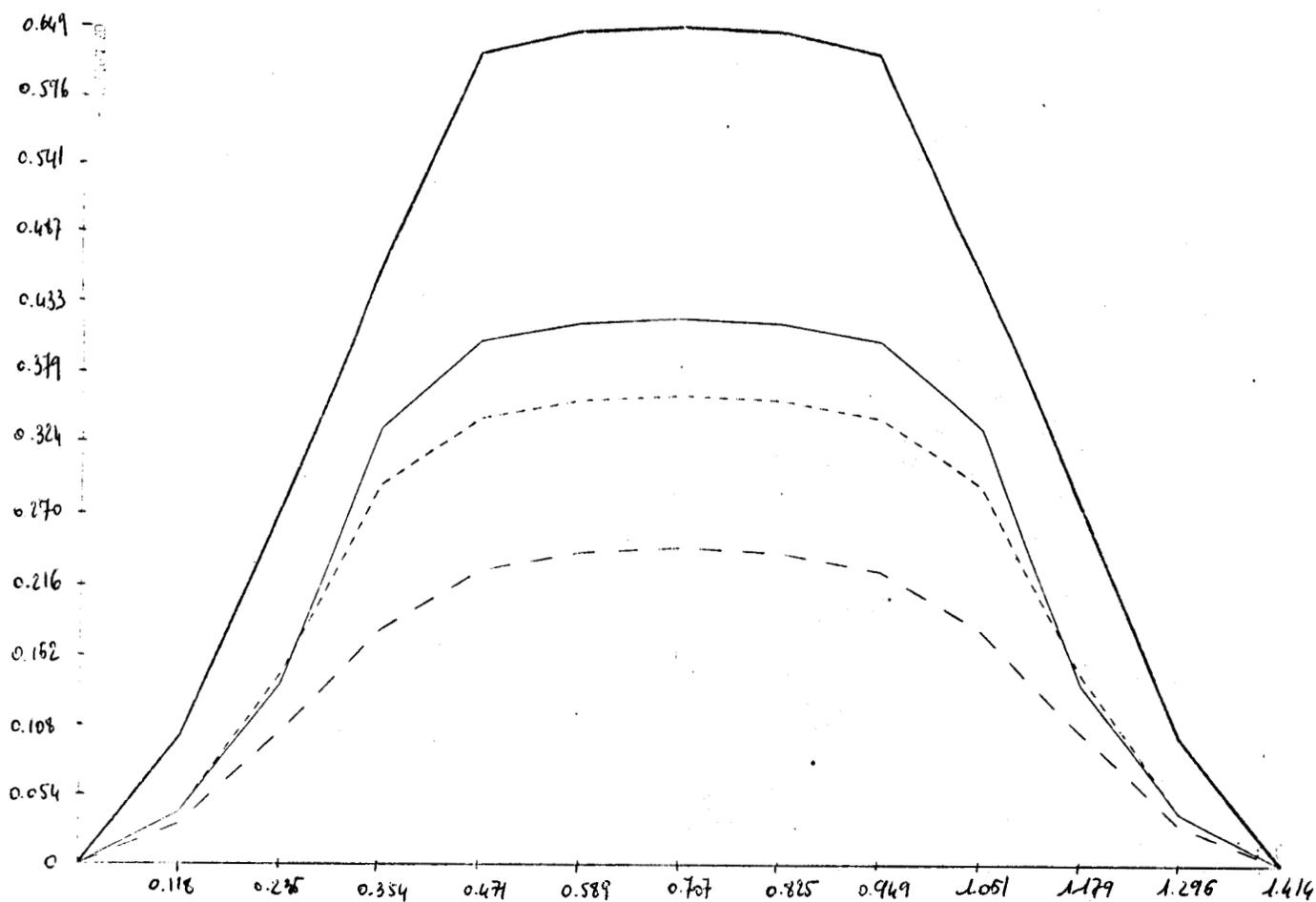


figure 5

—	$U^o = Z D^{1*}$	SEMI-RELAXE
---	$U_1$	$\alpha = 1$
- - -	$U_{12}$	$\beta = 10$
- · -	$U_{48}$	



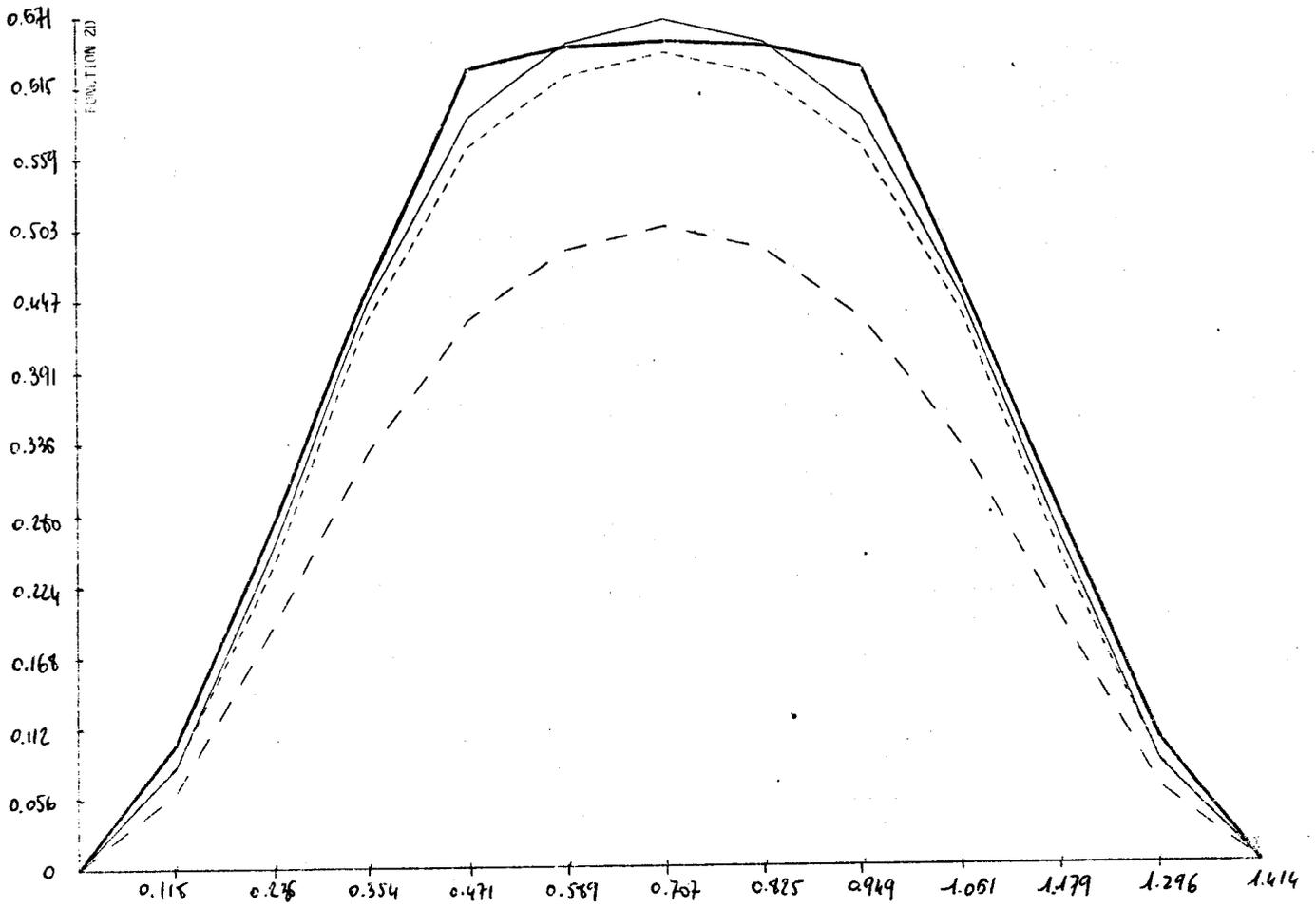


figure 6

—  $U^0 = Z D^{1*}$   
- - -  $U^1$   
- - -  $U^{12}$   
- · -  $U^{48}$

SEMI-RELAXE  
 $\alpha = 1$   
 $\beta = 2$



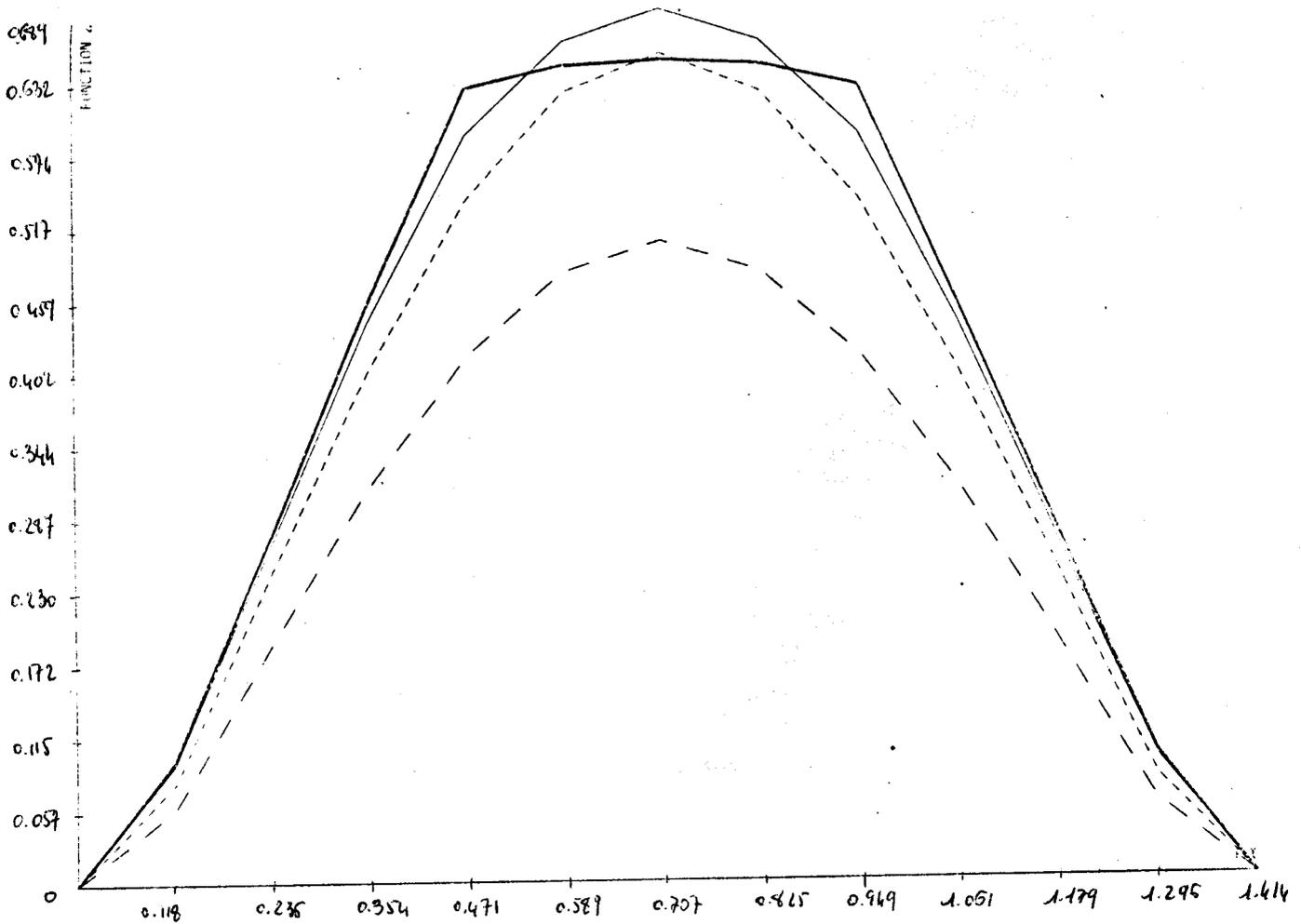


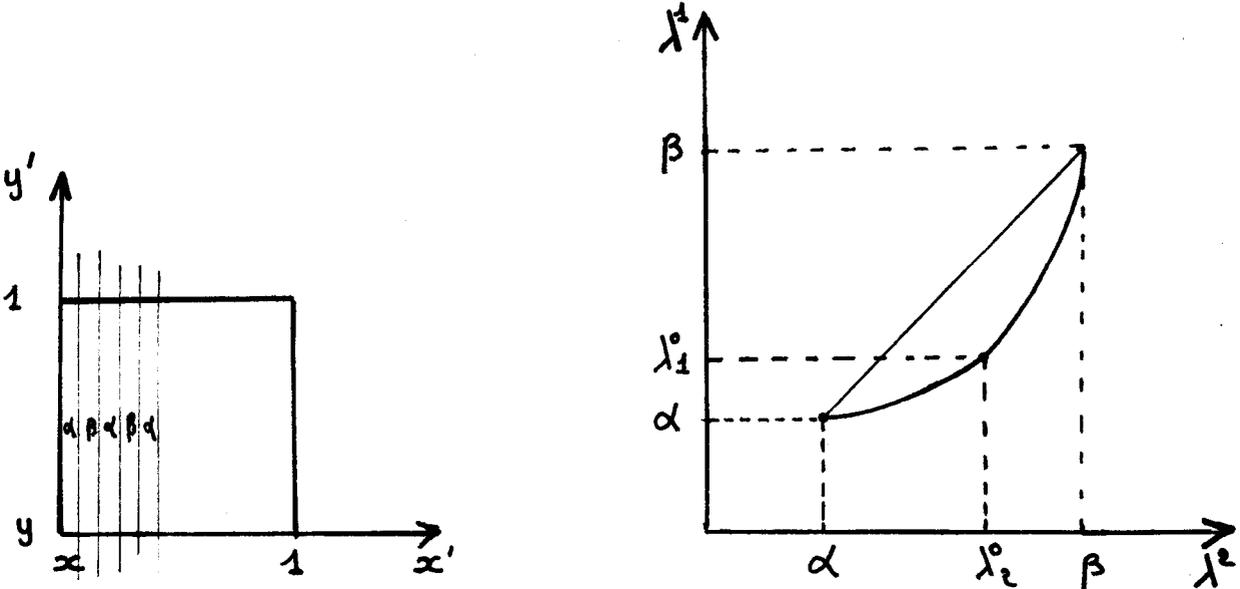
figure 7

—  $U_1^0 = Z D^{1*}$       RELAXE  
- -  $U_4$                      $\alpha = 1$   
- · -  $U_{17}$                      $\beta = 2$   
· · ·  $U_1^*$



II - Etude numérique des cas où le minimum est anisotrope.

1. Cas des couches régulières et parallèles à l'axe yy'



Soit  $(\lambda_2^0, \lambda_1^0) \in K_1$ ,  $\lambda_2^0 = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$ ,  $\lambda_1^0 = \frac{\alpha\beta}{\theta\beta + (1-\theta)\alpha}$  où

$\theta$  est constant,  $0 < \theta < 1$ .

Le problème posé est le suivant :

$$\text{Minimiser } J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_A - ZD|^2 \quad \text{où} \quad ZD = 10 \cdot xy(x-1)(y-1)$$

et  $U_A$  solution du problème :

$$\begin{cases} -\text{div}(A\nabla U_A) = \lambda_2^0 \cdot 2x(x-1) + \lambda_1^0 \cdot 2y(y-1) , \\ U_A \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Le minimum cherché est 0 et correspond alors à  $U^0 = ZD$  et

$$A^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 \end{pmatrix} .$$

On choisit  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  avec le même maillage que précédemment.

On a choisi  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $\theta = 0.25$ , d'où  $\lambda_2^0 = 1.75$  et  $\lambda_1^0 = 1.6$ .

On va étudier cet exemple en prenant différentes valeurs initiales.

$$\underline{1^{ier} \text{ cas}} : \text{initialisation } A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix} \text{ sur } \Omega \text{ tout entier,}$$

direction initiale  $\delta A = \text{Id}$ .

$$\underline{2^{ème} \text{ cas}} : \text{initialisation } A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ sur } \Omega \text{ tout entier.}$$

$$\underline{3^{ème} \text{ cas}} : \text{initialisation } A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda^2} & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda^2 = \frac{\alpha+\beta+\varepsilon}{2}$$

et  $\varepsilon = 0.2$ , sur  $\Omega$  tout entier.

$$\underline{4^{ème} \text{ cas}} : \text{initialisation } A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix} \text{ sur } \Omega \text{ tout entier,}$$

direction initiale  $\delta A = DA_1$  [cf. Chapitre III, paragraphe II.B].

On donne les résultats sous la même forme qu'au paragraphe (I).

[cf. Courbe 5, Tableau 5.1, tableau 5.2..., tableau 5.4].

On constate :

- les résultats sont différents suivant l'initialisation :

. les résultats les meilleurs et surtout les plus réguliers sont obtenus dans le  $1^{ier}$  cas et le  $2^{ème}$  cas : ceci étant prévisible car les directions initiales de descentes homogénéisent les valeurs de  $\lambda_2$ .

. Dans le  $4^{ème}$  cas la très faible valeur de  $J$  obtenue à la  $1^{ière}$  itération ne permet pas une bonne détermination de  $\lambda_2^0$ .

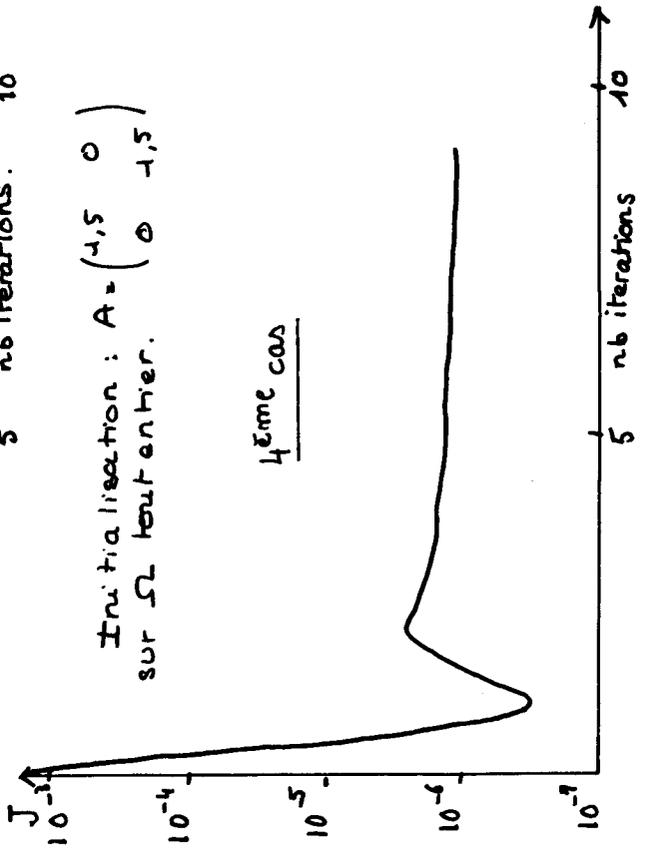
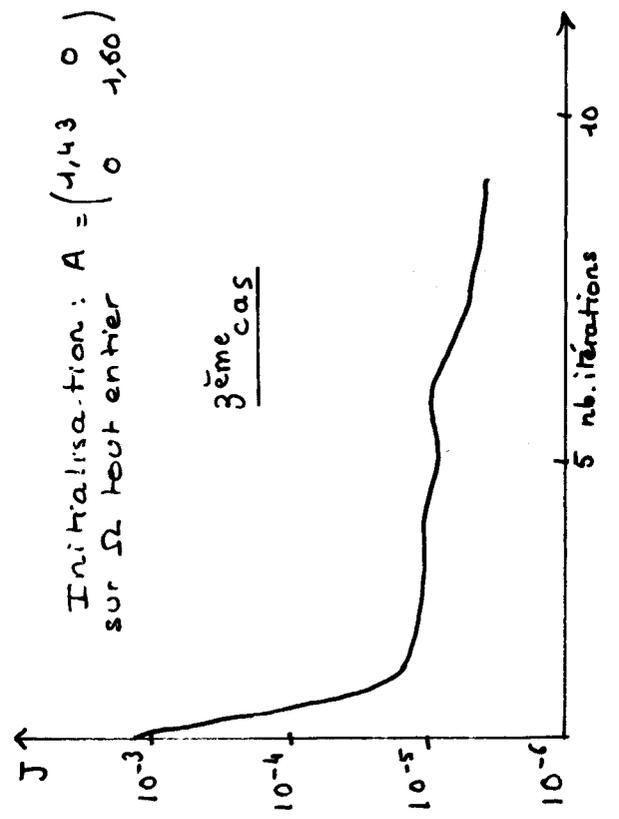
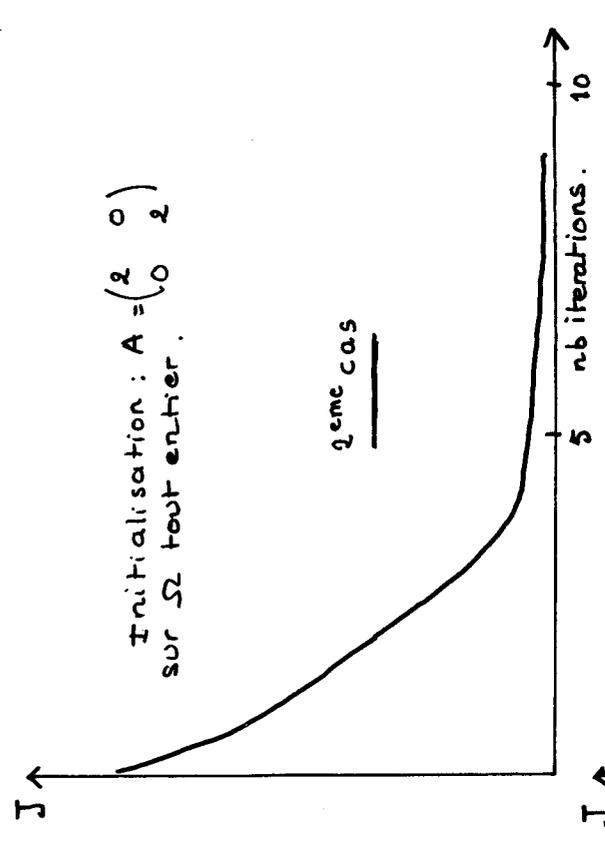
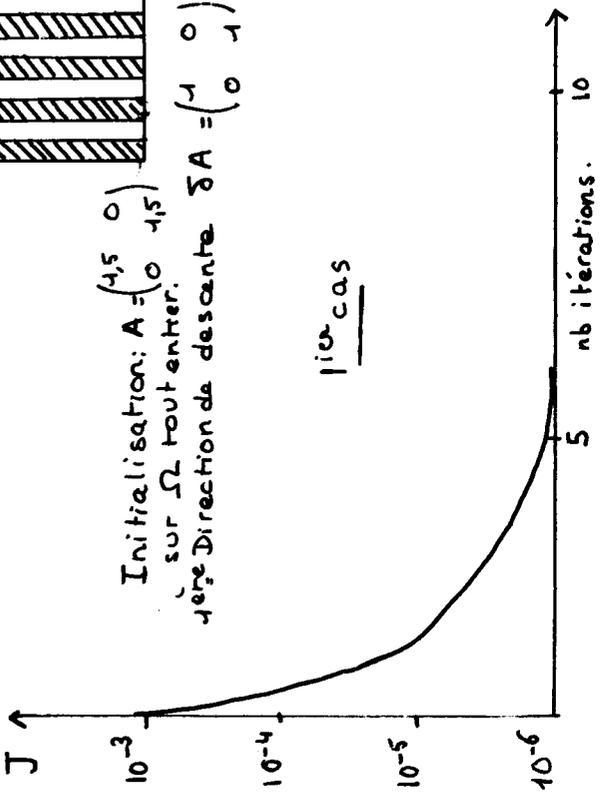
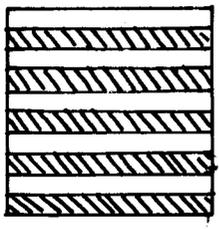
- Des résultats semblables sont obtenus avec d'autres valeurs de  $\theta$ .

Enfin dans les cas où  $\theta = 1$  ou  $0$  les résultats obtenus pour  $\lambda_2^0$  sont exacts en un nombre fini d'itérations.

RELAXE

Optimum =  $\begin{pmatrix} 1,6 & 0 \\ 0 & 1,75 \end{pmatrix}$

Graph of J.  
 $U = ZD$





Itération: 1

J<sup>4</sup> = 1.5 10<sup>-4</sup>

```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* *
* 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* *
* 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* *
* 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* *
* 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* * 1.846* *
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.521F-01

```

Itération: 5

J<sup>5</sup> = 1.8 10<sup>-6</sup>

```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* *
* 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* *
* 1.807* * 1.807* * 1.807* * 1.807* * 1.807* * 1.807* * 1.807* * 1.807* * 1.807* *
* 1.806* * 1.806* * 1.806* * 1.806* * 1.806* * 1.806* * 1.806* * 1.806* * 1.806* *
* 1.809* * 1.809* * 1.809* * 1.809* * 1.809* * 1.809* * 1.809* * 1.809* * 1.809* *
* 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* * 1.811* *
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.330F-01

```

Itération: 9

J<sup>9</sup> = 1.5 10<sup>-6</sup>

```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* *
* 1.810* * 1.806* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.808* *
* 1.806* * 1.806* * 1.810* * 1.807* * 1.810* * 1.810* * 1.807* * 1.806* * 1.806* *
* 1.806* * 1.806* * 1.807* * 1.809* * 1.810* * 1.810* * 1.807* * 1.806* * 1.806* *
* 1.806* * 1.807* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.806* * 1.810* *
* 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* * 1.810* *
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.327F-01

```





2. Cas des couches régulières et obliques.

Soit  $(\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in K_1$  définies comme précédemment on étudie le problème :

$$\text{Minimiser } J(A) = \int_{\Omega} |U_A - ZD|^2 \quad \text{où} \quad ZD = xy(x-1)(y-1)$$

et  $U_A$  solution du problème :

$$\begin{cases} -\text{div}(A\nabla U_A) = -[(\lambda_2^0 + \lambda_1^0)x(x-1) + (\lambda_2^0 + \lambda_1^0)y(y-1) + (\lambda_2^0 - \lambda_1^0)(2x-1)(2y-1)] \\ U_A \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Le minimum cherché est 0 et correspond à

$$A^0 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^0 + \lambda_2^0}{2} & \frac{\lambda_2^0 - \lambda_1^0}{2} \\ \frac{\lambda_2^0 - \lambda_1^0}{2} & \frac{\lambda_1^0 + \lambda_2^0}{2} \end{pmatrix}$$

Ce problème a été testé dans les mêmes cas que précédemment. On obtient les mêmes résultats sur la valeur de  $\lambda_2^0$ . Par contre on n'a aucun résultat sur les valeurs de la matrice  $A^0$ , tout ce passe comme si on était dans le cas où  $A^0$  est diagonale. [cf. Tableau n°5.2. bis].

On peut donner deux hypothèses pour expliquer ce résultat :

- La 1<sup>ière</sup> d'ordre numérique, en effet on a  $\frac{\lambda_2^0 - \lambda_1^0}{2} = 0.075$  valeur très faible, du même ordre de grandeur que la précision moyenne relative sur  $\lambda_2^0$  qui varie entre  $4 \cdot 10^{-2}$  et  $5 \cdot 10^{-3}$ .

- La 2<sup>ème</sup> inhérente au type de projection utilisée.



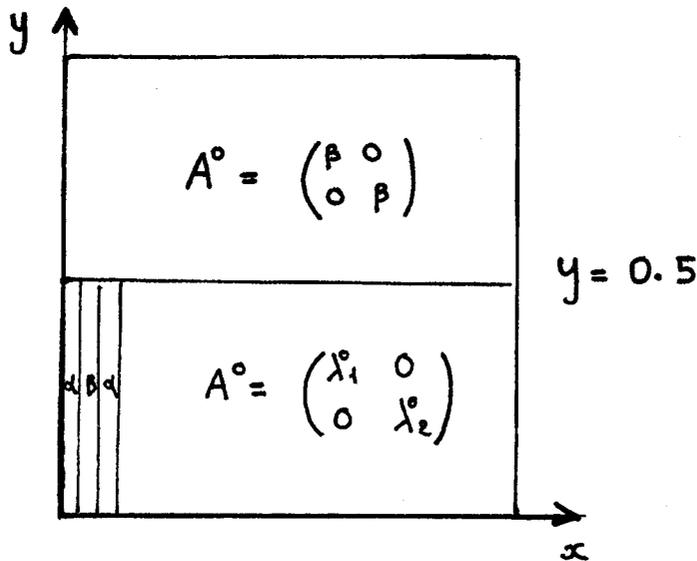
III - Etude d'un cas mixte

On étudie le cas où  $J(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_A - ZD^6|^2$  avec  $U^0 = ZD^6$  solution du problème :

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla U^0) = 10 & \text{dans } \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[ , \\ U^0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

où,  $A^0 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  ou  $A^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 \end{pmatrix}$

avec  $\lambda_2^0 = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$ ,  $\lambda_1^0 = \frac{\alpha\beta}{\theta\beta + (1-\theta)\alpha}$  suivant les régions de  $\Omega$ . On choisit le même maillage que précédemment avec la configuration géométrique suivante pour  $A^0$ .



La zone où  $A^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 \end{pmatrix}$  correspond physiquement à un matériau

disposé en couche parallèle à  $yy'$ .

On teste cet exemple avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $\theta = 0.5$ , soit

$$\lambda_2^0 = 1,5, \quad \lambda_1^0 = 1,33.$$

Soit  $U^0 = ZC$  la solution de (1) où  $A^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$  tout entier.

On note :  $\|ZC - ZD^6\|_{L^2(\Omega)} = L^{2c}$ , on note de même  $L^{1c}$  et  $L^{\infty c}$ .

On calcule les normes définies tout au début du paragraphe (I) avec  $\beta = 2$ .

On obtient :

$L^{2c}$	$L^{2\beta}$	$L^{\infty c}$	$L^{\infty\beta}$
4,4 $10^{-2}$	2.8 $10^{-2}$	0.15	0.18

[On a tracé les courbes  $ZD^\beta$ ,  $ZC$ ,  $ZD^6$ , dans le plan  $Y = X$  - figure 8].

On teste tout d'abord le cas où  $U^0 = ZC$  avec deux valeurs initiales différentes de  $A$ .

$$\text{1}^{\text{ier}} \text{ cas} : A^1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix} \quad \delta A^1 = \text{Id}$$

$$\text{2}^{\text{ème}} \text{ cas} : A^1 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

On obtient des résultats semblables à ceux traités au paragraphe II.

[cf. Tableau 6.1].

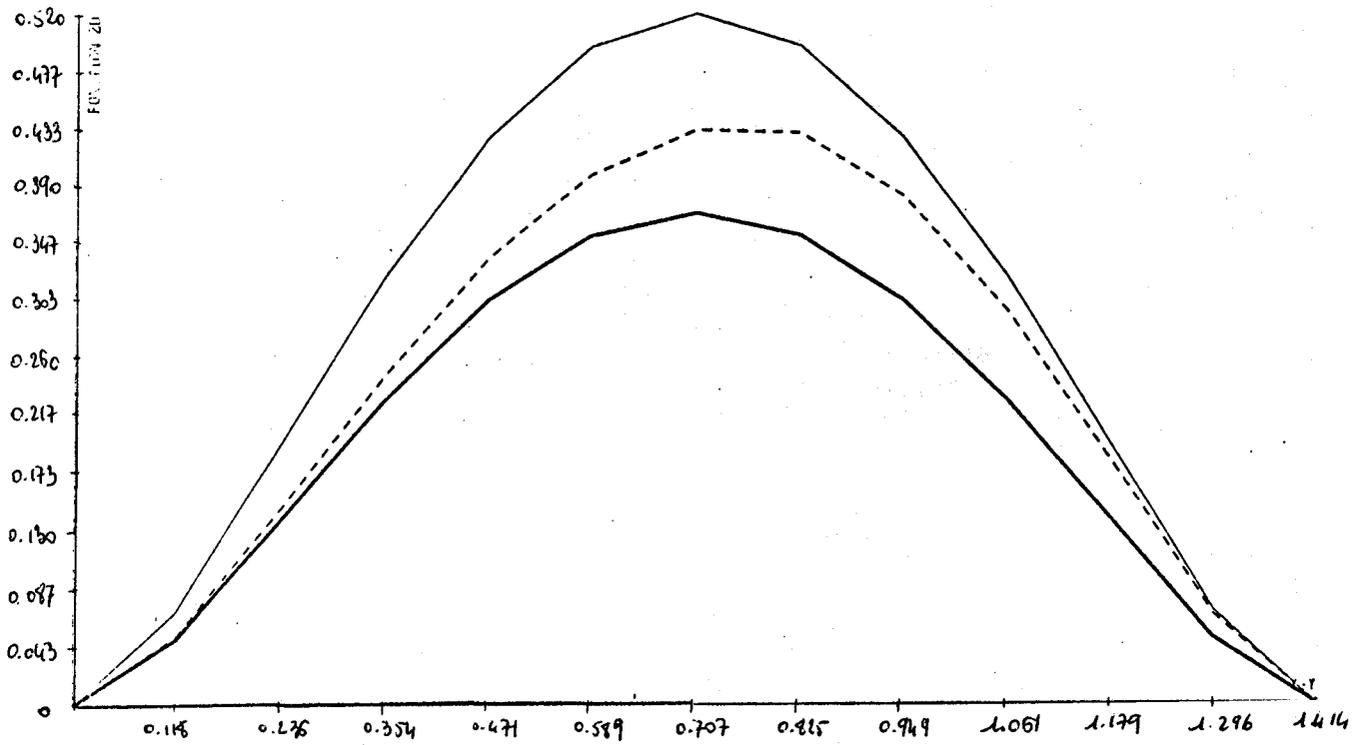
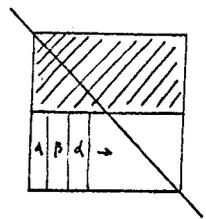


figure 8

$\text{—} U^{\circ} = ZD^{\beta}$   
 $\text{- - -} U^{\circ} = ZD^{\frac{\beta}{6}}$   
 $\text{—} U^{\circ} = ZC$

$\beta = 2$



On a testé le cas  $U^0 = ZD^6$  avec les deux initialisations du cas précédent. [cf. Tableau 6.2].

A l'analyse des résultats on constate :

-  $J$  décroît rapidement jusqu'à la valeur de  $5 \cdot 10^{-5}$  en 6 itérations puis reste stable.

- La configuration géométrique de  $A^0$  est très mauvaise de part et d'autre de la droite  $Y = 0.5$  correspondant au changement de structure.

- Les valeurs ponctuelles de  $A^0$  diffèrent suivant l'initialisation mais globalement l'erreur relative sur  $A^0$  reste la même. [cf. figure 9, même notation que figure 5,6,7].





Cas MIXTE U° = ZD<sup>6</sup>  
RELAXE

Initialisation:  $A^1 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$

direction initiale de descente:  $\Delta A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Itération: 6  $J^6 = 5.10^{-5}$

```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.605* * 1.828* * 1.967* * 1.779* * 1.965* * 1.965* * 1.832* * 1.795* * 1.804* * 1.604*
* 1.827* * 1.832* * 1.799* * 1.820* * 1.825* * 1.766* * 1.752* * 1.710* * 1.807* * 1.831* * 1.830*
* 1.823* * 1.826* * 1.752* * 1.770* * 1.644* * 1.702* * 1.664* * 1.670* * 1.792* * 1.748* * 1.818*
* 1.756* * 1.608* * 1.751* * 1.722* * 1.792* * 1.787* * 1.752* * 1.647* * 1.751* * 1.729* * 1.894*
* 1.509* * 1.593* * 1.500* * 1.573* * 1.966* * 1.700* * 1.944* * 1.900* * 1.501* * 1.575* * 1.601*
* 1.611* * 1.633* * 1.603* * 1.602* * 1.579* * 1.540* * 1.603* * 1.505* * 1.616* * 1.598* * 1.601*
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.104E+00
*****

```

Initialisation:  $A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Itération: 6  $J^6 = 3.8 \cdot 10^{-5}$

```

*****VALEUR PROPRE *****
* 1.868* * 1.915* * 1.875* * 1.918* * 1.822* * 1.872* * 1.863* * 1.866* * 2.000* * 1.952* * 1.881* * 1.882*
* 1.713* * 1.515* * 1.861* * 1.846* * 2.000* * 1.753* * 1.910* * 1.759* * 1.885* * 1.799* * 1.814* * 1.911*
* 1.863* * 1.801* * 1.763* * 1.768* * 1.646* * 1.895* * 1.683* * 1.673* * 1.802* * 1.757* * 1.894* * 1.803*
* 1.649* * 1.605* * 1.701* * 1.631* * 1.762* * 1.729* * 1.749* * 1.654* * 1.695* * 1.648* * 1.612* * 1.667*
* 1.603* * 1.614* * 1.761* * 1.677* * 2.000* * 1.637* * 1.845* * 1.567* * 1.558* * 1.647* * 1.609* * 1.619*
* 1.640* * 1.650* * 1.630* * 1.638* * 1.619* * 1.619* * 1.612* * 1.572* * 1.639* * 1.627* * 1.635* * 1.640*
*****ERREUR MOYENNE RELATIVE VALEUR PROPRE **
.902E-01
*****

```

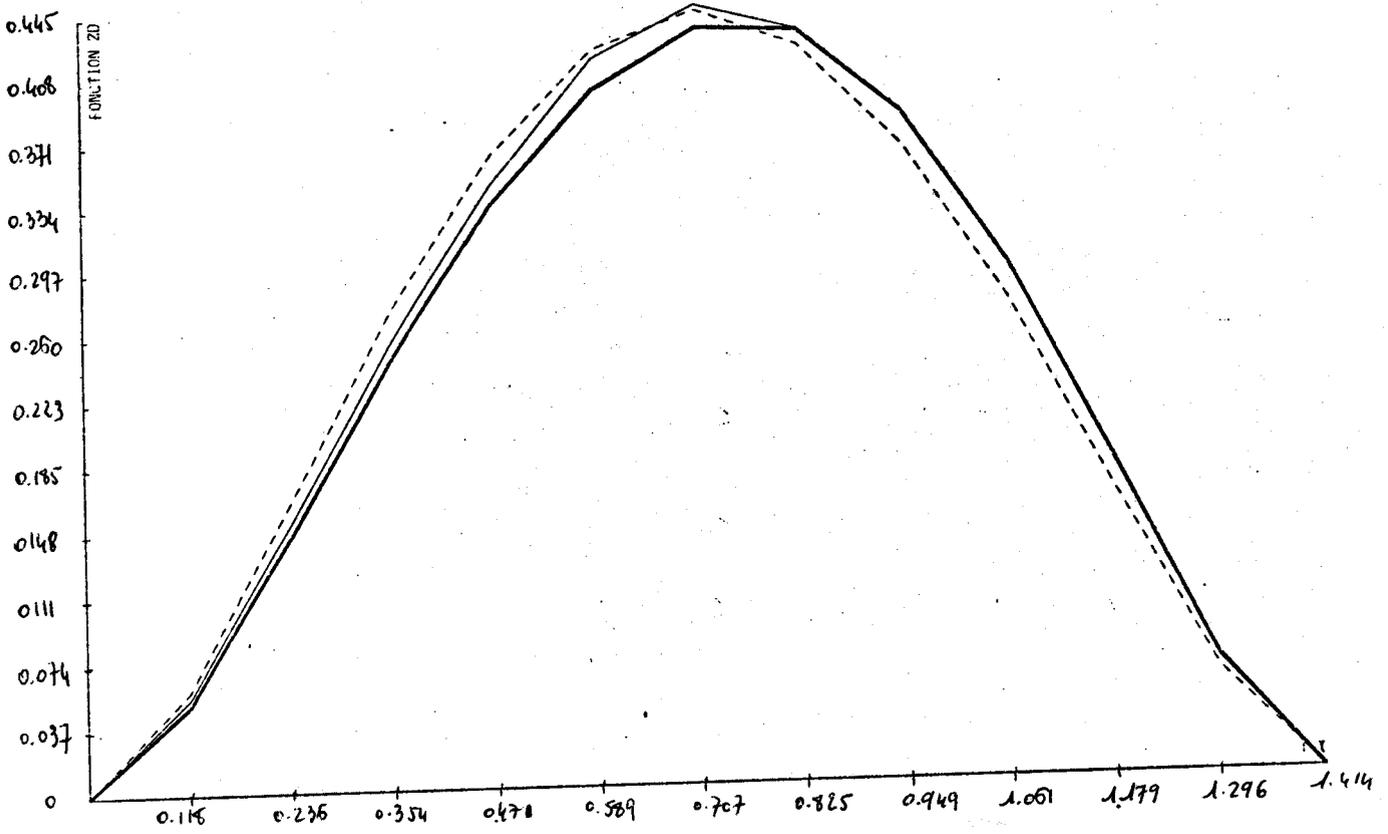


figure 9

—  $U^0 = Z D^6$   
- - -  $U^1$   
—  $U^6$



#### IV - Conclusion

Les exemples numériques étudiés nous permettent de conclure partiellement sur les méthodes de descente utilisées.

##### 1) Cas isotrope.

- La méthode "semi-relaxée" est très stable : la fonctionnelle  $J$  que l'on minimise décroît régulièrement, d'autre part les valeurs de  $a \in U$  s'améliorent à chaque itération, et ceci est valable pour tous les exemples étudiés. Par contre, après 50 itérations, la configuration géométrique du minimum  $a^0$  n'est pas bonne dans les cas où  $U^0 = ZD^i$ ,  $i = 2, 3, 4$  ; les valeurs de  $a^0$  au centre de l'ouvert  $]0,1[ \times ]0,1[$  restent mauvaises et on observe également des perturbations sur le bord.

- Dans la méthode "relaxée" la minimisation de  $J$  est régulière jusqu'à environ  $10^{-4}$ , les résultats diffèrent suivant les exemples étudiés.

Le cas le plus favorable est celui où  $U^0 = ZD^3$ , on remarquera que dans ce cas  $L^{\infty\alpha}$  et  $L^{\infty\beta}$  sont du même ordre de grandeur, inversement le cas le plus mauvais est celui où  $\frac{L^{\infty\alpha}}{L^{\infty\beta}}$  est de l'ordre de  $10^3$ .

La configuration géométrique du minimum  $a^0$  est bonne, même dans le cas où  $U^0 = ZD^4$ , les mauvaises valeurs de  $a$ , au centre de l'ouvert  $]0,1[ \times ]0,1[$ , observées dans la méthode "semi-relaxée", sont très atténuées.

- Dans le paragraphe I.3, les cas 2 et 3 sont très particuliers ; les résultats obtenus proviennent essentiellement des déformations de l'état optimum  $U^0$  lorsque l'on modifie  $\beta$  en respectant la configuration géométrique du minimum  $a^0$  [cf. figure 1].

2) Cas anisotrope.

- Dans ce cas la minimisation de  $J$  est très rapide ; la méthode "relaxée" est très sensible à l'initialisation choisie. Les exemples choisis ne nous permettent pas d'interpréter numériquement les résultats obtenus sur les coefficients de la matrice  $A$  mais uniquement sur ses valeurs propres.

- Le cas mixte donne des résultats moyens, la minimisation de  $J$  est très rapide et empêche d'obtenir des résultats précis sur le minimum  $A^0$  ; néanmoins la précision obtenue reste cohérente vis à vis des résultats obtenus avec la méthode relaxée, dans les paragraphes I et II.

ANNEXE

La solution U dans la méthode "P<sub>1</sub> conforme" est calculée en 25 noeuds.

La solution U dans la méthode "P<sub>2</sub> conforme" est calculée en 125 noeuds.

Le flux dans la méthode "P<sub>2</sub> mixte" est calculée en 240 noeuds.

On a choisi  $5 \cdot 10^{-2}$  pour la précision absolue sur les valeurs propres isotropes [cf. Remarque II.2, chapitre III].

Pour 50 itérations les temps moyens de calcul sur 1' "IRIS 80" sont :

- 12 minutes pour la méthode "semi-relaxée".

- 13 minutes pour la méthode "relaxée".

---

B I B L I O G R A P H I E

- [1] F. MURAT : *Seminaire d'Analyse fonctionnelle et numérique 1977-78*  
H convergence - Université Alger.
- [2] F. MURAT : *Contre exemples pour divers problèmes où le contrôle inter-*  
*vient dans les coefficients*  
Annali di Mathematica pura ed applicata (IV), Vol. CXII  
pp. 49-68.
- [3] F. MURAT : *Communication personnelle.*
- [4] F. MURAT : *Cours de D.E.A. - Paris VI*
- [5] L. TARTAR : *Cours Collège de France 79 (à paraître).*
- [6] L. TARTAR : *Problème de contrôle des coefficients dans des équations aux*  
*dérivées partielles.*  
Lectures Notes in Economic and Mathematical systems - Vol. 107  
Springer-Verlag 1975.
- [7] A. BENOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU : *Asymptotic analysis for periodic*  
*structures studies in Mathematics and its applications*  
North Holland 1978.
- [8] J.F. BOURGAT, A. DERVIEUX : *Méthode d'homogénéisation des opérateurs à*  
*coefficients périodiques.*  
IRIA : Rapport de Recherche n°278 - février 78.
- [9] W.H Mc CONNELL : *On the approximation of elliptic operators with discontinus*  
*coefficients.*  
Annali della scuola normale superiore di Pisa - Série 4 -  
1976 - Vol. 3 - pp. 121-137.
- [10] U.Ě RAĪTUM : *The extension of extremal problems connected with a linear*  
*elliptic equation.*  
Dokl. Akad. Nauk. SSSR - Tome 243 (1978), n°2.
- [11] J.L. LIONS : *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux*  
*dérivées partielles.* Dunod (1968).
- [12] F. MIGNOT : *Contrôle de fonctions propres.*  
C.R.A.S - t. 280 - Série A, p. 333-335.
- [13] M. EDELSTEIN : *On nearest points of sets in uniformly convex Banach spaces.*  
London Math. Soc, 43 (1968) p. 375, 377.
- [14] J.M. BALL : *A.R.M.A - Vol 63 (1976) p. 363,365.*
- [15] J.M. DUPUY : *Méthode des éléments mixtes bi et tridimensionnels appliquée à*  
*l'équation de la chaleur.*  
Thèse de 3ème cycle - Paris VI - décembre 1981.
- [16] B. MERCIER, O. PIRONNEAU : *Some examples of implementation and of application*  
*of the finite element method.*  
Rapport de Recherche n°248 - août 77 - IRIA.

## RÉSUMÉ

Dans ce travail on étudie des problèmes de contrôle du type suivant :  
à  $\omega \subset \Omega$ ,  $\Omega$  étant un domaine fixé de  $\mathbb{R}^2$  on associe la fonction  $U_\omega$  solution  
du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\omega(x) \operatorname{grad} U_\omega(x)) = f & \text{dans } \Omega \\ U_\omega(x) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où  $a_\omega(x) = \begin{cases} 2 & \text{sur } \omega, \\ 1 & \text{sur } \Omega \setminus \omega. \end{cases}$  On considère alors la fonctionnelle

$$J(\omega) = \int_{\Omega} |U_\omega - z_d|^2 dx, \quad (z_d \text{ fixé})$$

et on cherche le domaine optimum éventuel de  $\omega_0$  qui vérifie  $J(\omega_0) = \inf_{\omega \subset \Omega} J(\omega)$ .

Il n'y a pas, hélas en général de domaine optimum  $\omega_0$ , mais grâce à la théorie de l'homogénéisation une description complète de toutes les suites minimisantes pour  $J$  est possible.

Différents algorithmes numériques sont alors mis en oeuvre (à partir d'un système d'optimalité) pour approximer d'une part un domaine optimal s'il existe et, d'autre part, un matériau homogénéisé limite dans le cas général.

MOTS CLES : - CONTRÔLE NUMÉRIQUE OPTIMAL. PROBLÈME  
- HOMOGENÉISATION.  
- OPTIMISATION.