

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

MÉCANIQUE

PAR

Nabil EL HAGGAR

THEORIE DES PLAQUES (TRANSVERSALEMENT ISOTROPES) ET DES COQUES
CYLINDRIQUES (ISOTROPES) EN ELASTICITE LINEAIRE



SOUTENUE LE 9 DECEMBRE 1982 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury :

Président : M. PARREAU, Professeur, Université de Lille I.
Rapporteur : M. PARSY, Professeur, Université de Lille I.
Membres : M. HENRY, Professeur, Université de Lille I.
M. BUISINE, Assistant Agrégé, Université de Lille I
Invité : M. SOUCHET, Professeur, Université de Poitiers.



Je suis très heureux d'exprimer mes remerciements à Monsieur PARSY qui a dirigé ce travail sans discontinuer. Son amitié et ses qualités humaines m'ont apporté une aide considérable.

A Monsieur PARREAU qui me fait l'honneur et le très grand plaisir de présider ce jury.

Cette thèse a pour origine des travaux de Monsieur SOUCHET, Professeur à Poitiers, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et a accepté de participer à ce jury, je l'en remercie vivement.

Je tiens à remercier Monsieur HENRY qui a accepté d'examiner ce travail et de participer au jury.

Pendant tout ce travail j'ai bénéficié de la disponibilité de mon collègue D. BUISINE avec qui j'ai eu de longues discussions. Je le remercie vivement pour ces conseils généraux.

Je tiens à remercier J.C. MARTI pour l'aide qu'il m'a apportée pour la programmation numérique.

Je remercie également, Madame PÉTIAUX Françoise qui a dactylographié ces pages avec soin et le personnel de l'U.E.R. de Mathématiques Pures qui s'est chargé de l'impression et l'assemblage de ce document.

TABLE DES MATIERES

	Pages
I - <u>INTRODUCTION</u>	5
<u>PREMIERE PARTIE : PLAQUES TRANSVERSALEMENT ISOTROPES.</u>	8
<u>CHAPITRE II. EQUATION DE L'ELASTICITE LINEAIRE</u>	9
A - Milieu homogène isotrope	9
B - Milieu transversalement isotrope	12
<u>CHAPITRE III. DECOMPOSITION D'UN CHAMP VECTORIEL PLAN DE $[H^1(\Omega)]^2$</u>	
A - Existence et unicité de la décomposition	15
B - Décomposition d'un champ de vecteur, en coordonnées cylindriques	19
<u>CHAPITRE IV. PLAQUES TRANSVERSALEMENT ISOTROPES</u>	23
A - Equation de l'élasticité linéaire après décomposition.	
B - Formulation variationnelle.....	28
1 - Formulation équivalente des équations de l'élasticité dans Ω	28
2 - Formulation équivalente sur les faces $z = \pm h$...	36
<u>CHAPITRE V. APPROXIMATION SIMPLIFICATRICE SUR LE BORD D'UNE PLAQUE MINCE</u>	39
1 - Linéarisation du champ des déplacements	39
2 - Recherche du torseur des forces associé	40
3 - Formulation variationnelle tenant compte de l'approximation	41

	Pages
<u>CHAPITRE VI.</u> <u>SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES</u>	45
1 - Formulation différentielle	45
2 - Système différentiel	46
3 - Résolution du système différentiel	52
4 - Calcul des constantes d'intégration	62
5 - Conclusion	69
6 - Théorie asymptotique	71
 <u>CHAPITRE VII.</u> <u>EXEMPLE D'APPLICATION - PLAQUE CIRCULAIRE</u>	 79
1 - Recherche des fonctions propres	79
2 - Calcul des inconnues auxiliaires	83
3 - Approximation de rang N	89
4 - Théorie asymptotique	97
5 - Exemples de chargement	100
6 - Conclusion	104
 <u>DEUXIEME PARTIE : COQUES CYLINDRIQUES</u>	 106
 <u>CHAPITRE II'.</u> <u>EQUATIONS DE L'ELASTICITE LINEAIRE</u>	 107
1 - Equations de l'élasticité linéaire	107
2 - Conditions aux limites	110
3 - Les équations de l'élasticité, après décomposition du champ de vecteur \vec{U}	117
 <u>CHAPITRE III'.</u> <u>FORMULATION VARIATIONNELLE</u>	 127
1 - Formulation équivalente des équations de l'équilibre dans Ω	127
2 - Formulation équivalente sur les faces S^{\pm} ; $r=R+h$..	134

	Pages
<u>CHAPITRE IV'</u> . <u>APPROXIMATION SUR LE BORD D'UNE COQUE CYLINDRIQUE</u>	137
1 - Linéarisation du champ des déplacements et des charges appliquées	137
2 - Recherche de torseur des forces associé	138
3 - Formulation variationnelle après l'approximation.	140
 <u>CHAPITRE V'</u> . <u>SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES</u>	145
1 - Choix des fonctions propres	145
2 - Système différentiel	146
3 - Ecriture des équations différentielles	156
4 - Conclusion	159
 <u>CHAPITRE VI'</u> . <u>LE CAS D'UNE COQUE CYLINDRIQUE FERMEE</u>	162
1 - Formulation du problème	162
2 - Approximation sur le bord Σ	165
3 - Système d'équations différentielles	166
 <u>CHAPITRE VII'</u> . <u>MODELISATION NUMERIQUE</u>	174
I - <u>Présentation du problème</u>	174
1 - Etude des équations	174
2 - Dimension du problème	174
3 - Présentation matricielle du problème	175

	Pages
II - <u>Discrétisation</u>	178
1 - Schéma	178
2 - Méthode de calcul	178
3 - Discrétisation des équations I, II et III ...	181
4 - Discrétisation des équations I', II' et III' .	183
5 - Forme des opérateurs discrétisés	184
<u>CONCLUSION GENERALE</u>	186
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	190

INTRODUCTION

A partir du travail consacré à l'étude d'une théorie raffinée des plaques isotropes par M. SOUCHET [1] ; nous avons eu l'idée de généraliser cette théorie aux plaques transversalement isotropes et aux coques cylindriques isotropes (portion d'une coque cylindrique et coque cylindrique complète).

"Certes, dans la majorité des applications techniques, la formulation classique de POISSON-KIRCHOFF est suffisant pour l'étude des problèmes de flexion. Cependant, les imperfections de la théorie classique ont conduit plusieurs auteurs à proposer des modèles plus raffinés; l'un des premiers fut E. REISSNER [2] et tout récemment les résultats ainsi obtenus furent rassemblés dans un important ouvrage de V. PARC [3] avec un apport personnel de cet auteur" [1].

Dans la théorie classique des plaques, il y a deux méthodes principales pour aborder la solution du problème, la méthode de CAUCHY-POISSON et la méthode de KIRCHOFF [4]. Cette dernière a donné un sens physique à la théorie des plaques.

KIRCHOFF a basé sa théorie sur plusieurs suppositions, analogues à celles utilisées en théorie des poutres. Ces hypothèses peuvent être réduites aux deux suivantes :

- 1) Une fibre droite de la plaque perpendiculaire à la surface moyenne avant déformation, lui demeure perpendiculaire après déformation et ne change pas de longueur.
- 2) Les contraintes normales suivants les plans parallèles à la surface moyenne peuvent être négligées par comparaisons avec les autres contraintes.

Les principales hypothèses de la théorie des plaques minces servent de base à la théorie usuelle des coques minces.

Une coque est dite "mince" si $\max(h/R) \ll 1$ où h est l'épaisseur de la coque (supposée uniforme) et R est le rayon de courbure principale maximum de sa surface moyenne. dans les applications techniques, il est admissible et pour une erreur inférieure à 5 % de prendre :

$$\max(h/R) \leq 1/20 \quad [4]$$

Notons qu'il existe une importante différence dans le comportement des plaques et des coques sous l'action des charges extérieures. L'équilibre statique d'un élément de plaque soumis à une charge transversale n'est seulement possible que par l'action des moments de flexion et de torsion, habituellement accompagnées d'efforts tranchants, tandis qu'une coque, en général, est capable de transmettre les charges de surface par des contraintes de "membrane" qui agissent parallèlement au plan tangent en un point donné de la surface moyenne et sont distribuées uniformément à travers l'épaisseur de la coque [5].

Les nouvelles théories raffinées depuis LOVE-KIRCHOFF sont en général obtenues à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle soit par intégration de ces équations sur la variable épaisseur, c'est-à-dire le long des fibres de la plaque, soit par des hypothèses, sur les déplacements et les contraintes, faites à l'intérieur de la plaque et de la coque. Toutes ces théories découplent les effets de flexion et de contrainte plane.

L'approche que M. SOUCHET a proposé pour l'étude des plaques isotropes et que nous généralisons aux plaques transversalement isotropes et aux coques cylindriques, est de nature différente. Après avoir rappelé les équations de l'élasticité tridimensionnelle, nous obtenons une formulation

variationnelle par intégration sur les feuillets de la plaque et de la coque. Des hypothèses "naturelles" compatibles sont faites sur les déplacements et les charges sur les bords seuls de la plaque et de la coque (et non à l'intérieur de celles-ci).

Une application est donnée au Chapitre VII pour une plaque circulaire encastrée, une modélisation numérique est explicitée au Chapitre VII' pour l'intégration des équations différentielles de la coque cylindrique.

Nous verrons que plusieurs problèmes restent sans réponse et que la théorie n'est pas encore aussi générale que possible. En particulier, une étude directe de la formulation variationnelle reste à faire en vue de l'utilisation directe des éléments finis. De plus, il faudrait étendre les résultats aux plaques orthotropes et à des coques plus générales.

PREMIERE PARTIE

PLAQUES TRANSVERSALEMENT ISOTROPES

CHAPITRE II

EQUATIONS DE L'ELASTICITE LINEAIRE

A - Soit un milieu linéaire élastique occupant un domaine Ω de l'espace euclidien E_3 , rapporté à un repère orthonormé Ox_1, x_2, x_3 de base orthonormale associée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

A tout point x de Ω et pour tout instant t , si

$$\vec{U}(x,t) = u_i \vec{e}_i \quad (\text{resp. } \sigma(x,t) = \sigma_{ij}(x,t) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

désigne le vecteur déplacement du point x (resp. le tenseur symétrique des contraintes en ce point) on a (cf. GURTIN : p. 69-73).

$$(II.A-1) \quad \sigma(x) = C(x) : \varepsilon(x) ; \varepsilon(x) = \frac{1}{2} (\text{Grad}_x \vec{U} + {}^T \text{Grad}_x \vec{U})$$

$$(\sigma_{ij}(x) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} ; i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

où C est un tenseur du quatrième ordre considéré comme endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel des tenseurs symétriques du second ordre (C est symétrique pour le produit scalaire qui

$$\forall \alpha, \beta \text{ symétriques } \rightsquigarrow (\alpha \cdot \beta) = \text{Tr} (\alpha \cdot {}^T \beta) = \alpha_{ij} \beta_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$$

Il en résulte classiquement que

$$c_{ijkl} = c_{klij}$$

d'où, compte tenu de la symétrie de σ et ε :

$$(II.A-2) \quad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} .$$

Il y a donc au plus 21 coefficients (6 dans le cas plan).

La loi fondamentale de la dynamique entraîne (GERMAIN [6] p.ex)

$$(II.1-3) \quad \overrightarrow{\text{Div}} \sigma(x,t) + \vec{g}(x,t) = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

où, \vec{g} , ρ désignent respectivement les densités volumique de forces extérieures et massique au point $x \in \Omega$ à l'instant t .

(II.A-1) et II.A-2) montrent que :

$$(II.A-4) \quad \begin{aligned} C(x) : \varepsilon(x) &= C(x) : \text{Grad}_x \vec{U} \\ &= c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire (II.A-3) sous la forme :

$$(II.A-5) \quad \boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Div}} (C(x) : \text{Grad}_x \vec{U}) + \vec{g} &= \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}) + \vec{g}_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

qui peut encore s'écrire (PARSY (11))

$$(II.A-6) \quad \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij}(x) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_j}) + \vec{g} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}}}$$

où les

$$(II.A-7) \quad \underline{\underline{A_{ij} = c_{kilj} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l = {}^T A_{ji}}}$$

sont des tenseurs du second ordre.

Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope (GERMAIN [6])

$$\text{où} \quad c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

(λ, μ constants)

on a :

$$(II.A-8) \quad A_{11} = (\lambda + 2\mu) \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \mu (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3)$$

$$A_{12} = \lambda \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \mu (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1) = {}^T A_{21}$$

les autres A_{ij} s'en déduisant par permutation circulaire sur (1, 2, 3).

(II.A-6) devient :

$$(II.A-9) \quad (\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{U} - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} + \vec{g} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

$$\text{ou } \mu \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{U} + \vec{g} = \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} .$$

Dans le cas d'un milieu homogène transversalement isotrope pour la direction \vec{e}_3

(c'est-à-dire (GURTIN p. 87-89) dont le groupe de symétrie matérielle, ensemble des tenseurs orthogonaux Q tels que :

$$(II.A-10) \quad C(x) : Q \cdot \varepsilon \cdot {}^T Q = Q \cdot C(x) : \varepsilon \cdot {}^T Q$$

est formé de l'application identique 1 et des rotations d'axe \vec{e}_3)

on voit, d'après (I.A-10) que C , dans le cas tridimensionnel a , pour coefficients non nuls :

$$c_{1111} = c_{2222} ; c_{1212} = \frac{1}{2} (c_{1111} - c_{2222}) ; c_{1313} = c_{2323}$$

(II.A-11)

$$c_{1133} = c_{2233} ; c_{1122} \text{ et } c_{3333} .$$

Si l'on pose :

$$c_{1111} = \lambda_0 + 2\mu_0 ; c_{1122} = \lambda_0 , c_{1133} = \lambda_1$$

$$c_{1313} = \mu_1 \quad \text{et} \quad c_{3333} = \lambda_1 + 2\mu_2$$

(II.A-7) s'écrit :

$$A_{11} = (\lambda_0 + 2\mu_0) \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \mu_0 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \mu_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$$

$$A_{22} = \mu_0 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + (\lambda_0 + 2\mu_0) \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \mu_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$$

$$(II.A-8) \quad A_{33} = \mu_1 (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) + (\lambda_1 + 2\mu_2) \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$$

$$A_{12} = {}^T A_{21} = \lambda_0 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \mu_0 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

$$A_{23} = {}^T A_{32} = \lambda_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + \mu_1 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3$$

$$A_{31} = {}^T A_{13} = \lambda_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 .$$

(qui redonne le cas isotrope lorsque $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu$) .

B CAS DES PLAQUES TRANSVERSALEMENT ISOTROPES

Si $\Omega = \omega \times]-h, h[$ où $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné (feuillet moyen de la plaque); $2h$ est l'épaisseur constante de la plaque. (C) désignera la frontière de ω ,

$$\Gamma_0^h = C \times]-h, h[\text{ le bord latéral de la plaque } \Omega$$

$$\Gamma_\varepsilon^h = \{ (x_1, x_2, \varepsilon h) \in \bar{\Omega} \}, \varepsilon = \pm 1 \text{ les faces supérieures } (\varepsilon = +1) \text{ et inférieure } (\varepsilon = -1) \text{ de } \Omega.$$

\vec{n} désignera le vecteur unitaire normal extérieur à (C) .

Suivant SOUCHET [1] pour toute fonction \vec{f} de Ω dans \mathbb{R}^3 on utilisera la décomposition : $\vec{f} = \vec{f} + f_0 \vec{e}_3 = \vec{f} = f_\alpha \vec{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) et les notations :

$$\vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_3}, \quad \ddot{\vec{f}} = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_3^2}, \dots$$

Si l'on introduit les décompositions (I.B-2)

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \vec{g} + g_0 \vec{e}_3 \\ \vec{p}^\varepsilon &= \vec{p}^\varepsilon + p_0^\varepsilon \vec{e}_3 \\ \vec{f} &= \vec{f} + f_0 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad \text{(II.B-3)}$$

pour les densités volumiques de charges extérieures, surfaciques \vec{p}^ε de charges sur $x_3 = \varepsilon h$ ($\varepsilon = \pm 1$) et \vec{f} sur Γ_0^h , on obtient pour (I.A-6) compte tenu de (I.A-13) (dans le cas statique) :

$$\mu_0 \Delta \vec{u} + (\lambda_0 + \mu_0) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{u} + \mu_1 \ddot{\vec{u}} + (\lambda_1 + \mu_1) \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_0 = - \vec{g}$$

I.B-4)

$$\mu_1 \Delta u_0 + (\lambda_1 + \mu_1) \text{div } \dot{\vec{u}} + (\lambda_1 + 2\mu_2) \ddot{u}_0 = - g_0$$

dans Ω , les opérateurs $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $\text{div } u = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$.

($\alpha = 1, 2$) désignant des opérateurs différentiels plans (c'est-à-dire par rapport à x_1 et x_2).

sur $x_3 = \pm h$

$$(II.B-5) \quad \begin{aligned} \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0 + \dot{\vec{u}}) &= \varepsilon \vec{p}^\varepsilon \\ \lambda_1 \text{div} \vec{u} + (\lambda_1 + 2\mu_2) \dot{u}_0 &= \varepsilon p_0^\varepsilon \end{aligned}$$

sur $\Gamma_0^h = \mathcal{C} \times]-h, +h[$, si $\vec{n} = n_\alpha \vec{e}_\alpha$, $\vec{t} = \vec{e}_3 \wedge \vec{n} = -n_2 \vec{e}_1 + n_1 \vec{e}_2$

$$(II.B-6) \quad \begin{aligned} 2\mu_0 \frac{d\vec{u}}{dn} + (\lambda_0 \text{div} \vec{u} + \lambda_1 \dot{u}_0) \vec{n} - \mu_0 (\text{rot} \vec{u}) \vec{t} &= \vec{f} \\ \mu_1 \left(\frac{du_0}{dn} + \dot{\vec{u}} \cdot \vec{n} \right) &= f_0 \end{aligned}$$

compte tenu de : $\vec{n} \wedge \text{rot} \vec{u} = - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \vec{t} = - (\text{rot} \vec{u}) \vec{t}$.

Si l'on introduit la décomposition d'un champ de vecteurs (SOUCHET)

(II.B-7) $\vec{U} = u_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2$ (rappelée au chapitre III)
 $(\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions régulières de Ω dans \mathbb{R}) les équations (II.B-4, 5 et 6) peuvent se mettre sous les formes suivantes.

Dans Ω

$$(II.B-8) \quad \begin{aligned} \mu_1 \Delta u_0 + (\lambda_1 + \mu_1) \Delta \dot{u}_1 + (\lambda_1 + 2\mu_2) \ddot{u}_0 &= g_0 \\ (\lambda_0 + 2\mu_0) \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_1) + \mu_0 \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_2) + \mu_1 \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2 \\ + \mu_1 \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1 + (\lambda_1 + \mu_1) \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_0 + \vec{g} &= \vec{0} \end{aligned}$$

sur $x_3 = \pm h$:

$$(II.B-9) \quad \begin{aligned} \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0 + \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2) &= \varepsilon \vec{p}^\varepsilon \\ \lambda_1 \Delta u_1 + (\lambda_1 + 2\mu_2) \dot{u}_0 &= \varepsilon p_0^\varepsilon \end{aligned}$$

Sur Γ_0^h :

si l'on écrit :

$$\vec{f} = f_n \vec{n} + f_t \vec{t}$$

on a, d'après (I.B-6)

$$f_n = 2\mu_0 \vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn} + \lambda_0 \Delta u_1 + \lambda_1 \dot{u}_0.$$

Or, on a :

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = \text{div } \vec{u} \quad (= \Delta u_1 \text{ d'après (III.A) })$$

donc :

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = \Delta u_1 .$$

De même :

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} - \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn} = \text{div} (\vec{e}_3 \wedge \vec{u}) = -\Delta u_2 .$$

Comme :

$$f_t = 2\mu_0 \frac{d\vec{u}}{dn} \cdot \vec{t} - \mu_0 \text{rot } \vec{u}$$

'on déduit de ce qui précède que

$$f_t = 2\mu_0 \vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \mu_0 \Delta u_2$$

$$f_n = 2\mu_0 \Delta u_1 + \lambda_0 \Delta u_1 - 2\mu_0 \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} + \lambda_1 \dot{u}_0 .$$

$$f_0 = \mu_1 \left(\frac{du_0}{dn} + \vec{u} \cdot \vec{n} \right)$$

(II.B-10)

expriment les conditions aux limites sur le bord latéral Γ_0^h .

CHAPITRE III

DECOMPOSITION D'UN CHAMP VECTORIEL PLAN DE $[H^1(d)]^2$

A - EXISTANCE ET UNICITE DE LA DECOMPOSITION

Soit $\vec{u} \in [H^1(d)]^2$ un vecteur quelconque.

On définit : $H_0(d) = \{ f \in L^2(d) \text{ tel que } \Delta f \in L^2(d) \text{ avec } f|_{\Sigma} = 0 \}$

(d) étant le domaine; Σ est son bord.

Soit $u_1 \in H_0(d)$ tel que $\Delta u_1 = \text{div} \vec{u}$

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \Delta f = -g & ; g \in L^2(d) \\ f|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique dans $H_0^1(d)$, on peut même dire de plus que cette solution, d'après le théorème de régularité de NIRENBERG, est dans $H^2(d)$. (Principe du maximum ou Méthode intégrale). [8]

On prendra donc $u^1 \in H_0^1(d) \cap H^2(d)$

Soit $\vec{u}' = \vec{u} - \text{grad} u_1$; $\vec{u}' \in [H^1(d)]^2$ et

$$\text{div} \vec{u}' = \text{div} \vec{u} - \text{div} (\text{grad} u_1) = \text{div} \vec{u} - \Delta u_1 = 0$$

Soit alors $\vec{v} = \vec{u}' \wedge \vec{e}_k$ \vec{e}_k étant \perp au plan de

$$\vec{v} \in [H^1(d)]^2 \text{ et } \vec{v} \wedge \vec{e}_k = (\vec{u}' \wedge \vec{e}_k) \wedge \vec{e}_k = (\vec{e}_k \cdot \vec{u}') \vec{e}_k - \vec{u}' \\ = -\vec{u}'$$

$$\Rightarrow \text{div} (\vec{v} \wedge \vec{e}_k) = - (\text{div} \vec{u}') = 0 \quad \dots \quad \text{III.1}$$

Soit $\delta \subset d$ un sous domaine quelconque de d , de frontière Γ .

Considérons un élément quelconque de $[H^1(d)]^2$, on a $\vec{\mu} \in [H^1(\delta)]^2$

et $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_1, \mu_2 \in H^1(\delta)$.

D'après le théorème de trace, il existe $K(\delta) > 0$ tel que :

$$\|\mu_1|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq K \|\mu_1\|_{H^1(\delta)}$$

$$\text{et} \quad \|\mu_2|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq K \|\mu_2\|_{H^1(\delta)}$$

Si on considère la restriction à Γ de $\vec{\mu} \cdot \vec{n}$ que l'on notera

$$\Gamma(\vec{\mu} \cdot \vec{n}), \text{ on aura :} \quad \Gamma(\vec{\mu} \cdot \vec{n}) = \Gamma(\mu_1) n_1 + \Gamma(\mu_2) n_2$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \Gamma(\mu_1) = \mu_1|_{\Gamma} \\ \Gamma(\mu_2) = \mu_2|_{\Gamma} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |\vec{\mu} \cdot \vec{n}| \, ds &= \int_{\Gamma} |\Gamma(\vec{\mu} \cdot \vec{n})| \, ds = \int_{\Gamma} |\Gamma(\mu_1) n_1 + \Gamma(\mu_2) n_2| \, ds \\ &\leq \int_{\Gamma} |\Gamma(\mu_1) n_1| \, ds + \int_{\Gamma} |\Gamma(\mu_2) n_2| \, ds \\ &\leq \left(\int_{\Gamma} |\Gamma(\mu_1)|^2 \, ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Gamma} n_1^2 \, ds \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{\Gamma} |\Gamma(\mu_2)|^2 \, ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Gamma} n_2^2 \, ds \right)^{1/2} \\ &\leq K \left\{ \|\mu_1\|_{H^1(\delta)} \cdot \left(\int_{\Gamma} n_1^2 \, ds \right)^{1/2} + \|\mu_2\|_{H^1(\delta)} \cdot \left(\int_{\Gamma} n_2^2 \, ds \right)^{1/2} \right\} \\ &\leq K \sup(\|\mu_1\|_{H^1(\delta)}, \|\mu_2\|_{H^1(\delta)}) \left[\left(\int_{\Gamma} n_1^2 \, ds \right)^{1/2} + \left(\int_{\Gamma} n_2^2 \, ds \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

Or on a toujours : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq 2(a+b)$, $\forall a, b \geq 0$
 $\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$

D'où
$$\int_{\Gamma} |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds \leq \sqrt{2} \kappa \sup(\|\mu_1\|_{H^1(\delta)}, \|\mu_2\|_{H^1(\delta)}) \left(\int_{\Gamma} (n_1^2 + n_2^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \kappa \sqrt{2 \text{mes}(\Gamma)} \sup(\|\mu_1\|_{H^1(\delta)}, \|\mu_2\|_{H^1(\delta)})$$

$\vec{u} \cdot \vec{n} \in L^1(\Gamma)$ avec Γ frontière d'un sous domaine quelconque δ de d .

III.1 donne alors :

$$\int_{\delta} \text{div}(\vec{v} \wedge \vec{e}_k) dx = \int_{\Gamma} (\vec{v} \wedge \vec{e}_k) \cdot \vec{n} ds = 0$$

or $(\vec{v} \wedge \vec{e}_k) \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (\vec{e}_3 \wedge \vec{n}) = \vec{v} \cdot \vec{t}$
 \vec{t} étant le vecteur tangent à la frontière Γ .

D'où $\int_{\Gamma} (\vec{v} \cdot \vec{t}) ds = 0$.

$\Rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{t}) \in L^1(\Gamma)$ avec Γ frontière d'un sous domaine δ de d , et \vec{v} tel que $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{t} ds = 0$ pour toute courbe fermée Γ dans d .

Il en résulte donc que la circulation de \vec{v} le long d'un arc de courbe \overline{AM} , avec A point fixé de d et M point courant, est indépendante de l'arc choisi.

$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{t} ds$ est une quantité fonction scalaire μ_2 du Point M on a :
$$\mu_2(M) = \int_{\overline{AM}} \vec{v} \cdot \vec{t} ds$$

μ_2 est définie à une constante additive près. Et $\vec{v} \cdot d\vec{M} = d\mu_2$,

\forall le déplacement $d\vec{M}$, on en déduit donc :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \mu_2 \quad \text{dans } [\mathcal{D}'(d)]^2 \quad \text{avec } \mu_2 \in \mathcal{C}^0(\bar{d})$$

donc $\mu_2 \in L^2(d)$ d'autre part, $\vec{v} \in [H^1(d)]^2$ d'où

$$\mu_2 \in \mathcal{C}^0(\bar{d}) \cap H^1(d)$$

Par suite $\vec{u}' = \vec{e}_3 \wedge \vec{v} = \vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_2$

D'où

$$\vec{u} = \vec{\text{grad}} \mu_1 + \vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_2$$

Et

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 \wedge \vec{u} &= \vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_1 + \vec{e}_3 \wedge (\vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_2) \\ &= \vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_1 - \vec{\text{grad}} \mu_2 + \vec{e}_3 \cdot (\vec{\text{grad}} \mu_2 \cdot \vec{e}_3) \\ &= \vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_1 - \vec{\text{grad}} \mu_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{e}_3 \wedge \vec{u}) &= \text{div}(\vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_1) - \text{div}(\vec{\text{grad}} \mu_2) \\ &= \text{rot} \vec{e}_3 \cdot \vec{\text{grad}} \mu_1 - \text{rot}(\vec{\text{grad}} \mu_1) \cdot \vec{e}_3 - \Delta \mu_2 \\ &= -\Delta \mu_2 \end{aligned}$$

Conclusion

Tout champ $\vec{u} \in [H^1(d)]^2$ se décompose de la manière suivante :

$$\vec{u} = \vec{\text{grad}} \mu_1 + \vec{e}_3 \wedge \vec{\text{grad}} \mu_2$$

avec $\mu_1 \in H_0^1(d) \cap H^2(d)$ tel que $\Delta \mu_1 = \text{div} \vec{u}$

$$\mu_2 \in \mathcal{C}^0(\bar{d}) \cap H^1(d) \quad \Delta \mu_2 = -\text{div}(\vec{e}_3 \wedge \vec{u})$$

μ_1 est unique, μ_2 est déterminée à une constante additive près.

D'autre part on a sur le bord Γ :

$$u_{1/\Gamma} = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{du_1}{dn} - \frac{du_2}{dt}$$

$$u_t = \vec{u} \cdot \vec{t} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dn}$$

B - DECOMPOSITION D'UN CHAMP DE VECTEUR, EN COORDONNES CYLINDRIQUES

Soit le domaine élastique cylindrique Ω définie en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , relatives au repère orthonormé $\vec{Ox}\vec{y}\vec{z}$, définie par

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & \text{avec} & & R-h < r < R+h & ; & 0 < h < R \\ y &= r \sin \theta & & & -\alpha < \theta < +\alpha & ; & 0 < \alpha < \pi \\ z &= z & & & -l < z < +l & ; & l > 0 \end{aligned}$$

où h, R, α, l sont données.

Soit \vec{U} un champ vectoriel définie sur Ω : on séparera dans la suite ses composantes u_r sur $\vec{e}_r = \vec{x} \cos \theta + \vec{y} \sin \theta$ et \vec{u} sur $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) étant orthonormé direct.

Pour tout $r \in]R-h, R+h[$, \vec{U} est un champ défini par :

$$\vec{U}(r, \theta, z); (\theta, z) \in d =]-\alpha, +\alpha[\times]-l, +l[: r \longrightarrow \vec{U}(r, \theta, z)$$

$$\vec{U} = u_r \vec{e}_r + \vec{u}(\cdot, \theta, z)$$

$\vec{u}: d \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sera dit un champ de vecteurs tangents défini sur (d) .

On va montrer qu'il se décompose canoniquement sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{u} = \text{grad } u_1 + \vec{e}_r \wedge \text{grad } u_2 \\ u_1 = 0 \text{ sur la frontière de } (d) \text{ } (\theta = \pm \alpha, z = \pm l) \end{cases}$$

où $\vec{\text{grad}} = \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ est l'opérateur gradient "tangent".
 \vec{u} étant donné de classe C^2 sur d , il existe un champ scalaire ψ définie sur (d) tel que :

$$\Delta \psi = \text{div } \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{Laplacien "tangent"}$$

Si l'on pose : $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{\text{grad}} \psi$

on écrira donc $\text{div } \vec{u}' = 0$ (div opérateur "tangent").

Il existe donc un champ scalaire ψ sur (d) tel que :

$$\vec{u}' = \vec{e}_r \wedge \text{grad } \psi = \text{rot } \psi \vec{e}_r = \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_z$$

(où rot est l'opérateur "tangent" $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \wedge$).

Dans ces conditions \vec{u} s'écrit :

$$\vec{u} = \vec{\text{grad}} \psi + \vec{e}_r \wedge \text{grad } \psi$$

avec

$$\Delta \psi = \text{div } \vec{u}$$

$$\Delta \psi = -\text{div}(\vec{e}_r \wedge \vec{u}) \text{ dans } d ; \forall r \in]R-h ; R+h[$$

En utilisant :

$$\vec{u} = \vec{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \vec{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \vec{e}_\theta \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\vec{u} = \vec{e}_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

et $\text{div } \vec{w} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{w} \cdot \vec{e}_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{w} \cdot \vec{e}_z)$ on écrit aisément que :

$$- \operatorname{div}(\vec{e}_r \wedge \vec{u}) = \Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

et, sur la frontière de d :

$$\text{où } \begin{cases} \theta = +\alpha \\ z = \pm l \end{cases} \quad \begin{aligned} \mu_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \mu_z &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad ; \forall r \in]R-h, R+h[$$

Unicité de la décomposition :

Soit $(\Psi_1, \Psi_1), (\Psi_2, \Psi_2)$ tel que :

$$\vec{u} = \vec{\operatorname{grad}} \Psi_i + \vec{e}_r \wedge \vec{\operatorname{grad}} \Psi_i \quad (i=1,2)$$

Si l'on pose $\Psi_1 - \Psi_2 = \varphi$; $\Psi_1 - \Psi_2 = \psi$ on a donc :

$$\vec{\operatorname{grad}} \varphi + \vec{e}_r \wedge \vec{\operatorname{grad}} \psi = 0 \quad \text{dans } d \quad (\forall r \in]R-h, R+h[)$$

Soit

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= r \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \text{ dans } (d) \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad \text{dans } (d)$$

Soit $\Delta \varphi = 0 = \Delta \psi$; de même μ_θ, μ_z étant donné sur ∂d on a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{sur } \partial d .$$

Pour r fixé, φ et ψ sont des fonctions harmoniques de z , $s = r\theta$ sur $]-r\alpha, r\alpha[x]-l, +l[$ et vérifiant sur la frontière de ce rectangle (et dans ce rectangle) $\frac{\partial\varphi}{\partial s} - \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial s}$ qui sont les conditions de CAUCHY-RIEMANN traduisant le fait que $\varphi + i\psi$ est une fonction holomorphe de la variable complexe $s + iz$. D'après le théorème du maximum, si l'on impose $\varphi = 0$ sur $\{\pm r\alpha\} \times]-l, +l[$ et $]-r\alpha, r\alpha[x\{\pm l\}$ on aura $\varphi \equiv 0$ dans (d) et par conséquent $\psi = \text{cste}$ dans d .

Résultat : Tout champ vectoriel tangent \vec{u} se décompose de manière unique de la façon suivante :

$$\vec{u} = \text{grad } u_1 + \vec{e}_r \wedge \text{grad } u_2$$

où

$$\forall r \in]R-h, R+h[\\ u_i \in \mathcal{C}^2(d; \mathbb{R}) \quad \text{où } d =]-r\alpha, +r\alpha[x]-l; +l[\\ i = (1, 2)$$

vérifie :

$$\Delta u_1 = \text{div } \vec{u}$$

$$\Delta u_2 = -\text{div}(\vec{e}_r \wedge \vec{u})$$

$$u_1 = 0 \text{ sur } \{\pm r\alpha\} \times]-l, +l[\cup]-r\alpha, r\alpha[x\{\pm l\} = \Sigma$$

CHAPITRE IV

PLAQUES TRANSVERSALEMENT ISOTROPES

A - EQUATIONS DE L'ELASTICITE LINEAIRE

Soit L , l'opérateur de LAME, (σ_{ij}) le tenseur des contraintes, \vec{U} désignant le champ des déplacements; les équations de l'Elasticité linéaire sont :

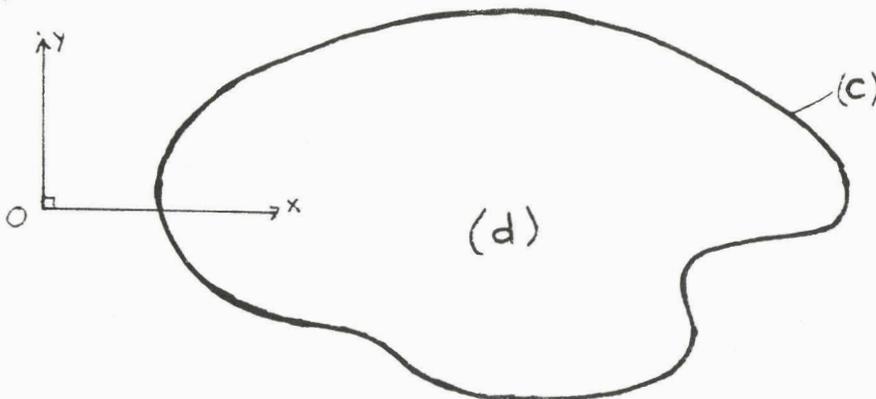
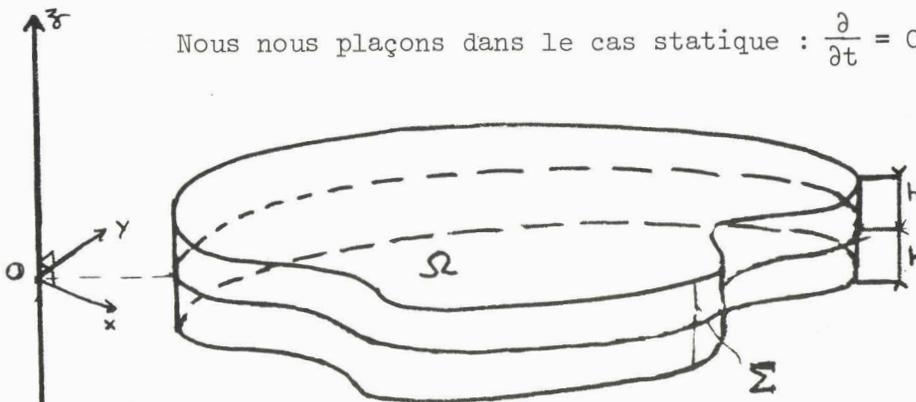
$$\overline{L}(\vec{U}) + \vec{G} = 0 \quad \text{dans } S \quad \text{IV.1}$$

$$(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33} \quad \varepsilon \vec{P}_e \quad \text{sur } \tau = \varepsilon h \quad \text{IV.2}$$

$$(\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j} n_j, \sigma_{3j} n_j) = \vec{F} \quad (j = 1, 2, n_3 = 0) \quad \text{sur } \Sigma \quad \text{IV.3}$$

Rappelons que : le champ des déplacements \vec{U} se met sous la forme $\vec{U} = U_0 \vec{e}_3 + \vec{u}$; $\vec{u} = u_x \vec{e}_1 + u_y \vec{e}_2$ et que tous les opérateurs sont des opérateurs "plans".

Nous nous plaçons dans le cas statique : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.



1) Dans S : Les équations (IV.1) (Ch. II Equation II.16), s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mu_0 \Delta_p \vec{u} + (\lambda_0 + \mu_0) \overrightarrow{\text{grad}}_p \text{div}_p \vec{u} + \mu_1 \vec{u}'' + (\lambda_1 + \mu_1) \overrightarrow{\text{grad}}_p u'_0 &= - \vec{g} \\ \mu_1 \Delta_p u_0 + (\lambda_1 + \mu_1) \text{div}_p \vec{u}' + (\lambda_1 + 2\mu_2) u''_0 &= - g_0 \end{aligned}$$

(IV.4)

2) Sur les faces $Z = \pm h$

Les conditions aux limites, sur les faces $Z = \pm h$ exprimées par les équations IV.2 deviennent : ($\vec{n} = \vec{e}_3$)

$$\begin{aligned} \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}}_p u_0 + \vec{u}') &= \varepsilon \vec{P}_\varepsilon \\ \lambda_1 \text{div}_p \vec{u} + (\lambda_1 + 2\mu_2) u'_0 &= \varepsilon P_{\varepsilon 0} \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

3) Sur le bord $\Sigma = CX]-h, +h [$

Soit $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2$ vecteur normal extérieur à C

$\vec{t} = -n_2 \vec{e}_1 + n_1 \vec{e}_2$ vecteur tangent sur C

Remarquons d'autre part que : $\vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \vec{t}$
 $= - (\text{rot}_p \vec{u}) \vec{t}$

Les équations (III.3) exprimant les conditions aux limites sur le bord Σ ; deviennent :

$$\begin{aligned} 2\mu_0 \frac{d\vec{u}}{dn} + (\lambda_0 \text{div}_p \vec{u} + \lambda_1 \dot{u}_0) \vec{n} - \mu_0 (\text{rot}_p \vec{u}) \vec{t} &= \vec{f} \\ \mu_1 \left(\frac{du_0}{dn} + \vec{u} \cdot \vec{n} \right) &= f_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Dans toute la suite nous abandonnons la notation $\overrightarrow{\text{grad}}_p$, div_p , Δ_p etc...
 Pour la remplacer tout simplement par : $\overrightarrow{\text{grad}}$, div , Δ ... etc....

En conséquence de la décomposition d'un champ de vecteur (Ch. III)

nous aurons :

$$* \quad \vec{U} = u_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2$$

$$* \quad \dot{\vec{u}} = \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2$$

$$* \quad \Delta \vec{u} = \Delta (\overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2)$$

$$* \quad \Delta \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_1) + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_2)$$

$$* \quad \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2)] = \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_1)$$

$$* \quad \text{div } \dot{\vec{u}} = \Delta \dot{u}_1$$

$$* \quad \ddot{\vec{u}} = \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2$$

Cette décomposition nous permettra d'écrire les équations de l'équilibre et les conditions aux limites sous les formes suivantes :

En effet, les équations (IV.4) deviennent : (l'équilibre dans S)

$$\begin{aligned} \mu_1 \Delta u_0 + (\lambda_1 + \mu_1) \Delta \dot{u}_1 + (\lambda_1 + 2\mu_2) \ddot{u}_0 &= g_0 \\ (\lambda_0 + 2u_0) \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_1) + u_0 \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_2) + u_1 \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2 + u_1 \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1 \\ + (\lambda_1 + u_1) \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_0 + \vec{g} &= 0 \end{aligned}$$

(IV.7)

Les équations (IV.5) deviennent : (conditions aux limites, $Z = \varepsilon h$)

$$\begin{aligned} \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0 + \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2) &= \varepsilon \vec{P}_\varepsilon \\ \lambda_1 \Delta u_1 + (\lambda_1 + 2\mu_2) \dot{u}_0 &= E P_{\varepsilon 0} \end{aligned}$$

(IV.8)

Les équations (IV.6) s'écrivent : (conditions aux limites sur le bord Σ).

$$\text{Soit } \vec{f} = f_n \vec{n} + f_t \vec{t} \Rightarrow$$

$$f_n = 2 u_0 \frac{d\vec{u}}{dn} \cdot \vec{n} + \lambda_0 \Delta u_1 + \lambda_1 \dot{u}_0$$

$$\begin{aligned} \text{or nous avons : } \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} + \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \vec{n} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} n_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} n_2 \right) + \vec{t} \left(-\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} n_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} n_1 \right) \\ &= \vec{n} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u_x}{\partial y} n_2 \right) \vec{e}_1 + \vec{n} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_2 \right) \vec{e}_2 \\ &+ \vec{t} \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x} n_2 + \frac{\partial u_x}{\partial y} n_1 \right) \vec{e}_1 + \vec{t} \left(-\frac{\partial u_y}{\partial x} n_2 + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_1 \right) \vec{e}_2 \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial x} n_1^2 + \frac{\partial u_x}{\partial y} n_1 n_2 + n_1 n_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_2^2 + \frac{\partial u_x}{\partial x} n_2^2 \\ &- \frac{\partial u_x}{\partial y} n_1 n_2 - \frac{\partial u_y}{\partial x} n_1 n_2 + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_1^2 \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial x} (n_1^2 + n_2^2) + \frac{\partial u_y}{\partial y} (n_1^2 + n_2^2) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial k} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = \text{div } \vec{u} = \Delta u_1 . \end{aligned}$$

$$* \quad \boxed{\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} + \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} = \Delta u_1}$$

$$\text{D'autre part : } \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} - \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} = \vec{n} \left(-\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} n_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} n_1 \right) - \vec{t} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} n_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} n_2 \right)$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = \text{div} (\vec{e}_3 \wedge \vec{u}) = -\Delta u_2$$

$$* \quad \boxed{\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} - \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} = -\Delta u_2}$$

$$\text{Or nous avons } f_t = 2 \mu_0 \frac{d\vec{u}}{dn} \cdot \vec{t} - \mu_0 \text{rot } \vec{u} \Rightarrow$$

$$f_t = 2\mu_0 \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} + \mu_0 \Delta u_2$$

$$\text{et } f_n = 2\mu_0 \Delta u_1 + \lambda_0 \Delta u_1 - 2\mu_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + \lambda_1 \dot{u}_0$$

En définitive les équations (IV.6) expriment les conditions aux limites sur le bord Σ , s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} f_n &= (\lambda_0 + 2\mu_0) \Delta u_1 + \lambda_1 \dot{u}_0 - 2\mu_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} \\ f_t &= 2\mu_0 \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} + \mu_0 \Delta u_2 \\ f_o &= \mu_1 \left(\frac{du_0}{dn} + \vec{u} \cdot \vec{n} \right) \end{aligned} \right\} \text{(IV.9)}$$

Conclusion

Dans le repère $(0, e_1, e_2, e_3)$, la plaque transversalement isotrope occupe le domaine $S = dx]-h, +h[$; (c) la frontière de $d, \Sigma = Cx]-h_1 + h [$ le bord de la plaque. \vec{G} étant les forces volumiques dans S \vec{P}_ε forces appliquées sur les faces $Z = \varepsilon h$; \vec{F} charges appliquées sur le bord Σ .

Les équations de l'élasticité linéaire, exprimant l'équilibre de la plaque et les conditions aux limites sont :

\vec{U} étant le champ des déplacements tel que; $\{u_1, u_2\}$ deux champs scalaires tel que :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= u_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2 \\ \text{avec } U_{1/\Sigma} &= 0 \text{ et } \text{div } \vec{u} = \Delta u_1 \\ \text{div } (\vec{e}_3 \wedge \vec{u}) &= -\Delta u_2 \end{aligned}$$

* Dans S ; (donc d et $\forall Z \in]-h, +h [$) :

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \Delta u_0 + (\lambda_1 + \mu_1) \Delta \dot{u}_1 + (\lambda_1 + 2\mu_1) \ddot{u}_0 &= -g_0 \\ (\lambda_0 + 2\mu_0) \overrightarrow{\text{grad}}(\Delta u_1) + \mu_0 \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(\Delta u_2) + \mu_1 \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2 + \mu_1 \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1 + \\ (\lambda_1 + \mu_1) \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_0 &= -\vec{g} \end{aligned} \right\}$$

(IV.10)

* Pour $Z = \pm h$

$$\begin{aligned} u_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0 + \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2) &= \varepsilon \vec{P}_e \\ \lambda_1 \Delta u_1 + (\lambda_1 + 2\mu_2) \dot{u}_0 &= \varepsilon P_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

* Sur le bord Σ ; (sur la frontière C ; et $Z \in]-h_1 + h[$) :

$$\begin{aligned} f_n &= (\lambda_0 + 2\mu_0) \Delta u_1 + \lambda_1 \dot{u}_0 - 2\mu_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} \\ f_t &= 2\mu_0 \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} + \mu_0 \Delta u_2 \\ f_o &= \mu_1 \left(\frac{du_0}{dn} + \dot{u}_n \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

B) FORMULATION VARIATIONNELLE

[On refait en détail les calculs de SOUCHET [1] dans le cas transversalement isotrope].

Nous introduisons l'espace W défini par :

$$W = \{ \vec{W} = (w_0, w_1, w_2) \in C^2(\bar{d}, R^3); \text{ tel que : } \vec{W} = w_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2;$$

$$\text{avec } w_1|_{\Sigma} = 0 \text{ et } \text{div } \vec{w} = \Delta w_1 ; \text{div} (\vec{e}_3 \wedge \vec{w}) = -\Delta w_2 \}$$

1°) Formulation équivalente des équations de l'élasticité dans Ω . . .

L'équation (IV.1) exprimant l'équilibre dans d et $\forall Z \in]-h, +h[$ est :

$$\overline{L}(\vec{U}) = -\vec{G} .$$

Problème : La formulation $\overline{L}(\vec{U}) = -\vec{G}$ est-elle équivalente à la formulation :

$$\int_d \overline{L}(\vec{V}) \cdot \vec{W} \, dx = - \int_d \vec{G} \cdot \vec{W} \, dx \quad \forall \vec{W} \in W$$

et $\forall Z \in]-h, +h[$

En effet, l'équivalence est évidente dans un sens :

$$L(\vec{U}) = \vec{G} \Rightarrow \int_d \overline{L(\vec{U})} \cdot \vec{W} \, dx = - \int_d \vec{G} \cdot \vec{W} \, dx \quad \forall \vec{W} \in W \text{ et } \forall Z \in]-h, +h[$$

Il nous faut démontrer que :

$$\int_d \overline{L(\vec{U})} \cdot \vec{W} \, dx = - \int_d \vec{G} \cdot \vec{W} \, dx \Rightarrow \text{alors } \overline{L(\vec{U})} = - \vec{G} .$$

$$\forall \vec{W} \in W \quad \forall Z \in]-h, +h[.$$

Lemme : Si $\psi(M)$ est une fonction définie et continue dans le domaine d , et si pour tout (δ) sous domaine quelconque de (d) on a : $\int_{\delta} \psi(M) dx = 0$, alors $\psi(M)$ est identiquement nulle dans (d) presque partout.

Il nous faut démontrer que en effet si $\int_d \psi(M) dx = 0$ alors \Rightarrow

$$\int_d \psi(M) dx = 0 \quad \text{pour } \forall (\delta \subset d).$$

Nous avons, $\int_{\delta} \psi(M) dx = \int_{\delta} \psi(M) 1_{\delta}(x) dx$

avec : $1_{\delta}(x) = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$= 1 \text{ si } x \in \delta$$

$$= 0 \text{ si } x \notin \delta$$

ceci nous donne :

$$\int_d \psi(M) 1_{\delta}(x) dx = \int_{\delta} \psi(M) 1_{\delta}(x) dx + \int_{d \setminus \delta} \psi(M) 1_{\delta}(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_d \psi(M) 1_{\delta}(x) dx = \int_{\delta} \psi(M) 1_{\delta}(x) dx$$

$$d'où \int_d \psi(M) dx = 0 \Rightarrow \int_{\delta} \psi(M) dx = 0 .$$

Soit alors : $\psi(M) = L(U) - G$ nous aurons :

$$\int_d (L(U) - G) W dx = 0 \quad \forall \vec{W} \in W$$

1°) Soit $\vec{W} = \omega_0 \vec{e}_3 \Rightarrow$

$$\int_d (\overline{L(\vec{U})} - \vec{G}) \omega_0 \vec{e}_3 dx = 0$$

Soit δ un sous domaine quelconque de d avec support de $\omega_0 \subset \delta$

$$\int_d \psi(H) \omega_0 dx = 0 \Rightarrow \int_\delta \psi(M) \omega_0 dx = 0$$

D'où d'après le lemme, $\psi(M) \omega_0 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\psi(M) = 0}$$

$$\text{avec } \psi(M) = (\overline{L(\vec{U})} - \vec{G}) \cdot \vec{e}_3$$

2°) Soit $\vec{W} \in W$ tq $w_0 = 0$; $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2$

On aura alors :

$$\int_d (\overline{L(\vec{U})} - \vec{G}) \vec{W} dx = 0$$

$$\int_d (\overline{L(\vec{U})} - \vec{G}) (\overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2) dx$$

$$= \int_d (\overline{L(\vec{U})} - \vec{G}) \left| \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \cdot \vec{e}_2 \right| dx = 0$$

$$\text{avec } \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial y} = w_x$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = w_y$$

$$\Rightarrow \int_d (\overline{L(\vec{U})} - \vec{G}) (w_x \cdot \vec{e}_1 + w_y \cdot \vec{e}_2) dx = 0$$

Soit $w_y = 0$; $w_x \neq 0$ $\overline{L(\vec{U})} - \vec{G} = \overrightarrow{\psi}(\vec{M})$

$$\Rightarrow \int_d \overrightarrow{\psi}(\vec{M}) w_x \vec{e}_1 dx = 0$$

Soit δ un sous domaine quelconque de d , nous aurons :

$$\int_{\delta} \overline{\psi}(\vec{M}) w_x \vec{e}_1 dx = \int_{\delta} \overline{\psi}(\vec{M}) \vec{e}_1 w_x \delta^1(x) dx = 0$$

toujours et d'après le lemme : $\Rightarrow \overline{\psi}(\vec{M}) \vec{e}_1 w_x = 0$

or ayant $w_x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\overline{\psi}(\vec{M}) \cdot \vec{e}_1} = 0$

De même, prenant $w_x = 0$ et $w_y \neq 0$

$$\int_d (\overline{L}(\vec{U}) - \vec{G}) (w_x \vec{e}_1 + w_y \vec{e}_2) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_d \overline{\psi}(\vec{M}) w_y \vec{e}_2 dx = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{\psi}(\vec{M}) \cdot \vec{e}_2} = 0$$

* Conclusion

Les équations de l'équilibre dans S :

$\overline{L}(\vec{U}) - \vec{G} = 0$ sont formellement équivalente à la formulation :

$$\int_d \overline{L}(\vec{U}) \cdot \vec{W} dx = \int_d \vec{G} \cdot \vec{W} dx$$

et ceci $\forall \vec{W} \in W$ et $\forall Z \in]-h, +h[$.

Nous posons d'une manière classique, et pour tout $Z \in]-h, +h[$.

$$\text{Pour tout } \vec{W} \in W : (u_o, w_o)_d = \int_d u_o w dx ; (\vec{u}, \vec{w})_d = \int_d (\vec{u} \cdot \vec{w}) dX$$

avec $dX = dx dy$.

Notons les relations suivantes :

$$* (\Delta u_o, w_o)_d = - (\overrightarrow{\text{grad}} u_o, \overrightarrow{\text{grad}} w_o)_d + \left(\frac{du_o}{dn}, w_o \right)_{\Sigma}$$

$$* (\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2) = (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d$$

$$\begin{aligned}
 * (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d &= (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \vec{w})_d - (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d \\
 &= \int \frac{\partial \ddot{u}_1}{\partial k_\alpha} w_\alpha dx dy + (\ddot{u}_1, \Delta w_1)_d - \int_\Sigma \ddot{u}_1 \frac{dw_1}{dn} ds
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \ddot{u}_1 /_\Sigma = 0$$

$$= (\ddot{u}_1, \Delta w_1)_d + (\ddot{u}_1, \vec{w} \cdot \vec{n})_\Sigma - (\ddot{u}_1, \Delta w_1)_d$$

$$= 0$$

$$* \text{ De même : } (\overrightarrow{\text{grad}} w_1, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2)_d = 0$$

$$* (\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_0, \vec{w})_d = (\dot{u}_0, w_n)_\Sigma - (\dot{u}_0, \Delta w_1)_d$$

$$* (\overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_1), \vec{w})_d = (\Delta u_1, w_n) - (\Delta u_1, \Delta w_1)_d$$

$$* (\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_2), \vec{w})_d = (\Delta u_2, w_t)_\Sigma - (\Delta u_2, \Delta w_2)_d$$

Par conséquent, la projection des équations (IV.10) sur l'espace des fonctions testes W , nous fournit une 1er équation intégrale :

$$\int_d (\overline{L}(\vec{U}) + \vec{G}) w_0 \vec{e}_3 dX = 0 \Rightarrow$$

$$\mu_1 (\Delta u_0, w_0)_d + (\lambda_1 + \mu_1) (\Delta \dot{u}_1, w_0)_d + (\lambda_1 + 2\mu_2) (\ddot{u}_0, w_0)_d + (g_0, w_0)_d = 0$$

qui s'écrit encore :

$$-\mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \overrightarrow{\text{grad}} w_0)_d + (\lambda_1 + \mu_1) (\Delta \dot{u}_1, w_0)_d + (\lambda_1 + 2\mu_2) (\ddot{u}_0, w_0)$$

$$= - (g_0, w_0)_d - \mu_1 \left(\frac{u_0}{dn}, w_0 \right)_\Sigma .$$

La seconde équation intégrale est donnée par :

$$\begin{aligned}
 & (\overline{L(\vec{U})} - \vec{G}) \cdot \vec{w} \, dX = 0 \Rightarrow \\
 & (\lambda_0 + 2\mu_0) (\overrightarrow{\text{Grad}} \Delta u_1, \vec{w}) + \mu_0 (\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (\Delta u_2), \vec{w})_d + \mu_1 (\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \vec{w})_d \\
 & + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \vec{w})_d + (\lambda_1 + \mu_1) (\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_0, \vec{w})_d + (\vec{g}, \vec{w})_d = 0 .
 \end{aligned}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda_0 + 2\mu_0) (\Delta u_1, \Delta w_1)_d - \mu_0 (\Delta u_2, \Delta w_2)_d + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_d, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d \\
 & + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d - (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, \Delta w_1)_d = -(\vec{g}, \vec{w})_d - (\lambda_0 + 2\mu_0) (\Delta u_1, w_n)_\Sigma \\
 & - \mu_0 (\Delta u_2, w_t)_\Sigma - (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, w_n)_\Sigma .
 \end{aligned}$$

Faisant la somme des deux équations ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & - \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \overrightarrow{\text{grad}} w_0) + (\lambda_1 + \mu_1) (\Delta \dot{u}_1, w_0)_d + (\lambda_1 + 2\mu_2) (\ddot{u}_0, w_0)_d \\
 & - (\lambda_0 + 2\mu_0) (\Delta u_1, \Delta w_1)_d - \mu_0 (\Delta u_2, \Delta w_2)_d + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d \\
 & + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d - (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, \Delta w_1)_d \\
 & = - (g_0, w_0)_d - (\vec{g}, \vec{w})_d - \mu_1 \left(\frac{du_0}{dn}, w_0 \right)_\Sigma - (\lambda_0 + 2\mu_0) (\Delta u_1, w_n)_\Sigma \\
 & - \mu_0 (\Delta u_2, w_t)_\Sigma - (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, w_n)_\Sigma .
 \end{aligned}$$

Soient les formes bilinéaires suivantes :

$$(IV.B.1) \ a(\vec{u}, \vec{w}) = (\lambda_1 + 2\mu_2) (\ddot{u}_0, w_0) + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d$$

$$(IV.B.2) \quad b(\vec{u}, \vec{w}) = (\lambda_1 + \mu_1) (\Delta \dot{u}_1, w_0)_d - (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, \Delta w_1)_d$$

$$(IV.B.3) \quad c(\vec{u}, \vec{w}) = -\mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \overrightarrow{\text{grad}} w_0)_d - (\lambda_0 + 2\mu_0) (\Delta u_1, \Delta w_1)_d - \mu_0 (\Delta u_2, \Delta w_2)_d$$

$$(IV.B.4) \quad \Gamma_\Sigma(\vec{u}, \vec{w}) = \mu_1 \left(\frac{du_0}{dn}, w_0 \right) + (\lambda_0 + 2\mu_0) (\Delta u_1, w_n)_\Sigma + u_0 (\Delta u_2, w_t)_\Sigma \\ + (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, w_n)_\Sigma$$

$$(\vec{G}, \vec{w})_d = (g_0, w_0)_d + (\vec{g}, \vec{w})_d$$

Remarquons que : la forme $C(\vec{u}, \vec{w})$ est une forme bilinéaire symétrique et que la forme $Q(\vec{u}, \vec{w}) = a(\vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$ est une forme bilinéaire symétrique positive (si $\lambda_1 + 2\mu_2$, μ_1 sont positifs).

D'autre par la forme bilinéaire $b(\vec{u}, \vec{w})$ est antisymétrique;

En effet : $b(\vec{u}, \vec{w}) = b(\vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{v} = \dot{\vec{u}} \Rightarrow$

$$b(\vec{u}, \vec{w}) = (\lambda_1 + \mu_1) \{ (\Delta v_1, w_0)_d - (v_0, \Delta w_1)_d \} \\ = - (\lambda_1 + \mu_1) \{ (\Delta w_1, v_0)_d - (w_0, \Delta v_1)_d \} .$$

Conclusion

Les équations de l'équilibre (IV.10) dans S, sont formellement équivalentes à la formulation variationnelle suivante :

$$\forall \vec{w} \in W = \{ (w_0, w_1, w_2) \text{ tq } \vec{w} = w_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2, w_1|_\Sigma = 0 \}$$

et $\forall z \in]-h, +h[$ en chaque point de (d), nous avons :

$$a(\vec{u}, \vec{w})_d + b(\vec{u}, \vec{w})_d + C(\vec{u}, \vec{w})_d = - (\vec{G}, \vec{w})_d - \Gamma_\Sigma(\vec{u}, \vec{w}) \quad (IV.B.5)$$

Nous savons d'autre part que $\Gamma_\Sigma(\vec{u}, \vec{w})$, doit satisfaire aux conditions aux limites sur le bord Σ , représentées par les équations (IV.12).

Notons les relations suivantes :

$$\mu_1 \frac{du_0}{dn/\Sigma} = f_{0/\Sigma} - \mu_1 \dot{u}_{n/\Sigma}$$

$$\mu_0 \Delta u_{2/\Sigma} = f_t - 2\mu_0 \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt}/\Sigma$$

$$(\lambda_0 + 2\mu_0) \Delta u_{1/\Sigma} = f_n - \lambda_1 \dot{u}_0 + 2\mu_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} .$$

Tenant compte de ces relations sur le bord Σ , la forme bilinéaire $\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w})$ devient :

$$\begin{aligned} & (f_0, w_0) - \mu_1 (\dot{u}_n, w_0)_{\Sigma} + (f_n, w_n) - \lambda_1 (\dot{u}_0, w_n)_{\Sigma} + 2\mu_0 \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt}, w_n \right)_{\Sigma} \\ & + (f_t, w_t)_{\Sigma} - 2\mu_0 \left(\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt}, w_t \right)_{\Sigma} + (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, w_n)_{\Sigma} . \end{aligned}$$

Or sachant que $\vec{F} = \vec{e}_3 f_0 + \vec{f} = f_0 \vec{e}_3 + f_n \vec{n} + f_t \vec{t}$

$$\Rightarrow (f_0, w_0)_{\Sigma} + (f_n, w_n)_{\Sigma} + (f_t, w_t)_{\Sigma} = (\vec{F}, \vec{w})_{\Sigma}$$

D'autre part remarquons que :

$$\begin{aligned} & 2\mu_0 \left\{ \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt}, w_n \right)_{\Sigma} - \left(\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt}, w_t \right)_{\Sigma} \right\} = 2\mu_0 \left\{ \left(\vec{t} w_n, \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\Sigma} - \left(\vec{n} w_t, \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\Sigma} \right\} \\ & = 2\mu_0 \left\{ \left(\vec{t} w_n - \vec{n} w_t \right), \frac{d\vec{u}}{dt} \right\}_{\Sigma} = 2\mu_0 \left(\vec{e}_3 \wedge \vec{w}, \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\Sigma} \end{aligned}$$

cela fait que l'expression de $\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w}) &= \mu_1 (\dot{u}_0, w_n)_{\Sigma} - \mu_1 (\dot{u}_n, w_0)_{\Sigma} - 2\mu_0 \left(\vec{e}_3 \wedge \vec{w}, \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\Sigma} \\ &+ (\vec{F}, \vec{w})_{\Sigma} \dots (IV.B.9) \end{aligned}$$

2°) Formulation équivalente sur les faces $Z = \pm h$

De même que au (1°), la formulation $\vec{T}(M, \vec{n}) = \epsilon \vec{P}_\epsilon$, exprimant les conditions aux limites sur les faces $Z = \pm h$, est formellement équivalente à la formulation variationnelle suivante :

$$\int_d \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{W} \, dx = \epsilon \int_d \vec{P}_\epsilon \cdot \vec{W} \, dx$$

et ceci $\forall \vec{W} \in W = \{\vec{W} = (w_0, w_1, w_2); \vec{W} = w_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2, w_1|_\Sigma = 0\}$

Nous aurons d'après les équations (IV.11)

$$\begin{aligned} & \lambda_1 (\Delta u_1, w_0)_d + (\lambda_1 + 2\mu_2) (\dot{u}_0, w_0)_d + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \vec{w})_d \\ & + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \vec{w})_d + \mu_1 (\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2, \vec{w})_d = \epsilon (\vec{P}_\epsilon, \vec{w})_d + \epsilon (P_0, w_0)_d \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \lambda_1 (\Delta u_1, w_0)_d + (\lambda_1 + 2\mu_2) (\dot{u}_0, w_0)_d - \mu_1 (u_0, w_1)_d + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d \\ & + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d = -\mu_1 (\dot{u}_0, w_n)_\Sigma + \epsilon (\vec{P}_\epsilon, \vec{w})_d + \epsilon (P_0, w_0)_d \end{aligned}$$

Soient les formes bilinéaires suivantes :

$$a_1(\vec{u}, \vec{w}) = (\lambda_1 + 2\mu_2) (u_0, w_0)_d + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d + \mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d$$

$$b_1(\vec{u}, \vec{w}) = \lambda_1 (\Delta u_1, w_0)_d - \mu (u_0, \Delta w_1)_d \dots \text{(IV.B.7)}$$

$$\Gamma_1(\vec{u}, \vec{w}) = \mu_1 (\dot{u}_0, w_n)_\Sigma \dots \text{(IV.B.8)}$$

$$(\vec{P}_\epsilon, \vec{w})_d = \epsilon (\vec{P}_\epsilon, \vec{w})_d + \epsilon (P_0, w_0)_d$$

Conclusion

Les équations (IV.11), représentent les conditions aux limites sur les faces $z = \pm h$, sont formellement équivalentes à la formulation suivante :

$$\vec{W} \in W = \{ (w_0, w_1, w_2); \vec{w} = w_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2; w_{1/\Sigma} = 0 \}$$

le point $M \in d$ pour $Z = \pm h$.

Nous avons :

$$a_1(\vec{u}, \vec{w}) + b_1(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{P}_\varepsilon, \vec{w})_d - \Gamma_\Sigma(\vec{u}, \vec{w})$$

... (IV.B.10)

Résumé

$(0, e_1, e_2, e_3)$ repère orthonormé direct de l'espace affine euclidien E_3 la plaque occupant le domaine $S = dx] -h, +h [$, $\Sigma = C x] -h, +h [$ étant le bord de la plaque, \vec{P}_ε densité de forces appliquées sur les faces $z = \pm h$; \vec{F} charges exercées sur le bord Σ , \vec{G} étant la densité des forces volumiques.

Soit l'espace des fonctions tests :

$$W = (w_0, w_1, w_2) \text{ tel que : } \vec{W} = w_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2; w_{1/\Gamma} = 0$$

\vec{U} désignant le champ des déplacements tel que

$$U = u_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2 \quad u_{1/\Gamma} = 0 .$$

Alors, les équations de l'élasticité linéaire, et les conditions aux limites sont formellement équivalentes à la formulation suivante :

$\forall \vec{w} \in W, \forall z \in]-h, +h [$

$$a(\vec{u}, \vec{w})_d + b(\vec{u}, \vec{w})_d + c(\vec{u}, \vec{w})_d = - (\vec{G}, \vec{w}) - \Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w}) \quad \dots \quad (\text{IV.B.11})$$

$$a_1(\vec{u}, \vec{w})_d + b_1(\vec{u}, \vec{w})_d = (\vec{\mathcal{P}}, \vec{w})_d - \Gamma_1(\vec{u}, \vec{w}) \quad \text{Pour } z = \pm h \quad \dots \quad (\text{IV.B.12})$$

CHAPITRE VAPPROXIMATION "SIMPLIFICATRICE" SUR LE BORD D'UNE PLAQUE MINCE

Le but de ce Chapitre est suivant l'idée de M. SOUCHET [1] , de formuler une "approximation" tridimensionnelle du problème des plaques élastiques. Au contraire des théories antérieures, qui en général utilisent des hypothèses du type LOVE-KIRCHOFF à l'intérieur de la plaque, la théorie actuelle se propose de ne faire qu'une hypothèse "naturelle" sur le bord de la plaque, hypothèse qui consiste à linéariser en z le champ des déplacements. $U(x,y,z)$ sur le bord Σ .

V.1. LINEARISATION DU CHAMP DES DEPLACEMENTS

La plaque étant un solide dont l'épaisseur $2h$ est faible en comparaison du diamètre du feuillet moyen d , l'idée de l'approximation, est donc de retenir pour chaque fibre de Σ d'abscisse (s), que des approximations pour $\vec{U}(z)$ et $\vec{F}(z)$, autrement dit d'effectuer un développement limité en (z) des champs des déplacements \vec{U} et des charges (\vec{F}) appliquées sur le bord Σ .

Le développement en z est fait au voisinage de $z = 0$

$$\text{soient : } \begin{aligned} U_0(z) &= u_0(0) & \vec{u}(z) &= \vec{u}(0) + z \dot{\vec{u}}(0) \\ f_0(z) &= f_0(0) & \vec{f}(z) &= \vec{f}(0) + z \dot{\vec{f}}(0) \end{aligned}$$

... V.1.1.

La linéarisation faite au (V.1.1) suppose donc que \vec{U} et \vec{F} sont linéaires en z , c'est-à-dire que chaque fibre de Σ d'abscisse (s) subit un déplacement de solide régide tel que :

$$\vec{u}(s,z) = \vec{u}(s,0) + \vec{\alpha}(s) \wedge z \vec{e}_3$$

$\vec{\alpha}(s)$ exprime la rotation de la section droite, rotation dans le plan (x,y) ou $\vec{\alpha}(s) \cdot \vec{e}_3 = 0$.

Qui nous donne :

$$\begin{aligned}\vec{u}(s,z) &= \vec{u}(s,0) + z \dot{\vec{u}}(s,0) = \vec{u}(s,0) + \vec{\alpha}(s) \wedge z \vec{e}_3 \Rightarrow \\ \dot{\vec{u}}(s,0) &= \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{e}_3 \quad \text{ou encore} \\ \vec{e}_3 \wedge \dot{\vec{u}}(s,0) &= \vec{\alpha}(s) \quad \dots \quad \text{V.1.2.}\end{aligned}$$

V.2. RECHERCHE DES TORSEURS DES FORCES ASSOCIEES

Soit le torseur des forces appliquées sur le bord Σ :

$$[C]_O \begin{cases} \nearrow \vec{R} \\ \searrow \vec{M} \end{cases}$$

\vec{R} et \vec{M} (la résultante et le moment $[C]$) sont les éléments de réduction de torseur $[C]$ au point en $(x_1(s), x_2(s))$ de (C) des forces appliquées sur la génératrice de (Σ) issue de ce point :

$$\vec{R} = \int_{-h}^{+h} \vec{F}(s,z) dz = \int_{-h}^{+h} f_0(s,z) dz \cdot \vec{e}_3 + \int_{-h}^{+h} \vec{f}(s,z) dz$$

or et d'après (V.1.1) nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{R}(s,0) &= 2h f_0(s,0) \vec{e}_3 + 2h \vec{f}(s,0) \\ &= 2h (f_0(s,0) \vec{e}_3 + \vec{f}(s,0))\end{aligned}$$

où encore : $\vec{R}(s,0) = 2h \vec{F}(s,0)$... V.2.1

D'autre part :

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \int_{-h}^{+h} \vec{OM} \wedge \vec{F}(s,z) dz = \int_{-h}^{+h} z \vec{e}_3 \wedge \vec{F}(s,z) dz \\ &= \int_{-h}^{+h} z \vec{e}_3 \wedge (f_0(s,z) \vec{e}_3 + \vec{f}(s,z) dz)\end{aligned}$$

$$= \int_{-h}^{+h} z \vec{e}_3 \wedge (f_0(s,0) \vec{e}_3 + \vec{f}(s,0) + z \vec{f}'(s,0)) dz \Rightarrow$$

$$\vec{M}_0 = \frac{2h^3}{3} (\vec{e}_3 \wedge \vec{f}'(s,0))$$

Notons : $\vec{m} = \frac{2h^3}{3} \vec{f}'(s,0) \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{e}_3 \wedge \vec{m}} \quad \dots \text{ V.2.2}$$

Notations : Nous désignons par :

$$\vec{R} = r \vec{e}_3 + \vec{r}$$

avec $r = 2h f_0(s,0)$; $\vec{r} = 2h \vec{f}(s,0)$

V.3. FORMULATION VARIATIONNELLE TENANT COMPTE DE L'APPROXIMATION

Nous allons introduire l'approximation formulée au (VI.1) dans l'expression de $\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w})$ exprimant les conditions aux limites sur le bord Σ .

Nous avons à présent :

- * $\dot{\vec{u}}(s,z) = \dot{\vec{u}}(s,0)$
- * $\dot{u}_n(s,z) = \dot{u}_n(s,0)$
- * $(\vec{F}, \vec{W})_{\Sigma} = (f_0(s,0), w_0)_{\Sigma} + (\vec{f}(s,z), \vec{w})_{\Sigma}$
 $= (f_0(s,0), w_0)_{\Sigma} + (\vec{f}(s,0), \vec{w})_{\Sigma} + z(\vec{f}'(s,0), \vec{w})_{\Sigma} \Rightarrow$
- * $(\vec{F}, \vec{W})_{\Sigma} = (\frac{r}{2h}, w_0)_{\Sigma} + (\frac{\vec{r}}{2h}, \vec{w})_{\Sigma} + \frac{3}{2h^3} (z \vec{m}, \vec{w})_{\Sigma}$
- * $(\dot{u}_0, w_n)_{\Sigma} = 0$ car $u_0 = \text{cte}$ sur Σ .
- * $(\dot{u}_n, w_0) = (\dot{u}_n \cdot \vec{n}, w_0)$
 or $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}(s,0) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{e}_3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 (\dot{\vec{u}}_n, \vec{w}_o)_\Sigma &= \int_\Sigma (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{e}_3) \cdot \vec{w}_o \cdot \vec{n} \, d\sigma \\
 &= \int_\Sigma \vec{t} \cdot \vec{\alpha}(s) \cdot \vec{w}_o(s) \, d\sigma = \int_\Sigma \alpha_t(s) \cdot \vec{w}_o(s) \, d\sigma
 \end{aligned}$$

et donc :

$$* (\dot{\vec{u}}_n, \vec{w}_o)_\Sigma = (\alpha_t, \vec{w}_o)_\Sigma$$

$$* (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{w})_\Sigma = \int_\Sigma (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt}) \cdot \vec{w} \, d\sigma$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{d}{dt} [\vec{u}(s,0) + z \vec{u}(s,0)] = \frac{d\vec{u}(s,0)}{dt} + z \frac{d}{dt} (\vec{u}(s,0)) \\
 &= \frac{d\vec{u}(s,0)}{dt} + z \frac{d}{dt} (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{e}_3) = \frac{d\vec{u}(s,0)}{dt} + z \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \wedge \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{w})_\Sigma &= \int_\Sigma \vec{w}(s) \left[\vec{e}_3 \wedge \left(\frac{d\vec{u}(s,0)}{dt} \right) + z \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \wedge \vec{e}_3 \right] \, d\sigma \\
 &= \int_\Sigma \vec{w}(s) (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}(s,0)}{dt}) \, d\sigma + \int_\Sigma \vec{w}(s) \cdot z (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \wedge \vec{e}_3) \, d\sigma
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \wedge \vec{e}_3 = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - (\vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{\alpha}}{dt}) \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{\alpha} = 0 \quad \vec{\alpha} \text{ est dans le plan } (\vec{x}, \vec{y}) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{e}_3 \cdot \vec{\alpha}) = 0 \Rightarrow \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \wedge \vec{e}_3 = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}.$$

En définitive on aura :

$$* (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{w})_\Sigma = (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}(s,0)}{dt} + z \frac{d\vec{\alpha}}{dt}; \vec{w}(s))_\Sigma$$

Introduisant ce qui précède dans l'expression $\Gamma_{\Sigma}(u, w)$ (IV.B.9)

nous obtenons :

$$\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w}) = -\mu_1 (\alpha_t, w_0)_{\Sigma} - 2\mu_0 (\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt}(s, 0) + z \frac{d\vec{\alpha}}{dt}, \vec{w}(s))_{\Sigma} \\ + (\frac{r}{2h}, w_0)_{\Sigma} + (\frac{r}{2h}, \vec{w})_{\Sigma} + (\frac{3z}{2h^3} \vec{m}, \vec{w})_{\Sigma}$$

$\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w})$ peut encore se mettre sous la forme suivante :

$$\Gamma_{\Sigma}(\vec{U}, \vec{w}) = (-\mu_1 \alpha_t^* + \frac{r^*}{2h}, w_0)_{\Sigma} + (-2u_0 \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{r^*}{2h}, \vec{w})_{\Sigma} \\ + z (-2u_0 \frac{d\vec{\alpha}}{dt} + \frac{3}{2h^3} \vec{m}^*, \vec{w})_{\Sigma} .$$

Sachant que les fonctions α^* , r^* , r^* , u^* , \vec{m}^* sont des fonctions de $(x, y$ et $z = 0)$

Conclusion

Le champ de déplacements \vec{U} tel que $\vec{U}(x, y, z) = u_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} u_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u_2$

avec $u_1|_{\Sigma} = 0$ et supposant que sur le bord Σ l'on ait :

$$u_0(x, y, z) = u_0(x, y, 0) = u_0^* \\ \vec{u}(x, y, z) = \vec{u}(x, y, 0) + z \dot{\vec{u}}(x, y, 0) = \vec{u}^* + z \dot{\vec{u}}^*$$

satisfait pour toute fonction $\vec{w} \in W$ et $\forall z \in]-h; +h[$ aux équations suivantes :

$$a(\vec{u}, \vec{w})_d + b(\vec{u}, \vec{w})_d + c(\vec{u}, \vec{w})_d = -(\vec{G}, \vec{w})_d + (\mu_1 \alpha_t^* - \frac{r^*}{2h}, w_0)_{\Sigma} \\ + (2\mu_0 \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{r^*}{2h}, \vec{w}) \\ + z (2\mu_0 \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - \frac{3}{2h^3} \vec{m}^*, \vec{w})_{\Sigma} \quad \dots(V.3.2)$$

et pour $z = \pm h$, $\forall \vec{w} \in W$, \vec{U} satisfait aux équations :

$$a_1(\vec{u}, \vec{w})_d + b_1(\vec{u}, \vec{w})_d = (\vec{P}_{\varepsilon}, \vec{w})_d - \mu_1 (\dot{u}_0^*, w_n)_{\Sigma} \quad \dots(V.3.3)$$

Bien entendu nous ne pouvons plus parler d'équivalence formelle entre les équations (V.3.2, V.3.3) et la formulation établie au chapitre IV, par conséquent, le problème important de l'existence de l'unicité des fonctions solutions (u_0, u_1, u_2) s'impose, d'autre part ce type d'approximation n'est pas unique. Ainsi par exemple, on peut écrire :

$$c(\vec{u}, \vec{w}) = c'(\vec{u}, \vec{w}) + \mu_1 \left(u_0, \frac{dw_0}{dn} \right)_{\Sigma} + \mu_0 (u_t, \Delta w_2)_{\Sigma}$$

$$\text{avec } c'(\vec{u}, \vec{w}) = +\mu_1 (u_0, \Delta w_0)_d - (\lambda_0 + 2u_0) (\Delta u_1, \Delta w_1)_d$$

$$+ \mu_0 (\overrightarrow{\text{grad}} u_2, \overrightarrow{\text{grad}} \Delta w_2)_d$$

ce qui implique d'une façon évidente la modification des équations (V.3.2).

En ce qui concerne ce travail nous admettons que ces approximations fournissent des "théories équivalentes".

Par contre, cette formulation a l'avantage d'introduire dans les termes-frontières que les grandeurs mécaniques significatives en théorie des plaques : déplacements moyen et rotations moyennes de la section droite sur le bord Σ , les résultantes et couples des efforts exercés sur le bord ce qui doit permettre une comparaison avec les théories de membrane usuelles.

CHAPITRE VISYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

VI.1. Au Chapitre IV et V, nous avons posé le problème de l'élasticité d'une plaque mince transversalement isotrope par une formulation variationnelle qu'il s'agit d'exploiter. En effet : le but du chapitre présent est de passer de la formulation variationnelle en une formulation différentielle.

Rappelons que nous avons l'espace des fonctions test :

$$W = \{(w_0, w_1, w_2) \text{ tel que } \vec{W} \in W ; \vec{W} = w_0 \vec{e}_3 + \overrightarrow{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_2 \\ w_{1/\Sigma} = 0 \} .$$

1°) Pour les composantes w_0, w_1 , nous choisissons les fonctions et valeurs propres du problème :

$$\begin{cases} \Delta w_i + \lambda_i^2 w_i = 0 \\ w_{i/\Sigma} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} w_i \text{ étant la fonction propre associée} \\ \lambda_i \text{ " la valeur propre associée} \\ i \in \mathbb{N} . \end{array}$$

2°) Pour la composante w_2 , choisissons les fonctions et valeur propre du problème :

$$\begin{cases} \Delta W_i + \Omega_i^2 W_i = 0 \\ \frac{dW_i}{dn} /_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} W_i \text{ fonctions propres associées} \\ \Omega_i \text{ valeurs propres associées} \\ i \in \mathbb{N} . \end{array}$$

Rappelons que les fonctions propres w_i, W_i , outre leurs propriétés d'orthogonalité, constituent des systèmes complets dans $L^2(d)$.

Nous avons :

$$\int_d w_i w_j dx = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} ; \int_d W_i W_j dx = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$(i, j) \in \mathbb{N}$$

Nous sommes ainsi conduit à introduire les moments h_{i0} , h_{i1} , h_{i2} , c'est-à-dire les projections de la fonction solution $\vec{U}(u_0, u_1, u_2)$, sur les bases des fonctions propres w_i , W_i .

Soient alors :

$$\begin{aligned} h_{i0} &= \int_d u_0 w_i dx = (u_0, w_i)_d \\ h_{i1} &= \int_d u_1 w_i dx = (u_1, w_i)_d \\ h_{i2} &= \int_d u_2 w_i dx = (u_2, w_i)_d \end{aligned} \quad \dots \text{(VI.1.1)}$$

ou alors :

$$u_0 = \sum_{i=1}^N h_{i0} w_i ; u_1 = \sum_{i=1}^N h_{i1} w_i ; u_2 = \sum_{i=1}^N h_{i2} w_i \quad \dots \text{(VI.1.2)}$$

Remarque importante :

Signalons que ce choix des fonctions propres, ne constitue pas nécessairement le meilleur choix possible. Précisément outre le fait que u_1 soit nul sur le bord Σ , nous imposons que u_0 le soit aussi, autrement dit, nous sommes ainsi amené à réduire l'étude à celui du cas particulier d'une plaque à bord appuyé.

VI.2. SYSTEME DIFFERENTIEL

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} g_{i0}(z) &= - (g_0, w_i)_d ; g_i(z) = - (\vec{g}, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d \\ g_{i2}(z) &= - (\vec{g}, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d ; p_{i0} = (p_0, w_i)_d \\ p_{i1} &= (\vec{P}_\epsilon, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d ; P_{i2} = (\vec{P}_\epsilon, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_d \end{aligned}$$

Les équations V.3.2 et V.3.3 s'écrivaient :

$\vec{W} \in W$ et $\forall z \in]-h_1 + h[$:

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{w})_d + b(\vec{u}, \vec{w})_d + c(\vec{u}, \vec{w})_d &= - (\vec{G}, \vec{W})_d + (\mu_1 \alpha_t^* - \frac{r}{2h}, w_0)_\Sigma \\ &= (2\mu_0 \vec{e}_3 \wedge \frac{du}{dt}^* - \frac{r}{2h}, \vec{w})_\Sigma \\ &+ z(2\mu_0 \frac{d\alpha}{dt}^* - \frac{3}{2h^3} m, \vec{w})_\Sigma . \end{aligned}$$

Pour $z = \pm h$; $\forall \vec{W} \in W$:

$$a_1(\vec{u}, \vec{w})_d + b_1(\vec{u}, \vec{w})_d = (\vec{P}, \vec{W})_d - \mu_1(\dot{u}_0^*, w_n)_\Sigma .$$

Avec :

$$a(\vec{u}, \vec{w})_d = (\lambda_1 + 2\mu_2)(\ddot{u}_0, w_0) + \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d + \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d$$

$$b(\vec{u}, \vec{w})_d = (\lambda_1 + \mu_1) (\Delta \dot{u}_1, w_0)_d + (\lambda_1 + \mu_1) (\dot{u}_0, \Delta w_1)_d$$

$$c(\vec{u}, \vec{w})_d = -\mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \overrightarrow{\text{grad}} w_0)_d - (\lambda_0 + 2\mu_0) (\Delta u_1 + \Delta w_1)_d - \mu_0(\Delta u_2, \Delta w_2)_d$$

$$a_1(\vec{u}, \vec{w})_d = (\lambda_1 + 2\mu_2) (\dot{u}_0, w_0)_d + \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_1)_d + \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} w_2)_d$$

$$b_1(\vec{u}, \vec{w})_d = \lambda_1(\Delta u_1, w_0)_d - \mu_1(u_0, \Delta w_1)_d$$

Prenons successivement pour des fonctions tests :

$$\vec{W} = w_i \vec{e}_3 \quad w_1 = w_2 = 0$$

$$\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} w_i \quad w_0 = w_2 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{W} = \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i \quad w_0 = w_1 = 0 .$$

$$1^\circ) \vec{W} = w_i \vec{e}_3, \quad w_1 = w_2 = 0 .$$

par conséquent, nous aurons :

$$a(\vec{u}, \vec{w})_d = (\lambda_1 + 2\mu_2)(\ddot{u}_0, w_i)_d$$

$$b(\vec{u}, \vec{w})_d = (\lambda_1 + \mu_1) (\Delta \dot{u}_1, w_i)_d$$

$$c(\vec{u}, \vec{w})_d = -\mu_1 (\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d$$

$$a_1(\vec{u}, \vec{w})_d = (\lambda_1 + 2\mu_2)(\dot{u}_0, w_i)_d$$

$$b_1(\vec{u}, \vec{w})_d = \lambda_1(\Delta u_1, w_i)_d$$

Les équations V.3.2 et V.3.3 deviennent alors :

→ pour $\vec{W} = w_i \vec{e}_3$ et $\forall z \in]-h + h[$:

$$(\lambda + 2\mu_2)(\ddot{u}_0, w_i)_d + (\lambda_1 + \mu_1)(\Delta \dot{u}_1, w_i)_d - \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d = g_{i0} \dots \text{VI.2.1}$$

pour $\vec{W} = w_i \vec{e}_3$ et pour $z = \pm h$:

$$(\lambda_1 + 2\mu_2)(\dot{u}_0, w_i)_d + \lambda_1(\Delta u_1, w_i)_d = p_{i0} \dots \text{VI.2.1}$$

2°) Lorsque $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} w_i$; $w_0 = w_2 = 0$.

$$\text{Nous aurons : } a(\vec{u}, \vec{w}) = \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d$$

$$b(\vec{u}, \vec{w}) = -(\lambda_1 + \mu_1)(u_0, \Delta w_i)_d$$

$$c(\vec{u}, \vec{w}) = -(\lambda_0 + 2\mu_0)(\Delta \dot{u}_1, \Delta w_i)_d$$

$$a_1(\vec{u}, \vec{w}) = \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d$$

$$b_1(\vec{u}, \vec{w}) = -\mu_1(u_0, \Delta w_i)_d$$

Dans ce cas les équations V.3.2 et V.3.3, s'écrivent :

→ pour $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} w_i$ et $\forall z \in]-h + h[$:

$$\mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d - (\lambda_1 + \mu_1)(\dot{u}_0, \Delta w_i)_d - (\lambda_0 + 2\mu_0)(\Delta u_1, \Delta w_i)_d$$

$$= g_{i1} + (2u_0 \vec{e}_3 \wedge \frac{\vec{du}}{dt} - \frac{\vec{r}}{2h}, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_\Sigma$$

$$+ z(2u_0 \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - \frac{3}{2h^3} \vec{m}, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_\Sigma \dots \text{VI.2.2}$$

→ pour $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} w_i$ et $z = \pm h$:

$$\mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d - \mu_1(u_0, \Delta w_i)_d = p_{\epsilon i 1} - \mu_1(\dot{u}_0^* - w_{in}^*)_\Sigma \dots \text{VI.2.2'}$$

3°) Lorsque $\vec{W} = \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i$; $w_0 = w_1 = 0$.

$$\text{Nous aurons : } a(\vec{u}, \vec{w})_d = \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_d$$

$$b(\vec{u}, \vec{w})_d = 0$$

$$c(\vec{u}, \vec{w})_d = -\mu_0(\Delta u_2, \Delta W_i)_d$$

$$a_1(\vec{u}, \vec{w})_d = \mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_d$$

$$b_1(\vec{u}, \vec{w})_d = 0.$$

Dans ce dernier cas, les équations V.3.2 et V.3.3 s'écrivent :

→ Pour $\vec{W} = \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i$ et $\forall z \in]-h, +h[$

$$\mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \ddot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_d - \mu_0(\Delta u_2, \Delta W_i)_d = g_{i2}$$

$$+ (2u_0 \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{\vec{r}}{2h}, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_\Sigma$$

$$+ z (2u_0 \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - \frac{3}{2h^3} m^*, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_\Sigma \dots \text{VI.2.3}$$

→ $\vec{W} = \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i$ et $z = \pm h$:

$$\mu_1(\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_2, \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_d = p_{i2} - \mu_1(\dot{u}_0^*, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_\Sigma \dots \text{VI.2.3'}$$

Pour établir le système d'équations différentielles en z , nous devons transformer les équations (VI.2, 1, 2, 3, 1', 2', 3') pour cela notons les relations suivantes :

$$* (\overrightarrow{\text{grad}} u_0, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d = - (u_0, \Delta w_i)_d + (u_0, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma$$

$$= \lambda_i^2 (u_0, w_i)_d + (u_0^*, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma$$

$$= \lambda_i^2 h_{i0} + (u_0^*, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma$$

$$* (\ddot{u}_0, w_i)_d = \ddot{h}_{i0}(z) \text{ de même : } (\ddot{u}_1, w_i)_d = \ddot{h}_{i1}(z) \text{ et } (\ddot{u}_2, w_i)_d = \ddot{h}_{i2}(z)$$

$$* (\Delta \dot{u}_1, w_i)_d = -\lambda_i^2 \dot{h}_{i1}$$

En effet :

$$(\Delta \dot{u}_1, w_i)_d = -(\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d + \left(\frac{d\dot{u}_1}{dn}, w_i \right)_\Sigma$$

$$\text{or } w_{i/\Sigma} = 0 \Rightarrow$$

$$(\Delta \dot{u}_1, w_i)_d = (-\overrightarrow{\text{grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_d = (\dot{u}_1, \Delta w_i)_d - \left(\dot{u}_1, \frac{dw_i}{dn} \right)_\Sigma$$

$$\text{or } \dot{u}_{1/\Sigma} = 0 \Rightarrow$$

$$(\Delta \dot{u}_1, w_i)_d = -\lambda_i^2 \dot{h}_{i1}$$

$$* (\Delta u_1, w_i)_d = -\lambda_i^2 h_{i1}$$

$$* \text{ Lorsque } \vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} w_i \Rightarrow w_n = \frac{dw_i}{dn} \text{ et } w_t = \frac{dw_i}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où sur } \Sigma ; \vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} w_i &= w_n \vec{n} + w_t \vec{t} \\ &= \frac{dw_i}{dn} \vec{n} + \frac{dw_i}{dt} \vec{t} . \end{aligned}$$

Soit \vec{v} un vecteur quelconque défini sur \bar{d} on a :

$$\left(\vec{v}, \frac{dw_i}{dt} \vec{t} \right)_\Sigma = \left(v_t, \frac{dw_i}{dt} \right)_\Sigma = v_{t/\Sigma} \cdot w_{i/\Sigma} - \left(\frac{dv_t}{dt}, w_i \right)_\Sigma = 0$$

cela implique que :

$$\left(\vec{v}, \overrightarrow{\text{grad}} w_i \right)_\Sigma = \left(\vec{v}, \frac{dw_i}{dn} \vec{n} \right)_\Sigma = \left(v_n, \frac{dw_i}{dn} \right) .$$

De même si $\vec{W} = \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_i$

$$W_n = \vec{n} \cdot (\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_i) = -\frac{dw_i}{dt}$$

$$W_t = \vec{t} \cdot (\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_i) = \frac{dw_i}{dn} = 0 .$$

$$\Rightarrow * (\vec{v}, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_\Sigma = - (v_n, \frac{dw_i}{dt})_\Sigma$$

Par conséquent les termes bord suivants pourront s'écrire de la façon suivante :

$$(2 \mu_0 \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{r^*}{2h}, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_\Sigma = (-2\mu_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{r_n^*}{2h}, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma$$

$$(2 \mu_0 \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - \frac{3}{2h^3} \vec{m}^*, \overrightarrow{\text{grad}} w_i)_\Sigma = (2 \mu_0 \vec{n} \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - \frac{3}{2h^3} m_n^*, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma$$

$$(2 \mu_0 \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{r^*}{2h}, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_\Sigma = (-2 u_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{r_n^*}{2h}, - \frac{dW_i}{dt})_\Sigma$$

$$(2 u_0 \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - \frac{3}{2h^3} \vec{m}^*, \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\text{grad}} W_i)_\Sigma = (2 u_0 \vec{n} \frac{d\vec{\alpha}}{dt} - \frac{3m_n^*}{2h^3}, - \frac{dW_i}{dt})_\Sigma$$

Soient les notations suivantes :

$$r_{i0} = \mu_1 (u_0^*, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma ; R_{i2} = u_0 (u_t^*, w_i)_\Sigma$$

$$r_i = (2 \mu_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{r_n^*}{2h}, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma$$

$$R_i = (2 \mu_0 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{r_n^*}{2h}, - \frac{dW_i}{dt})_\Sigma$$

$$s_i = (- 2 \mu_0 \vec{n} \frac{d\vec{\alpha}}{dt} + \frac{3m_n^*}{2h^3}, \frac{dw_i}{dn})_\Sigma$$

$$S_i = (- 2 \mu_0 \vec{n} \frac{d\vec{\alpha}}{dt} + \frac{3m_n^*}{2h^3}, - \frac{dW_i}{dt})_\Sigma$$

A présent, nous sommes en mesure d'écrire les équations :

(VI.2,1, 1', 2, 2' et 3, 3') de façon à ne faire intervenir que des moments

h_{i0} , h_{i1} , h_{i2} et les nouvelles variables r_{i0} , r_{i2} , r_i , R_i , s_i , S_i .

Ainsi, nous obtenons le système différentiel suivant :

$\forall z \in]-h, +h[:$

$$(\lambda_1 + 2\mu_2) \ddot{h}_{i0} - (\lambda_1 + u_1) \lambda_i^2 \dot{h}_{i1} - \mu_1 \lambda_i^2 \dot{h}_{i0} = g_{i0} + r_{i0}$$

$$\mu_1 \lambda_i^2 \ddot{h}_{i1} + (\lambda_1 + u_1) \lambda_i^2 \dot{h}_{i0} - (\lambda_0 + 2u_0) \lambda_i^4 h_{i1} = g_{i1} - (r_i + z s_i)$$

$$\mu_1 \Omega_i^2 \ddot{h}_{i2} - \mu_0 \Omega_i^4 h_{i2} = g_{i2} - \Omega_i^2 R_{i2} - (R_i + z S_i) \dots \text{(VI.2.4)}$$

pour $z = \pm h$ nous avons les équations différentielles du 1er ordre exprimant les conditions initiales suivantes :

$$-\lambda_1 \lambda_i^2 h_{i1} + (\lambda_1 + 2\mu_2) \dot{h}_{i0} = \varepsilon P_{\varepsilon i0}$$

$$\mu_1 \lambda_i^2 h_{i0} + \mu_1 \lambda_i^2 \dot{h}_{i1} = \varepsilon P_{\varepsilon i1} - r_{i0}$$

$$\mu_1 \Omega_i^2 \dot{h}_{i2} = -\tilde{R}_{i2} + \varepsilon P_{\varepsilon i2} \text{ avec } \tilde{R}_{i2} = \mu_1 \left(u_0^*, -\frac{dw_i}{dt} \right)_\Sigma \dots \text{(VI.2.5)}$$

VI.3. RESOLUTION DU SYSTEME DIFFERENTIEL

Afin de simplifier la résolution du problème différentiel précédent nous admettons que la densité G est donnée ou suffisamment bien représentée par :

$$g_{i0}(z) = \bar{g}_{i0} ; g_{i1}(z) = \bar{g}_{i1} + z g_{i1} ; g_{i2}(z) = \bar{g}_{i2} + z \tilde{g}_{i2}$$

Remarquons que le problème différentiel est découpés avec d'une part (h_{i0}, h_{i1}) et d'autre part h_{i2} . La résolution est élémentaire.

a - Commençons par la résolution de la 3ème équation en h_{i2} , nous avons :

$$\mu_1 \Omega_i^2 \ddot{h}_{i2} - \mu_0 \Omega_i^4 h_{i2} = \bar{g}_{i2} + z \tilde{g}_{i2} - \Omega_i^2 R_{i2} - (R_i + z S_i)$$

$$\text{posons } h_{i2} = \psi(z) \Rightarrow \ddot{h}_{i2} = \ddot{\psi}(z)$$

L'équation s'écrit alors :

$$\mu_1 \Omega_i^2 \ddot{\psi} - \mu_0 \Omega_i^4 \psi = \bar{g}_{i2} + z \tilde{g}_{i2} - \Omega_i^2 R_{i2} - (R_i - z S_i)$$

cherrchons la solution générale de l'équation sans second membre :

$$\mu_1 \Omega_i^2 \ddot{\psi} - \mu_0 \Omega_i^4 \psi = 0 \quad \mu_1 \neq 0 \quad ; \quad \Omega_i \neq 0 .$$

$$\ddot{\psi} - \frac{\mu_0}{\mu_1} \Omega_i^2 \psi = 0 \quad \text{dont l'équation caractéristique a pour solutions}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \Omega_i \quad ; \quad r_2 = - \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \Omega_i .$$

D'où la solution générale est de la forme :

$$\psi(z) = \tilde{E} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \Omega_i z + \tilde{F} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \Omega_i z \quad \dots \text{VI.3.1}$$

avec : \tilde{E} et \tilde{F} sont deux constantes d'intégration.

Cherrchons une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme :

$$\psi = c z^2 + D z + E \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\psi} = 2 c z + D \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\psi} = 2 c$$

Remplaçant ψ et $\ddot{\psi}$ dans l'équation différentielle, nous aurons :

$$c = 0 \quad ; \quad D = \frac{S_i + \tilde{g}_{i2}}{\mu_0 \Omega_i^2} \quad ; \quad E = \frac{-\bar{g}_{i2} + R_{i2} \Omega_i^2 + R_i}{\mu_0 \Omega_i^4}$$

D'où l'expression de h_{i2} est la suivante :

$$h_{i2} = \tilde{E} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \Omega_i z + \tilde{F} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \Omega_i z + \frac{1}{\mu_0 \Omega_i^4} \left[(S_i + \tilde{g}_{i2}) z - \bar{g}_{i2} + R_{i2} \Omega_i^2 + R_i \right] \dots(\text{VI.3.2})$$

b - Nous intégrons les deux premières équations couplées en (h_{i0}, h_{i1})

Posons $h_{i0} = f$; $h_{i1} = g$ les systèmes devient :

$$(i) \quad (\lambda_1 + 2\mu_2) \ddot{f} - (\lambda_1 + \mu_1) \lambda_i^2 \dot{g} - \mu_1 \lambda_i^2 f = \bar{g}_{i0} + r_{i0}$$

$$(ii) \quad \mu_1 \lambda_i^2 \ddot{g} + (\lambda_1 + \mu_1) \lambda_i^2 \dot{f} - (\lambda_0 + 2\mu_0) \lambda_i^4 g = \bar{g}_{i1} - r_i + z(\tilde{g}_{i1} - s_i)$$

Tirant \dot{g} de (i) puis dérivant 2 fois on obtient :

$$(3i) \quad (\lambda_1 + \mu_1) \lambda_i^2 \ddot{\dot{g}} = (\lambda_1 + 2\mu_2) \dot{f} - u_1 \lambda_i^2 \ddot{f} \quad (4)$$

D'autre part, dérivons une fois (ii) :

$$(4i) \quad (\lambda_1 + \mu_1) \lambda_i^2 \ddot{\dot{f}} + \mu_1 \lambda_i^2 \ddot{\dot{g}} - (\lambda_0 + 2\mu_0) \lambda_i^4 \dot{g} = \tilde{g}_{i1} - s_i$$

Remplaçant $\ddot{\dot{g}}$ et \dot{g} dans l'équation (4i), nous obtenons une équation différentielle du 4e ordre en f :

$$(5i) \quad f - \lambda_i^2 \left[\frac{\mu_1^2 - (\lambda_1 + \mu_1)^2 + (\lambda_0 + 2\mu_0)(\lambda_1 + 2\mu_2)}{\mu_1 (\lambda_1 + 2\mu_2)} \right] \ddot{\dot{f}} + \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)}{(\lambda_1 + 2\mu_2)} \lambda_i^4 f =$$

$$\frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{u_1 (\lambda_1 + 2\mu_2)} (\bar{g}_{i1} - s_i) - \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0) \lambda_i^2}{\mu_1 (\lambda_1 + 2\mu_2)} (\bar{g}_{i0} + r_{i0})$$

$$\text{Soient : } A = \frac{\mu_1^2 - (\lambda_1 + \mu_1)^2 + (\lambda_0 + 2\mu_0)(\lambda_1 + 2\mu_2)}{u_1 (\lambda_1 + 2\mu_2)}$$

$$B = \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)}{(\lambda_1 + 2\mu_2)}$$

$$C = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_2)}$$

(5i) s'écrit donc :

$$(6i) \quad f^{(4)} - \lambda_i^2 A \ddot{f} + \lambda_i^4 B f = \frac{1}{\mu_1} \left[C(\bar{g}_{i1} - s_i) - B(\bar{g}_{i0} + r_{i0}) \right]$$

Solution de l'équation (6i) sans second membre :

$$(4) \quad f^{(4)} - \lambda_i^2 A \ddot{f} + \lambda_i^4 B f = 0 .$$

Dont l'équation caractéristique est :

$$r^4 - A \lambda_i^2 r^2 + \lambda_i^4 B = 0$$

$$\text{soit } r^2 = R \quad \Rightarrow \quad R^2 - A \lambda_i^2 R + \lambda_i^4 B = 0$$

$$\text{dont le discriminant } \Delta = (A^2 - 4B) \lambda_i^4$$

Par conséquent plusieurs cas possible se présentent.

En effet :

1er cas : $\Delta = 0$ c'est-à-dire $A^2 = 4B$

$$\text{Soient : } \lambda_0 + 2\mu_0 = v_0 \quad \lambda_1 + \mu_1 = v_1, \quad \lambda_1 + 2\mu_2 = v_2$$

$$\text{or } A = \frac{\mu_1^2 - (\lambda_1 + \mu_1)^2 + (\lambda_0 + 2\mu_0)(v_1 + 2\mu_2)}{\mu_1 (\lambda_1 + 2\mu_2)} \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{\mu_1^2 - v_1^2 + v_0 v_2}{\mu_1 v_2}$$

$$A^2 = \frac{\mu_1^2 - 2v_1^2 \mu_1^2 + 2\mu_1^2 v_0 v_2 - v_0 v_1 v_2 (1+v_1) + v_0^2 v_2^2 + v_1^4}{\mu_1^2 v_2^2}$$

$$B = \frac{v_0}{v_2} .$$

Par conséquent, $A^2 = 4B \quad \Rightarrow$

$$\mu_1^2 (1 - 2v_0 v_2 - 2v_1^2) + v_0^2 v_2^2 + v_1^4 - v_0 v_1 v_2 (1 + v_1) = 0 \quad \dots \text{ VI.3.3}$$

Dans ce premier cas, deux sous cas se présentent, à savoir :

$$A > 0 \quad \text{ou} \quad A < 0 .$$

$$A > 0 \Rightarrow (\mu_1 - \nu_1) (\mu_1 + \nu_1) > \nu_2 (\mu_1 - \nu_0)$$

ou encore :

$$\boxed{\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_0 + 2 \mu_0} \quad \dots \quad \text{VI.3.4.}$$

Et bien entendu si $A < 0$ alors on aura :

$$\boxed{\lambda_1 + \mu_1 > \lambda_0 + 2 \mu_0} \quad \dots \quad \text{VI.3.5}$$

→ Quand $\begin{cases} A^2 = 4B \\ \text{et} \\ A > 0 \end{cases}$ les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i, \quad r_2 = -\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i \quad \text{2 solutions réelles.}$$

Par conséquent la solution générale de l'équation (6i) est de la forme suivante :

$$\boxed{f(z) = (\tilde{A} z + \tilde{B}) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z + (\tilde{C} z + \tilde{D}) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z} \quad \dots \quad \text{VI.3.6}$$

→ Quand $A^2 = 4B$ mais avec $A < 0$, les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = i \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i, \quad r_2 = -i \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i \quad \text{2 solutions imaginaires.}$$

Par conséquent la solution générale de l'équation (6i) est de la

forme suivante :

$$\boxed{f(z) = (\tilde{A} z + \tilde{B}) \cos \lambda_i \sqrt{\frac{A}{2}} z + (\tilde{C} z + \tilde{D}) \sin \lambda_i \sqrt{\frac{A}{2}} z} \quad \dots \quad \text{VI.3.7}$$

2ème cas $\Delta > 0, A^2 > 4B$

$$\text{Or } A^2 > 4B \Leftrightarrow |A| > 2\sqrt{B} \text{ si } B > 0$$

$$\forall A \Rightarrow A^2 > 4B \text{ si } B < 0$$

or comme B est toujours > 0 , nous avons donc

$$|A| > 2\sqrt{B} \Rightarrow$$

$$\text{Or } |A| > 2\sqrt{B} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\mu_1^2 - (\lambda_1 + \mu_1)^2 + (\lambda_0 + 2\mu_0)(\lambda_1 + 2\mu_2)}{\mu_1(\lambda_1 + 2\mu_2)} \right| > \sqrt{\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_2}} \cdot 2$$

ou que :

$$\boxed{|\mu_1^2 - v_1^2 + v_0 v_2| > 2 u_1 v_2 \sqrt{\frac{v_0}{v_2}}} \quad \dots \text{VI.3.8}$$

Par conséquent, 4 cas possibles à envisager, en effet :

Soient R_1 et R_2 les deux solutions réelles de l'équation caractéristique avec

$$R_1 = \frac{A\lambda_i^2}{2} + \frac{\sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad R_2 = \frac{A\lambda_i^2}{2} - \frac{\sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

→ Si $R_1, R_2 > 0 \Rightarrow$ quatre solutions réelles :

et ceci nous impose : $\lambda_i^4 > 1, r_1 = \sqrt{R_1}, r_2 = -\sqrt{R_1}, r_3 = +\sqrt{R_2},$

$r_4 = -\sqrt{R_2}.$

Au quel cas, la solution générale de l'équation (Gi) est de la forme suivante :

$$\boxed{f(z) = \tilde{A} \operatorname{ch} \sqrt{R_1} z + \tilde{B} \operatorname{Sh} \sqrt{R_1} z + \tilde{C} \operatorname{ch} \sqrt{R_2} z + \tilde{D} \operatorname{Sh} \sqrt{R_2} z} \quad \dots \text{VI.3.9}$$

→ $R_1 > 0, R_2 < 0$

Or $R_1 > 0 \Rightarrow$ ou $A > 0$ si non $\Rightarrow \lambda_i^4 > 2.$

De toutes les façons nous aurons 2 solutions réelles : $r_1 = \sqrt{R_1},$
 $r_2 = -\sqrt{R_1}$ et deux solutions imaginaires : $r_3 = i\sqrt{R_2}, r_4 = -i\sqrt{R_2}.$

Au quel cas, la solution générale de l'équation (6i) est la suivante :

$$f(z) = \tilde{A} \operatorname{Ch} \sqrt{R_1} z + \tilde{B} \operatorname{Sh} \sqrt{R_1} z + \tilde{C} \cos \sqrt{R_2} z + \tilde{D} \sin \sqrt{R_2} z \quad \dots \text{VI.3.10}$$

$$\rightarrow R_1 < 0, R_2 > 0$$

Un cas identique au précédent.

$$\rightarrow R_1 < 0, R_2 < 0$$

Nous aurons quatre solutions imaginaires : $r_1 = i\sqrt{R_1}$, $r_2 = i\sqrt{R_1}$, $r_3 = i\sqrt{R_2}$, $r_4 = -i\sqrt{R_2}$. Au quel cas la solution générale de l'équation (6i) est de la forme suivante :

$$f(z) = \tilde{A} \cos \sqrt{R_1} z + \tilde{B} \sin \sqrt{R_1} z + \tilde{C} \cos \sqrt{R_2} z + \tilde{D} \sin \sqrt{R_2} z \quad \dots \text{VI.3.11}$$

3ème cas : $\Delta < 0$, $A^2 < 4B$

$$\text{Deux solutions : } R_1 = \frac{1}{2} (A \lambda_i^2 + i\sqrt{\Delta}) ; R_2 = \frac{1}{2} (A \lambda_i^2 - i\sqrt{\Delta}) .$$

$$\text{Soient : } R_1 = \alpha_1 + i\beta_1, R_2 = \alpha_2 + i\beta_2 .$$

D'où 4 solutions imaginaires de l'équation caractéristique.

Soient :

$$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad ; \quad r_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$

$$-r_1 = -\alpha_1 - i\beta_1, \quad ; \quad -r_2 = -\alpha_2 - i\beta_2$$

D'où

$$f(z) = A e^{r_1 z} + B e^{-r_1 z} + C e^{r_2 z} + D e^{-r_2 z}$$

$$f(z) = A e^{\alpha_1 z} (\cos \beta_1 z + i \sin \beta_1 z) + B e^{-\alpha_1 z} (\cos \beta_1 z - i \sin \beta_1 z)$$

$$+ C e^{\alpha_2 z} (\cos \beta_2 z - i \sin \beta_2 z) + D e^{-\alpha_2 z} (\cos \beta_2 z + i \sin \beta_2 z)$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$f(z) = A' e^{\alpha_1 z} \cos y_1 z + C' e^{\alpha_1 z} \sin y_1 z + B' e^{-\alpha_1 z} \cos y_1 z + D' e^{-\alpha_1 z} \sin y_1 z$$

...VI.3.12

Après avoir vu les différentes solutions possible de l'équation (6i) sans second membre, cherchons à présent une solution particulière, une solution qui sera indépendante des différents coefficients de l'élasticité.

En effet :

$$f(z) = f = \frac{1}{\mu_1 \lambda_i^4 B} (C (\bar{g}_{i1} - s_i) - B (\bar{g}_{i0} + r_{i0}))$$

est une solution particulière de (6i)

Dans la suite de ce travail nous étudions le cas où $\Delta = 0$, autrement dit $A^2 = 4B$ et en plus lorsque $A > 0$ et ceci pour pouvoir rester en mesure de comparaison avec le travail déjà fait (Mr. SOUCHE) dans le cas des plaques isotropes.

Par conséquent, les coefficients de l'élasticité seront désormais liés par les deux relations (VI.3.3) et (VI.3.4).

Au quel cas, la solution de l'équation différentielle (6i), donnant l'expression de h_{i0} est la suivante :

$$h_{i0} = (\tilde{A} z + \tilde{B}) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z + (\tilde{C} z + \tilde{D}) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z + \frac{1}{\mu_1 \lambda_i^4 B} (C (\bar{g}_{i1} - s_i) - B (\bar{g}_{i0} + r_{i0}))$$

(VI.3.12)

Connaissant l'expression de $f(z)$, nous en déduisons aisément, l'expression de $g(z)$.

$$\text{En effet, nous avons, } (\lambda_1 + \mu_1) \lambda_i^2 \ddot{g} = (\lambda_1 + 2\mu_2) \ddot{f} - \mu_1 \lambda_i^2 \dot{f}$$

Connaissant \dot{f} et \ddot{f} , nous remplaçons \ddot{g} dans l'équation (ii) et on en déduit l'expression de g , rappelons que $g(z) \equiv h_{i1}(z)$.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} h_{i1}(z) = & \frac{1}{\lambda_i^2} \left\{ \frac{A\mu_1(\lambda_1+2\mu_2)}{2(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_0+2\mu_0)} (3\tilde{A} + \tilde{D}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i + \tilde{C}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z) \right. \\ & + \left. \frac{1}{(\lambda_0+2\mu_0)} \left(\frac{-\mu_1^2}{\lambda_1+\mu_1} + \lambda_1 + \mu_1 \right) (\tilde{A} + \tilde{D}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i + \tilde{C}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z) \right\} \text{ch} \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z \\ & + \frac{1}{\lambda_i^2} \left\{ \frac{A\mu_1(\lambda_1+2\mu_2)}{2(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_0+2\mu_0)} (3\tilde{C} + \tilde{B}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i + \tilde{A}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z) \right. \\ & + \left. \frac{1}{(\lambda_0+2\mu_0)\lambda_i^2} \left(-\frac{\mu_1^2}{\lambda_1+\mu_1} + \lambda_1 + \mu_1 \right) (\tilde{C} + \tilde{B}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i + \tilde{A}\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z) \right\} \text{Sh} \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i z \\ & - \frac{1}{(\lambda_0+2\mu_0)\lambda_i^4} \left\{ (\tilde{g}_{i1} - r_i) - z(\tilde{g}_{i1} - s_i) \right\} \end{aligned}$$

(VI.3.13)

Remarque : Les expressions des moments h_{i0} , h_{i1} et h_{i2} données par les relations (VI.3.12), (VI.3.13) et (VI.3.2) sont aussi valables pour un milieu élastique isotrope. En effet : il suffira de supposer que :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Au quel cas nous aurons, $A = 2$, $B = 1$ et $C = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$.

Ainsi, nous retrouvons les expressions données pour une plaque isotrope à savoir :

$$h_{i0} = (\tilde{A} z + \tilde{B}) \operatorname{Ch} \lambda_i z + (\tilde{C} z + \tilde{D}) \operatorname{Sh} \lambda_i z - \frac{1}{\mu \lambda_i^2} (\bar{g}_{i0} + r_{i0}) + \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu) \lambda_i^4} (\tilde{g}_{i1} - s_i) \quad \text{VI.3.14}$$

$$h_{i1} = \frac{1}{\lambda_i^2} \left[\lambda_i \tilde{C} z + \lambda_i \tilde{D} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \tilde{A} \right] \operatorname{Ch} \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i^2} \left[\lambda_i \tilde{A} z + \lambda_i \tilde{B} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \tilde{C} \right] \operatorname{Sh} \lambda_i z - \frac{1}{(\lambda + 2\mu) \lambda_i^4} \left[(\bar{g}_{i1} - r_i) + (\tilde{g}_{i1} - s_i) z \right] \quad \text{VI.3.15}$$

$$h_{i2} = \frac{-1}{\mu \Omega_i^4} \{ (\bar{g}_{i2} - R_{i2} \Omega_i^2 - R_i) - (S_i + \tilde{g}_{i2}) z \} + \tilde{E} \operatorname{Ch} \Omega_i z + \tilde{F} \operatorname{sh} \Omega_i z \quad \text{VI.3.16}$$

VI.4. CALCUL DES CONSTANTES D'INTEGRATION

Les constantes d'intégration $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i, \tilde{E}_i, \tilde{F}_i$ sont calculées à partir des conditions initiales c'est-à-dire, afin de satisfaire aux équations sur les faces $z = \pm h$.

Posons : $h_i = \lambda_i \sqrt{\frac{A}{2}} h$ et $H_i = \Omega_i h$.

Rappelons les équations différentielles du 1er ordre (VI.2.5) :

$$(i) \quad (\lambda_1 + 2\mu_1) \dot{h}_{i0}(\pm h) - \lambda_1 \lambda_i^2 h_{i1}(\pm h) = 2P_{i0}$$

$$(ii) \quad \mu_1 \lambda_i^2 \dot{h}_{i1}(\pm h) + \mu_1 \lambda_i^2 h_{i0}(\pm h) = 2P_{i2} - P_{i0}$$

$$(iii) \quad \mu_1 \Omega_i^2 \dot{h}_{i2}(\pm h) = -\tilde{R}_{i2} + 2P_{i2}$$

Nous avons ainsi, un système de six équations à six inconnues.

Faisant satisfaire l'équation (VI.3.2) pour $z = \pm h$ a (iii), nous obtenons aisément les expressions de \tilde{E}_i et \tilde{F}_i qui sont les suivantes :

$$\tilde{E}_i = \frac{P_{i2} + P_{i0}}{2\Omega_i \sqrt{\mu_1 \mu_0} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} H_i}$$

...VI.4.1

$$\tilde{F}_i = \frac{1}{2\Omega_i \sqrt{\mu_1 \mu_0} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} H_i} \left\{ -2\tilde{R}_{i2} + P_{i2} - P_{i0} - \frac{2\mu_1}{\mu_0 \Omega_i^2} (S_i - \tilde{g}_{i2}) \right\}$$

...VI.4.2

Remplaçant $h_{i0}, \dot{h}_{i0}, h_{i1}$ et \dot{h}_{i1} dans les équations (i) et (ii), nous obtenons un système de quatre équations à quatre inconnues.

(i) donne :

$$(\lambda_1 + \varepsilon \mu_2) \dot{h}_{i0}(+h) - \lambda_1 \lambda_1 h_{i1}(+h) = P_{+i0}$$

$$(\lambda_1 + \varepsilon \mu_2) \dot{h}_{i0}(-h) - \lambda_1 \lambda_1 h_{i1}(-h) = -P_{-i0}$$

(ii) donne :

$$\mu_1 \lambda_1^{\varepsilon} h'_{i1}(+h) + \mu_1 \lambda_1^{\varepsilon} h_{i0}(+h) = P_{+i1} - r_{i0}$$

$$\mu_1 \lambda_1^{\varepsilon} h'_{i1}(-h) + \mu_1 \lambda_1^{\varepsilon} h_{i0}(-h) = -P_{-i1} - r_{i0}$$

faisant la somme puis la différence entre les 2 premières équations, et de la même façon pour les 2 dernières, nous obtenons un système de quatre équations

à quatre inconnues : $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$.

Notons par :

$$a = \frac{A \mu_1 (\lambda_1 + \varepsilon \mu_2)}{2(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_0 + \varepsilon \mu_0)} \quad ; \quad b = \frac{\lambda_1 (\lambda_1 + \varepsilon \mu_1)}{(\lambda_0 + \varepsilon \mu_0)(\lambda_1 + \mu_1)}$$

$$\alpha_1 = (\lambda_1 + \varepsilon \mu_2) - \lambda_1(3a+b) \quad ; \quad \alpha_3 = \mu_1 \sqrt{\frac{A}{2}}(a+b) + \frac{\mu_1}{\sqrt{\frac{A}{2}}}$$

$$\alpha_2 = \lambda_1 + \varepsilon \mu_2 - \lambda_1(a+b) \quad ; \quad \alpha_4 = \varepsilon \mu_1 \sqrt{\frac{A}{2}}(\varepsilon a+b)$$

$$\beta_1 = \{(\lambda_1 + \varepsilon \mu_2) - \lambda_1(a+b)\} \sqrt{\frac{A}{2}} \quad ; \quad \beta_2 = \mu_1(a+b) \frac{A}{2} + \mu_1$$

$$\delta_1 = \varepsilon \mu_2 \sqrt{\frac{A}{2}} \quad ; \quad \delta_2 = \mu_1(a+b) \frac{A}{2} + \mu_1 = \beta_2$$

$$\tilde{\delta}_1 = (\lambda_1 + \varepsilon \mu_2) - \lambda_1(3a+b) \quad ; \quad \tilde{\delta}_2 = (\lambda_1 + \varepsilon \mu_2) - \lambda_1(a+b)$$

$$\tilde{\delta}_3 = \mu_1(a+b) \sqrt{\frac{A}{2}} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\frac{A}{2}}} = \alpha_3 \quad ; \quad \tilde{\delta}_4 = \varepsilon \mu_1(\varepsilon a+b) \sqrt{\frac{A}{2}}$$

Nous aurons alors :

$$\tilde{A}_i \{ \alpha_1 c h_i + \alpha_2 h_i s h_i \} + \tilde{D}_i \{ \delta_1 \lambda_i c h_i \} = \frac{1}{2} (P_{+i0} - P_{-i0}) - \left[\lambda_i / \lambda_i^c (1_0 + \epsilon \mu_0) \right] (\bar{q}_{i1} - r_i)$$

...VI.4.3

$$\tilde{A}_i \{ \alpha_3 \lambda_i h_i c h_i + \alpha_4 \lambda_i s h_i \} + \tilde{D}_i \delta_2 \lambda_i^c s h_i = \frac{1}{2} (P_{+i1} + P_{-i1})$$

...VI.4.4

$$\{ \beta_1 \lambda_i s h_i \} \tilde{B}_i + \tilde{C}_i \{ \gamma_1 s h_i + \gamma_2 h_i c h_i \} = - \left[\lambda_i / \lambda_i^c (1_0 + \epsilon \mu_0) \right] [h(\tilde{q}_{i1} - 1_i)] + \frac{1}{2} (P_{+i0} + P_{-i0})$$

...VI.4.5

$$\tilde{B}_i \beta_2 \lambda_i^c c h_i + \tilde{C}_i \{ \gamma_3 \lambda_i h_i s h_i + \gamma_4 \lambda_i c h_i \} = \frac{1}{2} (P_{+i1} - P_{-i1}) - \kappa_{i0} - \left[\lambda_i / \lambda_i^c (1_0 + \epsilon \mu_0) \right] (\tilde{q}_{i1} - 1_i) + \left[1 / \lambda_i^c \right] (\bar{q}_{i0} + r_{i0})$$

...VI.4.6

par conséquent, nous en déduisons les quatres constantes \tilde{A}_i , \tilde{B}_i , \tilde{C}_i et \tilde{D}_i .

$$\tilde{A}_i = \frac{-\delta_1 c h_i (P_{+i} + P_{-i})}{2 \lambda_i \{ (\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1) s h_i c h_i - (\alpha_3 \delta_1 c h_i^2 - \alpha_2 \delta_2 s h_i^2) h_i \}} + \frac{\delta_2 s h_i \left\{ \frac{1}{2} (P_{+i} - P_{-i}) - [\lambda_1 / \lambda_i^2 (\lambda_0 + \mu_0)] (\bar{q}_i - r_i) \right\}}{(\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1) s h_i c h_i - (\alpha_3 \delta_1 c h_i^2 - \alpha_2 \delta_2 s h_i^2) h_i}$$

...VI.4.7

$$\tilde{D}_i = \frac{(\alpha_1 c h_i + \alpha_2 h_i s h_i) (P_{+i} + P_{-i})}{2 \lambda_i^2 \{ (\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1) s h_i c h_i - (\alpha_3 \delta_1 c h_i^2 - \alpha_2 \delta_2 s h_i^2) h_i \}} - \frac{(\alpha_3 h_i c h_i + \alpha_4 s h_i) \left\{ \frac{1}{2} (P_{+i} - P_{-i}) - [\lambda_1 / \lambda_i^2 (\lambda_0 + \mu_0)] [\bar{q}_i - r_i] \right\}}{\lambda_i \{ (\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1) s h_i c h_i - (\alpha_3 \delta_1 c h_i^2 - \alpha_2 \delta_2 s h_i^2) h_i \}}$$

...VI.4.8

$$\tilde{C}_i = \frac{\beta_2 c h_i \left\{ [\lambda_1 h / (\lambda_0 + \mu_0) \lambda_i^2] (\tilde{q}_i - \lambda_i) + \frac{1}{2} (P_{+i} + P_{-i}) \right\}}{(\beta_1 \delta_3 s h_i^2 - \beta_2 \delta_2 c h_i^2) h_i + (\beta_1 \delta_4 - \beta_2 \delta_1) s h_i c h_i} + \frac{\beta_1 s h_i \left\{ \frac{1}{2} (P_{+i} - P_{-i}) - [\lambda_1 / (\lambda_0 + \mu_0) \lambda_i^2] (\tilde{q}_i - \lambda_i) + \frac{1}{2} \lambda_i^2 (\bar{q}_i + r_i) - r_i \right\}}{\lambda_i \{ (\beta_1 \delta_3 s h_i^2 - \beta_2 \delta_2 c h_i^2) h_i + (\beta_1 \delta_4 - \beta_2 \delta_1) s h_i c h_i \}}$$

AUS
LILLE

...VI.4.9

$$\tilde{B}_i = \frac{(\delta_3 h_i \text{sh} h_i + \delta_4 \text{ch} h_i) \left\{ \left[-\lambda_1 h / (\lambda_0 + 2\mu_0) \lambda_i^2 \right] (\tilde{g}_{i1} - \lambda_i) + \frac{1}{2} \cdot (P_{i0} + P_{i0}) \right\}}{\lambda_i \left\{ (\beta_1 \delta_3 \text{sh}^2 h_i - \beta_2 \delta_2 \text{ch}^2 h_i) h_i + (\beta_1 \delta_4 - \beta_2 \delta_1) \text{sh} h_i \text{ch} h_i \right\}}$$

$$- \frac{(\delta_1 \text{sh} h_i + \delta_2 h_i \text{ch} h_i) \left\{ \frac{P_{i1} - P_{i1} - P_{i0}}{2} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_0 + 2\mu_0)} \cdot \frac{(\tilde{g}_{i1} - \lambda_i)}{\lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} (\bar{g}_{i0} + \bar{\epsilon}_{i0}) \right\}}{\lambda_i^2 \left\{ (\beta_1 \delta_3 \text{sh}^2 h_i - \beta_2 \delta_2 \text{ch}^2 h_i) h_i + (\beta_1 \delta_4 - \beta_2 \delta_1) \text{sh} h_i \text{ch} h_i \right\}}$$

...VI.4.10

Remarque : Lorsque $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu$, les constantes d'intégrations calculées ci-dessus sont identiques à celles calculées dans le cas d'une plaque isotrope. En effet :

Nous avons :

$$A = 2 \quad , \quad a + b = 1$$

$$2a + b = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

$$3a + b = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\alpha_1 = \frac{2\mu^2}{\lambda + \mu}$$

$$\alpha_2 = 2\mu$$

$$\alpha_3 = 2\mu \quad , \quad \alpha_4 = 2\mu(\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$$

$$\beta_1 = 2\mu \quad ; \quad \beta_2 = 2\mu \quad ; \quad \delta_1 = 2\mu \quad ; \quad \delta_2 = 2\mu$$

$$\xi_1 = \alpha_1 = \frac{2\mu^2}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \xi_2 = \xi_3 = 2\mu \quad ; \quad \xi_4 = \alpha_4 = \frac{2\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Nous aurons alors :

$$\tilde{A}_i = \frac{1}{4\mu\lambda_i} \frac{ch_i}{h_i + ch_i sh_i} (P_{+i1} + P_{-i1}) - \frac{1}{4\mu} \frac{sh_i}{h_i + ch_i sh_i} \left\{ (P_{+i0} - P_{-i0}) - \left[2\lambda / (\lambda + 2\mu) \lambda_i^2 \right] (\bar{g}_{i1} - r_i) \right\}$$

...VI.4.11

$$\tilde{D}_i = \frac{1}{4\mu\lambda_i^2} \frac{h_i sh_i + (\mu/\lambda + \mu) ch_i}{h_i + ch_i sh_i} (P_{+i1} + P_{-i1}) + \frac{1}{4\mu\lambda_i} \frac{h_i ch_i + [(\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)] sh_i}{h_i + ch_i sh_i} \left\{ (P_{+i0} - P_{-i0}) - \frac{2\lambda}{\lambda_i^2 (\lambda + 2\mu)} (\bar{g}_{i1} - r_i) \right\}$$

...VI.4.12

$$\tilde{C}_i = \frac{1}{4\mu} \frac{ch_i}{h_i - ch_i sh_i} \left\{ P_{+i0} + P_{-i0} - \left[2\lambda h / \lambda_i^2 (\lambda + 2\mu) \right] (\tilde{g}_{i1} - s_i) \right\} - \frac{1}{4\mu\lambda_i} \frac{sh_i}{h_i - ch_i sh_i} \left\{ P_{+i1} - P_{-i1} + \frac{1}{\lambda_i^2} (\bar{g}_{i0} - r_{i0}) - \left[2\lambda / \lambda_i^2 (\lambda + 2\mu) \right] (\tilde{g}_{i1} - s_i) \right\}$$

...VI.4.13

$$\tilde{D}_i = \frac{1}{4\mu\Omega_i} \frac{h_i \operatorname{sh} h_i + [(1+2\nu)/(1+\nu)] c h_i}{h_i - c h_i \operatorname{sh} h_i} \left\{ (P_{+i0} + P_{-i0}) - [2\lambda h / \Omega_i^2 (1+2\nu)] (\tilde{g}_{i1} - s_i) \right\}$$

$$+ \frac{1}{4\mu\Omega_i^2} \frac{h_i c h_i + (\nu/1+\nu) \operatorname{sh} h_i}{h_i - c h_i \operatorname{sh} h_i} \left\{ P_{+i1} - P_{-i1} + (1/\Omega_i^2) (\bar{g}_{i0} + r_{i0}) - [2\lambda / \Omega_i^2 (1+2\nu)] (\tilde{g}_{i1} - s_i) \right\}$$

De même pour \tilde{E}_i et \tilde{F}_i

...VI.4.14

$$\tilde{E}_i = \frac{1}{2\mu\Omega_i \operatorname{sh} H_i} (P_{i2} + P_{-i2})$$

...VI.4.15

$$\tilde{F}_i = \frac{1}{2\mu\Omega_i c h H_i} \left\{ P_{i2} - P_{-i2} - 2\tilde{Q}_i + \frac{2}{\Omega_i^2} (\tilde{g}_{i2} - s_i) \right\}$$

...VI.4.16

Ces expressions sont identiques à celles calculées dans le cas d'une plaque isotrope (cf. SOUCHET).

VI.5. CONCLUSION [1]

La résolution du problème différentiel a permis d'obtenir les expressions de $h_{i_0}(z)$, $h_{i_1}(z)$, $h_{i_2}(z)$, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, en fonction des inconnues auxiliaires r_{i_0} , r_i , d_i , R_i , S_i , R_{i_2} , \tilde{R}_{i_2} . Celles-ci proviennent en fait des déplacements et charges sur le bord de la plaque : $(\vec{u}^*, \vec{q}^*, u_0^*)$ et $(r^*, \vec{v}^*, \vec{m}^*)$ respectivement.

Dans un problème aux limites, certaines de ces quantités sont connues, par exemple, pour une plaque en rotation uniforme autour d'un axe (O, e_z) perpendiculaire à son plan nous avons :

- la densité de forces volumiques. $G = \text{grad} \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2)$
 ρ masse volumique, ω vitesse angulaire

- Les charges P_E sur les faces $z = \pm h$
 - Sur le bord Σ' les conditions sont : $r^* = 0$, $\vec{v}^* = 0$, $\vec{m}^* = 0$.

Le problème est alors le suivant : déterminer $u(z) \in W$ satisfaisant aux équations (V.3.2) et (V.3.3) tel que sur Σ_1 on ait pour $z = 0$:

$$f_0(0) = 0, \quad \vec{f}(0) = 0, \quad \vec{f}(0) = 0$$

Au quel cas les inconnues auxiliaires se réduisent aux quantités :

$$(\vec{u}^*, \vec{q}^*, u_0^*)$$

et c'est un problème de contrainte plane généralisée.

Mais si on considère un problème de flexion, une plaque encadrée chargée sur les faces $z = \pm h$, sur le bord Σ' , nous aurons les conditions :

$u_0^* = 0$, $\vec{u}^* = 0$, $\vec{q}^* = 0$ et les inconnues auxiliaires deviennent : $(r^*, \vec{v}^*, \vec{m}^*)$.

On constate que le problème différentiel a déterminé en quelque sorte la dépendance de la solution par rapport à la variable épaisseur . Sa dépendance vis-à-vis des variables du plan moyen (x, y) s'obtient à partir des équations que doivent satisfaire les inconnues figurant dans $(u_0^*, \vec{u}^*, \vec{a}^*)$, $(r^*, \vec{v}^*, \vec{m}^*)$. Il est clair que si la dépendance en z est la même quelque soit la forme de la plaque, la dépendance en (x, y) est liée à la forme de la plaque. Les inconnues auxiliaires deviennent ainsi les véritables inconnues du problème et on ne peut aller plus loin dans la résolution sans spécifier la forme de la plaque.

VI.6. THEORIE ASYMPTOTIQUE

Au paragraphe VI.3., nous avons pu exprimer h_{i0} , h_{i1} , h_{i2} en fonction des constantes d'intégration : \tilde{A}_i , \tilde{B}_i , \tilde{C}_i , \tilde{D}_i , \tilde{E}_i et \tilde{F}_i où l'épaisseur $2h$ de la plaque y figure explicitement.

Nous appelons "théorie asymptotique lorsque h tend vers zéro", la théorie obtenue en faisant tendre h vers zéro, dans les expressions des constantes ci-dessus.

Nous avons :

$$c h h_i = c h \left(\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i h \right) \simeq 1 + \frac{h_i^2}{2!} + O(h^2)$$

$$\delta h h_i = \delta h \left(\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i h \right) \simeq h_i + \frac{h_i^3}{3!} + O(h^3)$$

nous avons de même pour $\delta h H_i$ et $c h H_i$.

D'après VI.4.11, \tilde{A}_i se met sous la forme

$$\tilde{A}_i = \frac{*_1 c h h_i + *_2 \delta h h_i}{*_3 \delta h h_i c h h_i + *_4 h_i c h^2 h_i + *_5 h_i \delta h^2 h_i}$$

Par conséquent \tilde{A}_i se développe alors :

$$\tilde{A}_i \simeq \frac{*_1}{(*_3 + *_4) h_i} + \frac{*_2}{*_3 + *_4}$$

D'où nous aurons :

$$\tilde{A}_i \approx \frac{1}{2h_i \lambda_i} \frac{-\delta_1 (P_{+i1} + P_{-i1})}{(\delta_2 \alpha_1 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1)} + \frac{\delta_2 [\gamma_2 (P_{i0} - P_{-i0}) - [\lambda_1 / \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2\mu_0)] (\bar{g}_i - r_i)]}{\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1}$$

...VI.6.1

De même d'après VI.4.8, nous pouvons développer \tilde{D}_i , qui se met sous la forme :

$$\tilde{D}_i = \frac{*_1 Ch_i + *_2 h_i Sh_i + *_3 h_i Ch_i + *_4 Sh_i}{*_5 Sh_i Ch_i + *_6 h_i Ch^2 h_i + *_7 h_i Sh^2 h_i}$$

et nous aurons :

$$\tilde{D}_i = \frac{*_1}{(*_5 + *_6) h_i} + \frac{*_3 + *_4}{*_5 + *_6} \Rightarrow$$

$$\tilde{D}_i \approx \frac{1}{2h_i \lambda_i^2} \frac{\alpha_1 (P_{+i1} + P_{-i1})}{\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1} - \frac{(\alpha_4 + \alpha_3) \{ \gamma_2 (P_{i0} - P_{-i0}) - [\lambda_1 / \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2\mu_0)] (\bar{g}_i - r_i) \}}{\lambda_i \{ \alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1 \}}$$

...VI.6.2

VI.4.9, nous permet d'écrire \tilde{C}_i^v sous la forme suivante :

$$\tilde{C}_i^v = \frac{*_1 \text{Sh} h_i + *_2 \text{Ch} h_i + *_6 h_i \text{Ch} h_i}{*_3 \text{Sh} h_i \text{Ch} h_i + *_4 h_i \text{Ch}^2 h_i + *_5 h_i \text{Sh}^2 h_i} \Rightarrow$$

$$\tilde{C}_i^v \approx \frac{*_2}{h_i (*_3 + *_4)} + \frac{*_1 + *_6}{*_3 + *_4}$$

, par conséquent \tilde{C} devient :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i^v \approx & \frac{\beta_2 \left\{ \frac{1}{2} (P_{+i0} - P_{-i0}) \right\}}{h_i (\beta_1 \gamma_4 - \beta_2 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2)} \\ + & \frac{\left[\lambda_1 / \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) \right] \left[(\bar{g}_i - \lambda_i) (\beta_2 - \sqrt{\frac{A}{2}} \beta_1) \right]}{\lambda_i (\beta_1 \gamma_4 - \beta_2 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2)} \\ + & \frac{\beta_1 \left\{ \frac{1}{2} (P_{ii} - P_{-ii}) - r_{i0} - \left[(\lambda_1 + \mu_1) / \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) \right] (\bar{g}_i - \lambda_i) + \left[1 / \lambda_i^2 \right] (\bar{g}_{i0} - r_{i0}) \right\}}{\lambda_i (\beta_1 \gamma_4 - \beta_2 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2)} \end{aligned}$$

...VI.6.3

De même VI.4.10 se met sous la forme :

$$\beta_i = \frac{*_1 h_i^2 sh_i + *_2 h_i ch_i + *_3 ch_i + *_4 sh_i + *_5 sh_i h_i}{*_6 sh_i ch_i + *_7 h_i ch^2 h_i + *_8 h_i sh^2 h_i}$$

$$\beta_i \approx \frac{*_3}{h_i (*_6 + *_7)} + \frac{*_2 + *_4}{*_6 + *_7}$$

Nous avons alors :

$$\beta_i \approx \frac{\bar{g}_i \left\{ \frac{1}{2} (P_{i0} + P_{-i0}) \right\}}{\Delta_i h_i (\beta_1 \bar{g}_i - \beta_2 \bar{g}_1 - \beta_2 \bar{g}_2)} + \frac{\left[-\Delta_i / (\Delta_0 + 2M_0) \Delta_i^2 \right] \left[(\bar{g}_i / \sqrt{A}) - \bar{g}_2 - \bar{g}_1 \right] \left[\bar{g}_i - \Delta_i \right]}{\Delta_i^2 (\beta_1 \bar{g}_i - \beta_2 \bar{g}_1 - \beta_2 \bar{g}_2)} - \frac{(\bar{g}_1 + \bar{g}_2) \left\{ \frac{1}{2} (P_{i1} - P_{-i1}) - r_{i0} + (1/\Delta_i^2) (\bar{g}_{i0} + P_{i0}) \right\}}{\Delta_i^2 (\beta_1 \bar{g}_i - \beta_2 \bar{g}_1 - \beta_2 \bar{g}_2)}$$

Les développements de \tilde{E} et \tilde{F} sont immédiats, en effet :

$$\tilde{E}_i \approx \frac{P_{i2} + P_{-i2}}{2\sqrt{\mu_1\mu_0} \Omega_i \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} H_i}$$

...VI.6.5

$$\tilde{F}_i \approx \frac{1}{2\Omega_i \sqrt{\mu_0\mu_1}} \left\{ \frac{-2\alpha_1}{\mu_0 \Omega_i^2} (S_i - \tilde{g}_{i2}) - 2\tilde{R}_{i2} + P_{i2} - P_{-i2} \right\}$$

...VI.6.6

En définitive, nous pouvons écrire :

$$\tilde{A}_i \approx \frac{1}{\lambda_i^2 \sqrt{\frac{A}{2}}} \frac{1}{2h} \frac{-\delta_1 (P_{+i1} + P_{-i1})}{\delta_2 \alpha_1 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1} + \frac{\delta_2 \left\{ \frac{1}{2} (P_{i0} - P_{-i0}) - \left[\lambda_1 / \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) \right] (\bar{g}_{i1} - r_i) \right\}}{\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1}$$

...VI.6.7

$$\tilde{D}_i \approx \frac{\alpha_1 (P_{i1} + P_{-i1})}{\lambda_i^3 \sqrt{\frac{A}{2}} 2h \{ \alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1 \}} - \frac{1}{\lambda_i} \frac{(\alpha_4 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2} (P_{i0} - P_{-i0}) - \left[\lambda_1 / \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) \right] (\bar{g}_{i1} - r_i) \right\}}{\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1}$$

...VI.6.8

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_i &\approx \frac{1}{\lambda_i \sqrt{\frac{A}{2}}} \frac{1}{2h} \frac{\beta_2 (P_{i0} - P_{-i0})}{\beta_1 \tilde{\sigma}_4 - \beta_2 \tilde{\sigma}_1 - \beta_2 \tilde{\sigma}_2} \\
 &+ \frac{1}{\lambda_i} \frac{[\lambda_1 / \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2M_0)] [(\tilde{g}_{i1} - \lambda_i) (\beta_2 - \sqrt{\frac{A}{2}} \beta_1)]}{\beta_1 \tilde{\sigma}_4 - \beta_2 \tilde{\sigma}_1 - \beta_2 \tilde{\sigma}_2} \\
 &+ \frac{1}{\lambda_i} \frac{\beta_1 \{ \frac{1}{2} (P_{i1} - P_{-i1}) - r_{i0} - [(\lambda_1 + M_1) / \lambda_i^2 (\lambda_0 + 2M_0)] (\bar{g}_{i1} - \lambda_i) + \frac{1}{2} \lambda_i^2 (\bar{g}_{i0} - r_{i0}) \}}{\beta_1 \tilde{\sigma}_4 - \beta_2 \tilde{\sigma}_1 - \beta_2 \tilde{\sigma}_2}
 \end{aligned}$$

...VI.6.9

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_i &\approx \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i^2} \frac{1}{2h} \frac{\tilde{\sigma}_4 (P_{i0} + P_{-i0})}{\beta_1 \tilde{\sigma}_4 - \beta_2 \tilde{\sigma}_1 - \beta_2 \tilde{\sigma}_2} \\
 &+ \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{[-\lambda_1 / (\lambda_0 + 2M_0) \lambda_i^2] [(\tilde{\sigma}_4 / \sqrt{\frac{A}{2}}) - \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1] (\tilde{g}_{i1} - \lambda_i)}{\beta_1 \tilde{\sigma}_4 - \beta_2 \tilde{\sigma}_1 - \beta_2 \tilde{\sigma}_2} \\
 &- \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) \{ \frac{1}{2} (P_{i1} - P_{-i1}) - r_{i0} + (1 / \lambda_i^2) (\bar{g}_{i0} + r_{i0}) \}}{\beta_1 \tilde{\sigma}_4 - \beta_2 \tilde{\sigma}_1 - \beta_2 \tilde{\sigma}_2}
 \end{aligned}$$

...VI.6.10

$$\tilde{E}_i \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \mu_0} \Omega_i^2 \frac{\mu_0}{\mu_1}} \frac{1}{2h} (P_{i2} + P_{-i2})$$

...VI.6.11

$$\tilde{F}_i \approx \frac{1}{2\Omega_i \sqrt{\mu_0 \mu_1}} \left\{ \frac{-2\mu_1}{\mu_0 \Omega_i^2} (s_i - \tilde{g}_{i2}) - 2\tilde{R}_{i2} + P_{i2} - P_{-i2} \right\}$$

...VI.6.12

Remarque :

Un développement asymptotique des constantes d'intégration dans le cas d'une plaque isotrope, d'après (VI.4.11), (VI.4.12), (VI.4.13), (VI.4.14) nous aurons :

$$\tilde{A}_i \approx \frac{1}{4\mu \Omega_i^2} \frac{1}{2h} (P_{+i1} + P_{-i1}) - \frac{1}{4\mu} \left\{ \frac{1}{2} (P_{i0} - P_{-i0}) - [\lambda / \Omega_i^2 (\lambda + 2\mu)] (\bar{g}_{i1} - c_i) \right\}$$

...VI.6.13

$$\tilde{D}_i \approx \frac{-(P_{+i1} + P_{-i1})}{4\mu(\lambda + \mu)\Omega_i^3 2h} + \frac{(2\lambda + 3\mu) \left\{ \frac{1}{2} (P_{i0} - P_{-i0}) - [\lambda / \Omega_i^2 (\lambda + 2\mu)] (\bar{g}_{i1} - c_i) \right\}}{4\mu(\lambda + \mu)\Omega_i}$$

...VI.6.14



$$\tilde{C}_i \approx -\frac{1}{4\mu\Omega_i^3} \frac{3}{2h^3} (P_{i0} + P_{-i0}) + \frac{1}{4\mu\Omega_i^3} \frac{3}{2h^2} \left\{ P_{+i} - P_{-i} + 2\bar{g}_{i0} + \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+2\mu)} \frac{1}{\Omega_i^3} (\tilde{g}_{i1} - s_i) \right\}$$

...VI.6.15

$$\tilde{B}_i \approx \frac{1}{4\mu\Omega_i^4} \frac{(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \frac{3}{2h^3} (P_{+i0} + P_{-i0}) - \frac{3(\lambda+2\mu)}{2h^2(\lambda+\mu)4\mu\Omega_i^4} \left\{ (P_{+i} - P_{-i}) + 2\bar{g}_{i0} \right\} - \frac{\lambda(3\lambda+4\mu)}{4\mu\Omega_i^4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)} (\tilde{g}_{i1} - s_i)$$

...VI.6.16

$$\tilde{E}_i \approx \frac{1}{2\mu h \Omega_i^2} (P_{i2} + P_{-i2})$$

...VI.6.17

$$\tilde{F}_i \approx \frac{1}{2\mu h \Omega_i^2} \left\{ P_{i2} - P_{-i2} - 2\tilde{R}_i + (\nu/\Omega_i^2)(\tilde{g}_{i2} - s_i) \right\}$$

...VI.6.18

Remarquons alors que \tilde{C}_i , \tilde{B}_i se développent en $\frac{1}{h_i} + cte$ dans le cas transversalement isotrope, ils se développent en $\frac{1}{h_i^3} + \frac{1}{h_i^2} + cte$ dans le cas isotrope.

CHAPITRE VII

EXEMPLE D'APPLICATION

Dans le cas des plaques isotropes, la théorie précédente a été appliquée à plusieurs problèmes [1], ici nous l'appliquons sur une plaque circulaire encastrée.

VII.1 - RECHERCHE DES FONCTIONS PROPRES

Nous devons chercher les fonctions propres w_i et w_i' associées à l'opérateur Δ tel que l'on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_i + \lambda_i^c w_i = 0 \\ w_{i/\Sigma} = 0 \quad ; \quad \|w_i\| = 1 \end{array} \right. \quad \dots \text{VII.1.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_i + \lambda_i^c w_i = 0 \\ \frac{dw_i}{dn} / \Sigma = 0 \quad ; \quad \|w_i\| = 1 \end{array} \right. \quad \dots \text{VII.1.2}$$

Dans les deux cas nous cherchons des fonctions propres 2π périodiques en θ - développable en série de Fourier.

Soit la famille des fonctions propres :

$$\{w_i^I; w_i^P\} \text{ tel que } w_i^I = f(r) \sin i\theta \quad ; \quad w_i^P = f(r) \cos i\theta$$

et soit la famille des fonctions propres :

$$\{w_i^I; w_i^P\} \text{ tel que : } w_i^I = g(r) \sin i\theta \quad ; \quad w_i^P = g(r) \cos i\theta$$

Nous calculons $f(r)$ et $g(r)$, du fait que w_i^I et w_i^P vérifient VII.1.1 nous obtenons :

$$\begin{cases} f'' + \frac{1}{r} f' + \left(\lambda_i^2 - \frac{i^2}{r^2} \right) f = 0 \\ f(R) = 0 \end{cases} \quad \dots \text{VII.1.3}$$

effectuons le changement de variable : $x = \lambda_i r$ on obtient :

$$\begin{cases} f'' + \frac{1}{x} f' + \left(1 - \frac{i^2}{x^2} \right) f = 0 \\ f(\lambda_i R) = 0 \end{cases} \quad \dots \text{VII.1.4}$$

c'est une équation de Bessel dont la solution général se met sous la forme :

$$f(x) = A J_i(x) + B N_i(x) \quad \dots \text{VII.1.5}$$

$J_i(x)$ fonction de Bessel d'ordre i , $i \in \mathbb{N}$

$N_i(x)$ fonction de Neumann (ou fonction de Bessel de seconde espèce).

Notons que la limite de $N_i(x) = +\infty$,
 alors que la limite de $J_i(x) = 0$
 et comme la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, doit être finie
 nous en déduisons que la constante B est nécessairement nulle, par

conséquent nous aurons :

$$f(x) = A J_n(x) \quad ; \quad J_n(\lambda_n R) = 0$$

D'autre par nous avons :

$$\|W_i^F\| = \|W_i^P\| = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\int_D (A J_n(x))^2 r dr d\theta = 1$$

$$\frac{\pi A^2}{\lambda_n^2} \int_0^{\lambda_n R} J_n^2(x) x dx = 1$$

$$A = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R(J_n'(\lambda_n R))}$$

Nous aurons alors les fonctions propres :

$$W_i^F = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{J_n(\lambda_n r)}{R(J_n'(\lambda_n R))} \sin i\theta$$

...VII.1.6

$$W_i^P = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{J_n(\lambda_n r)}{R(J_n'(\lambda_n R))} \cos i\theta$$

...VII.1.7

De même nous déterminons $\{W_i^I; W_i^P\}$ qui vérifient VII.1.2, par conséquent on obtient :

$$\begin{cases} g'' + \frac{1}{x} g' + \left(1 - \frac{x^2}{x^2}\right) g = 0 & x = \Omega_i \cdot r \\ \frac{dg}{dn/\Sigma} = 0 & \|W_i\| = 1 \end{cases} \quad \dots \text{VII.1.8}$$

et nous aurons :

$$g(x) = K J_i(x) \quad ; \quad J_i'(\Omega_i R) = 0$$

Ayant $\|W_i\| = 1$ nous permet d'en déduire l'expression de la constante K :

$$K = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi \left(1 - \frac{x^2}{\Omega_i^2 R^2}\right)}} \frac{1}{R J_i(\Omega_i R)}$$

par conséquent nous aurons :

$$W_i^I = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{\Omega_i^2 R^2}\right)}} \frac{1}{R J_i(\Omega_i R)} \sin i\theta \quad \dots \text{VII.1.9}$$

$$W_i^P = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{\Omega_i^2 R^2}\right)}} \frac{1}{R J_i(\Omega_i R)} \cos i\theta \quad \dots \text{VII.1.10}$$

VII.2. CALCUL DES INCONNUES AUXILIAIRES

Nous traitons une plaque circulaire à bord encastré; i.e.:

$$u_0^* = 0 ; \vec{u}^* = 0 ; \vec{\alpha}^* = 0 \quad (\text{centre } O, \text{ Rayon } R), \text{ chargée transversalement sur la face } z = +h :$$

$$P_{+0} = 0 \quad \text{pour} \quad r < a \quad \text{et} \quad r > b$$

$$P_{+0} = q_0 \quad \text{pour} \quad a < r < b \quad (q_0, \text{ constante réelle}).$$

Les forces de volume sont supposées nulles.

Si on prend en compte la symétrie du problème, nous utiliserons seulement les variables z et r , nous aurons alors des déplacements constants en θ , de même bien évidemment les fonctions propres seront constantes en θ .

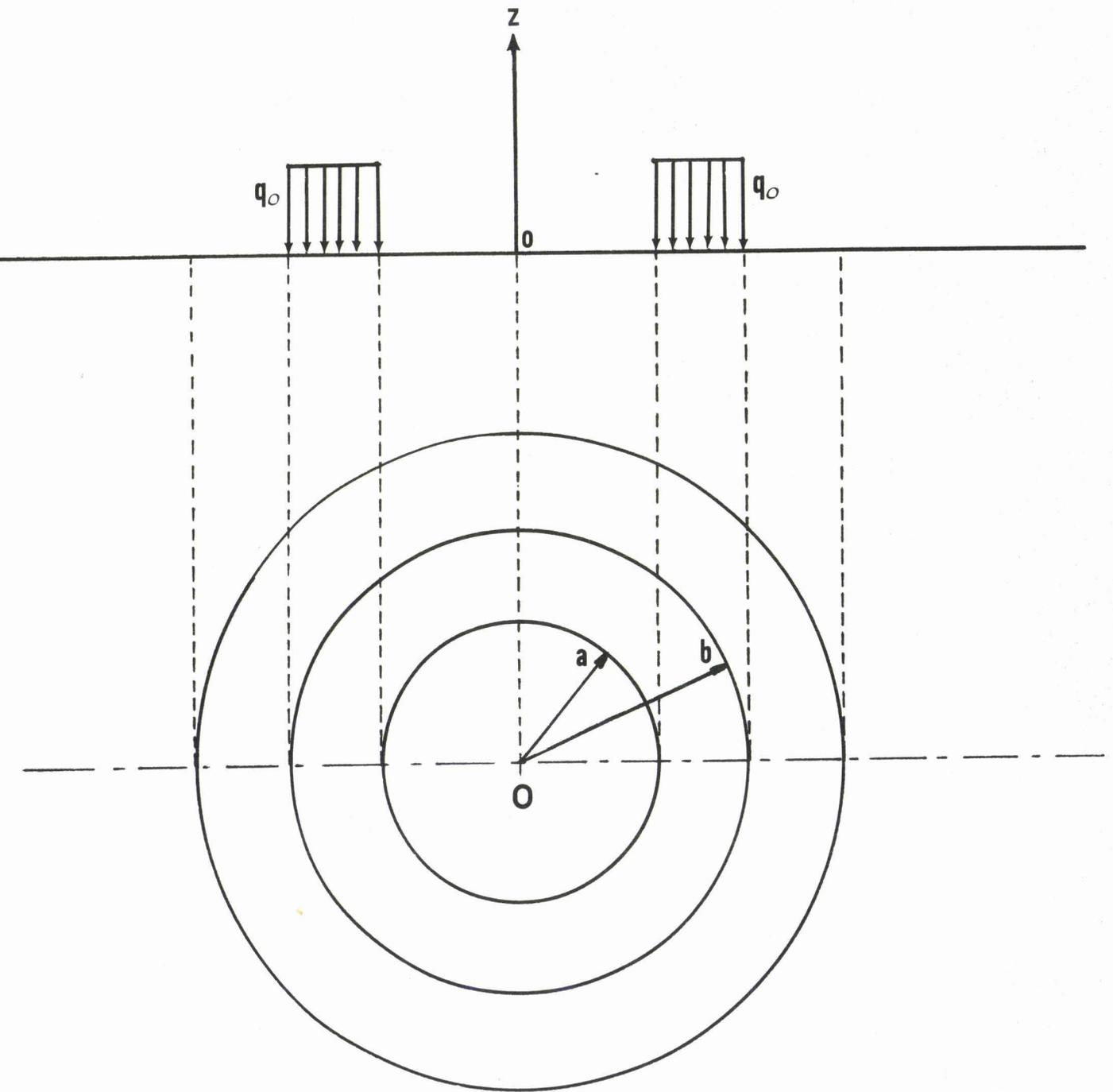
En effet ayant :

$$W_i = W_i(r) ; \quad w_i = w_i(r)$$

les solutions des équations VII.1.4 et VII.18 sont des fonctions de Bessel d'ordre zéro, il suffit de prendre $i = 0$ dans les expressions données par VII.1.6, VII.1.7, VII.1.9 et VII.1.10.

Par ailleurs notons $\{\alpha_i ; i \in \mathbb{N}^*\}$ la suite des zéros positifs de $J_0(\alpha)$, de même $\{\alpha'_i ; i \in \mathbb{N}^*\}$ c'est la suite des zéros positifs de $J_0(\alpha')$, avec :

$$\lambda_i = \frac{1}{R} \alpha_i ; \quad \lambda'_i = \frac{1}{R} \alpha'_i$$



rappelons que

$$J_0'(a; r) = -J_1(a; r)$$

Nous aurons pour les fonctions propres :

$$W_i(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{J_0(\lambda_i r)}{R |J_1(\lambda_i)|}$$

...VII.2.1

$$W_i(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{J_0(\lambda_i r)}{R |J_1(\lambda_i)|}$$

...VII.2.2

les déplacements et la rotation sont données sur le bord de la plaque, commençons par le calcul de chargement sur la face $z = +h$ nous avons :

$$\begin{aligned} P_{z0} &= \int_d P_{z0} W_i d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R q_0 W_i(r) r dr d\theta \end{aligned}$$

or

$$P_{z0} = 0 \quad \text{pour } r < a \text{ et } r > b$$

$$P_{z0} = q_0 \quad \text{pour } a < r < b$$

$$P_{z0} = \int_0^{2\pi} \int_a^b q_0 W_i(r) r dr d\theta = 2\pi q_0 \int_a^b W_i(r) r dr$$

$$P_{i0} = \frac{e\sqrt{\pi} q_0}{R |J_1(\lambda_i)|} \int_{\lambda_i a}^{\lambda_i b} u J_0(u) du \cdot \frac{1}{\lambda_i^2}$$

D'après la formule de récurrence pour $\nu=1$; on a :

$$u J_0(u) = u J_1'(u) + J_1(u) = \frac{d}{du} (u J_1(u)) \Rightarrow$$

$$P_{i0} = \frac{e\sqrt{\pi} q_0}{R |J_1(\lambda_i)|} \frac{1}{\lambda_i^2} (\lambda_i b J_1(\lambda_i b) - \lambda_i a J_1(\lambda_i a))$$

$$= \frac{e\sqrt{\pi} q_0}{|J_1(\lambda_i)|} \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \frac{b}{R} J_1\left(\lambda_i \frac{b}{R}\right) - \frac{a}{R} J_1\left(\lambda_i \frac{a}{R}\right) \right\}$$

Soient : $\alpha = \frac{a}{R}$; $\beta = \frac{b}{R}$ nous aurons :

$$P_{i0} = e\sqrt{\pi} q_0 \frac{\beta J_1(\lambda_i \beta) - \alpha J_1(\lambda_i \alpha)}{\lambda_i |J_1(\lambda_i)|}$$

...VII.2.3

D'autre part de fait de l'encastrement nous avons :

$$u_0^* = 0 \quad ; \quad \vec{u}^* = 0 \quad ; \quad \vec{v}^* = 0$$

Nous aurons :

$$r_{i0} = \alpha_1 (u_0^*, \frac{dw_i}{dn})_{\Sigma} = 0$$

$$\tilde{r}_{i2} = \alpha_1 (u_0^*, -\frac{dw_i}{dn})_{\Sigma} = 0$$

$$r_i = \left(\frac{r_n^*}{2h}, \frac{dw_i}{dn} \right)_{\Sigma} \quad ; \quad R_i = - \left(\frac{r_n^*}{2h}, \frac{dw_i}{dt} \right)_{\Sigma}$$

$$J_i = \left(\frac{3m_n^*}{2h^3}, \frac{dw_i}{dn} \right)_{\Sigma} \quad ; \quad S_i = - \left(\frac{3m_n^*}{2h^3}, \frac{dw_i}{dt} \right)_{\Sigma}$$

Notons que $r_n^* = \vec{r}^* \cdot \vec{n}$ avec $\vec{r}^* = 2h \vec{f}(s)$

avec s étant l'abscisse curviligne de cercle de centre O et de rayon R . La plaque circulaire étant symétrique on en déduit que $f(s)$ est une fonction indépendante de θ , et donc r_n^* on est de même.

D'autre part, nous avons :

$$\frac{\partial w_i}{\partial r} = \frac{dw_i}{dn} = w_i'(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dw_i}{dn/\Sigma} = w_i'(R) = \frac{\partial w_i(R)}{\partial r}$$

Il vient alors :

$$r_i = \frac{r_n^*}{2h} w_i'(R) \int_0^{2\pi} R d\theta = \frac{r_n^*}{2h} w_i'(R) (1,1)$$

$$r_i = \frac{2\pi R}{2h} r_n^* w_i'(R)$$

or nous avons

$$w_i(R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{J_0(\mu_i R)}{R |J_1(\mu_i)|}$$

$$w_i'(R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu_i}{R^2} \frac{J_0'(\mu_i)}{|J_0'(\mu_i)|}$$

$$w_i'(R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu_i}{R^2} \xi_i \quad \text{avec : } \xi_i \quad \text{étant le signe de } J_0'(\mu_i).$$

En définitive nous aurons :

$$r_i = \frac{r_n^*}{2h} \cdot 2\sqrt{\pi} \frac{\mu_i}{R} \xi_i$$

...VII.2.4

De même nous calculons :

$$\Delta_i = \left(\frac{3m_n^*}{2h^3}, \frac{dw_i}{dn} \right)_{\Sigma}$$

or

$$\vec{m}^* = \frac{2h^3}{3} \vec{f}(\Delta, 0)$$

$$\Delta_i = \frac{3m_n^*}{2h^3} w_i'(R) \cdot 2\pi R$$

$$\Delta_i = \frac{3m_n^*}{2h^3} \cdot 2\sqrt{\pi} \frac{\mu_i}{R} \xi_i$$

...VII.2.5

D'autre part, nous avons : $\frac{dw_i}{dt/\Sigma} = \frac{1}{R} \frac{2w_i(R)}{2\theta} = 0$

On en déduit que :

$$\begin{array}{l} R_i = 0 \\ S_i = 0 \end{array}$$

...VII.2.6

Les inconnues principales sont donc seulement γ_n^* et m_n^* .

VII.3. APPROXIMATION DE RANG N

Nous définissons une "approximation de rang N " comme étant une solution du problème dans le sous-espace engendré par les N premières fonctions - coordonnées.

Soit Φ_N^0 le sous-espace engendré par w_1, \dots, w_N ;
 $\Phi_N^1 = \Phi_N^0$; Φ_N^2 le sous-espace engendré par w_1, \dots, w_N .
 Nous dirons que $u_N(z) \in \Phi_N = \Phi_N^0 \times \Phi_N^1 \times \Phi_N^2$ est une solution approchée du problème si $u_N(z)$ vérifie sur le bord Σ les conditions aux limites et les équations variationnelles du paragraphe IV.B pour tout $w \in \Phi_N$.

Nous avons :

$$u_{0N}(z) = \sum_{i=1}^N h_{i0}(z) w_i$$

$$u_{1N}(z) = \sum_{i=1}^N h_{i1}(z) w_i$$

$$u_{2N}(z) = \sum_{i=1}^N h_{i2}(z) w_i$$

Il en résulte que $\mu_N(z)$ satisfait aux équations variationnelles sur Φ_N si et seulement si (h_{i0}, h_{i1}, h_{i2}) est solution des problèmes différentiels du paragraphe (VI.2) pour $i=1, \dots, N$ avec : $U_N(z) = (\mu_{0N}(z), \mu_{1N}(z), \mu_{2N}(z))$.

Notons que $U_N(z) \in \Phi_N$ implique sur le bord Σ :

$$\mu_{0N}(z) = 0 \quad (\text{Remarque importante au paragraphe VI.1})$$

$$\text{et à fortiori } \mu_{0N}(0) = 0, \quad \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N(0) = 0, \quad \vec{E} \cdot \vec{\mu}_N'(0) = 0.$$

En plus nous devons imposer les conditions :

$$\vec{n} \cdot \vec{\mu}_N(z) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{\mu}_N'(z) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\mu_{1N}(0)}{dn} - \frac{d\mu_{1N}(0)}{dt} = 0$$

...VII.3.1

$$\text{et} \quad \frac{d\mu_{2N}(0)}{dn} - \frac{d\mu_{2N}(0)}{dt} = 0$$

...VII.3.2

Compte tenu du fait que μ_{1N} et μ_{2N} s'expriment à l'aide de r_n^* et m_n^* , on a là deux équations résolvantes pour les deux inconnues principales r_n^* et m_n^* .

En effet :

$$\mu_{iN}(z) = \sum_{i=1}^N h_{i1}(z) w_i$$

$$\frac{dU_{1N}}{dn} = \sum_{i=1}^N h_{i1}(z) \frac{dw_i}{dn} = \sum_{i=1}^N h_{i1}(z) \frac{\partial w_i(r)}{\partial r}$$

$$\frac{dU_{2N}}{dt} = \sum_{i=1}^N h_{i2}(z) \frac{dw_i}{dt} = 0$$

De même,

$$\frac{dU_{1N}(z)}{dn} = \sum_{i=1}^N h_{i1}(0) \frac{dw_i}{dn}$$

D'où VII.3.1 et VII.3.2 deviennent :

$$\sum_{i=1}^N h_{i1}(0) w_i'(R) = 0 \quad \dots \text{VII.3.3}$$

$$\sum_{i=1}^N h_{i2}'(0) w_i'(R) = 0 \quad \dots \text{VII.3.4}$$

Rappelons que

$$w_i'(R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{w_i \xi_i}{R^2}$$

et que

$$h_{i1}(0) = \frac{1}{\lambda_i^2} \left\{ (3a+b) \tilde{A}_i + (a+b) \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i \tilde{D}_i \right\}$$

$$- \frac{1}{\lambda_i^4 (1+\epsilon\mu)} (\bar{g}_{i1} - r_i)$$

$$h_{i2}'(0) = \frac{e}{\lambda_i} \sqrt{\frac{A}{2}} (2a+b) \tilde{C}_i + (a+b) \frac{A}{2} \tilde{B}_i + \frac{\lambda_i}{\lambda_i^4 (1+\epsilon\mu)}$$

par conséquent VII.3.3 devient :

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\lambda_i^2} \left\{ (3a+b) \tilde{A}_i + (a+b) \sqrt{\frac{A}{2}} \lambda_i \tilde{D}_i \right\} + \frac{r_i}{[\lambda_i^4 (\lambda_0 + \nu_0)]} \right] \frac{\nu_i \xi_i}{\sqrt{\pi} R^2} = 0$$

Nous posons :

$$X_N = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\left[\frac{A}{2} (a+b) \alpha_3 h_i \operatorname{ch} h_i + [(a+b) \sqrt{\frac{A}{2}} \alpha_4 - (3a+b) \delta_2] \operatorname{sh} h_i \right]}{(\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1) \operatorname{sh} h_i \operatorname{ch} h_i - (\alpha_3 \delta_1 \operatorname{ch}^2 h_i - \alpha_2 \delta_2 \operatorname{sh}^2 h_i) h_i} \frac{\left[\beta J_1(\lambda_i R) - \alpha J_1(\lambda_i r) \right]}{\nu_i^2 J_1(\lambda_i)} \right\} \\ \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\lambda_0 + \nu_0} \left[1 + \lambda_i \frac{\left[(3a+b) \delta_2 - \sqrt{\frac{A}{2}} (a+b) \alpha_4 \right] \operatorname{sh} h_i - \sqrt{\frac{A}{2}} (a+b) \alpha_3 h_i \operatorname{ch} h_i}{(\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1) \operatorname{sh} h_i \operatorname{ch} h_i - (\alpha_3 \delta_1 \operatorname{ch}^2 h_i - \alpha_2 \delta_2 \operatorname{sh}^2 h_i) h_i} \right] \frac{1}{\nu_i^2} \right\}$$

...VII.3.5

Par conséquent nous aurons :

$$r_n^* = q_0 h X_N$$

...VII.3.6

De même et à partir de l'équation VII.3.4, remplaçant $h_i'(0)$ par la valeur et rappelant que :

$$\lambda_i = \frac{3m_n^*}{h^3} \sqrt{\pi} \frac{\nu_i \xi_i}{R}$$

, nous en déduisons l'expression

de moment de flexion au bord m_n^* .

En effet nous avons :

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{2}{\lambda_i} \sqrt{\frac{A}{2}} (a+b) \tilde{C}_i + (a+b) \frac{A}{2} \tilde{B}_i + \frac{\lambda_i}{\lambda_i^4 (\lambda_0 + \mu_0)} \right\} \frac{\mu_i \xi_i}{\sqrt{\pi} R^2} = 0$$

remplaçant \tilde{C}_i et \tilde{B}_i par leurs valeurs, nous aurons :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_i}{\lambda_i^4 (\lambda_0 + \mu_0)} \left\{ \frac{\lambda_1}{\Delta} \left[2\sqrt{\frac{A}{2}} (a+b) \left\{ \beta_1 \operatorname{sh} h_i - \left(1/\sqrt{\frac{A}{2}}\right) \beta_2 h_i \operatorname{ch} h_i \right\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (a+b) \frac{A}{2} \left\{ \frac{\xi_3 h_i \operatorname{sh} h_i + \xi_4 \operatorname{ch} h_i}{\sqrt{\frac{A}{2}}} h_i - \xi_3 \operatorname{sh} h_i + \xi_2 h_i \operatorname{ch} h_i \right\} + 1 \right] \right\} \\ & = \frac{-p_{i0}}{\lambda_i \Delta} \left\{ \sqrt{\frac{A}{2}} (a+b) \beta_2 \operatorname{ch} h_i + (a+b) \frac{A}{2} \left(\xi_3 h_i \operatorname{sh} h_i + \xi_4 \operatorname{ch} h_i \right) \right\} \end{aligned}$$

Remplaçant λ_i et p_{i0} par leurs valeurs, nous obtenons l'expression de m_n^* , en effet :

Nous posons :

$$Y_N = \frac{\sum_{i=1}^N h_i^3 \left\{ -2\sqrt{\frac{A}{2}} (a+b) \beta_2 \operatorname{ch} h_i - A(a+b) (\xi_3 h_i \operatorname{sh} h_i + \xi_4 \operatorname{ch} h_i) \right\} \left\{ \beta_1 J_1(\mu_i \beta) - \alpha J_1(\mu_i \alpha) \right\}}{\sum_{i=1}^N \left\{ (\beta_1 \xi_3 \operatorname{sh}^2 h_i - \beta_2 \xi_2 \operatorname{ch}^2 h_i) h_i + (\beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_1) \operatorname{sh} h_i \operatorname{ch} h_i \right\} \mu_i^4 J_1(\mu_i)}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1/\mu_i^2}{(\lambda_0 + \mu_0)} \left\{ 1 + \frac{2(a+b) \left(\frac{A}{2} \right)^{3/2} \beta_2 h_i \operatorname{ch} h_i + \left(\frac{A}{2} \right) \beta_1 \operatorname{sh} h_i + (a+b) \left(\frac{A}{2} \right) (\xi_3 h_i \operatorname{sh} h_i + \xi_4 \operatorname{ch} h_i) h_i - \left(\frac{A}{2} \right) (\xi_1 \operatorname{sh} h_i + \xi_2 h_i \operatorname{ch} h_i) \right\}}{(\beta_1 \xi_3 \operatorname{sh}^2 h_i - \beta_2 \xi_2 \operatorname{ch}^2 h_i) h_i + (\beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_1) \operatorname{sh} h_i \operatorname{ch} h_i}$$

par conséquent nous avons :

$$m_n^* = q_0 R^2 Y_N$$

...VII.3.8

La méthode utilisée détermine d'abord les deux inconnues sur le bord que sont le moment de flexion au bord m_n^* et la contrainte normale au bord r_n^* .

Nous donnons aussi l'expression de la flèche, i.e. du déplacement vertical du plan moyen $\delta = 0$:

$$u_{0N}(0) = \sum_{i=1}^N h_{i0}(0) w_i$$

rappelons que dans notre cas, nous avons :

$$h_{i0}(0) = \tilde{B}_i - \frac{(\lambda_i + \mu_i)}{\mu_i(\lambda_0 + 2\mu_0)} \frac{J_i}{\lambda_i^4}$$

$$w_i(r) = \frac{J_0(A_i r)}{\sqrt{\pi} R |J_1(A_i R)|}$$

Nous avons posé, par analogie avec le cas isotrope :

$$D = \frac{2}{3} h^3 \frac{4\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)} \quad \text{coefficient de rigidité à la flexion} \quad \dots \text{VII.3.9}$$

$$t_i = - \left[\frac{2(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)} \right]^2 \left[1 + \frac{\lambda_1 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)} \frac{(\xi_3 \text{sh} h_i + \xi_2 \text{ch} h_i) - (1/\sqrt{A}) (\xi_3 h_i^2 \text{sh} h_i + \xi_4 h_i \text{ch} h_i)}{(\beta_1 \xi_3 \text{sh} h_i - \beta_2 \xi_2 \text{ch} h_i) h_i + (\beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_1) \text{sh} h_i \text{ch} h_i} \right]$$

...VII.3.10

$$l_i = \left[2/\sqrt{A} \right]^{3/2} \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)} \left\{ \frac{2}{3} h_i^3 \frac{\xi_3 h_i \text{sh} h_i + \xi_4 \text{ch} h_i}{(\beta_1 \xi_3 \text{sh} h_i - \beta_2 \xi_2 \text{ch} h_i) h_i + (\beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_1) \text{sh} h_i \text{ch} h_i} \right\}$$

...VII.3.11

Par conséquent nous aurons :

$$U_{0N}(0) = \frac{2q_0 R^4}{D} \sum_{i=1}^N \left\{ Y_N t_i + l_i \frac{\beta J_1(N_i \beta) - \alpha J_1(N_i \alpha)}{N_i^2 (J_1(N_i))} \right\} \frac{J_0(N_i r/R)}{N_i^3 J_1(N_i)}$$

...VII.3.12

l'expression de la flèche ne fait apparaître que la constante

i.e. le moment m_n^* .

Y_N ,

Remarque :

Si l'on suppose $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu$ dans les expressions de m_n^* , r_n^* et $U_{0N}(0)$ calculées ci-dessus nous aurons :

$$X_N = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{h_i c h_i - [\mu/(1+\mu)] s h_i}{h_i + c h_i s h_i} \frac{\beta J_i(\mu; \beta) - \alpha J_i(\mu; \alpha)}{\mu_i^2 J_i(\mu_i)}}{\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{2\mu}{1+2\mu} \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \frac{h_i c h_i - [\mu/(1+\mu)] s h_i}{h_i + c h_i s h_i} \right) \frac{1}{\mu_i^2} \right\}}$$

...VII.3.13

et nous aurons :

$$Y_N = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{3} \frac{-h_i s h_i + [(1+\mu)/(1+\mu)] c h_i}{h_i - c h_i s h_i} \frac{\beta J_i(\mu; \beta) - \alpha J_i(\mu; \alpha)}{\mu_i^2 J_i(\mu_i)}}{\sum_{i=1}^N \frac{2\mu}{1+\mu} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\mu} \frac{-h_i s h_i + [(2\lambda+3\mu)/(1+\mu)] (h_i c h_i - s h_i)}{h_i - c h_i s h_i} \right\} \frac{1}{\mu_i^2}}$$

...VII.3.14

De même nous aurons :

$$D = \frac{e}{3} h^3 \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + e\mu)} \quad \dots \text{VII.3.15}$$

$$\frac{t_i}{e} = \left[\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + e\mu} \right]^e \left[1 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{h_i^2 sh_i + [\mu/(\lambda + \mu)](ch_i ch_i - sh_i)}{h_i - ch_i sh_i} \right] \quad \dots \text{VII.3.16}$$

$$t_i = -\frac{e}{3} h_i^3 \frac{ch_i + [(\lambda + \mu)/(\lambda + e\mu)] h_i sh_i}{h_i - ch_i sh_i} \quad \dots \text{VII.3.17}$$

Remarquons qu'on retrouve ainsi, le cas isotrope.

VII.4. THEORIE ASYMPTOTIQUE

Dans les expressions X_N , Y_N , t_i et l_i , nous faisons tendre h vers zéro, ainsi nous obtenons les résultats suivants :

$$X_N^0 = (\lambda_0 + e\mu_0) \frac{\left\{ \sqrt{\frac{A}{2}}(a+b)(\alpha_3 + \nu_4) - (3a+b)\delta_2 \right\} \sum_{i=1}^N \frac{\beta J_1(N_i; \beta) - \nu J_1(N_i; \nu)}{\alpha_i^2 J_1(N_i)}}{\left\{ (\nu_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1) - \lambda_1 \left[\sqrt{\frac{A}{2}}(a+b)(\nu_3 + \nu_4) + (3a+b)\delta_2 \right] \right\} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i^2}}$$

...VII.4.1

ce qui implique

$$r_n^* = q_0 h X_N^0$$

...VII.4.2.

VII.4.2 nous permet de dire que la contrainte normale au bord r_n^* , se comporte de la même façon que dans le cas isotrope.

Par contre nous avons :

$$Y_N^0 = \frac{(A/2) \lambda_0 + 2(N_0) [(a+b) (\nu \sqrt{\frac{A}{2}} \beta_2 + A \beta_4)] / [-\beta_2 \xi_2 + \beta_1 \xi_4 - \beta_1 \xi_1]}{3 \left\{ 1 + \frac{\lambda_0 \nu (2a+b) \left[-(A/2)^{3/2} \beta_2 + (A/2)^2 \beta_1 \right] + (a+b) \left[(A/2)^2 \xi_4 - (A/2)^{3/2} \xi_2 \right]}{-\beta_2 \xi_2 + \beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_2} \right\} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_i^2}}$$

...VII.4.3

Soit :

$$m_n^* = q_0 h^2 Y_N^0$$

...VII.4.4

le moment de flexion au bord m_n^* est proportionnel à $q_0 h^2$ alors que dans le cas isotrope il est indépendant de l'épaisseur h .

de même nous avons :

$$L_i^0 = - \left[\frac{2(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_0 + 2\mu_0)} \right]^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\xi_1 + \xi_2 - (1/\sqrt{A}) \xi_4}{-\beta_2 \xi_2 + \beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_1} \right\} \quad \dots \text{VII.4.5}$$

$$L_i \approx (2/\sqrt{A})^{3/2} \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left\{ \frac{2}{3} \frac{h_i^2 \xi_4}{-\beta_2 \xi_2 + \beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_1} \right\} \quad \dots \text{VII.4.6}$$

Soit

$$L_i^0 = (2/\sqrt{A}) \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_0 + 2\mu_0)} \left\{ \frac{2}{3} \mu_i^2 \frac{\xi_4}{-\beta_2 \xi_2 + \beta_1 \xi_4 - \beta_2 \xi_1} \right\} \quad \dots \text{VII.4.7}$$

Par conséquent la flèche s'écrit :

$$L_{ON}^0(0) = \frac{2q_0 R^2 h^2}{D} \sum_{i=1}^N \left\{ Y_N^0 L_i^0 + L_i^0 \frac{\beta J_1(\nu_i \beta) - \nu J_1(\nu_i \nu)}{J_1(\nu_i)} \right\} \frac{J_0(\nu_i r/R)}{(\nu_i^3 J_1(\nu_i))} \quad \dots \text{VII.4.8}$$

VII.5. Exemples de chargements

Il est possible d'utiliser ces résultats pour le cas d'une charge uniforme ($a=0, b \rightarrow R$), d'une charge concentrée au centre ($a=0, b \rightarrow 0$) ou plus généralement d'une charge uniforme concentrée le long du cercle de rayon a ($(b-a) \rightarrow 0$).

VII.5.1. LE CAS D'UNE CHARGE UNIFORME

Dans ce cas nous avons
$$\frac{\beta J_1(N_i \beta) - \alpha J_1(N_i \alpha)}{J_1(N_i)} = 1$$

nous aurons les résultats suivants :

$$\bar{X}_N^0 = (\lambda_0 + \lambda N_0) \frac{\int \frac{A}{2} (a+b)(\alpha_3 + \alpha_4) - (3a+b) \delta_2}{(\alpha_1 \delta_2 - \alpha_4 \delta_1 - \alpha_3 \delta_1) - \lambda_1 \left\{ \int \frac{A}{2} (a+b)(\alpha_4 + \alpha_3) + (3a+b) \delta_2 \right\}}$$

...VII.5.1.1

$$\boxed{r_m^* = q_0 h \bar{X}_N^0}$$

...VII.5.1.2

$$\bar{Y}_N^0 = \frac{(A/2)(\lambda_0 + \lambda N_0) \left\{ (a+b) \left[2 \int \frac{A}{2} \beta_2 + A \int_4 \right] / \left[-\beta_2 \int_2 + \beta_1 \int_4 - \beta_2 \int_1 \right] \right\}}{3 \left\{ 1 + \frac{\lambda_1 \int 2(a+b) \left[- (A/2)^{3/2} \beta_2 + (A/2)^2 \beta_1 \right] + (a+b) \left[(A/2)^4 \int_4 - (A/2)^{3/2} \int_2 \right] \right\}}{-\beta_2 \int_2 + \beta_1 \int_4 - \beta_2 \int_1}$$

...VII.5.1.3

$$m_n^* = q_0 h^2 \bar{Y}_N^0$$

...VII.5.1.4

et,

$$\bar{U}_{0N}^0(0) = \frac{2q_0 R^2 h^2}{D} \sum_{i=1}^N \left\{ \bar{Y}_N^0 \varepsilon_i^0 + \varepsilon_i^0 \right\} \frac{J_0(\mu_i r/R)}{\mu_i^3 J_1(\mu_i)}$$

...VII.5.1.5

VII.5.2. LE CAS D'UNE CHARGE CONCENTREE LE LONG DU CERCLE DE RAYON

Dans ce cas il suffit de remplacer dans les résultats du paragraphe précédent, q_0 par $Q_0/2\pi a$ et $\beta_i J_1(\mu_i \beta) - q J_1(\mu_i \alpha)$ par

$$(1/R) \alpha \mu_i J_0(\mu_i \alpha)$$

avec Q_0 désigne la charge totale,

nous avons les résultats suivants :

Soit
$$\tilde{X}_N^0 = \bar{X}_N^0 \frac{\sum_{i=1}^N J_0(\mu_i \alpha) / \mu_i J_1(\mu_i)}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_i^2}} \quad \dots \text{VII.5.2.1}$$

$$r_n^* = \frac{Q_0}{2\pi R^2} h \tilde{X}_N^0$$

...VII.5.2.2

Soit
$$\tilde{Y}_N^0 = \bar{Y}_N^0 \frac{\sum_{i=1}^N J_0(\mu_i r) / (\mu_i J_1(\mu_i))}{\sum_i \frac{1}{\mu_i^2}} \quad \dots \text{VII.5.2.3}$$

$$m_n^* = \frac{Q_0}{2\pi R^2} h^2 \tilde{Y}_N^0$$

...VII.5.2.4

et

$$U_{ON}^0(r) = \frac{Q_0}{\pi D} h^2 \sum_{i=1}^N \left\{ \tilde{Y}_N^0 \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{1}{\mu_i^2} \frac{J_0(\mu_i r/R)}{J_1(\mu_i)} \right\} \frac{J_0(\mu_i r/R)}{\mu_i^2 J_1(\mu_i)} \quad \dots \text{VII.5.2.5}$$

VII.5.3. LE CAS D'UNE CHARGE CONCENTREE AU CENTRE $r=0$

Nous avons les résultats suivants :

Soit
$$\tilde{X}_N^0 = \bar{X}_N^0 \frac{\sum_{i=1}^N 1/\mu_i J_1(\mu_i)}{\sum_i 1/\mu_i^2} \quad \dots \text{VII.5.3.1}$$

$$r_n^* = \frac{Q_0}{2\pi R^2} h \tilde{X}_N^0$$

...VII.5.3.2

soit

$$\bar{Y}_N^0 = \bar{Y}_N^0 \frac{\sum_{i=1}^N 1/\mu_i J_1(\mu_i)}{\sum_{i=1}^N 1/\mu_i^2}$$

...VII.5.3.3

$$M_n^* = \frac{Q_0}{2\pi} \frac{h^2}{R^2} \bar{Y}_N^0$$

...VII.5.3.4

et

$$\bar{L}_{N0}^0(\omega) = \frac{Q_0}{\pi D} h^2 \sum_{i=1}^N \left\{ \bar{Y}_N^0 t_i^0 + t_i^0 \frac{\mu_i}{J_1(\mu_i)} \right\} \frac{J_0(\mu_i r/e)}{\mu_i^3 J_1(\mu_i)}$$

...VII.5.3.5

CONCLUSION

Les calculs développés tout au long de cette partie nous amènent à la remarque suivante : en posant $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$; $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu$ dans le cas transversalement isotrope nous retrouvons le cas isotrope. Or, en faisant un développement asymptotique - et la remarque a déjà été faite (cf. VI.6) - les deux constantes d'intégration \tilde{B}_i et \tilde{C}_i se développent en $1/h_i$ alors que \tilde{B}_i^* et \tilde{C}_i^* (les deux constantes analogues dans le cas isotrope), se développent en $1/h_i^3$, ce qui explique que le moment de flexion au bord Σ , m_n^* (dont l'expression fait intervenir \tilde{B}_i et \tilde{C}_i) est fonction de h^2 alors qu'il est indépendant de l'épaisseur h de la plaque dans le cas isotrope.

En ce qui concerne la contrainte normale au bord v_n^* , dont l'expression fait intervenir les deux constantes \tilde{A}_i et \tilde{D}_i , elle se comporte de la même façon que la contrainte normale v_n^* dans le cas isotrope (rappelons que les deux constantes \tilde{A}_i et \tilde{D}_i se développent d'une façon analogue dans les deux cas).

Les remarques ci-dessus nous amènent à faire l'analyse suivante : Soit m_n^{*I} le moment de flexion d'une plaque circulaire isotrope et m_n^{*T} le moment de flexion d'une plaque circulaire transversalement isotrope (les deux plaques sont supposées de même rayon R et de même épaisseur h).

De même notons par $U_{N_0}^I$, q_0^I flèche et charge correspondant au cas isotrope, $U_{N_0}^T$, q_0^T flèche et charge correspondant au cas transversalement isotrope.

Pour une flèche donnée et égale dans les deux cas :

$$U_{N0}^I = U_{N0}^T$$

nous aurons donc :

$$m_n^{*T} = m_n^{*I} + M_i$$

où M_i est la fonction exprimant la différence entre les deux moments.

Par conséquent les charges correspondantes s'expriment l'une en fonction de l'autre de la façon suivante :

$$q_0^T = \frac{R^2}{h^2} q_0^I \frac{Y_N^{0I}}{Y_N^{0T}} + \frac{M_i}{h^2 Y_N^T}$$

ce qui nous permet de dire que lorsque l'épaisseur de la plaque tend à devenir de plus en plus petit $h \rightarrow 0$ on a :

$$q_0^T = q_0^I \cdot O\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

ce qui semble exprimer une plus grande rigidité à la flexion dans le cas d'une plaque transversalement isotrope.

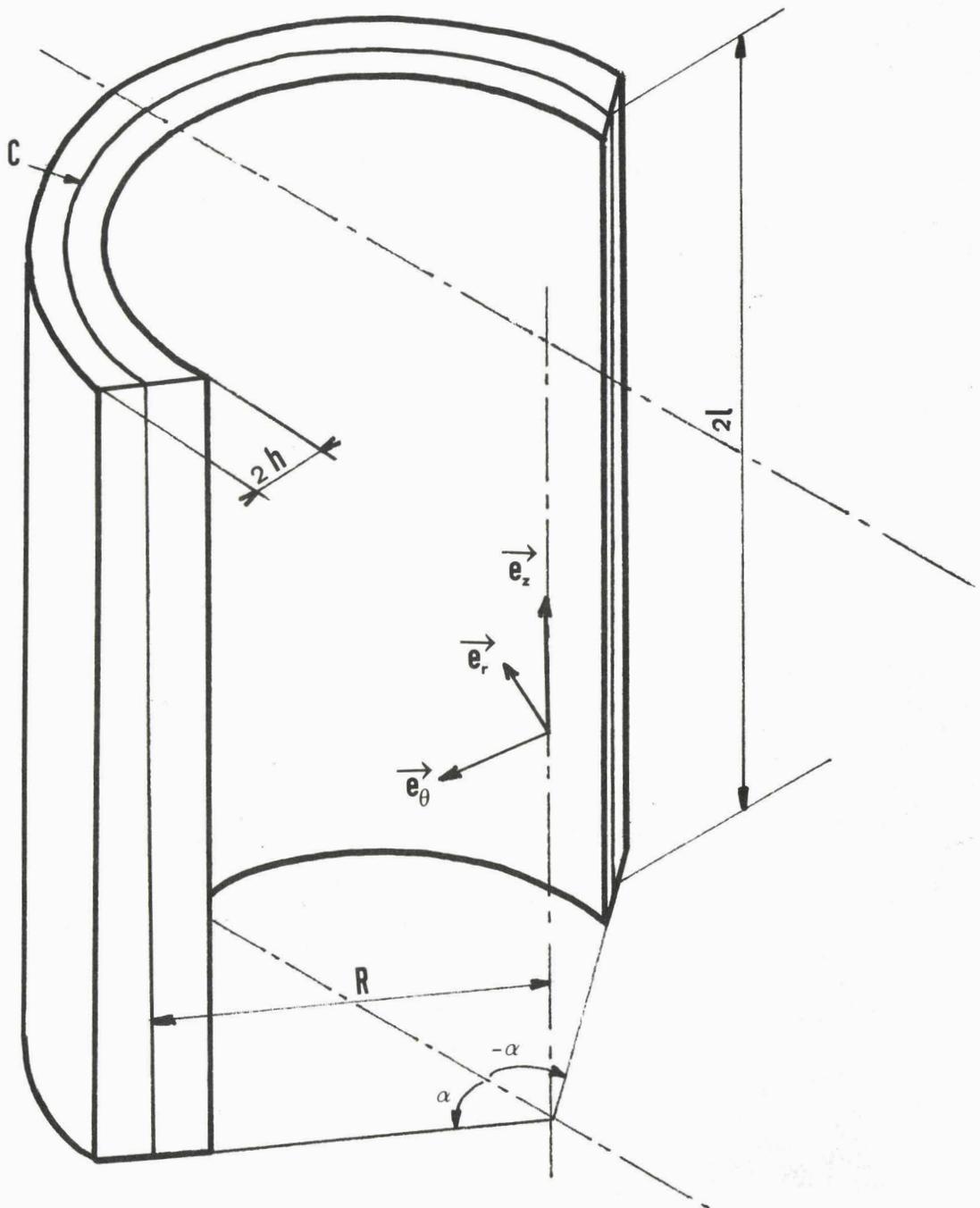
DEUXIEME PARTIE

COQUES CYLINDRIQUES ISOTROPES

CHAPITRE II'

II'.1. EQUATIONS DE L'ELASTICITE LINEAIRE

Soit $(0; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ un repère local orthonormé, la coque (C) élastique occupe le domaine $\Omega = dx]R-h, R+h[$ où d est un domaine du plan $(0, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, dit feuillet moyen tel que $d =]-\alpha, +\alpha [x] -l, +l [$, $0 < \alpha < \pi$, $L > 0$ et où R est le rayon du feuillet moyen, $2h$ est l'épaisseur (constante) de la coque. Nous notons C la frontière de d , régulière par morceaux. Enfin, soit $n = (n_1, n_2)$ la normale à C dirigée vers l'extérieur de d et $\Sigma = Cx]R-h, R+h[$ le bord de la coque (\vec{n} , vecteur unitaire).



Introduisant les actions extérieures à (C), nous supposons qu'elles admettent des densités, notées \vec{G} sur Ω , \vec{P}_ε ($\varepsilon = +1$) sur les faces $r = R \pm h$, \vec{K} sur le bord Σ .

Soit L l'opérateur de Lamé, (σ_{ij}) le tenseur des contraintes.

Nous rappelons les équations de la statique en élasticité linéaire classique.

\vec{U} désignant le champ des déplacements :

$$L(\vec{U}) + \vec{G} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \dots \quad (\text{II}' . 1.1)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = K, \quad (j = \theta, z) \text{ sur } \Sigma \quad \dots \quad (\text{II}' . 1.2)$$

$$(\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}) = \varepsilon P_\varepsilon \text{ sur } r = R \pm h \quad \dots \quad (\text{II}' . 1.3)$$

Le champ des déplacements \vec{U} s'écrit : $\vec{U} = U_r \vec{e}_r + \vec{u}$

$$\text{avec } \vec{u} = u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z .$$

L'équation (II'.1), $L(\vec{U}) = -\vec{G}$ dans Ω , s'écrit :

$$\mu \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{U} + \vec{G} = 0 \quad \dots \quad (\text{II}' . 1.4)$$

où $\Delta \vec{U} = \overrightarrow{\text{Div}} \overrightarrow{\text{Grad}} \vec{U}$

$$\text{tel que } \Delta \vec{U} \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}$$

$$= \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}$$

$$\text{de même, } \Delta \vec{U} \cdot \vec{e}_\theta = \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}$$

$$\text{et } \Delta \vec{U} \cdot \vec{e}_z = \Delta u_z$$

Rappelons que $\frac{\partial^*}{\partial r}$ est noté $\dot{*}$ de même que $\frac{\partial^{2*}}{\partial r^2} \equiv \ddot{*}$

D'autre part $(\overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{U})$ se projete comme suit :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{U}) \cdot \vec{e}_r = -\frac{u_r}{r^2} + \frac{\dot{u}_r}{r} + \ddot{u}_r - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}$$

$$(\overrightarrow{\text{Grad}} \text{ div } \vec{U}) \cdot \vec{e}_r = -\frac{u_r}{r^2} + \frac{\dot{u}_r}{r} + \ddot{u}_r - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}$$

$$(\overrightarrow{\text{Grad}} \text{ div } \vec{U}) \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta}$$

$$(\overrightarrow{\text{Grad}} \cdot \text{div } \vec{U}) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}$$

Nous avons noté : $\overrightarrow{\text{grad}}_p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

$$\text{div}_p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}$$

ce qui entraîne :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}_p \cdot \dot{u}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{Grad}}_p (\text{div}_p u) = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{Grad}}_p \left(\frac{u_r}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \vec{e}_z$$

L'équation (II'2.4), se projette alors sur \vec{e}_r en donnant :

$$\mu \Delta u_r - \frac{(\lambda+3\mu)}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2} u_r + \frac{(\lambda+\mu)}{r} \dot{u}_r + (\lambda+\mu) \ddot{u}_r + (\lambda+\mu) \text{div}_p \dot{u} + g_r = 0$$

La projection sur le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ donnant par ailleurs :

$$\left[\mu \Delta u_\theta - \frac{\mu}{r^2} u_\theta + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + (\lambda+\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + (\lambda+\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{(\lambda+\mu)}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right. \\ \left. + \frac{(\lambda+\mu)}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} \right] \vec{e}_\theta + \left[\mu \Delta u_z + \frac{(\lambda+\mu)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + (\lambda+\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{(\lambda+\mu)}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + (\lambda+\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z$$

$$+ g_\theta \vec{e}_\theta + g_z \vec{e}_z = \vec{0}$$

ou encore :

$$\mu \Delta_{\pi} \vec{U} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \dot{u}_r + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\text{div}_p \vec{u}) + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \left(\frac{u_r}{r} \right) + \vec{g} = \vec{0}$$

$$\text{avec } \Delta_{\pi} \vec{U} = |\Delta \vec{U}| \cdot \vec{e}_{\theta} + |\Delta \vec{U}| \cdot \vec{e}_z, \quad \vec{g} = g_{\theta} \vec{e}_{\theta} + g_z \vec{e}_z$$

$$\Delta_{\rho}^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 *}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 *}{\partial z^2} .$$

En définitif, les équations de l'équilibre (équations de LAME) dans Ω , s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mu \Delta u_r - \frac{\lambda + 3\mu}{r^2} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} u_r + \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \dot{u}_r + (\lambda + \mu) \ddot{u}_r + (\lambda + \mu) \text{div}_p \dot{\vec{u}} + g_r = 0 \\ \mu \Delta_{\pi} \vec{U} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \dot{u}_r + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\text{div}_p \vec{u}) + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \left(\frac{u_r}{r} \right) + \vec{g} = \vec{0} \end{aligned}$$

... (II'.1.5)

II'.2. CONDITIONS AUX LIMITES

II'.2.1 Conditions aux limites sur le bord Σ (en contraintes).

Sur le bord Σ , on a les conditions aux limites (équation (II'.2))

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = \mathbb{K}, \quad (j = \theta, z) \quad \mathbb{K}, \text{ densité des forces exercées sur } \Sigma.$$

Or la coque étudiée, a pour bord $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$

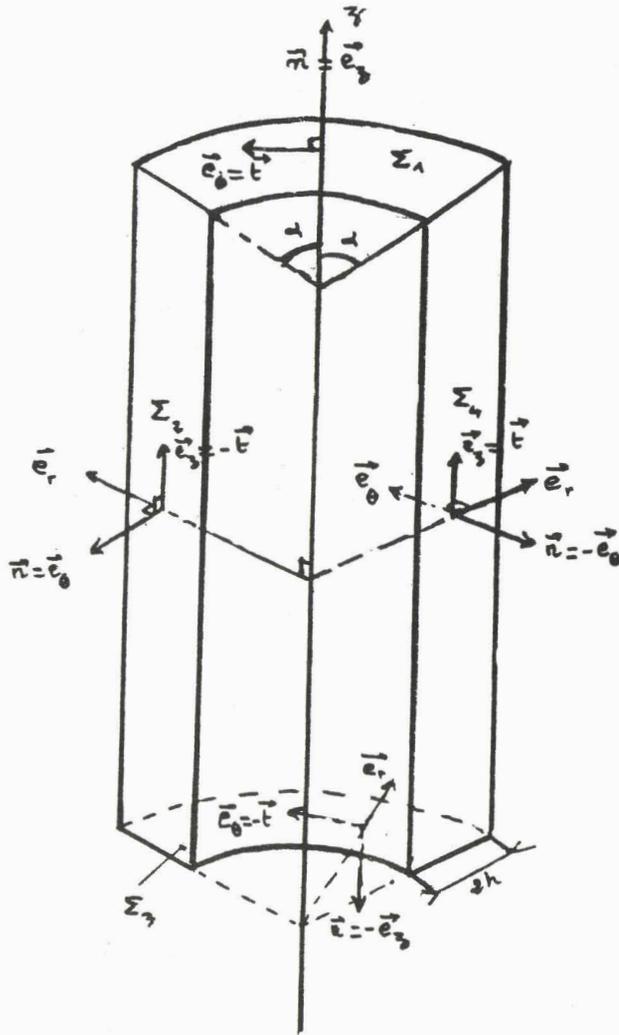
$$\text{avec } \Sigma_1 = \{ \theta \in] - \alpha, + \alpha[, z = + \ell \};$$

$$\Sigma_2 = \{ \theta = + \alpha ; z \in] + \ell, - \ell [\};$$

$$\Sigma_3 = \{ \theta \in] - \alpha, + \alpha[, z = - \ell \};$$

$$\Sigma_4 = \{ \theta = - \alpha, z \in] - \ell, + \ell [\};$$

Soient, \vec{n} vecteur normal extérieur en un point $M \in \Sigma$, \vec{t} le vecteur tangent en ce même point tel que, le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ étant direct, le repère $(\vec{e}_r, \vec{t}, \vec{n})$ formé par le plan tangent et le vecteur normal extérieur à Σ est aussi direct.



$$\vec{n}(M) = \vec{e}_z ; \vec{t}(M) = \vec{e}_\theta \quad M \text{ un point de } \Sigma_1$$

$$\vec{n}(M) = \vec{e}_\theta ; \vec{t}(M) = -\vec{e}_z \quad M \text{ " " de } \Sigma_2$$

$$\vec{n}(M) = -\vec{e}_z ; \vec{t}(M) = -\vec{e}_\theta \quad M \text{ " " de } \Sigma_3$$

$$\vec{n}(M) = -\vec{e}_\theta, \vec{t}(M) = \vec{e}_z \quad M \text{ " " de } \Sigma_4$$

Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{sur } \Sigma_1 : \quad \sigma_{rz}(r, \theta, +\ell) &= f_{1r} & \vec{K} &= \vec{f}_1(r, \theta, +\ell) \\ \sigma_{\theta z}(r, \theta, +\ell) &= f_{1\theta} & r \in &]R-h, R+h[\\ \sigma_{zz}(r, \theta, +\ell) &= f_{2\theta} & \theta \in &]-\alpha, +\alpha[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sur } \Sigma_2 : \quad \sigma_{r\theta}(r\alpha, z) &= h_{1r} & \vec{K} &= \vec{h}_1(r, \alpha, z) \\ \sigma_{\theta\theta}(r\alpha, z) &= h_{1\theta} & r \in &]R-h, R+h[\\ \sigma_{\theta z}(r\alpha, z) &= h_{1z} & z \in &] +\ell, -\ell[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sur } \Sigma_3 : \quad \sigma_{rz}(r, \theta, -\ell) &= -f_{2r} & \vec{K} &= \vec{f}_2(r, \theta, -\ell) \\ \sigma_{\theta z}(r, \theta, -\ell) &= -f_{2\theta} & r \in &]R-h, R+h[\\ \sigma_{zz}(r, \theta, -\ell) &= -f_{2z} & \theta \in &] +\alpha, -\alpha[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sur } \Sigma_4 : \quad \sigma_{r\theta}(-r\alpha, z) &= -h_{2r} & \vec{K} &= \vec{h}_2(r, -\alpha, z) \\ \sigma_{\theta\theta}(-r\alpha, z) &= -h_{2\theta} & r \in &]R-h, R+h[\\ \sigma_{\theta z}(-r\alpha, z) &= -h_{2z} & z \in &]-\ell, +\ell[\end{aligned}$$

II'.2.2. Conditions aux limites sur le bord Σ , en déplacements

* 2.1. Sur Σ_1

$$\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = f_{1r} \quad \dots 1$$

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = f_{1\theta} \quad \dots 2$$

$$\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} = f_{1z} \quad \dots 3$$

... (II'.2.1)

* 2.2 Sur Σ_2

$$\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = h_{1r} \quad \dots 1$$

$$\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) = h_{1\theta} \quad \dots 2$$

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = h_{1z} \quad \dots 3$$

...(II'.2.2)

* 2.3 Sur Σ_3

$$\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -f_{2r} \quad \dots 1$$

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -f_{2\theta} \quad \dots 2$$

$$\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} = -f_{2z} \quad \dots 3$$

...(II'.2.3)

* 2.4 Sur Σ_4

$$\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = -h_{2r} \quad \dots 1$$

$$\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) = -h_{2\theta} \quad \dots 2$$

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -h_{2z} \quad \dots 3$$

...(II'.2.4)

Ayant : $\frac{d^*}{dn} = \overrightarrow{\text{Grad}}^* \cdot \vec{n}$, $\frac{d^*}{dn} = \overrightarrow{\text{Grad}}^* \cdot \vec{n}$

Nous obtenons :

$$\underline{\text{Sur}} \Sigma_1 : \frac{du_r}{dn} = \frac{\partial u_r}{\partial n} ; \Sigma_3 : \frac{du_r}{dn} = - \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$\Sigma_2 : \frac{du_r}{dn} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} ; \Sigma_4 : \frac{du_r}{dn} = - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$\text{Sur } \Sigma_1 : \frac{du_r}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} ; \quad \Sigma_3 : \frac{du_r}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$\Sigma_2 : \frac{du_r}{dt} = -\frac{\partial u_r}{\partial z} ; \quad \Sigma_4 : \frac{du_r}{dt} = \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$\Sigma(1,3) : \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} = \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \vec{t} \cdot \dot{\vec{u}} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \end{array} ; \quad \Sigma(2,4) : \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \vec{t} \cdot \dot{\vec{u}} = \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{array}$$

$$1/(\text{II}' . 2.1) \text{ devient : } \mu \left(\frac{du_r}{dn} + \vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} \right) = f_{1r} \quad \dots(\text{II}' . 2.5)$$

$$1/(\text{II}' . 2.3) \text{ devient : } \mu \frac{du_r}{dn} - \mu \vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} = f_{2r} \quad \dots(\text{II}' . 2.6)$$

Les équations 2,3/(II'.2.1) deviennent :

$$\begin{aligned} 2\mu \left(\frac{d\vec{u}}{dn} \right) - \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + \lambda (\text{div } \vec{u} + \dot{\vec{u}}_r) \vec{e}_z + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \lambda \frac{u_r}{r} \vec{e}_z \\ = f_{1\theta} \vec{e}_\theta + f_{1z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

de plus nous avons :

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_\theta$$

qui nous donne :

$$\lambda (\text{div } \vec{u} + \dot{\vec{u}}_r) \cdot \vec{n} + 2\mu \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_\theta + \lambda \frac{u_r}{r} \vec{e}_z = f_{1\theta} \vec{e}_\theta + f_{1z} \vec{e}_z \quad \dots(\text{II}' . 2.7)$$

D'autre part les équations 2,3/(II'.2.3), s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\lambda (\dot{\vec{u}}_r + \text{div } \vec{u}) \cdot \vec{n} - 2\mu \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_\theta + \lambda \frac{u_r}{r} \vec{e}_z \\ = -f_{2\theta} \vec{e}_\theta - f_{2z} \vec{e}_z \quad \dots(\text{II}' . 2.8) \end{aligned}$$

En définitive, les conditions aux limites s'écrivent :

Sur Σ_1 :	$\mu \left(\frac{du_r}{dn} + \vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} \right) = f_{1r}$ $\lambda (\text{div } \vec{u} + \dot{\vec{u}}_r) \cdot \vec{n} + 2\mu \frac{d\vec{u}}{dn} + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\theta + \lambda \frac{u_r}{r} \vec{e}_z = f_{1\theta} \vec{e}_\theta + f_{1z} \vec{e}_z$ $\dots(\text{II}' . 2.9)$
Sur Σ_2 :	$\mu \left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} + \frac{du_r}{dn} - \frac{u_\theta}{r} \right) = h_{1r}$ $\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) = h_{1\theta}$ $\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = h_{1z}$ $\dots(\text{II}' . 2.10)$
Sur Σ_3 :	$\mu \left(\frac{du_r}{dn} - \vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} \right) = f_{2r}$ $- \lambda (\text{div } \vec{u} + \dot{\vec{u}}_r) \cdot \vec{n} - 2\mu \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\theta + \lambda \frac{u_r}{r} \vec{e}_z = - (f_{2\theta} \vec{e}_\theta + f_{2z} \vec{e}_z)$ $\dots(\text{II}' . 2.11)$
Sur Σ_4 :	$\mu \left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} - \frac{du_r}{dn} - \frac{u_\theta}{r} \right) = h_{2r}$ $\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) = - h_{2\theta}$ $\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = - h_{2z}$ $\dots(\text{II}' . 2.12)$

II' . 2.3. Conditions aux limites, en contraintes sur les forces S_\pm pour lesquelles

$$r = R \pm h .$$

Ayant P_ϵ pour densité des forces exercées sur S_\pm , \vec{n} la normale extérieure $\vec{n} = \pm \vec{e}_r$ $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{P}_\epsilon$ donne en contraintes :



Pour $r = R + h$, face S_+

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(R+h, \theta, z) &= P_{\varepsilon r} & \forall (\theta \text{ et } z) \in d \\ \sigma_{r\theta}(R+h, \theta, z) &= P_{\varepsilon\theta} & \varepsilon = + 1 \\ \sigma_{rz}(R+h, \theta, z) &= P_{\varepsilon z} & \vec{n} = \vec{e}_r\end{aligned}$$

Pour $r = R-h$, face S_-

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(R-h, \theta, z) &= - P_{\varepsilon r} & \forall (\theta \text{ et } z) \in d \\ \sigma_{r\theta}(R-h, \theta, z) &= - P_{\varepsilon\theta} & \varepsilon = - 1 \\ \sigma_{rz}(R-h, \theta, z) &= - P_{\varepsilon z} & n = - \vec{e}_r\end{aligned}$$

B.2. Conditions aux limites en déplacement sur S_{\pm} :

$$\begin{aligned}\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \varepsilon P_r \\ \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) &= \varepsilon P_\theta \\ \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) &= \varepsilon P_z \quad \dots(\text{II}' . 2.13)\end{aligned}$$

et ceci, $\forall (\theta \text{ et } z) \in d, r = R \pm h$, $\varepsilon = 1$ pour $r = R + h$
 $= -1$ pour $r = R - h$

Ces équations peuvent s'écrire de la façon suivante :

$(\lambda+2\mu) \dot{u}_r + \lambda \operatorname{div}_p \vec{u} + \lambda \frac{u_r}{r} = \varepsilon P_r \quad \forall (\theta, z) \in d \quad \varepsilon = 1 \quad \text{si } r = R + h$
$\mu \dot{u}_\theta + \mu \overrightarrow{\operatorname{Grad}}_p u_r - \mu \frac{u_\theta}{r} \vec{e}_\theta = \varepsilon P_\theta \quad r = R \pm h \quad - 1 \quad \text{si } r = R - h$
$\dots(\text{II}' . 2.14)$

II'.3. Les équations de l'élasticité, après décomposition du champ de vecteur \vec{U} (déplacements).

II'.3.1. Equations d'équilibre dans Ω

Nous avons démontré, que tout champ de vecteur se décompose et d'une façon unique (Ch. III. B) en trois champs scalaires : u_0, u_1, u_2 avec $u_{1/\Sigma} = 0$ et que, en particulier, le champ U (désignant les déplacements) dans une coque cylindrique, se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= u_0 \vec{e}_r + \vec{u} & \vec{u} &= u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z \\ \vec{u} &= \overrightarrow{\text{Grad}}_p u_1 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p u_2 & u_1 &= u_1(\theta, z) & u_{1/\Sigma} &= 0 \\ & & u_2 &= u_2(\theta, z) \end{aligned}$$

Nous remplaçons alors, $\vec{U} (u_r, u_\theta, u_z)$ dans les équations (II'.1.5) par $\vec{U}(u_r, u_1, u_2)$.

La première équation du système (II'.1.5) devient :

$$\begin{aligned} \mu \Delta_p u_r - \left(\frac{\lambda+2\mu}{r^2} \right) u_r + \frac{\lambda+2\mu}{r} \dot{u}_r + (\lambda+2\mu) \ddot{u}_r + (\lambda+\mu) \Delta_p \dot{u}_1 - 2 \frac{(\lambda+2\mu)}{r^3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \\ + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial z} + g_r = 0 . \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$* \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^2 \partial z}$$

$$* \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta \partial z^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^3}$$

$$* - \frac{u_\theta}{r^2} = - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$* \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^2}$$

$$* \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta \partial z^2}$$

$$* \dot{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}$$

$$* \dot{u}_z = \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}$$

$$* \ddot{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{u}_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \ddot{u}_2}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}$$

$$* \ddot{u}_z = \frac{\partial \ddot{u}_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{u}_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}$$

$$* \frac{1}{r} \dot{u}_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}$$

$$* \frac{1}{r} \dot{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} .$$

D'autre part, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} * \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_1) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta_1 u_1) \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (\Delta_p u_1) \vec{e}_z \\ &= \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta \partial z^2} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

de même :

$$* \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_2) = \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta \partial z^2} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3} \right) \vec{e}_z$$

et

$$* \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_2) = - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial z} \right) \vec{e}_z$$

D'où la 2ème équation du système (II'.1.5), qu'est une équation vectorielle, s'écrivant suivant $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de la façon suivante :

$$\mu \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{u}_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \ddot{u}_2}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} \\ & + \frac{2}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta \partial z^2} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ & + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \vec{e}_\theta$$

$$+ \mu \left[\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \ddot{u}_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{u}_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta \partial z^2} \end{aligned} \right] \vec{e}_z$$

$$+ (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \dot{u}_r + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\text{div}_p \vec{u}) + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \left(\frac{u_r}{r} \right) + \vec{g} = 0$$

⇓

$$\begin{aligned} & \mu \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_1) + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_2) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} \vec{e}_z - \frac{\mu}{r} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z} \vec{e}_\theta \\ & + \mu \overrightarrow{\text{Grad}}_p \ddot{u}_1 - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p \ddot{u}_2 - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} \vec{e}_z + \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ & + \frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p u_2 + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \dot{u}_r + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_1) \\ & + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \left(\frac{u_r}{r} \right) + \vec{g} = 0 \end{aligned}$$

D'où dans le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 & (\lambda+2\mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_1) + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\Delta_p u_2) + \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\ddot{u}_1) + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p (\ddot{u}_2) \\
 & + \frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}}_p u_2 + (\lambda+\mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \dot{u}_r + (\lambda+\mu) \overrightarrow{\text{Grad}}_p \frac{u_r}{r} + \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} \vec{e}_z \\
 & - \frac{\mu}{r} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta^2} \vec{e}_z + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \vec{g} = 0 .
 \end{aligned}$$

Conclusion :

De fait que tous les opérateurs vectoriels auxquels, nous avons à faire sont des opérateurs "plan" (nous avons tous faits pour que cela se soit ainsi), alors pour alléger l'écriture nous confondons désormais, la notation ∇_p avec ∇ .

Rappelons tout de même, que "plan" voulait dire, que les dérivations portaient uniquement aux deux variables plans (θ et z) ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{Grad}}_p &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{e}_z \\
 \text{div}_p &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \\
 \Delta_p &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 * &= \frac{\partial}{\partial r} ; * = \frac{\partial^2}{\partial r^2}
 \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre (équations de LAME) dans Ω , s'écrivent

alors :

$$\begin{aligned}
 & \mu \Delta u_r - \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2} u_r + \frac{(\lambda+2\mu)}{r} \dot{u}_r + (\lambda+2\mu) \ddot{u}_r + (\lambda+\mu) \Delta \dot{u}_1 - \frac{2(\lambda+2\mu)}{r^3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \\
 & + \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial z} + g_r = 0 \quad \dots \text{(II'.3.1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda+2\mu) \overrightarrow{\text{Grad}} (\Delta u_1) + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} (\Delta u_2) + u \overrightarrow{\text{Grad}} \ddot{u}_1 + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} \ddot{u}_2 + \\
& \frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} u_2 + (\lambda+\mu) \overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_r + (\lambda+\mu) \overrightarrow{\text{Grad}} \frac{u_r}{r} + \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} \vec{e}_z \\
& - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta} \vec{e}_z + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \vec{g} = \vec{0}
\end{aligned}$$

...(II'.3.2)

II'.3.2. Conditions aux limites sur Σ

Pour que la décomposition du champ de vecteur \vec{U} , soit unique nous avons imposés à ce que u_1 soit nul sur le bord Σ .

D'autre part, regardons la façon par laquelle intervient la décomposition de \vec{U} sur les conditions aux limites.

En effet :

Sur Σ_1 ($z = +l, \theta \in] -r\alpha, +r\alpha [$, $\forall r \in] R-h, R+h[$, $\vec{n} = \vec{e}_z, \vec{t} = \vec{e}_\theta$)

$$\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} - \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\
&= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r
\end{aligned}$$

Or nous avons : $\Delta u_1 = \text{div } \vec{u}$

$$\Delta u_2 = - \text{div} (\vec{e}_r \wedge \vec{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

que nous permet d'écrire : $\Delta u_1 = \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn}$

$$\Delta u_2 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r$$

même calcul sur Σ_3 ($z = -l, \theta \in] + r \alpha, - r \alpha[$, $\forall r \in] R-h, R+h[$, $\vec{n} = -\vec{e}_z, \vec{t} = -\vec{e}_\theta$)

donne :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u_2 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{e}_r \\ \Delta u_1 = \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} \end{array} \right.$$

Par conséquent, les équations (II'.2.9 et 10) exprimant les conditions aux limites; sur Σ_1 et Σ_3 deviennent :

Sur Σ_1 :

$$\begin{array}{l} \mu \left(\frac{du_r}{dn} + \vec{n} \cdot \vec{u} \right) = f_{1r} \\ (\lambda + 2\mu) \Delta u_1 + \lambda \dot{u}_r - 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\lambda}{r} u_r = f_{1n} \\ 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \Delta u_2 = f_{1t} \end{array} \quad \dots(\text{II}'.3.3)$$

Sur Σ_2 :

$$\begin{array}{l} \mu \left(\frac{du_r}{dn} - \vec{n} \cdot \vec{u} \right) = f_{2r} \\ (\lambda + 2\mu) \Delta u_1 + \lambda \dot{u}_r - 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} - \lambda \frac{u_r}{r} = -f_{2n} \\ 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \Delta u_2 = -f_{2t} \end{array} \quad \dots(\text{II}'.3.4)$$

Sur Σ_2 ($\theta = +\alpha, z \in] l - l [$ et $\forall r \in] R-h, R+h [$; $\vec{n} = \vec{e}_\theta$; $\vec{t} = -\vec{e}_z$)

$$\frac{d\vec{u}}{dn} = -\frac{u_\theta}{r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{\partial u_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

$$\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\Delta u_1 &= \operatorname{div} \vec{u} = \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} + \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} \\ \Rightarrow 2\mu \Delta u_1 - 2\mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} &= 2\mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= \Delta u_2 + 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \Delta u_2 - 2\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt}\end{aligned}$$

Sur Σ_4 ($\theta = -\alpha$, $z \in] -l ; +l[$ et $\forall r \in] R-h ; R+h [$, $\vec{n} = -\vec{e}_\theta$, $\vec{t} = \vec{e}_z$)

$$\begin{aligned}\text{nous avons : } \frac{d\vec{u}}{dn} &= \frac{u_\theta}{r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z \\ \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \vec{e}_z \\ \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dn} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}$$

remarquons que sur Σ (2,4) :

$$\begin{aligned}\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) &= \mu \left(\Delta u_2 + 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \mu \Delta u_2 - 2\mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} \\ - \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} - \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \Delta u_2 - 2 \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} \\ \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \Delta u_2 + \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} \\ - 2\vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -2 \Delta u_2 - 2 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} \quad \Rightarrow \\ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) &= \mu \left(-\Delta u_2 - 2 \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} \right)\end{aligned}$$

Par conséquent, les équations (II'.2.10 et 12) exprimant les conditions aux limites sur Σ_2 et Σ_4 s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \text{Sur } \Sigma_2 : \quad & \mu (\vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} + \frac{du_r}{dn} - \frac{u_n}{r}) = h_{1r} \\
 & (\lambda+2\mu) \Delta u_1 - 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + (\lambda+2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \dot{u}_r = h_{1n} \\
 & \mu \Delta u_2 - 2 \mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = -h_{1t} \\
 \text{ou } & \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = h_{1t} \quad (\text{II}' . 3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sur } \Sigma_4 : \quad & \mu (\vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} - \frac{du_r}{dn} + \frac{u_n}{r}) = -h_{2r} \\
 & (\lambda+2\mu) \Delta u_1 - 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + (\lambda+2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \dot{u}_r = h_{2n} \\
 & \mu \Delta u_2 - 2 \mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = -h_{2t} \\
 \text{ou } & \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = h_{2t} \quad (\text{II}' . 3.6)
 \end{aligned}$$

Conclusion

Les conditions aux limites sur le bord Σ , tenant compte de la décomposition canonique du champ de vecteur \vec{U} , s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \text{Sur } \Sigma_1 \quad & \mu \left(\frac{du_r}{dn} + \vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} \right) = f_{1r} \\
 & (\lambda+2\mu) \Delta u_1 + \lambda \dot{u}_r - 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + \lambda \frac{u_r}{r} = f_{1n} \\
 & 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \Delta u_2 = f_{1t} \quad (\text{II}' . 3.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sur } \Sigma_2 \quad & \mu \left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{u}} + \frac{du_r}{dn} - \frac{u_n}{r} \right) = h_{1r} \\
 & (\lambda+2\mu) \Delta u_1 - 2 \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + (\lambda+2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \dot{u}_r = h_{1n} \\
 & \mu \Delta u_2 - 2 \mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = -h_{1t} \\
 \text{ou } & \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = h_{1t} \quad (\text{II}' . 3.8)
 \end{aligned}$$

Sur Σ_3

$$\mu \left(\frac{du_r}{dn} - \vec{n} \cdot \vec{\dot{u}} \right) = f_{2r}$$

$$\lambda \dot{u}_r + (\lambda + 2\mu) \Delta u - 2\mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} - \lambda \frac{u_r}{r} = -f_{2n}$$

$$2\mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \Delta u_2 = -f_{2t}$$

(II'.3.9)

Sur Σ_4

$$\mu \left(\vec{n} \cdot \vec{\dot{u}} - \frac{du_r}{dn} + \frac{u_n}{r} \right) = h_{2r}$$

$$(\lambda + 2\mu) \Delta u_1 - 2\mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \dot{u}_r = h_{2n}$$

$$\mu \Delta u_2 - 2\mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = -h_{2t}$$

$$\text{ou } \mu \vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn} + \mu \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt} = h_{2t}$$

(II'.3.10)

II'.3.3. Conditions aux limites sur les faces S_{\pm} ; $r = R \pm h$

De même que pour les conditions aux limites sur Σ , nous écrirons les conditions aux limites sur S_{\pm} , en tenant compte de la décomposition du champ U et cela se fait aisément en remarquant que :

$$\vec{\dot{u}} = \frac{\partial}{\partial r} (\overrightarrow{\text{Grad}} u_1 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} u_2) \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0.$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{Grad}} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{u} = \Delta u_1$$

=>

Sur S_{\pm} ($r = R \pm h$) :

$$(\lambda+2\mu) \dot{u}_r + \lambda \Delta u_1 + \lambda \frac{u_r}{r} = \varepsilon P_{\varepsilon r}$$

$$\mu \overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_1 + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_2 - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \vec{e}_z + \mu \overrightarrow{\text{Grad}} u_r - \mu \frac{u_\theta}{r} \vec{e}_\theta = \varepsilon \vec{P}_\varepsilon$$

avec $\varepsilon = + 1$ pour $r = R + h$

- 1 pour $r = R - h$

...(II'.3.11)

CHAPITRE III'FORMULATION VARIATIONNELLE

Nous introduisons l'espace W défini par :

$$W = \{ W = (w_r, w_1, w_2) \in C^2(\bar{d}, R^3); w_1 = 0 \text{ sur } \Sigma \}$$

Tout champ vectoriel w défini sur d étant caractérisé par :

$$\vec{w} = \overrightarrow{\text{Grad}} w_1 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2$$

$$\Rightarrow w_{1/\Sigma} = 0$$

Il en résulte que tout champ vectoriel W défini sur Ω s'écrit :

$$\vec{W} = w_r \vec{e}_r + \overrightarrow{\text{Grad}} w_1 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2$$

$$w_{1/\Sigma} = 0 .$$

III'.1. Formulation équivalente des équations de l'équilibre dans Ω .

L'équation de l'équilibre dans Ω (équation de LAME);

$\overline{L}(\vec{U}) + \vec{G} = \vec{O}$ admet la formulation formellement équivalente :

$$\int_d (\overline{L}(\vec{U}) + G) \cdot \vec{w} \, dx = 0$$

$$\int_d \overline{L}(\vec{U}) \cdot \vec{w} \, dx = \int_d \vec{G} \cdot \vec{w} \, dx \quad \forall \vec{w} \in W \quad \dots \text{(III'.1.1)}$$

N.B. Cette équivalence formelle a été démontrée, dans le cas des plaques au Ch. (IV.B.1), pour le cas d'une coque cylindrique la démonstration en question reste entièrement valable.

Nous posons et d'une manière classique, et pour tout $r \in]R-h, R+h[$,

$$\text{pour tout } \vec{w} \in W : (u_r, w_r)_d = \int_d u_r w_r \, dx ; (\vec{u}, \vec{w}) = \int_d \vec{u} \cdot \vec{w} \, dx$$

$$dx = r \, d\theta \, dz .$$

Notons, les relations entre produits scalaires suivantes :

- * $(\Delta u_r, w_r)_d = - (\overrightarrow{\text{Grad}} u_r, \overrightarrow{\text{Grad}} w_r)_d + \left(\frac{du_r}{dn}, w_r \right)_\Sigma$
- * $\left(\frac{u_r}{r^2}, w_r \right)_d = \left(\frac{u_r}{r^2}, w_r \right)_d ; \quad * \left(\frac{\dot{u}_r}{r}, w_r \right)_d = \left(\frac{\dot{u}_r}{r}, w_r \right)_d$
- * $(\ddot{u}_r, w_r)_d = (\ddot{u}_r, w_r)_d$
- * $(\Delta \dot{u}_1, w_r)_d = - (\overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{Grad}} w_r)_d + \left(\frac{d\dot{u}_1}{dn}, w_r \right)_\Sigma$
- * $(\overrightarrow{\text{Grad}} (\Delta u_1), \vec{w})_d = - (\Delta u_1, \Delta w_1)_d + (\Delta u_1, w_n)_\Sigma$
- * $(\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} (\Delta u_2), \vec{w})_d = - (\Delta u_2, \Delta w_2)_d - (\Delta u_2, w_t)_\Sigma$
- * $(\overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_r, \vec{w})_d = - (\dot{u}_r, \Delta w_1)_d + (\dot{u}_r, w_n)_\Sigma$
- * $(\overrightarrow{\text{Grad}} \left(\frac{u_r}{r} \right), \vec{w})_d = - \left(\frac{u_r}{r}, \Delta w_1 \right)_d + \left(\frac{u_r}{r}, w_n \right)_\Sigma$
- * $\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \vec{w} \right)_d = \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d$
- * $(\overrightarrow{\text{Grad}} \left(\frac{\dot{u}_1}{r} \right), \vec{w})_d = - \left(\frac{\dot{u}_1}{r}, \Delta w_1 \right)_d + \left(\frac{\dot{u}_1}{r}, w_n \right)_\Sigma$
- * $(\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} \left(\frac{\dot{u}_2}{r} \right), \vec{w})_d = - \left(\frac{\dot{u}_2}{r}, \Delta w_2 \right)_d - \left(\frac{\dot{u}_2}{r}, w_t \right)_\Sigma$
- * $(\overrightarrow{\text{Grad}} \ddot{u}_1, \vec{w})_d = - (\ddot{u}_1, \Delta w_1)_d + (\ddot{u}_1, w_n)_\Sigma$
- * $(\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} \ddot{u}_2, \vec{w})_d = - (\ddot{u}_2, \Delta w_2)_d - (\ddot{u}_2, w_t)_\Sigma$
- * $\left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta, \vec{w} \right)_d = - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d$

$$* \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \vec{e}_z, \vec{w} \right)_d = - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_d - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_d$$

$$* \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \vec{e}_z, \vec{w} \right)_d = - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_d - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_d$$

$$* \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \vec{e}_z, \vec{w} \right)_d = \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{r^4} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_d$$

$$* \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial z} \vec{e}_\theta, \vec{w} \right)_d = \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d$$

$$* \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \vec{w} \right)_d = \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d$$

$$* \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}, w_r \right)_d = \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, w_r \right)_{\Sigma_{(2,4)}} - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d$$

$$* \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \theta}, w_r \right)_d = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial z}, w_r \right)_{\Sigma_{(2,4)}} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right)_d$$

$$= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, w_r \right)_{\Sigma_{(1,3)}} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_r}{\partial z} \right)_d$$

$$\text{avec } \left. \begin{array}{l} w_n = \vec{w} \cdot \vec{n} \\ w_t = \vec{w} \cdot \vec{t} \end{array} \right| \text{ sur } \Sigma$$

$\Sigma_{(2,4)}$ signifie Σ_2 et Σ_4

Par conséquent, la projection des équations (III'.1.1) sur l'espace des fonctions testes W , nous fournit la 1ère équation intégrale :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{d}} \overrightarrow{L(U)} \cdot \overrightarrow{w_r} \vec{e}_r \, dx \\
& - \mu (\overrightarrow{\text{Grad}} u_r, \overrightarrow{\text{Grad}} w_r)_{\mathcal{d}} + \mu \left(\frac{du_r}{dn}, w_r \right)_{\Sigma} - \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2} (u_r, w_r)_{\mathcal{d}} \\
& + \frac{(\lambda+2\mu)}{r} (\dot{u}_r, w_r)_{\mathcal{d}} + (\lambda+2\mu) (\ddot{u}_r, w_r)_{\mathcal{d}} - (\lambda+\mu) (\overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{Grad}} w_r)_{\mathcal{d}} \\
& + (\lambda+\mu) \left(\frac{d \dot{u}_1}{dn}, w_r \right)_{\Sigma} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} \\
& - \frac{2(\lambda+2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, w_r \right)_{\Sigma(2,4)} + \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, w_r \right)_{\Sigma(2,4)} - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} \\
& + (g_r, w_r)_{\mathcal{d}} = 0.
\end{aligned}$$

De même une seconde équation intégrale est donnée, en effet :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{d}} \overrightarrow{L(U)} \cdot \vec{W} \, dx \text{ donne :} \\
& - (\lambda+2\mu) (\Delta u_1, \Delta w_1)_{\mathcal{d}} + (\lambda+2\mu) (\Delta u_1, w_n)_{\Sigma} - \mu (\Delta u_2, \Delta w_2)_{\mathcal{d}} - \mu (\Delta u_2, w_t)_{\Sigma} \\
& + \mu (\ddot{u}_1, w_n)_{\Sigma} - \mu (\ddot{u}_1, \Delta w_1)_{\mathcal{d}} - \mu (\ddot{u}_2, \Delta w_2)_{\mathcal{d}} - \mu (\ddot{u}_2, w_t)_{\Sigma} - \frac{\mu}{r^2} (u_2, \Delta w_2)_{\mathcal{d}} \\
& - \frac{\mu}{r^2} (u_2, w_t)_{\Sigma} + (\lambda+\mu) (\dot{u}_r, w_n)_{\Sigma} - (\lambda+\mu) (\dot{u}_r, \Delta w_1)_{\mathcal{d}} \\
& - \frac{(\lambda+\mu)}{r} (u_r, \Delta w_1)_{\mathcal{d}} + \frac{(\lambda+\mu)}{r} (u_r, w_n)_{\Sigma} + \frac{2\mu}{r^4} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} - \frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_{\mathcal{d}} \\
& + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_{\mathcal{d}} + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_{\mathcal{d}} \\
& - \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_{\mathcal{d}} - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_{\mathcal{d}} - \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} \\
& + \frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_{\mathcal{d}} - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_{\mathcal{d}} + (g, \overrightarrow{\text{Grad}} w_1)_{\mathcal{d}} + (g, \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2)_{\mathcal{d}} = 0
\end{aligned}$$

Notons par : $a(\vec{u}, \vec{w})$, $b(\vec{u}, \vec{w})$ et $\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w})$, les formes bilinéaires

suivantes :

$$a(\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{(\lambda+2\mu)}{r^2} (u_r, w_r)_d + \frac{2\mu}{r^4} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d - \mu (\overrightarrow{\text{Grad}} u_r, \overrightarrow{\text{Grad}} w_r)_d \\ - \mu (\Delta u_2, \Delta w_2)_d - (\lambda+2\mu) (\Delta u_1, \Delta w_1)_d \quad \dots(\text{III}' .1.2)$$

$a(\vec{u}, \vec{w})$ est une forme bilinéaire symétrique.

$$b(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{(\lambda+2\mu)}{r} (\dot{u}_r, w_r)_d + (\lambda+2\mu) (\ddot{u}_r, w_r)_d - (\lambda+\mu) (\overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_1, \overrightarrow{\text{Grad}} w_r)_d \\ - \mu (\ddot{u}_1, \Delta w_1)_d - \mu (\ddot{u}_2, \Delta w_2)_d - \frac{\mu}{r^2} (u_2, \Delta w_2)_d - (\lambda+\mu) (\dot{u}_r, \Delta w_1)_d \\ - \frac{(\lambda+\mu)}{r} (u_r, \Delta w_1)_d - \frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_d + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_d \\ - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d - \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial \dot{w}_1}{\partial \theta} \right)_d \\ + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_d - \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_d \\ + \frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d + \frac{2(\lambda+2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right)_d \\ - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right)_d \quad \dots(\text{III}' .1.3)$$

$$\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w}) = \mu \left(\frac{du_r}{dn}, w_r \right) + (\lambda+\mu) \left(\frac{d\dot{u}_1}{dn}, w_r \right)_{\Sigma} + (\lambda+2\mu) (\Delta u_1, w_n)_{\Sigma}$$

$$- \mu (\Delta u_2, w_t)_{\Sigma} + \mu (\ddot{u}_1, w_n)_{\Sigma} - \mu (\ddot{u}_2, w_t)_{\Sigma} - \frac{\mu}{r^2} (u_2, w_t)$$

$$+ (\lambda+\mu) (\dot{u}_r, w_n)_{\Sigma} + \frac{(\lambda+\mu)}{r} (u_r, w_n)_{\Sigma} - \frac{2(\lambda+2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, w_r \right)_{\Sigma(2,4)}$$

$$+ \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, w_r \right)_{(\Sigma_2, \Sigma_4)} \quad \dots(\text{III}' .1.4)$$

$$(\vec{G}, \vec{w}) = (g_r, w_r)_d + (g, \overrightarrow{\text{Grad}} w_1)_d + (g, \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2)_d$$

...(III'.1.5)

Conclusion

Les équations de l'Elasticité linéaire exprimant l'équilibre du domaine Ω ; $L(U) + G = 0$, sont formellement équivalentes à la formulation variationnelle suivante : (jusqu'alors aucune hypothèse simplificatrice n'a été posée).

$$\forall \vec{W} \in W = \{(w_r, w_1, w_2) \text{ tq } \vec{W} = w_r \vec{e}_r + \overrightarrow{\text{Grad}} w_1 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2; w_1|_{\Sigma} = 0\}$$

et $\forall r \in]R-h, R+h[$

et en chaque point de (d), nous avons :

$$\boxed{a (\vec{u}, \vec{W})_d + b (\vec{u}, \vec{W})_d = - (\vec{G}, \vec{W})_d - \Gamma_{\Sigma}(\vec{U}, \vec{W})} \quad \dots(\text{III}'.1.6)$$

Or la forme bilinéaire $\Gamma_{\Sigma}(\vec{U}, \vec{W})$ doit satisfaire aux conditions aux limites sur le bord Σ , représentées par les équations (II'.3.7, 8, 9 et 10).

En effet, ces équations nous fournissent les relations suivantes :

$$* \quad \mu \frac{du_r}{dn|_{\Sigma_2}} = (h_{1r} + \mu \frac{u_n}{r} - \mu \dot{u}_n) / \Sigma_2$$

$$* \quad \mu \frac{du_r}{dn|_{\Sigma_4}} = (h_{2r} + \mu \frac{u_n}{r} + \mu \dot{u}_n) / \Sigma_4$$

$$* \quad \mu \frac{du_r}{dn|_{\Sigma_1}} = (f_{1r} - \mu \dot{u}_n) / \Sigma_1$$

$$* \quad \mu \frac{du_r}{dn|_{\Sigma_3}} = (f_{2r} + \mu \dot{u}_n) / \Sigma_3$$

$$* \quad (\lambda+2\mu) \Delta u_1|_{\Sigma_2} = (2\mu \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} - (\lambda+2\mu) \frac{u_r}{r} - \lambda \dot{u}_r + h_{1n})_{\Sigma_2}$$

$$* (\lambda+2\mu)\Delta u_{1/\Sigma_4} = (2\mu\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} - (\lambda+2\mu) \frac{u_r}{r} - \lambda \dot{u}_r + h_{2n})_{\Sigma_4}$$

$$* (\lambda+2\mu)\Delta u_{1/\Sigma_1} = (2\mu\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} - \lambda \dot{u}_r - \frac{\lambda}{r} u_r + f_{1n})_{\Sigma_1}$$

$$* (\lambda+2\mu)\Delta u_{1/\Sigma_3} = (2\mu\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} - \lambda \dot{u}_r + \frac{\lambda}{r} u_r - f_{1n})_{\Sigma_3}$$

$$* \mu \Delta u_{2/\Sigma_{2,4}} = (2\mu\vec{n} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} - h_{it})_{\Sigma_{(2,4)}} = (\epsilon h_{it} - 2\mu\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn})_{\Sigma_{(2,4)}}$$

$$* \mu \Delta u_{2/\Sigma_1} = (f_{1t} - 2\mu\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn})_{\Sigma_1}$$

$$* \mu \Delta u_{2/\Sigma_3} = (-f_{2t} - 2\mu\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn})_{\Sigma_3}$$

avec : h_{it} tq $i = 1$ sur Σ_2
 $i = 2$ sur Σ_4

Soit $\vec{K} = K_r \vec{e}_r + K_n \vec{n} + K_t \vec{t}$ charge exercée sur le bord ;

tel que l'on a :

Sur :	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4
$K_r =$	f_{1r}	h_{1r}	f_{2r}	h_{2r}
$K_n =$	f_{1n}	h_{1n}	f_{2n}	h_{2n}
$K_t =$	f_{1t}	h_{1t}	f_{2t}	h_{2t}

la forme bilinéaire $\Gamma_{\Sigma}(\vec{U}, \vec{W})$, tenant compte des conditions aux limites sur le bord Σ , devient :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\Sigma}(\vec{U}, \vec{W}) = & (K_r, w_r) + (K_n, w_n)_{\Sigma} + (K_t, w_t)_{\Sigma} \\
 & + \mu \left(\frac{u_n}{r}, w_r \right)_{\Sigma_2, \Sigma_4} + \varepsilon_1 \mu (\dot{u}_n, w_r)_{\Sigma} + (\lambda + \mu) \left(\frac{du_1}{dn}, w_r \right)_{\Sigma} \\
 & + 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt}, w_n \right)_{\Sigma} + 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn}, w_t \right)_{\Sigma} + \mu (\ddot{u}_1, w_n)_{\Sigma} - \mu (\ddot{u}_2, w_t)_{\Sigma} \\
 & - \frac{\mu}{r^2} (u_2, w_t)_{\Sigma} + \mu (\dot{u}_r, w_n)_{\Sigma} + \varepsilon_2 \left(\frac{u_r}{r}, w_n \right)_{\Sigma} \\
 & - 2 \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, w_r \right)_{\Sigma(2,4)} + \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, w_r \right)_{\Sigma(2,4)}
 \end{aligned}$$

...(III'.1.7)

avec $\varepsilon_1 = \begin{matrix} \nearrow -1 \text{ sur } \Sigma_1, \Sigma_2 \\ \searrow +1 \text{ sur } \Sigma_3, \Sigma_4 \end{matrix}$

$\varepsilon_2 = \begin{matrix} \nearrow \mu \text{ sur } \Sigma_1 \\ \rightarrow \mu \text{ sur } \Sigma_2, \Sigma_4 \\ \searrow (2\lambda + \mu) \text{ sur } \Sigma_3 \end{matrix}$

III'.2. Formulation équivalente sur les faces S_{\pm} , $r = R \pm h$

De même qu'au (I), la formulation $\vec{T}(M, \vec{n}) = \varepsilon \vec{P}_{\varepsilon}$, exprimant les conditions aux limites sur les faces latérales S_{\pm} ($r = R \pm h$), est formellement équivalente à la formulation variationnelle suivante :

$$\int_d \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{w} \, dx = \varepsilon \int_d \vec{P}_{\varepsilon} \cdot \vec{w} \, dx \quad \dots(\text{II}'.2.1)$$

et ceci $\forall \vec{w} \in W = \{w_r, w_1, w_2; \vec{w} = w_r \vec{e}_r + \overrightarrow{\text{Grad}} w_1 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2 \text{ avec } w_1|_{\Sigma} = 0\}$

et pour tout point $M \in d$ avec $r = R + h$.

Notons les relations suivantes :

$$* (\dot{u}_r, w_r)_d = (\dot{u}_r, w_r)_d$$

$$* (\Delta u_1, w_r)_d = (\Delta u_1, w_r)_d$$

$$* \left(\frac{u_r}{r}, w_r\right)_d = \left(\frac{u_r}{r}, w_r\right)_d$$

$$* (\overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_1, \vec{w})_d = (\dot{u}_1, w_n) - (\dot{u}_1, \Delta w_1)_d$$

$$* (\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_2, \vec{w})_d = (\overrightarrow{\text{Grad}} \dot{u}_2, \vec{w} \wedge \vec{e}_r)_d \\ = - (\dot{u}_2, w_t)_{\Sigma} - (\dot{u}_2, \Delta w_2)_d$$

$$* (\overrightarrow{\text{Grad}} u_r, \vec{w})_d = -(u_r, \Delta w_1)_d + (u_r, w_n)_{\Sigma}$$

$$* \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta}, \vec{w}\right)_d = \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta}\right)_d - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)_d$$

$$* \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \vec{e}_z, \vec{w}\right)_d = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)_d + \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta}\right)_d$$

$$* \left(\frac{u_{\theta}}{r} \vec{e}_{\theta}, \vec{w}\right)_d = \left(\frac{u_{\theta}}{r^2}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta}\right)_d - \left(\frac{u_{\theta}}{r}, \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)_d$$

$$= \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta}\right)_d - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)_d - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta}\right)_d$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)_d$$

Soient les formes bilinéaires suivantes :

$$a_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = \lambda \left(\frac{u_r}{r}, w_r \right)_d - \mu \left(\frac{2}{r^3} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d - \mu \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_d \\ - \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d \quad \dots(\text{III}' .2.2)$$

$a_{1s}(\vec{u}, \vec{w})$ est en plus symétrique.

$$b_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = (\lambda + 2\mu) (\dot{u}_r, w_r)_d + \lambda (\Delta u_1, w_r)_d - \mu (\dot{u}_1, \Delta w_1)_d \\ - \mu (\dot{u}_2, \Delta w_2)_d - \mu (u_r, \Delta w_1)_d + 2\mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)_d \\ - \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_d + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d \quad \dots(\text{III}' .2.3)$$

$$\Gamma_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = \mu (\dot{u}_1, w_n)_\Sigma + \mu (u_r, w_n) - \mu (\dot{u}_2, w_t)_\Sigma$$

$$\varepsilon (\vec{P}_\varepsilon, \vec{w})_d = \varepsilon (P_r, w_r)_d + \varepsilon (\vec{P}_\varepsilon, \overrightarrow{\text{Grad}} w_1)_d + \varepsilon (\vec{P}_\varepsilon, \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2)_d \\ \dots(\text{III}' .2.4)$$

Conclusion

Les conditions aux limites sur les faces S_{\pm} ($r = R \pm h$), représentées par les équations (II'.3.11) sont formellement équivalente à la formulation suivante :

$$\forall \vec{w} \in W = \{(w_1, w_1, w_2); \vec{w} = w_r \vec{e}_r + \overrightarrow{\text{Grad}} w_1 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{Grad}} w_2; w_{1/\Sigma} = 0\}$$

pour tout point $M \in d$, tel que $r = R \pm h$

Nous avons :

$$a_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) + b_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = - \Gamma_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) - \varepsilon (\vec{P}_\varepsilon, \vec{w})$$

... (III'.2.5)

CHAPITRE IV'

APPROXIMATION SUR LE BORD D'UNE COQUE CYLINDRIQUE

Comme cela a été fait dans le cas d'une plaque mince, nous formulons une approximation tridimensionnelle de problème des coques statistiques minces, qui consiste à linéariser le champ des déplacements $\vec{U}(r, \theta, z)$ en r sur le bord Σ .

IV'.1. Linéarisation du champ des déplacements et des charges appliquées.

La coque étant un solide dont l'épaisseur $2h$ est faible en comparaison du diamètre du feuillet moyen ($2h/R \ll 1$), nous ne retiendrons pour chaque fibre de Σ d'abscisse (ρ) , que des approximations pour $\vec{U}(r)$ et $\vec{K}(r)$.

Le développement en r donne :

$$u_r(r, \theta, z) = u_r(R, \theta, z); \quad \vec{u}(r, \theta, z) = \vec{u}(R, \theta, z) + (r-R)\vec{u}'(R, \theta, z)$$

$$K_r(r, \theta, z) = K_r(R, \theta, z); \quad \vec{K}(r, \theta, z) = \vec{K}(R, \theta, z) + (r-R)\vec{K}'(R, \theta, z)$$

Ceux-ci nous permet d'écrire :

$$\vec{U}(r, \theta, z) = u_r(R, \theta, z)\vec{e}_r + \vec{u}(R, \theta, z) + (r-R)\vec{u}'(R, \theta, z)$$

$$\vec{K}(r, \theta, z) = K_r(R, \theta, z)\vec{e}_r + \vec{K}(R, \theta, z) + (r-R)\vec{K}'(R, \theta, z)$$

Cette linéarisation suppose que \vec{U} et \vec{K} sont linéaires en r sur le bord Σ , c'est-à-dire que chaque fibre de Σ d'abscisse (ρ) , subit un déplacement de solide rigide tel que :

$$\begin{aligned}\vec{u}(r, \Delta) &= \vec{u}(R, \Delta) + \vec{\alpha}(\Delta) \wedge (r - R) \vec{e}_r \\ &= \vec{u}(R, \Delta) + (r - R) \vec{u}(R, \Delta)\end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(\Delta) \wedge \vec{e}_r &= \vec{u}(R, \Delta) \\ \text{d'où} \\ \vec{\alpha}(\Delta) &= \vec{e}_r \wedge \vec{u}(R, \Delta)\end{aligned}$$

...IV'.1.1

IV'.2. Recherche de torseur des forces associée

Soit $[\mathcal{L}] = \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{matrix}$ le torseur de forces associé-charges appliquées sur le bord Σ , \vec{R} et \vec{M} (la résultante et le moment) sont les éléments de réduction de torseur $[\mathcal{L}]$ au point $(x_1(\Delta), x_2(\Delta))$ des forces appliquées sur la génératrice de Σ issue de ce point.

La résultante $\vec{R} = \int_{R-h}^{R+h} [K \vec{e}_r] dr = \int_{R-h}^{R+h} K_r \vec{e}_r dr + \int_{R-h}^{R+h} [K \vec{e}_r + (r-R) \vec{k}(R, \Delta)] dr$

$$\vec{R} = 2h K_r(R, \Delta) \vec{e}_r + 2h \vec{k}(R, \Delta)$$

$$\vec{R} = 2h (K_r(R, \Delta) + \vec{k}(R, \Delta)) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\vec{R} = 2h K(R, \Delta)} \quad \dots \quad \text{IV}' 2.1$$

Notons :

$$r^*(\Delta, R) = 2h K_r(\Delta, R)$$

et $r^*(\Delta, R) = 2R \vec{K}(\Delta, R)$ on obtient :

$$\boxed{\vec{R} = r^*(\Delta, R) \vec{e}_r + \vec{r}^*(\Delta, R)} \dots \text{IV}' 2.2$$

Le moment

$$\vec{M} = \int_{R-h}^{R+h} \vec{OM} \wedge \rho K(\Delta, r) dr$$

$$= \int_{R-h}^{R+h} r \vec{e}_r \wedge (r-R) \vec{K}(\Delta, R) dr + \int_{R-h}^{R+h} r \vec{e}_r \wedge K_r(\Delta, R) \vec{e}_r dr + \int_{R-h}^{R+h} r \vec{e}_r \wedge \vec{K}(\Delta, R) dr$$

et on obtient :

$$\boxed{\vec{M} = 2Rh \vec{e}_r \wedge \vec{K}(\Delta, R) + \frac{2h^3 + 6Rh(h-R)}{3} \vec{e}_r \wedge \vec{K}(\Delta, R)}$$

... IV' 2.3

Notons par :

$$\vec{m}^* = \frac{2h^3 + 6Rh(h-R)}{3} \vec{K}(\Delta, R)$$

ce que nous permet d'écrire \vec{M} sous la forme suivante :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{e}_r \wedge (R \vec{r}^*(\Delta, R) + m^*)} \dots \text{IV}' 2.4$$

IV'.3. Formulation variationnelle après l'approximation.

Il est bien entendu que la formulation variationnelle du problème à l'intérieur du domaine Ω de la coque reste la même, par contre le terme de cette formulation exprimant les conditions limites sur le bord Σ' sont transformées suite à l'approximation faite au (IV'.1).

Par conséquent l'équation (III'.1.7) est changée, auparavant, notons que :

$$\begin{aligned}
 (\vec{K}, \vec{W})_{\Sigma'} &= \left(\frac{r^*}{2R}, W_r \right)_{\Sigma'} + \frac{3(r-R)}{2R^3 + 6RR(R-R)} (m^*, \vec{W})_{\Sigma'} + \left(\frac{r^*}{2R}, \vec{W} \right)_{\Sigma'} \\
 &- 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}}{dt}, w_n \right)_{\Sigma'} + 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}}{dn}, w_t \right)_{\Sigma'} \\
 &= 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, w_n \right)_{\Sigma'} + 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dn}, w_t \right)_{\Sigma'} + (r-R) 2\mu \left\{ \left(\vec{n} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, w_n \right)_{\Sigma'} + \left(\vec{n} \frac{d\vec{u}^*}{dn}, w_n \right)_{\Sigma'} \right\} \\
 &- \mathcal{E}_1 \mu (\dot{u}_n, w_r)_{\Sigma'} = - \mathcal{E}_1 \mu (\dot{u}_t^*, w_r)_{\Sigma'} \\
 &- \mu \left(\frac{u_n}{r}, w_r \right)_{\Sigma', \Sigma_n} = \frac{\mu}{r} (u_n^*, w_r)_{\Sigma', \Sigma_n} - \mu \left(\frac{r-R}{r} \right) (\dot{u}_t^*, w_r)_{\Sigma', \Sigma_n} \\
 &- (\lambda + \mu) \left(\frac{du_1}{dn}, w_r \right)_{\Sigma'} = (\lambda + \mu) \left(\frac{du_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma'} + (\lambda + \mu)(r-R) \left(\frac{du_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma'} \\
 &- \mu (\ddot{u}_1, w_n)_{\Sigma'} = \mu (\ddot{u}_1^*, w_n)_{\Sigma'} \quad , \quad \mu (\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma'} = \mu (\ddot{u}_2, w_t)_{\Sigma'}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow -\frac{\mu}{r^2} (u_z, w_t)_{\Sigma_1} = -\frac{\mu}{r^2} (u_z^*, w_t)_{\Sigma_1} - \frac{\mu(r-R)}{r^2} (\dot{u}_z^*, w_t) - \frac{\mu(r-R)^2}{r^2} (\ddot{u}_z^*, w_t)_{\Sigma_1}$$

$$\rightarrow \mu (\dot{u}_r, w_n)_{\Sigma_1} = 0$$

$$\rightarrow \mathcal{E}_2 \left(\frac{u_r}{r}, w_n \right)_{\Sigma_1} = \mathcal{E}_2 \left(\frac{u_r^*}{r}, w_n \right)_{\Sigma_1}$$

$$\rightarrow -\frac{2(\lambda+2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, w_r \right)_{\Sigma_1, \Sigma_4} = \frac{2(\lambda+2\mu)}{r^2} \mathcal{E}_3 \left(\frac{du_1}{dn}, w_r \right)_{\Sigma_1, \Sigma_4}$$

$$\rightarrow \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, w_r \right)_{\Sigma_1, \Sigma_4} = \mathcal{E}_3 \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{du_2}{dt}, w_r \right)_{\Sigma_1, \Sigma_4}$$

$$\text{ou } \mathcal{E}_3 = \begin{cases} -1 & \text{sur } \Sigma_2 \\ +1 & \text{sur } \Sigma_4 \end{cases}$$

or nous avons :

$$\frac{du_1}{dn} = \frac{du_1^*}{dn} + (r-R) \frac{d\dot{u}_1^*}{dn} + \frac{(r-R)^2}{2} \frac{d\ddot{u}_1^*}{dn}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{du_2^*}{dt} + (r-R) \frac{d\dot{u}_2^*}{dt} + \frac{(r-R)^2}{2} \frac{d\ddot{u}_2^*}{dt}$$

Tenant compte des résultats ci-dessus, nous obtiendrons pour les termes frontières :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\Sigma_1}^*(\vec{u}, \vec{w}) &= \left(\frac{r^*}{2h}, w_r \right)_{\Sigma_1} + \left(\frac{\vec{r}^*}{2h}, \vec{w} \right)_{\Sigma_1} + \gamma(r-R)(\vec{m}^*, \vec{w})_{\Sigma_1} \\
 &+ \frac{\mu}{r}(u_n^*, w_r)_{\Sigma_1, \Sigma_4} - \frac{\mu(r-R)}{r}(\alpha_t^*, w_r)_{\Sigma_2, \Sigma_4} - \mu \mathcal{E}_2(d_t^*, w_r)_{\Sigma_1} \\
 &+ (\lambda + \mu) \left(\frac{d\dot{u}_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma_1} + (\lambda + \mu)(r-R) \left(\frac{d\ddot{u}_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma_1} \\
 &+ 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, w_n \right) + 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dn}, w_t \right)_{\Sigma_1} + 2\mu(r-R) \left(\vec{\eta} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, w_n \right)_{\Sigma_1} \\
 &+ 2\mu(r-R) \left(\vec{\eta} \frac{d\alpha^*}{dn}, w_t \right)_{\Sigma_1} + \mu(\ddot{u}_1^*, w_n)_{\Sigma_1} - \mu(\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma_1} \\
 &- \frac{\mu}{r^2}(u_2^*, w_t)_{\Sigma_1} - \mu \frac{r-R}{r^2}(\dot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma_1} - \frac{\mu}{r^2}(r-R)^2(\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma_1} \\
 &+ \mathcal{E}_2 \left(\frac{u_r^*}{r}, w_n \right)_{\Sigma_1} + 2\mathcal{E}_3(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r^2} \left(\frac{du_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma_2, \Sigma_4} \\
 &+ 2 \mathcal{E}_3(\lambda + 2\mu) \frac{r-R}{r^2} \left(\frac{d\dot{u}_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma_2, \Sigma_4} \\
 &+ 2 \mathcal{E}_3(\lambda + 2\mu) \frac{(r-R)^2}{2r^2} \left(\frac{d\ddot{u}_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma_2, \Sigma_4} \\
 &+ 2\mu \frac{\mathcal{E}_3}{r^2} \left(\frac{du_2^*}{dt}, w_r \right)_{\Sigma_1, \Sigma_4} + 2\mu \mathcal{E}_3 \frac{(r-R)}{r^2} \left(\frac{d\dot{u}_2^*}{dt}, w_r \right)_{\Sigma_2, \Sigma_4} \\
 &+ 2\mu \mathcal{E}_3 \frac{(r-R)^2}{2} \left(\frac{d\ddot{u}_2^*}{dt}, w_r \right)_{\Sigma_2, \Sigma_4}
 \end{aligned}$$

... IV' 3.1

Rappelons que :

$$\xi_1 = \begin{cases} -1 & \text{sur } \Sigma'_1, \Sigma'_2 \\ +1 & \text{sur } \Sigma'_3, \Sigma'_4 \end{cases} ; \quad \xi_2 = \begin{cases} \mu & \text{sur } \Sigma'_1 \\ -\mu & \text{sur } \Sigma'_2, \Sigma'_4 \\ 2\lambda + \mu & \text{sur } \Sigma'_3 \end{cases}$$

$$\xi_3 = \begin{cases} -1 & \text{sur } \Sigma'_2 \\ +1 & \text{sur } \Sigma'_4 \end{cases}$$

et que la notation étoile (*) signifie que les fonctions notées ainsi ne dépendent que de (R, θ, z)

D'autre part les termes exprimant les conditions limites sur le bord Σ et qui apparaissent dans la formulation variationnelle équivalentes sur les faces S_{\pm} , $r = R \neq h$, sont changées suite à l'approximation. **IV.1**

Nous avons

$$\Gamma_{1S}(\vec{u}, \vec{w}) = \mu(\dot{u}_1, w_n)_{\Sigma'_1} + \mu(u_r, w_n)_{\Sigma'_1} - \mu(\dot{u}_2, w_t)_{\Sigma'_1}$$

... III' 2.3

Qui devient alors :

$$\begin{aligned} \Gamma_{1S}^*(\vec{u}, \vec{w}) &= \mu(\dot{u}_1^*, w_n) + \mu(r-R)(\ddot{u}_1^*, w_n)_{\Sigma'_1} \\ &\quad - \mu(\dot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma'_1} - \mu(r-R)(\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma'_1} \\ &\quad + \mu(u_r^*, w_n)_{\Sigma'_1} \end{aligned}$$

... IV' 3.2

Conclusion :

Le champ des déplacements \vec{U} tel que :

$$\vec{U}(r, \theta, z) = u_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + q \vec{\text{grad}} u_1(r, \theta, z) + \vec{e}_r \wedge q \vec{\text{grad}} u_2(r, \theta, z)$$

avec $u_2|_{\Sigma} = 0$

et supposant que :

$$\begin{cases} u_r(r, \theta, z) = u_r(R, \theta, z) \\ \vec{U}(r, \theta, z) = \vec{U}(R, \theta, z) + (r-R) \vec{U}'(R, \theta, z) \end{cases} \text{ sur le bord } \Sigma'$$

satisfait pour toute fonction \vec{W} de \mathcal{W} et $\forall r \in]R-h, R+h[$ aux équations suivantes :

$$a(\vec{U}, \vec{W})_d + b(\vec{U}, \vec{W})_d = -(\vec{G}, \vec{W})_d + \Gamma_2^*(\vec{U}, \vec{W})$$

... IV'.3.3

Bien entendu cette formulation n'est plus équivalente d'une façon formelle aux équations de l'élasticité linéaire (II'.1.1 et II'.1.2).

Notons que la remarque faite à ce niveau pour les plaques : la conclusion du (V.3), est entièrement valable ici.

D'autre part, ce champ des déplacements vérifie sur les faces

$S_{\pm}(r=R \pm h)$

, les équations suivantes :

$$a_{1s}(\vec{U}, \vec{W})_d + b_{1s}(\vec{U}, \vec{W})_d = -\Gamma_{1s}^*(\vec{U}, \vec{W}) - \mathcal{E}(\vec{P}_{\mathcal{E}}, \vec{W})$$

... IV'.3.4

CHAPITRE V'

SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLESV'.1. CHOIX DES FONCTIONS PROPRES

. Nous exploitons la formulation variationnelle du Chapitre IV', en passant à une formulation différentielle.

Nous avons l'espace des fonctions test :

$$W = \{ (w_r, w_1, w_2) \} \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{w} \in W; \quad \vec{w} = w_r \vec{e}_r + g \vec{\text{grad}} w_1 + \vec{z}_r \eta \vec{\text{grad}} w_2 \\ w_1|_{\Sigma'} = 0 \end{array} \right\}$$

Soient W_{nk} , λ_{nk} les fonctions et valeurs propres associées aux fonctions w_r , w_1 et w_2 tel que :

$$\boxed{\Delta W_{nk} + \lambda_{nk}^2 W_{nk} = 0} \quad \dots \text{V.1.1}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{nk} = A_{nk} \sin \frac{n\pi\theta}{2a} \sin \frac{k\pi z}{2l} \\ \forall \theta \in]0, 2\pi[\quad \text{et } z \in]0, 2l[\\ W_{nk} = 0 \quad \text{pour } \theta = 0, 2a \quad \text{et } z = 0, 2l \end{array} \right.$$

Rappelons que les fonctions propres W_{nk} , outre leurs propriétés d'orthogonalité, constituent des systèmes complets dans $L^2(d)$.

L'orthogonalité des fonctions W_{nk} implique :

$$\boxed{\frac{1}{A_{nk}^2} = \int_d \sin^2 \frac{n\pi\theta}{2a} \sin^2 \frac{k\pi z}{2l} d\theta dz} \quad \dots \text{V'.1.2}$$

De l'équation V'.1.1 on déduit que :

$$\lambda_{nk}^2 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} \frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{k^2}{\rho^2} \right) \quad \dots V'.1.3$$

Nous introduisons les moments R_{nk}^r , R_{nk}^1 et R_{nk}^2 tels que :

$$R_{nk}^r = \int_d u_r w_{nk} d\theta dz ; \quad R_{nk}^1 = \int_d u_1 w_{nk} d\theta dz$$

et

$$R_{nk}^2 = \int_d u_2 w_{nk} d\theta dz$$

c'est-à-dire

$$u_r = \sum_{n,k} R_{nk}^r w_{nk} ; \quad u_1 = \sum_{n,k} R_{nk}^1 w_{n,k} ; \quad u_2 = \sum_{n,k} R_{nk}^2 w_{nk}$$

Remarquons que en conséquence de ce choix des fonctions propres, nous réduisons l'étude au cas d'une coque a bord appuyé.

$$\text{En effet : } w_{nk} / \Sigma_1 = 0 \Rightarrow u_r / \Sigma_1 = 0$$

V'.2. Système différentiel

Nous introduisons les notations suivantes :

$$g_{nk}^r = (g_r, w_{nk})_d ; \quad g_{nk}^1 = (\vec{g}, g_{n\vec{a}d} w_{nk})_d$$

$$g_{nk}^2 = (\vec{g}, \vec{e}_r \wedge \vec{g} \text{grad} W_{nk})_d ; \quad P_{nk}^r = \mathcal{E}(P_r, W_{nk})_d$$

$$P_{nk}^1 = \mathcal{E}(\vec{P}, \vec{g} \text{grad} W_{nk})_d ; \quad P_{nk}^2 = \mathcal{E}(\vec{P}, \vec{e}_r \wedge \vec{g} \text{grad} W_{nk})_d$$

avec : $\mathcal{E} = +1$ pour $r = R+h$
 $\mathcal{E} = -1$ pour $r = R-h$

Et notons par :

$$Q_{nk}^r = (u_r^*, \frac{dW_{nk}}{dn})_{\Sigma_1} ; \quad \dot{q}_{nk} = \mu(\dot{u}_2^*, \frac{dW_{nk}}{dn})_{\Sigma_1}$$

$$\ddot{q}_{nk} = \mu(\ddot{u}_2^*, \frac{dW_{nk}}{dn})_{\Sigma_1}$$

$$Q_{nk}^n = \left(\frac{r_u^*}{2h} + 2\mu \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}^*}{dt}, \frac{dW_{nk}}{dn} \right)_{\Sigma_1}$$

$$Q_{nk}^t = \left(\frac{r_t^*}{2h} + 2\mu \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}^*}{dt}, \frac{dW_{nk}}{dn} \right)_{\Sigma_1}$$

$$S_{nk}^n = \left(y m_u^* + 2\mu \vec{n} \cdot \frac{d\vec{a}^*}{dt}, \frac{dW_{nk}}{dn} \right)_{\Sigma_1}$$

$$S_{nk}^t = \left(y m_t^* + 2\mu \vec{n} \cdot \frac{d\vec{a}^*}{dn}, \frac{dW_{nk}}{dn} \right)_{\Sigma_1}$$

$$\text{ou } y = \frac{3}{2R^3 + 6Rh(h-R)}$$

Prenons successivement pour des fonctions test dans les systèmes d'équations IV'.3.3 et IV'.3.4, les fonctions suivantes :

$$(1) \quad \vec{W} = w_{nh} \vec{e}_r \quad w_1 = w_t = 0$$

$$(2) \quad \vec{W} = g \vec{\text{grad}} w_{nh} \quad w_r = w_2 = 0$$

$$(3) \quad \vec{W} = \vec{e}_r \wedge g \vec{\text{grad}} w_{nh} \quad w_r = w_1 = 0$$

Remarque : Nous remarquons que lorsque :

$$\rightarrow \vec{W} = g \vec{\text{grad}} w_{nh}$$

nous aurons sur le bord Σ_1 :

$$\vec{W} = w_n \vec{n} + w_t \vec{t}$$

avec :

$$\begin{cases} w_n = \frac{dw_{nh}}{dn} \\ w_t = \frac{dw_{nh}}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{W} = \vec{e}_r \wedge g \vec{\text{grad}} w_{nh}$$

nous aurons sur le bord Σ_1' :

$$\vec{W} = w_n \vec{n} + w_t \vec{t}$$

avec :

$$w_n = \frac{dw_{nh}}{dt} = 0$$

$$w_t = \frac{dw_{nh}}{dn}$$

A : Dans Ω et $\forall r, r \in]R-h, R+h[$

(1) Si $\vec{w} = w_{nh} \vec{e}_r$, nous aurons alors :

$$* a(\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{(\lambda+2\mu)}{r^2} (u_r, w_{nh})_d - \mu (\text{grad} u_r, \text{grad} w_{nh})_d \quad \dots \quad \text{V}' 2.1$$

$$* b(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{(\lambda+2\mu)}{r} (\dot{u}_r, w_{nh})_d + (\lambda+2\mu) (\ddot{u}_r, w_{nh})_d \\ - (\lambda+\mu) (\text{grad} \dot{u}_r, \text{grad} w_{nh})_d \\ + \frac{2(\lambda+2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_{nh}}{\partial \theta} \right)_d - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}, \frac{\partial w_{nh}}{\partial \theta} \right)_d \quad \dots \quad \text{V}' 2.2$$

$$* \Gamma'_1(\vec{u}, \vec{w}) = 0$$

$$* (\vec{G}, \vec{w}) = (g_r, w_{nh})_d = g_{nh}^r \quad \dots \quad \text{V}' 2.3$$

(2) Si $\vec{w} = \text{grad} w_{nh}$, nous aurons alors :

$$* a(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{2\mu}{r^4} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_{nh}}{\partial \theta} \right)_d - (\lambda+\mu) (\Delta u_r, \Delta w_{nh})_d \quad \dots \quad \text{V}' 2.4$$

$$\begin{aligned}
 * b(\vec{u}, \vec{w}) &= -\mu (\ddot{u}_1, \Delta W_{4k})_d - (\lambda + \mu) (\dot{u}_r, \Delta W_{4k})_d \\
 &\quad - \frac{\lambda + \mu}{r} (u_r, \Delta W_{4k})_d + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z}, \frac{\partial W_{4k}}{\partial z} \right)_d \\
 &\quad - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z}, \frac{\partial W_{4k}}{\partial \theta} \right)_d - \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{4k}}{\partial \theta} \right)_d \\
 &\quad - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{4k}}{\partial z} \right)_d + \frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{4k}}{\partial \theta} \right)_d \\
 &\quad \dots \quad \text{V'.2.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \Gamma_{\Sigma}^1(\vec{u}, \vec{w}) &= \left(\frac{r_n^*}{2h}, \frac{dW_{4k}}{dn} \right)_{\Sigma} + \gamma(r-R) \left(m_n^*, \frac{dW_{4k}}{dn} \right)_{\Sigma} \\
 &\quad + 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, \frac{dW_{4k}}{dn} \right)_{\Sigma} + 2\mu(r-R) \left(\vec{n} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, \frac{dW_{4k}}{dn} \right)_{\Sigma} \\
 &\quad \text{V'.2.6}
 \end{aligned}$$

$$* (\vec{G}, \vec{w})_d = (\vec{g}, g \vec{\text{grad}} W_{4k}) = g_{4k}^1 \quad \dots \quad \text{V'.2.7}$$

(3) Si $\vec{w} = \vec{e}_r \wedge g \vec{\text{grad}} W_{4k}$, nous aurons alors :

$$* a(\vec{u}, \vec{w}) = -\mu (\Delta u_2, \Delta W_{4k}) \quad \dots \quad \text{V'.2.8}$$

$$\begin{aligned}
 * b(\vec{u}, \vec{w}) &= -\mu (\ddot{u}_2, \Delta W_{4k})_d - \frac{\mu}{r^2} (u_2, \Delta W_{4k})_d \\
 &\quad - \frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{4k}}{\partial z} \right)_d + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z}, \frac{\partial W_{4k}}{\partial \theta} \right)_d
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z}, \frac{\partial W_{nh}}{\partial z} \right)_d + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{nh}}{\partial z} \right)_d$$

$$- \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{nh}}{\partial \theta} \right)_d - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{nh}}{\partial z} \right)_d$$

... V' 2.9

$$* \Gamma_{\Sigma}^1(\vec{u}, \vec{w}) = \left(\frac{r_t^*}{2h}, \frac{dW_{nh}}{dn} \right)_{\Sigma} + \gamma(r-R) \left(M_t^*, \frac{dW_{nh}}{dn} \right)_{\Sigma}$$

$$+ 2\mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dn}, \frac{dW_{nh}}{dn} \right)_{\Sigma} + 2\mu(r-R) \left(\vec{n} \frac{d\vec{t}}{dn}, \frac{dW_{nh}}{dn} \right)_{\Sigma}$$

... V' 2.10

$$* (\vec{G}, \vec{W})_d = (\vec{g}, \vec{e}_r \wedge g \text{grad} W_{nh}) = g_{nh}^2 \quad \dots \text{V}' 2.11$$

Or dans le 2ème cas c'est-à-dire quand $\vec{w} = g \text{grad} W_{nh}$, $\Gamma_{\Sigma}^1(\vec{u}, \vec{w})$ peut encore s'écrire de la façon suivante :

$$\Gamma_{\Sigma}^1(\vec{u}, \vec{w}) = Q_{nh}^u + (r-R) S_{nh}^u \quad \dots \text{V}' 2.12$$

De même dans le 3ème cas : $\vec{w} = \vec{e}_r \wedge g \text{grad} W_{nh}$, nous avons :

$$\Gamma_{\Sigma}^1(\vec{u}, \vec{w}) = Q_{nh}^t + (r-R) S_{nh}^t \quad \dots \quad \text{V}' 2.13$$

B : Pour $r = R \pm h$

(1) Si $\vec{w} = w_{nk} \vec{e}_r$, nous aurons :

$$* a_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = \lambda \left(\frac{u_r}{r}, w_{nk} \right)_d \quad \dots V'.2.14$$

$$* b_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = (\lambda + 2\mu) (u_r, w_{nk})_d + \lambda (\Delta u_z, w_{nk})_d \dots V'.2.15$$

$$* \Gamma_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = 0$$

$$* \mathcal{E}(\vec{P}, \vec{w})_d = \mathcal{E}(P_r, w_{nk})_d = P_{nk} \quad \dots V'.2.16$$

(2) Si $\vec{w} = \text{grad } w_{nk}$, nous aurons :

$$* a_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial w_{nk}}{\partial \theta} \right)_d \quad \dots V'.2.17$$

$$* b_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = -\mu (u_z, \Delta w_{nk})_d - \mu (u_r, \Delta w_{nk})_d \\ - \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial w_{nk}}{\partial \theta} \right)_d + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial z}, \frac{\partial w_{nk}}{\partial \theta} \right)_d \quad \dots V'.2.18$$

$$* \Gamma_{1s}(\vec{u}, \vec{w}) = 0$$

$$* \mathcal{E}(\vec{P}, \vec{w})_d = \mathcal{E}(\vec{P}_z, \text{grad } w_{nk}) = P_{nk}^1 \quad \dots V'.2.19$$

(3) Si $\vec{w} = \vec{e}_r \wedge \text{grad} W_{uk}$, nous aurons :

$$* a_{13}(\vec{u}, \vec{w}) = -\mu \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{uk}}{\partial \theta} \right)_d - \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial W_{uk}}{\partial z} \right)_d \quad \dots V'.2.20$$

$$* b_{13}(\vec{u}, \vec{w}) = -\mu (\dot{u}_z, \Delta W_{uk})_d + 2\mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{uk}}{\partial z} \right)_d \quad \dots V'.2.21$$

$$* \Gamma'_{13}(\vec{u}, \vec{w}) = 0$$

$$* \mathcal{E}(\vec{P}_3, \vec{w}) = \mathcal{E}(\vec{P}_3, \vec{e}_r \wedge \text{grad} W_{uk})_d = P_{uk}^2 \quad \dots V'.2.22$$

A partir des relations ci-dessus, nous obtiendrons un système de trois équations différentielles du second degré dans d , et un système de trois équations différentielles de 1er ordre (conditions initiales) pour $r = R \mp h$

Pour cela, nous notons les résultats suivants :

$$* \frac{1}{r^2} (u_r, W_{uk})_d = \frac{1}{r} h_{uk}^r$$

$$* (\text{grad} u_r, \text{grad} W_{uk})_d = \lambda_{uk}^2 r h_{uk}^r$$

$$* (u_r, W_{uk})_d = r \dot{h}_{uk}^r$$

$$* \frac{1}{r} (\dot{u}_r, w_{uk})_d = \dot{h}_{uk}^r$$

$$* (\ddot{u}_r, w_{uk})_d = r \ddot{h}_{uk}^r$$

$$* \left(\frac{u_r}{r}, \Delta w_{uk} \right)_d = -\lambda_{uk}^2 h_{uk}^r$$

$$* (\text{grad } \dot{u}_1, \text{grad } w_{uk})_d = \lambda_{uk}^2 r \dot{h}_{uk}^1$$

$$* (\Delta u_1, \Delta w_{uk})_d = r \lambda_{uk}^4 h_{uk}^1$$

$$* (\dot{u}_r, \Delta w_{uk})_d = -\lambda_{uk}^2 r \dot{h}_{uk}^r$$

$$* \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_{uk}}{\partial \theta} \right)_d = \frac{u^2 \pi^2}{4d^2} \frac{1}{r^2} h_{uk}^r$$

$$* \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_{uk}}{\partial \theta} \right)_d = \frac{u^2 \pi^2}{4d^2} \frac{1}{r^2} h_{uk}^1$$

$$* \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial w_{nk}}{\partial z} \right)_d = \frac{k^2 \pi^2}{4l^2} h_{nk}^2$$

$$* \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_{nk}}{\partial z} \right)_d = \frac{k^2 \pi^2}{4l^2} \frac{1}{r} h_{nk}^2$$

$$* \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_{nk}}{\partial \theta} \right)_d = \frac{4}{r} \sum_{n,k} A_{nk} A_{n'k'} \frac{n n' k k'}{(n^2 - n'^2)(k^2 - k'^2)} h_{nk}^2$$

Pour $\begin{cases} n \text{ et } n' \text{ de parité différente} \\ k \text{ et } k' \text{ " " "} \end{cases}$

$$* \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial w_{nk}}{\partial \theta} \right)_d = 0$$

Si n et n' de même parité
ou k et k' " " "

* A_{nk} est tel que : $\frac{1}{A_{nk}^2} = \int_0^{e\alpha} \int_0^{e\ell} \sin^2 \frac{n\pi\theta}{2\alpha} \sin^2 \frac{k\pi z}{2\ell} d\theta dz$

$$\boxed{A_{nk} = \frac{1}{\sqrt{e\alpha e\ell}}}$$

De même nous avons (si n et n' , k et k' de parité différente)

$$* \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z}, \frac{\partial W_{nk}}{\partial \theta} \right)_d = \frac{4}{a\ell} \frac{1}{r} \sum_{n,k}^{\dot{1}} \frac{nn'kk'}{(n^2-n'^2)(k'^2-k^2)} \dot{h}_{nk}^2$$

$$* \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{nk}}{\partial z} \right)_d = \frac{4}{a\ell} \frac{1}{r^2} \sum_{n,k}^{\bar{1}} \frac{nn'kk'}{(n^2-k^2)(k'^2-k^2)} \dot{h}_{nk}^1$$

$$* \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z}, \frac{\partial W_{nk}}{\partial \theta} \right)_d = \frac{4}{a\ell} \frac{1}{r} \sum_{n,k}^{\bar{1}} \frac{nn'kk'}{(n^2-n'^2)(k'^2-k^2)} \dot{h}_{nk}^1$$

tous les autres produits scalaires sur (d), sont calculés de la même façon.

V'.3. Ecriture des équations différentielles.

Deux cas sont à envisager pour obtenir le système différentiel :

1) $n = n'$, $k = k'$

2) $n \neq n'$, $k \neq k'$

Or nous remarquons que dans le 2ème cas, nous obtenons un système

dont : la 1ère équation donne : $\dot{h}_{uk} = 0$

la 2ème équation donne : $a \dot{h}_{uk}^2 = f$

a un coefficient donné

la 3ème équation donne :

$$b \dot{h}_{uk}^1 + c \dot{h}_{uk}^1 = g$$

b, c des coefficients donné.

Un système dont l'intégration est immédiate, par conséquent, nous nous intéressons au 1er cas, à savoir : $n = n'$, $k = k'$.

→ V'.2.1, V'.2.2 et V'.2.3 nous fournissent la 1ère équation qui est la suivante :

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) r \ddot{h}_{uk}^r + (\lambda + 2\mu) \dot{h}_{uk}^r - (\lambda + \mu) \lambda_{uk}^2 r \dot{h}_{uk}^1 \\ & - \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} + \mu \lambda_{uk}^2 r \right\} h_{uk}^r + 2(\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2 n^2}{4 \alpha^2 r^2} h_{uk}^1 \\ & = -g_{uk}^r \end{aligned}$$

...V'.3.1

V'.2.4, V'.2.5, V'.2.6 et V'.2.7, nous donnent une 2ème équation suivante :

$$\begin{aligned} & \mu r \lambda_{uk}^2 \ddot{h}_{uk}^1 + \mu \frac{\pi^2}{4} \left(-\frac{n^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{k^2}{\ell^2} \right) \dot{h}_{uk}^1 + r(\lambda + \mu) \lambda_{uk}^2 \dot{h}_{uk}^r \\ & + \left\{ 2\mu \frac{\pi^2 n^2}{4 \alpha^2 r^3} - (\lambda + 2\mu) r \lambda_{uk}^4 \right\} h_{uk}^1 \\ & + \left\{ 2\mu \frac{\pi^2 n^2}{4 \alpha^2 r^2} + (\lambda + \mu) \lambda_{uk}^2 \right\} h_{uk}^r = -g_{uk}^1 - Q_{uk}^n + (r - R) S_{uk}^n \end{aligned}$$

...V'.3.2

V'.2.8, V'.2.9, V'.2.10 et V'.2.11 donnent :

$$\begin{aligned} & \mu r \lambda_{uh}^2 \ddot{h}_{uh}^2 + \mu \frac{\pi^2}{4} \left(-\frac{u^2}{d^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right) h_{uh}^2 \\ & + \mu \lambda_{uk}^2 \left\{ \frac{1}{r} - r \lambda_{uh}^2 \right\} h_{uh}^2 = -g_{uh}^2 - Q_{uh}^t - (r-R) S_{uh}^t \end{aligned}$$

...V'.3.3

les conditions initiales pour $r = R \pm h$ donnent les équations suivantes :

V'.2.14, V'.2.15 et V'.2.16 fournissent :

$$\lambda h_{uh}^r + (\lambda + 2\mu) r \dot{h}_{uh}^r - \lambda \lambda_{uh}^2 r h_{uh}^1$$

...V'.3.4

V'.2.17, V'.2.18 et V'.2.19 donnent :

$$\begin{aligned} & \mu \lambda_{uh}^2 r \dot{h}_{uh}^1 + \mu \lambda_{uh}^2 r h_{uh}^r - 2\mu \frac{\pi^2 u^2}{4d^2 r^2} h_{uh}^1 \\ & = p_{uh}^2 \end{aligned}$$

...V'.3.5

enfin V'.2.20, V'.2.21 et V'.2.22 nous donnent :

$$\mu r \lambda_{uh}^2 \dot{h}_{uh}^2 - \mu \lambda_{uh}^2 h_{uh}^2 = p_{uh}^2$$

...V'.3.6

Rappelons que $\lambda_{nk}^2 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{\rho^2} \right)$ qu'on remplace par sa valeur dans les équations précédentes.

Nous avons en effet, un système d'équations différentielles de second degré en $\dot{h}_{nk}^i(r)$ ($i=1, 2, r$) et 3 autres équations du 1er degré en $P_{nh}^i(R)$ ($i=1, 2, r$) qui représentent les conditions initiales.

Nous remarquons que les deux premières équations (V'.3.1 et V'.3.2) sont couplées entre elles, par contre la troisième (V'.3.3) est uniquement en \dot{h}_{nh}^2 , \ddot{h}_{nh}^2 et \ddot{h}_{nh}^2 .

V'.4. Conclusion

$\forall \vec{w} \in W$ et $\forall r \in]R-R, R+R[$, $\forall (0, z) \in d$

les moments $P_{nh}^r(r)$, $P_{nh}^1(r)$ et $P_{nh}^2(r)$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) r \ddot{h}_{nh}^r + (\lambda + \mu) \dot{h}_{nh}^r - (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{\rho^2} \right) r \dot{h}_{nh}^r \\
 \text{I)} \quad & - \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} + \mu \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{\rho^2} \right) r \right\} P_{nh}^r - 2(\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2 n^2}{4 a^2 r^2} h_{nh}^1 \\
 & = -g_{nh}^r
 \end{aligned}$$

...V'.4.1

II >

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right) r \ddot{h}_{nk}^1 + \mu \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} - \frac{k^2}{e^2} \right) \dot{h}_{nk}^1 \\
& + (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right) r \dot{h}_{nk}^r \\
& + \frac{\pi^2}{4} \left\{ -2\mu \frac{n^2}{a^2 r^3} - (\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right)^2 r \right\} h_{nk}^1 \\
& + \frac{\pi^2}{4} \left\{ -2\mu \frac{n^2}{a^2 r^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right) \right\} h_{nk}^r \\
& = -g_{uh}^1 - Q_{nk}^n - (r-R) S_{nk}^n
\end{aligned}$$

...V'.4.2

III >

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right) r \ddot{h}_{nk}^2 + \mu \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} - \frac{k^2}{e^2} \right) \dot{h}_{nk}^2 \\
& + \mu \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right) \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{a^2 r^2} + \frac{k^2}{e^2} \right) r \right\} h_{nk}^2 \\
& = -g_{nk}^2 - Q_{nk}^t - (r-R) S_{nk}^t
\end{aligned}$$

...V'.4.3

$\forall \vec{w} \in W$ et $\forall \theta, \beta \in d$

et pour $r = R \pm h$.

Nous avons les équations suivantes :

$$\text{I')} \quad \lambda h_{nk}^r + (\lambda + 2\mu) r \dot{h}_{nk}^r - \lambda r \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{d^2 r^2} + \frac{k^2}{\rho^2} \right) h_{nk}^r = p_{nk}^r$$

... V'4.4

$$\text{II')} \quad \mu r \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{d^2 r^2} + \frac{k^2}{\rho^2} \right) (\dot{h}_{nk}^1 + h_{nk}^r) + 2\mu \frac{\pi^2 n^2}{4 d^2 r^2} h_{nk}^1 = p_{nk}^1$$

... V'4.5

$$\text{III')} \quad \mu \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n^2}{d^2 r^2} + \frac{k^2}{\rho^2} \right) (r \dot{h}_{nk}^2 + h_{nk}^2) = p_{nk}^2$$

... V'4.6

CHAPITRE VI'LE CAS D'UNE COQUE FERMÉE

Soit $(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ un repère local orthonormé, la coque () occupe le domaine $\Omega = d \times]R-h, R+h[$, où d est le feuillet moyen tel que $d = [0, 2\pi] \times]0, l[$

R est le rayon du feuillet moyen, $2h$ est l'épaisseur (constante) de la coque.

Le bord $\Sigma = [0, 2\pi] \times]R-h, R+h[\times \{0, l\}$

Pour traiter le cas d'une coque fermée à partir du cas d'une coque ouverte (i.e; $d =]-\alpha, +\alpha[\times]-l, +l[; 0 < \alpha < \pi, l > 0$) il ne suffit pas de prendre α dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$.

En effet, l'hypothèse simplificative formulée sur $\Sigma = C \times]R-h, R+h[$ dans le cas ouvert nous ramènerait au cas classique de l'hypothèse de LOV-KIRSHOFF partout dans d si on considère $\alpha \in [0, \pi]$.

VI'.1. Formulation du problème

Les équations de la statique en élasticité linéaire classique :

$$\begin{aligned} L(\vec{U}) + \vec{G} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j &= K \quad (j = \theta, z) && \text{sur } \Sigma \\ (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}) &= \{ P_\xi \} && \text{sur } r = R \pm h \end{aligned}$$

nous fournissent les équations (II'.3.1), (II'.3.2) dans Ω , (II'.3.3), (II'.3.4) sur le bord Σ , et (II'.3.11) sur les faces $r = R \pm h$.

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \xi}, \frac{\partial w_z}{\partial \xi} \right)_D - \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_D + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_z}{\partial \xi} \right)_D \\
& - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right)_D - \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \theta}, \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right)_D + \frac{2\mu}{r^3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_D \\
& - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial w_z}{\partial \xi} \right)_D + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}, w_r \right)_D \\
& - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial w_r}{\partial \xi} \right)_D
\end{aligned}$$

--- VI'.1.4

Les termes soulignés ne figurent pas dans l'expression de $\mathbf{b}(\vec{u}, \vec{w})$ de

III'.1.3.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\Sigma}(\vec{u}, \vec{w}) &= (\vec{u}, \vec{w})_{\Sigma} + 2\mu (\dot{u}_n, w_n)_{\Sigma} + (\lambda + \mu) \left(\frac{d\dot{u}_1}{dn}, w_n \right)_{\Sigma} \\
&+ 2\mu \left(\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}, w_n \right)_{\Sigma} + 2\mu \left(\vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{dn}, w_t \right)_{\Sigma} \\
&+ \mu (\ddot{u}_1, w_n)_{\Sigma} - \mu (\ddot{u}_z, w_t)_{\Sigma} \\
&- \frac{\mu}{r^2} (\mu_z, w_t)_{\Sigma} + \mu (\dot{u}_r, w_n)_{\Sigma} \\
&+ \frac{\mu}{r} (\mu_r, w_n)_{\Sigma_+} + \frac{(2\lambda + \mu)}{r} (\mu_r, w_n)_{\Sigma_-}
\end{aligned}$$

...VI'.1.5

avec $\xi = \begin{cases} +1 & \text{sur } \Sigma_- \\ -1 & \text{sur } \Sigma_+ \end{cases}$

$a_{1s}(\vec{u}, \vec{w})$, $b_{1s}(\vec{u}, \vec{w})$ et $\Gamma_{1s}(\vec{u}, \vec{w})$ sont identiques

au cas d'une coque ouverte, cf. (III'.2.2), (III'.2.3) et (III'.2.4).

Ces équations sont formellement équivalente à la formulation variationnelle suivante :

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{W} = \{(w_r, w_1, w_2) \text{ tel que } \vec{w} = w_r \vec{e}_r + g \vec{\text{grad}} w_1 + \vec{e}_r \wedge g \vec{\text{grad}} w_2; \\ w_1|_{\Sigma} = 0\} \text{ et } \forall r \in]R-h, R+h[$$

en chaque point de (d) nous avons :

$$a(\vec{u}, \vec{w})_d + b(\vec{u}, w)_d = -(\vec{G}, \vec{w})_d - \int_{\Sigma} (\vec{u}, \vec{w}) \quad \dots \text{VI}' . 1.1$$

et $\forall M \in d$, tel que $r = R \pm h$ nous avons :

$$a_{1s}(\vec{u}, w)_d + b_{1s}(\vec{u}, \vec{w})_d = -\int_{1s} (\vec{u}, \vec{w}) - \int_{\Sigma} (\vec{u}, \vec{w}) \quad \dots \text{VI}' . 1.2$$

où

$$a(\vec{u}, \vec{w})_d = -\frac{(1+\nu\mu)}{r^2} (\mu_r, w_r)_d + \frac{2\nu}{r^4} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d \\ - \mu (g \vec{\text{grad}} \mu_r, g \vec{\text{grad}} w_r)_d \\ - \mu (\Delta \mu_2, \Delta w_2)_d - (1+\nu\mu) (\Delta \mu_1, \Delta w_1) \quad \dots \text{VI}' . 1.3$$

forme bilinéaire symétrique.

VI'.1.3 est identique à $a(\vec{u}, \vec{w})$ de III'.1.2.

$$b(\vec{u}, \vec{w})_d = \frac{1+\nu\mu}{r} (\dot{\mu}_r, w_r)_d + (1+\nu\mu) (\ddot{\mu}_r, w_r)_d - (1+\mu) (g \vec{\text{grad}} \dot{\mu}_1, g \vec{\text{grad}} w_1)_d \\ - \mu (\ddot{\mu}_1, \Delta w_1)_d - \mu (\ddot{\mu}_2, \Delta w_2)_d - \frac{\mu}{r^2} (\mu_2, \Delta w_2)_d \\ - (1+\mu) (\dot{\mu}_r, \Delta w_1)_d - \frac{1+\mu}{r} (\mu_r, \Delta w_1)_d - \frac{2\nu}{r^3} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d \\ + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial \dot{\mu}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{\mu}_1}{\partial \theta}, \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_d - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial \dot{\mu}_2}{\partial \theta}, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)_d$$

VI'.2 - Approximation sur le bord

La même approximation de Ch. IV' étant faite dans le cas d'une coque fermée nous donne le terme bord $\Gamma_{\Sigma}^*(\vec{U}, \vec{W})$ exprimant les conditions limites sur Σ suivant :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma}^*(\vec{U}, \vec{W}) = & \left(\frac{\vec{r}^*}{\rho h}, \vec{W} \right)_{\Sigma} + \left(\frac{r^*}{\rho h}, w_r \right)_{\Sigma} + \gamma(r-R) (\vec{m}^*, \vec{W})_{\Sigma} \\ & - \rho g (\alpha_t^*, w_r)_{\Sigma} + (1+\mu) \left(\frac{d\dot{u}_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma} + \rho \mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, w_n \right)_{\Sigma} \\ & + (1+\mu)(r-R) \left(\frac{d\ddot{u}_1^*}{dn}, w_r \right)_{\Sigma} + \rho \mu \left(\vec{t} \frac{d\vec{u}^*}{dt}, w_t \right)_{\Sigma} \\ & + \rho \mu (r-R) \left(\vec{m} \frac{d\vec{q}^*}{dt}, w_t \right)_{\Sigma} + \rho \mu (r-R) \left(\vec{m} \frac{d\vec{q}^*}{dn}, w_t \right)_{\Sigma} + \mu (\ddot{u}_1, w_n)_{\Sigma} \\ & - \mu (\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma} - \frac{\mu}{r^2} (u_2^*, w_t)_{\Sigma} - \frac{\mu(r-R)}{r^2} (\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma} \\ & - \frac{\mu}{r^2} (r-R)^2 (\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma} + \rho_1 (u_r^*, w_n)_{\Sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\mu}{r} \text{ sur } \Sigma_+ \\ &= \frac{\rho(1+\mu)}{r} \text{ sur } \Sigma_- \end{aligned}$$

... VI' 2.1

$$\begin{aligned} \Gamma_{15}^*(\vec{U}, \vec{W}) = & \mu (\ddot{u}_1^*, w_n)_{\Sigma} + \mu(r-R) (\ddot{u}_1^*, w_n)_{\Sigma} - \mu (\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma} \\ & - \mu(r-R) (\ddot{u}_2^*, w_t)_{\Sigma} + \mu (u_r^*, w_n)_{\Sigma} \end{aligned}$$

...VI'.2.2

notons que $\Gamma_{15}^*(\vec{U}, \vec{W})$ ne change pas par rapport au cas d'une coque ouverte (cf. IV'.3.2).

VI'.3 - Système d'équations différentielles.

Alors que dans le cas d'une coque ouverte, les fonctions propres associées aux fonctions (w_r, w_θ, w_z) et qui vérifient :

$$\begin{cases} \Delta W_{nk} + \lambda_{nk}^2 W_{nk} = 0 \\ W_{nk}|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad \dots \text{VI'.3.1}$$

Sont des fonctions impaires en θ , dans le cas d'une coque fermée nous pouvons prendre les W_{nk} sous la forme :

$$\begin{cases} W_{nk}^I = a_{nk} \sin n\theta \sin \frac{k\pi z}{2l} \end{cases} \quad \dots \text{VI'.3.2}$$

$$\begin{cases} W_{nk}^P = b_{nk} \cos n\theta \sin \frac{k\pi z}{2l} \end{cases} \quad \dots \text{VI'.3.3}$$

avec
$$W_{nk}^I|_{\Sigma} = W_{nk}^P|_{\Sigma} = 0$$

Rappelons que les fonctions propres W_{nk}^I et W_{nk}^P , outre leurs propriétés d'orthogonalité, constituent des systèmes complets dans $L^2(d)$.

Nous avons alors :

$$a_{nk} = b_{nk} = \frac{1}{\sqrt{l\pi}} \quad \dots \text{VI'.3.4}$$

d'autre part VI'.3.1 donne les valeurs propres λ_{nk}^2 associés aux fonctions W_{nk}^I et W_{nk}^P tel que :

$$\lambda_{nk}^2 = \frac{n^2}{r^2} + \frac{k^2 \pi^2}{4l^2} \quad \dots \text{VI'.3.5}$$

Nous introduisons les moments : h_{nk}^{I1} , h_{nk}^{I2} , h_{nk}^{II1} ,
 relatives à la base des fonctions impaires, de même, les moments :

h_{nk}^{Pr} , h_{nk}^{P1} et h_{nk}^{P2} relatives à la base
 des fonctions paires tel que l'on ait :

$$h_{nk}^{I1} = \int_D u_r w_{nk}^{I1} d\theta dz ; h_{nk}^{I2} = \int_D u_1 w_{nk}^{I2} d\theta dz ; h_{nk}^{II1} = \int_D u_2 w_{nk}^{II1} d\theta dz$$

$$h_{nk}^{Pr} = \int_D u_r w_{nk}^{Pr} d\theta dz ; h_{nk}^{P1} = \int_D u_1 w_{nk}^{P1} d\theta dz ; h_{nk}^{P2} = \int_D u_2 w_{nk}^{P2} d\theta dz$$

c'est-à-dire, nous prenons comme base, la famille des fonctions propres

w_{nk}^{I1} , w_{nk}^{Pr} où l'on a :

$$u_r = \sum_{n,k} h_{nk}^{I1} w_{nk}^{I1} + \sum_{n,k} h_{nk}^{Pr} w_{nk}^{Pr}$$

$$u_1 = \sum_{n,k} h_{nk}^{II1} w_{nk}^{II1} + \sum_{n,k} h_{nk}^{P1} w_{nk}^{P1}$$

$$u_2 = \sum_{n,k} h_{nk}^{I2} w_{nk}^{I2} + \sum_{n,k} h_{nk}^{P2} w_{nk}^{P2}$$

Nous notons la même remarque faite au (V'.1) pour le cas d'une
 coque ouverte, (i.e), par le choix des fonctions propres, nous réduisons
 l'étude au cas d'une coque à bord appuyé $u_r = 0$.

Gardant toujours les mêmes notations du (V'.2), prenant successivement pour des fonctions test dans le système d'équations (VI'.1.3), (VI'.1.4) et (VI'.2.1) :

$$\text{I) (1I) } \vec{W} = W_{nk}^I \vec{e}_r \quad ; \quad w_1 = w_2 = 0$$

$$(2I) \quad \vec{W} = \vec{\text{grad}} W_{nk}^I \quad ; \quad w_r = w_2 = 0$$

$$(3I) \quad \vec{W} = \vec{e}_r \wedge \vec{\text{grad}} W_{nk}^I \quad ; \quad w_r = w_1 = 0$$

$$\text{II) (1P) } \vec{W} = W_{nk}^P \vec{e}_r \quad ; \quad w_1 = w_2 = 0$$

$$(2P) \quad \vec{W} = \vec{\text{grad}} W_{nk}^P \quad ; \quad w_r = w_2 = 0$$

$$(3P) \quad \vec{W} = \vec{e}_r \wedge \vec{\text{grad}} W_{nk}^P \quad ; \quad w_1 = w_r = 0$$

D'autre part, notons que :

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{nk}^I}{\partial \theta} \right)_d = \frac{m^e}{r^3} f_{nk}^{I1}$$

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \frac{\partial W_{nk}^P}{\partial \theta} \right)_d = \frac{m^e}{r^3} f_{nk}^{P1}$$

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}, W_{nk}^I \right)_d = -\frac{m^e}{r^2} f_{nk}^{I1}$$

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}, W_{nk}^P \right)_d = -\frac{m^e}{r^2} f_{nk}^{P1}$$

Nous obtenons alors, deux systèmes d'équations différentielles du 2e ordre en $h_{nk}^{Ij}(r)$, $\dot{h}_{nk}^{Ij}(r)$ et leurs dérivées premières et secondes pour $r \in]R-h, R+h[$; $j = (r, 1, 2)$ et deux systèmes d'équations différentielles de 1er ordre qui expriment les conditions initiales pour ($r = R \pm h$).

Nous avons :

$\forall \vec{W} \in W$ et $\forall r \in]R-h, R+h[$; $\forall (\theta, \varphi) \in d$, les moments h_{nk}^{Ijr} , h_{nk}^{Ij1} , h_{nk}^{Ij2} vérifient les équations suivantes :

$$\text{I}^i \quad \begin{aligned} & (\lambda + \varepsilon\mu)r \ddot{h}_{nk}^{Ijr} + (\lambda + \varepsilon\mu) \dot{h}_{nk}^{Ijr} - (\lambda + \mu) \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{\kappa^e \pi^e}{4l^e} \right) r \dot{h}_{nk}^{Ij1} \\ & - \left\{ \frac{(\lambda + \varepsilon\mu)}{r} + \mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{\kappa^e \pi^e}{4l^e} \right) \right\} h_{nk}^{Ijr} - \varepsilon(\lambda + \mu) \frac{m^e}{r^2} h_{nk}^{Ij1} = -g_{nk}^{Ijr} \end{aligned}$$

...VI'.3.6

$$\text{II}^i \quad \begin{aligned} & \mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{\kappa^e \pi^e}{4l^e} \right) r \ddot{h}_{nk}^{Ij1} + \mu \left(\frac{m^e}{r^2} - \frac{\kappa^e \pi^e}{4l^e} \right) \dot{h}_{nk}^{Ij1} \\ & + (\lambda + \mu) \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{\kappa^e \pi^e}{4l^e} \right) r \dot{h}_{nk}^{Ijr} + \left\{ -2\mu \frac{m^e}{r^3} - (\lambda + \varepsilon\mu) \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{\kappa^e \pi^e}{4l^e} \right) \right\} h_{nk}^{Ij1} \\ & + \left\{ -2\mu \frac{m^e}{r^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{\kappa^e \pi^e}{4l^e} \right) \right\} h_{nk}^{Ijr} = \\ & -g_{nk}^{Ij1} - \mathcal{Q}_{nk}^{Im} - (r-R) S_{nk}^{In} \end{aligned}$$

...VI'.3.7

IIIⁱ

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) r \ddot{h}_{nk}^{I2} + \alpha \left(\frac{n^c}{r^2} - \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) \dot{h}_{nk}^{I2} \\ & + \alpha \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) \left\{ \frac{1}{r} - \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) r \right\} h_{nk}^{I2} \\ & = -g_{nk}^{I2} - \varphi_{nk}^{I2} - (r-R) S_{nk}^{I2} \end{aligned}$$

...VI'.3.8

Les conditions initiales pour $r=R \pm h$, $\forall \vec{w} \in W$, $\forall (\sigma, \varphi) \in \mathcal{D}$, nous avons :

Iⁱ

$$\lambda h_{nk}^{Ir} + (\lambda + \varepsilon \mu) r \dot{h}_{nk}^{Ir} - \lambda \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) r h_{nk}^{I1} = P_{nk}^{Ir}$$

...VI'.3.9

IIⁱ

$$\alpha \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) r \dot{h}_{nk}^{I1} + \alpha \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) h_{nk}^{Ir} + \frac{2\alpha}{r^2} n^c h_{nk}^{I1} = P_{nk}^{I1}$$

...VI.3.10

IIIⁱ

$$\alpha \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) r \dot{h}_{nk}^{I2} + \alpha \left(\frac{n^c}{r^2} + \frac{k^c \pi^c}{4l^c} \right) h_{nk}^{I2} = P_{nk}^{I2}$$

...VI.3.11



Notons que si l'on remplace $\frac{\eta^c}{r^2}$ par $\frac{\eta^c \pi^c}{4l^2 r^2}$ dans les équations ci-dessus on retrouve exactement les équations différentielles qui correspondent au cas d'une coque ouverte (cf. V'.4 1, 2, 3, 4, 5, 6).

De même, nous établissons les systèmes d'équations différentielles qui vérifient les moments, h_{nk}^{Pr} , h_{nk}^{P1} , h_{nk}^{P2} et leurs dérivées secondes et premières.

Nous avons :

$$\forall \vec{W} \in \vec{W}, \forall r \in]R-h, R+h[, \forall \theta \in \mathcal{O}, \exists \alpha \in \mathcal{P} :$$

IP

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) r \ddot{h}_{nk}^{Pr} + (\lambda + 2\mu) \dot{h}_{nk}^{Pr} - (\lambda + \mu) \left(\frac{\eta^c}{r^2} + \frac{\kappa^c \pi^c}{4l^2} \right) r \dot{h}_{nk}^{P1} \\ & - \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{r} + \mu \left(\frac{\eta^c}{r^2} + \frac{\kappa^c \pi^c}{4l^2} \right)^2 r \right\} h_{nk}^{Pr} - 2(\lambda + \mu) \frac{\eta^c}{r^2} h_{nk}^{P1} = -g_{nk}^{Pr} \end{aligned}$$

...VI.3.12

II^P

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{\eta^c}{r^2} + \frac{\kappa^c \pi^c}{4l^2} \right) r \ddot{h}_{nk}^{P1} + \mu \left(\frac{\eta^c}{r^2} - \frac{\kappa^c \pi^c}{4l^2} \right) \dot{h}_{nk}^{P1} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\eta^c}{r^2} + \frac{\kappa^c \pi^c}{4l^2} \right) r \dot{h}_{nk}^{Pr} \\ & + \left\{ -2\mu \frac{\eta^c}{r^3} - (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\eta^c}{r^2} + \frac{\kappa^c \pi^c}{4l^2} \right)^2 r \right\} h_{nk}^{P1} \\ & + \left\{ -2\mu \frac{\eta^c}{r^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\eta^c}{r^2} + \frac{\kappa^c \pi^c}{4l^2} \right) \right\} h_{nk}^{Pr} \\ & = -g_{nk}^{P1} - Q_{nk}^{Pm} - (r-R) S_{nk}^{Pn} \end{aligned}$$

...VI.3.13

$$\begin{aligned}
 & \mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) r \tilde{h}_{nk}^{P2} + \mu \left(\frac{m^e}{r^2} - \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) \overset{\circ}{h}_{nk}^{P2} \\
 & + \mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) \left\{ \frac{1}{r} - \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) r \right\} h_{nk}^{P2} \\
 & = -g_{nk}^{P2} - \overset{\circ}{\varphi}_{nk}^{Pt} - (r-R) S_{nk}^{Pt}
 \end{aligned}$$

...VI.3.14

Les conditions initiales pour $r=R \pm h$, $\forall \vec{w} \in W$, $\forall (\theta, \beta) \in \mathcal{P}$

sont :

$$\overset{\circ}{\Delta} h_{nk}^{Pr} + (1+\nu) r \overset{\circ}{h}_{nk}^{Pr} - \lambda \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) r h_{nk}^{P1} = P_{nk}^{Pr}$$

...VI.3.15

$$\mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) r \overset{j}{h}_{nk}^{P1} + \mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) h_{nk}^{Pr} + \frac{\nu \mu}{r^2} m^e h_{nk}^{P1} = P_{nk}^{P1}$$

...VI.3.16

III, P

$$\mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) r \overset{j}{h}_{nk}^{P2} + \mu \left(\frac{m^e}{r^2} + \frac{k^e \pi^e}{4l^e} \right) h_{nk}^{P2} = P_{nk}^{P2}$$

...VI.3.17

BHS
LIII

Remarquons que les équations $(I^i$ et $II^i)$ respectivement $(I^P$ et $II^P)$ sont couplées entre elles alors que (III^i) respectivement (III^P) sont indépendantes des autres moments.

Ces deux systèmes différentiels sont intégrés par une méthode numérique de différences finies.

CHAPITRE VIII'MODELISATION NUMERIQUEVIII'.1 Présentation du problème1) Etude des équations

Le problème posé consiste à intégrer les trois équations différentielles (V'.4.1), (V'.4.2) et (V'.4.3), associés aux conditions aux limites (V'.4.4), (V'.4.5) et (V'.4.6) dans le domaine tridimensionnel correspondant à la coque cylindrique.

Ces équations ne dépendent que de la coordonnée radiale r , à l'exception des deux autres coordonnées cylindriques qui n'interviennent que par l'intermédiaire de bornes d'intégration en α ou ℓ .

Pour chaque valeur de r correspondant à un point intérieur au domaine d'application, le phénomène étudié est régi par trois équations. Les deux premières font intervenir un couplage entre les fonctions inconnues h_{nk}^1 et h_{nk}^r et leurs dérivées premières et secondes.

La dernière est une équation en h_{nk}^2 , qui peut donc être résolue séparément.

2) Dimension du problème

Pour chaque valeur de r , il convient de calculer en fait autant de triplets $(h_{nk}^r, h_{nk}^1, h_{nk}^2)$ qu'il y a de couples (n,k) .

Dans la pratique, on prend $n \in [1, N]$ et $K \in [1, K]$, et on adopte $N = K$.

Le nombre de variables à calculer en chaque point de coordonnée radiale r vaut donc $3N^2$.

La méthode proposée pour la résolution est une méthode aux différences finies. Le domaine d'intégration est constitué d'un segment de rayon compris entre les points de coordonnées radiales $R-h$ et $R+h$.

Il est discrétisé en n_p noeuds régulièrement répartis, et la distance entre 2 noeuds consécutifs est représentée par le paramètre Δ .

3) Présentation matricielle du problème

Etudions tout d'abord la forme du 2^d membre des systèmes matriciels.

Les termes qui apparaissent dans les membres de droites des équations dans le domaine (d) - d'après les relations qui donnent Q_{MK}^n , Q_{MK}^t , S_{MK}^n et S_{MK}^t (cf. V'.2) - dépendent des composantes normales et tangentielles de forces généralisées appliquées sur le bord :

$$\int_{\Sigma} \vec{r}^* w_{MK} d\sigma \quad ; \quad \int_{\Sigma} \vec{m}^* w_{MK} d\sigma$$

par un changement de variable approprié dans l'expression de ces forces, il est possible de les présenter sous la forme d'un développement en série de Fourier de fonction paire. Un tel développement permet de représenter une répartition des forces sur les frontières de la coque.

Le développement en série de Fourier correspond à une opération linéaire d'opérateur A_1 que l'on peut représenter par :

$$\begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} = [A_1] \begin{Bmatrix} r^* \\ m^* \end{Bmatrix}$$

...VII'.I.1

où r^* et m^* représentent les composantes de la contrainte \vec{r}^* et du moment \vec{m}^* discrétisées sur n_p noeuds, et les C et d sont les termes correspondant du développement en série de Fourier.

Il est possible d'exprimer les Q_{nk}^n , Q_{nk}^t , S_{nk}^n et S_{nk}^t par rapport aux C et d par :

$$\begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ d \end{Bmatrix}$$

VII'.I.2

d'où l'on déduit l'expression du second membre :

$$\{SM_1\} = \begin{bmatrix} S_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix}$$

VII'.I.3

Considérons maintenant l'ensemble des solutions h_{nk}^r , h_{nk}^l et h_{nk}^2 calculées sur les n_p noeuds de maillage pour toutes les valeurs du couples (n, k) .

Soit D l'opérateur discrétisé correspondant aux équations I, II, III ainsi qu'à I', II' et III' pour les noeuds $n^o 1$ et $n^o n_p$

Soit $\{h\} = \begin{Bmatrix} h_{nk}^r \\ h_{nk}^l \\ h_{nk}^2 \end{Bmatrix}$

on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \{h\} = \{SM_1\}$$

VII'.I.4

cette équation peut se transformer en représentant séparément les éléments de 2^d membre relatifs aux équations I, II, III et ceux qui correspondent aux conditions limites indiquées par I', II' et III' d'où :

$$[D] \{h\} = \begin{Bmatrix} SM \\ CL \end{Bmatrix}$$

...VII'.I.5

Soit \vec{U} le vecteur des déplacements, $\vec{U} = u_r \vec{e}_r + g \text{grad } u_1 + \vec{e}_r \wedge g \text{grad } u_2$

nous avons :

$$u_r = \sum_{n,k} h_{nk}^r w_{nk}; \quad u_1 = \sum_{n,k} h_{nk}^1 w_{nk}$$

$$u_2 = \sum_{n,k} h_{nk}^2 w_{nk}$$

On peut donc écrire :

$$\{U\} = [L] \{h\}$$

Soit

$$\{U\} = [L][D]^{-1} \begin{Bmatrix} SM \\ CL \end{Bmatrix}$$

...VII'.I.5

Si l'on suppose que D est inversible cette hypothèse est nécessairement vérifiée dans la mesure où il existe une solution physique effective du problème.

Il est possible de généraliser ce modèle de la façon suivante :

on peut supposer que les éléments de SM_I comportent des quantités connues SM_0 et CL_0 et des quantités inconnues SM_I et CL_I .

Auquel cas \vec{U} se décompose lui aussi en une série de déplacements donnés \vec{U}_0 et de déplacements inconnus \vec{U}_I .

D'où

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_I \end{Bmatrix} = [L][D]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} SM_0 \\ CL_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} SM_I \\ CL_I \end{Bmatrix} \right)$$

...VII'.I.6

$$\{U\} = \{U_D\} + [P_1] \begin{Bmatrix} SM_I \\ CL_I \end{Bmatrix} \quad \dots VII'.I.7$$

Moyennant quoi, par une série de manipulations sur les vecteurs et les matrices, on peut écrire :

$$\{U_I\} = [P] \begin{Bmatrix} SM_I \\ CL_I \end{Bmatrix} + \{U_D\} \quad \dots VII'.I.8$$

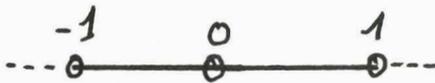
Equation matricielle qui peut encore s'écrire :

$$\{U_I\} = [A] \begin{Bmatrix} r_I^* \\ m_I^* \end{Bmatrix} + \{U_D\} \quad \dots VII'.I.9$$

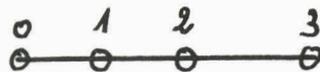
VII'.II - DISCRETISATION

1) Schéma

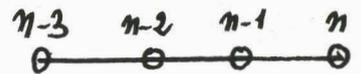
Nous choisissons un schéma linéaire centre (fig. 1) pour les dérivées premières et secondes figurant dans les équations I, II et III et des schéma décentrés (fig. 2a et 2b) pour les dérivées aux noeuds où s'appliquent les équations I', II' et III'.



Fig(1)



Fig(2-a)



Fig(2-b)

2) Méthode de calcul

Soient un certain nombre de noeuds, numérotés par exemple de - 2 à 2 et régulièrement espacés, à la distance Δ les uns des autres.

Ecrivons un développement en série de Taylor d'une fonction pour ses valeurs prises aux noeuds $-2, -1, 1$ et 2 en fonction de sa valeur au noeud 0 .

$$f_1 = f_0 + \Delta \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\Delta^3}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \dots$$

$$f_{-1} = f_0 - \Delta \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} - \frac{\Delta^3}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \dots$$

$$f_2 = f_0 + 2\Delta \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{4\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{8\Delta^3}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \dots$$

$$f_{-2} = f_0 - 2\Delta \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{4\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} - \frac{8\Delta^3}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \dots$$

multiplions par a, b, c, d et faisons la somme des 4 relations ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} (af_1 + bf_{-1} + cf_2 + df_{-2}) &= (a+b+c+d)f_0 \\ &+ \Delta(a-b+2(c-d)) \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} (a+b+4(c+d)) \\ &+ \frac{\Delta^3}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} (a-b+8(c-d)) + \dots \end{aligned}$$

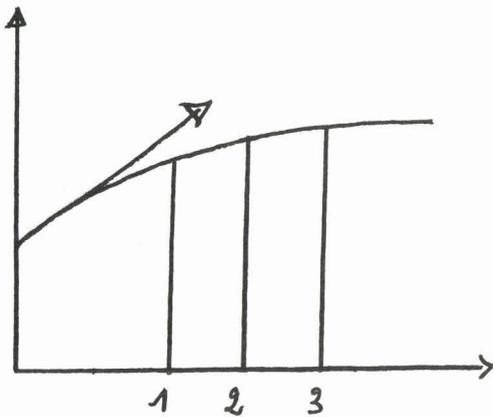
Pour évaluer la valeur approchée à un ordre donné près d'une dérivée partielle quelconque de f au noeud 0 , il suffit d'imposer aux coefficients a, b, c, d un certain nombre de contraintes, de façon à annuler les coefficients des dérivées d'ordre inférieurs (à cet ordre).

Avec le schéma centré à 3 noeuds de la figure 1, on a :

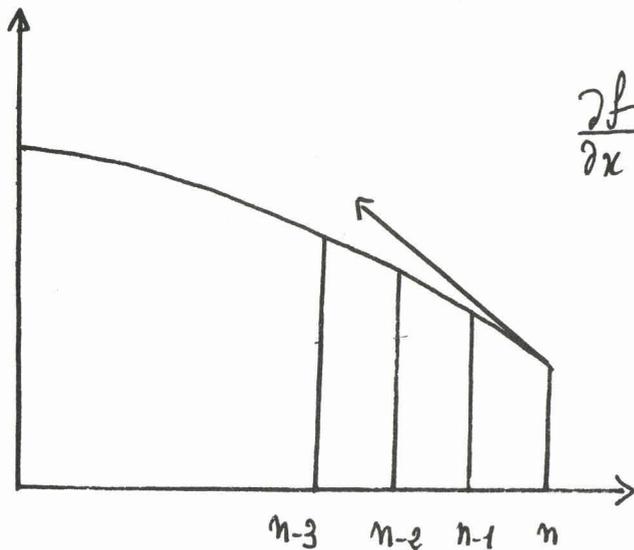
$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2\Delta} + O(\Delta^3)$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{\Delta^2} + O(\Delta^3)$$

Le principe de calcul est le même pour les dérivées premières aux noeuds 0 et n, à partir des schémas de la figure 2.



$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3}{6\Delta} + O(\Delta^4)$$



$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = \frac{11f_n - 18f_{n-1} + 9f_{n-2} - 2f_{n-3}}{6\Delta} + O(\Delta^4)$$

3) Discretisation des équations I, II et III.

Posons

$$C(r) = \frac{m^2}{4r^2} + \frac{k^2}{l^2} \quad ; \quad C_1 = \frac{\pi^2}{4} C$$

$$C_2 = (1+\mu) C \quad ; \quad C_3 = (1+\mu) \frac{\pi^2}{4} C$$

$$C_4 = \mu \frac{\pi^2}{4} C \quad ; \quad C_5 = (1+\mu)/r + C_4$$

$$C_6 = 2(1+\mu) \frac{\pi^2}{4} \frac{m^2}{4r^2} \quad , \quad C_7 = \mu \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{m^2}{4r^2} - \frac{k^2}{l^2} \right)$$

$$C_8 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{2\pi m^2}{4r^3} - (1+\mu) C_1 C_r \right) \quad ; \quad C_9 = \frac{\pi^2}{4} \left(2\mu \frac{m^2}{4r^2} + C_2 \right)$$

Désignons par HR_{-1} , HR_0 , HR_1 et par $H1_{-1}$, $H1_0$, $H1_1$ les valeurs des fonctions h_{nk}^r et h_{nk}^1 aux noeuds numérotés $-1, 0, 1$ dans le schéma de la figure 1.

La remarque que les coefficients C_i précédents sont des fonctions de r . leurs valeurs seront celles qui correspondent à $r=r_0$ dans les expressions qui vont suivre.

I) s'écrit :

$$(1+\mu)r_0 \frac{HR_{-1} - 2HR_0 + HR_1}{\Delta^2} + (1+\mu) \frac{HR_1 - HR_{-1}}{2\Delta} - C_3 r_0 \frac{H1_1 - H1_{-1}}{2\Delta} - C_5 HR_0 + C_6 H1_0 = BR_0$$

où BR_0 est le vecteur de $-g_{nk}^r$ pour $r=r_0$.

Pour II) on aura :

$$C_4 r_0 \frac{H_{1-1} - 2H_{10} + H_{11}}{\Delta^2} + C_7 \frac{H_{11} - H_{1-1}}{2\Delta} + C_3 r_0 \frac{HR_{-1} + HR_{-1}}{2\Delta} \\ + C_8 H_{10} + C_9 HR_0 = B_{10}$$

où B_{10} est la valeur de $-g_{nk}^1 - \Phi_{nk}^n - (r_0 - R) S_{nk}^n$ pour $r = r_0$

Pour III : soient H_{2-1} , H_{20} et H_{21} les valeurs de h_{nk}^2 aux noeuds -1, 0 et 1 ainsi que $C_{10} = C_4 (\frac{1}{r} - C_{1r})$. On obtient :

$$C_4 r_0 \frac{H_{2-1} + 2H_{20} + H_{21}}{\Delta^2} + C_4 \frac{H_{21} - H_{2-1}}{2\Delta} + C_{10} H_{20} = B_{20}$$

où B_{20} est la valeur du second membre de III pour $r = r_0$.

Les équations ci-dessus s'écrivent encore :

$$HR_{-1} \left[\frac{(A+2M)r_0}{\Delta^2} - \frac{A+2M}{2\Delta} \right] - HR_0 \left[\frac{(A+M)r_0}{\Delta^2} + C_5 \right] \\ + HR_1 \left[\frac{A+2M}{2\Delta} + \frac{(A+2M)r_0}{\Delta^2} \right] + C_6 H_{10} - \frac{C_3 r_0}{2\Delta} (H_{11} - H_{1-1}) = BR_0$$

...VII'.II.1

$$H_{1-1} \left(\frac{C_4 r_0}{\Delta^2} - \frac{C_7}{2\Delta} \right) + H_{10} \left(C_8 - \frac{2C_4 r_0}{\Delta^2} \right) + H_{11} \left(\frac{C_7}{2\Delta} + \frac{C_4 r_0}{\Delta^2} \right)$$

$$+ C_9 HR_0 + \frac{C_3 r_0}{2\Delta} (HR_1 - HR_{-1}) = B_{10}$$

...VII'.II.2

$$H_{z,-1} \left(\frac{C_4 r_0}{\Delta^2} - \frac{C_1}{2\Delta} \right) + H_{z0} \left(C_{10} - \frac{2C_4 r_0}{\Delta^2} \right) + H_{z1} \left(\frac{C_7}{2\Delta} + \frac{C_4 r_0}{\Delta^2} \right) = B z_0$$

...VII'.II.3

4) Discretisation des équations I', II', III'

Pour le noeud $r_0 = R \pm h$, on utilise le schéma de la figure 2-a, ce qui donne :

Pour I' :

$$\Delta H R_0 + (\lambda + 2\mu) \frac{r_0}{6\Delta} [-11H R_0 + 18H R_1 - 9H R_2 + 2H R_3] - \lambda_1 C_1 r_0 H_{10} = P_{R_0}$$

Pour II' :

$$\frac{C_4 r_0}{6\Delta} [-11H_{10} + 18H_{11} - 9H_{12} + 2H_{13}] + C_4 r_0 H R_0 - C_{11} H_{10} = P_{10}$$

$$\text{avec } C_{11} = 2\alpha \pi^2 \eta^2 / 44^2 r^2$$

Pour III' :

$$\frac{C_4 r_0}{6\Delta} [-11H_{20} + 18H_{21} - 9H_{22} + 2H_{23}] - C_4 H_{20} = P_{20}$$

les quantités P_{R_0} , P_{10} et P_{20} sont les valeurs respectives de second membre de I', II', III' pour $r = r_0$.

Pour le noeud $r_n = R + h$ (fig. 2-b) on obtient :

pour I' :

$$\Delta H R_n + \frac{(\lambda + 2\mu) r_n}{6\Delta} [11H R_n - 18H R_{n-2} - 2H R_{n-3}] - \lambda C_1 r_n H_{1n} = P_{R_n}$$

Pour II' :

$$\frac{C_4 r_n}{6\Delta} [11H1_n - 18H1_{n-1} + 9H1_{n-2} - 2H1_{n-3}] + C_4 r_n HR_n - C_{11} H1_n = P1_n$$

Pour III' :

$$\frac{C_4 r_n}{6\Delta} [11H2_n - 18H2_{n-1} + 9H2_{n-2} - 2H2_{n-3}] - C_4 H2_n = P2_n$$

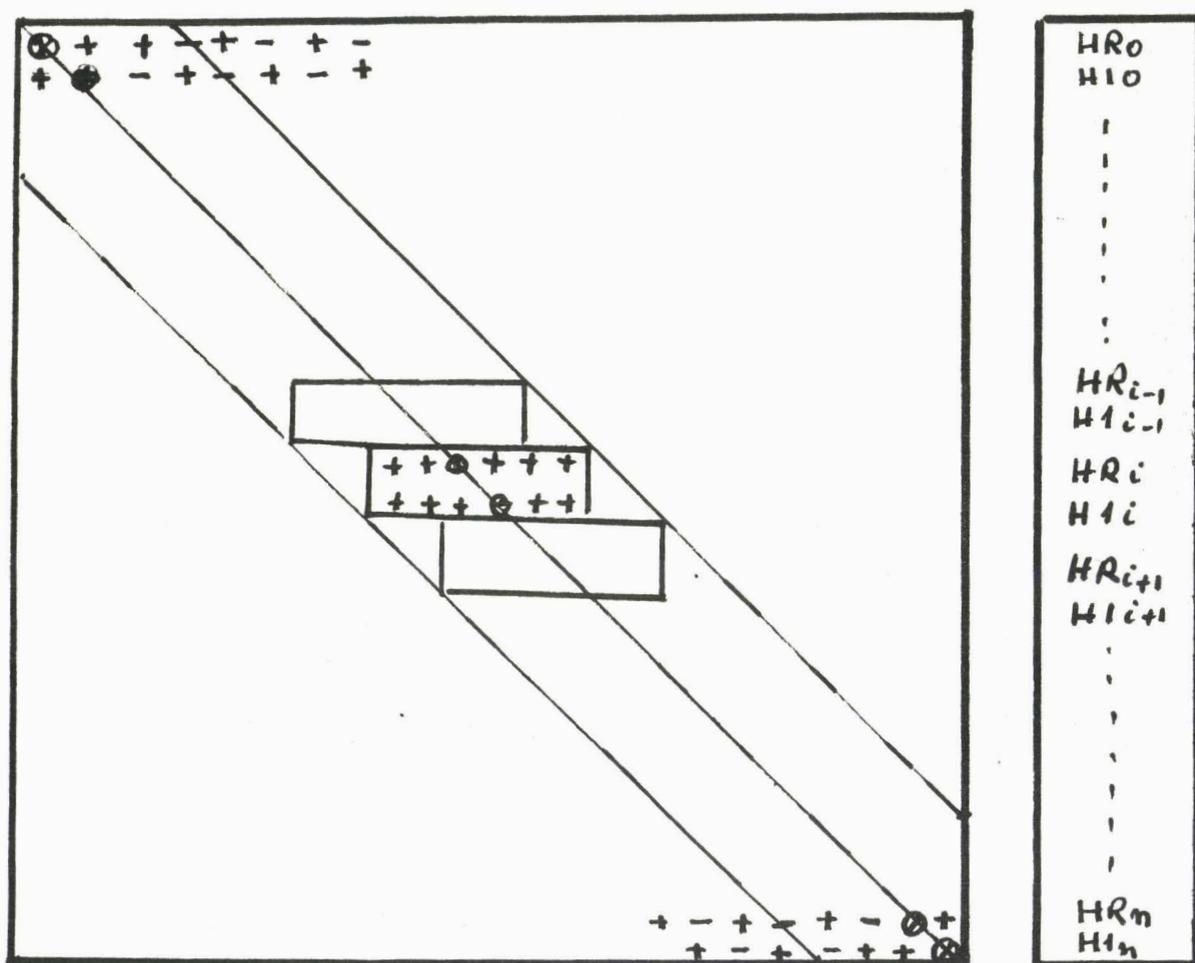
5) Forme des opérateurs discrétisés

Les coefficients des opérateurs discrétisés précédents sont définis en chaque noeud pour une valeur donnée du couple (n,k).

Du fait du couplage des équations I et II, il est intéressant de regrouper les inconnues HR et $H1$, de façon à minimiser la largeur de la bande de la matrice D pour chaque noeud, on placera dans $\{h\}$ la valeur de HR et de $H1$ correspondante - de ce fait, les lignes de la matrice D porteront alternativement les coefficients de l'une et l'autre équation.

On peut représenter, au sein de la matrice D , la sous matrice bloc diagonale relative, pour une valeur donnée de (n,k) , aux équations I et II. Les deux premières et les deux dernières lignes correspondent aux équations I' et II' discrétisées aux noeuds 0 et n.

Le système matriciel prend alors l'aspect suivant :



BUS
LILLE

Compte tenu des faibles dimensions de telles sous matrices et de la structure diagonale de D , il convient de calculer les inverses de chacune de ces sous-matrices pour former D^{-1} par assemblage.

CONCLUSION GENERALE

Au long de ce travail, nous avons généralisé l'essai consacré à l'étude d'une théorie raffinée des plaques isotropes de M. SOUCHET [1], aux plaques transversalement isotropes et aux coques cylindriques.

Comme plusieurs problèmes surgissent, notre conclusion porte sur trois aspect :

- Aspects positifs.
- Critiques et problèmes ouverts.
- Domaines d'applications.

L'approche que nous généralisons ici est de nature différente des théories antérieures qui sont en général obtenues à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle, soit par intégration de ces équations sur la variable épaisseur, c'est-à-dire le long des fibres, soit par des hypothèses, sur les déplacements et les contraintes, faites à l'intérieur de la plaque et de la coque. Toutes ces théories découplent les lois de comportement de flexion et de contrainte plane.

Après avoir rappelé les équations de l'élasticité tridimensionnelle (Ch. II, Ch. II') nous obtenons une formulation variationnelle par intégration sur les feuilletts de la plaque et de la coque (Ch. IV, Ch. III').

Des hypothèses "naturelles" compatibles sont faites sur les déplacements et les charges sur les bords seuls de la plaque et de la coque (et non à l'intérieur de celle-ci) (Ch. V, Ch. IV') cette formulation a l'avantage de n'introduire dans les termes-frontières que les grandeurs mécaniques significatives en théorie des plaques et coques : déplacements moyens et rotations moyennes de la section droite sur le bord Σ , résultantes et couples des efforts exercés sur le bord ce qui permet une comparaison avec les théories de coques usuelles.

Ce travail conserve un couplage entre flexion et contrainte plane aussi bien dans le cas des plaques transversalement isotropes que dans le cas des coques cylindriques.

La théorie a été appliquée à une plaque circulaire transversalement isotrope (Ch. VII), la contrainte normale au bord r_n^* se comporte de la même façon que la contrainte normale dans le cas isotrope, par contre le moment de flexion au bord m_n^* , quant à lui, est de l'ordre de h^2 alors qu'il est indépendant de l'épaisseur de la plaque dans le cas isotrope; ceci semble exprimer une plus grande rigidité à la flexion dans le cas d'une plaque transversalement isotrope. Néanmoins cette différence de moments entre les cas isotrope et transversalement isotrope, qui est de l'ordre de $\frac{R^2}{h}$, se présente comme une singularité et est discutable sur le plan de la signification physique. Elle pourrait s'expliquer à partir de l'hypothèse de l'axisymétrie.

Par ailleurs la formulation faite pour une coque cylindrique isotrope permet de passer au cas d'une plaque rectangulaire isotrope : pour cela il suffirait de faire tendre R vers l'infini pendant que $R\alpha$ reste constante, les fonctions propres w_{nk} s'exprimant de la même façon, à part un simple changement de notation : $\frac{n\pi\theta}{2\alpha}$ devient $\frac{n\pi y}{2b}$.

CRITIQUES ET PROBLÈMES OUVERTS

Cependant plusieurs problèmes ouverts se présentent qu'il serait intéressant d'essayer de résoudre.

- Existence et unicité de la solution

La formulation variationnelle faite, tenant compte des approximations, (Ch. V, Ch. IV') n'est pas équivalente aux équations de l'élasticité tridimensionnelle. Par conséquent le problème de l'existence et de l'unicité de la solution constitue une question importante. En ce qui concerne ce travail

nous avons admis que les approximations faites fournissent des "théories équivalentes". En fait dans les applications nous savons que la solution tridimensionnelle unique vérifie la formulation variationnelle.

- Les bords sont simplement appuyés

Le choix des fonctions propres $w_{i/\Sigma} = 0$ (VI.1) et $w_{nk/\Sigma} = 0$ (V'.1) ne constitue pas nécessairement le meilleur choix possible; par notre façon de faire, outre le fait que u_1 soit nul sur le bord, nous imposons que u_0 , u_r le soient aussi, autrement dit, nous sommes ainsi amenés à réduire l'étude à celui du cas particulier d'une plaque et d'une coque à bords simplement appuyés. Pour relever cet inconvénient, il suffirait de faire un autre choix des fonctions propres de sorte que le déplacement radial u_r pour la coque cylindrique et le déplacement suivant l'épaisseur u_0 pour la plaque, ne s'annulent pas sur le bord Σ .

- L'immobilité des coins

La formulation faite pour une coque cylindrique ouverte (par conséquence pour une plaque rectangulaire) fixe les coins de la coque. En effet, les coins constituant des points de singularités, les déplacements et les rotations y étant nuls, cette difficulté peut être levée :

Au moyen d'un champ de déplacement \vec{U} donné, auquel correspond un champ de forces extérieures calculé à partir des équations de l'équilibre, il est possible de rendre mobiles les coins et les bords du domaine.

Les forces ainsi introduites sont annulées par leurs opposées appliquées dans la formulation générale. Le champ ainsi calculé se superpose au champ donné initialement.

Ceci permet de lier les déplacements de bords interdits par la formulation aux efforts de bords correspondants à ces mobilités et donc

d'élargir les possibilités du choix des conditions aux limites.

- L'hypothèse de "l'axisymétrie" dans le cas d'une plaque circulaire

Nous avons posé que les fonctions propres (déplacements), moment de flexion et contraintes normales sont indépendants de θ pour une plaque circulaire transversalement isotrope encastrée et chargée uniformément. Cette hypothèse de l'axisymétrie nous paraissait "naturelle", or il nous semble qu'il aurait été plus prudent de considérer la seule périodicité de 2π pour θ , c'est-à-dire développer les fonctions propres en série de Fourier (cf. VII.1) et de même exprimer que r_n^* et m_n^* sont périodiques en θ .

- Le cas torique

Dans le cas torique comme dans le cas cylindrique à contour quelconque, le problème de la détermination des fonctions propres se pose : en effet, la dépendance des fonctions propres w_{nk} en r (variable épaisseur) n'est plus explicite comme c'était le cas pour une coque cylindrique et une plaque rectangulaire, surtout si l'on prend une portion de tore de forme quelconque.

- Domaines d'applications

Le modèle utilisé ici présente l'avantage d'être valable au voisinage des points singuliers :

- forces concentrées;
- zones à fortes courbures.

Il peut être utilisé localement et être raccordé à un domaine extérieur par les conditions aux limites de LOVE-KIRCHOFF.

Exemple : La création d'un super élément fini raccordable aux éléments standards de coques minces.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. SOUCHET Théorie des plaques élastiques.
Journal de Mécanique, Vol. 17, n° 1, 1978.
- [2] L. SOLOMON Elasticité linéaire. Masson 1968.
- [3] V. PANC Theories of static plates.
Edition anglaise Noordhoff, 1975.
- [4] NOVOZHILOV The theory of thin shells. Edition anglaise.
Noordhoff. 1970.
- [5] S. TIMOSHENKO - Theories des plaques et coques. Dunod, 1968
- Theory of elasticity. Mc Graw Hill Book, 1934.
- [6] GERMAIN Cours de Mécanique des Milieux Continus.
Musson 1973.
- [7] GURTIN Linear theory of elasticity. Hand buch der
Physik. Vol. VI a1.
- [8] J.L. LIONS Methodes d'approximation numérique.
Tome I. Cours polytechnique, Hermann.
- [9] A. DELACHET Le calcul vectoriel. Que suis je 1955.
- [10] G. GOUDET Les fonctions de Bessel. Masson 1954.
- [11] F. PARSY Thèse d'Etat. Lille 1975.
- [12] LOVE A treatise in the mathematical theory of
Elasticity. Dover Pub. - New York 1927.

- [13] COURBON Cours de Résistance des Matériaux. Dunod.
- [14] R. L'HERMITE Résistance des Matériaux Théoriques et expérimentale, Dunod 1954.
- [15] J. BASS Cours de Mathématiques Tome I, Masson 1977.
- [16] L. BRILLOUIN Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité, Masson 1960.
- [17] L. H. DONNEL Beams, plates and shells, Mc Graw Hill, New York, 1976.
- [18] P. ROUGEE Equilibre des coques élastiques minces inhomogènes en théorie non linéaire. Thèse, Paris 1969.
- [19] P.M. NAGHDI - Theory of plates and Shells, Handbuch der Physik, vol. VI a.2. Springer Verlag, Berlin 1972.
- On the theory of thin elastic shells. J. Quart of appl. Math. vol. 14, n° 4, Janvier 1957.
- [20] KOITER On the foundation of the linear theory of thin elastic shells I, II. Proc. Kon. Ned. Ak. wet 1373 (1970).
- [21] REISSNER The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. App. Mech., vol. 12, 1945.
- [22] F. MIGNOT, J.P. PUEL, P.M. SUQUET Flambage des plaques élastiques multiperforées. Annales Faculté des Sciences Toulouse, vol. III, 1981, 1 à 57.



RESUME

Dans la théorie présentée, l'auteur, suivant l'idée de M. SOUCHET, fait l'hypothèse de KIRCHOFF-LOVE sur la partie du bord normal à la surface moyenne, d'une part et d'autre part y linéarise les efforts appliqués.

De plus, à partir des équations de l'Elasticité tridimensionnelle l'auteur obtient une formulation variationnelle par intégration sur les feuillets moyens (et non suivant l'épaisseur comme dans les théories classiques).

Cette méthode permet de se ramener à intégrer des équations différentielles en la variable épaisseur ce qui facilite une étude asymptotique de la solution du type membrane et qui permet une comparaison avec les théories de coques usuelles.

MOTS CLEFS : PLAQUES ELASTIQUES
COQUES ELASTIQUES
FORMULATION VARIATIONNELLE.