l° d'Ordre : 306

50376

1982 THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

50376

1982 221

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

SYLVIE MERVIEL-LELEU

Ingénieur IDN

APPLICATION DES METHODES DE SIMULATION ANALOGIQUE LA A REPRESENTATION D'ETAT SYSTEMES DE CONTINUS NON-LINEAIRES.



Soutenue le 8 Juillet 1982 devant le Jury d'examen

MM

Président P. BORNE F. LAURENT Rapporteur Examinateur J.C. GENTINA R. CHAUSSARD Examinateur Invité D. MEIZEL



A mon mari et à mes parents

AVANT PROPOS

-7-

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université de Lille I .

Je tiens tout d'abord à remercier très vivement Monsieur le Professeur BORNE pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury de Thèse . Qu'il trouve ici le témoignage de ma respectueuse gratitude et de mon profond devouement .

Je suis particulièrement reconnaissante envers Monsieur le Professeur LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique, qui m'a accueillie au sein de son équipe et a su, par ses conseils éclairés et sa grande expérience, m'initier à la recherche. Je tiens à lui exprimer mes vifs remerciements.

Monsieur le Professeur GENTINA m'a , à tout moment , encouragée et soutenue dans mes travaux . Les conseils dont il a su me faire profiter , ainsi que sa présence dans ce jury , m'ont profondément touchée . Qu'il reçoive ici le témoignage de ma reconnaissance .

Je suis grandement honorée de l'intérêt que Monsieur CHAUSSARD, Directeur Général de la SFEE, veut bien porter à cet ouvrage .Qu'il me permette de le remercier très vivement pour sa participation dans ce jury .

Que Monsieur MEIZEL reçoive ici mes très sincères remerciements pour s'être intéressé à ce travail . Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa présence à ce jury .

Enfin , qu'il me soit permis de rendre hommage à tous les chercheurs du Laboratoire de Systématique pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée , ainsi qu'à Madame COPIN qui s'est chargée de la présentation matérielle de ce rapport de thèse .



INTRODUCTION GENERALE

-9-

Les travaux présentés dans ce mémoire, mettent en oeuvre une méthode simple qui permet de définir diverses représentations d'état pour toute une classe de systèmes continus, monovariables, linéaires ou non.

L'étude s'appuie sur la simulation analogique. Elle consiste en premier lieu en une généralisation des méthodes usuelles de calcul qui y sont associées. Celle-ci amène une nouvelle utilisation du schéma de simulation conduisant directement à des représentations d'état par simple lecture.

Plus généralement, une méthode de passage direct d'une représentation d'un système à une autre est exposée dans la deuxième partie. Elle découle d'un ensemble de théorèmes mettant essentiellement en oeuvre la notion de base de polynômes traitée par le calcul matriciel, et conduit à une généralisation des opérateurs de simulation analogique.

Enfin, le troisième chapitre s'attache à démontrer par des exemples l'efficacité des méthodes proposées.

Ainsi, pour deux types de systèmes physiques sont introduites des représentations d'état, qui vérifient les propriétés des processus et en facilitent l'analyse.



CHAPITRE I

APPLICATION DES MÉTHODES DU CALCUL ANALOGIQUE

À LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT



INTRODUCTION

La méthode de mise en équation proposée est induite par les méthodes de représentation usuelles en calcul analogique.

En premier lieu, ce chapitre rappelle les outils du calcul analogique, basés sur les opérateurs qu'il met en oeuvre. Ceci conduit à préciser la classe de systèmes étudiés, rattachés à la notion de fonction de transfert.

Les divers modes de représentation d'un système conduisent à une interprétation par la notion d'espace d'état, qui permet l'utilisation des méthodes du calcul matriciel. La seconde partie du chapitre montre alors comment un schéma de simulation, élaboré par une modélisation à partir d'une fonction de transfert, induit également une mise en équation d'état déterminée par simple lecture.

Enfin, l'application aux trois méthodes usuelles de simulation permet de montrer qu'elles sont directement associées à trois formes canoniques de représentation des systèmes continus monovariables.

I - LA SIMULATION ANALOGIQUE

1.1 - LES METHODES DE SIMULATION ANALOGIQUE

Les impératifs industriels exigent une bonne maîtrise des processus mis en oeuvre. La simulation analogique est un outil précieux qui apporte souvent une contribution non négligeable aux études préalables. En effet, elle permet de visualiser le comportement du modèle mathématique qui approche au mieux la réalité physique. La calculatrice analogique élabore la solution d'une équation différentielle ou d'un système différentiel dont on a précisé les valeurs initiales. Une étude par simulation analogique implique donc un modèle mathématique adapté du système étudié. Dans ce cas, les méthodes de calcul analogique permettent de transformer un modèle initial en un schéma de simulation. Celui-ci ne met en oeuvre que les opérateurs disponibles sur la calculatrice analogique, dont le choix a été guidé par les impératifs techniques et l'expérience. Ceux-ci sont maintenant normalisés.

1.2 - OPERATEURS FORMELS DU CALCUL ANALOGIQUE

Actuellement, l'élaboration d'un schéma de simulation implique dans la plupart des cas une mise en oeuvre à partir des seuls opérateurs normalisés disponibles sur la calculatrice. Leur nombre est relativement restreint. Il convient de préciser les opérations réalisables.

-14-

a) Intégration

L'intégrateur est l'opérateur de base du calcul analogique, qu'il justifie.

Dans la suite, nous symboliserons l'intégration d'une fonction du temps par la multiplication de cette fonction par $\frac{1}{n}$.

Le schéma-bloc correspondant, dont l'entrée x et la sortie y sont des fonctions du temps, prend la forme indiquée figure I-!.



Figure I-!

Cette représentation correspond à l'équation différentielle : y' = x.

b) Sommation

Le sommateur effectue la somme de ses entrées. Dans la suite, cette opération interviendra pour chaque noeud convergent entre plusieurs branches orientées du graphe (la flèche indique le sens du transfert de l'information : entrée ou sortie). Ainsi la figure I-2 représente l'opération :

 $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ lorsque y, $x_1, x_2 \ldots x_n$ sont des fonctions scalaires du temps.





Nous utilisons également la multiplication d'une fonction du temps par un coefficient constant quelconque appartenant à R .

Le schéma-bloc associé est indiqué figure I-3.



Figure I-3

Celle-ci représente l'équation : y = kx pour x et y fonctions du temps, k coefficient réel quelconque, positif ou négatif. Cet opérateur correspond formellement au potentiomètre de la calculatrice analogique. Toutefois la symbolique choisie, qui est indépendante des contraintes d'appareillage, généralise l'opérateur en ne tenant pas compte des impératifs technologiques. Ainsi le changement de signe, représenté figure I-4, appartient à cette catégorie.



Figure I-4

Remarque : dérivation

Le dérivateur n'est pas un opérateur disponible sur la calculatrice analogique. La raison n'en est pas seulement technique, car il existe une explication formelle à cela : en effet il serait impossible d'introduire les valeurs initiales dans une simulation basée sur l'existence des seuls dérivateurs.

L'opération de dérivation, notée p, peut ainsi apparaître dans les calculs intermédiaires ; elle ne peut être utilisée dans un schéma de simulation. 1.3 MODELISATION DES SYSTEMES CONTINUS LINEAIRES

Dans un premier temps, nous rappelons les méthodes de simulation des systèmes continus linéaires monovariables.

> a) Définition des systèmes continus linéaires monovariables. Notion de fonction de transfert.

Un système continu linéaire monovariable est par définition régi par une équation différentielle à coefficients constants.

Il existe entre l'entrée u(t) et la sortie y(t), toutes deux fonctions du temps, une relation telle que :

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} u^{(j)}$$

$$a_{n-i} = C^{ste} \in \mathbb{R} , \forall i \in [0, n]$$

$$b_{m-j} = C^{ste} \in \mathbb{R} , \forall j \in [0, m]$$
(I-1)

Posons :

$$y^{(i)} = \frac{d^{i}y}{dt^{i}} = p^{i} \cdot y$$
 (I-2)

L'opérateur symbolique p est équivalent à une multiplication formelle de la variable par $\frac{d}{dt}$.

Cette convention permet de représenter l'équation (I-1) sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} p^{i} y = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} p^{j} u$$
 (I-3)

Soit :

$$y \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} p^{i}\right) = u \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} p^{j}\right)$$
(I-4)

Il en résulte :

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} p^{j}}{\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-5)

Par définition W(p) est la fonction de transfert du système [1, 2] •

Dans le cas où une racine du numérateur est également racine du dénominateur, il y a simplification d'un pôle par un zéro. Il apparaît ainsi que la fonction de transfert représente le système initial à un coefficient multiplicatif près du numérateur et du dénominateur. Dans la suite, nous écarterons cette possibilité, ce qui revient à limiter l'étude aux systèmes continus linéaires monovariables commandables et observables, c'est-à-dire représentés sans ambiguité par une fonction de transfert. b) <u>Simulation d'un système représenté par une fonction</u> de transfert.

A partir de la fonction de transfert d'un système, les méthodes de calcul analogique conduisent à un schéma de simulation qui constitue une autre représentation du système. Le principe consiste à se ramener aux opérations formellement possibles.

Trois méthodes principales sont souvent mises en évidence : les deux méthodes du graphe et la méthode modale ; elles conduisent chacune à un schéma de simulation particulier d'un même système [3, 4, 5]

Position du problème

Soit un système continu linéaire monovariable commandable et observable d'ordre n, d'entrée u , de sortie y et défini par sa fonction de transfert telle que :

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} p^{j}}{\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} p^{i}} = \frac{N(p)}{D(p)} \qquad a_{n} \neq 0$$
(I-6)

Nous supposerons en outre que d° $N(p) \leq d^{\circ} D(p) - 1$. En effet, l'opération de dérivation étant exclue, les degrés du numérateur et du dénominateur sont au plus égaux. S'il y a égalité des degrés, on peut décomposer une telle fonction de transfert F(p) en $F(p) = C \div W(p)$, avec C constante et W(p) satisfaisant les hypothèses ci-dessus. Le problème est donc ramené à l'étude de ces seules fonctions de transfert.

Sans préjuger de la généralité de la représentation, nous posons
$$a_n = 1$$
.

Il vient alors :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-7)

La première méthode du graphe :

En faisant intervenir une variable intermédiaire x et en séparant numérateur et dénominateur, on peut écrire :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{u}$$
 (I-8)

avec :

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{u}} = \frac{1}{D(\mathbf{p})} \Rightarrow \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{u} - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{a}_{n-i} \mathbf{x}^{(i)}$$
(I-9)

$$\frac{y}{x} = N(p) \Rightarrow y = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} x^{(j)}$$
(I-10)

Ceci conduit au schéma de principe présenté figure I-5.



Figure I-5

Ce résultat est obtenu en supposant $x^{(n)}$ connu et en l'intégrant n fois. Alors la relation(I-9)conduit à élaborer la somme pondérée des dérivées d'ordre inférieur et de l'entrée de manière à les lier à $x^{(n)}$.

885 UU L'équation (I-10) permet ensuite d'obtenir la sortie y par simple sommation des grandeurs obtenues par la méthode précédente.

Notons que, si l'on étudie une fonction de transfert quelconque sur laquelle aucune restriction n'a été faite, la réalisation de cette simulation est commandable, mais pas toujours observable. En effet les dérivées successives de x constituent un vecteur état dont la définition est sans rapport avec le numérateur. Toutefois, nos hypothèses écartent cette éventualité en assurant dès le départ la commandabilité et l'observabilité.

La seconde méthode du graphe :

Le système étudié est toujours régi par la fonction de transfert (I-7) :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-7)

Divisons haut et bas par pⁿ. Il vient :

$$\frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{n-j}}{p^{n-j}}}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{p^{n-i}}}$$
(I-11)

-23-

Soit encore :

$$y = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{p^{n-j}} (b_{n-j} u - a_{n-j} y)$$
 (I-12)

Ainsi y apparait comme une somme pondérée de ses intégrales et de celles de u.

On en déduit immédiatement une représentation non redondante quant au nombre d'intégrateurs (figure I-6)



Cette fois, dans le cas général, la réalisation est toujours observable mais pas toujours commandable. En effet, dans le cas d'une entrée nulle, tout se passe comme si le numérateur était constant. De nouveau, les hypothèses excluent la non commandabilité du résultat.

La méthode modale :

Nous étudions toujours le système défini par la fonction de transfert (I-7) :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-7)

On peut alors décomposer cette dernière, fraction rationnelle en p, en élèments simples. Cette décomposition peut comporter :

- des termes du l^{er} degré pour les racines simples du dénominateur, tels que :

$$\frac{\beta}{p + \lambda}$$

- des termes du 2nd degré pour les racines imaginaires conjuguées :

$$\frac{\alpha p + \beta}{p^2 + ap + b}$$

- des termes de degré k , 0 < k \leqslant q, pour les racines q $\stackrel{\mbox{ièmes}}{\mbox{du}}$ du dénominateur :

$$\frac{N(p)}{(p+\lambda)^k}$$

avec N(p) numérateur de degré k - 1.

Supposons dans un premier temps, pour alléger la présentation, que le dénominateur de la fonction de transfert posséde n racines réelles et distinctes, et notons les :

$$-\lambda_{i}, i = 1, 2 \dots, n$$

Dans ces conditions, il vient :

$$W(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_{n-i+1}}{p + \lambda_{i}} = \frac{y}{u}$$
 (I-13)

Soit :

$$\frac{x_{i}}{u} = \frac{\beta_{n-i+1}}{p+\lambda_{i}}$$
(I-14)

On a alors :

$$x_i (p + \lambda_i) = \beta_{n-i+1}$$
 u, d'où x'_i = β_{n-i+1} u - $\lambda_i x_i$ (I-15)



On obtient ainsi le schéma de simulation présenté figure I-7 :

Dans ce cas, au contraire des deux schémas de simulation obtenus précédemment, les intégrateurs sont disposés en parallèle et non plus en série.

Si à présent la décomposition en élèments simples d'une fonction de transfert comporte des racines multiples ou complexes conjuguées, l'allure globale du schéma reste la même, mais des branches de simulation plus élaborées viennent se placer en parallèle avec les branches élémentaires du premier ordre.

Si les numérateurs sont d'ordre supérieur à 0, la modélisation de ces branches élaborées nécessite la mise en oeuvre d'une des méthodes précédentes.

Exemple :

La seconde méthode du graphe, appliquée au cas d'un élèment simple correspondant à deux racines complexes conjuguées, soit , conduit à la branche de simulation de la figure I-8 :





Figure I-8

-28-

c) Détermination d'une jonction de transfert à partir d'un schéma de simulation.

Nous avons vu les trois méthodes principales qui permettent de représenter un système régi par une fonction de transfert à l'aide d'un schéma de simulation. Réciproquement, il est possible sans problème d'identifier une fonction de transfert représentée par un schéma de simulation dont la forme est normalisée. Dans le cas contraire, cette détermination s'effectue par lecture des opérations symbolisées sur le schéma et élimination des variables intermédiaires entre l'entrée et la sortie.

Exemple d'application :



Figure I-9

$$\frac{x_1}{u - \lambda_3 x_2} = \frac{1}{p} \qquad p x_1 = u - \lambda_3 x_2 \qquad (I-16)$$

$$\frac{x_2}{x_1 - \lambda_2 x_2} = \frac{1}{p} \quad d' \tilde{ou} \quad (p + \lambda_2) x_2 = x_1 \quad (I-17)$$

$$\frac{y}{x_2 + \lambda_1 x_1} = \frac{1}{p} \qquad py = x_2 + \lambda_1 x_1 \qquad (1-18)$$

L'élimination de x_1 et x_2 donne finalement le résultat :

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{\lambda_1 p + \lambda_1 \lambda_2 + 1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 + \lambda_2 p + \lambda_3}$$
(I-19)

Conclusion :

Nous avons présenté l'aspect fonctionnel du calcul analogique, tel qu'il est mis en oeuvre habituellement. Il permet en particulier la représentation des systèmes continus linéaires monovariables. Les propriétés de commandabilité et d'observabilité ne sont en général pas simultanées dans une réalisation analogique des systèmes étudiés.

Il existe d'autres modes de représentation de tels systèmes. En particulier il s'avère commode, dans de nombreux cas pratiques, d'utiliser une représentation d'état.

L'objet de l'étude suivante est d'associer une représentation d'état à un schéma de simulation. II - NOUVELLE INTERPRETATION DU SCHEMA DE SIMULATION

Dans le paragraphe précédent, nous avons défini par leur fonction de transfert les systèmes continus linéaires monovariables commandables et observables. Nous envisageons maintenant leur représentation par un vecteur état.

II.1 - REPRESENTATION DES SYSTEMES

a) Fonction de transfert

La fonction de transfert ne permet pas de représenter tous les systèmes. Elle implique d'une part la linéarité, d'autre part une entrée et une sortie scalaires.

Pour l'étude de systèmes plus complexes, non linéaires, à entrée ou sortie multiple représentée par un vecteur, il faut définir d'autres types de représentation.

Il a déjà été proposé, pour les systèmes multivariables, une matrice de transfert, qui a été étendue au cas des systèmes non linéaires par CHAUSSARD [6]. Cette dernière définition fait intervenir la notion de réponse indicielle pour caractériser le comportement de chaque sortie par rapport aux entrées. Toutefois la méthode par vecteur état semble la plus générale.

b) Définition de l'état

Un vecteur état est un ensemble de n valeurs de paramètres servant à caractériser un système donné. Par définition, la connaissance de l'évolution des entrées sur un intervalle de temps $[t_i, t_f]$ et du vecteur état à l'instant initial t_i , permet de prévoir le comportement du système, en particulier ses sorties, sur tout l'intervalle $[t_i, t_f]$. [2, 3]

L'espace d'état est la base du repère orthonormé sur laquelle s'expriment les n composantes du vecteur état.

Celui-ci est décrit par l'identité (I-20) :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_{1}(t) \\ \mathbf{x}_{2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n}(t) \end{cases}$$

(1-20)

$$\begin{cases} x(t) \in \mathbb{R}^{n} \\ x_{i}(t) \in \mathbb{R} , \forall i \in [1, n] \end{cases}$$

Dans la plupart des cas, on utilise un vecteur état comportant le nombre nécessaire et suffisant de composantes. Toutefois, l'emploi de descriptions redondantes est possible. [7].

-32-

Dans la suite, nous limiterons notre étude à la classe de systèmes qui peuvent être représentés de la façon suivante :

t variable temps, t
$$\in [t_0, \infty [t_0 \in \mathbb{R}]$$

x(t) vecteur état, x(t) $\in \mathbb{R}^n$, x(t)^T = {x₁(t), x₂(t) ... x_n(t)}
u(t) vecteur entrée u(t) $\in \mathbb{R}^p$, u(t)^T = {u₁(t), u₂(t) ... u_p(t)}
y(t) vecteur sortie y(t) $\in \mathbb{R}^q$, y(t)^T = {y₁(t), y₂(t) ... y_q(t)}
p et q bornés

La dérivée x'(t) étant supposée explicite, les équations représentatives du système sont :

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t)$$
 (I-21)
 $f : \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{p} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$
 (I-22)

$$g: \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{p} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{q}$$

f permettant en principe de déterminer la solution de l'équation (I-21) à partir de l'entrée u(t) et des valeurs initiales. [8]

c) Représentation d'état matricielle

D'après la définition précédente, tout vecteur dont les composantes sont combinaison linéaire des composantes d'un vecteur état x(t), est également vecteur état pour le système considéré.

Il est donc possible d'envisager plusieurs représentations d'état d'un même système : l'étude peut être facilitée par le choix d'une représentation adaptée. [réf. 9 à 13].

Il est commode, alors, de ramener les équations (I-21) et (I-22) à une formulation matricielle, qui permet l'utilisation des méthodes de calcul matriciel. En particulier, un changement de vecteur état revient à un calcul de changement de base.

Dans ce cas, les systèmes admettent une représentation de la forme (I-23) :

> $\begin{cases} x'(t) = M(x, u, t). x(t) + B(x, u, t). u(t) \\ y (t) = C(x, u, t). x(t) + D(x, u, t). u(t) \\ x(t) vecteur état , x(t) <math>\in \mathbb{R}^n$ u(t) vecteur entrée, u(t) $\in \mathbb{R}^p$ y(t) vecteur sortie, y(t) $\in \mathbb{R}^q$ M matrice d'ordre n x n , B matrice d'ordre n x p

C matrice d'ordre q x n , D matrice d'ordre q x p

-34-

Le cas général de l'équation (I-23) correspond aux systèmes non linéaires non stationnaires. Les systèmes décrits par cette équation sont linéaires si les quatre matrices sont indépendantes de x et u, stationnaires si elles sont indépendantes de t.

Dans le cas particulier d'un système linéaire stationnaire, pour lequel on suppose par ailleurs y scalaire et u scalaire, c'està-dire p = 1 et q = 1, on obtient, d'après (I-23), la mise en équation suivante :

$$x'(t) = M \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

 $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$ (I-24)

$$x(t) \in \mathbb{R}^{n}, u(t) \in \mathbb{R}, y(t) \in \mathbb{R}$$

M matrice d'ordre n x n

B matrice d'ordre n x 1 , soit B vecteur colonne

C matrice d'ordre 1 x n ., soit C vecteur ligne

D matrice d'ordre 1×1 , soit D $\in \mathbb{R}$

Ces quatre matrices étant à coefficients constants.

Si l'on suppose en outre qu'il existe une équation différentielle entre y et u, ces hypothèses sont des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une fonction de transfert commandable et observable. L'étude du paragraphe précédent indique par conséquent qu'il existe également une relation du type (1-7) :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-7)

Ainsi les relations (I-24) et (I-7) constituent deux représentations admissibles du même système.

La présente étude se propose d'associer l'une et l'autre par l'intermédiaire des méthodes de simulation analogique.

II.2 - VECTEUR ETAT INDUIT PAR UN SCHEMA DE SIMULATION

a) Variables d'un schéma de simulation

Examinons un des schémas de simulation obtenus par les méthodes liées aux opérateurs disponibles sur une calculatrice analogique, par exemple celui de la figure I-6 caractéristique de la seconde méthode du graphe. Celui-ci comporte deux variables (l'entrée u et la sortie y) et n intégrateurs. Si on fait correspondre une variable x_i à la sortie du i^{ème} intégrateur, alors la dérivée de cette variable, x'_i, figure avant l'intégrateur. Il suffit donc d'écrire la somme de ses entrées pour obtenir une expression immédiate de cette dérivée x'_i.

D'après la remarque du paragraphe précédent (II.1 c) ceci peut constituer le point de départ d'une mise en équation d'état.

-36-

b) Principe fondamental de la méthode

Cette observation nous suggère l'idée qui va constituer le fondement de la méthode en vue d'obtenir une mise en équation d'état à partir d'un schéma de simulation. Elle conduit à l'énoncé suivant :

Enoncé :

Sur un schéma de simulation d'un système, soit x_i la variable correspondant à la sortie du i^{ème} intégrateur nécessaire à cette simulation. L'ensemble des x_i , i $\in [1, n]$ constitue les composantes d'un vecteur état d'ordre n.

c) Remarque concernant l'entrée u

Cet énoncé ne pose aucune hypothèse sur la nature de la sortie y et de l'entrée u, à condition que celles-ci soient scalaires. Par conséquent, la méthode permet d'envisager le cas où l'entrée u s'exprime en fonction d'autres grandeurs caractéristiques du système. De façon générale, pour un système bouclé, on a une expression du type (I-25) :

$$u = f(y, e, \varepsilon, t, x_{1}, ...)$$

(I-25)

u variable d'entrée de la fonction de transfert

y variable de sortie

e variable commande de la boucle fermée

 ε variable écart

t variable temps, t $\in [t_{0}, \infty)$

x vecteur état à l'instant initial t

La méthode conduit à transformer la fonction de transfert entre u et y en une représentation d'état. Pour obtenir une représentation du système global, il suffit ensuite de reporter la relation de bouclage entre y et u, telle que (I-25), dans les équations obtenues. La méthode conduit à des résultats pour un très grand nombre de systèmes.

- On peut envisager le cas des systèmes linéaires en régime non autonome, décrits par la figure I-10, pour lesquels la relation de bouclage est du type :

u = e - y

(I-26)



Figure I-10
- La méthode convient également pour les systèmes non linéaires à non-linéarité séparable, tel que celui de la figure I-11, dont la relation de bouclage est :

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{I-27}$$

f caractéristique de la non-linéarité



Plus généralement, l'étude des systèmes de type Lur'e Postnikov [14]
 en régime non autonome présentés figure I-12, est possible. Leur
 entrée u s'exprime sous la forme :

$$\varepsilon = e - y \tag{I-28}$$

 $u = f(\varepsilon) = f(\varepsilon - y)$ (I-29)

f caractéristique de la non-linéarité en supposant que le signal de commande est fonction explicite de l'état.



- On peut encore envisager le cas des systèmes interconnectés

$$\begin{array}{c} u_{1} = f(e_{1} - y_{1} + y_{2}) \\ u_{2} = g(e_{2} - y_{2} + y_{1}) \end{array} \end{array}$$



Figure I-13



(1-30)

- ou le cas des systèmes à plusieurs non-linéarités

$$\begin{cases} u_1 = f(y_2) \\ u_2 = g(y_1) \end{cases}$$



(I-31)

Figure I-14

II.3 - SCHEMA DE SIMULATION ET REPRESENTATION D'ETAT

a) Forme matricielle de la représentation d'état

Suivant l'idée de base, on place les x_i, i € [1, n] composantes du vecteur état, à la sortie de chaque intégrateur. Alors les égalités constituant la mise en équation recherchée sont obtenues simplement par lecture des opérations symbolisées sur le schéma, c'està-dire en exprimant la somme des entrées de chaque intégrateur. La structure du schéma implique que les variables qui interviennent dans cette somme sont des variables d'état ou l'entrée u. On a donc :

$$\mathbf{x'}_{i} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \mathbf{x}_{i} + b_{i} \mathbf{u} \quad \forall i \in [1, n]$$
 (I-32)

La juxtaposition des n égalités de cette sorte conduit bien à la formulation matricielle :

$$x'(t) = M \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
(I-33)

$$M = \begin{pmatrix} m_{ij} \end{pmatrix} |_{\leq i \leq n} \\|_{\leq j \leq n}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_i \end{pmatrix} |_{\leq i \leq n}$$

Suivant un raisonnement analogue, on obtient pour la sortie y(t) une relation de la forme :

$$y(t) = C . (t) + D. u(t)$$
(I-34)
$$C = (c_i) \quad 1 \le i \le n$$

$$D \in \mathbb{R}$$

b) Exemple

Reprenons l'exemple de la figure I-9 pour appliquer la méthode proposée précédemment.

Les variables x_i , i $\in [1, 3]$, de la figure I-15 sont donc les variables d'état du système.



Figure I-15

Les équations caractéristiques de chaque opérateur conduisent à écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_1 = \mathbf{u} - \lambda_3 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x'}_2 = \mathbf{x}_1 - \lambda_2 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x'}_3 = \mathbf{x}_2 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi :

1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \\ \mathbf{x'}_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_{3} & 0 \\ 1 & -\lambda_{2} & 0 \\ \lambda_{1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} \qquad (\mathbf{I}-36)$$
$$\mathbf{y} = (0, 0, 1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \end{bmatrix} + 0 \cdot \mathbf{u} \qquad (\mathbf{I}-37)$$

(I-35)

Les deux relations (I-36)et (I-37) correspondent bien à la formulation générale (I-24)

$$x'(t) = M \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

(I-24)
 $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$

On obtient les quatre matrices M, B, C, D par identification.

-44-

Le calcul de la fonction de transfert de ce système, effectué au paragraphe I.3-c , a donné le résultat :

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{\lambda_1 p + \lambda_1 \lambda_2 + 1}{p^3 + \lambda_2 p^2 + \lambda_3 p}$$
(I-38)

La méthode conduit à une mise en équation d'état du système étudié représenté par une fonction de transfert.

c) Remarque sur l'état

Dans l'énoncé du principe de base, nous admettons que l'ensemble des x_i , i $\in [1,n]$ constitue un vecteur état d'ordre n du système. Ceci ne pose aucun problème dans le cadre des hypothèses que nous nous sommes données. Toutefois, dans le cas général, la représentation d'état obtenue peut être redondante, en particulier lorsque la fonction de transfert de départ comporte une simplification d'un pôle par un zéro. D'après nos hypothèses initiales, ce cas est exclus. III - APPLICATION AUX METHODES USUELLES DE SIMULATION

Nous pouvons à présent étudier les représentations d'état associées aux trois principaux schémas analogiques que nous avons présentés au paragraphe I.3-b .

III.1 - LA PREMIERE METHODE DU GRAPHE

a) Mise en oeuvre de la méthode

Sur le schéma de principe de la figure I-5, nous plaçons les variables d'état à la sortie de chaque opérateur. On obtient ainsi :



Les opérations lues sur le schéma sont alors :

$$\frac{x_{n}}{u - a_{1}x_{n} - a_{2} - x_{n-1} - \dots - a_{n-1} - x_{2} - a_{n}x_{1}} = \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow x'_{n} = u - a_{1}x_{n} - a_{2} - x_{n-1} - \dots - a_{n-1} - x_{2} - a_{n}x_{1}$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_{n}} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow x'_{n-1} = x_{n}$$

$$\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow x'_{n-2} = x_{n-1}$$
...
(I-39)
$$\frac{x_{2}}{x_{2}} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow x'_{1} = x_{2}$$

$$y = b_{1}x_{n} + b_{2}x_{n-1} + b_{3}x_{n-2} - \dots + b_{n-1}x_{2} + b_{n}x_{1}$$

b) Représentation d'état associée



En mettant ces équations sous la forme matricielle, il vient :

(T - 40)

-47-

$$y = (b_{n}, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_{2}, b_{1}) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_{n} \end{bmatrix}$$
(I-41)

La représentation d'état associée à la première méthode du graphe est une forme Compagnon I, forme canonique de représentation des systèmes [2]. Nous la noterons M_{CI} dans la suite de l'étude. Par identification, on déduit les quatre matrices de la forme générale (I-24).



 $C = (b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1)$ D = 0

c) Cas des systèmes de type Lur'e Postnikov

Soit le système en boucle fermée de type Lur'e Postnikov proposé figure I-17 [14, 15]

-48-



. Figure I-17

La fonction de transfert W(p) est celle étudiée auparavant. Elle est incluse cette fois dans un schéma du type Lur'e Postnikov fonctionnant en régime non autonome. Après transformation par la première méthode du graphe, le schéma développé du système est alors :



II.2 - LA SECONDE METHODE DU GRAPHE

a) Mise en ceuvre de la méthode

Sur le schéma de principe de la figure I-6, on place de nouveau les variables d'état à la sortie de chaque opérateur, soit :







-49--

. Figure I-17

La fonction de transfert W(p) est celle étudiée auparavant. Elle est incluse cette fois dans un schéma du type Lur'e Postnikov fonctionnant en régime non autonome. Après transformation par la première méthode du graphe, le schéma développé du système est alors :



Pour obtenir la mise en équation de ce système global, il suffit d'exprimer u dans ce cas précis et de le remplacer par son expression dans les relations (I-40) et (I-41)

Ici

$$u = f(\varepsilon)$$

Si f est la fonction caractéristique de la non linéarité.

Si f(0) = 0, on peut supposer l'existence d'une fonction bornée f^* telle que [15] :

$$f^{*} : \mathbb{R} - \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R} , f(\varepsilon) = f^{*}(\varepsilon) . \varepsilon = f^{*} . \varepsilon$$

$$(I-42)$$

On a alors :

$$u = f(\varepsilon) = f^{\mathbf{x}} \cdot \varepsilon \qquad (I-43)$$

Or

$$\varepsilon = e - y$$
 , (I-44)

Donc en reportant, il vient :

$$u = f^{*} \cdot \varepsilon = f^{*} \cdot (e - y) = f^{*} \cdot e - f^{*} \cdot y$$
 (I-45)

L'expression de y est donnée par (I-41).

Donc en reportant dans (I-40) on obtient :



La forme obtenue est la représentation d'état Compagnon I pour un système non-linéaire de type Lur'e Postnikov fonctionnant en régime non autonome [17]. Cette forme est donc associée à la première méthode du graphe.

La méthode proposée a permis d'une part de retrouver simplement, à partir d'un schéma de simulation déduit de l'expression de la fonction de transfert par la lère méthode du graphe, la forme canonique dite Compagnon représentative de l'état du système. Ensuite ce résultat s'étend au cas des systèmes non-linéaires de type Lur'e Postnikov en régime forcé. II.2 - LA SECONDE METHODE DU GRAPHE

a) Mise en oeuvre de la méthode

Sur le schéma de principe de la figure I-6, on place de nouveau les variables d'état à la sortie de chaque opérateur, soit :





Les équations lues sur le schéma sont alors :

$$x'_{1} = b_{n} u - a_{n} y$$

$$x'_{2} = b_{n-1} u - a_{n-1} y + x_{1}$$

$$x'_{3} = b_{n-2} u - a_{n-2} y + x_{2}$$
(I-48)
...
$$x'_{n} = b_{1} u - a_{1} y + x_{n-1}$$

$$y = x_{n}$$

b) Représentation d'état associée

Du système (I-48) on déduit la forme matricielle suivante :



$$y = (0, ..., 0, 1)$$
 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$ (I-50)

-54-

La représentation d'état associée à la seconde méthode du graphe est cette fois une forme Compagnon II, que nous noterons M_{CII} [2]

Par identification, on détermine les quatre matrices de la forme générale (I-24) :



D = 0

 $C = (0, 0, \dots, 0, 1)$

c) <u>Cas des systèmes de type Lur'e Postnikov</u>

De la même façon qu'au paragraphe précédent, le schéma-bloc caractéristique d'un système de type Lur'e Postnikov



Figure I-17

est transformé par la seconde méthode du graphe en un schéma développé tel que :



905 มเ**น**ะ Reportons la relation

$$u = f^{*} \cdot \varepsilon = f^{*} \cdot e - f^{*} \cdot y$$
 (I-45)

dans (I-49). Sachant que $y = x_n$, il vient :



C'est une représentation d'état Compagnon II pour un système non-linéaire de type Lur'e Postnikov en régime forcé [17]. III.3 - LA METHODE MODALE

a) Mise en oeuvre de la méthode

De nouveau, nous supposerons, pour alléger la présentation, que le système comporte n racines réelles et distinctes. L'étude des autres cas est analogue, compte tenu des indications du paragraphe I.

Le schéma de principe de la figure I-7 comportait déjà des variables $x_1, x_2 \dots x_n$ à la sortie de chaque opérateur pour les besoins de la simulation. Nous les assimilons désormais aux variables d'état.

(1-53)

La mise en équation qui en découle est :

$$\mathbf{x'}_{1} = \beta_{n} \mathbf{u} - \lambda_{1} \mathbf{x}_{1}$$

$$\mathbf{x'}_{2} = \beta_{n-1} \mathbf{u} - \lambda_{2} \mathbf{x}_{2}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x'}_{n} = \beta_{1} \mathbf{u} - \lambda_{n} \mathbf{x}_{n}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_{1} + \mathbf{x}_{2} \dots + \mathbf{x}_{n}$$

b) Représentation d'état associée

La mise en équation matricielle est alors :

-57-



Nous trouvons cette fois une matrice M diagonale. En effet, on détermine par identification les quatre matrices de la forme générale (I-24)



 $C = (1, 1, \ldots, 1, 1)$

D = 0

-58-

c) Cas des systèmes de type Lur'e Postnikov

Partant d'un schéma-bloc caractéristique d'un système de pe Lur'e Postnikov



méthode modale conduit au schéma de principe présenté figure I-21 :



La relation

$$u = f^{*} \cdot \varepsilon = f^{*} \cdot e - f^{*} y$$
 (I-45)

reportée dans la matrice (I-54), l'expression de y étant donnée par (I-55), il vient :



Cette fois, la matrice M est une matrice pleine, non remarquable.

Toutefois, on observe que les termes non-linéaires en f^* de chaque ligne proviennent de l'intervention de y, qui s'exprime en fonction de toutes les variables d'état x_i , i $\in [1, n]$. Donc si on prend $x_n = y$ comme dernière variable d'état, les termes en f^* d'une ligne se limiteront à la dernière colonne de cette ligne.

Ceci revient à placer le dernier intégrateur devant y, et non plus en parallèle avec les autres.



On aboutit ainsi au schéma de la figure I-22 :

Figure I-22

Les n-l premières lignes de la mise en équation sont identiques. Pour la dernière, il vient :

$$x'_{n} = x_{1} + x_{2} + x_{n-1} + \beta_{1} u - \lambda_{n} x_{n}$$
 (I-58)



Ceci conduit à la forme matricielle suivante :

Cette dernière relation est la même que pour la deuxième méthode du graphe puisque, dans les deux cas, la sortie est égale à la dernière variable d'état.

Il suffit de faire intervenir l'égalité

$$u = f^{\dagger} \cdot \varepsilon = f^{\dagger} \cdot e - f^{\dagger} \cdot y \qquad (I-45)$$

dans (I-59) pour obtenir la représentation suivante :





Il s'agit cette fois d'une matrice dont la forme a été proposée par GROUMPOS, et généralisée par BENREJEB sous le nom de matrice dite en flèche.[Réf. 16 à 20]

Nous avons donc, en utilisant des opérations appropriées, montré les transformations auxquelles correspond la forme en flèche. Mais le schéma de simulation ayant été modifié, il faut calculer les coefficients par identification.

Ce calcul sera conduit très simplement par substitution à partir des équations lues sur le schéma I-22.

$$\frac{\mathbf{x}_{1}}{\mathbf{\beta}_{n}\mathbf{u} - \lambda_{1}\mathbf{x}_{1}} = \frac{1}{p} \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \mathbf{p} \ \mathbf{x}_{1} = \mathbf{\beta}_{n} \ \mathbf{u} - \lambda_{1} \ \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{1}(\mathbf{p} + \lambda_{1}) = \mathbf{\beta}_{n} \ \mathbf{u} \\ \frac{\mathbf{x}_{1}}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{\beta}_{n}}{\mathbf{p} + \lambda_{1}} \end{array} \right)$$
(I-63)

De la même façon

$$\frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{u}} = \frac{\beta_{n-1}}{p+\lambda_2}, \dots, \frac{\mathbf{x}_i}{\mathbf{u}} = \frac{\beta_{n-i+1}}{p+\lambda_i}, \dots, \frac{\mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{u}} = \frac{\beta_2}{p+\lambda_{n-1}} (1-64)$$

Pour la dernière variable d'état

$$\frac{\mathbf{x}_{n}}{\mathbf{x}_{1} + \mathbf{x}_{2} + \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{1} - \lambda_{n} - \lambda_{n} - \mathbf{x}_{n}} = \frac{1}{p} \implies p\mathbf{x}_{n} = \mathbf{x}_{1} + \mathbf{x}_{2} + \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{1} - \lambda_{n} - \mathbf{x}_{n} - \lambda_{n} - \mathbf{x}_{n} - \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{1} - \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{1} - \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{1} - \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf$$

Avec
$$x_n = y$$
, en réduisant au même dénominateur, il vient :

$$\frac{y}{u} = \frac{x_n}{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{n-i+1} \prod_{j=1}^{n-1} (p + \lambda_j) + \beta_1 \prod_{k=1}^{n-1} (p + \lambda_k)}{(p + \lambda_1) (p + \lambda_2) \dots (p + \lambda_{n-1}) (p + \lambda_n)}$$
(I-66)

En redécomposant cette fraction rationnelle en éléments simples, on trouve :

$$\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_{n-i+1}}{p + \lambda_i}$$
(I-67)

Cette relation est la formulation (I-13) que nous avions donnée de la fonction de transfert commandable et observable W(p), sachant que les $-\lambda_i$, i \in [1, n] sont ses pôles.

Par conséquent la figure I-22 constitue un schéma développé de la même fonction de transfert entre y et u. La relation (I-61) définit donc une représentation d'état matricielle admissible du système initial. Celle-ci correspond à une matrice M en flèche particulière, notée M_{FLE}. Ainsi la méthode permet d'introduire directement une forme en flèche particulière et met en évidence son existence par son obtention à partir de la méthode modale.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les méthodes du calcul analogique et étendu l'utilisation du schéma de simulation en y introduisant des variables supplémentaires assimilées aux variables d'état. Ce procédé, appliqué aux trois méthodes conventionnelles de calcul analogique, nous a permis de passer directement d'une fonction de transfert à des représentations d'état canoniques (formes compagnon I et II, forme en flèche).

Nous avons ainsi montré dans un premier temps l'efficacité de la méthode proposée. Dès le premier abord, son caractère particulièrement maniable et facile d'emploi en fait un outil efficace pour l'obtention de représentations d'état. Elle appelle donc des développements plus importants, et le deuxième chapitre s'attachera à l'élaborer davantage.



CHAPITRE II

LA SIMULATION PAR OPÉRATEURS GÉNÉRALISÉS

ET SES APPLICATIONS



INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'un schéma de simulation, élaboré par modélisation d'une fonction de transfert, induit également une mise en équation d'état déterminée par simple lecture. Ainsi trois formes canoniques particulières représentatives des systèmes ont été associées à des schémas obtenus par les méthodes usuelles de simulation.

L'objet de ce second chapitre est d'élargir les possibilités de la méthode proposée.

Dans ce but, nous introduisons en premier lieu une nouvelle représentation dans les schémas analogiques. Nous définirons ainsi les opérateurs "généralisés", dont l'intégrateur, le sommateur et le potentiomètre ne sont que des cas particuliers. L'utilisation des opérateurs généralisés dans les schémas de simulation conventionnels présentés au chapitre I conduit immédiatement à de nouvelles représentations d'état, dont les coefficients sont déterminés par identification. Toutefois ce calcul, mené par substitution à partir des équations obtenues par lecture du schéma, peut s'avérer fastidieux dans le cas des systèmes de grande dimension. Pour pallier cet inconvénient, des théorèmes permettent, dans un deuxième temps, de déduire la matrice de passage d'une représentation matricielle d'un système à une autre à partir des deux schémas de simulation correspondants. Ces résultats sont obtenus en comparant les opérateurs généralisés intervenant dans la modélisation et les deux polynômes en p constituant le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert.

Ce dernier point complète la méthode, puisque celle-ci conduit alors à des représentations d'état, et aux matrices de passage d'une représentation à une autre.

Cette approche permet donc une meilleure maîtrise des problèmes de changement de base pour ce type de représentations.

Enfin, dans le troisième paragraphe, une mise en oeuvre de ce nouvel outil est envisagée dans le but d'effectuer une recherche systématique de formes nouvelles.

-70-

I - DEFINITION DES OPERATEURS GENERALISES

1.1 - GENERALISATION DES OPERATEURS DE CALCUL ANALOGIQUE [21]

-71-

a) Remarque préliminaire

Dans le premier chapitre, nous avons défini une symbolique pour la constitution d'un schéma de simulation. Celle-ci fait intervenir des élèments induits par les opérateurs disponibles sur la calculatrice analogique, et normalisés. Ceci a permis de déterminer des schémas de simulation auxquels on peut associer une représentation d'état.

Reprenons l'exemple du paragraphe I.3 c du premier chapitre. Dans le schéma représenté figure I-9, nous pouvons isoler l'opérateur central : ceci conduit à la figure II-1.



La mise en équation de cet élèment suivant les régles usuelles conduit à écrire :

$$\frac{x_2}{x_1 - \lambda_2 x_2} = \frac{1}{p} d'o\tilde{u} p x_2 = x_1 - \lambda_2 x_2$$
(II-1)

En factorisant, il vient :

$$(p + \lambda_2) x_2 = x_1 \tag{II-2}$$

Soit encore :

$$\frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1} = \frac{1}{\mathbf{p} + \lambda_2} \tag{II-3}$$

Cette relation (II-3) caractérise l'élèment représenté figure II-1. On constate qu'elle correspond également au schéma de la figure II-2 dans lequel intervient l'opérateur symbolique $\frac{1}{p + \lambda_2}$


b) Définition des opérateurs généralisés continus

Par définition, l'opérateur $\frac{1}{p + \lambda_2}$ représenté figure II-2 sera appelé opérateur généralisé.

Par extension, si on utilise comme nouvel opérateur

 $\frac{1}{p'} = \frac{1}{\chi p + \psi}, \quad (\chi, \psi) \in \mathbb{R} \{ 0 \} \times \mathbb{R}, \quad 1' \text{ ensemble des } p'^{j} = (\chi p + \psi)^{j}, \quad j \in \mathbb{N}$ constitue une nouvelle base de l'espace vectoriel des polynômes en p, dont la base naturelle est l'ensemble $p^{k}, \quad k \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, on peut toujours écrire, de façon unique :

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N'(p')}{D'(p')}$$
 (II-4)

Ainsi, cette dernière relation permet une simulation utilisant $\frac{1}{p'}$ comme opérateur de base.

 $\frac{1}{p'} = \frac{1}{\chi p + \psi}$ est un opérateur généralisé.

Un opérateur généralisé est un élèment plus complexe mettant en oeuvre plusieurs opérateurs normalisés tels que nous les avons introduits au chapitre I.

A partir de cette remarque, on peut étendre encore la notion en considérant un opérateur généralisé comme un module représenté par la figure II-3.



Figure II-3

A l'intérieur de ce module figure un opérateur généralisé sous forme de fraction rationnelle de deux polynômes en p d'ordre fini.

Soit :

$$\frac{1}{p'} = \frac{\sum_{j=0}^{m} \beta_j p^j}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i} \text{ avec } m \leq n$$

Dès lors, la fonction de transfert, dont l'expression est donnée par la relation (I-7), est également un opérateur généralisé particulier.

(II-4)

(I-7)

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$

c) Extension de la définition

La définition des opérateurs généralisés sous forme de modules, conformément à la figure II-3, permet d'étendre leur utilisation à d'autres types de systèmes que les modèles continus. Pour chaque type de problème, les opérateurs normalisés de base, élèments constitutifs de ces modules sont adaptés au cas envisagé.

De façon générale, la mise en oeuvre de cette méthode nécessite un corps muni d'un opérateur spatial (le sommateur en continu) et d'un opérateur temporel (l'intégrateur en continu).

Dans le cas des systèmes logiques, le champ de Gallois modulo 2 [27], dont la sommation spatiale est la fonction dilemme et la sommation temporelle la bascule, répond à ces hypothèses. On peut donc étendre les méthodes de simulation analogique au cadre des systèmes logiques.

Dans le cas des systèmes discrets, le sommateur est encore l'opérateur spatial, mais il faut définir un opérateur temporel propre à l'échantillonné.

Soit un système discret défini par une équation de récurrence telle que II-5 :

$$y_{n+q} + \sum_{i=1}^{q} a_i y_{n+q-i} = \sum_{i=0}^{q} b_i u_{n+q-i}$$
 (II-5)

On introduit l'opérateur z défini par l'identité II-6 :

$$z^{i} \cdot y = y_{n+i}$$
(II-6)

L'équation de récurrence II-5 se ramène alors à une fonction de transfert en z, qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{y}{u} = \frac{\sum_{i=0}^{q} b_i z^{q-i}}{\sum_{i=1}^{q} a_i z^{q-i} + z^n}$$
(II-7)

Le module élèmentaire pour une simulation utilisant z comme opérateur de base, représenté figure II-4, correspond à la mise en équation II-8.



Figure II-4

$$\frac{v_n}{u_n} = z d'où v_n = z u_n = u_{n+1}$$

La réalisation de ce module constitue une impossibilité. En effet cet opérateur est anticipateur puisque sa sortie est égale à son entrée à la séquence suivante.

(II ·8)

En revanche, une simulation basée sur l'opérateur $\frac{1}{z}$ fait intervenir le module élèmentaire de la figure II-5.



Figure II-5

La mise en équation correspondante est :

$$\frac{\mathbf{v}_{n}}{\mathbf{u}_{n}} = \frac{1}{z} \quad d'o\tilde{\mathbf{u}} \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{u}_{n} \tag{II-9}$$

Cet opérateur redonne l'entrée à la sortie après une période d'échantillonnage : tout opérateur de décalage ou à effet mémoire est donc conforme au type recherché.

L'utilisation des opérateurs généralisés permet de faire très simplement le lien entre la représentation en z et la représentation moins connue en ζ , introduite par TSCHAUNER [22]; et qui relie équations de récurrence et équations aux différences.

Cet opérateur est défini par la relation :

 $\zeta = \chi z + \psi \operatorname{avec} \left\{ \chi = 1 \quad \text{soit } \zeta = z - 1 \right.$ (II-10) $\psi = -1$ L'ensemble des ζ^q , q $\in \mathbb{N}$, constitue une nouvelle base de l'espace vectoriel des polynômes en z. Par conséquent la fonction de transfert en z peut s'écrire de façon unique :

$$\frac{y}{u} = W(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N'(\zeta)}{D'(\zeta)}$$
(II-11)

Cette relation permet une simulation utilisant $\frac{1}{\zeta}$ comme opérateur temporel de base.



Figure II-6

La mise en équation du module élèmentaire représenté figure II-6, s'écrit alors :

$$\frac{\mathbf{v}_{n}}{\mathbf{u}_{n}} = \frac{1}{z-1} d' \circ \tilde{\mathbf{u}} \begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_{n} = \mathbf{u}_{n} \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{u}_{n} + \mathbf{v}_{n} \end{cases}$$

L'opérateur $\frac{1}{\zeta}$ fait la somme de toutes ses entrées pour les séquences successives ; il a été défini comme intégrateur discret par R. DEHORS et F. LAURENT [23].

Ainsi il apparaît une analogie entre la simulation de systèmes de nature différente.

En discret, on peut choisir le sommateur comme opérateur spatial et l'intégrateur discret défini précédemment comme opérateur temporel. [24].

Ainsi, la définition très large des opérateurs généralisés permet de les adapter à de nombreux types de problèmes.

L'étude suivante sera limitée au cas des systèmes continus. Un certain nombre de théorèmes peuvent donner lieu à une transposition directe en ce qui concerne les systèmes échantillonnés.

1.2 - MISE EN DEUVRE DES OPERATEURS GENERALISES PAR LES DEUX PREMIERES METHODES DU GRAPHE

a) Première méthode du graphe

Soit un système continu linéaire monovariable, commandable et observable, d'ordre n, d'entrée u, de sortie y et défini par sa fonction de transfert :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-7)

L'étude du paragraphe III.l du chapitre I a montré que le schéma de simulation d'un tel système obtenu par la lère méthode du graphe est associé à une représentation d'état du type Compagnon I. On envisage d'appliquer immédiatement les opérateurs généralisés à cet exemple.

Sur le schéma de principe de la figure I-16, nous substituerons aux intégrateurs des opérateurs généralisés du premier ordre, de la forme $\frac{1}{\chi p + \psi}$.

Le principe de base de la méthode de mise en équation, présenté au chapitre I, conduit à placer les variables d'état à la sortie de chaque opérateur comportant au moins un intégrateur, c'est-à-dire symbolisé par un rectangle, sans tenir compte des autres élèments figurant sur le schéma. C'est pourquoi un gain constant isolé est indiqué dans un cercle, généralisation du potentiomètre. En suivant ces conventions, le schéma généralisé figure II-7 se déduit simplement du schéma de la figure I-16 :



Figure II-7

Les opérations lues sur le schéma sont alors :

$$\frac{x_{n}}{u - \alpha_{1} x_{n} - \alpha_{2} x_{n-1} - \alpha_{3} x_{n-2} \cdots - \alpha_{n-1} x_{2} - \alpha_{n} x_{1}} = \frac{1}{\chi p + \psi}$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_{n}} = \frac{x_{k-1}}{x_{k}} = \frac{x_{1}}{x_{2}} = \frac{1}{\chi p + \psi} \quad \forall k \in [3, n-1] \quad (II-13)$$

$$y = \beta_{1} x_{n} + \beta_{2} x_{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} x_{2} + \beta_{n} x_{1}$$

En mettant ces équations sous forme matricielle, il vient :



On remarque que le terme $\frac{1}{\chi}$ se comporte comme un gain, mis en facteur de chaque ligne de la représentation matricielle. Par conséquent, il n'apporte rien quant à la structure interne de la

-82-

matrice, caractéristique de la forme canonique associée. Ainsi, dans la suite, les opérateurs généralisés du premier ordre auront toujours le coefficient du terme en p égal à l.

Par ailleurs, la forme matricielle obtenue en II-14 fait apparaître une forme Compagnon I à laquelle viennent s'ajouter des termes diagonaux négatifs pour $\psi > 0$, ici tous égaux. On peut généraliser cette forme en faisant intervenir des termes diagonaux différents. Il suffit, pour cela, de simuler à partir d'opérateurs généralisés dont les coefficients constants sont distincts. Ceci nous conduit au schéma de la figure II-8.



$$\frac{x_{n}}{u - \alpha_{1}x_{n} - \alpha_{2}x_{n-1} - \alpha_{3}x_{n-2} \cdots - \alpha_{n-1}x_{2} - \alpha_{n}x_{1}} = \frac{1}{p + \psi_{n}}$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_{n}} = \frac{1}{p + \psi_{n-1}}$$

$$\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} = \frac{1}{p + \psi_{n-2}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{x_{2}}{x_{3}} = \frac{1}{p + \psi_{2}}$$

$$\frac{x_{1}}{x_{2}} = \frac{1}{p + \psi_{1}}$$

$$y = \beta_{1}x_{n} + \beta_{2}x_{n-1} + \beta_{3}x_{n-2} \cdots + \beta_{n-1}x_{2} + \beta_{n}x_{1}$$

La mise en équation correspondante est :

On obtient ainsi la représentation d'état :



(II - 17)

$$y = (\beta_{n}, \beta_{n-1}, \beta_{n-2} \dots \beta_{2}, \beta_{1}) \begin{vmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_{n} \end{vmatrix}$$
(II-18)

Dans cette représentation, les termes diagonaux sont distincts.

Ainsi, l'emploi d'opérateurs généralisés du ler ordre sur le schéma caractéristique de la première méthode du graphe, met en évidence une forme matricielle pour la représentation d'état que nous appelons forme Compagnon I généralisée, et qui a déjà été introduite dans de précédents travaux [25].

b) Cas de la seconde méthode du graphe

Nous effectuons à présent la même transformation pour le schéma associé à la seconde méthode du graphe.

En remplaçant donc les intégrateurs respectivement par des opérateurs $\frac{1}{p + \psi_i}$, i **€** [1, n], le schéma de principe de la figure I-19 devient alors :



SULL LILL

Figure II-9

$$\frac{x_1}{\beta_n u - \alpha_n x_n} = \frac{1}{p + \psi_1}$$

$$\frac{x_2}{x_1 + \beta_{n-1} u - \alpha_{n-1} x_n} = \frac{1}{p + \psi_2}$$

$$\frac{x_3}{x_2 + \beta_{n-2} u - \alpha_{n-2} x_n} = \frac{1}{p + \psi_3}$$
(II-19)
$$\dots$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1} + \beta_1 u - \alpha_1 x_n} = \frac{1}{p + \psi_n}$$

$$y = x_n$$

La mise sous forme matricielle conduit à la représentation :

$$\begin{bmatrix} x'_{1} \\ x'_{2} \\ x'_{3} \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi_{1} & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n} \\ 1 & -\psi_{2} & & & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & -\psi_{3} & & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 1 & -\psi_{3} & & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{1}\psi_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n} \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_{2} \\ \beta_{1} \end{bmatrix}$$
(II-20)
$$y = (0, 0, 0, \dots 0, 1) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_{n} \end{bmatrix}$$

On obtient cette fois une forme canonique Compagnon II, à laquelle s'ajoutent des termes diagonaux distincts. Cette représentation sera appelée forme Compagnon II généralisée.

c) Calcul des coefficients

En introduisant les opérateurs généralisés, à partir des deux méthodes du graphe, nous avons obtenu deux représentations d'état, appelées Compagnon généralisées, de type I et II.

Il faut encore calculer leurs coefficients pour que ces formes soient représentatives du système initial, déterminé par sa fonction de transfert I-7.

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-7)

D'après les hypothèses, le système est défini sans ambiguité par sa fonction de transfert. On peut donc procéder par identification terme-à-terme.

Etudions par exemple le cas de la représentation Compagnon généralisée de type II.

La fonction de transfert entre y et u correspondant au schéma de la figure II-9 peut être calculée par substitution en éliminant les variables intermédiaires dans le système d'équations II-19.

Il vient :

$$\mathbf{x}_{n} = \mathbf{y} = \frac{1}{p + \psi_{n}} \left(\beta_{1} \mathbf{u} - \alpha_{1} \mathbf{y} + \frac{1}{p + \psi_{n-1}} \left(\beta_{2} \mathbf{u} - \alpha_{2} \mathbf{y} + \dots \right) \right)$$

$$\cdots + \frac{1}{p + \psi_{2}} \left(\beta_{n-1} \mathbf{u} - \alpha_{n-1} \mathbf{y} + \frac{1}{p + \psi_{1}} \left(\beta_{n} \mathbf{u} - \alpha_{n} \mathbf{y} \right) \right) \dots \right)$$

On reconnait ici une méthode de calcul analogue à l'algorithme de Hörner. Son développement permet donc d'écrire la relation II-22 sous la forme II-23 :

$$y \left(1 + \frac{\alpha_{1}}{p + \psi_{n}} + \frac{\alpha_{2}}{(p + \psi_{n})(p + \psi_{n-1})} + \dots + \frac{\alpha_{n}}{(p + \psi_{n})\dots(p + \psi_{1})}\right)$$

= $u \left(\frac{\beta_{1}}{p + \psi_{n}} + \frac{\beta_{2}}{(p + \psi_{n})(p + \psi_{n-1})} + \dots + \frac{\beta_{n}}{(p + \psi_{n})\dots(p + \psi_{1})}\right)$ (II-23)

En multipliant haut et bas par le facteur $\prod_{i=1}^{n} (p + \psi_i)$, on obtient l'expression de la fonction de transfert

$$\frac{y}{u} = \frac{\beta_1 \prod_{i=1}^{n-1} (p+\psi_i) + \beta_2 \prod_{i=1}^{n-2} (p+\psi_i) \dots + \beta_{n-1} (p+\psi_1) + \beta_n}{\prod_{i=1}^{n} (p+\psi_i) + \alpha_1 \prod_{i=1}^{n-1} (p+\psi_i) + \alpha_2 \prod_{i=1}^{n-2} (p+\psi_i) \dots + \alpha_{n-1} (p+\psi_1) + \alpha_n}$$
(II-24)

Les expressions I-7 et II-24 doivent être identiques puisqu'elles représentent le même système : on peut donc les identifier terme-à-terme. Il vient : Pour le numérateur

On note $\sigma_1^{\ j}$, $j \le i$, les sommes de produits de j termes parmi les i premiers indices de $\psi: \psi$ k avec k $\in [1, i]$. Donc : $\begin{bmatrix}
\sigma_1^1 = \psi_1 \\
\sigma_2^1 = \psi_1 + \psi_2 & \sigma_2^2 = \psi_1 \psi_2 \\
\sigma_3^1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 & \sigma_3^2 = \psi_1 \psi_2 + \psi_1 \psi_3 + \psi_2 \psi_3 & \sigma_3^3 = \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \text{ etc}
\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}
b_1 = \beta_1 \\
b_2 = \beta_2 + \sigma_{n-1}^1 \beta_1 \\
(II-26) \\
b_3 = \beta_3 + \sigma_{n-2}^1 \beta_2 + \sigma_{n-1}^2 \beta_1 \\
\vdots \\
b_n = \beta_n + \sigma_1^1 \beta_{n-1} \dots + \sigma_{n-2}^{n-2} \beta_2 + \sigma_{n-1}^{n-1} \beta_1
\end{bmatrix}$

Pour le dénominateur :

$$\begin{bmatrix} a_{1} = \alpha_{1} + \sigma_{n}^{1} \\ a_{2} = \alpha_{2} + \sigma_{n-1}^{1} \alpha_{1} + \sigma_{n}^{2} \\ a_{3} = \alpha_{3} + \sigma_{n-2}^{1} \alpha_{1} + \sigma_{n-1}^{2} \alpha_{2} + \sigma_{n}^{3} \\ \dots \\ a_{n} = \alpha_{n} + \sigma_{1}^{1} \alpha_{n-1} \dots + \sigma_{n-1}^{n-1} \alpha_{1} + \sigma_{n}^{n} \end{bmatrix}$$
(II-27)

L'inversion des deux systèmes II-26 et II-27 par rapport aux variables α_i et β_i , i $\in [1, n]$ est toujours possible car les déterminants de ces systèmes sont tous deux égaux à 1, donc non nuls.

On obtient ainsi l'expression des coefficients α_i , i $\in [1,n]$ en fonction des a_j , $j \in [1,n]$ et des ψ_k , $k \in [1,n]$ ainsi que l'expression des β_i , $i \in [1,n]$ en fonction des b_j , $j \in [1,n]$ et des ψ_k , $k \in [1,n]$. Pour cela, il est nécessaire de mettre en oeuvre un algorithme d'inversion de matrices, tel que l'algorithme de Gauss par exemple [26].

Nous constatons que les termes ψ_i , $i \in [1,n]$ apparaissent sous forme de paramètres dans les équations d'identification. Par conséquent ils peuvent être choisis arbitrairement, indépendamment du système.

Ainsi le calcul des coefficients α_i et β_i , i $\in [1,n]$ détermine entièrement la mise en équation Compagnon II généralisée du système en fonction des ψ_i , i $\in [1,n]$.

En ce qui concerne la forme Compagnon généralisée de type I, le calcul de la fonction de transfert, mené de façon analogue par substitution, conduit à la même expression II-24 que dans le cas de la forme de type II.

Par conséquent, l'identification conduit aux mêmes résultats : les coefficients α_i , $i \in [1,n]$ et β_j , $j \in [1,n]$, sont donc les mêmes pour les deux formes Compagnons généralisées. Il en résulte que les formes Compagnons généralisées de type I et II sont transposées l'une de l'autre, de même que les formes Compagnons de type I et II. 1.3 - APPLICATION A LA METHODE MODALE

a) Emploi des opérateurs généralisés dans le schéma de principe

Examinons à présent le schéma de la figure I-22, qui permet d'introduire la forme dite en flèche. Celui-ci comporte n intégrateurs bouclés par un potentiomètre, représentés isolément par la figure II-10.



i€[1, n]

Par définition ces élèments sont équivalents aux opérateurs généralisés proposés figure II-11.



Figure II-11

On effectue donc la substitution dans le schéma de la figure I-22, en supprimant le bouclage non-linéaire de type Lur'e Postnikov pour se ramener à l'étude de la boucle ouverte. On obtient ainsi le schéma présenté figure II-12, associé à la méthode modale et construit à partir d'opérateurs généralisés.



Figure II-12

La mise en équation n'ayant pas été modifiée puisque les deux représentations I-22 en boucle ouverte et II-12 sont équivalentes par définition, elle conduit au même résultat :

BUS



C'est-à-dire une représentation matricielle sous forme dite en flèche.

Le calcul par substitution de la fonction de transfert entre y et u a été effectué au cours de l'étude du chapitre I. On peut donc donner immédiatement son expression :

$$\frac{y}{u} = \frac{x_{n}}{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{n-i+1} \prod_{\substack{j=1 \ j \neq i}}^{n-1} (p + \lambda_{j}) + \beta_{1} \prod_{\substack{l=1 \ k=1}}^{n-1} (p + \lambda_{k})}{(p + \lambda_{1}) (P + \lambda_{2}) \dots (p + \lambda_{n-1}) (p + \lambda_{n})}$$
(I-66)

Procédons à l'identification terme-à-terme des deux expressions I-7 et I-66 de la fonction de transfert. On déduit de la comparaison des dénominateurs, que les $-\lambda_i$, $i \in [1,n]$, sont les pôles de la fonction de transfert. Ceci nous permet de retrouver l'hypothèse initiale de la méthode modale.

L'identification des numérateurs conduit au système d'équations II-28 :

$$b_{1} = \beta_{1}$$

$$b_{2} = \sigma_{n-1}^{1} \beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3} \dots + \beta_{n}$$

$$b_{3} = \sigma_{n-1}^{2} \beta_{1} + \sigma_{n-1}^{1} (n-1) \beta_{2} + \sigma_{n-1}^{1} (n-2) \beta_{3} \dots + \sigma_{n-1}^{1} (1) \beta_{n}$$

$$\dots$$

$$b_{n} = \sigma_{n-1}^{n-1} \beta_{1} + \sigma_{n-1}^{n-2} (n-1) \beta_{2} + \sigma_{n-1}^{n-2} (n-2) \beta_{3} \dots + \sigma_{n-1}^{n-2} (1) \beta_{n}$$
(II-28)

La notation σ_i^j (m), $j \leq i$, $m \in [1, i]$, correspond à la somme des produits de j termes parmi les i premiers indices de λ , sauf le m^{ième}:

$$k_k$$
, $k \in [1, i]$, $k \neq m$

Le calcul du déterminant de ce système II-28 montre qu'il est inversible pour $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$, $\substack{i \in [1, n-1] \\ j \in [1, n-1]}$ [17]

Dans ce cas, son inversion permet de déterminer l'expression des coefficients β_i , i $\in [1, n]$ en fonction des b_j , j $\in [1, n]$ et $-\lambda_k$, k $\in [1, n]$, coefficients et pôles de la fonction de transfert du système étudié.

b) Généralisation : la forme en flèche mince

En comparant la forme Compagnon généralisée de type II obtenue au paragraphe I.2 b, et la forme en flèche proposée au paragraphe précédent, nous constatons que toutes deux font apparaître des termes dans la diagonale. Toutefois, ceux de la forme en flèche considérée sont nécessairement égaux aux pôles de la fonction de transfert, alors que ceux de la forme Compagnon peuvent être choisis arbitrairement. Par analogie, il est possible de définir une forme en flèche dont les termes diagonaux sont arbitraires mais distincts. Pour cela, il est nécessaire d'introduire n coefficients qui se substitueront aux λ_i dans l'identification du dénominateur. Ces coefficients correspondent donc à des retours de la sortie y dans le schéma puisqu'ils figurent au dénominateur.

Cette remarque nous conduit au schéma complété de la figure II-13, pour lequel $\psi_i \neq \psi_j \forall i \neq j \in [1, n]$.

La mise en équation correspondante est :

$$\frac{x_{1}}{\beta_{n} u - \alpha_{n} y} = \frac{1}{p + \psi_{1}}$$

$$\frac{x_{2}}{\beta_{n-1} u - \alpha_{n-1} y} = \frac{1}{p + \psi_{2}}$$
(II-29)
$$\frac{x_{n-1}}{\beta_{2} u - \alpha_{2} y} = \frac{1}{p + \psi_{n-1}}$$

$$\frac{x_{n}}{\beta_{1} u - \alpha_{1} y + k_{1} x_{1} + k_{2} x_{2} \dots + k_{n-1} x_{n-1}} = \frac{1}{p + \psi_{n}}$$

$$x_{n} = y$$

-96-



-97-

Figure II-13

La mise sous forme matricielle conduit à la représentation :



$$y = (0, 0, ... 0, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$
(II-31)

Il apparaît ici la matrice générale introduite par Benrejeb dite forme en flèche mince [17].

Nous la noterons M_{FLE} dans la suite.

Le calcul de la fonction de transfert par substitution conduit au
résultat :

$$\frac{\beta_{1} \prod_{k=1}^{n-1} (p+\psi_{k}) + \sum_{i=1}^{n-1} k_{i} \alpha_{n-i+1} \prod_{j=1}^{n-1} (p+\psi_{j})}{j \neq i} \qquad (II-32)$$

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n} (p+\psi_{\ell}) + \alpha_{1} \prod_{k=1}^{n-1} (p+\psi_{k}) + \sum_{i=1}^{n-1} k_{i} \alpha_{n-i+1} \prod_{j=1}^{n-1} (p+\psi_{j})}{j \neq i} \qquad (II-32)$$

Par identification terme-à-terme, il vient les coefficients du dénominateur :

$$a_{1} = \sigma_{n}^{1} + \alpha_{1}$$

$$a_{2} = \sigma_{n}^{2} + \sigma_{n-1}^{1}\alpha_{1} + k_{n-1}\alpha_{2} + k_{n-2}\alpha_{3} \dots + k_{1}\alpha_{n}$$

$$a_{3} = \sigma_{n}^{3} + \sigma_{n-1}^{2}\alpha_{1} + \sigma_{n-1}^{1}(n-1)k_{n-1}\alpha_{2} + \sigma_{n-1}^{1}(n-2)k_{n-2}\alpha_{3}\dots + \sigma_{n-1}^{1}(1)k_{1}\alpha_{n}$$

$$\dots$$

$$b_{n} = \sigma_{n}^{n} + \sigma_{n-1}^{n-1}\alpha_{1} + \sigma_{n-1}^{n-2}(n-1)k_{n-1}\alpha_{2} + \sigma_{n-1}^{n-2}(n-2)k_{n-2}\alpha_{3}\dots + \sigma_{n-1}^{n-2}(1)k_{1}\alpha_{n}$$

le numérateur est obtenu de la même manière :

$$b_{1} = \beta_{1}$$

$$b_{2} = \sigma_{n-1}^{1} \beta_{1} + k_{n-1}\beta_{2} + k_{n-2}\beta_{3} \dots + k_{1}\beta_{n}$$

$$b_{3} = \sigma_{n-1}^{2} \beta_{1} + \sigma_{n-1}^{1} (n-1) k_{n-1}\beta_{2} + \sigma_{n-1}^{1} (n-2) k_{n-2}\beta_{3} \dots + \sigma_{n-1}^{1} (1) k_{1}\beta_{n}$$

$$\dots$$

$$b_{n} = \sigma_{n-1}^{n-1} \beta_{1} + \sigma_{n-1}^{n-2} (n-1) k_{n-1}\beta_{2} + \sigma_{n-1}^{n-2} (n-2) k_{n-2}\beta_{3} \dots + \sigma_{n-1}^{n-2} (1) k_{1}\beta_{n}$$
(II-34)

Les notations σ_i^j et σ_i^j (m) sont celles définies précédemment.

L'inversion des deux systèmes II-33 et II-34 est possible lorsque $\psi_i \neq \psi_j$, $\forall i \neq j \in [1, n]$. Celle-ci donne l'expression des α_i et β_i , i $\in [1, n]$ en fonction des b_j , ψ_j , $j \in [1, n]$ et k_{ℓ} , $\ell \in [1, n-1]$. Par conséquent les termes diagonaux ψ_j apparaissent comme des paramètres choisis arbitrairement, sous réserve qu'ils soient distincts deux à deux. Il en est de même des k_{ℓ} , à condition qu'ils soient non nuls.

-99-

c) Forme en Flèche de type I

La définition générale des représentations d'état matricielles que nous étudions, s'écrit sous la forme I-24 introduite au chapitre I.

$$x'(t) = M \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
 (I-24)
y (t) = C · x(t) + D · u(t)

Comparons les résultats obtenus avec les deux méthodes du graphe.

Avec les opérateurs généralisés, la première méthode du graphe fait apparaître la forme Compagnon I généralisée telle que :



$$C_{CIG} = (\beta_n, \beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \dots, \beta_2, \beta_1) \qquad D_{CIG} = 0$$

alors que la seconde méthode du graphe induit la forme Compagnon II généralisée qui vérifie :



Nous avons signalé par ailleurs que la résolution des équations d'identification conduit dans ce cas à des coefficients α_i et β_i , i $\in [1, n]$ égaux.

D'autre part, en faisant $\psi_i = 0 \quad \forall i \in [1, n]$ pour les deux formes précédentes, on retrouve les résultats obtenus par les deux méthodes du graphe lorsque les opérateurs sont des intégrateurs, c'est-à-dire les formes Compagnon I et Compagnon II, de matrices caractéristiques M_{CI}, B_{CI}, C_{CI}, D_{CI} et M_{CII}, B_{CII}, C_{CII} et D_{CII}.

Par conséquent, dans les deux cas, les matrices des représentations I et II sont liées par la relation II-35.

$$M_{II} = M_{I}^{T} ; B_{II} = C_{I}^{T} ; C_{II} = B_{I}^{T} ; D_{II} = D_{I}$$
 (II-35)

L'étude des formes Compagnon pour un système de type Lur'e Postnikov a montré en outre que les termes non-linéaires en f^{*} apparaissent dans la dernière ligne pour la représentation de type I et dans la dernière colonne pour celle de type II.

-101-

Par analogie, la forme en flèche obtenue, décrite par II-30 et II-31, sera dite de type II puisque C est telle que :

$$C = (0, 0, 0, ... 0, 1) = C_{CTTC} = C_{CTT}$$
 (II-36)

Cherchons le schéma de simulation correspondant à la représentation de type I, déduite de la précédente par la relation II-35.

En comparant les schémas de simulation respectifs des deux méthodes des graphes, on observe que la première ramène la sortie de chaque opérateur à l'entrée de la chaîne tandis que la seconde ramène la sortie de la chaîne à l'entrée de chaque opérateur. D'autre part, l'indiçage des variables d'état s'effectue en sens contraire.

Si l'on inverse le schéma de la figure II-13 de manière à satisfaire ces conditions il vient la représentation :



BUS

Figure II-14

-103-

La mise en équation par lecture du schéma conduit à :

$$\frac{x_{n}}{u - \alpha_{1}x_{n} - \alpha_{2}x_{n-1} \cdots - \alpha_{n-1}x_{2} - \alpha_{n}x_{1}} = \frac{1}{p + \psi_{n}}$$

$$\frac{x_{n-1}}{k_{n-1}x_{n}} = \frac{1}{p + \psi_{n-1}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{x_{2}}{k_{2}x_{n}} = \frac{1}{p + \psi_{2}}$$

$$\frac{x_{1}}{k_{1}x_{n}} = \frac{1}{p + \psi_{1}}$$

$$y = \beta_{1}x_{n} + \beta_{2}x_{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}x_{2} + \beta_{n}x_{1}$$
(II-37)

Soit en mettant sous forme matricielle :



$$y = (\beta_{n}, \beta_{n-1}, \dots, \beta_{2}, \beta_{1}) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_{n} \end{bmatrix}$$
(II-38)

-104-

On vérifie que les expressions II-38 et II-39 peuvent se déduire de II-30 et II-31 par une relation telle que II-35.

Par conséquent la représentation obtenue est bien une forme en flèche de type I.

Le schéma associé à cette représentation paraît original par rapport aux méthodes conventionnelles de simulation analogique, alors que celui de type II est déduit directement de la méthode modale [16].

Dans la suite, nous nous attacherons plus spécialement à l'étude des représentations de type II. Toutefois, pour chaque forme matricielle obtenue, on pourra disposer de la représentation correspondante de type I en effectuant $M = M_1^T$, $B = C_1^T$, $C = B_1^T$, D = D. Dans la pratique on peut adopter la forme la plus adaptée à l'étude envisagée.

Conclusion

La définition d'opérateurs généralisés et leur utilisation immédiate sur des schémas usuels a permis de mettre en évidence de nouvelles formes pour la représentation des systèmes, les coefficients étant déterminés par identification. La forme de représentation étant ainsi définie, on peut utiliser les critères de stabilité globale [réf. 9 à 13, 28, 29], car leur mise en oeuvre s'applique exclusivement à la matrice représentative du comportement du système étudié.

Au contraire, en ce qui concerne l'étude de la stabilité locale, l'évaluation du domaine d'attraction d'une position d'équilibre fait intervenir les composantes du vecteur état [30, 31]. Donc si on effectue un changement de base pour introduire une matrice plus adaptée à l'étude, il faut connaître les composantes du vecteur état dans la nouvelle base.

Par conséquent, la connaissance de la matrice de passage est indispensable pour la résolution de ce type de problèmes.

L'objet de l'étude suivante est la détermination de ce changement de base à partir du schéma de simulation. II - CHANGEMENT DE BASE ASSOCIE À UNE REPRESENTATION MATRICIELLE

La méthode proposée permet, à partir de schémas de simulation différents, de déterminer par simple lecture plusieurs représentations d'état matricielles d'un même système.Il existe donc un changement de base d'état qui assure le passage de l'une à l'autre. Nous envisageons dans cette partie la détermination de ce changement de base à partir des schémas de simulation associés.

11.1 - FONCTION DE TRANSFERT ET BASE DE POLYNOMES

a) Expression d'une fonction de transfert modélisée à partir d'opérateurs généralisés

En introduisant les opérateurs généralisés dans le premier paragraphe, nous avons noté qu'on peut utiliser comme nouvel opérateur $\frac{1}{p'} = \frac{1}{\chi p + \psi}$, $(\chi, \psi) \in \mathbb{R}^2$ puisque l'ensemble des $p'^j = (\chi p + \psi)^j$, $j \in \mathbb{N}$ constitue une nouvelle base de l'espace vectoriel des polynômes en p, dont la base naturelle est l'ensemble p^k , $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'emploi d'opérateurs généralisés revient à un changement de base de polynômes.

Considérons la fonction de transfert décrite en I-7 :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} p^{j}}{p^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^{i}}$$
(I-7)

Son expression est associée aux formes Compagnons, pour les quelles la modélisation fait intervenir des intégrateurs $\frac{1}{p}$.

Dans le cas des formes Compagnons généralisées, obtenues en introduisant des opérateurs généralisés du premier ordre, le calcul de la nouvelle expression de la fonction de transfert a conduit à identifier les coefficients β_i dans l'expression :

$$\frac{y}{u} = \frac{\beta_1 \prod_{i=1}^{n-1} (p + \psi_i) + \beta_2 \prod_{i=1}^{n-2} (p + \psi_i) \dots + \beta_{n-1} (p + \psi_1) + \beta_n}{\prod_{i=1}^{n} (p + \psi_i) + \alpha_1 \prod_{i=1}^{n-1} (p + \psi_i) + \alpha_2 \prod_{i=1}^{n-2} (p + \psi_i) \dots + \alpha_{n-1} (p + \psi_1) + \alpha_n}$$
(II-24)

La nouvelle base de polynômes est alors :

1,
$$(p+\psi_1)$$
, $(p+\psi_1)(p+\psi_2)$, ..., $\prod_{i=1}^{n} (p+\psi_i)$

b) Nouveau symbolisme de représentation des fonctions

de transfert

Le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert sont deux vecteurs de l'espace vectoriel des polynômes en p, qui peuvent s'écrire sous forme de produit matriciel entre les n+1 vecteurs de base de l'espace et les n+1 coefficients associés. Nous introduisons un nouveau symbolisme pour la représentation des fonctions de transfert, qui fait apparaître ce produit matriciel et met en évidence la base de l'espace vectoriel des polynômes en p utilisée.

-108-
$$\frac{y}{u} = \frac{\begin{bmatrix} b_{n}, b_{n-1}, \dots , b_{1}, 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{n}, a_{n-1}, \dots , a_{1}, 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1\\ p\\ \vdots\\ p^{n-1}\\ p\\ \vdots\\ p^{n-1}\\ p\\ \vdots\\ p^{n-1}\\ p^{n} \end{bmatrix}}$$

(II-40)

(II-41)



$$A_{+1}^{T} = \begin{bmatrix} a_{n}, a_{n-1}, \dots, a_{1}, 1 \end{bmatrix}$$

La relation II-42 donne ainsi une expression de la fonction de transfert équivalente à I-7.

$$\frac{y}{u} = \frac{B_{+1}^{T} \cdot B_{1}}{A_{+1}^{T} \cdot B_{1}}$$
(II-42)



(II-43)

II-43 équivaut à la représentation condensée II-45 :

 $\frac{y}{u} = \frac{B_{+2}^{T} \cdot \mathcal{D}_{2}}{A^{T} \mathcal{D}_{2}}$

(II-45)

(II-44)

Grâce à cette symbolique, les bases de polynômes, isolées dans les matrices (n+1,1) B, apparaissent explicitement.

c) Théorème du changement de base

Puisque \mathscr{P}_1 et \mathscr{P}_2 sont deux bases de l'espace vectoriel des polynômes en p, il existe une matrice de passage de l'une à l'autre. On montre que celle-ci contient la matrice de passage des représentations matricielles associées. Ce résultat essentiel dans notre étude permet d'énoncer le théorème du changement de base [32]:

Théorème :

Soit une première représentation d'état M_1 d'un système, \mathscr{C}_1 la base d'état correspondante, et \mathscr{P}_1 la base de l'espace vectoriel des polynômes en p associée. Soit une seconde représentation M_2 de ce système et les bases associées : \mathscr{C}_2 base d'état, \mathscr{P}_2 base de polynômes. La matrice de passage P de M_1 à M_2 , qui est aussi la matrice de passage de \mathscr{C}_1 à \mathscr{C}_2 , est égale à la matrice de passage de \mathscr{P}_1 à \mathscr{P}_2 moins sa dernière ligne et sa dernière colonne.

Démonstration

Soit \mathscr{B}_{i} une base de l'espace vectoriel des polynômes en p choisie comme référence et \mathscr{B}_{2} une autre base quelconque de cet espace.

Notons P⁺ la matrice de passage telle que :

$$\mathcal{B}_2 = \mathbb{P}_+^{\mathrm{T}} \cdot \mathcal{B}_1 \tag{II-46}$$

Soit un système satisfaisant aux conditions générales de l'étude et déterminé par sa fonction de transfert. Les deux bases \mathscr{B}_1 et \mathscr{B}_2 peuvent donner lieu à une expression de cette fonction de transfert, telles que :

$$\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{B}_{+1}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\mathcal{B}}_{1}}{\mathbf{A}_{+1}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\mathcal{B}}_{1}} = \frac{\mathbf{B}_{+2}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\mathcal{B}}_{2}}{\mathbf{A}_{+2}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\mathcal{B}}_{2}}$$
(11-47)

En reportant II-46 dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{y}{u} = \frac{B_{+1}^{T} \cdot \mathcal{B}_{1}}{A_{+1}^{T} \cdot \mathcal{B}_{1}} = \frac{B_{+2}^{T} \cdot (P_{+}^{T} \cdot \mathcal{B}_{1})}{A_{+2}^{T} \cdot (P_{+}^{T} \cdot \mathcal{B}_{1})} = \frac{(B_{+2}^{T} \cdot P_{+}^{T}) \cdot \mathcal{B}_{1}}{(A_{+2}^{T} \cdot P_{+}^{T}) \cdot \mathcal{B}_{1}} \quad (II-48)$$

D'où :

$$\frac{y}{u} = \frac{(P_{+} \cdot B_{+2})^{T} \cdot \mathcal{P}_{1}}{(P_{+} \cdot A_{+2})^{T} \cdot \mathcal{P}_{1}}$$
(II-49)

La comparaison de II-47 et II-49 conduit à :

$$\begin{cases} B_{+1}^{T} = (P_{+} \cdot B_{+2})^{T} \\ A_{+1}^{T} = (P_{+} + A_{+2})^{T} \end{cases}$$

Soit encore :

(II-50)

Cette relation indique que P^+ est aussi la matrice de passage de B_{+1} à B_{+2} , et de A_{+1} à A_{+2} .

Considérons à présent l'espace d'état.

Pour le choix d'une base d'état référence \mathscr{C}_1 , on a la relation matricielle :

si
$$\mathscr{C}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & e_{1} & e_{2} & e_{3} & \dots & e_{n} \end{bmatrix}$$
, $\begin{bmatrix} 1 & e_{1} & i \in [1, n] \\ e_{1} & i \in [1, n] \end{bmatrix}$
vecteurs de base de
l'espace d'état
(II-52)
avec $\mathbf{x}_{1}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & e_{1} & e_{2} & e_{3} & \dots & e_{n} \end{bmatrix}$

Si x est le vecteur état représentatif du système sur cette base, celui-ci s'écrit alors :

$$x'_{1} = M_{1} \cdot x_{1} + B_{1} \cdot u$$
 (II-53)
 $y = C_{1} \cdot x_{1} + D_{1} \cdot u$

Soit une deuxième base d'état \mathscr{C}_2 . Il vient cette fois :

$$\mathcal{C}_{2} = \begin{bmatrix} 2 e_{1}, 2 e_{2}, 2 e_{3} \dots 2 e_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 e_{1}, i \in [1, n], \text{ nouveaux} \\ \text{vecteurs de base de} \\ 1 \text{ 'espace d'état} \end{bmatrix}$$

$$x = x_{2}^{T} \cdot \mathcal{C}_{2}$$
(II-54)

avec
$$\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ \mathbf{x}_1, & 2 \\ \mathbf{x}_2, & 2 \\ \mathbf{x}_3, & \dots & 2 \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

L'entrée u et la sortie y du système ne sont pas modifiées par le changement de base d'état. On a donc :

$$\begin{cases} x'_{2} = M_{2} \cdot x_{2} + B_{2} \cdot u \\ y = C_{2} \cdot x_{2} + D_{2} \cdot u \end{cases}$$
 (II-55)

Soit Q la matrice de passage de la base d'état \mathscr{C}_1 à la base d'état \mathscr{C}_2 . Les deux bases sont liées par la relation II-58 :

$$\mathscr{C}_2 = Q^{\mathrm{T}} \cdot \mathscr{C}_1$$
 (II-56)

En reportant II-54, on obtient :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{2}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathscr{C}}_{2} = \mathbf{x}_{2}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathscr{C}}_{1}) = (\mathbf{x}_{2}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) \cdot \boldsymbol{\mathscr{C}}_{1} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_{2})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathscr{C}}_{1}$$
(III-57)

L'identification avec II-52 conduit à II-58 :

$$x_1^T = (Q \cdot x_2)^T$$
 (II-58)

D'où :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_2 \iff \mathbf{x}_2 = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{x}_1$$
 (II-59)

En remplaçant dans II-55, il vient :

$$\begin{cases} Q^{-1} \mathbf{x'}_{1} = M_{2} \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{x}_{1}) + B_{2} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C_{2} \cdot (Q^{-1} \cdot \mathbf{x}_{1}) + D_{2} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$
 (II-60)

Ceci est encore équivalent à :

$$\begin{cases} \mathbf{x'}_{1} = (Q \cdot M_{2} \cdot Q^{-1}) \cdot \mathbf{x}_{1} + (Q \cdot B_{2}) \cdot \mathbf{x}_{1} \\ \\ \mathbf{y} = (C_{2} \cdot Q^{-1}) \cdot \mathbf{x}_{1} + D_{2} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$
 (II-61)

La comparaison avec II-53 donne immédiatement les relations :

$$\begin{cases} M_{1} = Q \cdot M_{2} \cdot Q^{-1} \\ C_{1} = C_{2} \cdot Q^{-1} \\ D_{1} = D_{2} \end{cases}$$
(II-62)

$$B_1 = Q B_2 \tag{II-63}$$

L'étude des bases de polynômes a conduit auparavant au résultat

-116-

$$B_{+1} = P_{+} \cdot B_{+2}$$
 (II-51)

Or, pour une représentation de type II, il y a identité entre les termes de B_{+1} et ceux de B_1 . En effet on a la relation :

$$B_{+1} = \begin{bmatrix} B_{i} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B_{+2} = \begin{bmatrix} B_{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (II-64)$$

II-51 peut donc s'écrire sous forme développée :

En développant les n premières lignes de la matrice, on

obtient :

$$B_{1} = P \cdot B_{2} + \begin{bmatrix} \circ \cdot P_{1,n+1} \\ \circ \cdot P_{2,n+1} \\ \vdots \\ \circ \cdot P_{n,n+1} \end{bmatrix}$$
(II-66)

D'où :

 $B_1 = P \cdot B_2$

(II-67)

P est la matrice déduite de la matrice de passage d'une base de polynômes à l'autre en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.

$$B_1 = Q \cdot B_2 = P \cdot B_2$$
 (II-68)

Q est une matrice de passage. Donc elle est nécessairement inversible. Multiplions à gauche et à droite par son inverse Q^{-1} . Il vient :

$$Q^{-1} \cdot Q \cdot B_2 = I \cdot B_2 = Q^{-1} \cdot P \cdot B_2$$
 (II-69)

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{P}). \mathbf{B}_2 = 0 \quad \forall \mathbf{B}_2 \Longrightarrow \mathbf{Q}^{-1} . \mathbf{P} = \mathbf{I}$$
 (II-70)

En multipliant à gauche et à droite par Q, on obtient le résultat énoncé :

 $P = Q \tag{II-71}$

II.2 - CALCUL DE LA BASE DE POLYNOMES

Connaissant les deux bases de polynômes, la détermination de la matrice de passage est réalisée par lecture directe grâce au théorème du changement de base. Il s'agit à présent de préciser les vecteurs de la base de polynômes.

Dans la première partie, ce calcul a été effectué par identification de la fonction de transfert déterminée par substitution à partir des n équations de lecture du schéma.

Nous proposons ici deux théorèmes pour remplacer cette méthode malaisée dans le cas des systèmes de grande dimension.

a) Première méthode : Théorème 1

Théorème 1

Soit un système défini par une relation du type

(I-24)

où

Soit Bla base de polynômes associée à cette représentation. La connaissance de la matrice M seule permet la détermination de P à une constante multiplicative près, par la formule II-72.

Dét (pI - M) =
$$A_{+}^{T}$$
.

 $A_{+}^{T} = \left[\alpha_{n}, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{2}, \alpha_{1}, 1 \right]$

avec

Démonstration

Soit un système satisfaisant les conditions générales de l'étude. Une représentation d'état de ce système s'écrit donc :

$$\begin{cases} x' = M \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$$

p symbolisant l'opérateur de dérivation par définition, ceci peut s'écrire sous forme matricielle :

$$pIx = M \cdot x + B \cdot u$$
 (II-73)

avec I matrice identité d'ordre n

D'où

$$(pI - M).x = Bu$$
 (II-74)

Si la matrice pI - M est inversible, ceci équivaut à :

$$x = (pI - M)^{-1} \cdot B \cdot u$$

(II - 72)

(I-24)

Reportons dans la deuxième équation de I-24. On obtient ainsi :

$$y = \left[C \cdot (pI - M)^{-1} \cdot B + D \right] u$$
 (II-76)

D'après nos hypothèses, y et u sont scalaires. On peut donc en faire le rapport

$$\frac{y}{11} = C \cdot (pI - M)^{-1} \cdot B + D$$
 (II-77)

La définition de l'inverse d'une matrice conduit à :

$$(pI - M)^{-1} = \frac{1}{D \in t (pI - M)} \cdot Com^{T} (pI - M)$$
 (II-78)

si $\operatorname{Com}^{\mathrm{T}}$ désigne la transposée de la comatrice.

En reportant dans II-77, il vient :

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{D \acute{e}t (pI - M)}$$
 . C . Com^T (pI - M) . B + D (II-79)

D'où

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{D\acute{e}t (pI - M)} \left[C \cdot Com^{T} (pI - M) \cdot B + D\acute{e}t (pI - M) \cdot D \right]$$
(II-80)

Le même système vérifie également la relation :

$$\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{B}_{+}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathscr{B}}}{\mathbf{A}_{+}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathscr{B}}}$$
(II-81)

En écrivant l'égalité des dénominateurs dans les expressions II-80 et II-81, on obtient le résultat énoncé :

Dét (pI - M) = A_{+}^{T} . \mathcal{B} à une constante multiplicative près (II-72)

b) Seconde méthode : Théorème 2

Théorème 2

Soit un système défini par une relation du type :

 $\begin{cases} x' = M \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$

Soit *B*la base de polynômes associée, à laquelle on a enlevé le dernier terme.

La connaissance des matrices M et C de I-24 permet de déterminer Dà une constance multiplicative près, par la formule II-82.

Com (pI - M) .
$$C^{T} = \mathscr{B}_{-}$$

(II - 82)

(1-24)

Démonstration

Egalons cette fois les numérateurs des expressions II-80 et II-81 obtenues précédemment. Il vient :

C. Com^T (pI - M) . B + Dét (pI - M) · D =
$$B_{+}^{T}$$
 . \mathcal{B} (II-83)
à une constante multiplicative près.

D'après nos hypothèses, les systèmes considérés ont toujours le degré du numérateur inférieur d'au moins une unité au degré du dénominateur. Dans ce cas, on a toujours D = 0.

Alors l'égalité II-87 se simplifie sous la forme :

C.
$$Com^{T}(pI - M)$$
. $B = B_{+}^{T}$. \mathscr{B} (II-84)

Les deux membres de l'égalité II-84 sont des scalaires. Ils sont donc égaux à leur transposée. On en déduit :

C.
$$\operatorname{Com}^{\mathrm{T}}(\operatorname{pI} - \operatorname{M})$$
. $B = (C \cdot \operatorname{Com}^{\mathrm{T}}(\operatorname{pI} - \operatorname{M}) \cdot B)^{\mathrm{T}}$ (II-85)
= $B^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{Com}(\operatorname{pI} - \operatorname{M}) \cdot C^{\mathrm{T}}$

D'où

$$B^{T}$$
. Com (pI - M) . $C^{T} = B_{+}^{T}$. \mathcal{B} (II-86)

Nous avons défini B et B₊ par :

$$B_{+}^{T} = \begin{bmatrix} \beta_{n}, \beta_{n-1}, \dots, \beta_{1}, 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{T} = \begin{bmatrix} \beta_{n}, \beta_{n-1}, \dots, \beta_{1} \end{bmatrix}$$
(II-87)

Par conséquent on a :

$$B_{+}^{T} \cdot \mathcal{B} = B^{T} \cdot \mathcal{B}_{-} + 0 \cdot e_{n+1} = B^{T} \cdot \mathcal{B}_{-}$$

en posant
$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} e_{1} \\ e_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n} \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} e_{1} \\ e_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n} \end{bmatrix}$$

L'équation II-86 se réduit à II-89 :

$$B^{T}$$
. Com (pI - M) . C = B^{T} . \mathcal{B}_{-} (II-89)

(II-88)

(II - 82)

On en déduit le résultat final

Com (pI - M) . $C^{T} = \mathcal{B}_{-}$

c) Comparaison pratique des deux méthodes

Evaluons le volume de calculs nécessaires à la détermination de la base de polynômes par chacune des deux méthodes.

Le théorème 1 utilise Dét (pI - M) : il faut donc calculer un déterminant d'ordre n.

Dans le théorème 2 intervient Com (pI - M) . C^{T} . La comatrice étant composée par les mineurs terme-à-terme, il est donc nécessaire de calculer n² déterminants d'ordre n-1 dans le cas général.

Toutefois dans le cas des représentations de type II que nous étudions, la matrice C est telle que :

$$C = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots & 0, 1 \end{bmatrix}$$
 (II-90)

Il suffit donc d'évaluer la dernière colonne de la comatrice, puisque les autres sont multipliées par 0.

Le volume des calculs nécessaires à l'utilisation du théorème 2 est ainsi ramené à n déterminants d'ordrem-1. De plus, ces n déterminants interviennent dans le calcul de Dét (pI - M) suivant la dernière colonne.

Par conséquent, il apparait que le théorème 2 ne nécessite qu'une partie des calculs correspondant à l'utilisation du théorème 1.

Toutefois, la faiblesse du théorème 2 réside dans le fait qu'il ne permet pas de déterminer le dernier terme de la base de polynômes:

Remarque

Examinons l'égalité obtenue pour le théorème ! :

Dét
$$(pI - M) = A_{+}^{T}$$
. \mathscr{P} (II-72)

Elle indique que le choix arbitraire d'une représentation d'état, ou seulement de sa partie linéaire M, détermine immédiatement la base de polynômes associée, donc le schéma de simulation correspondant. Cette remarque constitue une vérification a posteriori de l'équivalence entre une représentation d'état et un schéma de simulation.

11.3 - MISE EN OEUVRE DE LA METHODE PROPOSEE

a) Exemple : La forme Compagnon II généralisée

Il convient de retrouver à l'aide des théorèmes proposés l'expression de la base de polynômes déterminée par substitution pour la forme Compagnon II généralisée. Celle-ci s'écrit :



(II-20)

1)

$$y = (0, 0 \dots 0, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$
 (II-2)

Calculons la base de polynômes correspondante à l'aide du

En développant ce déterminant par rapport à sa dernière ligne, il vient :



Ce second déterminant correspond à une matrice triangulaire inférieure : il est égal au produit des termes de la diagonale.

théorème 1. On a

En notant

$$Dét (pI - M) = \Delta$$
(II-93)

Dans II-92 apparaît un déterminant du même type que Δ_n , mais d'ordre n-1.

Il vient ainsi :

$$\Delta_{n} = \Delta_{n-1} + (p + \psi_{n} + \alpha_{1}) (p + \psi_{1}) (p + \psi_{2}) \dots (p + \psi_{n-1})$$
 (II-94)

Développons à nouveau Δ_{n-1} par rapport à sa dernière ligne, puis Δ_{n-2} , et plus généralement Δ_i jusque Δ_2

$$\Delta_{2} = \begin{bmatrix} p + \psi_{1} & \alpha_{n} \\ -1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \alpha_{n-1} (p + \psi_{1}) + \alpha_{n}$$
(II-95)

On obtient ainsi le système II-96

$$\Delta_{n} = \Delta_{n-1} + (p+\psi_{n}+\alpha_{1}) (p+\psi_{1}) (p+\psi_{2}) \dots (p+\psi_{n-1})$$

$$\Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} + \alpha_{2} (p+\psi_{1}) (p+\psi_{2}) \dots (p+\psi_{n-2})$$

$$\dots$$

$$\Delta_{i+1} = \Delta_{i} + \alpha_{n-i} (p+\psi_{1}) (p+\psi_{2}) \dots (p+\psi_{i})$$

$$\dots$$

$$\Delta_{2} = \alpha_{n-1} (p+\psi_{1}) + \alpha_{n}$$
(II-96)

En faisant la somme de ces équations membre à membre, il vient :

$$\Delta_{n} = (p + \psi_{n} + \alpha_{1}) (p + \psi_{1}) (p + \psi_{2}) \dots (p + \psi_{n-1})$$
 (II-97)

- + $\alpha_2(p+\psi_1)$ $(p+\psi_2)$... $(p+\psi_{n-2})$
- + α_{n-i} (p+ ψ_1) (p+ ψ_2) ... (p+ ψ_i)
- + α_{n-1} (p+ ψ_1) + α_n

D'après le théorème 1, cette expression II-97 est encore égale à A_{+}^{T} . \mathscr{D} avec $A_{+}^{T} = \left[\alpha_{n}, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{1}, 1 \right]$

En recomposant le produit matriciel, on déduit de II-97

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \alpha_{\mathbf{n}}, \alpha_{\mathbf{n}-1}, \dots, \alpha_{1}, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p+\psi_{1} \\ \vdots \\ (p+\psi_{1})(p+\psi_{2}) \dots (p+\psi_{\mathbf{n}-2}) \\ (p+\psi_{1})(p+\psi_{2}) \dots (p+\psi_{\mathbf{n}-1}) \\ (p+\psi_{1})(p+\psi_{2}) \dots (p+\psi_{\mathbf{n}-1})(p+\psi_{\mathbf{n}}) \end{bmatrix}$$
(II-98)

La base de polynômes obtenue est identique à celle qui est mise en évidence en II-24 à partir du calcul de la fonction de transfert par substitution. Il convient à présent de recommencer la détermination de la base de polynômes à partir du théorème 2.

Pour cela, il est nécessaire d'évaluer les mineurs des termes de la deuxième colonne de la matrice (pI - M). Or ceux-ci sont tous des déterminants d'ordre n-1 de matrices triangulaires dans l'exemple proposé. Le calcul est donc très simplifié.

Ainsi le premier mineur vaut :



le second :



Celui d'ordre i







On obtient ainsi directement la base de polynômes au dernier terme près.

On voit que, pour cet exemple, le calcul est beaucoup plus rapide par le théorème 2.

Cherchons la matrice de passage de la forme Compagnon II à cette forme Compagnon II généralisée.

Il convient donc d'exprimer les coefficients de la base de polynômes déterminée précédemment sur la base naturelle p^k , $k \in [0,n]$



(II-103)

avec les notations σ_i^j introduites dans le premier paragraphe.

L'expression II-103 est la forme développée de la relation II-46: $\mathcal{B}_2 = P_+^T \cdot \mathcal{B}_1$.

Le théorème du changement de base indique que la matrice de passage de Compagnon II à Compagnon généralisée est égale à P. Pour l'obtenir, il faut donc rayer la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice figurant dans II-103, puis la transposer.

On obtient ainsi : $P = \begin{bmatrix} 1 & \psi_1 & \psi_1 \psi_2 & \cdots & \sigma_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & \psi_1 + \psi_2 & \cdots & \sigma_{n-1}^{n-2} \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & &$

On obtient :

$$M_{CIIG} = P^{-1} \cdot M_{CII} \cdot P$$
 (II-105)

On sait que l'on a aussi :

$$B_{1} = P \cdot B_{2} \text{ avec } B_{1} = \begin{bmatrix} b_{n} \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_{2} \\ b_{1} \end{bmatrix} \text{ et } B_{2} = \begin{bmatrix} \beta_{n} \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_{2} \\ \beta_{1} \end{bmatrix} (II-106)$$

En écrivant cette relation sous forme développée, on retrouve le système d'équations d'identification des coefficients II-26.

Il est possible enfin de déterminer les coefficients du dénominateur, grâce à la relation II-107 :

$$A_{+2} = P_{+}^{-1} \cdot A_{+1}$$
 (II-107)

ainsi que les composantes du vecteur état par II-108

$$x_2 = P^{-1} \cdot x_1$$

(II-108)

b) Cas des représentations de type I

-133-

Le théorème de changement de base n'est valable que pour les matrices de type II. En effet il utilise le fait que la matrice des coefficients du numérateur de la fonction de transfert soit identique à la matrice B de la représentation d'état. Au contraire dans le cas des mises en équation de type I, la matrice C est égale à la matrice des coefficients.

Par ailleurs, le théorème du changement de base ne permet pas le passage d'une matrice de type I à une matrice de type II.

L'étude des matrices Compagnon I et II donne un contre exemple. Toutes deux sont associées à la base naturelle p^k , k $\in [0, n]$, Donc la matrice de passage d'une base de polynômes à l'autre est l'identité, et elle n'est pas égale à la matrice de passage de Compagnon I à Compagnon II.

En revanche, il n'est pas nécessaire d'élaborer un théorème de changement de base propre au cas des mises en équations de type I. Pour calculer la matrice de passage Q entre deux matrices de type I, il suffit de les transposer pour se ramener aux deux matrices de type II correspondantes, et de calculer la matrice de passage P entre elles à l'aide du théorème proposé. La matrice Q recherchée est alors définie par la relation II-109

 $Q = (P^{-1})^{T}$

(II - 109)

En effet considérons deux représentations de type II

$$x'_{1} = M_{1} \cdot x_{1} + B_{1} \cdot u$$
 (II-110)
 $y = C_{1} \cdot x_{1} + D_{1} \cdot u$

$$x'_{2} = M_{2} \cdot x_{2} + B_{2} \cdot u$$
 (II-111)
 $y = C_{2} \cdot x_{2} + D_{2} \cdot u$

Si P est la matrice de passage de l'une à l'autre, on a :

$$M_{2} = P^{-1} \cdot M_{1} \cdot P$$

$$B_{2} = P^{-1} \cdot B_{1}$$

$$C_{2} = C_{1} \cdot P$$

$$D_{2} = D_{1}$$
(II-112)

Les deux représentations de type I associées s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{x'}_{1} = \mathbf{M}_{1}^{T} \cdot \mathbf{x}_{1} + \mathbf{C}_{1}^{T} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}_{1}^{T} \cdot \mathbf{x}_{1} + \mathbf{D}_{1} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$
(II-113)
$$\begin{cases} \mathbf{x'}_{2} = \mathbf{M}_{2}^{T} \cdot \mathbf{x}_{2} + \mathbf{C}_{2}^{T} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}_{2}^{T} \cdot \mathbf{x}_{2} + \mathbf{D}_{2} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$
(II-114)

Q étant la matrice de passage de II-113 à II-114, on a de même :

$$M_2^{T} = Q^{-1} \cdot M_1^{T} \cdot Q$$

$$C_2^{T} = Q^{-1} \cdot C_1^{T}$$

$$B_2^{T} = B_1^{T} \cdot Q$$

$$D_2^{T} = D_1^{T}$$

Transposons les égalités de II-112, il vient :

$$M_{2}^{T} = (P^{-1} \cdot M_{1} \cdot P)^{T} = P^{T} \cdot M_{1}^{T} \cdot (P^{-1})^{T}$$

$$B_{2}^{T} = (P^{-1} \cdot B_{1})^{T} = B_{1}^{T} \cdot (P^{-1})^{T}$$

$$C_{2}^{T} = (C_{1} \cdot P)^{T} = P^{T} \cdot C_{1}^{T}$$

$$D_{2}^{T} = D_{2} = D_{1}^{T} = D_{1}$$
(II-116)

(II - 115)

En comparant avec le système II-115 ci-dessus, on obtient immédiatement :

$$Q = (P^{-1})^{T}$$
 (II-109)

Par ailleurs, la connaissance d'une matrice R de passage de Compagnon II à Compagnon I permet de calculer la matrice de passage d'une représentation quelconque de type II à une autre de type I, ou vice-versa.

En effet, on cherche S telle que $M_2^T = S^{-1} \cdot M_1 \cdot S$ avec M_1 de type II et M_2^T de type I.

On peut évaluer par la méthode la matrice de passage P^{-1} de M₁ à Compagnon II, telle que II-117

$$M_{1} = P^{-1} \cdot M_{CII} \cdot P \Longrightarrow M_{CII} = P \cdot M_{1} \cdot P^{-1}$$
 (II-117)

ainsi que la matrice de passage Q^T de M_2^T à Compagnon I, telle que II-118

$$M_2^T = Q^T \cdot M_{CI} \cdot Q^{-1T} = Q^T \cdot M_{CII}^T \cdot Q^{-1T}$$
 (II-118)

Si R est la matrice de passage de Compagnon II à Compagnon I, on a en outre :

$$M_{CI} = R^{-1} \cdot M_{CII} \cdot R$$
 (II-119)

Des trois dernières relations, on tire :

$$M_2^T = (Q^T \cdot R^{-1} \cdot P) \cdot M_1 \cdot (P^{-1} \cdot R \cdot Q^{-1T})$$
 (II-120)

On en déduit immédiatement :

$$S = P^{-1} \cdot R \cdot (Q^{-1})^{T}$$

 $S^{-1} = Q^{T} \cdot R^{-1} \cdot P$
(II-121)

Par conséquent, on peut résoudre tous les types de problèmes de changement de base à l'aide du seul théorème du changement de base à condition de connaître une matrice R de passage de Compagnon II à Compagnon I. Cette matrice R vérifie par définition :

$$M_{CI} = R^{-1} \cdot M_{CII} \cdot R$$
(II-122)

$$C^{T} = R^{-1} \cdot B$$

$$D = D$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \tag{II-123}$$

On suppose que R =
$$\begin{bmatrix} rij \end{bmatrix}$$
 $l \leq i \leq n$
 $l \leq i \leq n$

En effectuant alors le produit matriciel indiqué en II-123, on obtient les égalités terme-à-terme suivantes :

 $\begin{bmatrix} b_{n} = r_{n1} = r_{1n} \\ b_{n-1} = r_{n2} = r_{2n} \\ \cdots \\ b_{2} = r_{n,n-1} = r_{n-1,n} \\ b_{1} = r_{n,n} \end{bmatrix}$

В

(II-124)

D'autre part, on dispose également de la relation :

$$M_{CI} = R^{-1} \cdot M_{CII} \cdot R \iff R \cdot M_{CI} = M_{CII} \cdot R$$
(II-122)

Le développement des deux produits matriciels de cette dernière expression et leur identification terme-à-terme conduit à écrire :

$$r_{11} = a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}$$

$$r_{12} = a_{n-2} b_n - a_n b_{n-2}$$

$$\dots$$

$$r_{1,n-1} = a_1 b_n - a_n b_1$$
(II-125)

Εt

$$r_{ij} = a_{n-j} r_{in} + r_{i-1,j+1} - a_{n-i+1} r_{n,j+1}$$
 i $\in [2,n]$ (II-126)
 j $\in [1,n-1]$

A partir de ces équations, la détermination de la matrice R globale s'effectue par étapes.

Première phase : le système II-124 permet l'identification de la dernière ligne et de la dernière colonne de R

	$\int \cdot \cdot \cdot$	•	ຊີ	
R =	•	•	8	
	•	,	8	& termes identifié
		.•	8	
	8 8 8	8	8	

Seconde phase : II-125 permet de calculer les termes de la lère ligne de R à partir des coefficients de la fonction de transfert



Troisième phase : II-126 est un algorithme qui permet de calculer les termes centraux de la matrice R à partir des termes connus ligne par ligne. Le schéma ci-dessous illustre le déroulement du calcul.



L'ensemble de la matrice R est ainsi déterminé.

Exemple d'application

Soit le système d'ordre 4 défini par sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{2p^{3} + 2p^{2} + 3p + 1}{p^{4} + p^{3} + 4p^{2} + p + 2}$$

On a donc

 $a_1 = 1$ $a_2 = 4$ $a_3 = 1$ $a_4 = 2$ $b_1 = 2$ $b_2 = 2$ $b_3 = 3$ $b_4 = 1$

-139-

Par application de II-124, on a immédiatement

	Γ·	•	•	1	
	.	•	•	3	
R =		•	•	2	(II-127)
	lı	3	2	2	

Le système II-125 conduit à :

 $\begin{cases} \mathbf{r}_{11} = 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5 \\ \mathbf{r}_{12} = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0 \\ \mathbf{r}_{13} = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3 \end{cases}$ (II-128)

D'où

		- -5	0	-3	1
R =		•	•	•	3
		•	•	•	2
		1	3	2	2

Il suffit d'utiliser 6 fois l'algorithme II-126 pour déterminer les termes restants.

On obtient ainsi le résultat complet :

	-5	0	-3	1
R =	0	7	2	3
	-3	2	-3	2
		3	2	2

(II-130)

Cette matrice doit vérifier l'égalité II-122

$$M_{CI} = R^{-1} \cdot M_{CII} \cdot R$$
 (II-122)

(II-129)

Il est nécessaire d'effectuer le calcul de R^{-1} .

Il vient :

	-27	-7	23	1		
-1 1	-7	23	. 1	-32		
$R = \frac{1}{67}$	23	1,	-32	19		(II-131)
	1.	-32	19	62		

On peut contrôler alors que l'on a bien l'égalité :

-			-	-			•	7	Г			
-27	-7	23	1	0	0	0	-2		-5	0	-3	1
-7	23	. 1	-32	1	0	0	-1		0	7	2	3
23	1	-32	19	0	1	0	-4		-3	2	-3	2
1	-32	19	62	0	0	I	-1		1	3	2	2
			-						Ξ.			

	0	1	0	0	
	0	0	1	0	
=	0	0	0	1	
	-2	-1	-4	-1	

Conclusion

Avec ce dernier point, nous sommes en mesure de résoudre tous les problèmes de changements de base pour des matrices quelconques de type I ou de type II, en linéaire. On peut donc poser a priori une forme de matrice particulière en vue de la représentation des systèmes. La méthode proposée permet de déterminer s'il existe une matrice de passage de cette forme quelconque à la forme Compagnon de même type, c'est-à-dire si la matrice considérée peut constituer une représentation d'état du système. Dans l'affirmative, la matrice de passage peut-être calculée grâce aux méthodes proposées. D'autre part, chaque forme de schéma de simulation admissible induit une représentation d'état par simple lecture. L'ensemble de ces résultats fait de la méthode proposée un outil efficace de recherche systèmatique de nouvelles formes pour la représentation des systèmes.

111 - DETERMINATION DE FORMES MATRICIELLES POUR LA REPRESENTATION

DES SYSTEMES

III.1 - FORME EN FLECHE

Dans le paragraphe I.3-b de ce chapitre, nous avons introduit la forme dite en flèche mince. Pour cette forme, les équations permettant d'identifier les coefficients ont été obtenues par substitution.

Nous pouvons à présent retrouver ce résultat à partir des théorèmes proposés précédemment.

a) Matrice de passage et calcul des coefficients

Il convient tout d'abord de déterminer la base de polynômes. Pour cela, nous utilisons le théorème 2. Il s'agit donc de calculer la dernière colonne de Com (pI - M_{FLE}) puisque C = (0, 0 . . . 0, !) De l'expression de M_{FLE} figurant en II-32, on déduit :



Le premier mineur est calculé en développant par rapport à la première colonne

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_1 \\ -k_2 \\ -k_1 \\ -k_2 \\ -k_{n-1} \end{pmatrix}^{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_{n-1} \end{pmatrix}^{0} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} k_1 (p+\psi_2) \dots (p+\psi_{n-1})^{n+1} (p$$

Le second en développant par rapport à la deuxième colonne



(II - 134)

-144-
colonne :

$$(-1)^{n+i} \begin{vmatrix} p+\psi_{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p+\psi_{1-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+\psi_{1-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+\psi_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & p+\psi_{n-1} \\ -k_{1}\cdots -k_{1-1} & -k_{1} & -k_{1+1}\cdots -k_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+i} \cdot (-1)^{n+i} k_{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} (p+\psi_{j})$$
(II-135)

Celui de rang i, jusque i = n-l, par rapport à la i^{ème}

Le dernier est un déterminant de matrice diagonale :

$$(-1)^{2n} \prod_{j=1}^{n-1} (p+\psi_j) = \prod_{j=1}^{n-1} (p+\psi_j)$$
(II-136)

On en déduit immédiatement la base de polynômes sauf son dernier terme :

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} k_{1} \prod_{j=2}^{n-1} (p+\psi_{j}) \\ k_{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n-1} (p+\psi_{j}) \\ \vdots \\ k_{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j=1}}^{n-2} (p+\psi_{j}) \\ \prod_{\substack{j=1 \\ j=1}}^{n-1} (p+\psi_{j}) \end{bmatrix}$$

(II-137)

-145-

Ecrivons la matrice des coordonnées des vecteurs de la base \mathscr{D}_{-} sur la base naturelle p^k, k $\in [0, n-1]$. Il vient : $\begin{bmatrix} k_1 \sigma_{n-1}^{n-2}(1) & k_1 \sigma_{n-1}^{n-3}(1) & \cdots & k_1 \sigma_{n-1}^{1}(1) & k_1 & 0 \\ k_2 \sigma_{n-1}^{n-2}(2) & k_2 \sigma_{n-1}^{n-3}(2) & \cdots & k_2 \sigma_{n-1}^{1}(2) & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ k_{n-1}\sigma_{n-2}^{n-2} & k_{n-1}\sigma_{n-2}^{n-3} & \dots & k_{n-1}\sigma_{n-2}^{1} & k_{n-1} & 0 \\ \sigma_{n-1}^{n-1} & \sigma_{n-1}^{n-2} & \dots & \sigma_{n-1}^{2} & \sigma_{n-1}^{1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{n-2} \\ p^{n-2} \\ p^{n-2} \end{bmatrix}$$

D'après le théorème du changement de base, cette matrice est la transposée de la matrice de passage P de la forme Compagnon II à la forme en flèche. Cette matrice de passage s'écrit donc :

$$P = \begin{bmatrix} k_{1} \sigma_{n-1}^{n-2}(1) & k_{2} \sigma_{n-1}^{n-2}(2) & \dots & k_{n-1} \sigma_{n-2}^{n-2} & \sigma_{n-1}^{n-1} \\ k_{1} \sigma_{n-1}^{n-3}(1) & k_{2} \sigma_{n-1}^{n-3}(2) & \dots & k_{n-1} \sigma_{n-2}^{n-3} & \sigma_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{1} \sigma_{n-1}^{1}(1) & k_{2} \sigma_{n-1}^{1}(2) & \dots & k_{n-1} \sigma_{n-2}^{1} & \sigma_{n-1}^{2} \\ k_{1} & k_{2} & \dots & k_{n-1} & \sigma_{n-1}^{1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II - 1.39)

Dès lors, on peut déduire les α_j , $j \in [1, n]$ et les β_j , $j \in [1, n]$, par produit matriciel en fonction des coefficients de la fonction de transfert et des ψ_j , $j \in [1, n]$, grâce aux relations II-140

$$\begin{cases} M_{FLE} = P^{-1} \cdot M_{CII} \cdot P \\ B_{FLE} = P^{-1} \cdot B_{CII} \end{cases}$$
(II-140)

$$A_{+FLE} = P_{+}^{-1} \cdot A_{+CII}$$
 (II-141)

Toutefois, la détermination des α_j , $j \in [1, n]$ d'après II-141 parait impossible, puisque l'utilisation du théorème II ne permet pas de disposer de la matrice complète P_+ . Il faut donc définir une autre méthode pour réaliser cette identification dans tous les cas où l'usage du théorème 2 simplifie l'évaluation de la base de polynômes.

On observe que les $-\alpha_j$, j $\in [1,n]$ apparaissent dans la dernière colonne de M_{FLE} . Or on a :

$$M_{FLE} = P^{-1} \cdot M_{CII} \cdot P$$
 (II-140)

Par définition du produit matriciel, on peut écrire :

dernière colonne de M_{FLE} = P⁻¹ x (dernière colonne de M_{CII}P) = P⁻¹. (M_{CII} x dernière colonne de P) (II-142)

La relation ci-dessus permet d'identifier les coefficients α_i , j $\in [1, n]$ sans connaître la matrice totale P_+ .

Notons que, même lorsque l'on dispose de P^+ , l'utilisation de II-141 exige le calcul de l'inverse de P^+ . Dans la pratique, on évite cet intermédiaire par la méthode suivante :

$$A_{+CII} = P_{+} \cdot A_{+FLE}$$
(II-143)

Sous forme développée, ceci s'écrit encore :



Les n premières lignes conduisent à la relation

$$A_{CII} = P. A_{FLE} + \begin{bmatrix} p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \\ \vdots \\ p_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

D'où

P.
$$A_{FLE} = A_{CII} - \begin{bmatrix} p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \\ \vdots \\ p_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

(II-146)

(II-145)

On en déduit enfin :

$$A_{FLE} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{1,n+1} \\ P_{2,n+1} \\ P_{n,n+1} \end{bmatrix}$$
 (II-147)

Par conséquent, pour déterminer les coefficients α_j , j $\in [1,n]$ on utilise une relation du type II-142 lorsqu'on a évalué la base de polynômes par le théorème 2, et une relation du type II-147 pour le théorème 1.

Exemple d'application

Soit un système d'ordre 4 défini par sa fonction de transfert :

$$W(p) = \frac{1}{p^4 + 8p^3 + 21p^2 + 20p + 5}$$
 (II-148)

La représentation Compagnon II s'en déduit immédiatement. Elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \\ \mathbf{x'}_{3} \\ \mathbf{x'}_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (II-149)$$

$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(II-150)

Une représentation en flèche mince de ce système aura la forme définie en II-162 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \\ \mathbf{x'}_{3} \\ \mathbf{x'}_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi_{1} & 0 & 0 & -\alpha_{4} \\ 0 & -\psi_{2} & 0 & -\alpha_{3} \\ 0 & 0 & -\psi_{3} & -\alpha_{2} \\ \mathbf{k}_{1} & \mathbf{k}_{2} & \mathbf{k}_{3} & -\psi_{4} - \alpha_{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{4} \\ \beta_{3} \\ \beta_{2} \\ \beta_{1} \end{bmatrix} u^{*}$$
(II-151)
$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix}$$
(II-152)

On peut appliquer la formule II-150 à l'ordre quatre pour obtenir la matrice de passage. Il vient :

$$P = \begin{pmatrix} k_{1}\psi_{2}\psi_{3} & k_{2}\psi_{1}\psi_{3} & k_{3}\psi_{1}\psi_{2} & \psi_{1}\psi_{2}\psi_{3} \\ k_{1}(\psi_{2}+\psi_{3}) & k_{2}(\psi_{1}+\psi_{3}) & k_{3}(\psi_{1}+\psi_{2}) & \psi_{1}\psi_{2}+\psi_{1}\psi_{3}+\psi_{2}\psi_{3} \\ k_{1} & k_{2} & k_{3} & \psi_{1}+\psi_{2}+\psi_{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(II-153)
$$D\xi t P = k_{1}k_{2}k_{3} \qquad \begin{pmatrix} \psi_{2}\psi_{3} & \psi_{1}\psi_{3} & \psi_{1}\psi_{2} \\ \psi_{2}+\psi_{3} & \psi_{1}+\psi_{3} & \psi_{1}+\psi_{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(II-154)
$$= k_{1}k_{2}k_{3} \qquad (\psi_{1}-\psi_{2}) & (\psi_{2}-\psi_{3}) & (\psi_{3}-\psi_{1}) \end{pmatrix}$$

Pour que la matrice P de passage soit inversible, il est nécessaire et suffisant que son déterminant soit non nul. En exprimant cette condition, on retrouve ici une propriété connue de la forme en flèche [17] que nous avons introduite comme hypothèse : les termes ψ_j de la diagonale doivent être choisis nécessairement distincts pour $j \in [1,n-1]$, soit ici $j \in [1,3]$. A cette condition on peut calculer la matrice inverse de la matrice P. On obtient :

$$\frac{1}{\frac{1}{k_{1}-\psi_{2}-\psi_{1}}} \frac{-\psi_{1}}{(\psi_{1}-\psi_{2})-(\psi_{1}-\psi_{3})} \frac{-\psi_{1}}{k_{1}-\psi_{2}-(\psi_{1}-\psi_{3})} \frac{\psi_{1}^{2}}{k_{1}-(\psi_{1}-\psi_{2})-(\psi_{1}-\psi_{3})} \frac{-\psi_{1}^{3}}{k_{1}-(\psi_{1}-\psi_{2})-(\psi_{1}-\psi_{3})} \frac{-\psi_{1}^{3}}{k_{1}-(\psi_{1}-\psi_{2})-(\psi_{1}-\psi_{3})} \frac{-\psi_{2}^{3}}{k_{2}-(\psi_{2}-\psi_{1})-(\psi_{2}-\psi_{3})} \frac{\psi_{2}^{2}}{k_{2}-(\psi_{2}-\psi_{1})-(\psi_{2}-\psi_{3})} \frac{-\psi_{2}^{3}}{k_{2}-(\psi_{2}-\psi_{1})-(\psi_{2}-\psi_{3})} \frac{-\psi_{2}^{3}}{k_{2}-(\psi_{2}-\psi_{3})} \frac$$

(II-155)

$$\frac{1}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{1}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{1}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{1}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{1}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{1}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{1}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{1}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2})} - \frac{-\psi_{3}^{3}}{k_{3} (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{2}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}-\psi_{3}) (\psi_{3}-\psi_{3$$

Premier cas

e-! =

On choisit
$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

 $\psi_1 = 1$ $\psi_2 = 2$ $\psi_3 = 3$ $\psi_4 = 0$

On a alors les matrices :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II-156)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 & -4 & 8 \\ 1/2 & -3/2 & 9/2 & -27/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(II-157)

A l'aide de II-140 on en déduit :

$$\begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(II-158)

On utilise ensuite la relation II-142. On a donc :

$$M_{CII} \times \text{dernière colonne de P} = \begin{bmatrix} -5 \\ -14 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix}$$
(II-159)

D'où, puisque $\Psi_4 = 0$

F 1	1	F			Г	-	,		1
-a ₄		1/2	-1/2	1/2	-1/2	- 5		1/2	
-α3	=	- 1	2	- 4	8	-14	=	1	(II-160)
-α ₂		1/2	-3/2	9/2	-27/2	-10		1/2	
-a ₁		0	0	0	1	- 2		- 2	
L -]	L					ł		J

On obtient finalement la représentation sous forme en flèche :

-152-

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \\ \mathbf{x'}_{3} \\ \mathbf{x'}_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (\mathbf{II}-161)$$

y = (0, 0, 0, 1)
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

On peut s'assurer alors que $M_{FLE} = P^{-1}$. M_{CII} . P pour vérifier le résultat.

Second cas

On choisit cette fois
$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

 $\psi_1 = 3$ $\psi_2 = 2$ $\psi_3 = 1$ $\psi_4 = 0$

On a donc :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 & 9/2 & -27/2 \\ -1 & 2 & -4 & 8 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II-162)

(II-163)

On en déduit :

$$\begin{bmatrix}
\beta_4 \\
\beta_3 \\
\beta_2 \\
\beta_1
\end{bmatrix} = p^{-1} \begin{bmatrix}
b_4 \\
b_3 \\
b_2 \\
b_1
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
1/2 \\
-1 \\
1/2 \\
0
\end{bmatrix}$$
(II-164)

$$M_{CII} \times \text{dernière colonne de P} = \begin{bmatrix}
-5 \\
-14 \\
-10 \\
-2
\end{bmatrix}$$
(II-165)

$$D'où :$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{4} \\ -\alpha_{3} \\ -\alpha_{2} \\ -\alpha_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 & 9/2 & -27/2 \\ -1 & 2 & -4 & 8 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -14 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$
(II-166)

Soit finalement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \\ \mathbf{x'}_{3} \\ \mathbf{x'}_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix}$$
(II-167)
(II-168)

On constate que l'inversion des termes diagonaux ne change, dand ce cas particulier, aucun des autres coefficients de la matrice.

On peut calculer la base d'état \mathscr{C}_2 correspondant à cette représentation II-167 par rapport à \mathscr{C}_1 , base d'état du premier exemple.

On a en effet :

$$\mathcal{E}_{1} = P_{1}^{T} \cdot \mathcal{E}_{CII} \Leftrightarrow \mathcal{E}_{CII} = P_{1}^{-1T} \cdot \mathcal{E}_{1}$$
(II-169)

si \mathcal{C}_{CII} est la base d'état de la forme Compagnon II

$$\mathcal{E}_{2} = P_{2}^{T} \cdot \mathcal{E}_{CII} = P_{2}^{T} \cdot (P_{1}^{-1T}) \cdot \mathcal{E}_{1} = (P_{1}^{-1} \cdot P_{2})^{T} \cdot \mathcal{E}_{1}$$
$$= Q^{T} \cdot \mathcal{E}_{1} \qquad (II-170)$$

On obtient ainsi l'expression de la matrice de passage de \mathscr{C}_1 à \mathscr{C}_2 :

$$Q = P_1^{-1} \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II-171)

Soit :

$$\mathcal{C}_{2} = \begin{bmatrix} e'_{1} \\ e'_{2} \\ e'_{3} \\ e'_{4} \end{bmatrix} = Q^{T} \cdot \mathcal{C}_{1} = \begin{bmatrix} e_{3} \\ e_{2} \\ e_{1} \\ e_{4} \end{bmatrix}$$

(II - 172)

On retrouve bien qu'on a effectué une permutation entre

les variables d'état indicées 1 et 3.

b) Forme en flèche épaisse

Il est possible de choisir les termes de la diagonale d'une forme en flèche égaux aux pôles de la fonction de transfert lorsque ceux-ci sont distincts. On obtient ainsi la forme en flèche que nous avons introduite initialement en III.3 du chapitre 1, pour laquelle les α_i , j $\in [1, n]$ sont tous nuls.

Par extension, on cherche s'il existe une forme en flèche générale où les termes diagonaux peuvent être soit égaux, soit imaginaires conjugués. La diagonale de cette forme, dite en flèche épaisse, prend alors une forme analogue à celle de la diagonale de la matrice de Jordan [3].

Ainsi, le cas d'une racine double fait apparaître un bloc diagonal tel que II-173

$$\begin{bmatrix} -\psi & 1 \\ 0 & -\psi \end{bmatrix} \quad \psi \in \mathbb{R}$$
 (II-173)

le cas des racines imaginaires conjuguées correspond à un bloc diagonal tel que II-174

$$\begin{bmatrix} -\psi & +\phi \\ -\phi & -\psi \end{bmatrix} \quad (\phi,\psi) \in \mathbb{R}^2$$
 (II-174)

-156-

On regroupe les deux cas en étudiant les blocs diagonaux II-175 :

> $\begin{vmatrix} -\psi & \chi \\ \phi & -\psi \end{vmatrix} a \text{vec } \phi = 0 \ \chi = 1 \text{ pour une racine double} \\ \phi & -\psi & \phi = -\chi \text{ pour des racines imaginaires} \\ \text{ conjuguées} \end{cases}$ (II - 175)

La mise en équation d'un bloc isolé de ce type est telle

que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{n} \\ \mathbf{x'}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi & \chi \\ \phi & -\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n} \\ \mathbf{x}_{n+1} \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} \mathbf{x'}_{n} = -\psi \mathbf{x}_{n} + \chi \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{x'}_{n+1} = \phi \mathbf{x}_{n} - \psi \mathbf{x}_{n+1} \end{cases}$$

Soit encore

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\mathbf{x}_{n}}{\mathbf{\chi} \mathbf{x}_{n+1}} = \frac{1}{\mathbf{p} + \psi} \\ \frac{\mathbf{x}_{n+1}}{\mathbf{\phi} \mathbf{x}_{n}} = \frac{1}{\mathbf{p} + \psi} \end{array}\right.$$

(II - 178)

On en déduit immédiatement le bloc de simulation correspondant :

(II - 177)

(II - 176)



Figure II-15

Les racines multiples, d'un ordre de multiplicité supérieur à deux, font intervenir des blocs diagonaux tels que II-179 :

(II - 179)



1

pour un ordre de multiplicité égal à i.

Ceux-ci ont déjà été présentés au cours de l'étude de la forme Compagnon I généralisée, du premier paragraphe.

Ils correspondent à un schéma de simulation faisant intervenir des opérateurs $\frac{1}{p + \psi}$ en série.

Nous pouvons donc déterminer le schéma de simulation associé à chaque type de forme en flèche possible. La méthode permet également de choisir a priori une nouvelle forme de représentation, et de déterminer d'une part si celle-ci est admissible pour le système considéré, d'autre part de calculer ses coefficients et les changements de base qui s'y rapportent.



(II-180)

La mise en équation s'effectue alors de la façon suivante :



D'où :

$$\begin{bmatrix} x'_{n} = -\psi x_{n} + x_{n+1} + \dots + x_{n+1} \\ x'_{n+1} = -\psi x_{n+1} + x_{n+2} \dots + x_{n+1} \\ \dots \\ x'_{n+1} = -\psi x_{n+1} \end{bmatrix}$$
 (II-182)

Soit encore :

$$\begin{bmatrix} \frac{x_n}{x_{n+1} + \cdots + x_{n+i}} = \frac{1}{p + \psi} \\ \frac{x_{n+1}}{x_{n+2} + \cdots + x_{n+i}} = \frac{1}{p + \psi} \\ \cdots \\ x_{n+i} \quad (p + \psi) = 0 \end{bmatrix}$$

(II-183)

On en déduit le schéma de simulation de la figure II-16 pour cette forme choisie a priori.



Figure II-16

Dès que l'on connait le schéma de simulation pour chaque cas, la mise en équation, le calcul de la base de polynômes et de la matrice de passage ainsi que la détermination des coefficients se font par application des théorèmes proposés antérieurement.

c) Exemple

Soit le système défini par sa fonction de transfert :

$$W(p) = \frac{p+4}{(p+1)^3 (p+2)}$$
(II-184)

Ce système comporte un pôle triple - 1.

En développant la fonction de transfert, on obtient :

$$W(p) = \frac{p+4}{p^4 + 5p^3 + 9p^2 + 7p+2}$$
(II-185)

soit $a_1 = 5$ $a_2 = 9$ $a_3 = 7$ $a_4 = 2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$ $b_3 = 1$ $b_4 = 4$

On en déduit immédiatement la représentation sous forme Compagnon II de ce système, qui s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x'_{1} \\ x'_{2} \\ x'_{3} \\ x'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
(II-186)
$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix}$$
(II-187)

On cherche à présent une représentation telle que la diagonale mette en évidence les pôles de la fonction de transfert. On se trouve donc dans le cas d'une forme dont le pôle - 1 est triple. Pour ce pôle, on choisit un bloc du type II-180 proposé précédemment.

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = -1$$
 $\psi_4 = -2$ (II-188)

Par conséquent le schéma de simulation correspondant à la forme cherchée est présenté figure II-17.



Figure II-17

BUS

La lecture des opérations symbolisées par le schéma et la mise sous forme matricielle conduisent à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{1} \\ \mathbf{x}'_{2} \\ \mathbf{x}'_{3} \\ \mathbf{x}'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -\alpha_{4} \\ 0 & -1 & 1 & -\alpha_{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_{2} \\ k_{1} & k_{2} & k_{3} & -2 - \alpha_{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{4} \\ \beta_{3} \\ \beta_{2} \\ \beta_{1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (\mathbf{II}-189)$$

$$\mathbf{y} = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{II}-190)$$

Calculons la base de polynômes par le théorème 1. Il convient donc de déterminer Dét (pI - M)

$$Dét (pI - M) = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -1 & \alpha_4 \\ 0 & p+1 & -1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & p+1 & \alpha_2 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & p+2+\alpha_1 \end{vmatrix}$$
(II-191)

En effectuant le calcul, on obtient :

Dét (pI - M) = (p+1)³(p+2) +
$$\alpha_1$$
(p+1)³ + α_2 $\left(k_1 + k_1(p+1) + k_2(p+1) + k_3(p+1)^2\right)$

+
$$\alpha_3 \left(k_2(p+1)^2 + k_1(p+1) \right) + \alpha_4 k_1(p+1)^2$$
 (II-192)

D'après le théorème 1, la base de polynômes est :

$$\mathcal{B}_{=}\begin{bmatrix} k_{1}(p+1)^{2} \\ k_{2}(p+1)^{2} + k_{1}(p+1) \\ k_{1} + k_{1}(p+1) + k_{2}(p+1) + k_{3}(p+1)^{2} \\ (p+1)^{3} \\ (p+1)^{3} (p+2) \end{bmatrix}$$
(II-193)

-164-

On choisit $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Après développement, il vient :

$$\mathcal{B}_{=} \begin{bmatrix} p^{2} + 2p + 1 & & \\ p^{2} + 3p + 2 & & \\ p^{2} + 4p + 4 & & \\ p^{3} + 3p^{2} + 3p + 1 & \\ p^{4} + 5p^{3} + 9p^{2} + 7p + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ p^{2} \\ p^{3} \\ p^{4} \end{bmatrix}$$
(II-194)

On en déduit l'expression de la matrice de passage P :

		1	2	4	1		
Ρ	=	2	3	4	3		(II-195)
		1	1	1	3	,	
		0	0	0	1		

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 (II-196)

On peut alors effectuer l'identification des coefficients à l'aide de II-140 pour le numérateur

$$\begin{bmatrix} 8_4 \\ 8_3 \\ 8_2 \\ 8_1 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(II-197)

Pour le dénominateur, on utilise cette fois II-147. Donc :

$$A_{1} - \begin{bmatrix} P_{1,n+1} \\ \vdots \\ P_{n,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(II-198)
:

$$A_{2} = p^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{1} - \begin{bmatrix} P_{1,n+1} \\ \vdots \\ P_{n,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{4} \\ \alpha_{3} \\ \alpha_{2} \\ \alpha_{1} \end{bmatrix}$$
(II-199)

D'où :

On trouve les α_j nuls $j \in [1,4]$, ce qui est caractéristique d'une forme dont les termes de la diagonale sont les pôles de la fonction de transfert.

On peut donc écrire la mise en équation globale du système :

$$\begin{bmatrix} x'_{1} \\ x'_{2} \\ x'_{3} \\ x'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (II-200)$$

$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} \qquad (II-201)$$

Pour contrôler le résultat, on peut vérifier que :

$$M = P^{-1} \cdot M_{CII} \cdot P$$

Dans l'étude précédente, nous avons indiqué que, pour une forme en flèche mince, il faut $\psi_i \neq \psi_j$ pour $i \neq j \in [1, n-1]$. En revanche, il est toujours possible de réaliser $\psi_n = \psi_i$, $i \in [1, n-1]$. Par conséquent, dans l'exemple précédent, on ramène l'ordre de multiplicité à deux en effectuant une inversion des pôles et en posant :

 $\psi_1 = \psi_2 = -1$ $\psi_3 = -2$ $\psi_4 = -1$

Le schéma de simulation correspondant est présenté figure II-18.



Figure II-18

La lecture des opérations du schéma et la mise sous forme matricielle conduit à :

$$\begin{bmatrix} x'_{1} \\ x'_{2} \\ x'_{3} \\ x'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -\alpha_{4} \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha_{3} \\ 0 & 0 & -2 & -\alpha_{2} \\ k_{1} & k_{2} & k_{3} & -1-\alpha_{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{4} \\ \beta_{3} \\ \beta_{2} \\ k_{3} \end{bmatrix} u \quad (II-202)$$

$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix}$$

$$(II-203)$$

Il convient de déterminer la base de polynômes. En utilisant le théorème 2, on obtient :

 $\mathcal{B}_{=} \begin{bmatrix} k_{1}(p+1) & (p+2) \\ k_{2}(p+1) & (p+2) + k_{1}(p+2) \\ k_{3}(p+1)^{2} \\ (p+1)^{2} & (p+2) \end{bmatrix}$

(II-204)

Avec $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, il vient :

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} p^{2} + 3p + 2 \\ p^{2} + 4p + 4 \\ p^{2} + 2p + 1 \\ p^{3} + 4p^{2} + 5p + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ p^{2} \\ p^{3} \end{bmatrix}$$
(II-205)

D'où :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} et P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (II-206)$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (II-207)
$$M_{CII} \times \text{dernière colonne de P} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$
 (II-208)

D'où :



Donc les α_i , i \in [1, 4] sont encore tous nuls.

On aboutit ainsi à la représentation suivante :

$$\begin{bmatrix} x'_{1} \\ x'_{2} \\ x'_{3} \\ x'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (II-210)$$

$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix}$$
(II-211)

On a de nouveau $M_{FLE} = P^{-1} \cdot M_{CII} \cdot P$

La matrice de passage de la représentation obtenue en II-200 a la forme en flèche ci-dessus est définie par :

$$Q = P_1^{-1} \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit la nouvelle base d'état par rapport à la précédente :

$$\mathscr{C}_{2} = \begin{bmatrix} e'_{1} \\ e'_{2} \\ e'_{3} \\ e'_{4} \end{bmatrix} = Q^{T} \cdot \mathscr{C}_{1} = \begin{bmatrix} e_{2} \\ e_{3} \\ e_{1} \\ e_{1} + e_{4} \end{bmatrix}$$
(II-213)

(II-212)

C'est donc une permutation circulaire des trois premières variables d'état que nous avons effectuée pour le deuxième calcul.

Dans cet exemple, nous avons proposé a priori une forme de représentation matricielle pour un système défini par sa fonction de transfert. A l'aide des théorèmes proposés, nous avons calculé la matrice de passage de la forme Compagnon II à cette forme déterminée. L'existence de cette matrice de passage et son inversibilité démontrent qu'une telle forme est admissible comme représentation d'état du système, et permettent donc l'identification de tous les coefficients qui la composent.

111.2- FORME TRIDIAGONALE

a) Détermination d'une nouvelle forme

Les formes que nous avons mis en évidence font apparaître des termes tantôt dans la sur-diagonale, tantôt dans la sous-diagonale. Nous cherchons une nouvelle forme que nous choississons telle que à la fois la diagonale, la sur-diagonale et la sous-diagonale soient non nulles. Chaque variable d'état est ainsi liée à la précédente et à la suivante. Il en résulte le schéma général proposé figure II-19.



-171-

Figure II-19

La lecture du schéma permet d'écrire :

BUS

$$\frac{x_{1}}{\beta_{n}u - \alpha_{n}x_{n} + k_{1}x_{2}} = \frac{1}{p + \psi_{1}}$$

$$\frac{x_{2}}{\beta_{n-1}u - \alpha_{n-1} + k_{1}x_{1} + k_{2}x_{3}} = \frac{1}{p + \psi_{2}}$$

$$\frac{x_{3}}{\beta_{n-2}u - \alpha_{n-2}x_{1} + k_{2}x_{2} + k_{3}x_{4}} = \frac{1}{p + \psi_{3}}$$
(II-214)
$$\frac{x_{n}}{\beta_{1}u - \alpha_{1}x_{n} + k_{n-1}x_{n-1}} = \frac{1}{p + \psi_{n}}$$

$$y = x_{n}$$

La mise sous forme matricielle conduit à la représentation



Dans cette forme tridiagonale, la matrice correspondante

est notée M_{TRI},

Dès lors, on peut effectuer les calculs de changement de base et d'identification des coefficients à partir des théorèmes proposés.

b) Calcul de la matrice de passage

Utilisons le théorème 2. Il convient d'évaluer les mineurs de la dernière colonne de (pI - M_{TRI}). On a :



(II-217)

Alors le mineur de rang i+l s'écrit :



 $= (-i)^{n+i+1} \cdot (-i)^{n-i-1} \cdot k_{i+1} \cdot k_{i+2} \cdots k_{n-1} \cdot \Delta_{i} = k_{i+1} \cdot k_{i+2} \cdots k_{n-1} \cdot \Delta_{i}$



En développant ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, il vient :

$$\Delta_{i} = (-1)^{2i} \cdot (p + \psi_{i}) \cdot \Delta_{i-1} + (-1)^{2i-1} \cdot (-k'_{i-1}) \cdot (-k_{i-1}) \cdot \Delta_{i-2} \quad (II-220)$$

D'cù :

$$\Delta_{\mathbf{i}} = (\mathbf{p} + \psi_{\mathbf{i}}) \cdot \Delta_{\mathbf{i}-1} - \mathbf{k}_{\mathbf{i}-1} \cdot \mathbf{k'}_{\mathbf{i}-1} \cdot \Delta_{\mathbf{i}-2}$$
(II-221)

Cette relation II-221 est une formule de récurrence permettant le calcul des Δ_i en fonction de Δ_{i-1} et Δ_{i-2} . En reprenant la récurrence au départ, on obtient par exemple pour les premiers termes :

$$\begin{split} &\Delta_{0} = 1 \\ &\Delta_{1} = p + \psi_{1} \\ &\Delta_{2} = (p + \psi_{1}) (p + \psi_{2}) - k_{1} k'_{1} \\ &\Delta_{3} = (p + \psi_{3}) (p + \psi_{2}) (p + \psi_{1}) - k_{1} k'_{1} (p + \psi_{3}) - k_{2} k'_{2} (p + \psi_{1}) \\ &\Delta_{4} = (p + \psi_{4}) (p + \psi_{3}) (p + \psi_{2}) (p + \psi_{1}) - k_{1} k'_{1} (p + \psi_{4}) (p + \psi_{3}) - k_{2} k'_{2} (p + \psi_{1}) \\ &\qquad (p + \psi_{4}) - k_{3} k'_{3} (p + \psi_{1}) (p + \psi_{2}) + k_{1} k'_{1} k_{3} k'_{3} \\ &\Delta_{5} = (p + \psi_{5}) \Delta_{4} - k_{4} k'_{4} \Delta_{3} \end{split}$$

A partir de la formule II-218, il vient donc la base de polynômes à l'ordre 4 :

(II-223)

Exemple d'application

 \mathbf{c}

Considérons un système défini par le schéma de simulation de la Figure II-20 :



Figure II-20

$$\frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{u} + \mathbf{x}_2} = \frac{1}{\mathbf{p} + 2}$$
$$\frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3} = \frac{1}{\mathbf{p} + 2}$$
$$\frac{\mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_4} = \frac{1}{\mathbf{p} + 2}$$
$$\frac{\mathbf{x}_4}{\mathbf{x}_3} = \frac{1}{\mathbf{p} + 2}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_4$$

On en déduit la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x'_{1} \\ x'_{2} \\ x'_{3} \\ x'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
(II-225)
$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix}$$
(II-226)

(II-224)

Cette représentation est une forme tridiagonale pour laquelle on peut poser :

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 2 & \psi_4 = 0 \\ k_1 = k'_1 = k_2 = k'_2 = k_3 = 1 & k'_3 = 0 \end{cases}$$
 (II-227)

D'où :

$$\begin{cases} A_{\text{TRI}}^{\text{T}} = \left[\alpha_{4}, \alpha_{3}, \alpha_{2}, \alpha_{1}, 1 \right] = \left[0, 0, -1, 2, 1 \right] \\ B_{\text{TRI}}^{\text{T}} = \left[\beta_{4}, \beta_{3}, \beta_{2}, \beta_{1}, 0 \right] \left[1, 0, 0, 0, 0 \right] \end{cases}$$
(II-228)

La substitution dans l'expression II-235 permet de déterminer immédiatement la base de polynômes

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ p+2 & & & \\ (p+2)^2 - 1 & & \\ (p+2)^3 - (p+2) - (p+2) & \\ (p+2)^3 p - (p+2) p - (p+2) p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ p+2 & & \\ p^2 + 4p + 3 & & \\ p^3 + 6p^2 + 10p + 4 & \\ p^4 + 6p^3 + 10p^2 + 4p \end{bmatrix}$$

(11-229)

Alors la relation II-230 permet d'obtenir la fonction de transfert correspondant à ce système :

$$W(p) = \frac{B_{TRI}^{T} \cdot \mathscr{D}}{A_{TRI}^{T} \cdot \mathscr{D}} = \frac{\left[1, 0, 0, 0, 0\right] \cdot \mathscr{D}}{\left[0, 0, -1, 2, 1\right] \cdot \mathscr{D}}$$
(II-230)

En effectuant ce calcul, on obtient :

$$W(p) = \frac{1}{p^4 + 8p^3 + 21p^2 + 20p + 5}$$
 (II-231)

On en déduit immédiatement la représentation Compagnon II de ce système, proposée en II-232 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{1} \\ \mathbf{x}'_{2} \\ \mathbf{x}'_{3} \\ \mathbf{x}'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(II-232)$$

$$(II-232)$$

$$(II-233)$$

La matrice de passage de II-225 à II-232 est donnée par le théorème du changement de base.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^{+2} & & \\ p^{2} + 4p + 3 & \\ p^{3} + 6p^{2} + 10p + 4 & \\ p^{4} + 6p^{3} + 10p^{2} + 4p & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & \\ 0 & 4 & 10 & 6 & 1 & \\ 0 & 4 & 10 & 6 & 1 & \\ p^{4} \end{bmatrix}$$

(II-234)

-178-



On peut vérifier alors que $M_{CII} = P \cdot M_{TRI} \cdot P^{-1}$ ou encore $M_{TRI} = P^{-1} \cdot M_{CII} \cdot P$

c) Passage direct de la forme en flèche à la tridiagonale

Jusqu'ici, tous les exemples ont montré qu'il est aisé par la méthode, de calculer la matrice de passage d'une représentation Compagnon II à diverses représentations matricielles. Toutefois, la méthode convient également dans le cas de deux formes matricielles quelconques : on peut alors calculer directement la matrice de passage de l'une à l'autre sans qu'il soit nécessaire de connaître la forme Compagnon II ou la fonction de transfert du système.

Montrons-le pour l'exemple précédent. Au paragraphe b), nous avons obtenu une représentation tridiagonale, telle que :

-179-

$$\begin{bmatrix} x'_{1} \\ x'_{2} \\ x'_{3} \\ x'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
(II-225)
$$(II-225)$$

$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ \ddot{x}_{4} \end{bmatrix}$$
(II-226)

La base de polynômes associée a été calculée et vaut :

 $\mathcal{D}_{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ p+2 \\ p^{2} + 4p + 3 \\ p^{3} + 6p^{2} + 10p + 4 \\ p^{4} + 6p^{3} + 10p^{2} + 4p \end{bmatrix}$

(11-229)

Or, en comparant les fonctions de transfert, on constate que c'est le même système dont nous avons donné une représentation en flèche au paragraphe III.1 a).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \\ \mathbf{x'}_{3} \\ \mathbf{x'}_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

(II-161)
$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

(II-162)

La base de polynômes associée à celle-ci est :

-181-

$$\mathcal{B}_{2} = \begin{bmatrix} (p+2)(p+3) \\ (p+1)(p+3) \\ (p+1)(p+2) \\ (p+1)(p+2)(p+3) \\ p (p+1)(p+2)(p+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{2} + 5p + 6 \\ p^{2} + 4p + 3 \\ p^{2} + 3p + 2 \\ p^{3} + 6p^{2} + 11p + 6 \\ p^{4} + 6p^{3} + 11p^{2} + 6p \end{bmatrix}$$
(II-235)

Exprimons la matrice des coordonnées des vecteurs de la base \mathscr{B}_2 sur les vecteurs de la base \mathscr{B}_1 .

$$\begin{bmatrix} p^{2} + 5p + 6 \\ p^{2} + 4p + 3 \\ p^{2} + 3p + 2 \\ p^{3} + 6p^{2} + 11p + 6 \\ p^{4} + 6p^{3} + 11p^{2} + 6p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p+2 \\ p^{2} + 4p+3 \\ p^{3} + 6p^{2} + 10p+4 \\ p^{4} + 6p^{3} + 10p^{2}+4p \end{bmatrix}$$

(II-236)

On en déduit la matrice de passage de la forme tridiagonale à la forme en flèche :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad et p^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 (II-237)

On peut alors vérifier que $M_{FLE} = p^{-1} \cdot M_{TRI} \cdot p$, ce qui confirme que le résultat trouvé est correct.

En ce qui concerne les bases d'état, on a l'égalité

$$\mathcal{C}_{\text{FLE}} = P^{\text{T}} \cdot \mathcal{C}_{\text{TRI}}$$
 (II-238)

D'où

$$\begin{bmatrix} e'_{1} \\ e'_{2} \\ e'_{3} \\ e'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1} \\ e_{2} \\ e_{3} \\ e_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1} + e_{2} + e_{3} \\ e_{3} \\ e_{1} - e_{2} + e_{3} \\ e_{2} + e_{4} \end{bmatrix}$$
(II-239)

111.3 - AUTRES ASPECTS DU PROBLEME DE LA RECHERCHE DE

FORMES NOUVELLES

a) Etude des bases de polynômes

Dans les exemples ci-dessus, nous avons choisi des formes matricielles. A partir de celles-ci nous avons alors déduit tous les élèments qui les définissent.

Cependant nous avons montré, par le théorème du changement de base, qu'il y a équivalence entre une base de polynômes correspondant au choix d'opérateurs généralisés, et une forme de représentation d'état. Par conséquent on peut envisager une étude suivant les bases de polynômes. En repertoriant toutes les bases de polynômes susceptibles d'engendrer l'espace vectoriel des polynômes de degré n, on leur associe les formes matricielles admissibles.

Etudions par exemple l'ordre successif des vecteurs de base pour les polynômes de degré 4.

Il est nécessaire que les matrices de passage d'état aient leur dernière ligne sous forme (0, 0, 0, 1) pour que les représentations associées de type II pour un système de type Lur'e Postnikov laissent les termes non-linéaires exclusivement dans la dernière colonne. Ceci impose donc pour les matrices de passage de bases de polynômes, une relation du type

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{1} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^3 \\ \mathbf{p}^4 \end{bmatrix}$$

La dernière ligne et la dernière colonne sont indifférentes puisqu'elles n'interviennent pas dans le calcul de changement de base d'état. Par conséquent, en ce qui concerne les quatre premiers polynômes, on peut en avoir au maximum un d'ordre trois et trois d'ordre deux.

Les bases de polynômes possibles peuvent être composées ·de vecteurs d'ordres successifs :

0	2	2	3	1)
0	1	2	3	2)
1	1	2	3	3)
1	2	2	3	4)
2	2	2	3	5)

Le cas 2) correspond aux formes Compagnon, Compagnon Généralisée, tridiagonale, ou plus généralement à toute forme dont la structure du schéma de simulation associé est de type série. Le cas 5) correspond à la forme en flèche, dont la structure de simulation est de type parallèle. Les cas intermédiaires peuvent correspondre à des cas hybrides où la structure est mi-série, mi-parallèle.

Envisageons par exemple le schéma de la figure II-21



Figure II-21

La mise en équation matricielle correspondante est :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{1} \\ \mathbf{x}'_{2} \\ \mathbf{x}'_{3} \\ \mathbf{x}'_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi_{1} & 0 & 0 & -\alpha_{4} \\ 0 & -\psi_{2} & 0 & -\alpha_{3} \\ k_{1} & k_{2} & -\psi_{3} & -\alpha_{2} \\ 0 & 0 & k_{3} & -\psi_{1} - \alpha_{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{x}_{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{4} \\ \beta_{3} \\ \beta_{2} \\ \beta_{1} \end{bmatrix} u$$

$$(II-240)$$

$$(II-240)$$

$$(II-241)$$

En calculant Dét (pI-M), on détermine la base de polynômes associée.

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} k_{1}k_{3} (p+\psi_{2}) \\ k_{1}k_{3} (p+\psi_{1}) \\ k_{3} (p+\psi_{1}) (p+\psi_{2}) \\ (p+\psi_{1}) (p+\psi_{2}) (p+\psi_{3}) \\ (p+\psi_{1}) (p+\psi_{2}) (p+\psi_{3}) (p+\psi_{4}) \end{bmatrix}$$

(II-242)

L'ordre successif des polynômes de base est 1_1_2_3, ce qui correspond au cas 3).



Soit à présent le schéma de la figure II-22 :

Figure II-22

Celui-ci conduit à la représentation matricielle suivante :



(II、243)

8115 ULLE

u

$$y = (0, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

La base de polynômes associée est cette fois :

(II - 244)

(II-245)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} k_{2} & (p+\psi_{3}) + k_{3}(p+\psi_{2}) \\ k_{2} & (p+\psi_{1})(p+\psi_{3}) \\ k_{3} & (p+\psi_{1})(p+\psi_{2}) \\ (p+\psi_{1})(p+\psi_{2})(p+\psi_{3}) \\ (p+\psi_{1})(p+\psi_{2})(p+\psi_{3})(p+\psi_{4}) \end{bmatrix}$$

L'ordre successif des quatre premiers polynômes de base est $1_2_2_3$, ce qui correspond au cas 4).

Au contraire le cas !) ne correspond à rien de connu. Nous en déduisons qu'il existe une représentation d'état à l'ordre 4 associée à cette base de polynômes dont la forme n'a pas encore été déterminée. Celle-ci reste ainsi à découvrir.

b) Chaîne d'action comportant un intégrateur pur

On réalise à présent l'étude générale d'un système dont la matrice représentative comporte des termes tous nuls dans sa dernière colonne. La représentation correspondante prend donc La forme proposée en II-246.

-188-



D'après le théorème 1, on a Dét (pI-M) qui est égal au dénominateur de la fonction de transfert. Or, dans ce cas, on a :

En développant le calcul de ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, on obtient :

$$D\acute{e}t (pI-M) = p . D\acute{e}t (pI - M_{n-1})$$
 (II-249)

Par conséquent le terme p est en facteur dans le dénominateur de la fonction de transfert : on se trouve dans le cas où la fonction de transfert comporte un intégrateur pur $\frac{1}{p}$.

Alors, le terme constant du dénominateur, a_n, est nul. La représentation Compagnon II associée est nécessairement de la forme II-250.



(II-250)

(II-251)

avec $\begin{bmatrix} a_1, a_2 \dots a_{n-1} \end{bmatrix}$ coefficients de Dét (pI - M_{n-1}).

 $y = (0, 0, \dots 0, 1) \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x \end{vmatrix}$

Isolons la première ligne de cette représentation matricielle. On obtient :

 $x'_1 = b_n u$

(II-252)



(II-253)

La relation II-250 pour s'écrire alors :



(II-254)

En tenant compte de l'expression II-253 de u_2 , nous pouvons condenser l'écriture en convenant de faire intervenir le symbolisme $\frac{1}{p}$ dans la représentation finale.

En effet, si on symbolise u_2 par

 $u_2 = \frac{b_n u}{p}$ (II-255)



-191-

$$y = (0, 0, \dots 0, 1) \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

cù le symbolisme $\frac{b_n}{p}$ u représente $b_n \int_0^t u dt$.

On obtient à nouveau une représentation de type Compagnon II, mais inférieure d'un ordre à la précédente. En revanche, il apparaît un terme d'intégration $\frac{1}{p}$ dans la matrice B. Celle-ci n'est donc plus à coefficients constants. Tout se passe donc comme s'il y avait réduction de dimensionnalité d'une unité, en même temps qu'apparition d'opérateurs temporels dans la matrice B.

Le schéma de simulation correspondant à la représentation u (II-256) est proposé figure II-23.



Figure II-23

(II-257)

de II-256. Par définition, on a :

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{\left[b_{n-1} + \frac{b_n}{p}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1, 0 \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ p_{p^2} \\ \vdots \\ p^{n-2} \\ p^{n-1} \end{array} \right]}{\left[+a_{n-1}, +a_{n-2}, \dots + a_2, + a_1, 1 \right] \left[\begin{array}{c} p \\ p^2 \\ \vdots \\ p^{n-2} \\ p^{n-1} \\ p^{n-1} \end{array} \right]} (II-258)$$

Calculons l'expression de la fonction de transfert à partir

En effectuant ce produit matriciel, on obtient :

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{\frac{b_n}{p} + b_{n-1} + b_{n-2} p + \dots + b_1 p^{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-2} p + \dots + a_1 p^{n-2} + p^{n-1}}$$
(II-259)

Pour obtenir une expression sous forme de fraction rationnelle de deux polynômes en p, il faut multiplier II-259 haut et bas par p. Ceci conduit à :

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{b_n + b_{n-1} p + b_{n-2} p^2 \dots + b_1 p^{n-1}}{p(a_{n-1} + a_{n-2} p \dots + a_1 p^{n-2} + p^{n-1})}$$
(II-260)

Cette expression est aussi celle de la fonction de transfert initiale, calculée à partir de II-250.

3)

c) Cas particulier

Soit un système satisfaisant aux conditions de l'étude ci-dessus. Il est donc défini par sa fonction de transfert telle que II-260. Un tel système admet toujours une représentation en flèche épaisse pour laquelle les pôles figurent dans la diagonale.

Nous savons que ce système admet le pôle 0. Nous choississons de le faire figurer en dernier, soit ψ_n = 0.

Par ailleurs, nous avons vu que dans ce cas, les α_j , $j \in [1, n]$ sont tous nuls. On aboutit donc à la représentation en flèche suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{x'}_{n-1} \\ \mathbf{x'}_{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{n-1} \\ \mathbf{M}_{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{n-1} \\ \mathbf{M}$$

(II - 261)

 $y = (0, 0, \dots 0, 1) \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{vmatrix}$

(II - 262)

où M_{n-1} est composée de blocs diagonaux analogues à ceux de la matrice de Jordan.

On suppose à présent que ce système est bouclé par une non-linéarité. C'est donc un système de type Lur'e Postnikov en régime forcé représenté figure II-24.



Figure II-24

Ecrivons les équations de bouclage

ler cas : Régime autonome

$$e = 0$$
 $\varepsilon = -y = -x_n$ (II-263)
 $u = f(\varepsilon) = f^{\ddagger} \cdot \varepsilon = -f^{\ddagger} \cdot x_n$ (II-264)

En reportant dans II-261, on obtient :



(II-265)

En prenant $\varepsilon = -x_n$ domme dernière composante du vecteur état, il vient :



(II-266)

2ème cas : Régime non autonome

 $e \neq 0 \qquad \begin{cases} \varepsilon = e - y = e - x_4 \\ \varepsilon' = e' - x'_4 \end{cases}$ (II-267)

$$\mathbf{1} = \mathbf{f}(\varepsilon) = \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \cdot \varepsilon \tag{II-268}$$

En remplaçant dans II-261, on obtient



(II-269)

Lorsque ε est choisie comme dernière composante du vecteur état, on en déduit :



(II - 270)

S'il existe e', dérivée de l'entrée e par rapport au temps.

Ces deux représentations II-266 et II-270, sont semblables au terme e' près. Par conséquent, dans le cas particulier où e' = 0, donc e constant, les représentations sont rigoureusement identiques en régime autonome ou en régime forcé. Elles ont donc le même comportement en fonction du temps. En particulier, si le système est asymptotiquement stable, et si l'origine 0 est le seul équilibre, les composantes du vecteur état tendent vers 0, donc ε tend vers 0. Or ε = e - y, donc y tend vers e. Ainsi au bout d'un certain temps, la sortie est égale à l'entrée. Ceci redémontre qu'il n'y a pas d'erreur permanente en réponse à un échelon lorsque la chaîne d'action comporte un intégrateur pur $\frac{1}{p}$.

-197-

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé de nouveaux opérateurs symboliques pour le calcul analogique, puis défini une méthode permettant leur mise en oeuvre.

Des exemples ont ensuite montré que cet ensemble constitue un outil adapté à la détermination de représentations d'état des systèmes et au calcul des coefficients et des changements de base associés. Il permet de choisir a priori une forme représentative et de la définir complétement à partir d'une représentation initiale quelconque.

CHAPITRE III

APPLICATION À L'ÉTUDE DE SYSTÈMES PHYSIQUES





INTRODUCTION

Les deux précédents chapitres présentent une méthode de représentation d'état d'un système sous une forme proposée à priori. Dans chaque cas particulier, elle permet, d'introduire une forme adaptée à l'étude envisagée. L'identification des coefficients de la représentation d'état ainsi obtenue est simplifiée par les résultats antérieurs.

Cette dernière partie s'attache à l'étude de systèmes physiques.

Pour chaque système un modèle mathématique particulier est envisagé. L'analyse montre qu'il respecte les propriétés physiques du processus étudié, et qu'il en facilite l'étude.

La méthode sera appliquée dans deux cas : l'un concerne les régimes anormaux dans les circuits électriques, l'autre traite des problèmes de transmission de la chaleur à travers les parois.



I - LE CIRCUIT FERRORESONANT SERIE

1.1 - REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME MONOVARIABLE DU SECOND ORDRE

Soit un système continu monovariable, non linéaire de .type Lur'e Postnikov. Le schéma-bloc correspondant est indiqué figure III-1.



Figure III-1

On suppose en outre que sa fonction de transfert W(p) définie en III-1, d'ordre deux est non dégénérée

$$\frac{y}{u} = W(p) = \frac{b_1 p + b_2}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

(III-I)

Déterminons une représentation sous la forme Compagnon II pour ce système fonctionnant en régime forcé.

L'étude précédente montre que cette forme est associée à la seconde méthode du graphe, qui conduit au schéma de la figure III-2.



Figure III-2

La représentation matricielle III-2 se déduit des équations de lecture du schéma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{1} \\ \mathbf{x}'_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_{2} \\ 1 & -\mathbf{a}_{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{2} \\ \mathbf{b}_{1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (\text{III}-2)$$
$$\mathbf{y} = (0, 1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \end{bmatrix} \qquad (\text{III}-3)$$

Reportons la relation de bouclage non linéaire

$$u = f(\varepsilon) = f^{\star} \cdot \varepsilon$$
 (III-4)

Il vient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{x'}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_{2} \\ 1 & -\mathbf{a}_{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{2} \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b}_{1} \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \varepsilon \quad (\text{III}-5)$$

On substitue ϵ à x₂ comme dernière composante du vecteur état. On a donc

 $\varepsilon = e - y = e - x_2 \tag{III-6}$

S'il existe e' dérivée de l'entrée e par rapport au temps, le calcul de x'₁ et ε ' en fonction des nouvelles variables d'état conduit à la représentation matricielle III-7 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\prime} \\ \mathbf{z}^{\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_{2} + \mathbf{b}_{2} & \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \\ -1 & -\mathbf{a}_{1} - \mathbf{b}_{1} & \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_{2} \\ \mathbf{a}_{1} \end{bmatrix} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}^{\prime} \mathbf{e}^{\prime}$$
(III-7)
$$\mathbf{y} = (0, -1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + 1 \cdot \mathbf{e}$$
(III-8)

En changeant la première composante du vecteur état en son opposé, on obtient la mise en équation finale :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{\epsilon'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_{2} - \mathbf{b}_{2} \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \\ 1 & -\mathbf{a}_{1} - \mathbf{b}_{1} \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{\epsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{2} \\ \mathbf{a}_{1} \end{bmatrix} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{e'}$$

$$(III-9)$$

$$y = (0, -1) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{\epsilon} \end{bmatrix} + 1 \cdot \mathbf{e}$$

$$(III-10)$$

Soit la forme quadratique de type intégral
$$\phi$$
,
définie par la relation III-11 [33]

$$\phi = \frac{x_1^2}{2} + \int_0^{\varepsilon} \left(a_2 \varepsilon + b_2 f(\varepsilon) \right) d\varepsilon \qquad (III-11)$$

La forme quadratique ϕ est fonction de l'état initial x_{0} , de l'écart initial ε_{0} , et du temps t. Toutefois, dans la suite, nous gonvenons d'omettre x_{0} et ε_{0} . La fonction ϕ sera donc notée $\phi(t)$.

-206-

Il vient l'expression de sa dérivée ϕ'

$$\phi'(t) = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}'_1 + \varepsilon' \left(\mathbf{a}_2 \varepsilon + \mathbf{b}_2 \mathbf{f}(\varepsilon) \right)$$
 (III-12)

L'expression de x' et ε ' se déduit de III-9. On a :

$$\phi'(t) = a_2 e x_1 + (a_1 e + e') (a_2 + b_2 f(\varepsilon))$$
(III-13)
- $(a_1 \varepsilon + b_1 f(\varepsilon)) (a_2 \varepsilon + b_2 f(\varepsilon))$

Par définition, la fonction ϕ' est intégrable.Son intégrale est alors définie par la relation III-!4 [34]

$$\int_{t_0}^{t} \phi'(t) dt = \phi(t) - \phi(t_0)$$
 (III-14)

Dans le cas où $\phi(t)$ est périodique, si T désigne sa période, on a :

$$\phi(t_{o} + kT) = \phi(t_{o}) , k \in \mathbb{N}$$
 (III-15)

Donc à partir de III-14, pour t = $t_0 + kT$, on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_0+kT} \phi'(t) dt = 0$$
(III-16)

où $\phi'(t)$ s'exprime sous la forme indiquée en III-13.

1.2 - CAS PARTICULIER : LE CIRCUIT FERRORESONANT SERIE

Soit le circuit électrique ferrorésonant série décrit par le schéma de la figure III-3 :





Le noyau magnétique de la self introduit une non-linéarité pour ce système.

On suppose que la caractéristique magnétique se représente sous la forme indiquée figure III-4



Des travaux antérieurs [35, 36] ont montré l'équivalence entre le circuit ainsi défini et le schéma-bloc présenté figure III-5



Figure III-5

Pour ce schéma, f désigne l'inverse de la caractéristique magnétique g, dont la forme est précisée figure III-6



Figure III-6

Le schéma-bloc est équivalent à celui de la figure III-7 dont la forme est condensée.



Figure III-7

Ce schéma est du même type que celui de la figure III-1. Nous pouvons donc utiliser les résultats du premier paragraphe avec :

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_2}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{Rp + \frac{1}{C}}{p^2}$$
(III-17)

Par identification, on en déduit immédiatement :

$$b_1 = R$$

 $b_2 = \frac{1}{C}$ (III-18)
 $a_1 = a_2 = 0$

En substituant dans III-9, on obtient une représentation matricielle du circuit ferrorésonant série

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'}_{1} \\ \mathbf{\varepsilon'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \\ 1 & -\mathbf{R} \mathbf{f}^{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{e'}$$
(III-19)

$$y = (0, -1) \begin{vmatrix} x_1 \\ \varepsilon \end{vmatrix} + 1 \cdot e$$
 (III-20)

A partir de III-13, il vient une expression de la dérivée de la forme quadratique associée.

$$\phi' = \frac{1}{C} \left(e' f(\varepsilon) - R f^{2}(\varepsilon) \right)$$
 (III-21)

La substitution dans III-14 conduit à une seconde définition sous forme intégrale de la fonction φ

$$\int_{t_{o}}^{t} \frac{1}{C} \left(e' f(\varepsilon) - R f^{2}(\varepsilon) \right) dt = \phi(t) - \phi(t_{o})$$
(III-22)

111.3 - APPLICATION A LA SECURITE DANS LES RESEAUX ELECTRIQUES

Un tel circuit présente parfois des surtensions de longue durée, qui se manifestent soit à la fréquence de fonctionnement du réseau, soit à un multiple ou sous-multiple de cette fréquence. Les courants correspondants sont caractérisés par des valeurs plus élevées qu'en fonctionnement normal. Ces manifestations correspondent au phénomène de ferrorésonance. Celles-ci présentent des dangers pour les réseaux où elles apparaissent [37, 38, 39, 40] .

Plaçons-nous dans le cas où le circuit présente une ferrorésonance avec démultiplication de fréquence. Dans ce cas, on désigne par T la période du courant i(t), correspondant à la fréquence $f = \frac{1}{T}$.

On suppose que v(t), tension d'entrée du circuit, est de période $\frac{T}{m}$, m $\in \mathbb{N}$, correspondant à la fréquence mf.

Tous les signaux sont alors périodiques, et T correspond à la plus petite période de l'ensemble du système. La formule III-16 est donc applicable à cet exemple pour lequel ϕ ' est défini par III-21 Il vient :

$$\int_{t_{o}}^{t_{o}+kT} \frac{1}{C} \left(e' f(\varepsilon) - R f^{2}(\varepsilon)\right) dt = 0 \qquad (III-23)$$

La détermination des variables de cette équation est possible à partir du schéma de la figure III-7. En effet :

 $\begin{cases} e = \int_{0}^{t} v(t) dt \Longrightarrow e' = v(t) \\ f(\varepsilon) = i \end{cases}$ (III-24)

La traduction en grandeurs physiques de III+23 conduit ainsi

$$\int_{t_{0}}^{t_{0}+kT} v(t) \cdot i(t)dt = \int_{t_{0}}^{t_{0}+kT} R \cdot i^{2}(t) dt$$
(III-25)

Interprétons ce résultat Le terme $\int_{t_0}^{t_0+kT} v(t)$. i(t) dt est la puissance active correspondant à la composante du courant de fréquence mf, c'est-à-dire de même fréquence que la tension d'entrée. D'autre part, $\int_{t_0}^{t_0+kT} R i^2(t) dt$ représente l'énergie dissipée dans la résistance par effet Joule. Il résulte de la relation III-25 que toute l'énergie dissipée l'est dans la résistance, et l'on retrouve, par une méthode originale, le résultat que seul l'harmonique du courant de même fréquence que la tension d'entrée fournit cette énergie.

L'énergie dissipée dans la résistance apparaît donc comme limitée. En conséquence les dangers dûs à la ferrorésonance se manifestent principalement dans les surtensions. Cet aspect des choses peut amener un claquage du condensateur. Dans la pratique, le phénomène intervient lorsque sont mis en oeuvre de gros transformateurs. L'apparition de ferrorésonance peut alors leur faire courir un danger.

Remarque :

à :

La relation III-25 conduit à une seconde propriété pour ce type de système : la multiplication de fréquence au sens strict n'existe pas dans un circuit ferrorésonant série.

$$\int_{t_0}^{t_0+kT} i(t) v(t) dt = 0 = \int_{t_0}^{t_0+kT} R \cdot i^2(t) dt$$
(III-26)

0r

$$t \in [0, +\infty[, Ri^{2}(t) \ge 0]$$
 (III-27)

D'où

$$\int_{t_0}^{t_0+kT} R i^2(t) dt = 0 \implies R \cdot i^2(t) = 0 \implies i(t) = 0 \quad (III-28)$$

On ne peut donc pas avoir de courant i(t) non nul et de fréquence supérieure à v(t). Ceci exclut la multiplication de fréquence pour les circuits ferrorésonants série.

II - ECOULEMENT DE CHALEUR EN REGIME TRANSITOIRE A TRAVERS UNE PAROI

INTRODUCTION

Les lois de Fourier [41, 42] permettent de traiter les problèmes concernant la conduction thermique en régime permanent. Toutefois, les solutions apportées supposent qu'il existe un régime permanent pour le comportement du système, et elles ne tiennent pas compte de l'intervalle de temps précédant l'établissement de ce régime. Cependant la résolution en régime dynamique est nécessaire lorsque des variations de la température et de l'écoulement de chaleur ne peuvent être négligées. Par exemple, l'écoulement périodique de la chaleur a son importance dans les moteurs à combustion interne, le conditionnement de l'air, l'instrumentation ou les procédés de contrôle. L'étude suivante présente une solution analogique à ce type de problèmes. Celle-ci, découle de la méthode proposée précédemment.

11.1 - DETERMINATION D'UNE REPRESENTATION ADAPTEE DU SYSTEME

a) Position du problème

L'équation générale régissant la répartition des températures et l'écoulement de chaleur par conduction dans un solide ayant des propriétés physiques uniformes s'exprime par la relation [42]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{a} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}$$
(III-29)

θ température en un point du solide à l'instant t

q intensité de la source de chaleur par unité de volume et par unité de temps

k conductivité thermique du matériau (k cal/ $_{hm^{\circ}C}$) a = $\frac{k}{c\lambda}$ diffusivité thermique du matériau (m²/h) c chaleur spécifique du matériau (k cal/ $_{kg^{\circ}C}$) λ densité du matériau (kg/m³) (θ , ξ , y, z) repére euclidien de l'espace

Si le système ne contient pas de source de chaleur, l'équation III-48 se réduit à l'équation de Fourier

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$
(III-30)

Cette formule est valable pour un matériau continu et homogène, où il n'y a pas de transfert de matière et pas de rayonnement. On peut l'appliquer à l'étude de la répartition de chaleur à travers une paroi.

Si l'épaisseur e de la paroi est faible vis-à-vis de ses autres dimensions, celle-ci peut être assimilée à une plaque supposée infinie dans les directions y et z. La température sera uniforme dans n'importe quel plan yz pour une valeur donnée de l'abscisse §.
L'équation générale de la conduction de chaleur se ramène dans ce cas à la forme simplifiée III-31 :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad 0 \le \xi \le e \qquad (III-31)$$

Cette équation est une équation aux dérivées partielles dépendant de ξ et de t.

La méthode proposée ne permet de résoudre que les problèmes où interviennent des équations différentielles. Il convient donc d'approcher l'équation aux dérivées partielles (III-31) par un modèle mathématique de cette nature.

b) Recherche d'un modèle différentiel

On convient d'appliquer la source chaude du côté gauche de la paroi. La partie droite correspond à la source froide.

Pour obtenir un modèle différentiel du système, nous allons discrétiser par rapport à la variable abscisse ξ et intégrer continûment par rapport à la variable temporelle t. Pour cela, supposons la paroi découpée en n tranches d'égale épaisseur $\Delta\xi$. Dans un premier temps, la valeur de ce paramètre $\Delta\xi$ sera choisie très faible vis-à-vis de l'épaisseur totale e. Nous réalisons ainsi une discrétisation très fine de la paroi suivant l'Axe des abscisses. On repère les plans-milieu de chaque tranche par leur abscisse

ξ,

$$= \frac{\Delta\xi}{2}, \xi_{2} = \frac{3\Delta\xi}{2}, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{n-1}, \xi_{n} = e - \frac{\Delta\xi}{2}$$
(III-32)

La discrétisation de la paroi est réalisée suivant le schéma de la figure III-8



Effectuons un développement limité au second ordre de la fonction pour les deux plans distants de + $\Delta\xi$ et $-\Delta\xi$ du plan d'abscisse ξ_i .

$$\theta(\xi_{i+1}) - \theta(\xi_{i}) = \Delta \xi \theta_{\xi}^{(1)} (\xi_{i}) + \frac{\Delta \xi^{2}}{2!} \theta_{\xi}^{(2)} (\xi_{i}) + \frac{\Delta \xi^{3}}{3!} \theta_{\xi}^{(3)} (\xi_{i}) + \varepsilon_{1}^{(11-33)}$$

$$\theta(\xi_{i-1}) - \theta(\xi_{i}) = -\Delta \xi \theta_{\xi}^{(1)} (\xi_{i}) + \frac{\Delta \xi^{2}}{2!} \theta_{\xi}^{(2)} (\xi_{i}) - \frac{\Delta \xi^{3}}{3!} \theta_{\xi}^{(3)} (\xi_{i}) + \varepsilon_{2}^{(11-34)}$$

$$(III-34)$$

 $\theta_{\xi}^{(j)}\xi_{i}$) représente la dérivée d'ordre j par rapport à ξ de la variable θ au point ξ_{i} . ε_{1} et ε_{2} sont des termes du 4^{ème} ordre au moins. Ajoutons membre-à-membre les équations (III-33) et (III-34). Il vient au 4ème ordre près :

$$\theta_{\xi}^{(2)}(\xi_{i}) = \frac{1}{\Delta \xi^{2}} \quad \theta(\xi_{i+1}) - 2\theta(\xi_{i}) + \theta(\xi_{i-1})$$
(III-35)

On a par ailleurs

$$\theta_{\xi}^{(2)}(\xi_{i}) = \frac{\partial^{2}\theta}{\partial\xi^{2}}$$
(III-36)

En substituant dans III-35, on obtient à partir de III-31

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\Delta \xi^2} \quad \theta(\xi_{i+1}) - 2\theta(\xi_i) + \theta(\xi_{i-1}) = \frac{1}{a} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (III-37)$$

D'après les hypothèses, on a ici :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta(\xi_i)}{\partial t}$$
(III-38)

Pour simplifier la représentation, on convient d'écrire :

$$\theta(\xi_i) = \theta_i \quad \forall i \in [1, n]$$
 (III-39)

(III-37) et (III-38) conduisent alors à :

$$\frac{\partial \theta_{i}}{\partial t} = \frac{a}{\Delta \xi^{2}} \left(\theta_{i+1} - 2\theta_{i} + \theta_{i-1} \right)$$
(III-40)

D'après les hypothèses initiales, la température θ est fonction du temps t et de l'abscisse ξ . Par conséquent la température au plan d'abscisse ξ_i , θ_i , ne dépend que de t. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{d\theta_i}{dt}$$
(III-41)

La relation (III-40) devient alors :

$$\frac{d\theta_{i}}{dt} = \frac{a}{\Delta\xi^{2}} \left(\theta_{i+1} - 2\theta_{i} + \theta_{i-1} \right) \quad \forall i \in [1, n]$$
(III-42)

Nous avons ainsi substitué à l'équation aux dérivées partielles (III-31) un système de n équations différentielles telles que (III-42).

La méthode permet alors de déterminer un schéma de simulation de ce système et une représentation matricielle.

c) Définition d'un modèle matriciel

Faisons un changement d'échelle des temps en posant :

$$T = \alpha t \qquad dT = \alpha \ dt \qquad (III-43)$$

Alors :

$$\frac{d\theta_{i}}{dt} = \frac{d\theta_{i}}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d\theta_{i}}{dT}$$
(III-44)

En remplaçant dans (III-42), on obtient :

$$\frac{d\theta_{i}}{dT} = \frac{a}{\Delta\xi^{2}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\theta_{i+1} - 2\theta_{i} + \theta_{i-1} \right)$$
(III-45)

On fixe la valeur de α par la relation

$$\alpha = \frac{a}{\Delta \xi^2}$$
(III-46)

Il vient :

$$\frac{d\theta_{i}}{dT} = \theta_{i+1} - 2\theta_{i} + \theta_{i-1}$$
(III-47)

On réalise à présent un changement d'échelle des variables

Soit

 $\boldsymbol{\theta}_{\rm m}$ la température la plus basse dans le phénomène $\boldsymbol{\theta}_{\rm M}$ la température la plus haute dans le phénomène

On pose

$$x_{i} = \frac{\theta_{i} - \theta_{m}}{\theta_{M} - \theta_{m}} \qquad 0 \leq x_{i} \leq 1 , \forall i \in [1, n] \qquad (III-48)$$

Alors :

$$\theta_{i} = (\theta_{M} - \theta_{m}) \mathbf{x}_{i} + \theta_{m}$$
(III-49)

D'où, en dérivant par rapport au temps

$$\frac{d\theta_{i}}{dT} = (\theta_{M} - \theta_{m}) \frac{dx_{i}}{dT}$$
(III-50)

La substitution dans III-47 conduit à :

$$(\theta_{M} - \theta_{m}) \frac{dx_{i}}{dT} = (\theta_{M} - \theta_{m}) x_{i+1} + \theta_{m} - 2(\theta_{M} - \theta_{m}) x_{i} - 2\theta_{m}$$
$$+ (\theta_{M} - \theta_{m}) x_{i-1} + \theta_{m} \qquad (III-51)$$

Soit, après simplification :

$$\frac{dx_i}{dT} = x_{i+1} - 2 x_i + x_{i-1} \qquad \forall i \in [1,n] \qquad (III-52)$$

$$0 \le x_i \le 1$$

Pour i = 1, x_{i-1} n'existe pas. Nous faisons apparaître un terme u_C qui se comporte comme une entrée pour le système. Celui-ci représente l'influence du milieu extérieur, et plus particulièrement la température θ_C de la source chaude.

De la même façon, pour i = n, x_{i+1} est remplacé par une entrée u_r qui correspond à la température de la source froide.

L'expression III-53, qui met en évidence la schéma de simulation correspondant au modèle proposé, est équivalente à la relation III-52

$$\frac{x_{i}}{x_{i+1} + x_{i-1}} = \frac{1}{p+2} \qquad \forall i \in [1,n] \qquad (III-53) \\ 0 \le x_{i} \le 1$$

On en déduit le schéma de simulation associé, indiqué figure III-9



Figure III-9



Il en résulte la représentation matricielle III-54, obtenue par lecture du schéma



C'est une représentation en forme tridiagonale qui apparaît ici de manière naturelle par discrétisation.

III.2 - VALIDITE DU MODELE

Nous avons obtenu un modèle matriciel du système étudié. Pour être admissible, celui-ci doit traduire le comportement du système physique qu'il représente.

En particulier, il doit présenter les mêmes conditions de stabilité que le système correspondant. Par ailleurs il doit vérifier les propriétés physiques du système initial. Il convient donc de s'assurer que le modèle est asymptotiquement stable, car le système envisagé l'est. Par ailleurs, il doit satisfaire au principe de Carnot qui est l'une des principales lois physiques régissant les échanges thermiques.

a) Etude des conditions de stabilité

Considérons le système représenté par III-54, en régime autonome. Celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$X' = M \cdot X \tag{III-55}$$

Soit la fonction V candidate à LYAPUNOV [11], définie par

$$V = \frac{1}{2} X^{T} \cdot X$$
 (III-56)

Compte tenu de la symétrie de M, il vient :

$$V' = X^{\mathrm{T}} \cdot M \cdot X \tag{III-57}$$

Soit

$$\nabla' = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 \dots$$

+ 2(x_{n-1})² + 2x_{n-1}x_n - 2x_n² (III-58)

Ou encore :

$$\nabla' = -x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 \dots - (x_{n-1} - x_n)^2 - x_n^2 < 0$$
(III-59)

La fonction V proposée est de LYAPUNOV.

Par conséquent le modèle proposé est asymptotiquement stable en régime autonome, comme le système étudié.

b) Vérification du principe de Carnot

Soit la fonction V(X) telle que :

$$V = Max |x_i|$$
 $1 \le i \le n$

Pour le choix d'une telle fonction V définie et positive le critère de Rosenbrock [43, 44] conduit à déterminer le terme

(III-60)

(III-61)

$$\max \left(\begin{array}{c} m_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}| \right)$$

où M = (m_{ij}) désigne la matrice intervenant dans la l \leq i \leq n l \leq j \leq n

représentation III-54.

On a :

$$\max_{\substack{l \leq i \leq n}} \begin{pmatrix} m_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\i \neq i}}^{n} & m_{ij} \end{pmatrix} = 0$$

Le critère de Rosenbrock indique alors que la stabilité est assurée, ce qui équivaut à la condition V' \leq 0.

Interprétons ce résultat.

D'après la définition de V, on en déduit que, lorsque le système est abandonné à lui-même avec des conditions aux limites telles qu'il se trouve placé entre deux sources froides par rapport à lui, la température maximale dans la paroi ne peut pas croître. Il en résulte que, s'il y a un transfert de chaleur, celui-ci s'effectue du point le plus chaud vers les points les plus froids quand il n'y a pas d'apport extérieur d'énergie. Cette proposition constitue une vérification du principe de Carnot sous sa forme simplifiée.

Nous avons ainsi montré que la représentation matricielle (III-54) du système est conforme au système réel en ce qui concerne le principe de Carnot.

c) Détermination de la quantité de chaleur

A chaque instant, le flux de chaleur qui s'écoule du fluide source chaude vers la surface de la paroi est donné par la relation

$$\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{A}} = -\mathbf{k} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi} = 0$$
(III-62)

q : flux de chaleur échangé entre le fluide et la paroi

A : aire de la surface de transmission en m^2

On suppose en outre que le sens positif d'écoulement des flux est de la source chaude vers la source froide, suivant la figure III-10



Figure III-10

-226-

$$dq = -k \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=0} dt \qquad (III-63)$$

Pour évaluer la dérivée partielle $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$, on utilise une formule des

$$\frac{\Delta_{\xi}\theta}{\Delta\xi} = \frac{\theta_{i+1}^{t} - \theta_{i}^{t}}{\Delta\xi} = \frac{\theta_{M} - \theta_{m}}{\Delta\xi} (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i})$$
(III-64)

Où θ_i^t désigne la température de la i^{ème} tranche à l'instant t. On en déduit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\theta_{\mathrm{M}} - \theta_{\mathrm{m}}}{\Delta \xi} (\mathbf{x}_{1}^{\mathsf{t}} - \mathbf{u}_{\mathrm{C}}^{\mathsf{t}})$$
(III-65)

La substitution dans l'équation III-63 conduit à

$$dq = -\frac{k(\theta_{M} - \theta_{m})}{\Delta\xi} \left(x_{1}^{t} - u_{C}^{t} \right) dt \qquad (III-66)$$

D'où, par intégration

$$q^{t} = -\frac{k(\theta_{M} - \theta_{m})}{\Delta\xi} \int_{0}^{t} (x_{l}^{t} - u_{C}^{t}) dt + q^{\circ}$$
(III-67)

En effectuant le changement d'échelle des temps défini par III-43 et III-46, il vient :

$$q^{T} = -\frac{k}{\Delta\xi} (\theta_{M} - \theta_{m}) \cdot \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{T} (x_{1}^{T} - u_{C}^{T}) dT + q^{\circ}$$
 (III-68)

$$q^{T} = -\frac{k\Delta\xi}{a} \left(\theta_{M} - \theta_{m}\right) \int_{0}^{T} \left(x_{1}^{T} - u_{C}^{T}\right) dT + q^{\circ} \qquad (III-69)$$

Par définition, les constantes a et k sont liées par :

$$a = \frac{k}{c\lambda}$$
(III-70)

On en déduit l'expression simplifiée de III-69

$$q^{T} = -c\lambda\Delta\xi \quad (\theta_{M} - \theta_{m}) \quad \int_{0}^{T} (x_{1}^{T} - u_{C}^{T}) dT + q^{\circ} \qquad (III-71)$$

Un calcul analogue pour ξ = e donne à chaque instant T le flux de chaleur par mètre carré échangé entre le fluide source froide et la paroi.

$$q_{1}^{T} = -c\lambda\Delta\xi \quad (\theta_{M} - \theta_{m}) \quad \int_{0}^{T} (u_{F}^{T} - x_{n}^{T}) dT + q_{1}^{\circ} \qquad (III-72)$$

En faisant la différence membre-à-membre, on obtient :

$$Q^{T} = -c\lambda\Delta\xi \quad (\theta_{M} - \theta_{m}) \int_{0}^{T} (x_{1}^{T} - u_{C}^{T} + x_{n}^{T} - u_{F}^{T}) dT + Q^{\circ} (III-73)$$

 Q^{T} représente la variation totale de l'énergie interne par unité de surface, c'est-à-dire la quantité de chaleur exprimée en k cal/m², transmise par unité de surface dans l'intervalle de temps compris entre 0 et T.

Q° représente l'énergie interne initiale par unité de surface.

Le résultat Q^T doit être interprété en valeur algébrique.

Si sa valeur est positive, c'est que la quantité de chaleur correspondante est emmagasinée dans la paroi. Au contraire si cette valeur est négative, c'est que la paroi cède de la chaleur au milieu extérieur.

Posons :

$$\phi = x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_n$$
 (III-74)

En dérivant terme-à-terme, on obtient :

$$\phi' = \mathbf{x'}_1 + \mathbf{x'}_2 + \mathbf{x'}_3 \dots + \mathbf{x'}_n$$
(III-75)

en utilisant la forme matricielle III-54 pour exprimer ces dérivées, il vient :

$$\phi' = -x_1 + u_C - x_n + u_F$$
 (III-76)

En comparant avec III-73, on obtient immédiatement

$$Q^{T} = -c\lambda\Delta\xi \left(\theta_{M} - \theta_{m}\right) \int_{0}^{T} \left(-\phi'(T)\right) dT + Q^{\circ}$$
(III-77)

Soit encore

$$Q^{T} - Q^{\circ} = c_{\lambda} \Delta \xi \left(\theta_{M} - \theta_{m} \right) \left(\phi(T) - \phi(o) \right)$$
 (III-78)

Exprimons ϕ en fonction des températures réelles θ . Il vient :

$$\phi = \frac{\theta_1 - \theta_m}{\theta_M - \theta_m} + \frac{\theta_2 - \theta_m}{\theta_M - \theta_m} \cdot \cdot \cdot + \frac{\theta_n - \theta_m}{\theta_M - \theta_m} = \frac{1}{\theta_M - \theta_m} \left[\sum_{i=1}^n \theta_i - n \theta_m \right]$$
(III-79)

Examinons le comportement du système à l'instant T = 0. Le système est en équilibre et la même température θ_m règne dans les fluides extérieurs et dans toutes les tranches du mur. Par conséquent

$$\theta_{i} = \theta_{m} \quad \forall i \in [1, n] \qquad \sum_{i=1}^{n} \theta_{i} = n\theta_{m} \qquad (III-80)$$

En reportant dans III-79, on obtient :

$$\phi(0) = 0 \tag{III-81}$$

Il en résulte que III-78 se réduit à :

$$Q^{t} - Q^{\circ} = c\lambda\Delta\xi \ (\theta_{M} - \theta_{m}) \ \phi(T)$$
 (III-82)

Soit encore :

$$Q^{t} - Q^{\circ} = c\lambda\Delta\xi \ (\theta_{M} - \theta_{m}) \left[(x_{1} + x_{2} + x_{3} \dots + x_{n}) \right] \qquad (III-83)$$

Ainsi, ce résultat indique que le modèle mathématique qui représente la répartition des températures dans une paroi à chaque instant, convient également pour déterminer la quantité de chaleur emmagasinée ou cédée par la paroi à chaque instant.

Conclusion

Le modèle que nous avons proposé présente les mêmes conditions de stabilité que le système initial. Il obéit au principe de Carnot qui régit les échanges thermiques pour tous les systèmes physiques. Enfin, $\phi(T)$, somme des températures réduites dans chaque tranche, est proportionnel à la quantité de chaleur stockée dans le système représenté par le modèle. Il résulte de cet ensemble de résultats que le modèle semble convenir comme représentation du système, puisqu'il traduit de façon satisfaisante ses propriétés physiques.

Parmi les méthodes usuelles permettant de déterminer la répartition des températures ainsi que la quantité de chaleur, citons la méthode des abaques [45, 46] ou les méthodes numériques [47, 48]. Toutefois, la mise en oeuvre de la méthode analogique proposée précédemment apparaît plus aisée, puisqu'elle ne nécessite pas de calculs pour la résolution de ce type de problèmes.

III - APPLICATIONS

Nous pouvons utiliser le modèle mathématique que nous avons déterminé, pour l'étude de quelques exemples d'échanges thermiques entre une paroi et son milieu extérieur.

a) Premier exemple

Considérons tout d'abord le cas simple où la température de la source chaude est constante et égale à θ_M , et la température de la source froide constante et égale à θ_m . Ceci conduit à :

$$\begin{cases} u_e = 1 \\ u_F = 0 \end{cases}$$
 (III-84)

La simulation, réalisée pour n = 6, conduit au tracé de répartition des températures de la figure III-12. Celui-ci permet de déterminer la température dans les six tranches du mur à chaque instant.

En examinant ce relevé, on constate que le modèle utilisé vérifie une autre propriété classique de la propagation de la chaleur à travers les parois : lorsque le régime permanent est établi, la répartition des températures dans la paroi est linéaire.



-233-

La quantité de chaleur emmagasinée par la paroi dans les conditions de l'étude est donnée par le relevé de la figure III-13.

Cependant, en se reportant à l'expression III-73 de cette quantité de chaleur, on observe que celle-ci ne dépend pas explicitement des températures de la masse de la paroi. En effet, seules les températures de la première et de la dernière tranche, x₁ et x_n, interviennent avec les entrées. Il en résulte que l'évaluation de la quantité de chaleur est indépendante du nombre de tranches utilisées pour la simulation. En particulier, celle-ci doit conduire au même résultat avec un modèle réduit au maximum, c'est-à-dire à deux tranches. Le relevé des quantités de chaleur a été effectué pour n = 2, dans les mêmes conditions. Dans ce cas, la mesure étant inversement proportionnelle à $\Delta\xi$, le relevé est trois fois plus petit que pour n = 6. Par ailleurs, l'échelle des temps fait intervenir un facteur $\frac{a}{\Delta \xi^2}$. Il en résulte que le relevé est 9 fois plus rapide pour n=2. Ces rapports ayant été compensés par dilatation des échelles de la table traçante, on constate une exacte superposition des deux courbes. Ainsi la simulation sur deux tranches redonne le relevé de la figure III-13 pour les quantités de chaleur stockées par le système. Toutefois, le résultat a été obtenu pour des conditions particulières. En effet ici, la paroi est initialement à la température de la source froide, et la source chaude est extérieure. Si on choisit comme conditions initiales une paroi chauffée artificiellement en son milieu sur une tranche fine, et si on suppose que cette tranche constitue la source chaude pour le système, il est impossible de réduire ainsi le modèle à ses deux tranches externes.

-234-



On en déduit ce résultat très important : dans le cas d'une paroi initialement à la température de la source froide, à laquelle on applique une source chaude sur l'une de ses faces externes, il est suffisant de limiter le modèle mathématique et analogique à deux tranches. On a donc une réduction de dimensionalité importante puisqu'une représentation d'ordre deux, telle que III-85 convient à cette étude.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_F \end{bmatrix}$$
(III-85)

La simplification est appréciable dans le cas des structures composites. En effet, dans ce cas, chaque milieu homogène se réduira à un ordre deux quelle que soit son épaisseur. Ainsi par exemple, les études d'isolation thermique, qui s'intéressent essentiellement aux déperditions de calories, pourront être envisagées simplement par cette méthode. Pour les structures triples (double vitrage, double mur séparé par un vide d'air ...), l'ensemble du système, pour la détermination des quantités de chaleur, est d'ordre six. Au contraire, si l'on désire visualiser la distribution des températures, l'expérience montre qu'il faut prendre au mínimum six tranches dans chaque matériau homogène pour obtenir un résultat convenable, ce qui conduit à une matrice globale d'ordre dix huit.

On peut effectuer le calcul de la quantité de chaleur totale stockée par la paroi lorsque le régime permanent est atteint.

$$x_1 = \frac{1}{n+1}$$
, $x_2 = \frac{2}{n+1}$, ..., $x_i = \frac{1}{n+1}$, ..., $x_n = \frac{n}{n+1}$
(III-86)

D'où

$$\phi(\mathbf{T}) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \dots + \mathbf{x}_n = \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_o}{c\lambda\Delta\xi(\theta_M - \theta_m)}$$
(III-87)

Il vient :

$$\phi(\mathbf{T}) = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} \dots + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \quad (\text{III-88})$$

Il en résulte que :

$$\frac{Q - Q^{\circ}}{c\lambda\Delta\xi \ (\theta_{\rm M} - \theta_{\rm m})} = \frac{n}{2}$$
(III-89)

Ou encore, d'après la définition de $\Delta \xi$,

$$Q - Q^{\circ} = \frac{c\lambda e \left(\theta_{M} - \theta_{m}\right)}{2}$$
(III-90)

On en déduit que la quantité de chaleur totale stockée par la paroi lorsque le régime permanent est atteint, est proportionnelle à c $\lambda e (\theta_M - \theta_m)$. Par conséquent si on veut augmenter cette quantité de chaleur, il convient d'augmenter l'épaisseur e de la paroi, et de choisir un matériau pour lequel le produit c λ est le plus élevé possible. Par ailleurs, la quantité stockée sera d'autant plus grande que la différence entre la température de la source chaude et la température de la source froide sera plus grande. Au contraire, si on désire réaliser une paroi conductrice des quantités de chaleur, il est nécessaire de diminuer son épaisseur e, et de choisir un matériau tel que le produit $c\lambda$ soit le plus faible possible.

b) Second exemple

Dans cet exemple, nous faisons intervenir des entrées u c et uf variables.

Le relevé de la figure III-14 représente la répartition des températures pour les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_{C} = b(1 + \sin \omega t) & 0 < b < 1 \\ u_{F} = 0 \end{cases}$$
(III-91)

Ceci correspond au cas où la source chaude présente un variation sinusoïdale autour d'une constante.

Au contraire, dans le cas de la figure III-16, c'est la source froide qui présente une oscillation sinusoïdale de ses températures. On se trouve dans le cas où :

$$\begin{cases} u_{\rm g} = 1 \\ u_{\rm F} = \rm sin\omega t \end{cases}$$
(III-92)

L'évaluation des quantités de chaleur est donnée en III-17.









-241-



Interprétation

On constate que, dans les deux cas, la paroi atténue les variations sinusoïdales des températures. Celle-ci agit donc comme un filtre pour les écarts de température. D'autre part, on observe une variation sinusoïdale de la quantité de chaleur stockée dans la paroi, déphasée par rapport aux variations des conditions aux limites. Il en résulte que la paroi constitue une réserve de quantité de chaleur puisque celle-ci est maximale lorsque la fonction sinusoïdale est au voisinage de son minimum. Par conséquent, on peut utiliser une paroi comme accumulateur d'énergie calorifique, par exemple dans le cas des murs d'immeubles. La quantité de chaleur stockée arrive à son maximum la nuit et peut servir pour chauffer l'intérieur alors que la température extérieure atteint la valeur minimum. La réserve d'énergie est alors reconstituée le jour.

c) Remarque : intervention des effets de bord

Chaque fois qu'un transfert de chaleur s'effectue entre solide et fluide extérieur ou entre solides accolés, il se pose un problème de résistance thermique de contact. Cet aspect des choses a été négligé dans les calculs précédents.

Lorsqu'un débit de chaleur traverse une zone de contact, dans une région localisée de part et d'autre de l'interface, le champ de température se trouve considérablement perturbé. Ce phénomène caractérise les effets de bord. Le schéma de la figure III-18 montre l'allure de la perturbation, en régime permanent, au contact entre deux solides.





On utilise usuellement le modèle mathématique qui consiste à supposer nulle l'épaisseur de la zone perturbée et à remplacer la variation de température qui se développe dans cette zone par une non-linéarité telle que celle présentée figure III-19 [49].



Ceci revient, dans la modélisation, à placer une nonlinéarité entre les températures réelles des fluides de chaque source θ_c et θ_r , et les conditions aux limites u_c et u_r.

Toutefois, les chutes de températures $\Delta \theta$, qui peuvent être importantes pour de forts débits de chaleur dépendent d'un grand nombre de paramètres tels que la structure géomètrique de l'interface, ou les caractéristiques thermiques des milieux, et par conséquent, sont difficilement mesurables. Elles peuvent en outre relever d'un mécanisme de transfert d'énergie par convection selon que le mouvement du fluide au contact de la paroi est laminaire ou turbulent.

Une résolution compléte de ce problème nécessiterait donc l'étude et la simulation des échanges thermiques par convection.

CONCLUSION

La méthode de mise en équation proposée a été appliquée à un modèle mathématique destiné à l'étude de la répartition des températures dans une paroi. Nous avons montré que ce modèle est stable, qu'il vérifie le principe de Carnot, et qu'il conduit à la détermination des échanges thermiques entre une paroi et le milieu qui l'entoure. La représentation correspondante, de dimension très réduite, permet de résoudre de nombreux problèmes pratiques d'échanges de chaleur. Citons par exemple les problèmes d'isolation thermique dans le bâtiment, le chauffage pour l'amorçage d'une réaction exothermique suivi d'un refroidissement.

Nous avons supposé ici que la propagation thermique est unidirectionnelle. Dans un autre ordre d'idée, nous pouvons étendre le modèle à l'étude de la répartition des températures dans le cas d'une propagation dans toutes les directions. Le modèle est alors à 3 dimensions et permet l'étude du refroidissement dans des moules, du refroidissement des masses et des corps pleins ...

Cette généralisation du modèle est dans le prolongement de l'étude précédente, et constitue une ouverture pour des travaux ultérieurs.

CONCLUSION GENERALE

La méthode de mise en équation proposée permet la détermination de représentations d'état pour les systèmes continus monovariables. Celles-ci sont induites par des schémas de simulation, élaborés par une modélisation à partir d'une fonction de transfert faisant intervenir des opérateurs généralisés. La matrice de passage d'une représentation d'état d'un système à une autre se déduit des deux schémas de simulation correspondants.

Cette étude a permis en particulier d'associer des formes canoniques usuelles pour la représentation d'état des systèmes à des schémas de simulation conventionnels.

Par ailleurs, l'efficacité de la méthode proposée est illustrée par l'analyse de systèmes physiques. La maniabilité de la méthode et sa simplicité de mise en oeuvre en font un outil efficace.

Elle permet la représentation d'un système sous une forme quelconque, déterminée a priori, et donne accès aux méthodes de calcul matriciel pour l'étude du processus considéré.

De plus, nous avons introduit plusieurs formes comportant des termes diagonaux que l'on peut, dans une certaine mesure, choisir arbitrairement. Ceux-ci apparaissent comme des paramètres de représentation, qui interviennent dans la détermination des autres coefficients de la matrice. Dans les exemples envisagés, ces paramètres sont constants. Toutefois, les résultats restent valables si ces termes sont variables. Ainsi, la méthode peut s'appliquer à l'étude des systèmes à coefficients variables, par exemple périodiques. C'est dans ce sens qu'une extension de l'étude proposée peut être envisagée.

BIBLIOGRAPHIE

 [1] NARENDRA K.S. and TAYLOR J.H.
 "Frequency domain criteria for absolute stability" Academic Press, New York and London, 1973

[2] ROSENBROCK H.H. "State-space and multivariable theory" Studies in dynamical systems, Nelson, 1970

BOUDAREL R., DELMAS J. et GUICHET P.
 "Commande optimale des processus". Tome 1
 Techniques de l'Automatisme, Dunod, Paris, 1967

[4] SMITH G.W. and WOOD R.C. "Principles of Analog Computation" Mc Graw Hill, Publishing Company Ltd, Londres, 1959, p. 46-47

[5] LHOTE F. et MANESSE G.

"Méthode pour la simulation d'un système linéaire quelconque sur calculateur analogique"

Revue Générale de l'Electricité, Tome 73, N°1, p. 577-579, Nov. 1964

6 CHAUSSARD R.

"Méthodes d'analyse dynamique"

Partie I, Automatisme, Tome VIII, N° 2, p. 53-63, Février 1963 Partie II, Automatisme, Tome VIII, N° 3, p. 114-118, Mars 1963 7 LAURENT F., ROMELOT M.

"Sur le régime dynamique d'un système échantillonné non linéaire décrit par un modèle redondant"

C.R.A.S. Paris, t. 280, p. 1033-1035, 21 Avril 1975

[8] BELLMANN R. and COOKE K.L.
 "Differential. Difference équations"
 Mathematics in Sciences and Engineering 6, Academic Press,
 New York and London, 1963

 [9] LAURENT F. et LHOTE F.
 "Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non-linéaire"
 C.R.A.S. Paris, 3 Janvier 1966, t. 262, p. 35-37

10 GENTINA J.C. et BORNE P.

"Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires" C.R.A.S. Paris, 16 Août 1972, t. 275

11 LYAPUNOV

"Problème général de la stabilité du mouvement" University Press, Princeton, 1949

[12] GENTINA J.C., BORNE P. et LAURENT F. "Stabilité des systèmes continus non-linéaires de grande dimension" Revue R.A.I.R.O., J 3, p. 69-77, Août 1972 [13] BORNE P., BENREJEB M. and LAURENT F.

"Matrix approaches to absolute dynamical stability of Lur'e Postnikov systems"

4° Congress Informatica y Automatica, Madrid, 1979

[14] GRUJIC Lj.T.

"Solutions for the Lur'e Postnikov and Ayzerman problems" Int. J. Systems Science, Vol. 9, N° 12, p. 1359-1372, 1978

[15] LEFSCHETZ S.

"Stability of non Linear control systems" Mathematics in Science and Engineering 13, Academic Press, New York and London, 1965

[16] BENREJEB M., DAUPHIN G. et BORNE P. "Sur une nouvelle approche de la modélisation et de la simulation des processus non-linéaires" Congrès INTERLAKEN, Juin 1980

17 BENREJEB M.

"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés" Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1980

18 GROUMPOS P.P. et SCOTT P.D.

"The nested bordered diagonal method for symetric eigenproblems" Proc. 15th Annual Allerton Conference on Communication Control and Computing, 1977 19 GROUMPOS P.P.

"Filtering Techniques for a class of hierarchical systems" Modelling and Simulation, Vol. 9, Part. 3, Control and Identification Proc. of 9th Annual Pittsburg Conference, April 1978

20 BORNE P. and BENREJEB M.

"On the stability of a class of interconnected systems. Application to the forced working conditions" M.T.V.S. Symposium I.F.A.C., Fredericton, 1977

[21] LAURENT F., LELEU S. and MERVIEL P. "Application of modelling and simulation to analysis and synthesis of non linear processes" Modelling, Identification and Control 1^{rst} Symposium, Davos, Switzerland, February 1981

[22] TSCHAUNER J. "Introduction à la théorie des systèmes échantillonnés" Dunod, Paris, 1963

23 DEHORS R. et LAURENT F.

"Simulation des fonctions de transfert discrètes sur calculatrice analogique par courant continu" C.R.A.S., Tome 262, p. 928-930, Avril 1966

[24] GENTINA J.C., BORNE P., TOULOTTE J.M. et LAURENT F. "Extension à un corps quelconque des méthodes de simulation usuelles"

Congrès A.I.C.A., Prague, 1973
25 MEIZEL D., GENTINA J.C.

"New aspects on linear and non linear single input single output systems"

Int. j. of Control, Vol. 30, N° 6, p. 1043-1060, 1979

26 GANTMACHER F.R.

"Théorie des matrices" Tome 1

Collection Universitaire de Mathématiques, Dunod, 1966

27] GILL A. "Linear Sequential Circuits" Mac Graw Hill Book Company

28 ROSENBROCK H.H.

"A method of investigating stability"

I.F.A.C., Bâle, 1963, 352/1

[29] GRUJIC Lj.T., GENTINA J.C. and BORNE P. "General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms" Int. J. Control, Vol. 24, N° 4, p. 529-550, 1976

30 LAURENT F., EL MOUDNI A., RICHARD J.P. and BORNE P. "On initial stability conditions for non linear large scale systems"

4° Congreso Informatica y Automatica, Madrid, Octobre 1979

-253-

[31] RICHARD J.P., EL MOUDNI A., BORNE P.
"On the determination of a linear model for a localy stable non linear process"
1^{rst} IASTED Symposium MODELLING, Identification and Control, Davos (Switzerland), February 18-21, 1981

[32] LELEU-MERVIEL S., RICHARD J.P. "On the use of polynominal basis for descriptions of continuous systems"

A paraître, Congrès ICD ou MECO, Tunis, Septembre 82

33 RICHARD J.P., MERVIEL-LELEU S., ZAMBETTAKIS I.

"Application of invariant functions to continuous non linear systems"

A paraître, Congrès IASTED, AMS 82, Paris, Juillet 82

34 LAURENT F., RICHARD J.P.

"On the determination of structurland control invariants for continuous non linear Lur'e Postnikov type systems" SMD Congress, Cairo, Septembre 1981

35 MAIZIERES C., LAURENT F.

"Sur un modèle mathématique pour l'étude du circuit ferrorésonant série. Application à la détermination d'une condition suffisante de non démultiplication de fréquence" C.R.A.S., Paris, Série B, t. 265, p. 801-803, 1967 36 MAIZIERES C.

"Sur quelques méthodes d'étude des systèmes continus non linéaires"

Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1968

37 ROUELLE E.

"Contribution à l'étude expérimentale de la ferrorésonance" Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1934

38 DEHORS R.

"Contribution à la démultiplication de fréquence ferromagnétique" Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1946

39 PANET M.

"Sur l'interprétation de certains phénomènes de ferrorésonance" Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1967

40 AMALRIC J.

"Ferrorésonance"

Revue Technique Merlin Gerin, Fascicule 2, N° 3, 2nd trimestre 1974

41 JAKOB M.

"Heat transfer"

Vol. 1, New York, John Wiley & Sons, Inc, 1949

42 KREITH F.

"Transmission de la chaleur et thermodynamique" Masson et C^{ie} Editeurs, Paris, 1967 43 ROSENBROCK H.H.

"A method of investigating stability" Congrès IFAC, Bâle, Septembre 1965

GENTINA J.C.
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension"
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1976

[45] BOELTER L.M.K., CHERRY V.H., JOHNSON H.A. "Heat Transfer" 3^d Edition, Berkeley : University of California press, 1942

[46] GRÖBER H., ERK S., GRIGULL U. "Grundgesetze der Wärmeübertragung" 3^d Edition, Berlin, Springer Verlag, 1955

47 ELROD H.G.

"Improved lumped parameter method for transient heat conduction calculations with flat-slab and cylindrical elements" Trans. ASME, Serc. C, Vol. 82, p. 181-188, 1960

48] GUY L.J. "Modeling heat-transfer systems"

Chemical engineering, p. 93-98, Mai 3, 1982

49 BOUVENOT A.

"Transferts de chaleur"

Collection technologies, Masson, Paris, 1981

TABLE DES MATIERES

7

9

AVANT PROPOS

INTRODUCTION GENERALE

Chapitre I : APPLICATION DES METHODES DU CALCUL ANALOGIQUE

A LA REPRESENTATION D'ETAT

INTRODUCTION	13
I- LA SIMULATION ANALOGIQUE	
I.1 - Les méthodes de simulation analogique	14
I.2 - Opérateurs formels du calcul analogique	14
I.3 - Modélisation des systèmes continus linéaires	18
a) Définition des systèmes continus linéaires mono-	
variables. Notion de fonction de transfert	18
b) Simulation d'un système représenté par une fonction	
de transfert	20
Position du problème	20
La première méthode du graphe	21
La seconde méthode du graphe	23
La méthode modale	25
c) Détermination d'une fonction de transfert à partir	
d'un schéma de simulation	29
Exemple d'application	29

11	1
ļ	
NOUVELLE	
INIERPREIALION	
20	2
SCHEMA	
Ut	
SIMULAI I	
15	2

52	111.2 - La seconde méthode du graphe
48	c) Cas des systèmes de type Lut'e Postnikov
47	b) Représentation d'état associée
46	a) Mise en oeuvre de la méthode
46	III.1 - La première méthode du graphe
	111 - APPLICATION AUX METHODES USHELLES DE SIMULATION
45	c) Remarque sur la notion d'état
43	b) Exemple
41	a) Forme matricielle de la représentation d'état.
41	11.3 - Schēma de simulation et représentation d'état
37	c) Remarque concernant l'entrée u
37	b) Principe fondamental de la méthode
36	a) Variables d'un schēma de símulation
36	11.2 - Vecteur état induit par un schéma de simulation.
34	c) Représentation d'état matricielle
32	b) Définition de l'état
31	a) Fonction de transfert
31	11.1 - Représentation des systèmes

CONCLUSION

65

111.3

i

La méthode modale

٠ . 111.2

La seconde méthode du graphe

57

-258-

Chapitre II : LA SIMULATION PAR OPERATEURS GENERALISES ET

SES APPLICATIONS

TNTRODUCTTON	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	69
THU 1000001 TOW		• •

I - DEFINITION DES OPERATEURS GENERALISES

1.1 - Généralisation des opérateurs de calcul analogique	71
a) Remarque líminaire	71
b) Définition des opérateurs généralisés continus .	73
c) Extension de la définition	75
I.2 - Mise en oeuvre des opérateurs généralisés par les	
deux premières méthodes du graphe	80
a) Première méthode du graphe	80
b) Cas de la seconde méthode du graphe	85
c) Calcul des coefficients	88
1.3 - Application à la méthode modale	92
a) Emploi des opérateurs généralisés dans le schéma	
de principe	92
b) Généralisation : la forme en flèche mince	96
c) Forme en flèche de type I	100

II - CHANGEMENT DE BASE ASSOCIE À UNE REPRESENTATION MATRICIELLE

II.1	- i	Fonction de transfert et base de polynômes	107
	a)	Expression d'une fonction de transfert modélisée	
		à partir d'opérateurs généralisés	107
	Ь)	Nouveau symbolisme de représentation des fonctions	
		de transfert	108
	c)	Théorème du changement de base	111

11.2	- Calcul de la base de polynômes	117
	a) Première méthode : Théorème 1	118
	b) Seconde méthode : Théorème 2	121
	c) Comparaison pratique des deux méthodes. Remarque	123
11.3	- Mise en oeuvre de la méthode proposée	125
	a} Exemple : La forme Compagnon II généralisée	125
	b) Cas des représentations de type I	133
	c) Détermination d'un changement de base de	
	Compagnon II à Compagnon I	137
	Exemple d'application	139

111 - DETERMINATION DE FORMES MATRICIELLES POUR LA

REPRESENTATION DES SYSTEMES

III.1 - Forme en flèche	143
a) Matrice de passage et calcul des coefficients	143
Exemple d'application	149
b) Forme en flèche épaisse	156
c) Exemple	160
III.2 - Forme tridiagonale	170
a) Détermination d'une nouvelle forme	170
b) Calcul de la matrice de passage	173
c) Passage direct de la forme en flèche à la	
tridiagonale	179
III.3 - Autres aspects du problème de la recherche de	
formes nouvelles	183
a) Etude des bases de polynômes	183
b) Chaîne d'action comportant un intégrateur pur	188
c) Cas particulier	194
CONCLUSION	198

.

Chapitre III - APPLICATION A L'ETUDE DE SYSTEMES PHYSIQUES

INTRODUCTION		201
--------------	--	-----

1 - LE CIRCUIT FERRORESONANT SERIE

I.1 -	Représentation d'état d'un système monovariable		
	du second ordre	203	
I.2 -	Cas particulier : le circuit ferrorésonant série .	208	
1.3 -	Application à la sécurité dans les réseaux		
	électriques	211	

11 - ECOULEMENT DE CHALEUR EN REGIME TRANSITOIRE A TRAVERS

UNE PA	<u>ROI</u> luctían	21
1100104		
II.1 D	étermination d'une représentation adaptée du	
\$	ystēme	21
a	.) Position du problème	21
b) Recherche d'un modèle différentiel	21
c) Définition d'un modèle matriciel	22
II.2 V	'alidité du modèle	22
a) Etude des conditions de stabilité	22
b) Vérification du príncipe de Carnot	22
c) Détermination de la quantité de chaleur	23
11-3 A	pplications	23
a	.) Premier exemple	23
Ь) Second exemple	23
c) Remarque : intervention des effets de bord	24
CLUSION	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	24

CONCLUSION GENERALE

BIBLIOGRAPHIE

TABLE DES MATIERES

Section Sec 247

249

257