

50376
1982
231

THÈSE

50376
1982
231

N° d'ordre 1021

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

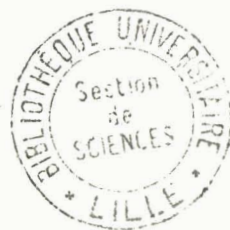
(Spécialité Electronique)

par

Quoc The NGUYEN

Maître ès-Sciences

MODELISATION NUMERIQUE D'UNE STRUCTURE BIDIMENSIONNELLE ILLUMINEE PAR UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PLANE



Soutenu le 16 Décembre 1982 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury : MM. R. GABILLARD Président
M. CAUTERMAN Rapporteur
P. DEGAUQUE Examineur
J. FONTAINE Examineur
F. MIGNOT Examineur

Ce travail a été effectué au Laboratoire de RADIOPROPAGATION et ELECTRONIQUE de l'Université des Sciences et Techniques de Lille sous la direction de Monsieur le Professeur R. GABILLARD.

J'exprime ma gratitude envers Monsieur le Professeur R. GABILLARD d'avoir bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et qui me fait l'honneur de juger ce mémoire et de présider mon jury.

Monsieur M. CAUTERMAN, Docteur ès Sciences, a dirigé ce travail. Pendant toute la durée de réalisation, j'ai travaillé en étroite collaboration avec lui, sa grande compétence scientifique et sa longue expérience m'ont été d'une aide efficace et amicale. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Monsieur le Professeur P. DEGAUQUE, avec qui j'ai eu de nombreuses discussions fructueuses, me fait l'honneur de juger mon travail. Je tiens à lui témoigner ma reconnaissance.

Monsieur J. FONTAINE, Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand me fait l'honneur de juger mon travail. Je lui exprime mes remerciements.

Monsieur F. MIGNOT, Professeur à l'Ecole Polytechnique me fait plaisir de participer à mon jury de thèse et d'examiner mon travail. Pendant la réalisation de cette thèse, j'ai discuté à plusieurs reprises avec lui, je l'en remercie.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du Laboratoire et particulièrement à Madame M. DEMOULIN, Messieurs B. DEMOULIN, A. ZEDDAM, M. HEDDEBAUT, P. DUVINAGE, G. COURBET, S.E. NADER, J.M. DEGEETER, P. CORNIC, A. BENANI.

Au personnel du Centre Interuniversitaire de Traitement de l'Information et particulièrement à Madame A. REMY, M. Y. TINEL.

A Madame GARDIN qui a assuré avec soin la dactylographie de ce mémoire, à Messieurs G. PLUQUET et J.P. DEHORTER pour le tirage.

MODELISATION NUMERIQUE DE LA REPONSE D'UNE STRUCTURE BIDIMENSIONNELLE
ILLUMINEE PAR UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PLANE

- INTRODUCTION

- CHAPITRE I : *SIMULATION DE LA REPONSE EN BASSE FREQUENCE*

- I.1. Positions et principales hypothèses simplificatrices.
- I.2. Expressions des équations fondamentales.
- I.3. Méthode de résolution numérique
 - I.3.1. Combinaison de la méthode variationnelle et des différences finies.
 - I.3.2. Expressions variationnelles.
 - I.3.3. Limitation artificielle du domaine.
 - I.3.4. Approximation discrète par différences finies et stationnarisation de la fonctionnelle.
- I.4. Système d'équations modales linéaires.
 - I.4.1. Forme matricielle.
 - I.4.2. Méthode de résolution sur l'ordinateur.
- I.5. Considérations pratiques.
 - I.5.1. Découpage optimum.
 - I.5.2. Convergence de la méthode.
 - I.5.3. Exemple numérique.

- CHAPITRE II : *ETUDE DE LA REPONSE DE LA STRUCTURE A FREQUENCES ELEVEES*

II.1. Condition aux limites à l'interface supérieure.

II.1.1. Formulation.

II.1.2. Etude de la singularité.

II.2. Approximation de cette condition par des éléments discrets.

II.3. Résolution numérique sur l'ordinateur.

II.3.1. Forme matricielle.

II.3.2. Méthode de résolution.

II.4. Exemple simple d'application.

- CHAPITRE III : *APPLICATIONS*

III.1. Modèles simulés en basse fréquence.

III.2. Modèles simulés en haute fréquence.

- *CONCLUSION*

- *REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.*

- *ANNEXES* :
- A.1. Calcul de la fonctionnelle du champ magnétique.
 - A.2. Champ électromagnétique dans un milieu stratifié.
 - A.3. Ordre d'approximation de l'opérateur à l'intérieur d'un domaine homogène.
 - A.4. Développement de la condition aux limites de convolution.

I N T R O D U C T I O N

Le sondage électromagnétique est une méthode de prospection géophysique bien connue. Cette méthode est basée sur la mesure du champ rérayonné par le sous-sol qui est illuminé par une onde émise d'un émetteur situé en surface. Ce procédé permet de reconnaître la structure géologique du sous-sol. Les méthodes d'interprétation des mesures effectuées sur le terrain ont été développées à partir d'études théoriques ou analogiques. Pour un gisement situé dans un sous sol stratifié, la solution théorique s'obtient sous la forme d'un système d'équations intégrales de Fredholm. Une solution analytique peut être effectuée sur les anomalies de forme simple : parallélépipède, sphère, disque plat. Lorsque le milieu encaissant contient une anomalie de forme quelconque, une méthode numérique de résolution d'équations intégrales comme la méthode des moments peut être utilisée. Cependant ce formalisme ne peut s'appliquer que si l'anomalie de résistivité est limitée par une surface fermée.

Lorsque la conductivité du sol est une fonction de points, il faut procéder à une résolution directe des équations de Maxwell en utilisant la méthode des différences finies ou des éléments finis.

Nous avons choisi la méthode de différences finies associée à un calcul variationnel à cause de sa simplicité et sa souplesse, pour simuler la réponse d'une structure "bidimensionnelle" hétérogène illuminée par une onde électromagnétique plane. Comme nous l'avons signalée, la structure étudiée, en général, semi-infinie, contient une distribution arbitraire de résistivités, de permittivités électriques et de perméabilités magnétiques, elle est en outre souvent linéaire et invariante dans une direction fixe.

L'objet du premier chapitre est principalement consacré à la modélisation d'une telle structure. L'onde plane de fréquence très basse est incidente sur l'interface air-sol plane. Pour limiter artificiellement le domaine étudié, nous étudions successivement les conditions aux limites analytiques permettant de réduire le domaine discrétisé en se basant sur un calcul variationnel applicable au problème auto-adjoint

.../...

que vérifie l'onde totale, nous aboutissons ainsi à un système linéaire d'équations nodales à résoudre qui régit le comportement discret de chaque valeur inconnue du champ électromagnétique. Ce modèle s'applique essentiellement aux méthodes de prospection très basse fréquence comme la magnétotellurie.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons à la réponse de la même structure illuminée par une onde électromagnétique plane de fréquence élevée dont la longueur d'onde dans l'air est comparable à l'extension horizontale du domaine étudié. Le demi milieu supérieur (l'air) est homogène et tenant compte du phénomène de diffusion de l'onde à l'interface supérieure, nous y développons une condition aux limites de type produit de convolution. Le modèle issu de cette étude est plus général, il est possible de simuler la réponse à une fréquence quelconque.

De nombreuses applications en géophysique notamment sont présentées au dernier chapitre.

Nous pensons que l'exploitation de ce modèle conduit à une amélioration de la méthode actuelle d'interprétation.

CHAPITRE I
=====

SIMULATION DE LA REponse EN BASSE FREQUENCE

Cette partie traite de la mise au point d'un modèle numérique permettant ainsi de simuler la réponse d'une structure hétérogène, souvent invariante dans une direction, illuminée par une onde plane électromagnétique de fréquence très basse.

Le programme élaboré à partir de ces hypothèses sera un outil simple et souple pourvu d'interprétation en sondage magnétotellurique, notamment.

I.1. POSITIONS ET PRINCIPALES HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

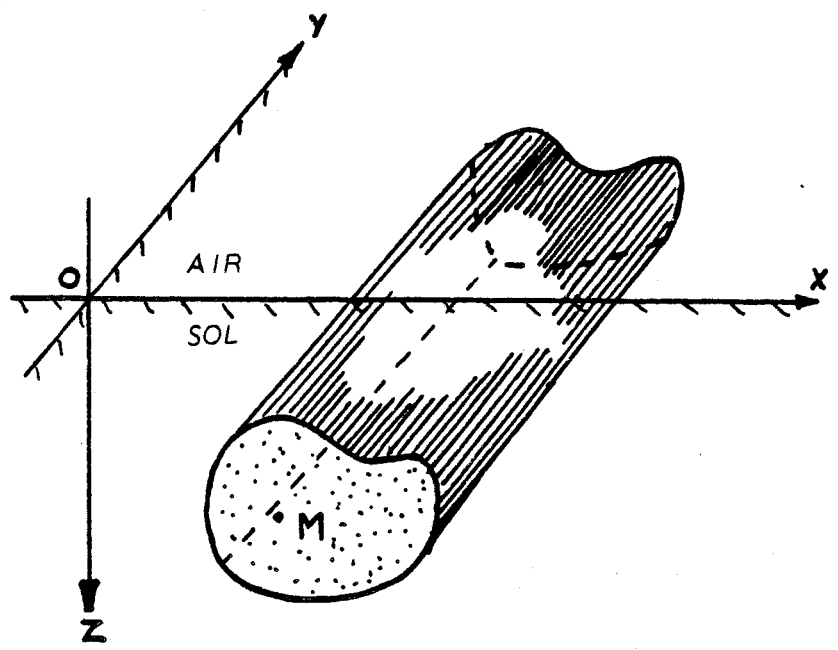


Figure 1

La structure du terrain, figure 1, est supposée invariante selon l'axe oy de sorte que les paramètres électromagnétiques puissent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma (M) = \sigma(x,z) \\ \epsilon (M) = \epsilon(x,z) \\ \mu (M) = \mu(x,z) \end{array} \right.$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x,z) \\ \vec{H}(x,z) \end{array} \right\} = 0$$

Par conséquent, le modèle simulé, deviendra bidimensionnel (2D) dans le plan oxz , figure 2.

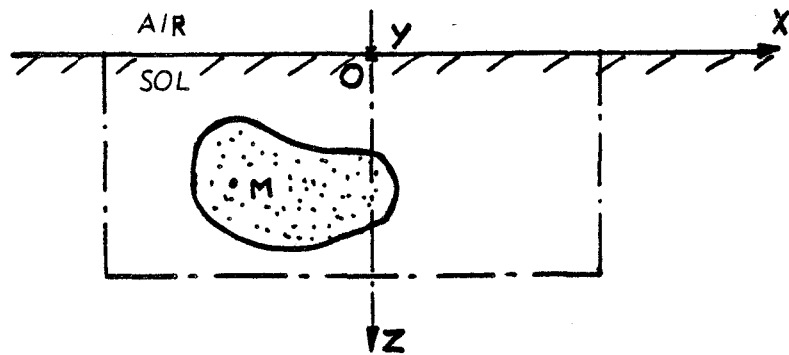


Figure 2

Dans l'hypothèse d'une source lointaine située au-dessus de l'interface air-sol, l'onde incidente est assimilable à une onde plane, donc décomposable en deux modes indépendants : Mode TM (Transverse magnétique, le champ magnétique H est parallèle à oy) et Mode TE (Transverse électrique, le champ électrique E est parallèle à oy).

Le champ résultant, en général, couple ces deux modes {1}, WAIT.

Si le demi milieu inférieur est isotrope et linéaire, nous pourrions toujours séparer la réponse en deux modes TM et TE indépendants, REDDY {2}.

Compte tenu des fréquences très basses auxquelles nous nous intéressons dans ce chapitre, nous négligeons les effets topologiques c'est-à-dire que l'interface air-sol est supposée plane.

I.2. EXPRESSIONS DES EQUATIONS FONDAMENTALES

Les équations de Maxwell avec l'hypothèse $\frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = 0$, et en régime sinusoïdal ($e^{j\omega t}$) s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - j\omega\mu(x,z)\vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \{\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)\} \vec{E} \end{cases}$$

Nous pouvons donc en déduire les deux systèmes d'équations suivantes, μ , ϵ , σ , étant fonctions de x, z .

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = - j\omega\mu H_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\mu H_y \end{cases} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = (\sigma + j\omega\epsilon) E_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_y \end{array} \right. \quad (2)$$

Grâce aux hypothèses précédentes et à la linéarité des équations de Maxwell, nous décomposons l'onde incidente en deux ondes indépendantes, une associée au mode TM et l'autre au mode TE. La solution globale sera la superposition de ces deux modes.

- Mode TM : $(H_x = H_z = E_y = 0)$

Nous avons le problème déterministe en champ magnétique H_y qui vérifie l'équation différentielle suivante obtenue à partir de (1), (2) ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{(\sigma + j\omega\epsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial x} H_y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{(\sigma + j\omega\epsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \right] = j\omega\mu H_y \quad (3)$$

- Mode TE : $(E_x = E_z = H_y = 0)$

Le champ électrique E_y vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial}{\partial z} E_y \right) \right] = (\sigma + j\omega\epsilon) E_y \quad (4)$$

On remarque évidemment que les équations (3) et (4) sont duales l'une de l'autre.

Vue la forme compliquée des équations (3) et (4), σ , ϵ , μ étant fonctions des coordonnées, la résolution analytique s'avère impossible ; nous allons recourir à une méthode numérique sur l'ordinateur. Le principe général de résolution consiste à subdiviser le sol en éléments discrets sur chaque élément σ , ϵ , μ étant constants.

I.3. METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

Les ordinateurs modernes possèdent une capacité mémoire importante mais qui reste évidemment limitée. Par conséquent, notre tâche primordiale est de limiter le domaine semi infini, que représente le sol par des frontières artificielles, frontières qui se traduisent mathématiquement par des conditions aux limites analytiques. Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier en détail ces conditions aux limites.

Nous allons d'abord envisager le cas de la propagation en mode TM, celui du mode TE se traite de la même façon.

Sur chaque élément i , l'équation (3) s'écrit :

$$\left[\frac{1}{(\sigma_i + j\omega\epsilon_i)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - j\omega\mu_i \right] H_y = 0 \quad (5)$$

L'équation elliptique (5) exprime le phénomène de diffusion du champ magnétique H_y dans l'élément i .

Compte tenu de la propriété de l'équation (5), la résolution numérique se fera par la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel.

I.3.1. Combinaison de la méthode variationnelle et de différences finies :

Par rapport à la méthode de discrétisation directe, la méthode variationnelle peut englober dans le calcul, les conditions aux limites (FOR SYTHE {3}). La solution du problème s'obtient, en général, en calculant l'extrémum d'une certaine intégrale qui correspond souvent à l'énergie contenue dans le système, WEXLER {4}.

Dans la méthode des différences finies, l'opérateur est discrétisé tandis que le champ magnétique H_y reste dans son espace. A titre indicatif nous signalons que si l'approche avait été faite par la méthode des éléments finis, méthode généralisée à partir de celle de RITZ - GALERKIN, c'est le champ H_y qui avait été discrétisé. Dans ce cas, H_y sera défini sur l'élément par une classe de fonctions de forme simple à partir d'un nombre fini de paramètres discrets. En général, ces fonctions sont des polynômes et les paramètres les valeurs du champ en des points précis. Au laboratoire, le modèle discrétisé en éléments finis en basse fréquence a été l'objet du travail de BENANI {8}.

I.3.2. Expressions variationnelles :

L'équation (3) s'écrit sous la forme condensée

$$LH_y = f \quad (6)$$

où

$$L \text{ est opérateur } \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi$$

$$\text{avec } k = (\sigma + j\omega\epsilon)^{-1} ; \phi = j\omega\mu$$

f est le second membre, ici $f = 0$

nous démontrons en annexe 1 que la solution de (6) sera le point de stationnarisation de la fonctionnelle $F(H_y)$, suivante :

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \langle LH_y, H_y \rangle - \langle H_y, f \rangle = \frac{1}{2} \langle LH_y, H_y \rangle \quad (7)$$

où

$$\langle LH_y, H_y \rangle = \iint_{(\Omega)} (LH_y) (H_y) d\Omega \quad (8)$$

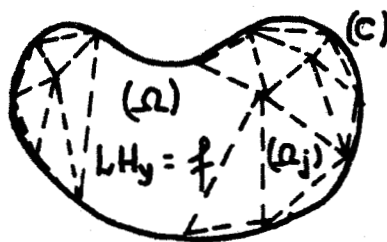


Figure 3

Dans le domaine discret, la fonctionnelle s'écrit sous la forme : (Figure 3)

$$\begin{aligned} F(H_y) &= \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} (L_j H_y) (H_y) d\Omega_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} [(k_j \Delta - \phi_j) H_y] H_y d\Omega_j \end{aligned}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Utilisant l'identité de Green :

$$\iint_{(\Omega_j)} H_y \Delta H_y d\Omega_j = - \iint_{(\Omega_j)} (\nabla H_y)^2 d\Omega_j + \oint_{(C_j)} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl$$

où n est la normale extérieure à (Ω_j) , (C_j) est le contour fermé de (Ω_j) .
Le champ magnétique étant continu sur l'interface des éléments, l'intégrale $\sum_j \oint_{(C_j)} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl = \oint_{(C)} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl$ où (C) est le contour fermé de (Ω) .

$F(H_y)$ s'écrit explicitement

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\iint_{(\Omega_j)} \left\{ k_j \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 \right\} d\Omega_j \right] - \frac{1}{2} \oint_{(C)} k_f H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl \quad (9)$$

où $k_f = (\sigma_f + j\omega\epsilon_f)^{-1}$; σ_f , ϵ_f sont conductivité et permittivité électrique des mailles frontalières.

Cette fonctionnelle quadratique est composée de deux intégrales ; la première traduit en quelque sorte la puissance dissipée à travers la surface (Ω) et la deuxième, la puissance écoulee à travers la frontière (C) .

Nous allons montrer que la première intégrale représente la puissance moyenne dissipée à travers (Ω) . En effet, la densité moyenne de flux de puissance, exprimé par le vecteur de Poynting \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

d'où la puissance moyenne dissipée à travers (Ω)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_f &= - \iint_{(\Omega)} \operatorname{div} \vec{S} d\Omega = - \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}) d\Omega_j \\ &= - \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} (\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}) d\Omega_j \end{aligned}$$

Remplaçons $\vec{\text{rot}}\vec{E}$ et \vec{E} tirés à partir des équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{E} = (\sigma + j\omega\epsilon)^{-1} \vec{\text{rot}}\vec{H}$$

dans l'expression de \mathcal{P}_f :

$$\mathcal{P}_f = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} \left[\frac{1}{(\sigma_j + j\omega\epsilon_j)} (\vec{\text{rot}}\vec{H} \cdot \vec{\text{rot}}\vec{H}) + j\omega\mu_j \vec{H} \cdot \vec{H} \right] d\Omega_j$$

En mode TM, $\vec{H} = (0, H_y, 0)$ donc :

$$\mathcal{P}_f = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} \left[k_j \left\{ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right\} + j\omega\mu_j H_y^2 \right] d\Omega_j$$

Ainsi, en résumé, la solution du problème n'est autre que celle qui rend la puissance du système minimale.

Il nous reste maintenant, avec les conditions aux limites physiques, de les interpréter mathématiquement.

I.3.3. Limitation artificielle du domaine :

Le domaine d'étude se schématise de la façon suivante, figure 4 :

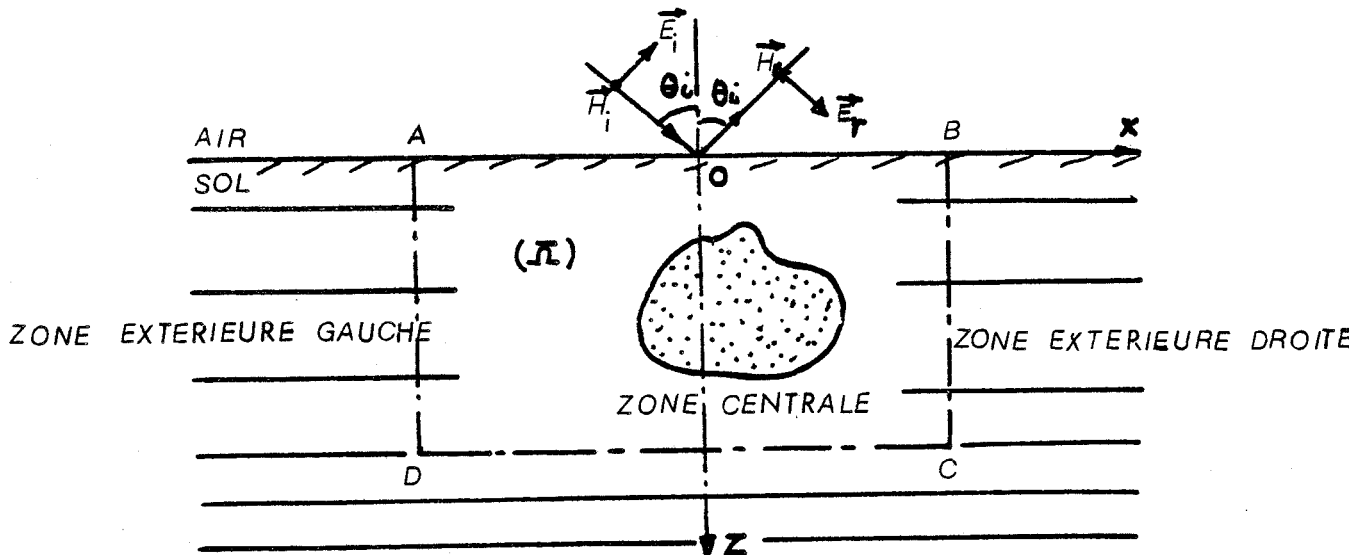


Figure 4

- La zone centrale (ABCD) contient une anomalie de forme et de conductivité quelconque modifiant ainsi la distribution du champ dans cette région de l'espace.
- Les deux zones extérieures droites et gauches, sont des demi-milieux stratifiés, non nécessairement identiques. Chaque zone extérieure compose de M couches homogènes de $\sigma_m, \epsilon_m, \mu_m$. (figure 5).

Le calcul du champ électromagnétique tabulaire en zone extérieure se base sur la théorie de WAIT [10] dont les détails de calcul se développent en annexe A.2 pour les modes TM et TE.

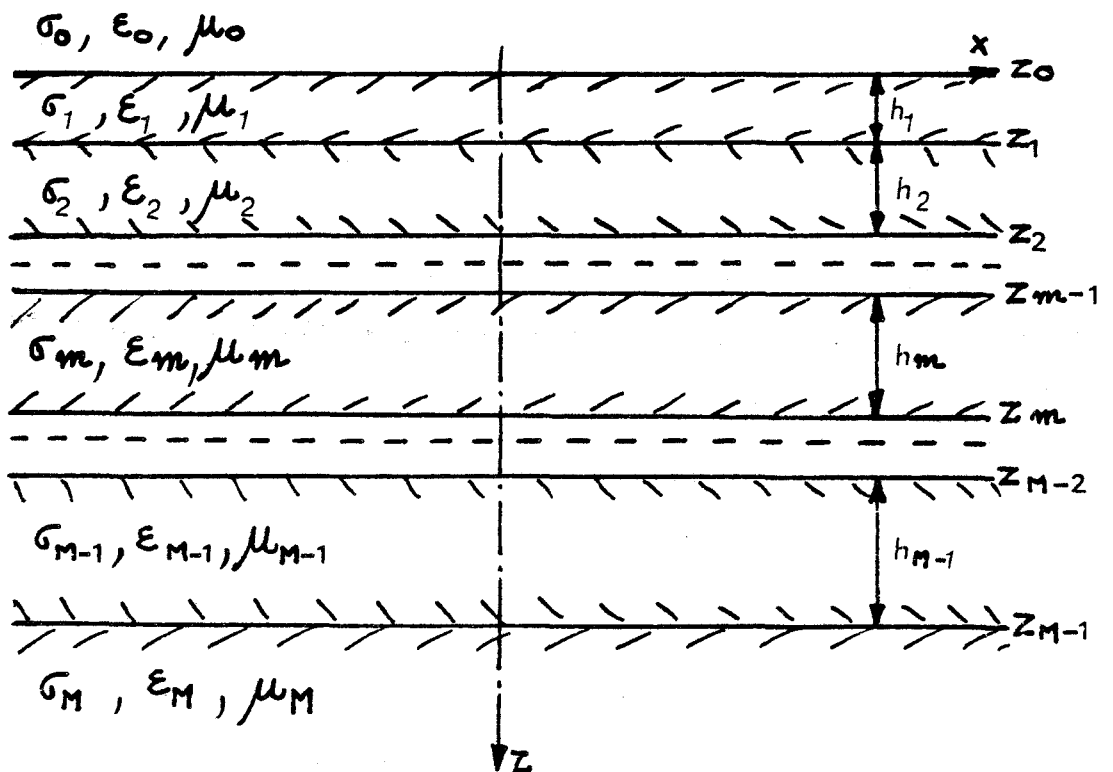


Figure 5

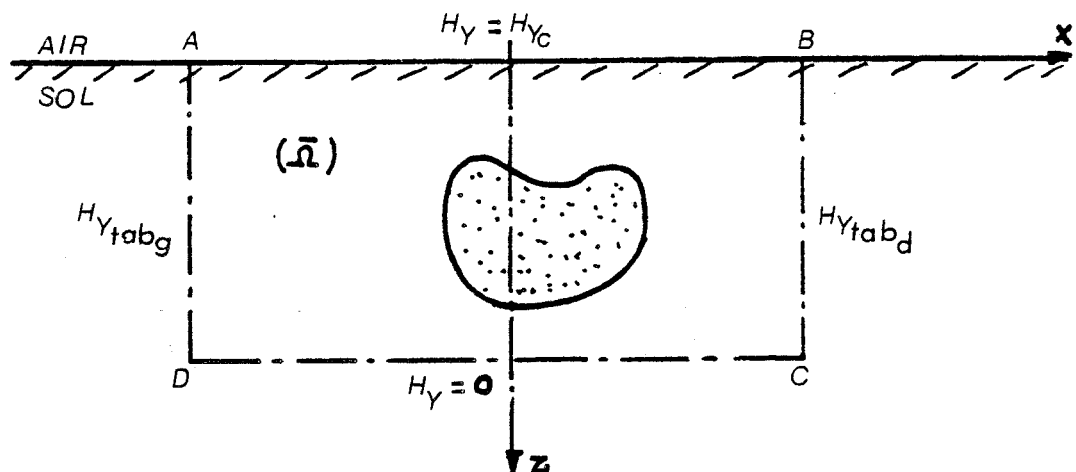
Sur le contour artificiel, on se fixe des conditions aux limites analytiques, qui sont l'objet d'étude du paragraphe suivant, pour chaque modèle numérique.

* modèle 1 : i) En basse fréquence, la composante verticale du courant est nulle. D'après les équations de Maxwell, il en résulte que la composante H_y du champ magnétique est constante à l'interface air-sol.

ii) En supposant que l'influence de l'anomalie ne se fait plus sentir au niveau $z = z_{M-1}$, on peut considérer que le champ électromagnétique est égal au champ électromagnétique tabulaire à la côte considérée. De plus, si l'épaisseur des couches conductrices est suffisante, on peut alors considérer que H_y est nul sur le segment CD.

iii) Loin à gauche et à droite, la structure du demi-milieu redevient tabulaire et le champ électromagnétique est égal au champ électromagnétique donné par WAIT [10].

Le modèle 1, avec ses conditions aux limites est représenté par la figure 6.



Modèle 1 - FIGURE 6

Mathématiquement, il s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = 0 \text{ sur } (\overline{\Omega}) \quad (10.1) \\ H_y = H_{yc} \text{ sur } (\overline{AB}) \quad (10.2) \\ H_y = H_{y \text{ tabcd}} \text{ sur } (\overline{BC}) \quad (10.3) \\ H_y = 0 \text{ sur } (\overline{CD}) \quad (10.4) \\ H_y = H_{y \text{ tabg}} \text{ sur } (\overline{DA}) \quad (10.5) \end{array} \right.$$

où $\overline{\Omega} = \Omega / ABCD$: intérieur de (Ω)

$$k = \{\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)\}^{-1} ; \phi = j\omega\mu(x,z)$$

Sa fonctionnelle $F(H_y)$ a la forme :

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\iint_{(\Omega_j)} \left\{ k_j \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 \right\} dx dz \right] \quad (11)$$

Ce problème est auto-adjoint, son développement conduit à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est symétrique WEXLER {4}. Dans le souci de réduire l'étendue du domaine (ABCD) vers le bas, nous utilisons la notion d'impédance de surface ramenée à une cote donnée, analogue à celle définie en théorie des lignes de transmission inhomogènes.

* modèle 2 :

Evidemment, cette proposition n'est valable que si l'onde résultante à la cote de \overline{CD} reste plane. L'impédance Z_f à une cote $z = z_{m-1}$ s'exprime par

$$Z_f = \left\{ \begin{array}{l} E_{m,x} \\ H_{m,y} \end{array} \right\}_{z = z_{m-1}}$$

où :
$$E_{m,x} = \frac{-1}{(\sigma_m + j\omega\epsilon_m)} \frac{\partial H_{m,y}}{\partial z} = k_m \frac{\partial H_{m,y}}{\partial z}$$

d'où la relation obtenue à une cote donnée

$z = z_{m-1}$

$$Z_f k_m^{-1} H_{m,y} + \frac{\partial H_{m,y}}{\partial z} = 0$$

(12)

La relation (12) n'est autre qu'une condition de type Cauchy régissant le comportement du champ magnétique et de sa dérivée sur \overline{CD} . L'impédance Z_f ne dépend que des propriétés géométriques et électromagnétiques de couches inférieures à la couche m . En supposant que la structure en-dessous de la couche m est unique et identique de part et d'autre des deux bords verticaux, l'expression de Z_f est donnée en Annexe 2.

Le modèle 2 se représente schématiquement par la figure 7.

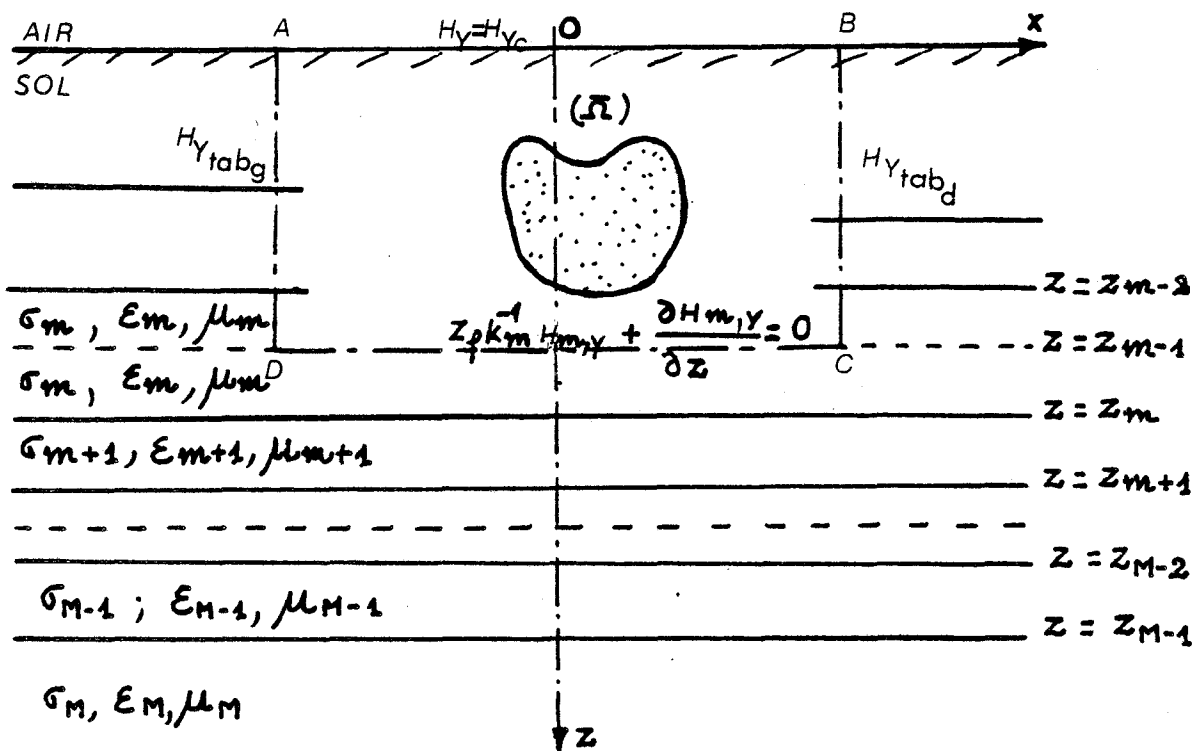


Figure 7

Mathématiquement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = 0 \text{ sur } (\bar{\Omega}) \cup (\overline{CD}) \end{array} \right. \quad (13.1)$$

$$H_y = H_{yc} \text{ sur } (\overline{AB}) \quad (13.2)$$

$$H_y = H_{ytab d} \text{ sur } (\overline{BC}) \quad (13.3)$$

$$Z_f k_m^{-1} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \text{ sur } (\overline{CD}) \quad (13.4)$$

$$H_y = H_y \text{ tab g sur } (\overline{DA}) \quad (13.5)$$

Dans ces conditions, la fonctionnelle associée à (13) s'écrit

$$\begin{aligned} F(H_y) = & \frac{1}{2} \sum_j \left[\int_{(\Omega_j)} \left\{ k_j \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 \right\} d\Omega_j + \dots \right. \\ & \left. \dots \frac{1}{2} \int_{(\overline{CD})} Z_f H_y^2 dl \right] \quad (14) \end{aligned}$$

Dans cette formulation le segment (\overline{CD}) est l'interface de 2 couches de conductivités électromagnétiques identiques.

Le problème reste auto-adjoint d'après FORSYTHE {3}, WEXLER {4}.

L'avantage de ce modèle par rapport au modèle 1 est que son domaine d'étude se rétrécit considérablement d'où un traitement numérique moins coûteux.

Nous continuons le processus d'optimisation du domaine par l'application d'une condition de type Cauchy sur les deux bords (\overline{BC}) et (\overline{DA}) .

* modèle 3 :

Nous supposons que le champ électromagnétique sur les deux bords (\overline{BC}) et (\overline{DA}) , redevient tabulaire soit :

$$H_{y \text{ total}} = H_{y \text{ tab.}}$$

or

$$H_{y \text{ tab}} = (a_m e^{-u_m z} + b_m e^{+u_m z}) e^{-\gamma_0 \sin \theta x}$$

où $a_m e^{-u_m z} + b_m e^{+u_m z}$ sont fonctions de z de sorte que :

$$\frac{\partial H_{y \text{ tab}}}{\partial x} = -\gamma_0 \sin \theta H_{y \text{ tab}}$$

et $H_{y \text{ total}} \equiv H_{y \text{ tab}}$

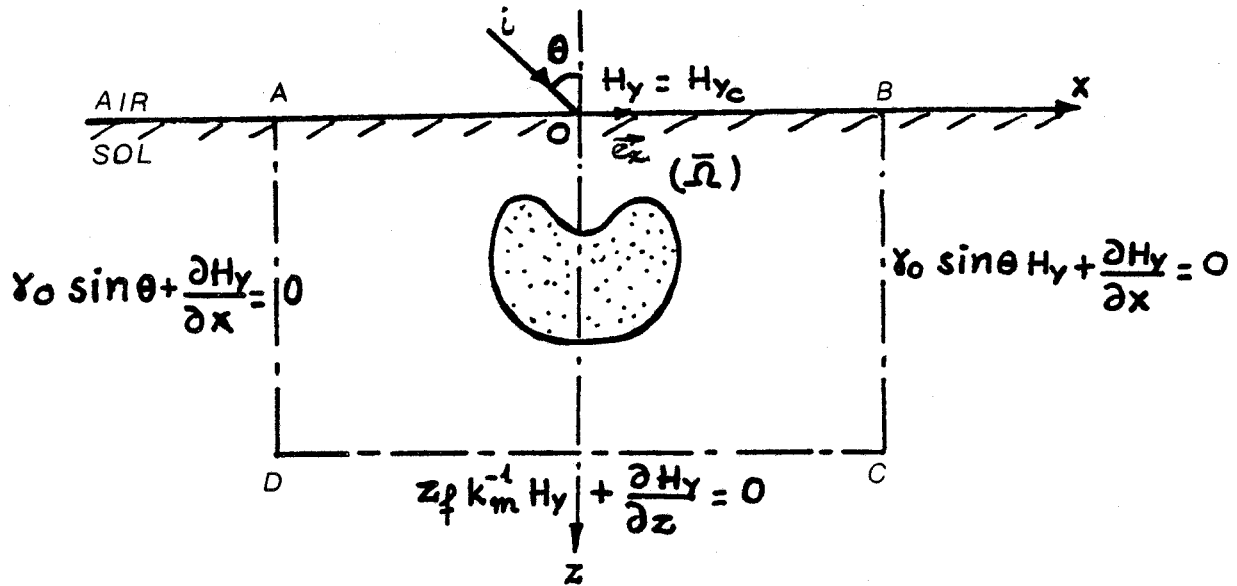
soit :

$$\gamma_0 \sin \theta H_{y \text{ total}} + \frac{\partial H_{y \text{ total}}}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

En très basse fréquence ou en incidence normale ($\theta = 0$), (15) se réduit à la condition de Neumann homogène : $\frac{\partial H_{y \text{ total}}}{\partial x} = 0$.

D'après DEY {12} {13}, la condition de Neumann "sur-évalue" le champ magnétique H_y calculé par rapport au champ magnétique exact (champ donné par les formules de WAIT {10}). Tandis qu'avec une condition plus générale telle que (15), le champ magnétique calculé concorde avec le champ exact, DEY {12}. De toute façon, l'adoption d'une telle condition, permettra de s'affranchir du calcul du champ électromagnétique tabulaire.

La figure 8, ci-dessous, représente le modèle 3.



Modèle 3 - FIGURE 8

Mathématiquement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = 0 \text{ sur } (\bar{\Omega}) \cup (\bar{BC}) \cup (\bar{CD}) \cup (\bar{DA}) \quad (16.1) \\ H_y = H_{yc} \text{ sur } (\bar{AB}) \quad (16.2) \\ \gamma_0 \sin \theta H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \text{ sur } (\bar{BC}) \quad (16.3) \\ Z_f k_m^{-1} H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \text{ sur } (\bar{CD}) \quad (16.4) \\ \gamma_0 \sin \theta H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \text{ sur } (\bar{DA}) \quad (16.5) \end{array} \right.$$

D'après la définition de la dérivée normale :

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial n} (x, z) \right\}_{H_y(x, z) \in \bar{BC}} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \cos (\vec{n}_{BC}, \vec{e}_x) = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial n}(x,z) \right\}_{H_y(x,z) \in \overline{DA}} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \cos(\vec{n}_{\overline{DA}}, \vec{e}_x) = - \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

La fonctionnelle associée à (16) est la suivante :

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} \left\{ k_j \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 + \phi_j H_y^2 \right] \right. \\ \left. \pm \frac{\gamma_0}{2} \sin \theta \oint_{(C_1)} k_f H_y^2 d\Gamma \right\} d\Omega_j \quad (17)$$

Le signe plus devant la deuxième intégrale correspond au contour (\overline{BC}) et le signe moins au contour (\overline{DA}) ,

Passons maintenant au traitement numérique par discrétisation du problème en différences finies. Signalons qu'on trouve dans la littérature plusieurs travaux analogues utilisant soit les différences finies (WAESELYNCK {11}, DEY {12}, MUFTI {14}, BREWIT-TAYLOR {15},...) soit la technique des éléments finis (COGGON {16}, PRIDMORE {9}, SILVESTER {17}, JONES {18} PRAUS {19}, STODT {20},...).

1.3.4. Approximation discrète par différences finies - Stationnarisation de la fonctionnelle :

En vue d'utiliser la méthode des différences finies en coordonnées cartésiennes oxz , le domaine continu (Ω) est remplacé par un réseau de mailles rectangulaires irrégulières, figure 9.

Le découpage est tel que σ , ϵ , μ sont constants sur chaque rectangle élémentaire, de plus, le champ magnétique H_y est continu à l'interface de chacun des éléments et varie linéairement d'une maille à l'autre.

En définitive le champ inconnu H_y n'est connu qu'en un nombre fini de points ou noeuds du maillage.

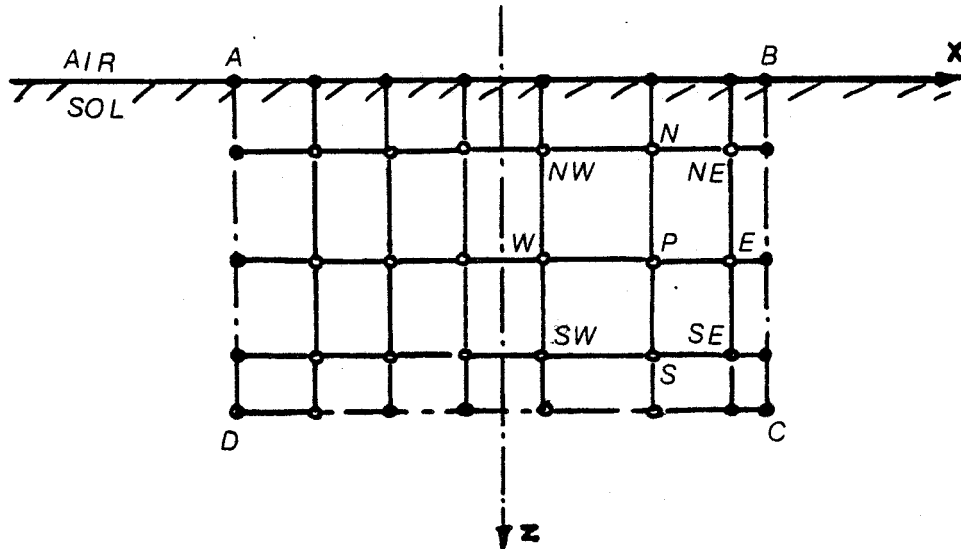


Figure 9

La solution approchée tend vers la solution exacte quand, à la limite, la taille des mailles élémentaires tend vers zéro.

Nous allons établir l'approximation aux différences finies de la fonctionnelle donnée par la relation (II). Considérons le maillage de la figure 9 et plus particulièrement les quatre mailles partageant le noeud P (figure 10)

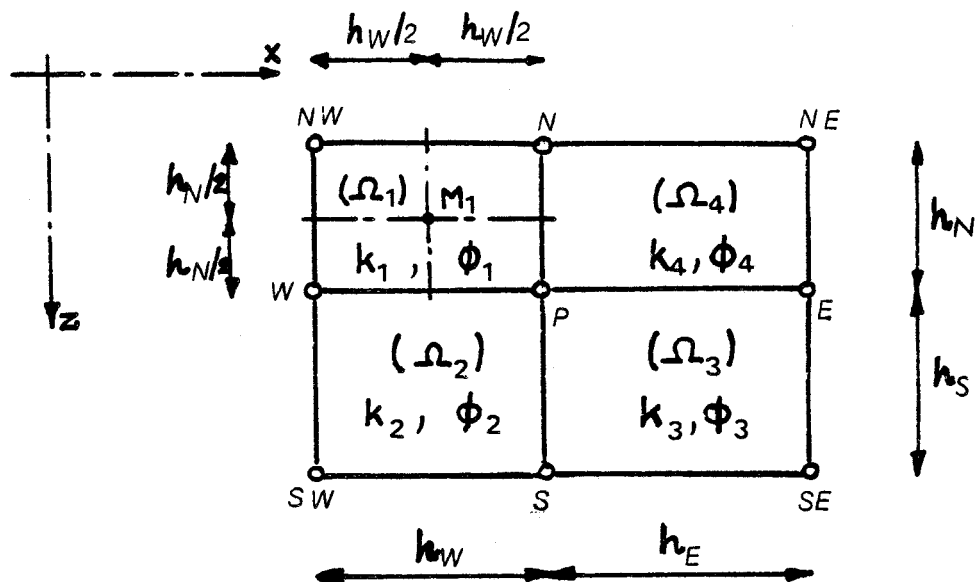


Figure 10

La fonctionnelle (14) s'exprime de la manière suivante sur la maille (NW.N.P.W)

$$F_1(H_y) = \frac{1}{2} \iint_{(\Omega_1)} \left\{ k_1 \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_1 H_y^2 \right\} d\Omega_1$$

Faisons les approximations pour les expressions des différentes intégrales de dérivées partielles de la fonction inconnue H_y .

$$\iint_{(\Omega_1)} k_1 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 d\Omega_1 \text{ par } k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(H_N - H_{NW})^2 + (H_P - H_W)^2}{h_W^2} \right] h_N h_W \quad (18.1)$$

$$\iint_{(\Omega_1)} k_1 \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 d\Omega_1 \text{ par } k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(H_W - H_{NW})^2 + (H_P - H_N)^2}{h_N^2} \right] h_N h_W \quad (18.2)$$

$$\iint_{(\Omega_1)} \phi_1 H_y^2 d\Omega_1 \text{ par } \phi_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot (H_{NW}^2 + H_N^2 + H_P^2 + H_W^2) h_N h_W \quad (18.3)$$

En se basant sur l'approximation proposée par FORSYTHE {3}, la valeur approchée de $H_y(x,y)$ est affecté au centre M_1 du panneau (Ω_1) .

Faisons les mêmes approximations (18) pour les expressions de la fonctionnelle sur les 3 autres mailles ayant en commun le sommet P.

La fonctionnelle $F(H_y)$ est stationnaire au point p si la relation suivante est satisfaite :

$$\frac{\partial F(H_y)}{\partial H_p} = 0$$

En reportant les approximations définies par (18) dans la fonctionnelle (11) et en appliquant la relation ci-dessus, on montre que la valeur du champ au noeud P est reliée aux quatres valeurs H_N , H_E , H_S , H_W des noeuds voisins par la formule suivante :

$$\boxed{C_P H_P + C_L H_W + C_R H_E + C_T H_N + C_B H_S = 0} \quad (19)$$

$$\text{où} \quad C_L = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_W} (k_1 h_N + k_2 h_S) \quad (19.1)$$

$$C_R = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_E} (k_3 h_S + k_4 h_N) \quad (19.2)$$

$$C_T = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_N} (k_1 h_W + k_4 h_E) \quad (19.3)$$

$$C_B = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_S} (k_2 h_W + k_3 h_E) \quad (19.4)$$

$$C_P = - (C_L + C_R + C_T + C_B) + \frac{1}{4} (\phi_1 h_N h_W + \phi_2 h_S h_W \dots \\ \dots + \phi_3 h_E h_S + \phi_4 h_N h_E) \quad (19.5)$$

$$k_j = (\sigma_j + j\omega\epsilon_j)^{-1}, \quad \phi_j = j\omega\mu_j$$

L'expression (19) est analogue à celle obtenue par l'approximation "5-points" en différences finies du Laplacien Δ . Ici cette approximation est pondérée par les coefficients C_L , C_R , C_T , C_B , C_P qui ont la dimension d'une résistivité fonction de σ_j , ϵ_j , μ_j et de la géométrie des mailles entourant P.

Ecrivons (19) autrement :

$$C_L (H_W - H_P) + C_R (H_E - H_P) + C_T (H_N - H_P) + C_B (H_S - H_P) + C'_P H_P = 0 \quad (20)$$

$$\text{où } C'_P = \frac{1}{4} (\phi_1 h_N h_W + \phi_2 h_S h_W + \phi_3 h_S h_E + \phi_4 h_E h_N)$$

Alors que le terme $C'_p H_p$, a la dimension d'un potentiel et représente en quelque sorte le potentiel par rapport à un potentiel nul de référence. Ce potentiel moyen, dû à une source d'origine externe, est pondéré par le produit $\phi_j \cdot (\overline{\Omega_j})$, $(\overline{\Omega_j})$ avec $j = 1,2,3,4$ est la surface des quatre panneaux entourant P.

De même les quatre premiers termes de l'expression précédente représentent le potentiel aux points M, L, Q, R.

Dans ces conditions, la relation (20) exprime l'équilibre (figure 11) du potentiel au point P, est la signification physique de la "stationnarisation" de la fonctionnelle.

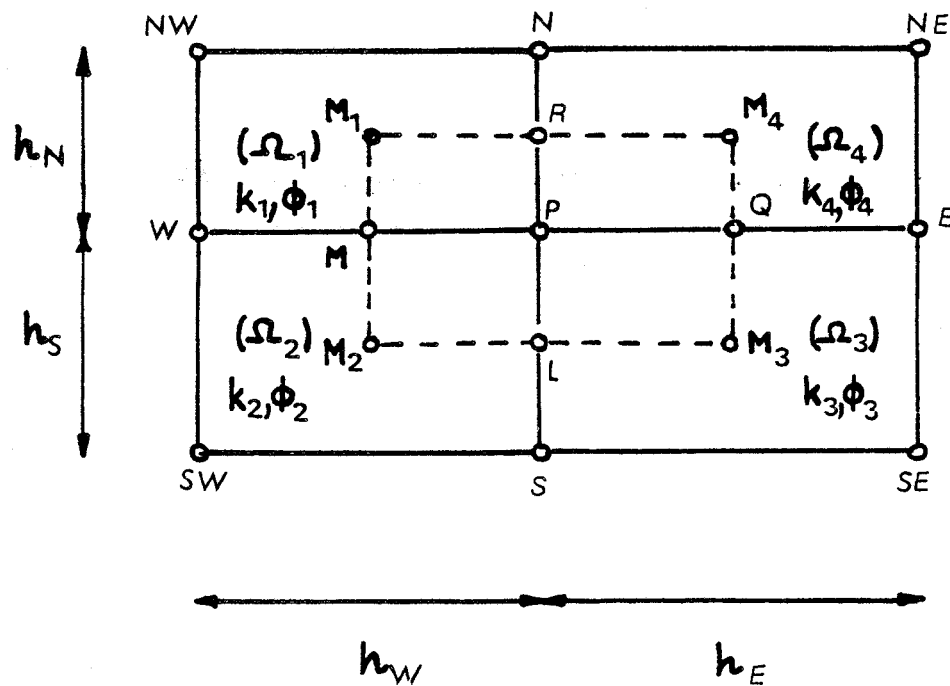


Figure 11

Nous allons maintenant traiter dans le cas le plus général (modèle 3) le cas particulier des points appartenant au contour(ABCD) du domaine. Nous traiterons plus particulièrement le cas des points appartenant aux segments AD,DC et CB ainsi que la contribution des sommets C,D.

Considérons donc la figure 12 :

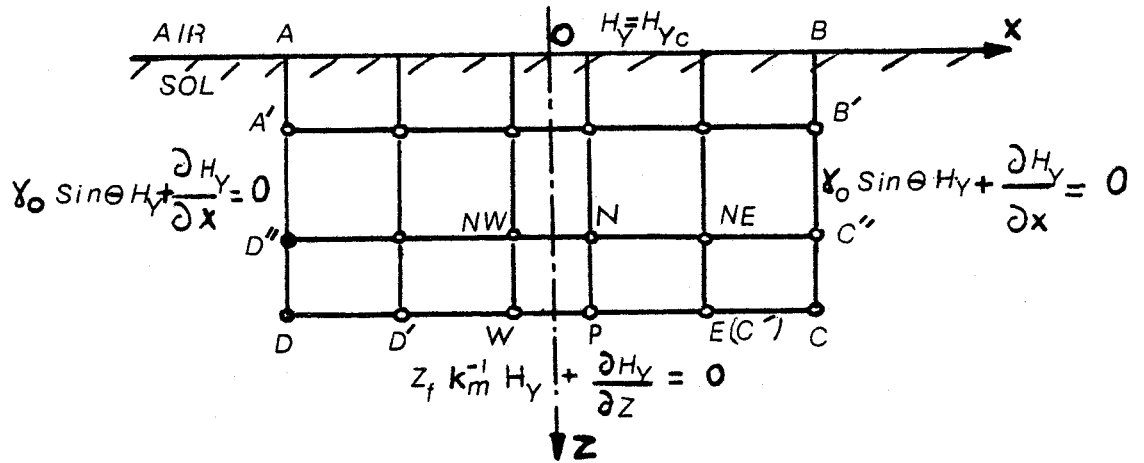


Figure 12

Supposons dans un premier temps que les noeuds considérés appartiennent au segment(D'C') (figure 13).

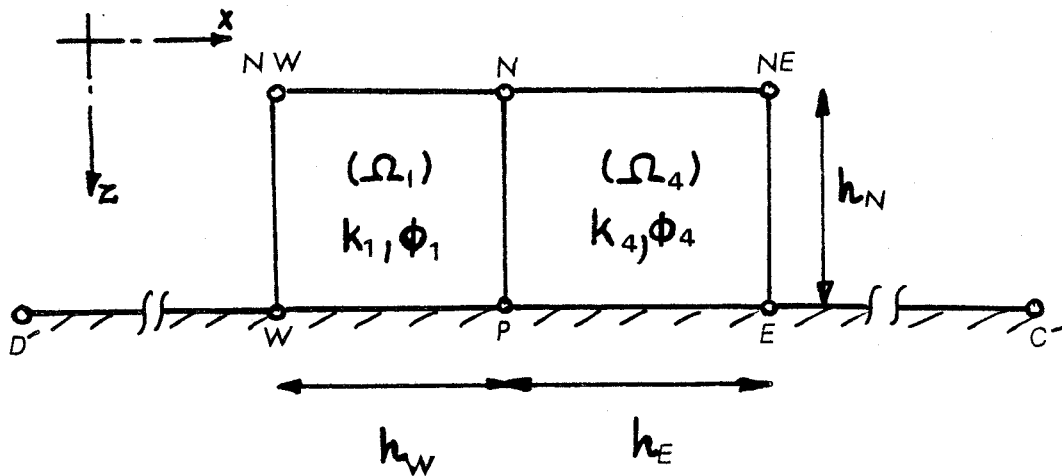


Figure 13

Par exemple sur le panneau (N,P,W,NW), si l'approximation de l'intégrale de surface est analogue à celle des formules (18), l'intégrale curviligne $\oint_{\overline{WP}} Z_f H_y^2 dl$ peut être approchée par $\frac{1}{2} Z_f (H_p^2 + H_W^2) \cdot hw$.
 d'où l'annulation de $\frac{\partial F}{\partial H_p} (H_y)$ se traduit par l'expression suivante

$$\sum_{\ell} \frac{\partial F_{\ell}}{\partial H_p} (H_y) = 0 ; \ell = 1,2 \quad ; \text{s'écrit}$$

$$C_P H_P + C_L H_W + C_R H_E + C_T H_N = 0 \tag{21}$$

où

$$C_L = - \frac{1}{2} \frac{1}{h_W} k_1 h_N \tag{21.1}$$

$$C_R = - \frac{1}{2} \frac{1}{h_E} k_4 h_N \tag{21.2}$$

$$C_T = - \frac{1}{2} \frac{1}{h_N} (k_1 h_W + k_4 h_E) \tag{21.3}$$

$$C_P = -(C_L + C_R + C_T) + \frac{1}{4} (\phi_1 h_N h_W + \phi_4 h_E h_N) + \frac{1}{2} Z_f (h_E + h_W) \tag{21.4}$$

L'interprétation physique est analogue à celle du modèle précédent ; mais, ici le potentiel du point P a deux origines, celui dû à une source externe (le deuxième terme de (21.4)) et l'autre dû à l'influence des couches inférieures à D'C' (le troisième terme de (21.4)).

Considérons maintenant les noeuds appartenant au segment(B'C'') (figure 14) ; compte tenu de l'étude précédente, nous avons :

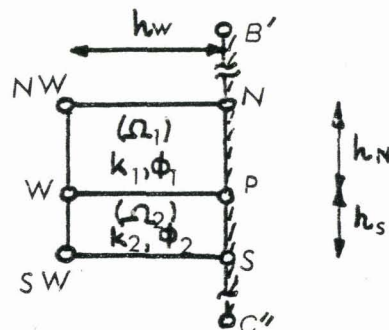


Figure 14

$$C_P H_P + C_L H_W + C_T H_N + C_B H_S = 0 \quad (22)$$

où

$$C_L = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_W} (k_1 h_N + k_2 h_S) \quad (22.1)$$

$$C_T = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_N} k_1 h_W \quad (22.2)$$

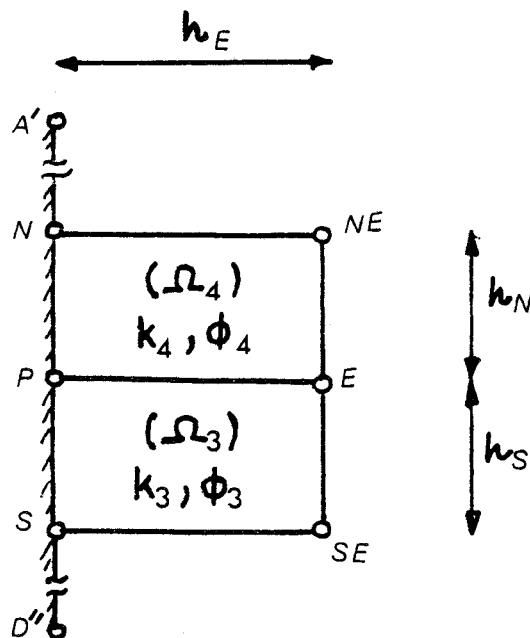
$$C_B = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_S} k_2 h_W \quad (22.3)$$

$$C_P = - (C_L + C_T + C_B) + \frac{1}{4} (\phi_1 h_N h_W + \phi_2 h_S h_W) \quad (22.4)$$

$$- \gamma_0 \sin \theta h_W C_L$$

De même si on considère le segment (A'D'') (figure 15).

Figure 15



$$C_P H_P + C_R H_E + C_T H_N + C_B H_S = 0$$

(23)

où

$$C_R = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_E} (k_4 h_N + k_3 h_S)$$

(23.1)

$$C_T = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_N} k_4 h_E$$

(23.2)

$$C_B = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_S} k_3 h_E$$

(23.3)

$$C_P = -(C_R + C_T + C_B) + \frac{1}{4} (\phi_3 h_S h_E + \phi_4 h_N h_E) \dots$$

(23.4)

$$+ \gamma_0 \sin \theta h_E C_R$$

Etudions maintenant successivement le cas des sommets C et D :

(figure 16)

a) P ≡ C

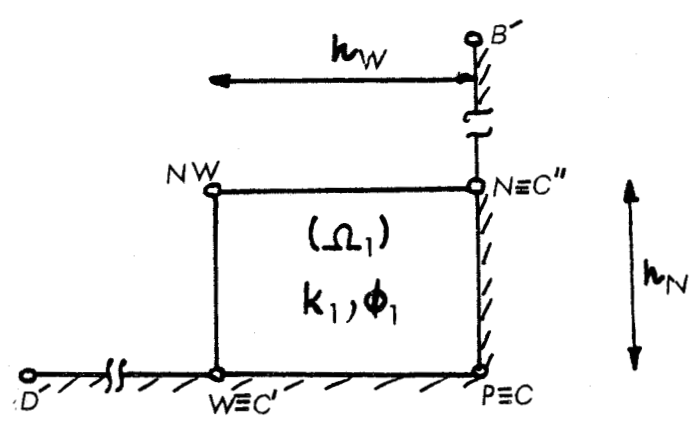


Figure 16

Rappelons les conditions aux limites à satisfaire sur :

- * \overline{WP} : $Z_f k_m^{-1} H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$
- * \overline{NP} : $\gamma_0 \sin \theta H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0$

qui donnent :

$$C_P H_P + C_L H_W + C_T H_N = 0 \quad (24)$$

où

$$C_L = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_W} k_1 h_N \quad (24.1)$$

$$C_T = -\frac{1}{2} \frac{1}{h_N} k_1 h_W \quad (24.2)$$

$$C_P = -(C_L + C_T) + \frac{1}{4} \phi_1 h_N h_W + h_W \left(\frac{Z_f}{2} - \gamma_0 \sin \theta C_L \right) \quad (24.3)$$

b) P ≡ D (Figure 17)

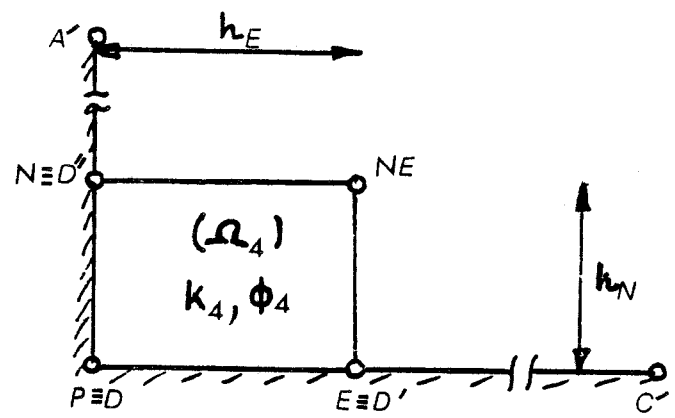


Figure 17

$$C_P H_P + C_R H_E + C_T H_N = 0 \quad (25)$$

où

$$C_R = - \frac{1}{2} \frac{1}{h_E} k_4 h_N \quad (25.1)$$

$$C_T = - \frac{1}{2} \frac{1}{h_N} k_4 h_E \quad (25.2)$$

$$C_P = - (C_R + C_T) + \frac{1}{4} \phi_4 h_N h_E + h_E \left(\frac{Z_f}{2} + \gamma_0 \sin \theta C_R \right) \quad (25.3)$$

En appliquant ce processus de stationnarisation à tous les noeuds inconnus du domaine, nous avons transformé le système d'équations intégrales en un système linéaire d'équations nodales régissant le comportement discret de chaque valeur nodale H_{y_j} .

I.4. SYSTEME D'EQUATIONS NODALES LINEAIRES :

Nous illustrons le système linéaire du modèle 3 par l'exemple ci-dessous (figure 18)

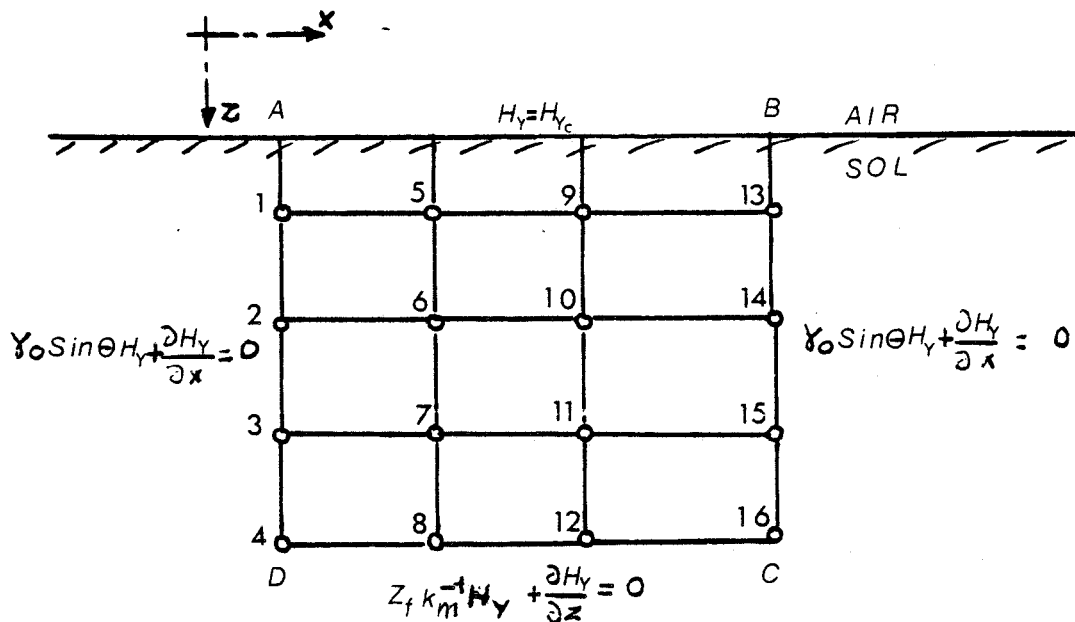


Figure 18

1.4.1. Forme matricielle :

Le système matriciel du modèle considéré se met sous la forme suivante :

$$\{A\} \{H\} = \{B\} \quad (26)$$

où

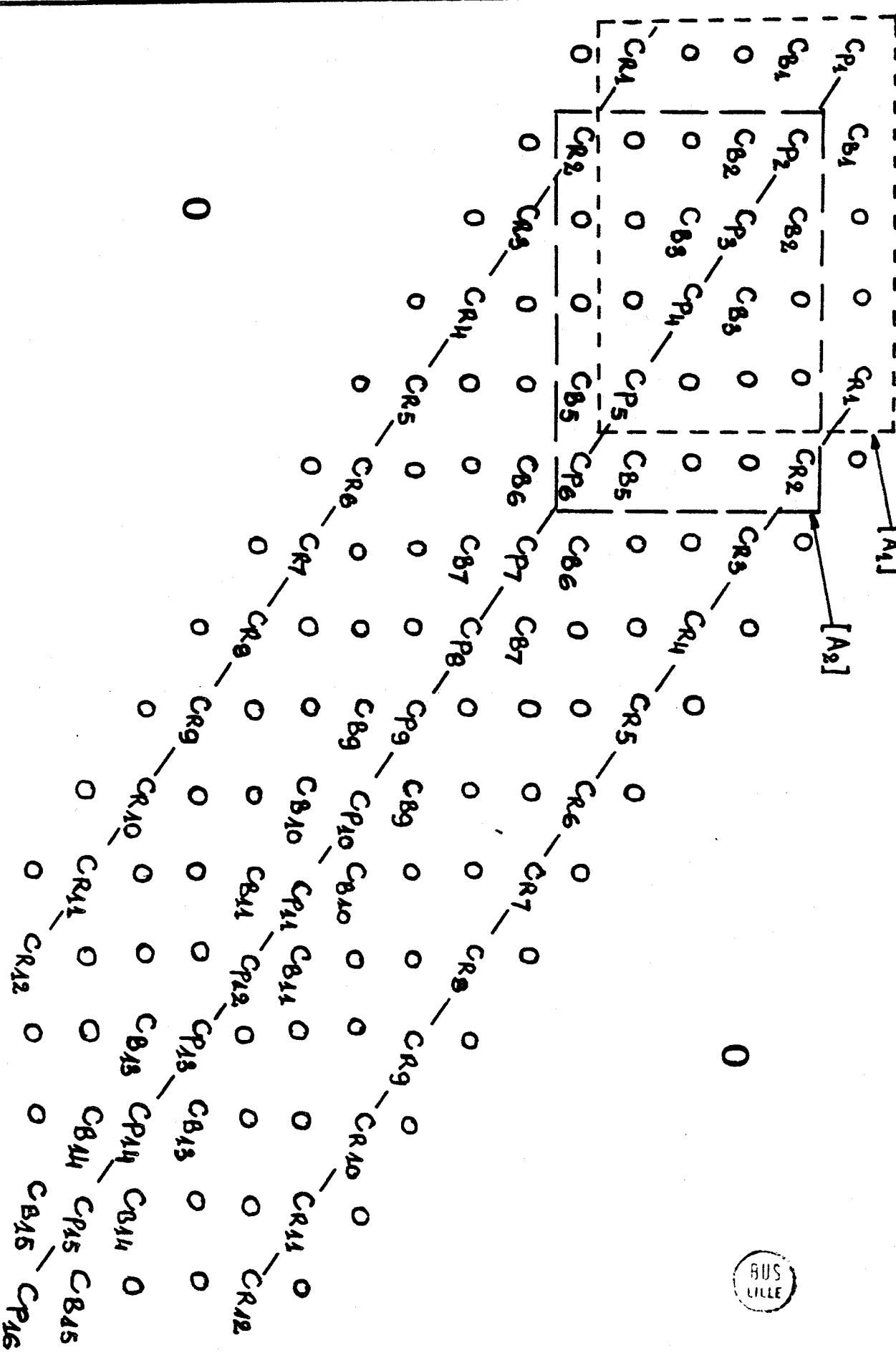
\{A\} matrice carrée de résistivité (27), ses éléments sont C_{P_j} ; C_{L_j} ; C_{R_j} ; C_{T_j} ; C_{B_j} ($j = 1, \dots, 16$).

\{H\} Vecteur colonne des inconnus H_j ($j = 1, \dots, 16$) (28)

\{B\} Vecteur second membre (29)

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \\ H_9 \\ H_{10} \\ H_{11} \\ H_{12} \\ H_{13} \\ H_{14} \\ H_{15} \\ H_{16} \end{bmatrix} = [H] \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} -C_{T_1} H_{Yc} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -C_{T_5} H_{Yc} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -C_{T_9} H_{Yc} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -C_{T_{13}} H_{Yc} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [B] \quad (29)$$



(27)

En général, le domaine comporte NZ couches horizontales, NX blocs verticaux.

La matrice A en général d'ordre $N = NZ(NX + 1)$ et possède les propriétés suivantes :

1) carrée, symétrique, relativement creuse, les termes non nuls se regroupent en bande de part et d'autre de la diagonale principale, avec la numérotation suivant les colonnes, la largeur de bande vaut $2NZ + 1$.

2) Élément diagonal est strictement dominant :

$$|a_{i,i}| > \sum_j |a_{i,j}|$$

3) Elle est irréductible, autrement dit, on ne peut pas trouver une matrice de permutation $\{P\}$:

$$\{P\} \{A\} \{P\}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Les sous matrices A_{11} , A_{22} sont carrées.

En théorie des graphes (voir GASTINEL {21}), l'irréductibilité de $\{A\}$ découle de la propriété de forte connexion du domaine, qui se traduit, en pratique, par le fait qu'on ne peut pas réduire l'ordre du système matriciel lors de la résolution numérique (voir VARGA {22}).

4) La représentation (27) de $\{A\}$ a, évidemment la propriété "A" de Young, MUFTI {14}, GASTINEL {21}. Rappelons qu'une matrice $\{R\}$ a la propriété "A" de Young si, après plusieurs permutations simultanées des lignes et des colonnes correspondantes, la matrice $\{R\}$ peut être transformée sous forme de matrice de blocs tridiagonaux.

VARGA {22} a montré que si A muni de deux propriétés 2) et 3) elle sera non singulière.

Maintenant, passons donc à l'étape de résolution sur l'ordinateur, de (26).

I.4.2. Méthode de résolution :

Compte tenu des propriétés que nous venons d'énoncer, nous avons choisi une méthode directe de résolution pour les deux raisons suivantes :

- 1) La matrice est extrêmement stable, VARGA {22} ; vu la deuxième propriété. Les erreurs provenant des erreurs arrondies sont réduites ; le pivotage n'est pas nécessaire.
- 2) La symétrie de bande par rapport à la diagonale principale, permet de stocker la moitié des éléments en mémoire du calculateur d'où un gain de places mémoires. La méthode directe en outre plus rapide, en temps de calcul, que la méthode itérative {23}.

Revenons au système (26), appliquant la méthode d'élimination de Gauss, on remarque que si on triangularise {A} de forme (27) H_1 s'élimine de l'équation.

$$C_{P_1} H_1 + C_{B_1} H_2 + C_{R_1} H_5 = B_1$$

En reportant la relation suivante dans les équations de (26) on ne modifie que les éléments de la sous matrice $\{A_1\}$, d'ordre $NZ+1$

$$\{A_1\} = \begin{bmatrix} C_{P_1} & C_{B_1} & 0 & 0 & C_{R_1} \\ C_{B_1} & C_{P_2} & C_{B_2} & 0 & 0 \\ 0 & C_{B_2} & C_{P_3} & C_{B_3} & 0 \\ 0 & 0 & C_{B_3} & C_{P_4} & 0 \\ C_{R_1} & 0 & 0 & 0 & C_{P_5} \end{bmatrix}$$

Puis l'élimination de la seconde inconnue H_2 , ne fait modifier que les éléments de la sous matrice $\{A_2\}$ dont une partie des éléments qui, entourés par les pointillés, se sont déjà modifiés par la première élimination. $\{A_2\}$ étant toujours symétrique d'ordre $NZ + 1$

$$\{A_2\} = \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc|c} \text{\scriptsize (4)} & & & & \\ \hline C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{R2} \\ \hline \text{\scriptsize (4)} & & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 \\ \hline \text{\scriptsize (4)} & & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 \\ \hline \text{\scriptsize (4)} & & & & \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{B5} \\ \hline C_{R2} & 0 & 0 & C_{B5} & C_{P6} \end{array} \end{bmatrix}$$

Aux étapes suivantes, on répète le même processus. Le mode de stockage en machine s'en déduit :

- on ne conservera en mémoire centrale qu'une moitié de la sous matrice d'ordre $NZ + 1$. Cette place mémoire est autant réduite que NZ est faible ; (ici NZ choisi égal à 4) ; nous avons choisi expressément le système de numérotation suivant les colonnes pour que la sous matrice soit d'ordre $Nz + 1$. En effet le nombre de couches est généralement inférieur aux nombres de mailles dans la direction ox .

- A chaque étape d'élimination, on stockera en mémoire périphérique (disque, bande,...) la première ligne de chaque sous matrice. En répétant $\{NX(NZ - 1) - 1\}$ fois le processus, la place totale réservée $NZ \cdot \{N - (NZ + 1)\}$ mots complexes, N ordre du système.

La dernière sous matrice est associée à un système linéaire qu'on résoud en mémoire centrale par l'élimination de Gauss.

- Dans l'étape de substitution montante, on relit chaque ligne stockée en mémoires périphériques, puis on calculera les valeurs de H_j correspondantes.

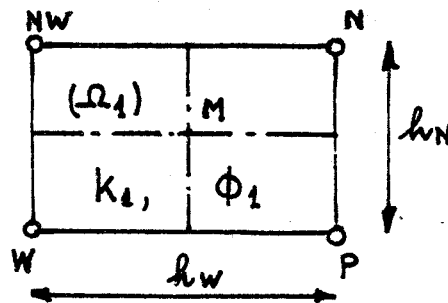
Ces opérations s'appliquent de la même façon au second membre.

Sur l'ordinateur de taille moyenne, PDP 11/23,... avec ce mode opératoire, on peut tenir compte de quelques milliers de noeuds. Par contre le temps d'occupation de la machine par les écritures et lectures en mémoires périphériques s'avère prohibitifs.

Il est évident que la numérotation des noeuds joue un rôle prépondérant dans l'économie du coût de calcul. Plusieurs spécialistes en éléments finis ont mis au point des méthodes automatiques de numérotation optimale, celle-ci consiste à réduire, si possible, la largeur de bande de la matrice. Dans certain cas optimal, en éléments finis, on arrive à créer seulement de 10 à 15 % d'éléments non nuls, SILVESTER [24].

Le champ électrique sera calculé au centre de maille à partir des valeurs nodales du champ magnétique vu la difficulté d'affectation de la quantité $(\sigma + j\omega\epsilon)$ à un noeud.

Le champ électrique se calcule, par exemple, au centre du panneau (N.P.W.NW) par :



$$\begin{cases} E_x(M) = -\frac{1}{(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(H_P + H_W) - (H_N + H_{NW})}{h_n} \right] \\ E_z(M) = \frac{1}{(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(H_P + H_N) - (H_W + H_{NW})}{h_w} \right] \end{cases}$$

Le programme informatique est réalisé en FORTRAN IV, exécutable en complexe simple précision sur l'ordinateur PDP 11/23 de notre laboratoire.

I.5. CONSIDERATIONS PRATIQUES

Tout problème de traitement numérique doit obéir à certains impératifs de précision qui est autant meilleure que son erreur totale est négligeable par rapport au problème "exact". Notre erreur totale ici est composée de deux types d'erreurs, une d'ordre numérique (précision disponible par la machine, erreur arrondie due au système matriciel,...) l'autre erreur est liée à la méthode numérique choisie (l'approximation d'un problème continu par un problème discret en différences finies), ce deuxième type d'erreur, bien sûr, peut être réduite par d'autre type d'approximation d'ordre plus élevé en différences finies. En pratique, l'étude de convergence du problème, se fait par affinement du réseau de mailles, cependant ceci entraîne aussi une erreur numérique croissante. Donc, il faut calculer au plus juste le nombre de mailles, par un découpage optimal et si besoin est, faire passer le programme sur l'ordinateur possédant la double précision automatique.

I.5.1. Découpage optimal :

On construit le plus souvent un maillage irrégulier en sondage par résistivité. Ce maillage suit certaines "règles" empiriques et doit garantir la propriété de bilinéarité du champ magnétique d'une maille à l'autre. Ci-dessous, nous décrivons en détail quelques règles de découpage optimal.

1) Dans la direction oz :

On peut montrer que dans un terrain stratifié donné, le pas de maille Δz est proportionnel à la racine carrée de résistivité de ce terrain et inversement proportionnel à la résistivité maximum des terrains supérieurs.

D'une manière équivalente, on essaye d'ajuster la variation exponentielle décroissante du champ magnétique par ses variations linéaires par morceau Δz . Comme le champ magnétique décroît rapidement à partir de l'interface air-sol ; Les épaisseurs Δz des premières couches devraient être choisie prudemment faibles.

2) Dans la direction ox :

D'après MUFTI {14,b}, un bon découpage horizontal doit assurer à Δx une variation croissante logarithmiquement à partir de l'origine.

En présence d'une anomalie, le champ magnétique résultant varie, de toute façon, rapidement aux abords de l'hétérogénéité, dans cette zone le maillage doit être serré tout en respectant les critères de découpage optimal.

Une autre règle cette fois tirée des mesures sur terrain réel proposée, MUFTI {14,b,c} : "La taille des mailles est en progression géométrique de raison $a = \sqrt{2}$ en s'éloignant de l'hétérogénéité". Cette proposition est un compromis entre deux considérations expérimentales suivantes :

- i) Dans la méthode de mesures de résistivité apparente de Schlumberger, on a l'habitude d'écarter successivement les deux électrodes d'injection de courant situées en surface d'une quantité en progression géométrique de raison légèrement inférieure à $a_1 = \sqrt{2}$, sauf dans des cas de mesures où le bruit est très important. (figure 19).
Un échantillonnage de mesures plus serré sur un terrain à faible bruit, (cas de la géophysique), ne donne pas des informations supplémentaires, jugées utiles (Kunetz {25})

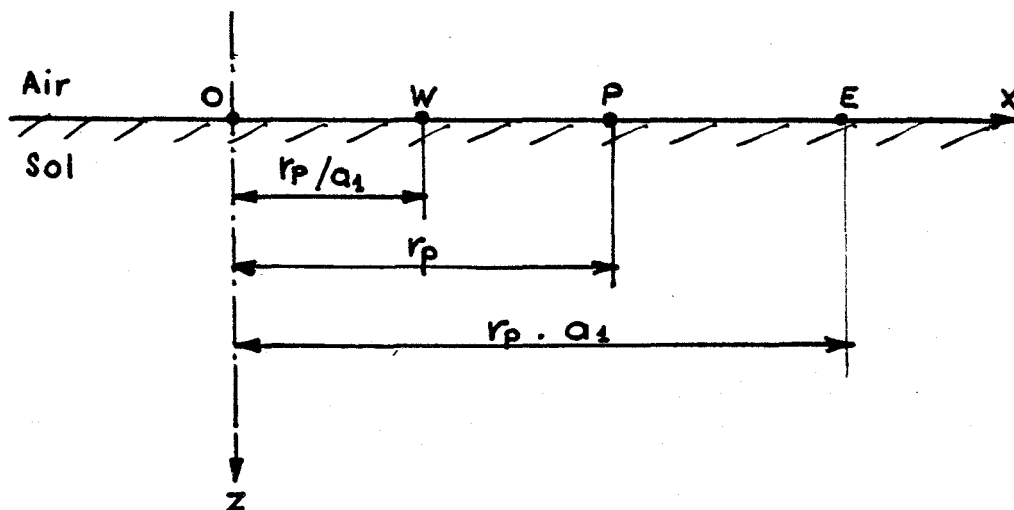


Figure 19

ii) Si l'on cherche à identifier une couche géologique dans un milieu stratifié, ceci n'est possible que si cette couche se trouve dans un contexte précis si, d'après FLATHE (26):

- a) le rapport de résistivités entre cette couche et les couches voisines $\leq 1/3$.
- b) son épaisseur doit être au moins égale à l'épaisseur totale des couches supérieures.

La dernière proposition (b) implique que Δz doit croître en progression géométrique de raison $a_2 = 2$ à partir de l'interface air-sol.

Bien entendu, toutes ces informations, sont très utiles en découpage initial, il nous reste à étudier la convergence de la méthode de discrétisation.

I.5.2. Convergence de la méthode :

Eventuellement, lorsque le domaine est hétérogène, (σ , ϵ , μ sont fonctions des coordonnées), l'étude de convergence ne peut que se faire pratiquement sur l'ordinateur. Théoriquement, l'ordre d'approximation de l'équation

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = 0 \quad \text{sur } (\bar{\Omega}) \text{ n'a pas encore été mis en évidence.}$$

Nous n'avons pu déterminer exactement l'ordre d'approximation que dans le cas du demi milieu homogène (annexe 3) ; il est $O(h_{\max})$ où h_{\max} est le plus grand pas de maille.

Un deuxième type d'erreur provient du fait que le domaine a été "artificiellement" limité par des conditions aux limites analytiques à distances finies de l'anomalie alors que ces conditions s'établissent sur l'hypothèse d'un champ magnétique perturbé (secondaire) négligeable, autrement dit, elles seraient "vraies" à distances infinies de l'anomalie. Pour étudier la convergence liée à cette erreur, il suffit de simuler plusieurs modèles d'extension variable du contour (ABCD).

En pratique, si la structure était présentée par la figure 20 où le milieu encaissant est homogène et en basse fréquence on choisit empiriquement :

$$l_x : \in \{1 \text{ à } 2,5 \delta_2\} \text{ pour les trois modèles 1,2,3.}$$

$$l_{z_1} : \in \{4 \text{ à } 5 \delta_2\} \text{ pour le modèle 1}$$

$$l_{z_2} : \in \{0,6 \text{ à } 2,5 \delta_2\} \text{ pour le modèle 2,3.}$$

où δ_2 , la profondeur de pénétration dans le milieu 2

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \sigma_2}}$$

COGGON [16], WAESLYNCK [11] proposent à peu près les mêmes fourchettes de valeurs de l_x et l_{z_1} .

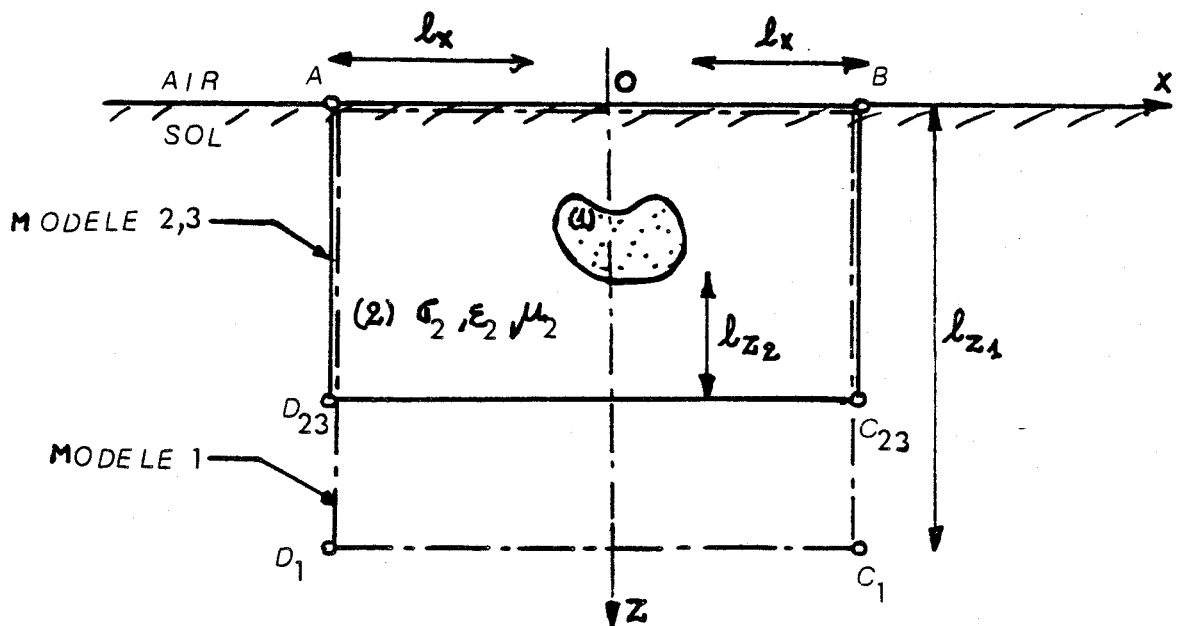


Figure 20

I.5.3. Exemple numérique :

La structure du sous-sol représentée par la figure 21 :

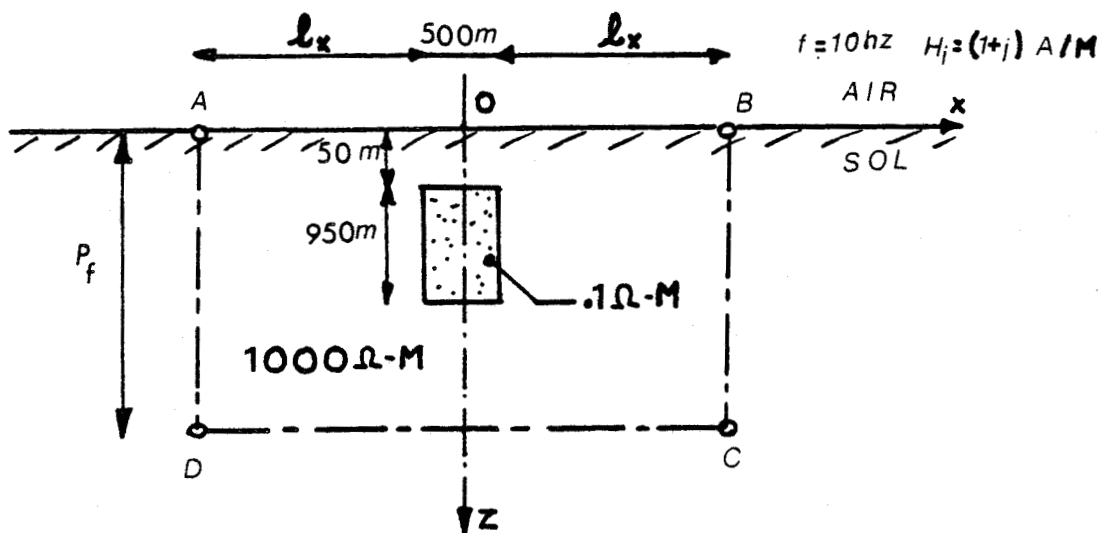


figure 21

elle comporte un filon conducteur dont la distance tête d'anomalie - interface air-sol est 50 m, enterré dans un demi-milieu homogène.

En performance, l'étude comparative des trois modèles s'avère très intéressante.

* modèle 1 : ($P_f = 24\ 100\text{ m}$, $l_x = 5\ 100\text{ m}$).

Le modèle discrétisé composé de 680 mailles dont 527 noeuds inconnus, réparti comme suit :

- selon z : 20 couches d'épaisseur (en mètre) 0.5, 19.5, 30, 50, 75, 100, 125, 150, 200, 250, 350, 500, 750, 1000, 1500, 2000, 3000, 4000, 5000, 5000.

- selon x : 34 mailles symétriques par rapport à l'origine 0 dont 17 mailles à partir d'origine de largeur 50, 100, 100, 100, 125, 125, 350, 350, 450, 450, 450, 450, 450, 450, 450, 450, 450. (m) .

$$\text{L'indice d'anomalie } I, I = \frac{|E_{x\text{tab}}| - |E_{x\text{ca}}|}{|E_{x\text{tab}}|} * 100$$

où $|E_{x\text{tab}}|$ module du champ électrique E_x du milieu homogène, $|E_{x\text{ca}}|$ celui du champ E_x en présence d'anomalie, à 25 cm de l'interface air-sol, est tracé en continu en fonction de x sur la figure 22.

La vérification du résultat s'est effectuée, en éléments finis par BENANI (8), chercheur de notre laboratoire. Son domaine discrétisé a la même répartition de mailles selon x et z ; l'approximation étant polynomiale linéaire du premier ordre sur chaque triangle. Sur la même figure 22, l'indice d'anomalie (en pointillé) en éléments finis s'est tracé. Le maillage moins serré en éléments finis, au niveau de la localisation d'anomalie serait l'origine de la légère différence entre les deux courbes.

* modèle 2 : ($P_f = 5\ 100\ \text{m}$, $l_x = 5\ 100\ \text{m}$)

On a réduit le domaine selon z à 15 mailles du domaine 1, ainsi le domaine composé de 510 mailles dort 495 noeuds inconnus.

L'indice d'anomalie d'une telle configuration s'est représenté par des 0 sur la figure 22. La parfaite concordance des résultats s'est observée. Avec deux positions différentes de la frontière \overline{CD} $P_f = 7\ 100\ \text{m}$ (16 mailles/oz) et $P_f = 3\ 600\ \text{m}$ (14 mailles/oz) ; on a toujours le même indice d'anomalie.

* modèle 3 : ($P_f = 3\ 600\ \text{m}$, $l_x = 5\ 100\ \text{m}$)

Le domaine, étant discrétisé en 14 mailles selon oz et 34 selon ox ; compose de 476 mailles dont 490 noeuds inconnus.

En essai d'extension des deux frontières verticales, $l_x = 2\ 850\ \text{m}$ (24 mailles/ox), le domaine se compose de 336 mailles, 350 noeuds inconnus. Le résultat se concorde toujours avec ceux déjà obtenus.

Du modèle 1 au modèle 3, le domaine d'étude se réduit considérablement, sans changer la performance des résultats obtenus, ceci s'illustre par la figure 23.

MODE 1H

ETUDE COMPARATIVE DES MODELES

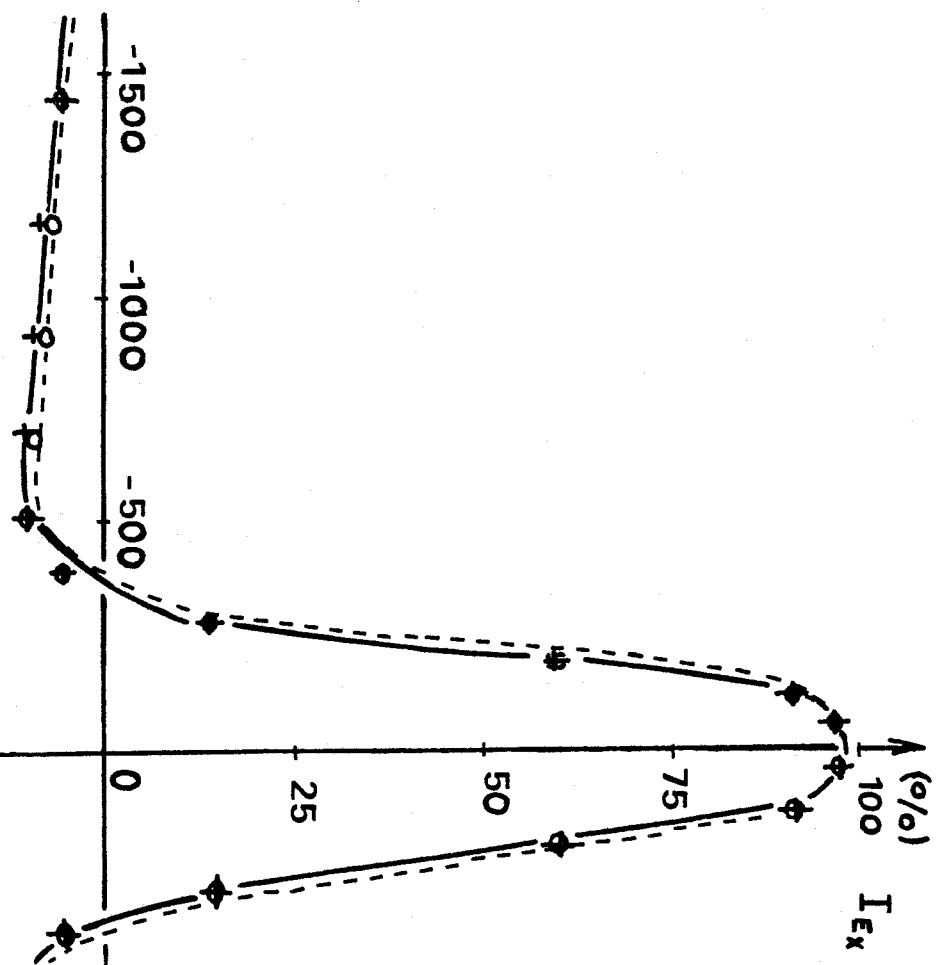
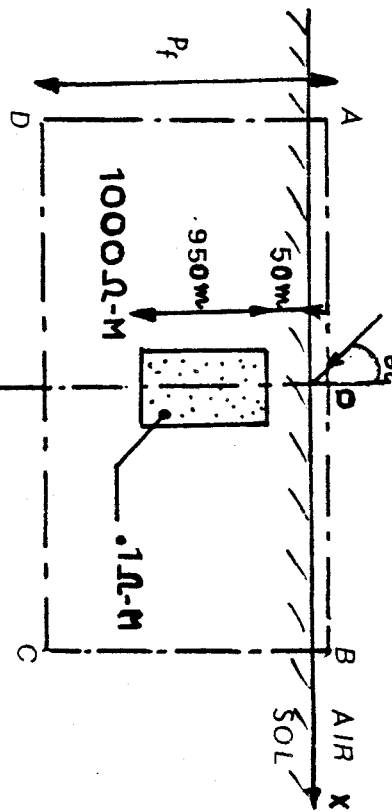


FIGURE 22

SOLUTION NUMERIQUE

- MODELE 1 (DIFFERENCES FINIES - NGUYEN)
 - - - - MODELE 1 (ELEMENTS FINIS - BENANI)
 - ○ ○ MODELE 2
 - + + + MODELE 3
- (DIFFERENCES FINIES - NGUYEN)



$\theta_1 = 0^\circ$
 $f = 10 \text{ hz}$
 $H_1 = (1+i) A/M$



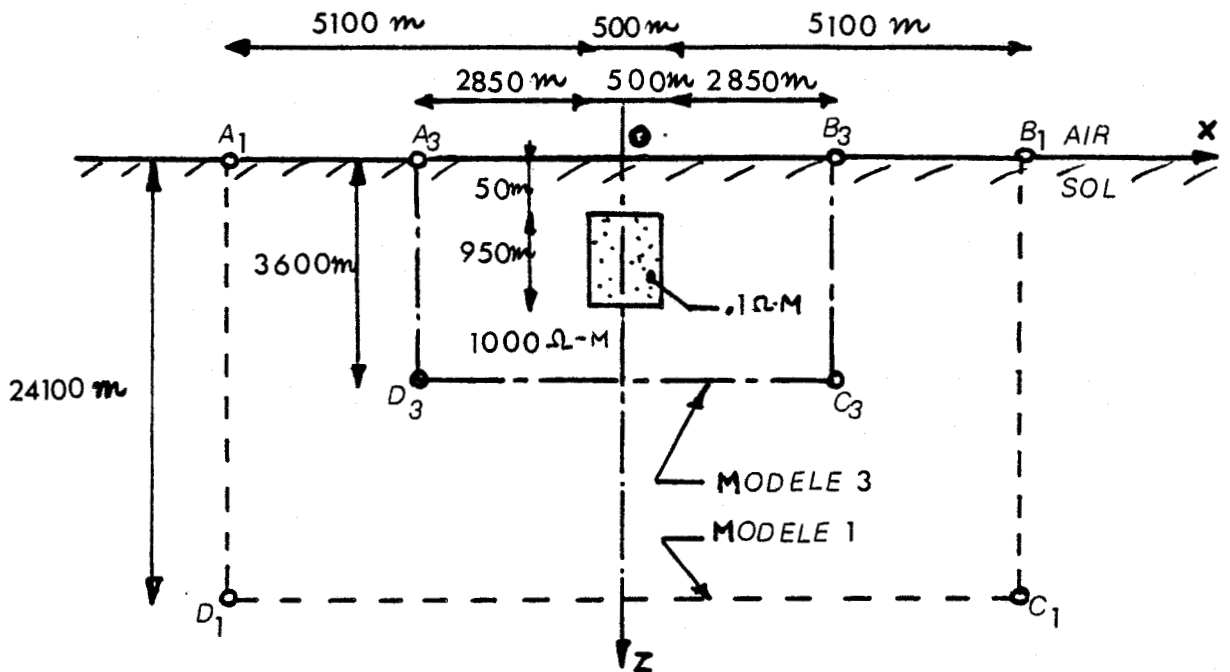


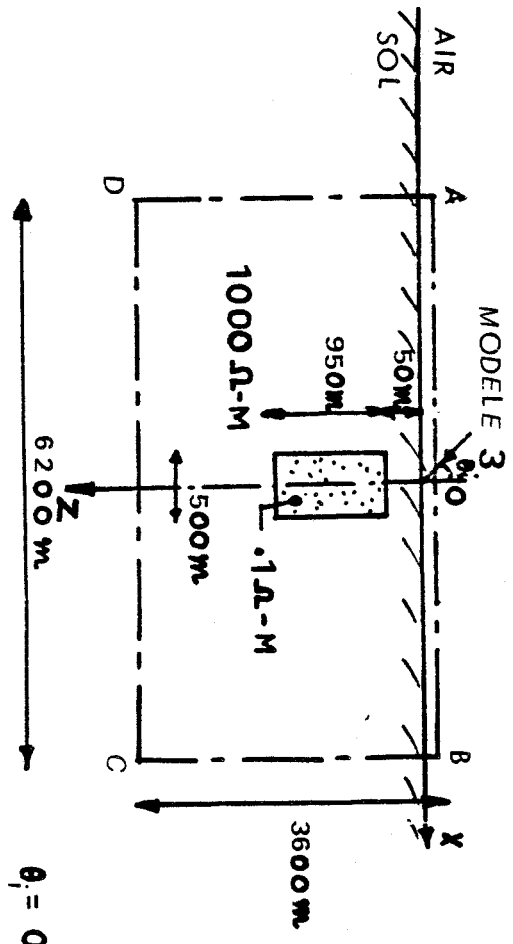
Figure 23

En dernier lieu, l'étude de convergence du pas de maille s'aborde par l'affinage du réseau de configuration $A_3 B_3 C_3 D_3$. Pour cela, nous l'avons choisi, selon z : 15 mailles d'épaisseur 0.5, 19.5, 30, 50, 75, 100, 125, 125, 150, 150, 175, 350, 500, 750, 1000, selon x : 38 mailles symétriques par rapport à l'origine 0, de largeur à partir de l'origine 0, 25, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 100, 150, 200, 250, 250, 300, 300, 300, 300, 300. Donc au total 570 mailles, 585 noeuds inconnus. Nous traçons, figure 24, l'indice d'anomalie, des deux maillages. Certes, l'extrême stabilité du problème numérique n'est pas étrangère à la propriété que possède la matrice.

Le test de fiabilité numérique du modèle 3, s'effectue dans le cas de propagation de l'onde dans un demi-milieu stratifié ; en effet, on peut y comparer la solution approchée avec la solution exacte (analytique) de WAIT [10]. En simple précision complexe sur PDP 11/23, l'écart relatif entre ces deux solutions est toujours majoré par 1‰ si l'ordre du système ≤ 1000 .



MODE TM
ETUDE DE CONVERGENCE



$\theta_1 = 0^\circ$
 $F = 10 \text{ Hz}$
 $H_1 = (i+j) A/m$

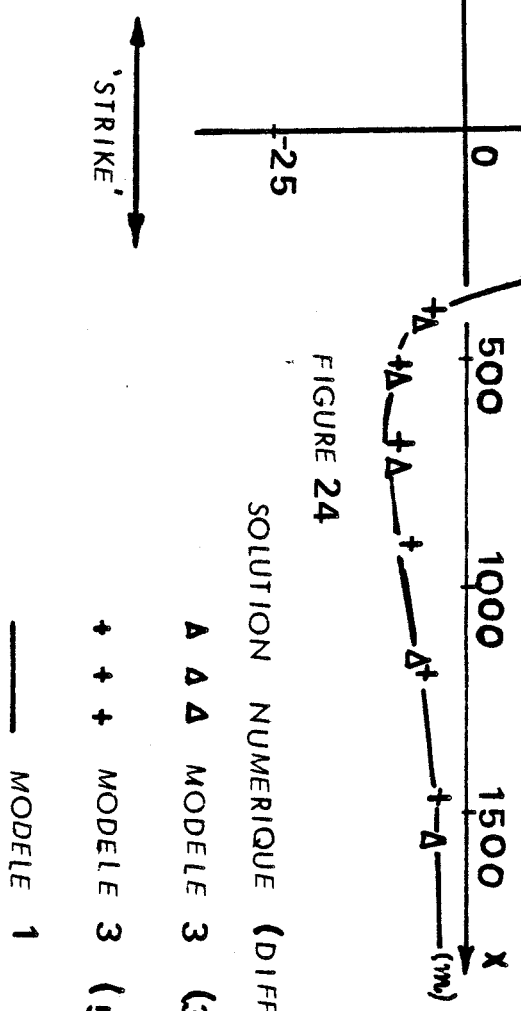


FIGURE 24

SOLUTION NUMERIQUE (DIFFERENCES FINIES)

- ▲ ▲ ▲ MODELE 3 (350 NOEUDS)
- + + + MODELE 3 (585 NOEUDS)
- MODELE 1

Toute formulation développée en mode TM s'applique également en mode TE par le principe de dualité, à une seule exception en mode TE, pour que $E_y = E_y$ constante sur la frontière AB, celle-ci doit se situer à une hauteur où l'influence du champ perturbé (secondaire) est négligée.

En domaine basse fréquence, la frontière AB se localise souvent à la base de l'ionosphère, WAESELYNCK {11}, PRIDMORE {9},... Par conséquent, le domaine d'étude en mode TE sera plus grand du fait de la présence de l'atmosphère d'où plus coûteux en traitement numérique.

Dans la gamme de fréquences élevées, si les autres conditions aux limites restent valables, celle à la surface air-sol ($H_y = \text{cte}$) cesse d'appliquer.

Pour étendre notre application aux problèmes plus généraux, à fréquences élevées, il est indispensable d'introduire une condition aux limites à la frontière \overline{AB} , qui tient compte du phénomène de diffusion de l'onde en interface.

A l'issue de cette nouvelle étude, avec le principe de dualité, le modèle numérique créé, serait plus performant tant en mode TM qu'en mode TE.

CHAPITRE II

=====

ETUDE DE LA REPONSE DE LA STRUCTURE A FREQUENCES ELEVEES

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons à la modélisation numérique des structures vérifiant les hypothèses citées au chapitre I .

Nous considérons une zone hétérogène illuminée par une onde électromagnétique plane de fréquence élevée dans la gamme correspondante à celle de l'onde radioélectrique. La prise en compte du phénomène de diffusion de l'onde à l'interface nous oblige, sans doute, de porter l'effort sur une nouvelle recherche de condition aux limites.

L'idée de réaliser un programme général nous est venue à la suite des travaux de SCHMUCKER { 27 } sur l'étude de condition aux limites à l'interface pour le mode E de propagation ; cette condition s'exprime mathématiquement par une équation intégrale de convolution et s'applique avec succès [WEAVER {28}, WEIDELT {29} , ROKITYANSKY {30} ...] en géophysique.

Notre objectif est de posséder, à l'issue de cette étude, un outil de simulation du phénomène de pénétration du champ électromagnétique dans les systèmes : ouverture, blindage, ... en compatibilité électromagnétique et éventuellement, comme modèle de simulation d'une induction EM des lignes hyperfréquences : ligne micro-ruban, guide d'onde ouverte.

Nous allons entamer l'étude en mode TM explicitement, celle en mode TE s'en déduit facilement en se basant sur le principe de dualité.

II.1. CONDITION AUX LIMITES A L'INTERFACE SUPERIEURE

L'étude de la condition aux limites à l'interface air-sol s'effectue analytiquement, c'est-à-dire dans l'espace continu des variables.

II.1.1. Formulation :

Dans l'air ($z \leq 0$) qui est un demi milieu homogène, le champ magnétique total $H_{y_T}(x, z)$ vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \gamma_0^2 \right] H_{y_T}(x, z) = 0 \quad (30)$$

où $\gamma_0^2 = j\omega\mu_0(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)$; $\text{Re}(\gamma_0) \geq 0$

et $H_{y_T}(x, z)$ s'exprime en fonction de sa transformée de Fourier $\mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z)$ par rapport à x

$$H_{y_T}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z) e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (31)$$

avec -

$$\mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{y_T}(x, z) e^{-j2\pi\lambda x} dx$$

d'où

$$\frac{\partial^2 H_{y_T}(x, z)}{\partial x^2} = -4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z) e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 H_{y_T}(x, z)}{\partial z^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z)}{\partial z^2} e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (33)$$

Remplaçons $\frac{\partial^2 H_{y_T}(x, z)}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 H_{y_T}(x, z)}{\partial z^2}$ et $H_{y_T}(x, z)$

par (31), (32), (33) dans (30) :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - u_0^2 \right] \mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z) = 0 \quad (34)$$

où

$$u_0^2 = (4\pi^2 \lambda^2 + \gamma_0^2) ; \operatorname{Re}(u_0) \geq 0$$

La solution de (34) a la forme ($z \leq 0$)

$$\mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z) = A e^{-u_0 z} + B e^{+u_0 z} \quad (35)$$

avec A, B fonctions de λ

Remplaçons maintenant $\mathcal{H}_{y_T}(\lambda, z)$ dans (31) par (35) :

$$H_{y_T}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\lambda) e^{-u_0 z} + B(\lambda) e^{+u_0 z} \right] e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (36)$$

Les champs électriques $E_{x_T}(x, z)$, $E_{z_T}(x, z)$ en fonction de $H_{y_T}(x, z)$ s'écrivent donc :

$$E_{x_T}(x, z) = -\frac{1}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \cdot \frac{\partial H_{y_T}(x, z)}{\partial z}$$

$$E_{z_T}(x, z) = \frac{1}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \cdot \frac{\partial H_{y_T}(x, z)}{\partial x}$$

Soit encore :

$$E_{x_T}(x, z) = \frac{1}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 \left[A(\lambda) e^{-u_0 z} - B(\lambda) e^{+u_0 z} \right] e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (37)$$

$$E_{z_T}(x, z) = \frac{1}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi\lambda \left[A(\lambda) e^{-u_0 z} + B(\lambda) e^{+u_0 z} \right] e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (38)$$

Comme il n'y a pas de charge libre dans l'air le champ électrique vérifie la relation suivante : $\text{Div } \vec{E} = 0$

Soit :
$$\frac{\partial E_{xT}(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_{zT}(x,z)}{\partial z} = 0$$

Si nous écrivons $E_{xT}(x,z)$, $E_{zT}(x,z)$ en fonction de leur transformée de Fourier :

$$E_{xT}(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{xT}(\lambda, z) e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (39)$$

$$E_{zT}(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{zT}(\lambda, z) e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \quad (40)$$

et comparons (39) à (37), (40) à (38) on obtient :

$$\mathcal{E}_{xT}(\lambda, z) = \frac{u_0}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \left[A(\lambda) e^{-u_0 z} - B(\lambda) e^{+u_0 z} \right] \quad (41)$$



$$\mathcal{E}_{zT}(\lambda, z) = \frac{j2\pi\lambda}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \left[A(\lambda) e^{-u_0 z} + B(\lambda) e^{+u_0 z} \right] \quad (42)$$

Tout champ total peut s'exprimer comme la somme d'un champ incident et d'un champ réfléchi :

$$E_{xT}(x,z) = E_{xi}(x,z) + E_{xr}(x,z)$$

$$E_{zT}(x,z) = E_{zi}(x,z) + E_{zr}(x,z)$$

Soit dans l'espace transformé de Fourier :

$$\mathcal{E}_{xT}(\lambda, z) = \mathcal{E}_{xi}(\lambda, z) + \mathcal{E}_{xr}(\lambda, z) \quad (43)$$

$$\mathcal{E}_{zT}(\lambda, z) = \mathcal{E}_{zi}(\lambda, z) + \mathcal{E}_{zr}(\lambda, z) \quad (44)$$

En identifiant (43) à (41), (44) à (42) on a :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{xi}(\lambda, z) = \frac{u_0}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} A(\lambda) e^{-u_0 z} \\ \mathcal{E}_{xr}(\lambda, z) = \frac{-u_0}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} B(\lambda) e^{+u_0 z} \\ \mathcal{E}_{zi}(\lambda, z) = \frac{j 2\pi\lambda}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} A(\lambda) e^{-u_0 z} \\ \mathcal{E}_{zr}(\lambda, z) = \frac{j 2\pi\lambda}{(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} B(\lambda) e^{+u_0 z} \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons la relation suivante, reliant les composantes réfléchies du champ électrique :

$$j 2\pi\lambda \mathcal{E}_{xr}(\lambda, z) + u_0 \mathcal{E}_{zr}(\lambda, z) = 0 \quad (45)$$

Exprimons (45) d'une autre façon, multiplions (41) par $j 2\pi\lambda$ et (42) par u_0 , faisons la somme des deux relations obtenues :

$$\mathcal{E}_{zT}(\lambda, z) = \mathcal{E}_{zi}(\lambda, z) + \frac{j 2\pi\lambda}{u_0} \left[\mathcal{E}_{xi}(\lambda, z) - \mathcal{E}_{xr}(\lambda, z) \right] \quad (46)$$

$$\mathcal{E}_{zT}(\lambda, z) = \mathcal{E}_{zi}(\lambda, z) - \frac{j 2\pi\lambda}{u_0} \mathcal{E}_{xr}(\lambda, z) \quad (47)$$

Dans le domaine réel

$$\mathcal{E}_{zT}(x, z) = \mathcal{E}_{zi}(x, z) + K(x) * \mathcal{E}_{xr}(x, z) \quad (48)$$

$$\text{où } K(x) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi\lambda}{[(2\pi\lambda)^2 + \gamma_0^2]^{1/2}} e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda$$

appelée fonction "noyau".

*: notation du produit de convolution.

- Calcul de K(x)

K(x) peut s'écrire :

$$K(x) = -j \left[\int_{-\infty}^0 \frac{2\pi\lambda}{[(2\pi\lambda)^2 + \gamma_0^2]^{1/2}} e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda + \int_0^{+\infty} \frac{2\pi\lambda}{[(2\pi\lambda)^2 + \gamma_0^2]^{1/2}} e^{+j2\pi\lambda x} d\lambda \right]$$

Faisons le changement de variable $\lambda' = -\lambda$ dans la première intégrale de sorte que :

$$\begin{aligned} K(x) &= -j \int_0^{+\infty} \frac{2\pi\lambda}{[(2\pi\lambda)^2 + \gamma_0^2]^{1/2}} (e^{+j2\pi\lambda x} - e^{-j2\pi\lambda x}) d\lambda \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{2\pi\lambda}{[(2\pi\lambda)^2 + \gamma_0^2]^{1/2}} \sin(2\pi\lambda x) d\lambda \end{aligned}$$

Posons maintenant :

$$t = 2\pi\lambda$$

d'où

$$K(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + \gamma_0^2)^{1/2}} \sin(xt) dt$$

$$K(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2 + \gamma_0^2) \cdot z}}{(t^2 + \gamma_0^2)^{1/2}} \cos(xt) dt$$

D'après la formule (60) P. 25, WAIT {10} :

$$K(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} K_0 \left[\gamma_0 (x^2 + z^2)^{1/2} \right]$$

$$K(x) = \frac{\gamma_0}{\pi} \operatorname{sign}(x) K_1(\gamma_0 |x|) \quad (49)$$

où

$K_1(\gamma_0 |x|)$ fonction de Bessel modifiée d'ordre 1

l'expression (48) s'écrit, explicitement, comme condition aux limites analytiques à l'interface supérieure : ($z \rightarrow 0^-$)

$$E_{zT}(z, 0^-) = E_{zi}(x, 0^-) + \frac{\gamma_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(\eta) K_1(\gamma_0 |\eta|) E_{zr}(x-\eta, 0^-) d\eta \quad (50)$$

Apparemment l'intégrale (50) serait singulière si $\eta \rightarrow 0$
car $K_1(\gamma_0 |\eta|) \rightarrow \infty$

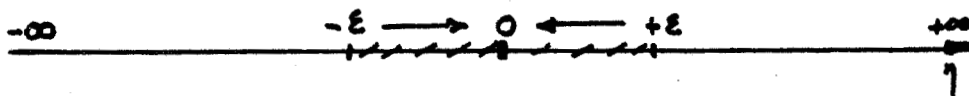
II.1.2. Etude de la singularité :

Posons : $f(x, \eta) = \operatorname{sign}(\eta) K_1(\gamma_0 |\eta|) E_{zr}(x-\eta, 0^-)$

Réécrivons l'intégrale dans (50) sous la forme suivante, avec ε arbitrairement pris petit :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(\eta, x) d\eta + \int_{-\varepsilon}^0 f(\eta, x) d\eta + \int_0^{+\varepsilon} f(\eta, x) d\eta + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} f(\eta, x) d\eta$$

sur l'axe réel η



Le développement en série de Taylor de $E_{x_r}(x - \eta, 0^-)$ au voisinage de x , lorsque $\eta \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$

$$E_{x_r}(x - \eta, 0^-) = E_{x_r}(x, 0^-) - \eta \frac{\partial E_{x_r}(x, 0^-)}{\partial x} + O(\eta^2)$$

et

$$K_1(\gamma_0 |\eta|) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma_0 \eta} & \text{si } \eta \in [-\varepsilon, 0] \\ +\frac{1}{\gamma_0 \eta} & \text{si } \eta \in [0, +\varepsilon] \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \int_{-\varepsilon}^0 \text{sign}(\eta) K_1(\gamma_0 |\eta|) E_{x_r}(x - \eta, 0^-) d\eta \\ &= \int_{-\varepsilon}^0 \frac{1}{\gamma_0 \eta} \left[E_{x_r}(x, 0^-) - \eta \frac{\partial E_{x_r}(x, 0^-)}{\partial x} \right] d\eta \\ &= + \frac{E_{x_r}(x, 0^-)}{\gamma_0} \int_{-\varepsilon}^0 \frac{d\eta}{\eta} - \frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial E_{x_r}(x, 0^-)}{\partial x} \underbrace{\int_{-\varepsilon}^0 d\eta}_{=0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0} \\ &= - \frac{E_{x_r}(x, 0^-)}{\gamma_0} \int_0^{+\varepsilon} \frac{d\eta}{\eta} \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\int_0^{+\varepsilon} \text{sign}(\eta) K_1(\gamma_0 |\eta|) E_{x_r}(x - \eta, 0^-) d\eta = \frac{E_{x_r}(x, 0^-)}{\gamma_0} \int_0^{+\varepsilon} \frac{d\eta}{\eta}$$

Donc :

$$\int_{-\varepsilon}^0 f(\eta) d\eta + \int_0^{+\varepsilon} f(\eta) d\eta = 0$$

C'est pourquoi dans le domaine continu de x , dans l'expression (50), la contribution de la singularité est nulle.

L'application directe de (50) se révèle impossible car (50) n'est autre que l'équation intégrale de Fredholm où $E_{xN}(x - \eta, 0^-)$ et $E_{zT}(x, 0)$ sont inconnues

Pour passer aux études dans le domaine discret, nous allons prendre une approximation de la forme de la fonction inconnue E_{xT} .

II.2. APPROXIMATION DE CETTE CONDITION PAR DES ELEMENTS DISCRETS

Le champ électrique $E_{xT}(x)$ s'est supposé constant par morceau et à valeur au noeud, figure 25.

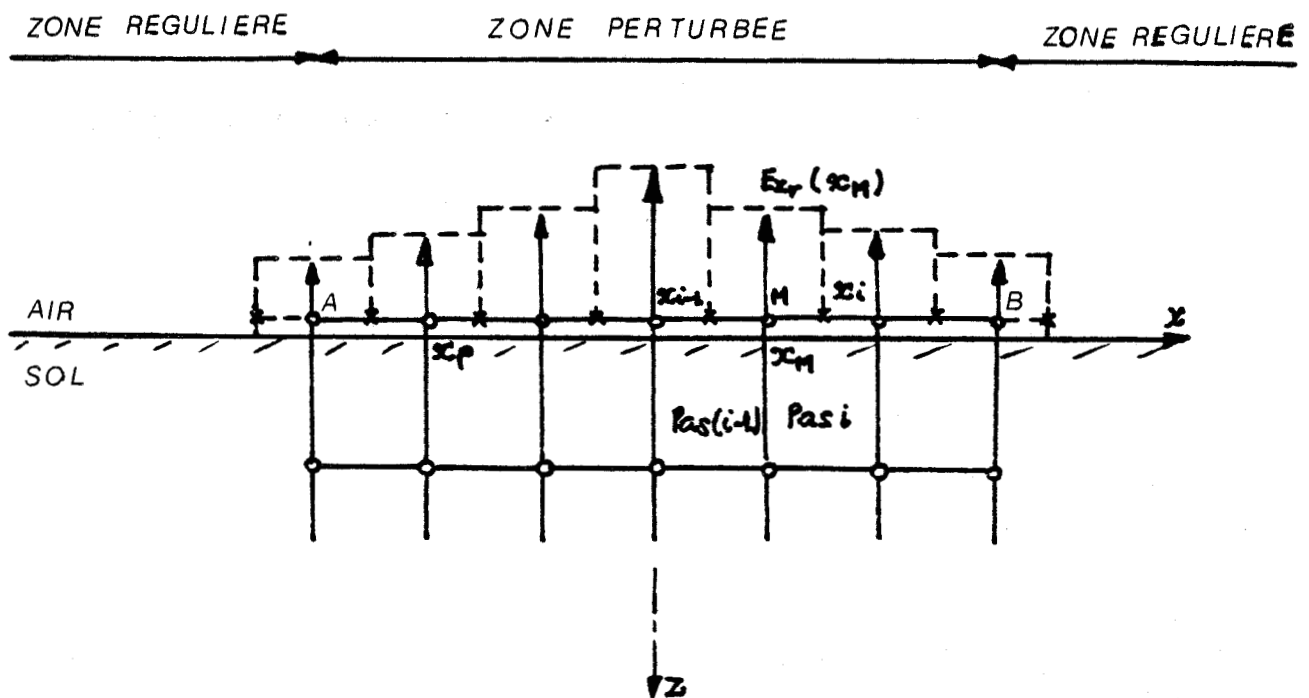


Figure 25

c'est-à-dire $E_{x_r}(x, 0^-) = E_{x_r}(x_M, 0^-)$ si $x \in [x_{i-1}, x_i]$

où x_{i-1} , x_i sont les points milieux respectivement des pas $(i-1)$ et i situés de part et d'autre de x_M de E_{x_r} .

La transformée de Fourier par rapport à x s'écrit :

$$\mathcal{E}_{x_r}(\lambda, 0^-) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{x_r}(x, 0^-) e^{-j2\pi\lambda x} dx$$

ou encore :

$$\mathcal{E}_{x_r}(\lambda, 0^-) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_{x_r}(x_M, 0^-) \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-j2\pi\lambda x} dx$$

$$\mathcal{E}_{x_r}(\lambda, 0^-) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_{x_r}(x_M, 0^-) \left(\frac{e^{-j2\pi\lambda x_i} - e^{-j2\pi\lambda x_{i-1}}}{-j2\pi\lambda} \right)$$

La relation (47) devient :

$$\mathcal{E}_{z_r}(\lambda, 0^-) = \mathcal{E}_{z_i}(\lambda, 0^-) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_{x_r}(x_M, 0^-) \left(\frac{e^{-j2\pi\lambda x_i} - e^{-j2\pi\lambda x_{i-1}}}{u_0} \right)$$

Et dans le domaine réel :

$$E_{z_r}(x_p, 0^-) = E_{z_i}(x_p, 0^-) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_{x_r}(x_M, 0^-) \cdot \text{Fe}^{-1} \left(\frac{e^{-j2\pi\lambda x_i} - e^{-j2\pi\lambda x_{i-1}}}{u_0} \right)$$

où x_p : l'abscisse d'un noeud quelconque

$$\text{Fe}^{-1} \left(\frac{e^{-j2\pi\lambda x_i} - e^{-j2\pi\lambda x_{i-1}}}{u_0} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j2\pi\lambda x_i} - e^{-j2\pi\lambda x_{i-1}}}{[(2\pi\lambda)^2 + \gamma_0^2]^{1/2}} e^{j2\pi\lambda x_p} d\lambda$$

Faisons le changement de variable $2\pi\lambda = t$, la transformée de Fourier inverse s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jt(x_i - x_p)}}{(t^2 + \gamma_0^2)^{1/2}} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jt(x_{i-1} - x_p)}}{(t^2 + \gamma_0^2)^{1/2}} dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\cos[t(x_i - x_p)]}{(t^2 + \gamma_0^2)^{1/2}} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos[t(x_{i-1} - x_p)]}{(t^2 + \gamma_0^2)^{1/2}} dt \right]$$

D'après la formule (60) page 25 de WAIT [10], les deux intégrales ci-dessus sont égales à $K_0(\gamma_0 |x_i - x_p|)$ et $K_0(\gamma_0 |x_{i-1} - x_p|)$. K_0 est fonction de Bessel modifiée d'ordre 0.

En résumé, la condition discrète aux limites s'écrit, x_p étant l'abscisse d'un noeud quelconque situé en interface (figure 25) et appartenant au segment AB :

$$E_{z_T}(x_p, 0^-) = E_{z_i}(x_p, 0^-) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[K_0(\gamma_0 |x_p - x_{i+1}|) - K_0(\gamma_0 |x_p - x_i|) \right] \cdot \left[E_{z_T}(x_M, 0^-) - E_{z_i}(x_M, 0^-) \right] \right\} \quad (51)$$

Si l'on remarque que :

$$\left[K_0(\gamma_0 |x_p - x_{i+1}|) - K_0(\gamma_0 |x_p - x_i|) \right] = \gamma_0 |x_i - x_{i+1}| \text{sign}(x_p) K_1(\gamma_0 |x_p|)$$

au sens de différences finies, cette égalité est autant plus vraie que $\gamma_0 |x_i - x_{i+1}| \ll 1$; on s'aperçoit que (51) est en quelque sorte l'équivalence de (50) dans le domaine discret.

Exprimons (51) autrement en fonction de H_{y_T} et H_{y_i} , on a :

$$\frac{\partial H_{y_T}(x_p, 0^-)}{\partial x} = \frac{\partial H_{y_i}(x_p, 0^-)}{\partial x} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[K_0(\gamma_0 |x_p - x_{i+1}|) - K_0(\gamma_0 |x_p - x_i|) \right] \cdot \left[\frac{\partial H_{y_T}(x_M, 0^-)}{\partial z} - \frac{\partial H_{y_i}(x_M, 0^-)}{\partial z} \right] \right\} \quad (52)$$

La relation (52) est la condition aux limites que vérifie le champ magnétique H_{yT} à la frontière supérieure.

En très basse fréquence, nous devons retrouver la condition $H_{yT} = \text{constante}$ à la surface supérieure, c'est-à-dire $\frac{\partial H_{yT}}{\partial x} = 0$. En effet, dans ce cas : $(\gamma_0 |x_p - x_i|) \ll 1$

on a

$$K_0(\gamma_0 |x_p - x_i|) \simeq -\text{Log}(\gamma_0 |x_p - x_i|)$$

Idem

$$K_0(\gamma_0 |x_p - x_{i-1}|) \simeq -\text{Log}(\gamma_0 |x_p - x_{i-1}|)$$

$$\frac{\partial H_{y_i}}{\partial x} \ll 1 \text{ en très basse fréquence.}$$

Donc :

$$\frac{\partial H_{yT}(x_p, 0^-)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ \text{Log} \left| \frac{x_p - x_i}{x_p - x_{i-1}} \right| \left[\frac{\partial H_{yT}(x_M, 0^-)}{\partial z} - \frac{\partial H_{y_i}(x_M, 0^-)}{\partial z} \right] \right\} \quad (53)$$

Cette dernière série s'annule complètement si :

- a) on choisit un maillage régulier dans la direction ox
 et
 b) le demi-milieu inférieur est homogène ou stratifié.

Dans le cas où le demi-milieu est hétérogène, nous avons calculé (53), par exemple, pour la configuration du demi-milieu de la figure 22 : le module de $\frac{\partial H_{yT}}{\partial x}(x_p, 0^-)$ est de l'ordre de 10^{-7} à 10^{-6} à la surface du sol (H_{y_i} y étant fixé à $(1 + j)A/m$).

Lorsque $x_p \equiv x_M$; la contribution de la singularité est nulle si la maillage est régulier dans la direction ox .

Conformément aux critères d'équivalences des deux relations (50) (domaine continu) et (51) (domaine discret) vérifiant la condition aux limites en très basse fréquence et compte tenu de la dernière propriété énoncée nous allons choisir dans la suite un maillage régulier dans la direction ox et un découpage tel que $\delta_0 |x_i - x_{i-1}| \ll 1$ dans l'air.

En pratique, on remplace la série $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\dots)$ de (52) par une série finie de termes $\sum_{i=-N}^{+N} (\dots)$ symétrique par rapport à x_p , point d'observation. N étant choisi de telle manière que la somme $\sum_{i=-\infty}^{-N-1} (\dots) + \sum_{i=N+1}^{+\infty} (\dots)$ soit négligeable. Numériquement, ceci se traduit par l'étude de convergence de la solution globale en fonction de l'extension horizontale de la zone perturbée \overline{AB} .

Notre modèle final se résume comme indique la figure suivante :

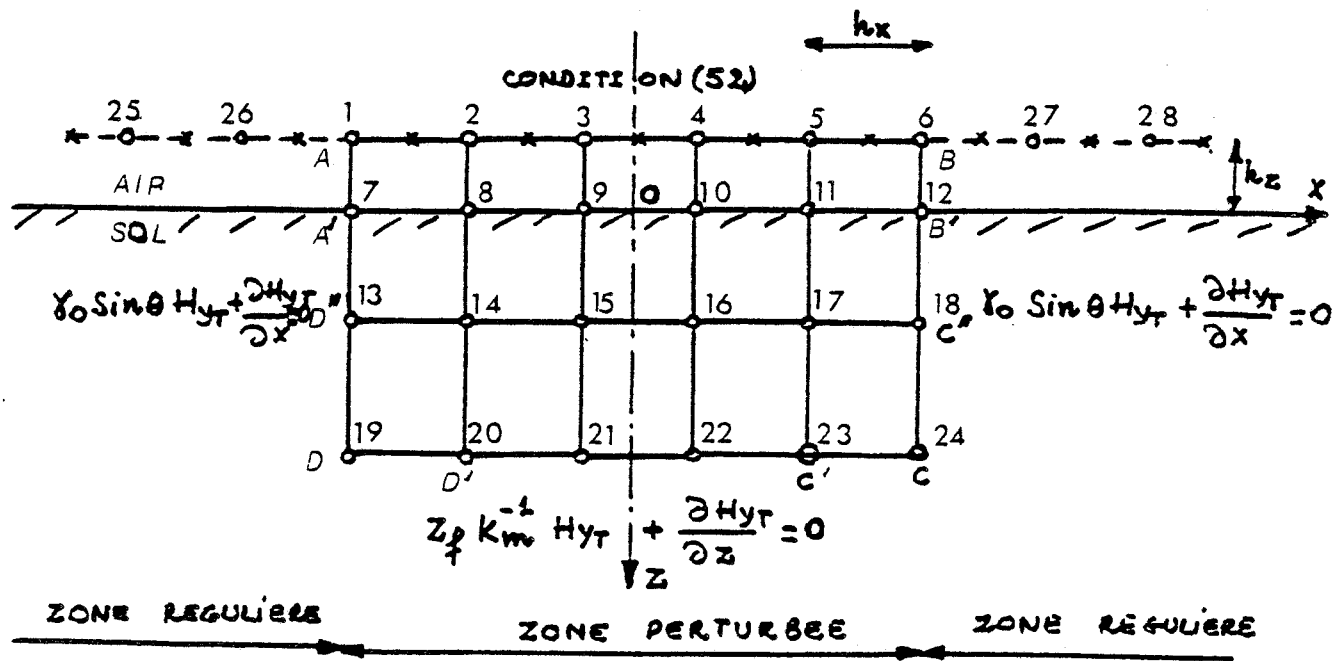


Figure 26

et mathématiquement cela se traduit par des relations suivantes :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_{yT} = 0 \quad \text{sur } (\bar{n}) \cup \bar{BC} \cup \bar{CD} \cup \bar{DA} \quad (54.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{yT}(x_p, -h_z)}{\partial x} &= \frac{\partial H_{y_i}(x_p, -h_z)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=-N_1}^{+N_1} \left\{ \left[K_0(\gamma_0 | x_p - x_{i-1}|) - K_0(\gamma_0 | x_p - x_i|) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial H_{yT}(x_M, -h_z)}{\partial z} - \frac{\partial H_{y_i}(x_M, -h_z)}{\partial z} \right] \right\} \\ &\quad \text{sur } \bar{AB} \quad (54.2) \end{aligned}$$

$$\gamma_0 \sin \theta H_{yT} + \frac{\partial H_{yT}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \bar{BC} \quad (54.3)$$

$$z_f k_m^{-1} H_{yT} + \frac{\partial H_{yT}}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } \bar{CD} \quad (54.4)$$

$$\gamma_0 \sin \theta H_{yT} + \frac{\partial H_{yT}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \bar{DA} \quad (54.5)$$

$$h = [\sigma(x, z) + j\omega \epsilon(x, z)]^{-1} \quad \text{et } \phi = j\omega \mu(x, z)$$

h_z l'épaisseur de la première couche d'air, elle est faible.

Tous les nœuds du domaine d'études sont des nœuds inconnus.

Comme méthode de résolution de (54) nous adoptons la méthode combinée variationnelle - différences finies partout dans le domaine sauf sur \bar{AB} , où nous avons "imposée" la condition (54.2) de "fermeture" du domaine qui exprime que l'atmosphère qui surmonte le milieu considéré est homogène. En effet, la relation (54.2) s'est établie à partir de l'équation de Helmholtz en domaine de Fourier que vérifie H_{yT} dans l'air. En conséquence, sur \bar{AB} , la discrétisation directe de (54.2) en différences finies est tout à fait correcte. Nous avons inspiré cette méthode à partir de celle développée par THOMAS [31].

* Exemple d'approximation en différences finies de (54.2) (figure 26)

Afin d'avoir une forme simple de la matrice $\{A\}$ à générer, nous fixons un nombre pair de noeuds, selon ox , symétriques par rapport à l'origine.

- Approximation des dérivées :

Selon x :

Si $x_i > 0$

$$\frac{\partial H_{yT}(x_i)}{\partial x} = \frac{1}{h_x} [H_{yT}(x_{i+1}) - H_{yT}(x_i)]$$

Si $x_i < 0$

$$\frac{\partial H_{yT}(x_i)}{\partial x} = -\frac{1}{h_x} [H_{yT}(x_{i-1}) - H_{yT}(x_i)]$$

Selon z :

$$\frac{\partial H_{yT}(z_i)}{\partial z} = \frac{1}{h_z} [H_{yT}(z_{i+1}) - H_{yT}(z_i)]$$

- Les dérivées du champ magnétique incident sont données analytiquement. le champ magnétique incident dans l'air s'écrit [10] :

$$H_{y_i}(x, z) = H_0 e^{-\gamma_0 \cos \theta z} e^{-\gamma_0 \sin \theta x}$$

d'où

$$\left. \frac{\partial H_{y_i}}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_p \\ z=-h_z}} = -\gamma_0 \sin \theta H_0 e^{+\gamma_0 \cos \theta h_z} e^{-\gamma_0 \sin \theta x_p}$$

$$\left. \frac{\partial H_{y_i}}{\partial z} \right|_{\substack{x=x_M \\ z=-h_z}} = -\gamma_0 \cos \theta H_0 e^{+\gamma_0 \cos \theta h_z} e^{-\gamma_0 \sin \theta x_M}$$

- le champ magnétique total à l'extérieur de la zone perturbée se calcule analytiquement (10) (voir l'annexe A.2)

$$H_{yT}(x,z) = H_0 (e^{-\gamma_0 \cos \theta z} + R e^{+\gamma_0 \cos \theta z}) e^{-\gamma_0 \sin \theta x}$$

$$\text{et } \frac{\partial H_{yT}(x,z)}{\partial z} = -\gamma_0 \cos \theta H_0 (e^{-\gamma_0 \cos \theta z} - R e^{+\gamma_0 \cos \theta z}) e^{-\gamma_0 \sin \theta x}$$

R est le coefficient de réflexion dont l'expression est bien connue (annexe A.2)

On peut montrer (annexe A.4) qu'avec l'approximation du premier ordre de $\frac{\partial}{\partial z}$ (...), le champ magnétique total d'un noeud situé sur \overline{AB} , s'exprime en fonction du champ magnétique total des autres noeuds situés sur \overline{AB} et $A'B'$.

II.3. RESOLUTION NUMERIQUE SUR L'ORDINATEUR

II.3.1. Forme matricielle :

Le système matriciel global s'écrit :

$$\{A\} \{H\} = \{B\}$$

où

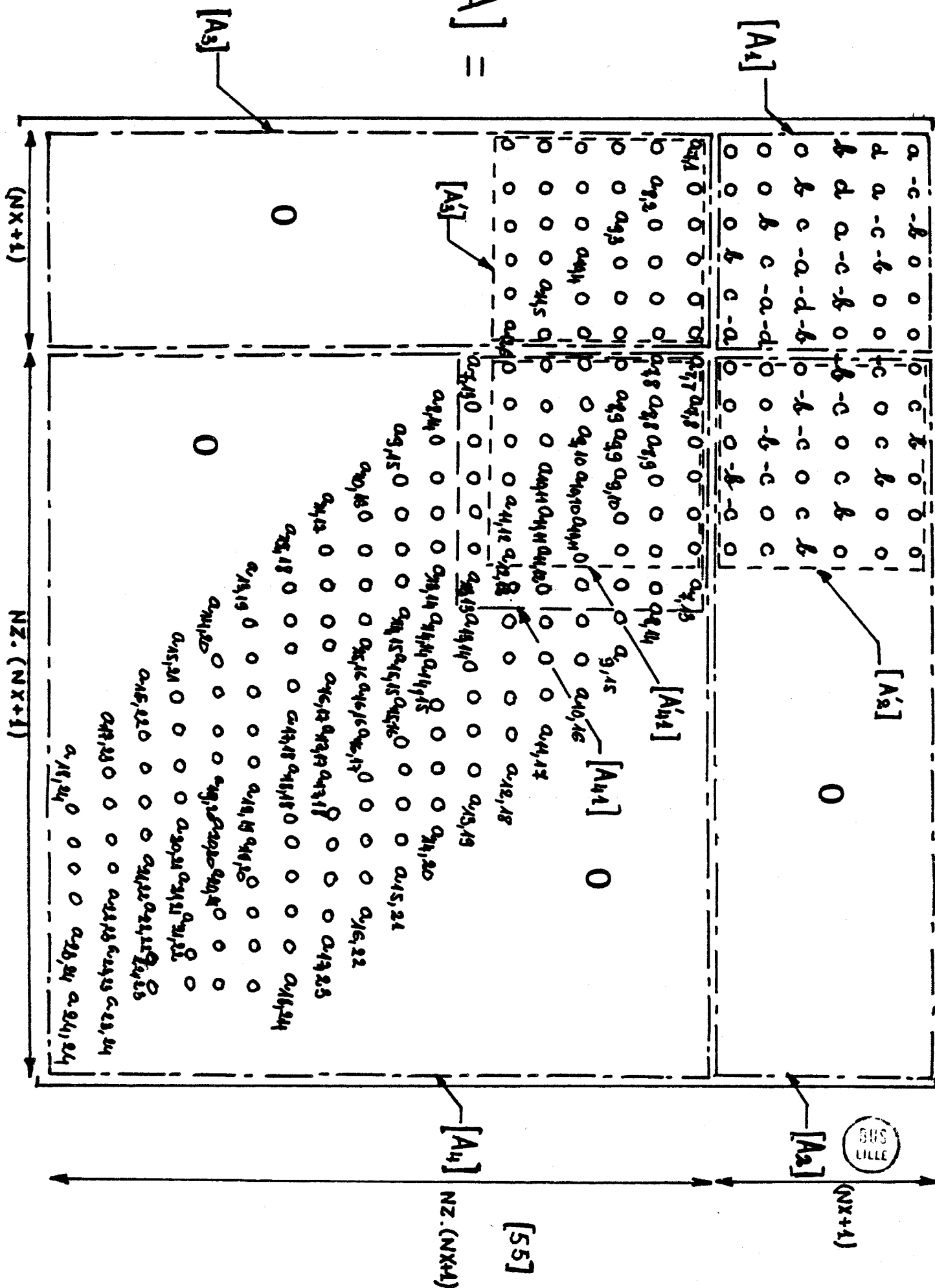
\{A\} matrice carrée, en général, de dimension N, où $N = (NX + 1)(NZ + 1)$; NX, NZ sont respectivement nombre de blocs verticaux, nombre de couches horizontales. Pour l'exemple de la figure 26, elle est représentée par (55) dans laquelle :

$$a = \pi \frac{h_z}{h_x} ; \quad b = f_{12} = \left[K_0 (2,5 \gamma_0 h_x) - K_0 (1,5 \gamma_0 h_x) \right]$$

$$c = f_{23} = \left[K_0 (1,5 \gamma_0 h_x) - K_0 (1,5 \gamma_0 h_x) \right] ; \quad d = c - a$$

Elle se décompose sous la forme :

[A] =



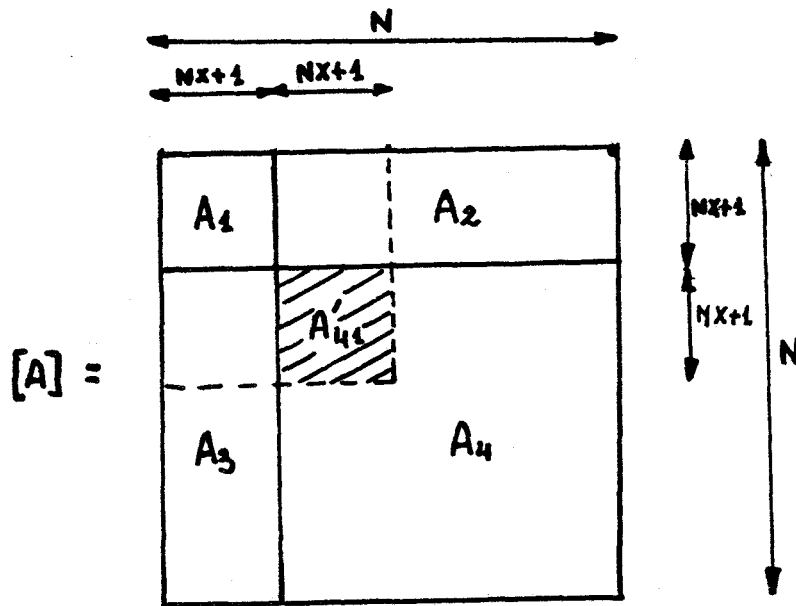


Figure 27

Dans ce système matriciel, les $(NX + 1)$ premières équations traduisent la condition aux limites (54.2) et les $(NX + 1)$. NZ restantes demeurent identiques à celles obtenues en modèle 3, (chapitre I).

Remarquons que la numérotation s'effectue horizontalement, elle permet ainsi de regrouper les inconnues qui correspondent à des noeuds placés en surface, de cette façon on facilite la résolution du système par une méthode de décomposition connue $\{5\}$. Ce genre d'arrangement est bien connu en éléments finis (méthode frontale) DUFF $\{32\}$

$\{H\}$: vecteur colonne des inconnues, de dimension N^2

$\{B\}$: vecteur colonne, second membre, comporte N^2 composantes dont $(NX + 1)$ premières non nulles.

Avec l'exemple de la figure 26

$$\{B\}^T = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, 0, \dots, 0\}$$

où les b_i sont donnés en annexe 4.

II.3.2. Méthode de résolution :

On écrit explicitement le système matriciel sous la forme :

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{c} \xleftrightarrow{NX+1} \quad \xleftrightarrow{NZ.(NX+1)} \\ \xleftrightarrow{NX+1} \\ \xleftrightarrow{NZ.(NX+1)} \end{array} \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$A_1 H_1 + A_2 H_2 = B_1$$

$$A_3 H_1 + A_4 H_2 = B_2$$

B_2 : vecteur identiquement nul

d'où

$$\begin{cases} H_1 = A_1^{-1} B_1 - A_1^{-1} A_2 H_2 & (56) \\ (A_3 A_1^{-1} A_2 - A_4) H_2 = (A_3 A_1^{-1} B_1 - B_2) & (57) \end{cases}$$

Nous constatons que la soustraction de A_4 par $A_3 A_1^{-1} A_2$ ne modifie que la sous matrice A'_{41} (appelée sous matrice active dans la méthode frontale) de A_4 . Par ailleurs la matrice obtenue après cette opération reste bande et à diagonale dominante.

Donc la méthode de résolution consiste à appliquer la procédure précédemment citée, en (I.4.2) au système (57). Ensuite, on passera au calcul du champ magnétique total sur \overline{AB} en résolvant (56).

Ici, il faut réserver en mémoire centrale un tableau carré de dimension $(NX + 2)$, car la matrice $\{A_{41}\}$ n'est plus symétrique, d'après (57).

Enfin, le modèle mathématique du mode TE se régit par les relations suivantes, en se basant sur le principe de dualité.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] E_{yT}(x,z) = 0 \quad \text{sur } (\bar{\Omega}) \cup \bar{BC} \cup \bar{CD} \cup \bar{DA} \quad (58.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{yT}(x_p, -h_2)}{\partial x} &= \frac{\partial E_{y_i}(x_p, -h_2)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=-N_2}^{+N_2} \left\{ \left[K_0(\gamma_0 |x_p - x_{i-1}|) - K_0(\gamma_0 |x_p - x_i|) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial E_{yT}(x_M, -h_2)}{\partial z} - \frac{\partial E_{y_i}(x_M, -h_2)}{\partial z} \right] \right\} \\ &\quad \text{sur } \bar{AB} \quad (58.2) \end{aligned}$$

$$\gamma_0 \sin \theta E_{yT} + \frac{\partial E_{yT}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \bar{BC} \quad (58.3)$$

$$Y_f k^{-1} E_{yT} + \frac{\partial E_{yT}}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } \bar{CD} \quad (58.4)$$

$$\gamma_0 \sin \theta E_{yT} + \frac{\partial E_{yT}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \bar{DA} \quad (58.5)$$

$$\begin{aligned} \text{où } k &= [j\omega\mu(x,z)]^{-1} \\ \phi &= [\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)] \end{aligned}$$

Y_f = admittance de surface à la frontière \bar{CD} , calculée par les formules trouvées en annexe A.2.

Nous réalisons un seul programme informatique, pour les deux modes TM et TE, avec :

MODE	TM	TE
k	$[\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)]^{-1}$	$[j\omega\mu(x,z)]^{-1}$
ϕ	$j\omega\mu(x,z)$	$[\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)]$
CHAMP ELECTRO- MAGNÉTI- QUE	$H_{yT}(x,z)$	$-E_{yT}(x,z)$
	$E_{xT}(x,z)$	$H_{xT}(x,z)$
	$E_{zT}(x,z)$	$H_{zT}(x,z)$

Son traitement s'effectue sur l'IRIS 80 du CITI, en complexe double précision, afin de minimiser les erreurs arrondies.

I.4. EXEMPLE SIMPLE D'APPLICATION

Par l'exemple simple d'un filon conducteur enterré dans un sous-sol homogène, nous allons tester, en basse fréquence, les deux de propagation TM et TE.

1) Mode TM :

La configuration testée, représentée par la figure 22 du chapitre I le modèle numérique se compose de 37 Mailles régulières selon ox de largeur 168 m, de 15 mailles selon oz d'épaisseurs 0.5, 0.5, 19.5, 30, 50, 75, 100, 125, 150, 200, 250, 350, 500, 750, 100 donc au total 555 mailles.

Nous avons obtenu les mêmes courbes que celles du modèle 3.

2) Mode TE

Pour ce mode, un exemple de STODT $\{20\}$ s'exécute en éléments finis, figure 28, avec un contraste de

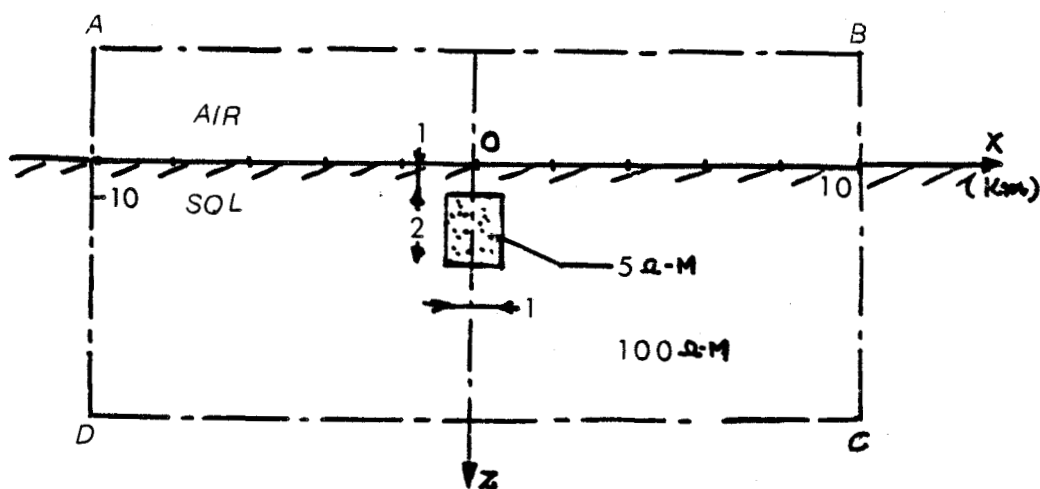


Figure 28

résistivité 20, la fréquence du signal étant fixée à 1 Hz. Il suppose que \overline{AB} se situe suffisamment loin dans l'air, de telle manière que, sur cette frontière H_{xT} soit constant ; autrement dit le champ E_{yT} total y vérifie la condition de Neumann non homogène $\frac{\partial E_{yT}}{\partial z} = cte$.

Sur les autres frontières, le champ électrique total E_{yT} vérifie les conditions aux limites de type Dirichlet.

Quant à notre modèle simulé, il est représenté par la figure 29, il se compose de 944 mailles ; discrétisé en 59 mailles régulières de largeur 333 m selon ox et 16 mailles d'épaisseur 0.5, 250, 250, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 750, 750, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000 m selon oz.

Les figures 30, 31, 32 représentent $\left| \frac{H_{x_{ano}}}{H_{x_{tab}}} \right|$, $\left| \frac{E_{y_{ano}}}{E_{y_{tab}}} \right|$

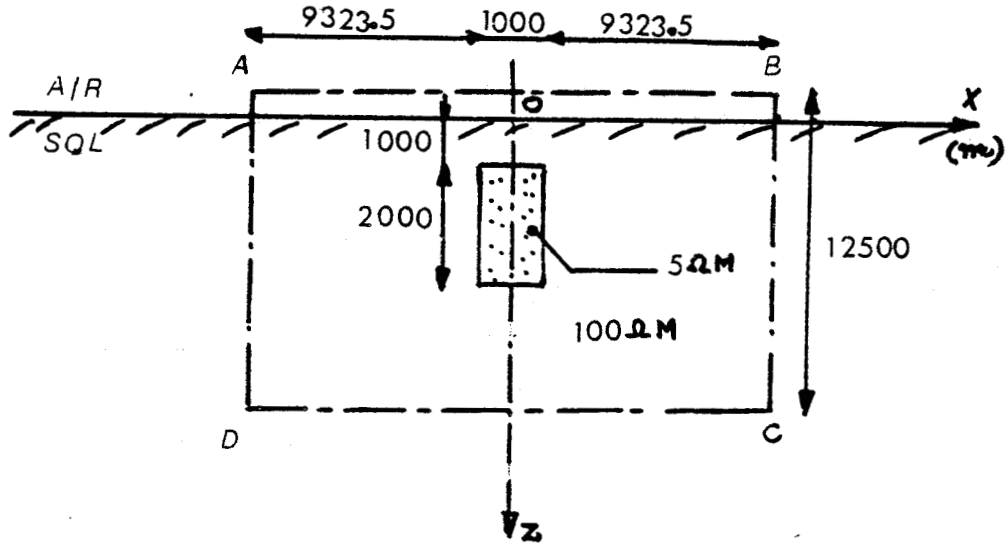


Figure 29

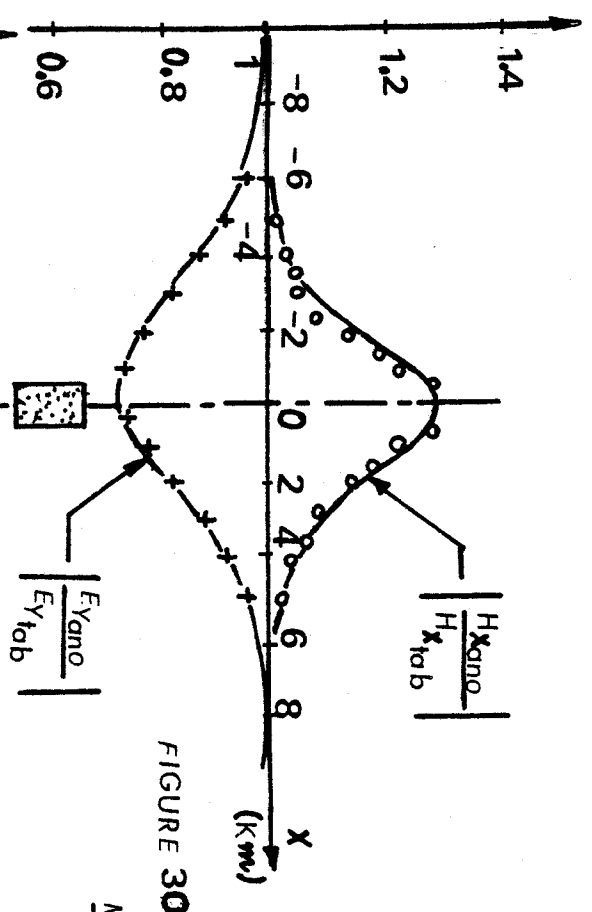


FIGURE 30

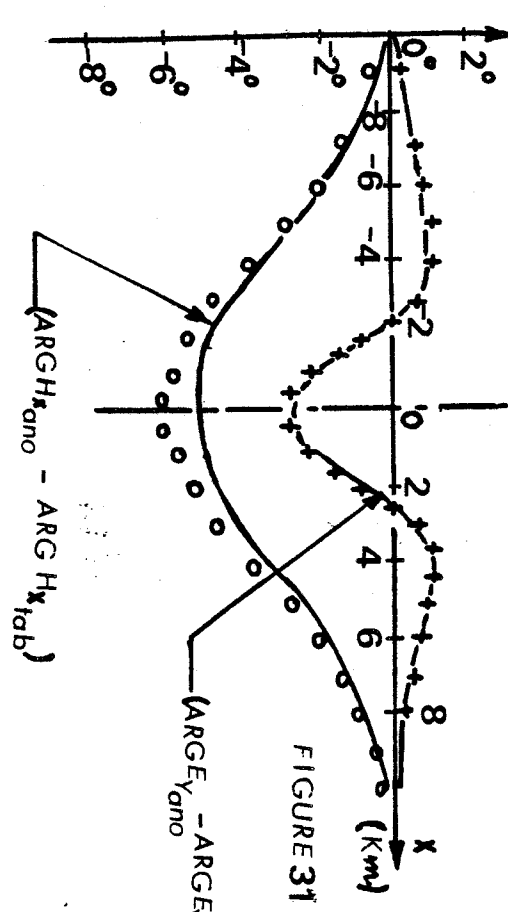


FIGURE 31

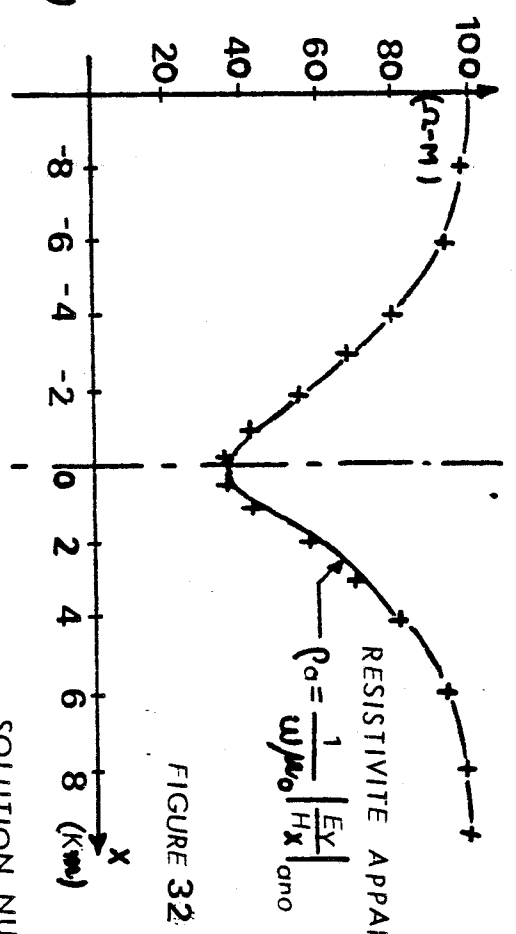


FIGURE 32

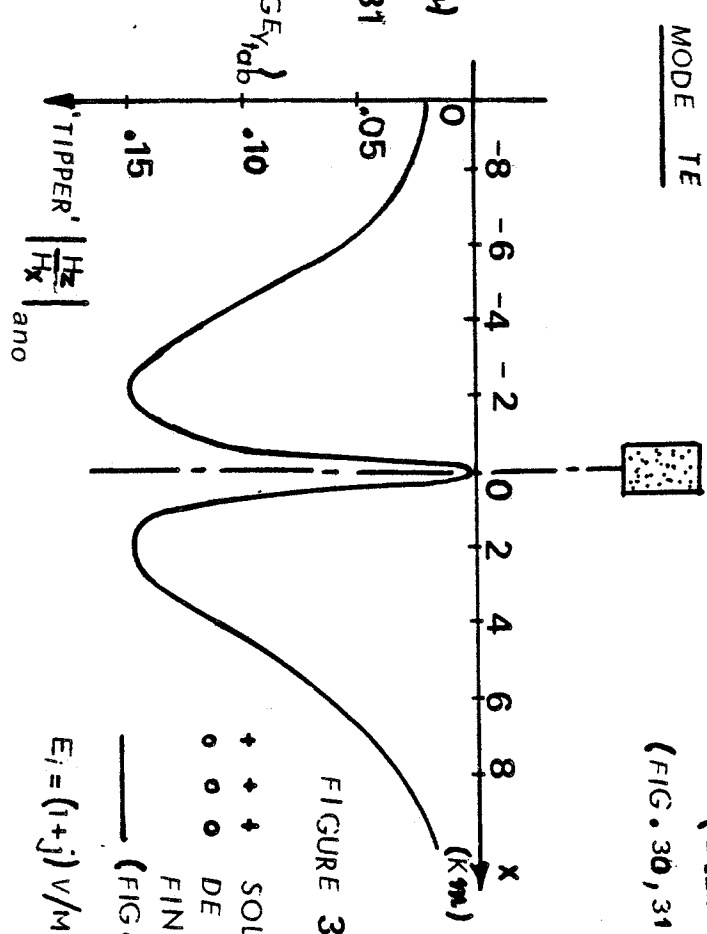


FIGURE 33

+ + + SOLUTION NUMERIQUE
 o o o DE NGUYEN (DIFFERENCES
 FINIES)
 ——— (FIG. 33)
 $E_1 = (1+j) V/m \quad f = 1 \text{ Hz}$

MODE TE

——— SOLUTION NUMERIQUE DE STODT
 (ELEMENTS FINIS)
 (FIG. 30, 31, 32)



$(\text{Arg } E_{y_{\text{ano}}} - \text{Arg } E_{y_{\text{tab}}}), (\text{Arg } H_{x_{\text{ano}}} - \text{Arg } H_{x_{\text{tab}}})$ et la résis-

tivité apparente ρ_a en fonction de x à l'interface air-sol où les indices ano et tab correspondant respectivement à la présence d'anomalie et à son absence.

Les courbes continues sont données par STODT (éléments finis), celles obtenues en différences finies sont tracées en discontinu. Il y a une seule légère différence des deux courbes $(\text{Arg } H_{x_{\text{ano}}} - \text{Arg } H_{x_{\text{tab}}})$ de l'ordre 1 degré dans la zone située à la verticale d'anomalie, cette différence est tout à fait négligeable. On constate que la variation spatiale du champ secondaire en E_y s'avère aussi importante que celle de H_x dans une zone étendue de δ_2 de part et d'autre des bords d'anomalie (δ_2 profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu encaissant, elle vaut, ici, 5000 m)

Nous complétons l'étude par la représentation de $\left| \frac{H_{z_{\text{ano}}}}{H_{x_{\text{ano}}}} \right|$

en fonction de x , figure 33. Ce rapport s'appelle "tipper", indicateur de sensibilité en conductivité qui permet, en pratique, de sélectionner la zone de sondage en magnétotellurie. Loin d'anomalie, à une distance $> \delta_2$, ce tipper tend très vite vers zéro.

L'étude de convergence s'effectue avec le modèle numérique de 464 mailles (29 mailles régulières selon ox de largeur 1000 m et en oz on conserve le même maillage que précédemment). Les courbes obtenues sont identiques à celles déjà tracées.

Par ailleurs, sur des exemples simples, nous avons aussi vérifié la validité du principe de dualité entre les deux modes TM et TE en intervertissant le rôle de k et ϕ . Nous abordons, au troisième chapitre, les principales applications d'intérêt général du modèle créé.

CHAPITRE III

=====

APPLICATIONS

Les méthodes numériques ne trouvent leur sanction que dans l'efficacité et la qualité qu'elles démontrent lors de leur utilisation.

La finalité de notre travail a été conçue en fonction d'elles. Donc, il était essentiel de vérifier concrètement sur des applications en géophysique (modèles en basse fréquence) et en compatibilité électromagnétique (modèles en haute fréquence).

III.1. MODELES SIMULES EN BASSE FREQUENCE

Notre modèle basse fréquence sert notamment aux simulations de sondage magnétotellurique.

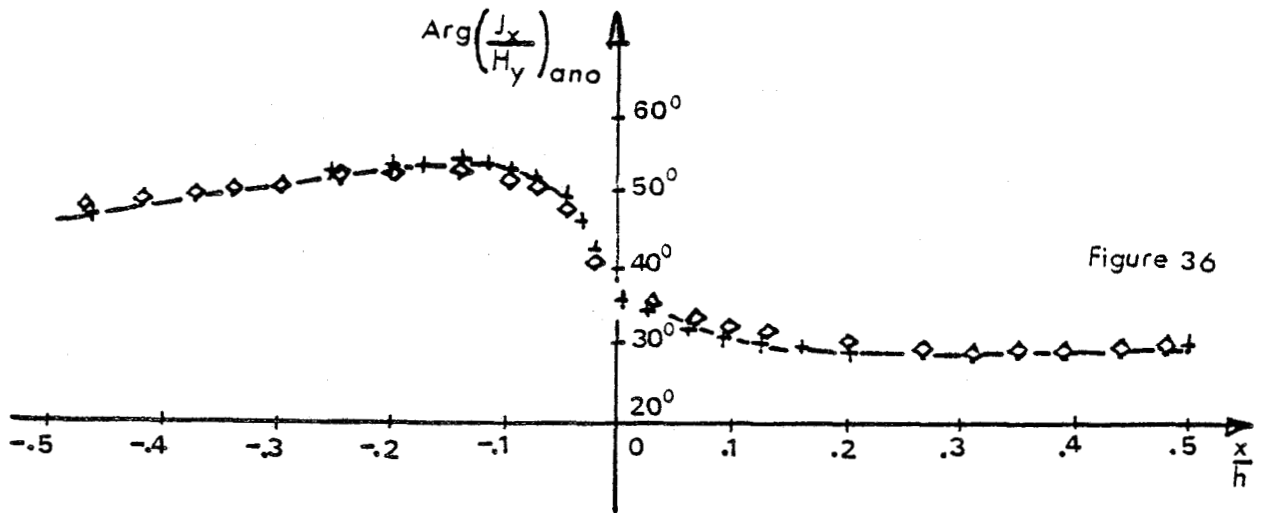
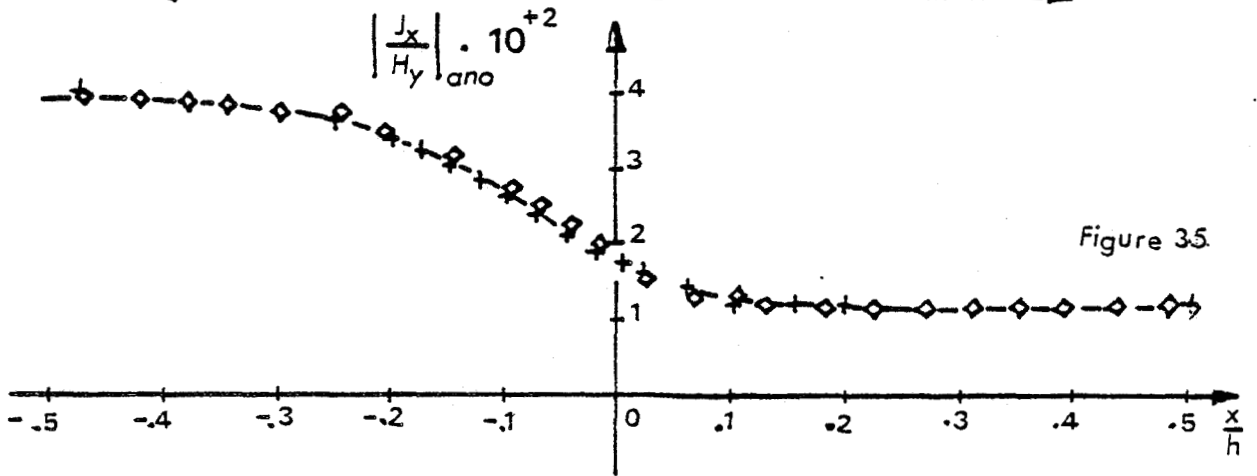
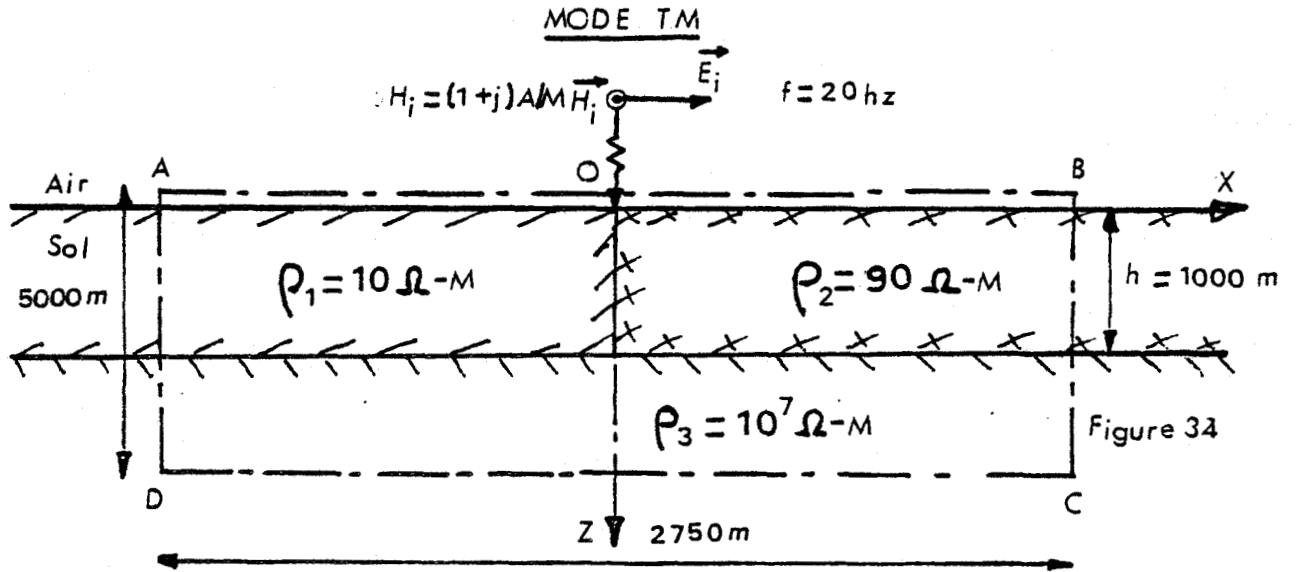
Voici, l'exemple d'une faille dont la structure géologique est formée par deux couches adjacentes de résistivités respectivement $10 \Omega\text{M}$ et $90 \Omega\text{M}$ et de même épaisseur 1000 m , basant sur un socle très résistant $10^7 \Omega\text{.m}$ (figure 34).

Cette faille est illuminée par une onde électromagnétique plane en mode TM, dont la fréquence du signal est 20 Hz ; le champ magnétique incident vaut $(1 + j) \text{ A/m}$. Comme $\sigma_{1,2} \gg \omega \epsilon_{1,2}$ l'onde transmise dans le sol est presque indépendante de l'angle incident de l'onde plane.

Le modèle simulé est délimité par la zone (ABCD) En vue de comparer notre modèle à ceux résolus analytiquement par D'ERREVILLE {33} et par les éléments finis SILVESTER {17}, nous traçons le module et la phase de

$\begin{bmatrix} J_x \\ H_y \end{bmatrix}$ à la surface du sol, sur les figures 35 et 36 .

La convergence des trois méthodes est parfaite et montre que, sur le compartiment conducteur, l'anomalie est la plus forte et se fait sentir à une distance relativement grande de la faille.



— Solution analytique d'Erceville et Kunetz ($\rho_3 = \infty$)

+ + + Solution numerique (Elements finis) de Silvester ($\rho_3 = \infty$)

◇ ◇ ◇ Solution numerique (Differences finies) de Nguyen ($\rho_3 = 10^7 \Omega\text{-M}$)



Passons ensuite à la simulation en mode TE de la réponse d'un filon conducteur dont le pendage est de 60° et la conductivité $5 \cdot 10^{-2}$ mho/m, il est enterré dans un sol de conductivité 10^{-2} mho/m avec la distance tête d'anomalie - interface air-sol de 10 m ; la fréquence du signal et le champ électrique incident se sont fixés respectivement à 500 hz et $(1 + j)$ V/m (figure 37).

A titre de comparaison, nous simulons en parallèle la réponse d'une plaque inclinée, (tracée en pointillé sur la figure 37) de 1480 m d'extension selon oy et de mêmes caractéristiques que le filon simulé à une excitation par un dipôle magnétique vertical (DMV) localisé sur le profil symétrique et placé respectivement à 600 m et 1200 m de l'origine. Ce programme tridimensionnel (3D) a été élaboré par NGUYEN {34,35}.

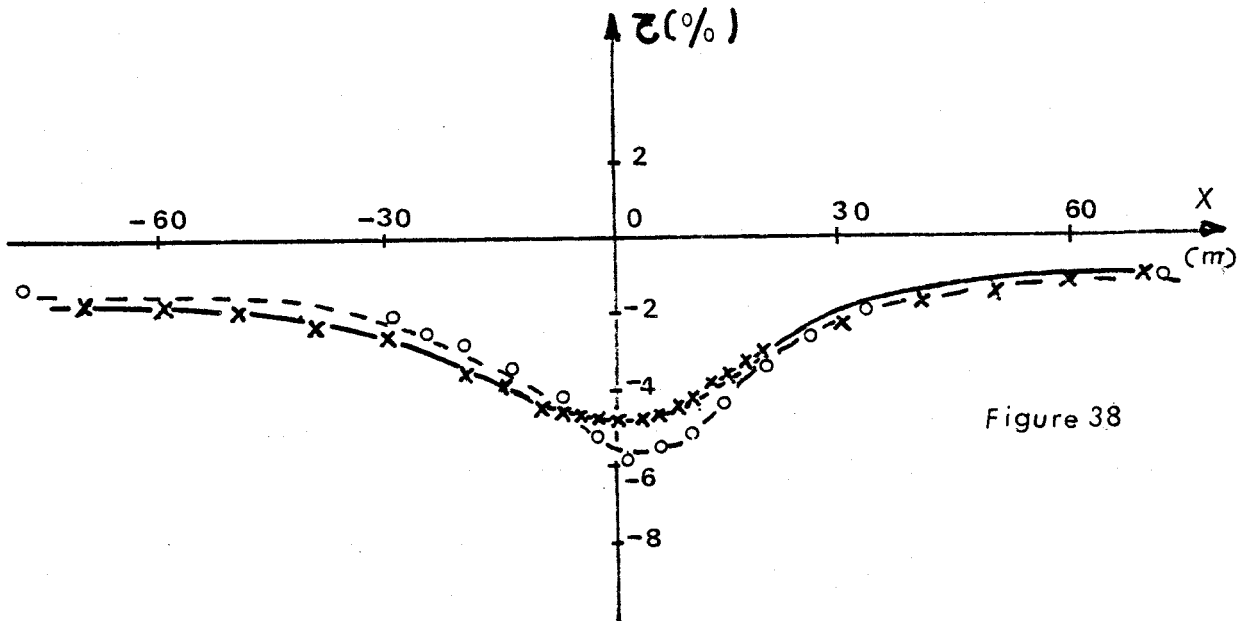
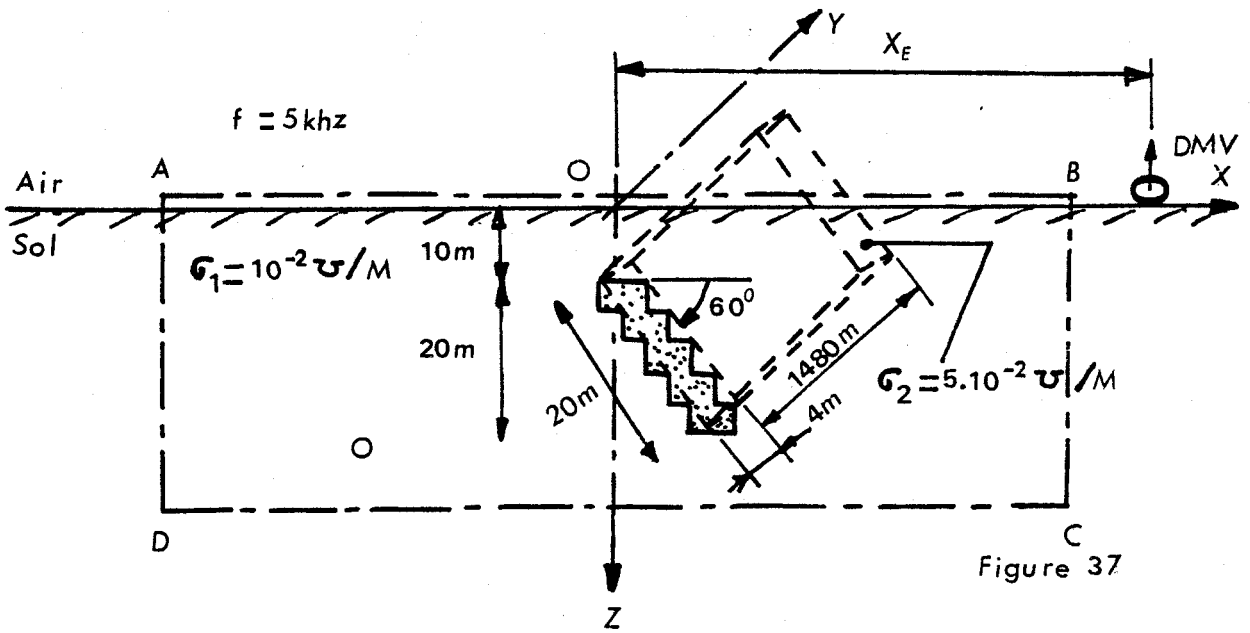
Sur la figure 38, le taux d'anomalie en conductance (\mathcal{C}) de chaque modèle est tracé en fonction de l'abscisse x. Il y a une différence de 1 % entre les deux modèles dans la zone située au-dessus de l'anomalie. Par ailleurs, le \mathcal{C} est maximum à la verticale du coeur d'anomalie et faisant sentir plus loin en surface du côté de la tête de l'hétérogénéité.

Dans le troisième exemple, nous simulons la réponse en mode TM d'un filon conducteur de conductivité 10^{-1} mho/m incliné de 56° par rapport à l'horizontale, enterré dans un sol de conductivité 10^{-5} mho/m, recouvert superficiellement par une couche de conductivité 10^{-4} mho/m d'épaisseur 17.5 m (figure 39).

Les différences en module et en phase de l'impédance à la surface du sol, se sont représentées sur les figures 40, 41. Sur la figure 42, nous représentons la variation du taux d'anomalie en champ électrique en fonction de l'abscisse x.

A cause du contraste de résistivité très élevé entre le filon et le milieu avoisinant, l'effet de bord s'est bien manifesté tant en mesures expérimentales relevées des travaux de CHAO.C.KU (36) qu'en valeurs simulées. Notre dernière application s'est portée sur l'étude de la réponse d'un bassin géothermal illuminé par une onde électromagnétique plane en mode TM et TE. Ce bassin géologique se forme de sédiments séparés par une faille. Le réservoir d'eau chaude se schématise par une portion de résistivité $1 \Omega\text{m}$ et localisé le long de la faille (figure 43).

COMPARAISON ENTRE LE MODELE 3D (DMV) ET LE MODELE 2D (MT-TE)



- DMV ($X_E = 600 \text{ m}$)
- x x x DMV ($X_E = 1200 \text{ m}$)
- - - MT ($AB = 146.5 \text{ m}$; $BC = 70 \text{ m}$)
- o o o MT ($AB = 166.5 \text{ m}$; $BC = 87 \text{ m}$)

$$\tau_{DMV} = \frac{|H_x/E_y|_{B.G.} - |H_x/E_y|_{ano}}{|H_x/E_y|_{B.G.}}$$

B.G.: Back ground

$$\tau_{MT} = \frac{|H_x/E_y|_{tab} - |H_x/E_y|_{ano}}{|H_x/E_y|_{tab}}$$



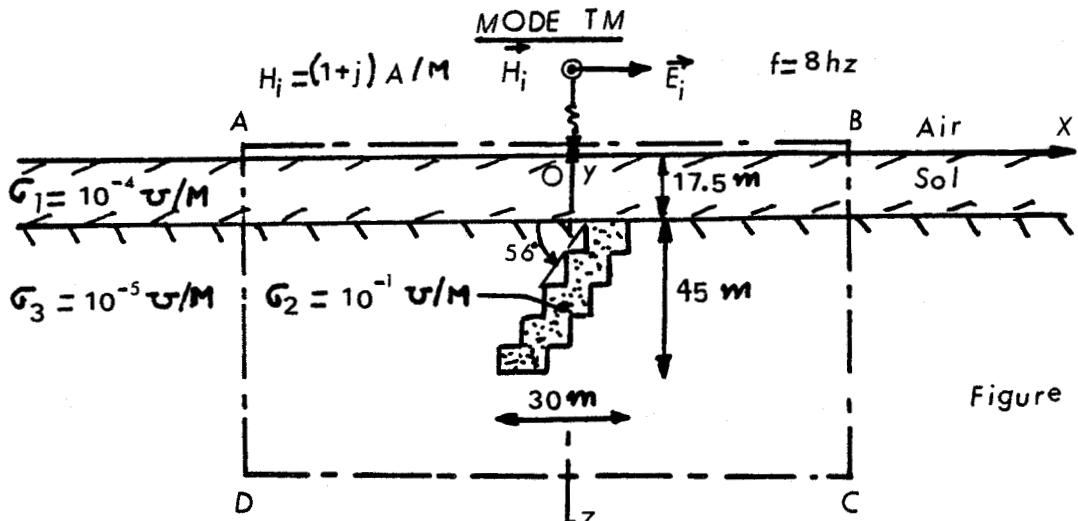


Figure 39

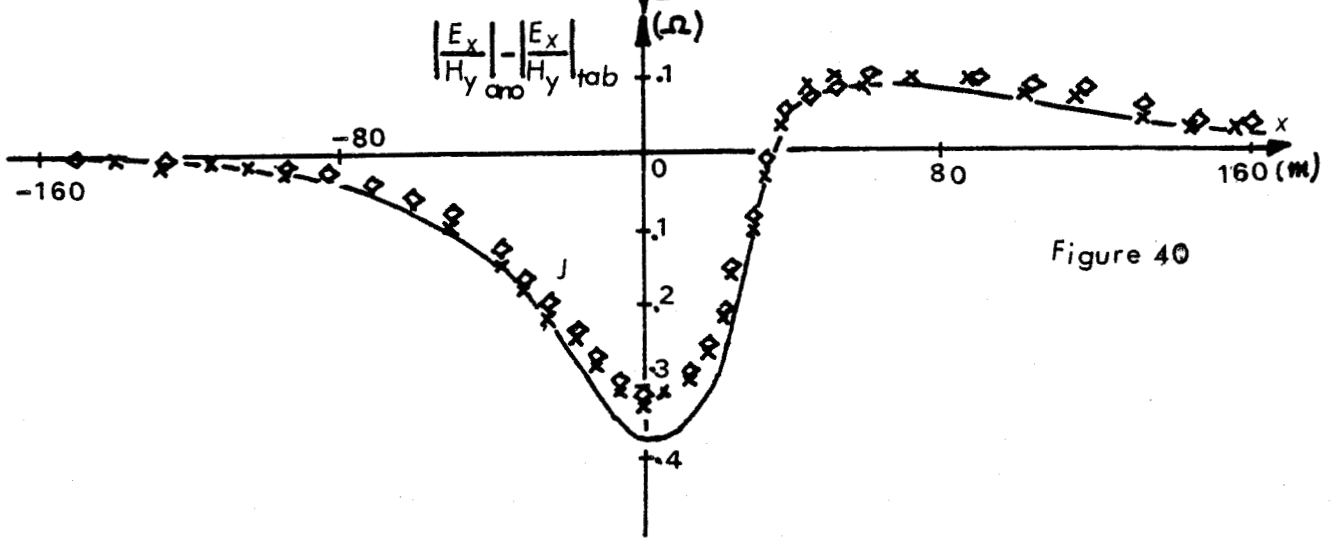


Figure 40

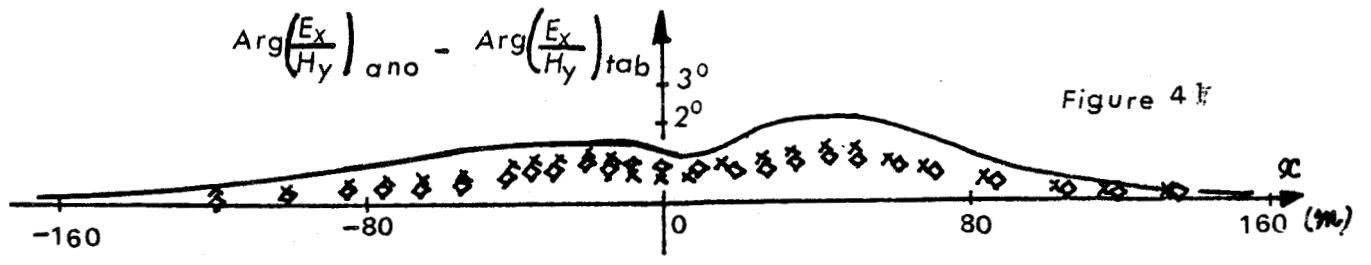


Figure 41

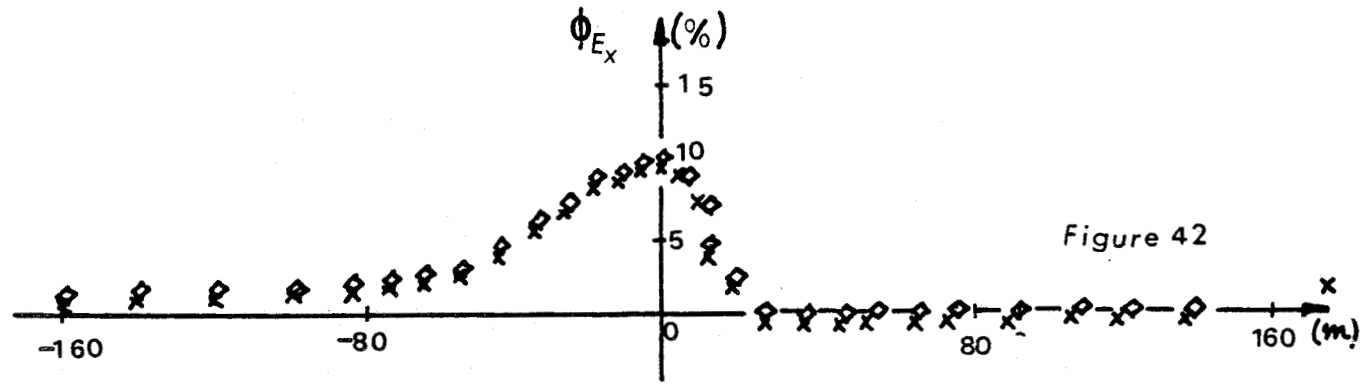


Figure 42

— Mesures expérimentales de CHAO C. KU
 + + + Modele numerique (AB=255 m ; BC=10132 m)
 ◇ ◇ ◇ Modele numerique (AB=515 m ; BC=1632 m)

de NGUYEN



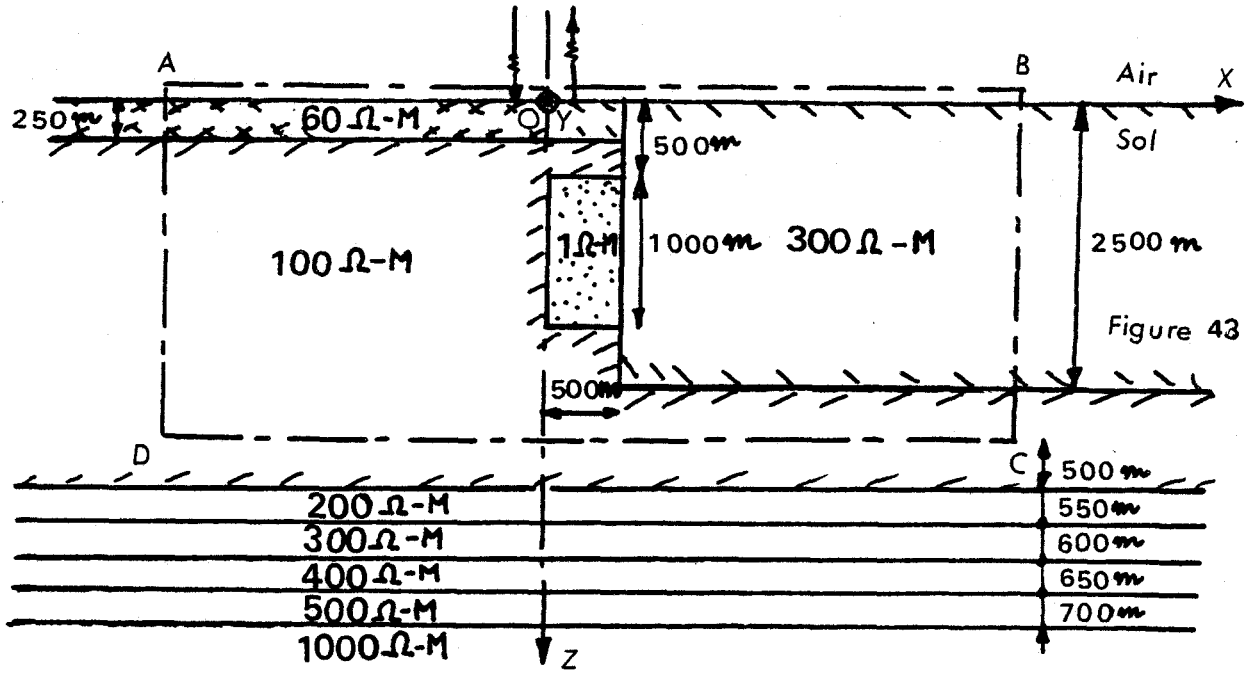


Figure 43

$H_{y_i} = (1+j) A/M$

MODE TM

$f = 10 \text{ hz}$

- Modele 3 (AB = 6000 m ; BC = 3000 m)
- o o o Modele 1 (Elements finis) de BENANI [8]
- x x x Dernier modele (AB = 6100 m ; BC = 3000 m)

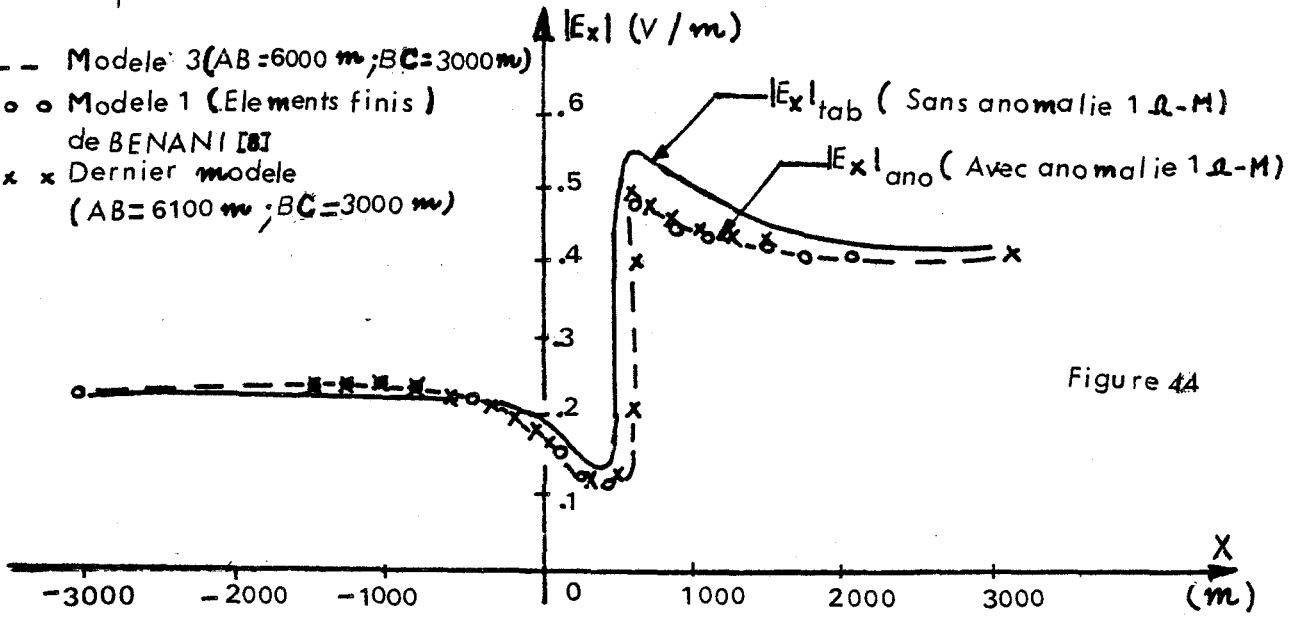


Figure 44

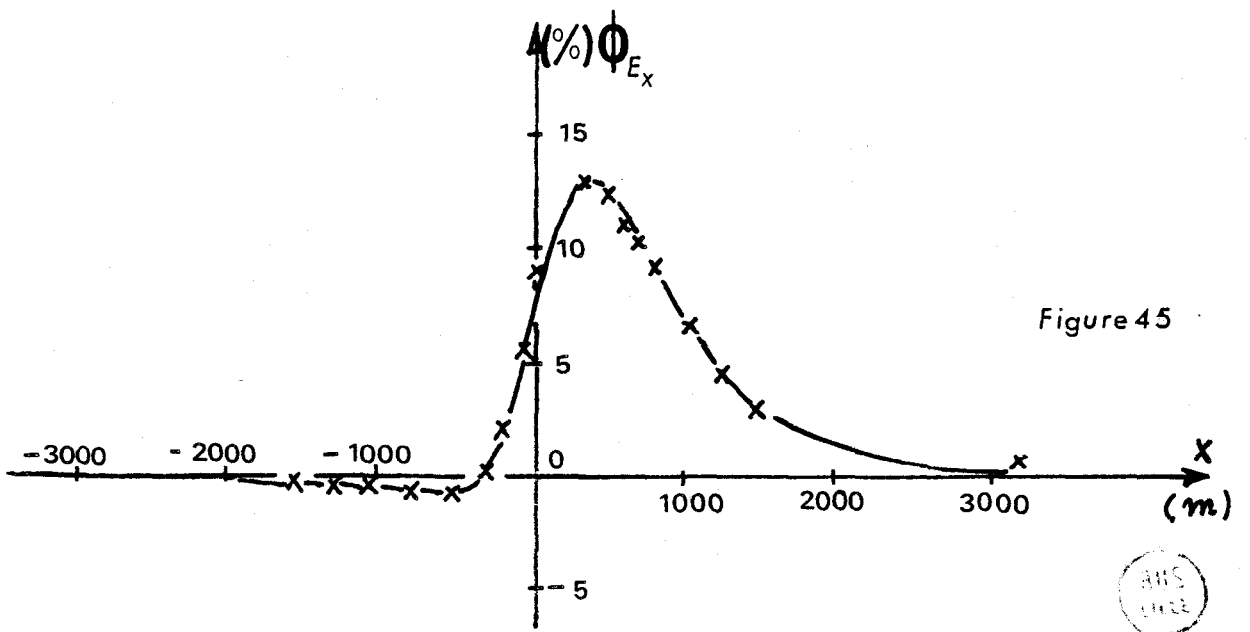


Figure 45



En mode TM nous avons représenté sur les figures 44 et 45, l'évolution du champ électrique E_x et son taux d'anomalie en surface en fonction de x . La fréquence et l'amplitude du champ magnétique incident se sont fixés respectivement à 10 Hz et $(1 + j)A/m$.

Aussi avons nous tracé les mêmes courbes simulées par le modèle 3 du chapitre 1 (CAUTERMAN et Collaborateurs {37}) et par le modèle 1, en éléments finis (BENANI {8}) à titre de comparaison ; la convergence a été parfaite en champ électrique $|E_x|_{ca}$.

Nous notons évidemment l'influence de la faille séparant deux compartiments, le saut du champ électrique est dans un rapport 5 au voisinage de la faille, qui n'est autre que le rapport des résistivités.

En outre, nous constatons que l'anomalie n'a pas d'influence sur cette variation, étant donnée qu'elle est masquée par les terrains de 60 Ωm et 300 Ωm .

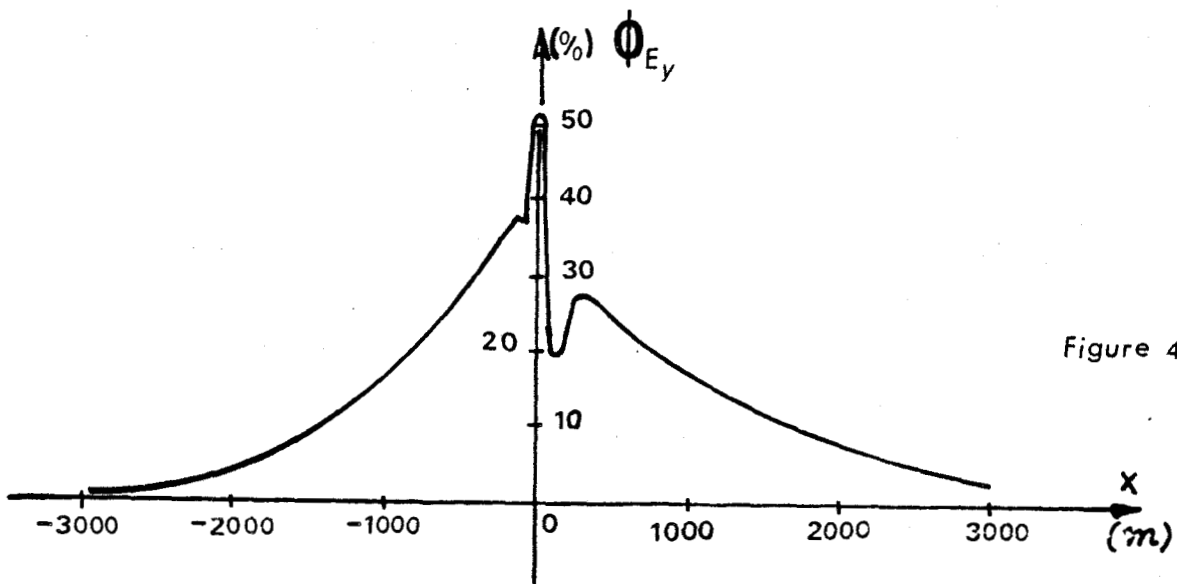
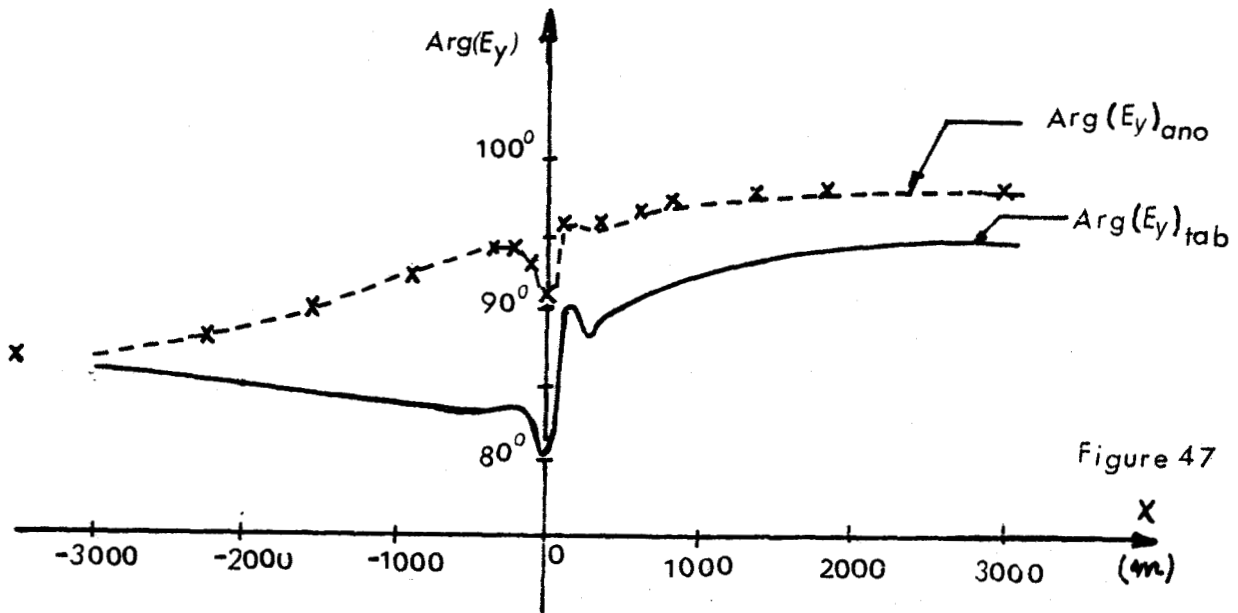
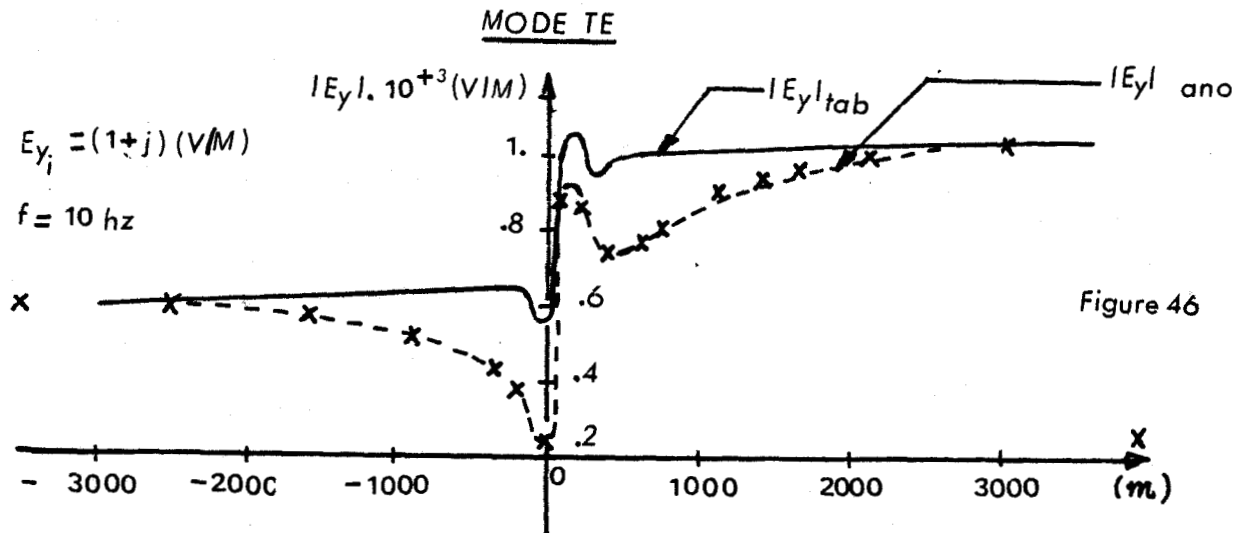
Pour le taux d'anomalie en champ électrique, à cause du masquage, il n'est pas symétrique par rapport au centre du réservoir, ce taux tend très vite vers 0 dans la région la plus conductrice.

En mode TE, nous représentons respectivement sur les figures 46, 47, 48, le module, la phase du champ électrique E_y à l'interface air-sol en présence et en l'absence du réservoir d'eau chaude, le taux d'anomalie de E_y . Le champ électrique incident et sa fréquence sont fixés à $(1 + j)V/m$, 10 Hz. Par rapport à la réponse en mode TM, le réservoir a une influence nette sur la variation du champ électromagnétique total; l'effet de ses bords s'est bien observé, ainsi le taux d'anomalie de E_y est important.

Nous représentons ensuite sur les figures 49, 50, 51 la variation du module, de la phase de la conductance (H_x/E_y) ainsi que son taux d'anomalie à l'interface air-sol. Les deux pics consécutifs relevés de la figure 51, permettent d'affirmer la présence à la fois du réservoir et de la faille.

La variation du "tipper" (H_z / H_x) a été représentée sur la figure 52. L'augmentation de 20 % aux abords du réservoir nous donne l'information supplémentaire sur son étendue.

En conclusion, en conjuguant les deux réponses du bassin illuminé par l'onde en mode TM et TE, nous pouvons établir une vue générale de la carte du sous-sol.

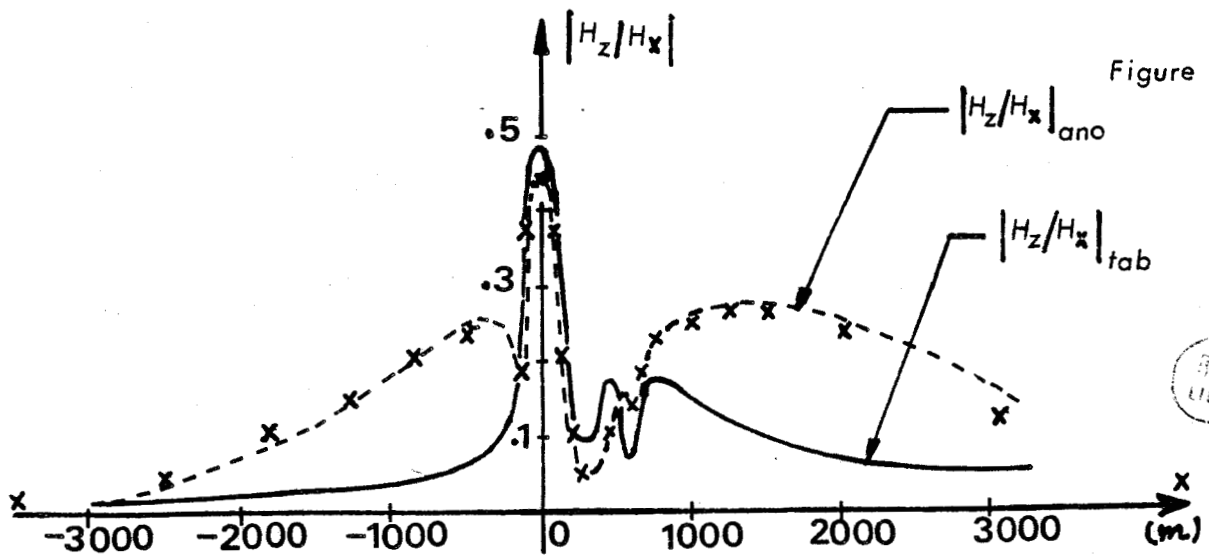
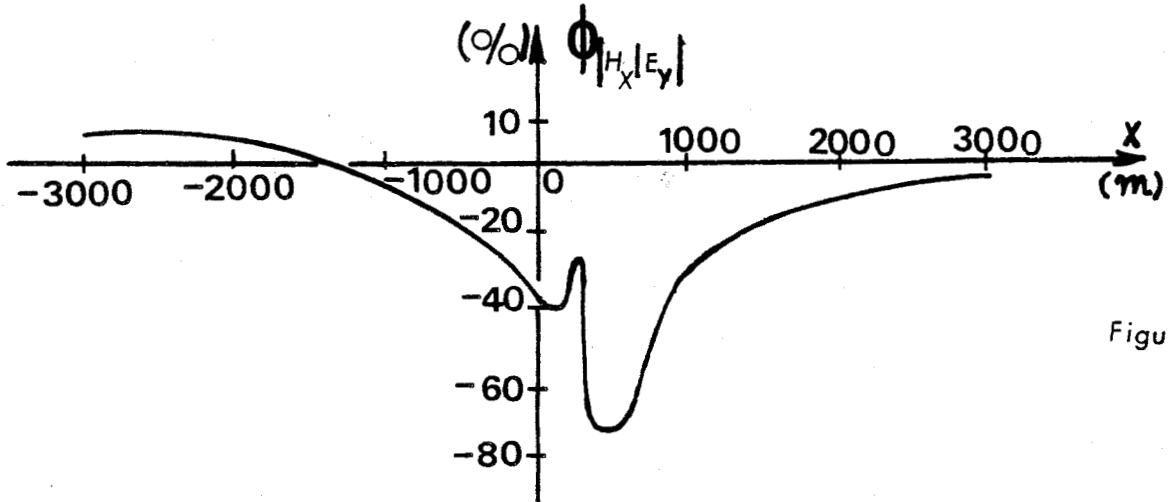
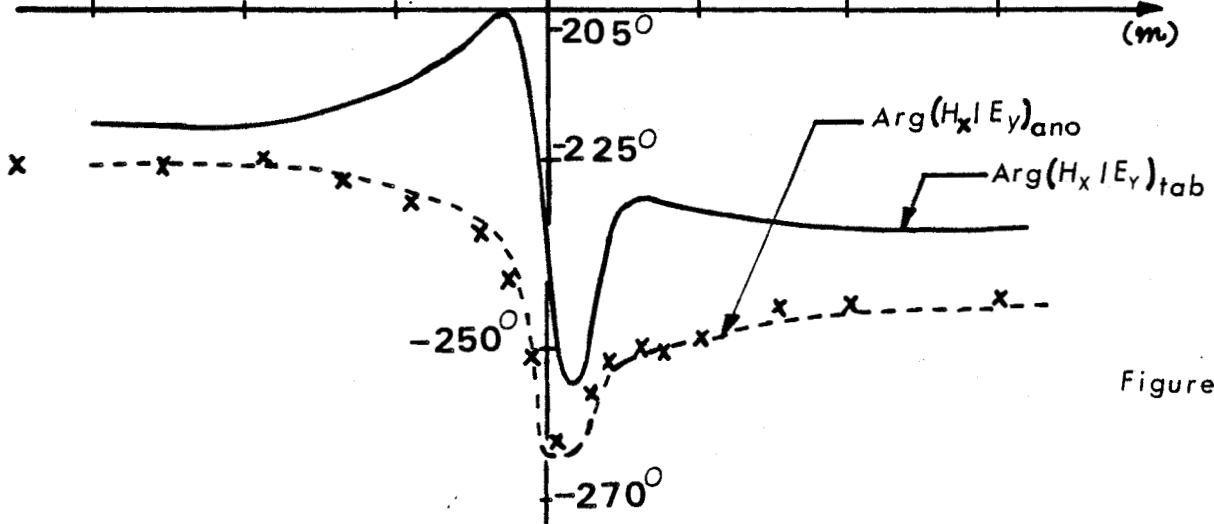
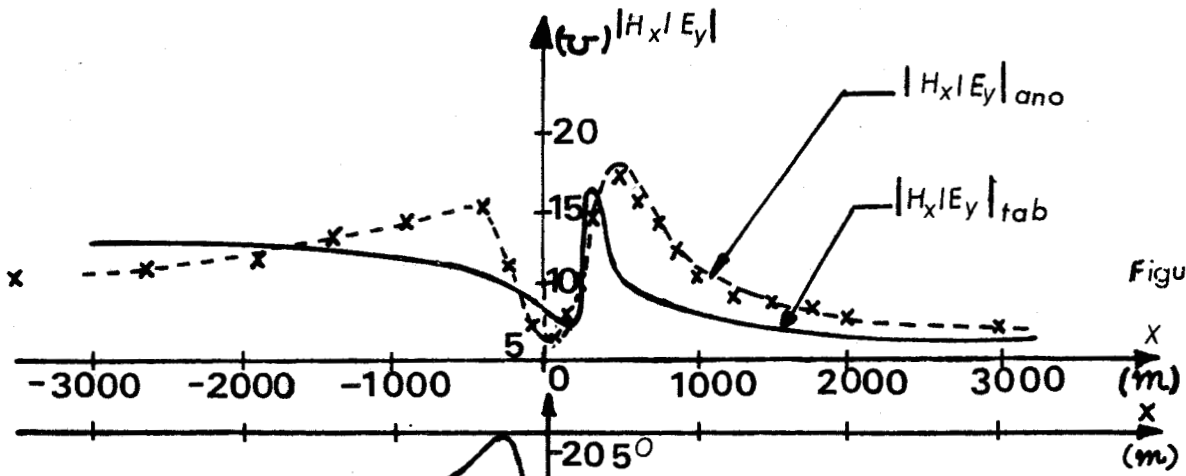


Champ électromagnétique en présence d'anomalie $1\Omega\text{-M}$

--- AB=6000m ; BC=3000m

* * * AB=7000m ; BC=3250m





III.2. MODELES SIMULES EN HAUTE FREQUENCE

Nous étudions l'étude du phénomène de réflexion et de transmission d'une onde électromagnétique plane à travers une lame conductrice ou diélectrique.

Dans le premier exemple, figure 53, l'onde incidente est normale à une lame diélectrique d'épaisseur 55 cm de permittivité relative 10.

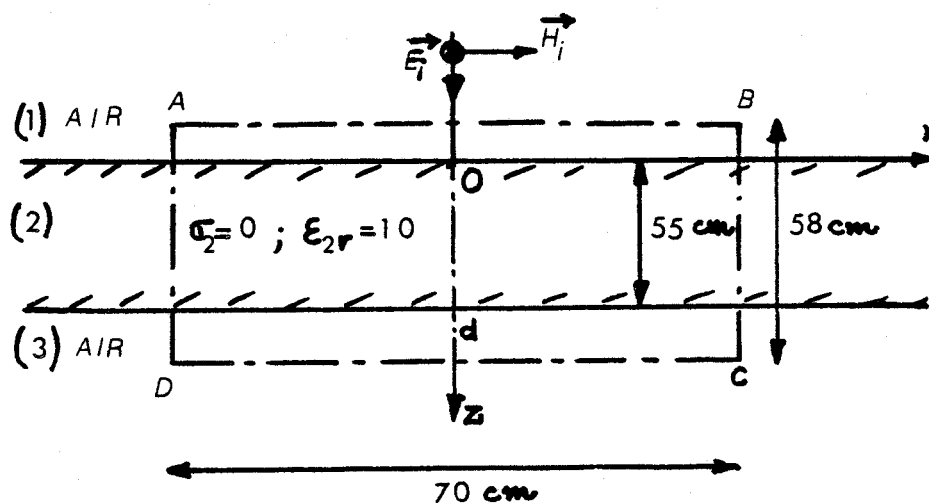


Figure 53

Nous rappelons ci-dessous les expressions du coefficient de réflexion :

* Mode TM :

$$R_{TM} = - \frac{H_r(0)}{H_i(0)}$$

* Mode TE :

$$R_{TE} = \frac{E_r(0)}{E_i(0)}$$

de même le coefficient de transmission s'écrit :

* Mode TM :

$$T_{TM} = \frac{Z(z)}{Z(z)} \cdot \frac{H_t(d)}{H_i(0)}$$

où $Z_{(i)}$ est l'impédance intrinsèque du milieu i , et vaut :

$$\frac{\omega \mu_i}{(\omega^2 \mu_i \epsilon_i - j \omega \mu_i \sigma_i)^{1/2}}$$

* Mode TE :

$$T_{TE} = \frac{E_t(d)}{E_i(0)}$$

Le maillage étant choisi en fonction de la fréquence de l'onde incidente. Pour une maille quelconque, sa largeur l_x devrait satisfaire $\gamma_0 l_x \ll 1$ où γ_0 est la constante de propagation de l'onde dans l'air.

Nous avons représenté sur les figures 54, 55, 56, 57 respectivement les évolutions des modules et phases des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de la fréquence variable de 10 kHz à 1 GHz.

Aux fréquences suffisamment basses telles que $\lambda_p \ll d$, λ_p étant la longueur d'onde dans la paroi ($\lambda_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f}$; c vitesse de la lumière), l'onde est totalement transmise.

Lorsque la fréquence est aux environs de 172 MHz ($\lambda_p \approx d$) le phénomène d'ondes stationnaires commence à apparaître dans l'épaisseur, on enregistre des variations rapides des coefficients de réflexion et de transmission.

Dans la gamme de fréquences de 172 MHz à 1 GHz, cette variation oscillatoire est de plus en plus accentuée surtout celle de la phase.

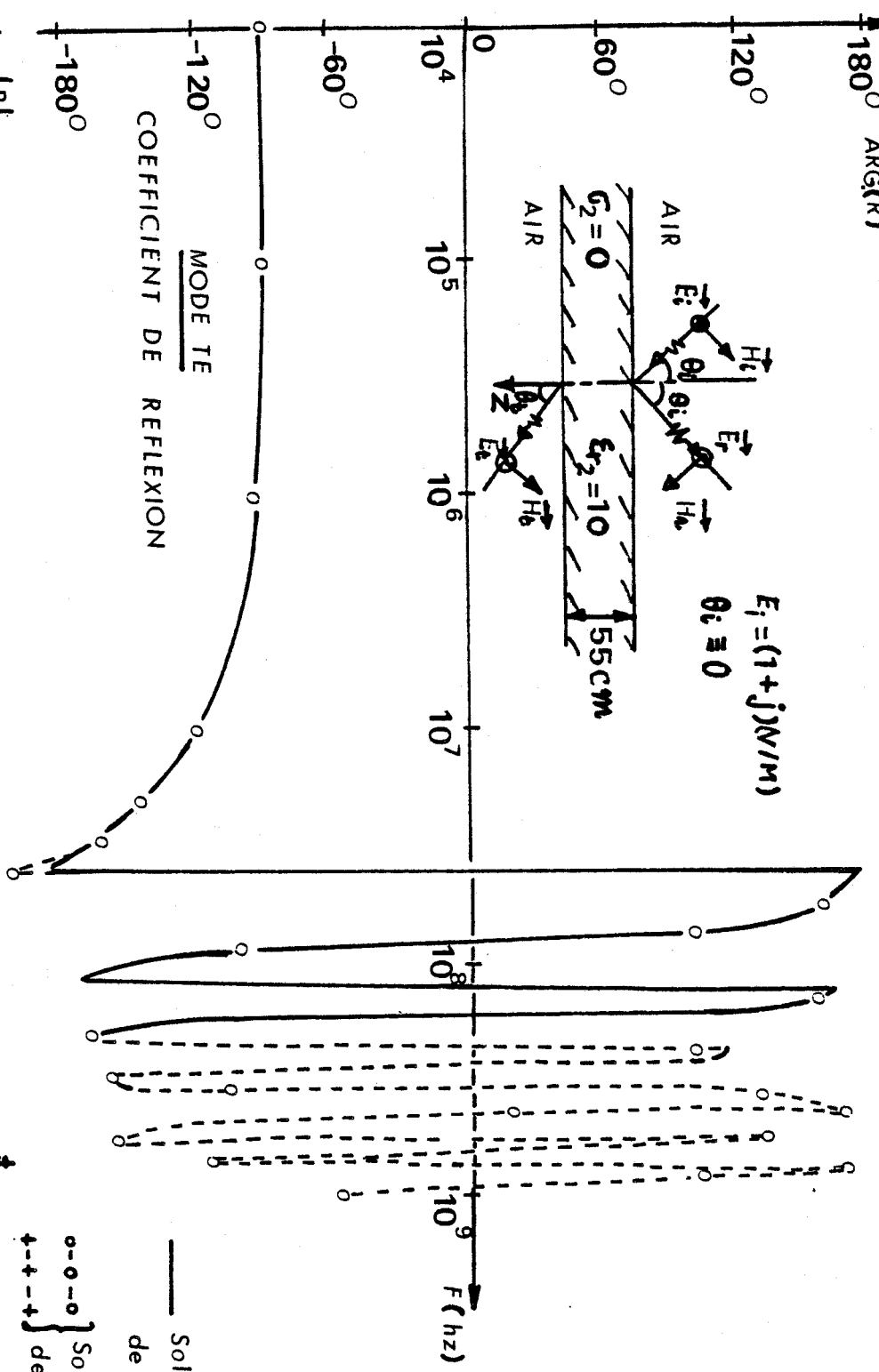


FIGURE 54

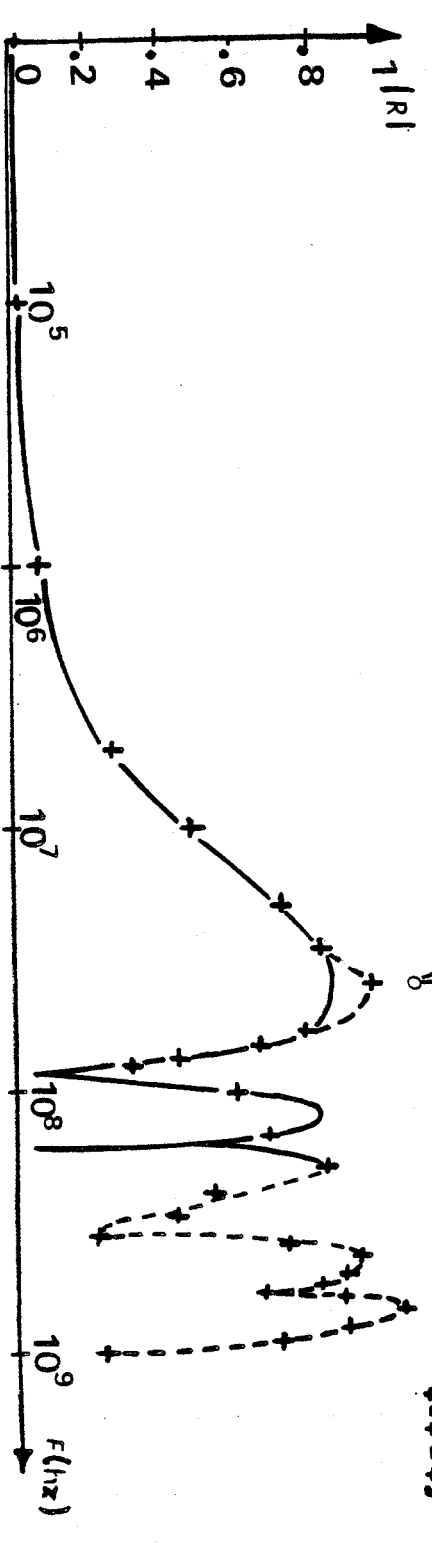


FIGURE 55

— Solution analytique
 de NADER
 o-o-o-o } Solution numerique
 +--+--+ } de NGUYEN

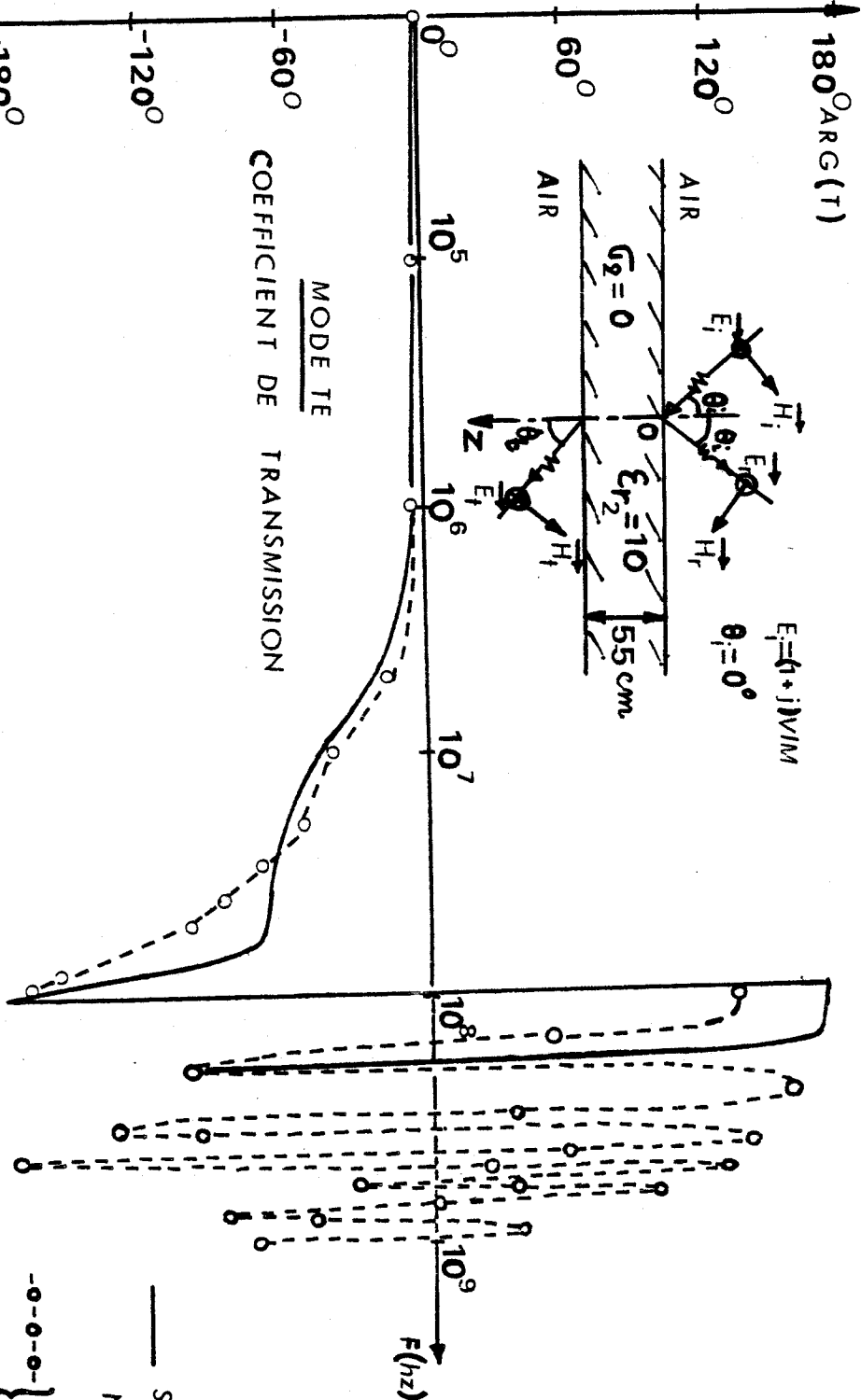


FIGURE 56

— Solution analytique de
NADER
-o-o-o- } Solution numerique de
-+-+-+ } NGUYEN

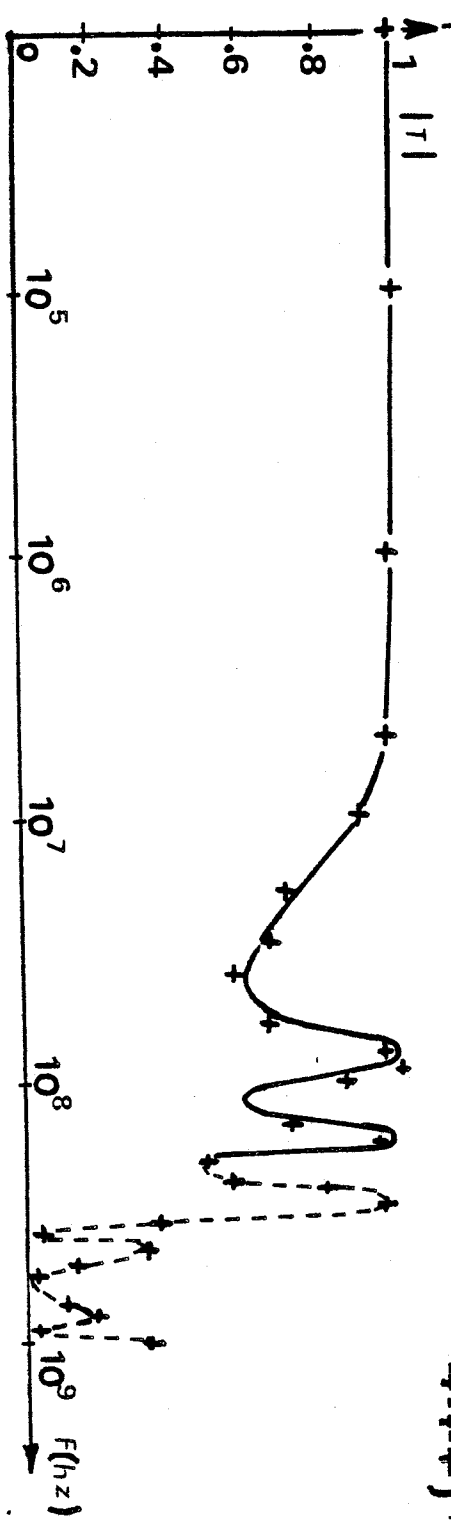


FIGURE 57



D'après NADER [38], si la fréquence est telle que

$$* \lambda_p = \frac{d}{2k} : |T| \text{ est maximum et } |R| \text{ minimum où } k \text{ est entier positif.}$$

$$* \lambda_p = \frac{d}{(2k+1)} : |T| \text{ est minimum et } |R| \text{ maximum.}$$

Il y a une légère différence entre la phase de T du modèle analytique et celle du modèle numérique.

Abordons la même étude pour une lame conductrice d'épaisseur 20 cm, de conductivité 10^{-2} mho/m et de permittivité relative 10. L'onde incidente est quelconque, de fréquence qui varie de 10 kHz à 200 MHz (figure 58).

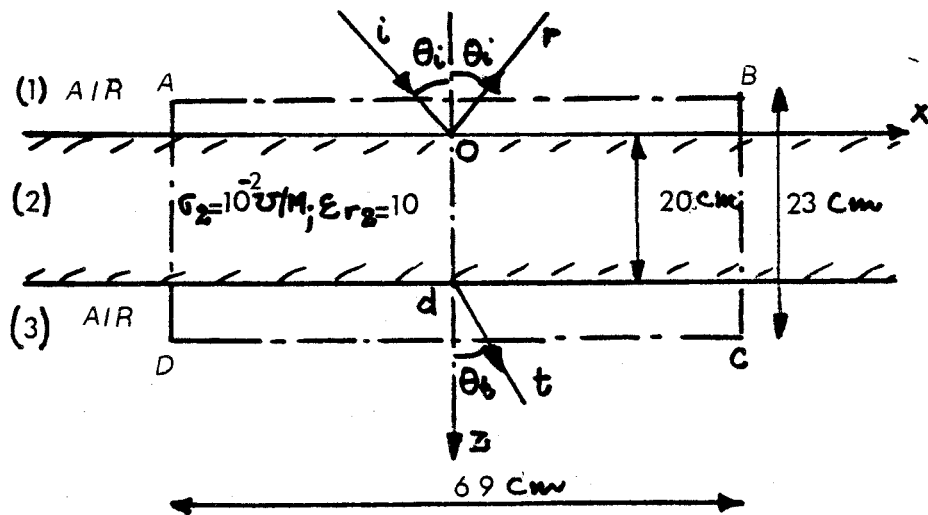


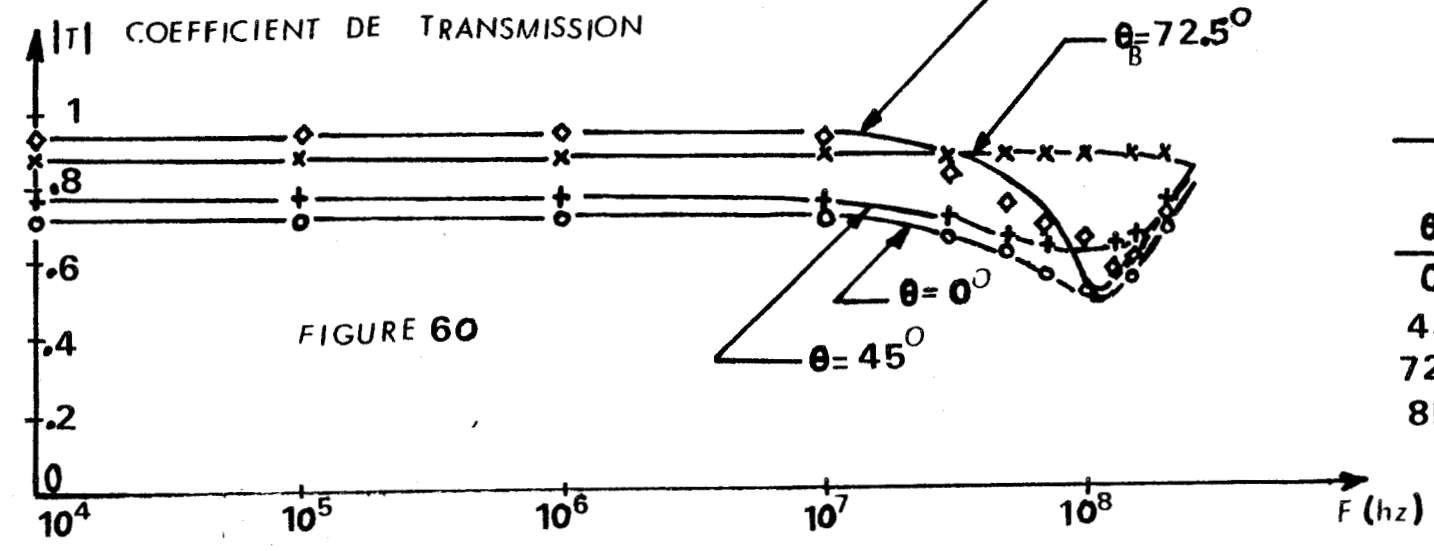
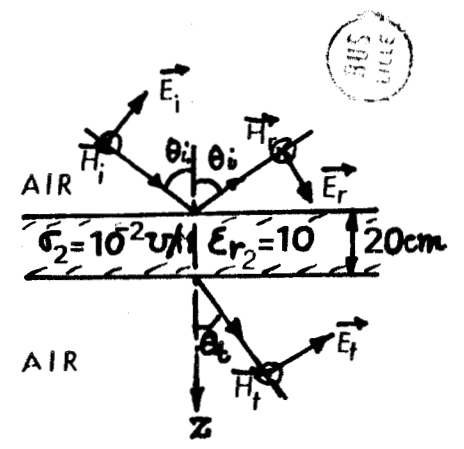
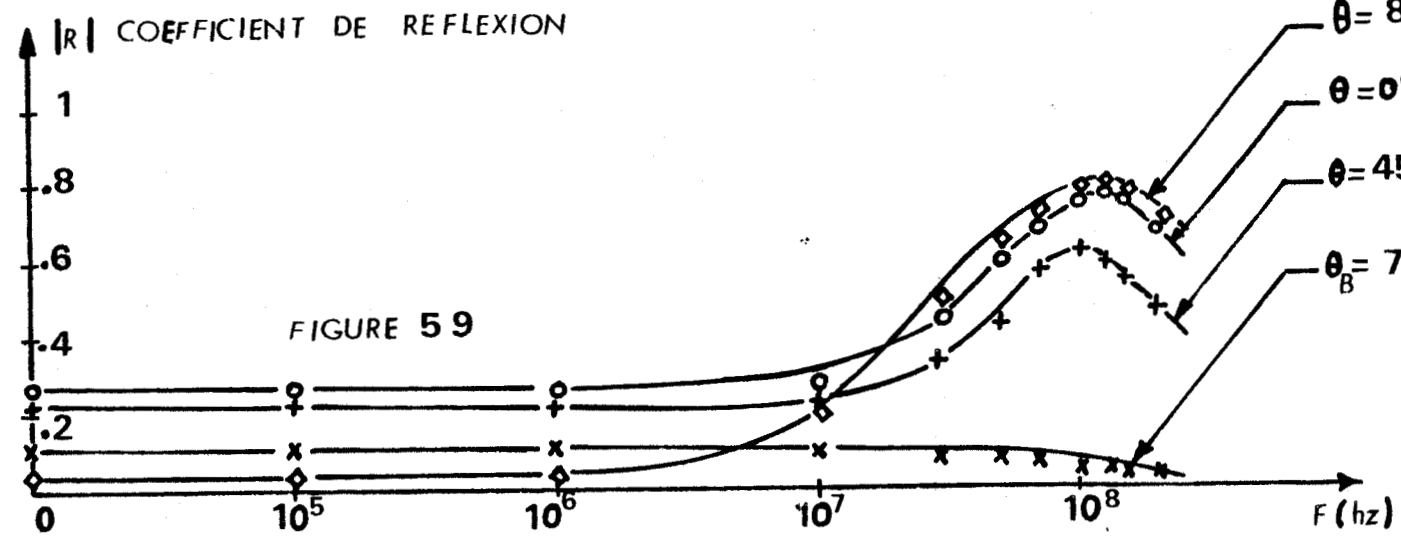
Figure 58

Les modules des coefficients de réflexion et de transmission sont représentés sur les figures 59, 60, 61, 62 pour les deux modes TM et TE de propagation de l'onde.

Sous la polarisation TM, aux fréquences basses, la transmission croît lorsque l'incidence s'écarte de la normale accompagnée d'une réflexion décroissante.

Par contre, sous la polarisation TE, c'est l'inverse qui se produit aux fréquences basses. Aux fréquences élevées, T et R retrouvent leur comportement du type diélectrique.

MODE TM



θ_i°	SOLUTION NUMERIQUE				
0	o	o	o	o	o
45	+	+	+	+	+
72.5	x	x	x	x	x
85	◇	◇	◇	◇	◇

— SOLUTION ANALYTIQUE

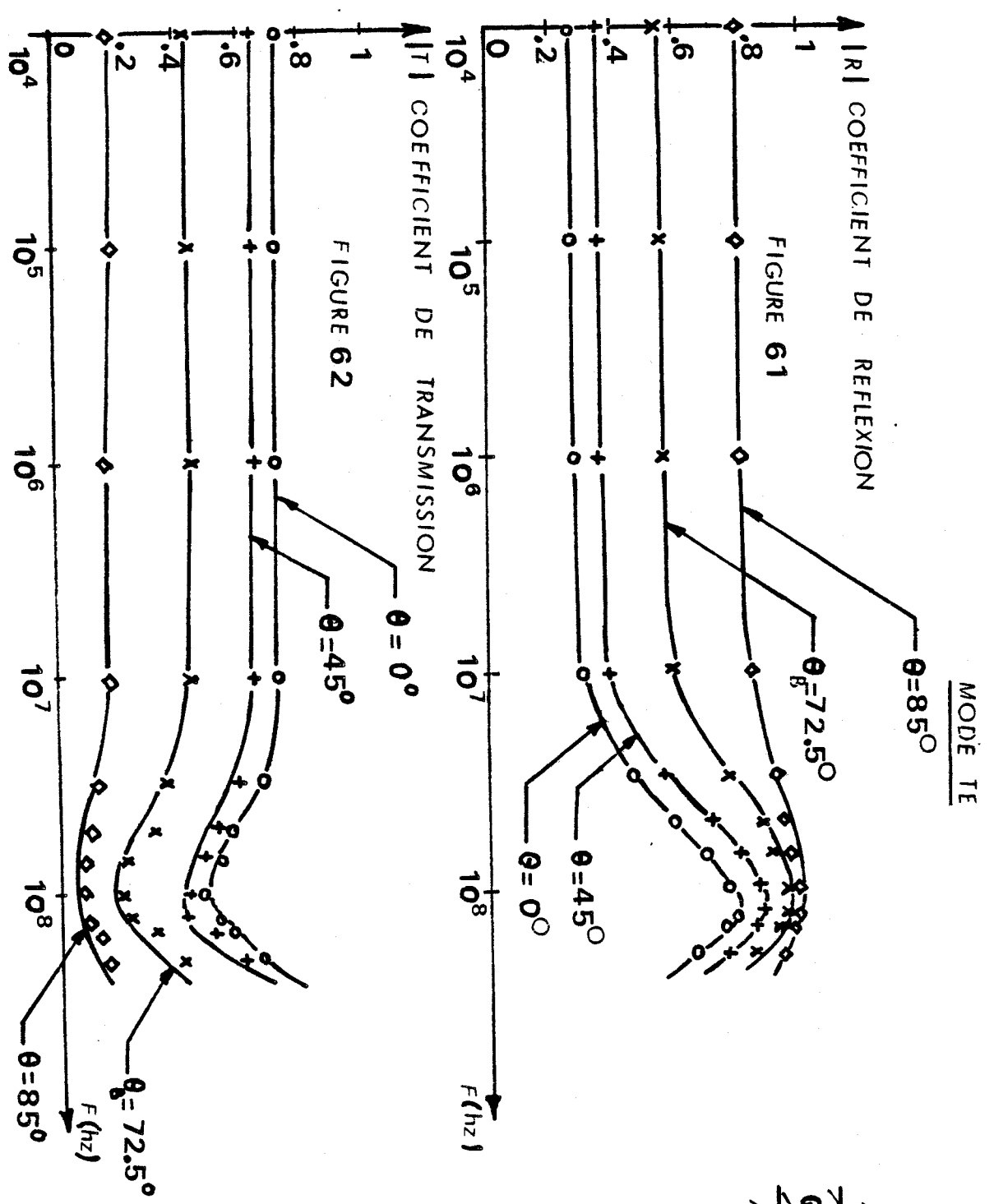
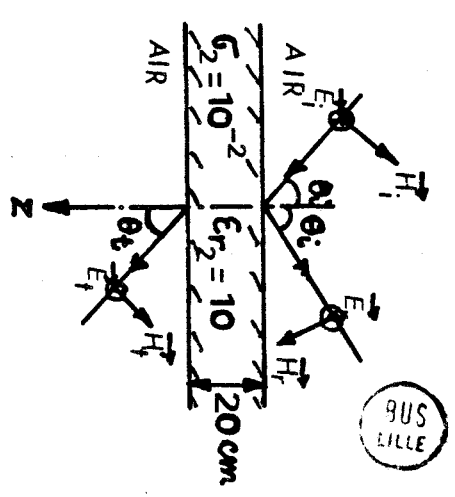


FIGURE 61

FIGURE 62



SOLUTION ANALYTIQUE

θ_i	SOLUTION ANALYTIQUE	SOLUTION NUMERIQUE
0	o o o	o
45	+ + +	+
72.5	x x x	x
85	o o o	o

Au cours de ce chapitre, nous avons montré par des applications concrètes que le dernier modèle numérique avait une large utilité en simulation de la réponse d'une structure bidimensionnelle, illuminée par une onde électromagnétique plane, de polarisation TM et TE, dont la fréquence peut varier aussi dans la gamme très basse que dans la gamme d'onde radioélectrique.

CONCLUSION

- - - -

L'élaboration du modèle numérique simulant la réponse d'un demi-milieu hétérogène "bidimensionnel" illuminé par une onde électromagnétique plane, basse fréquence en mode TM, a été entreprise au premier chapitre, nous y avons développé ce modèle suivant la méthode discrète aux frontières limites, en l'occurrence, celle de différences finies associée au calcul variationnel. Il est possible à l'issue de cette étude, de modéliser un environnement géologique complexe souvent rencontré en exploration géophysique minière de type électrique ou électromagnétique.

Dans le second chapitre, la mise au point de la condition aux limites du type produit de convolution à l'interface supérieure a permis d'étendre la validité du modèle dans la gamme de fréquences élevées pour les deux modes de propagation TM et TE, en accord avec le principe de dualité.

Avec le modèle général obtenu, nous avons montré ensuite qu'il est capable de simuler des phénomènes intéressants de radiopropagation en géophysique, en compatibilité électromagnétique.

Ce travail ne constitue qu'une première étape, nous pensons que lors d'une étude ultérieure il est possible d'appliquer la condition aux limites du type produit de convolution aux autres frontières, notamment sur celle située au fond du domaine discrétisé et de généraliser ensuite l'introduction d'une excitation du type ligne "line-source" de courant magnétique ou électrique de longueur infinie et par la suite à une structure tridimensionnelle. En parallèle, le développement du modèle par la méthode des éléments finis s'avère intéressant en matière de comparaison.

Nous souhaitons que ce travail rende les plus grands services à tout spécialiste qui s'intéresse aux méthodes de simulation de phénomène radiopropagation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- {1} J.R. WAIT 1962 : *Théory of magneto-telluric fields*. J. Research N.B.S. D - Propagation Vol. 66 D, n° 5.
- {2} I.K. REDDY, D. RANKIN 1975 : *Magneto-telluric response of lateral inhomogeneous and anisotropic media*. Geophysics, Vol. 40, n° 6.
- {3} G.E. FORSYTHE, W.R. WASOW 1967 : *Finite difference method for partial differential equations*. Ed. John WILEY and SONS - New York.
- {4} A. WEXLER 1969 : *Computation of electromagnetic fields* I.E.E.E. Trans. on Micro.Theory and Techn. Vol. MTT 17, N° 8.
- {5} J.L. VACHON 1973 : *Etude théorique de l'influence d'un tube isolant sur les mesures télélog*. Thèse de Docteur Ingénieur en Electronique. Université des Sciences et Techniques de Lille. (USTL).
- {6} P. RAVIART, P. FAURE 1976 : *Cours d'analyse numérique*. Ecole Polytechnique.
- {7} O.C. ZIENKIEWICZ 1973 : *La méthode des éléments finis*. Ediscience Paris.
- {8} A. BENANI 1982 : *Modélisation du sondage magnétotellurique par la méthode des éléments finis*. Diplôme d'études approfondies de Micro-onde. à l'USTL.
- {9} D.F. PRIDMORE, G. W. HOHMANN, S.H. WARD, W.R. STILL 1981 : *An investigation of finite element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions*. Géophysics Vol. 46, n° 7.
- {10} J.R. WAIT 1970 : *Electromagnetic waves in stratified media*. 2nd Ed. Pergamon Press.

- {11} M. WAESLYNCK 1967 : *Etude de structures anticlinales ou synclinales par la méthode magnétotellurique*. Bulletin du Centre de Recherche du Département géophysique PAU, SNPA.
- {12} A. DEY, H.F. MORISSON 1979 : *Resistivity modeling for arbitrarily shaped two dimensional structures*. Geophysical Prospecting Vol. 27.
- {13} A. DEY, H.F. MORISSON 1979 : *Resistivity modeling for arbitrarily shaped three dimensional structures*. Geophysics Vol. 44, N° 4.
- {14} I.R. MUFTI :
- a) 1976 *Finite difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two dimensional structures*. Geophysics Vol. 41. N° 1.
- b) 1978 *A practical approach to finite difference resistivity modeling*. Geophysics, Vol. 43, N° 5.
- c) 1980 *Finite difference evaluation of apparent resistivity curves*. Geophysical prospecting Vol. 28.
- {15} C.R. BREWIT - TAYLOR, J.T. WEAVER 1976 : *On the finite difference solution of two dimensional induction problems*. Geophysics J.R. Astro. Soc. Vol. 47.
- {16} J.H. COGGON 1971 : *Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method*. Geophysics Vol. 36 N° 1.
- {17} P. SILVESTER, R.S. HASLAM 1972 : *Magnetotelluric modeling by the finite element method*. Geophysical Prospecting Vol. 20.
- {18} F.W. JONES 1973 : *Induction laterally non uniform conductors. Theory and numerical models*. Physics of the earth and planetary interiors Vol. 7.
- {19} P. PRAUS 1975 : *Numerical and analogue modeling of inductions effects in laterally non uniform conductors*. Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. 10.

- {20} J.A. STODT, G.W. HOHMANN, S.C. TING 1981 : *The telluric magnetotelluric in two and three dimensional environments*. Geophysics Vol. 46, n° 8.
- {21} N. GASTINEL 1966 : *Analyse numérique linéaire*. Ed. Hermann.
- {22} R.S. VARGA 1962 : *Matrix iterative analysis*. Ed Prentice-Hall, Inc.
- {23} SERVICE CENTRAL DES TELECOMMUNICATIONS ET DE L'INFORMATIQUE 1971 : *Problèmes relatifs à la résolution des systèmes linéaires. Analyse Numérique - Note d'étude AN - 27*
- {24} P. SILVESTER, H.S. CABYAN, B.T. BROWNE 1973 : *Efficient techniques for finite element analysis of electric machines*. IEEE Trans. Power Appl. Syst. Vol. PAS-92.
- {25} G. KUNETZ 1966 : *Principles of direct current resistivity prospecting*. Gebrüder Borntraeger, BERLIN.
- {26} H. FLATHE 1974 : *Comment on "the automatic fitting of a resistivity sounding by geometrical progression of depth"*. Geophysical prospecting Vol. 22.
- {27} U. SCHMUCKER :
- a) 1971 : *Interpretation of induction anomalies above non uniform surface layers*. Geophysics Vol. 36, N°1.
 - b) 1973 : *Regional induction studies. A review of methods and results*. Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. 7.
- {28} J.T. WEAVER 1979 : *Electromagnetic induction in thin sheet conductivity anomalies at the surface of the earth*. Proceeding of the IEEE Vol. 67.
- {29} P. WEIDELT 1975 : *Inversion of the two dimensional conductivity structures*. Physics of the Earth and Planetary interiors. Vol. 10.
- {30} I.I. ROKITYANSKY 1975 : *The interpretation of anomalies fields by using their frequency characteristics*. Physics of the Earth and Planetary interiors. Vol. 10.

- {31} D.T. THOMAS 1969 : *Functional approximations for solving boundary values problems by computer*. IEEE Trans. on Micro. Theo. and Techn. Vol. MTT 17, N° 8.
- {32} I.S. DUFF 1978 : *Some current approaches to the solution of large sparse systems of linear equations*. (Congrès International sur les méthodes numériques dans les sciences de l'ingénieur). Ed. Dunod - Collection dirigée par R. GLOWINSKI.
- {33} D'ERCEVILLE I. and KUNETZ K. 1962 : *The effect of the fault on the earth natural electromagnetic field*. Geophysics Vol. 27.
- {34} Q.T. NGUYEN 1980 : *Etude et réalisation d'un modèle tridimensionnel permettant de simuler la réponse d'un filon conducteur excité par un dipôle magnétique vertical*. Diplôme d'études approfondies en Electronique USTL.
- {35} Q.T. NGUYEN, P. DEGAUQUE, M. CAUTERMAN 1982 : *Modélisation numérique de la réponse d'un gisement métallifère excité par une boucle magnétique - Application au gisement de Neves*. Colloque national sur la revalorisation des ressources du sous-sol - organisé par le Ministère de la recherche et d'industrie. Novembre 1982.
- {36} CHAO C. KU 1976 : *Numerical inverse magnetotelluric problems*. Geophysics Vol. 41, n° 2.
- {37} M. CAUTERMAN, Q.T. NGUYEN and P. DEGAUQUE 1982 : *Numerical modeling of geophysical structures excited by an electromagnetic wave*. Radio Science Vol. 17, n° 5.
- {38} S.E. NADER 1980 : *Etude de la pénétration des champs électromagnétiques transitoires à travers des parois conductrices et des nappes de fils parallèles*. Thèse de Doctorat de 3ème cycle en Electronique. USTL.

OUVRAGES CONSULTÉS

* Mathématiques appliquées

- 1) L. CAIRO, T. KAHAN 1962 : Techniques variationnelles en Radioélectricité. Monographies Ed. Dunod Paris.
- 2) B.H. Mc. DONAL, M. FRIEDMAN, A. WEXLER 1974 : Variational solution of integral equations. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques Vol. MTT-22, N°3.
- 3) W.J. ENGLISH, F.J. YOUNG 1971 : An E vector variational formulation of the Maxwell equations for cylindrical waveguide problems. IEEE Trans. on Micro. Theory and Techn. Vol. MTT 19, N° 1.
- 4) P. DALY 1973 : Variational expressions, Pseudoenergy and Power IEEE Trans. on Micro. Theor. and Techn. Short paper - February 1973.
- 5) K. KALIKSTEIN, A. SEPULVEDA 1981 : Variational principles and variational functions in electromagnetic scattering. IEEE Trans. on Antennas and Propagation. Vol. AP 29 N°5.
- 6) K. MORISHITA, N. KUMAGAI 1977 : Unified approach to the derivation of variational expressions for electromagnetic fields. IEEE Trans. on Micro. Theory and Techniques. Vol. MTT 25, n° 1.
- 7) L. KANTOROWICH, V. KRYLOV 1964 : Approximate method of higher analysis Ed. Bentertrans. New York Wiley.
- 8) S. GODOUNOV - V. RIABENKI 1977 : Schéma aux différences. Trad. française Ed. MIR-MOSCOU.
- 9) F.B. HILDEBRAND 1968 : Finite difference equations and simulations Ed. Englewood Cliffs - Newjersey.

- 10) A. SAMARSKI, V. ANDREEV 1978 : Méthodes aux différences pour équations elliptiques. Trad. française Ed MIR-MOSCOU.
- 11) D. YOUNG 1954 : Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Am. Math. Soc.
- 12) E. DURAND 1961 : Solutions numériques des équations algébriques Ed. MASSON.
- 13) T.K. SARKAR, K.R. SIARKIEWICZ, R.F. STRATTON 1981 : Survey of numerical methods for solutions of large systems of linear equations for electromagnetic field problems. IEEE Trans on Ant. and Prop. Vol AP 29, N° 6.
- 14) A. BAYLISS, M. GUNZBURGER, L. TURKEL 1982 : Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. Siam J. Appl. Math. Vol. 42, N° 2.
- 15) C.I. GOLDSTEIN : Numerical methods for Helmholtz-type equations in unbounded regions. Applied mathematics department - Brookhaven National Laboratory Upton, New York.
- 16) A. AUSSEMS 1972 : Une mise en oeuvre frontale des méthodes d'éléments finis. Thèse de Docteur Ingénieur en Mathématiques Appliquées. Univ. Scienc. et Médic. de Grenoble.
- 17) J. LIFERMAN 1979 : Les méthodes rapides de transformation du signal : Fourier, Walsh, Hadamard, Haar, Ed. Masson.
- 18) D.J. RICHARD, A. WEXLER 1972 : Finite element solution within curved boundaries. IEEE Trans. on Micro Theory and Techn. Vol. MTT 20, N° 10.
- 19) A. JAMI, M. LENOIR 1977 : Formulation variationnelle pour le couplage entre une méthode d'éléments finis et une représentation intégrale. C.R. Acad. Sc. Paris, t.285, (Septembre 1977) Série A.-269.

* Electromagnétisme

- 1) B.A. HOBBS 1975 : Analytical solutions to global and local problems of electromagnetic induction in the earth. Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. 10.
- 2) H.G. FOURNIER 1970 : Contribution au développement de la méthode magnéto-tellurique, notamment en vue de la détermination des structures profondes. Thèse de Doctorat d'Etat - Fac. des Sciences de Paris.
- 3) P. SILVESTER, M.S. HSIEH 1971 : Finite element solution of 2 dimensional exterior field problems. Proc. IEE Vol. 118, n° 12.
- 4) P.L. ARLETT, A.K. BAHRANI, O.C. ZIENKIEWICZ 1968 : Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation . Proc. IEE Vol. 115, N°2.
- 5) C. HUBANS 1981 : Etude et interprétation du sondage électromagnétique - comparaison avec la M.T. Thèse de Docteur Ingénieur en Géophysique. Univ. Des Sciences et Techniques du Languedoc.
- 6) J.A. STRATON 1961 : Théorie de l'électromagnétisme. Ed Dunod.

A N N E X E 1CALCUL DE LA FONCTIONNELLE DU CHAMP MAGNETIQUE

Le champ magnétique total vérifie l'équation :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = f \quad \text{sur}(\Omega) \quad (\text{A1.1})$$

$$\text{où } k = \left[\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z) \right]^{-1}$$

$$\phi = j\omega\mu(x,z)$$

$$f \equiv 0$$

$$\text{En posant } L = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi$$

L'équation (A1.1) s'écrit :

$$LH_y = f \quad (\text{A1.2})$$

Nous rappelons d'abord, certaines définitions :

- le produit intérieur s'écrit d'après PRIDMORE { 9 }

$$\langle LH_y, H_y \rangle = \iint_{(\Omega)} (LH_y) (H_y) d\Omega \quad (\text{A1.3})$$

- L'opérateur L_t est auto-adjoint (ou symétrique) au sens de (A1.3) si :

$$\langle L_t u, v \rangle = \langle u, L_t v \rangle \quad (A1.4)$$

- L'opérateur L_t est défini-positif s'il vérifie :

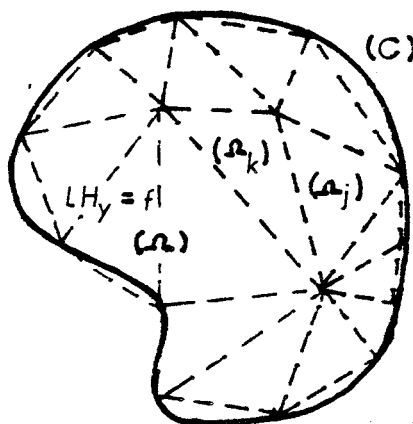
$$\begin{aligned} \langle L_t u, u \rangle &> 0 \quad \text{si } u \neq 0 \\ \langle L_t u, u \rangle &= 0 \quad \text{si } u = 0 \end{aligned} \quad (A1.5)$$

Nous démontrons par la suite que la fonctionnelle du champ magnétique a la forme suivante :

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle - \langle H_y, f \rangle = \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle$$

Il nous reste à modifier (A1.1) en une forme appropriée

En discrétisant (Ω) en un nombre fini d'éléments discrets (Ω_j) où $\sigma_j, \epsilon_j, \mu_j$ sont supposés constants et le champ magnétique étant continu à l'interface des éléments.



donc :

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} (L H_y)(H_y) d\Omega = \frac{1}{2} \sum_j \int_{(\Omega_j)} (L_j H_y)(H_y) d\Omega_j \quad (A1.6)$$

L'opérateur L_j est certes auto-adjoint mais non défini positif, par conséquent, il ne satisfait pas les hypothèses du théorème de minimum (RAVIART {6}).

La solution de l'équation (A1.1) ne peut être déduite de la minimisation de $F(H_y)$, (A1.6).

Cependant, on peut montrer que la valeur stationnaire de $F(y)$, correspondra à la solution de (A1.6).

En effet, si H_{y0} est une solution elle vérifie donc :

$$L_j H_{y0} = 0$$

on forme la quantité suivante :

$$\delta(\varepsilon) = F(H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y) - F(H_{y0})$$

où ε est un nombre réel arbitraire

\tilde{H}_y est une valeur arbitraire de H_y

$$\begin{aligned} F(H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y) &= \frac{1}{2} \langle L_j (H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y), (H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle L_j H_{y0}, H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \langle L_j \tilde{H}_y, H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y \rangle \end{aligned}$$

L_j étant auto-adjoint, d'où :

$$\langle L_j H_{y0}, H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y \rangle = \langle L_j H_{y0}, H_{y0} \rangle + \varepsilon \langle L_j H_{y0}, \tilde{H}_y \rangle$$

$$\langle L_j \tilde{H}_y, H_{y0} + \varepsilon \tilde{H}_y \rangle = \langle L_j H_{y0}, \tilde{H}_y \rangle + \varepsilon \langle L_j \tilde{H}_y, \tilde{H}_y \rangle$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \langle L_j H_{y0}, \tilde{H}_y \rangle + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle L_j \tilde{H}_y, \tilde{H}_y \rangle$$

En différentiant par rapport à ε :

$$\frac{d\delta(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \langle L_j H_{y_0}, \tilde{H}_y \rangle + \varepsilon \langle L_j \tilde{H}_y, \tilde{H}_y \rangle \quad (A1.7)$$

L'expression (A1.7) s'annule au point stationnaire, correspondant à $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire :

$$\langle L_j H_{y_0}, \tilde{H}_y \rangle = 0$$

\tilde{H}_y étant arbitraire, d'où $L_j H_{y_0} = 0$. Autrement dit le point stationnaire est la solution de (A1.6).

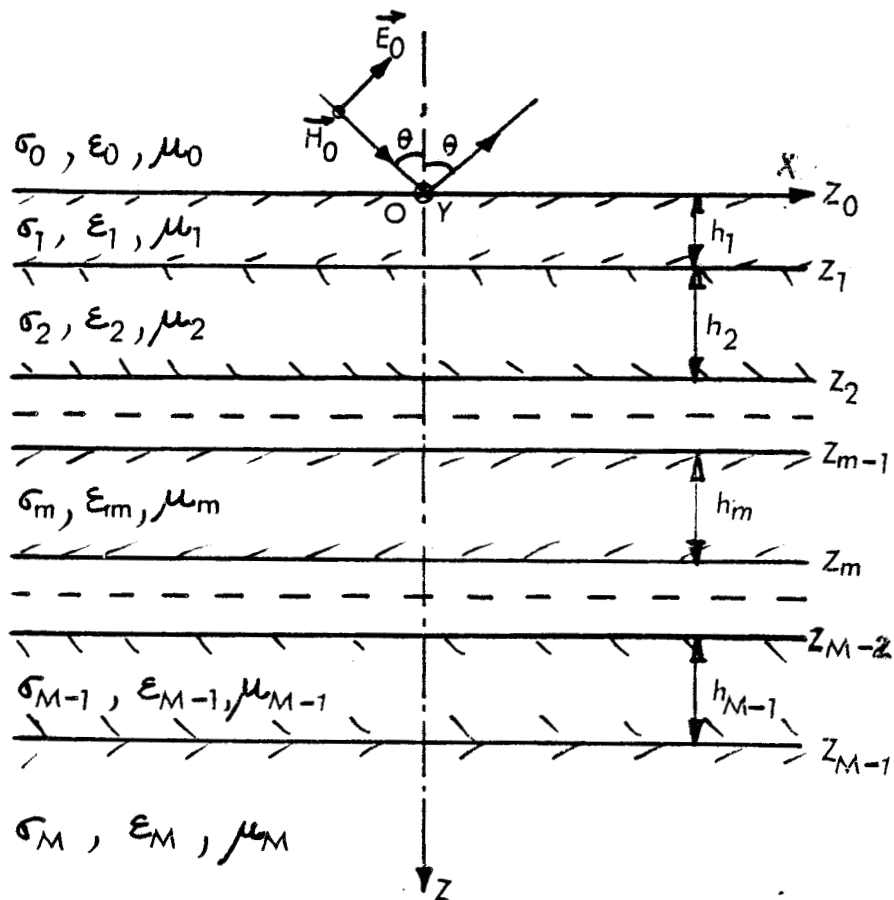
Le passage d'une proposition variationnelle à l'équation différentielle équivalente est relativement simple comme nous l'avons montré ici. Par contre, le processus inverse serait compliqué et de toute façon restrictif quelle que soit sa généralité, pour la simple raison que, fréquemment, on ne peut pas établir de principe variationnel (ZIENKIEWICZ {7}).

A N N E X E 2

CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN MILIEU STRATIFIE

1 - MODE TM

Le champ électrique est dans le plan incident oxz , nous représentons le demi milieu inférieur stratifié par la figure suivante :



il se compose de M couches, de propriétés électromagnétiques $\sigma_m, \epsilon_m, \mu_m$.
Le champ magnétique ne possède qu'une composante H_y .

Dans la couche m , il est solution de :

$$(\Delta - \gamma_m^2) H_{my} = 0 \quad (A2.1)$$

où

$$\gamma_m^2 = j \sigma_m \mu_m \omega - \epsilon_m \mu_m \omega^2 \text{ avec } \operatorname{Re}(\gamma_m) > 0 \text{ et la solution générale :}$$

$$H_{my} = (a_m e^{-u_m z} + b_m e^{+u_m z}) e^{-i\lambda x} \quad (A2.2)$$

où

$$u_m^2 = (\lambda^2 + \gamma_m^2) \text{ avec } \operatorname{Re}(u_m) > 0$$

λ est complexe arbitraire.

Il suffit de déterminer a_m , b_m à partir des conditions de continuité des champs E_x et H_y aux interfaces des couches.

Le champ magnétique incident s'écrit :

$$H_{oy}^{inc} = H_0 e^{-\gamma_0 \cos \theta z} e^{-\gamma_0 \sin \theta x} \quad (A2.3)$$

En l'identifiant à (A2.2), on a :

$$a_0 = H_0$$

$$i\lambda = \gamma_0 \sin \theta$$

$$b_0 e^{u_0 z} e^{-\gamma_0 \sin \theta x}, \text{ l'expression de l'onde réfléchie avec un angle}$$

de réflexion θ .

On déduit le champ électrique dans une couche m par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{m,x} = -(\sigma_m + j\omega\epsilon_m)^{-1} \frac{\partial H_{m,y}}{\partial z} \\ E_{m,z} = (\sigma_m + j\omega\epsilon_m)^{-1} \frac{-\partial H_{m,y}}{\partial x} \end{array} \right. \quad (A2.4)$$

$$(A2.5)$$

* Détermination de a_m, b_m :

Les conditions de continuités se traduisent par :

$$\left[\begin{array}{l} E_{m-1, x} \\ H_{m-1, y} \end{array} = \begin{array}{l} E_m, x \\ H_m, y \end{array} \right]_{z = z_{m-1}}$$

ou encore en $z = z_{m-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{m-1} + j\omega\epsilon_{m-1})^{-1} \frac{\partial H_{m-1, y}}{\partial z} = (\sigma_m + j\omega\epsilon_m)^{-1} \frac{\partial H_m, y}{\partial z} \\ H_{m-1, y} = H_m, y \end{array} \right. \quad (A2.6)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-2, M-1$$

Seule l'onde sortante est admise en dernière couche, $b_M = 0$

On écrit de la même façon (A2.6) pour $M-1$ couches, ce qui donne $2(M-1)$ équations linéaires de $2(M-1)$ inconnues a_m, b_m résolues en fonctions de a_0 .

En dernière couche

$$b_M = 0$$

$$\text{d'où } H_{M, y} = a_M e^{-u_M z} \cdot e^{-\gamma_0 \sin \theta x}$$

$$H_{M-1, y} = (a_{M-1} e^{-u_{M-1} z} + b_{M-1} e^{u_{M-1} z}) \cdot e^{-\gamma_0 \sin \theta x}$$

L'impédance de surface à la côte z_{M-1} :

$$Z_M = \frac{E_{M-1, x}}{H_{M-1, y}}$$

D'après (A2.6) elle vaut : $Z_M = \frac{u_M}{(\sigma_M + j\omega\epsilon_M)} = K_M$

- à la côte z_{M-2} :

$$Z_{M-1} = K_{M-1} \frac{K_M + K_{M-1} \tanh u_{M-1} h_{M-1}}{K_{M-1} + K_M \tanh u_{M-1} h_{M-1}}$$

où $K_m = \frac{u_m}{(\sigma_m + j\omega\epsilon_m)}$, $u_m = (\gamma_m^2 + \lambda^2)^{1/2}$

- à la côte z_{M-3}

$$Z_{M-2} = K_{M-2} \frac{Z_{M-1} + K_{M-2} \tanh u_{M-2} h_{M-2}}{K_{M-2} + Z_{M-1} \tanh u_{M-2} h_{M-2}}$$

- à la côte z_{m-1}

$$Z_m = K_m \frac{Z_{m+1} + K_m \tanh u_m h_m}{K_m + Z_{m+1} \tanh u_m h_m}$$

- à la côte z_1

$$Z_2 = K_2 \frac{Z_3 + K_2 \tanh u_2 h_2}{K_2 + Z_3 \tanh u_2 h_2}$$

- à la côte z_0

$$Z_1 = K_1 \frac{Z_2 + K_1 \tanh u_1 h_1}{K_1 + Z_2 \tanh u_1 h_1}$$

Appliquant (A2.6) on a :

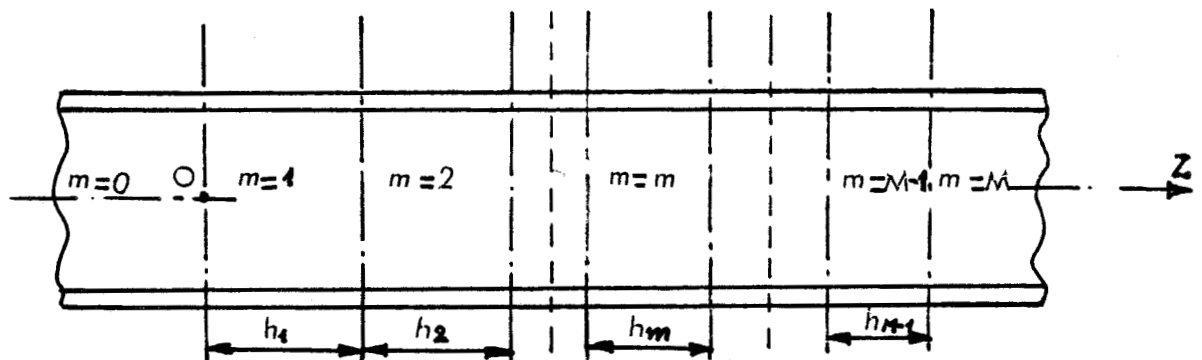
$$R = \frac{b_0}{a_0} = \frac{K_0 - Z_1}{K_0 + Z_1}$$

Les autres coefficients a_m, b_m se déduisent de a_{m-1}, b_{m-1} par les deux formules de récurrence :

$$a_m = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{K_{m-1}}{K_m}\right) a_{m-1} e^{-(u_{m-1} - u_m)z_{m-1}} + \left(1 - \frac{K_{m-1}}{K_m}\right) b_{m-1} e^{+(u_{m-1} + u_m)z_{m-1}} \right] \quad (\text{A2.7})$$

$$b_m = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{K_{m-1}}{K_m}\right) a_{m-1} e^{-(u_{m-1} + u_m)z_{m-1}} + \left(1 + \frac{K_{m-1}}{K_m}\right) b_{m-1} e^{+(u_{m-1} - u_m)z_{m-1}} \right] \quad (\text{A2.8})$$

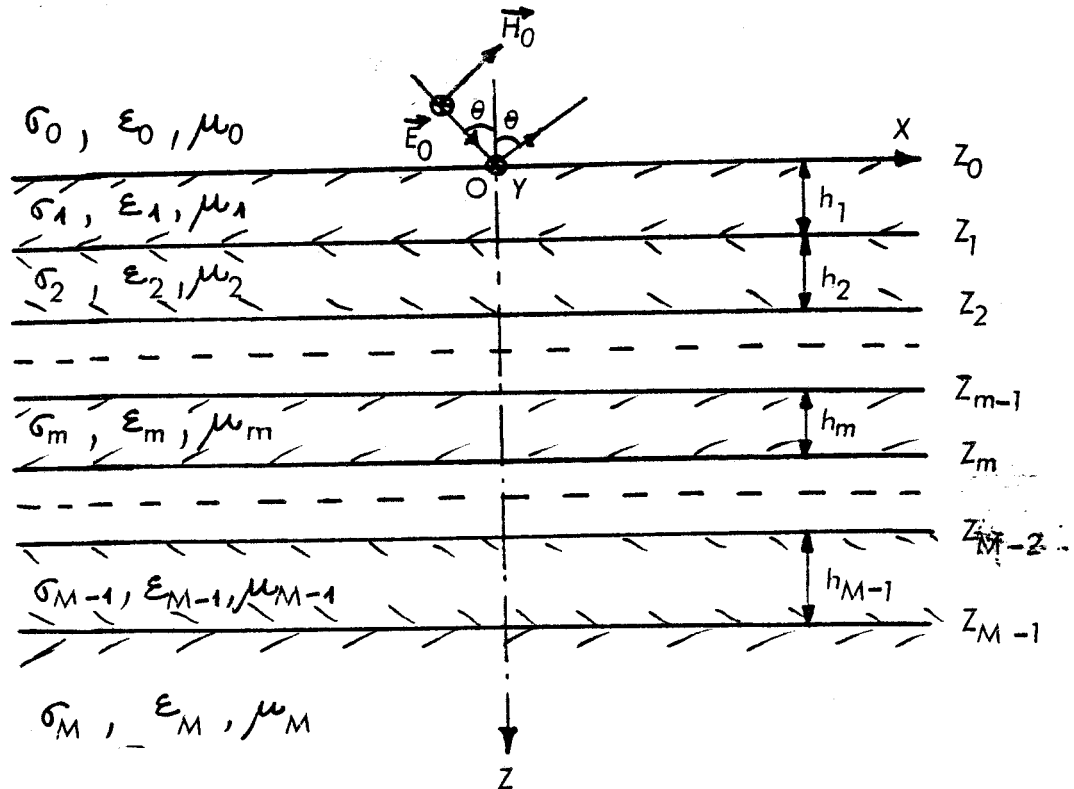
Le problème traité ci-dessus est analogue à la configuration d'une ligne de transmission, ligne présentée par :



où E_{mx} , H_{my} , u_m , K_m correspondent respectivement aux : potentiel, courant, constante de propagation et impédance caractéristique à la jonction $z = z_m$.

2 - MODE TE

Cette fois, le champ électrique est perpendiculaire au plan incident oxz



il ne possède qu'une composante E_{my} vérifiant :

$$(\Delta - \gamma_m^2) E_{my} = 0$$

dont la solution générale dans une couche m :

$$E_{my} = (\bar{a}_m e^{-u_m z} + \bar{b}_m e^{u_m z}) e^{-i\lambda x}$$

où γ_m , u_m , λ ont les mêmes significations indiquées au paragraphe 1.

Les conditions de continuités sont :

$$\left[\begin{array}{l} E_{m-1,y} = E_{m,y} \\ H_{m-1,x} = H_{m,x} \end{array} \right]_{z = z_{m-1}}$$

$$m = 1, 2, \dots, M-2, M-1$$

De la même façon que précédemment :

$$\bar{R} = \frac{\bar{b}_0}{\bar{a}_0} = \frac{N_0 - Y_1}{N_0 + Y_1}$$

$$Y_m = N_m \frac{Y_{m+1} + N_m \tanh u_m h_m}{N_m + Y_{m+1} \tanh u_m h_m}$$

$$Y_M = N_M$$

$$N_m = \frac{u_m}{j\omega\mu_m}$$

Alors que \bar{a}_m, \bar{b}_m se calculent par deux formules de récurrence de mêmes formes (A2.7) et (A2.8) dans lesquelles on remplace K_m par N_m .

Le champ magnétique a deux composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{mx} = (j\omega\mu_m)^{-1} \frac{\partial E_{my}}{\partial z} \\ H_{mz} = - (j\omega\mu_m)^{-1} \frac{\partial E_{my}}{\partial x} \end{array} \right.$$

Il y a une parfaite dualité entre deux modes de propagation

<u>Mode TM</u>		<u>Mode TE</u>
$\sigma_m + j\omega\mu_m$		$j\omega\mu_m$
H_{my}		$- E_{my}$
E_{mx}		H_{mx}
E_{mz}		H_{mz}

Un seul programme numérique, par conséquent, sera suffisant pour le calcul du champ électromagnétique. Lorsque le nombre de couches M devient important, le traitement numérique en double précision complexe est indispensable afin de minimiser l'erreur arrondie dans le calcul par récurrence de a_m, b_m .

A N N E X E 3

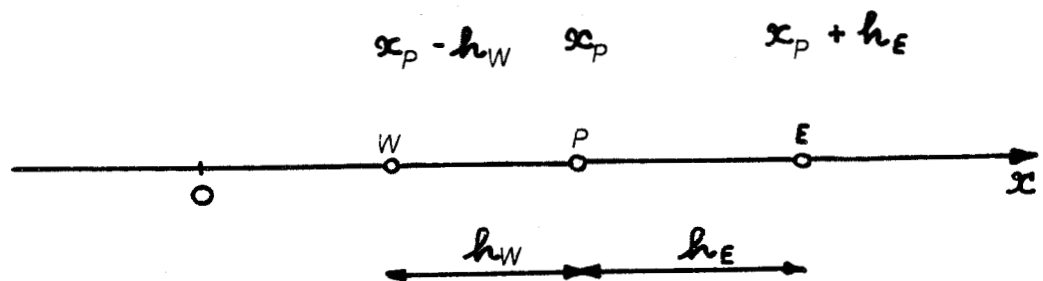
ORDRE D'APPROXIMATION DE L'OPERATEUR $\frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial}{\partial z}) - \phi$

A L'INTERIEUR D'UN DOMAINE HOMOGENE

D'abord nous avons besoin de montrer l'approximation de $\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}$ suivante :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \frac{2}{(h_W + h_E)} \left[\frac{(H_E - H_P)}{h_E} + \frac{(H_W - H_P)}{h_W} \right] \quad (A.3.1)$$

qui est donnée par E. DURAND, formule(145)(Electrostatique - Tome 2, problèmes généraux des conducteurs - Ed. MASSON 1966) est d'ordre 0(h) où $h = \text{Max}(h_E, h_W)$



En effet : $H_y \in C^4(\mathbb{R})$; développons $H_y(x_P + h_E)$ et $H_y(x_P - h_W)$ en série de Taylor.

$$H_E = H_y(x_p + h_E) = H_y(x_p) + h_E H_y^{(1)}(x_p) + \frac{h_E^2}{2!} H_y^{(2)}(x_p) + \frac{h_E^3}{3!} H_y^{(3)}(x_p) + O(h_E^4)$$

$$H_W = H_y(x_p - h_W) = H_y(x_p) - h_W H_y^{(1)}(x_p) + \frac{h_W^2}{2!} H_y^{(2)}(x_p) - \frac{h_W^3}{3!} H_y^{(3)}(x_p) + O(h_W^4)$$

d'où

$$\frac{(H_E - H_P)}{h_E} = H_y^{(1)}(x_p) + \frac{h_E}{2} H_y^{(2)}(x_p) + \frac{h_E^2}{6} H_y^{(3)}(x_p) + O(h_E^3) \quad (A.3.2)$$

$$\frac{(H_W - H_P)}{h_W} = -H_y^{(1)}(x_p) + \frac{h_W}{2} H_y^{(2)}(x_p) - \frac{h_W^2}{6} H_y^{(3)}(x_p) + O(h_W^3) \quad (A.3.3)$$

La somme de (A.3.2) et (A.3.3) :

$$H_y^{(2)}(x_p) \equiv \frac{\partial^2 H_y(x_p)}{\partial x^2} = \frac{2}{(h_E + h_W)} \left[\frac{(H_E - H_P)}{h_E} + \frac{(H_W - H_P)}{h_W} \right] + \frac{(h_W - h_E)}{3} H_y^{(3)}(x_p) - \frac{1}{(h_E + h_W)} O(h_E^3 + h_W^3) \quad (A.3.4)$$

D'ici, on voit que, tenant compte de (A.3.4.) ; l'approximation de (A.3.1) est d'ordre $O(h)$ où $h = \max(h_E, h_W)$.

En général, sur tout l'axe ox , pour un point P quelconque, l'approximation est d'ordre $O(h)$ où $h = \max(h_j)$.

Revenons à l'approximation de

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y(x, z) = 0$$

sur un domaine homogène, elle s'écrit d'après la formule (19) du paragraphe (I.3.4) :

$$\begin{aligned} & - \frac{(h_N + h_S)}{2} \left[\frac{(H_P - H_W)}{h_W} + \frac{(H_P - H_E)}{h_E} \right] - \frac{(h_E + h_W)}{2} \left[\right. \\ & \left. \frac{(H_P - H_N)}{h_N} + \frac{(H_P - H_S)}{h_S} \right] - \frac{\gamma^2}{4} (h_N + h_S)(h_E + h_W) H_P = 0 \end{aligned}$$

(A.3.5)

où $\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$

Divisons (A.3.5) par $\frac{1}{4} (h_N + h_S)(h_E + h_W)$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(h_E + h_W)} \left[\frac{(H_E - H_P)}{h_E} + \frac{(H_W - H_P)}{h_W} \right] + \frac{2}{(h_N + h_S)} \left[\right. \\ & \left. \frac{(H_N - H_P)}{h_N} + \frac{(H_S - H_P)}{h_S} \right] - \gamma^2 H_P = 0 \end{aligned} \quad (A.3.6)$$

(A.3.6) n'est autre que l'approximation directe de l'équation

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \gamma^2 \right] H_P = 0$$

par des formules de type (A.3.1).

L'équivalence des deux méthodes d'approximation, l'une directe, l'autre par le processus variationnel - différences finies est évidente.

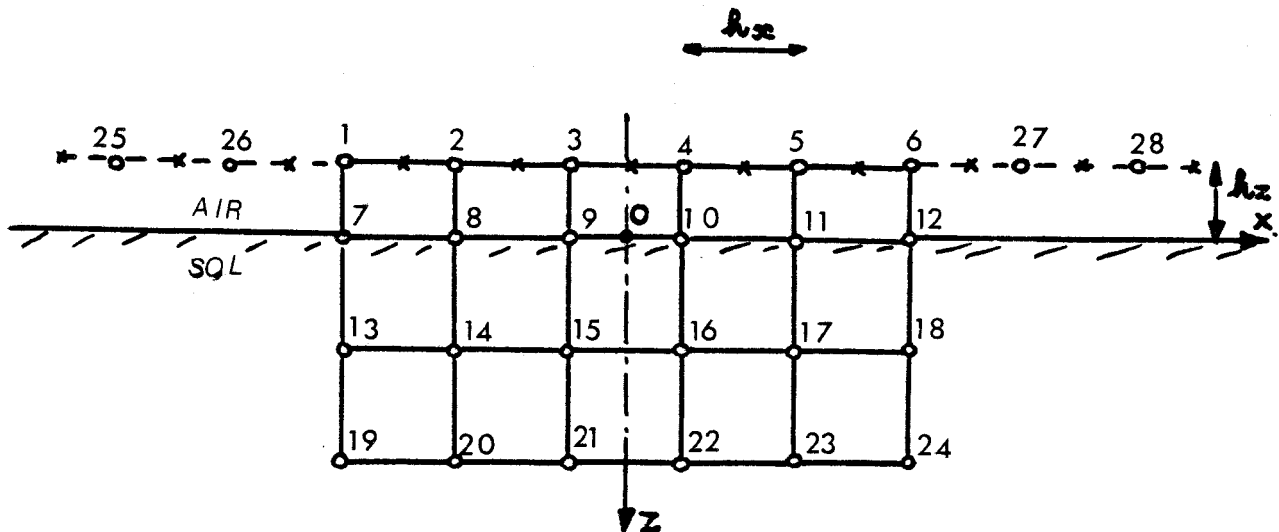
En conclusion, en demi milieu homogène, l'approximation (19) du paragraphe (I.3.4) sur le réseau à l'intérieur de (Ω) est d'ordre $O(h_k)$

$$\text{où } h_k = \max_i (h_{xi}) \text{ ou } h_k = \max_j (h_{zj}) \text{ selon la direction } x \text{ ou } z.$$

A N N E X E 4

DEVELOPPEMENT DE LA CONDITION AUX LIMITES DE CONVOLUTION

Nous développons (54.2) du chapitre II pour quelques noeuds de la configuration ci-dessous :



1) $x_p \equiv x_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{yT}}{\partial x}(P_1) &= \frac{\partial H_{yi}}{\partial x}(P_1) \\ &+ \frac{1}{\pi} \left\{ f_{12} \left[\left(\frac{\partial H_{yT}}{\partial z}(P_{25}) - \frac{\partial H_{yi}}{\partial z}(P_{25}) \right) - \left(\frac{\partial H_{yT}}{\partial z}(P_3) - \frac{\partial H_{yi}}{\partial z}(P_3) \right) \right] + f_{23} \left[\left(\frac{\partial H_{yT}}{\partial z}(P_{26}) - \frac{\partial H_{yi}}{\partial z}(P_{26}) \right) - \left(\frac{\partial H_{yT}}{\partial z}(P_2) - \frac{\partial H_{yi}}{\partial z}(P_2) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

en différences finies :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_x} \left[H_{yT}(P_{25}) - H_{yT}(P_1) \right] &= \frac{\partial H_{yi}}{\partial x}(P_1) + \frac{1}{\pi} \left\{ f_{12} \left[\left(\frac{\partial H_{yT}}{\partial z}(P_{25}) - \frac{\partial H_{yi}}{\partial z}(P_{25}) \right) - \left(\frac{H_{yT}(P_3) - H_{yT}(P_3)}{h_z} - \frac{\partial H_{yi}}{\partial z}(P_3) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ f_{23} \left[\left(\frac{\partial H_{yT}(P_{26})}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_{26})}{\partial z} \right) - \left(\frac{H_{yT}(P_8) - H_{yT}(P_2)}{h_z} - \frac{\partial H_{yi}(P_2)}{\partial z} \right) \right] \left. \vphantom{\frac{\partial H_{yT}(P_{26})}{\partial z}} \right\}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \pi \frac{h_z}{h_x} H_{yT}(P_2) + f_{12} [H_{yT}(P_9) - H_{yT}(P_3)] + f_{23} [H_{yT}(P_8) \\ & - H_{yT}(P_2)] = h_z \left\{ \pi \frac{\partial}{\partial x} H_{yi}(P_2) + f_{12} \left[\frac{\partial H_{yT}(P_{25})}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_{25})}{\partial z} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial H_{yi}(P_3)}{\partial z} \right] + f_{23} \left[\frac{\partial H_{yT}(P_{26})}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_{26})}{\partial z} + \frac{\partial H_{yi}(P_2)}{\partial z} \right] \right\} \\ & + \pi \frac{h_z}{h_x} H_{yT}(P_{26}). \end{aligned}$$

2) $x_p \equiv x_4$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{yT}(P_4)}{\partial x} = & \frac{\partial H_{yi}(P_4)}{\partial x} + \frac{1}{\pi} \left\{ f_{12} \left[\left(\frac{\partial H_{yT}(P_2)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_2)}{\partial z} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial H_{yT}(P_6)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_6)}{\partial z} \right) \right] + f_{23} \left[\left(\frac{\partial H_{yT}(P_3)}{\partial z} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\partial H_{yi}(P_3)}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial H_{yT}(P_5)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_5)}{\partial z} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & - \pi \frac{h_z}{h_x} H_{yT}(P_4) + f_{12} [(H_{yT}(P_{12}) - H_{yT}(P_6)) - (H_{yT}(P_8) \\ & - H_{yT}(P_2))] + f_{23} [(H_{yT}(P_{14}) - H_{yT}(P_5)) - (H_{yT}(P_9) - H_{yT}(P_3))] \\ & = h_z \left\{ \pi \frac{\partial H_{yi}(P_4)}{\partial x} + f_{12} \left[\frac{\partial H_{yi}(P_6)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_2)}{\partial z} \right] \right. \\ & \left. + f_{23} \left[\frac{\partial H_{yi}(P_5)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi}(P_3)}{\partial z} \right] \right\} \end{aligned}$$

- notation

$$f_{12} = K_0 (2.5 \gamma_0 h_x) - K_0 (1.5 \gamma_0 h_x)$$

$$f_{23} = K_0 (1.5 \gamma_0 h_x) - K_0 (0.5 \gamma_0 h_x)$$

$\frac{\partial H_{yT}}{\partial x} (P_i)$: Dérivée par rapport à x de H_{yT} au nœud i .

De la même façon, les éléments non nuls du second membre s'écrivent :

$$b_1 = h_z \left\{ \pi \frac{\partial}{\partial x} H_{yi} (P_1) + f_{12} \left[\frac{\partial H_{yr} (P_{25})}{\partial z} + \frac{\partial H_{yi} (P_3)}{\partial z} \right] + f_{23} \left[\frac{\partial H_{yr} (P_{26})}{\partial z} + \frac{\partial H_{yi} (P_2)}{\partial z} \right] \right\} + \pi \frac{h_z}{h_x} H_{yT} (P_2)$$

$$b_2 = h_z \left\{ \pi \frac{\partial}{\partial x} H_{yi} (P_2) + f_{12} \left[\frac{\partial H_{yr} (P_{26})}{\partial z} + \frac{\partial H_{yi} (P_4)}{\partial z} \right] + f_{23} \left[\frac{\partial H_{yi} (P_3)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_1)}{\partial z} \right] \right\}$$

$$b_3 = h_z \left\{ \pi \frac{\partial}{\partial x} H_{yi} (P_3) + f_{12} \left[\frac{\partial H_{yi} (P_5)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_2)}{\partial z} \right] + f_{23} \left[\frac{\partial H_{yi} (P_4)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_2)}{\partial z} \right] \right\}$$

$$b_4 = h_z \left\{ \pi \frac{\partial}{\partial x} H_{yi} (P_4) + f_{12} \left[\frac{\partial H_{yi} (P_6)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_2)}{\partial z} \right] + f_{23} \left[\frac{\partial H_{yi} (P_5)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_3)}{\partial z} \right] \right\}$$

$$b_5 = h_z \left\{ \pi \frac{\partial}{\partial x} H_{yi} (P_5) + f_{12} \left[- \frac{\partial H_{yr} (P_{27})}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_3)}{\partial z} \right] + f_{23} \left[\frac{\partial H_{yi} (P_6)}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_4)}{\partial z} \right] \right\}$$

$$b_6 = h_z \left\{ \pi \frac{\partial}{\partial x} H_{yi} (P_6) + f_{12} \left[- \frac{\partial H_{yr} (P_{28})}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_4)}{\partial z} \right] + f_{23} \left[- \frac{\partial H_{yr} (P_{27})}{\partial z} - \frac{\partial H_{yi} (P_5)}{\partial z} \right] - \pi \frac{h_z}{h_x} H_{yr} (P_{27}) \right\}$$

