THÈSE

présentée par

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Jeannette VAN ISEGHEM

APPLICATIONS DES APPROXIMANTS DE TYPE PADE

Soutenue le 23 juin 1982 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	Président	P. POUZET
	Rapporteur	C. BREZINSKI
	Examinateurs	S. PASZKOWSKI
		J. WIMP

Je remercie Monsieur P. Pouzet, Professeur à l'Université de Lille I , qui me fait l'honneur de présider cette thèse de 3ème cycle.

Je ne saurais ici exprimer toute la gratitude que je dois à Monsieur C. Brézinski, professeur à l'Université de Lille I , pour la confiance qu'il m'a témoignée et l'aide qu'il m'a apportée.

Je suis très honorée de la présence de Messieurs Paskowski, Professeur associé à l'Université de Lille I et J. Wimp, Professeur à Drexel University, Philadelphia qui ont accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier également Madame Evelyne Lamant qui a assuré avec soin, gentillesse et compréhension la frappe de ce travail. Enfin, je remercie Messieurs Gournay et Provost et Madame Wdowczyk qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse avec rapidité et compétence .

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Les approximants de type Padé d'une fonction ont l'avantage redoutable par rapport aux approximants de Padé de bénéficier de la liberté de choix du dénominateur. Cette liberté de choix doit théoriquement permettre d'adapter les approximants à chaque problème posé, ou inversement de reconnaître, dans des méthodes existantes, des solutions équivalentes au calcul d'approximants de type Padé. Leur apport peut alors soit simplifier la mise en oeuvre, soit assurer la convergence dans un domaine.

Les trois premières parties de ce travail sont consacrées à l'étude de trois exemples différents où nous avons essayé de confronter approximants de type Padé et problèmes déjà étudiés.

Dans la première, à propos d'approximations rationnelles des exp(-z) de dénominateur $(1 + \frac{z}{n})^n$, on montre que les approximants de type Padé font partie de ceux, dont Saff et Varga ont montré l'existence, qui convergent uniformément sur tout compact, et de manière géométrique. L'étude de la A-acceptabilité montre l'intérêt de la suite $(n-1/n)$.

Dans la deuxième partie, on étudie la méthode tau de Lanczos, de résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients polynômes. Un certain nombre d'expériences numériques nous avait montré que les solutions trouvées étaient souvent des approximants de type Padé. Cette approche permet de simplifier la mise en oeuvre, d'assurer la convergence des solutions trouvées vers la fonction cherchée et d'éclairer le choix fait du second membre. Nous nous sommes donc attachés à déterminer des cas où les deux méthodes donnent les mêmes résultats.

D'autre part, la synthèse de plusieurs méthodes de résolution d'équations différentielles peut être faite, dont on tire notamment profit dans le cas de l'exponentielle.

La troisième partie montre une autre façon d'utiliser les approximants de type Padé. Il s'agit de l'inversion de la Transformée de Laplace d'une fonction f . Ils servent à définir une "meilleure" suite d'approximants rationnels à un pole multiple de f et à assurer la convergence de ceux-ci. Le choix du dénominateur est directement posé pour des fonctions ayant des singularités quelconques ($\frac{1}{z}$ Log(1 + z) par exemple), et résolu si ce dénominateur est de la forme $(z + \lambda)^n$. On définit un algorithme d'inversion de la transformée de Laplace dont on montre la convergence en moyenne quadratique, et qu'on applique à plusieurs exemples numériques connus.

Les deux dernières parties sont tout à fait distinctes des trois premières.

Dans la quatrième, on étend la notion d'approximant de type Padé au cas d'approximation en plusieurs points. On s'est attaché à montrer le parallélisme qui existe avec les approximants de Newton Padé définis par Gallucci et Jones de manière analogue à celui existant entre approximants de type Padé et de Padé en zéro. Ces nouveaux approximants en plusieurs points conservent les propriétés algébriques, les propriétés de convergence et de continuité par rapport aux données de leurs ainés. On a en particulier étudié les approximants en 2 points, zéro et l'infini.

Enfin, dans la dernière partie, on s'intéresse au problème direct du choix du dénominateur d'un approximant de type Padé d'une fonction f méromorphe dans un disque. On distingue le cas où les poles sont connus exactement et celui où on connait m suites de points convergeant vers ces poles.

Les approximants sont comparés à ceux de Padé pour montrer que les premiers termes non nuls de la série Q.f-P sont petits.

Nous renvoyons à chaque introduction de chapitre (et à son intérieur) pour plus de détails sur les résultats démontrés. Nous voulons, ici, seulement insister sur la cohérence globale de ce travail pourtant présenté en cinq parties indépendantes.

PREMIERE PARTIE

APPROXIMANTS DE TYPE PADE DE $\exp(-z)$ DE DENOMINATEUR $(1+\frac{z}{n})^{-n}$.

Contenu

Cette partie contient essentiellement le résultat suivant : les suites des approximants $(k-1/k)$ et (k/k) de l'exponentielle convergent uniformément sur tout compact du plan, de manière géométrique.

On étudie ensuite la A-acceptabilité de ces approximants.

1 - *CONVERGENCES DES SUITES* (k/k) *ET* $(k-1/k)$ *VERS* e^{-x}

C. Brezinski a montré que la suite $(k-1/k)$ converge simplement vers l'exponentielle pour tout $t \geqslant 0$.

D'autre part, Saff, Shonage et Varga ont étudié la convergence d'approximants rationnels du type $\dfrac{p_{n-1}(z)}{(1+\frac{z}{n})^n}$ et ont montré qu'il existe p_{n-1} de degré $n-1$ tel que la convergence soit uniforme sur tout compact du plan et de plus, de type géométrique. On démontre ici le résultat suivant :

Propriété 1.1. La suite $(k-1/k)_{e^{-x}}(t)$ converge uniformément sur tout compact du plan, notamment sur tout compact de $[0,\infty[$. De même, la suite des approximants $(k/k)_{e^{-x}}$ converge uniformément sur tout compact du plan.

Démonstration : $f(z) = e^{-z}$ étant holomorphe sur tout z, on a l'expression du reste sous la forme

$$f(t) - (k-1/k)(t) = \frac{t^k}{\tilde{V}(t)} \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{x^{-1} f(x^{-1}) V(x)}{1-xt} dx$$

$c = \psi(c')$ $\left\{\begin{array}{l} c' \text{ contour simple entourant } 0 \text{ et } t \text{ tel que } f \text{ soit} \\ \text{holomorphe dans un domaine contenant } c' \text{ et simplement} \\ \text{connexe} \\ \psi : x \longrightarrow \frac{1}{x} \ . \end{array}\right.$

On prend $c' = \{z/|z| = r\}$ on a donc c le cercle de rayon $\frac{1}{r}$ et t tel que $|t| < r$.

$$e^{-t} - (k-1/k)(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\tilde{V}(t)} \int_c \frac{x^{-1} e^{-x^{-1}} V(x)}{1-xt} dx \ .$$

$$\tilde{V}(x) = (1 + \frac{x}{k})^k$$

$$V(x) = x^k \, \tilde{V}(x^{-1}) = (x + \frac{1}{k})^k \quad ; \quad |V(x)| \leqslant (\frac{1}{r} + \frac{1}{k})^k$$

D'autre part, $\quad |e^{-x^{-1}}| = e^{-\mathrm{Rc}\; x^{-1}}$

$\mathrm{Re}\; x^{-1} \in [-r,+r]$ donc $|e^{-x^{-1}}| \leqslant e^r$

et enfin $|1 - xt| \geqslant |1 - |xt||$ donc $|1 - xt| \geqslant 1 - \frac{|t|}{r}$

$$\left|e^{-t} - (k-1/k)(t)\right| \leqslant \frac{|t|^k}{\left|1 + \frac{t}{k}\right|^k} \; \frac{r\, e^r \,(\frac{1}{r} + \frac{1}{k})^k}{1 - \frac{|t|}{r}} \; \frac{1}{r}$$

$$\leqslant \frac{(1 + \frac{r}{k})^k}{\left|1 + \frac{t}{k}\right|^k} \cdot \frac{e^r}{1 - \frac{|t|}{r}} \; \frac{|t|^k}{r^k} \quad .$$

Supposons que t appartienne à un compact K du plan, on a donc $|t| \leqslant r_o$ et la majoration ci-dessus est valable quelque soit $r : r \geqslant r_o$.

D'autre part $\lim\limits_{k\infty} (1 + \frac{z}{k})^k = e^z$ uniformément sur K , donc pour k assez grand on a :

$$\begin{cases} (1 + \frac{r}{k})^k \leqslant e^r & \text{(ceci est vrai pour tout } k) \\ (1 + \frac{t}{k})^k \geqslant \frac{1}{2}\, |e^t| \geqslant \frac{1}{2}\; e^{-r_o} \quad \forall t \in K & (k \geqslant k_o) \end{cases}$$

$$\sup_{t \in K} |e^{-t} - (k-1/k)(t)| \leqslant \frac{(1 + \frac{r}{k})^k}{\frac{1}{2}\, e^{-r_o}} \; \frac{e^r}{1 - \frac{r_o}{r}} \; (\frac{r_o}{r})^k$$

$$\leqslant \frac{2 \;\; e^{2r+r_o}}{1 - \frac{r_o}{r}} \; (\frac{r_o}{r})^k \qquad \text{pour tout } r \geqslant r_o \;.$$

En particulier, prenons $r = 2r_o$.

$$\sup_K |e^{-t} - (k-1/k)(t)| \leqslant 4e^{5x_o} \, (\frac{1}{2})^k$$

La convergence est bien uniforme sur tout compact, en ce qui concerne la suite $(k-1/k)_{e^{-x}}$.

Considérons de même la suite des approximants de type Padé $(k/k)_{e^{-x}}$.

On a $(k/k)_f(t) = 1 + t(k-1/k)_{f_1}$ avec $f(t) = e^{-t}$ et $f_1(t) = \frac{e^{-t} - 1}{t}$

$$\begin{aligned} f(t) - (k/k)(t) &= (1 + t\, f_1(t) - (1 + t(k-1/k)_{f_1}) \\ &= t\left[f_1(t) - (k-1/k)_{f_1}\right] \end{aligned}$$

En procédant comme précédemment avec la fonction f_1 on a :

$$f_1(t) - (k-1/k)(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\tilde{V}(t)} \int_c \frac{x^{-1} f_1(x^{-1})\, V(x)}{1 - xt}\, dx$$

$$|f_1(t) - (k-1/k)(t)| \leqslant \frac{|t|^k}{\left|1 + \frac{t}{k}\right|^k} \frac{\frac{1}{r}(\frac{1}{r} + \frac{1}{k})^k}{1 - \frac{|t|}{r}} \sup_{|r| = r} |e^{-x^{-1}} - 1|$$

$$\leqslant \frac{(1 + \frac{r}{k})^k}{\left|1 + \frac{t}{k}\right|^k} \frac{e^r + 1}{1 - \frac{|t|}{r}} \frac{|t|^k}{r^k} \frac{1}{r}$$

t appartient à un compact K donc $|t| \leqslant r_o$ et l'inégalité est valable pour tout r plus grand que r_o .

Comme précédemment on a :

$$|f_1(t) - (k-1/k)(t)| \leqslant 2 \frac{e^{r+r_o} (e^r + 1)}{1 - \frac{r_o}{r}} (\frac{r_o}{r})^k \frac{1}{r}$$

soit pour f , en prenant $r = 2r_o$

$$|f(t) - (k/k)(t)| \leqslant 2 \frac{1}{r_o} e^{3r_o} (e^{2r_o} + 1) (\frac{1}{2})^k$$

la convergence de la suite $(k/k)_{e^{-x}}$ est donc aussi uniforme sur tout compact du plan.

Propriété 1.2. La convergence de la suite $(k-1/k)$ est géométrique à partir d'un certain rang, sur tout compact. Le rang dépend du compact.

Démonstration : Reprenons la démonstration relative à la suite des approximants $(k-1/k)$.

On a $\sup\limits_K |e^{-t} - (k-1/k)(t)| \leqslant 2 \dfrac{e^{2r+r_o}}{1-\frac{r_o}{r}} \left(\dfrac{r_o}{r}\right)^k$

pour K contenu dans le disque de rayon r_o et pour tout $r \geqslant r_o$

Soit $r_k(t)$ le reste $e^{-t} - (k-1/k)(t)$.

On a $\sup\limits_{t\in K} |r_k(t)| \leqslant \inf\limits_{r>r_o} \left(\dfrac{2\, e^{2r+r_o}}{1-\frac{r_o}{r}} \left(\dfrac{r_o}{r}\right)^k\right)$

Posons $\lambda = \dfrac{r}{r_o}$ $\quad r = \lambda r_o$

$$y_k(\lambda) = \frac{2\, e^{2r+r_o}}{1-\frac{r_o}{r}} \left(\frac{r_o}{r}\right)^k = 2\, e^{r_o} \frac{\lambda e^{2\lambda r_o}}{\lambda - 1} \frac{1}{\lambda^k}$$

Cherchons le minimum de $y_k(\lambda)$ pour λ dans $]1,\infty[$

$$y_k'(\lambda) = 2\, e^{r_o}\, e^{2r_o\lambda} \left[\frac{2r_o\lambda(\lambda-1) - \lambda - (k-1)(\lambda-1)}{\lambda^k(\lambda-1)^2}\right]$$

y_k' est du signe de : $2r_o\lambda^2 - \lambda(2r_o + k) + (k-1)$.

Cherchons les racines en λ du trinôme.

$$\Delta = (2r_o + k)^2 - 8r_o(k-1)$$
$$= (2r_o - (k-1))^2 + 1 + 4r_o + 2(k-1) \geqslant 0 \qquad (k \geqslant 1)$$

On a donc deux racines λ_1, λ_2, positives (somme et produit sont positifs).

Pour λ grand, $y_k' \geqslant 0$, pour λ voisin de 1 $\lim\limits_{\lambda\to 1} y_k(\lambda) = +\infty$ donc y_k' n'a qu'une racine dans $]1,\infty[$ qui est la plus grande $\lambda_1 = \dfrac{2r_o + k + \sqrt{\Delta}}{4r_o}$

et y_k est minimum en λ_1 .

$\sqrt{\Delta} \leqslant 2r_o + k$ donc $\lambda_1 \leqslant \lambda'$, $\lambda' = \dfrac{2r_o + k}{2r_o} = 1 + \dfrac{k}{2r_o}$

$\min y_k(\lambda) \leqslant y_k(\lambda')$ (on a bien $\lambda' > 1$) .

$$y_k(\lambda') = 4r_o\, e^{3r_o} \frac{e^k}{k} \left(\frac{2r_o}{2r_o + k}\right)^{k-1}$$

$$\left(\frac{2r_o}{2r_o + k}\right)^{k-1} = \left(\frac{2r_o}{k}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{k}\right)^k \varepsilon\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \text{où} \qquad \lim_{k\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{k}\right) = 0 .$$

$$y_k(\lambda') = 4r_o\, e^{3r_o} \frac{e^k}{(k)^k} \left[1 + \frac{1}{k}\, \varepsilon\left(\frac{1}{k}\right)\right] (2r_o)^{k-1}$$

$$(y_k(\lambda'))^{1/k} = (4r_o\, e^{3r_o})^{1/k} (2r_o)^{1-\frac{1}{k}} \left(\frac{e^k}{(k)^k}\right)^{1/k} \left[1 + \frac{1}{k}\, \varepsilon\left(\frac{1}{k}\right)\right]^{1/k}$$

$$(y_k(\lambda')^{1/k} = \frac{e}{k} (2r_o)^{1-\frac{1}{k}} (4r_o\, e^{3r_o})^{1/k} \left[1 + \frac{1}{k}\, \varepsilon\left(\frac{1}{k}\right)\right]^{1/k}$$

donc $\lim_{k\infty} |y_k(\lambda')|^{1/k} = 0$,

pour k assez grand, on a donc $|y_k(\lambda')| < 1$.

La convergence de la série est de type géométrique à partir d'un certain rang sur tout compact.

On s'aperçoit en fait sur la forme de $y_k(\lambda')$:

$$y_k(\lambda') = \Phi(r_o,k)\, \psi(k) \qquad \begin{cases} \lim_k \Phi(r_o,k) = 1 \quad , \quad \Phi(r_o,k) \gg 1. \\ \lim_k \psi(k) = 0 . \end{cases}$$

et $\Phi(r_o,k)$ est une fonction croissante de r_o, c'est-à-dire que plus r_o est grand, plus la convergence géométrique est difficile à atteindre.

On démontrerait de même que $(n/n)_{e^{-x}}$ de dénominateur $(1 + \frac{x}{n})^n$ converge géométriquement à partir d'un certain rang. Une comparaison des majorantes :

$$y_k(\lambda) = 2\, e^{r_o} \frac{e^{2\lambda r_o}}{\lambda^{k-1}(\lambda-1)} \qquad \lambda \in]1,\infty[$$

$$z_k(\lambda) = 2\, \frac{e^{r_o}}{r_o} \frac{e^{r_o\lambda}(e^{r_o\lambda}+1)}{\lambda^k(\lambda-1)} \qquad \lambda \in]1,\infty[$$

induit que la convergence de $(k-1/k)$ est plus "facile".

2 - A-ACCEPTABILITE DES APPROXIMANTS (k/k) ET (k-1/k). ETUDE NUMERIQUE

Il s'agit de montrer que ces approximants vérifient

$|r(z)| \leqslant 1$ pour z dans le 1/2 plan $\mathbb{C}^-$: $\{z | \mathrm{Re}\, z \leqslant 0\}$

D'après le principe du maximum, il suffit de montrer :

$$\sup_{z=it} |r(z)| \leqslant 1.$$

2.1. *Cas de la suite* $(k-1/k)_{e^{-x}}$.

On peut démontrer sur leurs expressions explicites que pour $k = 1,2,3$, ces approximants sont A-acceptables.

<u>k = 1</u> : $(0/1)_{e^{-z}}(z) = \dfrac{1}{1+z}$ $\qquad |(0/1)_{e^{-z}}(it)|^2 = \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$

<u>k = 2</u> : $(1/2)_{e^{-z}}(z) = \dfrac{1}{(1+\frac{z}{2})^2}$ $\qquad |(1/2)_{e^{-z}}(it)| = \dfrac{1}{1+\frac{t^2}{4}} \leqslant 1.$

<u>k = 3</u> : $(2/3)_{e^{-z}}(z) = \dfrac{1-\frac{1}{6}z^2}{(1+\frac{z}{3})^3}$ $\qquad |(2/3)_{e^{-z}}(it)| = \dfrac{1+\frac{t^2}{6}}{(1+\frac{t^2}{9})^{3/2}}$.

$$\left|(2/3)_{e^{-z}}(it)\right|^2 = \frac{1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{36}}{1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{27} + \frac{t^6}{9^3}} \leq 1 .$$

Pour k supérieur à 3 , l'expérience numérique semble confirmer la A-acceptabilité de ces approximants.

k \ z	10	5	2,5	1,25	0,625	0,315	e	$1/((k-1/k)(1/e))$
4	8,36 E-02	4,12 E-02	6 E-03	0,14	0,520	0,830	2,69959	2,72529
5	2 E-02	1 E-02	7,4 E-03	0,154	0,520	0,830	2,71505	2,71552
6	9,9 E-03	5,34 E-03	8,97 E-03	0,157	0,526	0,830	2,71826	2,71837
7	5,1 E-03	2,54 E-03	1,05 E-02	0,159	0,5260	0,830	2,71831	2,71830
8	2,99 E-03	1,28 E-03	1,18 E-02	0,161	0,5258	0,8299	2,71828	2,71828
9	1,89 E-03	0,67 E-03	1,29 E-02	0,162	0,5256	0,8296	2,71829	2,71828

2.2. Pour la suite (k/k) on a étudié le rapport des termes de plus haut degré b_k/a_k .

Le dénominateur est $(1 + \frac{z}{k})^k$ donc $a_k = \frac{1}{k^k}$.

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \binom{k}{k-i} \frac{1}{k^{k-i}}$$

Le calcul donne pour $b_k/a_k = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j\, k^j}{j!} \binom{k}{j}$

k	b_k/a_k	k	b_k/a_k	k	b_k/a_k
1	0	9	- 5	17	9338
2	-1	10	28	18	-5545
3	1	11	-14	19	-10792
4	1	12	-51	20	86464
5	-3	13	103		
6	1	14	13		
7	6	15	-222		
8	-8	16	165		

La suite (k/k) n'est pas A-acceptable à partir de $k = 4$, sauf peut-être pour $k = 6$.

On vérifie directement que :

$$(1/1)(z) = \frac{1}{1+z} \quad ; \quad |(1,1)(it)|^2 = \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$

$$(2/2)(z) = \frac{1-\frac{z}{2}}{1+\frac{z}{2}} \quad ; \quad |(2,2)(it)|^2 = \frac{1+\frac{t^2}{4}}{1+\frac{t^2}{4}} = 1.$$

$$(3/3)(z) = \frac{1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^3}{27}}{1+z+\frac{z^2}{3}+\frac{z^3}{27}} \quad ; \quad |(3,3)(it)|^2 = \frac{1+\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{36}+\frac{t^6}{3^4}}{1+\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{27}+\frac{t^6}{3^4}} \leqslant 1.$$

$$(4/4)(z) = \frac{1-\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{3.16}+\frac{z^4}{4^4}}{1+z+\frac{3z^2}{8}+\frac{z^3}{16}+\frac{z^4}{4^4}} \quad ;$$

$$|(4,4)(it)|^2 = \frac{1+\frac{t^2}{4}+\frac{3}{2.4^3}t^4+t^6\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{3.4^4}\right)+\frac{t^8}{4^8}}{1+\frac{t^2}{4}+\frac{3}{2.4^3}t^4+t^6\left(\frac{3}{4^5}+\frac{1}{4^4}\right)+\frac{t^8}{4^8}} \leqslant 1.$$

<u>$k = 6$</u>

$$(6/6)(z) = \frac{1-\frac{z^2}{12}+\frac{z^3}{3.6^2}+\frac{z^4}{2.6^3}-\frac{4z^5}{5.6^4}+\frac{z^6}{6^6}}{1+z+\frac{5z^2}{12}+\frac{10z^3}{3.6^2}+\frac{5z^4}{2.6^3}+\frac{z^5}{6^4}+\frac{z^6}{6^6}}$$

$$(6/6)(it) = \frac{\left(1+\frac{t^2}{12}+\frac{t^4}{2.6^3}-\frac{t^6}{6^6}\right)-it^3\left(\frac{1}{3.6^2}+\frac{4}{5.6^4}t^2\right)}{\left(1-\frac{5t^2}{12}+\frac{5t^4}{2.6^3}-\frac{t^6}{6^6}\right)+it\left(1-\frac{10t^2}{3.6^2}+\frac{t^4}{6^4}\right)}$$

$$|(6/6)(it)|^2 = \frac{N}{D}$$

$$N = 1 + \frac{t^2}{6} + t^4\left(\frac{1}{6^3} + \frac{1}{12^2}\right) + t^6\left(\frac{-2}{6^6} + \frac{1}{2.6^4}\right) + t^8\left(\frac{1}{2^2.6^6} - \frac{1}{6^7}\right) + t^{10}\left(\frac{-1}{6^9}\right) + \frac{t^{12}}{6^{12}}$$

$$+ t^6\left(\frac{1}{3^2\,6^4} + \frac{8}{3.5.6^4}\,t^2 + \frac{4^2}{5^2.6^8}\,t^4\right)$$

$$D = 1 - \frac{5t^2}{6} + t^4\left(\frac{5^2}{12^2} + \frac{5}{6^2}\right) + t^6\left(\frac{-2}{6^6} - \frac{25}{2.6^4}\right) + t^8\left(\frac{5}{6^7} + \frac{5^2}{2^2.6^6}\right)$$

$$+ t^{10}\left(\frac{-5}{6^9}\right) + \frac{t^{12}}{6^{12}}$$

$$+ t^2\left(1 - \frac{20}{3.6^2}\,t^2 + t^4\left(\frac{10^2}{3^2.6^4} + \frac{2}{6^4}\right) - \frac{20t^6}{3.6^6} + \frac{t^8}{6^8}\right)$$

$$N = 1 + \frac{t^2}{6} + \frac{5t^4}{2.6^3} + \frac{5}{3^2.6^4}\,t^6 + \frac{37}{2.5.6^7}\,t^8 + \frac{71}{2.3.5^2.6^8}\,t^{10} + \frac{t^{12}}{6^{12}}$$

$$D = 1 + \frac{t^2}{6} + \frac{55t^4}{2.6^3} + \frac{119}{6^6}\,t^6 + \frac{5}{2.6^7}\,t^8 + \frac{1}{6^9}\,t^{10} + \frac{t^{12}}{6^{12}}$$

$$N - D = -\frac{50}{2.6^3}\,t^4 - \frac{99}{6^6}\,t^6 + \frac{12}{2.5.6^7}\,t^8 + \frac{23}{2.3.5^2.6^8}\,t^{10}$$

$N - D$ est négatif au voisinage de 0 , positif pour t grand

donc $|(6/6)(it)|^2 - 1 = \frac{N - D}{D}$ change de signe quand t varie dans $[0,\infty[$.

(6/6)(z) n'est pas A-acceptable.

Références :

Brezinski. - Padé type approximation and general orthogonal polynomials. ISNM. Vol. 50 - Birkhauser - Verlag. Basel 1979.

Saff. Schonage. Varga - Geometrie convergence to e^{-z} *by rationnal functions with scals poles - Numer Math 25 (1976) p. 307-322.*

DEUXIEME PARTIE

METHODE TAU

Contenu

L'idée de la méthode tau est due à Lanczos. Elle est, de ce fait, évoquée sous le nom de "Lanczos τ-method". Elle a trouvé une mise en forme générale par Ortiz ; cette mise en forme est reprise sommairement ici dans la partie introductive, paragraphes c.d.e.

Un certain nombre de calculs de solutions, dans des cas particuliers d'équations différentielles, nous avait amené à penser que les méthodes tau et d'approximants de type Padé étaient liées.

Le but, que nous avons poursuivi, est de déterminer certains cas où les deux méthodes donnent le même résultat. On a alors une mise en oeuvre simplifiée et la convergence des approximants est assurée, dans le disque de convergence de la série solution, par la théorie des approximants de type Padé.

Nous nous sommes arrêtés au cas où la méthode tau n'emploie qu'une constante. Même avec cette restriction, on peut montrer (th. 2.7) que les méthodes ne sont pas équivalentes. Ces résultats sont rassemblés dans les parties 1 et 2, dans la partie 3 pour les démonstrations, dans la partie 4 pour les exemples.

Dans la partie 5, on fait le rapport avec d'autres méthodes. Enfin, dans la partie 6, tous les résultats sont regroupés sur le cas de l'exponentielle ce qui permet de définir des familles d'approximants A-acceptables.

PRESENTATION DE LA METHODE

On suppose donnée une équation différentielle, linéaire, à coefficients polynômes : $Dy = 0$ ou Dy = un polynôme. On ne considèrera d'abord que l'équation homogène $Dy = 0$ (1).

La méthode tau créée par Lanczos [4] consiste à remplacer la recherche d'une solution approchée de (1), par la recherche d'une solution polynôme exacte de $Dy = \tau\pi(x)$ (2), où π est un polynôme de degré n, et τ une constante permettant de vérifier une condition initiale.

Dans toute la suite, y sera la solution de $Dy = 0$ et y_n la solution de l'équation modifiée (avec mêmes conditions initiales).

a) Choix du second membre

Si $\eta = y_n - y$, η représente l'erreur commise et vérifie

$D\eta = \tau\ \pi(x)$, $\eta(0) = 0$.

En faisant intervenir la fonction de Green, et en admettant qu'on intègre sur $[0,1]$, on a pour tout x de $[0,1]$:

$$\eta(x) = \int_0^x \tau\ \pi(u)\ G(x,u)\ du$$

G est définie par $\tilde{D}\ G(x,u) = \delta(x,u)$ (3) où $\tilde{D}$ est l'opérateur adjoint de D et δ le symbôle de Kronecker.

Si on veut η petit sur $[0,1]$, l'équation (3) a, à cause du second membre, une irrégularité ; G est une fonction irrégulière.

Pour que η soit "petit", on rend $\pi(x)$ "petit" sur $[0,1]$. C'est cette idée qu'utilise Lanczos en prenant $\pi(x) = T_n^*(x)$ nième polynôme de Chebyshev adapté à $[0,1]$.

Si on veut η petit en 1, on ne considère que $\eta(1)$ et $G(1,u)$, définie par $\tilde{D}G(1,u) = \delta(1,u)$, est une fonction régulière sur $[0,1[$ et peut être approchée par un polynôme t_n :

$$G(1,u) = t_n(u) + \tau' \psi(u)$$

en prenant $\pi(x) = p_n(x)$ nième polynôme de Legendre sur $[0,1]$, on a :

$$\eta(1) = \tau\,\tau' \int_0^1 p_n(u)\,\psi(u)\,du \,.$$

Lanczos [4] constate, numériquement, que le choix de p_n donne toujours, pour n assez grand, et dans le cas de l'équation $y' - y = 0$, de meilleurs résultats.

Si on veut une approximation en un point z , il suffit de remplacer $[0,1]$ par $[0,z]$. L'équation à intégrer devient

$$\begin{cases} Dy(x) = \tau\,\pi(x/z) \\ y_n(0) = y_0 \end{cases}$$

$y_n(x)$ est un polynôme en x

$y_n(z)$ sera après le calcul de τ , une fraction rationnelle en z .

b) *Mise en oeuvre*

L'essentiel de ce paragraphe et les notations sont empruntés à Ortiz [7] .

On a à trouver une solution polynôme en x de $Dy_n = \tau \sum_0^n c_i z^{-i} x^i$.

Soit $P_n = Dx^n$ et Q_n un polynôme tel que $DQ_n = x^n$.

La solution s'écrit alors :

$$\begin{cases} y_n(x) = \tau \sum\limits_{i=0}^{n} c_i z^{-i} Q_i(x) \\ y_n(0) = y_0 \end{cases} \qquad y_n(z) = y_0 \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} c_i z^{-i}\, Q_i(z)}{\sum\limits_{i=0}^{n} c_i z^{-i} Q_i(0)}$$

$y_n(z)$ est une fraction rationnelle en z .

c) *Exemple de l'exponentielle*

$-y' + y = 0$; $y(0) = 1$. Soit S_n la somme partielle de $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$.

$$\begin{cases} P_n(x) = x^n - n\,x^{n-1} \\ \\ Q_n(x) = n!\; S_n(x) \end{cases} \qquad y_n(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n} i!\,c_i z^{-i}\; S_i(z)}{\sum_{i=0}^{n} i!\,c_i z^{-i}} = (n/n)_y$$

où $(n/n)_y$ représente l'approximant de type Padé de y .

d) *Définition générale des* Q_n .

Les polynômes Q_n n'existent généralement pas tous.

Par exemple si $Dy = y'(1 + x) - y$, $P_n(x) = (n - 1)x^n + n\,x^{n-1}$.

Aucun P_n n'est de d°1 . Le monôme x n'appartient pas à l'image par D de l'espace des polynômes, c'est-à-dire, que x n'appartient pas à l'espace engendré par les P_n et donc, il n'existe pas Q_1 tel que $DQ_1 = x$.

Soit $S = \left\{ i \;/\; x^i \notin \{(P_n)_n\} \right\}$ et R_S = {espace vectoriel engendré par x^i , i dans S} .

On définit Q_n par la propriété $DQ_n = x^n + R_n$, $R_n \in R_S$. On démontre (cf. Ortiz) qu'ils sont liés par :

$$Q_m = \frac{1}{a_m^m}\,(x^{m-h} - \sum_{\substack{r<m \\ r\notin S}} a_r^m\,Q_r) \qquad m \notin S \quad .$$

(les notations sont celles de Ortiz soit :

$$P_n = \sum_{r=0}^{\sigma(n)} a_r^{\sigma(n)}\,x^r \quad \text{et} \quad h = \sup(\sigma(n) - n)) \; .$$

Les Q_n sont définis à l'addition près d'un polynôme solution de $Dy = 0$.

On impose pour l'instant $d°Q_n \leqslant n$ dans un souci de clarté, un décalage peut se produire comme on le verra dans certains exemples ; les résultats restent inchangés.

e) Mise en forme générale

Faisons un résumé des notations.

D opérateur différentiel linéaire, à coefficients polynômes, d'ordre ν .

$y_1 \dots y_t$ solutions polynômes indépendantes de $Dy = 0$.

$S = \{i, \dots, i_s\}$ ensemble des indices tels que Q_i n'existe pas et $s = \mathrm{Card}\, S$.

$R_k^{i_p}$ coefficient du terme en x^{i_p} de R_k : $DQ_k = x^k + R_k$, $R_k \in \mathcal{R}_S$.

On modifie l'équation en ajoutant un polynôme $\tau\,\pi(x)$ au second membre. Si on remplace la fonction inconnue par une série entière $\sum a_n x^n$, les a_n vérifieront une relation de récurrence. On peut être amené à mettre plusieurs constantes τ (c'est-à-dire remplacer $\tau\,\pi(x)$ par $\tau_0\pi_0(x) + \tau_1\pi_1(x) + ..$) pour trouver une solution polynôme à l'équation modifiée.

L'équation est $Dy = 0$ (1) .

L'équation modifiée est $Dy_n = (\sum_{i=0}^{r} \tau_i x^i)(\sum_{j=0}^{n-r} c_j\, z^{-j}\, x^j)$ (2) ,

en posant arbitrairement $y_n(x) = \sum_{i=0}^{r} \tau_i \,(\sum_{\substack{j=0 \\ i+j \notin S}}^{n-r} c_j z^{-j}\, Q_{i+j}(x)) + \sum_{1}^{t} \gamma_j\, y_j\,(x)$

et en reportant dans (2), on trouve que les constantes τ_i et γ_j sont déterminées par le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y_n(0) = y_0 \\ \\ y_n^{(\nu-1)}(0) = y_0^{\nu-1} \end{array}\right\} \nu \text{ conditions initiales} \\ \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{r} \tau_i \sum\limits_{j=0,\, i+j \notin S}^{n-r} c_j z^{-j}\, R_{i+j}^{i_1} = \sum\limits_{i+j=i_1} \tau_i\, c_j\, z^{-j} \\ \sum\limits_{i=0}^{r} \tau_i \sum\limits_{j=0,\, i+j \notin S}^{n-r} c_j\, z^{-j}\, R_{it_j}^{i_s} = \sum\limits_{i+j=i_s} \tau_i\, c_j\, z^{-j} \end{array}\right\} s \text{ équations .} \end{array}\right.$$

Les nombres de paramètres sont liés par : $\nu + s$ équations pour $r + 1 + t$ inconnues soit :

$$r + t + 1 = s + \nu$$
$$r + 1 = s + \nu - t \, .$$

Cas d'une équation avec second membre

$$Dy = \sum_0^{n_o} di\, x^i \quad .$$

On écrit l'équation modifiée dans le cas de 2 constantes τ_o et τ_1 et dans le cas $S = \{\overline{s}\}$.

$$Dy_n = \sum_0^{n_o} di\, x^i + \tau_o \sum^{n-1} c_i z^{-i} x^i + \tau_1 x \sum_0^{n-1} c_i z^{-i} x^i$$

$$\begin{cases} Dy_n = \sum_0^{n-1} (di + \tau_o\, c_i z^{-i} + \tau_1 c_{i-1} z^{-i+1})\, x^i + \tau_1 c_{n-1} z^{-n+1}\, x^n \\ \\ DQ_k = x^k + R_k^{\overline{s}}\, x^{\overline{s}} \quad . \end{cases}$$

On a alors la solution :

$$y_n = \sum_{\substack{0 \\ i \neq \overline{s}}}^{n_o} di\, Q_i + \tau_o \sum_{\substack{0 \\ i \neq \overline{s}}}^{n-1} c_i z^{-i} Q_i + \tau_1 \sum_{\substack{i+1=0 \\ i+1 \neq \overline{s}}}^{n-1} c_i z^{-i}\, Q_{i+1} + \sum_1^t \gamma_j y_j$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y_n(0) = y_o \\ \vdots \\ y_n^{(\nu-1)}(0) = y_o^{\nu-1} \end{cases} \\ \\ d_{\overline{s}} + \tau_o\, c_{\overline{s}}\, z^{\overline{s}} + \tau_1\, c_{\overline{s}-1}\, z^{-\overline{s}+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \overline{s}}}^{n_o} R_i^{\overline{s}} + \tau_o \sum_{i \neq \overline{s}} c_i z^{-i} R_i^{\overline{s}} + \tau_1 \sum_{i+1 \neq \overline{s}} c_i z^{-i} R_{i+1}^{\overline{s}} \end{cases}$$

1 - RESULTATS GENERAUX

Notations : On a

$$D\,Q_n = x^n + R_S \ .$$

$$P_n = D\,x^n = \sum_{m=0}^{\sigma(n)} a_m^{\sigma(n)} x^m$$

Si y analytique en 0 , on a $y = \sum_0^\infty a_n x^n$ et les a_n vérifient une relation de récurrence (R) : $\sum_n a_n a_r^{\sigma(n)} = 0$.

On appelle H_n le nombre d'éléments "consécutifs" de P_n .
C'est-à-dire si, par exemple, $P_n(x) = x^n + x^{n-2}$, alors $H_n = 3$.

On a $P_n(x) = \sum_0^{\sigma(n)} a_m^{\sigma(n)} x^m$

$H_n = (\sigma_n - \inf m) + 1$. (inf pris pour m tel que $a_m^{\sigma(n)} \neq 0$) .

Propriété 1.1. Tous les P_n ont, à partir d'un certain rang N , le même nombre H de termes consécutifs.

Pour $n \geq \sup(\nu, \sup S)$ $d°P_n = n + h$ et $H \leq \nu + h + 1$.

Propriété 1.2. Les a_n, coefficients de la série solution, vérifient une relation de récurrence, à termes variables avec n , d'ordre au plus $H-1$.

Propriété 1.3. Si tous les Q_i existent, $d°P_n = n$ et il n'existe pas de solution polynôme non identiquement nulle à $Dy = 0$.

Propriété 1.4. Si S_p est la somme partielle de la série solution, on a pour $p > \sup S$:

$$\begin{aligned} S_p = \sum_0^s a_n x^n &+ a_{s+1} \left(a_{s+h-H+2}^{s+1+h} Q_{s+h-H+2} + \ldots + a_{s+h}^{s+1+h} Q_{s+h}\right) \\ &+ Q_{p+h-H+2} \left(a_{p-H+1} a_{p+h-H+2}^{p+h-H+1} + \ldots + a_p a_{p+h-H+2}^{p+h}\right) \\ &\vdots \\ &+ Q_{p+h} \left(a_p a_{p+h}^{p+h}\right) \end{aligned}$$

2. APPLICATION DE LA METHODE AVEC τ UNIQUE

On considère ici des équations différentielles linéaires d'ordre ν, à coefficients polynômes telles que si on applique la méthode Tau, elle s'appliquera avec une seule constante τ .

Ces équations sont homogènes ou avec second membre.

a) Equation homogène :

(1) $Dy = 0$; (2) $Dy_n = \tau \sum_{i=0}^{n} c_i z^{-i} x^i$

Propriété 2.1. Si $\nu > t$, tous les Q_i existent.

Propriété 2.2. $H \leq \nu+1$, $d°P_n = n$ et $S_n = \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda_n^i Q_{n-i}$

Théorème 2.3. Les seules équations différentielles linéaires, à coefficients polynômes, telles que τ soit unique sont de la forme :

$(ax + b)y' + ky = 0$.

La relation entre S_n et Q_n se réduit à $y(0).Q_n = Q(0).S_n$.

Si y_n est la solution obtenue en z par la τ-méthode, $y_n = (n/n)_y$ approximant de type Padé de la solution y de (1) de dénominateur $\sum_{i=0}^{n} c_i Q_i(0) z^{n-i}$, c'est-à-dire :

$$y_n(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n} c_i \; Q_i(0) z^{n-i} \; S_i(z)}{\sum_{i=0}^{n} c_i \; Q_i(0) z^{n-i}} .$$

b) Equation non homogène à second membre polynôme :

Il est clair que la méthode décrite pour $Dy = 0$, s'adapte au cas $Dy = \sum_{i=0}^{n_o} di\, x^i$ (3) . L'équation modifiée prend la forme :

$$Dy_n = \sum_{i=0}^{n_o} di\, x_i + \tau \sum_{i=0}^{n} c_i z^{-i} x^i .$$

La solution s'écrit donc avec les notations usuelles et pour τ unique

$DQ_n = x^n + R_S$, $S = \left\{ i \; ; \; x^i \notin \{P_n\}_n \right\}$ et $s = \text{Card } S$

$P_n = D\, x^n$ et $y_1 \ldots . y_t$ solutions de $Dy = 0$.

$$y_n(z) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \notin S}}^{n} (di + \tau\, c_i z^{-i}) Q_i + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j\, y_j .$$

<u>*Propriété 2.4.*</u> Tous les Q_i existent sauf au plus un , si $\nu \geqslant t$.

<u>*Théorème 2.5.*</u> On suppose $s = 0$, tous les Q_i existent.

Les équations différentielles sont alors de la forme :

$$(ax + b)y' + ky = \sum_{i=0}^{n_o} di\, x^i$$

Si Y est solution de $Dy = 0$, on a : $y_n = (n/n)_Y + \sum_{i=0}^{n_o} d_i Q_i$;

pour $n \geqslant n_o$: $y_n = (n/n)_y$ approximant de type Padé de dénominateur

$$\sum_{i=0}^{n} c_i z^{n-i} Q_i(0) \quad .$$

<u>*Propriété 2.6.*</u> On suppose $s = 1$, et on note $\{\bar{s}\} = S$.

- si $d°P_n \leqslant n$, alors $t = \nu = 1$.

  Les équations sont de la forme $(ax + b)y' - \bar{s}a\, y = \sum_0^{n_o} d_i x^i$;

- si $d°P_n \leqslant n+1$, alors $t = \nu$.

  Les équations sont de la forme $\sum_{i=0}^{\nu} A_i(x)\, y^{(i)} = \sum_0^{n_o} d_i x^i$, $d°A_i \leqslant i+1$.

<u>*Théorème 2.7.*</u> Dans le cas de l'équation $(ax + b)y' - \bar{s}a\, y = \sum_0^{n_o} d_i x^i$, sauf choix particulier des c_i , la solution de $Dy = \sum_{i=0}^{n_o} d_i x^i + \tau \sum_{i=0}^{n} c_i\, z^{-i} x^i$ ne peut être un approximant de type Padé de y si $\bar{s}$ est strictement positif.

<u>*Lemme 2.8.*</u> On cherche à résoudre $Dy = d_o$ sachant que

tous les Q_i existent sauf Q_o

tous les P_n ont 2 termes $a_{n+1}^{n+1} x^{n+1} + a_n^{n+1} x^n$ $(a_{n+1}^{n+1} \neq 0)$,

alors si y_n est solution de $Dy_n = d_o + \tau \sum_{i=0}^{n} c_i z^{-i} x^i$, on a

$$y_n = \sum_{j=1}^{t} \gamma_j\, y_j + (n-1/n)_y \quad .$$

Le dénominateur de l'approximant est $\sum_{0}^{n} c_i Q_i(0) z^{n-i}$ en posant $Q_o(0) = -y_o/d_o$.

Corollaire : on a pour n assez grand, $y_n = (n-1/n)_y$.

Théorème 2.9. On cherche à résoudre $Dy = \sum_{0}^{n_o} d_i x^i$ sachant que : Q_o n'existe pas.

P_n a 2 termes $a_{n+1}^{n+1} x^{n+1} + a_n^{n+1} x^n$ $(a_{n+1}^{n+1} \neq 0)$.

Alors si y_n est solution de $Dy_n = \sum_{0}^{n} (d_i + \tau c_i z^{-i}) x^i$ et $DQ_i = x^i + \lambda_i$

on a

$$y_n = \sum_{j=1}^{t} \gamma_j y_j + \sum_{1}^{n} d_i Q_i + (n-1/n)_z \quad \text{où} \quad z = y - \sum_{1}^{n} d_i Q_i$$

donc pour n assez grand , $y_n = (n-1/n)_y$.

3. DEMONSTRATIONS DES RESULTATS

Proposition 1.1. D est un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynômes, c'est à dire :

$$Dy = \sum_{i=0}^{\nu} A_i(x).y^{(i)} \quad .$$

Soit α_i et β_i les degrés respectivement le plus haut et le plus bas de $A_i(x)$.

$P_n = D\,x^n$, $d°P_n \leqslant n + \operatorname{Sup}_i (\alpha_i - i)$ Sup étendu à $i = 0\ldots\inf(n,\nu)$

(d° le plus bas de P_n) $= \inf(n - i + \beta_i)$

$= n - \operatorname{Sup}(i - \beta)$

Soit H_n le nombre de termes de P_n : $H_n \leqslant \operatorname{Sup}(\alpha_i - i) + \operatorname{Sup}(i - \beta_i) + 1$

pour $n \geqslant \nu$, $H_n \leqslant H$ avec $H = \operatorname{Sup}_i(\alpha_i - i) + \operatorname{Sup}_i(i - \beta_i) + 1$, $i = 0\ldots\ \nu$

Posons $h = \operatorname{Sup}_{i=0\ldots\nu} (\alpha_i - i)$, on a $H_n \leqslant \nu + h + 1$.

Pour $n > \operatorname{Sup} S$, tous les Q_n existent, donc il existe k tel que P_k soit de $d°n$, on a donc

$$\left.\begin{array}{l} n \geqslant \nu \Longrightarrow d°P_n \leqslant n+h \\ n > \operatorname{Sup} S \Longrightarrow a_n^n \neq 0 \end{array}\right\} \quad \text{donc } \sigma_n = n + h \quad \text{pour} \quad n \geqslant \operatorname{Sup}(\nu, \operatorname{Sup} S)$$

Proposition 1.2.

$$\left.\begin{array}{l} y = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ \\ D\,y = 0 \end{array}\right\} \sum_{n\geqslant 0} a_n P_n = 0 \Longrightarrow (R) \sum_n a_n\, a_r^{\sigma(n)} = 0 \,.$$

d'après P.1.1. (R) a au plus H termes. La relation de récurrence (R) est donc d'ordre $H-1$ au plus.

Proposition 1.3. Montrons que si tous les Q_i existent, alors $d°P_n \leqslant n$.

On note $\{P_n\}_n$ l'espace engendré par les P_n .

$DQ_o = 1$ donc $1 \in \{P_n\}_n$, $d°P_n$ est une fonction croissante de n , donc $d°P_o = 0$.

De même, Q_1 existe , $DQ_1 = x$ et $x \in \{P_n\}_n$ si $d°P_1 > 1$, c'est impossible, donc $d°P_1 \leqslant 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Soit } d°P_n \leqslant n. \\ x^{n+1} \in \{P_k\}_k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{c'est impossible si } d°P_{n+1} > n+1 \\ \text{donc } d°P_{n+1} \leqslant n+1 \,. \end{array}$$

Montrons que si tous les Q_i existent, il n'y a pas de solution polynôme à $Dy = 0$, non nulle.

Si Q_n existe, de degré inférieur ou égal à n : $d°P_n \geqslant n$.

En effet, $DQ_n = x^n$ et DQ_n est somme de P_i , $i \leqslant n$. $d°P_n$ est une fonction croissante de n donc $d°P_n \geqslant n$.

Donc si tous les Q_i existent , $d°P_n = n$ et pour tout n , $a_n^n \neq 0$.

Supposons que $Dy = 0$ ait une solution polynôme de degré p en écrivant la relation (R) au rang p

$$a_p a_p^p + a_{p+1} a_p^{p+1} + \ldots + a_{p+\nu} a_p^{p+\nu} = 0 \qquad (H \leqslant \nu+1)$$

on a $\quad a_{p+1} = \ldots = a_{p+\nu} = 0 \quad$ et $\quad a_p^p \neq 0 \Longrightarrow a_p = 0$.

De même $\quad a_{p-1} = 0 \ldots \quad$ donc $\quad y \equiv 0$.

Proposition 1.4. On applique la relation sur les Q_n pour trouver :

$$x^n = \sum_{\substack{r<n \\ r \notin S}} a_r^n Q_r \qquad n > s \qquad \text{avec} \qquad s = \operatorname{Sup} S .$$

Puis, on développe $S_n = \sum_0^n a_p x^p$, en ordonnant en Q_i . Le coefficient de Q_i est tout ou partie de la relation de récurrence R écrite au rang i soit R_i . D'où le résultat.

Proposition 2.1. On a toujours $r + 1 = s + \nu - t$ et on a supposé $r + 1 = 1$, donc $1 = s + \nu - t$.

On peut supposer $\nu > t$, sinon on a toutes les solutions sous forme polynôme. Donc $1 \geqslant s+1$, $s = 0$, donc tous les Q_i existent.

Proposition 2.2. En appliquant les résultats précédents (P.1.3. et P.2.1.) , on a $d°P_n = n$, $h = 0$ et $H \leqslant \nu + 1$.

Ecrivons le résultat P.1.4. , on trouve

$$S_n = \sum_{i=0}^{\nu} \lambda_n^i Q_{n-i} \quad . \text{ On a en effet :}$$

$$a_n^n Q_n = x^n - \sum_{r<n} a_r^n Q_r \qquad\qquad a_n x^n = a_n \sum_{r=0}^{n} a_r^n Q_r$$

donc $S_n = \sum_0^n a_i x_i = \sum_{i=0}^n a^i \sum_{r=0}^i a_r^i Q_r$

$$= \sum_{r=0}^n Q_r \sum_{i=r}^n a_i a_r^i \quad .$$

Le coefficient de Q_i est tout ou partie de la relation de récurrence R_i donc est nul s'il a au moins H termes : $l+n \geqslant H$ ou $r \leqslant h-H+1$.

$$S_n = \sum_{n-H+2}^n Q_i \cdot \sum_{i=r}^n a_i a_r^i \quad .$$

Comme $H-1 \leqslant \nu$, $S_n = \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda_i^n Q_{n-i}$.

Théorème 2.3. Démontrons d'abord que l'équation est d'ordre 1 : les Q_i existent tous, donc il n'y a pas de solution polynôme : $t = 0$, on a donc

$$r + 1 = \nu + s - t \quad , \quad r = 0 \quad , \quad s = 0 \quad , \quad t = 0 \quad ,$$

donc

$$\nu = 1 \; .$$

D'autre part, $d°P_n = n$ donc si $Dy = A(x)y' + B(x)y$, on a $d°A(x) \leqslant 1$ et $d°B(x) = 0$, d'où la forme de D :

$$Dy = (ax + b)y' + ky \quad .$$

La relation $S_n = \sum_0^{\nu-1} \lambda_i^n Q_{n-i}$ s'écrit $S_n = \lambda_n^n Q_n$.

Ou en tenant compte des relations initiales :

$$y_o Q_n = Q_n(0).S_n \quad .$$

La solution y_n est donnée au point z par :

$$\left.\begin{array}{l} y_n(z) = \tau \sum_{i=0}^n c_i z^{-i} Q_i(z) \\ y_o = \tau \sum_{i=0}^n c_i z^{-i} Q_i(0) \end{array}\right\} \Longrightarrow y_n(z) = \frac{\sum_{i=0}^n c_i Q_i(0) z^{n-i} S_i(z)}{\sum_{i=0}^n c_i Q_i(0) z^{n-i}} \quad .$$

Proposition 2.4. On a toujours y_n définie à partir de constantes vérifiant le même système, en changeant $\tau c_i z^{-i}$ en $(d_i + \tau c_i z^{-i})$.

On a donc toujours $\left.\begin{cases} r + 1 = s + \nu - t \\ r = 0 \\ \nu \geqslant t \end{cases}\right\} \Longrightarrow 1 \geqslant s \ , \ s = 0 \text{ ou } s = 1 \ .$

Théorème 2.5. Si $s = 0$, on a comme précédemment, en raisonnant sur $Dy = 0$, la forme de Dy soit

$Dy = (ax + b)y' + ky$.

Soit Y solution de $Dy = 0$, d'autre part $P = \sum_0^{n_o} d_i Q_i$ vérifie $DP = \sum_{i=0}^{n_o} d_i x^i$, donc $y = Y + P$

Si Y_n est solution de $Dy = \tau \sum_{i=0}^{n} c_i z^{-i} x^i$: $Y_n = (n/n)_Y$

et y_n la solution de $Dy = \sum_{i=0}^{n_o} d_i x^i + \tau \sum_{i=0}^{n} c_i z^{-i} x^i$ s'écrit alors :

$$\left.\begin{aligned} y_n &= \sum_0^n (d_i + \tau c_i z^{-i}) Q_i = P + \tau \sum_{i=0}^{n} c_i z^{-i} Q_i \\ \tau &= \frac{Y_o - P(0)}{\sum_0^n c_i z^{-i} Q_i(0)} = \frac{Y_0}{\sum c_i z^{-i} Q_i(0)} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y_n = P + Y_n \ .$$

$y_n = (n/n)_Y + P$ et $y_n = (n/n)_y$ si $n \geqslant n_o$.

Proposition 2.6. $\left.\begin{array}{l} s = 1 \ , \ r = 0 \\ r + 1 = s + \nu - t \end{array}\right\}$ $t = \nu$ et $d^\circ P_n \leqslant n+1$.

Soit R_n le coefficient de x^n dans Dy avec $y = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$

Q_n vérifie le système

$$\begin{aligned} &R_o = 0 \\ &\vdots \\ &R_{n-1} = 0 \\ &R_n = 1 \\ &R_{n+1} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

<u>*1er cas*</u> : $d^\circ P_n \leq n \ \forall n$.

Soit A_n la matrice des coefficients de P_i pour $i = 0 \ldots n$.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_o^o & & & & & \\ a_o^1 & a_1^1 & & & 0 & \\ a_o^{H-1} & \cdots & a_{H-1}^{H-1} & & & \\ & a_1^H & \cdots & a_H^H & & \\ 0 & & a_{n-H+1}^n & \cdots & a_n^n & \end{pmatrix}$$

Si $Q_i = \sum_{k=0}^{i} b_k x^k$, Q_i est défini par $A_i \cdot \begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i^k \end{pmatrix}_{k=0 \ldots i}$

vecteur colonne .

Si $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ est une solution polynôme de $Dy = 0$

$$A_n \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

Si $Q_o \ldots Q_{s-1}$ existent et Q_s n'existe pas, alors $\det A_i \neq 0$ pour $i \leq s$ et $\det A_s = 0$ donc $a_s^s = 0$.

Alors $A_s \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_s \end{pmatrix} = 0$ admet une solution non nulle $\alpha_1 \ldots \alpha_s$.

Si seul Q_s n'existe pas, il n'existe qu'une solution polynôme, donc $t = 1$ et $\nu = 1$.

L'équation a donc la forme $(ax + b)y' + ky = \sum_0^{n_o} d_i x^i$

$a_{\bar{s}}^{\bar{s}} = a\bar{s} + k = 0$ $\qquad Dy = (ax + b)y' - \bar{s}a\, y = \sum_{i=0}^{n_o} d_i x^i$.

2ème cas : Si $Q_{\bar{s}}$ n'existe pas et $d^\circ P_n \leqslant n+1$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_o^o & & & & & \\ a_o^1 & a_1^1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & a_{s-1}^{s-1} & & & \\ & & -\,a_{s-1}^{s+1} & a_s^{s+1} & a_{s+1}^{s+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & a_{n-H+1}^{n+1} & a_n^{n+1} & & a_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

On ne peut conclure sur le nombre de solutions polynômes et $d^\circ P_n \leqslant n+1$ implique que les équations ont la forme énoncée.

Théorème 2.7. On a :

$$\begin{cases} Dy = (ax+b)y' - \bar{s}ay = \sum_0^{n_o} d_i x^i \\ Dy_n = (ax+b)y_n' - \bar{s}ay_n = \sum_0^{n_o} d_i x^i + \tau \sum_0^{n} c_i z^{-i} x^i \\ DQ_i = x^i + \lambda_i x^{\bar{s}} \qquad (\lambda_i = 0 \text{ si } i < \bar{s}) \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\begin{cases} y_n = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \bar{s}}}^{n} (d_i + \tau c_i z^{-i})\, Q_i + y_1 \quad \text{avec } y_1 \text{ solution polynôme de } Dy = 0 \\ d_{\bar{s}} + \tau c_{\bar{s}}\, z^{-\bar{s}} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \bar{s}}}^{n} (d_i + \tau c_i z^{-i}) \lambda_i \end{cases}$$

en posant $\lambda_{\bar{s}} = -1$, on trouve :

$$\tau \left(\sum_{i=\bar{s}}^{n} c_i z^{-i} \lambda_i \right) = - \sum_{i=\bar{s}}^{n} d_i \lambda_i$$

Le dénominateur de y_n est $\sum_{\bar{s}}^{n} c_i z^{-i}\lambda_i$; il ne dépend pas de $c_o \ldots c_{\bar{s}-1}$, et dépend de $c_{\bar{s}}$.

Si y_n était un approximant de type Padé, il serait de la forme $\tilde{W}(s)/\tilde{V}(x)$

$$V(z) = k_o z^n + \ldots + k_n \quad ; \quad \tilde{V}(z) = k_o + k_1 z + \ldots + k_n z^n$$

$$W(z) = c\left(\frac{V(z) - V(t)}{z - t}\right) \quad ; \quad \tilde{W}(z) = z^{n-1} \,.\, W(z)$$

donc $\tilde{W}(z)$ ne dépend pas de k_n, mais dépend de $k_o \ldots k_{n-1}$

Donc y_n ne peut être un approximant de type Padé que si $\bar{s} = 0$.

On a donc le résultat négatif : si $\bar{s} \neq 0$, y_n ne peut être, sauf choix particulier des c_i, un approximant de type Padé

Lemme 2.8.

On suppose que Q_i existe pour $i \neq 0$, donc $d^\circ P_n = n+1$ pour tout n.

On suppose d'autre part $H = 2$: $P_n = a_{n+1}^{n+1} x^{n+1} + a_n^{n+1} x^n$.

Soit S_n la somme partielle de la solution Y de $DY = d_o$.

$$DS_{n-1} = D\left(\sum_0^{n-1} a_i x^i\right) \quad \text{et} \quad D\left(\sum_0^{\infty} a_n x^n\right) = d_o \,.$$

$$DS_{n-1} = a_{n-1}\, a_n^n\, x^n + d_o$$

donc Q_n vérifie : $\begin{cases} y_o\, Q_n = \alpha_n\, S_{n-1} \\ DQ_n = x^n + \lambda_n \end{cases}$ d'où $y_o \lambda_n = \alpha_n \alpha_o$

On a donc pour y_n :

$$Dy_n = d_o + \tau \sum_{i=0}^{n} c_i z^{-i} x^i$$

$$\begin{cases} y_n = \tau \sum\limits_{i=1}^{n} c_i z^{-i} Q_i + \sum\limits_{j=1}^{t} \gamma_j y_j \\ d_o + \tau c_o = \tau \sum\limits_{i=1}^{n} c_i z^{-i} \lambda_i \end{cases}$$

les autres équations déterminant les γ_j

Posons $z_n = y_n - \sum\limits_{j=1}^{t} \gamma_j y_j$ et $\tau = \dfrac{d_o}{\sum\limits_{i=0}^{n} c_i z^{-i} \lambda_i}$ (avec $\lambda_o = -1$)

$$z_n = \frac{d_o}{d_o} \frac{\sum\limits_{1}^{n} c_i z^{-i} \alpha_i S_{i-1}}{\sum\limits_{0}^{n} c_i z^{-i} \alpha_i} \qquad \text{avec } \alpha_o = -\frac{y_o}{d_o}$$

donc $y_n = \sum\limits_{0}^{t} \gamma_j y_j + (n-1/n)_y$

Le corollaire est immédiat dès que $n - 1 \geqslant d^\circ(\sum\limits_{j=1}^{t} \gamma_j y_j)$

Le dénominateur de l'approximant obtenu est :

$$\sum_{r=0}^{n} c_i z^{-i} \alpha_i \qquad \text{mais} \quad \alpha_i = Q_i(0) \qquad i \neq 0$$

donc finalement $z_n = \dfrac{\sum\limits_{0} c_i z^{-i} Q_i(0)\, S_{i-1}(z)}{\sum\limits_{0}^{n} c_i z^{-i} Q_i(0)}$

(en posant $Q_o(0) = -\dfrac{y_o}{d_o}$) .

L'approximant est de type Padé de dénominateur $\sum\limits_{0}^{n} c_i z^{n-i} Q_i(0)$.

<u>*Théorème 2.9.*</u> On pose $z = y - \sum\limits_{1}^{n} d_i Q_i$: $Dz = d_o - \sum\limits_{1}^{n} d_i \lambda_i$,

donc $z_n = (n-1/n)_z$ et $Dz_n = (d_o - \sum\limits_{1}^{n} d_i \lambda_i) + \tau \sum\limits_{i=0}^{n} c_i z^{-i} x^i$

d'après le lemme 2.8.

On a d'une part

$$Dy_n = \sum_0^n (d_i + c_i z^{-i}) x^i$$

$$\begin{cases} y_n = \sum_1^n d_i Q_i + \tau \sum_1^n c_i z^{-i} Q_i + \sum_1^t \gamma_j y_j \\ d_o + \tau c_o = \sum_1^n (d_i + \tau c_i z^{-i}) \lambda_i \end{cases}$$

d'autre part $\quad Dz_n = \tau \sum_0^n c_i z^{-i} x_i + d'_o \qquad d'_o = d_o - \sum_1^n d_i \lambda_i$

$$\begin{cases} z_n = \tau \sum_1^n c_i z^{-i} Q_i + \sum_1^t \gamma_j y_j \\ d'_o + \tau c_o = \tau \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} \lambda_i \end{cases} \qquad \text{d'où} \quad y_n - \sum_1^n d_i Q_i = z_n \ .$$

$z_n = (n-1/n)_z$ approximant de type Padé de dénominateur

$$-\frac{z_o c_o}{d'_o} \sum_1^n c_i z^{-i} Q_i(0)$$

$$y_n = \sum_{i=1}^n d_i Q_i + (n-1/n)_z$$

$$y = z + \sum_1^n d_i Q_i$$

$y_n - y = z - (n-1/n)_z = O(z^n)$ donc y_n est un approximant de type Padé de y de dénominateur :

$$- c_o \frac{y_o - \sum_1^n d_i \lambda_i}{d_o - \sum_1^n d_i \lambda_i} + \sum_1^n c_i z^{-i} Q_i(0)$$

4. EXEMPLES

1) *Equations homogènes*

① $y' - y = 0 \qquad y(0) = 1$.

Comme indiqué dans l'introduction, on a :

$$\left.\begin{aligned} P_n &= - x^n + x^{n-1} \\ Q_n &= n!\ S_n \end{aligned}\right\} \quad y_n = (n/n)_{e^x}$$

② $2(1 + ix)y' - y = 0 \qquad y(0) = 1.$

$$\left.\begin{aligned} P_n &= (2n - 1)x^n + 2n\ x^{n-1} \\ Q_k &= \frac{1}{a_k(2k - 1)}\ S_k \end{aligned}\right\} \quad y_n = (n/n)_y \qquad y = \sqrt{1 + ix}$$

2) *Equation avec second membre*

① $y'(1 + x) = 1 \qquad (y = \mathrm{Log}(1 + x))$

$P_n = n\ x^n + n\ x^{n-1} \qquad P_o = 0 \qquad (\bar{s} = 0)$

$Q_n = (-1)^{n-1}\ S_n$

$$y_n = \frac{\sum_1^n c_k (-1)^{k-1}\ S_k z^{-k}}{\sum_0^n c_k (-1)^{k-1}\ z^{-k}}$$

en particulier, en prenant pour second membre $T_4^*(x/z)$ polynôme de Tchebitcheff sur $[0,1]$:

$$y_4(z) = \frac{z(384 + 576\ z + 224\ z^2 + 16\ z^3)}{3(128 + 256\ z + 160\ z^2 + 32\ z^3 + z^4)} = (4/4)(z)$$

② $y'(x + 1) - y = 2 \qquad y(0) = 0 \qquad (\bar{s} = 1)$

$$y = (x+1)\ \mathrm{Log}(x+1) \quad = \quad x + \sum^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^n}{n(n-1)}$$

$P_n(x) = (n-1)x^n + n\ x^{n-1} \qquad d°P_n = n \qquad n \neq 1 \qquad S = \{1\} \qquad \underline{s \neq 0}$.

Tous les Q_n existent sauf Q_1 $\begin{cases} DQ_n = x^n + \lambda_n x \\ Q_n = \frac{1}{n-1}(x^n - n\,Q_{n-1}) \quad n \neq 1,2 \\ Q_2 = x^2 \end{cases}$

$$Q_o = -1$$

$$Q_2 = x^2 \qquad \lambda_2 x = 2x$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \qquad \lambda_3 x = -3x$$

$$Q_4 = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \qquad \lambda_4 x = 4x .$$

$$Dy_n = \tau \sum_{i=0}^{4} c_i z^{-i} x^i + x$$

$$\begin{cases} y_n = \gamma y_1 + \tau \sum\limits_{i\neq 1} c_i z^{-i} Q_i \\ 0 = \gamma - \tau c_o \\ 1 + \tau c_1 z^{-1} = \tau(2c_2 z^{-2} - 3c_3 z^{-3} + 4c_4 z^{-4}) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1 + x \\ \gamma = \tau c_o \\ \tau = \dfrac{1}{-c_1 z^{-1} + 2c_2 z^{-2}} \end{cases}$$

$$y_n = \frac{c_o z + c_2 + \frac{1}{2}c_3 z^{-3}(z^3 - 3z) + \frac{1}{3}c_4 z^{-4}(z^4 - 2z^3 + 6z^2)}{-c_1 z^{-1} + 2c_2 z^{-2} - 3c_3 z^{-3} + 4c_4 z^{-4}}$$

qui n'est pas un approximant de type Padé.

3) *Cas d'équation où* $\overline{s} = 0$.

1 $(1 + x)y = 1$

$$P_n = x^{n+1} + x^n \qquad d^\circ P_n = n + 1$$

Q_o n'existe pas.

$$Q_k = (-1)^{k-1} s_{k-1} \quad k \geq 1 \qquad Dq_k = x^k + (-1)^{k-1}$$

On écrit
$$\left.\begin{aligned} Dy_n &= 1 + \tau \sum_{i=1}^{n} c_i z^{-i} x^i \\ y_n &= \sum_{i=1}^{n} (1 + \tau c_i z^{-i}) Q_i \\ 1 + \tau c_o &= \tau \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} c_k z^{-k} \end{aligned}\right\} \quad y_n = \frac{\sum_1^n (-1)^{k-1} c_k z^{n-k} S_{k-1}(z)}{\sum_0^n (-1)^{k-1} c_k z^{n-k}}$$

$$y_n = (n-1/n)_y$$

② $\underline{x(x+1)y' - (\lambda x + \omega)y = \lambda x}$

$P_n = (n-\lambda)x^{n+1} + (n-\omega)x^n$ si $\lambda \notin \mathbb{N}$ on est dans le cas du th. 2.9.

P_n a 2 termes consécutifs seul Q_o n'existe pas.

On obtient ainsi des approximations de $\begin{cases} z^{1/2} \text{ Arctg } z^{-1/2} & (\lambda = \omega = \frac{1}{2}) \\ (1 + \frac{1}{z})^{1/m} & (\lambda = 0, \omega = -\frac{1}{m}) \end{cases}$

③ $W(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. On pose $W(z) = \frac{e^{-z}}{z} u(z)$. Puis $z = \frac{1}{z}$

d'où l'équation : $x^2 y' + (1+x)y = 1$, $y(0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) &= (n+1)x^{n+1} + x^n \\ Q_k(x) &= \frac{(-1)^{k-1}}{k!} S_{k-1}(x) \end{aligned}\right\} \quad y_n = \frac{\sum_1^n c_k \frac{(-1)^{k+1}}{k!} z^{n-k} S_{k-1}(z)}{\sum_0^n c_k \frac{(-1)^{k+1}}{k!} z^{n-k}} = (n-1/n)_y$$

cependant, ici, si on pose $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, on a $a_n = (-1)^n n!$

4) *Exemples divers*

① $y'' + y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 , y'(0) = 0$.

$P_n = x^n + n x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} \qquad d°P_n = n$ pour tout n .

Tous les Q_n existent et $S_n = (a_{n-1} + n a_n)Q_{n-1} + a_n Q_n$.

Si on applique la méthode tau avec des c_i quelconques

$$Dy_n = \sum_0^n c_i z^{-i} x^i$$

on trouve :

$$y_n = (2n/2n)_y \quad \text{pour} \quad n \leqslant 2$$

$$\neq (2n/2n)_y \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3.$$

2 $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0 \qquad y(0) = y'(0) = 1$.

$$P_n = (n+2)(n-3)x^n + n(n-1)x^{n-2}$$

Tous les Q_n existent sauf Q_3 ⎫ $\nu + s - t = 2$, il y a 2 constantes

Il y a une solution polynôme $x + x^3$ ⎭ τ_o , τ_1 .

$$Dy_n = (\tau_o + \tau_1 x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i z^{-i} x^i\right) \quad \text{et} \quad DQ_n = x^n + \lambda_n x^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = \gamma(x + x^3) + \tau_o \sum\limits_{\substack{0 \\ i \neq 3}}^{n-1} c_i z^{-i} Q_i + \tau_1 \sum\limits_{\substack{0 \\ i \neq 2}}^{n-1} c_i z^{-i} Q_{i+1} \\ \\ y_o = 1 = \tau_o \sum c_i z^{-i} \; Q_i(0) + \tau_1 \sum c_i z^{-i} \; Q_{i+1}(0) \\ \\ y'_o = 1 = \gamma \; + \tau \sum c_i z^{-i} Q'_i(0) + \tau_1 \sum c_i z^{-i} Q'_{i+1}(0) \\ \\ \tau_o c_3 + \tau_1 c_2 = \tau_o \sum c_i z^{-i} \lambda_i + \tau_1 \sum c_i z^{-i} \lambda_{i+1} \end{array} \right.$$

Dans tous les cas effectivement calculés de second membre, c'est à dire

$T_2^*(x/z)$, $T_3^*(x/z)$, $T_4^*(x/z)$, $\pi(x/z) = 1 + z^{-1}x + z^{-2}x^2 + z^{-3}x^3 + z^{-4}x^4$.

On trouve que $y_n - (x + x^3)$ est un approximant de type Padé de la série solution de $Dy = 0$.

5. RELATION AVEC D'AUTRES METHODES

a) *Approximation de l'exponentielle, C.polynômes de Norsett* [6] -

Norsett démontre que R_n^m est une fraction rationnelle n,m $(n \geq m)$ telle que $R_n^m(x) - e^x = O(x^{m+1})$ si et seulement si il existe un polynôme $\bar{p}$ de degré n, tel que $\dfrac{d^n \bar{p}(x)}{d\,x^n} = 1$ qui vérifie

$$R_n^m(x) = \sum_0^m (-1)^k \,\bar{p}^{(n-k)}(0) x^k \Big/ \sum_0^n (-1)^k \,\bar{p}^{(n-k)}(1)\; x^k$$

Posons $p(x) = \bar{p}(1-x)$, on a alors R_n^m sous la forme équivalente :

$$R_n^m\,(x) = \sum_0^m p^{(n-k)}(1)\; x^k \Big/ \sum_0^n p^{(n-k)}(0)\; x^k$$

L'approximant de type Padé étant unique, une fois son dénominateur fixé, on a $R_n^m = (m/n)_{e^x}$ et le polynôme générateur est v.

Si l'on pose $\tilde{V}(x) = \sum_0^n p^{(n-k)}(0) x^k$ alors

$$V(x) = x^n\,\tilde{V}(x^{-1}) \qquad V(x) = \sum_0^n p^{(k)}(0)\; x^k\,.$$

On obtient donc le résultat suivant :

Propriété 5.1. Si $R_n^n = y_n$ est la solution obtenue par la méthode de tau de l'équation $y' - y = \tau\, H(x/y)$; $y(0) = 1$ $(d°H(x) = n)$ alors $H(1-x)$ est le C.polynôme de l'approximant R_n^n à la multiplication par une constante près.

Démonstration : Soit $H(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$.

On a $y_n = \sum_0^n c_i i!\; z^{n-i}\; S_i(z) \Big/ \sum_0^n c_i i!\; z^{n-i}$.

$$\tilde{V}(z) = \sum_0^n c_i i!\; z^{n-i} \qquad V(z) = \sum_0^n c_i i!\; z^i$$

donc pour tout k : $p^{(k)}(0) = \lambda c_k k!$ λ tel que $p^{(n)}(x) = 1$, et en développant p par la formule de Taylor

$$p(x) = \sum_0^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$p(x) = \lambda \sum_0^n c_k x^k \qquad \text{donc} \qquad p(x) = \lambda H(x)$$

$$\text{et} \qquad p(x) = \overline{p}(1-x) \quad \text{où} \quad \overline{p} \quad \text{est le C.polynôme.}$$

Si on revient surle choix du second membre, on sait (d'après Norsett) alors que si $\tilde{P}_n$ est le nième polynôme de Legendre sur $[0,1]$

$$\overline{p}(x) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \tilde{P}_n(x) \implies R_n^n = [n/n]$$

$$\overline{p}(x) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!} (\tilde{P}_{n-1}(x) + \tilde{P}_n(x)) \implies R_n^{n-1} = [n-1/n]$$

$$\overline{p}(x) = \frac{2^{n-1}(n-2)!}{(2n-1)!} [n \tilde{P}_{n-2} + (2n-1) \tilde{P}_{n-1} + (n-1) \tilde{P}_n(y)] \implies R_n^{n-2} = [n-2/n]$$

donc le choix $H(x) = \tilde{P}_n(x)$ donne $y_n = [n/n]_{e^x}$ ce qui confirme le "bon choix" du polynôme de Legendre comme second membre.

On peut démontrer que l'équation $y' - y = \tau\pi(x)$ pour $\pi(x) = x^J R_M^J(x/z)$ a pour solution $[L/M]$ approximant de Padé de e^x où R_M^J est le Mième polynôme de Jacobi orthogonal relativement à x^J sur $[0,1]$ et où L est lié à M et J par $L = M + J$.

Pour $J = 0$, on retrouve le résultat précédent (Luke [5]).

b) *Recherche d'un approximant de Padé pour la solution de l'équation* $x(ax + b)E' = (Ax + B)E - Ax$ (Luke [5])

L'équation se met sous la forme $z(z + 1)E' = (\lambda z + \omega)E - \lambda z$.

Luke cherche d'une part les approximants E_n de E de Padé sous la forme φ_n/f_n.

$$\left.\begin{array}{l} E \text{ vérifie } (1) \\ E = E_n + 0\left(\dfrac{1}{x^{2n+1+p}}\right) \quad p \geq 0 \end{array}\right\} \text{ d'où des équations pour } \psi_n \text{ et } f_n$$

D'autre part, il cherche α et β pour que E_n satisfasse

$$z(z+1)E_n = (\lambda z + \omega)E_n - \lambda z + \tau\, R_n^{\alpha\beta}\left(\frac{\gamma}{z}\right)$$

où $R_n^{\alpha\beta}$ est le nième polynôme de Jacobi sur $[0,1]$.

On a $A/a = \lambda$ et $B/b = \omega$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } a \neq 0 ,\ b \neq 0 \\ \text{si } a \neq 0 ,\ b = 0 \end{array}\right\} \quad \alpha = 0 ,\ \beta = \lambda$$

si $a = 0$, $b \neq 0$ $\qquad$ α fini β infini

c) *Relation avec les méthodes de collocation et de Runge-Kutta implicites (Wright [8])* .

La méthode tau consiste à trouver une solution polynôme de l'équation

$Dy_n = \tau\, \pi(x)$.

Si $\pi(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \xi_i)$, y_n est un polynôme qui vérifie $Dy = 0$ aux points ξ_i, la méthode tau est donc en ce sens, une méthode de collocation.

D'autre part, toute méthode de collocation peut être considérée comme une méthode de Runge-Kutta implicite.

$y' = f(x,y)$, $y(0) = a$ et on cherche une solution sur $[0,h]$ ou en $x = h$.

$$z_n(x) \text{ un polynôme } \left\{\begin{array}{ll} z_n(x) = \sum_0^n a_r x^r \ , \quad a_o = a & (1) \\ z_n'(h\xi_j) = f(h\xi_j,\ z_n) & (2) \end{array}\right.$$

on pose $f_j = f(h\xi_j, \sum_0^n a_r (h\xi_j)^r)$.

Les a_r sont solutions du système (2) et $z_n(h)$ est donc une combinaison linéaire des f_j .

La méthode prend donc la forme d'une méthode de R.K. implicite.

En résumé, la méthode tau de second membre $\pi(x)$ peut être interprétée comme une méthode de R.K. basée sur les zéros de $\pi(x)$.

Plus précisément, Iserles démontre dans le cas de l'équation $y' - \mu y = 0$ que la fonction caractéristique du procédé de Runge-Kutta implicite de la "famille" B : $\{C,(C^{-1}F)^T,C^{-1}z\}$ est donnée par :

$$\chi(\mu) = \sum_0^n p^{(n-k)}(1)\mu^k / \sum_0^n p^{(n-k)}(0)\mu^k$$

soit la solution trouvée par la méthode τ (où p est le polynôme de R.K. :

$$p(x) = \Pi(x - c_k)) \quad .$$

En fait, Norsett et Iserles montrent que tout approximant de Padé $[n/m]$, $m \leqslant n$ a pour C.polynôme P_{nm}

$$P_{nm} = \sum_{i=m}^n \gamma_i \tilde{P}_i$$

et que toute méthode de R.K. basée sur les points C_k , $k = 1\ldots n$, de fonction caractéristique $\sum_0^n p^{(n-k)}(1)\mu^k \,/\, \sum_0^n p^{(n-k)}(0)\mu^k$ ("famille B") ou $\sum_0^n(-1)^k\, p^{(n-k)}(0)\mu^k \,/\, \sum_0^n(-1)^k p^{(n-k)}(1)\mu^k$ ("famille E") $\quad (p(x) = \prod_1^n(x - c_k))$ est d'ordre $2\nu-1$ $(\left[\frac{n+1}{2}\right] \leqslant \nu \leqslant n)$ si et seulement si

$$p(x) = \sum_k^n \gamma_i \tilde{P}_i(x) \qquad k = 2\nu- 1 - n$$

La méthode tau de second membre $\pi(x/z)$ est donc une méthode de R.K. de la famille B de polynôme de R.K. $\pi(x/z)$, et définit un approximant de l'exponentiel de C.polynôme $\pi(1 - x)$.

6. APPROXIMANTS DE TYPE PADE DE L'EXPONENTIELLE (n/n) D'ORDRE SUPERIEUR A n

a) Définition

Soit r un approximant de l'exponentielle (n/n) tel que

$$r(x) - e^x = O(x^{2k+1}) \qquad 2n+1 \geqslant 2k+1 \geqslant n+1$$

r est un approximant de type Padé qui peut être obtenu par la méthode tau avec un second membre convenable $\pi(x/z)$.

$$\pi(x) = \sum_k^n \alpha_i P_i(1 - x)$$

$$= \sum_k^n \bar{\alpha}_i \frac{(-1)^i i!}{(2i)!} \tilde{P}_i(1 - x)$$

$\tilde{P}_i$ polynôme de Legendre sur $[0,1]$

$$\tilde{P}_i(x) = (-1)^i \tilde{P}_i(1 - x)$$

Posons $p_i(x) = \dfrac{(-1)^i i!}{(2i)!} \tilde{P}_i(1 - x)$; $p_i^{(i)}(x) = 1$.

r est donc solution de $y' - y = \tau \sum_{i=k}^n \bar{\alpha}_i \, p_i(x/z) \qquad y_o(0) = 1$

et donc $r(z) = \sum_k^n \bar{\alpha}_j \, r_j(z)$ $\quad r_j$ solution de $y' - y = \tau \, p_j(x/z)$, $y_o = 1$

donc $\begin{cases} r(z) = \sum_k^n \bar{\alpha}_j \, [j/j](z) & [j/j] \text{ approximant de Padé de } e^z \\ \sum_k^n \bar{\alpha}_j = 1 \end{cases}$

D'autre part, cherchons directement l'expression de $r = \tilde{W}(z)/\tilde{V}(z)$.

Soit $\tilde{V}_n$ le dénominateur de $[n/n]$.

$$\tilde{V}(z) = \sum_0^n c_i \, Q_i(0) \, z^{n-i} \qquad c_i = \sum_k^n \alpha_j c_i^j \text{ , } c_i^j \text{ coefficients de } z^i \text{ dans } p_j(z)$$

$$= \sum_k^n \bar{\alpha}_j \, z^{n-j} \, \tilde{V}_j(z)$$

$$V(z) = z^{+n}\,\tilde{V}(z^{-1}) = \sum_k^n \bar{\alpha}_j\, V_j(z)$$

$$W(z) = \sum \bar{\alpha}_j\, W_j(z) \qquad \text{et} \qquad \tilde{W}(z) = z^{n-1}\, W(z^{-1})$$

$$\tilde{W}(z) = \sum_k^n \alpha_j\, z^{n-j}\, \tilde{W}_j(z)$$

$$\begin{cases} r(z) = \sum_k^n \bar{\alpha}_j\, z^{n-j}\, \tilde{W}_j(z) \Big/ \sum_k^n \bar{\alpha}_j\, z^{n-j}\, \tilde{V}_j(z) \\ \sum_k^n \bar{\alpha}_j = 1 \quad . \end{cases}$$

L'approximant obtenu est une fraction rationnelle (p,q) avec p et q $\leqslant$ n. En particulier, étant donné le rapport avec les C.polynômes, le 2ème membre peut être pris de manière à retrouver les sous diagonales de la table de Padé. On pourrait d'autre part, utiliser les α_j pour interpoler la fonction solution en d'autres points, n - k au plus.

b) *A.Acceptabilité de* r.

Les approximants r(z) trouvés sont les approximants de type Padé de polynôme générateur $V(z) = \sum_k^n \bar{\alpha}_j\, V_j(z)$ avec $\sum_k^n \bar{\alpha}_j = 1$.

Ils sont d'ordre 2k+1 au moins $(2n \geqslant 2k \geqslant n)$.

Ces approximants s'écrivent $\sum_k^n \bar{\alpha}_j [j/j]$ donc sont A-stables si de plus on suppose $\sum_k^n |\bar{\alpha}_j| \leqslant 1$.

Cette condition conduit à : $1 = |\sum \bar{\alpha}_j| \leqslant \sum |\bar{\alpha}_j| \leqslant 1$

donc $\bar{\alpha}_j \geqslant 0$ et $\sum_k^n \bar{\alpha}_j = 1$

7. *CONCLUSION*

L'étude précédente tente de faire le rapport entre différentes méthodes et la méthode tau.

Dans le cas où cette méthode conduit à des approximants de type Padé, et ceci s'étudie sans calculer la solution mais en observant l'opérateur D, on obtient une simplification de la mise en oeuvre d'une part, et la convergence des approximants dans le domaine de convergence de la série entière solution d'autre part.

Dans le cas de l'exponentielle, on fait le rapport avec les C.polynômes de Norsett et les approximants de type Padé. Les approximants ainsi définis au dernier paragraphe dépendent de constantes qui peuvent être utilisées pour vérifier des conditions supplémentaires : A-stabilité, interpolation de la fonction par l'approximant en d'autres points.

REFERENCES

[1] B. EHLE - *A.stable methods and Padé approximations to the exponential* - *SIAM J Math. Analy. Vol. 4 n° 4 Nov. 73.*

[2] GRAVE-MORRIS - *Collocation and τ-method.*

[3] A. ISERLES - *On the A.stability of implicit Runge-Kutta processes* - *BIT 18 (1978) 157-169.*

On the A.acceptability of rationnal approximations that interpolate the exponential function - *IMA Journal of Numerical Analysis (1981) 1.*

[4] LANCZOS - *Applied Analysis - Prentice Hall Mathematics series.*

[5] LUKE - *The Padé-table and the τ-method - Midwest Research institute Kansas City, Missouri (sept. 57).*

[6] NORSETT - *C.polynomials for rationnal approximation to the exponential function - Numerical Math. 25, 39-56 (1975).*

[7] ORTIZ - *The tau-method - SIAM Journal Numer. Analysis Vol 6 N° 1 Sept. 1969, p. 480-92*

Canonical polynomials for the Lanczos τ-method. Studies in numerical Analysis.

[8] K. WRIGHT - *Some relationshif between implicit Runge-Kutta, collocation and Lanczos τ-methods and their stability property* - *BIT 10 (1970) 217-227.*

TROISIEME PARTIE

INVERSION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Contenu

Etant donnée une fonction f , on cherche son inverse $F(t)$ par la transformée de Laplace ou cotransformée. On met donc f sous la forme

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{(z - \lambda/2)^n}{(z - \lambda/2)^{n+1}} \qquad (1)$$

de telle sorte que les cotransformées F_m des sommes partielles f_m soient des sommes finies de fonctions orthonormées :

$$F_m(t) = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \sum_{0}^{m} a_n L_n(\lambda t)$$

La constante λ est choisie de telle sorte que la convergence de la série (1) soit la plus rapide possible, ce qui conduit à définir le meilleur pôle d'un approximant de type Padé à un pole d'une fonction analytique en zéro.

D'autre part, on démontre que la suite F_m converge en moyenne quadratique vers F.

L'algorithme peut être amélioré en remplaçant f par $(-1)^k f^{(k)}$ ce qui conduit à une convergence vers F en moyenne quadratique avec une fonction poids $t^{2k} e^{-wt}$. D'un point de vue numérique, cette modification accélère la convergence vers $F(t)$, sans restreindre le domaine de convergence.

1. INTRODUCTION

Soit $f(z)$ une fonction définie par une série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ (1) .

Le changement de variable formel : $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} = t$ conduit à

$\varphi(t) = f(z)$.

Si $\frac{\varphi(t)}{-ct+a} = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$, alors $f(z) = \frac{ad-bc}{cz+d} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^n$.

Sous cette forme $f(z)$ est, toujours formellement, la transformée de Laplace d'une fonction $h(t)$:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\left(1 - \frac{\delta}{ac(z+\frac{d}{c})}\right) \qquad \begin{array}{l} \delta = ad - bc \\ ac \neq 0 \ . \end{array}$$

$$\frac{(az+b)^n}{(cz+d)^{n+1}} = \frac{a^n}{c^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-\delta}{ac}\right)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(z+\frac{d}{c})^{k+1}}$$

Chaque terme de la somme est donc la transformée de Laplace de :

$$e^{-\frac{d}{c}t} \frac{a^n}{c^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-\delta}{ac}\right)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} = e^{-\frac{d}{c}t} \frac{a^n}{c^{n+1}} L_n\left(\frac{\delta}{ac}t\right)$$

où L_n est le n^i polynôme de Laguerre d'ordre zéro.

On trouve donc, dans le cas $a.c \neq 0$, $h(t)$ développée en série de fonctions

$$\varphi_n(t) = e^{-\frac{d}{c}t} L_n\left(\frac{\delta}{ac}t\right)$$

Dans le cas $c = 0$, le changement de variable est sans intérêt, et dans le cas $a = 0$, on trouve aussi $h(t)$ sous forme d'une série entière :

$$\begin{cases} f(z) = \frac{-bc}{cz+d} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{b^n}{(cz+d)^n} \\ h(t) = -b\, e^{-\frac{d}{c}t} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{b}{c}\right)^n \frac{t^n}{n!} \end{cases} .$$

On s'intéressera essentiellement au cas $a.c \neq 0$.

On peut chercher à déterminer les changements de variables $\frac{az+b}{cz+d}$ qui conduisent à un calcul simple des a_n en fonction de f , soit qui conduisent à une famille $\varphi_n(t)$ orthonormale au sens de $\mathcal{L}^2(0,\infty)$. On a alors les 2 propositions suivantes :

Proposition 1.1. Les changements de variables qui conduisent à une famille φ_n orthogonale sont de la forme $a \frac{z-\lambda}{z+\lambda}$.

Démonstration : $\varphi_n(t) = e^{-\lambda t} L_n(\mu t)$ avec $\lambda = \frac{d}{c}$, $\mu = \frac{ad-bc}{ac}$

$$\int_0^\infty \varphi_p(t)\, \varphi_q(t)dt = \int_0^\infty e^{-2\lambda t} L_p(\mu t)\, L_q(\mu t)\, dt$$

ceci est nul si et seulement si $2\lambda = \mu$.

c'est à dire, $\frac{2d}{c} = \frac{ad-bc}{ac}$, soit $ad + bc = 0$,

a et c étant non nuls, on a $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$.

La condition $ad + bc = 0$ conduit à : $\frac{a}{c} \frac{z-\lambda}{z+\lambda}$

En reprenant les calculs, on voit que $\frac{a}{c} = 1$ ne restreint pas la généralité :

$$\text{si} \quad f(z) = \frac{1}{z+\lambda} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{a}{c}\right)^n \left(\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right)^n \quad , \quad \lambda = \frac{d}{c}$$

$$\text{alors} \quad h(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{a}{c}\right)^n L_n\left(\frac{\delta}{ac}\, t\right)$$

en faisant varier $\frac{a}{c}$ on fait varier le coefficient a_n seulement. Donc les changements de variables à considérer sont :

$$z \longmapsto \frac{z-\lambda}{z+\lambda} \quad . \quad \blacksquare$$

Proposition 1.2. Soit $\varphi_n(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} L_n(\lambda t) \quad \lambda \geq 0$

la famille $\psi_n(t) = \sqrt{\lambda}\ \varphi_n(t)$ est orthonormale.

Démonstration : Il suffit de calculer la norme de $\psi_n(t)$

$$\| \psi_n \|^2 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} L_n(\lambda t).L_n(\lambda t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_n(t) \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$ par définition des polynômes de Laguerre L_n

d'où $\| \psi_n \| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

et donc

$$\begin{cases} \| \psi_n \| = 1 \\ < \psi_n, \psi_p > = 0 \qquad n \neq p \end{cases} \quad . \blacksquare$$

Proposition 1.3. Pour que les sommes partielles S_m de la série $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{(az + b)^n}{(cz + d)^{n+1}}$ soient les approximants de type Padé de f de dénominateur $(cz + d)^{m+1}$, il faut et il suffit que $b = 0$ et $d \neq 0$ $(a.c \neq 0)$

Démonstration

Soit $S_n(z) = \sum_0^m a_n \frac{(az + b)^n}{(cz + d)^{n+1}}$ c'est une fraction rationnelle $(m, m+1)$.

Les a_n peuvent donc être calculés pour que S_m soit l'approximant de type Padé $(m/m+1)_f$; ils dépendent de m .

Soit $(m/m+1)_f = \frac{1}{cz + d} \sum_{n=0}^m a_n^{(m)} (\frac{az + b}{cz + d})$.

$a_n^{(m)} = a_n^{(m+1)}$ si et seulement si $(\frac{az + b}{cz + d})^{m+1} = O(z^{m+1})$, c'est à dire,

$b = 0$, $d \neq 0$.

Les changements de variables à considérer pour obtenir une série dont les sommes partielles soient les approximants de type Padé de f sont donc

$$\frac{az}{cz + d} .$$

compte tenu de la remarque précédente sur le rôle de a/c, il suffira de considérer les changements de variables de la forme

$$z \longmapsto \frac{z}{z + \lambda} . \quad \blacksquare$$

De manière à pouvoir étudier la convergence en moyenne quadratique des cotransformées, on va mettre f sous la forme :

$$f(z) = \frac{1}{z + \frac{\lambda}{2}} \sum_{n \geqslant 0} a_n \left(\frac{z - \frac{\lambda}{2}}{z + \frac{\lambda}{2}} \right)^n ,$$

λ étant choisi pour que la convergence soit la plus rapide possible, mais étant a priori une constante arbitraire positive.

On considère $g(z) = f(z - \frac{\lambda}{2})$.

On aura alors $g(z) = \frac{1}{z + \lambda} \sum_{n \geqslant 0} a_n \left(\frac{z}{z + \lambda}\right)^n$,

donc les sommes partielles sont les approximants de type Padé $(m/m+1)_g$ de g, ce qui permettra de calculer les a_n.

On étudiera la convergence de $f_m(z)$ vers $f(z)$ (partie 2), puis celle des cotransformées de Laplace $F_m(t)$ vers $F(t)$. (partie 3).

2. CALCUL DES a_n . CONVERGENCE VERS f

Soit λ arbitraire, on pose $g(z) = f(z + \frac{\lambda}{2})$.

On a $g(z)$ une fonction, développable en série $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, analytique dans un demi plan $\operatorname{Re} z > - \frac{\lambda}{2}$.

Propriété 2.1. Calcul des coefficients a_n .

$$g(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$$

$$S_m(z) = \frac{1}{z + \lambda} \sum_{n=0}^{m} a_n \frac{z^n}{(z+\lambda)^n} = (m/m+1)_g .$$

$$S_m(z) = \frac{1}{(z+\lambda)^{m+1}} \sum_{0}^{m} a_n z^n (z+\lambda)^{m-n}$$

$$(z+\lambda)^{m+1} \left[S_m(z) - g(z)\right] = O(z^{m+1})$$

en identifiant les termes en z^m , on a :

$$\sum_{0}^{m} a_n = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{m-i} c_i \lambda^{i+1}$$

$$a_m = (a_o + \ldots + a_m) - (a_o + \ldots + a_{m-1}) = \sum_{0}^{m-1} \left[\binom{m+1}{m-1} - \binom{m}{m-i-1}\right] c_i \lambda^{i+1} + c_m \lambda^{m+1}$$

$$\boxed{a_m = \sum_{0}^{m} \binom{m}{i} c_i \lambda^{i+1}} \quad . \blacksquare$$

Propriété 2.2. Si g est analytique dans le demi plan $\operatorname{Re} z > - \frac{\lambda}{2}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{(z+\lambda)^{n+1}}$ converge vers g sur ce demi plan.

Démonstration : Soit $t = \frac{z}{z+\lambda}$, le demi plan $\operatorname{Re} z > - \frac{\lambda}{2}$ est transformé en le disque unité

donc la fonction $\psi(t) = g(z)$ est analytique, de même que $\frac{\psi(t)}{1 - t}$ dans ce disque et donc développable en série entière de rayon 1.

Posons

$$\frac{\phi(t)}{1-t} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n\geq 0} a_n t^n \quad \text{alors} \quad g(z) = \frac{1}{z+\lambda} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{z}{z+\lambda}\right)^n$$

la convergence est uniforme sur les disques fermés image de $D(0,r)$ $r < 1$ par l'application $t \longmapsto z$, donc elle est uniforme sur tout compact du demi plan $\mathrm{Re} z > -\frac{\lambda}{2}$. ■

Propriété 2.3. Convergence vers f .

Si f est analytique dans le demi plan $\mathrm{Re} z > 0$, alors pour tout z de demi plan

$$f(z) = \frac{1}{z+\frac{\lambda}{2}} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\left(z-\frac{\lambda}{2}\right)^n}{\left(z+\frac{\lambda}{2}\right)^n}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact de ce demi plan.

Démonstration :

Etantdonné que par définition de g :

$$g(z-\frac{\lambda}{2}) = f(z)$$

il s'agit de la propriété précédente à la translation près de la variable. ■

Admettons un moment le théorème 3.2. sur la convergence des cotransformées de Laplace $F_m(t)$ de $f_m(z)$, sommes partielles de $f(z)$.

Appelons respectivement G et F les cotransformées de g et f :

$$g(z-\frac{\lambda}{2}) = f(z) \quad \text{donc} \quad e^{\frac{\lambda}{2}t}\, G(t) = F(t)$$

On a le résultat complémentaire sur la convergence des approximants S_m de $g(z)$.

Propriété 2.4. Convergence des S_m .

Si f admet une cotransformée de Laplace F de carré intégrable alors la suite $S_m(z)$ des approximants de type Padé de g converge vers g , uniformément sur tout demi plan fermé contenu dans $\mathrm{Re} z > -\frac{\lambda}{2}$.

Démonstration :

$$g(z) - S_m(z) = g(z) - \sum_0^m a_n \frac{z^n}{(z+\lambda)^{n+1}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-zt}(G(t) - \sum_0^m a_n e^{-\lambda t} L_n(\lambda t))dt .$$

$\frac{z^n}{(z+\lambda)^{n+1}}$ ayant pour cotransformée de Laplace $e^{-\lambda t} L_n(\lambda t)$

$$|g(z) - S_m(z)|^2 \leqslant \int \left|e^{-(z + \frac{\lambda}{2})t}\right|^2 dt \int_0^\infty \left|F(t) - e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum_0^m a_n L_n(\lambda t)\right|^2 dt$$

Le 2ème terme tend vers zéro quand $m \longrightarrow \infty$.

Le 1er terme est borné dès que $\mathrm{Re}(z + \frac{\lambda}{2}) \geqslant \alpha > 0$ d'où le résultat. ∎

Lien avec d'autres méthodes, choix de λ.

Scraton envisage un procédé de "sommation des séries divergentes" (voir référence), équivalent à la mise en forme de $g(z)$:

Etant donné $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, il construit $S_m(z,\mu)$

$$S_m(z,\mu) = \frac{1}{1 - \mu z} \sum_{n\geqslant 0}^m \Delta^n b_o \left(\frac{\mu z}{1 - \mu z}\right)^n \qquad \text{avec } b_n = c_n/\mu^n$$

On montre algébriquement $(s_n(z) = \sum_0^n c_p z^p)$:

$$S_m(z,\mu) = \frac{1}{(1-\mu z)^{m+1}} \sum_0^m \binom{m+1}{m+1} (-\mu\ z)^{m-n} \quad s_n(z)$$

ce qui démontre :

$S_m(z,\mu) = (m/m+1)_g$ de dénominateur $(1 - \mu z)^{m+1}$.

En posant $\mu = -1/\lambda$

$$\frac{\mu z}{1 - \mu z} = \frac{-z}{z + \lambda}$$

Scraton démontre la convergence de $S_m(z,\mu)$ de manière équivalente à la propriété 2.2.

Il cherche, d'autre part, le "meilleur" μ possible, le meilleur dans le sens de la plus grande vitesse de convergence de la série.

On considère z.g(z) pour que la série soit entière en $\left(\frac{z}{z + \lambda}\right)$, et on prend comme indicateur de la vitesse de convergence :

$$\mathcal{J}(\lambda) = \frac{\left|\frac{z}{z + \lambda}\right|}{\inf_i \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \lambda}\right|} \qquad \alpha_i \text{ singularité de } z.g(z)$$

$$\mathcal{J}(\lambda) = \frac{\max |LA_i|}{|LP|} \qquad \begin{array}{lll} \text{si } L & \text{est d'affine} & -1/\lambda \\ A_i & \text{est d'affine} & 1/\alpha_i \\ P & \text{est d'affine} & 1/z\ . \end{array}$$

plus $\mathcal{J}(\lambda)$ est petit, plus la convergence sera rapide.

D'autre part, soit R le rayon de convergence de $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$. Pour assurer la convergence vers $g(z)$ dans le demi plan $\mathrm{Re} z > -\lambda/2$, il faut $-\lambda/2 \geq -R$ ou $\lambda \leq 2R$.

Si on veut le meilleur λ possible pour tout z, on cherchera λ qui minimise $\max_i |LA_i|$.

Par exemple, si $z.g(z)$ a 2 singularités α_1 et α_2 , λ sera tel que :

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) .$$

Il faut remarquer que pour que α soit singularité de $z.g(z)$ et pas de $g(z)$, il faut que α soit infini, et que $g(z)$ présente une singularité essentielle, par exemple $f(z) = \frac{1}{z}\,\mathrm{Log}(1 + z)$.

Enfin, si f admet des singularités α_i, g admet les singularités $\alpha_i - \frac{\lambda}{2}$.

Cas où f a une singularité unique $(-\alpha)$

Alors g a une singularité unique $(-\alpha - \frac{\lambda}{2})$ et 2 cas peuvent se produire :

soit $z.g(z)$ a une singularité unique $(-\alpha - \frac{\lambda}{2})$

alors $-\frac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{-\alpha - \frac{\lambda}{2}}$ $\quad + \lambda = \alpha + \frac{\lambda}{2} \quad \frac{\lambda}{2} = \alpha \quad \boxed{\lambda = 2\alpha}$

On aura
$$\begin{cases} g(z) = \dfrac{1}{z + 2\alpha} \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n \left(\dfrac{z}{z + 2\alpha}\right)^n \\ \\ f(z) = \dfrac{1}{z + \alpha} \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n \left(\dfrac{z - \alpha}{z + \alpha}\right)^n \end{cases}$$

f est développée de manière équivalente à son développement de Laurent.

Soit $z.g(z)$ a pour singularités $-\alpha - \frac{\lambda}{2}$ et l'infini .

Le choix optimum de λ est :

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\alpha - \lambda/2} + 0\right]$$

$$\frac{\lambda}{2} = \alpha + \frac{\lambda}{2}$$

l'équation est impossible pour λ fini

On prendra alors L comme barycentre des points A_i

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{x}{-\alpha - \frac{\lambda}{2}} + (1 - x)(0) \qquad x \in [0,1]$$

$$\lambda = \frac{1}{x}\left(\alpha + \frac{\lambda}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{2\alpha}{2x - 1} \qquad \text{où} \quad x \in [0,1]$$

on a $0 \leqslant \lambda \leqslant 2R$

c.a.d. $2x - 1 > 0$ et $2x - 1 \geqslant \frac{\alpha}{R}$ mais $-\alpha = -R$

car f n'a qu'une singularité

donc $x > \frac{1}{2}$ et $x \geqslant 1$ d'où $x = 1$.

$$\boxed{\frac{\lambda}{2} = \alpha \quad \text{ou} \quad \lambda = 2\alpha.}$$

Quand f n'a qu'une singularité $-\alpha$, le meilleur λ possible est dans tous les cas $\lambda = 2\alpha$.

3. COTRANSFORMEE DE LAPLACE

Soit $$f_m(z) = \frac{1}{z + \frac{\lambda}{2}} \sum_{n=0}^{m} a_n \left(\frac{z - \frac{\lambda}{2}}{z + \frac{\lambda}{2}}\right)^n .$$

Propriété 3.1. Cotransformé de $f_m(z)$

$f_m(z)$ admet comme cotransformé de Laplace, la fonction $F_m(t)$

$$F_m(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum_{n=0}^{m} a_n L_n(\lambda t)$$

Démonstration :

Le calcul reprend le calcul de l'introduction

$$\frac{z - \frac{\lambda}{2}}{z - \frac{\lambda}{2}} = 1 - \frac{\lambda}{z + \frac{\lambda}{2}}$$

$$\frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}} = \sum_0^n (-\lambda)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(z+\frac{\lambda}{2})^{k+1}}$$ qui a pour cotransformé

$$e^{-\frac{\lambda}{2}t} L_n(\lambda t)$$

et donc

$$F_m(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum_0^m a_n L_n(\lambda t) \ . \ \blacksquare$$

Théorème 3.2. Cotransformé de f(z)

On suppose que $F(t)$, cotransformé de $f(z)$, existe et est de carré sommable, alors les $F_m(t)$ convergent vers $F(t)$ en moyenne quadratique :

$$F(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum_{n\geq 0} a_n L_n(\lambda t)$$

c'est à dire:

$$\lim_{N\infty} \int_0^\infty \left| F(t) - \sum_0^N e^{-\frac{\lambda}{2}t} a_n L_n(\lambda t)\right|^2 = 0$$

Démonstration :

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n \frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}$$

$F(t)$ est dans $\mathcal{L}^2$ $(0,\infty)$ donc admet un développement en série de $(\sqrt{\lambda}\, e^{-\frac{\lambda}{2}t} L_n(\lambda t))$ convergeant en moyenne quadratique.

$$\begin{cases} F(t) = \sum_{n\geq 0} b_n (\sqrt{\lambda}\, e^{-\frac{\lambda}{2}t} L_n(\lambda t)) \\ b_n = \sqrt{\lambda} \int_0^\infty F(t)\, e^{-\frac{\lambda}{2}t} L_n(\lambda t) dt \ . \end{cases}$$

Il suffit de démontrer que $b_n\sqrt{\lambda} = a_n$.

$$f(z) - \sum_0^N b_n\sqrt{\lambda}\,\frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}} = \int_0^\infty e^{-zt}\,F(t)dt - \sum_0^N \frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}\,\lambda\int_0^\infty F(\lambda)e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,L_n(\lambda t)dt$$

$$\left|f(z) - \sum_0^N b_n\sqrt{\lambda}\,\frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}\right|^2 \leq \int_0^\infty F^2(t)dt.\int_0^\infty\left|e^{-zt} - \lambda e^{-\frac{\lambda}{2}t}\sum_0^N \frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}\,L_n(\lambda t)\right|^2 dt$$

par l'inégalité de Schwarz.

Si $\mathrm{Re}z > 0$, e^{-zt} est de carré sommable donc développable en série de $\sqrt{\lambda}\,e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,L_n(\lambda t)$, de coefficient :

$$\sqrt{\lambda}\int^\infty e^{-zt}\,e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,L_n(\lambda t)dt = \sqrt{\lambda}\sum_{k=0}^n(-\lambda)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k!}\int^\infty e^{-(z+\frac{\lambda}{2})t}\,t^k\,dt$$

Cette dernière intégrale est obtenue en développant $L_n(\lambda t)$.

Soit $I_k = \int_0^\infty e^{-(z+\frac{\lambda}{2})t}.t^k\,dt$

On a $I_{k+1} = \dfrac{k+1}{z+\frac{\lambda}{2}}\,I_k$ et $I_o = \dfrac{1}{z+\frac{\lambda}{2}}$ donc $I_k = \dfrac{k!}{(z+\frac{\lambda}{2})^{k+1}}$

$$\sqrt{\lambda}\int_0^\infty e^{-zt}\,e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,L_n(\lambda t) = \sqrt{\lambda}\,\frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}\ ,\quad e^{-zt} = \lim_{m\infty}\sum_0^m\sqrt{\lambda}\,\frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}\,\sqrt{\lambda}\,e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,L_n(\lambda t)$$

$$\text{et}\quad \lim_{N\infty}\int_0^\infty\left|e^{-zt} - \lambda\,e^{-\frac{\lambda}{2}t}\sum_0^N\frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}\,L_n(\lambda t)\right|^2 dt = 0\ .$$

donc

$$\lim_{N\infty}\left|f(z) - \sum_0^N b_n\sqrt{\lambda}\,\frac{(z-\frac{\lambda}{2})^n}{(z+\frac{\lambda}{2})^{n+1}}\right| = 0 \quad\text{et}\quad b_n\sqrt{\lambda} = a_n \quad\text{pour tout } n\ .$$

Finalement, on a donc bien :

$$\begin{cases} F(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum\limits_{n\geq 0} a_n L_n(\lambda t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^2(0,\infty) \\ \lim\limits_{N\infty} \int_0^\infty \left| F(t) - \sum\limits_0^N e^{-\frac{\lambda}{2}t} a_n L_n(\lambda t)\right|^2 dt = 0 \quad . \blacksquare \end{cases}$$

Si les hypothèses sont affaiblies : f analytique dans le demi plan $\text{Rez} > \frac{w}{2}$ ou $F(t)$ telle que $\int_0^\infty e^{-wt} F^2(t)dt < +\infty$, on obtient par la même méthode un résultat plus faible mais comparable.

Théorème 3.3. Cotransformé de f(z). *(hypothèses affaiblies)*

Si $f(z)$ est analytique dans le demi plan $\text{Rez} > \frac{w}{2}$,

si $F(t)$ sa cotransformé est telle que $\int_0^\infty e^{-wt} F^2(t) < +\infty$

alors pour tout z du demi plan $\text{Rez} > \frac{w}{2}$: $f(z) = \dfrac{1}{z + \frac{\lambda-w}{2}} \sum\limits_{n\geq 0} a_n \left(\dfrac{z - \frac{\lambda+w}{2}}{z + \frac{\lambda.w}{2}}\right)^n$

$$F_m(t) = e^{\frac{w-\lambda}{2}t} \sum_{n=0}^{m} a_n L_n(\lambda t)$$

et $$\lim_m \int_0^\infty e^{-wt} \left| F(t) - F_m(t)\right|^2 = 0$$

Démonstration : On reprend la méthode précédente :

$f(z - \frac{w}{2})$ est analytique pour z dans le demi plan $\text{Rez} > 0$,

donc il existe (a_n) et λ tel que

$$f(z + \tfrac{w}{2}) = \frac{1}{z + \frac{\lambda}{2}} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{z - \frac{\lambda}{2}}{z + \frac{\lambda}{2}}\right)^n \qquad \text{Rez} > 0$$

et par changement de variable

$$f(z) = \frac{1}{z + \frac{\lambda-w}{2}} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{z - \frac{\lambda+w}{2}}{z + \frac{\lambda-w}{2}} \right)^n \qquad \text{Re} z > \frac{w}{2}$$

Passage à la cotransformé de Laplace de la somme partielle fm(z)

$$\frac{z - \frac{\lambda+w}{2}}{z + \frac{\lambda-w}{2}} = 1 - \frac{\lambda}{z + \frac{\lambda-w}{2}}$$

$$\frac{\left(z - \frac{\lambda+w}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{n+1}} = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{(-\lambda)^k}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{k+1}} \quad \text{a pour cotransformé : } e^{\frac{w-\lambda}{2}t} L_n(\lambda t)$$

donc fm(z) est la transformé de Laplace de $F_m(t) = e^{\frac{w-\lambda}{2}t} \sum_0^m a_n L_n(\lambda t)$

Convergence vers F(t)

Soit $\psi_n(t) = \sqrt{\lambda}\, e^{\frac{w-\lambda}{2}} L_n(\lambda t)$ les (ψ_n) forment une famille orthonormale pour le produit scalaire $\int^\infty e^{-wt} \psi.\psi(t)dt$.

donc comme $\int_0^\infty e^{-wt} F^2(t)dt < +\infty$

$$F(t) = \lim_{N\infty} \sum_0^m b_n \sqrt{\lambda}\, e^{\frac{w-\lambda}{2}t} L_n(\lambda t) \quad \text{avec } b_n = \sqrt{\lambda} \int_0^\infty e^{\frac{w-\lambda}{2}t} L_n(\lambda t)\, F(t)dt$$

On démontre comme précédemment que $\sqrt{\lambda}\, b_n = a_n$:

$$f(z) - \sum_0^N b_n \sqrt{\lambda} \frac{\left(z - \frac{\lambda+w}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{n+1}} = \int_0^\infty e^{-zt} F(t)dt - \sum_0^N \frac{\left(z - \frac{\lambda+w}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{n+1}} \lambda \int_0^\infty e^{\frac{w-\lambda}{2}} L_n(\lambda t)F(t)dt$$

$$\left| f(z) - \sum_0^N b_n \sqrt{\lambda} \frac{\left(z - \frac{\lambda+w}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{n+1}} \right|^2 \leq \int_0^\infty e^{-wt} F^2(t)\, dt \int_0^\infty \left| e^{-zt} \cdot e^{\frac{w}{2}t} - \lambda\, e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum_0^N \frac{\left(z - \frac{\lambda+w}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{n+1}} L_n(\lambda t) \right|^2 dt$$

On sait que

$$e^{-zt} = \lambda\, e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum_0^\infty \frac{(z - \frac{\lambda}{2})^n}{(z + \frac{\lambda}{2})^{n+1}} L_n(\lambda t) \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \quad \text{en norme } \mathcal{L}_2$$

(sans fonction poids)

Donc dans ce sens

$$e^{-(z - \frac{w}{2})t} = \lambda\, e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sum_0^\infty \frac{\left(z - \frac{\lambda+w}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{n+1}} L_n(\lambda t)$$ et la 2ème intégrale a

pour limite 0 .

Donc $f(z) = \sum_0^\infty \sqrt{\lambda}\, b_n \dfrac{\left(z - \frac{\lambda+w}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{\lambda-w}{2}\right)^{n+1}}$ et $\sqrt{\lambda} b_n = a_n$ pour tout n .

Et finalement

$$\begin{cases} F(t) = \lim\limits_{m\infty} F_m(t) \\ \lim\limits_{m} \displaystyle\int_0^\infty e^{-wt} \, |F(t) - F_m(t)|^2 \, dt = 0 \end{cases} \quad .\blacksquare$$

Remarque : le résultat est valable que w soit positif ou négatif. Si w est négatif, le résultat est une amélioration de (3.2).

4. AMELIORATION DELA PRECISION

Sidi (voir référence) fait remarquer que l'emploi d'une fonction poids e^{-wt} conduit à une approximation qui risque de n'être convenable qu'au voisinage de zéro. Il utilise alors comme fonction poids la fonction $\psi_N(t) = t^N e^{-wt}$. ψ_N est maximum en $t_{max} = \frac{N}{w}$ et est "petite" en dehors de $[t_-, t_+]$ avec

$$t_- = \frac{N - \sqrt{N}}{w} \quad \text{et} \quad t_+ = \frac{N + \sqrt{N}}{w} \quad \left(\Delta = t_+ - t_- = \frac{2\sqrt{N}}{w}\right)$$

donc l'emploi de ψ_N conduit à des approximations convenables en $t_{max} = \frac{N}{w}$.

En laissant $\frac{N}{w}$ constant de telle sorte que Δ diminue on a, a priori, une suite d'approximations de $F(t_{max})$.

La méthode précédente appliquée à la fonction $(-1)^k f^{(k)}(z)$ conduit

à $$\lim_m \int_0^\infty t^{2k} e^{-wt} \left|F(t) - h_m(t)\right|^2 dt \qquad (1)$$

donc à des approximations qui convergent avec la fonction poids $t^{2k} e^{-wt}$.

Si on remplace $f(z)$ par $f_1(z) = (-1)^k f^{(k)}(z)$ en appelant $F_1(t)$ la transformée de f_1, on a :

$$F_1(t) = t^k F(t)$$

On aura donc une approximation du type (1) en procédant de la manière suivante :

$$f_1(z) = (-1)^k f^{(k)}(z)$$

$$g(z) = f_1(z + \frac{\lambda+w}{2})$$

$$g(z) = \frac{1}{z+\lambda} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{z}{z+\lambda}\right)^n \quad \text{choix de } \lambda \text{ (qui dépend de } w).$$

Les a_n sont calculés par la relation

$$a_n = \sum_0^n \binom{n}{k} c_k \lambda^{k+1}$$

où les c_k sont les coefficients du développement de g en 0

$$c_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) = \frac{(-1)^k}{n!} f^{(k+n)}\left(\frac{\lambda+w}{2}\right)$$

d'où $$f_1(z) = \frac{1}{z + \frac{\lambda-w}{2}} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{z - \frac{\lambda+w}{2}}{z + \frac{\lambda-w}{2}}\right)^n$$

Appelons $F_{1,m}$ les cotransformées des sommes partielles de f_1 :

$$\int_0^\infty e^{-wt} |F_1(t) - F_{1,m}(t)|^2 \quad \text{tend vers zéro ,}$$

avec $$F_{1,m}(t) = e^{\frac{w-\lambda}{2} t} \sum_0^m a_n L_n(\lambda t)$$

Comme $F_1(t) = t^k F(t)$

$$\int_0^\infty t^{2k} e^{-wt} |F(t) - h_M(t)|^2 \text{ tend vers zéro}$$

avec

$$h_M(t) = \frac{1}{t^k} F_{1,M}(t) = \frac{1}{t^k} e^{\frac{w-\lambda}{2}t} \sum_0^M a_n L_n(\lambda t)$$

5. ETUDE NUMERIQUE

5.1.1. Calcul de $F_M(t) = e^{-\frac{\lambda}{z}t} \sum_0^M a_n L_n(\lambda t)$

Reprenons, on a les étapes suivantes :

a) $g(z) = f(z + \frac{\lambda}{2})$ $f(z)$ donnée. Choix de λ selon les singularités de f .

b) $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ $\qquad c_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\frac{\lambda}{2})$.

Le calcul des c_n a été fait par une relation de récurrence entre les dérivées de f qui sera explicité cas par cas.

c) $g(z) = \frac{1}{z+\lambda} \sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{z}{z+\lambda}\right)^n$ calcul des a_n .

$$a_n = \sum_0^n \binom{n}{k} c_k \lambda^{k+1}$$

d) Calcul du polynôme $P_m = \sum_0^m U_n^m t^n = \sum_0^m a_n L_n(t)$ c.a.d. calcul des u_n .

$L_n(t) = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{(-t)^n}{k!}$ $\qquad$ et $u_n^k = 0$ si $n > k$

$$\begin{cases} u_n^{m+1} = u_n^m + a_{m+1} \dfrac{(-1)^n}{n!} \dbinom{m+1}{n} \\ u_o^o = a_o L_o(t) = a_o . \end{cases}$$

e) Calcul de la valeur de $F_M(t)$ en certaines valeurs.

$$F_M(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} P_M(\lambda t)$$

A partir du c), le programme ne dépend pas de la fonction f , seules les phases a et b en dépendent.

5.1.2. *Amélioration par l'utilisation de fonctions poids* $t^{2k}e^{-wt}$

a) $g(z) = f_1(z + \frac{\lambda+w}{2}) \qquad f_1(z) = (-1)^k f^{(k)}(z)$

choix de λ .

b) $g(z) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n \qquad c_n = \frac{(-1)^k}{n!} f^{(k+n)}(\frac{\lambda+w}{2})$

c) et d) sont inchangés.

e) $F_M(t) = \frac{1}{t^k} e^{\frac{w-\lambda}{2}t} \sum\limits_0^m a_n L_n(\lambda t)$

5.1.3. *Méthode directe de l'inversion d'un approximant de type Padé de* f.

On aurait pu prendre directement un approximant de type Padé de f .

Si celui-ci est à 1 pole, on trouve (cf. prop. 1.3) :

$$f(z) = \frac{1}{z+\lambda} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{z}{z+\lambda}\right)^n$$

$$a_n = \sum_0^n \binom{n}{k} c_k \lambda^{k+1} \qquad \text{et} \qquad c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

Les sommes partielles de cette série admettent comme cotransformé de Laplace :

$$H_m(t) = e^{-\lambda t} \sum_0^m a_n L_n(\lambda t)$$

Ce n'est pas une famille orthonormale et on n'a pas de résultats théoriques de convergence.

5.2. *Exemples*

Les résultats sont regroupés en fin de paragraphe.

$\boxed{5.2.1.}$ $f(z) = \frac{1}{z} \text{Log}(1 + z)$

a) Choix de λ.

f n'a qu'une singularité $z = -1$.

D'après l'étude faite en fin de paragraphe 2, f_m sera la somme partielle du développement de Laurent de f.

donc :

$$\frac{\lambda - w}{2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\lambda}{2} = 1 + \frac{w}{2}$$

f étant analytique dans le demi plan $\text{Re}z > -1$, on peut prendre des w arbitraires croissants : $w = 0,1,2,\ldots$

b) La relation de récurrence entre les dérivées de f a été obtenue de la manière suivante :

$$z\, f(z) = \text{Log}(1 + z)$$

$$z\, f'(z) + f(z) = \frac{1}{1 + z}$$

\- - - - - - - - - - - - -

$$z\, f^{(n)}(z) + n\, f^{(n-1)}(z) = \frac{(-1)^{n+1}.n!}{(1 + z)^n}$$

La suite du programme n'est pas particulière à cette fonction.

Si on cherche directement un approximant de type Padé de f, on a alors :

les singularités de $z\, f(z)$ sont -1 et $l'\infty$ donc $-\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1} + 0\right)$

$$\Longrightarrow \lambda = 2$$

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \qquad c_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}$$

$$a_n = 2 \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} 2^k$$

soit

$$a_n(x) = - \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad a'_n(x) = - \sum_0^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

donc

$$a_n(x) = - \int_0^x (1+u)^n \, du = - \frac{1}{n+1} \quad (1+x)^{n+1} - 1$$

$$a_n = a_n(-\lambda) = + a_n(-2) = \frac{-1}{n+1} \quad (-1)^{n+1} - 1 \implies \begin{cases} a_{2n} = \dfrac{+2}{2n+1} \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{Log}(1+z) = \frac{2}{z+2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z}{z+2}\right)^{2n}$$

Si on prend $\lambda = 1$. On a $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

$$f(z) = \frac{1}{z+2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{z+1}\right)^{n+1}$$

qui converge visiblement moins vite que la précédente.

$\boxed{5.2.2.}$ On laisse de côté les exemples du type $f(z) = \dfrac{1}{(z+\alpha)^n}$ où la méthode est exacte avec $\lambda = \alpha$, car f est alors représentée par une somme finie

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{z+1} \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)$$

d'où pour les cotransformés de Laplace

$$H(t) = e^{-t} \left(L_o(t) - L_1(t)\right) = t \, e^{-t}$$

Cas d'une fonction avec 2 poles

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

a) Méthodes 5.1.1. et 5.1.2. : choix de λ .

On peut soit chercher λ tel que $-\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1-\frac{\lambda+w}{2}} + \frac{1}{-2-\frac{\lambda+w}{2}}\right)$

soit fixer arbitrairement le pole des f_m entre -1 et -2, c'est à dire :

$\frac{\lambda-w}{2} = x + 2(1-x)$ où x est un paramètre arbitraire entre 0 et 1 .

Equation différentielle vérifiée par f .

$(z+1)(z+2).f(z) = 1$.

Par la formule de Leibnitz : $(z+1)(z+2)f^{(n)} + n(2z+3)f^{(n-1)} + n(n-1)\ f^{(n-2)} = 0$.

b) Méthode 5.1.3. : inversion directe d'un approximant de f :

choix de λ .

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$.

$\boxed{5.2.3.}$ Soit $f_1(z) = \frac{1}{z}\exp\left(\frac{-z}{\sqrt{1+\sigma z}}\right)$

La fonction a 2 singularités $z = 0$ et $z = -\frac{1}{\sigma}$.

0 est un pole simple et on étudiera $f(z) = f_1(z) - \frac{1}{z}$ qui n'admet que $-\frac{1}{\sigma}$ comme singularité.

On aura pour les cotransformées de Laplace :

$$f(z) = f_1(z) - \frac{1}{z} \quad \text{d'où} \quad F_1(t) = F(t) + 1 .$$

Calcul des dérivées n ième de f_1 :

On pose :

$aux_n(z)$: dérivée n ième de $aux_o(z) = (1 + \sigma z)^{-\frac{1}{2}}$

$Z_n(z)$: dérivée en n ième de $Z_o(z) = -z.aux_o(z)$

$P_o = z\, f(x) = \exp(-z/(1+ \sigma z)^{-1/2}) - 1$

donc

$P_o = \exp(Z_o) - 1$.

$P_1 = P'_o = z\, f' + f_1 = Z_1 \exp Z_o$

donc $P_1 = \begin{cases} z\, f' + f \\ Z_1.(P_o + 1) \end{cases}$ d'où $f' = \frac{1}{z}\,(P_1 - f)$

Au rang n on calcule successivement

$$aux_n = (-1)^n \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)\ldots(\frac{1}{2} + n - 1)\ \sigma^n (1 + \sigma z)^{(\frac{1}{2} + n)}$$

$$= \frac{-\sigma}{1 + \sigma z}\ (\frac{1}{2} + n - 1)\ aux_{n-1}$$

$$Z_n = -(z.aux_o)^{(n)} = -\ z\ aux_n - n\ aux_{n-1}$$

$$P_n = (P_1)^{(n-1)} = \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} Z_{k+1}\ (P_o + 1)^{(n-1-k)} = Z_n(P_o + 1) + \sum_0^{n-2} \binom{n-1}{k} Z_{k+1} P_{n-1-k}$$

$$= z\ f^{(n)} + n\ f^{(n-1)}$$

$$\Longrightarrow f^{(n)} = \frac{1}{z}(P_n - n\ f^{(n-1)}) .$$

RESUME DES RESULTATS NUMERIQUES

(1) $f(z) = \frac{1}{z}\,\mathrm{Log}(1 + z)$

Méthode 5.1.3. : Cotransformé direct d'un approximant de type Padé de pole $(-\lambda)$.

	t = 4	t = 2	t = 1	t = 5	
m = 1	.00067093	.03663128	.27067057	.73575886	$\lambda = 2$
2	.00447284	.04884170	.18044704	.61313240	
3	.00447284	.04884170	.18044704	.61313240	
4	.00317571	.05616796	.19849175	.52116254	
5	.00317571	.05616796	.19849175	.52116254	
6	.00432800	.04651591	.23028480	.49415552	
7	.00432800	.04651591	.23028480	.49415552	
8	.00366039	.04397045	.24107343	.50674460	
9	.00366039	.04397045	.24107343	.50674460	
10	.00344455	.04856355	.23346844	.53476671	
m = 1	-.00915782	.06766764	.36787944	.75816332	$\lambda = 1$
2	-.00305261	.02255588	.30656620	.76343544	
3	.00763152	.01127794	.24525296	.76132234	
4	.01129464	.02030029	.19926803	.72120286	
5	.00864905	.03684127	.17065519	.67616059	
6	.00382303	.05273780	.15715167	.63247782	
7	.00009449	.06396263	.15529036	.59317924	
8	-.00117824	.06935635	.16158492	.55959342	
9	-.00018138	.06946614	.17297978	.53212246	
10	.00211517	.06560365	.18699083	.51065268	

L'inversion directe d'un approximant de type Padé est visiblement très sensible au choix de λ , et ne donne dans le meilleur des cas qu'un ordre de grandeur du résultat. Cette remarque ne semble pas devoir être aussi pessimiste dansle cas où les singularités sont des poles, comme le montrera l'exemple suivant.

Méthode 5.1.2. Convergence en moyenne quadratique avec ou sans fonction poids $w_k(t) = t^{2k} e^{-kt}$. $\frac{\lambda}{2} = 1 + \frac{w}{2}$, le pole de l'approximant est : $-\frac{\lambda - w}{2} = -1$.

	t = 3,5	t = 3	t = 2,5	t = 2	t = 1,5	t = 1	t = 0,5	
				0,048900511	0,100019582	0,219383934	0,559773595	valeurs exactes
k = 0	-.06933136	-.08375349	-.08771014	-.06155354	.03545161	.28421951	.64083003	m = 1
	.06481704	.05087376	.02327127	-.00927428	-.00764535	.14210975	.72366055	2
	.03377317	.06483267	.08464289	.07926234	.05491416	.10772868	.61031075	3
	-.02342939	.01015958	.06135655	.10898571	.12229681	.13466086	.52705392	4
	-.02624356	-.02396522	.01447132	.08782974	.15650634	.18332138	.47599996	5
	.00536467	-.01634973	-.01177380	.04964785	.15607971	.22958883	.45216180	6
	.03065352	.01178741	-.00822793	.02038861	.13396956	.26199192	.44690270	7
	.03178863	.03463655	.01328926	.01046505	.10496440	.27746491	.49985372	8
	.01514267	.03986297	.03648378	.01819741	.08010863	.27777821	.47957540	9
	-.00376690	.02934665	.05016289	.03593492	.06526617	.26697404	.50372147	10
k = 2	.00503191	.00964436	.01896532	.03883096	.08427774	.20306331	.61654242	1
	.00934026	.01631687	.02900755	.05298952	.10136561	.21211906	.55682075	2
	.00491537	.01111706	.02373874	.04932378	.10223699	.21965977	.54971645	3
	.00788457	.01324081	.02431052	.04802933	.10027452	.22111578	.55291718	4
	.00716273	.01355589	.02524787	.04858730	.09949116	.22045301	.55661559	5
	.00661415	.01298195	.02519291	.04908146	.09961164	.21962868	.55903906	6
	.00689209	.01283044	.02488140	.04912787	.09993565	.21916886	.56027449	7
	.00711855	.01300494	.02477130	.04897206	.10013526	.21905055	.56072204	8
	.00705538	.01313625	.02484138	.04884337	.10017103	.21912278	.56072914	9
	.00692836	.01312296	.02493785	.04881195	.10011317	.21925596	.56053232	10
k = 5	.00003050	.00009264	.00031431	.00125057	.00638979	.05121942	1.18385123	1
	.00057165	.00146609	.00405373	.01246449	.04493376	.20921376	1.27445597	2
	.00324656	.00700944	.01574636	.03723243	.09383135	.24787419	.31255744	3
	.00679221	.01280288	.02463078	.04871565	.10024385	.21956564	.55832294	4
	.00708141	.01315365	.02497225	.04886452	.09995667	.21961314	.55746028	5
	.00691592	.01302270	.02492488	.04892093	.09999331	.21942983	.55881759	6
	.00698528	.01304426	.02490583	.04890521	.10002278	.21937113	.55953237	7
	.00697249	.01305369	.02491395	.04889759	.10002495	.21936994	.55977769	8
	.00696628	.01304842	.02491676	.04889894	.10002099	.21937862	.55982869	9
	.00697044	.01304709	.02491538	.04890076	.10001893	.21938392	.55981930	10
k = 9	.00270555	.00642125	.01586635	.04077954	.10554066	.21757621	1.52876353	5
	.00556378	.01129602	.02330102	.04864577	.10149649	.21388154	.58242173	6
	.00695262	.01303162	.02490675	.04890704	.10001763	.21939904	.55790190	7
	.00697770	.01305251	.02491434	.04889898	.10002246	.21937515	.55928484	8
	.00696755	.01304807	.02491560	.04890014	.10001999	.21938065	.55970726	9
	.00697064	.01304810	.02491487	.04890065	.10001936	.21938371	[illegible]	10

(2) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$

Méthode 5.1.3. : Inversion directe d'un approximant de type Padé de pole $(-\lambda)$.

t = 8	t = 4	t = 2	t = 1	t = 0,5		
.00016575	.01716604	.12352614	.23430857	.22818539	m = 1	$\lambda = \frac{4}{3}$
.00022887	.01879525	.11952297	.21912190	.22395975		
.00033696	.01794311	.11691774	.23334433	.23851477		
.00034271	.01784679	.11756493	.23237117	.23830630		
.00033502	.01799317	.11697673	.23259914	.23869330		
.00033454	.01798673	.11700758	.23264844	.23844101		
.00033543	.01797984	.11701806	.23254456	.23865618		
.00033542	.01798139	.11701327	.23255948	.23863948		
.00033534	.01798006	.11701987	.23254376	.23865197		
.00033535	.01798011	.11701915	.23254556	.23865130		
.00033535	.01798018	.11701964	.23254416	.23865122	valeurs exactes	

t = 8	t = 4	t = 2	t = 1	t = 0,5		
.00075479	.02289455	.10150146	.18393972	.22744900	m = 1	$\lambda = 1$
.00004193	.02060509	.11841837	.20693219	.21797196		
.00030052	.01793406	.12123786	.22226050	.22350023		
.00040186	.01756170	.11982812	.22944564	.22976890		
.00036027	.01760972	.11827740	.23212810	.23399161		
.00032877	.01787365	.11740806	.23286657	.23638051		
.00032642	.01799016	.11705730	.23292473	.23760859		
.00033229	.01801254	.11696248	.23281409	.23819697		
.00033574	.01800280	.11696141	.23270281	.23846724		
.00033632	.01799047	.11698183	.23262756	.23858256		
.00033535	.01798018	.11701964	.23254416	.23865122	valeurs exactes	

La convergence est bonne pour $\lambda = \frac{4}{3}$, mais reste très sensible au choix de λ, comme le montre le 2ème tableau.

Méthode 5.1.2. : Convergence en moyenne quadratique sans fonction poids.

La convergence reste sensible au choix du pole, mais reste très significative. L'emploi d'une fonction poids n'améliore pas la convergence.

Pole - 1,4

t = 4	t = 3	t = 2	t = 1	t = 0,5	t / m
.12254902	.04689526	.01035775	.00198993	-.00085247	1
.34313725	.00676116	.00010153	.00000013	-.00000856	2
.01408451	.04284924	.11590968	.23543326	.23788746	.
.01511759	.04482427	.11816277	.23429951	.23513432	.
.01800271	.04737636	.11697315	.23258266	.23867050	.
.01802206	.04736325	.11695203	.23261387	.23865087	
.01797880	.04730791	.11702108	.23254323	.23865345	
.01797878	.04730794	.11702107	.23254324	.23865347	
.01798023	.04730826	.11701970	.23254407	.23865132	
.01798022	.04730828	.11701968	.23254409	.23865130	
.01798018	.04730832	.11701964	.23254416	.23865122	
.01798018	.04730832	.11701964	.23254416	.23865122	10
.01798018	.04730832	.11701964	.2325 4416	.2386 5122	val.exactes

Pole - 1,2

t = 4	t = 3	t = 2	t = 1	t = 0,5	t / m
.02055495	.05404838	.12688426	.22729506	.22326996	1
.01486358	.04499707	.11905611	.23412579	.23375263	2
.01824139	.04691720	.11665318	.23327398	.23805243	.
.01809225	.04737453	.11686653	.23271999	.23860481	.
.01797143	.04733706	.11700228	.23256549	.23866338	.
.01797408	.04731068	.11702186	.23254386	.23865807	
.01797971	.04730743	.11702114	.23254302	.23865336	
.01798039	.04730798	.11702001	.23254374	.23865177	
.01798024	.04730827	.11701969	.23254405	.23865134	
.01798018	.04730832	.11701964	.23254414	.23865124	10
.01798018	.04730832	.11701964	.232544.16	.23865122	val. exactes

3 $f(z) = \frac{1}{z} \exp(\frac{- z}{\sqrt{1 + \sigma z}})$.

Le point $z = 0$ est un pole simple ; on a donc utilisé $f(z) - \frac{1}{z}$.
Il n'y a alors qu'une singularité essentielle au point $z = - \frac{1}{\sigma}$.
Nous avons d'abord (tableau (1)) montré l'amélioration de la convergence par l'emploi d'une fonction poids $\omega_k(t) = t^{2k} e^{-kt}$. Celle-ci est identique quelque soit σ entre 0 et 1 (1 compris) ; tous les calculs sont faits en double précision.
Le phénomène de l'amélioration des résultats est limité par les erreurs d'arrondis, ce que confirme le calcul fait en simple précision : celui-ci se dégrade quand le nombre m de termes de l'approximant et l'indice de la fonction poids augmentent ($n > 12$ et $k > 5$ en simple précision, $k > 6$, n ? en double précision).
Sidi constate avec les fonctions poids $t^{2k} e^{-kt}$ un "effet-fenêtre" sur le résultat, c'est à dire, une amélioration des résultats en $t = 2k/k = 2$ et une détérioration loin de 2 . Ici ce n'est pas le cas, la précision et la convergence sont comparables en tous les points étudiés.
(voir tableau ci-après).

t = 4	t = 3,5	t = 3	t = 2,5	t = 2	t = 1,5	t = 1	t = 0,5	t	
.99999986	.99999856	.99998492	.99984674	.99850356	.98628452	.88791328	.30456546	F 1	
.99999829	.99998500	.99986612	.99887138	.99124340	.94041300	.68044363	.01920280		
.99999219	.99993603	.99951052	.99654327	.97833322	.88701647	.57001129	.09776288		
.99998313	.99987600	.99915167	.99472273	.97120245	.87019068	.56526813	.10454807		
.99997536	.99983203	.99894679	.99394937	.96925477	.86842194	.56735062	.10220813		
.99997316	.99982297	.99891025	.99385360	.96912914	.86846972	.56736320	.10230116		
.99997535	.99983094	.99893140	.99388702	.96913593	.86844132	.56739375	.10229724		
.99996444	.99980094	.99887782	.99385777	.96918000	.86842177	.56742160	.10225071		
.99998630	.99984349	.99891787	.99383422	.96915760	.86845681	.56739906	.10220075		
.99995784	.99980972	.99891707	.99386378	.96913222	.86847957	.56736640	.10217578		
.99998128	.99981804	.99898825	.99386576	.96914140	.86847128	.56735468	.10217472		(k = 0)
.99997174	.99982058	.99890547	.99385329	.96915294	.86845876	.56735969	.10218366		
.99997030	.99982033	.99891000	.99385345	.96915244	.86845607	.56736670	.10219166		
.99997310	.99982016	.99890790	.99385598	.96914967	.86845794	.56736934	.10219521		
.99997281	.99982069	.99890755	.99385608	.96914938	.86845850	.56736943	.10219568		
.99997332	.99982054	.99890703	.99385648	.96914893	.86845820	.56736996	.10219554		
.99997221	.99982213	.99890599	.99385771	.96914757	.86845899	.56737154	.10219628		
.99997151	.99982193	.99890674	.99385711	.96914716	.86846069	.56737300	.10219803		
.99997286	.99982075	.99890818	.99385557	.96914833	.86846177	.56737331	.10220015	F 19	
1.00000000	1.00000000	1.00000000	.99999991	.99999785	.99993848	.99752292	.77386022	F 1	
1.00000000	.99999999	.99999977	.99999611	.99992772	.99850020	.96243635	-.33387639		
.99999998	.99999949	.99999565	.99993878	.99911944	.98704978	.80957779	-.86853698		
.99999972	.99999647	.99996116	.99955634	.99510809	.95001387	.59024670	.34308168		
.99999847	.99998141	.99981813	.99831727	.98579190	.89899830	.52555640	.29683319		
.99999371	.99994114	.99951253	.99630172	.97550233	.87128291	.56122737	.03708751		
.99998543	.99988495	.99917356	.99465885	.97029158	.86761640	.56921486	.10394140		
.99997768	.99984297	.99897784	.99399727	.96920193	.86835232	.56743720	.10331944		(k = 5)
.99997389	.99982571	.99891802	.99386797	.96914265	.86846541	.56735064	.10207222		
.99997277	.99982173	.99890815	.99385658	.96914832	.86846044	.56737097	.10220529		
.99997256	.99982147	.99890726	.99385629	.96914884	.86845989	.56737058	.10220068		
.99997255	.99982146	.99890725	.99385630	.96914884	.86845989	.56737057	.10220066		
.99997252	.99982141	.99890724	.99385632	.96914882	.86845991	.56737061	.10220088		
.99997257	.99982145	.99890722	.99385632	.96914882	.86845992	.56737061	.10220111		
.99997252	.99982144	.99890724	.99385630	.96914883	.86845992	.56737059	.10220124	F 15	

On peut résumer les valeurs obtenues pour l'inverse de la fonction $\frac{1}{z} \exp\left(\frac{-z}{(1+\sigma z)^{1/2}}\right)$ dans le tableau suivant, selon les valeurs de σ et de t.

Le paramètre σ varie de 0,2 à 1 par pas de 0,2 et t varie de 0,5 à 4. Contrairement à ce qui se passe dans la méthode de Longmann, la valeur $\sigma = 1$, n'est pas particulière.

Les résultats sont obtenus en prenant 14 termes pour l'approximant rationnel de $(-1)^5 f^{(5)}(z)$. C'est une convergence en moyenne quadratique avec une fonction poids $t^{10} e^{-5t}$.

Toutes les décimales citées présentent une certaine stabilité dans les résultats trouvés. On peut remarquer une certaine dégradation de la précision quand σ augmente. L'erreur relative semble donc inférieure à 2.10^{-7}.

t \ σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0,5	.1022010	.2200330	.2983019	.3548312	.3983875
1	.5673705	.5956933	.6173415	.6352666	.6506315
1,5	.8684599	.8179220	.7988473	.7909833	.7882222
2	.9691488	.9239090	.8964390	.8797707	.869366
2,5	.9938563	.9697096	.9474830	.9308438	.9187462
3	.9989072	.9883548	.9736810	.9602775	.9492417
3,5	.9998211	.9956401	.9869363	.9772277	.9682182
4	.9999725	.9984017	.9935675	.9869720	.9800756

CONCLUSION

A propos des approximants de type Padé, on cherche à déterminer le "meilleur" pole $(-\lambda)$ pour un approximant qui n'aurait qu'un pole. Il faut remarquer que si $(-\lambda)$ est la singularité de f si celle-ci est un pole, ce n'est pas le cas nécessairement quand f admet une singularité essentielle, comme le montre l'exemple 1.

Du point de vue de l'inversion de la transformée de Laplace, la méthode proposée consiste au calcul d'un approximant de type Padé au point $\frac{\lambda+w}{2}$, donc le calcul de l'approximant rationnel de f est toujours simple, même dans la version améliorée où on emploie la fonction $f^{(k)}$ ce qui ne complique pas la mise en oeuvre.

Enfin, quoique la convergence démontrée soit en moyenne quadratique, les résultats numériques sont bons pour les fonctions étudiées et sur de grands domaines pour la variable t .

REFERENCES

I.M. LONGMANN - *On the generation of rationnal function approximation for Laplace transform inversion with application to viscoelasticity. Siam J. appl. Math. vol. 24, N 4, June 1973.*

- *Numerical Laplace transform inversion of a function arising in viscoelasticity. Reprinted from J. of computational Physics.*

- *Best rationnal function approximation for Laplace transform inversion. Siam J. Math. Appl. vol. 5 N 4, August 1974.*

I.M. LONGMANN *et* M. SHARIR - *Laplace transform inversion of rationnal functions. Geophys. J.R. astro. Soc. (1971) 25, p. 299-305.*

SCRATON - *A note on the summation of divergent power series. Proc. Cambridge Phil. Soc (1968) p.66.109.*

A.SIDI - *Best rationnal function approximation to Laplace transform inversion using a window function - J. of comput. and applied Math. vol. 2 N° 3 1976.*

- *The Padé table and its connection with some weak exponential function approximation to Laplace transform inversion. Lect. notes in math. N° 888 : Padé approximation and its applications. Amsterdam 1980.*

SPINELLI - *Numerical inversion of a Laplace transform. Siam J. of num. analysis. Vol. 3 n° 4 - 1965.*

QUATRIEME PARTIE

APPROXIMANTS DE TYPE PADE EN PLUSIEURS POINTS $z_1 \ldots z_n$.

On définit des approximants de type Padé d'une fonction f en plusieurs points, c'est à dire qu'on veut pour un dénominateur Q fixé, un polynôme P tel que P/Q interpole f en tous les points z_i, à un ordre m_i arbitraire fixé à l'avance. P apparait comme le polynome de Newton de la fonction $f.Q$.

Les propriétés algébriques classiques des approximants de type Padé en zéro sont conservées (2ème partie). D'autre part, ils apparaissent par rapport aux approximants de Newton-Padé comme en parallèle des approximants en un point (3ème partie).

Parallèlement à Galluci et Jones, on démontre donc à l'aide des formules d'Hermite une formule d'erreur, un théorème de convergence dans le cas d'un nombre fini de points d'interpolation, et enfin la continuité des approximants par rapport soit à la suite de points d'interpolation, soit à la fonction f, soit au polynôme Q (4ème partie).

Enfin dans la 5ème partie, on examine les approximants de type Padé en zéro et l'infini, leur existence, leur mode de calcul, leur lien avec les précédents.

Nous n'avons pas, dans ce chapitre, fait d'applications numériques ; mais l'idée nous en était pourtant venue en ce qui concerne les approximants en zéro et l'infini pour inverser la transformée de Laplace ce qui serait une extension de la méthode de Longmann-Sharir.

1. *DEFINITION*

Soit F une fonction donnée et Q un polynôme arbitraire de $d^\circ q$. On suppose que pour chaque point z_i , $i = 1 \ldots n$.

$$F.Q(z) = \sum_{j=0}^{m_i-1} u_{ij}(z - z_i)^j + O((z-z_i)^{m_i}) \quad .$$

On construit le polynôme P qui interpole la fonction $F.Q$ en z_i jusqu'à l'ordre m_j exclus et ceci pour chaque i .

P est le polynôme d'interpolation généralisé de Lagrange-Hermite

$$\begin{cases} P(z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega(z)}{(m_i-1)!} \left(\frac{d}{da}\right)^{m_i-1} \left[\sum_{j=0}^{m_i-1} u_{ij} \frac{(a - z_i)^{m_i+j}}{(z - a)\omega(a)}\right]_{a=z_i} & (1) \\ \text{où } \omega(z) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{m_i} \end{cases}$$

On vérifie algébriquement que (cf. Baker) :

$$i = 1 \ldots n \ , \ j = 0 \ldots m_i-1 \qquad P^{(j)}(z_i) = (F.Q)^{(j)}(z_i) \text{ et } d^\circ P = \sum_{i=1}^{n} m_i - 1 \ .$$

Cas particuliers

1 $\quad i = 1 \ , \ z_i = 0 \qquad \omega(z) = z^m$

$$P(z) = \frac{z^m}{(m-1)!} \left(\frac{d}{da}\right)^{m-1} \left[\sum_{j=0}^{m-1} u_j \frac{a^j}{z - a}\right]_{a=0}$$

par la formule de Leibnitz.

$$\left(\frac{d}{da}\right)^{m-1} \left(\frac{a_j}{z-a}\right)_{a=0} = \binom{m-1}{j} \frac{j!(m-1-j)!}{z^{m-j}}$$

$$P(z) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j z^j \qquad \text{et} \qquad u_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{da}\right)^j (FQ)_{a=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} c_k \, q_{j-k}$$

avec $\begin{cases} c_k = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{d}{da}\right)^{(k)} F(a))_{a=0} \\ \\ q_{j-k} = \dfrac{1}{(j-k)}\left(\dfrac{d}{da}\right)^{(j-k)} (Q(z))_{a=0} \end{cases}$ q_{j-k} est 0 si $k > j$ ou le coefficient en z^{j-k} de Q sinon).

et donc $\frac{P}{Q} = (m-1/q)_f$.

2 Pour tout i , $m_i = 1$.

$$P(z) = \sum_{i=1}^{n} \omega(z)\, u_{io} \frac{1}{(z - z_i)\prod\limits_{k\neq i}(z_i - z_k)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{io} \frac{\prod\limits_{k\neq i}(z - z_k)}{\prod\limits_{k\neq i}(z_i - z_k)}$$

P est le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Proposition 1.1.

Si pour $j = 0\ldots m_i-1$, et $i = 1\ldots n$ on a $P^{(j)}(z_i) = (FQ)^{(j)}(z_i)$, alors dans les mêmes conditions, on a

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^{(j)}(z_i) = F^{(j)}(z_i) \quad \text{pourvu que} \quad Q(z_i) \neq 0 \quad (i=1\ldots n)$$

Démonstration :

Pour i quelconque, on a $P(z_i) = F.Q(z_i)$ $\quad \frac{P}{Q}(z_i) = F(z_i)$

On procède par récurrence :

On suppose $\left(\frac{P}{Q}\right)^{(k)}(z_i) = F^{(k)}(z_i)$, $k = 0,1..,j-1$.

Dérivons $(F.Q)^{(j)}$ par la formule de Leibnitz :

$$(F.Q)^{(j)} = F^{(j)}.Q + \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} F^{(j-k)}.\ Q^{(k)}$$

de même $P = (Q.\frac{P}{Q})$ $\quad P^{(j)} = (\frac{P}{Q})^j\ Q + \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} (\frac{P}{Q})^{(j-k)} Q^{(k)}$

en comparant au point z_i, il vient

$$(F^{(j)}.Q)(z_i) = ((\frac{P}{Q})^{(j)}Q)(z_i) \Longrightarrow F^{(j)}(z_i) = (\frac{P}{Q})^{(j)}(z_i)$$

donc si P est défini par la relation (1)

on a

$$\frac{P}{Q}(z) = F(z) + O((z-z_i)^{m_i}) \qquad i = 1\ldots n \quad . \blacksquare$$

Définition 1.2.

On appelle approximant de type Padé (N/q), d'une fonction $F(z)$, aux n points (z_i,m_i), toute fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ telle que :

$$\begin{cases} d°P = N = \sum_{i=1} m_i - 1 \quad ; \quad d°Q = q \quad \text{et} \quad Q(z_i) \neq 0 \ , \ i = 1\ldots n \\ \\ \frac{P}{Q}(z) = F(z) + O((z-z_i)^{m_i}) \quad i = 1\ldots n \ . \end{cases}$$

Propriété 1.3. Unicité.

Si $\frac{P_1}{Q}$ et $\frac{P_2}{Q}$ sont deux approximants $(N/q)_F$ aux mêmes points $(z_i,m_i)_{i=1..n}$ et de même dénominateur Q , alors

$$P_1 = P_2$$

Démonstration

Par définition, on a :

$$(\frac{P_k}{Q})^{(j)} (z_i) = F^{(j)}(z_i) \qquad k = 1,2$$

donc par un calcul analogue à la proposition 1.1.

$$P_k^{(j)}(z_i) = (F.Q)^{(j)}(z_i) \qquad k = 1,2$$

P_1 et P_2 sont de degré N et coïncident en $(N+1)$ points, compte tenu de leur multiplicité, donc $P_1 = P_2$. ∎

2. *PROPRIETES ALGEBRIQUES*

Propriété 2.1.

Si P/Q est l'approximant $(N/N)_F$ aux points $(z_i,m_i)_{i=1\ldots n}$ de dénominateur Q , alors Q/P est l'approximant $(N/N)_{1/F}$ de $1/F$ aux mêmes points (z_i,m_i), de dénominateur P pourvu que $F(z_i) \neq 0$, $i = 1\ldots n$.

Démonstration

On sait que $P^{(j)}(z_i) = (F.Q)^{(j)}(z_i) \quad i = 1\ldots n\ , \ j = 0,\ldots m_i-1$.

On veut montrer que $Q^{(j)}(z_i) = (\frac{1}{F}.P)^{(j)}(z_i)$.

La propriété est vraie pour i quelconque, $j = 0$ si $F(z_i) \neq 0$.

On la suppose vraie jusqu'à $j-1$:

$$P = F.P/F \qquad P^{(j)}(a) = F(a).(P/F)^{(j)}(a) + \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} F^{(k)}(a).(P/F)^{(j-k)}(a)$$

$$(FQ)^{(j)}(a) = F(a).Q^{(j)}(a)+\ldots$$

au point z_i , on a $(P/F)^{(j-k)}(z_i) = Q^{(j-k)}(z_i) \quad k = 1\ldots j$.

$$\Longrightarrow \quad F(z_i)(P/F)^{(j)}(z_i) = F(z_i).Q^{(j)}(z_i)$$

donc $\quad Q^{(j)}(z_i) = (\frac{1}{F}.P)^{(j)}(z_i) \qquad i = 1\ldots n\ , \ j = 0\ldots m_i-1$.

De plus $\quad d°Q = N = \sum_{i=1}^{n} m_i - 1$.

donc $\quad Q/p = (N/N)_{1/F}$ aux points (z_i,m_i). ∎

Propriété 2.2.

Si F est remplacée par $aF + R_k$

Si $d°R_k \leq N-q$

Si $P/Q = (N/q)_F$ aux points (z_i, m_i)

alors $(aP + Q.R_k)/Q = (N/q)_{aF+R_k}$ aux mêmes points.

Démonstration

Séparons en deux parties.

Si F est remplacée par $a.F$: $\frac{P}{Q}$ interpole F en z_i à l'ordre m_i

donc $a.\frac{P}{Q} = \frac{aP}{Q}$ interpole $a.F$ en z_i à l'ordre m_i et $\frac{a.P}{Q}$: $(N/q)_{a.F}$.

Si F est remplacée par $F + R_k$: P interpole $F.Q$ en z_i à l'ordre m_i ,

$P + Q.R_k$ interpole $F.Q + Q\,R_k$ en z_i à l'ordre m_i .

$\dfrac{P + QR_k}{Q}$ sera l'approximant cherché s'il vérifie la condition sur le degré

du numérateur, c'est à dire, $d°Q.R_k \leq N$,

soit $d°R_k \leq N - q$. ∎

Propriété 2.3. Coriance homographique

2.3.1.

Si $H(z) = \dfrac{A + B F(z)}{C + D\,F(z)}$ et $C + DF(z_i) \neq 0 \quad i = 1 \ldots n$

si $\frac{P}{Q}(z) = (N/N)_F$ aux points (z_i, m_i)

$$\Longrightarrow R = \frac{A\,Q + B\,P}{C\,Q + D\,P} = (N/N)_H \text{ aux points } (z_i, m_i)$$

Démonstration :

En effet, on a :

$$R(z) = \frac{A + B\,\frac{P}{Q}}{C + D\,\frac{P}{Q}} = \frac{A + BF(z) + O(z-z_i)^{m_i})}{C + DF(z) + O((z-z_i)^{m_i}} \quad i = 1 \ldots n$$

$$= \frac{A + BF}{C + DF}(z) + O((z-z_i)^{m_i}) \quad \text{si} \quad C + DF(z_i) \neq 0 \quad \text{et pour} \quad i = 1 \ldots n.$$

et R est une fraction rationnelle de degré (N,N), donc $R = (N/N)_H$. ■

2.3.2.

Soit $z = \psi(t) = \dfrac{at + b}{ct + d}$ et $H(t) = F \circ \psi(t)$, et $ad - bc \neq 0$

Soit $\frac{P}{Q}(z) = (N/q)_F$ aux points (z_i, m_i) et $z_i = \psi(t_i)$

alors $$R(t) = \frac{P\left(\frac{at + b}{ct + d}\right)}{Q\left(\frac{at + b}{ct + d}\right)} = (N/q)_H \quad \text{aux points } (t_i, m_i)$$

Démonstration

Pour $i = 1 \ldots n$, et au voisinage de z_i :

$$\frac{P}{Q}(z) = F(z) + O((z-z_i)^{m_i})$$

On aura $\frac{P}{Q}(\psi(t)) = H(t) + O((t-t_i)^{m_i})$ si $(z-z_i) = (\psi(t)-\psi(t_i)) = O(t-t_i)$

$$\psi'(t) = \frac{ad - bc}{(ct+d)^2} .$$

Pour t dans tout compact de $\mathbb{R}$, $|\psi'(t)| \geqslant k > 0$

et $|\psi(t) - \psi(t_i)| \geqslant k|t - t_i|$

ψ est bijective continue ; si z est voisin de z_i , t est voisin de t_i .

Donc si z est voisin de z_i : $|z - z_i| = O(|t - t_i|)$

$$\frac{P \circ \psi(t)}{Q \circ \psi(t)} = H(t) + O((t-t_i)^{m_i}) \quad i = 1 \ldots n$$

d'autre part

$\dfrac{P \circ \psi(t)}{Q \circ \psi(t)}$ est une fraction de mêmes degrés (N,q) que $\frac{P}{Q}(z)$.

donc $R(t) = \dfrac{P(\frac{at+b}{ct+d})}{Q(\frac{at+b}{ct+d})} = (N/q)_H$ aux points (t_i, m_i) . ■

Propriété 2.4.

Si $F(z) = (z - z_k).G(z)$

Si $(N/q)_G$ est approximant de G aux points (z_i, m_i) ,

alors $(N+1/q)_F = (z - z_k)(N/q)_G$ approximant de F aux points (z_i, m_i') avec $m_i' = m_i + \delta_{ik}$.

Démonstration

$$(N/q)_G(z) = G(z) + O((z-z_i)^{m_i})$$

$$(z - z_k)(N/q)_G(z) = (z - z_k).G(z) + O((z - z_i)^{m_i'})$$

donc

$$(z - z_k)(N/q)_G = (N+1/q)_F \text{ aux points } (z_i, m_i') \text{ . ■}$$

Propriété 2.5.

Si $\dfrac{P_1}{Q} = (N/q)_F$ en (z_i, m_i) $i = 1\ldots n$

Si $\dfrac{P_2}{Q} = (N+1/q)_F$ en (z_i, m_i') $m_i' = m_i + \delta_{ik}$ $i = 1\ldots n$

Si $\dfrac{P_1}{Q}(z) = F(z) + A(z - z_k)^{m_k} + O((z - z_k)^{m_k+1})$

Alors : $P_2(z) = P_1(z) - A.Q(z_k).(z - z_k)^{m_k}$

Démonstration

$$\text{On a } \begin{cases} \dfrac{P_2}{Q} = F(z) + ((z - z_k)^{m_k+1}) \\ \dfrac{P_1}{Q} = F(z) + A(z - z_k)^{m_k} + O((z - z_k)^{m_k+1}) \end{cases} .$$

En développant Q en puissance de $(z - z_k)$, on trouve :

$$P_2(z) = P_1(z) - A.Q(z_k).(z - z_k)^{m_k} + O((z - z_k)^{m_k+1})$$

En faisant de même pour les indices $i = 1 \ldots n$, $i \neq k$, on a

$$P_2(z) = P_1(z) + O((z - z_i)^{m_i}) \qquad i \neq k \quad .$$

Les polynômes P_2 et $(P_1(z) - A.Q(z_k).(z - z_k)^{m_k})$ sont de degré $\sum_{i=1}^{n} m_i = N+1$, ils interpolent $F.Q$ en $N+2$ points, compte tenu de leur multiplicité.

Ils sont donc égaux en $N+2$ points, et de degré $N+1$. Ils sont égaux :

$$P_2(z) = P_1(z) - A.Q(z_k)(z - z_k)^{m_k} \quad . \blacksquare$$

Propriété 2.6.

Si $h(z) = (N/q)_F + (N/q)_G$ approximants de F et G aux mêmes points (z_i,m_i) , de dénominateur quelconque.

Alors $(N/q)_h = (N/q)_{F+G}$ aux mêmes points (z_i,m_i) , s'ils ont même dénominateur Q .

Démonstration :

Soit $(N/q)_h = \dfrac{P_h}{Q}$: $P_h^{(j)}(z_i) = (h.Q)^{(j)}(z_i)$ $\quad i = 1 \ldots n$, $j=0 \ldots m_i-1$.

Soit $(N/q)_{F+G} = \dfrac{P_{F+G}}{Q}$: $P_{F+G}^{(j)}(z_i) = ((F + G).Q)^{(j)}(z_i)$

comme $h^{(j)}(z_i) = F^{(j)}(z_i) + G^{(j)}(z_i)$

on a $P_h^{(j)}(z_i) = P_{F+G}^{(j)}(z_i)$ pour $i = 1 \ldots n$ et $j = 0 \ldots m_i - 1$,

et donc $P_h = P_{F+G}$ $. \blacksquare$

3. RELATIONS AVEC LES APPROXIMANTS DE NEWTON-PADE (*Gallucci-Jones*)

Etant donnée le triplé, $((a_n),(\beta_n),(f_n))$, on considère la FNS (formal Newton Serie)

$$\sum_{n\geq 0} a_n\, \omega_n(z) \qquad \begin{cases} \omega_n(z) = \prod_1^n (z-\beta_k) \\ f_n = \sum_0^n a_k\, \omega_k(z) \end{cases}$$

en appelant $A_{k,p} = \sum_{j=0}^{p} a_{k-j}\, K_{k+1,j+1}^{(p-j)}$

$$K_{\nu\mu}^{(m)} = \sum \beta_{i},\ldots,\beta_{im} \qquad \nu-\mu+1 \leqslant i_j \leqslant \nu$$

On cherche $u(z) = \sum_0^n c_i \omega_i(z)$ et $v(z) = \sum_0^m d_i z^i$ tels que

$$v(z).f(z) - u(z) = b_{n+m+1}\, \omega_{n+m+1}(z) + b_{n+m+2}\, \omega_{n+m+2}(z) + \ldots \qquad (1) .$$

Alors les c_i et les d_i sont solutions du système suivant :

$$(2) \begin{cases} (2.1) \begin{cases} d_o A_o + \ldots\ldots\ldots + d_m A_{om} = c_o \\ \quad | \\ d_o A_{n,o} + \ldots\ldots\ldots + d_m A_{nm} = c_n \end{cases} \\ (2.2) \begin{cases} d_o A_{n+1,o} + \ldots\ldots\ldots + d_m A_{n+1,m} = 0 \\ \quad | \\ d_o A_{n+m,o} + \ldots\ldots\ldots + d_m A_{n+m,m} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

On appelle $R_{m,n}(z) = P_{m,n}(z)/Q_{m,n}(z)$ l'unique approximant ainsi trouvé, à équivalence près.

Cependant, la propriété (2) implique : R_{mn} interpole f en β_i seulement si $Q_{m,n}(\beta_i) \neq 0$.

En effet, $Q_{mn}(\beta_i) = 0 \Longrightarrow P_{mn}(\beta_i) = 0$ pour $i \leqslant m+n$ (propriété 1)

Donc Gallucci-Jones définissent des approximants normaux, c'est à dire

$$\begin{cases} R_{mn} = P_{mn}/Q_{mn} \quad \text{vérifiant (1)} \\ d^\circ P_{m,n} = n \quad ; \; d^\circ Q_{mn} = m \\ P_{mn} \text{ et } Q_{pn} \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

alors $Q_{mn}(\beta_i) \neq 0$ et R_{mn} vérifie la propriété d'interpolation (cf. Prop.1.1)

Ils définissent d'autre part des approximants "réguliers" :

$$\begin{cases} Q_{mn}\, f(z) - P_{mn}(z) = b_{n+1}\, \omega_{n+1}(z) + \dots \\ P \text{ et } Q \text{ premiers entre eux} \\ Q(\beta_i) \neq 0 \qquad i = n+2 \dots \end{cases}$$

Les approximants de type Padé en (n) points se présentent par rapport aux approximants de Newton-Padé comme les approximants de type Padé classiques par rapport aux approximants de padé. C'est à dire que le dénominateur Q étant fixé, on cherche P(z) vérifiant la partie (2.1) du système (2).

On a alors :

$$f(z).Q(z) - P(z) = b_{N+1}\, \omega_{N+1}(z) + \dots \qquad (1')$$

Les ω_n sont obtenus à partir de la suite (β_k). Si on veut un approximant de type Padé aux points (z_i, m_i), $i = 1 \dots n$, et $N = \sum_{i=1}^{n} m_i - 1$, on prendra la suite (β_k) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} k = 1\,,\, m_1 \,:\, \beta_k = z_1 \\ k = m_1 + 1, \dots m_1 + m_2 : \beta_k = z_2 \\ \vdots \\ k = m_1 + m_2 + \dots m_{n-1} + 1, \dots m_1 + \dots + m_n \,:\, \beta_k = z_n \end{array}\right\} \beta_k \text{ est défini pour } k = 1, \dots N+1 \\ \text{pour } k > N+1\,,\; \beta_k \text{ quelconque.} \end{cases}$$

Remarquons que la propriété d'interpolation au point z_i est vraie si $Q(z_i) \neq 0$. Cette propriété est moins forte que celle mise pour définir des approximants normaux ou des approximants réguliers : P et Q premiers entre eux.

Le polynôme P est le polynôme de Newton associé à la fonction f.Q aux points $\beta_1, \ldots, \beta_{N+1}$ définis plus hauts pour les approximants de type Padé de dénominateur Q , il est la même chose aux points $\beta_1, \ldots \beta_{m+n+1}$ pour la fonction $f.Q_{m,n}$ où Q_{mn} est calculé par les équations (2.2), pour les approximants de Newton-Padé.

4. ERREUR. CONVERGENCE. CONTINUITE

4.1. *Définition de P par la méthode des résidus. Erreur*

Soit $\omega_N(z) = \prod_{i=1}^{N+1} (z - z_i)$, z_i points d'interpolation, chacun compté avec son ordre de multiplicité. On a

$$P(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\omega_N(z) - \omega_N(t)}{(z-t)\ \omega_N(t)} f(t)Q(t)dt \quad .$$

Γ est un contour ou une réunion de contours, chacun limitant un ouvert simplement connexe contenant un ou plusieurs z_i.

Tous les z_i, $i = 1 \ldots N+1$, sont intérieurs à Γ , et f.Q est analytique sur et dans Γ.

La fonction sous l'intégrale est un polynôme en z de degré N et en appliquant la formule de Cauchy au point $z = z_i$, on trouve le résultat.

On a donc

$$f(z)Q(z) - P(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\omega_N(z)}{\omega_N(t)(z-t)} f(t).Q(t)dt$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - f(z) = \frac{\omega_N(z)}{Q(z)} \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(t).Q(t)}{\omega_N(t).(t-z)} dt \quad .$$

4.2. *Convergence dans le cas d'un nombre fini de points* z_i *distincts*

Soit $z_1 \dots z_\lambda$ les points d'interpolation, distincts ou non. On construit une suite P_n/Q d'approximants de f telle que P_n interpole F.Q en $z_1 \dots z_\lambda\ z_1 \dots z_\lambda \dots z_1 \dots z_j$ avec $n = m\lambda + j$.

On construit la série formelle de Newton :

$$(4.2.1.)\quad f(z).Q(z) = a_o + a_1(z-z_1) + a_2(z-z_1)(z-z_2) + \dots + a_{m\lambda+j}(z-z_1)\dots(z-z_j) + \dots$$

et P_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes.

On a le théorème suivant (d'après Walsh, cf. réf. th. 3 p. 56).

Soit $\omega_o(z) = (z - z_1)\dots(z - z_\lambda)$.

Théorème 4.2.2.

Soit Γ défini par $|\omega_o(z)| = \mu$, tel que f.Q soit analytique sur et à l'intérieur de Γ . Alors la série de Newton (4.2.1.), trouvée par interpolation aux points z_i , converge vers f.Q à l'intérieur de Γ , uniformément sur tout fermé contenu dans Γ .

Si z vérifie $|\omega_o(z)| = \mu_1 < \mu$, on a $|f.Q(z) - P_n(z)| \leq M\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^{m/\lambda}$

Démonstration :

On a $n = m\lambda + j$, et :

$$f.Q(z) - P_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{(z-z_1)\dots(z-z_j)(\omega_o(z))^m}{(t-z_1)\dots(t-z_j).(\omega_o(z))^m}\ \frac{f(t).Q(t)}{t-z}\, dt .$$

Soit $\omega_{m\lambda+j}(z) = (z-z_1)\dots(z-z_j).(\omega_o(z))^m$

On a $$\mathrm{Log}\left(|\omega_{m\lambda+j}(z)|^{\frac{1}{m\lambda+j}}\right) = \frac{1}{m\lambda+j}\sum_{k=1}^{j} \mathrm{Log}\,|z-z_k| + \frac{m}{m\lambda+j}\,\mathrm{Log}\,|\omega_o(z)| .$$

donc $$\lim_{m\infty} |\omega_{m\lambda+j}(z)|^{\frac{1}{m\lambda+j}} = |\omega_o(z)|^{1/\lambda} \quad \text{quelque soit } j .$$

Supposons que z appartienne à un fermé K strictement contenu dans Γ :

$$|\omega_o(z)| \leqslant \mu_1 \quad \text{et} \quad \mu_1 < \mu$$

On a alors :

$$|f.Q(z) - P_n(z)| \leqslant M \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^{m/\lambda}$$

avec

$$M = \sup_{j=1-\lambda} M_j \quad \text{et} \quad M_j = \sup_{\substack{t \in \Gamma \\ z \in K}} \left| \frac{(z - z_1)\ldots(z - z_j)}{(t - z_1)\ldots(t - z_j)} f(t).Q(t) \right| .$$

La convergence est donc bien uniforme sur tout fermé contenu dans le lemniscate Γ . ■

On en déduit le corollaire suivant sur la convergence des approximants $R_n = P_n/Q$.

Corollaire 4.2.3.

Si on suppose que $f.Q(z)$ est analytique au voisinage des z_i , $i = 1\ldots\lambda$, il existe un lemniscate Γ $|\omega_o(z)| = \mu$, tel que R_n converge uniformément vers f , sur tout fermé contenu dans Γ .

Par définition, on a $Q(z_i) \neq 0$, donc $Q(z)$ est non nul dans un voisinage des z_i , donc il existe Γ : $|\omega_o(z)| = \mu$ vérifiant à la fois $f.Q$ analytique sur et à l'intérieur de Γ , et Q non nul.

Q est alors minoré et on trouve d'après le théorème précédent, si $|\omega_o(z)| = \mu_1 < \mu$:

$$|f(z) - P_n/Q(z)| \leqslant M' \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^{m/\lambda} . \blacksquare$$

4.3. *Convergence dans le cas d'une suite quelconque* (z_n)

On établit d'abord un lemme sur la convergence des polynômes d'interpolation de Newton vers la fonction (cf. Walsh p. 52.54).

Soient S_n les polynômes associés à une fonction F .

On utilise la relation :

$$S_{n-1}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\omega_n(z) - \omega_n(t)}{z - t} \; \frac{F(t)}{\omega_n(t)} \, dt$$

les hypothèses sur Γ et F sont donc celles du paragraphe 4.1.

Lemme 4.3.1.

On appelle V l'intérieur de Γ , $\delta = \inf\limits_{\substack{t \in \Gamma \\ t \in \mathbb{N}}} |z_k - t|$, et

$U_\Delta = \{z \mid z \in V \text{ et } \sup\limits_k |z_k - z| \leq \Delta\}$

On suppose :

- $\overline{\{(z_k)\}}$ V
- il existe Δ tel que $\Delta < \delta$ et intérieur $U_\Delta \neq \phi$

alors les polynômes d'interpolation de Newton S_n associés à F , convergent uniformément vers F sur U_Δ .

Démonstration

$$F(z) - S_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\omega_{n+1}(z)}{(z-t).\omega_{n+1}(t)} F(t)dt$$

si $z \in U_\Delta$ $\quad |\omega_{n+1}(z)| \leq \Delta^{n+1}$

si $t \in \Gamma$ $\quad |\omega_{n+1}(t)| > \delta^{n+1}$

donc
$$\sup_{z \in U_\Delta} |F(z) - S_n(z)| \leq M\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{n+1}$$

Comme on a supposé $\Delta < \delta$, les S_n convergent uniformément vers F sur U_Δ .■

Etant donné un polynôme Q arbitraire, non nul aux points de la suite $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$, on considère la suite $R_n = P_n/Q$ d'approximants de type Padé de la fonction f, aux points (z_i). On a parallèlement à Gallucci et Jones, le résultat suivant :

Théorème 4.3.2.

On suppose que $f.Q$ est holomorphe sur un domaine D, contenant la fermeture d'un ouvert V borné simplement connexe, de bord Γ. (z_k) est une suite de points dont la fermeture est dans V, δ et Δ étant définis comme dans le lemme 4.3.1., on suppose qu'il existe Δ vérifiant : $\Delta < \delta$ et $\mathrm{int}(U_\Delta) \neq \phi$.

Si Q est un polynôme tel que $Q(z_i) \neq 0$ pour tout i, et si R_n est l'approximant de type Padé en $(z_i)_{i=1 \ldots n+1}$, de dénominateur Q, alors : $(R_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de D si et seulement si $(R_n)_n$ est uniformément bornée sur tout compact de D.

Démonstration :

Dans un sens, il est clair que si (R_n) converge sur un compact K vers f, elle y est uniformément bornée.

Réciproquement, supposons la suite (R_n) uniformément bornée sur tout compact K de D : $\sup\limits_{K,n} |R_n(z)| < M$.

La fonction R_n étant bornée dans K, elle n'y a pas de poles donc est holomorphe dans K et Q y est minoré. D'autre part, on peut prendre K un compact tel que $\overline{V} \subset K$. On peut alors appliquer le lemme 4.3.1. aux fonctions $R_n.Q$ et $f.Q$

$$R_n(z).Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^n \, \omega_k(z)$$

$$f(z).Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k(z)$$

mais par définition de R_n : $R_n\ Q = P_n$

$$R_n.Q(z) - f(z).Q(z) = \sum_{n+1}^{\infty} d_k \omega_k(z) \qquad \text{donc } \gamma_k^n = a_k \quad \text{pour } k = 0,\dots n$$

On va montrer que la suite $(R_n(z))_n$ est une suite de Cauchy uniformément par rapport à z dans U_Δ.

$$\gamma_k^n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{R_n(t).Q(t)}{\omega_{k+1}(t)}\, dt$$

$$(R_p(z) - R_q(z)).Q(z) = \sum_{\inf(p,q)}^{\infty} (\gamma_k^p - \gamma_k^q)\ \omega_k(z)$$

$$\begin{cases} |\gamma_k^n| \leqslant M \sup\limits_\Gamma |Q(t)| \dfrac{1}{\delta^{k+1}} \\ \\ \sup\limits_{U_\Delta} |\omega_k(z)| \leqslant \Delta^{k+1} \end{cases}$$

donc finalement, en supposant $p \leqslant q$:

$$\sup_{z \in U_\Delta} |R_p(z) - R_q(z)| \leqslant 2M \sum_p^\infty \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{k+1}$$

$$\sup_{z \in U_\Delta} |R_p(z) - R_q(z)| \leqslant 2M \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{p+1} \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{\delta}}$$

La suite R_n est bien de Cauchy, donc convergente, uniformément sur U_Δ. Comme U_Δ a été supposé d'intérieur non vide, la suite R_n converge uniformément sur K et donc sur tout compact de D . ∎

Remarques sur les hypothèses du théorème 4.3.2.

1 L'hypothèse $Q(z_i) \neq 0$ pour tout i, "remplace" l'hypothèse de régularité des approximants de Newton-Padé dans le théorème similaire.

2 On suppose que $f.Q$ est holomorphe dans D, contenant V borné, simplement connexe. Nous allons voir que cette hypothèse n'est pas forte mais apparait comme à peu près minimum quand on considère la suite (R_n), donc tous les points z_i.

Si on suppose U_Δ d'intérieur non vide, l'intérieur de U_Δ est connexe, car connexe par arc, donc U_Δ est connexe et contient tous les z_i.

On a $\{z_k\} \subset U_\Delta \subset V$

Au paragraphe 4.1, pour établir la formule définissant P_n par la formule de Cauchy, on prend Γ :

$\Gamma : \{z / |\omega(z)| = \text{constante}\}$

Ce lemniscate Γ limite un domaine D_Γ qui peut avoir plusieurs composantes connexes.

Soit $U_\Delta^n = \{z \,|\, \max\limits_{k=1..n} |z - z_k| \leqslant \Delta\}$

On a : $\{z_k\}_{k=1...n} \subset U_\Delta^n \subset D_\Gamma$ et donc D_Γ est simplement connexe si $\operatorname{int} U_\Delta^n \neq \phi$.

Dans le cas du th. 4.3.2., il faut considérer les z_i. On a

$\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U_\Delta \subset D_\Gamma$

Si on suppose $\operatorname{int}(U_\Delta) \neq \phi$, l'hypothèse "$f.Q$ holomorphe sur un domaine D connexe contenant V simplement connexe de bord Γ", apparait comme "limite" de celle faite sur $f.Q$ pour utiliser la formule d'Hermite.

4.4. Théorème de continuité des approximants

On peut considérer plusieurs types de continuité. L'approximant dépend des (z_i), de f de Q. La continuité par rapport à ces trois éléments sera étudiée.

Théorème 4.4.1. Continuité par rapport aux z_i

Si $f.Q$ est holomorphe sur un ouvert D contenant V de bord Γ.

Si (z_i) et $(z_i)^*$ sont deux suites de points intérieurs à Γ.

Soit P (resp. P^*) le polynôme tel que $P/Q = (m/n)_{z \ldots z_{m+1}, f}$ (resp. $P^*/Q = (m/n)_{z^* \ldots z^*_{m+1}, f}$), alors sur tout compact intérieur à Γ, ne contenant aucun zéro de Q :

$$\forall \varepsilon \; , \exists \eta \sup_{k=1..m+1} (z_j - z_j^*) < \eta \Longrightarrow \sup_{z \in K} \left| \frac{P}{Q}(z) - \frac{P^*}{Q}(z) \right| < \varepsilon$$

Démonstration :

K ne contenant aucun zéro de Q, il suffit d'étudier la continuité de P.

On a : $f.Q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \omega_n(z)$ et $f.Q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n^* \omega_n^*(z)$ (séries formelles)

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$$

$$P(z) = f.Q(z) + d_{m+1} \; \omega_{m+1}(z) + \ldots . = \sum_{0}^{m} a_k \omega_k(z)$$

$$P^*(z) = f.Q(z) + d^*_{m+1} \; \omega^*_{m+1}(z) + \ldots = \sum_{0}^{m} a_k^* \; \omega_k^*(z)$$

Comme précédemment : $a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f.Q(t)}{\omega_{k+1}(t)} \, dt$

$$|a_k - a_k^*| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left| \frac{f.Q(t)}{\omega_{k+1}(t).\omega_{k+1}^*(t)} \right| . |\omega_{k+1}(t) - \omega_{k+1}^*(t)| \, dt$$

$$\leqslant M_k \; . \; \sup_{t \in \Gamma} |\omega_{k+1}(t) - \omega_{k+1}^*(t)|$$

ce qui prouve que chaque fonction a_k est une fonction continue de $z_1 \ldots z_{k+1}$ donc $a_o \ldots a_m$ sont des fonctions continues de $z_1 \ldots . z_{m+1}$.

Donc finalement :

$$\forall \varepsilon \; \exists \eta \; \sup_{k=1..m+1} |z_k - z_k^*| < \eta \Longrightarrow \sup_K |P(z) - P^*(z)| < \varepsilon$$

ce qui suffit à démontrer le théorème . ■

Théorème 4.4.2. Continuité par rapport à f et par rapport à Q .

Si $f.Q$ et $f^*.Q^*$ sont holomorphes sur un ouvert D contenant V de bord Γ .

Si (z_i) est une suite intérieure à Γ .

Si P et P^* sont les polynômes définissant les approximants (m/n) de f et f^* de dénominateurs respectifs Q et Q^* , alors sur tout compact K de V ne contenant aucun zéro de Q et Q^* , on a :

$$\forall \varepsilon \; \exists \eta \; \sup_K |f.Q(z) - f^*.Q^*(z)| < \eta \Longrightarrow \sup_K \left| \frac{P}{Q}(z) - \frac{P^*}{Q^*}(z) \right| < \varepsilon$$

Démonstration

On sait que $P(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\omega_{n+1}(z) - \omega_{n+1}(t)}{(z-t)} \frac{f.Q(t)}{\omega_{n+1}(t)} \, dt$

ce qui implique la continuité de P par rapport à f et à Q. Donc si on se place sur un compact où Q et Q^* n'ont pas de zéros, on a le résultat. ■

5. *APPROXIMANTS DE TYPE PADE EN 2 POINTS : ZERO ET INFINI*

Quoique ceux-ci puissent être définis à l'aide de la propriété de covariance homographique, nous en donnons une définition directe, et reviendrons ensuite sur leurs rapports avec les approximants en deux points z_o z_1 distincts, à distance finie.

5.1. *Calcul préliminaire. Développement en série de puissance de* $1/Q(z)$, *de* $P/Q(z)$.

Soit $Q(z) = \sum_{0}^{n} b_i z^i$.

On veut un développement soit de la forme $\sum_{k\geq 0} u_k z^k$, soit de la forme $\sum_{k\geq 0} u_k^* z^{-k}$

1er cas : développement en série de (z^k)

$$1/Q(z) = \frac{1}{b_o + \ldots + b_n z^n}$$

le développement est formellement obtenu par une division selon les puissances croissantes :

$$1/Q(z) = \sum_{k\geq 0} u_k z^k \qquad \begin{cases} u_k = 0 & k \quad 0 \\ u_o = \dfrac{1}{b_o} & \\ u_k = \dfrac{1}{b_o} \sum_{1}^{n} b_i u_{k-i} & \end{cases}$$

2ème cas : Développement en série de (z^{-k})

Soit $t = \frac{1}{z}$

$$\frac{1}{Q(z)} = t^n \frac{1}{b_o t^n + \ldots + b_n} .$$

$$= t^n \sum_{k\geq 0} \bar{u}_k t^k \qquad \begin{cases} \bar{u}_k = 0 & k < 0 \\ \bar{u}_o = \dfrac{1}{b_n} & \\ \bar{u}_k = \dfrac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{n-i} \bar{u}_{k-i} & \end{cases}$$

revenant à la variable z , on a :

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{k\geq 0} u_k^* z^{-k} \qquad \begin{cases} u_k^* = 0 & k < n \\ u_n^* = \dfrac{1}{b_n} & \\ u_k^* = \dfrac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{n-u} u_{k-i}^* & \end{cases}$$

Cette méthode a été obtenue par Longmann-Sharir pour obtenir une méthode d'inversion de la transformée de Laplace.

On a en conséquence, un développement en série de puissances z^k ou z^{-k} de toute fraction rationnelle P/Q :

si $P(z) = a_o + \ldots + a_p z^p$

$$P/Q(z) = \sum_{k\geq 0} V_k z^k \qquad V_k = \sum_{i=0}^{k} a_i u_{k-i}$$

$$P/Q(z) = \sum_{K} V_k^* z^{-k} \qquad \begin{array}{ll} V_k^* = 0 & k < n-p. \\ V_{n-p}^* = a_p u_n^* & \\ V_k^* = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i u_{i+k}^* & k \geq n-p \end{array}$$

On obtient ainsi deux séries S et S^* de puissances de sommes S_k et S_k^* .

Etant obtenu par division par puissances croissantes, on a :

$$P/Q(z) - S_k(z) = O(z^k)$$

$$P/Q(z) - S_k^*(z) = O(z^{-k})$$

S sera appelée le développement en zéro et S^* le développement à l'infini. Il faut remarquer que zéro et l'infini n'ont pas un rôle symétrique pour une fraction rationnelle, sauf si elle est (n,n) , et ceci contrairement à ce qui se passait précédemment avec les points d'interpolation (z_i).

5.2. *Définition*

On cherche une fraction rationnelle P/Q , de dénominateur Q fixé, de degré n, telle que f_o et f_1 étant deux séries formelles, f_o en puissances croissantes, f_1 en puissances décroissantes, m_o et m_1 étant 2 entiers arbitraires, on ait :

$$\begin{cases} P/Q(z) - f_o(z) = O(z^{m_o}) \\ P/Q(z) - f_1(z) = O(z^{m_1}) \end{cases}$$

Soit $f_o(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ et $f_1(z) = \sum_1^\infty c_n^* z^{-n}$. L'étude serait la même avec des séries $f_o(z) = \sum_{-\nu}^\infty c_n z^n$ et $f_1(z) = \sum_\mu^\infty c_n^* z^{-n}$ (cf. Draux) .

Soit $R_{k,m}$ la fraction cherchée pour f_o et f_1 , $m_o = k$, $m_o + m_1 = n$.
On aurait la fraction relative à $\overline{f}_o$ et $\overline{f}_1$:

$$\overline{R}_{km} = \sum_{-\nu}^{-1} c_i z^i + \sum_0^\mu c_i^* z^{-i} + \overline{\overline{R}}_{km}(z)$$

$\overline{\overline{R}}_{km}$ associée comme R_{km} à $\begin{cases} \sum_0^\mu (c_i - c_i^*) z^i + \sum_{\mu+1}^\infty c_i z^i \\ \sum_1^\nu (c_i^* - c_i) z^{-i} + \sum_{\nu+1}^\infty c_i^* z^{-i} \end{cases}$

Si par exemple $f_1 = c_{-1}^* z + c_o^* + \dots$ et $f_o = c_o + c_1 z + \dots$, alors l'approximant obtenu est du type $(n+1,n)$.
Il suffit donc d'étudier les approximants associés à des séries commençant en zéro pour les puissances croissantes et à un pour les puissances décroissantes.

La partie préliminaire montre qu'alors la fraction rationnelle cherchée ne peut être que du type $(n-1,n)$.

Propriété 5.2.1. Q étant un polynome fixe de degré n , f_o et f_1 désignant respectivement les séries $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} c_n^* z^{-n}$.

Pour tout couple d'entiers (m_o, m_1) vérifiant $m_o + m_1 = n$, il existe un polynôme P unique, de degré n-1, vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{P}{Q}(z) - f_o(z) = O(z^{m_o}) \\ \frac{P}{Q}(z) - f_1(z) = O(z^{-m_1}) \end{cases}$$

Démonstration

Soit $Q(z) = b_o + \ldots + b_n z^n$ donné, on cherche $P(z) = a_o + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$.

D'après la partie 5.1, on a :

$$\frac{P}{Q}(z) = \sum_{k\geq 0} V_k z^k \qquad \begin{cases} V_k = \sum_{i=0}^{k} a_i u_{k-i} \\ u_k = 0 \qquad k < 0 \\ u_o = \frac{1}{b_o} \\ u_k = \frac{1}{b_o} \sum_{1}^{n} b_i u_{k-i} \end{cases}$$

$$\frac{P}{Q}(z) - f_o(z) = O(z^{m_o}) \quad .$$

On a donc le système :

$$\begin{cases} c_o = a_o u_o \\ c_1 = a_o u_1 + a_1 u_o \\ c_2 = a_o u_2 + a_1 u_1 + a_2 u_o \\ \vdots \\ c_{m_o - 1} = a_o u_{m_o - 1} + \ldots\ldots + a_{m_o - 1} u_o \end{cases}$$

C'est un système triangulaire, qui définit de manière unique m_o des n coefficients a_i : $a_o \ldots a_{m_o - 1}$.

D'autre part $\frac{P}{Q}(z) - f_1(z) = O(z^{-m_1})$

$$\frac{P}{Q}(z) = \sum_k V_k^* z^{-k} \qquad \begin{cases} V_k^* = 0 & k \leqslant 0 \\ V_k^* = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u_{i+k}^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_k^* = 0 & k \leqslant n \\ u_n^* = \frac{1}{b_n} \\ u_k^* = \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} b_{n-i} u_{k-i}^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_k^* = V_k^* \qquad k = 1 \ldots m_1 \, . \\ \\ c_1^* = a_{n-1} u_n^* \\ c_2^* = a_{n-1} u_{n+1}^* + a_{n-2} u_n^* \\ c_3^* = a_{n-1} u_{n+2}^* + a_{n-2} u_{n+1}^* + a_{n-3} u_n^* \\ \vdots \\ c_{m_1-1}^* = a_{n-1} u_{n+m_1-1}^* + \ldots\ldots + a_{n-m_1-1} u_n^* \end{cases}$$

C'est un système triangulaire qui définit de manière unique les coefficients $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_{n-m_1-1}$.

Tous les a_n sont donc définis de manière unique si m_o et m_1 vérifient :

$$n - m_1 = m_o \quad , \quad \text{soit} \quad m_o + m_1 = n \quad . \blacksquare$$

Définition 5.2.2.

f_o et f_1 étant les deux séries $\sum\limits_{k\geq 0} c_k z^k$ et $\sum\limits_{k\geq 1} c_k^* z^{-k}$,
Q un polynôme de degré n et k un entier : $0 \leq k \leq n$.
Il existe $R_{kn} = P/Q$ tel que $\begin{cases} R_{kn}(z) - f_o(z) = O(z^k) \\ R_{kn}(z) - f_1(z) = O(z^{k-n-1}) \end{cases}$,

R_{kn} est unique, de type $(n-1,n)$.

Comme dans le cas des approximants de type Padé en zéro, P est associé de Q en termes de fonctionnelle linéaire.

Si P est de d°n-1 , et Q de d°n , on appelle
$\tilde{P}(x) = x^{n-1}P(x^{-1})$ et $\tilde{Q}(x) = x^n\, Q(x^{-1})$.

On a la relation : $\widetilde{(\tilde{P})} = P$

On dit que P et Q sont associés relativement à une fonctionnelle linéaire $\psi(t)$:

$$\tilde{P}(x) = \psi\left(\frac{\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}(t)}{x - t}\right)$$

Soit c et c^* les fonctionnelles définies par $c(x^i) = c_i$ et $c^*(x^i) = c^*_{i+1}$ $(i \geq 0)$

Propriété 5.2.3.

Si $P_k(x) = \sum\limits_0^{k-1} a_i x^i$ et $Q_k(x) = \sum\limits_0^{k} b_i x^i$ alors $P_k/Q_k = (k-1/k)_{f_o}$

P_k et Q_k sont associés relativement à la fonctionnelle c

et $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} b_k c_{i-k}$, $i = 0,\ldots k-1$

Si $P_{n-k}(x) = \sum\limits_k^{n-1} a_i x^i$, $Q_{n-k}(x) = \sum\limits_k^{n} b_i x^i$

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_1(u) = \sum_0^{\infty} c^*_{i+1}\, u^i$$

alors $\quad \tilde{P}_{n-k}(u)/\tilde{Q}_{n-k}(u) = (n-k-1/n-k)_{\overline{f}_1}$

$\tilde{P}_{n-k}$ et $\tilde{Q}_{n-k}$ sont associés relativement à la fonction c^*

et $\quad a_{n-1-j} = \sum_{k=0}^{j} b_{n-k}\, c_{j+1-k} \qquad k \leqslant n-1-j \leqslant n-1$

Remarque : On a $P(x) = P_k(x) + P_{n-k}(x) = \sum_0^{n-1} a_i x^i$

Par contre, Q_k et Q_{n-k} contiennent tous les deux, le terme $b_k x^k$:

$$Q_k(x) = \sum_0^k b_i x^i \quad \text{et} \quad Q_{n-k}(x) = \sum_k^n b_i x^i$$

En fait, on pourrait prendre $Q_k = \sum_0^{k-1} b_i x^i + b_k' x^k$, b_k' quelconque

puisqu'il n'intervient pas dans le calcul de son associé, l'important étant :

$$P_k/Q_k = (k-1/k)_{f_o}$$

et donc il faut que Q_k soit de degré k .

Démonstration

On a $(R_{kn} - f_o)(z) = O(z^k)$

$$(P - f_o Q)(z) = O(z^k)$$

d'où : $\quad P_k - f_o.Q_k = O(z^k)$

donc $\quad P_k/Q_k = (k-1/k)_{f_o}$

avec la notation $\tilde{P}_k(z) = z^{k-1}\, P_k(z^{-1})$ et $\tilde{Q}_k(z) = z^k\, Q_k(z^{-1})$, on a

$$\tilde{P}_k(z) = c\, \frac{\tilde{Q}_k(z) - \tilde{Q}_k(t)}{z - t}$$

On en déduit simultanément :

$$a_i = \sum_{k=0}^{i} b_k c_{i-k} \qquad i = 0...k-1 \quad .$$

D'autre part, avec la série f_1 , on a :

$$P/Q(z) - f_1(z) = O(z^{k-n-1}) \quad .$$

On effectue le changement de variable $z = \frac{1}{u}$ pour revenir à un approximant de type Padé en 0 :

$$\frac{u(a_o\ u^{n-1}+\ldots\ldots + a_{k-1}\ u^{n-k}+\ldots\ldots+ a_{n-1})}{b_o\ u^n +\ldots\ldots\ldots + b_n} - \sum_{1}^{\infty} c_i^*\ u^i = O(u^{n-k+1})$$

$$\frac{a_k\ u^{n-k-1} +\ldots\ldots+ a_{n-1}}{b_k\ u^{n-k} +\ldots\ldots+ b_n} - \sum_{0}^{\infty} c_{i+1}^*\ u^i = O(u^{n-k})$$

D'autre part :

$$\tilde{P}_{n-k}(u) = a_k\ u^{n-k-1} +\ldots\ldots+ a_{n-1} \quad \text{et} \quad \tilde{Q}_{n-k}(u) = b_k\ u^{n-k} +\ldots\ldots+ b_n$$

- $\tilde{P}_{n-k}(u)/\tilde{Q}_{n-k}(u) = (n-k-1/n-k)_{\bar{f}_1}$

- $P_{n-k}(z) = c^* \left(\frac{Q_{n-k}(z) - Q_{n-k}(t)}{z - t}\right)$

- $a_{n-1-i} = \sum_{h=0}^{i} b_{n-h}\ c^*_{i+1-h} \qquad n-1-i = 0,\ldots n-1-k\ ,$

$$i = k,\ldots,\ n-1.$$

Ces formules sont équivalentes à celles trouvées précédemment, et donnent un mode de calcul des a_i . ■

5.3. *Relation entre approximants en 2 points* $z_o z_1$ *distincts et en (zéro, infini)*

Soit $t = a \dfrac{z - z_o}{z - z_1} = \psi(z)$ ou $z = \dfrac{z_1 t - a z_o}{t - a}$ avec $a \neq 0$,

et $z_o \neq z_1$, et supposons une fonction f admettant f_o et f_1 comme développement en séries formelles de t en zéro et de $\frac{1}{t}$ à l'infini.

Les points z_i dans les approximants en plusieurs points ont des rôles symétriques. Pour pouvoir faire un rapport avec (zéro,infini), nous supposerons donc :

$$f_o(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n \quad \text{et} \quad f_1(t) = \sum_{n \geq 0} c_n^* t^n .$$

Dans ce cas, d'après le calcul 5.1, nous trouverons des approximants rationnels du type (n,n).

On suppose donc connu un approximant R_k rationnel (n,n) de f vérifiant :

$$\begin{cases} R_k(t) - f(t) = O(t^k) \\ R_k(t) - f(t) = O(t^{-n+k}) \end{cases}$$

Propriété 5.3.1.

Avec les notations précédentes $\overline{R}_k(z) = R_k \circ \psi(z)$ est l'approximant de type Padé (n,n) de $\overline{f}$ $(\overline{f}(z) = f \circ \psi(z))$ aux points z_o, z_1 ;

$$\begin{cases} \overline{R}_k(z) - \overline{f}(z) = O(z - z_o)^k) \\ \overline{R}_k(t) - \overline{f}(z) = O((z - z_1)^{+n-k}) \end{cases}$$

Démonstration

Si t est voisin de zéro, on a $t = a \dfrac{z - z_o}{z - z_1}$, $t = O(z - z_o)$ et $(z - z_o) = O(t)$, donc :

$$\begin{cases} R_k(t) - f(t) = O(t^k) \\ \overline{R}_k(z) - \overline{f}(z) = O((z - z_o)^k) \end{cases}$$

Si t est "grand" :

$$t = a \frac{z - z_o}{z - z_1} \Longrightarrow \frac{1}{t} = O(z - z_1) \quad \text{et} \quad (z - z_1) = O(\tfrac{1}{t}) \ ,$$

donc

$$\begin{cases} R_k(t) - f(t) = O(t^{-n+k}) \\ \overline{R}_k(z) - \overline{f}(z) = O((z - z_1)^{n-k}) \end{cases}$$

donc si $t = \vartheta(z) = a \dfrac{z - z_o}{z - z_1}$, R_k l'approximant de f en (zéro,infini), $R_k \circ \vartheta(z) = \overline{R}_k(z)$ est l'approximant de $f \circ \vartheta$ en (z_o, z_1) et réciproquement.■

REFERENCES

G. BAKER - *Essentials of Padé approximants* (acad. press 1975).

C. BREZINSKI - *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials* (Springer Verlag Berlin 1979).

P.J. DARIS - *Interpolation and approximation*. Blaisdell New York 1963.

A. DRAUX - *Thèse d'état*. Université de Lille I 1981.

M. GALLUCCI - W.B. JONES - *Rationnal approximations corresponding to Newton series*. (Newton-Padé approximants) J. of approx. th. 17 366-392 (1976).

W.B. JONES - *Multiple-point Padé tables*. Siam. J. Math. Analysis 10.1979.1-17.

W.B. JONES and W.J. THRON - *Two-point Padé approximants and T.fractions*. Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 388-390.

I.M.LONGMANN and M. SHARIR - *Laplace transform inversion of rationnal functions*- Geophys. J.R. Astro. Soc. (1971) 25. 299-305.

J.H. Mac CABE - *A formal extension of the Padé table to include two-point Padé quotients*. J. Inst. Math. Appl. (1975) 15. 363-372.

J.L. WALSH - *Interpolation and approximation by rationnal functions in the complex domain*. AMS. Coll. Pub. XX.

D.D. WARNER - *Hermite interpolation with rationnal functions* - Doct. Dissertation. Univ. of California. San Diego - 1974.

CINQUIEME PARTIE

APPROXIMANTS DE TYPE PADE DE DENOMINATEUR $\prod_{1}^{m} (z - z_i)$ *D'UNE FONCTION AYANT* $z_1 \ldots z_m$ *COMME POLES*

Le problème majeur des approximants de type Padé est le choix du "meilleur" dénominateur, que ce soit des approximants en zéro ou en plusieurs points.

L'étude, faite pour l'inverse de la transformée de Laplace, du meilleur pole d'un approximant $(m/m+1)$de $\frac{1}{z} \log(1 + z)$ montre que dans ce cas, le choix de (-1) n'est pas optimum. Nous nous limitons ici à des fonctions dont les singularités sont des poles et essayons de montrer que le choix de ces singularités comme polesdes approximants de type Padé est un "bon" choix.

Nous comparons les approximants obtenus avec les approximants de Padé de la fonction, quand on connait les premiers poles exactement ($|z_1| \leqslant \ldots\ldots \leqslant |z_m| < |z_{m+1}|$) puis quand on connait une approximation de ces poles.

1. CAS D'UNE FONCTION DONT LES POLES SONT CONNUS EXACTEMENT

Soit f une fonction méromorphe dans une région R, holomorphe en zéro, de poles $z_1 \dots z_m$ et soit v le polynôme générateur des approximants de type Padé $(n/m)_f$. Le dénominateur de $(n/m)_f$ est :

$$\tilde{v}(z) = z^m v(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{m} (z - z_i) \quad \text{et} \quad v(z) = \left(\prod_1^m z_i\right) \left(\prod_1^m (u_i - z)\right)$$

si $u_i = \dfrac{1}{z_i}$.

Propriété 1.1. Convergence

La suite $(n/m)_f$ d'approximants de type Padé de f , m fixé, converge vers f uniformément sur tout compact de Δ avec $\Delta = D - \{z_1 \dots z_m\}$, où D est le disque de convergence du développement de Taylor en zéro de la fonction holomorphe $h(z) = \tilde{v}(z).f(z)$.

Démonstration

$$(n/m)_f = \frac{\tilde{\omega}(z)}{\tilde{v}(z)}$$

où $\tilde{\omega}(z)$ est un polynôme de degré n , n premiers termes du développement en série de $h(z)$.

$$\tilde{\omega}(z) - \tilde{v}(z).f(z) = \sum_{n+1}^{\infty} a_p z^p$$

$\sum_{n+1}^{\infty} a_p z^p$ est le reste d'une série convergente, donc converge uniformément vers zéro sur tout compact de D , quand n tend vers l'infini.

$$(n/m)_f - f(z) = \frac{1}{\tilde{v}(z)} \sum_{n+1}^{\infty} a_p z^p$$

$(n/m)_f$ converge donc vers f , uniformément sur tout compact de Δ .

Nous allons maintenant comparer les approximants obtenus avec les approximants de Padé de f .

Considérons le polynôme de Hankel

$$H_k^n(z) = \begin{vmatrix} c_n \cdots\cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \\ c_{n+k-1} \cdots\cdots & c_{n+2k-1} \\ \vdots & \\ 1 \cdots\cdots & z^k \end{vmatrix}$$

et calculons $z^k H_k^n(z^{-1}).f(z)$ c'est à dire $\tilde{H}_k^n(z).f(z)$

$$\tilde{H}_k^n(z).f(z) = \sum_{n\geq 0} a_p z^p$$

$$a_p = \begin{vmatrix} c_n \cdots\cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \\ c_{n+k-1} \cdots\cdots & c_{n+2k-1} \\ & \\ c_p \cdots\cdots & c_{p+k} \end{vmatrix}$$

donc $\quad a_n = a_{n+1} = \cdots\cdots = a_{n+k-1} = 0$

On a donc la propriété suivante :

Propriété 1.2. Dénominateur des approximants de Padé

A la multiplication par un scalaire près, H_k^n est le kième polynôme de la famille des polynômes orthogonaux relativement à la fonctionnelle c^n : $c^n(x^i) = c_{n+i}$.

Si un approximant de type Padé $(n-1/k)$, a pour dénominateur $\tilde{H}_k^n(z)$, donc s'il a pour polynôme générateur H_k^n , alors $(n-1/k)$ est l'approximant de Padé $[n-1/k]$.

On va chercher à exprimer les c_n en fonction des poles z_i connus. On pourra alors comparer H_k^n et v .

Rappelons le théorème suivant (Henrici) :

Théorème 1.3.

Soit f une fonction holomorphe en zéro, méromorphe dans le disque $|z| < \sigma$, de poles $z_i = u_i^{-1}$ dans D en nombre fini ou non tels que : $0 < |z_1| \leqslant \ldots\ldots \leqslant |z_k| \ldots\ldots < \sigma$ chaque pole étant écrit un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Soit $H_k^n(z)$ les déterminants de Kankel associés à la série de Taylor de f en zéro : $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, alors pour tout m tel que $|z_m| < |z_{m+1}|$, il existe une constante c_m telle que : pour tout ρ : $|u_m| > \rho > |u_{m+1}|$

$$H_m^n(z) = c_m (u_1 \ldots . u_m)^n \left[\prod_{i=1}^{m} (z - u_i) + O\left(\left(\frac{\rho}{(u_m)}\right)^n\right)\right]$$

Démonstration

Reprenons les principales phases de la démonstration, de notre point de vue, écrite dans le cas où les poles de f sont simples :

$$f(z) = \sum_{1}^{m} \frac{r_i}{z - z_i} + g(z) \qquad g \text{ holomorphe dans } |z| < \sigma$$

Comparons les développements en séries en zéro :

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n = \sum_{i=1}^{m} r_i u_i \left(\sum_{n\geqslant 0} u_i^n z^n \right) + \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$$

d'où $\quad c_n = \sum_{i=1}^{m} r_i u_i^{n+1} + b_n$.

On remplace c_n par cette expression dans $H_m^n(z)$ et on développe le déterminant. On a $H_m^n(z) = v^n(z) + D_m^n(z)$

où v^n ne comporte que des lignes en u_i et tous les termes en b_i sont dans D_m^n :

on a :

$$v^n(z) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m r_i u_i^{n+1} & \ldots\ldots & \sum_{i=1}^m r_i u_i^{m+n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m r_u u_i^{n+m}, & \ldots\ldots, & \sum_{i=1}^m r_i u_i^{n+2m} \\ 1 & ,\ldots\ldots, & z^m \end{vmatrix}$$

Il est démontré que :

$$v^n(z) = \prod_{i=1}^m r_i u_i^{n+1} \cdot \prod_{1\leq i<j\leq m} (u_i - u_j)^2 \cdot \prod_{i=1}^m (z - u_i)$$

En utilisant la constante c_m .

$$v^n(z) = c_m (u_1 \ldots u_m)^n . \prod_{i=1}^m (z - u_i)$$

donc

$$v^n(z) = c_m (u_1 \ldots u_m)^{n+1} \, v(z)$$

et les approximants de type Padé de polynômes générateurs v ou v^n sont identiques .

Revenons sur l'évaluation des autres termes du développement : $D_m^n(z)$ est une somme finie de déterminants du type de $v^n(z)$: en remplaçant une ligne au moins par :

$$(b_{n+\alpha-1} \ldots\ b_{n+m+\alpha-1}) \qquad \alpha^{\text{ième}} \text{ ligne}$$

g est holomorphe si $|z| < \sigma$, donc si $|z| < |z_{m+1}|$ d'où

$|b_p| \leqslant \mu\rho^p$

donc chaque déterminant de D_m^n est un $O((u_1 \dots u_{m-1}\rho)^n)$, ceci uniformément par rapport à z dans tout ensemble borné.

Donc $\quad D_m^n(z) = O((u_1 \dots u_{m-1}\rho)^n)$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.3.

Il nous suffit d'interpréter les conséquences de ce résultat sur le développement en série en zéro de $\tilde{H}_m^n.f$ pour comparer les approximants de Padé et de type Padé.

Propriété 1.4.

Si g est un polynôme de d°h ,

$$(n + m - 1/m)_f = [n + m - 1/m]_f = f \quad , \quad n = h, h + 1 \dots .$$

Démonstration

$$f(z) = \sum_1^m \frac{r^i}{z - z_i} + g(z)$$

Si g est un polynôme de d°h , l'approximant de Padé de f est f lui-même à partir d'un certain rang.

$$[n + m - 1/m]_f = f \ , \ n \geqslant h$$

De même, l'approximant de type Padé de f de dénominateur $\prod_{i=1}^m (z - z_i)$ est f lui-même, d'où le résultat.

En particulier, on retrouve : $H_m^{n+m}(z) = v^{n+m}(z)$

$$H_m^{n+m}(z) = c_{n+m}(u_1 \dots u_m)^{n+m} \cdot \prod_{i=1}^m (z - u_i) \ .$$

Propriété 1.5.

Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 1.3.

Soit $\tilde{\omega}^n/\tilde{v}_n = (n-1/m)_f$ et $(\tilde{v}^n.f - \tilde{\omega}^n)(z) = \sum\limits_{p\geq n} \alpha_p^n \, z^p$

Soit $P^n/\tilde{H}_m^n = [n-1/m]_f$ et $(\tilde{H}_m^{n}.f - P^n)(z) = \sum\limits_{p\geq n+m} a_p^n \, z^p$

$$\left.\begin{array}{ll} p = n, n+1, \ldots n+m-1 & \alpha_p^n \\ & \\ p = n+m \ldots\ldots & \alpha_p^n - a_p^n \end{array}\right\} = O(\rho^{(m-1)n})$$

si $\quad |z_{m+1}| > 1 \quad \Longrightarrow \lim\limits_n \alpha_p^n = 0 \qquad p = n, n+1 \ldots n+m-1$

Démonstration :

$$H_m^n(z) = v^n(z) + c_m(u_1 \ldots . u_m)^n \quad O((\frac{\rho}{u_m})^n) \; .$$

$$z^m H_m^n(z^{-1}) = \tilde{z}^m v^n(z^{-1}) + c_m(u_1 \ldots u_m)^n \; O((\rho/|um|)^n).z^m$$

$$\tilde{H}_m^n(z).f(z) = \tilde{v}^n(z).f(z) + c_m(u_1 \ldots u_m)^n.O((\rho/|um|)^n).z^m.f(z)$$

en prenant les séries, et en identifiant les termes de même degré à partir du rang n :

$$a_p^n = \alpha_p^n + O(|u_1 \ldots u_m|^n . \frac{\rho^n}{|u_m|^n})$$

$$\alpha_p^n = a_p^n + O(\rho^{(m-1)n})$$

si $\; p = n, n+1 \ldots n+m-1 \qquad a_p^n = 0$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_p^n = O(\rho^{(m-1)n})$$

Enfin ρ est quelconque vérifiant $|u_m| > \rho > |u_{m+1}|$. Donc on peut choisir ρ inférieur à 1 si $|u_{m+1}| < 1$, c'est à dire $|z_{m+1}| > 1$.

Dans ce cas, $\lim_n \alpha_p^n = 0$.

L'emploi du polynôme générateur $v(z)$ n'améliore pas l'ordre d'approximation de l'approximant de type Padé, mais les premiers coefficients non nuls du développement sont uniformément petits.

2. *CAS OU LES POLES SONT CONNUS PAR APPROXIMATION*

D'après le théorème de Montessus de Ballore, si f est méromorphe dans un disque $|z| < \sigma$, holomorphe en zéro, avec m poles z_i, les poles des approximants de Padé $[n,m]_f$ tendent vers les $z_i = u_i^{-1}$.

Pour alléger l'écriture, on fixe n et on appelle $x_1 \dots x_m$ les zéros de p_m avec $\tilde{p}_m$ dénominateur de $[n,m]_f$.

Soit $v(z)$ le polynôme générateur de $(n/m)_f$

$$v(z) = \prod_1^m (z - u_i) \qquad \text{et} \qquad p_m^n(z) = \prod_{i=1}^m (z - x_i)$$

On suppose que les $(u_i)_{i=1..m}$ sont connus par une suite d'approximations $(y_{ik})_{k\geq 0}$, et on va envisager les approximants de type Padé de polynômes générateurs $v_k(z) = \prod_{i=1}^m (z - y_{ik})$

Proposition 2.1.

Soit f une fonction méromorphe dans le disque D_σ, holomorphe en zéro, ayant m poles $z_1 \dots z_m$, et soit m suites $(y_{ik})_{k\geq 0}$ $i = 1,\dots m$ convergeant respectivement vers $z_i^{-1} = u_i$.

On suppose que p_m^n est de d° m et a m racines $x_1 \dots x_m$.

On appelle : $\sum_{n\geq 0} \alpha_p^k z^p = \tilde{v}_k(z).f(z)$

$$\sum_{n\geq 0} a_p z^p = \tilde{p}_m^n(z)\ f(z)$$

$$\mu_k = \sup_{i=1\ldots m} |x_i - y_{ik}|$$

alors on a

$$\alpha_p^k = a_p + O(\mu_k) \qquad p \geq 0$$

Démonstration

$$z - y_{ik} = z - x_i + x_i - y_{ik} \quad .$$

On pose $\mu_{ik} = x_i - y_{ik}$

$$\mu_{ik} = x_i - u_i + u_i - y_{ik}$$

Par hypothèse $\lim_k y_{ik} = u_i$

D'autre part, si n devient grand, $x_i - u_i$ tend vers zéro ,

donc :

$$\nabla \varepsilon\ ,\quad N\ ,\ K \qquad n > K \quad \text{et} \quad k > K \Longrightarrow |\mu_{ik}| < \varepsilon$$

On a : $v_k(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - y_{ik})$

$$= \prod_{i=1}^{m} (z - x_i + \mu_{ik})$$

$$= p_m(z) + R_{m-1}^k(z)$$

R_{m-1}^k est un polynôme de d°m-1, dont tous les coefficients sont des $O(\mu_k)$

$$\tilde{v}_k(z).f(z) = \tilde{p}_m(z).f(z) + z\ \tilde{R}_{m-1}^k(z).f(z)$$

d'où $\alpha_p^k = a_p + O(\mu_k)$.

La démonstration consiste à considérer qu'une approximation de z_i est une approximation de x_i. On peut penser qu'il y a des suites $(y_{ik})_k$ meilleures que d'autres, notamment celles consistant à trouver y_{ik} comme approximations que x_i (n fixé). La suite $(y_{ik})_k$ trouvée par le q.d. algorithme devrait donc avoir de bonnes propriétés.

REFERENCES

P. HENRICI - *Applied and computationnal complex analysis. Vol. 1. Wiley Interscience pub.*

E.B. SAFF - *An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rationnal functions. J. of Approx. th. 6. 63-67 (1972).*