

50 376
1 982
29

N° d'ordre : 966

50376
1982
29

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Daniel BOICHU

CONJECTURE DE RAMADANOV
SUR LE NOYAU DE BERGMAN

Membres du Jury : MM. Michel PARREAU, Président
Gérard CŒURÉ, Rapporteur
Philippe ANTOINE } Examineurs
Laurent GRUSON }



Soutenue le mardi 22 juin 1982

à Ariane, Anne, Pierre et Marie,

à mes parents,

Ce travail, aussi modeste qu'il est, n'existerait pas sans la contribution de Monsieur Coeuré. Il a su, avec finesse et discrétion, redonner vigueur et tenacité aux moments cruciaux. Je lui en suis reconnaissant.

Je remercie Monsieur Parreau, Président du jury, ainsi que Messieurs Antoine et Gruson de s'être penchés sur ce travail.

J'ai apprécié l'efficacité des services généraux de l'Institut de Mathématique. Merci Madame Bérat pour la célérité de la frappe. Merci Madame Wdowczyk, Messieurs Gournay et Provost pour la qualité de la reproduction.

SOMMAIRE

<i>Introduction.</i>	1
CHAPITRE I -	
<i>Le terme logarithmique dominant de la formule de Fefferman pour un domaine de Reinhardt régulier de \mathbb{C}^2.</i>	10
. <i>Théorème principal</i>	12
. <i>Deux corollaires</i>	33
CHAPITRE II -	
<i>La conjecture de Ramanadov dans \mathbb{C}^2 pour les domaines de Reinhardt.</i>	35
. <i>Les résultats</i>	43
REFERENCES	46

INTRODUCTION

Il y a cinquante ans apparaît la métrique de Bergman. Une application holomorphe entre domaines bornés devient une isométrie. Depuis lors l'équivalence biholomorphe entre domaines, les questions de prolongement sont intimement liées à la théorie des noyaux de Bergman.

On se propose, dans ce chapitre, de présenter certains résultats sur le noyau de Bergman qui forment le point de départ obligé du travail présenté dans ces pages.

Noyau de Bergman.

Soit Ω un domaine de \mathbb{C}^n borné. On note $\mathcal{A}^2(\Omega)$ les fonctions holomorphes de carré intégrable sur Ω . C'est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$. Comme il est séparable, soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne orthonormée. La série $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_n(t) \overline{\psi_n(\xi)}$ converge uniformément sur tout compact ; la somme qu'on note $K(z, \xi)$; $z, \xi \in \Omega$, est la fonction noyau de Bergman. Pour $\xi \in \Omega$ la forme linéaire évaluation sur $\mathcal{A}^2(\Omega)$, $b \rightarrow b(\xi)$ est représentée d'après le théorème de Riesz par un unique élément de $\mathcal{A}^2(\Omega)$ qu'on note K_ξ . Alors $K_\xi(z) = K(z, \xi)$; c'est une autre définition du noyau de Bergman; incidemment ce noyau est clairement indépendant du choix d'une base hilbertienne de $\mathcal{A}^2(\Omega)$. On a aussi, si $d\xi$ est la mesure de Lebesgue sur Ω :

$$f(z) = \int_{\Omega} K(z, \xi) f(\xi) d\xi \quad ; \quad f \in \mathcal{A}^2(\Omega), z \in \Omega$$

$$K(z, z) = \|K_z\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0.$$

K est holomorphe en le premier argument et a la symétrie hermitienne.

Les propriétés suivantes se remarquent également :

- $\Omega_1 \subset \Omega_2$ implique $K_{\Omega_2}(z, z) \leq K_{\Omega_1}(z, z)$.
- le noyau de Bergman d'un produit est le produit des noyaux.
- Si Ω est une suite croissante de domaines Ω_m alors

$$K_{\Omega} = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{\Omega_m} \quad (\text{Ramadanov}).$$

- Si $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est biholomorphe, le noyau de Bergman se transforme selon la règle suivante :

$$K_{\Omega_1}(z, \xi) = \det(Jf(z)) K_{\Omega_2}(f(z), f(\xi)) \overline{\det(Jf(\xi))}$$

Jf est le jacobien holomorphe de f .

Pour conclure cette partie, on peut également citer une estimation utile du noyau sur la diagonale pour un domaine Ω borné régulier de \mathbb{C}^n

$$K_{\Omega}(z, z) \leq K / d(z, \partial\Omega)^{n+1}, \quad z \in \Omega,$$

K constante.

Projecteur de Bergman, condition R.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note $P(f)$ la projection orthogonale de f sur $\mathcal{A}^2(\Omega)$. On a :

$$P(f) = \int_{\Omega} K(\cdot, \xi) f(\xi) d\xi.$$

- On dit qu'un domaine Ω borné de \mathbb{C}^n satisfait la condition R si le projecteur de Bergman P est continu de $C^\infty(\bar{\Omega})$ dans $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Cette condition s'interprète en estimations sur le noyau de Bergman et ses dérivées. Précisément R est équivalente à :
pour tout multi-indice α , il existe $C_\alpha > 0$, m_α entier tel que :

$$\forall \xi \in \Omega \quad \sup_{z \in \Omega} \left| \frac{\partial^\alpha K}{\partial z^\alpha}(z, \xi) \right| \leq C_{\alpha/d}(\xi, \Omega)^{m_\alpha} \quad (\text{Bell, Boas}) \quad [3]$$

Cas de la boule.

Pour la boule, ou plus généralement pour un ellipsoïde de \mathbb{C}^n le noyau de Bergman est calculable. Si Ω est défini par $a_1|z_1|^2 + \dots + a_n|z_n|^2 < a_0$, a_1, \dots, a_n, a_0 des nombres positifs, alors :

$$K_\Omega(z, \xi) = \frac{n! a_0, \dots, a_n}{\pi^n (a_0 - \sum_{i=1}^n a_i z_i \bar{\xi}_i)^{n+1}}$$

On remarque que ce noyau est C^∞ et même analytique sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ diminué de la diagonale sur le bord. Plus précisément, encore à ξ fixé $\in \Omega$; $K(\cdot, \xi)$ admet un prolongement holomorphe sur un voisinage de $\bar{\Omega}$. D'autre part, quand $z \rightarrow b\Omega$, $K(z, z) \rightarrow +\infty$ avec une singularité en fonction puissance.

En quittant la boule, on perd l'accès au calcul explicite. Tout renseignement du genre de ceux qui précèdent devient une étape historique.

Chronologiquement, c'est le domaine strictement pseudo-convexe borné à frontière régulière (C^∞) qui fut d'abord étudié un tel domaine sera noté Ω , soit r une équation de définition de Ω ; on peut la choisir strictement plurisousharmonique (quitte à multiplier par e^{Ar} avec A assez grand).

Au moins en dehors de la diagonale du bord, le noyau de Bergman d'un domaine strictement pseudoconvexe possède les meilleures propriétés de régularité. La démonstration repose sur les propriétés de $\bar{\partial}$ -Neumann. Elle peut s'adapter à des domaines plus généraux dès que l'inverse du laplacien complexe est pseudo-local.

Formule asymptotique de Fefferman (1974) [8].

Soit Ω domaine de \mathbb{C}^n strictement pseudoconvexe borné d'équation de définition r .

Il existe des fonctions $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ telles que

$$K_\Omega(z, z) = \psi_1 / (-r)^{n+1} + \psi_2 \text{Log}(-r)$$

C'est une étape importante. La démonstration originale est longue et difficile. Des techniques d'approximation diverses sont utilisées. L'idée de développement asymptotique sous-jacente à la théorie des opérateurs Fourier intégraux donne naissance à une nouvelle preuve de Boutet de Monvel et Sjöstrand [6] ; en situation propice aux calculs comme le domaine de Reinhardt, G. Coeuré obtient une formule de représentation intégrale du noyau de Bergman [7]. Une autre approche par des régularisées de Sobolev est mise en oeuvre par Bell et Ligocka [4].

Le prolongement au bord d'une application biholomorphe.

La formule de Fefferman permet d'observer qu'une application biholomorphe entre domaines strictement pseudoconvexes se prolonge régulièrement au bord [10]. Les premières tentatives de

généralisation de ce résultat s'organisent autour des estimées sous-elliptiques de Kohn pour l'opérateur de $\bar{\partial}$ -Neumann. Au plan global pour un domaine borné pseudoconvexe à frontière C^∞ ces estimées entraînant la condition R. Les domaines strictement pseudoconvexes [14], pseudoconvexes à frontière analytique réelle [9], de type fini dans \mathbb{C}^2 [15] satisfont aux estimées sous-elliptiques. Un domaine de Reinhardt borné complet régulier satisfait la condition R ([3]). Si ce domaine a une partie de son bord Levi-plate (forme de Levi à valeurs propres nulles) on sait alors que les estimées sous-elliptiques sont fausses. La condition R est ainsi une condition strictement plus faible que la sous-ellipticité. On ne connaît pas actuellement de domaine pseudoconvexe régulier borné ne satisfaisant pas la condition R.

Bell et Ligocka [4] ont montré qu'une application biholomorphe entre deux domaines bornés, à frontières régulières, satisfaisant la condition R se prolonge régulièrement au bord. Récemment Bell [2] s'est affranchi de la condition R pour l'un des domaines dès que ceux-ci sont pseudoconvexes. Il résulte incidemment qu'il n'existe pas d'équivalence biholomorphe entre domaines strictement pseudoconvexe et faiblement pseudoconvexe (à frontière C^∞ , bornés).

Singularité en logarithme du noyau de Bergman.

• Le noyau de Bergman de la boule ne comporte pas de terme en logarithme.

• Si Ω_α domaine de \mathbb{C}^2 est défini par $|z_2|^2 < e^{-\alpha|z_1|^2}$, α réel, on a

$$K(z, \xi) = \frac{\alpha e^{\alpha z_1 \bar{\xi}_1}}{\pi^2} \cdot \frac{1 + z_2 \bar{\xi}_2 e^{\alpha z_1 \bar{\xi}_1}}{1 - z_2 \bar{\xi}_2 e^{\alpha z_1 \bar{\xi}_1}} \quad [18]$$

• Pour $p_1, \dots, p_n \geq 1$ soit D_{p_1, \dots, p_n} le domaine de \mathbb{C}^n défini par $\sum_{i=1}^n |z_i|^{2p_i} - 1 < 0$. Ce domaine pseudoconvexe ne l'est pas strictement aux points où $z_i = 0$ si $p_i > 1$.

D'Angelo [1] a explicité le noyau de Bergman de $D_{p, 1, \dots, 1}$. On pose $g(z) = 1 - \sum_{i=2}^n |z_i|^2$. Il y a des constantes c_1, \dots, c_n telles que :

$$K(z, z) = \frac{n!}{\pi^n p^{n-1}} \sum_{k=1}^n c_k g(z)^{\frac{k}{p} - n} (g(z)^{\frac{1}{p}} - |z_1|^2)^{-k-1}.$$

Les c_k dépendent polynomialement de p et s'annulent pour $p = 1$ quand $k \neq n$. En outre $c_n = 1$, $c_{n-1} = (n-1)(p-1)/2$.

• On remarque que Ω_α ; $D_{p, 1, \dots, 1}$ ont des noyaux de Bergman sans terme en logarithme.

• Fefferman a considéré la composante connexe de l'origine du domaine de \mathbb{C}^2 défini par $|z_1|^2 + |z_2|^2 - c|z_2|^8 < 1$, c'est un domaine strictement pseudoconvexe à frontière analytique réelle. Pour $c > 0$ assez petit, au point $(0, 1)$ le noyau de Bergman comporte un terme en logarithme effectif.

Ces exemples suggèrent de s'interroger sur l'occurrence du terme en logarithme. Ramadanov a conjecturé en 1981 que les seuls domaines strictement pseudoconvexes sans singularités en logarithme sont les boules.

On se propose au moins dans \mathbb{C}^2 , pour un domaine de Reinhardt de préciser le terme en logarithme dominant (i.e. non borné). Son absence fournit une équation différentielle ordinaire. On en déduit l'absence de terme en logarithme dominant dans D_{p_1, p_2} ; une condition nécessaire d'analyticité du bord pour un noyau sans terme en logarithme, et dans le cas d'espèce la conjecture de Ramadanov.

CHAPITRE I

LE TERME LOGARITHMIQUE DOMINANT DE LA FORMULE DE FEFFERMAN
POUR UN DOMAINE DE REINHARDT REGULIER DE \mathbb{C}^2 .

§ 1 - Le théorème principal.

- . notation.
- . énoncé.

§ 2 - Préliminaire autour de la formule de G. Coeuré.

- . Lemme 1.

§ 3 - Première intégration dans G_k .

- . Lemme 2.

§ 4 - Etude de L_0 .

- . Proposition 1.

§ 5 - La partie singulière de L_k , $1 \leq k$.

- . Lemme 3.

§ 6 - Etude asymptotique de $I_{q,p}$.

- . Proposition 2.

§ 7 - Evaluation asymptotique de L_k ; $1 \leq k$.

- . Proposition 3.

§ 8 - Démonstration du théorème principal.

§ 9 - Deux corollaires.

On se propose de déterminer explicitement près d'un point frontière de stricte pseudoconvexité le terme en logarithme dominant du noyau de Bergman pour un domaine de Reinhardt borné complet à bord régulier de \mathbb{C}^2 . Cette étude fournit immédiatement deux conséquences, l'une sur l'absence de terme en logarithme dominant pour le noyau de Bergman des domaines $|z_1|^{2p_1} + |z_2|^{2p_2} \leq 1$; $p_1, p_2 \geq 1$, l'autre sur la nature analytique réelle du bord d'un domaine dont le noyau est sans logarithme.

§ 1 - Le théorème principal.

• Notation - Un polynôme en k variables, de degré $6-k$,

à coefficients réels, de la forme

$$\sum_{\substack{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \\ i_1 + \dots + i_k = 6 - k}} \alpha_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}$$

est noté P_{6-k}^k .

Pour f , fonction régulière d'une variable, on pose alors

$$P_{6-k}^k[f] = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_k} f^{(i_1)} \dots f^{(i_k)}.$$

A titre d'exemple, pour $k = 2$; $P_4^2[f] =$
 $\alpha_{0,4} f \cdot f^{(iv)} + \alpha_{1,3} f' f''' + \alpha_{2,2} (f'')^2$.

• Soit Ω un domaine de Reinhardt complet, à bord régulier, pseudoconvexe de \mathbb{C}^2 . L'image de Ω dans l'espace des logarithmes est convexe, soit $\tilde{\Omega}$ cette image.

Le bord de $\tilde{\Omega}$ est représenté par une fonction y régulière concave définie sur un intervalle ouvert non borné à gauche.

$$z = (z_1, z_2) \in \Omega \text{ si et seulement si } \text{Log}|z_2| < y(\text{Log}|z_1|).$$

Le domaine Ω est strictement pseudoconvexe en un point si et seulement si $y'' < 0$ en ce point. Si Ω est de plus borné, le graphe de y a des asymptotes verticale et horizontale. Si ces asymptotes sont les axes de coordonnées le domaine Ω est dit normalisé.

• Théorème.- Soit Ω un domaine de Reinhardt complet, borné, strictement pseudoconvexe à frontière C^∞ de \mathbb{C}^2 . La frontière de dans le plan des logarithmes est définie par une fonction y . Pour $z = (z_1, z_2) \in \Omega$, on pose $a = \text{Log}(|z_1|)$ et $\lambda = \text{Log}|z_2| - y(\text{Log}|z_1|)$.

Alors,

i) Près d'un point $z^0 \in b\Omega$ à coordonnées non nulles la formule de Feffermann s'écrit localement :

$$K(z, z) = K(a, \lambda) = \frac{\phi_1(a, \lambda)}{-(\lambda)^3} + \phi_2(a, \lambda) \text{Log}(-\lambda)$$

avec $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty([a_0 - \alpha, a_0 + \alpha] \times [\lambda_0, 0])$ où $a_0 = \text{Log}|z_1^0|$;
 $\alpha > 0$; $\lambda_0 < 0$.

ii) Le coefficient de Hörmander $\phi_1(a_0, 0)$ est $\frac{|y''(a_0)|}{8\pi^2 |z_1^0|^2 |z_2^0|^2}$.

iii) Le coefficient dominant du logarithme $\phi_2(a_0, 0)$ est indépendant du choix de ϕ_2 et est de la forme :

$$\frac{1}{|z_1^0|^2 |z_2^0|^2} \left(\sum_{k=1}^{\sigma} P_{6-k}^k [y'''] (a_0) / y''(a_0)^{k+2} \right).$$

La troisième assertion de ce théorème consitue l'essentiel ; les deux premières forment une mise au point.

La formule de représentation intégrale de G. Coeuré offre un développement asymptotique dont les singularités sont logées dans les premiers termes. Ces singularités seront isolées progressivement dans des intégrales à noyau positif. On reconnaîtra alors une famille d'intégrales dépendant d'un paramètre dont l'étude asymptotique permet de classer les singularités en puissance ou logarithme. Il suffit ensuite de regrouper les informations pour obtenir le théorème.

Les paragraphes qui suivent constituent les étapes naturelles du raisonnement.

§ 2 - Préliminaire autour de la formule de G. Coeuré [7].

Les hypothèses et les données sont celles du théorème. On a localement près de $z^0 \in b\Omega$ à coordonnées non nulles, pour q entier naturel :

$$(1) \quad K(z, z) = \frac{1}{(2\pi)^2 |z_1|^2 |z_2|^2} \left(\sum_{0 \leq k \leq q} L_k(z) \right) + R_q(z).$$

R_q est de classe C^ℓ au bord de Ω près de z_0 dès que $q \geq 3(n+\ell+1)$.

$$(2) \quad L_k(z) = \left(\frac{|y''(a)|}{4\pi} \right)^{k+1} \frac{\partial^{2(k+1)} G_k(z)}{\partial \lambda^{2(k+1)}} \quad k = 0, 1, \dots$$

Chaque G_k est fonction de z ou aussi bien de λ et a . $z \in \Omega$ si et seulement si $\lambda < 0$. Examiner G_k près d'un point z^0 du bord de Ω revient à une évaluation asymptotique quand a tend

vers $a_0 = \text{Log}|z_1^0|$ et λ tend vers 0^- .

Pour $k = 0, 1, \dots$, on a :

$$(3) \quad G_k = \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}} \frac{\chi_k(v) Q_k(h(v)) P_k(A, B) B}{(1 - A^{\alpha_k} B^{\beta_k})(1 - A^{\alpha'_k} B^{\beta'_k})} dv d\tau dt$$

- $\alpha_k, \alpha'_k, \beta_k$ sont des entiers strictement positifs tels que :

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} < -y'(a_0) < \frac{\alpha'_k}{\beta'_k}.$$

- $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k$; $t \in \mathbb{R}$.

- χ_k est une fonction plateau C^∞ sur \mathbb{R}^k ; égale à 1 sur un voisinage de 0 et nulle en dehors d'un ouvert borné.

- P_k est un polynôme en deux variables à coefficients constants. Le détail de sa construction apparaît dans l'article de G. Coeuré, dans lequel il ressort aussi facilement $P_k(1, 1) = (\alpha'_k - \alpha_k) \beta_k$.

- Q_k est un polynôme homogène d'ordre k en k variables

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha \text{ tel que pour } f \text{ de classe } C^k ; \quad \left(\frac{1}{f}\right)^{(k)} = \frac{\sum a_\alpha f^{(\alpha)}}{f^{k+1}}$$

L'exposant entre parenthèses représente un nombre de dérivations.

- $h(v) = (h(v_1), \dots, h(v_k))$ avec h fonction d'une variable réelle définie par :

$$h(u) = \int_0^1 (1-t)(y''(a+tu) - y''(u))u^2 dt ; u \text{ réel.}$$

Commentaire : le bord du domaine étant régulier ;

la fonction y est C^∞ de même que h . Un développement de Taylor de h près de 0 permet d'écrire :

$$(4) \quad h(u) = u^3 U(u) ; U \text{ fonction } C^\infty$$

$$U^{(p)}(0) = C_p y^{(p+3)}(a) ; C_p \text{ constante.}$$

- $A = \exp(2i(\sum_{j=1}^k \tau_j + t))$

$$(5) \quad B = \exp \left[\sum_{j=1}^k \{2iy'(a)\tau_j + y''(a)\tau_j(\tau_j + 2iv_j)\} + \right. \\ \left. y''(a)t^2 + 2iy'(a)t + 2\lambda \right].$$

La formule (3) a dorénavant tous ses constituants explicités.

A propos de G_k , on peut présenter les remarques élémentaires suivantes :

a) Il y a singularité dans l'intégrant si et seulement si $A = B = 1$, soit encore $t = \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = \lambda = 0$. En effet, $1 - A^\alpha B^\beta$ entraîne $AB = 1$, ce qui donne la condition cherchée d'après (5) et $y''(a) < 0 ; \lambda < 0$.

b) G_k est régulier par rapport à la variable $a = \text{Log}|z_1|$ près de $a_0 = \text{Log}|z_1^0|$. On passera souvent sous silence cette variable dans la suite pour alléger.

c) La présence de B dans (3) assure qu'il est possible de limiter l'intégration en toutes les variables à un voisinage de 0 borné. On obtient G_k à une fonction analytique en λ près sur $[0, \lambda_0]$. (Utilisation de la convergence dominée sachant que dans B il y a un terme en $\exp(-\tau^2)$).

La quantité $\sum_{j=1}^k \tau_j + t$ présente un intérêt qu'on peut

mettre en évidence :

Lemme 1.-

i) on peut supposer que dans (3)

$$A = \exp(2i\sqrt{k+1} \tau_1)$$

$$B = \exp(2i\sqrt{k+1} y'(a)\tau_1 + y''(a)\tau^2 + 2iy''(a)\tau.w + 2\lambda).$$

w étant l'image de $(v_1, \dots, v_k, 0)$ par une transformation orthonormale de \mathbb{R}^{k+1} .

ii) $(v_1, \dots, v_k) \rightarrow (w_2, \dots, w_{k+1})$ est une transformation linéaire inversible de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^k .

Notation : $\tau.w$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^{k+1} .

Démonstration :

i) On considère un changement de base orthonormale dans \mathbb{R}^{k+1} (variables τ_1, \dots, τ_k, t) tel que le nouveau premier vecteur de base soit $1/\sqrt{k+1}(1, \dots, 1)$. Alors la nouvelle première coordonnée est $1/\sqrt{k+1}(\sum_{j=1}^k \tau_j + t)$. On la note τ_1 , les autres étant $\tau_2, \dots, \tau_{k+1}$ sans qu'il y ait risque de confusion. A, B prennent la forme annoncée.

$w = (w_1, \dots, w_{k+1})$ apparaît par l'invariance du produit scalaire.

ii) On appelle P la matrice de changement de base de R^{k+1} évoquée précédemment. On a :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} w_2 \\ \vdots \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

A est une matrice mineure de P formée par les n dernières lignes et n première colonnes. On suppose $(0) = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$.

Alors
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 \end{pmatrix}$$
. En inversant, comme $P^{-1} = {}^t P$, il

apparaît une première colonne de coefficients égaux (P a une première ligne de coefficients égaux). Il vient alors $w_1 = 0$ puis $v_1 = \dots = v_k = 0$.

§ 3 - Première intégration dans G_k .

Dorénavant, pour alléger, on omet l'indice k dans $\alpha_k, \alpha'_k, \beta_k$. On introduit aussi les coefficients non universels :

$$b = -2\sqrt{k+1}(\alpha + \beta y'(a))$$

$$c = -\beta y''(a)$$

$$d = -2\beta y''(a).$$

En tenant compte des hypothèses, b, c, d sont tous trois strictement positifs ($y''(a) < 0$ exprime exactement la stricte

pseudo-convexité).

Avec ces notations, il vient :

$$(6) \quad A^{\alpha} B^{\beta} = \exp -[ib\tau_1 - c \tau^2 - id\tau w + 2\beta\lambda].$$

Le résultat intermédiaire qui suit réalise une première réduction des singularités.

Lemme 2.- Il existe des réels $\tau_2^0, \dots, \tau_{k+1}^0 > 0$; $\lambda_0 < 0$; il existe une fonction Ψ_1 analytique à valeurs complexes définie sur un voisinage V de 0 dans $R^k(\tau_2, \dots, \tau_{k+1}) \times R^k(v) \times R(\lambda)$ tels que :

$$(7) \quad (a) \quad ib\Psi_1 + c\Psi_1^2 + id\Psi_1 = -c \sum_{j=2}^{k+1} \tau_j^2 - id \sum_{j=2}^{k+1} \tau_j w_j + 2\beta\lambda .$$

(b) à une fonction analytique près sur $[0, \lambda_0]$:

$$(8) \quad G_k(\lambda) = \frac{\pi\beta}{\sqrt{k+1}} \int_{\substack{|\tau_j| < \tau_j^0 \\ j=2, \dots, k+1}} \frac{\chi(v) Q_k(h(v)) d\tau_2, \dots, d\tau_{k+1} dv}{[i(b+d w_1) + 2c\Psi_1] \Psi_1}$$

(w_j est la j -ième coordonnée de w défini dans le lemme 1.i)).

Démonstration :

• $1 - A^{\alpha} B^{\beta}$ est une fonction analytique réelle en $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda$ réels qu'on peut prolonger en une fonction analytique complexe pour τ_1 complexe, les autres variables restant réelles. Cette fonction est

nulle en $\tau = v = \lambda = 0$ et sa dérivée holomorphe par rapport à τ_1 est :

$$\frac{\partial(1-A^{\alpha\beta})}{\partial\tau_1}(0) = (A^{\alpha\beta})(-ib-2c\tau_1-idw_1)\Big|_{(0)} = -ib \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un voisinage V de $\tau_2 = \dots = \tau_{k+1} = 0$, $v = 0$, $\lambda = 0$, d'une fonction analytique à valeurs complexes $\tau_1 = \Psi_1(\tau_2, \dots, v, \lambda)$ sur V telle que $1 - A^{\alpha\beta}$ s'annule identiquement sur V .

Cette identité est (7) a priori modulo $2i\pi$, puis sans modulo par continuité. D'où (a).

• On va réaliser une intégration dans (3) par rapport à τ_1 en choisissant un contour donnant lieu à une fonction de λ régulière par la méthode des résidus.

La partie réelle de (7) est :

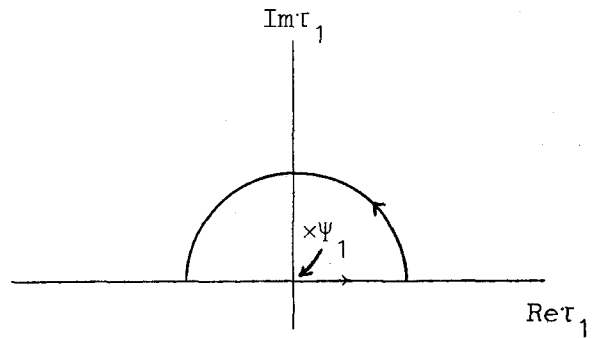
$$(9) \quad \text{Im}\Psi_1(b + dw_1 + c\text{Im}\Psi_1) = c((\text{Re}\Psi_1)^2 + \sum_{j=2}^{k+1} \tau_j^2) - 2\beta\lambda.$$

Comme w_1 est linéaire en v et $b > 0$; par la continuité de Ψ_1 , pour $v, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}, \lambda$ assez petits, on a :

$$b + dw_1 + c \text{Im}\Psi_1 > 0.$$

Le second membre de (9) étant positif il vient $\text{Im}\Psi_1 > 0$.

Dans le plan complexe des τ_1 , $\Psi_1(\tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda)$ est localisé dans le demi-plan supérieur. C'est le seul zéro de $1-A^{\alpha}B^{\beta}$ dès que $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda$ sont assez petits (d'après le théorème des



fonctions implicites). On limite le domaine d'intégration dans G_k pour assurer l'existence d'un seul zéro à $1-A^{\alpha}B^{\beta}$ pour chaque $\tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda$ à savoir $\Psi_1(\tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda)$. L'intégrale restante pour l'obtention de G_k comme on l'a déjà remarquée donne naissance à une fonction analytique en λ sur $[0, \lambda_0]$ pour un certain $\lambda_0 < 0$.

On peut maintenant choisir un contour dans le plan des τ_1 formé d'un demi-cercle supérieur tel que, pour chaque $\tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda$ assez petits, Ψ_1 est dans son intérieur. Il résulte du théorème des résidus que l'intégration sur l'axe $Re\tau_1$ dans le calcul de G_k est remplacé par une intégration sur un demi-cercle non situé à proximité du pôle $\Psi_1(\tau_2, \dots, \lambda)$ de l'intégrant qui donne naissance à une nouvelle fonction analytique en λ sur $[0, \lambda_0]$, avec en plus un résidu qui est :

$$\frac{2i\pi \chi(v) Q_k(h(v))P(A,B)B}{\frac{\partial(1-A^{\alpha}B^{\beta})}{\partial\tau_1} (1-A^{\alpha'-\alpha})} \text{ au point } \Psi_1(\tau_2, \dots, \lambda).$$

$$\text{Mais } \frac{\partial(1-A^{\alpha}B^{\beta})}{\partial\tau_1} (\Psi_1) = -i(b + dw_1) - 2c\Psi_1.$$

Une intégration du résidu en $\tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda$ donne :

$$(10) \quad 2i\pi \int_{\substack{|\tau_j| < \tau_j^0 \\ j=2, \dots, k+1}} \frac{\chi(v) Q_k(h(v) P_k(A, B) B \, d\tau_2, \dots, d\tau_{k+1} \, dv}{(-i(b+d w_1) - 2c\Psi_1)(1 - A^{\alpha' - \alpha})}$$

$\chi(v)$ aura été le cas échéant modifié pour avoir un support plus petit. A, B dans l'intégrand dépendent maintenant de $\Psi_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda$.

(10) se simplifie. En effet, d'après le lemme 1 :

$$A = 1 + (\Psi_1 \times \text{fonction analytique en } \Psi_1)$$

$$(1 - A^{\alpha' - \alpha})(\Psi_1) = -2\sqrt{k+1} \, i(\alpha' - \alpha)\Psi_1(1 + \Psi_1 \times \text{fonction analytique en } \Psi_1)$$

Comme Ψ_1 vérifie $A^\alpha B^\beta = 1$; en posant $B = \exp \theta$

il résulte $\theta = \text{constante} \times \Psi_1$ et $B-1 = \Psi_1 \times (\text{fonction analytique en } \Psi_1)$.

Ainsi $P_K(A, B) = P_K(1, 1) + (A-1)Q_1(A, B) + (B-1)Q_2(A, B)$ où Q_1, Q_2

sont des polynômes en A, B. Alors $P_K(A, B) = P_K(1, 1) + \Psi_1 \times \text{fonction}$

analytique. Le lemme suite par remplacement dans (10) de $1 - A^{\alpha' - \alpha}$

et $P_K(A, B)$ par les expressions ci-dessus sachant que $P_K(1, 1) = (\alpha' - \alpha)\beta$.

§ 4 - Etude de L_0 .

A ce stade, le comportement asymptotique de L_0 se dégage.

Proposition 1. - L_0 a un développement asymptotique de la

forme :

$$(11) \quad \frac{|y''(a)|}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^3} + \text{fonction analytique sur } [0, \lambda_0] \quad \lambda_0 < 0.$$

Démonstration :

On calcule dans ce qui suit à une fonction analytique en λ près sur $[0, \lambda_0]$. Pour $k = 0$, (8) donne :

$$G_0 = \frac{\pi\beta}{(ib + 2c\Psi_1(\lambda))\Psi_1(\lambda)}$$

Ψ_1 est définie par $ib\Psi_1 + c\Psi_1^2 = 2\beta\lambda$ c'est-à-dire

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{i(-b + \sqrt{b^2 - 8\beta\lambda c})}{2c} \quad \text{car } \operatorname{Re} \Psi_1 > 0.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} G_0 &= - \frac{2\pi\beta c}{\sqrt{b^2 - 8\beta\lambda c}(-b + \sqrt{b^2 - 8\beta\lambda c})} = \frac{\pi}{4\lambda} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 8\beta\lambda c}} \right) \\ &= \frac{\pi}{4\lambda} (1 + 1 + \lambda g(\lambda)) \quad ; \quad g \text{ analytique en } 0. \end{aligned}$$

D'après (2), on obtient la proposition en dérivant deux fois G_0 .

§ 5 - La partie singulière de L_k , $1 \leq k$.

Dans cette partie, on réalise une nouvelle intégration dans G_k donnée par (8) par un changement de contour après avoir localisé les zéros de Ψ_1 qui forment un pincement. On accède à L_k par des dérivations en λ suivant (2).

La partie singulière sera logée dans une intégrale absolument convergente se prêtant à une étude du comportement asymptotique.

Lemme 3.- Pour $k \geq 1$, la partie singulière de L_k est dans :

$$(16) \quad C_k \beta^{2k+6} y''(a)^{k+4} \int_U \frac{Q_k(h(\frac{v}{d})) dv d\tau_3, \dots, d\tau_{k+1}}{\left[-8b\beta\lambda + w_2^2 + \sum_{j=3}^{k+1} (\tau_j^2 + w_j^2) \right]^{\frac{1}{2} + 2(k+1)}}$$

C_k est une constante universelle indépendante de α, β, a .

U est un voisinage borné de 0.

Démonstration :

(a) La fonction $\Psi_1(\tau_2, \dots, \tau_{k+1}, v, \lambda)$ est analytique en τ_2 réel, elle admet un prolongement holomorphe pour τ_2 complexe. La relation (7) reste vraie. Il résulte que $\Psi_1(\tau_2, \dots) = 0$, τ_2 complexe si et seulement si

$$(13) \quad c \tau_2^2 + id \tau_2 w_2 - \{ 2\beta\lambda - c \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j^2 - id \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j w_j \} = 0.$$

Ψ_1 est une fonction holomorphe de τ_2 s'annulant aux zéros de (13) qui sont :

$$(14) \quad \frac{i}{2c} (-dw_2 \pm \sqrt{d^2 w_2^2 - 4c\{\dots\}}).$$

L'accolade dans (14) est la même que dans (13) et a une partie réelle négative de sorte que le radical définit la racine carrée holomorphe associée à la détermination principale du logarithme. En définitive (14) définit deux fonctions analytiques en

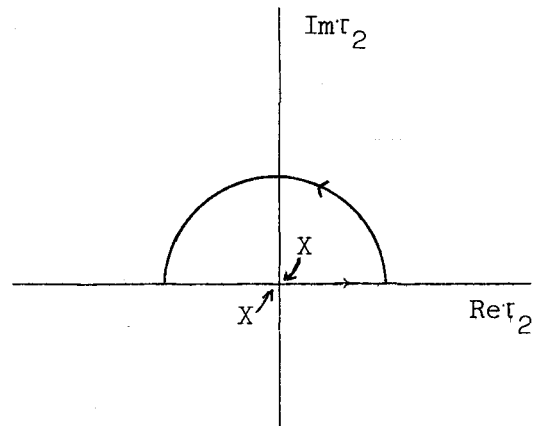
$\tau_3, \dots, \tau_{k+1}, \lambda$ qui tendent vers 0 avec $v, \tau_3, \dots, \tau_{k+1}, \lambda$.

(b) la localisation des zéros précédents s'appuie sur la propriété suivante :

Soit le trinôme $z^2 + 2iaz + \gamma = 0$, a réel, $\text{Re } \gamma > 0$. Alors $\text{Re} \sqrt{a^2 + \gamma} > |a|$ et les deux racines du trinôme sont de part et d'autre de l'axe réel en dépendant analytiquement de a et γ .

Cette propriété se démontre en supposant $a = 1$ en revenant à la définition de la racine carrée holomorphe associée à la détermination principale du logarithme.

(c) Ψ_1 porte la partie singulière dans (8). Pour $\tau_3, \dots, \tau_{k+1}, v, \tau$ fixés d'après (14) et (b), $\Psi_1 = 0$ admet deux racines en pincement de l'axe $\text{Re } \tau_2$. Ces deux racines définissent deux fonctions analytiques à valeurs dans les deux demi-espaces séparés strictement



par $\text{Re } \tau_2$. On utilise une nouvelle fois un demi-cercle supérieur et le théorème des résidus. On appelle $\Psi_2(\tau_3, \dots, v, \lambda)$ la racine de $\Psi_1 = 0$ dans le demi-plan supérieur. On a modulo une fonction analytique en λ, v, \dots :

$$\int_{|\tau_2| < \tau_2^0} \frac{d\tau_2}{[i(b+dw_1)+2c\Psi_1] \Psi_1} = \frac{2i\pi}{[i(b+dw_1)+2c\Psi_1(\Psi_2)] \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau_2}(\Psi_2)} .$$

Sachant que $\Psi_1(\Psi_2) = 0$, en dérivant dans (7) par rapport à τ_2 il vient :

$$i(b + dw_1) \frac{d\Psi_1}{d\tau_2} = -2c\Psi_2 - idw_2 .$$

Le résidu est alors $2i\pi / -2c\Psi_2 - idw_2$. En utilisant (14)

et en intégrant par rapport à $\tau_3, \dots, \tau_{k+1}, v$ on obtient pour $k \geq 1$ a une fonction analytique en λ près :

$$(15) \quad G_k(\lambda) = \frac{-2\pi^2\beta}{\sqrt{k+1}} \int_0 \frac{Q_k(h(v)) d\tau_3, \dots, dv}{\sqrt{d^2 w_2^2 - 4c\{2\beta\lambda - c \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j^2 - id \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j w_j\}}}$$

0 étant un voisinage borné de l'origine.

(d) L_k s'obtient à partir de G_k en dérivant $2(k+1)$ fois par rapport à λ . En dérivant (15) sous le signe somme et en effectuant les changements de variable $v \mapsto dv$, $\tau \mapsto 2c\tau$ il vient :

$$(16) \quad \int \frac{Q_k(h(\frac{v}{d})) dv d\tau_3, \dots, d\tau_{k+1}}{\left[-8c\beta\lambda + w_2^2 + \sum_{j=1}^{k+1} \tau_j^2 + 2i \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j w_j\right]^{\frac{1}{2} + k+2}}$$

avec la constante multiplicative :

$$- \frac{2\pi^2}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} + 2k + 1\right) \frac{\beta(-8c\beta)^{2(k+1)}}{d^k (2c)^{k-1}} .$$

On omettra dorénavant les constantes universelles, ainsi c et d pourront être remplacés par $\beta y''(a)$. Les β sont conservés, leur disparition dans les coefficients asymptotiques constitue un indice de correction des calculs.

La partie singulière de L_k s'obtient à partir de l'expression précédente en multipliant par $y''(a)^{k+1}$ (voir (2)). Il résulte la constante $\beta^{2k+6} y''(a)^{k+4}$ à un facteur multiplicatif universel près.

Pour étudier (16), on pose

$$\begin{cases} g(\tau_3) = \lambda_1 + w_2^2 + \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j^2 + 2i \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j w_j \\ \lambda_1 = -8c\beta\lambda \end{cases}$$

alors :

$$g(\tau_3) = \lambda_1 + w_2^2 + \sum_{j=3}^{k+1} \{(\tau_j + iw_j)^2 + w_j^2\}$$

Comme trinôme holomorphe de τ_3 complexe, g a des zéros extérieurs à la bande définie par l'axe réel et

$\text{Im } \tau_3 = -w_3$. (On applique

(b) aux zéros de g , en distinguant deux cas suivant le signe de w_3). Pour τ_3 dans cette

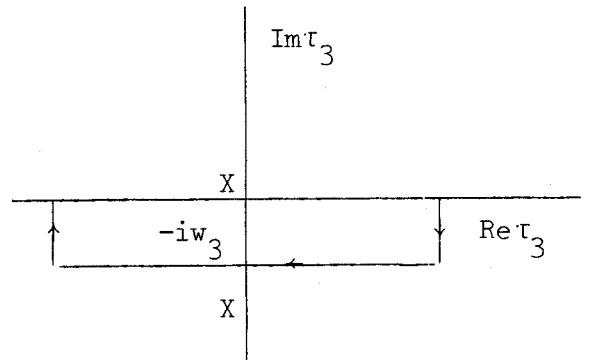
bande $|\text{Im } \tau_3 + w_3| \leq |w_3|$.

Comme $\text{Re } g(\tau_3) = \lambda_1 + w_2^2 + \sum_{j=4}^{k+1} \tau_j^2 + w_3^2 + (\text{Re } \tau_3)^2 - (\text{Im } \tau_3 + w_3)^2$,

il résulte que $\text{Re } g(\tau_3) > 0$. Ainsi, la racine carrée utilisée (associée à la détermination principale du logarithme) (dans (16) permet d'avoir $\tau_3 \mapsto \sqrt{g(\tau_3)}$ holomorphe sur la bande ci-dessus.

Il est permis à une fonction régulière en λ près d'intégrer sur le contour $t_3 \mapsto t_3 - iw_3$, t_3 réel limité à $|t_3| < \tau_3^0$.

En utilisant une méthode analogue pour les variables $\tau_4, \dots, \tau_{k+1}$ (16) donne l'intégrale cherchée.



§ 6 - Etude asymptotique de $I_{q,p}$.

Le comportement asymptotique des branches L_k est lié à l'étude de :

$$I_{q,p}(\lambda) = \int_0^1 \frac{u^q du}{(\lambda+u^2)^{\frac{1}{2}+p}} \quad p, q \text{ entiers } \geq 0 ; \lambda > 0.$$

Proposition 2.- Le comportement de $I_{q,p}$ près de 0^+ est le suivant, C désigne une constante :

- . $q > 2p$, $I_{q,p}$ borné ;
- . q impair $I_{q,p}(\lambda) = (\text{fonction analytique en } \lambda) + \frac{C}{\lambda^{p-\frac{q}{2}}}$;
- . q pair $I_{q,p}(\lambda) = (\text{fonction analytique en } \lambda) + C.I_{0,p-\frac{q}{2}}$;
- . $I_{0,0}(\lambda) = -\frac{1}{2} \text{Log } \lambda + (\text{fonction analytique en } \lambda)$;
- . $p > 0$, $I_{0,p}(\lambda) = \frac{g_p(\lambda)}{\lambda^p}$; g_p analytique en λ .

Remarque : Un terme en logarithme dans l'évaluation asymptotique de $I_{q,p}$ apparaît si et seulement si $q = 2p$.

Démonstration :

La démonstration repose sur les formules de récurrence :

$$(q+1)I_{q,p}(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^{p+\frac{1}{2}}} + (2p+1)I_{q+2,p+1}(\lambda)$$

$$I_{q+2,p+1}(\lambda) = I_{q,p}(\lambda) - \lambda I_{q,p+1}(\lambda).$$

On réduit facilement l'étude à $I_{o,p}$. Si on pose

$$\psi_p(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^{p+\frac{1}{2}}} ; \text{ il vient :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2p-1)\lambda I_{o,p} = \psi_{p-1}(\lambda) + (2p-2)I_{o,p-1} \\ \vdots \\ \lambda I_{o,1} = \psi_o(\lambda) + o. \end{array} \right.$$

On remarque que $I_{o,1}(\lambda) = \frac{\psi_o(\lambda)}{\lambda} = \frac{g_1(\lambda)}{\lambda}$; g_1 analytique.

De proche en proche on atteint $I_{o,p}$; $p > 0$. $I_{o,0}$ n'est pas atteint de cette manière, mais :

$$\begin{aligned} I_{o,0}(\lambda) &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+\lambda}} = \text{Log}(1 + \sqrt{1+\lambda}) - \text{Log} \sqrt{\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Log} \lambda + (\text{fonction analytique en } \lambda). \end{aligned}$$

§ 7 - Evaluation asymptotique de L_k , $1 \leq k$.

Il est maintenant possible de préciser les singularités dans chaque L_k .

. Pour les notations ; $h(v) = (h(v_1), \dots, h(v_k)) \in \mathbb{R}^k$.

$h(v_i) = v_i^3 U(v_i)$ (cf. (4)). On pose pour $v \in \mathbb{R}^k$;

$$v^3 U(v) = (v_1^3 U(v_1), \dots, v_k^3 U(v_k)).$$

On pose aussi $\lambda_1 = -8c\beta\lambda$. Le changement de variables linéaire inversible $(w_2, \dots, w_{k+1}) \mapsto (v_1, \dots, v_k)$ du lemme 1 est noté T.

. En utilisant l'homogénéité de Q_k , l'intégrale (12) devient à une constante multiplicative universelle près :

$$(17) \quad \frac{1}{\beta^{k-6}} y''(a)^{2k-4} \int_0 \frac{Q_k(v^3 U(\frac{v}{d})) dv d\tau_3, \dots, d\tau_{k+1}}{(\lambda_1 + \sum_{j=2}^{k+1} w_j^2 + \sum_{j=3}^{k+1} \tau_j^2)^{\frac{1}{2} + 2(k+1)}} .$$

Proposition 3.- Avec les notations ci-dessus :

- i) L_k est borné en λ pour $k > 6$;
- ii) la fonction puissance dominante $1/\lambda^3$ apparaît uniquement dans L_0 .
- iii) Le coefficient du terme en logarithme dans L_k ; $1 \leq k \leq 6$, est :

$$(18) \quad \frac{H^{(6-k)}(0)}{y''(a)^{k+2}}$$

où

$$H(\rho) = \int_{S^{2k-2}} Q_k(T(w')^3 U(\rho T(w'))) d\sigma_{w', \tau'}$$

S^{2k-2} est la sphère unité de $\mathbb{R}^k(w) \times \mathbb{R}^{k-1}(\tau_3, \dots, \tau_{k+1})$.

$\sigma_{w', \tau'}$ est l'élément d'aire usuel sur S^{2k-2} .

$$(w_2, \dots, w_{k+1}, \tau_3, \dots, \tau_{k+1}) = \rho(w'_2, \dots, w'_k, \tau'_3, \dots, \tau'_{k+1}) = \rho(w', \tau')$$

et $(w', \tau') \in S^{2k-2}$.

Démonstration :

La forme du dénominateur de l'intégrant dans (17) suscite le passage en polaires dans \mathbb{R}^{2k-1} . On note $(w, \tau) = \rho(w', \tau')$ comme il est rappelé dans l'énoncé de la proposition. (17) devient :

$$\frac{1}{\beta^{k-6} y''(a)^{2k-4}} \int_0^{\rho_0} \frac{\rho^{5k-2} d\rho}{(\lambda_1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + 2(k+1)} \left\{ \int_{S^{2k-2}} Q_k(T(w')^3 \cup \left(\frac{\rho}{d} T(w')\right)) d\sigma_{w', T'} \right\}$$

L'expression entre accolades est une fonction régulière en ρ qu'on note $H(\frac{\rho}{d})$. En tenant compte de la proposition 2 dans la recherche du terme en logarithme, si on effectue un développement de Taylor en 0 de H , il convient de ne s'intéresser qu'au terme d'ordre $6-k$ en ρ (seul celui-ci donne une intégrale du type $I_{q,p}$ avec $q = 2p$). Ce terme est $\frac{H^{(6-k)}(0)}{d^{6-k}}$ à une constante près. En outre, si $k > 6$ l'expression ci-dessus est bornée en λ_1 , donc en λ . Pour $1 \leq k \leq 6$, le coefficient du terme logarithme voit disparaître la contribution de β , et c'est (18). On remarque aussi toujours d'après la proposition 2 que les fonctions puissances intervenant pour $k = 1, \dots, 6$ sont $1/\lambda^2$ et $1/\lambda$. La proposition est prouvée. ■

§ 8 - Démonstration du théorème.

i) C'est une transcription du théorème de Fefferman sachant que pour un domaine de Reinhardt $K(z, z) = K(|z|, |z|)$ et que λ est une fonction de définition C^∞ de Ω localement près des points à coordonnées non nulles.

ii) Le coefficient de Hormänder en $z^0 \in b\Omega$, c'est-à-dire $\phi_1(a_0, 0)$ est $\frac{2}{\pi^2} \left| \Delta_\lambda(z^0) \right|$ ou Δ_λ est le déterminant de Monge-Ampère.

Aussi

$$\Delta_\lambda(z^0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial z_1} & & & \\ & \frac{\partial \lambda}{\partial z_2} & & \\ & & \lambda & \\ & & \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_2} \end{pmatrix} \quad \text{matrice de Levi} \quad (z^0)$$

on a $\lambda(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \text{Log } z_2 \bar{z}_2 - y(\frac{1}{2} \text{Log } z_1 \bar{z}_1)$.

Le point z^0 du bord correspond à $a_0 = \text{Log}|z_1^0|$ et $\lambda = 0$.

Un bref calcul donne :

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_1}\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial z_1} = -\frac{1}{2z_1} y'(\frac{1}{2} \text{Log } z_1 \bar{z}_1)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_1}\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial z_2} = \frac{1}{2z_2}$$

la matrice de Levi a ses coefficients nuls sauf

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = \frac{1}{4z_1 \bar{z}_1} y''(\frac{1}{2} \text{Log } z_1 \bar{z}_1).$$

Comme $\lambda = 0$ en z^0 , il vient :

$$\Delta_\lambda(z_0) = \frac{y''(a_0)}{16|z_1^0|^2 |z_2^0|^2} ;$$

d'où le coefficient de Hormänder annoncé d'après la proposition 1 et (1).

iii) Pour démontrer que $\phi_2(a_0, 0)$ ne dépend pas du choix de ϕ_2 on suppose $\Psi_{1/\lambda^3} + \Psi_2 \text{Log}(-\lambda) = 0$, $\Psi_1, \Psi_2 \in C^\infty$ près de 0^- .

Il s'agit de prouver $\Psi_2(0) = 0$. On décompose en partie bornée et

partie asymptotique par un développement de Ψ_1 à l'ordre 2, on obtient alors $\Psi_1(0) = \Psi_1'(0) = \Psi_1''(0) = 0$ puis $\Psi_2(0) = 0$.

. Pour obtenir $\phi_2(a_0, 0)$ il faut expliciter l'expression

$H^{(6-k)}(0)$, $1 \leq k \leq 6$ du théorème précédent. Q_k est une

somme de monômes homogènes d'ordre k . Prenons en un $X_1 X_2 \dots X_k$

par exemple, la méthode est la même pour les autres ; il s'agit

de trouver le coefficient de ρ^{6-k} dans le développement de Taylor

en 0 de $T_1(w')^3, \dots, T_k(w')^3 U(\rho T_1(w')) \dots U(\rho T_k(w'))$.

(T_i est la $i^{\text{ème}}$ fonction coordonnée de l'application T). Ce coef-

ficient est modifié par une constante universelle après intégration

en w' . C'est aussi bien le coefficient de ρ^{6-k} de la fonction

$\rho \rightarrow U(\rho)^k$. Pour cela, on a $U(\rho) = \sum_{k=0}^{6-k} \frac{U^{(p)}(a)}{p!} \rho^p + O(\rho^{6-k})$.

D'après la symétrie du propos si i_1, \dots, i_k sont des entiers

tels que $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ avec $i_1 + \dots + i_k = 6-k$, on

obtient dans $(\sum_{k=0}^{6-k} \frac{U^{(p)}(0)}{p!} \rho^p)^k$ pour terme associé au choix

i_1, \dots, i_k , le coefficient $U^{(i_1)}(0) \dots U^{(i_k)}(0)$ à une constante

près. Pour tous les choix possibles des indices i_1, \dots, i_k sachant

que $U(0) = y''(a_0)$ il apparaît $P_{6-k}^k [y'''] (a_0)$. L'expression

complète du terme $\phi_2(a_0, 0)$ résulte de (1) développé à un ordre

q assez grand. Tout est prouvé.

§ 9 - Deux corollaires.

. L'absence de terme dominant en logarithme au bord par le noyau de

Bergman se traduit exactement par une équation différentielle ordinaire

satisfaite par le bord du domaine en coordonnées logarithmiques du type :

$$\sum_{k=1}^f P_{6-k}^k [y'''] / y''^{k+2} = 0.$$

Comme $P_5^1 [y''']$ est $y^{(v111)}$ à une constante non nulle près, cette équation prend la forme normale :

$$(E) \quad y^{(v111)} = \sum_{k=2}^6 P_{6-k}^k [y'''] / y''^{k-1} .$$

Corollaire 1.- (d'Angelo)

Les domaines $D_{\alpha, \beta} \quad |z_1|^{2\alpha} + |z_2|^{2\beta} < 1 ; \quad \alpha, \beta$ entiers $\geq 1 ;$ sont sans terme en logarithme dans la partie non bornée au bord de la formule de Fefferman.

Remarque : α, β sont entiers ≥ 1 et non simplement réels pour avoir un bord régulier.

. Le résultat est plus faible que celui d'Angelo pour $D_{\alpha, 1}$ qui résulte d'un calcul explicite. En effet, les termes en Log multipliés par une puissance ne sont pas examinés. Par contre, il s'applique à $D_{\alpha, \beta}$, α et β différents de 1, non examiné dans [1].

Démonstration :

. La sphère unité est solution de (E) ; (E) est autonome et homogène ; aussi si $y(a)$ solution $\frac{1}{\beta} y(\alpha_a)$ est aussi solution c'est-à-dire encore $|z_1|^{2\alpha} + |z_2|^{2\beta} \leq 1$. Le raisonnement vaut a priori aux points de stricte pseudo-convexité et est étendue aux autres points éventuels par continuité. (Si $\alpha > 1$ (resp. $\beta > 1$), $0 \times S_1$ (resp. $S_1 \times 0$) est ensemble de points de faible pseudo-convexité).

Corollaire 2. - Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ domaine strictement pseudo-convexe de Reinhardt, complet, borné à frontière C^∞ . Si près d'un point du bord à coordonnées non nulles le noyau de Bergman est sans terme en logarithme alors localement la frontière est analytique réelle.

Démonstration : Soit z^0 le point du bord ou localement le noyau de Bergman est sans terme en logarithme. Près de $a_0 = \text{Log}(z_1^0)$ la fonction bord y vérifie l'équation différentielle ordinaire E sous forme normale à second membre analytique. y'' est localement différent de zéro par la stricte pseudo-convexité. Le corollaire résulte de l'unicité locale de la version analytique réelle du théorème de Cauchy.

Il est possible d'aller beaucoup plus loin dans la caractérisation des domaines strictement pseudo-convexes sans terme en logarithme, c'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

LA CONJECTURE DE RAMADANOV DANS \mathbb{C}^2 POUR LES DOMAINES DE REINHARDT

D'Angelo [1], puis Ramadanov [17] ont attiré l'attention sur la question de la présence d'un terme en logarithme dans le noyau de Bergman d'un domaine pseudo-convexe borné à frontière régulière. Ramadanov a conjecturé que les seuls domaines strictement pseudo-convexes bornés de \mathbb{C}^n ayant un noyau de Bergman sans terme en logarithme sont les boules.

Nous allons démontrer la véracité de cette affirmation dans \mathbb{C}^2 au moins pour les domaines de Reinhardt complets bornés à frontière régulière.

Soit Ω dans \mathbb{C}^2 un domaine de Reinhardt strictement pseudo-convexe, complet, borné, à frontière C^∞ . Ω est supposé normalisé, son bord dans le plan des logarithmes est défini par une fonction $y :]-\infty, 0[\rightarrow]-\infty, 0[$, C^∞ , telle que en $-\infty$ y et y' tendent vers 0, en 0 y et y' tendent vers $-\infty$. En outre, $y'' < 0$.

Si Ω a un noyau de Bergman sans terme en logarithme, il s'agit de prouver que c'est la boule de \mathbb{C}^2 , $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1$. On a prouvé précédemment que Ω a nécessairement une frontière analytique réelle localement près des points à distance finie

dans le plan des logarithmes. Aussi la fonction y correspondante vérifie une équation différentielle ordinaire :

$$E : \sum_{k=1}^6 P_{6-k}^k [y'''] / (y'')^{k+2} = 0 ; \quad P_5^1 [y'''] = y^{(v''')}.$$

Cette équation reflète la propriété des points du bord dans le plan des logarithmes ; il s'agit dans la suite de tenir compte de la stricte pseudo-convexité des points à l'infini.

Transformation de l'équation différentielle de base E.

Pour une fonction bord solution de E, y étant strictement décroissante on pose $y'' = -e^{p(y')}$. p est alors une fonction régulière sur $] -\infty, 0[$. Ce changement de fonction utilise la stricte pseudo-convexité des points à distance finie. On a :

Lemme 1.-

a) p définie sur $] -\infty, 0[$ vérifie l'équation :

$$E_1 : p^{(v')} = \sum a_\alpha (p')^{\alpha_1} (p'')^{\alpha_2} (p''')^{\alpha_3} (p'v)^{\alpha_4} (p^v)^{\alpha_5}$$

les a_α sont des constantes universelles ; la somme est prise sur les 5-uplets α tels que $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 5\alpha_5 = 6$.

b) p caractérise le domaine normalisé.

Démonstration :

a) par récurrence, on démontre que pour $\ell > 2$

$$y^{(\ell)} = (y'')^{\ell-1} \left[p^{(\ell-2)} + P_{(\ell-2)}(p', \dots, p^{(\ell-3)}) \right]$$

où $P_{(\ell-2)}$ est un polynôme en $p', \dots, p^{(\ell-3)}$ homogène d'ordre $\ell-2$ quant au nombre de dérivations. En effet, d'après l'écriture précédente de $y^{(\ell)}$ on a :

$$y^{(\ell+1)} = (\ell-1)(y'')^{\ell-2} y''' [\dots] + (y'')^{\ell-1} [p^{(\ell-1)} + Q_{(\ell-1)}(p_1', \dots, p^{(\ell-2)})] y''$$

$$\text{et } y''' = dy''/dy' \times dy'/dx = y''^2 \cdot p'$$

Pour obtenir l'équation annoncée, on remplace dans E les dérivées de y'' par les expressions calculées ; on factorise ensuite $(y'')^4$.

b) p étant fixée, une fonction bord y associée à p vérifie $y'' = -e^{p(y')}$; $y(-\infty) = y'(-\infty) = 0$; elle est donc unique par le théorème de Cauchy. ■

Quelques solutions de E_1 .

Lemme 2.-

i) La boule unité est solution de E_1 avec $p_0(y') = \text{Log } 2y'(y' - 1)$;

ii) Un domaine $D_{\alpha, \beta} : |z_1|^{2\alpha} + |z_2|^{2\beta} < 1$; α, β entiers ≥ 1 est solution de E_1 avec $p_{\alpha, \beta}(y) = \text{Log } 2y'(\beta y' - \alpha)$;

iii) Si p est solution de E_1 ; $\tilde{p}(y') = \text{Log } |y'|^3 + p(\frac{1}{y'})$ est solution de E_1 ; $\tilde{p}_0 = p_0$.

Démonstration :

i) Le noyau de Bergman de la boule est bien entendu sans-logarithme et pour celle-ci $y(x) = \frac{1}{2} \text{Log}(1-e^{2x})$. Après calcul $p(y') = \text{Log } 2y'(y'-1)$. On note cette fonction p_0 .

ii) $D_{\alpha,\beta}$ a pour équation dans le plan des logarithmes $e^{2\alpha x} + e^{2\beta y} < 1$.

$(x,y) \in b(D_{\alpha,\beta})$ si et seulement si $(\alpha x, \beta y) \in b$ (boule) ; c'est-à-dire $y = \frac{1}{2\beta} \text{Log}(1-e^{2\alpha x})$. On obtient $p(y')$ après dérivation.

iii) La fonction réciproque d'une fonction bord d'un domaine strictement pseudo-convexe est la fonction bord du domaine également strictement pseudo-convexe obtenu en échangeant z_1 et z_2 . Si $x(y)$ est la fonction réciproque et \tilde{p} la fonction p associée on a :

$$x \circ y = \text{id} ; x'(y) \cdot y'(x) = 1 ; x''y'^2 + x'y'' = 0.$$

D'où $x'' = -x'^3 y''$; $-e^{\tilde{p}(x')} = x'^3 e^{p(y')}$. Soit encore en passant aux logarithmes $\tilde{p}(x') = 3 \text{Log}|x'| + p(\frac{1}{x'})$. On vérifie facilement $\tilde{p}_0 = p_0$.

Condition suffisante "d'unicité" de la solution dans E_1 .

Dans le paragraphe précédent, on a remarqué que la sphère unité comme les domaines plus généraux $D_{\alpha,\beta}$ sont solution de E_1 . On a malgré tout :

Lemme 3.- Soit p solution de E_1 sur $] -\infty, 0[$; $q = p - p_0$. Si q vérifie l'estimation $q^{(i)} = O(\frac{1}{q'^i})$ en $-\infty$, $i = 1, \dots, 5$; alors pour tout $y' \in] -\infty, 0[$ on a $q^V(y') = q'^V(y') = q'''(y') = q''(y') = 0$.

Démonstration :

En remplaçant p par $p_0 + q$ dans E_1 , il vient :

$$p_0^{v'} + q^{v'} = a_\alpha (p_0' + q')^{\alpha_1}, \dots, (p_0^v + q^v)^{\alpha_5}$$

à l'aide de la formule multinomiale de Newton ; sachant que p_0 est solution de E_1 on a :

$$q^{v'} = \sum_{k=0}^5 \phi_k(p_0', \dots, p_0^{(k)}, q', \dots, q^{(6-k)})$$

ou ϕ_k est polynomiale en p_0', p_0'', \dots ; q', q'', \dots avec exactement k dérivations sur p_0 ; $6-k$ dérivations sur q . Le cas $k = 6$ disparaît du fait que p_0 est solution de E_1 . Intégrons successivement cinq fois l'expression précédente de a fixé à y' pour obtenir une primitive cinquième.

$$g'(y') = \int_a^{y'} dt_5 \int_a^{t_5} dt_4 \int_a^{t_4} dt_3 \int_a^{t_3} dt_2 \int_a^{t_2} \sum_{k=0}^5 \phi_k dt_1 + \left(\frac{(y'-a)^4}{4!} q^{(v)}(a) + \dots + q'(a) \right)$$

Par Fubini, l'intégrale multiple est $\int_a^{y'} \frac{(t-a)^4}{4!} (\sum \phi_k) dt$.

Faisons tendre maintenant y' vers $-\infty$.

$p_0^{(i)} \sim \frac{1}{y'^i}$. (On revient à l'expression de p_0). Grâce à l'hypothèse

$\phi_k \sim \frac{1}{(y')^6}$. Par conséquent, l'intégrale multiple est convergente ;

aussi $q'(y') \rightarrow 0$ par l'hypothèse. Il résulte que $\frac{(y'-a)^4}{4!} q^{(v)} + \dots + q'(a)$ doit être borné quand $y' \rightarrow -\infty$. On en déduit

$q^v(a) = \dots = q''(a) = 0$. Le raisonnement vaut quelque soit $a \in]-\infty, 0[$. ■

Intervention de la stricte pseudo-convexité aux points à l'infini.

Lemme 4.- Un domaine normalisé C^∞ , de Reinhardt, complet a un bord qui s'écrit localement près de $z_1 = 1$, $z_2 = 0$; $|z_1|^2 = f(|z_2|)$ avec $f \in C^\infty$ près de 0 ; $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$.

Démonstration : Soit r une fonction de définition du domaine normalisé ; y la fonction associée dans le plan des Log. On a $r(z_1, z_2) = r(|z_1|, |z_2|) = r(e^x, e^y) = 0$ pour tout (z_1, z_2) du bord à coordonnées non nulles. Ainsi $\forall x ; \epsilon] \infty, 0[$ $r(e^x, e^y) = 0$. Quand $x \rightarrow 0$; $y \rightarrow -\infty$, il vient $r(1, 0) = 0$; de même quand $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$ on obtient $r(0, 1) = 0$. Ainsi $(0, 1)$ comme $(1, 0)$ sont des points du bord du domaine.

On pose $z_1 = u_1 + iu_2$; $z_2 = v_1 + iv_2$, u_1, u_2, v_1, v_2 réels. Comme le domaine est de Reinhardt $r(1, u_2) = r(1, -u_2)$. On a

$$\lim_{\substack{u_2 \rightarrow 0 \\ u_2 > 0}} \frac{r(1, u_2)}{u_2} = \frac{\partial r}{\partial u_2}(1, 0) = \lim_{\substack{u_2 \rightarrow 0 \\ u_2 > 0}} \frac{r(1, -u_2)}{-u_2} = - \frac{\partial r}{\partial u_2}(1, 0).$$

Il résulte $\frac{\partial r}{\partial u_2}(1, 0) = 0$. En remarquant $r(1, iv_2) = r(1, v_2)$

il résulte $\frac{\partial r}{\partial r_2}(1, 0) = \frac{\partial r}{\partial u_2}(1, 0) = 0$. Par suite $\frac{\partial r}{\partial z_2}(1, 0) = 0$.

Comme r est une équation de définition du domaine $\frac{\partial r}{\partial z_1}(1, 0) \neq 0$.

Si $\frac{\partial r}{\partial u_1}(1, 0) \neq 0$ d'après le théorème des fonctions implicites

sachant que r est C^∞ il existe ψ définie près de 0 dans \mathbb{R} ; à valeurs réelles C^∞ , $\psi(0) = 1$ telle que $r(u_1, u_2) = 0$ si et seulement si $u_1 = \psi(u_2)$ soit encore $|z_1| = \psi(|z_2|)$.

On remarque en outre que $\psi'(0) = - \frac{\frac{\partial r}{\partial u_2}(1,0)}{\frac{\partial r}{\partial u_1}(1,0)} = 0$.

Comme $\frac{\partial r}{\partial v_1}(1,0) = 0$, on a toujours $\frac{\partial r}{\partial u_1}(1,0) \neq 0$. En effet,

$r(1+iv_1, 0)$ est négatif pour tout v_1 réel car $(1+iv_1, 0)$ n'est pas dans le domaine par suite $\frac{\partial v}{\partial v_1}(1,0) = 0$. La fonction cherchée est alors $\psi^2 = f$, en effet f est C^∞ ; $f(0) = \psi(0) = 1$; $f'(0) = 2\psi(0)\psi'(0) = 0$. ■

On est en mesure de prouver les estimations du lemme 3.

Lemme 5.- Soit p une solution de E_1 associée à un domaine strictement pseudo-convexe complet, normalisé, à frontière régulière : $q = p - p_0$. Alors :

$$q^{(i)} = o\left(\frac{1}{(y')^i}\right) \text{ en } -\infty.$$

Démonstration : D'après le lemme 4, près de $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, le bord s'écrit $|z_1|^2 = 1 - a|z_2|^2 + |z_3|^3 h_1(|z_2|)$; h_1 étant C^∞ près de 0. La stricte pseudo-convexité en $(1,0)$ impose $a > 0$. En effet, la partie principale du développement précédent s'écrit près de $(1,0)$:

$$1 + 2\operatorname{Re}(z_1^{-1}) + |z_1^{-1}|^2 + a|z_2|^2.$$

La forme de Lévi restreinte à la droite tangente holomorphe en $(1,0)$ au domaine est $u \in \mathbb{C} \rightarrow a|u|^2$. L'hypothèse de stricte positivité signifie $a > 0$. Avec $x = \text{Log}|z_1|$; $y = \text{Log}|z_2|$ l'équation du bord devient :

$$\begin{aligned} 2x &= \text{Log}(1 - ae^{2y} + e^{3y}h_1(e^y)) \\ &= -a e^{2y} + e^{3y}h_2(e^y) . \end{aligned}$$

h_2 comme les fonctions h ultérieures seront C^∞ en 0 .

On dérive :

$$(1) \quad 1 = (-a e^{2y} + e^{3y}h_3(e^y))y'$$

après une nouvelle dérivation on obtient

$$-e^{p(y')} = y'' = -y'^2 \frac{[-2a e^{2y} + e^{3y}h_4(e^y)]}{[-a e^{2y} + e^{3y}h_5(e^y)]} = -y'^2 [2 + e^y h_6(e^y)]$$

ou encore

$$(2) \quad p(y') = \text{Log}(2y'^2) + e^y h_7(e^y).$$

On relie e^y et y' en utilisant (1) :

$$e^y = \frac{1}{a\sqrt{-y'}} (1 + e^y h_8(e^y)).$$

En posant $v = e^y$, $u = \frac{1}{\sqrt{-y'}}$, l'expression précédente permet d'utiliser le théorème des fonctions implicites en $u = 0$; $v = 0$. Il existe ainsi une fonction $g \in C^\infty$ près de 0; $g(0) = 0$ telle que $e^y = g\left(\frac{1}{\sqrt{-y'}}\right)$. L'égalité (2) devient alors près de $-\infty$:

$$p(y') = \text{Log}(2y'^2) + \frac{1}{\sqrt{-y'}} h_9\left(\frac{1}{\sqrt{-y'}}\right).$$

$$\text{Par ailleurs } p_0(y') = \text{Log } 2y'(y'-1) + \frac{1}{\sqrt{-y'}} h_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{-y'}}\right).$$

Il en résulte : $q(y') = \frac{1}{\sqrt{-y'}} r\left(\frac{1}{\sqrt{-y'}}\right)$, $r \in C^\infty$ en 0. On en déduit par dérivations successives le résultat cherché.

Les résultats.

Théorème.- Un domaine de Reinhardt borné de \mathbb{C}^2 , strictement pseudo-convexe, complet, à frontière C^∞ , tel que le noyau de Bergman soit sans terme en logarithme est une ellipse centrée à l'origine.

Corollaire.- Le domaine ci-dessus est une ellipse dès que le terme dominant en logarithme est nul au bord du domaine (c'est-à-dire dans la formule de Fefferman le terme en logarithme intervenant dans la partie non bornée au bord).

Remarques :

. Le corollaire renforce le théorème. On se place avec notre méthode naturellement dans l'hypothèse du corollaire, en effet cette hypothèse permet à la fonction bord, du domaine dans le plan des logarithmes, de satisfaire l'équation différentielle E.

. Une ellipse centrée à l'origine dans \mathbb{C}^2 a une équation de définition de la forme $|z_1|^2/R_1^2 + |z_2|^2/R_2^2 < 1$; R_1, R_2 réels > 0 .

. Il est inutile d'envisager une hypothèse supplémentaire de connexité.

. Le domaine de l'hypothèse du théorème est complet dès qu'il contient l'origine.

Démonstration : On se place dans les hypothèses du corollaire

. Grâce à des homothéties en z_1, z_2 on peut supposer le domaine normalisé. Il faut alors prouver que le domaine est la boule unité.

. On note y la fonction bord. La fonction p associée vérifie E_1 . Si $q = p - p_0$, d'après les lemmes 3 et 5, $q'' = 0$ sur $] -\infty, 0[$. Ainsi $p' = p'_0 + k$, k constante. D'après le lemme 2, iii) en appliquant le raisonnement à \tilde{p} il vient $\tilde{p} = p' + C$, C constante. (\tilde{p} est associé au domaine symétrique du domaine original).

On a :

$$\text{pour tout } u < 0, \quad -\frac{3}{u} - p'\left(\frac{1}{u}\right)/u^2 = p'(u) + C.$$

Mais $p' = p'_0 + k$, il vient :

$$-\frac{3}{u} - p'_0\left(\frac{1}{u}\right)/u^2 - \frac{k}{u^2} = p'(u) + k + C.$$

Comme $\tilde{p}'_0 = p'_0$ il résulte : $-\frac{k}{u^2} = k+C$ pour tout $u < 0$.

Soit encore $k = C = 0$. Ainsi $p' = p'_0$; c'est-à-dire $p = p_0 + \text{Log } \alpha$
avec $\alpha > 0$. Ce bord est associé au domaine $D_{\alpha, \alpha}$ (lemme 2).

La stricte pseudo-convexité du domaine impose $\alpha = 1$. Par suite,

$p = p_0$ et p_0 caractérise la boule unité. ■

REFERENCES

- [1] J. D'ANGELO
A note on the Bergman Kernel
Duke math., Journal vol. 45 n° 2 (1978), 259-265.
- [2] S. BELL
Biholomorphic mappings and the $\bar{\partial}$ -problem
Annals of Math., 114 (1981), 103-113.
- [3] S. BELL, H. BOAS
Regularity of the Bergman projection in weakly pseudoconvex domains
Math. Ann. 257 (1981), 23-30.
- [4] S. BELL, E. LIGOCCA
A simplification and extension of Fefferman's theorem on
biholomorphic mappings
Invent. Math. 57 (1980), 283-289.
- [5] A. BONAMI, N. LOHOUÉ
Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines
faiblement pseudo-convexes et estimations L^p .
Prépublications, Université de Paris-Sud.
- [6] L. BOUTET DE MONVEL, J. SJÖSTRAND
Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö
S.M.F. Astérisque 34-35 (1976), 123-164.
- [7] G. COEURÉ
Sur le noyau de Bergman des domaines de Reinhardt
Publication IRMA - Lille - Vol. 3, fasc. 5 (1981) II, 1-16.
- [8] K. DIETRICH
Some recent developments in the theory of the Bergman kernel
function : a survey.
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 30 (1977).
- [9] K. DIETRICH and J. FORNAESS
Pseudo-convex domains with real-analytic boundary
Ann. of Math. 107 (1978), 371-384.
- [10] C. FEFFERMAN
The Bergman Kernel and biholomorphic mapping of pseudoconvex domains
Inventiones Math., 26 (1974) 1 - 65.

- [11] L. HÖRMANDER
Introduction to complex analysis in several variables
North Holland, Amsterdam (1973).
- [12] L. HÖRMANDER
 L^2 -Estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator
Acta Math. 113 (1965) 89-152.
- [13] N. KERZMAN
The Bergman kernel function.
Differentiability at the boundary.
Math. Ann. 195 (1972) 149-158.
- [14] J.J. KOHN
Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds I and II
Ann. Math. 78 (1963) 112-148 and 79 (1964) 450-472.
- [15] J.J. KOHN
Boundary behavior of $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds of
dimension two
J. Diff. Geom. 6 (1972) 523-542
- [16] J.J. KOHN
Subellipticité of the $\bar{\partial}$ Neumann problem on pseudo-convex domains
sufficient conditions
Acta Math. 142 (1979) 79-122.
- [17] I.P. RAMADANOV
A characterisation of the balls in C^n by means of the Bergman
kernel
Compte rendu de l'Académie bulgare des Sciences, Tome 34, n° 7, 1981.
- [18] SKWARCZYNSKI
Biholomorphic invariants related to the Bergman functions
Wroclawska Drukarnia Naukowa, 1980.



On étudie le terme logarithmique du développement asymptotique de Fefferman du noyau de Bergman des domaines de Reinhardt, strictement pseudo-convexes, en dimension 2.

On suppose les domaines complets et à frontière C^∞ ; si l'on pose $y = \text{Log}|z_2|$, $x = \text{Log}|z_1|$, $y' = \frac{dy}{dx}$, un tel domaine peut être défini par : $y'' = -e^{+p(y')}$, où p est une fonction C^∞ sur $] -\infty, 0[$.

On montre que la partie non bornée du terme logarithmique s'annule localement sur la frontière du domaine si et seulement si p vérifie une équation différentielle du 6ème ordre, non linéaire et autonome. On en déduit une démonstration de la conjecture de Ramadamov selon laquelle la boule est le seul domaine de Reinhardt (à une normalisation près) strictement pseudo-convexe, complet, à frontière C^∞ pour lequel le développement de Fefferman ne contient pas de singularité logarithmique.

MOTS CLÉS

- . FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES
- . NOYAU DE BERGMAN
- . PSEUDO-CONVEXITÉ