A mes parents ,

A ma femme ,

A Emmanuelle et Matthieu .

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur Pierre POUZET dont nous avons suivi et apprécié les enseignements de 3ème cycle de nous faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Nous tenons à exprimer notre profonde et très sincère reconnaissance à Monsieur le Professeur Denis BOSQ qui nous a proposé le sujet de cette thèse, qui a su nous initier à la recherche avec compétence et efficacité, et sans qui, finalement, ce travail ne serait.

Nous remercions également très vivement Monsieur le Professeur Pierre JACOB qui a accepté de juger notre travail.

Nous tenons aussi à remercier l'équipe des probabilistes et statisticiens de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille I qui nous a aidé de ses remarques, et entouré de sa sympathie.

Qu'il nous soit permis ici de rendre hommage à notre ami Christian GUILBART qui nous a hélas quittés prématurément.

Nous remercions enfin Arlette Lengaigne et toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse, pour la rapidité, la compétence et la gentillesse dont elles ont fait preuve.

PLAN DE L'OUVRAGE.

Pages

Pages

INTRODUCTION.

En estimation fonctionnelle classique sur les processus stationnaires, on a l'habitude d'étudier séparément les différentes fonctions à estimer. Bien souvent, plusieurs méthodes sont mises en oeuvre dans chaque cas (voir [1] par exemple pour l'estimation de la densité).

Cette thèse est une première étape vers une unification. Plus précisément, nous nous intéressons à une classe F de paramètres à valeurs dans un espace de Hilbert, dont les coefficients de Fourier, une base hilbertienne étant préalablement choisie, sont des espérances.

Ayant fait T observations, on ne peut estimer directement un tel paramètre de dimension infinie ; par conséquent, on projette la fonction à estimer sur un sous-espace de dimension finie, et on cherche des estimateurs "naturels" de la projection.

Le premier chapitre définit le cadre général de cette étude, la classe F de fonctions à estimer, illustrée de quelques exemples. Nous étudions également le problème de l'indépendance des propriétés requises pour F vis à vis de la base hilbertienne choisie. Enfin, nous mentionnons quelques résultats récents sur la question.

Dans le second chapitre, nous construisons des estimateurs des fonctions de F, étudions leur biais asymptotique, puis donnons une condition suffisante de convergence uniforme presque sûre. Cette condition est vérifiée dans deux cas classiques, moyennant des hypothèses qui se révèlent acquises sous une hypothèse simple sur la mélangeance du processus de base. Une vitesse de convergence exponentielle est fournie.

Le chapitre III voit s'appliquer les résultats précédents à de nombreux exemples : estimation de la densité, du mode, de la fonction de répartition, des dérivées de la densité, de la densité spectrale, de l'erreur de prédiction linéaire, de l'erreur d'interpolation linéaire, des dérivées de la densité spectrale, de la fonction de répartition spectrale, des covariances, des corrélations, de la densité conditionnelle, et des fonctions de régression.

Dans le dernier chapitre, nous donnons une condition suffisante de convergence uniforme presque sûre des estimateurs précédents en enlevant l'hypothèse de mélangeance, remplacée par une hypothèse plus faible, qui y fait perdre en vitesse de convergence.

Enfin, nous donnons une condition suffisante de convergence uniforme presque sûre et une vitesse de convergence dans le cas d'estimateurs de la densité spectrale pour un processus faiblement stationnaire.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR L'ESTIMATION D'UNE CLASSE DE PARAMETRES FONCTIONNELS.

I - LES DONNEES DU PROBLEME.-

1°) *Hypothèses sur le processus de base.*

Dans toute la suite, nous considérons un processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, centré, défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},Q)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{B})$ où E est un espace topologique muni de sa tribu borélienne.

On supposera (sauf avis contraire) qu'il est strictement stationnaire et fortement mélangeant.

Nous appelons processus strictement stationnaire (voir [2]) un processus tel que :

$$\forall k \geq 1 \quad ; \quad \forall (t_1,\ldots,t_k) \in \mathbb{Z}^k \quad ; \quad \forall h \in \mathbb{Z} \quad ;$$

$$\mathcal{L}(x_{t_1+h},\ldots,x_{t_k+h}) = \mathcal{L}(x_{t_1},\ldots,x_{t_k})$$

où $\mathcal{L}(Y)$ désigne la loi de la variable aléatoire Y. Soient $M_{-\infty}^{t}$ et $M_{t+n}^{+\infty}$ les tribus engendrées respectivement par $\{x_i \mid i \leq t\}$ et $\{x_i \mid i \geq t+n\}$. Comme Rosenblatt ([3]) , nous appelons processus fortement mélangeant, de coefficient de mélangeance α (on dira α-mélangeant) un processus vérifiant :

$$\sup_{\substack{A \in M_{-\infty}^{t} \\ B \in M_{t+n}^{+\infty}}} |P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| = \alpha(n)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha(n) = 0$.

On supposera de plus, sans perte de généralité, que la suite $(\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $\alpha(0) = 1$. Le processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ peut être considéré comme une variable aléatoire X à valeurs dans l'espace fonctionnel $(E^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}, Q_X)$ où $\mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}$ est la tribu engendrée par les projections canoniques Π_t . L'existence de Q_X est assurée par le grand théorème de Kolmogorov.

2°) *Schéma du problème d'estimation.*

Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(E^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}})$, $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$ (ensemble des paramètres) un sous-ensemble de $L^2(F, \mathcal{C}, \mu)$, où F est un espace topologique localement compact à base dénombrable muni de sa tribu borélienne $\mathcal{C}$, et μ une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{C})$ telle que $L^2(F, \mathcal{C}, \mu) = L^2(\mu)$ soit séparable quand on le munit de sa topologie usuelle.

Soit enfin Ψ une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{G}$. Le problème est d'estimer $\Psi(P) = g_P$ (notée g dans la suite, s'il n'y a pas ambiguïté) à partir d'observations provenant d'une loi inconnue P de $\mathcal{D}$.

Un estimateur d'ordre T est une application mesurable $\hat{g}_T$ de E^T dans $L^2(\mu)$.

3°) *Définition de la classe* $\mathcal{F}$.

Définition 1.- On dira que Ψ est de classe $\mathcal{F}$ si :

a) Il existe dans $L^2(\mu)$ un système orthonormé complet $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ formé de fonctions continues [1], et uniformément bornées.

b) Si on appelle $a_r(g_P)$ les coefficients de Fourier de g_P relativement à la base $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$, pour tout P de $\mathcal{D}$, on a :

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} |a_r(g_P)| < +\infty \,. \tag{1}$$

c) Pour tout P de $\mathcal{D}$ et tout r de $\mathbb{N}$, on a :

$$a_r(g_P) = E_P\left[\varphi_r(x_1,\dots,x_{h(r)})\right] \tag{2}$$

où h est une application définie et à valeurs dans $\mathbb{N}$, où φ_r est une application de $(E^{h(r)}, \mathcal{B}^{\otimes h(r)})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ P-intégrable.

Remarque : Dans la définition précédente, a et b sont de simples conditions de régularité, la propriété cruciale est c.

II - EXEMPLES.-

Il est clair que de nombreux paramètres fonctionnels sont de classe $\mathcal{F}$.

Nous supposerons dans la suite que les espaces topologiques rencontrés sont munis de leur tribu borélienne. Donnons ici deux exemples où Ψ est de classe $\mathcal{F}$.

----

(1) Plus précisément de versions continues. On les identifiera dans la suite.

1°) *Exemple 1.-*

$(E,\mathcal{B}) = (F,\mathcal{C}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

μ = mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

$(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ = fonctions d'Hermite

$\mathcal{D}$ = ensemble des mesures de probabilité sur $(E^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}})$ telles que, pour tout P de $\mathcal{D}$, et tout t de $\mathbb{Z}$, $P\,\Pi_t^{-1}$ admette une densité f_P par rapport à μ, qui soit trois fois dérivable, et telle que : $e^{x^2/2} \cdot \left[e^{-x^2/2} f_P(x)\right]^{(3)}$ soit de carré intégrable (voir [5]).

$\Psi(P) = f_P$.

2°) *Exemple 2.-*

Le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est supposé réel d'ordre 2 (i.e. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $E\, x_t^2 < +\infty$).

$(E,\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

$(F,\mathcal{C}) = ([-\pi, \pi], \mathcal{B}_{[-\pi, \pi]})$

μ = mesure de Lebesgue sur $(F, \mathcal{C})$

$(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ = les fonctions trigonométriques .

On pose :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad \sigma(t) = E(x_o\, x_t)$$

$\mathcal{D}$ = ensemble des mesures de probabilité sur $(E^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}})$ telles que :

$$\forall P \in \mathcal{D} \; ; \sum_{t\in\mathbb{Z}} |\sigma_P(t)| < +\infty \qquad (\text{i.e.} \sum_{t\in\mathbb{N}} |\sigma_P(t)| < +\infty)$$

On pose :

$$\forall \lambda \in [-\pi, \pi] \qquad f_P(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t\in\mathbb{Z}} \sigma_P(t) \cos \lambda t$$

f_P est la densité spectrale du processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de loi P.

. $\Psi(P) = f_P$.

Les exemples seront repris et détaillés au chapitre III, ainsi que d'autres.

L'estimation de la fonction frontière d'une mesure (voir [32]) ne semble pas devoir entrer dans le cadre de cette étude.

III - ETUDE DE L'EFFET D'UN CHANGEMENT DE BASE SUR LES ELEMENTS DE F.-

1°) Remarque.

Il est clair que la propriété b de la définition du paragraphe I, 3° n'est pas conservée par changement de base. En effet, si l'on choisit une base contenant $\frac{g}{||g||}$, il est clair que la propriété b sera vérifiée, alors qu'il n'y a aucune raison qu'elle le soit pour une base quelconque.

2°) Etude de certains changements de base.

Commençons par démontrer deux lemmes.

Lemme 1.- Soient deux systèmes orthonormés complets $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ et $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert H muni d'un produit scalaire noté $<.,.>$, de norme associée $||.||$.

Soit g un élément de H. On a alors :

$$g = \sum_{r\in\mathbb{N}} a_r e_r = \sum_{r\in\mathbb{N}} b_r f_r \quad \text{avec :}$$

(5) $$\sum_{r\in\mathbb{N}} a_r^2 = \sum_{r\in\mathbb{N}} b_r^2 = ||g||^2 \quad .$$

On pose :

(6) $$\alpha_{ir} = \langle e_i, f_r \rangle \qquad \forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

On a alors :

(7) $$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ir}^2 = \sum_{r\in\mathbb{N}} \alpha_{ir}^2 = 1 \qquad \text{et}$$

(8) $$b_r = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ir} a_i$$

Si on suppose de plus que :

(9) $$\sum_{r\in\mathbb{N}} |a_r| < + \infty \qquad \text{et que}$$

(10) $$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{r=1}^{\infty} |\alpha_{ir}| \leq M \quad .$$

Alors :

(11) $$\sum_{r\in\mathbb{N}} |b_r| < + \infty.$$

Démonstration : (5) n'est autre que l'égalité de Parseval.

On a :

$$b_r = \langle g, f_r \rangle = \langle \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i \, , f_r \rangle \quad .$$

Or $\sum_{r=0}^{N} a_r e_r$ tend en norme vers $\sum_{r=0}^{\infty} a_r e_r$.

La continuité du produit scalaire permet alors d'écrire :

$$b_r = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i <e_i, f_r> = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ir} a_i \quad .$$

On a clairement :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad f_r = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ir} e_i$$

et $\quad \forall i \in \mathbb{N} \quad ; \quad e_i = \sum_{r\in\mathbb{N}} \alpha_{ir} f_r \quad .$

L'égalité de Parseval nous donne alors (7).

On suppose maintenant avoir (9). On a alors :

$$\sum_{r=0}^{\infty} |b_r| = \sum_{r=1}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ir} a_i \right| \quad .$$

Pour tous entiers N_1 et N_2 , on a :

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{N_1} \left| \sum_{i=0}^{N_2} a_i \alpha_{ir} \right| &\leq \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{i=0}^{N_2} |a_i| \cdot |\alpha_{ir}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_2} |a_i| \sum_{r=0}^{N_1} |\alpha_{ir}| \\ &\leq M \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on a donc (11).

Lemme 2.- Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et uniformément bornées par M.

Les α_{ir} étant définis comme au lemme 1 où on prend $H = L^2(P)$, alors on a :

(12) $$E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ir} Y_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ir} E(Y_i) .$$

Démonstration : Posons :

$$Y'_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ir} Y_i \quad \text{et} \quad Y' = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_{ir} Y_i \quad \text{(existe grâce à (7)).}$$

On a :

$$|Y'_n - Y'|^2 = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_{ir} Y_i\right|^2 \leq M \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_{ir}^2 .$$

Or, grâce à (7), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_{ir}^2 = 0 .$$

Donc : $Y'_n \xrightarrow{L^2(P)} Y'$.

Grâce à l'inégalité de Schwarz, on a alors :

$$Y'_n \xrightarrow{L^1(P)} Y'$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ir} Y_i\right) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ir} Y_i\right) .$$

D'où l'égalité (12).

Appliquons ces deux lemmes.

Prenons $H = L^2(\mu)$. Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé complet de $L^2(\mu)$, où les $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont continues et uniformément bornées par S. Soit $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ un autre système orthonormé complet de $L^2(\mu)$, où les $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ sont continues et uniformément bornées par S'.

Soit g un paramètre vérifiant la propriété b) de la définition 1 relativement à $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, s'écrivant :

$$g = \sum_{r=0}^{\infty} a_r e_r = \sum_{r=0}^{\infty} b_r f_r .$$

On suppose que :

$$(13) \qquad \exists M_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ir}| \leqslant M_1$$

$$(14) \qquad \exists M_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{r=0}^{\infty} |\alpha_{ir}| \leqslant M_2$$

(les α_{ir} étant définis par 6).

Comme : $\forall r \in \mathbb{N}$; $f_r = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ir} e_i$.

Grâce à (13), on en déduit que les f_r sont continues et uniformément bornées.

De plus, grâce au lemme 1, on a :

$$\sum_{r=0}^{\infty} |b_r| < +\infty$$

Donc g vérifie la propriété b de la définition 1 relativement à $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$.

Supposons de plus que g vérifie la propriété c) de la définition 1 relativement à $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Il vérifie :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad a_r = E[\psi_r(x_1,\ldots,x_{h(r)})]$$

où ψ_r est supposée uniformément bornée par B.

Grâce au lemme 2, on a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad , \quad b_r = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ir} \, E[\psi_r(x_1,\ldots,x_{h(r)})]$$

$$= E[\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ir} \, \psi_r(x_1,\ldots,x_{h(r)})] \, .$$

Ainsi g vérifie la propriété c) relativement à $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$. De plus, on remarque que :

$$\left| \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ir} \, \psi_r(x_1,\ldots,x_{h(r)}) \right| \leq B \sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_{ir}| \leq B \cdot M_1$$

donc la propriété d'être uniformément bornée reste vraie.

IV - *QUELQUES RESULTATS RECENTS SUR LA CONVERGENCE EN ESTIMATION FONCTIONNELLE POUR LES PROCESSUS.-*

Nous ne prétendons évidemment pas à l'exhaustivité sur un sujet aussi vaste.

1°) *Estimation de la densité.*

G.G. Roussas [14], M. Rosenblatt [4], puis H.T. Nguyen [5] ont étudié particulièrement l'estimation des densités marginales, des densités multivariées, des densités de transition attachées à un processus markovien ; les deux premiers dans le cas discret, et le dernier le généralisant au cas continu.

D. Bosq, dans [6], a établi la proposition suivante :

Proposition 1.- Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement stationnaire φ-mélangeante de variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $(E,\mathcal{B},\mu)$. Soit P_o la loi commune des ξ_n.

Supposons que $(E,\mathcal{B})$ soit un espace topologique muni de sa tribu borélienne, et que $\frac{dP_o}{d\mu}$ admette une version continue unique notée f. Supposons d'autre part qu'il existe une suite $(e_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ de versions continues des e_i .

Posons :

$$a_i = \int f\, e_i^*\, d\mu \quad \text{et} \quad f_n = \sum_{i=0}^{q(n)} a_i\, e_i^* \ .$$

Sous les hypothèses suivantes :

1) $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est φ-mélangeante et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(n) < +\infty$

2) $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in E} |e_i^*(x)| < +\infty$

3) La série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, e_i^*$ converge uniformément vers f.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q(n))^5}{n^2} < +\infty$.

Alors, on a : $\lim_{n\to+\infty} \text{p.s.} \sup_{x\in E} |\hat{f}_n(x) - f(x)| = 0$.

Enonçons une proposition toujours due à D. Bosq ([8]) dans un article, qui est à la base de cette thèse.

Proposition 2.- Les notations sont les mêmes qu'à la proposition 1.

Si :

1) $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et φ-mélangeante avec :

$$\phi(n) = a\,\rho^n \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad 0 < \rho < 1 \quad ; \quad n \geq 1 .$$

2) $M = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \sup\limits_{x \in E} |e_i^*(x)| < +\infty$

3) $\sum\limits_{n \geq 1} q(n) \exp\left[- \dfrac{\gamma \sqrt{n}}{q(n)}\right] < +\infty$ pour tout $\gamma > 0$.

Alors, $\delta > 0$ et $\alpha > (\mathrm{Log}\, \frac{1}{\rho})^{-1/2}$ étant donnés, on a :

$$P(\sup_{x \in E} |\hat{f}_n(x) - f(x)| > \delta) = O\left[q(n) \exp(- \frac{\delta}{4\, M^2\, \alpha} \cdot \frac{\sqrt{n}}{q(n)})\right]$$

et donc $\sup\limits_{x \in E} |\hat{f}_n(x) - f(x)| \to 0$ presque complétement sûrement.

J. Akonom a étudié, dans sa thèse ([7]), l'estimation de la densité de la partie continue d'une probabilité mixte et l'a appliqué particulièrement aux processus stationnaires et mélangeants.

Avec le même type de processus, D. Bosq ([6]) a donné un théorème de convergence presque sûre de la densité conditionnelle.

Reprenons les notations de la proposition 1. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}, \mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$. On suppose que la loi Q_o de (ξ_o, ξ_1) est absolument continue par rapport à μ, et qu'elle admet une version continue et bornée h de sa densité par rapport à μ.

En prenant $(e_i\; e_j)_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N}}}$ comme base hilbertienne de $L^2(\mu \otimes \mu)$, on peut estimer la densité conditionnelle $\dfrac{h}{f}$.

Soit $\hat{h}_n(x,y) = \sum\limits_{\substack{0 \leq i \leq q_1(n) \\ 0 \leq j \leq q_2(n)}} \hat{a}_{ijn}\; e_i(x)\; e_j(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2p}$

L'estimateur de $\frac{h}{f}$ est défini par $\frac{\hat{h}_n}{\hat{f}_n}$ (si $\hat{f}_n = 0$, on prend $\frac{\hat{h}_n}{\hat{f}_n} = 0$) .

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.- Sous les hypothèses de la proposition 1, et si :

1) $\sum_{i,j=0}^{\infty} \left[\iint h\, e_i\, e_j\, d(\mu \otimes \mu)\right] e_i\, e_j$ converge uniformément vers h.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^5(n)\, q_2^5(n)}{n^2} < +\infty$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \text{p.s.} \sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left| \frac{\hat{h}_n(x,y)}{\hat{f}_n(x)} - \frac{h(x,y)}{f(x)} \right| = 0$$

pour tout compact K sur lequel f est positive.

M. Delecroix, dans [15] , a étudié dans le même cadre, l'estimation des densités marginales et de transition, et a obtenu des lois-limites pour ces estimateurs.

2°) *Estimation de la densité spectrale.*

Peu d'articles ont paru sur la convergence uniforme presque sûre des estimateurs de la densité spectrale. Ce problème a été étudié par T.M. Tovstik [9] dans le cas d'un processus linéaire, par G. Alekseev [10] pour les processus gaussiens, et par D.R. Brillinger [11] pour des processus dont les moments de tous ordres satisfont à des conditions de stationnarité.

Nous citerons le résultat plus général suivant, du à V.F. Gaposhkin [12] :

Soit $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus réel stationnaire de moyenne nulle. Appelons $I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^{T} u_t \, e^{it\lambda} \right|^2$ son périodogramme. Alors un estimateur $\hat{f}_T(\nu)$ de la densité spectrale $f(\nu)$ est donné par :

$$\hat{f}_T(\nu) = \int_{-\pi}^{+\pi} w_T(\lambda|\nu) \, I(\lambda) \, d\lambda \quad \text{où} \quad w_T(\lambda|\nu) \text{ est une "fenêtre spectrale"} .$$

Sous l'hypothèse que la relation $E(u_k \, u_{k+h} \, u_{k+r} \, u_{k+s}) = E(u_o \, u_h \, u_r \, u_s)$ est vérifiée pour tous entiers $k, h, r, s,$ l'auteur donne des conditions qui impliquent la convergence uniforme presque sûre de $\hat{f}_T$ vers f, ainsi qu'une vitesse de convergence.

Enfin, citons un article récent de E. Masry [13] qui estime par la méthode des fonctions orthogonales la densité spectrale d'un processus continu $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Il observe le processus aux temps (t_n), $n = 1,\dots,N$; où (t_n) suit un processus ponctuel réel stationnaire de Poisson. L'auteur montre la convergence uniforme en moyenne quadratique des estimateurs construits. Le systèmes orthonormé choisi, hélas, est fonction du processus $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dans le cas poissonnien, il prend les fonctions de Laguerre) et, hormis les cas simples, le calcul devient vite inextricable.

CHAPITRE II

UNE CONDITION SUFFISANTE DE CONVERGENCE UNIFORME PRESQUE SÛRE D'ESTIMATEURS DES PARAMETRES DE CLASSE F.

I - DEFINITION DES ESTIMATEURS - ETUDE DU BIAIS.-

1°) *Définition des estimateurs des paramètres de classe* F.

On suppose que Ψ est de classe F. Avec les notations du chapitre I, on a :

$$\forall y \in F \qquad g(y) = \sum_{r \in \mathbb{N}} a_r \, e_r(y) \quad (\text{au sens de } L^2(\mu)) \ .$$

On suppose qu'on a observé $x_1, \ldots, x_T$.

Il est naturel de choisir comme estimateur de g.

(15) $$\forall y \in F \qquad \hat{g}_T(y) = \sum_{r \in \mathbb{N}} w_T(r) \, \hat{a}_r \, e_r(y)$$

où :

- $$\hat{a}_r = \frac{1}{T-h(r)} \sum_{i=1}^{T-h(r)} \varphi_r(x_i, \ldots, x_{i+h(r)}) \ .$$

- les $w_T(r)$ sont des poids dont nous considérerons essentiellement deux classes :

Soit $K_T \in \mathbb{N}$ avec

(16) $$\begin{cases} K_T < T \\ \\ \lim\limits_{T \to +\infty} K_T = \lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{T}{K_T} = +\infty \ . \end{cases}$$

Classe 1 :

(17) $$\begin{cases} w_T(r) = 1 & \forall r \leq K_T \\ w_T(r) = 0 & \forall r > K_T \; . \end{cases}$$

Classe 2 :

(18) $$w_T(r) = (1 - \frac{r}{T})\, w_T^*(r)$$

où $$\begin{cases} w_T^*(r) = k(\frac{r}{K_T}) & \text{pour} \quad r \leq K_T \\ w_T^*(r) = 0 & \text{pour} \quad r > K_T \end{cases}$$

et où la fonction k est assujettie aux hypothèses classiques suivantes :

(19) $$\begin{cases} .\ k(0) = 1 \\ .\ |k(x)| \leq M \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{on prendra } M \geq 1) \\ .\ k \text{ est continue à droite en zéro.} \end{cases}$$

Remarques :

1) La somme dans (15) est une somme de $(K_T + 1)$ termes.

2) Grâce à (2), on a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \qquad E(\hat{a}_r) = a_r \quad .$$

2°) *Etude du biais*.

Commençons par établir un lemme sur les séries.

Lemme 3.- Soit $(a_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle à termes positifs telle que :

(20) $$\sum_{r=1}^{\infty} a_r < +\infty$$

Alors : $$\lim_{T\to+\infty} \sum_{r=1}^{T} \frac{r}{T} a_r = 0 \ .$$

<u>Démonstration</u> : (20) implique que :

$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists\, T_o \in \mathbb{N} \ ; \ \forall T \in \mathbb{N} \ , \ T > T_o$ tel que :

$$\sum_{r=T_o+1}^{\infty} a_r < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Pour $T > T_o$, on a :

$$\sum_{r=1}^{T} \frac{r}{T} a_r = \sum_{r=1}^{T_o} \frac{r}{T} a_r + \sum_{r=T_o+1}^{T} \frac{r}{T} a_r \leqslant \frac{T_o}{T} \sum_{r=1}^{\infty} a_r + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Il est clair qu'il existe T_1 dans $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $T > T_1$, on ait :

$$\frac{T_o}{T} \sum_{r=1}^{\infty} a_r < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Ainsi, pour $T > \max(T_o, T_1)$, on a :

$$\sum_{r=1}^{T} \frac{r}{T} a_r < \varepsilon$$

et ceci pour tout ε. D'où le lemme.

- Le biais $b_T(y)$ de $\hat{g}_T(y)$ vaut :

(21) $$\forall y \in F \ ; \ b_T(y) = E\, \hat{g}_T(y) - g(y)$$

$$= \sum_{r=0}^{K_T} (w_T(r) - 1)\, a_r\, e_r(y) - \sum_{r=K_T+1}^{\infty} a_r\, e_r(y)$$

D'où :

(22) $$S^{-1} \cdot \sup_{y\in F} |b_T(y)| \leqslant \sum_{r=0}^{K_T} |w_T(r) - 1| \cdot |a_r| + \sum_{r=K_T+1}^{\infty} |a_r|$$

en appelant : $S = \sup_{y\in F} |e_r(y)|$.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel donné.

a) Dans le cas de la classe 1, on a :

$$S^{-1} \sup_{y\in F} |b_T(y)| \leqslant \sum_{r=K_T+1}^{\infty} |a_r|$$

Cette dernière quantité étant majorée par ε pour T assez grand, grâce à (1) et au fait que : $\lim_{T\to+\infty} K_T = +\infty$.

b) Dans le cas de la classe 2, on a :

$$\left|(1 - \frac{r}{T})\, k(\frac{r}{K_T}) - 1\right| \leqslant \left|k(\frac{r}{K_T}) - 1\right| + \frac{r}{T}\left|k(\frac{r}{K_T})\right|$$

D'où :

(23) $$\sum_{r=0}^{K_T} |w_T(r) - 1| \cdot |a_r| \leqslant \sum_{r=1}^{K_T} |a_r| \cdot \left|k(\frac{r}{K_T}) - 1\right| + \sum_{r=1}^{K_T} |a_r| \cdot \frac{r}{T} \cdot \left|k(\frac{r}{K_T})\right|$$

On a alors :

$$\sum_{r=1}^{K_T} |a_r| \cdot \frac{r}{T} \cdot \left|k(\frac{r}{K_T})\right| \leqslant \frac{M\, K_T}{T} \sum_{r=1}^{K_T} \frac{r}{K_T} |a_r|$$

Grâce au lemme 3 et au fait que $\lim_{T\to+\infty} \frac{K_T}{T} = 0$, il existe $T_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

(24) $$\forall T \in \mathbb{N} \;,\quad T > T_0 \;,\quad \sum_{r=1}^{K_T} |a_r| \cdot \frac{r}{T} \cdot \left|k(\frac{r}{K_T})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \;.$$

Traduisons la continuité de k en 0 :

$$\exists \delta > 0 \quad (\delta < 1) \quad ; \quad \forall \frac{r}{K_T} \quad ; \quad \frac{r}{K_T} < \delta \; ;$$

$$\left| k\left(\frac{r}{K_T}\right) - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{6 \sum_{r=0}^{\infty} |a_r|}$$

Posons $K_T^* = [\delta\, K_T]$ ($[\ldots]$ signifiant : partie entière de) .

On a alors :

$$(25) \qquad \sum_{r=1}^{K_T} |a_r| \left| k\left(\frac{r}{K_T}\right) - 1 \right| \leqslant \sum_{r=1}^{K_T^*} |a_r| \frac{\varepsilon}{6 \sum_{r=0}^{\infty} |a_r|} + (M+1) \sum_{r=K_T^*+1}^{K_T} |a_r|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6} + (M+1) \sum_{r=K_T^*+1}^{\infty} |a_r|$$

Grâce à (1) et au fait que $\lim_{T \to +\infty} K_T = +\infty$, il existe T_1 dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$(26) \qquad \forall T \in \mathbb{N} \; ; \; T > T_1 \qquad (M+1) \sum_{r=K_T^*+1}^{\infty} |a_r| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Finalement (22), (23), (24), (25) et (26) permettent d'écrire :

$$S^{-1} \cdot \sup_{y \in F} |b_T(y)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{r=K_T+1}^{\infty} |a_r| \qquad \text{pour} \qquad T > \max(T_o, T_1) \; .$$

La dernière somme peut être rendue inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$ par un argument similaire à celui de a, pour $T > T_2$.

Finalement :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \forall T \in \mathbb{N} \quad ; \quad T \geqslant \max(T_o, T_1, T_2)$$

$$S^{-1} \cdot \sup_{y \in F} |b_T(y)| \leqslant \varepsilon$$

D'où le théorème.

Théorème 1.- Si les poids $w_T(r)$ sont de classe 1 ou 2,

et si :

$$\lim_{T \to +\infty} K_T = \lim_{T \to +\infty} \frac{T}{K_T} = +\infty$$

alors les estimateurs $\hat{g}_T$ sont asymptotiquement uniformément non biaisés.

3°) *Ordre du biais.*

E. Parzen [17] a développé une étude du biais asymptotique dans le cas de la densité spectrale. Nous reprenons son traitement "mutatis mutandis", dans un cadre plus général.

Il est clair (voir paragraphe précédent) que le biais asymptotique de $\hat{g}_T$ dépend à la fois de la régularité de g, paramètre à estimer, et aussi de la régularité au voisinage de 0 de la fonction de poids $k(x)$. D'où la nécessité d'introduire des hypothèses supplémentaires. Supposons qu'il existe $p > 0$ tel que :

$$\sum_{r=0}^{\infty} r^p |a_r| < +\infty$$

Supposons de plus que la fonction de poids $k(x)$ vérifie

$$\exists q > 0 \quad ; \quad \exists k > 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - k(x)}{x^q} = k$$

(q est le plus grand exposant pour lequel : $k < +\infty$). On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.- Sous les hypothèses supplémentaires précédentes et :

1) si $p \geq q$, alors :

$$\lim_{T \to +\infty} K_T^q \, b_T(y) = -k \sum_{r=0}^{+\infty} r^q \, a_r \, e_r(y)$$

si $p > 1$ et $\lim_{T \to +\infty} \frac{K_T^q}{T} = 0$

ou si $p \leq 1$ et $\lim_{T \to +\infty} \frac{K_T^{q+1-p}}{T} = 0$.

2) si $p < q$, alors :

$$\lim_{T \to +\infty} K_T^p \, b_T(y) = 0$$

si $p \geq 1$ et $\lim_{T \to +\infty} \frac{K_T^p}{T} = 0$

ou si $p < 1$ et $\lim_{T \to +\infty} \frac{K_T}{T} = 0$.

- Pour la démonstration, on pourra consulter T.W. Anderson ([18] p. 522-527).

Ainsi, étant donné g caractérisé par son degré de régularité p, on peut, dans tous les cas, contrôler le biais de $\hat{g}_T$, l'ordre de ce biais étant évalué grâce au théorème 2.

II - UNE CONDITION SUFFISANTE DE CONVERGENCE PRESQUE SÛRE DE $\hat{g}_T$ VERS g.-

1°) *Notations et hypothèses complémentaires.*

Supposons qu'il existe $T_o \in \mathbb{N}$ tel que :

(26 bis) $$\forall T \in \mathbb{N} \ ; \ T \geq T_o \ ; \ \forall r \in \mathbb{N} \ ; \ r \leq K_T \ ; \ K_T \geq h(r) \ .$$

Posons :

(27) $$\forall r \in \mathbb{N} \ ; \ \forall i \in \mathbb{N}^* \ ; \quad X_{i,r} = \varphi_r(x_i, \ldots, x_{i+h(r)}) - a_r$$

On a clairement grâce à (2) :

(28) $$\forall r \in \mathbb{N} \ ; \ \forall i \in \mathbb{N}^* \ ; \quad E(X_{i,r}) = 0 \ .$$

On supposera dans la suite que φ_r est uniformément bornée. Grâce à (1), on a alors :

(29) $$\exists d \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ \forall r \in \mathbb{N} \ ; \ \forall i \in \mathbb{N}^* \ ; \quad |X_{i,r}| \leq d \ .$$

Faisons l'hypothèse (de non-dégénérescence) suivante :

(30) $$\forall r \in \mathbb{N} \ ; \quad E(X_{1,r}^2) > 0 \ .$$

A r fixé, on considère la suite de séquences suivantes, où l'on pose : $k = k(T - h(r))$, où $T > 2$ et $2k \leq T$:

(31) $$\left\{\begin{array}{ll}
Y_{1,r} = X_{1,r} + \ldots + X_{k,r} & Z_{1,r} = X_{k+1,r} + \ldots + X_{2k,r} \\
Y_{2,r} = X_{2k+1,r} + \ldots + X_{3k,r} & Z_{2,r} = X_{3k+1,r} + \ldots + X_{4k,r} \\
\text{- - - - - - - - - - - - -} & \text{- - - - - - - - - - - - -} \\
Y_{\ell,r} = X_{2(\ell-1)k+1,r} + \ldots + X_{(2\ell-1)k,r} & Z_{\ell,r} = X_{(2\ell-1)k+1,r} + \ldots + X_{2\ell k,r} \\
\quad \text{et} \quad Z_{\ell+1,r} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad 2\ell k = T-h(r) \\ X_{2\ell k+1,r} + \ldots + X_{T-h(r),r} & \text{sinon} \end{array}\right. &
\end{array}\right.$$

où ℓ est déterminé par :

(32) $$2\ell k \leq T - h(r) < (2\ell+1)\, k$$

On pose en outre :

(33) $$S_{T-h(r)} = X_{1,r} + \dots + X_{T-h(r),r}$$

(34) $$\sigma^2_{T-h(r)} = 2 \sum_{j=1}^{\ell} E(Y^2_{j,r}) \quad .$$

On suppose en outre que :

(35) $$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T} = +\infty$$

(36) $\exists T_1 \in \mathbb{N}$; $\forall T \in \mathbb{N}$; $T \geq T_1$; $\forall r \in \mathbb{N}$; $r \leq K_T$; on ait :

$$k \geq h(r) \quad .$$

2°) Résultat principal.

Remarquons d'abord que, puisque $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus strictement stationnaire et α-mélangeant, alors le processus $(\varphi_r(x_i, \dots, x_{i+h(r)}))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est strictement stationnaire et α'-mélangeant avec, pour tout r et $n > h(r)$:

(37) $$\alpha'(n) = \alpha(n-h(r)) \quad .$$

Enonçons une inégalité de Bernstein pour les processus stationnaires et mélangeants dont la démonstration est due à D. Bosq [9] et ici généralisée au cas fortement mélangeant.

Lemme 4.- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles qui forme un processus stationnaire et α-mélangeant. On suppose que $|X_1| \leqslant d$, que $E\,X_1 = 0$, et que : $E\,X_1^2 > 0$.

On pose $k = k(n)$, $n \geqslant 2$ avec $2k \leqslant n$ et on considère les séquences :

$$Y_1 = X_1 + \dots + X_k \qquad\qquad Z_1 = X_{k+1} + \dots + X_{2k}$$

$$Y_2 = X_{2k+1} + \dots + X_{3k} \qquad\qquad Z_2 = X_{3k+1} + \dots + X_{4k}$$

- - - - - - - - - - - -   - - - - - - - - - - - - -

$$Y_\ell = X_{2(\ell-1)k+1} + \dots + X_{(2\ell-1)k} \qquad\qquad Z_\ell = X_{(2\ell-1)k+1} + \dots + X_{2\ell k}$$

$$Z_{\ell+1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 2\ell k = n \\ X_{2\ell k+1} + \dots + X_n & \text{sinon} \end{cases}$$

où ℓ vérifie :

$$2\ell k \leqslant n < 2(\ell+1)\,k$$

On pose :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad ; \quad \sigma_n^2 = 2\sum_{j=1}^{\ell} E(Y_j^2) \qquad (n \geqslant 2)$$

Alors :

$$\begin{cases} P\left[S_n > \varepsilon\,\sigma_n\right] \leqslant e \,.\, e^{-t\varepsilon}\left[e^{(3/2)t^2} + \alpha(k)\, e^{(6/5).(n/k)}\right] \\ \varepsilon > 0 \quad ; \quad 0 < t \leqslant \dfrac{\sigma_n}{2kd} \end{cases}$$

On peut énoncer le résultat principal suivant :

Théorème 3.- Sous les hypothèses précédentes et s'il existe $T' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$\sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(- \frac{\varepsilon\,(T-h(r))}{6MS(K_T+1)\,kd}\right) \times \tag{38}$$

$$\left[\exp\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{T-h(r)}}{k^2\,d^2}\right) + \alpha(k-h(r))\,\exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k}\right)\right] < +\infty$$

Alors :

$$\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.c_o.} 0$$

Démonstration : L'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$|\hat{g}_T(y) - g(y)| \leq |\hat{g}_T(y) - E\,\hat{g}_T(y)| + |b_T(y)| \tag{39}$$

Soit ε un réel strictement positif donné. Grâce au théorème 1, on a :

$$\exists T_2 \in \mathbb{N} \;;\; \forall T \in \mathbb{N} \;;\; T > T_2 \;;\; \sup_{y\in F} |b_T(y)| < \frac{\varepsilon}{2S} \;. \tag{40}$$

De (14) et (15), on tire :

$$\hat{g}_T(y) - E\,\hat{g}_T(y) = \sum_{r=0}^{K_T} w_T(r)\,(\hat{a}_r - a_r)\,e_r(y) \;. \tag{41}$$

D'où :

$$\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - E\,\hat{g}_T(y)| \leq MS \sum_{r=0}^{K_T} |\hat{a}_r - a_r| \;.$$

Alors pour $T \geq T_2$, on a : (démonstration par l'absurde)

$$(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \subset \bigcup_{r=0}^{K_T} \left(|\hat{a}_r - a_r| > \frac{\varepsilon}{2MS(K_T+1)}\right)$$

D'où :

(41 bis) $$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leq \sum_{r=0}^{K_T} P(|\hat{a}_r - a_r| > \frac{\varepsilon}{2MS(K_T+1)})$$

que l'on peut encore écrire, pour $T \geq T_2$:

(42) $$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leq \sum_{r=0}^{K_T} P(|S_{T-h(r)}| > \frac{\varepsilon(T-h(r))}{2MS(K_T+1)}) .$$

On peut alors appliquer le lemme 4 à (42).

Pour $T > T' = \max(T_o, T_1)$, on a :

(43) $$P(|S_{T-h(r)}| > \frac{\varepsilon(T-h(r))}{2MS(K_T+1)}) \leq$$

$$2e \exp(-\frac{\varepsilon(T-h(r))}{6MS(K_T+1)d}) \times \left[\exp(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{T-h(r)}}{k^2 d^2}) + \alpha(k - h(r)) \exp(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k})\right]$$

et le théorème s'en déduit aisément.

III - EXAMEN DE DEUX CAS PARTICULIERS.-

1°) *Notations et hypothèses supplémentaires.*

Posons, sous réserve d'existence :

(44) $$\tau_r^2 = E(X_{1,r}^2) + 2 \sum_{\nu>1} E(X_{1,r} X_{\nu,r}) \quad ; \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

On supposera dans la suite que :

(45) $$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad \tau_r^2 > 0 .$$

Nous aurons également besoin dans la suite des deux hypothèses suivantes :

(H_1) $\exists M' > 0 \ ; \ \forall r \in \mathbb{N} \ ; \ \tau_r^2 \leq M'$

(H_2) $\exists \delta \in]0,1[\ ; \ \exists T_3 \in \mathbb{N} \ ; \ \forall T \in \mathbb{N} \ ; \ T \geq T_3 \ ; \ \forall r \in \mathbb{N} \ , \ r \leq K_T \ ,$

$$(1-\delta)\ \tau_r^2 \leq \frac{\sigma^2_{T-h(r)}}{T-h(r)} \leq (1+\delta)\ \tau_r^2 \ .$$

Nous allons examiner deux cas particuliers correspondants à deux coefficients de mélangeance classiques.

2°) *Cas particulier 1.*

Corollaire 1.- Sous les hypothèses générales du chapitre I et du chapitre II (§ I et § II 1°), sous (H_1) et (H_2) et si :

* $\alpha(n) = a\ \rho^n$ avec $a > 0 \ ; \ 0 < \rho < 1 \ ; \ n \geq 1$.

* $K_T = A\ \alpha_T\ T^\alpha$ avec $A > 0 \ ; \ 0 < \alpha < \frac{1}{2} \ ; \ 1 < \alpha_T \leq 2$

(pour rendre K_T entier).

Alors $$\sup_{x \in F} \left|\hat{g}_T(y) - g(y)\right| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.c_o.} 0 \ .$$

Démonstration : On choisit de prendre :

$$k(T) = 2\ \beta_T\ T^\beta \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \beta < 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta < 1 \ ; \ 1 < \beta_T \leq 2$$

(pour rendre $k(T)$ entier).

Pour $T \geq \max(T_o,T_1)$ on a :

$$h(r) \leq K_T \quad \text{et} \quad k \geq h(r) \qquad \text{pour} \quad r = 0,1,\ldots,K_T \ .$$

D'où , pour $T \geq \max(T_o,T_1)$, on a :

(46) $$\alpha(k(T-h(r)) - h(r)) \leq \alpha(k(T-K_T) - K_T)$$

Il est aisé de montrer que pour T assez grand, on a :

(47) $$k(T-K_T) - K_T \geq T^{\beta}$$

On a alors, pour T assez grand :

(48) $$\alpha(k(T-h(r)) - h(r)) \exp(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k}) \leq$$

$$a \exp\left[T^{\beta} \operatorname{Log} \rho + \frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k(T-K_T)}\right]$$

Remarquons que, pour T assez grand, on a :

(49) $$\begin{cases} 1 > (1 - \dfrac{A\alpha_T}{T^{1-\alpha}})^{\beta} > \dfrac{1}{2} \\ \\ 1 < (1 + \dfrac{A\alpha_T}{T^{1-\alpha}})^{\beta} < \dfrac{3}{2} \end{cases} .$$

D'où, pour T assez grand, l'on tire :

(50) $$\frac{T}{k(T-K_T)} \leq T^{1-\beta}$$

On a alors, pour T assez grand :

$$\exp\left[T^{\beta} \operatorname{Log} \rho + \frac{6T}{5k(T-K_T)}\right] \leq \exp\left[T^{\beta} (\operatorname{Log} \rho + \frac{6}{5T^{2\beta-1}})\right]$$

Cette dernière expression étant majorée par 1 pour T assez grand.

Posons :

$$I = \exp(- \frac{\varepsilon\ (T-h(r))}{6MS(K_T+1)kd})$$

On a, pour T assez grand :

$$I \leqslant \exp\left(- \frac{\varepsilon(T-K_T)}{6MS(K_T+1)k(T)d}\right)$$

En utilisant (49) ainsi que les valeurs de K_T et $k(T)$, on a, pour T assez grand :

$$I \leqslant \exp\left(- \frac{\varepsilon T}{97MSAdT^{\alpha+\beta}}\right)$$

T' étant choisi assez grand, on a alors :

$$(51) \qquad \sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(- \frac{\varepsilon(T-h(r))}{6MS(K_T+1)kd}\right) \alpha(k-h(r)) \exp\left(\frac{\delta(T-h(r))}{5k}\right)$$

$$\leqslant a \sum_{T>T'} (K_T+1) \exp\left(- \frac{\varepsilon}{97MSAd} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)}\right)$$

série convergente car $\alpha + \beta < 1$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{K_T}{T} = 0$.

Examinons l'expression :

$$J = \exp\left(- \frac{\varepsilon(T-h(r))}{6MS(K_T+1)kd} + \frac{3\,\sigma^2_{T-h(r)}}{8k^2d^2}\right)$$

En utilisant (49) et (H_2), on a, pour T assez grand :

$$J \leqslant \exp\left(- \frac{\varepsilon T}{6MS(K_T+1)k(T)d} + \frac{3(1+\delta)\,\tau_r^2 T}{8k^2(T-K_T)d^2}\right)$$

Et grâce à (H_1), et pour T assez grand, on a :

$$J \leqslant \exp\left(- \frac{\varepsilon T^{1-(\alpha+\beta)}}{49MSAd} + \frac{3(1+\delta)M'T^{1-2\beta}}{16d^2}\right)$$

Or, pour T assez grand, on a :

$$\frac{\varepsilon}{49MSAd} - \frac{3(1+\delta)M'}{16d^2T^{\beta-\alpha}} > \frac{\varepsilon}{50MSAd}$$

Ainsi pour T assez grand, on a :

$$J \leqslant \exp\left(- \frac{\varepsilon}{50MSAd} \,.\, T^{1-(\alpha+\beta)}\right)$$

T' étant choisi assez grand, on a alors :

$$(52) \qquad \sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K_T} J \leqslant \sum_{T>T'} (K_T+1) \exp\left(- \frac{\varepsilon}{50MSAd} \,.\, T^{1-(\alpha+\beta)}\right)$$

série convergente car $\alpha + \beta < 1$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{K_T}{T} = 0$.

(51), (52) et le théorème 3 permettent de conclure .

3°) *Cas particulier 2.*

Corollaire 2.- Sous les hypothèses générales du chapitre I et du chapitre II (§ I et § II 1°), sous (H_1) et (H_2) et si :

* $\alpha(n) = \frac{C}{n^\nu}$ avec $C > 0$; $\nu > 1$; $n \geqslant 2$.
* $K_T = A\, \alpha_T (\mathrm{Log}\, T)^\alpha$ avec $A > 0$; $0 < \alpha < 1$; $1 < \alpha_T \leqslant 2$ (pour rendre K_T entier).

Alors :

$$\sup_{y\in F} \left|\hat{g}_T(y) - g(y)\right| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \,.$$

Démonstration : Posons

$$k(T) = \frac{6}{5} \cdot \beta_T \cdot \frac{T}{\operatorname{Log} T} \quad \text{où} \quad 1 < \beta_T \leq 2 \quad \text{(pour rendre } k(T) \text{ entier).}$$

Il est aisé de vérifier que, pour T assez grand, on a :

(53) $$k(T - K_T) - K_T \geq \frac{1}{2} \cdot T \cdot (\operatorname{Log} T)^{-1} .$$

Pour T assez grand, on a : $\forall r \in \mathbb{N}$, $r \leq K_T$

(54) $$\frac{T-h(r)}{k(T-h(r))} \leq \frac{T}{k(T-K_T)} \leq \frac{5}{6} \cdot \frac{\operatorname{Log} T}{(\nu+1)/2\nu} .$$

(En effet, pour T assez grand, on a :

$$1 - \frac{A\alpha_T(\operatorname{Log} T)^{\alpha}}{T} \geq 1 - \frac{\nu-1}{2\nu})$$

En utilisant (46), (53) et (54), pour T assez grand, on a :

(55) $$\alpha(k(T-h(r)) - h(r)) \exp(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k(T-h(r))}) \leq$$

$$C \exp\left[- \nu \operatorname{Log}(\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{\operatorname{Log} T}) + \frac{2\nu}{\nu+1} \operatorname{Log} T\right]$$

Cette dernière quantité étant majorée, pour T assez grand, par :

(56) $$C \exp\left[- \frac{\nu}{2} (\frac{\nu-1}{\nu+1}) \operatorname{Log} T\right] < C .$$

L'expression I étant définie comme dans la démonstration du corollaire 1, on montre que, pour T assez grand, on a :

$$I \leq \exp(- \frac{4\varepsilon}{145MSdA} \cdot (\operatorname{Log} T)^{1-\alpha})$$

Alors, T' étant choisi assez grand, on a :

$$(57) \quad \sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(- \frac{\varepsilon(T-h(r))}{6MS(K_T+1)kd}\right) \alpha(k-h(r)) \exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k}\right)$$

$$\leqslant C \sum_{T>T'} (K_T+1) \exp\left(- \frac{4\varepsilon}{145MSdA} \cdot (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right)$$

série convergente car : $0 < \alpha < 1$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{K_T}{T} = 0$.

L'expression J étant définie comme dans la démonstration du corollaire 1, un traitement en tout point similaire à celui du corollaire 1, utilisant (H_1) et (H_2) et les expressions de K_T et de $k(T)$ permet, pour T assez grand, de montrer que :

$$J \leqslant \exp\left[- \frac{3\varepsilon}{145MSdA} \cdot (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right]$$

Finalement, T' étant choisi assez grand, on a :

$$(58) \quad \sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K_T} J \leqslant \sum_{T>T'} (K_T+1) \exp\left[- \frac{3\varepsilon}{145MSdA} \cdot (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right]$$

série convergente car : $0 < \alpha < 1$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{K_T}{T} = 0$.

(57), (58) et le théorème 3 permettent de conclure.

4°) <u>*Sur le degré de contrainte des hypothèses*</u> (H_1) <u>*et*</u> (H_2).

On va établir une proposition montrant, dans deux cas particuliers importants, qu'une hypothèse simple sur le coefficient de mélangeance entraîne (H_1) et (H_2) .

<u>*Proposition*</u> *4*.- Sous les hypothèses générales du chapitre I et du chapitre II (§ I et § 88 1°) et dans les deux cas particuliers suivants :

1) ψ_r ne dépend que de x_i (i.e. $h(r) \equiv 0$),

2) $\psi_r(x_i, \ldots, x_{i+h(r)}) = x_i \, x_{i+r}$.

Si la condition suivante est réalisée :

$$(H_o) \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha(j) < +\infty \quad (\text{avec } \alpha(0) = 1)$$

Alors (H_1) et (H_2) sont vérifiées.

<u>Démonstration</u> :

1 - Examinons le premier cas particulier. On a :

$$E(X_{1,r} \, X_{i,r}) = E\left[\psi_r(x_1) \, \psi_r(x_i)\right] - a_r^2$$

Le lemme d'Ibragimov (lemme 1.2. page 352 de [19]) permet d'écrire :

$$(59) \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} \left|E(X_{1,r} \, X_{i,r})\right| \leq 4 \, d^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha(i-1) < +\infty \quad (\text{sous } H_o)$$

(H_1) est ainsi acquise.

Pour prouver (H_2), montrons d'abord que :

$$(60) \qquad \left|\frac{1}{k(T)} E(S_{k(T)}^2) - \tau_r^2\right| \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0 \quad \text{uniformément par rapport à } r.$$

Par définition, on a :

$$(61) \qquad \frac{1}{k(T)} E(S_{k(T)}^2) = \frac{1}{k(T)} \left[k(T) \, E(X_{1,r}^2) + \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq k(T) \\ 1 \leq j \leq k(T)}} E(X_{i,r} \, X_{j,r})\right]$$

$$= E(X_{1,r}^2) + \frac{2}{k(T)} \sum_{i=2}^{k(T)} (k(T) - i + 1) \, E(X_{1,r} \, X_{i,r})$$

en utilisant la stationnarité stricte du processus $(X_{i,r})_{i \in \mathbb{N}}$.

D'où :

(62) $$\frac{1}{k(T)} E(S^2_{k(T)}) - \tau^2_r = 2 \Big[\sum_{i=2}^{k(T)} \Big(\frac{k(T)-i+1}{k(T)} - 1\Big) E(X_{1,r}\, X_{i,r}) - \sum_{i>k(T)} E(X_{1,r}\, X_{i,r})\Big]$$

On a alors la majoration suivante :

(63) $$\Big|\frac{1}{k(T)} E(S^2_{k(T)}) - \tau^2_r\Big| \leqslant 2 \sum_{i=1}^{k(T)} \frac{i}{k(T)} E(X_{1,r}\, X_{i,r}) + 2 \sum_{i>k(T)} |E(X_{1,r}\, X_{i,r})| .$$

Le lemme d'Ibragimov susdit permet d'écrire que :

(64) $$\sum_{i>k(T)} |E(X_{1,r}\, X_{i,r})| \leqslant 4\, d^2 \sum_{i>k(T)} \alpha(i-1) .$$

La série $\sum_{i>k(T)} \alpha(i-1)$ tend vers zéro uniformément par rapport à r quand T tend vers l'infini sous l'hypothèse (H_o).

Une application renouvelée du lemme d'Ibragimov conduit à :

(65) $$\sum_{i=1}^{k(T)} \frac{i}{k(T)} |E(X_{1,r}\, X_{i,r})| \leqslant 4\, d^2 \sum_{i=1}^{k(T)} \frac{i}{k(T)} \alpha(i) .$$

Sous l'hypothèse (H_o) et en utilisant le lemme 3, la série : $\sum_{i=1}^{k(T)} \frac{i}{k(T)} \alpha(i)$ tend vers zéro uniformément par rapport à r quand T tend vers l'infini, et donc (60) est prouvée.

Rappelons que :

$$\sigma^2_T = 2\ell(T)\, E(S^2_{k(T)})$$

avec :

$$2\ell(T)\ k(T) \leq T < 2(\ell(T)+1)\ k(T)$$

On en déduit immédiatement que :

$$\frac{\ell(T)\ E(S^2_{k(T)})}{(\ell(T)+1)\ k(T)} < \frac{\sigma^2_T}{T} \leq \frac{E(S^2_{k(T)})}{k(T)} .$$

Par passage à la limite quand T tend vers l'infini, on a :

$$\frac{\sigma^2_T}{T} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \tau^2_r \quad \text{uniformément par rapport à } r .$$

Ce qui donne (H_2).

2 - Examinons le second cas particulier :

On suppose ici que : $|x_1| \leq M'$ pour que les hypothèses sur ψ_r soient vérifiées (ψ_r uniformément bornée).

a) Pour tout $i > r$, grâce au lemme d'Ibragimov, on a :

$$|E(X_{1,r}\ X_{i,r})| \leq 4\ d^2\ \alpha(i-1)$$

d'où :

$$(66) \qquad \sum_{i=r+1}^{+\infty} |E(X_{1,r}\ X_{i,r})| \leq 4\ d^2 \sum_{i=r+1}^{+\infty} \alpha(i-1) \leq 4\ d^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j) \leq M_1 < +\infty .$$

b) Pour tout i vérifiant : $0 < i \leq r$, on a, d'une part :

$$E(X_{1,r}\ X_{i,r}) = E(x_1\ x_{1+r}\ x_i\ x_{i+r}) - \sigma^2(r)$$

où $\sigma(r) = E(x_j\ x_{j+r})$; $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall r \in \mathbb{N}$ et d'autre part :

$$E(X_{1,i-1}\ X_{1+r,i-1}) = E(x_1\ x_{1+r}\ x_i\ x_{i+r}) - \sigma^2(i-1) .$$

D'où :

(67) $$\left|E(X_{1,r}\, X_{i,r}) - E(X_{1,i-1}\, X_{1+r,i-1})\right| \leqslant \left|\sigma^2(r) - \sigma^2(i-1)\right|$$

$$\leqslant (|\sigma(r)| + |\sigma(i-1)|) \,.\, |\sigma(r) - \sigma(i-1)|$$

Or (1) entraîne que, pour tout r, on a :

(68) $$|\sigma(r)| \leqslant K \,.$$

De plus, grâce au lemme d'Ibragimov, on a :

(69) $$|\sigma(r) - \sigma(i-1)| = |E(x_1(x_{1+r} - x_i))| \leqslant 8\ \alpha(i-1)\ M'^2 \,.$$

Et aussi :

(70) $$\left|E(X_{1,i-1}\, X_{1+r,i-1})\right| \leqslant 4\ d^2\ \alpha(r-i+1)$$

De (67), (68), (69) et (70) , on tire que :

(71) $$\left|E(X_{1,r}\, X_{i,r})\right| \leqslant 16\ K\ M'^2\ \alpha(i-1) + 4\ d^2\ \alpha(r-i+1)$$

Or, on a :

(72) $$\sum_{i=1}^{r} \alpha(i-1) = \sum_{i=0}^{r} \alpha(i) \leqslant M_2 < +\infty \qquad \text{pour tout } r$$

et

(73) $$\sum_{i=1}^{r} \alpha(r-i+1) = \sum_{j=1}^{r} \alpha(j) \leqslant M_2 < +\infty \qquad \text{pour tout } r$$

Finalement, (71), (72) et (73) entraînent que :

(74) $$\sum_{i=1}^{r} \left|E(X_{1,r}\, X_{i,r})\right| \leqslant M_3 < +\infty \qquad \text{pour tout } r \,.$$

Et donc (66) et (74) prouvent que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |E(X_{1,r}\, X_{i,r})| \leq M_1 + M_3 < +\infty \quad \text{pour tout } r .$$

Ce qui assure (H_1).

Pour prouver (H_2), on montre tout d'abord que :

$$(75) \quad \left|\frac{1}{k(T-r)} . E(S^2_{k(T-r)}) - \tau^2_r\right| \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0 \quad \text{uniformément par rapport à } r .$$

On a :

$$\frac{1}{k(T-r)} E(S^2_{k(T-r)}) = \frac{1}{k(T-r)} \Big[k(T-r)\, E(X^2_{1,r}) + \sum_{\substack{i\neq j \\ 1\leq i\leq k(T-r) \\ 1\leq j\leq k(T-r)}} E(X_{i,r}\, X_{j,r})\Big]$$

$$= E(X^2_{1,r}) + \frac{2}{k(T-r)} \sum_{i=2}^{k(T-r)} (k(T-r)-i+1)\, E(X_{1,r}\, X_{i,r})$$

par stationnarité. D'où :

$$\frac{1}{k(T-r)} E(S^2_{k(T-r)}) - \tau^2_r = 2 \left[\sum_{i=2}^{k(T-r)} \left(\frac{k(T-r)-i+1}{k(T-r)} - 1\right) E(X_{1,r}\, X_{i,r}) - \sum_{i>k(T-r)} E(X_{1,r}\, X_{i,r})\right]$$

Une majoration évidente donne :

$$(76) \quad \left|\frac{1}{k(T-r)} E(S^2_{k(T-r)}) - \tau^2_r\right| \leq 2 \sum_{i=2}^{k(T-r)} \frac{i-1}{k(T-r)} |E(X_{1,r}\, X_{i,r})| + 2 \sum_{i>k(T-r)} |E(X_{1,r}\, X_{i,r})|$$

on a, d'une part :

$$(77) \quad \sum_{i=2}^{k(T-r)} \frac{i-1}{k(T-r)} \left|E(X_{1,r}\, X_{i,r})\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k(T-K_T)} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{i,r})\right|$$

$$+ \sum_{j=k(T-K_T)+1}^{k(T)} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{j+1,r})\right| .$$

Pour T assez grand, on a :

$$(78) \quad \sum_{j=1}^{k(T-K_T)} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{j+1,r})\right| = \sum_{j=1}^{r} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{j+1,r})\right|$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{k(T-K_T)} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{j+1,r})\right|$$

Grâce à (71), on a, pour T assez grand :

$$I_1 = \sum_{j=1}^{r} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{j+1,r})\right| \leqslant 4\, d^2 \sum_{j=1}^{r} \frac{j}{k(T-K_T)}\, \alpha(r-j)$$

$$+ 16\, KM'^2 \sum_{j=1}^{r} \frac{j}{k(T-K_T)}\, \alpha(j)$$

En posant $\ell = r-j$, on a, pour T assez grand :

$$I_1 \leqslant 4\, d^2 \sum_{\ell=0}^{r-1} \frac{\ell}{k(T-K_T)}\, \alpha(\ell) + 4\, d^2 \sum_{\ell=0}^{r-1} \frac{r}{k(T-K_T)}\, \alpha(\ell) + 16\, KM'^2 \sum_{j=1}^{k(T-K_T)} \frac{j}{k(T-K_T)}\, \alpha(j)$$

$$\leqslant 4\, d^2 \sum_{\ell=1}^{k(T-K_T)} \frac{\ell}{k(T-K_T)}\, \alpha(\ell) + 4\, d^2 \frac{K_T}{k(T-K_T)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha(\ell) +$$

$$16\, KM'^2 \sum_{j=1}^{k(T-K_T)} \frac{j}{k(T-K_T)}\, \alpha(j) .$$

Le 1^{er} et le $3^{ème}$ terme tendent vers zéro quand T tend vers l'infini uniformément par rapport à r, grâce au lemme 3.

Quant au second, il tend vers zéro comme $\frac{K_T}{k(T-K_T)}$ quand T tend vers l'infini.

Ainsi :

$$\lim_{T\to+\infty} I_1 = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } r .$$

Grâce au lemme d'Ibragimov, pour T assez grand, on a :

$$I_2 = \sum_{j=r+1}^{k(T-K_T)} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{i,r})\right| \leqslant 4\, d^2 \sum_{j=r+1}^{k(T-K_T)} \frac{j}{k(T-K_T)}\, \alpha(j-r)$$

En posant $\ell = j-r$, on a alors pour T assez grand :

$$I_2 \leqslant 4\, d^2 \sum_{\ell=1}^{k(T-K_T)} \frac{\ell}{k(T-K_T)}\, \alpha(\ell) + 4\, d^2 \frac{K_T}{k(T-K_T)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha(\ell) .$$

Le 1^{er} terme tend vers zéro quand T tend vers l'infini, uniformément par rapport à r, grâce au lemme 3.

Le $2^{ème}$ terme tend vers zéro avec $\frac{K_T}{k(T-K_T)}$ quand T tend vers l'infini, uniformément par rapport à r.

Donc : $\lim_{T\to+\infty} I_2 = 0$ uniformément par rapport à r .

Reste à examiner le dernier terme ; pour T assez grand, on a :

$$I_3 = \sum_{j=k(T-K_T)+1}^{k(T)} \frac{j}{k(T-K_T)} \left|E(X_{1,r}\, X_{j+1,r})\right| .$$

Appliquons le lemme d'Ibragimov ; pour T assez grand, on a :

$$I_3 \leqslant 4\ d^2 \sum_{j=k(T-K_T)+1}^{k(T)} \frac{k(T)}{k(T-K_T)}\ \alpha(j-K_T)$$

$$\leqslant 4\ d^2 \left[k(T) - k(T-K_T) - 1\right] . \frac{k(T)}{k(T-K_T)} . \alpha(k(T-K_T) + 1 - K_T)$$

Sous (H_o), il est alors aisé de vérifier que :

$$\lim_{T\to+\infty} I_3 = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } r .$$

- D'autre part, pour T assez grand, d'après 2° a, on a :

$$|E(X_{1,r}\ X_{i,r})| \leqslant 4\ d^2\ \alpha(i-1)$$

on en déduit que, pour T assez grand, on a :

$$\sum_{i>k(T-r)} |E(X_{1,r}\ X_{i,r})| \leqslant 4\ d^2 \sum_{i=k(T-K_T)}^{+\infty} \alpha(i-1)$$

Cette dernière expression tendant vers zéro quand T tend vers l'infini, uniformément par rapport à r, sous l'hypothèse (H_o). Ce qui assure (75). Rappelons que :

$$\sigma^2_{T-r} = 2\ell(T-r)\ E(S^2_{k(T-r)})$$

avec :

$$2\ell(T-r)\ k(T-r) \leqslant T-r < 2(\ell(T-r) +1)\ k(T-r)$$

On a alors :

$$\frac{\ell(T-r)}{\ell(T-r)+1} . \frac{E(S^2_{k(T-r)})}{k(T-r)} < \frac{\sigma^2_{T-r}}{T-r} \leqslant \frac{E(S^2_{k(T-r)})}{k(T-r)}$$

Or, on a :

$$\frac{\ell(T-r)}{\ell(T-r)+1} > \frac{\ell(T-K_T)}{\ell(T)+1} .$$

Cette dernière expression tendant vers 1 quand T tend vers l'infini (uniformément par rapport à r).

D'où :

(79) $$\frac{\sigma^2_{T-r}}{T-r} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \tau^2_r \quad \text{uniformément par rapport à } r .$$

ce qui assure (H_2).

Remarque 1.- On a, grâce au lemme d'Ibragimov :

$$\sum_{r=0}^{+\infty} |\sigma(r)| \leq 4 M'^2 \sum_{r=0}^{+\infty} \alpha(r)$$

La condition (H_0) implique donc (68), et (1) dans le $2^{\text{ème}}$ cas particulier.

Remarque 2.- La proposition 4 reste vraie dans le cas où le processus de base est φ-mélangeant [20] et quand on remplace (H_0) par :

(80) $$\sum_{j=0}^{+\infty} \sqrt{\varphi(j)} < +\infty \qquad \text{(en posant } \varphi(0) = 1) .$$

Remarque 3.- Hormis les deux cas étudiés, une proposition similaire à la proposition 4 est vérifiée dans les cas usuels, mais nécessite la forme de la fonction φ_r, comme dans le cas traité au 2° de la démonstration précédente.

IV - ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DE $\hat{g}_T$ VERS g.-

1°) *Résultat général.*

Théorème 4.- Soit ε un réel strictement positif.

Sous les hypothèses générales du chapitre I et du chapitre II (§ I et § II 1°), sous (H_1) et (H_2) et si de plus les 3 conditions suivantes sont réalisées.

(C_1) $$\lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)K_T} = +\infty$$

(C_2) Pour T assez grand :

$$K_T \cdot \operatorname{Log}(K_T + 1) < \frac{T\varepsilon}{140MSdk(T)}$$

(C_3) Pour T assez grand :

$$\alpha(k(T-K_T) - K_T) \leq \exp\left[-\frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k(T-K_T)}\right]$$

Alors, pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leq 4e \cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon}{36MSd} \cdot \frac{T}{K_T k(T)}\right]$$

Démonstration :

Pour T assez grand, grâce à (43), on a :

(81) $$P(|S_{T-h(r)}| > \frac{\varepsilon(T-h(r))}{2MS(K_T+1)}) \leq 2e \exp(-\frac{\varepsilon(T-h(r))}{6MSd(K_T+1)k}) \times$$
$$\left[\exp(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{T-h(r)}}{k^2 d^2}) + \alpha(k-h(r)) \exp(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k})\right]$$

Grâce à (H_1) et (H_2) et pour T assez grand, on a :

(82) $$\sigma^2_{T-h(r)} \leq (T-h(r))\,(1+\delta)\,M'$$

Alors (81) se majore, pour T assez grand, par :

(83) $$2e \exp(-\frac{A(T-h(r))}{K_T\ k}) \left[\exp(B \cdot \frac{T-h(r)}{k^2}) + \alpha(k-h(r)) \exp(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k})\right]$$

où $A = \frac{\varepsilon}{7MSd}$ et $B = \frac{3}{8} \cdot \frac{(1+\delta).M'}{d^2}$.

L'hypothèse (C_3) implique que, pour T assez grand :

(84) $$\alpha(k-h(r)) \leq \exp\left[-\frac{T-h(r)}{K_T k}\left(\frac{6}{5}K_T - \frac{A}{2}\right)\right]$$

Deux cas peuvent se présenter :

1°) si :

$$\alpha(k-h(r)) \leq \exp\left[-\frac{T-h(r)}{k}\left(\frac{6}{5} - \frac{B}{k}\right)\right]$$

Alors (83), pour T assez grand, se majore par :

(85) $$4e \, . \, \exp\left[-\frac{A(T-h(r))}{K_T\ k} - \frac{T-h(r)}{k}\left(\frac{6}{5} - \frac{B}{k}\right) + \frac{6}{5} \, . \, \frac{T-h(r)}{k}\right]$$

$$= 4e \exp\left[-\frac{A(T-h(r))}{K_T\ k} + \frac{B(T-h(r))}{k^2}\right]$$

L'hypothèse (C_1) permet alors de majorer (85) par :

$$4e \exp\left[-\frac{A}{2}\frac{T-h(r)}{K_T\ k}\right] \quad \text{pour } T \text{ assez grand .}$$

que l'on majore finalement, pour T assez grand, par :

(86) $$4e \exp\left[-\frac{A}{4} \, . \, \frac{T - K_T}{K_T\ k(T)}\right]$$

2°) si :

$$\exp\left[-\frac{T-h(r)}{K_T\ k}\left(\frac{6}{5} - \frac{B}{k}\right)\right] < \alpha(k-h(r)) \leq \exp\left[-\frac{T-h(r)}{K_T\ k}\left(\frac{6}{5}K_T - \frac{A}{2}\right)\right]$$

Alors, pour T assez grand, on a :

(87) $$\alpha(k-h(r)) \exp\left[\frac{6}{5} \, . \, \frac{T-h(r)}{k}\right] > \exp\left[B \, . \, \frac{T-h(r)}{k^2}\right]$$

Et, pour T assez grand, (83) se majore par :

(88) $$4e \exp\left[- A \cdot \frac{T-h(r)}{K_T\ k} + \frac{6}{5} \cdot \frac{T-h(r)}{k} - \frac{T-h(r)}{K_T\ k}\left(\frac{6}{5} K_T - \frac{A}{2}\right)\right]$$

$$= 4e \cdot \exp\left[- \frac{T-h(r)}{K_T\ k} \cdot \frac{A}{2}\right]$$

$$\leq 4e \exp\left[- \frac{T-K_T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{A}{4}\right] \quad \text{pour } T \text{ assez grand .}$$

Les majorations finales du 1er et 2° sont identiques.

L'hypothèse (C_2) permet alors d'écrire, pour T assez grand :

(89) $$4e\ (K_T+1) \exp\left[- \frac{T-K_T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{A}{4}\right] \leq 4e \exp\left[- \frac{T-K_T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{A}{5}\right]$$

$$\leq 4e \exp\left[- \frac{T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{\varepsilon}{36MSd}\right]$$

Rappelons l'expression (42) :

(90) $$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leq \sum_{r=0}^{K_T} P(|S_{T-h(r)}| > \frac{\varepsilon(T-h(r))}{2MS(K_T+1)}|$$

$$\leq (K_T+1)\ P(|S_{T-h(r)}| > \frac{\varepsilon(T-h(r))}{2MS(K_T+1)})$$

Alors, (81), (83), (86), (88), (89) et (90) permettent de conclure, pour T assez grand.

2°) *Etude de la vitesse de convergence dans deux cas particuliers.*

Corollaire 3.- Sous les hypothèses du corollaire 1, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leq 4e \cdot \exp(- \frac{\varepsilon}{300AMSd} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)})$$

où β est un réel vérifiant : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

<u>Démonstration</u> : On choisit :

$$k(T) = 2\,\beta_T\, T^{\beta} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \beta < 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta < 1 \; ; \; 1 < \beta_T \leqslant 2$$

(pour rendre $k(T)$ entier).

Vérifions les 3 conditions du théorème 4.

(C_1) est trivialement vérifiée car $\alpha + \beta < 1$.

D'autre part, pour T assez grand, on a :

$$A\alpha_T\, T^{\alpha}\, \mathrm{Log}(A\alpha_T + 1) \leqslant \frac{T^{1-\beta}\varepsilon}{560SdM} \quad \text{car} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha + \beta < 1 . \tag{91}$$

De plus, pour T assez grand, on a :

$$\frac{T^{1-\beta}\varepsilon}{560SdM} \leqslant \frac{T\varepsilon}{560MSdT^{\beta}} \leqslant \frac{T\varepsilon}{280MSd\beta_T T^{\beta}} = \frac{T\varepsilon}{140MSdk(T)} \tag{92}$$

(91) et (92) assurent alors (C_2).

Pour T assez grand, grâce à (47), on a :

$$\alpha(k(T-K_T) - K_T) \leqslant \alpha(T^{\beta}) = a \exp\left[T^{\beta}\, \mathrm{Log}\, \rho\right] . \tag{93}$$

D'autre part, pour T assez grand, on a :

$$\exp\left[-\frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k(T-K_T)}\right] \geqslant \exp\left[-\frac{6}{5} \cdot T^{1-\beta}\right] \tag{94}$$

Or, comme pour T assez grand, on a :

$$a \exp\left[T^{\beta}\, \mathrm{Log}\, \rho\right] \leqslant \exp\left[-\frac{6}{5} \cdot T^{1-\beta}\right] \tag{95}$$

car $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Alors, pour T assez grand, (93), (94) et (95) permettent de conclure à (C_3).

Le théorème 4, pour T assez grand, permet aisément de conclure.

Corollaire 4.- Sous les hypothèses du corollaire 2, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leqslant 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{336AMSd} . (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right]$$

Démonstration : On choisit :

$$k(T) = \frac{6}{5} . \beta_T . \frac{T}{\mathrm{Log}\ T} \quad \text{où} \quad 1 < \beta_T \leqslant 2 \quad \text{(pour rendre } k(T) \text{ entier).}$$

Vérifions les 3 conditions du théorème 4.

Il est clair que :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{T}{K_T\ k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{5}{6A\alpha_T\beta_T} (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha} = +\infty \quad \text{car } 0 < \alpha < 1.$$

Donc (C_1) est vérifiée.

D'autre part, pour T assez grand, on a :

(96) $$A\alpha_T (\mathrm{Log}\ T)^{\alpha}\ \mathrm{Log}\left[A\alpha_T (\mathrm{Log}\ T)^{\alpha} + 1\right] \leqslant 3A(\mathrm{Log}\ T)^{\alpha}$$

De plus :

(97) $$\frac{T\varepsilon}{140MSdk(T)} = \frac{\varepsilon\ \mathrm{Log}\ T}{140MSd\ .(6/5).\beta_T} \geqslant \frac{\varepsilon\ \mathrm{Log}\ T}{336MSd} .$$

Il est clair que, pour T assez grand, on a :

(98) $$\frac{\varepsilon\ \mathrm{Log}\ T}{336MSd} \geqslant 3A\ (\mathrm{Log}\ T)^{\alpha}$$

Et (96), (97) et (98) donnent (C_2).

Pour T assez grand, grâce à (53), on a :

$$(99) \qquad \alpha(k(T-K_T) - K_T) \leqslant \alpha\left(\frac{1}{2}\,\frac{T}{\text{Log } T}\right) =$$

$$\exp\left[\text{Log } C - \nu \text{ Log } \frac{1}{2} - \nu \text{ Log } T + \nu \text{ Log}(\text{Log } T)\right]$$

Or, pour T assez grand, on a :

$$\text{Log } C - \nu \text{ Log } \frac{1}{2} + \nu \text{ Log}(\text{Log } T) \leqslant \frac{\nu-1}{4} \text{ Log } T \quad .$$

En portant dans (99), pour T assez grand, il vient :

$$(100) \qquad \alpha(k(T-K_T) - K_T) \leqslant \exp\left[- \frac{3\nu+1}{4} \text{ Log } T\right]$$

D'autre part, on a :

$$(101) \qquad \exp\left[- \frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k(T-K_T)}\right] \geqslant \exp\left[- \frac{\text{Log } T}{1 - (6/5)\beta_T (1/\text{Log } T)}\right]$$

Or, pour T assez grand, on a :

$$(102) \qquad 1 - \frac{6}{5}\,\beta_T\,\frac{1}{\text{Log } T} \geqslant \frac{2}{\nu+1} \quad (\text{car } \nu > 1) \quad .$$

(101) se minore alors par :

$$(103) \qquad \exp\left(- \frac{\nu+1}{2} \text{ Log } T\right) \geqslant \exp\left[- \frac{3\nu+1}{4} \text{ Log } T\right]$$

Alors (99), (100), (101), (102) et (103) permettent d'écrire, pour T assez grand :

$$(104) \qquad \alpha(k(T-K_T) - K_T) \leqslant \exp\left[- \frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k(T-K_T)}\right]$$

Ce qui donne (C_3).

Le théorème 4, pour T assez grand, permet aisément de conclure.

Remarque.- Les hypothèses (H_1) et (H_2) nécessaires dans les corollaires 1 et 2, ainsi que 3 et 4, sont vérifiées dans les cas particuliers importants grâce à la proposition 4, ces cas particuliers étant explicités dans cette proposition.

CHAPITRE III

APPLICATIONS.

I - APPLICATION A L'ESTIMATION DE LA DENSITE.-

1°) *Rappel et vérification des hypothèses générales précédentes.*

Le processus de base $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est celui décrit au chapitre I, 1°.

Nous supposerons ici (voir chapitre I, 2° pour les notations) que : $(E,\mathcal{B}) = (F,\mathcal{C})$ et que μ est une mesure σ-finie sur $(E,\mathcal{B})$.

On considère un système orthonormé complet $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\mu)$ formé de fonctions continues et uniformément bornées par S (exemple : fonctions trigonométriques - fonction d'Hermite - Base de Haar, dans le cas réel).

Supposons que la loi P_0 de x_t admette une densité f par rapport à μ et que f appartienne à $L^2(\mu)$.

On a alors :

$$f(y) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, e_r(y) \tag{105}$$

avec :

$$\forall r \in \mathbb{N} \qquad a_r = \int e_r\, f\, d\mu = E(e_r(x_1)) . \tag{106}$$

Donc (2) est vérifiée avec $\varphi_r(x_1) = e_r(x_1)$ et $h(r) \equiv 0$. Faisons l'hypothèse suivante :

$$\sum_{r=0}^{\infty} |a_r| < +\infty \iff \sum_{r\in\mathbb{N}} \left|\int e_r\, f\, d\mu\right| < +\infty.$$

Pour estimer f à partir des observations $x_1,\ldots,x_T$, nous utilisons l'estimateur classique :

$$(107) \qquad \forall y \in E \qquad \hat{f}_T(y) = \sum_{r=0}^{K_T} \hat{a}_r \, e_r(y)$$

où $\hat{a}_r = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} e_r(x_i)$.

L'estimateur défini en (107) est bien de la forme (15) avec des poids pris dans la classe 1.

Supposons en outre que :

$$(108) \qquad \forall r \in \mathbb{N} \qquad E(X_{1,r}^2) > 0 \qquad (X_{1,r} \text{ est défini par } (27))$$

qui traduit le fait que $e_r(x_1)$ est une v.a. non dégénérée, pour tout r.

Enfin, faisons l'hypothèse (35) :

$$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T} = +\infty .$$

2°) *Résultats.*

La traduction des théorèmes 3 et 4 donne dans ce cas précis la proposition suivante :

Proposition 5.- Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$(109) \qquad \sum_{T\geq 2} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left[-\frac{\varepsilon T}{6MS(K_T+1)kd}\right] \cdot \left[\exp\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma_T^2}{k^2 d^2}\right) + \alpha(k) \exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k}\right)\right] < +\infty$$

Alors :

$$\sup_{y\in E} |\hat{f}_T(y) - f(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Si, de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_1), (H_2), (C_1), (C_2), (C_3), alors, pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in E} |\hat{f}_T(y) - f(y)| > \varepsilon) \leqslant 4e \exp\left[- \frac{T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{\varepsilon}{36MSd}\right] .$$

3°) *Examen de deux cas particuliers.*

La dernière remarque du chapitre II s'applique ici encore. Les corollaires 1, 2, 3 et 4 se traduisent alors comme suit :

Corollaire 5.- Si $\alpha(n) = a\,\rho^n$ avec $a > 0$; $0 < \rho < 1$; $n \geq 1$. Si $K_T = A\alpha_T\ T^\alpha$ avec $A > 0$; $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; $1 < \alpha_T \leqslant 2$ (pour rendre K_T entier). Alors, on a :

$$\sup_{y\in E} |\hat{f}_T(y) - f(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in E} |\hat{f}_T(y) - f(y)| > \varepsilon) \leqslant 4e \cdot \exp\left[- \frac{\varepsilon}{300AMSd} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)}\right]$$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Corollaire 6.- Si $\alpha(n) = \frac{C}{n^\nu}$ avec $C > 0$; $\nu > 1$; $n \geqslant 2$. Si $K_T = A\alpha_T(\text{Log } T)^\alpha$ avec $A > 0$; $0 < \alpha < 1$; $1 < \alpha_T \leqslant 2$ (pour rendre K_T entier). Alors, on a :

$$\sup_{y\in E} |\hat{f}_T(y) - f(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in E} |\hat{f}_T(y) - f(y)| > \varepsilon) \leqslant 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{336AMSd} \cdot (\text{Log } T)^{1-\alpha}\right]$$

4°) Application à l'estimation du mode.

Supposons f uniformément continue et unimodale, de mode m :

$$f(m) = \sup_{y\in E} f(y) .$$

L'idée la plus naturelle consiste à prendre comme estimateur de m , le mode $\hat{m}_T$ de $\hat{f}_T$ où $\hat{m}_T$ est une solution de l'équation :

$$(110) \qquad \hat{f}_T(\hat{m}_T(\omega)) = \sup_{y\in E} \hat{f}_T(y,\omega) \quad .$$

Le fait que f soit continue et unimodale entraîne que :

$\forall\varepsilon > 0 \; ; \exists\beta > 0 \; ; \quad |m-y| \geqslant \varepsilon \Longrightarrow |f(m) - f(y)| \geqslant \beta$ (voir [21]).

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$(111) \qquad P(|\hat{m}_T - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left[|f(\hat{m}_T) - f(m)| \geqslant \beta\right]$$

Il est aisé de vérifier les trois inégalités suivantes :

$$|f(\hat{m}_T) - f(m)| \leqslant |f(\hat{m}_T) - \hat{f}_T(\hat{m}_T)| + |\hat{f}_T(\hat{m}_T) - f(m)|$$

$$|f(\hat{m}_T) - \hat{f}_T(\hat{m}_T)| \leqslant \sup_{y\in E} |f(y) - \hat{f}_T(y)|$$

$$|\hat{f}_T(\hat{m}_T) - f(m)| = |\sup_{y\in E} \hat{f}_T(y) - \sup_{y\in E} f(y)| \leqslant \sup_{y\in E} |f(y) - \hat{f}_T(y)|$$

Ces 3 inégalités impliquent la suivante :

$$|f(\hat{m}_T) - f(m)| \leqslant 2 \sup_{y\in E} |f(y) - \hat{f}_T(y)|$$

Et grâce à (111), on obtient :

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists \beta > 0$;

$$P(|\hat{m}_T - m| \geq \varepsilon) \leq P(\sup_{y \in E} |f(y) - \hat{f}_T(y)| \geq \frac{\beta}{2})$$

On ne peut écrire un corollaire du type proposition 5 car on ne connaît pas β (sauf hypothèses plus contraignantes sur f), ni donner de vitesse de convergence.

Néanmoins, on peut donner des résultats dans des cas particuliers.

Corollaire 7.- Sous les hypothèses du corollaire 5 (ou du corollaire 6) et si f est uniformément continue et unimodale, alors

$$\hat{m}_T \xrightarrow[T \to +\infty]{p.s.} m \quad .$$

5°) *Remarque.*

Les résultats obtenus par D. Bosq dans [8] sont comparables à ceux établis présentement pour l'estimation de la densité : nous avons ici en plus laissé la "liberté" sur le choix de $k(T)$, et étudié le cas fortement mélangeant.

On pourra comparer la proposition 5 et le corollaire 5 à la proposition 2 (chap. I).

II - APPLICATION A L'ESTIMATION DE LA FONCTION DE REPARTITION.-

1°) *Présentation du problème et vérification des hypothèses générales.*

La fonction de répartition est aussi justiciable d'une estimation par la méthode précédente quand l'ensemble E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$.

Nous prendrons ici $E = F = [a,b]$, et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur F.

On suppose que la loi P_o de x_t admet une densité f par rapport à λ :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad F(y) = \int_a^y f(t)\, dt \quad .$$

On a ici :

$$F(y) = 0 \qquad \text{pour} \quad y \leqslant a$$

$$\text{et} \quad F(y) = 1 \qquad \text{pour} \quad y \geqslant b$$

F appartient évidemment à $L^2_{[a,b]}(\lambda)$.

Soit $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé complet, formé de fonctions continues, et uniformément bornées par S sur $[a,b]$ (par exemple : les fonctions trigonométriques).

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\forall y \in [a,b] \quad ; \quad F(y) = \sum_{r\in\mathbb{N}} a_r\, e_r(y)$$

avec :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad a_r = \int_a^b e_r(t)\, F(t)\, dt \ .$$

On peut alors appliquer un théorème d'intégration par parties ([22]) :

$$\begin{aligned}\forall r \in \mathbb{N} \ ; \ a_r = \int_a^b e_r(t)\, F(t)\, dt &= \Big[E_r(t)\, F(t)\Big]_a^b - \int_a^b E_r(t)\, f(t)\, dt \\ &= E_r(b) - E(E_r(x_1)) \\ &= E(E_r(b) - E_r(x_1)) \quad .\end{aligned}$$

Donc (2) est vérifiée avec :

$$\vartheta_r(x_1) = E_r(b) - E_r(x_1) \qquad (h(r) \equiv 0) .$$

Grâce au théorème des accroissements finis, ϑ_r est uniformément bornée par rapport à r et i.

Faisons l'hypothèse suivante :

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} |a_r| < +\infty \iff \sum_{r\in\mathbb{N}} \left|\int_a^b e_r(t)\, F(t)\, dt\right| < +\infty$$

Pour estimer F à partir des observations $x_1,\dots,x_T$, on pose :

$$\hat{F}_T(y) = \sum_{r=0}^{K_T} \hat{a}_r\, e_r(y)$$

estimateur de F de la forme (15) avec :

$$\hat{a}_r = E_r(b) - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} E_r(x_i) \quad .$$

On suppose que :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad E(X^2_{1,r}) > 0$$

c'est-à-dire que le processus $(E_r(b) - E_r(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est non dégénéré, pour tout r.

On suppose enfin que :

$$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim \frac{k(T)}{K_T} = +\infty$$

2°) *Résultats.*

Les théorèmes 3 et 4 donnent dans ce cas

Proposition 6.- Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{T\geq 2} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(-\frac{\varepsilon T}{6MS(K_T+1)k(T)d}\right) \left[\exp\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma_T^2}{k^2(T)d^2}\right) + \alpha(k(T)) \exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k(T)}\right)\right] < +\infty$$

Alors : $$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 .$$

Si, de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_1), (H_2) (C_1), (C_2), (C_3), alors, pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| > \varepsilon\right) \leq 4e \exp\left[-\frac{T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{\varepsilon}{36MSd}\right] .$$

3°) *Examen de deux cas particuliers.*

Corollaire 8.- Sous les hypothèses du corollaire 5, on a :

$$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| > \varepsilon\right) \leq 4e \exp\left[-\frac{\varepsilon}{300AMSd} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)}\right]$$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Corollaire 9.- Sous les hypothèses du corollaire 6, on a :

$$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| > \varepsilon \right) \leq 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{336AMSd} \cdot (\operatorname{Log} T)^{1-\alpha}\right]$$

III - APPLICATION A L'ESTIMATION DES DERIVEES DE LA DENSITE.-

Elle aussi est susceptible de méthodes d'estimation liées à celle des fonctions orthogonales (voir à ce sujet [5]). Deux points de vue sont envisageables :

1 - Sachant que f est k fois dérivable , on peut estimer $f^{(k)}$ directement par une méthode du type précédent.

2 - Sachant que f est k fois dérivable, on peut chercher à partir d'un estimateur de f, un "bon" estimateur de $f^{(k)}$, en un sens à définir.

A - PREMIERE METHODE.

1°) *Présentation du problème et vérification des hypothèses générales.*

On prend ici $E = F = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

$\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur E.

Soit $G = \mathcal{D}^2([a,b], k)$ l'espace des fonctions réelles définies sur $[a,b]$, k fois dérivables, de carré intégrable, ainsi que leurs k dérivées.

Soit $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé complet de $L^2(\mu)$ où :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad e_r \in G \quad ; \quad e_r^{(k)} \text{ est continue.}$$

On suppose également que les fonctions $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ et $(e_r^{(k)})_{r\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées par S, ainsi que :

(112) $\forall r \in \mathbb{N}$; $\forall h = 0,1,\dots,k$;

$$\lim_{y\to a^+} e_r^{(k)}(y)\, f^{(k-h)}(y) = \lim_{y\to b^-} e_r^{(k)}(y)\, f^{(k-h)}(y) .$$

On suppose que la loi P_o de x_t admet une densité $f \in G$ par rapport à λ. On peut alors écrire :

$$\forall y \in [a,b] \qquad f^{(k)}(y) = \sum_{r\in\mathbb{N}} a_{rk}\, e_r(y)$$

(convergence au sens de $L^2[a,b]$) avec :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad a_{rk} = \int_a^b f^{(k)}(t)\, e_r(t)\, dt$$

En intégrant k fois par parties, grâce à (112), on a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad a_{rk} = (-1)^k \int_a^b e_r^{(k)}(t)\, f(t)\, dt$$

$$= E\left[(-1)^k\, e_r^{(k)}(x_1)\right]$$

Donc (2) est vérifiée avec :

$$\psi_r(x_1) = (-1)^k\, e_r^{(k)}(x_1) \qquad (h(r) \equiv 0) .$$

Faisons l'hypothèse suivante :

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} |a_{rk}| < +\infty \iff \sum_{r\in\mathbb{N}} \left|\int_a^b e_r^{(k)}(t)\, f(t)\, dt\right| < +\infty$$

$$\iff \sum_{r\in\mathbb{N}} \left|\int_a^b f^{(k)}(t)\, e_r(t)\, dt\right| < +\infty .$$

Pour estimer $f^{(k)}$ à partir des observations $x_1,\dots,x_T$, on utilise l'estimateur classique :

(113) $$\forall y \in [a,b] \quad ; \quad \hat{f}_{k,T}(y) = \sum_{r=0}^{K_T} \hat{a}_{rk}\, e_r(y)$$

où $$\hat{a}_{rk} = (-1)^k \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} e_r^{(k)}(x_i) \ .$$

L'estimateur défini en (113) est bien de la forme (15) avec des poids pris dans la classe 1.

Supposons en outre que :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad E(X_{1,r}^2) > 0$$

qui traduit le fait que $e_r^{(k)}(x_1)$ est une v.a. non dégénérée.

Faisons enfin l'hypothèse classique (35) :

$$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T} = +\infty \ .$$

2°) *Résultats.*

La traduction des théorèmes 3 et 4 donne dans ce cas :

Proposition 7.- Avec les notations et hypothèses précédentes, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{T\geq 2} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(-\frac{\varepsilon T}{6MS(K_T+1)k(T)d}\right) \left[\exp\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma_T^2}{k^2(T)d^2}\right) + \alpha(k(T)) \exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k(T)}\right)\right] < +\infty$$

Alors $$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Si, de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_1), (H_2), (C_1), (C_2), (C_3), alors, pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \exp\left[- \frac{T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{\varepsilon}{36MSd}\right] .$$

3°) *Examen de deux cas particuliers.*

Ici aussi, la dernière remarque du chapitre II s'applique. Les corollaires 1,2,3 et 4 se traduisent comme suit :

Corollaire 10.- Sous les hypothèses du corollaire 5, on a :

$$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \exp\left(- \frac{\varepsilon}{300AMSd} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)}\right)$$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Corollaire 11.- Sous les hypothèses du corollaire 6, on a :

$$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \exp\left(- \frac{\varepsilon}{336AMSd} (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right) .$$

4°) *Remarques.*

- L'étude de la dérivée de f peut donner des renseignements sur le module de continuité de f

$$\omega(\delta,f) = \sup_{\substack{y_1 \in [a,b] \\ y_2 \in [a,b] \\ |y_1-y_2|<\delta}} |f(y_1) - f(y_2)|$$

et être utile dans l'évaluation du β pour l'estimation du mode.

- Pour $k = 0$, on retrouve les résultats sur l'estimation de la densité.

(B) - SECONDE METHODE.

1°) *Présentation du problème et vérification des hypothèses générales.*

On prend ici $E = F = [a,b]$.

$\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur E.

Soit $G = C_k([a,b])$ l'espace des fonctions réelles définies et bornées sur $[a,b]$ ayant des dérivées continues et bornées jusqu'à l'ordre k.

Soit $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé complet de $L^2(\mu)$ où : $\forall r \in \mathbb{N}$; $e_r \in G$; et tel que les $(e_r^{(k)})_{r\in\mathbb{N}}$ soient uniformément bornées par S, ainsi que les $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$.

On suppose que la loi P_o de x_t admet une densité $f \in G$ par rapport à λ.

$\hat{f}_T$ étant l'estimateur défini par (107), sa dérivée k-ième, soit $\hat{f}_T^{(k)}$ est un estimateur de $f^{(k)}$.

L'estimateur est donc de la forme :

$$\forall y \in [a,b] \;\; \hat{f}_T^{(k)}(y) = \sum_{r=0}^{K_T} \hat{a}_r \, e_r^{(k)}(y)$$

avec $\hat{a}_r = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} e_r(x_i)$.

Supposons que :

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} |a_r| < +\infty \iff \sum_{r\in\mathbb{N}} \left|\int_a^b e_r\, f\, d\mu\right| < +\infty$$

Supposons en outre que :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad E(X_{1,r}^2) > 0$$

qui traduit le fait que $e_r(x_1)$ est une v.a. non dégénérée.

Enfin, faisons l'hypothèse (35) :

$$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T} = +\infty$$

2°) *Résultats.*

Les théorèmes 3 et 4 se traduisent de la manière suivante.

Proposition 8.- Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{T\geq 2} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(-\frac{T}{6MS(K_T+1)kd}\right) \left[\exp\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma_T^2}{k^2 d^2}\right) + \alpha(k) \cdot \exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T}{k}\right)\right] < +\infty$$

Alors : $\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_T^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$.

Si, de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_1), (H_2), (C_o), (C_1), (C_2), alors, pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_T^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon\right) \leq 4e \exp\left[-\frac{T}{K_T\, k(T)} \cdot \frac{\varepsilon}{36MSd}\right] .$$

3°) Examen de deux cas particuliers.

Corollaire 12.- Sous les hypothèses du corollaire 5, on a :

$$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_T^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 .$$

Pour $\varepsilon > 0$ et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_T^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{300AMSd} . T^{1-(\alpha+\beta)}\right]$$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Corollaire 13.- Sous les hypothèses du corollaire 6, on a :

$$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_T^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_T^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{336AMSd} . (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right]$$

IV - APPLICATION A L'ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE (*voir* [26]).-

1°) Présentation du problème et vérification des hypothèses générales.

On prend ici $(E,\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et $(F,\mathcal{C}) = ([-\pi, +\pi],\mathcal{B}_{[-\pi, \pi]})$.

On choisit $\mu = \lambda$ mesure de Lebesgue sur F.

Soit $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ le système orthonormé complet de $L^2(\mu)$ suivant :

$$\begin{cases} e_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, 1_{[-\pi,\pi]}(x) \\ e_{2j+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(j+1)x \quad ; \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ e_{2(j+1)}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(j+1)x \quad ; \quad \forall j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On suppose ici que le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est borné :

$$\forall t \in \mathbb{Z} \;;\; |x_t| \leq M'$$

et que :

(114) $$\sum_{r\in\mathbb{Z}} |\sigma(t)| < +\infty \quad \text{où}$$

(115) $$\forall r \in \mathbb{Z} \;;\; \forall t \in \mathbb{Z} \;;\; \sigma(r) = E(x_t\, x_{t+r})$$

Remarquons que : $\forall r \in \mathbb{Z}$; $\sigma(r) = \sigma(-r)$.

Le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet alors une densité spectrale f définie par :

(116) $$\forall \lambda \in [-\pi, +\pi] \qquad f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sigma(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{+\infty} \sigma(r) \cos \lambda r$$

Si l'on pose :

$$a_0 = \frac{\sigma(0)}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad \forall r \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a_r = \dfrac{\sigma(r)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } r \text{ est impair} \\ a_r = 0 & \text{si } r \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors $f(\lambda) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r\, e_r(\lambda)$.

Et (1) et (2) sont vérifiées grâce à (114) et (115) avec :

$$\psi_r(x_i,\ldots,x_{i+r}) = x_i\, x_{i+r} \qquad (h(r) = r) .$$

Pour estimer la densité spectrale f à partir des observations $x_1,\ldots,x_T$, nous utilisons l'estimateur (107) :

$$\forall y \in [-\pi, \pi] \qquad \hat{f}_T(y) = \sum_{r=0}^{K_T} w_T(r)\, \hat{a}_r\, e_r(y)$$

où : $\hat{a}_0 = \dfrac{\hat{\sigma}(0)}{\sqrt{2\pi}}$ $\qquad \forall r \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} \hat{a}_r = \dfrac{\hat{\sigma}(r)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } r \text{ est impair} \\ \hat{a}_r = 0 & \text{si } r \text{ est pair} \end{cases}$

et $\forall r \in \mathbb{N}$; $\hat{\sigma}(r) = \dfrac{1}{T-r} \displaystyle\sum_{t=1}^{T-r} x_t\, x_{t+r}$.

Les poids $w_T(r)$ sont choisis dans la classe 2 (chap. II, § I, 1°).

L'estimateur $\hat{f}_T$ s'écrit aussi sous la forme :

(116 bis) $\quad \forall y \in [-\pi, \pi] \quad \hat{f}_T(y) = \dfrac{1}{2\pi}\, \hat{\sigma}(0) + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{r=1}^{K_T} w_T(r)\, \hat{\sigma}(r) \cos \lambda r$

Remarque.- La classe 2 des poids $w_T(r)$ a été choisie de manière suffisamment générale pour englober toutes les familles de poids classiques utilisées dans l'estimation de la densité spectrale (pour une revue des différents poids : voir [18], [23] ou [24]).

- Supposons que $E(X_{1,r}^2) > 0$, c'est-à-dire que le processus $(x_1\, x_{1+r})_{r\in\mathbb{N}}$ est non dégénéré .

Supposons enfin que :

$$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T} = +\infty \ .$$

2°) *Résultats*.

Les théorèmes 3 et 4 se traduisent par :

Proposition 9.- Avec les notations et sous les hypothèses précédentes ; s'il existe $T' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$\sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(- \frac{\varepsilon(T-r)\sqrt{\pi}}{6M(K_T+1)kd}\right) \left[\exp\left(\frac{3}{8} \frac{\sigma^2_{T-r}}{k^2 d^2}\right) + \alpha(k-r) \exp\left(\frac{6}{5} \frac{T-r}{k}\right)\right] < + \infty$$

Alors :

$$\sup_{y\in[\pi,\pi]} |\hat{f}_T(y) - f(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

Si, de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_1) , (H_2) , (C_1) , (C_2) , (C_3) , alors, pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(y) - f(y)| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \exp\left[- \frac{T}{K_T \; k(T)} \cdot \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{36Md}\right]$$

3°) *Examen de deux cas particuliers.*

La dernière remarque du chapitre II s'applique ici pleinement.

Corollaire 14.- Sous les hypothèses du corollaire 5, on a :

$$\sup_{y\in[a,b]} |\hat{f}_T(y) - f(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(y) - f(y)| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{300AMd} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)}\right]$$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Corollaire 15.- Sous les hypothèses du corollaire 6, on a :

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(y) - f(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(y) - f(y)| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{336AMd} \cdot (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right]$$

4°) *Remarques*.

Bien que les hypothèses différent quelque peu, le résultat prouvé ici sur la vitesse de convergence des estimateurs de la densité spectrale est plus performant que celui de V.F. Gaposhkin [12]. De plus les hypothèses ici infligées aux poids sont très larges, et nos résultats restent vrais par certains changements de base (décrits au chapitre I, § III 2°).

5°) *Application à l'erreur de prédiction linéaire*.

On rappelle que l'erreur de prédiction linéaire vaut :

(117) $$\sigma^2 = 2\pi \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log } f(\lambda)\, d\lambda\right]$$ (voir [25]) .

Proposition 10.- On suppose que $\inf\limits_{\lambda\in[-\pi,\pi]} f(\lambda) > 0$.

Sous les hypothèses de la proposition 9, en posant :

$$\hat{\sigma}_T^2 = 2\pi \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log } \hat{f}_T(\lambda)\, d\lambda\right]$$

Alors, on a : $$\hat{\sigma}_T^2 \xrightarrow[T\to+\infty]{\text{p.s.}} \sigma^2 \ .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_0), (C_1), (C_2), (C_3), alors pour T assez grand, on a :

$$P(|\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left(-\frac{T}{K_T\, k} \cdot \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{72K\Lambda Md}\right)$$

où $\Lambda = 8\, M'^2 \sum\limits_{r=0}^{\infty} \alpha(r)$

Démonstration : La proposition 9, pour T assez grand, prouve que : $\hat{f}_T > 0$. Le théorème des accroissements finis, pour T assez grand, donne :

$$\left|\mathrm{Log}\ \hat{f}_T(\lambda) - \mathrm{Log}\ f(\lambda)\right| \leq K \left|\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right| \tag{118}$$

où $K = 2 \Big/ \inf_{\lambda \in [-\pi,\pi]} f(\lambda)$.

Ainsi on a :

$$\mathrm{Log}\ \frac{\hat{f}_T(\lambda)}{f(\lambda)} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0 \quad \text{p.s. uniformément par rapport à } \lambda. \tag{119}$$

Il est aisé de vérifier que :

$$\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2 = \sigma^2\left[\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Log}\ \frac{\hat{f}_T(\lambda)}{f(\lambda)}\, d\lambda\right) - 1\right] \tag{120}$$

Alors (119) et (120) permettent de conclure que :

$$\hat{\sigma}_T^2 \longrightarrow \sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

D'autre part, on a clairement :

$$\sup_{\lambda \in [-\pi,\pi]} |f(\lambda)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} |\sigma(r)| \ .$$

Le lemme d'Ibragimov (voir [19]) permet, sous (H_0), d'écrire :

$$\sup_{\lambda \in [-\pi,\pi]} |f(\lambda)| \leq \frac{4M'^2}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \alpha(r) \ . \tag{121}$$

En majorant, grâce à (121), l'expression (117), on obtient :

$$\sigma^2 \leq 8M'^2 \sum_{r=0}^{\infty} \alpha(r) = \Lambda \ . \tag{122}$$

Pour T assez grand, on a :

$$(123) \qquad \mathrm{Log}\, \frac{\hat{f}_T(\lambda)}{f(\lambda)} \leq \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\mathrm{Log}\, \hat{f}_T(\lambda) - \mathrm{Log}\, f(\lambda)\right|$$

On en déduit que, pour T assez grand, on a :

$$(124) \qquad \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Log}\, \frac{\hat{f}_T(\lambda)}{f(\lambda)}\, d\lambda\right) \leq$$

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\mathrm{Log}\, \hat{f}_T(\lambda) - \mathrm{Log}\, f(\lambda)\right| d\lambda\right)$$

De (118), on tire :

$$(125) \qquad \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\mathrm{Log}\, \hat{f}_T(\lambda) - \mathrm{Log}\, f(\lambda)\right| \leq K \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right|$$

(124) et (125) permettent alors d'écrire :

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}\, \frac{\hat{f}_T(\lambda)}{f(\lambda)}\, d\lambda\right) \leq \exp\left(K \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right|\right) .$$

Ce qui, grâce à (120), donne la majoration :

$$(126) \qquad \left|\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2\right| \leq \sigma^2 \left|\exp\left(K \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right|\right) - 1\right|$$

Le théorème des accroissements finis donne :

$$(127) \qquad \exp\left(K \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right|\right) - 1 =$$

$$K \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right| . \exp(y_T(\lambda))$$

où $y_T(\lambda) \in \left]0 , \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left|\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right|\right[$.

Alors, pour T assez grand, on a :

(128) $$\left|\exp\left(K \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)|\right) - 1\right| \leqslant 2K \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)|$$

Finalement (126), (128) et (122) permettent d'écrire, pour T assez grand :

(129) $$|\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2| \leqslant 2\, K\Lambda \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)|$$

On en déduit finalement que :

(130) $$P(|\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2| > \varepsilon) \leqslant P\left(\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)| > \frac{\varepsilon}{2K\Lambda}\right)$$

La proposition 4 et le théorème 4 permettent de conclure.

6°) *Application à l'erreur d'interpolation linéaire.*

L'erreur d'interpolation linéaire vaut :

$$\sigma^2 = 4\pi^2 \Big/ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda)}\, d\lambda$$

Sous l'hypothèse que $\frac{1}{f(\lambda)}$ est intégrable (voir [27] p. 82-85 , ou [28] p. 163-168).

Faisons l'hypothèse que : $\inf_{\lambda\in[-\pi,\pi]} f(\lambda) = m > 0$.

Posons $M'' = \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} f(\lambda)$

En prenant comme estimateur naturel de σ^2 la quantité :

$$\hat{\sigma}_T^2 = 4\pi^2 \Big/ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\hat{f}_T(\lambda)}\, d\lambda$$

On montre que (comme au 5°) :

$$|\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2| \leq \frac{M''^2}{\pi\, m^2} \sup_{\lambda \in [-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)|$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 11.- Sous les hypothèses précédentes, on a :

$$\hat{\sigma}_T^2 \xrightarrow[T \to +\infty]{p.s.} \sigma^2$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, si on suppose (H_0), (C_1), (C_2), (C_3), et pour T assez grand, on a :

$$P(|\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{T}{K_T . k} \cdot \frac{\varepsilon\, \pi^{3/2}\, m^2}{36 M''^2 M d}\right]$$

Remarque.- Les résultats obtenus présentement sur les erreurs de prédiction et d'interpolation linéaires améliorent nettement ceux de U. Grenander et M. Rosenblatt ([27] p. 267-270).

V - APPLICATION A L'ESTIMATION DES DERIVEES DE LA DENSITE SPECTRALE.-

1°) Présentation du problème.

On prend ici $(E,\mathcal{B}) = (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et $(F,\mathcal{C}) = ([-\pi,\pi], \mathcal{B}_{[-\pi,\pi]})$.

$\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur F.

Désignons par $G = F^2([-\pi,\pi], p)$ l'espace des fonctions réelles définies sur $[-\pi,\pi]$, k fois dérivables, de carré intégrable, ainsi que leurs k dérivées, et vérifiant :

(131) $\forall f \in G \qquad f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi) \qquad \forall k = 0,1,\ldots,p$.

Soit $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ le système trigonométrique orthonormé complet de $L^2(\mu)$ décrit au § IV, 1° .

On suppose que le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est borné :

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad |x_t| \leq M'$$

et que :

(132) $$\forall k = 0,1,\ldots,p \qquad \sum_{r=1}^{\infty} r^k |\sigma(r)| < +\infty$$

Le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une densité spectrale donnée par (116).

D'où :

(133) $$\forall y \in [-\pi, \pi] \;;\quad \forall k = 0,1,\ldots,p \;;$$
$$f^{(k)}(y) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} r^k \, \sigma(r) \cos(yr + k\frac{\pi}{2}) .$$

Il est immédiat de vérifier que :

(134) $$\forall k = 0,1,\ldots,p \quad ; \quad f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$$

on a évidemment :

(135) $$\forall y \in [-\pi, \pi] \quad f^{(k)}(y) = \sum_{r\in\mathbb{N}} a_{rk}\, e_r(y)$$ (convergence au sens de $L^2(\mu)$)

avec :

(136) $$\forall r \in \mathbb{N} \;;\quad \forall k = 0,1,\ldots,p \;;$$
$$a_{rk} = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t)\, e_r(t)\, dt .$$

En intégrant k fois par parties, grâce à (134), on obtient :

$$(137) \qquad \forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall k = 0,1,\ldots,p \quad ; \quad a_{rk} = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} e_r^{(k)}(t)\, f(t)\, dt$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$(138) \quad \begin{cases} \text{- Pour } r = 0 & a_{ok} = 0 \quad \text{pour } k \geqslant 1 \\ & a_{oo} = \dfrac{\sigma(0)}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{pour } k = 0 \\ \text{- Pour } r \geqslant 1 \ ; \ q \in \mathbb{N} \ ; \ k' \in \mathbb{N} & \\ \text{Si } r = 2(q+1) \text{ et } k = 2k'+1 & a_{rk} = \dfrac{(-1)^{(3k-1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{r}{2}\right)^k \sigma\left(\dfrac{r}{2}\right) \\ \text{Si } r = 2(q+1) \text{ et } k = 2k' & a_{rk} = 0 \\ \text{Si } r = 2q+1 \text{ et } k = 2k'+1 & a_{rk} = 0 \\ \text{Si } r = 2q+1 \text{ et } k = 2k' & a_{rk} = \dfrac{(-1)^{3k/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{r+1}{2}\right)^k \sigma\left(\dfrac{r+1}{2}\right) \end{cases}$$

Ainsi, si k est pair ($k \neq 0$), (135) s'écrit :

$$(139) \quad \forall y \in [-\pi,\pi] \ ; \quad f^{(k)}(y) = \sum_{q=1}^{\infty} a_{2q-1,k}\, e_{2q-1}(y) =$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k/2}}{\sqrt{\pi}}\, q^k\, \sigma(q) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos qy\right)$$

Si k est impair, (135) s'écrit :

$$(140) \quad \forall y \in [-\pi,\pi] \ ; \quad f^{(k)}(y) = \sum_{q=0}^{\infty} a_{2(q+1),k}\, e_{2(q+1)}(y) =$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(3k-1)/2}}{\sqrt{\pi}}\, q^k\, \sigma(q) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin qy\right)$$

Les valeurs des a_{rk} et la condition (132) permettent aisément de vérifier (1) et (2). Seule la fonction ϑ_r n'est pas uniformément bornée, ce qui va nous obliger à modifier légèrement la démonstration du théorème 3.

Pour estimer $f^{(k)}$ à partir des observations $x_1,\ldots,x_T$, nous utilisons l'estimateur (107) avec des poids de la classe 2 :

$$\forall y \in [-\pi,\pi] \quad ; \quad \hat{f}_{k,T}(y) = \sum_{r=0}^{K_T} w_T(r)\, \hat{a}_{rk}\, e_r(y)$$

où les $\hat{a}_{rk}$ sont de la forme (138), les $\sigma(r)$ étant remplacés par $\hat{\sigma}(r) = \frac{1}{T-r} \sum_{t=1}^{T-r} x_t\, x_{t+r}$.

Un traitement similaire à celui de la démonstration du théorème 3 permet d'écrire, pour $T \geqslant \max(T_o, T_1)$ et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\left(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} \left|\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)\right| > \varepsilon\right) \subset \bigcup_{j=1}^{K_T} \left(\left|\hat{\sigma}(j) - \sigma(j)\right| > \frac{\pi\varepsilon}{2Mj^k K_T}\right)$$

$$\subset \bigcup_{j=1}^{K_T} \left(\left|\hat{\sigma}(j) - \sigma(j)\right| > \frac{\pi\varepsilon}{2MK_T^{k+1}}\right)$$

2°) *Résultats.*

Le théorème 3 se transcrit alors comme suit :

***Proposition** 12.-* Sous les hypothèses de théorème, si :

$$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T^{k+1}} = +\infty \qquad \forall k = 0,1,\ldots,p \quad .$$

Si, pour T' assez grand, et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(- \frac{\varepsilon(T-r)\pi}{6MK_T^{k+1}k(T)d}\right) \left[\exp\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{T-r}}{k^2(T)d^2}\right) +\right.$$

$$\left.\alpha(k(T-r)-r) \exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-r}{k(T)}\right)\right] < +\infty$$

Alors :

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \qquad \forall k = 0,1,\dots,p .$$

- Soit $\varepsilon > 0$, posons :

$$(C_1^k) \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)K_T^{k+1}} = +\infty \qquad \forall k = 0,1,\dots,p$$

(C_2^k) pour T assez grand ; pour $k = 0,1,\dots,p$;

$$K_T \,(\mathrm{Log}\, K_T^{k+1}) < \frac{T\,\varepsilon\,\sqrt{\pi}}{140Mdk(T)}$$

Le théorème 4 se traduit par :

Corollaire 16.- Soit $\varepsilon > 0$. Sous les hypothèses précédentes, sous (H_0), (C_1^k), (C_2^k), (C_3) , et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon\right) \leq 4e \exp\left[- \frac{T}{K_T^{k+1}\, k(T)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{36Md}\right]$$

pour tout $k = 0,1,\dots,p$.

3°) *Examen de deux cas particuliers.*

Les corollaires 1, 2, 3 et 4 se traduisent comme suit :

Corollaire 17.- Sous les hypothèses du corollaire 5, et si de plus :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T^{k+1}} = +\infty \qquad \forall k = 0,1,\dots,p .$$

Alors $\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \qquad \forall k = 0,1,\dots,p$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{300A^{k+1}Md} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)}\right]$$

$$\forall k = 0,1,\dots,p$$

et où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Corollaire 18.- Sous les hypothèses du corollaire 6, et si de plus :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T^{k+1}} = +\infty \qquad \forall k = 0,1,\dots,p \quad .$$

Alors :

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \qquad \forall k = 0,1,\dots,p \; .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_{k,T}(y) - f^{(k)}(y)| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{336A^{k+1}Md} \cdot (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right]$$

$$\forall k = 0,1,\dots,p \quad .$$

VI - APPLICATION A L'ESTIMATION DE LA FONCTION DE REPARTITION SPECTRALE.-

1°) *Présentation du problème.*

On reprend ici les notations et les hypothèses faites au § IV.

Le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une densité spectrale (116) que, grâce à (114), on peut intégrer terme à terme, donnant la fonction de répartition spectrale :

$$\forall y \in [-\pi,\pi] \qquad F(y) = \frac{\sigma(0)}{2\pi}(y+\pi) + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sigma(r)\sin yr}{r} \; .$$

A partir des observations $x_1,\dots,x_T$, on définit un estimateur naturel de la fonction de répartition spectrale :

$$\forall y \in [-\pi,\pi] \quad \hat{F}_T(y) = \frac{1}{2}\hat{\sigma}(0)\,(y+\pi) + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{K_T} \frac{w_T(r)\,\hat{\sigma}(r)\sin yr}{r}$$

où $\hat{\sigma}(r) = \frac{1}{T-r}\sum_{t=1}^{T-r} x_t\, x_{t+r}$ et où les w_T sont choisis dans la classe 2.

On a alors :

$$\forall y \in [-\pi,\pi] \quad ;$$

$$|\hat{F}_T(y) - F(y)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,|\hat{\sigma}(0) - \sigma(0)|\,(y+\pi) +$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} |w_T(r)\,\hat{\sigma}(r) - \sigma(r)| \, . \frac{|\sin yr|}{r}$$

D'où :

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| \leqslant \sum_{r=0}^{\infty} |w_T(r)\,\hat{\sigma}(r) - \sigma(r)| \; .$$

On peut alors reprendre le traitement classique du chapitre II, pour aboutir aux résultats suivants :

2°) *Résultats.*

Proposition 13.- Sous les hypothèses de la proposition 9 , si pour T' assez grand, et si pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{T>T'}\sum_{r=0}^{K_T} \exp\left(-\frac{\varepsilon(T-r)}{6M(K_T+1)kd}\right)\left[\exp\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\sigma^2_{T-r}}{k^2 d^2}\right) + \alpha(k-r)\exp\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{T-r}{k}\right)\right] < +\infty$$

Alors :
$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Si, de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_1), (H_2), (C_1), (C_2), (C_3), alors pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{T}{K_T\ k(T)} \cdot \frac{\varepsilon}{36Md}\right] .$$

3°) *Examen de deux cas particuliers.*

Corollaire 19.- Sous les hypothèses du corollaire 5, on a :

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{300AMd} \cdot T^{1-(\alpha+\beta)}\right]$$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$.

Corollaire 20.- Sous les hypothèses du corollaire 6, on a :

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |\hat{F}_T(y) - F(y)| > \varepsilon) \leq 4e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{336AMd} \cdot (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right] .$$

VII - APPLICATION A L'ESTIMATION DES COVARIANCES ET CORRELATIONS.-

Bien que l'estimation des covariances n'entre pas, stricto sensu, dans le cadre de l'étude des chapitres I et II, il nous a paru intéressant de signaler les résultats ci-dessous, à notre connaissance inédits.

1°) *Estimation des covariances.*

a) *Position du problème.*

On prend $(E,\mathcal{B}) = ([a,b], \mathcal{B}_{[a,b]})$.

Faisons les hypothèses classiques :

$$\lim_{T\to+\infty} K_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{K_T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K_T} = +\infty .$$

On suppose qu'on a observé $x_1,\dots,x_T$. Définissons classiquement un estimateur de la covariance par :

$$\forall r \; ; \quad |r| \leq K_T \qquad \begin{cases} \hat{\sigma}_T(r) = \dfrac{1}{T-r} \displaystyle\sum_{t=1}^{T-r} x_t \, x_{t+r} \\ \\ \hat{\sigma}_T(-r) = \hat{\sigma}_T(r) \end{cases} .$$

Supposons, de plus que : $E(X_{1,r}^2) > 0$, c'est-à-dire que $(x_1 \, x_{1+r})_{r\in\mathbb{Z}}$ est un processus non dégénéré.

b) *Résultats.*

Avec les notations du chapitre II, on a :

$$P(|\hat{\sigma}_T(r) - \sigma(r)| > \varepsilon) \leq P(|S_{T-r}| > \varepsilon(T-r)) \qquad \forall r : 0 \leq r \leq K_T .$$

Grâce à l'inégalité de Bernstein (lemme 4, chap. II), on obtient :

$$P(|\hat{\sigma}_T(r) - \sigma(r)| > \varepsilon) \leq 2e \exp(-\frac{\varepsilon(T-r)}{2k(T-r)d}) \times$$

$$\left[\exp(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{T-r}}{k^2(T-r)d^2}) + \alpha(k(T-r)-r) \exp(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-r}{k(T-r)})\right] \qquad \forall r \in \mathbb{N} : \quad r \leq K_T .$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 14.- On suppose avoir (H_o) . Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si pour T' assez grand, et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{T>T'} \exp(-\frac{\varepsilon(T-r)}{2k(T-r)d}) \times \left[\exp(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{T-r}}{k^2(T-r)d^2}) + \alpha(k(T-r)-r) \times \right.$$

$$\left. \exp(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-r}{k(T-r)})\right] < +\infty .$$

Alors, pour tout r : $|r| < K_T$, on a :

$$\hat{\sigma}_T(r) \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} \sigma(r) .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$\forall r : |r| \leq K_T$.

$$P(|\hat{\sigma}_T(r) - \sigma(r)| > \varepsilon) \leq 2e \exp(-\frac{\varepsilon T}{4k(T)d}) +$$

$$2e\ \alpha(k(T-K_T)-K_T) \exp\left[-\frac{T}{k(T)} (\frac{\varepsilon}{2d} + \frac{6}{5} \cdot \frac{k(T)}{k(T-K_T)})\right]$$

<u>Démonstration</u> : Similaire à celle des théorèmes 3 et 4.

c) *Examen de deux cas particuliers.*

Corollaire 21.- Sous les hypothèses du corollaire 5, on a :

$\forall r : \ |r| \leqslant K_T$;

$$\hat{\sigma}_T(r) \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} \sigma(r) \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{|r|\leqslant K_T} |\hat{\sigma}_T(r) - \sigma(r)| > \varepsilon) \leqslant 4e \exp(-\frac{\varepsilon T^{1-\beta}}{8Bd})$$

où $B > 1$ et β vérifie : $\max(\frac{1}{2}, \alpha) < \beta < 1$.

Corollaire 22.- Sous les hypothèses du corollaire 6, on a :

$\forall r : \ |r| \leqslant K_T$;

$$\hat{\sigma}_T(r) \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} \sigma(r) \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{|r|\leqslant K_T} |\hat{\sigma}_T(r) - \sigma(r)| > \varepsilon) \leqslant 4e \exp(-\frac{5\varepsilon \operatorname{Log} T}{48d}) \quad .$$

2°) *Estimation des corrélations.*

a) *Position du problème.*

On suppose ici, que $\sigma(0) > m > 0$.

Pour tout $r : |r| \leqslant K_T$, un estimateur naturel de la corrélation $\rho(r)$ est :

$$\hat{\rho}_T(r) = \frac{\hat{\sigma}_T(r)}{\hat{\sigma}_T(0)}$$

(T est choisi assez grand pour que : $\hat{\sigma}_T(0) > 0$).

Il est aisé de vérifier que, pour T assez grand, on a :

$$|\hat{\rho}_T(r) - \rho(r)| \leq \frac{4}{m} \sup_{|r| \leq K_T} |\hat{\sigma}_T(r) - \sigma(r)|$$

Cette dernière inégalité permet de donner les résultats suivants comme corollaires de ceux du paragraphe précédent.

b) *Résultats.*

Proposition 15.- Sous les hypothèses précédentes et si, pour T' assez grand, et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{T > T'} \exp\left(- \frac{\varepsilon m(T-r)}{8k(T-r)d}\right) \times \left[\exp\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2_{T-r}}{k^2(T-r)d^2}\right) + \alpha(k(T-r)-r) \exp\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{T-r}{k(T-r)}\right)\right] < +\infty .$$

Alors, on a :

$$\forall r : |r| \leq K_T$$

$$\hat{\rho}_T(r) \xrightarrow[T \to +\infty]{\text{p.co.}} \rho(r)$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$\forall r : |r| \leq K_T$$

$$P(|\hat{\rho}_T(r) - \rho(r)| > \varepsilon) \leq 2e \exp\left(- \frac{mT}{16k(T)d}\right) + 2e\, \alpha(k(T-K_T)-K_T) \exp\left[- \frac{T}{k(T)} \cdot \left(\frac{m\varepsilon}{8d} - \frac{6}{5} \cdot \frac{k(T)}{k(T-K_T)}\right)\right]$$

Corollaire 23.- Sous les hypothèses du corollaire 21, on a :

$\forall r : |r| \leqslant K_T$

$$\hat{\rho}_T(r) \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} \rho(r)$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand , on a :

$$P\left(\sup_{|r|\leqslant K_T} |\hat{\rho}_T(r) - \rho(r)| > \varepsilon \right) \leqslant 4e \exp\left(- \frac{m\varepsilon T^{1-\beta}}{32Bd}\right)$$

où $B > 1$ et β vérifie : $\max(\frac{1}{2} , \alpha) < \beta < 1$.

Corollaire 24.- Sous les hypothèses du corollaire 22, on a :

$\forall r : |r| \leqslant K_T$

$$\hat{\rho}_T(r) \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} \rho(r)$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{|r|\leqslant K_T} |\hat{\rho}_T(r) - \rho(r)| > \varepsilon \right) \leqslant 4e \exp\left(- \frac{5m\varepsilon \mathrm{Log}\ T}{192d}\right) .$$

VIII - APPLICATION A L'ESTIMATION DE LA DENSITE CONDITIONNELLE ET DES FONCTIONS DE REGRESSION.-

(A) - ESTIMATION DE LA DENSITE CONDITIONNELLE.

1°) *Densité bidimensionnelle.*

a) *Position du problème.*

On choisit $(E,\mathcal{B}) = (F,\mathcal{C}) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p})$.

$\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$.

On fixe un entier $m > 1$.

Soit $(e_r)_{r\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé complet de $L^2(\mu)$, formé de fonctions continues et uniformément bornées. Alors $(e_r\ e_s)_{(r,s)\in\mathbb{N}^2}$ est un système orthonormé complet de $L^2(\mu \otimes \mu)$, formé de fonctions continues et uniformément bornées par rapport à r et s.

On suppose que la loi de $(x_1\ x_{m+1})$ admet une densité h par rapport à $\mu \otimes \mu$, appartenant à $L^2(\mu \otimes \mu)$.

On a alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2p} \qquad h(x,y) = \sum_{r,s=0}^{+\infty} a_{rs}\ e_r(x)\ e_s(y)$$

où :

$$a_{rs} = \iint h(x,y)\ e_r(x)\ e_s(y)\ dx\ dy = E(e_r(x_1)\ .\ e_s(x_{m+1}))$$

(2) est donc vérifiée.

Faisons l'hypothèse que :

$$\sum_{r,s=0}^{+\infty} |a_{rs}| < +\infty \iff \sum_{r,s=0}^{+\infty} \left|\iint h(x,y)\ e_r(x)\ e_s(y)\ dx\ dy\right| < +\infty .$$

Ainsi que la suivante :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad ; \quad E(X^2_{1,r,s}) > 0 \qquad \text{où}$$

$$X_{1,r,s} = e_r(x_1)\; e_s(x_{m+1}) - a_{rs}$$

c'est-à-dire que le processus $(e_r(x_1) \,.\, e_s(x_{m+1}))_{(r,s)\in\mathbb{N}^2}$ est non dégénéré.

Au vu des observations $x_1,\dots,x_T$, utilisons l'estimateur "naturel" suivant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2p} \qquad \hat{h}_T(x,y) = \sum_{\substack{0\leq r\leq K^1_T \\ 0\leq s\leq K^2_T}} \hat{a}_{rs}\; e_r(x)\; e_s(y)$$

où $\hat{a}_{rs} = \dfrac{1}{T-m} \displaystyle\sum_{t=1}^{T-m} e_r(x_t)\; e_s(x_{t+m})$.

Supposons enfin que :

$$\lim_{T\to+\infty} K^1_T = \lim_{T\to+\infty} K^2_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{k(T)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{k(T)}{K^1_T\; K^2_T} = +\infty.$$

b) *Résultats*.

Le théorème 3 se traduit par :

Proposition 16.- Sous les hypothèses précédentes, et s'il existe $T' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$(141) \quad \sum_{T>T'} \sum_{r=0}^{K^1_T} \sum_{s=0}^{K^2_T} \exp\left(-\frac{\varepsilon(T-m)}{4S^2 d^2 (K^1_T+1)(K^2_T+1)}\right) \times$$

$$\left[\exp\left(\frac{3}{8} \,.\, \frac{\sigma^2_{T-m}}{k^2(T-m)d^2}\right) + \alpha(k(T-m)-m)\, \exp\left(\frac{6}{5} \,.\, \frac{T-m}{k(T-m)}\right)\right] < +\infty$$

Alors, on a :

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} |\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

- On pose :

$$\tau^2_{r,s} = E(X^2_{1,r,s}) + 2 \sum_{\nu>1} E(X_{1,r,s}\, X_{\nu,r,s})$$

et l'on suppose que :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad , \quad \tau^2_{r,s} > 0 \quad .$$

Les hypothèses (H_1) et (H_2) s'écrivent ici :

(H'_1) $\qquad \forall (r,s) \in \mathbb{N}^2 \quad , \quad \tau^2_{r,s} \leq M$

(H'_2) $\qquad \exists \delta \in]0,1[\; ; \; \exists T_1 \in \mathbb{N} \; ; \; \forall T \in \mathbb{N} \quad , \quad T \geq T_1 \; , \; \forall (r,s) \in \mathbb{N}^2 \; ,$

$$(1-\delta)\, \tau^2_{r,s} \leq \frac{\sigma^2_{T-m}}{T-m} \leq (1+\delta)\, \tau^2_{r,s} \quad .$$

Remarque.- La proposition 4 reste valable dans ce cas particulier.

- Les hypothèses (C_1), (C_2), (C_3) s'écrivent :

(C'_1) $\qquad \lim_{T\to+\infty} \dfrac{T}{k(T) K^1_T K^2_T} = +\infty \quad .$

$\forall \varepsilon > 0$.

(C'_2) $\qquad$ Pour T assez grand ,

$$K^1_T\, K^2_T\, \mathrm{Log}\left[(K^1_T + 1)\, (K^2_T + 1)\right] < \frac{T\, \varepsilon}{140 S^2 d k(T)}$$

(C'_3) Pour T assez grand,

$$\alpha(k(T-m)-m) \leqslant \exp\left[-\frac{6}{5}\cdot\frac{T}{k(T-m)}\right] .$$

Le théorème 4 se transcrit alors comme suit :

Corollaire 25.- Sous les hypothèses précédentes, et si pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_0), (C'_1), (C'_2), (C'_3), alors pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} |\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)| > \varepsilon\right) \leqslant$$

$$4e \cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon}{36S^2d}\cdot\frac{T}{K_T^1K_T^2\ k(T)}\right] .$$

c) *Examen de deux cas particuliers.*

Comme dans le cas unidimensionnel, on obtient :

Corollaire 26.- Si $\alpha(n) = a\,\rho^n$ avec $a > 0$; $0 < \rho < 1$; $n \geqslant 1$.

Si $K_T^1 = A_1\ \alpha_{1,T}\ T^{\alpha_1}$ avec $A_1 > 0$; $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$; $1 < \alpha_{1,T} \leqslant 2$ (pour rendre K_T^1 entier).

Si $K_T^2 = A_2\ \alpha_{2,T}\ T^{\alpha_2}$ avec $A_2 > 0$; $1 < \alpha_{2,T} \leqslant 2$ (pour rendre K_T^2 entier) ; $0 < \alpha_2 < \frac{1}{2}$ et $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2 < \frac{1}{2}$.

Alors :

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} |\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} \left|\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)\right| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \, . \exp\left[-\frac{\varepsilon}{300A_1A_2S^2d} \, . \, T^{1-(\alpha'+\beta)}\right]$$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha' + \beta < 1$.

Corollaire 27.- Si $\alpha(n) = \frac{C}{n^{\nu}}$ avec $C > 0$; $\nu > 1$; $n \geqslant 2$.

Si $K_T^1 = A_1 \, \alpha_{1,T} (\mathrm{Log}\ T)^{\alpha_1}$ avec $A_1 > 0$; $0 < \alpha_1 < 1$; $1 < \alpha_{1,T} \leqslant 2$ (pour rendre K_T^1 entier).

Si $K_T^2 = A_2 \, \alpha_{2,T} (\mathrm{Log}\ T)^{\alpha_2}$ avec $A_2 > 0$; $1 < \alpha_{2,T} \leqslant 2$ (pour rendre K_T^2 entier) ; $0 < \alpha_2 < 1$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Alors :

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} \left|\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)\right| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \; .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} \left|\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)\right| > \varepsilon\right) \leqslant 4e \, . \exp\left[-\frac{\varepsilon}{336A_1A_2S^2d} \, . \, (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha}\right].$$

2°) *Estimation de la densité conditionnelle.*

a) *Position du problème.*

On fait sur f densité de x_t les mêmes hypothèses classiques qu'au paragraphe I (chap. III).

Ayant observé $x_1,\dots,x_T$, on définit un estimateur de la densité conditionnelle par :

$$\hat{D}_T(x,y) = \frac{\hat{h}_T(x,y)}{\hat{f}_T(x)} \quad \text{si} \quad \hat{f}_T(x) \neq 0 .$$

$$= 0 \quad \text{sinon} .$$

Il est aisé de montrer que (si $f(x) \neq 0$).

(142) $$\left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \leq \frac{|\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)|}{f(x)} + |\hat{h}_T(x,y)| \cdot \frac{|\hat{f}_T(x) - f(x)|}{f(x) \cdot |\hat{f}_T(x)|}$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^p$ sur lequel f est strictement positive. f y est donc minorée par $m > 0$.

Il est alors facile, grâce à (142), d'obtenir la majoration suivante :

$$\left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \leq A'(|\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)| + |\hat{f}_T(x) - f(x)|)$$

D'où :

$$\sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \leq A' \left(\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} |\hat{h}_T(x,y) - h(x,y)| + \right.$$

$$\left. + \sup_{x\in\mathbb{R}^p} |\hat{f}_T(x) - f(x)| \right) .$$

Grâce aux propositions 5 et 16, on obtient le résultat suivant :

b) *Résultats.*

Proposition 17.- Sous les hypothèses des propositions 5 et 16, pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$ où $f(x) > 0$, on a :

$$\sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

Si, de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose (H_0), (C_1), (C_2), (C_3), (C'_1), (C'_2), (C'_3), alors pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| > \varepsilon\right) \leq 8e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{72A'S^2d} \cdot \frac{T}{K'_T\ k(T)}\right]$$

où $K'_T = \max(K_T^1 \cdot K_T^2 , K_T)$.

c) *Examen de deux cas particuliers.*

Corollaire 28.- Pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$ où $f(x) > 0$, sous les hypothèses des corollaires 5 et 26, on a :

$$\sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| > \varepsilon\right) \leq 8e \exp\left[- \frac{\varepsilon}{600A'A''S^2d} \cdot T^{1-(\alpha''+\beta)}\right]$$

où : $A'' = A_1 \quad A_2$ si $K'_T = K_T^1 \cdot K_T^2$

$= A$ si $K'_T = K_T$

où $\alpha'' = \max(\alpha,\alpha')$

où β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha'' + \beta < 1$.

Corollaire 29.- Pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$ où $f(x) > 0$, sous les hypothèses des corollaires 6 et 27, on a :

$$\sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P\left(\sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| > \varepsilon\right) \leq 8e \,.\, \exp\left[-\frac{\varepsilon}{672A'A''S^2d} \,.\, (\mathrm{Log}\ T)^{1-\alpha''}\right]$$

où A'' et α'' sont définis comme au corollaire 28.

d) Remarques.

- Pour des détails sur l'estimation de la densité conditionnelle, voir [6] et [15].

- Les résultats obtenus donnent une meilleure vitesse de convergence que ceux de [6] et [15].

- On peut également énoncer des théorèmes similaires relatifs à l'estimation conditionnelle de $x_{t_1},\dots,x_{t_m}$ par rapport à $x_{s_1},\dots,x_{s_k}$.

- On pourrait donner également des résultats sur certains prédicteurs car les estimateurs des densités conditionnelles $\hat{f}_T(.|x_{t_1},\dots,x_{t_m})$ permettent de construire des prédicteurs : $\int_{\mathbb{R}} x\ \hat{f}_T(x|x_{t_1},\dots,x_{t_m})\,dx$ de $x_{t_{m+1}}$ sachant $x_{t_1},\dots,x_{t_m}$.

(B) - *ESTIMATION DES FONCTIONS DE REGRESSION.*

1°) Cas où le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est borné.

Supposons que :

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad ; \quad |x_t| \leq M' \quad .$$

Reprenons les notations et hypothèses du paragraphe précédent. Soit K un compact où $f(x) > 0$. Posons :

$$\forall x \in K \quad ; \quad E_\delta(x) = \int_{-M'}^{M'} y^\delta\, f(y|x)\,dy \quad ; \qquad \delta > 0$$

une fonction de régression de x_{t+m} en x_t .

Ayant observé $x_1,\dots,x_T$, un estimateur "naturel" de $E_\delta(x)$ est donné par :

$$\forall x \in K \quad ; \quad \hat{E}_{\delta,T}(x) = \int_{-M'}^{M'} y^\delta \, \hat{D}_T(x,y)\, dy \quad .$$

On obtient aisément la majoration suivante :

$$\sup_{x\in K} |\hat{E}_{\delta,T}(x) - E_\delta(x)| \leq \frac{2\, M'^{\,\delta+1}}{\delta+1} \sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left|\hat{D}_T(x,y) - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \quad .$$

Ce qui conduit à la proposition suivante :

Proposition 18.- Sous les hypothèses de la proposition 17, si le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est borné par M' , alors, sur tout compact K où $f(x) > 0$, on a :

$$\sup_{x\in K} |\hat{E}_{\delta,T}(x) - E_\delta(x)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{E}_{\delta,T}(x) - E_\delta(x)| > \varepsilon) \leq 8e \exp\left[- \frac{\varepsilon(\delta+1)}{144 M'^{\,\delta+1} A' S^2 d} \cdot \frac{T}{K'_T \; k(T)}\right]$$

- Les corollaires 28 et 29 se traduisent ici par :

Corollaire 30.- Sous les hypothèses du corollaire 28, et si le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est borné par M' , alors, on a :

$$\sup_{x\in K} |\hat{E}_{\delta,T}(x) - E_\delta(x)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

sur tout compact K de $\mathbb{R}^p$ où $f(x) > 0$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{E}_{\delta,T}(x) - E_{\delta}(x)| > \varepsilon) \leq 8e \exp\left[- \frac{\varepsilon(\delta+1)}{1200M'^{\delta+1}A'A''S^2d} \cdot T^{1-(\alpha''+\beta)}\right]$$

les constantes étant définies comme au corollaire 28.

Corollaire 31.- Sous les hypothèses du corollaire 29, et si le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est borné par M', sur tout compact K où $f(x) > 0$, on a :

$$\sup_{x\in K} |\hat{E}_{\delta,T}(x) - E_{\delta}(x)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{E}_{\delta,T}(x) - E_{\delta}(x)| > \varepsilon) \leq 8e \cdot \exp\left[- \frac{\varepsilon(\delta+1)}{1344M'^{\delta+1}A'A''S^2d} \cdot (\text{Log } T)^{1-\alpha''}\right]$$

les constantes étant définies comme au corollaire 29.

2°) Cas où le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *n'est pas nécessairement borné.*

Supposons ici, qu'en outre :

$$\forall x \in K \quad ; \quad E_{\delta}(x) = \int_{\mathbb{R}} y^{\delta} \, f(y|x) \, dy \quad ; \, \delta > 0$$

existe (K est toujours un compact de $\mathbb{R}^p$ où $f(x) > 0$).

Prenons comme estimateur :

$$\forall x \in K \quad ; \quad \hat{E}^{*}_{\delta,T}(x) = \int_{-M_T}^{M_T} y^{\delta} \, \hat{D}_T(x,y) \, dy$$

où $\lim_{T\to+\infty} M_T = + \infty$.

Faisons l'hypothèse suivante :

$$(R_1) \qquad \lim_{M\to+\infty} \sup_{x\in K} \int_{|y| \geq M} y^{\delta} f(y|x)\, dy = 0 \quad .$$

Il est alors aisé d'établir que, pour T assez grand, et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{E}^{*}_{\delta,T}(x) - E_{\delta}(x)| > \varepsilon) \leq P(\sup_{\substack{x\in K \\ |y|\leq M_T}} |\hat{D}_T(x,y) - f(y|x)| > \frac{\varepsilon(\delta+1)}{4\, M_T^{\delta+1}})$$

Faisons de plus l'hypothèse suivante :

$$(R_2) \qquad \lim_{T\to+\infty} \frac{T}{K'_T\, k(T)\, M_T^{\delta+1}} = +\infty \qquad \text{où} \quad K'_T = \max(K_T^1\, K_T^2 \, , K_T)$$

on peut alors formuler la proposition suivante :

Proposition 19.- Sous les hypothèses de la proposition 18, et si on suppose (R_1) et (R_2) , alors on a :

$$\sup_{x\in K} |\hat{E}^{*}_{\delta,T}(x) - E_{\delta}(x)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

sur tout compact K où $f(x) > 0$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{E}^{*}_{\delta,T}(x) - E_{\delta}(x)| > \varepsilon) \leq 8e \exp\left[- \frac{\varepsilon(\delta+1)}{288A'S^2 d} \cdot \frac{T}{K'_T\, k(T)\, M_T^{\delta+1}}\right]$$

Examinons les 2 cas particuliers classiques :

Corollaire 32.- Sous les hypothèses du corollaire 30, si on suppose (R_1) et (R_2) , sur tout compact K où $f(x) > 0$, on a :

$$\sup_{x\in K} |E^*_{\delta,T}(x) - E_\delta(x)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 \quad .$$

Si $M_T = A_3\ T^{\alpha_3}$ où $A_3 > 0$; $0 < \alpha_3 < \frac{1}{2}$ avec $\alpha' + \alpha_3 < \frac{1}{2}$,

alors, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{E}^*_{\delta,T}(x) - E_\delta(x)| > \varepsilon) \leqslant 8e \ . \exp\left[- \frac{\varepsilon(\delta+1)}{2400A'A''S^2d} \ . \ T^{1-(\alpha''+\beta)}\right]$$

où A'' est défini par : $(K'_T = \max(K^1_T\ K^2_T\ M_T\ ,\ K_T\ M_T)$

$$\begin{aligned} A'' &= A_1\ A_2\ A_3 \quad && \text{si} \quad K'_T = K^1_T\ K^2_T\ M_T \\ &= A && \text{si} \quad K'_T = K_T\ M_T \end{aligned}$$

où $\alpha'' = \max(\alpha,\ \alpha' + \alpha_3)$

et β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\alpha'' + \beta < 1$.

Corollaire 33.- Sous les hypothèses du corollaire 31 , si on suppose (R_1) et (R_2) , sur tout compact K où $f(x) > 0$, on a :

$$\sup_{x\in K} |\hat{E}^*_{\delta,T}(x) - E_\delta(x) \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

Si $M_T = A_3(\text{Log } T)^{\alpha_3}$ où $A_3 > 0$; $0 < \alpha_3 < 1$ et $\alpha' + \alpha_3 < 1$,

alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour T assez grand, on a :

$$P(\sup_{x\in K} |\hat{E}^*_{\delta,T}(x) - E_\delta(x)| > \varepsilon) \leqslant 8e \exp\left[- \frac{\varepsilon(\delta+1)}{2688A'A''S^2d} \ . \ (\text{Log } T)^{1-\alpha''}\right]$$

où A'' et α'' sont définis comme au corollaire 32.

CHAPITRE IV

AUTRES CONDITIONS DE CONVERGENCE PRESQUE SÛRE DES PARAMETRES DE CLASSE F.

I - CONDITION SUFFISANTE DE CONVERGENCE PRESQUE SÛRE DES ESTIMATEURS DES PARAMETRES DE CLASSE F SANS HYPOTHESE DE MELANGEANCE.-

1°) *Hypothèses générales.*

Nous reprenons toutes les notations et hypothèses des chapitres I et II (§ I 1°), sauf qu'ici, nous ne faisons plus d'hypothèse de mélangeance sur le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. On suppose encore (26 bis). Remarquons que (28) et (29) valent encore.

Inspirées de [29], nous ferons dans la suite l'une des deux hypothèses suivantes :

(H^1_η) $\exists K > 0$; $\exists \eta \in [0,1[$ tel que :

$$E\{|\sum_{t=1}^{T} \varphi(x_t)|^4\} \leq K\ (\sup_{u\in E} |\varphi(u)|)^4\ T^{2+\eta} \quad ; \quad \forall T \geq 1$$

pour toute fonction φ réelle, $\mathcal{B}$-mesurable, bornée, et vérifiant : $E[\varphi(x_1)] = 0$.

(H^2_η) $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus réel et borné :

$\forall t \in \mathbb{Z}$, $|x_t| \leq M'$ et

$\exists K > 0$, $\exists \eta \in [0,1[$ tel que :

$$E\{[\sum_{t=1}^{T} \varphi(x_t)]^4\} \leq K(\sup_{u\in[-M',M']} |\varphi(u)|)^4\ T^{2+\eta} \quad ; \quad \forall T \geq 1$$

pour toute fonction ψ réelle, continue et vérifiant : $E[\psi(x_1)] = 0$.

Remarque.- Les hypothèses ci-dessus peuvent s'entendre avec ψ fonction d'un nombre fini de x_t , c'est-à-dire :

$$\psi(x_t,\ldots,x_{t+h}) \quad \text{où} \quad h > 0 .$$

2°) *Exemples de processus vérifiant l'une des hypothèses précédentes.*

Commençons par un lemme.

Lemme 5.- Si $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus strictement stationnaire, borné par C, centré et α-fortement mélangeant avec :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty \qquad (\text{avec } \alpha(0) = 1).$$

Alors, on a :

$$E\left[\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^4\right] \leq 3072\, C^4 \,.\, \sum_{i=0}^{+\infty} \sqrt{\alpha(i)} \,.\, T^2 .$$

Démonstration : Similaire au lemme 4 p. 172 de Billingsley [20] où l'on remplace le lemme 2 p. 171 de [20] par le lemme d'Ibragimov [19] déjà cité.

- Supposons que $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifie les conditions du lemme précédent.

Soit $\eta_t = \psi(x_t)$, où ψ vérifie les conditions de (H^1_η) (respectivement celles de (H^2_η)). Alors $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus strictement stationnaire, réel, borné, centré, α-fortement mélangeant.

Donc, grâce au lemme précédent, $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifie (H^1_η) (respectivement (H^2_η)).

- Ceci reste vrai si $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus vérifiant : $\eta_t = \psi(x_t,\dots,x_{t+h})$ où h est un entier positif donné. η_t est strictement stationnaire, réel, borné, centré, si ψ vérifie les conditions de (H_η^1) (respectivement celles de (H_η^2)). Il est aussi α'-fortement mélangeant avec : $\alpha'(t) = \alpha(t-h)$. Donc, grâce au lemme 5, $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifie (H_η^1) (respectivement (H_η^2)).

3°) *Résultats*.

On suppose que, pour tout r de $\mathbb{N}$ le processus $(x_i,\dots,x_{i+h(r)})_{i\in\mathbb{N}^*}$ vérifie (H_η^1) (respectivement (H_η^2)).

Posons :

$\forall i \in \mathbb{N}^*$; $\forall r \in \mathbb{N}$;

$$\psi(x_i,\dots,x_{i+h(r)}) = \frac{\psi_r(x_i,\dots,x_{i+h(r)}) - a_r}{T-h(r)}$$

On a alors :

$$\hat{a}_r - a_r = \sum_{i=1}^{T-h(r)} \psi(x_i,\dots,x_{i+h(r)}) \quad .$$

Il est aisé de vérifier que ψ a toutes les propriétés demandées dans (H_η^1) (respectivement dans (H_η^2)).

Soit $\varepsilon > 0$. Grâce à une conséquence de l'inégalité de Markov , on obtient :

$$(143) \qquad P(|\hat{a}_r - a_r| > \frac{\varepsilon}{2MS(K_T+1)}) \leqslant \frac{16M^4S^4(K_T+1)^4}{\varepsilon^4} E(|\hat{a}_r - a_r|^4) \quad .$$

En appliquant (H_η^1) (respectivement (H_η^2)), on a :

$$P(|\hat{a}_r - a_r| > \frac{\varepsilon}{2MS(K_T+1)}) \leqslant \frac{16M^4S^4(K_T+1)^4}{\varepsilon^4} \cdot K \cdot \frac{d^4}{(T-h(r))^4} \cdot (T-h(r))^{2+\eta}$$

Ce qui est majoré, pour T assez grand, par :

$$\frac{34M^4S^4Kd^4}{\varepsilon^4} \cdot \frac{K_T^4}{T^{2-\eta}} \cdot$$

De (41^{bis}), on en déduit alors, pour T assez grand, que :

$$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leqslant \sum_{r=0}^{K_T} \frac{34M^4S^4Kd^4}{\varepsilon^4} \cdot \frac{K_T^4}{T^{2-\eta}}$$

$$\leqslant \frac{35M^4S^4Kd^4}{\varepsilon^4} \cdot \frac{K_T^5}{T^{2-\eta}}$$

Ce qui prouve le résultat suivant :

Théorème 5.- Sous les hypothèses précédentes, si le processus $(x_i,\dots,x_{i+h(r)})_{i\in\mathbb{N}^*}$ vérifie (H_η^1) (respectivement (H_η^2)) et si :

(144) $$\sum_{T\geqslant 2} \frac{K_T^5}{T^{2-\eta}} < +\infty .$$

Alors, on a :

$$\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0 .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

(145) $$P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leqslant \frac{35M^4S^4Kd^4}{\varepsilon^4} \cdot \frac{K_T^5}{T^{2-\eta}} .$$

4°) Remarques.

- La condition (144) ci-dessus est plus simple à vérifier que la condition (38).

- On n'obtient pas une vitesse de convergence exponentielle comme au chapitre II, ce dont on pouvait se douter car les hypothèses (H_η^1) ou (H_η^2) sont plus faibles que les hypothèses de forte mélangeance.

5°) *Applications.*

Le théorème 5 ci-dessus s'applique à toutes les estimations signalées au chapitre III, et où, suivant les cas, on suppose (H_η^1) ou (H_η^2). Par exemple, on suppose (H_η^1) pour l'estimation de la densité, et (H_η^2) pour l'estimation de la densité spectrale.

Nous ne reprendrons pas ici le détail de toutes ces applications, soin que nous laissons au lecteur.

Signalons par exemple qu'on retrouve ainsi les théorèmes 6 et 7 de [30].

II - ETUDE D'UN CAS PARTICULIER.-

Il est clair que le rang à partir duquel (145) est vérifiée dépend de la vitesse de convergence de la série : $\sum_{r=0}^{\infty} |a_r|$.

Nous supposerons dans ce paragraphe que :

(146) $$\exists C > 0 \ ; \ \exists \gamma > 1 \ ; \ \forall r \in \mathbb{N}^* \ ; \quad |a_r| \leqslant \frac{C}{r^\gamma}$$

Remarque : S'il existe $p > 0$, tel que la série : $\sum_{r=1}^{\infty} r^p |a_r|$ converge et tel que la suite $(r^p |a_r|)_{r \in \mathbb{N}^*}$ soit décroissante, alors un lemme classique d'analyse permet d'affirmer que :

$$\exists C > 0 \ ; \ \forall r \in \mathbb{N}^* \ ; \ |a_r| \leqslant \frac{C}{r^{p+1}}$$

ce qui nous donne (146).

1°) *Etude du biais.*

Nous supposerons dans la suite $K_T = 1 + [T^\alpha]$ où $0 < \alpha < 1$.
Etudions le biais suivant les deux classes de poids indiquées au chapitre II (§ I, 1°).

a) *Classe 1.*

D'après (22), on a :

$$\sup_{y \in F} |b_T(y)| \leqslant S \sum_{r=K_T+1}^{\infty} |a_r| \leqslant \frac{SC}{\gamma-1} \times \frac{1}{T^{\alpha(\gamma-1)}}$$

b) *Classe 2.*

Faisons l'hypothèse supplémentaire que la fonction $k(x)$ vérifiant les hypothèses (19) est lipschitzienne d'ordre q dans $[0,1]$:

$$|k(x) - 1| \leqslant M'' x^q \quad ; \quad \forall x \in [0,1] .$$

Dans la suite, sans perte de généralité, nous supposerons M et M'' supérieurs ou égaux à 1.

Deux cas se présentent :

(*) Si $1 < \gamma \leqslant 2$.

On peut toujours choisir les poids tels que : $q < \gamma-1$.
Alors, une étude similaire à celle du chapitre II (§ I, 2° b) aboutit au résultat suivant :

- Si $\alpha q < 1$.

$$\sup_{y \in F} |b_T(y)| \leqslant \frac{6SMM''C(\gamma-q)}{\gamma-q-1} \times \frac{1}{T^{\alpha q}}$$

(*) Si $\gamma > 2$.

On peut toujours choisir les poids tels que : $q \geqslant \gamma-1$.

Une étude semblable à celle du chapitre II (§ I, 2°, b), conduit alors à la majoration ci-dessous :

- Si $\alpha(\gamma-2) < 1$

$$\sup_{y\in F} |b_T(y)| \leqslant \frac{6SMM''C(\gamma-1)}{\gamma-2} \times \frac{1}{T^{\alpha(\gamma-2)}}$$

2°) *Résultats.*

On supposera dans ce paragraphe : $T \geqslant 10$.

Le théorème 5 et l'étude du biais ci-dessus permettent de donner le rang à partir duquel (145) est vérifié dans les différents cas.

a) Classe 1.

Pour tout $\varepsilon > 0$, si :

$$\alpha < \frac{1-\eta}{5} \qquad \text{et} \qquad T > \left[\frac{2SC}{(\gamma-1).\varepsilon}\right]^{1/\alpha(\gamma-1)}$$

Alors, on a :

$$(147) \quad P(\sup_{y\in F} |\hat{g}_T(y) - g(y)| > \varepsilon) \leqslant \frac{16M^4S^4Kd^4}{\varepsilon^4} \times \frac{1}{T^{2-\eta-5\alpha}}$$

b) Classe 2.

Pour tout $\varepsilon > 0$,

* Si $1 < \gamma \leqslant 2$; si $q < \gamma-1$; si $\alpha < \dfrac{1-\eta}{5}$;

et si $$T > \left[\frac{12SMM''C(\gamma-q)}{\varepsilon(\gamma-q-1)}\right]^{1/\alpha q} .$$

Alors, on a (147)

* Si $\gamma > 2$; si $q \geq \gamma-1$; si $\alpha < \min(\frac{1-\eta}{5} ; \frac{1}{\gamma-2})$

et si :

$$T > \left[\frac{12SMM''C(\gamma-1)}{\varepsilon(\gamma-2)}\right]^{1/\alpha(\gamma-2)}$$

Alors, on a (147).

3°) *Remarques*.

- Plus γ est grand, plus le rang à partir duquel (147) est vérifié est petit.

- Les calculs précédents ont été faits dans un cas particulier. Ils ne peuvent être menés dans le cas général que si l'on sait comment se comporte la série de terme général : $|a_r|$.

III - CONVERGENCE UNIFORME PRESQUE SÛRE DES ESTIMATEURS DE LA DENSITÉ SPECTRALE D'UN PROCESSUS FAIBLEMENT STATIONNAIRE ET φ-MELANGEANT.-

1°) *Deux résultats de G.J. Babu* ([31]).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, supposée φ-mélangeante au sens de P. Billingsley ([20]) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall A \in M_1^t \quad ; \quad \forall B \in M_{t+n}^{+\infty}$$

$$|P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| \leq \varphi(n)\,P(A)$$

(les tribus M_1^t et $M_{t+n}^{+\infty}$ étant définies au chapitre I § I , 1°) avec :

- $\lim_{n\to+\infty} \psi(n) = 0$,

- la suite $(\psi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante .

Soit $d > 1$. On pose :

$$Y_i = X_i \quad \text{si} \quad |X_i| \leq d$$

$$Y_i = 0 \quad \text{sinon}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} \ ; \quad k \geq 2 \ ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

$$D(n,k,h) = E \left| \sum_{i=1}^{n} Y_{i+h} \right|^k$$

et $D(n,k) = \sup_{h\in\mathbb{N}} D(n,k,h)$.

G.J. Babu a prouvé les deux résultats suivants :

Proposition 20.- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles ψ-mélangeante avec :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\psi(n))^\delta < +\infty \qquad (0 < \delta \leq 1) .$$

On suppose qu'il existe $p > 1$ et $M > 1$ tels que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} E\left[|X_n|^p\right] \leq M \ .$$

On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad E(X_n) = 0$$

et que : $0 < \delta \leq \max(\frac{1}{p} \ ; \ 1 - \frac{1}{p})$.

Alors, pour tous réels $k \geq 2$, $q > 0$, $p > q$, il existe une constante $a = a(k,p,q,M,\psi)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;;\; 1 \leq n \leq d^q \;;$$

$$D(n,k) \leq a\left[n^{k/2} + n\, d^{k-p}\right] .$$

Sous les hypothèses de la proposition 20, il obtient le corollaire suivant :

Corollaire 34.- Soient $A > 0$; $\beta > 0$; $\alpha > \frac{1}{2}$ avec $p\alpha > 1$.

Alors il existe $K(\theta)$ tel que :

(148) $$\forall n \geq 3 \;;\; P\Big(\sup_{1\leq j\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{j} X_{i,n}\Big| > 3\, A\, n^{\alpha}\Big) \leq$$

$$2\, A^{-\theta}\, K(\theta)\, n^{1-p\alpha}\, (\mathrm{Log}\; n)^{-2}$$

où $\theta = \max\left(3 \;;\; \frac{2\alpha p+4}{2\alpha-1} \;;\; p + \frac{4}{\beta}\right)$

où $X_{i,n} = X_i$ si $|X_i| \leq n^{\alpha}(\mathrm{Log}\; n)^{-\beta}$

$= 0$ sinon .

2°) *Conséquences.*

Dans les conditions du corollaire 34 , on a :

(149) $$P\Big(\sup_{1\leq j\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{j} X_i\Big| > 3\, A\, n^{\alpha}\Big) \leq$$

$$P\Big(\sup_{1\leq j\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{j} X_{i,n}\Big| > 3\, A\, n^{\alpha}\Big) + \sum_{i=1}^{n} P\big(|X_i| > n^{\alpha}\, (\mathrm{Log}\; n)^{-\beta}\big)$$

Soit $\eta > 1$. Alors il existe $t > 0$ et n_1 de $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ n \geq n_1 \ ;$$

$$(150) \quad P(|X_i| > n^{\alpha} (\mathrm{Log}\ n)^{-\beta}) \leq P(|X_i|^p (\mathrm{Log}\ (1 + |X_i|))^{\eta} > t\ n^{\alpha p}(\mathrm{Log}\ n)^{\eta-\beta p})$$

Alors (149), (148) et (150) permettent d'écrire que :

$$(151) \quad P(\sup_{1\leq j\leq n} |\sum_{i=1}^{j} X_i| > 3\ A\ n^{\alpha}) \leq$$

$$2\ A^{-\theta}\ K(\theta)\ n^{1-p\alpha}(\mathrm{Log}\ n)^{-2} + \sum_{i=1}^{n} t^{-1}(\mathrm{Log}\ n)^{\beta p-\eta} \times$$

$$n^{-\alpha p} \sup_{i\geq 1} E\left[|X_i|^p (\mathrm{Log}\ (1 + |X_i|))^{\eta}\right].$$

Posons $N = \sup_{i\geq 1} E\left[|X_i|^p (\mathrm{Log}\ (1 + |X_i|))^{\eta}\right]$ et choisissons : $\beta = \dfrac{\eta-1}{2p}$. (151) s'écrit alors :

$$(152) \quad P(\sup_{1\leq j\leq n} |\sum_{i=1}^{n} X_i| > 3\ A\ n^{\alpha}) \leq 2\ A^{-\theta}\ K(\theta)\ n^{1-p\alpha}\ (\mathrm{Log}\ n)^{-2} +$$

$$t^{-1}(\mathrm{Log}\ n)^{-(\eta+1)/2} \cdot n^{1-p\alpha} \cdot N$$

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 21.- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées ϕ-mélangeante. On suppose qu'il existe $p > 1$ et $\eta > 1$ tel que :

$$(153) \qquad N = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} E\left[|X_n|^p (\mathrm{Log}(1 + |X_n|))^{\eta}\right] < +\infty$$

On suppose que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(n))^{\delta} < +\infty \quad \text{où} \quad 0 < \delta < \max(\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p})$$

Soit $\alpha > \frac{1}{2}$ et $p\alpha > 1$.

Alors, il existe $t > 0$, $K(\theta) > 0$, tel que, pour n assez grand, on ait :

$$(154) \quad P(\sup_{1 \leq j \leq n} |\sum_{i=1}^{j} X_i| > 3 A n^{\alpha}) \leq 2 A^{-\theta} K(\theta) n^{1-p\alpha} (\text{Log } n)^{-2} + t^{-1} (\text{Log } n)^{-(n+1)/2} . n^{1-p\alpha} . N \; .$$

3°) Application à la convergence uniforme presque sûre des estimateurs de la densité spectrale d'un processus faiblement stationnaire.

a) Hypothèses générales.

Soit $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus :

- centré : $\forall t \in \mathbb{Z} \; E(x_t) = 0$
- faiblement stationnaire : $\forall (t,s,h) \in \mathbb{Z}^3$

$$\text{cov}(x_{t+h}, x_{s+h}) = \text{cov}(x_t, x_s) = \sigma(t-s)$$

- φ-mélangeant (voir chap. III, § III, 1°).

On suppose ici que :

$$(155) \qquad \sum_{r=-\infty}^{+\infty} |\sigma(r)| < +\infty \; .$$

Sous les hypothèses précédentes, le processus admet une densité spectrale $f(\lambda)$ définie en (116).

On suppose qu'on a observé $x_1, \ldots, x_T$; on définit un estimateur de la densité spectrale, noté $\hat{f}_T(\lambda)$ par l'expression (116 $^{\text{bis}}$).

b) *Résultats*.

Les résultats du chapitre II, et surtout l'expression (42) nous prouvent que, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand, on a :

$$(156)\quad P\left(\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)| > \varepsilon\right) \leq \sum_{r=0}^{K_T} P\left(\left|\sum_{t=1}^{T-r} X_{t,r}\right| > \frac{\sqrt{\pi}\,\varepsilon(T-r)}{2M(K_T+1)}\right)$$

où $X_{t,r} = x_t\, x_{t+r} - \sigma(r)$

où $\lim\limits_{T\to+\infty} K_T = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{T}{K_T} = +\infty$.

Remarquons que :

- $E(X_{t,r}) = 0$; $\forall t \in \mathbb{N}^*$; $\forall r \in \mathbb{N}$

- le processus $(X_{t,r})_{t\in\mathbb{N}^*}$ est φ'-mélangeant avec :

$$\forall r \in \mathbb{N} \;,\; n > r \;;\; \varphi'(n) = \varphi(n-r) .$$

Soit $K_T = [T^{1-\alpha}]$ où $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Pour $r \leq K_T$ et pour T assez grand, on a :

$$(157)\quad \frac{\sqrt{\pi}\,\varepsilon(T-r)}{2M(K_T+1)} \geq 3\,A\,T^{\alpha}$$

avec :

$$(158)\quad A = \frac{\sqrt{\pi}.\varepsilon}{24\;M} .$$

Alors (152) s'écrit, pour T assez grand :

$$(159)\quad P\left(\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)| > \varepsilon\right) \leq 2\,T^{1-\alpha}\, P\left(\sup_{0\leq r\leq K_T} \left|\sum_{t=1}^{T-r} X_{t,r}\right| > 3\,A\,T^{\alpha}\right)$$

Supposons $p \geq 3$. On peut alors appliquer la proposition 21, donnant le théorème suivant :

Théorème 6.- $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ étant un processus centré, faiblement stationnaire, et ψ-mélangeant ; si on suppose que :

- $\exists p \geq 3$; $\exists \eta > 1$, tel que :

(160) $$N = \sup_{\substack{t\geq 1 \\ r\geq 0}} E\left[|X_{t,r}|^p \, (\mathrm{Log}\,(1 + |X_{t,r}|))^{\eta}\right] < +\infty$$

où $X_{t,r} = x_t\, x_{t+r} - \sigma(r)$.

- Pour $0 < \delta \leq \max(\frac{1}{p}\ ,\ 1 - \frac{1}{p})$

$$\sum_{t=1}^{\infty} (\psi(t))^{\delta} < +\infty$$

Alors $$\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)| \xrightarrow[T\to+\infty]{p.co.} 0$$

avec pour tout $\varepsilon > 0$, et pour T assez grand :

$$P(\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)| > \varepsilon) \leq 4[A(\varepsilon)]^{-\theta}\, K(\theta)\, T^{2-p\alpha-\alpha} (\mathrm{Log}\ T)^{-2}$$

$$+\ 2\ t^{-1} (\mathrm{Log}\ T)^{-(\eta+1)/2} .\ T^{2-p\alpha-\alpha} .\ N$$

où $t > 0$; $K(\theta) > 0$; $A(\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{\pi}.\varepsilon}{24.M}$; $\theta = \max(3\ ;\ \dfrac{2p\alpha+4}{2\alpha-1}\ ;\ p + \dfrac{8p}{\eta-1})$.

4°) Remarques.

a) (160) est vérifiée s'il existe $q > 4$ tel que :

$$\sup_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ r\in\mathbb{N}}} E(|x_t\ x_{t+r}|^q) < +\infty.$$

(160) est vérifiée s'il existe $q > 4$ tel que :

$$\sup_{t\in\mathbb{N}} E(|x_t|^{2q}) < +\infty$$

b) Les calculs faits dans tout ce paragraphe III ne font intervenir en aucune façon la stationnarité du processus, ce qui permettra sans doute de généraliser dans certains cas non-stationnaires à l'estimation des densités spectrales évolutives (voir par exemple [24] - vol. 2 - chapitre 11).

c) Le théorème 6 généralise les résultats de Gaposhkin, ainsi que ceux du chapitre III (§ IV). A notre connaissance, il n'y a pas d'autre résultat sur la convergence uniforme presque sûre des estimateurs de la densité spectrale dans le cas faiblement stationnaire.

IV - CONCLUSION.-

- Cette première tentative d'unification est évidemment susceptible d'améliorations sensibles.

- Par exemple, on peut certainement améliorer l'inégalité de Bernstein employée ici (lemme 4). En effet, il est clair qu'avec des coefficients de mélangeance du type $\alpha(n) = a\,\rho^n$ $(0 < \rho < 1)$, on n'a certes pas indépendance, mais on en n'est pas "très loin". L'idéal serait d'obtenir alors une vitesse de convergence en $O[\exp(-n^\gamma)]$ où $0 < \gamma < 1$ serait aussi proche de 1 que souhaitable. Le premier problème qui se pose est donc "l'optimalité" de l'inégalité de Bernstein, et par conséquent l'optimalité des résultats de cette thèse.

- Le second problème soulevé est celui de la mélangeance. Il paraît souhaitable dans l'avenir de s'en dispenser, car il est clair que si, de loin en loin, dans le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, il y a deux v.a. fortement dépendantes, le résultat n'est pas notablement perturbé. Cette condition de régularité devrait donc être remplacée par une condition plus souple sur la variance de la somme de n v.a. consécutives du processus par exemple.

- Un troisième problème, certainement plus aisé à résoudre a priori, est celui de l'étude de la loi-limite des estimateurs "naturels" construits dans cette thèse, qui permettra dans chaque cas particulier de retrouver des résultats connus.

- Un quatrième problème est celui de l'estimation de la densité spectrale traitée dans le cas strictement (chap. III, § IV), puis faiblement (chap. IV , § III) stationnaire. Remarquons tout d'abord que l'on peut certainement au moins généraliser l'étude faite ici au cas fortement mélangeant. L'étude faite au chap. IV (§ III) ne fait intervenir en aucune façon la stationnarité, sauf pour l'existence de la densité spectrale. La tendance contemporaine de la recherche semblant s'orienter vers les processus non-stationnaires, qui modélisent sûrement mieux les phénomènes à analyser, l'étape suivante sera donc, sans doute, l'étude des spectres évolutifs et leur estimation, où bien des choses restent à faire.

- Un cinquième problème, important pour le praticien, esquissé dans le chapitre IV (§ II) est le rang T_0 à partir duquel on obtient les vitesses de convergence indiquées. Il semble qu'il soit difficile dans les chapitres II et III de donner une réponse, vu la surabondance de paramètres intervenant dans les calculs. On ne peut y apporter de réponses que dans des cas particuliers, réclamant la connaissance du coefficient de mélangeance, de la fonction de poids utilisée, ainsi que le comportement de la série : $\sum_{r=0}^{\infty} |a_r|$.

- Le sixième et primordial problème reste la compréhension totale et l'interprétation du fait que les éléments de F peuvent s'écrire comme des limites de suites d'espérances mathématiques des variables de l'échantillon, en vu de généraliser tout ce travail.

- Bref, les résultats nouveaux obtenus ici en appellent d'autres, et le sujet est loin d'être épuisé.

B I B L I O G R A P H I E.

[7] AKONOM J. (1978)

Estimation de la densité de la partie continue d'une probabilité mixte.

Thèse 3ème cycle - Lille.

[10] ALEKSEEV V.G. (1974)

On the uniform convergence of estimates of the spectral density of a stationary gaussian process.

Theory Prob. Appl., 19, p. 193-200.

[18] ANDERSON T.W. (1971)

The Statistical Analysis of Time Series.

J. Wiley - New-York.

[31] BABU G.J. (1980)

An inequality for moments of sums of truncated φ-mixing random variables and its applications.

Sankhyà : The Indian Journal of Statistics Vol. 42 - Series A pts 1 and 2 ; p 1-8.

[20] BILLINGSLEY P. (1968)

Convergence of probability measures.

J. Wiley - New-York.

[5] BOSQ D. (1970)

Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle.

Publ. de l'Inst. de Stat. de l'Univ. de Paris, XIX.

[6] BOSQ D. (1973)

Sur l'estimation de la densité d'un processus stationnaire et mélangeant.

C.R. Acad. Sciences, Paris, t. 277, Série A, p. 535-538.

[8] BOSQ D. (1975)

Inégalité de Bernstein pour les processus stationnaires et mélangeants. Applications.

C.R. Acad. Sciences, Paris, t. 281, Série A, p. 1095-1098.

[30] BOSQ D. (1980)

Séries chronologiques.

Polycopié D.E.A. (Université Lille).

[11] BRILLINGER D.R. (1975)

Time Serie, Data Analysis and Theory.

J. Wiley, New-York.

[26] CARBON M. (1981)

Sur la convergence uniforme presque sûre des estimateurs de la densité spectrale des processus stationnaires et mélangeants.

C.R. Acad. Sciences, Paris, t. 292, Série I, p. 95-98.

[16] COLLOMB G. (1981)

Estimation non paramétrique de la régression : revue bibliographique.

International Statistical Review.

[15] DELECROIX M. (1975)

Sur l'estimation des densités marginales et de transition d'un processus stationnaire et mélangeant.

Thèse 3ème cycle - Lille.

[22] DESCOMBES (1962)

Cours Analyse Math. I.

[2] DOOB J.L. (1953)

Stochastic Processes.
J. Wiley, New-York.

[1] FRYER M.J. (1977)

A review of Some non-parametric methods of density estimation.
J. Inst. Maths. Applic. 20, p. 335-354.

[12] GAPOSHKIN V.F. (1980)

Almost sure convergence of estimates for the spectral density of a stationary process.
Theory Prob. Appl. 25, n° 1, p. 169-176.

[32] GEFFROY J. (1964)

Sur un problème d'estimation géométrique.
Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 13, p. 191-210.

[27] GRENANDER U. AND ROSENBLATT M. (1957)

Statistical Analysis of stationary time series.
J. Wiley, New-York.

[23] HANNAN E.J. (1960)

Time series Analysis.
J. Wiley, New-York.

[28] HANNAN E.J. (1970)

Mutiple time series.
J. Wiley, New-York.

[19] IBRAGIMOV I.A. (1962)

Some limit theorems for stationary processes.
Theory of prob. and its appl.; vol. VII, n° 4, p. 349-382.

[25] KOLMOGOROV A.N. (1941)

Bull. Acad. Sc. U.S.S.R. Ser. Math. 5 ; p. 3-14.

[13] MASRY E. (1980)

Discrete - Time spectral estimation of continuous - time processes - The orthogonal method.
Ann. of Stat., vol. 8, N° 5, p. 1100-1109.

[5] NGUYEN H.T. (1979)

Density estimation in a continuous - time stationary markov process.
Ann. of Stat., vol. 7, p. 341-348.

[17] PARZEN E. (1957)

On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series.
Ann. of Math. Statist., 28, p. 329-348.

[21] PARZEN E. (1962)

Estimation of density and mode.
A.M.S.

[24] PRIESTLEY M.B. (1981)

Spectral Analysis and time series.
2 tomes ; Academic Press.

[3] ROSENBLATT M. (1956)

A central limit theorem and a strong mixing condition.
Proceedings, vol. 42, p. 43-47.

[4] ROSENBLATT M. (1970)

Density estimates and Markov sequences.
In "Non-parametric techniques in statistical inference"
(M. Puri, ed.) p. 199-210.

[14] ROUSSAS G.G. (1969)

Non parametric estimation of the transition distribution function of a markov process.
Ann. of Stat., vol. 40, p. 1386-1400.

[29] STOUT W. (1974)

Almost sure convergence.
Academic Press.

[9] TORSTIK T.M. (1968)

On the uniform convergence of estimates of the spectral density of a stationary linear process.
Vestnik, L.G.U., 19, p. 64-68 (En Russe).

RÉSUMÉ

Ce travail est essentiellement consacré à l'estimation asymptotique d'une classe $\mathcal{F}$ de paramètres fonctionnels, classe qui contient, sous certaines hypothèses de régularité, les paramètres classiques. Cette classe $\mathcal{F}$ est surtout caractérisée par le fait que les éléments de $\mathcal{F}$ peuvent s'écrire comme des limites de suites d'espérances mathématiques des variables de l'échantillon.

Des résultats relatifs à la convergence uniforme p.s. des estimateurs "naturels" des éléments de $\mathcal{F}$, ainsi qu'une vitesse de convergence, sont fournis, illustrés d'exemples.

Quelques généralisations, sous des hypothèses plus faibles, sont également indiquées.

MOTS - CLEFS

- CONVERGENCE UNIFORME PRESQUE SÛRE.
- ESTIMATION FONCTIONNELLE / DENSITE.
- ESTIMATION FONCTIONNELLE / DENSITE SPECTRALE.
- ESTIMATION FONCTIONNELLE / FONCTION DE REPARTITION.
- PROCESSUS STATIONNAIRE.