N° d'ordre : 946

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

Omar HEBBAR

SOLUTIONS NULLES POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL MATRICIEL ANALYTIQUE RELATIVEMENT A UNE HYPERSURFACE CARACTÉRISTIQUE DOUBLE AVEC UNE CONDITION DE DÉCOMPOSITION

MEMBRES DU JURY : R. BERZIN, *Président*
J.C. de PARIS, *Rapporteur*
D. GOURDIN, *Examinateurs*
D. SCHILTZ, *Examinateurs*

SOUTENUE LE 6 JANVIER 1982

A ma famille

mes amis ...

Monsieur le Professeur Robert Berzin m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, sa présence de tous les instants, ses judicieuses remarques ont aidé à la réalisation de la première partie de ce travail ; qu'il soit ici très vivement remercié.

Je remercie également Messieurs D. Gourdin et D. Schiltz d'avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean-Claude De Paris, qui m'a initié à la théorie des Equations aux Dérivées Partielles, et m'a guidé tout au long de ce travail, par sa disponibilité et ses conseils.

Je témoigne ma gratitude à toute l'équipe de recherche aux Dérivées Partielles de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille I, au sein de laquelle j'ai trouvé une ambiance chaleureuse.

Ma profonde reconnaissance à Arlette Lengaigne qui a assuré avec soin et efficacité la frappe de ce travail.

Je remercie de même Madame Monique Lloret qui a toujours accepté gentiment de me photocopier les documents dont j'avais besoin.

Un grand merci également à Madame Françoise Wdowczyk, Messieurs Albert Gournay et Michel Provost qui ont imprimé cette thèse avec rapidité et compétence.

Je réunis dans un climat amical mes collègues D. Abi-ayad, K. Belabbes, M. Boukrouche, S. Sedjelmaci ,... qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse par des discussions et des remarques pertinentes.

TABLE DES MATIERES.

	Pages
CHAPITRE 0 - INTRODUCTION.	1
CHAPITRE I - RESOLUTION FORMELLE.	2
§ 1 - *Notations - Hypothèses.*	2
§ 2 - *Résolution formelle.*	14
CHAPITRE II - MAJORATION DES Y_j^B .	29
§ 1 - *Fonctions majorantes.*	29
§ 2 - *Majoration des* Y_j^B.	35
CHAPITRE III - SOLUTIONS NULLES.	44
§ 1 - *Rappels sur fonctions ultra-différentiables, ultra-distributions.*	44
§ 2 - *Solutions nulles ultra-différentiables de classe* $\{M_p\}$	48
§ 3 - *Solutions nulles ultra-distributions.*	57
CHAPITRE IV - A PROPOS DE LA CONDITION (L_1^1).	58
§ 1 - *Une autre forme des conditions du chap. I.*	58
§ 2 - *Interprétation de l'opérateur différentiel* R_2.	61
BIBLIOGRAPHIE.	66

CHAPITRE 0

INTRODUCTION.

Suivant une question qui m'a été posée par Monsieur le Professeur J.C. De Paris ; j'ai essayé de construire une solution nulle dans l'espace des ultra-distributions pour un opérateur matriciel h d'ordre t, au voisinage d'un point caractéristique a, dans le cas dit cas II.b. de J. Vaillant [7].

On utilise la méthode de [10], reprise par H. Komatsu dans le cadre des ultra-distributions [3].

Elle consiste d'abord en la construction d'une onde asymptotique de phase φ (équation locale de S), pour l'opérateur h ; c'est l'objet du chap. I, l'essentiel de ces calculs était fait dans [6], [9]; il a fallu préciser le calcul des coefficients de distorsion $(Y_j^B)_{1\leq B\leq m}$, $j \geq 0$ de manière explicite afin de pouvoir les majorer.

La deuxième partie consiste à montrer que les $(Y_j^B)_{1\leq B\leq m}$, $j \geq 0$ vérifient certaines majorations ; on utilise pour cela la méthode des majorantes, sous la forme particulièrement élégante que lui a donnée C. Wagschal [2].

Dans la dernière partie, on démontre la convergence de l'onde asymptotique dans l'espace des ultra-distributions vers la solution nulle voulue. Les calculs sont analogués à ceux de [3].

Le cas où les conditions de Levi ne sont pas satisfaites n'a pu être traité, il le sera dans un autre travail.

CHAPITRE I

RESOLUTION FORMELLE.

---

§ 1 - *Notations - Hypothèses.*

Soit X une variété analytique réelle de dimension $n + 1$.

Soit S une hypersurface analytique de X ; a un point de S, et Ω un voisinage de a tel que :

$\Omega \cap S = \{x : \varphi(x) = 0\}$; on supposera que S est régulière en a ; c'est-à-dire :

$$\text{grad } \varphi(a) \neq 0 .$$

On note (dans une carte locale en a) :

$x = (x^o, x^1, \ldots, x^n) = (x^o, x^1, x'')$; les éléments de l'espace cotangent à X seront notés par (x,ξ).

On adopte les notations de [7] ;

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \;;\; \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \quad \text{pour tout } \alpha \text{ telle que } 0 \leq \alpha \leq n .$$

On considère un opérateur différentiel linéaire matriciel $h = (h^A_B)_{\substack{1 \leq A \leq m \\ 1 \leq B \leq m}}$, d'ordre t sur Ω ; la matrice caractéristique de h au sens de "Cauchy-Kowalewski" sera notée par :

$$H(x,\xi) = (H^A_B(x,\xi))_{1 \leq A, B \leq m} \quad \text{où :}$$

pour chaque (A,B) entre 1 et m ; $H_B^A(x,\xi)$ est le polynôme caractéristique de l'opérateur $h_B^A(x,\partial)$ si celui-ci est d'ordre t et nul sinon ; on suppose qu'elle est non dégénérée en a ; c'est dire que : $(\det H)(a,\xi)$ est non identiquement nul en ξ.

On note par A la matrice des cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de h telle que :

$$(AH)(x,\xi) = (HA)(x,\xi) = (\det H)(x,\xi)\ I \quad ; \quad \forall x \in \Omega \qquad (1) .$$

On écrit :

$$h(x,\partial) = H(x,\partial) + H^{*}(x,\partial) + \dots + H^{*(k)}(x,\partial) + \dots + H^{*(t)}(x,\partial)$$

avec :

$H^{*(k)}(x,\partial) = (H^{*(k)A}_{\ \ B}(x,\partial))_{1 \leq A,B \leq m}$ où $H^{*(k)A}_{\ \ B}(x,\partial)$ est la partie d'ordre $(t-k)$ de $h_B^A(x,\partial)$.

Et :

$$a(x,\partial) = A(x,\partial) + A^{*}(x,\partial) + \dots + A^{*(k)}(x,\partial) + \dots + A^{*((m-1)t)}(x,\partial)$$

où $a(x,\partial)$ est un opérateur différentiel linéaire de matrice caractéristique A.

(H.1) : On suppose qu'il existe H' , H'' analytiques en x, au voisinage de a, polynomiaux en ξ tels que :

$$(\det H)(x,\xi) = (H''(H')^2)(x,\xi) \qquad \forall x \in \Omega\ , \quad (2)$$

vérifiant :

$$H'(x,\ \text{grad}\ \psi(x)) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{3}$$

$$H''(a,\ \text{grad}\ \psi(a)) \neq 0 \tag{4}$$

$(p^{\alpha}(a))_{\alpha} \neq \vec{0}$ où $p^{\alpha}(x) = \partial^{\alpha}H'(x,\ \text{grad}\ \psi(x))$; pour $\alpha : 0 \leqslant \alpha \leqslant n$, (5) .

(c'est-à-dire que S est caractéristique totale simple pour H', et n'est pas caractéristique en a pour H'').

(H.2.) : On suppose que la matrice $H(a,\ \text{grad}\ \psi(a))$ est de rang $(m-1)$; il existe donc un coefficient de la matrice $A(a,\ \text{grad}\ \psi(a))$ non nul. On suppose que c'est $A_1^1(a,\ \text{grad}\ \psi(a))$ c'est-à-dire : S n'est pas caractéristique en a pour A_1^1).

Les hypothèses (H.1.) ; (H.2.) nous permettent de supposer l'existence d'un voisinage de a (qu'on notera encore Ω) tel que :

$$
\begin{aligned}
&A_1^1(x,\ \text{grad}\ \psi(x)) \neq 0 && \forall x \in \Omega && (6)\\
&H''(x,\ \text{grad}\ \psi(x)) \neq 0 && \forall x \in \Omega &&\\
&H'(x,\ \text{grad}\ \psi(x)) = 0 && \forall x \in \Omega &&\\
&(p^{\alpha}(x))_{0 \leqslant \alpha \leqslant n} \neq 0 && \forall x \in \Omega &&
\end{aligned}
$$

Condition de décomposition : [9] , [4].

On dit que h vérifie (D) si et seulement si il existe un opérateur différentiel linéaire matriciel a de matrice caractéristique A et trois opérateurs différentiels matriciels ℓ_o , e, f et un opérateur différentiel scalaire h' de symbole principal H' tels que :

a) $(h \circ a)(x,\partial) = (\ell_o(h')^2 + e \circ h' + f)(x,\partial)$ (7)

b) $$\begin{cases} \mathrm{ord}\left[(h \circ a - \ell_o(h')^2)(x,\partial)\right] \leqslant mt-1 & (8) \\ \text{et} \\ \mathrm{ord}\left[(h \circ a - \ell_o(h')^2 - e \circ h')(x,\partial)\right] \leqslant mt-2 & (9) \end{cases}$$

Définition.- Etant donnés deux polynômes en ξ, à coefficients analytiques en x ; P et Q.

On note :

$$P \equiv Q \ [U]$$

si et seulement si $P - Q$ est divisible par U, en tant que polynôme en ξ, pour tout x dans Ω.

On a :

$$AH \equiv HA \equiv 0 \quad [H'^2] \qquad \text{(conséquence de (H1) et (1))}$$

d'où on déduit immédiatement :

$$(\partial^\alpha H)A \equiv - H(\partial^\alpha A) \quad [H'] \qquad (\partial_\alpha H)A \equiv - H(\partial_\alpha A) \quad [H']$$

$$(\partial^\alpha A)H \equiv - A(\partial^\alpha H) \quad [H'] \qquad (\partial_\alpha A)H \equiv - A(\partial_\alpha A) \quad [H']$$

On rappelle un résultat sur la composition d'opérateurs : pour a,b deux opérateurs matriciels d'ordre respectifs p et q ; la partie d'ordre $(p + q-1)$ de $(a \circ b)(x,\partial)$ est :

$AB^* + A^*B + \partial^j A\ \partial_j B$: $0 \leq j \leq n$ avec (la convention d'EINSTEIN) :
$\partial^j A\ \partial_j B = \sum_{j=0}^{n} \partial^j A\ \partial_j B$; (qu'on utilisera systématiquement par la suite).

Remarques :

1°) Si h vérifie (D) ; on a :

$$\text{ord}(h \circ a - \ell_o (h')^2) < mt$$

c'est-à-dire : $L_o (H')^2 = HA = (\det H) I = H''(H')^2 I$

donc : $$L_o = H'' I \quad .$$

2°) D'autre part, on a :

$$a(x,\partial) = A(x,\partial) + A^*(x,\partial) + \ldots$$

$$h(x,\partial) = H(x,\partial) + H^*(x,\partial) + \ldots$$, c'est-à-dire que :

$$(h \circ a)(x,\partial) = (HA)(x,\partial) + (H^*A + HA^* + \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A)(x,\partial) + \ldots \qquad (10)$$

Et :

$$\ell_o(x,\partial) = L_o(x,\partial) + L_o^*(x,\partial) + \ldots \quad ; \quad h'(x,\partial) = H'(x,\partial) + H'^*(x,\partial) + \ldots ,$$

$$e(x,\partial) = E(x,\partial) + E^*(x,\partial) + \ldots$$

Donc :

$$(h')^2(x,\partial) = (H')^2(x,\partial) + (2H'\ H'^* + \partial^\alpha H'\ \partial_\alpha H')(x,\partial) + \ldots$$

$$(\ell_o \circ (h')^2)(x,\partial) = (L_o\ H'^2)(x,\partial) + (L_o^*\ H'^2 + L_o(2H'\ H'^* + \partial^\alpha H'\ \partial_\alpha H') + 2\ \partial^\alpha L_o\ \partial_\alpha H'H')(x,\partial) + \ldots\ldots \text{ (termes d'ordre } \leq mt-2)$$

$$(e \circ h')(x,\partial) = (EH')\ (x,\partial) + \ldots \text{ (termes d'ordre } \leq mt-2)$$

f étant un opérateur d'ordre inférieur strictement à $mt-1$; on peut écrire :

$$(\ell_o (h')^2 + e \circ h' + f)(x,\partial) = (L_o\ H'^2)(x,\partial) + \left[L_o^*\ H'^2 + L_o\ (2H'\ H'^* + \partial^\alpha H'\ \ \partial_\alpha H') + 2\ \partial^\alpha L_o\ \ \partial_\alpha H'\ H' + EH'\right](x,\partial) + \dots$$

(termes d'ordre inférieur stictement à $mt-1$). (11)

On identifie les termes d'ordre $(mt-1)$ des expressions (10) et (11) ; On trouve :

$$(H^* A + HA^* + \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A)(x,\xi) \equiv (H''\ \partial^\alpha H'\ \ \partial_\alpha H' I)(x,\xi)\ \ [H'] \qquad (12).$$

Polynôme sous-caractéristique [8] :

Soit ρ une mesure positive sur X ; on se donne un opérateur matriciel $h = (h_B^A)_{\substack{1 \leq A \leq m \\ 1 \leq B \leq m}}$ d'ordre t au voisinage de a.

On écrit pour (A,B) fixés entre 1 et m :

$$h_B^A(x,\partial) = \sum_{k=0}^{t} H_B^{(*)kA\ \alpha_1 \dots \alpha_{t-k}}\ \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{t-k}}$$

On appelle opérateur adjoint de $(h_B^A)_{1 \leq A,B \leq m}$ et on note $(\hat{h}_A^B(x,\partial))_{1 \leq A,B \leq m} = \hat{h}$ l'opérateur défini par :

$$\hat{h}_A^B(x,\partial) v(x) = \frac{1}{\rho(x)} \sum_{k=0}^{t} (-1)^k\ \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{t-k}}\ \left[\rho\ H_B^{(*)kA\ \alpha_1 \dots \alpha_{t-k}}\ v\right](x)$$

On appelle matrice sous caractéristique de h (notée K), la matrice caractéristique de l'opérateur $k = \frac{1}{2}\left[h - {}^t\hat{h}\right]$, on a :

$$K(x,\xi) = \left[H^* - \frac{1}{2\rho}\,\partial^\alpha_\alpha(\rho H)\right](x,\xi) \quad \left(\text{avec : } \partial^\alpha_\alpha(\rho H) = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial^2(\rho H)}{\partial x^\alpha \partial\xi_\alpha}\right) \qquad (13)$$

Lemme 1.- On pose

$$C = \partial^\alpha H\, \partial_\alpha A - \partial_\alpha H\, \partial^\alpha A$$

$$D = \partial^\alpha A\, \partial_\alpha H - \partial_\alpha A\, \partial^\alpha H .$$

Les matrices C, D sont des fonctions sur $T^*(X)$, définissant des invariants, et on a :

$$AC \equiv DA \quad [H']$$

Preuve : Soient A et B dans $\{1\ldots m\}$. Le polynôme caractéristique de l'opérateur $[h^A_C , a^C_B]$ est égal à :

$$H^A_C\, A^{C^*}_B + H^{A^*}_C\, A^C_B + \partial^\alpha H^A_B\, \partial_\alpha A^C_B - (A^C_B\, H^{A^*}_C + A^{C^*}_B\, H^A_C + \partial^\alpha A^C_B\, \partial_\alpha H^A_C)$$

$$= \partial^\alpha H^A_C\, \partial_\alpha A^C_B - \partial_\alpha H^A_C\, \partial^\alpha A^C_B = C^A_B$$

donc C^A_B est invariant.

On procède de même pour la matrice D, en prenant l'opérateur : $[a^A_C , h^C_B]$.

Démontrons maintenant la relation :

$$AC \equiv DA \quad [H']$$

On a :

$$AC - DA = A\left[\partial^\alpha H\, \partial_\alpha A - \partial_\alpha H\, \partial^\alpha A\right] - \left[\partial^\alpha A\, \partial_\alpha H - \partial_\alpha A\, \partial^\alpha H\right] A$$

Or :

$$A\,\partial^\alpha H\,\partial_\alpha A \equiv -\,\partial^\alpha A\,H\,\partial_\alpha A \equiv \partial_\alpha A\,\partial_\alpha H\,A \qquad [H']$$

et
$$A\,\partial_\alpha H\,\partial^\alpha A \equiv -\,\partial_\alpha A\,H\,\partial^\alpha A \equiv \partial_\alpha A\,\partial^\alpha H\,A \qquad [H']$$

donc :

$$AC - DA \equiv \left[\partial^\alpha A\,\partial_\alpha H - \partial_\alpha A\,\partial^\alpha H - \partial^\alpha A\,\partial_\alpha H + \partial_\alpha A\,\partial^\alpha H\right]\ A \qquad [H']$$
$$\equiv 0 \qquad [H'] .$$

Lemme 2.- On pose :

$$R = KA + \frac{1}{2}\,C$$

$$S = AK + \frac{1}{2}\,D .$$

Les matrices R et S définissent des invariants , et on a :

$$AR \equiv SA \qquad [H']$$

C'est une conséquence directe du lemme 1 car
$AR = AKA + \frac{1}{2}\,AC$ et $SA = AKA + \frac{1}{2}\,DA$.

On pose :

$$L = AR .$$

Définition.- On dit que h vérifiée (L_1^1) si et seulement si :

$$L_1^1 \equiv 0 \qquad [H']$$

Lemme 3.- On a :

$$L \equiv A\left[\partial^\alpha H\ \partial_\alpha A + H^* A - H''\ \partial^\alpha H'\ \partial_\alpha H' I\right] \qquad (14)$$

et

$$L \equiv \left[\partial^\alpha A\ \partial_\alpha H + AH^* - H''\ \partial^\alpha H'\ \partial_\alpha H' I\right] \qquad (15)$$

Preuve : On écrit :

$$L = AR = AKA + \frac{1}{2} AC = A\left[H^* - \frac{1}{2\rho}\partial^\alpha_\alpha(\rho H)\right] A + \frac{1}{2} A\left[\partial^\alpha H\ \partial_\alpha A - \partial_\alpha H\ \partial^\alpha A\right]$$

$$= AH^*A - \frac{1}{2\rho} A\left[\partial_\alpha \rho\ \partial^\alpha H + \rho\partial^\alpha_\alpha H\right] A + \frac{1}{2} A(\partial^\alpha H\ \partial_\alpha A - \partial_\alpha H\ \partial^\alpha A)$$

et comme :

$$A\ \partial^\alpha H\ A \equiv -\ \partial^\alpha A\ HA \equiv 0 \qquad [H']$$

donc :

$$L \equiv AH^*A - \frac{1}{2} A\ \partial^\alpha_\alpha HA + \frac{1}{2} A\ \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A - \frac{1}{2} A\ \partial_\alpha H\partial^\alpha A \qquad [H']$$

$$\equiv AH^*A + A\ \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A - \frac{A}{2}\left[\partial^\alpha_\alpha HA + \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A + \partial_\alpha H\ \partial^\alpha A\right] \qquad [H']$$

Or :

$$\partial^\alpha_\alpha(HA) = \partial^\alpha_\alpha HA + \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A + \partial_\alpha H\ \partial^\alpha A + H\ \partial^\alpha_\alpha A$$

c'est-à-dire que ;

$$A\ \partial^\alpha_\alpha(HA) \equiv A\left[\partial^\alpha_\alpha HA + \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A + \partial_\alpha H\ \partial^\alpha A\right] \qquad [H']$$

donc ;

$$L \equiv AH^*A + A\ \partial^\alpha H\ \partial_\alpha A - \frac{1}{2} A\ \partial^\alpha_\alpha(HA) \qquad [H']$$

On utilise alors l'hypothèse :

$$HA = H''(H')^2 I$$

pour écrire :

$$\partial^\alpha_\alpha(HA) \equiv 2H''\ \partial^\alpha H'\ \partial_\alpha H' I \qquad [H']$$

et par conséquent :

$$L \equiv A\left[H^{*}A + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A - H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H''I\right] .$$

Pour la relation (15) il suffit de remarquer que :

$$\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}HA \equiv - \partial^{\alpha}AH\partial_{\alpha}A \equiv A\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A \qquad [H']$$

<u>*Lemme 4*</u>.- Si $H'(x,\xi)$ est un polynôme premier en ξ pour tout x dans Ω , alors :

L est divisible par H' si et seulement si L_1^1 est divisible par H'.

<u>Preuve</u> : Il est clair que si H' divise L , alors H' divise L_1^1 .

On montre la réciproque ; pour cela, il suffit d'établir la relation :

$$A_1^1 L \equiv L_1^1 A \qquad [H'] \tag{16}$$

En effet ; si cette relation est démontrée , on a :

$L_1^1 A \equiv 0 \quad [H']$ et par suite :

$$A_1^1 L \equiv 0 \quad [H']$$

Puisque $A_1^1(x, \text{grad}\, \varphi(x)) \neq 0$, $H'(x,\xi)$ ne divise pas $A_1^1(x,\xi)$ et comme $H'(x,\xi)$ est premier, il divise donc $L(x,\xi)$; c'est-à-dire :

$$L \equiv 0 \quad [H'].$$

Démonstration de la relation (16) :

Soient (A,C) deux indices entre 1 et m.

On a :

$$A_1^1\ L_C^A = A_1^1\ A_F^A\ R_C^F \quad ;$$

on utilise l'identité de Jacobi entre les cofacteurs de la matrice H :

$$A_1^1\ A_F^A - A_F^1\ A_1^A = A_{1F}^{1A}\ (\det H) \qquad \text{en } (x,\xi) \quad ;$$

où A_{1F}^{1A} est le mineur correspondant aux lignes 1 et F et aux colonnes 1 et A de H.

C'est un polynôme de degré (m-2)t en ξ , ou nul.

On a alors :

$$A_1^1\ L_C^A \equiv A_F^1\ A_1^A\ R_C^F \qquad [H'^2]$$

Soit encore :

$$A_1^1\ L_C^A \equiv A_1^A\ L_C^1 \qquad [H'^2] \qquad (16,a)$$

De même :

$$L_C^1\ A_1^1 = A_F^1\ R_C^F\ A_1^1 \equiv S_F^1\ (A_1^1\ A_C^F) \qquad [H'] \qquad (\text{car} \quad AR \equiv SA \quad [H'])$$

D'après la relation de Jacobi :

$$L_C^1\ A_1^1 \equiv S_F^1\ A_C^1\ A_1^F \qquad [H'] \ ; \quad \text{mais} \quad S_F^1\ A_1^F \equiv L_1^1 \qquad [H']$$

donc :

$$L_C^1\ A_1^1 \equiv A_C^1\ L_1^1 \qquad [H'] \qquad (16.b) \ .$$

Ainsi :

$$A_1^1 \, A_1^1 \, L_C^A \equiv A_1^A \, A_1^1 \, L_C^1 \equiv A_1^A \, A_C^1 \, L_1^1 \qquad [H']$$

En utilisant encore une fois Jacobi :

$$A_1^1 \, A_1^1 \, L_C^A \equiv A_1^1 \, A_C^A \, L_1^1 \qquad [H']$$

C'est-à-dire que :

$$H' \text{ divise } (A_1^1)^2 \, L_C^A$$

Et comme H' ne divise pas A_1^1, il divise L_C^A :

Définition.- On dit que h vérifie (L) si et seulement si L est divisible par H'.

Remarque 1.- Si h vérifie (D), alors h vérifie (L), et en particulier (L_1^1).

En effet :

$$L \equiv A\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A + HA^* - H''\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I\right] \qquad [H']$$

(ceci d'après (14)).

On utilise alors (12) pour conclure.

Remarque 2.- Si $H'(x,\xi)$ est premier en ξ pour tout x de Ω, (L) $\Longleftrightarrow$ (L_1^1) c'est le lemme 4.

Remarque 3.-

$$(L_1^1) \Longleftrightarrow A_A^1\left[\partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha A_1^B + H_B^{*A} A_1^B - \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' H'' I_1^A\right] \equiv 0 \qquad [H'] \qquad (17).$$

résulte directement de la formule (14).

§ 2 - *Résolution formelle.*

On suppose que h vérifie $\{(L_1^1) - (H1) - (H2)\}$, et on cherche une onde asymptotique :

$$Y = (Y^B)_{1\leqslant B\leqslant m} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} Y_j^B \times f_j \circ \varphi\right)_{1\leqslant B\leqslant m} \tag{18}$$

de phase φ, où pour tout j dans $\mathbb{Z}$, f_j est une ultradistribution sur un intervalle de centre 0 dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad : \quad f_j' = f_{j-1} \tag{19}$$

Soit A entre 1 et m ; Y^B pour B dans $\{1,m\}$, vérifie formellement :

$$h_B^A\, Y^B = h_B^A \left(\sum_{j=0}^{+\infty} Y_j^B \times f_j \circ \varphi\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} h_B^A\, (Y_j^B \times f_j \circ \varphi) = 0 \quad .$$

h_B^A étant un opérateur scalaire d'ordre inférieur ou égal à t au voisinage de a ; il existe alors ([1], [8], [4]) t opérateurs $H_{B,\varphi}^{A,r}$ d'ordre inférieur ou égal à r tels que :

$$h_B^A(Y_j^B \times f_j \circ \varphi) = \sum_{r=0}^{t} H_{B,\varphi}^{A,r}\, [Y_j^B] \times f_{j-t+r} \circ \varphi$$

c'est-à-dire que :

$$h_B^A\, Y^B = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{t} H_{B,\varphi}^{A,r}\, [Y_j^B] \times f_{j-t+r} \circ \varphi \quad .$$

On pose :

$J = j-t+r \quad (J+t \geq r)$, on aura :

$$h^A_B Y^B = \sum_{J=-t}^{+\infty} \left(\sum_{r=0}^{\min(t,t+J)} \mathcal{H}^{A,r}_{B,\varphi} \left[Y^B_{J+t-r} \right] \times f_J \circ \varphi \right) = 0$$

Il suffit de poser :

$$\sum_{r=0}^{\min(t,t+J)} \mathcal{H}^{A,r}_{B,\varphi} \left[Y^B_{J+t-r} \right] = 0 \qquad \text{pour} \quad J \geq -t$$

Ou encore :

$$\sum_{r=0}^{\min(t,j)} \mathcal{H}^{A,r}_{B,\varphi} \left[Y^B_{j-r} \right] = 0 \qquad \text{pour} \quad j \geq 0 \qquad (20)$$

<u>*Calcul de*</u> Y^B_o :

Pour $j = 0$, on obtient le système en Y^B_o suivant :

$$\mathcal{H}^{A,o}_{B,\varphi} \left[Y^B_o \right] = 0$$

c'est-à-dire que :

$$H^A_B(x, \operatorname{grad} \varphi(x))\, Y^B_o(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega \ , \quad 1 \leq A \leq m \qquad (21)$$

On conviendra par la suite qu'une fonction $g(x,\xi)$ prise au point $(x, \operatorname{grad} \varphi(x))$ sera notée $\tilde{g}(x)$.

D'après {(H1), (H2)}, le système (21) est équivalent au système de "CRAMER" de $(m-1)$ équations à $(m-1)$ inconnues :

$$\tilde{H}^{\hat{A}}_{\hat{B}}\, Y^{\hat{B}}_o = - \tilde{H}^{\hat{A}}_1\, Y^1_o \qquad \begin{array}{l} 2 \leq \hat{A} \leq m \\ 2 \leq \hat{B} \leq m \end{array}$$

avec Y^1_o paramètre .

(On conviendra la notation $\hat{A}$ pour un indice A dans $\{1, m\}$, lorsqu'il varie entre 2 et m).

On obtient :

$$Y_o^{\hat{B}} = \frac{\tilde{A}_1^{\hat{B}}}{\tilde{A}_1^1}\, Y_o^1$$

Cette relation est encore valable lorsque $B = 1$; d'où :

$$Y_o^B = \frac{\tilde{A}_1^B}{\tilde{A}_1^1}\, Y_o^1$$

Cette relation nous donnera le coefficient de distorsion correspondant à $j = 0$, lorsque Y_o^1 sera connue.

On note :

$$\mathcal{R}_o^B = \frac{\widetilde{A_1^B}}{\tilde{A}_1^1} \quad : \quad \text{opérateur différentiel d'ordre } 0$$

On a donc :

$$Y_o^B = \mathcal{R}_o^B\,(Y_o^1) \qquad (22)\ .$$

Pour $j = 1$:

$$\mathcal{H}_{B,\varphi}^{A,o}\, Y_1^B + \mathcal{H}_{B,\varphi}^{A,1}\, Y_o^B = 0 \qquad (23)$$

On fait un changement de coordonnées locales, où on pose :

$$x^o = \varphi(x)$$

L'expression de $\mathcal{H}_{B,\varphi}^{A,1}$ dans cette carte est :

$$\mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset}(x,\partial) = \widetilde{\partial^{\alpha} H^{A}_{B} \partial_{\alpha}} + \widetilde{H^{*A}_{B}}$$

On a : $$\tilde{H}^{A}_{B}\, Y^{B}_{1} = - \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset}\, Y^{B}_{o} = - \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset}\, R^{B}_{o}(Y^{1}_{o}) \qquad (24)$$

c'est un système de m équations à m inconnues, de rang (m-1) ; la condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit possible est que :

$$\tilde{A}^{1}_{A}\, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset}\, R^{B}_{o}(Y^{1}_{o}) = 0 \quad .$$

On montre que :

$$\tilde{A}^{1}_{A}\, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset}\, R^{B}_{o} = 0 \qquad (25)$$

On a :

$$\tilde{A}^{1}_{A}\left[\widetilde{\partial^{\alpha} H^{A}_{B} \partial_{\alpha}} + \widetilde{H^{*A}_{B}}\right] \tilde{A}^{B}_{1} = \tilde{A}^{1}_{A}\, \widetilde{\partial^{\alpha} H^{A}_{B}}\tilde{A}^{B}_{1}\partial_{\alpha} + \tilde{A}^{1}_{A}(\widetilde{\partial^{\alpha} H^{A}_{B}}\partial_{\alpha}\widetilde{A^{B}_{1}} + \widetilde{H^{*A}_{B}}\tilde{A}^{B}_{1})$$

$$= \tilde{A}^{1}_{A}\, \widetilde{\partial^{\alpha} H^{A}_{B}}\tilde{A}^{B}_{1}\partial_{\alpha} + \tilde{L}^{1}_{1} \qquad (\text{car } \widetilde{\partial_{\alpha} H'}(x) = 0)$$

Et comme :

$$\tilde{A}^{1}_{A}\widetilde{\partial^{\alpha} H^{A}_{B}}\, \tilde{A}^{B}_{1} \equiv - \widetilde{A^{1}_{A} H^{A}_{B}}\, \widetilde{\partial^{\alpha} A^{B}_{1}} \equiv 0 \qquad [H']$$

donc :

$$\tilde{A}^{1}_{A}\, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset}\, R^{B}_{o} = 0 \qquad (\text{d'après } (L^{1}_{1}))$$

Et par suite, le système (24) est équivalent au système de "CRAMER" de (m-1) équations à (m-1) inconnues suivant :

$$\widetilde{H^{\hat A}_{\hat B}}\; Y^{\hat B}_1 = -\,(F^{\hat A} + \widetilde{H^{\hat A}_1}\; Y^1_1) \quad , \qquad 2 \leqslant \hat A \leqslant m \tag{26}$$

où : $\quad F^A = \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset}\,(Y^B_o) \quad$ pour $\quad A : 1 \leqslant A \leqslant m$.

Le déterminant est $\widetilde{A^1_1}$, qui n'est jamais nul sur Ω.

On a :

$$Y^{\hat B}_1 = -\frac{1}{\widetilde{A}^1_1}\left[\begin{vmatrix} \widetilde{H^2_2} & \widetilde{H^2_3} & \dots & \widetilde{H^2_{\hat B-1}} & F^2 & \widetilde{H^2_{\hat B+1}} & \dots & \widetilde{H^2_m} \\ \dots\dots\dots \\ \widetilde{H^{\hat A}_2} & \widetilde{H^{\hat A}_3} & \dots & \widetilde{H^{\hat A}_{\hat B-1}} & F^{\hat A} & \widetilde{H^{\hat A}_{\hat B+1}} & \dots & \widetilde{H^{\hat A}_m} \\ \dots\dots\dots \\ \widetilde{H^m_2} & \widetilde{H^m_3} & \dots & \widetilde{H^m_{\hat B-1}} & F^m & \widetilde{H^m_{\hat B+1}} & \dots & \widetilde{H^m_m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \widetilde{H^2_2} & \dots & \widetilde{H^2_{\hat B-1}} & \widetilde{H^2_1} & \widetilde{H^2_{\hat B+1}} & \dots & \widetilde{H^2_m} \\ \widetilde{H^{\hat A}_2} & \dots & \widetilde{H^{\hat A}_{\hat B-1}} & \widetilde{H^{\hat A}_1} & \widetilde{H^{\hat A}_{\hat B+1}} & \dots & \widetilde{H^{\hat A}_m} \\ \dots\dots\dots \\ \widetilde{H^m_2} & \dots & \widetilde{H^m_{\hat B-1}} & \widetilde{H^m_1} & \widetilde{H^m_{\hat B+1}} & \dots & \widetilde{H^m_m} \end{vmatrix}\; Y^1_1\right]$$

$$= \frac{\widetilde{A}^{\hat B}_1}{\widetilde{A}^1_1}\, Y^1_1 - \frac{\widetilde{A^{1,\hat B}_{1,\hat C}}}{\widetilde{A}^1_1}\, F^{\hat C} \qquad \text{c'est-à-dire que :}$$

$$Y^{\hat B}_1 = \mathcal{R}^{\hat B}_o(Y^1_1) - \frac{\widetilde{A^{1,\hat B}_{1,\hat C}}}{\widetilde{A}^1_1}\, \mathcal{H}^{\hat C,1}_{D,\emptyset}\, \mathcal{R}^D_o(Y^1_o) \tag{27}$$

$$= \mathcal{R}^{\hat B}_o(Y^1_1) - \frac{\widetilde{A^{1,\hat B}_{1,C}}}{\widetilde{A}^1_1}\, \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset}\, \mathcal{R}^D_o(Y^1_o) \qquad (\text{car } A^{1,\hat B}_{1,1} = 0)$$

et finalement

$$Y^B_1 = \mathcal{R}^B_o(Y^1_1) - \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\widetilde{A}^1_1}\, \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset}\, \mathcal{R}^D_o(Y^1_o)$$

car pour $B = 1$, la relation (27) est encore vraie $(A^{1,1}_{1,C} = 0$ et $\mathcal{R}^1_o = 1)$.

On note :

$$\mathcal{R}^{B}_{1}(x,\partial) = \Big(- \frac{\widetilde{A}^{1,B}_{1,C}}{\tilde{A}^{1}_{1}} \, \mathcal{H}^{C,1}_{D,\psi} \, \mathcal{R}^{D}_{o}\Big)(x,\partial) \qquad \text{pour} \quad B : 1 \leq B \leq m$$

C'est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1.

Ainsi :

$$Y^{B}_{1} = \mathcal{R}^{B}_{o}(Y^{1}_{1}) + \mathcal{R}^{B}_{1}(Y^{1}_{o}) \tag{28}$$

On écrit le système correspondant à $j = 2$:

$$\mathcal{H}^{A,o}_{B,\psi}(Y^{B}_{2}) + \mathcal{H}^{A,1}_{B,\psi}(Y^{B}_{1}) + \mathcal{H}^{A,2}_{B,\psi}(Y^{B}_{o}) = 0 \tag{29}$$

c'est un système de m équations à m inconnues de rang $(m-1)$: on écrit sa condition de compatibilité :

$$\tilde{A}^{1}_{A} \, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\psi}(Y^{B}_{1}) + \tilde{A}^{1}_{A} \, \mathcal{H}^{A,2}_{B,\psi}(Y^{B}_{o}) = 0$$

ou encore (d'après 28) :

$$\tilde{A}^{1}_{A} \, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\psi} \, \mathcal{R}^{B}_{o}(Y^{1}_{1}) + \tilde{A}^{1}_{1} \, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\psi} \, \mathcal{R}^{B}_{1}(Y^{1}_{o}) + \tilde{A}^{1}_{A} \, \mathcal{H}^{A,2}_{B,\psi} \, \mathcal{R}^{B}_{o}(Y^{1}_{o}) = 0 \quad .$$

Et d'après (25), ceci équivaut à :

$$\tilde{A}^{1}_{A} \, (\mathcal{H}^{A,1}_{B,\psi} \, \mathcal{R}^{B}_{1} + \mathcal{H}^{A,2}_{B,\psi} \, \mathcal{R}^{B}_{o}) \; Y^{1}_{o} = 0$$

On note :

$$K_{2}(x,\partial) = \tilde{A}^{1}_{A}(\mathcal{H}^{A,1}_{B,\psi} \, \mathcal{R}^{B}_{1} + \mathcal{H}^{A,2}_{B,\psi} \, \mathcal{R}^{B}_{o})(x,\partial) \tag{30}$$

la C.N.S. de possibilité de (29) est $K_{2}(Y^{1}_{o}) = 0$ K_{2} est un opérateur différentiel d'ordre 2, dont on va donner une expression simple.

on a $$K_2(Y) = \tilde{A}{}^1_A\, H^{A,1}_{B,\emptyset}\, \Big(-\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}{}^1_1}\, H^{C,1}_{D,\emptyset}\, \big(\tilde{A}{}^D_1\, \frac{Y}{\tilde{A}{}^1_1}\big)\Big) + \tilde{A}{}^1_A\, H^{A,2}_{B,\emptyset}\, \big(\tilde{A}{}^B_1\, \frac{Y}{\tilde{A}{}^1_1}\big)$$

$$= R^2\Big(\frac{Y}{\tilde{A}{}^1_1}\Big)$$

avec $$R^2 = \tilde{A}{}^1_A\, H^{A,1}_{B,\emptyset}\, \Big(-\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}{}^1_1}\Big)\, H^{C,1}_{D,\emptyset}\, .\, \tilde{A}{}^D_1 + \tilde{A}{}^1_A\, H^{A,2}_{B,\emptyset}\, .\, \tilde{A}{}^B_1\ .$$

En fait, c'est R^2 qu'on va calculer.

Lemme 5.-

a) $$-\frac{A^{1,B}_{1,C}}{A^1_1}\ \partial^\alpha H^C_D\ A^D_1 \equiv A^1_1\ \partial^\alpha\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big) \qquad (H')$$

b) $$-\frac{A^{1,B}_{1,C}}{A^1_1}\ \partial^\alpha H^A_B\ A^1_A \equiv A^1_1\ \partial^\alpha\Big(\frac{A^1_C}{A^1_1}\Big) \qquad (H')$$

On ne démontre que le a) (une lettre chapeautée varie entre 2 et m)

$$-A^{1,B}_{1,C}\ \partial^\alpha H^C_D\ \frac{A^D_1}{A^1_1} \equiv A^{1,B}_{1,C}\ H^C_D\partial^\alpha\Big(\frac{A^D_1}{A^1_1}\Big) = A^{1,B}_{1,C}\ H^C_{\hat D}\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\hat D}_1}{A^1_1}\Big) = A^{1,B}_{1,\hat C}\ H^{\hat C}_{\hat D}\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\hat D}_1}{A^1_1}\Big)$$

si $B = \hat B \in \{2,\dots,m\}$, on a $A^{1,\hat B}_{1,\hat C}\ H^{\hat C}_{\hat D}\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\hat D}_1}{A^1_1}\Big) = \delta^{\hat B}_{\hat D} A^1_1\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\hat D}_1}{A^1_1}\Big) = A^1_1\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\hat B}_1}{A^1_1}\Big)$

si $B = 1$ on a $A^{1,1}_{1,\hat C}\ H^{\hat C}_{\hat D}\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\hat D}_1}{A^1_1}\Big) = 0$ et $A^1_1\partial^\alpha\Big(\frac{A^1_1}{A^1_1}\Big) = 0$ donc dans tous les cas

$$-\frac{A^{1,B}_{1,C}}{A^1_1}\ \partial^\alpha H^C_D A^D_1 \equiv A^1_1\partial^\alpha\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big) \qquad [H']$$

(le b) se démontre de manière analogue .

Lemme 6.- Soit $q = q^\alpha \partial_\alpha + q^*$ un opérateur différentiel de degré 1 on a :

$$q(fY) = fq^\alpha \partial_\alpha Y + (q^\alpha \partial_\alpha f + q^* f)Y$$

$q^\alpha \partial_\alpha (fY) + q^*(fY) = fq^\alpha \partial_\alpha Y + (q^\alpha \partial_\alpha f + q^* f)Y$. Ceci s'écrit encore $q \circ f = f \cdot q^\alpha \partial_\alpha + q(f)$.

On étudie maintenant le premier opérateur de la somme définissant $\mathcal{R}^2$

$$\mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset} \cdot \tilde{A}^D_1 = \tilde{A}^D_1 \, \widetilde{\partial^\alpha H^C_D} \partial_\alpha + \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset}(\tilde{A}^D_1) \qquad \text{(lemme 6)} .$$

$$- \frac{\tilde{A}^{1,B}_{1,C}}{\tilde{A}^1_1} \, \widetilde{\partial^\alpha H^C_D} \, \tilde{A}^D_1 \partial_\alpha = \tilde{A}^1_1 \partial^\alpha \Big(\frac{\widetilde{A^B_1}}{\tilde{A}^1_1}\Big) \partial_\alpha \qquad \text{(lemme 5)} .$$

donc

$$- \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1} \cdot \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset} \cdot \tilde{A}^D_1 = \tilde{A}^1_1 \partial^\alpha \Big(\frac{\widetilde{A^B_1}}{\tilde{A}^1_1}\Big) \partial_\alpha - \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1} \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset}(\tilde{A}^D_1)$$

et par conséquent

$$\tilde{A}^1_A \, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset} \Big(- \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1}\Big) \cdot \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset} \cdot \tilde{A}^D_1 = \tilde{A}^1_A \, (\partial^\beta \widetilde{H^A_B} \partial_\beta + \tilde{H}^{*A}_B) \cdot \tilde{A}^1_1 \partial^\alpha \Big(\frac{\widetilde{A^B_1}}{\tilde{A}^1_1}\Big) \partial_\alpha$$

$$- \tilde{A}^1_A \widetilde{\partial^\alpha H^A_B} \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1} \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset}(\tilde{A}^D_1) \partial_\alpha + \tilde{A}^1_A \, \mathcal{H}^{A,1}_{B,\emptyset} \Big(- \frac{\tilde{A}^{1,B}_{1,C}}{\tilde{A}^1_1} \mathcal{H}^{C,1}_{D,\emptyset}(\tilde{A}^D_1)\Big)$$

(on a encore utilisé le lemme 6).

On utilise maintenant le lemme 5 pour transformer le 2ème terme de cette somme, le lemme 6 pour transformer le 1er terme, et on trouve :

$$\tilde{A}^1_A\, H^{A,1}_{B,\psi}\Big(-\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1}\Big)\, H^{C,1}_{D,\psi}\;.\;\tilde{A}^D_1 = \tilde{A}^1_A\;\widetilde{\partial^\beta H^A_B}\,\tilde{A}^1_1\,\partial^\alpha\Big(\widetilde{\frac{A^B_1}{A^1_1}}\Big)\,\partial_{\alpha\beta} +$$

$$\tilde{A}^1_A\, H^{A,1}_{B,\psi}\Big(\tilde{A}^1_1\,\partial^\alpha\Big(\widetilde{\frac{A^B_1}{A^1_1}}\Big)\Big)\partial_\alpha + \tilde{A}^1_1\,\partial^\alpha\Big(\widetilde{\frac{A^1_C}{A^1_1}}\Big)\, H^{C,1}_{D,\psi}(\tilde{A}^D_1)\,\partial_\alpha + \tilde{A}^1_A\, H^{A,1}_{B,\psi}\;.\Big(-\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1}\Big)\;.\;H^{C,1}_{D,\psi}(\tilde{A}^D_1))$$

On remarque enfin que $\tilde{A}^1_1\,\partial^\alpha\Big(\widetilde{\frac{A^B_1}{A^1_1}}\Big) = \widetilde{\partial^\alpha A^B_1} - \tilde{A}^B_1\,\dfrac{\widetilde{\partial^\alpha A^1_1}}{\tilde{A}^1_1}$,que $\tilde{A}^1_A\,\widetilde{\partial^\beta H^A_B}\,\tilde{A}^B_1 = 0$

et que $\tilde{A}^1_A\, H^{A,1}_{B,\psi}(\tilde{A}^B_1) = 0 = \tilde{A}^1_C\, H^{C,1}_{D,\psi}(\tilde{A}^D_1)$. Il reste donc

$$\tilde{A}^1_A\, H^{A,1}_{B,\psi}\Big(-\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1}\Big)\, H^{C,1}_{D,\psi}\tilde{A}^D_1 = \tilde{A}^1_A\;\widetilde{\partial^\alpha H^A_B}\,\widetilde{\partial^\beta A^B_1}\,\partial_{\alpha\beta} + \tilde{A}^1_A\, H^{A,1}_{B,\psi}(\widetilde{\partial^\alpha A^B_1})\,\partial_\alpha +$$

$$+\,\widetilde{\partial^\alpha A^1_C}\, H^{C,1}_{D,\psi}(\tilde{A}^D_1)\,\partial_\alpha + \tilde{A}^1_A\;.\;H^{A,1}_{B,\psi}\Big(-\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1}\Big)\;.\;H^{C,1}_{D,\psi}(\tilde{A}^D_1)\;.$$

On calcule maintenant le 2^{nd} opérateur de la somme définissant R^2

$$\tilde{A}^1_A\;.\;H^{A,2}_{B,\psi}\;.\;\tilde{A}^B_1 = \tilde{A}^1_A\Big[\frac{1}{2}\,\partial^{\alpha\beta}H^A_B\,\partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H^{*A}_{\;B}\,\partial_\alpha + H^{**A}_{\;\;B}\Big]\;.\;\tilde{A}^B_1$$

$$= \tilde{A}^1_A\;\Big[\frac{1}{2}\,\widetilde{\partial^{\alpha\beta}H^A_B}\,\tilde{A}^B_1\,\partial_{\alpha\beta} + (\widetilde{\partial^{\alpha\beta}H^A_B}\,\partial_\beta\tilde{A}^B_1 + \tilde{A}^B_1\,\widetilde{\partial^\alpha H^{*A}_{\;B}})\,\partial_\alpha + H^{A,2}_{B,\psi}(\tilde{A}^B_1)\Big]$$

et par conséquent

$$R^2 = \tilde{A}^1_A\;\Big[\widetilde{\partial^\alpha H^A_B}\,\widetilde{\partial^\beta A^B_1} + \frac{1}{2}\,\widetilde{\partial^{\alpha\beta}H^A_B}\,\tilde{A}^B_1\Big]\,\partial_{\alpha\beta} +$$

$$\tilde{A}^1_A\;\Big[\widetilde{\partial^{\alpha\beta}H^A_B}\,\widetilde{\partial_\beta A^B_1} + \tilde{A}^B_1\,\widetilde{\partial^\alpha H^{*A}_{\;B}} + H^{A,1}_{B,\psi}(\widetilde{\partial^\alpha A^B_1})\Big]\,\partial_\alpha$$

$$+\,\widetilde{\partial^\alpha(A^1_C)}\, H^{C,1}_{D,\psi}(\tilde{A}^D_1)\,\partial_\alpha + \tilde{A}^1_A\,\Big(H^{A,1}_{B,\psi}\Big(-\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{A^1_1}\Big)\, H^{C,1}_{D,\psi} + H^{A,2}_{D,\psi}\Big)\;(\tilde{A}^D_1)\;.$$

On s'occupe maintenant de la partie d'ordre 2 de R^2 on a :

$$\frac{1}{2}\,\widetilde{\partial^{\alpha\beta}(H^A_B\,A^B_1)}\,\partial_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\widetilde{\partial^{\alpha\beta}H^A_B}\,\tilde{A}^B_1\,\partial_{\alpha\beta} + \widetilde{\partial^\alpha H^A_B}\,\widetilde{\partial^\beta A^B_1}\,\partial_{\alpha\beta} +$$

$$\frac{1}{2}\,\tilde{H}^A_B\,\widetilde{\partial^{\alpha\beta}A^B_1}\,\partial_{\alpha\beta}$$

donc $\tilde{A}^1_A \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} \widetilde{(H^A_B A^B_1)} = \tilde{A}^1_A \left[\frac{1}{2} \widetilde{\partial^{\alpha\beta} H^A_B}\, \tilde{A}^B_1 + \widetilde{\partial^\alpha H^A_B}\, \widetilde{\partial^\beta A^B_1}\right] \partial_{\alpha\beta}$

(puisque $A^1_A H^A_B = (H')^2 H'' \delta^1_B$) . La partie d'ordre 2 de R^2 est donc :

$$\frac{1}{2} \tilde{A}^1_A \partial^{\alpha\beta} \widetilde{(H^A_B A^B_1)} \partial_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tilde{A}^1_A \widetilde{\partial^{\alpha\beta}((H')^2 H'' \delta^A_1)} \partial_{\alpha\beta} = \tilde{A}^1_1 \tilde{H}'' p^\alpha p^\beta \partial_{\alpha\beta}$$

(on rappelle que $p^\alpha(x) = \partial^\alpha H'(x, \operatorname{grad} \varphi(x')) = \partial^\alpha H'(x\ ;\ 1, 0, \ldots, 0)$

on s'occupe maintenant de la partie d'ordre 1 de R^2 (on remarque que le choix $\varphi(x) = x^o$ donne $\partial_\beta \tilde{A}^B_1 = \widetilde{\partial_\beta A^B_1}$) . Cette partie d'ordre 1 est donc

$$\{\tilde{A}^1_A \left[\widetilde{\partial^{\alpha\beta} H^A_B \partial_\beta A^B_1} + \widetilde{\partial^\alpha H^{*A}_B A^B_1} + \widetilde{\partial^\beta H^A_B \partial^\alpha_\beta A^B_1} + \widetilde{H^{*A}_B \partial^\alpha A^B_1}\right] + \widetilde{(\partial^\alpha A^1_A)} \left[\widetilde{\partial^\beta H^A_B \partial_\beta A^B_1} + \widetilde{H^{*A}_B A^B_1}\right]\} \partial_\alpha$$

$$= \partial^\alpha \widetilde{\left[A^1_A \left[\partial^\beta H^A_B \partial_\beta A^B_1 + H^{*A}_B A^B_1\right]\right]} \partial_\alpha$$

Or l'hypothèse (L^1_1) donne

$$A^1_A \left[\partial^\beta H^A_B \partial_\beta A^B_1 + H^{*A}_B A^B_1\right] = \Lambda H' + A^1_1 H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H'$$

et par conséquent, la partie d'ordre 1 de R^2 est

$$\tilde{\Lambda}\, p^\alpha \partial_\alpha + \tilde{A}^1_1 \tilde{H}'' p^\beta \partial_\beta p^\alpha \partial_\alpha$$

on a donc

$$(31)\quad R^2 = \tilde{A}^1_1 \tilde{H}'' p^\alpha p^\beta \partial_{\alpha\beta} + \tilde{\Lambda} p^\alpha \partial_\alpha + \tilde{A}^1_A \left(H^{A,1}_{B,\varphi}\left(- \frac{\tilde{A}^{1,B}_{1,C}}{\tilde{A}^1_1}\right) H^{C,1}_{D,\varphi} + H^{A,2}_{D,\varphi}\right)(\tilde{A}^D_1)$$

$$+ \tilde{A}^1_1 \tilde{H}'' p^\beta \partial_\beta p^\alpha \partial_\alpha$$

$$= \tilde{A}^1_1 \tilde{H}'' p^\alpha \partial_\alpha (p^\beta \partial_\beta) + \tilde{\Lambda}\, p^\alpha \partial_\alpha + N$$

et qui représente donc un opérateur de degré 2, de dérivation le long des bicaractéristiques par rapport à H' des hypersurfaces caractéristiques d'équation $\varphi(x)$ = constante.

Remarque.- Comme on travaille en analytique, et qu'on va appliquer le théorème de Cauchy-Kowalewski, cette précision sur $\mathcal{R}^2$ était inutile. Elle est néanmoins fondamentale en C^∞ [9],

Le vecteur $\vec{p}(a)$ étant non nul, on suppose par exemple $p^1(a) \neq 0$ (le choix $\varphi(x) = x^o$ donne $p^o(a) = 0$) ; on choisit alors Y_o^1 solution de :

$$(32) \quad \begin{cases} K_2(Y_o^1) = 0 \\ Y_o^1(x^o,0,x'') = 1 \ , \quad \partial_1 Y_o^1(x^o,0,x'') = 0 \ . \end{cases}$$

Ce choix détermine Y_o^1, donc Y_o^B ; il permet aussi de résoudre (29), et donne :

$$Y_2^B = R_o^B\, Y_2^1 - \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1} H^{C,1}_{D,\varphi} \left[R_o^D(Y_1^1) + R_1^D(Y_o^1)\right] - \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1} H^{C,2}_{D,\varphi} R_o^D(Y_o^1)$$

ou bien :

$$Y_2^B = R_o^B(Y_2^1) + R_1^B(Y_1^1) + R_2^B(Y_o^1) \qquad (33) \qquad \text{avec}$$

$$R_2^B = -\frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1} \left[H^{C,1}_{D,\varphi} R_1^D + H^{C,2}_{D,\varphi} R_o^D\right] \qquad (34) \ .$$

<u>*Calcul de*</u> Y_j^B <u>*pour*</u> $j \in \mathbb{N}$.

Afin de simplifier l'écriture des calculs, on convient de poser $Y_j^B = 0$ si $j < 0$, $B \in \{1,\dots,m\}$, et on introduit les notations suivantes : on pose

$$L_3^A = H_{B,\emptyset}^{A,1} R_2^B + H_{B,\emptyset}^{A,2} R_1^B + H_{B,\emptyset}^{A,3} R_o^B$$

$$L_4^A = H_{B,\emptyset}^{A,2} R_2^B + H_{B,\emptyset}^{A,3} R_1^B$$

$$L_5^A = H_{B,\emptyset}^{A,3} R_2^B \tag{35}$$

$$P_3 = -\tilde{A}_A^1 L_3^A , \quad P_4 = -\tilde{A}_A^1 L_4^A , \quad P_5 = -\tilde{A}_A^1 L_5^A$$

$$Q_3^B = -\frac{\widetilde{A_{1,C}^{1,B}}}{\tilde{A}_1^1} L_3^C , Q_4^B = -\frac{\widetilde{A_{1,C}^{1,B}}}{\tilde{A}_1^1} L_4^C , \quad Q_5^B = -\frac{\widetilde{A_{1,C}^{1,B}}}{\tilde{A}_1^1} L_5^C$$

$$M_{B,r} = -\tilde{A}_A^1 H_{B,\emptyset}^{A,r} \quad \text{pour} \quad r \in \{0,\dots,t\}$$

$$S_{D,r}^B = -\frac{\widetilde{A_{1,C}^{1,B}}}{\tilde{A}_1^1} H_{D,\emptyset}^{C,r} \quad \text{pour} \quad r \in \{0,\dots,t\}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; on va prouver par récurrence l'hypothèse (P_k) suivante :

Si Y_{k-2}^1 est solution du problème de Cauchy

$$(P_k) \quad \begin{cases} K_2(Y_{k-2}^1) = \Omega_k \\ Y_{k-2}^1(x^o,0,x'') = \delta_{o,k-2} \quad \text{(symbole de Kronecker)} \\ \partial_1 Y_{k-2}^1(x^o,0,x'') = 0 \end{cases}$$

avec $\Omega_k = P_3(Y^1_{k-3}) + P_4(Y^1_{k-4}) + P_5(Y^1_{k-5}) + M_{B,1}(Z^B_{k-1}) + M_{B,2}(Z^B_{k-2}) +$

$$M_{B,3}(Z^B_{k-3}) + \sum_{r=4}^{\min(t,k)} M_{B,r}(Y^B_{k-r})$$

Z^B_k étant défini par la formule suivante pour $k \geq 3$ et nul si $k \leq 2$

$$Z^B_k = Q^B_3(Y^1_{k-3}) + Q^B_4(Y^1_{k-4}) + Q^B_5(Y^1_{k-5}) + S^B_{D,1}(Z^D_{k-1}) +$$

$$S^B_{D,2}(Z^D_{k-2}) + S^B_{D,3}(Z^D_{k-3}) + \sum_{r=4}^{\min(t,k)} S^B_{D,r}(Y^D_{k-r})$$

alors le système correspondant à $j = k$ est compatible et on a

$$Y^B_k = R^B_o(Y^1_k) + R^B_1(Y^1_{k-1}) + R^B_2(Y^1_{k-2}) + Z^B_k \qquad (36)$$

Pour montrer P_{k+1}, on écrit le système relatif à $j = k + 1$

$$(37) \quad 0 = H^{A,o}_{B,\emptyset}(Y^B_{k+1}) + H^{A,1}_{B,\emptyset}(Y^B_k) + H^{A,2}_{B,\emptyset}(Y^B_{k-1}) + H^{A,3}_{B,\emptyset}(Y^B_{k-2}) + \sum_{r=4}^{\min(t,k+1)} H^{A,r}_{B,\emptyset}(Y^B_{k+1-r}) .$$

C'est un système de m équations à m inconnues Y^B_{k+1}, et de rang (m-1). On écrit sa condition de compatibilité.

$$\tilde{A}^1_A \{H^{A,1}_{B,\emptyset}(Y^B_k) + H^{A,2}_{B,\emptyset}(Y^B_{k-1}) + H^{A,3}_{B,\emptyset}(Y^B_{k-2}) + \sum_{r=4}^{\min(t,k+1)} H^{A,r}_{B,\emptyset}(Y^B_{k+1-r})\} = 0$$

On utilise (36) pour écrire :

$$\tilde{A}^1_A \, H^{A,1}_{B,\emptyset} \left[R^B_o(Y^1_k) + R^B_1(Y^1_{k-1}) + R^B_2(Y^1_{k-2}) + Z^B_k\right]$$

$$+ \tilde{A}^1_A \, H^{A,2}_{B,\emptyset} \left[R^B_o(Y^1_{k-1}) + R^B_1(Y^1_{k-2}) + R^B_2(Y^1_{k-3}) + Z^B_{k-1}\right]$$

$$+ \tilde{A}^1_A \, H^{A,3}_{B,\emptyset} \left[R^B_o(Y^1_{k-2}) + R^B_1(Y^1_{k-3}) + R^B_2(Y^1_{k-4}) + Z^B_{k-2}\right]$$

$$+ \sum_{r=4}^{\min(t,k+1)} \tilde{A}^1_A \, H^{A,r}_{B,\emptyset} \, (Y^B_{k+1-r}) = 0$$

Compte tenu de $\tilde{A}^1_A \, H^{A,1}_{B,\emptyset} \, R^B_o = 0$ et de la définition de K_2 et des opérateurs de (35) ceci s'écrit encore

$$K_2(Y^1_{k-1}) = P_3(Y^1_{k-2}) + P_4(Y^1_{k-3}) + P_5(Y^1_{k-5}) + M_{B,1}(Z^B_k) + M_{B,2}(Z^B_{k-1}) +$$

$$M^1_{B,3}(Z^B_{k-2}) + \sum_{r=4}^{\min(t,k+1)} M_{B,r}(Y^B_{k+1-r})$$

Soit encore, compte tenu de la définition de Ω_{k+1} :

$$K_2(Y^1_{k-1}) = \Omega_{k+1} \quad .$$

Afin de déterminer complètement Y^1_{k-1}, on leur impose d'être la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} K_2(Y^1_{k-1}) = \Omega_{k+1} \\ \\ Y^1_{k-1}(x^o,0,x'') = 0 \quad ; \quad \partial_1 \, Y^1_{k-1}(x^o,0,x'') = 0 \quad . \end{cases}$$

On peut alors résoudre le système (37) ; et on trouve

$$Y^B_{k+1} = \frac{\tilde{A}^B_1}{\tilde{A}^1_1} \, Y^1_{k+1} - \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{\tilde{A}^1_1} \left[H^{C,1}_{D,\emptyset}(Y^D_k) + H^{C,2}_{D,\emptyset}(Y^D_{k-1}) + H^{C,3}_{D,\emptyset}(Y^D_{k-2}) + \sum_{r=4}^{\min(t,k+1)} H^{C,r}_{D,\emptyset}(Y^D_{k+1-r})\right]$$

on remplace, pour trouver :

$$Y^B_{k+1} = R^B_o\, Y^1_{k+1} - \frac{\widetilde{A^{1,B}_{1,C}}}{A^1_1} \{H^{C,1}_{D,\emptyset}\, [R^D_o(Y^1_k) + R^D_1(Y^1_{k-1}) + R^D_2(Y^1_{k-2}) + Z^D_k]$$

$$+ H^{C,2}_{D,\emptyset}\, [R^D_o(Y^1_{k-1}) + R^D_1(Y^1_{k-2}) + R^D_2(Y^1_{k-3}) + Z^D_{k-1}] + H^{C,3}_{D,\emptyset}\, [R^D_o(Y^1_{k-2}) +$$

$$+ R^D_1(Y^1_{k-3}) + R^D_2(Y^1_{k-4}) + Z^D_{k-2}] + \sum_{r=4}^{\min(t,k+1)} H^{C,r}_{D,\emptyset}(Y^D_{k+1-r})\}$$

ce qui s'écrit, compte tenu des définitions de R^B_o , R^B_1 , R^B_2 et des définitions (35)

$$Y^B_{k+1} = R^B_o(Y^1_{k+1}) + R^B_1(Y^1_k) + R^B_2(Y^1_{k-1}) + Q^B_3(Y^1_{k-2}) + Q^B_4(Y^1_{k-3}) + Q^B_5(Y^1_{k-4})$$

$$+ S^B_{D,1}(Z^D_k) + S^B_{D,2}(Z^D_{k-1}) + S^B_{D,3}(Z^D_{k-2}) + \sum_{r=4}^{\min(t,k+1)} S^B_{D,r}(Y^D_{k+1-r}) \qquad (38)$$

Soit encore, compte tenu de la définition de Z^B_{k+1}

$$Y^B_{k+1} = R^B_o(Y^1_{k+1}) + R^B_1(Y^1_k) + R^B_2(Y^1_{k-1}) + Z^B_{k+1} \qquad (39)$$

Ceci termine la démonstration de (P_{k+1}).

CHAPITRE II

MAJORATION DES Y_j^B .

§ 1 - Fonctions majorantes.

Notations : Etant données deux séries formelles u , V à $(n+1)$ indéterminées X^o , X^1 ,..., X^n :

$$u(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha X^\alpha \qquad\qquad X = (X^o ,\dots, X^n)$$

$$V(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} V_\alpha X^\alpha$$

où :

u_α pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, est un élément d'une algèbre de Banach E et V_α pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ est un nombre réel positif ou nul.

On dit que $u(X)$ est majorée par $V(X)$ si et seulement si :

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \qquad ||u_\alpha||_E \leq V_\alpha$$

On note dans ce cas :

$$u(X) << V(X) .$$

Soient r , R' , R des nombres réels tels que : $0 < r < R' < R$.

On note $\theta(t)$ une série formelle d'une variable t ; et on pose :

$$\theta^{(j)}(t) = \frac{d^j}{(dt)^j}\,\theta(t) \quad \text{pour tout } j \text{ dans } \mathbb{N} .$$

On supposera :

$$\begin{aligned} &\theta(t) \gg 0 \\ &(R'-t)\,\theta(t) \gg 0 \end{aligned} \tag{40}$$

Proposition 1.- [2]

$$\theta^{(j)}(t) \ll R'\,\theta^{(j+1)}(t) \tag{41}$$

$$\frac{1}{R-t}\,\theta^{(j)}(t) \ll \frac{1}{R-R'}\,\theta^{(j)}(t) \tag{42}$$

Preuve : En dérivant $(R'-t)\,\theta(t) \gg 0$, on trouve

$$-\,\theta(t) + (R'-t)\,\theta'(t) \gg 0$$

et en ajoutant $\theta(t)$, qui est une série positive, aux deux membres de la relation précédente, on trouve

$$(R'-t)\,\theta'(t) \gg \theta(t) \gg 0 .$$

Il suffit alors d'établir les relations (41), (42) pour $j = 0$, puisque si θ vérifie les hypothèses (40), il en est de même pour chaque $\theta^{(j)}$ on a :

$$R'\,\theta'(t) - (R'-t)\,\theta'(t) = t\theta'(t) \gg 0$$

donc en ajoutant $(R'-t)\,\theta'(t)$, série positive, aux deux membres de cette relation

$$R'\ \theta'(t) \gg (R'-t)\ \theta'(t)$$

et on a bien :

$$\theta(t) \ll R'\ \theta'(t) \quad , \quad \text{et par conséquent (41).}$$

On écrit maintenant :

$$\left(\frac{1}{R-R'} - \frac{1}{R-t}\right) \theta(t) = \frac{(R'-t)\ \theta(t)}{(R-R')(R-t)} \gg 0$$

car $(R'-t)\ \theta(t) \gg 0$, $\frac{1}{R-t} \gg 0$ et $R - R' > 0$ donc ; en ajoutant $\frac{\theta(t)}{R-t}$, qui est une série positive, aux deux membres de cette relation, on trouve

$$\frac{1}{R-R'}\ \theta(t) \gg \frac{1}{(R-t)}\ \theta(t)$$

d'où la relation (42).

On pose :

$$t(x) = \rho\ x^o + x^1 + \dots + x^n \qquad \text{avec } \rho \geq 1 \text{ (qu'on précisera par la suite).}$$

Proposition 2.- [2]

Soit $C(x,\partial)$ un opérateur différentiel d'ordre ℓ en x et ℓ_1 en x^o , à coefficients holomorphes au voisinage du polydisque $\overline{PD(0,R)}$. Alors : il existe une constante B ne dépendant que de l'opérateur telle que :

$$u \ll U\ \theta^{(j)} \circ t \Longrightarrow C(u) \ll B\ \rho^{\ell_1}\ U\ \theta^{(j+\ell)} \circ t$$

Preuve : On écrit :

$$C(x,\partial) = \sum_{\substack{\alpha_o \leq \ell_1 \\ |\alpha| \leq \ell}} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

$$\alpha = (\alpha_o , \alpha') .$$

D'après (41) on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \ , \ \forall j \in \mathbb{N} \quad \theta^{(j)} \circ t \ll (R')^k\, \theta^{(j+k)} \circ t$$

Et par suite :

$$D^\alpha u \ll U\, D^\alpha(\theta^{(j)} \circ t) = U\, \rho^{\alpha_o}\, \theta^{(j+|\alpha|)} \circ t \ll U\, \rho^{\alpha_o} (R')^{\ell-|\alpha|}\, \theta^{(j+\ell)} \circ t$$

puisque a_α est holomorphe sur un voisinage de $\overline{PD(0,R)}$, il existe M_α tels que $a_\alpha \ll \frac{M_\alpha}{R-t}$. On a donc :

$$a_\alpha\, D^\alpha u \ll \frac{M_\alpha}{R-t}\, U\, \rho^{\alpha_o} (R')^{\ell-|\alpha|}\, \theta^{(j+\ell)} \circ t$$

Soit :

$$a_\alpha\, D^\alpha u \ll \frac{M_\alpha}{R-R'}\, U\, \rho^{\ell_1} (R')^{\ell-|\alpha|}\, \theta^{(j+\ell)} \circ t$$

(d'après (42) et puisque $\rho \geq 1$).

On prend :

$$B = \sum_{\substack{\alpha_o \leq \ell_1 \\ |\alpha| \leq \ell}} \frac{M_\alpha}{R-R'}\, (R')^{\ell-|\alpha|}$$

ce qui donne bien le résultat annoncé.

On rappelle maintenant un résultat de [5] :

Soit C un opérateur différentiel d'ordre ℓ en x, d'ordre inférieur strictement à ℓ en x^o :

On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \partial_o^\ell u = C(u) + v \\ \partial_o^r u(0,x') = w_r(x') & 0 \leqslant r \leqslant \ell-1 \end{cases}$$

Si $\mathcal{C}$ est un opérateur différentiel tel que

$$c \ll \mathcal{C}$$

Et si $v \ll \mathcal{V}$; $w_j \ll \mathcal{W}_j$ pour tout $j \in \{0,\ldots,\ell-1\}$.

Alors : si $\mathcal{U}$ est telle que :

$$\begin{cases} \partial_o^\ell \mathcal{U} \gg \mathcal{C}(\mathcal{U}) + \mathcal{V} \\ \partial_o^j \mathcal{U} \gg \mathcal{W}_j \end{cases}$$

On a : $u \ll \mathcal{U}$.

Proposition 3.- [5]. On considère le problème de Cauchy holomorphe (I), sur $PD(0,R)$:

$$\text{Si} \quad \begin{cases} v \ll V\,\theta^{(j+\ell)} \circ t \\ w_r \ll W_r\,\theta^{(j+r)} \circ t & 0 \leqslant r \leqslant \ell-1 \end{cases} .$$

Alors : la solution u de (I) est telle que :

$$u \ll U\,\theta^{(j)} \circ t$$

avec $\quad U = \max(\dfrac{V/\rho^{\ell}}{1-B/\rho} \;,\; W_o \;,\ldots,\; \dfrac{W_1}{\rho} \;,\ldots,\; \dfrac{W_{\ell-1}}{\rho^{\ell-1}}) \;,$

constante indépendante de $\theta(t)$, et B constante ne dépendant que de l'opérateur C.

<u>Preuve</u> : On note $B' = \max\limits_{|\alpha|\leq\ell} (M_\alpha)$, M_α étant tel que $a_\alpha \ll \dfrac{M_\alpha}{R-t}$. En appliquant le rappel avec :

$$\mathcal{C} = \frac{B'}{R-t} \sum_{\substack{\alpha_o\leq\ell-1 \\ |\alpha|\leq\ell}} D^\alpha \;,\quad \mathcal{U} = U\,\theta^{(j)} \circ t \;,\quad \mathcal{V} = V\,\theta^{(j+\ell)} \circ t$$

$$\mathcal{W}_r = W_r\,\theta^{(j+\ell)} \circ t \qquad 0 \leq r \leq \ell-1 \;.$$

Il suffira que $\mathcal{U}$ vérifie :

$$\begin{cases} \partial_o^\ell \mathcal{U} \gg \mathcal{C}(\mathcal{U}) + \mathcal{V} & \\ \partial_o^r \mathcal{U} \gg \mathcal{W}_r & r = 0,1,\ldots,\ell-1 \end{cases}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la proposition 2 :

$$\begin{cases} U\rho^\ell\,\theta^{(j+\ell)} \circ t \gg \dfrac{B'}{R-R'}\,\rho^{\ell-1}\,U\,\theta^{(j+\ell)} \circ t + V\,\theta^{(j+\ell)} \circ t \\ U\rho^r\,\theta^{(j+r)} \circ t \gg W_r\,\theta^{(j+r)} \circ t \end{cases}$$

ou encore d'après (42)) :

$$\begin{cases} U\rho^\ell \geq \dfrac{B'}{R-R'}\,\rho^{\ell-1}\,U + V \\ U\rho^r \geq W_r \quad \text{pour tout} \quad r : 0 \leq r \leq \ell-1 \;. \end{cases}$$

Si on note $B = \dfrac{B'}{R-R'}$, et si on suppose <u>$\rho > B$</u> , ceci équivaut encore à

$$\begin{cases} U \geq \dfrac{V}{\rho^{\ell}(1-B/\rho)} \\ U \geq \dfrac{W_r}{\rho^r} \quad \forall r : 0 \leq r \leq \ell-1 \end{cases}$$

ce qui termine bien la démonstration de la proposition 3.

Remarque : La proposition 3 est évidemment encore valable pour un problème de Cauchy analytique réel, si on suppose les coefficients a_α de l'opérateur C majorés sur $PD(0,R)$ par $\dfrac{M_\alpha}{R-t}$, ce qu'il est toujours possible de réaliser en supposant R assez petit.

§ 2 - *Majoration des* Y_j^B.

L'opérateur $(h_B^A(x,\partial))_{1\leq A,B\leq m}$ est un opérateur à coefficients analytiques réels, d'ordre t sur un voisinage de a.

Le système d'équations aux dérivées partielles :

$$h_B^A \, Y^B = 0 \quad ; \quad A \text{ varie entre } 1 \text{ et } m$$

admet une solution formelle :

$$Y^B = \sum_{j=0}^{+\infty} Y_j^B \times f_j \circ \varphi$$

à coefficient Y_j^B analytiques sur un voisinage V de a :

$$Y_j^B = R_o^B(Y_j^1) + R_1^B(Y_{j-1}^1) + R_2^B(Y_{j-2}^1) + Z_j^B \tag{43}$$

$$Z_j^B = Q_3^B(Y_{j-3}^1) + Q_4^B(Y_{j-4}^1) + Q_5^B(Y_{j-5}^1) + S_{1,D}^B(Z_{j-1}^D) +$$

$$S_{2,D}^B(Z_{j-2}^D) + S_{3,D}^B(Z_{j-3}^D) + \sum_{r=4}^{\min(t,j)} S_{r,D}^B(Y_{j-r}^D) \tag{44}$$

R^B_r , Q^B_r , $S^B_{r,D}$ sont des opérateurs différentiels d'ordre r , pour $r \geqslant 0$ définis dans le chap. I.

Y^1_j est la solution du problème de Cauchy holomorphe :

$$\begin{cases} p^\alpha \, p^\beta \, \partial_{\alpha\beta} \, Y^1_j + M \, p^\beta \, \partial_\beta \, Y^1_j + N \, Y^1_j = \Omega_{j+2} \\ Y^1(x^o, 0, x'') = \delta^o_j \quad ; \quad \partial_1 \, Y^1_j(x^o, 0, x'') = 0 \end{cases} \tag{45}$$

$$\Omega_o = \Omega_1 = 0$$

Et :

$$\Omega_j = P_3(Y^1_{j-3}) + P_4(Y^1_{j-4}) + P_5(Y^1_{j-5}) + \sum_{r=4}^{\min(t,j)} M_{B,r}(Y^B_{j-r}) +$$

$$M_{B,1}\,(Z^B_{j-1}) + M_{B,2}(Z^B_{j-2}) + M_{B,3}(Z^B_{j-3}) \tag{46}$$

P_r , $M_{B,r}$ désignent des opérateurs d'ordre r.

<u>*Majoration de*</u> Y^B_o.

Y^1_o étant solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial^2_1 \, Y^1_o = C_2(Y^1_o) \\ Y^1_o(x^o, 0, x'') = 1 \quad ; \quad \partial_1 \, Y^1_o(x^o, 0, x'') = 0 \end{cases}$$

On applique alors la proposition (3) (avec $W_o = \dfrac{1}{\theta_o}$, $W_1 = V = 0$, et θ_o premier terme de la série θ).

On aura :

$$Y_o^1 \ll \frac{1}{\theta_o} \theta^{(o)} \circ t$$

Et d'après la proposition 2 ; on obtient (avec $\ell = 0$) :

$$Y_o^B \ll \frac{M}{\theta_o} \theta^{(o)} \circ t \quad ; \quad M = \max_{1 \leq B \leq m} M_B \ ,$$

M_B constante associée à l'opérateur $\mathcal{R}_o^B = \dfrac{\tilde{A}_1^B}{\tilde{A}_1^1}$. On pose :

$$C_1 = \frac{M}{\theta_o} .$$

D'où : $$Y_o^B \ll C_1 \ \theta^{(o)} \circ t \quad , \quad C_1 \text{ indépendante de } \theta(t) .$$

Pour $j > 0$; on procédera par récurrence.

Soit $k \in \mathbb{N}$: $k \geq 3$

On suppose : P'_{k-1} :

$$\left[\begin{array}{lll} Y_j^B \ll C_1 \ C^j \ \theta^{(j)} \circ t & 0 \leq j \leq k-3 & (47)_{(k-1)} \\ \Omega_j \ll C_1 \ C^{j-2} \ \theta^{(j)} \circ t & 2 \leq j \leq k-1 & (48)_{(k-1)} \\ Z_j^B \ll C_1 \ C^{j-2} \ \theta^{(j)} \circ t & 2 \leq j \leq k-1 & (49)_{(k-1)} \end{array}\right.$$

Et, on montre P'_k .

(On conviendra qu'on prend la même constante B , pour chaque opérateur, lorsqu'on applique la proposition 2).

on a :

$$\left.\begin{array}{l} P_3(Y^1_{k-3}) << C_1 \; B \; C^{k-3} \; \rho^3 \; \theta^{(k)} \; o \; t \\ P_4(Y^1_{k-4}) << C_1 \; B \; C^{k-4} \; \rho^4 \; \theta^{(k)} \; o \; t \\ P_5(Y^1_{k-5}) << C_1 \; B \; C^{k-5} \; \rho^5 \; \theta^{(k)} \; o \; t \end{array}\right\} \quad \text{d'après} \quad (47)_{k-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{B,1}(Z^B_{k-1}) << m \; C_1 \; B \; C^{k-3} \; \rho \; \theta^{(k)} \; o \; t \\ M_{B,2}(Z^B_{k-2}) << m \; C_1 \; B \; C^{k-4} \; \rho^2 \; \theta^{(k)} o \; t \\ M_{B,3}(Z^B_{k-3}) << m \; C_1 \; B \; C^{k-5} \; \rho^3 \; \theta^{(k)} \; o \; t \end{array}\right\} \quad \text{d'après} \quad (48)_{k-1}$$

$$\sum_{r=4}^{\min(t,k)} M_{B,r}(Y^B_{k-r}) << m \sum_{r=4}^{\min(t,k)} C_1 \; B \; C^{k-r} \; \rho^r \; \theta^{(k)} \; o \; t$$

d'après $(49)_{k-1}$

c'est-à-dire :

$$\Omega_k << B \; C_1 \; C^{k-2} \left\{\frac{\rho^3}{C} + \frac{\rho^4}{C^2} + \frac{\rho^5}{C^3} + m \left(\frac{\rho}{C} + \left(\frac{\rho}{C}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{C}\right)^3 + \sum_{r=4}^{\min(t,k)} \rho^2 \left(\frac{\rho}{C}\right)^{r-2}\right)\right\} \theta^{(k)} \; o \; t$$

$$<< B \; C_1 \; C^{k-2} \left\{\rho^2\left(\frac{\rho}{C} + \left(\frac{\rho}{C}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{C}\right)^3\right) + m\left(\frac{\rho}{C} + \left(\frac{\rho}{C}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{C}\right)^3 + \sum_{r=4}^{\min(t,k)} \rho^2 \left(\frac{\rho}{C}\right)^{r-2}\right)\right\} \theta^{(k)} \; o \; t$$

On impose : $\quad \dfrac{\rho}{C} < 1$

On aura ; puisque $\rho \geq 1$

$$\Omega_k << B \; C_1 \; C^{k-2} \left\{\frac{\frac{\rho}{C}}{1 - \frac{\rho}{C}} \times (2m+1) \; \rho^2\right\} \theta^{(k)} \; o \; t \qquad (50)$$

donc $\quad \Omega'_k = \dfrac{1}{\tilde{H}'' p_1^2} \Omega_k << B^2 \; C \; C^{k-2} \dfrac{\frac{\rho}{C}}{1 - \frac{\rho}{C}} (2m+1) \; \rho^2 \; \theta^{(k)} \; o \; t$

on applique la proposition 3 avec :

$$W_o = W_1 = 0 \quad , \quad \ell = 2 \quad , \quad V = B^2 C_1 \; C^{k-2} \; . \; (2m+1) \; \rho^2 \; \frac{\rho/C}{1 - \rho/C}$$

au problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1^2 \; Y_{k-2}^1 = C_2(Y_{k-2}^1) + \Omega_k' \\ Y_{k-2}^1(x^o, \; 0, \; x'') = 0 \\ \partial_1 \; Y_{k-2}^1(x^o, \; 0, \; x'') = 0 \end{array} \right.$$

On obtient si $\rho \geqslant 2B$

$$Y_{k-2}^1 \ll B \; C_1 \; C^{k-2} \rho \, (2m+1) \; \frac{\rho/C}{1 - \frac{\rho}{C}} \; \theta^{(k-2)} \circ t \tag{51}$$

D'autre part ; d'après (44) ; on peut écrire :

$$Z_k^B \ll B \; C_1 \; \{\rho^3 \; C^{k-3} + \rho^4 \; C^{k-4} + \rho^5 \; C^{k-5} + m(\rho \; C^{k-3} + \rho^2 \; C^{k-4} + \rho^3 \; C^{k-5} + \sum_{r=4}^{\min(t,k)} \rho^r \; C^{k-r})\} \; \theta^{(k)} \circ t$$

$$\ll B \; C_1 \; C^{k-2} \; \{\rho^2 (\frac{\rho}{C} + (\frac{\rho}{C})^2 + (\frac{\rho}{C})^3) + m(\frac{\rho}{C} + (\frac{\rho}{C})^2 + (\frac{\rho}{C})^3 + \rho^2 \sum_{r=4}^{\min(t,k)} (\frac{\rho}{C})^{r-2})\} \; \theta^{(k)} \circ t$$

$$\ll B \; C_1 \; C^{k-2} \; \{\rho^2 \; \frac{\rho/C}{1 - \rho/C} + m(\frac{\rho/C}{1 - \rho/C} + \rho^2 \; \frac{\rho/C}{1 - \rho/C})\} \; \theta^{(k)} \circ t$$

$$\ll B \; C_1 \; C^{k-2} \; \{(2m+1) \; \rho^2 \; \frac{\rho/C}{1 - \rho/C}\} \; \theta^{(k)} \circ t \tag{52}$$

D'où :

$$Y^B_{k-2} \ll \Big[B\ C_1\ C^{k-2}\ \rho\ (2m+1)\ \frac{\rho/C}{1-\rho/C} + B\ \rho\ C_1\ C^{k-3} + B\ \rho^2\ C_1\ C^{k-4} + C_1\ C^{k-4} \Big]\ \theta^{(k-2)}\ o\ t$$

$$\ll C_1\ C^{k-2} \Big[(2m+1) B\ \rho \frac{\rho/C}{1-\rho/C} + B\ (\frac{\rho}{C} + (\frac{\rho}{C})^2) + \frac{1}{C^2} \Big]\ \theta^{(k-2)}\ o\ t$$

$$\ll C_1\ C^{k-2} \Big[(2m+1)\ \rho\ B + B)\ \frac{\rho/C}{1-\rho/C} + \frac{1}{C^2} \Big]\ \theta^{(k-2)}\ o\ t$$

Si $\rho \geqslant 2B$ (donc $\rho - B \geqslant B$) :

$$Y^B_{k-2} \ll C_1\ C^{k-2} (\ \rho (2m+2) B\ \frac{\rho/C}{1-\rho/C} + \frac{1}{C})\ \theta^{(k-2)}\ o\ t$$

On veut :

$$Z^B_k \ll C_1\ C^{k-2}\ \theta^{(k)}\ o\ t$$

$$Y^B_{k-2} \ll C_1\ C^{k-2}\ \theta^{(k-2)}\ o\ t$$

$$\Omega_k \ll C_1\ C^{k-2}\ \theta^{(k)}\ o\ t$$

Il suffit alors de choisir ρ et C telles que :

$$\begin{cases} \rho \geqslant 2B\ ,\ \rho \geqslant 1\ ,\ \rho < C & (C_o) \\ B(2m+1)\ \rho^2\ \dfrac{\rho/C}{1-\rho/C} \leqslant 1 & (C_1) \\ 2(m+1) B \rho\ \dfrac{\rho/C}{1-\rho/C} + \dfrac{1}{C} \leqslant 1 & (C_2) \end{cases}$$

On prend :

$\rho = \rho_o$ telle que $\rho_o \geqslant \max(1, 2B)$ et pour ce choix de ρ_o, on choisit C tel que :

$$\begin{cases} C \geqslant 2 \\ C \geqslant \left[2B\,(2m+2)\,\rho_o^2 + 1\right] \rho_o \end{cases}$$

pour ce choix de ρ_o et de C les conditions (C_o), (C_1), (C_2) sont bien satisfaites, et (P_k') est vérifié.

On pose :

$$\theta(t) = \frac{1}{r-t}$$

On a donc :

$$\theta^{(k)}(t) = \frac{k!}{(r-t)^{k+1}} \qquad \text{pour } k \geqslant 0$$

la série $\theta(t)$ vérifie (40) en effet :

$$(R'-t)\,\theta(t) = \frac{(R'-r)}{r-t} + 1 \gg 0$$

car $R' > r$ et $\dfrac{1}{r-t} \gg 0$.

On a le résultat suivant si :

$$\begin{cases} u \ll U \\ \left.\begin{array}{l} |x_o| \leqslant X_o \\ \quad\vdots \\ |x_n| \leqslant X_n \end{array}\right\} \end{cases} \quad \text{qu'on note abusivement } |x| \leqslant X .$$

Alors :

$$|u(x)| \leqslant U(X) .$$

En effet :

$$|u(x)| = |\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha x^\alpha| \leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} |u_\alpha| \, |x^\alpha| \leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} U_\alpha X^\alpha = U(X) .$$

On a :

$$Y_j^B(x) << C_1 \, C^j(\theta^{(j)} \circ t)(x)$$

d'où on déduit :

$$|Y_j^B(x)| \leqslant C_1 \, C^j(\theta^{(j)} \circ t)(|x|) = C_1 \, C^j \, \theta^{(j)}(t(|x|))$$

Soit V_o voisinage de $a = 0$ tel que :

$$t(|x|) \leqslant \frac{r}{2} .$$

Si $x \in V_o$, on a :

$$|Y_j^B(x)| \leqslant C_1 \, C^j \, \theta^{(j)}(\frac{r}{2}) \qquad \text{(car : sur }]-r, r[\text{ , } \theta^{(j)} \text{ est croissante)}$$

$$\leqslant C_1 \, C^j \frac{j!}{(r/2)^{j+1}} = (\frac{2C_1}{r}) \, (\frac{2C}{r})^j \, j!$$

On note :

$$C_1' = \frac{2C_1}{r} \quad , \quad C' = \frac{2C}{r}$$

On aura : pour x dans V_o :

$$|Y_j^B(x)| \leqslant C_1'(C')^j \, j!$$

Théorème 1.- Soit X une variété analytique réelle de dimension $(n+1)$, S une hypersurface de X régulière en a, d'équation locale $\varphi(x) = 0$ au voisinage de a, h un opérateur différentiel matriciel d'ordre t sur X.

Si : le déterminant de la matrice caractéristique de h se met sous la forme :

$$[H'(x,\xi)]^2 \; [H''(x,\xi)]$$

avec H' et H'' fonctions polynômiales en ξ, à coefficients analytiques sur un voisinage de a, et : S caractéristique totale simple pour H' au voisinage de a S non caractéristique en a pour H'' .

Si ; S **n'est pas caractéristique en a pour chacun des** cofacteurs de la matrice caractéristique (on suppose : non caractéristique pour A_1^1).

Si : la condition (L_1^1) est satisfaite :

$$(L_1^1) \; : \; \{A_A^1 [\partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha A_1^B + H_B^{*A} A_1^B] \equiv A_1^1 \, H'' \, \partial^\alpha H' \, \partial_\alpha H' \qquad [H']\}.$$

Alors : il existe une suite (Y_j) de fonctions analytiques sur un même voisinage de a dans X, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, telles que :

$$Y = \sum_{j=0}^{+\infty} Y_j \times (f_j \circ \varphi) \quad .$$

Soit une onde asymptotique pour h ; et : $\exists \; C_1 > 0$, $C > 0$, V_o voisinage de a tels que :

$$|Y_j^B(x)| \leq C_1 \, C^j \, j! \qquad \forall x \in V_o \, , \; \forall B \in \{1,\ldots,m\}.$$

CHAPITRE III

SOLUTIONS NULLES.

§ 1 - *Rappels sur fonctions ultra-différentiables, ultra-distributions.*

1°) *Les suites* $\{M_p\}$.

Soit $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant certaines des conditions suivantes :

(M.0.) $M_o = 1$ (Commodité)

(M.1.) $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad M_p^2 \leq M_{p-1} \times M_{p+1}$ (Convexité logarithmique)

(M.2.) $\exists A > 0 \ , \ \exists H > 0$

$$\forall p \in \mathbb{N} : \quad M_p \leq AH^p \min_{0\leq q\leq p} (M_q \times M_{p-q})$$ (Stabilité par op. ultra-différentiels)

(M.3.) $\exists A > 0 \ : \ \forall p \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leq A \times p \times \frac{M_p}{M_{p+1}}$$ (Forte non quasi-analyticité)

(M.2.)' $\exists A > 0 \ , \ \exists H > 0$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad M_{p+1} \leq A\, H^p\, M_p$$ (Stabilité par op. différentiels)

(M.3.)' $$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < +\infty$$ (Non quasi-analyticité)

Exemple : Si $p > 1$, $M_p = (p!)^s$ vérifie ces conditions.

Remarque 1.- Il résulte immédiatement de (M.O.), (M.1.) que

$$\forall q \in \mathbb{N} \qquad M_q \geq \max_{0\leq p\leq q} (M_p \times M_{q-p})$$

Remarque 2.- On démontre ([11] p. 74) que si $\{M_p\}$ vérifie (M.0.), (M.1.), (M.3.)' $\forall L > 0$, $\exists \tilde{B} > 0$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad p! \leq \tilde{B}\, L^p\, M_p$$

On définit aussi, pour une suite vérifiant (M.0.), (M.1.), une fonction M^* de $]0, +\infty[$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, par

$$M^*(\rho) = \sup_{p \in \mathbb{N}} \{\mathrm{Log}(\frac{p!\ \rho^p}{M_p})\}$$

Cette fonction est semi-continue inférieurement, comme enveloppe supérieure de fonctions continues.

2°) *Les espaces vectoriels de fonctions ultra-différentiables.*

a) Si $\{M_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, on note si K est un compact de Ω, h un nombre strictement positif et $f \in C^\infty(\Omega)$

$$p_{K,h}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}}} (\frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|}\ M_{|\alpha|}})$$

on note $C^\infty(\Omega, \{M_p\}) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \forall K \subset \Omega , \exists h > 0 : p_{K,h}(f) < +\infty\}$,

et $C^\infty_c(\Omega, \{M_p\})$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\Omega, \{M_p\})$ des fonctions à support compact (fonctions ultra-différentielles de type Roumien),

on note $C^\infty(\Omega, (M_p)) = \{f \in C^\infty(\Omega) , \forall K \subset \Omega , \forall h > 0 , p_{K,h}(f) < +\infty\}$

et $C^\infty_c(\Omega, (M_p))$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\Omega, (M_p))$ des fonctions à support compact (fonctions ultra-différentielles de type Beurling).

Ces espaces sont munis de leur topologie naturelle ([11], [14]) On note $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$, $\mathcal{D}(\Omega, \{M_p\})$, $\mathcal{E}(\Omega, (M_p))$, $\mathcal{D}(\Omega, (M_p))$ les espaces vectoriels topologiques ainsi définis.

<u>*Remarque*</u>.- Si une série $\sum_{j=0}^{\infty} Z_j$ de fonctions de $C^\infty(\Omega, \{M_p\})$ est telle que $\forall K$ compact de Ω, $\exists h > 0$, tel que $\sum_{j=0}^{\infty} p_{K,h}(Z_j) < +\infty$, alors cette série converge dans $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$ la condition s'écrit encore

$$\forall K \subset \Omega \ , \exists h > 0 \ , \exists A > 0 : \forall x \in K \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |D^\alpha Z_j(x)| \leq Ah^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$$

3°) <u>*Hyperfonctions et ultra-distributions*</u>.

On note $\mathcal{D}'(\Omega, \{M_p\})$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega, (M_p))$ le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega, \{M_p\})$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega, (M_p))$. Ce sont les ultra-distributions de classe $\{M_p\}$ (resp. (M_p)). Le dual de $\mathcal{E}(\Omega, \{M_p\})$ (resp. de $\mathcal{E}(\Omega, (M_p))$ s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega, \{M_p\})$ (resp : $\mathcal{D}'(\Omega, (M_p))$ des ultra-distributions à support compact. Si $\{M_p\}$ vérifie (M.1.) et (M.3.)' , $\mathcal{D}'(\Omega)$ est contenu dans chacun de ces espaces.

On définit encore, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{B}(\Omega) = H_\Omega^{n+1}(V,\theta)$, $(n+1)^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie relative de V modulo $V-\Omega$, à valeurs dans le faisceau θ des fonctions holomorphes sur V pour V est un ouvert de Stein de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant Ω comme sous-ensemble fermé. On montre que cette définition est indépendantes du choix de V.

Si $\Omega = \prod_{k=0}^{n} \Omega_k$, avec Ω_k ouvert de $\mathbb{R}$, on a plus simplement ([12])

$$\mathcal{B}(\Omega) = \frac{\theta(\prod_{k=0}^{n} (V_k \setminus \Omega_k))}{\sum_{j=0}^{n} \theta((V_o \setminus \Omega_o) \times \ldots \times (V_{j-1} \setminus \Omega_{j-1}) \times V_j \times (V_{j+1} \setminus \Omega_{j+1}) \times \ldots \times (V_n \setminus \Omega_n))}$$

Tout espace d'ultra-distributions s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\Omega)$.

Si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$, V un ouvert de Stein de $\mathbb{C}^{n+1}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, fermé dans V , et si $F \in \theta(V \cap (\mathbb{R}^{n+1} + i\Gamma))$ on peut définir ([12]) $F(x + i\,\Gamma o)$, valeur au bord de F , hyperfonction de $\mathcal{B}(\Omega)$.

On rappelle le théorème 11.5 de [11]

Si la suite $\{M_p\}$ vérifie (M.0.), (M.1.), (M.2.), (M.3.), et si $F \in \theta[V \cap (\mathbb{R}^{n+1} + i\Gamma)]$ est telle que :

$\forall K$ compact de Ω, $\forall \Gamma'$ sous-cône fermé de Γ, $\exists L > 0$, (resp. $\forall L > 0$), $\exists C > 0$, $\exists \eta > 0$, tels que :

$$\forall x \in K, \forall y \in \Gamma' \quad , \quad ||y|| < \eta : |F(x + iy)| \leq C\, e^{M^*(L/||y||)}$$

Alors $F(x + i\Gamma o) \in \mathcal{D}'(\Omega, (M_p))$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega, \{M_p\})$ et

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \Gamma'}} F(x + iy) = F(x + i\Gamma o) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega,(M_p)) \quad (\text{resp.} \quad \mathcal{D}'(\Omega, \{M_p\})$$

C'est ce critère qui sera utilisé pour démontrer l'existence de solutions nulles ultra-distributions.

4°) *Opérateurs ultra-différentiels.*

Un opérateur $P(D) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} a_\alpha D^\alpha$ $(a_\alpha \in \mathbb{C})$ sera dit opérateur ultra-différentiel de classe $\{M_p\}$, (resp. (M_p)) si et seulement si :

$$\exists L > 0 \text{ , (resp. } \forall L > 0) \quad : \sup_\alpha \left\{\frac{|a_\alpha| \, M_{|\alpha|}}{L^{|\alpha|}}\right\} < +\infty$$

On démontre (remarque 4.16 de [11]) que si $\ell \in \mathbb{C}$, et si $\{M_p\}$ vérifie (M.1.), (M.2.), (M.3.), alors : $P(D) = \prod_{p=1}^{\infty} (1 + \ell \frac{M_p}{M_{p-1}} D)$ est un opérateur ultra-différentiel de classe (M_p).

On utilisera aussi le lemme 11.3 de [11] :

Lemme (*11.3.*).- Si $\{M_p\}$ vérifie (M.0.),(M.1.), et (M.3.)', alors tout opérateur ultra-différentiel de classe (M_p) (resp. $\{M_p\}$) est un opérateur linéaire continue sur l'espace de Frechet $\theta(V)$, (V ouvert quelconque de $\mathbb{C}^{n+1}$), plus précisément, $\exists L > 0$ (resp. $\forall L > 0$), $\exists C > 0$ tels que, pour toute fonction F holomorphe sur un voisinage du polydisque fermé de centre z et de rayon $(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)$ $\overline{P(z,\lambda)}$, on a :

$$|P(D)(F)(z)| \leq C \, e^{M^*(L/\lambda)} \sup_{z'\in\overline{P(z,\lambda)}} |F(z')|$$

§ 2 - *Solutions nulles ultra-différentiables de classe* $\{M_p\}$.

1°) *Choix de la suite* f_j

Soit $f_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \{M_p\})$ telle que f_o soit nulle sur $]-\infty, 0]$ et $0 \in \sup(f)$ (on peut prendre par exemple [3] :

$$f_o(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+i\eta)^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + i \frac{M_p}{M_{p-1}} \eta\right)^{-1} e^{iy\eta}\, d\eta$$

on note, si $j \geq 1$, f_j la primitive d'ordre j, s'annulant (j-1) fois en 0 de f_o, c'est-à-dire $f_j(y) = \int_0^y \frac{(y-\eta)^{j-1}}{(j-1)!} f(\eta)\, d\eta$ et si $j \leq 0$, f_j est la dérivée d'ordre $(-j)$ de f_o. Cette suite vérifie : $\forall j \in \mathbb{Z}$, $f_j' = f_{j-1}$.

Soit $R > 0$, $\exists h > 0$, $\exists \tilde{L} > 0$ tel que :

$$\forall y \in [-R, R], \forall j \in \mathbb{N} \quad |f_{-j}(y)| = |f^{(j)}(y)| \leq \tilde{L}\, h^j\, M_j$$

d'autre part :

$$\forall y \in [-R, R], \forall j \in \mathbb{N} \quad |f_j(y)| \leq \frac{|y|^j}{j!} \sup_{|\eta| \leq R} |f_o(\eta)| \leq \tilde{L} \frac{|y|^j}{j!}$$

2°) <u>*Solutions nulles de classe*</u> $\{M_p\}$

a) On va démontrer le théorème suivant :

<u>*Théorème*</u> *2.-* Soit X une variété analytique réelle, de dimension (n+1), h un opérateur différentiel matriciel sur X, d'ordre t, S une hypersurface analytique de X, régulière en a, caractéristique pour h. Si h et S vérifient les hypothèses du théorème 1, il existe Ω_o, voisinage ouvert de a et $Y \in [C^\infty(\Omega_o, \{M_p\})]^m$, solution nulle de h pour S en a, pour toute suite $\{M_p\}$ vérifiant (M.0.), (M.1.), (M.3.)'.

La démonstration de ce théorème est évidemment la même (à quelques simplifications mineurs de calcul près) que celle de [3]. On la redonne ici afin de faciliter la compréhension de l'ensemble.

Elle consiste en la preuve de la convergence de la solution formelle trouvée au chap. I, et utilise de manière essentielle les majorations obtenues au chap. II.

b) *Convergence de la solution formelle.*

D'après I, 2°) a) il suffit qu'on montre qu'il existe Ω_o tels que $\forall K$ compact de Ω_o , $\exists H > 0$, $\exists A > 0$ tel que :

$$\forall B \in \{1,2,\dots,m\} \ , \ \forall x \in K \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$$

$$S_\alpha^B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} |D^\alpha(Y_j^B \times (f_j \circ \phi))(x)| \leq AH^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$$

Etant donné que le problème est local, on choisira une carte locale en a telle que $\phi(x) = x^o$ et que $a = (0,\dots,0)$; on aura $|x^o| \leq R$ on a :

$$S_\alpha^B(x) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o} |D_o^{\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y_j^B(x)| \times |f_{j-(\alpha_o-\beta_o)}(x^o)|$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \{ \sum_{\beta_o=0}^{\min(j,\alpha_o)} C_{\alpha_o}^{\beta_o} |D_o^{\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y_{j-\beta_o}^B(x)| \} |f_{j-\alpha_o}(x^o)|$$

$$= \tilde{S}_\alpha^B(x) + \tilde{\tilde{S}}_\alpha^B(x)$$

avec :

$$\tilde{S}_\alpha^B(x) = \sum_{j=0}^{\alpha_o-1} \{ \sum_{\beta_o=0}^{j} C_{\alpha_o}^{\beta_o} |D_o^{\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y_{j-\beta_o}^B(x)| \} |f_{j-\alpha_o}(x^o)|$$

$$\tilde{\tilde{S}}_\alpha^B(x) = \sum_{j=\alpha_o}^{+\infty} \{ \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o} |D_o^{\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y_{j-\beta_o}^B(x)| \} |f_{j-\alpha_o}(x^o)|$$

On rappelle le résultat essentiel du chap. II, à savoir, pour $r > 0$ convenable, ρ et C convenables :

$$Y_j^B(x) \ll C_1 C^j \frac{j!}{[r-t(x)]^{j+1}} \quad \text{avec} \quad t(x) = x^o + \rho x^1 + x^2 + \dots + x^n$$

On en déduit, d'après les propriétés classiques des majorantes que

$$D_o^{\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y_{j-\beta_o}^{B}(x) << C_1 \, C^{j-\beta_o} \rho^{\alpha_1} \frac{(j+|\alpha'|)\,!}{[r-t(x)]^{j+|\alpha'|+1}}$$

donc si $t(|x|) < r$, l'inégalité : (car $\rho \geqslant 1$)

$$|D_o^{\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y_{j-\beta_o}^{B}(x)| \leqslant C_1 \, C^{j-\beta_o} \rho^{|\alpha'|} \frac{(j+|\alpha'|)\,!}{[r-t(|x|)]^{j+|\alpha'|+1}}$$

On démontre maintenant une majoration de $\tilde{S}_\alpha^B(x)$; si $|x^o| \leqslant R$

on a :

$$\tilde{S}_\alpha^B(x) << \sum_{j=0}^{\alpha_o-1} \Big[\sum_{\beta_o=0}^{j} C_{\alpha_o}^{\beta_o} \, C_1 \, C^{j-\beta_o} \rho^{|\alpha'|} \frac{(j+|\alpha'|)\,!}{[r-t(|x|)]^{j+|\alpha'|+1}} \Big] \tilde{L} \, h^{\alpha_o-j} \, M_{\alpha_o-j}$$

On a $\quad C_{\alpha_o}^{\beta_o} \leqslant C_{\alpha_o}^{j} \times C_j^{\beta_o}$

$$M_{\alpha_o-j} \times (j + |\alpha'|)\,! \leqslant \tilde{B} \, L^{j+|\alpha'|} \, M_{j+|\alpha'|} \times M_{\alpha_o-j} \leqslant \tilde{B} \, L^{j+|\alpha'|} \, M_{|\alpha|}$$

et par conséquent

$$\tilde{S}_\alpha^B(x) \leqslant \left(\sum_{j=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{j} \Big[\sum_{\beta_o=0}^{j} C_j^{\beta_o} \, C^{j-\beta_o} \Big] h^{\alpha_o-j} \times \frac{L^j}{[r-t(|x|)]^j} \right) \frac{C_1 \rho^{|\alpha'|} \tilde{B} \, L^{|\alpha'|} M_{|\alpha|} \, \tilde{L}}{[r-t(|x|)]^{|\alpha'|+1}}$$

$$= \Big[h + \frac{(1+C)L}{r-t(|x|)}\Big]^{\alpha_o} \Big[\frac{\rho L}{r-t(|x|)}\Big]^{|\alpha'|} \frac{C_1 \, \tilde{B} \, \tilde{L}}{r-t(|x|)} \times M_{|\alpha|}$$

On pose $\tilde{H} = \max\,(h.r + (1+C)\,L\ ,\ \rho L)$, $\tilde{A} = C_1 \, \tilde{B} \, \tilde{L}$

on a donc :

$$\tilde{S}_\alpha^B(x) \leqslant \Big[\frac{H}{r-t(|x|)}\Big]^{|\alpha|} \times \frac{\tilde{A}}{r-t(|x|)} \times M_{|\alpha|}$$

On montre maintenant une majoration de $\tilde{\tilde{S}}^B_\alpha(x)$. On a :

$$\tilde{\tilde{S}}^B_\alpha(x) \leqslant \sum_{j=\alpha_o}^{\infty} \Big(\sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o} C_1 C^{j-\beta_o} \rho^{|\alpha'|} \frac{(j+|\alpha'|)!}{[r-t(|x|)]^{j+|\alpha'|+1}} \Big) \tilde{L} \frac{|x^o|^{j-\alpha_o}}{(j-\alpha_o)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\Big(\sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o} C^{\alpha_o-\beta_o} \Big) \left[\frac{C|x^o|}{r-t(|x|)}\right]^j \frac{(j+|\alpha|)!}{j!} \right] \frac{C_1 \tilde{L} \rho^{|\alpha'|}}{[r-t(|x|)]^{|\alpha|+1}}$$

$$= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+|\alpha|)!}{j!} \left[\frac{C|x^o|}{r-t(|x|)}\right]^j \Big) \times \frac{C_1 \tilde{L} (1+C)^{\alpha_o} \rho^{|\alpha'|}}{[r-t(|x|)]^{|\alpha|+1}}$$

On suppose x tel que : $C|x^o| + t(|x|) < r$. On a alors

$$\tilde{\tilde{S}}^B_\alpha(x) \leqslant \frac{(|\alpha|)!}{[r-C|x^o|-t(|x|)]^{|\alpha|+1}} \times ((1+C)^{\alpha_o} \rho^{|\alpha'|} C_1 \tilde{L})$$

$$\leqslant \frac{\tilde{B} L^{|\alpha|} M_{|\alpha|} (1+C)^{\alpha_o} \rho^{|\alpha'|} C_1 \tilde{L}}{[r-C|x^o|-t(|x|)]^{|\alpha|+1}}$$

On pose $\tilde{\tilde{H}} = \max\ (L(1+C), L\rho)$. On a donc :

$$\tilde{\tilde{S}}^B_\alpha(x) \leqslant \left[\frac{\tilde{\tilde{H}}}{r-C|x^o|-t(|x|)}\right]^{|\alpha|} \times \frac{\tilde{A}}{r-C|x^o|-t(|x|)} \times M_{|\alpha|}$$

Si on pose $H = \max(\tilde{H},\tilde{\tilde{H}})$, $A = 2\tilde{A}$, on a

$$S^B_\alpha(x) \leqslant \left[\frac{H}{r-C|x^o|-t(|x|)}\right]^{|\alpha|} \times \frac{A}{r-C|x^o|-t(|x|)} \times M_{|\alpha|}$$

Soit $\Omega_o = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid C|x^o| + t(|x|) < r\}$; si K est un compact de Ω_o, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in K$ $r - C|x^o|-t(|x|) \geqslant \varepsilon$, donc $\exists H_K = \frac{H}{\varepsilon}$, $A_K = \frac{A}{\varepsilon}$ tels que $\forall x \in K$

$$S_\alpha^B(x) \leqslant A_K(H_K)^{|\alpha|} \times M_{|\alpha|}$$

On a donc bien $Y^B = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^B \times (f_j \circ \vartheta) \in C^\infty(\Omega_o, \{M_p\})$: puisque $f_j(x^o) = 0$ si $x^o \leqslant 0$, on a bien $Y^B(x) = 0$ si $\vartheta(x) < 0$.

Enfin $Y^B(x^o, 0, x'') = Y_o^B(x^o, 0, x'') \times f_o(x^o) = f_o(x^o)$, donc ne s'annule pas identiquement sur aucun voisinage de 0.

§ 3 - *Solutions nulles ultra-distributions.*

On suppose que la suite $\{M_p\}_{p\geqslant 0}$, vérifie $\{M.0., M.1., M.2., M.3.\}$.

1°) *Choix de la suite* f_j.

On pose $\Phi_o(z) = \frac{1}{z}$, $\Phi_j(z) = \frac{z^{j-1}}{(j-1)!}\left[\log z - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{j-1})\right]$ si $j \geqslant 1$ et $\Phi_j(z) = \Phi_o^{(-j)}(z) = (-1)^j \frac{j!}{z^{j+1}}$ si $j \leqslant -1$, avec :

$\log z$ est une fonction définie sur le domaine de Riemann $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^* : \arg z \in]-\theta, 2\pi + \theta[, \ \theta > 0\}$$

Toutes les fonctions Φ_j sont holomorphes sur $\mathcal{D}$ et vérifient : $\forall j \in \mathbb{Z}$ $\Phi_j' = \Phi_{j-1}$.

Remarquons, car ce sera utile par la suite, que la fonction $z \rightsquigarrow z \log z$ est bornée sur $\{z \in \mathcal{D} : |z| \leqslant R\}$, car : $|z \log z| \longrightarrow 0$ quand $|z| \to 0$ (puisque $\arg z$ reste borné dans $\mathcal{D}$), on a ; pour $j \geqslant 2$, $|z| \leqslant r$:

$$|\Phi_j(z)| \leqslant \frac{|z|^{j-2}}{(j-1)!}\left[|z \log z| + |z| \ (j-1)\right] \leqslant \frac{|z|^{j-2} M}{(j-2)!} .$$

On pose :

$$\psi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} P(D)\ (\Phi_j)(z)$$

où : P(D) est l'opérateur ultra-différentiel de classe $(M_p)_p$:

$$P(D) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - i\,\frac{M_p}{M_{p-1}}\,D\right)$$

Les fonctions Φ_j sont holomorphes sur $\mathcal{D}$, il en est donc de même pour ψ_j, et il existe $B' > 0$, $L' > 0$ telles que :
si $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| \leqslant r$ et $\lambda < |z|$, on a :

$$|\psi_j(z)| = \frac{1}{2\pi} |P(D)(\Phi_j)(z)| \leqslant B'\ e^{M^*(L'/\lambda)} \sup_{|w-z|=\lambda} |\Phi_j(w)|$$

Si $j \geqslant 2$: $\displaystyle\sup_{|w-z|=\lambda} |\Phi_j(w)| \leqslant \frac{(2|z|)^{j-2}}{(j-2)!} M$ (car $|w| \leqslant |z| + \lambda \leqslant 2\ |z|$)

donc si $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| \leqslant r$ on a :

$$\forall \lambda < |z| \qquad |\psi_j(z)| \leqslant (B'M)\ \frac{(2|z|)^{j-2}}{(j-2)!}\ e^{M^*(L'/\lambda)}$$

M^* étant semi-continue inférieurement sur $]0\ , +\infty[$ et croissante, on aura donc : pour $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| \leqslant r$, $j \geqslant 2$:

$$|\psi_j(z)| \leqslant B'M\ \frac{(2|z|)^{j-2}}{(j-2)!}\ e^{M^*(L'/|z|)} \quad .$$

2°) *Solutions nulles ultra-distributions de classe* (M_p).

On va démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.- Soit X une variété analytique réelle, de dimension (n+1), h un opérateur différentiel matriciel sur X d'ordre t, S une hypersurface analytique de X, régulière en a, caractéristique pour h.

Si h et S vérifient les hypothèses du théorème 1, il existe Ω_o voisinage ouvert de a et $Y \in [\mathcal{D}'(\Omega_o, (M_p)]^m$, solution nulle de h, pour S en a, pour toute suite $\{M_p\}$ vérifie {M.O., M.1., M.2., M.3}.

La démonstration de ce théorème est identique à celle de [3], on la redonne ici pour faciliter la compréhension de l'ensemble.

On suppose encore $\phi(x) = x^o$, $a = (0,\dots,0)$ on a d'après le chap. II :

$$\forall B \in \{1,\dots,m\} \quad Y_j^B(x) \ll C_1 \, C^j \, \frac{j!}{[r-t(x)]^{j+1}} \quad \text{avec} \quad t(x) = x^o+\rho x^1+x^2+\dots+x^n$$

pour r,ρ et C convenables.

La fonction Y_j^B se prolonge donc en une fonction holomorphe sur $D = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |z^o| + \rho\,|z^1| + |z^2| + \dots + |z^n| < r\}$, et ce prolongement y_j^B vérifie :

$$y_j^B(z) \ll C_1 \, C^j \, \frac{j!}{[r-t(z)]^{j+1}}$$

on aura donc, si $t(|z|) < r$: (on note $|z| = (|z^o|,|z^1|,\dots, |z^n|)$)

$$|y_j^B(z)| \leq C_1 \, C^j \, \frac{j!}{[r-t(|z|)]^{j+1}}$$

Ainsi : si $z \in D \cap [\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n]$ alors :

$$|\sum_{j=2}^{\infty} y_j^B(z)\ \mathcal{\emptyset}_j(z^o)| \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} C_1\ C^j \frac{j!}{[r-t(|z|)]^{j+1}} \times (B'M) \frac{(2|z_o|)^{j-2}}{(j-2)!} e^{M^*(L'/|z^o|)}$$

$$= \frac{C_1\ C^2\ B'M}{[r-t(|z|)]^3} \left(\sum_{j=2}^{\infty} \left[\frac{2C|z^o|}{r-t(|z|)}\right]^{j-2} j(j-1)\right) e^{M^*(L'/|z^o|)}$$

Si on suppose que $z \in \tilde{\Omega}_o = \{z \in (\mathbb{C}-\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^n \ /\ 2C|z^o| + t(|z|) < r\}$

alors :

$$|\sum_{j=2}^{\infty} y_j^B(z)\ \mathcal{\emptyset}_j(z^o)| \leqslant \frac{C_1\ C^2\ B'M}{[r-t(|z|)]^3} \ \frac{2}{[1-2C|z_o|/r-t(|z|)]^3} e^{M^*(L'/|z^o|)}$$

$$= \frac{2\ C_1\ C^2\ B'M}{[r-2C|z^o|-t(|z|)]^3} e^{M^*(L'/|z^o|)}$$

Soit $\Omega_o = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 2C\ |x^o| + t(|x|) < r\}$ et Γ un cône ouvert convexe de R^{n+1} défini par

$$\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y^o > \omega(|y^1| + \ldots + |y^n|) \qquad (\omega \in \mathbb{R}_+^*)$$

Soit K un compact de Ω_o ; $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K \ :\ r - 2C\ |x^o| - t(|x|) \geqslant 2\varepsilon$$

$$r - 2C\ |z^o| - t(|z|) \geqslant r - 2C\ |x^o| - t(|x|) - 2C\ |y^o| - t(|y|)$$

$$\geqslant 2\varepsilon - 2C\ |y^o| - t(|y|)$$

On impose $\qquad 2C\ |y^o| + t(|y|) \leqslant \varepsilon$.

On aura donc

$$r - 2C\ |z^o| - t(|z|) \geqslant \varepsilon$$

D'autre part $|z^o| \geq |y^o| > \omega(|y^1| + \ldots + |y^n|)$

$$||y|| = |y^o| + |y^1| + \ldots + |y^n| \leq |y^o| \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) \leq |z^o| \left(\frac{\omega+1}{\omega}\right)$$

On aura donc, si $x \in K$, $y \in \Gamma$, $||y|| \leq \alpha$

$$|y^B(x+iy)| \leq \frac{A}{(\varepsilon)^3} e^{M^*(L/||y||)}$$

avec $A = 2\ C_1\ C^2\ B'M$ et $L = \left(\frac{\omega+1}{\omega}\right) \times L'$.

On en déduit, comme dans [3], que la valeur au bord :

$$y^B(x + i\,\Gamma\, o) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^B(x)\ [\psi_j(x^o + io) - \psi_j(x^o - io)]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^B(x) \times f_j(\psi(x))$$

avec : $f_j(\tau) = \psi_j(\tau+io) - \psi_j(\tau-io)$, est dans $\mathcal{D}'\ (\Omega_o\ , (M_p))$
et que c'est une solution nulle pour h, relativement à S, au voisinage de a.

CHAPITRE IV

A PROPOS DE LA CONDITION (L_1^1) (*)

----

§ 1 - *Une autre forme des conditions du chapitre I.*

Rappelons les hypothèses du chapitre I.

H.1.) a) $\det H = (H')^2 H''$

b) S caractéristique totale simple pour H' au voisinage de a, et S non caractéristique en a pour H''.

H.2.) La matrice $H(a\ ;\ \mathrm{grad}\ \varphi(a))$ est de rang $(m-1)$ (on suppose que c'est $A_1^1(a,\ \mathrm{grad}\ \varphi(a))$ qui est non nul).

L_1^1)
$$A_A^1\left[\partial^\alpha H_B^A\ \partial_\alpha A_1^B + H^{*A}_{\ B}\ A_1^B - \partial^\alpha H'\ \partial_\alpha H'\ H''\ \delta_1^A\right] \equiv 0 \qquad [H']$$

On se propose dans ce paragraphe de donner une forme équivalente de ces conditions faisant intervenir la notion d'opérateur bien décomposable au sens de De Paris. Cette équivalence sera utile dans d'autres travaux.

Définition.- Soit h un opérateur différentiel tel que

H.O.$)_2$: $\det(H)$ n'est pas identiquement nul et s'écrit sous la forme $(H')^2 H''$ avec H' et H'' polynomiaux en ξ, à coefficients analytiques au voisinage de a.

D.O.$)_2$ a) $\exists$ C, D dans $\{1,\dots,m\}$ et des opérateurs a_A^C pour $A \in \{1,\dots,m\}$ et a_D^B pour $B \in \{1,\dots,m\}$, de symboles principaux respectifs A_A^C et A_D^B tels que

----

(*) C'est J.C. De Paris qui m'a communiqué les résultats de ce chapitre. Je le remercie de m'avoir permis de les inclure dans ma thèse.

$$k = a_A^C \, h_B^A \, a_D^B$$

soit bien décomposable par rapport à H' avec multiplicité 2, c'est-à-dire qu'il existe ℓ_o , ℓ_1 et ℓ_2 opérateurs différentiels tels que

$$k = \ell_o (h')^2 + \ell_1 \, h' + \ell_2$$

avec $\begin{cases} \mathrm{ord}(k - \ell_o (h')^2) < (2m-1)\, t \\ \mathrm{ord}(k - \ell_o (h')^2 - \ell_1 \, h') < (2m-1)\, t-1 \end{cases}$

et L_o pas divisible par H' .

b) S est régulière en a pour cette décomposition, c'est-à-dire que S n'est pas caractéristique en a pour ℓ_o , et est caractéristique totale simple pour H' .

On peut évidemment supposer que $C = D = 1$.

Proposition 3.- Si h vérifie $(H.O.)_2$, on a :

$$(D.O.)_2 \Longleftrightarrow (H.1.) - (H.2.) - (L_1^1) .$$

Preuve : Supposons que h vérifie $(H.1.) - (H.2.) - (L_1^1)$ on a $k = a_A^1 \, h_B^A \, a_1^B$ donc $K = A_A^1 \, H_B^A \, A_1^B = A_1^1 \, H'' \, (H')^2$.

$A_1^1(a, \mathrm{grad}\, \varphi(a)) \neq 0$ et $H''(a, \mathrm{grad}\, \varphi(a)) \neq 0$, donc si ℓ_o est un opérateur différentiel de symbole principal $L_o = A_1^1 \, H''$, S n'est pas caractéristique en a pour ℓ_o , ce qui démontre $(D.O.)_2$ b , et L_o n'est pas divisible par H'.

On a, pour un tel ℓ_o

$$\mathrm{ord}(k - \ell_o (h')^2) < (2m-1)\, t .$$

On cherche maintenant la partie principale de $k - \ell_o(h')^2$; on a besoin d'abord de la partie homogène d'ordre $(2m-1)\,t-1$ de k, modulo H'

$$(k)^* = K^* = (a^1_A\, h^A_B\, a^B_1)^* = A^1_A (h^A_B\, a^B_1)^* + (a^1_A)^*\, H^A_B\, A^B_1 + \partial^\alpha A^1_A\, \partial_\alpha (H^A_B\, A^B_1)$$

$$\equiv A^1_A \left[H^A_B (a^B_1)^* + H^{*A}_B\, A^B_1 + \partial^\alpha H^A_B\, \partial_\alpha A^B_1 \right] \qquad [H']$$

$$\equiv A^1_A \left[\partial^\alpha H^A_B\, \partial_\alpha A^B_1 + H^{*A}_B\, A^B_1 \right] \qquad [H']$$

On a besoin ensuite de la partie homogène d'ordre $(2m-1)\,t-1$ de $\ell_o(h')^2$, modulo H'

$$(\ell_o(h')^2)^* = (\ell_o)^*\,(H')^2 + L_o\left[(h')^2\right]^* \equiv L_o\left[2H'(h')^* + \partial^\alpha H'\, \partial_\alpha H'\right] \quad [H']$$

$$\equiv A^1_1\, H''\, \partial^\alpha H'\, \partial_\alpha H' \qquad [H']$$

On a donc le symbole principal de $k - \ell_o(h')^2$ qui est égal, modulo H', à

$$A^1_A\, \left[\partial^\alpha H^A_B\, \partial_\alpha A^B_1 + H^{*A}_B\, A^B_1\right] - A^1_1\, H''\, \partial^\alpha H'\, \partial_\alpha H'$$

la condition (L^1_1) implique l'existence de Λ tel que ce polynôme soit égal à $\Lambda H'$. On peut donc trouver L_1 tel que le symbole principal de $k - \ell_o(h')^2$ soit égal à $L_1\, H'$. Si ℓ_1 est opérateur différentiel de symbole L_1, on a alors

$$\mathrm{ord}(k - \ell_o(h')^2 - \ell_1\, h') < (2m-1)\,t - 1$$

et par conséquent k est bien décomposable par rapport à H' avec multiplicité 2, ce qui démontre $(D.O.)_2$ a .

Supposons maintenant que h vérifie $(D.O.)_2$.

On a $K = A^1_A \, H^A_B \, A^B_1 = A^1_A \, \delta^A_1 \det(H) = A^1_1 \det(H) = A^1_1 \, H''(H')^2$ (d'après $(H.O.)_2$)

D'autre part $K = L_o(H')^2$, donc $L_o = A^1_1 \, H''$.

Comme $L_o(a, \operatorname{grad} \psi(a)) \neq 0$ (d'après $(D.O.)_2$ - b) on a bien S non caractéristique pour H'' et $A^1_1(a, \operatorname{grad} \psi(a)) \neq 0$, donc (H.1.) et (H.2.) sont vérifiées.

D'autre part le symbole principal de $(k - \ell_o(h')^2)$ qui est égal, modulo H' à

$$A^1_A \left[\partial^\alpha H^A_B \, \partial_\alpha A^B_1 + H^{*A}_B \, A^B_1\right] - A^1_1 \, H'' \, \partial^\alpha H' \, \partial_\alpha H'$$

est divisible par H' , ce qui donne la condition (L^1_1).

§ 2 - *Interprétation de l'opérateur différentiel* R_2.

On a vu dans le chap. I que les coefficients de distorsion Y^1_j étaient déterminés par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles d'ordre 2

$$R^2 \left[\frac{Y^1_j}{\tilde{A}^1_1}\right] = \Omega_{j+2}$$

avec $R^2 = \tilde{A}^1_A \, H^{A,1}_{\hat{B},\psi} \left(- \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^1_1}\right) H^{\hat{C},1}_{D,\psi} \cdot \tilde{A}^D_1 + \tilde{A}^1_A \, H^{A,2}_{B,\psi} \, \tilde{A}^B_1$.

Il est tentant d'essayer d'exprimer R^2 en fonction de K^2_ψ on a $A^1_A \, H^A_B = \delta^1_B \, H''(H')^2$ et par conséquent

$$a^1_A \, h^A_B - \delta^1_B \, h''(h')^2 = m^1_B \quad \text{avec} \quad \operatorname{ord}(m^1_B) \leq mt-1$$

de même $H^A_B \, A^B_1 = \delta^A_1 \, H''(H')^2$ et par conséquent

$$h^A_B \, a^B_1 - \delta^A_1 \, h''(h')^2 = \ell^A_1 \quad \text{avec} \quad \operatorname{ord}(\ell^A_1) \leq mt-1$$

On a donc

$$(a^{1}_{A}\ h^{A}_{B})^{1}_{\emptyset} = \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} = \tilde{A}^{1}_{A}\ \mathcal{H}^{A,1}_{\hat{B},\emptyset} + \mathcal{A}^{1,1}_{A,\emptyset}\ \tilde{H}^{A}_{\hat{B}} \qquad \text{par conséquent}$$

$$\tilde{A}^{1}_{A}\ \mathcal{H}^{A,1}_{\hat{B},\emptyset}\left(- \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\right) = - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} + \mathcal{A}^{1,1}_{A,\emptyset}\ \tilde{H}^{A}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} = - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} - \mathcal{A}^{1,1}_{1,\emptyset} \frac{\tilde{A}^{1}_{\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} + \mathcal{A}^{1,1}_{\hat{C},\emptyset}$$

on a aussi

$$(h^{\hat{C}}_{D}\ a^{D}_{1})^{1}_{\emptyset} = \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} = \mathcal{H}^{\hat{C},1}_{D,\emptyset}\ \tilde{A}^{D}_{1} + \tilde{H}^{\hat{C}}_{D}\ \mathcal{A}^{D,1}_{1,\emptyset}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{2} - \tilde{A}^{1}_{A}\ \mathcal{H}^{A,2}_{B,\emptyset}\ \tilde{A}^{B}_{1} &= \left[- \tilde{M}^{1}_{B} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} + \mathcal{A}^{1,1}_{\hat{C},\emptyset} - \mathcal{A}^{1,1}_{1,\emptyset} \frac{\tilde{A}^{1}_{\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\right]\left[\tilde{L}^{\hat{C}}_{1} - \tilde{H}^{\hat{C}}_{D}\ \mathcal{A}^{D,1}_{1,\emptyset}\right] \\
&= - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\ \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} + \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\ \tilde{H}^{\hat{C}}_{D}\ \mathcal{A}^{D,1}_{1,\emptyset} + \left[\mathcal{A}^{1,1}_{\hat{C},\emptyset} - \mathcal{A}^{1,1}_{1,\emptyset} \frac{\tilde{A}^{1}_{C}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\right]\left[\tilde{L}^{\hat{C}}_{1} - \tilde{H}^{\hat{C}}_{D}\ \mathcal{A}^{D,1}_{1,\emptyset}\right] \\
&= - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\ \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} + \tilde{M}^{1}_{\hat{B}}\left[- \frac{\tilde{A}^{\hat{B}}_{1}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\ \mathcal{A}^{1,1}_{1,\emptyset} + \mathcal{A}^{\hat{B},1}_{1,\emptyset}\right] + \left[\mathcal{A}^{1,1}_{\hat{C},\emptyset} - \mathcal{A}^{1,1}_{1,\emptyset} \frac{\tilde{A}^{1}_{\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\right]\left[\tilde{L}^{\hat{C}}_{1} - \tilde{H}^{\hat{C}}_{D}\ \mathcal{A}^{D,1}_{1,\emptyset}\right]
\end{aligned}$$

On a $k = a^{1}_{A}\ h^{A}_{B}\ a^{B}_{1} = a^{1}_{A}\ [\delta^{A}_{1}\ h''(h')^{2} + \ell^{A}_{1}] = a^{1}_{1}\ h''(h')^{2} + a^{1}_{A}\ \ell^{A}_{1}$

$$= [\delta^{1}_{B}\ h''(h')^{2} + m^{1}_{B}]\ a^{B}_{1} = h''(h')^{2}\ a^{1}_{1} + m^{1}_{B}\ a^{B}_{1} \quad .$$

Comme k est bien décomposable par rapport à H' avec multiplicité 2, on a $a^{1}_{A}\ \ell^{A}_{1}$ et $m^{1}_{B}\ a^{B}_{1}$ bien décomposables par rapport à H avec multiplicité 1 donc $\tilde{M}^{1}_{B}\ \tilde{A}^{B}_{1} = 0 \implies \tilde{M}^{1}_{1}\ \tilde{A}^{1}_{1} = - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}}\ \tilde{A}^{\hat{B}}_{1}$

et par conséquent :

$$- \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{\hat{B}}_{1}}{\tilde{A}^{1}_{1}} A^{1,1}_{1,\emptyset} + \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} A^{\hat{B},1}_{1,\emptyset} = \tilde{M}^{1}_{B} A^{B,1}_{1,\emptyset}$$

On a de même $\tilde{A}^{1}_{C} \tilde{L}^{C}_{1} = 0$ donc $\tilde{A}^{1}_{1} \tilde{L}^{1}_{1} = - \tilde{A}^{1}_{\hat{C}} \tilde{L}^{\hat{C}}_{1}$

donc $\left[A^{1,1}_{C,\emptyset} - A^{1,1}_{1,\emptyset} \frac{\tilde{A}^{1}_{\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\right] \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} = A^{1,1}_{C,\emptyset} \tilde{L}^{C}_{1}$

on trouve donc :

$$R^2 = - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} + \tilde{M}^{1}_{B} A^{B,1}_{1,\emptyset} + A^{1,1}_{C,\emptyset} \tilde{L}^{C}_{1} - \left[A^{1,1}_{\hat{C},\emptyset} - A^{1,1}_{1,\emptyset} \frac{\tilde{A}^{1}_{\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}}\right] \tilde{H}^{\hat{C}}_{D} A^{D,1}_{1,\emptyset}$$

$$+ \tilde{A}^{1}_{A} H^{A,2}_{B,\emptyset} \tilde{A}^{B}_{1}$$

$$= - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} + (a^{1}_{A} h^{A}_{B})^{1}_{\emptyset} A^{B,1}_{1,\emptyset} + A^{1,1}_{A,\emptyset} (h^{A}_{B} a^{B}_{1})^{1}_{\emptyset} - A^{1,1}_{\hat{C},\emptyset} \tilde{H}^{\hat{C}}_{D} A^{D,1}_{1,\emptyset}$$

$$+ A^{1,1}_{1,\emptyset} \frac{\tilde{A}^{1}_{\hat{C}} \tilde{H}^{\hat{C}}_{D}}{\tilde{A}^{1}_{1}} A^{D,1}_{1,\emptyset} + \tilde{A}^{1}_{B} H^{A,2}_{B,\emptyset} \tilde{A}^{B}_{1}$$

on a $\tilde{A}^{1}_{C} \tilde{H}^{C}_{D} = 0$ donc $\tilde{A}^{1}_{1} \tilde{H}^{1}_{D} = - \tilde{A}^{1}_{\hat{C}} \hat{H}^{\hat{C}}_{D}$

et par conséquent :

$$R^2 = - \tilde{M}^{1}_{B} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} + (a^{1}_{A} h^{A}_{B})^{1}_{\emptyset} A^{B,1}_{1,\emptyset} + A^{1,1}_{A,\emptyset} (h^{A}_{B} a^{B}_{1})^{1}_{\emptyset} - A^{1,1}_{A,\emptyset} \tilde{H}^{A}_{B} A^{B,1}_{1,\emptyset} +$$

$$\tilde{A}^{1}_{A} H^{A,2}_{B,\emptyset} \tilde{A}^{B}_{1}$$

$$= - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} + \tilde{A}^{1}_{A} H^{A,1}_{B,\emptyset} A^{B,1}_{1,\emptyset} + A^{1,1}_{A,\emptyset} (h^{A}_{B} a^{B}_{1})^{1}_{\emptyset} + \tilde{A}^{1}_{A} H^{A,2}_{B,\emptyset} \tilde{A}^{1}_{B}$$

$$= - \tilde{M}^{1}_{\hat{B}} \frac{\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}} \tilde{L}^{\hat{C}}_{1} + K^{2}_{\emptyset}$$

puisque $K^2_\psi = \tilde{A}^1_A\,(h^A_B\,a^B_1)^2_\psi + A^{1,1}_{A,\psi}\,(h^A_B\,a^B_1)^1_\psi + A^{1,2}_{A,\psi}\,\tilde{H}^A_B\,\tilde{A}^B_1$

$$= \tilde{A}^1_A\,\left[\tilde{H}^A_B\,A^{B,2}_{1,\psi} + H^{A,1}_{B,\psi}\,A^{B,1}_{1,\psi} + H^{A,2}_{B,\psi}\,\tilde{A}^B_1\right] + A^{1,1}_{A,\psi}\,(h^A_B\,a^B_1)^1_\psi$$

$$= \tilde{A}^1_A\,\left[H^{A,1}_{B,\psi}\,A^{B,1}_{1,\psi} + H^{A,2}_{B,\psi}\,\tilde{A}^B_1\right] + A^{1,1}_{A,\psi}\,(h^A_B\,a^B_1)^1_\psi \quad .$$

On voit donc que $R^2 - K^2_\psi$ est un opérateur différentiel d'ordre 0.

On peut évidemment se demander si la fonction

$$\tilde{M}^1_{\hat{B}}\,\tilde{A}^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}\,\tilde{L}^{\hat{C}}_1 \quad \text{n'est pas identiquement nulle}$$

un exemple simple nous montre que ça n'est pas le cas prenons

$m = 2$ $\quad h^1_1 = (H')^2$, $h^1_2 = P^*$, $h^2_1 = Q^*$, $h^2_2 = H''$ avec

$d^oP^* = d^oQ^* = t-1$, et ψ non caractéristique en a pour $H''\,P^*\,Q^*$

on a alors $\quad H = \begin{pmatrix} (H')^2 & 0 \\ 0 & H'' \end{pmatrix} \qquad A^1_1 = H''$, $A^{12}_{12} = 1$

on a $\quad M^1_2 = A^1_1\,Q^*$, $L^2_1 = A^1_1\,P^*$, $\quad$ donc $\dfrac{\tilde{M}^1_2\,\tilde{L}^2_1}{\tilde{A}^1_1} = \tilde{A}^1_1\,\tilde{P}^*\,Q^* \neq 0$

Si on pose $\qquad k = a^1_1\,a^1_A\,h^A_B\,a^B_1 - (a^1_A\,h^A_{\hat{B}})\,A^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}\,(h^{\hat{C}}_D\,a^D_1)$

avec $A^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}$ opérateur différentiel de symbole principal $A^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}$, k

est d'ordre $(3m-2)t$.

$(a^1_A\,h^A_{\hat{B}})\,A^{1,\hat{B}}_{1,\hat{C}}\,(h^{\hat{C}}_D\,a^D_1)$ est d'ordre $2(mt-1) + (m-2)t = (3m-2)\,t-2$.

Comme A^1_1 n'est pas divisible par H' , supposer k bien décomposable par rapport à H' avec multiplicité 2 équivaut à supposer $(a^1_A\,h^A_B\,a^B_1)$ bien décomposable par rapport à H' avec multiplicité 2 (si H' est irréductible).

Donc dans l'énoncé de la condition $(D.O.)_2$ on aurait pu remplacer $a_A^1 \, h_B^A \, a_1^B$ par cet opérateur k modifié.

On a $(a_A^1 \, h_B^A \, a_1^B)_\emptyset^o = (a_A^1 \, h_B^A \, a_1^B)_\emptyset^1 = 0$ si on suppose $(D.O.)_2$ avec k modifié, donc

$$K_\emptyset^2 = \tilde{A}_1^1 (a_A^1 \, h_B^A \, a_1^B)_\emptyset^2 - (a_A^1 \, h_{\hat{B}}^A)_\emptyset^o \, \tilde{A}_{1,\hat{C}}^{1,\hat{B}} (h_D^{\hat{C}} \, a_1^D)_\emptyset^1$$

$$= \tilde{A}_1^1 \left[(a_A^1 \, h_B^A \, a_1^B)_\emptyset^2 - \tilde{M}_{\hat{B}}^1 \frac{\tilde{A}_{1,\hat{C}}^{1,\hat{B}}}{\tilde{A}_1^1} L_1^{\hat{C}} \right] = \tilde{A}_1^1 \, R^2$$

C'est donc l'opérateur $K_\emptyset^2$ associé à l'opérateur k modifié qui sert dans l'intégration des équations aux dérivées partielles déterminant les Y_j^1. On peut donc énoncer la proposition suivante, ou $(D.O.)_2^1$ est la condition du même type que $(D.O.)_2$, mais utilisant l'opérateur k modifié.

Proposition 4.- Si h vérifie $(H.O.)_2$ et si H' est irréductible, on a

$$(D.O.)_2^1 \Longleftrightarrow (H.1) - (H.2) - (L_1^1)$$

et les coefficients de distrosion Y_j^1 sont déterminés par l'intégration des équations aux dérivées partielles

$$K_\emptyset^2 \left(\frac{Y_j^1}{\tilde{A}_1^1}\right) = \tilde{A}_1^1 \, \Omega_{j+2}$$

B I B L I O G R A P H I E.

[1] BERGER - Formes harmoniques (Séminaires Lichnerowicz - Avez - Berger - Collège de France).

[2] C. WAGSCHAL - Problème de Cauchy analytique à données méromorphes. (J. Math. Pures et Appliquées 51 (1972) p. 375-397).

[3] H. KOMATSU - Irregularity of characteristic elements and construction of null - solutions. (J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. Sec IA, vol. 23, 1976, p. 297-342).

[4] J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur diff. à caractéristiques multiples, Lien avec l'hyperbolicité. (J. Math. Pures et Appliquées 51, 1972, p. 231 à 256).

[5] J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur diff. bien décomposable. (J. Math. Pures et Appl. 51, 1972, p. 465 à 488).

[6] J. VAILLANT - Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. Ann. Institut de Fourier, Grenoble 15.2 (1965) 225-311.

[7] J. VAILLANT - Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques.

[8] L. GARDING - T. KOTAKE - J. LERAY - Uniformisation et dev. asymptotique de la solution du prob. linéaire à données holomorphes - analogie avec la théorie des ondes asymptotique et approchés Prob. de Cauchy I bis et VI. (Bull. Soc., Math. France 92 (1964), P. 263 à 361).

[9] R. BERZIN - J. VAILLANT - Système hyperbolique à caractéristiques multiples. (J. Math. Pures et Appliquées 58 (1979) p. 165 à 216).

[10] S. MIZOHATA - Solutions nulles et solutions non analytiques. (J. Maths. Kyoto, Univ. I (1962) p. 271 à 302).

[11] H. KOMATSU - Ultra-distributions, I - structure theorems and a caracterization. (J. of the Faculty of Science, The Univ. of Tokyo Sec. IA, vol. 20 , N° 1, pp. 25 - 105 March 73).

[12] H. KOMATSU - An introduction to the theory of hyperfonctions, hyperfonctions and pseudo-differential equations. Lectures notes in Math., N. 287, Springer 73 p. 3-40.

[13] C. ROUMIEU - Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables. (J. Analyse Math, 10 (62-63) p. 153-192.

[14] LIONS J.L. et E. MARGENES - Problème aux limites non homogènes et appliquées (vol. 3, Dunod, Paris 1970).