N° d'ordre : 961

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

Mahdi BOUKROUCHE

SOLUTIONS NULLES POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL MATRICIEL ANALYTIQUE RELATIVEMENT A UNE HYPERSURFACE CARACTÉRISTIQUE TRIPLE, PREMIER CAS, AVEC CONDITIONS DE DÉCOMPOSITION

MEMBRES DU JURY : J. VAILLANT, *Président*
J.C. de PARIS, *Rapporteur*
Y. HAMADA, *Examinateurs*
R. BERZIN, *Examinateurs*

SOUTENUE LE 23 MARS 1982

"Désapprendre à rêvasser, apprendre à penser,
désapprendre à philosopher, apprendre à dire,
cela ne se fait pas en un jour.
Et pourtant nous n'avons que peu de jours pour le faire".

R. DAUMAL.

A mon père

A mes frères : Rachid et Hani

A ma grande famille

A mes amis

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur J. VAILLANT, de l'Université de Paris VI, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse et l'intérêt qu'il a voulu accorder à ce travail.

Je suis profondément reconnaissant à Messieurs les Professeurs Y. HAMADA de l'Université de Kyoto, et R. BERZIN de l'Université de Lille I d'avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

J'exprime ma plus grande reconnaissance à Monsieur le Professeur J.C. DE PARIS pour son aide et sa bienveillance ; c'est grâce à lui que j'ai pu entreprendre ce travail et le mener à bien ; son assistance et ses remarques judicieuses m'ont permis de m'initier à la théorie des Equations aux dérivées partielles.

Que toute l'équipe de recherche en équations aux dérivées partielles ainsi que tous mes amis en particulier M. SEDJELMACI, D. BEKHTAOUI, O. HEBBAR, K. BELABBES, D. ABI-AYAD, M. MECHAB trouvent ici l'expression de ma gratitude pour leur discussions fructueuses, et leur présence chaleureuse.

Je remercie également Madame M. LLORET, qui acceptait avec gentillesse de me photocopier tous les documents dont j'avais besoin.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement Madame C. TATTI qui a dactylographié cette thèse avec soin et compétence ainsi que F. WDOWCZYK, A. GOURNAY et M. PROVOST qui ont imprimé cette thèse avec rapidité et compétence.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Il s'agit dans ce travail de donner la preuve de l'existence de solutions nulles ultradistributions, ou ultradifférentielles, pour un opérateur différentiel matriciel linéaire analytique h d'ordre t, au voisinage d'un point a, relativement à une hypersurface caractéristique triple, premier cas, selon la classification de J. VAILLANT [19].

Le premier chapitre, consiste a détailler les conditions prises, par R. BERZIN et J. VAILLANT [1], pour l'existence de l'onde asymptotique, dans ce premier cas triple.

Ils donnent, d'abord, une condition de Levi (D) suffisante, qui exprime que l'opérateur matriciel h composé avec un opérateur a dont la matrice caractéristique A est celle des cofacteurs de la matrice caractéristique de h, soit bien décomposable. La transformation de cette condition (D) entraîne des conditions algébriques polynomiales sur h dans une carte locale exprimant que l'on peut trouver les parties homogènes de h o a et du second membre de (D). Et ce n'est qu'après de très longs calculs qu'on arrive à formuler d'une manière invariante ces conditions.

Le second chapitre, présente, une forme équivalente des conditions du chapitre précédent, à l'aide de deux opérateurs bien décomposables au sens de J.C. DE PARIS ; l'un matriciel à deux lignes et deux colonnes ; qui remplace les hypothèses de localisation, l'autre scalaire qui donne l'équivalence avec les conditions algébriques polynomiales sur h obtenues de (D).

Pour la détermination des coefficients de distorsions, nous utiliserons la nouvelle forme de conditions. Cette nouvelle forme sera utile dans d'autres travaux, déjà en cours.

Le troisième chapitre propose une généralisation d'une proposition de J.C. DE PARIS [4], au cas matriciel, qui permettra avec la notion des majorantes, sous la forme élégante que lui a donnée C. WAGSCHAL [22], d'établir certaines majorations sur les coefficients de distorsions.

La convergence de la solution formelle obtenue s'en déduit comme dans un travail de KOMATSU [13], la démonstration est détaillée dans [11], [3].

Le cas où les conditions de Lévi ne sont pas satisfaites sera traité dans un autre travail.

CHAPITRE I

HYPOTHESES DE CONSTRUCTION DE L'ONDE ASYMPTOTIQUE DANS LE CAS TRIPLE I

selon : J. Vaillant et R. Berzin [1]

1. Notations - Définitions.

Soit X une variété analytique réelle de dimension $n+1$, soit S une hypersurface de X ; a un point de S, et Ω un voisinage de a tel que :

$$\Omega \cap S = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}$$

où φ est une fonction analytique. On supposera que : S est régulière en a ; c'est-à-dire : $\operatorname{grad} \varphi(a) \neq 0$.

On note (localement en a) :

$$x = (x^0, x^1, \ldots, x^n) = (x^0, x^1, x''),$$

les éléments de l'espace cotangent à X seront notés par (x,ξ).

On adopte les notations de [1] ; on considère un opérateur différentiel linéaire matriciel : $h = (h^A_B)_{\substack{1\leq A\leq m \\ 1\leq B\leq m}}$, d'ordre t sur Ω ;

La matrice caractéristique de h au sens de "Cauchy-Kowalewski" sera notée par :

$$H(x,\xi) = (H^A_B(x,\xi))_{1\leq A,B\leq m} \qquad \text{où}$$

$$H^A_B(x,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Ord} h^A_B(x,\xi) < t \\ \text{polynôme caractéristique de } h^A_B(x,\partial) & \text{si } \operatorname{Ord} h^A_B(x,\partial) = t. \end{cases}$$

On suppose qu'elle est non dégénérée en a ; c'est-à-dire que : $(\det H)(a,\xi)$ est non identiquement nul en ξ.

On note par A la matrice des cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de h telle que :

$$(AH)(x,\xi) = (HA)(x,\xi) = (\det H)(x,\xi).I \qquad ; \ \forall x \in \Omega \qquad (1)$$

on écrit dans une carte locale :

$$h(x,\partial) = H(x,\partial) + H^{*}(x,\partial) + \dots + H^{*(k)}(x,\partial) + \dots + H^{*(t)}(x,\partial)$$

avec :

$$H^{*(k)}(x,\partial) = (H^{*(k)A}_{B}(x,\partial))_{1\leq A,B\leq m} \quad \text{où} \quad H^{*(k)A}_{B}(x,\partial)$$

est la partie d'ordre $(t-k)$ de $h^{A}_{B}(x,\partial)$ considéré comme opérateur d'ordre t.

Et :

$$a(x,\partial) = A(x,\partial) + A^{*}(x,\partial) + \dots + A^{*(k)}(x,\partial) + \dots + A^{*(m-1)t}(x,\partial) .$$

où $a(x,\partial)$ est un opérateur différentiel linéaire de matrice caractéristique A.

On notera, dans tout ce qui suit, par $\tilde{f}(x)$ une fonction $f(x,\xi)$, prise au point $(x, \operatorname{grad} \varphi(x))$.

Définition 1.1. [5] Un opérateur différentiel linéaire, matriciel p, est dit bien décomposable par rapport à un facteur K, avec la multiplicité ν si et seulement si : il existe des opérateurs linéaires matriciels λ_i $i = 0,1,\dots,\nu$ et un opérateur scalaire k de sympbole principal K, tels que :

1) $p = \sum_{i=0}^{\nu} \lambda_i (k)^{\nu-i}$

2) La matrice caractéristique Λ_o de λ_o n'est pas divisible par K.

3) Pour tout $r \in \{1,\ldots,\nu\}$ on a :

$$\text{ordre de } \left[p - \sum_{\rho=0}^{r} \lambda_\rho (k)^{\nu-\rho}\right] < \text{ordre de } (p)-r.$$

Remarque 1.1. [6]. Si p est un opérateur différentiel tel que K est de multiplicité ν dans p. Alors

$$p \text{ bien décomposable par rapport à } K \text{ avec la multiplicité } \nu \iff \begin{cases} p = \sum_{i=0}^{\nu} p_i \\ \mathrm{Ord}(p - \sum_{\rho=0}^{r} p_\rho) < \mathrm{Ord}\, p - r. \end{cases}$$

où p_i est un produit d'opérateurs dont $\nu-i$ au moins ont pour symbole principal K.

Notation. Si ψ est une fonction C^∞ sur X, f une fonction C^∞, une distribution ou une ultradistribution ; et P un opérateur différentiel linéaire d'ordre μ sur Ω. Alors, il existe [5] $\mu+1$ opérateurs notés par P_ψ^r, d'ordre inférieur ou égal à r, tels que quelle que soit Y de classe C^∞ sur X,

$$P(Y \times f \circ \psi) = \sum_{r=0}^{\mu} P_\psi^r[Y] \times (f^{(\mu-r)} \circ \psi).$$

On emploiera la convention de sommation d'Einstein :

si A varie entre 1 et m $\qquad \ell^A v_A = \sum_{A=1}^{m} \ell^A v_A$

si $\hat{A}$ varie entre 3 et m $\qquad \ell^{\hat{A}} v_{\hat{A}} = \sum_{\hat{A}=3}^{m} \ell^{\hat{A}} v_{\hat{A}}$

si $\bar{A}$ varie entre 1 et 2 $\qquad \ell^{\bar{A}} v_{\bar{A}} = \sum_{\bar{A}=1}^{2} \ell^{\bar{A}} v_{\bar{A}}$.

2. *Hypothèses.*

$\boxed{H.1}$

a) on suppose qu'il existe H', H'' analytiques en x, au voisinage de a, polynomiaux en ξ, tels que :

$$\det(H) = H'' \cdot (H')^3 \tag{2}$$

Et pour tout $x \in \Omega$, $H'(x,\xi)$ est un polynôme irréductible en ξ.

b) S non caractéristique en a pour H'' c'est-à-dire :

$$\tilde{H}''(a) \neq 0 \tag{3}$$

c) S caractéristique totale simple pour H' c'est-à-dire :

$$\tilde{H}'(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega \tag{4}$$

$$(p^\alpha(a))_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} \neq \vec{0}, \quad \text{où} \quad p^\alpha(x) = \widetilde{\partial^\alpha H'}(x) \tag{5}$$

$\boxed{L_{(2,1,0,\ldots,0)}}$ (hypothèse de localisation)

Pour tout x de Ω, on a, [2] dans l'anneau localisé ϕ_x, de celui des polynômes en $(n+1)$ variables par rapport à l'idéal premier défini par $H'(x,\cdot)$

$$H(x,\cdot) \underset{\phi_x}{\sim} \begin{pmatrix} [H'(x,\cdot)]^2 & & & & \\ & [H'(x,\cdot)] & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc : A divisible par H', on pose :

$$B = A/H' \tag{6}$$

Et il existe au moins un cofacteur d'ordre m-2 de H, non divisible par H' ; on convient que c'est : A_{12}^{12} , et un élément de la matrice $\bar{B}$ non divisible par H'. On convient que c'est : B_1^1

$$(\text{où } \bar{B} = (B_B^A)_{1 \leqslant A,B \leqslant 2})$$

$\boxed{H.2}$

a) A_{12}^{12} non divisible par H' (7)

b) $\widetilde{A_{12}^{12}}(a) \neq 0$ (8)

$\boxed{H.3}$

a) B_1^1 non divisible par H' (9)

b) $\widetilde{B_1^1}(a) \neq 0$ (10)

Les hypothèses H.1. b),c), H.2. b) et H.3. b), nous permettent de supposer l'existence d'un voisinage de a, qu'on notera encore Ω, tel qu'on ait pour tout x de Ω : $\tilde{H}'(x) = 0$, $(p^\alpha(x))_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} \neq \vec{0}$, $\tilde{H}''(x) \neq 0$, $\widetilde{A_{1\ 2}^{1\ 2}}(x) \neq 0$, et $\widetilde{B_1^1}(x) \neq 0$.

3. *Condition de décomposition* : [1].

On dit que h vérifie (D) si et seulement si : il existe un opérateur différentiel linéaire matriciel $a(x,\partial)$ de matrice caractéristique A, tel que h o a soit bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 3 c'est-à-dire, de la définition I.1. qu'il existe des opérateurs différentiels matriciels $\ell_o, \ell_1, \ell_2, \ell_3$, et un opérateur différentiel scalaire h' de symbole principal H' tels que :

$$h \circ a = \sum_{i=0}^{3} \ell_i \circ (h')^{3-i} \qquad (11)$$

avec $\mathrm{ord}(h \circ a - \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho (h')^{3-\rho}) < mt-r$, pour $r \in \{0,1,2\}$.

Remarquons que si L_o est le symbole principal de ℓ_o on a :

$$L_o(H')^3 = H.A = \det(H).I = H''.(H')^3.I$$

d'où on tire $L_o = H''.I$.

Définition I.2. Soit V un polynôme en ξ à coefficients analytiques. On dit que deux polynômes en ξ, à coefficients analytiques en x, P et Q sont égaux modulo V, et on note $P \equiv Q$ $[V]$ si et seulement si $P-Q$ est divisible par V, en tant que polynôme en ξ, pour tout x dans Ω.

A partir de (D) on explicite certains invariants avec lesquels, on donnera les condidions d'existence de l'onde asymptotique.

On calcule, pour cela, les termes d'ordre $mt-1$ et $mt-2$ de $h \circ a$, ainsi que ceux du second membre de (11), puis en identifiant on obtient ([17],[1]) :

$$(HA^* + \partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A) = [3(H')^2 \partial^\alpha H'' \partial_\alpha H' + 3H''.H'(\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' + H'H'^*)]I + \\ + L_o^*(H')^3 + L_1(H')^2 \quad ; \tag{12}$$

$$[HA^{**} + \partial^\alpha H \partial_\alpha A^* + \tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} A + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha A + H^* A^* + H^{**}.A] \equiv J.I + [L_1 \partial^\alpha H' \partial_\alpha H'] + \\ + [3\partial^\alpha H' \partial_\alpha H'.H''.H'^*]I \quad . [H'] \tag{13}$$

avec

$$J = 3\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' \partial^\beta H'' \partial_\beta H' + H''[\partial^\alpha H' \partial^\beta H' \partial_{\alpha\beta} H' + \partial^{\alpha\beta} H' \partial_\alpha H' \partial_\beta H' + \partial^\alpha H' \partial_\alpha^\beta H' \partial_\beta H'] . \tag{14}$$

<u>Lemme</u> *1.1*. Si h vérifie H.1 a, $L_{(2,1,0\ldots0)}$ et (D).

Alors en posant :

$$\overset{o}{\Lambda} = B\left[2\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'.I+3H''.H'^{*}.I+L_{o}^{*}.H'+L_{1}\right] + H''\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H'-H''.A^{*} \qquad (15)$$

On a :

$$B\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B+H^{*}B-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I\right] = \overset{o}{\Lambda}H' \qquad (16)$$

<u>Preuve</u> : On a : $BH = HB = H''.(H')^{2}.I$ et $A = BH'$.

Multiplions alors (12) par B, d'où

$$H''.(H')^{2}A^{*} + B\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}(BH')+H^{*}B.H'\right] = B\left[3(H')^{2}\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'+\right.$$

$$\left.+3H''.H'.(\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'+H'.H'^{*})\right] + B\left[L_{o}^{*}(H')^{3}+L_{1}(H')^{2}\right] \qquad (17)$$

et comme : $B\partial^{\alpha}H.B = B\partial^{\alpha}\left[H''(H')^{2}I\right] - H''(H')^{2}\partial^{\alpha}B$

ou encore :

$$B\partial^{\alpha}H.B\partial_{\alpha}H' = H'(2BH''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'+BH'\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'-H'H''\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H') \qquad (18)$$

(17) s'écrit :

$$B\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B+H^{*}B\right]H' + B\partial^{\alpha}H.B\partial_{\alpha}H' = - H''(H')^{2}A^{*} +$$

$$+ B\left[3(H')^{2}\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H' + 3H''.H'\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H' + 3H''.(H')^{2}.H'^{*}\right] +$$

$$+ B\left[L_{o}^{*}H'+L_{1}\right](H')^{2}$$

Et de (18) on aura :

$$B\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B+H^{*}B-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I\right] = \overset{o}{\Lambda}.H'.$$

C.Q.F.D.

Lemme I.2. Si h vérifie H.1., a), $L_{(2,1,0\ldots 0)}$ et (D).

On a :

$$[\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H+BH^{*}-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I] \ . \ \overset{o}{\Lambda} \equiv 0 \qquad [H'].$$

Etablissons certaines formules qui facilitent la preuve de ce lemme.

a) (15) se met sous la forme :

$$H''A^{*} - H''\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H' = B[3H''.H'^{*}I+2\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'.I+L_{o}^{*}H'+L_{1}] - \overset{o}{\Lambda}$$

b) En multipliant (13) par $(H'')^{2}$ on aura :

$$(H'')^{2}.HA^{**} + [H''\partial^{\beta}H\partial_{\beta}-\partial^{\beta}H\partial_{\beta}H''+H^{*}.H''][3BH''.H'^{*}+2B\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H' +$$

$$+B(L_{o}^{*}H'+L_{1})-\overset{o}{\Lambda}] + (H'')^{2}[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}(\partial^{\beta}B\partial_{\beta}H')+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}(BH') +$$

$$+\partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}(BH')+H^{*}\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H'] \equiv (H'')^{2}[J.I+L_{1}\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H' +$$

$$+3\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''.H'^{*}I] \qquad [H']. \qquad (19)$$

<u>En effet</u> ; le membre de gauche s'écrit encore à l'aide de a)

$$(H'')^{2}.HA^{**} + [H''\partial^{\beta}H\partial_{\beta}(H''A^{*}-H''\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H') - \partial^{\beta}H\partial_{\beta}H'' \ . \ (H''A^{*}-H''\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H') +$$

$$+ H^{*}H''(H''A^{*}-H''\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H')] + (H'')^{2}[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}(\partial^{\beta}B\partial_{\beta}H')+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}(B.h') +$$

$$+ \partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}(BH') + H^{*}\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H'].$$

et en effectuant les calculs il ne reste que :

$$(H'')^{2} \quad [HA^{**}+\partial^{\beta}H\partial_{\beta}A^{*}+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A+H^{*}.A^{*}+\partial^{\alpha}H^{*}.\partial_{\alpha}A]$$

d'où la formule (19)

c) On a : $H\overset{o}{\Lambda} = H'H''[\partial^\alpha H\partial_\alpha B+H^*.B-H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I]$

En effet, il suffit de multiplier (16) par H', à gauche et d'utiliser :

$$BH = HB = (H')^2 . H'' . I.$$

Preuve du lemme I.2.

On note :

$$\rho = H''\partial^\beta H\partial_\beta - \partial^\beta H\partial_\beta H'' + H^*.H''$$

$$\theta = B[3H''.H'^*I+2\partial^\alpha H''\partial_\alpha H'.I+L_o^*.H'+L_1]$$

$$F = H''[\partial^\alpha B\partial_\beta H+BH^*]$$

et $$\eta = [\partial^\alpha H\partial_\alpha B+H^*B-H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I]$$

On considère l'expression :

$$B\rho[\theta-\overset{o}{\Lambda}] = B[H''\partial^\beta H\partial_\beta-\partial^\beta H\partial_\beta H''+H^*H''](\theta-\overset{o}{\Lambda}) \equiv$$

$$\equiv + H''\partial^\beta B.H.\partial_\beta\overset{o}{\Lambda} - BH^*.H''.\overset{o}{\Lambda} + F.\theta \qquad [H']$$

(du fait que : $BH = HB = (H')^2.H''.I.$)

De c) on a : $H\overset{o}{\Lambda} = H'H''\eta$ donc :

$$H\partial_\beta\overset{o}{\Lambda} \equiv -\partial_\beta H.\overset{o}{\Lambda} + H''.\eta\ \partial_\beta H' \qquad [H']$$

d'où :

$$B\rho[\theta-\overset{o}{\Lambda}] \equiv -H''[\partial^\beta B\partial_\beta H+BH^*].\overset{o}{\Lambda} + F.\theta + (H'')^2\partial^\beta B\partial_\beta H'.\eta \quad , [H']$$

On a : $B\partial^\beta H\partial_\beta B \equiv \partial^\beta B\partial_\beta H.B \qquad [H']$

donc (16) s'écrit :

$$[\partial^\beta B\partial_\beta H+BH^*-H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'.I]B \equiv 0 \qquad [H']$$

d'où : $$F.\theta \equiv (H'')^2\partial^\beta H'\partial_\beta H'.\theta$$

On remarque d'après a) que : $\theta = \overset{o}{\Lambda} + H''(A^* - \partial^\alpha B\partial_\alpha H')$.

D'où

$$F.\theta \equiv (H'')^2\partial^\beta H'\partial_\beta H'.\overset{o}{\Lambda} + (H'')^3\partial^\beta H'\partial_\beta H'.(A^* - \partial^\alpha B\partial_\alpha H') \qquad [H']$$

On a alors :

$$B\rho[\theta - \overset{o}{\Lambda}] \equiv -H''[\partial^\beta B\partial_\beta H + BH^* - H''\partial^\beta H'\partial_\beta H' I]\overset{o}{\Lambda} +$$

$$+ (H'')^2\partial^\beta B\partial_\beta H'.\eta + (H'')^3\partial^\beta H'\partial_\beta H'.(A^* - \partial^\alpha B\partial_\alpha H') , \qquad [H']$$

On multiplie maintenant (19) par B, à gauche, d'où :

$$B\rho[\theta - \overset{o}{\Lambda}] + (H'')^2.B[\partial^\alpha H\partial_\alpha(\partial^\beta B\partial_\beta H') + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}(BH') + \partial^\alpha H^*.\partial_\alpha(BH') + H^*\partial^\alpha B\partial_\alpha H'] \equiv$$

$$\equiv B(H'')^2[J.I + 3\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H''.H'^*.I + L_1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'] \qquad [H']$$

Donc pour avoir le lemme 2, il suffit de montrer que :

$$\partial^\beta B\partial_\beta H'.\eta + H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'.(A^* - \partial^\alpha B\partial_\alpha H') + B[\partial^\alpha H\partial_\alpha(\partial^\beta B\partial_\beta H') +$$

$$+ \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}(B.H') + \partial^\alpha H^*.\partial_\alpha(BH') + H^*\partial^\alpha B\partial_\alpha H'] \equiv$$

$$B[J.I + L_1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' + 3\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H''.H'^*.I] \qquad [H']$$

On a : $J = J^1 + 2\partial^\alpha H''\partial_\alpha H'\partial^\beta H'\partial_\beta H'$ (d'après (14)).

D'où :

$$B.J + 3BH''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H'^* + BL_1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' = BJ^1 +$$

$$+ \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.\theta - BH'L_o^*\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.$$

Donc il suffit de prouver que :

$$\partial^\beta B\partial_\beta H'.\eta + H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'.(A^*-\partial^\alpha B\partial_\alpha H') + B[\partial^\alpha H'\partial_\alpha(\partial^\beta B\partial_\beta H') +$$

$$+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}(BH')+\partial^\alpha H^*\partial_\alpha(BH')+H^*\partial^\alpha B\partial_\alpha H'] - BJ^1 - \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.\theta \equiv 0 \qquad [H']$$

Remarquons que :

$$\partial^\beta B\partial_\beta H'.\eta + H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'.(A^*-\partial^\alpha B\partial_\alpha.H') - \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.\theta =$$

$$= \partial^\beta B\partial_\beta H'.\eta - \partial^\beta H'.\partial_\beta H'.\overset{o}{\Lambda} \qquad \text{(d'après (15))}.$$

Or :

$$[\partial^\beta B.\eta-\partial^\beta H'.\mathring{\Lambda}]\partial_\beta H' \equiv -B\partial^\beta\eta.\partial_\beta H' \qquad [H']$$

car de (16), on a : $B\eta = \mathring{\Lambda}.H'$ c'est-à-dire :

$$\partial^\beta B.\eta - \partial^\beta H'.\mathring{\Lambda} \equiv -B\partial^\beta\eta \qquad [H']$$

Il suffit donc d'avoir :

$$-B\partial^\beta\eta\partial_\beta H' + B[\partial^\alpha H'\partial_\alpha(\partial^\beta B\partial_\beta H')+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}(BH') + \partial^\alpha H^*\partial_\alpha(B.H') +$$

$$+ H^*\partial^\alpha B\partial_\alpha H'] - BJ^1 \equiv 0 \qquad [H'] \qquad (20)$$

comme : $\partial^\beta\eta = \partial^\beta[\partial^\alpha H\partial_\alpha B+H^*B-H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I]$. Alors

$$B\partial^\beta\eta\partial_\beta H' = B\partial^{\alpha\beta}H.\partial_\alpha B\partial_\beta H' + B\partial^\alpha H\partial^\beta_\alpha B\partial_\beta H'+ B\partial^\beta(H^*.B)\partial_\beta H' -$$

$$- B\partial^\beta H''\partial_\alpha H'\partial_\beta H'\partial_\beta H' - B.H''(\partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H'+\partial^\alpha H'\partial^\beta_\alpha H'\partial_\beta H')$$

On remplace $B\partial^\beta\eta\partial_\beta H'$ par son expression dans (20), et en simplifiant on trouve qu'il suffit d'avoir :

$$B\left[\partial^{\alpha}H\partial^{\beta}B+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H.B-H''\partial^{\alpha}H'\partial^{\beta}H'.I\right]\partial_{\alpha\beta}H' \equiv 0 \qquad [H']$$

Or ceci est vrai en effet : de

$$HB = (H')^{2}.H''.I$$

on a :

$$\partial^{\alpha}H.B + H\partial^{\alpha}B = 2H'\partial^{\alpha}H'.H''+(H')^{2}\partial^{\alpha}H''.$$

On a encore :

$$\partial^{\alpha\beta}.H.B + \partial^{\alpha}H.\partial^{\beta}B + \partial^{\beta}H.\partial^{\alpha}B + H\partial^{\alpha\beta}B \equiv 2H''\partial^{\beta}H'\partial^{\alpha}H'.I \qquad [H']$$

On multiplie à gauche par B d'où :

$$B\left[\partial^{\alpha\beta}H.B+2\partial^{\alpha}H\partial^{\beta}B\right]\partial_{\alpha\beta}H' \equiv 2BH''\partial^{\beta}H'\partial^{\alpha}H'. \qquad [H']$$

D'où finalement :

$$B\left[\partial^{\alpha}H\partial^{\beta}B+\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H.B-H''\partial^{\alpha}H'\partial^{\beta}H'.I\right]\partial_{\alpha\beta}H' \equiv 0 \qquad [H']$$

Ce qui achève la preuve du lemme 2.

On donne maintenant d'autres formulations de (16) et du lemme I.2, à l'aide d'invariants.

Lemme I.3. Les matrices suivantes :

$$\overset{\circ}{C} = \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - \partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}B \quad , \quad \overset{\circ}{D} = \partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H - \partial_{\alpha}B\partial^{\alpha}H.$$

définissent des invariants, et on a : $B\overset{\circ}{C} \equiv \overset{\circ}{D}B \quad [H']$.

Preuve : $\overset{\circ}{C}$ est invariante car $\overset{\circ}{C} = (C^{A}_{B})_{1\leqslant A,B\leqslant m}$ et

$$\overset{\circ}{C}{}^{A}_{B} = \left[h^{A}_{C},b^{C}_{B}\right] \quad ; \text{(de même pour } \overset{\circ}{D}).$$

pour montrer que $B\overset{o}{C} \equiv \overset{o}{D}B$ on utilise le fait que :

$$BH = HB = (H')^2.H'.I$$

Conséquence. Soit K la matrice sous caractéristique ([11]) de h, on pose :

$$\overset{o}{R} = KB + \frac{1}{2}\overset{o}{C} \quad , \quad \text{et} \quad \overset{o}{S} = BK + \frac{1}{2}\overset{o}{D} \ .$$

ces matrices sont invariantes, et on a :

$$B\overset{o}{R} \equiv \overset{o}{S}B \qquad [H']$$

Preuve :

$$B\overset{o}{R} - \overset{o}{S}B = \frac{1}{2}(B\overset{o}{C}-\overset{o}{D}B) \equiv 0 \qquad [H']$$

Lemme I.4. Si h vérifie H.1. a, $L_{(2,1,0..0)}$, on posera :

$$L^o = B\overset{o}{R} \quad \text{et} \quad L^{o\prime} = \overset{o}{S}B \ .$$

Alors :

$$L^o \equiv L^{o\prime} \equiv B[\partial^\alpha H\partial_\alpha B+H^*B-H''I\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'] \qquad [H']$$

$$\equiv [\partial^\alpha B\partial_\alpha H+BH^*-H''.I\partial^\alpha H'\partial_\alpha H']B \qquad [H']$$

Preuve : Rappelons [11] que $K = H^* - \frac{1}{2\rho}\partial^\alpha_\alpha(\rho H)$ où ρ est une mesure positive sur X.

On a donc $L^o = B[H^*-\frac{1}{2\rho}\partial^\alpha_\alpha(\rho H)]B + \frac{1}{2}B\overset{o}{C}$

$$L^o = B[H^*-\frac{1}{2\rho}(\partial_\alpha\rho\partial^\alpha H+\rho\partial^\alpha_\alpha H)]B + \frac{1}{2}B\overset{o}{C} \ .$$

$$L^o \equiv BH^*B - \frac{1}{2}B\partial^\alpha_\alpha H.B + \frac{1}{2}B(\partial^\alpha H\partial_\alpha B-\partial_\alpha H\partial^\alpha B) \qquad [H']$$

(car $BH = HB \equiv 0 \ (H')^2$).

or $\partial^{\alpha}_{\alpha}(H.B) = \partial^{\alpha}_{\alpha}H.B + \partial^{\alpha}H.\partial_{\alpha}B + \partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}B + H\partial^{\alpha}_{\alpha}B.$

Ou encore

$$-B\partial^{\alpha}_{\alpha}H.B \equiv B[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B+\partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}B-\partial^{\alpha}_{\alpha}(HB)] \qquad [H']$$

d'où

$$L^{o} \equiv B[H^{*}B+\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B-\frac{1}{2}\partial^{\alpha}_{\alpha}(H.B)] \qquad [H']$$

et comme $HB = (H')^{2}H''.I$ implique que

$$\partial^{\alpha}_{\alpha}(H.B) \equiv 2H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I \qquad [H']$$

Alors :

$$L^{o} \equiv B[H^{*}B+\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I] \qquad [H']$$

Pour avoir $L^{o\prime}$, il suffit de remarquer que :

$$\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H.B \equiv B\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B \qquad [H']$$

C.Q.F.D.

Lemme I.5. Si h vérifie H.1. a) et $L_{(2,1,0\ldots0)}$. On a : L^{o} divisible par H' <=> L^{o1}_{1} divisible par H'.

Preuve : Si L^{o} est divisible par H' on a trivialement : L^{o1}_{1} divisible par H' ; pour la réciproque il suffit de prouver la relation :

$$B^{1}_{1}.L^{o} \equiv L^{o1}_{1}B \qquad [H'] \qquad (*)$$

et de remarquer que B^{1}_{1} n'est pas divisible par H', $(L_{(2,1,0,\ldots0)})$ et que H' est irréductible.

Montrons (*), on a : $B^1_1\, L^{oC}_{\ D} = B^1_1\, B^C_E\, \overset{o}{R}{}^E_D$ et de l'identité de Jacobi :

$$B^1_1\, B^C_D - B^C_1\, B^1_D = A^{1\ C}_{1\ D}\, H'.H''$$

$$B^1_1 L^{oC}_{\ D} \equiv B^C_1 B^1_E \overset{o}{R}{}^E_D \quad [H'] \qquad \text{donc} \qquad B^1_1 L^{oC}_{\ D} \equiv B^C_1 L^{o1}_{\ D} \quad [H']$$

D'autre part : $L^{o1}_{\ D} B^1_1 \equiv L^{o,1}_{\ D} B^1_1 = \overset{o}{S}{}^1_F B^F_D B^1_1$ et de l'identité de Jacobi on a :

$$L^{o1}_{\ D} B^1_1 \equiv \overset{o}{S}{}^1_F B^F_1 B^1_D \quad [H'] \qquad \text{donc} \qquad L^{o1}_{\ D} B^1_1 \equiv L^{o,1}_{\ 1} B^1_D \equiv L^{o1}_{\ 1} B^1_D \quad [H']$$

D'où alors : $B^1_1 B^1_1 L^{oC}_{\ D} \equiv B^C_1 B^1_1 L^{o1}_{\ D} \equiv B^C_1 B^1_D L^{o1}_{\ 1} \equiv B^1_1 B^C_D L^{o1}_{\ 1}$ $[H']$

c'est-à-dire $B^1_1 L^{oC}_{\ D} \equiv B^C_D L^{o1}_{\ 1}$ $[H']$.

C.Q.F.D.

Notation. Si h vérifie H.1. a), $L_{(2,1,0...0)}$, $L \equiv 0$ $[H']$

On pose :

$$\overset{o}{M} = \frac{\overset{o}{S}B\overset{o}{R}}{H'} \tag{21}$$

on a :

$$\overset{o}{M} \equiv \frac{[\partial^\alpha B \partial_\alpha H + BH^* - H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I]\, B\, [\partial^\alpha H \partial_\alpha B + H^* B - H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I]}{H'} \quad [H']$$

On effet on vérifie d'abord que :

$$\overset{o}{R} \equiv [H^* B + \partial^\alpha H \partial_\alpha B - H''.I\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'] + \frac{1}{2} H[\partial^\alpha_\alpha B + \frac{\partial_\alpha \rho}{\rho}\, \partial^\alpha B] \quad [H'].$$

On a : $\overset{o}{R} = KB + \frac{1}{2}\overset{o}{C}$ donc :

$$\overset{o}{R} = H^{*}.B - \frac{1}{2\rho}\,\partial^{\alpha}_{\alpha}(\rho H).B + \frac{1}{2}\,\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - \frac{1}{2}\,\partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}B$$

mais $\partial^{\alpha}_{\alpha}(\rho H).B = \rho\partial^{\alpha}_{\alpha}H.B + \partial_{\alpha}\rho.\partial^{\alpha}H.B$ et de $HB = (H')^{2}.H''.I$ on a :

$$\partial^{\alpha}_{\alpha}(\rho H).B \equiv \rho\partial^{\alpha}_{\alpha}H.B - \partial_{\alpha}\rho.H\partial^{\alpha}B \qquad [H'] \quad (*)$$

et $$\partial^{\alpha}_{\alpha}(HB) \equiv 2\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''.I \qquad [H']$$

donc

$$\partial^{\alpha}_{\alpha}H.B \equiv 2\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''.I - \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - \partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}B - H\partial^{\alpha}_{\alpha}B \qquad [H']$$

Ainsi de (*) on a :

$$-\frac{1}{2\rho}\,\partial^{\alpha}_{\alpha}(\rho H).B \equiv -\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''.I + \frac{1}{2}\,\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B + \frac{1}{2}\,\partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}B + \frac{1}{2}\,H(\partial^{\alpha}_{\alpha}B + \frac{\partial_{\alpha}\rho}{\rho}\,\partial^{\alpha}B) \qquad [H']$$

D'où

$$\overset{o}{R} \equiv H^{*}.B-\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''.I + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B + \frac{1}{2}\,H(\partial^{\alpha}_{\alpha}B + \frac{\partial_{\alpha}\rho}{\rho}\,\partial^{\alpha}B) \qquad [H'] \quad (22)$$

comme $\overset{o}{M} = \frac{\overset{o}{S}B\overset{o}{R}}{H'}$, donc en remplaçant $\overset{o}{R}$ par son expression (22), et en remarquant que $BH \equiv 0\ [(H')^{2}]$ alors :

$$\frac{BR}{H'} \equiv \frac{B}{H'}\,[H^{*}.B-\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''.I + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B] \qquad [H']$$

et du lemme I.4. On a :

$$\overset{o}{M} \equiv \frac{[\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H + BH^{*}-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I]B[H^{*}.B-\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''.I + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B]}{H'} \qquad [H']$$

C.Q.F.D.

Lemme I.6. Si h vérifie H.1. a), $L_{(2,1,0\ldots 0)}$ et $L^{o} \equiv 0$ [H'], alors

$$B^{1}_{1}\, M^{oD}_{C} \equiv S^{oD}_{A}\, A^{1}_{1}\, {}^{A}_{B}\, R^{oB}_{C}.H'' \qquad [H']$$

En effet : de l'identité de Jacobi :

$$B^{1}_{1}\, B^{A}_{B} - B^{1}_{B}\, B^{A}_{1} = A^{1}_{1}\, {}^{A}_{B}\, H'.H''.$$

On a :

$$B^{1}_{1}\, M^{oD}_{C} = B^{1}_{1}\, \frac{S^{oD}_{A}\, B^{A}_{B}\, R^{oB}_{C}}{H'} \qquad \text{(de (21))}$$

donc

$$B^{1}_{1}\, M^{oD}_{C} = \frac{S^{oD}_{A}\, B^{A}_{1}\, B^{1}_{B}\, R^{oB}_{C}}{H'} + S^{oD}_{A} A^{1}_{1}\, {}^{A}_{B} R^{B}_{C}.H''$$

comme

$$\frac{S^{oD}_{A} B^{A}_{1}.B^{1}_{B} R^{oB}_{C}}{H'} = \frac{L^{o,D}_{1}.L^{o1}_{C}}{H'} \qquad \text{(Lemme I.4)}$$

et puisque $$L'^{o} \equiv L^{o\prime} \equiv 0 . \qquad [H']$$

Alors

$$\frac{S^{oD}_{A} B^{A}_{1} B^{1}_{B} R^{oB}_{C}}{H'} = \frac{L^{o,D}_{1}\, L^{o1}_{C}}{H'} \equiv 0 \qquad [H']$$

D'où le résultat.

C.Q.F.D.

Lemme I.7. Si h vérifie H.1. a), $L_{(2,1,0\ldots 0)}$ et $L^{o} \equiv 0$ [H'],

Alors :

$$A^{1}_{1}\, {}^{2}_{2}.B^{1}_{1}.M^{oD}_{C} \equiv [S^{oD}_{A} A^{1}_{1}\, {}^{A}_{2}][A^{1}_{1}\, {}^{2}_{B}\, R^{oB}_{C}]H'' \qquad [H']$$

En effet : on a, d'après le lemme I.6 :

$$A^{1\ 2}_{1\ 2}{}^{B}{}_{1}{}^{1}{}^{\circ D}_{MC} \equiv S^{\circ D}_{A}{}^{A}{}^{1\ 2}_{1\ 2}{}^{A}{}^{1}_{1}{}^{A\circ B}_{B\ RC}.H'' \qquad [H']$$

l'identité entre cofacteurs, [1] :

$$A^{1\ 2}_{1\ 2}A^{1\ A}_{1\ B} - A^{1\ A}_{1\ 2}A^{1\ 2}_{1\ B} = A^{1\ 2\ A}_{1\ 2\ B}$$

et $A^{1}_{1} = B^{1}_{1}\, H'$ donnent le résultat.

Introduisons maintenant les matrices ligne et colonne :

$$P_C = A^{1\ 2}_{1\ B}\, R^{\circ B}_{C} \qquad , \qquad Q^D = S^{\circ D}_{A}\, A^{1\ A}_{1\ 2}$$

avec ces notations on a donc :

$$A^{1\ 2}_{1\ 2}{}^{B}{}_{1}{}^{1}{}^{\circ D}_{MC} \equiv Q^D P_C H'' \quad , \qquad [H'] \quad (23)$$

Lemme I.8. Si h vérifie H.1 a) et $L_{(2,1,0\ldots0)}$,

Alors

$$P_C \equiv A^{1\ 2}_{1\ B}[H^*.B+\partial^\alpha H\partial_\alpha B-IH''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H']^B_C \qquad [H']$$

$$Q^D \equiv [BH^* + \partial^\alpha B\partial_\alpha H - I.H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H']^D_A.A^{1\ A}_{1\ 2} \qquad [H']$$

En effet : de (22) on a :

$$P_C = A^{1\ 2}_{1\ B}R^{\circ B}_{C} \equiv A^{1\ 2}_{1\ B}[H^*.B + \partial^\alpha H\partial_\alpha B - \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H''.I]^B_C +$$

$$+ \frac{1}{2}\, A^{1\ 2}_{1\ B}.H^B_E[\partial^\alpha_\alpha B^E_C + \frac{\partial_\alpha \rho}{\rho}\ .\ \partial^\alpha B^E_C] \qquad [H']$$

Or $A^{1\ 2}_{1\ B}\, H^B_E \equiv 0 \quad [H']$ d'où le résultat.

De même pour Q^D.

Lemme I.9. Si h vérifie H.1 a) et $L_{(2,1,0\ldots0)}$,

Alors :

$$B_1^1 P_C \equiv B_C^1 P_1 \quad [H'] \qquad \text{et} \qquad B_1^1 Q^D \equiv B_1^D Q^1 \quad [H']$$

Preuve : Montrons la deuxième relation, la première se démontre de la même manière.

Du lemme I.8 on a :

$$B_1^1 Q^D \equiv B_1^1 \left[B_F^D H^{*F}_A + \partial^\alpha B_F^D \partial_\alpha H_A^F - \partial^\alpha H' \partial_\alpha H'.H''.I_A^D\right] A_1^1{}_2^A \qquad [H']$$

On peut supposer $D \neq 1$ (sinon la relation est triviale) et évidemment $A \neq 1$; on a :

$$B_1^1 B_F^D = B_F^1 B_1^D + A_{1F}^{1D} H' H''.$$

D'où :

$$\partial^\alpha (B_1^1 B_F^D) \equiv \partial^\alpha (B_F^1 B_1^D) + \partial^\alpha H'.A_{1F}^{1D}.H'' \qquad [H']$$

On a donc :

$$B_1^1 \partial^\alpha B_F^D \equiv \partial^\alpha (B_F^1 B_1^D) + H'' \partial^\alpha H'.A_{1F}^{1D} - \partial^\alpha B_1^1.B_F^D \qquad [H']$$

En reportant dans l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} B_1^1 Q^D \equiv{} & (B_1^D B_F^1 H^{*F}_A + \partial^\alpha (B_F^1 B_1^D) \partial_\alpha H_A^F + A_{1F}^{1D}.H''.\partial^\alpha H'.\partial_\alpha H_A^F - \\ & - \partial^\alpha B_1^1.B_F^D \partial_\alpha H_A^F) A_{12}^{1A} - B_1^1 \partial^\alpha H' \partial_\alpha H'.H''.I_A^D.A_{12}^{1A} \qquad [H'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^1 Q^D \equiv{} & B_1^D \left[B_F^1 H^{*F}_A + \partial^\alpha B_F^1 \partial_\alpha H_A^F\right] A_1^1{}_2^A + (B_F^1 \partial^\alpha B_1^D - \partial^\alpha B_1^1.B_F^D) \partial_\alpha H_A^F.A_{12}^{1A} + \\ & + A_{1F}^{1D}.H''.\partial^\alpha H' \partial_\alpha H_A^F.A_{12}^{1A} - B_1^1 \partial^\alpha H' \partial_\alpha H'.H''.A_{12}^{1D} \qquad [H'] \end{aligned}$$

$$B_1^1 Q^D \equiv B_1^D[B_F^1 H^{*F}_A + \partial^\alpha B_F^1 \partial_\alpha H_A^F]A_{12}^{1A} + A_{1F}^{1D} H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H_A^F . A_1^1{}_2^A -$$

$$- B_1^1 \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H''.A_{12}^{1D} - (\partial_\alpha B_F^1 \partial^\alpha B_1^D - \partial^\alpha B_1^1 \partial_\alpha B_F^D) H_A^F . A_1^1{}_2^A \qquad [H']$$

car

$$B_F^D H_A^F = \delta_D^A H''(H')^2 \quad \text{implique} \quad -B_F^D \partial_\alpha H_A^F \equiv \partial_\alpha B_F^D . H_A^F \qquad [H']$$

on a :

$$H_A^F A_{12}^{1A} \equiv 0 \qquad [H']$$

et

$$A_{1F}^{1D}\partial_\alpha H_A^F \,.\, A_1^1{}_2^A \equiv A_{1F}^{1D}\partial_\alpha (H_A^F A_{12}^{1A}) \qquad [H']$$

donc :

$$B_1^1 Q^D \equiv B_1^D [B_F^1 H^{*F}_A + \partial^\alpha B_F^1 \partial_\alpha H_A^F] A_{12}^{1A} + A_{1F}^{1D} H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha (H_A^F A_{12}^{1A}) -$$

$$- B_1^1 \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H''.A_{12}^{1D} \qquad [H']$$

et comme :

$$A_{1F}^{1D}\partial_\alpha (H_A^F A_{12}^{1A}) = A_{12}^{1D}\partial_\alpha (A_1^1) \equiv A_{12}^{1D} B_1^1 \partial_\alpha H' \qquad [H']$$

on en déduit alors que :

$$B_1^1 Q^D \equiv B_1^D [B_F^1 H^{*F}_A + \partial^\alpha B_F^1 \partial_\alpha H_A^F] A_1^1{}_2^A \qquad [H']$$

d'où

$$B_1^1 Q^D \equiv B_1^D Q^1 \qquad [H']$$

C.Q.F.D.

Conséquence. $\quad B_1^1 \overset{o}{M} \equiv \overset{o}{M}{}_1^1 B \qquad [H']$

En effet de (23) : $\quad A_{12}^{12} B_1^1 \overset{o}{M}{}_C^D \equiv Q^D P_C H'' \qquad [H']$

et du lemme I.9, on a :

$$
\begin{aligned}
A^{12}_{12}(B^1_1)^3\mathring{M}^D_C &\equiv H''Q^1B^D_1P_1B^1_C && [H'] \\
&\equiv H''Q^1P_1B^1_1B^D_C && [H'] \ \text{(Jacobi)} \\
&\equiv A^{12}_{12}B^1_1\mathring{M}^1_1B^1_1B^D_C && [H'] \ \text{(de 23)} \\
&\equiv A^{12}_{12}(B^1_1)^2\mathring{M}^1_1B^D_C && [H']
\end{aligned}
$$

d'où :

$$B^1_1\mathring{M}^D_C \equiv \mathring{M}^1_1B^D_C \qquad [H']$$

C.Q.F.D.

Définition *I.3.* On dira que h vérifie $(L^{o1}_1\text{-}\mathring{M}^1_1)$, si et seulement si :

(L^{o1}_1) : L^{o1}_1 est divisible par H'.

$(\mathring{M}^1_1)$: $\mathring{M}^1_1$ est divisible par H'

Conséquence. Si h vérifie H.1. a), $L_{(2,1,0\dots0)}$ et (D) alors des lemmes I.1 et I.2 on a : h vérifie (L^{o1}_1) et $(\mathring{M}^1_1)$.

Nous allons maintenant remplacer la condition $(\mathring{M}^1_1)$ par une condition sur le produit de deux autres invariants, qui donnera avec (L^{o1}_1) les conditions d'existence de l'onde asymptotique.

Pour cela on considère les notations : [18] , [3].

Un indice surbarré varie entre 1 et ν et un indice chapeauté entre $\nu+1$ et m.

Pour $\nu = 2$, on note :

$$A^{1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\nu}_{1\ldots\,\bar{A}-1\;B\;\bar{A}+1\ldots\nu} = A^{1\quad 2}_{\bar{A}-1\;B} \;, \qquad A^{1\ldots\bar{D}-1\;F\;\bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\nu} = A^{\bar{D}-1\;F}_{1\quad 2}$$

$$A^{1\ldots\,\bar{D}-1\;\bar{D}+1\ldots\nu}_{1\ldots\,\bar{A}-1\;\bar{A}+1\ldots\nu} = A^{\bar{D}-1\;\bar{D}+1}_{\bar{A}-1\;\bar{A}+1}$$

<u>*Lemme 1.10.*</u> ($\nu = 2$) on a :

1) $A^{\bar{G}}_{F} \cdot A^{1\;2}_{1\;2} = \sum\limits_{\bar{E}=1}^{2} A^{\bar{G}}_{\bar{E}}\, A^{1\quad 2}_{\bar{E}-1\;F}$

2) $A^{B}_{\bar{F}}\, A^{1\;2}_{1\;2} = \sum\limits_{\bar{G}=1}^{2} A^{\bar{G}}_{\bar{F}}\, A^{\bar{G}-1\;B}_{1\quad 2}$

3) $\sum\limits_{\bar{E}=1}^{2} A^{\bar{F}}_{\bar{E}}\, A^{\bar{G}-1\;\bar{G}+1}_{\bar{E}-1\;\bar{E}+1} \cdot (-1)^{(\bar{F}+\bar{G})} = A^{1\;2}_{1\;2} \det H . \delta^{\bar{F}}_{\bar{G}}$.

4) $\sum\limits_{\bar{E}=1}^{2} A^{\bar{F}-1\;\bar{F}+1}_{\bar{E}-1\;\bar{E}+1} \cdot A^{\bar{G}}_{\bar{E}} \cdot (-1)^{(\bar{E}+\bar{F})} = A^{1\;2}_{1\;2} \det H . \delta^{\bar{F}}_{\bar{G}}$.

On omettra dans la suite le signe $\sum\limits_{\bar{E}=1}^{2}$.

<u>Preuve</u> : Montrons 1) (car 2 se vérifie de la même manière.)

pour $F = \bar{F}$ triviale.

Montrons alors pour $F = \hat{F}$. On a de [18], [3] :

$$H^{\hat{A}}_{\hat{B}} . A^{1\;2\;\hat{B}}_{1\;2\;\hat{F}} = A^{1\;2}_{1\;2}\,\delta^{\hat{A}}_{\hat{F}} \;, \qquad H^{\bar{A}}_{B} \cdot A^{1\;2\;\hat{B}}_{1\;2\;\hat{F}} = -\,A^{1\quad 2}_{\bar{A}-1\;\hat{F}} \qquad \text{(23 bis)}$$

où δ^{q}_{p} est le symbole de Kronecker.

et $A^{\bar G}_{A} \cdot H^{A}_{\hat B} = 0$ (i.e) $\qquad A^{\bar G}_{\hat A}H^{\hat A}_{\hat B} + A^{\bar G}_{\bar A}H^{\bar A}_{\hat B} = 0$.

Multiplions par $A^{1\ 2\ \hat B}_{1\ 2\ \hat F}$ (cofacteur d'ordre m-3 de H) on aura :

$$A^{\bar G}_{\hat A}H^{\hat A}_{\hat B}A^{1\ 2\ \hat{\hat B}}_{1\ 2\ \hat F} = -A^{\bar G}_{\bar A}H^{\bar A}_{\hat B}A^{1\ 2\ \hat B}_{1\ 2\ \hat F}$$

$$A^{\bar G}_{\hat A}\,\delta^{\hat A}_{\hat F}\,A^{12}_{12} = +\,A^{\bar G}_{\bar A}\,A^{1\quad 2}_{\bar A-1\ \hat F}$$

d'où $A^{\bar G}_{\hat F}\,A^{12}_{12} = A^{\bar G}_{\bar A}\,A^{1\quad 2}_{\bar A-1\ \hat F}$ d'où 1).

3) et 4) sont triviales pour $(\bar F,\bar G) = (1,2)$ ou $(2,1)$ et donnent l'identité de Jacobi si $(\bar F,\bar G) = (1,1)$ ou $(2,2)$

Notation. [1], [18], Si h vérifie H1 et $L_{2,1,0\ldots 0}$, on pose :

$$\mathcal{A}^{\bar E}_{\bar G} = (-1)^{(\bar E+\bar G)}\,\frac{A^{\bar G-1\ \bar G+1}_{\bar E-1\ \bar E+1}}{H'.A^{12}_{12}} \qquad (24)$$

Conséquence du lemme I.10. et de (2) et (6) on a :

$$\left.\begin{aligned} B^{\bar F}_{\bar E}\,\mathcal{A}^{\bar E}_{\bar G} &= H'\ H''\ \delta^{\bar F}_{\bar G} \\ \mathcal{A}^{\bar F}_{\bar E}\ B^{\bar E}_{\bar G} &= H'\ H''\ \delta^{\bar F}_{\bar G} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Notation. On posera dans une carte locale arbitraire

$$\mathcal{H}^{*\,\bar A}_{\quad\bar D} = \frac{A^{1\quad 2}_{\bar A-1\ F}}{A^{12}_{12}}\left[H^{*F}_{B}\cdot\left(\frac{A^{\bar D-1\ B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\right) + \partial^{\alpha}\,H^{F}_{B}\,\partial_{\alpha}\left(\frac{A^{\bar D-1\ B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\right)\right]$$

et
$$\mathcal{K}^{\bar A}_{\bar D} = \mathcal{K}^{*\bar A}_{\bar D} - \frac{1}{2\rho}\,\partial^{\alpha}_{\alpha}(\rho\,\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}\,H').$$

Lemme I.11. Si h vérifie (H2). Alors :

$$\mathcal{K}^{\bar A}_{\bar D} = \frac{A^{1\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,K^F_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}} + \frac{1}{2}\,\frac{A^{1\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\left[\partial^{\alpha}H^F_B\,\partial_{\alpha}\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}}\right) - \partial_{\alpha}H^F_B\,\partial^{\alpha}\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}}\right)\right]$$

et est un invariant.

Preuve : Remarquons qu'on a [18], [3] :

$$H^{\bar E}_{B}\,A^{\bar G-1\;B}_{1\;2} = (-1)^{(\bar E+\bar G)}\,A^{\bar G-1\;\bar G+1}_{\bar E-1\;\bar E+1} \quad \text{d'où} \quad \frac{H^{\bar E}_{B}\,A^{\bar G-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}} = \mathcal{A}^{\bar E}_{\bar G}\,H' \qquad (26)$$

Remarquons en plus que :

$$\frac{A^{1\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\mathcal{A}^{F}_{\bar D} = \mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D} \quad .$$

En effet :

$$\frac{A^{1\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\mathcal{A}^{F}_{\bar D}\,H' = \frac{A^{1\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,H^F_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}} \quad \text{(d'après (26))}$$

$$= \frac{A^{1\;2}_{\bar A-1\;\bar F}}{A^{12}_{12}}\,H^{\bar F}_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}} + \frac{A^{1\;2}_{\bar A-1\;\hat F}}{A^{12}_{12}}\,H^{\hat F}_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}}$$

$$= H^{\bar A}_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;2}}{A^{12}_{12}} = \mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}\,H' \quad \text{(d'après (26))}.$$

Donc : $$\rho\,\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}H' = \rho\,\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\mathcal{A}^{F}_{\bar D}\,H' = \frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,(\rho\,H^F_B)\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}$$

$$\partial^\alpha(\rho\,\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}\,H') = \frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\partial^\alpha(\rho\,H^F_B)\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}} + \frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\rho\,H^F_B\,\partial^\alpha\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right) +$$

$$\partial^\alpha\left(\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\right)\rho\,H^F_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\;.$$

On a :

$$\partial^\alpha\left(\frac{A^{\bar D-1\;\bar B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right) = \partial^\alpha\left(\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;\bar F}}{A^{12}_{12}}\right) = 0 \quad\text{et}\quad A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}\,H^F_{\hat B} = 0,\; H^{\hat F}_B\,A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2} = 0$$

donc $\partial^\alpha(\rho\,\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}\,H') = \dfrac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\partial^\alpha(\rho\,H^F_B)\,\dfrac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}$ et par conséquent :

$$\partial^\alpha_\alpha(\rho\,\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}\,H') = \frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\partial^\alpha_\alpha(\rho\,H^F_B)\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}} + \partial_\alpha\left(\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\right)\partial^\alpha(\rho\,H^F_B)\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}} +$$

$$+\,\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\partial^\alpha(\rho\,H^F_B)\,\partial_\alpha\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right)\;.$$

Remarquons encore que :

$$\partial_\alpha\left(\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\right)\partial^\alpha H^F_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}} = \partial_\alpha\left(\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;\hat F}}{A^{12}_{12}}\right)\partial^\alpha H^{\hat F}_B\,\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}} =$$

$$-\,\partial_\alpha\left(\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;\hat F}}{A^{12}_{12}}\right) H^{\hat F}_B\,\partial^\alpha\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right) = -\,\partial_\alpha\left(\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\right) H^F_{\hat B}\,\partial^\alpha\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right) =$$

$$+\,\frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\partial_\alpha H^F_{\hat B}\,\partial^\alpha\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right) = \frac{A^{1\;\;2}_{\bar A-1\;F}}{A^{12}_{12}}\,\partial_\alpha H^F_B\,\partial^\alpha\left(\frac{A^{\bar D-1\;B}_{1\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right)\;.$$

D'où finalement, d'après les notations précédentes :

$$\mathcal{K}^{\bar{A}}_{\bar{D}} = \frac{A^{1\ 2}_{\bar{A}-1\ F}}{A^{12}_{12}} \left[H^{*F}_{B} - \frac{1}{2\rho}\,\partial^{\alpha}_{\alpha}(\rho H^{F}_{B})\right] \frac{A^{\bar{D}-1\ B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}}$$

$$+ \frac{1}{2}\, \frac{A^{1\ 2}_{\bar{A}-1\ F}}{A^{12}_{12}} \left[\partial^{\alpha} H^{F}_{B}\, \partial_{\alpha}\left(\frac{A^{\bar{D}-1\ B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}}\right) - \partial_{\alpha} H^{F}_{B}\, \partial^{\alpha}\left(\frac{A^{\bar{D}-1\ B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}}\right)\right] .$$

D'où le lemme I.11 (puisque : $H^{*F}_{B} - \frac{1}{2\rho}\,\partial^{\alpha}_{\alpha}(\rho H^{F}_{B}) = K^{F}_{B}$).

L'invariance de $\mathcal{K}^{\bar{A}}_{\bar{D}}$ provient du lemme suivant :

Lemme I.12. Soit p, p', q, q' des opérateurs différentiels de symboles principaux respectifs P, P', Q, Q'.

Alors l'expression : $\partial^{\alpha}(\frac{P}{Q})\partial_{\alpha}(\frac{P'}{Q'}) - \partial_{\alpha}(\frac{P}{Q})\,\partial^{\alpha}(\frac{P'}{Q'})$ est un invariant (défini sur le complémentaire dans $T^{*}(X)$ de la réunion des variétés caractéristiques de p et q).

En effet on a :

$$\partial^{\alpha}(\frac{P}{Q})\ \partial_{\alpha}(\frac{P'}{Q'}) - \partial_{\alpha}(\frac{P}{Q})\ \partial^{\alpha}(\frac{P'}{Q'}) = \left(\frac{\partial^{\alpha}P}{Q} - \frac{P\partial^{\alpha}Q}{Q^{2}}\right)\cdot\left(\frac{\partial_{\alpha}P'}{Q'} - \frac{P'\partial_{\alpha}Q'}{(Q')^{2}}\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial^{\alpha}P}{Q} - \frac{P\partial_{\alpha}Q}{Q^{2}}\right)\left(\frac{\partial^{\alpha}P'}{Q'} - \frac{P'\partial^{\alpha}Q'}{(Q')^{2}}\right)$$

$$= \frac{\partial^{\alpha}P\partial_{\alpha}P' - \partial_{\alpha}P\partial^{\alpha}P'}{QQ'} - \frac{P'}{Q(Q')^{2}}(\partial^{\alpha}P\partial_{\alpha}Q' - \partial_{\alpha}P\partial^{\alpha}Q') -$$

$$- \frac{P}{Q^{2}Q'}\,(\partial^{\alpha}Q\partial_{\alpha}P' - \partial_{\alpha}Q\partial^{\alpha}P') + \frac{PP'}{Q^{2}(Q')^{2}}(\partial^{\alpha}Q\partial_{\alpha}Q' - \partial_{\alpha}Q\partial^{\alpha}Q')$$

$$= \frac{\sigma[p,p']}{QQ'} + \frac{P'}{Q(Q')^{2}}\,\sigma[q',p] + \frac{P}{Q^{2}Q'}\,\sigma[p',q] + \frac{PP'}{Q^{2}(Q')^{2}}\,\sigma[q,q']$$

où on note $\sigma(r)$ le symbole principal de l'opérateur r. On a donc bien $\partial^\alpha(\frac{P}{Q})\ \partial_\alpha(\frac{P'}{Q'}) - \partial_\alpha(\frac{P}{Q})\ \partial^\alpha(\frac{P'}{Q'})$ qui est un invariant.

Notation. $\hat{\mathcal{K}}^{\bar{C}}_{\bar{D}} = B^{\bar{C}}_{\bar{A}}[\mathcal{K}^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}(\partial^\alpha H' \partial_\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} - \partial_\alpha H' \partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}})]$ et est donc un invariant d'après le lemme I.12.

Lemme I.13. On a : $\hat{\mathcal{K}}^{\bar{C}}_{\bar{D}} \equiv B^{\bar{C}}_{\bar{A}}[\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ \partial_\alpha H']$ $\quad [H']$

En effet :

$$\hat{\mathcal{K}}^{\bar{C}}_{\bar{D}} = B^{\bar{C}}_{\bar{A}}([\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \frac{1}{2\rho}\ \partial^\alpha_\alpha(\rho\, \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ H')] + \frac{1}{2}\ \partial^\alpha H' \partial_\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} - \frac{1}{2}\ \partial_\alpha H' \partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}})$$

$$= B^{\bar{C}}_{\bar{A}}[\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \frac{1}{2}\ \partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ \partial_\alpha H'] - B^{\bar{C}}_{\bar{A}}[\frac{1}{2\rho}\ \partial^\alpha_\alpha(\rho\, \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ H') - \frac{1}{2}\ \partial^\alpha H' \partial_\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}]\ .$$

On a :

$$\partial^\alpha_\alpha(\rho\, \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ H') \equiv \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} \partial^\alpha_\alpha(\rho H') + \partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} \partial_\alpha(\rho H') + \partial_\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ \partial^\alpha(\rho H') \qquad [H']$$

d'où on tire :

$$\frac{1}{2\rho}\ \partial^\alpha_\alpha(\rho\, \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ H') \equiv \frac{\partial_\alpha \rho}{2\rho}\ \partial^\alpha H'\ \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}\ \partial^\alpha_\alpha H'\ \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}\ \partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ \partial_\alpha H' + \frac{1}{2}\ \partial^\alpha H' \partial_\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} \qquad [H']$$

Donc on a :

$$\hat{\mathcal{K}}^{\bar{C}}_{\bar{D}} \equiv B^{\bar{C}}_{\bar{A}}[\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \partial^\alpha \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\ \partial_\alpha H'] - B^{\bar{C}}_{\bar{A}}[\frac{\partial_\alpha \rho}{2\rho}\ \partial^\alpha H'\ \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}\ \partial^\alpha_\alpha H'\ \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}] \qquad [H']$$

et comme : $B^{\bar{C}}_{\bar{A}}\ \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}} \equiv 0$ $[H']$ (d'après 25). D'où le lemme I.13.

Notation. $\check{\mathcal{K}}\,{}^{\bar{A}}_{\bar{E}} = (\mathcal{K}^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}(\partial^{\alpha}\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\,\partial_{\alpha}H' - \partial_{\alpha}\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\,\partial^{\alpha}H'))B^{\bar{D}}_{\bar{E}}$.

$$= (\mathcal{K}^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}, h'])B^{\bar{D}}_{\bar{E}}$$

et est donc un invariant d'après le lemme I.12.

Lemme I.14. On a :

$$\check{\mathcal{K}}\,{}^{\bar{A}}_{\bar{E}} \equiv [\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \partial_{\alpha}\mathcal{A}^{\bar{A}}_{\bar{D}}\,\partial^{\alpha}H']B^{\bar{D}}_{\bar{E}} \qquad [H']$$

se démontre comme le lemme I.13.

Lemme I.15. Si h vérifie H1 a) et $L_{(2,1,0,\ldots 0)}$. On a :

$$L^{o1}_{1} \equiv B^{1}_{\bar{A}}\,\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}}\,B^{\bar{D}}_{1} - B^{1}_{1}\,H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H' \qquad [H']$$

Preuve : Du lemme I.4, on a :

$$L^{o} \equiv B[H^{*}B + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I] \qquad [H']$$

d'où :

$$L^{o1}_{1} \equiv B^{1}_{F}[H^{*F}_{B}\,B^{B}_{1} + \partial^{\alpha}H^{F}_{B}\partial_{\alpha}B^{B}_{1}] - B^{1}_{1}H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H' \qquad [H']$$

il suffit de vérifier que :

$$B^{1}_{\bar{A}}\,\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}}\,B^{\bar{D}}_{1} \equiv B^{1}_{F}\,H^{*F}_{B}\,B^{B}_{1} + B^{1}_{F}\partial^{\alpha}H^{F}_{B}\partial_{\alpha}B^{B}_{1} \qquad [H']$$

Remplaçons $\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}}$ par son expression d'où :

$$B^{1}_{\bar{A}}\,\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}}\,B^{\bar{D}}_{1} = B^{1}_{\bar{A}}\,\frac{A^{1\;\;2}_{\bar{A}-1\;F}}{A^{12}_{12}}\left[H^{*F}_{B}\,\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\;\;\;2}}{A^{12}_{12}}\,B^{\bar{D}}_{1} + \partial^{\alpha}H^{F}_{B}\partial_{\alpha}\left(\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\;\;\;2}}{A^{12}_{12}}\right)B^{\bar{D}}_{1}\right]$$

Or du lemme I.10 (1) et 2)) et en tenant compte que $A = BH'$ on déduit :

$$B^1_{\bar{A}}\,\mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\bar{D}}\,B^{\bar{D}}_1 = B^1_F\,H^{*F}_B\,B^B_1 + B^1_F\,\partial^\alpha H^F_B\,\partial_\alpha\left(\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\right)B^{\bar{D}}_1 \;.$$

Reste donc à vérifier que :

$$B^1_F\partial^\alpha H^F_B\partial_\alpha B^B_1 \equiv B^1_F\partial^\alpha H^F_B\partial_\alpha\left(\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\right)B^{\bar{D}}_1 \qquad [H']$$

On a encore du lemme I.10 (2)) et $A = B\,H'$:

$$\partial_\alpha(B^B_1) = \partial_\alpha\left(B^{\bar{D}}_1\,\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\right) = \partial_\alpha\left(\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\right)B^{\bar{D}}_1 + \frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\,\partial_\alpha B^{\bar{D}}_1 \;.$$

(i.e) $$\partial_\alpha\left(\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\right)B^{\bar{D}}_1 = \partial_\alpha B^B_1 - \frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\,\partial_\alpha B^{\bar{D}}_1 \;.$$

Reste encore à vérifier que :

$$B^1_F\,\partial^\alpha H^F_B\,\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\,\partial_\alpha B^{\bar{D}}_1 \equiv 0 \qquad [H']$$

comme :

$$B^1_F H^F_B = (H')^2 H''\delta^1_B \Rightarrow B^1_F\partial^\alpha H^F_B \equiv -\,\partial^\alpha B^1_F H^F_B \qquad [H']$$

D'où :

$$B^1_F\partial^\alpha H^F_B\,\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\,\partial_\alpha B^{\bar{D}}_1 \equiv -\partial^\alpha\,B^1_F\,H^F_B\,\frac{A^{\bar{D}-1\;B}_{1\quad 2}}{A^{12}_{12}}\,\partial_\alpha\,B^{\bar{D}}_1 \qquad [H']$$

$$\equiv \partial^\alpha B^1_F(\mathcal{A}^F_{\bar{D}}H')\partial_\alpha B^{\bar{D}}_1 \equiv 0 \qquad [H']$$

C.Q.F.D.

Lemme I.16. $L^{o1}_{\ 1} \equiv \hat{\mathcal{K}}^{\ 1}_{\bar{D}} B^{\bar{D}}_{\ 1} \equiv B^{1}_{\bar{A}} \check{\mathcal{K}}^{\bar{A}}_{\ 1}$ [H']

En effet du lemme I.15 on a :

$$L^{o1}_{\ 1} \equiv B^{1}_{\bar{A}} \mathcal{X}^{*\bar{A}}_{\ \bar{D}} B^{\bar{D}}_{\ 1} - B^{1}_{\ 1} \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' H'' \qquad [H']$$

or du lemme I.13, on a :

$$\partial^{\alpha}(B^{1}_{\bar{A}} \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\ \bar{D}}) B^{\bar{D}}_{\ 1} = \partial^{\alpha}(H'H''\delta^{1}_{\bar{D}}) B^{\bar{D}}_{\ 1} \equiv \partial^{\alpha} H' H'' \delta^{1}_{\bar{D}} B^{\bar{D}}_{\ 1} \qquad [H']$$

or

$$B^{1}_{\bar{A}} \partial^{\alpha} \mathcal{A}^{\bar{A}}_{\ \bar{D}} B^{\bar{D}}_{\ 1} \equiv \partial^{\alpha} H' H'' \delta^{1}_{\bar{D}} B^{\bar{D}}_{\ 1} \qquad [H']$$

Donc :

$$\hat{\mathcal{K}}^{\ 1}_{\bar{D}} B^{\bar{D}}_{\ 1} \equiv B^{1}_{\bar{A}} \mathcal{H}^{*\bar{A}}_{\ \bar{D}} B^{\bar{D}}_{\ 1} - \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' H'' B^{1}_{\ 1} \equiv L^{o1}_{\ 1} \qquad [H']$$

C.Q.F.D.

Lemme I.17.

$$Q^{1} \equiv A^{12}_{12} \hat{\mathcal{K}}^{\ 1}_{2} \quad , \quad P_{1} \equiv A^{12}_{12} \check{\mathcal{K}}^{\ 2}_{1} \qquad [H']$$

<u>En effet</u> du lemme I.8, on a :

$$Q^{1} \equiv [BH^{*} + \partial^{\alpha} B \partial_{\alpha} H - \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' H'' I]^{1}_{A} A^{1A}_{12} \qquad [H']$$

$$Q^{1} \equiv [B^{1}_{B} H^{*B}_{\ \ A} + \partial^{\alpha} B^{1}_{B} \partial_{\alpha} H^{B}_{A}] A^{1A}_{12} \qquad [H']$$

On a encore :

$$Q^1 \equiv A^{12}_{12}\Big[B^1_B H^{*B}_{A} \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}} + \partial^\alpha B^1_B \partial_\alpha\left(H^B_A \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right) - \partial^\alpha B^1_B H^B_A \partial_\alpha\left(\frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right)\Big] \quad [H']$$

de (26) on déduit :

$$H^{\bar{B}}_A \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}} = \mathscr{A}^{\bar{B}}_{2}\, H'$$

et remarquons encore que $H^{\hat{B}}_A\, A^{1A}_{12} = 0$ d'où :

$$Q^1 \equiv A^{12}_{12}\Big[B^1_B H^{*B}_{A} \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}} + \partial^\alpha B^1_{\bar{B}} \partial_\alpha(\mathscr{A}^{\bar{B}}_{2} H') - \partial^\alpha B^1_B H^B_A \partial_\alpha\left(\frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right)\Big] \quad [H']$$

Si $A \neq 1$ on a $B^1_B H^B_A = 0$, donc $-\partial^\alpha B^1_B H^A_B = B^1_B \partial^\alpha H^A_B$, et par conséquent

$$Q^1 \equiv A^{12}_{12}\Big[B^1_B H^{*B}_{A} \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}} + \partial^\alpha B^1_{\bar{B}}\, \mathscr{A}^{\bar{B}}_{2} \partial_\alpha H' + B^1_B \partial^\alpha H^B_A \partial_\alpha\left(\frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right)\Big] \quad [H']$$

et de (25) $B^1_{\bar{B}}\, \mathscr{A}^{\bar{B}}_{2} = 0 \Rightarrow \partial^\alpha B^1_{\bar{B}}\, \mathscr{A}^{\bar{B}}_{2} = -B^1_{\bar{B}} \partial^\alpha \mathscr{A}^{\bar{B}}_{2}$.

D'où en utilisant 1) du lemme I.10 :

$$Q^1 \equiv A^{12}_{12}\Big[B^1_{\bar{F}} \frac{A^{1\ \ 2}_{\bar{F}-1\ B}}{A^{12}_{12}} H^{*B}_{A} \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}} - B^1_{\bar{B}} \partial^\alpha \mathscr{A}^{\bar{B}}_{2} \partial_\alpha H' +$$

$$+ B^1_{\bar{F}} \frac{A^{1\ \ 2}_{\bar{F}-1\ B}}{A^{12}_{12}} \partial^\alpha H^B_A \partial_\alpha\left(\frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right)\Big] \quad [H']$$

et des notations précédentes :

$$Q^1 \equiv A^{12}_{12}\big[B^1_{\bar{F}}(\mathscr{H}^{*\bar{F}}_{2} - \partial^\alpha \mathscr{A}^{\bar{F}}_{2} \partial_\alpha H')\big] \quad [H']$$

et du lemme I.13 on a : $Q^1 \equiv A^{12}_{12}\, \hat{\mathscr{K}}^{1}_{2}$ $\quad [H']$

C.Q.F.D.

$P_1 \equiv A^{12}_{12}\ \check{\mathcal{K}}^2_1$ $[H']$ se démontre de la même manière.

Proposition I.1. Si L^o est divisible par H', alors :

$$\overset{o}{M} \text{ divisible par } H' \iff \hat{\mathcal{K}}^1_2\ \check{\mathcal{K}}^2_1 \text{ divisible par } H'$$

$$\text{"} \qquad \iff \overset{o1}{M_1} \text{ divisble par } H'.$$

On a (23) : $A^{12}_{12}\ B^1_1\ \overset{oD}{M_C} \equiv Q^D\ P_C\ H''$ $[H']$ donc d'après la conséquence du lemme I.9.

$$A^{12}_{12}(B^1_1)^2\ \overset{oD}{M_C} \equiv B^1_1 Q^D P_C H'' \equiv B^D_C Q^1 P_1 H'' \qquad [H']$$

d'où d'après le lemme I.17 :

$$A^{12}_{12}(B^1_1)^2\ \overset{oD}{M_C} \equiv B^D_C (A^{12}_{12})^2\ \hat{\mathcal{K}}^1_2\ \check{\mathcal{K}}^2_1 H'' \qquad [H']$$

La proposition en résulte puisque H' est irréductible et que A^{12}_{12} et B^1_1 ne sont pas divisible par H'.

Conséquence. De la proposition I.1 et le lemme I.5 résulte l'équivalence suivante :

$$(L^{o1}_1) \text{ et } (\overset{o1}{M_1}) \iff (L^{o1}_1) \text{ et } \hat{\mathcal{K}}^1_2\ \check{\mathcal{K}}^2_1 \text{ divisible par } H'.$$

On démontre dans [1] l'existence de l'onde asymptotique avec les hypothèses :

H1, H2.b), H3.b), $L_{(2,1,0,\ldots,0)}$, (L^{o1}_1) et $\hat{\mathcal{K}}^1_2\ \check{\mathcal{K}}^2_1 \equiv 0$ $[H']$.

Si $\check{\mathcal{K}}^2_1 \equiv 0$ $[H']$, on supposera en plus que $\widetilde{\hat{\mathcal{K}}}^1_2(a) \neq 0$).

Dans le chapitre II, on obtient des hypothèses équivalentes, avec lesquelles on donnera une nouvelle démonstration de ce résultat.

CHAPITRE II

RESOLUTION FORMELLE

On donne dans un premier paragraphe une forme équivalente des hypothèses : H1 b), $L_{(2,1,0,\dots 0)}$, H3, $(L^{o1}_{1}$, $(\overset{o}{M}{}^{1}_{1})$ du chapitre I ; à l'aide d'opérateur bien décomposables au sens de J.C. De Paris.

1. *Nouvelles hypothèses.*

Soit h un opérateur différentiel matriciel vérifiant : [H1, a) et c)], [H2 a)]. On définit la condition $\mathcal{D}1$ par

$\boxed{\mathcal{D}1}$ a) Il existe des opérateurs différentiels :

$$a^{1\ 1}_{\bar{F}-1\ A}\ ,\quad a^{\bar{D}-1\ B}_{1\ \ 1}\ ,\quad a^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}\qquad \text{où}\qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant \bar{F},\bar{D} \leqslant 2 \\ 1 \leqslant B,A,C \leqslant m \end{array}$$

de symboles principaux respectifs :

$$A^{1\ 2}_{\bar{F}-1\ A}\ ,\quad A^{\bar{D}-1\ B}_{1\ \ 2}\ ,\quad A^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}$$

tels que l'opérateur $q = \left(q^{\bar{F}}_{\bar{D}}\right)_{1\leqslant\bar{F},\bar{D}\leqslant 2}$ (d'ordre (3m-5)t) avec

$$q^{\bar{F}}_{\bar{D}} = a^{1\ 2}_{\bar{F}-1\ A}\, h^{A}_{B}\, a^{\bar{D}-1\ B}_{1\ \ 2}\, a^{1\ 2}_{1\ 2} - a^{1\ 2}_{\bar{F}-1\ A}\, h^{A}_{B}\, a^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}\, h^{C}_{E}\, a^{\bar{D}-1\ E}_{1\ \ 2}$$

est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 1.

b) C'est une hypothèse de régularité de S par rapport à la décomposition de q.

Si Λ_o est tel que : $Q = \Lambda_o H'$ où Q est la matrice caractéristique de q.

Alors

$$\tilde{\Lambda}_o(a) \neq 0.$$

On convient que : un indice chapeauté varie entre 3 et m, et un indice surbarré entre 1 et 2.

On notera par $\bar{A}$ la matrice 2 lignes 2 colonnes :

$$\left(A^{\bar{F}}_{\bar{D}} \right)_{1 \leq \bar{F}\ \bar{D} \leq 2}$$

Conséquence II.1. Soit h un opérateur différentiel linéaire matriciel vérifiant : H1 a), H2 a).

Alors :

$\mathcal{D}$ 1.a $\iff \bar{A} \equiv 0 \quad [H'] \quad$ et $\quad \bar{A} \not\equiv 0 \quad [H'^2]$

En effet : puisque $A^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C} = 0$ si $B = \bar{B}$ ou $C = \bar{C}$ et

$$A^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A} H^{A}_{\hat{B}} = 0 \quad , \quad H^{\hat{C}}_{E} A^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2} = 0 \tag{27}$$

donc $A^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A} H^{A}_{B} A^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C} H^{C}_{E} A^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2} = 0$ d'où $Q^{\bar{F}}_{\bar{D}} = A^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A} H^{A}_{B} A^{\bar{D}-1\ B}_{1\quad 2} A^{1\ 2}_{1\ 2}$

$$\text{or} \qquad H^{A}_{B} A^{\bar{D}-1\ B}_{1\quad 2} = (-1)^{\bar{F}+\bar{D}} \delta^{A}_{\bar{F}} A^{\bar{D}-1\ \bar{D}+1}_{\bar{F}-1\ \bar{F}+1} \tag{28}$$

par suite : $Q^{\bar{F}}_{\bar{D}} = (A^{1\ 2}_{1\ 2})^2 (-1)^{\bar{F}+\bar{D}} A^{\bar{D}-1\ \bar{D}+1}_{\bar{F}-1\ \bar{F}+1}$.

D'où le résultat du fait que $A^{1\ 2}_{1\ 2}$ et $\dfrac{A^{1}_{1}}{H'}$ ne sont pas divisible par H' et que H' est irréductible.

Remarque II.1. De (27) on a :

1) ordre de $(a^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A}\ h^{A}_{\hat{B}}\ a^{1\ 2\ \hat{B}}_{1\ 2\ \hat{C}}\ h^{\hat{C}}_{E}\ a^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2}) \leqslant (3m-5)t-2$

2) ordre de $(a^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A}\ h^{A}_{\bar{B}}\ a^{1\ 2\ \bar{B}}_{1\ 2\ \hat{C}}\ h^{\hat{C}}_{E}\ a^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2}) \leqslant (3m-5)t-2$

3) ordre de $(a^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A}\ h^{A}_{\hat{B}}\ a^{1\ 2\ \hat{B}}_{1\ 2\ \bar{C}}\ h^{\bar{C}}_{E}\ a^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2}) \leqslant (3m-5)t-2$

4) ordre de $(a^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A}\ H^{A}_{\bar{B}}\ a^{1\ 2\ \bar{B}}_{1\ 2\ \bar{C}}\ h^{\bar{C}}_{E}\ a^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2}) \leqslant (3m-5)t-1$

et $(a^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A}\ h^{A}_{\bar{B}}\ a^{1\ 2\ \bar{B}}_{1\ 2\ \bar{C}}\ h^{\bar{C}}_{E}\ a^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2})^{*} = A^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A}\ H^{A}_{\bar{B}}\ A^{*1\ 2\ \bar{B}}_{1\ 2\ \bar{C}}\ H^{\bar{C}}_{E}\ A^{\bar{D}-1\ E}_{1\quad 2} =$

$$= (-1)^{\bar{F}+\bar{B}}\ A^{\bar{D}-1\ \bar{D}+1}_{\bar{F}-1\ \bar{F}+1}\ A^{*1\ 2\ \bar{B}}_{1\ 2\ \bar{C}}\ (-1)^{\bar{C}+\bar{D}}\ A^{\bar{D}-1\ \bar{D}+1}_{\bar{C}-1\ \bar{C}+1} \quad \text{(de 28)}$$

$\equiv 0 \quad [H'^{2}]$ (de la conséquence II.1 si h vérifie $\mathcal{D}$1).

Lemme II.1. Soit h un opérateur différentiel matriciel linéaire véfifiant : H1 a), H2 a) et H3 a).

Alors

$$\exists \bar{B}\ /\ \bar{A} = \bar{B}\ H' \iff \exists B\ /\ A = BH'.$$

Preuve : ($\Longleftarrow$) évident

($\Longrightarrow$) du lemme I.10. 1) et 2) on a :

$$A^{1\ 2}_{1\ 2}\ A^{\bar{F}}_{B} = A^{\bar{F}}_{\bar{E}}\ A^{1\quad 2}_{\bar{E}-1\ B} \equiv 0 \qquad [H']$$

de même $$A^{1\ 2}_{1\ 2}\, A^{A}_{\bar{D}} = A^{\bar{E}}_{\bar{D}}\, A^{\bar{E}-1\ A}_{1\ \ \ 2} \equiv 0 \quad [H']$$

et de l'identité de Jacobi

$$A^1_1\, A^A_B - A^A_1\, A^1_B = A^{1\ A}_{1\ B}\, H''(H')^3 .$$

donc $B^1_1\, A^A_B = H'(B^A_1 B^1_B + A^{1\ A}_{1\ B}\, H''H')$ ceci implique que $A^A_B \equiv 0 \quad [H']$

car B^1_1 n'est pas divisible par H', et H' irréductible.

C.Q.F.D.

Proposition II.1. Si h vérifie : H1 a).

Alors :

1) $L_{(2,1,0,\dots,0)} \iff \mathcal{D}1.$ a et H2. a

2) H3. b, H2. b $\iff \mathcal{D}1.$ b.

Preuve : (Remarquons que $L_{(2,1,0,\dots,0)}$ implique l'existence d'au moins un cofacteur d'ordre $m-2$ de H, non divisible par H' ; on convient que c'est $A^{1\ 2}_{1\ 2}$, et un cofacteur d'ordre $m-1$ de H non divisible par $(H')^2$ on convient que c'est A^1_1).

1) $L_{(2,1,0,\dots,0)} \iff (A \equiv 0 \ [H']$, H2 a et H3. a)

or du lemme II.1 ceci est encore équivalent à :

$$\bar{A} \equiv 0 \ [H'], \quad \text{H2. a et H3. a.}$$

Mais de la conséquence II.1, ceci est aussi équivalent à :

$\mathcal{D}1.$ a et H2. a. d'où 1)

2) Il suffit de remarquer que :

$$\Lambda_{o\ 2}^{\ 2} = (A^{1\ 2}_{1\ 2})^2\, \frac{A^1_1}{H'} = (A^{1\ 2}_{1\ 2})^2\, B^1_1$$

C.Q.F.D.

<u>*Définition*</u>. Si h vérifie : H1. a, c, H2. a, $\mathcal{D}$1. a., on définit la condition suivante

$\boxed{\mathcal{D}\,2}$ a) Il existe des opérateurs différentiels linéaires :

$$b^{i}_{j},\quad a^{1\ 2}_{1\ 2},\quad a^{1}_{1}\qquad i = 1,2,\quad j = 1,2$$

de symboles principaux respectifs

$$B^{i}_{j},\quad A^{1\ 2}_{1\ 2},\quad A^{1}_{1}$$

tels que l'opérateur scalaire :

$$\ell = b^{1}_{\underline{F}} \circ q^{\overline{F}}_{\underline{D}} \circ b^{\overline{D}}_{1} \circ (a^{1\ 2}_{1\ 2})^{2} \circ a^{1}_{1} - b^{1}_{\underline{F}} \circ q^{\overline{F}}_{2} \circ q^{2}_{\underline{D}} \circ b^{\overline{D}}_{1}$$

soit bien décomposable par rapport à H', avec la multiplicité 3.

b) S régulière en a, pour cette décomposition.

<u>*Conséquence*</u> *II.2*. Si ℓ est d'ordre T, alors $b^{1}_{\underline{F}}\, q^{\overline{F}}_{2}\, q^{2}_{\underline{D}}\, b^{\overline{D}}_{1}$ est d'ordre inférieur ou égal à T-2.

<u>En effet</u> : Les hypothèses de la conséquence II.1 sont réalisées donc il existe $\overline{B}$ telle que $\overline{A} = \overline{B}\, H'$, d'autre part on a :

$$Q^{\overline{F}}_{\underline{D}} = (A^{1\ 2}_{1\ 2})^{2}\,(-1)^{\overline{F}+\overline{D}}\, A^{\overline{D}-1\ \overline{D}+1}_{\underline{F}-1\ \underline{F}+1}$$

Donc du lemme I.10, 3) et 4) on a :

$$B^{1}_{\underline{F}}\, Q^{\overline{F}}_{2} = (A^{1\ 2}_{1\ 2})^{2}\,(-1)^{\overline{F}+\overline{D}}\, B^{1}_{\underline{F}}\, A^{\overline{D}-1\ \overline{D}+1}_{\underline{F}-1\ \underline{F}+1} = 0 \tag{29}$$

et

$$Q^{2}_{\underline{D}}\, B^{\overline{D}}_{1} = (A^{1\ 2}_{1\ 2})^{2}\,(-1)^{\overline{F}+\overline{D}}\, A^{\overline{D}-1\ \overline{D}+1}_{\underline{F}-1\ \underline{F}+1}\, B^{\overline{D}}_{1} = 0 \tag{30}$$

d'où le résultat.

Proposition II.2. Si h vérifie : H1 a), H2. a) et $\mathscr{D}$1; a).

Alors :

1) $\mathscr{D}$ 2. b) <=> H3. b), H2. b), H1. c)

2) $\mathscr{D}$ 2. a) et b) <=> (L^{o1}_{1}) et $(\overset{o}{M}{}^{1}_{1})$.

Preuve :

1) D'après la conséquence II.2, la partie principale de ℓ est :

$$L = B^1_{\bar F}\, Q^{\bar F}_{\bar D}\, B^{\bar D}_1\, (A^{1\,2}_{1\,2})^2\, A^1_1$$

$$L = B^1_{\bar F}(A^{1\,2}_{1\,2})^2\, (-1)^{\bar F+\bar D}\, A^{\bar D-1\ \bar D+1}_{\bar F-1\ \bar F+1}\, B^{\bar D}_1 (A^{1\,2}_{1\,2})^2\, A^1_1$$

$$L = B^1_{\bar F}(A^{1\,2}_{1\,2})^2\, A^{1\,2}_{1\,2}\, H''(H')^2 \delta^{\bar F}_1 (A^{1\,2}_{1\,2})^2\, A^1_1 \quad \text{(d'après lemme I.10. 4))}$$

$$L = (B^1_1)^2 (A^{1\,2}_{1\,2})^5\, H''(H')^3 \qquad (\text{car } A^1_1 = B^1_1\, H') \text{ d'où 1).}$$

2) De $\mathscr{D}$ 2. a) la partie principale de $\ell-\lambda_o(h')^3$, c'est-à-dire $L^*-(\lambda_o(h')^3)^*$ est divisible par $(H')^2$. Or de la conséquence II.2 on a :

$$L^* = (b^1_{\bar F}\ q^{\bar F}_{\bar D}\ b^{\bar D}_1 \circ (a^{1\,2}_{1\,2})^2 \circ a^1_1)^*$$

$$\equiv (b^1_{\bar F}\ q^{\bar F}_{\bar D}\ b^{\bar D}_1)^*\, A^{1\,2}_{1\,2}\, A^1_1 + \partial^\alpha(B^1_{\bar F}Q^{\bar F}_{\bar D}B^{\bar D}_1)\,\partial_\alpha[(A^{1\,2}_{1\,2})^2 A^1_1] \qquad [(H')^2]$$

car :

$$B^1_{\bar F}\ Q^{\bar F}_{\bar D}\ B^{\bar D}_1 = (A^{1\,2}_{1\,2})^3\ B^1_1\ H''(H')^2 \tag{31}$$

on a aussi :

$$\partial^\alpha(B^1_{\bar F}Q^{\bar F}_{\bar D}B^{\bar D}_1)\,\partial_\alpha[(A^{1\,2}_{1\,2})^2 A^1_1] \equiv 2(A^{1\,2}_{1\,2})^5 B^1_1\ A^1_1\ H''\ \partial^\alpha H'\ \partial_\alpha H' \qquad [(H')^2]$$

D'où alors :

$$L^{*} \equiv (b^{1}_{\bar F}\, q^{\bar F}_{\bar D}\, b^{\bar D}_{1})^{*}(A^{1\,2}_{1\,2})^{2} A^{1}_{1} + 2(A^{1\,2}_{1\,2})^{5} B^{1}_{1} A^{1}_{1} H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H' \qquad [(H')^{2}]$$

et puisque :

$$(\lambda_{o}(h')^{3})^{*} \equiv 3\Lambda_{o} H'\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H' \qquad [(H')^{2}]$$

$$\equiv 3(A^{1\,2}_{1\,2})^{5}(B^{1}_{1})^{2} H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H' \qquad [(H')^{2}]$$

car $\Lambda_{o} = (B^{1}_{1})^{2}(A^{1\,2}_{1\,2})^{5} H''$ (de 1)).

On a donc : $\ell^{*} - (\lambda_{o}(h')^{3})^{*} \equiv 0 \quad [(H')^{2}]$ équivalent à :

$$\left[(b^{1}_{\bar F}\, q^{\bar F}_{\bar D}\, b^{\bar D}_{1})^{*} - (A^{1\,2}_{1\,2})^{3} B^{1}_{1} H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'\right](A^{1\,2}_{1\,2})^{2} A^{1}_{1} \equiv 0 \qquad [(H')^{2}]$$

qui est encore équivalent, puisque $A^{1\,2}_{1\,2}$ et B^{1}_{1} ne sont pas divisibles par H', à :

$$\left[(b^{1}_{\bar F}\, q^{\bar F}_{\bar D}\, b^{\bar D}_{1})^{*} - (A^{1\,2}_{1\,2})^{3} B^{1}_{1} H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'\right] \equiv 0 \qquad [H'] \qquad (32)$$

D'autre part, on a d'après la remarque II.1 :

$$(b^{1}_{\bar F}\, q^{\bar F}_{\bar D}\, b^{\bar D}_{1})^{*} \equiv (b^{1}_{\bar F}\, a^{1\,2}_{\bar F-1\,A}\, h^{A}_{B}\, a^{\bar D-1\,B}_{1\,2}\, a^{1\,2}_{1\,2}\, b^{\bar D}_{1})^{*} \qquad [H']$$

$$(b^{1}_{\bar F}\, q^{\bar F}_{\bar D}\, b^{\bar D}_{1})^{*} \equiv B^{1}_{\bar F} A^{1\,2}_{\bar F-1\,A}(h^{A}_{B}\, a^{\bar D-1\,B}_{1\,2}\, a^{1\,2}_{1\,2}\, b^{\bar D}_{1})^{*} \qquad [H']$$

$$\equiv B^{1}_{\bar F} A^{1\,2}_{\bar F-1\,A}\left[H^{*A}_{B} A^{\bar D-1\,B}_{1\,2} A^{1\,2}_{1\,2} B^{\bar D}_{1} + \partial^{\alpha}H^{A}_{B}\,\partial_{\alpha}(A^{\bar D-1\,B}_{1\,2} A^{1\,2}_{1\,2} B^{\bar D}_{1})\right] \qquad [H']$$

$$\equiv A^{1\,2}_{1\,2} B^{1}_{A}\left[H^{*A}_{B} B^{B}_{1}(A^{1\,2}_{1\,2})^{2} + \partial^{\alpha}H^{A}_{B}\,\partial_{\alpha}(B^{B}_{1}(A^{1\,2}_{1\,2})^{2})\right] \qquad [H']$$

(d'après Lemme I.10 1) et 2))

$$(b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^* \equiv (A^{1\ 2}_{1\ 2})^3 B^{1}_{A}\left[H^{*A}_{\ \ B}B^{B}_{1} + \partial^{\alpha}H^{A}_{B}\partial_{\alpha}B^{B}_{1}\right] \qquad [H']$$

(car $B^{1}_{A}\partial^{\alpha}H^{A}_{B}B^{B}_{1} \equiv -\partial^{\alpha}B^{1}_{A}H^{A}_{B}B^{B}_{1} \equiv 0 \quad [H']$).

D'où $\ell^* - (\lambda_o(h')^3)^* \equiv 0\ [(H')^2]$ est équivalent à :

$$B^{1}_{A}\left[H^{*A}_{\ \ B}B^{B}_{1} + \partial^{\alpha}H^{A}_{B}\partial_{\alpha}B^{B}_{1} - H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'\delta^{A}_{1}\right] \equiv 0 \qquad [H']$$

car $A^{1\ 2}_{1\ 2}$ n'est pas divisible par H', et H' irréductible c'est-à-dire $\ell^* - (\lambda_o(h')^3)^* \equiv 0\ [(H')^2] \Longleftrightarrow (L^{o}{}^{1}_{1})$.

Remarquons que de (31) et (32) l'opérateur $b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1}$ est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 2. Puisque $(a^{1\ 2}_{1\ 2})^2 \circ a^{1}_{1}$ l'est aussi avec la multiplicité 1. Alors, d'après la remarque I.1, l'opérateur composé : $b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} \circ (a^{1\ 2}_{1\ 2})^2 \circ a^{1}_{1}$ le sera également avec la multiplicité 3.

On en déduit alors, d'après la conséquence II.2 que la partie principale d'ordre $T-2$ de $b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2}q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} = b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} \circ (a^{1\ 2}_{1\ 2})^2 \circ a^{1}_{1} - \ell$ est divisible par H' (car ℓ est bien décomposable par rapport à H' avec multiplicité 3). Or cette partie principale d'ordre $T-2$ est :

$$(b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2} \circ q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^{**} = (b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2})^*(q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^*$$

(car $B^{1}_{\bar F}Q^{\bar F}_{2} = Q^{2}_{\bar D}B^{\bar D}_{1} = 0$ d'après (29) et (30)).

On a :

$$(b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2})^*(q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^* \equiv (b^{1}_{\bar F}\,a^{1\ \ \ 2}_{\bar F-1\,A}h^{A}_{B}\,a^{1\ B}_{1\ 2}\,a^{1\ 2}_{1\ 2})^*(a^{1\ 2}_{1\ C}h^{C}_{E}\,a^{\bar D-1\ E}_{1\ \ \ 2}\,a^{1\ 2}_{1\ 2}b^{\bar D}_{1})^* \qquad [H']$$

$$\equiv (b^{1}_{\bar F}\,a^{1\ \ \ 2}_{\bar F-1\,A}h^{A}_{B})^*\,A^{1\ B}_{1\ 2}A^{1\ 2}_{1\ 2}A^{1\ 2}_{1\ C}(h^{C}_{E}\,a^{\bar D-1\ E}_{1\ \ \ 2}\,a^{1\ 2}_{1\ 2}b^{\bar D}_{1})^* \qquad [H']$$

$$\equiv \Big[B^{1}_{\bar F} A^{1\;\;2}_{\bar F-1\;A} H^{*A}_{B} + \partial^{\alpha}(B^{1}_{\bar F} A^{1\;\;2}_{\bar F-1\;A})\partial_{\alpha} H^{A}_{B}\Big] A^{1\;B}_{1\;2} A^{1\;2}_{1\;C} \Big[H^{*C}_{E} A^{\bar D-1\;E}_{1\;\;\;\;2} A^{1\;2}_{1\;2} B^{\bar D}_{1} +$$

$$+ \partial^{\beta} H^{C}_{E} \partial_{\beta}(A^{\bar D-1\;E}_{1\;\;\;\;2} A^{1\;2}_{1\;2} B^{\bar D}_{1})\Big] \qquad [H']$$

et du lemme I.10.

$$\equiv (A^{1\;2}_{1\;2})^{4} \Big[B^{1}_{A} H^{*A}_{B} + \partial^{\alpha} B^{1}_{A} \partial_{\alpha} H^{A}_{B}\Big] A^{1\;B}_{1\;2} A^{1\;2}_{1\;C} \Big[H^{*C}_{E} B^{E}_{1} + \partial^{\beta} H^{C}_{E} \partial_{\beta} B^{E}_{1}\Big] \qquad [H']$$

et de l'identité : $A^{1\;2}_{1\;2} A^{1\;B}_{1\;C} - A^{1\;B}_{1\;2} A^{1\;2}_{1\;C} = A^{1\;2\;B}_{1\;2\;C} A^{1}_{1}$

$$\equiv (A^{1\;2}_{1\;2})^{5} \Big[B^{1}_{A} H^{*A}_{B} + \partial^{\alpha} B^{1}_{A} \partial_{\alpha} H^{A}_{B}\Big] A^{1\;B}_{1\;C} \Big[H^{*C}_{E} B^{E}_{1} + \partial^{\beta} H^{C}_{E} \partial_{\beta} B^{E}_{1}\Big] \qquad [H']$$

et puisque $A^{1\;2}_{1\;2}$ n'est pas divisible par H' et H' irréductible.

Alors

$$\Big[B^{1}_{A} H^{*A}_{B} + \partial^{\alpha} B^{1}_{A} \partial_{\alpha} H^{A}_{B}\Big] A^{1\;B}_{1\;C} \Big[H^{*C}_{E} B^{E}_{1} + \partial^{\beta} H^{C}_{E} \partial_{\beta} B^{E}_{1}\Big] \equiv 0 \qquad [H']$$

Pour avoir $(\overset{o}{M}{}^{1}_{1})$ il suffit de remarquer que :

$$\overset{o}{M}{}^{1}_{1} \equiv 0 \;[H'] \iff \Big[B^{1}_{A} H^{*A}_{B} + \partial^{\alpha} B^{1}_{A} \partial_{\alpha} H^{A}_{B}\Big] A^{1\;B}_{1\;C} \Big[H^{*C}_{E} B^{E}_{1} + \partial^{\beta} H^{C}_{E} \partial_{\beta} B^{E}_{1}\Big] \equiv 0 \quad [H']$$

<u>en effet</u> :

$$\overset{o}{M}{}^{1}_{1} = \frac{[\partial^{\alpha} B \partial_{\alpha} H + BH^{*} - H''\partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' I]^{1}_{B} B^{B}_{C} [\partial^{\beta} H \partial_{\beta} B + H^{*} B - H''\partial^{\beta} H' \partial_{\beta} H' I]^{C}_{1}}{H'}$$

de l'identité de Jacobi

$$B^{1}_{1} B^{B}_{C} = B^{B}_{1} B^{1}_{C} + A^{1\;B}_{1\;C} H'' H'.$$

$$B^{1}_{1}\overset{o}{M}{}^{1}_{1} = \frac{[\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H+BH^{*}-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I]^{1}_{B}B^{B}_{1}B^{1}_{C}[\partial^{\beta}H\partial_{\beta}B+H^{*}B-H''\partial^{\beta}H'\partial_{\beta}H'I]^{C}_{I}}{H'} +$$

$$+ [\partial^{\alpha}B^{1}_{A}\partial_{\alpha}H^{A}_{B}+B^{1}_{A}H^{*A}_{B}-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'\delta^{1}_{B}]A^{1}_{1}\,{}^{B}_{C}H''[\partial^{\beta}H^{C}_{E}\partial_{\beta}B^{E}_{1}+H^{*C}_{E}B^{E}_{1}-H''\partial^{\beta}H'\partial_{\beta}H'\delta^{C}_{1}]$$

Or

$$\frac{[\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H+BH^{*}-H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I]^{1}_{B}B^{B}_{1}B^{1}_{C}[\partial^{\beta}H\partial_{\beta}B+H^{*}B-H''\partial^{\beta}H'\partial_{\beta}H'I]^{C}_{1}}{H'} = \frac{L^{1}_{1}L^{1}_{1}}{H'} \equiv 0 \quad [H']$$

(car $L^{1}_{1} \equiv 0 \quad [H']$).

Donc $B^{1}_{1}\overset{o}{M}{}^{1}_{1} \equiv [\partial^{\alpha}B^{1}_{A}\partial_{\alpha}H^{A}_{B}+B^{1}_{A}H^{*A}_{B}]A^{1}_{1}\,{}^{B}_{C}[\partial^{\beta}H^{C}_{E}\partial_{\beta}B^{E}_{1}+H^{*C}_{E}B^{E}_{1}]H'' \qquad [H']$

et puisque B^{1}_{1} et H'' ne sont pas divisibles par H', et H' irréductible alors on a le résultat énnoncé.

Réciproquement : supposons (L^{o1}_{1}) et $(\overset{o1}{M}_{1})$ et montrons $\mathcal{D}$2). Puisque (L^{o1}_{1}) implique $B^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} \circ (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{2} \circ a^{1}_{1}$ bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 3 ; et $(\overset{o1}{M}_{1})$ implique que la partie principale d'ordre T-2 de $(b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2}q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})$ est $\equiv 0 \quad [H']$, on a alors :
$\ell = b^{1}_{F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} \circ (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{2} \circ a^{1}_{1} - b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2}q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1}$ est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 3.

C.Q.F.D.

2. *Lien avec $\hat{\mathcal{K}}$ et $\check{\mathcal{K}}$* :

Proposition II.3. Si h vérifie : H1 a), H2 a) et $\mathcal{D}$1. a)

Alors :

1) $\mathcal{B}^{1\,0}_{\bar F\,\psi}$ $\mathcal{G}^{\bar F\,1}_{\bar D\,\psi}$ et $\mathcal{G}^{\bar F\,1}_{\bar D\,\psi}$ $\mathcal{B}^{\bar D\,0}_{1\,\psi}$ sont deux opérateurs d'ordre zéro qui seront notés respectivement par : $\tilde{f}^{1}_{\bar D}$, $\tilde{g}^{\bar F}_{1}$.

2) De plus $\mathcal{D}2$ implique que :

$$\tilde{f}^{1}_{\bar{D}}\ \tilde{B}^{\bar{D}}_{1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}^{1}_{2}\ \tilde{g}^{2}_{1} = 0$$

N.B. $1 \leqslant \bar{F}\ ,\ \bar{D} \leqslant 2$.

Preuve : H1 a), H2 a), $\mathcal{D}1$ a) assurent l'existence des B^{i}_{j} , $1 \leqslant i\ ,\ j \leqslant 2$ (d'après la conséquence II.1).

Remarquons que $B^{\bar{E}}_{\bar{F}}Q^{\bar{F}}_{\bar{D}} = (A^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{2}(-1)^{\bar{F}+\bar{D}}B^{\bar{E}}_{\bar{F}}A^{\bar{D}-1}_{\bar{F}-1}{}^{\bar{D}+1}_{\bar{F}+1} =$

$= (A^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{3}\ H''(H')^{2}\delta^{\bar{E}}_{\bar{D}}$ (du lemme I.10 3)) de même

$$Q^{\bar{F}}_{\bar{D}}B^{\bar{D}}_{\bar{E}} = (A^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{3}H''(H')^{2}\delta^{\bar{F}}_{\bar{E}}\ .$$

Donc

$$\bar{B}\bar{Q} = \bar{Q}\bar{B} = (A^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{3}\ H''(H')^{2}I\ .$$

On a alors : $b \circ q = (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2}I + r$ (avec ordre de $r <$ ordre de $b \circ q$).

D'où

$$(b \circ q)^{1}_{\psi} = \mathcal{B}^{0}_{\psi}\ \mathcal{Q}^{1}_{\psi} + \mathcal{B}^{1}_{\psi}\ \mathcal{Q}^{0}_{\psi} = \mathcal{R}^{0}_{\psi}$$

or $\mathcal{Q}^{0}_{\psi} = \tilde{Q} = 0$ donc $\boxed{\mathcal{B}^{0}_{\psi}\mathcal{Q}^{1}_{\psi} = \mathcal{R}^{0}_{\psi}}$. On peut aussi écrire $q \circ b = (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2}I + r'$ (avec ordre de $r' <$ ordre de $q \circ b$).

D'où

$$(q \circ b)^{1}_{\psi} = \mathcal{Q}^{0}_{\psi}\ \mathcal{B}^{1}_{\psi} + \mathcal{Q}^{1}_{\psi}\ \mathcal{B}^{0}_{\psi} = \mathcal{R}'^{0}_{\psi}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{Q}^{1}_{\psi}\ \mathcal{B}^{0}_{\psi} = \mathcal{R}'^{0}_{\psi}}$$

d'où 1).

2) De $\mathcal{I}$ 2. l'opérateur scalaire :

$$\ell = b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} \circ (a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2} \circ a^{1}_{1} - b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2}q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} \qquad \text{(d'ordre T)}$$

est bien décomposable par rapport à H', avec multiplicité 3. Donc $\mathcal{L}^{o}_{\psi} = \mathcal{L}^{1}_{\psi} = \mathcal{L}^{2}_{\psi} = 0$ [5] . Comme $B^{1}_{\bar F}Q^{\bar F}_{\bar D}B^{\bar D}_{1} = B^{1}_{1}(A^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{3}H''(H')^{2}$, on peut donc écrire

$$b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} = b^{1}_{1}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2} + r \qquad (\text{où Ord } r \leqslant \text{Ord}(b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1}) - 1)$$

et comme $A^{1}_{1} = B^{1}_{1}H'$ donc $(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2} \circ a^{1}_{1} = (a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h' + p$ (avec ord $p <$ ord$((a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2} \circ a^{1}_{1})$) donc si on note s l'opérateur $b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{2}q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1}$ qui est d'ordre $\leqslant$ T-2 , on a :

$$\ell = b^{1}_{1}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2}((a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h'+p) + r((a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h'+p) - s$$

i.e. $$\ell = b^{1}_{1}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h' + b^{1}_{1}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2}p + r(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h' + {}$$
$$+ rp - s$$

avec $\text{ord}[b^{1}_{1}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h'] = T$

$\text{ord}[b^{1}_{1}(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{3}h''(h')^{2}p + r(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h'] \leqslant T-1$

$\text{ord}[rp-s] \leqslant T-2.$

Donc $\mathcal{L}^{2}_{\psi} = (r(a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h')^{1}_{\psi} + (rp-s)^{o}_{\psi} = 0$ donc

$$\tilde R((a^{1}_{1}\,{}^{2}_{2})^{2}b^{1}_{1}h')^{1}_{\psi} + \widetilde{\widetilde{RP}} - \tilde S = 0$$

d'où on a : $\tilde R = 0$ et $\widetilde{\widetilde{RP}} - \tilde S = 0$. Donc $\tilde R = 0$ et $\tilde S = 0$.

or $\tilde{R} = (b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D} b^{\bar D}_1)^1_{\emptyset} = (b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D})^1_{\emptyset} \mathcal{B}^{\bar D\,0}_{1\,\emptyset} = \mathcal{B}^{1\,0}_{\bar F\,\emptyset} \mathcal{G}^{\bar F\,1}_{\bar D\,\emptyset} \mathcal{B}^{\bar D\,0}_{1\,\emptyset}$

i.e $\tilde{R} = \tilde{f}^1_{\bar D} \tilde{B}^{\bar D}_1 = 0$ et

$$\tilde{S} = (b^1_{\bar F} q^{\bar F}_2)^1_{\emptyset} (q^2_{\bar D} b^{\bar D}_1)^1_{\emptyset} = \mathcal{B}^{1\,0}_{\bar F\,\emptyset} \mathcal{G}^{\bar F\,1}_{2\,\emptyset} \mathcal{G}^{2\,1}_{\bar D\,\emptyset} \mathcal{B}^{\bar D\,0}_{1\,\emptyset}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{S} = \tilde{f}^1_2 \times \tilde{g}^2_1 = 0.$$

C.Q.F.D.

Proposition II.4. Si h vérifie H1 a), H2 et $\mathcal{D}$1. a).

Alors

1) $\tilde{B}^1_{\bar F} \mathcal{G}^{\bar F\,1}_{2\,\emptyset} = \tilde{f}^1_2 = \widetilde{(A^{1\,2}_{1\,2})^3 \hat{\mathcal{K}}^1_2}$

2) $\mathcal{G}^{2\,1}_{\bar D\,\emptyset} \tilde{B}^{\bar D}_1 = \tilde{g}^2_1 = \widetilde{(A^{1\,2}_{1\,2})^3 \check{\mathcal{K}}^2_1}$

où $\hat{\mathcal{K}}^1_2$ et $\check{\mathcal{K}}^2_1$ sont les deux invariants du chapitre I.

Preuve : H1 a), H2 a) et $\mathcal{D}$1 a) assurent l'existence des B^i_j $1 \leq i, j \leq 2$ et on a de $\mathcal{D}$1. a), l'opérateur (2 lignes, 2 colonnes) $q = (q^{\bar F}_{\bar D})_{1 \leq \bar F, \bar D \leq 2}$:

$$q^{\bar F}_{\bar D} = a^1_{\bar F-1}\, {}^2_A h^A_B a^{\bar D-1}_1\, B^1_2 a^2_{1\,2} - a^1_{\bar F-1}\, {}^2_A h^A_B a^1_{1\,2}\, B^C_{2\,C} h_E a^{\bar D-1}_1\, E_2$$

1) $\tilde{B}^1_{\bar F} \mathcal{G}^{\bar F\,1}_{2\,\emptyset} = \tilde{B}^1_{\bar F}(a^1_{\bar F-1}\, {}^2_A h^A_B a^1_1\, B_2 a^1_1\, {}^2_2)^1_{\emptyset}$ (d'après la remarque II.1).

D'où

$$\tilde{B}^1_{\bar F} \mathcal{G}^{\bar F\,1}_{2\,\emptyset} = \tilde{B}^1_{\bar F} \tilde{A}^1_{\bar F-1}\, {}^2_A \mathcal{H}^{A\,1}_{B\,\emptyset} \tilde{A}^{1\,B}_{1\,2} \tilde{A}^{1\,2}_{1\,2}$$

et avec le changement de coordonnées locales où $x^1 = \psi(x)$, l'expression de $\mathcal{H}^{A\ 1}_{B\ \psi}$ dans cette carte est :

$$\partial^\alpha \tilde{H}^A_B \partial_\alpha + \widetilde{H^{*A}_{B}} \quad .$$

D'où :

$$\tilde{B}^1_{\bar{F}} \ \mathcal{G}^{\bar{F}\ 1}_{2\ \psi} = \tilde{B}^1_{\bar{F}} \tilde{A}^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A} \widetilde{\partial^\alpha H^A_B} \frac{\tilde{A}^{1\ B}_{1\ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} (\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^2 \partial_\alpha +$$

$$+ \tilde{B}^1_{\bar{F}} \tilde{A}^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A} \widetilde{\partial^\alpha H^A_B} \frac{\tilde{A}^{1\ B}_{1\ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} \partial_\alpha (\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^2 +$$

$$+ \tilde{B}^1_{\bar{F}} \tilde{A}^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A} (\widetilde{\partial^\alpha H^A_B} \partial_\alpha \left(\frac{\tilde{A}^{1\ B}_{1\ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} \right) + \widetilde{H^{*A}_{B}} \frac{\tilde{A}^{1\ B}_{1\ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}) (\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^2 \ .$$

du fait que :

$$\tilde{B}^1_{\bar{F}} \tilde{A}^{1\quad 2}_{\bar{F}-1\ A} \partial^\alpha H^A_B \frac{\tilde{A}^{1\ B}_{1\ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} = \widetilde{B^1_A \ \partial^\alpha H^A_B A^{1\ B}_{1\ 2}} \qquad \text{d'après lemme I.10.}$$

$$= -\widetilde{\partial^\alpha B^1_A} \widetilde{H^A_B A^{1\ B}_{1\ 2}} = 0.$$

Il reste seulement :

$$\mathcal{B}^{1\ 0}_{\bar{F}\ \psi} \ \mathcal{G}^{\bar{F}\ 1}_{2\ \psi} = (\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^3 \ \tilde{B}^1_{\bar{F}} \ \widetilde{\mathcal{H}^{*\bar{F}}_{2}} \qquad \text{(d'après notation du chap. I)}$$

$$\mathcal{B}^{1\ 0}_{\bar{F}\ \psi} \ \mathcal{G}^{\bar{F}\ 1}_{2\ \psi} = (\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^3 \ \widetilde{\hat{\mathcal{K}}^{1}_{2}} \qquad \text{(d'après lemme I.1.3).}$$

2) $$\mathcal{G}^{2\ 1}_{\bar{D}\ \psi} \ \mathcal{B}^{\bar{D}\ 0}_{1\ \psi} = (a^{1\ 2}_{1\ A} h^A_B a^{\bar{D}-1\ B}_{1\quad 2} \, a^{1\ 2}_{1\ 2})^1_\psi \ \tilde{B}^{\bar{D}}_1$$

$$= \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A} \ \mathcal{H}^{A\ 1}_{B\ \psi} \ \tilde{A}^{\bar{D}-1\ B}_{1\quad 2} \ \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2} \ \tilde{B}^{\bar{D}}_1$$

et avec le même changement de coordonnées locales on a :

$$\mathcal{P}^{2\ 1}_{\bar D\ \psi}\,\mathcal{B}^{\bar D\ 0}_{1\ \psi} = \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A}\,\widetilde{\partial^{\alpha}H^{A}_{B}}\,\frac{\tilde{A}^{\tilde{\bar D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\,\tilde{B}^{\bar D}_{1}(\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^{2}\partial_{\alpha} +$$

$$+\ \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A}\,\widetilde{\partial^{\alpha}H^{A}_{B}}\,\frac{\tilde{A}^{\tilde{\bar D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\,\tilde{B}^{\bar D}_{1}\,\partial_{\alpha}(\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^{2} +$$

$$+\ \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A}\,\widetilde{\partial^{\alpha}H^{A}_{B}}\,\frac{\tilde{A}^{\tilde{\bar D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\,\partial_{\alpha}\tilde{B}^{\bar D}_{1}(\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^{2} +$$

$$+\ \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A}\Big[\widetilde{\partial^{\alpha}H^{A}_{B}}\,\partial_{\alpha}\Big(\frac{\tilde{A}^{\tilde{\bar D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\Big) + \widetilde{H^{*A}_{B}}\,\frac{\tilde{A}^{\tilde{\bar D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\Big]\,\tilde{B}^{\bar D}_{1}\,(\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2})^{2}$$

et du fait que $\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A}\,\widetilde{\partial_{\alpha}H^{A}_{B}}\,\dfrac{\tilde{A}^{\tilde{\bar D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\,\tilde{B}^{\bar D}_{1} = \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A}\,\widetilde{\partial^{\alpha}H^{A}_{B}B^{B}_{1}} = 0$ et

$$\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ A}\,\widetilde{\partial^{\alpha}H^{A}_{B}}\,\frac{\tilde{A}^{\tilde{\bar D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\,\partial_{\alpha}\,\tilde{B}^{\bar D}_{1} = \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ \bar A}\ \widetilde{\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}}\ \widetilde{\partial^{\alpha}H'}\,\partial_{\alpha}\tilde{B}^{\bar D}_{1} \qquad \text{(d'après (26))}$$

$$= \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}\ \partial_{\alpha}\widetilde{\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}}\ \widetilde{\partial^{\alpha}H'}\tilde{B}^{\bar D}_{1} \quad \text{(car de (25)}$$

$\widetilde{\mathcal{A}^{\bar A}_{\bar D}\,B^{\bar D}_{1}} = 0$) d'où alors :

$$\mathcal{P}^{2\ 1}_{\bar D\ \psi}\ \mathcal{B}^{\bar D\ 0}_{1\ \psi} = (\widetilde{A^{1\ 2}_{1\ 2}})^{3}\ \widetilde{\check{\mathcal{K}}^{2}_{1}}$$

C.Q.F.D.

3. *Résolution formelle*.

On suppose que h vérifie H1 a) et c) ; $\mathcal{D}1$, $\mathcal{D}2$ et on cherche une onde asymptotique :

$$Y(x) = \sum_{j\in Z} Y_j(x)\times f_j \circ \psi(x) \qquad (29)$$

où $Y_j = 0$ si $j < 0$ et où $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite de fonctions, distributions ou ultradistributions, telle que $\forall j \in \mathbb{Z}$, $f'_j = f_{j-1}$. On cherche Y telle que $h(Y) = 0$. On a [5] $h(Y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^r_\varphi[Y_{j-r}])\times f_{j-r} \circ \varphi$.

Il suffit donc de résoudre :

$$\sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^r_\varphi[Y_{j-r}] = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z} \tag{30}$$

Introduisons les notations suivantes :

$c = (c^{\bar{F}}_{A}) = (a^{1\ \ 2}_{\bar{F}-1\ A}) \qquad 1 \leqslant A \leqslant m, \qquad 1 \leqslant \bar{F} \leqslant 2$

$d = (d^{B}_{\bar{D}}) = (a^{\bar{D}-1\ B}_{1\ \ 2}) \qquad 1 \leqslant B \leqslant m, \qquad 1 \leqslant \bar{D} \leqslant 2$

$e = (e^{B}_{C}) = (a^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}) \qquad 1 \leqslant B, \quad C \leqslant m$

$r = (r^{B}_{\bar{D}})$:

où

$$r = d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2} - e \circ h \circ d\ .$$

Lemme II.2.

1) on a : $\mathcal{E}^{o}_{\varphi}(h \circ d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\varphi} = \tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}(e \circ h \circ d)^{1}_{\varphi}$

2) et $\mathcal{C}^{1}_{\varphi}(hr)^{1}_{\varphi} = (a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\varphi} \dfrac{1}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\ \mathcal{G}^{1}_{\varphi}$.

Preuve : $\mathcal{E}^{o}_{\varphi}(h \circ d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\varphi} = (e \circ h \circ d)^{1}_{\varphi}(a^{1\ 2}_{1\ 2})^{o}_{\varphi}$ or $(e \circ h \circ d)^{1}_{\varphi}$ est une fonction d'où 1).

2) $\mathcal{C}^{1}_{\varphi}(hr)^{1}_{\varphi} = (a^{1\ \ 2}_{\bar{F}-1\ A})^{1}_{\varphi}(h^{A}_{B}\, a^{\bar{D}-1\ B}_{1\ \ 2}\, a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\varphi} -$

$$- (a^{1\ \ 2}_{\bar{F}-1\ A})^{1}_{\varphi}(h^{A}_{B}\, a^{1\ 2\ B}_{1\ 2\ C}\, h^{C}_{E}\, a^{\bar{D}-1\ E}_{1\ \ 2})^{1}_{\varphi}$$

$$\mathscr{C}^{\,1}_{\psi}(hr)^{1}_{\psi} = (a^{1}_{\bar{F}-1}{}^{2}_{A})^{1}_{\psi}(h^{A}_{B}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{B}_{2})^{1}_{\psi}(a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{o}_{\psi} -$$

$$- (a^{1}_{\bar{F}-1}{}^{2}_{A})^{1}_{\psi}\; \widetilde{H}^{A}_{B}\; \tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2}{}^{B}_{C}(h^{C}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi} =$$

$$= (a^{1}_{\bar{F}-1}{}^{2}_{A})^{1}_{\psi}(h^{A}_{B}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{B}_{2})^{1}_{\psi}\; (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{o}_{\psi} - (a^{1}_{\bar{F}-1}{}^{2}_{\hat{A}})^{1}_{\psi}\; \tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2}(h^{\hat{A}}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi}$$

$$+ (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi}\; \tilde{A}^{1}_{\bar{A}-1}{}^{2}_{\hat{C}}(h^{\hat{C}}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi} \qquad \text{(d'après 23 bis)}$$

$$= (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi}(h^{\bar{A}}_{E}a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi}(a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{o}_{\psi} + (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi}\; \tilde{A}^{1}_{\bar{A}-1}{}^{2}_{\hat{C}}(h^{\hat{C}}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi}$$

car $(h^{\hat{C}}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi}$ est une fonction et $\dfrac{A^{1}_{\bar{F}-1}{}^{2}_{\bar{A}}}{A^{1}_{1}{}^{2}_{2}} = 1.$

$$= (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi} \times \Bigg(\frac{\tilde{A}^{1}_{\bar{A}-1}{}^{2}_{\hat{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2}}\; (h^{\hat{C}}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi} \times (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{o}_{\psi} +$$

$$+ \frac{\tilde{A}^{1}_{\bar{A}-1}{}^{2}_{\bar{C}}}{\tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2}}\; (h^{\bar{C}}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2})^{1}_{\psi} \times (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{o}_{\psi} \Bigg)$$

$$= (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi} \left(\frac{1}{\tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2}}\; \tilde{A}^{1}_{\bar{A}-1}{}^{2}_{C}\; (h^{C}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2}\; a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi} \right)$$

$$= (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi}\; \frac{1}{\tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2}}\; (a^{1}_{\bar{A}-1}{}^{2}_{C}\; h^{C}_{E}\; a^{\bar{D}-1}_{1}{}^{E}_{2}\; a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi}$$

et de la remarque II.1 on a alors :

$$\mathscr{C}^{\,1}_{\psi}(hr)^{1}_{\psi} = (a^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{1}_{\psi}\; \frac{1}{\tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2}}\; \wp^{\,1}_{\psi}$$

C.Q.F.D.

posons encore pour $j \in \mathbb{Z}$:

$$u_j = (u_j^{\bar{D}})_{1 \leq \bar{D} \leq 2} \; : \; u_j = (\tilde{A}_{1\,2}^{1\,2})^2 (Y_j - \mathcal{R}_\psi^1[u_{j-1}] - \mathcal{R}_\psi^2[u_{j-2}])$$

$$M_j = (M_j^B)_{1 \leq B \leq m} \; : \; M_j = \frac{\mathcal{C}_\psi^o}{\tilde{A}_{1\,2}^{1\,2}} (\beta_{j-1} - (hr)_\psi^2[u_j]) + \mathcal{R}_\psi^2[u_j]$$

$$\beta_j = - \mathcal{H}_\psi^1(M_j) - \mathcal{H}_\psi^2 \mathcal{R}_\psi^1[u_j] - \mathcal{H}_\psi^2(M_{j-1}) - \sum_{r=3}^t \mathcal{H}_\psi^r[Y_{j-r}]$$

$$\omega_j = \mathcal{C}_\psi^o \beta_j + (a_{1\,2}^{1\,2})_\psi^1 \times (\frac{1}{\tilde{A}_{1\,2}^{1\,2}} (\omega_{j-1} - \mathcal{G}_\psi^2[u_j])$$

où pour $j < 0$: $u_j = 0$, $\omega_j = 0$, $\beta_j = M_j = 0$ et montrons par récurrence l'hypothèse

$$(P_j) \; : \; \begin{cases} \mathcal{G}_\psi^1[u_{j-1}] + \mathcal{G}_\psi^2[u_{j-2}] = \omega_{j-3} & (31) \\ Y_j = \mathcal{R}_\psi^o[u_j] + \mathcal{R}_\psi^1[u_{j-1}] + M_{j-2} & (32) \end{cases}$$

(P_j) est vraie pour $j < 0$, supposons la vraie pour j et montrons (P_{j+1}). De (30) on a :

$$\mathcal{H}_\psi^o[Y_{j+1}] + \mathcal{H}_\psi^1[Y_j] + \mathcal{H}_\psi^2[Y_{j-1}] + \sum_{r=3}^t \mathcal{H}_\psi^r[Y_{j+1-r}] = 0$$

remplaçons Y_j, Y_{j-1} par leur expressions obtenues de (32). D'où :

$$\mathcal{H}_\psi^o[Y_{j+1}] + \mathcal{H}_\psi^1(\mathcal{R}^o[u_j] + \mathcal{R}_\psi^1[u_{j-1}] + M_{j-2}) + \mathcal{H}_\psi^2(\mathcal{R}^o[u_{j-1}]$$

$$+ \mathcal{R}_\psi^1[u_{j-2}] + M_{j-3}) + \sum_{r=3}^t \mathcal{H}_\psi^r[Y_{j+1-r}] = 0$$

et des notations introduites on a :

$$\mathcal{H}^{o}_{\psi}[Y_{j+1}] + \mathcal{H}^{1}_{\psi}\mathcal{R}^{o}_{\psi}[u_j] + \mathcal{H}^{1}_{\psi}\mathcal{R}^{1}_{\psi}[u_{j-1}] + \mathcal{H}^{2}_{\psi}\mathcal{R}^{o}_{\psi}[u_{j-1}] = \beta_{j-2}$$

et $\mathcal{R}^{o}_{\psi} = (d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{o}_{\psi}$ d'où :

$$\mathcal{H}^{o}_{\psi}[Y_{j+1}] + \mathcal{H}^{1}_{\psi}(d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{o}_{\psi}[u_j] + \mathcal{H}^{1}_{\psi}\mathcal{R}^{1}_{\psi}[u_{j-1}] + \mathcal{H}^{2}_{\psi}\mathcal{R}^{o}_{\psi}[u_{j-1}] = \beta_{j-2}$$

d'où encore :

$$\mathcal{H}^{o}_{\psi}(Y_{j+1} - (d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}[u_j] - \mathcal{R}^{2}_{\psi}[u_{j-1}]) + (hda^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}[u_j] +$$

$$+ (hr)^{2}_{\psi}[u_{j-1}] = \beta_{j-2} \qquad (33)$$

La condition de compatibilité de ce système est :

$$\mathcal{C}^{o}_{\psi}(hda^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}[u_j] + \mathcal{C}^{o}_{\psi}(hr)^{2}_{\psi}[u_{j-1}] = \mathcal{C}^{o}_{\psi}\,\beta_{j-2}$$

qui s'écrit encore :

$$\mathcal{C}^{o}(hodoa^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}[u_j] + (cohor)^{2}_{\psi}[u_{j-1}] = \mathcal{C}^{o}_{\psi}\beta_{j-2} + \mathcal{C}^{1}_{\psi}(hr)^{1}_{\psi}[u_{j-1}]$$

or du lemme II.2

$$\mathcal{C}^{1}_{\psi}(hr)^{1}_{\psi}[u_{j-1}] = (a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}\,\frac{1}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\,\mathcal{G}^{1}_{\psi}[u_{j-1}]$$

$$= (a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}\,\frac{1}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\,(\omega_{j-3} - \mathcal{G}^{2}_{\psi}[u_{j-2}]) \qquad \text{(de (31))}$$

on a alors :

$$\mathcal{C}^{o}_{\psi}(h \circ d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}[u_j] + \mathcal{G}^{2}_{\psi}[u_{j-1}] = \omega_{j-2}\,.$$

remarquons enfin que :

$$\mathscr{C}^{o}_{\psi}(h \circ d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi} = (c \circ h \circ d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}$$

$$= \mathscr{G}^{1}_{\psi} \qquad \text{(d'après la remarque II.1)}$$

D'où :

$$\mathscr{G}^{1}_{\psi}[u_j] + \mathscr{G}^{2}_{\psi}[u_{j-1}] = \omega_{j-2}$$

et si cette condition est réalisée on peut alors résoudre (33) d'où

$$Y_{j+1} - (d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}[u_j] - \mathscr{R}^{2}_{\psi}[u_{j-1}] = \mathscr{D}^{o}_{\psi}(a^{1\ 2}_{1\ 2})^{o}_{\psi}\ u_{j+1} -$$

$$- \frac{\mathscr{C}^{o}_{\psi}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} (h \circ d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi}[u_j] - \frac{\mathscr{C}^{o}_{\psi}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} [(hr)^{2}_{\psi}[u_{j-1}] - \beta_{j-2}]$$

Or $- \frac{\mathscr{C}^{o}_{\psi}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} (h \circ d \circ a^{1\ 2}_{1\ 2})^{1}_{\psi} = -(e \circ h \circ d)^{1}_{\psi}$ (lemme II.2 1)).

D'où :

$$Y_{j+1} = \mathscr{R}^{o}_{\psi}[u_{j+1}] + \mathscr{R}^{1}_{\psi}[u_j] + \mathscr{R}^{2}_{\psi}[u_{j-1}] - \frac{\mathscr{C}^{o}_{\psi}}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}} [(hr)^{2}_{\psi}[u_{j-1}] - \beta_{j-2}]$$

donc d'après la définition de M_{j-1} on a :

$$Y_{j+1} = \mathscr{R}^{o}_{\psi}[u_{j+1}] + \mathscr{R}^{1}_{\psi}[u_j] + M_{j-1} \quad .$$

C.Q.F.D.

La relation (32) donnera les Y_j lorsque les u_j seront connues.

Calcul des u_j.

On pose :

$$\Omega_j = \omega_{j-1} - \mathscr{G}^{2}_{\psi}[u_j] \quad .$$

On a de la récurrence précédente que :

$$\mathcal{G}^1_\psi[u_j] + \mathcal{G}^2_\psi[u_{j-1}] = \omega_{j-2} \tag{34}$$

d'où

$$\mathcal{G}^1_\psi[u_j] = \Omega_{j-1}$$

et d'après $\mathcal{D}$1. a) $\quad q = \lambda_o h' + \lambda_1 \quad$ d'où :

$$\tilde{\Lambda}_o (h')^1_\psi[u_j] + \tilde{\Lambda}_1 \times u_j = \Omega_{j-1} .$$

Remarque. Contrairement au cas double [11], et triple II, [17], la condition (31) n'est pas automatiquement vérifiée ; et contrairement au cas H.F [3], la matrice Λ_o n'est pas inversible au voisinage de a, car $\det \tilde{\Lambda}_o = 0$.

Donc (34) ne permet pas de déterminer u_j mais puisque $\tilde{B}^1_1 \neq 0$ on a alors :

$$\mathcal{G}^1_\psi[u_j] = \Omega_{j-1} \iff \begin{cases} \mathcal{G}^{2}_{\bar{D}}{}^{1}_{\psi}[u_j^{\bar{D}}] = \Omega^2_{j-1} \\ \tilde{B}^1_{\bar{F}}\ \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}{}^{1}_{\psi}[u_j^{\bar{D}}] = \tilde{B}^1_{\bar{F}}\ \Omega^{\bar{F}}_{j-1} \end{cases}$$

Et de la proposition II.3. 1) on a : $\tilde{B}^1_{\bar{F}}\ \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}{}^{1}_{\psi} = \tilde{f}^1_{\bar{D}}$ d'où :

$$\mathcal{G}^1_\psi[u_j] = \Omega_{j-1} \iff \begin{cases} \mathcal{G}^{2}_{\bar{D}}{}^{1}_{\psi}[u_j^{\bar{D}}] = \Omega^2_{j-1} & (35) \\ \tilde{f}^1_{\bar{D}} \times u_j^{\bar{D}} = \tilde{B}^1_{\bar{F}}\ \Omega^{\bar{F}}_{j-1} & (36) \end{cases}$$

Et de la proposition II.3.2) on a :

$$\tilde{f}^1_2 \times \tilde{g}^2_1 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{f}^1_{\bar{D}} \times \tilde{B}^{\bar{D}}_1 = 0$$

on a alors : $\tilde{f}^1_2(x) \times \tilde{g}^2_1(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$. On suppose que $\tilde{f}^1_2$ et $\tilde{g}^2_1$ ne s'annulent pas simultanément en a.

1er cas. Si $\tilde{f}^1_2 = 0$ sur Ω. De la proposition II.3 on a $\tilde{f}^1_{\bar{D}} \tilde{B}^{\bar{D}}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{f}^1_1 \tilde{B}^1_1 = 0$ or $\tilde{B}^1_1 \neq 0$ donc $\tilde{f}^1_1 = 0$ d'où $\tilde{f}^1_{\bar{D}} = 0$.

On a alors :

$$(35), (36) \iff \begin{cases} \mathcal{G}^{2}_{\bar{D}}\,{}^{1}_{\psi}[u^{\bar{D}}_j] = \Omega^2_{j-1} & (37) \\ \\ \tilde{B}^1_{\bar{F}}\, \Omega^{\bar{F}}_{j-1} = 0 & (38) \end{cases}$$

posons alors : $\Delta_j = \mathcal{B}^o_\psi \omega_j + \mathcal{B}^1_\psi \Omega_j$ et montrons par récurrence l'hypothèse :

$$(\mathcal{P}_k) : u_k \text{ est solution du problème : } \begin{cases} \mathcal{G}^{2}_{\bar{D}}\,{}^{1}_{\psi}[u^{\bar{D}}_k] = \Omega^2_{k-1} \\ \\ (b^1_{\bar{F}}\, q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^2_\psi\, [u^{\bar{D}}_k] = \Delta_{k-1} \end{cases}$$

Supposons $(\mathcal{P}_k)$ vraie pour $k < j$ et montrons la pour j.

On a (37) : $\mathcal{G}^{2}_{\bar{D}}\,{}^{1}_{\psi}[u^{\bar{D}}_j] = \Omega^2_{j-1}$. (38) est automatiquement satisfaite ; en effet :

$$\tilde{B}^1_{\bar{F}}\, \Omega^{\bar{F}}_{j-1} = \tilde{B}^1_{\bar{F}}(\omega^{\bar{F}}_{j-2} - \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}\,{}^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j-1}])$$

$$= \tilde{B}^1_{\bar{F}}\,\omega^{\bar{F}}_{j-2} - (b^1_{\bar{F}}\, q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^2_\psi [u^{\bar{D}}_{j-1}] + \mathcal{B}^1_{\bar{F}}\,{}^{1}_{\psi}\, \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}\,{}^{1}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j-1}]$$

mais de $\mathcal{G}^1_\psi[u_{j-1}] = \omega_{j-3} - \mathcal{G}^2_\psi[u_{j-2}]$ on a :

$$\tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\ \Omega^{\bar{F}}_{j-1} = \tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\ \omega^{\bar{F}}_{j-2} - (b^{1}_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j-1}] + \mathcal{B}^{1}_{\bar{F}}{}^{1}_{\psi}(\omega^{\bar{F}}_{j-3} - \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}{}^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j-2}])$$

$$= \tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\ \omega^{\bar{F}}_{j-2} - \mathcal{B}^{1}_{\bar{F}}{}^{1}_{\psi}\ \Omega^{\bar{F}}_{j-2} - (b^{1}_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j-1}]$$

$$= \Delta_{j-1} - (b^{1}_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j-1}]$$

$$= 0 \qquad \text{de l'hypothèse de récurrence.}$$

Considérons maintenant le système suivant :

$$\mathcal{G}^{1}_{\psi}[u_{j+1}] + \mathcal{G}^{2}_{\psi}[u_{j}] = \omega_{j-1} \tag{39}$$

Ce système est équivalent, pour la même raison que dans le cas des systèmes (34) - (35) au système :

$$\begin{cases} \mathcal{G}^{2}_{\bar{D}}{}^{1}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j+1}] + \mathcal{G}^{2}_{\bar{D}}{}^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j}] = \omega^{2}_{j-1} & (40) \\ \tilde{f}{}^{1}_{\bar{D}} \times u^{\bar{D}}_{j+1} + \tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\ \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}{}^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j}] = \tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\omega^{\bar{F}}_{j-1} & (41) \end{cases}$$

et puisque $\tilde{f}{}'_{\bar{D}} = 0$ donc (41) s'écrit :

$$\tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\ \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}{}^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j}] = \tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\ \omega^{\bar{F}}_{j-1}$$

ou encore : $(b^{1}_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j}] = \tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\ \omega^{\bar{F}}_{j-1} + \mathcal{B}^{1}_{\bar{F}}{}^{1}_{\psi}\ \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}{}^{1}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j}]$ et de (34), on a encore :

$$(b^{1}_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^{2}_{\psi}\ u^{\bar{D}}_{j} = \tilde{B}{}^{1}_{\bar{F}}\omega^{\bar{F}}_{j-1} + \mathcal{B}^{1}_{\bar{F}}{}^{1}_{\psi}(\omega^{\bar{F}}_{j-2} - \mathcal{G}^{\bar{F}}_{\bar{D}}{}^{2}_{\psi}[u^{\bar{D}}_{j-1}])$$

i.e.
$$(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D})^2_{\psi}[u^{\bar D}_j] = \tilde{B}^1_{\bar F}\,\omega^{\bar F}_{j-1} + \mathcal{B}^{1}_{\bar F}{}^{1}_{\psi}\,\Omega^{\bar F}_{j-1} .$$

D'où finalement :

$$(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D})^2_{\psi}[u^{\bar D}_j] = \Delta_{j-1} \tag{42}$$

C.Q.F.D.

On cherche alors u_j solution du problème :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{2}_{\bar D}{}^{1}_{\psi}[u^{\bar D}_j] = \Omega^2_{j-1} & (37) \\ \\ (b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D})^2_{\psi}[u^{\bar D}_j] = \Delta_{j-1} & (42) \end{cases}$$

vérifions que cette intégration est bien le long des bicaractéristiques par rapport à H', des hypersurfaces caractéristiques d'équations $\psi(x) = C^{te}$.

De $\mathcal{D}$1. on a : $q = \lambda_o h' + \lambda_1$. Donc (37) s'écrit :

$$\tilde{\Lambda}o^{2}_{\bar D}(h')^1_{\psi}[u^{\bar D}_j] + \tilde{\Lambda}^{\,2}_{1\bar D} \times u^{\bar D}_j = \Omega^2_{j-1}$$

or

$$(h')^1_{\psi} = \widetilde{\partial^{\alpha} H'}\partial_{\alpha} + \tilde{\beta} = p^{\alpha}\,\partial_{\alpha} + \tilde{\beta}$$

cette équation s'écrit alors :

$$\tilde{\Lambda}^{\,2}_{o_2}\, p^{\alpha}\partial_{\alpha} u^2_j + \tilde{\Lambda}^{\,2}_{o_1}\, p^{\alpha}\partial_{\alpha} u^1_j + (\tilde{\Lambda}^{\,2}_{o\bar D}\tilde{\beta} + \tilde{\Lambda}^{\,2}_{1\bar D}) \times u^{\bar D}_j = \Omega^2_{j-1} \tag{43}$$

Et (44) s'écrit :

$$(b^1_{\bar F}\lambda_0{}^{\bar F}_{\bar D}h')^2_{\psi}[u^{\bar D}_j] + (b^1_{\bar F}\lambda_1{}^{\bar F}_{\bar D})^1_{\psi}[u^{\bar D}_j] = \Delta_{j-1}$$

mais : $B^1_{\bar F}\Lambda_0{}^{\bar F}_{\bar D} = A^1_1{}^2_2 H''H'\delta^1_{\bar D}$ d'où

$$(b^1_{\bar F}\lambda_0{}^{\bar F}_{\bar D})^1_{\psi}(h')^1_{\psi}[u^{\bar D}_j] + (b^1_{\bar F}\lambda_1{}^{\bar F}_{\bar D})^1_{\psi}[u^{\bar D}_j] = \Delta_{j-1}$$

et il existe un opérateur différentiel $\beta = (\beta^{\bar F}_{\bar D})$, $1 \leqslant \bar F, \bar D \leqslant 2$ d'ordre $\leqslant \mathrm{ord}(b^1_{\bar F}\lambda^{\bar F}_{\bar D}) - 1$ tel que :

$$b^1_{\bar F}\lambda_0{}^{\bar F}_{\bar D} = a^1_1{}^2_2 h''h'\delta^1_{\bar D} + \beta^1_{\bar D}$$

d'où $(b^1_{\bar F}\lambda_0{}^{\bar F}_{\bar D})^1_{\psi} = \tilde A^1_1{}^2_2 \tilde H''(h')^1_{\psi}\delta^1_{\bar D} + (\beta^1_{\bar D})^o_{\psi}$ par conséquent (44) s'écrit :

$$\tilde A^1_1{}^2_2 \tilde H''(h')^1_{\psi}(h')^1_{\psi}[u^1_j] + (\beta^1_{\bar D})^o_{\psi}(h')^1_{\psi}[u^{\bar D}_j] + (b^1_{\bar F}\lambda_1{}^{\bar F}_{\bar D})^1_{\psi}[u^{\bar D}_j] = \Delta_{j-1}$$

vérifions que $B^1_{\bar F}\Lambda_1{}^{\bar F}_{\bar D} \equiv 0 \quad [H']$.

Nous avons vu que $\mathscr{D}$ 2. implique que la partie d'ordre $T-2$ de l'opérateur $b^1_{\bar F} \circ q^{\bar F}_2 \circ q^2_{\bar D} \circ b^{\bar D}_1$ (où T = ordre de ℓ) qui sera notée :

$$\sigma_{T-2}(b^1_{\bar F} \circ q^{\bar F}_2 \circ q^2_{\bar D} \circ b^{\bar D}_1) \text{ est } \equiv 0 \qquad [H']$$

Comme $\sigma_{T-2}(b^1_{\bar F}q^{\bar F}_2 q^2_{\bar D}b^{\bar D}_1) \equiv (B^1_{\bar F}\Lambda_1{}^{\bar F}_2)\times(\Lambda_1{}^2_{\bar D}B^{\bar D}_1 + \Lambda_0{}^2_{\bar D}\,\mathrm{sp}[h',b^{\bar D}_1]) \qquad [H']$

(où $\mathrm{s.p}[h',b^{\bar D}_1]$ est le symbole principal du crochet [7]).

Donc :

$$(B^{1}_{\bar F}\ \Lambda^{\bar F}_{1\,2})\times(\Lambda^{\ 2}_{1\ \bar D}\ B^{\bar D}_{1} + \Lambda^{\ 2}_{0\ \bar D}\ \text{s.p}[h', b^{\bar D}_{1}]) \equiv 0 \qquad [H'] \qquad (44)$$

puisque nous sommes dans le 1^{er} cas, donc $\tilde{g}{}^{2}_{1} \neq 0$. Or de la proposition II.3. 1) $\tilde{g}{}^{2}_{1} = \wp^{2\ 1}_{\bar D\ \psi}\ \tilde{B}{}^{\bar D}_{1}$ c'est-à-dire :

$$\tilde{g}{}^{2}_{1} = \widetilde{(\Lambda^{\ 2}_{1\ \bar D}\ B^{\bar D}_{1} + \Lambda^{\ 2}_{0\ \bar D}\ \text{s.p}[h', b^{\bar D}_{1}])} \neq 0$$

donc $(\Lambda^{\ 2}_{1\ \bar D}\ B^{\bar D}_{1} + \Lambda^{\ 2}_{0\ \bar D}\ \text{s.p}[h', b^{\bar D}_{1}])$ n'est pas divisible par H' ; On en déduit alors de (44) (et H' irréductible) que $B^{1}_{\bar F}\ \Lambda^{\bar F}_{0\,2} \equiv 0\ [H']$. Par conséquent, il existe alors : $k^{\ 1}_{0\ \bar D}$, $k^{\ 1}_{1\ \bar D}$: opérateurs différentiels tels que :

$$b^{1}_{\bar F}\lambda^{\bar F}_{0\ \bar D} = k^{\ 1}_{0\ \bar D}\ h' + k^{\ 1}_{1\ \bar D} \quad \text{et} \quad \text{ord}\, k^{\ 1}_{0\ \bar D} \leqslant \text{ord}(b^{1}_{\bar F}\lambda^{\bar F}_{0\ \bar D}) - 1$$

l'équation (44) s'écrit alors :

$$\tilde{A}{}^{1}_{1}\ {}^{2}\tilde{H}{}''_{2}(h')^{1}_{\psi}(h')^{1}_{\psi}[u^{1}_{j}] + (\beta^{1}_{\bar D} + \tilde{K}{}^{\ 1}_{0\ \bar D})(h')^{1}_{\psi}[u^{\bar D}_{j}] + \tilde{K}{}^{\ 1}_{1\ \bar D}\ [\tilde{u}{}^{\bar D}_{j}] = \Delta_{j-1}$$

cette équation s'écrit encore :

$$\tilde{A}{}^{1}_{1}\ {}^{2}\tilde{H}{}''_{2}\, p^{\alpha}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}u^{1}_{j}) + \mathscr{P}_{\bar D}\, p^{\alpha}\partial_{\alpha}u^{\bar D}_{j} + \mathscr{P}'_{\bar D} \times u^{\bar D}_{j} = \Delta_{j-1} \qquad (45)$$

D'autre part S est caractéristique totale simple pour H'

On a les équations d'HAMILTON :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, x^{\alpha}(t) = \partial^{\alpha}H'(x(t),\xi(t)) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\, \xi_{\alpha}(t) = -\partial_{\alpha}H'(x(t),\xi(t)) \end{cases}$$

pour $\xi(t) = \text{grad}\ \psi(x(t))$ on a

$$\frac{d}{dt}\, x^{\alpha}(t) = \partial^{\alpha} H'(x(t), \text{grad}\ \psi(x(t)) = p^{\alpha}(x(t)).$$

Posons :

$$U_j^1(t) = u_j^1(x(t)) \ , \quad U_j^2(t) = u_j^2(x(t)) \ , \quad U_j^3(t) = \frac{d}{dt}\, u_j^1(x(t))$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\, U_j^{\bar{D}}(t) = \partial_{\alpha} u_j^{\bar{D}}(x(t))\, \frac{dx^{\alpha}}{dt}(t) = p^{\alpha}(x(t))\partial_{\alpha} u_j^{\bar{D}}(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\, U_j^3(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}\, u_j^1(x(t))\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\partial_{\alpha} u_j^1(x(t))\, \frac{dx^{\alpha}(t)}{dt}\Big) = \frac{d}{dt}\big(p^{\alpha}(x(t))\partial_{\alpha} u_j^1(x(t))\big)$$

Donc

$$\frac{dU_j^3}{dt}\,(t) = \partial_{\beta}\big(p^{\alpha}(x(t))\partial_{\alpha} u_j^1(x(t))\big)\, \frac{dx^{\beta}(t)}{dt} =$$

$$= p^{\beta}(x(t))\partial_{\beta}\big(p^{\alpha}(x(t))\partial_{\alpha} u_j^1(x(t))\big).$$

Alors, le système (46) - (48) devient :

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\Lambda}_{0\ 2}^{\ 2}(x(t))\, \dfrac{d}{dt}\, U_j^2(t) + \tilde{\Lambda}_{0\ 1}^{\ 2}(x(t))\, \dfrac{d}{dt}\, U_j^1(t) + \\ \qquad\qquad + (\tilde{\Lambda}_{0\ \bar{D}}^{\ 2}\, \tilde{\beta} + \tilde{\Lambda}_{1\ \bar{D}}^{\ 2})(x(t))\ U_j^{\bar{D}}(t) = \Omega_{j-1}^2 \\ (\tilde{A}_1^1\ {}_2^2\ \tilde{H}'')(x(t))\, \dfrac{d}{dt}\, U_j^3(t) + \mathcal{P}_{\bar{D}}(x(t))\, \dfrac{d}{dt}\, U_j^{\bar{D}}(t) + \mathcal{P}'_{\bar{D}} \times U_j^{\bar{D}}(t) = \Delta_{j-1} \\ \dfrac{d}{dt}\, U_j^1(t) = U_j^3(t). \end{array}\right.$$

et puisque $\tilde{\Lambda}_{0\ 2}^{\ 2} \neq 0$ et $\tilde{A}_1^1\ {}_2^2\ \tilde{H}'' \neq 0$ ce système d'ordre 1 d'équations différentielle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U_j^1(t) = U_j^3(t) \\ \frac{d}{dt} U_j^2(t) = \rho_1 \frac{d}{dt} U_j^1(t) + \rho_{2\bar{D}} U_j^{\bar{D}}(t) - \Omega_{j-1}^2 \\ \frac{d}{dt} U_j^3(t) = \rho'_{1\bar{D}} \frac{1}{\bar{D}} \frac{d}{dt} U_j^{\bar{D}}(t) + \rho'_{2\bar{D}} U_j^{\bar{D}}(t) - \Delta_{j-1} \end{cases}$$

$(p^\alpha(a))_{\alpha\in\overline{1,n}}$ étant non nul, on supposera que : $p^o(a) \neq 0$ $u_j^{\bar{D}}$ sera complètement déterminée avec les conditions suivantes :

$$u_j^1(0,x') = 0, \quad u_j^2(0,x') = 0, \quad \partial u_j^1(0,x') = \delta_o^j$$

(où δ_o^j est le symbole de Kronecker).

<u>*2ème cas*</u>. Si $\tilde{g}_1^2 = 0$ sur Ω donc $\tilde{f}_2^1(a) \neq 0 \Rightarrow \tilde{f}_2^1(x) \neq 0$ sur Ω. On a donc de (36) :

$$u_j^2 = - \frac{\tilde{f}_1^1}{\tilde{f}_2^1} u_j^1 + \frac{1}{\tilde{f}_2^1} \tilde{B}_{\bar{F}}^1 \Omega_{j-1}^{\bar{F}}$$

or $-\frac{\tilde{f}_1^1}{\tilde{f}_2^1} = + \frac{\tilde{B}_1^2}{\tilde{B}_1^1}$ (de la proposition II.3) et en posant $z_j = u_j^1 / \tilde{B}_1^1$ on aura :

$$u_j^{\bar{D}} = \tilde{B}_1^{\bar{D}} z_j + \frac{\delta_2^{\bar{D}}}{\tilde{f}_2^1} \tilde{B}_{\bar{F}}^1 \Omega_{j-1}^{\bar{F}} \qquad (46)$$

Cette relation nous donnera $u_j^{\bar{D}}$ dès que z_j sera connue. Posons alors :

$$\psi_j = \frac{1}{\tilde{f}_2^1} \Delta_j - \frac{1}{\tilde{f}_2^1} (b_{\bar{F}}^1 q_2^{\bar{F}})^2 \left(\frac{1}{\tilde{f}_2^1} \tilde{B}_{\bar{F}}^1 \Omega_j^{\bar{F}}\right)$$

$$\Lambda_j = \mathcal{G}^{2\ 1}_{2\ \psi}[\psi_j] + \mathcal{G}^{2\ 2}_{2\ \psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar{F}}\ \Omega^{\bar{F}}_j\right) - \omega^2_j$$

et montrons par récurrence l'hypothèse suivante :

(P_k) : $$u^{\bar{D}}_k = \tilde{B}^{\bar{D}}_1\ z_k + \frac{\delta^{\bar{D}}_2}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar{F}}\ \Omega^{\bar{F}}_{k-1}$$ et z_k est solution du problème :

$$\mathcal{G}^{2\ 1}_{2\ \psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}}b^{\bar{D}}_1)^2_{\psi}[z_k]\right) - (q^2_{\bar{D}}b^{\bar{D}}_1)^2_{\psi}[z_k] = \Lambda_{k-1}$$

Supposons (P_h) vraie pour $k < j$, et montrons la pour j. Reportons $u^{\bar{D}}_j$ ainsi trouvée dans l'équation (35) nous aurons :

$$\mathcal{G}^{2\ 1}_{\bar{D}\ \psi}\tilde{B}^{\bar{D}}_1(z_j) + \mathcal{G}^{2\ 1}_{2\ \psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar{F}}\Omega^{\bar{F}}_{j-1}\right) = \Omega^2_{j-1}$$

$$\mathcal{G}^{2\ 1}_{\bar{D}\ \psi}\tilde{B}^{\bar{D}}_1 = \tilde{g}^2_1 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{G}^{2\ 1}_{2\ \psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar{F}}\ \Omega^{\bar{F}}_{j-1}\right) = \Omega^2_{j-1}$$

cette équation est automatiquement vérifiée par hypothèse de récurrence ; Considérons alors le système suivant i.e. (40) (41), de l'équation (41) et du fait que $\tilde{f}^1_2 \neq 0$ on a :

$$u^2_{j+1} = -\frac{\tilde{f}^1_1}{\tilde{f}^1_2}u^1_{j+1} - \frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^2_{\psi}[u^{\bar{D}}_j] + \frac{1}{\tilde{f}^1_2}\ \Delta_{j-1}$$

posons $z_{j+1} = u^1_{j+1}/\tilde{B}^1_1$ nous aurons du fait que $-\dfrac{\tilde{f}^1_1}{\tilde{f}^1_2} = +\dfrac{\tilde{B}^2_1}{\tilde{B}^1_1}$,

$$u^2_{j+1} = \tilde{B}^2_1\ z_{j+1} - \frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar{F}}q^{\bar{F}}_{\bar{D}})^2_{\psi}[u^{\bar{D}}_j] + \frac{1}{\tilde{f}^1_2}\ \Delta_{j-1}\ .$$

- Et en tenant compte de (46) :

$$u^2_{j+1} = \tilde{B}^2_1 z_{j+1} - \frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D})^2_{\psi}[\tilde{B}^{\bar D}_1 z_j] - \frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F})^2_{2\psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar F}\Omega^{\bar F}_{j-1}\right) + \frac{1}{\tilde{f}^1_2}\Delta_{j-1}$$

comme : $- \frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F})^2_{2\psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar F}\Omega^{\bar F}_{j-1}\right) + \frac{1}{\tilde{f}^1_2}\Delta_{j-1} = \psi_{j-1}$ (des notations).

Alors :

$$u^2_{j+1} = \tilde{B}^2_1 z_{j+1} - \frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D} b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] + \frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D})^1_{\psi}\,\mathcal{B}^{\bar D\,1}_{1\,\psi}[z_j] + \psi_{j-1}$$

or $(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D})^1_{\psi} = \tilde{B}^1_{\bar F} q^{\bar F\,1}_{\bar D\,\psi} = \tilde{f}^1_{\bar D}$ (proposition II.3) par conséquent :

$$u^{\bar e}_{j+1} = \tilde{B}^{\bar e}_1 z_{j+1} - \frac{\delta^{\bar e}_2}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D} b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] + \delta^{\bar e}_2\,\frac{\tilde{f}^1_{\bar D}}{\tilde{f}^1_2}\,\mathcal{B}^{\bar D\,1}_{1\,\psi}[z_j] + \delta^{\bar e}_2\,\psi_{j-1}$$

Reportons maintenant les expressions de $u^{\bar e}_{j+1}$ ainsi trouvée et $u^{\bar e}_j$ (d'après (46)), dans l'équation (40). D'où :

$$\mathcal{G}^{2\,1}_{\bar e\,\psi}\tilde{B}^{\bar e}_1[z_{j+1}] - \mathcal{G}^{2\,1}_{2\,\psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D} b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j]\right) + \mathcal{G}^{2\,1}_{2\,\psi}\left(\frac{\tilde{f}^1_{\bar D}}{\tilde{f}^1_2}\,\mathcal{B}^{\bar D\,1}_{1\,\psi}[z_j]\right) +$$

$$+ \mathcal{G}^{2\,1}_{2\,\psi}(\psi_{j-1}) + \mathcal{G}^{2\,2}_{\bar D\,\psi}(\tilde{B}^{\bar D}_1 z_j) + \mathcal{G}^{2\,2}_{2\,\psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar F}\Omega^{\bar F}_{j-1}\right) = \omega^2_{j-1}$$

Remarquons que $\mathcal{G}^{2\,1}_{\bar e\,\psi}\tilde{B}^{\bar e}_1 = \tilde{g}^2_1$ (proposition II.3) et que $\tilde{g}^2_1 = 0$ (dans ce cas) donc l'équation précédente s'écrit :

$$- \mathcal{G}^{2\,1}_{2\,\psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar F} q^{\bar F}_{\bar D} b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j]\right) + \mathcal{G}^{2\,1}_{2\,\psi}\left(\frac{\tilde{f}^1_{\bar D}}{\tilde{f}^1_2}\,\mathcal{B}^{\bar D\,1}_{1\,\psi}[z_j]\right) + \mathcal{G}^{2\,2}_{\bar D\,\psi}(B^{\bar D}_1 z_j) =$$

$$= - \mathcal{G}^{2\,1}_{2\,\psi}(\psi_{j-1}) - \mathcal{G}^{2\,2}_{2\,\psi}\left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\tilde{B}^1_{\bar F}\Omega^{\bar F}_{j-1}\right) + \omega^2_{j-1} \qquad (*)$$

Remarquons enfin que :

$$\mathcal{P}^{2\,1}_{2\,\psi}\Big(\frac{\tilde f^1_{\bar D}}{\tilde f^1_2}\,\mathcal{B}^{\bar D\,1}_{1\,\psi}[z_j]\Big) + \mathcal{P}^{2\,2}_{\bar D\,\psi}(\tilde B^{\bar D}_1\, z_j) = (q^2_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j]$$

en effet : puisque $\dfrac{\tilde f^1_1}{\tilde f^1_2} = -\dfrac{\tilde B^2_1}{\tilde B^1_1}$ (proposition II.3.b). Alors :

$$\mathcal{P}^{2\,1}_{2\,\psi}\Big(\frac{\tilde f^1_{\bar D}}{\tilde f^1_2}\,\mathcal{B}^{\bar D\,1}_{1\,\psi}[z_j]\Big) + \mathcal{P}^{2\,2}_{\bar D\,\psi}(\tilde B^{\bar D}_1\, z_j) = \mathcal{P}^{2\,1}_{2\,\psi}\,\mathcal{B}^{2\,1}_{1\,\psi}[z_j] +$$

$$\mathcal{P}^{2\,1}_{2\,\psi}\Big[-\frac{\tilde B^2_1}{\tilde B^1_1}\,\mathcal{B}^{1\,1}_{1\,\psi}[z_j]\Big] + (q^2_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] - \mathcal{P}^{2\,1}_{\bar D\,\psi}\,\mathcal{B}^{\bar D\,1}_{1\,\psi}[z_j] =$$

$$= (q^2_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] + \mathcal{P}^{2\,1}_{2\,\psi}\Big[-\frac{\tilde B^2_1}{\tilde B^1_1}\,\mathcal{B}^{1\,1}_{1\,\psi}[z_j]\Big] - \mathcal{P}^{2\,1}_{1\,\psi}\Big[\frac{\tilde B^1_1}{\tilde B^1_1}\,\mathcal{B}^{1\,1}_{1\,\psi}[z_j]\Big]$$

$$= (q^2_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] + \mathcal{P}^{2\,1}_{\bar D\,\psi}\,\frac{\tilde B^{\bar D}_1}{\tilde B^1_1}\,\mathcal{B}^{1\,1}_{1\,\psi}[z_j] =$$

$$= (q^2_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] \qquad \text{car} \quad \mathcal{P}^{2\,1}_{\bar D\,\psi}\,\tilde B^{\bar D}_1 = \tilde g^2_1 = 0.$$

Donc l'équation (*) devient :

$$\boxed{\mathcal{P}^{2\,1}_{2\,\psi}\Big(\frac{1}{\tilde f^1_2}(b^1_{\bar F}\, q^{\bar F}_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j]\Big) - (q^2_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] = \Lambda_{j-1}} \tag{47}$$

C.Q.F.D.

On cherche alors z_j solution du problème suivant :

$$\mathcal{P}^{2\,1}_{2\,\psi}\left(\frac{1}{\tilde f^1_2}(b^1_{\bar F}\, q^{\bar F}_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j]\right) - (q^2_{\bar D}\, b^{\bar D}_1)^2_{\psi}[z_j] = \Lambda_{j-1}$$

Vérifions que cette intégration est bien le long des bicaractéristiques par rapport à H', des hypersurfaces caractéristiques d'équations (x) = C^{ste}.
En effet : remarquons d'abord que :

$$(q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^{2}_{\psi}[z_j] = (\lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}\,h'b^{\bar D}_{1} + \lambda_{1}{}^{2}_{\bar D}\,b^{\bar D}_{1})^{2}_{\psi}[z_j]$$

$$= (\lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}\,b^{\bar D}_{1}h' + \lambda_{1}{}^{2}_{\bar D}\,b^{\bar D}_{1} + \lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}\circ[h',b^{\bar D}_{1}])^{2}_{\psi}[z_j]$$

où $[h',b^{\bar D}_{1}] = h'\circ b^{\bar D}_{1} - b^{\bar D}_{1}\circ h'$

i.e $(q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^{2}_{\psi}[z_j] = (\lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1}h')^{2}_{\psi}[z_j] + (\lambda_{1}{}^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} + \lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}[h',b^{\bar D}_{1}])^{1}_{\psi}[z_j]$

$$= (\lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^{1}_{\psi}(h')^{1}_{\psi}[z_j] + (\lambda_{1}{}^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1} + \lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}[h',b^{\bar D}_{1}])^{1}_{\psi}[z_j]$$

$(\lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^{1}_{\psi}$ étant une fonction car $\Lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}B^{\bar D}_{1} = 0$ (de (29)). Et dans ce 2ème cas
$\tilde f^{1}_{2} = \tilde B^{1}_{\bar F}\,\varphi^{\bar F\,1}_{2\,\psi} = \tilde B^{1}_{\bar F}\,\tilde\Lambda^{\bar F}_{12} \neq 0$ donc $B^{1}_{\bar F}\Lambda^{\bar F}_{12}$ n'est pas divisible par H',
donc de (44)

$$(\Lambda_{1}{}^{2}_{\bar D}B^{\bar D}_{1} + \Lambda_{0}{}^{2}_{\bar D}\,\mathrm{sp}.[h',b^{\bar D}_{1}]) \equiv 0 \qquad [H']$$

Donc $(q^{2}_{\bar D}b^{\bar D}_{1})^{2}_{\psi}[z_j] = \tilde\Gamma_{1}(h')^{1}_{\psi}[z_j] + \tilde\Gamma_{2}[z_j]$. (48)

Remarquons aussi que l'opérateur $b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1}$ est bien décomposable par rapport à H' avec multiplicité 2 (d'après 31-32) et q de multiplicité 1, d'où

$$\mathcal{Q}^{2}_{2}\,{}^{1}_{\psi}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}^{1}_{f_2}}\left(b^{1}_{\bar F}q^{\bar F}_{\bar D}b^{\bar D}_{1}\right)^{2}_{\psi}[z_j]\right) = \left(\lambda^{2}_{0\,2}h'+\lambda^{2}_{1\,2}\right)^{1}_{\psi}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}^{1}_{f_2}}\left(\gamma_{0}(h')^{2}_{\psi}+\gamma_{1}h'+\gamma_{2}\right)^{2}_{\psi}[z_j]\right)$$

$$= \left(\tilde{\Lambda}^{2}_{0\,2}(h')^{1}_{\psi}+\tilde{\Lambda}^{2}_{1\,2}\right)\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}^{1}_{f_2}}\left(\tilde{\Gamma}_{0}(h')^{1}_{\psi}(h')^{1}_{\psi}+\tilde{\Gamma}_{1}(h')^{1}_{\psi}+\tilde{\Gamma}_{2}\right)[z_j]\right) \tag{49}$$

En remplaçant $(h')^{1}_{\psi}$ par $p^{\alpha}\partial_{\alpha}+\tilde{\beta}$ dans (48) et (49), l'équation (47) s'écrit :

$$\frac{\tilde{\Lambda}^{2}_{0\,2}\tilde{\Gamma}_{0}}{\tilde{\gamma}^{1}_{f_2}}\,p^{\alpha}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}(p^{\gamma}\partial_{\gamma}z_j)) + \tilde{\mathcal{P}}\,p^{\alpha}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}z_j) + \tilde{\mathcal{P}}'\,p^{\alpha}\partial_{\alpha}(z_j) + \tilde{\mathcal{P}}''z_j = \Lambda_{j-1}$$

$\tilde{\Lambda}^{2}_{0\,2} \neq 0$ et $\tilde{\Gamma}_{0} = \tilde{B}^{1}_{1}(\tilde{A}^{1}_{1}{}^{2}_{2})^{3}\tilde{H}'' \neq 0$ (par hypothèse).

Il suffit alors de poser :

$$Z_j(t) = z_j(x(t))$$

on obtient alors :

$$\frac{\tilde{\Lambda}^{2}_{0\,2}\tilde{\Gamma}_{0}}{\tilde{\gamma}^{1}_{f_2}}\frac{d^3}{dt^3}Z_j(t) + \tilde{\mathcal{P}}\frac{d^2}{dt^2}Z_j(t) + \tilde{\mathcal{P}}'\frac{d}{dt}Z_j(t) + \tilde{\mathcal{P}}''Z_j(t) = \Lambda_{j-1}$$

Donc z_j sera entièrement déterminée avec les conditions suivantes :

$$\partial^{2}_{o}z_j(0,x') = 0, \qquad \partial_{o}z_j(0,x') = 0, \qquad z_i(0,x') = \delta^{j}_{o}\,.$$

CHAPITRE III

MAJORATION DES COEFFICIENTS DE DISTORSION ET CONVERGENCE DE LA SOLUTION FORMELLE

1. Majorante de la solution d'un système.

On considère un système d'équations aux dérivées partielles (en utilisant comme d'habitude la convention d'Einstein);

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{
\begin{array}{lll}
(\mathrm{I.1}) \quad \partial_o^{d_i} u^i = c^i_j(u^j) + v^i & 1 \leqslant i \leqslant N & (d_i \in \mathbb{N}^*) \\
\qquad \text{avec les données de Cauchy sur } x^o = 0 & & \\
(\mathrm{I.2}) \quad \partial_o^{\ell_i} u^i(0,x') = z^{i,\ell_i}(x') & 1 \leqslant i \leqslant N & 0 \leqslant \ell_i \leqslant d_i - 1
\end{array}
\right.
$$

les c^i_j étant des opérateurs différentiels analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, de même v^i analytique au voisinage de 0 des $\mathbb{R}^{n+1}$ et les z^{i,ℓ_i} analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

On suppose $d_1 \geqslant d_2 \ldots \geqslant d_N$, c^i_j d'ordre inférieur ou égal à $\min(d_i,d_j)$, et si $d_i = d_j$, C^i_j est d'ordre en ∂_o strictement inférieur à $\min(d_i,d_j) = d_i = d_j$.

On montre facilement que pour un tel système, les conditions d'application du th. 1.2.1 de [22] sont satisfaites (avec $a^i_j = c^i_j$ si $i \neq j$, $a^i_i = c^i_i - \partial_o^{d_i}$, $t_i = d_i$, $s_i = 0$ et $g(x,\xi) = \prod_{j=1}^{n} (c^i_j(x,\xi) - \xi_o^{d_j})$ si on note C^i_j le symbole principale de l'opérateur c^i_j), donc qu'un tel système possède une solution et une seule, analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$, quels que soient les seconds membres et les données de Cauchy. Cependant la suite de notre travail nécessite l'étude d'une suite de problème de Cauchy, les solutions des premiers intervenant dans le second membre des suivants (C'est évidemment toujours le cas quand on veut majorer les coefficients de distorsion d'une onde asymptotique). Il est donc fondamental d'obtenir un théorème permettant une majoration de la solution en fonction de majorantes des données un tel théorème est bien connu ([4]) dans le cas d'une seule équation ; on en donne ici une généralisation dans le cas du système (I). On remarquera que la démonstration donne aussi des résultats pour un problème avec des séries formelles, et que le théorème de [4] est un cas particulier de celui qu'on va démontrer.

Proposition III.1. Le problème (I) possède une solution série formelle et une seule, quels que soient les seconds membres v^i $(1 \leq i \leq N)$ et z^{i,ℓ_i} $(1 \leq i \leq N,\ 0 \leq \ell_i \leq d_i - 1)$.

De plus si $\mathcal{C}^i_j \gg c^i_j \quad \forall (i,j) \in \{1,..,N\} \vee \{1,..,N\}$

$$V^i \gg v^i \quad \forall i \in \{1,..,N\}$$

$$Z^{i,\ell_i} \gg z^{i,\ell_i} \quad \forall i \in \{1,..,N\},\ \forall \ell_i \in \{0,..,d_i - 1\}$$

et si $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}^i\}_{1 \leq i \leq N}$ est tel que

$$\partial_o^{d_i} \mathcal{U}^i \gg \mathcal{C}^i_j(\mathcal{U}^j) + V^i \qquad \forall i \in \{1,..,N\}$$

$$\partial_o^{\ell_i} \mathcal{U}^i(0,x') \gg Z^{i,\ell_i}(x') \qquad \forall i \in \{1,..,N\},\ \forall \ell_i \in \{0,..,d_i - 1\}$$

Alors on a

$$\forall i \in \{1,..,N\} \qquad \mathcal{U}^i \gg u^i .$$

<u>Preuve</u> : On note $\nu_1,..,\nu_{r-1},\nu_r$ les entiers tels que $\nu_r = N$ et $d_1 = d_2 = .. = d_{\nu_1} > d_{\nu_1+1} = .. = d_{\nu_2} > d_{\nu_2+1} \dots > d_{\nu_{r-1}+1} = .. = d_N$

et on fait une démonstration par récurrence sur r.

1) <u>Cas r=1</u>. C'est le lemme I.1 p.33 de [3], on a $d_1 = .. = d_N = d$ on montre, par récurrence sur k que $\forall i \in \{1,..,N\}$. $\partial_o^k u^i(0,x')$ se calcule à partir des données de Cauchy z^{i,ℓ_1} et des seconds membres v^i, et vérifie

$$\partial_o^k u^i(0,x') << \partial_o^k \mathcal{U}^1(0,x')$$

Si $k \leqslant d-1$ le résultat est trivial car

$$\partial_o^k u^i(0,x') = z^{i,k}(x') << Z^{i,k}(x') << \partial_o^k \mathcal{U}^i(0,x').$$

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre k, on le démontre à l'ordre $k+1$ (on suppose $k \geqslant d-1$).

On pose pour $\ell \geqslant d$

$$z^{i,\ell}(x') = (\partial_o^{\ell-d} c_j^i)(u^j(0,x') + \partial_o^{\ell-d} v^i(0,x')$$

$$Z^{i,\ell}(x') = (\partial_o^{\ell-d} \mathcal{C}_j^i)(\mathcal{U}^j)(0,x') + \partial_o^{\ell-d} v^i(0,x')$$

$\partial_o^{\ell-d} c_j^i$ est d'ordre $\leqslant k-d+d-1 = d-1$ en ∂_o, donc $z^{1,\ell}$ est connu si les $\partial_o^r u^j(0,x')$ sont connus pour $r \in \{0,.,\ell-1\}$ on a

$$\partial_o^{\ell-d} c_j^i << \partial_o^{\ell-d} \mathcal{C}_j^i$$

et d'après l'hypothèse de récurrence

$$\partial_o^r u^j(0,x') << \partial_o^r \mathcal{U}^j(0,x')$$

pour $r \in \{0,.,\ell-1\}$ on en déduit facilement que

$$z^{i,\ell}(x') << Z^{i,\ell}(x')$$

et ceci pour tout $\ell \in \{0,.,k\}$ et tout $i \in \{1,.,N\}$ on montre maintenant que

$$\partial_o^{k+1} u^i(0,x') \ll \partial_o^{k+1} \mathcal{U}^i(0,x') \quad \text{pour} \quad i \in \{1,.,N\}$$

On dérive $(k+1-d)$ par rapport à x^o les équations (I.1). On trouve

$$\partial_o^{k+1} u^i = (\partial_o^{k+1-d} c_j^i)(u^j) + \partial_o^{k+1-d} v^i$$

les opérateurs $\partial_o^{k+1-d} c_j^i$ sont d'ordre $\leqslant k+1-d+d-1 = k$ en ∂_o, $\partial_o^{k+1-d} c_j^i \ll \partial_o^{k+1-d} \mathcal{C}_j^i$ et pour tout $\ell \in \{0,\ldots,k\}$ et tout $j \in \{1,.,N\}$, on a $\partial_o^k u^j(0,x') \ll \partial_o^k \mathcal{U}^j(0,x')$. On aura donc $(\partial_o^{k+1-d} c_j^i)(u^j)(0,x') \ll$ $\ll (\partial_o^{k+1-d} \mathcal{C}_j^i)(\mathcal{U}^j)(0,x')$ d'autre part $\partial_o^{k+1-d} v^i(0,x') \ll \partial_o^{k+1-d} V^i(0,x')$.

Par conséquent :

$$\partial_o^{k+1} u^i(0,x') \ll (\partial_o^{k+1-d} \mathcal{C}_j^i)(\mathcal{U}^j)(0,x') + \partial_o^{k+1-d} V^i(0,x') \ll$$

$$\ll \partial_o^{k+1} \mathcal{U}^i(0,x')$$

c'est-à-dire le résultat souhaité.

2) Supposons le résultat vrai pour $1,.,r$; on le démontre pour $r+1$. On a donc une suite $d_1,\ldots,d_N$ telle que

$$d_1 = d_2 .. = d_{\nu_1} > d_{\nu_{r+1}} = .. = d_{\nu_2} > \ldots > d_{\nu_{r+1}} = .. = d_N$$

(et $N = \nu_{r+1}$).

On montre par récurrence que pour tout $k \in \{0,\ldots,d_{\nu_r}-1\}$ et tout $i \in \{\nu_r+1,.,N\}$, on a

$$\partial_o^k u^i(0,x') \ll \partial_o^k \mathcal{U}^i(0,x')$$

si $k \in \{0,..,d_N-1\}$ c'est une conséquence directe des données de Cauchy

$$(d_N = d_i \quad \text{si} \quad i \in \{\nu_r+1,...,N\})$$

car $\partial_o^k u^i(0,x') = z^{i,k}(x') << Z^{i,k}(x') << \partial_o^k \mathcal{U}^i(0,x')$. Supposons vrai le résultat pour $0,..,k-1$ et démontrons le pour k. Si $k = d_{\nu_r}$ c'est terminé, on suppose donc $k < d_{\nu_r}$, si $k \leqslant d_N-1$, c'est terminé également. On suppose donc $k \in \{d_N,..,d_{\nu_r}-1\}$.

On dérive $k-d_N$ fois les $N-\nu_r$ dernières équations et on fait $x^o = 0$

$$\partial_o^k u^i(0,x') = \partial_o^{k-d_N} c_j^i(u^j)(0,x') + \partial_o^{k-d_N} v^i(0,x')$$

tous les $\partial_o^p u^j(0,x')$ qui apparaissent dans le 2nd membre sont connus (si $j \in \{\nu_r+1,..,N\}$ on a $d_j = d_i$ donc c_j^i est d'ordre $\leqslant d_i-1$ en ∂_o, et si $j \in \{1,..,\nu_r\}$ on a $d_j > d_i$ donc c_j^i est d'ordre $\leqslant d_i \leqslant d_j-1$) puisque $c_j^i << \mathcal{C}_j^i$ et $v^i << V^i$, on a facilement :

$$\partial_o^k u^i(0,x') << (\partial_o^{k-d_N} \mathcal{C}_j^i)(\mathcal{U}^j)(0,x') + \partial_o^{k-d_N} V^i(0,x') << \partial_o^k \mathcal{U}^i(0,x')$$

On pose

$$z'^{i,k}(x') = \partial_o^k u^i(0,x') \quad \text{si} \quad i \in \{\nu_r+1,..,N\} \quad \text{et} \quad k \in \{d_N,..,d_{\nu_r}-1\}$$

$$z'^{i,k} = z^{i,k} \qquad \text{si} \quad i \in \{1,..,\nu_r\} \quad \text{et} \quad k \in \{0,..,d_i-1\}$$

si $i \in \{\nu_r+1,..,N\}$ et $k \in \{d_N,..,d_{\nu_r}-1\}$, on pose encore

$$Z^{i,k}(x') = (\partial_o^{k-d_N} \mathcal{C}_j^i)(\mathcal{U}^j)(0,x') + \partial_o^{k-d_N} V^i(0,x')$$

puis $d'_j = d_j$ si $j \in \{1,.,\nu_r\}$, $d'_j = d_{\nu_r}$ si $j \in \{\nu_r+1,.,N\}$

$$c'^i_j = \partial_o^{k-d_N} \circ c^i_j \quad \text{si} \quad i \in \{\nu_r+1,.,N\}, \quad j \in \{1,.,N\}$$

$$c'^i_j = c^i_j \quad \text{si} \quad i \in \{1,.,\nu_r\}, \quad j \in \{1,.,N\}$$

$$v'^i = \partial_o^{k-d_N} v^i \quad \text{si} \quad i \in \{\nu_r+1,.,N\}$$

$$v'^i = v^i \quad \text{si} \quad i \in \{1,.,\nu_r\}$$

On a alors $(u^i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ solution du système

$$\left|\begin{array}{ll} \partial_o^{d'_i} u^i = c'^i_j(u^j) + v'^i & i \in \{1,.,N\} \\ \partial_o^{\ell_i} u^i(0,x') = z'^{i,\ell_i}(x') & i \in \{1,.,N\}, \quad \ell_i \in \{0,.,d'_i-1\} \end{array}\right.$$

On a $\partial_o^{d'_i} \mathcal{U}^i \gg \mathcal{C}'^i_j(\mathcal{U}^j) + V'^i$ $\quad 1 \leqslant i \leqslant N$, pour $i \in \{1,.,\nu_r\}$ c'est l'hypothèse, pour $i \in \{\nu_r+1,.,N\}$, ça résulte de la stabilité de la notion de majorante par dérivation et de la définition de v'^i et de $\mathcal{C}'^i_j = \partial_o^{k-d_N} \circ c^i_j$ on a aussi

$$\partial_o^{\ell_i} \mathcal{U}_i(0,x') \gg Z'^{i,\ell_i}(x')$$

si $i \in \{1,.,\nu_r\}$, c'est l'hypothèse si $i \in \{\nu_{r+1},.,N\}$, c'est encore une conséquence de la stabilité par dérivation de la notion de majorante, de la définition de Z'^{i,ℓ_i} et de l'hypothèse

$$\partial_o^{d_i} \mathcal{U}^i \gg \mathcal{C}^i_j(\mathcal{U}^j) + V^i$$

Mais pour ce nouveau système il n'y a que r valeurs distinctes $\{d_1,..,d_N\}$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique et on a

$$\forall i \in \{1,..,N\} \qquad u^i \ll \mathcal{U}^i$$

c'est-à-dire le résultat cherché.

On introduit maintenant les fonctions majorantes θ de Y. Hamada [9] qui vérifient

$$\theta(t) \gg 0 \qquad \text{et} \quad (R'-t)\ (t) \gg 0 \tag{50}$$

si $R' < R$ on rappelle qu'on a [9]

$$\theta^{(j)}(t) \ll R'\ \theta^{(j+1)}(t) \tag{51}$$

$$\frac{1}{R-t}\ \theta^{(j)}(t) \ll \frac{1}{R-R'}\ \theta^{(j)}(t) \tag{52}$$

On rappelle encore [21] que si $t(x) = \rho x^o + x^1 + .. + x^n$ avec $\rho \geqslant 1$ et si c est un opérateur différentiel linéaire d'ordre ℓ, et d'ordre ℓ_o en ∂_o, à coefficients analytiques sur un voisinage du polydisque fermé $\overline{PD(O,R)}$, il existe une constante B, ne dépendant que de l'opérateur, de R et R', telle que

$$u \ll U\ \theta^{(j)} \circ t \Rightarrow c(u) \ll B\ \rho^{\ell_o}\ U\ \theta^{(j+\ell)} \circ t.$$

On démontre maintenant, en utilisant la proposition III.1 un résultat analogue à celui bien connu dans le cas scalaire [4].

Proposition III.2. Si dans le problème (I) et avec les mêmes notations que dans la proposition III.1, on a (en convenant que $\nu_o = 0$ et en notant $m_k = d_{\nu_{k+1}}$)

$\forall k \in \{0,..,r-1\}$, $\exists A_k$ $\forall i \in \{\nu_k+1,..,\nu_{k+1}\} = \mathcal{I}_k$ $v^i << A_k\ \theta^{j+m_k}\ o\ t$

$\forall k \in \{0,..,r-1\}$, $\forall \ell \in \{0,..,d_{\nu_k}-1\}$, $\exists A'_{k,\ell}$ tel que

$$\forall i \in \mathcal{I}_k \qquad z^{i,\ell} << A'_{k,\ell}\ \theta^{j+\ell}\ o\ t$$

alors $\exists \rho_o \geq 1$ tel que $\forall \rho \geq \rho_o$

$\forall k \in \{0,..,r-1\}$, $\exists c_k$ telle que $\forall i \in \mathcal{I}_k$ $u^i << c_k\ \theta^j\ o\ t$

De plus les constantes c_k sont connues explicitement en fonction des A_k et des $A'_{k,\ell}$.

D'après la proposition III.1, et le rappel précédent (on notera systématiquement B toutes les constantes provenant des opérateurs c^i_j), il suffit de prouver l'existence de constantes c_k telles que si pour $i \in \{\nu_k+1,..,\nu_{k+1}\}$ on note $\mathcal{U}^i = c_k\ \theta^j\ o\ t$, $V^i = A_k\ \theta^{j+m_k}\ o\ t$, $Z^{i,\ell} = A'_{k,\ell}\theta^{j+\ell}\ o\ t$ et si $\mathcal{C}^i_j >> c^i_j$, alors on a

(1) $\forall i \in \{1,..,N\}$ $\qquad \partial_o^{d_i}\ \mathcal{U}^i >> \mathcal{C}^i_j(\ \mathcal{U}^j) + V^i$

(2) $\forall i \in \{1,..,N\}$ $\quad \forall \ell_i \in \{0,..,d_i-1\}$ $\quad \partial_o^{\ell_i}\ \mathcal{U}^i >> Z^{i,\ell_i}$

les conditions (2) seront a fortiori vérifiées si

$$\forall k \in \{0,..,r-1\} \quad , \quad \forall \ell \in \{0,..,m_k-1\}$$

on a

$$\rho^\ell\ c_k\ \theta^{j+\ell}\ o\ t >> A'_{k,\ell}\ \theta^{j+\ell}\ o\ t$$

donc si

$$c_k \geq \max_{0\leq \ell \leq m_k-1} \left(\frac{A'_{k,\ell}}{\rho^\ell} \right) \tag{53}$$

si $k < s$, si $i \in \mathcal{J}_k$ et $j \in \mathcal{J}_s$, on a $d_i > d_j$ donc c_j^i est d'ordre $\leqslant d_j = m_s$; on note $\beta_{k,s} = \beta^o_{k,s} = m_s < m_k$ si $k = s$ et si i et j sont dans $\mathcal{J}_k$, on a $d_i = d_j$ donc c_j^i est d'ordre $d_j = m_s$ et d'ordre $< d_j$ en ∂_o ; on note $\beta_{s,s} = m_s$ et $\beta^o_{s,s} = m_s - 1$.

Si $i \in \mathcal{J}_k$, la relation (1) sera satisfaite si

$$\rho^{m_k} C_k \theta^{j+m_k} o\, t \gg B \sum_{s=0}^{r-1} C_s \sum_{i\in \mathcal{J}_s} \rho^{\beta^o_{k,s}} \theta^{j+\beta_{k,s}} o\, t + A_k \theta^{j+m_k} o\, t \qquad (54)$$

on a $\beta_{k,s} \leqslant m_k$, donc

$$\theta^{j+\beta_{k,s}} \ll (R')^{m_k-\beta_{k,s}} \theta^{j+m_k} \qquad \text{(d'après (51))}$$

et l'inégalité (54) sera a fortiori vérifiée si (en notant $\gamma_s = \text{card}\ \mathcal{J}_s$)

$$\rho^{m_k} c_k \geqslant B\left(\sum_{s=0}^{r-1} c_s \gamma_s \rho^{\beta^o_{k,s}} (R')^{m_k-\beta_{k,s}}\right) + A_k \qquad (55)$$

on pose $B' = B \max\limits_{(s,k)} (\gamma_s \times (R')^{m_k-\beta_{k,s}})$, (55) sera a fortiori vérifiée si

$$\rho^{m_k} c_k \geqslant B'\left(\sum_{s=0}^{r-1} c_s \rho^{\beta^o_{k,s}}\right) + A_k$$

ou encore si

$$c_k \geqslant B'\left(\sum_{s=0}^{r-1} c_s\, \rho^{(\beta^o_{k,s}-m_k)}\right) + \frac{A_k}{\rho^{m_k}} \quad . \qquad (56)$$

On décompose maintenant la somme du second membre en 3

$$c_k \geqslant B'\left[\sum_{s=0}^{k-1} \rho^{\beta^o_{k,s}-m_k} c_s + c_k\, \rho^{\beta^o_{k,k}-m_k} + \sum_{s=k+1}^{r-1} c_s \rho^{\beta^o_{k,s}-m_k}\right] + \frac{A_k}{\rho^{m_k}}$$

(On convient que la lère somme est nulle si $k = 0$, et que la dernière est nulle si $k = r-1$).

Compte tenu des valeurs des $\beta^o_{k,s}$, et du fait que $\rho \geqslant 1$, (56) sera a fortiori vérifiée si

$$c_k \geqslant B'\left(\sum_{s=0}^{k-1} c_s + \frac{1}{\rho}\sum_{s=k}^{r-1} c_s\right) + \frac{A_k}{\rho}$$

Considérons le système d'équations linéaires en $c_o,..,c_{r-1}$

$$c_k = B'\left(\sum_{s=0}^{k-1} c_s + \frac{1}{\rho}\sum_{s=k}^{r-1} c_s\right) + \frac{A_k}{\rho} \tag{57}$$

le déterminant de ce système est

$$\Delta(\frac{1}{\rho}) = \begin{vmatrix} \frac{B'}{\rho} - 1 & \frac{B'}{\rho} & \cdots\cdots & & \frac{B'}{\rho} \\ B' & \frac{B'}{\rho} - 1 & \frac{B'}{\rho} & \cdots & \frac{B'}{\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ B' & \cdots\cdots & & B' & \frac{B'}{\rho} - 1 \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme en $\frac{1}{\rho}$ de degré $\leqslant r$. On calcule le terme constant de ce polynôme ; c'est la limite quand $\rho \to +\infty$ de $\Delta(\frac{1}{\rho})$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & .. & 0 \\ B' & -1 & 0 & 0 \\ & & & \\ B' & & B' & -1 \end{vmatrix} = (-1)^r$$

donc pour ρ assez grand, le système est de Cramer, la solution $c_k(\frac{1}{\rho})$) est donc égale à $\dfrac{N_k(\frac{1}{\rho})}{\Delta(\frac{1}{\rho})}$

avec $N_k(\frac{1}{\rho})$ défini par

$$N_k(\frac{1}{\rho}) = \begin{vmatrix} \frac{B'}{\rho}-1 & \frac{B'}{\rho} & \cdots\cdots & -\frac{A_o}{\rho} & \cdots\cdots\cdots & \frac{B'}{\rho} \\ B' & \frac{B'}{\rho}-1 & \cdots\cdots & -\frac{A_1}{\rho} & \cdots\cdots\cdots & \frac{B'}{\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B' & \cdots\cdots & B' & -\frac{A_k}{\rho} \; \cdots & \frac{B'}{\rho} \; \cdots & \frac{B'}{\rho} \\ B' & \cdots\cdots & B' & -\frac{A_{r-1}}{\rho} \; \cdots & B' \; \cdots & \frac{B'}{\rho}-1 \end{vmatrix}$$

On a $N_k(\frac{1}{\rho}) = \frac{1}{\rho}$
$$\begin{vmatrix} \frac{B'}{\rho}-1 & \frac{B'}{\rho} & \cdots & -A_o & \cdots & \frac{B'}{\rho} \\ B' & \frac{B'}{\rho}-1 & \cdots & \vdots & \cdots & \\ & & & \vdots & & \frac{B'}{\rho} \\ & & & \vdots & & \\ B' & B' & \cdots & -A_{r-1} & \cdots & \frac{B'}{\rho}-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\; \mathcal{N}_k(\frac{1}{\rho})$$

On a donc

$$c_k(\frac{1}{\rho}) = \frac{1}{\rho}\,\frac{\mathcal{N}_r(\frac{1}{\rho})}{\Delta(\frac{1}{\rho})} \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}_k(\frac{1}{\rho}) \text{ polynôme en } \frac{1}{\rho}$$

on a donc :

$$c_k(\frac{1}{\rho}) = \frac{M_k}{\rho} + \theta(\frac{1}{\rho}) \;.$$

Si on reporte cette expression dans (57), on trouve

$$\frac{M_k}{\rho} = B' \sum_{k=0}^{s-1} \frac{M_s}{\rho} + \frac{A_k}{\rho} + \theta(\frac{1}{\rho})$$

donc

$$M_k = B'\left(\sum_{s=0}^{k-1} M_s\right) + A_k \tag{58}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} M_o = A_o > 0 \\ M_1 = B'M_o + A_1 > 0 \\ \vdots \\ M_{r-1} = B' \sum_{s=0}^{r-2} M_s + A_{r-1} > 0 \end{cases}$$

On a donc $\forall k \in \{0,.,r-1\}$ $c_k(\frac{1}{\rho}) \sim \frac{M_k}{\rho}$ avec $M_k > 0$ et $c_k(\frac{1}{\rho})$ est positif pour ρ assez grand.

$|\Delta(\frac{1}{\rho})|$ ne dépend que de B' et tend vers 1 quand $\rho \to +\infty$.

Donc $\exists \rho_o'(B')$ tel que

$$\forall \rho \geqslant \rho_o'(B') \qquad |\Delta(\frac{1}{\rho})| \geqslant \frac{1}{2}$$

$\mathcal{M}_k(\frac{1}{\rho}) = \sum_{j=0}^{r-1} P_{k,j}(\frac{1}{\rho})A_j$ avec $P_{k,j}(\frac{1}{\rho})$ polynôme en $\frac{1}{\rho}$ à coefficients ne dépendant que de B' donc $\exists \rho_o''(B')$ tel que

$$\forall \rho \geqslant \rho_o''(B') \qquad |P_{k,j}(\frac{1}{\rho})| \leqslant K \qquad ; \quad (K \text{ constante positive})$$

donc $|\mathcal{M}_k(\frac{1}{\rho})| \leqslant K \sum_{j=0}^{r-1} A_j$ si $\rho \geqslant \rho_o''(B')$ donc

$$c_k(\frac{1}{\rho}) = |c_k(\frac{1}{\rho})| = \frac{1}{\rho}\,\frac{|\mathcal{M}_k(\frac{1}{\rho})|}{|\Delta(\frac{1}{\rho})|} \leqslant \frac{2}{\rho} \sum_{j=0}^{r-1} A_j$$

$\exists$ donc ρ_o tel que

$$\forall \rho \geq \rho_o \qquad c_k(\frac{1}{\rho}) \leq \frac{2}{\rho}\left(\sum_{j=0}^{r-1} A_j\right) = c_k \quad .$$

Comme $u^i << c_k(\frac{1}{\rho}) \quad \theta^j \circ t$ pour $i \in \mathcal{J}_k$, on aura a fortiori

$$\forall i \in \{1,..,N\} \qquad u^i << \frac{2}{\rho}\left(\sum_{j=0}^{r-1} A_j\right) \theta^j \circ t \tag{59}$$

Cette formule permet donc un contrôle des constantes c_k à partir des constantes intervenant dans les seconds membres.

Il fallait aussi évidemment tenir compte des conditions sur les données de Cauchy, quand celles-ci ne sont pas nulles, ce qui donnait

$$c_k \geq \tilde{c}_k = \max_{0 \leq \ell \leq m_{k-1}} A'_{k,\ell} \geq \max_{0 \leq \rho \leq m_{k-1}} \left(\frac{A'_{k,\ell}}{\rho^{\ell}}\right)$$

mais dans l'utilisation qu'on va faire de ce résultat par la suite, les données de Cauchy seront toujours nulles (sauf pur $j = 0$) et c'est donc la formule (59) qu'on pourra utiliser.

2. *Majoration des coefficients de distorsion.*

1) Remarquons d'abord que d'après (43) et (45), le problème

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\bar{D}}^{2} \,{}_{\psi}^{1}[u_j^{\bar{D}}] = \Omega_{j-1}^2 \\ (b_{\bar{F}}^1 q_{\bar{D}}^{\bar{F}})^2_{\psi}[u_j^{\bar{D}}] = \Delta_{j-1} \\ \partial_o u_j^1(0,x') = 0, \quad u_j^1(0,x') = \delta_o^j \,, \quad u_j^2(0,x') = 0 \end{cases}$$

donnant $u_j^{\bar{D}}$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}^2_{\bar{D}}\, p^\alpha \partial_\alpha u_j^{\bar{D}} + \Gamma^2_{\bar{D}} \times u_j^{\bar{D}} = \Omega^2_{j-1} \\ \tilde{A}^1_1{}^2_2\, \tilde{H}''\, p^\alpha \partial_\alpha (p^\beta \partial_\beta u^i_j) + N_{\bar{D}} \times p^\alpha \partial_\alpha\, u_j^{\bar{D}} + M_{\bar{D}} \times u_j^{\bar{D}} = \Delta_{j-1} \\ \partial_o u^1_j(0,x') = 0, \quad u^1_j(0,x') = \delta^j_o, \quad u^2_j(0,x') = 0 \end{cases}$$

et puisque $\tilde{A}^1_1{}^2_2(a) \neq 0$, $\tilde{H}''(a) \neq 0$ et $\tilde{\Lambda}^2_2(a) \neq 0$.

On peut alors écrire ce problème sous la forme :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \partial_o u^2_j = c^2_{\bar{D}}(x,\partial)\, u_j^{\bar{D}} + v_{2,j} \\ \partial^2_o u^1_j = c^1_{\bar{D}}(x,\partial)\, u_j^{\bar{D}} + v_{1,j} \\ \partial_o u^1_j(0,x') = 0, \quad u^1_j(0,x') = \delta^j_o, \quad u^2_j(0,x') = 0 \end{cases}$$

N.B. : Ce problème est du type III avec $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $N = 2$ où

$$v_{2,j} = [\tilde{\Lambda}^2_2\, p^o]^{-1} \times \Omega^2_{j-1} \quad \text{et} \quad v_{1,j} = [\tilde{A}^1_1{}^2_2\, \tilde{H}''(p^o)^2]^{-1} \times \Delta_{j-1} .$$

<u>Majoration de</u> Y_j (à l'aide des u_j).

$$Y_j = \mathcal{R}^o_\psi[u_j] + \mathcal{R}^1_\psi[u_{j-1}] + M_{j-2}$$

où u_j est solution de (I). $j = 0$ implique que $v_{2,0} = v_{1,0} = 0$.

On applique alors, la proposition III.1 avec $N = 2$, $A = 0$, $A'\theta_o = 1$ où θ_o premier terme de la série $\theta(t)$.

On a alors

$$u_o \ll \frac{1}{\theta_o}\, \theta^{(o)}(t)$$

Or de la proposition III.2 on aura :

$$Y_o << \frac{M}{\theta_o} \theta^{(0)}(t)$$

car $\mathcal{R}^o_\psi$ est un opérateur d'ordre zéro. On choisit alors $C_1 = \frac{M}{\theta_o}$ d'où :

$$Y_o << C_1 \theta^{(0)}(t) \quad ; \quad C_1 \text{ indépendante de } \theta(t).$$

On avait :

$$Y_j = \mathcal{R}^o_\psi(u_j) + \mathcal{R}^1_\psi[u_{j-1}] + M_{j-2}$$

$$\Delta_j = \mathcal{B}^{1\ 0}_{\bar{F}\ \psi}\ \omega^{\bar{F}}_j + \mathcal{B}^{1\ 1}_{\bar{F}\ \psi}\ \Omega^{\bar{F}}_j$$

$$\Omega_j = \omega_{j-1} - \mathcal{P}^2_\psi[u_j]$$

$$\omega_j = \mathcal{C}^0_\psi\ \beta_j + (a^{1\ 2}_{1\ 2})^1_\psi \times (\frac{1}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\ (\omega_{j-1} - \mathcal{P}^2_\psi|u_j|))$$

$$\beta_j = -\mathcal{H}^1_\psi(M_j) - \mathcal{H}^2_\psi\ \mathcal{R}^1_\psi|u_j| - \mathcal{H}^2_\psi(M_{j-1}) - \sum_{r=3} \mathcal{H}^r_\psi|Y_{j-r}|$$

$$M_j = \frac{\mathcal{C}^o_\psi}{\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}}\ (\beta_{j-1} - (hr)^2_\psi|u_j|) + \mathcal{R}^2_\psi|u_j|.$$

Montrons alors l'hypothèse de récurrence :

$$Y_j << c_1\ c^j\ \theta^{(j)} \circ t$$

$$\omega_j << c_1\ c^{j-1}\ \theta^{(j+3)} \circ t$$

$$\beta_j << c_1\ c^{j-1}\ \theta^{(j+3)} \circ t$$

$$M_j << c_1\ c^{j-1}\ \theta^{(j+2)} \circ t$$

$$u_j << c_1\ c^{j-1}\ \theta^{(j)} \circ t$$

Supposons $(\mathcal{H}_i)$ vraie pour $i < k$ et montrons la pour k

1) $v_{i,k} = [\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}\ \tilde{H}''(p^o)^2]^{-1}\ \Delta_{k-1}$

$$= [\tilde{A}^{1\ 2}_{1\ 2}\ \tilde{H}''(p^o)^2]^{-1}(\mathcal{B}^{1\ 0}_{\bar{F}\ \psi}\ \omega_{k-1} + \mathcal{B}^{1\ 1}_{\bar{F}\ \psi}(\omega^{\bar{F}}_{k-2} - \mathcal{G}^{\bar{F}\ 2}_{\bar{D}\ \psi}[u^{\bar{D}}_{k-1}]))$$

et de la proposition III.2. Donc :

$$v^1_k = \mathcal{M}^{1\ 0}_{\bar{F}\ \psi}\ \omega^{\bar{F}}_{k-1} + \mathcal{M}^{1\ 1}_{\bar{F}\ \psi}\ \omega^{\bar{F}}_{k-2} + \mathcal{M}^{1\ \ 3}_{\bar{D}\ \ \psi}\ [u^{\bar{D}}_{k-1}]$$

avec $\mathcal{M}^{1\ r}_{\bar{F}\ \psi}$ opérateur différentiel d'ordre r.

Donc :

$$v^1_k \ll 2Bc_1 c^{k-2}\ \theta^{(k+2)}{}_o t + 2B\rho c_1 c^{k-3}\ \theta^{(k+2)}{}_o t + 2B\rho^3 c_1 c^{k-2} \theta^{(k+2)}{}_o t$$

$$v^1_k \ll c_1 c^{k-2}[2B(1 + \frac{\rho}{c} + \rho^3)]\ \theta^{(k+2)}\ {}_o t$$

et

$$v^2_k = [\tilde{\Lambda}^{\ \ 2}_{0\ 2}\ p^o]^{-1}\ \Omega^2_{k-1} = [\Lambda^{\ \ 2}_{0\ 2}\ p^o]^{-1}(\omega^2_{k-2} - \mathcal{G}^{2\ 2}_{\bar{D}\ \psi}\ [u^{\bar{D}}_{k-1}])$$

$$v^2_k = \mathcal{M}'^{\,0}_{\psi}\ \omega^2_{k-2} + \mathcal{M}'^{\,2\ 2}_{\bar{D}\ \psi}(u^{\bar{D}}_{k-1})$$

$$v^2_k \ll B\ c_1\ c^{k-3}\ \theta^{(k+1)}\ {}_o t + 2B\rho^2\ c_1\ c^{k-2}\ \theta^{(k+1)}\ {}_o t$$

$$v^2_k \ll c_1\ c^{k-2}[B(\frac{1}{c} + 2\rho^2)]\theta^{(k+1)}\ {}_o t\ .$$

On a donc :

$$\left|\begin{array}{l} v^1_k \ll 2B\ c_1\ c^{k-2}(1 + \frac{\rho}{c} + \rho^3)\ \theta^{(k+2)}\ {}_o t \\ v^2_k \ll 2B\ c_1\ c^{k-2}[\frac{1}{c} + \rho^2)]\theta^{(k+2)}\ {}_o t \end{array}\right.$$

Appliquons maintenant la proposition III.3. On a alors : avec $K = \max\{2,B,R'\}$

$$C^1 \geqslant \frac{K}{\rho}\ (2Bc_1\ c^{k-2})(1 + \frac{1}{c} + \frac{\rho}{c} + \rho^2 + \rho^3)$$

$$C^2 \geqslant \frac{K}{\rho}\ (2bc_1\ \bar{c}^{k-2})(1 + \frac{1}{c} + \frac{\rho}{c} + \rho^2 + \rho^3).$$

Notons

$$B_1 = \frac{K}{\rho}(2+\rho+\rho^2+\rho^3)2B \quad \text{avec} \quad c > 1.$$

D'où

$$u_k^1 \ll c_1\ B_1\ c^{k-2}\ \theta^{(k)}\ o\ t$$

et

$$u_k^2 \ll c_1\ B_1\ c^{k-2}\ \theta^{(k)}\ o\ t$$

i.e.

$$\boxed{u_k \ll c_1\ B_1\ c^{k-2}\ \theta^{(k)}\ o\ t}$$

On a alors de la définition de M_k :

$$M_k = \mathcal{M}_\psi^0\ \beta_{k-1} + \mathcal{M}_\psi^2\ (u_k)$$

d'où

$$M_k \ll mB\ c_1\ c^{k-2}\ \theta^{(k+2)}\ o\ t + 2B\rho^2\ c_1\ B_1\ c^{k-2}\ \theta^{(k+2)}\ o\ t$$

$$M_k \ll c_1\ c^{k-2}(mB(1 + \rho^2 B_1))\ \theta^{(k+2)}\ o\ t.$$

On pose

$$B_2 = mB(1 + \rho^2 B_1)$$

d'où

$$M_k \ll c_1\ c^{k-2}\ B_2\ \theta^{(k+2)}\ o\ t\ .$$

On a également

$$Y_k = \mathscr{R}^0_\psi(u_k) + \mathscr{R}'_\psi(u_{k-1}) + M_{k-2}$$

D'où :

$$Y_k \ll 2B\, c_1\, \bar{c}^{k-1}\, \theta^{(k)} + \rho 2B\, c_1\, c^{k-2}\, \theta^{(k)} \circ t + c_1\, c^{k-3}\, \theta^{(k)} \circ t$$

$$Y_k \ll c_1\, c^{k-1}(2B + \frac{2B}{c}\rho + \frac{1}{c^2})\, \theta^{(k)} \circ t$$

on pose

$$B_3 = 2B + 2B\rho + 1$$

d'où :

$$Y_k \ll c_1\, c^{k-1}\, B_3\, \theta^{(k)} \circ t.$$

On a aussi :

$$\beta_k \ll mB\rho\, c_1\, B_2\, c^{k-2}\, \theta^{(k+3)} + mB\rho^3\, c_1\, B_1\, c^{k-2}\, \theta^{(k+3)} \circ t +$$

$$+ mB\rho^2\, c_1\, c^{k-2}\, \theta^{(k+3)} \circ t + \sum_{r=3}^{\infty} mB\rho^r\, c_1\, c^{k-r}\, \theta^{(k)} \circ t$$

$$\ll c_1\, c^{k-2}(mB\rho B_2 + mB\rho^3 B_1 + mB\rho^2 + 2\rho^3\, \frac{mB}{c}\, (R')^3)\theta^{(k+3)} \circ t$$

posons

$$B_4 = mB\rho(B_2 + \rho^2 B_1 + \rho + 2\rho^2 (R')^3)$$

D'où :

$$\beta_k \ll c_1\, B_4\, c^{k-2}\, \theta^{(k+3)} \circ t\ .$$

Et

$$\omega_k << mB\, c_1\, B_4\, c^{k-2}\, \theta^{(k+3)}\, o\, t + B\rho\, c_1\, c^{k-2}\, \theta^{(k+3)}\, o\, t +$$

$$+ 2B\rho^3\, c_1\, B_1\, c^{k-2}\, \theta^{(k+3)}\, o\, t$$

$$\leqslant c_1\, c^{k-2}(mBB_4 + B\rho + 2B\rho^3 B_1)\theta^{(k+3)}\, o\, t$$

Posons :

$$B_5 = mBB_4 + B\rho + 2B\rho^3 B_1 .$$

Donc

$$\omega_k << c_1\, c^{k-2}\, B_5\, \theta^{(k+3)}{}_o\, t.$$

Il suffit alors de choisir C telle que :

$$C = \max\{B_1, B_2, B_3, B_4\} .$$

2) Remarquons que le problème (47) donnant z_j s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{A}_0\, 2\tilde{\Gamma}_0^2}{\tilde{f}_2^1}\, p^\alpha \partial_\alpha (p^\beta \partial_\beta (p^\gamma \partial_\gamma z_j)) + \tilde{\mathcal{P}}\, p^\alpha \partial_\alpha (p^\beta \partial_\beta z_j) + \tilde{\mathcal{P}}'\, p^\alpha \partial_\alpha z_j + \\ \qquad + \tilde{\mathcal{P}}''\, z_j = \Lambda_{j-1} \\ \partial_o^2\, z_j(0,x') = 0, \quad \partial_o\, z_j(0,x') = 0, \quad z_j(0,x') = \delta_o^j. \end{cases}$$

On peut alors écrire ce problème sous la forme :

$$(*) \qquad \begin{cases} \partial_o^3\, z_j = C(x,\partial) z_j + v_j \\ \partial_o^2\, z_j(0,x') = 0,\ \partial_o\, z_j(0,x') = 0,\ z_j(0,x') = \delta_o^j . \end{cases}$$

car $\tilde{A}_0 \, {}^2_2 \tilde{\Gamma}_0 \neq 0$ ainsi que $p^o \neq 0$ où $v_j = \left[\frac{\tilde{A}_0 \, {}^2_2 \tilde{\Gamma}_0}{\tilde{\gamma}^1_{f_2}}\right]^{-1} \Lambda_{j-1}$, ne dépend

que des z_k où $k < j$.

On rappelle que :

$$\Lambda_{j-1} = \mathcal{Q}^{2\;\;1}_{2\;\psi}(\psi_{j-1}) + \mathcal{Q}^{2\;\;2}_{2\;\psi}\Big(\frac{1}{\tilde{\gamma}^1_{f_2}} \tilde{B}^1_{\bar{F}} \, \Omega^{\bar{F}}_{j-1}\Big) - \omega^2_{j-1}$$

et

$$\psi_{j-1} = \frac{1}{\tilde{\gamma}^1_{f_2}} \Delta_{j-1} - \frac{1}{\tilde{\gamma}^1_{f_2}} (b^1_{\bar{F}} q^{\bar{F}}_2)^2_{\psi} \Big(\frac{1}{\tilde{\gamma}^1_{f_2}} \tilde{B}^1_{\bar{F}} \, \Omega^{\bar{F}}_{j-1}\Big)$$

On a également : $Y_j = \mathcal{R}^0_{\psi}[u_j] + \mathcal{R}^1_{\psi}[u_{j-1}] + M_{j-2}$.

Montrons par récurrence l'hypothèse suivante :

$\mathcal{H}_j)$:

$$Y_j << c_1 \, c^j \, \theta^{(j)} \circ t$$

$$Z_j << c_1 \, c^{j-1} \, \theta^{(j)} \circ t$$

$$u_j << c_1 \, c^{j-1} \, \theta^{(j)} \circ t$$

$$M_j << c_1 \, c^{j-1} \, \theta^{(j+2)} \circ t$$

$$\beta_j << c_1 \, c^{j-1} \, \theta^{(j+3)} \circ t$$

$$\omega_j << c_1 \, c^{j-1} \, \theta^{(j+3)} \circ t$$

Supposons $(\mathcal{H}_j)$ vraie pour $j < k$ et montrons $(\mathcal{H}_k)$.

On a de la définition de Ω :

$$\Omega_{k-1} << c_1 \, c^{k-3} \, \theta^{(k+1)} \circ t + B\rho^2 \, c_1 \, c^{k-2} \, \theta^{(k+1)} \circ t$$

$$\Omega_{k-1} << c_1 \, c^{k-2} \left[\frac{1}{c} + B\rho^2\right] \theta^{(k+1)} \circ t$$

Posons $B_1 = 1 + B\rho^2$. D'où :

$$\Omega_{k-1} \ll c_1\, c^{k-2}\, B_1\, \theta^{(k+1)} \circ t.$$

D'où :

$$\frac{1}{\tilde{f}^1_2}(b^1_{\bar{F}}\, q^{\bar{F}}_{2\psi})^2 \left(\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\, \tilde{B}^1_{\bar{F}}\, \Omega^{\bar{F}}_{k-1}\right) \ll B\rho\, c_1\, B_1\, c^{k-2}\, \theta^{(k+2)} \circ t$$

(car $\tilde{B}^1_{\bar{F}}\, \tilde{\zeta}^{\bar{F}}_2 = 0$ donc $(b^1_{\bar{F}}\, q^{\bar{F}}_{2\psi})^2$ est un opérateur d'ordre 1). On a aussi :

$$\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\, \Delta_{k-1} \ll 2B\, c_1\, c^{k-2}\, \theta^{(k+2)} + 2B\rho c_1 B_1 c^{k-2} \theta^{(k+2)} \circ t$$

$$\ll 2c_1 c^{k-2}\left[B + B\rho B_1\right]\theta^{(k+2)} \circ t$$

Posons $B_2 = 2(B + B\rho B_1)$ d'où :

$$\frac{1}{\tilde{f}^1_2}\, \Delta_{k-1} \ll c_1\, c^{k-2}\, B_2\, \theta^{(k+2)} \circ t.$$

On a alors de la définition de ψ_{k-1} :

$$\psi_{k-1} \ll c_1 c^{k-2}\left[B_2 + B\rho B_1\right]\theta^{(k+2)} \circ t$$

Posons : $B_3 = B_2 + B\rho B_1$, d'où $\psi_{k-1} \ll c_1 B_3 c^{k-2} \theta^{(k+2)} \circ t$

et de la définition de Λ_{k-1} on a :

$$\Lambda_{k-1} \ll B\rho c_1 B_3 c^{k-2} \theta^{(k+3)} \circ t + B\rho^2 c_1 B_1 c^{k-2} \theta^{(k+3)} \circ t + c_1 c^{k-2} \theta^{(k+2)} \circ t$$

$$\ll c_1 c^{k-2}(B\rho B_3 + B\rho^2 B_1 + R')\,\theta^{(k+3)} \circ t\,.$$

Posons : $B_4 = B\rho B_3 + B\rho^2 B_1 + R'$.

D'où : $\Lambda_{k-1} << c_1 c^{k-2} B_4 \; \theta^{(k+3)} \; o \; t$ donc $v_k << BB_4 c_1 c^{k-2} \theta^{(k+3)} \; o \; t$.

On applique maintenant la proposition III.3 (cas scalaire voir [11])

(avec $W_o = W_1 = 0$, $\ell = 3$, $V = Bc_1 B_4 c^{k-2}$) au problème de Cauchy (*) ;

on obtient si $\rho \geqslant 2B$:

$$z_k << \frac{B_4 c_1}{\rho^2} c^{k-2} \; \theta^{(k)} \; o \; t$$

posons $B_5 = B_4 \rho^{-2}$ d'où $z_k << B_5 c_1 c^{k-2} \; \theta^{(k)} \; o \; t \Rightarrow u_k^1 << BB_5 c_1 c^{k-2} \theta^{(k)} \; o \; t$

et de l'équation (35) $\mathcal{G}^{2\;1}_{2\;\psi}[u_k^2] = \Omega^2_{k-1} - \mathcal{G}^{2\;1}_{1\;\psi}(u_k^1)$. Puisque :

$$\Omega^2_{k-1} - \mathcal{G}^{2\;1}_{1\;\psi}(u_k^1) << (B_1 + B^2 \rho B_5) c_1 c^{k-2} \theta^{(k+1)} \; o \; t$$

et en appliquant de nouveau la proposition III.3 (cas scalaire avec

$W_o = W_1 = 0$, $\ell = 1$, $V = (B_1 + B^2 \rho B_5) c_1 c^{k-2}$ au problème

$$\begin{cases} \mathcal{G}^{2\;1}_{1\;\psi}(u_k^2) = \Omega^2_{k-1} - \mathcal{G}^{2\;1}_{1\;\psi}(u_k^1) \\ \\ u_k^2(0,x') = 0 \end{cases}$$

on trouve :

$$u_k^2 << \frac{1}{B}(B_1 + B^2 \rho B_5) c_1 c^{k-2} \theta^{(k)} \; o \; t$$

posons :

$$B_6 = \max \frac{1}{B}(B_1 + B^2 \rho B_5), BB_5 \quad \text{d'où} \quad u_k << B_6 c_1 c^{k-2} \; \theta^{(k)} \; o \; t$$

et on a de la définition de M_k :

$$M_k << Bc_1 c^{k-2} \theta^{(k-2)} \; o \; t + 2B\rho^2 c_1 B_6 c^{k-2} \; \theta^{(k+2)} \; o \; t$$

donc $M_k << c_1 B_7 c^{k-2} \theta^{(k+2)}$ o t avec $B_7 = B+2B\rho^2 B_6$.

On a aussi :

$$Y_k << BB_6 c_1 c^{k-2} \theta^{(k)} \text{ o t} + B\rho c_1 c^{k-2} \theta^{(k)} \text{ o t} + c_1 B_7\, c^{k-4}\, \theta^{(k)} \text{ o t.}$$

Donc :

$$Y_k << c_1 B_8 c^{k-1} \theta^{(k)} \text{ o t} \quad \text{avec} \quad B_8 = [B+B\rho+B_7]$$

majorons β_k :

$$\beta_k << B\rho c_1 c^{k-2} B_7 \theta^{(k+3)} \text{ o t} + B^2\rho^3 c_1 c^{k-2} B_6 \theta^{(k+3)} \text{ o t} + B\rho^2 c_1 B_7 c^{k-2} \theta^{(k+3)} \text{ o t}$$

$$+ \sum_{r=3} B\rho^r c_1 B_8 c^{k-r-1}\, \theta^{(k)} \text{ o t}$$

$$c_1 c^{k-2} \left[B\rho B_7 + B^2\rho^3 B_6 + B\rho^2 B_7 + \frac{B_8 B}{(c-c)}\right] \theta^{(k+3)} \text{ o t}$$

avec $\frac{\rho}{c} \leqslant \frac{1}{2}$. Posons :

$$B_9 = [B\rho B_7 + B^2\rho^3 B_6 + B\rho^2 B_7 + 2B_8 B]$$

donc

$$\beta_k << c_1 c^{k-2}\, B_9\, \theta^{(k+3)} \text{ o t}$$

et on a enfin :

$$\omega_k << Bc_1 c^{k-2} B_9 \theta^{(k+3)} \text{ o t} + B\rho\, c_1 B_1 c^{k-2}\, \theta^{(k+3)} \text{ o t}$$

$$\omega_k << c_1 c^{k-2} [BB_9 + B\rho B_1] \theta^{(k+3)} \text{ o t}$$

posons

$$B_{10} = B(B_9 + \rho B_1)$$

D'où $$\omega_k << c_1\, c^{k-2}\, B_{10}\, \theta^{(k-3)} \circ t$$

Il suffit alors de choisir :

$$C = \max\{B_1, B_2, .., B_{10}\} \quad \text{et} \quad C \geqslant 2\rho > 1.$$

C.Q.F.D.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1. Soit X une variété analytique réelle de dimension $(n+1)$, S une hypersurface de X régulière en a, d'équation locale $\varphi(x) = 0$ au voisinage de a, h un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre t sur X.

Si h vérifie : H1. a), c) ; $\mathscr{D}$ 1. ; $\mathscr{D}$ 2. de plus si $\tilde{f}_2^1$ et $\tilde{g}_1^2$ ne s'annulle pas simultanément en a.

Alors : il existe une suite Y_j de fonctions analytiques sur un même voisinage du point a, à valeurs dans R^m tel que

$$Y = \sum_{j\in Z}^{+\infty} Y_j \times (f_j \circ \varphi)$$

soit une onde asymptotique pour h, et : $\exists c_1 > 0$ et $c > 0$ tels que :

$$\forall j \qquad Y_j << c_1\, c^j\, \theta^{(j)} \circ t$$

(où $Y_j = 0$ pour $j < 0$).

3. *Convergence de la solution formelle.*

1) Si on choisit la suite $\{f_j\}_j$ telle que :

$$\begin{cases} f_o(y) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+\zeta)^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{\zeta}{mp}\right)^{-1} e^{\xi y}\, d\xi \\[2ex] f_j(y) = \displaystyle\int_0^y \dfrac{(y-\eta)^{j-1}}{(j-1)!} f_o(\eta) d\eta \quad , \qquad j = 1,2,... \\[2ex] f_j(y) = f_o^{(-j)}(y) \qquad\qquad j = -1,-2,... \end{cases}$$

Alors [13] [11] [3] la solution formelle obtenue converge vers une solution nulle ultradifférentiable de classe $\{M_p\}$.

2) On considère

$$\Phi_o(Z) = \frac{1}{Z}\ , \quad \Phi_j(Z) = \frac{Z^{j-1}}{(j-1)!}\left[\log Z - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j-1}\right)\right]\ , \quad j \geqslant 1$$

$$\Phi_j(Z) = \Phi_o^{(-j)}(Z) \qquad j \leqslant -1$$

où $\log Z$ est une fonction définie sur le domaine de Riemann $\mathscr{D} = \{Z \in \mathbb{C}^* : \arg Z \in]-\theta, 2\pi+\theta[\ , \ \theta > 0\}$ les Φ_j sont des fonctions holomorphes sur $\mathscr{D}$.

On pose ensuite $\psi_j(Z) = -\frac{1}{2\pi i} P(D)\ \Phi_j(Z)$, où $P(D)$ est un opérateur ultradifférentiable de classe (M_p).

Les fonctions ψ_j sont également holomorphes sur le domaine $D = \{Z \in \mathbb{C}^{n+1} : \rho|Z^o| + |Z^1| + \dots + |Z^n| < r\}$.

On prend ensuite f_j la valeur au bord de la fonction ψ_j.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BERZIN *et* J. VAILLANT : *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples*. J. Math. pures et appliquées 58 (1979) p. 165 à 216.

[2] BOURBAKI : *Groupes et corps ordonnés*. Paris 1964.

[3] K. BELABBES : *Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique multiple avec une condition de type hyperbolicité forte*. (Thèse de 3ème cycle présentée à Lille I le 06.01.1982 n° 945).

[4] J.C. DE PARIS : *Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable*. J. Math. pures et appl. 51 (1972) p. 465 à 488.

[5] J.C. DE PARIS : *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité*. J. Math. pures et appl. 51 (1972) p. 231 à 256.

[6] J.C. DE PARIS : *Ondes asymptotiques et problèmes de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples. Rôle des bicaractéristiques*. Note C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1509 à 1511 (8 juin 1970) (Série A).

[7] J.C. DE PARIS : *Problème de Cauchy asymptotique lien avec l'hyperbolicité*. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-1973.

[8] C. WAGSCHAL *et* J.C. DE PARIS : *Problème de Cauchy non caractéristique à données Gevrez pour un opérateur analytique à caractéristiques multiples*. J. Math. Pures et appl. 57, 1978, p. 157 à 172.

[9] Y. HAMADA : *Problème analytique de Cauchy à caractéristiques multiples dont les données de Cauchy ont des singularités polaires*. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A 276 (1973) 1681 à 1684.

[10] Y. HAMADA, J. LERAY *et* C. WAGSCHAL : *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle*. J. Math. pures et appl. 55, 1976, p. 297 à 352.

[11] O. HEBBAR : *Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique double, avec une condition de décomposition*. (Thèse de 3ème cycle présentée à Lille I le 06.01.1982 n°946).

[12] H. KOMATSU : *Ultradistributions, I structure theorems and a characterization*. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. I.A., vol 20, n°1, pp 25-105 march, 1973.

[13] H. KOMATSU : *Irregularity of characteristic elements and construction of null-solutions*. (J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. IA, Vol 23, 1976 p. 297-342).

[14] S. MIZOHATA : *Solutions nulles et solutions non analytiques* (J. Math. Kyoto-Univ. I (1962), p. 271-302).

[15] D. ROUMIEU : *Ultra-distributions définies sur* R^n *et sur certaines classes de variétés différentiables.* (J. Analyse Math. 10 (62-63) p. 153-192).

[16] C. ROUMIEU : *Sur quelques extensions de la notion de distribution.* (Ann. Scient. Ec. Norm. Dup. 3ème série t. 77, 1960, p. 41-121).

[17] S. SEDJELMACI : *Solutions nulles pour un opérateurs différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique triple deuxième cas avec condition de décomposition* (Thèse de 3ème cycle présentée à Lille I le 23.03.1982 n° 960).

[18] J. VAILLANT : *Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants.* (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15,2 (1965) 225-311).

[19] J. VAILLANT : *Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, Rôle des bicaractéristiques.* (J. Math. pures et appl. 47, 1968, p. 1 à 40).

[20] C. WAGSCHAL : *Diverses formulations du problèmes de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles* (J. Math. pures et appl. 53, 1974, p. 51 à 70).

[21] C. WAGSCHAL : *Problème de Cauchy analytique à données méromorphes.* (J. Math. pures et appl. 51 (1972) p. 375-397).

[22] C. WAGSCHAL : *Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes.* (J. Math. pures et appl. 53, 1974, p. 99-132).

*　　*

*

RÉSUMÉ

Il s'agit, dans ce travail, de donner la preuve de l'existence de solutions nulles ultradistributions, ou ultra-différentielles, pour une hypersurface caractéristique dans le cas T.R.I. de J. VAILLANT.

On commence par détailler les conditions prises, par J. VAILLANT et R. BERZIN dans leur article : "Systèmes hyperboliques à caractéristiques ultiples" J. Math. Pures et Appl. 58 - 1979, pour l'existence de l'onde asymptotique.

On donne ensuite, une forme équivalente de ces conditions, à l'aide de deux opérateurs, bien décomposables au sens sens de J.C. DE PARIS ; l'un matriciel (2,2) et l'autre scalaire.

Pour la détermination des coefficients de distorsions, on utilisera la nouvelle forme de conditions. Cette nouvelle forme, sera utile dans d'autres travaux, déjà en cours.

On propose, dans une dernière partie, une généralisation d'une proposition de J.C. DE PARIS, au cas matriciel ; qui permettra, avec la notion des majorantes, d'établir, certaines majorations sur les coefficients de distorsions.

La convergence de la solution formelle obtenue, s'en déduit comme dans un travail de Komatsu.

MOTS-CLÉS

- *Solution nulle ;*
- *Système hyperbolique/majorante (Notion de)*
- *Majoration (Notion de)/Système hyperbolique.*