N° d'ordre : 975
N° d'ordre : 976

THÈSES

présentées à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Chantal MOREAU-D'HALLUIN
Marie-Claire GAULTIER DE KERMOAL

THÉORIE DE GALOIS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE A SOLUTIONS ALGÉBRIQUES

Membres du Jury : MM. PARREAU M., *Président*
BKOUCHE R., *Rapporteur*
GRUSON L. } *Examinateurs*
GERGONDEY R. } *Examinateurs*

Soutenues le 30 Juin 1982

Nous remercions Monsieur le Professeur Michel Parreau d'avoir accepté de présider ce jury.

Nous sommes très reconnaissantes à Monsieur le Professeur Laurent Gruson d'avoir accepté d'y participer.

Pendant les quelques années où ce travail a muri nous avons trouvé le plaisir qu'il y a à "faire" des mathématiques, parfois avec passion, pas dans une économie de rendement individuel mais dans la recherche d'une culture véritable.

Que les mathématiques prennent un sens et ne soient pas seulement une technique affinée, nous a fait jeter des ponts entre les différents champs mathématiques, en comprendre les liens, nous a amenées à prendre une démarche historique.

Cette pratique mathématique s'est articulée avec notre pratique enseignante.

Ce mode de travail, nous le devons essentiellement à Rudolph Bkouche et aux rapports d'échanges qu'il impulse et entretient entre les personnes.

Robert Gergondey nous a apporté la matière éclatée, foisonnante.

Matière que nous avons retravaillée avec Anne-Marie Brasselet.

En guise de remerciements nous ne pouvons que souhaiter la poursuite et l'approfondissement de ce travail.

Nous adressons nos remerciements à Claudine Tatti et Raymonde Bérat pour l'attention et la diligence dont elles ont fait preuve lors de la dactylographie du manuscrit.

Que toutes celles et tous ceux avec lesquels nous avons eu des discussions fructueuses mathématiques ou extra-mathématiques nous permettant de mener à son terme ce mémoire, ainsi que celles et ceux qui en ont assuré la réalisation matérielle soient ici vivement remerciés.

Après une recherche effectuée en commun, ont été réunis dans ce mémoire les travaux de

. Chantal MOREAU-D'HALLUIN :

** Nature des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients dans un* $\mathbb{C}(z)$ *ayant leurs solutions dans une extension transcendante pure de* $\mathbb{C}$ *(Chapitre III)*

** Conditions pour que les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients dans un* $\mathbb{C}(z)$ *ait des solutions algébriques (Chapitre IV).*

. Marie-Claire GAULTIER de KERMOAL :

Conditions pour que les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients dans le corps de fonctions d'une courbe algébrique ait des solutions algébriques (Chapitre V).

L'introduction, les chapitres I et II ont été l'objet d'un travail commun.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le problème de la détermination des équations différentielles linéaires du second ordre à solutions algébriques a tout d'abord été étudié par Félix KLEIN dans son ouvrage "*Vorlesungen über das Ikosaeder*" (1884) Félix Klein fait une étude systématique des revêtements de la sphère de Riemann par la sphère de Riemann, des groupes de transformation correspondants et des formes invariantes par ces groupes. Sa démarche consiste alors à mettre en relation "*deux théories modernes : la théorie de Riemann des fonctions et la théorie de Galois des équations algébriques*". Il détermine ainsi les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à solutions algébriques dans une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$, à savoir des équations hypergéométriques. Ces équations et leurs solutions ont été étudiées systématiquement par GOURSAT.
La méthode de Klein, en mettant l'accent sur le groupe de l'équation différentielle est en fait galoisienne.

Différents travaux, en particulier ceux de Sophus LIE : "*intégrer un système différentiel admettant un groupe connu*", ont mis en évidence l'importance de la notion de groupe d'une équation différentielle ainsi que l'analogie entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques systématisée par E. PICARD et E. VESSIOT (1896) : "A *toute équation différentielle linéaire d'ordre* n *correspond un groupe algébrique de transformations linéaires à* n *variables, qui jouit de propriétés analogues à celles du groupe galois d'une équation algébrique*". [ce groupe a été nommé *groupe de rationnalité* par Félix Klein, on l'appelle aujourd'hui *groupe de galois différentiel*].

Ces travaux ont ouvert la voie à F. MAROTTE qui a repris ces idées dans sa thèse "*les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes*" (Toulouse, 1889).

F. Marotte a donné une méthode pour déterminer le groupe de rationalité d'une équation linéaire donnée : il ramène cette détermination à la recherche des intégrales d'une certaine équation linéaire auxiliaire qui ont une dérivée logarithmique rationnelle.

F. Marotte a appliqué sa méthode aux équations d'ordre 2,3 et 4. Il a aussi montré que, dans le cas général "le groupe de rationalité est le plus petit groupe algébrique contenant le groupe de monodromie et les groupes de méromorphie relatifs aux points singuliers".

Par la suite RITT (1938) a repris la théorie des équations différentielles algébriques et KOLCHIN (1950) a formalisé la théorie de galois différentielle sous un angle purement algébrique et géométrie-algébrique.

Après E. Picard, E. Vessiot et F. Marotte l'étude des équations différentielles algébriques en utilisant le point de vue galoisien différentiel a semble-t-il été abandonnée.

Récemment F. BALDASSARI et B. DWORK (1979) ont décrit un procédé permettant de déterminer les équations différentielles linéaires du second ordre à solutions algébriques, les équations ayant leurs coefficients dans une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$ ou dans le corps des fonctions d'une courbe algébrique.

Dans ce travail, nous étudions les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à solutions algébriques en reprenant l'étude de F. Baldassari et B. Dwork et en s'appuyant sur le travail de F. Marotte, considérant ainsi le point de vue galoisien différentiel de E. Picard et E. Vessiot. Ce point de vue permet de linéariser le problème, le groupe de Galois opérant linéairement sur l'espace des solutions, ce qui donne une approche plus fine que celle de Baldassari et Dwork.

Après avoir fait des rappels généraux sur la théorie de Galois différentielle et la résolution des équations différentielles dans un premier chapitre, nous reprenons dans le chapitre II l'étude de Klein des revêtements de la sphère de Riemann par la sphère de Riemann et des groupes G correspondants

$$\begin{tikzcd} S_2 \arrow[r, leftrightsquigarrow] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}(t) \\ S_2/G = S_2 \arrow[r, leftrightsquigarrow] & \mathbb{C}(z) \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

Nous déterminons également les fractions rationnelles $z = z(t)$ invariantes par G.

Le Chapitre III est consacré à la détermination des équations dont les solutions sont algébriques dans une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$. Nous suivons ici la démarche de Klein en la simplifiant considérablement par le résultat suivant : G étant l'un des groupes C_n, D_n, T, C ou I, si G n'est pas cyclique, le centre est réduit à l'identité et par conséquent la la représentation de G dans l'espace des solutions ne contient pas d'homothéties, ce qui implique que les solutions s'expriment rationnellement en fonction du rapport de deux solutions indépendantes

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(\eta) \arrow[r, equal] & \mathbb{C}(\eta)\langle y_1,y_2\rangle \\ & \mathbb{C}(z) \arrow[u, "G"'] \arrow[ul, "\mathbb{P}(G) = G"] \end{tikzcd}$$

Ce qui nous permet d'affirmer que les équations $y'' + py' + qy = 0$ à solutions algébriques dans un $\mathbb{C}(t)$ sont des équations hypergéométriques

$$y'' + \frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]}{z(z-1)}\, y' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\, y = 0$$

où α,β,γ sont déterminés par le groupe G et si G est cyclique on a une équation d'Euler.

Le problème traité par F. Baldassari et B. Dwork est repris dans les chapitres IV et le chapitre V.

On considère une équation $y'' + py' + qy = 0$ à solutions algébriques, où p et $q \in K$, K étant un $\mathbb{C}(t)$ ou le corps de fonctions d'une courbe algébrique c'est-à-dire le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte.

y_1, y_2 étant une base de solutions, le groupe projectif G qui opère sur les quotients de solutions η est un groupe de transformations homographiques à coefficients constants (dans $\mathbb{C}$) et donc G opère sur $\mathbb{C}(\eta)$ et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "G"] & K(\eta) \arrow[r] & K(y_1,y_2) \\ \mathbb{C}(z) \arrow[u] \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}(\eta) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Nous montrons que l'équation $y'' + q_1y = 0$ (équation normalisée de $y'' + py' + qy = 0$) est le relèvement d'une équation à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ dont η est encore un quotient de solutions.

Les cas où G est soit cyclique, soit diédral est traité séparément. Dans les autres cas, l'équation $y'' + q_1y = 0$ est le relèvement d'une équation hypergéométrique de groupe G, déterminée au chapitre III.

G est cyclique si et seulement si il existe deux solutions (définies chacune à un facteur constant près) admettant une dérivée logarithmique dans K.
G est diédral si et seulement si il existe deux solutions (définies chacune à un facteur constant près) admettant une dérivée logarithmique dans une extension quadratique de K, les solutions étant conjuguées ; ce qui est équivalent à dire que la somme des dérivées logarithmiques des deux solutions est dans K.
Ceci nous amène à distinguer le cas du groupe de Klein puisqu'alors K a trois extensions quadratiques.
Si $K = \mathbb{C}(t)$ on peut effectuer les calculs explicites, c'est ce qui est fait au chapitre IV.
L'existence de solutions y algébriques sur un corps K telles que $\frac{y'}{y}$ appartienne à ce corps ne pose pas de problèmes si le corps de base est un $\mathbb{C}(t)$, ce qui n'est pas le cas si K est le corps de fonctions d'une

surface de Riemann de genre différent de zéro. Alors on démontre que $y' = y\tau$ $(\tau \in K)$ a des solutions algébriques si et seulement si il existe un entier m tel que m soit la dérivée logarithmique d'un élément de K. On étudie ensuite des conditions nécessaires d'existence de l'entier m et si elles sont vérifiées, en utilisant la théorie des diviseurs, on donne un procédé pour construire effectivement l'élément de K dont la dérivée logarithmique est $m\tau$.

Cette étude est faite au Chapitre V.

CHAPITRE I

Dans ce premier chapitre, nous rappelons des points fondamentaux en ce qui concerne les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients dans un $\mathbb{C}(z)$, leurs solutions en un point régulier, le prolongement de ces solutions qui introduit la notion de monodromie et l'expression des solutions au voisinage d'un point singulier.

Nous rappelons très brièvement la théorie de Galois algébrique et énonçons les résultats de la théorie de Galois différentielle. Nous donnons l'expression du groupe de Galois différentiel comme groupe algébrique des matrices et le résultat que nous utiliserons dans toute la suite : Le groupe de Galois d'une équation différentielle linéaire homogène à points singuliers réguliers à solutions algébriques est égal au groupe de monodromie de l'équation.

§ 1 - *Equations algébriques à coefficients dans* $\mathbb{Q}$. *Théorie de Galois algébrique.*

L'équation $P = 0$ où $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré n, irréductible sur $\mathbb{Q}$ a n solutions $x_1,\ldots,x_n$ distinctes dans $\mathbb{C}$.

L'extension de $\mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_n)$ est le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$

$I = \{R \in \mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n] / R(x_1,\ldots,x_n) = 0\}$ est un idéal contenant $P(X_1),\ldots,P(X_n)$.

S_n, ensemble des permutations de n éléments, opère sur l'anneau $Q[X_1,\ldots,X_n]$ par $\sigma f(X_1,\ldots,X_n) = f(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})$.

On considère $G = \{\sigma \in S_n | \sigma I \subset I\}$.

G est l'ensemble des permutations de S_n conservant les relations algébriques entre les racines.

G <u>est le groupe de Galois de l'équation</u> $P = 0$

. G est le groupe des $\mathbb{Q}$-automorphismes de K et l'ordre de G est la dimension de l'espace vectoriel K sur $\mathbb{Q}$.

. La théorie de Galois dit qu'il y a correspondance bijective entre les sous-corps K' de K contenant $\mathbb{Q}$ et les sous-groupes G' de G.

K' corps correspondant à G' est le sous-corps de K composé des éléments invariants par G'.

Dans cette correspondance, les sous-groupes distingués de G correspondent aux extensions normales de $\mathbb{Q}$.

§ 2 - *Equations différentielles linéaires homogènes à coefficients dans* $K = \mathbb{C}(z)$.

E. Picard [1].

On considère les équations

(E) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ où les a_i sont des fonctions $a_i(z)$ holomorphes sauf en un nombre fini de points. Les $a_i(z)$ sont des fractions rationnelles en z.

2.1.- *Point régulier* - *Solutions en un point régulier.*

Point régulier : Un point z_o est un point régulier de (E) si en ce point tous les coefficients a_i sont holomorphes, c'est-à-dire si z_o n'est un pôle pour aucun des a_i.

Remarque : Si z_o est le point à l'infini, on transforme l'équation en prenant comme nouvelle variable $t = \frac{1}{z}$.

Solutions en un point régulier : En chaque point régulier z_o, il existe une solution y analytique au voisinage de z_o et satisfaisant les conditions initiales $y(z_o) = b_o$, $y'(z_o) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(z_o) = b_n-1$. Les solutions de (E) au voisinage d'un point régulier z_o forment un espace vectoriel de dimension n sur C.

Une base de cet espace s'appelle un système fondamental de solutions au voisinage de z_o.

L'indépendance linéaire de n solutions $f_1, \ldots, f_n$ est caractérisé par la relation $W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1, \ldots, & f_n \\ f_1' & f_n' \\ & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$

au voisinage de z_o.

$W(f_1,\dots,f_n)$ = <u>Wronskien</u>.

Le Wronskien satisfait l'équation différentielle $w' + a_1 w = 0$

si $a_1 = 0$; w est une constante.

. *Points singuliers*.

Les seules singularités possibles des solutions de l'équation (E) sont les points où l'un au moins des coefficients a_i admet une singularité. L'ensemble Δ des points singuliers des solutions de (E) est fini. En tout point de $B = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \Delta$ toutes les solutions de (E) sont régulières.

Exemples : *Quels sont les points singuliers des équations suivantes ?*

a) $y' - y = 0$.

L'infini est un point singulier pour cette équation :

en effet, posons $t = \frac{1}{z}$

$$y(z) = f(t) = y(\tfrac{1}{t}) \qquad f'(t) = y'(z) \times \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$-t^2 f'(t) - f(t) = 0.$$

f est solution de l'équation $f'(t) + \dfrac{f(t)}{t^2} = 0$.

b) $zy' - \alpha y = 0$ ou $y' - \frac{\alpha}{z} y = 0$.

. 0 est point singulier.

. L'infini est point singulier $t = \frac{1}{z}$

$$-t^2 f'(t) - \alpha t f(t) = 0 \quad ; \qquad f'(t) + \frac{\alpha}{t} f(t) = 0.$$

c) (E) = équation d'Euler $z^2 y'' - 2rzy' + sy = 0$

$$y'' - \frac{2r}{z} y' + \frac{s}{z^2} y = 0$$

. 0 est point singulier.

. L'infini est point singulier

$$z = \frac{1}{t} \quad f'(t) = y'(z) \times -\frac{1}{t^2} \quad ; \quad f''(t) = y''(z) \times \frac{1}{t^4} + y'(z) \times \frac{2}{t^3}$$

$$t^2 f''(t) + \frac{2}{t^3} t^4 f'(t) + \frac{2r}{t}\, t^2 f'(t) + s f(t) = 0$$

$$f''(t) + \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2r}{t}\right) f'(t) + \frac{s}{t^2} f(t) = 0.$$

d) (E) = l'équation de Bessel $y'' + \frac{y'}{z} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) y = 0$

. 0 est point singulier ;

. $t = \frac{1}{z} \quad t^4 f''(t) - \left(\frac{1}{t} + [illegible]\right) f'(t) + (1 - v^2 t^2) f(t) = 0$

l'infini est point singulier.

2.2.- *Prolongement des solutions.*

Soit γ un chemin de z_o à z_1 dont tous les points sont réguliers

- toute solution de (E), définie au voisinage de z_o peut être prolongée analytiquement le long de γ en une solution de (E) au voisinage de z_1.

- si l'on prolonge analytiquement un système fondamental de solutions on obtient en tout point de γ un système fondamental de solutions et l'on a $w(z_1) = w(z_o) e^{\int_\gamma -a_1(z)dz}$.

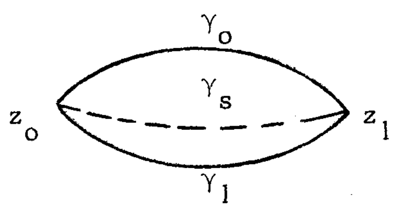
Dans le cas où γ est un chemin fermé, le problème est de savoir si en prolongeant une solution de (E) le long de γ, la solution à l'arrivée sera identique ou non à la solution de départ et ce que sera la solution prolongée.

Chemins homotopes - *Groupe* $\pi_1(B,z_o)$.

2 chemins γ_o et γ_1 dans X sont homotopes, s'il existe une application continue $\delta : I \times I \to X$ telle que

$$\delta(t,0) = \gamma_o(t) \qquad \delta(t,1) = \gamma_1(t)$$
$$\delta(0,s) = \gamma_o(0) = \gamma_1(0), \; \delta(1,s) = \gamma_o(1) = \gamma_1(1).$$

Autrement dit, si l'on pose $\gamma_s(t) = \delta(t,s)$, la famille des chemins γ_s d'origine z_o et d'extrémité z_1 est une déformation continue de γ_o en γ_1 lorsque s varie de 0 à 1



Le groupe $\pi_1(B,z_o)$ est le groupe constitué des classes d'équivalence des lacets dans X d'origine et d'extrémité z_o ; deux lacets étant équivalents si et seulement si ils sont homotopes.

Exemple de prolongement de solutions.

(E) : $zy' - \alpha y = 0$; 0 et l'∞ sont les points singuliers.

L'espace des solutions au voisinage de z_o ($z_o \neq 0$) est de dimension 1, engendré par z^α. Prolongeons cette solution le long d'un lacet ne contenant pas 0 en son intérieur, on retrouve z^α.

Prolongeons maintenant la solution z^α le long d'un lacet contenant 0 en son intérieur, on trouvera la solution $z^\alpha e^{2i\pi n\alpha}$ où n est le nombre de tours faits autour de zéro.

Ceci définit donc un morphisme des classes de lacets à homotopie près, c'est-à-dire de $\pi_1(B,z_o)$ dans $\mathbb{C}^*$ dont l'image est le groupe engendré par $e^{2i\pi\alpha}$. Ce groupe sera fini si et seulement si α est rationnel.

§ 3 - *Groupe de monodromie* [Plemelj [2]].

3.1.- *Théorème de monodromie*.- z_o un point singulier, f une fonction analytique définie au voisinage de z_o prolongeable le long de tout chemin Γ d'origine z_o contenu dans un domaine D. Si γ et γ' sont 2 chemins de z_o à z_1 homotopes dans D (ils définissent la même classe dans $\pi_1(D,z_o)$), alors le prolongement $f_\gamma(z)$ de $f(z)$ le long de γ et le prolongement $f_{\gamma'}(z)$ le long de γ' de $f(z)$ définissent la même fonction au voisinage de z_1.

3.2.- *Groupe de monodromie*.

Soit z_o un point régulier, $z_o \in B$, U un ouvert de X contenant z_o , U ne contient pas de singularités, dans lequel toute solution est prolongeable. Les solutions définies sur U forment un espace vectoriel de dimension n sur C que l'on notera $Sol(U)$.

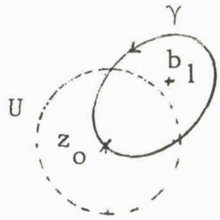
Soit γ un chemin fermé d'origine et d'extrémité z_o. On étudie le prolongement d'une solution y le long de γ, plusieurs cas peuvent se produire.

1°) γ ne contient aucun point singulier en son intérieur, γ est homotope à zéro dans X : nous obtenons la même solution d'après le théorème de monodromie.

2°)

a) γ contient un point singulier en son intérieur, nous obtenons une solution de (E), pas nécessairement la même.

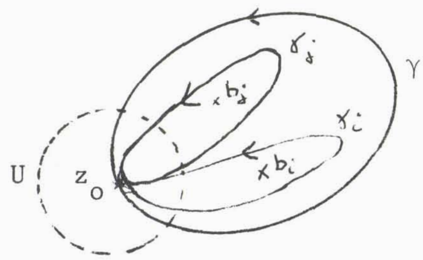
On définit ainsi une application $\bar{\gamma}$: $Sol(U) \to Sol(U)$ linéaire et qui ne dépend que de la classe d'homotopie de γ dans $\pi_1(B,z_o)$



b) γ contient plusieurs points singuliers en son intérieur $b_1,\dots,b_k$; γ est homotope au lacet composé des lacets $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ qui ne contiennent chacun qu'un point singulier b_i en leur intérieur. On définit encore une application linéaire

$$\bar{\gamma} : Sol(U) \to Sol(U)$$

$$\bar{\gamma} : \bar{\gamma}_1 \circ \bar{\gamma}_2 \circ \dots \circ \bar{\gamma}_k$$



Si $\tilde{\gamma}$ représente la classe d'homotopie de γ dans $\pi_1(B,z_o)$.
On définit un morphisme

$$\pi_1(B,z_o) \longrightarrow End_{\mathbb{C}} Sol(U)$$
$$\tilde{\gamma} \longrightarrow (\bar{\gamma} : Sol(U) \to Sol(U))$$

Un système fondamental de solutions étant choisi sur U $(f_1,\dots,f_n)$. Un endomorphisme de $Sol(U)$ est représenté par une matrice $n \times n$. Si γ' désigne le chemin inverse de γ, $\gamma' \circ \gamma$ est homotope à zéro donc $\bar{\gamma}' \circ \bar{\gamma} = id$ la matrice qui représente $\bar{\gamma}$ est inversible.

Donc $\pi_1(B,z_o)$ a une image dans $Gl(n,\mathbb{C})$ qui est un groupe de matrices engendré par un nombre fini de générateurs : les matrices associées aux lacets entourant chacun des points singuliers.

Cette image de $\pi_1(X,z_o)$ *dans* $Gl_n(\mathbb{C})$ *est le groupe de monodromie de l'équation* (E).

Remarque :

1) Si z_1 est un autre point régulier dans U.
On définit de la même façon l'image de $\pi_1(B,z_1)$ dans $Gl_n(\mathbb{C})$ soit M_1.
Alors M et M_1 sont 2 groupes conjugués.

γ un chemin de z_o à z_1 ; τ la matrice associée

$M_1 = \tau \circ M \circ \tau^{-1}$.

2) Si $(g_1,\ldots,g_n)$ est un autre système fondamental de solutions au voisinage de z_o dans U. M et N les 2 groupes de monodromie associés, σ la matrice de changement de base alors $N = \sigma M \sigma^{-1}$.
Un changement de point ou de système fondamental de solutions revient à prendre un sous-groupe conjugué du précédent.

§ 4 - *Expression des solutions au voisinage d'un point.*

4.1.- *Expression des solutions en un point régulier.*

Nous cherchons une base de $Sol(U)$ pour laquelle la matrice associée à γ soit la plus simple possible

$f_1,\dots,f_n$ un système fondamental de solutions

$f_1^*,\dots,f_n^*$ les transformées par γ de $f_1,\dots,f_n$.

$(f_i^*) = (c_{ij})(f_j)$ $c = (c_{ij})$ est la matrice de l'endomorphisme $\bar{\gamma}$. Les valeurs propres de $\bar{\gamma}$ sont les solutions de $(c-\theta id) = 0$. Cette équation caractéristique est indépendante de la base choisie. A chaque valeur propre θ on associe au moins un vecteur propre : une solution y de (E) telle que $y_\gamma = \theta y$.

- Si les n valeurs propres sont distinctes $\theta_1,\dots,\theta_n$. Une base de Sol(U) est constituée de n solutions $y_1,\dots,y_n$ telles que $y_{i,\gamma} = \theta_i y$.

- Si l'équation caractéristique admet des valeurs propres multiples, on peut trouver une base dans laquelle la matrice à la forme d'une matrice par blocs, ayant des blocs non nuls seulement sur la diagonale ces blocs ont 2 formes possibles $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

(forme de Jordan). Par un changement de base, on peut se ramener à la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$. La somme des tailles des blocs où figurent la même valeur λ est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre λ.

Dans ce cas, on peut trouver un système fondamental de solutions composé soit de fonctions y telle que l'on ait $y\gamma = \theta\gamma$ soit de solutions groupées par bloc $y_1,\dots,y_s$ telles que l'on ait

$$y_{1,\gamma} = \theta y_1$$

$$y_{2,\gamma} = \theta(y_1+y_2)$$

$$y_{3,\gamma} = \theta(y_2+y_3)$$

$$\vdots$$

$$y_{s,\gamma} = \theta(y_{s-1}+y_s).$$

4.2.- *Expression des solutions au voisinage d'un point singulier* b.

γ un chemin d'origine et d'extrémité z_o point régulier contenant le seul point singulier b en son intérieur.

γ peut être un cercle centré en b et passant par z_o parcouru dans le sens direct.

γ est défini par $z-b = re^{i\theta}$.

Si z parcourt γ, $(z-b)^\rho$ devient $(z-b)^\rho \times e^{2i\pi\rho}$.

Supposons que $e^{2i\pi\rho}$ est valeur propre, si y est le vecteur propre correspondant $y^* = e^{2i\pi\rho}y$.

La fonction $\dfrac{y}{(z-b)^\rho}$ est invariante quand z parcourt γ : c'est une fonction analytique au voisinage de b donc y solution est de la forme $y(z) = (z-b)^\rho\varphi(z)$ où φ admet un développement de Laurent au voisinage de b.

a) *Si l'équation caractéristique a toutes ses racines distinctes* $\rho_1,\dots,\rho_n$, $\rho_i-\rho_j \notin \mathbb{Z}$.

Alors une base de solutions est donnée par

$$y_1 = (z-b)^{\rho_1}\varphi_1(z)$$

$$\vdots$$

$$y_n = (z-b)^{\rho_n}\varphi_n(z).$$

b) *Si l'équation caractéristique a des racines multiples et* $\rho_i - \rho_j \notin \mathbb{Z}$.

Soit ρ une racine multiple d'ordre s. $y_1, \ldots, y_o$ les solutions correspondantes

$$y_1^\gamma = e^{2i\pi\rho} y_1$$

$$y_1 = (z-b)^\rho \psi_1(z), \quad y_2^\gamma = e^{2i\pi\rho}(y_1 + y_2).$$

Calculons y_2. On remarque que pour $u(z) = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{Log}(z-b)$

$$u^\gamma(z) = u(z) + 1.$$

Posons $y_2 = uy_1 + \Psi_2$

$$y_2^\gamma = e^{2i\pi\rho}(uy_1 + \Psi_2 + y_1) = u^\gamma y_1^\gamma + \Psi_2^\gamma$$

$$y_2^\gamma = e^{2i\pi\rho} y_1(u+1) + e^{2i\pi\rho}\Psi_2 = (u+1)e^{2i\pi\rho} y_1 + \Psi_2^\gamma$$

donc $\Psi_2 . e^{2i\pi\rho} = \Psi_2^\gamma$

d'où $\Psi_2 = (z-b)^\rho \varphi_2$

d'où $y_2 = (z-b)^\rho \left[\frac{e^{2i\pi\rho}}{2i\pi} \operatorname{Log}(z-b)\varphi_1(z) + \varphi_2(z)\right]$

y_2 est donc de la forme

$$y_2 = (z-b)^\rho \left[\varphi_1(z)\operatorname{Log}(z-b) + \varphi_2(z)\right].$$

D'une façon générale, on trouve

$$y_1 = (z-b)^\rho \varphi_1(z)$$

$$y_2 = (z-b)^\rho \left[u\varphi_1(z) + \varphi_2\right]$$

$$y_3 = (z-b)^\rho \left[\frac{u(u-1)}{2!}\varphi_1(z) + u\varphi_2(z) + \varphi_3(z)\right]$$

etc...

où $u = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{Log}(z-b)$.

c) Si $\rho_j - \rho_i \in \mathbb{Z}$; $\rho_j = \rho_i + p$, p entier positif.

On se trouve alors dans un cas similaire au cas b) avec d'autres possibilités.

Exemple des équations d'ordre 2, $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = \rho - p$

on a 2 intégrales $y_1 = (z-b)^{\rho}\varphi(z-b)$

$$y_2 = (z-b)^{\rho}\varphi(z-b)\,[c\ \mathrm{Log}(z-b)+(z-b)^{-p}\Psi(z-b)]$$

où c est une constante et φ et Ψ sont holomorphes.

On peut avoir $c = 0$ et alors $y_2 = (z-b)^{\rho-p}\varphi(z-b)\Psi(z-b)$ est solution ; y_2 a pour exposant $\rho-p$.

Si $c \neq 0$, le point b est alors appelé point singulier logarithmique.

4.3.- *Point singulier régulier* - *Condition de Fuchs*.

On dira que b est un point singulier régulier pour l'équation si b est un pôle ou une singularité logarithmique des solutions $y_1,\ldots,y_n$. Ceci revient à dire que dans l'étude ci-dessus les φ_i sont holomorphes en b ou ont un pôle d'ordre fini, ce qui est vérifié dans l'exemple du c).

Si b est une singularité essentielle pour l'un des φ_i, b_i est un point singulier essentiel pour l'équation.

Condition de Fuchs.

Un point singulier fuschien de l'équation différentielle linéaire $y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(z)y = 0$ est un point b où toutes les solutions sont soit régulières soit admettent ce point comme point singulier régulier.

Théorème de Fuchs.

$z = b$ est un point singulier Fuschien si et seulement si chaque coefficient $a_i(z)$ est soit régulier soit admet $z = b$ comme pôle au plus d'ordre i.

4.4.- *Exemple de l'équation d'Euler.*

Expression des solutions et groupe de monodromie

$$\text{(E)} \qquad y'' - \frac{2r}{z} y' + \frac{s}{z^2} y = 0 \quad , \qquad B = \mathbb{C} - \{0\}$$

l'espace des solutions $\mathrm{Sol}(U)$ est de dim 2.

Cherchons des solutions de la forme $y = z^\rho \varphi(z)$ où $\varphi(z) = \alpha_o + \alpha_1 z + \ldots$

Dérivons $y' = \rho z^{\rho-1}(\alpha_o + \ldots) + z^\rho(\alpha_1 + \ldots)$

$$y'' = \rho(\rho-1) z^{\rho-2}(\alpha_o + \ldots) + 2\rho z^{\rho-1}(\alpha_1 + \ldots) + z^\rho(\alpha_2 + \ldots)$$

et identifions avec l'équation (E).

Le coefficient de $z^{\rho-2}$ est nul,

donc ρ doit satisfaire l'équation $\rho(\rho-1) - 2r\rho + s = 0$

ou encore $\rho^2 - \rho(2r+1) + s = 0$ (équation déterminante).

. Si cette équation a 2 racines distinctes ρ_1 et ρ_2 l'équation d'Euler a 2 solutions de la forme $y_i = z^{\rho_i} \varphi_i(z)$, $i = 1,2$ en identifiant, on trouve

$$y_1 = z^{\rho_1} \quad \text{et} \quad y_2 = z^{\rho_2} \quad \text{sont solutions.}$$

. Si l'équation déterminante a une racine double ρ les 2 solutions sont $y_1 = z^\rho$ et $y_2 = z^\rho \operatorname{Log} z$, $\qquad \rho = r + \frac{1}{2}$.

Groupe de monodromie M.

. Dans le cas où il y a 2 racines distinctes ρ_1 et ρ_2

M est engendré par la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\rho_2} \end{pmatrix}$$

. Dans le cas où il y a une racine double ρ

le groupe est engendré par la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi\rho} & e^{2i\pi\rho} \\ 0 & e^{2i\pi\rho} \end{pmatrix}$$

M est fini <==> il existe deux solutions distinctes rationnelles ρ_1, ρ_2

si $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}^*$, M est cyclique

S'il y a une racine double, M n'est pas fini.

§ 5 - *Théorie de Galois différentielle*. *Groupe de Galois*.

Kolchin [3], [4] , [5] , Picard [7].

5.1.- *Définitions*.

A une équation différentielle (E),
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ à coefficients dans un corps K, on associe un corps L engendré sur K par $y_1, \dots, y_n$ système fondamental de solutions et leurs dérivées.

L est une extension de type fini de K.

L est un corps différentiel au sens où si $y \in L$ ses dérivées sont aussi dans L

f est un morphisme différentiel de L si $f(y^{(k)}) = (f(y))^k$ quelque-soit $y \in L$

K et L ont même corps des constantes.

Ici, $K = \mathbb{C}(z)$ et le corps des constantes est $\mathbb{C}$.

On définit de la même façon que dans la théorie algébrique, le groupe des K-automorphismes différentiels de L : G

$\sigma \in G$ si et seulement si pour tout i pour tout k

$\sigma(y_i^{(k)}) = (\sigma(y_i))^{(k)}$ où $(y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_n)$ est un système fondamental de solutions.

G opère donc linéairement sur S espace des solutions, qui forment un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

G est fermé pour la topologie de Zariski.

G est un groupe algébrique de matrices.

La dimension de G est le nombre de paramètres indépendants intervenant dans les équations de définition.

$\dim_{\mathbb{C}} G$ = degré de transcendance de L sur K.

$\dim_{\mathbb{C}} G = 0 \iff G$ est fini $\iff L/K$ est algébrique.

5.2.- *Expression du groupe de Galois comme groupe algébrique de matrices.* A.M. BRASSELET [6].

(E) : $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ l'équation différentielle linéaire à coefficients dans K.

$y_1,\ldots,y_n$ un système fondamental de solutions.

On pose

$$\Delta = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

det $\Delta = w =$ wronskien.

Pour tout $\sigma \in G$, calculons $\sigma(\Delta)$ et $(\sigma(\Delta))' = \sigma(\Delta')$.

$$\Delta' = \begin{pmatrix} y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{pmatrix} \times \Delta = A.\Delta$$

où $A \in Gl_n(K)$

A est invariante par G

$$\sigma(\Delta') = \sigma(A.\Delta) = A\sigma(\Delta) = \Delta'.\Delta^{-1}\sigma(\Delta) \quad ;$$

d'autre part, $(\sigma(\Delta))' = (\Delta.\Delta^{-1}\sigma(\Delta))' = \Delta'(\Delta^{-1}\sigma(\Delta)) + \Delta(\Delta^{-1}\sigma(\Delta))'$

d'où $\Delta.(\Delta^{-1}\sigma(\Delta))' = 0$

$\Delta^{-1}\sigma(\Delta) \in Gl_n(K)$.

Le morphisme ψ qui à σ fait correspondre $\Delta^{-1}\sigma(\Delta)$ est un morphisme de groupe injectif

$$\psi : Gal(L/K) \to Gl_n(K)$$

ce qui permet d'identifier $Gal(L/K)$ a un sous-groupe de matrice de $Gl_n(K)$.

Remarque : La condition $G \subset Sl_n(K)$ équivaut à $\det(\Delta^{-1}\sigma(\Delta)) = 1$. Ceci pour tout $\sigma \in G$, ce qui équivaut à $\det \sigma(\Delta) = \det \Delta$ ou encore $\det \Delta = w \in K$.

Et alors l'équation différentielle $y' + a_1y = 0$ dont w est solution a donc une solution dans K.

Les trois conditions sont équivalentes :

- $G \subset Sl_n(K)$
- w = wronskien $\in K$
- $y' + a_1y = 0$ a une solution non triviale dans K.

5.3.- *Cas où* $n = 2$, expression de $\Delta^{-1}\sigma(\Delta)$.

$$\Delta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \qquad \sigma(\Delta) = \begin{pmatrix} \sigma(y_1) & \sigma(y_2) \\ \sigma(y_1') & \sigma(y_2') \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{-1}\sigma(\Delta) = \frac{1}{w}\begin{pmatrix} y_2'\sigma(y_1)-y_2\sigma(y_1') & y_2'\sigma(y_2)-y_2\sigma(y_2') \\ -y_1'\sigma(y_1)+y_1\sigma(y_1') & -y_1'\sigma(y_2)+y_1\sigma(y_2') \end{pmatrix}.$$

5.4.- *Exemples.*

$K = \mathbb{C}(z)$, $\mathbb{C}$ corps des constantes, dérivation $\frac{d}{dz}$.

a) $y'-y = 0$ $\quad G = \mathbb{C}^*$ $\quad L = K(e^z)$

b) $zy' - \alpha y = 0$ $\quad L = K(z^\alpha)$.

Si α est rationnel $\alpha = \frac{p}{q}$ G est fini, contenu dans le groupe $q^{\text{ième}}$ des racines de l'unité.

Si α n'est pas rationnel, $G = \mathbb{C}^*$.

c) $y''-y = 0$, solutions $y_1 = e^z$, $y_2 = e^{-z}$ $\quad L = K(e^z)$.

G est de dim 1, on a les relations $y_1' = y_1$, $y_2' = -y_2$, $y_1y_2 = 1$.

$$G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{C}^*\right\}.$$

d) l'équation d'Euler $z^2y'' - 2rzy' + sy = 0$.

1) s'il y a 2 solutions de la forme $y_1 = z^\alpha$ et $y_2 = z^\beta$

$L = K(z^\alpha, z^\beta)$ $\quad \frac{y_1'}{y_1} = \frac{\alpha}{z} \quad \frac{y_2'}{y_2} = \frac{\beta}{z} \qquad \alpha \neq \beta$

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad ad \neq 0 \} .$$

Si α et β sont rationnels, il existe 2 entiers tel que $n\alpha + m\beta = p \in \mathbb{Z}$ alors on a $y_1^n y_2^m = z^p$ et $a^n d^m = 1$.

Alors G est fini.

2) s'il y a 2 solutions $y_1 = z^\alpha$ et $y_2 = z^\alpha \operatorname{Log} z$

$y_1' = \frac{\alpha}{z} y_1 \quad , \quad y_2' = \frac{\alpha}{z} y_2 + \frac{y_1}{z}$

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{C}^* \} .$$

c) $y'' + \frac{y'}{z} + (1 - \frac{\gamma^2}{z^2}) y = 0 \qquad \gamma \in \mathbb{C}$ <u>équation de Bessel</u>.

$y' + \frac{1}{z} y$ a une solution non triviale $\frac{1}{z}$ dans $\mathbb{C}(z)$

donc $w \in \mathbb{C}(z)$ et $G \subset Sl_2(\mathbb{C})$.

On a les résultats suivants

* Si 2γ est un entier impair : η_1 et η_2 sont solutions

$$\eta_1 = e^{iz} \sum_{k=0}^{s} a_k \left(\frac{i}{2}\right)^k z^{-k-\frac{1}{2}} \qquad \text{avec} \qquad a_k = \frac{(s+k)!}{k!(s-k)!}$$

$$\eta_2 = e^{-iz} \sum_{k=0}^{s} a_k \left(-\frac{i}{2}\right)^k z^{-k-\frac{1}{2}}$$

$\eta_1\eta_2 = a \in \mathbb{C}(z) \quad \eta_1' = \alpha_1\eta_1 \;, \quad \eta_2' = \alpha_2\eta_2 \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2$

$\forall \sigma \in G \;\; \exists\, c \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sigma(\eta_2) = c\eta_1$

d'où

$$G = \left\{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{C}^*\right\} \qquad G \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}^* .$$

* Si 2γ n'est pas un entier impair

Si 2γ n'est pas entier $\quad \eta_\gamma = (\frac{z}{2})^\gamma \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p (\frac{z}{2})^{2p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(\gamma+p+1)}$

et $\eta_{-\gamma}$ sont solutions.

Si γ est un entier $\eta_{-\gamma}$ est une fonction entière $\eta_\gamma = (-1)^n \eta_{-\gamma}$ on obtient une autre intégrale par d'autres méthodes.

On montre que $G = Sl_2(\mathbb{C})$.

Pour cela on suppose que $G \neq Sl_2(\mathbb{C})$ c'est-à-dire que $\dim_{\mathbb{C}} G \leqslant 2$ (puisque différente de 3).

La composante connexe de l'identé G_o est un groupe algébrique de dimension 1 ou 2 donc réductible à la forme triangulaire. Si η est solution de l'équation la matrice $\Delta^{-1}\sigma(\Delta)$ est triangulaire et $\frac{\eta'}{\eta}$ est algébrique sur $\mathbb{C}(z)$. En écrivant de $\frac{\eta'}{\eta}$ est solution de l'équation de Riccati associée $y' + y^2 + \frac{y}{z} + (1 - \frac{\gamma^2}{z^2}) = 0$. On arrive a une contradiction avec le fait que 2γ n'est pas entier impair. Donc $G = Sl_2(\mathbb{C})$.

§ 6 - *Groupe de monodromie et groupe de Galois.*

Le groupe de monodromie est l'image de $\pi_1(X,z_o)$ dans $Gl_n(\mathbb{C})$: le groupe engendré par les matrices représentant les endomorphismes de Sol(U) associés aux lacets entourant chacun des points singuliers. Tout élément du groupe de monodromie conserve les relations entre les solutions et leurs dérivées.

Le groupe de monodromie est contenu dans le groupe de Galois.

Dans le cas d'une équation différentielle à points singuliers réguliers où L est une extension algébrique de K alors G est fini et on est ramené à la théorie de Galois algébrique.

Tout élément de L invariant par $M \subset G$ est uniforme partout, son développement en série de Laurent au voisinage d'un point singulier ne peut comprendre qu'un nombre fini de termes à exposants négatifs donc f est méromorphe partout, c'est-à-dire que f est une fraction rationnelle donc $f \in K$.

G et M ayant même corps des invariants K, G et M sont égaux.

Dans le cas d'équations différentielles linéaires homogènes à points singuliers réguliers à solutions algébriques, le groupe de Galois et le groupe de monodromie sont égaux.

Déterminer le groupe de Galois, dans ce cas, reviendra donc à déterminer le groupe de monodromie.

CHAPITRE II

Nous ne considérons désormais que les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients dans un $\mathbb{C}(z)$ dont les solutions sont algébriques.

Ce groupe de monodromie est alors égal au groupe de Galois, ils sont finis.

Dans ce deuxième chapitre est développé l'aspect géométrique de la situation à savoir :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, no head, squiggly, "\mathcal{M}"] & L \\ S_2 \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, no head, squiggly, "\mathcal{M}"] & \mathbb{C}(z) \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

où L est l'extension algébrique de $\mathbb{C}(z)$ engendré par les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène à solutions algébriques G le groupe de Galois.

X la surface de Riemann associée sur laquelle les solutions sont uniformes. L est le corps des fonctions méromorphes sur X.

Dans ce deuxième chapitre, nous étudions également les aspects géométriques et algébriques liés à la situation où l'extension algébrique engendrée par les solutions est un $\mathbb{C}(t)$ ce qui revient à dire que les solutions sont uniformes sur la sphère de Riemann

$$\begin{tikzcd} S_2 \arrow[r, phantom, "\overset{\mathfrak{M}}{\sim}"] \arrow[d] & \mathbb{C}(t) \arrow[d] \\ Y \arrow[r, phantom, "\overset{\mathfrak{M}}{\sim}"] & K \end{tikzcd}$$

Nous déterminons de façon précise K, G et Y : G est conjugué de l'un des 5 groupes finis de rotation de la sphère S^2.

§ 1 - *Position du problème.*

(E) l'équation différentielle $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$; $a_i \in \mathbb{C}(z)$ une solution de (E) définie au voisinage d'un point régulier peut être prolonger analytiquement le long de tout chemin γ contenu dans $B = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \Delta$ où Δ = ensemble des points singuliers de E inclus dans l'ensemble des pôles des a_i .

. L'équation (E) a toutes ses solutions algébriques

y solution de (E) est racine d'un polynôme $P(T,z)$ de degré d

P est irréductible sur $\mathbb{C}(z)$

$$P(T,z) = T^d + c_{d-1}T^{d-1} + \ldots + c_o \qquad c_j \in \mathbb{C}(z).$$

. En général, les racines $u(u = u(z))$ de $P(T,z)$ sont simples, il peut exister un nombre fini de valeurs de z pour lesquelles des racines sont multiples : ce sont les racines d'un polynôme $\phi(z)$ obtenu en éliminant T entre les équations $P(T,z) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} P(T,z) = 0$.

Pour les valeurs de z pour lesquelles l'un des c_j à un pôle, $P(T,z)$ aura une racine simple infinie.

En dehors de ces deux cas, les racines u_j sont simples et finies.

L'ensemble des points où il peut exister des racines multiples et où les racines peuvent avoir des pôles est contenu dans l'ensemble Δ des points singuliers de l'équation différentielle (E). En effet, soit z_o un point régulier, $z_o \in X$, u_o une racine simple de $P(T,z) = 0$, u_o est holomorphe dans un voisinage de z_o et peut être prolongée le long de tout chemin de z_o et z_1 contenu dans X, $u(z_1)$ est racine de $P(T,z_1) = 0$, u est holomorphe au voisinage de z_1.

Action du groupe de monodromie ou du groupe de Galois (ils sont égaux) sur les solutions de $P(T,z) = 0$ au voisinage d'un point singulier où il y a une racine multiple : Exemple de l'équation d'Euler.

$$y'' - \frac{2r}{z} y' + \frac{s}{z^2} y = 0 \quad ; \quad 0 \text{ et } \infty \text{ sont les points singuliers.}$$

Prenons comme exemple l'équation $y'' + \frac{1}{6z} y' + \frac{1}{6z^2} y = 0.$

Au voisinage de 0, $z^{1/2}$ et $z^{1/3}$ constituent une base de solutions le groupe de Galois est d'ordre 6

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \right\}$$

y une solution au voisinage de 0, $y = az^{1/2} + bz^{1/3}$, $a, b \in \mathbb{C}$; y est algébrique, y est racine d'un polynôme $P(T,z)$

de degré 6. Calculons $P(T,z)$:

$$T = az^{1/2} + bz^{1/3}$$

$$(T - az^{1/2})^3 = b^3 z$$

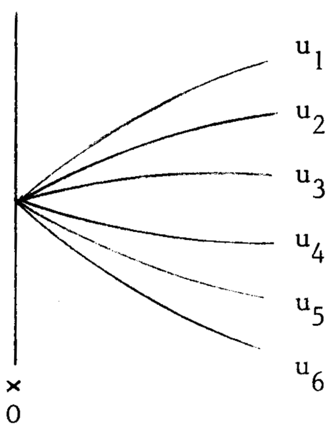
$$T^3 - 3aT^2 z^{1/2} + 3Ta^2 z - a^3 z^{3/2} = b^3 z$$

$$(T^3 + 3a^2 T - b^3 z)^2 = (3aT^2 + a^3 z)^2 z$$

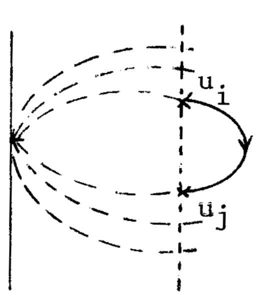
$$P(T,z) = T^6 - 3T^4 a^2 z - 2T^3 b^3 z + 3T^2 a^4 z^2 - 6Ta^2 b^3 z^2 + b^6 z^2 - a^6 z^3 = 0.$$

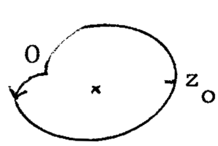
Les 6 racines étant
$$\begin{array}{ll} az^{1/2} + bz^{1/3} & -az^{1/2} + bz^{1/3} \\ az^{1/2} + bjz^{1/3} & -az^{1/2} + bjz^{1/3} \\ az^{1/2} + bj^2 z^{1/3} & -az^{1/2} + bj^2 z^{1/3} \; . \end{array}$$

En 0, les 6 racines sont confondues : 0 est 1 point multiple d'ordre 6.



On passe d'une racine u_i à une racine u_j par un élément du groupe de Galois, c'est-à-dire un élément du groupe de monodromie, c'est-à-dire en parcourant un chemin fermé autour de 0





Ceci nous amène, pour étudier les équations différentielles à solutions algébriques à considérer :

- d'une part, la surface de Riemann sur laquelle les solutions seront uniformes ;

- d'autre part, l'extension algébrique finie $\mathbb{C}(z) \to L$ de degré d de groupe de Galois G égal au groupe de monodromie engendrée par les solutions.

Dans ce chapitre II

. Nous construisons tout d'abord la surface de Riemann X au-dessus de S_2 (sphère de Riemann) associée à une extension algébrique L de $\mathbb{C}(z)$ de degré d [$\mathbb{C}(z)$ est le corps des fonctions méromorphes sur S_2] telle que le corps des fonctions méromorphes sur X soit L, ce qui fait l'objet des paragraphes 2-3 et 4. [Douady] [8].

. Ensuite, nous étudierons la situation inverse : on se donne $X = S_2$ et $L = \mathbb{C}(t)$ nous construisons la surface de Riemann Y et le corps K tels que

$$\begin{tikzcd} X = S_2 \arrow[r, squiggly, "\mathcal{M}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}(t) = L \\ Y \arrow[r, squiggly, "\mathcal{M}"] & K \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}(t)$ soit une extension algébrique de degré d de K et S_2 la surface de Riemann au-dessus de Y associée à l'extension algébrique $K \to \mathbb{C}(t)$. Plus précisément nous suivrons le plan

5 - Construire $Y = X/G$ où G est un groupe fini opérant sur X.

6 - Cas où $X = S_2$. Alors Y est isomorphe à S_2 : Théorème de Lüroth.

7 - Toujours dans le cas $X = S_2$. Déterminer les sous-groupes finis G qui opèrent sur la sphère et les quotients X/G correspondants.

8 - Déterminer les groupes finis qui opèrent sur $\mathbb{C}(t)$.

9 - Calculer les invariants de $\mathbb{C}(t)$ par G pour chaque groupe fini G ce qui détermine z fraction rationnelle en t telle que

$\mathbb{C}(z) \to \mathbb{C}(t)$ soit une extension algébrique de groupe de Galois G.

§ 2 - *Définitions*.

2.1.- *Revêtements*.

. B un espace topologique. Un revêtement X de B est un fibré à fibres discrètes sur B. Autrement dit $X \xrightarrow{\pi} B$ est un revêtement de B si quelque soit $b \in B$, il existe un voisinage U de b dans B, un ensemble discret F et un homéomorphisme φ de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times F$ tel que le diagramme soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

On appelle degré de X en b le cardinal de F.

Si B est connexe le degré ne dépend pas de b ; d est le degré du revêtement.

Le revêtement est dit fini si d est fini.

. B est un espace topologique X et Y , 2 revêtements de B.

$f : X \to Y$ est un morphisme de revêtements si f est continue et rend le diagramme $\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$ commutatif :

$\forall\ b \in B\ ,\quad f|_b : \pi^{-1}(b) = X(b) \to Y(b) = \pi'^{-1}(b).$

Si f_b est bijectif : f est un <u>isomorphisme de revêtements</u>.

. X un revêtement de B et $\psi : B' \to B$ où B' est un espace topologique et ψ continue.

On définit X' revêtement de B' à partir de X par <u>changement de base</u> $\forall\ b' \in B'$, $X'(b') = X(\psi(b'))$

$$\begin{array}{ccc} X' = X \underset{B}{\times} B' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow[\psi]{} & B \end{array}$$

. B connexe, simplement connexe. <u>Le groupe fondamental</u> $\pi_1(B,b_o)$ des classes d'homotopie des lacets autour de b_B <u>opère sur les fibres d'un revêtement</u> X, $\gamma \in \pi_1(B,b_o)$. γ_X est une permutation sur la fibre $X(b_o)$ telle que le diagramme soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X(b_o) & \xrightarrow{\gamma_B} & X(b_o) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_{b_o}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_{b_o}} \\ Y(b_o) & \xrightarrow[\gamma_Y]{} & Y(b_o)\ . \end{array}$$

Si X est connexe, $\pi_1(B,b_o)$ opère transitivement sur les fibres.

2.2.- *Revêtement ramifié fini.*

. Soient X et Y, 2 variétés complexes (variétés pour lesquelles chaque carte est homéomorphe a un ouvert de $\mathbb{C}$ et ou les changements de cartes sont des homéomorphismes).

f une application continue de X dans Y.

(U,φ) une carte de X ; (V,Ψ) une carte de Y.

On appelle expression de f dans ces cartes, l'application définie sur $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ à valeurs dans $\Psi(V)$ qui à $z = f(x)$ fait correspondre $\Psi(f(x))$

$$\begin{tikzcd} X \supset U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \varphi(U) \arrow[d, "\dot{f}"] \\ V \arrow[r, "\Psi"'] & \Psi(V) \end{tikzcd}$$

. Soient B et X, 2 variétés complexes $\pi : X \to B$ une application continue.

X est un revêtement ramifié fini de B si pour tout point $x \in X$, il existe une carte complexe de X centrée en x et une carte complexe de B centrée en $\pi(x)$ telle que l'expression de π dans ces cartes soit de la forme $z \to z^r$

$$\begin{tikzcd} X \supset & x \arrow[r, "\varphi"] & \bigcirc \subset \mathbb{C} \arrow[d, "\dot{\pi}"] & z \arrow[d] \\ B \supset \arrow[from=u, "\pi"'] & \pi(x) \arrow[r, "\Psi"] & \bigcirc \subset \mathbb{C} & z^r \end{tikzcd}$$

. En tout point $x \in X$ l'indice de ramification r est indépendant du choix des cartes.

. L'ensemble des points où $r > 1$ est fini sa projection sur B est l'ensemble de ramification.

. Pour tout point de ramification $x \in X$, il existe un voisinage de x dans X dans lequel x est le seul point de ramification.

. Si B est compact, l'ensemble de ramification est fini.

2.3.- *Surface de Riemann - Fonctions méromorphes sur une surface de Riemann.*

. Une surface de Riemann est une variété complexe munie d'un atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. (On dit aussi une variété $\mathbb{C}$-analytique de dimension 1).

. On appelle fonction méromorphe sur X une fonction f définie sur $X-\Delta$ où Δ est un ensemble discret, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dont l'expression dans toute carte (U,ψ) de X est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}(X)$: l'ensemble des fonctions méromorphes sur X
Si X est connexe, $\mathcal{M}(X)$ est un corps.

Exemple : L'image de S^2 par la projection stéréographique est une surface de Riemann : c'est la sphère de Riemann.

. Le corps des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann est un corps de fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}(z)$.

§ 3 - *Construction de la surface de Riemann au-dessus de* S_2 , *associée à une extension algébrique de degré* d *de* $\mathbb{C}(z)$.

3.1.- *Construction d'un revêtement de degré* d *de* $S_2-\Delta$ *où* Δ *est fini.*

Soit θ un élément primitif de L

$P(T)$ son polynôme minimal

$$P(T) = T^d + a_1T^{d-1} + a_2T^{d-2} + \dots + a_d$$

où les $a_i = a_i(z) \in \mathbb{C}(z)$.

$$\begin{tikzcd} L \\ \mathbb{C}(z) \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

Appelons Δ l'ensemble des points $b \in S_2$ pôles pour l'un des a_i ou tels que $P_b(T) = T^q + a_1(b)T^{d-1} + \dots + a_d(b) \in \mathbb{C}[T]$ ait des racines multiples. Les pôles pour l'un des a_i sont en nombre fini.

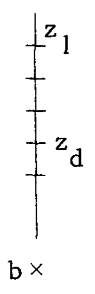
Les points b pour lesquels le polynôme $P_b(T) \in \mathbb{C}[T]$ a des racines multiples sont aussi en nombre fini : ce sont les racines du polynôme $\phi(u)$ obtenu en éliminant T entre $P(T,u) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial u} P(T,u) = 0$.

Δ est un ensemble fini.

Notons $S(L,\theta)$ le sous-espace de $(S_2-\Delta) \times \mathbb{C}$ formé des couples (b,z) tels que $P_b(z) = 0 = P(b,z)$.

<u>$S(L,\theta)$ est un revêtement de</u> $S_2-\Delta$ <u>de degré d</u>.

$$\begin{tikzcd} S(L,\theta) \arrow[d, "\pi"'] \\ S_2 - \Delta \end{tikzcd}$$



la fibre au-dessus de $b \in S_2 - \Delta$ est constituée des d racines distinctes du polynôme $P_b(T)$

$\forall\ b \in S_2 - \Delta$, il existe un voisinage U de b, $U \subset S_2 - \Delta$ tel que $\pi^{-1}(U)$ soit homéomorphe à $U \times F$ où F est 1 ensemble discret à d éléments.

$$\psi : S(L,\theta)\big|_{S_2-\Delta} \longrightarrow S(L,\alpha)$$

$$(b,z) \rightsquigarrow (b,z) = (b,R(z))$$

ψ est bien définie : $(b,z) \in S(L,\theta)$ $P(b,z) = 0$; $Q(\alpha) = 0 = Q(R(\theta))$ comme polynôme en T à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ donc P divise $Q \circ R$ comme $P(b,z) = 0$, $Q(b,R(z)) = 0$ soit $\psi(b,z) \in S(L,\alpha)$.

De plus $\psi\big|_b$ est un isomorphisme sur les fibres qui contiennent toutes d éléments

$S(L,\theta)(b)$: d racines distinctes de $P(b,T)$

$S(L,\alpha)(b)$: d racines distinctes de (b,T).

3.2.- *Prolongement de ce revêtement en un revêtement ramifié de degré d de S_2.*

Les points de ramification sont dans Δ, sont en nombre fini. $\forall\, b \in \Delta$, il existe un voisinage U de b dans S_2 dans lequel il n'y a pas d'autre point de Δ.

Le problème revient donc à prolonger le revêtement au-dessus de $U-\{b\}$ en un revêtement ramifié au-dessus de U.

. Pour cela, considérons le revêtement de degré de

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} - \{0\} & & z \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ D - \{0\} & & z^d \end{array}$$

ce revêtement se prolonge en un revêtement ramifié

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} & & z \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ D & & z^d \end{array}$$

. Soit V la restriction de $S(L,\theta)$ à $U - \{b\}$

V est un revêtement de $U - \{b\}$.

On peut identifier $U - \{b\}$ à $D - \{0\}$

V est un revêtement isomorphe à $(\tilde{D} - \{0\},\ z \to z^d)$.

En effet, les fibres en $b' \in D - 0$ de V et de $\tilde{D} - \{0\}$ ont même cardinal d , $\pi_1(D - \{0\}, b')$ est isomorphe à Z, il opère transitivement sur $V(b')$ et sur $(\tilde{D} - \{0\})(b')$.

Les fibres sont isomorphes, les revêtements sont isomorphes.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & \tilde{D} - \{0\} \arrow[d] & z \arrow[d, mapsto] \\ & D - \{0\} & z^d \end{tikzcd} .$$

On définit donc un revêtement ramifié de U, $\tilde{V}$ en prolongeant au point de ramification.

Notons $\tilde{S}(L,\theta)$ ce revêtement ramifié de S_2.

3.3.- $\tilde{S}(L,\theta)$ *est une surface de Riemann.*

Il s'agit donc de définir sur $\tilde{S}(L,\theta)$ un atlas analytique. Soit $x_o \in \tilde{S}(L,\theta)$, $b_o = \pi(x_o)$, φ_o et Ψ_o des cartes topologiques de S_2 et $\tilde{S}(L,\theta)$ respectivement centrée en b_o et x_o, de domaine U_o et V_o telle que l'expression de π dans ces cartes soit $z \to z^r$ (si b_o est 1 point de ramification $r > 1$, sinon $r = 1$).

Soit φ une carte analytique de S_2 centrée en b_o , de domaine $U \subset U_o$.

Il existe une carte topologique Ψ centrée en x_o de domaine $V = V_o \cap \pi^{-1}(U)$ telle que l'expression de π dans ces cartes soit $z \to z^r$ (On prend toujours des cartes qui ne contiennent au plus qu'un seul point de ramification b_o).

$$\begin{tikzcd} \times x_o \arrow[r, "\Psi_o"] \arrow[d, "\pi"'] & z \arrow[d, dashed] \\ b_o \arrow[r, "\varphi_o"] & z^r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \ \times x_o \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{D} \arrow[d] & r \arrow[d, dashed] \\ \times b_o \arrow[r, "\varphi"] & D & z^r \end{tikzcd}$$

Pour prouver l'existence de cette carte (Ψ, V). On construit un ψ-isomorphisme entre les 2 revêtements $V - \{x_o\}$ et $\tilde{D} - \{0\}$ de $U - \{b_o\}$ et $D - \{0\}$ respectivement et on prolonge ce φ-isomorphisme en x_o.

Ce qui nous donne un homéomorphisme Ψ de V sur $\tilde{D}$. On montre que ces cartes (Ψ, V) sont analytiques et que pour cette structure de surface de Riemann de $\tilde{S}(L,\theta)$, π est analytique (Douady 6.1.9).

Nous noterons X cette surface de Riemann.

§ 4 - *Le corps des fonctions méromorphes sur* X *est* L.

Soit $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X.

4.1.- $\mathcal{M}(X)$ *est une extension de* $C(z)$ *de degré* $\leq d$.

- $\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(X)$
- Soit $f \in \mathcal{M}(X)$

Δ_f l'ensemble des pôles de f, $\Delta_f \subset S_2$

Δ_r l'ensemble des points de ramification de X, $\Delta_r \subset S_2$

$\Delta = \Delta_r \cup \Delta_f$

$\forall\, b \in S_2 - \Delta$ la fibre de X au-dessus de b a d points distincts.

Posons $P_b(T) = \prod_{i=1}^{d} (T - f(x_i))$

à partir de cette expression $P_b(T)$, on définit un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ dont f est racine

$$P_b(T) = \prod_{i=1}^{d} (T - f(x_i)) = T^d + \prod_{i=1}^{d} (-1)^i a_i(b) T^{d-i} \quad \text{où les } a_j(b)$$

sont les j-ièmes fonctions symétriques des $f(x_i)$.

On pose alors $P(T) = T^d + \sum_{i=1}^{d} (-1)^i a_i T^{d-i}$

degré $P = d$

f est racine de P et les a_i sont méromorphes sur S_2 (cf. Douady 6.2.3.), donc $\mathcal{M}(X)$ est une extension de $\mathbb{C}(z)$ de degré $\leqslant d$.

4.2.- $\mathcal{M}(X)$ <u>est isomorphe à</u> L.

Pour montrer que $\mathcal{M}(X)$ est isomorphe à L, il suffit de construire une application $\psi : L \to \mathcal{M}(X)$ qui soit injective, A un élément primitif θ de L, on associe une fonction méromorphe particulière Z définie de la façon suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(X) & L \arrow[l, hook', "\psi"'] \\ & \mathbb{C}(z) \arrow[u] \arrow[ul, "s \leqslant d"] \end{tikzcd}$$

$$Z : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(b,z) \rightsquigarrow z \qquad (b,z) \text{ tel que } P_b(z) = 0.$$

Cette fonction Z est méromorphe sur X

et $\psi : L \to \mathcal{M}(X)$

$\theta \rightsquigarrow Z$ est injective (cf. Douady 6.2.8).

<u>*Remarque*</u> : La construction de X au-dessus de S_2 aurait pu se faire de la même manière au-dessus d'une surface de Riemann B compacte quelconque.

§ 5 - X *une surface de Riemann* - G *un groupe fini opérant sur* X. *Alors* X/G *est une surface de Riemann et* $\pi : X \to X/G$ *est analytique* Douady R. et A. [8].

5.1.- *Position du problème.*

. X une surface topologique séparée. G un groupe fini opérant sans point fixe sur X, X/G est une surface topologique, X est un revêtement fini de X/G d'ordre l'ordre de G.

En effet, soit $y \in X/G = Y$, x un représentant de y dans X. x possède un voisinage U homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. G opère sans point fixe alors tous les $g.U$ $(g \in G)$ sont des ouverts disjoints donc $\pi(U)$ est un ouvert de X/G pour la topologie quotient (l'image réciproque de $\pi(U)$ est une réunion finie d'ouverts disjoints).

$\pi(U)$ est homéomorphe à U qui est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc tout point y de X/G possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

X/G est une surface topologique.

$\forall$ V ouvert de X/G ; $\pi^{-1}(V) \simeq V \times G$

X est un revêtement fini de X/G de fibre G.

. Soit X une surface de Riemann G un groupe fini.

On définit sur X/G une structure de surface de Riemann telle que X soit un revêtement ramifié analytique de X/G ; l'ensemble de ramification Δ étant constitué des points y tels que dans la fibre $\{x_1,\dots,x_r\}$ au-dessus de y, il existe au moins un $x_i \in X$ tel que le stabilisateur de x_i dans G ne soit pas réduit à l'identité.

. G opère transitivement sur chaque fibre (par construction).

Deux points quelconques x_i et x_j dans une même fibre au-dessus de y ont des stabilisateurs conjugués, ils ont même ordre si $(x_1,\dots,x_r)$ = fibre en $y \in X/G$, l'indice de ramification du revêtement X de X/G en y est égal à l'ordre des stabilisateurs des x_i.

Soit Δ l'ensemble de ramification

$\Delta = \{y \in X/G$ tel que pour $x \in X$, $\pi(x) = y$, $S_x \neq \{id\})$.

Soit D l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe au moins un $\gamma \in G$. $\gamma \neq id$ tel que $\gamma x - x = 0$.

γ est analytique sur X (γ est un automorphisme de surface de Riemann)

γ-id n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés.

D est une réunion finie d'ensemble de points isolés, D est un ensemble de points isolés.

Si X est compacte, alors D est un ensemble fini et $\Delta = \pi(D)$.

Si X est compacte, X est un revêtement ramifié analytique fini de X/G.

5.2.- *Proposition*.- X une surface de Riemann connexe. G un groupe fini d'automorphismes de X.

Alors $Y = X/G$ est une surface topologique et il existe sur Y une structure $\mathbb{C}$-analytique et une seule telle que $\pi : X \to Y$ soit analytique.

Lemme.- Soit X une surface de Riemann, x_o un point de X, H un groupe fini d'automorphismes de X laissant x_o fixe.

Alors, il existe une carte φ de X centrée en x_o de domaine U stable par H telle que les expressions des éléments de H soient des applications $z \to \zeta z$ où ζ est une racine s-ienne de l'unité (si s est l'ordre de H) et H est cyclique.

Démonstration du lemme :

. X une surface de Riemann $x_o \in X$, φ une carte de X centrée en x_o de domaine U_o ; H d'ordre s.

Posons $U_1 = \bigcap_{g\in H} gU_o$, U_1 est stable par H c'est un ouvert contenant x_o ; $\forall x \in U_1$ posons $p(x) = \prod_{g\in H} \varphi(gx)$; p est analytique sur U_1 et admet x_o comme zéro d'ordre s, on peut écrire $p(x) = (\varphi_1(x))^s$ dans un voisinage U_2 de x_o où φ_1 admet un zéro d'ordre 1 en x_o.

φ_1 définit un homéomorphisme d'un ouvert u_3 dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ qui contient un disque de rayon r. Soit $U = \{x \in X | \varphi_1(x) < r\}$.

U est un ouvert de X stable par H.

(φ_1, U) est une carte de domaine U centrée en x_o stable par H.

. $x \in U$, $g \in H$, calculons $\varphi_1(g.x)$

$$(\varphi_1(g.x))^s = p(g.x) = p(x) = (\varphi_1(x))^s$$

donc $\varphi_1(g.x) = \zeta_{g,x}.\varphi_1(x)$ où $\zeta_{g,x}$ est une racine s-ienne de l'unité $\zeta_{g,x}$ est indépendante de x dans U.

L'expression de $g : U \to U$ dans la carte (U, φ) est $z \to \zeta_{g.z}$

. l'application $H \longrightarrow \{$les racines s-ienne de l'unité$\}$

$g \rightsquigarrow \zeta_g$ est un homomorphisme.

Si $\zeta_g = 1$ c'est que $\varphi_1(gx) = \varphi_1(x)$; $\forall\, x \in U$ donc $g = id$ sur U donc $g = id$ sur X donc $H \to \mu_s$ est injectif, les groupes sont finis donc H est isomorphe à μ_s cyclique.

Démonstration de la proposition :

. Pour $y \in Y = X/G$ définissons une carte topologique centrée en y

$$\begin{array}{c} X \\ \pi \big\downarrow \\ X/G \end{array} \qquad \text{soit } \{x_1,\dots,x_r\} = \pi^{-1}(y)$$

S_1 le stabilisateur de x_1 dans G, s l'ordre S.
Si S_j est le stabilisateur de x_j dans G, S_1 et S_j sont conjugués, ils ont même ordre s, $\{x_1,\dots,x_r\}$ s'identifie à G/S.

Soit (φ_1, U_1) une carte centrée en x_1 ayant les propriétés du lemme : carte telle que l'expression des éléments de S soit de la forme $z \to \zeta z$ où $\zeta^s = 1$.

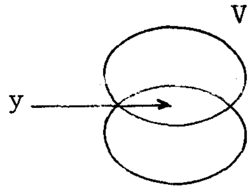
U_1 est stable par S : posons $U_k = g.U_1$ si $g(x_1) = x_k$.
Quitte à rétrécir les U_k, on peut les supposer disjoints soit
$W = \bigcup_{k=1}^{r} U_k$.

W est saturé $\pi(W) = V$ est un ouvert de $Y = X/G$ pour la topologie quotient.

On définit $\Psi : V \to$ ouvert de $\mathbb{C}$ de façon unique par le fait qu'elle rende le diagramme commutatif et que l'expression de π dans les cartes soit de la forme $z \to z^s$

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \Omega \subset \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle z \mapsto z^s} \\ V & \xrightarrow{\Psi} & O \subset \mathbb{C} \end{array}$$

. les cartes (V,Ψ) forment un atlas analytique



$$\begin{array}{llll} V \xrightarrow{\Psi} & \Psi(y) = (\varphi_k(x_k))^s \simeq (\zeta_k z)^s & \simeq & z^s \\ & & & \downarrow \\ V' \xrightarrow[\Psi']{} & \Psi'(y) = (\varphi_\ell(x_\ell))^s \simeq (\zeta_\ell z')^s & \simeq & z'^s \end{array}$$

s = ordre du stabilisateur est constant sur la fibre au-dessus de y.

le changement de cartes est analytique

donc $\pi : X \to X/G$ est analytique.

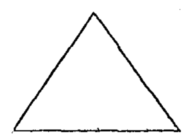
§ *6* - X *est la sphère de Riemann* S_2. *Tout quotient de* S_2 *par un groupe fini* G *est isomorphe à* S_2. *Théorème de Luröth.*

Douady R. et A. [8].

6.1.- Triangulation d'une surface de Riemann. Formule de Hurtwiz.

Définition.- Soit X une surface de Riemann, une triangulation τ est la donnée - d'un triangle T de référence

$e^{i\frac{\pi}{3}}$



0 1

- d'une famille $(s_i)_{i\in I_0}$ de points de X : les sommets de τ
- d'une famille $(a_j)_{j\in I_1}$ d'applications continues injectives de $[0,1]$ dans X : les arêtes de τ.

- d'une famille $(f_k)_{k\in I_2}$ d'applications injectives de T dans X, I_o, I_1, I_2 sont des ensembles finis ;

  $k_o(\tau) = \{s_i\}_{I_o}$, $k_1(z) = \bigcup_{j\in I_1} a_j([0,1])$, $k_2(\tau) = \bigcup_{k\in I_2} f_k(T)$

  vérifiant les propriétés suivantes :

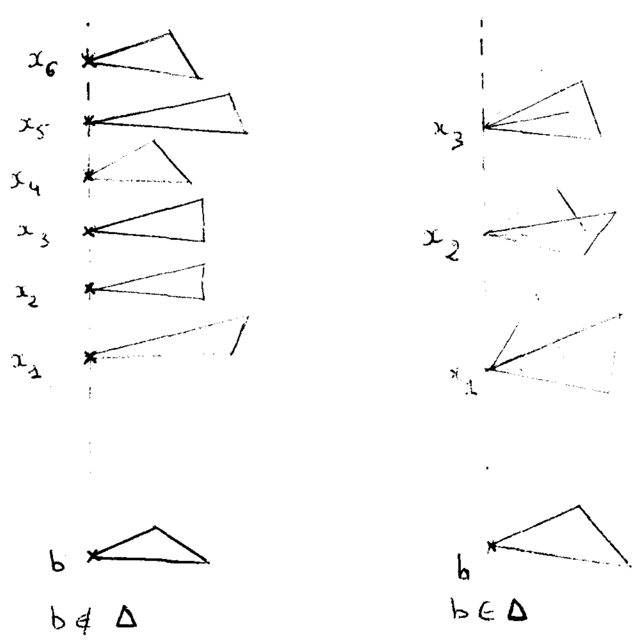
- $\forall j \in I_1$ $a_j(0)$ et $a_j(1)$ sont des sommets
- l'image d'un côté du triangle de référence T par f_k est une arête
- les $a_j(]0,1[)$ sont disjoints et ne rencontrent pas $k_o(\tau)$
- les $f_k(\overset{\circ}{T})$ sont disjoints et ne rencontrent pas $k_1(\tau)$
- $k_2(\tau) = X$

Remarque.- Si τ est une triangulation, quelque soit $x \in X$ $\tau \cup \{x\}$ est encore une triangulation.

Propriété.- Toute surface de Riemann compacte admet une triangulation. Soit X une surface de Riemann compacte, X/G la surface de Riemann quotient.

Il existe une triangulation τ de X/G telle que $\Delta \subset k_o(\tau)$ Δ = ensemble de ramification de X/G.

Cette triangulation τ se relève en une triangulation τ' de X de la façon suivante



ordre de $G = 6$

$k_2(\tau') = dk_2(\tau)$ $\qquad$ d = ordre de G

$k_1(\tau') = dk_1(\tau)$

$k_o(\tau') = dk_o(\tau) - \sum_{x\in\Delta'} (e_x - 1)$ $\qquad$ Δ' = ensemble de ramification de X

(dans l'exemple ci-dessus $\Delta' \ni \{x_1, x_2, x_3\}$ $\quad e_{x_i} = 2$).

Une surface est caractérisée topologiquement par sa caractéristique d'Euler χ et par son genre g.

$$\chi(X) = k_o - k_1 + k_2$$

$$\chi = 2-2g.$$

d'où la relation qui lie les genres de X et de X/G entre eux

$$2g(X)-2 = d(2g(X/G)-2) + \sum_{x\in\Delta'} (e_x - 1)$$

Soit encore $\underline{g(X)-1 = d(g(X/G)-1) + \frac{1}{2} \sum_{x\in\Delta'} (e_x - 1)}$.

C'est la formule du genre de Hurwitz.

Δ : ensemble des points de ramification de X/G que l'on notera b.

Dans une même fibre au-dessus de b, les indices de ramification sont les mêmes pour tous les $x \in \Delta'$ tels que $\pi(x) = b$, $e(x) = e(b)$ l'indice ne dépend que de $b \in \Delta$

$$\sum_{x\in\Delta} (e_x - 1) = \sum_{b\in\Delta} \Big(\sum_{\substack{x \\ \pi(x)=b}} (e(x)-1)\Big) - \sum_{b\in\Delta} \frac{d}{e(b)} (e(b)-1)$$

et donc

$$g(X)-1 = d(g(X/G)-1) + \frac{1}{2} \sum_{b\in\Delta} \frac{d}{e(b)} (e(b)-1).$$

Dans le cas où $X = S_2$, $g(X) = 0$ et

$$-\frac{2}{d} + 2 = g(X/G) + \sum_{b\in\Delta} \Big(1 - \frac{1}{e(b)}\Big).$$

Comme $g(X/G)$ est un entier positif ou nul, il ne peut être que nul donc X/G est de genre 0, X/G estisomorphe à la sphère de Riemann et

$$-\frac{2}{d}+2=\sum_{b\in\Delta}\left(1-\frac{1}{e(b)}\right).$$

6.2.- *Théorème de Luröth.*

. Forme géométrique :

S_2 est la sphère de Riemann. TOut quotient de S_2 est isomorphe à S_2 (S_2 est la seule surface compacte de genre 0). C'est la conclusion de ce qui est fait ci-dessus.

. Forme algébrique :

Tout sous corps de $\mathbb{C}(t)$, transcendant sur $\mathbb{C}$ et contenant $\mathbb{C}$ est de la forme $\mathbb{C}(z)$ où z est une fraction rationnelle en t

$$\begin{tikzcd} X = S_2 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{M}(S_2) = \mathbb{C}(t) \\ X/G = Y \simeq S_2 \arrow[r, squiggly] & \mathcal{M}(Y) = \mathbb{C}(z) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}(S_2)$ = fonctions méromorphes sur S_2, $\mathbb{C}(t)$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(z)$ de degré d, d = ordre de G, $Y = X/G$.

. On peut aussi en donner une démonstration purement algébrique [Samuel [9]].

k un corps, x transcendant sur k, K un sous corps de $k(x)$, alors K est une extension transcendante pure de k, $K = k(u)$ où u est une fraction rationnelle en x.

x est algébrique sur K, $[k(x) : k] = n$, f son polynôme minimal

$f = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \dots + c_o$

$$c_i \in K \qquad K \subset k(x) \qquad c_i = \frac{g_i(x)}{g_n(x)} \quad g_i \in k[T]$$

les g_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. Soit

$$f_o(x,T) = g_n(x)T^n + g_{n-1}(x)T^{n-1} + \dots + g_o \quad f_o(x,T) \in k[x,T]$$

l'un des c_i au moins n'est pas dans k sinon x serait algébrique sur k. Soit c_p

$$c_p = \frac{g_p(x)}{g_n(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

soit $f_1(x,T) = g(x)\ h(T) - h(x)\ g(T) \in k[x,T]$

$$f_1(x,T) = h(x)\left[c_p h(T) - g(T)\right]$$

comme $c_p\ h(x) - g(x) = 0$, f divise $c_p\ h - g$ dans $K[T]$

$$f_o(x,T) \text{ divise } f_1(x,T) \text{ dans } k(x)[T]$$

$$f_1(x,T) = q(x,T)\ f_o(x,T) \qquad q(x,T) \in k(x)[T]$$

$$f_1(x,T) = \frac{q_o(x,T)}{\psi(x)}\ f_o(x,T)$$

$$\psi(x)\ f_1(x,T) = q_o(x,T)\ f_o(x,T) \qquad \text{dans } k[x,T]$$

Les coefficients $g_i(x)$ de f_o sont premiers entre eux donc $\psi(x)$ divise tous les coefficients de q_o considéré comme polynôme en T donc $q(x,T) \in k[x,T]$ et $f_1(x,T) = q(x,T)\ f_o(x,T)$ dans $k[x,T]$ et donc $\deg_x f_o \leqslant \deg_x f_1$. D'autre part :

$$\deg_x f_1 \leqslant \max(\deg g, \deg h) = \max(\deg g_p, \deg g_n) \leqslant \underset{\displaystyle \deg_x f_o}{\underset{\|}{\max(\deg g_i)}}$$

d'où $\deg_x f_o = \deg_x f_1$ et alors

$$f_1(x,T) = q(T)\ f_o(X,T)$$

$$g(X)h(T) - g(T)h(x) = q(T)\ f_o(x,T)$$

dans le premier membre, il n'existe pas de facteur dépendant uniquement de T donc $q(T)$ est une constante et $\deg_T f_o = \deg_T f_1$

or

$$\begin{tikzcd} k(c_p) \arrow[r, phantom, "\subset"] & K \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[r, dashed, bend right, "\deg_T f_o"'] & k(x) \arrow[ll, dashed, bend right, "\deg \leqslant \deg_T f_1"'] \end{tikzcd}$$

alors $k(c_p) = K$ où c_p est une fraction rationnelle en x.

§ 7 - *Détermination des groupes finis opérant sur la sphère* S_2 *et des quotients* S_2/G *correspondants*. Klein [10].

7.1.- *Détermination des groupes* G.

La formule du genre de Hurwitz nous donne

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{y \in \Delta} \left(1 - \frac{1}{e_y}\right)$$

où n est l'ordre du groupe G, Δ l'ensemble de ramification de S_2/G et e_y l'indice de ramification de y c'est-à-dire l'ordre de multiplicité des points x dans la fibre au-dessus de y, $e_y > 1$.

Les points de ramification sont en nombre fini : $y_1,\dots,y_k$

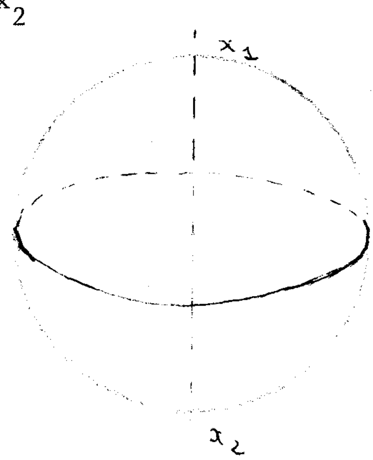
$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right)$$

$\forall i$ on a $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{e_i} < 1$, d'autre part $1 \leqslant 2 - \frac{2}{n} < 2$ $(n > 1)$ donc $1 < k < 4$ soit $k = 2$ ou $k = 3$. Il existe donc <u>2 ou 3 points de ramification</u> dans S_2/G.

1) <u>$k = 2$: 2 points de ramification chacun d'indice</u> n.

La fibre au-dessus de y_1 (resp. y_2) ne contient qu'un point x_1 (resp . x_2) x_1 et x_2 sont stables par G.

G peut être identifié au groupe des rotations de S^2, d'ordre n autour de l'axe x_1x_2



2) $k = 3$: 3 points de ramification y_1, y_2, y_3

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} = 1 + \frac{2}{n}$$

a) <u>$e_1 = e_2 = 2$ $\qquad e_3 = \frac{n}{2} = n'$ $\qquad n = 2n'$</u>

y_1 d'indice 2, la fibre en y_1 a n' points $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{n'}$

y_2 d'indice 2, la fibre en y_2 a n' points $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^{n'}$

y_3 d'indice n', la fibre en y_3 a 2 points x_3^1, x_3^2

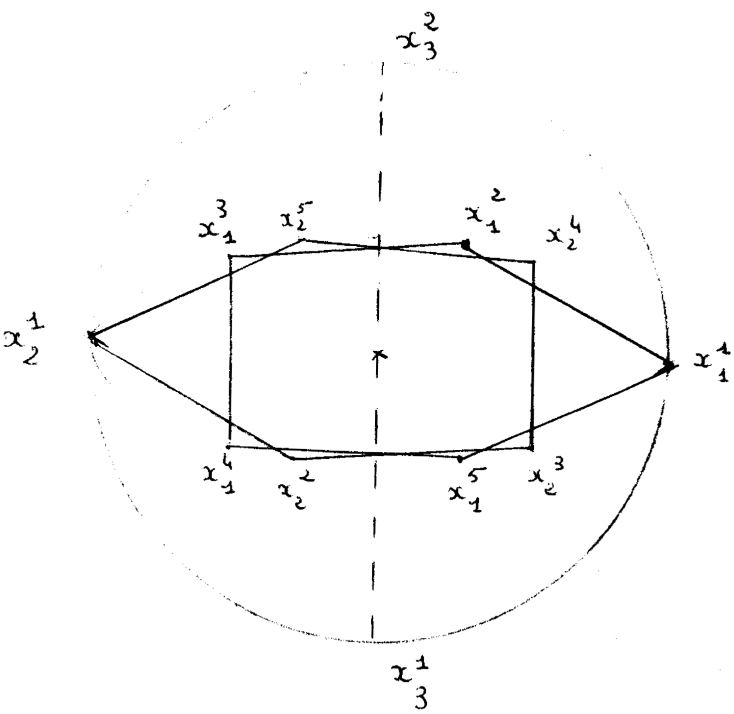
G est alors le groupe Diédral $D_n = D_{2n'}$. D_n contient 2 types de transformations : rotations $C_{n'}$ autour de l'axe $x_3^1 x_3^2$ et des symétries.

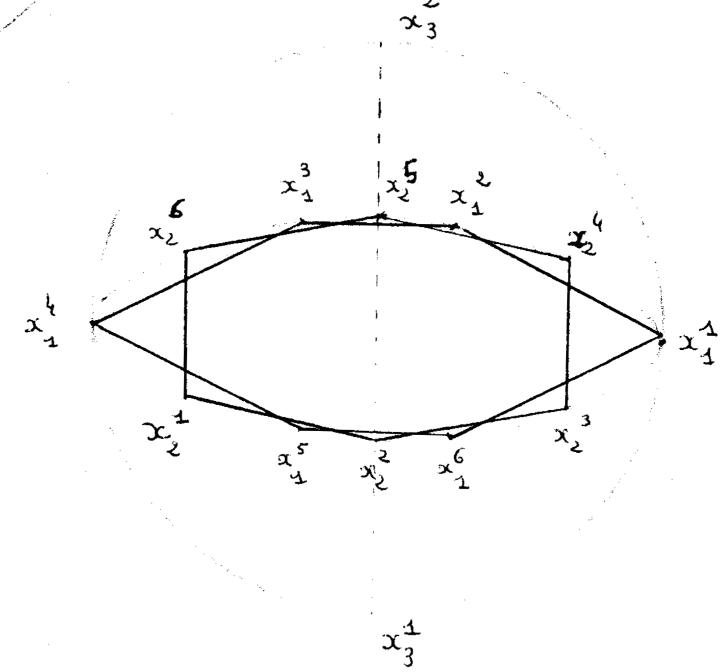
On distingue 2 cas suivant que n' est pair ou impair

. si n' impair, symétrie par rapport aux $x_1^\ell x_2^\ell$ qui sont alors des axes de la sphère

. si n est pair, symétrie par rapport aux axes joignant x_i^ℓ au milieu de $x_j^\ell\, x_j^{\ell+1}$.

Exemples pour $n' = 5$ et $n' = 6$.





b) $e_1 = 2, \quad e_2 = e_3 = 3, \quad n = 12$

y_1 d'indice 2, la fibre en y_1 a 6 points $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^6$

y_2 d'indice 3, la fibre en y_2 a 4 points $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^4$

y_3 d'indice 3, la fibre en y_3 a 4 points $x_3^1, x_3^2, \dots, x_3^4$

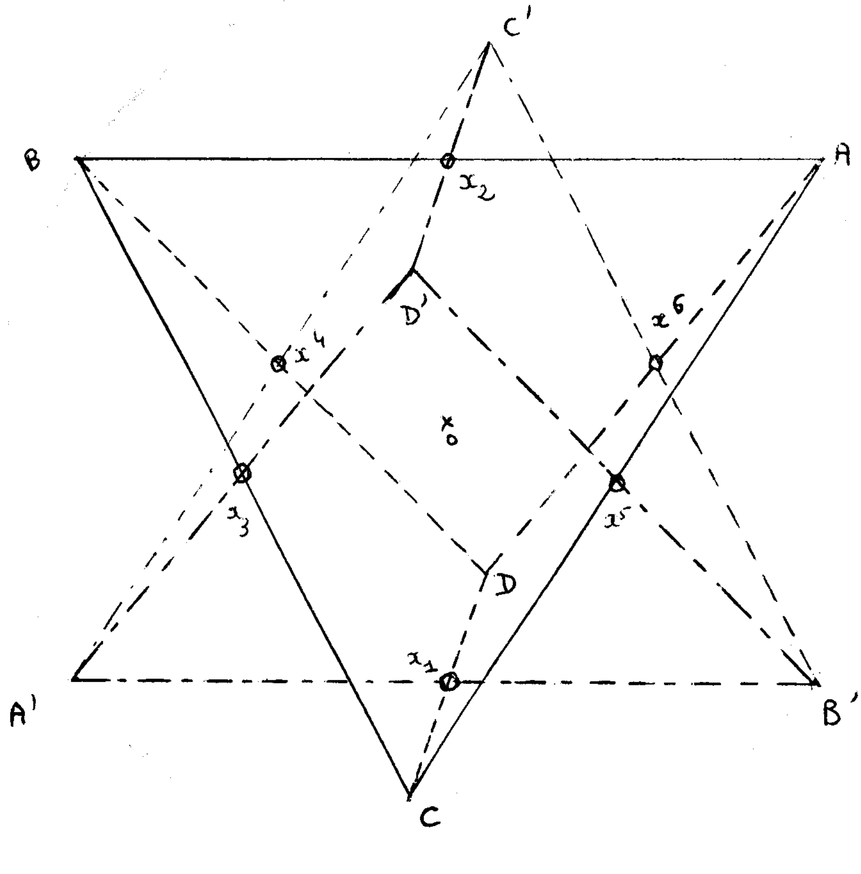
G est le groupe du tétraèdre T.

Si A B C D est un tétraèdre. Description de G

→ la fibre en y_2 est constituée des 4 sommets A B C D qui sont chacun invariant par un sous-groupe d'ordre 3 (rotations $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, id) autour d'un axe passant par le centre O de la sphère et le sommet en question.

→ la fibre en y_3 est constituée des quatre points A', B', C', D' diamétralement opposés sur la sphère aux points A B C D, chacun invariant par le sous-groupe des rotations d'ordre 3 autour des aces A'O, B'O, C'O, D'O.

→ la fibre en y_1 est constituée des 6 points obtenus sur la sphère en joignant le milieu d'une arête au centre O et en prolongeant cet axe. Chaque point est invariant par la symétrie par rapport à cet axe et qui échange 2 à 2 les sommets du tétraèdre (a milieu de AB, la symétrie par rapport à aO échange (A et B) et (C et D).


C'
B
A
x_2
D'
x^6
x^4
x_0
x_3
x^5
D
x_1
A'
B'
C

c) $\underline{e_1 = 2, \quad e_2 = 3, \quad e_3 = 4, \quad n = 24}$

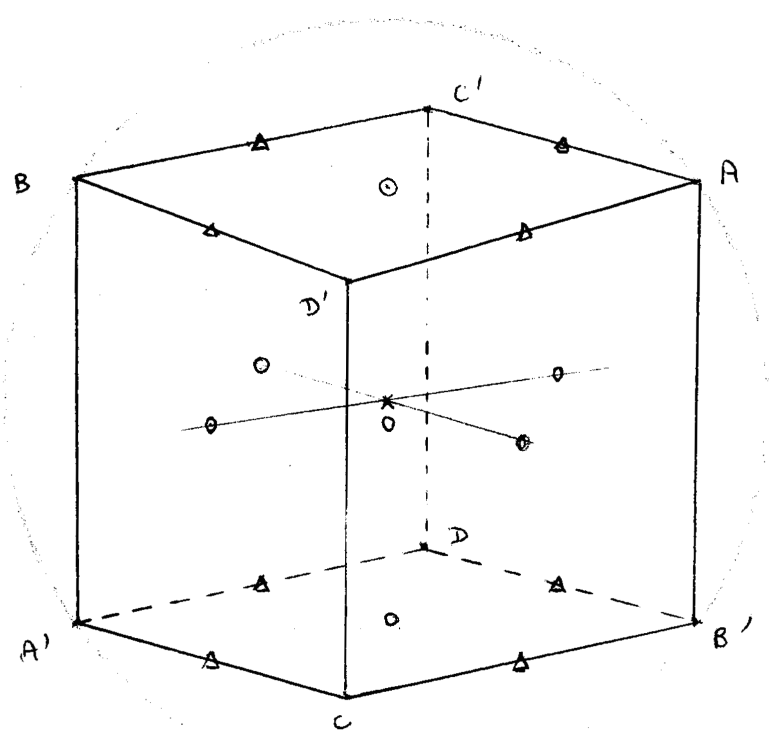
G est le groupe de l'octaèdre (ou du cube) : C

y_1 d'indice 2 : 12 points dans la fibre, chacun stable par un sous-groupe d'ordre 2

12 milieux des arêtes stables par la symétrie par rapport à l'axe joignant le milieu de l'arête au centre de la sphère O

y_2 d'indice 3 : 8 points dans la fibre : sommets du cube stable chacun par un groupe d'ordre 3 : rotations de $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe joignant ce sommet au centre de la sphère

y_3 d'indice 4 : 6 points dans la fibre : les points sur la sphère obtenus en prolongeant l'axe joignant le milieu des faces au centre de la sphère. Chacun stable par le sous-groupe des rotations d'ordre 4.



Δ = fibre en y_1

O = fibre en y_3

d) $e_1 = 2, \quad e_2 = 3, \quad e_3 = 5, \quad n = 60$

G est le groupe de l'icosaèdre : I

y_1 d'indice 2 : la fibre en y_1 contient 30 points stables chacun par un sous-groupe d'ordre 2, ce sont les milieux des arêtes

y_2 d'indice 3 : la fibre en y_2 contient 20 points stable chacun par un sous-groupe d'ordre 3, ce sont les points sur la sphère obtenus en joignant les milieux des faces au centre de la sphère, le sous groupe est le groupe des rotations $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe. (chaque face est un triangle équilatéra)

y_3 d'indice 5 : la fibre contient 12 points : les 12 sommets de l'icosaèdre stable chacun par le sous-groupe des rotations $\frac{2\pi}{5}$.

En résumé :

G	n	ensemble de ramification	indice des points de ramification
cyclique	n	2	$e_1 = e_2 = n$
diédral	n = 2n'	3	$e_1 = 2, \; e_2 = e_3 = n'$
tétraédral	12	3	$e_1 = 2, \; e_2 = 3, \; e_3 = 3$
octaédral ou cube	24	3	$e_1 = 2, \; e_2 = 3, \; e_3 = 4$
Icosaédral	60	3	$e_1 = 2, \; e_2 = 3, \; e_3 = 5$

§ 8 - Considérons maintenant le point de vue algébrique :

$\mathbb{C}(z) \xrightarrow{G} \mathbb{C}(t)$: $\mathbb{C}(z)$ est un sous-sorps de $\mathbb{C}(t)$, transcendant sur $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}(t)$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(z)$.

G est un sous-groupe fini du groupe des automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ les automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ sont les homographies $h : t \rightsquigarrow t' = \frac{at+b}{ct+d}$ $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

Nous devons donc :

Déterminer les sous-groupes finis du groupe des homographies.

h une homographie, h est représentée par une matrice

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2,\mathbb{C})$

2 matrices proportionnelles définissent la même homographie

On a la suite

$$1 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{C}^*}_{\text{homothéties}} \longrightarrow Gl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \underbrace{\mathbb{P}(Gl(2)}_{\text{homographies}} \longrightarrow 1$$

Si l'on ne considère dans $Gl(2,\mathbb{C})$ que les matrices de déterminant $+1$: $Sl(2,\mathbb{C})$, on a la suite

$$1 \longrightarrow \{-1,+1\} \longrightarrow Sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}\ Gl(2) \longrightarrow 1$$

où $+1$ représente la matrice identité

et -1 représente la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8.1.- *Les sous-groupes de* $\mathbb{P}\ Gl(2)$ *sont conjugués des sous-groupes de* $SU(2,\mathbb{C})$

$$SU(2,\mathbb{C}) = \left\{ \text{matrices} : \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ avec } a\bar{a} + b\bar{b} = +1 \right\}$$

Soit $\varphi : Sl(2,C) \longrightarrow \mathbb{P}\ Gl(2)$

$$\begin{tikzcd} Sl(2,C) \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{P}\ Gl(2) \\ \Gamma \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, no head] & G \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

G sous-groupe de $\mathbb{P}\ Gl(2)$.

Soit f une forme hernitienne définie positive sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$,
$\forall\gamma \in Sl(2,\mathbb{C})$ tel que $\psi(\gamma) \in G$ on définit $\hat{f}^{\gamma}$, $f^{\gamma}(x,y) = f(\gamma(x),\gamma(y))$
et on pose $h = \sum_{\gamma\in\Gamma} f^{\gamma}$,

$$\Gamma = \{\gamma \in Sl(2,\mathbb{C}) \text{ tel que } \psi(\gamma) \in G\}$$

h est invariante par Γ

h est une forme hernitienne définie positive.

Il existe une base orthonormale dans laquelle $h(\tau) = \tau_1\bar{\tau}_2+\tau_2\bar{\tau}_2$.
Soit $Gl(h)$ l'ensemble des automorphismes de $Sl(2,\mathbb{C})$ qui laissent h invariante : $Gl(h) \subset SU(2,\mathbb{C})$ et c'est un sous-groupe de $SU(2,\mathbb{C})$.
Donc à un sous-groupe G de $P\,Gl(2)$ on associe un groupe G' sous-groupe de $SU(2,\mathbb{C})$.

G et G' sont conjugués (par changement de base).

8.2.- Il y a une correspondance entre $SU(2,\mathbb{C})$ *et* $SO(3,\mathbb{R})$.
Plus précisément, on a la suite

$$1 \dashrightarrow \{+1,-1\} \dashrightarrow SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

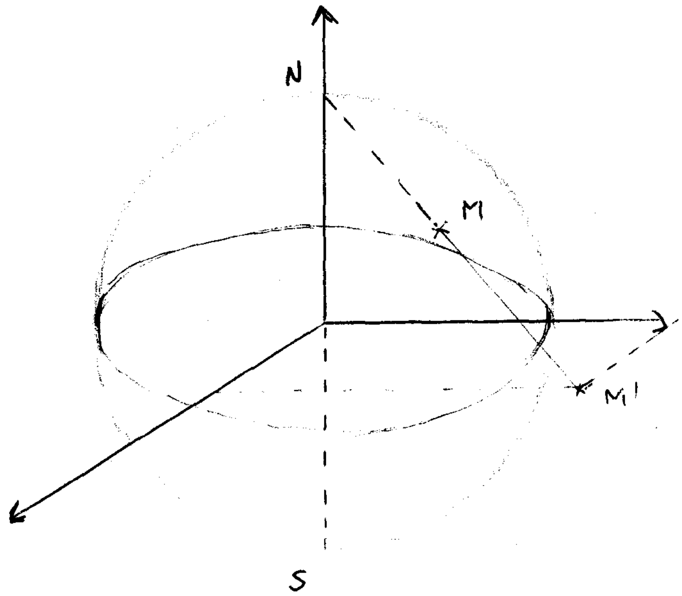
1) à une rotation $\rho \in SO(3,\mathbb{R})$ correspond une homographie à 2 points fixes dont le birapport est de module 1 et $\alpha\bar{\beta} = -1$ et réciproquement.

Soit $\rho \in SO(3,\mathbb{R})$ le groupe des rotations concervant la sphère $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$
Soit $\psi : S_2 \to P_1(\mathbb{C})$ la projection spiréographique

$$M \left| \begin{array}{l} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{array} \right. \rightsquigarrow M' \,|\, x+iy = 2 \qquad \text{avec } x = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

$$x+iy = \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}$$

ψ définit $SO(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{P}\,Gl(2)$
$\rho \rightsquigarrow \psi\,\rho\,\psi^{-1} = \tilde{\rho}$



. On peut toujours se ramener à une rotation ρ d'axe N.S d'angle θ

alors la matrice ρ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour points fixes N et S.

L'homographie $\tilde{\rho}$ a ∞ et 0 pour points fixes et $(\infty,0,\tau,\tilde{\rho}(\tau)) = \dfrac{\tilde{\rho}(\tau)}{\tau}$

$$\tilde{\rho}(\tau) = e^{i\theta}\tau \qquad\qquad (\infty,0,\tau,\tilde{\rho}(\tau)) = e^{i\theta}$$

A une rotation on associe une homographie $\tilde{\rho}$ a deux points fixes, dont le birapport est de module 1 et $\alpha\bar{\beta} = -1$.

Réciproquement : une homographie h ayant 2 points fixes dont le birapport est de module 1 $(\infty,0,\tau,h(\tau)) = e^{i\theta}$ $h(\tau) = \tau e^{i\theta}$, h provient d'une rotation d'angle θ autour de l'axe NS.

2) <u>à unematrice de</u> $SU(2,\mathbb{C})$ <u>on peut faire correspondre une homographie ayant 2 points fixes, dont le birapport est de module</u> 1 <u>où</u> $\alpha\bar{\beta} = -1$ <u>le noyau étant</u> $\{+1,-1\}$.

Soit h une telle homographie $(\alpha,\beta,z,h(z)) = e^{i\theta}$

$$h(z) = \frac{\beta-\alpha e^{i\theta}z - \alpha\beta(1-e^{i\theta})}{(1-e^{i\theta})z-(\alpha-\beta e^{i\theta})} \qquad \alpha\bar{\beta} = -1$$

h est représentée par $\begin{pmatrix} \beta-\alpha e^{i\theta} & -\alpha\beta(1-e^{i\theta}) \\ 1-e^{i\theta} & -(\alpha-\beta e^{i\theta}) \end{pmatrix}$

Cette matrice peut se mettre sous la forme $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$

on divise par β $\begin{pmatrix} 1+\alpha\bar{\alpha}e^{i\theta} & -\alpha(1-e^{i\theta}) \\ -\bar{\alpha}(1-e^{i\theta}) & \alpha\bar{\alpha}+e^{i\theta} \end{pmatrix}$ en multipliant par $e^{-i\theta/2}$.

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2}+\alpha\bar{\alpha}e^{i\theta/2} & -\alpha e^{-i\theta/2}+\alpha e^{i\theta/2} \\ -\bar{\alpha}e^{-i\theta/2}+\bar{\alpha}e^{i\theta/2} & \alpha\bar{\alpha}e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Cette forme n'est pas unique.

Réciproquement soit $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ une matrice de $SU(2,\mathbb{C})$ $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$.

Les valeurs propres λ_1,λ_2 vérifient $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| = 1$. Les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux $\alpha\bar{\beta} + 1 = 0$. On a donc une homographie à 2 points fixes de birapport de module 1 et $\alpha\bar{\beta} = -1$.

En conclusion on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \{-1,+1\} & \longrightarrow & Sl(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}Gl(2) \\
 & & & & \updownarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \{-1,1\} & \longrightarrow & SU(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & SO(3,\mathbb{R})
\end{array}$$

Les sous-groupes de $Sl(2,\mathbb{C})$ sont conjugués des sous-groupes de $SU(2,\mathbb{C})$. Donc les sous-groupes de $\mathbb{P}Gl(2)$ sont conjugués des sous-groupes de $SO(3,\mathbb{R})$, sous-groupes que l'on a déterminés au paragraphe précédent (7).

§ 9 - *Calcul des éléments de* $\mathbb{C}(t)$ *invariants par un sous-groupe fini* G *du groupe des homographies* Klein [10], Baldassari [11].

. G opère sur $\mathbb{C}(t)$, un élément θ de G est une homographie de $\mathbb{C}(t)$ et peut être représenté par une matrice

$$A_\theta = \begin{pmatrix} a_\theta & b_\theta \\ c_\theta & d_\theta \end{pmatrix} \quad \text{de } Sl_2(\mathbb{C}) \text{ modulo } \pm 1$$

$$1 \longrightarrow \{+1,-1\} \longrightarrow Sl(2,C) \longrightarrow \mathbb{P}Gl(2) \longrightarrow 1$$

. le corps des invariants de $\mathbb{C}(t)$ par un sous-groupe fini est un corps de fractions rationnelles $\mathbb{C}(z)$ (théorème de Luröth).

Chercher les invariants par $\mathbb{C}(t)$ reviendra à chercher une fraction rationnelle $z = z(t)$ tel que l'extension algébrique $\mathbb{C}(z) \to \mathbb{C}(t)$ soit galoisienne de groupe de Galois G ou encore que $\mathbb{C}(z) = \text{Fix } G$.

. Les groupes G sont conjugués des sous-groupes finis de $SO(3,\mathbb{R})$.

9.1.- *Proposition.*

Si u et v sont deux éléments de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas dans la même orbite (par G) et $F_u(t) = \prod_{\theta\in G}(t-\theta u)$, $F_v(t) = \prod_{\theta\in G}(t-\theta v)$ alors $z = \dfrac{F_u(t)}{F_v(t)}$ est invariant par G et engendre Fix G.

Soit $u \in \mathbb{C}$, $F_u(t) = \prod_{\theta\in G}(t-\theta u)$, $\theta u = \dfrac{a_\theta u + b_\theta}{c_\theta u + d_\theta}$. Si θu est infini, on remplace le facteur $t-\theta u$ par $-(a_\theta u + b_\theta)$. Calculons $F_u(\psi(t))$ pour $\psi \in G$

$$F_u(\psi(t)) = \prod_{\theta\in G} (\psi(t)-\theta u) \qquad \psi(t) = \frac{a_\psi t + b_\psi}{c_\psi t + d_\psi}$$

$$F_u(\psi(t)) = \prod_{\theta\in G}\left[\frac{a_\psi t + b_\psi}{c_\psi t + d_\psi} - \frac{a_\theta u + b_\theta}{c_\theta u + d_\theta}\right]$$

Soit n = ordre de G

$$(c_\psi t + d_\psi)^n F_u(\psi(t)) = \prod_{\theta\in G}\left[\frac{(a_\psi t+b_\psi)(c_\theta u+d_\theta) - (c_\psi t+d_\psi)(a_\theta u+b_\theta)}{c_\theta u + d_\theta}\right]$$

$$(c_\psi t + d_\psi)^n \prod_{\theta\in G} (c_\theta u + d_\theta)\, F_u(\psi(t)) = \prod_{\theta\in G} \big[\big[(a_\psi c_\theta - c_\psi a_\theta)u + (a_\psi d_\theta - c_\psi b_\theta)\big]t$$

$$+ (b_\psi c_\theta - d_\psi a_\theta)u + (b_\psi d_\theta - d_\psi b_\theta)\big]$$

$$= \prod_{\theta\in G} k(\psi,\theta)\big[t(c_{\psi^{-1}\theta} u + d_{\psi^{-1}\theta}) - (a_{\psi^{-1}\theta} u + b_{\psi^{-1}\theta})\big]$$

$k(\psi,\theta) \in \{+1,-1\}$. $k(\psi,\theta)$ est déterminée par $A_{\psi^{-1}} . A_\theta = k(\psi,\theta) A_{\psi^{-1}\theta}$

$$(c_\psi t+d_\psi)^n \prod_\theta (c_\theta u+d_\theta)\, F_u(\psi(t)) = \pm F_u(t) \times \prod_\theta (c_{\psi^{-1}\theta} u+d_{\psi^{-1}\theta})$$

d'où $F_u(\psi(t)) = \pm \dfrac{F_u(t)}{(c_\psi t+d_\psi)^n}$ le signe dépend uniquement de ψ puisqu'on prend le $\prod_\theta$ des deux côtés de l'égalité.

$$F_u(\psi(t)) = \frac{k(\psi)}{(c_\psi t+d_\psi)^n} F_u(t)$$

Si v est dans une autre orbite

$$F_v(\psi(t) = \frac{k(\psi)}{(c_\psi t+d_\psi)^n} F_v(t)$$

$\dfrac{F_u(t)}{F_v(t)}$ est invariant par G, on peut poser $z = \dfrac{F_u(t)}{F_v(t)}$.

<u>z engendre Fix G</u>

$[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(z)] \geqslant n$ puisque $z \in$ Fix G, d'autre part t est racine du polynôme $z\, F_v(t) - F_u(t) = 0$.

Ce polynôme est de degré $\leqslant n$ en t à coefficient dans $\mathbb{C}(z)$ donc $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(z)] \leqslant n$ d'où $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(z)] = n$ et z engendre Fix G

<u>Fix $G = C(z)$</u>.

9.2.- <u>Lemme</u>. Si u,v,w sont des points de $\mathbb{C}$, les polynômes F_u, F_v, F_w sont linéairement dépendants sur $\mathbb{C}$.

<u>Démonstration</u> : soit $z = \dfrac{F_u}{F_v}$, $y = \dfrac{F_u}{F_w}$, z et y engendrent chacun Fix G, 2 au moins des 3 polynômes sont d'ordre d. Supposons $\deg F_v = d$

$$z = \frac{ay+b}{cy+d}\ , \quad a,b,cd \in \mathbb{C} \quad \frac{F_u}{F_v} = \frac{aF_u+bF_w}{cF_u+dF_w}$$

$$F_u(cF_u + dF_w) = F_v(aF_u + bF_w)$$

F_v est premier avec F_u, F_v divise $cF_u + dF_w$, deg $F_v = d$, $\deg(cF_u + dF_w) \leqslant d$, donc F_v est égal à $cF_u + dF_w$ a un facteur constant prés, F_u, F_v, F_w sont linéairement dépendants sur $\mathbb{C}$.

9.3. *Proposition*. G un sous-groupe fini du groupe des homographies non cyclique. Il existe 3 polynômes P_1, P_2, P_3 de degré n/e_i (ou éventuellement $n/e_i - 1$) $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} = 1 + \frac{2}{n}$ tels que

$$k_1 P_1^{e_1} + k_2 P_2^{e_2} + k_3 P_3^{e_3} = 0 \qquad (P_i, P_j) = 1 \text{ pour } i \neq j$$

Soit G non cyclique

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}(t) \\ X/G \arrow[r, phantom, "\approx"] & \mathbb{C}(z) \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

X est la sphère de Riemann = $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

le revêtement $X \xrightarrow{\pi} X/G$ a 3 points de ramification (a_1, a_2, a_3) d'indice e_1, e_2, e_3

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} = 1 + \frac{2}{n} \quad \text{où n est l'ordre de } G.$$

Soit $P_i(t) = \prod_\theta (t - \theta a_i)$ le produit étant pris sur les $\theta \in G$ tels que θa_i parcourt l'orbite de a_i.

$P_i(t)$ est de degré n/e_i (ou éventuellement $\{n/e_i - 1\}$ si l'infini est dans l'orbite de a_i).

$$P_i(\psi(t)) = \frac{P_i(t)}{(c_\psi t + d_\psi)^{n/e_i}} \qquad \forall \psi \in G$$

$$P_i^{e_i}(\psi(t)) = \frac{P_i^{e_i}(t)}{(c_\psi t + d_\psi)^n} \qquad \text{pour } i = 1,2,3.$$

il existe donc k_1, k_2, k_3 tels que

$$k_1P_1^{e_1} + k_1P_2^{e_2} + k_3P_3^{e_3} = 0$$

puisque P_1, P_2, P_3 sont linéairement dépendants. P_i et P_j sont premiers entre eux puisque les orbites sont distinctes.

9.4. *Calcul des polynômes* $P_1\ P_2\ P_3$ *pour chaque groupe* G *possible (non cyclique)*.

1) G est le groupe diédral $n = 2n'$

$$e_1 = e_2 = 2 \qquad e_3 = n'$$

Calcul de P_1 : l'action de G sur a_1 se traduit par $a_1 \rightsquigarrow e^{2ik.\pi/n'} \frac{1}{a_1}$ on peut prendre $a_1 = 1$

$$P_1(t) = \prod_{k\in[0,n'[} (t-e^{2ik\pi/n'}) = t^{n'} - 1 .$$

Calcul de P_2 : l'action de G sur a_2 se traduit par $a_2 \to e^{2ik'\pi/2n'} \frac{1}{a_2}$ avec k' impair

$$P_2(t) = \prod_{\substack{k\in[0,2n'[\\ k'\in[0,n'[}} \frac{t - e^{\frac{2ik\pi}{2n'}}}{t - e^{\frac{2ik'\pi}{n'}}} = \frac{t^{2n'}-1}{t^{n'}-1} = t^{n'} + 1$$

Calcul de P_3 : la fibre en a_3 a 2 points 0 et ∞.

$$P_3(t) = (t-0)(1) = t$$

$$P_3(t) = t$$

La relation liant P_1, P_2, P_3 est

$$P_2^2 - P_1^2 - 4P_3^{n'} = 0$$

et $z = \dfrac{(t^{n'}+1)^2}{t^{n'}}$ est générateur de Fix G.

$t^{2n'} + t^{n'}(2-z) + 1 = 0$: t solution de cette équation définit une extension algébrique $\mathbb{C}(t)$ de $\mathbb{C}(z)$ de degré $2n' = n$ de groupe de galois $D_n = D_{2n'}$.

2) G <u>est le groupe du tétraèdre</u>

$$\underline{e_1 = 2 \qquad e_2 = 3 \qquad e_3 = 3 \qquad n = 12}$$

Sur la sphère on prend un repère centré au centre du tétraèdre dont les axes passent par le milieu des arêtes. A, B, C, D sommets du tétraèdre ont pour coordonnées

$$(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}) \qquad (-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3})$$

$$(-1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}) \qquad (1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3})$$

$\xi,\eta,\zeta = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ avec $\xi.\eta.\zeta > 0$. Sur le plan projectif $P_1(\mathbb{C})$ par la projection stéréographique : $\dfrac{\xi+i\eta}{1-\zeta}$.

. Calcul de P_1 : l'orbite de a_1 est constituée par les points de la sphère prolongeant les milieux des arêtes, dans notre repère sur la sphère

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

dans le repère projectif $(0,\infty,\pm 1,\pm i)$. Soit donc $P_1(t) = t(t^2-1)(t^2+1)$ le degré est 5, l'∞ étant dans l'orbite.

. Calcul de P_2 : l'orbite de a_2 est constituée des 4 sommets A B C D ce qui donne $(\frac{1+i}{\sqrt{3}-1}, \frac{1-i}{\sqrt{3}+1}, \frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}, \frac{-1-i}{\sqrt{3}-1})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

$$P_2(t) = \prod_{i=1}^{4} (t-z_i) = t^4 - 2\sqrt{-3}\ t^2 + 1$$

. Calcul de P_3 : l'obtite de a_3 est constituée des points diamétralement opposés aux sommets

$$(\frac{1+i}{\sqrt{3}+1}, \frac{1-i}{\sqrt{3}-1}, \frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\ ; \frac{-1-i}{\sqrt{3}+1})$$

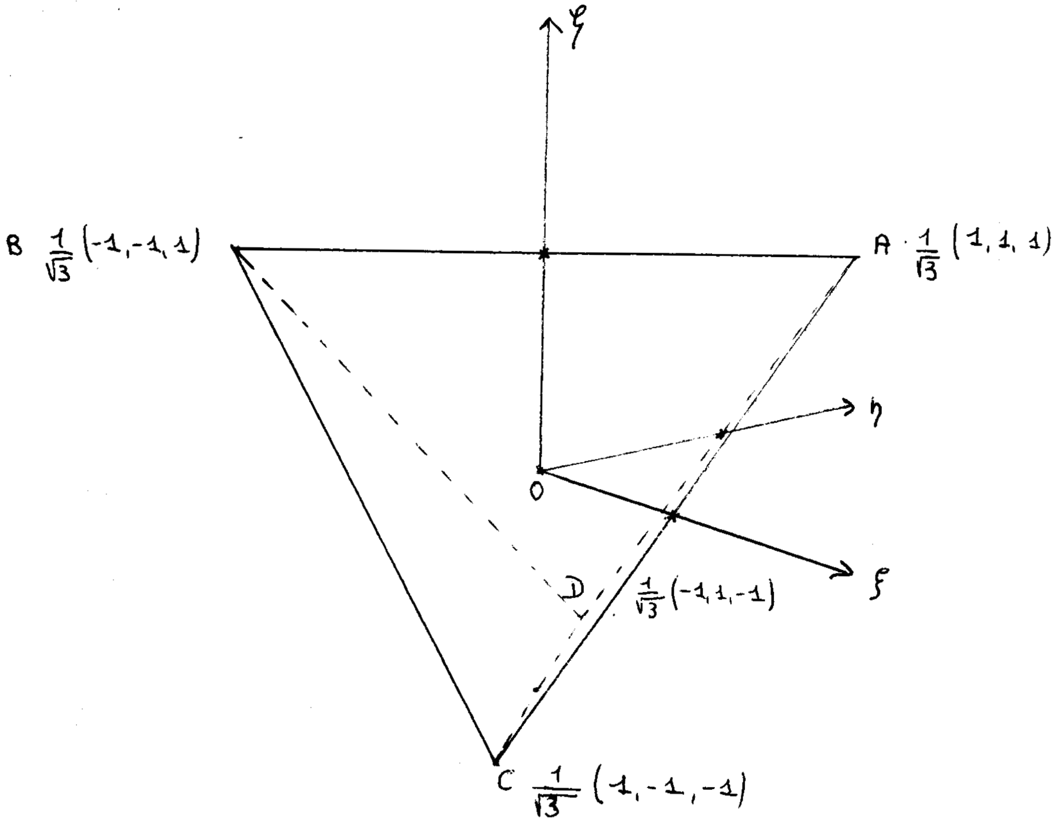
$$P_3(t) = \prod_{i=1}^{4} (t-z_i) = t^4 + 2\sqrt{-3}\ t^2 + 1$$

. La relation liant P_1, P_2, P_3 est

$$P_3^3 - P_2^3 - 12\sqrt{-2}\ P_1^2 = 0$$

. et $z = \dfrac{(t^4-2\sqrt{-3}\ t^2+1)^3}{(t^4+2\sqrt{-3}\ t^2+1)^3}$ est générateur de Fix G.

t racine de l'équation $(t^4+2\sqrt{-3}.\ t^2+1)^3 z - (t^4-2\sqrt{-3}\ t^2+1)^3 = 0$ définit une extension d'ordre 12 de $\mathbb{C}(z)$



3) G <u>est le groupe du cube</u>

$n = 24 \qquad e_1 = 2, \qquad e_2 = 3, \qquad e_3 = 4$

Comme repère sur la sphère on prendra le repère constitué des axes joignant le centre de la sphère au milieu des faces. Les sommets du cube ont alors pour coordonnées

$$1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

les milieux des arêtes ont pour coordonnées

$$1/\sqrt{3}\begin{pmatrix}\pm 1\\ \pm 1\\ 0\end{pmatrix} \; ; \; 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix}\pm 1\\ 0\\ \pm 1\end{pmatrix} \; ; \; 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\ \pm 1\\ \pm 1\end{pmatrix}$$: 12 milieux d'arêtes

les prolongements sur la sphère des milieux des faces

$$\begin{pmatrix}\pm 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\ \pm 1\\ 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \pm 1\end{pmatrix}$$: 6 points

Par la projection stéréographique, pour les sommets du cube

$$\left(\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2} \pm 1}\right) \qquad \text{8 points}$$

pour les milieux des arêtes

$$\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{\pm 1}{\sqrt{3} \pm 1}\ ,\ \frac{\pm i}{\sqrt{3} \pm 1} \quad .$$

Pour les prolongements des milieux des faces

$$(\infty, 0, \pm 1 \ ; \ \pm i)$$

d'où $P_1(t) = \Pi\left(t - \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{3}}\right) \left(t - \frac{\pm 1}{\sqrt{3} \pm 1}\right) \left(t - \frac{\pm i}{\sqrt{3} \pm 1}\right)$

$$P_1(t) = t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1$$

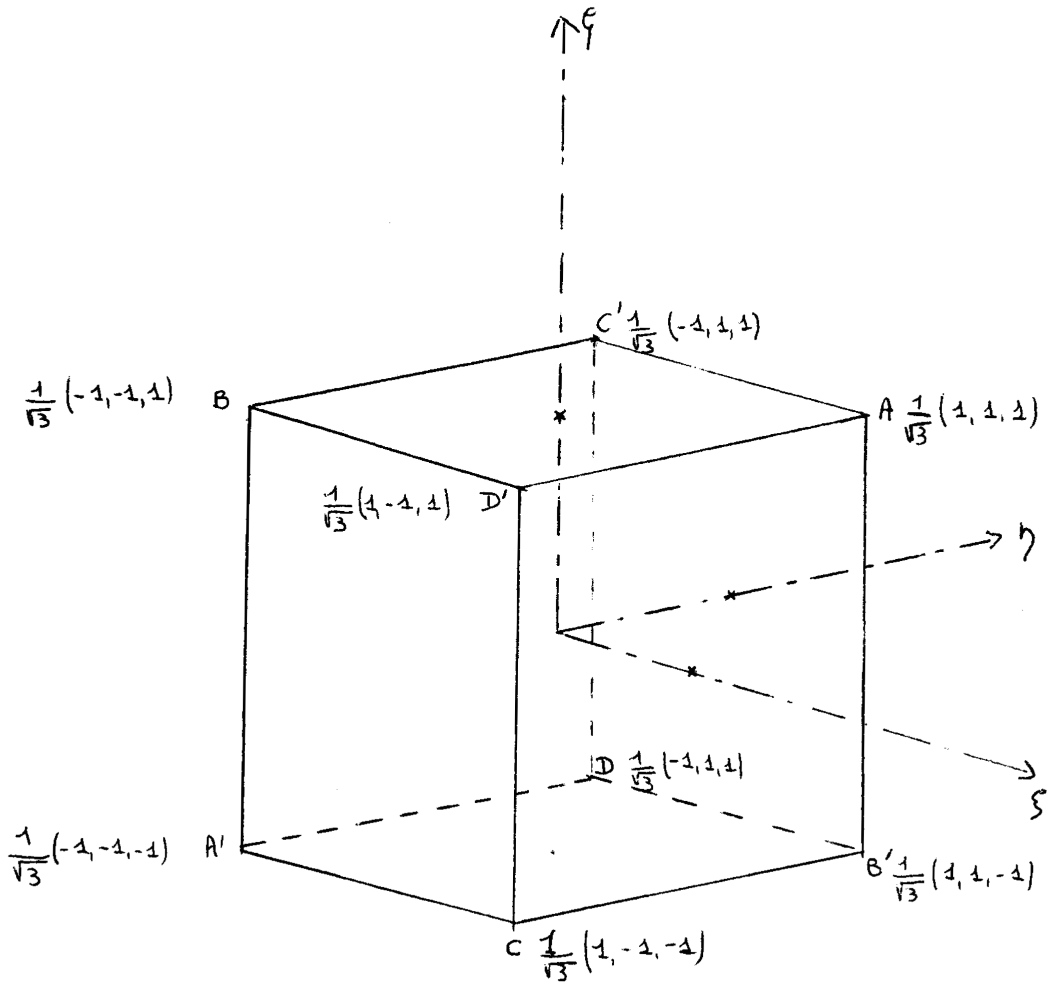
$$P_2(t) = (t^4-2\sqrt{-3}t^2+1)(t^4+2\sqrt{-3}t^2+1) = t^8 + 14t^4 + 1$$

et

$$P_3(t) = t(t^2-1)(t^2+1)$$

La relation entre P_1, P_2, P_3 étant $P_2^3 - P_1^2 - 108P_3^4 = 0$ et $z = \dfrac{P_2^3(t)}{P_3^4(t)}$

engendre Fix G.



4) G <u>est le groupe de l'icosaèdre</u>

$$n = 60 \qquad e_1 = 2 \qquad e_2 = 3 \qquad e_3 = 5$$

on trouve $P_1(t) = t^{30} + 522(t^{25}-t^5) - 10\,000(t^{20}-t^{10}) + 1$

$$P_2(t) = -(t^{20}+1) + 228(t^{15}-t^5) - 494t^{10}$$

$$P_3(t) = t(t^{10}+11t^5-1)$$

et la relation

$$1728\, P_3^5 - P_1^2 - P_2^3 = 0$$

9.5. *Si* G *est cyclique* $G = C_n$

$$e_1 = e_2 = n$$

$$F(t) = t^n$$

$z = t^n$ est générateur de Fix G

$\mathbb{C}(z) \xrightarrow{G} \mathbb{C}(t)$ est une extension cyclique

CHAPITRE III

L'objet de ce chapitre III est de déterminer les équations différentielles d'ordre 2 à coefficients dans un $\mathbb{C}(z)$ ayant leurs solutions algébriques et dans un $\mathbb{C}(t)$ engendré par les solutions.

Nous utilisons les résultats géométrique et algébrique du chapitre précédent.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(t) \arrow[r, phantom, "\approx"] & S_2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C}(z) \arrow[u, "G"] \arrow[r, phantom, "\approx"] & S_{2/G} \end{tikzcd}$$

G : groupe de Galois de l'extension égal au groupe de monodromie de l'équation $y'' + py' + qy = 0$ dont les solutions sont rationnelles en t ; p et $q \in \mathbb{C}(z)$.

Il nous faut donc déterminer les conditions portant sur p et q pour qu'il en soit ainsi.

. Les points singuliers de l'équation sont les points de ramification de $S_{2/G}$ pour le groupe G.

G est l'un des cinq groupes déterminés précédemment.
Les points singuliers de l'équation sont les pôles de p et de q.
Il y en a 2 ou 3, 2 si G est cyclique, 3 sinon.

On peut supposer sans restriction que ces 3 points singuliers sont $1, 0, \infty$ ($0, \infty$ dans le cas cyclique).

. Au voisinage d'un point singulier a_i , une solution s'écrit
$y = (z-a_i)^{\alpha_i}\psi(z-a_i)$ où $\psi(z-a_i)$ est holomorphe.

Les solutions sont algébriques donc les α_i sont rationnels.
On les appelle les exposants des solutions.

. Soit (y_1,y_2) une base de solutions, y_1 et y_2 linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$

$\eta = \dfrac{y_1}{y_2}$ le quotient.

1 : Si G n'est pas cyclique.

η quotient de 2 solutions indépendantes alors $\mathbb{C}(\eta) = \mathbb{C}(t)$

η est élément primitif de $\mathbb{C}(t)$, les solutions de l'équation différentielle s'expriment rationnellement en fonction η.

G opère sur les solutions de l'équation différentielle.

$$\sigma \in G \qquad \begin{pmatrix} \sigma(y_1) \\ \sigma(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$

Le solutions de l'équation différentielle sont dans un $\mathbb{C}(t)$

$$\mathbb{C}(\eta) \subset \mathbb{C}(t)$$

$$\sigma \in G \qquad \sigma(\eta) = \sigma\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{a\eta+b}{c\eta+d} .$$

Les transformations sur les quotients de solutions forment un groupe : groupe projectif de monodromie : $\mathbb{P}(G)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(\eta) \arrow[r, hook] & \mathbb{C}(t) \\ & \mathbb{C}(z) \arrow[ul, "\mathbb{P}(G)"] \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd} .$$

Si l'on note H les homothéties contenues dans G c'est-à-dire les $\sigma \in G$

$$\begin{pmatrix} \sigma(y_1) \\ \sigma(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, y_1 \\ a\, y_2 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{C}$$

$\mathbb{P}(G) \simeq G/H.$

Or dans notre cas G est l'un des groupes C_n , D_n , T , C ou I. Les homothéties sont contenues dans le centre de G, or si G n'est pas cyclique, le centre de D_n , T, C ou I est réduit à l'identité (voir III.2.3. où sont décrits les groupes).

Donc si G n'est pas cyclique, $\mathbb{P}(G) = G$

et

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(\eta) \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{C}(t) \\ & \mathbb{C}(z) \arrow[ul, "G"] \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

un quotient de solutions engendre donc $\mathbb{C}(t)$

Si G est cyclique, on ne peut conclure d'une façon générale.

Nous étudierons donc séparement le cas cyclique.

Dans un premier temps, nous allons établir une relation différentielle du 3ème ordre vérifiée par tout quotient de solutions indépendantes d'une équation différentielle d'ordre 2. $y'' + py' + qy = 0$; p et $q \in C(z)$. Cette relation sera invariante par toute homographie, elle sera donc rationnelle en z.

2 : *Le Schwarzien* Klein [10]

Par une homographie quelconque $\eta \to \zeta = \dfrac{a\eta+b}{c\eta+d}$ $a,b,c,d \in \mathbb{C}$

$$c\eta\zeta + \zeta d - a\eta - b = 0$$

differencions par rapport à z, $c(\zeta'\eta + \zeta\eta') + d\zeta' - a\eta' = 0$

$$c(\zeta''\eta + 2\zeta'\eta' + \zeta\eta'') + d\zeta'' - a\eta'' = 0$$

$$c(\zeta'''\eta + 3\zeta''\eta' + 3\zeta'\eta'' + \zeta\eta''') + d\zeta''' - a\eta''' = 0$$

une relation indépendante de a, b, c, d sera donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta & \eta & \zeta\eta \\ 0 & \zeta' & \eta' & \zeta'\eta + \zeta\eta' \\ 0 & \zeta'' & \eta'' & \zeta''\eta + 2\zeta'\eta' + \zeta\eta'' \\ 0 & \zeta''' & \eta''' & \zeta''' + 3\zeta''\eta' + 3\zeta'\eta'' + \zeta\eta''' \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne après simplification.

$$\begin{vmatrix} \zeta' & \eta' & 0 \\ \zeta'' & \eta'' & 2\eta'\zeta' \\ \zeta''' & \eta''' & 3\eta''\zeta' + 3\eta'\zeta'' \end{vmatrix} = 0$$

soit encore

$$2\eta'^2\zeta'\zeta'' - 2\eta'\eta'''\zeta'^2 + 3\eta''^2\zeta'^2 - 3\eta'^2\zeta''^2 = 0$$

$$\eta'^2\left[2\zeta'\zeta''' - 3\zeta''^2\right] - \zeta'^2\left[2\eta'\eta''' - 3\eta''^2\right] = 0$$

que l'on écrit $\dfrac{\zeta'''}{\zeta'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2 = \dfrac{\eta'''}{\zeta'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\eta''}{'}\right)^2$

donc $\dfrac{\eta'''}{\eta'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\eta''}{\eta'}\right)^2$ est invariant par homographie.

C'est un élément invariant par tout groupe G, c'est donc un élément de $\mathbb{C}(z)$.

On note $\underline{[\eta]_z = \dfrac{\eta'''}{\eta'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\eta''}{\eta'}\right)^2}$ c'est le shwarzien.

On a aussi la relation $[\eta]_z = \left(\dfrac{\eta''}{\eta'}\right)' - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\eta''}{\eta'}\right)^2$.

2.1.- *<u>Calcul du schwarzien</u>* de η quotient de 2 solutions indépendantes de l'équation $y'' + py' + qy = 0$ *en fonction de* p *et* q

$$\eta = \frac{y_1}{y_2} \qquad y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

$$\eta' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2} \qquad \eta'' = \ldots$$

on trouve $[\eta]_z = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'$.

2.2.- Calcul du schwarzien $[\eta]_z = r(z)$ *en fonction des éléments qui caractérise* G c'est-à-dire les points de ramification et les indices de ramification en ces points.

On suppose ici que G n'est pas cyclique.

Au voisinage de chaque point singulier 1, 0, ∞ , η a un développement de Puiseux. Comme $\mathbb{C}(z) \xrightarrow{G} \mathbb{C}(\eta)$.

En a_i

$$\eta = \alpha_o + \alpha_1(z-a_i)^{1/e_i} + \alpha_2(z-a_i)^{2/e_i} + \ldots$$

où e_i désigne l'indice de ramification de a_i

or $[\eta]_z \in \mathbb{C}(z)$ donc dans le développement de $[\eta]_z$ au voisinage d'un point singulier ne doivent apparaître que des puissances entières ce qui nous donne par le calcul

$$[\eta]_z = \frac{e_i^2 - 1}{2e_i^2(z-a_i)^2} + \frac{\alpha}{z-a_i} + \beta$$ où α et β sont des constantes

et où $a_i = 1$ ou 0.

Au voisinage de l'∞ , nous pouvons écrire la relation différentielle $[\eta]_u$ où $u = \frac{1}{z}$ et u est au voisinage de 0.

Le calcul nous donne $[\eta]_u = [\eta]_z \times \frac{1}{u^4}$.

Le premier terme du développement de $[\eta]_u$ est $\frac{e_3^2 - 1}{2e_3^2 u^2}$.

Au voisinage de l'∞, le premier terme du développement de $[\eta]_z$ sera $\frac{e_3^2 - 1}{2e_3^2 u^2} u^4 = \frac{e_3^2 - 1}{2e_3^2 . z^2}$.

Ceci nous donne

$$[\eta]_z = \frac{e_1^2 - 1}{2e_1^2 (z-1)^2} + \frac{A}{z-1} + \frac{e_2^2 - 1}{2e_2^2 z^2} + \frac{B}{z} + C .$$

En écrivant le premier terme de la série en $\frac{1}{z}$ au voisinage de l'∞.

$$c = 0 , \quad A + B = 0 \quad \frac{e_1^2 - 1}{2e_1^2} + \frac{e_2^2 - 1}{2e_2^2} + A = \frac{e_3^2 - 1}{2e_3^2}$$

et donc

$$\boxed{[\eta]_z = \frac{e_1^2 - 1}{2e_1^2 (z-1)^2} + \frac{e_2^2 - 1}{2e_2^2 z^2} + \frac{1/e_1^2 + 1/e_2^2 - 1/e_3^2 - 1}{2(z-1)z}}$$

3 :	*Les pôles de* p *sont d'ordre 1.* *Les pôles de* q *sont au plus d'ordre 2.*

3.1.- *Les poles de* p *sont d'ordre 1.*

Soit w le wronskien $w = y_1' y_2 - y_1 y_2'$

w satisfait l'équation différentielle $w' + pw = 0$, soit $w = ke^{\int -pdz}$

$$\eta' = \frac{w}{y_2^2}, \qquad y_2^2 = \frac{w}{\eta'} = \frac{ke^{\int -pdz}}{\eta'} .$$

y_1 et y_2 sont algébriques sur $C(z)$; $\int -pdz$ est un logarithme.

Les pôles de p *sont d'ordre 1.*

<u>Remarque</u> : Ici, le fait que les solutions soient dans un $\mathbb{C}(t)$ n'intervient pas ; c'est le seul caractère algébrique des solutions qui entraîne que les pôles de p sont d'ordre 1.

3.2.- *<u>Les pôles de</u>* q *<u>sont au plus d'ordre</u> 2.*

$[\eta]_z \in \mathbb{C}(z)$ $\qquad [\eta]_z = 2q - \frac{1}{2} p^2 - p'$.

Les pôles de $[\eta]_z$ sont d'ordre 2.
Les pôles de $2q - \frac{1}{2} p^2 - p'$ sont d'ordre 2.

<u>Les pôles de</u> q *<u>sont au plus d'ordre</u> 2.*

4 : *Expression de* p *et de* q

Au voisinage d'un point singulier a_i, p qui a des pôles d'ordre 1 s'écrit :

$$p(z) = \frac{1}{z-a_i} (p^o_{a_i} + p^1_{a_i} (z-a_i) + \ldots)$$

q qui a des pôles d'ordre 2 au plus s'écrit :

$$q(z) = \frac{1}{(z-a_i)} (q^o_{a_i} + q^1_{a_i} (z-a_i) + \ldots) .$$

Les solutions y au voisinage de a_i sont de la forme $(z-a_i)^{\alpha_i} \psi(z)$ avec $\psi(z)$ holomorphe. α rationnel (y est algébrique).

En écrivant que y est solution de $y'' + py' + qy = 0$ nous obtenons la relation $\alpha_i(\alpha_i - 1) + \alpha_i p^o_{a_i} + q^o_{a_i} = 0$; soit $\alpha_i^2 - (1-p^o_{a_i})\alpha_i + q^o_{a_i} = 0$.

Ce qui nous donne 2 possibilités pour α_i :

α_i et α'_i avec $\alpha_i + \alpha'_i = 1-p^o_{a_i}$

$$\alpha_i \alpha'_i = q^o_{a_i} \quad .$$

Donc $p(z) = \sum_i \dfrac{1 - \alpha_i - \alpha'_i}{z-a_i} + h(z)$ où $h(z)$ est un polynôme

$$q(z) = \sum_i \frac{\alpha_i \alpha'_i}{(z-a_i)^2} + \frac{A_i}{(z-a_i)} + k(z)$$ où $k(z)$ est un polynôme

les sommes portant sur les points singuliers à distance finie (1,0) (ou 0 si G est cyclique).

. L'équation $\alpha_i^2 - (1-p^o_{a_i})\alpha_i + q^o_{a_i} = 0$ s'appelle l'équation déterminante : elle détermine les exposants α_i et α'_i des solutions.

4.1.- *Expression de* p.

Ecrivons l'équation différentielle en $u = \dfrac{1}{z}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} = - \frac{1}{u^2} y' \qquad y' = -u^2 \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{1}{u^4} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2}{u^3} \frac{dy}{dz} \qquad y'' = -p(- u^2 \frac{dy}{du}) - qy$$

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{u} (- \frac{p}{u} + 2) \frac{dy}{du} + \frac{q}{u^4} y = 0$$

l'∞ est point singulier : $2 - \dfrac{p}{u} = h_o + h_1 u + \ldots$

d'ordre 1 $\qquad p = p_1 u + p_2 u^2 + \ldots$

$$p = \frac{p_1}{z}$$

mais $p(z) = \sum_i \frac{1 - \alpha_i - \alpha'_i}{z-a_i} + h(z)$

quand $z \to \infty$, $p(z) \to 0$ donc $h(z) = 0$

et $$\boxed{p(z) = \frac{1 - \alpha_o - \alpha'_o}{z} + \frac{1 - \alpha_1 - \alpha'_1}{z-1}}$$

si G est cyclique $p(z) = \frac{1 - \alpha_o - \alpha'_o}{z}$.

4.2.- *Expression de* q.

∞ est pôle d'ordre 2 au plus.

$\frac{q}{u^4}$ a au plus un pôle d'ordre 2, $\frac{q}{u^2} = q_o + q_1 u + \ldots$

$$q = \frac{q_o}{z^2} + \ldots$$

mais $q(z) = \sum_i \frac{\alpha_i \alpha'_i}{(z-a_i)^2} + \frac{A}{(z-a_i)} + k(z)$

quand $z \to \infty$, $q(z) \to 0$, $k(z) = 0$

$$q(z) = \sum_i \frac{\alpha_i \alpha'_i}{(z-a_i)^2} + \frac{A}{(z-a_i)} = \frac{\alpha_o \alpha'_o}{z^2} + \frac{A}{z} + \frac{\alpha_1 \alpha'_1}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1}$$

au voisinage de l'∞ , $q = \frac{q_o}{z^2}$

$$A + B = 0 \ , \qquad - A = \alpha_\infty \alpha'_\infty - \alpha_o \alpha'_o - \alpha_1 \alpha'_1$$

$$\boxed{q(z) = \frac{\alpha_o \alpha'_o}{z^2} + \frac{\alpha_1 \alpha'_1}{(z-1)^2} + \frac{\alpha_\infty \alpha_\infty - \alpha_o \alpha'_o - \alpha_1 \alpha'_1}{z(z-1)}}$$

Si G est cyclique $q(z) = \frac{\alpha_o \alpha'_o}{z^2}$.

L'expression des équations différentielles est donc

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha_o-\alpha'_o}{z} + \frac{1-\alpha_1-\alpha'_1}{z-1}\right)y' + \left(\frac{\alpha_o\alpha'_o}{z^2} + \frac{\alpha_1\alpha'_1}{(z-1)^2} + \frac{\alpha_\infty\alpha'_\infty-\alpha_o\alpha'_o-\alpha_1\alpha'_1}{z(z-1)}\right)y = 0$$

c'est une équation hypergéométrique,

ou

$$y'' + \frac{1-\alpha_o-\alpha'_o}{z}\,y' + \frac{\alpha_o\alpha'_o}{z^2}\,y = 0$$ s'il y a 2 points singuliers 0 et ∞, c'est-à-dire si G est cyclique

c'est une équation d'Euler

tous les α_i sont rationnels.

5 : *Conclusion*.

5.1.- *Cas de l'équation d' Euler - G est cyclique.*

Toutes les équations $y'' + \frac{1-\alpha_o-\alpha'_o}{z}\,y' + \frac{\alpha_o\alpha'_o}{z^2}\,y = 0$ avec α_o et α'_o rationnels auront leurs solutions algébriques et dans un $\mathbb{C}(t)$

avec $\mathbb{C}(z) \xrightarrow{C_n} \mathbb{C}(t)$.

5.2.- *Cas de l'équation hypergéométrique - G non cyclique.*

Dans ce cas, les exposants du quotient de solution η en $1, 0, \infty$ sont $\frac{1}{e_1}$, $\frac{1}{e_2}$, $\frac{1}{e_3}$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 - \alpha'_1 = \frac{1}{e_1}$$

$$\alpha_o - \alpha'_o = \frac{1}{e_1}$$

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{e_3}$$

D'autre part, $\alpha_i + \alpha'_i = 1-p^o_{a_i}$ pour les points à distance finie et $\alpha_\infty + \alpha'_\infty = \Sigma\, p^o_{a_i} - 1$ (ces résultats sont donnés par l'équation déterminante).

Dans notre cas, 2 points à distance finie, un point à l'∞

$$\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_o + \alpha'_o + \alpha_\infty + \alpha'_\infty = 2 - 1 = 1.$$

On a donc 4 relations déterminant les six exposants α_i , α'_i .

Les équations hypergéométriques

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha_o-\alpha'_o}{z} + \frac{1-\alpha_1-\alpha'_1}{z-1}\right)y' + \left(\frac{\alpha_o\alpha'_o}{z} + \frac{\alpha_1\alpha'_1}{z-1} + \frac{\alpha_\infty\alpha'_\infty-\alpha_o\alpha'_o-\alpha_1\alpha'_1}{z(z-1)}\right)y = 0$$

où les α_i , α'_i sont rationnels vérifiant les quatre relations

$$\alpha_1 - \alpha'_1 = \frac{1}{e_1} \qquad \alpha_o - \alpha'_2 = \frac{1}{e_2} \qquad \alpha_\infty - \alpha'_\infty = \frac{1}{e_3}$$

où $(e_1,e_2,e_3) =$ (2, n, 2) ; (2, 3, 3) ; (2, 3, 4) ; (2, 3, 5)

$$\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_o + \alpha'_o + \alpha_\infty + \alpha'_\infty = 1$$

ont leurs solutions algébriques, dans un $\mathbb{C}(t)$

$$\mathbb{C}(z) \xrightarrow[G]{} \mathbb{C}(t)$$

G étant déterminé par (e_1, e_2, e_3).

5.3.- *Forme usuelle de ces équations.*

Par un changement de variables $Y = yz^{\alpha'_o}(z-1)^{\alpha'_1}$ on se ramène à une équation où $\alpha'_o = 0$ et $\alpha'_1 = 0$ c'est-à-dire

$$\alpha_o = \frac{1}{e_1} \quad , \quad \alpha_1 = \frac{1}{e_2}$$

et on peut calculer α_∞ et α'_∞ , $\alpha_\infty = -\frac{2}{M}$, $\alpha'_\infty = \frac{1}{e_3} - \frac{1}{M}$

où M est l'ordre du groupe G : $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} = 1 + \frac{2}{M}$.

Soit encore en posant $\gamma-\alpha-\beta = \frac{1}{e_1} = \alpha_1$, $1 - \gamma = \frac{1}{e_2} = \alpha_o$,

$\alpha - \beta = \alpha_\infty - \alpha'_\infty = \frac{1}{e_3}$

$$\boxed{y'' + \left[\frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)z}{z(z-1)}\right] y' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\, y = 0} \quad .$$

CHAPITRE IV

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients rationnels dont les solutions sont algébriques dans une extension transcendante pure $\mathbb{C}(t)$ sont des équations hypergéométriques (ou d'Euler si le groupe de Galois de l'équation est cyclique).

Dans ce chapitre, on cherche à résoudre la question suivante : quand une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients rationnels dans un $\mathbb{C}(t)$: $y'' + py' + qy = 0$ a-t-elle des solutions algébriques ? $(y' = \frac{dy}{dt})$. Baldassarri and Dwork [11] - Baldassarri [12].

Ce problème est équivalent aux deux problèmes suivants

A : le wronskien est-il algébrique ?

B : les quotients de solutions sont-ils algébriques ?

En effet, si y_1, y_2 est une base de solutions de l'équation, η le quotient $\frac{y_1}{y_2}$ et w le Wronskien relatif à y_1, y_2 alors

$$y_2 = \sqrt{\frac{w}{\eta'}} \quad \text{et} \quad y_1 = \eta y_2 .$$

Résoudre le problème A revient à étudier l'existence de solutions algébriques de l'équation différentielle $w' + pw = 0$: les pôles de p sont d'ordre 1 et p est de la forme $\sum_i \frac{c_i}{t-a_i}$ a_i étant les pôles et c_i étant rationnels.

Pour résoudre le problème B, nous étudions le groupe qui opère sur les quotients de solutions de l'équation $y'' + py' + qy = 0$. Sous l'action du groupe de monodromie de l'équation, une base de solutions y_1 y_2 est transformée en une autre base de solutions u_1, u_2

$$\begin{aligned} u_1 &= ay_1 + by_2 \\ u_2 &= cy_1 + dy_2 \end{aligned} \qquad \text{où} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$

un quotient de solutions η est transformé en un quotient de solutions ζ avec $\zeta = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$ $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

Ces transformations sur les quotients de solutions forment un groupe : sous-groupe du groupe des homographies c'est le groupe projectif de monodromie G. G opère sur les quotients de solutions de l'équation $y'' + py' + qy = 0$, p et $q \in \mathbb{C}(t)$ et $y' = \frac{dy}{dt}$.

G est fini est équivalent à dire que les quotients de solutions sont algébriques.

G est fini <=> G est égal à conjugaison près à l'un des cinq types de groupes C_n, D_n, T, C ou I. G étant un sous-groupe du groupe des homographies $\mathbb{P}$ Gl(2), la détermination de ces sous-groupes a été faite au chapitre II paragraphe 8.

D'un point de vue algébrique, on est dans la situation suivante

$$\mathbb{C}(t) \xrightarrow{G} L = \mathbb{C}(t)(\eta)$$

L est l'extension algébrique, galoisienne engendrée par les quotients de solutions, η étant un élément primitif.

Or G opère sur $\mathbb{C}(\eta)$ puisque par $G : \eta \to \zeta = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$ $a,b,c,d \in \mathbb{C}$

Quel est le corps fixe de $\mathbb{C}(\eta)$ par G ?

d'une part $\mathbb{C}(\eta)^G = \mathbb{C}(t) \cap \mathbb{C}(\eta)$

d'autre part c'est un sous-corps de $\mathbb{C}(\eta)$ de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C}(\eta)^G \to \mathbb{C}(\eta)$ est une extension algébrique donc, d'après le théorème de Luröth $\mathbb{C}(\eta)^G$ est un $\mathbb{C}(z)$ où z est une fraction rationnelle en η

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(t) & \xrightarrow{G} & L = \mathbb{C}(t)(\eta) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}(z) & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}(\eta) \end{array}$$

D'un point de vue différentiel

η quotient de solutions de $y'' + py' + qy = 0$ $(p,q \in \mathbb{C}(t)$ $y' = \frac{dy}{dt})$ vérifie une équation différentielle du 3ème ordre, que l'on obtient en éliminant a,b,c,d entre la relation $\zeta = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$ et ses dérivées première, seconde et troisième.

Cette équation est le swarchzien de η, invariante par G donc rationnelle en t :

$$[\eta]_t = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'$$

G opère sur $\mathbb{C}(\eta)$, $\zeta = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$, on peut aussi écrire l'équation différentielle du troisième ordre en considérant les dérivées $\frac{d}{dz}$. On obtient de la même façon $[\eta]_z = r(z) =$ fraction rationnelle en z. η est quotient de solution de $\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0$ donc $[\eta]_t = 2q - p' - \frac{1}{2}p^2$.

Posons

$$q_1 = q - \frac{1}{2} p' - \frac{1}{4} p^2$$

$[\eta]_t = 2q_1$ et η est quotient de solutions de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + q_1 y = 0$$

nous dirons qu'une équation de la forme $\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)y = 0$ est une <u>équation normalisée</u>, elle est équivalente à l'équation initiale au sens où les quotients de solutions de l'une sont quotients de solutions de l'autre et réciproquement, on dira projectivement équivalente.

$[\eta]_z = r(z)$, η est quotient de solutions d'une équation $\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}[\eta]_z y = 0$ or on a $\mathbb{C}(z)^G \to \mathbb{C}(\eta)$.

G est fini <=> G est l'un des cinq groupes C_n, D_n, T, C ou I <=> d'après les calculs de $[\eta]_z$ fait au chapitre précédent

$$[\eta]_z \equiv \frac{e_1^2-1}{2e_1^2(z-1)^2} + \frac{e_2^2-1}{2e_2^2 z^2} + \frac{1/e_1^2+1/e_2^2-1/e_3^2-1}{2z(z-1)}$$

ou $[\eta]_z = \frac{n^2-1}{2n^2} \frac{1}{z^2}$ (si G est cyclique).

Nous noterons E_{e_1,e_2,e_3} l'équation correspondante $\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}[\eta]_z y = 0$. Ce sont des équations hypergéométriques normalisées.

<u>*Conclusion.*</u>

$\mathbb{C}(z)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}(t)$ de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{C}$: z est une fraction rationnelle en t : $z = z(t)$.

On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
S_2 = X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[r, phantom, "\approx"] & \mathbb{C}(t) \arrow[r, "G"] & L = \mathbb{C}(t,\eta) \\
S_2 = Y \arrow[r, phantom, "\approx"] & \mathbb{C}(z) \arrow[u] \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}(\eta) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où X (resp. Y) est la surface de Riemann dont le corps des fonctions méromorphes est $\mathbb{C}(t)$ (resp. $\mathbb{C}(z)$) et où (X,π) est un revêtement ramifié fini analytique de Y.

On en conclue donc que l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$ aura des quotients de solutions algébriques si et seulement si l'équation normalisée équivalente $y'' + q_1 y = 0$ est le "relèvement" par une application rationnelle $z = z(t)$ d'une équation hypergéométrique normalisée E_{e_1,e_2,e_3} (ou d'Euler, si G est cyclique) de groupe G ; <u>relèvement</u> étant entendu au sens suivant : $[\eta]_t = 2q_1(t)$

$$[\eta]_z = 2q_{e_1,e_2,e_3}(z), \qquad \frac{dz}{dt} = z'$$

$$[\eta]_t = [\eta]_z\, z'^2 - \left(\frac{z''}{z'}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$$

Le groupe projectif de monodromie d'une équation différentielle, et donc d'une équation différentielle normalisée projectivement équivalente (E) sera D_n, T, C ou I (resp. C_n) suivant qu'il existera une fraction rationnelle $z = z(t)$ telle que (E) soit le relèvement d'une équation différentielle normalisée hypergéométrique (resp. d'Euler) $E_{e_1 e_2, e_3}$ les indices (e_1,e_2,e_3) correspondant à ceux des groupes D_n, T, C ou I.

Nous étudions donc les conditions que doit satisfaire une telle fraction rationnelle $z = z(t)$.

§ 1 - *Expression du degré de* $z = z(t)$ *en fonction des différences d'exposants des solutions de l'équation différentielle* $y'' + py' + qy = 0$.

Les différences d'exposants des solutions sont les exposants des quotients de solutions.

Au voisinage d'un point P de X, une base de solutions peut s'écrire :

$$y_1 = t_p^{\alpha_1}(1+b_1 t_p + \dots) \quad ; \quad y_2 = t_p^{\alpha_2}(1+b_2 t_p + \dots)$$

$\alpha_1 - \alpha_2$ est l'exposant de $\eta = \dfrac{y_1}{y_2}$.

En un point régulier, les solutions sont holomorphes on peut donc prendre une base de solution pour laquelle $(\alpha_1 - \alpha_2) = (0,1)$.

Soit $\gamma(P) = |\alpha_1 - \alpha_2|$.

$\gamma(P) - 1$ est nul presque partout c'est-à-dire partout sauf aux points singuliers de l'équation

$$\begin{array}{ccll} X & \mathbb{C}(t) & E_o & \text{une équation différentielle sur } X \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & \uparrow & & \\ Y & \mathbb{C}(z) & E & \text{une équation différentielle sur } Y \end{array}$$

Δ l'ensemble des points singuliers de E

Δ_o l'ensemble des points singuliers de E_o

$P \in \Delta$, α_1, α_2 les exposants des solutions en P.

P_o au-dessus de P, les exposants des solutions en P_o seront respectivement égaux à $\alpha_1\, e(P_o)$ et $\alpha_2\, e\,(P_o)$ où $e(P_o)$ désigne la ramification de P_o au-dessus de P.

On a donc $\gamma(P_o) = e(P_o) \times \gamma(P)$

$$\sum_{P_o|P} \gamma(P_o) = \gamma(P) \sum_{P_o|P} e(P_o) = \gamma(P)\ .\ d$$

d étant le degré du revêtement $X \xrightarrow{\pi} Y$. (la $\sum$ étant prise sur les points P_o au-dessus de P).

Comparons $\sum_{P\in\Delta} (\gamma(P)-1)$ et $\sum_{P_o\in\Delta_o} (\gamma(P_o)-1)$

$$\sum_{P_o\in\Delta_o} (\gamma(P_o)-1) = \sum_{P_o} \gamma(P_o) - \text{card}\ \Delta_o$$

$$= \sum_{p} \sum_{P_o|P} \gamma(P_o) - \text{card}\ \Delta_o = \sum_{p} (\gamma(P)\times d) - \text{card}\ \Delta_o$$

$$\sum_{P_o} (\gamma(P_o)-1) = d(\sum_{p}(\gamma(P)-1)) + d\ \text{card}\ \Delta - \text{card}\ \Delta_o$$

d'où

$$\sum_{P_o}(\gamma(P_o)-1) - d(\sum_{p}(\gamma(P)-1)) = d\ \text{card}\ \Delta - \text{card}\ \Delta_o$$

d'autre part la formule du genre de Hurwitz nous donne :

$$2(g_o-1) - 2d(g-1) = \sum_{P_o} (e_{P_o}-1)$$

$$= \sum_{p}(\sum_{P|P_o} e_{P_o}) - \text{card}\ \Delta_o = d\ \text{card}\ \Delta - \text{card}\ \Delta_o$$

d'où

$$2(g_o-1) - 2d(g-1) = \sum_{P_o} (\gamma(P_o)-1) - d(\sum_{P}(\gamma(P)-1))$$

et $d = \dfrac{\sum\limits_{P_o} (\gamma(P_o)-1)-2(g_o-1)}{\sum\limits_{P} (\gamma(P)-1) + 2(g-1)}$. Dans notre cas $g = g_o = 0$ et

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{degré de } z \\ z = z(t) \end{array} = \dfrac{\sum\limits_{P_o} (\gamma(P_o)-1)+ 2}{\sum\limits_{P}(\gamma(P)-1) + 2}}$$

L'ensemble fini Δ_o est donné par l'équation $y'' + py' + qy = 0$ (ou $y'' + q_1 y = 0$) ainsi que les $\gamma(P_o)$.

L'ensemble Δ lui est $\{1,0,\infty\}$ si G n'est pas cyclique, $\{0,\infty\}$ si G est cyclique. Les $\gamma(P)$ sont fixés si G est ni diédral ni cyclique et dépendent de n si G est D_n ou C_n.

Ceci nous amène à étudier différemment les cas où G pourrait être cyclique, diédral ou l'un des 3 autres groupes.

En effet si G n'est ni cyclique, ni diédral, G sera l'un des 3 autres groupes s'il existe une fraction rationnelle $z = z(t)$ de degré fixé (différent suivant que G est T,C ou I) telle que E soit un relèvement de E_{e_1,e_2,e_3}.

Pour voir si G est cyclique et diédral nous devrons utiliser d'autres méthodes puisque le degré de $z = z(t)$ ne peut être fixé a priori

§ 2 - *Le groupe projectif de monodromie d'une équation* $E : y''+ q_1(t)y = 0$ *peut-il être tétraédral, octaédral ou icosaédral* (T,C ou I) ?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(t) \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}(t,\eta) \\ \mathbb{C}(z) \arrow[u] \arrow[r, "G"'] & \mathbb{C}(\eta) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$E : y''+q_1(t)y = 0$

$E_{e_1,e_2,e_3} : y''+q_{e_1,e_2,e_3}(z)y = 0$

η un quotient de solutions.

La réponse sera positive s'il existe une fraction rationnelle $z = z(t)$ qui vérifie :

$$\text{a) degré } z(t) = \frac{\sum_{P_o}(\gamma(P_o)-1)+2}{\sum_{P}(\gamma(P)-1)+2} \qquad \text{avec}$$

$$\sum_{P}(\gamma(P)-1) = \frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}-3,$$

Les P_o étant les pôles de $q_1(t)$

$$\boxed{\text{degré } z(t) = \frac{\sum_{P_o}(\gamma(P_o)-1)+2}{\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}-1} = \frac{\|G\|}{2}\left[\sum_{P_o}(\gamma(P_o)-1)+2\right]}$$

$$\text{b) } \boxed{q_1(t) = q_{e_1,e_2,e_3}(z)\,.\,z'^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z}\right)' + \frac{1}{4}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2}$$

Cette dernière relation étant établie comme suit

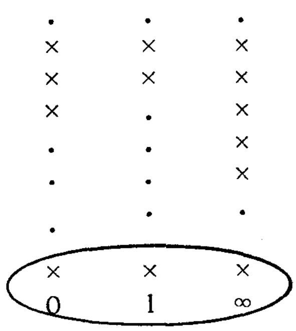
$$[\eta]_t = \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2q_1(t) \qquad ; \qquad [\eta]_z = 2q_{1,e_2,e_3}(z)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta' = \frac{d\eta}{dz}\,.\,z' \qquad \eta'' = \eta''_z\, z'^2 + \eta'_z\, z'' \qquad \text{avec } \eta'_z = \frac{d\eta}{dz}$$

$$[\eta]_t = [\eta]_z\, z'^2 + \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

d'où la relation.

c) d'un point de vue géométrique



$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C}(t) \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}(t)(\eta) \\ \mathbb{C}(z) \arrow[u] \arrow[r, "G"'] & \mathbb{C}(\eta) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dire que $E = y'' + q_1(t)y = 0$ est le relèvement de E_{e_1,e_2,e_3} c'est dire que les singularités de E, les pôles de $q_1(t)$ sont dans les fibres au-dessus de $0,1,\infty$ si l'on considère le revêtement $X \xrightarrow{\pi} Y$.

Si $z = z(t) = \dfrac{t^r+\alpha_1 t^{r-1}+\ldots+\alpha_r}{t^s+\beta_1 t^{s-1}+\ldots+\beta_s}$, $\sup(r,s) = d$ = degré du revêtement = degré de $z(t)$

on connaît les singularités de $q_1(t)$ et on a ainsi des renseignements sur les degrés du numérateur et du dénominateur r et s.

§ 3 - *Exemple d'une équation différentielle* $y'' + q_1(t)y = 0$ *dont le groupe projectif de monodromie est tétraédral* (ou C ou I).

$$E_{e_1,e_2,e_3} = y'' + q_{e_1e_2e_3}(z)y = 0$$

où

$$q_{e_1e_2e_3}(z) = \frac{e_2^2-1}{4e_2^2z^2} + \frac{e_1^2-1}{4e_1^2(z-1)^2} + \frac{1/e_1^2+1/e_2^2-1/e_3^2-1}{4z(z-1)}$$

avec $\left(\dfrac{1}{e_1},\dfrac{1}{e_2},\dfrac{1}{e_3}\right) = \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

<u>Choisissons a priori</u> $z(t) = t^m$

a) <u>Calculons</u> $q_1(t)$

$$q_1(t) = q_{e_1,e_2,e_3}(z)\, z'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$$

$$z' = mt^{m-1} \quad , \quad z'' = m(m-1)t^{m-2} \quad ; \quad \frac{z''}{z'} = \frac{m-1}{t} \quad ; \quad \left(\frac{z''}{z'}\right)' = -\frac{m-1}{t^2}$$

$$q_1(t) = \left[\frac{e_2^2-1}{4e_2^2 t^{2m}} + \frac{e_1^2-1}{4e_1^2(t^m-1)^2} + \frac{1/e_1^2+1/e_2^2-1/e_3^2-1}{4t^m(t^m-1)}\right] m^2 t^{2m-2} - \frac{1}{2}\frac{m-1}{t^2} - \frac{1}{4}\frac{(m-1)^2}{t^2}$$

$$q_1(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{e_2^2-m^2}{e_1^2}\right] \times \frac{1}{t^2} + \frac{1}{4}\frac{e_1^2-1}{e_1^2} m^2\left(\frac{t^{m-1}}{t^m-1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_3^2} - 1\right)m^2 . \frac{t^{m-2}}{t^m-1}$$

Notons ζ_k les m racines m-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

$$\frac{t^{m-1}}{t^m-1} = \frac{1}{m}\sum_k \frac{1}{t-\zeta_k} .$$

$$q_1(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{e_2^2-m^2}{e_2^2}\right] \times \frac{1}{t^2} + \frac{e_1^2-1}{4e_1^2}\left(\sum_k \frac{1}{t-\zeta_k}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_3^2} - 1\right)m \sum_k \frac{1}{t(t-\zeta_k)}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\begin{aligned} q_1(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{e_1^2-m^2}{e_2^2}\right] \times \frac{1}{t^2} + \frac{e_1^2-1}{4e_1^2}\sum_k \frac{1}{(t-\zeta_k)^2} + \frac{e_1^2-1}{2e_1^2}\sum_{k>k'} \frac{1}{\zeta_k-\zeta_{k'}}\left(\frac{1}{t-\zeta_k} - \frac{1}{t-\zeta_{k'}}\right) \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_3^2} - 1\right)m \sum_k \frac{1}{t(t-\zeta_k)} \end{aligned}}$$

b) <u>Déterminons les singularités de</u> $E = y'' + q_1(t)y$ <u>et les</u> $\gamma(P)$ <u>correspondants</u>.

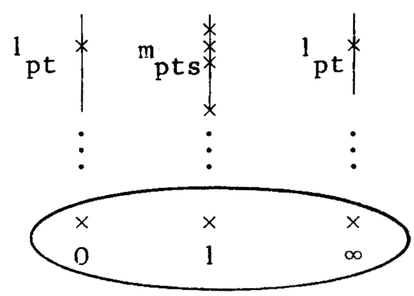
. Les singularités de E sont 0, les racines m ième de 1, l'∞.

. Les singularités de E_{e_1,e_2,e_3} sont 1, 0, ∞ avec

$$\gamma(1) = \frac{1}{2} \ , \quad \gamma(0) = \frac{1}{3} \ , \quad \gamma(\infty) = \frac{1}{3} \, .$$

d'un point de vue géométrique on a la situation suivante

$$z = t^m \qquad \begin{array}{c} \mathbb{C}(t) \\ \uparrow \\ \mathbb{C}(z) \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \\ \pi \big\downarrow \\ Y \end{array}$$



$$e(0) = m \ , \quad e(\infty) = m, \quad e(\zeta_k) = 1$$

donc

$$\gamma(0) = \frac{m}{3} \ , \quad \gamma(\zeta_k) = \frac{1}{2}, \quad \gamma(\infty) = \frac{m}{3}$$

La formule donnant le degré de $z(t)$ est bien vérifiée

$$m = \frac{\frac{m}{3} - 1 + \sum\limits_{k=1}^{m} (1/2-1) + \frac{m}{3} - 1 + 2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 3 + 2} = \frac{\frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{3} - m}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1}$$

. Si l'on calcule les racines de l'équation déterminante et que l'on fait la différence on trouve bien

$$\frac{1}{2} \, , \ \frac{m}{3} \, , \ \frac{m}{3} \ .$$

Remarque : On aurait pu faire cette construction pour G octoédral ou icosaédral, en prenant dans le premier cas $(\frac{1}{e_1},\frac{1}{e_2},\frac{1}{e_3}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$ et dans le deuxième $(\frac{1}{e_1},\frac{1}{e_2},\frac{1}{e_3}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5})$.

§ 4 - *Le groupe projectif de monodromie* G *peut-il être cyclique ?*

$E = y'' + q_1(t)y = 0$ l'équation normalisée.

4.1.- *Le groupe projectif* G *est cyclique si et seulement si il existe deux solutions* y_1 *et* y_2 *de* E *telles que* $\frac{y_1'}{y_1}$ *et* $\frac{y_2'}{y_2}$ *soient rationnelles, c'est-à-dire invariantes par* G.

a) Supposons G cyclique, G opère sur les quotients de solutions de E, $\mathbb{C}(t,\eta)$ où η est un élément générique.

G est un sous-groupe de $\mathbb{P}\,Gl(2)$, il existe 2 éléments $\frac{y_1'}{y_1}$ et $\frac{y_2'}{y_2}$ invariants par G où y_1 et y_2 sont solutions de E. $\frac{y_1'}{y_2}$ et $\frac{y_2'}{y_2} \in \mathbb{C}(t)$. Soit alors $\eta = \frac{y_1}{y_2}$, l'action de G sur η est donc $\eta \rightsquigarrow a\eta$, $a \in C$. G est fini donc a est une racine n-ième de l'unité - $\eta^n \in \mathbb{C}(t)$.

b) Réciproquement : Supposons qu'il existe deux solutions y_1 et y_2 de E telles que $\frac{y_1'}{y_1}$ et $\frac{y_2'}{y_2}$ soient rationnelles.

Soit alors $\eta = \frac{y_1}{y_2}$, $\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2} = \frac{\eta'}{\eta}$. $\frac{\eta'}{\eta}$ est rationnel, $\frac{\eta'}{\eta}$ est invariant par G. η est un élément exponentiel, l'action de G sur η est donc $\eta \to a\eta$, $a \in \mathbb{C}$ et a est une racine de l'unité puisque G est fini (η est algébrique).

Donc G est cyclique.

4.2.- *A quelles conditions existe-t-il deux solutions* y_1, y_2 *de* $E = y'' + q_1(t)y = 0$ *dont les dérivées logarithmiques* $\frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_2'}{y_2}$ *sont rationnelles ?*

y solution de $E \Rightarrow \frac{y'}{y}$ est solution de l'équation de Riccati $u' + u^2 + q_1(t) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y'}{y} \text{ rationnelle} \\ y \text{ solution de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \sum_i \frac{c_i}{(t-a_i)} .$$

Les c_i sont des exposants des solutions de E. Si α_i, α_i' désignent les exposants d'une base de solution que l'on peut supposer constituée à partir de y, $c_i = \alpha_i$, de plus $\alpha_i + \alpha_i' = 1$ (le coefficient de y' est nul et donc α_i et α_i' sont racines de l'équation $\alpha^2 - \alpha + q^o_{a_i} = 0$) $\alpha_i - \alpha_i' = \pm\lambda_i$ et donc $c_i = \frac{1\pm\lambda_i}{2}$ où λ_i est la différence d'exposants en a_i, reste à vérifier que $u = \frac{y'}{y} = \sum_i \frac{c_i}{(t-a_i)}$ avec $c_i = \frac{1\pm\lambda_i}{2}$ est solution de $u' + u^2 + q_1(t) = 0$.

Si l'équation de Riccati admet 2 solutions de ce type alors G sera cyclique.

Si l'équation de Riccati n'admet pas 2 solutions de ce type alors G ne pourra être cyclique.

§ 5 - *Le groupe projectif de monodromie* G *peut-il être diédral ?*

On suppose G non cyclique. G est diédral d'ordre $2n$. Si $n \neq 2$, G contient un seul sous-groupe cyclique H d'ordre n (le groupe des rotations C_n) G/H est d'ordre $2 = \{1,\sigma\}$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "G"] \arrow[dr] & & L \\ & L^H \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

L^H est une extension quadratique de K donc galoisienne.

Si $n = 2$, G est le groupe de Klein $= V = \{1,\sigma,\tau,\sigma\tau\}$, $K \xrightarrow{V} L$, il existe a et b dans K tels que $L = K(\sqrt{a},\sqrt{b})$, $K(\sqrt{a})$, $K(\sqrt{b})$, $K(\sqrt{ab})$ sont 3 extensions quadratiques de K.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr] \arrow[dr] & & L \\ & K(\sqrt{a}) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[rr] \arrow[dr] & & L \\ & K(\sqrt{b}) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[rr] \arrow[dr] & & L \\ & K(\sqrt{ab}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Nous distinguerons le cas où G est diédral (en excluant $G = V$) et le cas où $G = V$.

5.1.- *Le groupe projectif* G *est diédral* $(G \neq V)$ *si et seulement si il existe deux solutions linéairement indépendantes de* (E) y_1 *et* y_2 *telles que* $\frac{y'_1}{y_1}$ *et* $\frac{y'_2}{y_2}$ *soient conjuguées dans une extension quadratique de* $\mathbb{C}(t)$ *contenue dans* L.

G est diédral d'ordre $2m$, H le sous groupe cyclique, η un élément primitif de L

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(t) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{C}(t,\eta) \\ & \mathbb{C}(t,\eta)^H \arrow[ur] & \\ \mathbb{C}(z) \arrow[uu] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{C}(\eta) \arrow[uu] \\ & \mathbb{C}(\eta)^H \arrow[ur] \arrow[uu] & \end{tikzcd}$$

(E) : $y'' + q_1(t)y = 0$

(E_z) : $y'' + q(z)y = 0$

5.1.1. Montrons tout d'abord que G est diédral si et seulement si il existe deux solutions, y_1 et y_2 de E_z telles que $\frac{y'_1}{y_1}$ et $\frac{y'_2}{y_2}$ soient conjuguées dans une extension quadratique de $\mathbb{C}(z)$.

. <u>On suppose</u> G <u>diédral</u>

H le sous-groupe cyclique, $\mathbb{C}(\eta)^H$ est un sous corps de $\mathbb{C}(\eta)$, extension quadratique de $\mathbb{C}(z)$, c'est un $\mathbb{C}(\alpha)$.

H est cyclique d'ordre m, on peut donc trouver deux solutions y_1, y_2 telles que $\frac{y'_1}{y_1}$ et $\frac{y'_2}{y_2}$ soient dans $\mathbb{C}(\alpha)$; c'est le cas cyclique.

Pour le η correspondant $\eta = \frac{y_1}{y_2}$, $\eta^m \in \mathbb{C}(\alpha)$, G n'étant pas cyclique $\frac{y'_1}{y_1}$ et $\frac{y'_2}{y_2}$ ne sont pas dans $\mathbb{C}(z)$, ne sont pas invariants par G ; ce sont les seules valeurs de $\frac{y'}{y}$ dans $\mathbb{C}(\alpha)$ donc $\frac{y'_1}{y_1}$ et $\frac{y'_2}{y_2}$ sont conjuguées.

. <u>Réciproquement</u> : On suppose qu'il existe 2 solutions y_1 et y_2 de E_z telles que $\frac{y'_1}{y_1}$ et $\frac{y'_2}{y_2}$ soient dans une extension quadratique de $\mathbb{C}(z)$ qui est un $\mathbb{C}(\alpha)$.

Prenons $\eta = \frac{y_1}{y_2}$.

Les y_i sont algébriques donc il existe un m tel que $\eta^m \in \mathbb{C}(\alpha)$. Désignons par H le sous-groupe de G tel que $\mathbb{C}(\eta)^H = \mathbb{C}(\alpha)$

H est cyclique d'ordre m [même raisons que dans le cas cyclique]

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(z) \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "\{1,\sigma\}"'] & & \mathbb{C}(\eta) \\ & \mathbb{C}(\eta) \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Donc $G/H = \{1,\sigma\}$, G est diédral. Si m est différent de 2, $\mathbb{C}(\eta)^H$ est la seule extension quadratique de $\mathbb{C}(z)$. Si $m = 2$, G est le groupe de Klein V et l'extension quadratique $\mathbb{C}(\eta)^H$ contient η^2 c'est le corps fixe correspondant à l'élément $\gamma \in G$, $\gamma : \eta \to -\eta$. Nous reviendrons sur ce cas.

5.1.2. Calculs explicites de $\frac{y_1'}{y_1}$ et $\frac{y_2'}{y_2}$ à partir de deux solutions y_1 et y_2 de E_z calculées par Gauss.

L'équation hypergéométrique à groupe diédral s'écrit

$$y'' + \frac{(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)}{z(1-z)}\, y' - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}\, y \quad \text{où } 1-\gamma,\ \gamma-\alpha-\beta,\ \alpha-\beta$$

sont les différences d'exposants en $0,1,\infty$ soit ici $1-\gamma = \frac{1}{2}$ $\gamma-\alpha-\beta = \frac{1}{m}$, $\alpha-\beta = \frac{1}{2}$.

Gauss en a calculé 2 solutions :

$$(1+\sqrt{z})^{1/m} \quad \text{et} \quad (1-\sqrt{z})^{1/m}$$

L'équation normalisée $(E_z) = y'' + q(z)y = 0$ aura pour solutions

$$y_1 = \frac{(1+\sqrt{z})^{1/m}}{\sqrt{w}} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{(1-\sqrt{z})^{1/m}}{\sqrt{w}}$$

où w est le Wronskien des 2 solutions précédentes c'est-à-dire $w = \frac{1}{m\sqrt{z}}\,(1-z)^{1/m-1}$, ce qui nous donne

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{2m}\,\frac{\sqrt{z}}{z(1-z)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4z}$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = -\frac{1}{2m}\,\frac{\sqrt{z}}{z(1-z)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4z}$$

$\frac{y_1'}{y_1} = \gamma + \sqrt{R}$ et $\frac{y_2'}{y_2} = \gamma - \sqrt{R}$ où $\sqrt{R} = \frac{1}{2m}\frac{\sqrt{z}}{z(1-z)}$ et $\gamma = -\frac{1}{4}\frac{R'}{R}$ donc

$\frac{y_1'}{y_1}$ et $\frac{y_2'}{y_2}$ sont conjuguées dans l'extension quadratique $\mathbb{C}(\sqrt{z})$ de $\mathbb{C}(z)$.

5.1.3. Etudions maintenant le relèvement à $\mathbb{C}(t)$

(E) : $y'' + q_1(t)y = 0$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}(t) \arrow[rr, "C"] \arrow[dr] & & \mathbb{C}(t,\eta) \\
& \mathbb{C}(t,\eta)^H \arrow[ur] & \\
\mathbb{C}(z) \arrow[uu] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{C}(\eta) \arrow[uu] \\
& \mathbb{C}(\alpha) \arrow[ur, "H"'] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}(\alpha) = \mathbb{C}(t,\eta)^H \cap \mathbb{C}(\eta)$, $\mathbb{C}(t,\eta)^H$, extension quadratique de $\mathbb{C}(t)$ est le relèvement de $\mathbb{C}(\alpha)$ par $z = z(t)$.

. Calculons les $\frac{y_1'}{y_1}$ et $\frac{y_2'}{y_2}$ conjuguées dans $\mathbb{C}(t,\eta)^H$. Soit η le quotient de solutions $\frac{y_1}{y_2}$ de E_z trouvé au paragraphe précédent η est aussi quotient de solutions de E.

En effet si y_i est solution de E_z alors $y_i \times \frac{1}{\sqrt{z'}}$ où $y_i = y_i(z(t))$ est solution de E.

Si $u_i(z) = \frac{y_i'}{y_i}$ alors $u_i(z(t)) \times z' - \frac{1}{2}\frac{z''}{z'} = \frac{y_i'}{y_i}(t)$ où $y_i(t)$ est solution de E.

Les calculs se font "simplement" en écrivant

$$(E) : \quad y'' + q_1(t)y = 0 \quad \text{et} \quad (E_z) : \quad y'' + q(z)y = 0$$

où $q_1(t) = q(z(t))z'^2 + \frac{1}{2}[z]_t$; $[z]_t$ = schwarzien de z par rapport à t.

Comme z' et z'' sont dans $\mathbb{C}(t)$, on écrira encore

$\frac{y_1'}{y_1} = \gamma+\sqrt{R}$, $\frac{y_2'}{y_2} = \gamma-\sqrt{R}$ avec γ et R dans $\mathbb{C}(t)$, R non carré dans $\mathbb{C}(t)$

et $\gamma = -\frac{1}{4}\frac{R'}{R}$.

Ceci achève la démonstration.

> G diédral $\iff$ il existe deux solutions y_1 et y_2 de (E) telles que $\frac{y_1'}{y_1}$ et $\frac{y_2'}{y_2}$ soient conjuguées dans une extension quadratique de $\mathbb{C}(t)$ contenue dans $L = \mathbb{C}(t,\eta)$

Soient donc y_1 et y_2, $\frac{y_1}{y_2} = \eta$ trouvés précédemment

$$\frac{y_1'}{y_1} = \gamma+\sqrt{R} \qquad \frac{y_2'}{y_2} = \gamma-\sqrt{R}$$

$$\frac{y_1'}{y_1} + \frac{y_2'}{y_2} \in \mathbb{C}(t) \quad \text{est invariant par } G.$$

D'autre part $\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2} = 2\sqrt{R} = \frac{w}{y_1y_2}$, w = Wronskien est ici une constante.

y_1 et y_2 sont telles que la dérivée logarithmique du produit soit rationnelle, invariante par G et telles que le carré du produit soit rationnel, invariant par G.

Ceci nous amène à formuler une nouvelle condition pour que G soit diédral (différent de V).

5.2. G diédral <=> il existe deux solutions y_1, y_2 de (E) telles quel'équation différentielle (du troisième ordre) dont $y_1\, y_2$ est solution admet une solution dont la dérivée logarithmique est rationnelle et dont le carré est dans $\mathbb{C}(t)$

. Supposons G diédral alors $\eta = \dfrac{y_1}{y_2}$, $\mathbb{C}(t) \xrightarrow{G} \mathbb{C}(t,\eta)$ et

$\dfrac{y_1'}{y_1} = \gamma+\sqrt{R}$, $\dfrac{y_2'}{y_2} = \gamma-\sqrt{R}$, $\dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} = \dfrac{d(\mathrm{Log}\ y_1y_2)}{dt} \in \mathbb{C}(t)$ et

$(y_1y_2)^2 = \dfrac{1}{4}\dfrac{w^2}{R} \in \mathbb{C}(t)$. C'est le calcul de $\dfrac{y_1'}{y_1}$ et $\dfrac{y_2'}{y_2}$ qui précède.

. Réciproquement :

L'équation différentielle du troisième ordre dont les solutions sont les formes quadratiques des solutions de (E) est

$$(E_3) = y''' + 4q_1y' + 2q_1'y = 0$$

La solution générale est $Ay_1^2 + By_1y_2 + Cy_2^2$ où A,B,C sont des constantes.

Une solution de E_3 peut avoir 2 formes

a) $Y^2 = (ay_1 + by_2)^2$ c'est le cas $B^2-AC = 0$ mais alors

$\dfrac{d(\mathrm{Log}\ Y^2)}{dt} = \dfrac{2Y'}{Y} \in \mathbb{C}(t)$, $\dfrac{Y'}{Y}$ est rationnel, Y est solution de (E) or ceci est impossible car on a supposé que G n'était pas cyclique (G cyclique <=> il existe une solution y tel que $\dfrac{y'}{y} \in \mathbb{C}(t)$).

b) $Y_1 Y_2 = (ay_1 + by_2)(cy_1 + dy_2)$, c'est donc le seul cas possible

$$\frac{d\ \mathrm{Log}\ Y_1Y_2}{dt} = \frac{Y_1'}{Y_1} + \frac{Y_2'}{Y_2} \in \mathbb{C}(t) \quad \text{et} \quad (Y_1Y_2)^2 \in \mathbb{C}(t), \qquad Y_1Y_2 = \sqrt{R(t)}$$

$$\frac{Y_1'}{Y_1} - \frac{Y_2'}{Y_2} = \frac{w}{Y_1 Y_2} = \frac{w}{\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad \frac{Y_1'}{Y_1} + \frac{Y_2'}{Y_2} = \frac{1}{2}\frac{R'}{R}$$

$$\frac{Y_1'}{Y_1} = \frac{1}{4}\frac{R'}{R} + \frac{w}{2\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad \frac{Y_2'}{Y_2} = \frac{1}{4}\frac{R'}{R} - \frac{1}{2}\frac{w}{\sqrt{R}} .$$

Y_1 et Y_2 sont solutions de $(E) = y'' + q_1(t)y = 0.$

$\frac{Y_1'}{Y_1}$ et $\frac{Y_2'}{Y_2}$ sont conjugués dans une extension quadratique de $\mathbb{C}(t)$.

Remarque. Le carré d'une solution de (E_3) est dans $\mathbb{C}(t)$ implique que la dérivée logarithmique de cette solution est dans $\mathbb{C}(t)$.

5.3. Cas où G serait le groupe de Klein

$G = V = \{id,\sigma,\tau,\sigma\tau\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(t) \arrow[r, "G"] & L \\ \mathbb{C}(z) \arrow[u] \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}(\eta) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Soit η un quotient de (E) correspondant au quotient de solution de (E_3) $\frac{y_1}{y_2}$ où y_1 et y_2 sont les solutions de Gauss de l'équation hypergéométrique normalisée $\frac{(1+\sqrt{z})^{1/2}}{\sqrt{w}}$ et $\frac{(1-\sqrt{z})^{1/2}}{\sqrt{w}}$.

G opère sur η

$$\sigma : \eta \to -\eta$$

$$\tau : \eta \to \frac{1}{\eta}$$

$$\sigma\tau : \eta \to -\frac{1}{\eta}$$

η^2 est invariant par σ, η^2 n'est pas invariant par G.

η^2 est dans une extension quadratique K_σ de $\mathbb{C}(t)$ $(\eta(t) = \frac{Y_1}{Y_2})$

$K_\sigma = \mathbb{C}(\sqrt{z(t)})$ et $\frac{Y_1'}{Y_1}$ et $\frac{Y_2'}{Y_2}$ sont dans $\mathbb{C}(\sqrt{z(t)})$, en effet d'après les calculs précédents (5.1.2)

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{z}}{z(1-z)} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4z} \quad ; \quad \frac{y_2'}{y_2} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{z}}{z(1-z)} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4z}$$

$$\frac{Y_1'}{Y_1} = \frac{y_1'}{y_1}(t) \times z' - \frac{1}{2}\frac{z''}{z'} \quad ; \quad \frac{Y_2'}{Y_2} = \frac{y_2'}{y_2}(t) \times z' - \frac{1}{2}\frac{z''}{z'}$$

z étant rationnellement z' et z'' le sont, $\frac{Y_1'}{Y_1}$ et $\frac{Y_2'}{Y_2}$ sont dans $\mathbb{C}(\sqrt{z(t)})$.

5.3.1. Si ζ (resp. ξ) est un quotient de solutions $\frac{U_1}{U_2}$ (resp. $\frac{V_1}{V_2}$) dont le carré est invariant par τ (resp. $\sigma\tau$) alors $\frac{U_1'}{U_1}$ et $\frac{U_2'}{U_2}$ (resp. $\frac{V_1'}{V_1}$ et $\frac{V_2'}{V_2}$) seront conjugués dans l'extension quadratique K_τ (resp. $K_{\sigma\tau}$) de $\mathbb{C}(t)$. Ceci déterminera explicitement K_τ et $K_{\sigma\tau}$.

Cherchons tout d'abord ζ dont le carré est invariant par $\tau : \eta \to 1/\eta$

$$\zeta = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$$

$$\tau\left(\left(\frac{a\eta+b}{c\eta+d}\right)^2\right) = \left(\frac{a\eta+b}{c\eta+d}\right)^2$$

Cette équation nous conduit au système $\left|\begin{array}{l} ad + bc = 0 \\ ac + bd = 0 \end{array}\right.$

$\zeta = \frac{\eta-1}{\eta+1}$ convient, prenons

$$\zeta(z) = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\eta-1}{\eta+1} \quad \text{où} \quad u_1 = u_1(z) = y_1 - y_2 \quad \text{solution de } E_z$$

$$u_2 = u_2(z) = y_1 + y_2 \quad \text{solution de } E_z$$

alors

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{1+\sqrt{1-z}}{4z\sqrt{1-z}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4z} = \frac{\sqrt{1-z}}{4z(1-z)} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{4(1-z)}$$

$$\frac{u_2'}{u_2} = + \frac{-1+\sqrt{1-z}}{4z\sqrt{1-z}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4z} = \frac{-\sqrt{1-z}}{4z(1-z)} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{4(1-z)}$$

K_τ est donc $\mathbb{C}(\sqrt{1-z(t)})$, on aurait pu aussi calculer

$$\zeta^2 = \frac{z-2\sqrt{1-z}}{z} \in \mathbb{C}(\sqrt{1-z}) \ .$$

* On cherche de la même façon ξ dont le carré est invariant par $\sigma\tau : \eta \to -\frac{1}{\eta}$, $\xi = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$

$$\sigma\tau\left(\left(\frac{a\eta+b}{c\eta+d}\right)^2\right) = \left(\frac{a\eta+b}{c\eta+d}\right)^2$$

Cette équation nous conduit au système $\left|\begin{array}{l} ad + bc = 0 \\ ac - bd = 0 \end{array}\right.$

$\zeta = \frac{\eta-i}{\eta+i}$ convient

$$\xi = \frac{v_1}{v_2} = \frac{y_1-iy_2}{y_1+iy_2} \qquad v_1 = y_1-iy_2 \quad ; \quad v_2 = y_1+iy_2$$

$$\xi^2 = 2z - 1 - 2i\sqrt{z(1-z)}$$

Si on calcule $\frac{v_1'}{v_1}$ et $\frac{v_2'}{v_2}$

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{+i\sqrt{z(1-z)}}{4z(1-z)} + \frac{1}{4z} - \frac{1}{4(1-z)}$$

$$\frac{v_2'}{v_2} = \frac{-i\sqrt{z(1-z)}}{4z(1-z)} + \frac{1}{4z} - \frac{1}{4(1-z)}$$

$$K_{\sigma\tau} = \mathbb{C}(\sqrt{z(t)(1-z(t)})$$

Pour avoir les solutions $\frac{U_i'}{U_i}(t)$ et $\frac{V_i'}{V_i}(t)$ il suffit d'écrire

$$\frac{U_i'}{U_i} = \frac{u_i'}{u_i} \times z' - \frac{1}{2}\frac{z''}{z}$$

Nous obtenons ainsi les 3 extensions quadratiques de $\mathbb{C}(t)$ correspondant aux corps fixes par les sous-groupes de G et nous obtenons 3 couples de solutions de (E) (U_1,U_2), (V_1,V_2), (Y_1,Y_2) tels que

$$\left(\frac{U_1'}{U_1}, \frac{U_2'}{U_2}\right) \quad , \quad \left(\frac{V_1'}{V_1}, \frac{V_2'}{V_2}\right) \quad , \quad \left(\frac{Y_1'}{Y_1}, \frac{Y_2'}{Y_2}\right)$$

sont distinctes et conjugués 2 à 2.

5.3.2. G est le groupe de Klein <=> l'équation différentielle du 3ème ordre qui admet comme solution générale $Ay_1^2 + By_2y_1 + Cy_2^2$ où y_1, y_2 sont 2 solutions linéairement indépendantes de (E) admet 3 solutions distinctes dont la dérivée logarithmique est rationnelle et dont le carré est dans $\mathbb{C}(t)$.

C'est la même démonstration que dans 5.2 où l'on considérera les 3 extensions quadratiques K_σ, K_τ, $K_{\sigma\tau}$ de $C(t)$ et les 3 couples de solution (U_1,U_2), (V_1,V_2), (Y_1,Y_2).

5.4.

Il nous reste maintenant à chercher quand il peut y avoir une (ou trois) solutions de (E_3) dont le carré est dans $\mathbb{C}(t)$ et donc que la dérivée logarithmique est rationnelle.

$$Y_1Y_2 = \sqrt{R(t)} \qquad R(t) \in \mathbb{C}(t)$$

Y_1Y_2 est de la forme $\pi(t-a_i)^{k_i}$ o g où les k_i sont des entiers ou des demi-entiers et g un polynôme. Les a_i étant les points singuliers de l'équation (E).

D'autre part, $Y_1Y_2 = (ay_1+by_2)(cy_1+dy_2)$, en utilisant les différences d'exposants λ_i, on obtient vu les relations déjà écrites (dans le cas cyclique) $k_i = 1 \pm \lambda_i$ ou 1 et $\sum k_i + \deg g = 1$ ou $1 \pm \lambda_\infty$. Ceci donne un nombre fini de possibilités puisque l'on connaît λ_i et λ_∞ et les a_i.

Ce qui permet de déterminer si G peut être diédral ou le groupe de Klein.

§ 6 - *En guise de conclusion à ce chapitre*

Quelles conditions doivent satisfaire les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients dans un $\mathbb{C}(t)$ pour avoir des solutions algébriques ?

. $y'' + py' + qy = 0$ une telle équation

. $y'' + (q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p')y = 0$ l'équation normalisée projectivement équivalente (ayant les mêmes quotients de solutions)

. M le groupe de monodromie de l'équation égal au groupe de Galois, G la partie projective de M : groupe projectif qui opère sur les quotients de solutions η $M/H \simeq G$ où H est le sous-groupe des homothéties

$$\begin{pmatrix} h(y_1) \\ h(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 \\ ay_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C}(t) \xrightarrow{G} \mathbb{C}(t,\eta) \xrightarrow{H} L$$

→ les pôles de p sont d'ordre 1

→ les pôles de q sont au plus d'ordre 2

→ le nombre de pôles de p et q n'est pas fixé mais : les pôles de $q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$ sont dans les fibres au-dessus de $1,0,\infty$ ($0,\infty$ si G est cyclique) dans le revêtement $X \xrightarrow{\pi} Y$ défini par une application rationnelle $z = z(t)$ telle que

$$[\eta]_t = [\eta]_z z'^2 - [z]_t \qquad z' = \frac{dz}{dt}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly, no head] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}(t) \\ Y \arrow[r, squiggly, no head] & \mathbb{C}(z) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

→ G est l'un des 5 groupes C_n, D_n, T, C ou I

H est fini cyclique

les solutions sont dans L extension cyclique de $\mathbb{C}(t,\eta)$

→ étant donné une équation $y'' + py' + qy = 0$ on a décrit des procédures permettant de déterminer si G pouvait être cyclique, diédral ou T, C ou I.

Etant donné une équation $y'' + py' + qy = 0$, on saura donc déterminer si ces solutions sont algébriques ou non.

CHAPITRE V

Dans ce chapitre nous étudions des conditions pour que certains opérateurs linéaires du second ordre définis sur une surface de Riemann compacte, connexe ait des solutions algébriques.

Nous le faisons en nous plaçant du point de vue de l'algèbre différentielle en travaillant dans les corps de fonctions méromorphes sur des surfaces de Riemann.

§ 1 - *Rappels sur les surfaces de Riemann.*

1.1. *Définitions générales.*

Par K un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ nous entendons un corps de transcendance 1 de type fini sur $\mathbb{C}$.

K peut s'écrire $\mathbb{C}(x,y)$ où (x,y) vérifie un polynôme irréductible sur $\mathbb{C}$.

Définitions 1. Un point P de K est un anneau de valuation de K qui contient $\mathbb{C}$. Ce point est k-rationnel si le corps résident $\frac{P}{\mathfrak{m}}$ est le corps k.

On associe ainsi à K un ensemble de points dont on peut démontrer que c'est une surface analytique complexe compactes connexe, une surface de Riemann dont le corps des fonctions méromorphes est $K.x(P)$ est la classe résiduelle de x modulo $\mathfrak{m}$ si $x \in P$, ∞ si $x \notin P$. Si $x(P) = 0$, on dit que x est un zéro en P, si $x(P) = \infty$ un pôle.

Définitions 2. K et M deux corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ avec $K \hookrightarrow M$. Q un point de M, $Q \cap M$ est un point de K.

A une extension du corps K correspond un revêtement de sa surface de Riemann. On démontre que les degrés sont les mêmes et que les ramifications se correspondent.

Définitions 3.

- On appelle $\mathbb{C}$-dérivation de K une application C-linéaire de K dans K :

$$\forall f,g \in K, \qquad D(fg) = f\,Dg + g\,Df \ .$$

Les $\mathbb{C}$-dérivations sont nulles sur $\mathbb{C}$. Ce K-espace des $\mathbb{C}$-dérivations est noté $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ et est K-isomorphe à K.

Si $K \hookrightarrow M$ est une extension finie de K, toute $\mathbb{C}$-dérivation de K s'étend d'une façon et d'une seule en une $\mathbb{C}$-dérivation de M.

- Une <u>différentielle</u> sur K est un élément du K-dual de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ ce dual s'écrit $\mathrm{Diff}_{C}(K)$.

f élément de K, on définit l'élément df de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(K)$ qui à tout D de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ fait correspondre Df. On définit ainsi une application $\mathbb{C}$-linéaire de K dans $\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(K)$; on dit que les éléments df sont des différentielles exactes.

- x étant un élément de K n'appartenant pas à $\mathbb{C}$, dx est différent de 0 ; nous pouvons définir la $\mathbb{C}$-dérivation associée à x :

$$\frac{d}{dx} : f \rightsquigarrow \frac{df}{dx} .$$

Cette C-dérivation se prolonge à toute extension M de degré fini de K en une unique $\mathbb{C}$-dérivation de M encore notée $\frac{d}{dx}$.

Si D est un $\mathbb{C}$-dérivation de K, L un opérateur différentiel linéaire est une expression $L = \sum_{i=0}^{n} A_i D^i$ où les A_i sont dans K. Les solutions sont des éléments y de K ou d'extensions de K tels que $Ly = 0$.

1.2.- <u>Diviseurs sur</u> K.

<u>Définition</u> 1. Un diviseur sur le corps K des fonctions d'une variable sur C (ou sur la surface de Riemann corrspondante) est un élément du groupe abélien libre engendré par les points P de K.

Si L est un diviseur, $L = \sum_{P \in \Gamma} n_P P$, $n_P \in \mathbb{Z}$ et où les n_P non nuls sont en nombre fini.

<u>Définition</u> 2. En un point P de K tout élément y de K s'écrit $y = \sum_{i=s}^{+\infty} a_i t^i$ où t est un générateur de l'idéal maximal de P et $a_s \neq 0$, s ne dépend pas du choix de l'uniformisante t, on dit que s est l'ordre de y en P on le note $\mathrm{Ord}_p(y)$, $s > 0$, P est un zéro pour y, $s < 0$, P est un pôle. Cet ordre est différent de zéro en un nombre fini de points seulement et donc

$$\mathrm{div}(y) = \sum_{P\in\Gamma} \mathrm{ord}_p(y).P$$

est défini

$$\mathrm{div}(y.z) = \mathrm{div}(y) + \mathrm{div}(z).$$

Les diviseurs de fonctions sont appelés <u>diviseurs principaux</u>.

- <u>Diviseurs équivalents</u> : Deux diviseurs sont linéairement équivalent si leur différence est le diviseur d'un élément de K (que l'on appelle encore fonction).

- <u>Diviseurs associés aux formes différentielles</u> : Soit ω un élément de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(K)$. t étant une uniformisante en le point P, $\omega = y\,dt$ où $y \in K$ et on appelle ordre de ω en P, $\mathrm{ord}_p(\omega)$, l'ordre de y en P, Cet ordre ne dépend pas du choix de t

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{P\in\Gamma} \mathrm{ord}_p(\omega).P$$

- <u>Diviseur canonique</u> : $\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(K)$ est de dimension 1 sur K : quelques soient ω_1 et ω_2 différentielles sur K il existe y dans K tel que $\omega_1 = y\,\omega_2$.

$$\mathrm{div}(\omega_1) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega_2).$$

Les diviseurs des différentielles appartiennent à la même classe d'équivalence linéaire que l'on appelle <u>diviseur canonique</u>.

- <u>Degré d'un diviseur</u> : $L = \sum_{P\in\Gamma} n_p.P$, $\sum_{P\in P} n_p$ est appelé degré de L et noté $\deg(L)$.

On peut démontrer que si y est un élément de K non constant, c étant le diviseur de ses pôles

$$-\deg(c) = +[K : \mathbb{C}(y)]$$

c'est ce que nous appellerons ensuite le degré de y dans K, $\deg_K(y)$.
Comme $[K : \mathbb{C}(y)] = [K : \mathbb{C}(\frac{1}{y})]$, le nombre de pôles d'un élément est égal au nombre de ses zéros. Le degré du diviseur d'un élément de K est nul.

Le degré d'un diviseur ne dépend que de sa classe d'équivalence.

Le degré du diviseur canonique est $2g-2$ si g est le genre de K.

- <u>Résidus d'une forme différentielle</u> : P étant un point de K, $\omega = y\,dt$ où t est une uniformisante en t, y appartient à K et

$$y = \sum_{i=s}^{+\infty} a_i\, t^i\; i\,.$$

On appelle <u>résidu de ω en P</u>, $\mathrm{res}_p(\omega)$, a_{-1} ; ceci ne dépend pas du choix de t.

(i) $\mathrm{res}_p(\omega) = 0$ si $\mathrm{ord}_p(\omega) \geqslant 0$

(ii) $\mathrm{res}_p(dg) = 0$ si $g \in K$

(iii) $\mathrm{res}_p(\frac{dg}{g}) = \mathrm{ord}_p(g)$ si $g \in K^*$

(iv) $\sum_{P\in\Gamma} \mathrm{res}_p(\omega) = 0$

- Jacobienne : On appelle jacobienne de Γ le quotient du groupe des diviseurs de degré 0 par celui des diviseurs principaux

$$0 \to \mathrm{Div}_p \to \mathrm{Div}_0 \to J(\Gamma) \to 0$$

Un diviseur de degré 0 est celui d'une fonction si et seulement si son image dans $J(C)$ est nulle.

§ 2 - *Résultats généraux.*

2.1. *Préliminaires.*

K un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$; Γ la surface de Riemann correspondante. D une $\mathbb{C}$-dérivation de K non nulle, on considère l'opérateur différentiel du second ordre $L = D^2 + AD + B$ où A,B appartiennent à K.

Soit P un point de K, tp étant une uniformisante en P

$$L = R\left(\frac{d^2}{dtp^2} + A_1 \frac{d}{dtp} + B_1\right)$$

où R, A_1 et B_1 appartiennent à K ; en effet $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ est de dimension 1 sur K et donc $D = S \frac{d}{dtp}$ où S est un élément de K.

Le point P est un point ordinaire ou singulier de L suivant que A_1 et B_1 sont holomorphes ou non en P. En chaque point P singulier nous supposons que L a deux solutions linéairement indépendantes qui sont pour $i = 1,2$: $u_{i_p} = t_p^{\alpha_{ip}} \Psi_i(t_p)$ avec Ψ_i une série entière inversible et α_{ip} appartient à $\mathbb{Q}$.

Ce qui se calcule classiquement par identification.

Groupes de monodromie et de monodromie projective.

Γ est connexe par arcs.

Notons $P_1,\ldots,P_2$ les points singuliers de L sur Γ et soit P un point différent des $P_1,\ldots,P_2$; si nous prenons un système de deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de L et nous nous fixons un point P_o au-dessus de P un corps où sont les solutions, les valeurs $y_1(P_o)$ et $y_2(P_o)$ après que l'on ait suivi un chemin élément du groupe $F = \Pi_1(\Gamma - \{P_1,\ldots,P_2\} ; P)$ sont transformées en $a_1y_1(P_o) + a_2y_2(P_o)$ et $b_1y_1(P_o) + b_2y_2(P_o)$ respectivement avec a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{C}$. Nous avons en fait une représentation de F dans $Gl_2(\mathbb{C})$. C'est l'image de cette représentation que l'on appelle groupe de monodromie de L. Ce groupe est défini à conjugaison près quend on change de point P et de point P_o au-dessus de P.

Si nous prenons un quotient η de solutions linéairement indépendantes nous avons une représentation de F dans $Pl_2(\mathbb{C})$ et l'image de cette représentation est appelée groupe de monodromie projective de L.

Si donc 2 opérateurs définis sur K ont même quotients de solutions c'est-à-dire même schwarzien, ils ont même groupe de monodromie projective.

Définition. Deux opérateurs du second ordre en D à coefficients ans K sont dits projectivement équivalents s'ils ont en chaque point de K en commun même quotient de deux solutions linéairement indépendantes.

Ceci est intéressant car L donné est projectivement à L_1 :

$$L_1 = D^2 + B_1$$

avec $B_1 = B - \frac{1}{2} DA - \frac{1}{4} A$.

On a écrit simplement que L_1 a même schwarzien que L.

$L_1 = \frac{1}{\sqrt{w}} \circ L \circ \sqrt{w}$ où w est le wronskien de L.

L_1 qui n'a pas de tenue en D est dit normalisé et η est le quotient de deux solutions linéairement indépendantes

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{D\eta}} \quad , \quad y_2 = \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} \quad .$$

Ces solutions de L_1 sont algébriques sur K si et seulement si η est algébrique sur K. Nous pouvons résumer :

L aura des solutions algébriques sur K si et seulement si

1) son wronskien est algébrique sur K et
2) L_1 l'opérateur normalisé qui lui est projectivement équivalent à des solutions algébriques.

Ici nous ne nous intéresserons qu'au problème 2) et nous rappelons que cette condition 2) est équivalente à la condition que le groupe de monodromie projective de L ou L_1 est fini. Dans ce cas le groupe de monodromie projective égal au groupe de galois.

2.2. *Conditions nécessaires pour que le groupe projectif soit fini.*

K corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$.

x un élément non constant de K qui n'a que des pôles simples qui sont m. $K = \mathbb{C}(x,y)$ et $[K : \mathbb{C}(x)] = m$. $L = (\frac{d}{dx})^2 - Q$ où $Q \in K$; on note η un quotient de deux solutions linéairement indépendantes. G le groupe de monodromie projective de L. $L\lambda,\mu,\nu = (\frac{d}{d\xi})^2 + q\lambda,\mu,\nu(\xi)$ l'opérateur hypergéométrique défini sur $\mathbb{C}(\xi)$ $(\xi \notin \mathbb{C})$ associé à (λ,μ,ν) de "la liste de Schwarz" avec

$$q\lambda,\mu,\nu(\xi) = \frac{1-\lambda^2}{4\xi^2} + \frac{1-{}^{\;2}}{4(\xi-1)^2} + \frac{\lambda^2+\mu^2-1-\nu^2}{4(\xi-1)}$$

Théorème.- Baldassarri [12]. Si L défini au-dessus a un groupe G de monodromie projective fini il existe un unique (λ,μ,ν) dans la liste de Schwarz et un élément ξ de K tels que l'opérateur hypergéométrique $L\lambda,\mu,\nu$ défini sur $\mathbb{C}(\xi)$ ait un groupe de monodromie projective isomorphe à G.

ξ est unique si $(\lambda,\mu.\nu) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; si $(\lambda,\mu,\nu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ il y a deux solutions ξ et $1-\xi$.

Nous supposons donc η est algébrique sur K ; les conjugués de η sur K sont aussi solutions de schwarzien de L $\{\eta,x\} = -2Q$. Les conjugués de η sur K sont des transformés de η par des homographies à coefficients dans $\mathbb{C}$, ils appartiennent à $K(\eta)$ qui est de ce fait galoisien sur K (caract $K = 0$) et $\mathbb{C}(\eta)$ est stable par G. Nous avons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & K(\eta) \\
K \arrow[ur, hook] & \mathbb{C}(\eta) \arrow[u, hook] \\
\mathbb{C}(\eta)^G = \mathbb{C}(\eta) \cap K \arrow[u] \arrow[ur, hook, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Il existe un élément ξ de $\mathbb{C}(\eta)^G$ tel que $\mathbb{C}(\eta)^G = \mathbb{C}(\xi)$ et tel que η soit un quotient de solutions pour l'opérateur $L\lambda,\mu,\nu$ défini sur $\mathbb{C}(\xi)$. ξ est uniquement déterminé sauf dans le cas où $(\lambda,\mu.\nu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (v. Ch. III) [Baldassarri et Dwork [11]].

Nous savons que nous avons alors la relation entre les schwarziens $\{\eta,x\} = \{\eta,\xi\} + \{\xi,x\}$. ξ est solution de l'équation différentielle dans K.

$$\boxed{Q = -q\lambda,\mu.v(\xi)\xi'^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)' + \frac{1}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2}$$

(les $'$ et les $''$ désignent la dérivation $\frac{d}{dx}$ et $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ et nous continuerons à utiliser ces notations).

Dans les cas où les groupes sont ceux du tétraèdre, du cube et de l'icosaèdre, nous connaissons le degré de ξ dans K, c'est-à-dire le nombre de ses pôles ou de ses zéros. Nous avons en effet (v. Ch. IV) la formule des degrés avec les mêmes notations qu'au Ch. IV.

$$\deg_K \xi = \frac{\sum\limits_{P_o} (\gamma(P_o)-1) - 2(g-1)}{\sum\limits_{P} (\gamma(P)-1) - 2}$$

où g est le genre de K.

Or nous avons le lemme en nous rappelant que

$$K = \mathbb{C}(x,y) \quad \text{et} \quad [K : \mathbb{C}(x)] = m$$

<u>*Lemme*</u>. Soit $z \in K$ et $d = \deg_K z$. z s'écrit de façon unique $\sum\limits_{i=0}^{m-1} h_i(x)y^i$, $h_i(x) \in \mathbb{C}(x)$ pour $i = 0,1,\dots,m-1$.

Si pour $i = 0,\dots,m-1$ d_i z $\deg_{C(x)} h_i(x)$, il existe $\ell \in N$ indépendant de z tel que pour $i = 0,\dots,m-1$

$$d_i \leqslant \ell + d[K' ; K]$$

où K' est la clôture normale de $K/\mathbb{C}(x)$.

<u>Démonstration</u> : Posons $Gal(K'/\mathbb{C}(x)) = \{id = \sigma_o, \sigma_1, \dots, \sigma_t\}$ et $\{1, y, \dots, y^{m-1}, z_m, \dots, z_t\} = \{b_o, \dots, b_t\}$ une base de $K'/\mathbb{C}(x)$. La matrice $B = b_i^{\sigma_j})_{0 \leqslant {i \atop j} \leqslant t}$ est une matrice inversible : en effet quelque soit $z = \sum_{i=0}^{t} t_i b_i$ élément de K' le système $\sum_{i=0}^{t} t_i\, b_i^{\sigma_j} = \sigma_j(z)$, $j = 0, \dots, t$ a une solution et une seule dans K'.

On a en particulier

$$\begin{pmatrix} z^{\sigma_o} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z^{\sigma_t} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} h_o \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m-1} \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} h_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m-1} \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} z^{\sigma_o} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z^{\sigma_t} \end{pmatrix}$$

$B^{-1} = (C_{ij})_{0 \leqslant {i \atop j} \leqslant t}$; si ℓ est le maximum des degrés des C_{ij} sur K' on a :

$$\deg_K h_i \leqslant (t+1)(\ell + d[K' : K]).$$

Conclusion.

Ceci nous permet comme nous connaissons le $\deg_K \xi$ d'écrire

$$\xi = \sum_{i=0}^{m-1} h_i(x)\, y^i \quad \text{avec}$$

$$h_i(x) = \frac{a_{io} + a_{i1} + x \ldots + a_{i\beta} x^\beta}{b_{io} + b_{i_1} + \ldots + b_{i\beta} x^\beta}$$

où est un majorant du degré des $h_i(x)$.

Donc en procédant par élimination dans les équations différentielles que peut vérifier ξ nous saurons si oui ou non le groupe peut être celui du tétraèdre, du cube ou de l'icosaèdre.

Cette méthode ne peut s'appliquer aux cas des groupes cycliques ou diédraux ; les indices de ramification ou encore (λ,μ,ν) dépendent d'un paramètre n.

C'est pourquoi nous allons donner des méthodes particulières.

§ 3 - *Cas cyclique et diédral.*

3.0. Avant de passer à ces cas, faisons quelques remarques et rappels : Avec les mêmes notations qu'au §.2

1) Tout quotient de solutions linéairement indépendantes de L appartient à $K(\eta)$ et en est un élément primitif

2) Le groupe de Galois de l'extension $K \hookrightarrow K(\eta)$, est le groupe de monodromie projective de L associé à η.

3) Si nous prenons le groupe de monodromie de L attaché à deux solutions y_1 et y_2 linéairement indépendantes, on peut lui associer deux groupes d'homographies :

- l'un qui opère sur $\mathbb{P}(S)$ ensemble des droites du $\mathbb{C}$-espace des solutions de L

- l'autre sur l'ensemble des quotients des transformées de y_1 et y_2 (qui appartiennent à $\mathbb{P}(S^*)$) par le groupe de monodromie.

Ces deux groupes d'homographies sont de même "nature" et ont même cardinal parce qu'ils correspondent en fait à des groupes de matrices transposées associées à des bases duales dans S et S^*.

Nous donnons dans ce chapitre des conditions nécessaires pour que le groupe de monodromie projective G d'un opérateur différentiel du second ordre de la forme $L = (\frac{d}{dx})^2 - Q$ défini sur K corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ soit cyclique ou diédral. Nous caractérisons ces groupes à l'aide d'invariants différentiels en nous inspirant de ce qu'a fait F. Marotte.

Les notations sont celles du §.2.

Nous donnons un lemme préliminaire que d'ailleurs nous utiliserons ensuite pour vérifier que des éléments de K que nous avons trouvés sont bien les dérivées logarithmiques d'éléments algébriques.

3.1. *Lemme préliminaire*.- Un élément dont la dérivée logarithmique u appartient à K corps de fonctions d'une variable sur C est algébrique sur K si et seulement si il existe n entier positif tel que $n\,u$ soit la dérivée logarithmique d'un élément de K.

Démonstration : Soit z un élément algébrique sur K dont la dérivée logarithmique u appartient à K. Les conjugués de z sur K sont aussi solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients dans K, $y' - uy = 0$; ces conjugués sont donc de la forme az avec a appartenant à $\mathbb{C}$. Le groupe de Galois de cette équation est un groupe fini d'homothéties donc est isomorphe à un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$; il est cyclique et $\prod_{\sigma \in G} \sigma(z) = \pm z^n$; z^n appartient à K.

On peut remarquer que dans ce cas $K(z)$ est normal sur K et que $K(z)/K$ est cyclique.

Inversement : si $n\,u$ est la dérivée logarithmique d'un élément r de K ; $z^n = a\,r$ $(a \in K)$ appartient aussi à K.

3.2. *Cas cyclique.*

Théorème.- η quotient de deux solutions de L linéairement indépendantes étant algébrique sur K les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $K(\eta)$ est une extension cyclique de K.

ii) Il existe deux solutions linéairement indépendantes de L dont les dérivées logarithmiques sont dans K.

iii) Il existe un quotient τ de deux solutions de L linéairement indépendantes dont la dérivée logarithmique est dans K.

i) => ii) $K(\eta)$ étant cyclique sur K, le groupe des homographies qui opère sur $\mathbb{P}(S)$, ensemble des droites de l'espace des solutions de L est cyclique aussi ; il existe deux éléments de $\mathbb{P}(S)$ invariants par ce groupe ; et donc deux solutions de L linéairement indépendantes dont les dérivées logarithmiques appartiennent à K.

ii) => iii) La dérivée logarithmique du quotient de deux solutions est la différence des dérivées logarithmiques des deux solutions.

iii) => i) Tout quotient τ de deux solutions linéairement indépendantes est un élément primitif de $K(\eta)$; τ étant algébrique sur K et sa dérivée logarithmique appartenant à K, il existe n tel que $\tau^n \in K$. $K(\eta)$ est engendré par un élément τ dont une puissance appartient à K.

Remarque. η étant le quotient de deux solutions y_1 et y_2 linéairement indépendantes, posons

$$u = \frac{\eta'}{\eta}$$

$$u' = \frac{y''_1}{y_1} - \left(\frac{y'_1}{y_1}\right)^2 - \frac{y''_2}{y_2} + \left(\frac{y'_2}{y_2}\right)^2$$

mais $\dfrac{y''_1}{y_1} = \dfrac{y''_2}{y_2} = Q$

$$\frac{u'}{u} = -\left(\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2}\right)$$

Si u appartient à K, u' appartient à K et $\dfrac{y'_1}{y_1}$ et $\dfrac{y'_2}{y_2}$, dont la somme est la différence appartiennent à K sont dans K.

Comme un groupe d'homographies qui a plus de deux points fixes est réduit à l'identité, les solutions linéairement indépendantes dont les dérivées logarithmiques sont dans K sont celles dont le quotient est τ si G est différent de $\{id\}$.

On peut prendre comme invariant différentiel attaché aux groupes cycliques la dérivée logarithmique d'un quotient de deux solutions linéairement indépendantes de L.

Remarque et corollaire.- Si trois solutions de L deux à deux linéairement indépendantes ont des dérivées logarithmiques appartenant à K le groupe G est trivial.

Il nous reste donc à déterminer le nombre de solutions de l'équation de Riccati appartenant à K. Nous le ferons par identification en montrant que u dérivée logarithmique de y solution de L appartenant à K s'écrit $u = \sum_{i=0}^{m-1} h_i(x)\, y^i$, si m est le nombre de pôles de x, avec $\deg_{\mathbb{C}(x)} h_i(x)$ borné par un nombre qui ne dépend que de L.

D'après le lemme démontré en 2.2. il nous suffit de montré que $\deg_K u$ est borné par un nombre qui ne dépend que de L.

On peut trouver un nombre qui ne dépend que de L qui majore le $\deg_K u$ si u appartient à K.

Supposons donc que u appartienne à K

$$\mathrm{div}(u) = \mathrm{div}(u\, dx) - \mathrm{div}(dx)$$

$u\, dx = \frac{dy}{y}$ avec y solution de L.

$$\mathrm{div}(u) = A - \sum_{i=1}^{r} P_i - \sum_{j=1}^{N} Q_j - Z + \sum_{k=0}^{m-1} R_k$$

où A est un diviseur positif, $u\, dx$ n'ayant de pôles qu'en les singularités $P_1,\dots,P_r$ de L et en les Q_j zéros simples de y (les autres zéros entrant dans les singularités de L).

Z est le diviseur des zéros de dx, $-\sum_{k=0}^{m} R_k$ celui de ses pôles

$$\deg(Z - \sum_{k=0}^{m-1} R_k) = 2g - 2 \quad ;$$

$2g-2$ est le degré de la classe canonique sur une surface de genre g.

Les pôles de dx sont m pôles doubles car x a m pôles simples

$$\deg Z = 2(m+g-1)$$

Le degré des diviseurs de u est inférieur à

$$r + N + 2(m+g-1).$$

Mais la somme des résidus de $\frac{dy}{y}$ est nulle et ces résidus sont ceux des pôles simples qui correspondent aux zéros simples de y c'est-à-dire aux Q_j et ceux qui proviennent des singularités P_i de y donc de forme α_i avec $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ ne dépendant que de L.

$$N + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0$$

nous permet de trouver un majorant de N qui ne dépend que de L.

3.3. *Cas diédral.* η est encore le quotient de deux solutions linéairement indépendantes de L ; G le groupe de Galois de l'extérieur $K \hookrightarrow K(\eta)$.

Théorème. Si $K(\eta)$ est une extension de degré fini mais non cyclique de K, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes

i) G est diédral

ii) Il existe une solution de L dont la dérivée logarithmique appartient à une extension quadratique de K (mais non à K)

iii) Il existe un quotient de deux solutions linéairement indépendantes de L dont la dérivée logarithmique appartient à une extension quadratique de K (mais non à K).

iv) L'équation L_2 dont sont solutions les formes quadratiques en deux solutions linéairement indépendantes de L a une solution dont la dérivée logarithmique appartient à K.

Remarquons que si la dérivée logarithmique d'une solution y_1 de L appartient à une extension quadratique de K son conjugué sera la dérivée logarithmique d'une solution de L non colinéaire à y_2. Comme $K(\eta)/K$ est supposée non cyclique, ces deux éléments sont les seuls de l'extension quadratique à pouvoir être des dérivées logarithmiques de solution de L.

i) => ii) et iii) : G étant diédral contient un sous-groupe H cyclique d'indice 2. L'extension $K(\eta)^H \hookrightarrow K(\eta)$ est cyclique et $K(\eta)^H$ est une extension quadratique qui contient les dérivées logarithmiques de deux solutions linéairement indépendantes de L ou la dérivée logarithmique de leur quotient.

ii) ou iii) => i) : Si nous sommes dans les hypothèses ii) ou iii) $K(\eta)$ est cyclique sur une extension quadratique de K.

iii) => ii) est évident d'après le th. du §. 3.2.

ii) => iv) : Les deux dérivées logarithmiques $\frac{y_1'}{y_1}$ et $\frac{y_2'}{y_2}$ étant conjuguées dans une extension quadratique de K, leur somme et leur produit appartiennent à K.

i) = iii) (ou ii)).

Lemme.- Pour que la somme et le produit des dérivées logarithmiques de deux solutions de L appartiennent à K il faut et il suffit que la somme appartienne à K.

Supposons que $\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} = R$ élément de K.

$$\frac{y''_1}{y_1} - \left(\frac{y'_1}{y_1}\right)^2 + \frac{y''_2}{y_2} - \left(\frac{y'_2}{y_2}\right)^2 = R' \quad \text{qui appartient à } K.$$

Mais

$$\frac{y''_1}{y_1} = \frac{y''_2}{y_2} = Q$$

$$2\,\frac{y'_1}{y_1} \cdot \frac{y'_2}{y_2} = R' - 2Q + R^2 .$$

Le produit de $\frac{y'_1}{y_1}$ et $\frac{y'_2}{y_2}$ appartient à K.

$$\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2 = \left(\frac{y'_1}{y_1} - \frac{y'_2}{y_2}\right)^2 = \left(\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2}\right)^2 - 4\,\frac{y'_1 y'_2}{y_1 y_2}$$

Remarque.

Le conjugué de $\frac{\eta'}{\eta}$ est $-\frac{\eta'}{\eta}$ donc la dérivée logarithmique de $\frac{1}{\eta}$. Ceci est compatible avec le fait que seuls deux éléments de l'extension quadratique peuvent être les dérivées logarithmiques de solutions de L.

L'invariant différentiel qui caractérise les cas où le groupe de l'extension $K \hookrightarrow K(\eta)$ est diédral est la somme des dérivées logarithmiques de deux solutions linéairement indépendantes.

Théorème.- On aura 0, 1 ou 3 solutions de L_2 dont la dérivée logarithmique est dans K si η est algébrique sur K.

Démonstration :

- 0 dans le cas où G n'est ni cyclique ni diédral

- 1 si G est cyclique ou diédral mais non de Klein ($n \neq 2$)

- si on a 2 formes quadratiques z_1 et z_2 en deux solutions linéairement indépendantes de L dont les dérivées logarithmiques appartiennent à K, z_3 telle que $z_3^2 = z_1 z_2$ et solution de L_2 a aussi sa dérivée logarithmique dans K.

On se retrouve dans le cas du groupe de Klein (v. ch. IV).

Equation L_2 attachée à $L = (\frac{d}{dx})^2 - Q$.

$$z = a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$z' = \sum_{i \leq j} a_{ij}(y_i'y_j + y_j'y_i) \qquad i,j = 1,2$$

$$z'' = \sum_{i \leq j} a_{ij}(y_i''y_j + 3y_i'y_j' + y_iy_j'')$$

$$z''' = \sum_{i \leq j} a_{ij}(y_i'''y_j + 3(y_i''y_j' + y_i'y_j'') + y_iy_j''')$$

avec

$$y_i'' = Qy_i \qquad \text{et} \qquad y_i''' = Q'y_i + Qy_i' \quad .$$

L'équation différentielle dont z est solution est l'équation linéaire du 3ème ordre

$$z''' = 4Qz' + 2Q'z \quad .$$

<u>Equation de "Riccati généralisée" dont est solution l'invariant différentiel caractérisant le cas diédral.</u>

z étant solution de L_2 , posons $u = \frac{z'}{z}$

$$u' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2$$

$$u'' = \frac{z'''}{z} - 3\,\frac{z'z''}{z^2} + 2\left(\frac{z'}{z}\right)^3$$

$$u'' = 4Qu - 3uu' - 3u^3 + 2u^3 + 2Q'$$

$$\boxed{u'' + 3uu' + u^3 - 4Qu - 2Q' = 0}$$

Nous déterminerons encore les solutions dans K de cette équation par élimination

$$u = \sum_{i=0}^{m-2} h_i(x)\, y^i .$$

Le degré des $h_i(x)$ est borné par un nombre indépendant que de i si celui de u dans K l'est.

On a comme en 3.2

$$\mathrm{div}(u) = \mathrm{div}(u\,dx) - \mathrm{div}(dx)$$

avec $u\,dx = \frac{dy_1}{y_1} + \frac{dy_2}{y_2}$.

Il suffit de remplacer un majorant de N dans 3.2. par son double.

§ 4 - *Conclusion.*

Il reste maintenant à décider si étant donné un élément u d'un corps K cet élément est bien la dérivée logarithmique d'un élément algébrique sur K. Le lemme I du §.3.1 dit que pour cela il suffit qu'existe un entier m tel que mu soit la dérivée logarithmique d'un élément de K.

4.1. Supposons $u\, dx = \frac{dy}{y}$ avec $y \in K$.

En tout point P de K, $\mathrm{res}_p(u\, dx) = \mathrm{ord}_p(y)$. Pour que η soit la dérivée logarithmique d'un élément de K il faut qu'existe un entier m tel que

$$m\, L \sim 0 \qquad \text{où} \qquad L = \sum_p \mathrm{res}_p(u\, dx)\, .\, P$$

Ceci s'établit en utilisant les résultats suivants.

Supposons Γ surface de Riemann modèle non singulier de K dans $\mathbb{P}^3$. K un corps de définition de C et de L.

a) <u>Si K est un corps de nombres algébriques.</u>

Si $\mathcal{P}_i$ est un anneau de valuation dans K extension de l'anneau de valuation rationnel associé au nombre premier p_i tel que $\bar{\Gamma}_i$ la courbe réduite correspondante soit non singulière, on note alors e_i l'ordre du groupe des points de la jacobienne $J(\bar{\Gamma}_i)$ qui sont rationnels sur $\bar{K}_i$ et d'ordre premier avec p_i.

<u>*Lemme*</u>.- Si l'image de L dans $J(\Gamma)$ est ordre fini, il existe deux premiers p_1 et p_2 tels que :

$$e_1 e_2\, L \sim 0\, .$$

b) <u>Si K est de type fini sur $\mathbb{Q}$.</u>

On choisit une spécialisation de K, K', corps de nombres algébriques avec $\Gamma \to \Gamma'$ non singulier.

$$J(C)(K)_{tors} \to J(C')(K')_{tors}$$

est injective.

4.2. S'il existe un entier m tel que $m\mathcal{L}$ est un diviseur principal ce ne peut être que celui que nous avons trouvé. Essayons de construire l'élément du corps de fonctions dont il est le diviseur

$$m\mathcal{L} = L_o - L_\infty ,$$

L_o et L_∞ diviseurs positifs, sur une surface de Riemann (ou courbe) dont les singuliers réguliers $p_1,\dots,p_n$ sont de multiplicités $s_1,\dots,s_n$. Soit $D = \sum_{j=1}^{n} s_j P_j$. Construisons une courbe B telle que

$$B \cap C = D + L_o + X$$

où X est un diviseur positif. Si ℓ est le degré de B pour que $L_o - L_\infty$ soit un diviseur principal il faut et il suffit qu'existe une courbe B' de degré ℓ telle que

$$B' \cap C = L_\infty + D + X$$

Confondant B et B' avec la fonction sur Γ qu'elles représentent, nous avons : $\operatorname{div}(\frac{B}{B'}) = L_o - L_\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PICARD : *Traité d'analyse* - Tome III - Gauthier-Villars (1908)

[2] PLEMELJ J : *"Problems in the sense of Riemann and Klein"* - Interscience Pub. New-York - 1964.

[3] KOLCHIN : *"Galois theory of differential fields"* - American journal of Math. (75).

[4] KOLCHIN : *"On the Galois theory of differential fields"* - American journal of Math (77).

[5] KOLCHIN : *"Algebraic groups and algebraic dependance"* - American journal of Math (90).

[6] A.M. BRASSELET : *"Dépendance algébrique des solutions d'équations différentielle"* - Université de Lille n°105.

[7] E. PICARD : *"Analogie entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques"* - Gauthier-Villars (1936).

[8] R et A. DOUADY : *Algèbre et théories galoisiennes* - Vol 2 / Théories galoisiennes - CEDIC-Nathan.

[9] SAMUEL : *Corps de fonctions algébriques* - Cours fac. des Sciences de Paris - Institut H. Poincaré - Février juin 65.

[10] KLEIN : *Lectures on the Icosahedron* - Dover Publication New-York 1913.

[11] BALDASSARRI and DWORK : *"On second order linear differential equations with algebraic solutions"* - American journal of Maths (101).

[12] BALDASSARRI : *"On second order linear differential equations with algebraic solutions on algebraic curves"* - American journal of Maths (102).

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on explicite la théorie de Galois différentielle des équations du second ordre lorsque les solutions sont algébriques, et l'on est amené à étudier les trois cas suivants

. nature des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients dans un $\mathbb{C}(z)$ ayant leurs solutions dans une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$.

. Conditions pour que les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients dans un $\mathbb{C}(z)$ ait des solutions algébriques.

. Conditions pour que les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients dans le corps de fonctions d'une courbe algébrique ait des solutions algébriques.

Dans chacun des cas, on classifie les équations suivant la réductibilité ou l'irréductibilité de la représentation du groupe de Galois dans l'espace des solutions.

MOTS CLES

- GALOIS (THEORIE DE)/EQUATION DIFFERENTIELLE - SOLUTION ALGEBRIQUE
- EQUATION DIFFERENTIELLE - SOLUTION ALGEBRIQUE/GALOIS (THEORIE DE)
- EQUATION DIFFERENTIELLE - SOLUTION ALGEBRIQUE/RIEMANN SURFACE.