N° d'ordre 960

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPECIALITE : Mathématiques Pures

par

SEDJELMACI Sidi Mohammed

SOLUTIONS NULLES POUR UN OPERATEUR DIFFERENTIEL MATRICIEL ANALYTIQUE RELATIVEMENT A UNE HYPERSURFACE CARACTERISTIQUE TRIPLE, DEUXIEME CAS, AVEC UNE CONDITION DE BONNE DECOMPOSITION POUR UN OPERATEUR SCALAIRE ASSOCIÉ.

Membres du Jury : J. VAILLANT, Président
J.C. DE PARIS, Rapporteur
R. BERZIN } Examinateurs
Y. HAMADA }

Soutenue le 23 mars 1982

A ma famille,

à mes amis...

"Nous élevons en rang qui Nous voulons ;

et au-dessus de chaque savant, il est un grand Savant".

CORAN. Sourat Joseph, verset 76.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très vivement Monsieur le Professeur Jean VAILLANT d'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je tiens aussi à exprimer ma très grande estime à Messieurs les Professeurs Y. HAMADA et R. BERZIN, et les remercie d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse.

Que Monsieur le Professeur Jean-Claude DE PARIS trouve ici, ma profonde gratitude et ma grande reconnaissance. C'est, en effet, grâce à lui que j'ai pu m'initier à la théorie des équations aux dérivées partielles ; sa disponibilité et ses remarques judicieuses m'ont été très utiles pour la réalisation de ce travail.

Je témoigne toute ma reconnaissance à l'ensemble de l'équipe de recherche en équations aux dérivées partielles de l'U.E.R. de Mathématiques, au sein de laquelle j'ai pu étudier.

Je remercie Monique LLORET d'avoir toujours bien voulu photocopier mes documents.

Un grand merci également à Raymonde BÉRAT, Françoise WDOWCZYK, Albert GOURNAY et Michel PROVOST qui ont imprimé cette thèse avec rapidité et compétence.

Que tous mes amis et collègues, et en particulier M. BOUKROUCHE, D. BEKHTAOUI, O. HEBBAR, K. BELABBES et D. ABI AYAD, trouvent ici mes sincères remerciements pour leurs discussions fructueuses et leurs remarques pertinentes.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

D'après une question que m'a posé Monsieur le Professeur J.C. DE PARIS, j'ai essayé de construire une solution nulle dans l'espace des ultra-distributions pour un opérateur linéaire matriciel h, d'ordre t, au voisinage d'un point caractéristique a dans le cas triple II, (T.R. 2) selon la classification de J. VAILLANT [13].

Dans un premier temps, on commence par rappeler et détailler les hypothèses de résolution formelle selon R. BERZIN et J. VAILLANT [2]. Elles consistent essentiellement à faire une hypothèse de rang pour la matrice caractéristique de l'opérateur considéré, et une hypothèse (D), de bonne décomposition de type matricielle. Mais en fait, on utilise que $(L_1^1)^2 - (N_1^1)$: une forme affaiblie de (D), pour la résolution formelle ; d'où l'idée de rechercher directement un opérateur différentiel linéaire scalaire k, associé à h, bien décomposable au sens de DE PARIS [10], (de multiplicité 3, dans notre cas) et d'obtenir directement $(L_1^1)^2 - (N_1^1)$, suffisante pour faire la résolution formelle. Cet opérateur scalaire k, est défini directement à partir de l'opérateur matriciel h considéré.

On montre ensuite, qu'il y a effectivement une équivalence entre ces différentes formes d'hypothèses, et c'est cette dernière qu'on utilisera par la suite.

La résolution formelle présentait au départ beaucoup de difficultés de calculs ; cependant l'utilisation d'opérateurs associés [10] apporte une simplification considérable des calculs. De plus, on arrive à exprimer facilement les coefficients de distorsions $(Y_j^B)_{j\in\mathbb{N}}$, avec les opérateurs associés à un certain opérateur s, matriciel $m \times 1$, définis au préalable. m étant l'ordre la matrice caractéristique de h.

Cette méthode a aussi l'avantage d'être généralisable dans le cas où la multiplicité est quelconque, et quand le rang de la matrice caractéristique est $m-1$.

La troisième partie consiste à montrer que les $(Y_j^B)_{j\in\mathbb{N}}$ obtenus vérifient certaines majorations ; on utilise pour cela la méthode des majorantes, sous sa forme particulièrement élégante que lui a donné C. WAGSCHAL [15].

La convergence du développement formel obtenu sera assurée par des calculs semblables à ceux de Y. KOMATSU [5], et repris ensuite par O. HEBBAR [4] et K. BELABBES [1].

CHAPITRE I

HYPOTHESES DE RESOLUTION FORMELLE POUR LE CAS TRIPLE 2, (T.R. 2) D'APRES R. BERZIN *et* J. VAILLANT [2].

---

§ 1 - *Notations, définitions.*

Soit X une variété analytique de dimension $n+1$; $n \in \mathbb{N}$. Soit S une hypersurface analytique de X, a un point de S et Ω un voisinage de a, tel que

$\Omega \cap S = \{x \in X / \psi(x) = 0\}$, où ψ est une fonction analytique, on supposera que S est régulière en a, c'est-à-dire :

$$\text{grad}\, \psi(a) \neq \vec{0}.$$

Un point x de X sera noté : $x = (x^o, x^1, \ldots, x^n) = (x^o, x^1, x'')$. Celui de l'espace cotangent à X par (x, ξ).

On adopte les notations de BERZIN-VAILLANT, [2] :

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \text{et} \quad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \quad ; \text{ pour } \alpha \in \{0, 1, \ldots, m\}.$$

Soit $h = (h^A_B)_{1 \leqslant A, B \leqslant m}$ un opérateur linéaire matriciel à m lignes, m colonnes ; $m \in \mathbb{N}^*$, de classe analytique et d'ordre t sur X ; $t \geqslant 1$.

La matrice caractéristique de h, au sens de "Cauchy-Kowalewski" sera notée par :

$$H^A_B(x,\xi) = (H^A_B(x,\xi))_{1 \leqslant A, B \leqslant m} \quad , \quad \text{avec :}$$

$$H_B^A(x,\xi) = \begin{cases} \text{symbole principal de } h_B^A, & \text{si } \operatorname{ord}(h_B^A) = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour chaque $A,B \in \{1,2,\dots,m\}$.

On suppose que $H(x,\xi)$ est non dégénérée en a, c'est-à-dire

$(\text{dét } H)(a,\xi)$ est non identiquement nul.

On note par A la matrice des cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de h, on a :

$$(A.H)(x,\xi) = (H.A)(x,\xi) = (\text{dét } H)(x,\xi).I \quad ; \quad \forall\, x \in \Omega \qquad (1)$$

On considère la décomposition d'opérateur suivant ses parties homogènes, on a en coordonnées locales :

$$h(x,\partial) = H(x,\partial) + H^{*}(x,\partial) + \dots + H^{*(k)}(x,\partial) + \dots + H^{(*)(t)}(x,\partial)$$

avec $H^{(*)(k)}(x,\partial) = (H_B^{*(k)A}(x,\partial))_{1\leqslant A,B\leqslant m}$ partie homogène d'ordre $t-K$ de $h(x,\partial)$.

De même, si $a(x,\partial)$ est un opérateur différentiel matriciel linéaire de matrice caractéristique A, on écrira :

$$a(x,\partial) = A(x,\partial) + A^{*}(x,\partial) + \dots + A^{(*)(k)}(x,\ ) + \dots + A^{*(m-1)t}(x,\partial).$$

HYPOTHESES :

[H.1] : On suppose qu'il existe H', H'' analytiques en x, au voisinage de a, polynomiaux en ξ tels que :

a) $(\text{dét } H)(x,\xi) = [H''(H')^3](x,\xi) \quad \forall\, x \in \Omega$ (2)

b)
$$\begin{cases} H'(x,\operatorname{grad}\psi(x)) = 0 \quad \text{sur } \Omega & (3) \\ H''(a,\operatorname{grad}\psi(a)) \neq 0 & (4) \\ (p^{\alpha}(a))_{a\leqslant\alpha\leqslant n} \neq \vec{0}, \text{où } p^{\alpha}(x) = \partial^{\alpha}H'(x,\operatorname{grad}\psi(x)) & (5) \end{cases}$$

c'est-à-dire : S est caractéristique totale simple pour H', et n'est pas caractéristique en a pour H".

[H. 2] : On suppose que la matrice $H(a, \text{grad}\ \psi(a))$ est de rang : m-1 ; il existe donc un coefficient de la matrice $A(a, \text{grad}\ \psi(a))$ non nul.

On suppose que c'est $A_1^1(a, \text{grad}\ \psi(a))$. C'est-à-dire : S n'est pas caractéristique en a pour A_1^1.

Les hypothèses (H.1), (H.2) nous permettent donc de supposer l'existence un voisinage de a, qu'on notera encore Ω, tel que :

$$\left\{\begin{array}{lll} A_1^1(x, \text{grad}\ \psi(x) \neq 0 & \forall\, x \in \Omega & (6) \\ H''(x, \text{grad}\ \psi(x) \neq 0 & \forall\, x \in \Omega & \\ H'(x, \text{grad}\ \psi(x) = 0 & \forall\, x \in \Omega & \\ (p^{\alpha}(x))_{0 \leqslant \alpha \leqslant n} \neq \vec{0} & \forall\, x \in \Omega & \end{array}\right.$$

<u>REMARQUE</u> : Si on considère pour $x \in \Omega$, l'anneau localisé Φ_x de celui des polynômes à (n+1) variables par rapport à l'idéal défini par H' ; alors (H.2) correspond à l'hypothèse de localisation

<u>T.R. 2</u> : $H \underset{\Phi_x}{\sim} \begin{bmatrix} (H')_1^3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, pour un seul facteur : H'.

Condition de décomposition :

On dit que h vérifie (D) si et seulement si :
il existe un opérateur différentiel linéaire matriciel a, de matrice caractéristique A, et trois opérateurs différentiels matriciels ℓ_o, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3, et un opérateur différentiel scalaire h', de symbole principal H', tel que :

$$\begin{cases} h \circ a(x,\partial) = (\ell_o(h')^3 + \ell_1(h')^2 + \ell_2(h') + \ell_3)(x,\partial) & (7) \\ \operatorname{ord}(h \circ a - \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho (h')^{3-\rho}) < mt - r \ ; \text{ pour } r = 0, 1 \text{ et } 2. \end{cases}$$

Remarque :

Si h vérifie (D) alors $L_o = H''I$, où L_o représente le symbole principale de ℓ_o ; en effet :

En prenant les parties homogènes d'ordre mt des deux membres de (7), on aura : $H.A = L_o(H')^3$, or d'après H.1 a) :
$\text{dét } H = (H')^3 H''$ d'où $(H')^3 H'' I = (H')^3 L_o$ soit : $L_o = H''.I$.

Nous allons maintenant montrer que (D) entraîne :

$$L_1^1 \equiv 0 \ [(H')^2] \quad \text{et} \quad N_1^1 \equiv 0 \ [H']$$

où L_1^1 et N_1^1 sont des expressions scalaires, dépendant de h, définies de manière intrinsèque ; ce sera en fait, ces dernières hypothèses qu'on utilisera pour la résolution formelle.

Définition :

Soient trois polynômes en ξ, à coefficients analytiques en x : P, Q et U ; on note :

$$P \equiv Q[U]$$

si et seulement si $P-Q$ est divisible par U, en tant que polynôme en ξ, analytique en x dans Ω.

Si P et Q sont deux matrices de polynômes en ξ, à coefficients analytiques en x, on note $P \equiv Q[U]$ si et seulement si

$P_B^A \equiv Q_B^A[U]$ pour tout $(A,B) \in \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,m\}$.

On donne maintenant certains résultats concernant les différentes parties homogènes d'un composé de deux ou plusieurs opérateurs :

Prenons d'abord deux opérateurs a et b, matriciels d'ordre respectifs p et q. On pose $c = a \circ b$.

Lemme 1.- On a avec les notations habituelles,

$$C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{\tau=0}^{r} \sum_{k=0} \sum_{|\mu|=k} \frac{1}{\mu!} D_\xi^\mu A^{(*)\tau-k}(x,\xi) . D_s^\mu B^{(*)(r-\tau)}(x,\xi).$$

Preuve : On note, dans la carte locale

$$a(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant p} a\ (x) D_x^\alpha \quad ; \quad b(x,D_x) = \sum_{|\beta|\leqslant q} b_\beta(x) D_x^\beta .$$

On pourra convenir dans la suite, pour faciliter les calculs, que $a_\alpha = 0$ si $|\alpha| > p$, $b_\beta = 0$ si $|\beta| > q$.

Soit u une fonction assez régulière (de classe $C^{p+q}(\Omega)$). On aura :

$$C(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant q} a_\alpha(x) D_x^\alpha \Big(\sum_{|\beta|\leqslant q} b_\beta(x) D_x^\beta u(x)\Big)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ \gamma\leqslant\alpha}} C_\alpha^\gamma a_\alpha(x) D_x^{\alpha-\gamma} b_\beta(x) . D_x^{\beta+\gamma} u(x) .$$

On note, pour ces calculs, si $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$

$$D_x^\alpha = (\partial_o)^{\alpha_o} \circ (\partial_1^{\alpha_1}) \circ \dots \circ (\partial_n)^{\alpha_n}$$

en posant $\beta + \gamma = \mu$, on aura :

$$C(x,D_x)u(x) = \sum_{|\mu|\leqslant p+q} \Big(\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ \gamma\leqslant\alpha \\ \beta+\gamma=\mu}} C_\alpha^\gamma a_\alpha(x) D_x^{\alpha-\gamma} b_\beta(x)\Big) D_x^\mu u(x) \quad .$$

On note : $C(x,D_x)u(x) = \sum_{|\mu|\leqslant p+q} C_\mu(x) . D_x^\mu u(x) .$

On aura : $C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{|\mu|=p+q-r} C_\mu(x)\xi^\mu$

$$= \sum_{|\mu|=p+q-r} \Big(\sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma) \\ \gamma\leqslant\alpha \\ \beta+\gamma=\mu}} C_\alpha^\gamma a_\alpha(x) D^{\alpha-\gamma} b_\beta(x)\xi^\mu$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma) \\ \gamma\leqslant\alpha \\ |\beta|+|\gamma|=p+q-r}} C_\alpha^\gamma a_\alpha(x) D_x^{\alpha-\gamma} b_\beta(x)\xi^{\beta+\gamma}$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma) \\ \gamma\leqslant\alpha \\ |\beta|+|\gamma|=p+q-r}} C_\alpha^\gamma a_\alpha(x)\xi^\gamma . D_x^{\alpha-\gamma}(b_\beta(x)\xi^\beta)$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma)\\ \gamma\leqslant\alpha\\ |\beta|+|\gamma|=p+q-r}} \frac{1}{(\alpha-\gamma)!} D_\xi^{\alpha-\gamma}(a_\alpha(x)\xi^\alpha).D_x^{\alpha-\gamma}(b_\beta(x)\xi^\beta)$$

en notant de même, si $\alpha = (\alpha_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$

$$D_\xi^\alpha = (\partial^o)^{\alpha_o} \circ (\partial^1)^{\alpha_1} \circ \ldots \circ (\partial^n)^{\alpha_n} .$$

$$C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma)\\ \gamma\leqslant\alpha\\ |\alpha|\leqslant p\\ |\beta|\leqslant q\\ |\beta|+|\gamma|=p+q-r}} \frac{1}{(\alpha-\gamma)!} D_\xi^{\alpha-\gamma}(a_\alpha(x)\xi^\alpha).D_x^{\alpha-\gamma}(b_\xi(x)\xi^\beta).$$

On a : $|\gamma| \leqslant |\alpha| \leqslant p$; $|\beta| \leqslant q$; $|\beta| + |\gamma| = p+q-r$; d'où :

$$\begin{cases} \text{soit } |\beta| = q & \text{et } |\gamma| = p-r \\ \text{soit } |\beta| = q-1 & \text{et } |\gamma| = p-(r-1) \\ \text{soit } |\beta| = q-2 & \text{et } |\gamma| = p-(r-2) \\ \quad\vdots & \\ \text{soit } |\beta| = q-r & \text{et } |\gamma| = p. \end{cases}$$

Donc $C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{q-r\leqslant|\beta|\leqslant q} \Big(\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ |\alpha|\leqslant p\\ \gamma\leqslant\alpha\\ |\beta|+|\gamma|=p+q-r}} \frac{1}{(\alpha-\gamma)!} D_\xi^{\alpha-\gamma}(a_\alpha(x)\xi^\alpha).D_x^{\alpha-\gamma}(b_\beta(x)\xi^\beta).$

On pose $\mu = \alpha - \gamma$:

$$C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{q-r\leqslant|\beta|\leqslant q} \sum_{\substack{(\alpha,\mu)\\ |\alpha|\leqslant p\\ |\mu|=|\alpha|+|\beta|-(p+q)+r}} \frac{1}{\mu!} D_\xi^\mu(a_\alpha(x)\xi^\alpha).D_x^\mu(b_\beta(x)\xi^\beta).$$

$$= \sum_{q-r\leqslant|\beta|\leqslant q} \quad \sum_{p+q-r+|\beta|\leqslant|\alpha|\leqslant p} \quad \sum_{\substack{\mu \\ |\mu|=|\alpha|+|\beta|+r-(p+q)}} \frac{1}{\mu!} D^{\mu}_{\xi}(a_{\alpha}(x)\xi^{\alpha}).D^{\mu}_{x}(b_{\beta}(x)\xi^{\beta})$$

$$= \sum_{s=q-r}^{q} \quad \sum_{\ell=p+q-r-s}^{p} \quad \sum_{|\mu|=\ell+s+r-(p+q)} \frac{1}{\mu!} D^{\mu}_{\xi}(\sum_{|\alpha|=\ell} a_{\alpha}(x)\xi^{\alpha}).D^{\mu}_{x}(\sum_{|\beta|=s} b_{\beta}(x)\xi^{\beta}).$$

On pose $q-s = \sigma$ et $p-\ell = \rho$

d'oũ $(p-r) + (q-s) = (p-r)+\sigma$; $\rho = p-\ell = r-\sigma$; et :

$$C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{\sigma=0} \sum_{\rho=0}^{r-\sigma} \sum_{|\mu|=r-\rho-\sigma} \frac{1}{\mu!} D^{\mu}_{\xi}(\sum_{|\alpha|=p-\rho} a_{\alpha}(x)\xi^{\alpha}).D^{\mu}_{x}(\sum_{|\beta|=q-\sigma} b_{\beta}(x)\xi^{\beta})$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{r} \sum_{\rho=0}^{r-\sigma} \sum_{|\mu|=r-\rho-\sigma} \frac{1}{\mu!} D^{\mu}_{\xi}A^{(*)\rho}(x,\xi).D^{\mu}_{x}B^{(*)\sigma}(x,\xi).$$

On pose $r-\sigma = \tau$, on aura :

$$C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{\sigma=0}^{r} \sum_{\rho=0}^{\tau} \sum_{|\mu|=\tau-\rho} \frac{1}{\mu!} D^{\mu}_{\xi}A^{(*)\rho}(x,\xi).D_{x}B^{(*)(r-\tau)}(x,\xi).$$

Soit en posant $\tau-\rho = k$:

$$C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{\tau=0}^{r} \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{|\mu|=k} \frac{1}{\mu!} D^{\mu}_{\xi}A^{(*)(\tau-k)}(x,\xi).D^{\mu}_{x}B^{(*)(r-\tau)}(x,\xi).$$

Remarque : pour $r = 1$ et $r = 2$, on trouve donc (avec la convention d'Einstein)

. $C^{*} = A^{*}B + \partial^{j}A\partial_{j}B + AB^{*}.$

.. $C^{**} = AB^{**} + \partial^{j}A\partial_{j}B^{*} + \partial^{j}A^{*}\partial_{j}B + A^{*}B^{*} + \frac{1}{2}\partial^{ij}A\partial_{ij}B + A^{**}B.$

Si on note par $a^{(s)}$ (pour $s \in \mathbb{N}$) l'opérateur défini à partir de a par :

$$a^{(s)}(x,\xi;D_x) = \sum_{|\mu|\leqslant s} \frac{1}{\mu!} D_\xi^\mu A^{(*)(s-|\mu|)}(x,\xi) D_x^\mu .$$

Alors la formule précédente s'écrit :

$$C^{(*)r}(x,\xi) = \sum_{s=0}^{r} a^{(s)}(x,\xi;D_x)\left[B^{(*)(r-s)}\right](x,\xi).$$

Soit encore : $C^{(*)r} = \sum_{s_1+s_2=r} a^{(s_1)}\left[B^{(*)s_2}\right].$

On montre plus généralement le résultat suivant :

Lemme 2.- Si $a_1,a_2,\dots,a_k$ sont k opérateurs différentiels : $(k \geqslant 2)$

$$(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_k)^{(*)r} = \sum_{s_1+s_2+\dots+s_k=r} a_1^{(s_1)} . a_2^{(s_2)} \circ \dots \circ a_{k-1}^{(s_{k-1})}\left[A_k^{(*)s_k}\right].$$

Le résultat est vrai pour 2 ; supposons le démontré pour $2,\dots,k$, on le démontre pour $(k+1)$

$$(a_1 \circ a_2 \circ \dots a_k \circ a_{k+1})^{(*)r} = \sum_{s_1+\sigma_2=r} a_1^{(s_1)}\left[(a_2 \circ a_3 \circ \dots a_{k+1})^{(*)\sigma_2}\right]$$

$$= \sum_{s_1+\sigma_2=r} a_1^{(s_1)} \Big(\sum_{s_2+\dots+s_{k+1}=\sigma_2} a_2^{(s_2)} \circ\dots\circ a_k^{(s_k)}\left[A_{k+1}^{(*)s_{k+1}}\right]\Big).$$

$$= \sum_{s_1+s_2+\dots+s_{k+1}=r} a_1^{(s_1)} \circ\dots\circ a_k^{(s_t)}\left[A_{k+1}^{(*)s_{k+1}}\right] .$$

De ce lemme découlent facilement les résultats suivants :

Corollaire 1.-

(i) $[(h')^3]^* = 3H'\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' + 3(H')^2 H'^*$ (8)

(ii) $[(h')^3]^{**} \equiv 3H'^*\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha[\partial^\beta H'\partial_\beta H'] + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' ; [H'].$ (8')

(iii) si $\operatorname{ord}[\ell_1(h')^2] = \operatorname{ord}[\ell_o(h')^3]-1$, on a :

$$[\ell_o(h')^3+\ell_1(h')^2]^{**} \equiv L_o\{\partial^\alpha H'\partial_\alpha(\partial^\beta H'\partial_\beta H') + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + 3H'^*.\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'\}$$

$$+ L_1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' + 3\partial^\alpha L_o\partial_\alpha H'\partial^\beta H'\partial_\beta H' \;;\; [H']. \qquad (9)$$

On note $H'^{(*)k} = (h')^{(*)k}$ et on utilise systématiquement la convention de sommation d'EINSTEIN.

Preuve :

(i) : $[(h')^3]^* = \sum\limits_{s_1+s_2+s_3=1} (h')^{(s_1)}.(h')^{(s_2)}.[(h')^{*(s_3)}]$

$= (h')^{(1)}[(H')^2] + H'.(h')^{(1)}[H'] + (H')^2[H'^*]$

on a : $(h')^{(1)} = \partial^\alpha H'\partial_\alpha + H'^*$

donc $[(h')^3]^* = 3H'\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' + 3(H')^2 H'^*$

(ii) : $[(h')^3]^{**} = (h')^{(2)}[(H')^2] + (h')^{(1)}[(h')^{(1)}[H'] + H'H'^*] + H'[(h')^{(2)}[H'] + (h')^{(1)}[H'^*] + H'H'^{**}]$

on a : $(h')^{(2)} = \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H'\partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H'^*\partial_\alpha + H'^{**}$

on aura donc

$$[(h')^3]^{**} \equiv \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha[\partial^\beta H'\partial_\beta H' + 2H'^*H'] + H'^*[\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'] \;;\; [H']$$

$$\equiv \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + 3H'^*\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha[\partial^\beta H'\partial_\beta H'] \;;\; [H']$$

(iii) : $[\ell_o(h')^3 + \ell_1(h')^2]^{**} = [\ell_o(h')^3]^{**} + [\ell_1(h')^2]^*$

$= \ell_o^{(2)}[(H')^3] + \ell_o^{(1)}\{[(h')^3]^{(*)}\} + L_o[(h')^3]^{**} + \ell_1^{(1)}[(H')^2] + L_1[(h')^2]^*$

$\equiv (\partial^\alpha L_o\partial_\alpha + L_o^*)[3H'\partial^\beta H'\partial_\beta H' + 3H'^*(H')^2] + L_o[(h')^3]^{**} + L_1[(h')^2]^* \;;\; [H']$

$$\equiv 3\partial^{\alpha}L_o\partial_{\alpha}H'\partial^{\beta}H'\partial_{\beta}H'+L_o[\partial^{\alpha\beta}H'\partial_{\alpha}H'\partial_{\beta}H'+\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}[\partial^{\beta}H'\partial_{\beta}H']+3H'^{*}\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H']$$
$$+L_1[\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'] \quad ; \qquad [H'].$$

Proposition 1.-

Si h vérifie (D) et (H.1.a) on a, dans une carte locale quelconque ; les relations :

i) $A[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A+H^{*}A-3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I] \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2]$

on note Λ le quotient par $(H')^2$ de ce polynôme.

ii) $-[\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H+AH^{+}-2H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I]\Lambda$
$+ H'H''\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}[\partial^{\beta}H\partial_{\beta}A+H^{*}A-3H'H''\partial^{\beta}H'\partial_{\beta}H'I]$
$+ H'H''A[\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A+\partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}A+H^{**}A]$
$\equiv AH'(H'')^2[\partial^{\alpha}H'\partial^{\beta}H'\partial_{\alpha\beta}H'+\partial^{\alpha\beta}H'\partial_{\alpha}H'\partial_{\beta}H'+\partial^{\beta}H'\partial^{\alpha}_{\beta}H'\partial_{\alpha}H'] \quad ; \quad [(H')^2].$

On donne ici le détail des calculs de la démonstration de cette proposition.

On reprend l'expression (7) :

$$h \circ a = \ell_o(h')^3 + \ell_1(h')^2 + \ell_2(h') + \ell_3 .$$

On a : $L_o = H''.I$ puisque les parties d'ordre mt sont égales ; de même, en exprimant que les parties d'ordre mt-1 de (7) sont égales, on aura :

$$(HA^{*} + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + H^{*}A)$$
$$= [H''[(h')^3]^{*} + \partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}(H')^3]I + L_o^{*}(H')^3 + L_1(H')^2.$$

Soit encore en utilisant (8) :

$$HA^{*}+\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A+H^{*}A = \left[3(H')^{2}\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'+3H''H'(\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'+H'H'^{*})\right].I$$
$$+ L_{o}^{*}(H')^{3} + L_{1}(H')^{2} \quad ; \qquad (10).$$

En exprimant que les parties d'ordre $mt-2$ sont égales, on obtient :

$$HA^{**}+\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A^{*}+\partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}A + \frac{1}{2}\,\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A+H^{*}A^{*}+H^{**}A$$
$$= \left[\ell_{o}(h')^{3}\right]^{**} + \left[\ell_{1}(h')^{2}\right]^{*} + L_{2}H'.$$

A l'aide de (9), on a :

$$\left[HA^{**} +\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A^{*} + \frac{1}{2}\,\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A+\partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}A+H^{*}A^{*} + H^{**}A\right]$$
$$\equiv J.I + \left[L_{1}.\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'\right] + \left[3\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H''H'^{*}\right]I \quad ; \quad [H'] \quad (11)$$

avec :

$$J = 3\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'\partial^{\beta}H''\partial_{\beta}H'+H''\left[\partial^{\alpha}H'\partial^{\beta}H'\partial_{\alpha\beta}H'+\partial^{\alpha\beta}H'\partial_{\alpha}H'\partial_{\beta}H'+\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}^{\beta}H'\partial_{\beta}H'\right].$$

En multipliant les deux membres de l'égalité (10) par A, on trouve, en tenant compte de $A.H = H.A = (H')^{3}H''I$:

$$\left[(H')^{3}H''A^{*}\right]+A\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A+H^{*}A-3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I\right]$$
$$= (H')^{2}A.\left[(3\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'+3H''H'^{*})I+H'L_{o}^{*}+L_{1}\right]. \quad (12)$$

Donc, si on pose :

$$\Lambda = A\left[(3\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'+3H''H'^{*})I+H'L_{o}^{*}+L_{1}\right] - H'H''A^{*}$$

on a :

$$A(\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + H^{*}A - 3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I) = \Lambda(H')^{2} \qquad (13)$$

ce qui termine la démonstration du (i) de la proposition 1.

(12) s'écrit alors :

$$[H'H''A^{*} + \Lambda] = A[(3\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H' + 3H''H'^{*})I + H'L_{o}^{*} + L_{1}] \qquad (14)$$

On multiplie (11) par $(H'H'')^{2}$, et on remplace $H'H''A^{*}$ à l'aide de (14) :

On montre alors le :

Lemme 3.-

$$\begin{aligned}
&(H'H'')^{2}HA^{**}+[H'H''\partial^{\beta}H\partial_{\beta}-\partial^{\beta}H\partial_{\beta}H'.H''-\partial^{\beta}H\partial_{\beta}H'.H'+H'H''H^{*}] \\
&\qquad [3H''AH'^{*} - \Lambda + A(3\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H'I + H'L_{o}^{*} + L_{1})] \\
&+ \frac{1}{2}(H'H'')^{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + (H'H'')^{2}\partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}A + (H'H'')^{2}H^{**}A \\
&\equiv (H'H'')^{2}[J.I+3H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H'^{*}I+L_{1}\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'] \; ; \; [(H')^{3}] \qquad (15)
\end{aligned}$$

Preuve :

Remarquons d'abord que : (d'après (14))

$$3H''AH'^{*} - \Lambda + A((3\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H')I + H'L_{o}^{*} + L_{1}) = H'H''A^{*}. \qquad (14')$$

D'autre part, en multipliant (11) par $(H'H'')^{2}$, on obtient bien une congruence modulo $(H')^{3}$.

Considérons l'expression :

$$(H'H'')^{2}\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A^{*} + (H'H'')^{2}H^{*}A^{*}$$

on a :

$$(H'H'')^{2}H^{*}A^{*} = H'H''\partial^{\beta}H[H'H''\partial_{\beta}A^{*}]$$

et :

$$(H'H'')^{2}\partial^{\beta}H\partial_{\beta}A^{*} = H'H''\partial^{\beta}H.[H'H''\partial_{\beta}A^{*}]$$

mais :

$$(H'H'')\partial_{\beta}A^{*} = \partial_{\beta}[H'H''.A^{*}] - \partial_{\beta}(H'H'').A^{*}$$

d'où

$$(H'H'')^2\partial^\beta H\partial_\beta A^* = \partial^\beta H.(H'H'')\left[\partial_\beta(H'H''A^*) - \partial_\beta(H'H'')A^*\right]$$

donc finalement :

$$(H'H'')^2\partial^\alpha H\partial_\alpha A^* + (H'H'')^2H^*A^*$$
$$= (\partial^\beta H.H'H''\partial_\beta - \partial^\beta H\partial_\beta H'H'' - \partial^\beta H.H'\partial_\beta H'' + H'H''H^*)\left[H'H''A^*\right]$$

les autres termes restent inchangés : (15) est démontré.

On démontre maintenant le ii) de la proposition 1 :

$$- \left[\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right].\Lambda$$
$$+ H'H''\partial^\alpha A\partial_\alpha\left[\partial^\beta H\partial_\beta A + H^*A - 3H'H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'I\right]$$
$$+ H'H''A\left[\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^\alpha H^*\partial_\alpha A + H^{**}A\right]$$
$$\equiv AH'(H'')^2\left[\partial^\alpha H'\partial^\beta H'\partial_{\alpha\beta}H' + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + \partial^\beta H'\partial^\alpha_\beta H'\partial_\alpha H'\right] \; ; \; \left[(H')^2\right]. \tag{16}$$

D'après (13), on note :

$$H.\Lambda = H'H''\left[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^*A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right] = H'H''T. \tag{17}$$

On multiplie (15) par A :

$$(H'H'')^2(H')^3H''A^{**} + A\left[H'H''\partial^\beta H\partial_\beta - \partial^\beta H\partial_\beta(H'H'') + H'H''H^*\right]$$
$$\left[3H''AH'^* - \Lambda + A((3\partial^\alpha H''\partial_\alpha H')I + H'L_o^* + L_1)\right]$$
$$+ A(H'H'')^2\left[\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^\alpha H^*\partial_\alpha A + H^{**}A\right]$$
$$\equiv A(H'H'')^2\left[JI + 3H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H'^*.I + L_1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'\right] \; ; \; \left[(H')^3\right]. \tag{18}$$

On pose :

$\omega = H'H''\partial^\beta H\partial_\beta - \partial^\beta H\partial_\beta(H'H'') + H'H''H^*$, ω est un opérateur d'ordre 1.

$$\nu = 3H''AH'^* + A((3\partial^\alpha H''\partial_\alpha H')I + H'L_o^* + L_1) = A.\mathcal{U}. \tag{18'}$$

Simplifions l'expression : $A\omega[\nu - \Lambda]$

on a :

$$A\omega[\nu-\Lambda] = A[H'H''\partial^\beta H\partial_\beta - \partial^\beta H\partial_\beta(H'H'') + H'H''H'^*]$$
$$[3H''AH'^* - \Lambda + A((3\partial^\alpha H''\partial_\alpha H')I + H'L_o^* + L_1)].$$

On essaie de faire apparaître $H'H''$ en facteur en utilisant (17).

On a $A\partial^\beta H \equiv - \partial^\beta A.H$; $[(H')^2]$

d'où : $AH'H''\partial^\beta H\partial_\beta[\nu-\Lambda] \equiv - H'H''\partial^\beta A.H\partial^\beta A.H\partial_\beta[\nu-\Lambda]$; $[(H')^3]$.

De même :

$- A\partial^\beta H \equiv \partial^\beta A.H$; $[(H')^2]$, d'où

$- A\partial^\beta H\partial_\beta(H'H'')[\nu-\Lambda] \equiv + \partial^\beta A.H\partial_\beta(H'H'')[\nu-\Lambda]$; $[(H')^3]$.

car $[\nu-\Lambda] \equiv 0$; $[H']$ d'après (14').

Il vient :

$$A\omega[\nu-\Lambda] \equiv - H'H''\partial^\beta A.H\partial_\beta[\nu-\Lambda] + \partial^\beta A.H\partial_\beta(H'H'').[\nu-\Lambda]$$
$$+ \quad AH'H''H^*[\nu-\Lambda] \; ; \; [(H')^3]$$

Soit : $A\omega[\nu-\Lambda] \equiv H'H''\partial^\beta A.H\partial_\beta(\Lambda) - \partial^\beta A.H\partial_\beta(H'H'')(\Lambda)$
$- AH'H''H^*(\Lambda) + R(\nu)$; $[(H')^3]$

avec $R(\nu) = - H'H''\partial^\beta A.H\partial_\beta(\nu)+\partial^\beta A.H\partial_\beta(H'H'').(\nu)+AH'H''H^*.(\nu)$.

Mais : $H\partial_\beta(\Lambda) = \partial_\beta(H\Lambda) - \partial_\beta H.\Lambda$
$= \partial_\beta(H'H''T) - \partial_\beta H.\Lambda$; ($H.\Lambda = H'H''T$ d'après (17).).
$= \partial_\beta(H'H'').T + H'H''.\partial_\beta T - \partial_\beta H.\Lambda$

et : $H'H''\partial^\beta A.H\partial_\beta(\Lambda) - \partial^\beta A.H\partial_\beta(H'H'').(\Lambda)$

$= H'H''\partial^\beta A.[\partial_\beta(H'H'').T + H'H''\partial_\beta T - \partial_\beta H.\Lambda] - \partial^\beta A.H\partial_\beta(H'H'').(\Lambda)$

$= H'H''\partial^\beta A\partial_\beta(H'H'').T + (H'H'')^2\partial^\beta A\partial_\beta T - H'H''\partial^\beta A\partial_\beta H.\Lambda$

$- H'H''.T\partial^\beta A\partial_\beta(H'H'')$. (On a encore utilisé (17) pour le dernier terme)

$= H'H''\partial^\beta A[H'H''\partial_\beta T - \partial_\beta H.\Lambda]$.

Donc :

$$A\omega[\nu-\Lambda] \equiv (H'H'')^2\partial^\beta A\partial_\beta T - H'H''[\partial^\beta A\partial_\beta H + AH^*](\Lambda) + R(\nu) \quad ; \quad [(H')^3].$$

D'autre part :

$$H.\nu \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^3] \quad \Longrightarrow \quad R(\nu) \equiv - H'H''\partial^\beta A.H\partial_\beta(\nu) + AH'H''H^*(\nu) \quad ; \quad [(H')^3]$$

de $-H\partial_\beta(\nu) \equiv + \partial_\beta H.(\nu) \quad ; \quad [(H')^2]$ (d'après (18)'.)

il vient : $- H'H''\partial^\beta A.H\partial_\beta(\nu) \equiv + H'H''\partial^\beta A\partial_\beta H.(\nu) \quad ; \quad [(H')^3]$.

Donc : $\qquad R(\nu) \equiv + H'H''[\partial^\beta A\partial_\beta H + AH^*].(\nu) \quad ; \quad [(H')^3]$.

<u>Ainsi</u> :

$$\begin{aligned} A\omega[\nu-\Lambda] \equiv\ & (H'H'')^2\partial^\beta A\partial_\beta T \\ & - (H'H'')[\partial^\beta A\partial_\beta H + AH^*].(\Lambda) \\ & + (H'H'')[\partial^\beta A\partial_\beta H + AH^*](\nu) \quad ; \quad [(H')^3]. \end{aligned} \tag{19}$$

(18) s'écrit à l'aide de (19) :

$$\begin{aligned} & (H'H'')^2\partial^\beta A\partial_\beta(T) - (H'H'')[\partial^\beta A\partial_\beta H + AH^*](\Lambda) \\ & + (H'H'')[\partial^\beta A\partial_\beta H + AH^*](\nu) + A(H'H'')^2\ [\tfrac{1}{2}\ \partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^\alpha H^*\partial_\alpha A + H^{**}A] \\ & \equiv A(H'H'')^2[J.I + (3H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H'^*)I + L_1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'] \quad ; \quad [(H')^3]. \end{aligned}$$

En divisant par $H'H''$, on obtient une équivalence modulo $(H')^2$ (H'' n'étant pas divisible par H') :

$$\begin{aligned} & (H'H'')\partial^\beta A\partial_\beta(T) - [\partial^\beta A\partial_\beta H + AH^*](\Lambda) \\ & + [\partial^\beta A\partial^\beta H + AH^*](\nu) + A(H'H'')\ [\tfrac{1}{2}\ \partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^\alpha H^*\partial_\alpha A + H^{**}A] \\ & \equiv A(H'H'')[J.I + (3H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.H'^*)I + L_1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'] \quad ; \quad [(H')^2]. \end{aligned} \tag{20}$$

On rappelle que : (d'après (11))

$J = \theta + H''[\mu]$ avec :

$$\begin{cases} \theta = 3\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.\partial^{\beta}H''\partial_{\beta}H'. \\ \mu = \partial^{\alpha}H'\partial^{\beta}H'\partial_{\alpha\beta}H' + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_{\alpha}H'\partial_{\beta}H' + \partial^{\alpha}H'\partial^{\beta}_{\alpha}H'\partial_{\beta}H' \end{cases}$$

d'où :

$$A(H'H'')[J.I] = A(H'H'')\theta + AH'(H'')^2[\mu].$$

Ce qui nous donne : (on reprend (20).).

$$\begin{aligned} &- [\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^* - 2H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I].(\Lambda) \\ &+ (H'H'')\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}T + (H'H'')A\ [\tfrac{1}{2}\ \partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^{\alpha}H^*\partial_{\alpha}A + H^{**}A] \\ &\equiv AH'(H'')^2[\mu] + S \quad ; \quad [(H')^2], \end{aligned}$$

avec : $S = [2H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'](\Lambda) + A(H'H'')\theta - [\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^*](\nu)$

$$+ \ A(H'H'').[(3H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H'^*)I + L_1\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'].$$

Il suffit de montrer que : $S \equiv 0 \quad [(H')^2]$.

On a $\Lambda = \nu - H'H''A^*$, donc $\Lambda \equiv \nu \quad ; \quad [H']$

et $2H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.\Lambda \equiv 2H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.\nu \quad ; \quad [(H')^2]$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} &AH'H''[(3H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H'^*)I + L_1\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'] \\ &= H'H''.\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.[3H''H'^*.A + AL_1] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 3H''H'^*.A + A.L_1 &= \nu - A[(3\partial^{\beta}H''\partial_{\beta}H')I + H'L_o^*] \\ &\equiv \nu - 3\partial^{\beta}H''\partial_{\beta}H'.A \ ; \ [H'] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &A(H'H'')[(3H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.H'^*)I + L_1\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'] \\ &\equiv [H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'].\nu - (3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H').(\partial^{\beta}H''\partial_{\beta}H').A \quad ; \quad [(H')^2] \\ &\equiv H'H''.\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.\nu - \theta(H'H'').A \quad ; \quad [(H')^2]. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S \equiv 3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.\nu - (\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^*).\nu \quad ; \quad [(H')^2]$$

Montrons que :

$$3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.\nu \equiv (\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^{*}).\nu \quad ; \quad [(H')^{2}]$$

on a :

$$(\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^{*}).\nu = [\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^{*}].(A.\mathcal{U}) \quad ; \quad \text{(d'après (18)').}$$
$$= [\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H.A + AH^{*}.A].\mathcal{U}$$

or $\partial^{\alpha}A(\partial_{\alpha}H.A) + AH^{*}A \equiv (-\partial^{\alpha}A.H)\partial_{\alpha}A + AH^{*}A \quad ; \quad [(H')^{2}]$

$$\equiv + A\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + AH^{*}A \quad ; \quad [(H')^{2}]$$
$$= A(\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + H^{*}A).$$

Ce qui nous donne, d'après (i) de la proposition 1 :

$$(\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^{*}).\nu \equiv A(\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + H^{*}A).\mathcal{U} \quad ; \quad [(H')^{2}]$$
$$\equiv (3H'H''.\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H')A.\mathcal{U} \quad ; \quad [(H')^{2}]$$
$$= (3H'H''.\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H').\nu.$$

Ce qui achève la démontration de (16), donc du (ii) de la proposition 1.

§ 2 - *Rappel sur quelques invariants.*

Lemme 4.- Les matrices :

$$C = \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A - \partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}A$$

et

$$D = \partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H - \partial_{\alpha}A\partial^{\alpha}H$$

sont des fonctions sur $T^{*}(X)$ et définissent des invariants et on a :

$$A.C \equiv D.A \quad ; \quad [(H')^{2}].$$

Preuve : Soient A et B dans $\{1,2,\ldots,m\}$.
Le polynôme caractéristique de l'opérateur $[h^{A}_{C},a^{C}_{B}]$ est égal à C^{A}_{B} qui est donc un invariant. De même pour D^{A}_{B}.

D'autre part : $A.H = H.A \equiv 0$; $(H')^3$ entraîne :

$$A\partial^\alpha H\partial_\alpha A - A\partial_\alpha\,\partial^\alpha A \equiv -\partial^\alpha A.H\partial_\alpha A + \partial_\alpha A.H.\partial^\alpha A$$
$$\equiv \partial^\alpha A\partial_\alpha H.A - \partial_\alpha A\partial^\alpha H.A \quad ; \quad [(H')^2].$$

Corollaire 2.-

Si K est la matrice sous caractéristique de h, $R = K.A + \frac{1}{2}C$ et $S = A.K + \frac{1}{2}D$ sont des invariants, et on a : $AR \equiv SA$; $[(H')^2]$.

Preuve : $A.R - SA = \frac{1}{2}(AC - DA)$.

Lemme 5.- On pose $L = A.R$, on a :

$$L \equiv A[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^*A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I] \qquad a)$$
$$\equiv [\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I].A \quad ; \quad [(H')^2]. \qquad b)$$

Preuve : Soit ρ une mesure positive sur X ; on a :

$$K = H^* - \frac{1}{2\rho}\partial^\alpha_\alpha(\rho H)$$

et
$$L = A.R = A.K.A + \frac{1}{2}A.C$$
$$= A[H^* - \frac{1}{2\rho}\partial^\alpha_\alpha(\rho H)]A + \frac{1}{2}A[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^*A]$$
$$= AH^*A - \frac{1}{2\rho}A[\partial_\alpha\rho\partial^\alpha H + \rho\partial^\alpha_\alpha H]A + \frac{1}{2}A(\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^*A).$$

Et comme :

$$A\partial^\alpha H.A \equiv -\partial^\alpha A.H.A \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2].$$

On aura :

$$L \equiv AH^*A - \frac{1}{2}A\partial^\alpha_\alpha H.A + \frac{1}{2}A\partial^\alpha H\partial_\alpha A - \frac{1}{2}A\partial_\alpha H\partial^\alpha A \quad ; \quad [(H')^2]$$
$$\equiv AH^*A + A\partial^\alpha H\partial_\alpha A - \frac{1}{2}A[\partial^\alpha_\alpha H.A + \partial^\alpha H\partial_\alpha A + \partial_\alpha H\partial^\alpha A] \quad ; \quad [(H')^2]$$

or $\partial^\alpha_\alpha(H.A) = \partial^\alpha_\alpha H.A + \partial^\alpha H\partial_\alpha A + \partial_\alpha H\partial^\alpha A + H\partial^\alpha_\alpha A.$

donc $L \equiv AH^{*}A + A\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A - \frac{1}{2}A\partial^{\alpha}_{\alpha}(H.A) \quad ; \qquad [(H')^2]$

$\equiv A[H^{*}A + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A - 3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'.I] \quad ; \qquad [(H')^2]$

(puisque : $H.A = (H')^3H''.I$).

Pour b) il suffit de remarquer que :

$$\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H.A \equiv -\partial^{\alpha}A.H.\partial_{\alpha}A \equiv A\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A \quad ; \qquad [(H')^2].$$

Lemme 6.- Si $H'(x,\xi)$ est irréductible pour tout $x \in \Omega$:

$$(L \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2]) \iff (L^1_1 \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2])$$

Preuve : 1°) $\Rightarrow$) : évident.

2°) $\Leftarrow$) : Il suffit d'établir la relation :

$$A^1_1 L \equiv L^1_1 A \quad ; \quad [(H')^2] \qquad (*).$$

En effet, si cette relation est démontrée, alors on aura :

$L^1_1 A \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2]$ et par suite :

$A^1_1 L \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2]$

puisque $A^1_1(x, \text{grad}\, \psi(x)) \neq 0$, $H'(x,\xi)$ ne divise pas A^1_1 et en utilisant le lemme de GAUSS, on aura :

$$L \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2].$$

Montrons (*) : Soient $A, C \in \{1,2,\ldots,m\}$.

On a $A^1_1 L^A_C = A^1_1 A^A_F R^F_C$;

On utilise l'identité de JACOBI entre les cofacteurs de la matrice H :

$$A^1_1 A^A_F - A^1_F A^A_1 = A^{1A}_{1F}(\text{dét } H)$$

où A^{1A}_{1F} est le mineur correspondant aux lignes 1 et F et aux colonnes 1 et A de H.

C'est un polynôme de degré $(m-2)t$ en ξ, ou nul.

On a alors :

$$A^1_1 L^A_C \equiv A^1_F A^A_1 R^F_C \quad ; \quad [(H')^3].$$

Soit encore :

$$A^1_1 L^A_C \equiv A^A_1 L^1_C \quad ; \quad [(H')^3].$$

De même :

$$L^1_C A^1_1 = A^1_F R^F_C A^1_1 \equiv S^1_F (A^1_1 A^F_C) \quad ; \quad [(H')^2] . \quad (\text{car } AR \equiv SA \ ; \ [(H')^2]).$$

D'après la relation de JACOBI

$$L^1_C A^1_1 \equiv S^1_F A^1_C A^F_1 \quad ; \quad [(H')^2], \text{ mais } S^1_F A^F_1 \equiv L^1_1 \quad ; \quad [(H')^2].$$

Donc :

$$L^1_C A^1_1 \equiv A^1_C L^1_1 \quad ; \quad [(H')^2].$$

Ainsi :

$$A^1_1 A^1_1 L^A_C \equiv A^A_1 A^1_1 L^1_C \equiv A^A_1 A^1_C L^1_1 \quad ; \quad [(H')^2].$$

En utilisant encore une fois JACOBI :

$$A^1_1 A^1_1 L^A_C \equiv A^1_1 A^A_C L^1_1 \quad ; \quad [(H')^2]$$

c'est-à-dire :

$$A^1_1 L^A_C \equiv L^1_1 A^A_C \quad ; \quad [(H')^2]$$

car H' ne divise pas A^1_1. C.Q.F.D.

On reprend l'expression (16) ; il sera commode d'obtenir une condition équivalente en multipliant par A^1_1 (qui n'est pas divisible par H' d'après l'hypothèse (H.2)).

De (13) on déduit : pour $A, F \in \{1,2,\dots,m\}$.

$$A_1^1\Lambda_F^A = \frac{A_1^1 A_C^A}{(H')^2}\left[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I\right]_F^C .$$

L'identité de JACOBI nous donne :

$$A_1^1 A_C^A - A_C^1 A_1^A = A_{1C}^{1A}(H')^3 H''$$

d'où :

$$A_1^1\Lambda_F^A = \frac{A_1^A A_C^1}{(H')^2}\left[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I\right]_F^C .$$

On aura donc, pour tout E,F dans $\{1,2,\dots,m\}$:

$$- \left[\partial^\alpha H\partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right]_A^E \Lambda_F^A A_1^1$$

$$= -\left[\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right]_A^E \frac{A_1^1 A_C^1}{(H')^2}\left[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right]_F^C$$

$$- (H'H'')\left[\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right]_A^E A_{1C}^{1A}\left[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right]_F^C$$

mais la première partie s'écrit aussi : (en utilisant (13) et le lemme 5)

$$- \left[(\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I)A\right]_1^E .\Lambda_F^1$$

$$\equiv -\Lambda_F^1 .\left[\Lambda_1^E (H')^2 + H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.A_1^E\right] \equiv - \Lambda_F^1 .H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.A_1^E \quad ; \quad \left[(H')^2\right]$$

En reportant dans (16) cette expression de $- \left[\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I\right].\Lambda$, et en divisant tout par $H'H''$, on trouve :

$$\begin{aligned}
& - \Lambda_F^1\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.A_1^E - \left[\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I\right]_A^E \\
& \times A_{1C}^{1A}\left[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.I\right]_F^C \\
& + A_1^1\left[\partial^\alpha A\partial_\alpha(\partial^\beta H\partial_\beta A + H^* A - 3H'H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'.I)\right]_F^E \\
& + A_1^1\left[A(\tfrac{1}{2}\,\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^\alpha H^*\partial_\alpha A + H^{**}A)\right]_F^E \\
& \equiv A_1^1 A_F^E\left[\partial^\alpha H'\partial^\beta H'\partial_{\alpha\beta}H' + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + \partial^\beta H'\partial_\beta^\alpha H'\partial_\alpha H'\right].H'' \quad ; \quad \left[H'\right]. \qquad (21)
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
N^E_F = & - \Lambda^1_F . \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' . A^E_1 - \left[\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*\right]^E_A A^{1A}_{1C} \left[\partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A\right]^C_F \\
& + A^1_1 \left[\partial^\alpha A \partial_\alpha (\partial^\beta H \partial_\beta A + H^* A - 3H'H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' I)\right]^E_F \\
& + A^1_1 \left[A(\tfrac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} A + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha A + H^{**} . A)\right]^E_F \\
& - A^1_1 A^E_F \left[\partial^\alpha H' \partial^\beta H' \partial_{\alpha\beta} H' + \partial^{\alpha\beta} H' \partial_\alpha H' \partial_\beta H' + \partial^\beta H' \partial^\alpha_\beta H' \partial_\alpha H'\right] H''.
\end{aligned}$$

(21) équivaut à : $N^1_1 \equiv 0 \quad ; \quad [H']$.

Définition :

h vérifie $((L^1_1)^2 - (N^1_1))$ si et seulement si :

$(L^1_1)^2 \quad : \quad L^1_1 \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2]$.

$(N^1_1) \quad : \quad N^1_1 \equiv 0 \quad ; \quad [H']$.

Il résulte du lemme 5 que $(L^1_1)^2$ est intrinsèque. On montre dans [2] que N^1_1 est un invariant, donc que la condition (N^1_1) est intrinsèque. On donnera dans le chapitre II une démonstration plus naturelle de ces résultats.

CHAPITRE II

RESOLUTION FORMELLE.

On se propose, au début de ce chapitre de donner une forme équivalente aux conditions (H.1) - (H.2) - $(L_1^1)^2$ - (N_1^1) du chapitre I, à l'aide de la notion de bonne décomposition au sens de DE PARIS [10], pour un opérateur différentiel linéaire scalaire cette fois-ci.

§ 1 - *Equivalence entre* $((D_o)_3$ - (H.2)) et ((H.1) - (H.2) - $(L^2$-N)) :

Hypothèse de bonne décomposition $(D_o)_3$:

On dira que h vérifie $(D_o)_3$ si et seulement si :

(a) Il existe des opérateurs $(a_A^1)_{1\leq A\leq m}$, $(a_1^B)_{1\leq B\leq m}$ et $(a_{1\hat{C}}^{1\hat{B}})_{2\leq\hat{B},\hat{C}\leq m}$ de symboles principaux respectifs : A_A^1, A_1^B et $A_{1\hat{C}}^{1\hat{B}}$ tel que l'opérateur scalaire :

$$k = a_A^1 h_B^A a_1^B a_1^1 - a_A^1 h_{\hat{B}}^A a_{1\hat{C}}^{1\hat{B}} h_D^{\hat{C}} a_1^D .$$

Soit bien décomposable par rapport à H', de multiplicité 3, c'est-à-dire qu'il existe λ_o, λ_1, λ_2 et λ_3 opérateurs différentiels linéaires tels que :

$$\begin{cases} k = \lambda_o(h')^3 + \lambda_1(h')^2 + \lambda_2(h') + \lambda_3 \\ \text{ord}(k - \sum\limits_{\rho=0}^{r} \lambda_\rho(h')^{3-\rho}) < \text{ord}(k)-r \quad ; \forall\, r \in \{0,1,2\}. \end{cases}$$

(b) S est régulière en a pour cette décomposition, c'est-à-dire que S n'est pas caractéristique en a pour λ_o, et S est caractéristique totale simple pour H'.

Remarque : Pour raison de commodité d'écriture, on omettra souvent de mettre les indices chapeautés, il suffira pour cela de supposer pour toute la suite que :

$$a^{1B}_{1C} \equiv 0 \quad \text{si} \quad B = 1 \quad \text{ou} \quad C = 1.$$

On essaie maintenant de donner une autre forme des hypothèses $(H.1) - (L^1_1)^2 - (N^1_1)$ du chapitre I.

Montrons d'abord quelques lemmes :

Lemme 7.- Pour toutes fonctions vectorielles $(Z_A)_A$ et $(X^A)_A$, on a :

a) $Z_A H^A_B A^{1B}_{1C} X^C = (Z_A A^1_1 - Z_1 A^1_A) X^A$.

b) $Z_A A^{1B}_{1B} H^B_C X^C = Z_A (X^A . A^1_1 - A^A_1 X^1)$.

Preuve : On rappelle que les indices chapeautés varient entre 2 et m.

Pour a) : $Z_A H^A_B A^{1B}_{1C} X^C = Z_1 H^1_{\hat{B}} A^{1\hat{B}}_{1\hat{C}} X^{\hat{C}} + Z_{\hat{A}} H^{\hat{A}}_{\hat{B}} A^{1\hat{B}}_{1\hat{C}} X^{\hat{C}}$

$= - Z_1 A^1_{\hat{C}} X^{\hat{C}} + Z_{\hat{A}} X^{\hat{A}} A^1_1$

$= (Z_{\hat{A}} A^1_1 - Z_1 A^1_{\hat{A}}) X^{\hat{A}} = (Z_A A^1_1 - Z_1 A^1_A) X^A.$

Pour b) : Par transposition de a) ; en effet si on note : $(Z')_A = {}^t(X^A)$ et $(X')^A = {}^t(Z_A)$ on aura :

$Z' A^{1C}_{1B} H^B_A X'^A = Z'_A (X'^A A^1_1 - A^A_1 X'^1)$. C.Q.F.D.

Remarques :

1°) si $A^1_A X^A = 0$ alors :

$Z_A H^A_B A^{1B}_{1C} X^C = A^1_1 Z_A X^A$; de même :

si $Z_A A_1^A = 0$ alors : $Z_A A_{1B}^{1A} H_C^B X^C = A_1^1 Z_A X^A$.

2°) On a évidemment des résultats analogues en remplaçant l'égalité par une congruence.

Notation : Si k est un opérateur différentiel linéaire, et $n \in \mathbb{N}^*$; "k bien décomposable par rapport à H' de multiplicité : n" sera noté abusivement : "k est B.D.n".

Lemme 8.- Si k est un opérateur différentiel linéaire et $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a l'équivalence entre :

i) k est B.D.n.

ii) $\exists \lambda_o , \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, n opérateurs différentiels linéaires tels que, pour toute carte locale, on a :

$$\forall\, r \in \{0,1,\ldots,n-1\} \quad : K^{(*)(r)} = \sum_{\ell=0}^{r} \left[\lambda_\ell (h')^{n-\ell}\right]^{(*)(r-\ell)} \tag{22}$$

avec $\Lambda_o \not\equiv 0$; $[H']$.

Preuve : Evident.

Lemme 9.- Sous les hypothèses $(L_1^1)^2$ et (H.1).a), on a dans une carte locale quelconque :

$$1°)\quad K^* \equiv A_1^1 \Lambda (H')^2 + 3(A_1^1)^2 H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' + 3(H')^2 H'' A_1^1 (\partial^\alpha A_1^1 \partial_\alpha H' + \partial^\alpha H' \partial_\alpha A_1^1) \; ; \; [(H')^3] \tag{23}$$

$$2°)\quad K^{**} \equiv A_1^1\{A_A^1 (h_B^A)^{(2)} [A_1^B] + \partial^\alpha A_A^1 \partial_\alpha ((h_B^A)^{(1)} [A_1^B] - 3H'H''\partial^\beta H' \partial_\beta H' I_1^A)\} + 3A_1^1 H''(\partial^\alpha H' \partial_\alpha A_1^1 + \partial^\alpha A_1^1 \partial_\alpha H') \partial^\beta H' \partial_\beta H' - T \; ; \; [H'] \tag{24}$$

avec $T = (\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)_B^1 A_{1C}^{1B} (h_D^C)^{(1)} [A_1^D]$

et Λ, le quotient de $A_A^1 [(h_B^A)^{(1)} [A_1^B] - 3H'H''\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I_1^A]$ par $(H')^2$.

Preuve :

1°) $K^{*} = A_A^1 (h_B^A a_1^B a_1^1)^{*} + (a_A^1)^{(1)} [H_B^A A_1^B A_1^1]$

d'où $K^{*} \equiv A_A^1 [(h_B^A a_1^B)^{*} A_1^1 + \partial^{\alpha}(H_B^A A_1^B)\partial_{\alpha} A_1^1] + \partial^{\alpha} A_A^1 \partial_{\alpha}(H_B^A A_1^B A_1^1) \quad ; \quad [(H')^3]$ (25)

en utilisant $(L_1^1)^2$, et : $A_A^1 (h_B^A a_1^B)^{*} \equiv A_A^1 . (h_B^A)^{(1)} [A_1^B] \quad ; \quad [(H')^3]$:

on a : $A_1^1 A_A^1 (h_B^A a_1^B)^{*} \equiv A_1^1 \Lambda (H')^2 + 3(A_1^1)^2 H' H'' \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' \quad ; \quad [(H')^3]$.

De même : $\partial^{\alpha} A_A^1 \partial_{\alpha}(H_B^A A_1^B . A_1^1) = \partial^{\alpha} A_A^1 \partial_{\alpha}[H''(H')^3 A_1^1 I_1^A]$ (d'après H.1 a))

$$= \partial^{\alpha} A_1^1 \partial_{\alpha}[H''(H')^3 A_1^1].$$

Soit : $\partial^{\alpha} A_A^1 \partial_{\alpha}(H_B^A A_1^B . A_1^1) \equiv 3(H')^2 H'' A_1^1 \partial^{\alpha} A_1^1 \partial_{\alpha} H' \quad ; \quad [(H')^3]$

et $A_A^1 \partial^{\alpha}(H_B^A A_1^B)\partial_{\alpha} A_1^1 = A_1^1 \partial^{\alpha}[H''(H')^3]\partial_{\alpha} A_1^1$

$$\equiv 3(H')^2 H'' A_1^1 \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} A_1^1 \quad ; \quad [(H')^3]$$

donc :

$$\boxed{\begin{aligned} K^{*} &\equiv A_1^1 \Lambda (H')^2 + 3(A_1^1)^2 H' H'' \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' \\ &+ 3(H')^2 H'' A_1^1 (\partial^{\alpha} A_1^1 \partial_{\alpha} H' + \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} A_1^1) \quad ; \quad [(H')^3]. \end{aligned}}$$

2°) Calcul de $(a_A^1 h_B^A a_1^B a_1^1)^{**}$

on a : $(a_a^1 h_B^A a_1^B a_1^1)^{**} = A_A^1 (h_B^A a_1^B a_1^1)^{**} + (a_A^1)^{(1)} [h_B^A a_1^B a_1^1]^{*} + (a_A^1)^{(2)} H_B^A A_1^B A_1^1$.

Soit : $(a_A^1 h_B^A a_1^B a_1^1)^{**} \equiv A_A^1 (h_B^A a_1^B a_1^1)^{**} + (a_A^1)^{(1)} [h_B^A a_1^B a_1^1]^{*} \quad [H']$

car $H_B^A A_1^B A_1^1 \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^3]$ et $(a_A^1)^{(2)} [H_B^A A_1^B A_1^1] \equiv 0 \quad ; \quad [H']$.

D'autre part :

1°) $(h_B^A a_1^B a_1^1)^{*} = (h_B^A a_1^B)^{(1)} [A_1^1] + H_B^A A_1^B A_1^1 \equiv (h_B^A a_1^B)^{*} A_1^1 \quad ; \quad [(H')^2]$

car $(h_B^A a_1^B)^{(1)} [A_1^1] \equiv (h_B^A a_1^B)^{*} . A_1^1 \quad ; \quad [(H')^2]$.

2°) $(h_B^A a_1^B a_1^1)^{**} = (h_B^A a_1^B)^{(2)} [A_1^1] + (h_B^A a_1^B)^{(1)} [A_1^{*1}] + H_B^A A_1^B . A_1^{**1}$

mais : $(h_B^A a_1^B)^{(2)} [A_1^1] \equiv \partial^{\alpha}(h_B^A a_1^B)^{*} \partial_{\alpha} A_1^1 + (h_B^A a_1^B)^{**} . A_1^1 \quad ; \quad [(H')]$

et $(h_B^A a_1^B)^{(1)} [A_1^{*1}] \equiv (h_B^A a_1^B)^{*} . A_1^{*1} \quad ; \quad [(H')^2]$.

d'où : $(h^A_B a^B_1 a^1_1)^{**} \equiv \partial^\alpha (h^A_B a^B_1)^* \partial_\alpha A^1_1 + (h^A_B a^B_1)^{**}.A^1_1 + (h^A_B a^B_1)^*.A^{*1}_1$; $[H']$

et en utilisant $(L^1_1)^2$:

$$A^1_A (h^A_B a^B_1 a^1_1)^{**} \equiv A^1_A \partial^\alpha (h^A_B a^B_1)^* \partial_\alpha A^1_1 + A^1_1 A^1_A (h^A_B a^B_1)^{**} \quad ; \quad [H'].$$

Puis : $(a^1_A)^{(1)} [h^A_B a^B_1 a^1_1]^* = \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha [h^A_B a^B_1 a^1_1]^* + A^{*1}_A [h^A_B a^B_1 a^1_1]^*$

et en utilisant le 1°) :

$$(a^1_A)^{(1)} [h^A_B a^B_1 a^1_1]^* \equiv \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha [(h^A_B a^B_1)^*.A^1_1] + A^1_1.A^{*1}_A (h^A_B a^B_1)^* \quad ; \quad [H'].$$

En reportant ces termes dans l'expression de $(a^1_A h^A_B a^B_1 a^1_1)^{**}$

on aura :

$$(a^1_A h^A_B a^B_1 a^1_1)^{**} \equiv A^1_A \partial^\alpha (h^A_B a^B_1)^*.\partial_\alpha A^1_1 + A^1_1 A^1_A (h^A_B a^B_1)^{**}$$
$$+ \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha (h^A_B a^B_1)^*.A^1_1 + A^1_1 A^{*1}_A (h^A_B a^B_1)^* \quad ; \quad [(H')].$$

De même :

$$A^1_1 A^1_A (h^A_B a^B_1)^{**} \equiv A^1_1 A^1_A ((h^A_B)^{(2)} [A^B_1] + (h^A_B)^{(1)} [A^{*B}_1]) \qquad [(H')].$$

D'autre part $(L^1_1)^2$ nous donne :

$$\partial^\alpha [A^1_A (h^A_B a^B_1)^* - 3A^1_1 H'H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H'] \equiv 0 \qquad [(H')]$$

d'où

$$\partial^\alpha [A^1_A (h^A_B a^B_1)^*] \partial_\alpha A^1_1 \equiv 3A^1_1 H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha A^1_1 . \partial^\beta H' \partial_\beta H' \quad ; \quad [(H')].$$

Ensuite :

$$\partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha (h^A_B a^B_1)^* A^1_1 = A^1_1 \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha \{H^A_B A^{*B}_1 + (h^A_B)^{(1)} [A^B_1] - 3H'H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' I^A_1\}$$
$$+ A^1_1 \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha \{3H'H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' I^A_1\}.$$

Soit $\partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha (h^A_B a^B_1)^* A^1_1 = A^1_1 \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha \{(h^A_B)^{(1)} [A^B_1] - 3H'H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' I^A_I\}$

$$+ A^1_1 \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha [H^A_B A^{*B}_1] + 3A^1_1 \partial^\alpha A^1_1 H'' \partial_\alpha H' \partial^\beta H' \partial_\beta H'.$$

Et :

$$A^1_1 A^1_A (h^A_B)^{(1)} \left[A^{*B}_1\right] + A^1_1 \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha \left[H^A_B A^{*B}_1\right]$$

$$= A^1_1 \left[A^1_A (\partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha A^{*B}_1 + H^{*A}_B A^{*B}_1) + \partial^\alpha A^1_A (H^A_B \partial_\alpha A^{*B}_1 + \partial_\alpha H^A_B A^{*B}_1)\right]$$

$$\equiv A^1_1 \left[A^1_A H^{*A}_B + \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha H^A_B\right] A^{*B}_1 \quad ; \quad [(H')] \quad (\text{car } A^1_A \partial^\alpha H^A_B \equiv - \partial^\alpha A^1_A H^A_B \quad ; \quad [(H')^2].)$$

En regroupant, on trouve :

$$\begin{aligned}(a^1_A h^A_B a^B_1 a^1_1)^{**} \equiv\ & 3A^1_1 H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' (\partial^\alpha H' \partial_\alpha A^1_1 + \partial^\alpha A^1_1 \partial_\alpha H') + A^1_1 A^*_A (h^A_B a^B_1)^* \\ & + A^1_1 A^1_A (h^A_B)^{(2)} \left[A^B_1\right] + A^1_1 \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha \{ (h^A_B)^{(1)} \left[A^B_1\right] - 3H'H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' I^A_I \} \\ & + A^1_1 \left[A^1_A H^{*A}_B + \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha H^A_B\right] A^{*B}_1 \quad ; \quad [(H')] . \qquad (26).\end{aligned}$$

Les identités : $H^C_D A^D_1 = (H')^3 H'' I^C_1$ et $A^1_A H^A_B = (H')^3 H'' I'_B$

nous conduisent à poser :

$$\begin{cases} h^C_D a^D_1 = (h')^3 h'' I^C_1 + \ell^C_1 \\ a^1_A h^A_B = (h')^3 h'' I^1_B + m^1_B \end{cases}$$

avec $\mathrm{ord}(\ell^C_1) < mt$ et $\mathrm{ord}(m^1_B) < mt$.

Aussi : $a^1_A h^A_B a^{1B}_{1C} h^C_D a^D_1$ est un opérateur d'ordre inférieur ou égal à $(3m-2)t$ c'est-à-dire $\mathrm{ord}(k) - 2$, d'où :

$$(a^1_A h^A_B a^{1B}_{1C} h^C_D a^D_1)^{**} = M^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 \qquad (27)$$

où M^1_B et L^C_1 représentent les parties homogènes d'ordre $mt-1$ de m^1_B et de ℓ^C_1.

D'autre part :

de $[(h')^3 h'']^* \equiv H'' [(h')^3]^* \equiv 0$, $[H']$ il vient

$$(h^C_D a^D_1)^* \equiv L^C_1 \quad ; \quad [(H')]$$
$$(a^1_A h^A_B)^* \equiv M^1_B \quad ; \quad [(H')]$$

avec égalité pour $C = \hat{C}$ et $B = \hat{B}$.

On remarque aussi que (L^2) entraîne : $A^1_A L^A_1 \equiv 0$; $[H']$ et $M^1_B A^B_1 \equiv 0$; $[H']$.

D'où :

$$
\begin{aligned}
M^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 &= (A^*H + \partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 \\
&= (A^*H)^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 + (\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 \\
&= (A^*H)^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 + T + (\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_B A^{1B}_{1C} (HA^*)^C_1
\end{aligned}
\tag{28}
$$

avec $\quad T = (\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_B A^{1B}_{1C} (h^C_D)^{(1)} [A^D_1]$.

En utilisant le lemme 7, et $(L^1_1)^2$:

$(A^*H)^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 \equiv A^1_1 A^{*1}_A L^A_1$; $[(H')]$: car $A^1_A L^A_1 \equiv 0$ $[(H')]$

et $(\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_B A^{1B}_{1C} (HA^*)^C_1 \equiv A^1_1 (\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_A . A^{*A}_1$; $[(H')]$

car $(\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_A A^A_1 \equiv 0$; $[(H')]$,

d'où

$$
M^1_B A^{1B}_{1C} L^C_1 \equiv A^1_1 A^{*1}_A (h^A_B a^B_1)^* + A^1_1 (\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*)^1_A A^{*A}_1 + T \quad ; \quad [H'] \tag{29}
$$

Et enfin :

$$
\begin{aligned}
&(a^1_A h^A_B a^B_1 a^1_1 - a^1_A h^A_B a^{1B}_{1C} h^C_D a^D_1)^{**} \\
&\quad \equiv A^1_1 A^1_A (h^A_B)^{(2)} [A^B_1] + 3A^1_1 H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' (\partial^\alpha H' \partial_\alpha A^1_1 + \partial^\alpha A^1_1 \partial_\alpha H') \\
&\quad + A^1_1 \partial^\alpha A^1_A \partial_\alpha \{ (h^A_B)^{(1)} [A^B_1] - 3H'H'' \partial^\beta H' \partial_\beta H' I^A_I \} - T \quad ; \quad [(H')].
\end{aligned}
$$

C.Q.F.D.

Proposition 2.-

Sous l'hypothèse (H.2) et H' irréductible pour tout x dans Ω, on a l'équivalence :

$$[(H.1) - (L_1^1)^2 - (N_1^1)] \iff [(D_o)_3].$$

Preuve : On montre d'abord que :

$$\{(D_o)_3 - a)\} \iff \{(L_1^1)^2 - (N_1^1) - (H.1).a)\}. \qquad (30)$$

En appliquant le lemme 8, pour $n = 3$, $(D_o)_3 - a)$ équivaut à : il existe trois opérateurs différentiels $\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2$ tels que :

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & K = \Lambda_o(H')^3 \quad ; \quad \Lambda_o \not\equiv 0 \quad ; \quad [H'] \\
\text{(ii)} & K^* = [\lambda_o(h')^3]^* + \Lambda_1(H')^2 \\
\text{(iii)} & K^{**} = [\lambda_o(h')^3]^{**} + [\lambda_1(h')^2]^* + \Lambda_2.H'
\end{array}$$

or on a : $$K = A_A^1 H_B^A A_1^B A_1^1 = (A_1^1)^2 \text{dét } H$$

ainsi, d'après l'hypothèse (H.2) et H' irréductible on a :

$$\{(i)\} \iff \{\exists H'' \text{ tel que : dét } H = H''(H')^3\}$$

et on a de plus : $\Lambda_o = (A_1^1)^2 H''$.

D'autre part, d'après (25) :

$$K^* = (a_A^1 h_B^A a_1^B a_1^1)^* \equiv A_1^1 A_A^1 (h_B^A a_1^B)^* \equiv A_1^1 A_A^1 (h_B^A)^{(1)} [A_1^B] \quad ; \quad [(H')^2]$$

$$[\lambda_o(h')^3]^* \equiv 3H'\Lambda_o \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' \quad ; \quad [(H')^2].$$

Ainsi, en faisant la différence, on obtient :

$$\{(i) - (ii)\} \Longleftrightarrow \{(H.1).a) - (L_1^1)^2\}.$$

(i) $\Longleftrightarrow$ $(K^* = [\lambda_o(h')^3]^* + \Lambda_1(H')^2)$; d'après le lemme 9 ; 1°) on a :

$$\begin{aligned}\Lambda_1(H')^2 \equiv\ & (A_1^1)\Lambda(H')^2 + 3\Lambda_o H'\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' - 3(H')^2\partial^\alpha\Lambda_o\partial_\alpha H' \\ & + 3(H')^2H''A_1^1(\partial^\alpha A_1^1\partial_\alpha H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha A_1^1) \\ & - 3\Lambda_o((H')^2H'^* + H'\partial^\alpha H'\partial_\alpha H') \quad ; \quad [(H')^3].\end{aligned}$$

D'où en divisant par $(H')^2$:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 \equiv\ & A_1^1\Lambda - 3\Lambda_o H'^* + 3H''A_1^1(\partial^\alpha A_1^1\partial_\alpha H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha A_1^1) \\ & - 3\partial^\alpha\Lambda_o\partial_\alpha H' \quad ; \quad [H']\end{aligned}$$

et $[\lambda_1(h')^2]^* \equiv \Lambda_1\partial^\beta H'\partial_\beta H'$; $[H']$

$$\equiv [A_1^1\Lambda - 3\Lambda_o H'^* + 3H''A_1^1(\partial^\alpha A_1^1\partial_\alpha H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha A_1^1) - 3\partial^\alpha\Lambda_o\partial_\alpha H'].\partial^\beta H'\partial_\beta H' \quad ; \quad [H'].$$

En utilisant le corollaire 1, on a finalement :

$$\begin{aligned}& [\lambda_o(h')^3]^{**} + [\lambda_1(h')^2]^* \\ & \equiv \Lambda_o\{\partial^\alpha H'\partial_\alpha(\partial^\beta H'\partial_\beta H') + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + 3H'^*\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'\} \\ & + 3\partial^\alpha\Lambda_o\partial_\alpha H'.\partial^\beta H'\partial_\beta H' \\ & + [A_1^1\Lambda - 3\Lambda_o(H')^* - 3\partial^\alpha\Lambda_o\partial_\alpha H' + 3H''A_1^1(\partial^\alpha A_1^1\partial_\alpha H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha A_1^1)]\partial^\beta H'\partial_\beta H' \quad ; \quad [H'].\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse i) et ii), (iii) peut s'écrire encore :

$$\begin{aligned}K^{**} \equiv [\lambda_o(h')^3]^{**} + [\lambda_1(h')^2]^* \equiv\ & (A_1^1)^2H''\{\partial^\alpha H'\partial_\alpha(\partial^\beta H'\partial_\beta H') + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H'\} \\ & + A_1^1\Lambda.\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' + 3H''A_1^1(\partial^\alpha A_1^1\partial_\alpha H' + \partial^\alpha H'\partial_\alpha A_1^1)\partial^\beta H'\partial_\beta H' \quad ; \quad [H'] \quad (31).\end{aligned}$$

On utilise alors le 2°) du lemme 9 ; et en faisant la différence de ces deux expressions de K^{**}, on obtient :

$$A^1_1\{A^1_A(h^A_B)^{(2)}[A^B_1] + \partial^\alpha A^1_A\partial_\alpha((h^A_B)^{(1)}[A^B_1] - 3H'H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'I^A_I)\} - T$$

$$- (A^1_1)^2 H''\{\partial^\alpha H'\partial_\alpha(\partial^\beta H'\partial_\beta H') + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H'\} - A^1_1\Lambda\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'.$$

$\equiv 0$; $[H']$; qui n'est rien d'autre que (N^1_1).

<u>Ainsi</u> : $\{(i) - (ii) - (iii)\}$ <==> $\{(H.1).a) - (L^1_1)^2 - (N^1_1)\}$

et enfin de : $\Lambda_o = (A^1_1)^2 H''$, il vient :

$$(\Lambda_o(a,\text{grad } \varphi(a)) \neq 0) \iff (H''(a,\text{grad } \varphi(a)) \neq 0)$$

qui n'est rien d'autre que :

$$\{(D_o)_3\text{-b}\} \iff \{(H.1)\text{-a})\}.$$

car : S caractéristique totale simple pour H', est commune à $\{(D_o)_3 - b\}$ et à $\{(H.1)\text{-a})\}$, ce qui achève la preuve de la proposition 2.

<u>*Remarques*</u> :

1°) La proposition 2 confirme que la définition de $\{(L^1_1)^2 - (N^1_1)\}$ est intrinsèque.

2°) (D) => $(D_o)_3$ -a), de manière évidente, et on retrouve ainsi l'implication : $\{D\}$ => $\{(L^1_1)^2 - (N^1_1)\}$, du chapitre I.

<u>*Autre formulation de*</u> $(D_o)_3$:

On pose $k_1 = a^1_A h^A_B a^B_1 a^1_1 - a^1_A h^A_B a^{1B}_{1C} h^C_D a^D_1$

$$k_2 = k_1 a^1_1 + [a^1_A h^A_B a^{1B}_{1C} h^C_D a^{1D}_{1E} h^E_F a^F_1 - a^1_A h^A_B a^{1B}_{1C} h^C_D a^D_1 a^1_1].$$

On justifiera plus loin l'emploi de k_2 :

En remarquant que :

$$h^{\hat{E}}_F a^F_1 = \ell^{\hat{E}}_1 \quad \text{et} \quad a^1_A h^A_{\hat{B}} = m^1_{\hat{B}}$$

k_2 s'écrit aussi :

$$k_2 = k_1 a_1^1 + r$$

avec $$r = m_{\hat{B}}^1 a_{1\hat{C}}^{1\hat{B}} \left[h_{\hat{D}}^{\hat{C}} a_{1\hat{E}}^{1\hat{D}} \ell_1^{\hat{E}} - \ell_1^{\hat{C}} a_1^1 \right] . \tag{32}$$

Ainsi, a priori :

$$\mathrm{ord}(r) \leqslant \mathrm{ord}(k_2) - 2$$

mais : $$H_{\hat{D}}^{\hat{C}} A_{1\hat{E}}^{1\hat{D}} L_1^{\hat{E}} - L_1^{\hat{C}} . A_1^1 = 0$$

donc $$\mathrm{ord}(r) \leqslant \mathrm{ord}(k_2) - 3. \tag{33}$$

. D'autre part, k_1 est B.D.3 équivaut à : $k_1 . a_1^1$ est B.D.3, [16], puisque A_1^1 est premier avec H' ; on peut ainsi ré-écrire la proposition 2, en remplaçant k_1 par k_2 dans la définition de $(D_o)_3$.

On utilisera pour la résolution formelle, cette dernière version avec $\underline{k = k_2}$.

§ 2 - *Résolution formelle.*

On suppose que h vérifie $\{(H.2) - (D_o)_3\}$, et on cherche une onde asymptotique :

$$Y = (Y^B)_{1 \leqslant B \leqslant m} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} Y_j^B \times f_j \circ \psi \right)_{1 \leqslant B \leqslant m}$$

de phase ψ, où pour tout $j \in \mathbb{Z}$, f_j est une ultradistribution sur un intervalle de centre 0 dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, j \in \mathbb{Z} : f_j' = f_{j-1}.$$

En utilisant la notation matricielle, Y vérifie formellement :

$$hY = h\left(\sum_{j=0}^{+\infty} Y_j \times f_j \circ \psi\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} h(Y_j \times f_j \circ \psi).$$

Il existe alors : [10], $t+1$ opérateurs matriciels H_ψ^r ; $r \in \{0,1,\ldots,t\}$ d'ordre inférieur ou égal à r, tels que :

$$h(Y_j \times f_j \circ \psi) = \sum_{r=0}^{t} H_\psi^r[Y_j] \times f_{j-t+r} \circ \psi$$

ce qui donne :

$$h(Y) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{r=0}^{\min(t,j)} H_\psi^r[Y_{j-r}]\right) f_{j-t} \circ \psi.$$

En choisissant les Y_j de telle manière que $\forall\, j \geqslant 0$, on ait :

$$\sum_{r=0}^{\min(t,j)} H_\psi^r[Y_{j-r}] = 0 \tag{34}$$

Y sera alors solution formelle de $hY = 0$.

Avant d'entreprendre la résolution formelle proprement dite, on présente ici certains résultats utiles par la suite :

on pose $\begin{cases} r_1^B = a_1^B a_1^1 - a_{1C}^{1B} h_D^C a_1^D \\ s_1^B = r_1^B a_1^1 - a_{1C}^{1B} h_D^C r_1^D \end{cases}$; pour $B \in \{1,2,\ldots,m\}$.

alors $h_B^A s_1^B = h_B^A\{(a_1^B a_1^1 - a_{1C}^{1B} h_D^C a_1^D) a_1^1 - a_{1C}^{1B} h_D^C (a_1^D a_1^1 - a_{1E}^{1D} h_F^E a_1^F)\}$.

soit $h_B^A s_1^B = h_B^A a_1^B (a_1^1)^2 - 2 h_B^A a_{1C}^{1B} h_D^C a_1^D a_1^1 + h_B^A a_{1C}^{1B} h_D^C a_{1E}^{1D} h_F^E a_1^F$ (35)

et l'opérateur k_2 utilisé en page 14, s'écrit de manière plus simple

$$k_2 = a_A^1 h_B^A s_1^B .$$

On a alors le résultat important suivant :

Proposition 3.-

(k est B.D.3) $\iff$ $((h^A_B s^B_1)_A$ est B.D.3).

Preuve :

1°) ($\Longleftarrow$) : évident puisque $k = a^1_A h^A_B s^B_1$

donc $K = A^1_A H^A_B S^B_1 = A^1_A H^A_B A^B_1 (A^1_1)^2 = (A^1_1)^3 H''.(H')^3$

donc la multiplicité 3 se conserve.

2°) ($\Longrightarrow$) : on utilise les décompositions :

$$h^A_B a^B_1 = h''(h')^3 I^A_1 + \ell^A_1 \quad \text{et} \quad a^1_A h^A_B = h''(h')^3 I^1_B + m^1_B \tag{36}$$

pour montrer d'abord que :

$$A^1_A L^A_1 \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2].$$

<u>En effet</u> :

$$k = a^1_1 h''(h')^3 (a^1_1)^2 + a^1_A \ell^A_1 (a^1_1)^2 - 2m^1_B a^{1B}_{1C} \ell^C_1 a^1_1 + m^1_B a^{1B}_{1C} h^C_D a^{1D}_{1E} \ell^E_1$$

d'où :

$$k \underset{\tau-1}{\sim} a^1_1 h''(h')^3 (a^1_1)^2 + a^1_A \ell^A (a^1_1)^2 \quad ; \quad \tau = \text{ord}(k)$$

mais k est B.D.3 nous permet d'écrire aussi :

$$k \underset{\tau-1}{\sim} \lambda_o (h')^3 + \lambda_1 (h')^2 \underset{\tau-1}{\sim} a^1_1 h''(h')^3 (a^1_1)^2 + a^1_A \ell^A_1 (a^1_1)^2$$

ainsi :

$$a^1_A \ell^A_1 (a^1_1)^2 \underset{\tau-1}{\sim} \lambda_o (h')^3 + \lambda_1 (h')^2 - a^1_1 h''(h')^3 (a^1_1)^2 .$$

En prenant alors les parties homogènes d'ordre $\tau-1$ des deux membres de cette équivalence :

$$A_A^1 L_1^A (A_1^1)^2 \equiv 0 \quad ; \quad [(H')^2] \tag{37}$$

A_1^1 étant premier avec H', on a le résultat.

On pose alors : $A_A^1 L_1^A = \theta(H')^2$.

Soit $T = \mathrm{ord}[(h_B^A s_1^B)_A]$.

Alors tous les opérateurs $h_B^A s_1^B$, pour $A \in \{1,2,\ldots,m\}$, sont considérés d'ordre T.

On a : si $A \neq 1$: $H_B^A A_{1C}^{1B} L_1^C = H_{\hat{B}}^{\hat{A}} A_{1\hat{C}}^{1\hat{B}} L_1^C = L_1^{\hat{A}} A_1^1$

si $A = 1$: $H_{\hat{B}}^1 A_{1\hat{C}}^{1\hat{B}} L_1^{\hat{C}} = - A_{\hat{C}}^1 L_1^{\hat{C}} = - A_A^1 L_1^A + A_1^1 L_1^1$.

Soit finalement : $\forall A \in \{1,2,\ldots,m\}$:

$$H_B^A A_{1C}^{1B} L_1^C = - \theta(H')^2 I_1^A + L_1^A . A_1^1 \tag{38}$$

donc : $\forall A \in \{1,2,\ldots,m\}$, il existe des opérateurs p^A et α tels que :

$$h_B^A a_{1C}^{1B} \ell_1^C = (\alpha(h')^2 I_1^A + \ell_1^A a_1^1) + p^A$$
$$\text{avec} \quad \mathrm{ord}(p^A) \leqslant \mathrm{ord}(h_B^A a_{1C}^{1B} \ell_1^C) - 1.$$

Nouvelle expression de $h_B^A s_1^B$:

On a : $h_D^C a_{1E}^{1D} \ell_1^E = (\alpha(h')^2 I_1^C + \ell_1^C . a_1^1) + p^C$; $c \in \{1,2,\ldots,m\}$

d'où

$$\begin{aligned} h_B^A a_{1C}^{1B} h_D^C a_{1E}^{1D} \ell_1^E &= h_B^A a_{1C}^{1B} \{(\alpha(h')^2 I_1^C + \ell_1^C a_1^1) + p^C\} \\ &= h_B^A a_{1C}^{1B} \ell_1^C a_1^1 + h_B^A a_{1C}^{1B} p^C \quad ; \quad (a_{1C}^{1B} I_1^C \equiv 0) \end{aligned}$$

et $h_B^A s_1^B = h''(h')^3 (a_1^1)^2 I_1^A + \ell_1^A (a_1^1)^2 - h_B^A a_{1C}^{1B} \ell_1^C a_1^1 + h_B^A a_{1C}^{1B} p^C$

ceci d'après (35) et (36).

de la même manière :

$$h^A_B a^{1B}_{1C} \ell^C_1 a^1_1 = \left[(\alpha(h')^2 I^A_1 + \ell^A_1 a^1_1) + p^A\right].a^1_1$$
$$= \left[\alpha(h')^2 a^1_1 . I^A_1 + \ell^A_1 (a^1_1)^2\right] + p^A . a^1_1$$

d'où $\forall A \in \{1,2,\dots,m\}$:

$$h^A_B s^B_1 = \left[h''(h')^3(a^1_1)^2 - \alpha(h')^2 a^1_1\right] I^A_1 + (h^A_B a^{1B}_{1C} p^C - p^A a^1_1) \qquad (39)$$

avec $\quad \mathrm{ord}\{(h^A_B a^{1B}_{1C} p^C - p^A a^1_1)\} \leqslant T - 2$

mais k est B.D.3 et $k = a^1_A h^A_B s^B_1$, alors $k \underset{\tau-1}{\sim} a^1_A (h^A_B a^{1B}_{1C} p^C - p^A a^1_1)$

d'où

$$A^1_A (H^A_B A^{1B}_{1C} P^C - P^A A^1_1) \equiv 0 \quad ; \quad [H']$$
$$\Longleftrightarrow \quad A^1_A P^A . A^1_1 \equiv 0 \quad ; \quad [H'] \quad \Longleftrightarrow \quad A^1_A P^A \equiv 0 \quad [H']$$

on pose $A^1_A P^A = B.H'$.

Alors : $\begin{cases} \text{si } \; A \neq 1 \; : H^{\hat A}_B A^{1\hat B}_{1\hat C} P^{\hat C} = P^{\hat A} . A^1_1 \\ \text{si } \; A = 1 \; : H^1_B A^{1\hat B}_{1\hat C} P^{\hat C} = -A^1_{\hat C} P^{\hat C} = -A^1_A P^A + A^1_1 P^1 = -BH' + A^1_1 P^1 . \end{cases}$

Soit encore : $\forall A \in \{1,2,\dots,m\}$:

$$H^A_B A^{1B}_{1C} P^C = -BH' I^A_1 + P^A . A^1_1$$

il existe donc des opérateurs différentiels linéaires β de symbole principal B, et q^A tels que :

$$h^A_B a^{1B}_{1C} p^C - p^A a^1_1 = -\beta \, h' I^A_1 + q^A \quad ;$$

et en reportant cette expression dans celle $h^A_B s^B_1$: (39) on a :

$\forall \; A \in \{1,2,\dots,m\}$:

$$\begin{cases} h^A_B s^B_1 = \left[h''(h')^3 (a^1_1)^2 - \alpha(h')^2 a^1_1 - \beta(h')\right] I^A_1 + q^A \\ \text{et } \; \mathrm{ord}(q^A) \leqslant T-3. \end{cases} \qquad (40)$$

On peut écrire alors : $\forall A \in \{1,2,\ldots,m\}$.

$$h^A_B s^B_1 = \gamma . I^A_1 + q^A \quad ; \quad \mathrm{ord}(q^A) \leqslant T - 3 \tag{41}$$

où γ est l'opérateur entre crochet dans [40], qui est B.D.3, d'où le résultat.

Conséquence : $\forall A \in \{1,2,\ldots,m\}$;

$(h^A_B s^B_1)^r_{\varphi} \equiv 0 \quad ; \quad r = 0,1,2.$

Détermination de $Y_o = (Y^B_o)_{1 \leqslant B \leqslant m}$: on note $\tilde{g}(x) = g(x, \mathrm{grad}\, \varphi(x))$ pour toute fonction g définie sur $T^*(X)$.

Remarquons d'abord que le système $\tilde{H}^A_B X^B = 0$ possède comme solution paramétrée (puisque $\mathrm{rg}(\tilde{H}^A_B) = m-1$)

$$X^B = S^{B,0}_{1,\varphi} . \lambda.$$

En effet, $X^B = \dfrac{\tilde{A}^B_1}{\tilde{A}^1_1} X^1 = \tilde{A}^B_1 . (\tilde{A}^1_1)^2 . \dfrac{X^1}{(A^1_1)^3} = S^{B,0}_{1,\varphi} . \lambda$

avec $\lambda = \dfrac{X^1}{(\tilde{A}^1_1)^3}$ comme nouveau paramètre.

On reprend la résolution formelle : en faisant $\underline{j = 0}$ dans (34) on a :

$$H^o_{\varphi} Y_o = 0$$

c'est-à-dire : $\tilde{H} Y_o = 0$ d'où $\boxed{Y_o = S^o_{\varphi} . \lambda_o}$ (42)

où λ_o est donc le paramètre à déterminer :

pour $j = 1$:

$$H_\psi^o Y_1 + H_\psi^1 Y_o = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{H} Y_1 + H_\psi^1 . S_\psi^o \lambda_o = 0$$

or $(hs)_\psi^1 = 0$; $(hs = (h_B^A s_1^B)_A)$ d'où $H_\psi^1 S_\psi^o = -\tilde{H} S_\psi^1$

le système devient :

$$\tilde{H}\left[Y_1 - S_\psi^1 . \lambda_o\right] = 0$$

d'où :

$$\boxed{Y_1 = S_\psi^o . \lambda_1 + S_\psi^1 . \lambda_o} \qquad (43) \quad ;$$

λ_1 nouveau paramètre à déterminer.

pour $j = 2$:

$$H_\psi^o Y_2 + H_\psi^1 Y_1 + H_\psi^2 Y_o = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{H} Y_2 + H_\psi^1 (S_\psi^o . \lambda_1 + S_\psi^1 \lambda_o) + H_\psi^2 . S_\psi^o \lambda_o = 0$$

or $(hs)_\psi^1 = (hs)_\psi^2 = 0$, le système devient :

$$\tilde{H}\left[Y_2 - S_\psi^1 \lambda_1 - S_\psi^2 \lambda_o\right] = 0$$

d'où

$$\boxed{Y_2 = S_\psi^o \lambda_2 + S_\psi^1 \lambda_1 + S_\psi^2 \lambda_o} \qquad (44)$$

avec λ_2 nouveau paramètre.

pour $j = 3$:

$$H_\psi^o Y_3 + H_\psi^1 Y_2 + H_\psi^2 Y_1 + H_\psi^3 Y_o = 0.$$

En utilisant (42), (43) et (44), ce système devient :

$$\tilde{H}Y_3 + H^1_\psi(S^o_\psi\lambda_2 + S^1_\psi\lambda_1 + S^2_\psi\lambda_o)$$
$$+ \quad H^2_\psi(S^o_\psi\lambda_1 + S^1_\psi\lambda_o)$$
$$+ \quad H^3_\psi S^o_\psi\lambda_o = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \tilde{H}[Y_3 - S^1_\psi\lambda_2 - S^2_\psi\lambda_1 - S^3_\psi\lambda_o] + (hs)^3_\psi[\lambda_o] = 0$$

la condition de compatibilité de ce système s'écrit :

$$\tilde{A}^1_A[(hs)^A_1]^3_\psi[\lambda_o] = 0$$

ou encore, compte tenu de $(hs)^o_\psi = (hs)^1_\psi = (hs)^2_\psi = 0$

$$K^3_\psi[\lambda_o] = 0 \qquad (45)$$

. K^3_ψ n'est rien d'autre qu'un opérateur, de degré 3, de dérivation le long des courbes bicaractéristiques par rapport à H', **des hypersurfaces** caractéristiques d'équation $\psi(x)$ = constante.

Cette précision est néanmoins inutile, puisqu'on va utiliser Cauchy-Kowalewski ; elle est cependant fondamentale en C^∞ [2], le vecteur $\vec{p}(a)$ étant non nul d'après $(D_o)_3$; on supposera $p^o(a) \neq 0$, et on choisit λ_o solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} K^3_\psi[\lambda_o] = 0 \\ \partial^\ell_o\lambda_o(0,x') = \delta^\ell_o \quad ; \quad \ell = 0,1,2 \end{cases} \qquad (46)$$

où δ^ℓ_p représente le symbole de Kronecker : $\delta^\ell_p = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ce qui détermine λ_o donc Y_o d'après (42).

Remarque générale sur la résolution formelle :

On obtient une résolution formelle analogue si on suppose les hypothèses suivantes :

(I) : $\exists\ p = (p^B)_{1\leqslant B\leqslant m}$, opérateur différentiel linéaire matriciel $m \times 1$ de la forme : $p = a_1 p' + q$; $a_1 = (a_1^B)_B$ avec : $\mathrm{ord}(q) < \mathrm{ord}(p)$ et $\tilde{P}'(a) \neq 0$.

(II) : $(h \circ p)$ est BD3.

En effet, le système $\tilde{H}Y = 0$ admet pour solution $Y = P^o_\psi . \lambda$; λ est un paramètre à déterminer ; la résolution formelle est exactement la même avec : $k = (ahp)^1_1$.

Exemples :

1°) $p = a_1$, avec l'hypothèse assez forte : $(hoa)_A$ est BD3.

2°) $p = s_1 = (s_1^B)_B$: notre cas, avec l'hypothèse : $k = (ahs)^1_1$ est BD3.

Remarque :

Les relations (42), (43) et (44) nous donnent aussi des formules qui lient les paramètres utilisés par BERZIN-VAILLANT dans [2] et les nôtres.

$$Y^1_o = S^{1,0}_{1,\psi}\lambda_o \quad ; \quad S^{1,0}_{1,\psi} = \tilde{S}^1_1 = [\tilde{A}^1_1]^3 .$$

$$Y^1_1 = S^{1,0}_{1,\psi}\lambda_1 + S^{1,1}_{1,\psi}\lambda_o$$

$$Y^1_2 = S^{1,0}_{1,\psi}\lambda_2 + S^{1,1}_{1,\psi}\lambda_1 + S^{1,2}_{1,\psi}\lambda_o .$$

§ 3 - *Détermination des* Y_j , $j \in \mathbb{N}$.

Par commodité d'écriture, on conviendra de poser $\lambda_j \equiv 0$ si $j < 0$.

On pose ensuite pour $B \in \{1,2,\ldots,m\}$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_i^B = 0 \\ W_i^B = \mathcal{S}^{B,2}_{1,\psi}[\lambda_{i-2}] + X_i^B \\ V_i^B = \mathcal{S}^{B,1}_{1,\psi}[\lambda_{i-1}] + W_i^B \quad ; \quad i = 0,1,2. \end{array}\right. \tag{47}$$

A l'aide de ces notations, on aura d'après (42), (43) et (44) :

$$Y_i^B = \mathcal{S}^{B,0}_{1,\psi}[\lambda_i] + V_i^B \quad ; \quad i = 0,1,2. \tag{48}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit :

(H.R)p :

1°) : $\forall\, j \leqslant p$, λ_j est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} K^3_\psi[\lambda_j] = \Omega_{j+3} \\ \partial_o^\ell(\lambda_j)(0,x') = \delta_o^\ell . \delta_o^j \end{array}\right. \tag{49}$$

2°) Toutes les conditions de compatibilité sont satisfaites jusqu'à l'ordre $p+3$, et plus précisément :

$$\forall\, j \leqslant p+3 : \quad Y_j = \mathcal{S}^o_\psi \lambda_j + \mathcal{S}^1_\psi \lambda_{j-1} + \mathcal{S}^2_\psi \lambda_{j-2} + X_j \tag{50}$$

où λ_{p+1} , λ_{p+2} et λ_{p+3} sont de nouveaux paramètres à déterminer ; $X_j = (X_j^B)_{1 \leqslant B \leqslant m}$.

<u>avec</u> : $\Omega_{j+3} = \tilde{A}^1_A \{ H^{A,1}_{B,\psi} X^B_{j+2} + H^{A,2}_{B,\psi} W^B_{j+1} + H^{A,3}_{B,\psi} V^B_j + R^A_{j+3} \}$ (51)

où X^B_{j+2} , W^B_{j+1} , V^B_j et R^A_{j+3} sont définis par induction de la manière suivante :

$$R_K^A = \sum_{r=4}^{\mathrm{Min}(t,K)} H_{B,\psi}^{A,r} Y_{K-r}^B \quad \text{et} \quad R_3^A = 0$$

$$X_K^B = S_{1,\psi}^{B,3}[\lambda_{K-3}] - \frac{\tilde{A}_{1C}^{1B}}{\tilde{A}_1^1} \{ (h_D^C s_1^D)_\psi^3 [\lambda_{K-3}] + H_{D,\psi}^{C,1} X_{K-1}^D$$

$$+ H_{D,\psi}^{C,2} W_{K-2}^D + H_{D,\psi}^{C,3} V_{K-3}^D + R_K^C \}.$$

$$W_K^B = S_{1,\psi}^{B,2}[\lambda_{K-2}] + X_K^B$$

$$V_K^B = S_{1,\psi}^{B,1}[\lambda_{K-1}] + W_K^B \qquad (52)$$

avec l'initialisation (47).

Remarque :

En pratique, pour définir (52) on définit d'abord X_3 puis W_3 et V_3 ensuite X_4 puis W_4 et V_4, et ainsi de suite jusqu'à X_{p+3}, W_{p+3} et V_{p+3}.

Remarquons aussi que de (47) et (52), il vient :

$$X_3^B = S_{1,\psi}^{B,3}[\lambda_o] - \frac{\tilde{A}^{1B}}{\tilde{A}_1^1} (h_D^C s_1^D)_\psi^3 [\lambda_o]. \qquad (53)$$

On reprend la notation matricielle :

Supposons $(H.R)_p$, et montrons $(H.R)_{p+1}$:

On écrit le système relatif à Y_{p+4} :

$$\{\tilde{H}[Y_{p+4}] + H_\psi^1[Y_{p+3}] + H_\psi^2[Y_{p+2}] + H_\psi^3[Y_{p+1}]\}$$

$$+ \sum_{r=4}^{\mathrm{Min}(t,p+4)} H_\psi^r[Y_{p+4-r}] = 0 \qquad (54)$$

or d'après $(H.R)_p$: ((50) et (52))

$$\left| \begin{array}{l} Y_{p+1} = S^o_\psi\lambda_{p+1} + V_{p+1} \\ Y_{p+2} = S^o_\psi\lambda_{p+2} + S^1_\psi\lambda_{p+1} + W_{p+2} \\ Y_{p+3} = S^o_\psi\lambda_{p+3} + S^1_\psi\lambda_{p+2} + S^2_\psi\lambda_{p+1} + X_{p+3} \end{array} \right.$$

le système (54) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{H}Y_{p+4} &+ H^1_\psi\{S^o_\psi\lambda_{p+3} + S^1_\psi\lambda_{p+2} + S^2_\psi\lambda_{p+1} + X_{p+3}\} \\ &+ H^2_\psi\{S^o_\psi\lambda_{p+2} + S^1_\psi\lambda_{p+1} + W_{p+2}\} \\ &+ H^3_\psi\{S^o_\psi\lambda_{p+1} + V_{p+1}\} + R_{p+4} = 0. \end{aligned}$$

$$\iff \quad \tilde{H}\{Y_{p+4} - S^1_\psi\lambda_{p+3} - S^2_\psi\lambda_{p+2} - S^3_\psi\lambda_{p+1}\}$$

$$+ (hs)^3_\psi[\lambda_{p+1}] + H^1_\psi X_{p+3} + H^2_\psi W_{p+2} + H^3_\psi V_{p+1} + R_{p+4} = 0 \tag{55}$$

la condition de compatibilité de ce sytème s'écrit alors :

$$A^1_A\{(hs)^3_\psi[\lambda_{p+1}] + H^1_\psi X_{p+3} + H^2_\psi W_{p+2} + H^3_\psi V_{p+1} + R_{p+4}\}^A_1 = 0 \ .$$

Soit, compte tenu de la définition de Ω_{p+4} :

$$K^3_\psi[\lambda_{p+1}] = \Omega_{p+4} \ .$$

On impose alors à λ_{p+1} d'être solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^3[\lambda_{p+1}] = \Omega_{p+4} \\ \partial^\ell_o[\lambda_{p+1}(0,x')] = 0. \end{array} \right. \tag{56}$$

On peut résoudre alors le système (55) :

$$Y_{p+4} = S^o_\psi\lambda_{p+4} + S^1_\psi\lambda_{p+3} + S^2_\psi\lambda_{p+2} + S^3_\psi\lambda_{p+1}$$

$$- \frac{\tilde{A}^{1B}_{1C}}{\tilde{A}^1_1}\{(hs)^3_\psi[\lambda_{p+1}] + H^1_\psi X_{p+3} + H^2_\psi W_{p+2} + H^3_\psi V_{p+1} + R_{p+4}\}^C_1$$

qui s'écrit encore, compte tenu de $X_{p+4} = (X^B_{p+4})_B$:

$$Y_{p+4} = S^o_\psi \lambda_{p+4} + S^1_\psi \lambda_{p+3} + S^2_\psi \lambda_{p+1} + X_{p+4} \qquad (57) \quad .$$

Remarquons enfin que $(H.R)_o$ est vérifiée d'après (53).

On arrive ainsi à déterminer de proche en proche, tous les coefficients Y_j vérifiant chacun (51) et (52).

CHAPITRE III

MAJORATION ET CONVERGENCE DE L'ONDE ASYMPTOTIQUE.

----

§ 1 - *Rappels de résultats sur les majorantes.*

Notations : Etant données deux séries formelles u, U, à $(n+1)$ indéterminées $X^o, X^1, \ldots, X^n$:

$$u(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha X^\alpha$$

$$U(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} U_\alpha X^\alpha$$

avec $X = (X^o, X^1, \ldots, X^n)$; $u_\alpha \in E$, algèbre de Banach, et $U_\alpha \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Définition.-

$(u(X) << U(X)) \iff (\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}\ ||u_\alpha||_E \leqslant U_\alpha)$.

Soient r, R', R des nombres réels tels que : $0 < r < R' < R$. On utilise les fonctions majorantes d'une variable $\theta(t)$, introduite par Y. HAMADA [8] : c'est-à-dire vérifiant :

$$\begin{cases} 1°)\quad \theta(t) >> 0 & a) \\ 2°)\quad (R'-t)\theta(t) >> 0 & b) \end{cases} \qquad (58)$$

Et par conséquent, pour $\theta^{(j)}(t) = \dfrac{d^j}{dt^j}\,\theta(t)$:

$\forall\, \ell \in \mathbb{N} : \theta^{(j)}(t) << (R')^{\ell}\theta^{(j+\ell)}(t)$.

Proposition 1.- [15]

Soit $C(x,\partial)$ un opérateur différentiel d'ordre ℓ en x, et ℓ_1 en x^o, à coefficients holomorphes au voisinage du polydisque $\overline{PD(0,R)}$. Alors, il existe une constante B ne dépendant que de l'opérateur telle que

$$(u \ll U\theta^{(j)} \circ t) \Longrightarrow (C(u) \ll B\rho^{\ell_1} U\theta^{(j+\ell)} \circ t$$

avec $t(x) = \rho x^o + x^1 + \dots + x^n$; $\rho > 1$ qu'on précisera.

Preuve : [15], [4]

Proposition 2.- [11]

On considère le problème de Cauchy holomorphe (I) sur PD(0,R) :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \partial_o^{\ell} u = C(u) + v \\ \partial_o^r u(0,x') = w_r(x') \quad ; \quad 0 \leqslant r \leqslant \ell-1. \end{cases}$$

$$\text{Si} \quad \begin{cases} v \ll V\theta^{(j+\ell)} \circ t \\ w_r \ll W_r\theta^{(j+r)} \circ t \quad ; \quad 0 \leqslant r \leqslant \ell-1. \end{cases}$$

Alors la solution u de (1) est telle que :

$$u \ll U\theta^{(j)} \circ t$$

$$\text{avec} \quad U = \text{Max}\left(\frac{V/\rho^{\ell}}{1-B/\rho}, W_o, \frac{W_1}{\rho}, \dots, \frac{W_{\ell-1}}{\rho^{\ell-1}}\right).$$

Preuve : [11], [4]

§ 2 - *Majoration des* Y_j .-

$$\text{On a} \quad \begin{cases} \partial_o^{(3)} \lambda_o = C(\lambda_o) \\ \partial_o^{(\ell)} \lambda_o(0,x') = \delta_o^{\ell} \quad ; \quad \ell = 0,1,2. \end{cases}$$

C est un opérateur différentiel de degré 3 et, de degré strictement inférieur à 3 par rapport à x_o.

On applique la proposition 2 avec $\ell = 3$;
$W_o = \frac{1}{\theta_o}$, $W_1 \equiv W_2 \equiv 0$ et $V = 0$ où θ_o est le premier terme de la série θ. On aura :

$$\lambda_o << \frac{1}{\theta_o} \theta^{(o)} \text{ o } t$$

d'où $Y_o = S^o_\psi . \lambda_o << B \frac{1}{\theta_o} \theta^{(o)}$ o t ; $X_1 = M_3(\lambda_o) << B\rho^3 \frac{1}{\theta_o} .\theta^{(3)}$ o t(*)

on pose alors : $C_1 = \frac{B}{\theta_o}$;

on aura : $\begin{cases} \lambda_o << \frac{1}{B} C_1 \theta^{(o)} \text{ o } t \\ Y_o << C_1 \theta^{(o)} \text{ o } t \\ X_3 << \rho^3 C_1 \theta^{(3)} \text{ o } t \end{cases}$

on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \leqslant p$ on ait :

$$\underline{H.R_p|} : \begin{cases} \lambda_j << \frac{1}{B} C_1 C^j \theta^{(j)} \text{ o } t & \text{a)} \\ Y_j << C_1 C^j \theta^{(j)} \text{ o } t & \text{b)} \\ X_{j+3} << \rho^3 C_1 C^j \theta^{(j+3)} \text{ o } t & \text{c)} \end{cases} \qquad (59)$$

On conviendra de prendre la même constante B, pour chaque opérateur, lorsqu'on applique la proposition 2.

(*) : On a noté $M_3^B = S^{B,3}_{1,\psi} - \frac{\tilde{A}^{1B}_{1C}}{\tilde{A}^1_1} \left[(hs)^3_\psi\right]^C_1$ qui est un opérateur d'ordre au plus 3.

On a :

$$\Omega'_{p+4} = \frac{\tilde{A}^1_A}{\tilde{H}''(\tilde{A}^1_1)^3} \{H^1_\psi X_{p+3} + H^2_\psi W_{p+2} + H^3_\psi V_{p+1} + R_{p+4}\}^A_1$$

et $W_{p+2} = S^2_\psi(\lambda_p) + X_{p+2}$

donc $W_{p+2} << B\rho^2 \left[\frac{1}{B} C_1 C^p \theta^{(p+2)} \circ t\right] + \rho^3 C_1 C^{p-1} \theta^{(p+2)} \circ t$

soit $W_{p+2} << \rho\left[(\frac{\rho}{C}) + (\frac{\rho}{C})^2\right] C_1 C^{p+1} \theta^{(p+2)} \circ t.$

De même :

$$V_{p+1} = S^1_\psi(\lambda_p) + W_p$$

donc $V_{p+1} << B\rho\left[\frac{1}{B} C_1 C^p \theta^{(p+1)} \circ t\right] + \rho\left[(\frac{\rho}{C}) + (\frac{\rho}{C})^2\right] C_1 C^p \theta^{(p+1)} \circ t$

soit $V_{p+1} << \left[\frac{\rho}{C} + (\frac{\rho}{C})^2 + (\frac{\rho}{C})^3\right] C^{p+1} \theta^{(p+1)} \circ t$.

D'autre part :

$$R_{p+4} = \sum_{r=4}^{\mathrm{Min}(t,p+4)} H^r_\psi\left[Y_{p+4-r}\right]$$

donc $R_{p+4} << \sum_{r=4}^{\mathrm{Min}(t,p+4)} Bp^r C_1 C^{p+4-r} \theta^{(p+4)} \circ t =$

$$= B(\frac{\rho}{C})^4 . C^3 (\sum_{r=0}^{\mathrm{Min}(t,p+4)-4} (\frac{\rho}{C})^r) C^{p+1} . C_1 \theta^{(p+4)} \circ t$$

soit encore :

$$R_{p+4} << B\rho^3\left[(\frac{\rho}{C}) + (\frac{\rho}{C}) + \dots\right] . C_1 C^{p+1} \theta^{(p+4)} \circ t$$

il vient :

$$\begin{aligned}\Omega'_{p+4} << {} & mB\rho . \rho^3 C_1 C^p \theta^{(p+4)} \circ t + mB\rho^2 . \rho\left[(\frac{\rho}{C}) + (\frac{\rho}{C})^2\right] C_1 C^{p+1} \theta^{(p+4)} \circ t \\ & + mB\rho^3 . \left[(\frac{\rho}{C}) + (\frac{\rho}{C})^2 + (\frac{\rho}{C})^3\right] . C_1 C^{p+1} \theta^{(p+4)} \circ t \\ & + mB\rho^3 . \left[(\frac{\rho}{C}) + (\frac{\rho}{C})^2 + \dots\right] C_1 C^{p+1} \ {}^{(p+4)} \circ t\end{aligned}$$

d'où, en imposant $(\frac{\rho}{C}) < 1$:

$$\Omega'_{p+4} << 4mB\rho^3(\frac{\rho/C}{1-\rho/C})C_1 C^{p+1}\theta^{(p+4)} \text{ o t} \qquad (60)$$

on applique la proposition 2 avec : $W_o = W_1 = W_2 = 0$; $(\ell = 3)$

et $V = 4mB\rho^3(\frac{\rho/C}{1-\rho/C})C_1 C^{p+1}$; on aura :

1°) $$\lambda_{p+1} << \frac{4mB}{1-B/\rho} \cdot (\frac{\rho/C}{1-\rho/C})C_1 C^{p+1}\ (p+1) \text{ o t} \qquad (61)$$

Si on impose : (C_o) : $\rho \geqslant 5B$; on aura : (62)

$$\frac{4mB}{1-B/\rho} \leqslant m\rho \quad \text{et} \quad \lambda_{p+1} << m\rho. \frac{\rho/C}{1-\rho/C} \cdot C_1 C^{p+1}\theta^{(p+1)} \text{ o t.} \qquad (63)$$

Pour avoir (48) a) il suffit que :

$$\frac{\rho/C}{1-\rho/C} \leqslant \frac{1}{mB\rho}$$

ce qui équivaut à la condition :

$$(C_1) : \quad C \geqslant \rho(1 + mB\rho). \qquad (64)$$

2°) En utilisant la majoration (60) de Ω'_{p+4} , la définition de X_{p+4} et la relation (63) :

$$X_{p+4} << B\rho^3.m\rho(\frac{\rho/C}{1-\rho/C})C_1 C^{p+1}\theta^{(p+4)} \text{ o t}$$

$$+ 4mB\rho^3.(\frac{\rho/C}{1-\rho/C})C_1 C^{p+1}\theta^{(p+4)} \text{ o t.}$$

Soit $$X_{p+4} << \rho^3.\left[mB(\rho+4).(\frac{\rho/C}{1-\rho/C})\right].C_1 C^{p+1}\theta^{(p+4)} \text{ o t.}$$

Pour (59) c, il suffit d'avoir :

$$\frac{\rho/C}{1-\rho/C} \leqslant \frac{1}{mB(p+4)}$$

soit

$$(C_2) \ : \ C \geqslant \rho\left[1 + mB(\rho+4)\right] \tag{65}$$

3°) On a $Y_{p+1} = S^{o}_{\psi}\lambda_{p+1} + S^{1}_{\psi}\lambda_{p} + S^{2}_{\psi}\lambda_{p-1} + X_{p+1}$

d'où en utilisant (52) et $\underline{H.R_p}|$; on aura :

$$Y_{p+1} \ll B.m\rho\left(\frac{\rho/C}{1-\rho/C}\right)C_1 C^{p+1}\theta^{(p+1)} \circ t$$

$$+ B\rho. \frac{1}{B} C_1 C^{p}\theta^{(p+1)} \circ t + B\rho^2 . \frac{1}{B} C_1 C^{p-1}\theta^{(p+1)} \circ t + \rho^3 C_1 C^{p-2}\theta^{(p+1)} \circ t$$

ou encore :

$$Y_{p+1} \ll \left[(Bm\rho + 1). \frac{\rho/C}{1-\rho/C}\right] C_1 C^{p+1}\theta^{(p+1)} \circ t$$

on imposera, de la même manière :

$$\frac{\rho/C}{1-\rho/C} \leqslant \frac{1}{1+Bm\rho}$$

soit encore la condition (C_1) : $C > \rho(1 + mB\rho)$.

Ainsi, pour avoir $\underline{H.R_{p+1}}|$, il suffit d'avoir (C_2) car $(C_2) \implies (C_1)$, et $\left((\frac{\rho}{C}) < 1\right)$; on prend alors : $\rho = \rho_o$; tel que $\rho_o > \mathrm{Max}(5B,1)$, et pour ce choix on choisit C tel que : (C_2) : $C \geqslant \rho\left[1 + mB(\rho+4)\right]$

C.Q.F.D.

Si on choisit :

$$\theta(t) = \frac{1}{r-t}$$

on aura donc

$$\theta^{(k)}(t) = \frac{k!}{(r-t)^{k+1}} \quad \text{pour} \quad k \geq 0$$

la série $\theta(t)$ vérifie (58), en effet

$$(R'-t)\theta(t) = \frac{(R'-r)}{r-t} + 1 >> 0,$$

car $R' > r$ et $\frac{1}{r-t} >> 0$.

On a le résultat suivant si :

$$u << U$$

$$\begin{cases} |x_o| \leq X_o \\ \vdots \\ |x_n| \leq X_n \end{cases}, \quad \text{qu'on note abusivement} \quad |x| \leq X.$$

Alors :

$$|u(x)| \leq U(X).$$

En effet :

$$|u(x)| = |\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha x^\alpha| \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} |u_\alpha|.|x^\alpha|$$

$$\leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} U_\alpha X^\alpha = U(X)$$

on a : $Y_j^B(x) << C_1 C^j (\theta^{(j)} \circ t)(x)$

d'où on en déduit ; pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$; $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$|D^{\alpha}Y_j^B(x)| \leq C_1\rho^{\alpha}_o.C^j(\theta^{(j+|\alpha|)}(t(|x|)).$$

Soit V_o , un voisinage de $a = 0$, tel que :

$$t(|x|) \leq \frac{r}{2}.$$

Si $x \in V_o$, on a :

$$|D^{\alpha}Y_j(x)| \leq C_1\rho^{\alpha}_o C^j\theta^{(j+|\alpha|)}(\tfrac{r}{2}) \quad , \quad \text{car sur }]-r,r[,\theta^{(j+|\alpha|)}$$

est croissante ; soit encore :

$$|D^{\alpha}Y_j\,;\,(x)| \leq C_1\rho^{\alpha}_o C^j \frac{(j+|\alpha|)!}{(r/2)^{j+|\alpha|+1}} \leq \frac{2C_1}{r} . (\frac{2C}{r})^{|\alpha|+j}.(j+|\alpha|)!$$

on note :

$$C_1' = \frac{2C_1}{r} \quad \text{et} \quad C' = \frac{2C}{r} .$$

On aura, pour tout x dans V_o ; pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$.

$$|D^{\alpha}Y_j(x)| \leq C_1'.(C')^{|\alpha|+j}(j+|\alpha|)! \tag{66}$$

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 1.- Soit X une variété analytique réelle de dimension $(n+1)$, S, une hypersurface analytique de X régulière en a, d'équation locale $\varphi(x) = 0$ du voisinage de a ; h un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre t sur X.

Si h vérifie (H.2) et $(D_o)_3$, il existe une suite $(Y_j)_j$ de fonctions analytiques sur un même voisinage de a, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$Y = \sum_{j=0}^{+\infty} Y_j \times f_j \circ \psi \qquad \text{soit une onde}$$

asymptotique pour h et telle que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \quad : \quad Y_j << C_1 C^{(j)}(t). \tag{67}$$

§ 3 - *Convergence*.

Enfin, en utilisant essentiellement la majoration (66) des Y_j on assure ([5], [4] , [1]) l'existence d'une solution nulle de h pour S en a, dans l'ensemble $[\mathcal{C}^\infty(\Omega_o,\{M_p\})]$ des fonctions ultradifférentiables de classe $\{M_p\}$, et dans l'ensemble $\mathcal{D}'(\Omega_o\,,(M_p))$, ceci avec un choix convenable de la suite $(f_j)_j$ pour chaque cas.

1er cas : pour $\mathcal{C}^\infty(\Omega_o,\{M_p\})$

on prend $f_o(y) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+i\eta)^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + i \frac{M_p}{M_{p-1}} \eta\right)^{-1} . e^{iy\eta} d\eta$

et pour $j \geqslant 1$, f_j sera la primitive d'ordre j, s'annulant $(j-1)$ fois en 0.

pour $j \leqslant 0$, f_j sera la dérivée d'ordre $(-j)$ de f_o.

On assure la convergence en montrant qu'il existe Ω_o, tel que $\forall\, k$ compact de Ω_o, $\exists\, H > 0$, $\exists\, A > 0$ tel que

$$\forall\, x \in k, \quad \forall\, \alpha \in N^{n+1} \; :$$

$$S_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} |D^\alpha(Y_j \times f_j \circ \psi)(x)| \leqslant AH^{|\alpha|}.M_{|\alpha|}.$$

2ème cas : pour $\mathcal{D}'(\Omega_o,(M_p))$: ensemble des ultra-distributions de classe (M_p).

On choisit $\Phi_o(z) = \dfrac{1}{z}$;

$$\Phi_j(z) = \frac{z^{j-1}}{(j-1)!}\left[\mathrm{Log}\, z - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{j-1}\right)\right] \quad \text{si} \quad j \geqslant 1$$

et $$\Phi_j(z) = (-1)^j \frac{j!}{z^{j+1}} \quad \text{si} \quad j \leqslant -1 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Log}\, z$$

défini sur le domaine de Riemann $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{z \in C^* : \arg z \in \left]-\theta, 2\pi+\theta\right[, \quad \theta > 0\}$$

les Φ_j sont toutes holomorphes sur $\mathcal{D}$.

On pose ensuite :

$$\psi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} P(D)\Phi_j(z)$$

où $P(D)$ est un opérateur ultra-différentiel, de classe $(M_p)_p$.

Les fonctions ψ_j sont aussi holomorphes sur $\mathcal{D}$.

On prolonge ensuite Y_j en une fonction holomorphe sur le domaine :

$$D = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \quad \rho|z^o| + |z^1| + \ldots + |z|^n < r\}.$$

On montre ensuite que :

$$\left|\sum_{j=2}^{+\infty} Y_j(z)\psi_j(z^o)\right| \leqslant k.e^{M^*(L/||y||)}$$

avec $$y = \mathcal{Im}(z) \quad ; \quad M^*(\rho) = \sup_{p \in N}\{\mathrm{Log}(\frac{p!\rho^p}{M_p})\}.$$

On conclut, d'après un théorème de caractérisation que la valeur au bord de cette fonction holomorphe, au sens des hyperfonctions, est dans $\mathcal{D}'(\Omega_o, (M_p))$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. BELABBES - Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique, relativement à hypersurface caractéristique multiple avec une condition de type hyperbolicité forte. Thèse 3ème cycle, Janvier 1982, LILLE.

[2] R. BERZIN, J. VAILLANT - Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples. (J. Math. Pures et Appliquées 58 (1979)) p. 165 à 216.

[3] L. GARDING, T. KOTAKE, J. LERAY - Uniformation et dev. asymptotique de la solution du problème linéaire à données holomorphes - analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées. Problème de Cauchy I bis et VI (Bull. Soc. Math. France 92 (1964), p. 263 à 361).

[4] O. HEBBAR - Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique double avec une condition de décomposition (Thèse 3ème cycle, LILLE, janvier 1982).

[5] H. KOMATSU - Irregularity of characteristic elements and construction of null-solutions. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. I.A., Vol. 23, 1976, p. 297-342.

[6] H. KOMATSU - Ultra-distributions, I-structures theorems and a caracterisation. (J. of the Faculty of Science, the Univ. of Tokyo, Sec. IA, vol. 20, N° 1, pp. 25 - 105, March 73).

[7] H. KOMATSU - An introduction to the theory of hyperfonctions and pseudo-differentiel equations. Lectures Notes in Math., N° 287, Springer 73, p. 3 - 40.

[8] Y. HAMADA - Problème analytique de Cauchy à caractéristiques multiples dont les données de Cauchy ont des singularités polaires, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. 276 (1973), p. 1681-1684.

[9] S. MIZOHATA - Solutions nulles et solutions non analytiques. (J. Maths Kyoto, Univ. I (1962), p. 271 à 302).

[10] J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur diff. à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité (J. Math. Pures et Appliquées 51, 1972, p. 231 à 256).

[11] J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur diff. bien décomposable.
(J. Math. Pures et Appli. 51, 1972, p. 465 à 488).

[12] C. ROUMIEU - Ultra-distributions définies sur R^n et sur certaines classes de variétés différentiables.
(J. Analyse Math., 10 (62-63) p. 153-192).

[13] J. VAILLANT - Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants.
Ann. Institut de Fourier, Grenoble 15.2 (1965), 225-311.

[14] J. VAILLANT - Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques.
J. Math. Pures et Appl. 47, 1968, p. 1 à 40.

[15] C. WAGSCHAL - Problème de Cauchy analytique à données méromorphes.
(J. Math. Pures et Appliquées 51 (1972), p. 375-397).

[16] J.C. DE PARIS - Notes C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1509-1511 (8 juin 1970).

004 947 835

RÉSUMÉ

Ce travail consiste à montrer l'existence de solutions nulles ultra-différentiables, ou ultra-distributions pour une hypersurface caractéristiques dans le cas triple 2 : T.R 2 de J. VAILLANT.

Dans la première partie, on commence par détailler les hypothèses de résolution formelle selon BERZIN-VAILLANT d'après leur article :

"Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples".

On donne ensuite, dans le deuxième chapitre, une forme équivalente à ces hypothèses, à l'aide d'un opérateur scalaire, bien décomposable au sens de DE PARIS, associé à l'opérateur matriciel considéré.

On utilise alors une nouvelle méthode pour la résolution formelle : les coefficients de distorsion s'obtiennent uniquement à l'aide de cet opérateur scalaire, et s'exprime d'une manière assez simple.

Cette méthode a aussi l'avantage d'être généralisable dans le cas où la multiplicité est quelconque, et quand le rang de la matrice caractéristique est m-1 ; m étant l'ordre de la matrice.

On utilise enfin, la méthode des fonctions majorantes pour obtenir certaines majorations ; la convergence en sera assurée par des calculs semblables à ceux de KOMATSU.

MOTS-CLÉS

- *Solution nulle ;*
- *Système hyperbolique/majorante (Notion de)*
- *Majoration (Notion de)/Système hyperbolique.*