N° d'ordre : 553

50376
1982
73

50376
1982
73

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES

par

Paul SABLONNIERE

BASES DE BERNSTEIN
ET
APPROXIMANTS SPLINES

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

Soutenue le 11 juin 1982 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	Président	N. GASTINEL
	Rapporteurs	M. ATTEIA
		P.G. CIARLET
		P.J. LAURENT
		P. POUZET
	Examinateurs	P. BEZIER
		C. BREZINSKI

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique
M.	DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques
M.	FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	GERVAIS Michel	S.E.S.
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HANGAN Théodore	Mathématiques
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M.	KREMBEL Jean	Biologie
M.	LAURENT François	I.E.E.A.
Mle	LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle	LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques

M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LENTACKER Firmin	G.A.S.
M. LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M. LHENAFF René	G.A.S.
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M. LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
Mme NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RICHARD Alain	Biologie
M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	M.P.A.
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M. SCHAMPS Joël	Physique
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. WALLART Francis	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M. TOP Gérard	S.E.S.
M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jacques	I.P..A
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Monsieur Noël GASTINEL, Professeur à l'Université de Grenoble, me fait le grand honneur de présider ce jury. C'est grâce à lui que j'ai eu connaissance des travaux de Monsieur Bézier et il a toujours suivi les miens avec intérêt : je lui en suis très reconnaissant.

Monsieur Pierre BEZIER, ancien directeur à la Régie Renault, est à l'origine de plusieurs des idées développées dans cette thèse. Je le remercie de m'avoir encouragé si chaleureusement à publier mes premiers travaux et d'en avoir suivi l'évolution.

Monsieur Philippe G. CIARLET, Professeur à l'Université de Paris VI, n'a cessé de m'envoyer régulièrement références, conseils et encouragements : je l'en remercie très vivement.

Monsieur Pierre POUZET, Professeur à l'Université de Lille, m'a permis, lors de mes travaux dirigés en troisième cycle, de développer plusieurs des thèmes exposés ci-après. Je le remercie de m'avoir soutenu efficacement durant la rédaction de ce document.

Monsieur Claude BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille,m'a permis de nouer de nombreuses relations lors de voyages communs à l'étranger : je lui en suis particulièrement reconnaissant.

Messieurs Marc ATTEIA, Professeur à l'Université de Toulouse, et Pierre-Jean LAURENT, Professeur à l'Université de Grenoble, ont accepté de juger cette thèse : je les remercie de leurs remarques et de leurs suggestions.

Je remercie tous mes collègues français et étrangers qui ont contribué à la réalisation de ce travail ; en particulier mon ami Bernard GERMAIN-BONNE, Patrick VAN INGELANDT qui a programmé la plupart des exemples, les professeurs Carl de BOOR, de l'Université de Madison, et Edward NEUMAN, de l'Université de Wroclaw.

Je remercie également Mesdames et Mesdemoiselles BERAT, DESCARPENTRIES, DRIESSENS, FIEVET, LENGAIGNE, TAILLY et TATI qui ont participé à la frappe des documents préparatoires à cette thèse, Madame CARON qui en a assuré la frappe définitive et Madame DEBOCK qui en a réalisé le tirage. Je rends hommage à leur patience et à leur compétence.

Je remercie chaleureusement ma femme qui a vaillamment supporté mes variations d'humeur durant ces dernières années et n'a cessé de me faire confiance.

A Véronique,
Anne,
Marguerite,
Catherine,
Louis.

Table des Matières

*

Chapitre 4 : OPERATEURS SPLINES POSITIFS ET SPLINES ORTHOGONALES

*

Chapitre 5 : B-SPLINES ET QUASI-INTERPOLANTS SUR UN RESEAU EQUILATERAL DU PLAN

*

Chapitre 6 : B-SPLINES ET QUASI-INTERPOLANTS SUR UN RESEAU RECTANGLE-ISOCELE DU PLAN

*

Chapitre 7 : SPLINES QUADRATIQUES A DEUX VARIABLES

*

INTRODUCTION

C'est à P. Bézier [2] que l'on doit l'idée de représenter les courbes et surfaces paramétrées polynômiales dans la base de Bernstein et d'utiliser leurs coefficients (qui définissent des points du plan ou de l'espace) comme des paramètres permettant de faire varier la forme de ces courbes et de ces surfaces : d'où les applications, en dessin graphique assisté par ordinateur, à la conception des formes géométriques utilisées dans l'industrie des automobiles, des avions ou des bateaux. Cette idée a été généralisée par R.F. Riesenfeld [20] aux courbes et surfaces paramétrées splines polynômiales représentées dans la base des B-splines (qui constitue une généralisation de la base de Bernstein). Les splines paramétrées n'étant que des courbes polynômiales par morceaux, il était naturel d'associer à chaque morceau une représentation Bézier locale et d'étudier les liens de cette représentation avec celle de Riesenfeld : c'est ce que nous avons fait, B. Germain-Bonne et moi-même dans le rapport [12] dont une partie est publiée dans [S2]. Les algorithmes (SB) et (BS) permettent le passage de la représentation dans la base des B-splines à la représentation locale dans la base de Bernstein et réciproquement (le premier algorithme a été donné également par W. Böhm [3]). Ces algorithmes ont été repris et généralisés récemment dans [4]. Dans le rapport [12], nous avons redémontré géométriquement les propriétés de diminution de la variation des approximants-splines de Schoenberg-Marsden [17] et, après avoir défini la notion plus fine de forme d'une courbe paramétrée plane, nous avons démontré que ces approximants splines diminuaient la forme de ces courbes sous certaines conditions. En dehors de ces conséquences théoriques, la représentation Bézier locale s'avère intéressante en dessin graphique car les points correspondant aux coefficients-Bernstein sont beaucoup plus proches de la courbe ou de la surface que les points correspondant aux coefficients-splines. Ces différents travaux font l'objet du premier chapitre.

Dans les années 1973-75, Lipow, Schoenberg [14], Sharma [21] et Lee [13] ont introduit de nouvelles sortes de B-splines pour la représentation des fonctions splines solutions de problèmes d'**interpolation d'Hermite aux points entiers de la droite réelle**. La construction de ces B-splines de degré $n = 2m - 1$ et de classe C^{n-r} $(1 \leq r \leq m)$ est faite à partir des coefficients d'un polynôme de degré $d = 2(m-r)$ calculé au moyen d'un déterminant d'ordre $d+r$, et d'un système linéaire assez complexe. Grâce à la représentation locale des splines dans la base de Bernstein, je montre au chapitre 2 que ces B-splines se calculent aisément à partir des éléments propres d'une matrice de dimension d. J'obtiens également une représentation simple des fonctions fondamentales du procédé d'interpolation, ce qui permet en particulier le calcul des normes des opérateurs de projection. De nombreux exemples sont donnés dans les rapports [S4] et [S5].

Au chapitre 3, je définis des splines quadratiques généralisées (SQG) qui sont des fonctions de $C^1[a, b]$ constituées de morceaux de fonctions de la forme $S_i(t) = a_{io} + a_{i1}\, x + a_{i2}\, u_i(x)$ où $x = (t-t_i)/(t_{i+1} - t_i)$, lorsque $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\tau = \{a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ étant une subdivision donnée de $[a, b]$. Quand $u_i(x) = x^2$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$, on retrouve les splines quadratiques classiques. Moyennant des hypothèses simples sur les fonctions u_i, je généralise aux SQG des résultats démontrés par Marsden [16] et Schoenberg [22], dans le cas polynômial, sur la norme du projecteur de Lagrange aux points $(t_i + t_{i+1})/2$ et sur une propriété d'optimalité des splines d'interpolation par moyenne locale (histosplines). J'étudie également l'interpolation d'Hermite (f et f') par les SQG, et je donne des majorations d'erreur pour les interpolants de Lagrange et d'Hermite en reprenant les techniques utilisées par Marsden dans [16].

Au chapitre 4, j'étudie une famille **d'opérateurs splines positifs** et leurs **fonctions propres** constituant une **base orthogonale de fonctions splines.** Ces opérateurs généralisent les **opérateurs de Bernstein modifiés,** étudiés par Durrmeyer [6] et Derrienic [5], dont les fonctions propres sont les **polynômes de Legendre.** Après avoir étudié quelques propriétés de convergence de ces opérateurs dans $L^p[0, 1]$, je montre que leurs valeurs propres sont réelles, distinctes dans $]0, 1]$ et que leurs fonctions propres forment une base de splines orthogonales dont les racines ont des propriétés analogues à celles des polynômes orthogonaux classiques. Ces splines orthogonales sont différentes de celles introduites par Schoenberg [22]. Il serait intéressant de pouvoir les calculer à partir de formules de récurrence.

Au chapitres 5 et 6, j'étudie des **approximants-splines** (quasi-interpolants) du type :

$$(*) \qquad Sf(x, y) = \sum_{i,j} \mu_{ij}(f)\, M_{ij}(x, y)$$

où $\mu_{ij}(f)$ fait intervenir les valeurs de f et de certaines de ses dérivées partielles aux noeuds A_{ij} d'une **triangulation régulière** du plan (triangles équilatéraux au chapitre 5, triangles rectangle-isocèles au chapitre 6) et où $M_{ij}(x, y)$ est une **spline à support borné** centré en A_{ij} (B-spline). Le premier problème qui se pose est celui de **l'existence de B-splines** dans l'espace Sp(n,k) des fonctions de classe C^k dont la restriction à chaque triangle est un polynôme de degré total inférieur ou égal à n. J'ai construit en 1978 [S12] quelques B-splines (dans Sp(3,1), Sp(4,2) et Sp(6,3) pour le réseau équilatéral et dans Sp(2,1) et Sp(4,2) pour le réseau rectangle-isocèle) au moyen de la représentation locale des splines dans la base de Bernstein en coordonnées barycentriques. Par une autre technique (convolution discrète), P.O. Frederickson a construit, dès 1970-71, des B-splines et des quasi-interpolants sur le **réseau équilatéral** en donnant également des majorations d'erreur théoriques [9] [10] [11]. Il a démontré en particulier que l'on peut construire des B-splines dans $Sp(n, k^*(n))$ avec $k^*(3p) = 2p - 1$ et $k^*(3p+1) = k^*(3p+2) = 2p$. J'ai complété ce résultat en montrant qu'il est impossible de construire des B-splines dans $Sp(n, k)$ lorsque $k > k^*(n)$. Pour le **réseau rectangle isocèle**, j'ai montré qu'il n'existe pas de B-spline dans $Sp(n, n-1)$ pour tout $n \geq 3$ (en revanche il en existe pour $n = 1$ et 2) et la question de l'existence dans $Sp(n, n-2)$ n'est pas résolue sauf pour $n = 2, 3, 4$. Ces questions sont actuellement l'objet d'études plus approfondies dans un cadre plus général.

Le reste des chapitres 5 et 6 est une étude des constantes explicites de **majorations d'erreur** (en norme uniforme) pour divers **quasi-interpolants du type** (*) : on utilise systématiquement le fait que les polynômes de Bernstein, en coordonnées barycentriques, forment une partition de l'unité sur chaque triangle du réseau. Cette technique est utilisée également par d'autres auteurs [8] [1] pour la détermination des dimensions des espaces de splines sur une triangulation quelconque et la construction de nouveaux éléments finis.

Au chapitre 7, j'utilise des **splines quadratiques à deux variables** (fonctions de classe C^1 dont la restriction à chaque triangle T d'une triangulation $\mathcal{T}$ d'un domaine est un polynôme P_T de degré inférieur ou égal à 2) pour construire des interpolants d'Hermite en des points arbitraires du plan et des interpolants de Lagrange en des points répartis de façon assez régulière. La représentation systématique des polynômes P_T dans la base de Bernstein par rapport aux coordonnées barycentriques de T, permet de donner une expression simple et géométrique des conditions de continuité C^1 à la frontière de deux triangles adjacents. Ceci facilite le calcul des coefficients de l'interpolant d'Hermite S (défini par Powell et Sabin [19]) d'une fonction f et de son gradient en des points arbitraires du plan. Je donne une majoration de l'erreur d'interpolation lorsque la triangulation associée à ces points est assez régulière.

En ce qui concerne l'interpolation de Lagrange en des points arbitraires du plan, le problème est moins trivial car il n'est plus purement local comme le problème d'Hermite. En revanche, pour des domaines simples (triangles, carrés, rectangles, quadrilatères) munis de triangulations régulières constituées par exemple de triangles rectangle-isocèles, je montre qu'il est possible de construire des interpolants en des points particuliers du domaine. Les algorithmes obtenus, pour les carrés notamment, sont peu coûteux en opérations (environ 20 N additions-multiplications pour N points d'interpolation) et semblent intéressants pour le tracé des courbes de niveau (voir également [18]). Ils sont généralisables à des domaines plus complexes munis de triangulations moins régulières.

LISTE DES TRAVAUX DE L'AUTEUR LIES A LA THESE (*)

Chapitre 1 : Polygones Bézier et polygones splines

[S1] *"Propriétés de diminution de la variation et de la forme pour les approximants-splines"* Séminaire n° 263, Grenoble (Janvier 1977) (avec B. Germain-Bonne).

[S2] *"Spline and Bézier polygons associated with a polynomial spline curve"* Computer Aided Design, Vol 10, n° 4 (Juillet 1978), p. 257-261.

[S3] *"Splines et base de Bernstein. I-Polygones associés à une fonction spline et applications"*. Publication n° 109 de l'UER de Mathématiques. Lille (avril 1977).

Chapitre 2 : Interpolation cardinale d'Hermite

[S4] *"Splines et base de Bernstein II. Splines à support minimal pour l'interpolation cardinale d'Hermite."* Publication n° 112 de l'UER de mathématiques, Lille (avril 1977).

[S5] *"Splines et base de Bernstein III. Interpolation cardinale d'Hermite (splines de degré impair)"*. Publication n° 123 de l'UER de mathématiques Lille (décembre 1977).

Chapitre 3 : Splines quadratiques généralisées

[S6] *"Interpolation d'Hermite sur un intervalle par des splines quadratiques et applications"*, Publication ANO 36 (Janvier 1981).

[S7] *"Splines quadratiques généralisées. I-interpolation sur un intervalle de $\mathbb{R}$"* Publication ANO 42 (janvier 1981).

[S8] *"Splines quadratiques généralisées. II-Erreur d'interpolation sur un intervalle"*, Publication ANO 49 (août 1981).

(*) Les publications ANO sont celles de l'équipe d'Analyse Numérique et Optimisation (UER d'IEEA Informatique) de l'Université de Lille I.

Chapitre 4 : Opérateurs splines positifs et splines orthogonales

[S9] *"Opérateurs de Bernstein-Jacobi et polynômes orthogonaux"* Publication ANO 37 (janvier 1981).

[S10] Opérateurs de Bernstein-Laguerre et polynômes orthogonaux sur $\mathbb{R}^+$. Publication ANO 38 (janvier 1981).

[S11] *"Opérateurs splines positifs : convergence et éléments propres"* Publication ANO 48 (Juillet 1981).

Chapitres 5 et 6 : Quasi-interpolants sur un réseau équilatéral ou rectangle-isocéle

[S12] *"Quasi-interpolants-splines sur des réseaux triangulaires réguliers du plan"*. Colloque d'Analyse Numérique, Giens (Mai 1978) Exposés à la NASA (Cleveland) et à Kent State University (Avril - Mai 1979). Ecole d'été de Sielpia, Pologne (Septembre 1980).

[S13] *"De l'existence de splines à support borné sur une triangulation équilatérale du plan"*. Publication ANO 39 (Février 1981).

[S14] *"Quasi-interpolants splines sur un réseau équilatéral du plan"* Publication ANO 57 (Novembre 1981).

[S15] *"Quasi-interpolants splines sur un réseau rectangle-isocèle du plan"* Publication ANO 59 (Janvier 1982).

Chapitre 7 : Splines quadratiques à 2 variables

[S16] *"Interpolation d'Hermite par des surfaces de classe C^1 quadratiques par morceaux"* Publication ANO 16 (novembre 1979) Séminaire n° 339, Grenoble (avril 1980).

[S17] *"Interpolation d'Hermite par des surfaces de classe C^1 quadratiques par morceaux"* 2° Congrés International sur les Méthodes Numériques de l'Ingénieur (GAMNI), p. 175-185, Dunod, Paris (décembre 1980). Voir aussi Publication ANO 34 (janvier 1981).

[S18] *"Interpolation by quadratic splines on triangles and squares"* Publication ANO 52 (septembre 1981). A paraître dans Computers in Industry

AUTRES TRAVAUX DE L'AUTEUR

Equations intégrales

[S19] *"Système différentiel associé à certaines équations intégrales de type Hammerstein"* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 277 (1973), A 605-607.

[S20] *"Une méthode de résolution numérique de certaines équations intégrales de type Hammerstein"* RAIRO (1975), R1, p. 105-118.

[S21] *"Utilisation des déterminants de Fredholm dans la résolution numérique des équations intégrales linéaires à noyau continu"* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 279 (1974), p 337-340.

[S22] *"Etude de l'équation de Fredholm au voisinage d'une borne critique"* RAIRO Analyse Numérique, Vol 11, n° 3 (1977), p. 287-305.

Bases de type Schauder de C[0,1]

[S23] *"Bases de type Schauder de C[0,1]. Formules de quadrature associées. Bases de Romberg"*. Publications n° 49 et 76 de l'UER de Mathématiques Lille (mai 1975 et mars 1976).

[S24] *"Bases de type Schauder de C[0,1] et applications à l'intégration numérique*. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 284 (2 mai 1977) A 1077-1080.

[S25] *"Bases de type Schauder de C[0,1] et formules de quadrature associée"* Numer. Math, 30 (1978), p. 227-240.

Divers

[S26] *"Quatre algorithmes pour développer un nombre réel en série de fractions égyptiennes"* Publication ANO 35 (janvier 1981)

[S27] *"Opérateurs de Bernstein-Sheffer"* Publication ANO 45 (juin 1981).

CHAPITRE 1

POLYGONES ET RESEAUX ASSOCIES AUX COURBES ET SURFACES POLYNOMIALES PAR MORCEAUX

Il dit : "Je suis losange.
Je suis le cercle avec sa quadrature
Je suis carré ; je roule, roule"
Il se voudrait la loi
d'un univers jamais compris
Ecole pour chardonnerets.
Neige en oiseaux majeurs ...
Il dit : "Je suis la parallèle
Je suis la pyramide".
Ô bal masqué,
pour n'avoir plus à se connaître...

Alain BOSQUET
(Poèmes, deux)

I - INTRODUCTION

Tout arc paramétré polynômial (**courbe Bézier**) est représentable dans la base de Bernstein : ses coefficients sont des points formant une ligne polygonale (**polygone Bézier** ou **B-polygone**) dont l'enveloppe convexe contient la courbe associée. Plus généralement, tout arc paramétré spline polynômial (**courbe spline**) est représentable dans la base des B-splines : ses coefficients sont des points formant une ligne polygonale (**polygone spline** ou **S-polygone**) dont l'enveloppe convexe contient également la courbe associée. Mais cette courbe spline est obtenue par raccordement d'un certain nombre de courbes Bézier locales dont chacune possède un **B-polygone local** : la réunion de ces B-polygones locaux constitue le **B-polygone global** de la courbe spline.

Après avoir rappelé les définitions des B et S-polygones ainsi que les constructions relatives aux courbes associées, nous donnons dans ce chapitre deux algorithmes permettant de construire le B-polygone global à partir du S-polygone d'une courbe spline (**algorithme (SB)**) et réciproquement de reconstruire le S-polygone à partir du B-polygone global (**algorithme (BS)**). Ces définitions et ces algorithmes se généralisent aux surfaces splines obtenues par produits tensoriels de splines polynômiales à une variable. Le B-polygone global (le B-réseau global pour les surfaces) est beaucoup plus proche de la courbe (ou de la surface) que le S-polygone (ou le S-réseau) : cette propriété est intéressante sur le plan pratique (en dessin graphique par exemple) et sur le plan théorique. On montre en effet que le passage du B-polygone global au S-polygone s'effectue au moyen d'un certain nombre de polygones emboîtés les uns dans les autres : ceci permet d'une part de redémontrer géométriquement les propriétés de diminution de la variation des approximants de Schoenberg-Marsden et de démontrer d'autre part, pour les courbes planes, une propriété plus fine de diminution de la forme pour ces mêmes approximants splines.

II - POLYGONES ET RÉSEAUX ASSOCIÉS AUX COURBES ET SURFACES BÉZIER

2.1 Rappels sur la base de Bernstein

La base de Bernstein de l'espace $\mathbb{P}_n$ des polynômes de degré $\leq n$ est constituée des polynômes :

$$\phi_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

Rappelons sans démonstration quelques propriétés de ces polynômes (voir Davis [9], Chapitre 6 ou Lorentz [14])

(B1) $\forall\, t \in [0, 1], \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

- $\phi_{n,i}(t) \geq 0$
- $\sum_{i=o}^{n} \phi_{n,i}(t) = 1$
- $\sum_{i=o}^{n} \frac{i}{n} \phi_{n,i}(t) = t$

(B2) Pour $P(t) = \sum_{i=o}^{n} b_i \phi_{n,i}(t) \in \mathbb{P}_n$, on a , pour $0 \leq k \leq n$:

$$P^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=o}^{n-k} \Delta^k b_i \phi_{n-k,i}(t)$$

avec $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$ et $\Delta^{k+1} b_i = \Delta(\Delta^k b_i)$ pour $k \geq 1$.

En particulier :

$$P^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k b_o$$

$$P^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k b_{n-k}$$

(B3) Dans la base canonique de $\mathbb{P}_n$, on a :

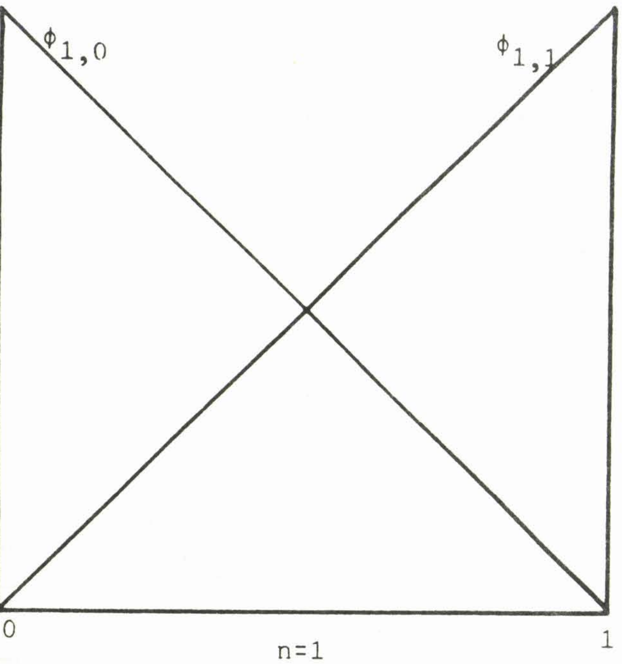
$$P(t) = \sum_{k=o}^{n} a_k t^k = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k b_o t^k$$

ce qui donne, pour $0 \leq k \leq n$:

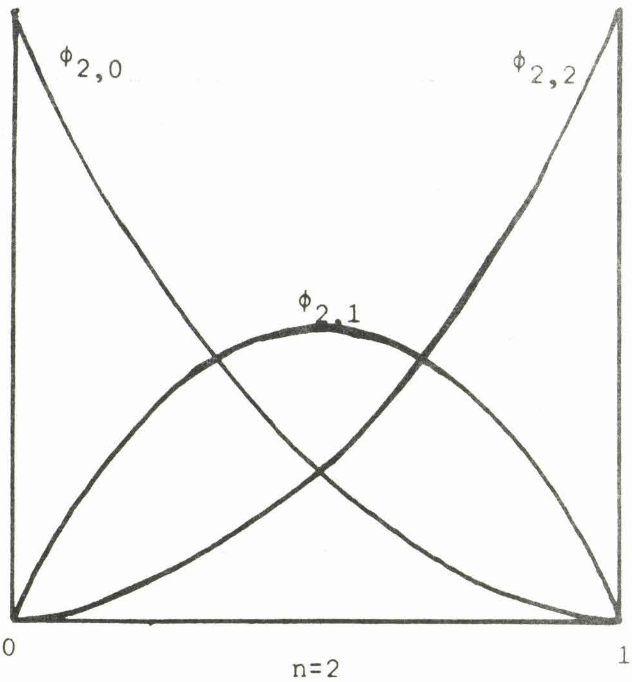
$$a_k = \binom{n}{k} \Delta^k b_o \text{ et } b_k = \sum_{i=o}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{n}{i}} a_i$$

On passe ainsi aisément d'une base à l'autre.

FIG. 1. BASES DE BERNSTEIN DE DEGRE n $(1 \leq n \leq 3)$

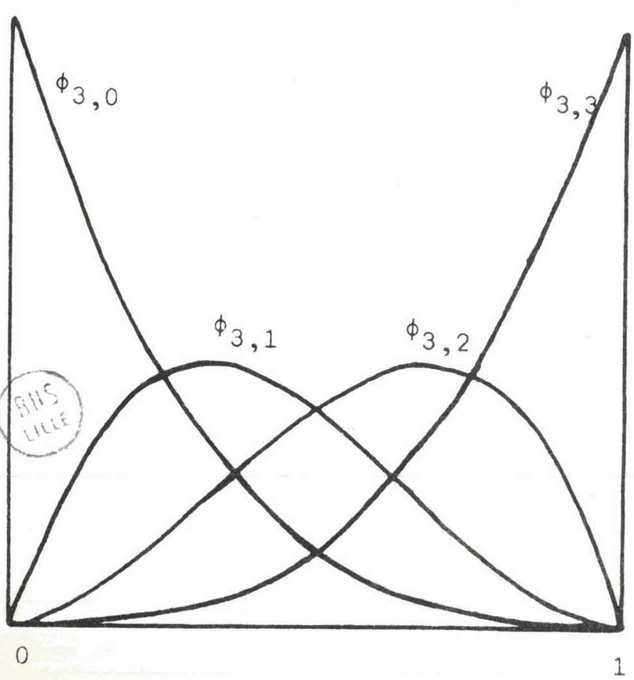


$\phi_{1,0}(x) = 1-x$ $\phi_{1,1}(x) = x$



$\phi_{2,0}(x) = (1-x)^2$ $\phi_{2,2}(x) = x^2$

$\phi_{2,1}(x) = 2x(1-x)$



n=3

$\phi_{3,0}(x) = (1-x)^3$

$\phi_{3,1}(x) = 3x(1-x)^2$

$\phi_{3,2}(x) = 3x^2(1-x)$

$\phi_{3,3}(x) = x^3$

2.2 Courbes et polygones Bézier. Surfaces et polyèdres (ou réseaux) Bézier

Les **courbes Bézier** sont des arcs paramétrés de $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$) définis par des polynômes à coefficients vectoriels exprimés dans la base de Bernstein de $\mathbb{P}_n$.

Soit $\mathbb{Q} = \{Q_o, Q_1, \ldots, Q_n\}$ une suite de n+1 points de $\mathbb{R}^p$; on lui associe l'arc paramétré :

$$B_n(\mathbb{Q}, t) = \sum_{i=o}^{n} Q_i \, \phi_{n,i}(t) \qquad t \in [0, 1]$$

Définition 1 : *B_n est une courbe Bézier de degré n et $\mathbb{Q}$ est le polygone Bézier (en abrégé B-polygone) de B_n.*

Comme conséquence de (B1), on voit que le point courant $B_n(\mathbb{Q}, t)$ est barycentre des points Q_i affectés respectivement des masses $\phi_{n,i}(t)$. C'est cette propriété qui est intéressante dans les applications graphiques (voir les travaux de P. Bézier [1] [2], [3], A.R. Forrest [10], W.J. Gordon et R.F. Riesenfeld [12]).

On a également, d'après (B2) :

$$B_n^{(k)}(\mathbb{Q}, t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=o}^{n-k} \Delta^k Q_i \, \phi_{n-k,i}(t)$$

Ce qui montre que $B_n^{(k)}$ est, à un coefficient près, la courbe Bézier de degré n-k associée au B-polygone :

$$\mathbb{Q}^{(k)} = \{\Delta^k Q_o, \Delta^k Q_1, \ldots, \Delta^k Q_{n-k}\}$$

En particulier $B'_n(0) = n(Q_1 - Q_o)$, $B'_n(1) = n(Q_n - Q_{n-1})$; plus généralement les vecteurs dérivés en 0 et 1 se construisent géométriquement à partir du B-polygone $\mathbb{Q}$. On peut également exprimer B_n dans la base canonique :

$$B_n(\mathbb{Q}, t) = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k \, Q_o \, t^k$$

De manière analogue, les **surfaces Bézier** sont des nappes paramétrées de $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 3$) définies comme polynômes à coefficients vectoriels dans la base de Bernstein de $\mathbb{P}_n \otimes \mathbb{P}_n$ (ou plus généralement de $\mathbb{P}_m \otimes \mathbb{P}_n$, m pouvant être différent de n) :

$$\mathbb{Q} = \{Q_{ij},\ 0 \leq i,j \leq n\} \subset \mathbb{R}^p$$

$$B_n(\mathbb{Q}, u, v) = \sum_{i=o}^{n} \sum_{j=o}^{n} Q_{ij}\ \phi_{n,i}(u)\ \phi_{n,j}(v) \qquad (u, v) \in [0, 1]^2$$

Définition 2 : B_n est une surface Bézier de degré n et $\mathbb{Q}$ est le polyèdre ou réseau Bézier de B_n. (En abrégé B-polyèdre ou B-réseau).

En pratique, on utilise essentiellement les surfaces bilinéaires (n=1), biquadratiques (n=2) et bicubiques (n=3). La plupart des algorithmes, exposés dans la suite pour les courbes, se généralisent aux surfaces de ce type. Enfin, il est possible de définir des variétés de dimension supérieure par produit tensoriel d'un plus grand nombre d'espaces $\mathbb{P}_n$. Les propriétés des B-polygones sont conservées, en particulier le fait que la nappe paramétrée est dans l'enveloppe convexe de son B-réseau.

2.3 Construction géométrique du point courant d'une courbe Bézier et de toutes les dérivées en ce point.

a) *Algorithme de Bézier*

Pour construire le point courant $B_n(\mathbb{Q},t)$ à partir du polygone $\mathbb{Q}$, on utilise l'algorithme suivant :

(BZO)

(i) $Q_{i,o} = Q_i \qquad (0 \leq i \leq n)$

(ii) $Q_{i,j}(t) = t\ Q_{i,j-1}(t) + (1-t)\ Q_{i-1,j-1}(t) \qquad \left(\begin{smallmatrix} 1 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq n \end{smallmatrix}\right)$

(iii) $B_n(\mathbb{Q},t) = Q_{n,n}(t)$.

Exemple voir figure 2, page I-10.

Plus généralement, pour construire $\mathcal{B}^{(k)}(\mathbb{Q},t)$, on utilise l'algorithme précédent à partir du polygone $\mathbb{Q}^{(k)} = (\Delta^k Q_o, \Delta^k Q_1, \ldots, \Delta^k Q_{n-k})$.

$$\text{(i)}\quad Q^{(k)}_{i,o} = \Delta^k Q_i \qquad (0 \le i \le n-k)$$

$$\text{(BZ1)}\ \text{(ii)}\quad \boxed{Q^{(k)}_{i,j}(t) = tQ^{(k)}_{i,j-1}(t) + (1-t)\, Q^{(k)}_{i-1,j-1}(t)} \qquad \left(\begin{matrix}1 \le j \le n-k\\ j \le i \le n-k\end{matrix}\right)$$

$$\text{(iii)}\quad Q^{(k)}_{n-k,n-k}(t) = \frac{(n-k)!}{n!}\,\mathcal{B}^{(k)}_n(\mathbb{Q}, t) = \frac{(n-k)!}{n!}\,\mathcal{B}_{n-k}(\mathbb{Q}^{(k)}, t).$$

Remarque : En posant $Q_{i,j} = Q^{(o)}_{i,j}$, le premier algorithme est le cas particulier k=0 du deuxième.

b) *Forme tétraédrale de l'algorithme de Bézier*

On se propose de condenser sous une forme géométrique simple les algorithmes ci-dessus.

Remarquons d'abord que pour $0 \le k \le n-1$:

$$Q^{(k+1)}_{i,o} = \Delta^{k+1} Q_i = \Delta^k Q_{i+1} - \Delta^k Q_i = Q^{(k)}_{i+1,0} - Q^{(k)}_{i,o} \qquad (0 \le i \le n-k-1)$$

Supposons que l'on ait établi à l'ordre j, pour $0 \le k \le n-1$:

$$\text{(BZ2)}\qquad \boxed{Q^{(k+1)}_{i,j} = Q^{(k)}_{i+1,j} - Q^{(k)}_{i,j}} \qquad (j \le i \le n-k-1)$$

On obtient à l'ordre j+1 :

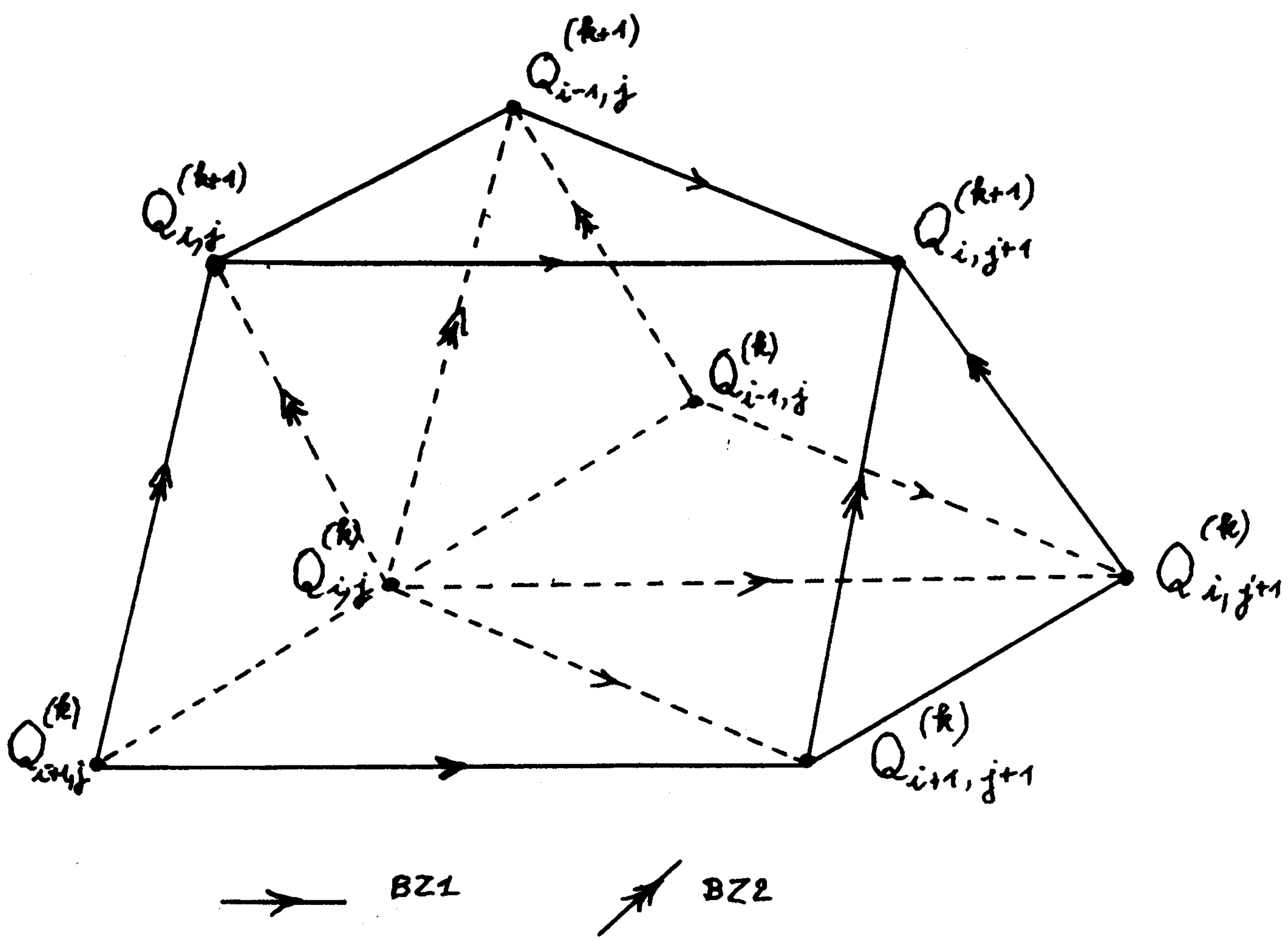
$$\begin{aligned} Q^{(k+1)}_{i,j+1} &= t\, Q^{(k+1)}_{i,j} + (1-t)\, Q^{(k+1)}_{i-1,j} \\ &= t[Q^{(k)}_{i+1,j} - Q^{(k)}_{i,j}] + (1-t)\,[Q^{(k)}_{i,j} - Q^{(k)}_{i-1,j}] \\ &= [tQ^{(k)}_{i+1,j} + (1-t)\,Q^{(k)}_{i,j}] - [tQ^{(k)}_{i,j} + (1-t)\,Q^{(k)}_{i-1,j}] \\ &= Q^{(k)}_{i+1,j+1} - Q^{(k)}_{i,j+1}, \quad \text{cqfd.} \end{aligned}$$

Il y a donc deux façons de calculer $Q_{i,j+1}^{(k+1)}$ à partir des trois points $Q_{i-1,j}^{(k)}$, $Q_{i,j}^{(k)}$ et $Q_{i+1,j}^{(k)}$ (cf. figure ci-dessous).

- soit en calculant $Q_{i+1,j+1}^{(k)}$ et $Q_{i,j+1}^{(k)}$ en utilisant la relation (BZ1, ii), puis $Q_{i,j+1}^{(k+1)}$ en utilisant (BZ2)

- soit en calculant $Q_{i,j}^{(k+1)}$ et $Q_{i-1,j}^{(k+1)}$ en utilisant (BZ2) puis $Q_{i,j+1}^{(k+1)}$ en utilisant (BZ1, ii).

Nous venons d'établir que ces deux manières de procéder conduisent au même résultat : **nous dirons que les algorithmes (BZ1) et (BZ2) commutent.**



Le tableau des $Q_{i,j}^{(k)}$ $(0 \le k \le n,\ 0 \le j \le n-k,\ j \le i \le n-k)$ peut se représenter sous la forme d'un tétraèdre : nous donnons pour simplifier la figure dans le cas n=3 : (voir figure 3, page I-11).

Les points que l'on calcule sont :

$Q_{3,3}^{(0)} = \mathcal{B}_3(\mathbb{Q},t)$ (point courant)

$Q_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{3}\, \mathcal{B}'_3(\mathbb{Q},t)$ (tangente au point courant)

$Q_{1,1}^{(2)} = \frac{1}{6}\, \mathcal{B}''_3(\mathbb{Q},t)$

$Q_{0,0}^{(3)} = \frac{1}{6}\, \mathcal{B}'''_3(\mathbb{Q},t)$

On voit qu'en général, on se contentera de calculer $\mathcal{B}_3(\mathbb{Q},t)$ et $\mathcal{B}'_3(\mathbb{Q},t)$, ce qui demandera simplement l'évaluation des points $Q_{i,j}^{(0)}$ et du point $Q_{2,2}^{(1)}$, c'est à dire ici 7 combinaisons linéaires : on n'est pas obligé de construire le polygone Bézier $\mathbb{Q}^{(1)} = (Q_{0,0}^{(1)}, Q_{1,0}^{(1)}, Q_{2,0}^{(1)})$ et d'appliquer l'algorithme (BZ1) pour le calcul du vecteur dérivé au point t.

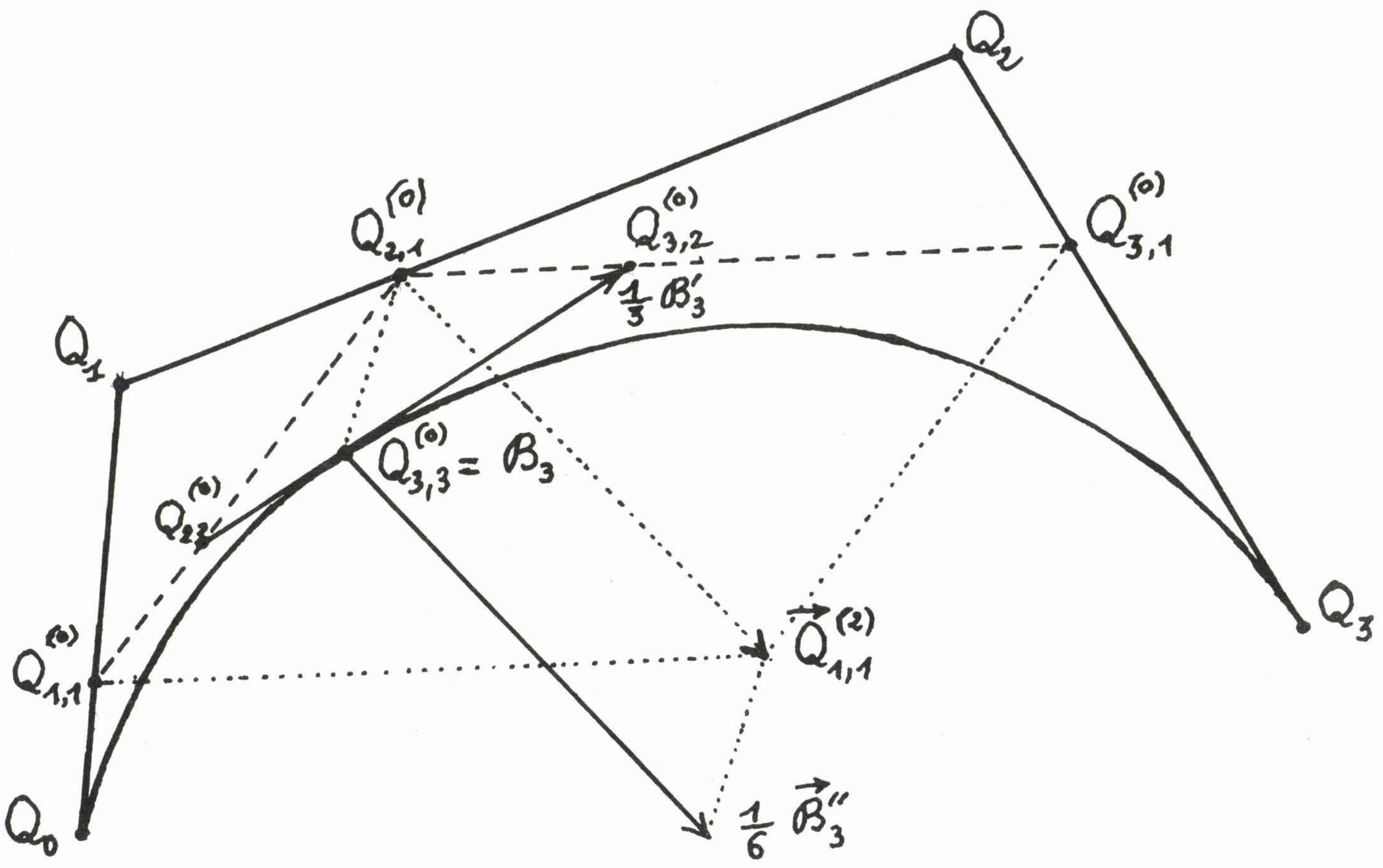
Remarque : Pour le degré n, le nombre de combinaisons linéaires est égal à $N_1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ pour le calcul de $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}'_n$, et à $N_2 = 3 + \frac{n(n+1)}{2}$ pour le calcul de $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}'_n$ et $\mathcal{B}''_n$.

Le calcul de toutes les dérivées demande :

$N_n = \frac{n(n+1)(n+5)}{6}$ opérations du type (BZ1) ou (BZ2)

n	2	3	4	5	6
N_1	4	7	11	16	22
N_2	7	9	13	18	24
N3		16	19	24	30
N4			30	34	40
N5				50	55
N6					77

FIG. 2 : COURBE BEZIER DE DEGRE 3



$\mathbb{Q} = \{Q_o, Q_1, Q_2, Q_3\}$ $\quad B_3(Q;t) = Q_o(1-t)^3+3Q_1t(1-t)^2+3Q_2t^2(1-t)+Q_3t^3$

$\mathbb{Q}^{(1)} = \{Q_1-Q_o, Q_2-Q_1, Q_3-Q_2\}$ $\quad B'_3(Q;t) = 3(Q_1-Q_o)(1-t)^2+6(Q_2-Q_1)t(1-t)+3(Q_3-Q_2)t^2$

$\mathbb{Q}^{(2)} = \{Q_2-2Q_1+Q_o, Q_3-2Q_2+Q_1\}$ $\quad B'_3(Q;t) = 6(Q_2-2Q_1-Q_o)(1-t)+6(Q_3-2Q_2+Q_1)t$

On donne sur la figure la construction du point courant pour t = 1/3 par l'algorithme de Bézier. On a :

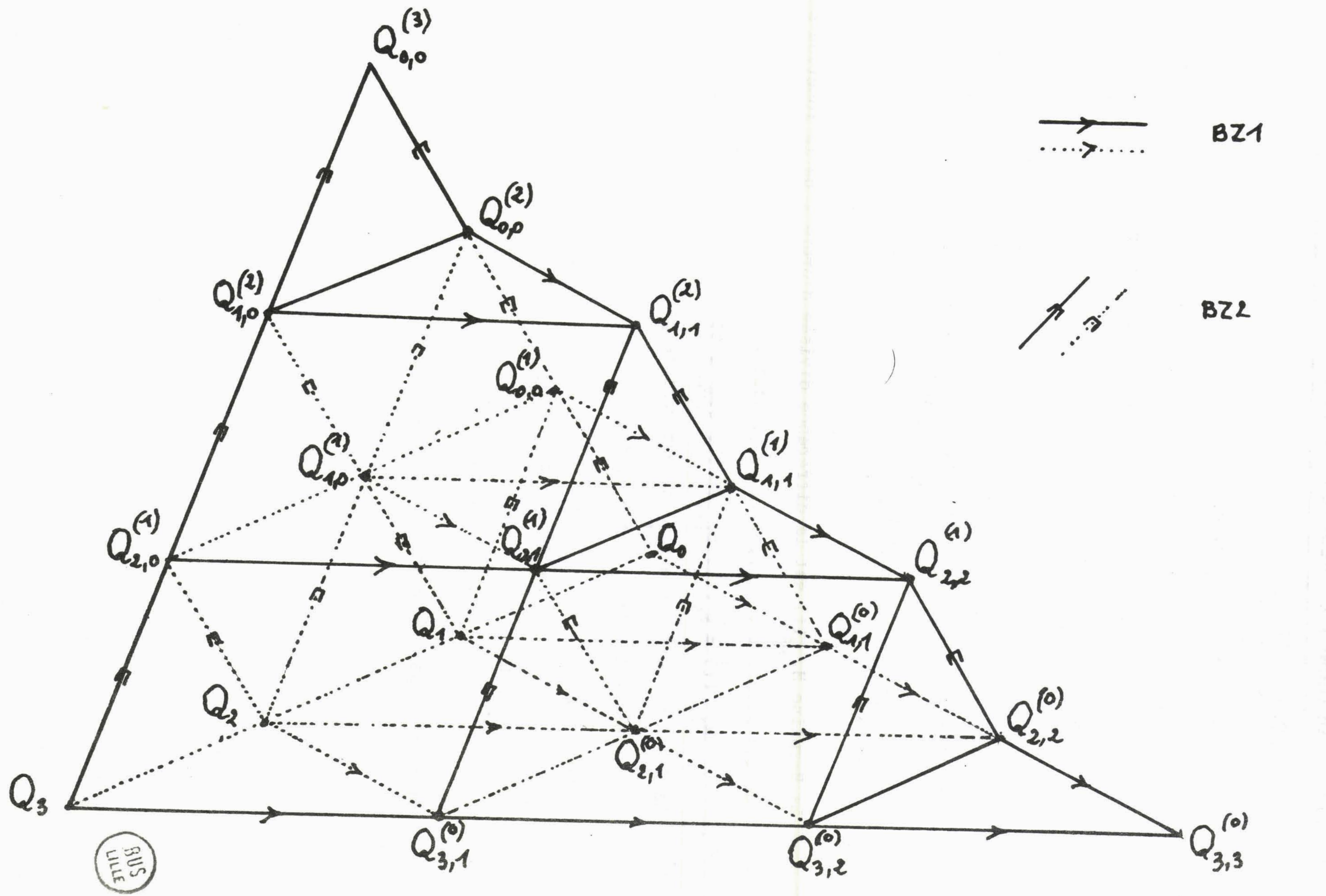
$$B'_3(\mathbb{Q} \; ; \; 1/3) = 3Q_{2,2}^{(1)} = 3(Q_{3,2}^{(0)} - Q_{2,2}^{(0)})$$

et d'autre part :

$$B''_3(Q \; ; \; 1/3) = 6Q_{1,1}^{(2)} = 6(Q_{2,1}^{(1)} - Q_{1,1}^{(1)})$$

avec $Q_{2,1}^{(1)} = Q_{3,1}^{(0)} - Q_{2,1}^{(0)}$ et $Q_{1,1}^{(1)} = Q_{2,1}^{(0)} - Q_{1,1}^{(0)}$

Figure 3 : Forme tétraèdrale de l'algorithme de Bézier
pour n = 3



BUS LILLE

III - POLYGONES ET RÉSEAUX ASSOCIÉS AUX COURBES ET SURFACES SPLINES POLYNÔMIALES

3.1 Rappels sur les B-splines

Rappelons sans démonstration quelques propriétés des B-splines généralisant celles des polynômes de Bernstein (voir également De Boor [8] chapitre 9 ou Schumaker [21], chapitres 4 et 5).

Soit $\pi = \{t_i, i \in I\}$ une suite croissante (finie ou infinie) de nombres réels telle que $t_i < t_{i+m}$ (m entier ≥ 1). Posons :

$$g_m(s\,;\,t) = (s-t)_+^{m-1} = \begin{cases} (s-t)^{m-1} & s \geq t \\ 0 & s < t \end{cases}$$

La B-spline $M_{i,m}(t)$ est la différence divisée d'ordre m de la fonction $s \mapsto g_m(s,t)$ sur les points $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+m}$, soit :

$$M_{i,m}(t) = g_m(t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+m}\,;\,t)$$

La B-spline normalisée $N_{i,m}(t)$ est définie par :

$$N_{i,m}(t) = (t_{i+m} - t_i)\, M_{i,m}(t)$$

A partir de :

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On calcule par récurrence, pour $m \geq 2$:

FIG. 4. B-SPLINES SANS NOEUDS MULTIPLES POUR UNE SUBDIVISION UNIFORME

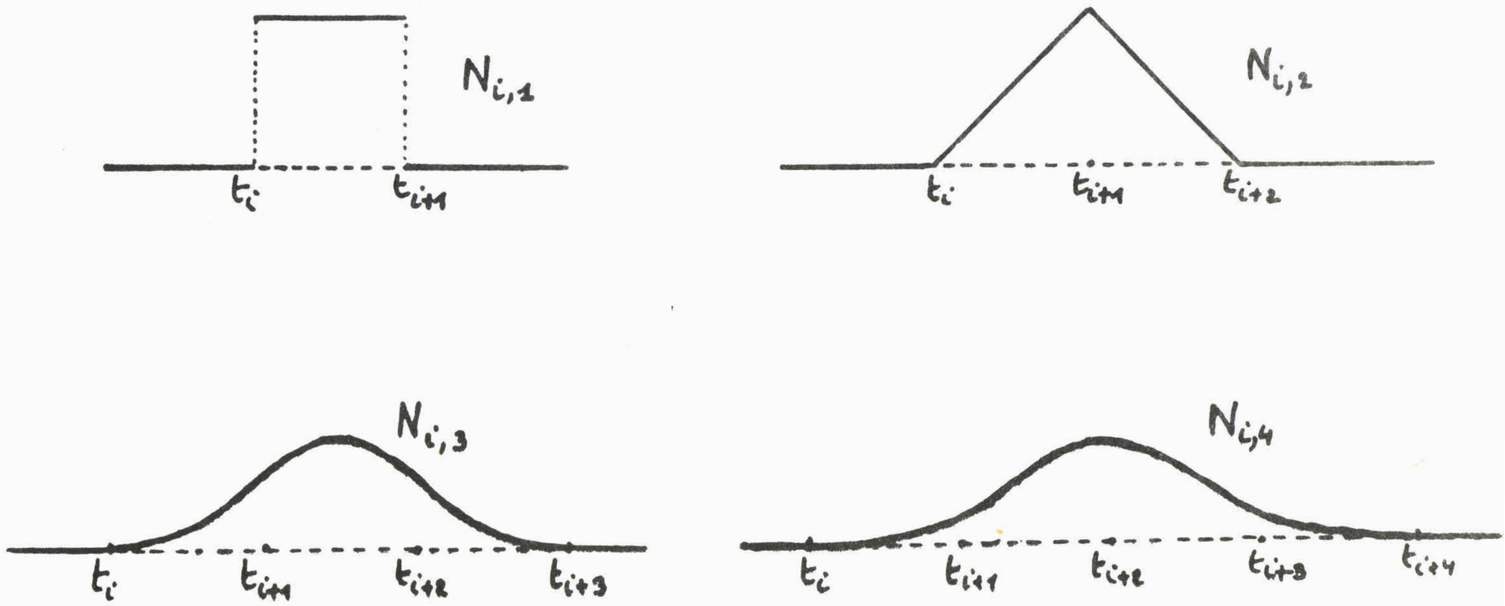
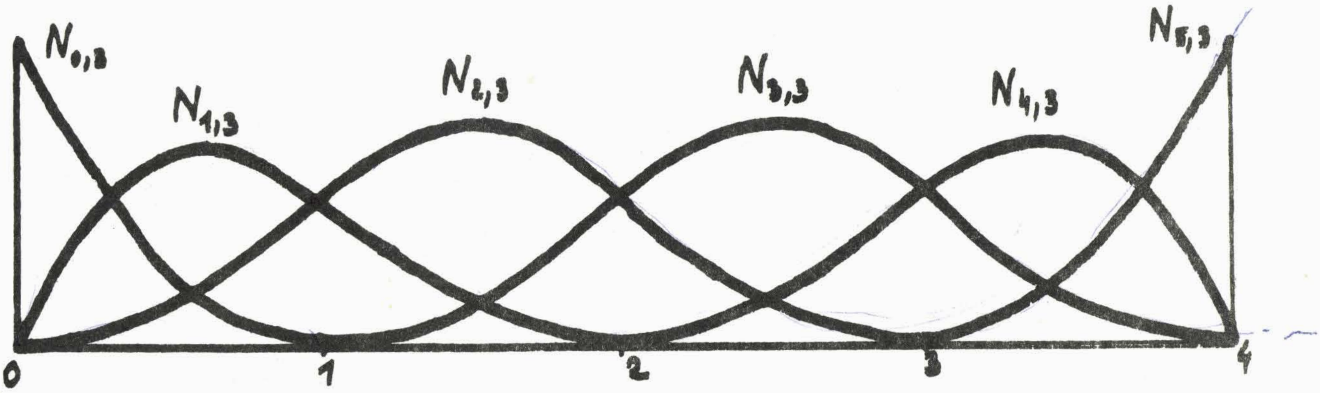


FIG. 5. B-SPLINES DE DEGRE 2 SUR L'INTERVALLE [0,4]

Suite des noeuds ; $\pi = \{0,0,0,1,2,3,4,4,4\}$

$$S_2(x) = \sum_{j=0}^{5} A_j \, N_{j,3}(x) \quad \text{(6 fonctions de base)}$$

Comparer avec la base de Bernstein de degré 2 (fig. 1).



$$N_{i,m}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m}-t}{t_{i+m}-t_{i+1}} N_{i+1,\, m-1}(t)$$

et l'on en déduit que $N_{i,m}(t) > 0$ pour $t_i < t < t_{i+m}$ et que $N_{i,m}(t) = 0$ ailleurs, donc le support de $N_{i,m}$ est l'intervalle $[t_i, t_{i+m}]$ (figure 4).

Lorsque π est doublement infinie ($I = \mathbb{Z}$), on note $\mathcal{S}_m(\pi)$ l'espace des splines de degré m ayant comme noeuds les points de π, c'est à dire les fonctions de classe C^{m-1} dont la restriction à chaque sous-intervalle (t_i, t_{i+1}) est un polynôme de degré $\leq m$. Tout $S_m \in \mathcal{S}_m(\pi)$ s'écrit alors de manière unique sous la forme :

$$S_m(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_i\, N_{i,m+1}(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(on suppose, pour simplifier, que les noeuds t_i sont tels que $t_i < t_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$).

Lorsque π est finie et que l'on a :

$$a = t_o < t_1 < \dots < t_n = b$$

il est commode d'introduire deux noeuds de multiplicité m+1 à chaque extrémité, ce qui donne les 2m+n+1 noeuds suivants :

$$\begin{cases} t'_o = t'_1 = \dots = t'_m = t_o \\ t'_i = t_{i-m} \qquad \text{pour } m+1 \leq i \leq m+n-1 \\ t'_{m+n} = t'_{m+n+1} = \dots = t'_{2m+n} = t_n = b \end{cases}$$

$\mathcal{S}_m(\pi\ ;\ a, b)$ est l'espace des fonctions de $C^{m-1}[a, b]$ dont la restriction à (t_i, t_{i+1}) est un polynôme de degré $\leq m$. Tout $S_m \in \mathcal{S}_m(\pi\ ;\ a, b)$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$S_m(t) = \sum_{i=o}^{m+n-1} A_i\, N_{i,m+1}(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

Le support de la B-spline $N_{i,m+1}$ est alors l'intervalle $[t'_i, t'_{i+m+1}]$ (figure 5).

Propriétés des B-splines

Dans le cas où π est finie, il faut utiliser les t'_j au lieu des t_j dans ce qui suit.

(S1) Pour tous $t \in \mathbb{R}$ ou $[a, b]$, $m \in \mathbb{N}$ et $i \in I(= \mathbb{Z}$ ou $\{0, 1, \ldots, m+n-1\})$.

- $N_{i,m+1}(t) \geq 0$
- $\sum_{i \in I} N_{i,m+1}(t) = 1$
- $\sum_{i \in I} \theta_i N_{i,m+1}(t) = t$ (pour $m \geq 1$)

où les **points nodaux** θ_i sont définis par :

$$\theta_i = (t_{i+1} + \ldots + t_{i+m}) / m$$

(S2) Si $S_m(t) = \sum_{i \in I} A_i N_{i,m+1}(t)$, on a, pour $0 \leq k \leq m$:

$$S_m^{(k)}(t) = \frac{m!}{(m-k)!} \sum_i A_i^{(k)} N_{i,m-k+1}(t)$$

avec $A_i^{(o)} = A_i$ et pour $k \geq 1$:

$$A_i^{(k)} = (A_i^{(k-1)} - A_{i-1}^{(k-1)}) / (t_{i+m-k+1} - t_i)$$

(S3) Lorsque $[a, b] = [0, 1]$ et $\pi = \{t_o = 0, t_1 = 1\}$, la B-spline $N_{i,m+1}(t)$ coïncide avec le polynôme de Bernstein $\phi_{m,i}(t)$

3.2 Courbes et polygones splines, surfaces et réseaux splines

Comme pour les fonctions splines, nous distinguerons les courbes paramétrées où $t \in \mathbb{R}$ et les arcs paramétrés où $t \in [a, b]$.

Dans le premier cas, on se donne une suite de noeuds $\pi = (t_i)_{i \in Z}$ et une suite $(P_i)_{i \in Z}$ de points formant un polygone P infini, et on leur associe la courbe paramétrée :

$$S_m(P, \pi ; t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_j N_{j,m+1}(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Chaque coordonnée est donc une fonction spline de degré m définie sur $\mathbb{R}$, c'est à dire un élément de $\mathcal{S}_m(\pi)$.

Dans le second cas, on se donne les 2m+n+1 noeuds $\pi = \{t_o,\dots,t_o,t_1,t_2,\dots,t_{n-1},t_n,\dots,t_n\}$ et un polygone $P = \{P_o,P_1,\dots,P_{m+n-1}\}$ et on leur associe l'arc paramétré :

$$S_m(P,\ \pi\ ;\ t) = \sum_{j=o}^{m+n-1} P_j\ N_{j,m+1}(t) \qquad (t \in [a,\ b]).$$

Chaque coordonnée de cet arc est un élément de $\mathcal{S}_m(\pi,\ a,\ b)$.

<u>*Définition 3*</u> *: Dans les deux cas,* S_m *est la courbe spline de degré* m *associée à la subdivision* π *et au polygone spline* P *(en abrégé S-polygone).*

Il résulte immédiatement de ces définitions et des propriétés (S1) que **le point** $S_m(P,\ \pi\ ;\ t)$, que l'on écrira souvent $S_m(t)$ ou $S_m(P,\ t)$ pour simplifier, **est le barycentre des sommets** P_i du polygone spline **affecté des masses positives** $N_{i,m+1}(t)$.

Les différentes dérivées s'obtiennent immédiatement ;
si $S_m(t) = \sum_i P_i\ N_{i,m+1}(t)$, alors pour $1 \leq k \leq m-1$:

$$S_m^{(k)}\ (P,\ t) = m(m-1)\ \dots\ (m-k+1) \sum_i P_i^{(k)}\ N_{i,m-k+1}(t)$$

avec
$$\begin{cases} P_i^{(o)} = P_i \text{ et pour } j \geq 1 : \\ P_i^{(j)} = (P_i^{(j-1)} - P_{i-1}^{(j-1)})\ /\ (t_{i+m-j+1} - t_i) \end{cases}$$

Ceci montre que $S_m^{(k)}$ est, à un coefficient près, la courbe spline de degré m-k associée au polygone spline :

$$P^{(k)} = \{P_i^{(k)}\}_{i \in I} \qquad \text{(I fini ou infini)}$$

De manière analogue, une surface-spline de degré m peut se définir par :

$$S_m(P,\ u,\ v) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} P_{ij}\ N_{i,m+1}(u)\ N_{j,m+1}(v)$$

où $\{t_i,\ i \in I\}$ et $\{s_j,\ j \in J\}$ sont deux suites de noeuds pouvant être distinctes.

<u>*Définition 4*</u> : S_m *est la surface-spline de degré* m *associée aux subdivisions* $\{t_i\}$ et $\{s_j\}$ *et* $P = \{P_{ij},\ i \in I,\ j \in J\}$ *est le polyèdre ou réseau-spline de* S_m *(en abrégé S-polyèdre ou S-réseau)*.

La surface-spline est dans l'enveloppe convexe de son S-réseau. En pratique, on utilise essentiellement des splines bilinéaires (m = 1), biquadratiques (m = 2) ou bicubiques (m = 3).

3.3 <u>Construction géométrique du point courant d'une courbe spline et des dérivées en ce point</u>

a) <u>*Algorithmes de De Boor-Cox (cf. [7] et [6])*</u>

Pour construire le point courant :

$$S_m(P\ ;\ t) = \sum_{i=\ell-m}^{\ell} P_i\ N_{i,m+1}(t)$$

à partir du polygone P, pour $t \in [t_\ell,\ t_{\ell+1}]$ on utilise l'algorithme suivant :

$$\text{(DBO)} \quad \begin{cases} \text{(i)}\ P_{i,o} = P_i \quad (\ell-m \le i \le \ell) \\ \text{(ii)}\ P_{i,j}(t) = \lambda\ P_{i,j-1}(t) + (1-\lambda)\ P_{i-1,j-1}(t) \\ \qquad \text{avec } \lambda = (t-t_i)\ /\ (t_{i+m-j+1} - t_i) \\ \qquad \text{pour } 1 \le j \le m \text{ et } \ell-m+j \le i \le \ell. \\ \text{(iii)}\ S_m(P\ ;\ t) = P_{\ell,m}(t) \end{cases}$$

Plus généralement, pour construire le point $S_m^{(k)}$ $(P\ ;\ t)$ lorsque $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$, on applique l'algorithme ci-dessus au polygone $P^{(k)}$ et l'on obtient, pour $0 \le k \le m-1$:

$$\text{(i)}\quad P_{i,o}^{(k)} = P_i^{(k)} \qquad (\ell-m+k \le i \le \ell)$$

$$\text{(ii)}\quad P_{i,j}^{(k)}(t) = \lambda\ P_{i,j-1}^{(k)}(t) + (1-\lambda)\ P_{i-1,j-1}^{(k)}(t)$$

avec $\lambda = (t-t_i) \ / \ (t_{i+m+1-j-k} - t_i)$

pour $1 \le j \le m-k$ et $\ell-m+k+j \le i \le \ell$

$$\text{(iii)}\quad S_m^{(k)}\ (P\ ;\ t) = m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)\ P_{\ell,m-k}^{(k)}(t)$$

b) *Forme tétraédrale de l'algorithme de De Boor-Cox*

Comme pour les courbes Bézier, il est possible de donner une représentation géométrique des algorithmes ci-dessus mettant en lumière les liens existant entre les différents points $P_{i,j}^{(k)}$.

Pour le calcul de ces points, il suffit d'appliquer les deux algorithmes suivants :

$$\text{(A1)}\qquad \boxed{P_{i,j}^{(k)} = \frac{t-t_i}{t_{i+m+1-j-k}-t_i}\ P_{i,j-1}^{(k)} + \frac{t_{i+m+1-j-k}-t}{t_{i+m+1-j-k}-t_i}\ P_{i-1,j-1}^{(k)}}$$

pour $0 \le k \le m$, $1 \le j \le m-k$, $\ell-m+k+j \le i \le \ell$

$$\text{(A2)}\qquad \boxed{P_{i,j}^{(k)} = (P_{i,j}^{(k-1)} - P_{i-1,j}^{(k-1)})\ /\ (t_{i+m+1-j-k} - t_i)}$$

pour $1 \le k \le m$, $0 \le j \le m-k$, $\ell-m+k+j \le i \le \ell$

avec comme initialisation :

$$P_{i,o}^{(o)} = P_i \qquad (\ell-m \le i \le \ell)$$

et comme **résultats** : $S_m(t) = P^{(o)}_{\ell,m}$ et pour $1 \leq k \leq m$:

$$S^{(k)}_m(t) = m(m-1) \ldots (m-k+1)\, P^{(k)}_{\ell,m-k}$$

Pour cela, il suffit de remarquer que (A1) est simplement l'algorithme (DB1), que pour $j = 0$ l'algorithme (A2) donne :

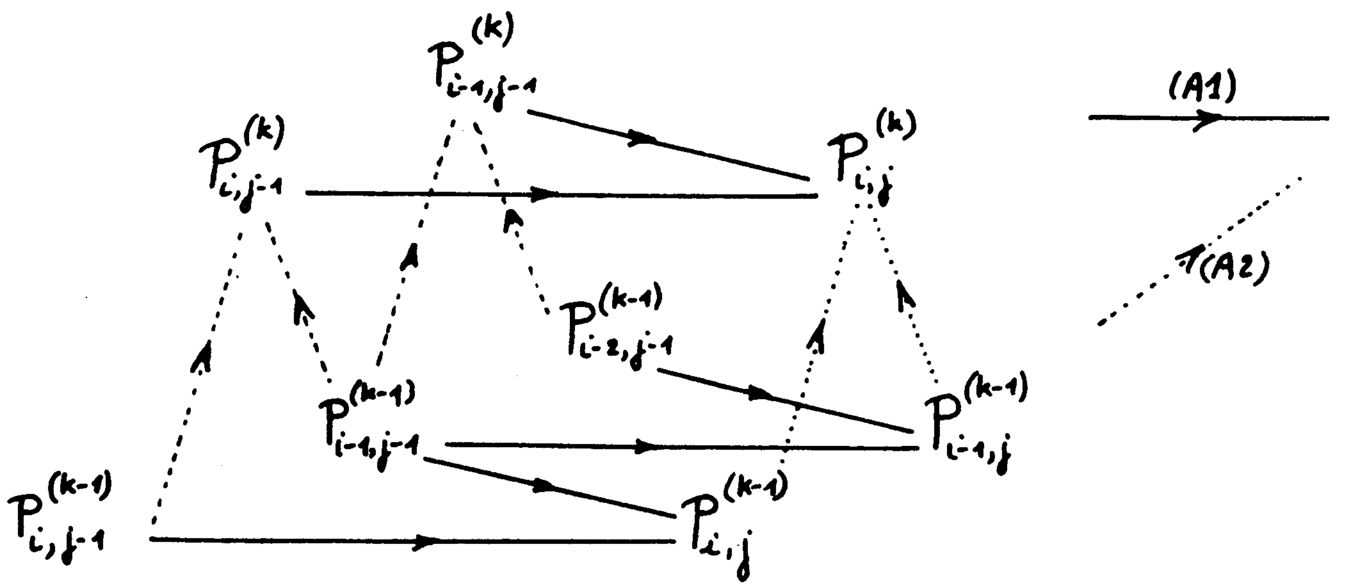
$$P^{(k)}_{i,o} = (P^{(k-1)}_{i,o} - P^{(k-1)}_{i-1,o}) \,/\, (t_{i+m+1-k} - t_i)$$

(c'est à dire les sommets du polygone $P^{(k)}$) et de démontrer que **les algorithmes (A1) et (A2) commutent** comme les algorithmes (BZ1) et (BZ2) de la forme tétra-édrale de l'algorithme de Bézier. Il y a en effet 2 manières de calculer $P^{(k)}_{i,j}$ à partir des 3 points $P^{(k-1)}_{i,j-1}$, $P^{(k-1)}_{i-1,j-1}$ et $P^{(k-1)}_{i-2,j-1}$ supposés connus (cf. figure ci-dessous).

a) Soit en calculant $P^{(k-1)}_{i,j}$ et $P^{(k-1)}_{i-1,j}$ par l'algorithme (A1), puis $\tilde{P}^{(k)}_{i,j}$ par l'algorithme (A2)

b) soit en calculant $P^{(k)}_{i,j-1}$ et $P^{(k)}_{i-1,j-1}$ par l'algorithme (A2), puis $\hat{P}^{(k)}_{i,j}$ par l'algorithme (A1).

On vérifie immédiatement que $\tilde{P}^{(k)}_{ij} = \hat{P}^{(k)}_{ij}$ (voir [11], chapitre 1, p. 21-22).



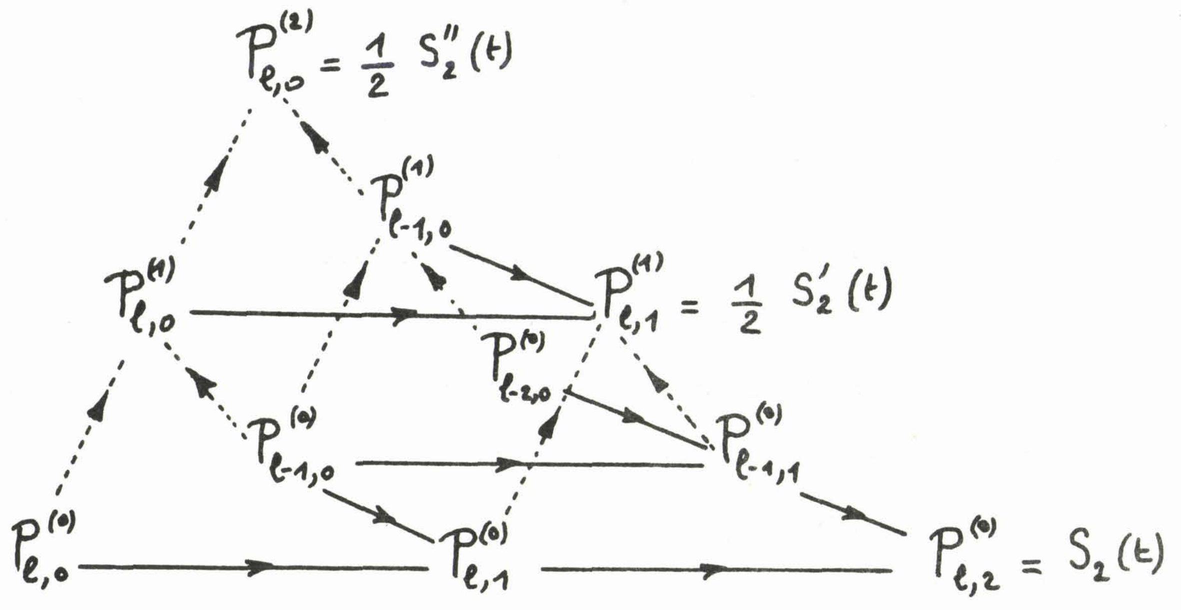


Figure 6

Les différents points $P^{(k)}_{i,j}$ se disposent en tétraèdre, d'où le nom que nous avons donné à cette présentation de l'algorithme de De Boor et Cox.

Exemple : voir figure 6 pour m = 2.

<u>Remarque</u> : Il peut être intéressant d'utiliser l'algorithme tétraédral pour minimiser le nombre des opérations dans le calcul sur ordinateur de $S_m(t)$ et de ses premières dérivées, comme on l'a vu au paragraphe 1.3 pour les courbes Bézier.

IV - L'ALGORITHME (SB) : CONSTRUCTION DU POLYGONE BÉZIER LOCAL D'UN ARC DE COURBE SPLINE

On se donne des noeuds $\{t_i\}$ en nombre fini ou infini (suivant que $t \in [a, b]$ ou $t \in \mathbb{R}$) et un polygone-spline $P = \{P_i\}$. Sur l'intervalle $[t_\ell, t_{\ell+1}]$, l'arc de courbe-spline de degré $m \geq 1$, associé à ces noeuds et à ce polygone, a comme point courant :

$$S_m(t) = \sum_{i=\ell-m}^{\ell} P_i \, N_{i;m+1}(t)$$

Chacune de ses composantes est en réalité un polynôme de degré $\leq m$, par conséquent il peut s'exprimer dans la base de Bernstein de degré m et **on peut considérer l'arc S_m comme une courbe Bézier** si l'on prend comme paramètre $u = (t-t_\ell) / (t_{\ell+1}-t_\ell)$. On se propose de calculer les coefficients de l'expression :

$$(1) \qquad \tilde{S}_m(u) = \sum_{r=o}^{m} \binom{m}{r} Q_{\ell+r-m} \, u^r(1-u)^{m-r}$$

où $\tilde{S}_m(u) = S_m(ut_{\ell+1} + (1-u)t_\ell) \qquad (0 \leq u \leq 1)$

donnant la **forme Bézier locale de l'arc de courbe-spline** S_m.

Le polygone $Q = \{Q_{\ell-m}, Q_{\ell-m+1}, \ldots, Q_\ell\}$ est appelé **polygone Bézier local** de la courbe spline pour $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$.

Nous donnons un algorithme (SB) permettant de calculer les sommets de ce polygone à partir des sommets du **polygone-spline local** $\{P_{\ell-m}, P_{\ell-m+1}, \ldots, P_\ell\}$.

a) *Algorithme (SB). (Forme non simplifiée)*

. **Initialisation** : On pose $P_{i,o}^{(o)} = P_i \; (\ell-m \leq i \leq \ell)$

. Pour k fixé ($0 \le k \le m$), $1 \le j \le m-k$ et $\ell+j-m+k \le i \le \ell$, on définit un premier algorithme :

$$\text{(SB1)} \qquad \boxed{P_{i,j}^{(k)} = \frac{t_\ell - t_i}{t_{i+m+1-j-k}-t_i}\, P_{i,j-1}^{(k)} + \frac{t_{i+m+1-j-k}-t_\ell}{t_{i+m+1-j-k}-t_i}\, P_{i-1,j-1}^{(k)}}$$

. Pour j fixé ($0 \le j \le m$), $1 \le k \le m-j$ et $\ell+k-m+j \le i \le \ell$, on définit un second algorithme :

$$\text{(SB2)} \qquad \boxed{P_{i,j}^{(k)} = \frac{t_{\ell+1}-t_i}{t_{i+m+1-j-k}-t_i}\, P_{i,j}^{(k-1)} + \frac{t_{i+m+1-j-k}-t_{\ell+1}}{t_{i+m+1-j-k}-t_i}\, P_{i-1,j}^{(k)}}$$

. **Résultat** : $Q_{\ell-r} = P_{\ell,r}^{(m-r)}$ $\qquad (0 \le r \le m)$.

<u>Remarque</u> : Les combinaisons linéaires (SB1) et (SB2) sont toutes convexes.

On peut démontrer que **les 2 algorithmes (SB1) et (SB2) commutent** de la même manière que les algorithmes (A1) et (A2) de la forme tétraédrale de l'algorithme de De Boor (cf. [11], p. 27-28).

b) *L'algorithme (SB) fournit le polygone Bézier local*

Nous allons démontrer que les coefficients de l'expression (1) sont fournis par l'algorithme (SB) :

$$Q_{\ell-r} = P_{\ell,r}^{(m-r)} \qquad (0 \le r \le m)$$

Appelons ${}^*P_{i,j}^{(k)}(t)$ les points générés pour $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$ par l'algorithme tétraédral de De Boor : nous allons montrer qu'ils s'obtiennent simplement au moyen des points générés par l'algorithme (SB).

On a évidemment :

$$^{*}P_{i,o}^{(o)}(t) = P_{i,o}^{(o)} \qquad (\ell\text{-}m \le i \le \ell)$$

L'algorithme (A1) donne :

$$^{*}P_{i,1}^{(o)}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i} P_{i,o}^{(o)} + \frac{t_{i+m}-t}{t_{i+m}-t_i} P_{i-1,o}^{(o)}$$

L'algorithme (SB1) donne :

$$P_{i,1}^{(o)} = \frac{t_\ell - t_i}{t_{i+m}-t_i} P_{i,o}^{(o)} + \frac{t_{i+m}-t_\ell}{t_{i+m}-t_i} P_{i-1,o}^{(o)}$$

L'algorithme (SB2) donne :

$$P_{i,o}^{(1)} = \frac{t_{\ell+1}-t_i}{t_{i+m}-t_i} P_{i,o}^{(o)} + \frac{t_{i+m}-t_{\ell+1}}{t_{i+m}-t_i} P_{i-1,o}^{(o)}$$

En posant $u = \dfrac{t-t_\ell}{t_{\ell+1}-t_\ell}$, on voit facilement que :

(2) $$^{*}P_{i,1}^{(o)}(t) = (1-u)\, P_{i,1}^{(o)} + u\, P_{i,o}^{(1)} \qquad (\ell\text{-}m+1 \le i \le \ell)$$

Supposons que l'on ait démontré, à l'ordre j-1 :

(3) $$^{*}P_{i,j-1}^{(o)}(t) = \sum_{r=o}^{j-1} \binom{j-1}{r} u^r (1-u)^{j-1-r} P_{i,j-1-r}^{(r)} \qquad (\ell\text{-}m+j-1 \le i \le \ell)$$

(pour j = 2, on obtient (2)),

et démontrons-le à l'ordre j. Au moyen de l'algorithme (A1), on a :

$$^{*}P_{i,j}^{(o)}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m+1-j}-t_i}\, {}^{*}P_{i,j-1}^{(o)}(t) + \frac{t_{i+m-j+1}-t}{t_{i+m+1-j}-t_i}\, {}^{*}P_{i-1,j-1}^{(o)}(t), \text{ soit :}$$

$$^{*}P_{i,j}^{(o)}(t) = \sum_{r=o}^{j-1} \binom{j-1}{r} u^r (1-u)^{j-1-r} \left[\frac{t-t_i}{t_{i+m+1-j}-t_i} P_{i,j-1-r}^{(r)} + \frac{t_{i+m+1-j}-t}{t_{i+m+1-j}-t_i} P_{i-1,j-1-r}^{(r)} \right]$$

Or l'algorithme (SB2) donne :

$$P_{i,j-1-r}^{(r+1)} = \frac{t_{\ell+1}-t_i}{t_{i+m+1-j}-t_i} P_{i,j-1-r}^{(r)} + \frac{t_{i+m+1-j}-t_{\ell+1}}{t_{i+m+1-j}-t_i} P_{i-1,j-1-r}^{(r)}$$

et l'algorithme (SB1) donne :

$$P_{i,j-r}^{(r)} = \frac{t_\ell - t_i}{t_{i+m-j+1} - t_i} P_{i,j-1-r}^{(r)} + \frac{t_{i+m-j+1} - t_\ell}{t_{i+m-j+1} - t_i} P_{i-1,j-1-r}^{(r)}$$

Donc si l'on calcule la quantité :

$$(5) \qquad (1-u)\, P_{i,j-r}^{(r)} + u\, P_{i,j-1-r}^{(r+1)}, \text{ avec } u = \frac{t - t_\ell}{t_{\ell+1} - t_\ell}$$

on obtient :

$$\frac{t - t_i}{t_{i+m+1-j} - t_i} P_{i,j-1-r}^{(r)} + \frac{t_{i+m+1-j} - t}{t_{i+m+1-j} - t_i} P_{i-1,j-1-r}^{(r)}$$

c'est à dire le crochet de l'expression (4) : on peut donc remplacer le crochet par (5) et on obtient finalement

$$^*P_{i,j}^{(o)}(t) = \sum_{r=o}^{j} \binom{j}{r} u^r (1-u)^{j-r} P_{i,j-r}^{(r)}$$

c'est à dire (3) à l'ordre j, cqfd.

En particulier, on obtient pour $i = \ell$ et $j = m$:

$$S_m(t) = {}^*P_{\ell,m}^{(o)}(t) = \sum_{r=o}^{m} \binom{m}{r} u^r (1-u)^{m-r} P_{\ell,m-r}^{(r)} = \tilde{S}_m(u)$$

et en comparant avec (1), on a bien le polygone Bézier local :

$$\boxed{Q_{\ell+r-m} = P_{\ell,m-r}^{(r)}} \qquad (0 \le r \le m)$$

c) *Simplification de l'algorithme (SB) - Exemples*

Une étude plus précise des algorithmes (SB1) et (SB2) montre que de nombreux points du tétraèdre formé au moyen de $P_{i,j}^{(k)}$ sont confondus. La figure se simplifie considérablement et il faut en tenir compte dans le calcul effectif des sommets du polygone Bézier local.

Lorsque $i = \ell$, (SB1) donne :

$$(6) \qquad P^{(k)}_{\ell,j} = P^{(k)}_{\ell-1,j-1} \qquad \begin{array}{l}(0 \le k \le m-1)\\(1 \le j \le m-k)\end{array}$$

De même, lorsque $i = \ell+j+k-m$, (SB2) donne :

$$(7) \qquad P^{(k)}_{\ell+j+k-m,j} = P^{(k-1)}_{\ell+j+k-m,j} \qquad \begin{array}{l}(0 \le j \le m-1)\\(1 \le k \le m-j)\end{array}$$

Alors que le nombre de combinaisons convexes de type (SB1) ou (SB2) nécessaire pour calculer tous les Q_i $(\ell-m \le i \le \ell)$ est égal, pour l'algorithme (SB), à :

$$N_1 = \frac{m(m+1)(m+5)}{6}$$

il se réduit, pour la forme simplifiée, à :

$$N_2 = \frac{(m-1)(m^2+m+6)}{6}$$

d'où un gain appréciable, surtout pour les petites valeurs de m qui sont les plus utilisées.

m	2	3	4	5	6	7	8
N_1	7	16	30	50	77	112	156
N_2	2	6	13	24	40	62	91

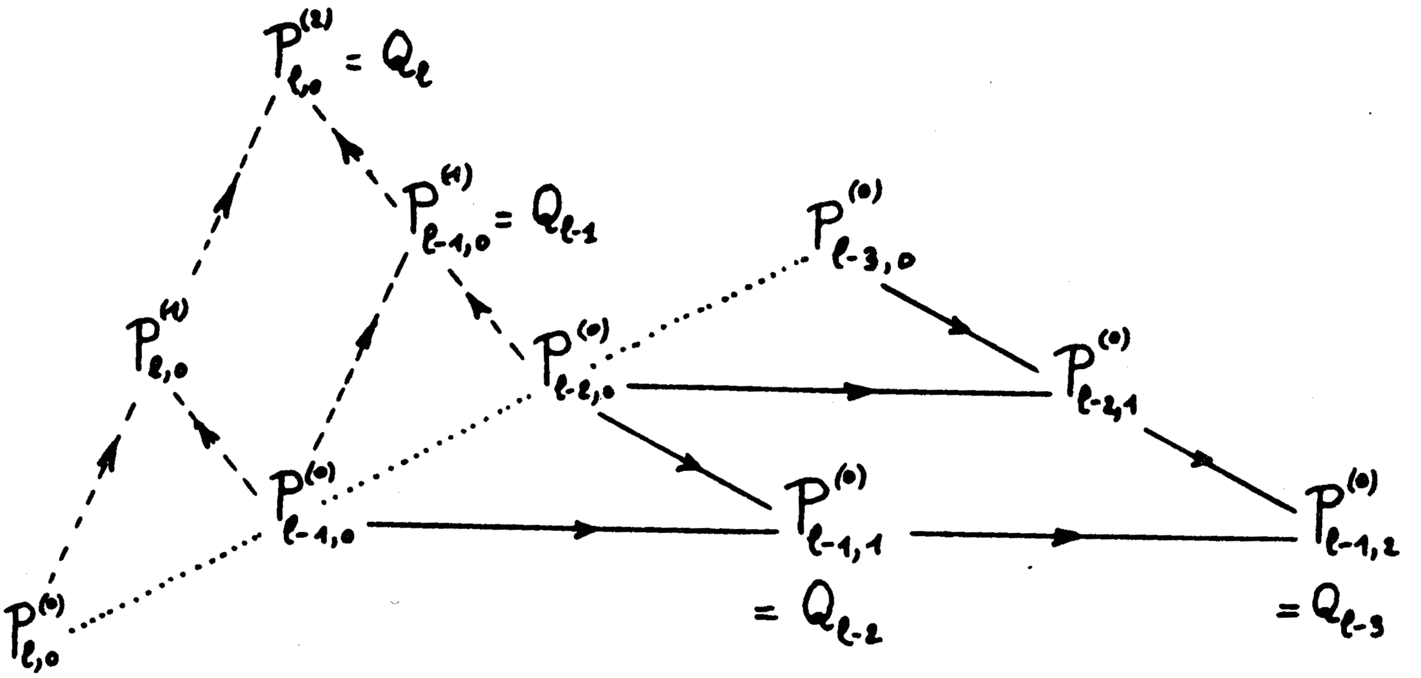
A titre d'exemple, voici ce que donne l'algorithme (SB) simplifié pour m = 3 (figure page suivante).

En effet, (6) donne successivement :

$$P^{(o)}_{\ell,1} = P^{(o)}_{\ell-1,o},\ P^{(o)}_{\ell,2} = P^{(o)}_{\ell-1,1},\ P^{(o)}_{\ell-1,1},\ P^{(o)}_{\ell,3} = P^{(o)}_{\ell-1,2}$$

$$P^{(1)}_{\ell,1} = P^{(1)}_{\ell-1,o},\ P^{(1)}_{\ell,2} = P^{(1)}_{\ell-1,1}$$

$$P^{(2)}_{\ell,1} = P^{(2)}_{\ell-1,o}$$



D'autre part (7) donne les simplifications suivantes :

$P^{(1)}_{\ell-2,o} = P^{(o)}_{\ell-2,o}$, $P^{(2)}_{\ell-1,o} = P^{(1)}_{\ell-1,o}$, $P^{(3)}_{\ell,o} = P^{(2)}_{\ell,o}$

$P^{(1)}_{\ell-1,1} = P^{(o)}_{\ell-1,1}$, $P^{(2)}_{\ell,1} = P^{(1)}_{\ell,1}$.

$P^{(1)}_{\ell,2} = P^{(o)}_{\ell,2}$.

En particulier, on obtient pour le polygone Bézier local :

$Q_{\ell-3} = P^{(o)}_{\ell,3} = P^{(o)}_{\ell-1,2}$

$Q_{\ell-2} = P^{(1)}_{\ell,2} = P^{(o)}_{\ell,2} = P^{(o)}_{\ell-1,1}$

$Q_{\ell-1} = P^{(2)}_{\ell,1} = P^{(2)}_{\ell-1,o} = P^{(1)}_{\ell-1,o}$

$Q_\ell \;\; = P^{(3)}_{\ell,o} = P^{(2)}_{\ell,o}$

BUS LILLE

V - RACCORDEMENT DES POLYGONES BEZIER LOCAUX DANS LE POLYGONE BÉZIER GLOBAL

5.1 Cas général (subdivision quelconque)

Pour $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$, le point courant de la courbe-spline $S_m(t) = \sum_{i=\ell-m}^{\ell} P_i N_{i,m+1}(t)$ peut s'écrire :

$$\tilde{S}_m(u) = \sum_{r=o}^{m} Q_{\ell+r-m} \, \phi_{m,r}(u)$$

où $u = (t-t_\ell) / h_\ell \in [0, 1]$ $(h_\ell = t_{\ell+1}-t_\ell > 0)$.

Le B-polygone local $\{Q_{\ell-m}, \ldots, Q_\ell\}$ s'obtient à partir du S-polygone local $\{P_{\ell-m}, \ldots, P_\ell\}$ au moyen de l'algorithme (SB).

De même, si $t \in [t_{\ell+1}, t_{\ell+2}]$, le point courant $S^*_m(t) = \sum_{i=\ell+1-m}^{\ell+1} P_i N_{i,m+1}(t)$ peut s'écrire :

$$\tilde{S}^*_m(v) = \sum_{r=o}^{m} Q^*_{\ell+r-m+1} \, \phi_{m,r}(v)$$

où $v = (t-t_{\ell+1}) / h_{\ell+1} \in [0, 1]$.

Le B-polygone local $\{Q^*_{\ell-m+1}, \ldots, Q^*_{\ell+1}\}$ s'obtient à partir du S-polygone local $\{P_{\ell-m+1}, \ldots, P_{\ell+1}\}$ au moyen de l'algorithme (SB*) déduit de (SB) en remplaçant ℓ par $\ell+1$.

En vertu des propriétés (B2) du paragraphe 1.1, le raccordement à l'ordre m-1 de S_m et S^*_m au point $t_{\ell+1}$ s'écrit :

(8) $\quad \Delta^k Q_{\ell-k}/h^k_\ell = \Delta^k Q^*_{\ell+1-m+k}/h^k_{\ell+1} \qquad (0 \leq k \leq m-1)$

Soit Δ_m la matrice triangulaire inférieure d'ordre m ayant comme coefficients :

$$(\Delta_m)_{ij} = (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \text{ pour } 0 \leq j \leq i \leq m-1$$

et ∇_m la matrice d'ordre m ayant comme coefficients :

$$(\nabla_m)_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{m-1-j} \binom{i}{m-1-j} & \text{pour } i+j \geq m-1 \\ 0 & \text{pour } i+j < m-1 \end{cases}$$

En introduisant les vecteurs

$$Q = (Q_{\ell-m+1}, \ldots, Q_\ell)^T$$

$$Q^* = (Q^*_{\ell-m+1}, \ldots, Q^*_\ell)^T$$

et la matrice diagonale $H_{\ell,m} = \operatorname{diag} \{1, 1/h_\ell, \ldots, 1/h_\ell^{m-1}\}$,

les conditions (8) s'écrivent :

$$H_{\ell,m} \nabla_m Q = H_{\ell+1,m} \Delta_m Q^*$$

ou encore :

$$Q^* = R_{\ell,m} Q$$

La **matrice de raccordement** à l'ordre m-1 au point $t_{\ell+1}$ est **définie** par :

$$R_{\ell,m} = \Delta_m^{-1} H_{\ell+1,m}^{-1} H_{\ell,m} \nabla_m \tag{9}$$

Si l'on pose $\rho_\ell = h_{\ell+1} / h_\ell$ et si l'on observe que $(\Delta_m^{-1})_{ij} = \binom{i}{j}$ pour $0 \leq j \leq i \leq m-1$, il est facile de vérifier par récurrence que les coefficients de $R_{\ell,m}$ sont donnés par :

$$(R_{\ell,m})_{ij} = \begin{cases} \phi_{i,m-1-j} (1+\rho_\ell) & \text{pour } i+j \geq m-1 \\ 0 & \text{pour } i+j < m-1 \end{cases}$$

où les ϕ_{rs} sont les polynômes de Bernstein de degré r.

5.2 Cas d'une subdivision uniforme

Comme $\rho_\ell = 1$, toutes les matrices de raccordement coïncident avec la matrice R_m de coefficients :

$$(R_m)_{ij} = \begin{cases} (-1)^{m-1-j}\, 2^{i+j-m+1} \binom{i}{i+j-m+1} & \text{pour } i+j \geq m-1 \\ 0 & \text{pour } i+j < m-1 \end{cases}$$

<u>Exemple</u> : Raccordement C^2 de deux cubiques.

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \Delta_3^{-1} \nabla_3$$

$$Q^*_{\ell-2} = Q_\ell$$

$$Q^*_{\ell-1} = 2Q_\ell - Q_{\ell-1}$$

$$Q^*_\ell = 4Q_\ell - 4Q_{\ell-1} + Q_{\ell-2}$$

On remarque que Q_ℓ est le milieu de l'intervalle $Q_{\ell-1}\, Q^*_{\ell-1}$ et on note également la simplicité de la construction de Q^*_ℓ. Dans le cas général, les m premiers sommets du polygone Q^* se déduisent des m derniers sommets du polygone Q : seul le sommet $Q^*_{\ell+1}$ doit être construit, par exemple à partir de l'algorithme de De Boor appliqué à $S^*_m(t_{\ell+2})$ ou de l'algorithme de Bézier appliqué à $\tilde{S}^*_m(1) = Q^*_{\ell+1}$.

<u>Remarque</u> : Nous avons imposé le raccordement des courbes Bézier jusqu'à l'ordre m-1 parce qu'elles proviennent d'une même courbe spline de classe C^{m-1}, mais on peut évidemment imaginer des conditions de raccordement plus faibles entre deux courbes Bézier quelconques.

VI - RECONSTITUTION DU POLYGONE SPLINE À PARTIR DU POLYGONE BÉZIER GLOBAL D'UNE COURBE SPLINE (ALGORITHME (BS))

On considère maintenant une courbe spline :

$$S_m(t) = \sum_i P_i \, N_{i,m+1}(t)$$

dont on ne connaît que le polygone Bézier global vérifiant les conditions de raccordement vues au paragraphe précédent.

On se propose de reconstruire le polygone spline local :

$$\mathcal{P} = \{P_{\ell-m}, P_{\ell-m+1}, \ldots, P_\ell\}$$

à partir du polygone Bézier local :

$$\mathcal{Q} = \{Q_{\ell-m}, Q_{\ell-m+1}, \ldots, Q_\ell\}$$

Les conditions de raccordement étant vérifiées et la suite des noeuds $\{t_i\}$ étant fixée, on construit le polygone-spline associé par l'algorithme (BS) suivant :

6.1. Algorithme (BS) inverse de l'algorithme (SB)

Il s'agit de retrouver les points :

$$P_i = P_{i,o}^{(o)} \qquad (\ell-m \le i \le \ell)$$

à partir des points générés par l'algorithme (SB) :

$$Q_i = P_{\ell,\ell-i}^{(i+m-\ell)} \qquad (\ell-m \le i \le \ell)$$

Considérons le système linéaire suivant obtenu à partir de (SB2) et (SB1) :

$$\begin{cases} P_{i,j}^{(k)} = \dfrac{t_{\ell+1}-t_i}{t_{i+m+1-j-k}-t_i} \, P_{i,j}^{(k-1)} + \dfrac{t_{i+m+1-j-k}-t_{\ell+1}}{t_{i+m+1-j-k}-t_i} \, P_{i-1,j}^{(k-1)} \\[2ex] P_{i,j+1}^{(k-1)} = \dfrac{t_\ell-t_i}{t_{i+m+1-j-k}-t_i} \, P_{i,j}^{(k-1)} + \dfrac{t_{i+m+1-j-k}-t_\ell}{t_{i+m+1-j-k}-t_i} \, P_{i-1,j}^{(k-1)} \end{cases}$$

Le déterminant étant égal à $(t_{\ell+1}-t_\ell)/(t_{i+m+1-j-k}-t_i) \neq 0$, il y a une solution unique que l'on obtient immédiatement par élimination :

$$\begin{cases} P_{i,j}^{(k-1)} = \dfrac{t_{i+m+1-j-k}-t_\ell}{t_{\ell+1}-t_\ell} P_{i,j}^{(k)} + \dfrac{t_{\ell+1}-t_{i+m-1-j-k}}{t_{\ell+1}-t_\ell} P_{i,j+1}^{(k-1)} \\[2ex] P_{i-1,j}^{(k-1)} = \dfrac{t_i-t_\ell}{t_{\ell+1}-t_\ell} P_{i,j}^{(k)} + \dfrac{t_{\ell+1}-t_i}{t_{\ell+1}-t_\ell} P_{i,j+1}^{(k-1)} \end{cases}$$

La correspondance $Q_{i,j}^{(k)} = P_{\ell-j,\ell-i}^{(m-\ell+i-j-k)}$ fournit les 2 algorithmes suivants qui "commutent" comme (SB1) et (SB2) et dont les points générés peuvent être disposés suivant un tétraèdre :

. **Initialisation** : $Q_{i,o}^{(o)} = Q_i$ $\qquad (\ell-m \le i \le \ell)$

. Pour $0 \le k \le m-1$, $1 \le j \le m-k$, et $\ell-m+j+k \le i \le \ell$:

(BS1) $$\boxed{Q_{i,j}^{(k)} = \frac{t_{\ell-j+1}-t_\ell}{t_{\ell+1}-t_\ell} Q_{i,j-1}^{(k)} + \frac{t_{\ell+1}-t_{\ell-j+1}}{t_{\ell+1}-t_\ell} Q_{i-1,j-1}^{(k)}}$$

. Pour $0 \le j \le m-1$, $1 \le k \le m-j$ et $\ell-m+j+k \le i \le \ell$:

(BS2) $$\boxed{Q_{i,j}^{(k)} = \frac{t_{\ell+k}-t_\ell}{t_{\ell+1}-t_\ell} Q_{i,j}^{(k-1)} + \frac{t_{\ell+1}-t_{\ell+k}}{t_{\ell+1}-t_\ell} Q_{i-1,j}^{(k-1)}}$$

. **Résultat** : $Q_{\ell,r}^{(m-r)} = P_{\ell-r}$ $\qquad (0 \le r \le m)$

Remarques :

1) Les coefficients des combinaisons linéaires (BS1) et (BS2) sont **indépendants de** m.

2) La somme des coefficients est toujours égale à 1, mais ils ne sont plus ≥ 0 et on n'a pas de combinaisons convexes comme dans l'algorithme (SB).

5.2 Forme simplifiée de l'algorithme (BS) - Exemple

Il apparait clairement que de nombreux points sont confondus. En effet :

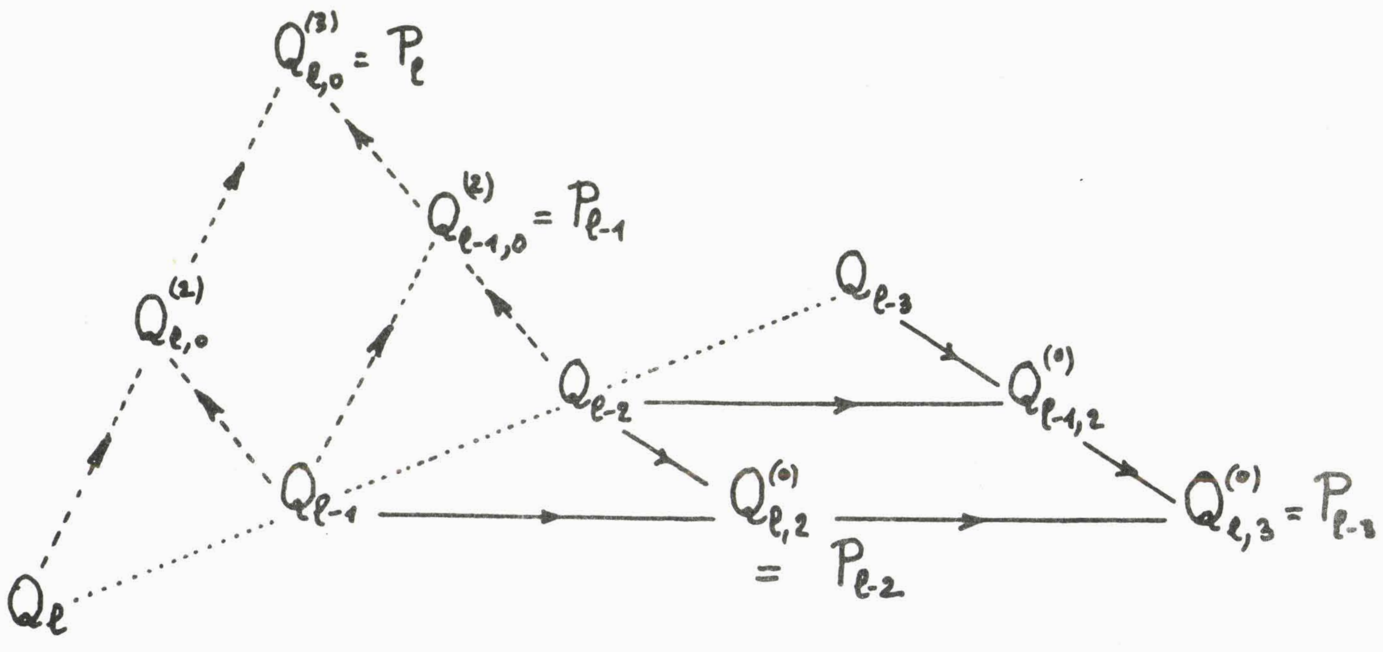
- d'une part lorsque j = 1 dans (BS1), on obtient :

$$Q_{i,1}^{(k)} = Q_{i-1,o}^{(k)} \qquad (0 \le k \le m-1,\ \ell-m+k+1 \le i \le \ell)$$

- d'autre part lorsque k = 1 dans (BS2), on obtient :

$$Q_{i,j}^{(1)} = Q_{i,j}^{(o)} \qquad (0 \le j \le m-1,\ \ell-m+j+1 \le i \le \ell)$$

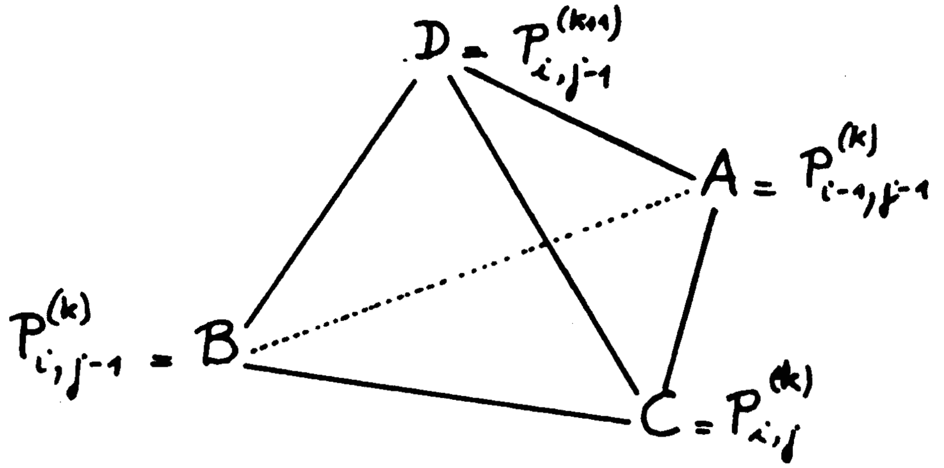
Exemple : Tétraèdre simplifié pour m = 3



VII - POLYGONES EMBOITÉS INTERMÉDIAIRES ENTRE LE POLYGONE SPLINE ET LE POLYGONE BÉZIER GLOBAL

7.1 Algorithme (SB3) et (SB4)

Considérons le petit tétraèdre :



(SB1) donne : $C = \alpha A + (1-\alpha) B$

(SB2) donne : $D = \beta A + (1-\beta) B$

avec $\alpha = (t_{i+m+1-j-k} - t_\ell)/(t_{i+m+1-j-k} - t_i)$

$\beta = (t_{i+m+1-j-k} - t_{\ell+1})/(t_{i+m+1-j-k} - t_i)$

Un calcul simple fournit immédiatement les nouveaux algorithmes :

(SB3) $C = \gamma A + (1-\gamma) D$

(SB4) $D = \delta B + (1-\delta) C$

avec $\gamma = (t_{\ell+1} - t_\ell) / (t_{\ell+1} - t_i)$

$\delta = (t_{\ell+1} - t_\ell) / (t_{i+m+1-j-k} - t_\ell)$

On vérifie facilement que $0 \le \gamma,\ \delta \le 1$, donc que les combinaisons linéaires ci-dessus sont **convexes**.

7.2 Polygones emboités pour les splines de degré impair ($m=2n+1$)

On considère les chaînes de sommets suivantes, pour un indice ℓ donné :

$$C_{\ell,o} = \{P_{\ell-n-1} \ ; \ P_{\ell-n}\} \qquad \text{(2 sommets)}$$

$$C_{\ell,1} = \{P^{(o)}_{\ell-n,1} \ ; \ P^{(1)}_{\ell-n,o}\} \qquad \text{(2 sommets)}$$

Et de façon générale, pour $0 \leq r \leq n$:

$$C_{\ell,2r} = \{P^{(k)}_{\ell-n+r-1,j}\}_{0\leq k\leq r} \cup \{P^{(k)}_{\ell-n+r,j}\}_{r\leq k\leq 2r}$$

$$(j+k = 2r, \text{ au total } 2r+2 \text{ sommets})$$

et pour $0 \leq r \leq n-1$

$$C_{\ell,2r+1} = \{P^{(k)}_{\ell-n+r,j}\}_{0\leq k\leq 2r+1}$$

$$(j+k = 2r+1, \text{ au total } 2r+2 \text{ sommets})$$

Les chaînes ci-dessus se raccordent pour former des polygones emboités les uns dans les autres :

a) $C_{\ell,2r}$ et $C_{\ell+1,2r}$ ont le sommet $P^{(2r)}_{\ell-n+r,o}$ en commun et la succession de toutes les chaînes $C_{\ell,2r}$ (pour ℓ variant de $-\infty$ à $+\infty$, ou de m à $m+n-1$ suivant que l'on a une courbe paramétrée sur $\mathbb{R}$ ou sur $[t'_o, t'_{n+2m}]$) constitue **le polygone** $\mathcal{P}_{2r}$.

b) $C_{\ell,2r+1}$ et $C_{\ell+1,2r+1}$ sont telles que le dernier sommet $P^{(2r+1)}_{\ell-n+r,o}$ de $C_{\ell,2r+1}$ précède le premier sommet $P^{(o)}_{\ell-n+r+1,2r+1}$ de $C_{\ell+1,2r+1}$: on constitue ainsi **le polygone** $\mathcal{P}_{2r+1}$.

$\mathcal{P}_o$ est le polygone spline et $\mathcal{P}_{m-1}$ le polygone Bézier global.

Le passage d'un polygone au suivant se fait au moyen des algorithmes (SB1) à (SB4) (cf [11]. p. 42-26).

7.3 Polygones emboités pour les splines de degré pair (n=2m)

On considère les chaînes de sommets suivantes, pour un indice ℓ donné :

$$C_{\ell,o} = \{P_{\ell-n-1,o}\ P_{\ell-n},\ P_{\ell-n+1}\} \qquad \text{(3 sommets)}$$

$$C_{\ell,1} = \{P^{(o)}_{\ell-n,1}\ ;\ P^{(1)}_{\ell-n,o}\} \qquad \text{(2 sommets).}$$

Et de façon générale :

$$C_{\ell,2r} = \{P^{(k)}_{\ell-n+r,j}\}_{0\leq j\leq 2r} \qquad \text{(j+k=2r, au total 2r+1 sommets)}$$

pour $r = 1, \ldots, n-1$

$$C_{\ell,2r+1} = \{P^{(k)}_{\ell-n+r,\ j}\}_{0\leq j\leq 2r+1} \qquad \text{(j+k=2r+1, au total 2r+2 sommets)}$$

pour $r = 0, 1, \ldots, n-2$.

Les raccordements de ces chaînes se font de la façon suivante :

a) $C_{\ell,2r}$ et $C_{\ell+1,2r}$ sont jointes par leurs sommets respectifs $P^{(2r)}_{\ell-n+r,o}$ et $P^{(o)}_{\ell-n+r+1,2r}$ et constituent le polygone $\mathcal{P}_{2r}$.

b) $C_{\ell,2r+1}$ et $C_{\ell+1,2r+1}$ sont jointes par leurs sommets respectifs $P^{(2r+1)}_{\ell-n+r,o}$ et $P^{(o)}_{\ell-n+r+1,2r+1}$ et constituent le polygone $\mathcal{P}_{2r+1}$.

Le passage d'un polygone au suivant se fait au moyen des algorithmes (SB1) à (SB4) (cf [11], pages 46-56).

$\mathcal{P}_o$ est le polygone spline et $\mathcal{P}_{m-1}$ le polygone Bézier global.

7.4 Un exemple : splines quintiques sur une subdivision uniforme (figure 7)

Toutes les constructions ci-dessus restent valables lorsque la courbe est définie sur un intervalle fini : la seule particularité est que de nombreux sommets sont confondus du fait qu'il y a m+1 noeuds confondus à chaque extrémité de l'intervalle. Il y a "dégénérescence" des polygones emboités.

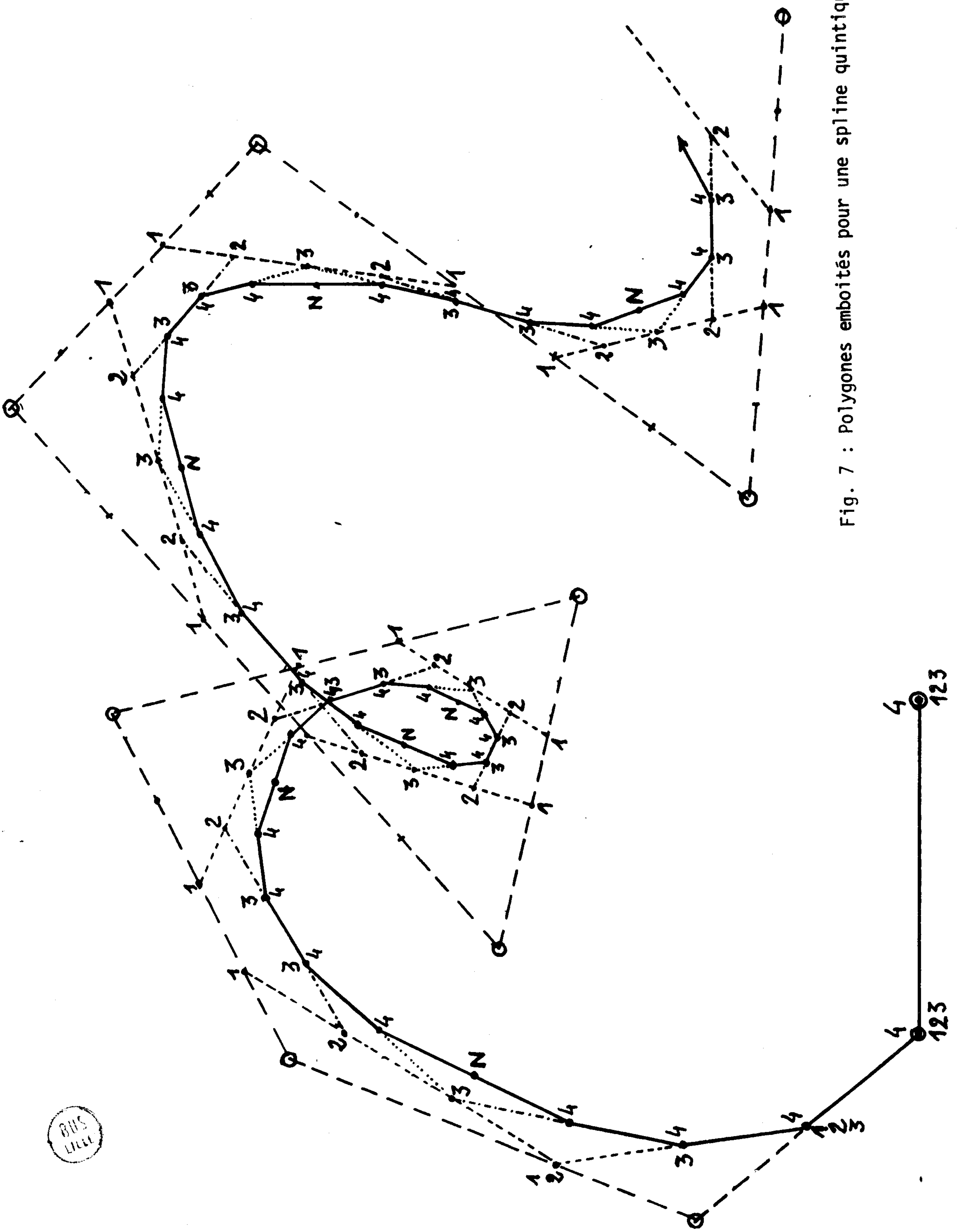


Fig. 7 : Polygones emboîtés pour une spline quintique

BUS LILLE

La figure 7 montre les différents polygones emboités pour une spline quintique sur une subdivision uniforme. On a numéroté i les sommets du polygone P_i pour $0 \le i \le 4$. P_o est le **S-polygone** (tirets longs), P_1, P_2 et P_3 sont les différents polygones intermédiaires et P_4 est le **B-polygone global** (trait continu). Les points N sont les noeuds de raccordement des différents arcs Bézier de degré 5 constituant la courbe spline.

On donne dans l'annexe de [11] les constructions des différents polygones emboités pour les splines de degrés ≤ 5 sur une subdivision uniforme.

7.5 Application aux surfaces (figure 8)

La figure 8 représente la construction du réseau Bézier local d'une spline bicubique à partir du réseau spline local (la subdivision est uniforme). Le réseau spline local est ici :

$P = \{P_{ij},\ 0 \le i,j \le 3\}$.

On construit alors successivement ; pour $0 \le i \le 3$:

$$Q^*_{i,o} = \frac{1}{6}(P_{i,o} + 4P_{i,1} + P_{i,2})$$

$$Q^*_{i,1} = \frac{1}{3}(2P_{i,1} + P_{i,2})$$

$$Q^*_{i,2} = \frac{1}{3}(P_{i,1} + 2P_{i,2})$$

$$Q^*_{i,3} = \frac{1}{6}(P_{i,1} + 4P_{i,2} + P_{i,3})$$

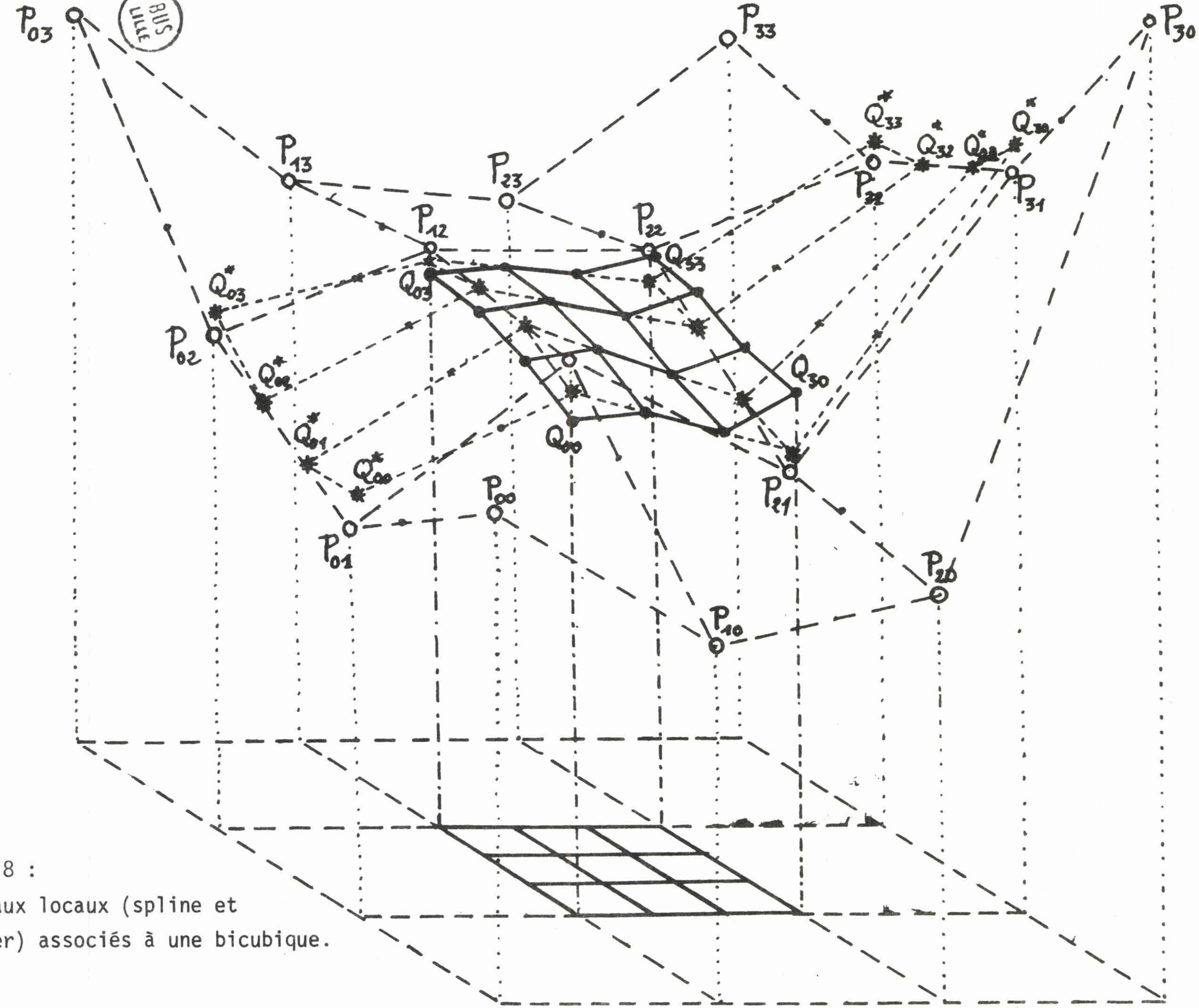
puis, pour $0 \le j \le 3$:

$$Q_{o,j} = \frac{1}{6}(Q^*_{o,j} + 4Q^*_{1,j} + Q^*_{2,j})$$

$$Q_{1,j} = \frac{1}{3}(2Q^*_{1,j} + Q^*_{2,j})$$

$$Q_{2,j} = \frac{1}{3}(Q^*_{1,j} + 2Q^*_{2,j})$$

$$Q_{3,j} = \frac{1}{6}(Q^*_{1,j} + 4Q^*_{2,j} + Q^*_{3,j})$$



BUS LILLE

Fig. 8 :
Réseaux locaux (spline et
Bézier) associés à une bicubique.

et le réseau Bézier local $Q = \{Q_{ij}, 0 \leq i,j \leq 3\}$ est beaucoup plus proche de la surface que le réseau spline, ce qui peut être intéressant dans certaines représentations graphiques.

Cette construction est généralisable aux splines obtenues par produit tensoriel de splines à une variable : il suffit d'appliquer deux fois l'algorithme SB respectivement par rapport aux indices i et j.

VIII - APPLICATIONS À L'ÉTUDE DE LA FORME DES APPROXIMANTS SPLINES DES COURBES PARAMÉTRÉES

Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous ne donnons que les idées et les résultats essentiels et renvoyons le lecteur intéressé aux chapitres 4, 5 et 6 de [11].

8.1 Diminution de la variation

Il est facile de généraliser aux courbes Bézier les résultats de Polya et Schoenberg [15] sur la propriété de diminution de la variation (P.D.V.) des approximants de Bernstein.

Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ un arc paramétré et $\mathcal{B}_n g$ la courbe Bézier dont le B-polygone est :

$$Q = \{Q_i = g(i/n),\ 0 \le i \le n\}$$

On désigne par $V_H(g)$ le nombre de fois où l'arc g traverse l'hyperplan affine H. On a alors :

$$(10) \qquad V_H(\mathcal{B}_n g) \le V_H(Q) \le V_H(g)$$

Q désigne ici, par abus de langage, la ligne polygonale de sommets Q_i.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\tau = \{t_j\}$ une subdivision de I, $\{N_{j,m+1}, j \in J\}$ la base des B-splines de degrés m et $\theta_j = (t'_{j+1} + \dots + t'_{j+m}) / m$ les points nodaux associés. L'approximant de Schoenberg-Marsden [22] de l'arc paramétré $f : I \to \mathbb{R}^p$ est la courbe spline définie sur I par :

$$S_m f(t) = \sum_{j \in J} f(\theta_j)\, N_{j,m+1}(t)$$

Son S-polygone est donc $P_o = \{P_j = f(\theta_j),\ j \in J\}$ Comme on passe du S-polygone P_o au B-polygone global P_{m-1} par une suite de polygones emboités P_i, on a, pour tout hyperplan affine H :

$$V_H(P_{m-1}) \leq V_H(P_i) \leq V_H(P_o) \leq V_H(f)$$

D'autre part, $S_m f$ est localement une courbe Bézier et P_{m-1} un B-polygone, par conséquent, on a d'après (10) :

$$V_H(S_m f)_{loc} \leq V_H(P_{m-1})_{loc}$$

Enfin, comme les différentes courbes Bézier constituant la courbe spline $S_m f$ et les différents B-polygones locaux constituant le B-polygone global P_{m-1} se recollent tangentiellement, on obtient :

$$V_H(S_m f) \leq V_H(P_{m-1}) \leq V_H(P_o) \leq V_H(f)$$

Autrement dit, on obtient ainsi une preuve géométrique de la P.D.V. des approximants de Schoenberg des arcs paramétrés. Cette propriété est utilisée en dessin graphique.

8.2 Diminution de la forme (dans $\mathbb{R}^2$)

La P.D.V. est une propriété assez grossière. Dans un travail commun réalisé avec B. Germain-Bonne [11], nous avons introduit la notion de **forme d'un arc paramétré** et démontré que, sous certaines conditions, l'approximant de Schoenberg diminuait la forme de l'arc de départ.

Soit $P = \{P_j = f(\theta_j),\ j \in J\}$ le S-polygone de l'approximant de Schoenberg $S_m f$ de l'arc paramétré $f : I \to \mathbb{R}^2$. Désignons par α_j l'angle orienté $(P_{j-1}P_j, P_jP_{j+1})$. Le vecteur $\alpha = (\alpha_j)$ se décompose en q blocs $A_1, \ldots, A_q$ de composantes de même signe et on lui associe le vecteur alterné $\beta = (\beta_i)$ de $\mathbb{R}^q$ de composantes $\beta_i = \sum_{\alpha_j \in A_i} \alpha_j$

Définition 5 : β *est le vecteur forme (réelle) du polygone P. La forme de* f, *si elle existe, est la limite des formes des polygones P inscrits dans la courbe lorsque la subdivision* $\theta = (\theta_j)$ *est de plus en plus fine. On note* F(C) *la forme de* C = f(I).

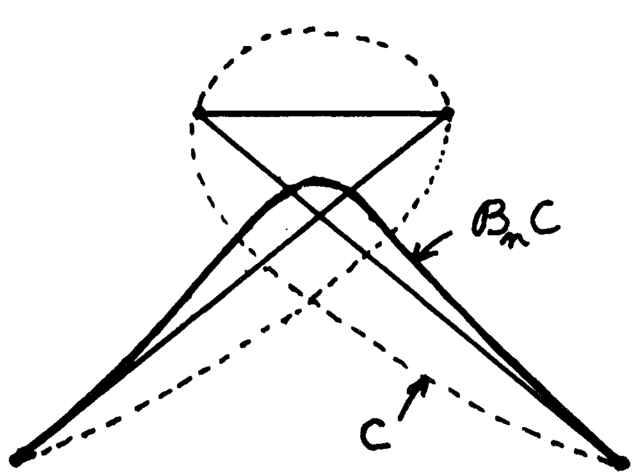
Pour comparer les formes entre elles, on introduit l'ordre suivant :

Définition 6 : *Soit* $\beta = (\beta_i) \in \mathbb{R}^q$ *un vecteur alterné. On obtient un vecteur* $\beta' \leq \beta$ *en répétant plusieurs fois l'une ou l'autre des opérations suivantes :*
1) Diminution d'une composante en valeur absolue (sans l'annuler)
2) Si on annule β_i, *on remplace* β *par* $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1} + \beta_{i+1}, \ldots, \beta_q)$ *qui est encore un vecteur alterné.*

Exemple : $(-16,2) \leq (-14, 1, -2,2) \leq (-15,10,-5,4)$
On dit que l'arc paramétré C est de **forme simple** si $F(C) = (\pm\alpha)$ ou $(\pm\alpha, \mp\beta)$ avec $0 \leq \alpha, \beta < \pi$. On démontre alors que si C est de forme simple, si $\mathcal{B}_n C$ est son approximant Bézier de degré n et Q sont B-polygone, on a :

$$F(\mathcal{B}_n C) \leq F(Q) \leq F(C)$$

Remarque : Lorsque la forme de C n'est pas simple, cette propriété n'est plus nécessairement vraie, comme le montre la figure suivante :



L'objectif est de choisir le S-polygone $P = \{P_j = f(\theta_j)\}$ de l'approximant de Schoenberg $S_m f$ de manière que chaque courbe Bézier locale soit de forme simple.

<u>*Définition 7*</u> : *P forme une* **subdivision k-compatible** *de l'arc* $C = f(I)$ *si, pour tout* j, **l'arc $P_j P_{j+k}$ est de forme simple.**
De même, P est un **polygone k-admissible** *si, pour tout j,* **la ligne polygonale $P_j P_{j+k}$ est de forme simple.**

On démontre alors successivement :

- que si P forme une subdivision m-compatible de C ($m \geq 2$), alors $F(P) \leq F(C)$.

- que si le S-polygone $P_o = P$ de $S_m f$ forme une subdivision m-compatible de C, le B-polygone global P_{m-1} est m'-admissible avec $m' \geq m$, ce qui permet de montrer que :

$$F(P_{m-1}) \leq F(P_o)$$

Le résultat final est alors le suivant :

<u>*Théorème*</u> : *Si P est une subdivision m-compatible de* C*, on a la propriété de diminution de la forme pour les approximants de Schoenberg :*

$$F(S_m f) \leq F(P_{m-1}) \leq F(P) \leq F(C)$$

La preuve de ces résultats utilise essentiellement la construction des polygones emboîtés vue au paragraphe 6 et la propriété de diminution des formes simples pour les approximants de Bézier.

RÉFÉRENCES

[1] P. BEZIER, *"Numerical Control, Mathematics and Applications"*. Wiley, London (1972).

[2] P. BEZIER, *"Mathematical and Practical Possibilities of UNISURF"*. Computer Aided Geometric Design, R.E. Barnhill, R.F. Riesenfeld, ed. Academic Press - New York (1974) p. 127-152.

[3] P. BEZIER, *"Essai de définition numérique des courbes et des surfaces expérimentales"*. Thèse, Université de Paris VI (1977).

[4] W. BÖHM, *"Uber die Konstruktion von B-spline Kurven"*. Computing, 18 (1977), p. 161-166.

[5] E. COHEN, T. LYCHE, R. RIESENFELD, *"Discrete B-splines and Subdivision Techniques in Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics"*. Computer Graphics and Image Procressing 14 (1980), p. 87-111.

[6] M.G. COX, *"The Numerical Evaluation of B-splines"*. J. Inst. Math. Aplic. (1972) 10, p. 134-149.

[7] C. DE BOOR, *"On calculating with B-splines"*. J. Approx. Theory, vol 6 (1972) p. 50-62.

[8] C. DE BOOR, *"A practical guide to splines"*. Applied Math. Sciences, Vol 27. Springer-Verlag, New-York (1978).

[9] P.J. DAVIS, *"Interpolation and Approximation"*. Blaisdell Publishing Comp. (1963).

[10] A.R. FORREST, *"Interactive Interpolation and Approximation by Bezier Polynomials"*. Comp. J. Vol. 15 (1972) p. 71-79.

[11] B. GERMAIN-BONNE, P. SABLONNIERE, *"Comparaison des formes de courbes paramétrées et de leurs approximants splines"*. Publication n° 76 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille (octobre 1976).

[12] W.J. GORDON, R.F. RIESENFELD, "*Bernstein-Bézier Methods for the Computer-Aided Design of Free Form Curves and Surfaces*". J. of A.C.M., Vol. 21, n° 2 (April 1974) p. 293-310.

[13] W.J. GORDON, R.F. RIESENFELD, "*B-spline Curves and Surfaces*". Computer Aided Geometric Design. R.E. Barnhill et R.F. Riesenfeld ed. Academic Press, New York (1974) p. 95-126.

[14] G.G. LORENTZ, "*Bernstein Polynomials*". University of Toronton Press (1953).

[15] G. POLYA, I.J. SCHOENBERG, "*On De la Vallée-Poussin means and convex maps*". Pacific J. of Math. Vol. VIII (1958) p. 295.

[16] R.F. RIESENFELD, "*Application of B-spline approximation to geometric problems of Computer Aided Design*". Thesis, Computer Science University of Utah, Salt Lake City (1974).

[17] P. SABLONNIERE, "*Splines et bases de Bernstein. I-Polygones associés à une fonction spline et applications*". Publication n° 109, UER de Mathématiques Pures et Appliquées (avril 1977).

[18] P. SABLONNIERE, "*Spline and Bézier polygons associated with a polynomial spline curve*". Computer Aided Design, vol. 10, n° 4 (1978) p. 257-261.

[19] I.J. SCHOENBERG, "*On Spline Functions*". Inequalities, O. Shisha ed., Academic Press (1967) p. 255-291.

[20] I.J. SCHOENBERG, "*Cardinal Spline Interpolation*". Regional Conference Series in Applied Mathematics n° 12, SIAM, Philadelphia (1973).

[21] L.L. SCHUMAKER, "*Spline Functions : Basic Theory*". John Wiley, New-York (1981).

[22] M.J. MARSDEN, I.J. SCHOENBERG, "*On variation diminishing spline approximation methods*". Mathematica (Cluj) 31 (1966), p. 61-82.

CHAPITRE 2

B-SPLINES ET SPLINES FONDAMENTALES POUR L'INTERPOLATION CARDINALE D'HERMITE DE DEGRE IMPAIR

Hypatie, ô grande âme, adepte du savoir
D'en haut, en ces moments où ta voix grave et claire
Nous démontre les cieux et leur divin mouvoir,
Je m'émerveille, ô vierge sage, et je crois voir
Briller au fond des nuits l'autre vierge, stellaire.

PALLADAS

I - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous utilisons la représentation locale des fonctions splines polynômiales de degré impair dans la base de Bernstein pour la construction d'interpolants d'Hermite aux points entiers de la droite réelle (interpolation cardinale d'Hermite). Plus précisément, soient $n = 2m-1$ et r des entiers positifs, et r suites de réels :

$$y = \{y_\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}\},\ y' = (y'_\nu),\ \ldots,\ y^{(r-1)} = (y_\nu^{(r-1)})$$

représentant éventuellement les valeurs d'une fonction et de ses dérivées aux points entiers. Le problème est de construire une spline polynômiale de l'espace :

$$S_{n,r} = \{S \in C^{n-r}(\mathbb{R}) : \forall\ \nu \in \mathbb{Z},\ S(x) \in \mathbb{P}_n \text{ pour } x \in (\nu, \nu+1)\}$$

vérifiant les conditions d'interpolation :

$$S(\nu) = y_\nu,\ S'(\nu) = y'_\nu,\ \ldots,\ S^{(r-1)}(\nu) = y_\nu^{(r-1)}$$

pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$.

Rappelons quelques résultats dus à Lipow et Schoenberg [6], Schoenberg et Sharma [15] et Lee [5].

Théorème 1 : Pour tout $\gamma \geq 0$, *soit* $Y_\gamma = \{(y_\nu)\ ;\ y_\nu = O(|\nu|^\gamma)$ *et* $S_{n,r,\gamma} = \{S \in S_{n,r}\ ;\ S(x) = O(|x|^\gamma)\}$. *Pour* $n = 2m-1$ *et* $1 \leq r \leq m$, *le problème ci-dessus admet une solution unique dans* $S_{n,r,\gamma}$ *lorsque les suite* $(y_\nu), (y'_\nu), \ldots (y_\nu^{(r-1)})$ *sont dans* Y_γ.

Théorème 2 : La solution unique du problème d'interpolation s'écrit sous la forme :

$$S(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \{y_\nu L_0(x-\nu) + y'_\nu L_1(x-\nu) + \ldots + y_\nu^{(r-1)} L_{r-1}(x-\nu)\}$$

où $L_s = L_{n,r,s}$ *est l'unique spline bornée de l'espace* $(0 \leq s \leq r-1)$:

$$S_{n,r}^{(s)} = \{S \in S_{n,r} : S^{(j)}(\nu) = 0 \text{ pour } \nu \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq j \leq r-1,\ j \neq s\}$$

vérifiant les conditions :

$$L_s^{(s)}(0) = 1 \text{ et } L_s^{(s)}(\nu) = 0 \text{ pour } \nu \neq 0.$$

Les fonctions L_s sont les **splines fondamentales du problème d'interpolation.**

<u>*Théorème 3*</u> *: Tout élément de $S_{n,r}^{(s)}$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$S_s(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} C_\nu\, N_s(x-\nu)$$

où N_s est la **B-spline** *de $S_{n,r}^{(s)}$ de support $[-m+r-1, m-r+1]$, c'est à dire la spline ayant le support (centré à l'origine) le plus petit possible.*

L'interpolant d'Hermite (théorème 2) peut s'exprimer également au moyen des B-splines via le développement de L_s dans cette base (théorème 3).

Le but de ce chapitre est de donner des constructions simples et géométriques des B-splines et des splines fondamentales définies ci-dessus. Ces constructions s'obtiennent à partir des éléments propres d'une matrice de dimension $d = 2(m-r)$ pour les splines de degré $n = 2m-1$ et de classe C^{n-r} alors que les auteurs cités plus haut utilisent une matrice de dimension $d+r$ pour le même problème. L'étude est particulièrement simple lorsque $n = 2r+1$ $(m=r+1)$ car on utilise une matrice de dimension $d=2$ dont on calcule aisément tous les éléments propres.

II - MATRICES DE RACCORDEMENT DES B-POLYGONES LOCAUX D'UNE SPLINE DE CLASSE C^{n-r}

Tout $S \in \mathcal{S}_{n,r}$ s'exprime localement dans la base de Bernstein sous la forme :

(1) $$S(x) = \sum_{\nu=o}^{n} x_\nu^{(j)} \phi_{n,\nu}(x-j)$$

lorsque $x \in [j, j+1]$. Le **B-polygone local de S** sur cet intervalle a comme sommets :

$$\mathbb{Q}_\nu^{(j)} = (j+\nu/n, \; x_\nu^{(j)}) \qquad (0 \le \nu \le n)$$

Le **B-polygone global** $\mathbb{Q}$ de S est constitué par le raccordement à l'ordre n-r des B-polygones locaux $\mathbb{Q}^{(j)} = \{\mathbb{Q}_\nu^{(j)}, \; 0 \le \nu \le n\}$ lorsque $j \in \mathbf{Z}$.

Avec les notations :

$$X_j = (x_o^{(j)}, x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\check{X}_j = (x_r^{(j)}, x_{r+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \in \mathbb{R}^{n-r+1}$$

$$\hat{X}_j = (x_o^{(j)}, x_1^{(j)}, \ldots, x_{n-r}^{(j)}) \in \mathbb{R}^{n-r+1}$$

$$\tilde{X}_j = (x_r^{(j)}, x_{r+1}^{(j)}, \ldots, x_{n-r}^{(j)}) \in \mathbb{R}^{d}$$

(où $d = n-2r+1 = 2(m-r) \ge 0$)

Le raccordement à l'ordre n-r au point x=j se traduit par la relation matricielle :

$$\hat{X}_{j+1} = R_{n-r+1} \check{X}_j$$

où la matrice de raccordement :

$$R_{n-r+1} = \Delta_{n-r+1}^{-1} \nabla_{n-r+1}$$

a été décrite au paragraphe 4 du chapitre 1. Cette matrice est semblable à la matrice :

$$R_{n-r+1}^{*} = \nabla_{n-r+1} \Delta_{n-r+1}^{-1} = \Delta_{n-r+1} R_{n-r+1} \Delta_{n-r+1}^{-1}$$

et d'autre part, on montre que :

$$R_{n-r+1}^{-1} = U_{n-r+1}\, R_{n-r+1}\, U_{n-r+1}$$

où U_p est la matrice de terme général :

$$\begin{cases} u_{ij} = 1 & \text{pour} \quad i+j = p+1 \\ u_{ij} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

inversant l'ordre des composantes d'un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

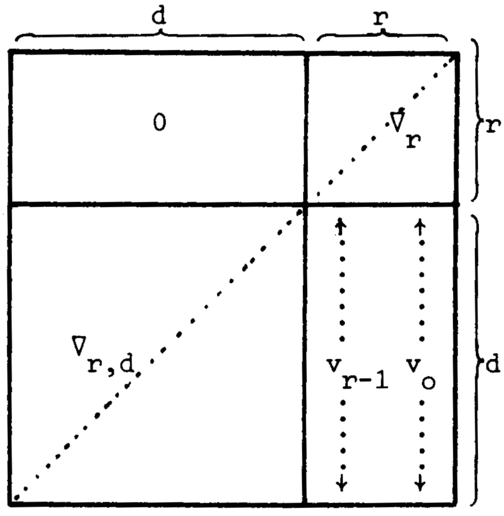
<u>Exemple</u> : n = 5, r = 2 (quintiques de classe C^3)

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 6 & -12 & 8 \end{pmatrix} \qquad R_4^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

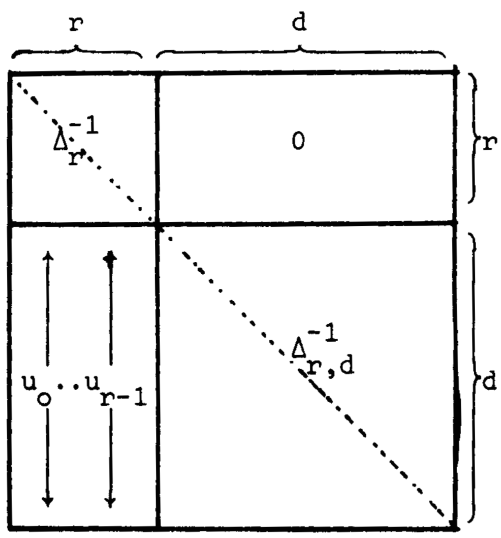
III - Sous-matrices des matrices de raccordement

On a les décompositions en blocs suivantes, pour r et d ≥ 1 :

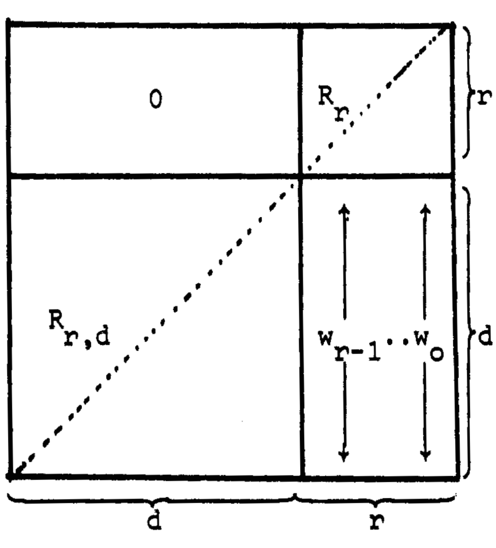
$\nabla_{r+d} =$



$\Delta_{r+d}^{-1} =$



$R_{r+d} =$



BUS LILLE

dont on déduit les relations :

$$R_{r,d} = \Delta_{r,d}^{-1} \nabla_{r,d}$$

$$R_{r,d}^{-1} = \nabla_{r,d}^{-1} \Delta_{r,d} = U_d R_{r,d} U_d$$

$$w_s = (-1)^s [u_s + \binom{s}{s-1} u_{s+1} + \ldots + \binom{r-1}{s-1} u_{r-1}] + \Delta_{r,d}^{-1} v_s$$

$(0 \leq s \leq r-1)$

On pose :

$$\boxed{R_{r,d}^{*} = \nabla_{r,d} \Delta_{r,d}^{-1}}$$

Si l'on introduit les matrices carrées d'ordre $p \geq 1$:

$$K_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } K'_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 1 : *Pour* $r \geq 1$, $n \geq 2r$, on a :

$$\nabla_{r,d} = (-1)^r (K_d)^r \nabla_d$$

$$\Delta_{r,d}^{-1} = \Delta_d^{-1} (K'_d)^r$$

donc $\quad R_{r,d}^{*} = (-1)^r (K_d)^r R_d^{*} (K'_d)^r$

Démonstration : La prémultiplication de ∇_d par K_d a pour effet de remplacer la ligne i par la somme des lignes de 1 à i ; il résulte des propriétés des coefficients du binôme que :

$$K_d.\nabla_d = \begin{pmatrix} 0 \;\ldots\ldots\; 0 & 0 & 1 \\ 0 \;\ldots\ldots\; 0 & -1 & 2 \\ 0 \;\ldots\ldots\; 1 & -3 & 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ (-1)^{d-1} & \binom{d}{3}-\binom{d}{2} & d \end{pmatrix} = -\nabla_{1,d}$$

En répétant cette opération r fois, on obtient :

$$(K_d)^r \nabla_d = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 \\ 0 & & -1 & \binom{r+1}{r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ ((-1)^{d-1}) & \ldots\ldots & -\binom{r+d-1}{r+1} & \binom{r+d-1}{r} \end{pmatrix} = (-1)^r \nabla_{r,d}$$

De même, la postmultiplication de Δ_d^{-1} par K'_d transforme cette matrice en la matrice $\Delta_{1,d}^{-1}$ et en répétant r fois cette opération, on obtient :

$$\Delta_d^{-1}(K'_d)^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \binom{r+1}{r} & 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \binom{r+d-1}{r} & \binom{r+d-1}{r+1} \;\ldots\ldots & \binom{r+d-1}{r+d-1} \end{pmatrix} = \Delta_{r,d}^{-1}$$

Comme $R^*_{r,d} = \nabla_{r,d}\, \Delta_{r,d}^{-1}$, on a bien :

$$R^*_{r,d} = (-1)^r\, (K_d)^r\, \nabla_d\, \Delta_d^{-1}(K'_d)^r$$

$$= (1)^r\, (K_d)^r\, R^*_d(K'_d)^r$$

La matrice R^*_d s'obtient aisément grâce aux propriétés des coefficients du binôme.

$$(2)\quad R_d^* = \begin{pmatrix} \binom{d-1}{d-1} & \binom{d-1}{d-2} & \ldots\ldots & \binom{d-1}{1} & 1 \\ 0 & \binom{d-2}{d-2} & & \binom{d-2}{1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : **Dans le cas d'une suite de noeuds $\tau = (t_j)_{j\in J}$ non uniforme,** les matrices de raccordement $R_{j,r+d}$ admettent des décompositions en blocs analogues à celle de R_{r+d} et l'on obtient :

$$R^*_{j,r,d} = \left(\frac{h_{j+1}}{h_j}\right)^r (H^{-1}_{j+1,d}\ H_{j,d})\ R^*_{r,d} \qquad (h_j = t_{j+1} - t_j > 0)$$

La sous-matrice $R_{j,r,d}$ de $R_{j,r+d}$ est semblable à cette matrice car :

$$R_{j,r,d} = \Delta^{-1}_{r,d}\ R^*_{j,r,d}\ \Delta_{r,d}.$$

<u>Exemple</u> : $r = 2$, $n = 5$, donc $d = n-2r+1 = 2$.

$$R^*_{2,2} = \nabla_{2,2}\ \Delta^{-1}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_{j,2,2} = \left(\frac{h_{j+1}}{h_j}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_{j+1}/h_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\rho_j^2 & \rho_j^2 \\ 8\rho_j^3 & 3\rho_j^3 \end{pmatrix}$$

en posant $\rho_j = h_{j+1}/h_j$. D'autre part, on a:

$$R_{j,4} = \Delta_4^{-1} H^{-1}_{j+1,4} H_{j,4} \nabla_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_j & 1+\rho_j \\ 0 & \rho_j^2 & -2\rho_j(1+\rho_j) & (1+\rho_j)^2 \\ -\rho_j^3 & 3\rho_j^2(1+\ _j) & -3\rho_j(1+\ _j)^2 & (1+\rho_j)^3 \end{pmatrix}$$

d'où $R_{j,2,2} = \rho_j^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\rho_j & 3(1+\rho_j) \end{pmatrix}$

$$R^{*}_{j,2,2} = \Delta_{2,2}\, R_{j,2,2}.\Delta^{-1}_{2,2} = \rho_j^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\rho_j & 3+3\rho_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on retrouve bien $R^{*}_{j,2,2} = \rho_j^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8\rho_j & 3\rho_j \end{pmatrix}$

BUS LILLE

IV - PROPRIÉTÉS SPECTRALES DES MATRICES $R_{r,d}$

Räppelons qu'une matrice A est totalement positive, en abrégé T.P. (respectivement strictement totalement positive, en abrégé S.T.P.) si tous ses mineurs sont ≥ 0 (respectivement > 0).

De plus, A est **oscillatoire** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A^k soit S.T.P. D'après un théorème de Gantmacher et Krein ([2] p. 454), il faut et il suffit pour cela que A soit T.P., régulière, et que tous les coefficients $a_{i,i+1}$ et $a_{i+1,i}$ soient > 0.

Les matrices R^*_d, K_d et K'_d sont T.P. (cf. Karlin [4], chap. 3), par conséquent la matrice :

$$B^*_{r,d} = (-1)^r R^*_{r,d} = (K_d)^r R^*_d (K'_d)^r \quad \text{est T.P.}$$

D'autre part, on obtient à partir de (2) :

$$R^*_d . K'_d = \begin{pmatrix} \binom{d}{d-1} & \binom{d}{d-2} & & \binom{d}{1} & 1 \\ 1 & \binom{d-1}{d-2} & \cdots\cdots\cdots & \binom{d-1}{1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est oscillatoire d'après le critère vu plus haut.

La prémultiplication par $(K_d)^r$ et la postmultiplication par $(K'_d)^{r-1}$ conservent cette propriété puisque ces matrices sont régulières, donc :

La matrice $B^*_{r,d}$ est oscillatoire.

D'après un théorème de Gantmacher et Krein ([2], p. 461), les valeurs propres de $B^*_{r,d}$ sont réelles, simples et strictement positives.

Comme $R^*_{r,d} = (-1)^r B^*_{r,d}$ et que $R_{r,d}$ est semblable à $R^*_{r,d}$, on en déduit que les valeurs propres de $R_{r,d}$ sont réelles, distinctes, et de signe $(-1)^r$. (Plus généralement, cette propriété est vraie pour les matrices $R_{j,r,d}$).

Le polynôme de degré d :

$$\Pi^*_{r,d}(\lambda) = |R^*_{r,d}-\lambda I_d| = |R_{r,d}-\lambda I_d|$$

est à coefficients entiers. De plus, la relation :

$$R^{-1}_{r,d} = U_d\ R_{r,d}\ U_d$$

implique que :

$$\Pi^*_{r,d}(\lambda) = |R^{-1}_{r,d}-\lambda I_d|$$

Par conséquent si λ est racine de ce polynôme, il en est de même de λ^{-1} et les coefficients équidistants des extrêmes sont égaux en valeur absolue.

Si $n = 2m-1$, $d = n-2r+1 = 2m-2r$ est pair et les racines peuvent se ranger comme suit :

$$0 < |\lambda_1| < |\lambda| < \dots < |\lambda_{m-r}| < 1 < |\lambda_{m-r+1}| < \dots < |\lambda_d|$$

Nous définissons les polynômes d'Euler-Frobenius pour la multiplicité r par :

$$\Pi_{2m-1,r}(\lambda) = (-1)^{m(r-1)}\ \Pi^*_{r,d}(\lambda)$$

on vérifie aisément ([10], p. 15) qu'ils coïncident avec ceux définis par Lipow et Schoenberg [6].

Résumons les résultats ci-dessus dans la :

<u>Proposition 2</u> : Pour $r \geq 1$ *et* $n \geq 2r$, *le polynôme caractéristique de* $R_{r,d}$:

$$\Pi^*_{r,d} = c^*_o \lambda^d + c^*_1 \lambda^{d-1} + \ldots + c^*_{d-1}\lambda + c^*_d$$

vérifie les propriétés suivantes :

(*i*) $c^*_j \in \mathbf{Z}$ *et* $|c^*_j| = |c^*_{d-j}|$ *pour* $0 \leq j \leq d$.

(*ii*) *ses racines sont réelles, distinctes de signe* $(-1)^r$ *et vérifient :*

$$\lambda_1 \lambda_{2m-2r} = \lambda_2 . \lambda_{2m-2r-1} = \ldots = \lambda_{m-r} . \lambda_{m-r+1} = 1.$$

pour $n = 2m-1$.

(*iii*) *Les polynômes d'Euler-Frobenius sont liés à ces polynômes par :*

$$\Pi_{2m-1,r} = (-1)^{m(r-1)} \Pi^*_{r,d}.$$

Plus généralement, si l'on pose :

$$\Pi^*_{j,r,d}(\lambda) = |R^*_{j,r,d} - \lambda I_d| = |R_{j,r,d} - \lambda I_d|$$

on obtient également un polynôme dont les racines sont réelles, distinctes et de signe $(-1)^r$.

<u>Exemple</u> : $\Pi_{j,2,2}(\lambda) = |R_{j,2,2} - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & \rho_j^2 \\ -\rho_j^3 & 3\rho_j^2(1+\rho_j)-\lambda \end{vmatrix}$

$$= \lambda^2 - 3\rho_j^2 (1+\rho_j)\lambda + \rho_j^5$$

a deux racines réelles, distinctes, strictement positives et telles que :

$$\lambda_1 . \lambda_2 = \rho_j^5 = (h_{j+1}/h_j)^5.$$

V - CONSTRUCTION DES B-SPLINES $M_s (0 \leq s \leq r-1)$

On cherche la spline $M_s \in S^{(s)}_{n,r}$ ayant le support $[0, k]$ le plus petit possible. On utilise les notations du paragraphe 2 pour les vecteurs X_j ayant comme composantes les ordonnées des sommets des B-polygones locaux de M_s sur $[j, j+1]$.

Comme $M_s^{(i)}(0) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-r$, on doit avoir :

$$\overset{(o)}{x}_o = \overset{(o)}{x}_1 = \ldots = \overset{(o)}{x}_{n-r} = 0$$

autrement dit $\hat{X}_o = 0$ et $\tilde{X}_o = 0$.

D'autre part, $M_s^{(i)}(1) = 0$ pour $0 \leq i \leq r-1$, $i \neq s$, ce qui se traduit par :

$$\overset{(o)}{x}_n = \ldots = \overset{(o)}{x}_{n-s+1} = 0$$

Puis en posant arbitrairement :

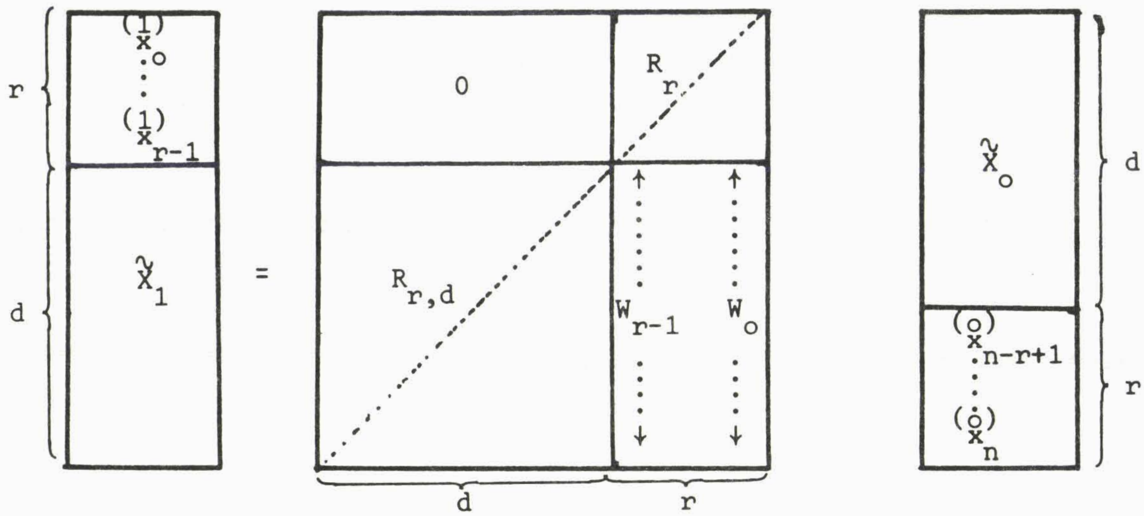
$$\overset{(o)}{x}_{n-s} = \gamma_o$$

on déduit de $\nabla^i \overset{(o)}{x}_n = 0$ $(s+1 \leq i \leq r-1)$ les relations :

$$\overset{(o)}{x}_{n-i} = \binom{i}{s} \gamma_o$$

Rappelons que l'on a (§2) :

$$\hat{X}_1 = R_{r+d} X_o$$



d'où l'on déduit :

$$\overset{(1)}{x}_o = \dots = \overset{(1)}{x}_{s-1} = 0$$

$$\overset{(1)}{x}_i = (-1)^s \, \overset{(o)}{x}_{n-i} = (-1)^s \binom{i}{s} \gamma_o \qquad \text{pour } s \le i \le r-1$$

et d'autre part :

$$\tilde{X}_1 = R_{r,d} \, \tilde{X}_o + \sum_{i=0}^{r-1} \overset{(o)}{x}_{n-i} \, w_i$$

Posons :

$$\boxed{\tilde{b}_s = \sum_{i=s}^{r-1} \binom{i}{s} w_i}$$

La relation ci-dessus peut s'écrire, puisque $\tilde{X}_o = 0$:

$$\tilde{X}_1 = \gamma_o \, \tilde{b}_s$$

De manière analogue, en posant :

$$\overset{(j)}{x}_{n-s} = \gamma_j \text{ pour } j \ge 0$$

on obtient, au voisinage du noeud j :

$$(2)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} \overset{(j)}{x}_{n-i} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le s-1 \\[2ex] \overset{(j)}{x}_{n-i} = \binom{i}{s}\,\gamma_j & \text{pour } s \le i \le r-1 \\[2ex] \tilde{X}_{j+1} = R_{r,d}\,\tilde{X}_j + \gamma_j\,\tilde{b}_s & \\[2ex] \overset{(j+1)}{x}_i = (-1)^s \,.\, \overset{(j)}{x}_{n-i} & \text{pour } 0 \le i \le r-1 \end{array}}$$

<u>Exemple</u> : $n = 5$, $r = 2$, $d = 2$.

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 6 & -12 & 8 \end{pmatrix} \qquad R_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$s = 0 : \tilde{b}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$X_o \begin{cases} \overset{(o)}{x}_o = \overset{(o)}{x}_1 = \overset{(o)}{x}_2 = \overset{(o)}{x}_3 = 0 \\ \overset{(o)}{x}_4 = \overset{(o)}{x}_5 = \gamma_o \end{cases}$$

$$X_1 \begin{cases} \overset{(1)}{x}_o = \overset{(1)}{x}_1 = \gamma_o \\ \overset{(1)}{x}_2 = 0 \;;\; \overset{(1)}{x}_3 = -4\gamma_o \\ \overset{(1)}{x}_4 = \overset{(1)}{x}_5 = \gamma_1 \end{cases}$$

$$s = 1 : \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$X_o^* \begin{cases} \overset{(o)}{x}_o = \overset{(o)}{x}_1 = \overset{(o)}{x}_2 = \overset{(o)}{x}_3 = 0 \\ \overset{(o)}{x}_4 = \gamma_o^* \,,\; \overset{(o)}{x}_5 = 0 \end{cases}$$

$$X_1^* \begin{cases} \overset{(1)}{x}_o = 0 \,,\; \overset{(1)}{x}_1 = -\gamma_o^* \\ \overset{(1)}{x}_2 = -4\gamma_o^* ,\; \overset{(1)}{x}_3 = -12\gamma_o^* \\ \overset{(1)}{x}_4 = \gamma_1^* \,,\; \overset{(1)}{x}_5 = 0 \end{cases}$$

$$X_2 \begin{cases} x_o^{(2)} = x_1^{(2)} = \gamma_1 \\ x_2^{(2)} = -4\gamma_o \\ x_3^{(2)} = -24\gamma_o - 4\gamma_1 \\ x_4^{(2)} = x_5^{(2)} = \gamma_2 \end{cases}$$

etc ...

$$X_2^* \begin{cases} x_o^{(2)} = 0 \quad , \quad x_1^{(2)} = -\gamma_1^* \\ x_2^{(2)} = -12\gamma_o^* - 4\gamma_1^* \\ x_3^{(2)} = -68\gamma_o^* - 12\gamma_1^* \\ x_4^{(2)} = \gamma_2^* \quad , \quad x_5^{(2)} = 0. \end{cases}$$

etc ...

De façon générale, on a :

$$\boxed{\tilde{\check{X}}_{j+1} = (\gamma_o R^j_{r,d} + \gamma_1 R^{j-1}_{r,d} + \dots + \gamma_j I_d)\, \tilde{b}_s} \tag{3}$$

Si l'on veut que le support de M_s soit l'intervalle [0,j+2], il faut imposer :

$$M_s^{(i)}(j+2) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \le i \le n-r$$

ce qui équivaut, en vertu des propriétés du B-polygone local sur (j+1, j+2), à : $\check{X}_{j+1} = 0$ et entraîne en particulier

$$\tilde{\check{X}}_{j+1} = 0$$

La recherche du support [0, j+2] le plus petit possible équivaut donc, d'après la relation (3) ci-dessus à la recherche du plus petit entier $j \ge 0$ tel que $\tilde{\check{X}}_{j+1} = 0$, c'est à dire à la recherche du polynôme minimal du vecteur $\tilde{b}_s$ pour la matrice $R_{r,d}$.

__Proposition 3__ : *Pour n = 2m-1 et r ≥ 1 fixés, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le polynôme minimal de $\tilde{b}_s$ *pour la matrice* $R_{r,d}$ *est le polynôme caractéristique de cette matrice, c'est à dire le polynôme d'Euler-Frobenius :*

$$\Pi^*_{r,d}(\lambda) = C^*_o \lambda^d + \dots + C^*_d$$

(ii) En choisissant $\gamma_j = kC^*_j$ $(0 \le j \le d$, k *constante* $\neq 0)$ *les vecteurs* $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d$ *sont linéairement indépendants.*

(iii) Le support minimal de M_s *est* $[0,d+2]$

(iv) Avec le choix $\gamma_j = kC^*_j$ $(0 \le j \le d, k \neq 0)$ *pour* M_s, *les* B-*splines* $M_s(x)$, $M_s(x+1), \dots, M_s(x+d+1)$ *sont linéairement indépendantes sur* $[0, 1]$.

Preuve : Montrons que (i) implique (ii) et (iii).

Si $\Pi^*_{r,d}(\lambda)$ est le polynôme minimal de $\tilde{b}_s$ pour la matrice $R_{r,d}$, la relation (3) implique que les vecteurs $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_d$ sont non nuls et linéairement indépendants si l'on choisit les γ_j proportionnels aux C^*_j $(0 \le j \le d)$,de plus $\tilde{X}_{d+1} = 0$, par conséquent le support minimal de M_s est l'intervalle $[0, d+2]$.

Montrons que (iii) implique (i) et (ii).

Si le support minimal de M_s est $[0, d+2]$, le plus petit indice j pour lequel $\tilde{X}_{j+1} = 0$ est $j = d$, par conséquent le polynôme minimal de $\tilde{b}_s$ pour $R_{r,d}$ est de degré d et coïncide nécessairement avec le polynôme $\Pi^*_{r,d}(\lambda)$. Les γ_j sont alors proportionnels aux C^*_j et les vecteurs $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d$ sont linéairement indépendants.

Montrons que (ii) équivaut à (iv).

Si, avec le choix $\gamma_j = kC^*_j$ $(0 \le j \le d, k \neq 0)$, les vecteurs $\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_d$ sont indépendants, il en est de même des vecteurs $X_o, X_1, \dots, X_{d+1}$ qui ont comme composantes les B-coefficients des fonctions $M_s(x)$, $M_s(x+1),\dots,M_s(x+d+1)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

En effet :

$$\sum_{j=o}^{d+1} \alpha_j X_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \tilde{X}_j = 0$$

donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_d = 0$. Il reste alors :

$$\alpha_o X_o + \alpha_{d+1} X_{d+1} = 0$$

En prenant les composantes s et n-s de ce vecteur, on en déduit $\alpha_o = \alpha_{d+1} = 0$, sachant que γ_o et γ_d sont différents de 0. Enfin l'indépendance locale des B-splines équivalant à l'indépendance des vecteurs $X_o, \ldots, X_d$, on a bien le résultat annoncé. ■

Avec le choix particulier

$$(4) \qquad \gamma_j = (-1)^s \frac{(n-s)!}{n!} c_j^* \qquad (0 \le j \le d)$$

on a les propriétés suivantes pour M_s :

<u>*Proposition 4*</u> : *Les fonctions* M_s *vérifient ; pour* $x \in [0, d+1]$:

(i) $M_s(d+2-x) = (-1)^s M_s(x)$

(ii) $M_s^{(s)}(j+1) = c_j^*$ *pour* $0 \le j \le d$.

(iii) $M_s^{(i)}(j) = 0$ *pour* $i \neq s,\ 0 \le i \le r-1,\ 0 \le j \le d+1$

<u>Preuve</u> : La propriété (iii) résulte immédiatement du fait que $M_s \in S_{n,r}^{(s)}$.

Sur l'intervalle (j,j+1), on a :

$$M_s(x) = \sum_{i=o}^{n} x_i^{(j)} \phi_{n,i}(x-j)$$

donc $M_s^{(s)}(x) = \dfrac{n!}{(n-s)!} \displaystyle\sum_{i=o}^{n-s} \nabla^s x_{s+i}^{(j)} \phi_{n-s,i}(x-j)$ et

$$M_s^{(s)}(j+1) = \frac{n!}{(n-s)!} (-1)^s x_{n-s}^{(j)} = c_j^* \quad \text{d'après (2) et (4)}$$

L'application $x \to d+2-x$ transforme l'intervalle $[j,j+1]$ en l'intervalle $[d+1-j,\ d+2-j]$ et l'on doit montrer que :

$$U_{n+1}\, X_j = (-1)^s\, X_{d+1-j} \qquad (0 \le j \le d+1) \tag{5}$$

la matrice U_{n+1} inversant l'ordre des composantes du vecteur X_j.

On a d'une part :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_i^{(j)} = x_{n-i}^{(j)} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le s-1 \\ x_i^{(j)} = (-1)^s \binom{i}{s} & \text{pour } s \le i \le r-1 \\ x_{n-i}^{(j)} = \binom{i}{s} \gamma_j & \text{pour } s \le i \le r-1 \end{array}\right. \tag{6}$$

et d'autre part :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_i^{(d+1-j)} = x_{n-i}^{(d+1-j)} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le s-1 \\ x_i^{(d+1-j)} = (-1)^s \binom{i}{s} \gamma_{d-j} & \text{pour } s \le i \le r-1 \\ x_{n-i}^{(d+1-j)} = \binom{i}{s} \gamma_{d+1-j} & \text{pour } s \le i \le r-1 \end{array}\right. \tag{7}$$

Les racines du polynôme $\Pi_{n,r}$ étant de signe $(-1)^r$ et ce polynôme étant de degré d, on a :

$$c^*_{d-j} = (-1)^{(r+1)d} c^*_j \qquad (0 \le j \le d)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} \gamma_j = (-1)^{(r+1)d} \, \gamma_{d-j} \\ \\ \gamma_{j-1} = (-1)^{(r+1)d} \, \gamma_{d+1-j} \end{cases}$$

Pour n impair, d est pair, et l'on déduit des relations (6) et (7) ci-dessus que :

(8) $$x_i^{(d+1-j)} = (-1)^s \, x_i^{(j)} \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq r-1 \text{ et } n-r+1 \leq i \leq n$$

En ce qui concerne les composantes centrales (i.e. d'indices r, ..., n-r), on a d'après (3) :

$$\tilde{X}_j = (\gamma_o \, R_{r,d}^{j-1} + \gamma_1 \, R_{r,d}^{j-2} + \ldots + \gamma_{j-1} \, I_d) \, \tilde{b}_s$$

De manière analogue, on démontre à partir de $\tilde{X}_{d+1} = 0$ et de $R_{r,d}^{-1}$ (comme pour $\tilde{X}_o$ et $R_{r,d}$) que :

$$\tilde{X}_d = (-1)^s \, \gamma_d \, U_d \, \tilde{b}_s$$

et plus généralement, sachant que $R_{r,d}^{-1} = U_d \, R_{r,d} \, U_d$:

$$\tilde{X}_{d+1-j} = (-1)^s \, U_d(\gamma_d \, R_{r,d}^{j-1} + \gamma_{d-1} \, R_{r,d}^{j-2} + \ldots + \gamma_{d+1-j} \, I_d) \, \tilde{b}_s$$

On obtient alors :

$$U_d \, \tilde{X}_j = (-1)^{s+d(r+1)} \, \tilde{X}_{d+1-j} \qquad (1 \leq j \leq d)$$

ce qui, avec (8) démontre (5).■

Lee [5] ayant démontré l'indépendance linéaire des B-splines $M_s(x)$, ..., $M_s(x+d+1)$ sur l'intervalle [0, 1], c'est à dire l'assertion (iv) de la proposition 3, cette proposition nous a permis de calculer, au moyen de l'algorithme de Souriau-Faddéev (cf. Gastinel [3] p. 294) les polynômes d'Euler-Frobenius et les B-splines dans un grand nombre de cas (d'autres exemples sont donnés dans [10]).

Remarques

1) Il est possible de démontrer directement l'indépendance linéaire des vecteurs $\tilde{X}_j$ $(1 \le j \le d)$ lorsque $d = 2$ ou 4, ce qui suffit largement dans la plupart des applications.

2) La technique ci-dessus permet également le calcul des B-splines pour une subdivision dont les h_j sont en progression géométrique, car dans ce cas $\rho_j = h_{j+1}/h_j = \rho$ est constant et les matrices de raccordement sont toutes identiques.

Exemple 1 : $n = 5$, $r = 2$, $d = 2$ (degré 5, classe C^3)

$$\Pi_{5,2}(\lambda) = \Pi^{*}_{2,2}(\lambda) = -\lambda^2 + 6\lambda - 1.$$

Pour $s = 0$:

$$\gamma_o = c_o = -1$$
$$\gamma_1 = c_1 = 6$$
$$\gamma_2 = c_2 = -1$$

B-polygone de M_o $\begin{cases} X_o = (0, 0, 0, 0, -1, -1) \\ X_1 = (-1, -1, 0, 4, 6, 6) \\ X_2 = (6, 6, 4, 0, -1, -1) \\ X_3 = (-1, -1, 0, 0, 0, 0) \end{cases}$ (figure 1)

Pour s = 1 :

$$\gamma_o^* = -\frac{1}{5}\,c_o = \frac{1}{5}$$

$$\gamma_1^* = -\frac{1}{5}\,c_1 = -6/5$$

$$\gamma_2^* = -\frac{1}{5}\,c_2 = 1/5$$

$$\text{B-polygone de } M_1 \left\{ \begin{array}{l} X_o = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0) \\ X_1 = (0,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{12}{5},\ -\frac{6}{5},\ 0) \\ X_2 = (0,\ \frac{6}{5},\ \frac{12}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ 0) \\ X_3 = (0,\ -\frac{1}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \end{array} \right. \qquad \text{(figure 2)}$$

__Exemple 2__ : $n = 7$, $r = 2$, $d = 4$ (degré 7, classe C^5)

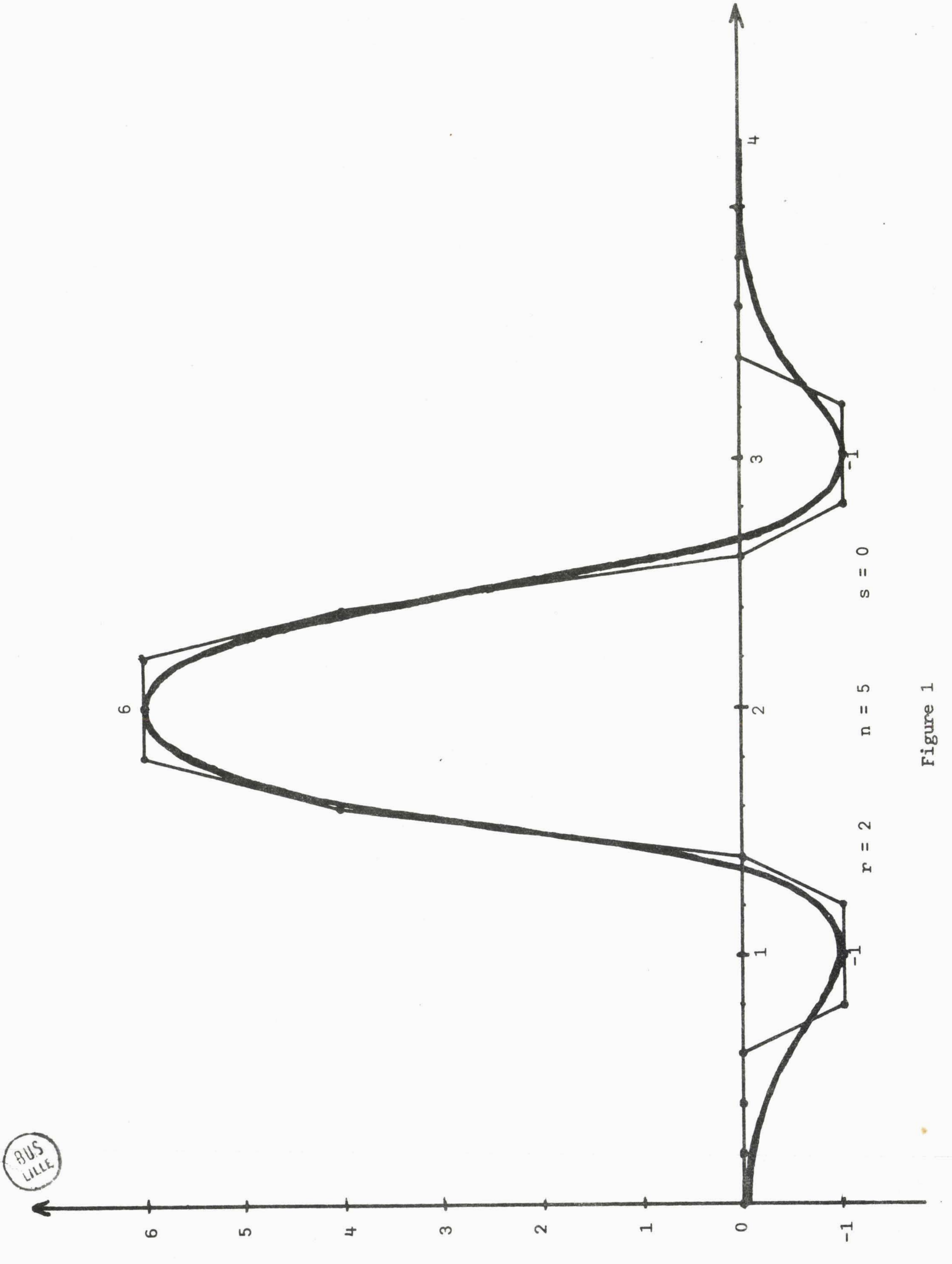
$$\Pi_{7,2}(\lambda) = \Pi_{2,4}^*(\lambda) = \lambda^4 - 72\lambda^3 + 262\lambda^2 - 72\,\lambda + 1$$

Pour s = 0 : $\gamma_o = \gamma_5 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_4 = -72$, $\gamma_3 = 262$

$$\text{B-polygone de } M_o \left\{ \begin{array}{l} X_o = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1) \\ X_1 = (1,\ 1,\ 0,\ -4,\ -16,\ -48,\ -72,\ -72) \\ X_2 = (-72,\ -72,\ -48,\ 16,\ 124,\ 216,\ 262,\ 262) \\ X_3 = (262,\ 262,\ 216,\ 124,\ 16,\ -48,\ -72,\ -72) \\ X_4 = (-72,\ -72,\ -48,\ -16,\ -4,\ 0,\ 1,\ 1) \\ X_5 = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \end{array} \right. \qquad \text{(figure 3)}$$

<u>Pour s = 1</u> : $\gamma_o = \gamma_5 = \frac{1}{7}, \gamma_2 = \gamma_4 = \frac{72}{7}, \gamma_3 = \frac{262}{7}$

$$\text{B-polygone de } M_1 \begin{cases} X_o = \frac{1}{7}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0) \\ X_1 = \frac{1}{7}(0,\ 1,\ 4,\ 12,\ 32,\ 80,\ 72,\ 0) \\ X_2 = \frac{1}{7}(0,\ -72,\ -208,\ -416,\ -628,\ -564,\ -262,\ 0) \\ X_3 = \frac{1}{7}(0,\ 262,\ 524,\ 628,\ 416,\ 208,\ 72,\ 0) \\ X_4 = \frac{1}{7}(0,\ -72,\ -80,\ -32,\ -12,\ -4,\ -1,\ 0) \\ X_5 = \frac{1}{7}(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \end{cases} \qquad \textbf{(figure 4)}$$



r = 2 n = 5 s = 0

Figure 1

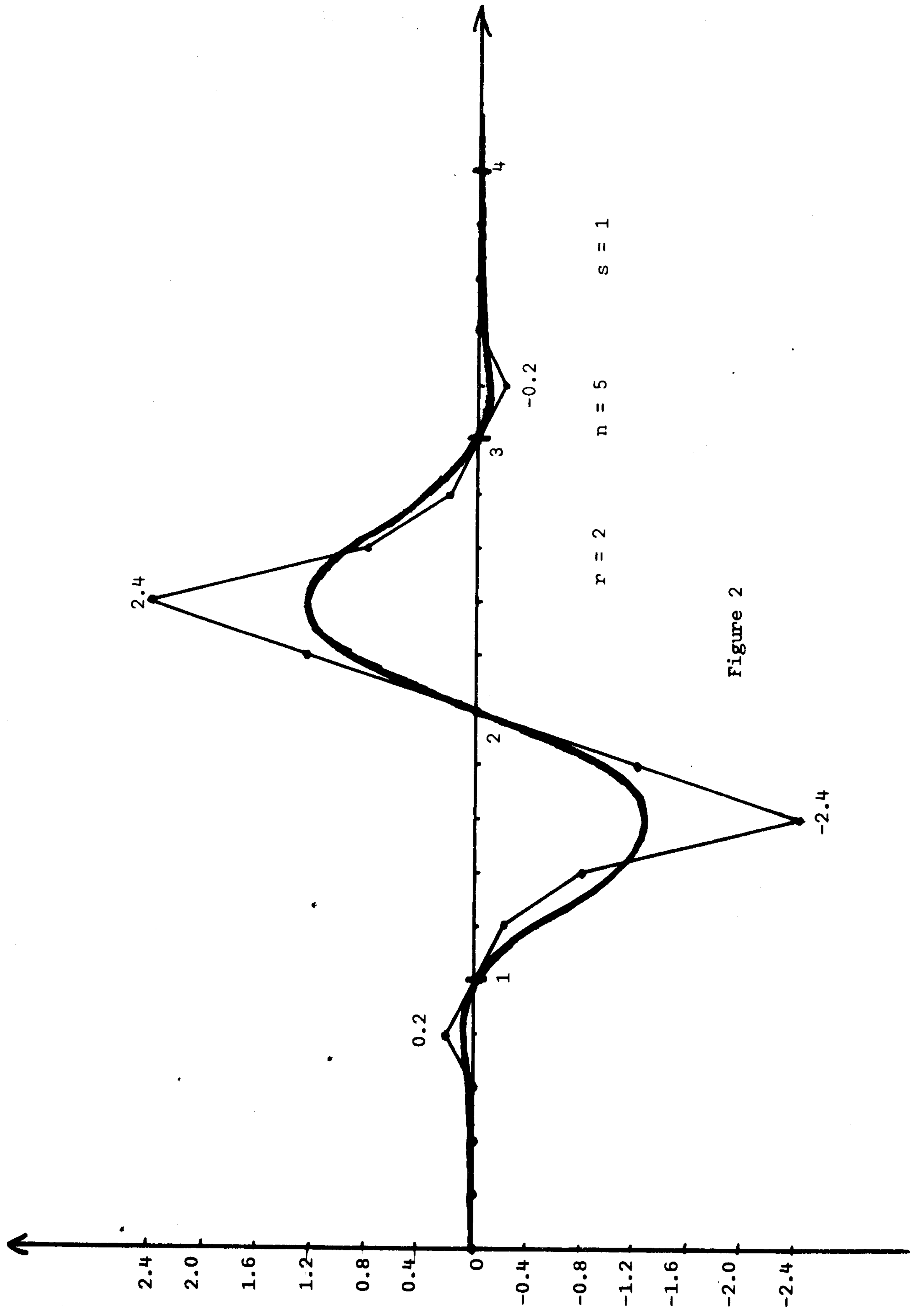


Figure 2

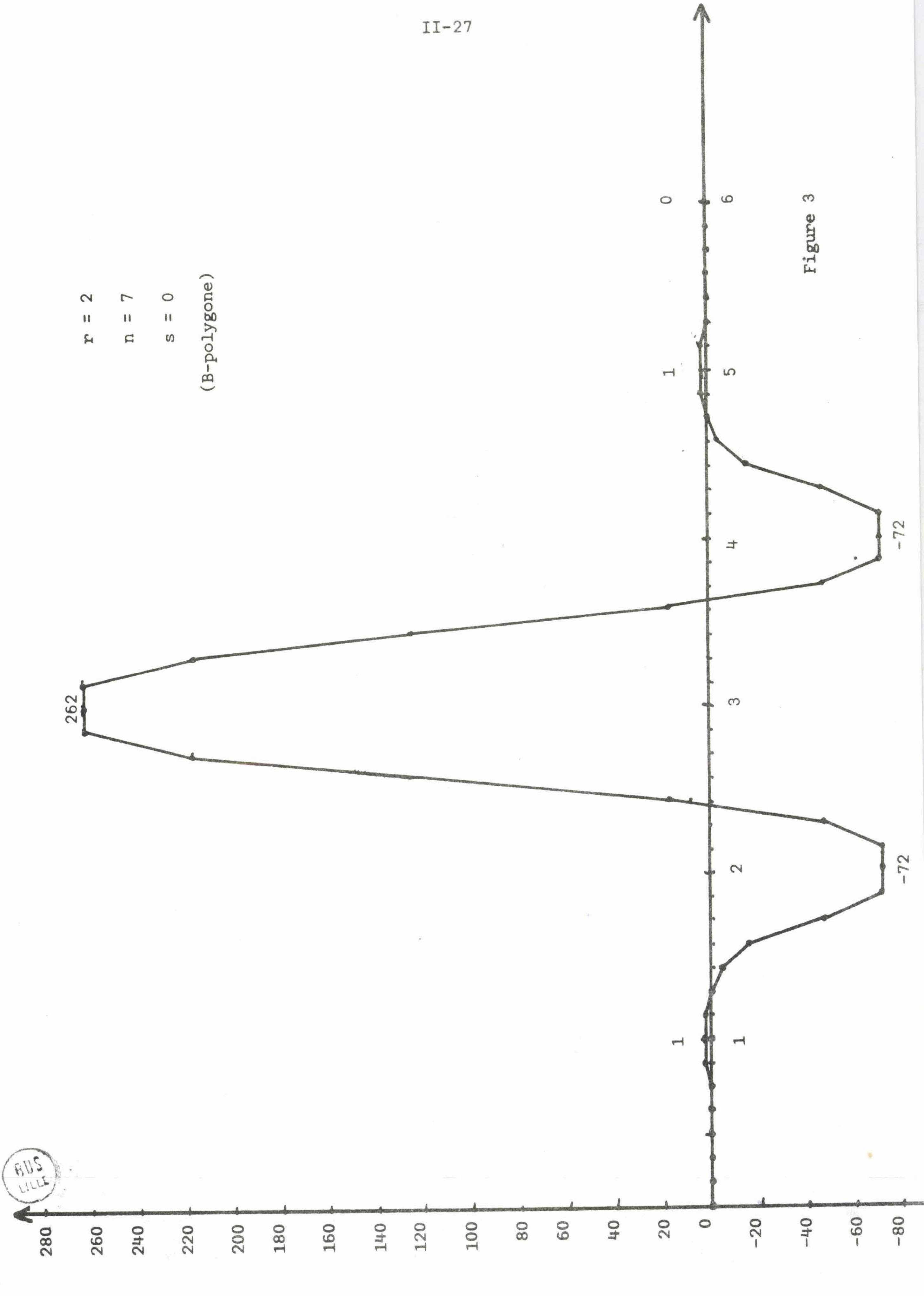

r = 2
n = 7
s = 0
(B-polygone)
262
-72
-72
1
1
0
1
2
3
4
5
6
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80

Figure 3

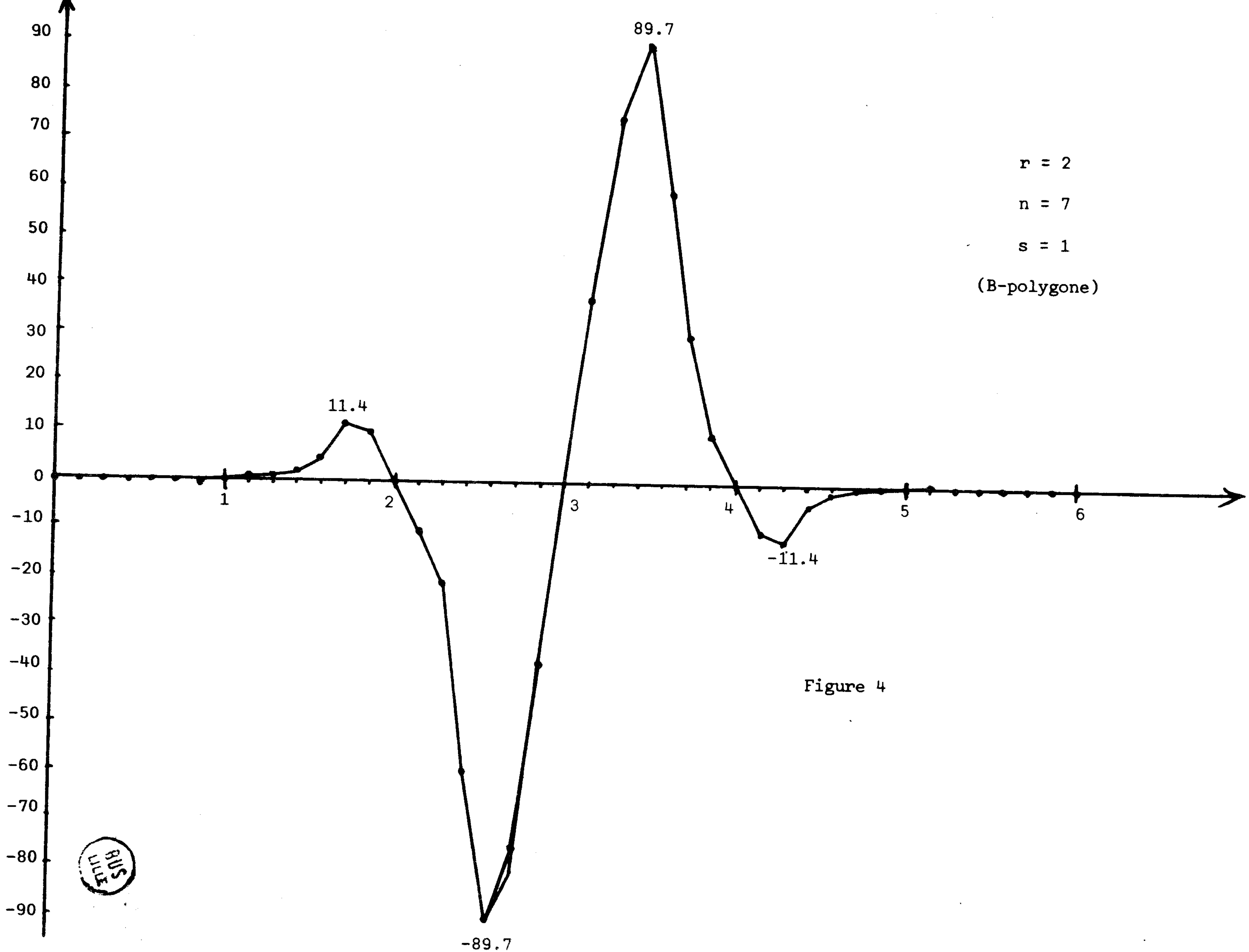


Figure 4

BUS LILLE

VI - CONSTRUCTION DES SPLINES FONDAMENTALES L_s

6.1 Vecteurs propres des matrices $R_{r,d}$

Soient $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_d$ les vecteurs des B-coefficients centraux de la B-spline M_s. Nous définissons le polynôme à coefficients vectoriels :

(9) $$\tilde{\omega}_s(\lambda) = \tilde{X}_{s,1}\lambda^d + \ldots + \tilde{X}_{s,d-1}\lambda + \tilde{X}_{s,d}.$$

A l'aide des définitions (2), (3), (4), on établit la relation :

$$R_{r,d}\tilde{\omega}_s(\lambda) = \lambda\tilde{\omega}_s(\lambda) - (-1)^s \frac{(n-s)!}{n!} \Pi_{n,r}(\lambda).\tilde{b}_s$$

qui peut se démontrer par exemple à l'aide des résultats du chapitre 7 de Gantmacher [1]. On en déduit alors la :

Proposition 5 : *Toute racine* λ_i $(1 \le i \le d)$ *du polynôme d'Euler-Frobenius* $\Pi_{n,r}(\lambda)$ *est valeur propre de la matrice* $R_{r,d}$ *et* $\tilde{\omega}_s(\lambda_i)$ *est un vecteur propre associé* $(0 \le s \le r-1)$.

Exemple : $r = 2$, $n = 5$.

$\tilde{X}_{o,1} = (0, 4)$ $\qquad$ $\tilde{X}_{o,2} = (4, 0)$

$\tilde{X}_{1,1} = -\frac{4}{5}(1, 3)$ $\qquad$ $\tilde{X}_{1,2} = \frac{4}{5}(3, 1)$

$\tilde{\omega}_o(\lambda) = (4, 4\lambda)$

$\tilde{\omega}_1(\lambda) = \frac{4}{5}(-\lambda + 3, -3\lambda + 1).$

Pour $\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, on obtient :

$\tilde{\omega}_o(\lambda_1) = (4, 12 - 8\sqrt{2})$

$\tilde{\omega}_1(\lambda_1) = \frac{1}{5}(8\sqrt{2}, -32 + 24\sqrt{2}) = \frac{2}{5}\sqrt{2}\,\tilde{\omega}_o(\lambda_1).$

Pour $\lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}$, on obtient :

$$\tilde{\omega}_o(\lambda_2) = (4,\ 12 + 8\sqrt{2})$$

$$\tilde{\omega}_1(\lambda_2) = \frac{1}{5}\,(-8\sqrt{2},\ -32\ -24\sqrt{2}) = -\,\frac{2}{5}\,\sqrt{2}\tilde{\omega}_o(\lambda_2).$$

6.2 Construction des splines L_s

Nous cherchons une spline $L_s \in S^{(s)}_{2m-1,r}$ telle que :

$$\text{(i) } L_s^{(j)}(\nu) = 0 \text{ pour } \nu \in \mathbb{Z},\ 0 \leq j \leq r-1,\ j \neq s.$$

(10) $$\text{(ii) } L_s^{(s)}(0) = 1 \quad , \quad L_s^{(s)}(\nu) = 0 \text{ pour } \nu \neq 0$$

$$\text{(iii) } L_s(x) \text{ reste bornée quand } |x| \to +\infty.$$

Proposition 6 : *Soient* $\tilde{X}_{s,1}, \ldots, \tilde{X}_{s,d}$ *les vecteurs des B-coefficients centraux de* M_s *sur les intervalles* $[1, 2], \ldots, [d, d+1]$ *respectivement. Soient* $Y_{s,\nu} = (y_o^{(\nu)}, \ldots, y_n^{(\nu)})$ *et* $\tilde{Y}_{s,\nu} = (y_r^{(\nu)}, \ldots, y_{n-r}^{(\nu)})$ *les vecteurs des B-coefficients et des B-coefficients centraux respectivement de la spline fondamentale* L_s *sur l'intervalle* $(\nu, \nu+1)(\nu \in \mathbb{Z})$. *On a alors :*

(*i*) $y_i^{(\nu)} = 0$ *pour* $0 \leq i \leq r-1$ *et* $n-r+1 \leq i \leq n$ *pour tout* $\nu \neq 0$

(*ii*) $y_i^{(o)} = 0$ *pour* $0 \leq i \leq s-1$ *et* $n-r+1 \leq i \leq n$

mais $y_i^{(o)} = \dfrac{1}{s!}\,\dfrac{\binom{i}{s}}{\binom{n}{s}}$ *pour* $s \leq i \leq r-1$

(*iii*) $\tilde{Y}_{s,\nu} = \sum\limits_{j=1}^{d} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m-r} \lambda_i^{\nu+d-j} \,/\, \Pi'_{n,r}(\lambda_i) \Big)\, \tilde{X}_{s,j}$

(*iv*) $L_s(-x) = (-1)^s\, L_s(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Preuve : Les conditions (10, i) et (10, ii) ci-dessus impliquent, pour $\nu = 0$:

$$(11) \quad \begin{cases} \text{(i) } y_o^{(o)} = \ldots = y_{s-1}^{(o)} = 0 \qquad (s \geq 1) \\ \text{(ii) } y_i^{(o)} = \dfrac{1}{s!}\dfrac{\binom{i}{s}}{\binom{n}{s}} \quad \text{pour } s \leq i \leq r-1 \\ \text{(iii) } (y_r^{(o)}, y_{r+1}^{(o)}, \ldots, y_{n-r}^{(o)}) = \tilde{Y}_{s,o} \in \mathbb{R}^d \text{ est un vecteur inconnu} \\ \text{(iv) } y_{n-r+1}^{(o)} = \ldots = y_n^{(o)} = 0. \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : On a supprimé l'indice s dans les composantes, pour simplifier les notations, mais il est bien clair qu'a priori elles dépendent de s.

Le raccordement à l'ordre n-r au point $\nu \geq 1$ des polygones locaux de L_s sur $[\nu-1,\nu]$ et $[\nu,\nu+1]$ ainsi que les conditions (10, i) et (10,ii) s'expriment par :

$$\tilde{Y}_{s,\nu+1} = R_{r,d}\tilde{Y}_{s,\nu} \qquad (\nu \geq 1)$$

où $\tilde{Y}_{s,\nu} = (y_{s,r}^{(\nu)}, \ldots, y_{s,n-r}^{(\nu)})$, par suite :

$$(12) \qquad \tilde{Y}_{s,\nu} = R_{r,d}^{\nu}\,\tilde{Y}_{s,o} \text{ pour tout } \nu \geq 1.$$

Ecrivons la décomposition de $\tilde{Y}_{s,o}$ dans la base des vecteurs propres de $R_{r,d}$:

$$(13) \qquad \tilde{Y}_{s,o} = \alpha_{s,1}\tilde{\omega}_s(\lambda_1) + \ldots + \alpha_{s,d}\tilde{\omega}_s(\lambda_d).$$

On en déduit :

$$(14) \qquad \tilde{Y}_{s,\nu} = \alpha_{s,1}\lambda_1^{\nu}\tilde{\omega}_s(\lambda_1) + \ldots + \alpha_{s,d}\lambda_d^{\nu}\tilde{\omega}_s(\lambda_d).$$

Comme $y_o^{(\nu)} = \ldots = y_{r-1}^{(\nu)} = y_{n-r+1}^{(\nu)} = \ldots = y_n^{(\nu)} = 0$ pour $\nu \geq 1$, on voit que la condition (10, iii) sera vérifiée si le vecteur $\tilde{Y}_{s,\nu}$ reste borné quand

$\nu \to +\infty$, c'est à dire, puisque $1 < |\lambda_{m-r+1}| < \dots < |\lambda_d|$, si l'on a :

(15) $$\boxed{\alpha_{s,m-r+1} = \dots = \alpha_{s,d} = 0}$$

D'autre part, le raccordement à l'ordre n-r, à l'origine, des polygones locaux de L_s sur [-1, 0] et [0, 1] se traduit par :

$$\tilde{Y}_{s,o} = R_{r,d}\tilde{Y}_{-1} + (-1)^s \frac{(n-s)!}{n!} \tilde{b}_s$$

Ecrivons la décomposition de $\tilde{b}_s$ dans la base des vecteurs propres :

(16) $$\tilde{b}_s = \beta_{s,1}\tilde{\omega}_s(\lambda_1) + \dots + \beta_{s,d}\tilde{\omega}_s(\lambda_d).$$

On en déduit :

$$\tilde{Y}_{s,-1} = \sum_{i=1}^{d} (\alpha_{s,i} - (-1)^s \frac{(n-s)!}{n!} \beta_{s,i})\tilde{\omega}_s(\lambda_i)/\lambda_i$$

et puisque l'on a également :

$$\tilde{Y}_{s,-\nu} = R_{r,d}^{-\nu+1} \tilde{Y}_{s,-1}$$

et tout $\nu \geq 1$, on obtient :

(17) $$\tilde{Y}_{s,-\nu} = \sum_{i=1}^{d} (\alpha_{s,i} - (-1)^s \frac{(n-s)!}{n!} \beta_{s,i})(\frac{1}{\lambda_i})^\nu \tilde{\omega}_s(\lambda_i).$$

Si l'on veut que L_s reste bornée quand $x \to -\infty$, il faut et il suffit que $\tilde{Y}_{s,-\nu}$ reste borné quand $\nu \to +\infty$, c'est à dire que :

(18) $$\boxed{\alpha_{s,i} = (-1)^s \frac{(n-s)!}{n!} \beta_{s,i} \quad (1 \leq i \leq m-r)}$$

D'après (9) et (14), on a :

$$\tilde{b}_s = \sum_{j=1}^{d} (\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{d-j} \beta_{s,i})\tilde{X}_j.$$

Mais comme d'autre part, on a, d'après les relations du paragraphe 5 :

$$\tilde{X}_1 = (-1)^s c_o^* \frac{(n-s)!}{n!} \tilde{b}_s \text{ avec } c_o^* = \pm 1$$

on en déduit :

$$(19) \quad \begin{cases} \lambda_1^{d-1}\beta_{s,1} + \ldots + \lambda_d^{d-1}\beta_{s,d} = (-1)^s \dfrac{n!}{(n-s)!} c_o^* \\ \lambda_1^{d-2}\beta_{s,1} + \ldots + \lambda_d^{d-2}\beta_{s,d} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{s,1} + \ldots + \beta_{s,d} = 0 \end{cases}$$

Soit $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ le déterminant de ce système et $V_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ le mineur obtenu en supprimant la ligne 1 et la colonne i. Les solutions de (18) sont données par :

$$(20) \quad \beta_{s,i} = (-1)^s \frac{n!}{(n-s)!} c_o^* . (-1)^{i-1} \frac{V_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)}{V(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)}$$

Comme d'autre part, $\Pi_{n,r}(\lambda) = c_o^* \prod_{i=1}^{d} (\lambda-\lambda_i)$, on déduit immédiatement de (18) que :

$$(21) \quad \boxed{\alpha_{s,i} = 1/\Pi'_{n,r}(\lambda_i)} \qquad (1 \leq i \leq m-r)$$

Les relations (13) et (14) s'écrivent alors respectivement :

$$\tilde{Y}_{s,o} = \sum_{i=1}^{m-r} \tilde{\omega}_s(\lambda_i)/\Pi'_{n,r}(\lambda_i) \text{ ou}$$

$$\tilde{Y}_{s,o} = \sum_{j=1}^{d} \Big(\sum_{i=1}^{m-r} \lambda_i^{d-j}/\Pi'_{n,r}(\lambda_i)\Big) \tilde{X}_{s,j}$$

$$(22) \quad \tilde{Y}_{s,\nu} = \sum_{j=1}^{d} \Big(\sum_{i=1}^{m-r} \lambda_i^{\nu+d-j}/\Pi'_{n,r}(\lambda_i)\Big)\tilde{X}_{s,j}$$

D'autre part, (17) et (21) impliquent :

$$\tilde{Y}_{s,-\nu} = - \sum_{i=m-r+1}^{d} \tilde{\omega}_s(\lambda_i)/\lambda_i^{\nu}\Pi'_{n,r}(\lambda_i)$$

Or on vérifie aisément que :

$$\Pi'_{n,r}(\lambda_i) = (-1)^{d-1}\Pi'_{n,r}(\lambda_{d+1-i})/\lambda_{d+1-i}^{d-2}$$

$$\tilde{\omega}_s(\lambda_{d+1-i}) = (-1)^s U_d\tilde{\omega}_s(\lambda_i)/\lambda_i^{d-1}$$

(où U_d désigne matrice "anti-unitaire" inversant l'ordre des composantes d'un vecteur de $\mathbb{R}^d$).

On en déduit alors :

$$\tilde{Y}_{s,-\nu} = (-1)^s \sum_{i=1}^{m-r} \lambda_i^{\nu-1}U_d\tilde{\omega}_s(\lambda_i)/\Pi'_{n,r}(\lambda_i)$$

soit, en comparant avec (22) :

$$\tilde{Y}_{s,-\nu} = (-1)^s U_d \tilde{Y}_{s,\nu-1} \qquad (\nu \geq 1)$$

Pour la fonction $L_s(x)$, cela se traduit par la relation :

$$\boxed{L_s(-x) = (-1)^s L_s(x)}$$

<u>Exemple</u> : n = 5, r = 2.

$$\Pi_{5,2}(\lambda) = -\lambda^2 + 6\lambda - 1$$

$$\Pi'_{5,2}(\lambda) = -2\lambda + 6$$

$$\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2}, \text{ donc } 1/\Pi'_{5,2}(\lambda_1) = 1/4\sqrt{2}$$

$$\tilde{\omega}_o(\lambda_1) = 4(1,3 - 2\sqrt{2})$$

$$\tilde{\omega}_1(\lambda_1) = \frac{8}{5}\sqrt{2}(1,3 - 2\sqrt{2})$$

Par conséquent :

$$\tilde{Y}_{o,o} = \tilde{\omega}_o(\lambda_1)/4\sqrt{2} = (1/\sqrt{2},\ 3/\sqrt{2} - 2)$$

$$\tilde{Y}_{1,o} = \tilde{\omega}_1(\lambda_1)/4\sqrt{2} = \frac{1}{5}\ (2,6 - 8\sqrt{2})$$

Les B-coefficients de L_o et L_1 sur [0, 1] sont donc respectivement :

$$Y_{o,o} = (1,\ 1,\ 0.707,\ 0.121,\ 0,\ 0)$$

$$Y_{1,o} = (0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.068,\ 0,\ 0)$$

6.2 Représentation au moyen des B-splines

Soit $N_s(x) = M_s(x+m-r+1)$ la B-spline de $S^{(s)}_{n,r}$ de support [m+r-1,m-r+1]. On se propose de calculer les coefficients du développement :

(23) $$L_s(x) = \sum_{\nu} a_{s,\nu} N_s(x-\nu)$$

Comme $M_s(d+2-x) = (-1)^s M_s(x)$ (proposition 2) on a $N_s(-x) = N_s(x).(-1)^s$ et comme $L_s(-x) = (-1)^s L_s(x)$, on en déduit :

$$a_{s,-\nu} = a_{s,\nu} \qquad (\nu \geq \in \mathbf{Z})$$

Sur l'intervalle [0, 1], on a :

$$L_s(x) = \sum_{\nu=-m+r}^{m-r+1} a_{s,\nu} N_s(x-\nu).$$

Ce qui se traduit sur les B-coefficients centraux par :

$$\tilde{Y}_{s,o} = \sum_{\nu=-m+r+1}^{m-r} a_{s,\nu} \tilde{X}_{s,m-r+1-\nu}$$

ou encore :

$$\tilde{Y}_{s,o} = \sum_{j=1}^{d} a_{s,m-r+1-j} \tilde{X}_{s,j}$$

d'où, en comparant avec (iii) (Proposition 6) pour $\nu = 0$:

$$a_{s,m-r+1-j} = \sum_{i=1}^{m-r} \lambda_i^{d-j} \Pi'_{n,r}(\lambda_i) \qquad (1 \leq j \leq d).$$

Le raisonnement ci-dessus s'étend sans difficulté à tout intervalle $(\nu, \nu+1)$ et l'on en déduit :

(23 $$\boxed{a_{s,\nu} = a_\nu = \sum_{i=1}^{m-r} \lambda_i^{m-r-1+|\nu|} / \Pi'_{n,r}(\lambda_i)}$$

qui est **indépendant de** s. A l'aide de cette relation et des théorèmes 1, 2 et 3, on établit la :

<u>*Proposition 7*</u> : *La solution unique* $S \in S_{n,r,\gamma}$ *du problème d'interpolation d'Hermite peut s'exprimer sous la forme :*

$$S(x) = \sum_{s=o}^{r-1} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} z_\nu^{(s)} N_s(x-\nu) \right)$$

où les suites $(z_\nu^{(s)})_{\nu\in\mathbb{Z}}$ *sont données par :*

$$z_\nu^{(s)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{\nu-j} y_j^{(s)} \qquad (0 \leq s \leq r-1)$$

avec $$a_\nu = \sum_{i=1}^{m-r} \lambda_i^{m-r-1+|\nu|} / \Pi'_{n,r}(\lambda_i)$$

<u>**Preuve**</u> : D'après le théorème 2, on a :

$$S(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{1=o}^{r-1} y_j^{(s)} L_s(x-j)$$

mais $$L_s(x-j) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu N_s(x-\nu-j) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-j} N_s(x-\nu)$$

donc si l'on pose $Z_\nu^{(s)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-j}\, y_j^{(s)}$ pour $s = 0, 1, \ldots, r-1$, on aura bien :

$$\sum_{s=o}^{r-1} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} Z_\nu^{(s)} N_s(x-\nu)\right) = \sum_{s=o}^{r-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-j}\, y_j^{(s)} N_s(x-\nu)$$

$$= \sum_{s=o}^{r-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-j} N_s(x-\nu)\right) y_j^{(s)} = S(x).$$

VII - UN EXEMPLE NON TRIVIAL : SPLINES DE DEGRÉ $n = 2r+1$ ET DE CLASSE C^{r+1} (CAS OÙ $d=2$)

7.1 B-splines

Les espaces de splines considérés sont respectivement :

$$S_{2r+1,r} = \{S \in C^{r+1}(\mathbb{R}) \ : \ S|(\nu,(\nu+1)) \in \mathbb{P}_{2r+1}\} \quad \text{et}$$

$$S^{(s)}_{2r+1,r} = \{S \in S_{2r+1,r} \ : \ S^{(j)}(\nu) = 0, \ 0 \leq j \leq r-1, \ j \neq s, \ \nu \in \mathbb{Z}\}$$

pour $s = 0, 1, \ldots, r-1$.

Pour la construction de la B-spline $M_s \in S^{(s)}_{2r+1,r}$ ayant comme support l'intervalle $[0, 4]$, on utilise les résultats du paragraphe 5.

La sous-matrice $R_{r,2}$ de la matrice de raccordement R_{r+2} s'écrit ici :

$$R_{r,2} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^r \\ & \\ (-1)^{r+1} & (-1)^r(2r+2) \end{pmatrix}$$

Les vecteurs w_i $(0 \leq i \leq r-1)$ sont donnés par :

$$w_i = (-1)^i \ 2^{r-i}(\binom{r}{i}, \ 2\binom{r+1}{i}) \in \mathbb{R}^2$$

et l'on en déduit :

$$\tilde{b}_s = \sum_{i=s}^{r-1} \binom{i}{s} w_i = (-1)^s \begin{pmatrix} \binom{r}{s} (1 - (-1)^{r-s}) \\ \\ \binom{r+1}{s} (1 - (-1)^{r-s} (1+2r-2s)) \end{pmatrix}$$

en utilisant les propriétés des coefficients du binôme.

Le polynôme d'Euler-Frobénius est :

$$\Pi_{2r+1,r}(\lambda) = (-1)^{r-1}\,\lambda^2 + (2r+2)\,\lambda + (-1)^{r-1}$$

et ses racines sont respectivement =

$$\begin{cases} \lambda_1 = (-1)^r\,(r+1-\sqrt{r(r+2)}) \\ \lambda_2 = (-1)^r\,(r+1+\sqrt{r(r+2)}) = 1/\lambda_1 \end{cases}$$

Il est clair que l'on a :

$$0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|.$$

$$\begin{cases} \gamma_{s,o} = \gamma_{s,2} = (-1)^{s+r-1}\,\dfrac{(n-s)!}{n!} \quad (n = 2r+1) \\ \gamma_{s,1} = (-1)^s\,\dfrac{(n-s)!}{n!}\,(2r+2) \end{cases}$$

On construit alors les vecteurs $\tilde{X}_{s,1}$ et $\tilde{X}_{s,2}$ de $\mathbb{R}^2$ donnant les B-coefficients centraux (r et r+1) de M_s sur les intervalles (1,2) et (2,3) respectivement :

$$\begin{cases} \tilde{X}_{s,1} = \gamma_{s,o}\,\tilde{b}_s = (\overset{(1)}{x}_{s,r}, \overset{(1)}{x}_{s,r+1}) \\ \tilde{X}_{s,2} = (\gamma_{s,o}\,R_{r,2} + \gamma_{s,1}\,I)\,\tilde{b}_s = (\overset{(2)}{x}_{s,r}, \overset{(2)}{x}_{x,r+1}) \end{cases}$$

dont on calcule les composantes à partir des relations ci-dessus :

$$\tilde{X}_{s,1} = (-1)^{r-1}\,\frac{(n-s)!}{n!}\begin{bmatrix} \binom{r}{s}\,(1-(-1)^{r-s}) \\ \binom{r+1}{s}\,(1-(-1)^{r-s}\,(1+2r-2s)) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}_{s,2} = \frac{(n-s)!}{n!}\begin{bmatrix} \binom{r+1}{s}\,(2r-2s+1-(-1)^{r-s}) \\ \binom{r}{s}\,(1-(-1)^{r-s}) \end{bmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants et l'on voit que

$$\tilde{X}_{s,2} = (-1)^s\, U_2\, \tilde{X}_{s,1} \text{ où } U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les autres B-coefficients de M_s sont respectivement :

$$\text{sur } [0,1] \begin{cases} \overset{(o)}{x}_{s,i} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le r+1 \\ \overset{(o)}{x}_{s,n-i} = \binom{i}{s} \gamma_{s,o} & \text{pour } s \le i \le r-1 \\ \overset{(o)}{x}_{s,n-i} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le s-1 \quad (s \ge 1) \end{cases}$$

$$\text{sur } [1,2] \begin{cases} \overset{(1)}{x}_{s,i} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le s-1 \quad (s \ge 1) \\ \overset{(1)}{x}_{s,i} = (-1)^s \binom{i}{s} \gamma_{s,o} & \text{pour } s \le i \le r-1 \\ \overset{(1)}{x}_{s,r} \text{ et } \overset{(1)}{x}_{s,r+1} \text{ sont les composantes de } \tilde{X}_{s,1} & \\ \overset{(1)}{x}_{s,n-i} = \binom{i}{s} \gamma_{s,1} & \text{pour } s \le i \le r-1 \\ x_{s,n-i} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le s-1 \quad (s \ge 1) \end{cases}$$

Les B-coefficients $X_{s,2}$ et $X_{s,3}$ sur [2,3] et [3,4] s'en déduisent par les relations :

$$X_{s,2} = (-1)^s\, U_n\, X_{s,1} \text{ et } X_{s,3} = (-1)^s\, U_n\, X_{s,o}$$

qui équivalent à :

$$M_s(4 - x) = (-1)^s\, M_s(x) \quad \text{pour } x \in (0, 4)$$

ou encore à :

$$N_s(-x) = (-1)^s\, N_s(x) \quad \text{si} \quad N_s(x) = M_s(x+2).$$

7.2 Splines fondamentales

Le problème d'interpolation est le suivant : étant données r suites $\overset{(s)}{y} = (\overset{(s)}{y}_\nu)_{\nu\in\mathbf{Z}}$ $0 \le s \le r-1$ appartenant à $\mathcal{Y}_\gamma (\gamma \ge 0)$, calculer l'unique spline $S_r \in \mathcal{S}_{2r+1,r,\gamma}$ telle que :

$$S_r^{(s)}(\nu) = \overset{(s)}{y}_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{Z},\ 0 \le s \le r-1).$$

On sait que la solution s'exprime au moyen des splines fondamentales

$$L_s(x) \in \mathcal{S}^{(s)}_{2r+1,r}.$$

$$S(x) = \sum_{s=o}^{r-1} \Big(\sum_{\nu\in\mathbf{Z}} \overset{(s)}{y}_\nu\, L_s(x-\nu)\Big).$$

Nous utilisons les résultats du paragraphe 6 pour la construction de ces fonctions.

Le seul calcul à faire est celui du vecteur des B-coefficients centraux de L_s sur l'intervalle (0, 1). Or on a, d'après la proposition 6 :

$$\tilde{Y}_{s,o} = \lambda_1/\Pi'_{2r+1,r}(\lambda_1)\ .\ \tilde{X}_{s,1} + 1/\Pi'_{2r+1,r}(\lambda_1)\ \tilde{X}_{s,2}$$

Comme $\Pi'_{2r+1,r}(\lambda) = 2[(r+1) - (-1)^r\lambda]$, et

$$\lambda_1 = (-1)^r(r+1 - \sqrt{r(r+2)}), \text{ il vient :}$$

$$1/\Pi'_{2r+1,r}(\lambda_1) = 1/2\sqrt{r(r+2)}$$

Par conséquent :

$$\tilde{Y}_{s,o} = \frac{1}{2\sqrt{r(r+2)}}\ (\lambda_1\ \tilde{X}_{s,1} + \tilde{X}_{s,2})$$

et plus généralement, on a pour tout $\nu \ge 0$:

$$\tilde{Y}_{s,\nu} = \frac{\lambda_1^\nu}{2\sqrt{r(r+2)}}\ (\lambda_1\ \tilde{X}_{s,1} + \tilde{X}_{s,2})$$

En utilisant maintenant les résultats du paragraphe 7.1 :

a) si r-s est pair :

$$\tilde{Y}_{s,\nu} = \frac{(n-s)!}{n!} \binom{r+1}{s} \frac{r-s}{\sqrt{r(r+2)}} \lambda_1^{\nu} (1, |\lambda_1|)$$

ce qui montre que $L_s(x)$ est du signe de λ_1^{ν} sur l'intervalle $(\nu, \nu+1)$, pour $\nu \geq 0$.

b) si r-s est impair :

$$\tilde{Y}_{s,\nu} = \frac{(n-s)!}{n!} \binom{r}{s} \cdot \lambda_1^{\nu} (1, |\lambda_1|).$$

et $L_s(x)$ est également du signe de λ_1^{ν} sur l'intervalle $(\nu, \nu+1)$, pour $\nu \geq 0$.

Rappelons également que :

$$L_s(-x) = (-1)^s L_s(x)$$

et d'autre part le développement de L_s dans la base des B-splines

$$\boxed{L_s(x) = \frac{1}{2\sqrt{r(r+2)}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \lambda_1^{|\nu|} \; N_s(x-\nu).}$$

La proposition 7 prend alors la forme simple.

Proposition 8 : La solution unique $S \in S_{2+1,r,\gamma}$ *du problème d'interpolation d'Hermite peut s'exprimer sous la forme*

$$S(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} z_\nu^{(s)} \; N_s(x-\nu)\Big)$$

où les suites $(z_\nu^{(s)})_{\nu\in\mathbb{Z}}$ *sont données, pour* $s = 0, 1, \ldots, r-1$, *par :*

$$z_\nu^{(s)} = \frac{1}{2\sqrt{r(r+2)}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_1^{|\nu-j|} \; y_j^{(s)}$$

7.3 Norme de l'opérateur de projection $\mathbb{L}^r_{2r+1}$

Cet opérateur associe à r suites bornées $y^{(s)} = (y_\nu^{(s)})_{\nu\in\mathbb{Z}}$ l'unique spline borné S_r de degré 2r+1 et de classe C^{r+1} telle que :

$$S_r^{(s)}(\nu) = y_\nu^{(s)} \qquad (\nu \in \mathbb{Z},\ 0 \leq s \leq r-1).$$

Posons :

$$|||\bar{y}|||_\infty = \max_{0\leq s\leq r-1} ||y^{(s)}||_\infty \quad \text{avec } ||y^{(s)}||_\infty = \sup_\nu |y_\nu^{(s)}|.$$

$$||S_r||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |S_r(x)|$$

$$||\mathbb{L}^r_{2r+1}|| = \sup_{|||\bar{y}|||_\infty=1} ||S_r||_\infty$$

Or on a vu, au paragraphe 7.2 que $L_s(x)$ est du signe de λ_1^ν sur $(\nu, \nu+1)$ pour $\nu \geq 0$ et du signe de $(-1)^s\ \lambda_1^{|\nu|}$ pour $\nu \leq -1$. Choisissons comme suites :

$$y_\nu^{(s)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\lambda_1^\nu) & \text{pour } \nu \geq 0 \\ (-1)^s \operatorname{sgn}(\lambda_1^{|\nu|}) & \text{pour } \nu \leq -1 \end{cases} \qquad (0 \leq s \leq r-1)$$

On a évidemment $|||\bar{y}|||_\infty = \max_{0\leq s\leq r-1} ||y^{(s)}||_\infty = 1$ et l'interpolant a comme expression, pour $x \in [0, 1]$

$$S_r(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_s(x-\nu)| \Big)$$

Par conséquent, on en déduit :

$$||\mathbb{L}^r_{2r+1}|| = \max_{x\in[0,1]} \sum_{s=0}^{r-1} \Psi_s(x)$$

avec $$\Psi_s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_s(x-\nu)|$$

En effet, le maximum de $\Psi_s(x)$ sur $\mathbb{R}$ est égal à son maximum sur $[0, 1]$ car Ψ_s est périodique de période 1.

Nous allons montrer maintenant que :

$$\max_{x\in[0,1]} \Psi_s(x) = \Psi_s(1/2) \tag{24}$$

En utilisant les relations de la proposition 6 et du paragraphe 7.2, on calcule les B-coefficients de Ψ_s sur $[0, 1]$:

$$\begin{cases} x_i = x_{n-i} = \dfrac{(n-s)!}{n!}\binom{i}{s} & \text{pour } s \le i \le r-1 \\ x_i = x_{n-i} = 0 & \text{pour } 0 \le i \le s-1 \quad (s \ge 1) \end{cases}$$

$$x_r = x_{r+1} = \frac{(n-s)!}{n!}\binom{r+1}{s}\frac{r-s}{\sqrt{r(r+2)}}\,\frac{1+|\lambda_1|}{1-|\lambda_1|}$$

$$= \frac{(n-s)!}{n!}\binom{r+1}{s}\frac{r-s}{r} \quad \text{pour } r-s \text{ pair}$$

et d'autre part :

$$x_r = x_{r+1} = \frac{(n-s)!}{n!}\binom{r}{s}\frac{1+|\lambda_1|}{1-|\lambda_1|}$$

$$= \frac{(n-s)!}{n!}\binom{r}{s}\frac{\sqrt{r(r+2)}}{r} \quad \text{pour } r-s \text{ impair}$$

On en déduit :

$$* \; x_i - x_{i-1} = \frac{(n-s)!}{n!}\binom{i-1}{s-1} \ge 0 \qquad \text{pour } s \le i \le r-1$$

$$* \; x_r - x_{r-1} = \begin{cases} \dfrac{r-s}{r}\binom{s}{r-1} \quad 0 & \text{si } r-s \text{ est pair} \\ \binom{r}{s}\left[\dfrac{\sqrt{r(r+2)}-1}{r-s}\right] > 0 & \text{si } r-s \text{ est impair} \end{cases}$$

$$* \; x_{r+1} - x_r = 0$$

$$* \; x_{n-i} - x_{n-i-1} = -(x_i - x_{i-1}) < 0 \qquad \text{pour } s \le i \le r.$$

Comme le nombre de zéros de Ψ'_s dans $]0, 1[$ est au plus égal au nombre de changements de signes de la suite $(x_i - x_{i-1})$ $(1 \le i \le 2r+1)$ et comme $\Psi'_s(0) \cdot \Psi'_s(1) \le 0$, on voit que Ψ'_s ne s'annule qu'en $x = 1/2$, donc (24) est démontré. On calcule alors :

$$\Psi_s(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{s!}\,\frac{1}{4^r}\left\{\sum_{i=s}^{r-1}\binom{n-s}{i-s} + \binom{n-r}{r-s}\frac{r+1}{r}\,\frac{r-s}{r-s+1}\right\} \qquad \text{pour } r-s \text{ pair}$$

$$\Psi_s(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{s!}\,\frac{1}{4^r}\left\{\sum_{i=s}^{r-1}\binom{n-r}{i-s} + \binom{n-r}{r-s}\frac{\sqrt{r(r+2)}}{r}\right\} \qquad \text{pour } r-s \text{ impair}$$

Et l'on obtient finalement :

$$\boxed{\|L^r_{2r+1}\| = \sum_{s=o}^{r-1}\Psi_s(\tfrac{1}{2})}$$

Exemples : 1) $r = 1$ $(n = 3)$ $\|L^1_3\| = \frac{1}{4}(1+3\sqrt{3}) \sim 1{,}549$

2) $r = 2$ $(n = 5)$ $\|L^2_5\| = \frac{1}{16}(17+4\sqrt{2}) \sim 1{,}416$

Remarque : La valeur de $\|L^2_5\|$ calculée par cette méthode est différente de celle obtenue par Lipow dans [7], p. 379. On y trouve en effet : $\|L^2_5\| \sim 1{,}5239$. En revanche, la valeur calculée pour $\|L^1_3\|$ coïncide avec celle donnée dans [8] et [9].

On a démontré dans [11] les résultats suivants :

Proposition 9 :

(*i*) *La norme de l'opérateur* $\mathbb{L}^r_{2r+1}$ *converge vers* $\sqrt{e}$ *quand* $r \to +\infty$.

(*ii*) *Si pour tout* $|\nu|$ *assez grand, on a pour tout* $j \ge 0$:

$|f^{(j)}(\nu)| \le A_j|\nu|^\gamma$ $\qquad (\gamma \ge 0$ *fixé*) *et si la série* $\sum_{j\geq o} Aj/j!$ *converge, alors l'interpolant spline* $s_r \in S_{2r+1,r}$ *de* f *converge vers* f *quand* $r \to +\infty$ *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}$.

D'autres résultats y sont donnés concernant les formules de quadrature associées aux interpolants d'Hermite.

RÉFÉRENCES

[1] F. GANTMACHER, *"Théorie des matrices"*. Dunod Paris (1966).

[2] F. GANTMACHER, M. KREIN, *"Sur les matrices complètement non négatives et oscillatoires"*. Compositio Math. 4 (1937), 445-476.

[3] N. GASTINEL, *"Analyse Numérique Linéaire"*. Hermann, Paris (1966).

[4] S. KARLIN, *"Total Positivity"*. Stanford University Press (1968).

[5] S.L. LEE, *"B-splines for Cardinal Hermite Interpolation"* Linear Algebra Appl. 12, 269-280 (1975).

[6] P.R. LIPOW, I.J. SCHOENBERG, *"Cardinal Interpolation and Spline Functions : III Cardinal Hermite Interpolation"*. Linear Algebra Appl. 6, 273-304 (1973).

[7] P.R. LIPOW, *"Uniform Bounds for cardinal Hermite Spline operators with double knots"*. Journal of Approx. Theory, 16, 372-383 (1976).

[8] G. MEINARDUS, *"Über Die Norm des operators du Kardinaler Spline Interpolation"*. Journal of Approx. Theory, 16, 289-298 (1976).

[9] F.B. RICHARDS, *"Best Bounds for the uniform periodic spline interpolation operator"*. Journal of Approx. Theory, 7, 302-317 (1973).

[10] P. SABLONNIERE, *"Splines et Base de Bernstein II - Splines à support minimal (B-splines pour l'interpolation cardinale d'Hermite)"*. Publ. n° 112 UER Math. Pures et Appliquées, Université de Lille 1 (1977)

[11] P. SABLONNIERE, *"Splines et base de Bernstein III - Interpolation cardinale d'Hermite (splines de degré impair)"*. Publ. n° 123, UER Math. Pures et Appliquées. Université de Lille I (1977).

[12] I.J. SCHOENBERG, *"On Spline Functions"*, dans *Inequalities*, O. Shisha ed., Academic Press (1967), 255-291.

[13] I.J. SCHOENBERG, "*Cardinal Interpolation and Spline Functions, II - Interpolation of Data of Power Growth*", J. of Approximation Theory, 6, 404-420 (1972).

[14] I.J. SCHOENBERG, "*Cardinal Spline Interpolation, Regional Conference Series in Applied Mathematics*", Vol. 12, SIAM, Philadelphia (1973).

[15] I.J. SCHOENBERG, A. SHARMA, "*Cardinal Interpolation and Spline Functions V - The B-splines for cardinal Hermite Interpolation*" Linear Algebra and Applications, 7, 1-42 (1973).

CHAPITRE 3

SPLINES QUADRATIQUES GENERALISEES SUR UN INTERVALLE

I do not know what I may appear to the world ; but to myself I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

Isaac ***NEWTON***

I - Introduction

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\tau = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ une subdivision de I. Désignons par :

$$Sp_2(\bar{u}) = Sp_2(\bar{u}, I, \tau)$$

le sous-espace des fonctions $S \in C^1(I)$ dont la restriction à chaque sous-intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n - 1)$ est de la forme :

$$S(x) = a_{i0} + a_{i1}\, y + a_{i2}\, u_i(y)$$

où $y = (x - t_i)/h_i$, $h_i = t_{i+1} - t_i$ et où $u_i \in C^1[0, 1]$ vérifie quelques propriétés simples (cf. § II, Définition 1).

On pose $\bar{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$: on a donc le choix de la fonction u_i sur chaque sous-intervalle. Les fonctions de $Sp_2(\bar{u})$ sont appelées splines quadratiques généralisées (en abrégé SQG).

Ce chapitre étudie les problèmes suivants :

1) Construction des B-*splines* de $Sp_2(\bar{u})$ et représentation globale des SQG au moyen d'un *polygone Bézier*.

2) *Interpolation de Lagrange* aux points $t_0^* = t_0$, $t_{i+1}^* = (t_i + t_{i+1})/2$ pour $0 \leq i \leq n - 1$, $t_{n+1}^* = t_n$, généralisation d'un théorème de Marsden [9] sur la norme du projecteur de Lagrange correspondant. Sur ce sujet, voir également [1], [7], [10], [11], [16], [17].

3) *Interpolation par moyenne locale*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_i(x)\, S(x)\, dx = M_i \quad (0 \leq i \leq n - 1) \\ \\ S'(t_0) = S'(t_n) = 0 \qquad \text{ou } S(t_0) = y_0,\ S(t_n) = y_n \end{cases}$$

et généralisation d'un théorème de Schoenberg [14] sur les histosplines quadratiques. Voir également [8], [12], [14] et [15].

4) *Interpolation d'Hermite du type :*

$$S(t_{2i}) = y_i,\ S'(t_{2i}) = y'_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

lorsque $\tau = \{a = t_o < t_1 < \ldots < t_{2n} = b\}$ et $t_{2i+1} = (t_{2i} + t_{2i+2})/2$ $(0 \leq i \leq n-1)$.

5) Erreur d'interpolation pour le problème de Lagrange lorsque la fonction interpolée est dans $C^r[a, b]$, $0 \leq r \leq 2$.

6) Erreur d'interpolation pour le problème d'Hermite lorsque la fonction interpolée est dans $C^1[a, b]$ ou $C^2[a, b]$. Pour les splines quadratiques polynômiales, l'erreur est étudiée pour les fonctions de $C^3[a, b]$.

II - L'ESPACE $\mathbb{P}_2(u)$ DES POLYNOMES QUADRATIQUES GENERALISES ET SA BASE DE BERNSTEIN

Définition 1 : $\mathbb{P}_2(u)$ *est le sous-espace de* $C^1[0, 1]$ *formé des polynômes quadratiques généralisés du type* : $P(x) = a_o + a_1 x + a_2 u(x)$ *où* $u \in C^1[0, 1]$ *vérifie les conditions (cf. fig. 1).*

(*i*) $u(0) = u'(0) = 0$, $u(1) = 1$

(*ii*) u *et* u' *sont strictement croissantes*

(*iii*) $u(1 - x) = 1 - 2x + u(x)$

Ces propriétés permettent de prouver le

Lemme 1 : *le système* $\{1, x, u(x)\}$ *est un système de Descartes sur* $(0, 1)$, *c'est à dire que l'on a :*

$$Z(a_o + a_1 x + a_2 u(x)) \le S^-(a_o, a_1, a_2)$$

où $Z(P)$ *désigne le nombre de racines de* P *dans* $(0, 1)$ *et* $S^-(a_o, a_1, a_2)$ *le nombre de changements de signe de la suite* (a_o, a_1, a_2) *sans tenir compte des zéros.*

Preuve : Il suffit de montrer (cf. Karlin [18], chap. 1) que pour $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$, on a :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ u(x_1) & u(x_2) & u(x_3) \end{vmatrix} > 0 \text{ et pour } i < j :$$

$$D_1(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_i & x_j \end{vmatrix} > 0 \text{ (évident)}$$

$$D_2(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u(x_i) & u(x_j) \end{vmatrix} > 0 \text{ (évident d'après (ii))}$$

$$D_3(i, j) = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ u(x_i) & u(x_j) \end{vmatrix} > 0$$

et bien sûr $u(x) > 0$ pour tout $x \in (0, 1)$.

$$\text{Or } D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ u(x_1) & u(x_2)-u(x_1) & u(x_3)-u(x_2) \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } D > 0 \iff \frac{u(x_3)-u(x_2)}{x_3 - x_2} > \frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2 - x_1}$$

mais il existe y_1 et y_2, $x_1 < y_1 < x_2$, $x_2 < y_2 < x_3$ tels que
$u(x_3) - u(x_2) = (x_3 - x_2)\, u'(y_2)$
$u(x_2) - u(x_1) = (x_2 - x_1)\, u'(y_1)$

par conséquent (ii) entraîne $u'(y_1) < u'(y_2)$ donc $D > 0$. De même :

$$D_3(i,j) = \begin{vmatrix} x_i & x_j - x_i \\ u(x_i) & u(x_j)-u(x_i) \end{vmatrix} > 0 \text{ équivaut à :}$$

$$\frac{u(x_i)}{x_i} < \frac{u(x_j) - u(x_i)}{x_j - x_i}$$

mais il existe $0 < \eta_i < x_i$ tel que : $u(x_i) = x_i\, u'(\eta_i)$ et il existe $x_i < \xi_{ij} < x_j$ tel que $u(x_j) - u(x_i) = u'(\xi_{ij}) \cdot (x_j - x_i)$.

Comme u' est strictement croissante, on $u'(\eta_i) < u'(\xi_{ij})$, donc $D_3(i, j) > 0$, cqfd.

<u>*Lemme 2*</u> : *La fonction u vérifie également les propriétés suivantes :*

(iv) $2x - 1 < u(x) < x$ *pour* $x \in (0, 1)$

(v) $u'(1/2) = 1$ *et* $u'(1) = 2$

<u>Preuve</u> : On a d'abord $2x - 1 < u(x) < x$ pour $x \in [1/2, 1]$ car d'une part : $u(1 - x) = 1 - 2x + u(x) > 0$ et comme $u'(1 - x) = 2 - u'(x)$, on a $u'(1/2) = 1$ et $u'(1) = 2$; or u' strictement croissante entraîne $u(x) = x\, u'(\xi) < x$ pour $0 < \xi < x \leq 1/2$ et comme d'autre part $u(1 - x) = 1 - 2x + u(x) < 1 - x$ pour $1/2 \leq x < 1$ on a aussi $u(x) < x$ pour $1/2 \leq x \leq 1$.

<u>Définition 2</u> : La base de Bernstein de $\mathbb{P}_2(u)$ *est définie par* (cf. fig. 1).

$$\begin{cases} \phi_0(x) = u(1 - x) = 1 - 2x + u(x) \\ \phi_1(x) = 2(x - u(x)) \\ \phi_2(x) = u(x) \end{cases}$$

<u>Lemme 3</u> : La base de Bernstein ci-dessus vérifie les propriétés suivantes

(B1) $\phi_i(x) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{2} \phi_i(x) = 1$ et $x = \frac{1}{2}\phi_1(x) + \phi_2(x)$

(B2) $\begin{cases} \phi_0(0) = 1 & \phi_0'(0) = -2 \\ \phi_0(1) = 0 & \phi_0'(1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \phi_1(0) = 0 & \phi_1(1) = 0 \\ \phi_1'(0) = 2 & -\phi_1'(1) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \phi_2(0) = 0 & \phi_2'(0) = 0 \\ \phi_2(1) = 1 & \phi_2'(1) = 2 \end{cases}$

(B3) $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ *est un système de Descartes sur* $(0, 1)$, *i.e.* :

$$Z(b_0\,\phi_0 + b_1\,\phi_1 + b_2\,\phi_2) \leq S^-(b_0, b_1, b_2)$$

<u>Preuve</u> : Les propriétés (B1) et (B2) résultent trivialement de la définition 2 et du lemme 2. La propriété (B3) se démontre comme le lemme 1. Il suffit de remarquer par exemple que

$$\begin{vmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_0(x_2) & \phi_0(x_3) \\ \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \phi_1(x_3) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \phi_2(x_3) \end{vmatrix} = 2\,D > 0$$

et il en est de même pour les déterminants d'ordre 2.

__Définition 3__ : On appelle polygone Bézier (ou B-polygone) de $P(x) = b_0\ \phi_0(x) + b_1\ \phi_1(x) + b_2\ \phi_2(x) \in \mathbb{P}_2(u)$ *la ligne brisée de sommets :*

$$\tilde{b}_0 = (0,\ b_0),\ \tilde{b}_1 = (1/2,\ b_1)\ \tilde{b}_2 = (1,\ b_2)$$

Comme
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ \phi_1(x) + \phi_2(x) \\ P(x) = b_0\ \phi_0(x) + b_1\ \phi_1(x) + b_2\ \phi_2(x) \end{cases}$$

on voit que le point courant $(x,\ P(x))$ *est dans l'enveloppe convexe des sommets du B-polygone de* $P \in P_2(u)$ (fig. 1).

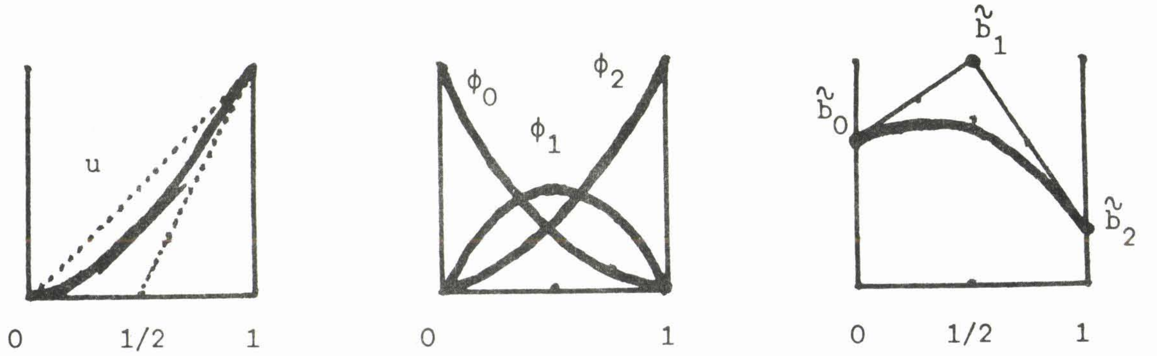


Figure 1

III - UN CAS PARTICULIER IMPORTANT : $u \in C^2[0,1]$ ET $u''(x) = w(x) > 0$ SUR $(0,1)$

Dans ce cas, on peut écrire :

(1) $$u(x) = \int_0^x \int_0^t w(s)\,ds\,dt$$

et $\mathbb{P}_2(u) = \ker L_w$ où L_w est l'opérateur différentiel :

(2) $$(L_w f)(x) = \frac{d}{dx}\,(f''(x)/w(x))$$

On a alors le :

Théorème 1 : *Une condition nécessaire et suffisante pour que* u *vérifie les propriétés (i) (ii) (iii) de la définition 1 est que* w *vérifie :*

(a) $w(x) = w(1-x)$

(b) $\int_0^1 x\,w(x)\,dx = 1$

Preuve : (i) et (ii) sont trivialement vérifiées pour toute fonction u de la forme (1) sauf la condition $u(1) = 1$. Posons $\hat{u}(x) = u(1-x)$. Si l'on veut que $\hat{u}(x)$ appartienne à $\mathbb{P}_2(u) = \ker L_w$, il faut et il suffit que $\frac{d}{dx}\{\hat{u}''(x)/w(x)\} = 0$ pour $0 < x < 1$. Or $\hat{u}''(x) = u''(1-x) = w(1-x)$ et $\frac{d}{dx}\{w(1-x)/w(x)\} = 0$ entraine $w(1-x) = k\,w(x)$. Pour $x = 1/2$, on voit que $k = 1$, donc (a) est vérifié.

D'autre part, on a :

$$u'(1) - u'(t) = \int_t^1 w(s)\,ds$$

$$\int_x^1 [u'(1) - u'(t)]\,dt = \int_x^1 \int_t^1 w(s)\,ds\,dt$$

La première intégrale est égale à :

$$(1-x)\,u'(1) + u(x) - 1$$

La deuxième intégrale devient, en tenant compte de (a) :

$$\int_x^1 \int_t^1 w(s)\,ds\,dt = \int_x^1 \int_0^{1-t} w(s)\,ds\,dt = \int_0^{1-x} \int_0^t w(s)\,ds\,dt = u(1-x)$$

On obtient donc :

$$u(1-x) = u'(1) - 1 - u'(1) \cdot x + u(x)$$

$x = 0$ et $u(1) = 1$ donnent $u'(1) = 2$ et $u(1-x) = 1 - 2x + u(x)$, donc (iii) est vrai.

Comme $u(x) = \int_0^x (x-t)\,w(t)\,dt$ (Taylor en 0) la condition $u(1) = 1$ s'écrit :

$$1 = \int_0^1 w(t)\,dt - \int_0^1 t\,w(t)\,dt$$

et comme $u'(1) = \int_0^1 w(t)\,dt = 2$, on a bien la condition (b), cqfd.

Donnons quelques exemples de fonctions u.

Exemple 1 : $u(x) = x^2$, $\mathbb{P}_2(u) = \mathbb{P}_2$.

Exemple 2 : $w(x) = \alpha\,\mathrm{ch}(\alpha/2 - \alpha x)/\mathrm{sh}(\alpha/2)$
(où $\alpha > 0$), vérifie $w(1-x) = w(x)$

et $\int_0^1 x\,w(x)\,dx = 1$. La fonction u correspondante est

$$u(x) = [\mathrm{ch}(\alpha/2)(\mathrm{ch}(\alpha x) - 1) - \mathrm{sh}(\alpha/2)(\mathrm{sh}(\alpha x) - (\alpha x)]/\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha/2)$$

Lorsque $\alpha \to 0$, $w(x) \to 2$ donc $u(x) \to x^2$ et lorsque $\alpha \to +\infty$, $u(x) \to x$.

Exemple 3 : $w(x) = \alpha \cos(\alpha/2 - \alpha x)/\sin(\alpha/2)$, (où $0 < \alpha < \pi$) donne :

$u(x) = [\cos(\alpha/2)(1 - \cos(\alpha x)) + \sin(\alpha/2)(\alpha x - \sin(\alpha x))]/\alpha \sin(\alpha/2)$

lorsque $\alpha \to 0$, $u(x) \to x^2$ et lorsque $\alpha = \pi$, on a $w(x) = \pi \sin \pi x$ et $u(x) = x - \sin \pi x/\pi$.

Exemple 4 : $w(x) = k(\alpha) \cdot x^{\alpha}(1 - x)^{\alpha}$ $(\alpha > -1)$ avec
$k(\alpha) = \Gamma(2\alpha + 3)/\Gamma(\alpha + 2)\, \Gamma(\alpha + 1)$. ($\Gamma$ = fonction gamma d'Euler)
$f \in \mathbb{P}_2(u)$ si et seulement si, pour $0 < x < 1$:

$$\frac{d}{dx} \{f''(x)/x^{\alpha}(1 - x)^{\alpha}\} = 0$$

ou encore : $x(1 - x) f'''(x) - \alpha(1 - 2x) f''(x) = 0$

Exemple 5 : $w(a, x) = 2a + 12(1 - a)\, x(1 - x)$, où $0 < a < 3$, donne :
$u(a, x) = a\, x^2 + (1 - a)\, (2x^3 - x^4)$.
On vérifie que $a \leq b \Longrightarrow u(a, x) \leq u(b, x)$ et $u(1, x) = x^2$.

Lemme 5 : *(Interpolation de Lagrange dans* $\mathbb{P}_2(u)$*)*

L'interpolant $P \in \mathbb{P}_2(u)$ *de* f, *définie sur* $[0, 1]$, *aux points* 0, $1/2$ *et* 1, *est donné par :*

$$P(x) = f(0)\, \ell_0(x) + f(1/2)\, \ell_1(x) + f(1)\, \ell_2(x)$$

où $\ell_0(x) = \frac{1}{1-2m} [(1 - 2m)(1 - x) - (x - u(x))]$

$$\ell_1(x) = \frac{2}{1-2m} (x - u(x))$$

$$\ell_2(x) = \frac{1}{1-2m} (u(x) - 2m\, x)$$

avec $0 < m = u(1/2) < 1/2$.

Preuve : Simple vérification.

IV - L'ESPACE $Sp_2(\bar{u})$ DES SPLINES QUADRATIQUES GENERALISEES (SQG) ET LES B-SPLINES

Soit $I = [a, b]$ et $\tau = \{a = t_0 < t_1 <\ldots< t_n = b\}$ une subdivision de I. On pose $h_i = t_{i+1} - t_i$ et $t^*_{i+1} = t_i + \frac{1}{2} h_i$ $(0 \leq i \leq n - 1)$.

Soit $\bar{u} = (u_1,\ldots, u_{n-1})$ une suite de n - 1 fonction de $C^1[0, 1]$ vérifiant les conditions de la définition 1 du § II.

Définition 4 : L'espace des splines quadratiques généralisées (SQG) *associées à cette suite $\bar{u}$ est défini par :*

$$Sp_2(\bar{u}) = Sp_2(\bar{u}, I, \tau) = \{S \in C^1[a, b] : S \mid (t_i, t_{i+1}) \in \mathbb{P}_2(u_i),\ 0 \leq i \leq n - 1\}$$

Si $S \in Sp_2(\bar{u})$, on peut représenter S sur l'intervalle (t_i,t_{i+1}) sous la forme :

$$(3) \qquad S(x) = b_{2i}\, \phi_{i0}(y_i) + b_{2i+1}\, \phi_{i1}(y_i) + b_{2i+2}\, \phi_{i2}(y_i)$$

où $y_i = (x - t_i)/h_i \in [0, 1]$ et où $\{\phi_{i0}, \phi_{i1}, \phi_{i2}\}$ est la base de Bernstein de $\mathbb{P}_2(u_i)$. On remarque que $S(t_i) = b_{2i}$.

Définition 5 : Les points $\tilde{b}_{2i} = (t_i, b_{2i})$ et $\tilde{b}_{2i+1} = (t^*_{i+1}, b_{2i+1})$ sont les sommets du polygone Bézier (ou B-polygone) global de S, et $\{\tilde{b}_{2i}, \tilde{b}_{2i+1}, \tilde{b}_{2i+2}\}$ est le B-polygone local de S sur (t_i, t_{i+1}).

Lemme 6 : Les conditions de continuité C^1 aux points t_i se traduisent sur le B-polygone global de S par les n-1 relations :

$$h_i(b_{2i} - b_{2i-1}) = h_{i-1}(b_{2i+1} - b_{2i})$$

où i varie de 1 à n-1.

<u>Preuve</u> : D'après (3) et le lemme 3, on a :

$$S'(t_i^+) = \frac{2}{h_i}(b_{2i+1} - b_{2i})$$

$$S'(t_{i+1}^-) = \frac{2}{h_i}(b_{2i+2} - b_{2i+1})$$

Au point t_i, on doit avoir $S'(t_i^-) = S'(t_i^+)$ d'où la relation ci-dessus, cqfd.

On en déduit immédiatement : $\dim Sp_2(\bar{u}) = n + 2$

En effet, le B-polygone global a $2n + 1$ sommets liés par $n - 1$ relations.

Construisons maintenant une base de $Sp_2(\bar{u})$ formée de fonctions à support borné (B-splines).

<u>Définition 6</u> : Posons $\alpha_i = h_{i-1}/(h_{i-1} + h_i)$, $\beta_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$ *pour* $1 \le i \le n-1$ *et* $y_i = (x-t_i)/h_i$ *pour* $0 \le i \le n-1$. *Les B-splines de* $Sp_2(\bar{u})$ *sont définies par :*

$$N_0(x) = \begin{cases} \phi_{00}(y_0) & \text{pour } x \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_1(x) = \begin{cases} \phi_{01}(y_0) + \beta_1\, \phi_{02}(y_0) & \text{pour } x \in [t_0, t_1] \\ \beta_1\, \phi_{10}(y_1) & \text{pour } x \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_i(x) = \begin{cases} \alpha_{i-1}\, \phi_{i-2,2}(y_{i-2}) & \text{pour } x \in [t_{i-2}, t_{i-1}] \\ \alpha_{i-1}\, \phi_{i-1,0}(y_{i-1}) + \phi_{i-1,1}(y_{i-1}) + & \\ \qquad \beta_i\, \phi_{i-1,2}(y_{i-1}) & \text{pour } x \in [t_{i-1}, t_i] \\ \beta_i\, \phi_{i0}(y_i) & \text{pour } x \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

lorsque $i = 2,\dots, n - 1$ $(n \ge 3)$

$$N_n(x) = \begin{cases} \alpha_{n-1}\, \phi_{n-2,2}(y_{n-2}) & \text{pour } x \in [t_{n-2}, t_{n-1}] \\ \alpha_{n-1}\, \phi_{n-1,0}(y_{n-1}) + \phi_{n-1,1}(y_{n-1}) & \text{pour } x \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{n+1}(x) = \begin{cases} \phi_{n-1,2}(y_{n-1}) & \textit{pour } x \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que les $N_i \in Sp_2(\bar{u})$ pour $0 \le i \le n+1$, et que l'on a les propriétés suivantes :

<u>*Lemme 7*</u> : (BS1) $N_i(x) \ge 0$, $\sum_{i=0}^{n+1} N_i(x) = 1$

et $x = \sum_{i=0}^{n+1} t_i^* N_i(x)$

avec $t_0^* = t_0$, $t_{n+1}^* = t_n$ *et* $t_i^* = t_{i-1} + \frac{1}{2} h_{i-1}$ *pour* $1 \le i \le n$.

(BS2) $N_0(t_0) = N_{n+1}(t_n) = 1$

$N_1(t_1) = \beta_1 = h_1/(h_0 + h_1)$

$N_n(t_{n-1}) = \alpha_{n-1} = h_{n-2}/(h_{n-2} + h_{n-1})$

et pour $2 \le i \le n-1$:

$N_i(t_{i-1}) = \alpha_{i-1} = h_{i-2}/(h_{i-2} + h_{i-1})$

$N_i(t_i) = \beta_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$

(BS3) $N_0'(t_0) = -N_1'(t_0) = -2/h_0$

$N_n'(t_n) = -N_{n+1}'(t_n) = -2/h_{n-1}$

et pour $1 \le i \le n-1$:

$N_{i+1}'(t_i) = -N_i'(t_i) = 2/(h_{i-1} + h_i)$

(BS4) *Les B-splines forment une base de* $Sp_2(\bar{u})$.

<u>Preuve</u> : Les propriétés (BS1) (BS2) (BS3) se vérifient immédiatement par le calcul. Démontrons que les N_i forment une base.

Comme dim $Sp_2(\bar{u}) = n + 2$, il suffit de vérifier leur indépendance linéaire.

$$\text{Si } S(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i N_i(x) = 0$$

on a sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ $(1 \le i \le n-2)$:

$$a_i\, N_i(x) + a_{i+1}\, N_{i+1}(x) + a_{i+2}\, N_{i+2}(x) = 0$$

et, en utilisant la définition 6 :

$$(4) \qquad (a_i\, \beta_i + a_{i+1}\, \alpha_i)\, \phi_{i0}(y_i) + a_{i+1}\, \phi_{i1}(y_i) + (a_{i+1}\, \beta_{i+1} + a_{i+2}\, \alpha_{i+1})\phi_{i2}(y_i) = 0$$

Comme $\{\phi_{i0}, \phi_{i1}, \phi_{i2}\}$ est une base de $\mathbb{P}_2(u_i)$ on en déduit $a_{i+1} = 0$, puis $a_i = a_{i+2} = 0$; puis $S(t_0) = a_0 = S(t_n) = a_{n+1} = 0$, cqfd.

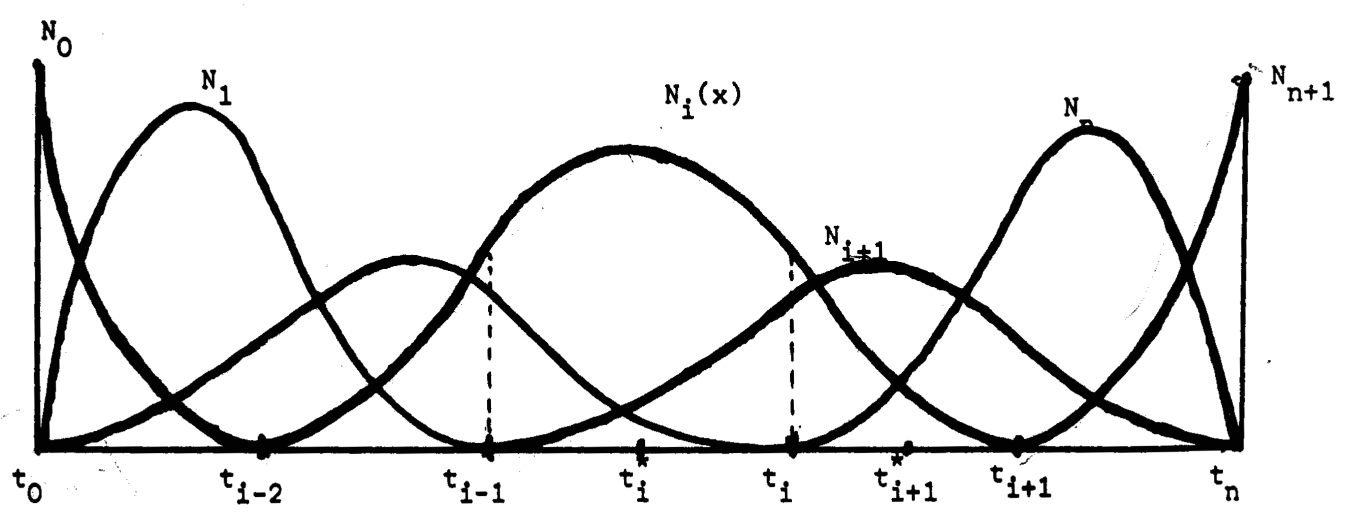
En ce qui concerne la *forme* de ces B-splines, il est clair que N_i est *convexe* sur (t_{i-2}, t_{i-1}) et (t_i, t_{i+1}) car α_{i-1} et $\beta_i > 0$. Sur (t_{i-1}, t_i), on a :

$$N_i'(x) = \frac{1}{h_{i-1}} [\alpha_{i-1}(u_{i-1}'(y_{i-1}) - 2) + 2(1 - u_{i-1}'(y_{i-1})) + \beta_i\, u_{i-1}'(y_{i-1})]$$

$$= \frac{1}{h_{i-1}} (2\, \beta_{i-1} - (\beta_{i-1} + \alpha_i)\, u_{i-1}'(y_{i-1}))$$

On voit donc que $N_i'(x)$ est strictement décroissante sur (t_{i-1}, t_i) et s'annule pour la racine y_{i-1} de $u_{i-1}'(y_{i-1}) = 2\beta_{i-1}/(\beta_{i-1} + \alpha_i)$. Autrement dit, $N_i(x)$ est *concave* et passe par un maximum. (Fig. 2).

Figure 2 : B-splines de $Sp_2(\bar{u})$



Définition 7 : Par analogie avec la définition 5, et en vertu de (BS1), *on appelle polygone spline (ou S-polygone) de*

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i N_i(x) \text{ la ligne brisée de sommets}$$

$$\tilde{a}_i = (t_i^*, a_i),\ 0 \leq i \leq n+1.$$ *Le point* $(x, S(x))$ *est dans l'enveloppe convexe du S-polygone de* S.

Lemme 8 : Le B-*polygone global et le* S-*polygone sont liés par les relations :*

$$b_0 = a_0,\ b_{2n} = a_{n+1}$$
$$b_{2i+1} = a_{i+1} \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1.$$
$$b_{2i} = \beta_i a_i + \alpha_i a_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

Preuve : Cela résulte immédiatement de la comparaison des expressions (3) et (4).

Remarque : L'espace $Sp_2(\bar{u})$ dépend du choix des fonctions u_i. Si les u_i sont du type de l'exemple 2 du § III, on parlera de SQG hyperboliques Si elles sont du type de l'exemple 3, on parlera de SQG trigonométriques. Si elles sont du type de l'exemple 4, on parlera de SQG de Gegenbauer. puisque w(x) est la fonction de poids de ces polynômes orthogonaux (en particulier $\alpha = 0$ redonne les splines quadratiques classiques). Pour l'exemple 5, on peut parler de SQG pseudo-quartiques. Ces différents choix permettent de faire varier la forme de la SQG et leur rôle apparaîtra peut-être plus intéressant dans les problèmes d'interpolation de données monotones ou convexes que nous étudierons ultérieurement.

V - INTERPOLATION DE LAGRANGE DANS $Sp_2(\bar{u})$ ET GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE MARSDEN

On se propose de résoudre dans $Sp_2(\bar{u})$ le problème d'interpolation suivant :

(5) $\quad S(t_i^*) = f(t_i^*) = f_i^* \qquad 0 \le i \le n+1$

avec $t_0^* = t_0$, $t_{n+1}^* = t_n$ et pour $0 \le i \le n-1$:

$$t_{i+1}^* = t_i + h_i/2 = (t_i + t_{i+1})/2.$$

Théorème 2 : *Le problème* (5) *admet une solution unique* S *dans* $Sp_2(\bar{u})$. *Les coefficients* b_{2i} $(0 \le i \le n)$ *du B-polygone global sont solutions du système tridiagonal suivant, de taille* n-1.

$$B_1 b_2 + C_1 b_4 = \frac{C_1}{m_1} f_2^* + \frac{A_1}{m_0}(f_1^* - m_0 f_0^*)$$

$$A_i b_{2i-2} + B_i b_{2i} + C_i b_{2i+2} = \frac{C_i}{m_i} f_{i+1}^* + \frac{A_i}{m_{i-1}} f_i^*$$

pour $2 \le i \le n-2$

$$A_{n-1} b_{2n-4} + B_{n-1} b_{2n-2} = \frac{C_{n-1}}{m_{n-1}}(f_n^* - m_{n-1} f_{n+1}^*) + \frac{A_{n-1}}{m_{n-2}} f_{n-1}^*$$

où l'on a posé, pour $1 \le i \le n-1$:

$$A_i = m_{i-1}\beta_i/(1-2m_{i-1}) \qquad \alpha_i = h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i)$$
$$C_i = m_i \alpha_i/(1-2m_i) \qquad m_i = u_i(1/2) < 1/2$$
$$B_i = 1 + A_i + C_i. \qquad \beta_i = 1-\alpha_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$$

Les coefficients b_{2i+1} *s'obtiennent alors par les* n *relations* :

$$(1-2m_i)\, b_{2i+1} = f_{i+1}^* - m_i b_{2i} - m_i b_{2i+2} \quad (0 \le i \le n-1)$$

avec $b_0 = f_0^*$ *et* $b_{2n} = f_{n+1}^*$.

Preuve : La représentation locale (3) de S donne :

(6) $\quad f_{i+1}^* = S(t_{i+1}^*) = m_i b_{2i} + (1-2m_i)\, b_{2i+1} + m_i b_{2i+2}$

pour $0 \leq i \leq n - 1$, et :

$$S(t_0^*) = b_0 = f_0^*, \quad S(t_{n+1}^*) = b_{2n} = f_{n+1}^*$$

D'autre part, le lemme 6 donne $(1 \leq i \leq n - 1)$

$$b_{2i} = \alpha_i \, b_{2i+1} + \beta_i \, b_{2i-1} \tag{7}$$

On déduit de (6) :

$$(1 - 2m_{i-1}) \, b_{2i-1} = f_i^* - m_{i-1} \, b_{2i-2} - m_{i-1} \, b_{2i}$$

$$(1 - 2m_i) \, b_{2i+1} = f_{i+1}^* - m_i \, b_{2i} - m_i \, b_{2i+2}$$

et en remplaçant dans (7) ; on a pour $2 \leq i \leq n - 2$:

$$\frac{m_{i-1}}{1-2m_{i-1}} \beta_i \, b_{2i-2} + \left(\frac{m_i}{1-2m_i} \alpha_i + 1 + \frac{m_{i-1}}{1-2m_{i-1}} \beta_i\right) b_{2i}$$
$$+ \frac{m_i}{1-2m_i} \alpha_i \, b_{2i+2} = \frac{\alpha_i}{1-2m_i} f_{i+1}^* + \frac{\beta_i}{1-2m_{i-1}} f_i^*$$

pour $i = 1$ et $i = n - 1$, on obtient respectivement :

$$\left(\frac{m_1}{1-2m_1} \alpha_1 + 1 + \frac{m_0}{1-2m_0} \beta_1\right) b_2 + \frac{m_1}{1-2m_1} \alpha_1 \, b_4 =$$
$$\frac{\alpha_1}{1-2m_1} f_2^* + \frac{1\ \beta_1}{1-2m_0} (f_1^* - m_0 \, f_0^*)$$

$$\frac{m_{n-2}}{1-2m_{n-2}} \beta_{n-1} \, b_{2n-4} + \left(\frac{m_{n-1}}{1-2m_{n-1}} \alpha_{n-1} + 1 + \frac{m_{n-2}}{1-2m_{n-2}} \beta_{n-1}\right) b_{2n-2}$$
$$= \frac{\alpha_{n-1}}{1-2m_{n-1}} (f_n^* - m_{n-1} \, f_{n+1}^*) + \frac{\beta_{n-1}}{1-2m_{n-2}} f_{n-1}^*$$

Posant $A_i = m_{i-1} \, \beta_i/(1-2m_{i-1})$

$C_i = m_i \, \alpha_i/(1-2m_i)$

et $B_i = C_i + 1 + A_i$, pour $1 \leq i \leq n - 1$

on obtient une matrice tridiagonale à diagonale strictement dominante puisque

$B_i > A_i + C_i$

L'interpolation est possible pour toute subdivision τ de I et tout choix des fonctions u_i et S est unique.

Remarque : La solution unique S peut s'exprimer localement dans la base de Lagrange de $\mathbb{P}_2(u_i)$ (cf. lemme 5). Comme on a :

$$\begin{aligned} \phi_{i0}(y) &= \ell_{i0}(y) + m_i\ \ell_{i1}(y) \\ \phi_{i1}(y) &= (1-2m_i)\ \ell_{i1}(y) \qquad\qquad (0 \le y \le 1) \\ \phi_{i2}(y) &= m_i\ \ell_{i1}(y) + \ell_{i2}(y) \end{aligned}$$

S(x) s'écrit, pour $x \in (t_i, t_{i+1})$:

$$S(x) = b_{2i}\ \ell_{i0}(y_i) + (m_i\ b_{2i} + (1-2m_i)\ b_{2i+1} + m_i\ b_{2i+2})\ \ell_{i1}(y_i) + b_{2i+2}\ \ell_{i2}(y_i)$$

où $y_i = (x - t_i)/h_i$, et en tenant compte de la relation (6) :

$$S(x) = b_{2i}\ \ell_{i0}(y_i) + f^*_{i+1}\ \ell_{i1}(y_i) + b_{2i+2}\ \ell_{i2}(y_i) \tag{8}$$

Soit f une fonction définie et continue sur I et $P(\bar{u}, \tau)$ l'opérateur de C(I) dans $Sp_2(\bar{u}, I, \tau)$ qui à f associe l'unique interpolant défini par le théorème 2 ci-dessus. On suppose que les espaces sont munis de la norme uniforme et *l'on se propose de généraliser un théorème de Marsden* [9] concernant la norme de l'opérateur de projection :

$$||P(\bar{u}, \tau)||_\infty = \sup\{||P(\bar{u}, \tau)\ f||_\infty \mid ||f||_\infty \le 1\}$$

Théorème 3 : *Pour toute subdivision τ de I, on a :*

$$||P(\bar{u}, \tau)||_\infty \le 1/(1-2m)$$

où $m = \max_{0\le i\le n-1} m_i < 1/2 \qquad (m_i = u_i(1/2))$

<u>Preuve</u> : La démonstration se fait en deux étapes : on montre d'abord que pour $0 \leq i \leq n$

$$|b_{2i}| \leq ||f||_\infty/(1-2m)$$

et l'on utilise (8) pour montrer que

$$||S||_\infty \leq ||f||_\infty/(1-2m)$$

$|b_0| = |f_0^*|$ et $|b_{2n}| = |f_{n+1}^*|$ sont majorés par $||f||_\infty$

D'autre part si l'on pose $b = \max\limits_{0\leq i\leq n} |b_{2i}|$, on obtient à partir de la $i^{\text{ième}}$ équation :

$$(1 + A_i + C_i)\, b \leq ||f||_\infty\, (\beta_i + \alpha_i)/(1-2m) + (A_i + C_i)\, b$$

donc $b \leq ||f||_\infty/(1-2m)$.

Sur l'intervalle (t_i, t_{i+1}^*), en posant $y = (x - t_i)/h_i$

$$S(x) = \frac{1}{1-2m_i} \{b_{2i}[(1-2m_i) - 2(1-m_i)\, y + u_i(y)]$$

$$+ 2f_{i+1}^* [y - u_i(y)] + b_{2i+2} [u_i(y) - 2m_i y]\}$$

Sachant que $\ell_{i0}(y)$ et $\ell_{i1}(y) \geq 0$ et $\ell_{i2}(y) \leq 0$ pour $0 \leq y \leq 1/2$, on a la majoration :

$$(1-2m_i)\ |S(x)| \leq (\frac{1}{1-2m})\ ||f||_\infty \{(1-2m_i) - 2(1-m_i)\, y + u_i(y)$$

$$+ 2(1-2m_i)(y - u_i(y)) - u_i(y) + 2m_i y\}$$

$$(1-2m_i)\ |S(x)| \leq (\frac{1}{1-2m})\ ||f||_\infty\ (1-2m_i)(1-2u_i(y))$$

et comme $0 < 1-2u_i(y) \leq 1$ pour $0 \leq y \leq 1/2$, on en déduit :

$$|S(x)| \leq ||f||_\infty/(1-2m)$$

La démonstration est identique pour $1/2 \leq y \leq 1$, par conséquent on a bien :

$$||S||_\infty \leq ||f||_\infty/(1-2m), \text{ cqfd}$$

Remarques : 1) Le théorème de Marsden est un cas particulier du théorème 3 ; il suffit de prendre $u_i(x) = x^2$, donc $m_i = m = 1/4$ pour tout i et l'on a bien

$$||P||_\infty \leq 2,$$

indépendamment de la subdivision τ.

2) Si $u_i(x)$ est du type de l'exemple 2 (splines hyperboliques), on a

$$m_i = u_i(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_i} \text{th}(\alpha_i/4). \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

par conséquent si $\alpha = \max \alpha_i$,

$$m = \max m_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \text{th}(\alpha/4) \text{ et } ||P||_\infty \leq \alpha/2\text{th}(\alpha/4)$$

Lorsque $\alpha \to 0$, le majorant tend vers 2 et si $\alpha \to +\infty$, il tend vers $+\infty$.

3) Si u_i est de type trigonométrique (exemple 3), on a

$$m_i = u_i(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_i} \text{tg}(\alpha_i/4),$$

par conséquent si $\alpha = \min \alpha_i$, on a

$$m = \max m_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \text{tg}(\alpha/4)$$

et $\quad ||P||_\infty \leq \alpha/2\text{tg}(\alpha/4)$

Lorsque $\alpha \to 0$, le majorant tend vers 2 et si $\alpha \to \pi$, il tend vers $\pi/2$.

4) Si $u_i(x) = a_i\, x^2 + (1 - a_i)(2x^3 - x^4)$, on a

$m_i = (3 + a_i)/16$ (avec $0 < a_i < 3$)

donc si $a = \max a_i$, $m = (3 + a)/16$ et $||P||_\infty \leq 8/(5 - a)$

Comme $0 < a < 3$, le majorant est compris entre $\frac{8}{5}$ et 4.

5) On pourrait rechercher l'interpolant dans la base des B-splines :

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i\, N_i(x)$$

Les conditions $S(t_i^*) = f_i$ pour $0 \leq i \leq n + 1$ donnent $a_0 = f_0^*$, $a_{n+1} = f_{n+1}^*$ et pour $1 \leq i \leq n - 2$:

$$\beta_i\, m_i\, a_i + (\alpha_i\, m_i + (1-2m_i) + \beta_{i+1}\, m_i)\, a_{i+1}$$

$$+ \alpha_{i+1}\, m_i\, a_{i+2} = f_{i+1}^*$$

a ces équations, il faut ajouter :

$$((1-2m_0) + \beta_1\, m_0)\, a_1 + \alpha_1\, m_0\, a_2 = f_1^* - m_0\, f_0^*$$

$$\beta_{n-1}\, m_{n-1}\, a_{n-1} + (\alpha_{n-1}\, m_{n-1} + (1-2m_{i-1}))\, a_n = f_n^* - m_{n-1}\, f_{n+1}^*$$

Malheureusement ce système tridiagonal n'est pas toujours à diagonale strictement dominante. C'est le cas seulement si :

$$\alpha_i\, m_i + 1 - 2m_i + \beta_{i+1}\, m_i > \beta_i\, m_i + \alpha_{i+1}\, m_i$$

ce qui donne la condition :

$$\beta_i + \alpha_{i+1} < 1/2m_i$$

soit $2m_i\, h_i(h_{i-1} + 2h_i + h_{i+1}) < (h_{i-1} + h_i)\,(h_i + h_{i+1})$

Si $m_i \leq 1/4$, cette condition est toujours vérifiée (en particulier pour les splines quadratiques ordinaires). En revanche, elle ne l'est plus pour $m_i > 1/4$ et pour une subdivision quelconque : cependant elle est toujours vérifiée quand la subdivision est uniforme ($h_i = h$ pour tout i) car $m_i < 1/2$.

VI - INTERPOLATION PAR MOYENNE LOCALE ET GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE SCHOENBERG

On se propose de construire $S \in Sp_2(\bar{u})$ solution du problème suivant :

$$(9) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_i(x)\, S(x)\, dx = M_i \quad (0 \le i \le n-1) \\ \\ S(t_0) = y_0,\ S(t_n) = y_n \end{cases}$$

où les M_i sont donnés et les ω_i sont définis par

$$\omega_i(x) = w_i((x - t_i)/h_i)$$

les w_i vérifiant les conditions du théorème 1.

Posons $\gamma_i = \displaystyle\int_0^1 (u_i'(t))^2\, dt$, les u_i étant définies par $u_i(t) = \displaystyle\int_0^t \int_0^s w_i(v)\, dv\, ds$. Il est clair que $1 \le \gamma_i \le 2$ car d'une part $2 - \gamma_i = \displaystyle\int_0^1 u_i(t)\, u''_i(t) > 0$ et d'autre part $u_i(t) < t$ implique $\displaystyle\int_0^1 u''_i(t)\, u_i(t)\, dt < \int_0^1 t\, u''_i(t)\, dt = 1$, soit $2 - \gamma_i < 1$. On a alors le

<u>*Théorème 4*</u> : *Le problème (9) admet une solution unique* S *dans* $Sp_2(\bar{u})$. *Les coefficients du B-polygone global sont solutions du système tridiagonal suivant :*

$$B_1\, b_2 + C_1\, b_4 = C_1\, M_1/h_1(2-\gamma_1) + A_1\, M_0/h_0(2-\gamma_0) - A_1\, y_0$$

$$A_i\, b_{2i-2} + B_i\, b_{2i} + C_i\, b_{2i+2} = C_i\, M_i/h_i(2-\gamma_i) + A_i\, M_{i-1}/h_{i-1}(2-\gamma_{i-1}$$
pour $i = 2,\ldots, n-2$

$$A_{n-1}\, b_{2n-4} + B_{n-1}\, b_{2n-2} = C_{n-1}\, M_{n-1}/h_{n-1}(2-\gamma_{n-1}) +$$
$$A_{n-1}\, M_{n-2}/h_{n-2}(2-\gamma_{n-2}) - C_{n-1}\, y_n.$$

où l'on a posé, pour $1 \le i \le n-1$:

$$A_i = \beta_i(2-\gamma_{i-1})/2(\gamma_{i-1}-1) > 0 \qquad \alpha_i = h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i)$$

$$C_i = \alpha_i(2-\gamma_i)/2(\gamma_i-1) > 0 \qquad \beta_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$$

$$B_i = 1 + A_i + C_i \qquad \gamma_i = \int_0^1 (u'_i(t))^2\, dt$$

Les coefficients b_{2i+1} $(0 \le i \le n-1)$ *s'obtiennent alors par les relations*

$$2h_i(\gamma_i-1)\, b_{2i+1} = M_i - (2-\gamma_i)\, h_i(b_{2i} + b_{2i+2})$$

<u>Preuve</u> : Sur l'intervalle (t_i, t_{i+1}), on a, avec $y_i = (x - t_i)/h_i$:

$$M_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_i(x)\, [b_{2i}\, \phi_{i0}(y_i) + b_{2i+1}\, \phi_{i1}(y_i) + b_{2i+2}\, \phi_{i2}(y_i)]\, dx$$

(10) $$M_i = h_i \int_0^1 u''_i(y_i)\, [b_{2i}(1-2y_i+u_i(y_i)) + 2\, b_{2i+1}(y_i-u_i(y_i)) + b_{2i}\, u_i(y_i)]\, dy_i$$

mais $$\int_0^1 u''_i(y_i)\, dy_i = u'_i(1) - u'_i(0) = 2$$

$$\int_0^1 y_i\, u''(y_i)\, dy_i = [y_i\, u'(y_i)]_0^1 - \int_0^1 u'(y_i)\, dy_i = u'_i(1) - u_i(1) + u_i(0) = 1$$

$$\int_0^1 u_i\, (y_i)\, u''_i(y_i)\, dy_i = [u(y_i)\, u'(y_i)]_0^1 - \int_0^1 (u'(y_i))^2\, dy_i = 2 - \gamma_i > 0$$

La relation (10) devient ; pour $0 \le i \le n - 1$:

$$M_i = h_i\, [b_{2i}(2 - \gamma_i) + 2b_{2i+1}(\gamma_i - 1) + (2 - \gamma_i)\, b_{2i+2}]$$

d'où l'on tire :

$$b_{2i+1} = \frac{M_i}{2h_i(\gamma_i-1)} - \frac{2-\gamma_i}{2(\gamma_i-1)}\, (b_{2i} + b_{2i+2})$$

que l'on remplace dans la relation :

$$b_{2i} = \alpha_i\, b_{2i+1} + \beta_i\, b_{2i-1} \quad (1 \le i \le n-1)$$

ce qui donne :

$$b_{2i} = \frac{\alpha_i\, M_i}{2h_i(\gamma_i - 1)} + \frac{\beta_i\, M_{i-1}}{2h_{i-1}(\gamma_{i-1}-1)} - \frac{\alpha_i(2-\gamma_i)}{2(\gamma_i-1)}\, b_{2i+2}$$
$$- \left(\frac{\alpha_i(2-\gamma_i)}{2(\gamma_i-1)} + \frac{\beta_i(2-\gamma_{i-1})}{2(\gamma_{i-1}-1)}\right) b_{2i} - \frac{\beta_i(2-\gamma_{i-1})}{2(\gamma_{i-1}-1)}\, b_{2i-2}$$

en introduisant les notations :

$$A_i = \beta_i(2 - \gamma_{i-1})/2\,(\gamma_{i-1} - 1)$$

$$C_i = \alpha_i(2 - \gamma_i)/2(\gamma_i - 1)$$

on obtient le système $(1 \le i \le n-1)$:

$$A_i\, b_{2i-2} + (1 + A_i + C_i)\, b_{2i} + C_i\, b_{2i+2} =$$
$$C_i\, M_i/h_i(2 - \gamma_i) + A_i\, M_{i-1}/h_{i-1}(2 - \gamma_{i-1})$$

pour $i = 1$ et $n - 1$, on tient compte de

$$b_0 = S(t_0) = y_0 \text{ et } b_{2n} = S(t_n) = y_n.$$

Le théorème suivant généralise un résultat de I.J. Schoenberg ([14] ou [15], Chapitre 10).

<u>Théorème 5</u> : *Si* S *est la solution du problème (9) donnée par le théorème 4 ci-dessus, on a pour toute fonction* f *de* $H^1(0, 1)$ *vérifiant les mêmes conditions de moyenne locale que* S :

$$\int_{t_0}^{t_n} (S'(t))^2\, dt < \int_{t_0}^{t_n} (f'(t))^2\, dt \quad (f \neq S)$$

(propriété d'optimalité)

<u>Preuve</u> : $\int_{t_0}^{t_n} (f'(t))^2\, dt = \int_{t_0}^{t_n} (S'(t))^2\, dt + 2\int_{t_0}^{t_n} S'(t)\,(f'(t) - S'(t))\, dt$
$+ \int_{t_0}^{t_n} (S'(t) - f'(t))^2\, dt$

Mais par intégration par parties :

$\int_{t_0}^{t_n} S'(t)\,(S'(t) - f'(t))\, dt = S'(t_n)\,[S(t_n) - f(t_n)] + S'(t_0) \times$
$[S(t_0) - f(t_0)] - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S''(t)\,(S(t) - f(t))\, dt$

Comme $S''(t) = \omega_i(t)/h_i^2$ pour $t \in (t_i, t_{i+1})$, les conditions (9) impliquent que cette intégrale est nulle, d'où la relation :

$$\int_{t_0}^{t_n} (f'(t))^2\, dt = \int_{t_0}^{t_n} (S'(t))^2\, dt + \int_{t_0}^{t_n} (S'(t) - f'(t))^2\, dt$$

et l'inégalité du théorème. L'égalité n'a lieu que si $S - f = k$ et $S(t_n) - f(t_n) = S(t_0) - f(t_0) = 0$ entraînent $S = f$. □

<u>Remarque</u> : Le résultat reste valable si on impose comme conditions aux limites :

$$S'(t_0) = S'(t_n) = 0$$

Il faut alors modifier les équations (1) et (n - 1) du théorème 4. On a, en effet, d'après les conditions aux limites ci-dessus :

$b_0 = b_1$ et $b_{2n-1} = b_{2n}$ donc $b_0 = M_0/2h_0(\gamma_0-1) - (2-\gamma_0)(b_0+b_2)/2(\gamma_0-1)$ ou $\gamma_0\, b_0 = M_0/h_0 - (2-\gamma_0)\, b_2$; de même $b_{2n} = M_{n-1}/2h_{n-1}(\gamma_{n-1}-1) - (2-\gamma_{n-1})$ $(b_{2n-2}+b_{2n})/2(\gamma_{n-1}-1)$ ou $\gamma_{n-1}\, b_{2n} = M_{n-1}/h_{n-1} - (2-\gamma_{n-1})\, b_{2n-2}$ et l'on remplace b_0 et b_{2n} par ces valeurs dans les équations :

$$A_i\, b_{2i-2} + B_i\, b_{2i} + C_i\, b_{2i+2} = C_i\, M_i/h_i(2-\gamma_i) + A_i\, M_{i-1}/h_{i-1}(2-\gamma_{i-1})$$

pour i = 1 et i = n - 1, ce qui donne :

$$(1 + C_1 + \beta_1(2-\gamma_0)/\gamma_0)\ b_2 + C_1\ b_4 = C_1\ M_1/h_1(2-\gamma_1) + \beta_1\ M_0/h_0\ \gamma_0$$

$$A_{n-1}\ b_{2n-4} + (1 + A_{n-1} + \alpha_{n-1}(2-\gamma_{n-1})/\gamma_{n-1})\ b_{2n-2}$$
$$= \alpha_{n-1}\ M_{n-1}/h_{n-1}\ \gamma_{n-1} + A_{n-1}\ M_{n-2}/h_{n-2}(2-\gamma_{n-2})$$

VII - INTERPOLATION D'HERMITE

Soit $\tau = \{t_0 < t_1 <\ldots< t_{2n}\}$ une subdivision de $I = [t_0, t_{2n}] = [a, b]$ en 2n sous-intervalles, telle que pour $0 \leq i \leq n-1$:

$$t_{2i+1} = (t_{2i} + t_{2i+2})/2$$

on pose $h_i = t_{2i+2} - t_{2i}$ donc $t_{2i+1} - t_{2i} = t_{2i+2} - t_{2i+1} = h_i/2$

On prend comme suite de fonctions :

$$\bar{u} = (u_0, u_0, u_1, u_1,\ldots, u_n, u_n)$$

i.e. la même fonction u_i intervient dans les intervalles (t_{2i}, t_{2i+1}) et (t_{2i+1}, t_{2i+2}). On étudie dans $Sp_2(\bar{u}, I, \tau)$ le problème d'Hermite suivant :

$$(H) \quad \begin{cases} S(t_{2i}) = f(t_{2i}) = y_i \\ \\ S'(t_{2i}) = f'(t_{2i}) = y_i' \end{cases} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

et on exprime sa solution dans la base d'Hermite, dans la base des B-splines et au moyen du B-polygone global.

Définissons sur $[0, 1]$, au moyen de la base de Bernstein $\{\phi_{i0}, \phi_{i1}, \phi_{i2}\}$ de $\mathbb{P}_2(u_i)$, les fonctions suivantes :

$$\eta_{i0}(x) = \begin{cases} \phi_{i0}(2x) + \phi_{i1}(2x) + \frac{1}{2}\phi_{i2}(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \\ \frac{1}{2}\phi_{i0}(2x-1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta_{i0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\phi_{i1}(2x) + \frac{1}{8}\phi_{i2}(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \\ \frac{1}{8}\phi_{i0}(2x-1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\eta_{i1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi_{i2}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \\ \frac{1}{2}\phi_{i0}(2x-1) + \phi_{i1}(2x-1) + \phi_{i2}(2x-1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta_{i1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}\,\phi_{i2}(2x) & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ -\frac{1}{8}\,\phi_{i0}(2x-1) - \frac{1}{4}\,\phi_{i1}(2x-1) & \text{si } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

On vérifie aisément que ces 4 fonctions forment une base de l'espace

$$\tilde{S}p_2(u_i) = Sp_2(u_i, [0, 1], \tilde{\tau})$$

où $\tilde{\tau}$ est la subdivision $\{0, 1/2, 1\}$ de $[0, 1]$ et que l'on a :

$$\begin{cases} \eta_{i0}(0) = 1 \\ \theta'_{i0}(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \eta'_{i0}(0) = \eta'_{i0}(1) = \eta_{i0}(1) = 0 \\ \theta_{i0}(0) = \theta_{i0}(1) = \theta'_{i0}(1) = 0 \end{cases}$$

et comme $\eta_{i1}(x) = \eta_{i0}(1-x)$ et $\theta_{i1}(x) = \theta_{io}(1-x)$, on a également :

$$\begin{cases} \eta_{i1}(1) = 1 \\ \theta'_{i1}(1) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \eta_{i1}(0) = \eta'_{i1}(0) = \eta'_{i1}(1) = 0 \\ \theta_{i1}(0) = \theta'_{i1}(1) = \theta_{i1}(1) = 0 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement le

<u>Lemme 9</u> : *La solution unique du problème d'Hermite*

$$S(0) = y_0,\ S'(0) = y'_0,\ S(1) = y_1,\ S'(1) = y'_1$$

dans l'espace $\tilde{S}p_2(u_i)$ *est donnée par :*

$$S(x) = y_0\,\eta_{i0}(x) + y'_0\,\theta_{i0}(x) + y_1\,\eta_{i1}(x) + y'_1\,\theta_{i1}(x)$$

On peut définir maintenant la base d'Hermite de $Sp_2(\bar{u})$:

pour $1 \le i \le n-1$; en posant $y_i = (x - t_{2i})/h_i$

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \eta_{i-1,1}(y_{i-1}) & \text{si } x \in [t_{2i-2}, t_{2i}] \\ \eta_{i,0}(y_i) & \text{si } x \in [t_{2i}, t_{2i+2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} h_{i-1}\ \theta_{i-1,1}(y_i) & \text{si } x \in [t_{2i-2}, t_{2i}] \\ h_i\ \theta_{i,0}(y_i) & \text{si } x \in [t_{2i}, t_{2i+2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour $i = 0$ et n, on ne garde respectivement que la moitié droite ou gauche de ces fonctions.

Le lemme 9 et la définition ci-dessus montrent que l'on a bien une base de $Sp_2(\bar{u})$. On remarque que cette base **s'exprime** au moyen des B-splines sous la forme :

$$\begin{cases} \Phi_i(x) = N_{2i}(x) + N_{2i+1}(x) \\ \Psi_i(x) = -\dfrac{h_{i-1}}{4} N_{2i}(x) + \dfrac{h_i}{4} N_{2i+1}(x) \end{cases}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, avec :

$$\Phi_0(x) = N_0(x) + N_1(x),\ \Psi_0(x) = \frac{h_0}{4} N_1(x)$$
$$\Phi_n(x) = N_{2n}(x) + N_{2n+1}(x),\ \Psi_n(x) = -\frac{h_{n-1}}{4} N_{2n}(x)$$

Théorème 6 : *Le problème d'Hermite* (H) *admet une solution unique dans* $Sp_2(\bar{u})$.

1) Dans la base d'Hermite, cette solution s'écrit :

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i\ \Phi_i(x) + y_i'\ \Psi_i(x))$$

2) Dans la base des B-splines :

$$S(x) = y_0\ N_0(x) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \frac{h_{i-1}}{4} y_i')\ N_{2i}(x)$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + \frac{h_i}{4} y_i')\ N_{2i+1}(x) + y_n\ N_{2n+1}(x)$$

3) *Localement, pour* $x \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$, *et en posant*

$$\xi = 2(x - t_{2i})/h_i, \text{ on a :}$$

$$S(x) = \sum_{j=0}^{2} b_{4i+j}\ \phi_{ij}(\xi)$$

de même, pour $x \in [t_{2i+1}, t_{2i+2}]$, *en posant*

$$\eta = 2(x - t_{2i+1})/h_i, \text{ on a :}$$

$$S(x) = \sum_{j=0}^{2} b_{4i+j+2}\ \phi_{ij}(\eta)$$

$$\text{où } b_{4i} = y_i,\ b_{4i+1} = y_i + \frac{h_i}{4} y_i'$$

$$b_{4i+4} = y_{i+1},\ b_{4i+3} = y_{i+1} - \frac{h_i}{4} y_{i+1}'$$

$$\text{et } b_{4i+2} = (b_{4i+1} + b_{4i+3})/2$$

Preuve : Il suffit d'appliquer localement le lemme 9 et d'utiliser les correspondances entre la base d'Hermite, les B-splines et leurs représentations dans la base de Bernstein de $\mathbb{P}_2(u_i)$.

VIII - INTERPOLATION DE LAGRANGE : LEMMES PRÉLIMINAIRES :

Si l'on pose $t_o^* = t_o$, $t_{n+1}^* = t_n$ et $t_{i+1}^* = (t_i + t_{i+1})/2$ pour $0 \le i \le n-1$, on a vu au paragraphe 5 que la solution du problème de Lagrange :

(11) $\quad S(t_i^*) = f(t_i^*) = f_i^* \ (0 \le i \le n+1)$

peut s'écrire, sur l'intervalle (t_i, t_{i+1}) sous la forme :

(12) $\quad S(x) = S_i\, \ell_{io}(t) + f_{i+1}^*\, \ell_{i1}(t) + S_{i+1}\, \ell_{i2}(t)$

où $\quad t = (x-t_i)/h_i$, $S_i = S(t_i)$, et :

$$\begin{cases} \ell_{io}(t) = \dfrac{1}{1-2m_i}\,(u_i(1-t) - 2m_i(1-t)) \\ \ell_{i1}(t) = \dfrac{2}{1-2m_i}\,(t - u_i(t)) & \qquad m_i = u_i(1/2) < 1/2 \\ \ell_{i2}(t) = \dfrac{1}{1-2m_i}\,(u_i(t) - 2m_i\, t) \end{cases}$$

les S_i étant solutions du système linéaire :

$$(13)\quad \begin{cases} (1+C_1+A_1)\, S_1 + C_1\, S_2 = \dfrac{C_1}{m_1} f_2^* + \dfrac{A_1}{m_o}(f_1^* - m_o f_o^*) \\ A_i\, S_{i-1} + (1+A_i+C_i)\, S_i + C_i\, S_{i+1} = \dfrac{C_i}{m_i} f_{i+1}^* + \dfrac{A_i}{m_{i-1}} f_i^* \\ \text{pour } i = 2, \ldots, n-2, \text{ et} \\ A_{n-1}\, S_{n-2} + (1+A_{n-1} + C_{n-1})\, S_{n-1} = \dfrac{C_{n-1}}{m_{n-1}}(f_n^* - m_{n-1} f_{n+1}^*) + \dfrac{A_{n-1}}{m_{n-2}} f_{n-1}^* \end{cases}$$

où l'on a posé pour simplifier :

$\alpha_i = h_{i-1} / (h_{i-1} + h_i)$, $\beta_i = 1 - \alpha_i$.

$A_i = m_{i-1}\, \beta_i / (1-2m_{i-1})$

$C_i = m_i\, \alpha_i / (1-2m_i)$

Soit $e(x) = f(x) - S(x)$ l'erreur d'interpolation et $e_i = f(t_i) - S(t_i) = f_i - S_i$ $(1 \le i \le n-1)$. Les e_i sont solutions du système :

$$(14)\begin{cases} (1+A_1+C_1)\, e_1 + C_1\, e_2 = A_1\, f_o + (1+A_1+C_1)\, f_1 + C_1\, f_2 \\ \qquad\qquad - \dfrac{C_1}{m_1} f_2^* - \dfrac{A_1}{m_o} f_1^* \\ A_i\, e_{i-1} + (1+A_i+C_i)\, e_i + C_i\, e_{i+1} = A_i\, f_{i-1} + (1 + A_i + C_i)\, f_i \\ \qquad\qquad + C_i\, f_{i+1} - \dfrac{C_i}{m_i} f_{i+1}^* - \dfrac{A_i}{m_{i-1}} f_i^* . (2 \le i \le n-2) \\ A_{n-1}\, e_{n-2} + (1 + A_{n-1} + C_{n-1})\, e_{n-1} = A_{n-1}\, f_{n-2} + (1 + A_{n-1} + C_{n-1})\, f_{n-1} \\ \qquad\qquad + C_{n-1}\, f_n - \dfrac{C_{n-1}}{m_{n-1}} f_n^* - \dfrac{A_{n-1}}{m_{n-2}} f_{n-1}^* . \end{cases}$$

<u>*Lemme 1*</u> : *On a la majoration suivante, valable pour* $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\max_i |e_i| \le \max_i |\, C_i(f_{i+1} - f_{i+1}^*) + (C_i + \alpha_i)\,(f_i - f_{i+1}^*) + (A_i + \beta_i)(f_i - f_i^*) + A_i\,(f_{i-1} - f_i^*)|$$

<u>Preuve</u> : $A_i(1 - 1/m_{i-1}) = -\,(1 + m_{i-1} \,/\, (1 - 2m_{i-1}))\ \beta_i = -\,(A_i + \beta_i)$

idem $\quad C_i(1 - 1/m_i) = -\,(1 + m_i/(1 - 2m_i))\ \alpha_i = -(C_i + \alpha_i)$

la $i^{\text{ème}}$ équation de (4) peut alors s'écrire :

$$(1+A_i+C_i)\, e_i = -A_i\, e_{i-1} - C_i\, e_{i-1} + [C_i(f_{i+1} - f_{i+1}^*) + (C_i + \alpha_i)(f_i - f_{i+1}^*) + (A_i + \beta_i)(f_i - f_i^*) + A_i(f_{i-1} - f_i^*)]$$

d'où $\quad (1+A_i+C_i)\, |e_i| \le A_i\, |e_{i-1}| + C_i\, |e_{i+1}| + |[\ldots]|$

et $\quad \max\limits_i\, (1 + A_i + C_i) \max\limits_i |e_i| \le \max\limits_i\, (A_i + C_i) \max\limits_i |e_i| + \max\limits_i |[\ldots]|$

et l'on obtient bien le résultat du lemme.■

L'équation de S sur (t_i, t_{i+1}) peut s'écrire, avec les conventions habituelles $t = (x-t_i)/h_i$, $m_i = u_i(1/2)$ et $S'_i = S'(t_i)$:

(15) $\quad S(x) = f^*_{i+1} - \frac{1}{2} h_i \, m_i \, (S'_{i+1} - S'_i) + \frac{1}{2} h_i \, [S'_{i+1} \, u_i(t) - S'_i \, u_i(1-t)]$

On en déduit l'équation de S' sur (t_i, t_{i+1}) :

(16) $\quad S'(x) = \frac{1}{2} (S'_{i+1} \, u'_i(t) + S' \, u'_i \, (1-t))$

Une autre expression de S' est obtenue en dérivant (2) :

(17) $$(1-2m_i) \, h_i \, S'(x) = (u'_i(t) - 2m_i) \, S_{i+1} - (u'_i(1-t) - 2m_i) \, S_i + (u'_i \, (1-t) - u'_i(t)) \, f^*_{i+1}$$

On déduit de (15) :

$$S(t^-_{i+1}) = f^*_{i+1} + \frac{1}{2} h_i \, ((1-m_i) \, S'_{i+1} + m_i \, S'_i)$$

$$S(t^+_i) = f^*_{i+1} - \frac{1}{2} h_i \, ((1-m_i) \, S'_i + m_i \, S'_{i+1})$$

En écrivant $S(t_o) = f(t_o) = f^*_o$, puis $S(t^-_i) = S(t^+_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et enfin $S(t_n) = f(t_n) = f^*_{n+1}$, on a :

(18) $$\begin{cases} h_o(1-m_o) \, S'_o + h_o \, m_o \, S'_1 = 2(f^*_1 - f^*_o) \\ m_{i-1} \, h_{i-1} \, S'_{i-1} + (h_{i-1}(1-m_{i-1}) + h_i(1-m_i)) \, S'_i + m_i \, h_i \, S'_{i+1} \\ \qquad = 2(f^*_{i+1} - f^*_i) \\ h_{n-1}(1-m_{n-1}) \, S'_n + h_{n-1} \, m_{n-1} \, S'_{n-1} = 2(f^*_{n+1} - f^*_n) \end{cases}$$

Si l'on pose $e'_i = e'(t_i) = f'(t_i) - S'(t_i) = f'_i - S'_i$, les e'_i sont solutions du système linéaire :

(19) $$\begin{cases} h_o(1-m_o) \, e'_o + h_o \, m_o \, e'_1 = h_o(1-m_o) \, f'_o + h_o \, m_o \, f'_1 - 2(f^*_1 - f^*_o) \\ m_{i-1} \, \alpha_i \, e'_{i-1} + (1-\alpha_i \, m_{i-1} - \beta_i \, m_i) \, e'_i + m_i \, \beta_i \, e'_{i+1} = \\ m_{i-1} \, \alpha_i \, f'_{i-1} + (1-\alpha_i \, m_{i-1} + \beta_i \, m_i) \, f'_i + m_i \, \beta_i \, f'_{i+1} - 2 \, (f^*_{i+1} - f^*_i) \\ \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n-1, \text{ et :} \\ h_{n-1} \, m_{n-1} \, e'_{n-1} + h_{n-1} \, (1-m_{n-1}) \, e'_n = h_{n-1} \, m_{n-1} \, f'_{n-1} + h_{n-1} \, (1-m_{n-1}) f'_n \\ \qquad - 2 \, (f^*_{n+1} - f^*_n) \end{cases}$$

On en déduit la majoration suivante :

<u>*Lemme 2*</u> : *Pour* $i = 0, 1, \ldots, n$, *on a, en posant* $m = \max\limits_i m_i$:

$$\max_i |e'_i| \leq \frac{1}{1-2m} \max_i |m_{i-1}\, \alpha_i\, f'_{i-1} + (1-\alpha_i\, m_{i-1} - \beta_i m_i) f'_i$$
$$+ m_i\, \beta_i\, f'_{i+1} - 2(f^*_{i+1} - f^*_i) \;/\; (h_{i-1} + h_i)|$$

(*en posant* $h_{-1} = h_n = 0$, donc $\alpha_o = 0$, $\beta_o = 1$, $\alpha_n = 1$, $\beta_1 = 0$)

<u>Preuve</u> : On utilise une technique analogue à celle du lemme 1 et le fait que $\alpha_i + \beta_i = 1$ pour tout i :

$$(1-2m) \max_i |e'_i| = \max_i (1-2m(\alpha_i+\beta_i)) \max_i |e'_i|$$
$$= \max_i (1 - 2m_i(\alpha_i+\beta_i)) \max_i |e'_i|.$$

Ces lemmes sont utilisés dans les théorèmes qui suivent.

IX - INTERPOLATION DE LAGRANGE : MAJORATIONS DE L'ERREUR

Théorème 7 : Soit $f \in C[a, b]$, S *son interpolant SQG et* $e = f - S$ *l'erreur d'interpolation. Si* $h = \max_i h_i$ *et* $\omega(f, \delta)$ *est le module de continuité de* f, *on a :*

$$\max_i |e(t_i)| \leq \omega(f, h/2) \; / \; (1-2m)$$

$$||e||_\infty \leq \omega\,(f, h/2) \times (4 - 6m) \; / \; (1 - 2m)$$

$$(m = \max_i m_i = \max_i u_i(1/2)).$$

<u>Preuve</u> : Les quantités $|f_{i+1} - f^*_{i+1}|$, $|f_i - f^*_{i+1}|$, $|f_i - f^*_i|$, $|f_{i-1} - f^*_i|$ sont majorées par $\omega(f, h/2)$. D'autre part :

$$A_i + C_i = \frac{m_{i-1}\,\beta_i}{1-2m_{i-1}} + \frac{m_i\,\alpha_i}{1-2m_i} \leq \frac{m}{1-2m}\,(\alpha_i + \beta_i) = \frac{m}{1-2m}$$

donc $1+2(A_i+C_i) \leq 1 \, / \, (1-2m)$. Ces résultats et le lemme 1 donnent :

$$\max_i |e_i| \leq \omega(f, h/2) \; / \; (1-2m).$$

Majorons $|e(x)|$ lorsque $x \in [t^*_{i+1}, t_{i+1}]$ (l'étude est analogue si $x \in [t_i, t^*_{i+1}]$).

Supposons d'abord que S soit monotone sur cet intervalle, par exemple croissante :

$$S(t^*_{i+1}) \leq S(x) \leq S(t_{i+1})$$

On a alors , en posant $\omega = \omega(f, h/2)$:

$$e(x) = f(x) - S(x) \geq [f(x) - f(t_{i+1})] + [f(t_{i+1}) - S(t_{i+1})]$$

$$\geq -\,\omega - \omega \; / \; (1-2m) = -\,(2-2m)\,\omega \; / \; (1-2m)$$

$$e(x) = f(x) - S(x) \leq [f(x) - f(t^*_{i+1})] + \underbrace{[f(t^*_{i+1}) - S(t^*_{i+1})]}_{=\,0} \leq \omega$$

Dans ce cas, on a la majoration :

(20) $\quad |e(x)| \leq (2-2m) \;\; \omega(f, h/2) \; / \; (1-2m)$

La démonstration est analogue si S est décroissante.

Si S n'est pas monotone, on peut supposer par exemple que

$$S(t^*_{i+1}) = f(t^*_{i+1}) = e(t^*_{i+1}) = 0$$

et que $S_i = S(t_i) > 0$. On utilise l'expression (7) de la dérivée :

$$(1 - 2m_i)\, h_i\, S'(x) = (u'_i(t) - 2m_i)\, S_{i+1} - (u'_i(1-t) - 2m_i)\, S_i.$$

En particulier, pour $x = t_i$, t^*_{i+1} et t_{i+1} :

$$(1 - 2m_i)\, h_i\, S'_i = -2((1-m_i)\, S_i + m_i\, S_{i+1})$$

$$S'(t^*_{i+1}) = (S_{i+1} - S_i) / h_i \text{ (pente de la corde)}$$

$$(1-2m_i)\, h_i\, S'_{i+1} = 2(m_i - S_i + (1 - m_i)\, S_{i+1}).$$

<u>1er cas</u> : $S_{i+1} > S_i > 0$. Dans ce cas S est monotone croissante sur (t^*_{i+1}, t_{i+1}) et on a la majoration (20).

<u>2ème cas</u> : $S_i > S_{i+1} > - S_i$ (i.e. $S_{i+1} + S_i > 0$). On a toujours $S'(t^*_{i+1}) < 0$ et $S'(t_i) < 0$. Si $S'(t_{i+1}) \leq 0$, S est monotone décroissante et on a la majoration (20).

Si $S'(t_{i+1}) > 0$, S passe par un minimum $x' \in (t^*_{i+1}, t_{i+1})$ et $S(x') < 0$.

Posant $t' = (x' - t_i) / h_i$, on a d'après (2) :

$$\begin{aligned} - (1-2m_i)\, S(x') = & - S_i(u_i(1-t') - 2m_i(1-t')) \\ & - S_{i+1}(u_i(t') - 2m_i\, t') \end{aligned}$$

Sachant que $\ell_{io}(t) < 0$ et $\ell_{i2}(t) > 0$ sur $[1/2, 1]$ et en utilisant le fait que $- S_{i+1} < S_i$, on a :

$$\begin{aligned} - (1-2m_i)\, S(x) \leq & \; S_i\, (2m_i(1-t') - 1+2t'-u_i(t') \\ & + u_i(t') - 2m_i\, t') = (1-2m_i)\, S_i\, (2t'-1) \end{aligned}$$

d'où $\quad - S(x') \leq S_i$ car $t' \in [1/2, 1]$;

et comme $\quad - e_i = S_i - f_i \leq \omega / (1-2m)$:

$$- S(x') \leq S_i \leq f_i + \omega / (1-2m) \leq (2-2m)\, \omega / (1-2m)$$

$$\text{car } f_i = f_i - f(t^*_{i+1}) \leq \omega$$

On en déduit (puisque $S(x) \geq S(x')$) :

$$e(x) = f(x) - S(x) \leq [f(x) - f(x')] + f(x') - S(x')$$

$$\leq \omega + \omega + (2-2m)\,\omega\,/\,(1-2m)$$

(21) soit $$e(x) \leq (4-6m)\,\omega\,/\,(1-2m)$$

De même, puisque $S(x) \leq \max(0, S_{i+1})$

$$e(x) \geq [f(x) - f_{i+1}] + [f_{i+1} - \max(0, S_{i+1})]$$

$$f(x) - f_{i+1} \geq -\omega$$

$$f_{i+1} = f_{i+1} - f(t^*_{i+1}) \geq -\omega$$

$$f_{i+1} - S_{i+1} = e_{i+1} \geq -\omega\,/(1-2m)$$

(22) donc $e(x) \geq -(2-2m)\,\omega\,/\,(1-2m)$.

Mais $2-2m \leq 4-6m$ car $m < 1/2$, d'où la majoration résultant de (21) et (22) :

(23) $$|e(x)| \leq (4-6m)\,\omega\,/\,(1-2m)$$

<u>3ème cas</u> : $S_{i+1} + S_i < 0$. Dans ce cas, S est monotone décroissante et on a la majoration (20).

Dans tous les cas, (23) est valable, d'où le théorème 7. ■

<u>*Théorème 8*</u> : *Soit* $f \in C^1\,[a, b]$, S *son interpolant SQG et* $\omega(f', \delta)$ *le module de continuité de* f'. *On a les majorations suivantes :*

$$\max_i |e_i| \leq h\,\omega\,(f', h/2)\,/\,2(1-2m)$$

$$\max_i |e'_i| \leq (1+m)\,\omega\,(f', h/2)\,/\,(1-2m)$$

$$||e||_\infty \leq h\,\omega\,(f', h/2).\,(7-4m)\,/\,8(1-2m)$$

$$||e'||_\infty \leq \omega\,(f', h/2).(5-4m)/2(1-2m)$$

<u>Preuve</u> :

a) On a $f_{i+1} - f^*_{i+1} = \frac{1}{2} h_i\, f'(u_4)$, $t^*_{i+1} < u_4 < t_{i+1}$

$f_i - f^*_{i+1} = -\frac{1}{2} h_i\, f'(u_3)$, $t_i < u_3 < t^*_{i+1}$

$f_i - f^*_i = \frac{1}{2} h_{i-1}\, f'(u_2)$, $t^*_i < u_2 < t_i$

$f_{i-1} - f^*_i = -\frac{1}{2} h_{i-1}\, f'(u_1)$, $t_{i-1} < u_1 < t^*_i$

Le lemme 1 fournit la majoration :

$$\max_i |e_i| \leq \max_i \left|\frac{1}{2} C_i h_i (f'(u_4) - f'(u_3)) + \frac{1}{2} \beta_i h_{i-1} f'(u_2) - \frac{1}{2} \alpha_i h_i f'(u_3) + \frac{1}{2} A_i h_{i-1} (f'(u_2) - f'(u_1))\right|$$

$C_i h_i$ et $A_i h_{i-1} \leq mh/2(1-2m)$

$|f'(u_4) - f'(u_3)|$, $|f'(u_3) - f'(u_2)|$ et $|f'(u_2)-f'(u_1)| \leq \omega(f',h)$

$\beta_i h_{i-1} = \alpha_i h_i = h_i h_{i-1} / (h_{i-1} + h_i) \leq h/2$

donc $\max_i |e_i| \leq (\frac{m}{1-2m} + 1 + \frac{m}{1-2m}) \frac{h}{4} \omega(f', h)$

(24) et $\max_i |e_i| \leq h\, \omega(f', h/2) / 2(1-2m)$

car $\quad \omega(f', h) \leq 2\omega(f', h/2)$.

b) Pour la dérivée, on utilise le lemme 2

$$f^*_{i+1} - f^*_i = (f^*_{i+1} - f_i) + (f_i - f^*_i)$$

$$= \frac{1}{2} h_i f'(\theta_2) + \frac{1}{2} h_{i-1} f'(\theta_1)$$

avec $t^*_i < \theta_1 < t_i$, $t_i < \theta_2 < t^*_{i+1}$

et $\quad 2(f^*_{i+1} - f^*_i)/(h_{i-1} + h_i) = \beta_i f'(\theta_2) + \alpha_i f'(\theta_1)$

Le second membre de la majoration de $\max_i |e_i| \times (1-2m)$ peut s'écrire alors :

$$m_{i-1} \alpha_i(f'_{i-1} - f'(\theta_1)) + \alpha_1(1 - m_{i-1}) (f'_i - f'(\theta_1))$$
$$+ \beta_i(1-m_i) (f'_i - f'(\theta_2)) + m_i \beta_i(f'_{i+1} - f'(\theta_2))$$

or $|f'_{i-1} - f'(\theta_1)| \leq \omega(f', h) \leq 2\omega(f', h/2)$

$|f'_i - f'(\theta_1)| \leq \omega(f', h/2)$

$|f'_i - f'(\theta_2)| \leq \omega(f', h/2)$

$|f'_{i+1} - f'(\theta_2)| \leq \omega(f', h) \leq 2\omega(f', h/2)$

d'où la majoration :

$$(1-2m) \max_i |e'_i| \leq \omega(f', h/2) \max_i (\alpha_i(1+m_{i-1}) + \beta_i(1+m_i))$$

dont on déduit :

(25) $\quad \max_i |e'_i| \leq \omega(f', h/2) \times (1+m) / (1-2m)$

c) Majorons $e'(x) = f'(x) - S'(x)$, avec :

$S'(x) = \frac{1}{2}(S'_{i+1}\, u'_i(t) + S'_i\, u'_i(1-t)) \quad (t_i \leq x \leq t_{i+1})$

où $t = (x-t_i) / h_i$, $u'_i(t) + u'_i(1-t) = 2$.

Posons $Lf'(x) = \frac{1}{2}(f'_{i+1}\, u'_i(t) + f'_i\, u'_i(1-t)$

$|e'(x)| \leq |f'(x) - Lf'(x)| + |Lf'(x) - S'(x)|$

$|Lf'(x) - S'(x)| \leq \frac{1}{2}(|e'_{i+1}|u'_i(t) + |e'_i|\, u'_i(1-t))$

$\leq \omega(f', h/2).(1+m) / (1-2m)$

On peut écrire également :

$Lf'(x) = f'_i(1-u'_i(t)) + \frac{1}{2}(f'_i + f'_{i+1})\, u'_i(t)$

Par conséquent, si $x \in (t_i, t^*_{i+1})$; i.e. $t \in (0, 1/2)$:

$Lf'(x) - f'(x) = (1-u'_i(t))\,(f'_i - f'(x))$

$u'_i(t)\, [\frac{1}{2}(f'_i + f'_{i+1}) - f'(x)]$

mais $|f'_i - f'(x)| \leq \omega(f', h/2)$

et $|[...]| \leq \frac{1}{2}\, |f'_i - f'(x)| + \frac{1}{2}\, |f'_{i+1} - f'(x)|$

$\leq \frac{1}{2}\, (\omega(f', h/2) + \omega(f', h)) \leq \frac{3}{2}\, \omega(f', h/2)$

donc $|Lf'(x) - f'(x)| \leq \omega(f', h/2)\, [(1-u'_i(t)) + \frac{3}{2}\, u'_i(t)]$

et puisque $0 \leq u'_i(t) \leq 1$ si $0 \leq t \leq 1/2$

$|Lf'(x) - f'(x)| \leq \frac{3}{2}\, \omega(f', h/2)$

ce qui donne la majoration

$|e'(x)| \leq \omega(f', h/2)\, [\frac{1+m}{1-2m} + \frac{3}{2}] = \omega(f', h/2).\, \frac{5-4m}{2(1-2m)}$

On a un résultat analogue pour $t^*_{i+1} \leq x \leq t_{i+1}$

d) Majorons maintenant $e(x)$ pour $t_i \leq x \leq t_{i+1}$

On a les deux expressions :

$$e(x) = - \int_x^{t^*_{i+1}} e'(t)\, dt \qquad \text{car } e(t^*_{i+1}) = 0$$

$$e(x) = e_i + \int_{t_i}^{x} e'(t)\, dt$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$; la première expression donne

$$|e(x)| \leq |x-t^*_{i+1}| \; ||e'||_\infty \leq \alpha.\frac{5-4m}{4(1-2m)} \; h\omega(f', h/2)$$

si $\quad t^*_{i+1} - x = \alpha(t^*_{i+1} - t_i) \leqq \alpha \; h/2.$

La deuxième expression donne :

$$|e(x)| \leq |e_i| + (x-t_i) \; ||e'||_\infty \leq [\frac{2+(1-\alpha)(5-4m)}{4(1-2m)}] \; h \; \omega/ \; f', h/2)$$

car $\quad x-t_i = (1-\alpha) \; h_i/2 \leq (1-\alpha) \; h/2$

La meilleure majoration est obtenue pour α tel que :

$$\alpha(5-4m) = 2 + (1-\alpha)(5-4m)$$

c'est à dire $\alpha = (7-4m)/2(5-4m)$

et l'on obtient la majoration :

$$||e||_\infty \leq h \; \omega(f', h/2).(7-4m)/8(1-2m)$$

<u>*Théorème 9*</u> : *Si* $f \in C^2[a, b]$, *si* s *est son interpolant SQG et* $\omega(f", \delta)$ *le module de continuité de* $f"$, *on a les majorations d'erreur suivantes :*

$$\max_i |e_i| \leq \frac{m}{4(1-2m)} \; h^2\omega(f", h) + \frac{\mu}{8(1-2m)} \; h^2||f"||_\infty$$

$$\max_i |e'_i| \leq \frac{m}{1-2m} \; h\omega(f", h) + \frac{\mu}{4(1-2m)} \; h||f"||_\infty$$

$$||e||_\infty \leq \frac{h^2}{8(1-2m)} \; [(m+1)\omega(f", h) + ||f"||_\infty \; (2\varepsilon+\mu)]$$

$$||e'||_\infty \leq \frac{h}{2(1-2m)} \; [\omega(f", h) + ||f"||_\infty \; (2\varepsilon + \frac{1}{2}\mu)]$$

$$\mu = \max_i |1-4m_i| \leq 1, \; m = \max_i m_i = \max_i u_i(1/2)$$

$\varepsilon = (1-2m) \max_i \int_0^{1/2} |1 - \frac{1}{2} w_i(t)| \; dt$, *en supposant que* $u"_i(t) = w_i(t) > 0$ *vérifie les hypothèses du théorème 1 du paragraphe III pour* $0 \leq i \leq n-1$

<u>Preuve</u>

a) Le lemme 1 donne :

$$\max_i |e_i| \leq \max_i |C_i(f_{i+1} - 2f^*_{i+1} + f_i) + A_i\ (f_i - 2f^*_i + f_{i-1})$$
$$+ \alpha_i(f_i - f^*_{i+1}) + \beta_i(f_i - f^*_i)$$

or $$f_{i+1} - 2f^*_{i+1} + f_i = \frac{1}{4} h_i^2\ f''(\theta_4),\ t_i < \theta_4 < t_{i+1}$$

$$f_i - 2f^*_i + f_{i-1} = \frac{1}{4} h^2_{i-1}\ f''(\theta_1),\ t_{i-1} < \theta_1 < t_i$$

$$f^*_{i+1} - f_i = \frac{1}{2} h_i\ f'_i + \frac{1}{8} h_i^2\ f''(\theta_3),\ t_i < \theta_3 < t^*_{i+1}$$

$$f^*_i - f_i = -\frac{1}{2} h_{i-1}\ f'_i + \frac{1}{8} h^2_{i-1}\ f''(\theta_2),\ t^*_i < \theta_2 < t_i$$

on obtient donc la majoration :

$$4 \max_i |e_i| \leq \max_i \Big| \frac{\alpha_i m_i}{1-2m_i} h_i^2\ (f''(\theta_4) - f''(\theta_3))$$
$$- \frac{(1-4m_i)}{2(1-2m_i)} \alpha_i\ h_i^2\ f''(\theta_3) + \frac{\beta_i m_{i-1}}{1-2m_{i-1}} h^2_{i-1}\ (f''(\theta_1) - f''(\theta_2))$$
$$- \frac{(1-4m_{i-1})}{2(1-2m_{i-1})}\ \beta_i\ h^2_{i-1}\ f''(\theta_2)\Big|$$

en posant $\mu = \max_i |1-4m_i| < 1$, on a :

$$\max_i |e_i| \leq \frac{h^2}{4(1-2m)} [m\omega(f'', h) + \frac{1}{2} \mu\ ||f''||_\infty] \tag{26}$$

b) De la même manière, on utilise le lemme 2 pour majorer $\max_i |e'_i|$

$$f^*_{i+1} - f^*_i = (f^*_{i+1} - f_i) + (f_i - f^*_i)$$

$$f^*_{i+1} - f_i = \frac{1}{2} h_i\ f'_i + \frac{1}{8} h_i^2\ f''(\theta_3),\ t_i < \theta_3 < t^*_{i+1}$$

$$f_i - f^*_i = \frac{1}{2} h_{i-1}\ f'_i - \frac{1}{8} h^2_{i-1}\ f''(\theta_2),\ t^*_i < \theta_2 < t_i.$$

donc $$-2(f^*_{i+1} - f^*_i)/(h_{i-1} + h_i) = -f'_i - \frac{1}{4} h_i\ \beta_i\ f''(\theta_3)$$
$$+ \frac{1}{4} h_{i-1}\ \alpha_i\ f''(\theta_2)$$

Le second membre de la majoration s'écrit alors :

$$m_{i-1}\,\alpha_i\,(f'_{i-1} - f'_i) + m_i\,\beta_i(f'_{i+1} - f'_i)$$

$$+ \frac{1}{4}\,\alpha_i\,h_{i-1}\,f''(\theta_2) - \frac{1}{4}\,\beta_i\,h_i\,f''(\theta_3)$$

mais $f'_{i-1} - f'_i = -\,h_{i-1}\,f''(\theta_1),\quad t_{i-1} < \theta_1 < t_i$

$f'_{i+1} - f'_i = \quad h_i\,f''(\theta_4),\quad t_i < \theta_4 < t_{i+1}$

ce qui donne :

$$(1-2m)\ \max_i |e'_i| \le \max_i \Big|m_i\beta_i\ h_i(f''(\theta_4) - f''(\theta_3))$$

$$+ \beta_i\,h_i\,(m_i - \frac{1}{4})\,f''(\theta_3) + m_{i-1}\,\alpha_i\,h_{i-1}\,(f''(\theta_2) - f''(\theta_1))$$

$$+ (\frac{1}{4} - m_{i-1})\,\alpha_i\,h_{i-1}\,f''(\theta_2)\Big|$$

Comme $|f''(\theta_4) - f''(\theta_3)| \le \omega(f'', h)$

$|f''(\theta_2) - f''(\theta_1) \le \omega(f'', h)$

(27) $$(1-2m)\ \max_i |e'_i| \le h[m\omega(f'', h) + \frac{1}{4}\,\mu\,||f''||_\infty]$$

c) Majoration de $|e'(x)|$, pour $t_i \le x \le t^*_{i+1}$

$$|e'(x)| \le |f'(x) - Lf'(x)| + |Lf'(x) - S'(x)|$$

On a vu, au cours de la démonstration du théorème 2, que :

$$|Lf'(x) - S'(x)| \le \max\{|e'_i|,\ |e'_{i+1}|\}$$

donc on peut utiliser (17). D'autre part :

$$(Lf')(x) = \frac{1}{2}\,(f'_{i+1}\,u_i(t) + f'_i\,u'_i(1-t))$$

$$(Lf')'(x) = \frac{1}{2h_i}\,(f'_{i+1} - f'_i)\,w_i(t)\quad (t = (x-t_i)/h_i).$$

où $w_i(t) = u''_i(t)$, car $w_i(1-t) = w_i(t)$ (si w_i vérifie les hypothèses du théorème 1 de [2]).

Comme $f'_{i+1} - f'_i = h_i\,f''(\theta),\ t_i < \theta < t_{i+1}$,

on a $(Lf')'(x) = \frac{1}{2}\,f''(\theta).w_i(t)$ et :

$$Lf'(x) - f'(x) = \int_{t_i}^{x} [(Lf')'(s) - f''(s)]\, ds$$

$$= \int_{t_i}^{x} \frac{1}{2} w_i(t)\, [f''(\theta) - f''(s)]\, ds$$

$$+ \int_{t_i}^{x} (\frac{1}{2} w_i(t) - 1)\, f''(s)\, ds$$

(dans les intégrales, $t = (s - t_i)/h_i \in [0, 1/2]$)

$$|f''(\theta) - f''(s)| \leq \omega(f'', h)$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_i}^{x} w_i(t)\, ds \leq \frac{1}{2} h_i \int_{o}^{1/2} w_i(t)\, dt = \frac{1}{2} h_i\, u'_i(1/2) = \frac{1}{2} h_i$$

$$\left|\int_{t_i}^{x} (\frac{1}{2} w_i(t) - 1)\, f''(s)\, ds\right| \leq ||f''||_\infty\, h_i \int_{o}^{1/2} |1 - \frac{1}{2} w_i(t))|dt$$

d'où $\quad |Lf'(x) - f'(x)| \leq \frac{1}{2} h \quad [\omega(f'', h) + \frac{2\varepsilon}{(1-2m)} ||f''||_\infty]$

en posant $\varepsilon = (1-2m) \max\limits_{i} \int_{o}^{1/2} |1 - \frac{1}{2} w_i(t)|\, dt$,

et la majoration de la dérivée de l'erreur :

$$|e'(x)| \leq \frac{h}{1-2m} \quad m\omega(f'', h) + \frac{1}{4} \mu\, ||f''||_\infty + \frac{1}{2} (1-2m)\, \omega\, (f'',h) + \varepsilon||f''||_\infty]$$

$$(28) \qquad |e'(x)| \leq \frac{h}{1-2m} [\frac{1}{2} \omega(f'', h) + (\frac{1}{4} \mu + \varepsilon)\, ||f''||_\infty]$$

d) Majoration de $|e(x)|$, pour $t_i \leq x \leq t^*_{i+1}$

On utilise la même technique que dans la démonstration du théorème 8.

$$|e(x)| \leq \frac{1}{2} \alpha h\, ||e'||_\infty \quad \text{si } |x-t^*_{i+1}| \leq \alpha h/2$$

$$|e(x)| \leq |e_i| + \frac{1}{2} (1-\alpha)h\, ||e'||_\infty \text{ si } |x-t_i| \leq (1-\alpha)\, h/2$$

On aura égalité des majorants si on choisit α tel que :

$$\frac{1}{4} \frac{\alpha}{1-2m} \omega + (\frac{1}{8} \mu + \frac{1}{2} \varepsilon) \frac{\alpha}{1-2m} ||f''||_\infty$$

$$= \frac{1}{4} \frac{m}{1-2m} \omega \quad + \frac{\mu}{8(1-2m)} ||f''||_\infty$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\alpha}{1-2m} \omega + (\frac{1}{8} \mu + \frac{1}{2} \varepsilon) \frac{1-\alpha}{1-2m} ||f''||_\infty \text{, donc :}$$

$$\alpha\{\frac{1}{2}\,\frac{\omega}{1-2m} + (\frac{1}{4}\,\mu + \varepsilon).\,\frac{||f''||_\infty}{1-2m}\}$$

$$= \{\frac{1}{4}\,\frac{(1+m)\omega}{1-2m} + (\frac{1}{4}\,\mu + \frac{1}{2}\,\varepsilon)\,\frac{||f''||_\infty}{1-2m}\}$$

d'où la majoration :

$$||e||_\infty \leq \frac{h^2}{8(1-2m)}\,((m+1)\,\omega(f'',\,h) + (\mu + 2\varepsilon)\,||f''||_\infty)$$

X - INTERPOLATION D'HERMITE : MAJORATIONS DE L'ERREUR

Soit $\tau = \{a = t_o < t_1 < \ldots < t_{2n} = b\}$ une subdivision telle que $t_{2i+1} = (t_{2i} + t_{2i+2}) / 2$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$. On pose $t_{2i+1} - t_{2i} = t_{2i+2} - t_{2i+1} = h_i/2$ et $h = \max_i h_i$.

On prend comme suite de fonctions :

$$\bar{u} = (u_o, u_o, u_1, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_{n-1})$$

autrement dit on choisit la même fonction u_i dans les intervalles $[t_{2i}, t_{2i+1}]$ et $[t_{2i+1}, t_{2i+2}]$. On a étudié au paragraphe VII le problème d'Hermite suivant ($f \in C^1(I)$, $S \in Sp_2(\bar{u})$) :

$$(H) \quad \begin{cases} S(t_{2i}) = f(t_{2i}) = y_i \\ S'(t_{2i}) = f'(t_{2i}) = y'_i \end{cases}$$

et l'on a démontré que la solution s'exprimait localement sous la forme suivante :

a) pour $x \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$, en posant $\xi = 2(x-t_{2i}) / h_i$, on a :

$$(19) \quad S(x) = y_i\, \phi_o(\xi) + (y_i + h_i\, y'_i/4)\, \phi_1(\xi) + [(y_i + y_{i+1}) / 2 + h_i(y'_i - y'_{i+1}) / 8]\ \phi_2(\xi).$$

b) pour $x \in [t_{2i+1}, t_{2i+2}]$, en posant $\eta = 2(x - t_{2i+1}) / h_i$, on a :

$$(20) \quad S(x) = [(y_i + y_{i+1})/2 + h_i\ (y'_i - y'_{i+1})/8]\ \phi_o(\eta) + (y_{i+1} - h_i\ y'_{i+1}\ 4\ )\ \phi_1(\eta) + y_{i+1}\ \phi_2\ (\eta)$$

où $\{\phi_o, \phi_1, \phi_2\}$ est la base de Bernstein de $\mathbb{P}_2(u_i)$, c'est à dire :

$$\phi_o(t) = u_i(1-t) = 1-2t + u_i(t)$$

$$\phi_1(t) = 2(t - u_i(t)) \qquad (0 \le t \le 1)$$

$$\phi_2(t) = u_i(t)$$

Théorème 10 : *Si* $f \in C^1[a, b]$ *et* S *est la solution du problème* (H), *on a* :

$$||e||_\infty \leq \frac{3}{2} h\, \omega(f', h/2)$$

$$||e'||_\infty \leq 5\, \omega(f', h/2)$$

Preuve : Il suffit d'étudier l'erreur sur $[t_{2i}, t_{2i+1}]$ l'étude étant analogue sur l'autre demi-intervalle. Comme :

$$f(x) = y_i + \frac{1}{2} \xi\, h_i\, f'(\theta_i)$$

avec $t_{2i} < \theta_i < t_{2i+1}$, (29) donne :

$$e(x) = S(x) - f(x) = h_i\, \xi(y'_i - f'(\theta_i))/2$$

$$+ u_i(\xi)\, [(y_{i+1} - y_i) - h_i\, y'_i - h_i(y'_{i+1} - y'_i)/4]/2$$

Comme $y_{i+1} - y_i = h_i\, f'(\eta_i)$, $(t_{2i} < \eta_i < t_{2i+2})$,

$$|y'_i - f'(\theta_i)| \leq \omega(f', h/2) \text{ et :}$$

$$|f'(\eta_i) - \frac{3}{4} y'_i - \frac{1}{4} y'_{i+1}| \leq \omega(f', h) \leq 2\omega(f', h/2)$$

on en déduit $e(x) \leq \frac{3}{2} h\omega(f', h/2)$

D'autre part, on a :

$$S'(x) = y'_i + u'_i(\xi)\, [(y_{i+1} - y_i)/h_i - y'_i - \frac{1}{4} (y'_{i+1} - y'_i)]$$

donc $e'(x) = S'(x) - f'(x) = (y'_i - f'(x)) + u'_i(\xi)\, [f'(\eta_i) - \frac{3}{4} y'_i - \frac{1}{4} y'_{i+1}]$

et puisque $0 \leq u'(\xi) \leq 2$ et $|y'_i - f'(x)| \leq \omega(f', h/2)$

on obtient :

$$|e'(x)| \leq 5\, \omega(f', h/2)$$

Théorème 11 : *Si* $f \in C^2[a, b]$, *si* S *est la solution du problème* (H) *et si l'on pose* :

$$\mu = \max_i \mu_i, \quad \mu_i = \max_{0 \leq t \leq 1} |u_i(t) - t^2|$$

$$\nu = \max_i \nu_i, \quad \nu_i = \max_{0 \leq t \leq 1} |u'_i(t) - 2t|$$

on a les majorations suivantes

$$||e||_\infty \le \frac{1}{4} h^2 \omega(f", h) + \frac{1}{8} \mu h^2 ||f"||_\infty$$

$$||e'||_\infty \le h \omega(f", h) + \frac{1}{4} \nu h \ ||f"||_\infty$$

<u>Preuve</u> :

$$f(x) = y_i + \frac{1}{2} \xi h_i y'_i + \frac{1}{8} \xi^2 h_i^2 f"(\theta_i)$$

pour $x \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$, $t_{2i} < \theta_i < x$.

$$e(x) = S(x) - f(x) = - \frac{1}{8} \xi^2 h_i^2 f"(\theta_i) + u_i(\xi)$$

$$[\frac{1}{2} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{8} h_i(y'_{i+1} - y'_i) - \frac{1}{2} h_i y'_i]$$

Comme $y_{i+1} - y_i = h_i y'_i + \frac{1}{2} h_i^2 f"(\alpha_i)$, $t_{2i} < \alpha_i < t_{2i+2}$

$$y'_{i+1} - y'_i = h_i f"(\beta_i), \ t_{2i} < \beta_i < t_{2i+2}$$

$$e(x) = \frac{1}{8} h_i^2 \{(u_i(\xi) - \xi^2) f"(\theta_i) + u_i(\xi) (f"(\alpha_i) - f"(\theta_i)) + u_i(\xi) (f"(\alpha_i) - f"(\beta_i))\}$$

En posant $\mu_i = \max\limits_{o \le t \le 1} |u_i(t) - t^2|$ et $\mu = \max\limits_i \mu_i$, on obtient :

$$|e(x)| \le \frac{1}{8} \mu h^2 ||f"||_\infty + \frac{1}{4} h^2 \omega(f", h)$$

De même on a :

$$e'(x) = S'(x) - f'(x) = y'_i - f'(x) + \frac{1}{2} h_i u'_i(\xi) [f"(\alpha_i) - \frac{1}{2} f"(\beta_i)]$$

et comme $y'_i - f'(x) = - \frac{1}{2} \xi h_i f"(\gamma_i)$,

$$e'(x) = \frac{1}{4} h_i f"(\gamma_i) (u'_i (\xi) - 2\xi) +$$

$$\frac{1}{4} h_i u'_i (\xi) [(f"(\alpha_i) - f"(\gamma_i)) + (f"(\alpha_i) - f"(\beta_i))]$$

En posant $\nu_i = \max\limits_{o \le t \le 1} |u'_i(t) - 2t|$, $\nu = \max \nu_i$

et puisque $0 \le u'_i(\xi) \le 2$, on a :

$$|e'(x)| \le \frac{1}{4} \nu h ||f"||_\infty + h\omega(f", h)$$

REMARQUES

Les majorations des théorèmes 9 et 11 font intervenir un certain nombre de constantes μ, ε, ν qui sont nulles quand on utilise des splines quadratiques classiques

$$(u_i(t) = t^2,\ u'_i(t) = 2t,\ u''_i(t) = w_i(t) = 2)$$

On vérifie aisément que, pour les splines hyperboliques ou trigonométriques, si l'on pose $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$ et si l'on suppose que α est voisin de 0, alors ces constantes sont des $0(\alpha^2)$.

Par exemple, pour les splines hyperboliques :

$$m_i = u_i\ (1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_i}\ \mathrm{th}(\alpha_i/4)$$

$$4\ m_i - 1 = 1 - \mathrm{th}(\alpha_i/4)/(\alpha_i/4) \geq 0$$

$$\mu = \max_i\ (4\ m_i - 1) = 1 - \mathrm{th}(\alpha/4)/(\alpha/4)$$

Si α est voisin de 0, $\mathrm{th}(\alpha/4) \sim \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha^3}{192}$, donc $\mu \sim \alpha^2/48$

XI - CAS DES SPLINES QUADRATIQUES POLYNÔMIALES

La base d'Hermite de Sp_2 (théorème 6) est formée des fonctions suivantes ; de support $[t_{2i-2}, t_{2i+2}]$:

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 2(t-t_{2i-2})^2 / h_{i-1}^2 & t_{2i-2} \le t \le t_{2i-1} \\ 1-2(t_{2i} - t)^2 / h_{i-1}^2 & t_{2i-1} \le t \le t_{2i} \\ 1-2(t - t_{2i})^2 / h_i^2 & t_{2i} \le t \le t_{2i+1} \\ 2(t_{2i+2} - t)^2 / h_i^2 & t_{2i+1} \le t \le t_{2i+2} \end{cases}$$

$$\Psi_i(t) = \begin{cases} -(t - t_{2i-2})^2 / 2h_{i-1} & t_{2i-2} \le t \le t_{2i-1} \\ (t - t_{2i}) [1+3(t-t_{2i}) / 2h_{i-1}] & t_{2i-1} \le t \le t_{2i} \\ (t - t_{2i}) [1-3(t-t_{2i}) / 2h_i] & t_{2i} \le t \le t_{2i+1} \\ (t_{2i+2} - t)^2 / 2h_i & t_{2i+1} \le t \le t_{2i+2} \end{cases}$$

pour $1 \le i \le n-1$

Pour $i = 0$ ou n, on ne garde respectivement que la moitié droite ou la moitié gauche des fonctions ci-dessus. On pose $h = \max_i h_i = \max_i (t_{2i+2} - t_{2i})$. Lorsque $f \in C^2[a, b]$, le théorème 11 fournit les majorations suivantes pour $e = f-S$:

$$||e||_\infty \le \frac{1}{4} h^2 \omega(f'',h)$$

$$||e'||_\infty \le h\omega(f'',h)$$

Lorsque $f \in C^3[a, b]$, on a des résultats plus précis :

<u>*Théorème 12*</u> : *Si* $f \in C^3[a, b]$ *et si* S *est l'interpolant d'Hermite de* f *aux points* $\{t_{2i}, 0 \le i \le n\}$, *on a les majorations d'erreur suivantes :*

$$||e||_\infty \le \frac{h^3}{96} ||f^{(3)}||_\infty$$

$$||e'||_\infty \le \frac{h^2}{24} ||f^{(3)}||_\infty$$

$$|e''(t)| \le \frac{h}{3} ||f^{(3)}||_\infty \quad \textit{pour } t \ne t_{2i}$$

Preuve :

Comme $e = 0$ si $S \in \mathbb{P}_2$, le théorème de Peano donne sur l'intervalle $[t_{2i}, t_{2i+2}]$:

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{t_{2i}}^{t_{2i+2}} K_i\ (t, s)\ f^{(3)}(s)\ ds$$

où $K_i(t, s)$ est l'erreur d'interpolation pour la fonction $t \to (t-s)_+^2$ sur l'intervalle $[t_{2i}, t_{2i+2}]$, c'est à dire, d'après **le théorème 6** :

$K_i(t, s) = (t_{2i+2} - s)^2\ \phi_{i+1}(t) + 2(t_{2i+2} - s)\ \Psi_{i+1}(t) - (t-s)_+^2$

Posons pour simplifier :

$$t = (1-\beta)\ t_{2i} + \beta t_{2i+2} \qquad (0 \leq \beta \leq 1)$$

$$s = (1-\alpha)\ t_{2i} + \alpha t_{2i+2} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

On obtient l'expression suivante du noyau :

$$K_i(t,s) = h_i^2 k(\alpha,\beta) = h_i^2 \times \begin{cases} (1-\alpha)(1-2\alpha)\ \beta^2-(\beta-\alpha)_+^2 & 0 \leq \beta \leq 1/2 \\ \\ -\ k\ (1-\alpha,\ 1-\beta) & 1/2 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

et la majoration

$$|e(t)| \leq \frac{1}{2} ||f^{(3)}||_\infty\ h_i^3 \int_0^1 |k(\alpha,\beta)|\ d\alpha$$

Etudions le signe de $k(\alpha,\beta)$ pour $0 \leq \beta \leq 1/2$ (fixé) et $0 \leq \alpha \leq 1$: k est un spline quadratique C^1 ayant un seul noeud en $\alpha = \beta$, de plus $k(0, \beta) = 0$, $k(\beta, \beta) \geq 0$, $k(1/2, \beta) = k(1, \beta) = 0$, par conséquent $k(\alpha,\beta)$ est du signe de $(1-2\alpha)$ et :

$$\int_0^1 |k(\alpha,\beta)|\, d\alpha = \int_0^{1/2} k(\alpha,\beta)\, d\alpha - \int_{1/2}^1 k(\alpha,\beta)\, d\alpha$$

$$= \beta^2 \int_0^{1/2} (1-\alpha)(1-2\alpha)\, d\alpha - \beta^2 \int_{1/2}^1 (1-\alpha)(1-2\alpha)\, d\alpha - \int_0^\beta (\alpha-\beta)^2\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{12}\ \beta^2 (3 - 4\beta)$$

et l'on peut écrire pour $t \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$:

$$|e(t)| \leq \frac{h_i}{24} ||f^{(3)}||_\infty (t-t_{2i})^2(3h_i + 4t_{2i} - 4t)$$

De manière analogue, pour $t \in [t_{2i+1}, t_{2i+2}]$:

$$|e(t)| \leq \frac{h_i}{24} ||f^{(3)}||_\infty (t_{2i+2}-t)^2 (4t-4t_{2i} - h_i)$$

car $\int_o^1 |k(\alpha,\beta)|d\alpha = \frac{1}{12} (1-\beta)^2 (4\beta- 1)$

Désignons par m_o la fonction majorante :

$$m_o(\beta) = \begin{cases} \beta^2(3-4\beta) & 0 \leq \beta \leq 1/2 \\ \\ (1-\beta)^2(4\beta-1) & 1/2 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

Son maximum est atteint pour $\beta = 1/2$ et $m_o(1/2) = 1/4$, donc :

$$\max_{t_{2i}\leq t\leq t_{2i+2}} |f(t) - S(t)| \leq \frac{h_i^3}{96} ||f^{(3)}||_\infty$$

L'erreur sur la dérivée est :

$$e'(t) = \frac{1}{2} \int_{t_{2i}}^{t_{2i+2}} K_i'(t, s) f^{(3)} (s) ds$$

avec $K'_i(t, s) = (t_{2i+2} - s)^2 \phi'_{i+1} (t) + 2(t_{2i+2} - s)\Psi'_{i+1}(t) - 2(t-s)_+$

$$= 2h_i k_1 (\alpha, \beta)$$

$$\text{où } k_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} \beta(1-\alpha)(1-2\alpha) - (\beta-\alpha) & \alpha \leq \beta \\ \\ \beta(1-\alpha)(1-2\alpha) & \alpha \geq \beta \end{cases}$$

pour $0 \leq \beta \leq 1/2$ et $k_1(\alpha, \beta) = k_1(1-\alpha, 1-\beta)$ pour $1/2 \leq \beta \leq 1$

on en déduit, pour $t \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$:

$$|e'(t)| \leq h_i^2||f^{(3)}||_\infty \int_o^1 k_1(\alpha, \beta)|d\alpha$$

Pour β fixé dans $[0, 1/2]$, $k_1(\alpha, \beta)$ est une fonction continue de α, constituée de 2 arcs de parabole, vérifiant $k_1(0, \beta) = k_1(1/2, \beta) = k_1(1,\beta)=0$ et $k_1(\beta,\beta) \geq 0$.

Comme $k_1(\alpha,\beta) = \alpha[(1-3\beta) + 2\beta\alpha]$ lorsque $\alpha \leq \beta$, on voit que k_1 peut s'annuler en $\alpha = \alpha_o = (3\beta - 1) / 2\beta \leq 1/2$ lorsque $\beta \geq 1/3$. On a donc 2 cas :

a) si $0 \leq \beta \leq 1/3$, $k_1 \geq 0$ pour $0 \leq \alpha \leq 1/2$ et $k_1 \leq 0$ pour $1/2 \leq \alpha \leq 1$, et l'on obtient :

$$\int_o^1 |k_1(\alpha,\beta)|d\alpha = \frac{1}{4}\beta(1-2\beta)$$

b) si $1/3 \leq \beta \leq 1/2$, $k_1 \leq 0$ pour $0 \leq \alpha \leq \alpha_o$

et $1/2 \leq \alpha \leq 1$ et $k_1 \geq 0$ pour $\alpha_o \leq \alpha \leq 1/2$

et l'on obtient :

$$\int_o^1 k_1(\alpha,\beta)|d\alpha = \frac{1}{4}\beta(1-2\beta) + \frac{(3\beta-1)^3}{12\beta^2}\quad .$$

La fonction $m_1(\beta) = \frac{1}{4}\beta\ (1-2\beta) + (3\beta-1)_+^3 / 12\beta^2$ atteint son maximum en $\beta = 1/2$ et $m_1(1/2) = 1/24$, d'où la majoration :

$$\max_{t_{2i}\leq t\leq t_{2i+1}} |f'(t) - S'(t)| \leq \frac{h_i^2}{24}||f^{(3)}||_\infty$$

valable également pour $t \in [t_{2i+1}, t_{2i+2}]$

De la même manière, on a l'erreur sur la dérivée seconde :

$$e''(t) = \frac{1}{2}\int_{t_{2i}}^{t_{2i+2}} K''_i(t,s)\ f^{(3)}(s)\ ds$$

où $K''_i(t,s) = (t_{2i+2} - s)^2\ \phi''_{i+1}(t) + 2\ (t_{2i+2} - s)\ \Psi''_{i+1}(t) - 2(t-s)_+^o$

$= 2\ k_2(\alpha,\beta)$

$$\text{avec } k_2(\alpha,\beta) = \begin{cases} (1-\alpha)(1-2\alpha) - 1 & \alpha \leq \beta \\ (1-\alpha)(1-2\alpha) & \alpha \geq \beta \end{cases}$$

pour $0 \leq \beta \leq 1/2$ et $k_2(\alpha,\beta) = - k_2(1-\alpha, 1-\beta)$ pour $1/2 \leq \beta \leq 1$. Comme $k_1 \leq 0$ pour $0 \leq \alpha \leq \beta$ et $1/2 \leq \alpha \leq 1$ et $k_1 \geq 0$ pour $\beta \leq \alpha \leq 1/2$, on obtient :

$$\int_o^1 |k_2(\alpha,\beta)|d\alpha = \frac{1}{4} - \beta + 3\beta^2 - \frac{4}{3}\beta^3 = m_2(\beta)$$

dont le maximum est atteint en $\beta = \frac{1}{2}$ et vaut $m(1/2) = 1/3$, d'où la majoration valable pour $t \in [t_{2i}, t_{2i+2}]$:

$$\max |e''(t)| \leq \frac{h_i}{3} ||f^{(3)}||_\infty$$

REMARQUE

On démontre dans [13] les résultats suivants :

1) Pour une subdivision uniforme, l'intégration de S donné la formule des trapèzes avec un terme correcteur :

$$\frac{h^2}{12} [f'(t_o) - f'(t_{2n})]$$

c'est à dire une formule d'Euler-Maclaurin.

2) Si $f \in C^2[a, b]$ vérifie $f''(x) \geq m_2 > 0$, elle admet un minimum unique x^*. Son interpolant d'Hermite S aux points a et b, avec un seul noeud intérieur $(a+b)/2$, vérifie également $S''(x) \geq m_2 > 0$; il admet donc un minimum unique en $\bar{x}$ constituant une approximation de x^*. Le procédé peut être réitéré et fournit un algorithme de calcul du minimum d'une fonction strictement convexe.

RÉFÉRENCES

[1] C. De Boor, "*Quadratic spline interpolation and the sharpness of Lebesgue's inequality*". J. of Approximation Theory, 17, p 348-358 (1976).

[2] C. De Boor, "*Interpolation by quadratic splines*". J. of Approximation Theory, 23, p 392-400 (1978).

[3] C. De Boor, "*A practical guide to splines*". Springer Verlag, New-York (1978).

[4] J.W. Daniel, "*Constrained approximation and Hermite interpolation with smooth parabolic splines : some negative results*". J. of Approximation Theory, 17, p 135-149 (1976).

[5] S. Demko, "*Local approximation properties of spline projections*". J. of Approximation Theory 19, 176-185 (1977).

[6] S. Demko, "*Interpolation by quadratic splines*". J. of Approximation Theory, 23, p 392-400 (1978).

[7] W.J. Kammerer, G.W. Reddien, R.S. Varga, "*Quadratic interpolatory splines*". Numer. Math., 22, p 241-259 (1974).

[8] P.J. Laurent, "*Approximation et Optimisation*". Hermann, Paris (1972).

[9] M.J. Marsden, "*Quadratic spline interpolation*". Bull. Amer. Math. Soc., 80, p 903-906 (1974).

[10] M.J. Marsden, "*Operator norm bounds and error bounds for quadratic spline interpolation*". Approximation Theory, p 159-175, Banach Center Publications, Warsaw (1979).

[11] G. Meinardus, G.D. Taylor, "*Periodic quadratic spline interpolants of minimal norm*". J. of Approximation Theory, 23, p 137-141 (1978).

[12] E. Neuman, "*Quadratic splines and histosplines projections*". J. of Approximation Theory, 29, p 297-304 (1980).

[13] P. Sablonnière, "*Interpolation d'Hermite sur un intervalle par des splines quadratiques et applications*". Publ. A.N.O. 36, Lille I (Janvier 1981).

[14] I.J. Schoenberg, "*Splines and histograms*". Spline Functions and Approximation Theory (A. Meir et A. Sharma Editeurs), ISNM, Vol. 21, p 277-327, Birkhaüser-Verlag, Basel (1973).

[15] I.J. Schoenberg, "*Cardinal spline interpolation*". Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphie (1973).

[16] A. Sharma, J. Tzimbalario, "*Quadratic splines*". J. of Approximation Theory, 19, p 186-193 (1977).

[17] J.W. Schmidt, H. Mettke, "*Konvergenz von quadratishen Interpolations und Flächenabgleichssplines*". Computing, 19, p 351-363 (1978).

[18] S. Karlin, "*Tchebycheff systems*". Interscience Pub., Wiley (1966).

CHAPITRE 4

OPERATEURS POSITIFS ET SPLINES ORTHOGONALES

Comme toute espérance n'abandonne jamais une pauvre tête ! Celui-ci ne s'attache qu'à des bagatelles, sa main avide creuse la terre pour chercher des trésors ; mais qu'il trouve un vermisseau, et le voilà content.

GOETHE *(Faust)*

I - INTRODUCTION

Soit $\tau_n = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ une subdivision de $I = [0, 1]$. On pose $|\tau_n| = \max_{0\le i\le n-1} h_i = \max_{0\le i\le n-1} (x_{i+1} - x_i)$; et l'on introduit la suite de noeuds :

$$\tau_{n,k} = \{x_i \; : - k \le i \le n + k\}$$

en posant $\begin{cases} x_{-k} = \ldots = x_{-1} = x_0 = 0 \\ x_n = x_{n+1} = \ldots = x_{n+k} = 1 \end{cases}$

Les points nodaux sont définis par :

$$\xi_{i,k} = (x_{i+1} + \ldots + x_{i+k})/k \quad (- k \le i \le n - 1)$$

et ils vérifient :

$$0 = \xi_{-k,k} < \xi_{-k+1,k} < \ldots < \xi_{n-1,k} = 1$$

$$\xi_{i+1,k} - \xi_{i,k} = (x_{i+k+1} - x_{i+1})/k$$

Les B-splines normalisées sont définies par :

$$N_{i,k}(x) = \frac{x_{i+k+1} - x_i}{k+1} M_{i,k}(x)$$

où la B-spline $M_{i,k}(x)$ est la spline de degré k définie comme différence divisée d'ordre k + 1 de la fonction (t variable, x fixé) :

$$M(x \; ; t) = (k + 1)(t - x)_+^k = \begin{cases} (k + 1)(t - x)^k & t \ge x \\ 0 & t < x \end{cases}$$

sur les points $x_i, \ldots, x_{i+k+1}$. Rappelons quelques propriétés de ces B-splines :

$$N_{i,k}(x) \ge 0 \qquad \text{supp } N_{i,k} = [x_i, x_{i+k+1}]$$

$$\sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k}(x) = 1$$

$$\sum_{i=-k}^{n-1} \xi_{i,k} N_{i,k}(x) = x$$

$$\int_0^1 M_{i,k}(x)\, dx = 1$$

Schoenberg [17] a construit une généralisation des opérateurs de Bernstein en posant ; **pour $f : I \to \mathbb{R}$:**

$$(1) \qquad S_{n,k} f(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} f(\xi_{i,k}) N_{i,k}(x)$$

(le cas de Bernstein correspond à $n = 1$).

Les propriétés de cet opérateur ont été étudiées dans [10], [11] et [16].

Plus récemment, Müller [12] a introduit une généralisation des opérateurs de Bernstein - Kantorovitch [9] en posant :

$$(2) \qquad T_{n,k} f(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \left(\int_{\xi_{i-1,k+1}}^{\xi_{i,k+1}} f(t)\, dt\right) N_{i,k}(x)$$

Il a démontré certains résultats de convergence et des majorations d'erreur lorsque $f \in L^p(I)$.

Durrmeyer [6] et Derrienic [4] ont introduit une autre modification des opérateurs de Bernstein en posant :

$$(3) \qquad B_n f(x) = (n+1) \sum_{i=0}^{n} \left(\int_0^1 f(t)\, b_{ni}(t)\, dt\right) b_{ni}(x)$$

où $\quad b_{ni}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad (0 \le i \le n)$

On trouvera dans [4] une étude complète de ces opérateurs lorsque $f \in L^p(I)$ ou $f \in W^{m,p}(I)$ (et leur généralisation à un simplexe).

Une propriété remarquable des opérateurs (3) est que **leurs vecteurs propres sont les polynômes de Legendre** et leurs valeurs propres des nombres rationnels explicitement connus. (Nous avons généralisé ces résultats aux polynômes de Jocobi [14] et aux polynômes de Laguerre sur R^+ [10]. Pour ces derniers, voir aussi Coatmélec [1]).

De manière analogue, nous introduisons les opérateurs suivants :

$$(4) \qquad U_{n,k}\, f(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \left(\int_0^1 f(t)\, M_{i,k}(t)\, dt\right) N_{i,k}(x)$$

et nous nous proposons de démontrer d'abord quelques résultats de convergence et quelques majorations d'erreur lorsque $f \in L^p(I)$.

Nous étudions ensuite quelques propriétés du spectre de l'opérateur $U_{n,k}$, et nous montrons en particulier que **ses vecteurs propres sont des splines orthogonales** pouvant être considérées comme des **généralisations des polynômes de Legendre** et constituer une base intéressante pour l'approximation au sens des moindres carrés par des fonctions splines. Le cas des splines de degré 1 (linéaires par morceaux) sur la subdivision uniforme $\tau_n = \{i/n,\ 0 \leq i \leq n\}$ est étudié en détail.

Pour simplifier les notations, on pose parfois :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt, \text{ en particulier on a :}$$

$$U_{n,k}\, f(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} \langle M_{i,k}, f\rangle\, N_{i,k}(x)$$

On désigne par $Sp(k, \tau_n)$ l'espace vectoriel des splines de degré k (classe C^{k-1}) sur la subdivision τ_n. Sa dimension est $n + k$ et une base est fournie par les B-splines $\{N_{i,k},\ -k \leq i \leq n-1\}$.

II - CONVERGENCE DANS $L^p(I)$ $(1 \le p \le +\infty)$

On se propose de démontrer le :

Théorème 1 : L'opérateur $U_{n,k}$ *possède les propriétés suivantes :*

i) c'est un opérateur positif, auto-conjugué, de norme 1, *de* $L^p(I)$ *dans lui-même.*

ii) $U_{nk}\, f$ *converge vers* f *dans* $L^p(I)$ *lorsque* $n \to +\infty$ *et* $|\tau_n| \to 0$ (k *fixé*).

iii) $\int_0^1 U_{n,k}\, f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt.$

Preuve : On peut poser :

$$U_{n,k}\, f(x) = \int_0^1 K_{n,k}\,(x, t)\, f(t)\, dt$$

avec $K_{n,k}(x, t) = \sum_{i=-k}^{n-1} M_{i,k}(t)\, N_{i,k}(x) \ge 0$

par conséquent $f \ge 0$ entraîne $U_{n,k}\, f \ge 0$.

D'autre part, comme on peut écrire :

$$K_{n,k}\,(x, t) = \sum_{i=-k}^{n-1} \left(\frac{x_{i+k+1} - x_i}{k+1}\right) M_{i,k}(x)\, M_{i,k}(t)$$

$$\langle U_{n,k}\, f, g\rangle = \int_0^1 \int_0^1 K_n(x, t)\, f(t)\, g(x)\, dt\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 K_n(t, x)\, g(x)\, f(t)\, dx\, dt$$

$$= \langle f, U_{n,k}\, g\rangle$$

et l'on a bien un opérateur auto-conjugué.

Soit maintenant $f \in L^p(I)$ et soit q tel que $1/p + 1/q = 1$; l'inégalité de Hölder donne :

$$|U_{n,k}\, f(x)| \le \left[\int_0^1 K_{n,k}(x, t)\, dt\right]^{1/q} \left[\int_0^1 K_{n,k}(x, t)\, |f(t)|^p\, dt\right]^{1/p}$$

et comme $\int_0^1 K_{n,k}(x,t)\,dt = \sum_{i=-k}^{n-1} (\int_0^1 M_{i,k}(t)\,dt)\, N_{i,k}(x) = 1$

on en déduit :

$$\int_0^1 |U_{n,k}\, f(x)|^p\,dx \le \int_0^1 \int_0^1 K_{n,k}\,(x,t)\,|f(t)|^p\,dt\,dx$$

$$= \int_0^1 K_{n,k}(x,\,t)\,dx \times \int_0^1 |f(t)|^p\,dt$$

$$= ||f||_p^p$$

donc $||U_{n,k}\, f||_p \le ||f||_p$. De plus f = 1 donne $U_{n,k}\, f = f$, et $U_{n,k}$ est bien un opérateur de norme 1 de $L^p(I)$.

Pour $f \in C(I)$, on a :

$$U_{n,k}\, f(x) - S_{n,k}\, f(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k}(x) \int_0^1 M_{i,k}(t)\,[f(t) - f(\xi_{i,k})]\,dt$$

mais lorsque $t \in \text{supp } M_{i,k} = [x_i,\, x_{i+k+1}]$, on a :

$$|f(t) - f(\xi_{i,k})| \le k\,\omega(f,\,|\tau_n|)$$

car $x_{i+1} \le \xi_{i,k} \le x_{i+k}$ (ω est le module de continuité de f).

On en déduit $||U_{n,k}\, f - S_{n,k}\, f||_\infty \le k\,\omega(f,\,|\tau_n|)$

Comme d'autre part, on a (cf. [10]).

$$||S_{n,k}\, f - f||_\infty \le (1 + \sqrt{(k+1)/12})\quad \omega(f,\,|\tau_n|)$$

On en déduit ; pour $f \in C(I)$:

$$||U_{n,k}\, f - f||_p \le ||U_{n,k}\, f - f||_\infty \le (k+1 + \sqrt{(k+1)/12})\,\omega(f,\,|\tau_n|)$$

Donc $U_{n,k}\, f$ converge vers f, pour k fixé, lorsque $|\tau_n| \to 0$.

Si $g \in L^p(I)$, la densité de $C(I)$ dans $L^p(I)$ entraîne l'existence de f telle que $||g - f||_p \leq \varepsilon/2$, donc :

$$||U_{n,k}\, g - g||_p \leq ||U_{n,k}\,(g - f)||_p + ||U_{n,k}\, f - f||_p + ||f - g||_p$$

$$\leq\ 2\, ||g - f||_p + ||U_{n,k}\, f - f||_p$$

$$||U_{n,k}\, g - g||_p \leq \varepsilon + ||U_{n,k}\, f - f||_p$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien la convergence de $U_{n,k}\, g$ vers g dans $L^p(I)$.

Enfin $\displaystyle\int_0^1 U_{n,k}\, f(t)\, dt = \int_0^1 \int_0^1 K_{n,k}\,(t,\, s)\, f(s)\, ds\, dt$

$$= \int_0^1 f(s) \int_0^1 K_{n,k}(t,\, s)\, dt\, ds = \int_0^1 f(s)\, ds$$

III - DEGRÉ D'APPROXIMATION DANS $L^P(I)$ $(1 \leq P \leq +\infty)$

Soit $L^{p,1}(I)$ l'espace des fonctions $f \in L^p(I)$ avec f absolument continue, $f' \in L^p(I)$ et la norme :

$$||f||_{p,1} = ||f||_p + ||f'||_p$$

On se propose de donner une majoration d'erreur pour les fonctions $f \in L^{p,1}(I)$ et d'en déduire une majoration pour les fonctions de $L^p(I)$ par une technique voisine de celle utilisée par Müller [12] et faisant intervenir les K-fonctionnelles de Peetre [13]. On utilisera pour cela le :

<u>Lemme</u> : *Pour tout* $x \in I$, *on a* :

$$\sum_{i=-k}^{n-1} N_{ik}(x) \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t)\ |t-x|\ dt \leq (k+1)\ |\tau_n|$$

<u>Preuve</u> : Posons $A_{ik}(x) = \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t)\ |t-x|\ dt$

Fixons $x \in [x_j, x_{j+1}]$ $(0 \leq j \leq n-1)$.

Seules sont non nulles en x les B-splines N_{ik} d'indices $i = -k+j, \ldots, j$ (au nombre de $k+1$) ; donc t peut varier de x_{-k+j} à x_{j+k+1} et l'on a toujours :

$$|t-x| \leq (k+1)\ |\tau_n|$$

d'où $A_{ik}(x) \leq (k+1)\ |\tau_n| \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t)\ dt = (k+1)\ |\tau_n|$

et puisque $\sum_i N_{ik}(x) = 1$, on a le résultat.

On peut démontrer alors le :

<u>*Théorème 2*</u> : *Pour* $f \in L^{p,1}(I)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$, *on a la majoration suivante* :

$$||U_{n,k}\, f - f||_p \leq (k+1)\; ||f'||_p\; |\tau_n|$$

<u>Preuve</u> : Pour $x \in I$ fixé, on a :

$$|U_{n,k}\, f(x) - f(x)| \leq \sum_i N_{ik}(x) \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t) \int_x^t |f'(u)|\, du\, dt$$

En utilisant l'inégalité de Hölder $(1/p + 1/q = 1)$, on obtient successivement :

$$\int_x^t |f'(u)|\, du \leq |t-x|^{1/q} \left(\int_x^t |f'(u)|^p\, du\right)^{1/p}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t) \int_x^t |f'(u)|\, du\, dt \leq \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t)\; |t-x|\; dt\right]^{1/q}}_{A_{ik}(x)} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t) \int_x^t |f'(u)|^p\, du\, dt\right]^{1/p}}_{B_{ik}(x)}$$

Par conséquent :

$$(5) \qquad |U_{nk}\, f(x) - f(x)| \leq \sum_i [A_{ik}(x)\, N_{ik}(x)]^{1/q}\, [B_{ik}(x)\, N_{ik}(x)]^{1/p}$$

$$\leq [\sum_i A_{ik}(x)\, N_{ik}(x)]^{1/q}\, [\sum_i B_{ik}(x)\, N_{ik}(x)]^{1/p}$$

(6) $\sum_i A_{ik}(x)\, N_{ik}(x) \leq (k+1)\, |\tau_n|$ d'après le lemme.

D'autre part, pour $x \in \text{supp}\,(N_{ik}) = [x_i, x_{i+k+1}]$ on a :

$$(7) \qquad \int_0^1 (B_{ik}(x)\, N_{ik}(x))\, dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} N_{ik}(x) \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(t) \int_{x_i}^{x_{i+k+1}}$$

$$|f'(u)|^p \, du \, dt \, dx \;=\; \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} N_{ik}(x) \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} |f'(u)|^p \, du \, dx$$

$$\leq |\tau_n| \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} |f'(u)|^p \, du$$

car $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+k+1}} N_{ik}(x)\, dx = \frac{(x_{i+k+1} - x_i)}{k+1} \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} M_{ik}(x)\, dx \leq |\tau_n|.$

En utilisant les inégalités (5), (6) et (7), on obtient :

$$||U_{nk} f - f||_p \leq (k+1)^{1/q} \, |\tau_n|^{1/q} \, |\tau_n|^{1/p} \, \Big(\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} |f'(u)|^p \, du\Big)^{1/p}$$

mais $\displaystyle\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+k+1}} |f'(u)|^p \, du \leq (k+1) \int_0^1 |f'(u)|^p \, du$

d'où l'inégalité du théorème :

$$||U_{nk} f - f||_p \leq (k+1) \, ||f'||_p \, |\tau_n| \qquad \blacksquare$$

La K fonctionnelle de Peetre [13] est définie, pour $f \in L^p(I)$, par :

$$K_p(t, f) = \inf_{g \in L^{p,1}(I)} \big(||f - g||_p + t \, ||g'||_p\big) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

Le module intégral de continuité est défini, pour $f \in L^p(I)$, par :

$$\omega_{1,p}(f, h) = \sup_{0<t\leq h} ||f(. + t) - f(.)||_p \, (I_t)$$

(où $||.||_p \, (I_t)$ indique que la norme L^p doit être prise sur l'intervalle $I_t = [0, 1 - t]$).

Johnen ([8], proposition 6.1) a montré qu'il existe des constantes c_1, $c_2 > 0$, indépendantes de f et p, telles que :

(8) $c_1 \, \omega_{1p}(f, |\tau_n|) \leq K_p(t, f) \leq c_2 \, \omega_{1p}(f, |\tau_n|) \qquad (0 \leq t \leq 1)$

On peut alors énoncer le :

Théorème 3 : Pour $f \in L^p(I)$, $1 \le p \le +\infty$, *on a :*

$$||U_{nk} f - f||_p \le M\, \omega_{1,p}(f, |\tau_n|)$$

où $M > 0$ *est indépendant de* f *et* p.

Preuve : Pour $h \in L^p(I)$, on a $||U_{nk} h - h||_p \le 2||h||_p$ car $||U_{nk} h||_p \le ||h||_p$ (théorème 1) et pour $h \in L^{p,1}(I)$, on a (théorème 2) :

$$||U_{nk} h - h||_p \le (k + 1)\, ||h'||_p\, |\tau_n|$$

Si $f \in L^p(I)$ et $g \in L^{p,1}(I)$, on a :

$$\begin{aligned} ||U_{nk} f - f||_p &\le ||U_{nk}(f - g) - (f - g)||_p + ||U_{nk}\, g - g||_p \\ &\le 2||f - g||_p + (k + 1)\, ||g'||_p\, |\tau_n| \\ &\le 2\, (||f - g||_p + k\, |\tau_n|\, ||g'||_p) \end{aligned}$$

En prenant l'infimum du second membre sur tous les $g \in L^{p,1}(I)$ et en utilisant la définition de la K-fonctionnelle et (8) :

$||U_{nk} f - f||_p \le 2\, K_p\, (k|\tau_n|, f) \le 2\, c_2\, \omega_{1,p}\, (f, k|\tau_n|)$ à condition que $k|\tau_n| \le 1$.

Puisque $\omega_{1,p}(f, k|\tau_n|) \le k\, \omega_{1p}(f, |\tau_n|)$, on a le résultat du théorème, avec $M = 2\, k\, c_2$.

Remarque : On pourrait montrer, comme dans [12] (Corollaire, p 392) que si $\omega_{1,p}(f, h) = O(h^\alpha)$, alors $||U_{nk} f - f||_p = O(|\tau_n|^\alpha)$ $(0 < \alpha \le 1)$.

IV - SPECTRE DE L'OPÉRATEUR $U_{n,1}$ (SPLINES LINÉAIRES PAR MORCEAUX)

Les B-splines de l'espace $Sp(1, \tau_n)$ s'écrivent, en modifiant légèrement la numérotation du § I :

$$N_0(x) = (x_1 - x)/h_0 \qquad x \in [x_0, x_1]$$
$$N_n(x) = (x - x_{n-1})/h_{n-1} \qquad x \in [x_{n-1}, x_n]$$

et pour $1 \leq i \leq n - 1$:

$$N_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_{i-1} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/h_i & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

De même $M_0(x) = 2\, N_0(x)/h_0$, $M_n(x) = 2\, N_n(x)/h_{n-1}$ et $M_i(x) = 2\, N_i(x)/(h_{i-1} + h_i)$ pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Nous étudions dans ce § le spectre de l'opérateur :

$$U_n\, f(x) = U_{n,1}\, f(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle f, M_i\rangle\, N_i(x)$$

Les résultats se résument dans le :

<u>*Théorème 4*</u> :

(i) U_n *est un opérateur auto-adjoint de* $L^2[0, 1]$ *ayant* $n + 1$ *valeurs propres* $\lambda_k^{(n)}$ *réelles, positives, distinctes vérifiant :*

$$\lambda_n^{(n)} = 1/3 < \lambda_k^{(n)} < 1 = \lambda_0^{(n)} \qquad (1 \leq k \leq n-1)$$

(ii) Les fonctions propres sont orthogonales et la k-ième fonction propre $V_k^{(n)}(x)$ *présente exactement* k *changements de signe sur* $[0, 1]$. *Plus précisément, on a :*

$$V_0^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} N_i(x) = 1$$

$$V_n^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, N_i(x)$$

(iii) Si la subdivision τ_n *est uniforme* ($x_i = i/n$ *les valeurs propres sont :*

$$\lambda_k^{(n)} = (2 + \cos(k\,\pi/n))/3$$

et les fonctions propres associées :

$V_k^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \cos(ik\pi/n)\, N_i(x)$. *Donc* $V_k^{(n)}(x)$ *converge uniformément vers* $V_k^{\infty}(x) = \cos k\pi x$ *quand* $n \to +\infty$

Preuve : Calculons la matrice A_n de terme général $a_{ij} = \langle M_i, N_j\rangle$ représentant l'opérateur U_n dans la base des B-splines. On obtient $\langle M_0, N_0\rangle = 2/3 = \langle M_n, N_n\rangle$, $\langle M_0, N_1\rangle = 1/3 = \langle M_n, N_{n-1}\rangle$, puis :

$$\begin{aligned}
&\langle M_i, N_i\rangle = 2/3\\
&\langle M_i, N_{i-1}\rangle = a_i/3 = h_{i-1}/3\,(h_{i-1} + h_i)\\
&\langle M_i, N_{i+1}\rangle = b_i/3 = h_i/3\,(h_{i-1} + h_i)
\end{aligned}$$

pour $1 \le i \le n - 1$.

On a donc une matrice tridiagonale à diagonale strictement dominante $(2 > a_i + b_i = 1)$

$$A_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 \cdots\cdots & & & \\
a_1 & 2 & b_1 & 0 \cdots\cdots & & & \\
0 & a_2 & 2 & b_2 \cdots\cdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & 0 & a_i & 2 & b_i \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & a_{n-1} & 2 & b_{n-1}\\
 & & & & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}$$

A_n est stochastique (la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1), par conséquent $\lambda_o^{(n)} = 1$ est associée au vecteur propre $\tilde{V}_o^{(n)} = (1,1,\ldots,1)^T$ et $|\lambda_k^{(n)}| \le 1$ pour $0 \le k \le n$. Les mineurs principaux de A_n vérifiant :

$$D_{i+1} = 2D_i - a_{i+1}\, b_i\, D_{i-1} \qquad (1 \le i \le n-1)$$

(à condition de poser $D_o = 2$ et $a_n = 1$), on montre par récurrence que $2 = D_o < D_1 < \ldots < D_n$, par conséquent A_n est oscillatoire (elle est tridiagonale et ses mineurs principaux sont strictement positifs. cf [7], théorème 7). Ses valeurs propres sont donc réelles, positives, distinctes et les composantes du k-ième vecteur propre $\mathcal{V}_k^{(n)}$ présentent exactement k changements de signe. Comme $\mathcal{V}_n^{(n)} = (1, -1, \ldots, (-1)^n)^T$ est le vecteur propre associé à $\lambda_n^{(n)} = 1/3$ et qu'il présente n changements de signe, on a bien $\lambda_k^{(n)} > 1/3$ pour $k \leq n-1$. A chaque vecteur propre $\mathcal{V}_k^{(n)}$ de A_n correspond la fonction propre $V_k^{(n)}(x)$ de l'opérateur U_n et comme elle est linéaire par morceaux, elle présente exactement k changements de signe sur $]0, 1[$ (en effet $V_k^{(n)}(0)\ V_k^{(n)}(1) \neq 0$). Ces splines sont orthogonales car elles correspondent à des valeurs propres distinctes d'un opérateur auto-adjoint. Lorsque la subdivision est uniforme, la matrice A_n devient :

$$A_n = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_k^{(n)} = (2 + \cos(k\pi/n))/3$ et les vecteurs propres associés sont :

$$\mathcal{V}_k^{(n)} = (1, \cos(k\pi/n), \ldots, \cos(ik\pi/n), \ldots, \cos k\pi)^T$$

La fonction $V_k^{(n)}(x)$ est l'interpolant linéaire par morceaux de $V_k^{\infty}(x) = \cos k\pi x$ aux points i/n, d'où la convergence uniforme de $V_k^{(n)}$ vers V_k^{∞} quand $n \to +\infty$.

<u>*Corollaire*</u> : *La meilleure approximation de* $f \in L^2[0, 1]$ *dans* $Sp(1, \tau_n)$ *est :*

$$S(x) = \sum_{k=o}^{n} \gamma_k^{(n)} \langle f, V_k^{(n)} \rangle\, V_k^{(n)}(x)$$

où $1/\gamma_k^{(n)} = \langle V_k^{(n)}, V_k^{(n)} \rangle$

En particulier, si la subdivision est uniforme, $\gamma_k^{(n)} = 2/\lambda_k^{(n)}$ *pour* $1 \leq k \leq n-1$, $\gamma_o = 1$ *et* $\gamma_n = 3$.

<u>Preuve</u> : L'expression de S(x) résulte de l'orthogonalité des $V_k^{(n)}(x)$.
Pour une subdivision uniforme, on a :

$$1/\gamma_k^{(n)} = \langle V_k^{(n)}, V_k^{(n)} \rangle = \sum_{i=o}^{n} \sum_{j=o}^{n} \cos(ik\pi/n) \cos(jk\pi/n) \langle N_i, N_j \rangle$$

$$\text{or } \sum_{j=o}^{n} \langle N_i, N_j\rangle \cos (jk\pi/n) = \frac{1}{n} \sum_{j=o}^{n} \langle M_i, N_j\rangle \cos (jk\pi/n)$$

$$= \frac{1}{n} \lambda_k^{(n)} \cos (ik\pi/n) \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1$$

D'autre part $\sum_{j=o}^{n} \langle N_o, N_j\rangle \cos (jk\pi/n) = \lambda_k^{(n)}/2n$ et

$$\sum_{j=o}^{n} \langle N_n, N_j\rangle \cos (jk\pi/n) = (-1)^k \lambda_k^{(n)}/2n, \text{ donc :}$$

$$\langle V_k^{(n)}, V_k^{(n)}\rangle = \frac{\lambda_k^{(n)}}{n} (1 + \sum_{i=1}^{n-1} \cos^2(ik\pi/n))$$

soit $$1/\gamma_k^{(n)} = \frac{\lambda_k^{(n)}}{2n} (n+1 + \sum_{i=1}^{n-1} \cos (2ik\pi/n))$$

mais $$\sum_{i=1}^{n-1} \cos(2ik\pi/n) = \frac{\cos(k\pi) \sin(\frac{(n-1)k\pi}{n})}{\sin(k\pi/n)} = -1$$

il reste donc $1/\gamma_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}/2$. ∎

<u>Remarque</u> : Pratiquement, on a intérêt à exprimer S(x) dans la base des B-splines. Par exemple, pour la subdivision uniforme ; si l'on pose :

$$\mu_i^{(n)}(f) = \int_o^1 f(t)\, N_i(t)\, dt$$

on a
$$\begin{cases} \langle f, V_k^{(n)}\rangle = \sum_{i=o}^{n} \cos (ik\pi/n).\mu_i^{(n)} (f) \\ \\ V_k^{(n)}(x) = \sum_{j=o}^{n} \cos (jk\pi/n).N_j(x) \end{cases}$$

d'où la meilleure approximation :

$$S(x) = \sum_{j=o}^{n} (\sum_{i=o}^{n} \mu_i^{(n)}(f).C_{ij}^{(n)})\, N_j(x)$$

où les $$C_{ij}^{(n)} = \sum_{k=o}^{n} \gamma_k^{(n)} \cos (ik\pi/n) \cos (jk\pi/n)$$

sont les coefficients d'une matrice $C^{(n)}$ de taille (n+1) x (n+1) qui peut être calculée une fois pour toutes.

<u>Exemple</u> : Pour n = 3, les éléments propres de A_3 sont :

$\lambda_o^{(3)} = 1$ $\quad V_o^{(3)} = (1, 1, 1, 1)^T$

$\lambda_1^{(3)}$ $\quad V_1^{(3)} = (1, 1/2, -1/2, -1)^T$

$$\lambda_2^{(3)} = 1/2 \qquad \tilde{V}_2^{(3)} = (1, -1/2, -1/2, 1)^T$$
$$\lambda_3^{(3)} = 1/3 \qquad \tilde{V}_3^{(3)} = (1, -1, 1, -1)^T$$

La figure 1 donne les graphes des fonctions propres associées. On calcule alors :

$$C^{(3)} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 52 & -14 & 4 & -2 \\ -14 & 28 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 28 & -14 \\ -2 & 4 & -14 & 52 \end{pmatrix}$$

$$S(x) = \alpha_o\ N_o(x) + \alpha_1\ N_1(x) + \alpha_2\ N_2(x) + \alpha_3\ N_3(x)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_o = \frac{2}{5}\,(26\mu_o - 7\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3) \\ \alpha_1 = \frac{2}{5}\,(-7\mu_o + 14\mu_1 - 8\mu_2 + 2\mu_3) \\ \alpha_2 = \frac{2}{5}\,(2\mu_o - 4\mu_1 + 14\mu_2 - 7\mu_3) \\ \alpha_3 = \frac{2}{5}\,(-\mu_o + 2\mu_1 - 7\mu_2 + 26\mu_3) \end{cases}$$

où $\mu_i = \mu_i^{(3)}\ (f) = \int_o^1 f(t)\ N_i(t)\ dt.$

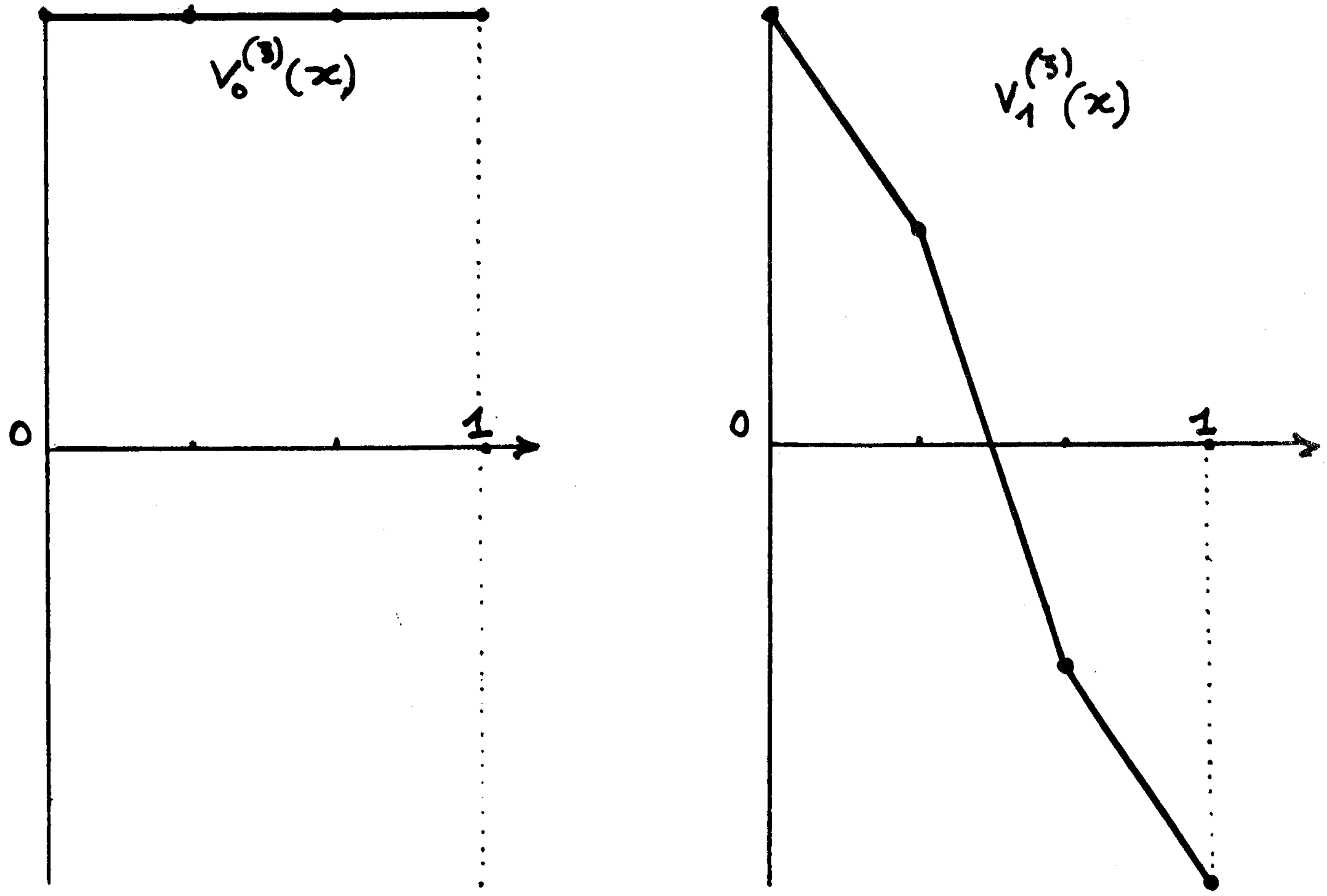
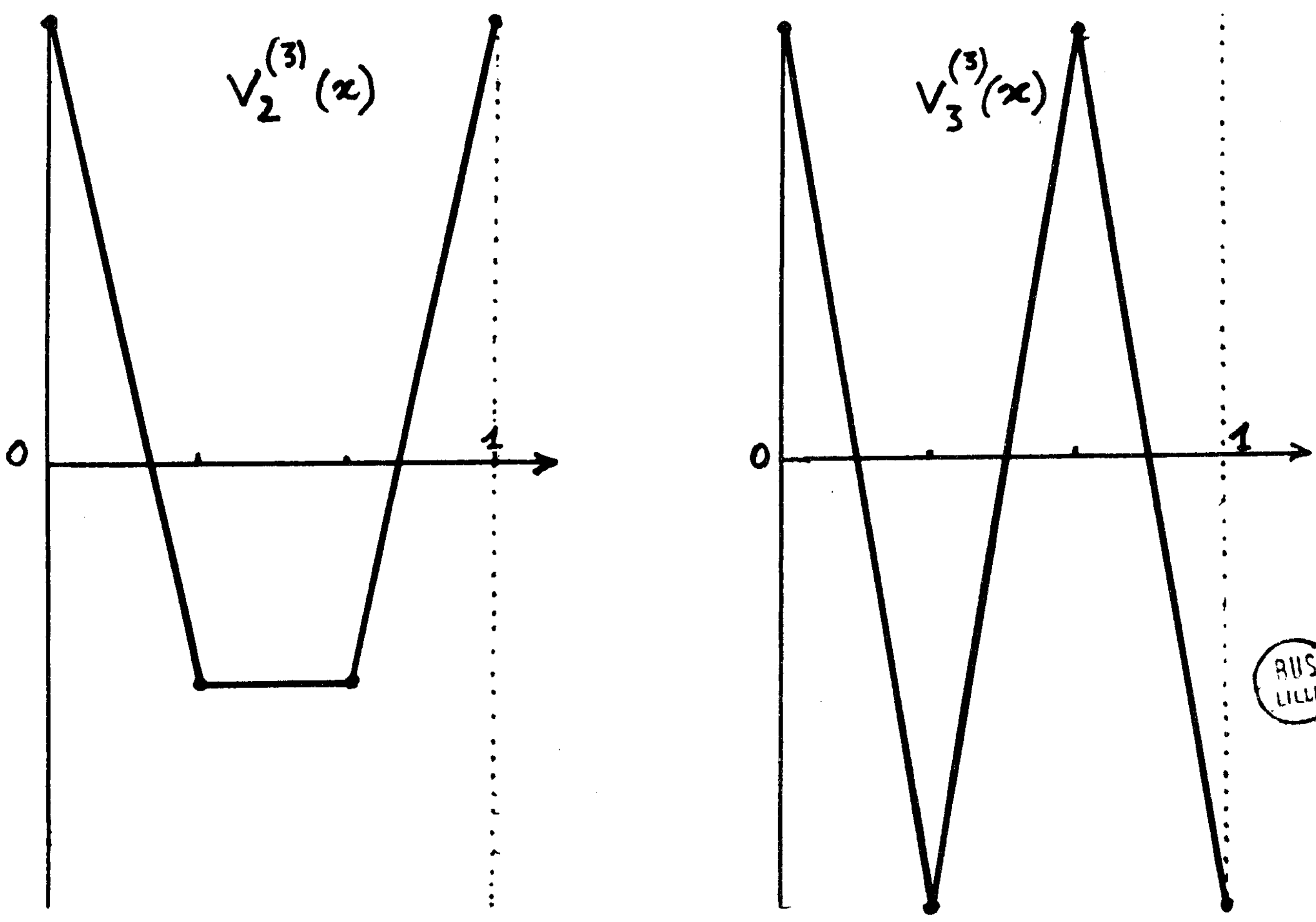


Figure 1



BUS LILLE

V - SPECTRE DE L'OPÉRATEUR $U_{n,k}$

La restriction de l'opérateur $U = U_{n,k}$ à l'espace $Sp(k, \tau_n)$ admet comme matrice dans la base des B-splines :

$$A = A_{n,k} = (a_{ij}) = (\langle M_i, N_j \rangle)$$

où $- k \leq i, j \leq n - 1$.

A est une matrice stochastique car :

$$\sum_{j=-k}^{n-1} a_{ij} = \langle M_i, \sum_j N_j \rangle = \langle M_i, 1 \rangle = 1$$

pour tout $i = - k, \ldots, n - 1$.

Par conséquent elle admet comme valeur propre $\lambda_0 = 1$ et comme vecteur propre :

$$\tilde{V}_0 = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+k}$$

et de plus $|\lambda_j| \leq 1$ pour $0 \leq j \leq n + k - 1$.

Mais comme dans le cas des splines linéaires, on peut donner des renseignements plus précis sur le spectre car A est oscillatoire.

En effet, la matrice A ci-dessus coïncide avec la matrice $G = G_\infty$ utilisée par De Boor dans [2] et [3] et cette matrice est totalement positive. Comme les éléments $a_{i,i-1} = \langle M_i, N_{i-1} \rangle$ et $a_{i,i+1} = \langle M_i, N_{i+1} \rangle$ sont strictement positifs pour $k \geq 1$, il résulte d'un théorème de Gantmacher et Krein ([7], p 454 théorème 2) que A est oscillatoire. Par conséquent ses valeurs propres λ_j sont (réelles) positives, distinctes, comprises entre 0 et 1 et le j-ième vecteur propre $\tilde{V}_j$ présente exactement j changements de signe : $S^-(\tilde{V}_j) = j \quad (0 \leq j \leq n + k - 1)$

L'opérateur U étant auto-adjoint dans $L^2[0, 1]$ (théorème 1) et ses valeurs propres étant distinctes, les fonctions propres :

$$V_j(x) = \sum_{=-k}^{n-1} \omega_{\ell j} N_{\ell,k}(x)$$

où $\quad \tilde{V}_j = (\omega_{\ell j}, - k \leq \ell \leq n - 1)$

sont deux à deux orthogonales et forment une base de $Sp(k, \tau_n)$.

La base orthogonale $\{V_j,\ 0 \le j \le n+k-1\}$ peut être naturellement utilisée pour calculer la projection S_n de f sur $Sp(k, \tau_n)$:

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n+k-1} \frac{<f, V_j>}{<V_j, V_j>} V_j(x)$$

Les quantités $<f, V_j>$ s'expriment au moyen des "moments" de f par rapport aux B-splines :

$$\mu_\ell(f) = \int_0^1 N_{\ell,k}(t)\, f(t)\, dt = <N_{\ell,k}, f>$$

par les relations :

$$<f, V_j> = \sum_{\ell=-k}^{n-1} \omega_{\ell j}\, \mu_\ell\, (f)$$

D'autre part, on peut calculer une fois pour toutes les quantités :

$$\gamma_j^{-1} = <V_j, V_j> = \sum_{\ell,m} \omega_{\ell j}\, \omega_{mj} <N_\ell, N_m>$$

$$= \sum_\ell \omega_{\ell j} \frac{x_{\ell+k+1} - x_\ell}{k+1} \left(\sum_m <M_\ell, N_m>\, \omega_{mj}\right)$$

$$\gamma_j = \lambda_j \sum_\ell \frac{x_{\ell+k+1} - x_\ell}{k+1}\ \omega_{\ell j}^2$$

car $\tilde{V}_j$ est vecteur propre de A.

Résumons tous ces résultats dans le :

<u>*Théorème 5*</u> :

(i) $U_{n,k}$ *est un opérateur auto-adjoint de* $L^2[0, 1]$ ayant n+k *valeurs propres* λ_j *réelles positives distinctes vérifiant* $0 < \lambda_j \le \lambda_o = 1$ $(0 \le j \le n+k-1)$.

(ii) Les fonctions propres $V_j(x)$ *sont orthogonales et si l'on pose :*

$$V_j(x) = \sum_{\ell=-k}^{n-1} \omega_{\ell j}\, N_{\ell,k}(x)$$

où $\tilde{V}_j = (\omega_{\ell j},\ -k \le \ell \le n-1) \in \mathbb{R}^{n+k}$ *est le j-ième vecteur propre de la matrice* A_{nk} *de* U_{nk} *par rapport aux B-splines,* *on a* $S^-(\tilde{V}_j) = j$, *en particulier* $\tilde{V}_0 = (1,\ldots,1)$, *donc* $V_0(x) = 1$.

(iii) La projection orthogonale S *de* $f \in L^2[0, 1]$ *sur* $Sp(k, \tau_n)$ *s'écrit :*

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n+k-1} \gamma_j <f, V_j> V_j(x)$$

avec $\gamma_j^{-1} = \lambda_j \sum_{\ell=-k}^{n-1} \frac{x_{\ell+k+1} - x_\ell}{k+1} \omega_{\ell j}^2 = <V_j, V_j>$

et $$<f, V_j> = \sum_{\ell=-k}^{n-1} \omega_{\ell j} \mu_\ell(f) \text{ où}$$

$$\mu_\ell(f) = <f, N_{\ell,k}> = \int_0^1 N_{\ell,k}(t)\, f(t)\, dt$$

Donnons les matrices A pour k = 2 et k = 3 dans le cas d'une subdivision uniforme $\tau_n = \{i/n, 0 \leq i \leq n\}$.

<u>Exemple 1</u> : *splines quadratiques*

La matrice $A_{n,2}$ est de taille n + 2 et pour $n \geq 4$, on obtient

$$A = A_{n,2} = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 72 & 42 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ 21 & 60 & 75/2 & 3/2 & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ 2 & 25 & 66 & 26 & 1 & 0 & \cdots & & & & \\ 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & & & & & & \\ & & & & \cdots & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ & & & & \cdots & 0 & 1 & 26 & 66 & 25 & 2 \\ & & & & \cdots & 0 & 0 & 3/2 & 75/2 & 60 & 21 \\ & & & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 6 & 42 & 72 \end{bmatrix}$$

Les splines quadratiques orthogonales $V_j(x)$ s'obtiennent à partir des vecteurs propres $\tilde{V}_j$ de cette matrice. Il est intéressant de remarquer que l'image du vecteur :

$$\tilde{V}_\infty = (1, -1, 1, \ldots, \pm 1)^T$$

par la matrice A est le vecteur :

$$A\,\tilde{V}_\infty = \frac{1}{120}\,(36, -5, 18, -16, +16, \ldots, \pm 16, \mp 18, \pm 5, \mp 36)$$

$$A\,\tilde{V}_\infty = \frac{2}{15}\,\tilde{V}_\infty + \frac{1}{120}\,(20, +11, 2, 0, \ldots, 0, \mp 2, \mp 11, \mp 20)$$

Si l'on pose $V_\infty(x) = \sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, N_i(x)$

$$U_{n,2}\, V_\infty(x) = \frac{2}{15}\, V_\infty(x) + W_\infty(x)$$

avec $W_\infty(x) = \frac{1}{120}\,(20\, N_0(x) + 11\, N_1(x) + 2\, N_2(x) + \ldots \pm 2N_{n-1}(x) \pm 11N_n(x) + 20N_{n+1}(x))$

et l'on peut calculer :

$$||W_\infty||_2^2 = \langle W_\infty, W_\infty\rangle \leq \frac{400}{(120)^2} \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{6\sqrt{n}}\right)^2$$

Par conséquent, lorsque $n \to +\infty$, la fonction $V_\infty(x)$ est "proche" de la fonction propre $V_{n+1}(x)$ (en norme L^2) et la plus petite valeur propre λ_{n+1} est voisine de 2/15.

Il est probable qu'elle soit comprise entre 1/10 et 2/15 d'après les résultats numériques obtenus pour les premières valeurs de n.

Exemple 2 : splines cubiques

Le résultat est donné par De Boor ([2], p. 542).

$$A = A_{n,3} = \frac{1}{10080}\left[\begin{array}{cccccc:ccc}
5760 & 3528 & 744 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & \\
1764 & 4464 & 3150 & 696 & 6 & 0 & 0 & 0 \ldots & \\
248 & 2100 & 4392 & 3018\frac{2}{3} & 318\frac{2}{3} & 2\frac{2}{3} & 0 & 0 \ldots & \\
12 & 348 & 2264 & 4832 & 2382 & 240 & 2 & 0 \ldots & \\
\hdashline
0 & 2 & 240 & 2382 & 4832 & 2382 & 240 & 2 & \\
 & & 2 & 240 & 2382 & 4832 & 2382 & 240 & 2 \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}\right]$$

Les 4 dernières lignes de A sont irrégulières comme les 4 premières lignes (en inversant l'ordre des indices i et j).

Comme dans le cas quadratique, on peut montrer que si :

$$V_\infty(x) = \sum_i (-1)^i N_i(x)$$

alors $U_{n,3}\, V_\infty(x) = \dfrac{17}{315}\, V_\infty(x) + W_\infty(x)$ où $\|W_\infty\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Il est probable que λ_{n+2}, valeur propre minimale de A, est voisine de 17/315 pour n grand, et qu'elle est comprise entre 9/315 et 17/315.

<u>Remarque</u> Les splines orthogonales ainsi définies diffèrent de celles introduites par Schoenberg dans [18]. Leur calcul serait sans doute facilité par des formules de récurrence.

VI - PROPRIÉTÉS OSCILLATOIRES DES SPLINES ORTHOGONALES

Les deux derniers paragraphes sont consacrés à la démonstration du théorème suivant qui montre que les splines orthogonales V_j du théorème 5 ont les mêmes propriétés que les polynômes orthogonaux classiques.

Théorème 6 : *Les* n+k *splines orthogonales* V_j $(0 \le j \le n+k-1)$ *de l'espace* $Sp(k, \tau_n)$ *possèdent les propriétés suivantes :*

(i) V_j *a exactement* j *racines réelles simples dans l'intervalle* $]0, 1[$.

(ii) *Deux splines orthogonales successives* V_j *et* V_{j+1} *n'ont pas de racine commune dans* $]0, 1[$. *De plus,* V_j *change de signe entre deux racines de* V_{j+1}, *autrement dit leurs racines sont alternées.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes et utilise les lemmes suivants (on a numéroté les B-splines de 0 à n+k-1 = N et l'on pose $\sigma_i =]t_{i-k}, t_{i+1}[$ = intérieur du support de la B-spline N_i).

Lemme 1 : *Soient* $t_o < t_1 < \dots < t_\ell$ *des points de* $[0, 1]$ *et* $D(t_o, t_1, \dots, t_\ell)$ *le déterminant d'ordre* $\ell+1$ *ayant comme coefficients* $d_{ij} = V_i(t_j)$ *pour* $0 \le i,j \le \ell \le N$. *On a alors :*

a) $D(t_o, t_1, \dots, t_\ell) \ge 0$

b) $D(t_o, t_1, \dots, t_\ell) > 0$ *si et seulement s'il existe* $\ell+1$ *indices* $0 \le i_o < i_1 < \dots < i_\ell \le n+k-1$ *tels que* $t_s \in \sigma_{i_s}$ = *intérieur du support de* N_{i_s} *pour* $0 \le s \le \ell$.

Preuve du lemme 1 : Rappelons que si N = n+k-1 :

$$V_j(t) = \sum_{i=o}^{N} \omega_{ij} N_i(t) \qquad (0 \le j \le N)$$

où $\tilde{V}_j = (\omega_{ij}, 0 \le i \le N)$ est le j-ième vecteur propre de la matrice oscillatoire $A_{n,k}$. Soit Ω la matrice ayant comme vecteurs lignes les $\tilde{V}_j$ et N la matrice de terme général $N_i(t_j)$.$(0 \le i,j \le N)$. Le déterminant $D(t_o, \dots, t_\ell)$ se développe sous la forme :

$$D(t_o, \dots, t_\ell) = \sum_{o \le i_o < \dots < i_\ell \le N} \Omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \dots \ell \\ i_o & i_1 \dots i_\ell \end{pmatrix} N \begin{Bmatrix} i_o & i_1 & \dots & i_\ell \\ 0 & 1 & \dots & \ell \end{Bmatrix}$$

La notation $B\begin{pmatrix} r_o & \dots & r_\ell \\ s_o & \dots & s_\ell \end{pmatrix}$ désignant le déterminant extrait de la matrice B en ne gardant que les lignes d'indices $r_o < \dots < r_\ell$ et les colonnes d'indices $s_o < s_1 < \dots < s_\ell$.

Or d'après le théorème 13 (et le corollaire 1) de Gantmakher et Krein ([7], p. 461- 463), tous les déterminants $\Omega\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \ell \\ i_o & i_1 & \dots & i_\ell \end{pmatrix}$ sont strictement positifs.

D'autre part, d'après le théorème 4.65 de Schumaker ([20], p. 169), le déterminant $N\begin{pmatrix} i_o & i_1 & \dots & i_\ell \\ 0 & 1 & & \ell \end{pmatrix}$ est toujours ≥ 0 et n'est > 0 que si $t_s \in \sigma_{i_s}$ = intérieur du support de N_{i_s} (pour $0 \leq s \leq \ell$). Il suffit donc, pour que $D(t_o, \dots, t_\ell)$ soit $\neq 0$, qu'il existe au moins une suite d'indices ayant cette propriété.■

<u>Lemme 2</u> : *Soient* $t_o < t_1 < \dots < t_s = t_{s+1} < \dots < t_\ell$ $\ell+1$ *points de* $[0, 1]$, *dont deux sont confondus, et* $\bar{D}(t_o, t_1, \dots, t_\ell)$ *le déterminant déduit de* $D(t_o, \dots, t_\ell)$ *en remplaçant la colonne* $\{V_i(t_{s+1}), 0 \leq i \leq N\}$ *par la colonne* $\{V'_i(t_s), 0 \leq i \leq N\}$. *On a alors* $\bar{D}(t_o, \dots, t_\ell) > 0$ *si et seulement s'il existe* $\ell+1$ *indices* $0 \leq i_o < i_1 < \dots < i_\ell \leq N$ *tels que* $t_r \in \sigma_{i_r}$ *pour* $0 \leq r \leq \ell$, *et* $N'_{i_{s+1}}(t_s) \neq 0$.

<u>Preuve</u> : Comme pour le lemme 1, on a :

$$\bar{D}(t_o, \dots t_\ell) = \sum_{o \leq i_o < i_1 < \dots < i_\ell \leq N} \Omega\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \ell \\ i_o & i_1 & \dots & i_\ell \end{pmatrix} \bar{N}\begin{pmatrix} i_o & \dots & i_\ell \\ 0 & 1 & \dots & \ell \end{pmatrix}$$

où la matrice $\bar{N}$ se déduit de la matrice N en remplaçant la (s+1)-ième colonne $\{N_i(t_{s+1})\}$ par la colonne $\{N'_i(t_s)\}$. Les déterminants $\Omega\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \ell \\ i_o & i_1 & \dots & i_\ell \end{pmatrix}$ sont tous strictement positifs et $\bar{N}\begin{pmatrix} i_o & \dots & i_\ell \\ 0 & 1 \dots & \ell \end{pmatrix}$ est strictement positif si et seulement si $t_r \in \sigma_{i_r}$ pour $0 \leq r \leq \ell$ et $N'_{i_{s+1}}(t_s) \neq 0$ (d'après les théorèmes 4.67 et 4.76, p. 171 et 177, de Schumaker [20]) d'où le résultat.

<u>Lemme 3</u> : *Soit* Q_i^k *une B-spline de degré* $k-1$ *ayant comme support* $[t_i, t_{i+k}]$ *et* x_i^k *l'abscisse du maximum unique de* Q_i^k *sur son support* ($\frac{d}{dx} Q_i^k(x_i^k) = 0$ *pour* $k \geq 3$). *On a alors* $x_i^k < x_{i+1}^k$ *pour tout* $i = -k+1, \dots, n-1$, *pour la subdivision* $t_{-k+1} = \dots = t_o < t_1 < \dots < t_n = \dots = t_{n+k-1}$ *de l'intervalle* $[t_o, t_n]$.

<u>Preuve</u> : Elle se fait par récurrence sur $k \geq 2$ en utilisant les relations suivantes (cf. Schumaker [20], p. 120-121) :

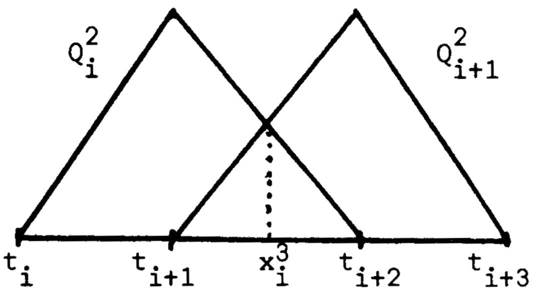
(1) $$Q_i^k(x) = \frac{(x-t_i)\, Q_i^{k-1}(x) + (t_{i+k}-x)\, Q_{i+1}^{k-1}(x)}{(t_{i+k}-t_i)}$$

(2) $$\frac{d}{dx}\, Q_i^k(x) = (k-1)\, \frac{Q_i^{k-1}(x) - Q_{i+1}^{k-1}(x)}{(t_{i+k}-t_i)}$$

Pour k=2, on sait que Q_i^2 est maximum en $x_i^2 = t_{i+1}$ $(-1 \leq i \leq n-1)$ et l'on a bien :

$$t_o < t_1 < \ldots < t_n$$

Pour k=3, Q_i^3 atteint son maximum unique au point x_i^3 tel que $\frac{d}{dx}\, Q_i^3(x_i^3) = 0$, i.e. d'après (2), quand $Q_i^2(x_i^3) = Q_{i+1}^2(x_i^3)$. On a alors, d'après la figure suivante :



$$x_i^2 = t_{i+1} < x_i^3 < t_{i+2} = x_{i+1}^2$$

pour $-1 \leq i \leq n-2$, avec

$$x_{-2}^3 = x_{-1}^2 = t_o$$

$$x_{n-1}^3 = x_{n-1}^2 = t_n$$

D'autre part, on a :

$$Q_{i+1}^2(x_i^3) > Q_{i+2}^2(x_i^3) = 0$$

$$Q_{i+1}^2(x_{i+1}^3) \quad Q_i^2(x_{i+1}^3) = 0.$$

Supposons que l'on ait établi :

(3) $$x_i^k < x_{i+1}^k \qquad (-k+1 \leq i \leq n-2)$$

(4) $$Q_i^{k-1}(x_i^{k-1}) > Q_{i+1}^{k-1}(x_i^{k-1})$$

(5) $$Q_i^{k-1}(x_{i+1}^{k-1}) < Q_{i+1}^{k-1}(x_{i+1}^{k-1})$$

(6) $$Q_i^{k-1}(x_{i+1}^k) < Q_{i+1}^{k-1}(x_{i+1}^k)$$

(7) $$Q_{i+2}^{k-1}(x_i^k) < Q_{i+1}^{k-1}(x_i^k)$$

et démontrons ces inégalités à l'ordre k+1. Le maximum de Q_i^k est atteint en x_i^k tel que :

(8) $$Q_i^{k-1}(x_i^k) = Q_{i+1}^{k-1}(x_i^k) \qquad \text{(d'après (2))}$$

On calcule d'autre part, au moyen de (1) et (8) :

$$Q_i^k(x_i^k) - Q_{i+1}^k(x_i^k) = \frac{t_{i+k+1}-x_i^k}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\, (Q_{i+1}^{k-1}(x_i^k) - Q_{i+2}^{k-1}(x_i^k))$$

Cette quantité est strictement positive d'après (7). De même, au moyen de (1) et (6), on obtient :

$$Q_{i+1}^k(x_{i+1}^k) - Q_i^k(x_{i+1}^k) = \frac{x_{i+1}^k - t_i}{t_{i+k} - t_i}\,(Q_{i+1}^{k-1}(x_{i+1}^k) - Q_i^{k-1}(x_{i+1}^k))$$

ce qui montre (4) et (5) à l'ordre k+1 et prouve que $\delta_i^k(x) = Q_{i+1}^k(x) - Q_i^k(x)$ ne peut s'annuler qu'entre x_i^k et x_{i+1}^k, donc $x_i^k < x_i^{k+1} < x_{i+1}^k$, ce qui implique $x_i^{k+1} < x_{i+1}^{k+1}$ pour tout $i = -k, \ldots, n-2$ et démontre (3) à l'ordre k+1. Enfin, puisque

$$\delta_i^k(x) = -\frac{(t_{i+k+1} - t_i)}{k}\,\frac{d}{dx}\,Q_i^{k+1}(x)$$

ne s'annule qu'en $x = x_i^{k+1}$, on a nécessairement $\delta_i^k(x_{i+1}^{k+1}) > 0$ et $\delta_{i+1}^k(x_i^{k+1}) < 0$ car $x_i^{k+1} < x_{i+1}^{k+1}$, ce qui prouve (6) et (7) à l'ordre k+1, cqfd.

<u>Lemme 4</u> : *Soient* $\{\alpha_o < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m\}$ m+1 *points de* $]0, 1[$, *dont* m *au moins sont racines d'une spline* S *de* $Sp(k, \tau_n)$ $(0 \le m \le N = n+k-1)$. *Alors il existe* $0 \le i_o < i_1 < \ldots < i_n \le N$ *tels que* $\alpha_s \in \sigma_{i_s}$ = *intérieur du support de la B-spline* N_{i_s}, *pour* $0 \le s \le m$.

<u>Preuve</u> : Elle se fait par récurrence sur m et n.

a) Le lemme est vrai pour $0 \le m \le k$.

Il est évident pour m = 0 car il y a au moins $k+1 \ge 2$ B-splines dans $Sp(k, \tau_n)$. Supposons-le vrai pour $0 \le m \le k-1$ et montrons-le pour m = k. Si les m+1 = k+1 points sont dans un seul intervalle $[t_o, t_1]$ recouvert par les supports $\overline{\sigma_i}$ des k+1 B-splines $N_i (0 \le i \le k)$, on a $\alpha_i \in \sigma_i$ pour $0 \le i \le k$. Supposons que l'on ait démontré la propriété pour r-1 intervalles et montrons la pour $r \ge 2$. On peut toujours supposer que $\alpha_o \in \sigma_o =]t_o, t_1[$ et $\alpha_k \in]t_{r-1}, t_r[= \sigma_{r+k-1}$. Soit $\ell \ge 1$ le premier indice tel que $\alpha_\ell \notin \sigma_\ell$: on a nécessairement $\alpha_\ell \ge t_{\ell+1}$. Sinon, puisque $\sigma_\ell =]t_{\ell-k}, t_{\ell+1}[$, on aurait $\alpha_\ell \le t_{\ell-k}$ et $[t_o, t_{\ell-k}]$ contiendrait ℓ ou $\ell+1$ racines parmi $\{\alpha_o, \ldots, \alpha_\ell\}$. Ceci est impossible car le nombre de zéros de S dans $[t_o, t_{\ell-k}]$ est tel que :

$$Z_S[t_o, t_{\ell-k}] \le (\ell-k) + (k-1) = \ell-1$$

en tenant compte des multiplicités (cf. Schumaker [20], théorème 4.53, p. 160) : Comme $\alpha_\ell \ge t_{\ell+1}$, $[t_\ell, t_r]$ est la réunion de $r-\ell < r$ intervalles et contient les $k-\ell+1$ points $\{\alpha_\ell, \ldots, \alpha_k\}$: on est ramené par récurrence à moins de points et moins d'intervalles et le lemme est alors valable.

b) Supposons le lemme vrai pour m-1 et montrons-le pour $m \geq k+1$. Si les m+1 points sont répartis sur exactement m-k+1 intervalles (on ne peut en avoir moins, sinon $Z_S[t_o, t_{m-k}] \leq m-1$ contredirait le fait qu'il y a m racines) recouverts par les m+1 supports des B-splines $N_o, \ldots, N_m$, on a nécessairement $\alpha_i \in \sigma_i$ pour $0 \leq i \leq m$. Sinon :

- ou bien $\alpha_i \leq t_{i-k}$, mais alors $Z_S[t_o, t_{i-k}] \leq i-1$ contredirait $\{\alpha_o, \ldots, \alpha_i\} \subset [t_o, t_{i-k}]$ (au moins i zéros)

- ou bien $\alpha_i \geq t_{i+1}$, mais alors $Z_S[t_{i+1}, t_{m-k+1}] \leq m-i-1$ contredirait $\{\alpha_i, \ldots, \alpha_m\} \subset [t_{i+1}, t_{m-k+1}]$ (au moins m-i zéros).

Si les m+1 points sont répartis sur m-k+r intervalles exactement $(r \geq 2)$, recouverts par les supports de m+r B-splines, on peut toujours supposer que $\alpha_o \in]t_o, t_1[= \sigma_o$ et $\alpha_m \in]t_{m-k+r-1}, t_{m-k+r}[= \sigma_{m+r-1}$. Soit $\ell \geq 1$ le premier indice tel que $\alpha_\ell \notin \sigma_\ell$. On ne peut avoir $\alpha_\ell \leq t_{\ell-k}$, sinon $Z_S[t_o, t_{\ell-k}] \leq \ell-1$ contredirait le fait que cet intervalle contient au moins ℓ racines de S. On a donc $\alpha_\ell \geq t_{\ell+1}$, mais alors $[t_{\ell+1}, t_{m-k+r}]$ est réunion de $m-k+r-\ell < m-k+r$ intervalles et contient $\{\alpha_\ell, \ldots, \alpha_m\}$ soit $m-\ell+1 < m+1$ points, on peut donc, grâce à l'hypothèse de récurrence, répartir ces points dans les $m-\ell+r$ intérieurs des supports des B-splines $N_\ell, \ldots, N_{m+r-1}$. On a supposé implicitement que les racines α_i étaient simples, mais on peut supposer qu'elles sont multiples, puisque la démonstration tient compte de la multiplicité des zéros et que le nombre d'intervalles, donc de B-splines, augmente dans ce cas (en même temps que la possibilité de choix pour les indices) : il suffit de répéter autant de fois une racine que son ordre de multiplicité m et de considérer que l'on a m racines simples très voisines.

<u>Lemme 5</u> *: Soient* $\{\alpha_o, \ldots, \alpha_{m-1}\}$ m *racines simples d'une spline* $S \in Sp(k, \tau_n)$ *avec* $n = m-k+r+2$ *si* $m \geq k-2$ $(r \geq 1)$. *Supposons que* $\alpha_o \in [t_o, t_1[$ *et* $\alpha_{m-1} \in]t_{n-1}, t_n[$ *et que* $\alpha_i < t_{i+r}$ *pour* $i = 0, \ldots, m-k+2$. *Il existe alors :* $0 = i_o < i_1 < \ldots < i_{m-1} \leq m+r-2$ *tels que* $\alpha_s \in \sigma_{i_s}$ *pour* $0 \leq 1 \leq m-1$.

<u>Preuve</u> : Elle est semblable à celle du lemme 4. La propriété étant simple à démontrer pour $1 \leq m \leq k-3$, on peut supposer que $m \geq k-2$.
Pour $r = 1$, on a m racines simples sur $[t_o, t_{m-k+3}]$ à répartir dans les intérieurs σ_i des supports de $N_o, \ldots, N_{m-1}$, i.e. des m premières B-splines.

Ceci implique que $\alpha_i \in \sigma_i$ pour $0 \leq i \leq m-1$, sinon (puisque $\alpha_i < t_{i+1}$), il existerait un indice i tel que $\alpha_i \leq t_{i-k}$, mais alors $Z_S[t_o, t_{i-k}] \leq i-1$ contredirait le fait que $[t_o, t_{i-k}]$ contient les i+1 racines $\{\alpha_o, \ldots, \alpha_i\}$.
Pour $r \geq 2$, on a m racines simples sur $[t_o, t_{m-k+r+2}[$ vérifiant $\alpha_i < t_{i+r}$.
Soit $\ell \geq 1$ le premier indice tel que $\alpha_\ell \notin \sigma_\ell =]t_{\ell-k}, t_{\ell+1}[$. On ne peut avoir $\alpha_\ell \leq t_{\ell-k}$, sinon $[t_o, t_{\ell-k}]$ contiendrait $\ell+1$ racines, ce qui contredit $Z_S[t_o, t_{\ell-k}] \leq \ell-1$. Donc $\alpha_\ell \geq t_{\ell+1}$ et l'intervalle $[t_{\ell+1}, t_{m-k+r+2}[$ contient les $m-\ell < m$ racines $\{\alpha_\ell, \ldots, \alpha_{m-1}\}$; par l'hypothèse de récurrence, on peut répartir ces racines sur $m-\ell$ σ_i distincts parmi les $m-\ell+r-2 \geq m-\ell$ σ_i restants, cqfd. ■

<u>*Lemme 6*</u> : *Soient* $\{\alpha_o < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m\} \subset [t_o, t_n]$ m+1 *points, dont* m *racines simples et une racine double* α_p, *d'une spline* $S \in Sp(k, \tau_n)$. *Il existe alors* : $0 \leq i_o < i_1 < \ldots < i_{m+1} \leq n+k-1$ *tels que* $\alpha_s \in \sigma_{i_s}$ *pour* $0 \leq s \leq p-1$, $\alpha_s \in \sigma_{i_{s+1}}$ *pour* $p+1 \leq s \leq m$, *et* $\alpha_p \in \sigma_{i_p} \cup \sigma_{i_{p+1}}$ *avec* $N'_{i_{p+1}}(\alpha_p) \neq 0$.

<u>Preuve</u> : On peut supposer, quitte à réduire le nombre d'intervalles, que $\alpha_o \in [t_o, t_1[$ et $\alpha_m \in]t_{n-1}, t_n]$. Remarquons que l'on a toujours $n \geq m-k+3$ sinon $Z_S[t_o, t_{m-k+2}] \leq m+1$ contredirait le fait que S a m+2 zéros.
Supposons que $m \geq k-1$ et $n \geq 2$, les autres cas étant plus simples à étudier.

a) Si $n = m-k+3$, et si α_p est racine double $(1 \leq p \leq m-1)$ on a $\alpha_i \in \sigma_i$ pour $0 \leq i \leq p-1$ et $\alpha_i \in \sigma_{i+2}$ pour $p+1 \leq i \leq m$. Sinon il existerait un $i \leq p-1$ tel que $\alpha_i \notin \sigma_i =]t_{i-k}, t_{i+1}[$:

- ou bien $\alpha_i \leq t_{i-k}$, mais $Z_S[t_o, t_{i-k}] \leq i-1$ contredit $\{\alpha_o, \ldots, \alpha_i\} \subset [t_o, t_{i-k}]$.

- ou bien $\alpha_i \geq t_{i+1}$, mais $Z_S[t_{i+1}, t_{m-k+3}] \leq m-i+1$ contredit $\{\alpha_i, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_m\} \subset [t_{i+1}, t_{m-k+3}]$

(S a m-i+2 zéros car α_p compte double).

Par un raisonnement analogue, on montre qu'il est impossible d'avoir $\alpha_i \notin \sigma_{i+2}$ pour un $i \geq p+1$. On a donc finalement $\alpha_p \in \sigma_p \cup \sigma_{p+1} \cup \sigma_{p+2}$ et comme $N'_{p+1}(\alpha_p)$ et $N'_{p+2}(\alpha_p)$ ne peuvent s'annuler en même temps (lemme 3), on choisit $i_{p+1} = p+1$ ou $p+2$. La démonstration est analogue si α_o (ou α_m) est racine double.

b) Si $n > m-k+3$, si α_p est racine double ($1 \leq p \leq m-1$) et se trouve dans l'intervalle $[t_s, t_{s+1}]$, le cas le plus critique est celui où $Z_s[t_s, t_{s+1}] = k$, i.e. $[t_s, t_{s+1}]$ contient k-2 racines simples différentes de α_p. Comme $Z_S[t_o, t_{s+1}] \leq s+k$, on doit avoir $Z_S[t_o, t_s[\leq s$: supposons que $\{\alpha_o, \ldots, \alpha_{q-1}\} \subset [t_o, t_s[$avec $q \leq s$. Ceci implique nécessairement que $\alpha_i < t_{i+s-q+1}$ pour $0 \leq i \leq q-1$ sinon $[t_{i+s-q+1}, t_{s+1}]$ contiendrait q-i+k zéros, ce qui contredirait $Z_S[t_{i+s-q+1}, t_{s+1}] \leq i-q+k-1$. On peut appliquer le lemme 5 avec $m = q$ et $r = s-q+1$: il existe alors $0 = i_o < i_1 < \ldots < i_{q-1} \leq s-1$ tels que $\alpha_\ell \in \sigma_{i_\ell}$ pour $0 \leq \ell \leq q-1$.

Comme $\{\alpha_q, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_{q+k-2}\} \subset [t_s, t_{s+1}]$, on a $\{\alpha_{q+k-1}, \ldots, \alpha_m\} \subset]t_{s+1}, t_n]$; de plus pour tout $i \geq 2$, on a $\alpha_{q+k+i-3} > t_{s+i-1}$ sinon $[t_s, t_{s+i-1}]$ contiendrait k+i-1 zéros, ce qui est impossible car $Z_S[t_s, t_{s+i-1}] \leq k+i-2$. On peut à nouveau appliquer le lemme 5 en inversant le sens des intervalles et la numérotation des indices. Posons $m' = m-q-k+2$ (nombre de racines), $\alpha'_i = \alpha_{i+q+k-1}$ pour $0 \leq i \leq m'-1$ et $t'_i = t_{s+i+1}$ ($0 \leq i \leq n' = n-s-1$). La condition $\alpha_{q+k+i-3} > t_{s+i-1}$ s'écrit alors $\alpha'_i > t'_i = t'_{i+n'-m'-r'}$ avec $r' = n'-m'$. Le lemme "symétrique" du lemme 5 permet d'affirmer l'existence de m' indices :

$$(n'+k-1) - (m'+r'-2) \leq i_o < i_1 < \ldots < i_{m'-1} = n'+k-1$$

tels que $\alpha'_\ell \in \sigma'_{i_\ell}$ pour $0 \leq \ell \leq m'-1$, ce qui peut s'écrire encore :

$$k+1 \leq i_o < i_1 < \ldots < i_{m'-1} = n-s+k-2$$

avec $\alpha_{\ell+q+k-1} \in]t'_{i_\ell-k}, t'_{i_\ell+1}[=]t_{i_\ell-k+s+1}, t_{i_\ell+s+2}[= \sigma_{i_\ell+s+1}$ pour $0 \leq \ell \leq m'-1 = m-q-k+1$. En particulier, on a au pire $\alpha_{q+k-1} \in \sigma_{k+s+2}$. Par conséquent $[t_s, t_{s+1}]$ est recouvert par $\sigma_s, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+k}$: on a $\alpha_1 \in \sigma_{s+i-q}$ pour $q \leq i \leq p-1$, $\alpha_i \in \sigma_{s+2+i-q}$ pour $p+1 \leq i \leq q+k-2$ ce qui permet d'écrire :

$$\alpha_p \in \sigma_{s+p-q} \cup \sigma_{s+p-q+1} \cup \sigma_{s+p-q+2}$$

Par conséquent, on choisit $i_p = s+p-q$ et $i_{p+1} = s+p-q+1$ ou $s+p-q+2$ pour que $N'_{i_{p+1}}(\alpha_p) \neq 0$ (c'est possible d'après le lemme 3). Les démonstrations sont analogues dans les cas non critiques (i.e. quand $[t_s, t_{s+1}]$ contient moins de k-2 racines simples) ou lorsque p=0 ou m.

VII - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6

Nous utilisons des techniques analogues à celles de Kellog [19], en tenant compte du fait que la condition de Haar qu'il donne n'est pas toujours vérifiée pour les splines.

7.1 Pour $0 \leq j \leq N = n+k-1$, la spline orthogonale V_j a exactement j changements de signe stricts dans l'intervalle]0, 1[: $S^-(V_j) = j$.

On a $V_j = \sum_{i=o}^{N} \omega_{ij} N_i$ et le vecteur propre $\tilde{V}_j = (\omega_{ij}, 0 \leq i \leq N)$ présente exactement j changements de signe ($S^-(\tilde{V}_j) = S^+(\tilde{V}_j) = j$, cf. Gantmakher et Krein [7]), par conséquent la propriété de diminution de la variation des B-splines (cf. Schumaker [20] p. 178, théorème 4.76) implique $S^-(V_j) \leq j$. D'autre part on a $\omega_{oj}\, \omega_{Nj} \neq 0$, i.e. $V_j(o)\, V_j(1) \neq 0$, et $\tilde{V}_j$ n'a pas deux composantes successives qui soient nulles, sinon on aurait $S^+(\tilde{V}_j) = j+2 > S^-(V_j) = j$. Ceci implique que V_j ne peut être identiquement nulle sur un intervalle $[t_s, t_{s+1}]$ ou, ce qui revient au même, ne peut avoir plus de k zéros sur cet intervalle, sinon sa restriction $V_j = \sum_{i=s}^{i+k} \omega_{ij} \quad N_i$ serait nulle et on aurait $\omega_{sj} = \ldots = \omega_{s+k,j} = 0$, ce qui contredit l'assertion ci-dessus sur $\tilde{V}_j$.

Comme $V_o = 1$, on a $S^-(V_o) = 0$; supposons que $S^-(V_m) = m$ pour $0 \leq m \leq j$ et montrons que $S^-(V_{j+1}) = j+1$. Supposons que $S^-(V_{j+1}) = m \leq j$ et désignons par $0 < \alpha_o < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1} < 1$ les points où V_{j+1} change de signe. Soit $\phi(x) = D(\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, x)$ (notation du lemme 1) : elle est combinaison linéaire de $V_o, \ldots, V_m$, donc orthogonale à V_{j+1}. D'autre part, si $x > \alpha_{m-1}$, les m+1 points peuvent être répartis (lemme 4) dans m+1 σ_i distincts, par conséquent, $\phi(x) > 0$ d'après le lemme 1. Lorsque $\alpha_{m-2} < x < \alpha_{m-1}$, on a de même $\phi(x) < 0$ car les lemmes 1 et 4 sont encore applicables et plus généralement $\phi(x)$ change de signe strictement quand x franchit un des points α_i. La fonction $\phi(x)\, V_{j+1}(x)$ garde un signe constant sur [0, 1] et cela contredit le fait que $<\phi, V_{j+1}> = 0$, cqfd.

7.2 Pour $0 \leq j \leq N$, V_j a exactement j racines dans]0, 1[

$V_o = 1$ n'a pas de racine et V_1 est strictement croissante car $D(t_o, t_1) = V_1(t_1) - V_1(t_o) > 0$ si $t_1 > t_o$ (lemme 1) : comme $S^-(V_1) = 1$, V_1 n'a qu'une seule racine dans]0, 1[. Supposons la propriété vraie pour $V_1, \ldots, V_{j-1}$ et montrons-la pour V_j : supposons que V_j ait j+1 racines $0 < \alpha_o < \alpha_1 < \ldots < \alpha_j < 1$ parmi lesquelles j points où V_j change de signe et un point où V_j s'annule sans changer de signe. D'après le lemme 4, il existe $0 \leq i_o < i_1 < \ldots < i_j \leq N$ tels que $\alpha_s \in \sigma_{i_s}$ pour $0 \leq s \leq j$, donc d'après le lemme 1, on a $D(\alpha_o,\ldots,\alpha_j) > 0$, mais ceci contredit le fait que $V_{j+1}(\alpha_s) = 0$ pour $0 \leq s \leq j$, i.e. que la ligne (j+1) de D est nulle, cqfd.

7.3 <u>V_j a exactement j racines simples dans]0, 1[</u>

Supposons que V_j ait j-1 racines simples et une racine double $\alpha_p \in \{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}\}$. D'après le lemme 6, il existe $0 \leq i_o < \ldots < i_j \leq N$ tels que $\alpha_{i_s} \in \sigma_{i_s}$ pour $0 \leq s \leq p-1$, $\alpha_s \in \sigma_{i_{s+1}}$ pour $p+1 \leq s \leq j-1$ et $\alpha_p \in \sigma_{i_p} \cup \sigma_{i_{p+1}}$ avec $N'_{i_{p+1}}(\alpha_p) \neq 0$, donc d'après le lemme 2, le déterminant $D(\alpha_o, \ldots, \alpha_p, \alpha_p, \ldots, \alpha_{j-1})$ est strictement positif, ce qui contredit le fait que sa (j+1)ième ligne est nulle : $V_j(\alpha_i) = 0$ pour $0 \leq i \leq j-1$ et $V'_j(\alpha_p) = 0$.

7.4 <u>V_j et V_{j+1} n'ont pas de racine commune et V_j change de signe entre deux racines de V_{j+1}, (autrement dit leurs racines sont alternées)</u>

Il suffit de reprendre les démonstrations de Kellog [19], page 4.

<u>REMARQUE</u>

Les figures 2 et 3 donnent les graphes des $V_j^{(n)}$, $(1 \leq j \leq 4)$ lorsque k = 2 (splines quadratiques) sur la subdivision uniforme de pas 1/8 (n=8). Les résultats numériques obtenus pour n = 2, 4, 6, 8 semblent indiquer que la spline $V_j^{(n)}(x)$ converge vers $\pm \cos j\pi x$ quand $n \to +\infty$, pour tout j fixé.

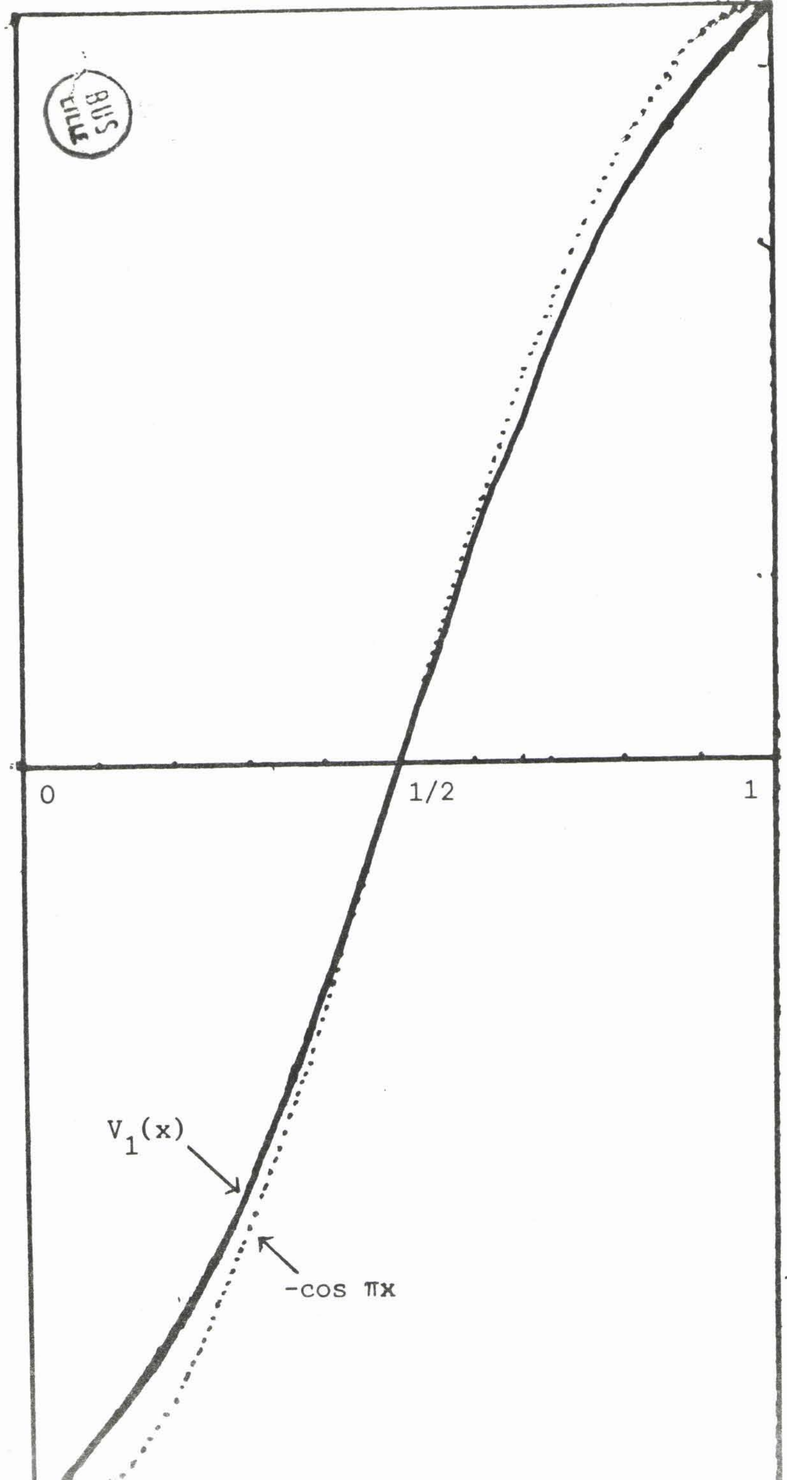
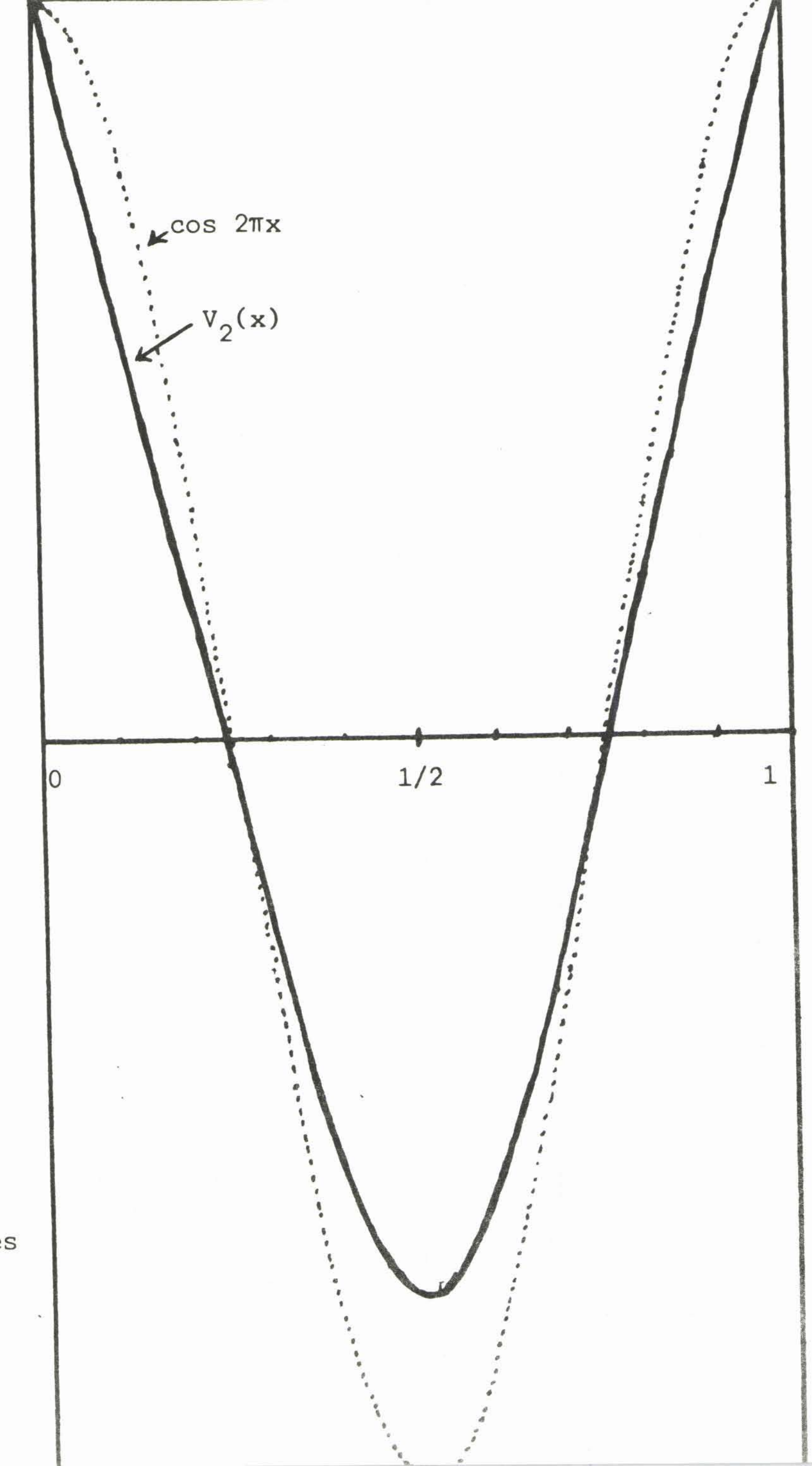
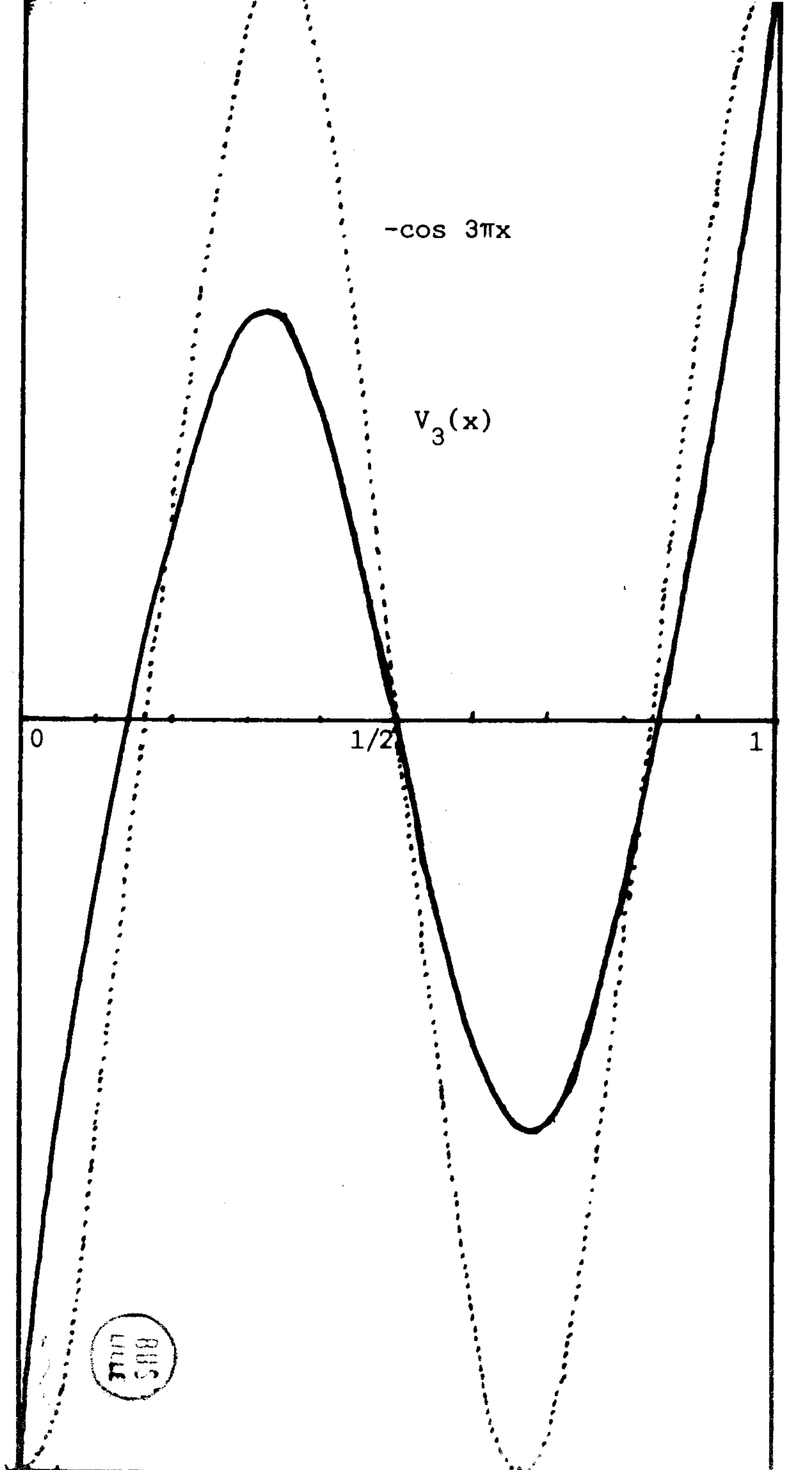


Figure 3

Splines quadratiques orthogonales (n=8)





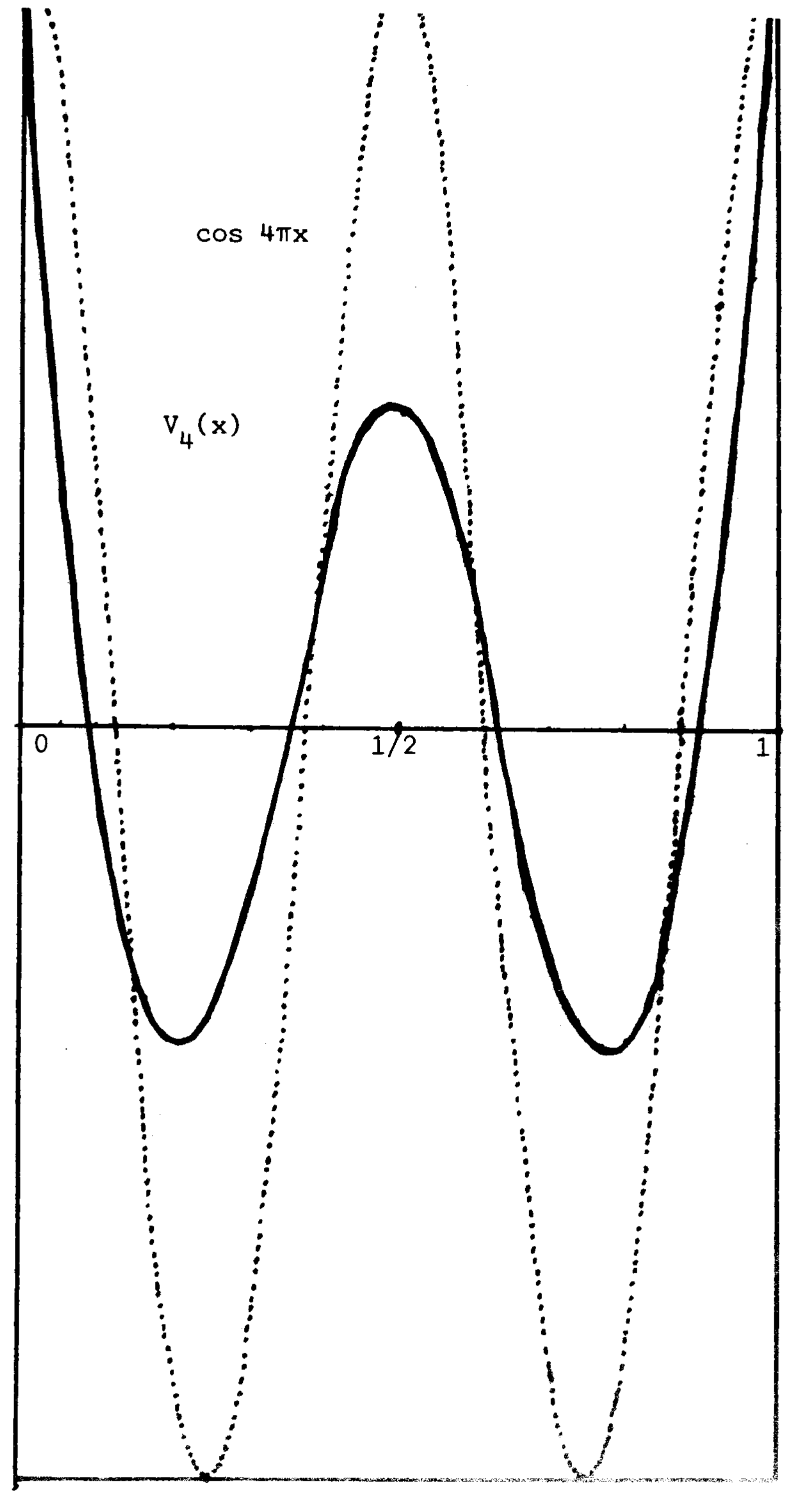


Figure 3

Splines quadratiques orthogonales (n=8)

BUS LILLE

RÉFÉRENCES

[1] C. Coatmelec, "*Quelques propriétés d'une famille d'opérateurs positifs sur des espaces de fonctions réelles définies presque partout sur* [0, + ∞[", dans Approximation Theory and applications, Academic Press, New-York (1981), p 89-111.

[2] C. De Boor, "*Bounding the error in spline interpolation*", SIAM Review, Vol. 16, n° 4 (Oct. 1974), p 531-544.

[3] C. De Boor, "*A bound on the L_∞-norm of L_2-approximation by splines in terms of a global mesh rational*", Math. of Comp., Vol. 30, n° 136 (Oct. 1976), p 765-771.

[4] M. M. Derrienic, "*Sur l'approximation des fonctions d'une ou plusieurs variables par des polynômes de Bernstein modifiés et application au problème des moments*", Thèse de 3ème cycle, Rennes (1978).

[5] R.A. De Vore, "*Degree of approximation*", dans Approximation Theory II (G. G. Lorentz et al. ed.), p 117-161, Academic Press, New-York (1976).

[6] J.L. Durrmeyer, "*Une formule d'inversion de la transformée de Laplace, Applications à la théorie des moments*". Thèse de 3ème cycle, Paris (1967).

[7] F. Gantmacher, M. Krein, "*Sur les matrices complètement non négatives et oscillatoires*", Compositio Math. 4 (1937), p 445-476.

[8] H. Johnen, "*Inequalities connected with the moduli of smoothness*", Math. Vestnik 9 (1972), p 289-303.

[9] L.V. Kantorovitch, "*Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein*", C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. (1930), p 563-568, 595-600.

[10] M.J. Marsden, "*An identity for spline functions with applications to variation diminishing spline approximation*", J. of Approximation Théory, 3 (1970), p 7-49.

[11] M. J. Marsden, I.J. Schoenberg, *"On variation diminishing spline approximation methods"*, Mathematica (Cluj) 31 (1966), p 61-82.

[12] M. W. Müller, *"Degree of L_p-approximation by integral Schoenberg splines"*, J. of Approximation Theory 21 (1977), p 385-393.

[13] J. Peetre, *"A theory of Interpolation of Normed Space"*, Lecture Notes, Brazilia (1963).

[14] P. Sablonnière, *"Opérateurs de Bernstein - Jacobi et polynômes orthogonaux"*, Publication A.N.O. n° 37 (Janv. 1981), Université de LILLE.

[15] P. Sablonnière, *"Opérateurs de Bernstein-Laguerre et polynômes orthogonaux"*, Publication A.N.O. n° 38 (Fév. 1981), Université de LILLE.

[16] K. Scherer, *"Über diebeste Approximation von L^p-Funktionen durch Splines"*, dans Proc. of the Conf. on Constructive Function Theory, Varna (1970), p 277-286.

[17] I. J. Schoenberg, *"On variation diminishing approximation methods"*, dans "On Numerical Approximation" (R.E. Langer ed.), Univ. of Wisconsin Press, Madison (1959).

[18] I. J. Schoenberg, *"Notes on Spline Functions V. Orthogonal or Legendre splines"*, J. of Approximation Theory 13 (1975), p 84-104.

[19] O.D. Kellog, *"The oscillation of functions of an orthogonal set"*. Amer. J. Math., 38 (1916), p. 1-5.

[20] L.L. Schumaker, *"Spline Functions"*, Basic Theory, John Wiley, New-York (1981).

CHAPITRE 5

B-SPLINES ET QUASI-INTERPOLANTS SUR UN RESEAU EQUILATERAL DU PLAN

J'ai passé mes jours à accorder et à désaccorder ma lyre.
Je n'ai pu trouver le juste rythme ;
les mots n'ont pas été bien assemblés ;
il reste seulement l'agonie du souhait dans mon coeur.

Rabindranath ***TAGORE***

I - INTRODUCTION

Soit $\mathbb{P}_n$ l'espace des polynômes à 2 variables de degré total $\leq n$ et $\mathbb{Q}_n$ celui des polynômes de degrés partiels $\leq n$. On désigne par Sp(n, k) l'espace des splines polynômiales de degré n et de classe C^k $(0 \leq k \leq n-1)$ sur une triangulation équilatérale du plan, c'est à dire des fonctions C^k dont la restriction à chaque triangle est dans $\mathbb{P}_n$.

En utilisant les résultats de G. Farin [3] [4] et de Frederickson [6], on montre qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un entier $k^*(n)$ tel que l'on puisse construire une spline à support hexagonal dans $Sp(n, k^*(n))$ (centré par exemple à l'origine) et qu'il soit impossible de construire une spline à support borné dans Sp(n,k) pour $k^*(n) < k \leq n$. A l'aide des translatées M_{ij} de cette spline, on définit des approximants (quasi-interpolants) de f du type :

$$Sf(x, y) = \sum_{i,j} \mu_{ij}(f) \cdot M_{ij}(x, y)$$

où $\mu_{ij}(f)$ est une combinaison linéaire des valeurs de f et de certaines de ses dérivées partielles au centre du support de M_{ij}. Des quasi-interpolants du même type ont été étudiés par Frederickson [7] sur un réseau triangulaire et par De Boor et Fix [2] sur un réseau rectangulaire.

On détaille les cas $n = 3$, $k^*(n) = 1$ (cubiques C^1) $n = 4$, $k^*(n) = 2$ (quartiques C^2) et $n = 6$, $k^*(n) = 3$ (sextiques C^3) et l'on donne quelques majorations d'erreur précises (en norme uniforme) sur un triangle du réseau lorsque la fonction approchée a des dérivées partielles continues jusqu'à un certain ordre.

Le cas des splines quintiques de classe C^2 est également étudié, mais s'avère peu intéressant pour les applications.

II - RACCORDEMENT DE 2 POLYNÔMES TRIANGULAIRES DE DEGRÉ N ADJACENTS

Nous utilisons les résultats de G. Farin [3][4] dans un cas particulier.

Soit T_1 un triangle équilatéral du plan de sommets A_1, A_2 et A_3. Tout point M du plan s'exprime au moyen des coordonnées barycentriques de T_1 sous la forme :

$$M = u_1\, A_1 + u_2\, A_2 + u_3\, A_3$$

avec $\quad u_1 + u_2 + u_3 = 1$

et $\quad 0 \leq u_1, u_2, u_3 \leq 1 \quad \text{si } M \in T_1$

Les polynômes de Bernstein $B_i^n(u)$ sur T_1 sont définis par :

(1) $$B_i^n(u) = \frac{n!}{i_1!\,i_2!\,i_3!}\; u_1^{i_1}\, u_2^{i_2}\, u_3^{i_3} \geq 0$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)\ ,\ u_1 + u_2 + u_3 = 1$$

$$i = (i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{N}^3, i_1 + i_2 + i_3 = |i| = n$$

On a immédiatement :

(2) $$\sum_{|i|=n} B_i^n(u) = (u_1+u_2+u_3)^n = 1$$

Les $B_i^n(u)$ formant une base de $\mathbb{P}_n(T_1)$, espace des polynômes de degré $\leq n$ sur T_1, tout $P_1 \in \mathbb{P}_n(T_1)$ peut s'écrire sous la forme de l'approximant de Bernstein :

(3) $$P_1(u) = B_n\, \phi_1(u) = \sum_{|i|=n} a_i\, B_i^n(u)$$

où ϕ_1 est la fonction linéaire par morceaux déterminée par les sommets $(i_1/n, i_2/n, i_3/n, a_i = a_{i_1 i_2 i_3}) = \tilde{a}_i$ du **réseau Bézier de P_1**. Nous représenterons souvent ce réseau par sa projection sur le plan (figure 1).

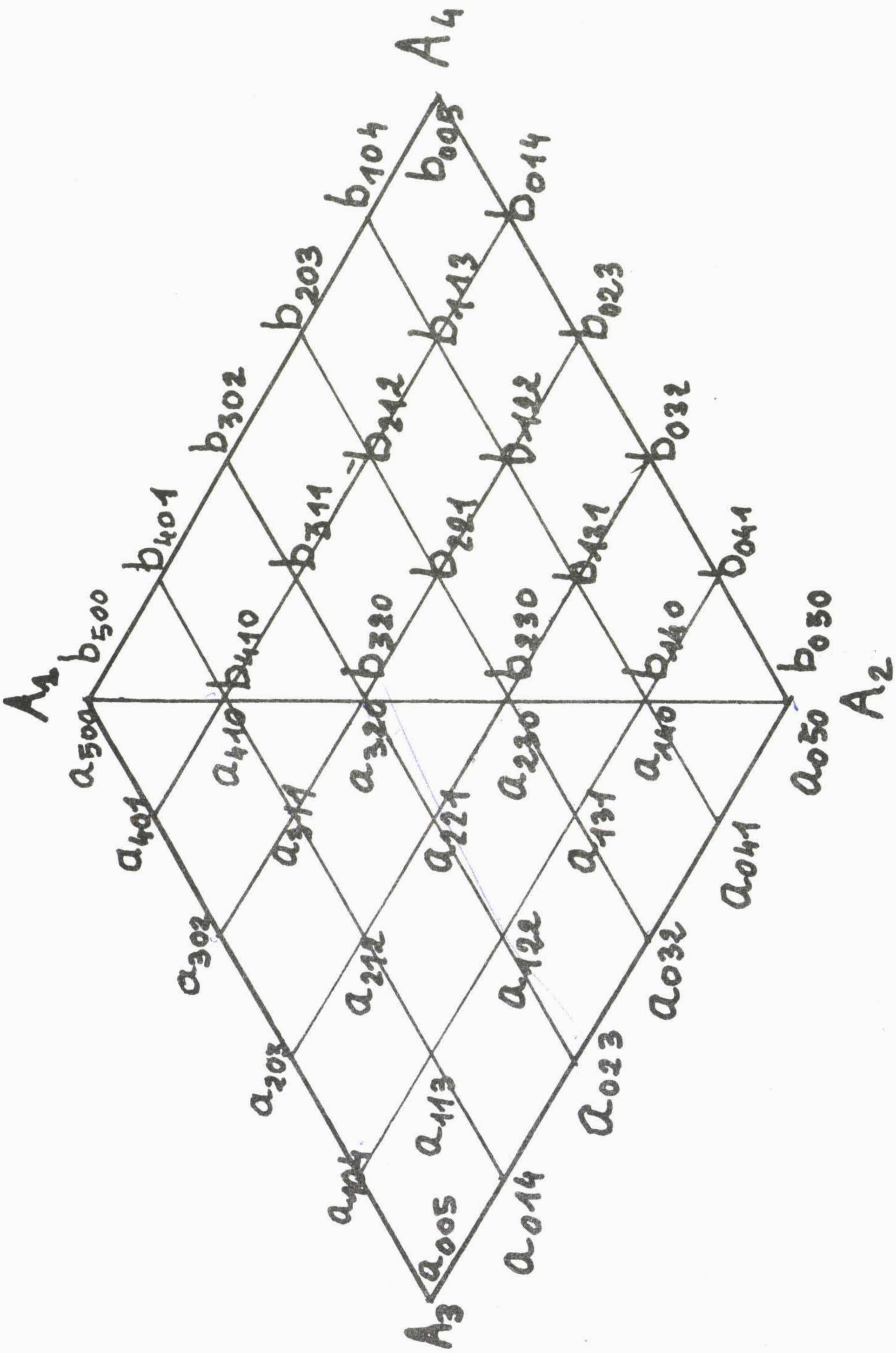


Figure 1

Raccordement de 2 polynômes de degré 5

BUS
LILLE

Les relations (1) et (2) impliquent que la surface définie par P_1 est dans l'enveloppe convexe du graphe de ϕ_1.

Soit $T_2 = A_1\ A_2\ A_4$ un triangle équilatéral adjacent à T_1, de coordonnées barycentriques $v = (v_1, v_2, v_3)$, on a :

(4) $$A_4 = A_1 + A_2 - A_3\ .$$

Soit $P_2 \in \mathbb{P}_n(T_2)$ un polynôme de degré n défini par :

$$P_2(v) = B_n\phi_2(v) = \sum_{|i|=n} b_i\ B_i^n\ (v)$$

où ϕ_2 est la fonction linéaire par morceaux déterminée par le réseau Bézier de $P_2 = \{\tilde{b}_i = (i_1/n,\ i_2/n,\ i_3/n\ ;\ b_i\}$.

Par application directe du théorème 5 de G. Farin ([4], p. 17) et de la relation (4) ou par un calcul direct, on obtient :

<u>*Théorème 1*</u> : *Le raccordement* $C^r(0 \le r \le n)$ *de* P_1 *et* P_2 *le long de* $A_1\ A_2$ *se traduit par les relations* :

$$b_{i_1 i_2 k} = \sum_{j=o}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{s_1+s_2=k-j} \binom{k-j}{s_1}\ a_{i_1+s_1,\ i_2+s_2,\ j}$$

pour $0 \le k \le r$ *et* $i_1 + i_2 = n-k$

Pour les premières valeurs de k, on a :

<u>Continuité C^o</u> : $b_{i_1 i_2 o} = a_{i_1 i_2 o}\ (i_1 + i_2 = n)$

<u>Continuité C^1</u> : $b_{i_1 i_2 1} = a_{i_1+1,i_2,o} + a_{i_1,i_2+1,o} - a_{i_1 i_2 1}\quad (i_1+i_2 = n-1)$

<u>Continuité C^2</u> : $(i_1 + i_2 = n-2)$

$$b_{i_1,i_2,2} = (a_{i_1+2,i_2,o} + 2\ a_{i_1+1,i_2+1,o} + a_{i_1,i_2+2,o})$$
$$- 2(a_{i_1+1,i_2,1} + a_{i_1,i_2+1,1}) + a_{i_1,i_2,2}$$

Continuité C^3 : $(i_1 + i_2 = n-3)$

$$b_{i_1,i_2,3} = (a_{i_1+3,i_2,o} + 3\, a_{i_1+2,i_2+1,0} + 3\, a_{i_1+1,i_2+2,o} + a_{i_1,i_2+3,o})$$

$$- 3(a_{i_1+2,i_2,1} + 2a_{i_1+1,i_2+1,1} + a_{i_1,i_2+2,1}) + 3(a_{i_1+1,i_2,2} +$$

$$a_{i_1,i_2+1,2}) - a_{i_1,i_2,3}$$

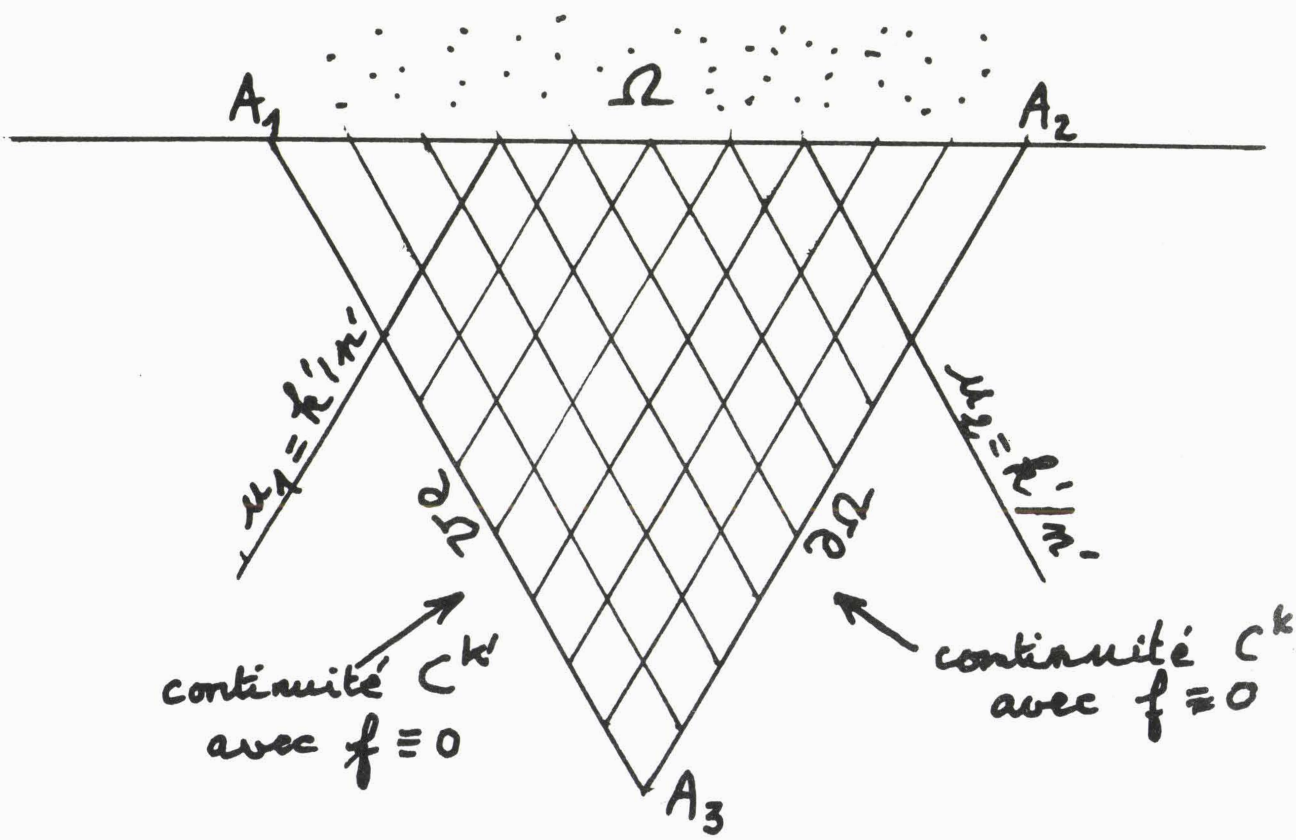


Figure 2a

Cas d'un triangle isolé
(p = 3, n' = 10, k' = 7)

BUS LILLE

III - B-SPLINES DE DEGRÉ n. CAS OU $n \equiv 1$ (MODULO 3)

Théorème 2 : Si $n = 3p+1$ $(p \geq 0)$, *il n'existe pas de spline à support borné de classe* C^k *pour* $k > k^*(n) = 2p$

Preuve : Pour $n = 1$, il n'y a évidemment pas de spline à support borné de classe C^1. Supposons le théorème vrai pour $n = 3p-2$ et $k = k^*(n)+1 = 2p-1$ et montrons qu'on ne peut construire de spline à support borné de degré $n' = 3 + n = 3p+1$ et de classe $C^{k'}$ avec $k' = k^*(n') + 1 = 2p+1$. Supposons qu'une telle spline S existe dans $Sp(n', k')$: soit Ω le support polygonal de S constitué d'un nombre fini de triangles équilatéraux et $\partial\Omega$ le bord de Ω

a) **Montrons d'abord que $\partial\Omega$ ne peut contenir de triangle isolé $A_1\ A_2\ A_3$** (figure 2a). En effet la continuité $C^{k'}$ avec la fonction nulle le long de $A_1\ A_3$ implique que les coefficients $a_{i_1 r i_3}$ sont nuls pour $0 \leq r \leq k'$ et $i_1 + i_3 = n'-r$ et la continuité $C^{k'}$ le long de $A_2\ A_3$ implique que les coefficients $a_{r i_2 i_3}$ sont nuls pour $0 \leq r \leq k'$ et $i_2 + i_3 = n'-r$.
En particulier le long de $A_1\ A_2$, on a : $i_3 = 0$ donc $a_{n'-r,r,o} = 0 = a_{r,n'-r,o}$ pour $0 \leq r \leq k'$, ce qui donne :

$$a_{3p+1,o,o} = a_{3p,1,o} = \ldots = a_{p,2p+1,o} = 0$$

$$a_{o,3p+1,o} = a_{1,3p,o} = \ldots = a_{2p+1,p,o} = 0$$

donc tous les coefficients Bézier de S sont nuls.

b) **Montrons que $\partial\Omega$ ne peut avoir d'angle de 120°** (figure 2b)
Soient $T_1 = A_1\ A_2\ A_3$ et $T_2 = A_1\ A_2\ A_4$ deux triangles adjacents tels que $A_3\ A_2$ et $A_2\ A_4$ soient sur $\partial\Omega$ et $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ leurs coordonnées barycentriques respectives.

Soient P_1 et P_2 les restrictions de S à T_1 et T_2 de coefficients a_i et b_j $(|i| = |j| = n')$

La continuité $C^{k'}$ de P_1 avec la fonction nulle le long de $A_2 A_3$ implique que pour $0 \leq r \leq k'$ et $i_2 + i_3 = n' - r$, on ait :

(5) $\quad a_{ri_2i_3} = 0$

De même la continuité $C^{k'}$ de P_2 avec la fonction nulle le long de $A_2 A_4$ implique que pour $0 \leq r \leq k'$ et $j_2 + j_3 = n' - r$, on ait :

(6) $\quad b_{rj_2j_3} = 0$

Soient maintenant T'_1 et T'_2 les sous-triangles de T_1 et T_2 limités par les droites $u_1 = 2/n'$, $u_2 = 1/n'$, $u_3 = 0$ et $v_1 = 2/n'$, $v_2 = 1/n'$, $v_3 = 0$ respectivement. Les sommets des réseaux Bézier de P_1 et P_2 au dessus de T'_1 et T'_2 constituent les réseaux Bézier de polynômes P'_1 et P'_2 de degré $n = n'-3$. Les conditions (5) et (6) ci-dessus montrent que P'_1 (resp. P'_2) a un raccordement C^k $(k = k' - 2)$ avec la fonction nulle le long du côté $u_1 = 2/n'$ (resp. $V_1 = 2/n'$). Mais l'hypothèse de récurrence (non existence de spline à support borné de Sp(n,k) entraîne $P'_1 = P'_2 \equiv 0$, donc tous les a_i et b_j correspondants sont nuls.

Seuls sont non nuls les coefficients suivants situés sur $A_1 A_3$ et $A_1 A_4$:

$$a_s = a_{n'-s,\, o,\, s} \qquad (0 \leq s \leq p-1)$$
$$b_s = b_{n'-s,\, o,\, s}$$

La continuité C^{2p+1} le long du côté $A_1 A_2$ donne les 2p+2 relations :

$$b_o = a_o$$
$$b_1 = a_o - a_1$$
$$b_2 = a_o - 2a_1 + a_2$$
$$\cdots\cdot$$
$$b_{p-1} = a_o - \binom{p-1}{1} a_1 + \ldots + (-1)^{p-1} a_{p-1}$$

$$0 = a_o - \binom{p}{1} a_1 + \ldots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} a_{p-1}$$

....

$$0 = a_o - \binom{2p+1}{1} a_1 + \ldots + (-1)^{p-1} \binom{2p+1}{p-1} a_{p-1}$$

Le système homogène formé par les p dernières équations étant de Cramer, on en déduit que les a_i sont nuls, et les p premières équations impliquent que les b_i sont nuls. Par conséquent $P_1 = P_2 = 0$ et S ne peut avoir de support borné. □

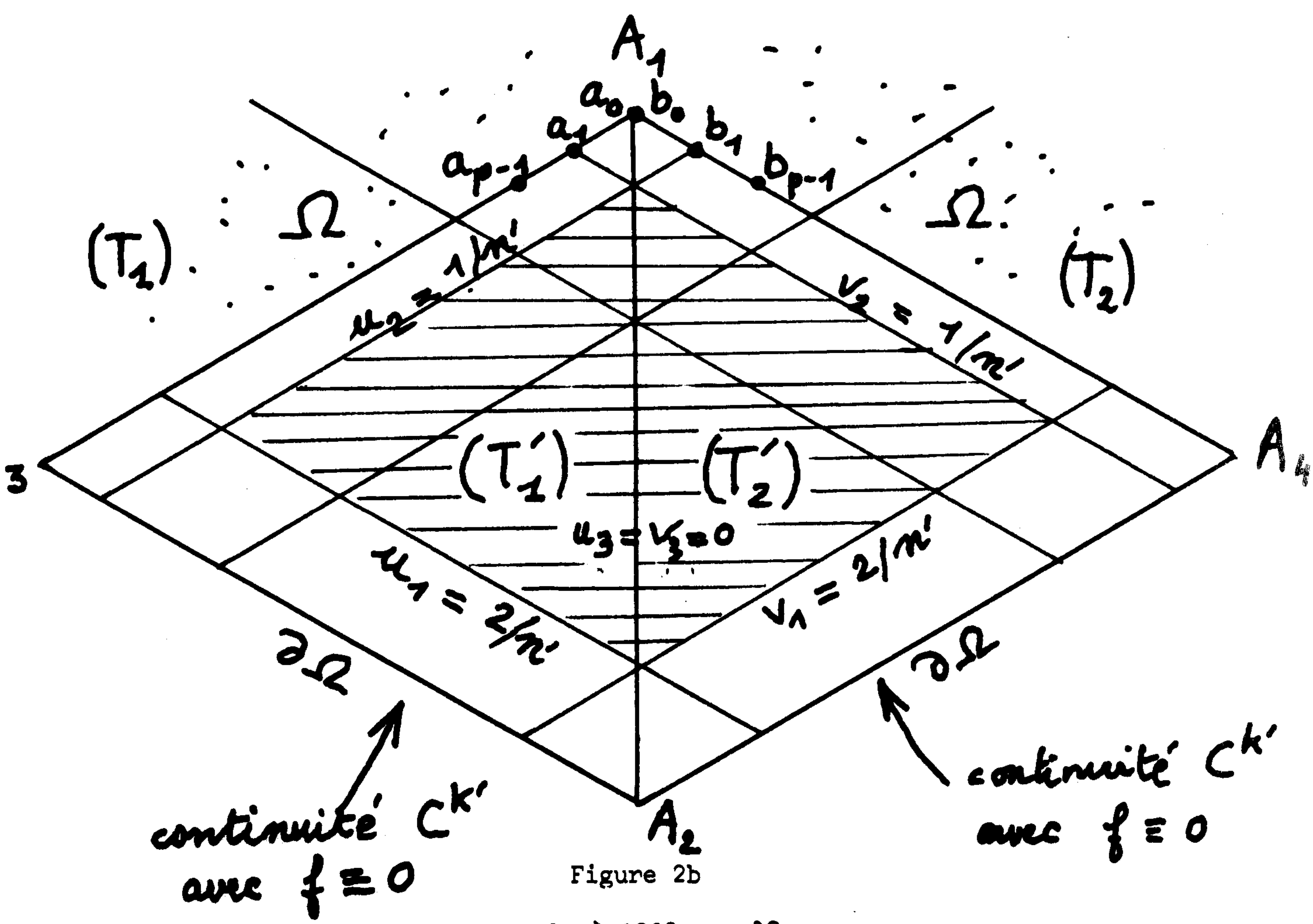


Figure 2b

angle à 120° sur $\partial\Omega$

IV - B-SPLINES DE DEGRÉ n. CAS OÙ n $\equiv$ 2 (MODULO 3)

Théorème 3 : *Si* $n = 3p+2$ $(p \geq 0)$, *il n'existe pas de spline à support borné de classe* C^k *pour* $k > k^*(n) = 2p$.

Preuve : Montrons qu'il n'existe pas de spline de $\mathcal{S}p(2, 1)$ à support Ω borné. Si $\partial\Omega$ contient un angle de 60° (figure 3), on a $a_o = a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$ mais comme on a la continuité C^1

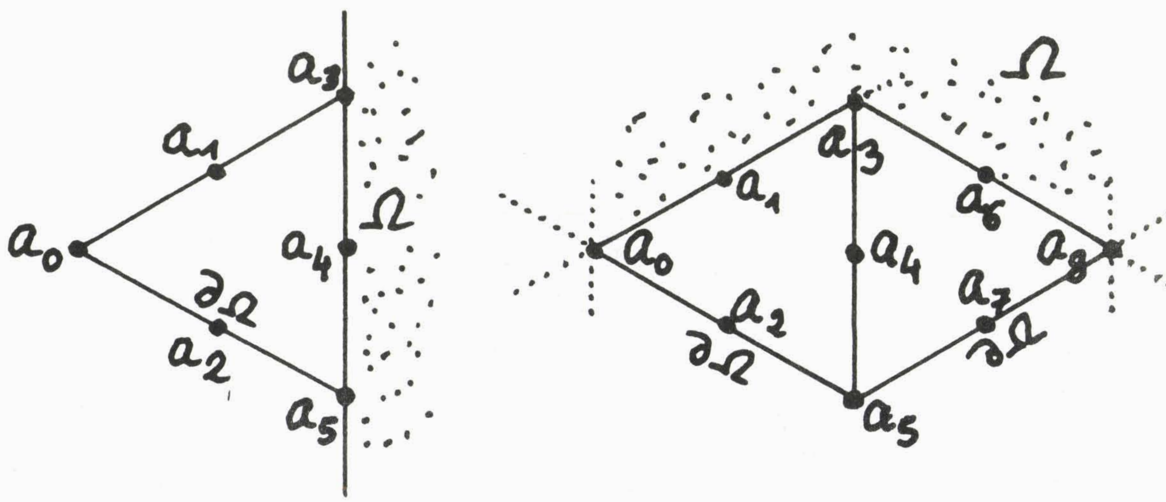


Figure 3

le long de $a_o\, a_3$ et $a_o\, a_5$, ceci implique $a_4 = 0$. Si $\partial\Omega$ contient un angle de 120°, on a $a_o = a_2 = a_5 = a_7 = a_8 = 0$ par hypothèse et $a_1 = a_4 = a_6 = 0$ par la continuité C^1 le long de a_oa_5 et de a_5a_8. Mais la continuité C^1 le long de a_5a implique à son tour $a_3 = 0$. Supposons le théorème vrai pour $n' = 3p-1$ et $k = 1 + k^*(n') = 2p-1$ et montrons qu'il n'existe pas de spline $S \in Sp(n,k)$ (pour $n = 3p+2$ et $k = 2p+1 = k^*(n) + 1$) à support Ω borné (cf figure 4).

a) **Montrons que $\partial\Omega$ ne peut contenir d'angle à 60° :**

Supposons qu'un triangle $A_1\ A_2\ A_3$ soit isolé dans Ω. La continuité C^k le long de $A_1 A_3$ implique que les coefficients $a_{i_1 r i_3}$ sont nuls pour $0 \leq r \leq k$ et $i_1 + i_3 = n-r$ et la continuité C^k le long de $A_2 A_3$ implique que $a_{r i_2 i_3} = 0$ pour $0 \leq r \leq k$ et $i_2 + i_3 = n-k$. En particulier sur $A_1 A_2$, $i_3 = 0$, donc

$$a_{n-r,r,o} = a_{r,n-r,o} = 0 \text{ pour } 0 \leq r \leq k,$$

ou encore :

$$a_{3p+2,o,o} = a_{3p+1,1,o} = \ldots = a_{p+1,2p+1,o} = 0$$

$$a_{o,3p+2,o} = a_{1,3p+1,o} = \ldots = a_{2p+1,p+1,o} = 0$$

par conséquent tous les coefficients Bézier de S sont nuls sur le triangle.

b) Montrons que $\partial\Omega$ ne peut avoir d'angle de 120°

Soient $T_1 = A_1 A_2 A_3$ et $T_2 = A_1 A_2 A_4$ deux triangles adjacents tels que A_2A_3 et A_2A_4 soient sur $\partial\Omega$ et $u=(u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ leurs coordonnées barycentriques respectives. Soient P_1 et P_2 les polynômes de degré n, restrictions de S à T_1 et T_2, de coefficients Bézier a_i et b_j ($|i| = |j| = n$). La continuité C^k de P_1 le long de $A_2 A_3$ avec la
(7) fonction nulle implique que $a_{r i_2 i_3} = 0$ pour $0 \leq r \leq k$ et $i_2+i_3 = n-r$.
De même la continuité C^k de P_2 avec la fonction nulle le long de $A_2 A_4$
(8) implique $b_{r j_2 j_3} = 0$ pour $j_2 + j_3 = n-r$ et $0 \leq r \leq k$.

Soient T'_1 et T'_2 les sous-triangles de T_1 et T_2 limités par les droites $u_1 = 2/n$, $u_2 = 1/n$, $u_3 = 0$ et $v_1 = 2/n$, $v_2 = 1/n$ et $v_3 = 0$ respectivement. Les sommets des réseaux Bézier de P_1 et P_2 au dessus de T'_1 et T'_2 constituent les réseaux Bézier de polynômes Q_1 et Q_2 de degré $n' = n-3 = 3p-1$. Les conditions (7) et (8) ci-dessus montrent que Q_1 (resp. Q_2) a un raccordement $C^{k'}$ ($k' = k-2 = 2p-1$) avec la fonction nulle le long du côté $u_1 = 2/n$ (resp. $v_1 = 2/n$). Mais l'hypothèse de récurrence (non-existence de spline à support borné dans $Sp(n', k')$) entraîne $Q_1 = Q_2 = 0$ sur T'_1 et T'_2, donc tous les coefficients a_i et b_j correspondants sont nuls. Seuls sont non nuls les coefficients suivants situés sur $A_1\ A_3$ et $A_1\ A_4$:

$$a_s = a_{n-s,o,s} \qquad (0 \leq s \leq p)$$
$$b_s = b_{n-s,o,s}$$

La continuité C^{2p+1} le long du côté $A_1\ A_2$ donne les 2p+2 relations :

$$b_o = a_o$$
$$b_1 = a_o - a_1$$
$$\ldots\ldots$$
$$b_p = a_o - \binom{p}{1} a_1 + \ldots + (-1)^p a_p$$
$$0 = a_o - \binom{p+1}{1} a_1 + \ldots + (-1)^p \binom{p+1}{p} a_p$$
$$\ldots\ldots$$
$$0 = a_o - \binom{2p+1}{1} a_1 + \ldots + (-1)^p \binom{2p+1}{p} a_p$$

Le système homogène formé par les p+1 dernières équations étant de Cramer, on en déduit que les a_i sont nuls, et les p+1 premières équations impliquent que les b_i sont nuls. Par conséquent S ne peut avoir de support borné.

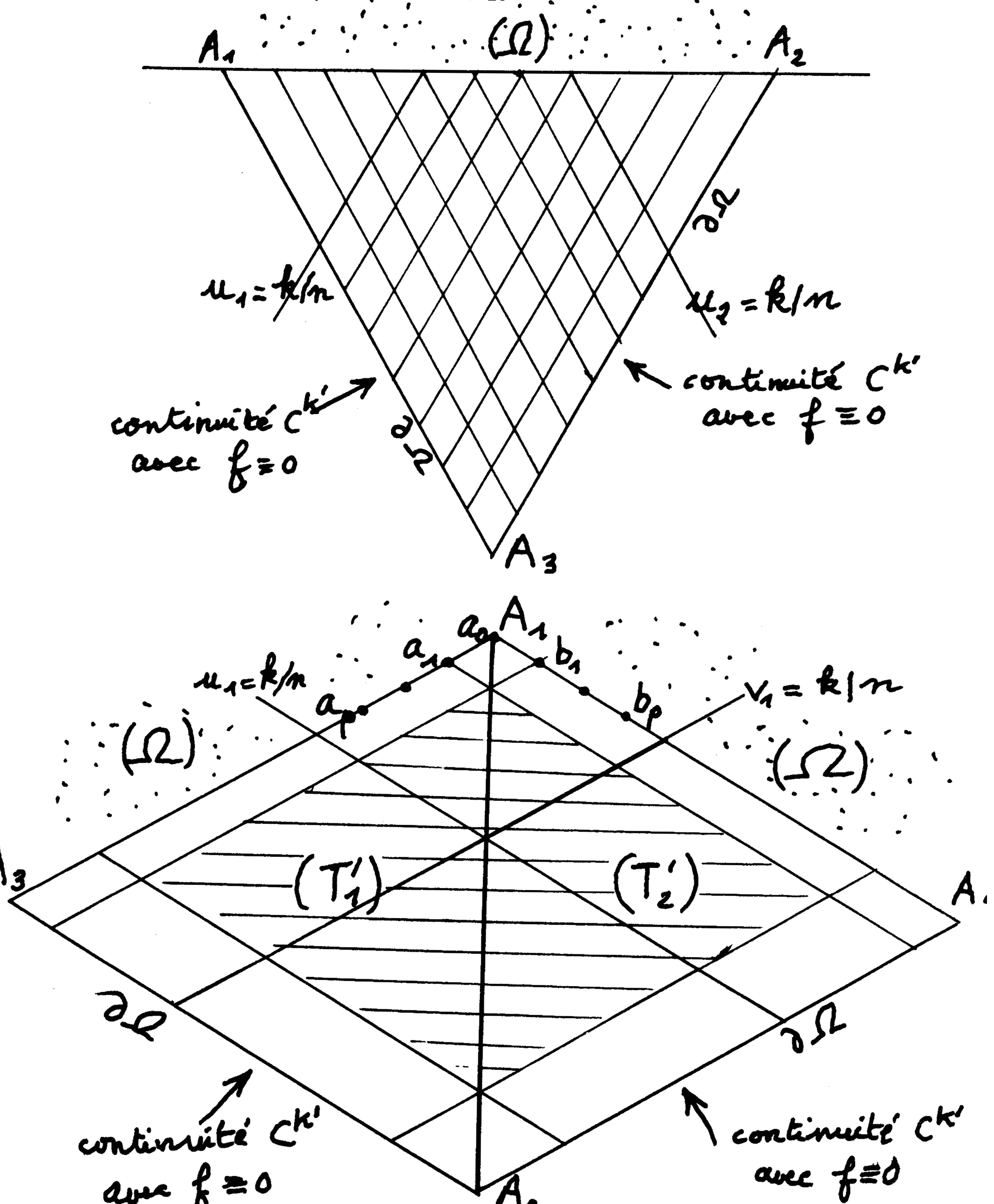


Figure 4

$(p = 3,\ n = 11,\ k = 7)$

BUS LILLE

V - B-SPLINES DE DEGRÉ n. CAS OÙ n ≡ 0 (MODULO 3)

Théorème 4 : *Si* $n = 3p$ $(p \geq 1)$, *il n'existe pas de spline à support borné de classe* C^k *pour* $k > k^*(n) = 2p-1$.

Preuve : Montrons qu'il n'existe pas de spline de $\mathcal{S}p(3,2)$ à support Ω borné. Si $\partial\Omega$ contient un angle de 60° (figure 5), on a $a_o = a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = 0$ et la continuité C^1 le long des 2 côtés de $\partial\Omega$ entraîne $a_4 = a_7 = a_8 = 0$, donc $S = 0$ sur ce triangle. Si $\partial\Omega$ contient un angle de 120°, on a $a_o = a_2 = a_5 = a_9 = a_{12} = a_{14} = a_{15} = 0$ sur le bord et la continuité C^1 le long des 2 côtés entraîne $a_1 = a_4 = a_8 = a_{11} = a_{13} = 0$. La continuité C^2 entraîne $a_3 = a_7 = a_{10} = 0$.

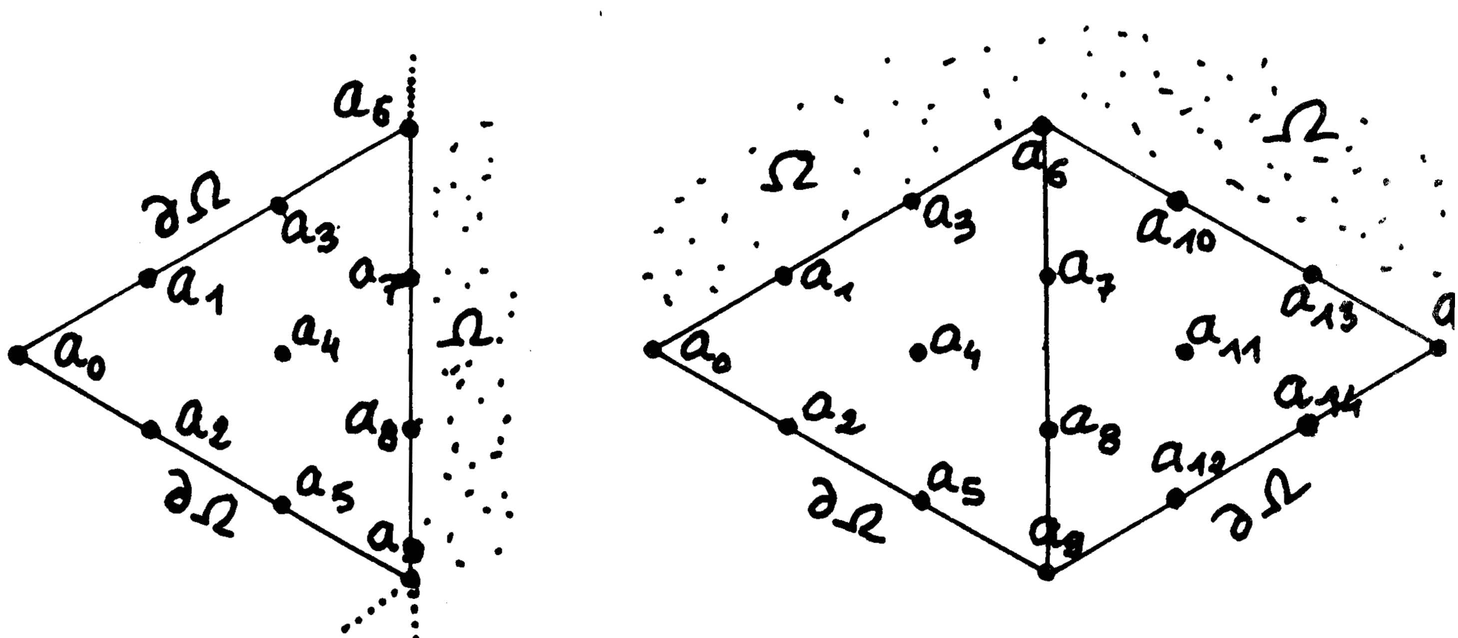


Figure 5

La continuité C^1 le long de $a_6\ a_9$ entraîne à son tour $a_6 = 0$, donc $S = 0$ sur ces 2 triangles, c.q.f.d. Supposons le théorème vrai pour $n' = 3p-3$ et $k' = k^*(n')+1 = 2p-2$ et montrons qu'il n'existe pas de spline $S \in \mathcal{S}p(n,k)$ (pour $k = 3p$ et $k = 2p = k^*(n)+1$) dont le support Ω soit borné (cf figure 6).

Le fait que $\partial\Omega$ n'ait pas d'angle à 60° se démontre aisément comme dans les théorèmes 2 et 3.

Montrons simplement que $\partial\Omega$ ne peut comporter d'angle à 120°. Avec les mêmes notations que celles des preuves des théorèmes 2 et 3, on montre que seuls sont non nuls les coefficients suivants, situés sur $A_1\ A_3$ et $A_1\ A_4$:

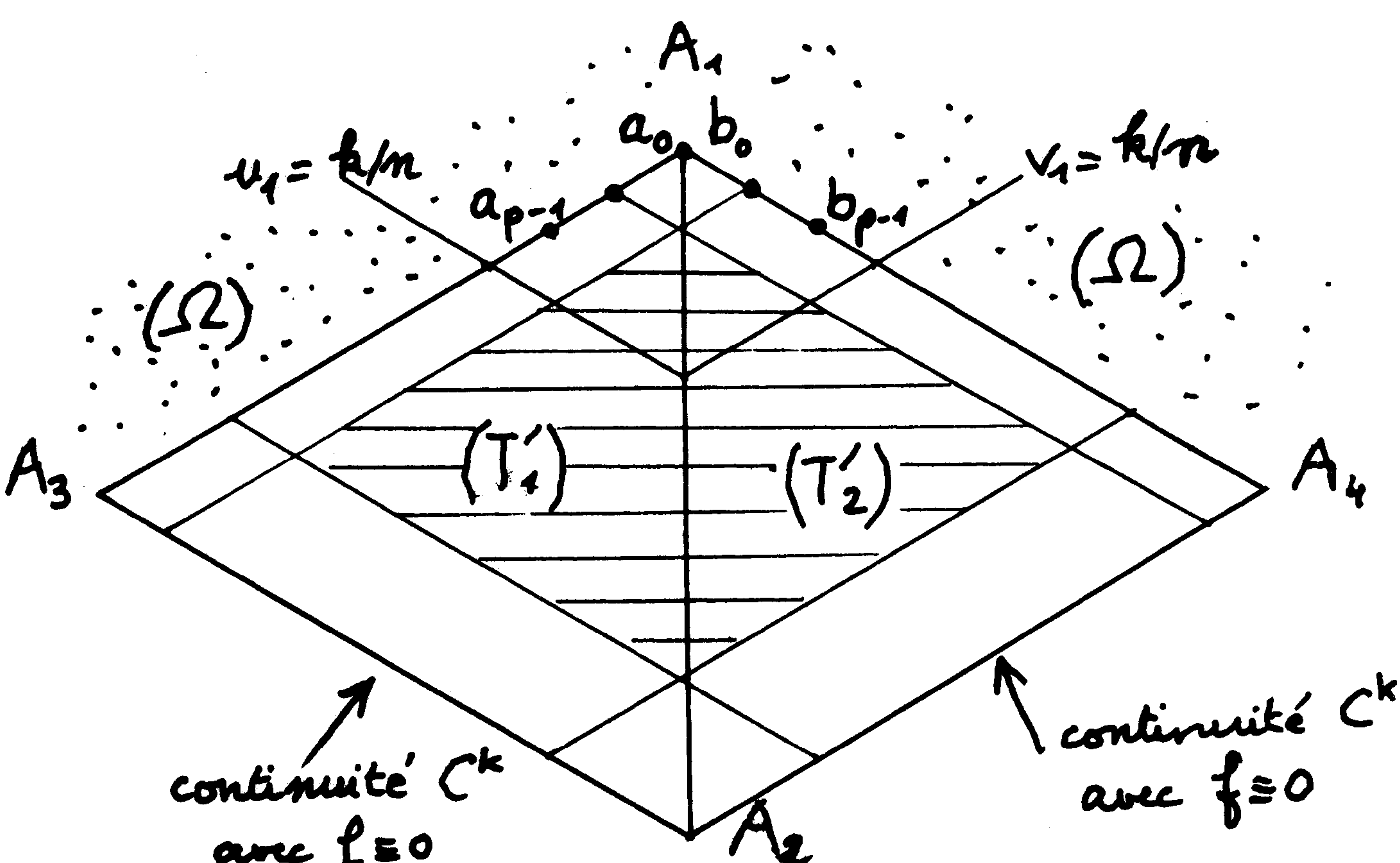


Figure 6

$$a_s = a_{n-s,o,s} \qquad (0 \le s \le p-1)$$
$$b_s = b_{n-s,o,s}$$

La continuité C^{2p} le long de $A_1\ A_2$ donne les 2p+1 relations :

$$b_o = a_o$$
$$b_1 = a_o - a_1$$
$$\vdots$$
$$b_{p-1} = a_o - \binom{p-1}{1} a_1 + \ldots + (-1)^{p-1}\, a_{p-1}$$
$$0 = a_o - \binom{p}{1} a_1 + \ldots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} a_{p-1}$$
$$\ldots\ldots$$
$$0 = a_o - \binom{2p}{1} a_1 + \ldots + (-1)^{p-1} \binom{2p}{p-1} a_{p-1}$$

Les p dernières équations donnent $a_i = 0$ pour $0 \le i \le p-1$, ce qui implique que tous les b_j sont nuls, c.q.f.d. □

VI - SPLINES À SUPPORT BORNÉ DANS $\mathcal{S}p(N,K^*)$

Les théorèmes précédents montrent l'impossibilité de construire des splines à support borné dans $\mathcal{S}p(n,k)$ lorsque $k > k^* = k^*(n)$.

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'il est possible de construire des splines à support borné de degré n et de classe C^{k*} pour $1 \leq n \leq 6$. (figure 7)

6.1 Pour $n = 1, 2$ $k^* = 0$ et il est clair que l'on peut construire de telles splines à support hexagonal formé de 6 triangles.

6.2 Pour $n = 3$, $k^* = 1$, le problème est moins trivial.
Le support ne peut être un hexagone formé de 6 triangles (figure 8).
En effet, du fait de la continuité C^1 avec la fonction nulle, seuls sont non nuls les coefficients Bézier a, b, c, d, e, f, g. Mais d'autre part la continuité C^1 le long du côté commun aux triangles (1) et (2) entraîne que $b = 0$ et par le même raisonnement que $c = d = e = f = a = 0$. Enfin la continuité C^1 au centre implique $g = 0$, donc la fonction est identiquement nulle.

La spline à support minimal de degré 3 et de classe C^1 est obtenue en choisissant comme support un polygone formé d'un triangle entouré de 12 triangles (figure 9), mais cette spline n'est pas invariante par le groupe des isométries du réseau équilatéral. Une spline à support hexagonal formé de 24 triangles (figures 10 et 11), invariante par le groupe des isométries du réseau, peut être également construite. Pour calculer les coefficients Bézier, on part de la frontière et on progresse

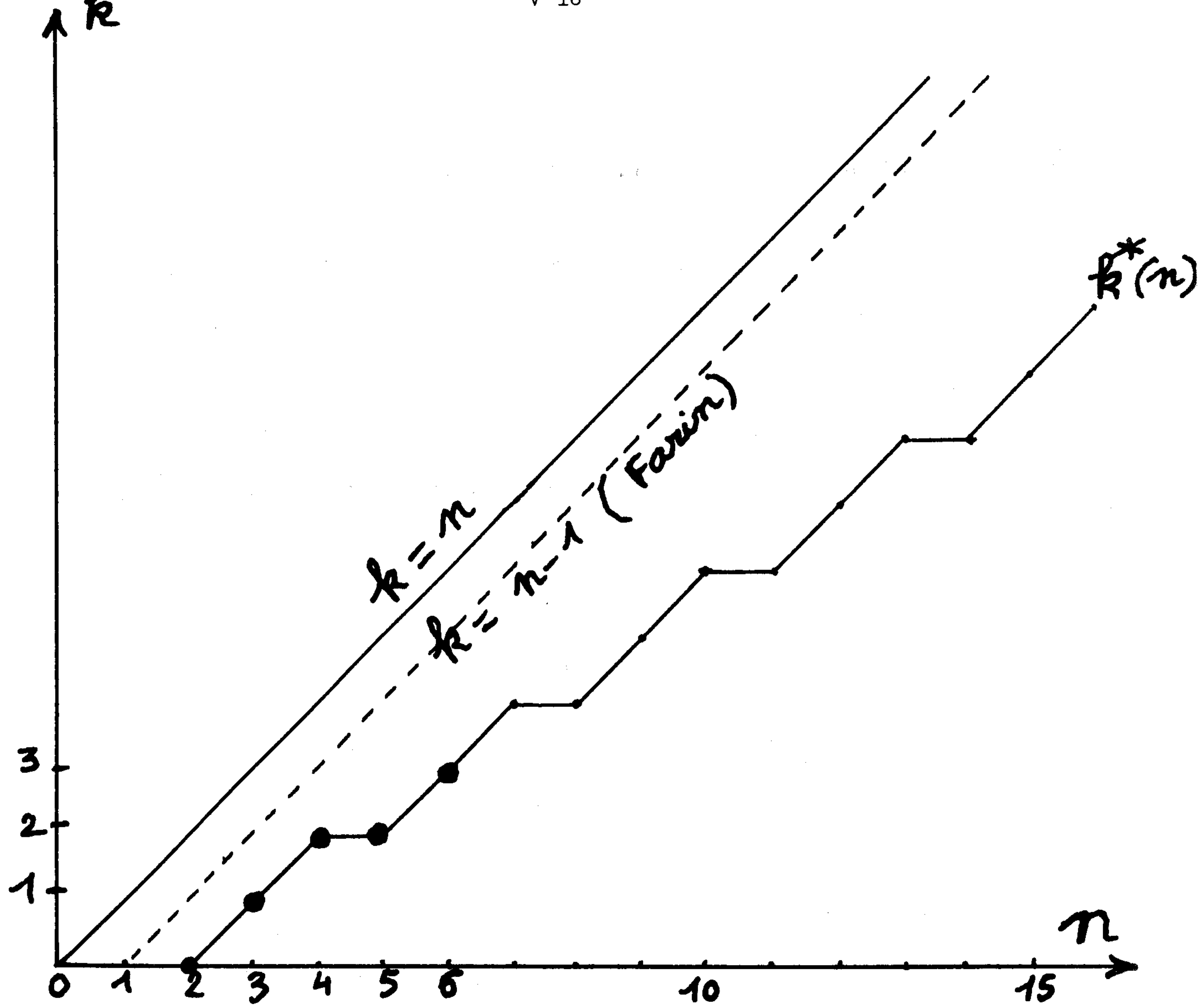
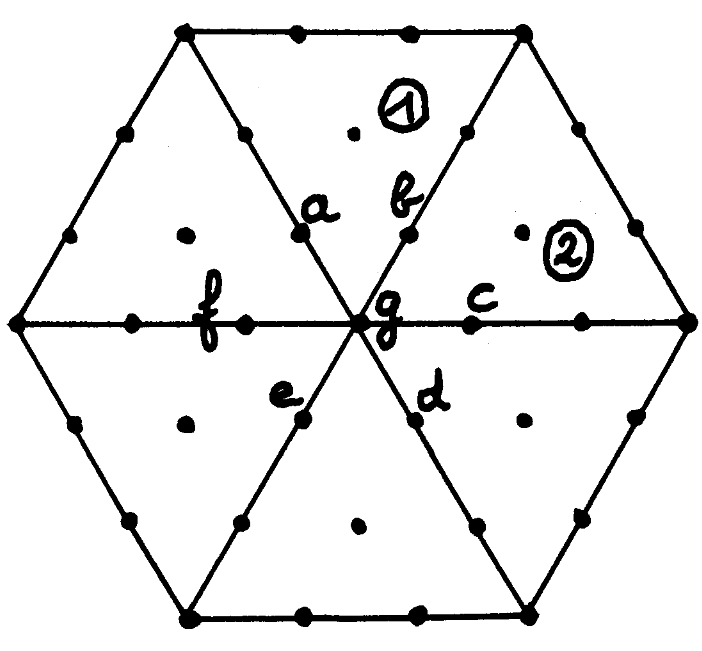


Figure 7

Graphe de la fonction $k^*(n)$



BUS LILLE

Figure 8

vers l'intérieur du support en tenant compte à la fois de la continuité C^1 et des propriétés de symétrie. Pour simplifier, on n'indique que les coefficients non nuls (à une homothétie près).

6.3. Pour $n = 4$, $k^* = 2$, on peut construire une spline dont le support est hexagonal et formé de 24 triangles comme celui de la cubique C^1 (figure 12). Là encore, le calcul des coefficients Bézier se fait en progressant de la frontière vers le centre en tenant compte de la continuité C^2 et des symétries : il y a unicité.

Pour $n = 5$, $k^* = 2$, on peut construire une spline à support hexagonal formé de 6 triangles mais ce cas est moins intéressant . (cf. § 11).

6.4. Pour $n = 6$, $k^* = 3$, on peut construire une spline unique ayant un support hexagonal formé de 54 triangles (figure 13). Le détail des coefficients Bézier est donné sur la figure 14.

On constate que les splines hexagonales de degrés 3, 4 et 6 sont positives et de somme égale à 1 (à condition de normaliser convenablement les coefficients).

Est-il possible de construire des splines à support borné (B-splines) pour tout $n \geq 7$?

6.5 Cette conjecture a été démontrée il y a dix ans par Paul O. Frederickson dans un rapport interne [7] non publié. L'auteur y montre que l'on peut construire une B-spline dans $Sp(m + n + 2, p + q + 2)$ par convolution d'une B-spline de $Sp(m, p)$ et d'une B-spline de $Sp(n, q)$. En particulier une B-spline de $Sp(n, k^*(n))$ peut être obtenue par convolution de B-splines de $Sp(n-3, k^*(n-3))$ et de $Sp(1, 0)$. On peut préciser que l'hexagone H_{p+1} support de la B-spline de $Sp(n, k^*(n))$ est composé de $6(p+1)^2$ triangles lorsque $n = 3p$, $3p+1$ ou $3p+2$ (le côté est de longueur $p+1$).

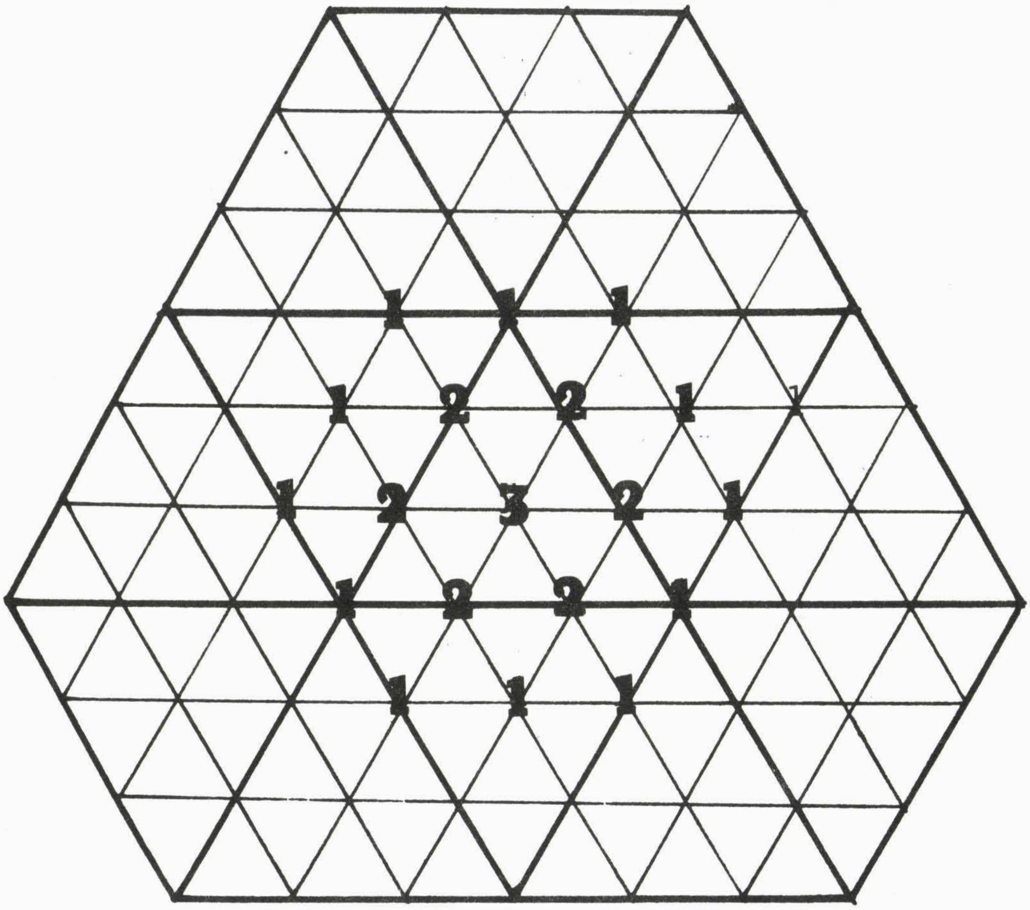


Figure 9

spline cubique de classe C^1
à support minimal

BUS LILLE

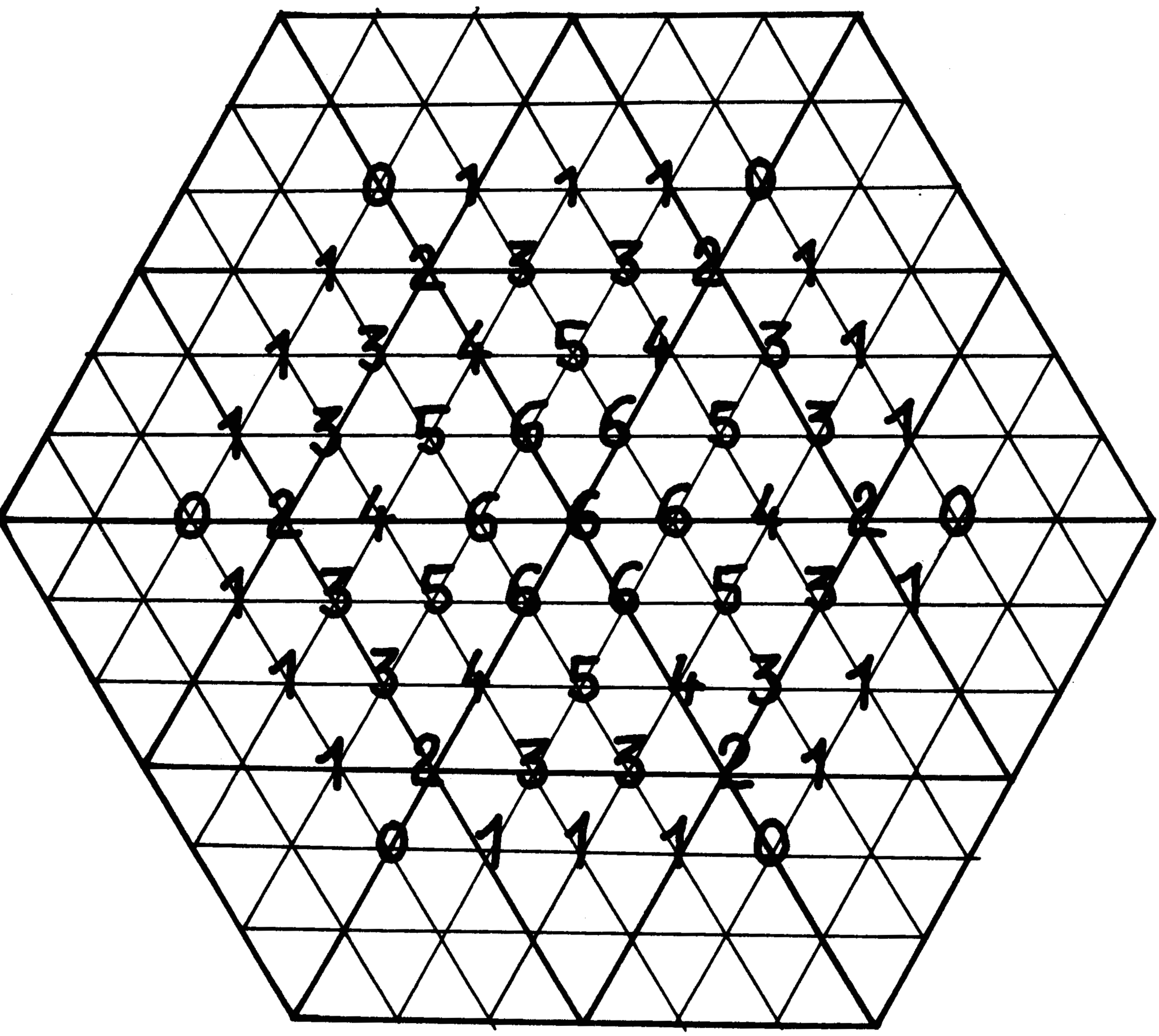


Figure 10

Spline cubique C^1 à support hexagonal

BUS LILLE

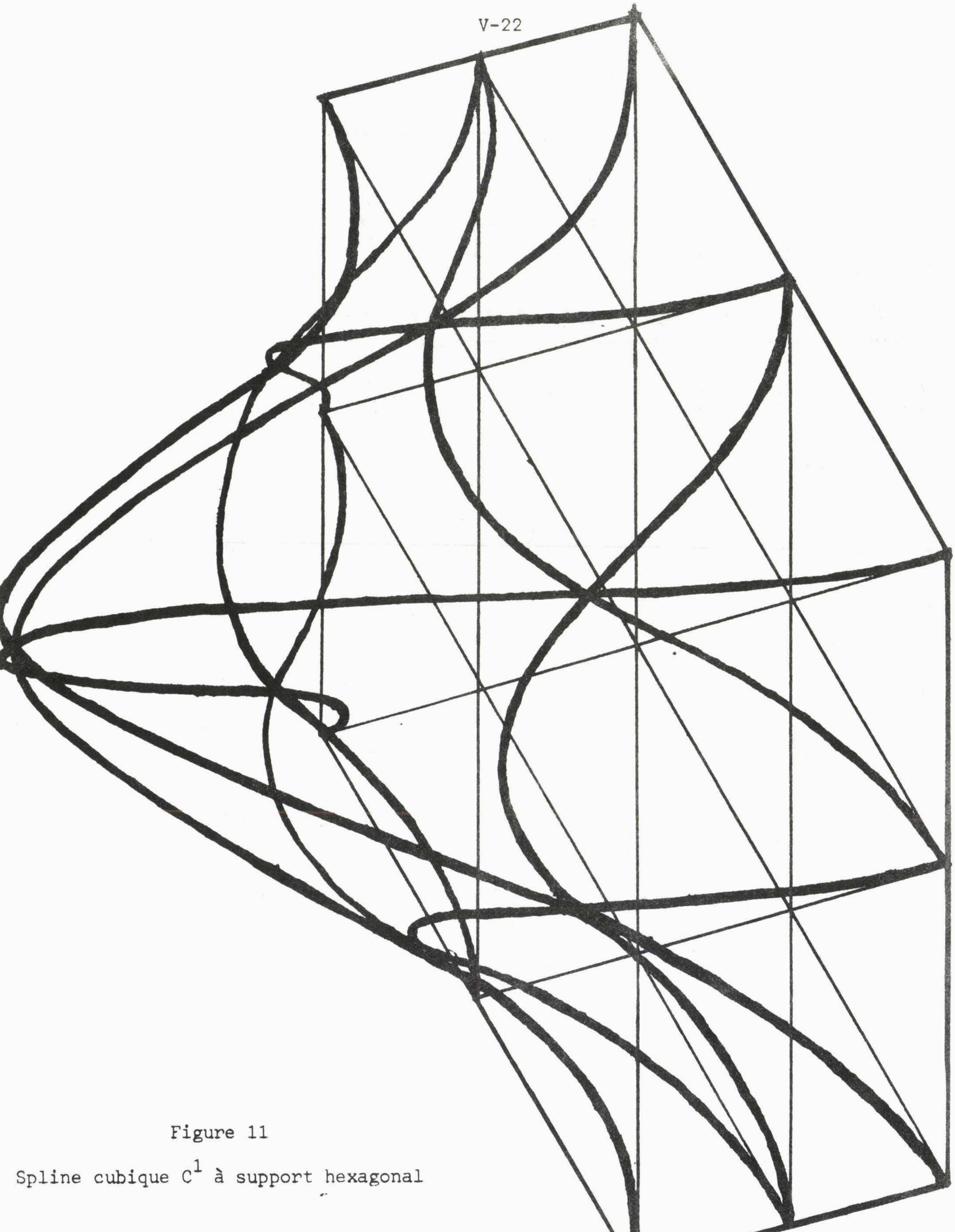


Figure 11

Spline cubique C^1 à support hexagonal

BUS LILLE

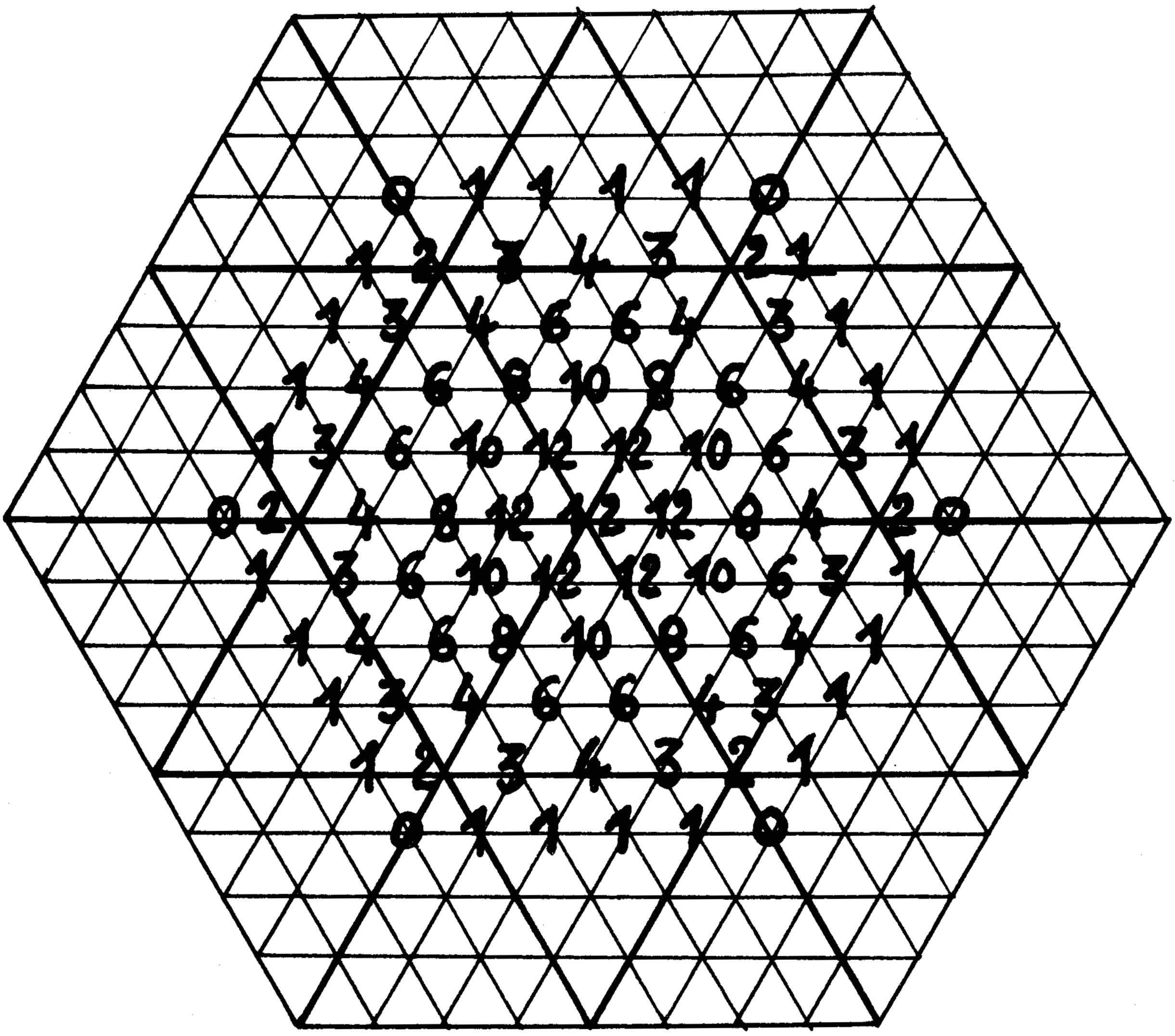


Figure 12

Spline de $\mathbb{S}p$ (4, 2) à support borné

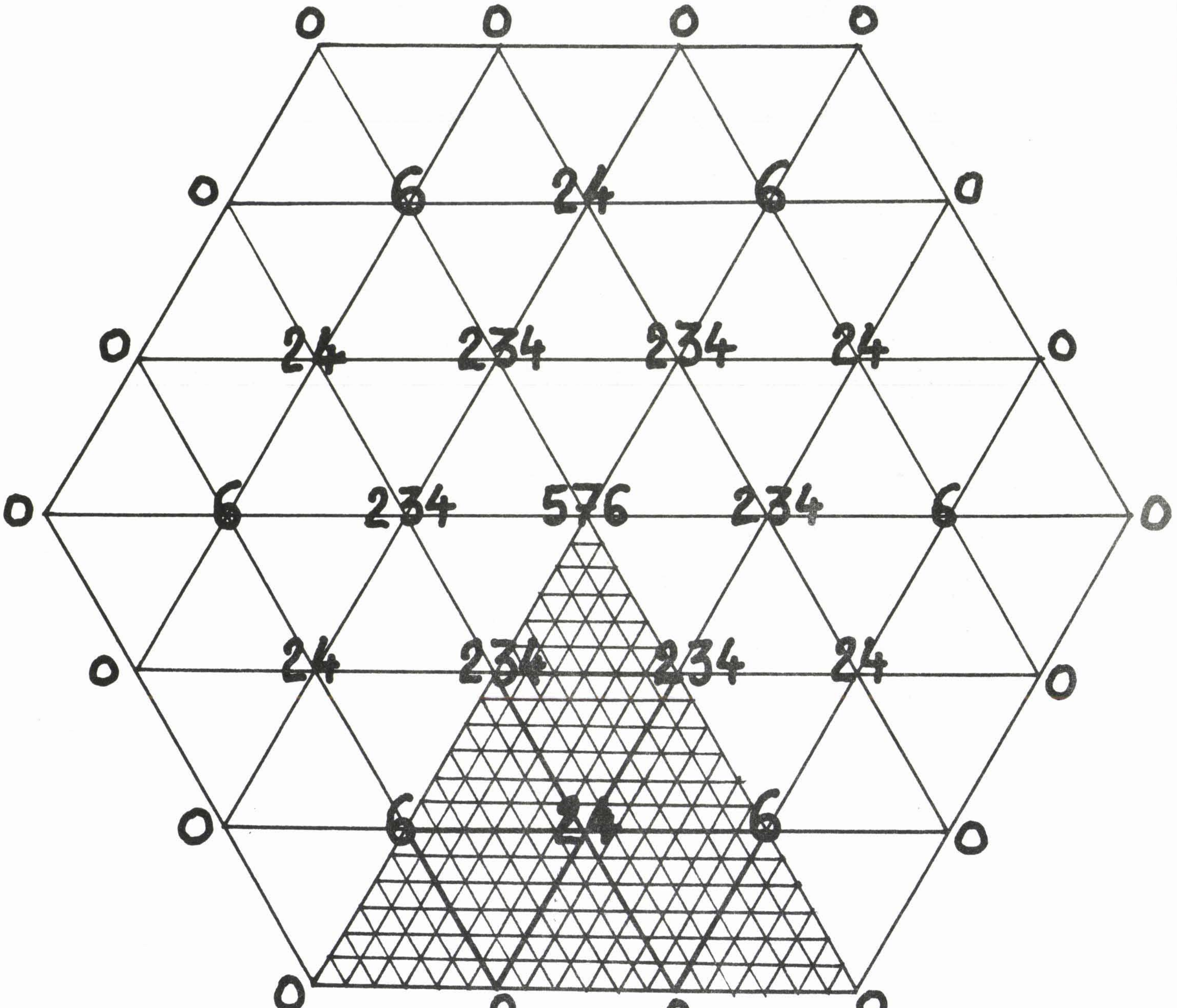


Figure 13

Spline de $\mathcal{S}p$ (6, 3) à support borné

(valeurs aux noeuds)

BUS LILLE

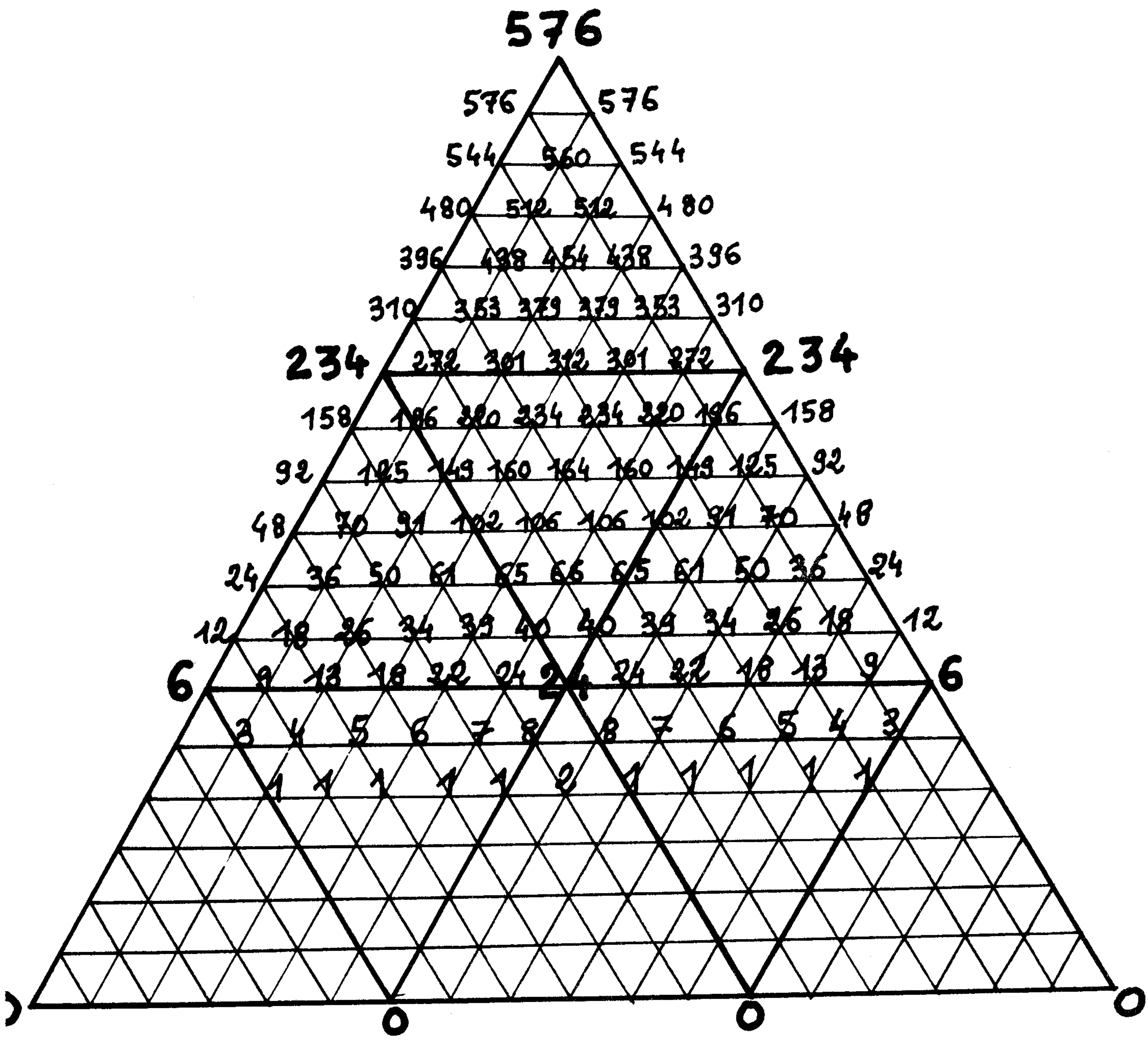


Figure 14

Spline de $\mathcal{S}p$ (6, 3) à support borné

(coefficients Bézier)

BUS

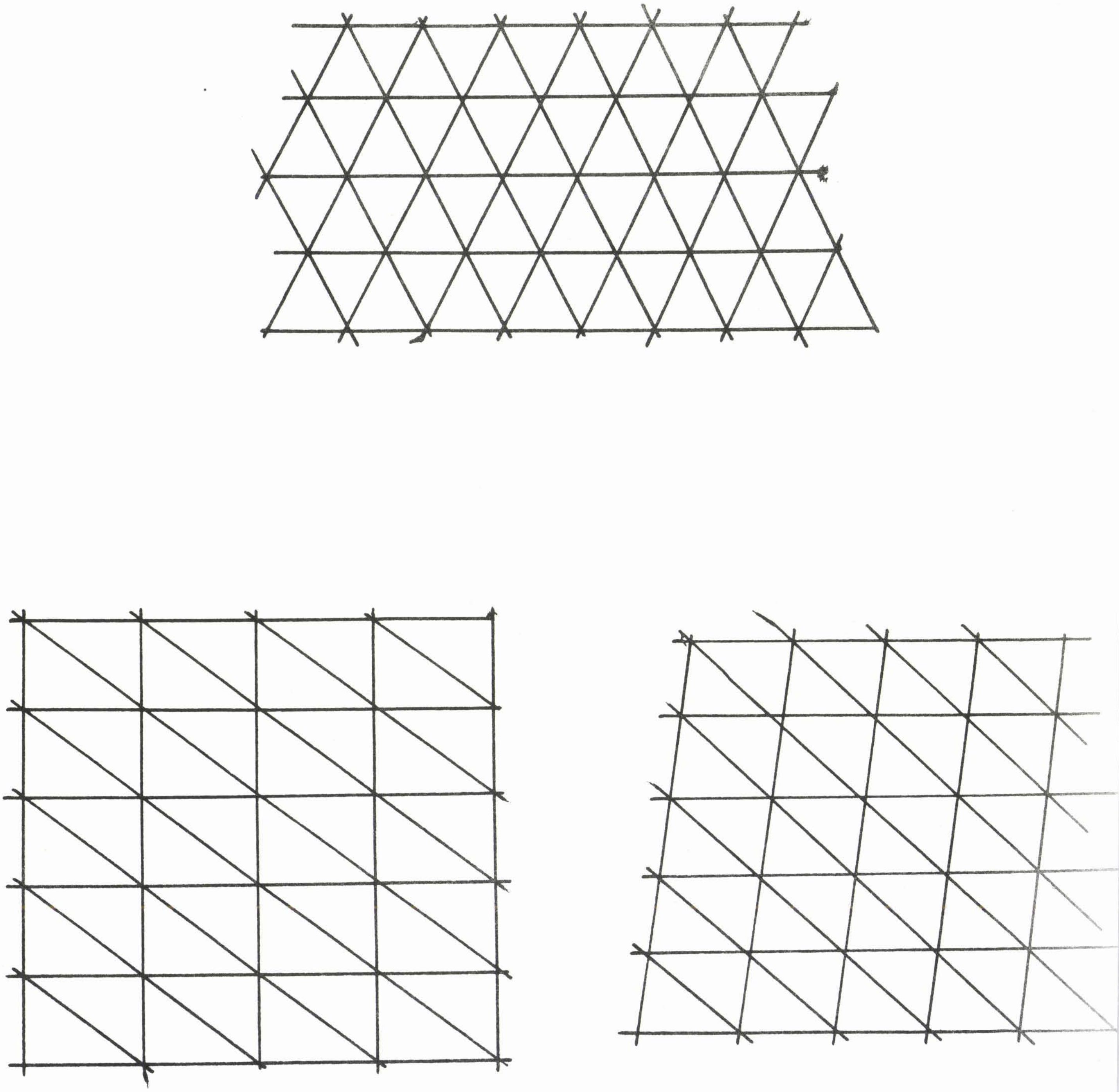


Figure 15

Réseaux équivalents au réseau équilatéral

BUS LILLE

Il faut remarquer que le terme de B-spline est ambigu car il ne désigne pas nécessairement la spline **de support minimal** que l'on peut construire dans $Sp(n, k^*(n))$, ni même la spline de **support hexagonal minimal** (voir par exemple le cas des cubiques (figure 9) ou des quintiques (figure 20)). Il désigne une spline à support borné dont les translatées permettent de définir de bons quasi-interpolants

Résumons le résultat essentiel dans le :

<u>*Théorème 5*</u> : *Il n'existe pas de spline à support borné dans* $Sp(n,k)$ *pour* $k>k^*(n)$ *et il est toujours possible d'en construire une, à support hexagonal, dans* $Sp(n, k^*(n))$. ($k^*(3p) = 2p-1$ et $k^*(3p+1) = k^*(3p+2) = 2p$).

VII - QUASI-INTERPOLANTS DE DEGRÉS 3, 4 ET 6. NOTATIONS ET RÉSULTATS

Soit $\mathcal{T}_h$ la triangulation équilatérale de côté h et $\mathcal{R}_h$ le réseau des sommets correspondants (Fig. 16). Les sommets A_{ij} de $\mathcal{R}_h$ ont comme coordonnées (ih,jh) par rapport à un système XOY d'axes à 120° et $((i-j/2)\,h,\ j\sqrt{3}h/2)$ par rapport à un système xoy d'axes orthogonaux ($i, j \in \mathbf{Z}$). On désigne respectivement par $\hat{T}_{ij}$ et $\overset{\vee}{T}_{ij}$ les triangles de sommets $\{A_{ij}, A_{i+1,j}, A_{i+1,j+1}\}$ et $\{A_{ij}, A_{i+1,j+1}, A_{i,j+1}\}$ et par P_{ij} le parallélogramme $\hat{T}_{ij} \cup \overset{\vee}{T}_{ij}$. Les tableaux 1 et 2 en annexe donnent les B-coefficients (c'est à dire les coefficients dans la base de Bernstein) des polynômes des bases canoniques de $\mathbb{P}_n$ $(1 \le n \le 4)$ sur les triangles $\hat{T}_{oo}$ et $\overset{\vee}{T}_{oo}$. (pages V-70 à V-72).

Désignons par M_{ij} la B-spline normalisée (telle que $\sum_{i,j} M_{ij} = 1$) de degré 3, 4 ou 6, dont le support hexagonal est centré en A_{ij} (figures 10,12,13).

Lorsque l'on étudie des quasi-interpolants du type :

(9) $$Sf(x, y) = \sum_{i,j} \mu_{ij}(f)\, M_{ij}(x, y)$$

on peut se ramener, par translation, au cas où le point (x, y) est dans le parallélogramme P_{oo}. Pour n = 2 ou 3, P_{oo} est recouvert par les supports des 14 B-splines suivantes :

$$M_{i,-1}\ (-1 \le i \le 1), \qquad M_{i,o}\ (-1 \le i \le 2)$$

$$M_{i,1}\ (-1 \le i \le 2), \qquad M_{i,2}\ (\ 0 \le i \le 2)$$

Les B-coefficients de Sf sur P_{oo} sont donc des combinaisons linéaires des B-coefficients des splines M_{ij} sur les parallélogrammes numérotés (i, j) de leur support (Fig. 17). C'est en effet le parallélogramme (i, j) qui coïncide avec P_{oo} lorsque le support est centré en A_{ij}.
Pour n = 6, P_{oo} est recouvert par les supports des 30 B-splines suivantes :

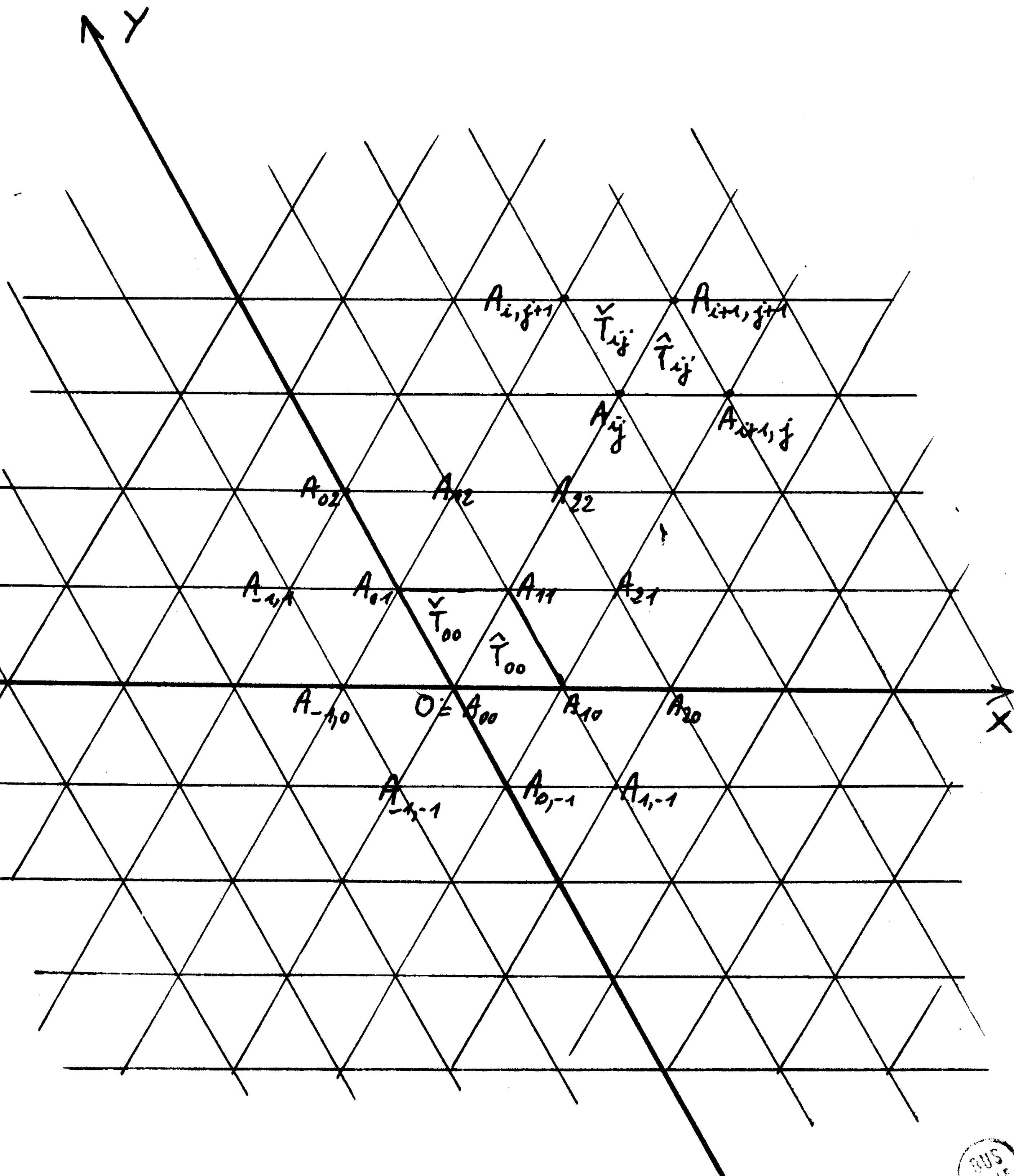


Fig. 16 : Triangulation équilatérale

Centres des supports des B-splines

recouvrant $P_{oo} = \check{T}_{oo} \cup \hat{T}_{oo}$

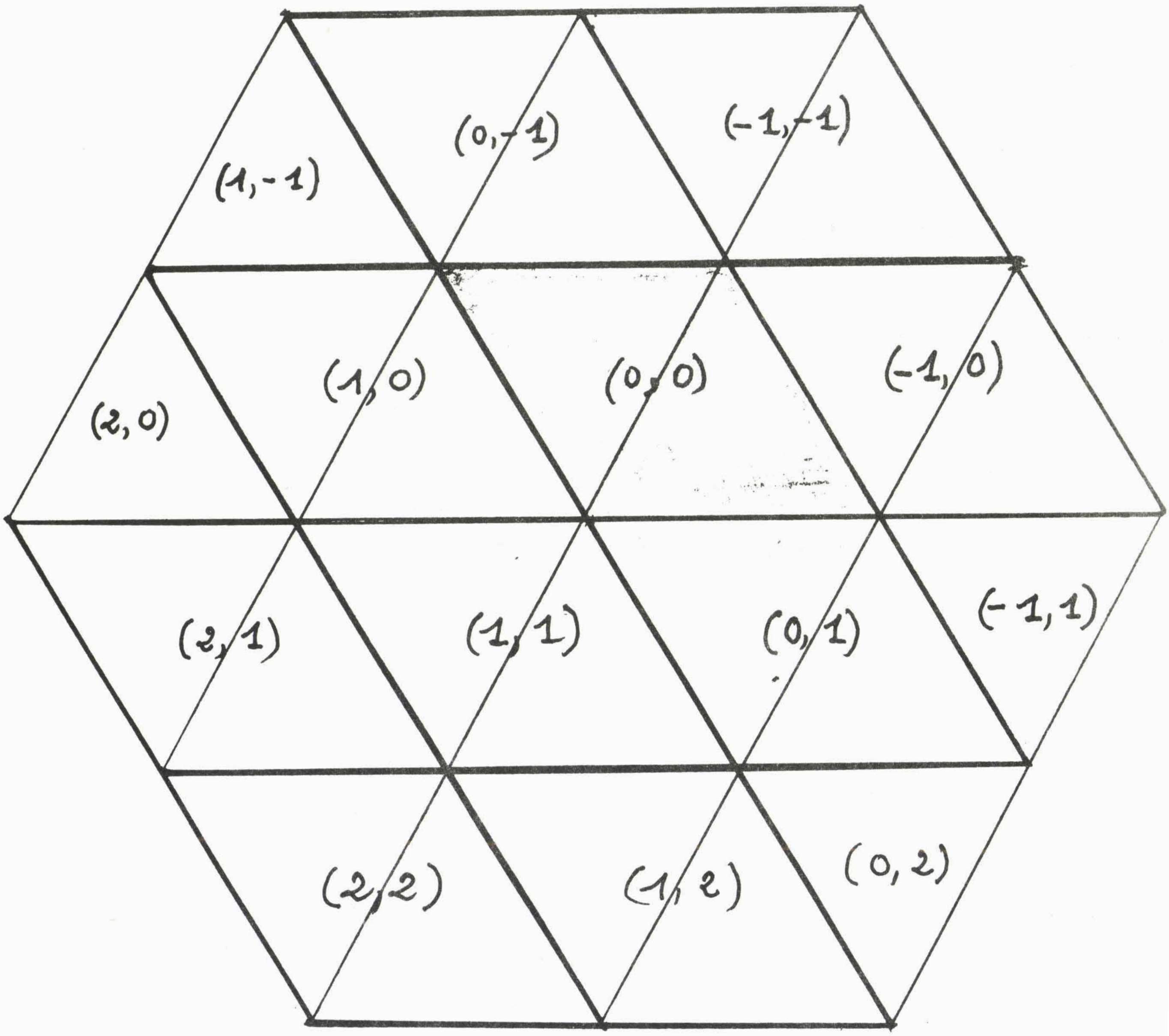


Figure 17

BUS LILLE

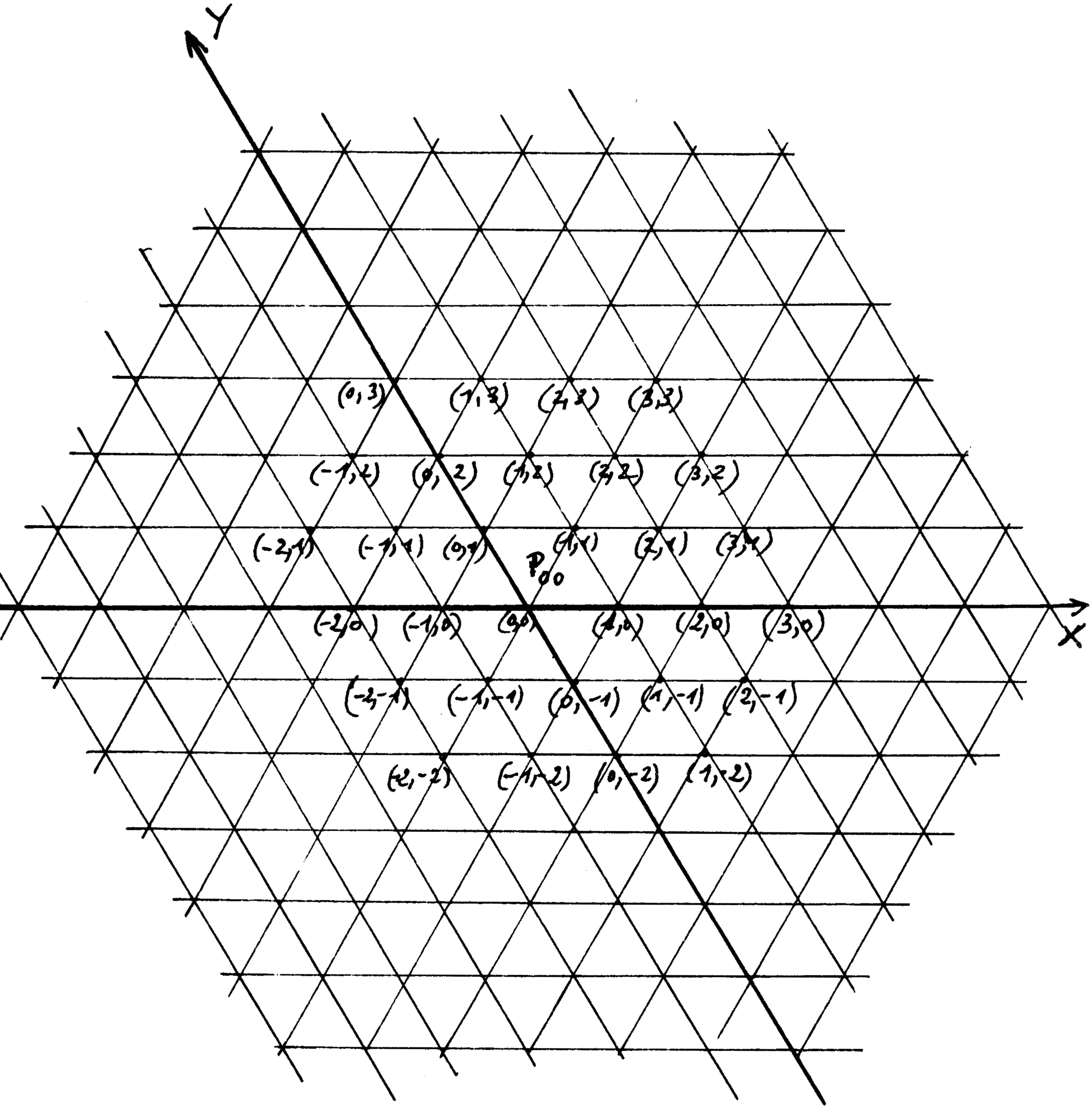


Figure 18

Centres des supports des B-splines de degré 6

recouvrant le parallélogramme P_{oo}

BUS LILLE

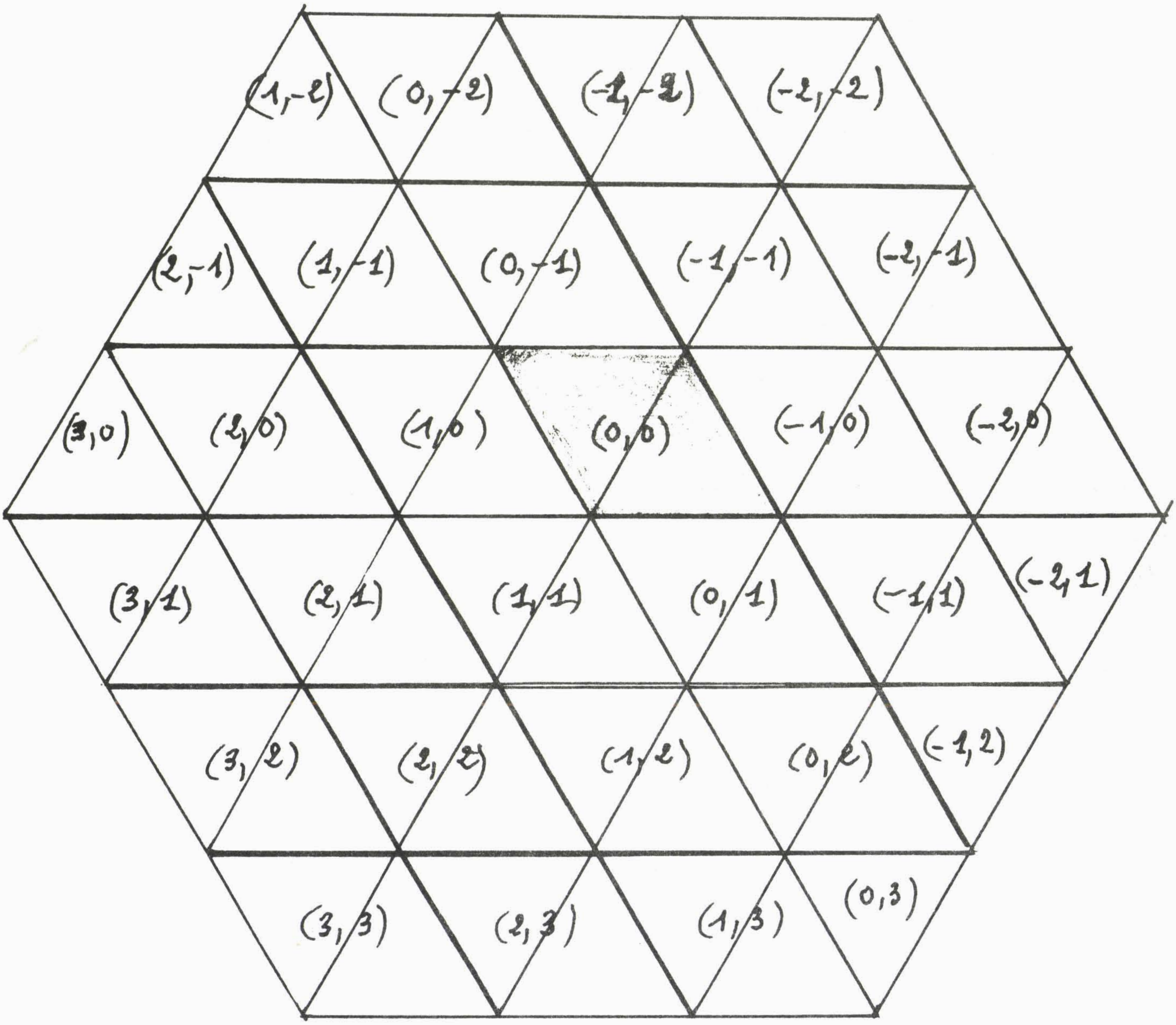


Figure 19

BUS LILLE

$$M_{i,3}\ (0 \le i \le 3),\ M_{i,2}\ (-1 \le i \le 3),\ M_{i,1}\ (-2 \le i \le 3)$$

$$M_{i,o}\ (-2 \le i \le 3),\ M_{i,-1}\ (-2 \le i \le 2),\ M_{i,-2}\ (-2 \le i \le 1)$$

Les B-coefficients de Sf sur P_{oo} sont également des combinaisons linéaires des B-coefficients des M_{ij} sur les parallélogrammes (i, j) de leur support (Fig. 19).

Nous utilisons les définitions suivantes :

__*Définition 1*__ : *Le quasi-interpolant* S *est exact sur* $\mathbb{P}_n$ *(ou* $\mathbb{Q}_n$*) ou reproduit* $\mathbb{P}_n$ *(ou* $\mathbb{Q}_n$*) si* $Sf = f$ *pour tout* $f \in \mathbb{P}_n$ *(ou* $\mathbb{Q}_n$*).*

__*Définition 2*__ : *Le quasi-interpolant* S *interpole* $\mathbb{P}_n$ *sur* R_h *si l'on a* $Sf(A_{ij}) = f(A_{ij})$ *pour tout* $f \in \mathbb{P}_n$ *et tout* $A_{ij} \in R_h$.

On utilise les notations $e_{ij}(x, y) = x^i\, y^j$, Δf = laplacien de f et $\Delta^2 f$ = bilaplacien de f $(\Delta^2 f(x,y) = \partial^4 f/\partial x^4 + 2\partial^4 f/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 f/\partial y^4)$.

__*Théorème 6*__ : *(splines cubiques de classe* C^1*)*

(i) le quasi-interpolant S_1 *défini par :*

$$S_1\, f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\, M_{ij}(x, y)$$

reproduit $\mathbb{Q}_1$. *De plus on a :*

$$S_1\, e_{2o} - e_{2o} = S_1\, e_{o2} - e_{o2} = \frac{h^2}{3}\, e_{oo}$$

(ii) le quasi-interpolant S_2 *défini par :*

$$S_2\, f(x, y) = \sum_{i,j} \left(f(A_{ij}) - \frac{h^2}{6}\, \Delta f(A_{ij})\right) M_{ij}\,(x, y)$$

reproduit $\mathbb{P}_2$ *et interpole* $\mathbb{P}_3$. *De plus :*

$$\|S_2\, e_{ij} - e_{ij}\|_\infty = C_{ij}.h^3 \qquad (i+j = 3)$$

avec $C_{30} = \sqrt{3}/24$, $C_{21} \simeq 0.06$, $C_{12} = \sqrt{3}/72$ *et* $C_{03} = 1/32$.

Remarque : La notation $||Sf-f||_\infty$ signifie que l'on prend le maximum sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Si l'on prend le maximum sur un triangle T de $\mathcal{T}_h$, on précise $||Sf-f||_{\infty,T}$.

Théorème 7 : (*Splines quartiques de classe C^2*)

(*i*) *le quasi-interpolant* S_1 *défini par* :

$$S_1 f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\, M_{ij}\,(x,y)$$

reproduit $\mathbb{P}_1$. *De plus, on a* :

$$S_1\, e_{20} - e_{20} = S_1\, e_{02} - e_{02} = \frac{h^2}{4}\, e_{oo}$$

(*ii*) *le quasi-interpolant* S_2 *défini par* :

$$S_2 f(x, y) = \sum_{i,j} (f(A_{ij}) - \frac{h^2}{8}\, \Delta f(A_{ij}))\, M_{ij}(x,y))$$

reproduit $\mathbb{P}_3$. *De plus* $S_3\, e_{13} = e_{13}$ *et* :

$$||S_2\, e_{ij} - e_{ij}||_\infty = C_{ij}.h^4 \qquad (i+j = 4)$$

avec $C_{40} = 7/32$, $C_{31} = \sqrt{3}/128$, $C_{22} = 5/64$ *et* $C_{04} = 57/64$

(*iii*) *le quasi-interpolant* S_3 *défini par* :

$$S_3 f(x, y) = \sum_{i,j} (f(A_{ij}) - \frac{h^2}{8}\, \Delta f(A_{ij}) + \frac{h^4}{128}\, \Delta^2 f(A_{ij}))\, M_{ij}(x, y)$$

reproduit $\mathbb{P}_3$ *et interpole* $\mathbb{P}_4$ *sur* R_h. *De plus*

$$||S_3\, e_{ij} - e_{ij}||_\infty = C_{ij}\, h^4 \qquad (i+j = 4)$$

avec $C_{40} = 1/32$, $C_{31} = \sqrt{3}/128$, $C_{22} = 1/64$, $C_{04} = 9/256$, $C_{13} = 0$

Théorème 8 : (*Splines sextiques de classe C^3*)

(*i*) *le quasi-interpolant* S_1 *défini par* :

$$S_1 f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\, M_{ij}(x, y)$$

reproduit $\mathbb{P}_1$. *De plus, on a* :

$$S_1\, e_{20} - e_{20} = S_1\, e_{02} - e_{02} = \frac{11h^2}{24}\, e_{oo}$$

(*ii*) *le quasi-interpolant* S_2 *défini par :*

$$S_2f(x, y) = \sum_{i,j} (f(A_{ij}) - \frac{11}{48} h^2 \Delta f(A_{ij})). M_{ij}(x, y)$$

reproduit $\mathbb{P}_3$, e_{31} *et* e_{13}. *De plus :*

$$S_2 e_{40} - e_{40} = 3(S_2 e_{22} - e_{22}) = S_2e_{04} - e_{04} = - \frac{83}{120} h^4$$

(*iii*) *le quasi-interpolant* S_3 *défini par :*

$$S_3f(x, y) = \sum_{i,j} (f(A_{ij}) - \frac{11}{48} h^2\Delta f(A_{ij}) + \frac{83}{2880} h^4\Delta^2f(A_{ij})). M_{ij}(x, y)$$

reproduit $\mathbb{P}_4$ *et interpole* $\mathbb{P}_5$ *sur* R_h. *De plus :*

$$||S_3 e_{ij} - e_{ij}||_\infty \leq h^5/100 \text{ pour } i+j = 5.$$

Remarque :

Il est clair que l'on peut remplacer $\Delta f(A_{ij})$ et $\Delta^2f(A_{ij})$ par des différences finies faisant intervenir des points de R_h entourant A_{ij}. Ces schémas peuvent être choisis assez précis pour que les résultats des théorèmes ci-dessus restent valables, à quelques modifications près pour les constantes d'erreur C_{ij}.

VIII-SPLINES CUBIQUES DE CLASSE C^1 (PREUVE DU THÉORÈME 6)

8.1) Le quasi-interpolant S_1

$$S_1 f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\, M_{ij}(x, y)$$

où M_{ij} désigne la B-spline normalisée dont les B-coefficients sont ceux de la figure 10 divisés par 18 : on a alors $\sum_{i,j} M_{ij}(x, y) = 1$, S_1 reproduit $\mathbb{P}_0$ et par conséquent :

$$S_1(f - K) = S_1 f - K$$

pour toute fonction constante K.

Si $f(x, y) = e_{10}(x, y) = x$, on a :

$$S_1\, e_{10}(x, y) = h \sum_{i,j} (i-j/2) \,.\, M_{ij}(x, y)$$

Il suffit de comparer les B-coefficients de $S_1\, e_{10}$ et de e_{10} sur P_{oo} (fig. 16)

Or on a :

$$\begin{aligned} S_1 e_{10} = h\{ &+ \tfrac{3}{2} (-M_{-1,1} + M_{2,1} + M_{1,-1}) + 2M_{2,0} \\ &+ (-M_{-1,0} - M_{0,2} + M_{1,0} + M_{2,2}) \\ &+ \tfrac{1}{2} (-M_{0,1} - M_{-1,-1} + M_{1,1} + M_{0,-1})\} \end{aligned}$$

On obtient comme B-coefficients :

$$\frac{h}{18} \begin{bmatrix} -9 & -3 & 3 & 9 \\ -6 & 0 & 6 & 12 \\ -3 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

c'est à dire ceux de e_{10} (cf tableau 1).

De même $S_1\, e_{01} = e_{01}$, où $e_{01}(x, y) = y$. Lorsque $f(x, y) = \tilde{e}_{11}(x, y) = 2xy/\sqrt{3}$,

on a : $S_1\, \tilde{e}_{11} = h^2 \sum_{i,j} (i-j/2)j\, M_{ij}(x, y)$

On peut se ramener à P_{oo} car si $g(x, y) = (x-a)(y-b)$, $S_1 g = S_1[xy] - ay - bx + ab$, et si $S_1[xy] = xy$ on a également $S_1\, g = g$. Sur P_{oo}, on obtient :

$$\begin{aligned} S_1\, \tilde{e}_{11} = 2(M_{2,2} - M_{0,2}) &+ \tfrac{1}{2} (M_{1,1} + M_{-1,1} - M_{0,1} - M_{0,-1}) \\ &+ \tfrac{3}{2} (M_{2,1} - M_{-1,1} - M_{1,-1}) \end{aligned}$$

dont les B-coefficients sont :

$$\frac{h^2}{18}\begin{bmatrix} -9 & -3 & 3 & 9 \\ -3 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c'est à dire ceux de $\tilde{e}_{11}$ (tableau 1).

On a ainsi prouvé que S_1 reproduit $\mathbb{Q}_1$.

Lorsque $f(x, y) = e_{20}(x, y) = x^2$, on a sur P_{oo} :

$$S_1\, e_{20} = \frac{9}{4} h^2(M_{-1,1} + M_{2,1} + M_{1,-1}) + \frac{h^2}{4} (M_{0,1} + M_{-1,-1} + M_{1,1} + M_{0,-1}) + h^2(M_{-1,0} + M_{0,2} + M_{2,2} + M_{1,0}) + 4h^2\, M_{2,0}.$$

On montre enfin que les B-coefficients de $S_1\, e_{20} - e_{20}$ et $S_1\, e_{02} - e_{02}$ sont constants et égaux à $h^2/3$, donc :

$$S_1\, e_{20} - e_{20} = S_1\, e_{02} - e_{02} = \frac{h^2}{3}\, e_{oo} \text{ sur } P_{oo}$$

Ceci est valable dans tout le plan car si $g(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$, on a $S_1\, g - g = (S_1\, e_{20} - e_{20}) + (S_1\, e_{02} - e_{02}) = 2h^2/3$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, et l'on peut toujours se ramener au parallélogramme P_{oo}.

On peut modifier S_1 en remplaçant $f(A_{ij})$ par $\mu_{ij}(f) = f(A_{ij}) - \frac{1}{6} h^2\, \Delta f(A_{ij})$: on a alors $\mu_{ij}(f) = f(A_{ij})$ lorsque $f \in Q_1$ et $\mu_{ij}(f) = f(A_{ij}) - \frac{h^2}{3}$ lorsque $f = e_{20}$ ou e_{02}. L'opérateur S_2 ainsi obtenu reproduit $\mathbb{P}_2$ par construction.

8.2) Le quasi-interpolant S_2

$$S_2 f(x, y) = \sum_{i,j} [f(A_{ij}) - \frac{h^2}{6}\, \Delta f(A_{ij})]\, M_{ij}(x, y)$$

Comme S_2 est exact sur $\mathbb{P}_2$, évaluons les erreurs $S_2\, e_{ij} - e_{ij}$ pour $i+j = 3$.

Lorsque $f = \tilde{e}_{03} = 8e_{03}/3\sqrt{3}$, on a $\mu_{ij}(\tilde{e}_{03}) = h^3 j(j^2 - 4/3)$ et l'on obtient comme B-coefficients de $S_2\, \tilde{e}_{03} - \tilde{e}_{03}$ sur P_{oo} :

$$\frac{h^3}{18}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que l'erreur est nulle sur les droites $Y = hj/2 (j \in \mathbb{Z})$ du réseau et que l'erreur maximale (en valeur absolue) est $h^3\sqrt{3}/36$.

Par conséquent, on a :

$$||S_2\, e_{03} - e_{03}||_\infty = h^3/32 = h^3 \times 0{,}03125$$

Pour $f = \tilde{e}_{12} = 4e_{12}/3$, on calcule

$$\mu_{ij}(\tilde{e}_{12}) = h^3(i-j/2)(j^2 - 4/9)$$

et les B-coefficients de $S_2\,\tilde{e}_{12} - \tilde{e}_{12}$ sur P_{oo} sont :

$$\frac{h^3}{54}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

L'erreur est nulle sur les droites $x = ih/2$ $(i \in \mathbb{Z})$ et l'on calcule :

$$||S_2\, e_{12} - e_{12}||_\infty = h^3\sqrt{3}/72 = h^3 \times 0{,}02406$$

Pour $f = \tilde{e}_{21} = 2e_{21}/\sqrt{3}$, on obtient :

$$\mu_{ij}(\tilde{e}_{21}) = h^3 j((i-j/2)^2 - 1/3)$$

et les B-coefficients de $S_2\,\tilde{e}_{21} - \tilde{e}_{21}$ sur P_{oo} sont :

$$\frac{h^3}{36}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'erreur est nulle sur les droites $Y = jh (j \in \mathbb{Z})$ et l'on calcule :

$$||S_2\, e_{21} - e_{21}||_\infty = h^3 \times 0{,}059216522.$$

Enfin, pour $f = e_{30}$, on a :

$$\mu_{ij}(e_{30}) = h^3(i-j/2)((i-j/2)^2 - 1)$$

et les B-coefficients de $S_2\, e_{30} - e_{30}$ sur P_{oo} sont :

$$\frac{h^3}{24} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent $S_2\, e_{30}$ interpole e_{30} sur les droites $x = hi/2$ $(i \in \mathbb{Z})$ et l'on calcule,

$$||S_2\, e_{30} - e_{30}||_\infty = h^3\sqrt{3}/24 = h^3 \times 0.072168784$$

On constate qu'en norme ∞, l'erreur sur les polynômes du 3° degré est en $O(h^3)$ avec une constante assez faible, donc S_2 est un bon approximant pour les fonctions de classe C^3.

IX - SPLINES QUARTIQUES DE CLASSE C^2 (PREUVE DU THÉORÈME 7)

9.1) Le quasi-interpolant S_1

$$S_1\, f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\, M_{ij}(x, y)$$

où M_{ij} désigne la B-spline normalisée dont les B-coefficients sont ceux de la figure 12 divisés par 24. Comme pour les cubiques, on vérifie immédiatement par le calcul que S_1 est exact sur $\mathbb{P}_1$ et que $S_1\, e_{20} - e_{20} = S_1\, e_{02} - e_{02} = \frac{h^2}{4}\, e_{oo}$. On peut donc corriger S_1 en remplaçant $f(A_{ij})$ par $\mu_{ij}(f) = f(A_{ij}) - \frac{h^2}{8}\, \Delta f(A_{ij})$ et l'on obtient l'opérateur S_2.

9.2) Le quasi-interpolant S_2

$$S_2\, f(x, y) = \sum_{i,j} [f(A_{ij}) - \frac{h^2}{8}\, \Delta f(A_{ij})]\, M_{ij}(x, y)$$

Par construction, S_2 est exact sur $\mathbb{P}_2$, il suffit de vérifier que $S_2\, e_{ij} = e_{ij}$ pour $i+j = 3$. On obtient successivement :

$$\mu_{ij}(e_{30}) = h^3(i-j/2)((i-j/2)^2-3/4)$$

$$\mu_{ij}(\tilde{e}_{21}) = h^3 j((i-j/2)^2-1/4) \text{ avec } \tilde{e}_{12} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e_{12}$$

$$\mu_{ij}(\tilde{e}_{12}) = h^3(i-j/2)(3j^2-1)/4, \text{ avec } \tilde{e}_{12} = \frac{4}{3}\, e_{12}$$

$$\mu_{ij}(\tilde{e}_{03}) = h^3 j(j^2-1), \text{ avec } \tilde{e}_{03} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\, e_{03}$$

Par exemple, on obtient sur P_{oo} :

$$S_2\, \tilde{e}_{03} = \frac{h^3}{4}\, (M_{0,2} + M_{1,2} + M_{2,2})$$

dont les B-coefficients sont ceux de $\tilde{e}_{03}$:

$$h^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(cf tableau 2)}$$

En posant $\tilde{e}_{ij} = (\frac{2}{\sqrt{3}})^j\, e_{ij}$ $(i+j = 4)$, on obtient, en posant $x_{ij} = i-j/2$:

$$\mu_{ij}\ (e_{40}) = h^4\ x_{ij}^2\ (x_{ij}^2 - 3/2)$$
$$\mu_{ij}\ (\tilde{e}_{31}) = h^4\ j\ x_{ij}\ (x_{ij}^2 - 3/4)$$
$$\mu_{ij}\ (\tilde{e}_{22}) = h^4[j^2\ x_{ij}^2 - \frac{1}{3}\ (x_{ij}^2 + \frac{3}{4}\ j^2)]$$
$$\mu_{ij}\ (\tilde{e}_{13}) = h^4\ j\ (j^2 - 1)\ x_{ij}$$
$$\mu_{ij}\ (\tilde{e}_{04}) = h^4\ j\ \ (j^2 - 1)$$

On constate que $S_2\ \tilde{e}_{13} = \tilde{e}_{13}$. Pour les autres, les B-coefficients et la norme de l'erreur $(S_2\ \tilde{e}_{ij} - \tilde{e}_{ij})$ sont respectivement :

$$\text{pour } e_{40} : -\frac{h^4}{96} \begin{bmatrix} 18 & 18 & 26 & 18 & 18 \\ +18 & +22 & +22 & +18 & +18 \\ +23 & +19 & +23 & +19 & 23 \\ +18 & +18 & +22 & +22 & 18 \\ +18 & +18 & +26 & +18 & 18 \end{bmatrix}$$

et $||e_{40} - S_2\ e_{40}||_\infty = 7h^4/32 = h^4 \times 0{,}21875$

$$\text{pour } \tilde{e}_{31} : \frac{h^4}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $||e_{31} - S_2\ e_{31}||_\infty = h^4\sqrt{3}/128 = h^4 \times 0{,}01353$

$$\text{pour } \tilde{e}_{22} : -\frac{h^4}{72} \begin{bmatrix} +6 & +6 & +10 & +6 & +6 \\ +6 & +8 & +8 & +6 & +6 \\ +7 & +5 & +7 & +5 & +7 \\ +6 & +6 & +8 & +8 & +6 \\ +6 & +6 & +10 & +6 & +6 \end{bmatrix}$$

et $||e_{22} - S_2\ e_{22}||_\infty = 5h^4/64 = h^4 \times 0{,}078125$

pour $\tilde{e}_{04}$: $-\dfrac{h^4}{6}$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $||S_2 e_{04} - e_{04}||_\infty$

$= 57h^4/256$

$= h^4 \times 0{,}22266$

S_2 ne reproduit pas $\mathbb{P}_4$, il reproduit e_{13} et interpole e_{31}. On constate également que :

$$(S_2\, e_{40} - e_{40})\,(A_{ij}) = 3(S_2\, e_{22} - e_{22})\,(A_{ij}) = (S_2\, e_{04} - e_{04})(A_{ij})$$
$$= \text{constante} = -\,3h^4/16.$$

Il est donc possible d'interpoler $\mathbb{P}_4$ en ajoutant à $\mu_{ij}(f)$ la quantité $h^4\Delta^2 f(A_{ij})/128$, ce qui donne l'opérateur S_3.

9.3) Le quasi-interpolant S_3

$$S_3\, f(x, y) = \sum_{i,j} [f(A_{ij}) - \frac{h^2}{8}\, \Delta f(A_{ij}) + \frac{h^4}{128}\, \Delta^2 f(A_{ij})]\; M_{ij}(x, y)$$

interpole $\mathbb{P}_4$ par construction, mais ne reproduit pas $\mathbb{P}_4$. L'erreur sur e_{13} et e_{31} est la même que pour S_2. Pour les autres monômes, on a comme B-coefficient de l'erreur :

pour e_{40} : $\dfrac{h^4}{96}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

pour $\tilde{e}_{22} = \frac{3}{4}\, e_{22}$: $-\dfrac{h^4}{96}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & +4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{pour } e_{04} = \frac{9}{16}\,\tilde{e}_{04} \;:\; -\frac{3h^4}{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne respectivement :

$$||S_3\, e_{40} - e_{40}||_\infty = h^4/32$$

$$||S_3\, e_{22} - e_{22}||_\infty = h^4/64,\; ||S_3\, e_{31} - e_{31}||_\infty = h^4\sqrt{3}/128$$

$$||S_3\, e_{04} - e_{04}||_\infty = 9h^4/256$$

On constate que S_3 interpole les e_{ij} et leurs dérivées partielles premières aux noeuds du réseau, ce qui a pour effet de donner une erreur très faible en norme uniforme pour les polynômes de $\mathbb{P}_4$.

X - SPLINES SEXTIQUES DE CLASSE C^3 (PREUVE DU THÉORÈME 8)

10.1) Le quasi-interpolant S_1

$$S_1\, f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\, M_{ij}\, (x, y)$$

où M_{ij} désigne la B-spline normalisée dont les B-coefficients sont ceux des figures 13 et 14 divisés par 2160. Comme pour les cubiques et les quartiques on vérifie que S_1 reproduit $\mathbb{P}_1$.

D'autre part, on constate que :

$$S_1\, e_{20} - e_{20} = S_1\, e_{02} - e_{02} = \frac{11}{24} h^2\, e_{00}$$

On peut donc corriger S_1 en remplaçant $f(A_{ij})$ par $\mu_{ij}(f) = f(A_{ij}) - \frac{11}{48} h^2 \Delta f(A_{ij})$; on obtient ainsi l'opérateur S_2.

10.2) Le quasi-interpolant S_2

$$S_2\, f(x, y) = \sum_{i,j} [f(A_{ij}) - \frac{11}{48} h^2 \Delta f(A_{ij})]\;\; M_{ij}(x, y)$$

Par construction, S_2 reproduit $\mathbb{P}_2$. On a vérifié sur ordinateur que S_2 reproduit $\mathbb{P}_3$ et les monômes $e_{31}(x, y) = x^3y$ et $e_{13}(x, y) = xy^3$.

D'autre part on a calculé :

$$S_2\, e_{40} - e_{40} = 3(S_2\, e_{22} - e_{22}) = S_2\, e_{04} - e_{04} = -83h^4/120$$

On peut donc corriger S_2 en ajoutant au coefficient de M_{ij} la quantité $83h^4\, \Delta^2 f(A_{ij})/2880$ et l'on obtient l'opérateur S_3.

10.3) Le quasi-interpolant S_3

$$S_3\, f(x, y) = \sum_{i,j} [f(A_{ij}) - \frac{11}{48} h^2\, \Delta f(A_{ij}) + \frac{83}{2880} h^4\, \Delta^2 f(A_{ij})]\, M_{ij}(x, y)$$

Par construction, S_3 reproduit $\mathbb{P}_4$. On a vérifié sur ordinateur que S_3 interpole $\mathbb{P}_5$ aux noeuds du réseau. Plus précisément, on a les résultats suivants :

$S_3\, e_{50} = e_{50}$ sur les droites $x = ih/2$ $\quad (i \in \mathbb{Z})$

$S_3\, e_{41} = e_{41}$ sur les droites $y = jh$ $\quad (j \in \mathbb{Z})$

$S_3\, e_{32} = e_{32}$ aux noeuds

$S_3\, e_{23} = e_{23}$ sur toutes les droites du réseau $\mathcal{R}_h$

$S_3\, e_{14} = e_{14}$ exactement

$S_3\, e_{05} = e_{05}$ sur les droites $y = jh/2 \quad (j \in \mathbf{Z})$

Dans tous les cas, on a vérifié que

$$||S_3\, e_{ij} - e_{ij}||_\infty \le h^5/100$$

Donnons par exemple les B-coefficients de l'erreur $S_3\, \tilde{e}_{05} - \tilde{e}_{05}$, où $\tilde{e}_{05} = 32 e_{05}/9\sqrt{3}$.
Cette erreur est la même sur tous les parallélogrammes P_{ij} du réseau car S_3 reproduisant $\mathbb{P}_4$, on a $S_3[(y-a)^5] - (y-a)^5 = S_3[y^5] - y^5$. On peut donc se ramener au parallélogramme P_{oo}.

$$\frac{h^5}{54}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de l'erreur s'écrit localement (avec $2y = \sqrt{3}hu$) :

$$S_3\, \tilde{e}_{05} - \tilde{e}_{05} = \frac{h^5}{9}\, u(1-u)\,(1-2u)\,(1+3u-3u^2) \qquad (0 \le u \le 1)$$

et l'on montre que $||S_3\, \tilde{e}_{05} - \tilde{e}_{05}||_\infty \sim h^5 \times 0{,}8 \times 10^{-2}$

On voit que S_3 interpole e_{05} sur les droites $y = jh/2$.

XI - SPLINES QUINTIQUES DE CLASSE C^2

11.1) La B-spline de support H_1

Il est facile de montrer qu'il existe une B-spline de Sp(5, 2) à support minimal, unique à une homothétie près (figure 20). Mais cette B-spline ne semble pas intéressante car si l'on définit, comme dans les paragraphes précédents, l'opérateur S_1 par :

$$S_1 f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij}) N_{ij} (x, y)$$

où N_{ij} désigne la B-spline de la figure 20 centrée en A_{ij}, S_1 ne reproduit même pas la fonction $f = e_{oo} = 1$. Les B-coefficients de $\sum_{i,j} N_{ij} (x, y)$ sur un parallélogramme sont en effet :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La surface obtenue n'est pas un plan, mais présente un "creux" au milieu. On a donc cherché une B-spline de Sp(5, 2) de support hexagonal H_2.(Côté de longueur 2h).

11.2) B-splines de support H_2

En construisant une B-spline de support H_2, on est amené à calculer les coefficients de la figure 21 dépendant des 4 paramètres a, b, c, d (en fait il y a 3 paramètres seulement si l'on impose $\sum_{i,j} M_{ij} = 1$). Les conditions de raccordement C^2 entre les différents triangles conduisent aux relations suivantes :

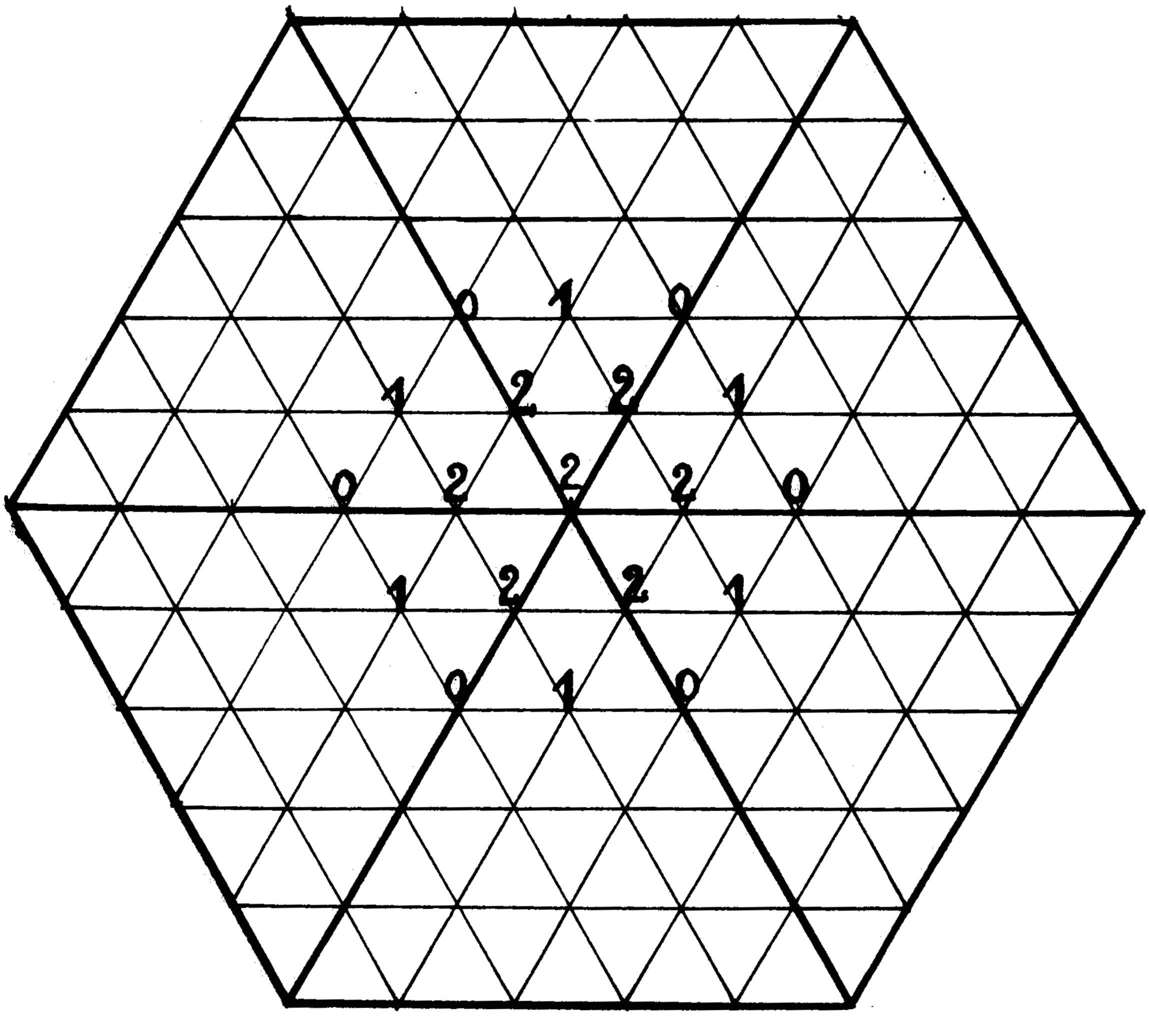


Figure 20

B-spline de Sp(5, 2) à support minimal H_1

BUS LILLE

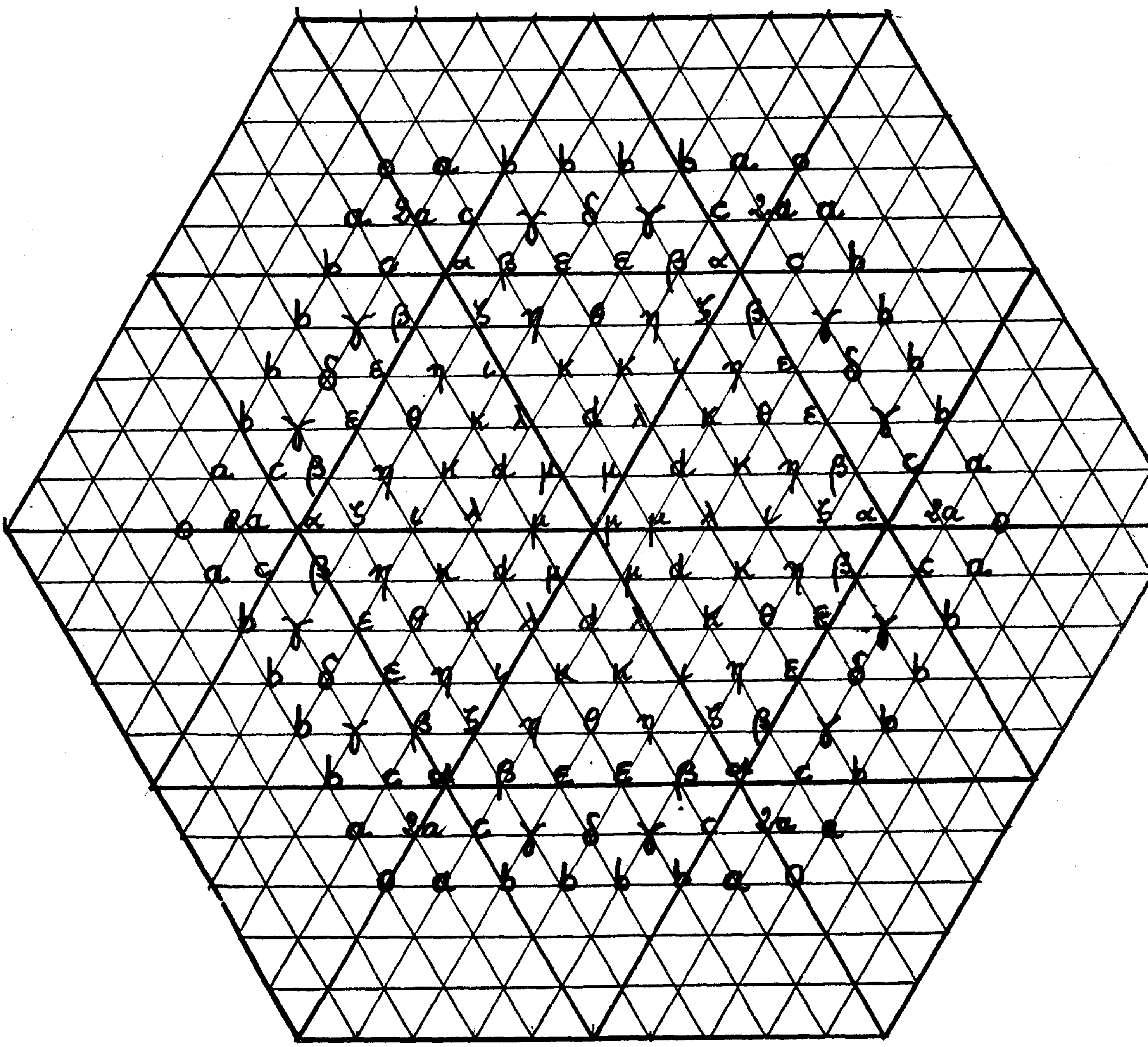


Figure 21

B-coefficients d'une spline de degré 5

à support H_2

BUS LILLE

$\alpha = 2(c-a)$ $\qquad$ $\eta = 6c - 11a$

$\beta = 3c - 4a$ $\qquad$ $\theta = 7c - 14a$

$\gamma = b + c - a$ $\qquad$ $\iota = 8c - 16a$

$\delta = 2b + c - 2a$ $\qquad$ $K = 11c - 22a - 2b$

$\varepsilon = b + 4c - 8a$ $\qquad$ $\lambda = 14c - 28a - 4b$

$\zeta = 4c - 6a$ $\qquad$ $\mu = 2d - 14c + 28a + 4b$

Si l'on impose la condition $\sum_{i,j} M_{ij}$ = constante, on obtient la relation :

$$2d - 2c + 16a + 4b = 30(c - 2a)$$

qui détermine les valeurs de d et μ :

$$\begin{cases} d = 16c - 38a - 2b \\ \mu = 18c - 48a \end{cases}$$

On vérifie alors que l'opérateur :

$$S_1 f(x, y) = \sum_{i,j} f(A_{ij}) M_{ij}(x, y)$$

reproduit $\mathbb{P}_1$ (c'est à dire $S_1 e_{10} = e_{10}$ et $S_1 e_{01} = e_{01}$).

Si l'on impose la condition $S_1 e_{11} = e_{11}$, et si l'on choisit arbitrairement $c - 2a = 4$, c'est à dire $\sum_{i,j} M_{ij} = 120$, on obtient la valeur de b :

$$S_1 e_{11} = e_{11} \Rightarrow b = 2$$

et les valeurs des paramètres sont alors :

$\alpha = 2a + 8$ $\qquad$ $\eta = a + 24$

$\beta = 2a + 12$ $\qquad$ $\theta = 28$

$\gamma = a + 6$ $\qquad$ $\iota = 32$

$\delta = 8$ $\qquad$ $K = 40$

$\varepsilon = 18$ $\qquad$ $\lambda = 48$

$\zeta = 2a + 16$ $\qquad$ $\mu = 72 - 12a$

et $d = 60 - 6a$

Si l'on impose maintenant la condition $S_1 e_{20} - e_{20} = S_1 e_{02} - e_{02}$ = constante comme dans les paragraphes précédents, on obtient $a = 1$ et :

$$S_1 e_{20} - e_{20} = S_1 e_{02} - e_{02} = (h^2/4)e_{oo}$$

La B-spline est alors entièrement déterminée (figure 22). Mais la valeur au centre (1/2) et les valeurs aux 6 sommets de l'hexagone central (1/12) sont les mêmes que celles de la B-spline quartique de la figure 12 En exprimant dans la base de Bernstein de $\mathbb{P}_5$ les polynômes composant cette B-spline, on constate que les deux B-splines sont identiques. **Autrement dit la B-spline de Sp(5,2) a dégénéré en la B-spline de Sp(4,2).**

11.3) B-splines de Lagrange

Au lieu de choisir a tel que l'erreur $S_1\, e_{20} - e_{20} = S_1\, e_{02} - e_{02}$ soit constante, on peut le choisir de manière à avoir $\alpha = 0$; on obtient alors une B-spline dont les valeurs aux noeuds (sauf au centre) sont nulles ; autrement dit une B-spline de Lagrange.

Les valeurs des coefficients sont alors :

$\alpha = 0$	$\eta = 20$	
$\beta = 4$	$\theta = 28$	$a = -4$
$\gamma = 2$	$\iota = 32$	$b = 2$
$\delta = 8$	$K = 40$	$c = -4$
$\varepsilon = 18$	$\lambda = 48$	$d = 84$
$\zeta = 8$	$\mu = 120$	

d'où la figure 23.

Par construction, S_1 est un **interpolant de f** reproduisant $\mathbb{Q}_1$, mais non $\mathbb{P}_2$. Il est possible aussi de laisser b arbitraire tout en conservant $\alpha = 0$, soit $c = a = -4$, $\beta = 4$, $\gamma = b$, $\delta = 2b+4$, $\varepsilon = b+16$, $\zeta = 8$, $\eta = 20$, $\theta = 28$, $\iota = 32$, $K = 44 - 2b$, $\lambda = 56 - 4b$, $\mu = 120$, $d = 88 - 2b$. On choisirait alors b de manière à minimiser l'erreur maximale $S_1\, f - f$ lorsque $f = e_{20}$, e_{11} ou e_{02} ; mais on n'obtiendra qu'une erreur en $O(h^2)$ quel que soit le choix de b. Le cas $n = 5$, $k^*(n) = 2$ ne semble pas très intéressant pour les applications.

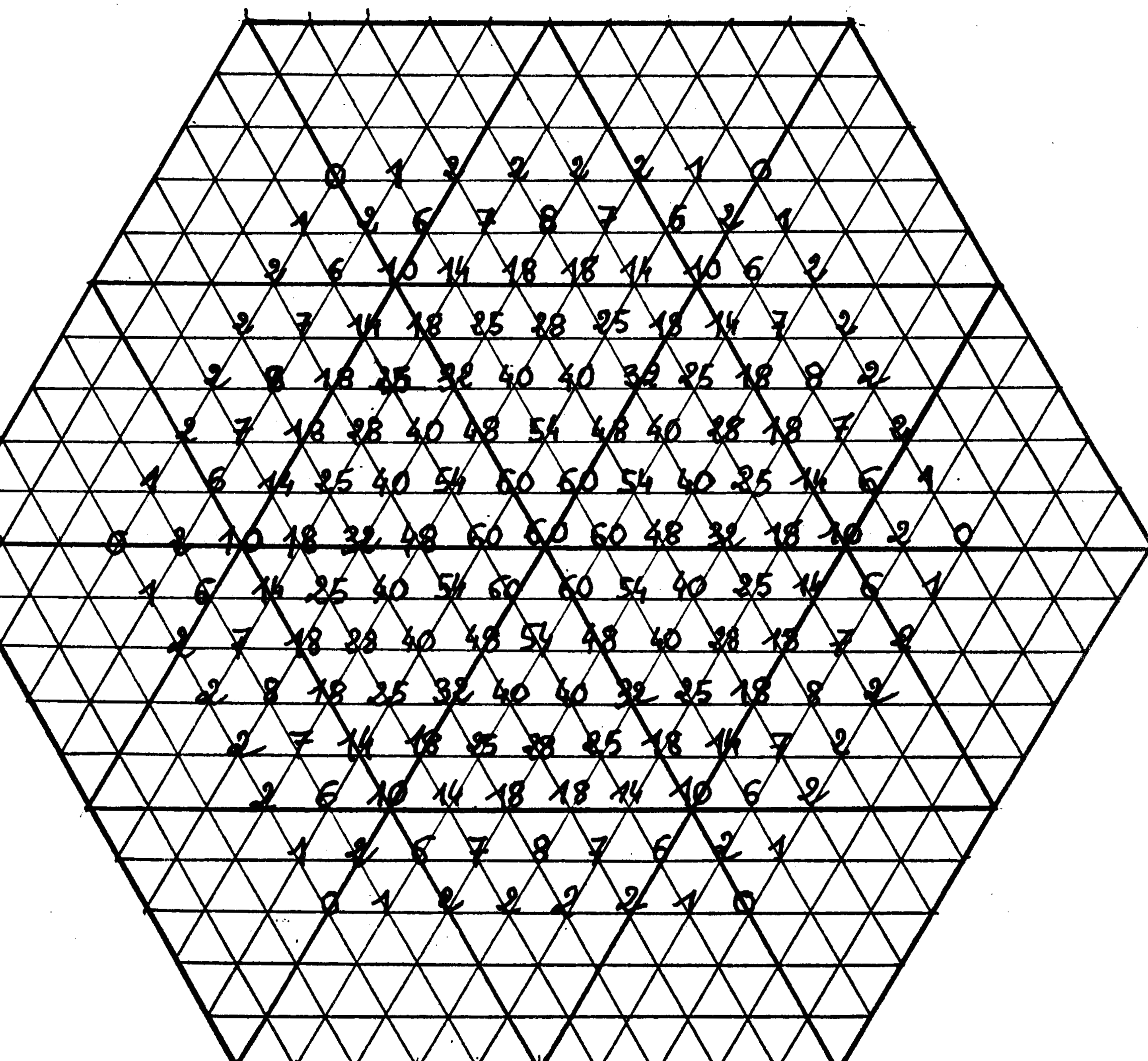


Figure 22

B-spline de Sp(5, 2) ayant dégénéré

en B-spline de Sp(4, 2)

BUS LILLE

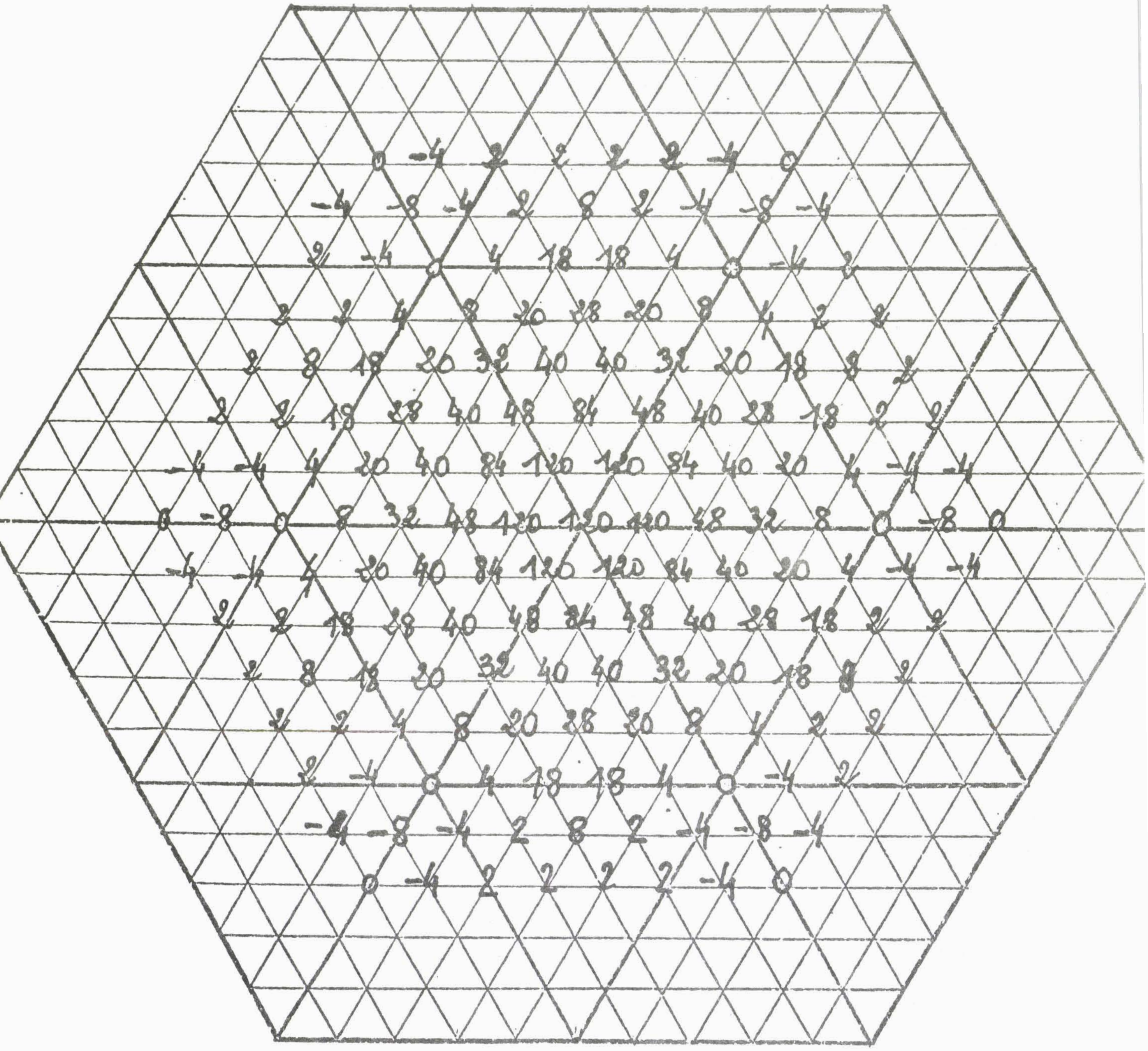
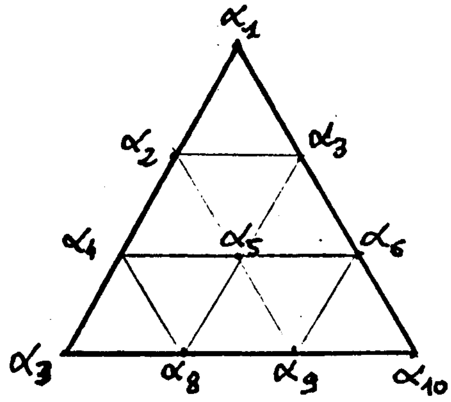


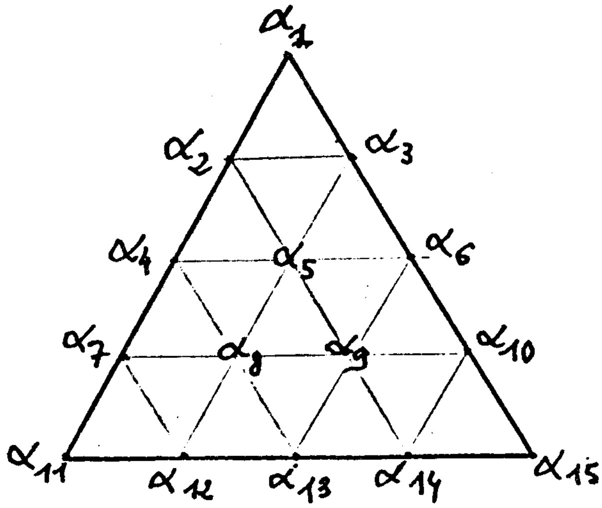
Figure 23

B-spline de Lagrange de Sp(5, 2)

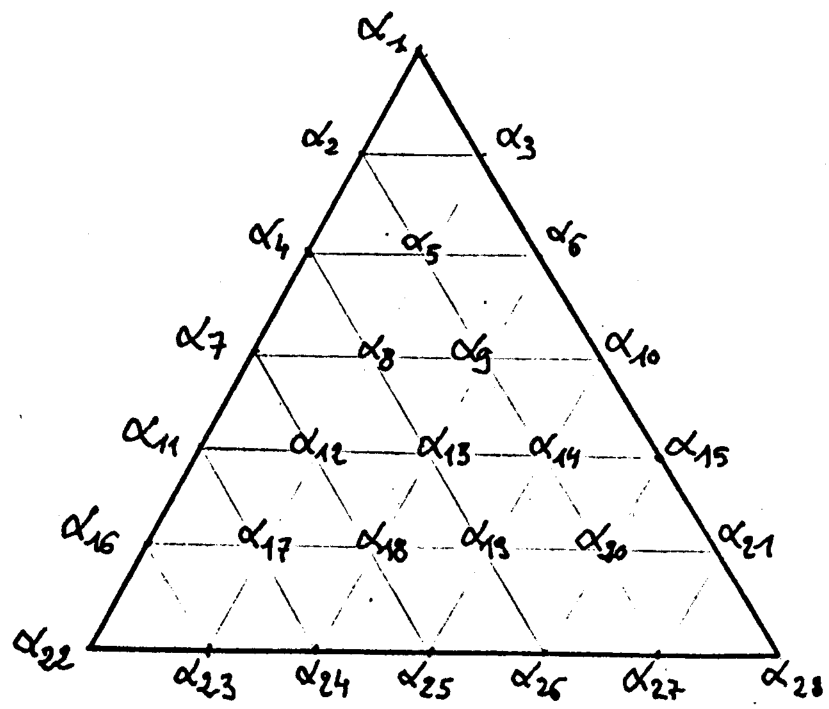
BUS LILLE



cubiques



quartiques

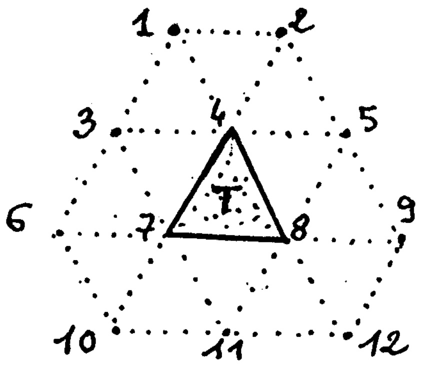


sextiques

Figure 24

Numérotation des B-coefficients pour l'étude de l'erreur

BUS LILLE



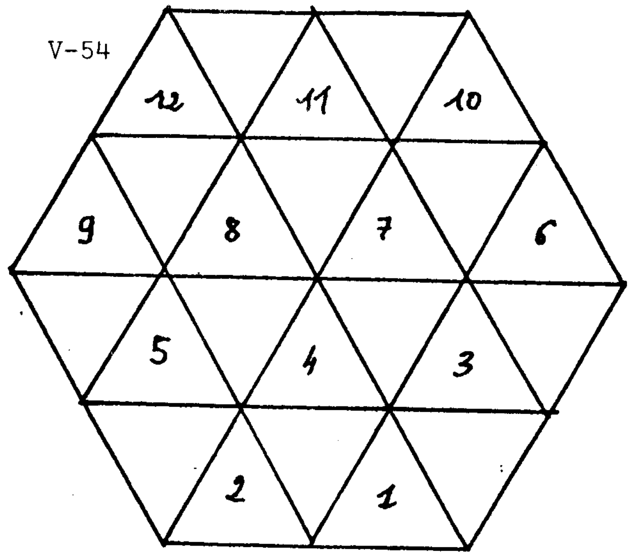


figure 25

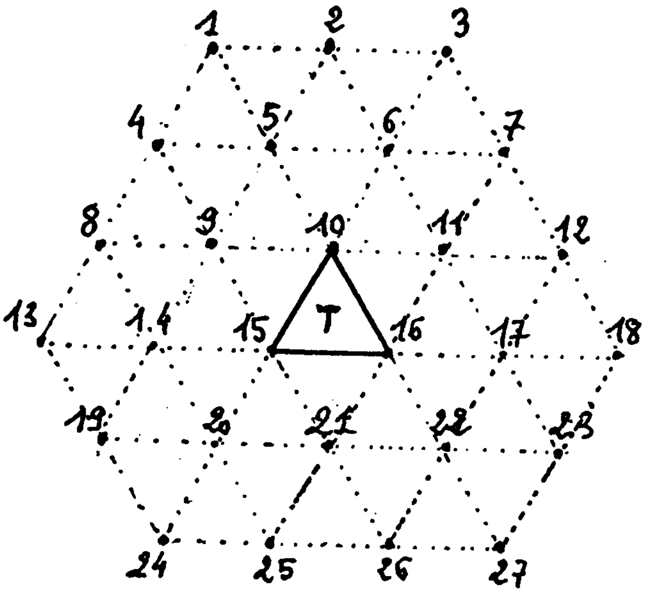
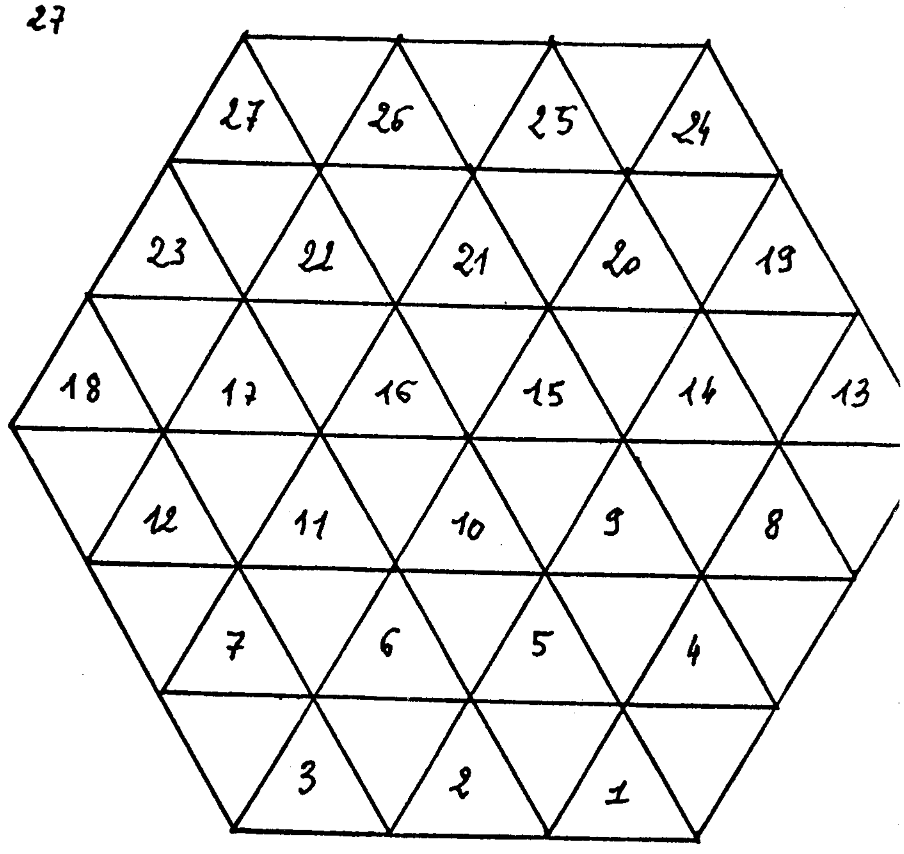


figure 26



BUS LILLE

XII - MAJORATIONS D'ERREUR. QUELQUES RÉSULTATS POUR L'OPÉRATEUR S_1

Donnons maintenant quelques majorations pour l'erreur

$$||u - S_1\, u||_{\infty,T} = \max_{x\in T} |u(x) - S_1\, u(x)|$$

où T est un triangle quelconque du réseau de sommets $\{a_4, a_7, a_8\}$, les centres des supports des B-splines M_j recouvrant T étant les sommets numérotés de 1 à 12 (figure 25) pour les cubiques et les quartiques. Pour les sextiques, le triangle $T = \{a_{10}, a_{15}, a_{16}\}$ est recouvert par les supports des B-splines centrées en $a_1, a_2, \ldots, a_{27}$ (figure 26). On note $\hat{T}$ la région enveloppe convexe de $\{a_1, a_2, a_6, a_9, a_{10}, a_{12}\}$ pour la figure 25 et de $\{a_1, a_3, a_{13}, a_{18}, a_{24}, a_{27}\}$ pour la figure 26.

Lorsque $u \in C^k(\hat{T})$, on note :

$$\hat{\omega}_k(h) = \max_{i+j=k} \{\omega(\partial_{ij}\, u, h, \hat{T})\}$$

où $\omega(\partial_{ij}\, u, h, \hat{T})$ est le module de continuité de $\partial_{ij} u = \partial^{i+j}u/\partial x_1^i\, \partial x_2^j$ sur la région $\hat{T}$.

Pour simplifier, on désigne par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ les B-coefficients du polynôme $S_1\, u$ sur T (p = 10 pour les cubiques, 15 pour les quartiques et 28 pour les sextiques) : il résulte des propriétés de la base de Bernstein que $|\alpha_i - u(x)| \le \varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, p$ implique $|S_1\, u(x) - u(x)| \le \varepsilon$ pour $x \in T$.

Pour les cubiques par exemple, en posant $u_j = u(a_j)$, en utilisant la figure 10 et l'expression $S_1\, u$ sur T :

$$S_1\, u(x) = \sum_{j=1}^{12} u_j . M_j(x)$$

on obtient comme B-coefficients (fig. 24) :

$$9\alpha_1 = u_1 + u_2 + u_3 + 3u_4 + u_5 + u_7 + u_8$$

$$18\alpha_2 = u_1 + 3u_3 + 6u_4 + u_5 + 4u_7 + 3u_8$$

$$18\alpha_5 = u_3 + 5u_4 + u_5 + 5u_7 + 5u_8 + u_{11}$$

et des formules analogues pour les autres α_i.

Lorsque $x \in T$, les distances de x à a_1, a_2, a_3 , a_5 et a_{11} sont majorées par $2h$ et les distances de x à a_4, a_7 et a_8 par h, on en déduit ; si $u \in C^o(\hat{T})$:

$$9|\alpha_1 - u(x)| \leq 4\hat{\omega}_o(2h) + 5\hat{\omega}_o(h) \leq 13\hat{\omega}_o(h)$$

$$18|\alpha_2 - u(x)| \leq 5\hat{\omega}_o(2h) + 13\hat{\omega}_o(h) \leq 23\hat{\omega}_o(h)$$

$$18|\alpha_5 - u(x)| \leq 3\hat{\omega}_o(2h) + 15\hat{\omega}_o(h) \leq 21\hat{\omega}_o(h)$$

et des majorations analogues pour les autres α_i ; dans tous les cas, on a :

$|\alpha_i - u(x)| \leq \frac{13}{9}\hat{\omega}_o(h)$ pour $x \in T$, d'où :

$$||u - S_1 u||_{\infty,T} \leq \frac{13}{9}\hat{\omega}_o(h) \text{ si } u \in C^o(\hat{T})$$

Pour les quartiques, on obtient (figures 12 et 24)

$$12\alpha_1 = u_1 + u_2 + u_3 + 6u_4 + u_5 + u_7 + u_8$$

$$24\alpha_2 = u_1 + 3u_3 + 12u_4 + u_5 + 4u_7 + 3u_8$$

$$6\alpha_4 = u_3 + 2u_4 + 2u_7 + u_8$$

$$24\alpha_5 = u_3 + 10u_4 + u_5 + 6u_7 + 6u_8$$

d'où les majorations :

$$|\alpha_1 - u(x)| \leq \frac{4}{3}\hat{\omega}_o(h), \quad |\alpha_2 - u(x)| \leq \frac{29}{24}\hat{\omega}_o(h)$$

$$|\alpha_4 - u(x)| \leq \frac{7}{6}\hat{\omega}_o(h), \quad |\alpha_5 - u(x)| \leq \frac{13}{12}\hat{\omega}_o(h)$$

d'où l'on déduit

$$||u - S_1 u||_{\infty,T} \leq \frac{4}{3}\hat{\omega}_o(h) \quad \text{si } u \in C^o(\hat{T})$$

Pour les sextiques, on obtient (figures 13, 24 et 26)

$$\begin{aligned} 360\alpha_1 = {} & u_1 + 4u_2 + u_3 + 4u_4 + 39u_5 + 39u_6 + 4u_7 + u_8 + u_8 \\ & + 39u_9 + 96u_{10} + 39u_{11} + 4u_{12} + 4u_{14} + 39u_{15} \\ & + 39u_{16} + 4u_{17} + u_{20} + 4u_{21} + u_{22} \end{aligned}$$

qui donne l'écart maximum

$$|\alpha_1 - u(x)| \leq \frac{281}{180}\hat{\omega}_o(h)$$

Pour le B-coefficient central :

$$\begin{aligned} 2160\alpha_{13} = {} & u_4 + 50u_5 + 50u_6 + u_7 + u_8 + 164u_9 + 454u_{10} \\ & + 164u_{11} + u_{12} + 50u_{14} + 454u_{15} + 454u_{16} \\ & + 50u_{17} + 50\,u_{20} + 164u_{21} + 50u_{22} + u_{25} + u_{26} \end{aligned}$$

On obtient en effet la majoration :

$$|\alpha_{13} - u(x)| \leq \frac{247}{180}\,\hat{\omega}_o(h) \leq \frac{281}{180}\,\hat{\omega}_o(h)$$

et l'on a également $|\alpha_i - u(x)| \leq \frac{281}{180}\,\hat{\omega}_o(h)$ pour les autres B-coefficients par conséquent :

$$||u - S_1\, u||_{\infty,T} \leq \frac{281}{180}\,\hat{\omega}_o(h)$$

Résumons ces résultats dans le :

<u>Théorème 9</u> : *Soit* T *un triangle du réseau* R_h, $\hat{T}$ *l'enveloppe convexe des centres des supports des B-splines recouvrant* T *et* $u \in C^o(\hat{T})$. *On a les majorations suivantes* :

$$||u - S_1\, u||_{\infty,T} \leq k_i\, \hat{\omega}_o(h) \qquad i = 3,\ 4,\ 6$$

avec $k_3 = 13/9 = 1{,}4444\ \ldots$ *pour les cubiques*

$k_4 = 4/3 = 1{,}3333\ \ldots$ *pour les quartiques*

$k_6 = 281/180 = 1{,}56111\ \ldots$ *pour les sextiques.*

<u>Remarque</u> : Le théorème s'applique à toute région Ω réunion d'un nombre fini de triangles T ; $\hat{\Omega}$ étant la réunion des $\hat{T}$ correspondants, on aura $||u - S_1\, u||_{\infty,\Omega} \leq k_i \hat{\omega}_o(h)$, où $\hat{\omega}_o$ est le module de continuité de $u \in C^o(\hat{\Omega})$.

Donnons maintenant des résultats pour $u - S_1\, u$, lorsque $u \in C^2(\hat{T})$ et $S_1\, u$ est une spline cubique.

<u>Théorème 10</u> : *Si* $u \in C^2(\hat{T})$ *et* $S_1\, u \in Sp(3,\ 1)$, *on a les majorations suivantes* (g *est le barycentre de* T) :

$$||u - S_1\, u||_{\infty,T} \leq \frac{h^2}{6}\,|\Delta u(g)| + 2h^2\hat{\omega}_2(h)$$

$$||\partial_{ij}\, u - \partial_{ij}\, S_1\, u||_{\infty,T} \le 4h\, \hat{\omega}_2\,(h) \qquad (i+j = 1)$$

$$||\partial_{ij}\, u - \partial_{ij}\, S_1\, u||_{\infty,T} \le 3{,}2\, \hat{\omega}_2(h) \qquad (i+j = 2)$$

<u>Preuve</u> :

1) Etude $u - S_1\, u$

Soit g le barycentre de T. La formule de Taylor donne :

$$u(x) = u(g) + Du(g).(x-g) + \frac{1}{2}\, D^2u(g).(x-g)^2$$
$$+ \frac{1}{2}[D^2u(\tilde{x}) - D^2u(g)].(x-g)^2,\ \tilde{x} \in [g,\, x]$$

$$u(a_j) = u(g) + Du\,(g).(a_j-g) + \frac{1}{2}\, D^2\, u(a_j).(a_j-g)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\, [D^2u(\tilde{a}_j) - D^2u(g)].(a_j-g)^2,\ \tilde{a}_j \in [g,a_j]$$

En vertu du théorème 6, si $v(x) = Du(g).(x-g)$ et $w(x) = \frac{1}{2}\, D^2u(g).(x-g)^2$, on a : $S_1v(x) = v(x)$ et $S_1w(x) - w(x) = \frac{h^2}{6}\, \Delta u(g)$

Il en résulte que :

$$S_1u(x) - u(x) = \frac{h^2}{6}\, \Delta u(g) + \frac{1}{2} \sum_j M_j(x)\, [D^2u(\tilde{a}_j) - D^2u(g)].(a_j-g)^2$$
$$- \frac{1}{2}\, [D^2u(\tilde{x}) - D^2u(g)].(x-g)^2$$

En posant δ_j = distance de g à a_j, on a :

$$\frac{1}{2}\, |[D^2u(\tilde{a}_j) - D^2u(g)](a_j-g)^2| \le \frac{1}{2}\, \hat{\omega}_2\, (\delta_j).(||a_j-g||_1)^2 \qquad (1 \le j \le 12)$$

Le B-coefficient α_1 de la somme ci-dessus est majoré par :

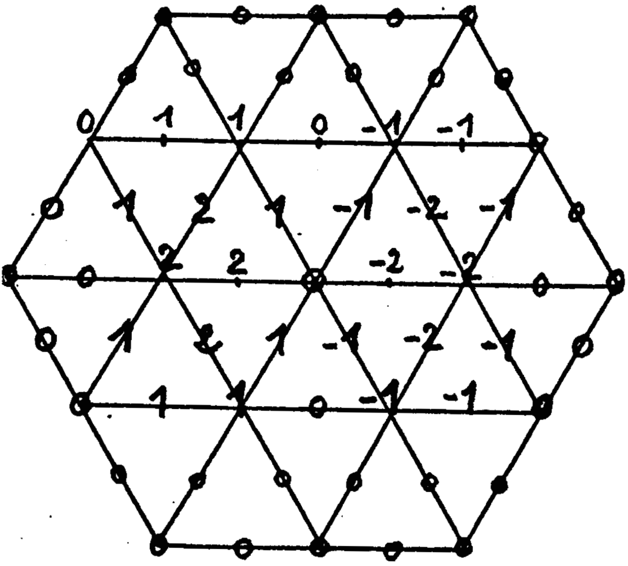
$$h^2\, \hat{\omega}_2(h)\, \frac{1}{18}\, \{4(\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6})^2 + 4(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 3\, (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})^2\} \le 1{,}6\, h^2\, \hat{\omega}_2(h)$$

et $\frac{1}{2}\, |[D^2\, u(x) - D^2u(g)].(x-g)^2| \le h^2\, \hat{\omega}_2(h) \times 0{,}4.$

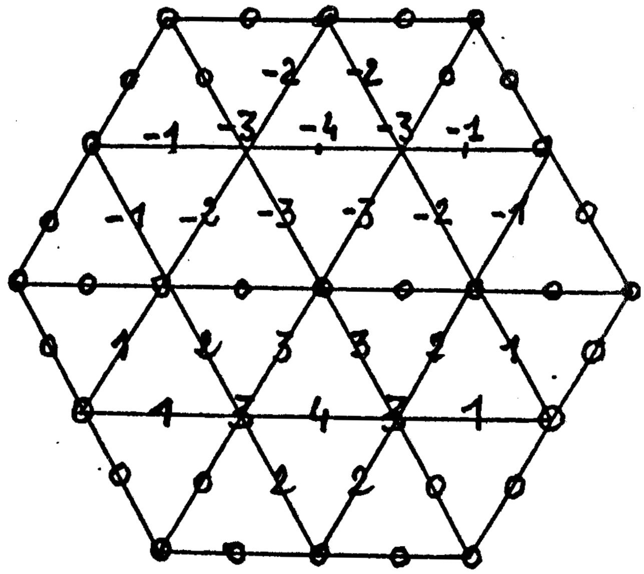
d'où l'on déduit :

$$|\alpha_1 - u(x)| \le \frac{h^2}{6}\, |\Delta u(g)| + 2h^2\, \hat{\omega}_2(h)$$

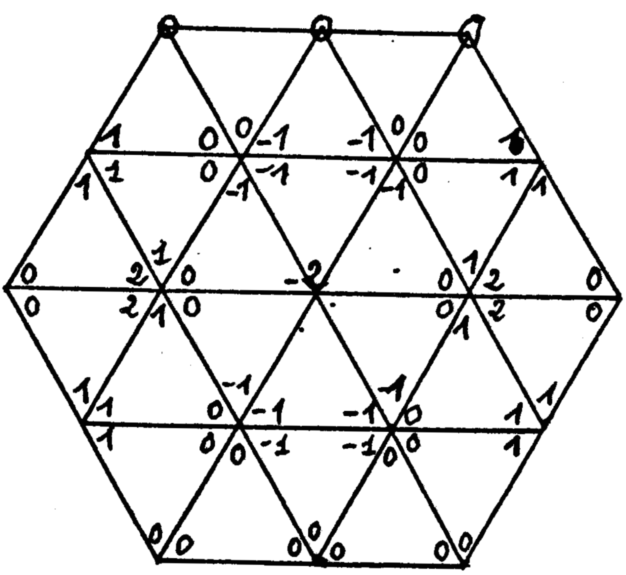
La même majoration étant valable pour tous les α_i, on a le résultat sur $||u - S_1u||_{\infty,T}$.



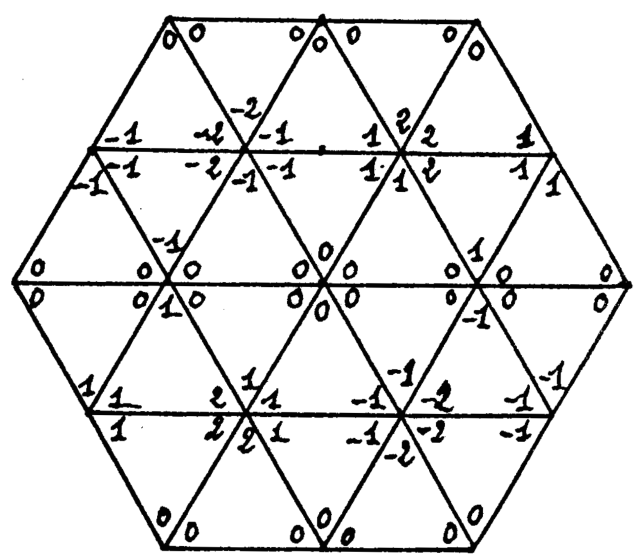
$6h\partial_{10}M_j$



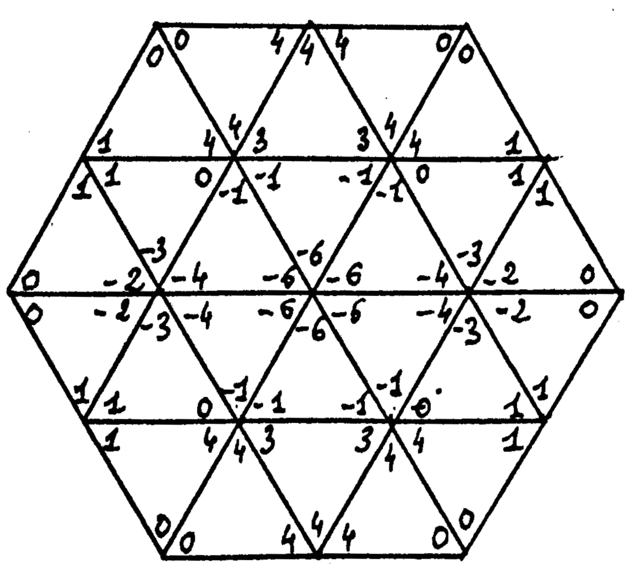
$6h\sqrt{3}\partial_{01}M_j$



$3h^2\partial_{20}M_j$



$3h^2\sqrt{3}\partial_{11}M_j$



$9h^2\partial_{02}\,M_j$

Figure 27

Dérivées de la B-spline cubique

BUS LILLE

2) Etude de $\partial_{10} S_1u - \partial_{10} u$ et de $\partial_{01} S_1u - \partial_{01} S_1u$.

$$\partial_{10} u(x) = \partial_{10} u(g) + D\partial_{10} u(g) . (x-g) + [D\partial_{10}u(\tilde{x}) - D\partial_{10} u(g)].(x-g)$$

avec $\tilde{x} \in [g, x]$

$$\partial_{10} S_1 u(x) = \sum_j u(a_j) \partial_{10} M_j(x)$$
$$= \partial_{10}u(g)+D\partial_{10}u(g).(x-g) + \frac{1}{2} \sum_j \partial_{10}M_j(x)[D^2u(\tilde{a}_j)-D^2u(g)].(a_j-g)^2$$

avec $\tilde{a}_j \in [g, a_j]$

en effet $\sum_j u(g) . \partial_{10}M_j(x) = \partial_{10}[u(g)] = 0$ car $\sum_j M_j(x) = 1$

$$\sum_j \partial_{10}M_j(x) . Du(g).(a_j-g) = \partial_{10}[Du(g).(x-g)] = \partial_{10} u(g)$$

et $\{\frac{1}{2} \sum_j \partial_{10} M_j(x) D^2u(a_j).(a_j-g)^2 - \frac{1}{2} \partial_{10} D^2u(g).(x-g)^2\}$

$$= \frac{h^2}{6} \partial_{10}\{\Delta u(g)\} = 0$$

donc $D\partial_{10} u(g).(x-g) = \frac{1}{2} \sum_j \partial_{10} M_j(x).D^2u(a_j).(a_j-g)^2$

on obtient alors :

$$\partial_{10} S_1u(x) - \partial_{10}u(x) = \frac{1}{2} \sum_j \partial_{10} M_j(x) [D^2u(\tilde{a}_j) - D^2u(g)] .(a_j-g)^2$$
$$- [D\partial_{10}u(\tilde{x}) - D_{10}u(g)].(x-g)$$

En désignant par $\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$ les B-coefficients de la somme ci-dessus, on obtient à l'aide des B-coefficients de $\partial_{10} M_j$:

$$\beta_1 = \frac{1}{6h} \{\lambda_2 - \lambda_1 + 2(\lambda_5 - \lambda_3) + \lambda_8 - \lambda_7\}$$
$$\beta_2 = \frac{1}{6h} \{-2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 + 2\lambda_8\}$$

D'autre part, on a :

$$|\lambda_j| \leq \frac{1}{2} \hat{\omega}_2(\delta_j) . (||a_j-g||_1)^2 \text{ pour tout } j = 1, \ldots, 12$$

donc $|\beta_1| \leq h \hat{\omega}_2(h) . \frac{1}{12} \{4(\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6})^2 + 8 (1 + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})^2\}$

$$|\beta_2| \leq h \hat{\omega}_2(h) . \frac{1}{12} \{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 6(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 3(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})^2 + 2(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})^2\}$$

soit $|\beta_1| \leq h \hat{\omega}_2(h) \times 3,03$ et $|\beta_2| \leq h \hat{\omega}_2(h) \times 1,96$

on ajoute alors la majoration de :

$$|[D\partial_{10}u(\tilde{x}) - D\partial_{10}u(g)].(x-g)| \le h\,\hat{\omega}_2(h).(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}) \sim h.\hat{\omega}_2(h) \times 0{,}8$$

ce qui donne :

$$||\partial_{10}\, S_1u - \partial_{10}u||_{\infty,T} \le 4h.\hat{\omega}_2(h)$$

La même étude est valable pour $\partial_{01}u - \partial_{01}\, S_1u$, à l'aide des B-coefficients de $\partial_{01}\, M_j$ (figure 27), et l'on obtient la même majoration.

3) étude de $\partial_{ij}\, S_1u - \partial_{ij}\, u$ pour $i+j = 2$

Nous donnons seulement l'étude complète de $\partial_{11}\, S_1u - \partial_{11}\, u$ qui donne la plus forte majoration. En notant $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ les B-coefficients de $\partial_{11}S_1u$ sur T, on obtient à l'aide des B-coefficients de $\partial_{11}\, M_j$ (figure 27) les relations suivantes :

$$\gamma_1 = \frac{1}{3h^2\sqrt{3}}\{-2u_1 + 2u_2 - u_3 + u_5 + u_6 + u_7 - u_8 - u_9\}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{3h^2\sqrt{3}}\{-2u_3 + u_4 + u_5 + 2u_{10} - u_{11} - u_{12}\}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{3h^2\sqrt{3}}\{-u_3 - u_4 + 2u_5 + u_{10} + u_{11} - 2u_{12}\}$$

En notant $\partial_{ij}\,\tilde{u}_j = \partial_{ij}u(\tilde{a}_j)$ pour $i+j = 2$, avec $\tilde{a}_j \in [a_4, a_j]$, on a :

$$u_1 = u_4 - \frac{h}{2}\,\partial_{10}u_4 + h\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\partial_{01}u_4 + \frac{h^2}{8}\,\partial_{20}\tilde{u}_1 - h^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,\partial_{11}\tilde{u}_1 + \frac{3}{8}\,h^2\,\partial_{02}\tilde{u}_1$$

$$u_2 = u_4 + \frac{h}{2}\,\partial_{10}u_4 + h\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\partial_{01}u_4 + \frac{h^2}{8}\,\partial_{20}\tilde{u}_2 + h^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,\partial_{11}\tilde{u}_2 + \frac{3}{8}\,h^2\,\partial_{02}\tilde{u}_2$$

$$u_3 = u_4 - h\,\partial_{10}u_4 + \frac{1}{2}\,h^2\,\partial_{20}\tilde{u}_3$$

$$u_5 = u_4 + h\,\partial_{10}u_4 + \frac{1}{2}\,h^2\,\partial_{20}\tilde{u}_5$$

$$u_6 = u_4 - \frac{3}{2}\,h\,\partial_{10}u_4 - h\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\partial_{01}u_4 + \frac{9}{8}\,h^2\partial_{20}\tilde{u}_6 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,h^2\partial_{11}\tilde{u}_6 + \frac{3}{8}\,h^2\,\partial_{02}\tilde{u}_6$$

$$u_7 = u_4 - \frac{h}{2}\,\partial_{10}u_4 - h\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\partial_{01}u_4 + \frac{h^2}{8}\,\partial_{20}\tilde{u}_7 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,h^2\,\partial_{11}\tilde{u}_7 + \frac{3}{8}\,h^2\,\partial_{02}\tilde{u}_7$$

$$u_9 = u_4 + \frac{3}{2}\,h\,\partial_{10}\,u_4 - h\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\partial_{01}\,u_4 + \frac{9}{8}\,h^2\,\partial_{20}\tilde{u}_9 - \frac{3}{4}\,\sqrt{3}h^2\,\partial_{11}\,\tilde{u}_9 + \frac{3}{8}\,h^2\,\partial_{02}\,\tilde{u}_9$$

D'où l'on déduit :

$$\gamma_1 - \partial_{11}u(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\ \{\tfrac{1}{4}(\partial_{20}\tilde{u}_2 - \partial_{20}\tilde{u}_1) + \tfrac{1}{2}(\partial_{20}\tilde{u}_5 - \partial_{20}\tilde{u}_3)$$

$$+ \frac{9}{8}\ (\partial_{20}\tilde{u}_6 - \partial_{20}\tilde{u}_9) + \frac{1}{8}(\partial_{20}\tilde{u}_7 - \partial_{20}\tilde{u}_8) + \frac{3}{4}(\partial_{02}\tilde{u}_2 - \partial_{02}\tilde{u}_1)$$

$$+ \frac{3}{8}\ (\partial_{02}\tilde{u}_6 - \partial_{02}\tilde{u}_9) + \frac{3}{8}(\partial_{02}\tilde{u}_7 - \partial_{02}\tilde{u}_8)$$

$$+ \frac{1}{4}\sqrt{3}\ (2\partial_{11}\tilde{u}_2 + 2\partial_{11}\tilde{u}_1 + 3\partial_{11}\tilde{u}_6 + \partial_{11}\tilde{u}_7 + \partial_{11}\tilde{u}_8 + 3\partial_{11}\tilde{u}_9 - 12\partial_{11}u(x))\}$$

et la majoration :

$$|\gamma_1 - \partial_{11}u(x)| \leq \hat{\omega}_2(h)\ .\ \frac{1}{3\sqrt{3}}\ \{7 + \frac{11}{2}\sqrt{3}\} \leq 3{,}2.\hat{\omega}_2(h)$$

De même, pour γ_2, on a :

$$u_4 = u_3 + h\ \partial_{10}\ u_3 + \frac{1}{2}\ h^2\ \partial_{20}\ \tilde{u}_4 \qquad \tilde{a}_4 \in [a_3,\ a_4].$$

$$u_5 = u_3 + 2h\ \partial_{10}\ u_3 + 2h^2\ \partial_{20}\ \tilde{u}_5 \qquad \tilde{a}_5 \in [a_3,\ a_5]$$

$$u_{11} = u_{10} + h\ \partial_{10}\ u_{10} + \frac{1}{2}\ h^2\ \partial_{20}\ \tilde{u}_{11} \qquad \tilde{a}_{10} \in [a_{10},\ a_{11}]$$

$$u_{12} = u_{10} + 2h\partial_{10}\ u_{10} + 2h^2\ \partial_{20}\ \tilde{u}_{12} \qquad \tilde{a}_{12} \in [a_{10},\ a_{12}]$$

et en utilisant $\partial_{10}u_3 - \partial_{10}u_{10} = h\sqrt{3}\ \partial_{11}\ \tilde{u}_3$, $\quad \tilde{a}_3 \in [a_3,\ a_{10}]$,

on obtient :

$$|\gamma_2 - \partial_{11}u(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}\ \{3\sqrt{3}\ |\partial_{11}\ \tilde{u}_3 - \partial_{11}\ u(x)| +$$

$$\frac{1}{2}\ |\partial_{20}\tilde{u}_4 - \partial_{20}\tilde{u}_{11}| + 2\ |\partial_{20}\ \tilde{u}_5 - \partial_{20}\tilde{u}_{12}|\}$$

$$\leq \hat{\omega}_2(h)\ .\ \{\frac{18+5\sqrt{3}}{3}\} \leq 3\hat{\omega}_2(h).$$

Les calculs étant du même type pour γ_3, on a :

$$||\partial_{11}\ S_1u - \partial_{11}u||_{\infty,T} \leq 3{,}2\ .\ \hat{\omega}_2(h)$$

L'étude est analogue pour $||\partial_{20}\ S_1u - \partial_{20}u||_{\infty,T}$ et $||\partial_{02}S_1u - \partial_{02}u||_{\infty,T}$ et le théorème est démontré.

<u>Remarque</u> : Si $u \in C^1(\hat{T})$, on peut démontrer que :

$$||u - S_1u||_{\infty,T} \leq 3h\ \hat{\omega}_1(h)$$

$$||\partial_{10}u - \partial_{10}S_1u||_{\infty,T} \text{ et } ||\partial_{01}u - \partial_{01}S_1u||_{\infty,T} \leq 2{,}5\ \hat{\omega}_1(h)$$

XIII - MAJORATIONS D'ERREUR POUR LES OPÉRATEURS S_2 ET S_3

Nous donnons quelques résultats partiels, pour les opérateurs S_2 et S_3, concernant $||u - Su||_{\infty,T}$ lorsque u est de classe C^k avec $k \geq 3$.

Théorème 11 : Soit g *le centre de gravité de* T *et*

$$M_k(g) = \max_{i+j=k} \{|\partial_{ij}\, u(g)|\} \; . \quad (k = 3 \text{ ou } 4)$$

(i) pour les cubiques C^1 *et* $u \in C^3(\hat{T})$, *on a :*

$$||S_2u-u||_{\infty,T} \leq 0{,}06h^3M_3(g) + 1{,}6h^3\hat{\omega}_3(h)$$

(ii) pour les quartiques C^2 *et* $u \in C^4(\hat{T})$:

$$||S_2u-u||_{\infty,T} \leq \frac{1}{24}\, h^4M_4(g) + 0{,}61\; h^4\hat{\omega}_4(h)$$

(iii) pour les sextiques C^3 *et* $u \in C^4(\hat{T})$:

$$||S_2u-u||_{\infty,T} \leq \frac{83}{2880}\, h^4\; |\Delta^2u(g)| + 1{,}75h^4\hat{\omega}_4(h)$$

Théorème 12: Pour $u \in C^5(\hat{T})$ *et* $S_3u \in Sp(6,3)$, *si l'on pose*

$$M_5(g) = \max_{i+j=5} \{|\partial_{ij}u(g)|\}$$

on obtient

$$||S_3u-u||_{\infty,T} \leq \frac{1}{375}\; h^5\; M_5(g) + 1{,}3\; h^5\; \hat{\omega}_5\; (h)$$

13.1) Preuve du théorème 11

1) Etude de S_2u-u quand $u \in C^3(\hat{T})$ et $S_2\, u \in Sp(3,1)$

$$S_2u(x) = \sum_j M_j(x).(u_j - \frac{h^2}{6}\Delta u_j)$$

$$u(x) = \sum_{k=o}^{3} \frac{1}{k!} D^k u(g).(x-g)^k + \frac{1}{6}[D^3u(x) - D^3\tilde{u}(g)].(x-g)^3 \text{ avec } \tilde{x} \in [g,x].$$

avec un développement analogue pour $u_j = u(a_j)$

et $\tilde{a}_j \in [g, a_j]$ $(1 \leq j \leq 12)$

$$\Delta u(a_j) = \Delta u(g) + D\Delta u(g).(a_j-g) + [D\Delta u(a_j) - D\Delta u(g)] \; . \; (a_j-g)$$

avec $\tilde{x} \in [g, a_j]$

Posons $w(x) = \frac{1}{6} D^3u(g) \; . \; (x-g)^3 \in \mathbb{P}_3$

On a alors $\Delta w(x) = D\Delta u(g) \; . \; (x-g)$ et en vertu du théorème 6 :

$$S_3w(x) - w(x) = \frac{1}{6} \sum_j \sum_j M_j(x) \; [D^3u(g).(a_j-g)^3 - h^2D\Delta u(g).(a_j-g)] - w(x)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i+j=3} \binom{3}{i} \partial_{ij}u(g).[S_2e_{ij} - e_{ij}]$$

On a alors la majoration

$$|S_3w(x) - w(x)| \leq \frac{1}{6} M_3(g) \sum_{i+j=3} \binom{3}{i} ||S_2 \, e_{ij} - e_{ij}||_\infty$$

qui d'après le théorème 6,(ii) est $\leq 0{,}06 \; h^3 \; M_3(g)$

On en déduit

$$|S_2u(x) - u(x)| \leq |S_3w(x) - w(x)| + \frac{1}{6} \hat{\omega}_2(h).(||x-g||_1)^3$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_j M_j(x) \; \{|(D^3u(\tilde{a}_j) - D^3u(g)).(a_j-g)^3| + h^2|(D\Delta u(\hat{a}_j) - D\Delta u(g)).(a_j-g)|\}$$

Le coefficient de M_j est majoré par :

$$\lambda_j = \hat{\omega}_3(\delta_j).(||a_j-g||_1)^3 + 2h^2\hat{\omega}_3(\delta_j).||a_j-g||_1$$

où δ_j est la distance euclidienne de g à a_j.

Pour $j = 1,2$: $||a_j-g||_1 = h(\frac{1}{2} + 5\sqrt{3}/6)$, $\delta_j \leq 2h$

$j = 3,5$: $||a_j-g||_1 = h(1 + \sqrt{3}/3)$, $\delta_j \leq 2h$

$j = 4$: $||a_4-g||_1 = h\sqrt{3}/3$, $\delta_4 \leq h$

$j = 7,8$: $||a_j-g||_1 = h(1/2 + \sqrt{3}/6)$, $\delta_j \leq h$

Le B-coefficient α_1 de $\frac{1}{6} \sum \lambda_j \; M_j(x)$ est donc majoré par

$$|\alpha_1| \leq \frac{1}{54} \hat{\omega}_3(h) \; \{4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 2\varepsilon_7\}$$

où $\quad \varepsilon_j = (||a_j - g||_1)^3 + 2||a_j-g||_1$

soit $|\alpha_1| \leq 1{,}508.\ h^3.\hat{\omega}_3(h)$. Cette majoration est valable pour les autres B-coefficients et comme $\frac{1}{6}||x-g||_1^3 \leq 0{,}082.h^3$, on obtient :

$$||S_2u-u||_{\infty,T} \leq 0{,}06\ h^3M_3(g) + 1{,}6.h^3\ \hat{\omega}_3(h)$$

2) Etude de S_2u-u quand $u \in C^4(\hat{T})$ et $S_2\ u \in Sp(4,2)$

$$S_2u(x) = \sum_j M_j(x)(\ u_j - \frac{h^2}{8}\ \Delta u_j)$$

On utilise la même technique et un développement de Taylor à l'ordre 4.

En posant $w(x) = \frac{1}{24}\ D^4u(g).(x-g)^4$, on calcule $\Delta w(x) = \frac{1}{2}\ D^2\Delta u(g).(x-g)^2$ et on a la majoration suivante, d'après le théorème 7 :

$$|S_2w(x) - w(x)| \leq \frac{1}{24}\ M_4(g).\sum_{i+j=4} \binom{4}{i}\ ||S_2\ e_{ij} - e_{ij}||_\infty$$

$$\leq \frac{1}{24}\ h^4\ M_4(g)$$

d'où la majoration d'erreur :

$$|S_2u(x) - u(x)| \leq \frac{1}{24}\ \ h^4M_4(g) + \frac{1}{24}\ |[D^4u(x) - D^4u(g)]\ (x-g)^4|$$

$$+ \sum_j \frac{1}{24}\ M_j(x)\ \{|[D^4u(\tilde{a}_j) - D^4u(g)].(a_j-g)^4| + \frac{3}{2}\ h^2\ |[D^2\ u(\tilde{a}_j) - D^2\Delta u(g)].(a_j-g)^2|\}$$

Le coefficient de M_j est majoré par :

$$\lambda_j = \frac{1}{24}\ \hat{\omega}_4(\delta_j).\{(||a_j-g||_1)^4 + 3h^2(||a_j-g||_1)^2$$

et le B-coefficient α_1 de la somme $\sum_j \lambda_j\ M_j(x)$ est majoré par :

$$|\alpha_1| \leq \frac{1}{288}\ \hat{\omega}_4(h)\ \{4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 2\varepsilon_7\}$$

où $\varepsilon_j = (||a_j-g||_1)^4 + 3(||a_j-g||_1)^2$

ce qui donne $|\alpha_1| \leq 0{,}59\ h^4.\hat{\omega}_4(h)$

D'autre part, $(||x-g||_1)^4/24 \leq 0{,}01612\ h^4$

donc $||S_2u-u||_{\infty,T} \leq \frac{1}{24}\ h^4\ M_4(g) + 0{,}61.h^4\ \hat{\omega}_4(h)$

3) Etude de S_2u-u quand $u \in C^4(\hat{T})$ et $S_2u \in Sp(6,3)$.

$$S_2u(x) = \sum_j M_j(x)\ (u_j - \frac{11}{48} h^2\ \Delta a_j)$$

On utilise les résultats du théorème **8** et des développements de Taylor à l'ordre 4.

Si $w(x) = \frac{1}{24} D^4u(g).(x-g)^4$, on obtient :

$$S_2w(x) - w(x) = - \frac{83}{2880} h^4\{\partial_{40}u(g) + 2\partial_{22}\ u(g) + \partial_{04}u(g)\}$$

$$= - \frac{83}{2880} h^4\ \Delta^2u(g)$$

d'où la majoration d'erreur :

$$|S_2u(x) - u(x)| \leq \frac{83}{2880} h^4\ |\Delta^2u(g)| + \frac{1}{24} |(D^4u(\tilde{x}) - D^4u(g)).(x-g)^4|$$

$$+ \sum_j M_j(x)\ \frac{1}{24} \{|(D^4u(a_j)-D^4u(g))(a_j-g)^2| + \frac{11}{4} h^2\ |(D^2\Delta u(a_j)- D^2\ u(g)).(a_j-g)^2|\}$$

Le coefficient de M_j et majoré par :

$$\lambda_j = \frac{1}{24} . \hat{\omega}_4(\delta_j)\ \{(||a_j-g||_1)^4 + \frac{11}{2} h^2\ (||a_j-g||_1)^2\}$$

et le B-coefficient α_1 de $\sum_j \lambda_j\ M_j(x)$ est alors majoré par :

$$|\alpha_1|\quad \frac{\hat{\omega}_4\ (h)}{360x24} . \{6\varepsilon_1+12\varepsilon_2+24\varepsilon_4+156\varepsilon_5+6\varepsilon_8+156\varepsilon_9+96\varepsilon_{10}+16\varepsilon_{14}+78\varepsilon_{15}+4\varepsilon_{20}+8\varepsilon_{21}\}$$

où $\varepsilon_j = (||a_j-g||_1)^4 + 5,5\ h^2\ (||a_j-g||_1)^2$

ce qui donne $|\alpha_1| \leq 1,73\ h^4\ \hat{\omega}_4(h)$

et comme $\frac{1}{24} |(D^4u(\tilde{x}) - D^4u(g)).(x-g)^4| \leq 0,016\ h^4\ \hat{\omega}_4(h)$

on en déduit la majoration suivante (celle obtenue pour α_1 étant valable pour les autres α_j) :

$$||S_2u-u||_{\infty,T} \leq \frac{83}{2880} h^4\ |\Delta^2u(g)| + 1,75\ h^4\ \hat{\omega}_4(h)$$

13.2) <u>Preuve du théorème12</u>

$$S_3u(x) = \sum_j M_j(x)\ \{u_j - \frac{11}{48} h^2\ \Delta u_j + \frac{83}{2880} h^4\ \Delta^2u_j\}.$$

S_3 reproduit $\mathbb{P}_4$ et interpole $\mathbb{P}_5$ sur R_h, de plus :

$$||S_3 e_{ij} - e_{ij}||_\infty \leq h^5/100 \text{ pour } i+j=5$$

Posant $w(x) = \frac{1}{120} D^5 u(g).(x-g)^5$, on a :

$$||S_3 w - w||_\infty \leq \frac{1}{120} M_5(g).\ x\ \frac{32h^5}{100} = \frac{h^5}{375} M_5(g)$$

où $M_5(g) = \max\limits_{i+j=5} \{|\partial_{ij} u(g)|\}$. D'autre part :

$$u(x) = \sum_{k=o}^{5} \frac{1}{k!} D^k u(g).(x-g)^k + \frac{1}{120} [D^5 u(\tilde{x}) - D^5 u(g)] . (x-g)^5$$

$$\Delta u(x) = \sum_{k=o}^{3} \frac{1}{k!} D^k \Delta u(g).(x-g)^k + \frac{1}{6} [D^3 \Delta u(\hat{x}) - D^3 \Delta u(g)].(x-g)^3$$

$\Delta^2 u(x) = \Delta^2 u(g) + D\Delta^2 u(g).(x-g) + [D\Delta^2 u(\check{x}) - D\Delta^2 u(g)].(x-g)$ avec $\tilde{x}$, $\check{x}$ et $\hat{x} \in [g,x]$

et des relations analogues pour $x = a_j$: $(1 \leq j \leq 27)$

On obtient les majorations :

$$|S_3 u(x) - u(x)| \leq \frac{1}{375} h^5 M_5(g) + \frac{1}{120} \hat{\omega}_5(h).(||x-g||_1)^5$$
$$+ \sum_j M_j(x).\lambda_j$$

avec $\lambda_j = \frac{1}{120} \alpha_j + \frac{11}{288} h^2 \beta_j + \frac{83}{2880} h^4 \gamma_j$

$$\alpha_j = |(D^5 u(\tilde{a}_j) - D^5 u(g)).(a_j - g)^5| \leq (||a_j - g||_1)^5\ \hat{\omega}_5(\delta_j)$$
$$\beta_j = |(D^3 \Delta u(\hat{a}_j) - D^3 \Delta u(g))\ (a_j - g)^3| \leq 2(||a_j - g||_1)^3.\hat{\omega}_5(\delta_j)$$
$$\gamma_j = |(D\Delta^2 u(\check{a}_j) - D\Delta^2 u(g))\ (a_j - g)) \leq 4(||a_j - g||_1).\hat{\omega}_5(\delta_j)$$

où δ_j est la distance euclidienne de g à a_j.

Le B-coefficient α_1 de $\sum\limits_j \lambda_j M_j$ est donc majoré par :

$$|\alpha_1| \leq h^5\ \hat{\omega}_5(h)\ .\ \frac{1}{360} \{6\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2 + \dots + 8\varepsilon_{21}\}$$

avec $\varepsilon_j = \frac{1}{120} (||a_j - g||_1)^5 + \frac{11}{144} (||a_j - g||_1)^3 + \frac{83}{720} ||a_j - g||_1$

l'expression { ... } étant la même que dans la majoration de $|\alpha_1|$ du théorème précédent (pour $S_2 u - u$ et $S_2 u \in Sp(6,3)$).

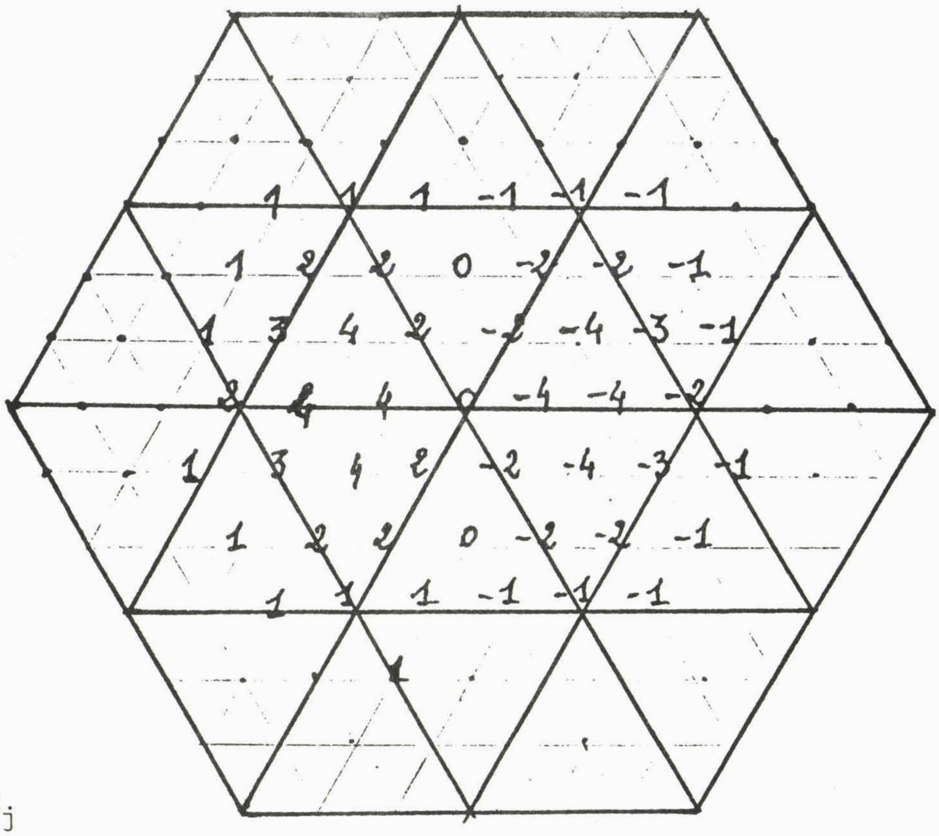
On obtient alors :

$$|\alpha_1| \leq \frac{458}{360} h^5\ \hat{\omega}_5(h) \sim 1,27222.h^5\ \hat{\omega}_5(h)$$

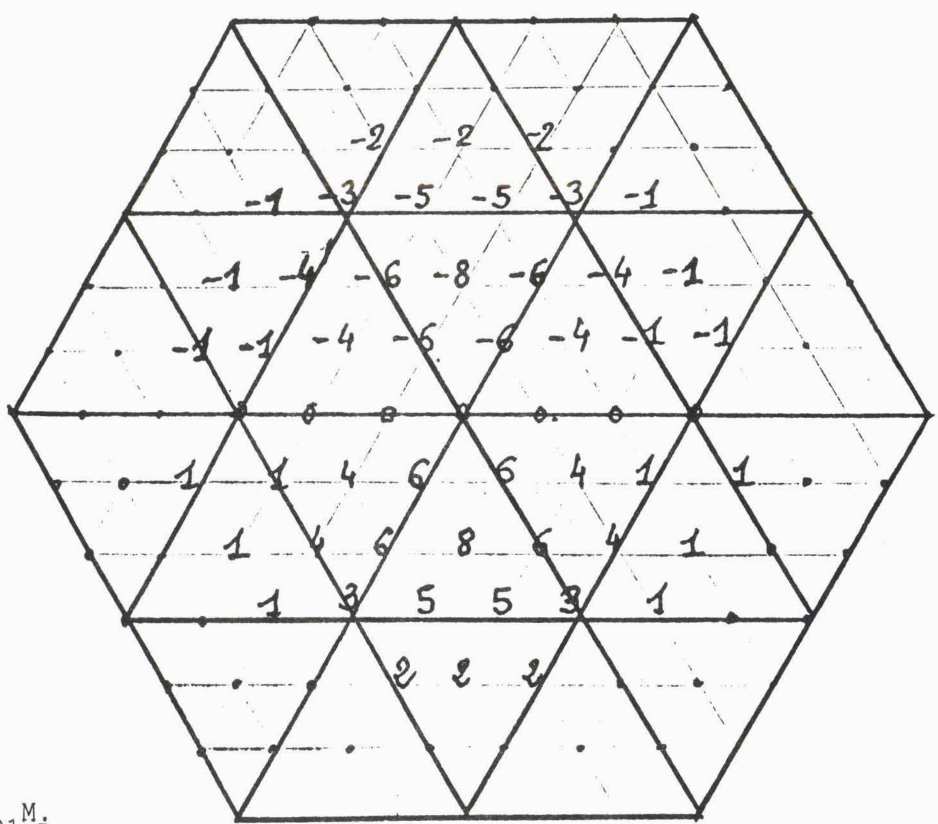
et comme $(||x-g||_1)^5/120 \leq 0,003.h^5$, on a finalement :

$$||S_3 - u||_{\infty,T} \leq \frac{1}{375}\ h^5\ M_5(g) + 1,3.h^5\ \hat{\omega}_5(h)$$

car la majoration pour α_1 est valable pour tous les α_j :



$6h\partial_{10}M_j$



$6h\sqrt{3}\partial_{01}M_j$

BUS LILLE

Figure 28

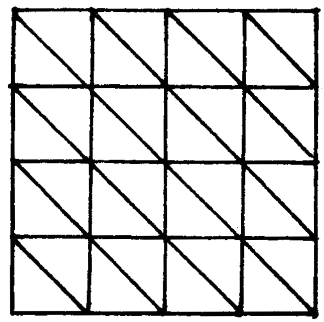
Dérivées de la B-spline quartique

XIV - Essais numériques

Quelques essais numériques ont été réalisés pour l'opérateur S_2 avec des cubiques C^1 et des quartiques C^2. On a approché les fonctions :

$$f_1(x, y) = \text{Log}\,(1 + x + y)$$

$$f_2(x, y) = \sin\,(\pi(x + y))$$



sur le carré $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ subdivisé en 32 triangles ($h = 1/4$, figure ci-contre) ou 128 triangles ($h = 1/8$).

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de :

$$||e_i||_\infty = ||f_i - S_2\, f_i||_\infty = \max_{x \in Q} |f_i(x) - S_2\, f_i(x)|$$

pour $i = 1, 2$.

h	cubiques C^1	quartiques C^2	cubiques C^1	quartiques C^2
1/4	0.84×10^{-3}	0.39×10^{-3}	1.09×10^{-2}	0.98×10^{-1}
1/8	0.47×10^{-4}	0.21×10^{-4}	0.74×10^{-3}	0.26×10^{-1}
	(i = 1)		(i = 2)	

(les calculs ont été faits en simple précision)

BUS LILLE

Tableau 1 : B-coefficients des polynômes de $\mathbb{P}_3$

-3	-1	1	3
-2	0	2	4
-1	1	3	5
0	2	4	6

$6x$

3	3	3	3
2	2	2	2
1	1	1	1
0	0	0	0

$2\sqrt{3}\ y$

-3	-1	1	3
-1	0	+1	3
0	0	1	2
0	0	0	0

$4\sqrt{3}\ xy$

3	-1	-1	3
1	-1	1	5
0	0	2	8
0	0	4	12

$12\ x^2$

3	3	3	3
1	1	1	1
0	0	0	0
0	0	0	0

$4\ y^2$

-1	1	-1	1
0	0	0	2
0	0	0	4
0	0	0	8

$8\ x^3$

3	-1	-1	3
0	0	0	4
0	0	0	4
0	0	0	0

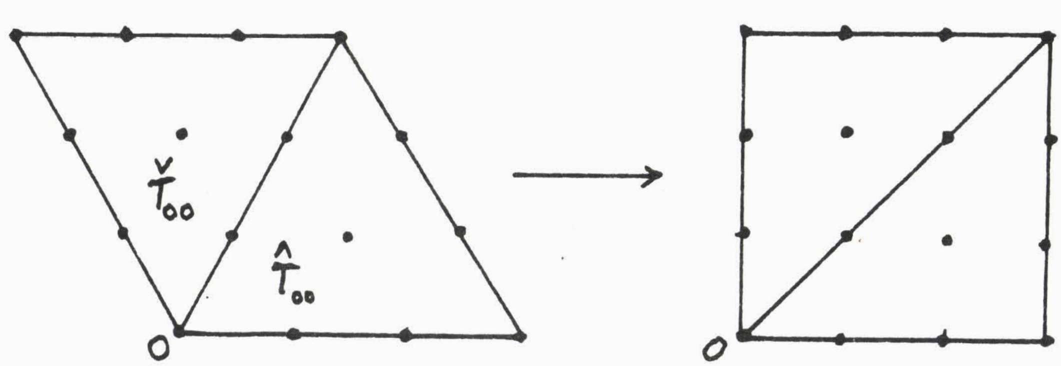
$8\sqrt{3}\ x^2y$

-3	-1	1	3
0	0	0	2
0	0	0	0
0	0	0	0

$8\ xy^2$

1	1	1	1
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\frac{8\sqrt{3}}{3}\ y^3$



BUS LILLE

Tableau 2 : B-coefficients des polynômes de $\mathbb{P}_4$

-4	-2	0	2	4
-3	-1	1	3	5
-2	0	2	4	6
-1	1	3	5	7
0	2	4	6	8

$x(\times 8)$

4	4	4	4	4
3	3	3	3	3
2	2	2	2	2
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0

$\frac{2}{\sqrt{3}}\, y(\times 4)$

-6	-3	0	3	6
-3	-1	1	3	6
-1	0	1	3	5
0	0	1	2	3
0	0	0	0	0

$\frac{2}{\sqrt{3}}\, xy(\times 12)$

6	0	-2	0	6
3	-1	-1	3	9
1	-1	1	5	13
0	0	2	8	18
0	0	4	12	24

$x^2(\times 24)$

6	6	6	6	6
3	3	3	3	3
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$4/3\ y^2(\times 6)$

-4	2	0	-2	4
-1	1	-1	1	7
0	0	0	2	12
0	0	0	4	20
0	0	0	8	32

$x^3(\times 32)$

BUS LILLE

$$\begin{array}{ccccc} 12 & 0 & -4 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$32\sqrt{3}\ x^2y$

$$\begin{array}{ccccc} -12 & -6 & 0 & 6 & 12 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$32\ xy^2$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\frac{32}{9}\sqrt{3}\ y^3$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}$$

$16\ x^4$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\frac{32}{3}\sqrt{3}\ x^3y$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$16\ x^2y^2$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\frac{32}{9}\sqrt{3}\ xy^3$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\frac{16}{9}\ y^4$

BUS LILLE

RÉFÉRENCES

[1] P. BEZIER, "*Numerical Control - Mathematics and Applications*", Wiley, London (1972).

[2] C. DE BOOR, G.J. FIX, "*Spline Approximation by quasi-interpolants*". J. of Approximation Theory, 8, (1973) p 19-45.

[3] G. FARIN, "*Subsplines uber Dreiecken*", Dissertation, Braunschweig (1979).

[4] G. FARIN, "*Bézier Polynomials over Triangles and the Construction of Piecewice C^r Polynomials*". (à paraître).

[5] P.O. FREDERICKSON, "*Triangular spline interpolation*", Report 6-70, Lakehead University (1970).

[6] P.O. FREDERICKSON, "*Generalized triangular splines*". Report 7.71, Lakehead University (1971).

[7] P.O. FREDERICKSON, "*Quasi-interpolation, extrapolation and approximation on the plane*" Conf. Numerical Maths, Winnipeg (1971) p. 159-167.

[8] P. SABLONNIERE, "*Splines et base de Bernstein*", Publication n° 109, 112, 123 de l'UER de Mathématiques de Lille (1977).

[9] P. SABLONNIERE, "*Quasi-interpolants splines sur des réseaux triangulaires réguliers du plan*". Colloque d'Analyse Numérique, Giens (1978). NASA, Cleveland et Kent State University (1979). Ecole d'été de Sielpia, Pologne (1980).

[10] L.L. SCHUMAKER, "*Fitting Surfaces to scattered data*", dans Approximation Theory II, G.G. Lorentz (ed), Academic Press (1976), p. 203-268.

CHAPITRE 6

B-SPLINES ET QUASI-INTERPOLANTS SUR UN RESEAU RECTANGLE-ISOCELE DU PLAN

Ils agissent mal, ceux qui croient ici qu'ils comprennent le passé. Nous honorons sans doute les grands hommes du passé pour ce qu'ils ont libéré et conduit à la lumière, mais à nous il convient seulement de penser à l'obscurité où ils nous ont encore laissés.

ZENON

I - INTRODUCTION

Au chapitre précédent, nous avons étudié la possibilité de construire des B-splines et des quasi-interpolants sur une triangulation équilatérale du plan. Nous faisons ici une étude analogue pour les splines définies sur une triangulation rectangle **isocèle. Les** résultats obtenus sont moins généraux et beaucoup reste à faire.

Soit $Sp(n,k)$ l'espace des splines polynomiales de degré n et de classe C^k sur une triangulation rectangle-isocèle du plan.

Nous montrons que pour tout $n \geqslant 3$, il est impossible de construire une B-spline (c'est-à-dire une spline dont le support est constitué d'un nombre fini de triangles) dans $Sp(n,n-1)$. Naturellement, il existe des B-splines dans $Sp(1,0)$ et nous construisons une B-spline dans $Sp(2,1)$. (qui est celle donnée par Powell [2], Schumaker [6] et Zwart [7]).

Nous ne savons pas s'il existe des B-splines dans $Sp(n,n-2)$ pour tout $n \geqslant 2$, mais nous en construisons dans $Sp(3,1)$ et $Sp(4,2)$.

Les B-splines de $Sp(2,1)$ et $Sp(4,2)$ nous servent à définir des quasi-interpolants du type :

$$Sf(x,y) = \sum_{i,j} \mu_{ij}(f)\, M_{ij}(x,y)$$

où $\mu_{ij}(f)$ est une combinaison linéaire des valeurs de f et de certaines de ses dérivées partielles au centre du support de la B-spline M_{ij}. On donne quelques majorations d'erreur locales (en norme uniforme) pour les quasi-interpolants de degrés 2 et 4 et pour des fonctions suffisamment dérivables. Des résultats plus complets peuvent être obtenus par des techniques analogues en norme L^p et pour d'autres classes de fonctions.

II - RACCORDEMENT DE 2 POLYNÔMES DE DEGRÉ n SUR 2 TRIANGLES ADJACENTS DU RÉSEAU

La figure 1 montre qu'il y a 2 cas possibles suivant que le côté commun aux 2 triangles est l'hypoténuse ou un côté de l'angle droit. En supposant que l'origine est en A_3, les coordonnées barycentriques des triangles $T_1 = A_1A_2A_3$, $T_2 = A_1A_2B_3$ et $T_3 = B_1A_2A_3$ sont respectivement :

$$T_1 : \quad u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = 1-x-y$$

$$T_2 : \quad v_1 = 1-y, \quad v_2 = 1-x, \quad v_3 = x+y-1$$

$$T_3 : \quad w_1 = -x, \quad w_2 = y, \quad w_3 = 1+x-y$$

Les polynômes de Bernstein :

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3}$$

avec $\quad u = (u_1,u_2,u_3) \quad , \quad u_1+u_2+u_3 = 1$

$\qquad\quad i = (i_1,i_2,i_3) \quad , \quad |i| = i_1+i_2+i_3 = n$

formant une base de $\mathbb{P}_n(T_1)$, tout $P_1 \in \mathbb{P}_n(T_1)$ s'écrit :

$$P_1(u) = B_n\psi_1(u) = \sum_{|i|=n} a_i \, B_i^n(u)$$

où ψ_1 est la fonction linéaire par morceaux définie par les sommets $\tilde{a}_i = (i_1/n,\ i_2/n,\ i_3/n\ ;\ a_i) \in \mathbb{R}^3$ du réseau Bézier de P_1. Ce réseau est représenté par sa projection sur le plan et on confond les points $\tilde{a}_i$ et les B-coefficients a_i.

De même, $P_2 \in \mathbb{P}_n(T_2)$ et $P_3 \in \mathbb{P}_n(T_3)$ s'écrivent :

$$P_2(v) = B_n\psi_2(v) = \sum_{|j|=n} b_j \, B_j^n(v)$$

$$P_3(w) = B_n\psi_3(w) = \sum_{|k|=n} C_k \, B_k^n(w)$$

où ψ_2 et ψ_3 sont les fonctions linéaires par morceaux déterminées par les réseaux Bézier $\{\tilde{b}_j, |j| = n\}$ et $\{\tilde{c}_k, |k| = n\}$. Par un calcul direct ou en utilisant le théorème 6 ([1], p. 17) de G. Farin et les relations barycentriques :

$$B_3 = A_1+A_2-A_3$$

$$B_1 = 2A_3-A_1$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème 1

1) *Le raccordement* C^r $(0 \leq r \leq n)$ *de* P_1 *et* P_2 *le long de* $A_1 A_2$ *se traduit par les relations :*

$$b_{i_1 i_2 k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{s_1+s_2=k-j} \binom{k-j}{s_1} a_{i_1+s_1, i_2+s_2, j}$$

pour $0 \leq k \leq r$ et $i_1+i_2 = n-k$

2) *Le raccordement* C^r $(0 \leq r \leq n)$ *de* P_1 *et* P_3 *le long de* A_2A_3 *se traduit par les relations :*

$$c_{k i_2 i_3} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} 2^{k-j} a_{j, i_2, i_3-j+k}$$

pour $0 \leq k \leq r$ et $i_2+i_3 = n-k$.

Pour les premières valeurs de k, on obtient :

continuité C^0 : 1) $b_{i_1 i_2 0} = a_{i_1 i_2 0}$ $\quad (i_1+i_2 = n)$

2) $c_{0 i_2 i_3} = a_{0 i_2 i_3}$ $\quad (i_2+i_3 = n)$

continuité C^1 : 1) $b_{i_1 i_2 1} = a_{i_1+1, i_2+1, 0} + a_{i_1, i_2+1, 0} - a_{i_1, i_2 1}$ $\quad (i_1+i_2 = n-1)$

2) $c_{1i_2i_3} = 2a_{0i_2,i_3+1} - a_{1i_2i_3} \qquad (i_2+i_3 = n-1)$

continuité C^2 : 1) $b_{i_1i_22} = (a_{i_1+2,i_2,0} + 2a_{i_1+1,i_2+1,0} + a_{i_1,i_2+2,0})$

$- 2(a_{i_1+1,i_2,1} + a_{i_1,i_2+1,1}) - a_{i_1i_22} \qquad (i_1+i_2 = n-2)$

2) $c_{2i_2i_3} = 4a_{0i_2,i_3+2} - 4a_{1,i_2+i_3+1} + a_{2i_2i_3} \qquad (i_2+i_3 = n-2)$

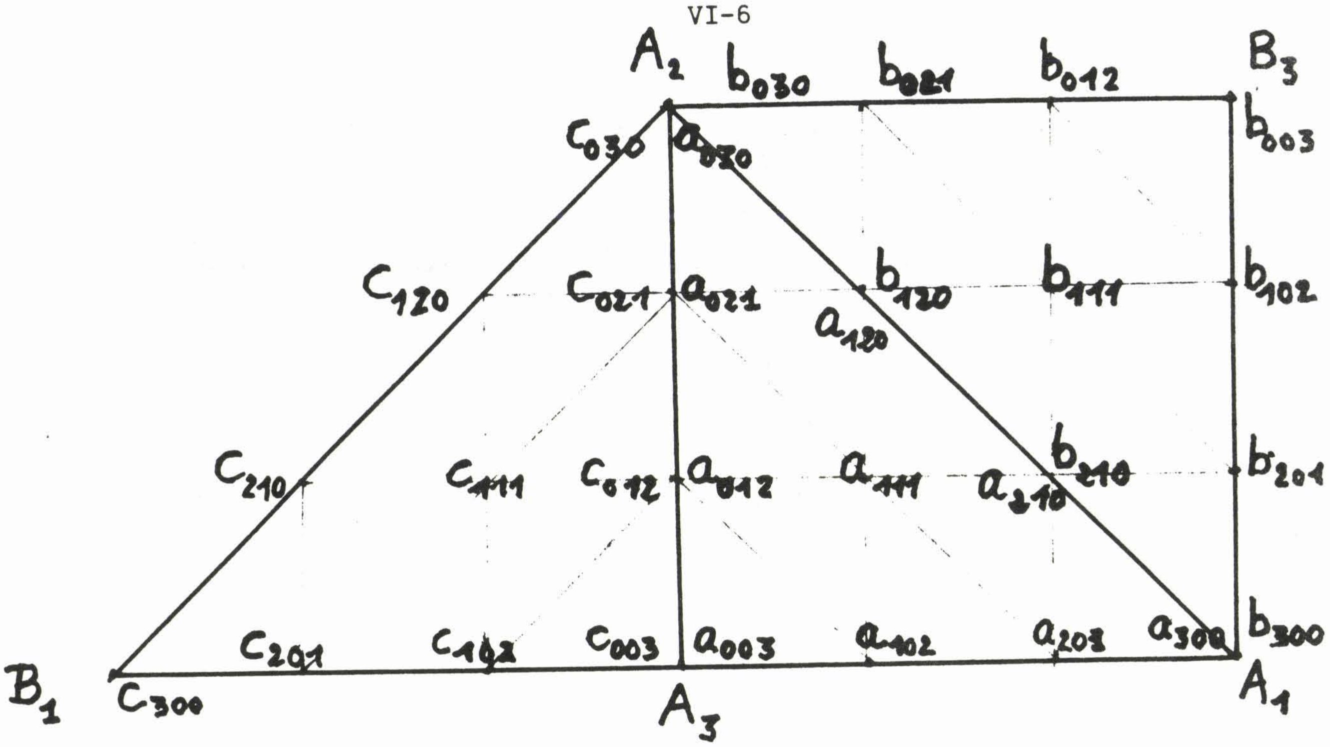


Figure 1 : Raccordement de 2 polynômes

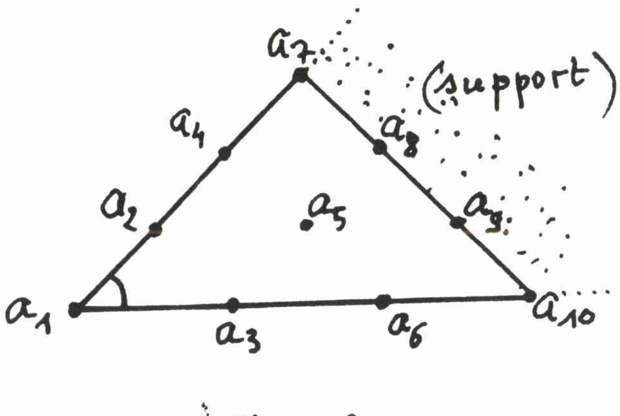


Figure 2

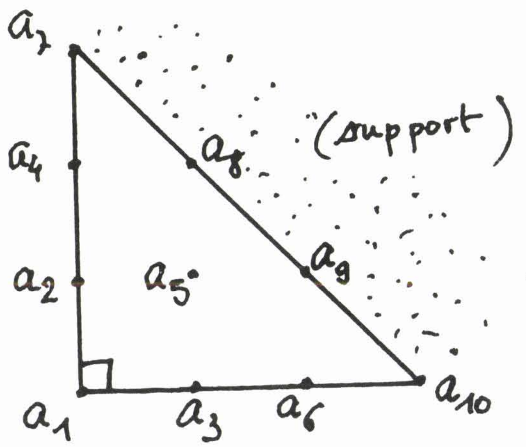
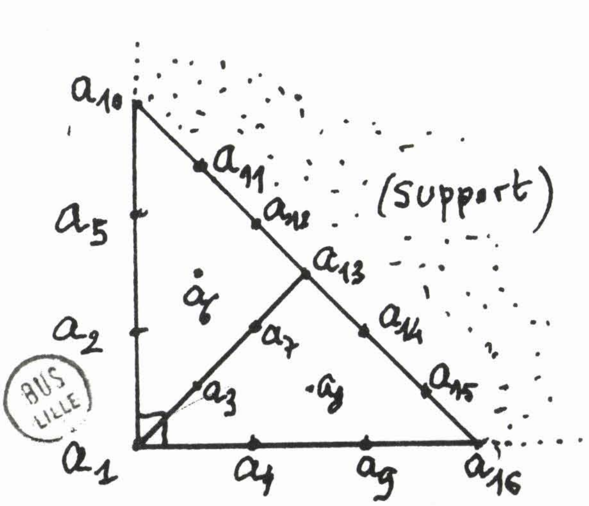


Figure 3a



BUS LILLE

Figure 3b

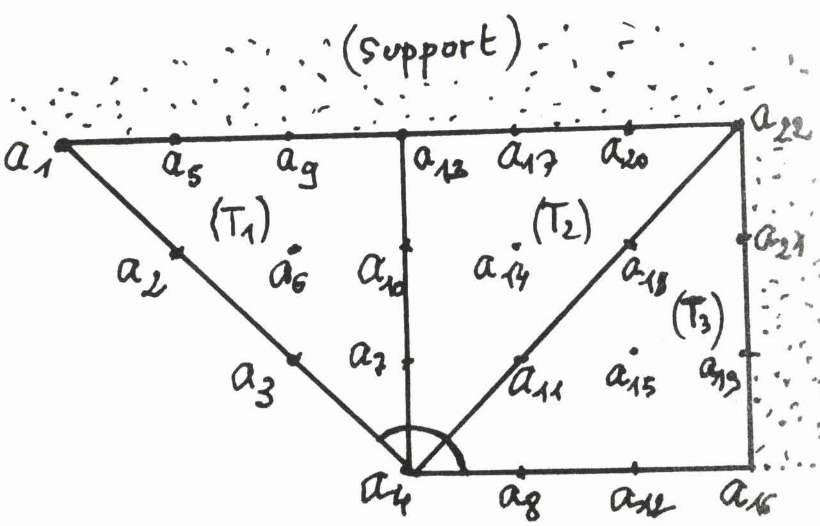


Figure 4

III - Existence de B-splines dans Sp(n, n-1)

Théorème 2 : Il existe des B-splines dans Sp(1, 0) *et* Sp(2, 1) *mais pas dans* Sp(n, n-1) *pour tout* $n \geq 3$.

Preuve : 1) Le résultat est trivial pour Sp(1,0). On montre aisément que la spline à support minimal dans Sp(2,1) respectant la symétrie du réseau est celle de la figure 8. Pour cela, on commence par prouver que la frontière du support n'a pas d'angles à 45° ni à 90°, mais nécessairement à 135° ; par conséquent le support est au moins un octogone. On montre ensuite que les B-coefficients de la figure 8 vérifient les conditions de raccordement C^1 du théorème 1. L'invariance par symétrie entraîne l'unicité (à une homothétie près).

2) Montrons qu'il n'existe pas de B-spline dans Sp(3,2).

a) Une telle B-spline $M(x,y)$ ne peut avoir d'angles à 45° sur la frontière de son support (figure 2). En effet le raccordement C^0 avec la fonction nulle donne $a_i = 0$ pour $i = 1,2,3,4,6,7,10$ et le raccordement C^1 donne $a_i = 0$ pour $i = 5,8,9$, donc $M \equiv 0$ sur le triangle frontière.

b) M ne peut avoir d'angles à 90° sur la frontière de son support (figures 3a et 3b). En effet, sur la figure 3a, la continuité C^2 avec la fonction nulle le long des deux côtés de l'angle droit implique $a_i = 0$ pour tout i.

De même, sur la figure 3b, cette continuité C^2 implique $a_i = 0$ sauf pour $i = 13$, mais la continuité C^1 entre les deux triangles implique $a_{13} = 0$ (car $2a_{13} = a_{12}+a_{14}$).

c) M ne peut avoir d'angle à 135° sur la frontière de son support (figure 4). La continuité C^2 avec la fonction nulle le long des deux côtés de l'angle implique que $a_i = 0$ sauf pour $i = 13, 14, 17, 20, 22$. Mais la continuité

 (support)

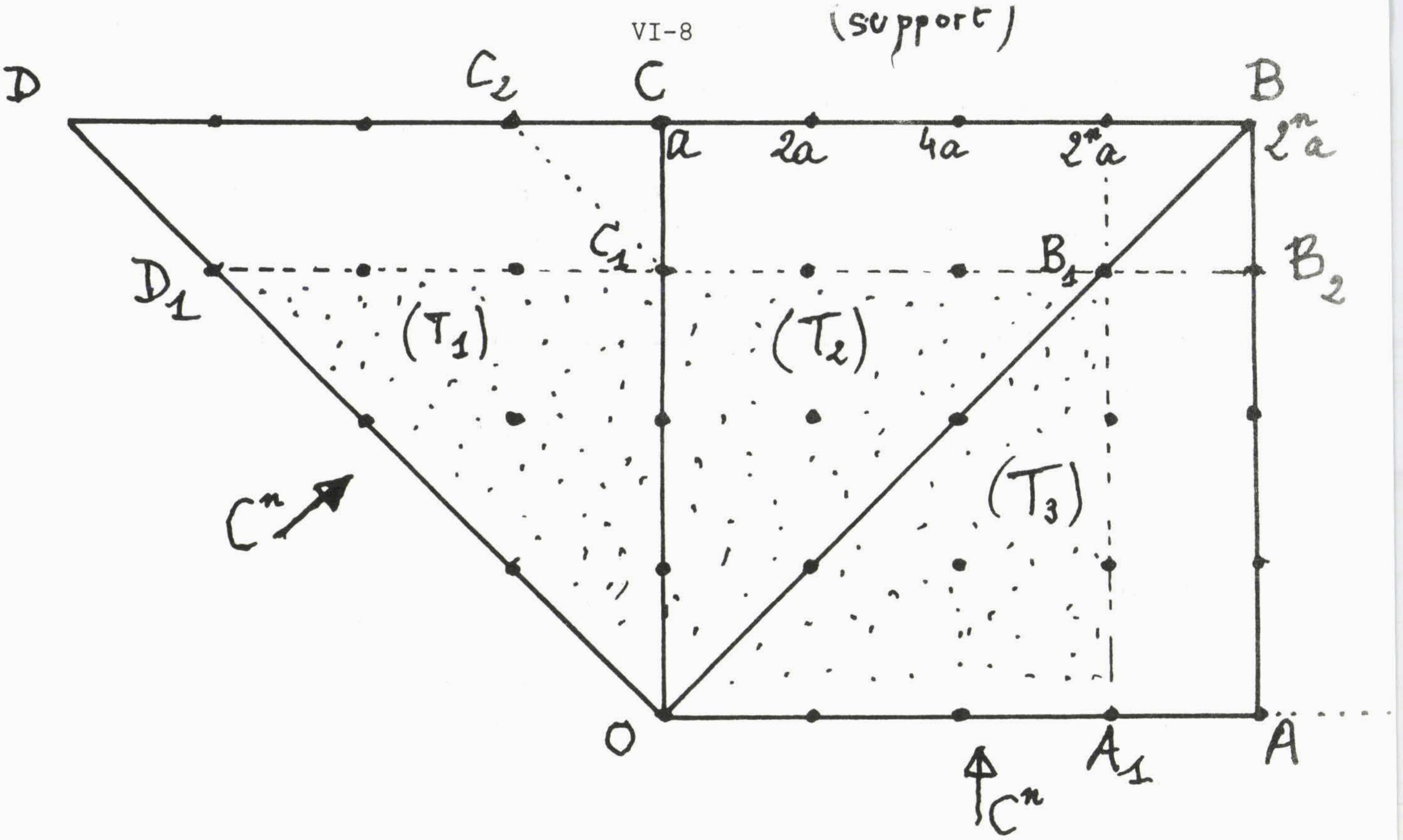


Figure 5 : Preuve du théorème 2

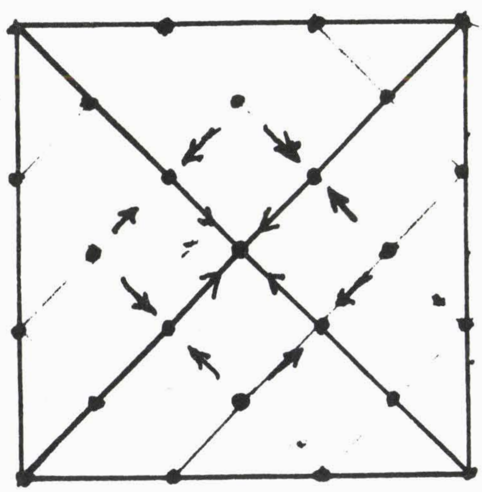


Figure 6

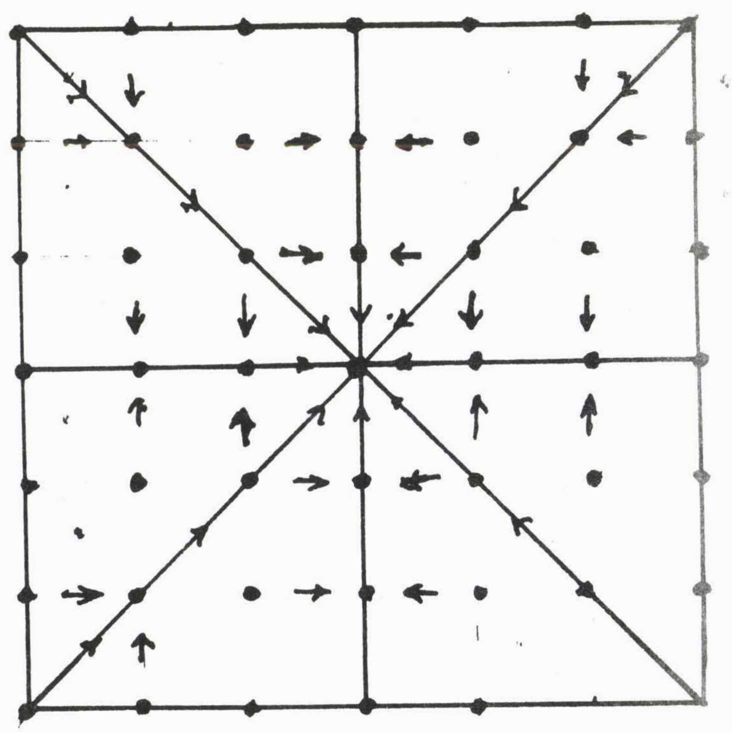


Figure 7

BUS LILLE

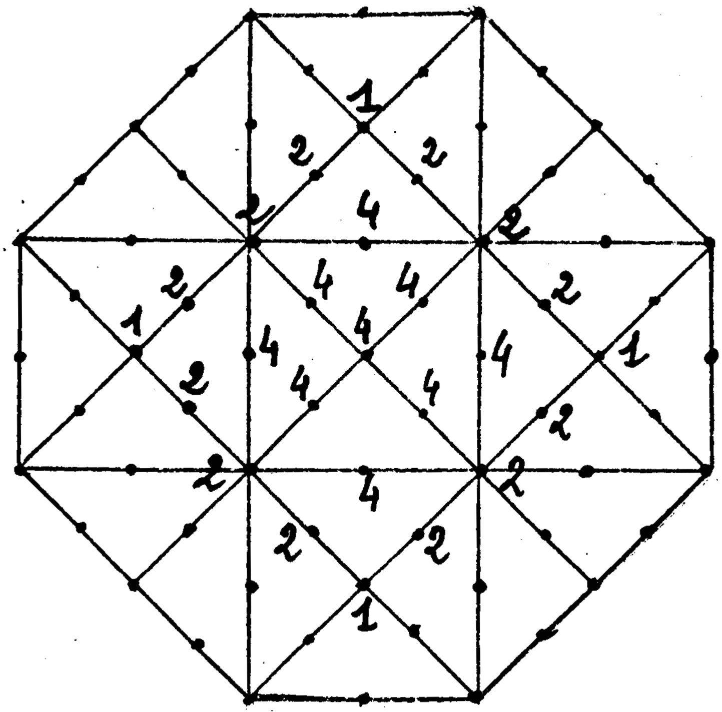


Figure 8 : B-spline de Sp(2, 1). (normalisation : diviser par 8)

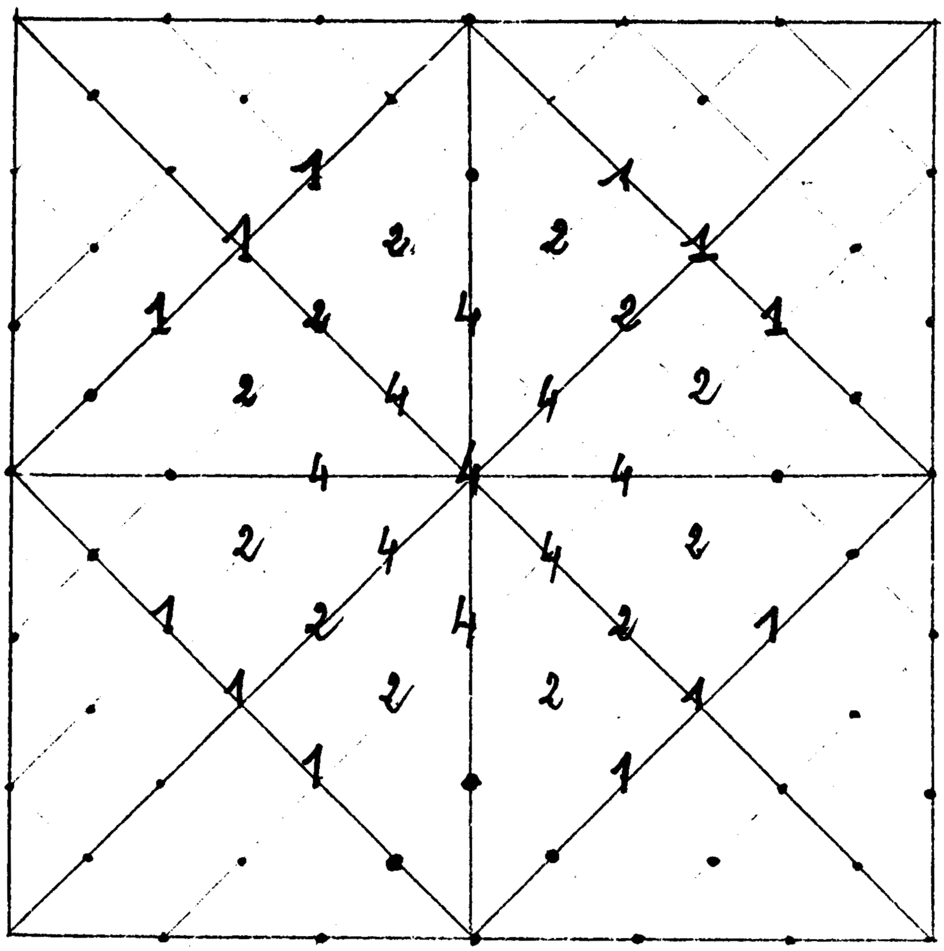


Figure 9 : Une B-spline de Sp(3, 1) (non utilisable à priori).

BUS LILLE

C^2 le long de $T_1 \cap T_2$ et $T_2 \cap T_3$ entraîne $a_{14} = 0$ et $a_{20} = a_{22}$ et si l'on pose $a = a_{13}$, on obtient $a_{17} = 2a$, $a_{20} = 4a$ et $a_{22} = 8a$, d'où $a_{20} = 4a = 8a = a_{22}$ et $a = 0$.

3) Supposons qu'il n'existe pas de B-spline dans $Sp(n,n-1)$ (pour $n \geqslant 3$) et montrons qu'il n'en existe pas dans $Sp(n+1,n)$. On montre aisément, comme pour les cubiques, qu'il ne peut y avoir d'angle à 45° ou à 90° sur la frontière du support d'une éventuelle B-spline M.

Montrons maintenant qu'il ne peut y avoir d'angle à 135° (figure 5). La continuité C^n avec la fonction nulle le long de OD et OA implique que les B-coefficients contenus dans les trapèzes OC_1C_2D et OB_1B_2A sont nuls, en particulier ceux des triangles OC_1D_1 et OB_1A_1. On peut alors considérer que les B-coefficients contenus dans OB_1D_1 sont ceux d'une spline de $Sp(n,n-1)$ et l'hypothèse de récurrence entraîne que les B-coefficients de ce trapèze sont tous nuls. Soit a le B-coefficient au point C : ceux du segment CB sont calculés au moyen des relations du théorème 1 et les n+1-premiers sont alors $a, 2a, 4a, \ldots, 2^n a$. La continuité C^1 entre T_2 et T_3 donne le $(n+2)$-ième égal aussi à $2^n a$, mais la continuité C^2 s'exprime par $0 = 2^{n-1}a - 2^{n+1}a$, d'où $a = 0$. Remarquons que c'est justement l'absence de cette continuité C^2 qui permet l'existence de la B-spline de $Sp(2,1)$.

IV - B-SPLINES DE Sp(3, 1)

a) Les figures 2 et 3a montrent que le support d'une éventuelle B-spline de Sp(3,1) ne peut avoir d'angle à 45° ou d'angle à 90° (avec un seul triangle). On montre facilement que le support ne peut être le carré de la figure 6, ni celui de la figure 7. En revanche, il est possible de construire une B-spline dont le support est le carré composé de 16 triangles de la figure 9, et qui est invariante par le groupe du carré. En divisant par 4 les B-coefficients, on obtient une spline de Lagrange pour l'interpolation aux noeuds intersections de 4 droites du réseau, mais l'interpolant associé n'est pas intéressant car il n'est même pas exact pour les fonctions linéaires.

b) En essayant le support octogonal de la B-spline de Sp(2,1), on obtient les B-coefficients de la figure 10 dépendant des 3 paramètres a,b,c :

$$\alpha = (a+b)/2 \qquad \beta = 2(b-a)$$

$$\gamma = 2(c-a) \qquad \delta = 4c - 2(a+b)$$

En supposant que les points de coordonnées (i,j) soient les intersections de 2 droites à 45° du réseau et en désignant par M_{ij} la B-spline centrée au point (i,j), posons :

$$S_1 f(x,y) = \sum_{i,j} f(i,j)\, M_{ij}(x,y)$$

Si l'on veut que S_1 reproduise $\mathbb{P}_1$ (i.e. $S_1 f = f$ pour $f \in \mathbb{P}_1$), on doit avoir $S_1\, e_{ij} = e_{ij} = x^i y^j$ pour $0 \leq i+j \leq 1$. La condition $S_1 e_{00} = e_{00}$, c'est-à-dire $\sum_{i,j} M_{ij} = 1$ impose $c = 1/4$. Les conditions $S_1 e_{10} = e_{10}$ et $S_1 e_{01} = e_{01}$ impliquent respectivement (avec les notations

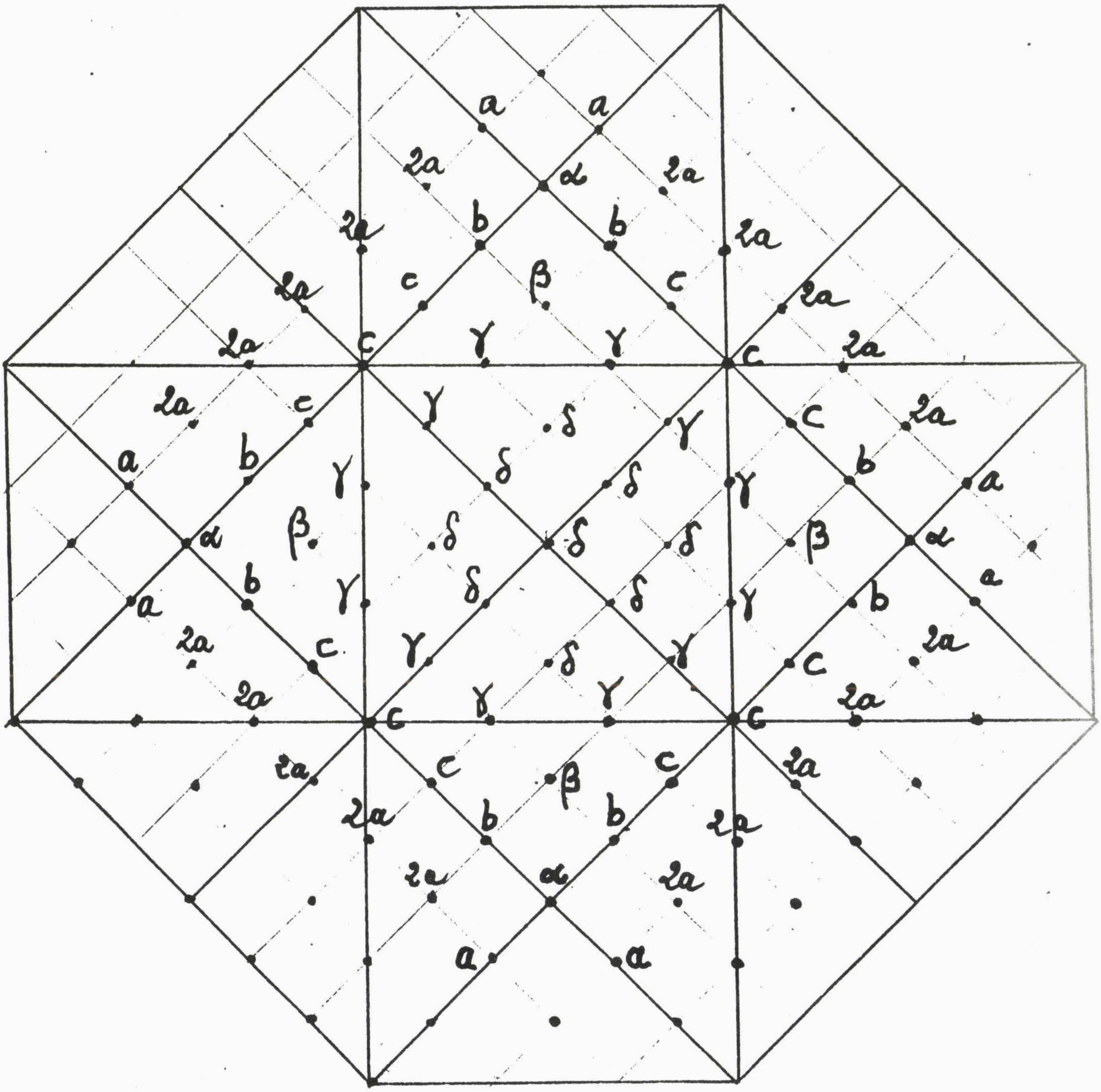


Figure 10 : B-splines de Sp(3, 1) dépendant des paramètres a, b, c.

BUS LILLE

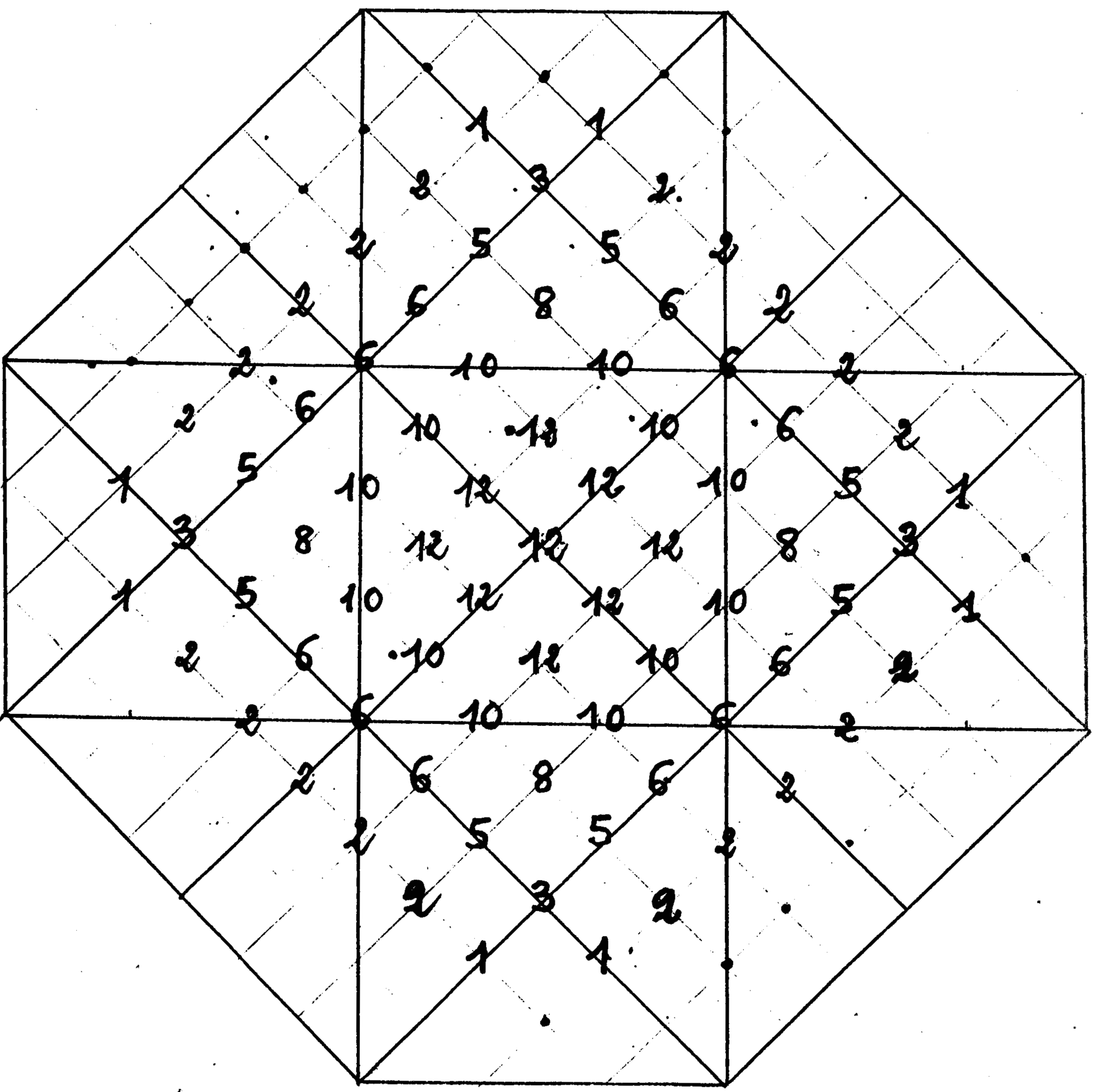


Figure 11 : B-spline de Sp(3, 1) identique à celle de Sp(2, 1)

(normalisation : diviser par 24).

BUS LILLE

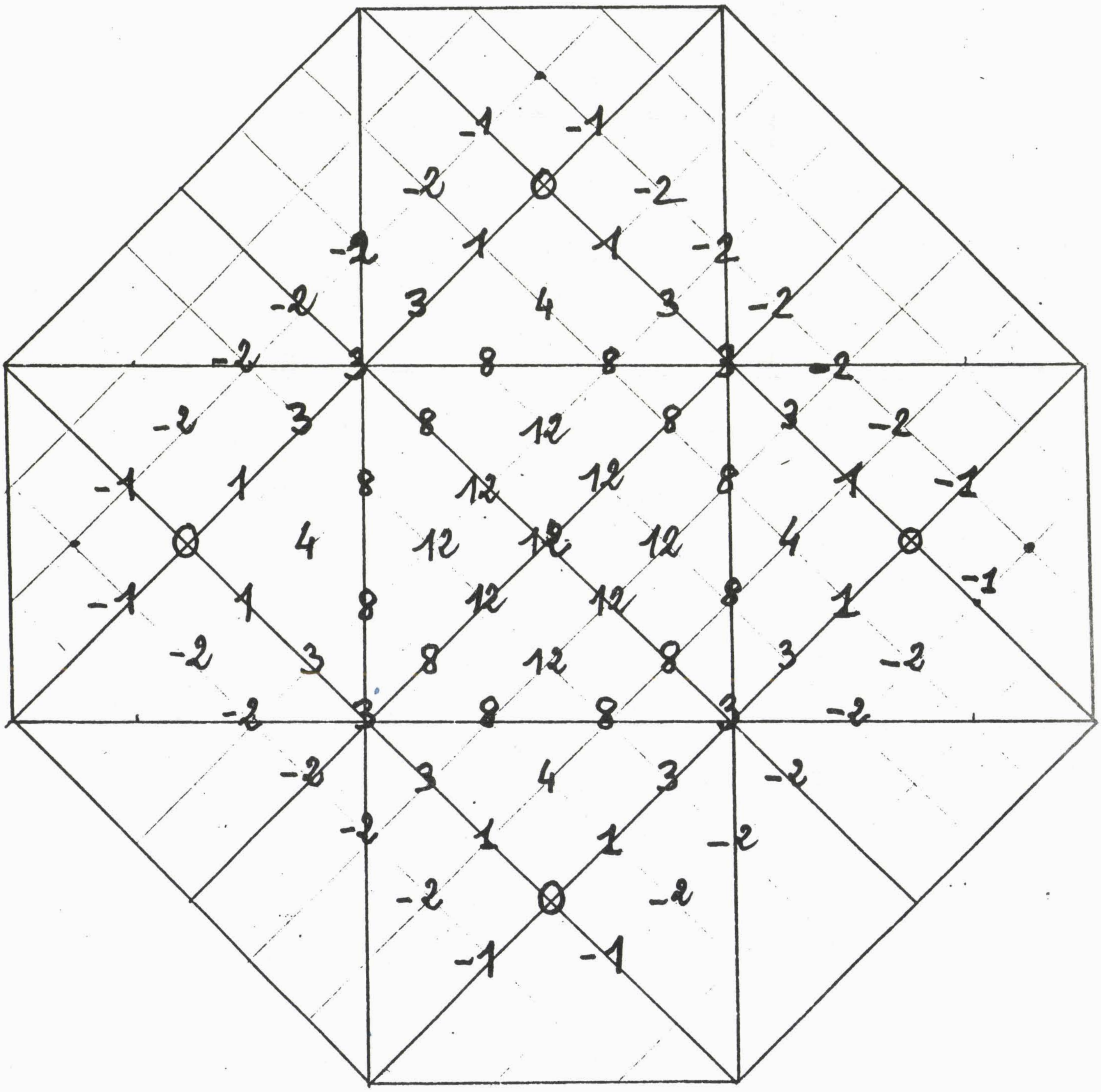


Figure 12 : Une B-spline de Lagrange de Sp(3, 1)

(normalisation : diviser par 12)

BUS LILLE

de la figure 17)

$$\begin{cases} x = (M_3+M_6+M_9) - (M_1+M_4+M_7) \\ y = (M_1+M_2+M_3) - (M_7+M_8+M_9) \end{cases}$$

sur le carré $[-1/2,1/2]^2$ et elles imposent alors :

$$a = 1/24 \qquad \text{et} \qquad b = 5/24$$

d'où la B-spline de la figure 11. Mais on vérifie qu'elle coïncide avec la B-spline de $Sp(2,1)$.

Si l'on veut que S_1 interpole f en tous les points (i,j), il faut que M_{ij} vérifie $M_{ij}(i,j) = 1$ et $M_{ij}(k,\ell) = 0$ pour $(k,\ell) \neq (i,j)$, ce qui impose comme valeurs des paramètres :

$$c = 1/4 \qquad \text{et} \qquad b = -a \qquad (a \text{ restant arbitraire}).$$

Dans ce cas, S_1 est exact pour les fonctions constantes, mais pas pour les polynômes du premier degré. Des choix possibles sont $a = 0$ (simplicité), $a = -1/12$ (figure 12 : S_1 est un interpolant d'Hermite des fonctions linéaires aux points (i,j)) ou $a = -1/24$ (S_1 interpole e_{10} et e_{01} le long des droites horizontales et verticales du réseau). Ces cas ne semblent pas très intéressant pour les applications.

V - B-SPLINES DE Sp(4,2)

5.1. Comme pour les cubiques, il est facile de montrer que la frontière du support d'une B-spline de Sp(4,2) ne peut avoir d'angle à 45° ni d'angle à 90° avec un seul triangle. Le support ne peut être non plus le carré de la figure 6 ni celui de la figure 7.

En revanche, il est possible de construire une B-spline dont le support est le carré de la figure 13. Comme la somme de ces B-splines centrées aux points $(i+1/2,\ j+1/2)$ n'est pas égale à 1, l'interpolant de Lagrange associé ne reproduit pas les constantes et n'offre a priori aucun intérêt.

5.2. En essayant le support octogonal de la figure 14, (c'est-à-dire celui de la B-spline de Sp(2,1)), on détermine les B-coefficients de manière unique (à un coefficient multiplicatif près). Mais dans ce cas encore, la somme des B-splines n'est pas égale à 1 et elles n'offrent pas d'intérêt. Intuitivement, chaque triangle n'est pas recouvert par un nombre suffisant d'octogones (7 octogones alors que la dimension de $\mathbb{P}_4$ est 15).

5.3. Cherchons une B-spline ayant un support plus grand, par exemple l'octogone de la figure 15. Les B-coefficients dépendent de 3 paramètres a,b,c :

$\alpha = (b+c)/2$	$\eta = 2c-2b+28a$
$\beta = 2b-28a$	$\theta = 4c-8b+140a$
$\gamma = 4b-92a$	$i = 4c-8b+148a$
$\delta = 4b-84a$	$\kappa = 8c-24b+496a$
$\varepsilon = 2c-2b+24a$	$\lambda = 8c-24b+504a$
$\zeta = 2c-2b+32a$	$\mu = 10c-34b+756a$

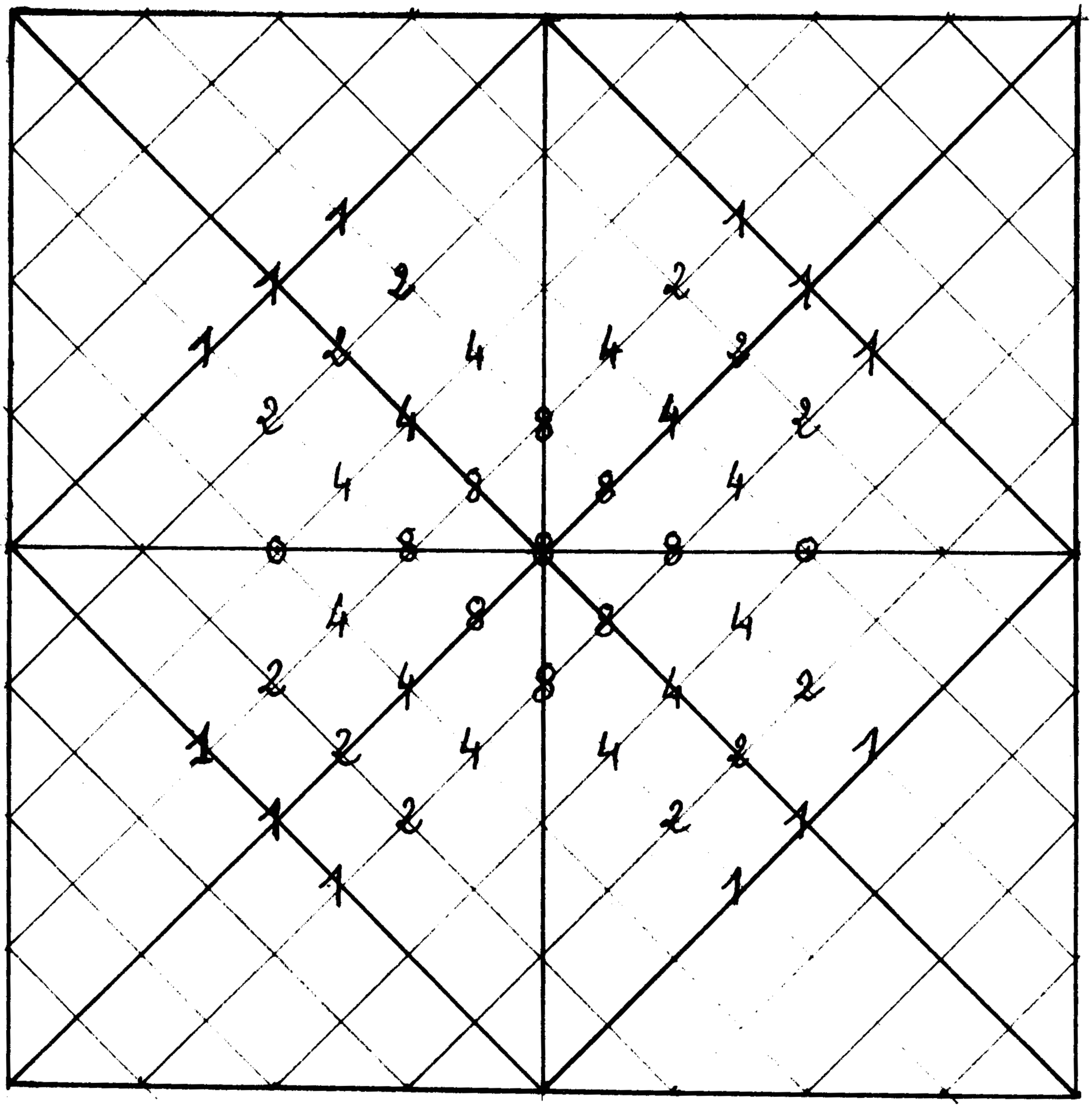
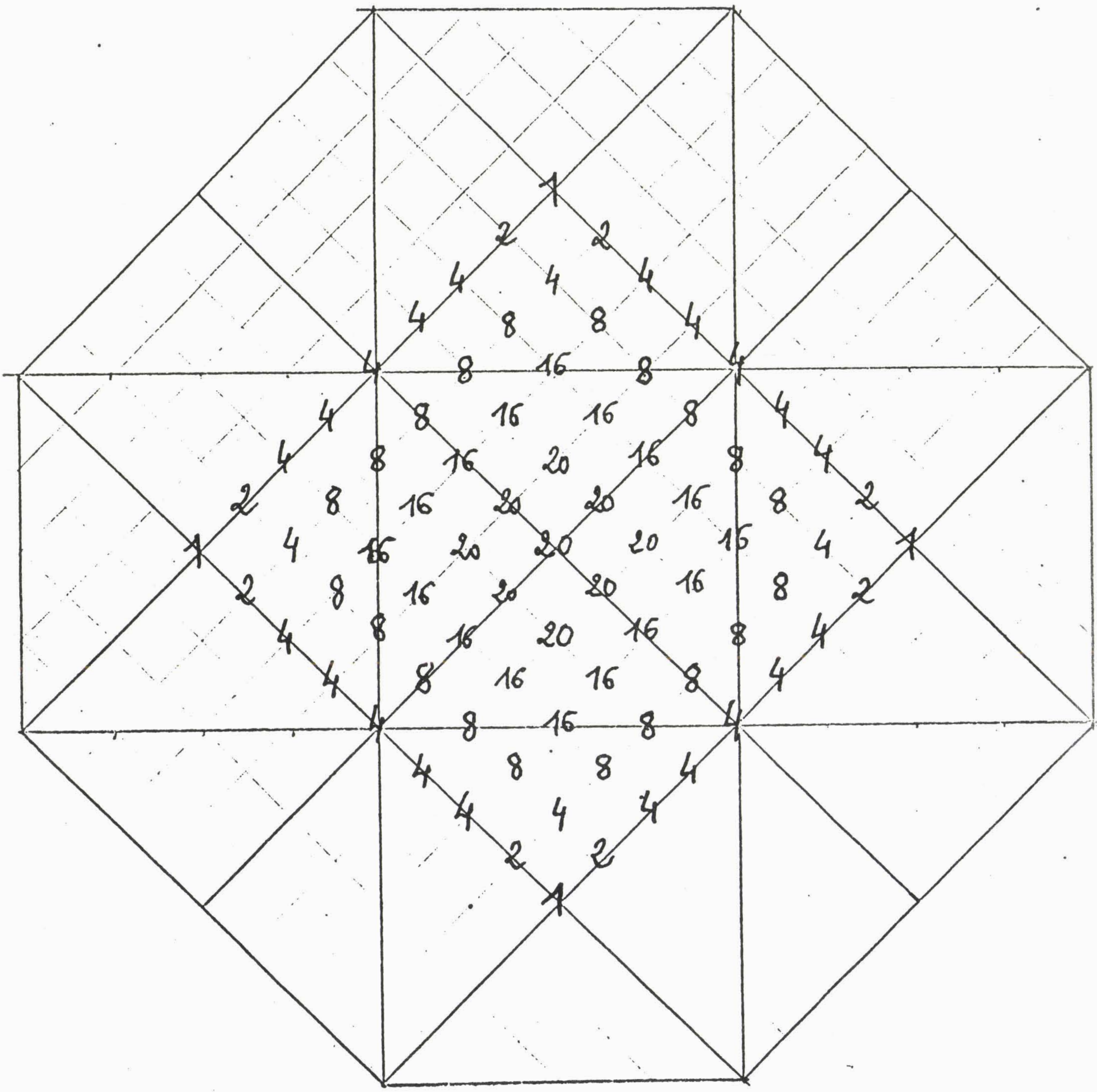


Figure 13 : Une B-spline de Sp(4, 2) (non utilisable à priori)

BUS LILLE



BUS LILLE

Figure 14

Une B-spline de Sp(4, 2)

(non utilisable à priori)

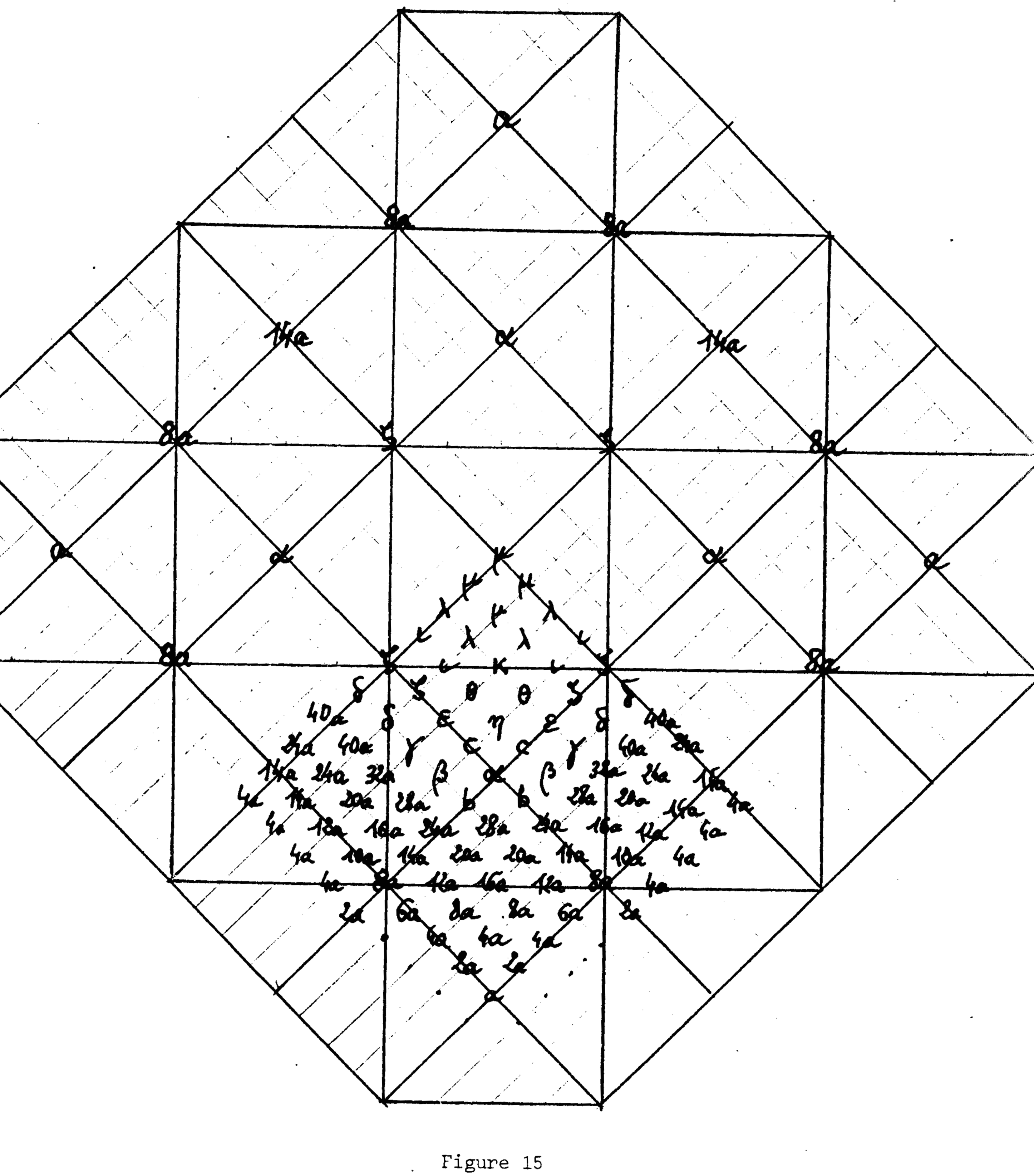


Figure 15

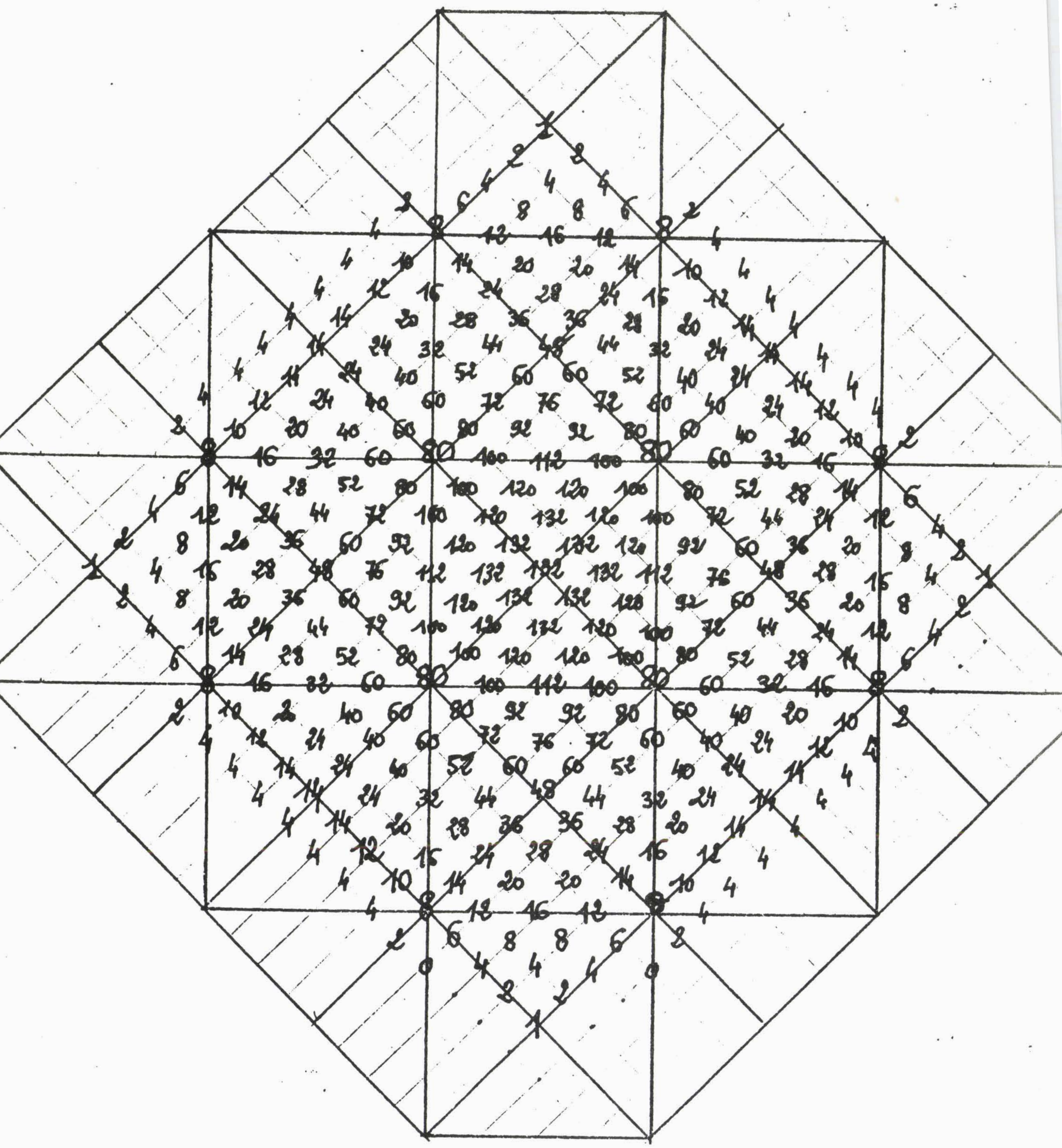


Figure 16 : B-spline de Sp(4, 2) normalisation : diviser par 384

BUS LILLE

auxquelles il faut ajouter la condition C^2 :

$$\gamma + 28a - \beta = 36a \qquad \text{qui donne} \qquad b = 36a$$

Si l'on veut que la somme des B-splines soit égale à 1, on doit avoir :

$$\left.\begin{array}{l} 60a + 4\alpha + \mu = 1 \\ \\ 64a + 4\zeta = 1 \end{array}\right\} \text{qui donnent} \left\{\begin{array}{l} a = 1/384 \\ \\ c = 60a = 5/32 \end{array}\right.$$

On peut alors calculer :

$$\begin{array}{ll} \alpha = 48a & \eta = 76a \\ \beta = 44a & \theta = 92a \\ \gamma = 52a & i = 100a \\ \delta = c = 60a & \kappa = 112a \\ \varepsilon = 72a & \lambda = 120a \\ \zeta = 80a & \mu = 132a \end{array}$$

d'où les B-coefficients de la figure 16.

On utilise cette B-spline pour la construction de quasi-interpolants C^2 aux §.8 et 9.

VI - QUASI-INTERPOLANTS DE Sp(2,1)

Soit R_h le réseau formé de carrés de coté h subdivisés en 4 triangles et centrés aux points $A_{ij} = (ih,jh)$.

Désignons par M_{ij} la B-spline normalisée $(\sum_{i,j} M_{i,j} = 1)$ centrée en A_{ij}.

Théorème 3 :

i) Le quasi-interpolant S_1 *défini par :*

$$S_1 f(x,y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\, M_{ij}(x,y)$$

est exact pour les fonctions bilinéaires. De plus :

$$S_1 e_{20} - e_{20} = S_1 e_{02} - e_{02} = h^2/4 \; e_{00}$$

ii) Le quasi-interpolant S_2 *défini par :*

$$S_2 f(x,y) = \sum_{i,j} \left(f(A_{ij}) - \frac{1}{8}h^2\, \Delta f(A_{ij})\right) M_{ij}(x,y)$$

(*où* Δf = *laplacien de* f) *est exact sur* $\mathbb{P}_2$ *et interpole les polynômes de* $\mathbb{P}_3$ *aux points* A_{ij}. *De plus, on a, pour* $i+j = 3$:

$$\| S_2 e_{ij} - e_{ij} \|_\infty = h^3 \sqrt{3}/36 \; .$$

Preuve : On utilise les notations simplifiées de la figure 17, c'est-à-dire que l'on étudie simplement les opérateurs S_1 et S_2 sur le carré centré à l'origine. Ce carré R est recouvert par les supports des B-splines centrés aux points 1,2,3,4,5,6 de la figure du bas et la contribution de chaque support est indiquée sur la figure du haut.

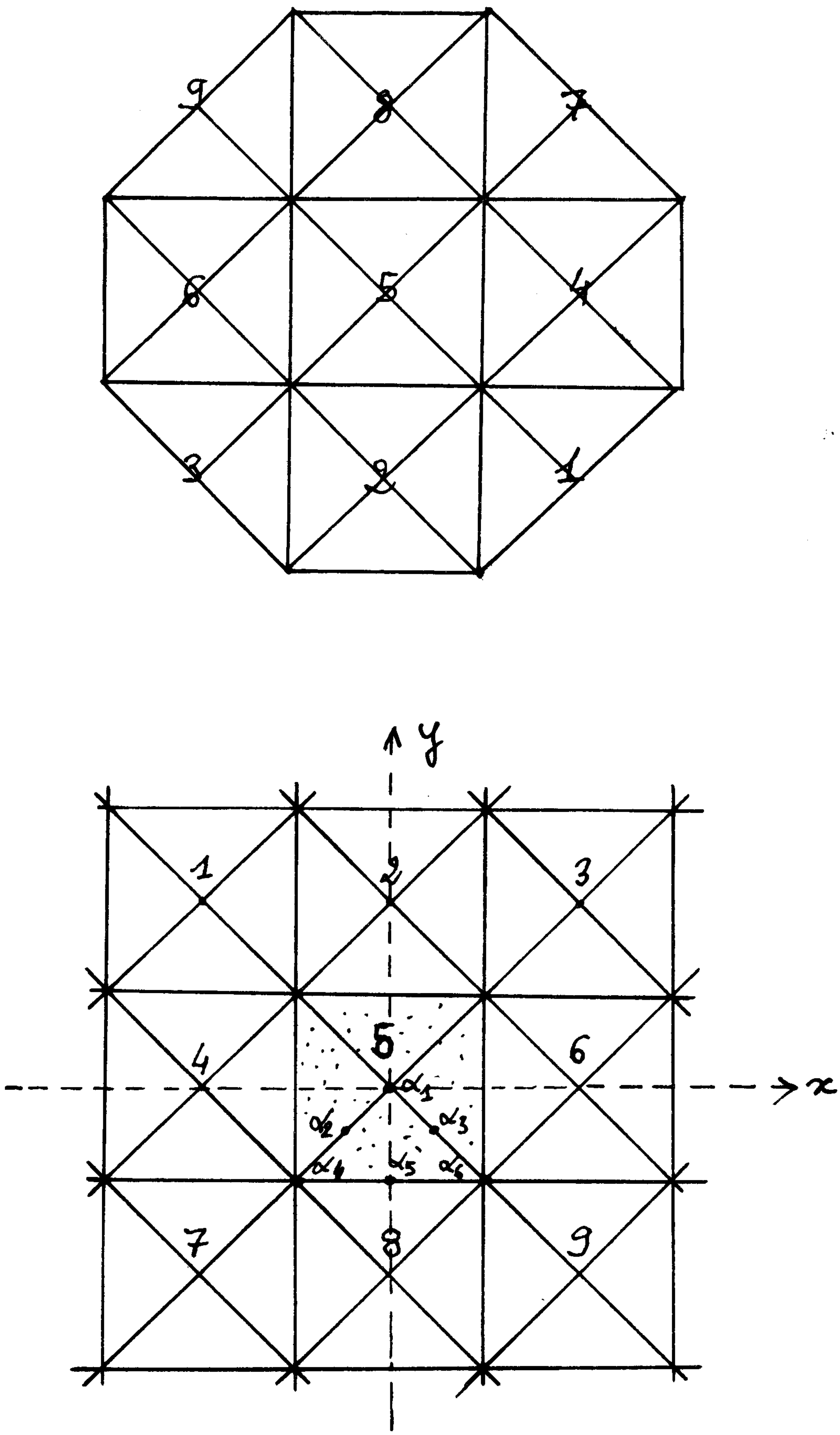


Figure 17

1) Montrons que $S_1e_{10} = e_{10}$ et $S_1e_{01} = e_{01}$ sur R. (on peut toujours se ramener à R car $S_1(f-k) = S_1f-k$ pour toute constante k). Il suffit de comparer les B-coefficients des 2 membres sachant que :

$$S_1e_{10} = h(M_3+M_6+M_9) - h(M_1+M_4+M_7)$$

$$S_1e_{01} = h(M_1+M_2+M_3) - h(M_7+M_8+M_9)$$

On vérifie qu'ils sont identiques à l'aide des figures 8 et 17 et du tableau 1. De même :

$$S_1e_{11} = h^2\left[(M_3+M_7) - (M_1+M_9)\right]$$

a les mêmes B-coefficient que $e_{11}(x,y) = xy$ sur R.

On calcule également :

$$S_1e_{20} = h^2(M_1+M_3+M_4+M_6+M_7+M_9)$$

$$S_1e_{02} = h^2(M_1+M_2+M_3+M_7+M_8+M_9)$$

et l'on vérifie que $S_1e_{20}-e_{20} = S_1e_{02}-e_{02} = \frac{h^2}{4}\ e_{oo}$

2) Il est alors naturel de remplacer le coefficient $f(A_{ij})$ de M_{ij} par $f(A_{ij}) - \frac{h^2}{4}\ \Delta f(A_{ij})$ où Δf est le laplacien de f. On a donc par construction $S_2e_{20} = e_{20}$ et $S_2e_{02} = e_{02}$ et S_2 est bien exact sur $\mathbb{P}_2$.

Etudions l'effet de S_2 sur $\mathbb{P}_3$.

$S_2e_{30} = h^3 \sum\limits_{i,j} i(i^2-3/4)M_{ij}$ donne sur R :

$$S_2e_{30} = \frac{1}{4}\ h^3\left[(M_3+M_6+M_9) - (M_1+M_4+M_7)\right] = \frac{1}{4}\ h^2\ e_{10}$$

Par conséquent S_2e_{30} interpole e_{30} le long des droites $x = ih/2$ $(i \in \mathbb{Z})$ et la norme de l'erreur est calculable explicitement :

$$\|S_2e_{30}-e_{30}\|_\infty = h^3\sqrt{3}/36 .$$

De même $S_2e_{03} = \frac{1}{4}h^2 e_{01}$, S_2e_{03} interpole e_{03} le long des droites $y = jh/2$ $(j \in \mathbb{Z})$ et l'erreur est identique à celle de e_{30}.

$S_2e_{21} = h^3 \sum_{i,j} j(i^2-1/4)M_{ij}$ donne sur $\mathbb{R}$:

$$S_2e_{21} = \frac{1}{4}h^3\left[3(M_3-M_9-M_1+M_7) + M_8-M_2\right]$$

On constate que S_2e_{21} interpole e_{21} le long des droites $x = (i+1/2)h$ et $y = (j+1/2)h$ et aux points (ih,jh). En explicitant l'erreur dans $\mathbb{P}_3$, on calcule aisément :

$$\|S_2e_{21}-e_{21}\|_\infty = h^3\sqrt{3}/36.$$

Ce résultat est valable également pour e_{12}.

On peut toujour se ramener à R car

$$S_2\left[(x-a)^3\right] = S_2\left[x^3-3ax^2+3a^2x-a^3\right] = S_2\left[x^3\right] - 3ax^2+3a^2x-a^3$$

(puisque S_2 reproduit $\mathbb{P}_2$), donc $S_2\left[(x-a)^3\right] - (x-a)^3 = S_2\left[x^3\right] - x^3$. Même raisonnement pour $(x-a)^2(y-b)$, $(x-a)(y-b)^2$ et $(y-b)^3$. Le théorème 3 est ainsi démontré.

VII - ETUDE DE L'ERREUR POUR LES QUASI-INTERPOLANTS DE Sp(2,1)

On ne donne que quelques résultats en norme uniforme pour des fonctions ayant certaines dérivées partielles continues. Des résultats plus complets concernant l'erreur sur les dérivées ou l'erreur avec d'autres normes peuvent être obtenus de la même manière.

Les majorations données sont locales. Si R est le carré de côté h centré au point a_5 (figure 17) et $\hat{R}$ le carré de côté $2h$ et de sommets a_1, a_3, a_7 et a_9, on a les résultats suivants, où $\hat{\omega}_k(h)$ est le plus grand module de continuité des dérivées partielles d'ordre k sur $\hat{R}$ (pour $k = 2$, les majorations ne sont pas valables sur les droites du réseau).

Théorème 4

(i) Si $u \in C^o(\hat{R})$, *on a :*

$$\|S_1u-u\|_{\infty,R} \leq \frac{3}{2}\,\hat{\omega}_o(h)$$

(ii) Si $u \in C^2(\hat{R})$, *on a :*

$$\|S_1u-u\|_{\infty,R} \leq \frac{1}{8}\,h^2|\Delta u(a_5)| + \frac{7}{4}\,h^2\,\hat{\omega}_2(h)$$

$$\|\partial_{ij}(S_1u-u)\|_{\infty,R} \leq \frac{7}{2}\,h\,\hat{\omega}_2(h) \qquad (i+j = 1)$$

$$\|\partial_{ij}(S_1u-u)\|_{\infty,R} \leq 2\hat{\omega}_2(h) \qquad (i+j = 2)$$

(iii) Si $u \in C^3(\hat{R})$, *on a, si* $M_3(a_5) = \max\limits_{i+j=3} \{|\partial_{ij}u(a_5)|\}$:

$$\|S_2u-u\|_{\infty,R} \leq \frac{\sqrt{3}}{27}\,h^3M_3(a_5) + \frac{31}{24}\,h^3\,\hat{\omega}_3(h)$$

$$\|\partial_{ij}(u-S_1u)\|_{\infty,R} \leq \frac{11}{48}\,h^2\,M_3(a_5) + \frac{17}{16}\,h^2\,\hat{\omega}_3(h) \qquad (i+j = 1)$$

$$\|\partial_{ij}(u-S_1u)\|_{\infty,R} \leq h\,M_3(a_5) + \frac{11}{2}\,h.\hat{\omega}_3(h)\ . \qquad (i+j = 2)$$

<u>Preuve</u> : Désignons par $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ les B-coefficients de $S_1 u$ sur le triangle T de sommets a_5, $\frac{1}{2}(a_5+a_7)$, $\frac{1}{2}(a_5+a_9)$ et par $u_j = u(a_j)$ les valeurs de u aux noeuds.

Nous étudions l'erreur locale sur ce triangle, les calculs étant analogues pour les autres triangles de R. Comme $S_1 u = \sum_{j=1}^{9} u_j M_j$, on obtient (fig. 8 et 17) :

$$\begin{aligned}
8\alpha_1 &= u_2+u_4+4u_5+u_6+u_8 \\
4\alpha_2 &= u_4+2u_5+u_8 \\
4\alpha_3 &= 2u_5+u_6+u_8 \\
4\alpha_4 &= u_4+u_5+u_7+u_8 \\
2\alpha_5 &= u_5+u_8 \\
4\alpha_6 &= u_5+u_6+u_8+u_9
\end{aligned}$$

1) Si $\hat{\omega}_o(h)$ est le module de continuité de u sur $\hat{R}$, on a, pour $x \in T$:

$$|\alpha_1-u(x)| \leq \frac{1}{8}\,(|u_2-u(x)| + |u_4-u(x)| + 4|u_5-u(x)| + |u_6-u(x)| + |u_8-u(x)|),$$

soit :

$$|\alpha_1-u(x)| \leq \frac{11}{8}\,\hat{\omega}_o(h) .$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\alpha_i-u(x)| &\leq \frac{5}{4}\,\hat{\omega}_o(h) && \text{pour } i = 2,3 \\
|\alpha_i-u(x)| &\leq \frac{3}{2}\,\hat{\omega}_o(h) && \text{pour } i = 4,6 \\
|\alpha_5-u(x)| &\leq \hat{\omega}_o(h)
\end{aligned}$$

On en déduit, en vertu des propriétés de la base de Bernstein (partition de l'unité sur T), que :

$$\|u-S_1u\|_{\infty,T} \leqslant \frac{3}{2}\,\hat{\omega}_o(h)$$

La majoration est en fait valable sur R (symétries du réseau et des B-splines), d'où le (i) du théorème.

2) Si $u \in C^2(\hat{R})$, on utilise le fait que $S_1 e_{ij} = e_{ij}$ pour $0 \leqslant i+j \leqslant 1$ et $S_1e_{20}-e_{20} = S_1e_{02}-e_{02} = h^2/4\ e_{oo}$

A l'aide des développements de Taylor ($1 \leqslant j \leqslant 9$) :

$$u(x) = u(a_5)+Du(a_5).(x-a_5)+\frac{1}{2}D^2u(a_5).(x-a_5)^2+\frac{1}{2}[D^2u(\tilde{x})-D^2u(a_5)].(x-a_5)^2,$$
$\tilde{x} \in [a_5,x]$

$$u(a_j) = u(a_5)+Du(a_5).(a_j-a_5)+\frac{1}{2}D^2u(a_5).(a_j-a_5)^2+\frac{1}{2}[D^2u(\tilde{a}_j)-D^2u(a_5)].(a_j-a_5)$$
$\tilde{a}_j \in [a_5,a_j]$

on obtient :

$$S_1u(x)-u(x) = \frac{1}{8}h^2\Delta u(a_5)+\frac{1}{2}\sum_j M_j(x)[D^2u(\tilde{a}_j)-D^2u(a_5)].(a_j-a_5)^2$$
$$-\frac{1}{2}[D^2u(\tilde{x})-D^2u(a_5)].(x-a_5)^2 \quad .$$

Si δ_j est la distance euclidienne de a_5 à a_j et $\hat{\omega}_2(h)$ le module de continuité maximum des dérivées partielles $\partial_{20}u$, $\partial_{11}u$ et $\partial_{02}u$ sur $\hat{R}$, le coefficient de $M_j(x)$ est majoré en module par $\lambda_j = \hat{\omega}_2(\delta_j).(\|a_j-a_5\|_1)^2$.

Pour $j = 2,4,6,8$ $\qquad \lambda_j \leqslant h^2\ \hat{\omega}_2(h)$

Pour $j = 7,9$ $\qquad \lambda_j \leqslant 8h^2\ \hat{\omega}_2(h)$

Si $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_6\}$ sont les B-coefficients de $\sum \lambda_j M_j(x)$, on a :

$$\alpha_i \leqslant \frac{1}{2} h^2 \hat{\omega}_2(h) \qquad \text{pour } i = 1,2,3,5$$
$$\alpha_i \leqslant \frac{5}{2} h^2 \hat{\omega}_2(h) \qquad \text{pour } i = 4,6$$

Comme $|[D^2u(x)-D^2u(a_5)].(x-a_5)^2| \leqslant h^2\hat{\omega}_2(h)$, on obtient finalement, pour tout $x \in T$:

$$|S_1u(x)-u(x)| \leqslant \frac{1}{8} h^2 |\Delta u(a_5)| + \frac{7}{4} h^2 \hat{\omega}_2(h)$$

Etudions l'erreur $\partial_{10}(u-S_1u)$, la technique et les résultats étant les mêmes pour $\partial_{01}(u-S_1u)$.

$$\partial_{10}u(x) = \partial_{10}u(a_5)+D\partial_{10}u(a_5).(x-a_5)+[D\partial_{10}u(\hat{x})-D\partial_{10}u(a_5)].(x-a_5),\ \hat{x} \in [a_5,x]$$

$$\partial_{10}S_1u(x) = \sum_j \partial_{10}M_j(x).u(a_j) = \partial_{10}u(a_5)+\partial_{10}\{\frac{1}{2}\sum_j M_j(x).D^2u(a_5).(a_j-a_5)^2\}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_j \partial_{10}M_j(x)[D^2u(\tilde{a}_j)-D^2u(a_5)].(a_j-a_5)^2$$

mais

$$\partial_{10}\{\frac{1}{2}\sum_j M_j(x)D^2u(a_5).(a_j-a_5)-\frac{1}{2}D^2u(a_5).(x-a_5)^2\} = \partial_{10}\{\frac{1}{4}h^2\Delta u(a_5)\} = 0.$$

et $\quad \partial_{10}\frac{1}{2}D^2u(a_5).(x-a_5)^2 = D\partial_{10}u(a_5).(x-a_5)$

par conséquent :

$$|\partial_{10}u(x)-\partial_{10}S_1u(x)| \leqslant |[D\partial_{10}u(\hat{x})-D\partial_{10}u(a_5)].(x-a_5)|$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_j |\partial_{10}M_j(x)|\lambda_j$$

Les B-coefficients de $\partial_{10}M_j$ sont donnés sur la figure 19. En désignant par $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ les valeurs de la 2ème somme aux sommets de T, on obtient :

$$\beta_1 \leqslant \frac{1}{2h}(\lambda_4+\lambda_6) \leqslant h\,\hat{\omega}_2(h)$$

$$\beta_2 \leqslant \frac{1}{2h}(\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7+\lambda_8) \leqslant 5h\,\hat{\omega}_2(h)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2h}(\lambda_5+\lambda_6+\lambda_8+\lambda_9) \leqslant 5h\,\hat{\omega}_2(h) .$$

De plus

$$\left|\left[D\partial_{10}u(\hat{x})-D\partial_{10}u(a_5)\right].(x-a_5)\right| \leqslant h\,\hat{\omega}_2(h).$$

On en déduit, pour $x \in T$:

$$|\partial_{10}u(x)-\partial_{10}S_1u(x)| \leqslant \frac{7}{2}\,h\,\hat{\omega}_2(h).$$

La figure 20 donnant les valeurs de $\partial_{20}M_j$ et $\partial_{11}M_j$ dans chaque triangle, on obtient à l'intérieur de T :

$$\partial_{20}S_1u(x) = \frac{1}{2h^2}(u_4-2u_5+u_6+u_7-2u_8+u_9) = \frac{1}{2}(\partial_{20}u(\tilde{a}_5)+\partial_{20}u(\tilde{a}_8))$$

avec $\tilde{a}_5 \in [a_4,a_6]$ et $\tilde{a}_8 \in [a_7,a_9]$, d'où l'on déduit :

$$|\partial_{20}u(x)-\partial_{20}S_1u(x)| \leqslant \hat{\omega}_2(2h) \leqslant 2\hat{\omega}_2(h) \quad ;$$

de même :

$$\partial_{11}S_1u(x) = \frac{1}{2h^2}(-u_4+u_6+u_7-u_9).$$

Au moyen des développements de Taylor :

$$u_6 = u_5 + h\partial_{10}u_5 + \frac{1}{2}h^2\ \partial_{20}u(\tilde{a}_6) \qquad \tilde{a}_6 \in [a_5,a_6]$$

$$u_4 = u_5 - h\partial_{10}u_5 + \frac{1}{2}h^2\ \partial_{20}u(\tilde{a}_4) \qquad \tilde{a}_4 \in [a_4,a_5]$$

$$u_7 = u_8 - h\partial_{10}u_8 + \frac{1}{2}h^2\ \partial_{20}u(\tilde{a}_7) \qquad \tilde{a}_7 \in [a_7,a_8]$$

$$u_9 = u_8 + h\partial_{10}u_8 + \frac{1}{2}h^2\ \partial_{20}u(\tilde{a}_9) \qquad \tilde{a}_9 \in [a_8,a_9]$$

$$\partial_{10}u_5 - \partial_{10}u_8 = h\ \partial_{11}u(\tilde{a}_8) \qquad \tilde{a}_8 \in [a_5,a_8]$$

on obtient :

$$\begin{aligned}|\partial_{11}u(x)-\partial_{11}S_1u(x)| &\leqslant |\partial_{11}u(x)-\partial_{11}u(\tilde{a}_8)| + \frac{1}{4}|\partial_{20}u(\tilde{a}_6)-\partial_{20}u(\tilde{a}_4)| + \\ &+ \frac{1}{4}|\partial_{20}u(\tilde{a}_7)-\partial_{20}u(\tilde{a}_9)| \\ &\leqslant \hat{\omega}_2(h) + \frac{1}{2}\hat{\omega}_2(2h) \leqslant 2\hat{\omega}_2(h)\end{aligned}$$

L'étude étant la même pour ∂_{02} et pour les autres triangles de R, on a la majoration du théorème.

3) $S_2u(x) = \sum_j M_j(x)\ [u(a_j) - \frac{1}{2}h^2\ \Delta u(a_j)]$. Etudions simplement l'erreur quand $u \in C^3(\hat{R})$. Rappelons (th.3,(ii)) que S_2 est exact sur $\mathbb{P}_2$ et que $\|S_2e_{ij}-e_{ij}\|_\infty \leqslant h^3\ \frac{\sqrt{3}}{36}$ pour $i+j = 3$.

$$u(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}\ D^k u(a_5)(x-a_5)^k + \frac{1}{6}[D^3u(\tilde{x})-D^3u(a_5)](x-a_5)^3 \text{ avec } \tilde{x}\in[a_5,x].$$

et des formules de Taylor analogues pour $u(a_j)$, avec $\tilde{a}_j \in [a_5,a_j]$.

$$\Delta u(a_j) = \Delta u(a_5) + D\Delta u(a_5).(a_j-a_5) + [D\Delta u(\hat{a}_j)-D\Delta u(a_5)].(a_j-a_5) \text{ avec } \hat{a}_j\in[a_5,a_j].$$

Si l'on pose $w(x) = \frac{1}{6} D^3u(a_5).(x-a_5)^3$, on a $\Delta w(x) = D\Delta u(a_5).(x-a_5)$

et $S_2w(x) = \sum_j M_j(x)[\frac{1}{6} D^3u(a_5).(a_j-a_5)^3 - \frac{1}{8}h^2 D\Delta u(a_5).(a_j-a_5)]$.

D'autre part : $S_2w(x)-w(x) = \frac{1}{6} \sum_{i+j=3} \binom{3}{i} \partial_{ij}u(a_5)\{S_2e_{ij}-e_{ij}\}(x)$

donc $\|S_2w-w\|_\infty \leqslant \frac{1}{6} M_3(a_5) \sum_{i+j=3} \binom{3}{i} \|S_2e_{ij}-e_{ij}\|_\infty$ soit

$$\|S_2w-w\|_\infty \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 M_3(a_5).$$

On en déduit la majoration :

$$|S_2u(x)-u(x)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 M_3(a_5) + \frac{1}{6}|[D^3u(\tilde{x})-D^3u(a_5)] \ . \ (x-a_5)^3|$$

$$+ \sum_j M_j(x) \ \{\frac{1}{6}|[D^3u(\tilde{a}_j)-D^3u(a_5)] \ . \ (a_j-a_5)^3| +$$

$$\frac{1}{8} h^2 |[D\Delta u(\hat{a}_j)-D\Delta u(a_5)] \ . \ (a_j-a_5)|\}$$

Le coefficient de $M_j(x)$ est majoré par :

$$\lambda_j = \hat{\omega}_3(\delta_j) \ \{\frac{1}{6}(\|a_j-a_5\|_1)^3 + \frac{1}{4} h^2 \|a_j-a_5\|_1\}$$

pour $j = 2,4,6,8,$ $\qquad \lambda_j \leqslant \hat{\omega}_3(h) \ . \ \{\frac{1}{6} h^3 + \frac{1}{4} h^3\} = \frac{5}{12} h^3 \hat{\omega}_3(h)$

pour $j = 7,9$ $\qquad \lambda_j \leqslant 2\hat{\omega}_3(h) \ \{\frac{1}{6} \ . \ 8h^3 + \frac{1}{4} h^2.2h\} = \frac{11}{3} h^3 \hat{\omega}_3(h)$.

Soient $\{\alpha_1,..,\alpha_6\}$ les B-coefficients de $\sum_j \lambda_j M_j$ sur T.

La plus grande majoration est fournie par :

$$\alpha_4 = \frac{1}{4}(\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7+\lambda_8) \leqslant \frac{9}{8} h^3 \hat{\omega}_3(h).$$

Comme $\left|\left[D^3u(\tilde{x})-D^3u(a_5)\right].(x-a_5)^3\right| \leqslant h^3\ \hat{\omega}_3(h)$, on obtient finalement :

$$\|S_2u-u\|_{\infty,T} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27}\ h^3\ M_3(a_5) + \frac{31}{24}\ h^3\ \hat{\omega}_3(h)\ .$$

Comme pour S_1, en utilisant les dérivées partielles des M_j, on obtient des majorations en $O(h^2)$ ou $O(h)$ pour les dérivées partielles premières ou secondes de S_1u-u, avec des constantes calculables explicitement à partir des normes des erreurs sur la base de $\mathbb{P}_3$:

$$\|\partial_{10}(S_2e_{30}-e_{30})\|_\infty = h^2/4\ ,\quad \|\partial_{01}(S_2e_{30}-e_{30})\|_\infty = 0$$

$$\|\partial_{10}(S_2e_{03}-e_{03})\|_\infty = 0\quad ,\quad \|\partial_{01}(S_2e_{03}-e_{03})\|_\infty = h^2/4$$

$$\|\partial_{10}(S_2e_{21}-e_{21})\|_\infty = h^2/8 = \|\partial_{01}(S_2e_{12}-e_{12})\|_\infty$$

$$\|\partial_{01}(S_2e_{21}-e_{21})\|_\infty = h^2/4 = \|\partial_{10}(S_2e_{12}-e_{12})\|_\infty$$

$$\partial_{ij}(S_2e_{30}-e_{30}) = \partial_{ij}(S_2e_{03}-e_{03}) = 0 \qquad (i+j = 2)$$

$$\|\partial_{ij}(S_2e_{21}-e_{21})\|_{\infty,T} = \|\partial_{ij}(S_2e_{12}-e_{12})\|_{\infty,T} = h.$$

VIII - QUASI-INTERPOLANTS DANS Sp(4,2)

Avec les notations du §.6, on a le :

Théorème 5 :

i) Le quasi-interpolant S_1 *défini par* :

$$S_1 f(x,y) = \sum_{i,j} f(A_{ij})\ M_{ij}(x,y)$$

est exact pour les fonctions bilinéaires, de plus :

$$S_1 e_{20} - e_{20} = S_1 e_{02} - e_{02} = 5h^2/12\ e_{00}$$

ii) Le quasi-interpolant S_2 *défini par* :

$$S_2 f(x,y) = \sum_{i,j} (f(A_{ij}) - \frac{5}{24} h^2 \Delta f(A_{ij}))\ .\ M_{ij}(x,y)$$

reproduit $\mathbb{P}_3$. *De plus,* S_2 *interpole* e_{31} *et* e_{13}, *et* :

$$S_2 e_{40} - e_{40} = S_2 e_{04} - e_{04} = -9h^4/16\ e_{00}$$

$$\|S_2 e_{22} - e_{22}\|_\infty = 61h^4/288$$

$$\|S_2 e_{31} - e_{31}\|_\infty = \|S_2 e_{13} - e_{13}\|_\infty = h^4/256$$

iii) Le quasi-interpolant S_3 *défini par* :

$$S_3 f(x,y) = \sum_{i,j} (f(A_{ij}) - \frac{5}{24} h^2 \Delta f(A_{ij}) + \frac{3}{128} h^4 \Delta^2 f(A_{ij})) M_{ij}(x,y)$$

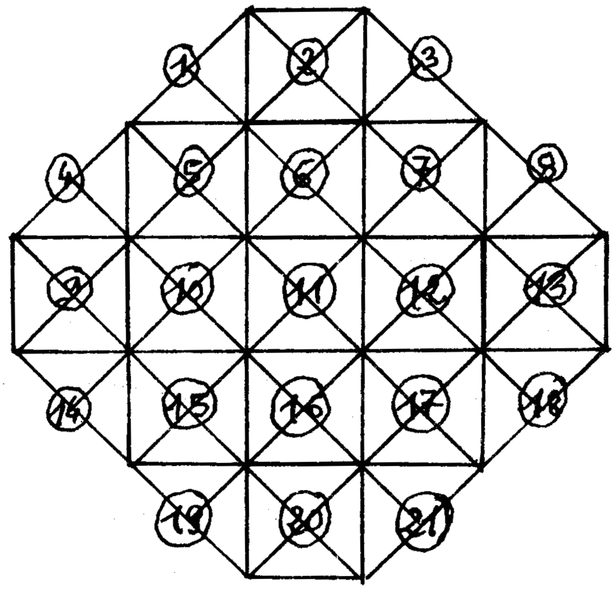
est exact pour $\mathbb{P}_3$, e_{40} *et* e_{04}. *De plus, on a* :

$$\|S_3 e_{13} - e_{13}\|_\infty = \|S_3 e_{31} - e_{31}\|_\infty = h^4/256$$

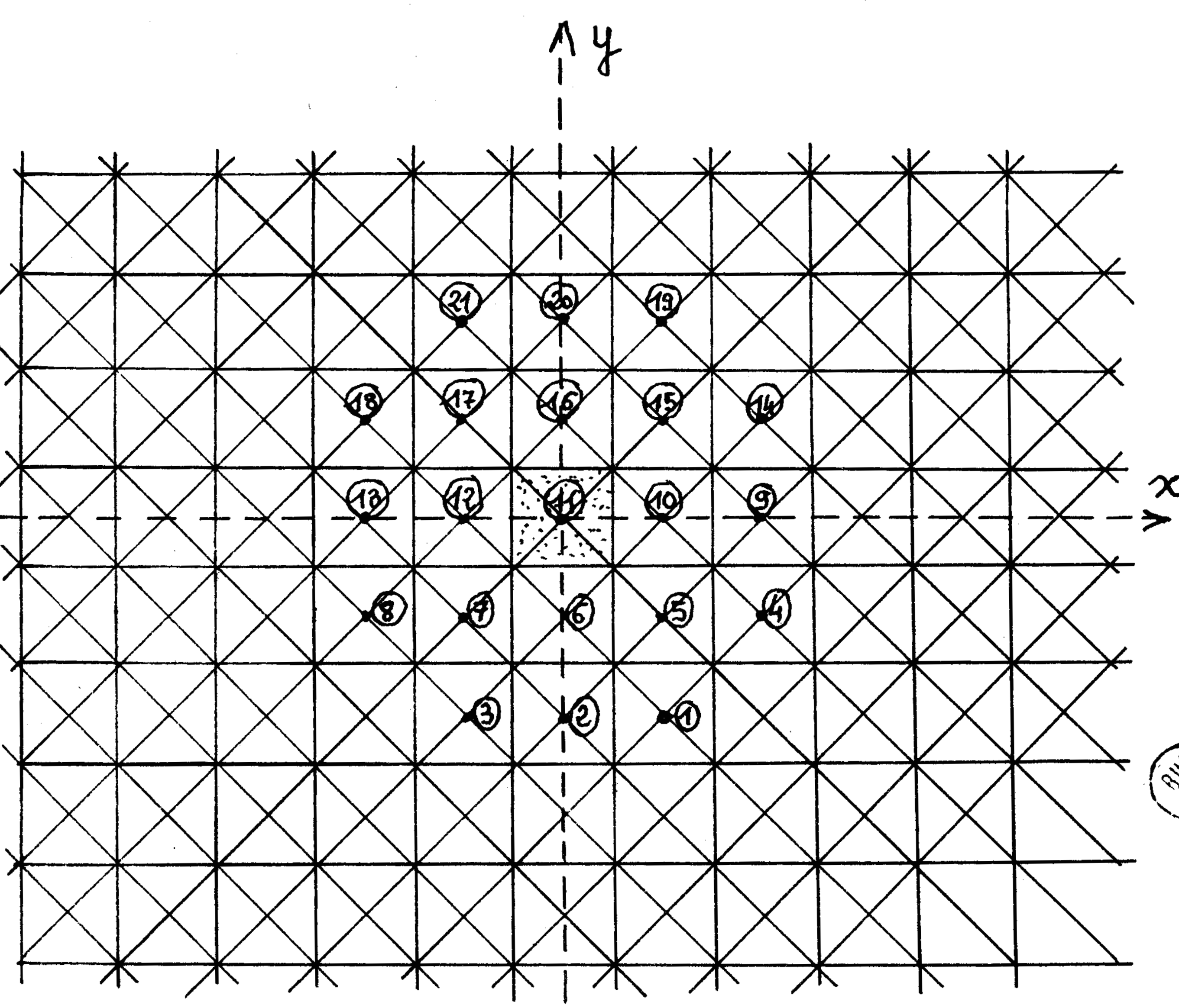
$$\|S_3 e_{22} - e_{22}\|_\infty = 7h^4/288$$

S_3 *interpole* e_{13} *et* e_{31} *aux points* A_{ij}, *mais non* e_{22}.

Figure 18



Support de la B-spline de Sp(4, 2)



BUS LILLE

Preuve : Pour plus de clarté, on utilise les notations de la figure 18 et l'on étudie les opérateurs sur le carré R centré en $a_{11} = (0,0)$ qui est recouvert par les supports des B-splines centrés aux points $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ de la figure du bas. La contribution de chaque support est indiquée sur la figure du haut.

On compare les B-coefficients de e_{ij} et Se_{ij} sur le triangle T situé en bas du carré R en utilisant le tableau 2 des pages VI-52 et VI-53.

1) Etude du quasi-interpolant S_1.

Sur le carré R, on a :

$$\frac{1}{h} S_1 e_{10} = 2(M_4+M_9+M_{14}) + (M_1+M_5+M_{10}+M_{15}+M_{19}) - (M_3+M_7+M_{12}+M_{17}+M_{21}) - 2(M_8+M_{13}+M_{18})$$

et l'on vérifie que les B-coefficients sur le carré R sont ceux de e_{10}. On calcule de même :

$$\frac{1}{h^2} S_1 e_{11} = 2(M_3+M_8+M_{14}+M_{19}-M_1-M_4-M_{18}-M_{21}) + (M_7+M_{15}-M_5-M_{17})$$

et l'on constate que les B-coefficients sont ceux de e_{11}.

Enfin

$$\frac{1}{h^2} S_1 e_{20} = 4(M_4+M_8+M_9+M_{13}+M_{14}+M_{18}) + (M_1+M_3+M_5+M_7+M_{10}+M_{12}+M_{15}+M_{17}+M_{19}+M_{21})$$

est tel que les B-coefficients de $S_1e_{20}-e_{20}$ sont constants et égaux à $5h^2/12$, idem pour $S_1e_{02}-e_{02}$.

2) <u>Etude du quasi-interpolant</u> S_2.

Par construction, S_2 reproduit $\mathbb{P}_2$. Pour montrer qu'il reproduit $\mathbb{P}_3$, il suffit de prouver que $S_2 e_{30} = e_{30}$ et $S_2 e_{21} = e_{21}$ pour des raisons de symétrie.

On a sur le carré R ; puisque $\Delta e_{30} = 6 e_{10}$:

$$S_2 e_{30} = \sum_{j=1}^{21} x_j (x_j^2 - 5h^2/4) M_j \qquad \text{avec} \quad a_j = (x_j, y_j).$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{h^3} S_2 e_{30} = \frac{11}{2} (M_4 + M_9 + M_{14} - M_8 - M_{13} - M_{18})$$
$$+ \frac{1}{4} (M_1 + M_5 + M_{10} + M_{15} + M_{19} - M_3 - M_7 - M_{12} - M_{17} - M_{21})$$

et les B-coefficients sont ceux de e_{30}.

De même, puisque $e_{21} = 2e_{01}$, on a :

$$S_2 e_{21} = \sum_{j=1}^{21} y_j (x_j^2 - 5h^2/12) M_j \ ,$$

soit

$$\frac{1}{h^3} S_2 \ e_{21} = \frac{7}{6}(-M_1 - M_3 + M_{19} + M_{21})$$
$$+ \frac{43}{12}(-M_4 - M_8 + M_{14} + M_{18}) + \frac{7}{12}(-M_5 - M_7 + M_{15} + M_{17})$$
$$+ \frac{5}{6}(M_2 - M_{20}) + \frac{5}{12}(M_6 - M_{16})$$

dont les B-coefficients sur R sont ceux de e_{21}/h^3.

Etudions l'erreur sur les monômes e_{40}, e_{13} et $e_{22} \in \mathbb{P}_4$.

$$S_2 e_{40} = \sum_{j=1}^{21} x_j^2 (x_j^2 - 5h^2/2) M_j \ , \quad \text{car} \quad \Delta e_{40} = 12\, e_{20}, \ \text{soit :}$$

$$\frac{1}{h^4} S_2 e_{40} = 6(M_4 + M_8 + M_9 + M_{13} + M_{14} + M_{18}) - \frac{3}{2}(M_1 + M_5 + M_{10} + M_{15} + M_{19} + M_3 + M_7 + M_{12} + M_{17} + M_{21}).$$

On vérifie alors que les B-coefficients sont ceux de $e_{40}/h^4-9/16$, donc $S_2e_{40} - e_{40} = \frac{9}{16}\,h^4 = S_2e_{04}-e_{04}$ en utilisant la symétrie du réseau et des B-splines par rapport à $y = x$.

$$S_2e_{13} = \sum_{j=1}^{21} x_jy_j(y_j^2-5h^2/4)M_j \quad \text{car} \quad \Delta e_{13} = 6e_{11}, \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{h^4}\,S_2e_{13} = \frac{11}{2}\,(-M_1+M_3+M_{19}-M_{21}) + \frac{1}{2}\,(M_4-M_8-M_{14}+M_{18}) + \frac{1}{4}\,(M_5-M_7-M_{15}+M_{17})$$

Les B-coefficients de $S_2e_{13}-e_{13}$ sur R sont les suivants, multipliés par $\frac{h^4}{96}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & -1 & & 1 & & 0 & \\
0 & & -1 & & 0 & & 1 & & 0 \\
 & -1 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & -1 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
0 & & -1 & & 0 & & 1 & & 0 \\
 & 0 & & -1 & & 1 & & 0 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Il y a donc interpolation le long des droites verticales et horizontales du réseau et interpolation d'Hermite aux différents noeuds. On calcule explicitements : $\|S_2e_{13}-e_{13}\|_{\infty,R} = h^4/256$, mais comme S_2 laisse $\mathbb{P}_3$ invariant, l'erreur sur $(x-a)(y-b)^3$ est la même que pour xy^3 et cette évaluation de l'erreur est valable par conséquent dans le plan tout entier. Par symétrie, le résultat est identique pour $S_2e_{31}-e_{31}$.

Enfin, puisque $\Delta e_{22} = 2(x^2+y^2)$, on obtient :

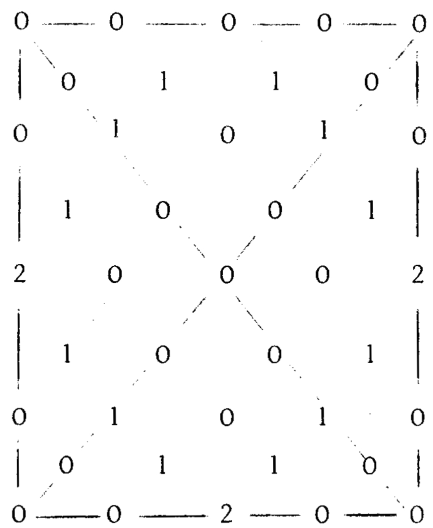
$$S_2e_{22} = \sum_{j=1}^{21} \left[x_j^2y_j^2 - \frac{5}{12}\,h^2(x_j^2+y_j^2)\right].M_j,$$

soit :

$$\frac{1}{h^4}\,S_2e_{22} = \frac{23}{12}\,(M_4+M_8+M_{14}+M_{18}) - \frac{5}{3}\,(M_2+M_9+M_{13}+M_{20}) + \frac{1}{6}\,(M_5+M_7+M_{15}+M_{17})$$

$$- \frac{5}{12}\,(M_6+M_{10}+M_{12}+M_{16})$$

On trouve alors $S_2e_{22}-e_{22} = -\frac{29}{144}\,h^4 - \frac{h^4}{72}\,\sigma(x)$ où $\sigma(x)$ a comme B-coefficients sur R :



On calcule alors $\|\sigma\|_\infty = 3/4$ et

$\|S_2 e_{22} - e_{22}\|_\infty = \frac{61}{288} h^4$.

La norme est valable sur $\mathbb{R}^2$ tout entier car S_2 laisse $\mathbb{P}_3$ invariant et l'erreur sur $(x-a)^2(y-b)^2$ est la même que sur x^2y^2.

3) Etude du quasi-interpolant S_3.

Comme $\Delta^2 e_{40} = 24 = \Delta^2 e_{04}$, on a $\frac{3}{128} h^4 \Delta^2 e_{40} = \frac{9}{16} h^4$ donc $S_3 e_{40} = e_{40}$ et $S_3 e_{04} = e_{04}$.

L'erreur sur e_{13} et e_{31} reste inchangée car $\Delta^2 e_{13} = \Delta^2 e_{31} = 0$. Enfin $\Delta^2 e_{22} = 8$, donc :

$$S_3 e_{22} - e_{22} = - \frac{29}{144} h^4 - \frac{1}{72} h^4 \sigma + \frac{3}{16} h^4 = - \frac{1}{72} h^4 (1+\sigma) \ ,$$

soit :

$$\|S_3 e_{22} - e_{22}\|_\infty = \frac{7}{288} h^4 .$$

Remarque. Au lieu de corriger S_2 en ajoutant $\frac{3}{128} \Delta^2 f(A_{ij})$ au coefficient de M_{ij}, on peut s'arranger pour que S_3 interpole e_{22} en corrigeant par :

$$h^4\left(\frac{3}{128}\,\partial_{40}f(A_{ij}) + \frac{29}{576}\,\partial_{22}f(A_{ij}) + \frac{3}{128}\,\partial_{04}f(A_{ij})\right)$$

au lieu de :

$$\frac{3}{128}\,h^4\Delta^2 f(A_{ij}) = h^4\left(\frac{3}{128}\,\partial_{40} + \frac{27}{576}\,\partial_{22} + \frac{3}{128}\,\partial_{04}\right)f(A_{ij})$$

En désignant par $\hat{S}_3$ le nouvel opérateur, on a alors interpolation de $\mathbb{P}_4$, l'erreur sur e_{40} et e_{04} est toujours nulle, celle sur e_{13} et e_{31} est inchangée et :

$$\|\hat{S}_3 e_{22} - e_{22}\|_\infty = \frac{1}{72}\,h^4\,\|\sigma\|_\infty = \frac{h^4}{96}$$

IX - ETUDE DE L'ERREUR POUR LES QUASI-INTERPOLANTS DE Sp(4,2)

R désigne toujours le carré centré en a_{11} (figure 18), et $\hat{R}$ est l'octogone de sommets $\{a_1,a_3,a_8,a_{18},a_{21},a_{19},a_{14},a_4\}$. On donne quelques majorations en norme uniforme pour des fonctions ayant des dérivées partielles continues dans $\hat{R}$ et l'on utilise ; pour $u \in C^k(\hat{R})$:

$$\hat{\omega}_k(h) = \max\{\hat{\omega}(\partial_{ij},u,h) \quad ; \quad i+j = k\}$$

$\hat{\omega}(v,h)$ étant le module de continuité de $v \in C^o(\hat{R})$.

Des résultats plus complets peuvent être obtenus par des techniques analogues à celles du théorème 4 pour les erreurs sur les dérivées partielles. Elles peuvent être adaptées au calcul des erreurs en d'autres normes que la norme uniforme.

Théorème 6 :

i) Si $u \in C^o(\hat{R})$, *on a* :

$$||S_1u-u||_{\infty,R} \leqslant \frac{5}{3}\,\hat{\omega}_o(h)$$

et si $u \in C^2(\hat{R})$, *il existe* C_1 *et* $C_2 > 0$ *tels que* :

$$||S_1u-u||_{\infty,R} \leqslant \frac{5}{24}\,h^2|\Delta u(a_{11})| + \frac{59}{24}\,h^2\,\hat{\omega}_2(h)$$

$$||\partial_{ij}(u-S_1u)||_{\infty,R} \leqslant C_1h\hat{\omega}_2(h) \qquad (i+j = 1)$$

$$||\partial_{ij}(u-S_1u)||_{\infty,R} \leqslant C_2\hat{\omega}_2(h) \qquad (i+j = 2)$$

ii) Si $u \in C^4(\hat{R})$, *on a* :

$$||S_2u-u||_{\infty,R} \leqslant \frac{233}{2304}\,h^4M_4(a_{11}) + \frac{27}{16}\,h^4\hat{\omega}_4(h)$$

où $M_4(a_{11}) = \max\{|\partial_{ij}u(a_{11})| \;,\quad i+j = 4\}$.

D'autre part, on a également :

$$\|\partial_{ij}(u-S_2u)\|_{\infty,R} = O(h^{4-k}) \qquad i+j = k \leqslant 3$$

(*pour* $k = 3$, *à l'intérieur de chaque triangle*).

iii) Si $u \in C^4(\hat{R})$, *on a :*

$$\|S_3u-u\|_{\infty,R} \leqslant \frac{17}{2304} h^4 M_4(a_{11}) + \frac{115}{54} h^4 \hat{\omega}_4(h)$$

et l'on a également :

$$\|\partial_{ij}(u-S_3u)\|_{\infty,R} = O(h^{4-k}) \qquad 0 \leqslant i+j = k \leqslant 3.$$

Preuve :

1) Désignons par α_i $(i = 1,\dots,15)$ les B-coefficients de $S_1u = \sum_{j=1}^{21} u_j M_j$ sur le triangle T de sommets $\{a_{11},(a_7+a_{11})|2,(a_5+a_{11})|2\}$ avec la notation $u_j = u(a_j)$. On étudie l'erreur locale sur ce triangle uniquement, les calculs étant analogues pour les 3 autres triangles formant R. Au moyen des figures 16 et 18, on calcule les B-coefficients :

$$384\,\alpha_1 = u_2+14u_5+48a_6+14u_7+u_9+48u_{10}+132u_{11}+48u_{12}+u_{13}+14u_{15}+48u_{16}+14u_{17}+u_{20}$$

$$192\,\alpha_2 = u_2+7u_5+30u_6+12u_7+18u_{10}+66u_{11}+30u_{12}+u_{13}+2u_{15}+18u_{16}+7u_{17}$$

$$96\,\alpha_4 = u_2+3u_5+18u_6+10u_7+6u_{10}+30u_{11}+18u_{12}+u_{13}+6u_{16}+3u_{17}$$

$$96\,\alpha_5 = u_2+6u_5+19u_6+6u_7+11u_{10}+33u_{11}+11u_{12}+u_{15}+7u_{16}+u_{17}$$

$$192\,\alpha_7 = 3u_2+u_3+5u_5+40u_6+30u_7+u_8+7u_{10}+50u_{11}+40u_{12}+3u_{13}+7u_{16}+5u_{17}$$

$$96\,\alpha_8 = 2u_2+5u_5+23u_6+10u_7+7u_{10}+30u_{11}+13u_{12}+5u_{16}+u_{17}$$

$$48\ \alpha_{11} = u_2+u_3+u_5+10u_6+10u_7+u_8+u_{10}+10u_{11}+10u_{12}+u_{13}+u_{16}+u_{17}$$

$$96\ \alpha_{12} = 3u_2+u_3+4u_5+25u_6+15u_7+4u_{10}+25u_{11}+15u_{12}+3u_{16}+u_{17}$$

$$48\ \alpha_{13} = 2u_2+4u_5+14u_6+4u_7+4u_{10}+14u_{11}+4u_{12}+2u_{16}\ .$$

En utilisant les majorations :

$|u_j-u(x)| \leqslant \hat{\omega}_o(h)$ pour $j = 6,11$

$|u_j-u(x)| \leqslant 2\hat{\omega}_o(h)$ pour $j = 5,7,10,12,16,2$

$|u_j-u(x)| \leqslant 3\hat{\omega}_o(h)$ pour $j = 1,3,4,8,9,13,14,15,17,18,19,20,21.$

On obtient successivement :

$|\alpha_1-u(x)| \leqslant \frac{619}{384}\,\hat{\omega}_o(h)$

$|\alpha_i-u(x)| \leqslant \frac{298}{192}\,\hat{\omega}_o(h)$ pour $i = 2,3$

$|\alpha_i-u(x)| \leqslant \frac{148}{96}\,\hat{\omega}_o(h)$ pour $i = 4,6$

$|\alpha_5-u(x)| \leqslant \frac{142}{96}\,\hat{\omega}_o(h)$

$|\alpha_i-u(x)| \leqslant \frac{304}{192}\,\hat{\omega}_o(h)$ pour $i = 7,10$

$|\alpha_i-u(x)| \leqslant \frac{135}{96}\,\hat{\omega}_o(h)$ pour $i = 8,9$

$|\alpha_i-u(x)| \leqslant \frac{80}{48}\,\hat{\omega}_o(h)$ pour $i = 11,15$ (maximum)

$|\alpha_{13}-u(x)| \leqslant \frac{68}{48}\,\hat{\omega}_o(h)$

$|\alpha_i-u(x)| \leqslant \frac{144}{96}\,\hat{\omega}_o(h)$ pour $i = 12,14.$

Comme les polynômes de Bernstein forment une partition de l'unité sur le triangle T, on en déduit :

$$|S_1 u(x)-u(x)| \leqslant \frac{5}{3}\,\hat{\omega}_o(h)$$

d'où le résultat lorsque u est simplement continue sur $\hat{R}$.

2) Lorsque $u \in C^2(R)$, on utilise la formule de Taylor :

$$u(x) = u(a_{11}) + Du(a_{11}).(x-a_{11}) + \frac{1}{2}D^2u(a_{11}).(x-a_{11})^2 +$$

$$\frac{1}{2}\left[D^2u(\tilde{x})-D^2u(a_{11})\right].(x-a_{11})^2, \qquad \text{avec } \tilde{x} \in [a_{11},x]$$

et des formules analogues pour $u(a_j)$, avec $\tilde{a}_j \in [a_{11},a_j]$.

Sachant que $S_1e_{20}-e_{20} = S_1e_{02}-e_{02} = 5h^2/12$, on a :

$$S_1w-w = \frac{5}{24}h^2\,\Delta u(a_{11}) \qquad \text{si} \quad w(x) = \frac{1}{2}D^2u(a_{11})\,.\,(x-a_{11})^2$$

Par conséquent, on obtient :

$$|S_1u(x)-u(x)| \leqslant \frac{5}{24}h^2|\Delta u(a_{11})| + \frac{1}{2}\sum_j M_j\left|\left[D^2u(\tilde{a}_j)-D^2u(a_{11})\right].(a_j-a_{11})^2\right|$$

$$+\frac{1}{2}\left|\left[D^2u(\tilde{x})-D^2u(a_{11})\right].(x-a_{11})^2\right|$$

Le coefficient de M_j est majoré par $\lambda_j = \hat{\omega}_2(\delta_j).(\|a_j-a_{11}\|_1)^2$ où δ_j est la distance euclidienne de a_{11} à a_j.

Pour $j = 3,8$: $\lambda_j \leqslant 27h^2\hat{\omega}_2(h)$

Pour $j = 2,5,7,13,17$: $\lambda_j \leqslant 8h^2\hat{\omega}_2(h)$

Pour $j = 6,10,12,16$: $\lambda_j \leqslant h^2\hat{\omega}_2(h)$

Donc les B-coefficients α_i de $\sum \lambda_j M_j$ sont majorés par :

$$\alpha_i \leqslant \alpha_{11} \leqslant \frac{1}{48}h^2\omega_2(h)\left[54+14\times 8+22\right] = \frac{47}{12}h^2\omega_2(h)$$

D'autre part, on a :

$$|[D^2u(\tilde{x})-D^2u(a_{11})].(x-a_{11})^2| \leqslant h^2\hat{\omega}_2(h)$$

d'où la majoration finale :

$$|S_1u(x)-u(x)| \leqslant \frac{5}{24} h^2|\Delta u(a_{11})| + \frac{59}{24} h^2\hat{\omega}_2(h)$$

valable sur tout le carré R.

On a vu que si $w(x) = \frac{1}{2} D^2u(a_{11}).(x-a_{11})^2$, alors $S_1w-w = \frac{5}{24} h^2 u(a_{11})$, donc $\partial_{ij}(S_1w-w) = 0$ pour $i+j = k = 1,2$.

Par une technique analogue à celle utilisée pour l'opérateur S_1 dans $Sp(2,1)$ (cf. la 2ème partie de la preuve du théorème 4), on peut montrer l'existence de C_1 et $C_2 > 0$ telles que :

$$\|\partial_{ij}(S_1u-u)\|_{\infty,R} \leqslant C_1h\hat{\omega}_2(h) \qquad (i+j = 1)$$

$$\|\partial_{ij}(S_1u-u)\|_{\infty,R} \leqslant C_2\hat{\omega}_2(h) \qquad (i+j = 2)$$

Ces constantes sont calculables à partir des B-coefficients des dérivées partielles des B-splines M_j.

3) Etudions l'opérateur S_2 lorsque $u \in C^4(\hat{R})$.

$$u(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} D^ku(a_{11}).(x-a_{11})^k + \frac{1}{24} [D^4u(\tilde{x})-D^4u(a_{11})].(x-a_{11})^4, \ \tilde{x}\in [a_{11},x]$$

et des développements analogues en a_j, avec $\tilde{a}_j \in [a_{11},a_j]$.

$$\Delta u(a_j) = \Delta u(a_{11}) + D\Delta u(a_{11}).(a_j-a_{11}) + \frac{1}{2} D^2\Delta u(a_{11}) \ . \ (a_j-a_{11})^2$$
$$+ \frac{1}{2}[D^2\Delta u(\hat{a}_j)-D^2\Delta u(a_{11})]. \ (a_j-a_{11})^2, \qquad \hat{a}_j \in [a_{11},a_j] \ .$$

Posons $w(x) = \frac{1}{24} D^4u(a_{11}).(x-a_{11})^4 \in \mathbb{P}_4$. On a $\Delta w(x) = \frac{1}{2} D^2\Delta u(a_{11}).(x-a_{11})^2$ et

$$S_2w(x) = \sum_j M_j(x) \{w(a_j) - \frac{5}{24} h^2\Delta w(a_j)\}.$$

Comme S_2 reproduit $\mathbb{P}_3$:

$$S_2w(x)-w(x) = \frac{1}{24} \sum_{i+j=4} \binom{4}{i} \partial_{ij} u(a_{11}) [S_2e_{ij}-e_{ij}]$$

et en utilisant les majorations du théorème 5, (ii) :

$$||S_2w-w||_\infty \leq \frac{1}{24} h^4M_4(a_{11}) \{\frac{9}{16} + \frac{1}{64} + \frac{61}{48} + \frac{1}{64} + \frac{9}{16}\} = \frac{233}{2304} h^4M_4 .$$

D'où la majoration de l'erreur :

$$|S_2u(x)-u(x)| \leq \frac{233}{2304} h^4M_4(a_{11}) + \frac{1}{24}|[D^4u(\tilde{x})-D^4u(a_{11})].(x-a_{11})^4|$$

$$+ \sum_j M_j(x) \{\frac{1}{24}||D^4(\tilde{a}_j)-D^4u(a_{11})|.(a_j-a_{11})^4| + \frac{5}{48} h^2||D^2\Delta u(\hat{a}_j)-D^2\Delta u(a_{11})|.(a_j-a_{11})^2|\}$$

Le 2ème terme du second membre est majoré par $\frac{1}{24} h^4\hat{\omega}_4(h)$.

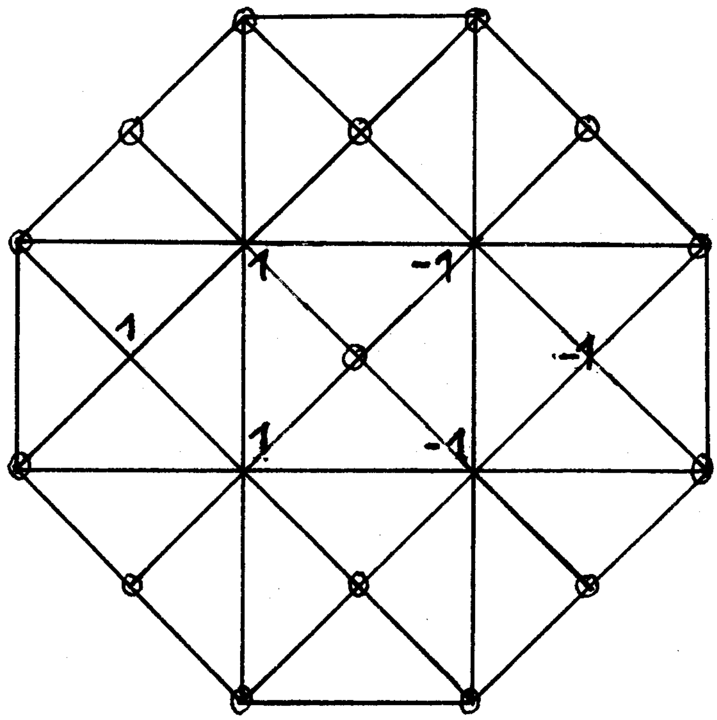
Le coefficient de M_j est majoré par :

$$\lambda_j = \hat{\omega}_4(\delta_j)\{\frac{1}{24}(||a_j-a_{11}||_1)^4 + \frac{5}{24} h^2(||a_j-a_{11}||_1)^2\}$$

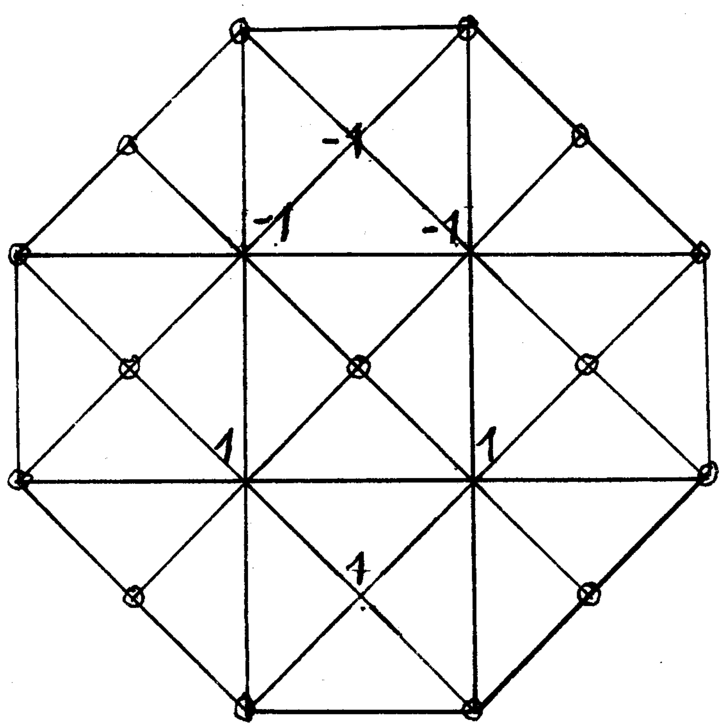
pour $j = 3,8$ $\quad\lambda_j \leq \frac{63}{4} h^4\hat{\omega}_4(h)$

pour $j = 2,5,7,13,17$, $\quad\lambda_j \leq 3h^4\hat{\omega}_4(h)$

pour $j = 6,10,12,16$, $\quad\lambda_j \leq \frac{1}{4} h^4\hat{\omega}_4(h)$



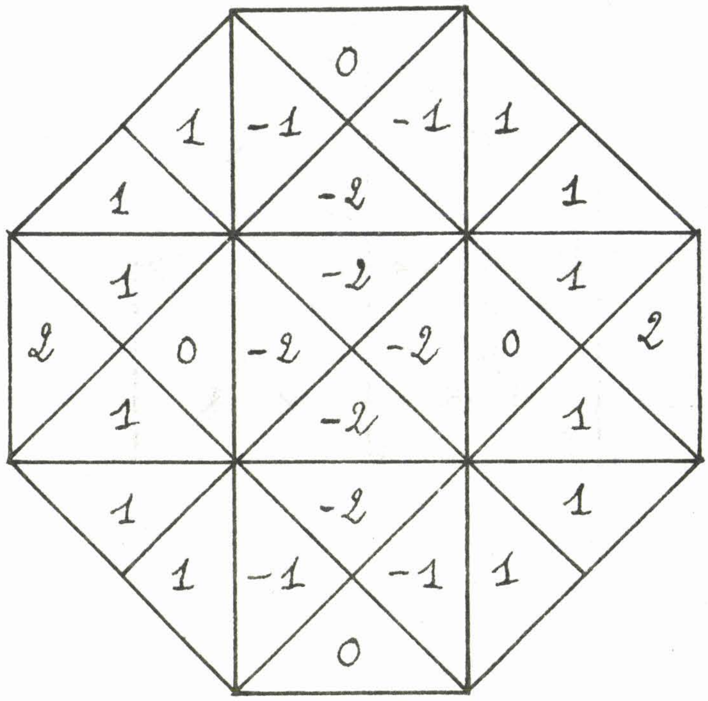
$2h\partial M_j/\partial x$



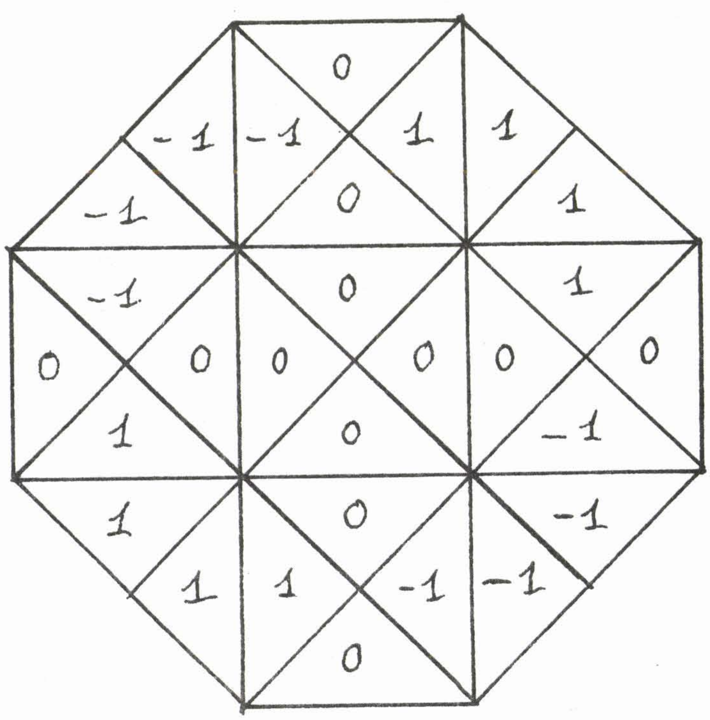
$2h\partial M_j/\partial y$

Figure 19

BUS LILLE



$2h^2\partial^2 M_j/\partial x^2$



$2h^2\partial^2 M_j/\partial x\partial y$

Figure 20

BUS LILLE

Les B-coefficients α_i de $\sum_j \lambda_j M_j$ sur T sont majorés par :

$$\alpha_{11} \leqslant \frac{1}{192} h^4 \hat{\omega}_4(h) \; \{126+14\times 12+22\} = \frac{79}{48} h^4 \hat{\omega}_4(h)$$

ce qui donne la majoration (ii) du théorème :

$$|S_2 u(x)-u(x)| \leqslant \frac{203}{2304} h^4 M_4(a_{11}) + \frac{27}{16} h^4 \hat{\omega}_4(h) \; .$$

Par une technique analogue et en utilisant des majorations des dérivées partielles des B-splines, on obtient localement sur le triangle T :

$$\|\partial_{ij}(S_2 u-u)\|_{\infty,T} = O(h^{4-k}) \quad \text{lorsque} \quad i+j = k = 1,2,3 \; .$$

4) Pour l'opérateur S_3 défini, pour $u \in C^4(\hat{R})$, par :

$$S_3 u = \sum_j \left[u_j - \frac{5}{24} h^2 \Delta u_j + \frac{3}{128} h^4 \Delta^2 u_j\right] M_j$$

on aura, avec les notations de la 3ème partie ci-dessus :

$$S_3 w(x)-w(x) = \frac{1}{6} \partial_{31} u(a_{11}) . \left[S_3 e_{31} - e_{31}\right] + \frac{1}{4} \partial_{22} u(a_{11}) \left[S_3 e_{22} - e_{22}\right]$$

$$+ \frac{1}{6} \partial_{13} u(a_{11}) \left[S_3 e_{13} - e_{13}\right]$$

puisque S_3 reproduit $\mathbb{P}_3$, e_{40} et e_{04}. En utilisant les majorations du (iii) du théorème 5, on obtient :

$$\|S_3 w-w\|_\infty \leqslant \frac{17}{2304} h^4 \; . \; M_4(a_{11}) .$$

En utilisant des formules de Taylor au 4ème ordre pour $u(x)$, $u(a_j)$, $\Delta u(a_j)$ et $\Delta^2 u(a_j)$, on obtient :

$$|S_3u(x)-u(x)| \leqslant \frac{17}{2304} h^4 M_4(a_{11}) + \frac{1}{24} h^4 \hat{\omega}_4(h) +$$

$$\sum_j M_j(x)\{\frac{1}{24}| [D^4u(a_j)-D^4u(a_{11})].(a_j-a_{11})^4| + \frac{5}{48} h^2 | [D^2\Delta u(\hat{a}_j)-D^2u(a_{11})]$$

$$. (\hat{a}_j-a_{11})^2| + \frac{3}{128} h^4 |\Delta^2u(\check{a}_j)-\Delta^2u(a_{11})|\}$$

avec $\tilde{a}_j$, $\hat{a}_j$ et $\check{a}_j \in [a_{11}, a\ ]$.

Le coefficient de M_j est majoré par :

$$\lambda_j = \hat{\omega}_4(\delta_j) \{\frac{1}{24}(\|a_j-a_{11}\|_1)^4 + \frac{5}{24} h^2(\|a_j-a_{11}\|_1)^2 + \frac{3}{32} h^4\}$$

pour $j = 3,8$ $\qquad \lambda_j \leqslant \frac{513}{32} h^4\hat{\omega}_4(h)$

pour $j = 2,5,7,13,17$ $\qquad \lambda_j \leqslant \frac{51}{16} h^4\hat{\omega}_4(h)$

pour $j = 6,10,12,16$ $\qquad \lambda_j \leqslant \frac{11}{32} h^4\hat{\omega}_4(h)$

Les B-coefficients de $\sum_j \lambda_j M_j$ sur T sont majorés par :

$$\frac{1}{16\times 48} h^4\hat{\omega}_4(h) \{513+14\times 51+121\} = \frac{337}{192} h^4\hat{\omega}_4(h)$$

d'où la majoration globale sur T, puis sur R :

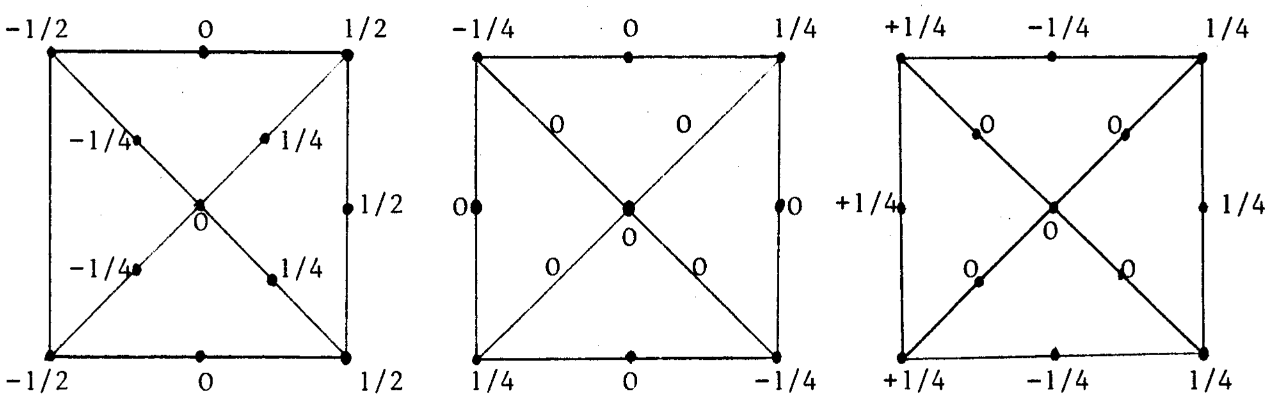
$$|S_3u(x)-u(x)| \leqslant \frac{17}{2304} h^4 M_4(a_{11}) + \frac{115}{64} h^4.\hat{\omega}_4(h)$$

On montre de même que $\|\partial_{ij}(u-S_3u)\|_{\infty,R} = O(h^{4-k})$ lorsque $i+j = k = 1,2,3$ (pour $k = 3$, il s'agit d'une erreur locale, à l'intérieur de chaque triangle).

B-coefficients des polynômes de $\mathbb{P}_2$ *et* $\mathbb{P}_4$.

Tableau 1.

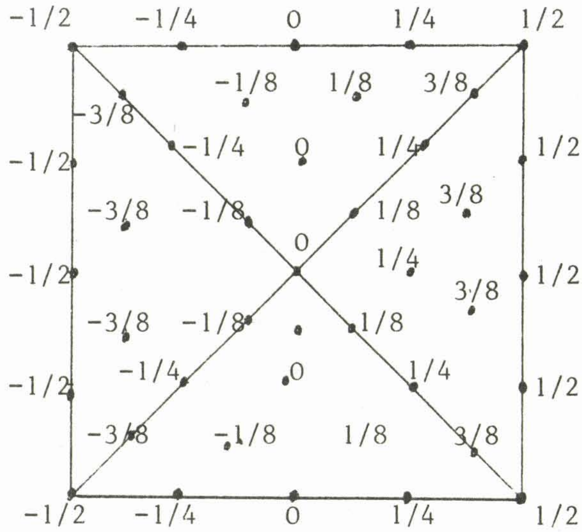
Base canonique de $\mathbb{P}_2$.



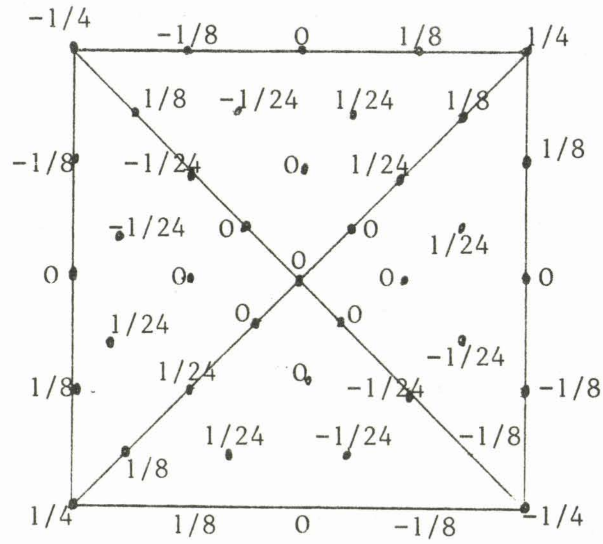
$e_{10} = x$ $e_{11} = xy$ $e_{20} = x^2$

Tableau 2.

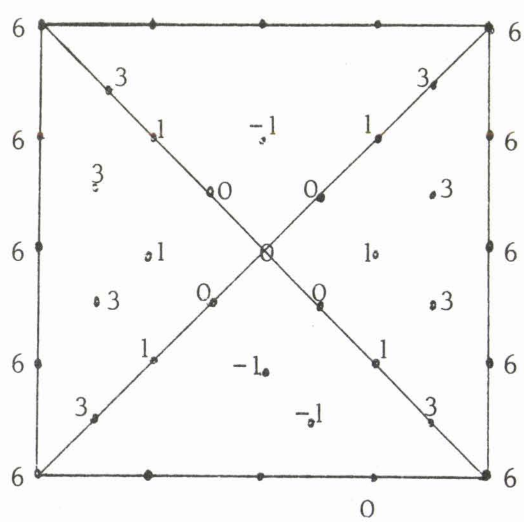
Base canonique de P_4.



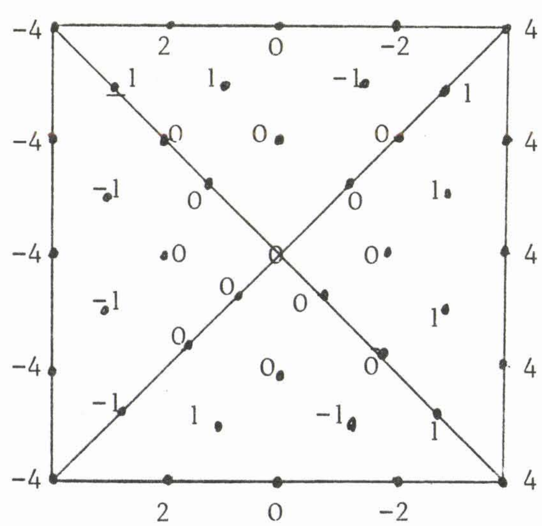
$e_{10} = x$



$e_{11} = xy$

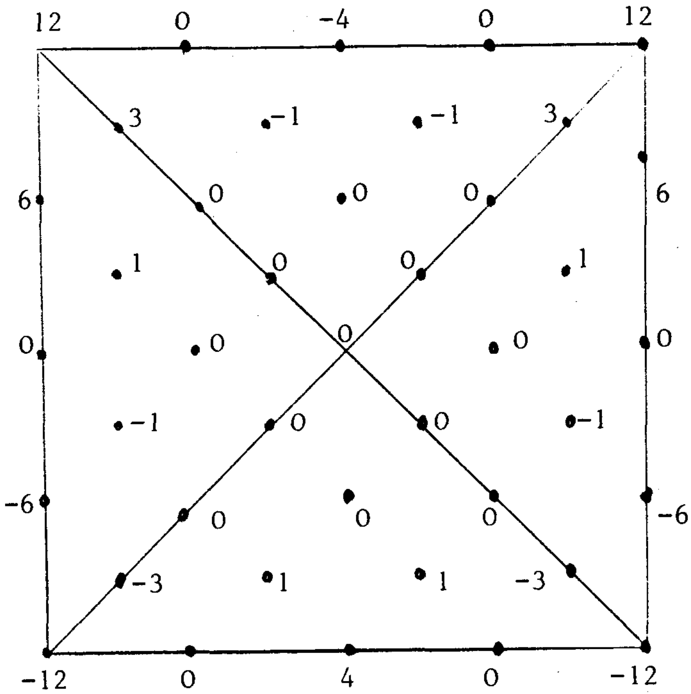


$24e_{20} = 24\ x^2$

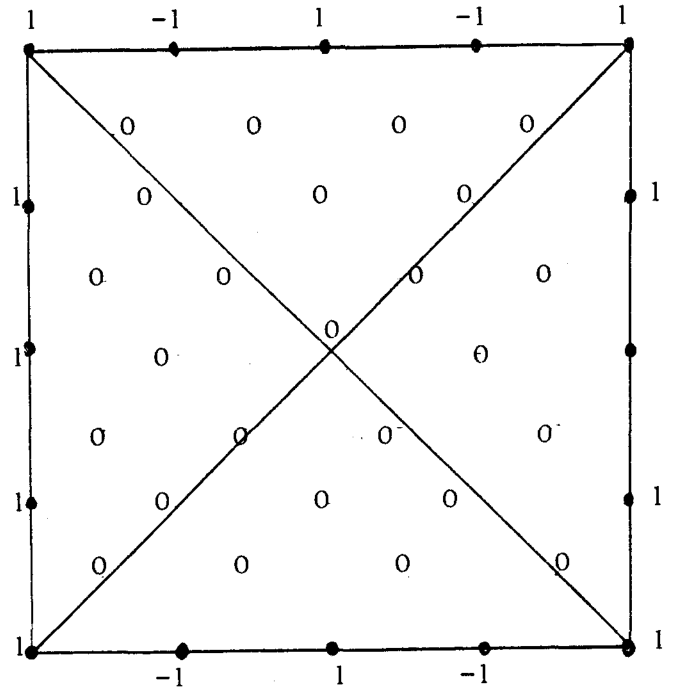


$32e_{30} = 32\ x^3$

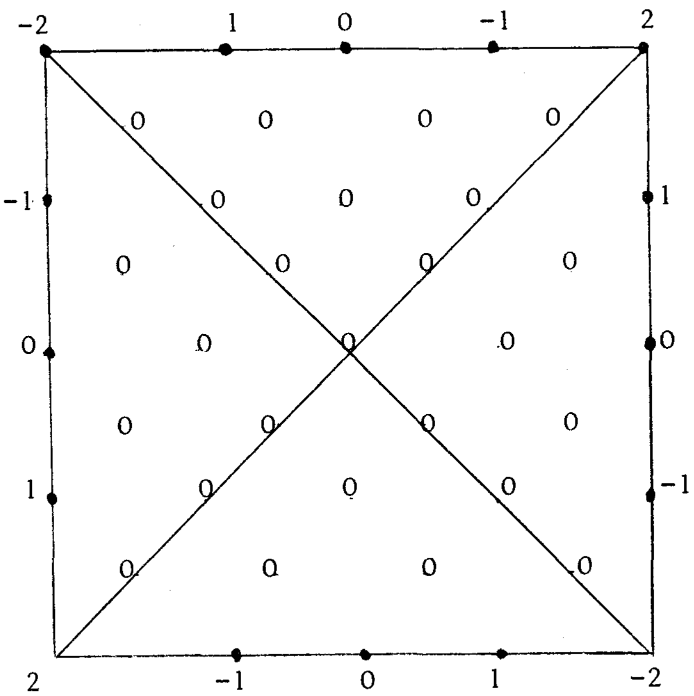
BUS LILLE



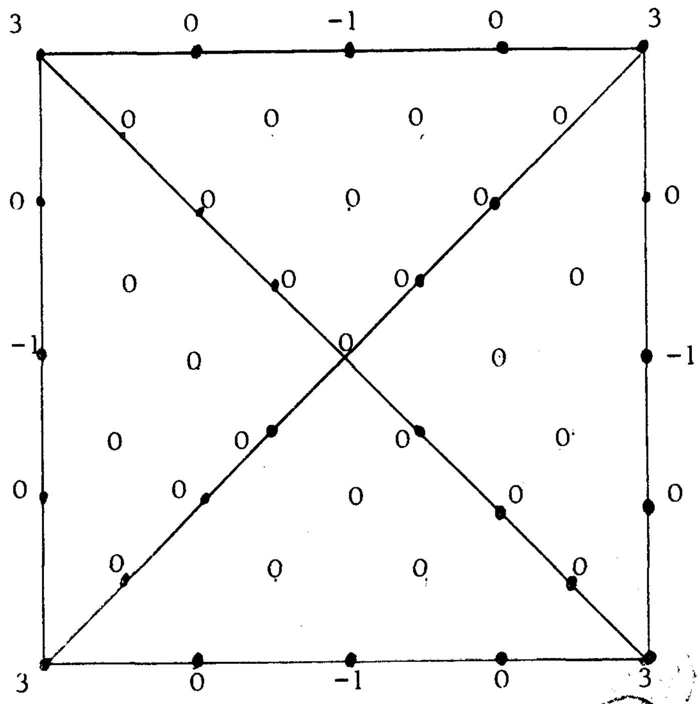
$96\ x^2y = 96e_{21}$



$16\ x^4 = 16\ e_{40}$



$32\ x^3y = 32\ e_{31}$



$48\ x^2y^2 = 48\ e_{22}$

BUS LILLE

RÉFÉRENCES

[1] G. FARIN, "*Bézier Polynomials over triangles and the construction of piecewise* C^r*-polynomials*" (1980, à paraître).

[2] M.J.D. POWELL, "*Piecewice quadratic surface fitting for contour plotting*", in Software for Numerical Mathematics, D.J. Evans (ed.), Academic Press (1974), p. 243-272.

[3] P. SABLONNIERE, "*Quasi-interpolant splines sur des réseaux réguliers du plan*", Colloque d'Analyse Numérique, Giens (1978). Conférences à la NASA (Cleveland), à Kent State University (1979), à l'école d'été de Sielpia (Pologne, Sept. 1980).

[4] P. SABLONNIERE, "*De l'existence de splines à support borné sur une triangulation équilatérale du plan*", Publication ANO 39, Lille (Février 1981).

[5] P. SABLONNIERE, "*Quasi-interpolants splines sur un réseau équilatéral du plan*", Publication ANO 57, Lille (Novembre 1981).

[6] L.L. SCHUMAKER, "*Fitting surfaces to Scattered Data*", dans Approximation Theory II, G.G. Lorentz (ed.), Academic Press (1976), p. 203-268.

[7] P.B. ZWART, "*Multivariate splines with non-degenerate partitions*", SIAM. J. Num. Anal., Vol 10 (1973), p.665-673.

CHAPITRE 7

SPLINES QUADRATIQUES A DEUX VARIABLES

Ils ne savent pas que ce n'est que la chasse et non la prise qu'ils recherchent.

PASCAL *(Pensées)*

I - INTRODUCTION - NOTATIONS

Les splines quadratiques à deux variables sont les surfaces différentiables et polynômiales par morceaux les plus simples : ce sont en effet des fonctions de $C^1(\Omega)$ (Ω domaine polygonal du plan) dont la restriction à chaque triangle T d'une triangulation de Ω est un élément de $\mathbb{P}_2(T)$ (espace des polynômes à deux variables, de degré total inférieur ou égal à 2, sur T).

Par abus de langage, on appelle **triangle quadratique** le graphe d'un polynôme $P \in \mathbb{P}_2(t)$. A chaque triangle quadratique est associé un B-réseau, dans la base de Bernstein de $\mathbb{P}_2(T)$ par rapport aux coordonnées barycentriques de T, grâce auquel les conditions de continuité C^1 s'expriment de manière simple et géométrique : c'est ce que nous appelons la **technique des plaques**. Elle permet la construction rapide de l'**interpolant spline quadratique d'Hermite** (Powell et Sabin [12]) **d'une fonction en des points arbitraires du plan** pour lequel nous donnons également une majoration de l'erreur d'interpolation. Cette technique permet aussi le calcul de la dimension de l'espace des splines quadratiques sur un domaine polygonal muni d'une triangulation vérifiant certaines conditions. Elle fournit enfin des méthodes assez efficaces pour le calcul de l'interpolant **spline quadratique de Lagrange en des points particuliers** d'un domaine triangulaire ou carré muni d'une triangulation régulière, de type rectangle-isocèle comme au chapitre 6. Pour les carrés, on obtient deux algorithmes permettant le calcul de l'interpolant en N points avec un coût de l'ordre de 20 N opérations (additions et multiplications). Ces résultats s'étendent à des domaines plus généraux munis de triangulation moins régulières.

<u>Notations</u> : Si Ω est un domaine du plan, $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω. Pour toute fonction $f \in C^1(\Omega)$, on pose $\partial_1 f = \partial f / \partial x$ et $\partial_2 f = \partial f/\partial y$.

Si $f \in H^3(T) = \{f \in L^2(T), \partial^3 f/\partial x^i \partial y^j \in L^2(T)$ pour $i+j = 3\}$, on pose ; pour $0 \le m \le 3$:

$$|f|^2_{m,T} = \sum_{i+j=m} \int_T |\partial^m f/\partial x^i \partial y^j|^2 \, dx$$

La notation $f|_T$ désigne la restriction de f au triangle T.

II - Continuité C^1 entre deux triangles quadratiques. La technique des plaques

2.1 Coordonnées barycentriques et base de Bernstein de $\mathbb{P}_2(T)$

Soit T le triangle $A_o A_1 A_2$ et $\lambda = (\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2)$ les coordonnées barycentriques d'un point $M \in T$, c'est à dire les solutions du système :

$$\begin{cases} M = \lambda_o A_o + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \\ 1 = \lambda_o + \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

Tout polynôme $P \in \mathbb{P}_2(T)$ s'écrit dans la base de Bernstein :

$$(1) \qquad P(\lambda) = \sum_{o \le i+j \le 2} a_{ij}\, \phi_{ij}(\lambda)$$

où les $\phi_{ij}(\lambda) = \dfrac{2!}{i!j!(2-i-j)!}\, \lambda_o^{2-i-j}\, \lambda_1^i\, \lambda_2^j$

vérifient les propriétés suivantes sur T :

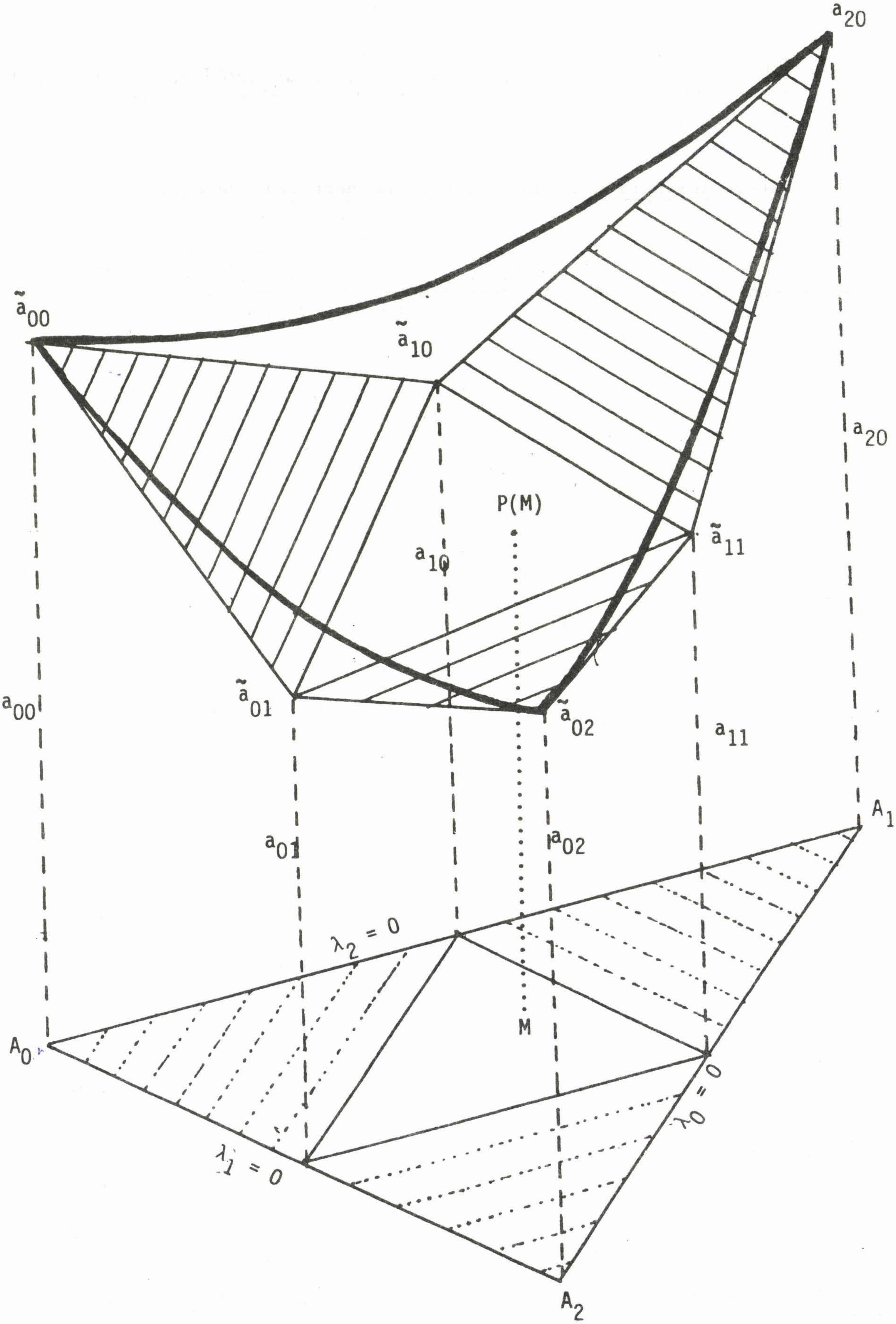
$$(2) \quad \begin{cases} \phi_{ij}(\lambda) \ge 0, \quad \displaystyle\sum_{o \le i+j \le 2} \phi_{ij}(\lambda) = 1 \\ \lambda = \displaystyle\sum_{o \le i+j \le 2} A_{ij}\, \phi_{ij}(\lambda) \end{cases}$$

avec $A_{ij} = ((2-i-j)/2,\ i/2,\ j/2) \in \partial T$ = bord de T.

Les relations (1) et (2) indiquent que le point $(\lambda, P(\lambda))$ du graphe de P (c'est à dire du triangle quadratique défini par P) appartient à l'enveloppe convexe des points $\tilde{a}_{ij} = (A_{ij}, a_{ij})$ (figure 1)

Définition 1 : *L'ensemble des points* $\{\tilde{a}_{ij},\ 0 \le i+j \le 2\}$ *est le B-réseau de* P *(ou B-polyèdre de* P*) sur le triangle* P. *Les* a_{ij} *sont les B-coefficients de* P.

Le B-réseau de P définit quatre plaques triangulaires qui jouent un rôle important dans le raccordement C^1 des triangles quadratiques.



BUS LILLE

FIGURE 1

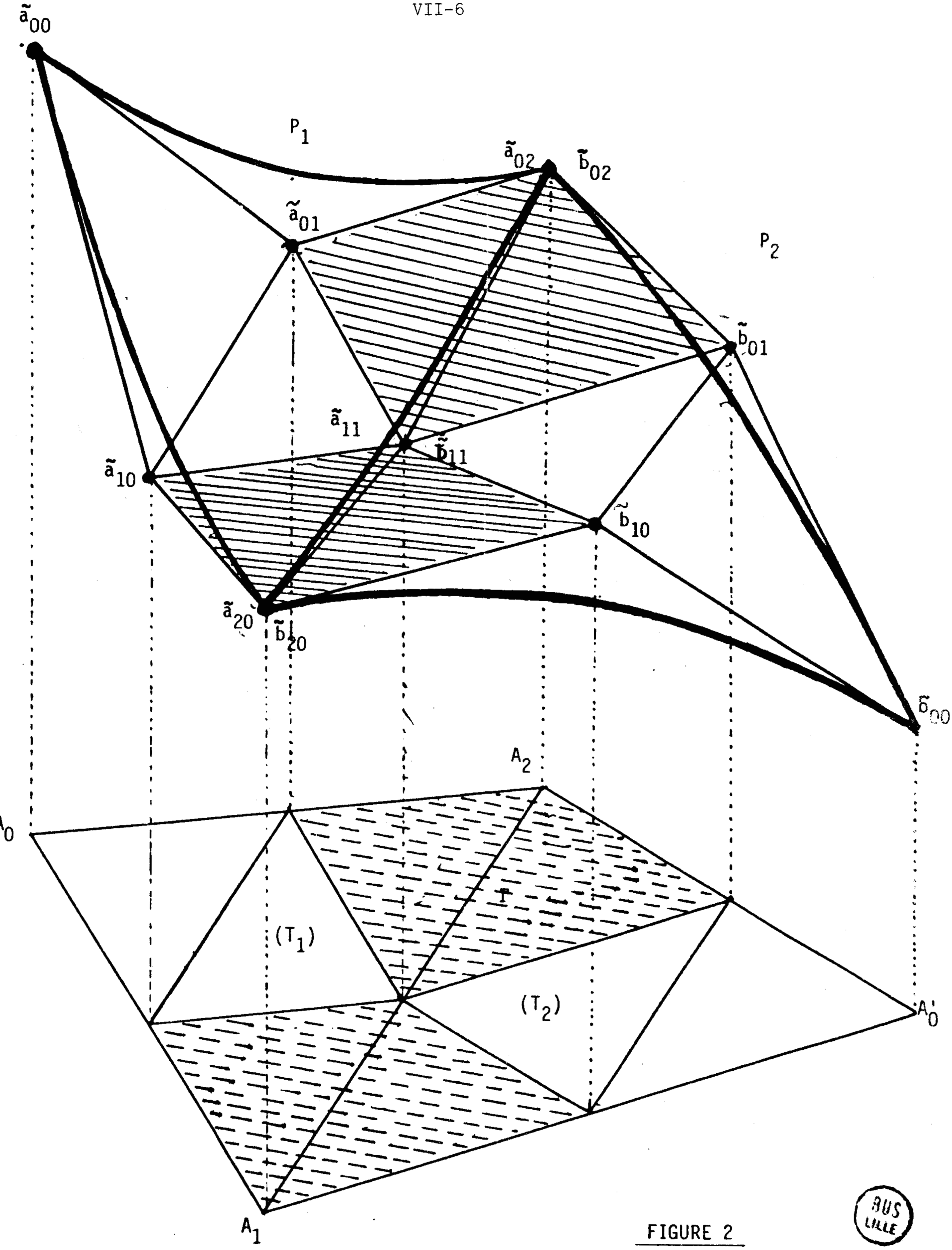


FIGURE 2

BUS LILLE

2.2 Continuité C^1 entre deux triangles quadratiques

Soient $P_1 \in \mathbb{P}_2(T_1)$ et $P_2 \in \mathbb{P}_2(T_2)$ deux polynômes de degré 2 définis respectivement sur les triangles $T_1 = A_o\, A_1\, A_2$ et $T_2 = A'_o\, A_1\, A_2$ (figure 2) ayant $\Gamma = A_1\, A_2$ comme frontière commune. Soient (x_i, y_i) les coordonnées de A_i, (x'_o, y'_o) celles de A'_o, $\{a_{ij},\ 0 \le i+j \le 2\}$ et $\{b_{ij},\ 0 \le i+j \le 2\}$ les B-coefficients de P_1 et P_2 sur T_1 et T_2 respectivement.

Théorème 1 : *La continuité C^1 de P_1 et P_2 le long de Γ est exprimée par les relations suivantes :*

1) $a_{20} = b_{20}$, $a_{11} = b_{11}$ *et* $a_{02} = b_{02}$

pour la continuité le long de Γ

2)
$$\begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{10} & b_{10} \\ x_1 & x_2 & x_o & x'_o \\ y_1 & y_2 & y_o & y'_o \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{02} & a_{01} & b_{01} \\ x_1 & x_2 & x_o & x'_o \\ y_1 & y_2 & y_o & y'_o \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pour la continuité des dérivées partielles du premier ordre le long de Γ.

Preuve : Bien que le résultat soit un cas particulier d'un théorème général donné par G. Farin [7], on peut en donner une preuve directe.

Le long de $\Gamma = A_1\, A_2$, on a $\lambda_o = \mu_o = 0$, $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2 = 1 - \lambda_1 = 1 - \mu_1$, d'où :

$$P_{1|\Gamma} = a_{20}\, \lambda_1^2 + 2a_{11}\, \lambda_1(1 - \lambda_1) + a_{02}(1 - \lambda_1)^2$$

$$P_{2|\Gamma} = b_{20}\, \lambda_1^2 + 2b_{11}\, \lambda_1(1 - \lambda_1) + b_{02}(1 - \lambda_1)^2$$

La continuité s'exprime donc bien par :

$$a_{20} = b_{20},\ a_{11} = b_{11} \text{ et } a_{02} = b_{02}.$$

Les dérivées partielles le long de Γ se calculent de manière analogue :

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial P_1}{\partial \lambda_1}\right|_\Gamma = (a_{20} - a_{10})\lambda_1 + (a_{11} - a_{01})(1 - \lambda_1)$$

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial P_1}{\partial \lambda_2}\right|_\Gamma = (a_{11} - a_{10})\lambda_1 + (a_{02} - a_{01})(1 - \lambda_1)$$

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial P_2}{\partial \mu_1}\right|_\Gamma = (a_{20} - b_{10})\lambda_1 + (a_{11} - b_{01})(1 - \lambda_1)$$

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial P_2}{\partial \mu_2}\right|_\Gamma = (a_{11} - b_{10})\lambda_1 + (a_{02} - b_{01})(1 - \lambda_1)$$

En posant $\Delta = \begin{vmatrix} x_o & x_1 & x_2 \\ y_o & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\Delta' = \begin{vmatrix} x'_o & x_1 & x_2 \\ y'_o & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

on a $\lambda_1 = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_o & x & x_2 \\ y_o & y & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_o & x_1 & x \\ y_o & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\mu_1 = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} x'_o & x & x_2 \\ y'_o & y & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} x'_o & x_1 & x \\ y'_o & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

En écrivant que $\partial_i\, P_1(A_1) = \partial_i\, P_2(A_1)$ $(i = 1,2)$, on obtient les deux relations :

(3) $$\Delta'[(a_{20} - a_{10})(y_2 - y_o) + (a_{11} - a_{10})(y_o - y_1)] = \Delta[(a_{20} - b_{10})(y_2 - y'_o) + (a_{11} - b_{10})(y'_o - y_1)]$$

(4) $$\Delta'[(a_{20} - a_{10})(x_o - x_2) + (a_{11} - a_{10})(x_1 - x_o)] = \Delta[(a_{20} - b_{10})(x'_o - x_2) + (a_{11} - b_{10})(x_1 - x'_o)]$$

Or ces relations résultent de l'identité de Sylvester (cf. Gantmacher [8]) appliquée au déterminant :

$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{10} & b_{10} \\ x_1 & x_2 & x_o & x'_o \\ y_1 & y_2 & y_o & y'_o \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. En choisissant les lignes 3 et 4 et les colonnes 1 et 2,

on obtient :

$$(5) \qquad (y_1 - y_2)\ \delta_1 = \Delta' \begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{10} \\ y_1 & y_2 & y_o \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \Delta \begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} & b_{10} \\ y_1 & y_2 & y'_o \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

De même, en choisissant les lignes 2 et 4 et les colonnes 1 et 2 :

$$(6) \qquad (x_1 - x_2)\ \delta_1 = \Delta' \begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{10} \\ x_1 & x_2 & x_o \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} & b_{10} \\ x_1 & x_2 & x'_o \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On voit que $\delta_1 = 0$ entraîne (3) et (4) et réciproquement (car on a $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$). Par un raisonnement analogue, on montre que $\partial_i\ P_1(A_2) = \partial_i\ P_2\ (A_2)$ $(i = 1, 2)$ impliquent :

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{02} & a_{01} & b_{01} \\ x_1 & x_2 & x_o & x'_o \\ y_1 & y_2 & y_o & y'_o \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \blacksquare$$

Les corollaires suivants sont utilisés pour les triangulations particulières des paragraphes 4 à 6 de ce chapitre.

<u>*Corollaire 1*</u> : *Si* $A_o\ A_1\ A'_o\ A_2$ *est un parallélogramme, la continuité* C^1 *se traduit par* :

$$a_{10} + b_{10} = a_{20} + a_{11}$$

$$a_{01} + b_{01} = a_{02} + a_{11}$$

<u>*Corollaire 2*</u> : *Si* A_o, A_1 *et* A'_o *sont alignés, avec* $A'_oA_1 = kA_oA_1$, *la continuité* C^1 *se traduit par* :

$$\begin{cases} (1+k)\ a_{20} = b_{10} + ka_{10} \\ (1+k)\ a_{11} = b_{01} + ka_{01} \end{cases}$$

2.3 <u>La technique des plaques</u> (figure 2)

L'interprétation géométrique du théorème 1 est intéressante parce qu'elle simplifie les preuves des théorèmes qui vont suivre.

Quand les quatre sommets A_o, A_1, A_2 et A'_o sont en position générale (l'exception est le cas du corollaire 2) les relations données dans ce théorème expriment que les quatre points $\tilde{a}_{20}$, $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{10}$ et $\tilde{b}_{10}$ sont coplanaires (idem pour les quatre points $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{02}$, $\tilde{a}_{01}$ et $\tilde{b}_{01}$). Par conséquent **les deux plaques triangulaires des B-réseaux de P_1 et P_2**, ayant respectivement comme sommets $\tilde{a}_{20}$, $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{10}$ et $\tilde{a}_{20}$, $\tilde{b}_{10}$ et $\tilde{a}_{11}$, **forment une seule plaque quadrilatérale du B-réseau de la surface C^1, quadratique par morceaux, obtenue en raccordant P_1 et P_2 le long de Γ.** Une fois connues les plaques du B-réseau, la surface est complètement déterminée.

<u>Remarque</u> : Le raisonnement ci-dessus s'applique de la même manière au raccordement C^1 de deux surfaces polynômiales de degré n dans $\mathbb{R}^3$ (on a alors n déterminants d'ordre 4 à annuler et n plaques le long de Γ). Plus généralement, il s'applique au raccordement C^1 de deux variétés polynômiales de degré n dans $\mathbb{R}^p$ (on a alors n déterminants d'ordre p+1 à annuler et n hyperplaques de dimension p-1).

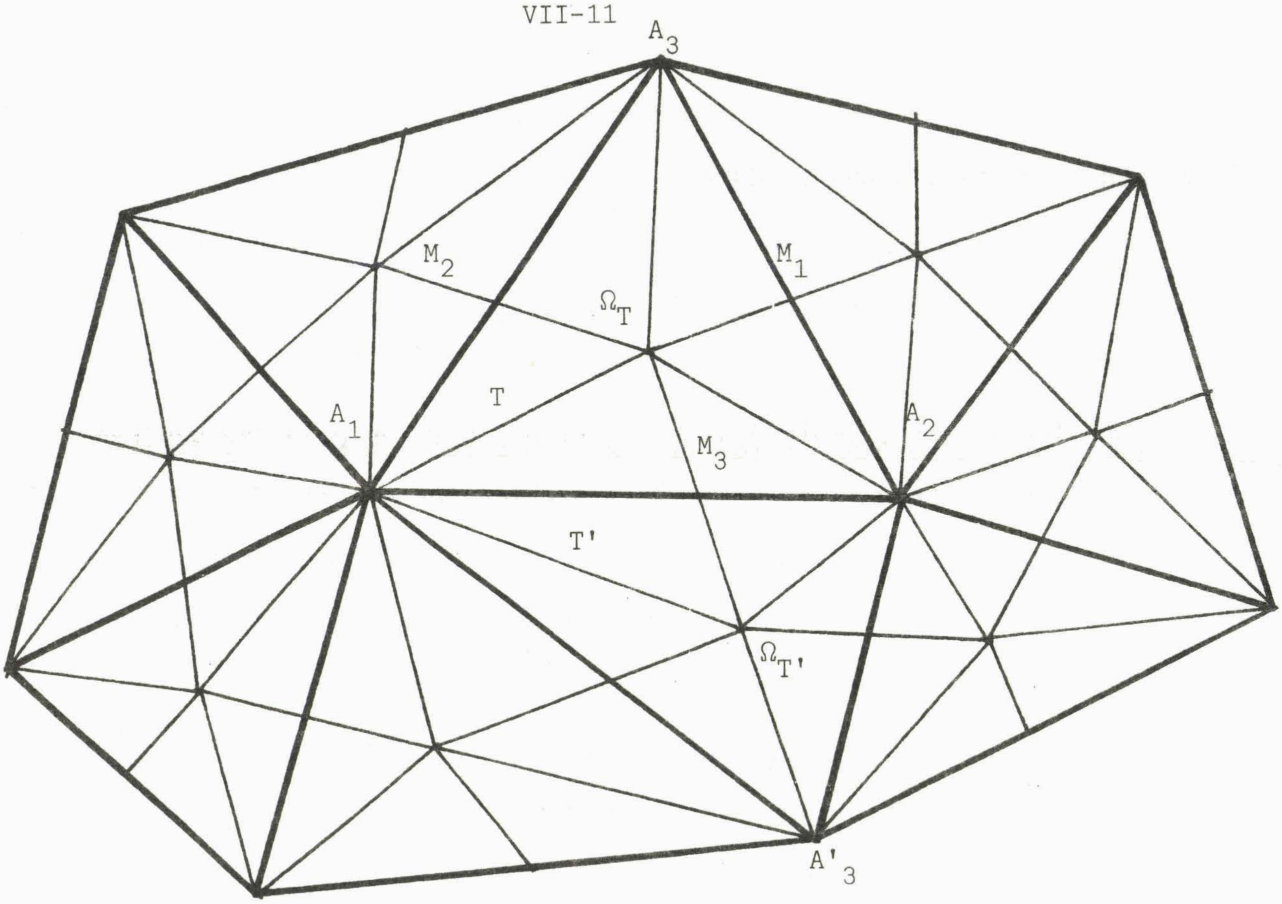
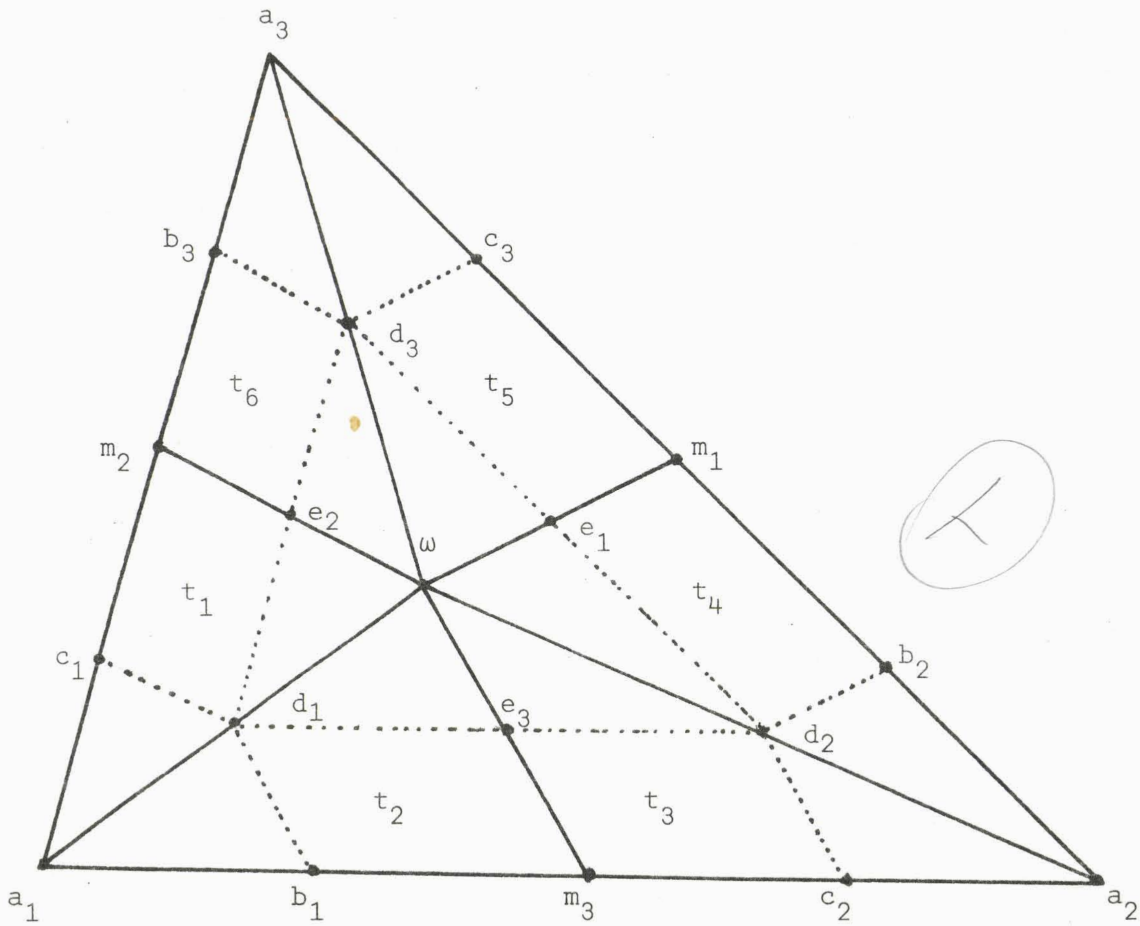


Figure 3 : Triangulation T_1 et T_2



BUS LILLE

Figure 4 : Projection du réseau Bézier global de T

III - INTERPOLATION D'HERMITE DANS LE PLAN

3.1 Introduction et notations

Soit $\sum = \{A_i, i = 1, \ldots, n\}$ un ensemble quelconque de points du plan et D l'enveloppe convexe de $\sum$. Pour $f \in C^1(D)$, nous montrons l'existence d'une seule fonction $S \in C^1(D)$, quadratique par morceaux triangulaires, vérifiant pour $i = 1, \ldots, n$:

$$(7) \qquad \begin{cases} S(A_i) = f(A_i) \\ \partial_1 S(A_i) = \partial_1 f(A_i) \\ \partial_2 S(A_i) = \partial_2 f(A_i) \end{cases}$$

Plus précisément, soit $\mathcal{T}_1$ une triangulation du domaine D, de sommets A_i, et $\mathcal{T}_2$ la sous-triangulation de $\mathcal{T}_1$ obtenue de la manière suivante (figure 3) : dans tout triangle $T = A_1 A_2 A_3$ de $\mathcal{T}_1$, on choisit un point intérieur Ω_T tel que si $T' = A_1 A_2 A'_3$ est adjacent à T, le segment $\Omega_T \Omega_{T'}$ coupe le segment $A_1 A_2$ en un point M_3 intérieur à ce segment (idem pour $M_1 \in A_2 A_3$ et $M_2 \in A_1 A_3$). Chaque triangle T (ou **macrotriangle**) est ainsi décomposé en 6 **microtriangles** :

$t_{2i-1} = \Omega A_i M_{i+1}$ et $t_{2i} = \Omega A_i M_{i+2}$ $(i = 1, 2, 3$ avec la convention $M_j = M_{j-3}$ si $j \geq 4)$.

La fonction S construite dans ce paragraphe est un élément de l'espace :

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(D, \mathcal{T}_2) = \{S \in C^1(D) : S|_t \in \mathbb{P}_2(t), \forall t \in \mathcal{T}_2\}$$

La restriction de S à chaque macrotriangle $T \in \mathcal{T}_1$ est un élément de l'espace :

$$\mathcal{S}_2(T) = \{S \in C^1(T) : S|_t \in \mathbb{P}_2(t), \forall t \subset T\}$$

Par abus de langage, le graphe de $S|_t$ $(t \in \mathcal{T}_2)$ sera souvent appelé **microtriangle quadratique** et le graphe de $S|_t$ $(T \in \mathcal{T}_1)$ **macrotriangle quadratique.**

T

La triangulation $\mathcal{T}_2$ est toujours possible, en particulier si l'on choisit comme point S_T le centre du cercle inscrit à $T \in \mathcal{T}_1$, ce que nous supposerons dans la suite.

Après avoir construit l'interpolant d'Hermite de f sur un macrotriangle T, nous montrons que la surface obtenue est globalement de classe C^1 sur le domaine D et nous donnons une majoration pour l'erreur d'interpolation en utilisant une technique analogue à celle employée par Ciarlet pour l'élément HCT [3] ou HCT réduit [4].

3.2 Construction du macrotriangle quadratique sur T

La restriction P_j de $S \in \mathcal{S}_2(T)$ à chaque microtriangle t_j a un B-réseau noté (figure 4), pour $1 \le i \le 3$:

$$\{\tilde{a}_i, \tilde{c}_i, \tilde{d}_i, \tilde{m}_{i+1}, \tilde{e}_{i+1}, \tilde{\omega}\} \text{ pour } P_{2i-1}$$
$$\{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{d}_i, \tilde{m}_{i+2}, \tilde{e}_{i+2}, \tilde{\omega}\} \text{ pour } P_{2i}$$

(avec la convention $\tilde{\alpha}_j = \tilde{\alpha}_{j-3}$ pour $j \ge 4$)

D'après le théorème 1, $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_i$ et $\tilde{d}_i$ sont coplanaires grâce au raccordement de P_{2i} et P_{2i-1} ; $\tilde{b}_i$, $\tilde{m}_{i+2}$, $\tilde{c}_{i+1}$ d'une part et $\tilde{d}_i$, $\tilde{e}_{i+2}$ et $\tilde{d}_{i+1}$ d'autre part sont colinéaires grâce au raccordement de P_{2i} et P_{2i+1} (corollaire 2) ; $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$, $\tilde{d}_3$, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ et ω sont coplanaires grâce au raccordement au point Ω_T des 6 microtriangles quadratiques.

On en déduit que dim $\mathcal{S}_2(T) = 9$ car la connaissance des 9 sommets $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_i$ $(1 \le i \le 3)$ détermine complétement le B-réseau global de la surface S. Or ces 9 sommets se calculent au moyen des valeurs $f(A_i)$, $\partial_1 f(A_i)$, $\partial_2 f(A_i)$ $(1 \le i \le 3)$ et des relations exprimant les dérivées partielles en coordonnées barycentriques au moyen des B-coefficients (cf. la preuve du théorème 1), d'où le :

<u>Théorème 2</u> : *Pour tout* $f \in C^1(T)$, *il existe une seule fonction* $S_T \in S_2(T)$ *vérifiant pour* $i = 1, 2, 3$:

$$(8) \qquad \begin{cases} S_T(A_i) = f(A_i) \\ \partial_1 S_T(A_i) = \partial_1 f(A_i) \\ \partial_2 S_T(A_i) = \partial_2 f(A_i) \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : On donne dans [14] (p. 18 et 19) la description des fonctions de base ϕ_i, χ_i, Ψ_i du procédé d'interpolation sur T, qui vérifient :

$$\phi_i(A_i) = 1,\ \partial\phi_i/\partial\lambda_{i+1}(A_i) = \partial\phi_i/\partial\lambda_{i+2}(A_i) = 0$$

$$\chi_i(A_i) = 0,\ \partial\chi_i/\partial\lambda_{i+1}(A_i) = 1,\ \partial\chi_i/\partial\lambda_{i+2}(A_i) = 0$$

$$\Psi_i(A_i) = 0,\ \partial\Psi_i/\partial\lambda_{i+1}(A_i) = 0,\ \partial\Psi_i/\partial\lambda_{i+2}(A_i) = 1$$

pour $i = 1, 2, 3$ (avec la convention $i = i-3$ pour $i \geq 4$) les fonctions ϕ_i, χ_i, Ψ_i étant nulles, ainsi que leur dérivées partielles du premier ordre, aux sommets A_{i+1} et A_{i+2}. On peut construire à partir de ces fonctions les fonctions de base sur le domaine D.

3.3 Interpolation d'Hermite sur le domaine D

Supposons que les triangulations T_1 et T_2 vérifient les conditions du paragraphe 2.1 et que l'on ait construit les macrotriangles quadratiques (graphes des S_T) pour chaque $T \in T_1$ en utilisant la technique du paragraphe 2.2 ci-dessus.

<u>Théorème 3</u> : *La fonction* S, *définie sur* D *par* $S|_T = S_T$ *pour chaque* $T \in T_1$, *est de classe* C^1 ; *autrement dit* $S \in S_2(D, T_2)$.

<u>Preuve</u> : Soient $T = A_1A_2A_3$ et $T' = A_1A_2A'_3$, et les macrotriangles quadratiques S_T et $S_{T'}$ (figure 5). Les sommets $\tilde{a}_i = \tilde{a}'_i$, $\tilde{b}_i = \tilde{b}'_i$, $\tilde{c}_i$, $\tilde{c}'_i$, $\tilde{d}_i$ et $\tilde{d}'_i$ $(i = 1, 2)$ de leurs B-réseaux sont coplanaires car ils se trouvent dans le plan

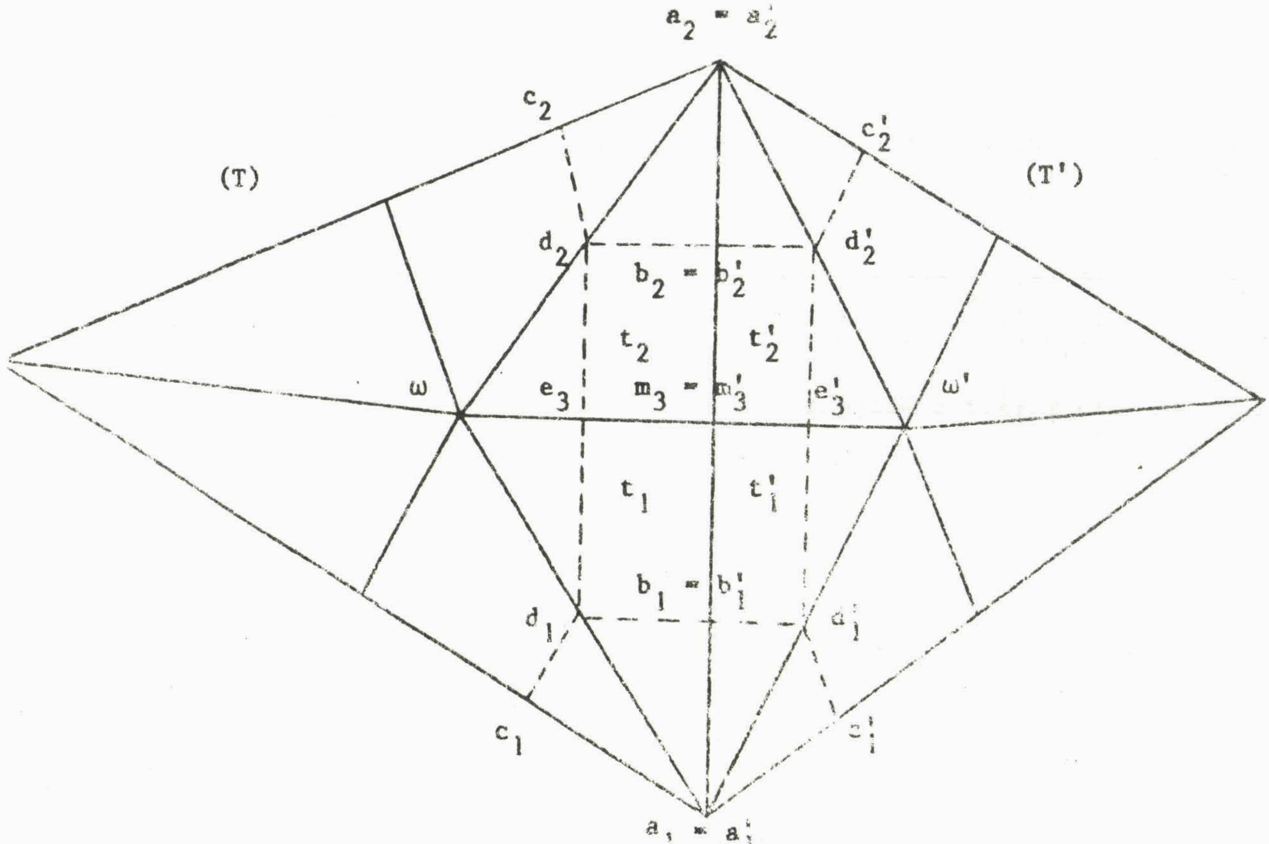
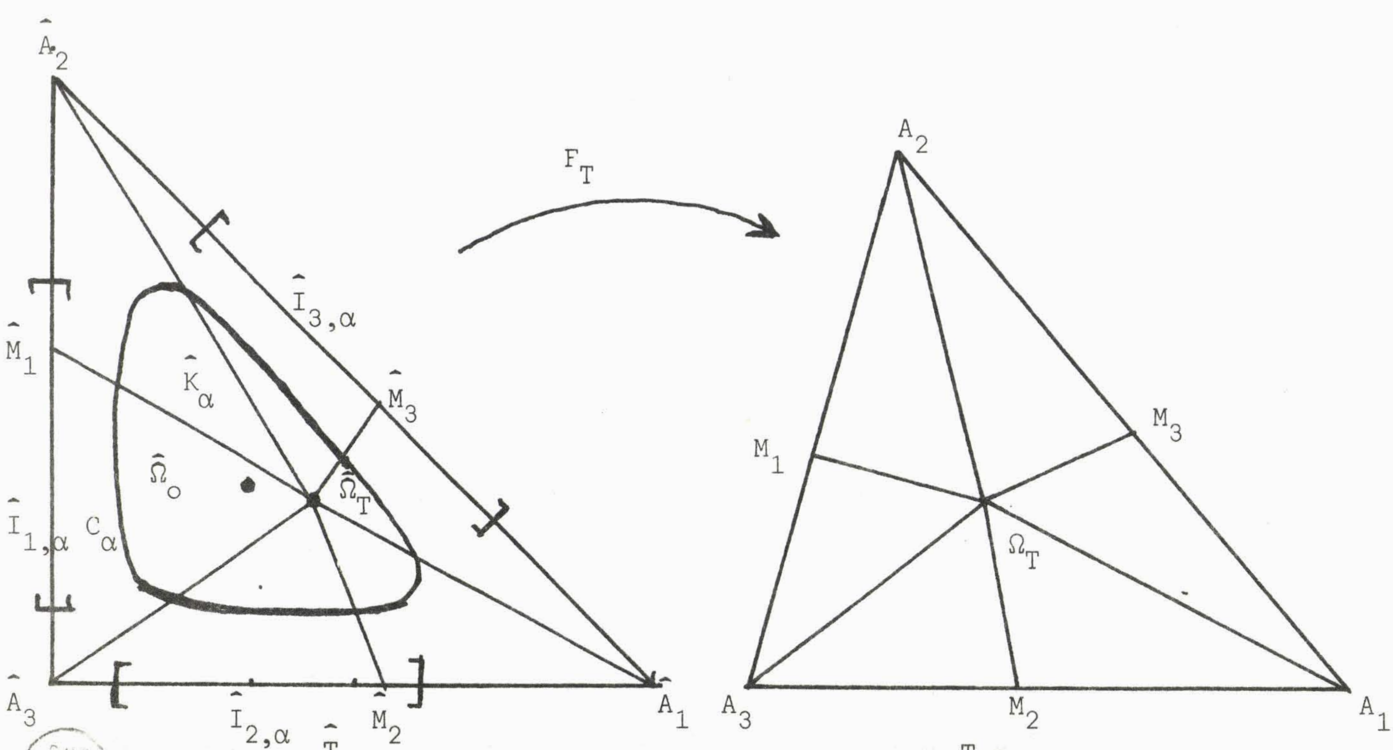


Figure 5 : Raccordement de deux macrotriangles quadratiques.



BUS LILLE

Figure 6 : Preuve du théorème 3

déterminé par $f(A_i)$, $\partial_1 f(A_i)$ et $\partial_2 f(A_i)$, donc $\tilde{d}_i$, $\tilde{b}_i = \tilde{b}'_i$ et $\tilde{d}'_i$ sont alignés. Le raccordement C^1 de $S|_{t_1}$ et de $S|_{t_2}$ (respectivement de $S|_{t'_1}$ et $S|_{t'_2}$) le long de $\Omega_T\, \Omega_{T'}$ implique que les points $\tilde{d}_1$, $\tilde{e}_3$, $\tilde{d}_2$ d'une part et $\tilde{b}_1$, $\tilde{m}_3$, $\tilde{b}_2$ d'autre part, soient alignés, en vertu du corollaire 2 du théorème 1 (idem pour les points $\tilde{d}'_1$, $\tilde{e}'_3$, $\tilde{d}'_2$ et $\tilde{b}'_1$, $\tilde{m}'_3$, $\tilde{b}'_2$). Il en résulte que les points $\tilde{e}_3$, $\tilde{m}_3$, $\tilde{e}'_3$ sont alignés, ce qui entraîne, avec les conditions précédentes, que les raccordements de $S|_{t_i}$ et $S|_{t'_i}$ $(i = 1, 2)$ sont C^1 le long de $A_1\, A_2$.

3.4 Erreur d'interpolation

Supposons que la triangulation $\mathcal{T}_1$ du domaine D vérifie la condition de régularité suivante :

(9) $\quad \exists\, \alpha \geq 1$ tel que $\forall\, T \in \mathcal{T}_1 : 1 \leq R_T/2r_T \leq \alpha$

où R_T (resp. r_T) est le rayon du cercle circonscrit (resp. inscrit) au triangle T. Soit ℓ_i la longueur du côté $A_{i+1}\, A_{i+2}$ et $p = (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)/2$. Les coordonnées barycentriques de Ω_T, centre du cercle inscrit dans T, sont $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ avec $\omega_i = \ell_i/2p$ $(i = 1, 2, 3)$ d'où la relation :

(10) $$R_T/2r_T = g(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{\omega_1\, \omega_2\, \omega_3}{(1-2\omega_1)(1-2\omega_2)(1-2\omega_3)}$$

avec $0 < \omega_i < 1/2$ et $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$

Choisissons un triangle de référence $\hat{T}$ de sommets $\hat{A}_1(1, 0)$, $\hat{A}_2(0, 1)$ et $\hat{A}_3(0, 0)$ (figure 6) et désignons par F_T l'unique transformation affine vérifiant $F_T(\hat{A}_i) = A_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Lorsque T varie dans $\mathcal{T}_1$, les points $\hat{\Omega}_T = F_T^{-1}(\Omega_T)$ varient dans le compact $\hat{K}_\alpha$ limité par l'équipotentielle C_α d'équation $g(\omega) = \alpha$, d'après (9) et (10). Les courbes C_α sont des courbes fermées simples entourant le point $\hat{\Omega}_o$ de coordonnées barycentriques $\omega_o = (1/3, 1/3, 1/3)$ où $g(\omega_o) = 1$. De même si $T' = A_1\, A_2\, A'_3$ est adjacent à T, la continuité de l'application :

$$(\Omega_T, \Omega_{T'}) \to M_3 = \Omega_T\, \Omega_{T'} \cap A_1\, A_2$$

implique que le point $\hat{M}_3 = F_T^{-1}(M_3) = F_{T'}^{-1}(M_3)$ varie dans un intervalle compact $\hat{I}_{3,\alpha}$ de $\hat{A}_1\hat{A}_2$ lorsque T et T' varient dans $\mathcal{T}_1$. De même $\hat{M}_1$ varie dans $\hat{I}_{1,\alpha} \subset \hat{A}_2\hat{A}_3$ et $\hat{M}_2$ varie dans $\hat{I}_{2,\alpha} \subset \hat{A}_1\hat{A}_3$.

Avec les notations de l'introduction, on a le :

<u>*Théorème 4*</u> : *Si* $\mathcal{T}_1$ *vérifie la condition de régularité (9) et si* $f \in H^3(T) \subset C^1(T)$ *pour tout* $T \in \mathcal{T}_1$, *il existe une constante* $C(\alpha) > 0$ *telle que*

$$|f - S_T|_{m,T} \leq C(\alpha)\, h_T^{3-m}\, |f|_{3,T} \qquad (0 \leq m \leq 2)$$

où $h_T = 2R_T$ = *diamètre de* T *et* $S_T \in \mathcal{S}_2(T)$ *est l'interpolant du théorème 2.*

<u>Preuve</u> : Supposons d'abord que les points $\hat{\Omega}_T = F_T^{-1}(\Omega_T)$ et $\hat{M}_i = F_T^{-1}(M_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$ soient fixes. On peut utiliser alors la théorie affine de Ciarlet et Raviart [2]. Soit $\Lambda f = \Lambda(\hat{\Omega}, \hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3)f$ l'unique fonction de $\mathcal{S}_2(T)$ telle que $\Lambda f(A_i) = f(A_i)$, $\partial_1\Lambda f(A_i) = \partial_1 f(A_i)$ et $\partial_2\Lambda f(A_i) = \partial_2 f(A_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathbb{P}_2(T) \subset \mathcal{S}_2(T)$, le théorème 5 de [2] donne :

$$|f - \Lambda f|_{m,T} \leq \hat{C}\, h_T^{3-m}\, |f|_{3,T}$$

où $\hat{C} = C(\hat{\Omega}_T, \hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3) > 0$ ne dépend que de $\hat{T}$ et des points $\hat{\Omega}_T$ et $\hat{M}_i$. Plus précisément (cf. lemme 7 de [2]), on a :

$$\hat{C} = C(\hat{T})\, ||I-\hat{\Lambda}||$$

où $C(\hat{T})$ ne dépend que de $\hat{T}$, I est l'identité et $\hat{\Lambda} \in \mathcal{L}(H^3(\hat{T}), H^m(\hat{T}))$ est l'application linéaire qui à toute fonction $\hat{f} \in H^3(\hat{T})$ associe son interpolant d'Hermite aux sommets de $\hat{T}$; la norme de $I-\hat{\Lambda}$ est prise dans $\mathcal{L}(H^3(\hat{T}), H^m(\hat{T}))$.

Lorsque T varie dans $\mathcal{T}_1$, les points $\hat{\Omega}_T$ et $\hat{M}_i$ varient dans les compacts $\hat{K}_\alpha$ et $\hat{I}_{i,\alpha}$ $(i = 1, 2, 3)$. On doit montrer que :

$$C(\hat{K}_\alpha, \hat{I}_{i,\alpha}) = \sup\{||\hat{\Lambda}(\hat{\Omega}_T, \hat{M}_i)||,\ \hat{\Omega}_T \in \hat{K}_\alpha,\ \hat{M}_i \in \hat{I}_{i,\alpha}\ i = 1,2,3\} < +\infty$$

Or, sur chaque microtriangle $\hat{t}$ de $\hat{T}$, défini par $\hat{\Omega}_T$ et les $\hat{M}_i$, les B-coefficients de $\hat{\Lambda}\,\hat{f} \in \mathbb{P}_2(\hat{t})$ dépendent continûment des coordonnées des points $\hat{\Omega}_T$ et $\hat{M}_i$ comme on l'a vu aux paragraphes 2.2 et 2.3 ; par conséquent, comme ces points varient dans des compacts de $\hat{T}$, la majoration (11) est valable et celle du théorème en résulte.■

3.5 Application et généralisation

Comme les interpolants HCT et HCT réduit, cet interpolant peut être utilisé comme élément fini dans la résolution des problèmes elliptiques du 4° ordre sur un polygone.

L'emploi des surfaces quadratiques par morceaux est intéressant pour le tracé des courbes de niveau qui sont alors des morceaux de coniques (cf. Powell [11]). De ce point de vue, l'interpolant d'Hermite construit ci-dessus est le plus simple possible pour le problème étudié. Si $u \in C^1[0, 1]$ est une fonction croissante et convexe vérifiant $u(0) = u'(0) = 0$, $u(1) = 1$ et $u(1-x) = 1-2x+u(x)$ (cf. chapitre 3), on peut remplacer l'espace $\mathbb{P}_2$ par l'espace engendré par $\{1, x, y, u(x), u(y), u(x+y)\}$ sur le triangle de référence de sommets (0, 0) (0, 1) et (1, 0). On obtient alors un interpolant spline quadratique généralisé et toute la partie purement algébrique des calculs reste la même (technique des plaques, construction de S_T et de l'interpolant global).

IV - LA DIMENSION DE L'ESPACE $S_2(\Omega,T)$ DES SPLINES QUADRATIQUES SUR UN DOMAINE TRIANGULÉ

4.1 Cas général

Soit Ω un domaine polygonal du plan, $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω et T une triangulation de Ω.

Définition 2 : *$S_2(\Omega, T)$ est l'espace des splines quadratiques sur Ω pour la triangulation T, c'est à dire le sous-espace des fonctions $S \in C^1(\Omega)$ dont la restriction à chaque triangle $T \in T$ est dans $\mathbb{P}_2(T)$.*

Le théorème suivant est un cas particulier d'un résultat général donné par Farin ([7], théorème 11). Il se démontre également par la technique des plaques vue au paragraphe 1.

Théorème 5 : *Si la triangulation T ne contient pas de sommets situés à l'intersection des deux diagonales d'un quadrilatère convexe, on a :*

$$\dim S_2(\Omega, T) = s+3$$

où s est le nombre de sommets sur $\Gamma = \partial\Omega$.

Un contre-exemple simple montre que la restriction sur T est fondamentale. Supposons que Ω soit un carré subdivisé en quatre triangles par un point intérieur ω.

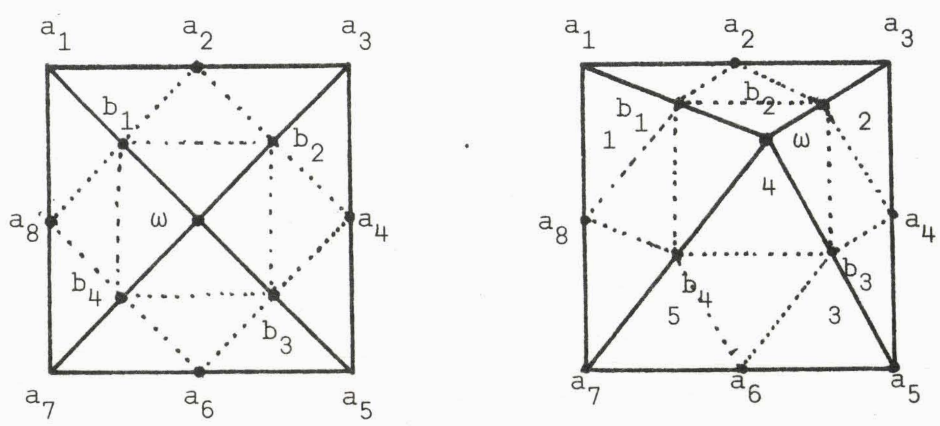


figure 7

a) Si ω est le centre du carré, dim $S_2(\Omega, T) = 8$; en effet, une fois connus les 8 sommets $\tilde{a}_i$ $(1 \leq i \leq 8)$ du B-réseau de $S \in S_2$, le corollaire 2 du théorème 1 montre que les $\tilde{b}_j$ $(1 \leq j \leq 4)$ sont les milieux des segments $\tilde{a}_{2j-2}\,\tilde{a}_{2j}$ $(\tilde{a}_o = \tilde{a}_8)$ et $\tilde{\omega}$ est à la fois milieu de $\tilde{b}_1\,\tilde{b}_3$ et de $\tilde{b}_2\,\tilde{b}_4$.

b) Si ω n'est pas au centre du carré, dim $S_2(\Omega, T) = 7$. On utilise la technique des plaques : $\tilde{a}_8$, $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ déterminent la plaque (1) (3 paramètres), puis $\tilde{a}_3$ et $\tilde{a}_4$ la plaque (2) (2 paramètres), puis $\tilde{a}_5$ et $\tilde{a}_6$ la plaque (3) (2 paramètres) ; la plaque centrale (4) est alors fixée par $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ et $\tilde{b}_3$ et la plaque (5) par $\tilde{a}_6$, $\tilde{b}_4$ et $\tilde{a}_8$.

Remarque : Le théorème 5 montre qu'une triangulation arbitraire de Ω peut ne pas être intéressante pour l'interpolation de Lagrange par des éléments de $S_2(\Omega, T)$. En effet un domaine triangulaire Ω peut être subdivisé en un très grand nombre de petits triangles (les côtés de Ω n'étant pas subdivisés) bien que la dimension de S_2 reste égale à 6 : on ne pourra donc interpoler une fonction donnée qu'en 6 points même si Ω est subdivisé en 100 triangles. C'est pourquoi l'interpolation de Lagrange ne semble intéressante que sur des triangulations particulières, du type de celles que nous utilisons dans les paragraphes suivants.

4.2 Les espaces $S_2(T_n)$ et $S_2(T_n^*)$

Soit T le triangle de sommets $A_o = (0, 0)$, $A_1 = (1, 0)$ et $A_2 = (0, 1)$. Les résultats qui suivent sont également valables pour toute image affine de T (fig. 9 bis).

Définition 3 : $S_2(T_n)$ *est l'espace des splines quadratiques sur le triangle*

T_5

$t(5) = 25$

$d(5) = 22$

$\mathcal{L}_5 = \{\cdot\}$

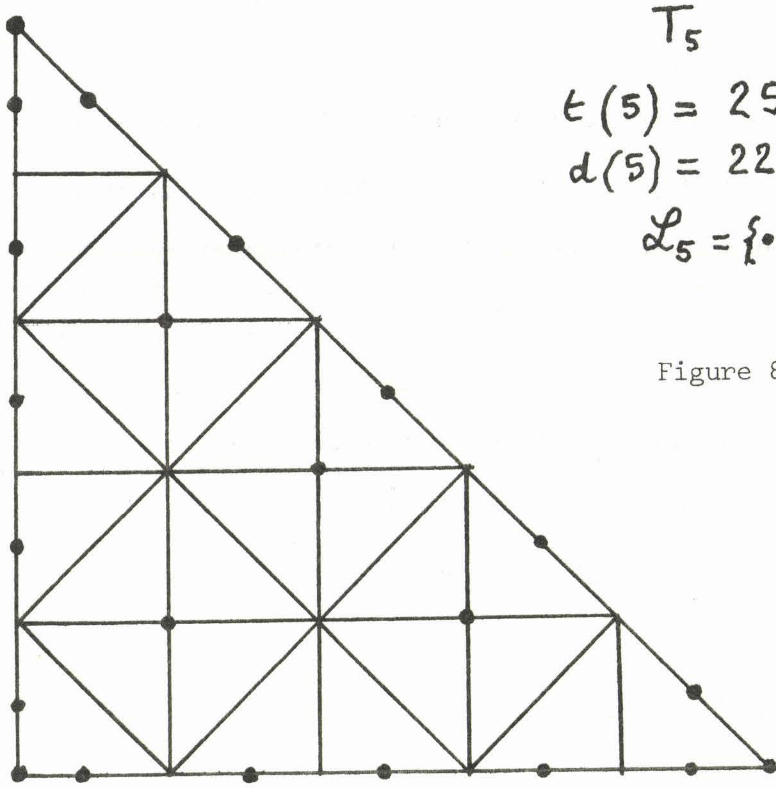


Figure 8

T_5^*

$t^*(5) = 50$

$d(5) = 33$

$\mathcal{L}_5^* = \{\cdot\}$

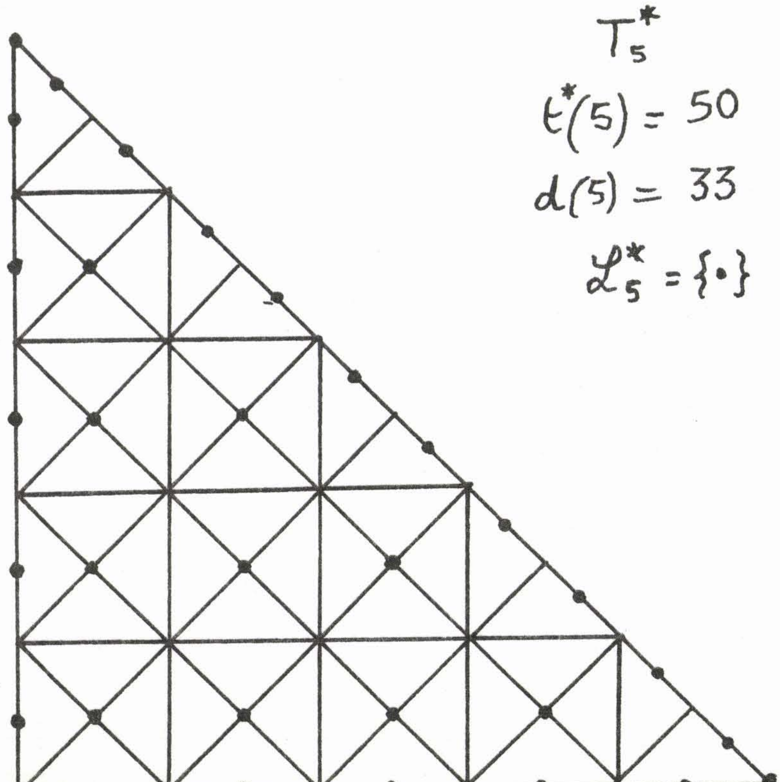


Figure 9

BUS LILLE

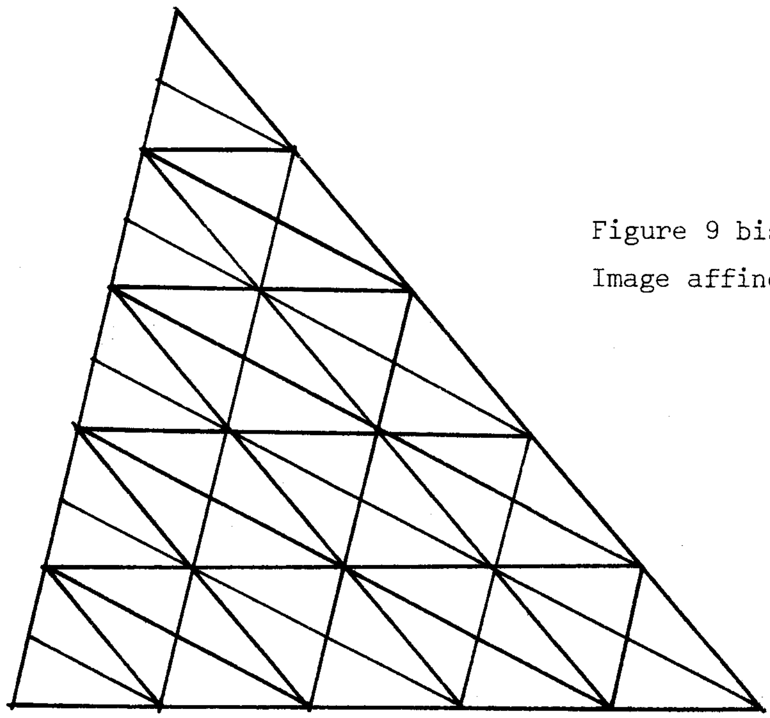


Figure 9 bis
Image affine de T_5^*

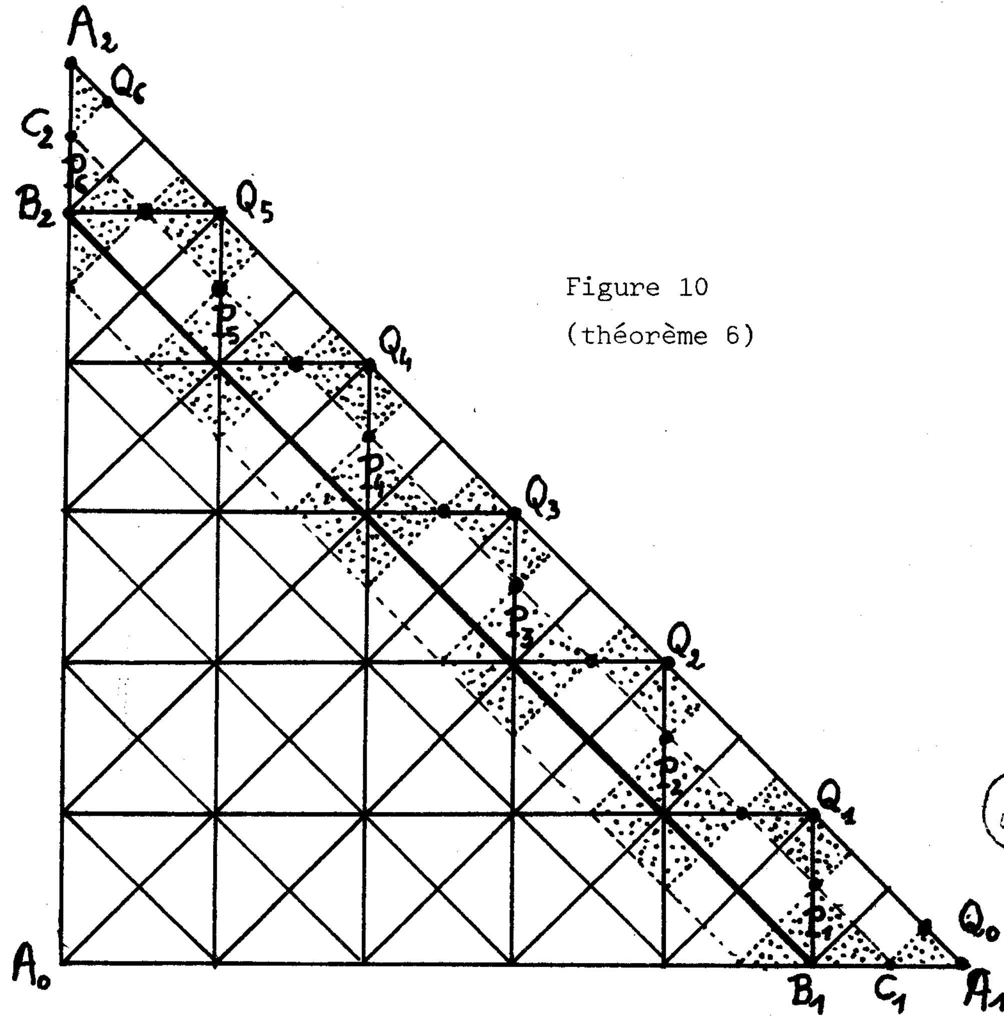


Figure 10
(théorème 6)

BUS LILLE

T_n = T *subdivisé par la triangulation* T_n *formée de* $t(n) = n^2$ *triangles égaux à côtés de l'angle droit parallèles aux axes (figure 8)*

Définition 4 : $S_2(T_n^*)$ *est l'espace des splines quadratiques sur le triangle* T_n^* = T *subdivisé par la triangulation* T_n^* *formée de* $t^*(n) = 2n^2$ *triangles égaux à hypoténuses parallèles aux axes (figure 9).*

Théorème 6 : *Posons* $d(n) = \dim S_2(T_n)$ *et* $d^*(n) = \dim S_2(T_n^*)$; *on a alors*

$$d(2p) = p^2 + 5p + 3$$

$$d(2p+1) = p^2 + 6p + 6$$

$$d^*(n) = (n^2 + 7n + 6)/2$$

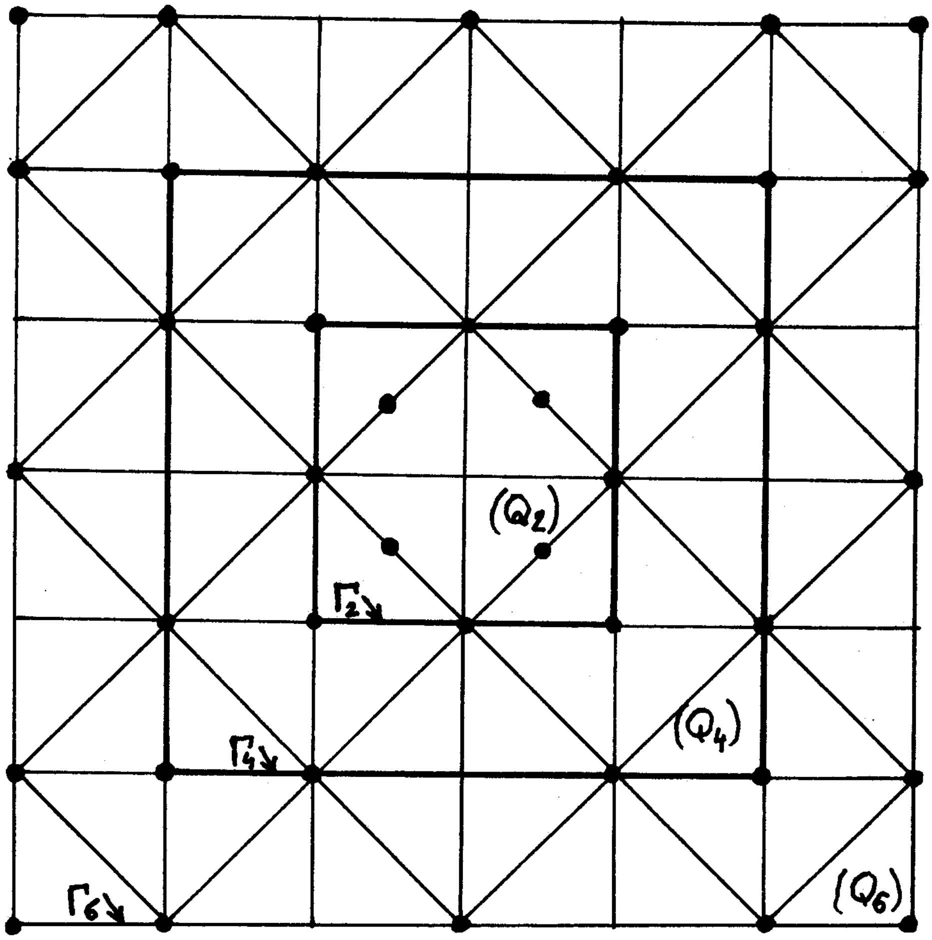
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(n)/t(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} d^*(n)/t^*(n) = 1/4$

Preuve : Donnons-la seulement pour $d^*(n)$, l'autre étant très semblable. Il est clair que $d^*(1) = 7$: supposons $d^*(n)$ connu et montrons que $d^*(n+1) = d^*(n) + n + 4$. Posons $T_{n+1} = A_o\ A_1\ A_2$ et $T_n = A_o\ B_1\ B_2$ (figure 10) et utilisons la technique des plaques. Les n+1 plaques alignées sur $B_1\ B_2$ sont complétement déterminées par les sommets du B-réseau de T_n. La figure 10 montre que les plaques P_i et P_{i+1} déterminent deux sommets de la plaque Q_i $(1 \le i \le n)$: cette plaque est donc fixée par un nouveau sommet, ce qui donne n paramètres au total. De plus les plaques triangulaires Q_o et Q_{n+1} sont fixées chacune par deux nouveaux sommets. Les autres sommets le long de $C_1\ C_2$ et $A_1\ A_2$ s'obtiennent au moyen du corollaire 2 du théorème 1. On a bien introduit ainsi n+4 sommets supplémentaires, cqfd.

4.3) Les espaces $S_2(Q_n)$ et $S_2(Q_n^*)$

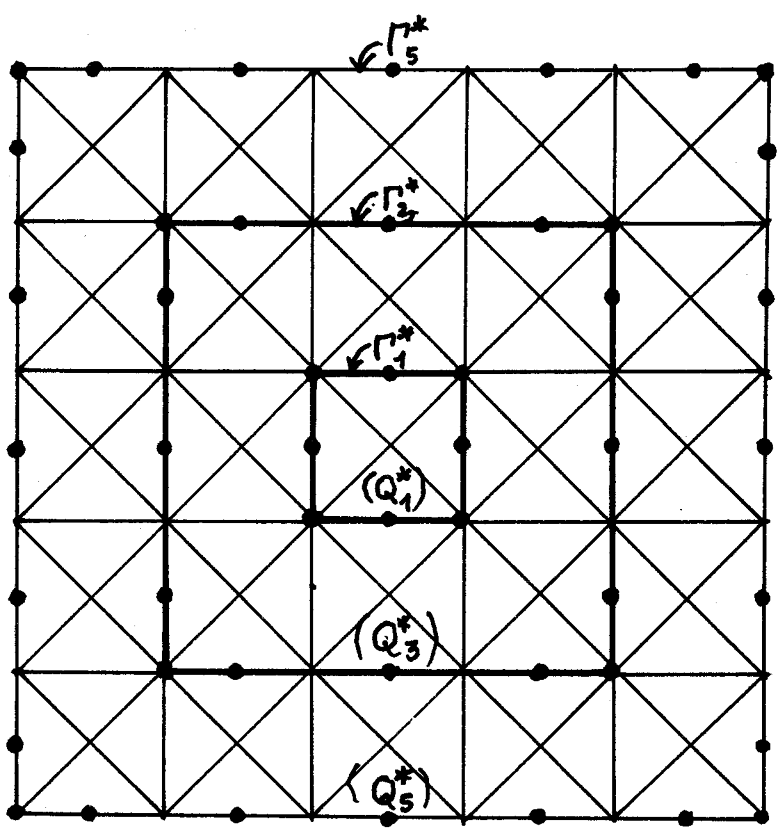
Soit Q le carré [0,1] x [0,1] et Q_n (n pair) ce carré subdivisé en $t(n) = 2n^2$ triangles égaux (à côtés de l'angle droit parallèles aux axes) par la

figure 11

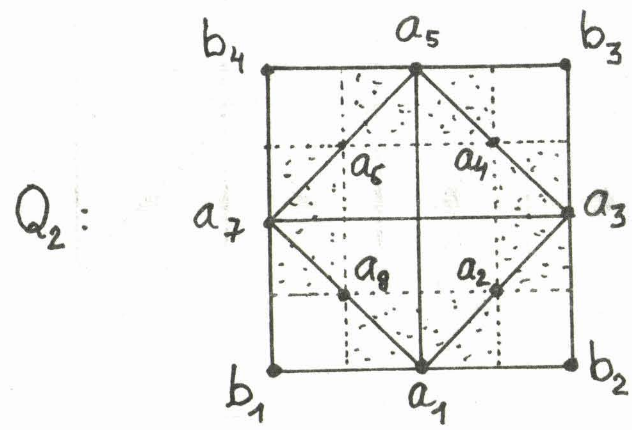


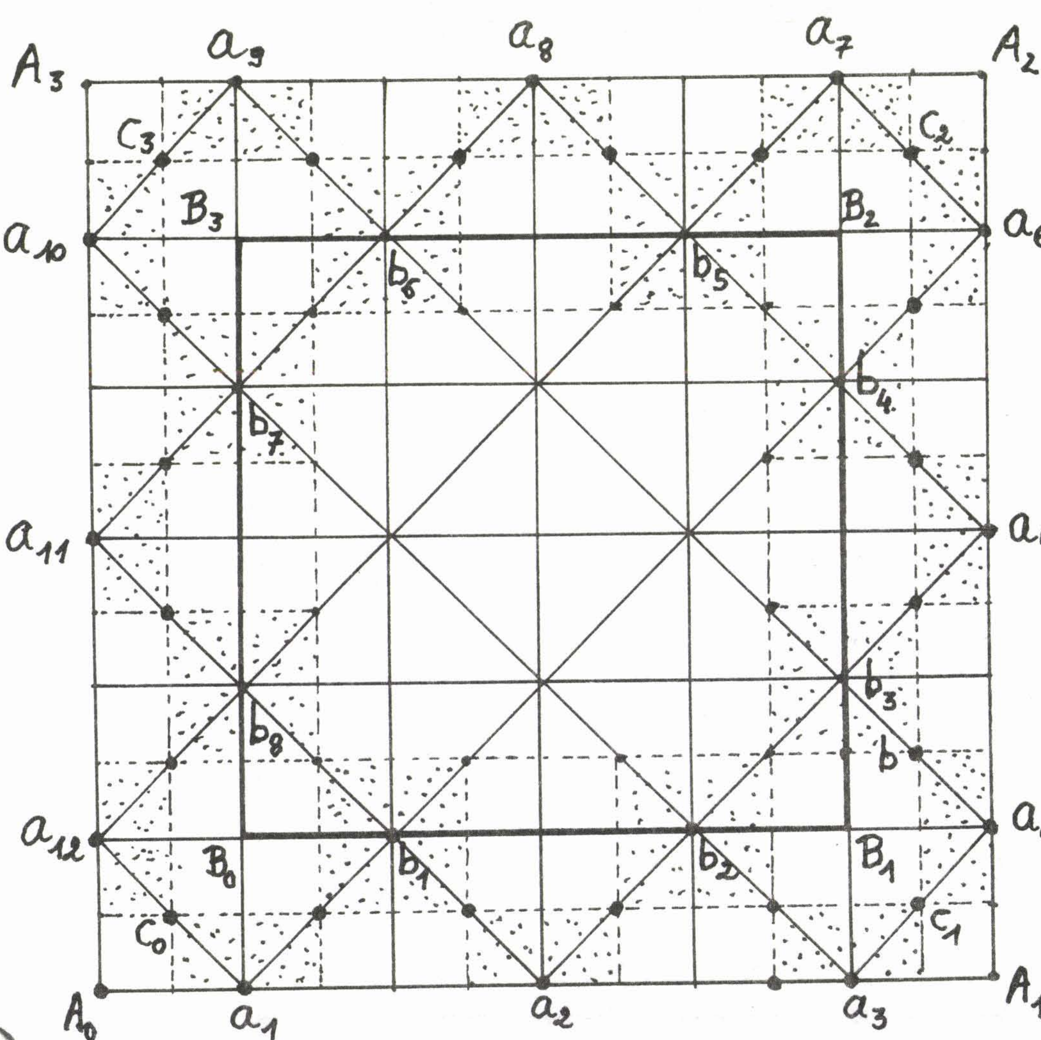
$Q_6 \;:\; t(6) = 72 \;,\; d(6) = 40 \;,\; \mathcal{L}_6 = \{\bullet\}$

figure 12



$Q_5^* \;:\; t(5) = 100 \;,\; d(5) = 48 \;,\; \mathcal{L}_5^* = \{\bullet\}$





BUS LILLE

Figure 13 (Théorème 7)

triangulation T_n indiquée sur la figure 11.

Soit Q_n^* **(n impair)** le carré Q subdivisé en $t^*(n) = 4n^2$ triangles égaux (à hypoténuses paralléles aux axes) par la triangulation T_n^* indiquée sur la figure 12

<u>*Définition 5*</u> : *$S_2(Q_n)$ et $S_2(Q_n^*)$ sont les espaces des splines quadratiques sur le domaine Q muni respectivement des triangulations T_n (n pair) et T_n^* (n impair).*

<u>*Théorème 7*</u> : *Posons* $d(n) = \dim S_2(Q_n)$ *et* $d^*(n) = \dim S_2(Q_n^*)$.

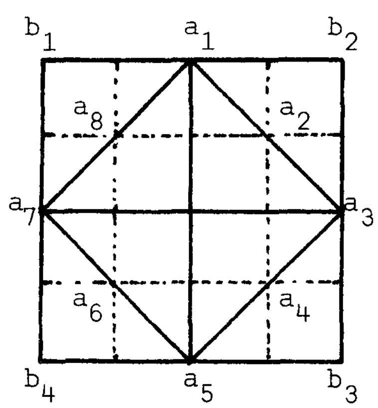
On a alors :

$$d(n) = \frac{1}{2}\,[(n+3)^2 - 1] \qquad (n \textit{ pair})$$

$$d^*(n) = (n+2)^2 - 1 \qquad (n \textit{ impair})$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(n)/t(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} d^*(n)/t(n) = 1/4.$

<u>Preuve</u> : Donnons-la pour Q_n (n pair) en utilisant la technique des plaques (figure 13).



Pour Q_2, les 4 plaques définies par les sommets $\tilde{a}_{2i}$, $\tilde{a}_{2i+1}$ $\tilde{a}_{2i+2}$ $(0 \leq i \leq 3$, $\tilde{a}_o = \tilde{a}_8)$ sont déterminés par les 8 points $\tilde{a}_i$ (comme on l'a vu au paragraphe 3.1), de même que les sommets du B-réseau intérieur au losange $a_1\ a_3\ a_5\ a_7$. Seuls restent à fixer les 4 sommets $\tilde{b}_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ pour compléter le B-réseau de Q_2, d'où $d(2) = 12$. Supposons que $d(n)$ soit connu et montrons que $d(n+2) = d(n) + 2n+8$ (n = 4 sur la figure 13). Soit $Q_n = B_o\ B_1\ B_2\ B_3$ dont le B-réseau est connu et $Q_{n+1} = A_o\ A_1\ A_2\ A_3$. Les 2n plaques carrées situées sur la frontière ∂Q_n et centrées aux points $\tilde{b}_i$ sont complètement fixées par les sommets du B-réseau de Q_n. Par le corollaire 2 du théorème 1, on calcule également tous les sommets de la ligne $C_o\ C_1\ C_2\ C_3\ C_o$. D'autre part, chaque plaque demi-carrée située sur ∂Q_{n+1} a déjà deux sommets fixés : ces 2n+4 plaques sont donc déterminées par 2n+4 paramètres (par exemple les points $\tilde{a}_i$). En ajoutant un paramètre pour chaque sommet A_i $(0 \leq i \leq 3)$, on obtient bien les 2n+8 paramètres nécessaires, les autres sommets du B-réseau le long de ∂Q_{n+1} s'obtenant au moyen du corollaire 2 du théorème 1.

Pour Q_n^*, une preuve est donnée par Schumaker [19], mais la technique des plaques permet une démonstration plus rapide, analogue à celle donnée pour Q_n.

Remarque : Comme pour les triangles, les résultats demeurent valables pour des images affines de Q_n ou Q_n^*.

V - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR T_n ET T_n^*

Définition 6 : Soit L_n *(respectivement* L_n^**) l'ensemble des points d'interpolation suivants (figures 8 et 9).*

(i) les 3 sommets de T_n *(resp.* T_n^**)*

(ii) les milieux des sous-intervalles déterminés par T_n *(resp.* T_n^**) sur les côtés de* T_n *(resp.* T_n^**)*

(iii) les centres des carrés formés par 4 triangles de T_n *(resp.* T_n^**)*

On vérifie aisément que $|L_n| = d(n)$ et $|L_n^*| = d^*(n)$.

Théorème 8 : Il existe une seule spline $S \in S_2(T_n)$ *interpolant une fonction* f *aux points de* L_n*. De même il existe une seule spline* $S \in S_2(T_n^*)$ *interpolant* f *sur* L_n^*.

Preuve : Donnons une idée de la démonstration générale pour les premières valeurs de n. Nous supposons que l'on sait résoudre le problème d'interpolation de Lagrange par des splines quadratiques à une variable aux extrémités d'un intervalle et aux milieux des sous-intervalles d'une subdivision de cet intervalle (cf. par exemple [10]), en particulier on connaît les sommets du B-réseau de S sur les bords de T_n et T_n^*.

a) Formules complétes pour T_2 (figure 15).

Les B-coefficients de S sur ∂T_2 étant connus, par exemple :

$$a_o = f_o,\ a_1 = (-5f_o + 20f_1 - 4f_3 + f_4)/12$$
$$a_4 = f_4,\ a_3 = (f_o - 4f_1 + 20f_3 - 5f_4)/12,$$
$$a_2 = (a_1 + a_3)/2$$

et des formules analogues pour les autres côtés (f_i = valeur de f au point numéro i), on utilise les corollaires 1 et 2 du théorème 1 pour calculer les derniers B-coefficients de S :

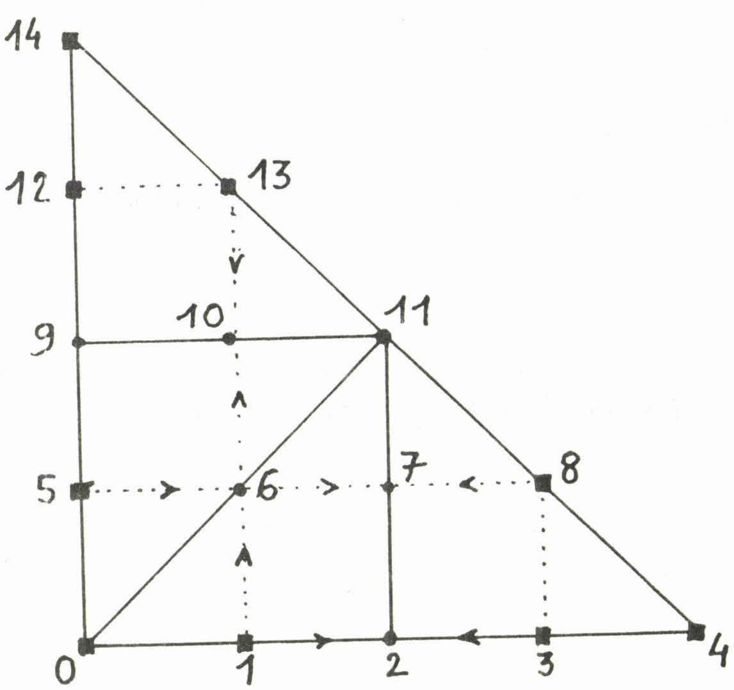


Figure 15 T_2

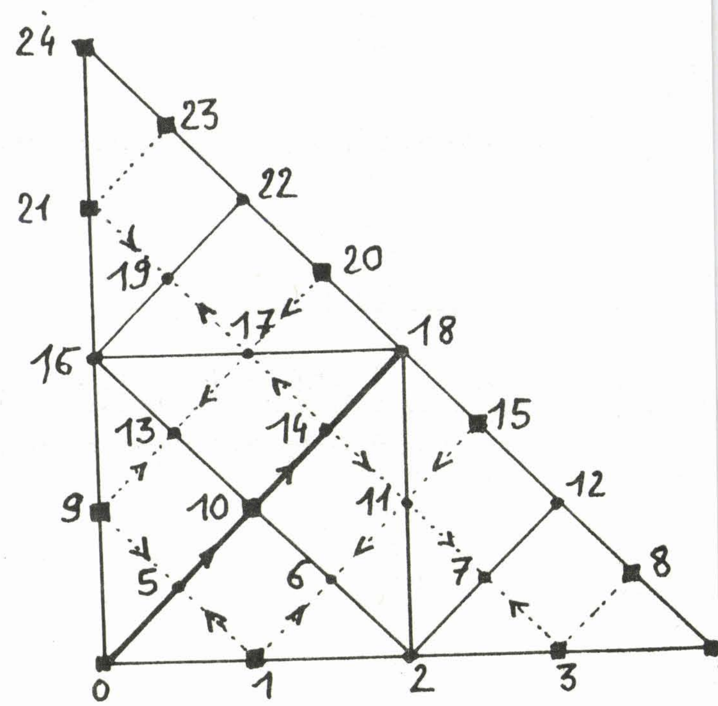


Figure 16 T_2^*

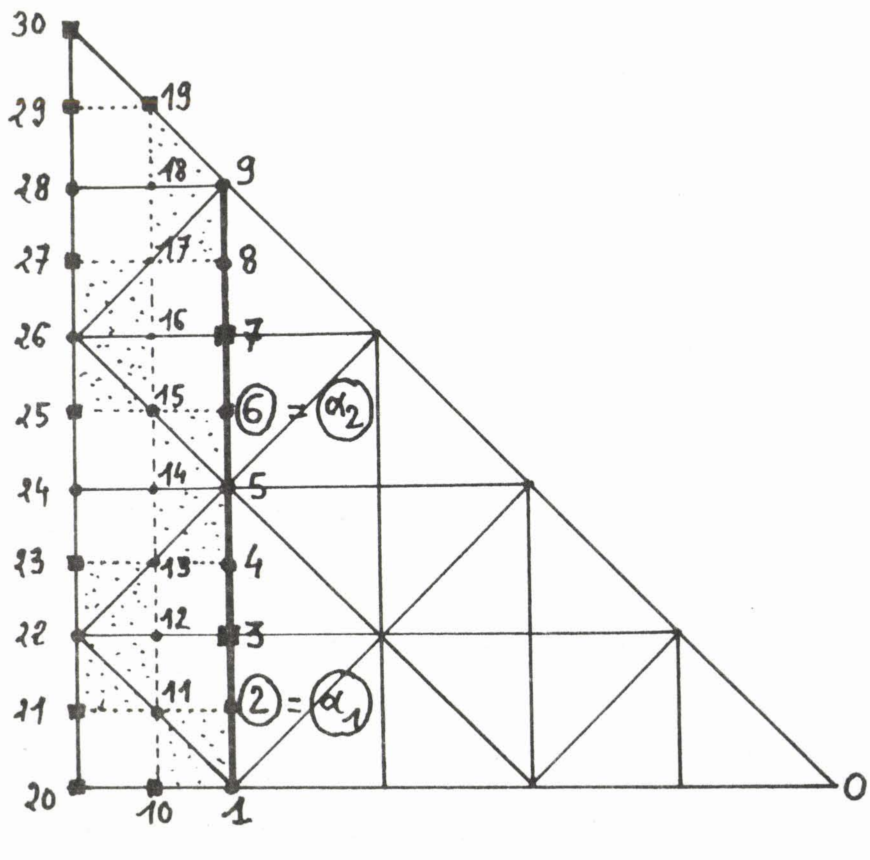


Figure 17 T_5

BUS LILLE

$$a_6 = a_1 + a_5 - a_o$$
$$a_7 = (a_6 + a_8)/2$$
$$a_{10} = (a_6 + a_{13})/2$$

b) Formules complètes pour T_2^* (figure 16).

Une fois calculés les B-coefficients de S sur les bords de T_2^*, on obtient :

$$a_5 = (a_1 + a_9)/2$$
$$a_{14} = 2a_{10} - a_5 = 2f_{10} - a_5$$

Mais alors les B-coefficients des côtés des deux triangles (0, 4, 18) et (0, 18, 24) sont connus : comme ce sont des triangles de type T_2, on utilise les résultats du (a) et l'on obtient :

$$a_{11} = a_{14} + a_{15} - a_{18}$$
$$a_{17} = a_{14} + a_{20} - a_{18}$$
$$a_6 = (a_1 + a_{11})/2, \quad a_7 = (a_3 + a_{11})/2,$$
$$a_{13} = (a_9 + a_{17})/2, \quad a_{19} = (a_{17} + a_{21})/2.$$

ce qui détermine complètement les B-coefficients de S.

c) Explicitons la construction de S sur T_5 (figure 17) comme modèle de construction sur T_{2p+1} : on suppose que l'on a calculé les B-coefficients de S sur ∂T_5 (résolution de trois systèmes linéaires 5 x 5 tridiagonaux) et que l'on sait résoudre le problème d'interpolation sur T_4.

Sont connus également par hypothèse :

$$a_3 = f_3 \text{ et } a_7 = f_7$$

Donc si l'on prend comme **paramètres** :

$$\alpha_1 = a_2 \text{ et } \alpha_2 = a_6 \text{ par exemple,}$$

on peut calculer successivement (corollaire 2 du théorème 1) :

$$a_4 = 2f_3 - \alpha_1$$
$$a_5 = (a_4 + a_6)/2 = f_3 + (\alpha_2 - \alpha_1)/2$$
$$a_8 = 2f_7 - \alpha_2$$

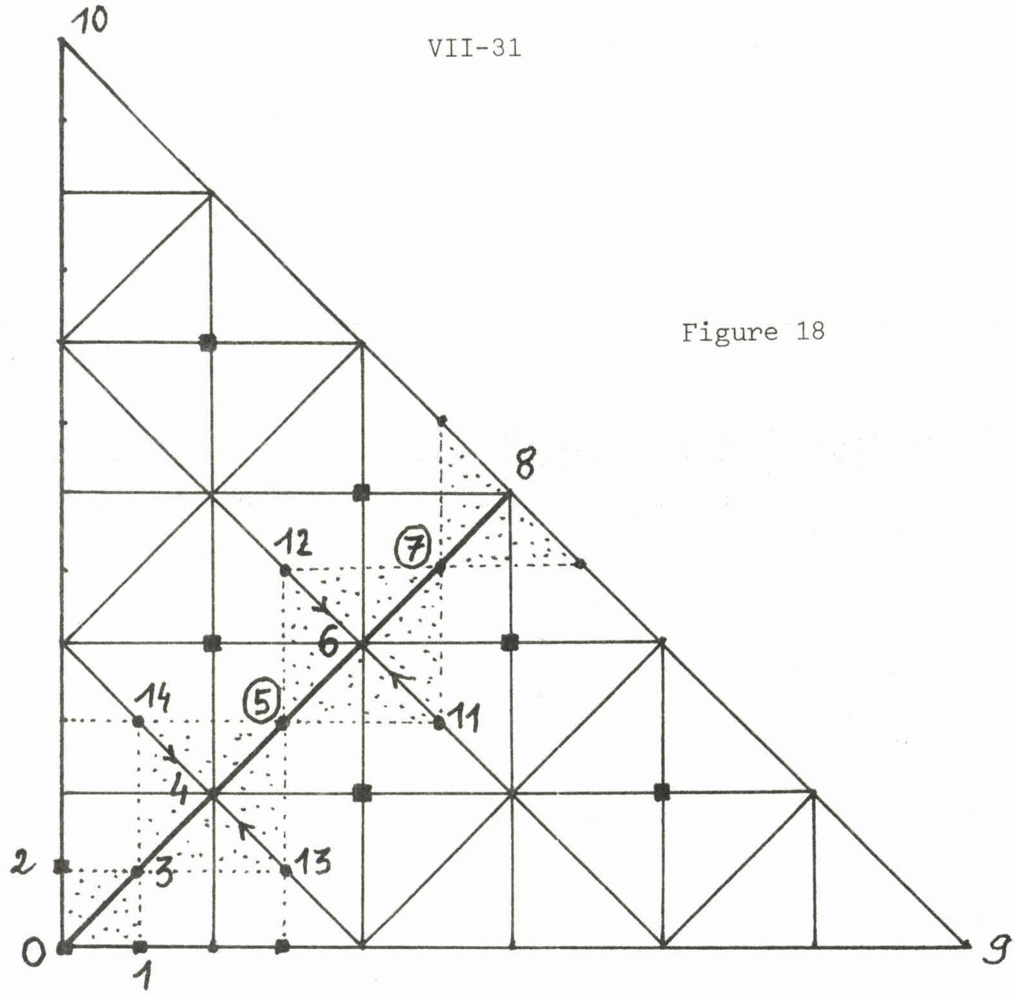


Figure 18

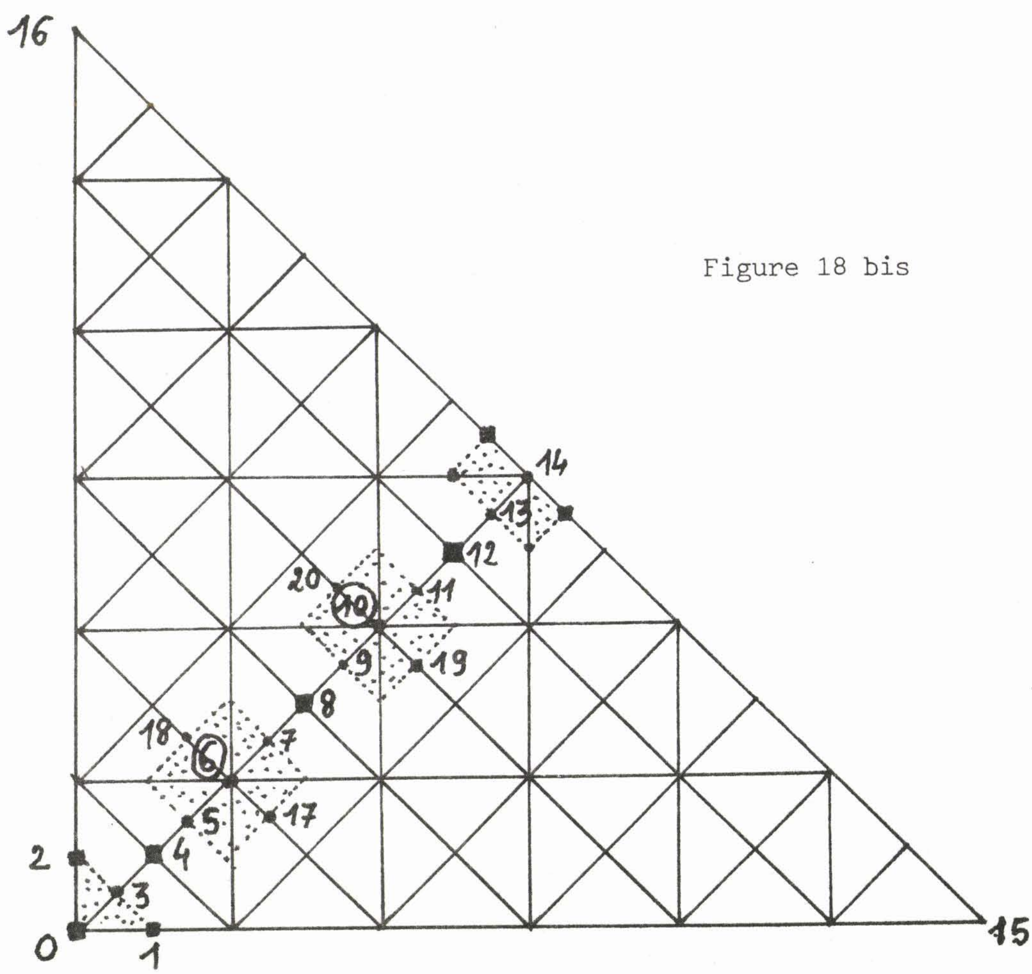


Figure 18 bis

BUS LILLE

On connaît ainsi les B-coefficients de S sur les bords du triangle (0, 1, 9) qui est de type T_4 et l'on en déduit tous les B-coefficients de S sur ce triangle en fonction des paramètres α_1 et α_2. Puis, à l'aide des corollaires 1 et 2 du théorème 1, on calcule les B-coefficients de S numérotés de 11 à 18 (toujours en fonction de α_1 et α_2). Enfin, les B-coefficients de S numérotés de 20 à 30 étant connus explicitement, les relations indépendantes :

$$a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21}$$

$$a_{15} + a_{26} = a_{17} + a_{25}$$

permettent le calcul des paramètres α_1 et α_2 et de tous les B-coefficients de S sur T_5.

La technique est la même pour T_{2p+1} : on choisit p paramètres par exemple sur le bord gauche du triangle $T_{2p} \subset T_{2p+1}$, on calcule formellement les B-coefficients sur T_{2p} en fonction de ces paramètres et les p plaques situées le long du bord gauche de T_{2p+1} fournissent p relations indépendantes permettant le calcul explicite des p paramètres, d'où l'on déduit l'ensemble des B-coefficients de S sur T_{2p+1}.

d) Explicitons la construction de S sur T_6 (figure 18) comme modèle de construction de S sur T_{2p} : on suppose que l'on a calculé les B-coefficients de S sur ∂T_6 (résolution de 3 problèmes de Lagrange à une variable, autrement dit de 3 systèmes linéaires 6 x 6 tridiagonaux). On voit que T_6 est décomposé par la hauteur (0,8) en deux triangles (0,8,9) et 0,8,10) de type T_3^* : si l'on a déjà fait la construction de l'interpolant sur T_3^*, on en déduira la construction de S sur T_6 si l'on arrive à calculer les B-coefficients de S sur (0,8), c'est à dire a_o, a_3, ..., a_8. Or on connaît déjà a_o et a_8 et le corollaire 1 du théorème 1 donne $a_3 = a_1 + a_2 - a_o$.

Choisissant comme paramètres :

$$\alpha_1 = a_5 \text{ et } \alpha_2 = a_7$$

on peut calculer successivement :

$$a_4 = (a_3 + \alpha_1)/2 \text{ et } a_6 = (\alpha_1+\alpha_2)/2$$

puis, en fonction de α_1 et α_2, tous les B-coefficients de S sur les deux triangles (0,8,9) et (0,8,10) respectivement, en utilisant l'algorithme connu pour T_3^*.

Enfin les deux relations :

$$a_{11} + a_{12} = 2a_6 \text{ et } a_{13} + a_{14} = 2a_4$$

permettent de calculer α_1 et α_2 explicitement et d'en déduire les valeurs de tous les B-coefficients. Pour le triangle T_{2p}, la technique est la même : on choisit p-1 paramètres sur la hauteur Γ_p partageant T_{2p} en deux triangles de type T_p^*. Connaissant les B-coefficients de S sur les bords de ces deux triangles (en fonction des paramètres α_1, ..., α_{p-1}), on en déduit, par l'algorithme donnant S sur T_p^*, les B-coefficients sur les deux triangles. Enfin p-1 conditions de continuité C^1 à travers Γ_p permettent de calculer explicitement les paramètres α_1, ..., α_{p-1} et l'ensemble des B-coefficients de S.

e) Explicitons la construction de S sur T_6^* comme modèle de construction sur T_n^* (figure 18 bis) ; on suppose que les B-coefficients de S sur ∂T_6^* ont été calculés (résolution de 3 systèmes tridiagonaux 6 x 6) et que l'on sait résoudre le problème d'interpolation de Lagrange sur T_6. Sont connus également les B-coefficients :

$$a_4 = f_4,\ a_8 = f_8,\ a_{12} = f_{12}$$

choisissons comme paramètres :

$$\alpha_1 = a_6 \text{ et } \alpha_2 = a_{10}$$

On peut alors calculer tous les B-coefficients de S sur la hauteur (0,14) :

$$a_3 = (a_1 + a_2)/2$$

$$a_5 = 2f_4 - a_3$$

$$a_7 = 2\alpha_1 - a_5$$

$$a_9 = 2f_8 - a_7$$

$$a_{11} = 2\alpha_2 - a_9$$

$$a_{13} = 2f_{12} - a_{11}$$

On connait alors les B-coefficients de S sur les bords des deux triangles (0, 14, 15) et (0, 14, 16) qui sont de type T_4. On en déduit, en fonction de α_1 et α_2, les B-coefficients de S à l'intérieur de chacun de ces deux triangles. Enfin, les relations $a_{17} + a_{18} = 2\alpha_1$ et $a_{19} + a_{20} = 2\alpha_2$ permettent le calcul explicite de α_1 et α_2 et de tous les B-coefficients de S.

Dans le cas général, on choisit $[(n-1)/2]$ paramétres sur la hauteur Γ_n partageant T_n^* en deux triangles de type T_n, on calcule les B-coefficients de S en fonction de ces paramètres et $[(n-1)/2]$ relations de continuité C^1 à travers Γ_n permettent le calcul explicite des paramètres, puis de tous les B-coefficients de S.■

<u>Remarque</u> : Les techniques ci-dessus permettent de construire une fois pour toutes les fonctions de base des différents problèmes d'interpolation de Lagrange, c'est à dire les fonctions de $S_2(T_n)$ (resp. de $S_2(T_n^*)$) dont la valeur est 1 en un point d'interpolation et 0 aux autres points de L_n (resp. L_n^*). L'interpolant cherché est alors la combinaison linéaire de ces fonctions ayant comme coefficients les valeurs de f aux points de L_n (resp. L_n^*).

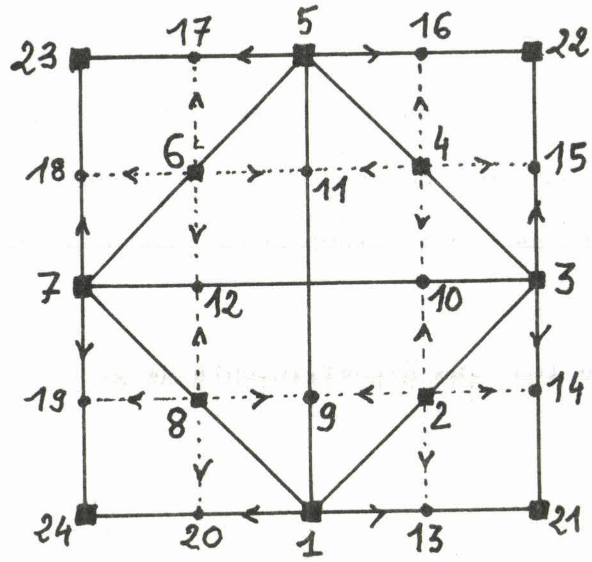
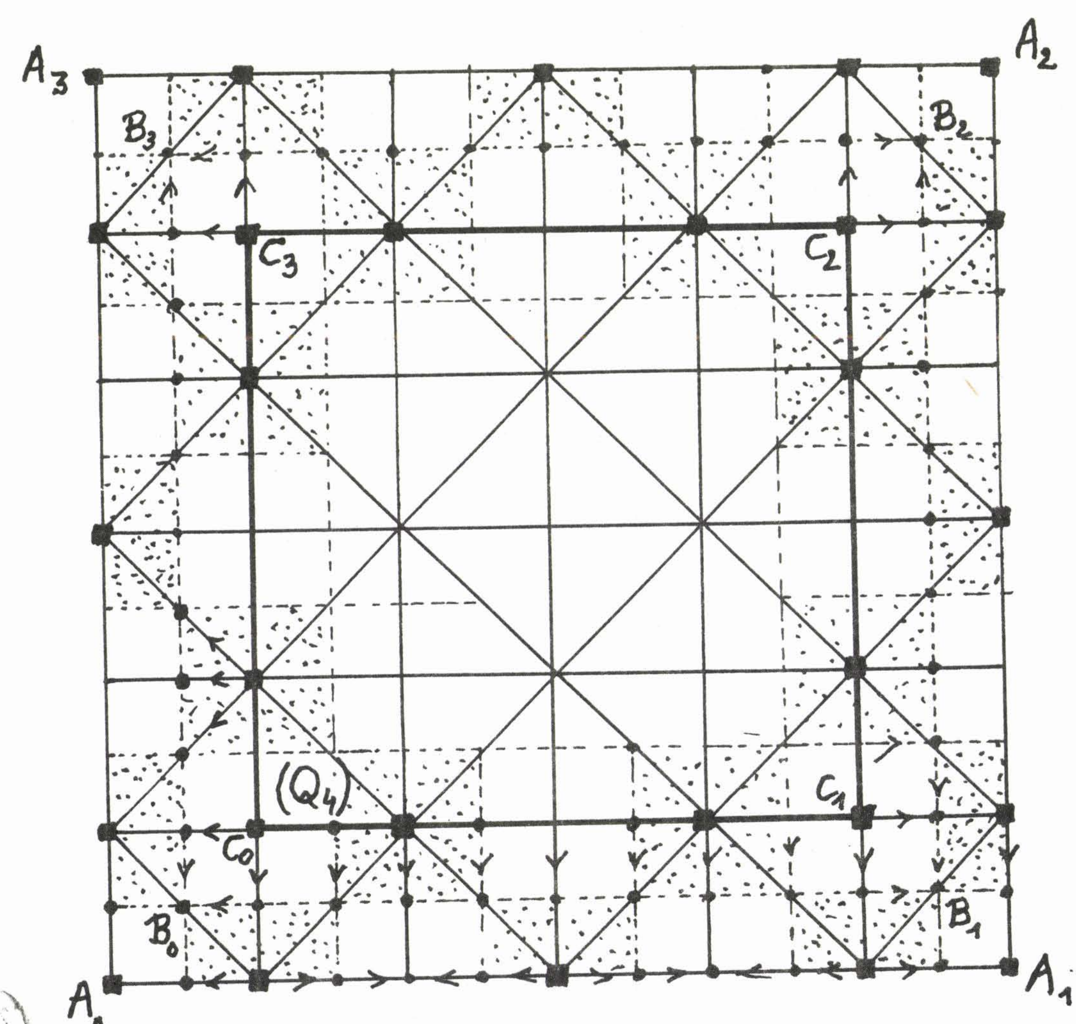


Figure 19



BUS
LILLE

Figure 20

VI - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR Q_n ET Q_n^*

Pour $n = 2p$, Q_{2p} est réunion de p carrés concentriques Q_{2j} $(1 \leq j \leq p)$ et l'on choisit les points d'interpolation sur les bords $\Gamma_{2j} = \partial Q_{2j}$ de ces carrés (sauf pour Q_2 où l'on rajoute 4 points intérieurs, voir figure 19)

Définition 7 : *Pour* $n = 2p$, *l'ensemble* L_n *des points d'interpolation sur* Q_n *est le suivant :*

(i) les 4 points intérieurs de Q_2 *(figure 19)*

(ii) pour $1 \leq j \leq p$, *les* $4(j+1)$ *points suivants de* Γ_{2j} *: les 4 sommets de* Q_{2j} *et les* $4j$ *points de concours de 4 droites du réseau (fig. 11).*

Pour $n = 2p+1$, Q^*_{2p+1} est réunion de p+1 carrés concentriques Q^*_{2j+1} $(0 \leq j \leq p)$ et les points d'interpolation sont choisis sur les bords $\Gamma^*_{2j+1} = \partial Q^*_{2j+1}$ de ces carrés.

Définition 8 : *Pour* $n = 2p+1$, *l'ensemble* L^*_n *des points d'interpolation sur* Q^*_n *est le suivant : pour* $0 \leq j \leq p$, *les 4 sommets de* Q^*_{2j+1} *et les milieux des sous-intervalles situés sur* $\Gamma^*_{2j+1} = \partial Q^*_{2j+1}$, *soit* $8(j+1)$ *points (fig. 12)*

On vérifie que $|L_n| = d(n)$ et $|L_n| = d^*(n)$.

Théorème 9 : *Pour* n *pair, il existe un seul* $s \in S_2(Q_n)$ *interpolant une fonction* f *donnée sur* L_n*. Pour* n *impair, il existe un seul* $s \in S_2(Q^*_n)$ *interpolant* f *sur* L^*_n.

Preuve : a) Pour Q_2 (figure 19), on connaît $f_1, \ldots, f_8$ et l'on en déduit $a_i = f_i$ pour $i = 1, 3, 5, 7$ et $a_i = 2f_i - (f_{i-1} + f_{i+1})$ pour $i = 2,4,6,8$ $(f_9=f_1)$;

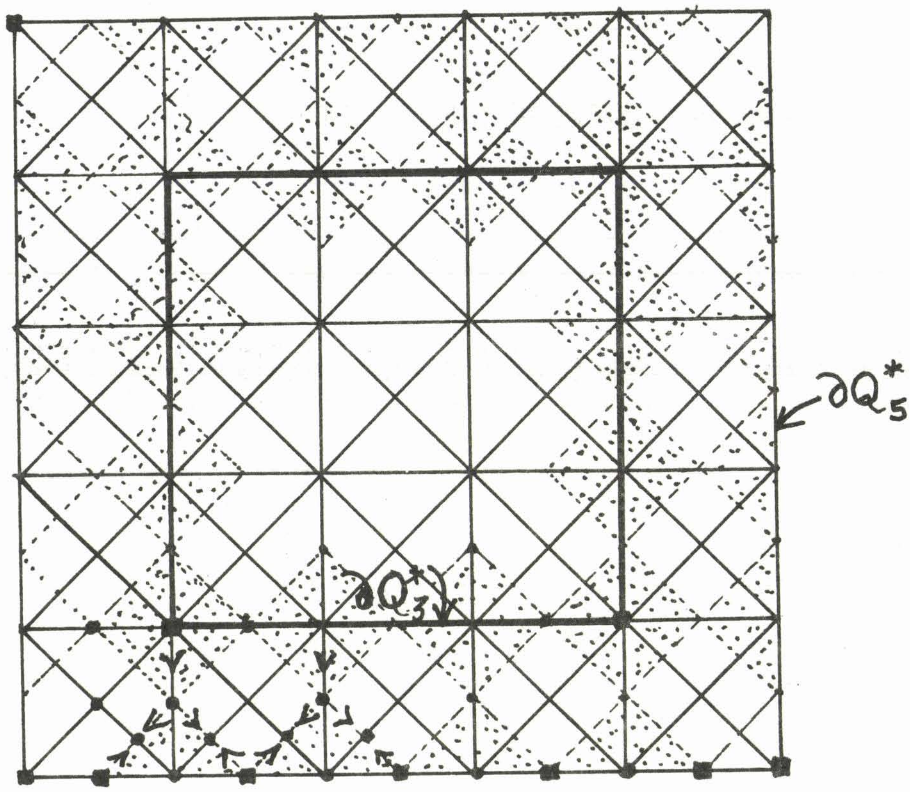


Figure 21

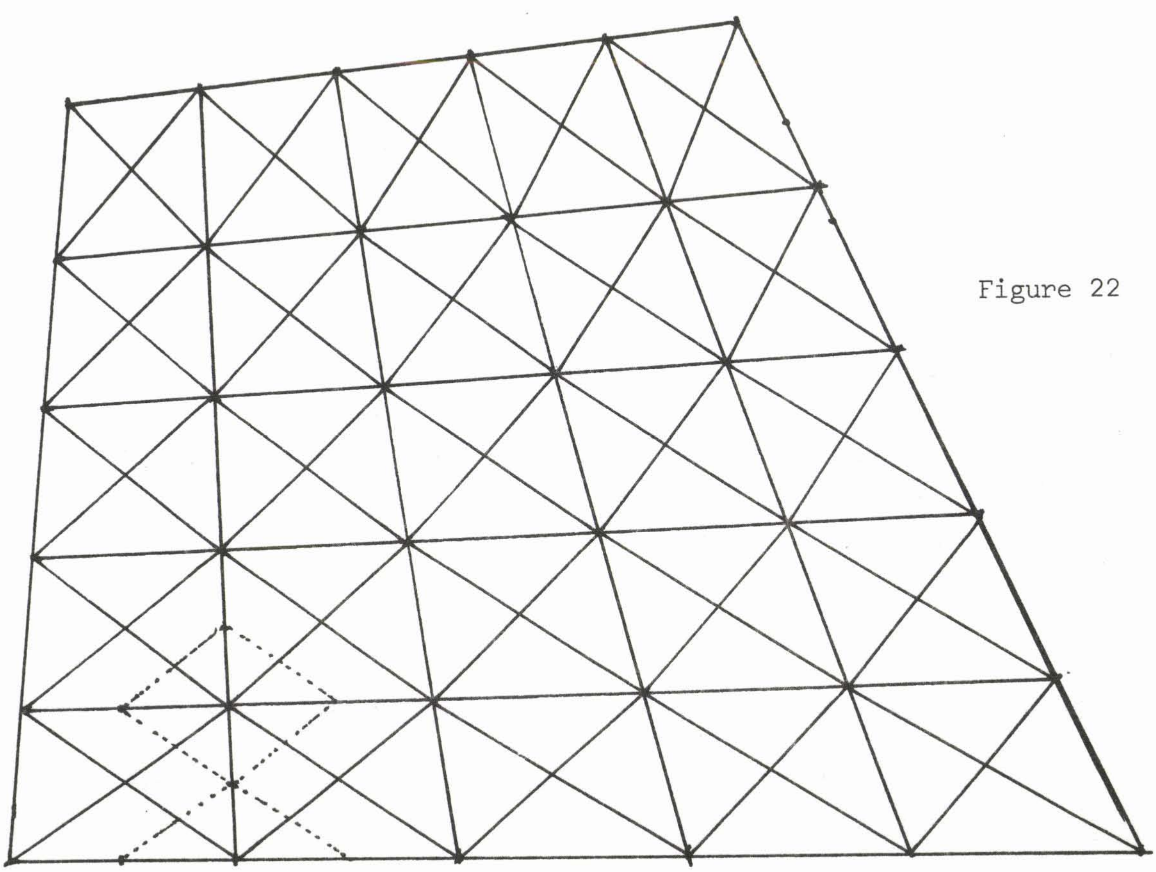


Figure 22

BUS LILLE

puis $a_9 = (a_8 + a_2)/2$, $a_{10} = (a_2 + a_4)/2$, $a_{11} = (a_4 + a_6)/2$, $a_{12} = (a_6 + a_8)/2$ et enfin $a_o = (a_9 + a_{11})/2 = (a_{10} + a_{12})/2$. A l'extérieur du losange (1,3,5,7), on obtient, au moyen du corollaire 1 du théorème 1 :

$$
\begin{aligned}
a_{13} &= a_1 + a_2 - a_9 \\
a_{14} &= a_2 + a_3 - a_{10} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{20} &= a_1 + a_8 - a_9
\end{aligned}
$$

Finalement, comme $a_i = f_i$ pour $21 \le i \le 24$, on a déterminé complétement les B-coefficients de S sur Q_2.

b) Supposons que la construction ait été faite pour Q_4 et montrons-la pour Q_6 (figure 20). (On généralise aisément au passage de Q_n à Q_{n+2}). Les B-coefficients de S sur les bords du carré $Q_5 = B_o\ B_1\ B_2\ B_3$ s'obtiennent à partir des B-coefficients de S sur Q_4 en appliquant le corollaire 2 du théorème 1

Les 12 plaques demi-carrées (du B-réseau de S) situées sur les bords de Q_6 sont alors complétement fixées grâce aux B-coefficients sur ∂Q_5 et aux valeurs connues de f sur ∂Q_6. Les autres B-coefficients de S sur ∂Q_6 s'obtiennent au moyen du corollaire 2.

c) Supposons que la construction ait été faite pour $Q_3^\star$ et montrons-la pour $Q_5^\star$ (figure 21). On généralise facilement au passage de $Q_n^\star$ à $Q_{n+2}^\star$ (n impair) On commence par calculer les B-coefficients de S sur $\partial Q_5^\star$ en résolvant 4 systèmes linéaires 5 x 5 tridiagonaux (n x n dans le cas général). Les B-coefficients de S intérieurs à la couronne $Q_5^\star - Q_3^\star$ se calculent alors par la technique des plaques, c'est à dire en utilisant les corollaires 1 et 2 du théorème 1. Plus précisément, on calcule d'abord les B-coefficients des 12 plaques en forme de losange situées le long de $\partial Q_3^\star$, puis des 12 plaques en forme de demi-losange situées le long de $\partial Q_5^\star$. Les autres B-coefficients s'en déduisent immédiatement.■

Remarques :

1) Les algorithmes de calcul de S sur Q_n et Q_n^* sont **peu coûteux en opérations** : si $N = d(n)$ et $N^* = d^*(n)$, le coût approximatif (additions-soustractions et produits-quotients) du premier est de l'ordre de 20 N et le second de l'ordre de $20N^*$ également.

2) Si f est un polynôme de degré total ≤ 2 en x et y, l'interpolant S de f coïncide avec f, donc d'après les résultats généraux classiques sur l'interpolation (cf [2] ou [5]), l'erreur est en $O(h^3)$ pour $S - f$ lorsque $f \in H^3(Q_n)$ ou $H^3(Q_n^*)$, avec $h = 1/n$. Même résultat pour les triangles.

3) Les résultats ci-dessus se généralisent aux rectangles (avec des subdivisions différentes sur la longueur et la largeur), aux images affines des carrés Q_n et Q_n^* et à des domaines plus généraux, par exemple celui de la figure 22.

4) Les figures 23 et 24 montrent la répartition des points d'interpolation sur Q_n et Q_n^* quand n est grand.

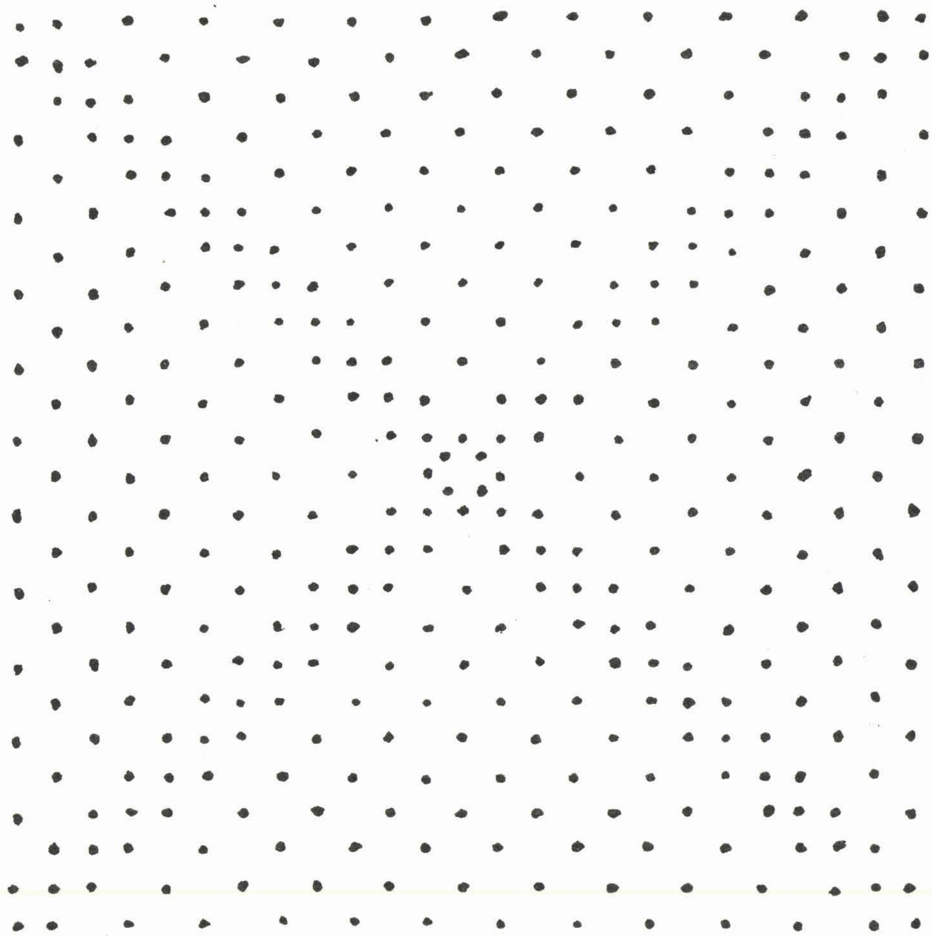


Figure 23

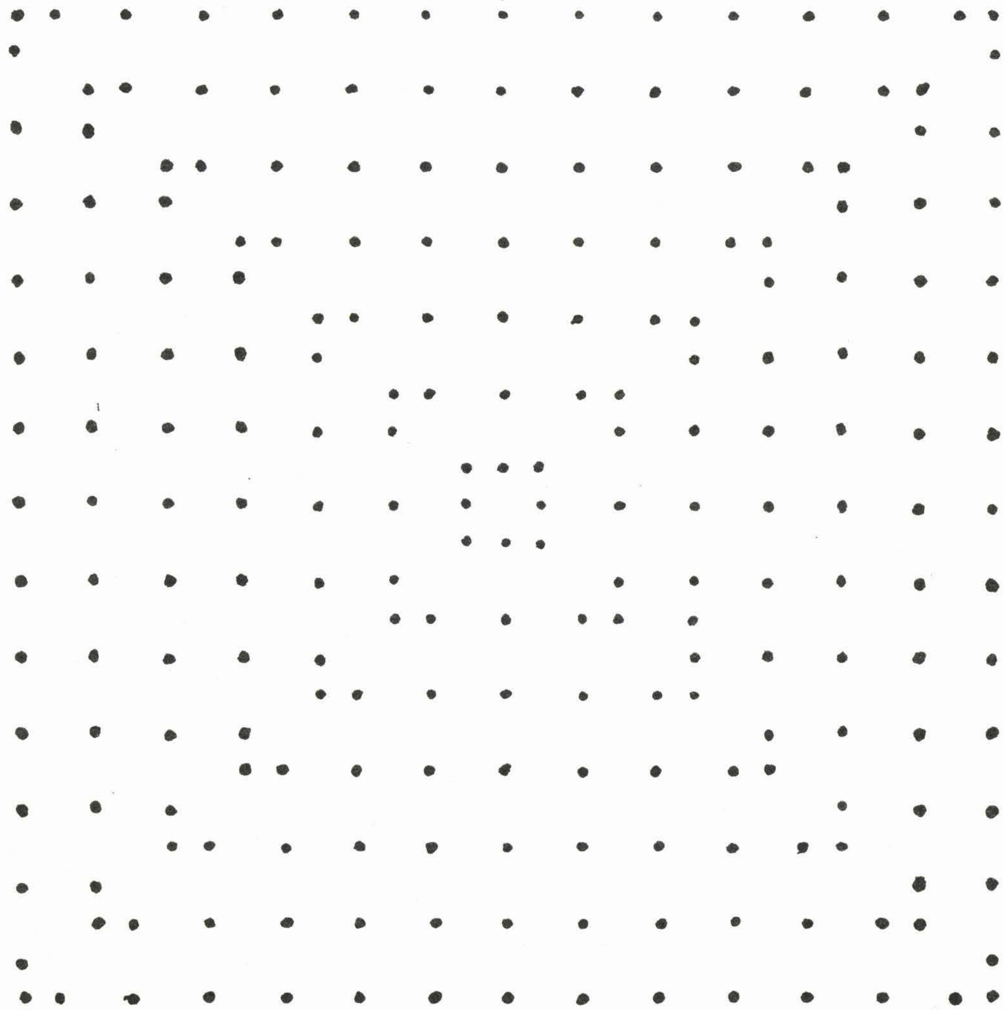


Figure 24

BUS LILLE

RÉFÉRENCES

[1] R.E. BARNHILL, G. FARIN, "*C^1-Quintic interpolation over triangles : two explicit représentations*", International J. for Num. Methods in Engineering, Vol. 17 (1981), p. 1763-78.

[2] P.G. CIARLET, P.A. RAVIART, "*General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite elements methods*", Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972), pp. 177-199.

[3] P.G. CIARLET, "*Sur l'élément de Clough et Tocher*", RAIRO, Analyse Numérique R2, (1974), p. 19-27.

[4] P.G. CIARLET, "*Interpolation error estimates for the reduced Hsieh-Clough - Tocher triangle*", Math. of Computation, Vol. 32, n° 142, (April 1978), p. 335-344.

?[5] P.G. CIARLET, "*The finite element method for elliptic problems*", North Holland Amsterdam (1977).

[6] G. FARIN, "*Subsplines uber Dreiecken*", Dissertation, Braunschweig (1979).

[7] G. FARIN, "*Bézier polynomials over triangles and the construction of piecewise C^r-polynomials*". Manuscrit (à paraître).

[8] F. GANTMACHER, "*Théorie des matrices*", Dunod, Paris (1966).

[9] G. HEINDL, "*Interpolation and approximation by piecewise quadratic C^1 functions of two variables*", dans Multivariate Approximation Theory, ISNM 51, Birkhaüser Verlag, Basel (1979)

[10] W.J. KAMMERER, G.W. REDDIEN, R.S. VARGA, "*Quadratic Interpolatory splines*" Numer. Math., 22, pp. 241-259 (1974).

[11] M.J.D. POWELL, "*Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting*", In Software for Numerical Mathematics. D.J. EVANS, Ed., Academic Press (1974), pp. 253-272.

[12] M.J.D. POWELL, M.A. SABIN, "*Picewise quadratic approximations on triangles*" A.C.M. Transactions on Math. Software, Vol. 3, n° 4 (Déc. 1977) pp. 316-325.

[13] J.R. RICE, "*Mathematical software III*", Academic Press, New-York (1977).

[14] P. SABLONNIERE, "*Interpolation d'Hermite par des surfaces de Classe C^1 quadratiques par morceaux*", Publ. ANO 16, Université de Lille (Nov 1979).

[15] P. SABLONNIERE, "*Interpolation d'Hermite par des surfaces de classe C^1 quadratiques par morceaux*", in Actes du 2° Congrès International sur les Méthodes Numériques de l'Ingénieur (GAMNI), DUNOD, Paris (Déc. 1980), pp. 175-185. Voir aussi ANO 34 (janv. 81).

[16] P. SABLONNIERE, "*Interpolation by quadratic splines on triangles and squares*", Publication ANO 52, Lille (Sept. 1981). A paraître dans un numéro spécial de Computers in Industry dédié à la mémoire de S.A. COONS.

[17] W. SCHEMP, K. ZELLER, "*Multivariate approximation theory*", ISNM 51, Birkhaüser Verlag, BASEL (1979).

[18] L.L. SCHUMAKER, "*Fitting surfaces to scattered Data*", in Approximation Theory II G.G. LORENTZ (ed.), Academic Press, New-York (1976) pp. 203-268.

[19] L.L. SCHUMAKER, "*On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables*", in [19], pp. 396-412.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE