N° d'ordre : 979

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Pascal VAN DEN BOSCH

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\omega(n)$

Membres du Jury : Mr J.-L. NICOLAS, *Président*
Mme N. ZINN-JUSTIN, *Rapporteur*
Mr S. FAKIR, *Examinateur*

Soutenue le 22 Juin 1982

Je dédicace cette thèse à mes parents,

et à mon épouse.

Je remercie vivement Madame Nicole ZINN-JUSTIN de l'Université de Lille I et Monsieur Jean-Louis NICOLAS de l'Université de Limoges, dont la compétence et l'érudition m'ont guidé, pour l'aide constante qu'ils m'ont gentiment apporté, et pour avoir accepté de participer au jury de ce travail.

Je remercie également Monsieur Sabah FAKIR qui s'est intéressé à mon travail et qui a accepté de faire partie du jury, ainsi que Monsieur Guy ROBIN de l'Université de Limoges pour ses articles intéressants.

Je tiens également à remercier Madame Raymonde BÉRAT qui a dactylographié cette thèse ainsi que toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle pour le soin et la compréhension dont elles ont fait preuve.

SOMMAIRE

1ÈRE P A R T I E

INTRODUCTION

§ 1 - *Rappels de quelques propriétés de l'ensemble des nombres premiers.*

Dans la suite $\mathcal{P}$ désignera l'ensemble des nombres premiers de N et $p_1 < p_2 \ \dots < p_k < \dots$ les éléments de $\mathcal{P}$.

A sera toujours une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}$.

1.1. *Rappel.*

On appelle fonction arithmétique toute application de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. Une fonction arithmétique sera additive (respectivement complètement additive) si pour tout couple (m,n) d'entiers non nuls premiers entre eux $f(mn) = f(m) + f(n)$ (respectivement si la précédente égalité est valable pour tous les couples d'entiers non nuls).

On définit de même la notion de fonction arithmétique multiplicative (respectivement complètement multiplicative).

1.1.1.- *Exemples.*

. Pour $A \subset \mathcal{P}$; on définit la fonction arithmétique "degré de composition de n en éléments distincts de A" par :

$$\omega_A(n) = \sum_{\substack{p^\alpha | n \\ p \in A}} 1 \quad . \quad \text{Lorsque } A = \mathcal{P} \text{ on note plus simplement } \omega(n).$$

Il est évident que cela définit une fonction arithmétique additive sur $\mathbb{N}^*$.

. On peut introduire de la même façon la fonction complètement additive Ω_A par $\Omega_A(n) = \sum_{\substack{p^\alpha | n \\ p \in A}} 1$.

C'est le degré de composition de n en éléments de A (comptés avec leur multiplicité).

. Rappelons enfin la fonction de Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \text{si } n \text{ n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Celle-ci est multiplicative.

2.2. *Produit de Convolution.*

Rappelons que l'on peut définir un produit appelé produit de convolution sur l'ensemble des fonctions arithmétiques par :

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\tfrac{n}{d}) \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce produit possède un élément neutre e ($e(1) = 1$, $e(n) = 0$ si $n \neq 1$).

On remarque aisément que l'ensemble des fonctions arithmétiques muni de l'addition, de ce produit et de la multiplication par un scalaire possède une structure de $\mathbb{C}$ algèbre. Les éléments inversibles étant les fonctions arithmétiques g telles que $g(1) \neq 0$.

Par exemple, la fonction de Möbius est l'inverse pour ce produit de la fonction z ($z(n) = 1$ pour tout n).

En remarquant cela nous obtenons la formule d'inversion de Möbius : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n) = \sum_{d|n} g(\frac{n}{d})$ si et seulement si $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$.

1.3. *Fonctions de Tchebychef, répartition des nombres premiers.*

Pour étudier P on introduit les fonctions de Tchebychef π, θ définies par

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 \quad \text{fonction de distribution des nombres premiers}$$

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \operatorname{Log} p \ .$$

La distribution des nombres premiers dans N est connue au moins depuis 1896 grâce à J. Hadamard :

Théorème 1.3.1.

Lorsque x tend vers l'infini

$$\pi(x) = \frac{x}{\operatorname{Log} x}\left(1+ \left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right)\right) = L_i(x)\left(1+ \left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right)\right) \quad \text{ou encore} \quad \theta(x) = \left(x\left(1+ \left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right)\right)\right)$$

$L_i(x)$ étant la fonction logarithme intégral définie pour $x \geqslant 2$ par $L_i(x) = \int_2^x \frac{dt}{\operatorname{Log} t}$.

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème, on montre par exemple celui-ci en étudiant les zéros de la fonction ζ de Riemann dans la bande critique. Citons également l'existence d'une preuve entièrement élémentaire établie par Erdös et Selberg (1949) (voir [E11]). Les termes d'erreur dans le théorème précédent peuvent être approximés de façon précise, cependant seule la forme grossière $\left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right)$ sera utilisée dans la suite.

On trouvera des versions précises des termes d'erreurs dans [E11].

On peut facilement généraliser ces dernières notions aux sous-ensembles non vides de $\mathcal{P}$:

Définition 1.3.2.- Soit $A \subset \mathcal{P}$, pour tout réel positif x on définit

$$\pi_A(x) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in A}} 1 \qquad \theta_A(x) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in A}} \operatorname{Log} p.$$

π_A et θ_A généralisent les fonctions π et θ précédemment citées.

Définition 1.3.3.- Soit $A \subset \mathcal{P}$. Nous dirons que A vérifie la propriété généralisée des nombres premiers s'il existe $\gamma_A > 0$ tel que $\pi_A(x) = \gamma_A \dfrac{x}{\operatorname{Log} x}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\operatorname{Log} x}\right)\right)$.

Par le théorème 1.1., on a $\gamma_A \in \left]0,1\right]$ nécessairement.

Dans la suite, nous désignerons par $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ les éléments de A avec $a_1 < a_2 < a_3 \ldots$

Donnons tout d'abord des formes équivalentes de la propriété généralisée des nombres premiers (en abrégé p.g.p).

Théorème 1.3.4.-

Il y a équivalence entre :

1) A vérifie la p.g.p.

2) $\theta(x) = \gamma_A x + O\left(\dfrac{1}{\operatorname{Log} x}\right)$

3) $a_k = \dfrac{1}{\gamma_A} k(\operatorname{Log} k + \operatorname{Log} \operatorname{Log} k + O(1))$.

1) => 2)

$$\theta_A(x) = \int_{2^-}^{x} \text{Log } t \, d\pi_A(t) = \pi_A(x) \text{ Log } x - \int_{2^-}^{x} \frac{\pi_A(t)}{t} dt$$

$$= \gamma_A x(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\text{Log } x})) - \gamma_A L_i(x) + \mathcal{O}(\int_{\bar{2}}^{x} \frac{dt}{\text{Log}^2 t})$$

$$\int_{2^-}^{x} \frac{dt}{\text{Log}^2 t} \leqslant \frac{1}{\text{Log } 2} L_i(x)$$

donc

$$\theta_A(x) = \gamma_A x(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\text{Log } x})) + \mathcal{O}(L_i(x)) = \gamma_A x(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\text{Log } x}))$$

car $L_i(x) = \frac{x}{\text{Log } x} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\text{Log } x}))$

2) => 1). Le raisonnement est analogue.

$$\pi_A(x) = \int_{2^-}^{x} \frac{d(\theta_A(t))}{\text{Log } t} = \frac{\theta_A(x)}{\text{Log } x} + \int_{2^-}^{x} \frac{\theta_A(t)}{t \text{Log}^2 t} dt .$$

Par hypothèse $\theta_A(x) = \gamma_A x(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\text{Log } x}))$ alors

$$\pi_A(x) = \gamma_A \frac{x}{\text{Log } x} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\text{Log } x})) + \int_2^x \gamma_A \frac{dt}{\text{Log}^2 t} + \mathcal{O}(\int_2^x \frac{dt}{\text{Log}^3 t}) .$$

Pour x tendant vers $+\infty$, on a :

$$\int_2^x \frac{dt}{\text{Log}^2 t} = \int_2^x \frac{2\sqrt{t}}{\text{Log}^2 t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{\text{Log}^2 x} \int_2^x \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$ puisque la fonction

$t \to \frac{2\sqrt{t}}{\text{Log}^2 t}$ croît strictement pour $t \geqslant e^4$

aussi lorsque x tend vers $+\infty$

$\int_2^x \frac{dt}{\mathrm{Log}^2 t} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{\mathrm{Log}^2 x}(\sqrt{x} - \sqrt{2})$. De ce fait $\int_2^x \frac{dt}{\mathrm{Log}^2 t} = O(\frac{x}{\mathrm{Log}^2 x})$

et par suite $\pi_A(x) = \gamma_A \frac{x}{\mathrm{Log}\ x}(1+O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ x}))$.

1) => 3)

Nous avons $k = \gamma_A \frac{a_k}{\mathrm{Log}\ a_k}(1+O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ a_k}))$

ou encore $a_k = \frac{k}{\gamma_A} \mathrm{Log}\ a_k (1+O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ a_k}))$

$$\mathrm{Log}\ k = \mathrm{Log}\ \gamma_A + \mathrm{Log}\ a_k - \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ a_k + O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ a_k})$$

$$\mathrm{Log}\ k = \mathrm{Log}\ a_k (1 - \frac{\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ a_k}{\mathrm{Log}\ a_k} + O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ a_k}))$$

$\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ k = \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ a_k - \frac{\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ a_k}{\mathrm{Log}\ a_k} + O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ a_k})$ pour k tendant vers l'infini

aussi $\mathrm{Log}\ a_k = \mathrm{Log}\ k + \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ k + O(\frac{\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ a_k}{\mathrm{Log}\ a_k})$

$$= \mathrm{Log}\ k + \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ k + O(\frac{\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ k}{\mathrm{Log}\ k})$$

et $a_k = \frac{k}{\gamma_A}(\mathrm{Log}\ k + \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ k + O(1))$.

3) => 1)

Soit x un réel supérieur à a_1. Il existe k tel que $a_k \leqslant x < a_{k+1}$.

Clairement, on a $\pi_A(x) = k$.

Comme $a_k = \frac{k}{\gamma_A}(\text{Log } k + \text{Log Log } k + O(1))$

$$\text{Log } a_k = \text{Log } k - \text{Log } \gamma_A + \text{Log Log } k + O(\frac{\text{Log Log } k}{\text{Log } k})$$

de cette façon

$$\gamma_A \frac{a_k}{\text{Log } a_k} = k(1 + O(\frac{1}{\text{Log } k})) = k(1 + O(\frac{1}{\text{Log } a_k})) \quad \text{d'où le}$$

résultat puisque $a_k = x(1 + O(\frac{1}{\text{Log } x}))$.

Définition 1.4.

1) Soit f une fonction arithmétique à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ψ une fonction numérique positive définie et continue pour x suffisamment grand. Nous dirons que ψ est l'ordre maximum de la fonction f si pour tout n $f(n) \geq \psi(n)(1+o(1))$ avec égalité pour une infinité d'entiers.

2) Soit H l'ensemble des entiers n tels que $f(n) \neq 0$. Si f n'est pas constamment nulle lorsque x tend vers $+\infty$, nous dirons que ψ réalise l'ordre minimal de f si $f(n) \geq \psi(n)(1+o(1))$ lorsque $n \in H$ et n tend vers l'infini et si $f(n) \sim \psi(n)$ lorsque n appartient à une suite infinie d'entiers de H.

Exemple : L'ordre minimal de ω_A et de Ω_A est égal à 1 puisque $\omega_A(p) = \Omega_A(p) = 1$ pour tout $p \in A$ et que ces fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Notation 1.4.1.

On désigne dans tout ce qui suit par $e^{\theta_A(a_k)} = a_1 a_2 \ldots a_k = n_k$ pour $A \subset \mathcal{P}$.

Si $A = \mathcal{P}$, on note plutôt $N_k = 2\ 3 \dots p_k$.

Par sa définition, il est évident que n_k (resp. N_k) est le plus petit entier n tel que $\omega_A(n) = k$ (resp. $\omega(n) = k$).

Proposition 1.5.- Soit A vérifiant la p.g.p. alors l'ordre maximum de ω_A est égal à $\dfrac{\text{Log } n}{\text{Log Log } n}$.

Démonstration :

Celle-ci est immédiate grâce aux propriétés de la suite n_k : soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$k = \omega_A(n_k) = \pi(a_k) = \gamma_A \frac{a_k}{\text{Log } a_k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\text{Log } a_k}\right)\right) .$$

$$\text{Or} \quad \gamma_A a_k = \theta_A(a_k)\left(1+O\left(\frac{1}{\text{Log } a_k}\right)\right) \quad \text{et} \quad \theta_A(a_k) = \text{Log } n_k$$

$$\text{ainsi} \quad k = \frac{\theta_A(a_k)}{\text{Log } \theta_A(a_k)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\text{Log } a_k}\right)\right)$$

$$= \frac{\text{Log } n_k}{\text{Log Log } n_k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\text{Log Log } n_k}\right)\right) .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_1 = a_1$. Il existe k tel que $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ puisque la suite n_k est strictement croissante car A est infini par suite comme $\omega_A(n) \leqslant k$ (puisque n_{k+1} est le plus petit entier m tel que $\omega_A(m) \geqslant k+1$)

$$\omega_A(n) \leqslant \frac{\text{Log } n_k}{\text{Log Log } n_k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\text{Log Log } n_k}\right)\right.$$

$$\leqslant \frac{\text{Log } n}{\text{Log Log } n}\left(1+O\left(\frac{1}{\text{Log Log } n}\right)\right) \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty .$$

Ceci entraîne que $\dfrac{\text{Log } n}{\text{Log Log } n}$ est l'ordre maximum de la fonction ω_A. Si A vérifie la p.g.p.

§ 2 - *Présentation des différentes études.*

Pour x réel positif, on s'intéresse à la quantité $s(x,y) = \text{card}\{n \leqslant x,\ \omega(n) > y\}$ où $y > 0$ (on peut toujours prolonger cette définition de façon triviale pour $x \leqslant 0$ ou $y \leqslant 0$).

En particulier, si $y = f(x)$, où f est une fonction numérique $s(x,y)$ est une fonction de x et on peut étudier son comportement.

Par exemple si $y = \dfrac{c \text{ Log } x}{\text{Log Log } x}$ $(x > 1)$.

J.L. Nicolas et P. Erdös ont montre que $s(x,y) = x^{1-c+O(1)}$ (voir [Nic], 2).

Ce résultat a été généralisé par K.K. Norton aux sous-ensembles de P vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers. Si on pose maintenant $S(x,y) = \text{card}\{n \leqslant x,\ \Omega(n) > y\}$, Norton a également établi des approximations de $S(x,y)$. Celles-ci s'obtiendront de manière analogue à ce qui a été fait pour $s(x,y)$ mais nous aurons besoin d'un résultat particulier de G. Halàsz. La deuxième partie est consacrée à ces travaux de Norton et à la démonstration du théorème de Halàsz.

Enfin, au paragraphe 7, nous démontrerons une formule asymptotique obtenue par H. Delange donnant une très bonne approximation de $s(x,y)$ lorsque $y = \alpha \text{ Log Log } x$ avec $\alpha > 1$ fixé.

La troisième partie est destinée à l'étude de suites vérifiant certaines propriétés particulières relatives à ω :

C'est le cas par exemple des nombres ω-largement composés définis par : $n \in \mathbb{N}^*$ n est ω-largement composé si $\omega(n) \geqslant \omega(m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leqslant n$. Si $W_\ell(X)$ désigne le nombre de ces entiers inférieurs à X nous montrerons qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que : $c_1\sqrt{\text{Log } X} \leqslant \text{Log } W_\ell(X) \leqslant c_2\sqrt{\text{Log } X}$.

On conjecture alors que $\text{Log } W_\ell(X) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ Log } X$ quand X tend vers $+\infty$. Par des raffinements, nous essayerons d'obtenir des valeurs de c_1 de plus en plus proches de la valeur conjecturée $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2ème P A R T I E

ÉTUDE DE K.K. NORTON

Dans toute la suite, les constantes c...,d..., sont positives.

§ 1 - *Introduction.*

Soit $A \subset S$ un sous-ensemble infini, et $n \in \mathbb{N}$.
Il y a plusieurs manières d'exprimer le degré de composition de n en éléments de A :

On peut tout d'abord caractériser celui-ci par le nombre de diviseurs de n dont tous les facteurs premiers appartiennent à A, on introduit pour cela la fonction $d_A(n) = \sum\limits_{d|n}{}' 1$ la somme étant étendue aux diviseurs de n dont tous les facteurs premiers appartiennent à A.

On peut également caractériser ce degré par le nombre $\omega_A(n)$ de facteurs premiers distincts de n appartenant à A si l'on ne tient pas compte de la multiplicité de ceux-ci, ou encore en utilisant la fonction $\Omega_A(n)$ dans le cas contraire.

Nous avons déjà remarqué que l'ordre minimal des fonctions ω_A et Ω_A est 1 puisque $\omega_A(p) = \Omega_A(p) = 1$ pour tout p et que l'ordre maximum de Ω_A était inférieur à $\dfrac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n}$.

Comme on le montre au paragraphe 4 (Lemme 4.0.) l'ordre maximum de Ω_A est égal à $\dfrac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n}$ si a_1 est le plus petit élément de A. (On pose $\text{Log}_r x = \text{Log Log}_{r-1} x$ pour $x > e^{r-2}$.

Cette partie est consacrée au comportement lorsque x tend vers l'infini du nombre d'entiers inférieurs à x dont le degré de composition ω_A est supérieur à $\dfrac{\alpha \text{ Log } n}{\text{Log}_2 n}$, ce qui en d'autres termes signifie que l'on s'intéresse aux entiers n tels que $\omega_A(n)$ est voisin du maximum $\dfrac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n}$.

Dans la même optique des propriétés seront établies pour Ω_A.

Définition 1.1.- Soit f une fonction arithmétique à valeurs réelle positives et ψ une fonction numérique positive continue dérivable pour x assez grand. Nous dirons que l'ordre moyen de f est égal à $\psi(n)$ si pour n tendant vers $+\infty$,

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \sim n\psi(n)$.

Proposition 1.2.- Soit $A \subset P$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers, alors l'ordre moyen de ω_A (et celui de Ω_A) est égal à $\gamma_A \mathrm{Log}_2 n$.

Démonstration :

$\sum\limits_{n\leqslant x} \omega_A(n) = \sum\limits_{n\leqslant x} \sum\limits_{\substack{p/n \\ p\in A}} 1 = \sum\limits_{\substack{p\leqslant x \\ p\in A}} \left[\frac{x}{p}\right]$ puisqu'il y a seulement $\left[\frac{x}{p}\right]$ entiers inférieurs à x multiples de p.

Ainsi :

$$\sum_{n\leqslant x} \omega_A(n) = x \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\in A}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\in A}} \left|\frac{x}{p}\right| = x \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\in A}} \frac{1}{p} + O(\pi(x))$$

$$= x\Big(\sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\in A}} \frac{1}{p} + O(1)\Big)$$

dans la suite, nous désignerons toujours la somme $\sum\limits_{\substack{p\leqslant x \\ p\in A}} \frac{1}{p}$ par $A(x)$ pour $A \subset P$, $A \neq \phi$. (Si $A = \phi$, alors $A(x) = 0$ pour tout x)

$$\sum_{n\leqslant x} \Omega_A(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x \\ m>x}} \sum_{\substack{p^m | n \\ p\in A}} 1 = \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ p\in A \\ m\geqslant 0}} \left[\frac{x}{p^m}\right]$$

aussi $\sum_{n\leqslant x} \Omega_A(n) - \sum_{n\leqslant x} \omega_A(n) = \sum_{\substack{p^m\leqslant x\\ p\in A\\ m\geqslant 2}} \left[\frac{x}{p^m}\right]$

$$\sum_{\substack{p^m\leqslant x\\ p\in A\\ m\geqslant 2}} 1 \leqslant \sum_{\substack{p\in A\\ p\leqslant x}} \frac{\operatorname{Log} p}{\operatorname{Log} 2} \leqslant \frac{\Psi(x) - \theta(x)}{\operatorname{Log} 2} = O(x^{1/2})$$

de ce fait, $\sum_{n\leqslant x} \Omega_A(n) - \sum_{n\leqslant x} \omega_A(n) = x\Big(\sum_{\substack{m\geqslant 2\\ p^m\leqslant 2\\ p\in A}} \frac{1}{p} m + O(1)\Big).$

$$\text{Or,} \quad \sum_{\substack{m\geqslant 2\\ p^m\leqslant x\\ p\in A}} \frac{1}{p^m} \leqslant \sum_{p\in A} \Big(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\Big) = \sum_{p\in A} \frac{1}{p(p-1)} \quad ,$$

qui est le terme général d'une série convergente et finalement

$$\sum_{n\leqslant x} \Omega_A(n) = x \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in A}} \frac{1}{p} + bx + O(x) \quad \text{où} \quad b = \sum_{p\in A} \Big(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\Big).$$

Nous montrerons à la proposition 3.8. que $A(x) \sim \gamma_A \operatorname{Log}_2 x$ lorsque $x \to +\infty$ si A vérifie la propriété généralisée des nombres premiers.

Il en résulte que l'ordre moyen de ω_A et de Ω_A est $\gamma_A \operatorname{Log}_2 n$.

Dans ce qui suit, nous étudierons également le comportement lorsque x tend vers $+\infty$ du nombre d'entiers n inférieurs à x tels que $\omega_A(n)$ soit voisin de $\gamma_A \operatorname{Log}_2 x$, soit encore voisin de l'ordre moyen de ω_A d'après ce que nous venons de montrer.

§ 2 - *Estimation de la fonction* ω_A.

Nous allons tout d'abord exprimer θ_A en fonction de π_A.

Proposition 2.1. -

Soit $A \subset P$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers, alors pour $x > c_{21}(A)$ on a

$$\theta_A(x) = \pi_A(x)\left[\operatorname{Log}(\pi_A(x)) + \operatorname{Log}_2(\pi_A(x)) - 1 - \operatorname{Log}\gamma_A + \frac{\operatorname{Log}_2(\pi_A(x))}{\operatorname{Log}(\ _A(x))} + O_A\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\pi_A(x)}\right)\right]$$

Démonstration :

On commence par exprimer $\operatorname{Log} x$ en fonction de $\operatorname{Log}\pi_A(x)$ et de $\operatorname{Log}_2\pi_A(x)$

$$\operatorname{Log}\pi_A(x) = \operatorname{Log}(\gamma_A \frac{x}{\operatorname{Log} x}(1 + O_A(\frac{1}{\operatorname{Log} x}))) = \operatorname{Log} x - \operatorname{Log}_2 x + \operatorname{Log}\gamma_A + O_A(\frac{1}{\operatorname{Log} x})$$

$$\operatorname{Log}\pi_A(x) = \operatorname{Log}_2 x\left(1 + \frac{\operatorname{Log}\left[1 - \operatorname{Log}_2 x(\operatorname{Log} x)^{-1} + O_A(1/\operatorname{Log} x)\right]}{\operatorname{Log}_2 x}\right)$$

$$= \operatorname{Log}_2 x\left(1 - \frac{1}{\operatorname{Log} x} + O_A\left(\frac{1}{\operatorname{Log} x \operatorname{Log}_2 x}\right)\right) .$$

En conséquence,

$$\operatorname{Log}\pi_A(x) + \operatorname{Log}_2\pi_A(x) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\gamma_A - \operatorname{Log}_2 x(\operatorname{Log} x)^{-1} + O_A(\frac{1}{\operatorname{Log} x})$$

et

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}\pi_A(x) + \operatorname{Log}_2\pi_A(x) - \operatorname{Log}\gamma_A + \frac{\operatorname{Log}_2 x}{\operatorname{Log} x} + O_A(\frac{1}{\operatorname{Log} x})$$

$$= \operatorname{Log}\pi_A(x) + \operatorname{Log}_2\pi_A(x) - \operatorname{Log}\gamma_A + \frac{\operatorname{Log}_2\pi_A(x)}{\operatorname{Log}\pi_A(x)} + O_A(\frac{1}{\operatorname{Log}\pi_A(x)})$$

ceci en tenant compte du fait que l'on a :

$$\operatorname{Log}_2 x(\operatorname{Log} x)^{-1} = \operatorname{Log}_2\pi_A(x)(\operatorname{Log}\pi_A(x))^{-1} + O_A(\frac{1}{\operatorname{Log}\pi_A(x)}) .$$

Exprimons maintenant $\theta_A(x)$ en fonction de $\pi_A(x)$

$$\theta_A(x) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in A}} \operatorname{Log} p = \int_{\bar{2}}^{x} \operatorname{Log} t \, d\pi_A(t) = \pi_A(x) \operatorname{Log} x - \int_{\bar{2}}^{x} \frac{\pi_A(t)}{t} dt$$

$$= \pi_A(x) \operatorname{Log} x - \gamma_A \, L_i(x) + \mathcal{O}_A\left(\int_2^x \frac{dt}{\operatorname{Log}^2 t}\right) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 2$$

$$= \pi_A(x) \operatorname{Log} x - \gamma_A \frac{x}{\operatorname{Log} x} + \mathcal{O}_A\left(\frac{x}{\operatorname{Log}^2 x}\right)$$

car $L_i(x) = \dfrac{x}{\operatorname{Log} x} + \mathcal{O}\left(\dfrac{x}{\operatorname{Log}^2 x}\right)$

et $\displaystyle\int_{\bar{2}}^{x} \frac{dt}{\operatorname{Log}^2 t} = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\operatorname{Log}^2 x}\right)$

aussi

$$\theta_A(x) = \pi_A(x) \operatorname{Log} x - \pi_A(x) + \mathcal{O}_A\left(\frac{x}{\operatorname{Log}^2 x}\right)$$

$$\theta_A(x) = \pi_A(x)\left(\operatorname{Log} \pi_A(x) + \operatorname{Log}_2 \pi_A(x) - \operatorname{Log} \gamma_A - 1 + \frac{\operatorname{Log}_2 \pi_A(x)}{\operatorname{Log} \pi_A(x)} + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\operatorname{Log} \pi_A(x)}\right)\right)$$

ceci d'après les expressions précédentes de $\operatorname{Log} x$ et $\operatorname{Log}_2 x$ en fonction de $\operatorname{Log} \pi_A(x)$.

Remarque 2.1.1.- Il apparaît clairement que l'on obtient une formule effective dès que l'égalité $\pi_A(x) = \gamma_A \dfrac{x}{\operatorname{Log} x}\left(1 + \mathcal{O}_A\left(\dfrac{1}{\operatorname{Log} x}\right)\right)$ l'est, c'est-à-dire si γ_A est connu et $\mathcal{O}_A$ effectif.

Dans le cas particulier $A = \mathcal{P}$ nous obtenons :

$$\theta(x) = \pi(x)\left(\operatorname{Log} x + \operatorname{Log}_2 x - 1 + \frac{\operatorname{Log}_2 x}{\operatorname{Log} x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right)\right).$$

Théorème 2.2. - Soit $A \subset \mathcal{P}$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers. Pour $n \geqslant 3$

$$\omega_A(n) \leqslant \frac{\mathrm{Log}\, n}{\mathrm{Log}_2 n} + (1 + \mathrm{Log}\, \gamma_A) \frac{\mathrm{Log}\, n}{(\mathrm{Log}_2 n)^2} + \mathcal{O}_A\left(\frac{\mathrm{Log}\, n}{(\mathrm{Log}_2 n)^3}\right) \quad \text{avec l'égalité}$$

pour une infinité d'entiers.

Démonstration :

On montre ce résultat par une méthode identique à celle utilisée au paragraphe 1. Tout d'abord

$$\omega_A(n_k) = \frac{\mathrm{Log}\, n_k}{\mathrm{Log}_2 n_k} + \frac{(1+\mathrm{Log}\, \gamma_A)\mathrm{Log}\, n_k}{(\mathrm{Log}_2\, n_k)^2} + \mathcal{O}_A((\mathrm{Log}\, n_k)(\mathrm{Log}_2\, n_k)^{-3})$$

$$\mathrm{Log}\, n_k = \theta_A(a_k) = \pi_A(a_k)(\mathrm{Log}\, \pi_A(a_k) + \mathrm{Log}_2\, \pi_A(a_k) - 1 - \mathrm{Log}\, \gamma_A + \leftarrow$$

$$\rightarrow + (\mathrm{Log}_2 \pi_A(a_k))(\mathrm{Log}\, \pi_A(a_k))^{-1} + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, \pi_A(a_k)}\right) \qquad \text{(par la proposition 2.1.)}$$

ainsi

$$\mathrm{Log}\, n_k = k\, \mathrm{Log}\, k(1+(\mathrm{Log}_2 k)(\mathrm{Log}\, k)^{-1} - \frac{1+\mathrm{Log}\, \gamma_A}{\mathrm{Log}\, k} + \frac{\mathrm{Log}_2\, k}{(\mathrm{Log}\, k)^2} + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}^2 k}\right)) \quad \text{(E.2.1.)}$$

pour $k \geqslant 3$.

Il en résulte

$$\mathrm{Log}_2\, n_k = \mathrm{Log}\, k + \mathrm{Log}_2 k + \mathrm{Log}(1 + \frac{\mathrm{Log}_2 k}{\mathrm{Log}\, k} + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, k}\right))$$

$$= \mathrm{Log}\, k + \mathrm{Log}_2 k + \frac{\mathrm{Log}_2 k}{\mathrm{Log}\, k} + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, k}\right) \quad .$$

En remplaçant $\mathrm{Log}\, k$ par cette expression en fonction de $\mathrm{Log}_2 n_k$ dans la formule (E.2.1.), nous obtenons :

$$\mathrm{Log}\, n_k = k(\mathrm{Log}_2 n_k - 1 - \mathrm{Log}\, \gamma_A + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, k}\right)) \qquad \text{pour } k \geqslant 3$$

$$\mathrm{Log}\, n_k = k(\mathrm{Log}_2 n_k - 1 - \mathrm{Log}\, \gamma_A + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}_2 n_k}\right))$$

soit

$$k = \frac{\text{Log } n_k}{\text{Log}_2 n_k (1 - \frac{1-\text{Log }_A}{\text{Log}_2\ n_k} + O_A(\frac{1}{\text{Log}^2\ n_k}))}$$

$$\omega_A(n_k) = k = \frac{\text{Log } n_k}{\text{Log}_2 n_k} (1 + \frac{1 + \text{Log } \gamma_A}{\text{Log}^2\ n_k} + O_A(\frac{1}{\text{Log}^2\ n_k})) \quad \text{quand} \quad k \geqslant 3.$$

Ceci prouve que l'égalité est réalisée au moins pour une infinité de n.

Soit $n \geqslant 3$ tel que $\omega_A(n) = k$.

Pour $\varepsilon > 0$, posons $f_\varepsilon(n) = \frac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n} + (1+\text{Log } \gamma_A) \frac{\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^2} + \varepsilon \frac{\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^3}$.

Cette fonction est croissante lorsque n tend vers $+\infty$.

Par ce qui précède il existe $c_{22}(A)$ tel que $\omega_A(n_k) \leqslant f_{c_{22}(A)}(n_k)$,

et $f_{c_{22}(A)}$ est croissante pour $k > c_{23}(A)$

$\omega_A(n) = \omega_A(n_k) \leqslant f_{c_{22}(A)}(n_k) \leqslant f_{c_{22}(A)}(n)$ (i.e. $f_{c_2(A)}$ est croissante)

car $n_k \leqslant n$ nécessairement puisque n_k est le plus petit entier m tel que $\omega_A(n) = k$.

Si maintenant $2 \leqslant k \leqslant c_{23}(A)$

alors on peut toujours trouver une constante $c_{24}(A)$ telle que

$$\omega_A(n) = k \leqslant c_{23}(A) \leqslant f_{c_{24}(A)}(n).$$

Posons $c(A) = \text{Sup}(c_{22}(A), c_{24}(A))$, nous avons $\omega_A(n) \leqslant f_{c(A)}(n)$ pour tout $n \geqslant 3$. Ceci montre le théorème.

Cas particulier $A = \mathcal{P}$.

Dans ce cas, nous obtenons $\omega(n) \leqslant \dfrac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n} + \dfrac{\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^2} + O\left(\dfrac{\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^3}\right)$

ce qui apporte un raffinement de la formule (e.2.1.) démontrée dans la 1ère partie.

Il est bien évident que, $\omega_A(p)$ pouvant prendre la valeur 1 pour un nombre fini ou infini de $p \in \mathcal{P}$; on ne peut trouver de formule asymptotique donnant une minoration de $\omega_A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Cependant, si $\pi_A(x) \geqslant x^\delta$ pour x assez grand et $\delta > 0$ alors nous avons le résultat suivant : (on a dans ce cas $\delta < 1$ puisque $x^\delta \leqslant \dfrac{x}{\text{Log } x}(1+O(1))$).

Proposition 2.3.- Soit $A \subset \mathcal{P}$. On suppose que pour $x \geqslant x_o$ $\pi_A(x) \geqslant x^\delta$ où x_o et δ sont strictement positifs.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \frac{\omega_A(n)\text{Log}_2 n}{\text{Log } n} \geqslant \delta .$$

Démonstration :

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \dfrac{\omega_A(n)\text{Log}_2 n}{\text{Log } n} \geqslant \lim\limits_{k\to+\infty} \sup \dfrac{\omega_A(n_k)\text{Log}_2 n_k}{\text{Log } n_k}$.

$$\text{Log } n_k = \theta_A(a_k) = \sum_{\substack{p \leqslant a_k \\ p \in A}} \text{Log } p \geqslant \pi_A(a_k) \geqslant a_k^\delta$$

ainsi $\text{Log}_2 n_k \geqslant \delta \text{ Log } a_k$

aussi $\dfrac{\omega_A(n_k)\text{Log}_2 n_k}{\text{Log } n_k} \geqslant \delta \dfrac{\omega_A(n_k)}{\text{Log } n_k} \text{Log } a_k$

$\text{Log } n_k = \theta_A(a_k) \leqslant \pi_A(a_k)\text{Log } a_k = \omega_A(n_k)\text{Log } a_k$. Par suite :

$$\omega_A(n_k)(\text{Log}_2 n_k)(\text{Log } n_k)^{-1} \geqslant \delta$$

aussi $$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\omega_A(n)\text{Log}_2 n}{\text{Log } n} \geqslant \delta.$$

On peut maintenant se demander comment se comporte l'ensemble des entiers dont la valeur de $\omega_A(n)$ s'écarte peu de $\frac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n} + \frac{(1+\text{Log } \gamma_A)\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^2} + O\left(\frac{\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^3}\right)$ c'est ce que nous faisons dans le paragraphe suivant pour $\omega_A(n) > y$ avec $y \leqslant \frac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n} + \frac{(1+\text{Log } \gamma_A - \varepsilon)\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^2}$ $\varepsilon > 0$.

§ 3 - *Etude de* $s_A(x,y)$.

3.1.- *Définitions*.- Soit $A \subset \mathcal{P}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\Omega_A(n) = \sum\limits_{\substack{p^\alpha || n \\ p\in A}} \alpha$ où l'on note $p^\alpha || n$ pour exprimer que $p^\alpha | n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.

2) Nous poserons successivement :

. $s_A(x,y) = \text{card}\{n \in \mathbb{N}^*, n \leqslant x \text{ et } \omega_A(n) > y\}$

c'est le nombre d'entiers inférieurs à x, composés d'au moins $[y] + 1$ nombres premiers de A.

. $S_A(x,y) = \text{card}\{n \in \mathbb{N}^*, n \leqslant x \text{ et } \Omega_A(n) > y\}$.

Il s'agira de donner une minoration et une majoration de $s_A(x,y)$ et $S_A(x,y)$ lorsque A vérifie la propriété généralisée des nombres premiers.

Enfin, les propriétés seront établies par commodité en fonction de t (où t sera une approximation de $A(x)$ plutôt qu'en fonction de $A(x)$ lui-même.

3.2.- Théorème.- Soit $A \subset \mathcal{P}$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers. Soit $Y > c_{32}(A)$,

$$Y \leqslant \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}_2 x} + (1 + \operatorname{Log} \gamma_A - \varepsilon) \frac{\operatorname{Log} x}{(\operatorname{Log}_2 x)^2} \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0.$$

nous avons quand x tend vers $+\infty$

$$s_A(x,Y) \geqslant x \exp(-Y(\operatorname{Log} Y + \operatorname{Log}_2 Y - 1 - \operatorname{Log} \gamma_A) + \mathcal{O}_A(\frac{Y \operatorname{Log}_2 Y}{\operatorname{Log} Y}))$$

Démonstration :

Nous allons utiliser la méthode d'Erdös et Nicolas généralisée aux sous-ensembles de $\mathcal{P}$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Choisissons $k = [Y] + 1$, il y a exactement $\left[\frac{x}{n_k}\right]$ multiples de n_k inférieurs à x.

Pour les multiples m de n_k , on a $\omega_A(m) \geqslant \omega_A(n_k) \geqslant [Y] + 1 > Y$

Aussi $s_A(x,Y) \geqslant \left[\frac{x}{n_k}\right]$ (E.3.1.).

Il suffit ainsi de trouver une estimation de $\left[\frac{x}{n_k}\right]$.

Pour cela on utilise de nouveau la proposition 2.1.

$$\operatorname{Log} n_k = \theta_A(a_k) = k(\operatorname{Log} k + \operatorname{Log}_2 k - 1 - \operatorname{Log} \gamma_A + \mathcal{O}_A(\frac{\operatorname{Log}_2 k}{\operatorname{Log} k}))$$

On introduit la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par

$g(t) = t(\text{Log } t + \text{Log}_2 t - 1 - \text{Log } \gamma_A)$

$g'(t) = \text{Log } t + \text{Log}_2 t - \text{Log } \gamma_A + \dfrac{1}{\text{Log } t} \geqslant 0$ pour $t \geqslant e$ et g croît.

Par la formule de Taylor : :

$$g(k) = g(Y) + (k-Y)g'(Y) + (k-Y)^2 g''(Y) + \dots \quad \text{pour} \quad > c_{31}(A) > 1$$

$$= g(Y) + O(\text{Log } Y) \quad \text{puisque} \quad Y-k = \{Y\} - 1 = O(1).$$

De ce fait, pour $Y > 1$,

$$\text{Log } n_k = g(k) + k\, O_A\left(\frac{\text{Log}_2 k}{\text{Log } k}\right) = g(Y) + O_A\left(Y \frac{\text{Log}_2 Y}{\text{Log } Y}\right) \qquad (\text{E.3.1.}).$$

Par hypothèse, on a $Y \leqslant \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log}_2 x} + (1 + \text{Log } \gamma_A - \varepsilon) \dfrac{\text{Log } x}{(\text{Log}_2 x)^2}$

n_k dépend de Y. Les conditions imposées à Y entraînent peut être que n_k soit plus grand que x. Nous aurions alors $\left[\dfrac{x}{n_k}\right] = 0$.

Dans ces conditions, nous ne pourrions en déduire aucune minoration de $s_A(x,Y)$. Nous montrons dans ce qui suit que cela ne se produit pas .

Pour cela, on pose dans un but de simplification

$$L_n = \text{Log}_n x \qquad \beta = (1 + \text{Log } \gamma_A - \varepsilon)$$

$$T = \frac{L_1}{L_2} + \beta \frac{L_1}{(L_2)^2} = O_\beta\left(\frac{L_1}{L_2}\right) .$$

Par hypothèse $c_{31}(A) < Y \leqslant T$.

$$\text{Log } T = \text{Log}\left(\frac{L_1}{L_2}\left(1 + \frac{\beta}{L_2}\right)\right) = L_2 - L_3 + \text{Log}\left(1 + \frac{\beta}{L_2}\right) \qquad (\text{E.3.2.})$$

aussi $\text{Log } T \leqslant L_2 - L_3 + \dfrac{\beta}{L_2} \leqslant L_2 - L_3 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geqslant x_2(A) > 0$

nous en déduisons

$$\text{Log}_2 T \leqslant \text{Log } L_2 + \text{Log}\left(\frac{1 - 2L_3 - \varepsilon}{2L_2}\right) \leqslant \text{Log } L_2 = L_3 \quad (\text{E.3.3.}) \text{ où l'on a}$$

$x \geqslant x_3(A) > \text{Sup}(x_2(A), \exp \exp 1)$.

Il en résulte

$$\frac{Y\ \mathrm{Log}_2 Y}{\mathrm{Log}\ Y} \leqslant \frac{T\ \mathrm{Log}_2 T}{\mathrm{Log}\ T} = O_A\left(\frac{L_1 L_3}{(L_2)^2}\right) \quad \text{pour} \quad T \geqslant Y \geqslant c_{31}(A) \quad \text{où} \quad c_{31}(A) \quad \text{est}$$

supposé suffisamment grand, soit encore pour $x \geqslant x_4(A) \geqslant x_3(A)$.

$$\mathrm{Log}\ n_k = g(Y) + O_A(Y\ \mathrm{Log}_2\ Y(\mathrm{Log}\ Y)^{-1}) \leqslant g(T) + O_A\left(\frac{L_1 L_3}{(L_2)^2}\right) \quad \text{pour}$$

$T \geqslant Y \geqslant c_{31}(A) \geqslant e$ car g est alors croissante.

$$\mathrm{Log}\ n_k \leqslant T(\mathrm{Log}\ T + \mathrm{Log}_2\ T - 1 - \mathrm{Log}\ \gamma_A) + O_A\left(\frac{L_1 L_3}{(L_2)^2}\right)$$

$$\leqslant T(L_2 + \frac{\varepsilon}{2} - 1 - \mathrm{Log}\ \gamma_A) + O_A\left(\frac{L_1 L_3}{(L_2)^2}\right), \quad \text{d'après (E.3.2.) et (E.3.3.).}$$

En remplaçant T par sa valeur

$$\mathrm{Log}\ n_k \leqslant \left(\frac{L_1}{L_2} + \beta \frac{L_1}{(L_2)^2}\right)\left(L_2 + \frac{\varepsilon}{2} - (\beta+\varepsilon)\right) + O_A\left(\frac{L_1 L_3}{(L_2)^2}\right)$$

$$\leqslant L_1\left(1 - \frac{\varepsilon}{2L_2} - \frac{\beta}{L_2} - \frac{\beta(\beta+\varepsilon)}{(L_2)^2} + \frac{\varepsilon\beta}{2(L_2)^2} + O_A\left(\frac{L_3}{(L_2)^2}\right)\right)$$

aussi pour $x \geqslant x_5(A) \geqslant x_4(A)$, $\mathrm{Log}\ n_k \leqslant L_1$ et $n_k \leqslant x$, ainsi $\left[\frac{x}{n_k}\right] \neq 0$.

On a finalement $s_A(x,Y) \geqslant \left[\frac{x}{2n_k}\right]$ (car $[t] \geqslant \frac{t}{2}$ pour $t \geqslant 1$)

$$\geqslant x \exp\left(-\mathrm{Log}\ 2 - g(Y) + O_A\left(Y \frac{\mathrm{Log}_2 Y}{\mathrm{Log}\ Y}\right)\right)$$

$$\geqslant x \exp\left(-g(Y) + O_A\left(Y \frac{\mathrm{Log}_2 Y}{\mathrm{Log}\ Y}\right)\right)$$

soit encore $s_A(x,Y) \geqslant x \exp\left(-Y(\mathrm{Log}\ Y + \mathrm{Log}_2 Y - 1 - \mathrm{Log}\ \gamma_A) + O_A\left(Y \frac{\mathrm{Log}_2 Y}{\mathrm{Log}\ Y}\right)\right)$.

Si l'on se donne des hypothèses moins fortes sur A , nous obtenons un résultat moins bon mais de la même forme :

3.3.- *Proposition.*- On suppose que l'on peut trouver $\delta > 0$ et $x_o \geqslant 2$ tels que $\pi_A(x) \geqslant x^\delta$ pour tout $x \geqslant x_o$, où $A \subset \mathcal{P}$.

Si $x \geqslant c_{32}$ et $1 \leqslant y \leqslant \delta \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log}_2 x}$ alors

$s_A(x,y) \geqslant \frac{x}{2} \exp(- \frac{1}{\delta} (y \text{ Log } y + \text{Log } y + 2))$.

Démonstration :

On utilise la même méthode et les mêmes notations que précédemment.

$\text{Log } n_k = \theta(a_k) \leqslant k \text{ Log } a_k \leqslant \dfrac{k \text{ Log } k}{\delta}$ car $k = \pi_A(a_k) \geqslant a_k^\delta$

de ce fait :

$$\text{Log } n_k \leqslant \frac{(y+1)\text{Log}(y+1)}{\delta} \leqslant \frac{(y+1)(\text{Log } y + \frac{1}{y})}{\delta} < \frac{y \text{ Log } y + \text{Log } y + 2}{\delta}$$

Montrons que $x \geqslant n_k$ pour x assez grand.

$\text{Log } y \leqslant \text{Log}_2 x - \text{Log}_3 x$ et ainsi $\text{Log } n_k \leqslant \text{Log } x(1 - \dfrac{\text{Log}_3 x}{\text{Log}_2 x} + \dfrac{\text{Log}_2 x - \text{Log}_3 x + 2}{\text{Log } x})$.

Pour $x \geqslant c_{32}$ $\dfrac{\text{Log}_3 x}{\text{Log}_2 x} - \dfrac{1}{\text{Log } x} (\text{Log}_2 x - \text{Log}_3 x + 2) > 0$

aussi

$\text{Log } n_k < \text{Log } x$

Il en résulte que la condition $y \leqslant \delta \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log}_2 x}$ entraîne que $\dfrac{x}{n_k} \geqslant 1$ pour x suffisamment grand.

c_{32} est évidemment calculable.

$s_A(x,y) \geqslant \frac{x}{2} \exp(- \dfrac{(y \text{ Log } y + \text{Log } y + 2)}{\delta}$ pour $x \geqslant c_{32}$

Remarque : On a utilisé la minoration $[x] \geqslant \frac{x}{2}$ valable pour $x \geqslant 1$. On peut toujours raffiner ceci :

si on pose

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\,(\mathrm{Log}\,x\,\mathrm{Log}_3 x(\mathrm{Log}_2 x)^{-1} - \mathrm{Log}\,x\,\mathrm{Log}\,\delta(\mathrm{Log}_2 x)^{-1} - \frac{1}{\delta}\,(\mathrm{Log}_2 x - \mathrm{Log}_3 x + 2 + \mathrm{Log}\,\delta))$$

$\mathrm{Log}\,n_k \leqslant \mathrm{Log}\,x - f_\delta(x)$ aussi $n_k \leqslant x\,e^{-f_\delta(x)}$ et

$\left[\frac{x}{n_k}\right] \geqslant \frac{x}{n_k}\,(1 - \frac{n_k}{x}) \geqslant \frac{x}{n_k}\,(1 - e^{-f_\delta(x)})$. Par suite, on remarque que pour $x \geqslant c_{32}$ suffisamment grand, la contribution du terme $e^{-f_\delta(x)}$ est faible et la minoration est beaucoup plus fine que celle $\left[\frac{x}{n_k}\right] \geqslant \frac{x}{2n_k}$.

Nous avons obtenu des minorations de $s_A(x,Y)$ à partir de résultats simples sur ω_A. Il n'en sera pas de même pour $S_A(x,Y)$.

Avant de donner des majorations pour $s_A(x,Y)$ nous allons tout d'abord énoncer et démontrer un lemme dont l'usage sera fréquent dans la suite :

3.4.- *Lemme*.- Pour $x \geqslant 1$ et $Z \geqslant 1$ éléments de $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\sum_{n\leqslant x} Z^{\omega_A(n)} \leqslant x \prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\in A}} (1 + \frac{Z-1}{p}) .$$

Démonstration : Celle-ci est très simple et basée sur la formule d'inversion de Möbius.

Pour cela, on pose $f_Z(n) = Z^{\omega_A(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \geqslant 1$ $f_Z(1) = 1$. Soit $k_Z = Z^{\omega_A} * \mu$.

Aussi

$$\sum_{n\leqslant x} Z^{\omega_A(n)} = \sum_{n\leqslant x} f_Z(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} k_Z(d) = \sum_{\ell\leqslant x}\sum_{d\leqslant\frac{x}{\ell}} k_Z(d) = \sum_{d\leqslant x} k_Z(d) \sum_{k\leqslant\frac{x}{d}} 1$$

$$\sum_{n\leq x} Z^{\omega_A(n)} = \sum_{d\leq x} k_Z(d) \left[\frac{x}{d}\right] .$$

k_Z est une fonction multiplicative car c'est la convolution de deux fonctions multiplicatives.

Soit $p \in \mathcal{P}$ et $r \geq 1$ un entier

$$k_Z(p^r) = \mu(1)f_Z(p^r) + \mu(p)f_Z(p^{r-1}) = \begin{cases} Z-1 \geq 0 & \text{si } p \in A \text{ et } r = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par suite $k_Z(m) \geq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

et $$\sum_{n\leq x} Z^{\omega_A(n)} \leq x \sum_{d\leq x} \frac{k_Z(d)}{d} \leq x \prod_{\substack{p\leq x \\ p\in A}} \left(1 + \frac{k_Z(p)}{p}\right)$$

$$\leq x \prod_{\substack{p\leq x \\ p\in A}} \left(1 + \frac{Z-1}{p}\right) .$$

3.4.1.- <u>Remarque</u> :

La démonstration précédente fait appel à des résultats très simples. Il n'en est pas de même lorsqu'on considère une fonction f quelconque, l'estimation de la somme étant donnée par le théorème suivant dû à Halàsz pour f vérifiant certaines conditions spécifiques :

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction complètement multiplicative à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose $\theta_p = \arg f(p)$ et on suppose qu'il existe deux réels $\gamma > 0$ et θ_o tels que pour tout p on ait :
$\gamma \leq |f(p)| \leq 2 - \gamma$ et $|e^{i\theta_p} - e^{i\theta_o}| \geq \gamma$, alors pour $x \geq 1$

$$\left|\sum_{n\leq x} f(n)\right| \leq c_{33}(\gamma)x \exp\left(\sum_{p\leq x} \frac{|f(p)|-1}{p} - c_{34}(\gamma) \sum_{p\leq x} \frac{|f(p)|-\mathrm{Re}(f(p))}{p}\right).$$

La démonstration de ce théorème s'avère assez longue et ne fait pas entièrement appel à des techniques élémentaires. Celle-ci figure dans [Hal].

Proposition 3.5.- Soient $x \geq 1$ et $w \geq -2$ des réels. On rappelle que $A(x) = \sum\limits_{\substack{p\leq x\\ p\in A}} \frac{1}{p}$ pour tout $A \subset \mathcal{P}$.

Nous avons

1) $\prod\limits_{\substack{p\leq x\\ p\in A}} (1 + \frac{w}{p}) \leq e^{wA(x)}$

2) Si $1 \leq w \leq x$ $\prod\limits_{\substack{p\leq x\\ p\in A}} (1 + \frac{w}{p}) = \exp(w(A(x)-A(w)) + \mathcal{O}(\frac{w}{\operatorname{Log} 2w}))$.

Démonstration :

La première partie est immédiate : $0 \leq 1 + \frac{w}{p} \leq \exp \frac{w}{p}$ car $w \geq -2$ et $p \geq 2$ aussi $\prod\limits_{\substack{p\leq x\\ p\in A}} (1 + \frac{w}{p}) \leq \exp(\sum\limits_{\substack{p\leq x\\ p\in A}} \frac{w}{p}) = \exp wA(x)$.

On pose dans ce qui suit $f(w,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = x \\ \prod\limits_{\substack{w<p\leq x\\ p\in A}} \exp(\frac{w}{p}) & \text{si } w < x. \end{cases}$

Il apparaît que $f(w,x) = \exp(w(A(x) - A(w))$.

Nous noterons $\prod'_x$ plutôt que $\prod\limits_{\substack{p\leq x\\ p\in A}}$ et de même pour le symbole Σ

$$\prod{}'_x (1 + \frac{w}{p}) \leq \prod{}'_w (1 + \frac{w}{p}) f(w,x) \leq \prod{}'_w \frac{2w}{p} f(w,x)$$

$$\leq \exp(w(A(x) - A(w)) + \sum{}'_w (\operatorname{Log} 2w - \operatorname{Log} p))$$

$$\leqslant \exp(w(A(x) - A(w)) + \text{Log } 2w\ \pi_A(w) - \theta_A(w))$$

$$\theta_A(w) = \int_{2^-}^{w} \text{Log } t\ d\pi_A(t) = \pi_A(w)\text{Log } 2w - \int_{2^-}^{w} \frac{\pi_A(t)dt}{t} \quad ;$$

or $\pi_A(w) \leqslant \pi(w) = \mathcal{O}(\frac{w}{\text{Log } w}) = \mathcal{O}(\frac{w}{\text{Log } 2w})$ lorsque $w \to +\infty$.

D'autre part $\int_{2^-}^{w} \frac{\pi_A(t)}{t}dt = \mathcal{O}(\frac{w}{\text{Log } 2w})$.

Par suite

$$\pi_A(w)\text{Log } 2w - \theta_A(w) = \mathcal{O}(\frac{w}{\text{Log } 2w}) \quad \text{quand} \quad w \to +\infty$$

$$\prod_x{}' (1 + \frac{w}{p}) \leqslant \exp(w(A(x) - A(w)) + \mathcal{O}(\frac{w}{\text{Log } 2w})) \qquad \text{(E.3.2.)}$$

Minorons maintenant $\prod_x{}' (1 + \frac{w}{p})$

$$\prod_x{}' (1 + \frac{w}{p}) \geqslant \prod_{\substack{w<p\leqslant x \\ p\in A}} \exp(\text{Log}(1 + \frac{w}{p}) = \prod_{\substack{w<p\leqslant x \\ p\in A}} \exp(\frac{w}{p} + \mathcal{O}(\frac{w^2}{p^2})) \quad \text{pour} \quad w < x$$

$$\geqslant \exp(w(A(x) - A(w)) + \mathcal{O}(w^2 \sum_{p>w} \frac{1}{p^2}))$$

$$\sum_{p>w} \frac{1}{p^2} \leqslant \int_{w}^{+\infty} \frac{d\pi(t)}{t^2} = -\frac{\pi(w)}{w^2} + 2\int_{w}^{+\infty} \frac{\pi(t)}{t^3} dt \leqslant 2\int_{w}^{+\infty} \frac{\pi(t)}{t^3} dt .$$

Mais $\int_{w}^{+\infty} \frac{\pi(t)}{t^3} dt = \mathcal{O}(\int_{w}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \text{ Log } 2t})$ car $w \geqslant 1 > \frac{1}{2}$.

$$\int_{w}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \text{ Log } 2t} \leqslant \frac{1}{\text{Log } 2w} \int_{w}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{w \text{ Log } 2w}$$

nous en déduisons que

$$\sum_{p>w} \frac{1}{p^2} = O\left(\frac{1}{w \operatorname{Log} 2w}\right) \quad \text{et}$$

$$\prod_x{}' \left(1 + \frac{w}{p}\right) \geqslant \exp(w(A(x) - A(w)) + O\left(\frac{w}{\operatorname{Log} 2w}\right)) \quad \text{pour} \quad w < x.$$

Si maintenant $w = x$, le résultat persiste puisque dans ce cas le terme $A(x) - A(w)$ est nul.

Finalement, nous avons

$$\prod_x{}' \left(1 + \frac{w}{p}\right) = \exp(w(A(x) - A(w)) + O\left(\frac{w}{\operatorname{Log} 2w}\right)) .$$

Remarque 3.5.1. : explication des constantes.

Les constantes précédentes deviennent calculables si l'on suppose que pour $x \geqslant a_1 \geqslant 2$ l'expression de π_A est effective : c'est-à-dire si l'on peut trouver deux constantes b et B telles que $\gamma_A \frac{x}{\operatorname{Log} x}\left(1 + \frac{b}{\operatorname{Log} x}\right) \leqslant \pi_A(x) \leqslant \gamma_A \frac{x}{\operatorname{Log} x}\left(1 + \frac{B}{\operatorname{Log} x}\right)$ où γ_A est bien entendu supposé connu.

Remarquons que pour $x \geqslant a_1$, nous avons

$$\frac{1}{\operatorname{Log} 2x} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} x} \leqslant \frac{\operatorname{Log} 2a_1}{\operatorname{Log} a_1 \operatorname{Log} 2x} .$$

Pour $w \geqslant 2$,

$$\theta_A(w) = \pi_A(w) \operatorname{Log} 2w - \int_{2^-}^{w} \frac{\pi_A(t)}{t}\, dt$$

...

$$\int_{2^-}^{w} \frac{\pi_A(t)}{t}\,dt \geqslant \int_{2^-}^{a_1} \frac{\pi_A(t)}{t} + \gamma_A(L_i(w)-L_i(a_1)) + \gamma_A b\int_{a_1}^{w} \frac{dt}{\mathrm{Log}^2 t} .$$

Or $\gamma_A b\int_{a_1}^{w} \frac{dt}{\mathrm{Log}^2 t} = \left(\frac{a_1}{\mathrm{Log}\ a_1} - \frac{w}{\mathrm{Log}\ w}\right)\gamma_A b + \gamma_A b(L_i(w) - L_i(a_1))$

de cette façon

$$\theta_A(w) \leqslant \gamma_A \frac{w}{\mathrm{Log}\ w}\left(1 + \frac{B}{\mathrm{Log}\ 2}\right) - \int_{2^-}^{a_1} \frac{\pi_A(t)}{t}\,dt - \gamma_A(1-b)(L_i(w) - L_i(a_1)$$

$$- \gamma_A b\left(\frac{a_1}{\mathrm{Log}\ a_1} - \frac{w}{\mathrm{Log}\ w}\right).$$

3.6.- *Corollaire*.- Soit $x \geqslant 1$, $Z \geqslant 1$ des réels.

$A \subset P$ alors

1) $\sum_{n \leqslant x} Z^{\omega_A(n)} \leqslant x \exp((Z-1)A(x))$

2) Si $1 \leqslant Z \leqslant x$, $\sum_{n \leqslant x} Z^{\omega_A(n)} \leqslant x \exp((Z-1)(A(x)-A(Z))+c_{33} \frac{Z}{\mathrm{Log}\ 2Z})$.

Démonstration :

Nous allons utiliser les 2 lemmes précédents :

1) $\sum_{n \leqslant x} Z^{\omega_A(n)} \leqslant x \prod'_x \left(1 + \frac{Z-1}{p}\right)$ (Lemme 3.4.)

$\leqslant x \exp((Z-1)A(x))$ (Lemme 3.5.) puisque $Z \geqslant 1$.

2)

• Si $2 \leqslant Z \leqslant x$, on utilise le 2°) du lemme 3.5. pour obtenir une meilleure majoration $x \prod'_x \left(1 + \frac{Z-1}{p}\right) \leqslant x \exp((Z-1)(A(x)-A(Z-1)) + O\left(\frac{Z - 1}{\mathrm{Log}\ 2(Z-1)}\right))$

car $Z-1 \geqslant 1$.

Comme $(Z-1)(A(Z) - A(Z-1)) \leqslant \dfrac{Z-1}{[Z]} = 1 + O(\dfrac{1}{Z})$

$$x\Pi'(1 + \frac{Z-1}{p}) \leqslant x \exp((Z-1)(A(x) - A(Z)) + c_{33} \frac{Z}{\text{Log } 2Z}) .$$

• Si $1 \leqslant Z < 2$, $A(Z) = 0$ et par le 1°) on a immédiatement le résultat.

De même, si la formule donnant π_A est effective c_{33} est calculable.

Des résultats précédents, nous en déduisons le théorème suivant :

3.7.- *Théorème* : Soit $x \geqslant 1$ et $y > 0$, $\alpha \in [1,x]$.

On définit $\mu_A(x,y)$ par $\mu_A(x,y) = \text{Sup}\{2, |A(x)-y|\}$ que nous noterons plus simplement μ. On a alors

$$s_A(x,\alpha y) \leqslant x \exp((\alpha - 1 - \alpha \text{ Log } \alpha)y - \alpha A(\alpha) + c_{34}\alpha\mu_A(x,y)).$$

Démonstration :

Soit $Z \in [1,x]$, nous avons : $\displaystyle\sum_{n\leqslant x} Z^{\omega_A(n)} \geqslant \sum_{\substack{\omega_A(n)>\alpha y \\ n\leqslant x}} Z^{\omega_A(n)}$

$$\geqslant \sum_{\substack{n\leqslant x \\ \omega_A(n)>\alpha y}} Z^{\alpha y} = Z^{\alpha y} s_A(x,\alpha y).$$

Par le corollaire 3.6.

$$\sum_{n\leqslant x} Z^{\omega_A(n)} \leqslant x \exp((Z-1)(A(x)-A(Z)) + c_{33} \frac{Z}{\text{Log } 2Z})$$

aussi

$$s_A(x,\alpha y) \leqslant x \exp((Z-1)(A(x)-A(Z)) - \alpha y \text{ Log } Z + c_{33} \frac{Z}{\text{Log } 2Z}) \qquad \text{(E.3.4.)}.$$

Remarquons que $A(Z) \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant Z \\ p\in A}} \frac{1}{p} \leqslant \pi_A(Z) = O_A(\frac{Z}{\text{Log } 2Z})$

et que $A(x) \leqslant |A(x) - y| + y$ aussi $A(x) \leqslant y + \mu$.

En remplaçant dans (E.3.4.) nous obtenons

$$s_A(x,\alpha y) \leqslant x \exp((Z-1)(y+\mu) - Z\ A(Z) - \alpha y \text{ Log } Z + c'_{33} \frac{Z}{\text{Log } 2Z})$$

ceci pour $1 \leqslant Z \leqslant x$, $1 \leqslant \alpha \leqslant x$.

En particulier, si on choisit $Z = \alpha$, on obtient

$$s_A(x,\alpha y) \leqslant x \exp((\alpha - 1 - \alpha \text{ Log } \alpha)y - \alpha\ A(\alpha) + \alpha\mu + c'_{33} \frac{\alpha}{\text{Log } 2\alpha}))$$

$$\leqslant x \exp((\alpha - 1 - \alpha \text{ Log } \alpha)y - \alpha\ A(\alpha) + c_{34}\alpha\mu)$$

où $c_{34} \geqslant 1 + \frac{c'_{33}}{2}$ car $\mu \geqslant 2$.

Nous utiliserons ce résultat afin de trouver une minoration de $s_A(x,Y)$ où $y \geqslant \gamma_A \text{ Log}_2 x$.

<u>*Remarque*</u> *3.7.1.* : Si la formule $\pi_A(x) = \gamma_A \frac{x}{\text{Log } x} (1 + O(\frac{1}{\text{Log } x}))$ est explicite, alors c_{34} est calculable puisque dans ce cas, on peut déterminer la constante c_{33} intervenant dans le corollaire 3.6.

On choisit $Z = \alpha$ dans la démonstration afin de simplifier et surtout parce que ce choix réalise le minimum de l'expression $(Z-1)Y - \alpha Y \text{ Log } Z$ ceci étant justifié par le fait que dans la pratique t est souvent une bonne approximation de $A(x)$, aussi μ est minime par rapport à $A(x)$. Par exemple $t = \text{Log}_2 x$ si $A = \mathcal{P}$.

Enfin, il est à noter que le précédent théorème est valable pour les ensembles A quelconques ne vérifiant pas forcément la propriété généralisée des nombres premiers.

3.8.- *Proposition* : Soit $A \subset \mathcal{P}$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers. Pour $x \geqslant a_1$

il existe un réel B_A tel que

$A(x) = \gamma_A \operatorname{Log}_2 x + B_A + \mathcal{O}_A(\frac{1}{\operatorname{Log} x})$. En particulier, $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$.

Cette proposition généralise le résultat connu dans le cas des nombres premiers. Nous utiliserons celle-ci afin de préciser le terme $\alpha A(\alpha)$ intervenant dans le théorème 3.7.

Démonstration :

$$A(x) = \sum_{\substack{p \in A \\ p \leqslant x}} \frac{1}{p} = \int_{a_1}^{x} \frac{d(\pi_A(t))}{t} = \frac{\pi_A(x)}{x} + \int_{a_1}^{x} \frac{\pi_A(t)}{t^2}\,dt = \int_{a_1}^{x} \frac{\pi_A(t)}{t^2}\,dt + \mathcal{O}_A(\frac{1}{\operatorname{Log} x})$$

Comme A vérifie la propriété généralisée des nombres premiers :

$$\int_{a_1}^{x} \frac{\pi_A(t)}{t^2}\,dt = \int_{a_1}^{x} \frac{\gamma_A}{t \operatorname{Log} t}\,(1 + \mathcal{O}_A(\frac{1}{\operatorname{Log} t}))dt$$

$$= \gamma_A \operatorname{Log}_2 x - \gamma_A \operatorname{Log}_2 Z + \int_{a_1}^{x} \mathcal{O}_A(\frac{1}{t \operatorname{Log}^2 t})dt .$$

Or $\displaystyle\int_{a_1}^{x} |\mathcal{O}_A(\frac{1}{t \operatorname{Log}^2 t})|dt \leqslant \int_{a_1}^{+\infty} |\mathcal{O}_A(\frac{1}{t \operatorname{Log}^2 t})|dt$

cette intégrale étant convergente puisque $x > 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_{a_1}^{x} \mathcal{O}_A(\frac{1}{t \operatorname{Log}^2 t})dt = \delta_A + \mathcal{O}_A(\frac{1}{\operatorname{Log} x})$,

δ_A étant une constante dépendant au plus de A.

Il en résulte pour finir :

$$A(x) = \gamma_A \mathrm{Log}_2 x + B_A + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\ x}\right) \quad \text{où} \quad B_A = \delta_A - \mathrm{Log}_2 Z.$$

Remarque : Si la formule $\pi_A(x) = \gamma_A \dfrac{x}{\mathrm{Log}\ x}\left(1 + \mathcal{O}_A\left(\dfrac{1}{\mathrm{Log}\ x}\right)\right)$ est explicite, alors nous pouvons calculer les constantes intervenant dans la formule de $A(x)$ et ainsi B_A est calculable.

Par exemple pour $A = \mathcal{P}$, $B_A = B_1 = \gamma + \sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \left(\mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)$;

γ étant la constante d'Euler (voir [H-W] p. 399).

En utilisant le théorème et le lemme précédents, nous obtenons :

3.9.- *Théorème*.- Soit $A \subset \mathcal{P}$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers.

Soit $x \geqslant a_1$ et $\alpha \geqslant a_1$

alors $s_A(x, \alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x \exp((\alpha - 1 - \alpha \mathrm{Log}\ \alpha)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x - \alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 \alpha + c_{35}(A)\alpha)$.

Nous voyons que par le lemme précédent $s_A(x, \alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x)$ est approximativement le nombre d'entiers $n \leqslant x$ tels que $\omega_A(n) > \alpha A(x)$.

Démonstration :

- On suppose dans un premier temps que $\alpha \leqslant x$.

Appliquons le théorème 3.7.

$$s_A(x, \alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x \exp((\alpha - 1 - \alpha\mathrm{Log}\alpha)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x - \alpha A(\alpha) + c_{34}\mu\alpha)$$

où $\mu = \mu_A(x, \gamma_A \mathrm{Log}_2 x) = \mathrm{Sup}(2, |A(x) - \gamma_A \mathrm{Log}_2 x|) = \mathrm{Sup}\left(2, \left|B_A + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\ x}\right)\right|\right) = \mathcal{O}(1)$ par la proposition 3.8.

On a aussi $\alpha A(\alpha) = \alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 \alpha + \alpha\left(B_A + \mathcal{O}_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\ \alpha}\right)\right)$ puisque $\alpha \geqslant 2$.

Par suite, on peut trouver $c'_{35}(A)$ tel que

$s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x \exp((\alpha-1-\alpha\mathrm{Log}\alpha)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x - \alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2\alpha + c'_{35}(A)\alpha)$.

• Si maintenant $\alpha > x$

alors $s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x)$ est borné par une constante :

Tout d'abord on a montré que pour tout $n \geqslant 3$

$$\omega_A(n) \leqslant \omega(n) \leqslant \frac{\mathrm{Log}\, n}{\mathrm{Log}_2 n}(1 + o(1)).$$

Il existe donc une constante K telle que

$$\omega_A(n) \leqslant K \frac{\mathrm{Log} n}{\mathrm{Log}_2 n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3.$$

On peut trouver $x_1 \geqslant 3$ tel que

$$\mathrm{Sup}(\omega_A(2),\omega_A(3),\ldots,\omega_A([e^e])\ K \frac{\mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}) = S(x)$$

et $S(x) \leqslant \gamma_A\ x\ \mathrm{Log}_2 x$ pour tout $x \geqslant x_1$.

Alors si $e^e \leqslant n \leqslant x$ et $x \geqslant x_1$

$\omega_A(n) \leqslant K \dfrac{\mathrm{Log}\ n}{\mathrm{Log}_2 n} \leqslant \gamma_A\ x\ \mathrm{Log}\ x$ puisque la fonction $x \rightsquigarrow k \dfrac{\mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}$ croît

pour $x \geqslant e^e$.

Par suite, pour tout $n \leqslant x$, $\omega_A(n) \leqslant \gamma_A\ x\ \mathrm{Log}\ x$ et

$s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) = 0$.

Si maintenant $x \leqslant x_1$, $s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x \leqslant x_1$.

Dans ce cas, on peut trouver une constante c''_{35} telle que

$s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x_1 \leqslant x \exp((\alpha-1-\alpha\mathrm{Log}\alpha)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x - \alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2\alpha + c''_{35}\alpha)$

pour tout $x \leqslant x_1$ et $\alpha > x$. (Etant entendu que $s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) = 0$

dès que $\alpha > \dfrac{x}{\gamma_A \mathrm{Log}_2 x}$).

Finalement, dans tous les cas il existe $c_{35}(A)$ telle que
$s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x \exp((\alpha-1-\alpha\mathrm{Log}\alpha)\gamma_A\mathrm{Log}_2 x - \alpha_A \mathrm{Log}_2\alpha + c_{35}(A))$.

Nous venons de trouver une majoration de $s_A(x,y)$ lorsque $y = \alpha\gamma_A\mathrm{Log}_2 x$ avec $\alpha \geqslant 2$. Nous allons maintenant nous intéresser au cas où $\alpha \geqslant 1$ c'est-à-dire lorsque $y \geqslant \gamma_A\mathrm{Log}_2 x$ et $x \geqslant 3$.

3.10.- ***Théorème*** : Soit $A \subset P$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers. Soit $x \geqslant 3$ et $y \geqslant \gamma_A\mathrm{Log}_2 x$.

Dans ce cas :

$$s_A(x,y) \leqslant x \exp(-y(\mathrm{Log}\, y - \mathrm{Log}_3 x - \mathrm{Log}\,\gamma_A - 1) - \gamma_A\mathrm{Log}_2 x + O_A(\frac{y}{\mathrm{Log}_2 x}))$$

Démonstration :

Par le corollaire 3.6. $\sum_{n\leqslant x} z^{\omega_A(n)} \leqslant x \exp((z-1)A(x))$ pour $x \geqslant 3$ et $z \geqslant 1$.

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega_A(n)} \geqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega_A(n)>y}} z^{\omega_A(n)} \geqslant z^y s_A(x,y)$$

par suite $s_A(x,y) \leqslant x \exp((z-1)A(x) - y \,\mathrm{Log}\, z)$.

A vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers, il existe $B_A \in R$ tel que $A(x) = \gamma_A \mathrm{Log}_2 x + B_A + O_A(\frac{1}{\mathrm{Log}\, x})$, en conséquence :

$$s_A(x,y) \leqslant x \exp((z-1)(\gamma_A\mathrm{Log}_2 x + B_A + O_A(\frac{1}{\mathrm{Log}\, x})) - y\,\mathrm{Log}\, z)$$

ou encore

$$s_A(x,y) \leqslant x \exp((z-1)\gamma_A\mathrm{Log}_2 x - y\,\mathrm{Log}\, z + (z-1)(B_A + O_A(\frac{1}{\mathrm{Log}\, x}))).$$

L'expression $(z-1)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x - y \mathrm{Log}\, z$ est minimale pour $z = \dfrac{y}{\gamma_A \mathrm{Log}_2 x}$. Par ce choix de z (qui est supérieur à 1 car $y \geq \gamma_A \mathrm{Log}_2 x$)

$$s_A(x,y) \geq x \exp(-y(\mathrm{Log}\, y - \mathrm{Log}\, \gamma_A - \mathrm{Log}_3 x - 1) - \gamma_A \mathrm{Log}_2 x + (\frac{y}{\gamma_A \mathrm{Log}_2 x} - 1)(B_A + O_A(\frac{1}{\mathrm{Log}\, x})))$$

et

$$s_A(x,y) \leq x \exp(-y(\mathrm{Log}\, y - \mathrm{Log}\, \gamma_A - \mathrm{Log}_3 x - 1) - \gamma_A \mathrm{Log}_2 x + O\,(\frac{y}{\mathrm{Log}_2 x}))$$

puisque $y \geq \gamma_A \mathrm{Log}_2 x$, la constante "O_A" pouvant être déterminée dès que l'on connaît γ_A et $O_A(\frac{1}{\mathrm{Log}\, x})$ dans la formule généralisée des nombres premiers.

Remarque :

Il est clair que l'on obtient, approximativement le minimum de l'expression $(z-1)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x - y \mathrm{Log}\, z + (z-1)(B_A + O_A(\frac{1}{\mathrm{Log}\, x}))$ (tout au moins lorsque x tend vers $+\infty$) en choisissant celui de $(z-1)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x - y \mathrm{Log}\, z$ car $(z-1)(B_A + O_A(\frac{1}{\mathrm{Log}\, x}))$ est négligeable devant ce premier terme.

Nous allons maintenant rassembler les minorations et majorations pour des valeurs particulières de y.

3.11.- Corollaire : Soit $A \subset P$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers. Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$ alors pour x assez grand

$$s_A(x, (\mathrm{Log}\, x)^{\alpha}) = x \exp(-\alpha(\mathrm{Log}\, x)^{\alpha} \mathrm{Log}_2 x + O_A((\mathrm{Log}\, x)^{\alpha} \mathrm{Log}_3 x)$$

Démonstration :

Choisissons $y = (\text{Log } x)^{\alpha}$. Pour $x \geqslant c'_{36}(A,\alpha)$ calculable, $y \geqslant \gamma_A \text{Log}_2 x$. Par le théorème 3.10., nous obtenons :

$$s_A(x,(\text{Log } x)^{\alpha}) \leqslant x \exp(-(\text{Log } x)^{\alpha}(\alpha \text{ Log}_2 x - \text{Log } \gamma_A - \text{Log}_3 x - 1) - \gamma_A \text{Log}_2 x + O_A(\frac{(\text{Log } x)}{\text{Log}_2 x})^{\alpha})$$

$$\leqslant x \exp(-\alpha(\text{Log } x)^{\alpha}\text{Log}_2 x + O_A(\text{Log}_3 x(\text{Log } x)^{\alpha}).$$

Minoration : Comme $\alpha < 1$, on peut trouver $c_{36}(A,\alpha) \geqslant c'_{36}(A,\alpha)$ tel que si $x \geqslant c_{36}(A,\alpha)$, $0 < (\text{Log } x)^{\alpha} \leqslant \frac{\text{Log } x}{\text{Log}_2 x} + (1 + \text{Log } \gamma_A - \varepsilon) \frac{\text{Log } x}{(\text{Log}_2 x)^2}$.

En appliquant le théorème 3.2., nous obtenons :

$$s_A(x,(\text{Log } x)^{\alpha}) \geqslant x \exp(-(\text{Log } x)^{\alpha}(\alpha \text{Log}_2 x + \text{Log } \alpha + \text{Log}_3 x - \text{Log } \gamma_A - 1) + O_A((\text{Log } x)^{\alpha}\text{Log}_3 x(\text{Log}_2 x)^{-1})$$

$$\geqslant x \exp(-\alpha(\text{Log } x)^{\alpha}\text{Log}_2 x + O_A((\text{Log } x)^{\alpha}\text{Log}_3 x)).$$

Finalement :

$$s_A(x,(\text{Log } x)^{\alpha}) = x \exp(-\alpha(\text{Log } x)^{\alpha}\text{Log}_2 x + O_A((\text{Log } x)^{\alpha}\text{Log}_3 x))$$

$s_A(x,(\text{Log } x)^{\alpha})$ représente ici approximativement la distribution des nombres entiers n tels que $\omega_A(n)$ soit compris dans la bande limitée par $(\text{Log } x)^{\alpha}$ et $\frac{\text{Log } x}{\text{Log}_2 x}$.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas $y = \frac{\alpha \text{ Log } x}{\text{Log}_2 x}$

Nous avons montré au paragraphe 2 que

$\omega_A(n) \leqslant \frac{\text{Log } n}{\text{Log}_2 n} + (1 + \text{Log } \omega_A) \frac{\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^2} + O(\frac{\text{Log } n}{(\text{Log}_2 n)^3})$ lorsque A vérifie la propriété généralisée des nombres premiers.

Il est naturel de vouloir évaluer le nombre d'entiers inférieurs à x tels que la valeur de $\omega_A(n)$ ne s'écarte pas trop de cette limite supérieure. Le corollaire suivant répond à la question.

3.12. Corollaire : Soit $A \subset \mathcal{P}$ vérifiant la propriété généralisée des nombres premiers.

Soit $\alpha \in \left[\frac{(\mathrm{Log}_2 x)^2}{\mathrm{Log}\ x}, 1 + (1+\mathrm{Log}\ \gamma_A - \varepsilon)\frac{1}{\mathrm{Log}_2 x}\right]$ où $\varepsilon > 0$

et $x \geqslant 3$ alors

$$x^{1-\alpha+O_A\left(\frac{1}{\mathrm{Log}_2 x}\right)} \leqslant s_A\left(x, \frac{\alpha\ \mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}\right) \leqslant x^{1-\alpha} \exp\left(\frac{2\alpha(\mathrm{Log}\ x)\mathrm{Log}_3 x}{\mathrm{Log}_2 x} + O_A\left(\frac{\mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}\right)\right)$$

Démonstration :

Nous allons appliquer les théorèmes 3.2. et 3.9. avec cette fois le choix $y = \frac{\alpha\ \mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}$.

Il suffit en fait de montrer que nous pouvons appliquer ceux-ci.

Minoration :

Comme $\alpha \leqslant 1 + (1 + \mathrm{Log}\ \gamma_A - \varepsilon)\frac{1}{\mathrm{Log}_2 x}$ si $y = \frac{\alpha\ \mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}$ alors $y \leqslant \frac{\mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x} + (1 + \mathrm{Log}\ \gamma_A - \varepsilon)\frac{\mathrm{Log}\ x}{(\mathrm{Log}_2 x)^2}$ aussi par le théorème 3.2. nous obtenons :

$$s_A\left(x, \frac{\alpha\ \mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}\right) \geqslant x \exp\left(-\alpha \frac{\mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}\left(\mathrm{Log}\ y + \mathrm{Log}_2 y - 1 - \mathrm{Log}\ \gamma_A\right) + O_A\left(\frac{y\ \mathrm{Log}_2 y}{\mathrm{Log}\ y}\right)\right).$$

En remplaçant y par sa valeur

$$s_A\left(x, \frac{\alpha\ \mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}\right) \geqslant x \exp\left(-\alpha \frac{\mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}_2 x}\left(\mathrm{Log}_2 x + \mathrm{Log}\ \alpha + O\left(\frac{\mathrm{Log}_3 x}{\mathrm{Log}_2 x}\right) - \mathrm{Log}\ \gamma_A\right) + \right.$$

$$+ \mathcal{O}_A(\frac{\text{Log } x \text{ Log}_3 x}{(\text{Log}_2 x)^2}))$$

$$s_A(x, \frac{\alpha \text{ Log } x}{\text{Log}_2 x}) \geqslant x^{1-\alpha}\exp(\text{Log } x(\frac{\alpha \text{ Log } \gamma_A - \alpha \text{ Log } \alpha}{\text{Log}_2 x} + \mathcal{O}_A \frac{\text{Log}_3 x}{(\text{Log}_2 x)^2})$$

par suite

$$s_A(x, \frac{\alpha \text{ Log } x}{\text{Log}_2 x}) \geqslant x^{1-\alpha+\alpha(\text{ Log } \gamma_A - \text{Log } \alpha)(\text{Log}_2 x)^{-1}} \exp\mathcal{O}_A(\frac{\text{Log}_3 x}{(\text{Log}_2 x)^2})$$

$$\geqslant x^{1-\alpha+\mathcal{O}_A(\frac{1}{\text{Log}_2 x})} .$$

Majoration :

Comme $\alpha \geqslant \frac{(\text{Log}_2 x)^2}{\text{Log } x}$ et $\gamma_A \leqslant 1$. On a $y \geqslant \gamma_A \text{Log}_2 x$.

On peut appliquer le théorème précédent :

$$s_A(x, \frac{\alpha \text{ Log } x}{\text{Log}_2 x}) \leqslant x \exp(-y(\text{Log } y - \text{Log}_3 x - \text{Log } \gamma_A - 1) - \gamma_A \text{Log}_2 x + \mathcal{O}_A(\frac{y}{\text{Log}_2 x}))$$

$$\leqslant x^{1-\alpha}\exp(2\alpha \text{ Log } x \text{ Log}_3 x(\text{Log}_2 x)^{-1} + \frac{\alpha \text{ Log } x}{\text{Log}_2 x}(1 + \text{Log } \gamma_A - \text{Log } \alpha) +$$

$$+ \mathcal{O}_A(\frac{\text{Log } x}{(\text{Log}_2 x)})) \quad \text{car} \quad \mathcal{O}_A(\frac{y}{\text{Log}_2 x}) = \mathcal{O}_A(\frac{\alpha \text{ Log } x}{(\text{Log}_2 x)^2}) = \mathcal{O}_A(\frac{\text{Log } x}{(\text{Log}_2 x)})$$

finalement

$$s_A(x, \frac{\alpha \text{ Log } x}{\text{Log}_2 x}) \leqslant x^{1-\alpha}\exp(2\alpha \frac{\text{Log } x \text{ Log}_3 x}{\text{Log}_2 x} + \mathcal{O}_A(\frac{\text{Log } x}{\text{Log}_2 x})).$$

Les constantes précédentes devenant toutes effectives dès que l'on "connaît" γ_A et $\mathcal{O}_A(\frac{1}{\text{Log } x})$.

3.13.- *Remarque au sujet du paragraphe* 3.

Dans le théorème 3.10. si l'on choisit $y = \alpha\gamma_A \text{Log}_2 x$ pour $\alpha \geqslant 2$, nous obtenons :

$$s_A(x,\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x\ \exp(-\alpha\gamma_A \mathrm{Log}_2 x(\mathrm{Log}\ \alpha-1) - \gamma_A \mathrm{Log}_2 x + O_A(\alpha))$$
$$\leqslant x\ \exp((\alpha-1-\alpha \mathrm{Log}\ \alpha)\gamma_A \mathrm{Log}_2 x + O_A(\alpha)).$$

Le résultat est donc nettement moins précis que le théorème 3.9. pour $\alpha \geqslant 2$.

Dans le cas $A = P$, nous obtenons :

$$s(x,\alpha \mathrm{Log}_2 x) \leqslant x\ \exp((\alpha-1-\alpha \mathrm{Log}\alpha)\ \ \mathrm{Log}_2 x + O_A(\alpha))$$

le corollaire 3.11. peut être avantageusement remplacé par un théorème dû à Delange que nous énonçons ici et qui sera montré au paragraphe 7.

<u>*Théorème*</u> *7.2.-* Soient x,α,r_1,r_2 des réels avec $x \geqslant 3$, $1 < r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2$ alors

$$s_A(x,\alpha \mathrm{Log}_2 x) = \frac{F(\alpha)\alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha \mathrm{Log}_2 x\}}}{\sqrt{2\pi}(\alpha-1)} \frac{x}{(\mathrm{Log}\ x)^{\alpha-1-\alpha \mathrm{Log}\alpha}} \times$$
$$\frac{1}{(\mathrm{Log}_2 x)^{1/2}}\left(1 + O_{r_1,r_2}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}_2 x}\right)\right).$$

$F(\alpha)$ étant égal à $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \prod_{p\in P} \left(1 + \dfrac{\alpha}{p-1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^{\alpha}$

§ *4* - <u>*Majorations de*</u> $s_A(x,y)$.

Montrons tout d'abord que l'ordre maximum de $\Omega_A(n)$ est $\dfrac{\mathrm{Log}\ n}{\mathrm{Log}\ a_1}$.

<u>*Lemme*</u> *4.0.-* Soit a_1 le plus petit élément de A alors $\Omega_A(n) \leqslant \dfrac{\mathrm{Log}\ n}{\mathrm{Log}\ a_1}$ pour tout $n \geqslant 1$ l'égalité est réalisée si et seulement si n est de la forme a_1^k.

Démonstration :

Celle-ci est triviale

$$n \geqslant \prod_{\substack{p^k || n \\ p \in A}} p^k \geqslant \prod_{\substack{p^k || n \\ p \in A}} a_1^k = a_1^{\Omega_A(n)}$$

aussi $\Omega_A(n) \leqslant \dfrac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} a_1}$.

La deuxième assertion est immédiate.

Dans ce qui suit les résultats établis ne nécessiteront pas forcément l'assurance de la propriété généralisée des nombres premiers par l'ensemble A. On supposera uniquement parfois que A possède deux éléments au moins que nous noterons a_1, a_2 où $a_1 < a_2$.

Nous allons tout d'abord établir un résultat un peu plus precis que le lemme 3.4.

Proposition 4.1.- Soit $A \subset P$. Si $x \geqslant 1$ et $1 \leqslant z < a_1$ alors $\sum_{n \leqslant x} z^{\omega_A(n)} \leqslant \sum_{n \leqslant x} z^{\Omega_A(n)} \leqslant x\, G(x,z) \exp((z-1)A(x) + 4z)$

où l'on a posé $G(x,z) = \operatorname{Inf}\left(1 + \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a_1}, \dfrac{a_1 - 1}{a_1 - z}\right)$.

Démonstration :

Celle-ci n'est qu'une version plus détaillée de celle du lemme 3.4. la fonction z^{Ω_A} est multiplicative et vaut 1 pour $n = 1$ et soit $k_z = z^{\Omega_A} * \mu$.

Par la formule d'inversion de Möbius :

alors $z^{\Omega_A(n)} = \sum_{d|n} k_z(d)$

$$\sum_{n \leqslant x} z^{\Omega_A(n)} = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} k_z(d) \leqslant \sum_{d \leqslant x} k_z(d) \left[\frac{x}{d}\right]$$

de même que précédemment $k_z(n) \geq 0$ pour tout n (car k_z est multiplicative et $z \geq 1$)

aussi

$$\sum_{n\leq x} z^{\Omega_A(n)} \leq \sum_{d\leq x} k_z(d)\,\frac{x}{d} \leq x \prod_{p\leq x} \sum_{0\leq k\leq \alpha_p+1} \frac{k_z(p^k)}{p^k}$$

on pose $\alpha_p = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} p} - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k_z(n) = \sum_{d|n} \mu(d) z^{\Omega_A(\frac{n}{d})}$

aussi $k_z(p^k) = z^{\Omega_A(p^k)} - z^{\Omega_A(p^{k-1})} = \chi_A(p)(z^k - z^{k-1})$

où χ_A est la fonction caractéristique de A,

et $\displaystyle\sum_{n\leq x} z^{\Omega_A(n)} \leq x \prod_{p\leq x} \sum_{0\leq k\leq\alpha_p+1} \frac{k_z(p^k)}{p^k} = x \prod_x{}' \Big(1 + \big(\frac{z-1}{p}\big) \sum_{0\leq k\leq \alpha_p} \big(\frac{z}{p}\big)^k\Big)$

(on rappelle que l'on note $\prod'_x$ pour $\prod'_{\substack{p\leq x\\ p\in A}}$).

On suppose $x \geq a_1$ sinon la proposition est trivialement vérifiée.

$$1 + \Big(\frac{z-1}{a_1}\Big) \sum_{0\leq k\leq \alpha_{a_1}} \Big(\frac{z}{a_1}\Big)^k \leq \alpha_{a_1} + 1 = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a_1} \quad \text{car} \quad z < a_1$$

d'autre part, on a également

$$1 + \frac{z-1}{p} \sum_{0\leq k\leq \alpha_p} \Big(\frac{z}{p}\Big)^k \leq 1 + \frac{z-1}{p} \sum_{k\geq 0} \Big(\frac{z}{p}\Big)^k = 1 + \frac{z-1}{p-z}$$

aussi

$$\sum_{n\leq x} z^{\Omega_A(n)} \leq x\, G(x,z) \prod_{a_1<p\leq x}{}' \Big(1 + \frac{z-1}{p-z}\Big).$$

Pour $p > a_1$ $p \leqslant p(p-z)$ et $1 + \frac{z-1}{p} \leqslant p-z$

aussi

$$\sum_{n \leqslant x} z^{\Omega_A(n)} \leqslant x\, G(x,z)\Big(\prod_{p \leqslant 2z} p\Big) \exp\Big((z-1) \sum_{\substack{2z < p \leqslant x \\ p \in A}} \frac{1}{p-z}\Big) .$$

Si $p > 2z$ alors $\frac{1}{p-z} = \frac{1}{p}\Big(1 + \frac{z}{p}\,\frac{1}{1-\frac{z}{p}}\Big) < \frac{1}{p} + \frac{2z}{p^2}$

$$\sum_{\substack{2z < p \leqslant x \\ p \in A}} \frac{1}{p^2} < \sum_{n > 2z} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(2z)^2} + \int_{2z}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{(2z)^2} + \frac{1}{2z}$$

$$\sum_{n \leqslant x} z^{\Omega_A(n)} \leqslant x\, G(x,z)\Big(\prod_{p \leqslant 2z} p\Big) \exp\big((z-1)A(x) + z\big).$$

<u>*Lemme*</u> *4.1.1.-* $\prod_{p \leqslant y} p \leqslant 4^y$ pour $y \geqslant 1$.

On montre en fait que $\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

En effet soit $m \in \mathbb{N}^*$

$2C_{2m+1}^m < 2^{2m+1}$ aussi $C_{2m+1}^m < 2^{2m}$.

Si $p \in \mathcal{P}$ et $m + 1 < p \leqslant 2m + 1$ alors $p \mid C_{2m+1}^m$

Ainsi $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \;\Big|\; C_{2m+1}^{m+1}$

et $\theta(2m+1) - \theta(m+1) = \sum_{m+1 < p \leqslant 2m+1} \operatorname{Log} p \leqslant \operatorname{Log} C_{2m+1}^m < 2m \operatorname{Log} 2$.

Le lemme est évident pour $n = 1$ et $n = 2$.

On montre la suite par récurrence : on suppose la propriété vraie pour tout $k \leqslant n-1$.

. Si n est pair $\theta(n) = \theta(n-1) < 2(n-1)\text{Log } 2 < 2n \text{ Log } 2$

. Si n est impair soit $n = 2m + 1$

$$\theta(n) = \theta(2m+1) = \theta(2m+1) - \theta(m+1) + \theta(m+1)$$

$$< 2m \text{ Log } 2 + 2(m+1)\text{Log } 2 \quad \text{par récurrence}$$

$$< 2n \text{ Log } 2.$$

En utilisant le résultat 4.1.1.

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\Omega_A(n)} \leqslant x\, G(x,z)\exp((z-1) + z(2 \text{ Log } 4 + 1))$$

$$\leqslant x\, G(x,z) \exp((z-1) + 4z.$$

4.2.- *Corollaire*.- Soit $x > 0$, $y \in R$ et $A \subset P$, a_1 étant le plus petit élément de A et g_A la fonction ω_A ou Ω_A nous avons :

$$\text{card}\{n \leqslant x, g_A(n) \geqslant y\} < \frac{a_1}{a_1-z}\, x \exp((z-1)A(x) - y \text{ Log } z + 4z).$$

ou $1 \leqslant z < a_1$.

Démonstration :

$$\sum_{n\leqslant x} z^{g_A(n)} \geqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ g_A(n)\geqslant y}} z^{g_A(n)} \geqslant z^y \sum_{\substack{n\leqslant x\\ g_A(n)\geqslant y}} 1 = z^y \text{ card}\{n \leqslant x, g_A(n) \geqslant y\}$$

d'autre part $\displaystyle\sum_{n\leqslant x} z^{g_A(n)} < \frac{a_1}{a_1-z}\, x \exp((z-1)A(x) + 4z)$

ainsi

$$\text{card}\{n \leqslant x, g_A(n) \geqslant y\} \leqslant \frac{a_1}{a_1-z}\, x \exp((z-1)A(x) + 4z - y \text{ Log } z).$$

4.3.- *Corollaire*.- Soit $A \subset P$, x,y,t des réels tels que $x > 0$, $0 < t \leqslant y < a_1 t$ alors :

$$\text{card}\{n \leqslant x, g_A(n) \geqslant y\} < c_{41}(a_1)\, \frac{1}{a_1 - \frac{y}{t}}\, x \exp(y-t-y \text{ Log } \frac{y}{t} + a_1\mu)$$

(où $\mu = \mu(x,t)$.

<u>*Démonstration*</u> :

On choisit $z = \frac{y}{t}$ dans le corollaire précédent.

Comme $0 < t \leqslant y < a_1 t$, $1 \leqslant z < a_1$ et

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x, g_A(n) \geqslant y\} \leqslant \frac{a_1}{a_1 - \frac{y}{t}} \; x \exp((\tfrac{y}{t} - 1)A(x) - y \operatorname{Log} \tfrac{y}{t} + \tfrac{4y}{t})$$

$$\leqslant \frac{a_1}{a_1 - \frac{y}{t}} \; x \exp((y-t) - y \operatorname{Log} \tfrac{y}{t} + \mu\, a_1 + 4a_1)$$

et en posant

$$c_{41}(a_1) = a_1 \, e^{4a_1}$$

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x, g_A(n) \geqslant y\} \leqslant c_{41}(a_1) \; \frac{x}{a_1 - \frac{y}{t}} \exp(y-t-y \operatorname{Log} \tfrac{y}{t} + \mu\, a_1).$$

Nous verrons dans la suite que la précédente inégalité peut être considérablement améliorée.

Le corollaire 4.2. peut être encore utilisé si l'on suppose $y \geqslant a_1 t$ c'est l'objet du résultat suivant :

4.4.- <u>*Corollaire*</u>.- Soit $A \subset P$, x, y, t des réels tels que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$, $1 \leqslant t \leqslant y$ alors

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x, \; g_A(n) \geqslant y\} \leqslant c_{42}(a_1) \; \frac{y}{a_1^{\,y}} \; x \exp((a_1 - 1)t + a_1 \mu).$$

<u>*Démonstration*</u> :

Dans le corollaire 4.2., on a pour $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant z < a_1$

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x, g_A(n) \geqslant y\} < a_1 x \exp((z-1)A(x) - y \operatorname{Log} z - \operatorname{Log}(a_1 - z) + 4z).$$

z étant borné par a_1, le terme principal de cette expression est finalement $(z-1)A(x) - y \operatorname{Log} z - \operatorname{Log}(a_1 - z)$. En majorant $A(x)$ par $t+\mu$ nous avons en fait à considérer

$f_t(z) = (z-1)t - y \operatorname{Log} z - \operatorname{Log}(a_1-z)$ pour $1 \leqslant z < a_1$.

On se propose d'abord de minimiser de cette expression (puisque dans la pratique on choisit t comme étant une approximation de $A(x)$ et que par conséquent on a $\mu = 2$).

$$f_t'(z) = t - \frac{y}{z} + \frac{1}{a_1-z} , \quad f_t''(z) = \frac{y}{z^2} + \frac{1}{(a_1-z)^2}$$

nous en déduisons la croissance de f_t' pour $1 \leqslant z < a_1$.

Dès que $y > t - \dfrac{1}{a_1-1}$, $f_t'(1) < 0$ et comme f' est continue elle admet un zéro entre 1 et a_1, ce qui correspond à un minimum de f_t. Ce zéro β est alors donné par

$$\beta = \frac{y+1+a_1t-((y+1+a_1t)^2-4a_1\ yt)^{1/2}}{2t} .$$

Si l'on suppose $\frac{t}{y}$ tend vers 0 quand $y \to +\infty$. On s'aperçoit que $\beta \to a_1$. Par suite comme $f_t'(x_o) > 0$ pour $z_o = a_1(1 - \frac{1}{2y})$ lorsque y tend vers $+\infty$ cette valeur de z est proche de β et f_t est approximativement minimisée en z_o.

On choisit alors $z = a_1(1 - \frac{1}{2y})$ ce choix étant justifiée par ce qui précède et suffisant pour obtenir le résultat.

Ainsi par le corollaire 4.2.

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x, \Omega_A(n) \geqslant y\} = S_A(x,y-1) \leqslant 2yx \exp((a_1-1-\frac{a_1}{2y})A(x)-y \operatorname{Log}(a_1(1 - \frac{1}{2y})) +$$
$$\to + 4a_1(1 - \frac{1}{2y}))$$

soit encore

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x, \Omega_A(n) \geqslant y\} \leqslant 2yx \exp((a_1-1)t+a_1\mu)e^{4a_1}\exp(-y \operatorname{Log}(a_1(1- \frac{1}{2y}))$$

la fonction $-y\,\mathrm{Log}(1-\frac{1}{2y})$ est bornée pour $y \geq 1$ soit c'_{42} un majorant de cette fonction :

alors

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\{n \leq x, \Omega_A(n) \geq y\} &= S_A(x,y-1)\\ &\leq 2e^{4a_1} \exp(c'_{42}) yx\, a_1^{-y} \exp((a_1-1)t+a_1\mu)\\ &\leq c_{42}(a_1)\, \frac{y}{a_1^y}\, x \exp((a_1-1)t+a_1\mu)\end{aligned}$$

si l'on pose $$c_{42}(a_1) = 2e^{4a_1} \exp c'_{42}\ .$$

4.4.1.- *Corollaire* (Cas particulier où $A = \mathcal{P}$)

Soit $x \geq 3$ et $t = \mathrm{Log}_2 x$, $y \geq 2t$

alors $\mathrm{card}\,\{n \leq x,\ \Omega(n) \geq y\} \leq c''_{42}\, y\, 2^{-2\mathrm{Log}_2 x}\, x\,\mathrm{Log}\, x$.

En effet, comme $t = \mathrm{Log}_2 x$, $\mu = O(1)$ et peut être majoré on applique alors le résultat précédent.

Notation : Soit $A \subset \mathcal{P}$ et a_1 le plus petit élément de A. Nous noterons B l'ensemble $A\backslash\{a_1\}$. Par convention, si $B = \emptyset$, nous poserons $\omega_B = \Omega_B \equiv 0$.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a \in \{0,1,2,\dots,k\}$ on désignera par $c_a(x)$ le cardinal de l'ensemble $C_a(x) = \{m \leq \frac{x}{a_1^a}$, $a_1 \nmid m$ et $\Omega_B(m) \geq k-a\}$.

4.5.- *Lemme*.- Soient x et y des réels tels que $x > 0$. On pose $k = [y] + 1$ alors $S_A(x,y) = \left[\frac{x}{a_1^k}\right] + \sum_{a=0}^{k-1} c_a(x)$.

Démonstration :

Pour $a \in \{0,1,2,\dots,k\}$ on désigne :

$\Gamma_a(x) = \{n \leq x,\ a_1^a \| n$ et $\Omega_B(\frac{n}{a_1^a}) \geq k-a\}$

autrement dit $\Gamma_A(x)$ est l'ensemble des entiers inférieurs à x qui possèdent au moins k facteurs premiers dans A (non nécessairement distincts) dont a sont égaux à a_1.

On montre que

$$\{n \leqslant x \quad \Omega_A(n) > y\} = \{n \leqslant x, \quad a_1^{\,k} | n\} \cup \bigcup_{0}^{k-1} \Gamma_a(x).$$

Soit $n \leqslant x$ tel que $\Omega_A(n) > y$, on a $\Omega_A(n) \geqslant k$. Si $a_1^{\,k} \nmid n$ alors il existe $a \in \{0,\dots,k-1\}$ tel que $a_1^{\,a} \| n$ soit encore $n = a_1^{\,a} d$ avec $(d, a_1) = 1$.

Comme $\Omega_A(n) \geqslant k$ et Ω_A additive $\Omega_A(d) = \Omega_A(\frac{n}{a_1^{\,a}}) \geqslant k-a$ aussi $n \in \Gamma_a(x)$.

Inversement :

Si $n \in \Gamma_a(x)$, on peut écrire $n = (\frac{n}{a_1^{\,a}}) a_1^{\,a}$ avec $\frac{n}{a_1^{\,a}} \in \mathbb{N}$ et $(a_1^{\,a}, \frac{n}{a_1^{\,a}}) = 1$. Aussi $\Omega_A(n) = \Omega_A(\frac{n}{a_1^{\,a}}) + a \geqslant k$.

En conséquence :

$$\{n \leqslant x, \quad \Omega_A(n) > y\} = \{n \leqslant x, \quad a_1^k | n\} \cup \bigcup_{a=0}^{k-1} \Gamma_a(x).$$

Comme ces ensembles sont disjoints et que pour $a \in \{0,\dots,k-1\}$, $\Gamma_a(x)$ et $C_a(x)$ sont équipotents, nous obtenons l'égalité annoncée.

On établit maintenant une majoration de $S_A(x,y)$. On raisonnera de manière analogue à ce qui a été fait pour $s_A(x,y)$

4.6.- *Théorème*.- Soient x,y,t des réels tels que $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$ et $t \geqslant 1$. Soit $A \subset \mathcal{P}$, alors $S_A(x,y) \leqslant c_{43}(a_1) \frac{1}{a_1^{\,y}} x\sqrt{t} \exp((a_1-1)t + a_1\mu)$.

Démonstration :

On utilise le lemme précédent. Pour cela on évaluera les nombres $c_{k-a}(x)$ que nous avons précédemment introduits. On rappelle que l'on a posé $k = [y] + 1$.

. Tout d'abord si $A = \{a_1\}$

alors $S_A(x,y) = \{n \leqslant x,\ \Omega_A(n) > y\} = \{n \leqslant x,\ n$ est multiple de $a_1^k\}$

$$= \left[\frac{x}{a_1^k}\right] \leqslant \frac{x}{a_1^y} \sqrt{t} \exp((a_1-1)t + a_1\mu) \quad \text{puisque} \quad t \geqslant 1$$

et $(a_1-1)t + a_1\mu \geqslant 0$.

. On suppose maintenant que $B = A\setminus\{a_1\}$ n'est pas vide.

$$S_A(x,y) = \left[\frac{x}{a_1^k}\right] + \sum_{j=0}^{k-1} c_j(x) \quad \text{d'après le lemme précédent}$$

ou encore $S_A(x,y) = \dfrac{x}{x_1^y} + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_{k-j}(x)$.

Nous devons estimer $c_{k-j}(x)$ pour $0 < j \leqslant k$

$$c_{k-j}(x) = \text{card}\{n \leqslant \frac{x}{a_1^{k-j}},\ a_1 \nmid n \ \text{ et } \ \Omega_B(n) \geqslant j\}$$

$$\leqslant S_B(\frac{x}{a_1^{k-j}}, j-1) \quad \text{et par le corollaire 4.2. pour} \quad 1 \leqslant z \leqslant a_2$$

$$\leqslant \frac{a_2}{a_2-z} \frac{x}{(a_1)^{k-j}} \exp((z-1)B(\frac{x}{a_1^{k-j}}) + 4z - j \operatorname{Log} z).$$

Or, $$B(\frac{x}{(a_1)^{k-j}}) = \sum_{\substack{a\in B \\ a \leqslant \frac{x}{(a_1)^{k-j}}}} \frac{1}{a} \leqslant B(x) \leqslant A(x) \leqslant t+\mu .$$

Ainsi

$$c_{k-j}(x) \leqslant \frac{a_2}{a_2-z} \frac{x}{(a_1)^{k-j}} \exp((z-1)(t+\mu) - j \text{ Log } z + 4z) \quad \text{pour} \quad 1 < z \leqslant a_2$$

$$S_A(x,y) \leqslant \left[\frac{x}{a_1{}^k}\right] + \sum_{j=1}^{k} H(j,z) \quad \text{où} \quad H(j,z) = \frac{a_2}{a_2-z} \frac{x}{(a_1)^{k-j}} \exp((z-1)(t+\mu)$$

$$+ 4z - j \text{ Log } z).$$

Nous allons diviser la somme $\sum_{j=1}^{k} H(j,z)$ en trois :

Pour chaque somme partielle, on choisira alors une valeur particulière de z et on majorera $H(j,z)$.

Posons $M = \text{Sup}(k,a_1t)$,

On a alors

$$S_A(x,y) \leqslant \frac{x}{a_1{}^k} + \sum_{j=1}^{t} H(j,z\ ) + \sum_{t<j\leqslant a_1t} H(j,z\ ) + \sum_{a_1t<j\leqslant M} H(j,z\ ).$$

Si l'ensemble d'indices pour l'une de ces sommes était vide par convention celle-ci serait nulle.

Pour chaque $j \in \{1,\ldots,k\}$ on choisira z_j , un réel satisfaisant $1 \leqslant z_j < a_2$,

1°) Lorsque $1 \leqslant j \leqslant t$, choisit $z_j = 1$.

Nous en déduisons :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant t} H(j,z_j) = \sum_{1\leqslant j\leqslant t} \frac{a_2}{a^2-1} \frac{x}{a_1{}^{k-j}} e^4$$

$$\leq 2e^4 \frac{x}{a_1^k} \sum_{1 \leq j \leq t} a_1^j = 2e^4 \frac{x}{a_1^k} a_1 \frac{(a_1^t - 1)}{a_1 - 1}$$

$$\leq 4e^4 \frac{x}{a_1^{k-t}} \leq 4e^4 \frac{x}{a_1^y} \exp t \operatorname{Log} a_1$$

$\sum_{1 \leq j \leq t} H(j,z_j) \leq 4e^4 \frac{x}{a_1^y} \exp((a_1-1)t)$ puisque $a_1 - 1 \geq \operatorname{Log} a_1$ pour tout $a_1 \in P$.

2°) Si $t < j \leq a_1 t$, on choisit $z = z_j = \frac{j}{t}$ ceci parce que l'expression $(z-1)t - j \operatorname{Log} z$ est minimale pour cette valeur, que celle-ci est supérieur à 1 et que le terme $4\frac{j}{t}$ est négligeable par rapport à l'expression précédente

$$H(j,z_j) = \frac{a_2}{a_2 - \frac{j}{t}} \frac{x}{a_1^{k-j}} \exp\left(\left(\frac{j}{t} - 1\right)(t+\mu) - j \operatorname{Log} \frac{j}{t} + \frac{4j}{t}\right)$$

$$= \frac{a_2}{a_2 - \frac{j}{t}} \frac{x}{a_1^{k-j}} \exp((a_1-1)\mu) e^{\frac{4j}{t}} \times \left(\frac{et}{j}\right)^j \frac{1}{e^t} .$$

Comme $\frac{a_2}{a_2 - \frac{j}{t}} \leq \frac{a_2}{a_2 - a_1} \leq a_1 + 1$

car $\frac{j}{t} \leq a_1$ et la t fonction $x \to \frac{x}{x-a_1}$ est décroissante pour $x > a_1$

$$H(j,z_j) \leq e^{4a_1} \frac{x}{a_1^{k-j}} \exp((a_1-1)\mu) \left(\frac{et}{j}\right)^j e^{-t} \times (a_1+1).$$

Par la formule de stirling $(n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1}{12n} + \ldots)$

on a $\left(\frac{e}{n}\right)^{n} = \alpha \frac{n!}{\sqrt{n}}$ avec $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+ \frac{1}{12} + \ldots)}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$

$$\sum_{t<j\leq a_1 t} H(j,z_j) \leq (a_1+1)e^{4a_1} \frac{x}{a_1^k} e^{-t} e^{(a_1-1)\mu} \sum_{t<j\leq a_1 t} \left(\frac{a_1 t e}{j}\right)^j$$

$$\leq (a_1+1)e^{4a_1} \frac{x}{a_1^y} e^{-t} e^{(a_1-1)\mu} \sum_{t<j\leq a_1 t} (a_1 t)^j \frac{\sqrt{j}}{\alpha j!}$$

$$\leq (a_1+1) \frac{e^{4a_1}}{\alpha} e^{-t} \sqrt{a_1 t}\, e^{(a_1-1)\mu} \exp(a_1 t) \frac{x}{a_1^y}$$

finalement

$$\sum_{t<j\leq a_1 t} H(j,z_j) \leq c_{45}(a_1) \frac{x}{a_1^y} \sqrt{t}\, e^{((a_1-1)t+a_1\mu)} .$$

3°) Envisageons maintenant le 3ème cas : celui où $a_1 t < j \leq M$.

Celui-ci est un peu plus long que les précédents.

On prend $z_j = a_1(1+\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta < \frac{a_2}{a_1} - 1$

ce qui entraîne $z_j < a_2$. D'autre part, il est évident que $z_j > a_1$

$$\sum_{a_1 t<j\leq M} H(j,z_j) \leq \sum_{a_1 t<j\leq M} \frac{a_2}{a_2-a_1(1+\theta)} \frac{x}{(a_1)^{k-j}} \exp((a_1(1+\theta)-1)(t+\mu) -$$

$$- j \operatorname{Log}(a_1(1+\theta)) + 4a_1(1+\theta))$$

soit donc

$$\sum_{a_1 t<j\leq M} H(j,z_j) \leq \frac{a_2}{a_2-a_1(1+\theta)} \frac{x}{a_1^k} \exp((a_1-1+a_1\theta)(t+\mu)+4a_1(1+\theta)) \times$$

$$\times \sum_{a_1 t<j\leq M} \frac{1}{(1+\theta)^j} \qquad \text{(E.4.1)}$$

Majorons la somme $\displaystyle\sum_{a_1 t<j\leqslant M} \frac{1}{(1+\theta)^j}$

$$\sum_{a_1 t<j\leqslant M} \frac{1}{(1+\theta)^j} \leqslant \sum_{a_1 t\leqslant j} \frac{1}{(1+\theta)^j} \leqslant \frac{1}{(1+\theta)^{a_1 t}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(1+\theta)^n}$$

$$\sum_{a_1 t\leqslant j\leqslant M} \frac{1}{(1+\theta)^j} \leqslant \frac{1}{(1+\theta)^{a_1 t}} \frac{1+\theta}{\theta} .$$

En remplaçant dans (E.4.1.) nous obtenons :

$$\sum_{a_1 t<j\leqslant M} H(j,z_j) \leqslant \frac{a_2}{a_2-a_1(1+\theta)} \frac{x}{a_1^{\,k}} \exp((a_1-1+a_1\theta)(t+\mu) + 4a_1(1+\theta)) \times$$

$$\times (1+\theta)^{1-a_1 t} \theta^{-1} \quad (E.4.2.).$$

Nous allons minimiser maintenant l'intervention du terme

$$\exp(a_1\theta t) \frac{(1+\theta)^{-a_1 t}}{\theta}$$

$$\begin{aligned} a_1\theta t - \mathrm{Log}\,\theta - a_1 t\,\mathrm{Log}(1+\theta) &\leqslant a_1\theta t - \mathrm{Log}\,\theta - a_1\theta t + a_1 t\,\frac{\theta^2}{2} \\ &\leqslant -\mathrm{Log}\,\theta + a_1 t\,\frac{\theta^2}{2} \quad (E.4.3.) \end{aligned}$$

car $\mathrm{Log}(1+\theta) \geqslant \theta - \dfrac{\theta^2}{2}$ ceci pour $\theta > 0$.

Ceci est minimisé pour $\theta = (a_1 t)^{-1/2}$ malheureusement on a pas nécessairement $a_2-a_1 > a_1^{1/2}$ soit encore pas nécessairement $\theta < \dfrac{a_2}{a_1} - 1$.

Si nous prenons $\theta = \dfrac{1}{2a_1\sqrt{t}}$, nous avons cette fois

$$\theta \leqslant \frac{1}{2a_1} < (a_2-a_1)\left(\frac{1}{a_1}\right) = \frac{a_2}{a_1} - 1 \quad \text{car} \quad t \geqslant 1.$$

Nous pourrions choisir $\theta = \dfrac{\alpha}{a_1\sqrt{t}}$ où α est très voisin de 1 cette valeur serait ainsi plus proche de $\frac{1}{\sqrt{a_1 t}}$ et l'expression $a_1\theta t - \text{Log}\,\theta - a_1 t\theta\text{Log}(1+\theta)$ serait encore davantage minimisée, tout en ayant encore $\theta < \frac{a_2}{a_1} - 1$.

Il se trouve que le précédent choix de θ suffit pour obtenir le résultat.

Tout d'abord

$$\frac{a_2}{a_2-a_1(1+\theta)} \leqslant \frac{a_2}{a_2-a_1(1+\frac{1}{2a_1})} < \frac{a_2}{a_2-a_1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{a_1+\frac{1}{2}}{a_2-(a_1+\frac{1}{2})}$$

soit encore

$$\frac{a_2}{a_2-a_1(1+\theta)} \leqslant \frac{a_1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = 2(a_1+1).$$

Posons maintenant :

$$f(a_1,\theta,t) = \exp(a_1\theta t + (a_1\theta-1)\mu + 4a_1(1+\theta) + (1-a_1 t)\text{Log}(1+\theta) - \text{Log}\,\theta)$$

pour $a_1 \in P$, θ et t des réels positifs strictement

alors

$$f(a_1,\theta,t) = \exp((a_1\theta-1)\mu+4a_1(1+\theta)+\text{Log}(1+\theta))\exp(a_1\theta t-a_1 t\ \text{Log}(1+\theta)-\text{Log}\,\theta)$$

$$\leqslant \exp((a_1\theta-1)\mu)\ \exp(4a_1(1+\theta)+\text{Log}(1+\theta))\exp(-\text{Log}\,\theta + a_1\ t\ \frac{\theta^2}{2}) \quad \text{d'après (E.4.3).}$$

En remplaçant θ par sa valeur dans cette précédente inégalité et en remarquant que $a_1\theta-1 = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 1 \leqslant 0$ car $t \geqslant 1$

$4a_1(1+\theta) < 6a_1$ car $\theta < \frac{1}{2}$

$a_1 t\ \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{8a_1}$ nous obtenons

$$f(a_1,\theta,t) \leqslant 2a_1\sqrt{t}\ \exp(a_1 t\ \frac{\theta^2}{2})\exp(6a_1 + \mathrm{Log}(1+\theta))$$

$$\leqslant 2a_1\sqrt{t}\ \exp(6a_1 + \mathrm{Log}\ \frac{3}{2})\exp(\frac{1}{8a_1})$$

puisque $1 + \theta \leqslant \frac{3}{2}$.

Ainsi

$$f(a_1,\theta,t) \leqslant 3a_1\sqrt{t}\ \exp(6a_1 + \frac{1}{8a_1}) = c_{46}(a_1)\sqrt{t}$$ en posant

$$c_{46}(a_1) = 3a_1\ \exp(6a_1 + \frac{1}{8a_1}).$$

Rappelons (E.4.2.)

$$\sum_{a_1 t<j\leqslant M} H(j,z_j) \leqslant \frac{a_2}{a_2-a_1(1+\theta)}\ \frac{x}{a_1^{\ k}}\ \exp((a_1-1+a_1\theta)(t+\mu) + 4a_1(1+\theta) +$$

$$+ (1-a_1 t)\mathrm{Log}(1+\theta) - \mathrm{Log}\ \theta)$$

d'après ce qui précède

$$\sum_{a_1 t<j\leqslant M} H(j,z_j) \leqslant (2(a_1+1)\ \frac{x}{a_1^{\ y}}\ f(a_1,\theta,t)\exp((a_1-1)t+a_1\mu)$$

$$\leqslant 2c_{46}(a_1)(a_1+1)\ \frac{x}{a_1^{\ y}}\ \sqrt{t}\ \exp((a_1-1)t+a_1\mu).$$

En conclusion :

$$S_A(x,y) \leqslant \frac{x}{a_1^{\ k}} + \sum_{1\leqslant j\leqslant t} H(j,z_j) + \sum_{t<j\leqslant a_1 t} H(j,z_j) + \sum_{a_1 t<j\leqslant M} H(j,z_j)$$

$$\leqslant \frac{x}{a_1^{\ y}} + 4e^4\ \frac{x}{a_1^{\ y}}\ \exp((a_1-1)t) + c_{45}(a_1)\ \frac{x}{a_1^{\ y}}\ \sqrt{t}\ \exp((a_1-1)t+a_1\mu) +$$

$$+ 2c_{46}(a_1)(a_1+1)\ \frac{x}{a_1^{\ y}}\ \sqrt{t}\ \exp((a_1-1)t + a_1\mu)$$

ainsi

$$S_A(x,y) \leqslant \frac{x}{a_1^{\ y}} \sqrt{t}\ \exp((a_1-1)t+a_1\mu)(1+4e^4+c_{45}(a_1)+2(a_1+1)c_{46}(a_1))$$

soit si nous posons :

$$c_{43}(a_1) = 1 + 4e^4 + c_{45}(a_1) + 2c_{46}(a_1)(a_1+1)$$

ainsi

$$S_A(x,y) \leqslant c_{43}(a_1)\ \frac{x}{a_1^{\ y}} \sqrt{t}\ \exp((a_1-1)t+a_1\mu) \quad \text{ceci pour} \quad x \geqslant 1, \quad y \geqslant 0,$$

$t \geqslant 1$ et $\mu = \mu(x,t)$.

Remarque :

Nous obtenons au théorème 4.6. la meilleure majoration de $S_A(x,y)$ pour $y > a_1 t - \sqrt{t}$.

Pour $y \leqslant a_1 t - \sqrt{t}$, nous obtenons $\sqrt{t} \geqslant \dfrac{1}{a_1 - \frac{y}{t}}$ et

$$S_A(x,y) \leqslant S_A(x,y-1) \leqslant c_{43}(a_1)\ \frac{1}{a_1 - \frac{y}{t}}\ x \exp(y-t-y \operatorname{Log} \frac{y}{t} + a_1\mu)$$

$$\leqslant c_{43}(a_1)\sqrt{t}\ x \exp(y-t-y \operatorname{Log} \frac{y}{t} + a_1\mu)$$

$$\leqslant c_{43}(a_1)\ \frac{\sqrt{t}}{a_1^{\ y}}\ x \exp((a_1-1)t + a_1\mu)$$

puisque $y-t-y \operatorname{Log} \frac{y}{t} \leqslant (a_1-1)t-y \operatorname{Log} a_1$ car $y \leqslant a_1 t$.

Ainsi la proposition 4.5. donne un meilleur résultat que le théorème 4.6.

D'autre part, dans le corollaire 4.3., on suppose que $x > 0$ et $t > 0$, nous obtenons ainsi un élargissement pour $x \in]0,1[$ et $t \in]0,1[$ du théorème 4.6.

Enfin, dans le cas particulier $A = \mathcal{P}$, on obtient :

4.7.- *Corollaire*.- Soit $x \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $y \geqslant 0$ alors

$S_A(x,y) \leqslant c'_{43}\, 2^{-y}\, x\sqrt{t}\, \exp(t+2\mu)$.

§ 5 - *Minorations de* $S_A(x,y)$.

Proposition 5.1.-

Soit $x \geqslant a_1$ et $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a_1} - 1$ alors

$$S_A(x,y) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{x}{a_1^{\,y+1}} .$$

Démonstration : Posons $k = [y] + 1$

(On utilise la méthode de Erdös et Nicolas).

Si n est un multiple de a_1^k alors de façon évidente

$\Omega_A(n) \geqslant k > y$.

Il y a $\left[\dfrac{x}{a_1^k}\right]$ multiples de a_1^k inférieurs à x.

Comme $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a_1} - 1$, $k \leqslant \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a_1}$ et $a_1^k \leqslant x$

par suite :

$$\left[\frac{x}{a_1^k}\right] \neq 0 \quad \text{et} \quad S_A(x,y) \geqslant \frac{x}{2a_1^k} \geqslant \frac{x}{2a_1^{\,y+1}} \quad \text{puisque} \quad [\omega] \geqslant \frac{\omega}{2} \quad \text{pour} \quad \omega \geqslant 1.$$

Remarque : De la même façon que pour 3.3.

si on connaît l'ordre de grandeur de x et de a_1 , on peut toujours minorer $\left[\dfrac{x}{a_1^k}\right]$ par $\dfrac{x}{a_1^k}\left(1 - \dfrac{a_1^k}{x}\right)$, celle-ci étant meilleure que $\dfrac{1}{2}$ dans le cas où $\dfrac{x}{a_1^k} \geqslant 2$.

D'autre part, lorsque $A = \{a_1\}$,

$S_A(x,y) = \text{card}\{n \leqslant x,\ a_1^k | n\} = \left[\frac{x}{a_1^k}\right]$ de cette façon la proposition 5.1. donne le meilleur résultat possible dans ce cas.

De la même manière, il est évident que c'est encore le meilleur résultat pour $x = a_1^s$ $s \in N^*$ et $y = s-1$ puisque, dans ce cas,

$$S_A(x,y) = 1 = \left[\frac{x}{a_1^k}\right] = \frac{x}{a_1^{y+1}} \ .$$

Dans la suite de ce paragraphe on va tout d'abord établir quelques résultats, nous les utiliserons ensuite afin de donner une minoration de $S_A(x,y)$, beaucoup plus fine en général que la précédente.

Le processus pour y parvenir n'est pas sans rappeler celui du paragraphe précédent.

On suppose dans la suite que A possède au moins deux éléments distints que nous noterons a_1 et a_2 $(a_1 < a_2)$. On rappelle que B désigne l'ensemble $A \setminus \{a_1\}$ et par conséquent B n'est pas vide.

Nous noterons pour $m \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $N_A(x,m)$ le cardinal de l'ensemble : $\{n \leqslant x,\ \Omega_A(n) = m\}$. C'est la fréquence avec laquelle $\Omega_A(n)$ prend la valeur m.

Lemme 5.2.- Si $x > 0$, $y \geqslant 0$ et $k = [y] + 1$ alors

$$S_A(x,y) = S_B(x,k-1) + \sum_{m=0}^{k-1} N_B\left(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m\right).$$

Démonstration :

Soit $0 \leqslant j \leqslant k$, $\mathcal{D}_j(x)$ désignera l'ensemble :

$\{n \leqslant \frac{x}{a_1^j}, a_1 | n$ et $\Omega_B(n) \geqslant k-j\}$ et $d_j(x)$ le cardinal de $\mathcal{D}_j(x)$.

Rappelons que $c_j(x) = \text{card } \mathcal{C}_j(x) = \text{card}\{n \leqslant \frac{x}{a_1^j}$ $a_1 \nmid n$ et $\Omega_B(n) \geqslant k-j\}$.

Il en résulte que $\mathcal{C}_j(x) \cup \mathcal{D}_j(x) = \{n \leqslant \frac{x}{a_1^j}$ $\Omega_B(n) \geqslant k- \}$ et $c_j(x) + d_j(x) = S_B(\frac{x}{a_1^j}, k-j-1)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k$.

$\mathcal{D}_j(x)$ est équipotent à l'ensemble suivant :

$\{n \leqslant \frac{x}{a_1^{j+1}}, \Omega_B(n) \geqslant k-j\}$

ainsi $d_j(x) = S_B(\frac{x}{a_1^{j+1}}, k-j-1)$

et de cette manière $c_j(x) = S_B(\frac{x}{a_1^j}, k-j-1) - S_B(\frac{x}{a_1^{j+1}}, k-j-1)$.

Le lemme 4.5. affirme que $S_A(x,y) = \left[\frac{x}{a_1^k}\right] + \sum_{j=0}^{k-1} c_j(x)$

nous en déduisons

$$S_A(x,y) = \left[\frac{x}{a_1^k}\right] + \sum_{j=0}^{k-1} S_B\left(\frac{x}{a_1^j}, k-j-1\right) - S_B\left(\frac{x}{a_1^{j+1}}, k-j-1\right).$$

Remarquons que $\left[\frac{x}{a_1^k}\right] = S_B(\frac{x}{a_1^k}, -1)$.

(On peut étendre la définition de $S_B(x,m)$ pour $m < 0$ de façon triviale). Aussi

$$S_A(x,y) = \sum_1^k S_B(\frac{x}{a_1^j}, k-j-1) - \sum_1^k S_B(\frac{x}{a_1^j}, k-j) + S_B(x,k-1).$$

Enfin comme $S_B(\frac{x}{a_1^j}, k-j-1) - S_B(\frac{x}{a_1^j}, k-j) = N_B(k-j, \frac{x}{a_1^j})$

nous en déduisons finalement :

$$S_A(x,y) = S_B(x,k-1) + \sum_{j=1}^{k} N_B(\frac{x}{a_1^j}, k-j)$$

$$= S_B(x,k-1) + \sum_{0}^{k-1} N_B(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m)$$

Proposition 5.3.- Soient $x \geqslant 3$, $t > 0$ et $\varepsilon \in \left]0,1\right[$.

On suppose que $t \geqslant (a_2+1)(\mu - \mathrm{Log}\,\varepsilon) + c_{51}(a_2)$

(où $\mu = \mu_A(x,t) = \mathrm{Sup}(2, |A(x)-t|)$).

Pour $y \in \left[1, (1-\varepsilon)\frac{\mathrm{Log}\,x}{\mathrm{Log}\,a_1}\right]$ et $M = \mathrm{Inf}\{y, (a_2-1)t\}$ nous avons

$$S_A(x,y) \geqslant c_{52}(a_2)\, \frac{x}{a_1^y}\, e^{(a_1-1)t}\, \varepsilon^{a_2}\, (e^{\mu}\,\mathrm{Log}\,t)^{-a_2} \sum_{1 \leqslant m \leqslant M} \frac{(a_1 t)^m e^{-a_1 t}}{m!}$$

$c_{51}(a_2)$ étant une constante positive prise suffisamment grande.

Démonstration : Nous allons utiliser le résultat précédent.

Par le lemme précédent si bien sûr $k = [y] + 1$

$$S_A(x,y) = S_B(x,k-1) + \sum_{m=0}^{k-1} N_B\left(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m\right)$$

Comme

$$S_B(x,k-1) \geqslant N_B(x,k)$$

on a

$$S_A(x,y) \geqslant \sum_{m=0}^{k} N_B\left(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m\right) \qquad \text{(E.5.1.)}$$

soit encore

$$S_A(x,y) \geqslant \sum_{m'=0}^{k-1} N_B\left(\frac{x}{a_1^{k-m'-1}}, m'+1\right) \quad \text{en posant } m = m'+1$$

$$S_A(x,y) \geqslant \sum_{m'=0}^{k-1} N_B\left(\frac{x}{a_1^{k-m'}}, m'+1\right) \qquad \text{(E.5.2.)} \quad \text{ceci de façon triviale.}$$

On obtient ainsi en ajoutant membre à membre les inégalités (E.5.1.) et (E.5.2.)

$$2S_A(x,y) \geqslant \sum_{m=1}^{k-1} \left(N_B\left(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m\right) + N_B\left(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m+1\right)\right) \qquad \text{(E.5.3.)}$$

Nous allons estimer le second membre de l'inégalité (E.5.3.) en utilisant un résultat sur la distribution locale de $\Omega_A(n)$.

Enonçons ce résultat :

5.3.1.- <u>Théorème</u> 6.1.- Soit $x \geqslant 1$, $t > 0$.

On suppose que $0 < \beta \leqslant \delta \leqslant a_1$ et $A(x) \geqslant c_{61}(\beta,a_1) > 0$, $t \geqslant (a_1+1)\,\frac{\mu}{\beta}$

et $0 \leqslant m \leqslant (a_1-\delta)t$ alors

$$N_A(x,m) + N_A(x,m+1) \geqslant c_{62}(\beta,a_1)\ x\ \frac{t^m}{m!}\ e^{-t}(e^{\mu}\ \mathrm{Log}\ t)^{-a_1}\ .$$

Ce théorème sera montré au paragraphe 6. Il a été établi par G. Halàsz.

5.3.2.- *Retour à la démonstration de la proposition* 5.3.

Nous allons tout d'abord vérifier que nous avons bien les hypothèses du théorème dans lequel on substitue $\frac{x}{a_1^{k-m}}$ à x

B à A , a_2 à a_1 et $\beta = \delta = 1$.

Montrons d'abord : $B(\frac{x}{a_1^{k-m}}) \geqslant c_{61}(\delta,a_2)$.

On a supposé $t \geqslant (a_2+1)(\mu-\mathrm{Log}\ \varepsilon) + c_{51}(a_2)$

par suite $\mathrm{Log}\ \varepsilon \geqslant \mu - \frac{t}{a_2+1}$ (E.5.4.).

$$t \leqslant |t-A(x)| + A(x) \leqslant A(x) + \mu \leqslant \mu + \mathrm{Log}_2 x + c_{53}$$

car $A(x) \leqslant \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \mathrm{Log}_2 x + B_1 + O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ x})$

ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}_2 x &\geqslant t - \mu - c_{53} \\ &\geqslant (a_2+1)(\mu-\mathrm{Log}\ \varepsilon)-\mu+c_{51}(a_2)-c_{53} = a_2(\mu-\mathrm{Log}\ \varepsilon)-\mathrm{Log}\ \varepsilon + c_{51}(a_2)-c_{53} \\ &\geqslant c_{51}(a_2) - c_{53} \geqslant c_{53} \quad \text{pour } c_{51}(a_2) \text{ suffisamment grand.} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\ \varepsilon &\geqslant \mu - \frac{t}{a_2+1} \geqslant \mu - \frac{1}{a_2+1}(2\ \mathrm{Log}_2 x + \mu) \\ &\geqslant \mu(1 - \frac{1}{a_2+1}) - \mathrm{Log}_2 x \geqslant - \mathrm{Log}_2 x. \end{aligned}$$

De l'encadrement $1 \leqslant y \leqslant (1-\varepsilon) \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a_1}$ il résulte que

pour $m = 1,2,\ldots,k-1$

$$x > \frac{x}{a_1^{k-m}} \geqslant \frac{x}{a_1^{k-1}} \geqslant \frac{x}{x^{1-\varepsilon}} = x^{\varepsilon} > e \quad \text{car} \quad \operatorname{Log} \varepsilon \geqslant -\operatorname{Log}_2 x$$

aussi

$$0 \leqslant A(x) - A\Big(\frac{x}{a_1^{k-m}}\Big) \leqslant A(x) - B\Big(\frac{x}{a_1^{k-m}}\Big) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in A}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p \leqslant \frac{x}{a_1^{k-m}}\\ p\in B}} \frac{1}{p}$$

ceci pour $m = 1,2,\ldots,k-1$

soit encore

$$0 \leqslant A(x) - A\Big(\frac{x}{a_1^{k-m}}\Big) \leqslant \frac{1}{a_1} + \sum_{x^{\varepsilon}<p\leqslant x} \frac{1}{p} = \operatorname{Log}_2 x - \operatorname{Log}_2 x^{\varepsilon} + \mathcal{O}(1)$$

car $\dfrac{x}{a_1^{k-m}} \geqslant x^{\varepsilon}$. $\mathcal{O}(1)$ étant effective

et donc

$$0 \leqslant A(x) - B\Big(\frac{x}{a_1^{k-m}}\Big) \leqslant - \operatorname{Log} \varepsilon + \mathcal{O}(1) \qquad (E.5.5)$$

$$\begin{aligned} B\Big(\frac{x}{a_1^{k-m}}\Big) &\geqslant A(x) + \operatorname{Log} \varepsilon + \mathcal{O}(1) \\ &\geqslant t - \mu + \operatorname{Log} \varepsilon + \mathcal{O}(1) \\ &\geqslant c_{51}(a_2) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

puisque $t \geqslant (a_2+1)(\mu - \operatorname{Log} \varepsilon) + c_{51}(a_2)$ donc $t - \mu + \operatorname{Log} \varepsilon \geqslant c_{51}(a_2)$.

Si l'on suppose $c_{51}(a_2)$ suffisamment grand, on a $c_{51}(a_2) + \mathcal{O}(1) \geqslant c_{61}(1,a_2)$ qui est la constante intervenant dans l'énoncé du théorème 6.1.

Ainsi $B(\frac{x}{a_1^{k-m}}) \geqslant c_{61}(\delta,a_2)$ dès que $c_{51}(a_2)$ est pris suffisamment grand.

Montrons maintenant que $t \geqslant \frac{(a_2+1)\mu'}{\beta}$ où $\mu'_m = \mu_B(\frac{x}{a_1^{k-m}},t)$

$$\left|B(\frac{x}{a_1^{k-m}}) - t\right| \leqslant A(x) - B(\frac{x}{a_1^{k-m}}) + |A(x) - t|$$

$$\leqslant \mu + A(x) - B(\frac{x}{a_1^{k-m}}) .$$

D'après (E.5.5.)

$$\left|B(\frac{x}{a_1^{k-m}}) - t\right| \leqslant \mu - \text{Log}\ \varepsilon + O(1)$$

et

$$\mu'_m \leqslant \mu - \text{Log}\ \varepsilon + O(1) \qquad \text{(E.5.6.)}.$$

Or $t \geqslant (a_2+1)(\mu - \text{Log}\ \varepsilon) + c_{51}(a_2)$

aussi

$$t \geqslant (a_2+1)(\mu'+O(1)) + c_{51}(a_2)$$

$\geqslant (a_2+1)\mu'_m$ si l'on suppose $c_{51}(a_2)$ suffisamment grand

ainsi $t \geqslant (a_2+1)\frac{\mu'_m}{\beta}$ puisque $\beta = 1$.

Toutes les hypothèses du théorème 6.1. sont donc satisfaites pour β,μ'_m et a_2. En conséquence :

$$N_B(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m) + N_B(\frac{x}{a_1^{k-m}}, m+1) \geqslant c_{62}(1,a_2)\ \frac{x}{a_1^{k-m}}\ \frac{t^m}{m!}\ e^{-t}(e^{\mu'_m}\ \text{Log}\ t)^{-a_2}$$

pour $m = 1,\dots,[M]$ où l'on rappelle que $M = \mathrm{Inf}\{y,(a_2-1)t\}$.

En corollaire de (E.5.3.) nous obtenons

$$2S_A(x,y) \geq c_{62}(1,a_2)\,\frac{x}{a_1^k}\,e^{-t}\,(\quad \mathrm{Log}\ t)^{-a_2}\sum_{m=1}^{[M]}\frac{t^m a_1^m}{m!}\cdot e^{-\mu'_m a_2}$$

Enfin

$$e^{-\mu'_m a_2} \geq e^{-a_2(\mu-\mathrm{Log}\ \varepsilon+O(1)} = \varepsilon^{a_2}\,e^{-\mu a_2+O(a_2)} \qquad \text{d'après (E.5.6.)}$$

et

$$S_A(x,y) \geq \Big(\frac{c_{62}(1,a_2)}{2}\,\frac{x}{a_1^y}\,e^{-t}\,\varepsilon^{a_2}(e^{\mu}\ \mathrm{Log}\ t)^{-a_2}\sum_{m=1}^{[M]}\frac{(a_1t)^m}{m!}\Big)\exp(O(a_2))$$

Choisissons $c_{52}(a_2) \leq \dfrac{c_{62}(1,a_2)}{2}\ \exp(O(a_2))$ finalement :

$$S_A(x,y) \geq c_{52}(a_2)\,\frac{x}{a_1^y}\,e^{(a_1-1)t}\,\varepsilon^{a_2}(e^{\mu}\mathrm{Log}\ t)^{-a_2}\sum_{m=1}^{[M]}\frac{(a_1t)^m e^{-a_1t}}{m!}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 5.3.

Il reste maintenant à préciser le terme $\displaystyle\sum_{m=1}^{[M]}\frac{(a_1t)^m e^{-a_1t}}{m!}$

qui est une somme partielle d'une série exponentielle.

<u>*Lemme*</u> *5.4.-* On désigne par $Q(t)$ la fonction $t \rightsquigarrow t-(1+t)\mathrm{Log}(1+t)$ définie pour t réel $t > -1$.

Soient u et α des réels vérifiant : $u \geq 6$, $\alpha \in \left[u^{-1/2}, 1-\frac{3}{u}\right]$

dans ces conditions

$$\sum_{1\leq m\leq(1-\alpha)u}\frac{e^{u}u^{m}}{m!} \geq c_{54}\,\frac{(1-\alpha)^{3/2}}{\alpha}\,\frac{e^{Q(-\alpha)u}}{\sqrt{u}}\quad .$$

Démonstration :

On établira un résultat un peu plus fort :

si l'on pose $\gamma = (\alpha(1-\alpha)u)^{-1}$ alors $\gamma \in [0,1]$ et on a

$$\sum_{(1-\gamma)([(1-\alpha)u]-1)\leqslant m \leqslant [(1-\alpha)u]-1} \frac{e^{-u}u^m}{m!} \geqslant c_{54} \frac{(1-\alpha)3/2}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{(Q(-\alpha)u)} \qquad (E.5.6.)$$

Posons $n = [(1-\alpha)u]-1$ et $b = \frac{n}{u}(1-\gamma)$.

Remarquons tout d'abord que γ et $b \in]0,1[$.

La fonction $f(x) = x(1-x)$ est croissante pour $x \leqslant \frac{1}{2}$

et décroissante pour $x \geqslant \frac{1}{2}$ par suite pour

$x \in \left[\frac{1}{\sqrt{u}}, 1-\frac{3}{u}\right]$, $f(x) \geqslant \text{Inf}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{u}, \frac{3}{u} - \frac{9}{u^2}\right) > \frac{1}{u}$

car $u \geqslant 6$

aussi $\gamma = \dfrac{1}{u\, f(\alpha)} < 1$ car $\alpha \in \left[\frac{1}{u}, 1-\frac{3}{u}\right]$

donc $\gamma \in]0,1[$.

D'autre part $(1-\alpha)u \geqslant 3$ car $\alpha \leqslant 1-\frac{3}{u}$ aussi $n \neq 0$.

Comme $\gamma < 1$ cela entraîne $b > 0$.

$$\frac{u}{1-\gamma} = \frac{\alpha(1-\alpha)u^2}{\alpha(1-\alpha)u-1} > u > (1-\alpha)u-1 \geqslant n$$

aussi $b = \frac{n}{u}(1-\gamma) < 1$ donc $b \in]0,1[$

$$\sum_{(1-\gamma)n\leqslant m\leqslant n} \frac{u^m}{m!} = \frac{u^n}{n!} \sum_{0\leqslant m'\leqslant \gamma n} \frac{1}{u^{m'}} \frac{n!}{(n-m')!}$$

$$\geqslant \frac{u^n}{n!} \sum_{0\leqslant m'\leqslant \gamma n} \left(\frac{n-m+1}{u}\right)^{m'} .$$

Pour $0 \leqslant m' \leqslant \gamma n$, $n-m'+1 \geqslant n-\gamma n+1 > n(1-\gamma)$

et ainsi

$$\sum_{(1-\gamma)n\leqslant m\leqslant n} \frac{u^m}{m!} \geqslant \frac{u^n}{n!} \sum_{0\leqslant m'\leqslant \gamma n} b^{m} = \frac{u^n}{n!} \frac{1-b^{[\gamma n]+1}}{1-b} .$$

Or $n \geqslant (1-\alpha)u-2 \geqslant (1-\alpha)\frac{u}{3}$ car $\alpha \leqslant 1-\frac{3}{u}$

$b^{\gamma n+1} \leqslant (\frac{n}{u})^{\gamma n} b \leqslant (1-\alpha)^{\gamma n} b < (1-\alpha)^{\gamma n}$ puisque $b < 1$;

aussi

$\mathrm{Log}\, b^{[\gamma n]+1} < \gamma n \,\mathrm{Log}(1-\alpha) < -\gamma n_\alpha < -\gamma_\alpha (1-\alpha)\frac{u}{3} = -\frac{1}{3}$

et également $b = \frac{n(1-\gamma)}{u} > (1-\alpha-\frac{2}{u})(1-\gamma) > 1-\alpha-\frac{2}{u}-\gamma(1-\alpha)$.

Comme $\frac{2}{u}+\gamma(1-\alpha) = \frac{2}{u}+\frac{1}{\alpha u} \leqslant \frac{3}{\alpha u}$ puisque $\alpha < 1$

$b > 1-\alpha-\frac{3}{\alpha u} \geqslant 1-4\alpha$ car $\alpha > \frac{1}{\sqrt{u}}$.

Nous déduisons de ce qui précède :

$$\sum_{(1-\gamma)n\leqslant m\leqslant n} \frac{u^m}{m!} > \frac{u^n}{n!} \frac{1-b^{[\gamma_n]+1}}{1-b} > \frac{u^n}{n!} \frac{1-e^{-\frac{1}{3}}}{4\alpha} = \frac{1-e^{-\frac{1}{3}}}{4\alpha} \frac{u^{n+2}}{(n+2)!} \frac{(n+1)(n+2)}{u^2}$$

$$> \frac{1-e^{-\frac{1}{3}}}{4\sqrt{2\pi}} \frac{(n+1)\sqrt{n+2}}{u^2} \left(\frac{eu}{n+2}\right)^{n+2} \frac{1}{1+\frac{1}{12(n+2)}}$$ par la formule

de Stirling

$$> c_{54}\left(\frac{eu}{n+2}\right)^{n+2} \frac{(1-\alpha)^{3/2}}{\alpha\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

où $c_{54} = \frac{1-e^{-1/3}}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\frac{1}{48}}$.

Or $(1-\alpha)u \leqslant n+2 \leqslant u(1-\alpha+\frac{1}{u}) \leqslant u$

et comme la fonction $X \rightsquigarrow (\frac{eu}{X})^X$ est croissante pour

$0 < X \leqslant u$ nous obtenons $(\frac{eu}{n+2})^{n+2} \geqslant (\frac{eu}{(1-\alpha)u})^{1-\alpha}$,

et finalement :

$$\sum_{(1-\gamma)n\leqslant m\leqslant n} \frac{u^m}{m!} \geqslant c_{54} \frac{(1-\alpha)^{3/2}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{u}} (\frac{e}{1-\alpha})^{(1-\alpha)u}$$

$$\sum_{(1-\gamma)n\leqslant m\leqslant n} e^{-u} u^m/_{m!} \geqslant c_{54} \frac{(1-\alpha)^{3/2}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{u}} \exp(u-\alpha_u-u(1-\alpha)\mathrm{Log}(1-\alpha))$$

$$\geqslant c_{54} \frac{(1-\alpha)^{3/2}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{u}} \exp(Q(-\alpha)u).$$

Le lemme 5.4. en résulte aussitôt.

Proposition 5.5.- Soient $x \geqslant 3$ et $t > 0$. On suppose que l'on a :

$$(a_2+1)\mu + c_{55}(a_2) \leqslant t \leqslant \frac{\mathrm{Log}\ x}{2a_1 \mathrm{Log}\ a_1} \quad \text{(E.5.7.)}$$ (où $c_{55}(a_2)$ est suffisamment grand et que

$$\frac{3}{t} \leqslant \alpha \leqslant a_1 - \sqrt{\frac{a_1}{t}}$$

alors $S_A(x,\alpha t) \geqslant c_{56}(a_2) \frac{\alpha^{3/2}}{a_1-\alpha}\, x\, e^{t(\alpha-1-\alpha\mathrm{Log}\alpha)} \frac{(e^{\mu}\mathrm{Log} t)^{-a_2}}{\sqrt{t}}$.

Démonstration :

Ce résultat est un corollaire de la proposition 5.3.

Vérifions tout d'abord que nous sommes dans les conditions d'application de celle-ci pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $y = \alpha t$.

Tout d'abord

$$t \geqslant (a_2+1)\mu + c_{55}(a_2) + (a_2+1)\mathrm{Log}\ 2 - (a_2+1)\mathrm{Log}\ 2$$

$$\geqslant (a_2+1)(\mu - \mathrm{Log}\ \tfrac{1}{2}) + c_{51}(a_2) \quad \text{ceci pour} \quad c_{55}(a_2)$$

supérieur à $c_{51}(a_2) + (a_2+1)\mathrm{Log}\ 2$.

D'autre part $y = \alpha t \geqslant \frac{3t}{t} = 3$ et $y \geqslant 1$

$$\alpha t \leqslant \frac{\mathrm{Log}\ x}{2a_1 \mathrm{Log}\ a_1}\left(a_1 - \sqrt{\frac{a_1}{t}}\right) < \frac{1}{2}\mathrm{Log}\ x(\mathrm{Log}\ a_1)^{-1} .$$

Toutes les hypothèses se trouvent ainsi réalisées.

Enfin $M = y$ puisque $y = \alpha t \leqslant a_1 t - t\sqrt{\frac{a_1}{t}} < a_1 t \leqslant (a_2-1)t$ et $M = \mathrm{Inf}\{y,(a_2-1)t\}$.

En conséquence :

$$S_A(x,\alpha t) \geqslant c_{52}(a_2)\, \frac{x}{a_1^{\alpha t}}\, e^{(a_1-1)t}\, \frac{1}{2^{a_2}}\, (e^{\mu}\mathrm{Log}\ t)^{-a_2} \sum_{1 \leqslant m \leqslant y} \frac{(a_1 t)^m e^{-a_1 t}}{m!} .$$

En appliquant le lemme précédent pour $a_1 t$ et $1 - \frac{\alpha}{a_1}$

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant y = \alpha t} \frac{(a_1 t)^m e^{-a_1 t}}{m!} \geqslant c_{54}\, \frac{a_1}{a_1-\alpha}\, \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^{3/2} e^{Q(\frac{\alpha}{a_1} - 1)a_1 t}\, (a_1 t)^{-1/2}$$

soit donc

$$S_A(x,\alpha t) \geqslant c_{52}(a_2)c_{54}\,\frac{1}{2^{a_2}}\,\frac{x}{a_1^{\alpha t}}\,e^{(a_1-1)t}\left(\frac{e^{\mu}\mathrm{Log}\ t)}{a_1-\alpha}\right)^{-a_2} a_1\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^{3/2}\frac{e^{Q(\frac{\alpha}{a_1}-1)a_1 t}}{(a_1 t)^{1/2}}$$

$$Q\left(\frac{\alpha}{a_1}-1\right)a_1 t+(a_1-1)t=\left(\frac{\alpha}{a_1}-1-\frac{\alpha}{a_1}\,\mathrm{Log}\,\frac{\alpha}{a_1}\right)a_1 t+(a_1-1)t$$

$$=(\alpha-1-\alpha\ \mathrm{Log}\ \alpha)t+\alpha t\ \mathrm{Log}\ a_1$$

finalement

$$S_A(x,\alpha t) \geqslant c_{54}c_{52}(a_2)\quad x\quad \frac{1}{2^{a_2}}\,\frac{(e^{\mu}\mathrm{Log}\ t)^{-a_2}}{(a_1-\alpha)}\,\frac{1}{(a_1 t)^{1/2}}\,\alpha^{3/2}\qquad \exp(t(\alpha-1-\alpha\ \mathrm{Log}\ \alpha))$$

$$\geqslant c_{56}(a_2)\,\frac{x}{a_1-\alpha}\left(\frac{e^{\mu}\mathrm{Log}\ t)}{\sqrt{t}}\right)^{-a_2}\alpha^{3/2}\ \exp(t(\alpha-1-\alpha\ \mathrm{Log}\ \alpha))$$

si on pose

$$c_{56}(a_2)=\frac{c_{54}c_{52}(a_2)}{2^{a_2}}\,(a_1)^{-1}\ .$$

<u>*Théorème*</u> *5.6.*- Soient $x \geqslant 3$ et $t > 0$ des réels $\varepsilon \in\ ]0,1[$.

On suppose

1) $t \geqslant (a_2+1)(\mu - \mathrm{Log}\ \varepsilon) + c_{57}(a_2)$ où $c_{57}(a_2) > 0$ est suffisamment grand.

2) $a_1 t - \sqrt{a_1 t} \leqslant y \leqslant (1-\varepsilon)\,\dfrac{\mathrm{Log}\ x}{\mathrm{Log}\ a_1}$

alors :

$$S_A(x,y) \geqslant c_{58}(a_2)\,\frac{x}{a_1^{\,y}}\,e^{(a_1-1)t}\,\varepsilon^{a_2}(e^{\mu}\mathrm{Log}\ t)^{-a_2}\ .$$

Il suffit de montrer que les hypothèses de la proposition 5.3. sont satisfaites.

Tout d'abord $M = \mathrm{Inf}\{y,(a_2-1)t\} \geqslant a_1t - \sqrt{a_1t}$

puisque $(a_2-1)t \geqslant a_1t > a_1t - \sqrt{a_1t}$.

Posons $\theta = \dfrac{1}{\sqrt{a_1t}}$.

La seule chose à vérifier pour appliquer la proposition 5.3. est que $y \geqslant 1$ ce qui est immédiat.

En effet $t > (a_2+1)(\mu - \mathrm{Log}\,\varepsilon) + c_{57}(a_2)$ entraîne $t > 8$ d'autre part, $a_1 \geqslant 2$ aussi $y \geqslant a_1t - \sqrt{a_1t} \geqslant 16 - \sqrt{16} = 12$ du fait que la fonction $x \rightsquigarrow x - \sqrt{x}$ est croissante pour $x \geqslant \frac{1}{4}$.

Il en résulte que $y > 1$.

Nous avons donc :

$$S_A(x,y) \geqslant c_{52}(a_2)\, \frac{x}{a_1^{\,y}}\, e^{(a_1-1)t}\, \varepsilon^{a_2} (e^{\mu}\mathrm{Log}\, t)^{-a_2} \sum_{1\leqslant m\leqslant a_1t(1-\theta)} \frac{(a_1t)^m e^{-a_1t}}{m!} .$$

Il suffit de montrer que la somme précédente peut être minorée par une constante strictement positive :

On applique pour cela le lemme 5.4. avec $u = a_1t$

Nous pouvons l'utiliser puisque

$\dfrac{1}{\sqrt{u}} = \dfrac{1}{\sqrt{a_1t}} = \theta$ et $t > 8$, $a_1 > 2$ entraîne $u \geqslant 16$ donc $u > 6$.

$$\frac{1}{\sqrt{a_1t}} \leqslant \frac{1}{4} < 1 - \frac{3}{u}$$

aussi $$\sum_{1\leqslant m\leqslant a_1t(1-\theta)} \frac{e^{-a_1t}(a_1t)^m}{m!} \geqslant c_{54}\sqrt{a_1t}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_1t}}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{Q(-\theta)u} .$$

Pour $\theta \in]0,1[$, $Q(-\theta) = -\theta - (1-\theta)\mathrm{Log}(1-\theta) \geqslant -\theta^2$ aussi

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant a_1 t(1-\theta)} \frac{e^{-a_1 t}(a_1 t)^m}{m!} \geqslant c_{54}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_1 t}}\right)^{3/2} e^{-a_1 \theta^2 t}$$

$$\geqslant \frac{c_{54}}{e}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_1 t}}\right)^{3/2} .$$

Enfin, la fonction $1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ croît pour $x > 0$ aussi

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_1 t}}\right)^{3/2} \geqslant \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3/2}$$

et $$\sum_{1 \leqslant m \leqslant a_1 t(1-\theta)} \frac{e^{-a_1 t}(a_1 t)^m}{m!} \geqslant \frac{c_{54}}{e}\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} .$$

Pour conclure

$$S_A(x,y) \geqslant c_{58}(a_2)\,\frac{x}{a_1^{\,y}}\, e^{(a_1-1)t}\, \varepsilon^{a_2}\, (e^{\mu}\mathrm{Log}\ t)^{-a_2}$$ où l'on choisit

$$c_{58}(a_2) = c_{52}(a_2)\,\frac{c_{54}}{e} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} .$$

Remarque : Le théorème 5.6. fournit un prolongement de la proposition 5.5. qui avait été établie pour $y \leqslant a_1 t - (a_1 t)^{1/2}$.

Enfin, dans le cas $A = \mathcal{P}$, nous obtenons le corollaire suivant des théorèmes 4.6. et 5.6.

Corollaire 5.7.-

1) Pour $x \geqslant e^e$ et $y \geqslant 0$:

$S(x,y) \leqslant d_{51}\, 2^{-y}\, x(\mathrm{Log}\ x)(\mathrm{Log}_2 x)^{1/2}$.

2) Si $\varepsilon \in \,]0,1[$, $x \geqslant \exp(d_{52}/\varepsilon^4)$ (où $d_{52} > 0$ et

suffisamment grand) et y tel que

$$2 \operatorname{Log}_2 x - \sqrt{2 \operatorname{Log}_2 x} \leqslant y \leqslant (1-\varepsilon) \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} 2}$$

alors

$$S(x,y) \geqslant d_{53}\, 2^{-y}\, x \operatorname{Log} x \left(\frac{\varepsilon}{\operatorname{Log}_3 x}\right)^3 .$$

La démonstration est immédiate :

1) On choisit $t = \operatorname{Log}_2 x$

pour $x \geqslant e^e$, $t \geqslant 1$.

$$\mu = \mu(x,t) = \operatorname{Sup}(2, |P(x)-t|) \leqslant d_{54} \quad \text{car} \quad P(x) = \operatorname{Log}_2 x + B_1 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right)$$

par la proposition 4.6., on a alors

$$S(x,y) \leqslant c_{43}(2) \frac{1}{2^y}\, x \sqrt{\operatorname{Log}_2 x} \operatorname{Log} x \exp(2d_{54})$$

$$\leqslant d_{51}\, 2^{-y}\, x (\operatorname{Log} x)(\operatorname{Log}_2 x)^{1/2} \quad \text{si on pose}$$

$d_{51} = c_{43}(2)\exp(2d_{54})$.

2) On choisit toujours $t = \operatorname{Log}_2 x$

$$\operatorname{Log} x \geqslant \frac{d_{52}}{\varepsilon^4}$$

$$\operatorname{Log}_2 x \geqslant \operatorname{Log} d_{52} - 4 \operatorname{Log} \varepsilon .$$

Comme $\mu \leqslant d_{54}$, on a, certainement $\operatorname{Log} d_{52} \geqslant 4d_{54} + c_{57}(3)$ et $t \geqslant 4(\mu - \operatorname{Log} \varepsilon) + c_{57}(3)$ pour d_{52} assez grand aussi par le théorème 5.6.

$$S(x,y) \geqslant c_{58}(3) \frac{x}{2^y} \text{Log } x \, \varepsilon^3 (e^2 \text{ Log}_3 x)^{-3}$$

$$\geqslant d_{53}\, 2^{-y} \, x \text{ Log } x \left(\frac{\varepsilon}{\text{Log}_3 x}\right)^3 \quad \text{pour} \quad d_{53} = c_{58}(3) e^{-6} \, .$$

Enfin, si l'on rassemble les résultats obtenus pour les théorèmes 4.6. et 5.6. on a pour x,y,t vérifiant les conditions du théorème 5.6. (qui sont plus restrictives que celles de 4.6.)

$$c_{43}(a_1) \frac{x\sqrt{t}}{a_1 y} \exp((a_1-1)t + a_1\mu) \geqslant S_A(x,y) \geqslant c_{58}(a_2) \frac{x}{a_1 y} e^{(a_1-1)t} \varepsilon^{a_2} (e^{\mu} \text{Log } t)^{-a_2} .$$

Le fait que le terme $\frac{x}{a_1 y} \exp((a_1-1)t)$ soit commun nous suggère l'existence d'une formule asymptotique pour $S_A(x,y)$. Toutefois les précédentes méthodes ne permettent pas d'établir un tel résultat. Il faudrait peut-être pour cela une formule de type Selberg et intégrer la fonction $Q(x,A) = \sum_{n \leqslant x} z^{\Omega_A(n)}$ sur un cercle de centre 0 de rayon r de manière similaire à ce qui a été fait par Delange.

§ 6 - *Distribution locale de* Ω_A.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème 6.1. précédemment énoncé, que nous rappelons maintenant.

Théorème 6.1.- Soient $x \geqslant 1$ et $t > 0$. On suppose $0 < \beta \leqslant \delta \leqslant a_1$,

$$A(x) \geqslant c_{61}(\beta, a_1) \qquad t \geqslant (a_1+1)\frac{\mu}{\beta} \qquad 0 \leqslant m \leqslant (a_1-\delta)t$$

alors

$$N_A(x,m) + N_A(x,m+1) \geqslant C_{62}(\beta,a_1) \frac{x\ t^m}{m!} e^{-t} (e^{\mu} \text{ Log } t)^{-a_1}$$

où $c_{61}(\beta,a_1)$ est une constante suffisamment grande et $c_{62}(\beta,a_1)$ suffisamment petite.

6.1.1.- Pour parvenir à ce résultat, nous allons établir quelques propositions préliminaires. En fait la suite réside dans l'étude de la fonction $F(z,\sigma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega_A(n)}}{n^\sigma}$.

Dans la suite A désigne toujours un ensemble non vide de nombres premiers a_1 étant son plus petit élément.

Egalement pour $m \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $N(x,m)$ plutôt que $N_A(x,m)$.

Nous suivrons la méthode due à Haläsz.

Enonçons tout d'abord un premier résultat :

<u>*Proposition*</u> *6.2.*- Soit $A \subset P$ dont le plus petit élément est 2. Si $0 \leqslant m \leqslant (2-\delta)A(x)$, $N(x,m) \leqslant c_{62}(\delta) \frac{x\ A(x)^m}{m!} e^{-A(x)}$

6.2.2.- <u>*Etude de la fonction génératrice de*</u> $z^{g(n)}$.

Nous noterons F la fonction définie par :

$F(z,\sigma) = \prod_{p\in A} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{p^\sigma}}\right) \prod_{p\notin A} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^\sigma}}\right)$ qui converge pour $|z| \leqslant a_1$ et $\sigma > 1$.

En effet, pour $|z| \leqslant a_1$, $\sigma > 1$

$$F(z,\sigma) = \prod_{p\in A} \left(1 + \frac{z}{p^\sigma} + \frac{z^2}{p^{2\sigma}} + \ldots\right) \prod_{p\notin A} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} + \ldots\right)$$

$$|(F(z,\sigma)| \leqslant \prod_{p\in A} \left(1 + \frac{|z|}{p^\sigma} + \frac{|z|^2}{p^{2\sigma}} + \ldots\right) \prod_{p\notin A} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} + \ldots\right) .$$

Or $\prod_{p \notin A} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}}\right) \leqslant \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}}\right) = \zeta(\sigma)$ qui converge car $\sigma > 1$.

(ζ étant la fonction ζ de Riemann).

D'autre part :

$\sum_{\substack{p \geqslant a_1 \\ p \in A}} \left(\frac{|z|}{p^\sigma} + \frac{|z|^2}{p^{2\sigma}} + \ldots\right)$ est une série convergente pour

$|z| \leqslant a_1$ car pour $n \geqslant a_1$ $\frac{|z|}{n^\sigma} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{n^\sigma}} \leqslant \frac{a_1}{n^\sigma} \frac{1}{1 - \frac{a_1}{n^\sigma}} \sim \frac{a_1}{n^\sigma}$ quand

n tend vers $+\infty$.

Or la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_1}{n^\sigma}$ converge puisqu'elle est égale à

$a_1 \zeta(\sigma)$ et $\sigma > 1$.

Ainsi $\sum_{n \geqslant a_1} \frac{a_1}{n^\sigma} \frac{1}{1 - \frac{a_1}{n^\sigma}} \geqslant \sum_{n \geqslant a_1} \frac{|z|}{n^\sigma} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{n^\sigma}} \geqslant \sum_{n \geqslant a_1} \left(\frac{|z|}{n^\sigma} + \frac{|z|^2}{n^{2\sigma}} + \frac{|z|^3}{n^{3\sigma}} + \ldots\right)$

$$\geqslant \sum_{\substack{p \geqslant a_1 \\ p \in A}} \left(\frac{|z|}{p^\sigma} + \frac{|z|^2}{p^{2\sigma}} + \ldots\right).$$

Par suite le produit $\prod_{\substack{p \in A \\ p \geqslant a_1}} \left(1 + \frac{|z|}{p^\sigma} + \ldots\right)$ converge pour $\sigma > 1$

et $|z| \leqslant a_1$.

et $\prod_{p \in A} \frac{1}{1 - \frac{z}{p^\sigma}}$ converge absolument pour $|z| \leqslant a_1$ $\sigma > 1$.

Nous en déduisons que $F(z,\sigma)$ converge absolument pour

$|z| \leqslant a_1$ et $\sigma > 1$.

Par l'identité d'Euler puisque $F(z,\sigma) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 + h(p) + h(p^2) + \ldots)$

où $h(n) = \frac{z^{\Omega_A(n)}}{n^\sigma}$ nous obtenons

$$F(z,\sigma) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{\Omega_A(n)}}{n^\sigma}$$ où la série converge absolument pour $|z| \leqslant a_1$

et $\sigma > 1$.

En particulier, pour $z = 1$, $F(1,\sigma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma)$.

Proposition 6.3.- (Estimation de la série $\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ \Omega_A(n)=m}} \frac{1}{n^\sigma}$) .

Soit $a_1 > \delta > 0$, $1 \leqslant m+1 \leqslant (a_1-\delta)A(y)$ et $\sigma = 1 + \frac{1}{\text{Log } y}$ où $y \geqslant a_1$.

Posons $r = \frac{m+1}{A(y)}$ alors :

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ \Omega_A(n)=m}} \frac{1}{n^\sigma} = F(r,\sigma)\,\frac{A(y)^m}{m!}\,e^{-rA(y)}\left(1 + O_{\delta,a_1}((A(y))^{-1/2})\right).$$

Démonstration :

On suppose que $z = re^{i\theta}$ $\sigma > 1$ dans ce qui suit $|z| = r \leqslant a_1 - \delta$

$$F(z,\sigma) = \prod_{p\in A}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{p^\sigma}}\right)\prod_{p\notin A}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^\sigma}}\right) = \exp\left(\sum_{p\in A} -\text{Log}\left(1-\frac{z}{p^\sigma}\right) + \sum_{p\notin A} -\text{Log}\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right)\right).$$

Nous allons exprimer $F(z,\sigma)$ en fonction de $F(r,\sigma)$

$$\frac{F(z,\sigma)}{F(z,\sigma)} = \exp\left(\sum_{p\in A}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k - r^k}{kp^{k\sigma}}\right) .$$

On peut négliger, dans cette série, les termes dans lesquels k apparaît avec une puissance supérieure à 2.

$$\sum_{p\in A}\sum_{k\geqslant 2}\frac{|z^k - r^k|}{kp^{k\sigma}} \leqslant |z-r|\sum_{p\in A}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|z|^{k-1}+|z|^{k-2}r+\ldots+r^{k-1}}{kp^{k\sigma}}$$

$$\leqslant |z-r|\sum_{p\in A}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(a_1-\delta)^{k-1}}{p^{k\sigma}}$$

car $|z| = r$ et $r \leqslant (a_1-\delta)$.

$$\sum_{p\in A}\sum_{k\geqslant 2}\frac{|z^k - r^k|}{kp^{k\sigma}} \leqslant |z-r|\,|a_1-\delta|\sum_{p\in A}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\frac{(a_1-\delta)^k}{p^k}$$ cette série

étant convergente puisque $p \geqslant a_1-\delta$ et $\sigma > 1$.

Ainsi

$$\sum_{p\in A}\sum_{k\geqslant 2}\frac{|z^k - r^k|}{kp^{k\sigma}} \leqslant |z-r|(a_1-\delta)\sum_{p\in A}\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1-\frac{(a_1-\delta)}{p}}\right)$$

$$\leqslant |z-r|(a_1-\delta)\sum_{p\in \mathcal{P}}\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1-\frac{(a_1-\delta)}{p}}\right).$$

Le terme général de cette dernière série étant équivalent à $\frac{1}{p^2}$ lorsque p tend vers $+\infty$ il en résulte que celle-ci converge et

$$\sum_{p\in A}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|z^k - r^k|}{kp^{k\sigma}} = \mathcal{O}_{a_1,\delta}(r|\theta|).$$

De ce fait

$$F(z,\sigma) = F(r,\sigma)\exp\Big(\sum_{p\in A}\frac{z-r}{p^\sigma} + \mathcal{O}_{a_1,\delta}(r|\theta|)\Big) \qquad (E.6.2).$$

On peut maintenant négliger les termes pour $p > y$ et remplacer σ par 1 pour $p \leqslant y$:

Pour cela, nous observons que

$$\sum_{\substack{p>y \\ p\in A}} \frac{1}{p^{\sigma}} = \int_{y^-}^{+\infty} \frac{d\pi_A(t)}{t^{\sigma}} \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi_A(t)}{t} + \sigma\int_{y^-}^{+\infty} \frac{\pi_A(t)dt}{t^{\sigma+1}}$$

$$\leqslant \sigma \int_{y^-}^{+\infty} \frac{\pi_A(t)dt}{t^{\sigma+1}} \quad .$$

Comme $\pi_A(t) \leqslant \pi(t) = \mathcal{O}(\frac{t}{\text{Log } t})$, il existe une constante positive c_{66} telle que $\pi_A(t) \leqslant c_{66} \frac{t}{\text{Log } t}$

et

$$\sum_{\substack{p>y \\ p\in A}} \frac{1}{p^{\sigma}} \leqslant c_{66}\, \sigma\int_{y^-}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\sigma}\text{Log } t} \leqslant c_{66} \frac{\sigma}{\text{Log } y} \frac{1}{(\sigma-1)y^{\sigma-1}} \quad \text{car} \quad \sigma > 1$$

$$\leqslant c_{66} \frac{\text{Log } y + 1}{\text{Log } y} \frac{1}{e} \quad \text{puisque} \quad \sigma = 1 + \frac{1}{\text{Log } y}$$

$$= \mathcal{O}(1) \quad \text{lorsque} \quad y \to +\infty \ .$$

D'autre part :

$$\sum_{\substack{p\leqslant y \\ p\in A}} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\sigma}}) \leqslant \sum_{\substack{p<y \\ p\in \mathcal{P}}} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\sigma}}) + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^{e}}$$

$$\frac{1}{p^{\sigma}} = \frac{1}{p^{1+\frac{1}{\text{Log } y}}} = \frac{1}{p} \exp(-\frac{\text{Log } p}{\text{Log } y}) = \frac{1}{p} (1 - \frac{\text{Log } p}{\text{Log } y} + \mathcal{O}(\frac{\text{Log}^2 p}{\text{Log}^2 y}))$$

aussi : $\displaystyle \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\sigma}} = \frac{\text{Log}\, p}{p\ \text{Log } y} + \mathcal{O}(\frac{\text{Log}^2 p}{p\ \text{Log}^2 y})$

$$\sum_{p<y} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\sigma}}) = \frac{1}{\text{Log } y} \sum_{p\leqslant y} (\frac{\text{Log } p}{p} + \mathcal{O}(\frac{\text{Log}^2 p}{p\ \text{Log } y})) \leqslant \frac{c'_{66}}{\text{Log } y} \sum_{p\leqslant y} \frac{\text{Log } p}{p}$$

$$= O(1) \quad \text{car} \quad \sum_{p \leqslant y} \frac{\operatorname{Log} p}{p} = \operatorname{Log} y + O(1) \qquad \text{[Har]}$$

aussi

$$\sum_{p \leqslant y} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\sigma}}\right) = O(1).$$

Nous obtenons de cette façon

$$F(z,\sigma) = F(r,\sigma)\exp\Big(\sum_{\substack{p \leqslant y \\ p \in A}} \frac{z-r}{p} + O_{a_1,\delta}(r|\theta|)\Big) =$$

$$= F(r,\sigma)\exp((z-r)A(y))(1 + O_{a_1,\delta}(r|\theta|)).$$

Nous pouvons maintenant étudier la somme

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \Omega_A(n)=m}}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} z^{\Omega_A(n)-m-1} dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \Big(\sum_{n=1} \frac{z^{\Omega_A(n)-m-1}}{n^{\sigma}} dz\Big)$$

car la série $\dfrac{z^{\Omega_A(n)-m-1}}{n^{\sigma}}$ converge uniformément pour $\sigma > 1$

et $|z| < a_1$ en vertu de l'étude concernant $F(z,\sigma)$

ainsi $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ \Omega_A(n)=m}} \frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{F(r,\sigma)}{z^{m+1}} dz.$

En remplaçant $F(r,\sigma)$ par l'expression précédemment établie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} F(r,\sigma) \frac{e^{(z-r)A(y)}}{z^{m+1}} dz + \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \quad + \frac{F(z,\sigma)}{2i\pi} \int_{|z|=r} O_{a_1,\delta}(r|\theta|e^{r(\cos\theta-1)A(y)}).$$

La fonction $\frac{e^{(z-r)A(y)}}{z^{m+1}}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ exepté au point 0. Le résidu en celui-ci est égal à $\frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-rA(y)}$ coefficient d'ordre m dans le développement de Taylor de $e^{(z-r)A(y)}$ au voisinage de 0.

$$\text{Et}\quad \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r} F(r,\sigma)\ \frac{e^{(z-r)A(y)}}{z^{m+1}}\ dz = F(r,\sigma)\ \frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-rA(y)}.$$

Pour la 2ème intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=r} F(r,\sigma) O_{a_1,\delta}(e^{r(\cos\theta-1)A(y)}r|\theta|)\ \frac{dz}{z^{m+1}}\right| \leq \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \left|\frac{F(r,\sigma)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_{67}(\delta,a_1)e^{r(\cos\theta-1)A(y)}r|\theta|d\theta}{r^m}\right|.$$

Comme $\cos\theta-1 \leq -c_{68}\theta^2$

puisque $\cos\theta-1 = -\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}\ \ldots$ où la série est une série uniformément convergente de fonctions continue sur $[-\pi,\pi]$ et donc sa somme est continue et bornée sur cet intervalle.

Par suite

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \frac{F(r,\sigma)}{z^{m+1}}\ O_{a_1,\delta}(e^{r(\cos\theta-1)A(y)}r|\theta|)dz\right| \leq \longleftarrow$$

$r \leq a_1-\delta$

$$\longrightarrow \leq \left|\frac{F(r,\sigma)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_{67}(\delta,a_1)e^{-c_{68}r\theta^2A(y)}r|\theta|d\theta}{r^m}\right|$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \frac{F(r,\sigma)}{z^{m+1}}\, O_{a_1,\delta}(e^{r(\cos\theta-1)A(y)}r|\theta|)dz| \leqslant \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \leqslant \frac{F(r,\sigma)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_{67}(\delta,a_1)e^{-c_{68}u^2}|u|du}{r^m A(y)} \quad \text{en posant} \quad u = \theta\sqrt{r\ A(y)}$$

et majorant par l'intégrale généralisée,

$$\leqslant \frac{F(r,\sigma)}{2\pi r^m}\ \frac{c_{67}(\delta,a_1)}{A(y)}\ O(1) = O_{\delta,a_1}\left(\frac{1}{r^m A(y)}\right)F(r,\sigma) \quad \text{puisque la}$$

dernière intégrale est convergente.

On choisit $r = \dfrac{m+1}{A(y)}$, on a par hypothèse $\dfrac{m+1}{A(y)} < a_1-\delta$

et par conséquent $r \leqslant a_1-\delta$.

L'erreur commise en négligeant la deuxième intégrale est

alors $O_{\delta,a_1}\left(\dfrac{A(y)^{m-1}}{(m+1)^m}\right)F(r,\delta)$ par le choix de r.

$$\sum_{\substack{n=1\\ \Omega_A(n)=m}}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = F(r,\sigma)\left(\frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-rA(y)} + O_{a_1,\delta}\left(\frac{A(y)^{m-1}}{(m+1)^m}\right)\right).$$

Rappelons l'une des formes de la formule de Stirling

$$m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m} \leqslant m! \leqslant m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}\ e^{\frac{1}{12m}}$$

aussi

$$O_{\delta,a_1}\left(\frac{A(y)^{m-1}}{(m+1)^m}\right) = O_{\delta,a_1}\left(A(y)^{m-1}e^{-m}e^{\frac{1}{12m}}\ \frac{\sqrt{2\pi m}}{m!}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi m}}{A(y)}\ O_{\delta,a_1}\left(\frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-m+1}\right)$$

or :

$$\frac{\sqrt{2\pi m}}{A(y)} \leqslant \frac{\sqrt{2\pi(a_1-\delta)A(y)}}{A(y)} = \mathcal{O}_{\delta,a_1}\left(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}\right)$$

finalement

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \Omega_A(n)=m}}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = F(r,\sigma) \frac{A^m(y)}{m!} e^{-(m+1)}\left(1 + \mathcal{O}_{\delta,a_1}\left(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}\right)\right)$$

lorsque $y \to +\infty$, c'est le résultat que nous voulions obtenir.

Remarque 6.3.1.-

Nous avons montré que le terme principal était égal à $F(r,\sigma)\ \frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-rA(y)}$ et que la deuxième intégrale était $\left(\frac{1}{r^m A(y)}\right)F(r,\sigma)$

Le rapport est donc $\mathcal{O}\left(\frac{A(y)^{m+1}}{m!}\ e^{rA(y)} r^m\right)$.

On choisit $r = \frac{m+1}{A(y)}$ ce qui permet de neutraliser le terme $A(y)^{m+1}$ ainsi que $m!$ ce choix étant justifié par le fait que l'on a $(m+1) \leqslant (a_1-\delta)A(y)$.

Corollaire 6.4.-

On suppose que $0 < \delta \leqslant 1$, $1 \leqslant m+1 \leqslant (a_1-\delta)A(y)$ $\sigma = 1 + \frac{1}{\operatorname{Log} y}$ alors

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)}{u^{\sigma+1}}\, du \leqslant c_{69}(\delta,a_1)\ \frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-A(y)} \operatorname{Log} y$ (E.6.3).

2) Si $A(y) \geqslant c'_{69}(\delta,a_1)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)}{u^{\sigma+1}}\, du \geqslant c_{70}(\delta,a_1)\ \frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-A(y)} \operatorname{Log} y \ . \qquad \text{(E.6.4)}$$

Démonstration :

1) $$\sum_{\substack{n=1 \\ \Omega_A(n)=m}}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \int_1^{+\infty} \frac{dN(u,m)}{u^\sigma} = \sigma\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$$

D'autre part, on a également

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \Omega_A(n)=m}}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = F(r,\sigma)\ \frac{A(y)^m}{m!}\ (1 + \mathcal{O}_{\delta,a_1}(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}))\, e^{-rA(y)} \qquad \text{(proposition 6.3.)}$$

Par suite

$$\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} = \frac{F(r,\sigma)}{\sigma}\ \frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-rA(y)} (1 + \mathcal{O}_{\delta,a_1}(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}))$$

de même que précédemment :

$$F(r,\sigma) = \exp(\sum_{p\in A} \frac{r-1}{p^\sigma} + \mathcal{O}_{\delta,a_1}(1))F(1,\sigma) = \exp(\sum_{\substack{p\leqslant y \\ p\in A}} \frac{r-1}{p} + \mathcal{O}(1))F(1,\sigma).$$

On a, d'autre part $\zeta(\sigma) = \dfrac{H(\sigma)}{\sigma-1}$ où H est continue et ne s'annule pas au voisinage de 1. Il en résulte que $\operatorname{Log} H(\sigma)$ est une fonction continue au voisinage de 1 et que $\operatorname{Log} H(\sigma) = \mathcal{O}(1)$ lorsque $y \to +\infty$.

Par suite :

$$F(r,\sigma) = \exp(\sum_{\substack{p\in A \\ p\leqslant y}} \frac{r-1}{p} + \mathcal{O}_{a_1,\delta}(1))\ \frac{1}{\sigma-1} = \operatorname{Log} y\ \exp((r-1)A(y) + \mathcal{O}_{a_1,\delta}(1))$$

.

.

$$\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} = \frac{1}{\sigma}\ \frac{A(y)^m}{m!}\ e^{-A(y)+\mathcal{O}_{a_1,\delta}(1)} \operatorname{Log} y(1 + \mathcal{O}_{a_1,\delta}(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}))$$

soit $c_{69}(\delta,a_1)$ une constante majorant $(1 + \mathcal{O}_{a_1,\delta}(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}))e^{\mathcal{O}_{a_1,\delta}(1)}$

ce qui est possible puisque $A(y) > 0$).

On a $\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant c_{69}(\delta,a_1) \frac{A(y)^m}{m!} e^{-A(y)} \text{Log } y.$

Enfin, si l'on a

$$A(y) \geqslant c'_{69}(\delta,a_1) \qquad \mathcal{O}_{a_1,\delta}(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}) = \mathcal{O}_{a_1,\delta}\left(\sqrt{\frac{c'_{69}(\delta,a_1)}{A(y)}}\right) = \mathcal{O}_{a_1,\delta}(1)$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \geqslant \frac{1}{\sigma} \frac{A(y)^m}{m!} e^{-A(y)} \text{Log } y \; c_{70}(\delta,a_1) \quad \text{où}$$

$c_{70}(\delta,a_1)$ est une constante minorant $(1 + \mathcal{O}_{a_1,\delta}(\frac{1}{\sqrt{A(y)}}))e^{\mathcal{O}_{a_1,\delta}(1)}$.

Remarque 6.4.1.-

En particulier, si on choisit $y = x$, alors pour $u \leqslant x$

$u^{\sigma-1} \leqslant x^{\sigma-1} = x^{\frac{1}{\text{Log } x}} = e$ et on obtient

$$\int_1^x \frac{N(u,m)du}{u^2} \leqslant \int_1^x \frac{N(u,m)x^{\sigma-1}du}{u^{\sigma+1}} = \int_1^x e \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$$

$$\leqslant e \int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)}{u^{\sigma+1}} du$$ car $\sigma > 1$ donc l'intégrale est

convergente.

$$\int_1^x \frac{N(u,m)du}{u^2} \leqslant e \; c_{69}(\delta,a_1) \frac{A(x)^m}{m!} e^{-A(x)} \text{Log } x \quad (E.6.5) .$$

Lemme 6.5.- Soit $x \geqslant 2$ et $m = 0,1,2,\ldots$

alors $N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{61} \dfrac{x}{\mathrm{Log}\ x} \displaystyle\int_1^{x/2} \frac{N(u,m)}{u^2}\, du.$

<u>*Démonstration*</u> :

$$\sum_{\substack{n \leqslant u \\ \Omega_A(n)=m}} \mathrm{Log}\ n = \sum_{\substack{n \leqslant u \\ \Omega_A(n)=m}} \sum_{d/n} \Lambda(d)$$ (où Λ est la fonction de Von Mangolt) ([E11] , page 7)

$$= \sum_{d \leqslant u} \Lambda(d) \sum_{\substack{k' \leqslant \frac{u}{d} \\ \Omega_A(k'd) = m}} 1$$

$$= \sum_{d \leqslant u} \Lambda(d) N\left(\frac{u}{d}, m-\Omega_A(d)\right).$$

Remarquons que l'on peut négliger les termes en $d = p^k$ où $k \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{d=p^k \leqslant u \\ k \geqslant 2}} \Lambda(d) \sum_{\substack{k' \leqslant \frac{u}{d} \\ \Omega_A(k'd)=m}} 1 \leqslant \sum_{\substack{p^k \leqslant u \\ k \geqslant 2}} \mathrm{Log}\ p \frac{u}{p^k} = u \sum_{\substack{p^k \leqslant u \\ k \geqslant 2}} \frac{\mathrm{Log}\ p}{p^k}$$

or

$$\sum_{\substack{p^k \leqslant u \\ k \geqslant 2}} \frac{\mathrm{Log}\ p}{p^k} < \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ k \geqslant 2}} \frac{\mathrm{Log}\ p}{p^k} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\mathrm{Log}\ p}{p^2} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right)$$

$$< \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\mathrm{Log}\ p}{p^2} \frac{1}{(1-\frac{1}{p})} < \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{Log}\ n}{n^2} \frac{1}{(1-\frac{1}{n})}$$ qui converge :

$$\sum_{\substack{n \leqslant u \\ \Omega_A(n)=m}} \mathrm{Log}\ n = \sum_{p \leqslant u} \mathrm{Log}\ p\ N\left(\frac{u}{p}, m-\Omega_A(p)\right) + O(u)$$

$$= \sum_{\substack{p \leqslant u \\ p \in A}} \mathrm{Log}\ p\ N\left(\frac{u}{p}, m-1\right) + \sum_{\substack{p \leqslant u \\ p \notin A}} \mathrm{Log}\ p\ N\left(\frac{u}{p}, m\right) + O(u).$$

De ce fait, pour $u \leqslant x$

$$N(x,m)\operatorname{Log} x \geqslant N(u,m)\operatorname{Log} u \geqslant \sum_{\substack{n \leqslant u \\ \Omega_A(n)=m}} \operatorname{Log} n$$

$$\geqslant \sum_{\substack{p \leqslant u \\ p \in A}} \operatorname{Log} p \; N(\frac{u}{p}, m-1) + \sum_{\substack{p \leqslant u \\ p \notin A}} \operatorname{Log} p \; N(\frac{u}{p}, m).$$

En intégrant entre 1 et x, nous obtenons

$$xN(x,m)\operatorname{Log} x \geqslant \int_1^x N(u,m)\operatorname{Log} u \, du \geqslant \int_1^x (\sum_{\substack{p \leqslant u \\ p \in A}} N(\frac{u}{p}, m-1)\operatorname{Log} p)du +$$

$$+ \int_1^x (\sum_{\substack{p \leqslant u \\ p \in A}} N(\frac{u}{p}, m)\operatorname{Log} p)du$$

$$xN(x,m)\operatorname{Log} x \geqslant \int_1^x N(u,m-1)(\sum_{\substack{p \leqslant \frac{x}{u} \\ p \in A}} p \operatorname{Log} p)du + \int_1^x N(u,m)(\sum_{\substack{p \leqslant \frac{x}{u} \\ p \notin A}} p \operatorname{Log} p)du$$

et encore pour $m+1$

$$xN(x,m+1)\operatorname{Log} x \geqslant \int_1^x N(u,m)(\sum_{\substack{p \leqslant \frac{x}{u} \\ p \in A}} p \operatorname{Log} p)du + \int_1^x N(u,m+1)(\sum_{\substack{p \leqslant \frac{x}{u} \\ p \notin A}} p \operatorname{Log} p)du$$

En ajoutant membre à membre les inégalités précédentes :

$$x[N(x,m) + N(x,m+1)]\operatorname{Log} x \geqslant \int_1^x N(u,m)(\sum_{p \leqslant \frac{x}{u}} p \operatorname{Log} p)du .$$

Enfin, $\displaystyle\sum_{p \leqslant \frac{x}{u}} p \operatorname{Log} p \geqslant \frac{x}{2u} \sum_{\frac{x}{2u} < p < \frac{x}{u}} \operatorname{Log} p = \frac{x}{2u} (\theta(\frac{x}{u}) - \theta(\frac{x}{2u})) \geqslant d_{61} \frac{x^2}{u^2}$

pour $\frac{x}{u} \geqslant 2$ et ainsi $\displaystyle\int_1^{x/2} N(u,m)(\sum_{p \leqslant \frac{x}{u}} p \operatorname{Log} p)du \geqslant d_{61} x^2 \int_1^{x/2} \frac{N(u,m)}{u^2} du$

$$(N(x,m) + N(x,m+1))\operatorname{Log} x \geqslant d_{61} \, x \int_1^{x/2} \frac{N(u,m)}{u^2} du.$$

6.6.- Démonstration de la proposition 6.2.-

Rappelons que l'on a montré précédemment

$$\sum_{\substack{n\leqslant u\\ \Omega_A(n)=m}} \operatorname{Log} n = \sum_{\substack{p\in A\\ p\leqslant u}} \operatorname{Log} p N(\frac{u}{p},m-1) + \sum_{\substack{p\notin A\\ p\leqslant u}} \operatorname{Log} p\ N(\frac{u}{p},m) + \mathcal{O}(u)$$

$$\leqslant \sum_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{Log} p(N(\frac{u}{p},m-1) + N(\frac{u}{p},m)) + \mathcal{O}(u)$$

car $N(m,\frac{u}{p}) = 0$ pour $p \geqslant u$. Les termes de la somme étant tous nuls sauf un nombre fini.

De même, on pose $N(\frac{u}{p},m-1) = 0$ si $m = 0$.

Soit $u \geqslant x$.

$\sum_{\substack{n\leqslant u\\ \Omega_A(n)=m}} \operatorname{Log} n \geqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega_A(n)=m}} \operatorname{Log} n \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{Log} x(N(x,m) - \sqrt{x})$ nous obtenons

par intégration entre x et $2x$:

$$\frac{x}{2}\operatorname{Log} x(N(x,m) - \sqrt{x}) \leqslant \int_x^{2x} \Big(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega_A(n)=m}} \operatorname{Log} n\Big)du \leqslant \int_x^{2x}\Big(\sum_{\substack{n\leqslant u\\ \Omega_A(n)=m}} \operatorname{Log} n\Big)du \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^{2x} \Big(\sum_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{Log} p\ N(\frac{u}{p},m-1) + N(\frac{u}{p},m)\Big) + \mathcal{O}(x^2)$$

$\leqslant \sum_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{Log} p \int_1^{2x} (N(\frac{u}{p},m-1) + N(\frac{u}{p},m))du + \mathcal{O}(x^2)$ puisqu'en fait

cette deuxième somme est finie.

Or,

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{Log} p \int_1^{2x} (N(\frac{u}{p},m-1) + N(\frac{u}{p},m))du = \sum_p p \operatorname{Log} p \int_1^{\frac{2x}{p}} (N(u,m-1)+N(u,m)du$$

car $N(x,k) = 0$ pour $x < 1$ et on peut ramener la borne inférieure d'intégration à 1.

$$\sum_{p\in P} \text{Log } p \int_1^{2x} (N(\frac{u}{p},m-1) + N(\frac{u}{p},m))du = \int_1^{2x} (N(u,m-1)+N(u,m)) \sum_{p \leqslant \frac{2x}{u}} p \text{ Log} p du \cdot$$

Mais $\displaystyle\sum_{p \leqslant \frac{2x}{u}} p \text{ Log } p \leqslant \frac{2x}{u} \sum_{p \leqslant \frac{2x}{u}} \text{Log } p \leqslant \frac{2x}{u}\,\theta(\frac{2x}{u}) \leqslant \frac{M_1}{2}\frac{x^2}{u^2}$

car $\theta(x) = \mathcal{O}(x)$ (théorème de Tchébychef).

En conséquence,

$$x\left[N(x,m) - \sqrt{x}\right]\text{Log } x \leqslant 2\int_1^x \left[N(u,m-1)+N(u,n)\right] \sum_{p \leqslant \frac{2x}{u}} p \text{ Log } p \text{ du} + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\leqslant M_{61}\, x^2\int_1^x \frac{N(u,m-1)du}{u^2} + M_{61}x^2\int_1^x \frac{N(u,m)du}{u^2} + \mathcal{O}(x^2)$$

$$x\left[N(x,m) - \sqrt{x}\right]\text{Log } x \leqslant e\ c_{69}(\delta)\quad M_1x^2(\frac{A(x)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A(x)^m}{m!})e^{-A(x)}\text{Log } x + \mathcal{O}(x^2)$$

ceci en vertu de la remarque 6.4.1.

$$x\left[N(x,m) - \sqrt{x}\right]\text{Log } x \leqslant ec_{69}(\delta)\quad M_1\ x^2\ \frac{A(x)^m}{m!}\ (1+(a_1-\delta)e^{-A(x)}\text{Log } x + \mathcal{O}(x^2)$$

car $m \leqslant A(x)(2-\delta)$ par hypothèse.

Ainsi, on peut trouver $M_{62}(\delta)$ tel que

$$N(x,m)x \text{ Log } x \leqslant M_{62}(\delta)(x^2\ \frac{(A(x))^m}{m!}\ e^{-A(x)} + x^2)$$

soit encore

$$N(x,m) \leqslant M_2(\delta)(x\ \frac{A(x)^m}{m!}\ e^{-A(x)} + \frac{x}{\text{Log } x})$$

la proposition 6.2. sera établie si l'on montre que le terme $\dfrac{x}{\text{Log } x}$ est négligeable par rapport à $\dfrac{x(A(x))^m}{m!}\,e^{-A(x)}$.

Tout d'abord $e^{-A(x)} \geq e^{-\sum\limits_{p\leq x} \frac{1}{p}} = \exp(-\mathrm{Log}_2 x + O(1)) \geq M_{63} \left| \frac{1}{\mathrm{Log}\ x} \right.$.

Il suffit donc d'étudier la quantité $\frac{A(x)^m}{m!}$. On peut considérer

celle-ci comme une fonction de m qui croît si $m \leq A(x)$ et

décroît pour $A(x) \leq m \leq 2A(x)$.

En conséquence, pour m donné inférieur à $2A(x)$, la fonction $\frac{A(x)^m}{m!}$ possède deux minimaux : celui correspondant à $m = 0$ et valant 1 et

celui correspondant à $2A(x)$, valant $\frac{A(x)^{[2A(x)]}}{[(2A(x))!]}$.

Par la formule de Stirling

$$\frac{(A(x))^{[2A(x)]}}{([2A(x)]!)} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi[2A(x)]}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{12[2A(x)]})} \left(\frac{e}{[2A(x)]}\right)^{[2A(x)]} \times (A(x))^{[2A(x)]}$$

$$\geq \left(\frac{e}{2}\right)^{[2A(x)]} \frac{1}{\sqrt{4\pi A(x)}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{12[2A(x)]})} .$$

Quand $x \to +\infty$ si $A(x) \to +\infty$ cette dernière expression tend vers $+\infty$.

Si $A(x) \to M < +\infty$, avec $M > 0$ la limite vaut

$\left(\frac{e}{2}\right)^{[a_1 M]} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi M}(1 + \frac{1}{12[2M]})} > 0$ aussi dans les 2 cas nous pourrons

trouver une constante strictement positive k tel que $\frac{A(x)^{[2A(x)]}}{([2A(x)]!)} \geq k$

pour $x \geq 2$.

Par suite $\dfrac{A(x)^m}{m!} \geqslant \mathrm{Inf}(k,1) > 0$ pour $x \geqslant 2$.

De ce fait, $\dfrac{1}{\mathrm{Log}\ x} \dfrac{1}{(A(x))^m} e^{A(x)} \leqslant \dfrac{1}{M_3 \mathrm{Inf}(k,1)}$

et $\dfrac{x}{\mathrm{Log}\ x} = \mathcal{O}(x \dfrac{A(x)^m}{m!} e^{-A(x)})$.

Nous remarquons donc que le terme $\dfrac{x}{\mathrm{Log}\ x}$ est négligeable par rapport à $\dfrac{xA(x)^m}{m!} e^{-A(x)}$. Il existe ainsi une constante $c_{62}(\delta)$ telle que

$$N(x,m) \leqslant c_{62}(\delta) \frac{xA(x)^m}{m!} e^{-A(x)} \quad \text{pour} \quad x \geqslant 2.$$

Le résultat persiste de façon triviale pour $0 \leqslant x < 2$.

Corollaire 6.6.1.- Soit $0 < \delta \leqslant 1$ et $0 \leqslant m \leqslant (a_1-\delta)A(x)$ alors $N(x,m) \leqslant d_{60}(\delta,a_1)(m+1)^{1/2} \dfrac{xA(x)^m}{m!} e^{-A(x)}$.

Démonstration :

Pour $m \leqslant A(x)$ cela résulte de la proposition précédente. Si $m > A(x)$ alors on utilise la proposition 4.3. Comme $0 < A(x) \leqslant m < a_1 A(x)$

$$N(x,m) \leqslant \mathrm{card}\{n \leqslant x, \Omega_A(n) \geqslant m\} < c_{41}^{(a_1)} \frac{1}{a_1 - \dfrac{m}{A(x)}} x \exp(m-A(x)-m \mathrm{Log} \frac{m}{A(x)} + $$
$$+ 2a_1)$$

et par la formule de Stirling

$$N(x,m) < d_{60}(\delta,a_1)(m+1)^{1/2} \frac{xA(x)^m}{m!} e^{-A(x)}.$$

On décompose maintenant l'intégrale $\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{N(u,m)du}{u^2}$ en deux :

$$\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{N(u,m)du}{u^2} \geqslant \int_1^{\frac{x}{2}} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} = \int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} - \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} .$$

(Les deux intégrales convergent puisque $\sigma > 1$ et $N(u,m) \leqslant u$).

Posons $I = \int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$ $\qquad J = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$.

L'intégrale I a été estimée par le corollaire 6.4.

Nous allons montrer que J est négligeable par rapport à I.

Tout d'abord puisque l'on ne sait pas intégrer des fonctions de $A(u)$ en fonction de u nous avons besoin de l'affirmation suivante :

Lemme 6.7.- Soient a, b, c des réels tels que $a_1 \leqslant a \leqslant b$ $c \geqslant 1$ et on suppose que $0 \leqslant m \leqslant cA(a)$ alors :

$$A^m(b)\, e^{-A(b)} \leqslant d_{62}(c)(\text{Log } a)^{1-c} A^m(a) \exp(-A(a))(\text{Log } b)^{c-1} .$$

Démonstration :

$$\frac{A^m(b)e^{-A(b)}}{A^m(a)e^{-A(a)}} = e^{A(a)-A(b)+m \text{ Log} \frac{A(b)}{A(a)}} \leqslant e^{A(a)-A(b)+ m(\frac{A(b)}{A(a)} - 1)}$$

$$\leqslant e^{(c-1)(A(b)-A(a))}$$

$$\leqslant e^{(c-1)} \sum_{a<p\leqslant b} \frac{1}{p}$$

$$\leqslant e^{(c-1)(\text{Log}_2 b - \text{Log}_2 a)+d_{63}(c)}$$

où d_{63} est calculable puisque $\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \text{Log}_2 x + B_1 + O(\frac{1}{\text{Log } x})$

où B_1 est calculable et O est effective.

$$\frac{A^m(b)e^{-A(b)}}{A^m(a)e^{-A(a)}} \leqslant d_{62}(\frac{\text{Log } b}{\text{Log } a})^{c-1}$$

et finalement $A^m(b)e^{-A(b)} \leqslant d_{62}A^m(a)e^{-A(a)}(\frac{\text{Log } b}{\text{Log } a})^{c-1}$.

Lemme 6.8.-

Soit $z > 0$, $\sigma > 1$ alors pour $m = 0,1,2\ldots$

$$\int_z^{+\infty} \frac{(\text{Log } u)^m du}{u^\sigma} = \frac{z^{1-\sigma}}{\sigma-1}\left((\text{Log } z)^m + \sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(\sigma-1)^k}(\text{Log } z)^{m-k}\right).$$

Démonstration : On démontre ce résultat par récurrence :

$m = 0$ $\quad \int_z^{+\infty} \frac{du}{u^\sigma} = \frac{z^{1-\sigma}}{\sigma-1}$ le résultat est vérifié.

On suppose maintenant la propriété réalisée pour tous les entiers inférieurs ou égaux à m avec $m \geqslant 1$.

On établit tout d'abord la formule de récurrence suivante :

Si on pose $I_m = \int_z^{+\infty} \frac{(\text{Log } u)^m}{u^\sigma} du$; Im est convergente car $\sigma > 1$

pour $m \geqslant 0$ et on a $I_{m+1} - \frac{m+1}{\sigma-1} \text{Im} = \frac{1}{\sigma-1} z^{1-\sigma}(\text{Log } z)^{m+1}$

$$I_{m+1} = \int_z^{+\infty} \frac{(\text{Log } u)^{m+1}}{u^\sigma} du = \left[\frac{(\text{Log } u)^{m+1}}{1-\sigma \quad u^{\sigma-1}}\right]_z^{+\infty} - \frac{(m+1)}{1-\sigma}\int_z^{+\infty} \frac{(\text{Log } u)^m}{u^\sigma} du$$

$$I_{m+1} = \frac{(\text{Log } z)^{m+1}}{\sigma-1 \quad z^{\sigma-1}} + \frac{m+1}{\sigma-1} I_m .$$

Ainsi :

$$I_{m+1} = \frac{1}{\sigma-1} z^{1-\sigma}(\text{Log } z)^{m+1} + \frac{m+1}{(\sigma-1)^2} z^{1-\sigma}(\text{Log}^m z + \sum_{k=1}^{m} \frac{m\ldots(m-k+1)\text{Log}^{m-k} z}{(\sigma-1)^k})$$

$$= \frac{1}{\sigma-1} z^{1-\sigma}((\text{Log } z)^{m+1} \left(\frac{(m+1)(\text{Log } z)^m}{\sigma-1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-k+1)(\text{Log } z)^{m-k}}{(\sigma-1)^{k+1}}\right.$$

$$= \frac{1}{\sigma-1} z^{1-\sigma}((\text{Log } z)^{m+1} + \sum_{k'=1}^{m+1} \frac{(m+1)\ldots(m+1-k'+1)(\text{Log } z)^{m+1-k'}}{(\sigma-1)^{k'}})$$

en posant $k' = k+1$

d'où le résultat.

Lemme 6.9.- On suppose $x \geqslant 2a_1$, $0 < \delta < 1$ et $\sigma > 1$

$0 \leqslant m \leqslant (a_1 - \frac{\delta}{2})A(\frac{x}{2})$ alors

$$J = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant d_{64}(\delta,a_1) \frac{(m+1)^{\frac{1}{2}}(A(\frac{x}{2}))^m e^{-A(\frac{x}{2})}}{m!(\sigma-1)(\frac{x}{2})^{\sigma-1}} \times \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \times \left(1 + \sum_{k=1}^{a_1-1} \frac{(a_1-1)(a_1-2)\dots(a_1-k)}{(\sigma-1)^k(\mathrm{Log}\ \frac{x}{2})^k}\right) .$$

Démonstration :

On utilise le lemme 6.7. avec $a = \frac{x}{2}$, $b = u$, $c = a_1$

et $m \leqslant (a_1 - \frac{\delta}{2})A(\frac{x}{2})$; $N(u,m) \leqslant d_{60}(\frac{\delta}{2},a_1)\sqrt{(m+1)}\ \frac{uA(u)^m}{m!} e^{-A(u)}$

(corollaire 6.6.1.) avec $u \geqslant \frac{x}{2}$

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant d_{60}(\frac{\delta}{2},a_1)\frac{(m+1)^{1/2}}{m!} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{A(u)^m e^{-A(u)}}{u^{\sigma}} du\right)$$

$$\leqslant d_{60}(\frac{\delta}{2},a_1) \frac{(m+1)^{1/2}}{m!} e^{-A(\frac{x}{2})} \frac{A^m(\frac{x}{2})}{e^{A(\frac{x}{2})}} \times \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \times \frac{1}{(\mathrm{Log}\ \frac{x}{2})^{a_1-1}} \times \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{(\mathrm{Log}\ u)^{a_1-1}}{u^{\sigma}} du .$$

Nous évaluons l'intégrale à l'aide du résultat 6.8.

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant d_{60}(\frac{\delta}{2},a_1) \frac{d_{62}(a_1)}{(\frac{x}{2})^{\sigma-1}} \frac{(m+1)^{1/2}}{m!} \frac{e^{-A(\frac{x}{2})}}{\sigma-1} A^m(\frac{x}{2}) \times \left((\mathrm{Log}\ \frac{x}{2})^{a_1-1} +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{a_1-1} \frac{(a_1-1)\dots(a_1-k)(\mathrm{Log}\ \frac{x}{2})^{a_1-1-k}}{(\sigma-1)^k}\right) .$$

En simplifiant

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant d_{64}(\delta,a_1)\ \frac{(m+1)^{1/2}}{m!}\ \frac{e^{-A(\frac{x}{2})}}{(\sigma-1)}\ \frac{A^m(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^{\sigma-1}}\ \left(1+\sum_{k=1}^{a_1-1}\frac{(a_1-1)\ldots(a_1-k)}{(\sigma-1)^k(\text{Log }\frac{x}{2})^k}\right)$$

où l'on a posé $d_{64}(\delta,a_1) = d_{60}(\frac{\delta}{2},a_1)d_{62}(a_1)$.

Théorème 6.10.-

Soit $0 < \delta \leqslant a_1$. Si $A(x) \geqslant d_{65}(\delta,a_1)$ et $0 \leqslant m \leqslant (a_1-\delta)A(x)$, alors $N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{66}(\delta,a_1)x\ \frac{A(x)^m}{m!}\ e^{-A(x)}(\text{Log } A(x))^{-a_1}$ pour $d_{65}(\delta,a_1)$ suffisamment grand et $d_{66}(\delta,a_1)$ suffisamment petit.

Démonstration :

Remarquons que l'on peut supposer $0 < \delta \leqslant 1$ car si m vérifie $m \leqslant (a_1-\delta')A(x)$ où $\delta' \geqslant 1$ en particulier m vérifie $n \leqslant (a_1-\delta)A(x)$ avec $0 < \delta \leqslant 1$. On suppose également $d_{65}(\delta,a_1) \geqslant e^2$ alors $A(x) \geqslant d_{65}(\delta,a_1) \geqslant e^2$.

Dans la suite, nous désignons Log $A(x)$ par w. On a alors $w \geqslant 2$. On choisit $y = x^{\frac{1}{w}}$.

On suppose également $d_{65}(\delta,a_1)$ suffisamment grand de façon que $a_1 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2}$ ce qui résulte du fait que

$$y = x^{\frac{1}{w}} = x^{\frac{1}{\text{Log } A(x)}} \leqslant x^{\frac{1}{\text{Log } d_{65}(\delta,a_1)}}$$

$$y = \exp\frac{\text{Log } x}{\text{Log } A(x)} \geqslant \exp\frac{\text{Log } x}{\text{Log}(\sum\limits_{p\leqslant x}\frac{1}{p})} \geqslant \exp\frac{\text{Log } x}{\text{Log}_3 x}(1+o(1)) \geqslant a_1$$

si x est assez grand et donc si $A(x)$ est suffisamment grand.

D'autre part,

$$0 \leqslant A(x) - A(y) \leqslant \sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p} = \text{Log}_2 x + B_1 + O(\frac{1}{\text{Log } x}) - (\text{Log}_2 x^{\frac{1}{w}} - B_1 - O(\frac{\text{Log } A(x)}{\text{Log } x})$$

$$= \text{Log } w + O(1)$$

$$= \text{Log}_2 A(x) + O(1)$$

aussi pour $d_{65}(\delta,a_1)$ suffisamment grand, on peut supposer $A(y) \geqslant c'_{69}(\frac{\delta}{2},a_1)$ (où $c'_{69}(\frac{\delta}{2},a_1)$ est la constante qui apparaît dans le corollaire 6.4.).

De plus,

$$m \leqslant (a_1-\delta)A(x) = (a_1-\delta)A(y)\,\frac{A(x)}{A(y)} = (a_1-\delta)A(y)\left(\frac{A(x)-A(y)}{A(y)}+1\right)$$

$$\leqslant (a_1-\delta)A(y)\left(1+\frac{\mathrm{Log}_2 A(x)+O(1)}{A(x)-\mathrm{Log}_2 A(x)+O(1)}\right) \leqslant \left(a_1-\frac{3\delta}{4}\right)A(y)$$

Si $d_{64}(\delta,a_1)$ est suffisamment grand.

Les hypothèses du corollaire 6.4. sont satisfaites dans le cas où l'on remplace δ par $\frac{\delta}{2}$.

D'autre part $m \leqslant (a_1-\frac{3\delta}{4})A(y) \leqslant (a_1-\delta/_2)A(\frac{x}{2})$

Il en résulte que les conditions du lemme 6.9. sont vérifiées.

D'après (E.6.4.) :

. $$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)\,du}{u^{\sigma+1}} \geqslant c_{70}(\frac{\delta}{2},a_1)\,\frac{A(y)^m}{m!}\,e^{-A(y)}\,\mathrm{Log}\,y.$$

. D'autre part :

. $$\int^{+\infty} \frac{N(u,m)\,du}{u^{\sigma+1}} \leqslant d_{64}(\delta,a_1)\,\frac{(m+1)^{1/2}}{m!}\,\frac{A(\frac{x}{2})^m}{(\sigma-1)}\,\frac{e^{-A(\frac{x}{2})}}{(\frac{x}{2})^{\sigma-1}}\left(1+\sum_{k=1}^{a_1-1}\frac{(a_1-1)\ldots(a_1-k)}{(\sigma-1)^k(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2})^k}\right).$$

Or comme $y \leqslant \frac{x}{2}$ $$\left(1+\sum_{k=1}^{a_1-1}\frac{(a_1-1)\ldots(a_1-k)}{(\sigma-1)^k(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2})^k}\right) = \left(1+\sum_{k=1}^{a_1-1}(a_1-1)\ldots(a_1-k)\left(\frac{\mathrm{Log}\,y}{\mathrm{Log}\,\frac{x}{2}}\right)^k\right)$$

$$\leqslant 1+\sum_{k=1}^{a_1-1}(a_1-1)\ldots(a_1-k)$$ qui ne dépend que de a_1

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\sigma-1} \quad \frac{2^{\frac{1}{\mathrm{Log}\,a_1}}}{x^{\frac{1}{\mathrm{Log}\,y}}} = \frac{2^{\frac{1}{\mathrm{Log}\,a_1}}}{e^w}$$

et

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant d_{67}(\delta,a_2)\, \frac{(m+1)^{1/2}}{e^w}\, \frac{A(\frac{x}{2})^m}{e^{A(\frac{x}{2})}}\, \frac{\text{Log } y}{m!} \quad .$$

On utilise de nouveau le lemme 6.7. avec $a = y$, $b = \frac{x}{2}$ et $c = a_1$

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant d_{67}(\delta,a_1)\, (\frac{m+1)^{1/2}}{e^w}\, \frac{A(y)^m}{e^{A(y)}}\, \frac{\text{Log } y}{m!}\, d_{62}(a_1)\, (\frac{\text{Log } \frac{x}{2}}{\text{Log } y})^{a_1-1}$$

$$\leqslant d_{67}(\delta,a_1)d_{62}(a_1)\, \frac{(m+1)^{1/2}}{m!}\, \frac{A(y)^m}{e^{A(y)}}\, \frac{\text{Log } y}{e^w}\, w^{a_1-1} \quad .$$

Mais $d_{67}(\delta,a_1)d_{62}(a_1)(a_1+1)^{1/2} w^{a_1-1} e^{-w} \leqslant \longleftarrow$

$$\longrightarrow \leqslant d_{67}(\delta,a_1)d_{62}(a_1)a_1^{1/2}(\text{Log } A(x))^{a_1-1} A(x)^{-1/2}$$

$\leqslant \frac{1}{2}\, c_{70}(\frac{\delta}{2}, a_1)$ si $c_{65}(\delta,a_1)$ est suffisamment grand et $A(x) \geqslant c_{65}(\delta,a_1)$.

Par conséquent,

$$\int_1^{x/2} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} = \int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} - \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\, c_{70}(\frac{\delta}{2}, a_1)\, \frac{A(y)^m}{m!}\, e^{-A(y)}\, \text{Log } y$$

- par le lemme 6.5

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{61}\, \frac{x}{\text{Log } x} \int_1^{x/2} \frac{N(u,m)du}{u^2}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\, d_{61}c_{70}(\frac{\delta}{2}, a_1)\, \frac{x}{\text{Log } x}\, \frac{A(y)^m}{m!}\, e^{-A(y)}\, \text{Log } y$$

Comme $a_1 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2} < x$ et $m+1 \leqslant (a_1 - \frac{\delta}{2})A(\frac{x}{2}) \leqslant (a_1 - \frac{\delta}{2})A(x)$.

Nous pouvons utiliser une fois encore le lemme 6.7. dans le cas $a = y$, $b = x$, $c = a_1$

$$A(x)^m e^{-A(x)} \leqslant A(y)^m e^{-A(y)} \left(\frac{\text{Log } x}{\text{Log } y}\right)^{a_1 - 1} d_{62}(a_1)$$

et

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant \frac{1}{2} \frac{d_{61} c_{70}(\frac{\delta}{2}, a_1)}{d_{62}(a_1)} \frac{x(A(x))^m e^{-A(x)}}{m!} \left(\frac{\text{Log } y}{\text{Log } x}\right)^{a_1}$$

$$\geqslant d_{66}(\delta, a_1) \frac{xA(x)^m}{m!} e^{-A(x)} (\text{Log } A(x))^{-a_1}$$

où $d_{66}(\delta, a_1) = \frac{1}{2} d_{61} c_{70}(\frac{\delta}{2}, a_1) \frac{1}{d_{62}(a_1)}$.

En corollaire, nous avons bien entendu le résultat pour P en prenant $a_1 = 2$.

Cependant, nous pouvons espérer une minoration un peu meilleure :

<u>*Proposition*</u> *6.11.-*

Soit $A \in P$ dont le plus petit élément est 2.

Si $A(x) \geqslant d_{67}(\delta)$ et $0 \leqslant n \leqslant (2-\delta)A(x)$ alors

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{68}(\delta) \frac{x\, A(x)^m}{m!} e^{-A(x)}.$$

<u>*Démonstration*</u> : Celle-ci est semblable à la précédente. On oublie la proposition 6.2. ce qui donne un meilleur résultat que le cas général.

Tout d'abord si $t = x^\alpha$, $\alpha < 1$

$$A(x) - A(t) \leqslant \sum_{t \leqslant p \leqslant x} \frac{1}{p} = O(1) \quad \text{puisque} \quad \sum_{p \leqslant u} \frac{1}{p} = \text{Log Log } u + B_1 + O\left(\frac{1}{\text{Log } u}\right)$$

aussi $(2-\delta)A(x) = (2 - \frac{\delta}{2})A(t) - \frac{\delta}{2} A(x) + (2 - \frac{\delta}{2})O(1)$

$$\leqslant (2 - \frac{\delta}{2})A(t) \quad \text{si} \quad A(x) \geqslant d'_{67}(\delta)$$

et nous pouvons ainsi supposer $(2-\delta)A(x) \leqslant (2 - \frac{\delta}{2})A(x^\alpha) \leqslant (2 - \frac{\delta}{2})A(\frac{x}{2})$ pour $A(x) > d'_{67}(\delta)$ et x assez grand

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant \frac{c_{62}(\delta)}{m!} \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{A(u)^m e^{-A(u)} du}{u^\sigma} \quad \text{(par la proposition 6.2.).}$$

Appliquons le lemme 6.7. avec le choix $a = \frac{x}{2}$, $b = u$, $c = 2$ pour $u \geqslant \frac{x}{2}$

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)}{u^{\sigma+1}} du \leqslant c_{62}(\delta) d_{62}(2) \frac{A^m(\frac{x}{2}) e^{-A(\frac{x}{2})}}{m!} \frac{1}{\text{Log } \frac{x}{2}} \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{\text{Log } u}{u^\sigma} du$$

soit encore par le lemme 6.8.

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)}{u^{\sigma+1}} du \leqslant c_{62}(\delta) d_{62}(2) \frac{A^m(\frac{x}{2}) e^{-A(\frac{x}{2})}}{m!} \frac{1}{\text{Log } \frac{x}{2}} \left(\frac{2}{x}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{\text{Log } \frac{x}{2}}{\sigma-1} + \frac{1}{(\sigma-1)^2}\right).$$

Par le corollaire 6.4. pour $A(y) \geqslant c'_{69}(\delta,2)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \geqslant c_{70}(\delta,2) \frac{A(y)^m}{m!} e^{-A(y)} \text{Log } y \qquad \text{Log } y = \frac{1}{\sigma-1} .$$

Si $y = (\frac{x}{2})^{\frac{1}{k}}$ où $k > 1$ l'intégrale $\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$ sera inférieure à la moitié de $\int_1^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$ dès que

$$d'_{68}(\delta)\ \frac{A^m(\frac{x}{2})e^{-A(\frac{x}{2})}}{m!}\ \frac{1}{\mathrm{Log}\ \frac{x}{2}}\ (\frac{2}{x})^{\sigma-1}(\frac{\mathrm{Log}\ \frac{x}{2}}{\sigma-1}+\frac{1}{(\sigma-1)^2}) \leqslant A^m(y)e^{-A(y)}\mathrm{Log}\ y$$

où $d'_{68}(\delta) = 2c_{62}(\delta)d_{62}(2)(c_{70}(\delta,2))^{-1}$.

En choisissant $\alpha = k$

$$(2-\delta)A(x) \leqslant (2-\frac{\delta}{2})A(y) \leqslant (2-\frac{\delta}{2})A(\frac{x}{2})$$

l'inégalité précédente sera réalisée dès que :

$$d'_{68}(\delta)(d_{62}(2))^{-1}(\frac{2}{x})^{\sigma-1}\ \frac{\mathrm{Log}\ \frac{x}{2}}{\mathrm{Log}\ y}\ (1+\frac{\mathrm{Log}\ y}{\mathrm{Log}\ \frac{x}{2}}) \leqslant 1 \quad ,$$

ou encore

$d'_{68}(\delta)(d_{68}(2))^{-1}\ k\ e^{-k}(1+\frac{1}{k}) \leqslant 1$ ce qui est assuré pour k assez grand.

Par un tel choix de k, nous obtenons

$$\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \leqslant \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}}$$

et ainsi :

$$\int_{1}^{\frac{x}{2}} \frac{N(u,m)du}{u^2} \geqslant \int_{1}^{\frac{x}{2}} \frac{N(u,m)du}{u^{\sigma+1}} \geqslant \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{N(u,m)}{u^{\sigma+1}}\,du$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\, c_{70}(\delta,2)\ \frac{A(y)^m e^{-A(y)}}{m!}\ \mathrm{Log}\ y$$

pour $A(y) \geqslant c'_{69}(\delta,2)$ ce qui est réalisé pour $A(x) \geqslant d_{67}(\delta)$

et enfin $$\int_1^{x/2} \frac{N(u,m)du}{u^2} \geqslant \frac{1}{2} \frac{c_{70}(\delta,2)}{d_{62}(2)} \frac{A(x)^m e^{-A(x)}}{m!} \operatorname{Log} x$$

en utilisant le lemme 6.7. de nouveau avec $a = y$, $b = x$, $c = 2$

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{68} \frac{(A(x))^m e^{-A(x)}}{m!} \operatorname{Log} x \quad \text{où} \quad d_{68} = \frac{d_{61} c_{70}(\delta,2)}{2d_{62}(2)}$$

Démonstration du théorème 6.1. :

Ce théorème n'est autre qu'une forme équivalente du théorème 6.10.

On pose tout d'abord $A(x) = t + z$, aussi $|z| = |A(x)-t| \leqslant \mu = \mu(x,t)$.

Remarquons en premier que $A(x)(a_1 - \frac{\beta}{a_1+1}) \geqslant (a_1-\delta)t$

$$A(x) \geqslant t - \mu \geqslant \frac{a_1+1}{\beta}\mu - \mu \quad \text{car} \quad t \geqslant (a_1+1)\frac{\mu}{\beta} \quad \text{et} \quad t - \mu \leqslant t - |A(x)-t| \leqslant A(x)$$

aussi

$$\mu \leqslant A(x)\Bigl(\frac{1}{\frac{a_1+1}{\beta} - 1}\Bigr) = A(x)\Bigl(\frac{\beta}{a_1 - \beta + 1}\Bigr)$$

$$t \leqslant A(x) + \mu \leqslant A(x)\Bigl(1 + \frac{\beta}{a_1 - \beta + 1}\Bigr)$$

$$(a_1-\delta)t \leqslant (a_1 - \beta)t \leqslant (a_1 - \beta + 1 - 1)\Bigl(1 + \frac{\beta}{a_1 + 1 - \beta}\Bigr)A(x)$$

$$\leqslant \Bigl(a_1 - \frac{\beta}{a_1 + 1 - \beta}\Bigr)A(x) \leqslant \Bigl(a_1 - \frac{\beta}{a_1+1}\Bigr)A(x).$$

Il en résulte $0 \leqslant m \leqslant (a_1-\delta)t \leqslant (a_1 - \frac{\beta}{a_1+1})A(x)$.

Posons $c_{61}(\beta,a_1) \leq 1 + d_{65}(\frac{\beta}{a_1+1}, a_1)$ et supposons $A(x) \geqslant c_{61}(\beta,a_1)$.

Comme $0 \leqslant m \leqslant (a_1 - \frac{\beta}{a_1+1})A(x)$, nous pouvons utiliser le théorème 6.10.

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{66}(\frac{\beta}{a_1+1}, a_1) \times \frac{A(x)^m}{m!} e^{-A(x)} (\mathrm{Log}\ A(x))^{-a_1}$$

$$A(x)^m = (t+z)^m = t^m(1 + \frac{z}{t})^m$$

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{66}(\frac{\beta}{a_1+1}, a_1) \times \frac{t^m}{m!} e^{-t}(1 + \frac{z}{t})^m e^{-z} (\mathrm{Log}\ A(x))^{-a_1}$$

comme $\mathrm{Log}(1+u) \geqslant \frac{u}{1+u}$ pour $u > -1$ en prenant $u = \frac{z}{t}$, nous obtenons

$$m\ \mathrm{Log}(1 + \frac{z}{t}) - z \geqslant m(\frac{\frac{z}{t}}{1 + \frac{z}{t}}) - z = z(\frac{m}{z+t} - 1) = z(\frac{m}{A(x)} - 1)$$

$$\geqslant -|z|\ \left|\frac{m}{A(x)} - 1\right| \geqslant -\mu\ \left|\frac{m}{A(x)} - 1\right| .$$

Comme $\frac{m}{A(x)} \leqslant a_1 - \frac{\beta}{a_1+1}$ $\left|\frac{m}{A(x)} - 1\right| \leqslant a_1$

$$m\ \mathrm{Log}(1 + \frac{z}{t}) - z \geqslant -\mu\ a_1$$

et $$(1 + \frac{z}{t})^m e^{-z} \geqslant e^{-\mu\ a_1} .$$

En conséquence :

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geqslant d_{66}(\frac{\beta}{a_1+1}, a_1) \times \frac{t^m}{m!} e^{-t}\ e^{-\mu a_1} (\mathrm{Log}\ A(x))^{-a_1}$$

$t \geqslant (\frac{a_1+1}{\beta})\mu$ donc $t \geqslant \mu \geqslant 2$

il en résulte que $1 < A(x) \leq t+\mu \leq t^2$ et $(\operatorname{Log} A(x))^{-a_1} \geq (2 \operatorname{Log} t)^{-a_1}$.

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geq d_{66}(\frac{\beta}{a_1+1}, a_1) 2^{-a_1} x \frac{t^m}{m!} e^{-t} e^{-\mu a_1} (\operatorname{Log} t)^{-a_1}$$

si on pose

$$c_{62}(\beta,a_1) = d_{66}(\frac{\beta}{a_1+1}, a_1) 2^{-a_1} \quad \text{finalement :}$$

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geq c_{62}(\beta,a_1) \frac{x\ t^m}{m!} e^{-t} (e^{\mu} \operatorname{Log} t)^{-a_1}$$

ce qui assure le théorème 6.1.

Nous avons la réciproque :

Plaçons nous dans les hypothèses du théorème 6.10. c'est-à-dire $0 < \delta \leq a_1$, $A(x) \geq d_{65}(\delta,a_1)$ et $0 \leq m \leq (a,-\delta)A(x)$.

Pour $d_{65}(\delta,a_1)$ suffisamment grand on a $x \geq 1$.

On choisit $\beta = \delta$

$$c_{61}(\beta,a_1) = d_{65}(\delta,a_1), \quad t = A(x).$$

Alors $0 \leq m \leq (a_1-\delta)t = (a_1-\delta)A(x)$

$$N(x,m) + N(x,m+1) \geq c_{62}(\beta,a_1) \frac{x(A(x))^m}{m!} e^{-A(x)} (e^{\mu} \operatorname{Log} A(x))^{-a_1}$$

$$\geq c_{62}(\beta,a_1) e^{-2a_1} \frac{x(A(x))^m}{m!} e^{-A(x)} (\operatorname{Log} A(x))^{-a_1}$$

car $\mu = \mu(x,t) = \mu(x,A(x)) = 2$

$$\geq d'_{66}(\delta,a_1) \frac{xA(x)^m}{m!} e^{-A(x)} (\operatorname{Log} A(x))^{-a_1}$$

si l'on pose $\qquad d'_{66}(\delta,a_1) = c_{62}(\delta,a_1) e^{-2a_1}.$

§ 7 - *Formule de Delange.*

7.1.- *Définition.*- Soit $A \subset \mathcal{P}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathcal{P}$. Nous dirons que A vérifie une formule généralisée de Selberg s'il existe une fonction F_A holomorphe dans $\mathbb{C}$ ne s'annulant pas sur les réels positifs telle que

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega_A(n)} = z\,F_A(z)x(\mathrm{Log}\ x)^{z-1} + O(x(\mathrm{Log}\ x)^{\mathrm{Re}z-2})$$

7.2.- *Théorème.*- Soit $A \subset \mathcal{P}$ vérifiant la propriété généralisée de Selberg.

Soit $1 < r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2$ alors quand x tend vers $+\infty$

$$s_A(x,\alpha\ \mathrm{Log}_2 x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{F_A(\alpha)}{\alpha - 1}\,\alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha\,\mathrm{Log}_2 x\}}\cdot\frac{x}{(\mathrm{Log}\ x)^{1-\alpha+\alpha\,\mathrm{Log}\,\alpha}(\mathrm{Log}_2 x)^{1/2}}$$

$$\left(1 + O_{r_1,r_2}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}_2\ x}\right)\right)$$

pour $\alpha \in [r_1,r_2]$ (cette formule est donc valable pour $\alpha > 1$).

Démonstration :

Posons $P_{x,A}(z) = \sum_{n\leqslant x} z^{\omega_A(n)}$

nous allons tout d'abord évaluer l'intégrale $I_A = \int_\gamma \frac{P_{x,A}(z)}{(z-1)z^{k+1}}\,dz$ pour $k \in \mathbb{N}$, γ étant un cercle de centre 0 de rayon strictement supérieur à 1.

$$I_A = \int_\gamma \frac{P_{x,A}(z)}{(z-1)z^{k+1}}\,dz = \int_\gamma \frac{\sum_{n\leqslant x} z^{\omega_A(n)}}{(z-1)z^{k+1}}$$

$$= \sum_{n\leqslant x}\int_\gamma \frac{z^{\omega_A(n)}}{(z-1)z^{k+1}}\,dz\ .$$

La fonction $z \overset{f_n}{\rightsquigarrow} \dfrac{z^{\omega_A(n)}}{(z-1)z^{k+1}}$ est holomorphe dans C

sauf en 0 et 1 , $\operatorname{Res}(f_n,1) = 1$.

. Si $\omega_A(n) \geqslant k+1$ dans ce cas il n'y a pas de pôle de f_n en 0 et $\operatorname{Res}(f_n,0) = 0$.

. $\omega_A(n) \leqslant k$, $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-1)z^{k+1-\omega_A(n)}}$ avec $k+1-\omega_A(n) > 0$

au voisinage de 0 , $\dfrac{1}{z-1} = -1-z-z^2\ldots-z^{k+1-\omega_A(n)}+(z^{k+1-\omega_A(n)})$

aussi

$$\frac{1}{(z-1)(z^{k+1-\omega_A(n)})} = -\frac{1}{z^{k+1-\omega_A(n)}} - \frac{1}{z^{k-\omega_A(n)}} \cdots - \frac{1}{z} - 1 + O(z)$$

donc $\operatorname{Res}\left(\dfrac{z^{\omega_A(n)}}{(z-1)z^{k+1}},0\right) = -1$

aussi $$\int \frac{z^{\omega_A(n)}}{(z-1)z^{k+1}}\,dz = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } \omega_A(n) > k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $I_A = \displaystyle\sum_{\substack{n\leqslant x \\ \omega_A(n)>k}} 2i\pi = 2i\pi s_A(x,k)$.

Par suite $$s_A(x,k) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{P_{x,A}(z)}{(z-1)z^{k+1}}\,dz.$$

Comme A vérifie la propriété généralisée de Selberg c'est-à-dire

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega_A(n)} = P_{x,A}(z) = z\,F_A(z)x(\operatorname{Log} x)^{z-1} + O(x(\operatorname{Log} x)^{\operatorname{Re} z-2})$$

où $F_A(z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ ne s'annulant en aucun point de $\mathbb{R}_+^*$.

Nous obtenons :

$$s_A(x,k) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z\,F_A(z)x(\mathrm{Log}\ x)^{z-1}}{(z-1)z^{k+1}}\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathcal{O}(x(\mathrm{Log}\ x)^{\mathrm{Re}z-2})}{(z-1)z^{k+1}}\,dz.$$

Posons $Q(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\mathcal{O}(x(\mathrm{Log}\ x)^{\mathrm{Re}z-2})}{(z-1)z^{k+1}}\,dz$.

Nous allons tout d'abord estimer $Q(x)$

$|Q(x)| \leqslant r \qquad \mathcal{O}(x(\mathrm{Log}\ x)^{r-2})\ \dfrac{1}{(r-1)r^{k+1}}$ puisque $|z| = r$

et que $|z-1|$ est minimal pour $z = r$ et $\mathrm{Re}z$ maximum pour $z = r$

soit encore

$$Q(x) = \frac{\mathcal{O}(x(\mathrm{Log}\ x)^{r-2})}{(r-1)r^k} .$$

Posons $G_A(z) = \dfrac{z\,F_A(z)}{z-1}$; G_A est holomorphe pour $z \neq 1$

puisque $F_A(z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier.
Par la formule de Taylor puisque $r \neq 1$, nous avons

$$G_A(z) = G_A(r) + (z-r)G'_A(r) + (z-r)^2 H_A(z,r) \qquad \text{(E.7.1)}$$

où l'on a $H_A(z,r) = G''_A(r+\ (z-r))\quad \xi \in \,]0,1[$.

G_A étant holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ sa série de Taylor est uniformément convergente dans toute couronne C_{r_1,r_2} de la forme $1 < r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$.

Il en résulte que pour $|z| \in \gamma$ et $1 < r_1 \leqslant r < r_2$ $H_A(z,r)$ est bornée.

En remplaçant $G_A(z)$ par son expression (E.7.1)

$$s_A(x,k) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{G_A(r)x(\mathrm{Log}\ x)^{z-1}}{z^{k+1}}\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(z-2)G'_A(r)x(\mathrm{Log}\ x)^{z-1}}{z^{k+1}}\,dz$$

$$+ (Q + R)(x)$$

où $R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma H_A(z,r)\ \frac{x\ (\mathrm{Log}\ x)^{z-1}}{z^{k+1}}\ (z-r)^2 dz$.

Nous allons évaluer successivement les intégrales.

La fonction $G_A(r)x(\mathrm{Log}_2x)^z\ z^{-k-1} = G_A(z)x\ \exp(z\ \mathrm{Log}_2x)z^{-k-1}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ sauf au point 0 qui est un pôle d'ordre $k+1$, dont le résidu est $x\ G_A(r)\ \frac{(\mathrm{Log}_2x)^k}{k!}$. Par le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{G_A(r)x(\mathrm{Log}\ x)^{z-1}}{z^{k+1}}\,dz = \frac{x}{\mathrm{Log}\ x}\ G_A(r)\ \frac{(\mathrm{Log}_2x)^k}{k!} .$$

De même :

La fonction $\frac{(z-r)G'_A(r)x(\mathrm{Log}\ x)^z}{z^{k+1}}$ est holomorphe sauf en 0 qui est pôle d'ordre $k+1$.

Son résidu en celui-ci est $\frac{x}{\mathrm{Logx}}\ G'_A(r)\left(\frac{(\mathrm{Log}_2x)^{k-1}}{(k-1)!} - r\ \frac{(\mathrm{Log}_2x)^k}{k!}\right)\frac{1}{\ }$

Nous en déduisons que

$$s_A(x,k) = \frac{x}{\mathrm{Log}\ x}\ G_A(r)\ \frac{(\mathrm{Log}_2x)^k}{k!} + x\ G'_A(r)\left(\frac{(\mathrm{Log}_2x)^{k-1}}{(k-1)!} - r\ \frac{(\mathrm{Log}_2x)^k}{k!}\right)\frac{1}{\mathrm{Logx}}$$

$Q(x) + R(x)$.

Ceci pour $1 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Nous allons choisir maintenant $r = \dfrac{k}{\mathrm{Log}_2 x}$.

(En supposant $k > \mathrm{Log}_2 x$, ce qui sera réalisé dans la suite).

De cette manière, le coefficient de $G'_A(r)$ dans la précédente expression s'annule

et $s_A(x,k) = \dfrac{x}{\mathrm{Log}\ x}\, G_A(r)\, \dfrac{(\mathrm{Log}_2 x)^k}{k!} + Q(x) + R(x)$.

Il ne reste qu'à estimer

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi \mathrm{Log}\ x} \int_\gamma \frac{x(z-r)^2 H_A(z,r) e^{z\ \mathrm{Log}_2 x}}{z^{k+1}}\, dz \ .$$

Posons $z = re^{i\theta}$

$$|z-r|^2 |e^{z\ \mathrm{Log}_2 x}| = 2r^2(1-\cos\theta) e^{r\ \mathrm{Log}_2 x \cos\theta} .$$

En majorant :

$$|R(x)| \leqslant \frac{x}{2\pi \mathrm{Log}\ x}\, \frac{M}{r^k} \int_0^{2\pi} 2r^2(1-\cos\theta) e^{r \mathrm{Log}_2 x\cos\theta}\, d\theta \quad \text{où}$$

$$M_{z_1,r_2} = \sup_{z \in C_{r_1,z_2}} |H_A(z,r)| \quad \text{aussi} \quad |R(x)| = O\Big(\frac{x}{\mathrm{Log}\ x}\, r^{2-k} \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta) e^{r\mathrm{Log}_2 x\cos\theta}\, d\theta\Big)$$

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\ \theta) e^{\alpha\cos\theta} = O(e^\alpha \alpha^{-3/2}) \quad \text{quand } \alpha \to \infty \quad \text{(voir [Dieu])}$$

$$|R(x)| = O\Big(\frac{x}{\mathrm{Log}\ x}\, \frac{e^{r\mathrm{Log}_2 x}}{(\mathrm{Log}_2 x)^{3/2}}\, r^{\frac{1}{2}-k}\Big).$$

Par la formule de Stirling : $\dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi k}}\, k^{-k} e^k (1+o(1))$

$$\frac{x}{\mathrm{Log}\ x}\, G_A(r)\, \frac{(\mathrm{Log}_2 x)^k}{k!} = \frac{x}{\mathrm{Log}\ x}\, G_A(r) (\mathrm{Log}_2 x)^k\, \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\, e^k k^{-k} (1+o(1))$$

et ainsi

$$s_A(x,k) = \frac{x}{\operatorname{Log} x} G_A(r) \frac{(\operatorname{Log}_2 x)^k}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{e}{-}\right)^k (1+o(1)) + \mathcal{O}\left(\frac{x(\operatorname{Log} x)^{r-2}}{(r-1)r^k}\right) + \longrightarrow$$

$$\longrightarrow + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\operatorname{Log} x} \frac{e^{r\operatorname{Log}_2 x}}{\operatorname{Log}_2 x)^{3/2}} r^{\frac{1}{2}-k}\right) \qquad (E.7.1)$$

Choisissons maintenant $k = [\alpha \operatorname{Log}_2 x]$ avec $\alpha > 1$,

$1 < r_1 < \alpha \leqslant r_2$, $r = \dfrac{k}{\operatorname{Log}_2 x} = \dfrac{[\alpha \operatorname{Log}_2 x]}{\operatorname{Log}_2 x} \to \alpha$ quand $x \to +\infty$

aussi pour x suffisamment grand $1 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$

$r = \alpha + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\operatorname{Log}_2 x}\right)$.

On peut évaluer $G(r)$:

$$G(r) = G(\alpha) + (r-\alpha)G'(\alpha) + \frac{(r-\alpha)^2}{2!} G''(\alpha) + \dots \quad \text{par la formule de Taylor}$$

$$= G(\alpha)\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}_2 x}\right)\right).$$

En remplaçant dans (E.7.1)

$$s_A(x,\alpha \operatorname{Log}_2 x) = \frac{x}{\operatorname{Log} x} G_A(\alpha)\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}_2 x}\right)\right)\left(\frac{e}{k}\right)^k \frac{(\operatorname{Log}_2 x)^k}{\sqrt{2\pi k}} + \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{O}\left(\frac{x(\operatorname{Log} x)^{r-2}}{(r-1)r^k}\right) + \left(\frac{x}{\operatorname{Log} x} \frac{e^{r\operatorname{Log}_2 x}}{(\operatorname{Log}_2 x)^{3/2}} r^{\frac{1}{2}-k}\right)$$

Il ne reste qu'à évaluer chacun des termes de la précédente égalité.

Tout d'abord le terme principal :

$$\frac{x}{\text{Log } x} G_A(\alpha)(1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 x}))(\frac{e}{k})^k \frac{(\text{Log}_2 x)^k}{\sqrt{2\pi k}}$$

$$(\frac{e \text{ Log}_2 x}{k})^k = (\frac{e}{\alpha})^k (1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 x}))^k = \frac{(\text{Log } x)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha \text{Log}_2 x - \{\alpha \text{Log}_2 x\}}} (1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 x}))$$

aussi

$$(\frac{e}{k} \text{ Log}_2 x)^k \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{(\text{Log } x)^{\alpha - \alpha \text{Log } \alpha + \{\alpha \text{ Log}_2 x\} - \frac{1}{2}}}{(\text{Log}_2 x)^{1/2}} (1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 x}))$$

$$\frac{x}{\text{Log } x} G_A(\alpha) (\frac{e \text{ Log}_2 x}{k})^k (1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 x})) \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{\text{Log } x^{1-\alpha+\alpha \text{Log}\alpha}}$$

$$\frac{F_A(\alpha)}{\alpha - 1} \frac{\frac{1}{2} + \{\alpha \text{ Log}_2 x\}}{\sqrt{2\pi}} (1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 x}))$$

$$O(\frac{x}{\text{Log } x} \frac{e^{r\text{Log}_2 x}}{(\text{Log}_2 x)^{3/2} \; r^{k-1/2}}) = \frac{x}{\text{Log } x} \frac{e^{\text{Log}_2 x + O(1)}}{(\alpha(1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 x})))^{k-\frac{1}{2}}} O_{r_1,r_2}(\frac{1}{(\text{Log}_2 x)^{3/2}})$$

$$= \frac{x}{\text{Log } x^{1-\alpha}} \frac{\alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha \text{Log}_2 x\}}}{\alpha^{\alpha \text{Log}_2 x}} O_{r_1,r_2}(\frac{1}{(\text{Log}_2 x)^{3/2}})$$

$$= \frac{x}{\text{Log } x^{1-\alpha+\alpha \text{Log}}} \alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha \text{Log}_2 x\}} O_{r_1,r_2}(\frac{1}{(\text{Log}_2 x)^{3/2}}).$$

Aussi :

$$O_{r_1,r_2}(\frac{x}{\text{Log } x} \frac{e^{r\text{Log}_2 x}}{(\text{Log}_2 x)^{3/2}} \; r^{k-1/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F_A(\alpha)}{\alpha - 1} \frac{\alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha \text{Log}_2 \alpha\}}}{(\text{Log}_2 x)^{1/2}} \times \longleftarrow$$

$$\to \times \frac{x}{(\mathrm{Log}\ x)^{1-\alpha+\alpha\mathrm{Log}\alpha}}\ \mathcal{O}_{r_1,r_2}\left(\frac{1}{(\mathrm{Log}_2 x)^{3/2}}\right)$$

car $F_A(\alpha) \neq 0$ par hypothèse.

De même le terme

$$\mathcal{O}\left(\frac{x(\mathrm{Log}\ x)^{r-2}}{(r-1)r^k}\right) \quad \text{est} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{F_A(\alpha)}{\alpha-1}\ \frac{\alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha\mathrm{Log}_2\alpha\}}}{(\mathrm{Log}_2 x)^{1/2}}\ \frac{x}{(\mathrm{Log}\ x)^{1-\alpha+\alpha\mathrm{Log}\alpha}}\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\mathrm{Log}_2 x)^{3/2}}\right).$$

Finalement :

$$s_A(x,\alpha\mathrm{Log}_2 x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{F_A(\alpha)}{\alpha-1}\ \frac{\alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha\mathrm{Log}_2\alpha\}}}{(\mathrm{Log}_2 x)^{1/2}}\ \frac{x}{(\mathrm{Log}\ x)^{1-\alpha+\alpha\mathrm{Log}\alpha}}\ \mathcal{O}_{r_1,r_2}\left(\frac{1}{(\mathrm{Log}_2 x)^{3/2}}\right)$$

7.3.- *Corollaire*.-

$$s_{\mathcal{P}}(x,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{F(\alpha)}{\alpha-1}\ \frac{\alpha^{\frac{1}{2}+\{\alpha\mathrm{Log}_2 x\}}}{(\mathrm{Log}\ x)^{1-\alpha+\alpha\mathrm{Log}\alpha}}\ \frac{x}{(\mathrm{Log}_2 x)^{1/2}}\ \left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}_2 x}\right)\right).$$

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate que l'ensemble des nombres premiers vérifie la formule de Selberg (voir [Sel])

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)} = z\ F(z)x(\mathrm{Log}\ x)^{z-1} + \mathcal{O}(x(\mathrm{Log}\ x)^{\mathrm{Re}z-2})$$

où $F(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1-\dfrac{z}{p-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^2$ formule valable pour $z \in \mathbb{C}$

et $F(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 7.4.- Soit $A \subset P$ vérifiant la propriété généralisée de Selberg. Soit $0 < r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2 < 1$ alors quand x tend vers $+\infty$.

$$\mathrm{Card}\{n \leqslant x,\ \omega_A(n) \leqslant \alpha \mathrm{Log}_2 x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{2}^{+\{\alpha \mathrm{Log}_2 x\}} \frac{x(1+O((\mathrm{Log}_2 x)^{-1}))}{(\mathrm{Log}\ x)^{1-\alpha+\alpha\mathrm{Log}\alpha}} \frac{1}{(\mathrm{Log}_2 x)^{1/2}} .$$

Démonstration :

Soit γ un cercle de centre 0 et de rayon r avec $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

On considère de même l'intégrale $J_A = \int_\gamma \frac{P_{x,A}(z)\,dz}{(1-z)z^{k+1}}$

$$J_A = \sum_{n \leqslant x} \int_\gamma \frac{z^{\omega_A(n)-k-1}}{1-z}\, dz.$$

Comme pour $k \in \mathbb{N}$ les fonctions $z \rightsquigarrow \frac{z^{\omega_A(n)-k-1}}{1-z}$ sont holomorphes dans la couronne $C(r_1,r_2)$ sauf en 0 eventuellement nous avons $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z^{\omega_A(n)-k-1}}{1-z} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_A(n) > k \\ 1 & \text{si } \omega_A(n) \leqslant k \end{cases}$ et

$$J_A = 2i\pi \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \omega_A(n) \leqslant k}} 1 = 2i\pi\ \mathrm{card}\{n \leqslant x ; \omega_A(n) \leqslant k\}.$$

On choisit alors comme précédemment $r = \frac{[\alpha \mathrm{Log}_2 x]}{\mathrm{Log}_2 x}$ $k = \alpha \mathrm{Log}_2 x$.

Le reste de la démonstration est identique à celle du théorème.

Remarque : La démonstration des théorèmes 7.2. et 7.4. permet d'affirmer que ceux restent valables si F_A est uniquement holomorphe dans un disque de centre 0 de rayon R où $R > 1$ pour le premier cas et indifférent pour le deuxième puisque nous ne considérons pas le comportement de F_A à l'extérieur de celui-ci.

3ÈME P A R T I E

NOMBRES ω-LARGEMENT-COMPOSÉS

Cette partie est consacrée à l'étude des nombres ω hautement composés et des nombres largement composés, qui constituent deux suites d'entiers possédant de nombreux diviseurs premiers par rapport au reste des éléments de $\mathbb{N}$. Nous donnerons exactement la distribution des nombres ω-hautement composés.

On ne connaît pas avec précision la distribution des nombres largement composés, ceci restant un problème non résolu. Si $W_\ell(x)$ désigne le nombre d'entiers ω largement composés inférieurs à x nous ne pouvons donner qu'un encadrement du logarithme de $W_\ell(x)$ de la forme $c_1\sqrt{\operatorname{Log} x}(1+O(1)) \leqslant \operatorname{Log} W_\ell(x) \leqslant c_2\sqrt{\operatorname{Log} x}(1+O(1))$.
Il semble que $\operatorname{Log} W_\ell(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\operatorname{Log} x}$ lorsque x tend vers l'infini mais ceci n'est pas encore établi. Dans cette étude, nous essaierons de donner des minorations de $\operatorname{Log} W_\ell(x)$ se rapprochant de $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\operatorname{Log} x}$.

§ 1 - *Distribution des nombres ω hautement composés.*

Définition 1.1.- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous dirons que n est ω hautement composé dans $\mathbb{N}^*$ si pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m < n$ entraîne $\omega(m) < \omega(n)$.

Proposition 1.2.- La su'te des nombres ω hautement composés est exactement la suite $N_k = e^{\theta(p_k)}$ pour $k \geqslant 1$.

Démonstration :

Tout d'abord N_k est ω hautement composé : en effet, N_k par définition est le plus petit entier n tel que $\omega(n) = k$ par suite si $m < N_k$, $\omega(m) < k = \omega(N_k)$.

La réciproque est tout aussi immédiate.

Soit n un nombre ω hautement composé et $k = \omega(n)$

alors $N_k \leqslant n$ puisque N_k est le plus petit entier m tel que $\omega(m) = k$ Comme n est ω hautement composé si $N_k \neq n$, $\omega(n) > \omega(N_k) = k$ ce qui est absurde.

La connaissance exacte des nombres ω hautement composés permet bien évidemment d'en déduire leur distribution dans $\mathbb{N}$.

Théorème 1.2.-

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. On pose $W_h(x) = \text{card}\{n \leqslant x,\ n$ est ω hautement composé$\}$ alors $W_h(x) = \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log Log } x} + O(\dfrac{\text{Log } x}{(\text{Log Log } x)^2})$ tend vers l'infini.

Démonstration :

Ce théorème n'est que nouvelle forme du théorème 2.2. de la deuxième partie.

§ 2 - *Eléments de la théorie des partitions, contribution de ceux-ci à l'étude de certaines inéquations à coefficients entiers.*

Pour aborder l'étude des nombres ω largement composés que nous définirons au paragraphe 3 nous devons majorer le logarithme du nombre de solutions de deux inéquations à coefficients entiers, nous y parvenons grâce aux résultats d'Erdös et de Ramanujan relatifs à la théorie des partitions.

Dans ce paragraphe, nous majorons le logarithme du nombre de solutions de l'inéquation

$$E_1 : x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_rp_r+\ldots+y_1p_1+y_2p_2+\ldots+y_sp_s+\ldots \leqslant n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

avec $x_i \in \{0,1\}$; $y_j \in \{0,1\}$

ainsi que le logarithme du nombre de solutions de

$E_2 : x_1+2x_2+\ldots+rx_r+\ldots+y_1+2y_2+\ldots+RY_R+\ldots \leqslant n$ où $x_i \in \{0,1\}$, $y_j \in \{0,1\}$ avec $\sum\limits_{i\geqslant 1} x_i = \sum\limits_{j\geqslant 1} y_j$.

Définition 2.1.- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers croissante pour k tendant vers $+\infty$.

On dit que $\{u_{k_1},\ldots,u_{k_s}\}$ constitue une partition de n en sommant de la suite u_k si $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_s}$, où $u_{k_1} \leqslant u_{k_2} \leqslant \ldots \leqslant u_{k_s}$.

Lorsqu'on impose aux u_{k_i} d'être tous distincts on dit que $\{u_{k_1},\ldots,u_{k_s}\}$ est une partition de n en sommant distincts de la suite u_k.

Proposition 2.2.- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $P(n)$ le nombre de partitions de n en sommants premiers inégaux Alors lorsque n tend vers l'infini $\operatorname{Log} P(n) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{n}{\operatorname{Log} n}}$.

Lemme 2.2.1

Soit $\gamma(n)$ une suite d'entiers positifs telle que $f_\gamma(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} \gamma(n) \sim kx^u(\operatorname{Log} x)^v$ avec $k > 0$ et $u > 0$.

On pose $g_\gamma(s) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1-e^{-sn})^{\gamma(n)}} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_\gamma(m)e^{-sm}$ qui converge pour $\operatorname{Re} s > 0$ alors lorsque s tend vers 0 par valeurs réelles positives $\operatorname{Log} g_\gamma(s) \sim k(\frac{1}{s})^u(\operatorname{Log} \frac{1}{s})^v\Gamma(1+u)\zeta(1+u)$.

Ce lemme est démontré dans [Brig].

Corollaire 2.3.-

1) $\operatorname{Log} \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (\dfrac{1}{1-e^{-sn}}) \sim \dfrac{\pi^2}{6s}$ lorsque $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, s tendant vers 0.

2) $\operatorname{Log} \prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1-e^{-sn}}\right) \sim \frac{\pi^2}{6s} \left(\operatorname{Log}\left(\frac{1}{s}\right)\right)^{-1}$ pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, tendant vers 0.

Démonstration :

Si on pose $z = e^{-s}$ alors $|z| < 1$ et le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^n}$ converge absolument et uniformément dans tout disque $|z| \leqslant r < 1$ il en est de même pour $\prod_{p \in P} \frac{1}{1-z^n}$.

Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent :

Pour le premier cas, on pose $\gamma(n) = 1$ pour tout n, ainsi $k = 1$, $u = 1$, $v = 0$, $\Gamma(1+u) = \Gamma(r) = 1$, $\xi(1+u) = \xi(r) = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour le deuxième cas $\gamma(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

aussi $k = 1$, $u = 1$ et $v = -1$.

Théorème 2.4. (Ramanujan).-

Soit a_n une suite d'entiers positifs, $A > 0$ et $\alpha > 0$ des réels, si :

1) $\sum_{n \geqslant 0} a_n e^{-sn}$ converge pour tout s réel strictement positif.

2) $\operatorname{Log}\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n e^{-sn}\right) = \frac{A}{s^\alpha} \left(\operatorname{Log}\left(\frac{1}{s}\right)\right)^{-\beta} (1+o(1))$ pour $s \to 0$, $s > 0$

alors :

$$A_n = a_o + a_1 + \dots + a_n = \exp\left(\left(B\, n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (\operatorname{Log} n)^{\frac{-\beta}{1+\alpha}}\right)(1+o(1))\right) \text{ lorsque } n \text{ tend}$$

vers $+\infty$, B étant égal à $A^{\frac{1}{1+\alpha}}\, \alpha^{-\frac{1}{1+\alpha}} (1+\alpha)^{1+\frac{\beta}{1+\alpha}}$.

La démonstration de ce théorème se trouve dans [Ram] page 253.

Définition 2.5.-

Si a_n est une suite d'entiers positifs, $f(x)$ est la fonction génératrice de a_n pour $|x| < r$ si

1) la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour tout x tel que $|x| < r$.

2) pour $|x| < r$, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Proposition 2.6.-

La fonction génératrice de $P(n)$ est $\sum_{p\in P} \left(\frac{1-x^{2p}}{1-x^p}\right)$ pour $|x| < 1$.

Démonstration :

Posons $\psi(x) = \prod_{p\in P} \left(\frac{1-x^{2p}}{1-x^p}\right)$ et pour $k \in N^*$, $\psi_k(x) = \prod_{\substack{p\leq p_k \\ p\in P}} \left(\frac{1-x^{2p}}{1-x^p}\right)$

$\psi_k(x) = \prod_{\substack{p\leq p_k \\ p\in P}} (1+x^p) = \sum_{n=0}^{p_1+p_2+\dots+p_k} P_k(n)x^n$ où $P_k(n)$ est le nombre de solutions de l'équation $X_1 p_1 + \dots + X_k p_k = n$ avec $X_i \in \{0,1\}$ c'est donc le nombre de partitions de n en sommants premiers distincts inférieurs à p_k (Par convention, on pose pour tout k, $P_k(0) = 1$ et $P(0) = 1$. Il est clair que pour $k' \geq k$, $P_k(n) \leq P_{k'}(n)$ et que si $n \leq p_k$, $P_k(n) = P(n)$.

Par suite, $\lim_{k\to+\infty} P_k(n) = P(n)$.

Le produit $\psi(x)$ est convergent pour $|x| < 1$.

$\sum_{n=0}^{p_k} P(n)x^n \leq \psi_k(x) \leq \psi(x)$.

Aussi la série $\sum_{n\geq 0} P_k(n)x^n$ converge sur tout disque $|x| \leq \delta < 1$ uniformément en x et k. En conséquence :

$$\psi(x) = \lim_{k\to+\infty} \psi_k(x) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\geq 0} P_k(n)x^n = \sum_{n\geq 0} P(n)x^n$$

et $\psi(x)$ est la fonction génératrice du nombre de partitions de n en sommant premiers distincts.

2.7.- *Démonstration de la proposition 2.2.*

La fonction génératrice de $\bar{P}(n) = P(n) - P(n-1)$ pour $n \geq 1$ est $(1-x)\psi(x)$ avec $|x| < 1$.

Si on pose $x = e^{-s}$ pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$

$\text{Log}((1-x)\psi(x)) = \text{Log}(1-e^{-s}) + \text{Log } g(s) - \text{Log}(g(2s))$ où $g(s)$ désigne $\prod_{p\in P} \left(\frac{1}{1-e^{-sn}}\right)$ pour $s > 0$.

Par le corollaire 2.3. $\text{Log}((1-e^{-s})\psi(e^{-s})) = \frac{\pi^2}{12s} (\text{Log}(\frac{1}{s}))^{-1}(1+o(1))$ lorsque s tend vers 0, $s > 0$.

Le théorème 2.4. entraîne alors (avec $A = \frac{\pi^2}{12}$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$)

$P(n) = \bar{P}(1) + \bar{P}(2) + \dots + \bar{P}(n) = \exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{n}{\text{Log } n}} (1+o(1)))$.

Remarque 2.7.1.-

On désigne par $P^*(n)$ le nombre de partitions (sans restriction) de n en sommants premiers. Par la même méthode, on peut montrer que $\text{Log } P^*(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n}{\text{Log } n}}(1+o(1))$ (voir [Ram] , page 260).

Théorème 2.8.- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q(n)$ le nombre de solutions de l'inéquation suivante :

$$\sum_{i\geq 1} x_i p_i + \sum_{j\geq 1} y_j p_j \leq n \quad \text{où } x_i \in \{0,1\} \quad \text{et} \quad y_j \in \{0,1\}.$$

Lorsque n tend vers l'infini :

$$\text{Log } Q(n) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n}{\text{Log } n}} .$$

Démonstration :

Désignons tout d'abord par $Q^*(n)$ le nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i\geq 1} x_i p_i + \sum_{j\geq 1} y_j p_j = n \quad \text{avec} \quad x_i \, , \, y_j \quad \text{valant} \quad 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Il apparaît que $Q(m) = \sum_{m=1}^{n} Q^*(m)$ et que

$$Q^*(m) = \sum_{k=0}^{n} P(k)P(n-k). \quad (\text{Si nous posons } Q^*(0) = 1).$$

Nous en déduisons que la fonction génératrice de Q^* est $F(s) = (\psi(e^{-s}))^2 = (1 + \sum_{n\geq 1} P(n)e^{-sn})^2$ qui converge pour $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Nous avons remarqué que $\mathrm{Log}\, \psi(e^{-s}) \sim \frac{1}{2s}\frac{\pi^2}{6} \mathrm{Log}\, \frac{1}{s}$ lorsque $\substack{s \to 0 \\ s\in\mathbb{R} \\ s>0}$ aussi

$$\mathrm{Log}\, F(s) \sim \frac{\pi^2}{6s} \mathrm{Log}(\frac{1}{s}) \quad \text{quand} \quad \substack{s \to 0 \\ s\in\mathbb{R} \\ s>0} \quad .$$

Comme $Q(n) = \sum_{m=1}^{n} Q^*(m)$:

par le théorème 2.4. de Ramanujan, nous obtenons :

$$\mathrm{Log}\, Q(n) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n}{\mathrm{Log}\, n}} \, , \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \, .$$

Dans la suite $p(n)$ désigne le nombre de partitions de n en sommants entiers distincts.

Proposition 2.9.-

1) La série $\sum_{n\geq 0} p(n)x^n$ est convergente pour $|x| < 1$ (par convention nous posons $p(0) = 1$).

2) $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1+x^n)$ où $|x| < 1$ est la fonction génératrice de p.

La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la propriété 2.6.

Corollaire 2.10.-

$$\text{Log } p(n) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\, n(1+o(1)) \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty\ .$$

Démonstration : On raisonne de façon identique à démonstration de la proposition 2.2. :

La fonction génératrice de $\bar{p}(n) = p(n)-p(n-1)$ est $(1-x)\Psi(x)$ si $x = e^{-s}$, $s > 0$

$$\begin{aligned}\text{Log}\Big(\sum_{n\geqslant 0} \bar{p}(n)e^{-sn}\Big) &= \text{Log}((1-e^{-sn})\Psi(e^{-s})) \\ &= \text{Log}(1-e^{-sn})+\text{Log}(f(s))-\text{Log}(f(2s))\end{aligned}$$

et par le corollaire 2.3.

$$\text{Log}\Big(\sum_{n\geqslant 0} \bar{p}(n)e^{-sn}\Big) \simeq \frac{\pi^2}{12s} \quad \text{lorsque} \quad \begin{matrix} s \to 0 \\ s > 0 \end{matrix} \qquad (E.2.1.)\ .$$

Nous déduisons alors du théorème 2.4. que

$$\text{Log}(p(n)) = \text{Log}(\bar{p}(1) + \ldots + \bar{p}(n)) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{n}(1+o(1)).$$

Remarque 2.10.1.-

Si $\bar{p}^{*}(n)$ désigne le nombre de partitions de n en sommants entiers (non nécessairement distincts) alors de la même façon que précédemment on peut montrer que $\text{Log } p(n) \;\; \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\, \sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$ (voir [AY] ou [Ram] ou [And] ou encore [Niv]).

Notations.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ $q(n)$ désigne le nombre de solutions de l'inéquation $x_1+2x_2+\ldots+rx_r+\ldots+y_1+2y_2+\ldots+sy_s+\ldots \leqslant n$ où $x_i \in \{0,1\}$, $y_i \in \{0,1\}$.

On pose $q(0) = 1$.

$U(n)$ est le nombre de solutions du système $S(n)$

$x_1+2x_2+\ldots+ix_i+\ldots+y_1+2y_2+\ldots+jy_j+\ldots \leqslant n$ où $x_i \in \{0,1\}$, $y_j \in \{0,1\}$ avec $\sum_{i\geqslant 0} x_i = \sum_{j\geqslant 0} y_j$. De même par convention $U(0) = 1$.

Théorème 2.11.-

Lorsque n tend vers l'infini $\operatorname{Log} U(n) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{n}(1+o(1))$.

On établit ce résultat par majoration et minorations successives.

Proposition 2.12.-

Lorsque n tend vers l'infini $\operatorname{Log} q(n) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{n}(1+o(1))$.

Démonstration :

Si $q^*(n)$ désigne le nombre de solutions de l'équation $\sum_{i\geqslant 1} ix_i + \sum_{j\geqslant 1} jy_j = n$ avec $x_i \in \{0,1\}$, $y_i \in \{0,1\}$ alors $q^*(n) = \sum_{k=0}^{n} p(k)p(n-k)$ et $q^*(n) = q(n) - q(n-1)$.

De ce fait, si $G(s)$ est la fonction génératrice de $p(n)$, celle de $q^*(n)$ est égale à $(G(s))^2$.

Or

$2\operatorname{Log} G(s) \sim \frac{\pi^2}{6s}$ lorsque $s > 0$ tend vers 0 (d'après E.2.1.)

et par le théorème 2.4. :

$$\operatorname{Log} q(n) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{n}(1+o(1))$$

de cette façon comme $U(n) \leqslant q(n)$, $\operatorname{Log} U(n) \leqslant \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{n}(1+o(1))$

2.1.3.- Minoration.

. Pour minorer le logarithme de $U(n)$ nous utilisons l'inégalité de Cauchy Schwartz :

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $x_j, y_j \in \mathbb{C}$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\ell=1}^{m} |y_\ell|^2\right)^{1/2}$$ avec égalité si et seulement si $(x_1,\ldots,x_m)$ et $(y_1,\ldots,y_m)$ sont proportionnels.

Soit $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} x_i = \ell = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j & x_i \in \{0,1\} \quad ; \quad y_j \in \{0,1\} \\ \\ x_1+2x_2+\ldots+rx_1+\ldots+y_1+2y_2+\ldots+ry_r = n \end{cases}$$ est égal à

$\sum_{m=1}^{n} p_\ell(m)p_\ell(n-m)$ où $p_\ell(m)$ est le nombre de partitions de m en ℓ sommants entiers distincts. Aussi le nombre de solutions du système $S(n)$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ldots+rx_2+\ldots+y_1+2y_2+\ldots+ry_2 = n \\ \sum_{i=1}^{+\infty} x_i = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j & x_i \in \{0,1\} \quad ; \quad y_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

est égal à

$$\sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} p\ (m)p\ (n-m)\right) = \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} p\ (m).p\ (n-m)\right).$$

Suppons que n soit un entier pair.

Dans ce cas

$$U(n) \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell\left(\frac{n}{2}\right)p_\ell\left(\frac{n}{2}\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 = \frac{1}{n}\, p^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

ceci grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Nous en déduisons

$$\text{Log } U(n) \geqslant 2\text{Log } p(\tfrac{n}{2}) - \text{Log } n$$

comme $\text{Log } p(\frac{n}{2}) \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n}$; $2\text{Log } p(\frac{n}{2}) - \text{Log } n \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n}{2}}$ lorsque $n \to +\infty$, soit encore $\text{Log } U(n)$ est supérieur à une expression équivalente à une expression équivalente à $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$ lorsque n est pair.

Pour terminer montrons que $U(n)$ est une fonction croissante : Toute solution du système $S(n)$ peut se mettre sous la forme

$x_1+2x_2+\ldots+sx_s+\ldots+y_1+2y_2+\ldots+ry_r = n$ avec $x_i \in \{0,1\}$, $y_i \in \{0,1\}$

$\sum_{i\geqslant 1} x_i = \sum_{j\geqslant 1} y_j$, $y_r = 1$ et $y_j = 0$ si $y > r$.

On peut alors faire correspondre la solution $(x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots)$ de $S(n+1)$ donnée par :

$$x_1+2x_2+\ldots+sx_s+\ldots+y_1+2y_2+\ldots+(r-1)y_{r-1}+y_r(r+1) = n+1.$$

Nous obtenons une injection de l'ensemble des solutions de $S(n)$ dans celui de $S(n+1)$ et ainsi $U(n+1) \geqslant U(n)$ finalement si n est impair

$\text{Log } U(n) \geqslant \text{Log } U(n-1) \geqslant \pi\sqrt{\frac{2}{3}\quad n}(1+o(1))$ lorsque n tend vers $+\infty$.

§ 3 - *Répartition des nombres* ω *largement composés* (*majoration*).

3.1.- *Définition*.- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous dirons que n et ω-largement-composé (en abrégé $\omega.\ell.c$) si $\omega(m) \leqslant \omega(n)$ pour tout $m \leqslant n$.

Exemples :

N_k , $\frac{N_{k+1}}{p_r}$ pour $r \leqslant k$ sont ω-largement-composés.

Les nombres $\omega.\ell.c$ sont les entiers possédant "beaucoup" de facteurs premiers.

3.2.- *Théorème*.- Soit x un réel positif, on note $W_\ell(x)$ le cardinal de l'ensemble $\{n \leqslant x,\ n \text{ est } \omega.\ell.c\}$.

Nous nous pouvons trouver deux constantes C_1 et C_2 telles que $\exp(C_1\sqrt{\text{Log } x}) \leqslant W_\ell(x) \leqslant \exp(C_2\sqrt{\text{Log } x})$ lorsque x tend vers l'infini.

La démonstration de ce théorème constitue l'essentiel de ce paragraphe. Elle a été établie par P. Erdös et J.L. Nicolas.

Lemme 3.3.-

Soient $e_k = \text{card } E_k$, $E_k = \{n < N_{k+1} \quad \omega(n) = k\}$

$e'_k = \text{card } E'_k$, $E'_k = \{n < N_{k+1} \quad \omega(n) = \Omega(n) = k\}$

alors $e_k \leqslant p_{k+1} e'_k$.

Démonstration :

Nous pouvons écrire $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$ si $n \in E_k$ (Les q_i étant distincts).

A cet entier, on associe $Q(n) = q_1 \dots q_k$ $Q(n) \in E'_k$

$$\frac{n}{Q(n)} < \frac{N_{k+1}}{q_1 \dots q_k} \leqslant \frac{N_{k+1}}{N_k} = p_{k+1} .$$

On en déduit que pour $n' \in E'_k$ il existe au plus $p_{k+1}-1$ entiers n tels que $n' = Q(n)$ et par suite $e_k \leqslant p_{k+1} e'_k$.

Proposition 3.4.- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_o > 0$ tel que :

$W_\ell(x) \leqslant \exp(2\pi\sqrt{\frac{2}{3} \text{ Log } x(1+\varepsilon)})$ pour $x \geqslant x_o$.

Démonstration :

Soit $n' \in E'_k$, on distingue les facteurs premiers de n' inférieurs à p_k en écrivant :

$$n' = 2^{1-y_{k-1}}\, 3^{1-y_{k-2}} \cdots p_k^{1-y_o}\, p_{k+1}^{x_1} \cdots p_{k+r}^{x_r}$$

où x_i et y_j appartiennent à $\{0,1\}$, ces nombres étant tous nuls sauf au plus k d'entre eux puisque $n' \in E'_k$ et nous avons $\sum\limits_{i\geqslant 1} x_i = \sum\limits_{j\geqslant 0} y_i$.

Par cette égalité, nous obtenons

$$\frac{n'}{N_k} = 2^{-y_{k-1}}\, 3^{-y_{k-2}} \cdots p_k^{-y_o}\, p_{k+1}^{x_1} \cdots p_{k+r}^{x_r} \cdots = \left(\frac{2}{p_k}\right)^{-y_{k-1}} \left(\frac{3}{p_k}\right)^{-y_{k-2}} \cdots \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^{x_1} \cdots \times$$

$$\times \left(\frac{p_{k+r}}{p_k}\right)^{x_r} \times \cdots$$ Comme $n' \in E'_k$ $\operatorname{Log} \dfrac{n'}{N_k} \leqslant \operatorname{Log} p_{k+1}$ soit encore

$$I : x_1 \operatorname{Log}\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) + x_2 \operatorname{Log}\left(\frac{p_{k+2}}{p_k}\right) + \ldots + x_r \operatorname{Log}\left(\frac{p_{k+r}}{p_k}\right) + \ldots + y_o \operatorname{Log} \frac{p_k}{p_k} + y_1 \operatorname{Log} \frac{p_{k+1}}{p_k} +$$

$$+ \ldots + y_{r'} \operatorname{Log} \frac{p_{k-r'}}{p_k} + \ldots \leqslant \operatorname{Log} p_{k+1} .$$

Afin de majorer T le nombre de solutions de cette inéquation nous allons décomposer celle-ci en 3 nouvelles inégalités : I_1, I_2 , I_3 de manière que le nombre de solutions de I_2 et I_3 soit négligeable par rapport à celui de I_1.

La décomposition de I est liée au partage des nombres premiers en trois ensembles :

Tout d'abord par le théorème des nombres premiers $p_{k+1} = p_k + \mathcal{O}\left(\dfrac{p_k}{\operatorname{Log} p_k}\right)$ lorsque k tend vers $+\infty$. Le terme d'erreur étant effectif (voir [Ell]).

Par suite lorsque $k \to +\infty$, $p_{k+1} < p_k + \dfrac{p_k}{\mathrm{Log}\, p_k}$.

(En fait, il est établi que $p_{k+1} < p_k + (p_k)^{\beta}$ lorsque $k \to +\infty$ pour tout $\beta > \frac{7}{12}$ voir [Hux]).

Soit R_1 le plus grand entier tel que $p_{k+R_1} < p_k + \dfrac{p_k}{\mathrm{Log}\, p_k}$

R_1 n'est pas nul lorsque k tend vers l'infini en vertu de ce qui précède.

De même R_2 étant le plus grand entier tel que $2p_{k-R_2} > p_k$ on peut affirmer que ce nombre n'est pas nul (grâce au postulat de Bertrand pour cela voir [Niv]).

On désigne alors par I_1, I_2, I_3, les inéquations successives :

$$I_1 : x_1 \mathrm{Log}\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)+\ldots+x_{R_1} \mathrm{Log}\, \frac{p_{k+R_1}}{p_k} + y_1 \mathrm{Log}\, \frac{p_k}{p_1} + \ldots + y_{R_2} \mathrm{Log}\, \frac{p_k}{p_{k-R_2}} \leqslant \mathrm{Log}\, p_{k+1}.$$

$$I_2 : \sum_{r=R_1+1}^{+\infty} x_r \mathrm{Log}\, \frac{p_{k+2}}{p_k} \leqslant \mathrm{Log}\, p_{k+1}$$

$$I_3 : \sum_{s'=R_2+1}^{k-1} y_s \mathrm{Log}\, \frac{p_k}{p_{k-s}} \leqslant \mathrm{Log}\, p_{k+1} .$$

Enfin, T_i désignera le nombre de solutions de I_i pour $i = 1,2,3$.

De cette manière card $E'_k \leqslant T \leqslant T_1 T_2 T_3$.

3.4.1. - *Estimation de* T_2.

Dans I_2 les variables x_r ne prennent qu'une valeur nulle dès que $p_{k+r} > p_k p_{k+1}$.

Comme $p_{k+r} > p_k + \dfrac{p_k}{\mathrm{Log}\, p_k}$ pour $r \geqslant R_1+1$

$$\text{Log}\,\frac{p_{k+r}}{p_k} > \text{Log}\left(1+\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)$$

et les solutions de I_2 sont encore solutions de l'inéquation

$$x_{R_1+1}+x_{R_1+2}+\ldots+x_{R_1+r}+\ldots \leqslant \frac{\text{Log}(p_{k+1})}{\text{Log}\left(1+\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)}\ .$$

De ce fait, chaque solution de I_2 compte au plus

$\left[\text{Log}\,p_{k+1}\left(\text{Log}\left(1+\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)\right)^{-1}\right]$ variables ayant une valeur éventuellement non nulle.

Comme $\sum\limits_{j\leqslant i}\binom{m}{j} \leqslant im^i$ pour $m \geqslant i \geqslant 2$

$$T_2 \leqslant \frac{\text{Log}\,p_{k+1}}{\text{Log}\left(1+\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)}\,(p_k p_{k+1})^{(\text{Log}\,p_{k+1})\left(\text{Log}\left(1+\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)\right)^{-1}}$$

En conséquence

$$\text{Log}\,T_2 \leqslant \text{Log Log}\,p_{k+1} - \text{Log Log}\left(1+\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right) + (\text{Log}\,p_k p_{k+1})\frac{\text{Log}\,p_{k+1}}{\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\left(1+O\left(\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)\right)}$$

$$\frac{\text{Log Log}\left(1+\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)}{\sqrt{p_k}} = \frac{\text{Log}\left(\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\left(1+O\left(\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)\right)\right)}{\sqrt{p_k}}$$

$$= \left(-\text{Log Log}\,p_k + O\left(\frac{1}{\text{Log}\,p_k}\right)\right)p_k^{-\frac{1}{2}}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Par suite $\text{Log}\,T_2 = O((\text{Log}\,p_k)^3) = o(\sqrt{p_k})$.

3.4.2. - Estimation de T_3.

Pour $s \geqslant R_2+1$, $p_k > 2p_{k-s}$ aussi les solutions de I_3 vérifient

$$\sum_{s=R_2+1}^{k-1} y_s \leqslant \frac{\text{Log } p_{k+1}}{\text{Log } 2}$$ et de la même manière que précédemment

$$T_3 \leqslant \frac{\text{Log } p_{k+1}}{\text{Log} 2} (k-1)^{\frac{\text{Log } p_{k+1}}{\text{Log } 2}}$$

ainsi $\text{Log } T_3 = O((\text{Log } p_k)^2) = o(\sqrt{p_k})$.

3.4.3. - Estimation de T_1.

Elle repose sur l'inégalité démontrée par Brun et Tichsmarsh dont Mongomery et Vaughan ont donné la forme :

$$\pi(x) - \pi(x-y) \leqslant \frac{2y}{\text{Log } y} \quad \text{pour} \quad 1 < y \leqslant x$$ (voir [Halb], chapter 3, § 4)

Soit $s \leqslant R_1$, on peut appliquer la précédente inégalité avec le choix $x = p_{k+s}$, $y = p_{k+s} - p_k$.

Ainsi $p_{k+s} - p_k \geqslant \frac{s}{2} \text{Log}(p_{k+s} - p_k) \geqslant \frac{s}{2} \text{Log } s$.

Comme $\text{Log } x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$ pour $x \geqslant 1$

$$\text{Log } \frac{p_{k+s}}{p_k} \geqslant \frac{p_{k+s} - p_k}{p_k} \geqslant \frac{s}{2p_k} \text{Log}(p_{k+s} - p_k).$$

Remarquons tout d'abord que R_1 tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$.

En effet, supposons R_1 borné soit donc $R_1 < M$ pour tout k $p_{k+R_1}-p_k = p_{k+R_1}-p_{k+R_1-1} + \dots + p_{k+1}-p_k$. Soit $\alpha \in \left[\frac{7}{12}, 1\right]$

Pour $k \geqslant k_o(\alpha)$ et $p_{k+1}-p_k < (p_k)^\alpha$ (voir [Hux]) aussi

$$p_{k+R_1+1}-p_k \leqslant (R_1+1)(p_{k+R_1+1})^\alpha \leqslant (M+1)(p_{k+M+1})^\alpha = \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \leqslant (M+1)k \text{ Log } k \quad (1+O(\frac{\text{Log}_2 k}{\text{Log} k}))$$ puisque M est fixé (et donc ne dépend pas de k).

D'autre part, $p_{k+R_1+1} > p_k(1+\frac{1}{\text{Log } p_k})$ par définition de R_1 soit encore $p_{k+R_1+1}-p_k \geqslant k(1+O(\frac{\text{Log Log } k}{\text{Log } k}))$. Comme $\alpha < 1$, nous déduisons une contradiction de ces deux inégalités de ce fait R_1 tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$.

De la même manière lorsque $k \to +\infty$, R_2 tend vers $+\infty$.

Soit $s \leqslant R_1$, $p_{k+s}-p_k \geqslant \frac{s}{2} \text{ Log } s$.

$$\text{Log}(p_{k+s}-p_k) \geqslant \text{Log } s + \text{Log Log } s - \text{Log } 2$$

ainsi

$$p_{k+s}-p_k \geqslant \frac{s}{2} (\text{Log } s + \text{Log Log } s - \text{Log } 2) > \frac{p_s}{2} \quad \text{pour} \quad s \geqslant s_o$$

(ce qui est possible pour k tendant vers $+\infty$ puisque R_1 tend vers $+\infty$).

On a certainement $s_o \leqslant 7022$ puisque

$k(\text{Log } k + \text{Log Log } k - 0{,}9385) \geqslant p_k$ dès que $k \geqslant 7022$ (voir [Robin]). On montre de même que $p_k - p_{k-r} \geqslant \frac{p_r}{2}$, $r \geqslant s'_o$. Par suite lorsque $k \to +\infty$, les solutions de I_1 vérifient l'inéquation :

$$\frac{x_1}{2p_k}\,\mathrm{Log}(p_{k+1}-p_k)+\dots+x_{s_o-1}\left(\frac{s_o-1}{2p_k}\right)\mathrm{Log}(p_{k+s_o-1}-p_k)+\frac{x_{s_o}}{2}\frac{p_s}{p_k}+\dots+$$

$$+\dots+\frac{x_{R_1}}{2}\frac{p_{R_1}}{p_k}+\frac{y_1}{2p_k}\,\mathrm{Log}(p_k-p_{k-1})+\dots+(s'_o-1)\,\frac{y_{s'_o-1}}{2p_k}\,\mathrm{Log}(p_k-p_{k-s'_o+1})+ \leftarrow$$

$$\rightarrow \frac{y_{s'_o}}{2}\frac{p_{s'_o}}{p_k}+\dots+\frac{y_{R_2}}{2}\frac{p_{R_2}}{p_k}\leqslant \mathrm{Log}\,p_{k+1}.$$ Aussi lorsque k tend vers $+\infty$ les solutions de I_1 sont solutions de l'inéquation I'_1

$$\frac{x_{s_o}}{2}p_{s_o}+\frac{x_{s_o+1}}{2}p_{s_o+1}+\frac{x_r}{2}p_r+\dots+\frac{y_{s'_o}}{2}p_{s'_o}+\frac{y_{s'_o+1}}{2}p_{s'_o+1}+\dots+\frac{y_s}{2}p_s+\dots\leqslant \leftarrow$$

$$\rightarrow \leqslant p_k\,\mathrm{Log}\,p_{k+1}\,.$$

Le nombre de solutions de l'inéquation

$x_1p_1+\dots+x_{s_o-1}\,p_{s_o-1}\leqslant 2p_k\,\mathrm{Log}\,p_{k+1}$ est inférieur à 2^{s_o}.

Cette dernière quantité étant constante, on en déduit que le logarithme du nombre de solutions de I'_1 est équivalent à $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{p_k}$ lorsque $k\to+\infty$, (d'après le théorème 2.8.).

3.4.4.- *Conclusion.*

$\mathrm{Log}\,T\leqslant \mathrm{Log}\,T_1+\mathrm{Log}\,T_2+\mathrm{Log}\,T_3\leqslant 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{p_k}(1+o(1))$.

$\mathrm{Log\,Card}\,E_k\leqslant \mathrm{Log}\,p_{k+1}+\mathrm{Log\,card}\,E'_k\leqslant \mathrm{Log}\,p_{k+1}+\mathrm{Log}\,T$

$$\leqslant 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{p_k}(1+o(1)) \qquad (E.3.1.).$$

Soit $x\in\mathbb{R}_+$ tel que $N_k\leqslant x<N_{k+1}$, par ceci $\mathrm{Log}\,x\sim p_k$ lorsque $x\to+\infty$

$$W_\ell(x)\leqslant e_1+\dots+e_k\leqslant p_1e_1+\dots+p_{k+1}e_k\leqslant p_{k+1}(e'_1+\dots+e'_k).$$

$$\mathrm{Log}\,W_\ell(x)\leqslant \mathrm{Log}\,p_{k+1}+\mathrm{Log}(e'_1+\dots+e'_k)\leqslant 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{p_k}(1+o(1))$$

en vertu de (E.3.1.).

3.5.- Conjecture.

Si on suppose les nombres premiers bien répartis autour de p_k autrement dit si l'on considère que la différence $p_{k+r}-p_k$ est assimilable à $r \text{ Log } p_k$ (ce qu'il peut être raisonnable de penser puisque $p_k \sim k \text{ Log } p_k$ et $p_k - p_{k-s}$ à $s \text{ Log } p_k$, on peut remplacer les termes $\text{Log } \frac{p_{k+r}}{p_k}$ par $\frac{r}{p_k} \text{ Log } p_{k+1}$ dans l'inéquation I.

Les éléments de E'_k seraient alors solution de l'inéquation I" :

$$\sum_{i\geq 1} i x_i + \sum_{j\geq 1} j y_j \leq p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i\geq 1} x_i = \sum_{j\geq 1} y_j \,. \quad x_i, y_j \in \{0,1\}.$$

Conséquence au théorème 2.11., le logarithme du nombre de solutions de I" est équivalent à $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{p_k}$ lorsque $k \to +\infty$. De cette façon, nous pouvons conjecturer que $\text{Log } W_\ell(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\text{Log } x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On peut enfin remarquer que la connaissance exacte de l'équivalent de $\text{Log } W_\ell(x)$ ne permet pas de situer de façon précise les nombres $\omega.\ell.c.$ dans $\mathbb{N}$ puisque par exemple si nous envisageons les suites $u_n = \left[e^{c_1\sqrt{\text{Log } n}}\right]$ et $v_n = \left[\text{Log } n \; e^{c_1\sqrt{\text{Log } n}}\right]$ alors

$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = +\infty$ et cependant $\text{Log } u_n \sim \text{Log } v_n \sim c_1\sqrt{\text{Log } n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

§ 4 - *Minoration de* $\text{Log } W_\ell(x)$.

Proposition 4.1.-

Pour tout C, $0 < C < C_o$, il existe $X(C) > 0$ tel que

$$\forall X \geq X(C) \qquad \text{Log } W_\ell(X) \geq C\sqrt{\text{Log } X}.$$

On peut prendre successivement $C_o = 2{,}2493\ldots;\ 2{,}2997\ldots;\ 2{,}2529\ldots$

4.2.- La minoration de $\text{Log } W_\ell(X)$ a été établie par Erdös et Nicolas qui ont montré la proposition 4.1. dans le cas où $C < \frac{\text{Log } 2}{\sqrt{2}}$.

Par des raffinements de leur méthode Pamerance a obtenu successivement les constantes $\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ Log } 4$; 2,2493; 2,2997 ..; 2,2529... Le présent paragraphe expose les 3 premiers résultats. La constante 2,2529 sera étudiée au paragraphe 5.

Etablissons tout d'abord un théorème dû à Selberg.

Proposition 4.3. (Selberg).-

Soit f une fonction numérique positive. $\gamma \in \left]0, \frac{5}{6}\right[$ et $\mu \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$. On suppose que lorsque x tende vers $+\infty$:

1) $f(x) > x^{\frac{1}{6}+\gamma}$.

2) $\frac{f(x)}{x}$ décroisse et tende vers 0.

3) $\frac{f(x)}{\text{Log } x}$ soit une fonction croissante.

On pose $N(\xi) = [\text{Log}_2 \xi]$ pour $\xi > e$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$, $i \leqslant N(\xi)$. Il existe ξ_o tel que : $\xi \geqslant \xi_o$ entraîne : pour tout $x \in [\xi, \xi']$ (avec $\xi' = \xi + \frac{\xi}{\text{Log } \xi}$) hors mis éventuellement sur un ensemble exceptionnel de mesure $O(\xi e^{-(\text{Log } \xi)^\mu})$

$$\text{a)} \quad \left| \pi\left(x + \frac{if(x)}{N(\xi)}\right) - \pi(x) - \frac{i}{N(\xi)} \frac{f(x)}{\text{Log } x} \right| < \frac{4if(x)}{N(\xi)\text{Log}^2 x} \qquad (E.4.1.)$$

$$\text{b)} \quad \left| \pi(x) - \pi\left(x - \frac{if(x)}{N(\xi)}\right) - \frac{i}{N(\xi)} \frac{f(x)}{\text{Log } x} \right| < \frac{4i\, f(x)}{N(\xi)\text{Log}^2 x} \qquad (E.4.2.)$$

Lemme 4.4.- Soit $\Psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \text{Log } p$.

Quand $x \to +\infty$ pour tout $T \leqslant x^{5/6} e^{-(\text{Log } x)^\delta}$ avec $\frac{2}{3} < \delta < 1$, on a pour $\mu < \delta - \frac{2}{3}$

$$\frac{1}{x}\int_x^{2x}\left|\Psi(y+\frac{y}{T})-\Psi(y)-\frac{y}{T}\right|^2 dy = O(\frac{x^2}{T^2}e^{-(\mathrm{Log}\ x)^{\mu}}).$$

La démonstration de ceci se trouve dans [Nic].

Démonstration de la proposition 4.3.-

Le principe est de vérifier que l'ensemble des $x \in [\xi,\xi']$ ne vérifiant pas la relation (E.4.1.) ou (E.4.2.) a pour mesure $O(\xi e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\mu}})$.

Soit $x \in [\xi,\xi']$ ne vérifiant pas (E.4.1.) alors pour X tendant vers $+\infty$ $\left|\Psi(x+\frac{i\ f(x)}{N(\xi)})-\Psi(x)-\frac{i}{N(\xi)}f(x)\right| \geqslant \frac{3i\ f(x)}{N(\xi)}$

(on rappelle que $\Psi(x) = \sum_{p^{\nu}\leqslant x}\mathrm{Log}\ p$ et que $\Psi(x) = x(1+O(\frac{1}{\mathrm{Log}\ x}))$ lorsque $x \to +\infty$).

Considérons μ et ν deux réels strictement positifs tels que $\mu+\nu \in]0,\frac{1}{3}[$ et $\delta > \mu+\nu+\frac{2}{3}$ $\delta \in]\frac{2}{3},1[$ et posons

$$T = T(\xi) = \frac{\xi N(\xi)}{if(\xi)}$$

$$\frac{T}{\xi^{5/6}\ e^{-\mathrm{Log}\ \xi)^{\delta}}} = \frac{\xi N(\xi)e^{(\mathrm{Log}\ \xi)^{\delta}}}{i\xi^{5/6}f(\xi)} \leqslant \frac{N(\xi)e^{(\mathrm{Log}\ \xi)^{\delta+\mu}}}{\xi^{\gamma}} \quad \text{puisque} \quad f(\xi) > \xi^{\frac{1}{6}+\gamma}.$$

Comme $N(\xi) = [\mathrm{Log}_2\xi]$ et $\delta+\mu < 1$ cette dernière expression tend vers 0 lorsque ξ tend vers $+\infty$.

En conséquence, il existe $X_o > 0$ tel que $X \geqslant X_o$ entraîne $T(\xi) < \xi^{5/6}\ e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\delta}}$ car $\xi \to +\infty$ lorsque $X \to +\infty$ par le choix de δ, $\nu+\mu < \delta-\frac{2}{3}$.

Appliquons le lemme 4.4.

$$\frac{1}{\xi}\int_{\xi}^{\xi'}\left|\Psi(y+\frac{y}{T}) - \Psi(y) - i\ y\ \frac{f(\xi)}{N(\xi)}\right|^2 dy = O(\frac{i^2 f^2(\xi)}{(N(\xi))^2}\ e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\mu+\nu}})$$

ou encore

$$\cdot\ \int_{\xi}^{\xi'}\left|\Psi(y+\frac{i}{N(\xi)}\ y\ f(\xi)) - \Psi(y) - \frac{iyf(\xi)}{N(\xi)}\right|^2 dy = O(\frac{i^2 f^2(\xi)}{(N(\xi))^2}\ e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\mu+\nu}}) \qquad (E.4.3.)$$

(E.4.3)

Soit $E \subset [\xi,\xi']$ et λ la mesure de Borel sur $]\xi,\xi']$

alors :

$$\int_E (\frac{f(y)}{\mathrm{Log}\ y}\ \frac{i}{N(\xi)})^2 d\lambda(y) = \int I_E (\frac{i}{N(\xi)}\ \frac{f(y)}{\mathrm{Log}\ y})^2 d\lambda(y)$$

$$\geqslant \int_{I_E} (\frac{i}{N(\xi)}\ \frac{f(\xi)}{\mathrm{Log}\ \xi})^2 d\lambda(y)$$

puisque l'on a supposé que la fonction $\frac{f(x)}{\mathrm{Log}\ x}$ était croissante.

Par suite

$$\int_E (\frac{f(y)}{\mathrm{Log}\ y}\ \frac{i}{N(\xi)})^2 d\lambda(y) \geqslant \lambda(E)\,(\frac{i}{N(\xi)}\ \frac{f(\xi)}{\mathrm{Log}\ \xi})^2$$

cela entraîne à cause de (E.4.3.)

$$\lambda(E) = (\xi\ \mathrm{Log}^2\xi\ e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\mu+\nu}}) = (\xi\ e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\mu}}).$$

Soit maintenant $x \in [\xi,\xi'] \setminus E$

$$\Psi(x+\frac{i\ f(x)}{N(\xi)}) - \Psi(x) - \frac{if(x)}{N(\xi)} \leqslant \Psi(x + \frac{i}{N(\xi)}\ \frac{f(\xi)}{\xi}\ x) - \Psi(x) - \frac{i\ f(x)}{N(x)} + \leftarrow$$

$$\rightarrow \frac{i}{N(\xi)}\ (\frac{f(\xi)}{\xi} - f(x)) \leqslant \frac{i\ f(x)}{N(\xi)\mathrm{Log}\ x} + \frac{i}{N(\xi)}(\frac{f(\xi)}{\xi} - f(x)$$

soit donc

$$\Psi(x + \frac{if(x)}{N(\xi)}) - \Psi(x) - \frac{if(x)}{N(\xi)} \leqslant \frac{3if(x)}{N(\xi)\mathrm{Log}\ x} .$$

De même si l'on choisit $T = \dfrac{i\ f(\xi')}{N(\xi)\xi'}$

nous obtenons

$$\Psi(x + \frac{if(x)}{N(\xi)}) - \Psi(x) - \frac{if(x)}{N(\xi)} \geqslant - \frac{3i}{N(\xi)} \frac{f(x)}{\mathrm{Log}\ x}$$ sauf sur un ensemble

exeptionnel E' de mesure $(\xi\ e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)\mu})$.

Cela entraîne que la relation

$$\left[\pi(x + \frac{if(x)}{N(\xi)}) - \pi(x) - \frac{i\ f(x)}{N(\xi)\mathrm{Log}\ x}\right] < \frac{4i\ f(x)}{N(\xi)\mathrm{Log}^2 x}$$ est vérifiée

pour tout $x \in [\xi, \xi']$ hors mis les éléments de $E \cup E'$. Ce dernier ensemble étant de mesure $O(\xi e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\mu}})$.

La démonstration de la relation (E.4.2.) est identique à la précédente.

Corollaire 4.5.-

Soit $k = \pi(x)$ où x est un élément de $[\xi, \xi']$ n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel de mesure $O(\xi e^{-(\mathrm{Log}\ \xi)^{\mu}})$ défini à la proposition 4.3.

Alors si $K = \pi(x - \dfrac{i}{N(\xi)} f(x))$ avec $-N(\xi) \leqslant i \leqslant N(\xi)$

$$p_K = x - \frac{i}{N(\xi)} f(x) \ (1+O(\frac{\mathrm{Log}_2\ \xi)}{\mathrm{Log}\ \xi})).$$

Démonstration :

On utilise simplement le fait que $p_k \sim k\ \mathrm{Log}\ k$ lorsque $k \to +\infty$

Remarque 4.5.1.-

Iwaniëc a démontré que $p_{k+1}-p_k \leq (p_k)^{\frac{11}{20}+\delta}$ lorsque k tend vers $+\infty$ pour $\delta > 0$ (voir [Iw]) c'est la meilleure majoration que l'on connaisse actuellement.

Citons également un résultat un peu moins fort établi dans [Hux].

Soit $c > \frac{7}{12}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, il existe un nombre premier p tel que $x < p \leq x+x^c$.

En admettant l'hypothèse de Riemann, Cramer a montré (voir [Cra]) que dans ce cas $p_k-p_{k+1} = O(\sqrt{p_k}\text{ Log } p_k)$. En fait, il a conjecturé que $p_{k+1}-p_k = O(\text{Log}^2 p_k)$. Lorsque $c \leq \frac{11}{20}$, on ne peut plus assurer l'existence d'un nombre premier compris entre x et $x+x^c$.

Néanmoins si $c > \frac{1}{6}$, le théorème de Selberg 4.3. affirme que cette propriété reste vraie pour "presque" tous les éléments des intervalles $[\xi_1,\xi_2]$ où $\xi_2 \geq \xi_1 + \frac{\xi_1}{\text{Log } \xi_1}$.

4.6.- *Notations*.

Soit c une constante positive strictement. Posons

$f(X) = c\sqrt{X}\text{ Log } X$ et $\xi = (1-2\varepsilon)\text{Log } X$ $\quad N = N(\xi) = [\text{Log}_2\xi]$

f(x) vérifie les hypothèses de la proposition 4.3. et du corollaire 4.5.

Par suite, ε étant fixé définitivement :

$$\exists X_o \quad X \geq X_o \Rightarrow \exists x \in [(1-2\varepsilon)\text{Log } X,(1-\varepsilon)\text{Log } X] \quad \text{tel que}$$

$$\pi(x + \frac{if(x)}{N}) - \pi(x) = \frac{i}{N}\frac{f(x)}{\text{Log } x}(1+O(\frac{1}{\text{Log Log } X})) \qquad (E.4.1.)$$

$$\pi(x) - \pi(x - \frac{if(x)}{N}) = \frac{i}{N}\frac{f(x)}{\text{Log } x}(1+(\frac{1}{\text{Log Log } X})) \qquad (E.4.2.)$$

Soit $k = \pi(x)$. Considérons s le plus grand entier positif tel que $p_{k-s+1} \geqslant x-f(x)$ et $p_{k+s} \leqslant x+f(x)$. Alors s est égal soit à $\pi(x) - \pi(x-f(x))$ soit à $\pi(x+f(x)) - \pi(x)$ et par (E.4.1.), (E.4.2.)

$$s = \frac{f(x)}{\mathrm{Log}\ x}\left(1+O\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ X}\right)\right) \quad (E.4.3.)$$

4.7.- *Méthode de démonstration de la proposition* 4.1. *(Erdös et Nicolas).*

Dans ce qui suit, nous construisons une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ dépendant de k et s (donc de X) qui auront k facteurs premiers distincts. Nous choisirons la constante C de façon que ceux-ci soient inférieurs à N_k (et donc soient $\omega.\ell.c$).

Pour cela, on pose $n' = N_{k-s}\ q_1 \dots q_s$ où $q_1 \dots q_s$ sont des nombres premiers tous distincts choisis parmi $p_{k-s+1}, \dots, p_{k+s}$.

En conséquence $\mathrm{Log}\ \frac{n'}{N_k} \leqslant \mathrm{Log}\ \left(\frac{p_{k+s}}{p_{k-s+1}}\right)^s \leqslant$

$$s\ \mathrm{Log}\left(\frac{x+f(x)}{x-f(x)}\right)$$

grâce à la proposition 4.3.

$$\mathrm{Log}\ \frac{n'}{N_k} \leqslant \frac{2s\ f(x)}{x}\left(1+O\left(\frac{f(x)}{x}\right)\right) = 2c^2 \mathrm{Log}\ x\left(1+O\left(\frac{f(x)}{x}\right)\right)$$

Soit $C < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\ \frac{n'}{N_k}}{2s\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\ \frac{n'}{N_k}}{2c^2 \mathrm{Log}\ x} \leqslant 1 .$$

Il existe donc $X(C)$ tel que $X \geqslant X(C)$ entraîne :

$$\operatorname{Log} \frac{n'}{N_k} \leq 2c^2 \operatorname{Log} x \leq \operatorname{Log} x \leq \operatorname{Log} p_{k+1} .$$

De cette façon $\omega(n') = k$ et $n' \leq N_{k+1}$ donc n' est $\omega.\ell.c.$

<u>*Remarque*</u> *4.7.1.*- Dans ce cas pour $X \geq x_o$ on a $n' \leq X$.

En effet $\operatorname{Log} n' \leq \operatorname{Log} N_{k+1} = \theta(p_{k+1})$.

Comme $\theta(p_{k+1}) = p_{k+1}(1+O(\frac{1}{\operatorname{Log} p_{k+1}})) = x(1+O(\frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} X}))$ lorsque X tend vers $+\infty$ (car k et x tendent vers $+\infty$ lorsque $X \to +\infty$)

$\operatorname{Log} n' \leq x(1+O(\frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} X})) \leq (1-\varepsilon)\operatorname{Log} X(1+O(\frac{1}{\operatorname{Log}_2 X})) < \operatorname{Log} X$ pour X tendant vers $+\infty$.

Enfin, remarquons, qu'il y a 2^s manières de choisir le s-uplet $q_1 \dots q_s$ par suite $\operatorname{Log} W_\ell(X) \geq \exp s \operatorname{Log} 2$

$\geq (\operatorname{Log} 2) c \operatorname{Log} X(1+O(\frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} X})) \times \sqrt{1-2\varepsilon}$ puisque $s = \frac{f(x)}{\operatorname{Log} x}(1+O(\frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} X}))$.

<u>*En conclusion*</u> :

$$\forall K < \frac{\operatorname{Log} 2}{\sqrt{2}} \quad \exists\, X(K) > 0 \text{ tel que } X \geq X(K) \Rightarrow \operatorname{Log} W_\ell(X) \geq K\sqrt{\operatorname{Log} X}.$$

<u>*Lemme préliminaire*</u> :

Soient $\alpha,\beta \in [0,2]$; $\gamma,\delta \in [0,1]$ des réels positifs ou nuls, qui dépendent éventuellement de X.

. Les entiers k et s sont définis au paragraphe 4.6.

$N = N(\xi) = [\operatorname{Log}\operatorname{Log} \xi]$ avec $\xi = (1-2\xi)\operatorname{Log} X$.

Par ce choix $N(\xi) = O(\operatorname{Log}_3 X)$.

De ce fait $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{s}{N} = +\infty$

On divise l'intervalle $I = [p_{k-s+[\alpha s]}, p_{k-s+[\alpha s]+[\beta s]}]$ en $N = N(\xi)$ sous intervalles disjoints $I_1,\dots,I_N$ tels que

$$I_i = \left]p_{k-s+[\alpha s]+(i-1)u}\ ,p_{k-s+[\alpha s]+iu}\right] \quad \text{avec} \quad i = 1,2,\dots,N-1$$

$$u = \left[\frac{\beta s}{N}\right]$$

$$I_N = \left]p_{k+[\alpha s]+(N-1)u}, p_{k+s}\right].$$

Supposons $\gamma \leqslant \beta$ et notons $v = \left[\dfrac{\gamma s}{N}\right]$ $\quad v' = [\gamma s] - (N-1)v$

$$U_i = \frac{q_{i_1}\dots q_{i_v}}{(p_{k-s+[\delta s]+(\alpha-1)v})^v} \qquad i = 1,2,\dots,N-1$$

$$U_N = \frac{q_{N_1}\dots q_{N_{v'}}}{(p_{k-s+[\delta s]+(N-1)v'})^{v'}}$$

où les $q_{i_1}\dots q_{i_v}$ (resp. $q_{N,1},\dots,q_{N,v}$) sont v (resp. v')

nombres premiers distincts choisis dans I_i (resp. I_N).

Lemme 4.8.-

$$\mathrm{Log}\ U_1 \dots U_N \leqslant \frac{v}{2}\,\frac{f(x)}{x}\,((2(\alpha-\delta)+(\beta-\gamma))N+\beta+\gamma)\left(1+O\left(\frac{\mathrm{Log}_3 X}{\mathrm{Log}_2 X}\right)\right) \quad .$$

Démonstration :

Soit $i \in \{1,2,\dots,N-1\}$, $\mathrm{Log}\ U_i \leqslant v\ \mathrm{Log}\ \dfrac{p_{k-s+[\alpha s]+iu}}{p_{k-s+[\alpha s]+(i-1)v}}$.

Par le théorème de Selberg (proposition 4.3.)

$$p_{k-s+[\alpha s]+iu} = x-(f(x)+\delta f(x)+i\ \frac{f(x)}{N})\left(1+O\left(\frac{\mathrm{Log}_3 X}{\mathrm{Log}_2 X}\right)\right)$$

de même

$$p_{k-s+[\delta s]+(i-1)v} = x-(f(x)+\ f(x)+(i-1)\ \gamma\frac{f(x)}{N})\left(1+O\left(\frac{\mathrm{Log}_3 X}{\mathrm{Log}_2 X}\right)\right)$$

On a donc

$$\text{Log } U_i \leqslant v \text{ Log}(1+ \frac{\alpha f(x)+i\beta\frac{f(x)}{N} \quad \delta f(x)+(1-i)\ \frac{f(x)}{N}}{x-f(x)+\delta f(x)+(i-1)\ \frac{\gamma f(x)}{N}}\ (1+\mathcal{O}(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log Log } X}))$$

$$\leqslant v\ \frac{f(x)}{xN}\ ((\alpha-\delta)N + i(\beta-\gamma)+\gamma)(1+\mathcal{O}(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log Log } X}))$$

puisque $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

$$v' = [\gamma s] - (N-1)v = \gamma s(1+\mathcal{O}(\frac{1}{s})) - (N-1)\ \frac{\gamma s}{N}\ (1+\mathcal{O}(\frac{N}{s}))$$

$$= \frac{\gamma s}{N}\ (1+\mathcal{O}(\frac{N}{s})) = v(1+\mathcal{O}(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log Log } X})$$

et le résultat reste valable si $i = N$.

Par suite

$$\text{Log } U_1 \ldots U_N \leqslant v(1+\mathcal{O}(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log}_2 X}))\ \frac{f(x)}{xN}\ \sum_{i=1}^{N}\ ((\alpha-\delta)N+i(\beta-\gamma)+\gamma)$$

$$\leqslant v(1+\mathcal{O}(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log}_2 X})\ \frac{f(x)}{xN}\ ((\alpha-\delta)N^2 + \frac{(\beta-\gamma)N(N+1)}{2} + \gamma N)$$

$$\leqslant v(1+ (\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log}_2 X}))\ \frac{f(x)}{xN}\ (\frac{(2(\alpha-\delta)+(\beta-\gamma))N+\gamma}{2})$$

4.9.- *Application à la démonstration de la proposition 4.1.*

La minoration est basée sur un choix spécifique des nombres premiers $q_1 \dots q_s$ introduits au paragraphe 4.7.

Pour cela on peut effectuer une première subdivision de l'intervalle $I =]p_{k-s}, p_{k+s}]$ en 4 sous intervalles disjoints I_1 , I_2 , I_3 , I_4

$$I_1 =]p_{k-s} \, , \, p_{k-[\frac{s}{4}]}] \qquad I_2 =]p_{k-[\frac{s}{4}]} \, , p_k]$$

$$I_3 =]p_k , p_{k+[\frac{s}{4}]}] \quad , \qquad I_4 =]p_{k+[\frac{s}{4}]} , p_{k+s}] \quad .$$

L'intervalle I_j contient $U_j = [\beta_j \, s]$ nombres premiers distincts avec $\beta_1 = \beta_4 = \frac{3}{4}$; $\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{4}$.

Soit $N = N(\xi)$; $\xi = (1-2\xi)\text{Log } X$.

On divise chaque intervalle I_j en N sous intervalles disjoints H_{ji} .

On a pour $j = 1,2,3,4$ et $i = 1,2,\dots,N-1$

$$H_{ji} =]p_{k-s+U_o+U_1+\dots+U_{j-1}+(i-1)u_j} , p_{k-s+U_o+U_1+\dots+U_{j-1}+iu_j}]$$

$$H_{j,N-1} =]p_{k-s+U_o+\dots+U_{j-1}+(N-1)u_j} , p_{k-s_o+U_o+\dots+U_j}]$$

où $u_j = [\beta_j \frac{s}{N}]$ et $U_o = 0$.

De cette manière chaque intervalle H_{ji} contient approximativement u_j nombres premiers distincts.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in]0,1[$; $\lambda_3 = 1-\lambda_2$; $\lambda_4 = 1-\lambda_1$.

La méthode consiste à choisir les nombres premiers $q_1 \dots q_s$ avec la probabilité λ_j dans chaque intervalle I_j . Plus précisément, dans chaque intervalle I_{ji} on choisit une proportion de λ_{ji} nombres premiers distincts. λ_{ji} peut être fixé pour tous les intervalles I_{ji} avec j constant et i variant de 1 à N. Ceci est l'objet des premières minorations. On peut également envisager le cas où λ_{ji} varie en fonction de j et i, une autre minoration sera établie dans cette optique au paragraphe 5.

On suppose maintenant que pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ $\lambda_{ji} = \lambda_j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Dans ce cas, on introduit

$$V_j = [\beta_j \lambda_j s] \qquad v_j = [\beta_j \lambda_j \tfrac{s}{N}] \qquad v'_h = V_h - (N-1)v_h$$

pour $h = 1, 2, 3$.

Ainsi $(N-1)v_h + v'_h = V_h$.

Si $h = 4$,

$$v'_4 = s - V_1 - V_2 - V_3 - (N-1)v_4.$$

On sélectionne $v_{ji} = v_j$ nombres premiers distincts dans I_{ji} pour $j \in \{1,2,3,4\}$ et $i \in \{1,2,\dots,N-1\}$.

On en sélectionne $v_{jN} = v'_j$ dans $I_{j,N}$.

De cette manière, nous distinguons s nombres premiers distincts dans I.

Nous nous intéressons aux entiers $n = N_{k-s}\ q_1,\dots,q_s$ les nombres premiers distincts $q_1,\dots,q_s$ étant déterminés par le processus précédent

Enfin

$$M_j = (\prod_j{}' q)(p_{k-s+V_o+\ldots+V_{j-1}} \cdots p_{k-s+V_o+V_1+\ldots+V_{j-1}+(N-2)v_j})^{-v_j}$$

$$\times\ p_{k-s+V_o+\ldots+V_{j-1}+(N-1)v_j})^{-v'_j}$$ dans cette définition $V_o = 0$ et le

produit $\prod_j{}'\ q$ est celui étendu à tous les nombres premiers choisis dans I_j.

On applique le lemme 4.8. pour majorer $\mathrm{Log}\, M_j$, j variant de 1 à 4.

4.9.1.- Majoration de $\mathrm{Log}\, M_j$, $j = 1, 2, 3, 4$

avec les notations du lemme 4.8. , on a :

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = \frac{3}{4}, \qquad \gamma_1 = \frac{3\lambda_1}{4} \qquad \delta_1 = 0 \qquad v_1 = \left[\frac{3}{4}\lambda_1 \frac{s}{N}\right]$$

alors

$$\mathrm{Log}\, M_1 \leqslant \frac{3\lambda_1}{8}\frac{s}{N}\frac{f(x)}{x}\left(\frac{3}{4}(1-\lambda_1)N + \frac{3}{4}(1+\lambda_1)\right)\left(1+O\left(\frac{\mathrm{Log}_3 X}{\mathrm{Log}_2 X}\right)\right) .$$

Cas de M_2.

On a

$$\alpha_2 = \frac{3}{4}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{4}, \qquad \gamma_2 = \frac{\lambda_2}{4} \qquad \delta_2 = \frac{3\lambda_1}{4} \qquad v_2 = \left[\frac{\lambda_2 s}{4N}\right]$$

alors

$$\mathrm{Log}\, M_2 \leqslant \frac{\lambda_2 s}{8N}\ \frac{f(x)}{x}\left(\left(\frac{3}{2}(1-\lambda_1) + \frac{1-\lambda_2}{4}\right)N + \frac{1+\lambda_2}{4}\right)\left(1+\left(\frac{\mathrm{Log}_3 X}{\mathrm{Log}_2 X}\right)\right)$$

<u>De même pour</u> M_3 <u>et</u> M_4 :

$$\alpha_3 = 1, \qquad \beta_3 = \frac{1}{4}, \qquad \gamma_3 = \frac{(1-\lambda_2)}{4}, \qquad \delta_3 = \frac{3\lambda_1+\lambda_2}{4}, \qquad v_3 = \left[\frac{(1-\lambda_2)s}{4N}\right]$$

alors par le lemme 4.8.

$$\text{Log } M_3 \leqslant \frac{(1-\lambda_2)s}{8N}\ \frac{f(x)}{x}\ ((\frac{3}{2}\ (1-\lambda_1) + \frac{(1-\lambda_2)}{2} + \frac{\lambda_2}{4})N + \frac{2-\lambda_2}{4})(1+O(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log}_2 X}))$$

$$\alpha_4 = \frac{5}{4}\ ,\quad \beta_4 = \frac{3}{4}\ ,\quad \gamma_4 = \frac{3}{4}\ (1-\lambda_1)\ ,\quad \delta_4 = \frac{3\lambda_1+1}{4}\ ,\quad v_4 = \left[\frac{3}{4}\ (1-\lambda_1)\ \frac{s}{N}\right]$$

alors

$$\text{Log } M_4 \leqslant \frac{3(1-\lambda_1)}{8}\ \frac{s}{N}\ \frac{f(x)}{x}\ ((2 - \frac{3\lambda_1}{4})N + \frac{3}{4}\ (2-\lambda_1))(1+O(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log}_2 X}))$$

4.9.2.- *Majoration de* $\frac{n}{N_k}$.

Par construction

$\text{Log } \frac{n}{N_k} \leqslant \sum_{j=1}^{4} \text{Log } M_j$ aussi en ajoutant tous les résultats partiels :

$$\text{Log } \frac{n}{N_k} \leqslant \frac{s}{N}\ \frac{f(x)}{x}\ (1+O(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log}_2 X}))(\frac{(15(1-\lambda_1)+(1-\lambda_2))N}{16} + \frac{9\lambda_1(\lambda_1-1)+\lambda_2(\lambda_2-1)+10}{16})$$

$$\leqslant \frac{s}{x}\ \frac{f(x)}{16}\ (1+O(\frac{\text{Log}_3 X}{\text{Log}_2 X})((15(1-\lambda_1)+(1-\lambda_2)) + (1-\lambda_2)) + O(\frac{1}{N}))$$

$$\frac{sf(x)}{x} = \frac{f^2(x)}{x\ \text{Log } x}\ (1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 X}))$$ d'après (E.4.3.)

$$= c^2\ \text{Log } x(1+O(\frac{1}{\text{Log}_2 X})).$$

Par suite

$$\lim_{X\to+\infty}\ \frac{\text{Log } \frac{n}{N_k}}{\text{Log } x} \leqslant \frac{c^2}{16}\ (15(1-\lambda_1)+(1-\lambda_2)).$$

En conséquence :

$\forall\ c < \frac{4}{\sqrt{15(1-\lambda_1)+(1-\lambda_2)}}$ il existe $X(C)$ tel que $X \geqslant X(C)$

entraîne $\text{Log } n \leqslant \text{Log } N_{k+1}$. Dans ce cas n est ω-largement composé pusque $\omega(n) = k$.

Par la remarque 4.7.1. $n \leqslant X$. Ainsi $W_\ell(X) \geqslant \mathrm{card}\{n=N_{k-s}q_1\dots q_s\}$ les q_i étant déterminés par le processus précédent.

Il reste à évaluer ce cardinal dans les différents cas.

Proposition 4.10.-

Soit $\lambda \in \left]0,1\right[$ et f une fonction définie pour $t \geqslant t_o$, tendant vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$

alors $\mathrm{Log}\binom{[f(t)]}{[\lambda f(t)]} = -f(t)(\mathrm{Log}(\lambda^\lambda(1-\lambda)^{(1-\lambda)})+O(\frac{\mathrm{Log}(f(t))}{f(t)}))$

quand $t \to +\infty$.

Démonstration :

$$\binom{[f(t)]}{[\lambda f(t)]} = \frac{[f(t)]!}{([\lambda f(t)]!)([f(t)]-[f(t)])!}$$ avec $[u]$ = partie entière de u.

Si $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}([f(t)])^{1/2}([\lambda f(t)])^{-1/2}([f(t)] - [\lambda f(t)])^{-1/2}$

$G(t) = [f(t)]^{[f(t)]} \times [\lambda f(t)]^{-[\lambda f(t)]}([f(t)] - [\lambda f(t)])^{([\lambda f(t)]-[f(t)])}$.

Par la formule de Stirling

$$\binom{[f(t)]}{[\lambda f(t)]} = F(t)G(t)H(t)$$

où $H(t) = (1 + \frac{1}{12[f(t)]} + \dots)(1+ \frac{1}{12[\lambda f(t)]} + \dots)^{-1} \times \to$

$\to \times (1 + \frac{1}{12([f(t)]-[\lambda f(t)]} + \dots)^{-1}$

$\mathrm{Log}\ F(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\ 2\pi + \frac{1}{2}(\mathrm{Log}(f(t)(1+O(\frac{1}{f(t)})) - \mathrm{Log}(\lambda f(t)(1+O(\frac{1}{f(t)})$

$- \mathrm{Log}((1-\lambda)f(t)(1+O(\frac{1}{f(t)})))$

$= - \mathrm{Log}\ f(t) - \mathrm{Log}\ \lambda(1-\lambda) + \frac{\mathrm{Log}\ 2\pi}{2} + O(\frac{1}{f(t)}) = O(\mathrm{Log}\ f(t))$

de même

$$\mathrm{Log}\ H(t) = \mathcal{O}(\frac{1}{f(t)})$$

$$\mathrm{Log}\ G(t) = f(t)(1+\mathcal{O}(\frac{1}{f(t)}))\mathrm{Log}(f(t)(1+\mathcal{O}(\frac{1}{f(t)})) - \lambda f(t)(1+\mathcal{O}(\frac{1}{f(t)}) \times \rightarrow$$

$$\rightarrow \times \ \mathrm{Log}(\lambda f(t)(1+\mathcal{O}(\frac{1}{f(t)})) - (1-\lambda)f(t)\mathrm{Log}((1-\lambda)f(t)(1+\mathcal{O}(\frac{1}{f(t)}))$$

$$= - f(t)(\mathrm{Log}(\lambda^{\lambda}(1-\lambda)^{1-\lambda}) + \mathcal{O}(\frac{\mathrm{Log}(f(t))}{f(t)}))$$

$$\text{Ainsi} \quad \mathrm{Log}(\frac{[f(t)]}{[\lambda f(t)]}) = -f(t)(\mathrm{Log}(\lambda^{\lambda}(1-\lambda)^{1-\lambda}) + \mathcal{O}(\frac{\mathrm{Log}\ f(t)}{f(t)}))$$

Corollaire 4.11.-

Soit $C(\lambda_1,\lambda_2)$ le nombre d'entiers précédemment construits pour $\lambda_1,\lambda_2 \in]0,1[$.

$$\text{Alors} \quad \mathrm{Log}\ C(\lambda_1,\lambda_2) = -2s(\frac{3}{4}\mathrm{Log}(\lambda_1^{\lambda_1}(1-\lambda_1)^{1-\lambda_1}) + \frac{1}{4}\mathrm{Log}(\lambda_2^{\lambda_2}(1-\lambda_2)^{(1-\lambda_2)}) \times \rightarrow$$

$$\rightarrow \times (1+\mathcal{O}(\frac{N(\xi)}{\sqrt{\mathrm{Log}\ X}})).$$

Démonstration :

Par construction

$$C(\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{j\in\{1,2,3,4\}} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}^{2N-2} \prod_{j\in\{1,2,3,4\}} (\frac{U_j-(N-1)u_j}{v_{jN}}).$$

Il suffit d'appliquer la proposition précédente car $\frac{s}{N} \rightarrow +\infty$ lorsque $X \rightarrow +\infty$. ($\frac{s}{N}$ n'est pas une fonction de X mais il est facile de voir que la proposition 4.10. reste valable).

4.11.- Conclusion :

Soit $C < \dfrac{4}{\sqrt{15(1-\lambda_1)+(1-\lambda_2)}}$ et $X \geqslant X(C)$

$$\mathrm{Log}\ W_{\ell}(X) \geqslant \mathrm{Log}\ C(\lambda_1,\lambda_2) \geqslant - 2C\sqrt{1-2\varepsilon}\ \sqrt{\mathrm{Log}\ X}(\frac{3}{4}\mathrm{Log}\ \lambda_1^{\lambda_1}(1-\lambda_1)^{1-\lambda_1} + \leftarrow$$

$$\rightarrow + \frac{1}{4}\mathrm{Log}\ \lambda_2^{\lambda_2}(1-\lambda_2)^{(1-\lambda_2)}).$$

Par suite pour tout $K < K(\lambda_1,\lambda_2) = -\frac{8}{\sqrt{15(1-\lambda_1)+(1-\lambda_2)}}$

$\times\ (\frac{3}{4}\operatorname{Log}\lambda_1^{\lambda_1}(1-\lambda_1)^{(1-\lambda_1)} + \frac{1}{4}\operatorname{Log}\lambda_2^{\lambda_2}(1-\lambda_2)^{(1-\lambda_2)}$ il existe $X(K)$

tel que $X \geqslant X(K)$ entraîne $\operatorname{Log} W_\ell(X) \geqslant K\sqrt{\operatorname{Log} X}$.

4.12.- <u>Etude pour</u> $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

$$K(\lambda,\lambda) = -\frac{2}{\sqrt{1-\lambda}}\operatorname{Log}\lambda^\lambda(1-\lambda)^{1-\lambda}.$$

Si on pose $f(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\operatorname{Log} t^t(1-t)^{1-t}$ pour $t \in [0,1]$
$K(\lambda,\lambda) = 2f(1-\lambda)$.

Nous pouvons rechercher la valeur de λ pour laquelle cette fonction est maximale, $\lambda \in]0,1[$. Nous obtiendrons ainsi la meilleure minoration possible dans ce cas.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(t\operatorname{Log}\frac{1}{t} + (1-t)\operatorname{Log}\frac{1}{1-t}\right)$$

f est définie et continue pour $t \in [0,1]$. Elle est dérivable sur $]0,1[$,

$f'(t) = -\frac{1}{(\sqrt{t})}3\left(\frac{t\operatorname{Log} t}{2} - \frac{(t+1)}{2}\operatorname{Log}(1-t)\right)$ d'où le tableau de variations

t	0		β		1
f'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
f		$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	

$\beta \simeq 0,242$

$f(\beta) = 1,12489...$

Nous obtenons ainsi $K(1-\beta,1-\beta) = 2,2497866...$

Si l'on choisit $\lambda = \frac{1}{2}$, nous obtenons $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \sqrt{2}\ \mathrm{Log}\ 4$.

Sans découper I_j en N sous intervalles $(j = 1,2,3,4)$ Pomerance a obtenu $\sqrt{\frac{2}{3}}\ \mathrm{Log}\ 4$. Enfin pour $\lambda = \frac{3}{4}$, $K(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = -4\ \mathrm{Log}((\frac{3}{4})^{\frac{3}{4}}(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}) =$ $= 2,24934...$

On retrouve ainsi la constante annoncée par Pomerance.

4.12.- Obtention de la constante 2,2997...

Si nous choisissons $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$

$$K(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}) = -2\ \frac{\sqrt{192}}{7}\ (\frac{3}{4}\ \mathrm{Log}((\frac{3}{4})^{\frac{3}{4}}(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}) + \frac{1}{4}\ \mathrm{Log}((\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}))$$

$$= 2,29969.$$

§ 5 - *La proportion des nombres premiers choisis dépend de* N.

Cette méthode est identique à la précédente mais dans chaque sous intervalle I_{ji} nous choisissons les nombres premiers distincts avec une probabilité λ_{ij} dépendant cette fois de j et de i.

Soit $i \in \{1,2,...,N\}$ et $u = \left[\frac{s}{N}\right]$ $N = N(\xi)$.

On pose $H_i =]p_{k+(i-1)u}, p_{k+i}]$;

$$H_j =]p_{k-iu}, p_{k-(i-1)u}] .$$

Par construction chaque intervalle H_i contient approximativement $\frac{s}{N}$ nombres premiers distincts

Soit $\theta = \pm 1$ alors $\lambda_{\theta i} = \frac{1}{2} - \frac{\theta i}{mN}$ m étant un entier positif supérieur ou égal à 2. Dans ce cas $\lambda_i \geqslant 0$.

Enfin, on introduit $v_\ell = \left[\lambda_\ell \frac{s}{N}\right]$ pour $\ell = -N,\ldots -1,1,\ldots,N-1$

$v_N = s - v_{-N} - v_{-N+1} \cdots - v_{N-1}$.

On considère alors les entiers $n = N_{k-s} \cdot q_1 \ldots q_s$, les nombres premiers $q_1 \ldots q_s$ étant repartis en choisissant exactement $v_{\theta i}$ nombres premiers distincts dans $H_{\theta i}$ pour $i = 1,2,\ldots,N$.

Proposition 5.1.-

Les entiers n construits précédemment vérifient :

$$\operatorname{Log} \frac{n}{N_k} \leqslant s \frac{f(x)}{x\, N^2} \left(\frac{2N^2+3N}{4} + \frac{(N+1)}{6m}(1-4N) + \frac{1}{(mN)^2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) + O\left(\frac{N^2 \operatorname{Log}_3 X}{\operatorname{Log}_2 X}\right)\right) .$$

Démonstration :

Elle est identique à celle exposée au paragraphe 4.9.1., toutefois on commence par établir le résultat suivant :

Lemme 5.1.1.-

1) $v_{-N}+\ldots+v_{-i} = \left(\frac{s}{N}\right)\left(1+O\left(\frac{N^2}{s}\right)\right)\left(\frac{1}{2}(N-i+1) + \frac{1}{2mN}(N(N+1)-i(i-1))\right)$;

2) $V_- + v_1+\ldots+v_i = \left(\frac{s}{N}\right)\left(1+O\left(\frac{N^2}{s}\right)\right)\left(\frac{N+i}{2} + \frac{1}{2mN}(N(N+1)-i(i+1))\right)$

où $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ et $V_- = v_{-N}+\ldots+v_{-1}$.

Preuve de ce lemme :

$$v_{-i} = \left[\lambda_{-i} \frac{s}{N}\right] = \lambda_{-i} \frac{s}{N}\left(1+O\left(\frac{N}{s}\right)\right)$$

$$v_{-N}+\ldots+v_{-i} = \frac{s}{N}(\lambda_{-N}+\ldots+\lambda_{-i}) + (\lambda_{-N}+\ldots+\lambda_{-i})O(1)$$

$$\lambda_{-N}+\ldots+\lambda_{-i} = \frac{1}{2}(N-i+1) + \sum_{h=i}^{N} \frac{h}{mN}$$

$$= \frac{1}{2} \left((N-i+1) + \frac{1}{mN} (N(N+1) - i(i-1))\right)$$

et finalement

$$v_{-N} + \ldots + v_{-i} = \frac{s}{2N} \left(N-i+1 + \frac{1}{mN} (N(N+1)-i(i-1))\right) + (N))$$

$$= \frac{s}{2N} \left(1+ (\frac{N^2}{s})\right) \left(N-i+1 + \frac{1}{mN} (N(N+1)-i(i-1))\right).$$

On montre la deuxième formule de manière identique.

Il suffit alors de remarquer que $\frac{n}{N_k} \leqslant U_{-N} \ldots U_{-1}\, U_1 \ldots . U_N$

avec $U_\ell = (\Pi'_\ell q)(p_{k-s+v_{-N}+v_{-N+1}\ldots+v_{i-1}})^{-v_i}$ pour $i = -N,\ldots,N$

en posant $v_{-N-1} = 0$.

Comme précédemment, on majore $\text{Log } U_\ell$ grâce au lemme 4.8.

5.2.- *Evaluation du nombre d'entiers constructibles.*

5.2.1.- *Préliminaires.*

La dernière méthode permet d'obtenir exactement

$\prod_{i=1}^{N} \binom{u}{v_{-i}} \prod_{i=1}^{N} \binom{u}{v_i}$ nombres entiers n.

Estimons tout d'abord $P_- = \prod_{i=1}^{N} \binom{u}{v_{-i}}$

$$\text{Log } P_- = \sum_{i=1}^{N} \text{Log} \binom{u}{v_{-i}} = \sum_{i=1}^{N} \text{Log} \binom{[\frac{s}{N}]}{[\lambda_{-i} \frac{s}{N}]}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} - \frac{s}{N} \left(\text{Log } \lambda_{-i}^{\lambda_{-i}} (1-\lambda_{-i})^{(1-\lambda_{-i})} + O(\frac{N \text{ Log } s}{s})\right)$$

$$= -\frac{s}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \text{Log } \lambda_{-i}^{\lambda_{-i}} \lambda_i^{\lambda_i} + \mathcal{O}\left(\frac{N^2 \text{Log } s}{s}\right)\right) \quad \text{car} \quad 1-\lambda_{-i} = \lambda_i$$

pour $i = 1,2,\dots,N$.

En conséquence ,

$$\text{Log } P_- = -\frac{s}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{mN}\right)\text{Log}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{mN}\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{mN}\right)\text{Log}\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{mN}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^2\text{Log } s}{s}\right)\right)$$

$$= -\frac{s}{N}\left(N \text{ Log } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(1+\frac{2i}{mN}\right)\text{Log}\left(1+\frac{2i}{mN}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{2i}{mN}\right)\text{Log}\left(1-\frac{2i}{mN}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^2\text{Log } s}{s}\right)\right) \quad .$$

Puisque $1-\lambda_i = \lambda_i$ ce résultat reste encore valable pour $\text{Log } P_+$ si $P_+ = \prod_{i=1}^{N} \binom{u}{v_i}$.

Il suffit donc de déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{S_{-1}(N)}{N}$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{S_{+1}(N)}{N}$

avec $S_-(N) = S_{-1}(N) = \sum_{i=1}^{N}\left(1+\frac{2i}{mN}\right)\text{Log}\left(1+\frac{2i}{mN}\right)$

$$S_+(N) = S_{+1}(N) = -\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{2i}{mN}\right)\text{Log}\left(1-\frac{2i}{mN}\right) \quad .$$

On a alors :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{s}\text{ Log } P_- = \text{Log } 2 - \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N} S_-(N) + \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}S_+(N) =$$

$$= \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{s}\text{ Log } P_+ \quad .$$

<u>*Lemme*</u> 5.2.2.- Soit $\theta = \pm 1$ les sommes S_θ étant définies précédemment on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{S_\theta(N)}{N} = \frac{m}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\theta}{m}\right)^2 \mathrm{Log}\left(1-\frac{2\theta}{m}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2\theta}{m}\right)^2\right].$$

Démonstration :

On étudie $S_+(N)$.

Pour $u \leqslant \frac{mN}{2}$, posons $h(u) = \left(\frac{2u}{mN}-1\right)\mathrm{Log}\left(1-\frac{2u}{mN}\right)$ qui est à valeurs positives pour $0 \leqslant u \leqslant \frac{mN}{2}$

$$h'(u) = \frac{2}{mN}\left(\mathrm{Log}\left(1-\frac{2u}{mN}\right)+1\right).$$

$h'(u)$ est positive si $2u \leqslant \left(1-\frac{1}{e}\right)mN$.

De ce fait h est monotone croissante (resp. décroissante) pour $0 \leqslant u \leqslant \left(1-\frac{1}{e}\right)mN$ (resp. pour $\left(1-\frac{1}{e}\right)mN \leqslant u \leqslant \frac{mN}{2}$).

Alors soit $M = \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{mN}{2}$.

Si $m = 2$ ou 3 , $M < N$, nous divisons $S_+(N)$ en 2 :

$$S_+(N) = \sum_{1\leqslant i\leqslant M} h(i) + \sum_{M<i\leqslant N} h(i).$$

Si on pose $I(A,B) = \int_A^B h(u)du$; $0 \leqslant A \leqslant B$

On a $I(0,M) = \int_0^M h(u)du \geqslant \int_0^{[M]} h(u)du = \int_0^1 h(u)du + \dots + \int_{[M]-1}^{[M]} h(u)du$

$\geqslant h(0) + \dots + h([M]-1) \geqslant \int_0^{[M]-1} h(u)du$ car h croît pour $u \leqslant M$.

De même

$$I(M,N) \geqslant \int_{[M]+1}^{N} h(u)du \geqslant h(\ M\ +2)+\dots+h(N) \quad \text{car } h$$

décroît pour $u \geqslant M$.

Il suffit donc d'estimer l'intégrale $I(A,B)$.

$$I(A,B) = \int_A^B -(1-\frac{2u}{mN})\mathrm{Log}(1-\frac{2u}{mN})du = \int_{1-\frac{2A}{mN}}^{1-\frac{2B}{mN}} \frac{mN}{2}\, U \,\mathrm{Log}\, U\, dU$$

$$= \frac{mN}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\frac{2u}{mN})^2\mathrm{Log}(1-\frac{2u}{mN}) - \frac{1}{4}(1-\frac{2u}{mN})^2\right]_A^B .$$

Ainsi $I(0,N) = \frac{mN}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-\frac{2}{m})^2\mathrm{Log}(1-\frac{2}{m}) - \frac{1}{4}(1-\frac{2}{m})^2\right]$

d'autre part

$$I(0,N) = \int_0^N h(u)du \geqslant S_+(N)-h([M])-h([M+1]) \geqslant I(0,N)-I([M]-1,[M]+2)).$$

Comme

$$I([M]-1),[M]+2) = \int_{[M]-1}^{M} h(u)du + \int_{[M]}^{[M]+2} h(u)du$$

$$\leqslant 3h(M)$$

il en résulte

$$I(0,N) \geqslant S(N) - h([M]) - h([M]+1) \geqslant I(0,N) - 3h(M).$$

Il suffit de remarquer que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{h(M)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}(\frac{1}{e}) = 0.$$

Par suite :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{S(N)}{N} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} I(0,N) = \frac{m}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-\frac{2}{m})^2\mathrm{Log}(1-\frac{2}{m}) - \frac{1}{4}(1-\frac{2}{m})^2\right].$$

Si $m \geqslant 4$ alors $M > N$. Dans ce cas, le résultat s'obtient de façon identique en utilisant le fait de h est croissante sur $[0,N]$.

Enfin, pour établir la limite de $\frac{S\_(N)}{N}$, on raisonne de façon analogue avec la fonction $g(u) = (1 + \frac{2u}{mN})\mathrm{Log}(1 + \frac{2u}{mN})$.

En conséquence

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{s} \mathrm{Log}\, P_+P_- = 2(\mathrm{Log}\, 2 + \frac{m}{4} (\frac{1}{2} (1 - \frac{2}{m})^2 \mathrm{Log}(1 - \frac{2}{m}) - \frac{1}{4} (1 - \frac{2}{m})^2 -$$

$$- \frac{1}{2} (1 + \frac{2}{m})^2 \mathrm{Log}(1 + \frac{2}{m}) + \frac{1}{4} (1 + \frac{2}{m})^2)).$$

Cas $m = 2$.

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{s} \mathrm{Log}\, P_+P_- = 1$$

$$\lim_{X\to+\infty} \mathrm{Log}\, n_{/Nk}(\mathrm{Log}\, x)^{-1} = \frac{1}{6} .$$

Soit $C < \sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$ de façon identique au paragraphe on a pour $X \geqslant X(C)$

$$\mathrm{Log}\, W_\ell(X) \geqslant \sqrt{2}\sqrt{3}\ \sqrt{\mathrm{Log}\, X} \qquad \sqrt{2}\sqrt{3} = 2{,}4494...$$

Si $m = 4$;

Pour $C < \sqrt{3}$

$$\lim_{X\to+\infty} \mathrm{Log}\, n_{/Nk}(\mathrm{Log}\, x)^{-1} < 1$$

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{Log} P_+P_-}{s} = 2(\mathrm{Log}\, 2 + \frac{1}{2} (1 - \frac{\mathrm{Log}\ 2}{4} - \frac{9}{4} \mathrm{Log}\, \frac{3}{2})$$

$$= 2 \times 0{,}607564...$$

finalement pour $K < (1{,}300711...)\sqrt{3} = 2{,}2528...$ Il existe $X(K)$ tel que

$X \geqslant X(K)$ entraîne

$$\mathrm{Log}\, W_\ell(X) \geqslant K\sqrt{\mathrm{Log} X}$$

Rappelons enfin que $\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 2{,}565...$

APPENDICE

Le but de ceci est d'essayer de généraliser quelques notions introduites au paragraphe 3 à l'anneau $F_q[X]$.

A.1.- *Notations*.

On pose $q = p^m$ $p \in P$. On désigne par $E_n(q)$ l'ensemble des éléments unitaires de degré n de $F_q[X]$, $I_n(q)$ celui des élément irréductibles de $E_n(q)$.

Un élément de $E_n(q)$ peut se mettre sous la forme $a_o + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$, $a_o, \ldots, a_{n-1} \in F_q$ de sorte que card $E_n(q) = q^n$.

Le nombre d'éléments de $I_n(q)$ vérifie le résultat suivant.

Proposition A.2.-

Pour $k \geqslant 1$ $\quad q^k = \sum_{d|k} dI_d(q)$

la démonstration de ceci se trouve dans [Ber].

On déduit de cette formule que $I_1(q) = q$ $\quad I_2(q) = \frac{q^2-q}{2}$ $\quad I_3(q) = \frac{q^3-q}{3}$

$$q^k = \sum_{d|k} dI_d \leqslant kI_k + \sum_{i=0}^{[k/2]} q^i < kI_k + q^{\frac{k}{2}+1}$$

(par simplification on note I_d pour $I_d(q)$)

ainsi

$$I_k > \frac{q^k}{k} - \frac{q^{\frac{k}{2}+1}}{k} = \frac{q^k}{k}\left(1 - q^{-\frac{k}{2}+1}\right).$$

Cette dernière inégalité montre en particulier que $I_k > 0$ pour $k > 2$. Mais nous avons remarqué que $I_1 I_2 > 0$.

En conséquence pour tout $n \geqslant 1$, il existe au moins un polynôme irréductible unitaire de degré n.

On peut effectivement déterminer I_n.

Proposition A.3.-

Pour $n \geqslant 1$, $I_n(q) = \frac{1}{n}\left(q^n - \sum_i q^{\frac{n}{p_i}} + \sum_{i<j} q^{\frac{n}{p_i p_j}} \dots + (-1)^r q^{\frac{n}{p_1 \dots p_2}}\right.$

$p_1 \dots p_r$ étant les facteurs irréductibles distincts de n.

On peut encore écrire

$$I_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) q^{\frac{n}{d}} .$$

La démonstration de cette propriété est proposée dans [Bour].

Définition A.4.-

1) On pose pour $Q \in E_n$ $\qquad \omega(Q) = \sum_{P|Q} 1$

P irréductible unitaire

ω est une fonction additive de $E = \bigcup_{n \in N} E_n(q) \to \mathbb{N}$ c'est-à-dire que $\omega(Q_1\ Q_2) = \omega(Q_1) + \omega(Q_2)$ si Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux.

2) Nous dirons que $Q \in E_n$ est ω hautement composé si pour tout Q' de degré strictement inférieur à celui de Q, on a $\omega(Q') < \omega(Q)$.

Remarque : On utilise ici l'ordre partiel constitué par le degré puisque $F_q[X]$ n'est pas ordonnable.

Notations.

Les polynômes irréductibles appartenant à $E_n(q)$ sont en nombre fini

si $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $Q_k = \prod\limits_{\substack{n \leqslant k \\ P \in \mathcal{I}_n(q)}} P$

$$= X(X-1)\dots(X-p+1) \prod_{P_2 \in \mathcal{I}_2(q)} P_2 \times$$

$$\times \prod_{P_k \in \mathcal{I}_k(q)} P_k \; .$$

Théorème A.5.-

Les polynômes Q_k sont exactement les polynômes ω-hautement composés de $F_q[X]$.

Démonstration :

Remarquons tout d'abord que le degré de Q_k vaut

$$\delta(k) = I_1 + 2I_2 + 3I_2 + \dots + kI_k = q + 2\left(\frac{q^2-q}{2}\right) + 3\left(\frac{q^3-q}{3}\right) + \dots + kI_k \; .$$

Soit $Q \in E_n(q)$ avec $n < \delta(k)$ et supposons que

$$\omega(Q) \geqslant \omega(Q_k) = \sum_{i=1}^{k} I_i \; .$$

On peut toujours écrire

$Q = \prod\limits_{P|Q}' P \times Q_o$ le produit est entendu aux facteurs premiers de Q dont le degré est inférieur ou égal à k. Par suite les facteurs irréductibles de Q_o sont au moins de degré $k+1$ dès que $Q_o \neq 1$. On suppose que Q n'est pas divisible par le carré d'un polynôme irréductible et qu'il possède exactement $j(n)$ facteurs irréductibles de degré n pour $n = 1,2,\dots,k$ où $j(n) = 0,\dots,I_n$ alors comme

$(Q_o \,, \prod_{P|Q}' P) = 1$

$$(Q_o) \geqslant \sum_1^k I_n - j(1) - j(2), \ldots - j(n).$$

On a donc

deg $Q = j(1)+2j(2)+\ldots+kj(k)+\deg Q_o$ car les polynômes sont tous unitaires

$$\deg Q_o \geqslant (\sum_1^k I_n - j(1) - j(2) \ldots - j(n))(k+1)$$

car tous les facteurs irréductibles de Q_o sont au moins de degré $k+1$.

$$\text{Ainsi} \quad \deg Q \geqslant j(1)+2j(2)+\ldots+kj(k)+(\sum_1^k I_n)k-(j(1)+\ldots+j(k))k$$

$$\geqslant j(1)+I_1-j_1+2j(2)+2(I_2-j(2))+\ldots\ kj(k)+k(I_k-j_k)$$

$$\geqslant I_1+2I_2+\ldots+kI_k = \deg Q_k \text{ , ce qui est impossible.}$$

Si maintenant Q est divisible au moins par le carré d'un facteur irréductible on considère le polynôme Q' composé de tous comme nous venons de montrer que dans ce cas $\deg Q' \geqslant \deg Q_k$ ceci entraîne $\deg Q > \deg Q_k$ ce qui est absurde.

Remarque A.6.-

On peut définir de la même manière les polynômes de $E_n(q)$ ω largement composés : ce sont naturellement les polynômes Q de $E_n(q)$, vérifiant $\omega(Q') \leqslant \omega(Q)$ pour tout $Q \in E_m(q)$ où $m \leqslant r$.

$F_q[X]$ n'étant pas ordonnable les méthodes utilisées pour les nombres ω largement composés ne paraissent plus valables pour déterminer la proportion de tels polynômes dans $E_n(q)$.

BIBLIOGRAPHIE

[AND] ANDREWS (G.E.) - The theory of partitions - Encyclopedia of mathematics and its applications - Volume 2 - 1976 - Addison - Wesley Publishing Company.

[AY] AYOUB (R.) - An introduction to the analytic theory of numbers - mathematical survey n° 10 - 1963 - American mathematical Society.

[BER] BERLEKAMP (E.R.) - Algebraic coding theory - Mc Graw Hill Book Company.

[BOUR] BOURBAKI (N.) - Algebre, chapitre V, § 11.

[BRIG] BRIGHAM (N.A.) - A general asymptotic formula for partitions - 1950 - Proc. Math. Soc. 1, 182-191.

[CRA] CRAMER (H.) - On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers - Acta Arith. 2, 1937, p. 23-46.

[DIEU] DIEUDONNE (J.) - Calcul infinitésimal - Herman, Paris 1968 (Collection méthodes).

[ELL] ELLISON (J.), MENDES FRANCE (M.) - Les nombres premiers - Herman, 1975.

[HAL] HALASZ (G.) - On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions - Studia Sci. Math. Hungar, Vol. 6, 1971 - p. 211-233.

[HALB] HALBERSTAM (H.), RICHERT (H.E.) - Sieve methods - London Academic Press, 1974 (London mathematical Society monographs, 4).

[HAR] ou [H.W]. HARDY (G.H.), WRIHT (E.M.) - An introduction to the theory of numbers - Oxford, Clarendon Press.

[HUX] HUX (M.N.) - The distribution of prime numbers - Oxford Clarendon Press, 1972.

[IW] HEATH BROWN (D.R.), IWANIEC (H.) - On the difference between consecutive primes - Inventiones mathematicae n° 55, 1979.

[NIC] NICOLAS (J.L.) - Répartition des nombres largement composés. Séminaire Delange-Pisot-Poitou - 19ème année 1977/78 - exposé n° 41.

BIBLIOGRAPHIE (SUITE)

[NIC] 2 ERDÖS (P.) et NICOLAS (J.L.) - Sur la fonction nombre de facteurs premiers de n - Séminaire Delange-Pisot-Poitou 20ème année : 1978/79, exposé n° 32.

[NIV] NIVEN (I.), ZUCKERMAN (H.S.) - An introduction to the theory of numbers.

[RAM] HARDY (G.H.), RAMANUJAN (S.) - Twelve lectures on subjets suggested by his life and work - Chelsea Publishing company.

[ROB] ROBIN (G.) - Estimation de la fonction de Tcheybychef θ sur le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$, nombres de diviseurs premiers de N.

[SEL] SELBERG (A.) - Note on a paper by L.G. Sathe - J. Indian. Math. Soc. t. 18, 1954, p. 83-87.

Soit n un entier naturel non nul. $\omega_A(n)$ étant le nombre de facteurs premiers distincts de n appartenant à A (où A est inclus dans l'ensemble des nombres premiers et vérifie une propriété analogue au théorème des nombres premiers). On définit $s_A(x,y) = \text{card}\{n \leqslant x, \omega_A(n) > y\}$ pour $y \geqslant 0$. Si on suppose $y \geqslant f(x) > 0$, f étant une fonction numérique on peut étudier le comportement de $s_A(x,y)$ lorsque x tend vers l'infini. En particulier il est intéressant d'établir des encadrements de $s_A(x,y)$.

De manière analogue si $\Omega_A(n)$ désigne le degré de composition de n en éléments de A comptés avec leur multiplicité. On étudie le comportement de $s_A(x,y) = \{n \leqslant x, \Omega_A(n) > y\}$: cette étude est subordonnée à l'emploi d'un résultat de G. Halàsz sur la distribution locale de Ω_A.

On considère ensuite les nombres ω lartement composés : ce sont les entiers vérifiant $m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$. Soit $W_\ell(X) = \text{card}\{n < X,\ n \text{ est } \omega.\text{l.c}\}$.

Nous déterminons $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que $C_1\sqrt{\text{Log } X} \leqslant \text{Log } W_\ell(X) \leqslant C_2\sqrt{\text{Log } X}$.

Il est raisonnable de penser que $C_1 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Par des raffinements on essaye d'obtenir des valeurs de C_1 de plus en plus proches de $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

MOTS CLÉS

. ERDÖS . THEOREME

. NOMBRE (THEOREME ANALYTIQUE)

. PREMIER . NOMBRE . THEOREME.