N° d'ordre : 953

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

HEMDAOUI MOHAMMED

APPROXIMATION ANALYTIQUE SUR LES COMPACTS DE $\mathbb{C}^n$

MEMBRES DU JURY : M. PARREAU, PRÉSIDENT
G. CŒURÉ, RAPPORTEUR
Ph. ANTOINE } EXAMINATEURS
F. VAN ISEGHEM } EXAMINATEURS
L. WAELBROECK, INVITÉ

SOUTENUE LE VENDREDI 26 FÉVRIER 1982

A ma mère,

A mes frères,

A Jeannine,

A mes amis ...

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ qui m'a accueilli, dans son équipe de Recherche, et m'a constamment aidé durant l'élaboration de ce travail, qu'il trouve donc ici, l'expression de ma profonde gratitude.

La présence dans mon jury de Monsieur le Professeur Lucien WAELBROECK de l'Université de Bruxelles me fait un très grand honneur dont je l'en remercie vivement.

Je remercie Monsieur le Professeur Michel PARREAU qui a bien voulu présider cette thèse, ainsi que Messieurs les Professeurs Philippe ANTOINE et François VAN ISEGHEM qui ont accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont, enfin, à tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce travail, et, particulièrement, à Madame Raymonde BÉRAT qui en a assuré la présentation dactylographiée.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Une sous-variété C^∞ de $\mathbb{C}^n$ est dite totalement réelle si en chacun de ses points, son espace tangent ne contient aucune droite complexe ; J. Werner et L. Hörmander ont montré [5] que pour tout compact K d'une telle sous-variété $\mathcal{O}(K)$ est dense dans $C(K)$. C. Wrobel [8] obtient ce résultat comme corollaire du théorème d'approximation suivant : si K est uniformément holomorphiquement convexe c'est-à-dire s'il existe θ dans $]0,1[$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage pseudo-convexe U_ε de K, vérifiant $\delta_K^{-1}[0,\theta\varepsilon[\subset U_\varepsilon \subset \delta_K^{-1}[0,\varepsilon[$ (δ_K est la distance à K). Alors toute fonction f de classe C^1 au voisinage de K telle que $d''f$ soit un $\mathcal{O}(\delta_K^N)$ pour un entier N convenable est limite uniforme sur K de fonctions holomorphes au voisinage de K.

Dans ce travail, nous établissons un résultat semblable en montrant que si K admet seulement un système fondamental de voisinages pseudo-convexes alors la même propriété a lieu pour les fonctions f telles que $d''f$ soit à décroissance rapide par rapport à une fonction régularisant en un certain sens δ_K.

On obtient aussi sans aucune hypothèse sur le compact K qu'une telle fonction f est limite uniforme sur K de fonctions analytiques par rapport aux coordonnées réelles sous-jacentes.

La méthode utilise une notion d'enveloppe de b-algèbres déjà introduite par Kiyoko Nishizawa [6] pour obtenir la propriété d'unicité du calcul fonctionnel holomorphe et dont la construction n'est qu'esquissée par l'auteur. Nous donnons une démonstration complète de l'existence de cette enveloppe. Les théorèmes décrits plus haut s'obtiennent à l'aide du calcul fonctionnel holomorphe à valeurs dans une enveloppe d'algèbres de fonctions holomorphes sur des ouverts polynomialement convexes de $\mathbb{C}^{2n}$ et on a été amené à étendre aux b-algèbres un calcul fonctionnel établi par C. Wrobel pour des fonctions à valeurs dans une algèbre de Banach ; la construction de ce calcul est semblable à celle de C. Wrobel [8] sauf pour la régularisation des coefficients spectraux qui dans [8] est propre aux algèbres de Banach ; nous utilisons la méthode de régularisation de Waelbroeck [7] que l'on a du réexposer pour obtenir une estimation précise des coefficients liés aux algèbres que nous utilisons.

CHAPITRE I

ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE b-ALGEBRES.

Définition d'une b-algèbre [3].

On appelle algèbre bornologique, une algèbre A, commutative et unitaire sur $\mathbb{C}$, munie d'une bornologie $\mathcal{B}$, vérifiant les propriétés suivantes :

a) la somme de deux bornés est un borné ;

b) l'homothétique de tout borné est un borné ;

c) l'enveloppe convexe et équilibré de tout borné est un borné ;

d) le produit de deux bornés est borné.

Si B est un disque borné de A, on désigne par A_B l'espace vectoriel engendré par B, muni de la jauge de B, on dit que le disque B est complétant si A_B est un espace de Banach.

On appelle b-algèbre où algèbre complète, une algèbre bornologique, admettant comme base de bornologie des disques complétants :

Considérons la donnée d'une famille $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de b-algèbres, et pour chaque λ de Λ, d'une base $(B_{\lambda,\mu})_{\mu\in M}$ de la bornologie de A_λ, où M est un ensemble ordonné filtrant à droite d'indices indépendants de λ ; on suppose chaque $B_{\lambda,\mu}$ convexe, équilibré et pour tout couple (μ,μ') de M^2, on puisse trouver ν dans M tel que $B_{\lambda,\mu}.B_{\lambda,\mu'} \subset B_{\lambda,\nu}$ pour tout λ dans Λ.

On suppose que pour tout couple (λ,λ') de Λ^2, il existe une algèbre notée $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$ unitaire et un morphisme d'algèbres $\Psi_{\lambda,\lambda'}$ resp.$(\Psi_{\lambda',\lambda})$ de $A_\lambda \cap A_{\lambda'} \to A_{\lambda'}$ (resp. de $A_\lambda \cap A_{\lambda'} \to A_\lambda$).

Pour ces données, on a le résultat suivant [6] dont on donnera une démonstration complète.

Théorème 1.- Il existe une famille de morphismes de b-algèbres $(\psi_\lambda : A_\lambda \to \mathcal{A})_{\lambda\in\Lambda}$ telle que

1°) $\psi_\lambda \circ \Psi_{\lambda'\lambda} = \psi_{\lambda'} \circ \Psi_{\lambda\lambda'}$ sur $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$

2°) Quel que soit μ dans M, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(B_{\lambda,\mu})$ est borné dans $\mathcal{A}$.

3°) Quel que soit la famille de morphismes de b-algèbres $(\psi'_\lambda : A_\lambda \longrightarrow \mathcal{A}')_{\lambda\in\Lambda}$ vérifiant 1°) et 2°), il existe un morphisme unique de b-algèbres

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

rendant commutatif les diagrammes suivants :

(1)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\ A_\lambda \arrow[ur, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\psi'_\lambda"'] & \\ & \mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

La famille de morphisme ψ_λ vérifiant 1°), 2°) et 3°) est unique à un isomorphisme bornologique près.

$\mathcal{A}$ sera appelée l'enveloppe de la famille $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Démonstration :

a) *Unicité de la solution*.

Si $(\mathcal{A} ; (\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ et $(\mathcal{A}', (\psi')_{\lambda\in\Lambda})$ sont deux solutions du problème alors d'après (1), il existe un unique morphisme d'algèbres

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

tels que

$$L \circ \varphi_\lambda = \varphi'_\lambda \qquad \forall \lambda \in \Lambda .$$

De même, il existe un unique morphisme d'algèbres

$$L' : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$$

tels que

$$L' \circ \varphi'_\lambda = \varphi_\lambda \qquad \forall \lambda \in \Lambda .$$

Le morphisme $L' \circ L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ vérifie la commutation du diagramme (3) avec $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ ainsi $L' \circ L = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

On a de même $L \circ L' = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}'}$, ainsi L est un isomorphisme et les familles de morphismes $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(\varphi'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont bien isomorphes.

b) *Existence de la solution.*

Pour toute partie finie J de Λ, on considère :

$$A^J = \prod_{\lambda\in J} A_\lambda \quad ; \quad A_J = \bigotimes_{\lambda\in J} A_\lambda$$

$\sum_J A_J = A$ la somme directe des espaces A_J, quand J parcourt l'ensemble des parties finies de Λ.

On considère l'application multilinéaire définie sur $A^J \times A^{J'}$ à valeurs dans $A_{J \cup J'}$ par :

$$\Psi_{J,J'}(x^J, x^{J'}) = \bigotimes_{J \cap J'} x_\lambda x'_\lambda \bigotimes_{J-J'} x_\lambda \bigotimes_{J'-J} x'_\lambda .$$

D'après la propriété universelle du produit tensoriel et de la somme directe, elle se prolonge en une forme bilinéaire unique sur $A_J \times A_{J'}$ qu'elle même se prolonge d'une façon unique, en une application bilinéaire sur A à valeurs dans A qui définit une multiplication commutative sur A notée par •

Or on constate que

$$((\underset{J}{\otimes} x_\lambda)(\underset{J'}{\otimes} x'_{\lambda'}))(\underset{J''}{\otimes} x''_{\lambda''}) = \underset{J \cap J' \cap J''}{\otimes} x_\lambda x'_\lambda x''_\lambda \underset{J \cap J'-J''}{\otimes} x_\lambda x'_\lambda \underset{J \cap J''-J'}{\otimes} x_\lambda x''_\lambda$$

$$\underset{J' \cap J''-J}{\otimes} x'_{\lambda'} x''_{\lambda'} \underset{J-J' \cup J''}{\otimes} x_\lambda \underset{J'-J \cup J''}{\otimes} x'_{\lambda'} \underset{J''-J \cup J'}{\otimes} x''_{\lambda''} .$$

Cette expression est symétrique en J, J' et J'', en raison de la commutativité de la multiplication dans les A_J, il en résulte l'associativité de la multiplication dans A.

Ainsi A devient une algèbre commutative non unitaire sur $\mathbb{C}$.

Un élément quelconque de A s'écrit sous la forme d'une somme finie

$$\sum \alpha_I \; a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_p}$$

où

$$\alpha_I \in \mathbb{C}, \qquad I = (i_1,\ldots,i_p) \quad , \qquad a_{i_j} \in A_{\lambda_j} .$$

Sur A, on considère la famille $(B_{r,p,\mu})_{(r,p,\mu)\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \times M}$

où

$$B_{r,p,\mu} = \{\sum \alpha_I \; a_{i_1} \otimes \ldots \otimes a_{i_p} \; ; \; I = (i_1,\ldots,i_k), \; k \leqslant p \; ; \; \sum |\alpha_I| \leqslant r \; ; \; a_{i_j} \in B_{\lambda_j,\mu}\}$$

la famille $(B_{r,p,\mu})_{(r,p,\mu)\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \times M}$ définit une base de bornologie vectorielle sur A ; en effet :

$$A = \bigcup_{(r,p,\mu)} B_{(r,p,\mu)} .$$

La somme de deux bornés est un borné et plus précisément

$B_{r,p,\mu} + B_{r',p',\mu'} \subset B_{r'',p'',\mu''}$

où

$r'' = \sup(r,r')$, $p'' = \sup(p,p')$

μ'' est tel que $B_{\lambda,\mu} + B_{\lambda,\mu'} \subset B_{\lambda,\mu''}$ $\forall \lambda \in \Lambda$.

L'homothétique de tout borné est un borné et plus précisément $t \in \mathbb{C}$, $t \cdot B_{r,p,\mu} \subset B_{|t|r,p,\mu}$.

$B_{r,p,\mu}$ est convexe et équilibré par construction.

Le produit de deux bornés est un borné et plus précisément

$B_{r,p,\mu} \cdot B_{r',p',\mu'} \subset B_{r'',p'',\mu''}$

où

$r'' = r'.r$, $p'' = p + p'$.

$\mu'' \in M$ est tel que $B_{\lambda,\mu} \cdot B_{\lambda',\mu'} \subset B_{\lambda,\mu''}$ $\forall \lambda \in \Lambda$.

Dans A, on considère l'idéal I engendré par les éléments de la forme

$f_\lambda \circ \Psi_{\lambda'\lambda}(a) - f_{\lambda'} \circ \Psi_{\lambda\lambda'}(a)$

où | f_λ est l'application canonique de A_λ dans A ,
| λ,λ' varient dans Λ et a varie dans $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$.

Comme $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$ est unitaire si $e_{\lambda\lambda'}$ désigne son élément neutre alors

$f_\lambda(1_\lambda) - f_{\lambda'}(1_{\lambda'}) \in I$ $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$

où 1_λ (resp. $1_{\lambda'}$) est l'élément neutre de A_λ (resp. de $A_{\lambda'}$).

Ainsi l'algèbre quotient A/I est unitaire et a pour élément unité la classe de $f_\lambda(1_\lambda)$, en effet : si x_J est un tenseur élémentaire de A_J et si λ_o est un élément de J (J partie finie de Λ) on a :

$$\begin{aligned} f_\lambda(1_\lambda) \cdot f_J(x_J) &= f_{\lambda_o}(1_{\lambda_o}) f_J(x_J) \quad (\text{mod } I) \\ &= f_J(1_{\lambda_o} \cdot x_J) \quad (\text{mod } I) \\ &= f_J(x_J) \quad (\text{mod } I). \end{aligned}$$

Ainsi A/I muni de la structure bornologique quotient est une algèbre bornologique unitaire.

Soit $\mathcal{A}$, le complété bornologique de A/I qui est caractérisé d'après [4] par l'existence d'un morphisme d'algèbres u unique : $u \quad A/I \to \mathcal{A}$ possédant la propriété universelle suivante.

Pour tout morphisme d'algèbres borné $P : \widehat{A/I} \to E$ où E est une b-algèbre, il existe un morphisme d'algèbres bornologique unique $\tilde{P} : A/I \to E$ tel que

$$P = \tilde{P} \circ u$$

on pose

$$\psi_\lambda = u \circ \theta \circ f_\lambda \qquad \lambda \in \Lambda$$

où

θ est le plongement canonique de A dans A/I.

Alors $(\mathcal{A}, (\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ est la solution du problème.

Démonstration :

- Les ψ_λ sont des morphismes d'algèbres bornés
- $\psi_\lambda \circ \Psi_{\lambda'\lambda} = \psi_{\lambda'} \circ \Psi_{\lambda\lambda'}$ sur $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$ évident.
- $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(B_{\lambda,\mu})$ est borné dans $\widehat{A/I} = \mathcal{A}$ en effet :

$f_\lambda(B_{\lambda,\mu})$ est contenu dans un $B_{1,1,\mu}$, $\forall \lambda \in \Lambda$

donc

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(B_{\lambda,\mu}) \subset (u \circ \theta)(B_{r,p,\mu}) \text{ est borné dans } \mathcal{A}.$$

- La b-algèbre $\mathcal{A}$ est universelle en effet :

Soient $\mathcal{A}'$ une autre b-algèbre et $\varphi'_\lambda : A_\lambda \to \mathcal{A}'$ d'autres morphismes d'algèbres vérifiant les propriétés

* $\varphi'_\lambda \circ \Psi_{\lambda'\lambda} = \varphi'_{\lambda'} \circ \Psi_{\lambda\lambda'}$ sur $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$

* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi'_\lambda(B_{\lambda,\mu})$ est borné dans $\mathcal{A}'$.

Pour toute partie finie J de Λ, on a :

$$\begin{array}{ccc} A^J = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda & \xrightarrow{\varphi'_J} & \mathcal{A}' \\ (x_\lambda)_{\lambda\in J} & \longrightarrow & \varphi'_J((x_\lambda)) = \prod_{\Lambda\in J} \varphi'_\lambda(x_\lambda) \end{array}$$

est une application multilinéaire multiplicative, donc d'après la propriété universelle du produit tensoriel, il existe un et un seul morphisme d'algèbres $L_J : A_J \to \mathcal{A}'$ vérifiant :

$$L_J(\bigotimes_J x_\lambda) = \prod_{\lambda\in J} \varphi'_\lambda(x_\lambda) \quad .$$

Comme $\sum_J A_J = A$ est une somme directe. Alors il existe un et un seul morphisme d'algèbres $L : A \to \mathcal{A}'$ telle que la restriction de L à chaque A_J soit exactement L_J.

L est borné :

Comme $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(B_{\lambda,\mu})$ est borné dans $\mathcal{A}'$; pour tout entier m $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi'_\lambda(B_{\lambda,\mu})\right)^m$ est aussi borné dans $\mathcal{A}'$ si on note par :

$$\sqrt[r]{\left(\bigcup \varphi'_\lambda(B_{\lambda,\mu})\right)^m} = \left\{\sum \alpha_I \;\; \varphi'_{i_1}(a_{i_1}),\ldots,\varphi'_{i_m}(a_{i_m}),\;\; I = (i,\ldots,i_m),\;\; \sum |\alpha_I| \leq r \quad a_{i_j} \in B_{\lambda_j,\mu}\right\}$$

alors cet ensemble est borné dans $\mathcal{A}'$.

Soit $B_{r,p,\mu}$ un borné dans A, son image par L est contenue dans l'ensemble :

$$\left\{\sqrt[r]{\left(\bigcup \varphi'_\lambda(B_{\lambda,\mu})\right)^m}\right\} \quad m \leq p$$

qui est borné dans $\mathcal{A}'$.

Puisque $\varphi'_\lambda \circ \Psi_{\lambda'\lambda} = \varphi'_{\lambda'} \circ \Psi_{\lambda\lambda'}$ sur $A_\lambda \cap A_{\lambda'}$ alors l'idéal I est contenu dans $\mathrm{Ker}\, L$. D'après le théorème de factorisation des applications linéaires, il existe donc un et un seul morphisme d'algèbres borné

$$L' : A/I \longrightarrow \mathcal{A}'$$

vérifiant :

$$L = L' \circ \theta .$$

D'après la propriété universelle du complété bornologique, il existe alors un et un seul morphisme d'algèbres borné

$$L : A/I \longrightarrow \mathcal{A}'$$

vérifiant $L \circ u = L'$ où $u : A/I \to A/I$ et pour tout λ de Λ on a :

$$L \circ \varphi_\lambda = \varphi'_\lambda .$$

CHAPITRE II

EXEMPLE D'ENVELOPPE.

On se donne une famille $(U_s)_{s \in \Lambda}$ d'ouverts pseudo-convexes de $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n(z) \times \mathbb{C}^n(w)$, et ε une fonction supérieure où égale à 1 sur Λ

pour $(z,w) \in U_s$, on désigne par :

$$\delta_{U_s}(z,w) = \mathrm{Min}(\delta_o(z,w) \ ; \ d((z,w), \complement U_s))$$

$$\delta_o(z,w) = (1 + |z|^2 + |w|^2)^{-1/2}$$

$d((z,w), \complement U_s)$ = distance de (z,w) au bord de U_s.

On désigne par A_s, l'algèbre des fonctions f, holomorphes à croissance tempérée dans U_s, c'est-à-dire les fonctions f tels que, il existe un couple (M,N) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ vérifiant

$$\delta_{U_s}^N |f| \leqslant M .$$

On munit A_s de la base de bornologie vectorielle formée par les homothétiques des ensembles de la forme

$$B_{s,N} = \{f \in A_s \quad , \quad \varepsilon(s)\delta_{U_s}^N |f| \leqslant 1\} .$$

Cette base de bornologie vérifie

- $B_{s,N} + B_{s,N'} \subset 2B_{s,N+N'}$ $\quad \forall s \in \Lambda$
- $B_{s,N} \cdot B_{s,N'} \subset B_{s,N.N'}$ $\quad \forall s \in \Lambda$.

De cette manière A_s devient une b-algèbre, qui sera notée par A_s^ε.

On se propose de déterminer une enveloppe, pour la famille de b-algèbres $(A_s^\varepsilon)_{s\in\Lambda}$.

Pour cela, on considère l'algèbre $\mathcal{P}$ des fonctions polynomes en z sur $\mathbb{C}^n$.

On a un morphisme d'algèbres

$$\Psi_s \; : \mathcal{P} \longrightarrow A_s$$

qui à toute fonction polynome f de $\mathcal{P}$, fait correspondre la fonction $\Psi_s(f) = f_s$ de A_s définie sur U_s par

$$f_s(z_s,w_s) = f(z_s) \quad .$$

Dans ces conditions (d'après le chapitre I), on sait trouver une enveloppe $\mathcal{A}^\varepsilon$, et des morphismes d'algèbres bornés φ_s vérifiant :

$$\begin{tikzcd}
 & A_s^\varepsilon \arrow[dl, "\lambda_s"'] \arrow[dr, "\varphi_s"] & \\
\mathcal{P} \arrow[ur, "\Psi_s"] \arrow[dr, "\Psi_{s'}"'] & \mathcal{A} & \mathcal{A}^\varepsilon \arrow[l, dashed, "L"'] \\
 & A_{s'} \arrow[ul, "\lambda_{s'}"] \arrow[ur, "\varphi_{s'}"'] &
\end{tikzcd}$$

dès que

- $\bigcup_{s\in\Lambda} \lambda_s(B_{s,N})$ est borné dans $\mathcal{A}'$

- et

$$\lambda_s \circ \Psi_s = \lambda_{s'} \circ \Psi_{s'}$$

avec

$$\varphi_s \circ \Psi_s = \varphi_{s'} \circ \Psi_{s'} \qquad \forall\, s, s' \in \Lambda$$

$L \circ \varphi_s = \lambda_s$ et $_{s\in\Lambda}\, \varphi_s(B_{s,N})$ est borné dans $\mathcal{A}^\varepsilon$, pour N fixé.

Proposition 1.- Considérons les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^\Lambda$

$$S_\varepsilon = \begin{cases} (\xi;\eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^\Lambda \quad \text{tels que} \\ \text{i) } (\xi;\eta_s) \in U_s, \quad \forall s \in \Lambda \\ \text{ii) } \forall N \in \mathbb{N}, \exists M_N \in \mathbb{R}_+ \ \text{tel que } |u(\xi,\eta_s| \leqslant M_N, \forall u \in B_{s,N}, \forall s \in \Lambda \end{cases}$$

$$\Sigma'_\varepsilon = \begin{cases} (\xi;\eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^\Lambda \quad \text{tels que} \\ \text{i) } (\xi;\eta_s) \in U_s, \quad \forall s \in \Lambda \\ \text{ii) } \inf\limits_{\Sigma'_\varepsilon} \varepsilon(s)\delta^N_{U_s}(\xi;\eta_s) > 0 \qquad \forall N \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{cases} (\xi;\eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^\Lambda \quad \text{tels que} \\ \text{i) } (\xi;\eta_s) \in U_s, \quad \forall s \in \Lambda \\ \text{ii) } \inf\limits_{s\in\Lambda} \varepsilon(s)\ \delta_{U_s}(\xi;\eta_s) > 0. \end{cases}$$

Alors

a) le spectre de $\mathcal{A}^\varepsilon$ s'identifie à S_ε, dans le sens suivant : il existe une bijection L de S_ε sur le spectre de $\mathcal{A}^\varepsilon$ tel que

$$\forall(\xi;\eta) \in S_\varepsilon \qquad L(\xi,\eta) \circ \psi_s = \widehat{(\xi;\eta_s)} \qquad \forall s \in \Lambda$$

où $\widehat{(\xi;\eta_s)}$ désigne l'évaluation au point (ξ,η_s) de U_s dans l'algèbre A_s.

b) De plus, on a $\Sigma'_\varepsilon \subset S_\varepsilon \subset \Sigma_\varepsilon$.

Preuve : On vérifie d'abord a).

Soit $(\xi;\eta)$ un point dans S_ε, la réunion $\bigcup_{s\in\Lambda} \widehat{(\xi,\eta_s)}(B_{s,N})$ est contenu dans le disque de rayon M_N, de plus on a :

$$\widehat{(\xi,\eta_s)} \circ \Psi_s = \widehat{(\xi,\eta_{s'})} \circ \Psi_{s'} = \widehat{\xi} \quad \text{sur} \quad P.$$

D'après la propriété universelle de l'enveloppe, il existe un et un seul morphisme d'algèbres bornologique

$$L_{(\xi,\eta)} \ : \ \mathcal{A}^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{C}$$

tel que

$$L_{(\xi,\eta)} \circ \varphi_s = \widehat{(\xi;\eta_s)} \qquad \text{sur} \quad A_s$$

l'application L cherchée est définie par

$$(\xi,\eta) \longrightarrow L_{(\xi,\eta)} .$$

L est injective : car les fonctions coordonnées qui sont dans A_s séparent les points.

L est surjective : soit Ψ un caractère de $\mathcal{A}^\varepsilon$ alors $\Psi \circ \varphi_s$ est un caractère borné de A_s, comme U_s est pseudo-convexe on sait [3] que $\Psi \circ \varphi_s$ est l'évaluation en un point (ξ_s,η_s) de U_s ; on a donc :

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_s = \Psi \circ \varphi_s \circ \Psi_s[z] \\ \eta_s = \Psi \circ \varphi_s[w] \end{cases} \qquad \forall\, s \in \Lambda$$

ici $[z]$ (resp. $[w]$) désigne l'application $(z,w) \to z$ (resp. $(z,w) \to w$) de A_s.

Mais la définition de I fait que $\varphi_s \circ \Psi_s = \varphi_{s'} \circ \Psi_{s'}$ ainsi (ξ_s) est un point de $\mathbb{C}^n$ indépendant de s dans Λ et $\Psi = L_{(\xi,\eta)}$; il reste à vérifier que $(\xi;\eta)$ est dans S_ε, on a :

(2) $u(\xi,\eta_s) = \Psi \circ \varphi_s(u)$, quel que soit u dans $B_{s,N}$.

Mais $\varphi_s(B_{s,N})$ est contenu dans un borné de $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ lorsque s décrit Λ, ainsi la propriété ii) est vérifiée.

Montrons maintenant le point b).

L'inclusion $\sum'_{\varepsilon} \subset S_{\varepsilon}$ résulte immédiatement de la définition des bornés $B_{s,N}$.

Montrons maintenant que S_{ε} est contenu dans $\sum_{\varepsilon}$.

En effet :

D'après un théorème de Cnop [2] U_s est spectral dans A_s, pour $(z_s;w_s)$, c'est-à-dire : il existe un couple (M,N) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, et pour tout η dans $\mathbb{C}^{2n}$ des fonctions u^i_{η} , $i = 0,1,\dots,2n$ holomorphes sur U_s , vérifiant pour tout s dans Λ.

$$<(z_s;w_s)- \ ;u_{\eta}> + \delta_{U_s}(\eta)u^o_{\eta} = 1$$

$$\delta^N_{U_s}|u^i_{\eta}| \leqslant M \qquad i = 0,\dots,2n .$$

En particulier au point $\eta = (\xi,\eta_s)$ de U_s , on a :

(*) $$<(z_s,w_s) - (\xi,\eta_s),u_{(\xi,\eta_s)}> + \delta_{U_s}(\xi,\eta_s)u^o_{(\xi;\eta_s)} = 1$$

(3) $$\delta^N_{U_s}|u^i_{(\xi,\eta_s)}| \leqslant M , \qquad i = 0,\dots,2n.$$

En appliquant $\Psi \circ \varphi_s$ à (*), on a :

(4) $$u^o_{(\xi,\eta_s)}(\xi,\eta_s) = \frac{1}{\delta_{U_s}(\xi;\eta_s)} .$$

D'après [3] la famille $\varphi_s(\frac{1}{\varepsilon(s)}\, u^o_{(\xi,\eta_s)})_{s\in\Lambda}$ est borné dans $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ il existe donc une constante $M' > 0$ telle que :

$$\frac{1}{\varepsilon(s)} \left|\Psi \circ \Phi_s(u^o_{(\xi,\eta_s)})\right| \leqslant M' \qquad \forall s \in \Lambda .$$

Les relations (1) et (4) conduisent alors à la minoration suivante :

$$\inf_{s\in\Lambda} \varepsilon(s)\delta_{U_s}(\xi;\eta_s) \geqslant \frac{1}{M'}$$

et par suite le point $(\xi;\eta_s)_{s\in\Lambda} \in \sum_\varepsilon$.

Réalisation d'un quotient de $\mathcal{A}^\varepsilon$ comme algèbre de fonctions.

La proposition 1 a mis en évidence que le spectre de est formée par le sous-ensemble S_ε de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^\Lambda$ formé par les familles $(\xi,(\eta_s)_{s\in\Lambda})$ telles que :

1°) $(\xi;\eta_s) \in U_s$, $\forall s \in \Lambda$.

2°) $\forall N \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}_+$ telle que $|u(\xi,\eta_s)| \leqslant M, \forall u \in B_{s,N}, \forall s \in \Lambda$.

Pour tout $(\xi;\eta)$ de S_ε, on notera $M_N(\xi,\eta)$ le plus petit M vérifiant 2°).

On considère l'ensemble $T(P,N)$ forme par les couples (σ,u) où σ décrit les applications de $\{1,2,\dots,p\}$ dans Λ et $u = \left[u_{s,1},\dots,u_{s,p}\right]_{s\in\Lambda}$ décrit $\prod\limits_{s\in\Lambda} (B_{s,N})_P$.

Pour tout α dans $\ell^1\left[T(P,N)\right]$ et pour tout (ξ,η) dans S_ε on considère la série

$$f_\alpha(\xi,\eta) = \sum_{(\sigma,u)} \alpha_{\sigma,u}\, u_{\sigma(1),1}(\xi,\eta_{\sigma(1)}) \dots u_{\sigma(p),p}(\xi;\eta_{\sigma(p)}).$$

D'après 2°) cette série converge absolument, et on définit une application linéaire : $\alpha \to f_\alpha$ de $\ell^1\left[T(p,N)\right]$ dans l'ensemble des fonctions sur S_ε, de plus toujours d'après 2°), on a :

(3) $$|f_\alpha(\xi,\eta)| \leq ||\alpha||_{\ell^1} M_N^P(\xi;\eta)$$

le noyau V de cette application linéaire est fermé d'après (3).

Soit $E(P,N)$ l'ensemble des fonctions f qui est donc un espace vectoriel isomorphe à $\ell^1[T(P,N)]_{/V}$, on munit $E(P;N)$ de la norme quotient, qui devient donc un espace de Banach, la norme d'une fonction g de $E(P,N)$ est donc définie par

$$||g|| = \inf\{||\alpha||_{\ell^1} \;;\; g(\xi,\eta) = f_\alpha(\xi,\eta) \quad \text{sur} \quad S_\varepsilon\}.$$

Définition.- Soit A une algèbre bornologique, on appelle radical de A, l'ensemble $\bigcap_\chi (\chi^{-1}(\{0\}))$, quand χ parcourt l'ensemble des caractères bornés sur A.

Proposition 2.- Rappelons que $\mathcal{a}^\varepsilon$ est le complété bornologique de A^ε/I.

Soit J le radical de A^ε alors :

a) $\widehat{A^\varepsilon/J+I}$ le complété bornologique de $A^\varepsilon/J+I$ est la réunion des espaces de Banach $E(P,N)$ lorsque P et N decrivent $\mathbb{N}$.

b) pour tout α dans $\ell^1[T(P,N)]$, la série f_α converge uniformément sur $\sum'_\varepsilon$.

Preuve :

a) Montrons d'abord que si $P' \geq P$ et $N' \geq N$, alors $E(P,N)$ est un sous-espace de $E(P',N')$ et que l'injection canonique de $E(P,N)$ dans $E(P',N')$ est continue.

A tout $u \in \prod_{s\in\Lambda} (B_{s,N})_P$, associons $\tilde{u} \in \prod_{s\in\Lambda} (B_{s',N'})_{P'}$ en posant :

$$\tilde{u}_{s,k} = u_{s,k} \quad \text{si} \quad 1 \leq k \leq p \quad \text{et} \quad \tilde{u}_{s,k} = \frac{1}{\varepsilon(s)} \quad \text{si} \quad P < k \leq P.$$

Prolongeons chaque $\sigma : \{1,2,\dots,P\} \to \Lambda$ à $\{1,2,\dots,P'\}$ dans Λ en posant :

$\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ si $1 \leqslant i \leqslant P$ et $\tilde{\sigma}(i) = s_o$ si $P < i \leqslant P'$ où s_o est un point fixe dans Λ.

A tout α de $\ell^1[T(P,N)]$ on associe β dans $\ell^1[T(P',N')]$ en posant :

$$\beta_{\tau,\nu} = \alpha_{\sigma,\mu} \cdot \varepsilon_{(s_o)}^{P'-P} \quad \text{si} \quad (\tau,\nu) = (\tilde{\sigma},\tilde{u})$$

$$\beta_{\tau,\nu} = 0 \quad \text{autrement.}$$

On a :

$$f_\beta = f_\alpha \quad \text{et} \quad ||f_\beta||_{E(P',N')} \leqslant \varepsilon_{(s_o)}^{P'-P} ||f_\alpha||_{E(P,N)} .$$

Ce qui démontre que $E(P,N)$ est un sous-espace de $E(P',N')$ et que l'injection canonique de $E(P,N)$ dans $E(P',N')$ est continue.

Considérons les sous-espaces $E^o(P,N)$ fermés par les f_α lorsque α décrit $\ell^1[T(P,N)]$ en prenant la valeur 0 sauf pour un nombre fini d'indices, ces sous-espaces sont denses dans les $E(P,N)$.

Pour démontrer que la réunion des $E(P,N)$ est le complété bornologique de la réunion des $E^o(P,N)$, on utilise le résultat suivant : d'abord deux définitions :

Définition 1.- [4] Soient E_1 et E_2 deux espaces normés de normes P_1 et P_2 (respectivement) et π une injection linéaire continue de E_1 dans E_2, on dit que les normes P_1 et P_2 sont faiblement concordantes sur E_1 si pour toute suite de Cauchy (x_n) de E_1 telle que $\pi(x_n)$ converge vers $\pi(x_o)$ dans E_2 la suite x_n converge vers x_o dans E_1.

Définition 2.- [4] On dit qu'un espace bornologique convexe E possède la propriété de concordance faible des normes s'il est séparé et s'il possède une base de bornologie $(B_i)_{i\in I}$ tel que $E = \lim(E_i,\pi_{ij})$ où $(i \leqslant j)$ $\pi_{ij} : E_i \to E_j$ injection canonique continue de manière que si P_i désigne la norme de l'espace E_i, alors pour $i' \leqslant j$ les normes P_i et P_j sont faiblement concordantes sur E_i.

Théorème.- [4]

Soit un espace bornologique convexe de complété $\tilde{E}$.

i) si E est un espace bornologique convexe aux normes faiblement concordantes, soit $(E_i)_{i\in I}$ le système correspondant d'espaces normés tel que

$$E = \lim(E_i,\pi_{ij})$$

a) $\tilde{E} = \varinjlim(\hat{E}_i,\tilde{\pi}_{ij})$;

b) tout borné de $\tilde{E}$ est contenu dans l'adhérence dans l'adhérence dans un $\widehat{E_i}$ d'un borné de E_i ;

c) tout élément de $\tilde{E}$ est limite de Mackey d'une suite de E et par conséquent E est dense au sens de Mackey dans $\tilde{E}$.

ii) si E est un espace bornologique convexe aux normes fortement concordantes E est un sous-espace bornologique de son complété.

On utilise la partie (i) de ce théorème.

Soit $E = \bigcup_{(P,N)\in\mathbb{N}^2} E^o(P,N) = \varinjlim(E^o(P,N),\pi_{(P,N),(P',N')})$

où $\pi_{(P,N),(P',N')}$ désigne l'injection canonique de $E^o_{(P,N)}$ dans $E^o_{(P',N')}$ lorsque $P \leqslant P'$ et $N \leqslant N'$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E^{o}(P,N) \arrow[r, "\pi_{(P,N),(P',N')}"] \arrow[d, "u"'] & E^{o}(P',N') \arrow[d, "\bar{u}"] \\ E(P,N) \arrow[r, "\tilde{\pi}_{(P,N),(P',N')}"'] & E(P',N') \end{tikzcd}$$

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $E^{o}(P,N)$ telle que $\pi_{(P,N),P',N'}(x_n)$ converge vers $\pi_{P,N,P',N'}(x_o)$; il s'agit de montrer que x_n converge vers x_o.

D'une part, $u(x_n)$ converge vers un point x'_o de $E(P,N)$, par conséquent :

$$\bar{u} \circ \pi_{P,N,P',N'}(x_n) = \tilde{\pi}_{P,N,P'N'} \circ u(x_n)$$

converge vers $\tilde{\pi}_{P,N,P',N'}(x'_o) = \bar{u} \circ \pi_{P,N,P',N'}(x_o) = \tilde{\pi}_{P,N,P',N'} \circ u(x_o)$.

On a vu précédemment que $\tilde{\pi}_{P,N,P',N'}$ est injectif il en résulte donc :

$x'_o = u(x_o)$ et ainsi $u(x_n)$ converge vers $u(x_o)$

dans $E_{(P,N)}$ c'est-à-dire x_n converge vers x_o.

Ainsi la réunion des espaces $E_{(P,N)}$ est le complété bornologique de la réunion des $E^{o}_{(P,N)}$.

Enfin, puisque J est le radical de A^{ε} , $A^{\varepsilon}/I+J$ est isomorphe algébriquement à l'algèbre des fonctions $\hat{a}$ sur S_{ε} définies par :

$$(\xi;(\eta)_s) \longrightarrow (\xi,\eta_s)(a)$$

lorsque $\mathcal{a}$ décrit A^{ε} ; c'est-à-dire à l'ensemble des fonctions f_{α} lorsque f_{α} décrit la réunion de $E^{o}(P,N)$.

La définition des bornés de A^{ε} et le choix de la norme dans $E(P,N)$ fait que cet isomorphisme est bornologique, ceci termine la démonstration a).

$$\text{b)}\quad f_{\alpha}(\xi,\eta) = \sum_{(\sigma,\mu)} \alpha_{\sigma,\mu}\, u_{\sigma(1),1}(\xi,\eta_{\sigma(1)}) \ldots u_{\sigma(P),P}(\xi,\eta_{\sigma(P)})$$

donc

$$|f_{\alpha}(\xi,\eta)| \leqslant \sum_{(\sigma,\mu)} |\alpha_{\sigma,\mu}|\,|u_{\sigma(1),1}(\xi;\eta_{\sigma(1)}) \ldots u_{\sigma(P),P}(\xi,\eta_{\sigma(P)})|$$

or $$|u_{\sigma(1),1}(\xi,\eta_{\sigma(1)})| \leqslant \frac{1}{\varepsilon(s)\delta^{N}_{U_{\sigma(1)}}(\xi,\eta_{\sigma(1)})} \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{\Sigma'_{\varepsilon}} \varepsilon(s)\delta^{N}_{U_s}(\xi;\eta_s)} = M_N$$

donc

$$|f_{\alpha}(\xi.\eta)| \leqslant ||\alpha||_{\ell^1}.M_N^P .$$

Plongement de $\mathcal{a}^{\varepsilon}$ *dans* $\widehat{A^{\varepsilon}/J+I}$.

On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A^{\varepsilon}/I \arrow[r] \arrow[d] & A^{\varepsilon}/J+I \arrow[r] & \widehat{A^{\varepsilon}/J+I} = \bigcup\limits_{(P,N)} E(P,N) \arrow[d, "\chi"] \\
\varepsilon = \widehat{A^{\varepsilon}/I} \arrow[urr, "i"] \arrow[rr, "\chi \circ i"] & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

L'existence du morphisme i résulte de la propriété universelle du complété bornologique. L'application $\chi \rightarrow \chi \circ i$ réalise une bijection du spectre de $\widehat{A^{\varepsilon}/I+J}$ sur celui de $\mathcal{a}^{\varepsilon}$. En effet :

$$\chi \circ i = 0 \implies \chi\Big|_{A^{\varepsilon}/I+J} = 0 \implies \chi = 0 \quad \text{d'après}$$

l'unicité du prolongement au complété.

D'autre part, étant donné $\tilde{\chi}$ dans le spectre de $\mathcal{A}^{\varepsilon}$, la restriction de $\tilde{\chi}$ à $\widehat{A^{\varepsilon}/I+J}$ se prolonge en un caractère borné χ sur $A^{\varepsilon}/I+J$ qui vérifie $\chi \circ i = \tilde{\chi}$.

Dans la suite, i sera appelé le prolongement canonique de $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ dans $\widehat{A^{\varepsilon}/J+I}$.

• *Etude de deux exemples qui seront utilisés ultérieurement pour lesquels Σ'_{ε} est assez riche.*

On se donne un ensemble compact K de $\mathbb{C}^n$, et V un voisinage relativement compact de K.

A tout point s de $V-K = \Lambda$, on associe l'ouvert polynomialement convexe U_s, défini par

$$U_s = \{(z_s,w_s) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \left|<z_s-s;w_s> - 1\right| < 1\}$$

où

$$<z_s-s;w_s> = \sum_{i=1}^{n} (z_{s,i}-s_i)w_{s,i}\ .$$

1°) Cas.

On prend pour ε une fonction à croissance rapide par rapport à $\dfrac{1}{d(s,K)}$, c'est-à-dire une fonction vérifiant $\dfrac{1}{\varepsilon(s)} = \mathcal{O}(d^N(s;K))$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, sur Λ.

Proposition 3.-

Pour ξ dans K et s dans $V-K = \Lambda$, on pose

$$\xi_s = \frac{\bar{\xi} - \bar{s}}{|\xi-s|^2}$$

alors

$\Sigma'_{\varepsilon} = \{(\xi;\xi_s)_{s\in\Lambda}$; lorsque s décrit Λ et ξ décrit $K\}$ vérifie les conditions de la proposition 1.

Preuve : Il est clair que $(\xi,\xi_s) \in U_s \quad \forall s \in \Lambda$

pour chaque s de Λ on pose

$$\alpha(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|V| + 1 + \frac{1}{d(s,K)}}\right)$$

$|V|$ désigne le diamètre de V.

On considère le voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{2n}$, défini, par

$$W = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{2n} \mid |z| < \alpha(s) ; |w| < \alpha(s)\}$$

alors

$$\begin{aligned} & |<\xi+z-s;\xi_s+w> - 1| \\ \leqslant\ & |<\xi-s;w>| + |<z;\xi_s>| + |z||w| \\ \leqslant\ & |\xi-s||w| + |z|\ |\xi-s|^{-1} + |z||w| \\ \leqslant\ & \alpha(s)(|V| + 1 + |\xi-s|^{-1}) \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc

$$(\xi,\xi_s) + W \subset U_s .$$

Ainsi pour tout N dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\inf_{\Lambda\times K} \varepsilon(s)\ d^N \Big|(\xi;\xi_s), \Big|\ U_s \Big| \geqslant \inf_{s\in\Lambda} \varepsilon(s)\alpha^N(s) > 0.$$

De même, on voit que, pour tout N dans N, on a :

$$\delta_o^N(\xi;\xi_s) = \frac{1}{(1 + |\xi|^2 + \frac{1}{|\xi-s|^2})^{N/2}} \geqslant \frac{1}{(1 + |\xi|^2 + \frac{1}{d(s,K)}\ ^2)^{N/2}}$$

donc
$$\inf_{\Lambda\times K} \epsilon(s)\delta_o^N(\xi,\xi_s) > 0, \quad \forall N \in N$$

ainsi
$$\inf_{\Lambda\times K} \epsilon(s)\delta_{U_s}^N(\xi,\xi_s) > 0, \quad \forall N \in N .$$

Proposition 4.-

L'inclusion $S_\varepsilon \subset \Sigma_\varepsilon$ est stricte.

Preuve :

Considérons la famille $(\xi;\xi_s)_{s\in\Lambda}$ avec ξ dans K

et

$$\xi_s = \frac{\bar{\xi} - \bar{s}}{|V|^2\sqrt{\varepsilon(s)}}$$

le point (ξ,ξ_s) est dans U_s , d'autre part :

$$|<\xi-s+w,\xi_s+w>-1| < 1 \quad \text{dès que} \quad |w| < \frac{1}{|V|^2} \, \frac{d^2(s,K)}{|V|^{-1} + \sqrt{\varepsilon(s)}(1+|V|)}$$

ainsi

$$d((\xi,\xi_s), |U_s) \geqslant \frac{1}{|V|^2} \, \frac{d^2(s,K)}{|V| + \sqrt{\varepsilon(s)}(1+|V|)}$$

$$\delta_o(\xi,\xi_s) = \frac{1}{(1 + |\xi|^2 + \frac{|\xi-s|^2}{|V|^4 \, (s)})^{1/2}} \geqslant \frac{|V| \quad \sqrt{\varepsilon(s)}}{(1 + |V|^2 \; \varepsilon(s)(1+|\xi|^2)^{1/2}} \; .$$

Puisque $\varepsilon(s)$ est à croissance rapide par rapport à $d(s,K)$, on a :

$$\lim_{s\to K} \varepsilon(s)\delta_{U_s}(\xi,\xi_s) = \infty$$

ainsi la famille $(\xi,\xi_s)_{s\in\Lambda}$ est dans Σ_ε.

Nous allons montrer qu'elle ne définit pas un caractère borné de $\mathcal{a}^\varepsilon$, pour cela nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 1.- Soit $s \in \mathbb{C}^n$-K et V_s la variété de $\mathbb{C}^{2n}$ définie par

$$V_s = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{2n} \mid <z-s,w> = 0\}$$

alors pour tout point $(\xi;\xi')$ de $\mathbb{C}^{2n}$ on a

$$d^2\left[(\xi;\xi'),V_s\right] \leqslant |<\xi-s;\xi'>| .$$

<u>*Preuve*</u> : Soit $(\xi;\xi')$ un point de $\mathbb{C}^{2n}$,

$(\xi,0) \in V_s$, l'inégalité est vérifiée pour $\xi' = 0$; si $\xi' \neq 0$, soit ξ_o la projection orthogonale de ξ sur l'hyperplan d'équation

$$H_{\xi',s} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid <z-s,\xi'> = 0\}$$

(ξ_o,ξ') et $(\xi,0)$ sont dans V_s ; ainsi

$$d\left[(\xi,\xi'),\ V_s\right] \leqslant |\xi-\xi_o| = d\left[\xi,H_{\xi',s}\right] = |<\xi-s,\xi'>|\cdot \frac{1}{|\xi'|}$$

et

$$d\left[(\xi,\xi'),V_s\right] \leqslant |(\xi,\xi') - (\xi,0)| = |\xi'| .$$

En multipliant ces deux inégalités membre à membre, on a :

$$d^2\left[(\xi,\xi_s),V_s\right] \leqslant |<\xi-s;\xi'>|.$$

Reprenons la démonstration de la proposition 4, et considérons la famille $(f_s)_{s\in\Lambda}$ de fonctions définies par

$$f_s(z_s,w_s) = \frac{1}{\varepsilon(s)}\,\frac{1}{<z_s-s;w_s>^2}$$

d'après le lemme ci-dessus, on a :

$$\varepsilon(s)\delta^4_{U_s}|f_s| \leqslant \varepsilon(s)d^4(.,\ \complement U_s)|f_s| \leqslant \varepsilon(s)d^4(.,\ \complement V_s)|f_s| \leqslant 1$$

la famille $(\psi_s \circ f_s)$ est donc bornée dans $\mathcal{A}^{\varepsilon}$, cependant

$\widehat{(\xi,\xi_s)}(f_s) = \dfrac{|v|^4}{|\xi-s|^4}$ n'est pas borné lorsque ξ est sur la frontière de K.

Le caractère $\left(\xi\ ;\ \dfrac{\overline{\xi - s}}{|\xi-s|^2}\right)_{s\in\Lambda}$ de $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ mis en évidence par la proposition 3 ne dépend pas holomorphiquement de ξ, dès que la dimension est supérieure à 1 ; aussi ayant pour objectif des théorèmes d'approximations holomorphes, on étudie maintenant un cas où Σ'_{ε} contient des caractères dépendant holomorphiquement de ξ.

2°) *Cas.*

On suppose que K admet un système fondamental de voisinages ouverts pseudo-convexes.

Pour tout s dans Λ, soit Ω_s un ouvert pseudo-convexe contenant K et contenu dans $K + \frac{1}{2}\, d(s,K)B_1$, où B_1 est la boule unité de $\mathbb{C}^n$; on a déjà rappelé que Ω_s est spectral pour la fonction δ_{Ω_s}, il existe donc un couple (M_o,N_o) dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ et pour tout η dans $\mathbb{C}^n - \Omega_s$ des fonctions u^i_η $i = 1,\dots,n$ holomorphes sur Ω_s telles que

$$(5)\qquad \begin{cases} \langle z-\eta, u_\eta\rangle = 1 & \text{sur } \Omega_s \\ \delta_{\Omega_s}^{N_o}\, |u_\eta| \leq M_o & \forall\, s \in \Lambda \end{cases}$$

Proposition 5.- Soit $\varepsilon(s)$ une fonction à croissance rapide par rapport à la fonction de s définie par

$$\inf_{z\in K} d_{\Omega_s}(z)$$

l'ensemble $\{(z,u_s(z))$, lorsque z décrit K ; et s décrit $\Lambda\}$ est une partie Σ'_ε vérifie les conditions de la proposition 1.

Preuve :

On remarque que $\delta_{\Omega_s}(z) = d(z, \complement\Omega_s)$ pour s assez voisin de K

$(z;u_s(z)) \in U_s \qquad \forall\, s \in \Lambda$

car

$<z-s;u_s(z)> = 1.$

D'après (5), on a :

$$\delta_0(z,u_s(z)) = \frac{1}{(1+|z|^2+|u_s(z)|^2)^{1/2}} \geqslant \frac{d^{N_0}(z;\complement\Omega_s)}{(M_0^2+(1+|z|^2)d^{2N_0}(z,\complement\Omega_s))^{1/2}}.$$

De même un calcul analogue à celui de la démonstration de la proposition 3 conduit à :

$$d((z,u_s(z)),|U_s) \quad \frac{1}{1+|\Lambda|+|u_s(z)|} \geqslant \frac{d^{N_0}(z;\complement\Omega_s)}{M_0+(1+|\Lambda|)d^{N_0}(z,\complement\Omega_s)}$$

ainsi le choix de la fonction ε conduit pour tout N dans $\mathbb{N}$ à

$$\inf_{\Lambda\times K} \varepsilon(s)\delta^N_{U_s}(z,u_s(z)) > 0.$$

CHAPITRE III

CALCUL FONCTIONNEL.

Soit A une b-algèbre, a un point de $A^n = A \times \ldots \times A$ (n fois), K un compact de $\mathbb{C}^n$, V un voisinage relativement compact de K et $\Lambda = V-K$.

On désigne par K_ρ $(\rho \in \mathbb{R}_+)$, un voisinage d'ordre ρ de K ; étant donné un borné B de A, B_n sera le produit cartésien de $B \times B \times \ldots \times B$ (n fois) et B^k le produit de bornés dans A $B,\ldots,B$ (k fois).

Etant donnée une famille $(u_i(s),\ i \in I,\ s \in \Lambda)$ dans A, on dira que $u_i(s) \in \mathcal{O}(B)$ s'il existe un borné B de A, et un scalaire λ tel que

$$u_i(s) \in \lambda B \quad \forall\, i \in I, \quad \forall\, s \in \Lambda.$$

On se donne maintenant une fonction α sur V à valeurs dans $[1,+\infty]$ valant $+\infty$ sur K.

<u>*Définition*</u>.- On dira qu'une famille $(H_\rho)_{\rho>0}$ de fonctions de classe C^1 sur V à valeurs dans A^n vérifie la condition (a,K,A,α) si

1) $\langle a-s, H_\rho(s)\rangle = 1$ sur $\complement K_\rho$ $\quad \forall\, \rho > 0$

2) Il existe un borné B_n de A^n telles que $H_\rho(s)$ et et toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont dans $\alpha(s)B_n$ $\quad \forall\, s \in V,\ \forall\, \rho > 0$.

on pose :

$$\omega(H) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, H^i d''H^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^i} \wedge \ldots \wedge d''H^n$$

où (H^i) désignent les composantes de H.

$d''H^1 \wedge \ldots \wedge d''H^i \wedge \ldots \wedge d''H^n$ désigne le produit extérieur de toutes les formes différentielles d'indice j sauf celle d'indice i.

Théorème 2.- Pour toute fonction f de classe C^1 dans un voisinage de K à valeurs complexes, telle que $d''f = \mathcal{O}(\alpha^{-2n+1})$, et pour toute famille $(H_\rho)_{\rho>0}$ vérifiant la condition (a,K,A,α) on a :

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{(-1)^n}{(2i\pi)^n}\, n\,! \int_{K_\rho} f(s)d''\omega(H_\rho(s)) \wedge ds\right)$$ existe et est indépendante de la famille $(H_\rho)_{\rho>0}$ vérifiant (a,K,A,α). Cette limite est notée $f[a]$.

De plus si $\alpha(s) \geqslant \dfrac{1}{d(s,K)^2}$ on a :

$\chi(a) \in K$ et $\chi(f[a]) = f[\chi(a)]$ pour tout caractère borné de A.

Preuve :

Par application du critère de Cauchy, il faut vérifier qu'il existe un borné B complétant tel que quelles que soient les familles H_ρ et $H'_{\rho'}$ vérifiant la condition (a,K,A,α) on a :

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho'\to 0}} \left\| \int_{K_\rho} f(s)d''\omega(H_\rho) \wedge ds - \int_{K_{\rho'}} f(s)d''\omega(H'_{\rho'}) \wedge ds \right\|_{A_B} = 0$$

où A_B est l'espace de Banach engendré par B muni de la jauge de B.

On peut supposer $0 < \rho < \rho'$, alors d'après (1) $d''\omega(H_\rho)$ est nulle sur $\complement K_\rho$, on est donc amené à étudier

$$\int_{K_{\rho'}} f(s)d''\left[\omega(H_\rho) - \omega(H'_{\rho'})\right] \wedge ds.$$

D'abord on a le lemme suivant :

Lemme.-

Posons $\alpha_{i,j} = H_\rho^{i'} H_\rho'^{j} - H_\rho^{j} H_\rho'^{i}$, $(i,j = 1,\dots,n)$

alors sur $[K_{\rho'}$ on a :

$$\omega(H_\rho) - \omega(H_{\rho'}) = \sum_{\substack{1\leqslant |I|,|J|\leqslant n-1 \\ |I| + |K| = n-1}} A_{I,J,K}\, d''\alpha_{I,J} \wedge d''H_\rho^K$$

avec

$$d''\alpha_{I,J} = d''\alpha_{i_1,j_1} \wedge \dots \wedge d''\alpha_{i_p,j_p}$$

$$d''H_\rho^K = d''H_\rho^{k_1} \wedge \dots \wedge d''H_\rho^{k_q}$$

$(I,J) = (i_1,j_1,\dots,i_p,j_p)$, $K = (k_1,\dots,k_q)$.

$A_{I,J,K}$ est un polynôme en a et s à coefficients constants.

Utilisons ce lemme qui sera démontré à la fin, d'après le théorème de Stockes on a :

$$\int_{K_{\rho'}} d''[f(s)(\omega(H_\rho) - \omega(H_{\rho'}))] \wedge ds = \int_{K_{\rho'}} d''f(s) \wedge (\sum A_{I,J,K} d''\alpha_{I,J} \wedge d''H_\rho^K$$

or d'après (2) il existe un borné complétant de A tel que $\sum A_{I,J,K}\, d''\alpha_{I,J} \wedge d''H_\rho^K$ soit dans $\alpha^{(2n-2)}\mathcal{O}(B)$.

La condition imposée à $d''f$ fait que la fonction sous le signe somme est uniformément bornée dans un voisinage de K et vaut 0 sur K, aussi a-t-on :

$$\lim_{\rho'\to 0} \int_{K_{\rho'}} d''[f(s)(\omega(H_\rho) - \omega(H'_{\rho'})] \wedge ds = 0.$$

D'autre part,

$d''f(s) \wedge [\omega(H_\rho)(s) - \omega(H_{\rho'})(s)]$ est dans $\alpha^n(s).\mathcal{O}(\alpha^{-2n+1}(s)).B^n$.

Cette fonction est donc aussi uniformément bornée dans un voisinage de K et vaut 0 sur K, aussi a-t-on :

$$\lim_{\rho'\to 0} \int_{K_{\rho'}} d''f(s) \wedge [\omega(H_\rho) - \omega(H'_{\rho'})] \wedge ds = 0.$$

En définitive, on a :

$$\lim_{\rho'\to 0} \int_{K_{\rho'}} f(s)\, d''[\omega(H_\rho) - \omega(H'_{\rho'})] \wedge ds = 0.$$

Soit maintenant χ un caractère borné de A, la famille $(\chi(H_\rho))_{\rho>0}$ vérifie la condition $(\chi(a),K,\mathbb{C},\alpha)$, il en résulte déjà que $\chi(a)$ est dans K.

Soit ψ une fonction de classe C^1 valant 0 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et valant 1 sur le complémentaire de $]-1,1[$.

La famille $H^1_\rho(s) = \dfrac{\overline{\chi(a) - s}}{|\chi(a) - s|^2}\, \psi\left(\left|\dfrac{\chi(a) - s}{\rho}\right|^2\right)$ vérifie aussi la condition $(\chi(a);K,\mathbb{C};\alpha)$, aussi a-t-on d'après la première partie.

$$\chi(f[a]) = \lim_{\rho\to 0} \frac{(-1)^n}{(2i\pi)^n}\, n! \int_{K_\rho} f(s)\, d''\omega(\chi \circ H_\rho) \wedge ds$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{(-1)^n}{(2i\pi)^n}\, n! \int_{K_\rho} f(s)\, d''\omega(H^1_\rho) \wedge ds.$$

Montrons que cette dernière limite vaut $f(\chi(a))$.
En effet, soit B_ρ la boule de centre $\chi(a)$ et de rayon ρ.
Alors H^1 vérifie

$$\langle \chi(a) - s . H^1_\rho(s) \rangle = 1 \quad \text{sur} \quad \complement B_\rho .$$

Comme $B_\rho \subset K_\rho$, on a :

$$\int_{K_\rho} f(s)d''\omega(H^1_\rho) \wedge ds = \int_{B_\rho} f(s)d''\omega(H^1_\rho) \wedge ds$$

or

$$\int_{B_\rho} f(s)d''\omega(H^1_\rho) \wedge ds = \int_{\partial B_\rho} f(s)\omega(H^1_\rho) \wedge ds - \int_{B_\rho} d''f(s) \wedge \omega(H^1_\rho) \wedge ds$$

le choix de f et $d(s) \geqslant \dfrac{1}{d(s,K)^2}$ fait que

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{B_\rho} d''f(s) \wedge \omega(H^1) \wedge ds = 0$$

sur ∂B_ρ, on a $H^1_\rho(s) = \dfrac{\overline{\chi(a) - s}}{\rho^2}$

pour ρ suffisamment petit on a :

$$\int_{\partial B_\rho} f(s)\omega(H^1_\rho) \wedge ds \simeq \frac{f(\chi(a))}{\rho^{2n}} \int_{\partial B_\rho} \omega(H^1_\rho) \wedge ds = \frac{f(\chi(a))}{\rho^{2n}} (-1)^n \int_{B_\rho} d\bar{s} \wedge ds$$

or $\displaystyle\int_{B_\rho} d\bar{s} \wedge ds = \frac{(2i\pi)^n}{n!} \rho^{2n}$ volume de la boule B_ρ.

donc $\displaystyle\chi(f[a]) = \lim_{\rho\to 0} \frac{(-1)^n}{(2i\pi)^n} n! \int_{B_\rho} f(s)d''\omega(H^1_\rho) \wedge ds = f[\chi(a)]$.

Preuve du lemme :

D'abord décomposons $\omega(H_\rho)$, $i \leqslant k \leqslant j$

$$\omega(H_\rho) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{n}(-1)^{i+j}\left[H^i_\rho d''H^j_\rho - H^{j}_\rho{}' d''H^i_\rho\right] \wedge d''H^1_\rho \wedge\ldots\wedge d''H^i_\rho \wedge\ldots\wedge d''H^j_\rho \wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \\ -\frac{1}{n}\sum\limits_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} (-1)^k H^k_\rho d''H^1_\rho \wedge\ldots\wedge d''H^i_\rho \wedge\ldots\wedge d''H^k_\rho \wedge\ldots\wedge d''H^j_\rho \wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho \end{array} \right.$$

Soient les applications $T_{i,j}$ $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ définies par

$$T_{ij}(H^i_\rho) = H^i_\rho + (a_j - s_j)\alpha_{ji}$$

$$T_{ij}(H^j_\rho) = H^j_\rho + (a_i - s_i)\alpha_{ij}$$

$$T_{ij}(H^k_\rho) = H^k_\rho \quad \text{si} \quad k \neq i \quad \text{et} \quad k \neq j.$$

1ère partie : On montre que si H_ρ vérifie $<a-s;H_\rho(s)> = 1$ sur $\complement K_\rho$ alors :

$$\omega(T_{ij}(H_\rho)) - \omega(H_\rho) = \frac{(-1)^{i+j}}{n} d''\alpha_{ji} \wedge d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^i_\rho} \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^j_\rho} \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho .$$

On remplace H_ρ par $T_{ij}(H_\rho)$ dans $\omega(H_\rho)$

le premier terme s'écrit :

$$-\frac{1}{n}(-1)^{i+j}\Big[(H^i_\rho+(a_j-s_j)\alpha_{ji})(d''H^j_\rho+(a_i-s_i)d''\alpha_{ij})-(H^j_\rho+(a_i-s_i)d''\alpha_{ij})(d''H^i_\rho+(a_j-s_j)d''\alpha_{ji})\Big]$$
$$\wedge\ d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^i_\rho} \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^j_\rho} \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho$$

$$= \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{n}(-1)^{i+j}(H^i_\rho d''H^j_\rho - H^j_\rho d''H^i_\rho) \wedge d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^i_\rho} \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^j_\rho} \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho \\ \qquad + \\ -\frac{1}{n}(-1)^{i+j}((a_i-s_i)H^i_\rho+(a_j-s_j)H^j_\rho)d''\alpha_{ij} \wedge d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^i_\rho} \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^j_\rho} \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho \quad . \end{array}\right.$$

Le produit des $d''H^i_\rho$ dans le deuxième terme de $\omega(H_\rho)$ devient :

$$d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge (d''H^i_\rho+(a_j-s_j)d''\alpha_{ji}) \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^k_\rho} \wedge \ldots \wedge (d''H^j_\rho+(a_i-s_i)d''\alpha_{ij}) \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho$$

$$= \left\{\begin{array}{l} d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge d''H^i_\rho \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^k_\rho} \ldots\ d''H^j_\rho \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho \\ \qquad + \\ d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge (a_i-s_i)d''H^i_\rho \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^k_\rho} \wedge \ldots \wedge d''\alpha_{ij} \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho \\ \qquad + \\ d''H^1_\rho \wedge \ldots \wedge d''\alpha_{ji} \wedge \ldots \wedge \widehat{d''H^k_\rho} \wedge \ldots \wedge (a_j-s_j)d''H^j_\rho \wedge \ldots \wedge d''H^n_\rho \quad . \end{array}\right.$$

Dans la dernière ligne, on remplace $(a_j-s_j)d''H^j_\rho$ par $-\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}(a_\ell-s_\ell)d''H^\rho_\rho$ qui lui est égal sur $\complement K_\rho$ ainsi

$$d''H^1_\rho\wedge\ldots\wedge d''\alpha_{ji}\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^k_\rho}\wedge\ldots\wedge(a_j-s_j)d''H^j_\rho\wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -\ d''H^1_\rho\wedge\ldots\wedge(a_i-s_i)d''H^i_\rho\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^k_\rho}\wedge\ldots\wedge d''\alpha_{ij}\wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho \\ + \\ (-1)^{j+i-k}(a_k-s_k)d''\alpha_{ij}\wedge d''H^1_\rho\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^i_\rho}\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^j_\rho}\wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho\ . \end{array}\right.$$

Le second terme de $\omega(T_{ij}(H_\rho))$ se réduit à

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}}(-1)^k H^k_\rho d''H^1_\rho\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^k_\rho}\wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho$$

$$+$$

$$\frac{(-1)^{j+i}}{n}(a_k-s_k)H^k_\rho d''\alpha_{ji}\wedge d''H^1_\rho\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^i_\rho}\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^j_\rho}\wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho\ .$$

En définitive, on a :

$$\omega[T_{ij}(H_\rho)] = \omega(H_\rho) + \frac{(-1)^{i+j}}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-s_k)H^k_\rho d''\alpha_{ji}\wedge d''H^1_\rho\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^i_\rho}\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^j_\rho}\wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho$$

$$= \omega(H_\rho) + \frac{(-1)^{i+j}}{n}d''\alpha_{ji}\wedge d''H^1\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^i_\rho}\wedge\ldots\wedge\widehat{d''H^j_\rho}\wedge\ldots\wedge d''H^n_\rho\ .$$

Sur le $\complement K_\rho$, ce qui établie la première partie.

<u>*2ème partie*</u> : on constate d'abord que sur $\complement K_{\rho'}$, on a :

$$(H_{\rho'}) = (\prod_{i\leqslant j}T_{ij})(H_\rho)\ .$$

On vérifie la propriété affirmée dans le lemme par récurrence sur le nombre de transformation T_{ij}

- pour une transformation la formule du lemme est vraie

  soit A une partie quelconque de $\{1,2,\ldots,n\}$.

  Posons

$$L_{\rho'} = \left(\prod_{\substack{i\leq j\\ i,j\in A}} T_{ij}\right)(H_\rho) \quad .$$

Supposons que $\omega(L_{\rho'}) - \omega(H_\rho)$ est de la forme annoncée ; soit $T_{p,q}$ une nouvelle transformation, on constate facilement que $\langle a-s.L\rangle = 1$ sur $\complement K_{\rho'}$, aussi d'après la première partie on a :

$$\omega[T_{p,q}(L_\rho)] - \omega(L_\rho) = \frac{(-1)^{p+q}}{n}\, d''\alpha \wedge d''L_\rho^1 \wedge\ldots\wedge \widehat{d''L_\rho^p} \wedge\ldots\wedge \widehat{d''L_\rho^q}\wedge\ldots\wedge d''L_\rho^n$$

or chaque $d''L_\rho^i$ $(i \in A)$ est une combinaison linéaire de $d''H_\rho^i$ et de $d''\alpha_{ij}$ à coefficients polynomiaux en a et s.

Ainsi $\omega[T_{p,q}(L_\rho)] - \omega(L_\rho)$ est de la forme annoncée d'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence :

$\omega(L_\rho) - \omega(H_\rho)$ est de la forme annoncée donc par addition, $\omega[T_{p,\rho}(L_\rho)] - \omega(H_\rho)$ est de la forme annoncée ce qui établit le lemme.

Calcul fonctionnel dans l'enveloppe $\mathcal{A}^\varepsilon$.

On rappelle que A_s est l'algèbre des fonctions holomorphes à croissance tempérée sur l'ouvert U_s de $\mathbb{C}^{2n}$ défini par $|\langle z_s-s.w_s\rangle-1| < 1$. Etant donnée une fonction ε localement bornée supérieurement sur Λ à valeurs dans $]1,+\infty[$, on a muni au chapitre II les A_s^ε d'une bornologie et on a défini l'enveloppe $\mathcal{A}^\varepsilon$ des A_s^ε lorsque s décrit Λ ; on désignera par $\tilde{u}_s$ l'image d'un élément u_s de A_s par le morphisme ψ_s de A_s dans $\mathcal{A}^\varepsilon$.

On appelle B, un borné convexe, équilibré de $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ contenant les u_s, lorsque s décrit Λ et u_s vérifie :

$$\varepsilon(s)\delta^3_{U_s} \, |u_s| \leqslant 1 \qquad \forall\, s \in \Lambda .$$

Un tel borné existe bien, par construction de $\mathcal{A}^{\varepsilon}$.

Théorème 3.- Soit $\alpha(s) = \sup\{\varepsilon(t),$ lorsque $|s-t| \leqslant 1/3\ d(s,K)\}$ pour $s \in \Lambda$ et $\alpha(s) \equiv +\infty$ sur K.

Il existe une famille $(H_\rho)_{\rho>0}$ vérifiant la condition $(z, K, \mathcal{A}^{\varepsilon}, \dfrac{\alpha^4}{d(\ ,K)})$.

Preuve :

1ère partie : On construit $\tilde{u}_\rho$ défini sur Λ à valeurs dans $(\mathcal{A}^{\varepsilon})^n$ tel que

$$\operatorname{supp}(\tilde{u}_\rho) \subset \complement K_{2\rho} , \qquad \forall\, \rho > 0$$

$$\tilde{u}_\rho(s) \in \varepsilon(s)B_n \quad , \ \forall\, \rho > 0, \quad \forall\, s \in \Lambda \ .$$

$$<z-s;\tilde{u}_\rho(s)> + \ y_\rho(s) = 1 \quad \forall\, s \in \Lambda, \ \forall\, \rho > 0$$

où y_ρ est une fonction de classe C^1 à support dans $K_{3\rho}$ valant 1 sur $K_{2\rho}$.

En effet : on considère les fonctions u^i_s de A_s définies par :

$$u^i_s(z_s, w_s) = \frac{w^i_s}{<z_s-s;w_s>} \qquad i = 1,\dots,n.$$

Les u^i_s sont holomorphes dans U_s et d'après le lemme du chapitre II, vérifient :

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} <z_s-s;u_s> = 1 & s \in \Lambda \\ \delta^3_{U_s}|u^i_s| \leqslant 1 & i = 1,\dots,n \end{array}$$

où

$$u_s = (u_s^1, \dots, u_s^n)$$

on pose

$$u_{\rho(s)} = (1 - y_\rho(s))u_s$$

donc

$$(2) \quad \langle z_s - s ; u_\rho(s)\rangle + y_\rho(s) = 1, \qquad \forall\, s \in V\,.$$

En appliquant le morphisme φ_s à la relation (2), et en tenant compte que $\varphi_s(z_s) = z$, $\forall\, s \in \Lambda$. On a :

$$\langle z - s ; \tilde{u}_\rho(s) + y_\rho(s) = 1, \qquad \forall\, s \in V\,.$$

D'après (1) :

$\tilde{u}_\rho(s)$ est à valeurs dans $\varepsilon(s)B_n$ et

$$\operatorname{supp}(\tilde{u}_\rho) \subset \complement K_{2\rho}.$$

2ème partie : On régularise la fonction $\tilde{u}_\rho$ par la méthode de Waelbroeck décrite dans [3].

Soit φ une fonction positive, de classe C^∞, a support dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

On pose :

$$\Psi(s) = \frac{\varphi(s)}{\sum_{t \in T^n} \varphi(s-t)} \qquad \text{où } T^n = (\mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z})^n\,.$$

Alors :

Ψ est de classe C^∞ ; $\operatorname{supp}(\Psi) \subset \Delta$; $\sum_{t \in T^n} \Psi(s-t) = 1$.

Pour tout entier p tel que $2^{-p} \leqslant \frac{\rho}{2}$. On pose :

$$W_{p,\rho}(s) = \sum_{t\in T^n} \Psi(2^p s-t)\tilde{u}_\rho(2^{-p}t)$$

alors, on a :

$$(3) \qquad \langle z-s;W_{p,\rho}(s)\rangle + \chi_{p,\rho}(s) + k_{p,\rho}(s) = 1$$

où

$$k_{p,\rho}(s) = \sum_{t\in T^n} \Psi(2^p s-t)\langle s-2^{-p}t,\tilde{u}_\rho(2^{-p}t)\rangle$$

$$\chi_{p,\rho}(s) = \sum_{t\in T^n} \Psi(2^p s-t)y_\rho(2^{-p}t) .$$

<u>*Propriétés des fonctions*</u> $W_{p,\rho}$, $k_{p,\rho}$ et $\chi_{p,\rho}$.

Il est clair que $W_{p,\rho}$, $k_{p,\rho}$ et $\chi_{p,\rho}$ sont de classe C^∞

$$\complement \mathrm{supp}(W_{p,\rho}) \subset \complement K_{2\rho} + 2^{-p}\Delta \subset \complement K_{\frac{3}{2}\rho}$$

$$\complement \mathrm{supp}(k_{p,\rho}) \subset \complement K_2 + 2^{-p} \subset \complement K_{\frac{3}{2}\rho}$$

$$\complement \mathrm{supp}(\chi_{p,\rho}) \subset K_3 + 2^{-p}\Delta \subset K_{\frac{7}{2}\rho}$$

$\complement W_{p,\rho}(s) \in \alpha(s)B_n$, $\forall s \in \Lambda$, $\forall \rho > 0$, en effet :

$$W_{p,\rho}(s) = \sum_{t\in T^n} \Psi(2^p s-t)\tilde{u}_\rho(2^{-p}t) = \sum_{t\in T^n+2^p s} \Psi(t)\tilde{u}_\rho(s-2^{-p}t) ,$$

d'une part :

$$\tilde{u}_\rho(s-2^{-p}t) \in \varepsilon(s-2^{-p}t)B_n \quad ;$$

d'autre part :

$\sup\{\varepsilon(s-2^{-p}t) \mid |2^{-p}t| \leqslant \frac{1}{3} d(s,K)\} \leqslant \sup\{\varepsilon(t) \mid |s-t| \leqslant \frac{1}{3} d(s,K)\} = \alpha(s)$

le second membre est dans $\alpha(s).B_n$, puisque B_n est équilibré

et $\sum_{t\in T^n} \Psi(t) = 1$. La propriété annoncée est établie.

$\lfloor k_{p,\rho}(s) \in 2^{-p}\alpha(s).B_n \quad , \quad \forall\, s \in \Lambda \, , \quad \forall\, \rho > 0 \quad ;$

en effet :

$$k_{p,\rho}(s) = \sum_{t\in T^n} \Psi(2^p s-t)<s-2^{-p}t,\tilde{u}_\rho(2^{-p}t)>$$

$$= 2^{-p} \sum \Psi(2^p s-t)<2^p s-t,\tilde{u}_\rho(2^{-p}t)>$$

$$= 2^{-p} \sum \Psi(t)<t,\tilde{u}_\rho(s-2^{-p}t)>$$

le même calcul que ci-dessus conduit au résultat

$\lfloor DW_{p,\rho}(s) \in 2^p\alpha(s).B_n \quad , \quad \forall\, s \in \Lambda, \quad \forall\, \rho > 0$

en effet :

Pour toute dérivée partielle D d'ordre 1, on a :

$$DW_{p,\rho}(s) = 2^p \sum_{t\in T^n} D\Psi(2^p s-t)\tilde{u}_\rho(2^{-p}t)$$

le nombre des $t \in T^n$ vérifiant $2^p s-t \in \Delta$ est borné indépendamment de s et de p, par un calcul semblable aux précédents, on obtient le résultat annoncé.

$\lfloor Dk_{p,\rho}(s) \in \alpha(s)B, \quad \forall\, s \in \Lambda, \quad \forall\, \rho > 0$

en effet :

Pour toute dérivée partielle D d'ordre 1, on a :

$$Dk_{p,\rho}(s) = 2^p \sum_{t\in T^n} D\Psi(2^p s-t)<s-2^{-p}t,\tilde{u}_\rho(2^{-p}t)> + \sum_t \Psi(2^p s-t) \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}^i(2^{-p}t).$$

Par un raisonnement analogue à celui de $DW_{p,\rho}$, on obtient le résultat annoncé.

$\lfloor D\chi_{p,\rho}(s) \in 2^p\mathcal{O}(1) \quad , \quad \forall\, s \in \Lambda, \quad \forall\, \rho > 0$

en effet :

Pour toute dérivée partielle D d'ordre 1, on a :

$$D\chi_{p,\rho}(s) = 2^p \sum_{t\in T^n} D\Psi(2^p s-t)y_\rho(2^{-p}t) \quad .$$

On élève maintenant la relation (3) au carré, et après arrangement des termes, on trouve la nouvelle relation :

$$(4) \qquad \langle z-s;V_{p,\rho}(s)\rangle + Y_{p,\rho}(s) + k^2_{p,\rho}(s) = 1$$

où

$$V_{p,\rho}(s) = (1 + \chi_{p,\rho}(s) + k_{p,\rho}(s))W_{p,\rho}(s)$$

$$Y_{p,\rho}(s) = \chi^2_{p,\rho}(s) + 2\chi_{p,\rho}(s)k_{p,\rho}(s).$$

Propriétés des fonctions $V_{p,\rho}$ et $Y_{p,\rho}$.

Il est clair que les fonctions $V_{p,\rho}$ et $Y_{p,\rho}$ sont de classe C^∞.

Les supports de $V_{p,\rho}$ et $Y_{p,\rho}$ sont respectivement contenus dans ceux de $W_{p,\rho}$ et $\chi_{p,\rho}$

$$[V_{p,\rho}(s) \in \alpha^2(s)\mathcal{O}(B^2_n) \qquad \forall\, s \in \Lambda,\ \forall\, \rho > 0$$

$$[Y_{p,\rho}(s) \in \alpha(s)\mathcal{O}(B) \qquad \forall\, s \in \Lambda,\ \forall\, \rho > 0$$

$$[DV_{p,\rho}(s) \in 2^p\alpha^2(s)\mathcal{O}(B^2_n), \qquad \forall\, s \in \Lambda,\ \forall\, \rho > 0$$

en effet :

Pour toute dérivée partielle D d'ordre 1, on a :

$$DV_{p,\rho}(s) = D\chi_{p,\rho}(s)W_{p,\rho}(s)+Dk_{p,\rho}(s)W_{p,\rho}(s)+DW_{p,\rho}(s)+\Psi_{p,\rho}(s)DW_{p,\rho}(s)$$
$$+k_{p,\rho}(s)DW_{p,\rho}(s) \quad .$$

En tenant compte des propriétés de $\Psi_{p,\rho}$, $D\Psi_{p,\rho}$, $k_{p,\rho}$ et $Dk_{p,\rho}$, $W_{p,\rho}$ et $DW_{p,\rho}$, on trouve le résultat annoncé.

$$[DY_{p,\rho}(s) \in 2^{p}\alpha(s)\mathcal{C}(B), \quad \forall s \in \Lambda, \ \forall \rho > 0$$

en effet :

$$DY_{p,\rho}(s) = 2\chi_{p,\rho}(s)D\chi_{p,\rho}(s)+2D\chi_{p,\rho}(s).k_{p,\rho}(s)+2\chi_{p,\rho}(s)Dk_{p,\rho}(s)$$

là aussi en tenant compte des propriétés de $\chi_{p,\rho}$, $D\chi_{p,\rho}$ de $k_{p,\rho}$ et de $Dk_{p,\rho}$ on trouve le résultat. De même :

$$[Dk^2_{p,\rho}(s) = 2k_{p,\rho}(s)Dk_{p,\rho}(s) \in 2^{-p}\alpha^2(s)\mathcal{C}(B^2), \quad \forall s \in \Lambda, \ \forall \rho > 0.$$

Maintenant regardons, les termes généraux suivants :

$$(5) \quad [k^2_{p+1,\rho}(s) - k^2_{p,\rho}(s) \in 2^{-2p}\alpha^2(s)\mathcal{C}(B^2), \quad \forall s \in \Lambda, \ \forall \rho > 0.$$

$$(6) \quad [k^2_{p+1,\rho}(s)Y_{p,\rho}(s) - k^2_{p,\rho}(s)Y_{p+1,\rho}(s) \in 2^{-2p}\alpha^3(s)\mathcal{C}(B^3), \quad \forall s \in \Lambda, \forall \rho > 0.$$

Pour toute dérivée partielle D d'ordre 1, on a :

$$[D(k^2_{p+1,\rho}(s) - k^2_{p,}(s)) \in 2^{-p}\alpha^2(s)\mathcal{C}(B^2), \quad \forall s \in \Lambda, \ \forall \rho > 0.$$

$$[D(k^2_{p+1,\rho}(s)Y_{p,\rho}(s) - k^2_{p,\rho}(s)Y_{p+1,\rho}(s)) \in 2^{-p}\alpha^3(s)\mathcal{C}(B^3), \ \forall s \in \Lambda, \forall \rho > 0.$$

Enfin,

$$(7) \quad [k^2_{p+1,\rho}(s)V_{p,\rho}(s) - k^2_{p,\rho}(s)V_{p+1,\rho}(s) \in 2^{-2p}\alpha^4(s)\mathcal{C}(B^4_n), \ \forall s \in \Lambda, \forall \rho > 0$$

tandis que pour toute dérivée partielle d'ordre 1, on a :

$$[D(k^2_{p+1,\rho}(s)V_{p,\rho}(s) - k^2_{p,\rho}(s)V_{p+1,\rho}(s)) \in 2^{-p}\alpha^4(s)\mathcal{C}(B^4_n), \quad \forall s \in \Lambda, \ \forall \rho > 0.$$

Les séries (5), (6) et (7) sommées à partir de la partie entière N de $\left[-\dfrac{\log \rho}{\log 2} + 1\right]$ convergent vers des fonctions de classe

C^1 sur V, car leurs termes généraux sont a support dans $V - K_{\frac{3}{2}\rho}$, sur lequel α est localement borné.

Si l'on note T_ρ et Z_ρ les sommes des séries (6) et (7), on obtient à partir de la relation (4)

$$<z-s, Z_\rho(s)> + T_\rho(s) = -k^2_{N,\rho}(s).$$

En utilisant la relation (4) à nouveau, on obtient :

$$<z-s, H_\rho(s)> + U_\rho(s) = 1$$

où

$$H_\rho(s) = V_{\rho,N}(s) - Z_\rho(s)$$
$$U_\rho(s) = Y_{\rho,N}(s) - T_\rho(s) .$$

Propriétés des fonctions H_ρ et U_ρ.

D'abord H_ρ et U_ρ sont de classe C^∞

$$\left[\mathrm{supp}(H_\rho) \subset \complement K_{\frac{3}{2}\rho}\right.$$

$$\left[\mathrm{supp}(U\ ) \subset \complement K_{\frac{7}{2}\rho}\right.$$

$$\left[H_\rho(s) \in \alpha^4(s)\ (B^4_n)\right. , \quad \forall\, s \in \Lambda, \quad \forall\, \rho > 0.$$

Pour toute dérivée partielle D d'ordre 1, on a :

$$\left[DH_\rho(s) \in \frac{\alpha^4(s)}{d(s,K)}\ \theta(B^4_n)\right., \quad \forall\, s \in \Lambda, \forall\, \rho > 0 \quad ;$$

en effet :

$$DH_\rho(s) = DV_{N,\rho}(s) - \sum_{p\geq N} D(k^2_{p+1,\rho}(s)V_{p,\rho}(s) - k^2_{p,\rho}(s)V_{p+1}(s))$$

donc $DH_\rho(s) \in \frac{1}{\rho}\, \alpha^4(s)\mathcal{O}(B_n^4)$

or pour $d(s,K) \leq \frac{3}{2}\rho$, H_ρ est nulle, ainsi

$$DH_\rho(s) \in \frac{\alpha^4(s)}{d(s,K)}\, \mathcal{O}(B_n^4) \text{ , ce qui établit le résultat :}$$

Sur $\complement K_{\frac{7}{2}\rho}$, on a d'après (8)

$$<z-s;H_\rho(s)> = 1$$

on pose
$$H_\rho^1 = H_{\frac{2}{7}\rho} .$$

La famille $(H_\rho^1)_{\rho>0}$, vérifie bien la condition $(z,K;\ \mathcal{A}^\varepsilon,\ \frac{\alpha^4}{d(s,K)})$.

Corollaire.-

La fonction α est celle du théorème 3 ; il existe une famille $(\tilde{H}_\rho)_{\rho>0}$ vérifiant la condition $(z,K,\widehat{A^\varepsilon/_{I+J}},\frac{\alpha^4}{d(\ ,K)})$.

Preuve :

Il suffit de prendre pour $\tilde{H}_\rho$, la famille $i \circ H_\rho^1$, où i est le morphisme canonique de $\mathcal{A}^\varepsilon$ dans $\widehat{A^\varepsilon/I+J}$ défini au chapitre II.

CHAPITRE IV

APPROXIMATION ANALYTIQUE SUR LE COMPACTS DE $\mathbb{C}^n$.

Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$, f une fonction de classe C^1 dans un voisinage V de K.

Théorème 4.- Si $d''f$ est à décroissance rapide par rapport à la fonction $d(\ ,K)$; alors f est limite uniforme sur K de fonctions analytiques par rapport aux parties réelles et imaginaires des coordonnées, dans des voisinages de K.

Théorème 5.- On suppose que K admet un système fondamental de voisinages pseudo-convexes, pour tout s dans $\mathbb{C}^n$-K, soit Ω_s un voisinage pseudo-convexe de K contenu dans $K + \frac{1}{2}\, d(s,K)\Delta$, où Δ désigne la boule unité de $\mathbb{C}^n$ soit

$$d(\Omega_s) = \inf_{\substack{z\in K \\ t\in |\Omega_s}} |z - t|$$

on pose

$$\delta(s) = \inf_t d(\Omega_{s+t}) \qquad |t| \leqslant \frac{1}{2}\, d(s+t,K).$$

Si $d''f$ est à décroissance rapide par rapport à δ, alors f est limite uniforme sur K, de fonctions holomorphes dans des voisinages de K.

Preuve :

On démontre simultanément les deux théorèmes.

Soit h une fonction à décroissance rapide par rapport à la fonction δ, et localement bornée inférieurement par un nombre réel strictement positif sur $\Lambda = V - K$, à valeurs dans R_+^*.

Posons :

$$g = |d''f| + h .$$

Considérons la fonction ε définie par

$$\varepsilon(s) = \inf_t \left[g(t)\right]^{\frac{-1}{5(2n-1)}} \quad \text{lorsque} \quad |s-t| \leqslant \frac{1}{2}\, d(s,K)$$

D'après le théorème 2 du chapitre III, il existe une famille $(H_\rho)_{\rho>0}$ vérifiant la condition $(z,K,\widehat{A^\varepsilon/J+I},\frac{\alpha^4}{d(.,K)})$ où

$$\alpha(s) = \sup_t \varepsilon(t) \quad \text{lorsque} \quad |s-t| \leqslant \frac{1}{3}\, d(s,K).$$

On constate que $\left(\frac{\alpha^4(s)}{d(s,K)}\right)^{2n-1} d''f(s)$ est bornée au voisinage de K.

En effet :

$$\varepsilon(s+u) \leqslant \left|(g(s+u+t))\right|^{-\frac{1}{5(2n-1)}} \qquad \forall\ |u| \leqslant \frac{1}{3}\, d(s,K)$$

$$\forall\ |t| \leqslant \frac{1}{2}\, d(s,+u,K)$$

or

$$\frac{1}{2}\, d(s+u,K) \geqslant \frac{1}{3}\, d(s,K) \qquad \forall\ |u| \leqslant \frac{1}{3}\, d(s,K) .$$

En prenant $t = -u$, on a

$$\varepsilon(s+u) \leqslant \left|(g(s))\right|^{-\frac{1}{5(2n-1)}} \qquad \forall\ |u| \leqslant \frac{1}{3}\, d(s,K)$$

donc $$\alpha(s) \leqslant \left(g(s)\right)^{-\frac{1}{5(2n-1)}}$$

et par conséquent

$$|d''f(s)|\left(\frac{\alpha^4(s)}{d(s,K)}\right)^{2n-1} \leqslant \frac{|d''f(s)|}{d(s,K)^{2n-1}}\ g(s)^{-\frac{4}{5}} \leqslant \frac{|d''f(s)|^{\frac{1}{5}}}{d(s,K)^{2n-1}}$$

ce qui donne le résultat.

On constate facilement que α est à croissance rapide par rapport à la fonction $\dfrac{1}{d(\ ,K)}$, en effet :

Puisque h est à décroissance rapide par rapport à δ, h est à décroissance rapide par rapport à la fonction $d(\ ,K)$, donc si $d''f$ est à décroissance rapide par rapport à $d(\ ,K)$, g est à décroissance rapide par rapport à $d(\ ,K)$; pour s assez voisin de K, on a :

$$\left(g(t)\right)^{-\frac{1}{5(2n-1)}} \geqslant (g(t))^{-1} \quad \forall t \quad \text{tq } |s-t| \leqslant \frac{1}{2}\, d(s,K)$$

le second membre est à croissance rapide par rapport à la fonction $\dfrac{1}{d(t,K)}$; donc quelque soit l'entier N, il existe une constante M_N telle que :

$$\varepsilon(s) \geqslant \inf_{|s-t| \leqslant \frac{1}{2} d(s,K)} [g(t)]^{-1} \geqslant \inf_t \frac{M_N}{d(t,K)^N} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^N \frac{M_N}{d(s,K)^N}$$

donc ε est à croissance rapide par rapport à $\dfrac{1}{d(\ ,K)}$ et par suite α est à croissance rapide par rapport à la fonction $\dfrac{1}{d(\ ,K)}$.

Aussi d'après les théorèmes 2 et 3 du chapitre III, il existe un élément $f[z]$ de $\widehat{A^{\varepsilon}/J+I}$ tel que

(1) $\quad \chi(f[z]) = f[\chi(z)]$ quelque soit le caractère borné de $\widehat{A^{\varepsilon}/J+I}$.

D'après la proposition 2 du chapitre II, il existe un couple (P,N) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et un élément α de $\ell^1[T(P,N)]$ tel que $f[z]$ soit une fonction sur S_{ε} de la forme

$$(2) \quad f[z] = f_{\alpha}(\xi,\eta) = \sum_{(\sigma;u)} \alpha_{(\sigma,u)} u_{\sigma(1),1}(\xi;\eta_{\sigma(1)}) \cdots u_{\sigma(P),P}(\xi;\eta_{\sigma(P)})$$

où les $u_{\sigma(i),i}$ sont dans un borné $B_{\sigma(i),N}$ de $A_{\sigma(i)}$.

Dans le cadre du théorème 4, il est clair que ε est une fonction à croissance rapide par rapport à la fonction $\dfrac{1}{d(.,K)}$.

Dans le cadre du théorème 5, $\varepsilon(s)$ est une fonction à croissance rapide par rapport à la fonction $\dfrac{1}{d(\Omega_s)}$.

En effet :

$$\delta(s) = \inf_t d(\Omega_{s+t}) \qquad |t| \leqslant \frac{1}{2} d(s+t,K)$$

donc

$$(3) \qquad \delta(s) \leqslant d(\Omega_s)$$

puisque $d''f$ est à décroissance rapide par rapport à $\delta(s)$, alors g est à décroissance rapide par rapport à $\delta(s)$, donc $\varepsilon(s)$ est une fonction à croissance rapide par rapport à $\dfrac{1}{\delta(s)}$, et d'après (3), $\varepsilon(s)$ est à croissance rapide par rapport à la fonction $\dfrac{1}{d(\Omega_s)}$ ce qui établit le résultat annoncé.

On peut donc appliquer les propositions 3 et 4 du chapitre II et prendre dans (1) les caractères $(z,(\eta_s)_{s\in\Lambda})$ avec $\eta_s = \dfrac{\overline{z-s}}{|z-s|^2}$.

dans le cadre du théorème 4, et dans le cadre du théorème 5, $\eta_s = g_s(z)$ où g_s est une fonction holomorphe sur Ω_s à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ dont la description a été donnée dans la proposition 4 du chapitre II, on obtient donc à partir de (2).

Dans le cadre du théorème 4 :

$$f[z] = f_\alpha(z,\eta_s) = \sum_{(\sigma,u)} \alpha_{\sigma,u}\, u_{\sigma(1),1}\left(z, \frac{\overline{z-\sigma_{(1)}}}{|z-\sigma_{(1)}|^2}\right) \dots u_{\sigma(P),P}\left(z, \frac{\overline{z-\sigma_{(P)}}}{|z-\sigma_{(P)}|^2}\right) .$$

Dans le cadre du théorème 5 :

$$f[z] = f_\alpha(z,\eta_s) = \sum_{(\sigma,u)} \alpha_{(\sigma,u)}\, u_{\sigma(1),1}(z,g_{\sigma(P)}(z)) \dots u_{\sigma(P),P}(z,g_{\sigma(P)}(z)) ;$$

de plus, ces deux séries convergent uniformément sur K, d'après la partie b) de la proposition 2 du chapitre II, ce qui établit les deux théorèmes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N. - Algèbre linéaire, Ch. II.

[2] CNOP I. - Spectral study of holomorphics functions with bounded growth. Ann. Inst. Fourier, vol. 23, 1972.

[3] FERRIER J.P. - Spectral theory and complex analysis. Mathematics studies n° 4, North Holland, 1973.

FERRIER J.P. - Séminaire sur les algèbres complètes. Springer lectures notes n° 164, 1970.

[4] HOGBE-NLEND - Théorie des bornologies et applications. Pub. Univ. de Bordeaux, Mars 1971.

[5] HORMANDER L. et WERMER J. - Uniform approximation on compact sets in $\mathbb{C}^n$. Math. Scand. 23 (1968).

[6] KIYOKO NISHIZAWA - A propos de l'unicité du calcul fonctionnel holomorphe des b-algèbres. Ed. Barroso, Advances in holomorphy, p. 575-585, Math. Studies n° 34, North Holland, 1979.

[7] WAELBROECK L. - Etude spectrale des algèbres complètes. Mémoire cl. Sc. Acad. Roy Belgique 31, fasc. 7, Bruxelles 1960.

" " - Topological vecteur spaces and algebras, Lectures notes in Math. 230 (1971), Springer-Verlag, Berlin.

[8] WROBEL C. - Extension du calcul fonctionnel holomorphe et application à l'approximation. C.R. Acad. Sc. Paris, 275 (1972), 175-177.
Revue $\overset{\circ}{\Pi}$ de Mathématiques, Institut Elie Cartan, Nancy n° 1 (1972).