N° d'ordre : 992

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PAR

Dembo GADIAGA

SUR UNE CLASSE DE TESTS QUI CONTIENT LE TEST DU χ^2 : LE CAS D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE

MEMBRES DU JURY : P. POUZET, PRÉSIDENT
D. BOSQ, RAPPORTEUR
P. JACOB, EXAMINATEUR

SOUTENUE LE 13 OCTOBRE 1982

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur Pierre Pouzet dont j'ai suivi et apprécié les enseignements de 3ème cycle et qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde et très sincère reconnaissance à Monsieur le Professeur Denis Bosq qui m'a proposé le sujet de cette thèse. Il a su surtout, malgré l'éloignement (cette thèse a été préparée à l'Université de Ouagadougou) m'initier à la recherche avec compétence et efficacité en ne ménageant ni son temps ni ses conseils enrichissants et, en me corrigeant tout au long de ce travail.

Monsieur le Professeur Pierre Jacob a bien voulu accepter de juger ce travail, je l'en remercie très vivement.

Il est clair, pour moi, que ce travail n'a pu être mené à bien que grâce à tous ceux, nombreux, qui s'y sont intéressés, y ont participé de près ou de loin. Le les en remercie.

Je remercie très vivement Monsieur Van Ingelandt pour l'aide remarquable et efficace apportée pour la réalisation du travail informatique.

Je tiens aussi à remercier Messieurs Michel Delecroix et Michel Carbon avec lesquels j'ai eu de fructueuses discussions lors de mes différents séjours.

Madame Lengaigne a dactylographié cette thèse avec diligence et compétence ; qu'il me soit permis de la remercier ainsi que toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail.

PLAN DE L'OUVRAGE

Pages

Pages

INTRODUCTION.

Le test du χ^2 de K. Pearson est très employé par les praticiens qui veulent ajuster des observations à une loi donnée.

L'alternative d'un tel test reste vague dans l'esprit de l'utilisateur. Pourtant la statistique utilisée correspond à un choix bien précis des hypothèses H_o et H_1 aussi, en faisant varier ces hypothèses, on peut construire toute une classe de tests.

Certains de ces tests ont été étudiés par J. Newman dans [38], E. Nadaraya dans [39] et Bickel et Rosenblatt dans [40].

D. Bosq dans [5], [6], [7] a, à partir des statistiques fonctionnelles, établi quelques résultats généraux relatifs à ces tests. Il a notamment obtenu des vitesses de convergence et étudié la convergence de cette classe de tests.

D.E. Barton dans [41] a étudié le test Ψ_k^2 de Newman dans le cas où l'hypothèse nulle n'est pas entièrement spécifiée.

Ce travail est consacré essentiellement à la généralisation d'un certain nombre de résultats obtenus par D. Bosq dans [5], [6], [7] au cas des processus strictement stationnaires et fortement mélangeants.

Dans le premier chapitre nous définissons une statistique fonctionnelle $S_n(.)$ à partir d'un noyau reproduisant de dimension finie k. Nous montrons que la statistique $||S_n(.)||^2$ tend en loi vers une v.a. dont la fonction caractéristique est donnée par $[\text{dét}(I_{k-1} - 2it\Sigma)]^{-1/2}$. Les propriétés asymptotiques de $||S_n(.)||^2$ sont étudiées sous diverses alternatives.

La matrice Σ étant inconnue, dans le deuxième chapitre nous construisons un estimateur $\hat{\Sigma}'_n$ de Σ et nous déterminons la loi limite d'une statistique fonctionnelle définie à partir de $\hat{\Sigma}'_n$.

Dans le troisième chapitre nous déterminons la vitesse de convergence de $||S_n(.)||^2$ vers sa loi limite (obtenue au premier chapitre).

Dans le quatrième chapitre nous étendons l'étude faite au troisième chapitre aux deux cas :

- le cas où le noyau reproduisant est de dimension finie qui varie avec la taille de l'échantillon,

- le cas où le noyau reproduisant est de dimension infinie.

Dans le cinquième chapitre nous construisons et étudions les propriétés asymptotiques d'une classe de tests, le test du χ^2 usuel fait partie de cette classe.

Nous terminons cette étude (en appendice) par une simulation sur un autorégressif d'ordre 1.

CHAPITRE I

LOI LIMITE DE LA STATISTIQUE $s_n(.)$ DANS LE CAS D'UN NOYAU DE DIMENSION FINIE.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $||s_n(.)||^2$.

A - LES DONNEES DU PROBLEME.-

I - HYPOTHESES GENERALES.

Dans toute la suite, nous considérons une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ définie sur un espace probabilisé (Ω,A,P) à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{B})$ où E est l'espace des observations, $\mathcal{B}$ une tribu sur E et soit μ une probabilité sur $(E,\mathcal{B})$; supposons que l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$ est séparable.

En outre supposons que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est :

1) strictement stationnaire,

2) fortement mélangeant.

Nous entendons par processus strictement stationnaire, une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que : la distribution des vecteurs aléatoires $(X_m,\ldots,X_{m+n})$ soit indépendante de m, pour tout m de $\mathbb{N}^*$, voir [29] p. 94 .

Comme [1] p. 156 , "Recent advances in mixing sequences of random variables p.2" ou encore [35], nous appelons processus fortement mélangeant, de coefficient de mélangeance α (on dira α-fortement mélangeant) un processus vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad \forall A \in M_1^t , \quad \forall B \in M_{t+n}^\infty \quad |P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| \leq \alpha(n)$$

où M_1^t désigne la σ-algèbre engendrée par $X_1,\ldots,X_t$ et M_{t+n}^∞ celle qui l'est par les variables $X_{t+n},\ldots$; que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha(n) = 0$, où $\alpha(n)$ est une suite décroissante de nombres réels positifs.

Soit $(e_1,\ldots,e_k)$ avec $e_1 \equiv 1$ une base orthonormale du sous-espace Hilbertien E_k $(k \geq 2)$ de $L^2(\mu)$, nous désignerons par $K(.,.)$ le noyau reproduisant de l'espace E_k engendré par $e_1,\ldots,e_k$; alors $K(x,t)$ s'écrit :

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{k} e_j(x)\, e_j(t) \quad \text{avec} \quad (x,t) \in E \times E$$

en identifiant les e_i et leur classe d'équivalence.

II - <u>CONSTRUCTION DE LA STATISTIQUE</u> $S_n(.)$.

Considérons la statistique $T_n(.) = \sum_{i=1}^{n} K(X_i,.)$.

$$T_n(.) = \sum_{i=1}^{n} K(X_i,.) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} e_j(X_i)\, e_j(.)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \sum_{j=2}^{k} e_j(X_i)\, e_j(.)\right]$$

En posant $\hat{a}_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)$.

$$T_n(.) = n \left[1 + \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}\, e_j(.)\right]$$

$$\forall t \in E \quad E\left[T_n(t)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} K(X_i,t)\right]$$

Il est évident que :

$$\forall t \in E \quad E(T_n(t)) = \int_E \sum_{i=1}^{n} K(x,t)\, d\mu(x)$$

$$= n \int_E K(x,t)\, d\mu(x) = n \quad \langle K(.,t),\ 1(.)\rangle = n \times 1$$

$$= n$$

Posons enfin $\quad S_n(.) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[T_n(.) - E(T_n(.)\right]$

$$S_n(.) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[n \ (1 + \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}\ e_j(.)) - n\right]$$

$$= \sqrt{n} \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}\ e_j(.)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{k} e_j(X_i)\ e_j(.) \quad .$$

Remarquons que $S_n(.)$ est à valeurs dans E' sous-espace vectoriel de E orthogonal à 1.

Rappelons enfin que nous voulons chercher la loi limite de la v.a. $S_n(.)$, pour ce faire nous donnerons d'abord deux lemmes.

III - <u>DEUX LEMMES</u>.

<u>Lemme</u> 1. [1] p. 157 .- Si X et Y sont deux v.a. réelles mesurables respectivement par rapport aux σ-algèbres M_1^t et M_{t+n}^{∞} , $n \geq 1$.

Si $|X| \leq C_1 \quad |Y| \leq C_2$ alors

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq 4\ C_1\ C_2\ \alpha(n) \ .$$

Lemme 2.- [12] *p. 99* .- Si $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus strictement stationnaire, borné par C, centré et α-fortement mélangeant avec

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty \quad (\text{avec } \alpha(0) = 1) .$$

Alors on a :

$$E\Big[\sum_{t=1}^{T} x_t\Big]^4 \leqslant 3072 \; C^4 \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} \, . \, T^2 \, .$$

<u>Démonstration</u> : voir [12] p. 99 .

B - <u>*ETUDE DE LA LOI LIMITE DE*</u> $S_n(.)$.-

$$S_n(.) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{k} e_j(X_i)\, e_j(.) \quad .$$

Soit le vecteur $V = (e_2(.) \, ,\ldots, \, e_j(.) \, ,\ldots, \, e_k(.))$.

En posant

$$S'_n = \begin{pmatrix} S'^{\,2}_n \\ \vdots \\ S'^{\,j}_n \\ \vdots \\ S'^{\,k}_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S'^{\,j}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i) \quad \forall j = 2 \ldots k$$

$S'_n \in \mathbb{R}^{k-1}$, $S_n(.) = \langle S'_n \, , V\rangle$.

Pour la recherche de la loi limite de $S_n(.)$, la démarche suivante va être adoptée.

1) Détermination de la loi limite de S'_n

2) Détermination de la loi limite de $S_n(.)$ à partir de celle de S'_n.

I - LOI LIMITE DE S'_n.

Montrons que chacune des composantes de S'_n que nous noterons $\forall j = 2\ldots k$ $S'^j_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)$, converge en loi vers une loi normale dont nous préciserons les caractéristiques.

1 - *Loi limite de* S'^j_n *pour tout* $j = 2\ldots k$.

Les e_j étant des applications mesurables de $(E, \mathcal{B}_E, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ un processus strictement stationnaire et α-fortement mélangeant alors quel que soit j, $j \in \{2\ldots k\}$ $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ l'est aussi.

Donnons d'abord le

Lemme 3.- Pour tout j, $j = 2\ldots k$ $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ étant un processus strictement stationnaire, α-fortement mélangeant et à valeurs réelles, sous les hypothèses.

a) La loi des X_i est μ.

b) $\sup_{x\in E} \sup_{j\in\{2\ldots k\}} |e_j(x)| = M < +\infty$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$

alors

1) $\forall j$, $j = 2\ldots k$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |E(e_j(X_1)\, e_j(X_{\nu+1}))| < +\infty$

2) $\forall j$, $j = 2\ldots k$, $E|S'^j_n|^2 \leq 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |E(e_j(X_1)\, e_j(X_{\nu+1}))|$

et pour tout n $E[S'^j_n]^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma_j^2$

où $$\sigma_j^2 = E[e_j^2(X_1)] + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} E[e_j(X_1)\, e_j(X_{\nu+1})]$$

$$= 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} E[e_j(X_1)\, e_j(X_{\nu+1})]$$

Démonstration : Voir [3] p. 172 .

Remarquons que Billingsley suppose dans son lemme (cf. [3] p. 172) que son processus $(X_n)_{n\geq 1}$ est centré, cette hypothèse est "superflue" ici puisque

$$\forall j \geq 2 \quad E[e_j(X_i)] = 0 \quad (E[e_j(X_i)] = \int_E e_j(x)\, d\mu(x) = \int_E 1 \,.\, e_j(x)\, d\mu(x) = 0)$$

Par contre, compte tenu de la définition du processus α-fortement mélangeant (s'agissant des v.a.) nous devons supposer ici que le processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ quel que soit $j \in \{2...k\}$ est uniformément borné.

Ceci dit la démonstration reste strictement la même dans la démarche que celle de Billingsley.

Théorème 1.- Pour tout $j = 2...k$ $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ étant un processus strictement stationnaire, α-fortement mélangeant et à valeurs réelles.

Sous les hypothèses

a) $\sup\limits_{x\in E}\ \sup\limits_{j\in\{2...k\}} |e_j(x)| = M < +\infty$

b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$

c) la loi des X_i est μ

on a :

1) $\forall j = 2\ldots k \qquad 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |E[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})]| < +\infty$

2) Si en plus

$\forall j = 2\ldots k \qquad \sigma_j^2 = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} E[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})] > 0$

alors $\qquad \forall j = 2\ldots k \qquad S'^{j}_{n} \xrightarrow{L\ (1)} N(0, \sigma_j^2)$

Démonstration :

1) La convergence absolue de la série de terme général

$(E[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})])_{\nu\geq 0}$ vient du lemme 3.

2) Pour la loi limite de S'^{j}_{n} voir [4] p. 440 .

Remarques :

1) Si le processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ est φ-mélangeant le théorème 1 reste vrai en remplaçant l'hypothèse $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$ par $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)} < +\infty$; de plus on n'a pas besoin de supposer que le processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ est uniformément borné puisque

$$|E[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})]| \leq 2[E[e_j^2(X_1)]]^{1/2}\ [E[e_j^2(X_{\nu+1})]]^{1/2}\ \sqrt{\varphi(i)}$$

c'est-à-dire :

$$|E[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})]| \leq 2\sqrt{\varphi(i)}\ .$$

2) Si le processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ est m-dépendant c'est-à-dire que les tribus M_1^t et M_{t+n}^{∞} engendrées respectivement par $e_j(X_1),\ldots,e_j(X_t)$ et $e_j(X_{t+n})$,... sont indépendantes pour tout $t \geq 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ tel que $n > m$. Dans ce cas alors, on a :

$$S'^{j}_{n} \xrightarrow{L} N(0,\sigma_j^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_j^2 = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{m} E[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})]\ .$$

---

(1) L signifie convergence en loi.

Rappelons que l'indépendance correspond au cas où $m = 0$.

3) Le théorème 1 exige $\sigma_j^2 > 0$ pour que la loi limite soit une v.a. normale non dégénérée. Nous donnons une condition suffisante.

Posons $$\sup_{x \in E} \sup_{j=2\ldots k} |e_j(x)| = M$$

alors le lemme 1 permet de montrer que :

$$1 - 8 M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) \leq E[S'^j_n]^2 \leq 1 + 8 M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)$$

d'où une condition suffisante pour que $\sigma_j^2 > 0$ (voir lemme 3) est

$$1 - 8 M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) > 0$$

$$1 - 8 M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) > 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < \frac{1}{8 M^2} \quad (1)$$

Si $\alpha(n)$ est de la forme

$$\alpha(n) = a \rho^n \qquad a > 0 \qquad \rho \in [0,1[\qquad n \geq 1$$

alors la condition (1) s'écrira :

$$a \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n < \frac{1}{8 M^2} \Longrightarrow \frac{a\rho}{1-\rho} < \frac{1}{8 M^2} \Longrightarrow \rho < \frac{1}{1 + 8 a M^2}$$

Corollaire 1.- Sous les hypothèses du théorème 1 et si en plus

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < \frac{1}{8 M^2}$$

alors $\forall j = 2\ldots k \quad S'^j_n \longrightarrow N(0, \sigma_j^2)$ non dégénérée .

Remarque : Si $\sigma_j^2 = 0$ alors $S'^j_n \xrightarrow{P} 0$ ceci se démontre aisément en utilisant l'inégalité de Tchebychev et le lemme 3 .

Dans toute la suite de cette étude nous supposerons que $\forall j = 2\ldots k \quad \sigma_j^2 > 0$.

2 - *Loi limite de* S'_n .

Nous avons déjà montré que $\forall j = 2\ldots k \quad S'^j_n \xrightarrow{L} Z_j$ où Z_j suit une loi normale $N(0,\sigma_j^2)$.

Utilisons maintenant le théorème de Cramer Wald suivant pour démontrer que $S'_n \longrightarrow Z$, Z étant une v.a. normale dans $\mathbb{R}^{k-1}$ et possédant une matrice de covariance que nous préciserons par la suite.

Théorème 2.- Cramer Wald [3] *p. 49.-* Dans $\mathbb{R}^k$, la v.a. X_n converge en loi vers la v.a. X si et seulement si toute combinaison linéaire des composantes de X_n converge en loi vers la combinaison linéaire correspondante des composantes de X.

Pour appliquer ce théorème donnons nous la v.a. normale

$$Z = \begin{pmatrix} Z_2 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix} \quad \text{de matrice de covariance } (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k \\ j'=2\ldots k}}$$

$$j=j', \quad \sigma_j^2 = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_j(X_1)\, e_j(X_{\nu+1})\right]$$

$$j \neq j', \quad \sigma_{jj'} = \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_j(X_1)\, e_{j'}(X_{\nu+1}) + e_{j'}(X_1)\, e_j(X_{\nu+1})\right]$$

$$\sum = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k\\ j'=2\ldots k}} = \begin{cases} \sigma_j^2 = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right] & \text{si} \quad j = j' \\ \sigma_{jj'} = \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_j(X_1)e_{j'}(X_{\nu+1}) + e_{j'}(X_1)e_j(X_{\nu+1})\right] & \text{si} \quad j \neq j' \end{cases}$$

et montrons que :

$$\sum_{j=2}^{k} t_j\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)\right] \xrightarrow{L} \sum_{j=2}^{k} t_j\ Z_j \quad \text{où} \quad t_j \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{j=2}^{k} t_j\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=2}^{k} t_j\ e_j(X_i)\right]$$

posons $y_i = \sum_{j=2}^{k} t_j\ e_j(X_i)$ d'où

$$\sum_{j=2}^{k} t_j\ \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i\ .$$

Il est immédiat que : $(y_n)_{n\geq 1}$ est un processus strictement stationnaire, α-fortement mélangeant μ-centré et défini de (Ω, A, P) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Sous les deux hypothèses suivantes :

1) $(y_n)_{n\geq 1}$ uniformément borné .

2) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$

on peut appliquer le théorème 1 au processus $(y_n)_{n\geq 1}$.

- y_n est uniformément borné si $e_j(X_n)$ l'est en effet

$$|y_n| = |\sum_{j=2}^{k} t_j\, e_j(X_n)| \leqslant \sum_{j=2}^{k} |t_j|\, |e_j(X_n)| \leqslant M \sum_{j=2}^{k} |t_j| < +\infty$$

$$(M = \sup_{x\in E}\ \sup_{j=2\ldots k} |e_j(x)|)\ .$$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$ (hypothèse 4 du lemme 3).

On a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow[n\to+\infty]{L} N(0,c^2) \quad \text{avec} \quad c^2 = \lim_{n\to+\infty} E[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i]^2$$

$$E[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i]^2 = \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{k} t_j\, e_j(X_i)]^2 = \frac{1}{n} E[\sum_{j=2}^{k} t_j\, [\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)]]^2$$

$$= \frac{1}{n} E[\sum_{j=2}^{k} t_j^2\, [\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)]^2] + \frac{1}{n} E[\sum_{j\neq j'} t_j\, t_{j'} (\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)) (\sum_{i=1}^{n} e_{j'}(X_i))]\ .$$

Posons $A = \frac{1}{n} E[\sum_{j=2}^{k} t_j^2\, (\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i))^2]$

$$B = \frac{1}{n} E[\sum_{j\neq j'} t_j\, t_{j'}\, (\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i))\, (\sum_{i=1}^{n} e_{j'}(X_i))]\ .$$

$$A = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{k} t_j^2\, E[\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)]^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{k} t_j^2\, [\sum_{i=1}^{n} e_j^2(X_i) + \sum_{i\neq i'} E[e_j(X_i)\, e_j(X_i)]]\ .$$

Soit par stationnarité du processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$.

$$A = \sum_{j=2}^{k} t_j^2 \left[1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{n-\nu}{n} E\left[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right]\right]$$

$$B = \frac{1}{n} E \left[\sum_{j\neq j'} t_j\ t_j' \left(\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)\right) \left(\sum_{i=1}^{n} e_{j'}(X_i)\right)\right]$$

En utilisant la stationnarité du processus $(X_n)_{n\geq 1}$ on a :

$$B = \sum_{j\neq j'} t_j\ t_{j'} \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{n-\nu}{n} \left[E\left[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1})\right] + E\left[e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right]\right]\right]$$

En utilisant le lemme 3

$$E\left[S_n'^{\,j}\right]^2 = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{n-\nu}{n} E\left[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma_j^2 = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right]$$

d'où $$A \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{j=2}^{k} t_j^2\ \sigma_j^2 \quad .$$

D'autre part le processus $(X_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs aléatoires réels est strictement stationnaire , α-fortement mélangeant et μ-centré. Les $e_j(X_n)$ étant uniformément bornés $\forall j = 2...k$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|E\left[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1})\right]\right| < +\infty \\ \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|E\left[e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right]\right| < +\infty \end{cases}$$

on a alors

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{n-\nu}{n} E\left[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1}) + e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma_{jj'}$$

avec $\sigma_{jj'} = \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1})\right] + \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right]$

d'où

$$B = \sum_{j\neq j'} t_j\, t_{j'} \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{n-\nu}{n} \left[E\left[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1})\right] + E\left[e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right]\right]\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\sum_{j\neq j'} t_j\, t_{j'}\, \sigma_{jj'}$$

On a donc montré que :

$$\begin{cases} A \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{j=2}^{k} t_j^2\, \sigma_j^2 \\ \\ B \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{j\neq j'} t_j\, t_{j'}\, \sigma_{jj'} \end{cases}$$

On obtient alors

$$E\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i\right]^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} c^2 = \sum_{j=2}^{k} t_j^2\, \sigma_j^2 + \sum_{j\neq j'} t_j\, t_{j'}\, \sigma_{jj'} < +\infty$$

Car si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$ les séries de termes généraux.

$$(E\left[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right])_{\nu\geq 0} \quad \text{et} \quad (E\left[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1}) + e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})\right])_{\nu\geq 1}$$

sont absolument convergentes $\forall j$ et $j' = 2\ldots k$.

Après avoir montré que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow{L} N(0,c^2)$, nous allons chercher la loi limite de la v.a. $\sum_{j=2}^{k} t_j\, Z_j$ où Z_j suit une loi normale $N(0,\ \sigma_j^2)$.

La v.a. $Z = \begin{pmatrix} Z_2 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}$ étant normale

$\sum_{j=2}^{k} t_j Z_j$ l'est aussi (cf. théorème 7.4. p. 67 de [8]) d'où $\sum_{j=2}^{k} t_j Z_j$ suit une loi normale $N(0, Var[\sum_{j=2}^{k} t_j Z_j])$ (puisque les Z_j sont des v.a. centrées).

$$Var[\sum_{j=2}^{t} t_j Z_j] = E[\sum_{j=2}^{k} t_j Z_j]^2 = \sum_{j=2}^{k} t_j^2 E[Z_j^2] + \sum_{j \neq j'}^{k} t_j t_{j'} E[Z_j Z_{j'}]$$

$$E[Z_j^2] = \sigma_j^2 \qquad j = 2 \ldots k$$

$$E[Z_j Z_{j'}] = \sigma_{jj'} \quad jj' = 2 \ldots k$$

donc

$$Var[\sum_{j=2}^{k} t_j Z_j] = \sum_{j=2}^{k} t_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j \neq j'} t_j t_{j'} \sigma_{jj'} = c^2 .$$

D'où on a bien

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow[n \to +\infty]{L} \sum_{j=2}^{k} t_j Z_j \qquad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\sum_{j=2}^{k} t_j S_n'^{j} \xrightarrow[n \to +\infty]{L} \sum_{j=2}^{k} t_j Z_j \quad .$$

Le théorème de Cramer Wald nous permet alors d'affirmer que

$$S_n' \xrightarrow{L} Z = \begin{pmatrix} Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}$$

où Z est une v.a. normale dans $\mathbb{R}^{k-1}$ de moyenne nulle et de matrice de covariance Σ définie par :

$$\sum = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k\\ j'=2\ldots k}} = \begin{cases} \sigma_j^2 & \text{si} \quad j = j' \\ \sigma_{jj'} & \text{si} \quad j \neq j' \end{cases}$$

(σ_j^2 et $\sigma_{jj'}$ ont été définies à la page 9).

II - LOI LIMITE DE $S_n(.)$.

Théorème 3.- Sous les hypothèses suivantes :

a) La loi des X_i est μ.

b) $\sup\limits_{x \in E} \sup\limits_{j=2\ldots k} |e_j(x)| = M < +\infty$

c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$

alors la statistique $S_n(.) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=2}^{k} e_j(X_i)\, e_j(.)$ tend en loi vers la v.a. $U = \sum\limits_{j=2}^{k} Z_j\, e_j(.)$ où les Z_j sont des v.a. normales $N(0,\sigma_j^2)$ telles que $j = 2\ldots k$ $\sigma_j^2 > 0$.

De plus la v.a. $Z = \begin{pmatrix} Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}$ a pour matrice de covariance

$$\sum = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k\\ j'=2\ldots k}}$$

Démonstration :

$$S_n(.) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=2}^{k} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)\, e_j(.) = \sum_{j=2}^{k} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)\right] e_j(.) = \sum_{j=2}^{k} S_n'^{j}\, e_j(.)$$

$$= g(S_n') \quad .$$

L'application g est linéaire continue $\left(||S_n(.)||^2_{L^2(\mu)} = ||S_n'||^2_{\mathbb{R}^{k-1}}\right.$. La convergence en loi se conservant par continuité (cf. [3] corollaire 1 p. 31).

On a : $S_n(.) \xrightarrow{L} \sum_{j=2}^{k} Z_j\, e_j(.) = U$.

Il est évident que $E[Z_j] = 0$ et $\mathrm{Cov}(Z_j\, Z_{j'}) = \sigma_{jj'}$.

C - *COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE* $||S_n(.)||^2$.-

I - LA LOI DES X_i *EST* μ.

Proposition 1.- Le processus $(X_n)_{n\geq 1}$ étant strictement stationnaire, α-fortement mélangeant, de loi μ tels que :

1) $\sup_{x\in E}\ \sup_{j\in\{2\ldots k\}} |e_j(x)| = M < +\infty$

2) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$

alors $||S_n(.)||^2 \xrightarrow{L} Q = \sum_{j=2}^{k} Z_j^2$ où Q est une v.a. dont la fonction caractéristique est égale à :

$$\left[\det(I_{k-1} - 2it\ \Sigma)\right]^{-1/2} \quad .$$

I_{k-1} désignant la matrice unité dans $\mathbb{R}^{k-1}$.

Démonstration :

$$S_n(.) \longrightarrow \sum_{j=2}^{k} Z_j \, e_j(.) \qquad \text{(théorème 3)} .$$

L'application : $S_n(.) \longrightarrow ||S_n(.)||^2$ étant continue.

En utilisant le fait que la convergence en loi se conserve par continuité on a :

$$||S_n(.)||^2 \xrightarrow{L} \sum_{j=2}^{k} Z_j^2 = Q$$

on conclut alors en utilisant le théorème 1. p. 88 de [9].

II - LA LOI DES X_i *EST* ν.

Proposition 2.- $(X_n)_{n\geq 1}$ étant un processus strictement stationnaire, et α-fortement mélangeant.

1) Si la loi de probabilité des X_n est ν telle qu'il existe $j \in \{2...k\}$ pour lequel e_j soit ν-intégrable et d'intégrale non nulle.

2) si $\sup\limits_{x\in E} \sup\limits_{j\in\{2...k\}} |e_j(x)| = M < +\infty$

3) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty$.

Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_j(X_i) = \hat{a}_{jn} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} E[e_j(X_1)]$$

de plus $||S_n(.)||^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} +\infty$.

Démonstration : L'application de l'inégalité de Tchebychev nous donne

$$P[[\hat{a}_{jn} - a_j] \geq \varepsilon] \leq \frac{E[\hat{a}_{jn} - a_j]^4}{\varepsilon^4}$$

où $a_j = \int e_j \, d\nu$.

$$\hat{a}_{jn} - a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i) - a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (e_j(X_i) - a_j) .$$

Le processus $(e_j(X_n) - a_j)_{n \geq 1}$ est un processus strictement stationnaire α-fortement mélangeant et uniformément borné.

$$|e_j(X_i) - a_j| \leq |e_j(X_i)| + |a_j| \leq 2M$$

d'où :

$$E[\hat{a}_{jn} - a_j]^4 \leq 3072 \times (2M)^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} \frac{1}{n^2} \qquad \text{(lemme 2).}$$

donc :

$$P[|\hat{a}_{jn} - a_j| \geq \varepsilon] \leq \frac{3072}{\varepsilon^4} 2^4 M^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} \frac{1}{n^2}$$

d'où

$$P[|\hat{a}_{jn} - a_j| \geq \varepsilon] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

On conclut alors en utilisant le lemme de Borel Cantelli.

D'où : $\hat{a}_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i) \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} a_j = E[e_j(X_1)] = \int e_j \, d\nu \neq 0$

$$||S_n(.)||^2 = ||\frac{1}{\sqrt{n}} [T_n(.) - E[T_n(.)]]||^2 = n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2$$

et comme $\hat{a}_{jn} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} a_j \neq 0$

alors

$$||S_n(.)||^2 = n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} +\infty .$$

Remarque : Au vu de l'étude sur le comportement asymptotique de $||S_n(.)||^2$ notre problème de construction de test se résume en ceci :

Tester l'hypothèse H_o "la loi commune des X_i est μ avec $\forall j = 2\ldots k \int e_j \, d\mu = 0$ " contre l'hypothèse H_1 "la loi commune des X_i est ν avec il existe au moins un $j \in \{2\ldots k\}$ tel que $\int e_j \, d\nu \neq 0$ " .

CHAPITRE II

ESTIMATION DES ELEMENTS DE LA MATRICE DES COVARIANCES $\Sigma = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k \\ j'=2\ldots k}}$.

LOI LIMITE DE $S'_n(.)$.

Après avoir exhibé les éléments de la matrice des covariances Σ, nous chercherons à les estimer. Compte tenu du fait que dans la pratique ces éléments sont très peu maniables, car même si μ est connue la loi du couple $(e_j(X_1), e_j(X_{\nu+1}))$ ou encore $(e_j(X_1), e_{j'}(X_{\nu+1}))$ est inconnue, donc les quantités $E[e_j(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})]$ et $E[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1})]$ pour $j,j' = 2\ldots k$ sont inconnues d'où pratiquement σ_j^2 et $\sigma_{jj'}$ sont inutilisables.

A - ESTIMATION DE $(\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k \\ j'=2\ldots k}}$.-

Nous utiliserons les densités spectrales pour faire l'estimation. En effet pour un processus stationnaire vérifiant certaines conditions de régularité, il est commode d'utiliser des estimateurs spectraux.

Compte tenu de la forme des éléments de Σ, nous nous intéressons ici à l'estimation de la densité spectrale en un point.

I - ESTIMATION DE σ_j^2 , $j = 2 \dots k$.

Rappelons que le processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ est strictement stationnaire α-fortement mélangeant et uniformément borné. Le lemme 3 nous permet d'écrire sous l'hypothèse $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$ ($\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty$ $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$) que :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| E\left[e_j(X_1)\; e_j(X_{\nu+1})\right] \right| < +\infty \, .$$

La série $(E\left[e_j(X_1)\; e_j(X_{\nu+1})\right])_{\nu\geq 0}$ étant absolument convergente, le processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ admet une mesure spectrale m_j telle que :

$$\gamma_\nu^j = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu\lambda}\, dm_j(\lambda) \quad \text{où} \quad \gamma_\nu^j = E\left[e_j(X_1)\; e_j(X_{\nu+1})\right]$$

et il existe une densité spectrale $f_j = \dfrac{dm_j}{d\ell}$ où ℓ est la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$.

$$\forall \lambda \in [-\pi, \pi] \qquad f_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_\nu^j\, e^{i\nu\lambda} \, .$$

La fonction $f_j(\lambda)$ est bien définie puisque la convergence de la série $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_\nu^j\, e^{i\nu\lambda}$ est uniforme en λ.

On a alors :

$$\gamma_\nu^j = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu\lambda}\, f_j(\lambda)\, d\lambda \qquad \nu \in \mathbb{Z} \, .$$

Il est donc équivalent de se donner γ_ν^j ou f_j . Le processus $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ étant réel $f_j(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \cos \nu\lambda \;\gamma_\nu^j$.

De plus comme $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ est strictement stationnaire

$$f_j(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_\nu^j = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu\, \gamma_\nu^j \qquad \text{où on a posé :}$$

$$\varepsilon_\nu = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad \nu = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \nu > 0 \end{cases}$$

$$f_j(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \gamma_\nu^j \Longrightarrow 2\pi f_j(0) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \gamma_\nu^j =$$

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left[e_j(X_1)\, e_j(X_{\nu+1})\right] = \sigma_j^2 \; .$$

Posons $\quad c_\nu^j = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-\nu} e_j(X_h)\, e_j(X_{h+\nu}) \; , \quad 0 \leq \nu \leq n-1 \; .$

Nous énoncerons des résultats tout à fait analogues à ceux de [10] p. 508-518 , [11] p. 145-153 , [12] p. 65-68 .

Proposition 3.- Sous les conditions suivantes :

a) $(e_j(X_n))_{n\geq 1}$ est uniformément borné :

$$\sup_{x\in E} \sup_{j\in\{2\ldots k\}} |e_j(x)| = M < +\infty \; .$$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty$.

c) $\lim d_n = +\infty$.

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n^5}{n^2} < +\infty$,

alors :

1) $\hat{\sigma}_j^2 = 2 \sum_{\nu=0}^{d_n} \varepsilon_\nu c_\nu^j$ est un estimateur convergent presque sûrement et en moyenne quadratique de σ_j^2 .

2) si $\sum_{r,s,h} |\lambda(r,s,h)| < +\infty$ où

$$\lambda(r,s,h) = E[e_j(X_1)\, e_j(X_{h+1})\, e_j(X_{s+1})\, e_j(X_{r+1})] - [\gamma_s^j\, \gamma_{h-r}^j + \gamma_r^j\, \gamma_{h-s}^j + \gamma_h^j\, \gamma_{r-s}^j]$$

alors $$\lim \frac{n}{d_n} \operatorname{Var}[\hat{\sigma}_j^2] = [2\, \sigma_j^2]^2 \quad .$$

Démonstration :

1)

$$\hat{\sigma}_j^2 - \sigma_j^2 = 2 \sum_{=0}^{d_n} \varepsilon_\nu\, C_\nu^j - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu\, \gamma_\nu^j$$

$$= 2 \sum_{\nu=0}^{d_n} \varepsilon_\nu\, [C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n} \gamma_\nu^j - \frac{\nu}{n} \gamma_\nu^j] - 2 \sum_{\nu=d_n+1}^{\infty} \gamma_\nu^j$$

soit

$$|\hat{\sigma}_j^2 - \sigma_j^2| \leq 2 \sum_{\nu=0}^{d_n} |C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n} \gamma_\nu^j| + 2 \sum_{\nu=0}^{d_n} \frac{\nu}{n} |\gamma_\nu^j| + 2 \sum_{\nu=d_n+1}^{\infty} |\gamma_\nu^j| \quad .$$

La série de terme général $(\gamma_\nu^j)_{\nu \geq 0}$ étant absolument convergente $\sum_{\nu=d_n+1}^{\infty} |\gamma_\nu^j| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ comme reste d'une série absolument convergente.

$$2 \sum_{\nu=0}^{d_n} \frac{\nu}{n} |\gamma_\nu^j| \leq 2\, M^2 \sum_{\nu=0}^{d_n} \frac{\nu}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{(sous l'hypothèse d))}.$$

Il reste donc en fait à montrer que :

$$P[2 \sum_{\nu=0}^{d_n} |C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n} \gamma_\nu^j| > \varepsilon] \longrightarrow 0 \quad .$$

$$P[2 \sum_{\nu=0}^{d_n} |C^j - \frac{n-\nu}{n} \gamma_\nu^j| > \varepsilon] \leq \sum_{\nu=0}^{d_n} P[|C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n} \gamma_\nu^j| > \frac{\varepsilon}{2(d_n+1)}]$$

$$C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n} \gamma_\nu^j = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-\nu} e_j(X_h)\, e_j(X_{h+\nu}) - \frac{n-\nu}{n} \gamma_\nu^j$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-\nu} [e_j(X_h)\, e_j(X_{h+\nu}) - \gamma_\nu^j]$$

$(e_j(X_h)\, e_j(X_{h+\nu}) - \gamma_\nu^j)_{\nu \geq 1}$ est un processus strictement stationnaire , α-fortement mélangeant et uniformément borné

$$|e_j(X_h)\, e_j(X_{h+\nu}) - \gamma_\nu^j| \leq 2\, M^2$$

L'inégalité de Tchebychev nous donne :

$$P\left[|C^j - \frac{n-\nu}{n}\gamma_\nu^j| > \frac{\varepsilon}{2(d_n+1)}\right] \leq \frac{E\left[C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n}\gamma_\nu^j\right]^4}{\varepsilon^4}\, 2^4 (d_n+1)^4$$

$$E\left[C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n}\gamma_\nu^j\right]^4 \leq 3072\ (2M^2)^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}\ \left(\frac{n-\nu}{n^4}\right)^2$$

donc

$$P\left[|C^j - \frac{n-\nu}{n}\gamma_\nu^j| > \frac{\varepsilon}{2(d_n+1)}\right] \leq \frac{3072 \times 2^4 \times M^8 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}}{\varepsilon^4}\ \frac{(d_n+1)^4}{n^2} .$$

Soit :

$$P\left[2 \sum_{\nu=0}^{d_n} |C^j - \frac{n-\nu}{n}\gamma_\nu^j| > \varepsilon\right] \leq \frac{3072 \times 2^4 \times M^8 \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}}{\varepsilon^4} \times \frac{(d_n+1)^5}{n^2} .$$

La série de terme général $\frac{d_n^5}{n^2}$ étant convergente donc

$$P\left[2 \sum_{\nu=0}^{d_n} |C_\nu^j - \frac{n-\nu}{n}\gamma_\nu^j| > \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où
$$P\left[|\hat{\sigma}_j^2 - \sigma_j^2| > \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En conséquence, en utilisant le lemme de Borel Cantelli

$$\hat{\sigma}_j^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \sigma_j^2 .$$

Pour la convergence en m.q. voir [10] .

2) voir [10] p. 527-532.

Remarquons que nous avons utilisé le périodogramme "tronké en d_n" pour obtenir notre estimateur $\hat{\sigma}_j^2$.

II - ESTIMATION DE $\sigma_{jj'}$, $j \neq j'$.

$$\sigma_{jj'} = \sum_{\nu=1}^{\infty} E[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1})] + \sum_{\nu=1}^{\infty} E[e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j}) \quad \text{où} \quad \gamma_\nu^{jj'} = E[e_j(X_1)\ e_{j'}(X_{\nu+1})] \quad \text{et}$$

$$\gamma_\nu^{j'j} = E[e_{j'}(X_1)\ e_j(X_{\nu+1})] .$$

$\sigma_{jj'}$ est lié au processus strictement stationnaire $(e_j(X_n), e_{j'}(X_n))_{n\geq 1}$.
Nous savons par ailleurs (cf. chapitre I) que sous la condition $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$ alors

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu^{jj'}| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu^{j'j}| < +\infty.$$

On a donc existence d'une densité spectrale appelée "cross spectral density function" définie par :

$$f_{jj'}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j})\ e^{i\nu\lambda}$$

Utilisant la stricte stationnarité du processus $(e_j(X_n), e_{j'}(X_n))_{n\geq 1}$ et comme $\gamma_o^{jj'} = \gamma_o^{j'j} = 0$ alors au point $\nu = 0$ on a :

$$f_{jj'}(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j}) \Longrightarrow \pi\ f_{jj'}(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j}) = \sigma_{jj'} .$$

Comme précédemment nous considérons l'estimateur obtenu par la troncature en m_n tel que :

$$\hat{\sigma}_{jj'} = \sum_{\nu=1}^{m_n} (C_\nu^{jj'} + C_\nu^{j'j}) \quad \text{où} \quad m_n < n-1 \quad \text{et}$$

$$C_\nu^{jj'} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-\nu} e_j(X_h)\, e_{j'}(X_{h+\nu}) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-1$$

$$C_\nu^{j'j} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-\nu} e_{j'}(X_h)\, e_j(X_{h+\nu}) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-1 \quad .$$

Sous certaines conditions $\hat{\sigma}_{jj'}$ est un estimateur convergent de $\sigma_{jj'}$, c'est l'objet de la :

Proposition 4.- Sous les hypothèses a) et b) de la proposition 3. Si en plus

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$

2) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{m_n^5}{n^2} < +\infty$

alors $\hat{\sigma}_{jj'} = \sum\limits_{\nu=1}^{m_n} (C_\nu^{jj'} + C_\nu^{j'j})$ est un estimateur convergent presque sûrement et asymptotiquement sans biais de $\sigma_{jj'}$.

Démonstration : Elle est exactement la même que celle utilisée au point 1 de la proposition 3, donc ne pose aucune difficulté.

Etude du biais

$$\sigma_{jj'} - E[\hat{\sigma}_{jj'}] = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j}) - \sum_{\nu=1}^{m_n} E(C_\nu^{jj'} + C_\nu^{j'j})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j}) - \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{n-\nu}{n} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j})$$

$$\sigma_{jj'} - E[\hat{\sigma}_{jj'}] = \sum_{\nu=m_n+1}^{\infty} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j}) + \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{\nu}{n} (\gamma_\nu^{jj'} + \gamma_\nu^{j'j})$$

$$|\sigma_{jj'} - E[\hat{\sigma}_{jj'}]| \leq \sum_{\nu=m_n+1}^{\infty} |\gamma_\nu^{jj'}| + \sum_{\nu=m_n+1}^{\infty} |\gamma_\nu^{j'j}| + \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{\nu}{n} |\gamma_\nu^{jj'}| + \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{\nu}{n} |\gamma_\nu^{j'j}|$$

$|\gamma_\nu^{jj'}| \leq M^2$ et $|\gamma_\nu^{j'j}| \leq M^2$ d'où

$$|\sigma_{jj'} - E[\hat{\sigma}_{jj'}]| \leq \sum_{\nu=m_n+1}^{\infty} |\gamma_\nu^{jj'}| + \sum_{\nu=m_n+1}^{\infty} |\gamma_\nu^{j'j}| + 2\,M^2 \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{\nu}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\hat{\sigma}_{jj'}$ est un estimateur convergent p.s. et asymptotiquement sans biais de $\sigma_{jj'}$.

En conclusion la matrice Σ a été estimée par la matrice

$$\hat{\Sigma}_n = (\hat{\sigma}_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k\\ j'=2\ldots k}} \quad \text{et} \quad \hat{\Sigma}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \Sigma$$

$\hat{\Sigma}_n$ nous servira à une légère modification près à la détermination de la loi limite de $S'_n(.)$.

B - <u>LOI LIMITE DE</u> $S'_n(.)$.-

I - <u>DETERMINATION DE</u> $\hat{B}_n$.

1 - <u>*Détermination de*</u> $\hat{\Sigma}'_n$.

Nous avons montré que $\hat{\Sigma}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \Sigma$, de plus comme on a convergence composante par composante et k est fini alors $||\hat{\Sigma}_n - \Sigma||_{\mathbb{R}^{k-1}} \to 0$ c'est-à-dire que $\hat{\Sigma}_n$ converge au sens fort (au sens de la norme) vers Σ. Cependant $\hat{\Sigma}_n$ n'a aucune raison d'être définie positive, $\hat{\Sigma}_n$ est presque sûrement asymptotiquement définie positive puisque Σ matrice de covariances est définie positive.

Par ailleurs on sait que $\hat{\Sigma}_n$ et Σ sont bornées.

Nous allons chercher une matrice $\hat{\Sigma}'_n$ telle que

a) $\hat{\Sigma}'_n \xrightarrow{p.s.} \Sigma$.

b) $\hat{\Sigma}'_n$ strictement définie positive.

Rappelons une fois pour toute que la norme que nous considérons ici est la norme usuelle dans $\mathbb{R}^{k-1}$.

Posons $\alpha_n = \left| \inf\limits_{||v|| \leq 1} <\hat{\Sigma}_n v, v> \right| + \frac{1}{n}$

et considérons la matrice $\hat{\Sigma}'_n$ définie par :

$$\hat{\Sigma}'_n = \hat{\Sigma}_n + \alpha_n I$$

où I est la matrice identique dans $\mathbb{R}^{k-1}$, nous montrerons successivement que :

$$\alpha_n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \hat{\Sigma}'_n \text{ strictement définie positive .}$$

- pour $v \in \mathbb{R}^{k-1}$ tel que $||v|| \leq 1$ on a :

$$|<\hat{\Sigma}_n v,v> - <\Sigma v, v>| = |<(\hat{\Sigma}_n - \Sigma) v, v>| \leq ||\hat{\Sigma}_n - \Sigma|| \; ||v||^2$$

d'où

$$|<\hat{\Sigma}_n v,v> - <\Sigma v, v>| = ||\hat{\Sigma}_n - \Sigma|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\inf_{||v|| \leq 1} <\hat{\Sigma}_n v, v> \to 0 \quad .$$

En conséquence :

$$\alpha_n = \left| \inf_{||v|| \leq 1} <\hat{\Sigma}_n v, v> \right| + \frac{1}{n} \to 0$$

et par suite $\hat{\sum}'_n = \hat{\sum}_n + \alpha_n I \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \sum$.

- Pour montrer que $\hat{\sum}'_n$ est strictement définie positive, il suffit de montrer que pour $||v|| = 1$ on a $<\hat{\sum}'_n v, v> > 0$.

$$<\hat{\sum}'_n v, v> = <(\hat{\sum}_n + \alpha_n I) v, v> = <\hat{\sum}_n v, v> + \alpha_n <v, v>$$

$$= <\hat{\sum}_n v, v> + \alpha_n ||v||^2$$

$$= <\hat{\sum}_n v, v> + \alpha_n \quad (||v|| = 1)$$

$$= <\hat{\sum}_n v, v> + \alpha_n > 0 \quad \text{(compte tenu de la définition de } \alpha_n)$$

d'où pour $||v|| = 1$ $<\hat{\sum}'_n v, v> > 0$ donc $\hat{\sum}'_n$ est strictement définie positive.

2 - *Détermination de* $\hat{B}_n$.

Donnons le

Théorème 4.- [13] p. 263 .

Chaque transformation symétrique positive A admet une racine carrée symétrique positive et une seule qu'on désigne par $A^{1/2} = \sqrt{A}$. Celle-ci peut être représentée comme limite (au sens fort c'est à dire au sens de la norme définie dans l'espace considéré) d'une suite de polynômes de A et, par conséquent, est permutable avec toutes les transformations qui sont permutables avec A.

Le théorème ci-dessus nous permet de dire qu'il existe une matrice B unique, symétrique et définie positive telle que :

$$\sum = B^2$$

$$B = \sqrt{\Sigma} .$$

De même il existe une matrice $\hat{B}_n$ unique, symétrique et strictement définie positive ($\hat{\Sigma}'_n$ étant strictement définie positive) telle que :

$$\hat{\Sigma}_n + \alpha_n I = \hat{\Sigma}'_n = \hat{B}_n^2 \Longrightarrow \hat{B}_n = \sqrt{\hat{\Sigma}'_n} \, .$$

Par ailleurs l'application :

$$f : A \longrightarrow \sqrt{A}$$

où A est une matrice définie positive est continue, d'où :

$$\hat{\Sigma}'_n \xrightarrow{p.s.} \Sigma \Longrightarrow f(\hat{\Sigma}'_n) \xrightarrow{p.s.} f(\Sigma)$$

donc $\sqrt{\hat{\Sigma}'_n} \xrightarrow{p.s.} \sqrt{\Sigma}$ c'est-à-dire encore $\hat{B}_n \xrightarrow{p.s.} B$.

II - *LOI LIMITE DE* $\hat{B}_n^{-1} S'_n$.

$\hat{B}_n$ étant une matrice strictement définie positive, elle admet une matrice inverse (voir proposition 3 p. 73 de [14]) que nous notons par $\hat{B}_n^{-1}$.

Nous supposons en plus dans cette partie que la matrice des covariances $\Sigma = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k \\ j'=2\ldots k}}$ est inversible, remarquons que cette hypothèse est raisonnable dans le cas de la faible dépendance (le cas d'indépendance correspondant au cas où $\Sigma = I$ voir [5]).

Σ inversible entraîne B inversible, soit B^{-1} l'inverse de B , $\hat{\Sigma}'_n \xrightarrow{p.s.} \Sigma$ donc $\hat{B}_n \xrightarrow{p.s.} B$ et par suite $\hat{B}_n^{-1} \xrightarrow{p.s.} B^{-1}$ et $\hat{B}_n^{-1}$ et B^{-1} sont bornées.

Nous nous proposons maintenant de résoudre le problème suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_n^{-1} \xrightarrow{p.s.} B^{-1} \\ \\ S'_n \longrightarrow Z \end{array}\right\} ? \implies \hat{B}_n^{-1}\, S'_n \xrightarrow{L} B^{-1}\, Z$$

où Z est la v.a. définie en page 9 .

Ce résultat est sûrement connu mais nous ne l'avons pas vu dans la littérature.

Nous le montrons à partir des fonctions caractéristiques

$$E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1} S'_n>}\right] - E\left[e^{i<t,B^{-1}Z>}\right] = A + B \quad \text{où}$$

$$A = E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1} S'_n>}\right] - E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right]$$

$$B = E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right] - E\left[e^{i<t,B^{-1}Z>}\right] .$$

Pour montrer que $\hat{B}_n^{-1}\, S'_n \xrightarrow{L} B^{-1}\, Z$, il suffirait de prouver que A et B tendent vers 0.

$$B = E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right] - E\left[e^{i<t,B^{-1}Z>}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

à cause de la continuité de la fonction caractéristique de la v.a. Z.

En effet Z suivant la loi normale $N(0,\sum)$ sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,j'} \sigma_{jj'}\, t_j\, t_{j'}\right]$$

donc continue

$$A = E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1} S'_n>}\right] - E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right].$$

Utilisant l'inégalité classique suivante :

$$|e^{i<a,b>} - e^{i<a',b'>}| \leq \min(2, |<a,b> - <a',b'>|)$$

on a :

$$\sup_{||t-s||\leq\varepsilon} |E[e^{i<t, \hat{B}_n^{-1} S'_n>}] - E[e^{i<s,\hat{B}_n^{-1} S'_n>}]| \leq \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \min(2, \varepsilon||\hat{B}_n^{-1}x||)\, d\lambda_n(x) \quad (1)$$

où λ_n est la loi de S'_n .

Soit λ la loi de la v.a. Z , pour ε assez petit , $\hat{B}_n^{-1}$ étant borné

$$\sup_{||t-s||\leq\varepsilon} |E[e^{i<t, \hat{B}_n^{-1} Z>}] - E[e^{i<s,\hat{B}_n^{-1} Z>}]| \leq \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \min(2, \varepsilon||\hat{B}_n^{-1}x||)\, d\lambda(x) \leq \eta \quad (2)$$

D'autre part on sait que $\hat{B}_n^{-1} \xrightarrow{p.s.} B^{-1}$ et $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ d'où pour ε assez petit et n assez grand

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{k-1}} \min(2, \varepsilon||\hat{B}_n^{-1}x||)\, d\lambda_n(x) - \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \min(2,\varepsilon||B^{-1}x||)\, d\lambda(x)\right| \leq \eta \quad (3) .$$

De même, pour ε assez petit

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} \min(2, \varepsilon\, ||B^{-1}x||)\, d\lambda(x) \leq \eta \qquad (4) .$$

En combinant (3) et (4) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} \min(2, \varepsilon\, ||\hat{B}_n^{-1}x||)\, d\lambda_n(x) \leq 2\,\eta \quad .$$

Soit maintenant K un compact, on sait que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini. Posons alors $K = \bigcup_{j=1}^{J} B_j(C_j, \varepsilon)$ où $B_j(C_j, \varepsilon)$ désigne la boule de centre C_j et de rayon ε, ε étant aussi petit que l'on veut.

$$\sup_{t\in B_j} \left| E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}S'_n>}\right] - E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right]\right| \leq \sup_{t\in B_j} \left| E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}S'_n>}\right] - E\left[e^{i<C_j,\hat{B}_n^{-1}S'_n>}\right]\right| +$$

$$\sup_{t\in B_j} \left| E\left[e^{i<C_j,\hat{B}_n^{-1}S'_n>}\right] - E\left[e^{i<C_j,B^{-1}Z>}\right]\right| + \sup_{t\in B_j} \left| E\left[e^{i<C_j,B^{-1}Z>}\right] - E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right]\right| .$$

En utilisant les relations (1), (2), (3) et (4) on obtient :

$$\sup_{t\in B_j} \left| E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}S'_n>}\right] - E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right]\right| \leq 4\ \eta$$

En conséquence :

$$\sup_{t\in K} \left| E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}S'_n>}\right] - E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right]\right| \leq 4\ J\eta$$

J étant fini on a :

$$\sup_{t\in K} \left| E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}S'_n>}\right] - E\left[e^{i<t,\hat{B}_n^{-1}Z>}\right]\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc on a convergence uniforme sur tout compact.

On a donc montré que A et B tendent vers 0 d'où

$$\hat{B}_n^{-1}\ S'_n \xrightarrow{L} B^{-1}\ Z \quad .$$

D'autre part, il est connu que si X est une v.a. dont la matrice des covariances est C_X , la v.a. $Y = M_X$ où M est une matrice régulière a comme matrice des covariances $C_Y = M\ C_X\ M'$ (M' désignant la transposée de M).

La v.a. $B^{-1}\ Z$ a donc comme matrice des covariances

$$C_{B^{-1}Z} = (B^{-1})(\Sigma)(B^{-1})' = B^{-1}\ \Sigma\ B^{-1} \qquad (B^{-1} \text{ étant symétrique}$$

$$B^{-1} = (B^{-1})') \ .$$

Comme $\Sigma = B^2$ alors

$$C_{B^{-1}Z} = B^{-1} B^2 B^{-2} = I_{k-1} \quad .$$

En conclusion :

$\hat{B}_n^{-1} S'_n \xrightarrow{L} B^{-1}Z$ et $B^{-1}Z$ suit la loi normale de moyenne nulle et de matrice des covariances l'identité dans $\mathbb{R}^{k-1}$.

$$\hat{B}_n^{-1} S'_n \xrightarrow{L} W = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_k \end{pmatrix}$$

où les ζ_i sont des v.a. normales $N(0,1)$ et indépendantes (car pour une loi normale si la matrice des covariances est diagonale alors les v.a. constituant le vecteur aléatoire sont indépendantes).

Ce qui termine la recherche de la loi limite de $\hat{B}_n^{-1} S'_n$.

III - LOI LIMITE DE $S'_n(.)$

Proposition 5.- Sous les hypothèses du théorème 3 et des propositions 3 et 4 la statistique $S'_n(.) = \langle \hat{B}_n^{-1} S'_n ; V \rangle$ (où S'_n et V ont été définis au chapitre I p. 4).

Converge en loi vers la v.a. $U = \sum_{j=2}^{k} \zeta_j e_j(.)$ où les ζ_j sont des v.a.r. normales centrées réduites et indépendantes.

Démonstration : Immédiat, elle est la même que celle donnée au théorème 3.

Corollaire 2.- Sous les hypothèses de la proposition 5

$||S'_n(.)||^2 \xrightarrow{L} Q$ où Q suit un χ^2 à $(k-1)$ d.d.ℓ.

<u>Démonstration</u> : Immédiate, elle est la même que celle donnée à la proposition 1.

<u>*Remarque*</u> : Nous obtenons ainsi un résultat assez intéressant compte tenu de l'importance de la loi du χ^2 dans les tests statistiques.

IV - QUELQUES EXEMPLES.

Nous traiterons deux cas : le cas $\mathbb{R}^2$ et le cas $\mathbb{R}^3$.

1 - Cas $\mathbb{R}^2$.

$$\hat{\Sigma}'_n = \hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n > 0$$

donc
$$\frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_2(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{L} N(0,1) ,$$

d'où
$$\frac{1}{\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n} \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} e_2(X_i)\right]^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{L} \chi^2 \text{ à } 1 \text{ d.d.}\ell.$$

2 - Cas $\mathbb{R}^3$.

Nous allons déterminer les éléments de la matrice $\hat{B}_n$ telle que :

$$\hat{\Sigma}'_n = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n & \hat{\sigma}_{23} \\ \hat{\sigma}_{32} & \hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n \end{pmatrix} = \hat{B}_n^2 \quad \text{où} \quad \hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32} .$$

Posons
$$\hat{B}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$$

car $\hat{B}_n$ est symétrique .

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_n^2 + b_n^2 = \hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n \\ b_n(a_n + c_n) = \hat{\sigma}_{23} + \hat{\sigma}_{32} \\ b_n^2 + c_n^2 = \hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n \end{cases} .$$

a) $\underline{b_n = 0}$. Alors $a_n^2 = \hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n$ et $c_n^2 = \hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n$,

d'où $a_n = \sqrt{\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n}$ et $c_n = \sqrt{\hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n}$,

seules les quantités positives conviennent puisque $\hat{B}_n$ doit être définie positive, donc

$$\hat{B}_n = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n} & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\hat{B}_n^{-1} = \begin{pmatrix} (\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (\hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

par suite $\hat{B}_n^{-1} \; S'_n \xrightarrow{L} N(0,I)$ où I est la matrice identique dans $\mathbb{R}^2$.

$||\hat{B}_n^{-1} \; S'_n||^2 \longrightarrow \chi^2$ à 2 degré de liberté .

b) $\underline{b_n \neq 0}$. On écrit alors $a_n + c_n = \dfrac{\hat{\sigma}_{23}}{b_n}$,

puisque $b_n \neq 0$ donc $\hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32} = 0$ si et seulement si $a_n + c_n = 0$,

$a_n + c_n = 0 \Longrightarrow a_n = - c_n$ d'où

$a_n^2 + b_n^2 = c_n^2 + b_n^2 = \hat{\sigma}_2^2 + d_n = \hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n \Longrightarrow \hat{\sigma}_2^2 = \hat{\sigma}_3^2$ dans ce cas

$$\hat{B}_n^2 = (\hat{\sigma}_2 + \alpha_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où}$$

$$\hat{B}_n = \begin{pmatrix} (\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n)^{1/2} & 0 \\ 0 & -(\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n)^{1/2} \end{pmatrix}$$

alors $\hat{B}_n$ n'est pas définie positive car $\forall v \in \mathbb{R}^2$. $<\hat{B}_n v,v>$ n'est pas toujours positif. En effet posons $v = (v_1,v_2)$ $<\hat{B}_n v,v> = \sqrt{\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n}\,(v_1^2 - v_2^2)$ si $|v_2| > |v_1|$ alors $<\hat{B}_n v,v> < 0$.

En conclusion, pour que $\hat{B}_n$ soit définie positive si $b_n \neq 0$, il faut et il suffit que $\hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32} \neq 0$ donc dans cette partie on a $b_n \neq 0$ et $\hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32} \neq 0$.

En calculant a_n et c_n en fonction de b_n on obtient

$$a_n = \frac{\hat{\sigma}_{23}}{2b_n} - \frac{\hat{\sigma}_3^2 - \hat{\sigma}_2^2}{2\,\hat{\sigma}_{23}}\,b_n \qquad (1)$$

$$c_n = \frac{\hat{\sigma}_3^2 - \hat{\sigma}_2^2}{2\,\hat{\sigma}_{23}}\,b_n + \frac{\hat{\sigma}_{23}}{2b_n} \qquad (2) \quad .$$

En remplaçant a_n par sa valeur (1) dans l'équation $a_n^2 + b_n^2 = \hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n$, on obtient une équation en b_n dont la résolution donne :

$$b_n = \hat{\sigma}_{23}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 + 2\,\alpha_n + 2\sqrt{(\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n)\,(\hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n) - \hat{\sigma}_{23}^2}}{(\hat{\sigma}_3^2 - \hat{\sigma}_2^2)^2 + 4\,\hat{\sigma}_{23}^2}}$$

Remarquons que b_n existe puisque

1) $(\hat{\sigma}_3^2 - \hat{\sigma}_2^2)^2 + 4\,\hat{\sigma}_{23}^2 > 0 \qquad \hat{\sigma}_{23} \neq 0$

2) $(\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n)\,(\hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n) - \hat{\sigma}_{23}^2 \quad 0$

(la matrice $\hat{\sum}'_n$ étant strictement définie positive, son déterminant est strictement positif).

3) $\hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 + 2\,\alpha_n = (\hat{\sigma}_2^2 + \alpha_n) + (\hat{\sigma}_3^2 + \alpha_n) > 0$ (définition de α_n).

Enfin, la connaissance de b_n permet de déterminer a_n et c_n par les relations (1) et (2).

Connaissant alors a_n, b_n et c_n, $\hat{B}_n$ est connue et on calcule aisément $\hat{B}_n^{-1}$ (inversion d'une matrice carrée ce qui est classique).

$$\hat{B}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \hat{B}_n^{-1} = \frac{1}{a_n c_n - b_n^2} \begin{pmatrix} c_n & -b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_n^{-1} S'_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \nu(0,I) \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et}$$

$$\|\hat{B}_n^{-1} S'_n\|^2_{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2 \quad \text{à } 2 \text{ d.d.}\ell\,.$$

CHAPITRE III

ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DANS LE CAS OU LE NOYAU EST DE DIMENSION FINIE.

A - INTRODUCTION ET NOTATIONS.-

Nous avons montré au premier chapitre que si le processus $(X_n)_{n\geq 1}$ suivait la loi μ alors $||S_n(.)||^2 \xrightarrow{L} Q$ où Q est une loi dont la fonction caractéristique est donnée par $[\det(I_{k-1} - 2it \sum)]^{-1/2}$.

Dans cette partie nous chercherons la vitesse de convergence. De nombreux auteurs ont étudié, dans le cas où les v.a. X_n sont indépendantes et dans $\mathbb{R}^k$ la vitesse de convergence de P_n vers sa loi limite ϕ (P_n est la loi de probabilité de la v.a. $T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et ϕ la loi normale limite de P_n).

On pourra consulter notamment [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22].

D. Bosq dans [5], [6], [7] étudiant les tests hilbertiens dans le cas des v.a. indépendantes a obtenu une vitesse de convergence de l'ordre de $n^{-1/2}$.

Plus précisément, il a obtenu en supposant que :

$$\forall j = 2...k \qquad \int |e_j|^3 \, d\mu < +\infty$$

(les e_j , $j = 2...k$ étant le système orthonormal cf. chapitre I).

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left| P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a\right] - P\left[Q \leq a\right] \right| \leq C_o (k-1)^3 \left[\int \sum_{j=2}^{k} |e_j|^3 \, d\mu\right] n^{-1/2} \qquad (1')$$

où Q est une loi du χ^2 à $(k-1)$ d.d.ℓ.

et C_o une constante universelle .

En utilisant une majoration d'Esseen [15], on obtient dans le cas où les v.a. sont indépendantes un majorant de la forme $D_{k-1}\, n^{-(k-1)/k}$ où la constante D_{k-1} ne dépend que de k et des moments d'ordre 4 de $e_j(X_i)$. Cette majoration est valable sous l'hypothèse supplémentaire $\int e_j^4 \, d\mu < +\infty$.

Malheureusement Esseen ne donne pas la valeur de cette constante D_{k-1} , ce qui rend cette majoration inutilisable lorsque la dimension du noyau varie avec la taille de l'échantillon (k_n avec $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$) ou encore si cette dimension est infinie.

Par contre la majoration (1') permet cette généralisation voir Bosq [5], [6], [7].

Dans la "littérature" enfin, nous n'avons guère trouvé d'article relatif à la vitesse de convergence dans le cas des processus stationnaires multidimensionnels. Cependant nous avons cherché à exploiter l'article d'Esseen dans le cadre de nos hypothèses particulières.

L'hypothèse (H) suivante est valable pour toute la suite de ce travail.

$$H \ : \begin{cases} \sup\limits_{x\in E} \ \sup\limits_{j=2\ldots k} |e_j(x)| = M < +\infty \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty \end{cases}$$

I - GROUPEMENT SOUS FORME DE PAQUETS DE S'_n .

$$S'_n = \begin{pmatrix} S'^{2}_n \\ \vdots \\ S'^{j}_n \\ \vdots \\ S'^{k}_n \end{pmatrix}$$

Posons :

$$W_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} e_2(X_i) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} e_k(X_i) \end{pmatrix}.$$

$$E||W_i||^2 = s^2_{n,k} .$$

$$A^2_{n,k} = E[||S'_n||^2] = E[||S_n(.)||^2] .$$

Il est facile de voir que :

$$E||W_i||^2 = \sum_{j=2}^{k} E[\frac{1}{\sqrt{n}} e_j(X_i)]^2 = \frac{k-1}{n} = s^2_{n,k} .$$

De même

$$A^2_{n,k} = E[||S'_n||^2] = \sum_{j=2}^{k} E[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)]^2$$

$$= \sum_{j=2}^{k} [1 + \frac{2}{n} \sum_{i<i'} E[e_j(X_i)\ e_j(X_i)]]$$

Par conséquent

$$A^2_{n,k} \leq (k-1)\ (1 + 8\ M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)) = c_k^2 .$$

Lemme 4.- On suppose réalisée l'hypothèse (H).

Soit h le plus grand entier tel que

$$E\Big[\Big|\Big| \sum_{i=1}^{h} W_i \Big|\Big|^2\Big] \leq A_{n,k}\ s_{n,k} .$$

Soit m la partie entière de $\left[\frac{A_{n,k}}{s_{n,k}}\right]^{1/2}$.

On pose :

$Y_1 = W_1 + \ldots + W_h$ $\qquad$ $Z_2 = W_{h+1} + \ldots + W_{h+m}$

$Y_2 = W_{h+m+1} + \ldots + W_{2h+m}$ $\qquad$ $Z_2 = W_{2h+m+1} + \ldots + W_{2h+2m}$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$Y_i = W_{(i-1)(h+m)+1} + \ldots + W_{ih+(i-1)m}$ $\qquad$ $Z_i = W_{ih+(i-1)m+1} + \ldots + W_{i(h+m)}$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$Y_\ell = $ - - - - - - - - - - - - - - - - - - $\qquad$ $Z_\ell = $ - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$Z_{\ell+1} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \ell m + \ell h = n \\ \\ W_{\ell(m+h)+1} + \ldots + W_n \qquad \text{sinon} \end{cases} .$$

ℓ étant déterminé par l'impossibilité de construire $Y_{\ell+1}$ et $Z_{\ell+1}$ à la fois selon le schéma :

$$Y_1 , Z_1 ,\ldots, Y_i , Z_i \ldots \qquad \text{tel que}$$

$$\ell(m+h) \leqslant n < (\ell+1)(m+h)$$

$$S'_n = Y_n + Z_n \quad \text{où} \quad Y_n = \sum_{i=1}^{\ell} Y_i \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{\ell+1} Z_i \ .$$

1) $\forall i = 1\ldots\ell \qquad E||Y_i||^2 = A_{n,k}\, s_{n,k}\,(1 + o(1))$

2) $\forall i = 1\ldots\ell \qquad E[||Z_i||^2] \leqslant D\, A_{n,k}^{3/2}$

où $\quad D = c_k^{1/2}\,(1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))$.

3) $\qquad E||Z_{\ell+1}||^2 \leqslant A_{n,k}\, s_{n,k}\,(1 + o(1))$

4) $\qquad \ell = \dfrac{A_{n,k}}{s_{n,k}}\,(1 + o(1))$.

<u>Démonstration</u> : On remarque d'abord que, par stationnarité, tous les Y_i ont même loi de même que les Z_i pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Il suffit donc pour 1) et 2) d'étudier Y_1 et Z_1 .

1) Par hypothèse on a :

$$E||Y_1||^2 \leqslant A_{n,k}\, s_{n,k}$$

$$E||Y_1 + W_{h+1}||^2 > A_{n,k}\, s_{n,k}$$

d'où

$$E||Y_1||^2 \leqslant A_{n,k}\, s_{n,k} < E||Y_1||^2 + E||W_{h+1}||^2 + 2E <Y_1, W_{h+1}>$$

$$E||Y_1||^2 \leqslant A_{n,k}\, s_{n,k} < E||Y_1||^2 + s_{n,k}^2 + 2\sqrt{E||Y_1||^2} \times \sqrt{E||W_{h+1}||^2}$$

donc :

$$0 \leq A_{n,k}\, s_{n,k} - E||Y_1||^2 < s_{n,k}\,(s_{n,k} + 2(A_{n,k}\, s_{n,k})^{1/2})$$

on tire alors :

$$E||Y_1||^2 = A_{n,k}\, s_{n,k}\,(1 + o(1))\ .$$

2) $\forall i = 1 \ldots \ell \quad E||Z_i||^2 = E||Z_1||^2$

$$E||Z_1||^2 = E\Big[\sum_{j=2}^{k}\Big[\sum_{i=1}^{m} W_i^j\Big]^2\Big] = \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{k} E\Big[\sum_{i=1}^{m} e_j(X_i)\Big|^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{k}\Big[m + 2\sum_{i<i'} E\big[e_j(X_i)\ e_{j'}(X_{\nu+1})\big]\Big]$$

donc

$$E||Z_1||^2 \leq \frac{m}{n}\,(k-1)\,\Big(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)\Big)$$

$$\leq \left[\frac{A_{n,k}}{s_{n,k}}\right]^{1/2} s_{n,k}^2\,\Big(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)\Big)$$

$$\leq A_{n,k}^{1/2}\, s_n^{3/2}\,\Big(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)\Big)$$

$$E||Z_1||^2 \leq c_k^{1/2}\, s_n^{3/2}\,\Big(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)\Big) \quad D = c_k^{1/2}\,\Big(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)\Big)\ .$$

Pour les points 3) et 4) voir [1] p. 159-160 ou [24] p. 35-38 , il suffit de remplacer les produits par des normes.

Déterminons maintenant h, m et ℓ.

m est la partie entière de $\left[\dfrac{A_{n,k}}{s_{n,k}}\right]^{1/2}$

$$A_{n,k}^2 = E\big[||S'_n|\big]^2 = \sum_{j=2}^{k} E\big[S'^{\,j}_n\big]^2\ .$$

Soit $L = \inf_{j=2\ldots k} E[S'^{j}_{n}]^2$ ($L < +\infty$ car $\forall j = 2\ldots k$ $E[S'^{j}_{n}]^2 < +\infty$)

donc

$$m \geq \left[\frac{[L(k-1)]^{1/2}}{(\frac{k-1}{n})^{1/2}}\right]^{1/2} = L^{1/4}\ n^{1/4}$$

d'autre part

$$\forall j = 2\ldots k \quad E[S'^{j}_{n}]^2 \leq 1 + 8\ M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty$$

donc

$$m \leq (1 + 8\ M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^{1/4}\ n^{1/4}\ .$$

Par conséquent

$$L^{1/4}\ n^{1/4} \leq m \leq (1 + 8\ M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^{1/4}\ n^{1/4}$$

donc $$m = O(n^{1/4})\ ,$$

de même on montre que

$$L^{1/2}\ n^{1/2} \leq \ell \leq 2(1 + 8\ M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^{1/2}\ n^{1/2}$$

d'où $$\ell = O(n^{1/2})\ .$$

Pour la détermination de h on écrit que :

$$E\|\sum_{i=1}^{h} W_i\|^2 \leq A_{n,k}\ s_{n,k}$$

et on montre que

$$h \leq [1 + 8\ M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)]^{-1/2}\ n^{1/2}$$

et comme $\ell(m+h) \leq n < (\ell+1)\ (m+h)$

alors $$h = O(n^{1/2}) .$$

Nous avons donc

$$m = O(n^{1/4}) \ , \quad h = O(n^{1/2}) \ , \quad \ell = O(n^{1/2}) .$$

Lemme 5.- Avec les mêmes notations et hypothèses qu'au lemme 4

$$E||Z_n||^2 \leq K\, s_{n,k}^{1/2} \quad \text{où} \quad K = 6\, c_k^{3/2}\, (1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)) .$$

Démonstration :

$$E||Z_n||^2 = \sum_{j=2}^{k} E[Z_n^j]^2 = \sum_{j=2}^{k} E[\sum_{i=1}^{\ell+1} Z_i^j]^2$$

$$E||Z_n||^2 = \sum_{j=2}^{k} [\sum_{i=1}^{\ell} E[Z_i^j]^2 + E[Z_{\ell+1}^j]^2 + 2[\sum_{1\leq i'\leq \ell}\ \sum_{i=i'+1} E[Z_i^j\ Z_{i'}^j]]]$$

$$= \ell\, E||Z_1||^2 + E||Z_{\ +1}||^2 + 2 \sum_{j=2}^{k} [\sum_{1\leq i\leq \ell}$$

$$[\sum_{\substack{\nu\in\{\rho h+(\rho-1)m+1,\dots,\rho h+m\} \\ \rho=i',\dots,\ell+1}} E[W_\nu^j\ Z_{i'}^j]]]$$

$$|E[W_\nu^j\ Z_{i'}^j]| \leq 4\ |W_\nu^j|\ |Z_{i'}^j|\ \alpha(m_\nu) \quad \text{où} \quad m_\nu = \nu - (i'h + (i'-1)m)$$

d'après ce qui précède

$$|E[W_\nu^j\ Z_{i'}^j]| \leq 4\ \frac{M}{\sqrt{n}}\ \frac{mM}{\sqrt{n}}\ \alpha(m_\nu)$$

d'où en remplaçant les différentes quantités par leurs valeurs

$$E||Z_n||^2 \leqslant \frac{c_k}{s_{n,k}} D(1 + o(1))\, s_{n,k}^{3/2} + c_k\, s_{n,k}(1 + o(1)) + \frac{8\,M^2}{n} \left(\frac{c_k}{s_{n,k}}\right)^{1/2} \times$$

$$\frac{c_k}{s_{n,k}} (1 + o(1)) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)$$

$$E||Z_n||^2 \leqslant s_{n,k}^{3/2} \frac{c_k^{3/2}}{s_{n,k}} \quad (1 + o(1))\,(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)) + c_k\, s_{n,k}\,(1 + o(1)) +$$

$$8\,M^2\, c_k^{3/2}\, s_{n,k}^{1/2}\,(1 + o(1)) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) \quad ,$$

donc :

$$E||Z_n||^2 \leqslant 6\, c_k^{3/2}\,(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))\, s_{n,k}^{1/2} \qquad K = 6\, c_k^{3/2}\,(1 + 8\,M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)) \;.$$

d'où le résultat annoncé.

Remarquons que $E||Y_n||^2 = A_{n,k}(1 + o(1))$ et $E||Z_n||^2 = o(1)$.

II - EXPRESSION DE $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leqslant a^2] - P[Q \leqslant a^2]|$.

Q est une v.a. dont la loi a comme fonction caractéristique

$$[\text{dét}(I_{k-1} - 2it\ \Sigma)]^{-1/2} \;.$$

La matrice Σ a été définie au chapitre I p. 9

$$||S_n(.)||^2_{L^2(\mu)} = ||S'_n||^2_{\mathbb{R}^{k-1}}$$

$S'_n = (Y_n + Z_n)$ avec $Y_n = (Y_n^2\ ,\ldots,\ Y_n^k)$, $Z_n = (Z_n^2\ ,\ldots,\ Z_n^k)$

donc

$$P[||S_n(.)||^2 \leqslant a^2] = P[||S'_n||^2 \leqslant a^2] = P[||Y_n + Z_n||^2 \leqslant a^2]$$

$$P[||Y_n + Z_n||^2 \leq a^2] = P[\{(||Y_n + Z_n||^2 \leq a^2) \cap (||Z_n|| > \varepsilon)\} \cup \{(||Y_n + Z_n||^2 \leq a^2) \cap (||Z_n|| \leq \varepsilon)\}]$$

où ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut et qu'on choisira par la suite et a un nombre positif.

On obtient alors

$$P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] \leq P[||Z_n|| > \varepsilon] + P[\{(||Y_n + Z_n|| \leq a) \cap (||Z_n|| \leq \varepsilon)\}].$$

Nous savons d'autre part que

$$||Y_n|| \leq ||Y_n + Z_n|| + ||Z_n||$$

d'où $\quad P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] \leq P[||Z_n|| > \varepsilon] + P[||Y_n||^2 \leq (a + \varepsilon)^2]$

On obtient en définitive

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[Q \leq a^2]| \leq P[||Z_n|| > \varepsilon] + \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||Y_n||^2 \leq (a + \varepsilon)^2] - P[Q \leq (a + \varepsilon)^2]| + \sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left|P[Q \leq (a + \varepsilon)^2] - P[Q \leq a^2]\right|$$

Posons :

$$A = P[||Z_n|| > \varepsilon]$$

$$B = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[Q \leq (a + \varepsilon)^2] - P[Q \leq a^2]|$$

$$C = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||Y_n||^2 \leq (a + \varepsilon)^2] - P[Q \leq (a + \varepsilon)^2]| .$$

La recherche de la vitesse de convergence consistera à calculer les 3 quantités A, B et C.

B - VITESSE DE CONVERGENCE.-

Donnons d'abord quelques lemmes préliminaires.

I - PRELIMINAIRES.

Un lemme dû à Esseen dans son esprit.

Lemme 6.- Soit a et ε deux nombres constants donnés tel que $0 < \varepsilon < a$.

Il existe une fonction $H(x_1,\dots,x_{k-1},a,\varepsilon) = H(\rho,a,\varepsilon)$ dépendant uniquement de $\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2}$ telles que :

1)
$$H(\rho,a,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leqslant \rho \leqslant a \\ 0 & \text{pour } \rho \geqslant a+\varepsilon \end{cases}$$

et $|H(\rho,a,\varepsilon)| \leqslant 1$ pour tout ρ.

De plus la transformée de Fourier de H est $h(t_1,t_2,\dots,t_{k-1},a,\varepsilon) = h(r,a,\varepsilon)$ dépendant uniquement de $r = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_{k-1}^2}$ et

2) $$|h(r,a,\varepsilon)| \leqslant C_1(k) \frac{(a+\varepsilon/2)^{(k-2)/2}}{\varepsilon^{k/2}\, r^k}$$

$$C_1(k) = (2\pi)^{(k-3)/2}\, 2^{k+3/2}\, \Gamma(\frac{k+1}{2}) \quad .$$

3) $$|h(r,a,\varepsilon)| \leqslant C_2(k) \frac{(a+\varepsilon/2)^{(k-2)/2}}{r^{k/2}}$$

$$C_2(k) = \sqrt{2}\ (2\pi)^{(k-1)/2} \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} .$$

Démonstration :

1) Soit la fonction $G_a(x_1,\ldots,x_{k-1})$ définie dans $\mathbb{R}^{k-1}$ $(k \geq 2)$ de la façon suivante :

$$G_a(x_1,\ldots,x_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2} \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (1)$$

où a est un nombre positif.

La transformée de Fourier de G_a s'écrira :

$$g_a(t_1,\ldots,t_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} e^{i<t,x>} G_a(x_1,\ldots,x_{k-1})\, dx_1 \ldots dx_{k-1}$$

$$g_a(t_1,\ldots,t_{k-1}) = \left[\frac{2\pi a}{r}\right]^{(k-1)/2} J_{\frac{k-1}{2}}(ar) \qquad r = \sqrt{t_1^2 + \ldots + t_{k-1}^2}\ .$$

$J_{\frac{k-1}{2}}(z)$ désignant la fonction de Bessel d'ordre $\frac{k-1}{2}$ au point z.

Considérons la fonction

$$M(x_1,\ldots,x_{k-1}) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\pi^{(k-1)/2}\varepsilon^{k-1}} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} G_a(x_1 - \zeta_1, \ldots, x_{k-1} - \zeta_{k-1})$$

$$G_\varepsilon(\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1})\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_{k-1} \quad \text{où} \quad 0 < \varepsilon < a$$

de (1) on obtient :

$$M(x_1,\ldots,x_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2} \leq a - \varepsilon \\ 0 & \text{si } \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2} \geq a + \varepsilon \end{cases} \qquad (2)$$

et $|M(x_1,\ldots,x_{k-1})| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{k-1}$.

La transformée de Fourier d'un produit de convolution étant égale au produit des transformations de Fourier correspondantes de ces fonctions, la transformée de Fourier de $M(x_1,\dots,x_{k-1})$ est égale à :

$$m(t_1,\dots,t_{k-1}) = \left[\frac{2\pi a}{r}\right]^{(k-1)/2} J_{\frac{k-1}{2}}(ar) \; 2^{(k-1)/2}\,\Gamma\!\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{J_{\frac{k-1}{2}}(\varepsilon r)}{(\varepsilon r)^{(k-1)/2}} \qquad (3)$$

on obtient de (2) et (3)

$$h(r,a,\varepsilon) = \left[\frac{2\pi(a+\frac{\varepsilon}{2})}{r}\right]^{(k-1)/2} 2^{(k-1)/2}\,\Gamma\!\left(\frac{k+1}{2}\right) J_{\frac{k-1}{2}}\left[(a+\frac{\varepsilon}{2})r\right] \frac{J_{\frac{k-1}{2}}(\varepsilon r/2)}{(\varepsilon r/2)^{(k-1)/2}}$$

$h(r,a,\varepsilon)$ est la transformée de Fourier de la fonction

$$H(\rho,a,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \leqslant a \\ 0 & \text{si } \rho \geqslant a+\varepsilon \end{cases}$$

et pour tout x de $\mathbb{R}^{k-1}$ $|H(\rho,a,\varepsilon)| \leqslant 1$.

2) En utilisant les inégalités classiques sur les fonctions de Bessel (voir [23] p. 373).

$$\left|\frac{J_{\frac{k-1}{2}}(z)}{z^{(k-1)/2}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(k-1)/2}\,\Gamma(k/2)} \quad \text{pour tout } z \text{ positif} \qquad (4)$$

$$\left|J_{\frac{k-1}{2}}(z)\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{z}} \quad \text{pour tout } z \text{ positif} \qquad (5)$$

En considérant (5) on obtient :

$$|h(r,a,\varepsilon)| \leqslant \left[\frac{2\pi(a+\frac{\varepsilon}{2})}{r}\right]^{(k-1)/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{r(a+\frac{\varepsilon}{2})}} \, 2^{(k-1)/2} \, \Gamma(\frac{k+1}{2}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(\varepsilon r/2)^{1/2}} \times \frac{1}{(\varepsilon r/2)^{(k-1)/2}}$$

d'où

$$|h(r,a,\varepsilon)| \leqslant (2\pi)^{(k-3)/2} \, 2^{k+3/2} \, \Gamma(\frac{k+1}{2}) \frac{(a+\varepsilon/2)^{(k-2)/2}}{\varepsilon^{k/2} \, r^{k}} .$$

3) En considérant à la fois les relations (4) et (5) on obtient :

$$|h(r,a,\varepsilon)| \leqslant \left[\frac{2\pi(a+\varepsilon/2)}{r}\right]^{(k-1)/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(a+\varepsilon/2)r^{1/2}} \, 2^{(k-1)/2} \, \Gamma(\frac{k+1}{2}) \times \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(k-1)/2} \, \Gamma(k/2)}$$

soit

$$|h(r,a,\varepsilon)| \leqslant \sqrt{2} \, (2\pi)^{(k-1)/2} \frac{\Gamma(k+1)/2}{\Gamma(k/2)} \frac{(a+\varepsilon/2)^{(k-2)/2}}{r^{k/2}} .$$

Remarquons qu'Esseen, dans la démonstration de son lemme [15] p. 102-103, ne donne pas la valeur des constantes $C_1(k)$ et $C_2(k)$.

Posons : $P_n(E) = \int_E f_n(x)\,dx$ où $f_n(x)$ désigne la fonction densité de la v.a. Y_n, ($Y_n = \sum_{i=1}^{\ell} Y_i$ et $Y_i = (Y_i^2, \ldots, Y_i^k)$) .

$P(E) = \int_E \omega(x)\,dx$ où $\omega(x)$ désigne la loi normale $N(0,\Sigma)$.

Posons enfin :

$$\Delta_n(t) = E[e^{i<t,Y_n>}] - f(t)$$

où $f(t)$ est la fonction caractéristique de la loi normale $N(0,\Sigma)$.

$\Delta_n(t)$ est la fonction caractéristique de $(f_n(x)-\omega(x))$.

Il est immédiat à partir de la formule d'inversion de Fourier que :

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} H(\rho,a,\varepsilon)\, d\left[P_n(x) - P(x)\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Delta_n(t)\, h(r,a,\varepsilon)\, dt \qquad (6)$$

où H et h sont les fonctions définies au lemme 6.

Les propriétés de la fonction H (cf. lemme 6) nous permettent d'écrire en considérant la relation (6) ci-dessus :

$$\left|P\left[||Y_n||^2 \leq (a+\varepsilon)^2\right] - P\left[Q \leq (a+\varepsilon)^2\right]\right| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n(t)\, h(r,a,\varepsilon)|\, dt$$

on a donc :

$$C = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left|P\left[||Y_n||^2 \leq (a+\varepsilon)^2\right] - P\left[Q \leq (a+\varepsilon)^2\right]\right| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n(t)\, h(r,a,\varepsilon)|\, dt$$

$$\Delta_n(t) = E\left[e^{i<t,Y_n>}\right] - f(t)$$

$$= E\left[e^{i<t,Y_n>}\right] - \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] + \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] - f(t)$$

$$|\Delta_n(t)| \leq \left|E\left[e^{i<t,Y_n>}\right] - \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right]\right| + \left|\prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] - f(t)\right|$$

Posons :

$$\Delta_n^1(t) = E\left[e^{i<t,Y_n>}\right] - \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right]$$

$$\Delta_n^2(t) = \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] - f(t) \quad .$$

La recherche de C consistera tout d'abord à majorer les quantités $\Delta_n^1(t)$ et $\Delta_n^2(t)$.

Lemme 7.-

$$|\Delta_n^1(t)| \leq 4\ell\alpha(m)$$

Démonstration : Immédiate, il suffit de remplacer e^{itY} par $e^{i<t,Y>}$ et $\varphi(n)$ par $\alpha(n)$ dans [24] p. 39.

Lemme 8.- $t \in \mathbb{R}^{k-1}$

si

$$||t|| \leq \beta_1 \, g_n^{-3}$$

où

$$\beta_1 = \inf_{||t||=1} <\Sigma t,t>$$

$$g_n^3 = \ell \, E \, ||Y_1||^3$$

alors pour n assez grand

$$|\Delta_n^2(t)| \leq g_n^3 \, ||t||^3 \, e^{-\beta_1/3 \, ||t||^2} \quad .$$

Démonstration :

$$\Delta_n^2(t) = \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] - f(t) \quad \text{où} \quad f(t) = e^{-1/2<\Sigma t,t>}$$

$$E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] = 1 + i \, E<t,Y_\nu> - \frac{1}{2} E<t,Y_\nu>^2 - \frac{i\theta}{3!} E<t,Y_\nu>^3 \qquad |\theta| < 1 \ ,$$

les Y_ν, $\nu = 1,\dots,\ell$ étant de même loi et μ-centrées alors

$$E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] = 1 - \frac{1}{2} E<t,Y_\nu>^2 - \frac{i\theta}{3!} E<t,Y_\nu>^3$$

$$\prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] = \left[E\left[e^{i<t,Y_1>}\right]\right]^{\ell}$$

$$\Delta_n^2(t) = \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] - f(t) = \left[E\left[e^{i<t,Y_1>}\right]\right]^{\ell} - e^{-1/2<\Sigma t,t>}$$

$$|\Delta_n^2(t)| \leqslant \left|e^{\ell\ \mathrm{Log}(1-(1/2)E<t,Y_1>^2+(1/3!)||t||^3E||Y_1||^3)} - e^{-(1/2)<\Sigma t,t>}\right|$$

$$\leqslant \left|e^{-(1/2)\ell E<t,Y_1>^2+(1/3!)\ell||t||^3E||Y_1||^3} - e^{-(1/2)<\Sigma t,t>}\right|$$

pour n assez grand on a :

$$\ell\ E <t,Y_1>^2 = <\Sigma t,t> (1 + o(1))$$

donc

$$|\Delta_n^2(t)| \leqslant e^{-(1/2)<\Sigma t,t>} \times$$

$$\left|e^{-(1/2)<\Sigma t,t>(1+o(1))+(1/3!)\ell E||Y_1||^3||t||^3+(1/2)<\Sigma t,t>} - 1\right|$$

$$\leqslant e^{-(1/2)<\Sigma t,t>} \left|e^{(1/3!)\ell E||Y_1||^3||t||^3} - 1\right|$$

Utilisons maintenant l'inégalité classique suivante

$$\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad |e^{\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|\ e^{|\alpha|}$$

$$\left|e^{(1/3!)\ell E||Y_1||^3||t||^3} - 1\right| \leqslant \frac{1}{3!}\ \ell E||Y_1||^3||t||^3\ e^{(1/3!)\ell E||Y_1||^3||t||^3}$$

Par conséquent :

$$|\Delta_n^2(t)| \leqslant \ell\ E||Y_1||^3\ ||t||^3\ e^{(1/6)\ell E||Y_1||^3||t||^3-(1/2)<\Sigma t,t>} .$$

Supposons maintenant que la matrice Σ est inversible.

Posons :

$$\beta_1 = \inf_{||t||=1} <\Sigma t,t>$$

$$g_n^3 = \ell \, E \, ||Y_1||^3 .$$

On sait que $\beta_1 \, ||t||^2 \leq <\Sigma t,t>$.

De plus $\beta_1 > 0$ (cf. proposition 7 p. 79 de [14]).

Il vient donc :

$$|\Delta_n^2(t)| \leq g_n^3 \, ||t||^3 \left[e^{(1/2)||t||^2((g_n^3/3)||t||-\beta_1)}\right]$$

et si $||t|| \leq \beta_1 \, g_n^{-3}$,

alors $$\frac{g_n^3}{3} ||t|| - \beta_1 \leq \frac{\beta_1}{3} - \beta_1 = - \frac{2 \, \beta_1}{3}$$

donc $$|\Delta_n^2(t)| \leq g_n^3 \, ||t||^3 \, e^{-(\beta_1/3)||t||^2} .$$

Lemme 9.- Pour tout $t \in \mathbb{R}^{k-1}$ tel que :

$||t|| \geq \beta_1 \, g_n^{-3}$ où β_1 et g_n^3 ont été définis au lemme 8 ,

alors pour n assez grand :

$$\left| \prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] \right| \leq \exp\left[- \frac{\beta_1}{8} \, ||t||^2\right] .$$

Démonstration : On écrit encore

$$E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] = 1 + i \, E<t,Y_\nu> - \frac{1}{2} E<t,Y_\nu>^2 - \frac{i\theta}{3!} E<t,Y_\nu>^3 \quad |\theta| < 1$$
$$= 1 - \frac{1}{2} E<t,Y_\nu> - \frac{i\theta}{3!} E<t,Y_\nu>^3 \quad |\theta| < 1 ,$$

donc :

$$E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right] \leq 1 - \frac{1}{2} E<t,Y_\nu>^2 + \frac{1}{6} E||Y_\nu||^3 \, ||t||^3$$

et on utilise l'inégalité classique

$$1 + x \leq e^x$$

c'est-à-dire ici :

$$1 - \frac{1}{2} E<t,Y_\nu>^2 + \frac{1}{6} E||Y_\nu||^3 \, ||t||^3 \leq e^{-(1/2)E<t,Y_\nu>^2+(1/6)E||Y_1||^3||t||^3} .$$

Le processus $(Y_\nu)_{\nu=1\ldots\ell}$ est stationnaire donc

$$\left|\prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right]\right| \leq e^{\ell(-(1/2)E<t,Y_1>^2+(1/6)E||Y_1||^3||t||^3}$$

$$\leq e^{-(1/2)\ell E<t,Y_1>^2+(1/6)\ell E||Y_1||^3 \, ||t||^3}$$

et pour n assez grand

$$\left|\prod_{\nu=1}^{\ell} E\left[e^{i<t,Y_\nu>}\right]\right| \leq e^{-(1/2)<\Sigma t,t>(1+o(1))+(1/6)g_n^3||t||^3}$$

$$\leq e^{-(\beta_1/8)||t||^2} .$$

Lemme 10.-

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{k-1}$

$$f(t) = e^{-(1/2)<\Sigma t,t>} \leq e^{-(\beta_1/2)||t||^2} .$$

Démonstration : Immédiate car $\beta_1 \, ||t||^2 \leq <\Sigma t,t>$.

Lemme 11.- Sous l'hypothèse générale (H)

1) $\forall i = 1\ldots\ell \quad E||Y_i||^3 \leqslant K_1 \times (\frac{k^2}{n})^{3/4}$

où K_1 est une constante indépendante de n et de k.

2) $g_n^3 \leqslant K_2 (\frac{k^6}{n})^{1/4}$ où K_2 est une constante indépendante de n et de k.

3) Il existe une constante K_3 indépendante de n et de k telle que :

$$g_n^3 \geqslant K_3\, n^{-1/4} .$$

Démonstration :

1) $\forall i = 1\ldots\ell \quad E||Y_i||^3 = E||Y_1||^3$ (les Y_i , $i = 1\ldots\ell$ sont de même loi).

$$E||Y_1||^3 \leqslant (k-1)^{1/2}\, E\Big[\sum_{j=2}^{k} |Y_1^j|^3\Big] \leqslant k^{1/2}\, E\Big[\sum_{j=2}^{k} |Y_1^j|^3\Big].$$

En utilisant les propriétés des normes dans L_p (voir [26] p. 53) on a :

$$E||Y_1||^3 \leqslant k^{1/2} \sum_{j=2}^{k} \Big[E[Y_1^j]^4\Big]^{3/4} \leqslant k^{1/2} \times k^{1/4} \Big[\sum_{j=2}^{k} E[Y_1^j]^4\Big]^{3/4}$$

$$E[Y_1^j]^4 = E\Big[\sum_{i=1}^{h} W_i^j\Big]^4 = \frac{1}{n^2} E\Big[\sum_{i=1}^{h} e_j(X_i)\Big]^4 \leqslant 3072\, M^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}\, \frac{h^2}{n^2} .$$

D'autre part nous savons par définition de la longueur h

$$h \leqslant \frac{\sqrt{n}}{(1+8M^2 \Sigma\alpha(i))^{1/2}}$$

On obtient alors :

$$\forall j = 2\ldots k \quad E[Y_1^j]^4 \leq 3072\, M^4 \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}}{1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)} \times \frac{1}{n} .$$

En conséquence :

$$\forall i = 1\ldots\ell \quad E\|Y_i\|^3 \leq \left[\frac{3072\, M^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}}{1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)}\right]^{3/4} k^{3/4} \left(\frac{k}{n}\right)^{3/4}$$

En posant $\quad K_1 = \left[\dfrac{3072\, M^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}}{1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)}\right]^{3/4}$

$$\forall i = 1\ldots\ell \quad E\|Y_i\|^3 = E\|Y_1\|^3 \leq K_1 \left(\frac{k^2}{n}\right)^{3/4} .$$

2) $g_n^3 = \ell\, E\|Y_1\|^3$

$$g_n^3 \leq \frac{c_k}{s_{n,k}} (1 + o(1))\, E\|Y_1\|^3$$

$$c_k = \left[(k-1)\,(1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))\right]^{1/2}$$

$$s_{n,k} = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{1/2} ,$$

d'où

$$g_n^3 \leq 2\,(1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^{1/2}\, n^{1/2}\, K_1 \left(\frac{k^2}{n}\right)^{3/4} .$$

$$g_n^3 \leq K_2 \left(\frac{k^6}{n}\right)^{1/4} \quad \text{avec} \quad K_2 = 2\, K_1\, (1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^{1/2}$$

3) $g_n^3 \geq \ell\left[E\|Y_1\|^2\right]^{3/2}$

$$\geq \frac{A_{n,k}}{s_{n,k}} (1 + o(1))\, \left[A_{n,k}\, s_{n,k} (1 + o(1))\right]^{3/2}$$

$$\geq \frac{A_{n,k}}{s_{n,k}} (A_{n,k}\, s_{n,k})^{3/2} = A_{n,k}^{5/2}\, s_{n,k}^{1/2}$$

$$A^2_{n,k} = E[||S_n(.)||^2] = E[||S'_n||^2] = \sum_{j=2}^{k} E[S'^j_n]^2$$

Posons $$\inf_{j=2\ldots k} E[S'^j_n]^2 = L .$$

$L < +\infty$ $\left(\forall j = 2\ldots k \quad E[S'^j_n]^2 \leqslant 1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < +\infty\right)$ d'où

$$A^2_{n,k} \geqslant (k-1)\, L \geqslant L \quad \text{par conséquent} .$$

$$g^3_n \geqslant L^{5/4} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} \qquad K_3 = L^{5/4}$$

II - CALCUL DE A, B ET C.

1 - Calcul de A.

L'inégalité de Bienaymé Tchebychev nous permet d'écrire :

$$P[||Z_n|| > \varepsilon] \leqslant \frac{E||Z_n||^2}{\varepsilon^2}$$

Par ailleurs

$$E||Z_n||^2 \leqslant 6\, c_k^{3/2}\, s_{n,k}^{1/2}\, (1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)) \qquad \text{(lemme 5)} .$$

donc

$$E||Z_n||^2 \leqslant 6\, k\, (1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^{7/4} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4}$$

d'où

$$A \leqslant 6\, (1 + 8\, M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^{7/4} \left(\frac{k^4}{n}\right)^{1/4} \times \frac{1}{\varepsilon^2} \qquad (7)$$

Le choix de ε nous permettra donc de trouver une majoration de A. Nous ferons ce choix à la fin.

2 - *Calcul de* B.

$$B = \sup_{a \in \mathbb{R}^+} \left| P\left[Q \leqslant (a+\varepsilon)^2\right] - P\left[Q \leqslant a^2\right] \right|$$

$$B \leqslant \int_{a^2}^{(a+\varepsilon)^2} \sup |f_k(x)| \, dx$$

$$\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| \left[\varepsilon^2 + 2\, a\varepsilon\right]$$

$f_k(x)$ désignant la fonction densité de la loi dont la fonction caractéristique est égale à $g_k(t) = \left[\text{dét}(I_{k-1} - 2it\,\Sigma)\right]^{-1/2}$.

Supposons maintenant que Σ est strictement définie positive, alors il existe une matrise S symétrique et orthogonale telle que :

$S^{-1}\, DS = \Sigma$ où D est une matrice diagonale formée des valeurs propres de Σ. Notons par d_j , $j \geqslant 2$ ces valeurs propres ($\forall j \geqslant 2$, $d_j > 0$ puisque Σ est strictement définie positive).

Il est alors immédiat que :

$$g_k(t) = \left[\text{dét}(I_{k-1} - 2it\,\Sigma)\right]^{-1/2} = \left[\text{dét}(I_{k-1} - 2it\,D)\right]^{-1/2}$$

$$= \left[\prod_{j=2}^{k} (1 - 2it\, d_j)\right]^{-1/2} .$$

Pour $k = 2$ ou 3 la densité de la v.a. $Q = \sum_{j=2}^{k} Z_j^2$ (dont la fonction caractéristique est égale à $\left[\text{dét}(I_{k-1} - 2it\Sigma)\right]^{-1/2}$) est majorée par $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Pour $k \geqslant 4$, $g_k(t)$ est intégrable , sa densité $f_k(x)$ est donnée par :

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, g_k(t)\, dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |g_k(t)|\, dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=2}^{k} \left[(1 - 2it\, d_j)\right]^{-1/2} dt$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(t)|\, dt \leq 2 + \int_{|t|\geq 1} \prod_{j=2}^{k} \left[(1 - 2it\, d_j)\ (1 + 2it\, d_j)\right]^{-1/4} dt$$

$$\leq 2 + \int_{|t|\geq 1} \prod_{j=2}^{k} (1 + 4\, t^2\, d_j^2)^{-1/4}\, dt$$

$$\leq 2 + \int_{|t|\geq 1} \prod_{j=2}^{4} (1 + 4\, t^2\, d_j^2)^{-1/4}\, dt$$

$$\leq 2 + \int_{|t|\geq 1} \prod_{j=2}^{4} (4\, d_j^2)^{-1/4}\, (t^6)^{-1/4}\, dt$$

$$\leq 2 + (2^6 \prod_{j=2}^{4} d_j^2)^{-2/4} \int_{|t|\geq 1} (t^2)^{-3/4}\, dt$$

$$\leq 2 + 2\ (2^6 \prod_{j=2}^{4} d_j^2)^{-1/4} \int_{1}^{\infty} t^{-3/2}\, dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(t)| \leq 2 + \frac{4}{(2^6 \prod_{j=2}^{4} d_j^2)^{1/4}} = 2 \left[1 + \frac{1}{2^{1/2} (\prod_{j=2}^{4} d_j^2)^{1/4}}\right]$$

Posons $\quad d = \inf(d_2,\ d_3,\ d_4) \quad$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(t)| \leq 2\ (1 + \frac{1}{(2d^3)^{1/2}})$$

d'où $\quad \sup |f_k(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{(2d^3)^{1/2}}$.

Par conséquent :

$$B \leq (\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{(2d^3)^{1/2}})\quad (\varepsilon^2 + 2\, a\varepsilon) \tag{8}$$

Ici aussi il suffit de se donner ε pour avoir une majoration de B.

3 - *Calcul de* C.

$$C \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$|\Delta_n(t)| \leqslant |\Delta_n^1(t)| + |\Delta_n^2(t)|$ donc

$$C \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

Posons

$$C_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r\leqslant 1} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r\geqslant 1} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

où $r^2 = t_1^2 + \ldots + t_{k-1}^2$.

Posons

$$C_1' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r\leqslant 1} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C_1'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r\geqslant 1} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt\ .$$

Calculons maintenant C_1' et C_1'' .

$$C_1' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r\leqslant 1} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} 4\ell\alpha(m) \int_{r\leqslant 1} |h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

et cf. (lemme 6/3 p. 49).

$$C'_1 \leqslant 4\ell\alpha(m) \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{(k-1)/2} \sqrt{2}\ (2\pi)^{(k-1)/2} \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2} \times$$

$$\frac{1}{\Gamma((k-1)/2)} \int_0^1 r^{(k-2)/2}\, dr$$

$$\leqslant 8\sqrt{2} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{k-1} \frac{\Gamma((k+1)/2}{\Gamma(k/2)\ \Gamma((k-1)/2} \frac{1}{k} (a + \varepsilon/2)^{(k-2)/2}\ \ell\alpha(m) .$$

La formule de Stirling nous permet de dire qu'il existe deux constantes b_1 et b_2 tels que :

$$b_1\ z^{z-1/2}\ e^{-z} \sqrt{2\pi} \leqslant \Gamma(z) \leqslant b_2\ z^{z-1/2}\ e^{-z} \sqrt{2\pi} \quad , \quad z > 0$$

on obtient donc

$$C'_1 \leqslant 8\sqrt{2} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{(k-1)/2} \frac{b_2}{b_2^2} \frac{(\frac{k+1}{2})^{(k+1)/2-1/2}\ e^{-(k+1)/2}\ (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2}}{(\frac{k}{2})^{(k/2)-1/2}\ e^{-k/2}\ \ 2\ (\frac{k-1}{2})^{(k-1)/2-1/2}\ e^{-(k-1)/2}} \frac{\ell\alpha(m)}{k}$$

Soit après simplification

$$C'_1 \leqslant \frac{2\ b_2}{e\ b_1^2} \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{k/2} k^{1/2}\ (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2}\ \ell\alpha(m) \qquad (9')$$

donc

$$C'_1 \leqslant \frac{b_2}{b_1^2} (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2}\ \ell\alpha(m) \qquad (9)$$

$$C''_1 = (\frac{1}{2\pi})^{k-1} \int_{r \geqslant 1} |\Delta_n^1(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C''_1 \leqslant 4\ (\frac{1}{2\pi})^{k-1}\ \ell\alpha(m) \int_{r \geqslant 1} |h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C_1'' \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} 4\ell\alpha(m)\ (2\pi)^{(k-1)/2}\ 2^{k+3/2}\ \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{(a+\frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2}}{\varepsilon^{k/2}} \frac{1}{\Gamma((k-1)/2)}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{r^{k-2}}{r^k}\, dr$$

$$C_1'' \leq \sqrt{\frac{2}{\pi e^2}}\ \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2} k\ell\alpha(m)\ (a+\frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2} \frac{1}{\varepsilon^{k/2}} \qquad (10')$$

d'où

$$C_1'' \leq \frac{b_2}{b_1}\ (a+\frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2}\ \frac{\ell\alpha(m)}{\varepsilon^{k/2}} \qquad (10)$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r \leq \beta_1 g_n^{-3}} |\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r \geq \beta_1 g_n^{-3}}$$

$$|\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$C_2 = C_2' + C_2''$ avec

$$C_2' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r \leq \beta_1 g_n^{-3}} |\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C_2'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} \int_{r \geq \beta_1 g_n^{-3}} |\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt \quad .$$

En appliquant successivement les lemmes 8 et 6, on a :

$$C_2' \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} g_n^3 \sqrt{2}\ (2\pi)^{(k-1)/2} \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)\ \Gamma((k-1)/2)} (a+\frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2}$$

$$\int_0^{+\infty} r^{(k+2)/2}\ e^{-(\beta_1/3)r^2}\ dr \quad .$$

On obtient alors après calcul (intégration et utilisation de la formule de Stirling).

$$C_2' \leqslant \frac{b_2}{b_1^2} \frac{1}{8e\pi} \left[\frac{\sqrt{3}}{2\pi k \sqrt{\beta_1}}\right]^{k/2} k^{3/2} (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2} g_n^3 \qquad (11')$$

Soit

$$C_2' \leqslant \frac{b_2}{b_1^2} g_n^3 (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2} \qquad (11)$$

$$C_2'' = (\frac{1}{2\pi})^{k-1} \int_{r \geqslant \beta_1 g_n^{-3}} |\Delta_n^2(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$|\Delta_n^2(t)| = |\prod_{\nu=1}^{\ell} E[e^{i<t,Y_\nu>}] - f(t)|$$

$$C_2'' \leqslant C_{21}'' + C_{22}''$$

$$C_{21}'' = (\frac{1}{2\pi})^{k-1} \int_{r \geqslant \beta_1 g_n^{-3}} |\prod_{\nu=1}^{\ell} E[e^{i<t,Y_\nu>}]\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt$$

$$C_{22}'' = (\frac{1}{2\pi})^{k-1} \int_{r \geqslant \beta_1 g_n^{-3}} |h(r,a,\varepsilon)\ f(t)|\ dt \quad .$$

En utilisant les lemmes 6 et 9 et en appliquant la formule de Stirling on obtient

$$C_{21}'' \leqslant \frac{b_1}{b_1^2} \frac{1}{8e\pi} \left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi k \sqrt{\beta_1}}\right]^{k/2} e^{-(\beta_1/8) g_n^{-3/2}} (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2} \qquad (12)$$

$$C_{22}'' = (\frac{1}{2\pi})^{k-1} \int_{r \geqslant \beta_1 g_n^{-3}} |f(t)\ h(r,a,\varepsilon)|\ dt \quad .$$

De même en utilisant les lemmes 6 et 10 on obtient :

$$C_{22}'' \leqslant \frac{b_2}{b_1^2} \frac{1}{8e\pi} \left[\frac{2}{2\pi k \sqrt{\beta_1}}\right]^{k/2} e^{-(\beta_1/2) g_n^{-3/2}} (a + \frac{\varepsilon}{2})^{(k-2)/2} \qquad (13)$$

Par ailleurs nous savons que (lemme 6)

$$0 < \varepsilon < a$$

d'où on obtient successivement, comme k est constant

$$A = 0\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} \frac{1}{\varepsilon^2}\right] \tag{14}$$

$$B = 0\left[a\ \varepsilon\right] \tag{15}$$

$$C_1' = 0\left[\ell\alpha(m)\ a^{(k-2)/2}\right] \tag{16}$$

$$C_1'' = 0\left[\ell\alpha(m)\ \frac{a^{(k-2)/2}}{\varepsilon^{k/2}}\right] \tag{17}$$

$$C_2' = 0\left[g_n^3\ a^{(k-2)/2}\right] \tag{18}$$

$$C_{21}'' = 0\left[e^{-\beta_1/8\ g_n^{-3/2}}\ a^{(k-2)/2}\right] \tag{19}$$

$$C_{22}'' = 0\left[e^{-\beta_1/2\ g_n^{-3/2}}\ a^{(k-2)/2}\right] \tag{20}$$

III - <u>RECAPITULATIF</u> : <u>DETERMINATION DE LA VITESSE DE CONVERGENCE</u>.

1 - Le cas général.

Choisissons maintenant ε

$$\varepsilon = \varepsilon_n = (g_n^3)^{1/2\ k} .$$

Nous savons d'autre part (lemme 11) que :

$$g_n^3 \geqslant K_3\ n^{-1/4}$$ où K_3 est une

constante indépendante de n et de k.

$g_n^3 \leqslant K_2 \left(\frac{k^6}{n}\right)^{1/4}$ K_2 étant une constante indépendante de n et de k.

On obtient alors le

Théorème 5.-

1) Si la loi des X_i est μ.

2) Si $\sup_{x\in E} \sup_{j\in\{2\ldots k\}} |e_j(x)| = M < +\infty$

3) Si $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty$

Pour n assez grand on a :

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left|P\left[\|S_n(\cdot)\|^2 \leqslant a^2\right] - P\left[Q \leqslant a^2\right]\right| = O\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} a^{(k-2)/2}\right] +$$

$$O\left[n^{9/16}\,\alpha(n^{1/4})\,a^{(k-2)/2}\right].$$

Démonstration : Il suffit de remplacer dans les relations (14), (15), (16), (17), (18), (19) et (20), ε , ℓ, m et g_n^3 par leurs valeurs respectives .

Nous obtenons ainsi une vitesse de convergence qui est fonction de a, du coefficient de mélangeance $\alpha(n)$ et de la dimension du noyau.

Remarquons que pour $a = n$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} a^{(k-2)/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Ce qui veut dire que pour $a = n$, la vitesse de convergence ne tend pas vers 0 , ce qui est sans intérêt.

Il serait plus intéressant que la vitesse de convergence tende vers 0 quand n tend vers l'infini.

Définissons pour cela un ensemble de suites $(\mathcal{a}_n)$ pour qu'il y ait convergence.

Ainsi donc soit $(\mathcal{a}_n)$ l'ensemble des suites tel que $\forall b_n \in (\mathcal{a}_n)$, avec $(\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty)$.

$$\sup_{a\leqslant b_n} \left[P\left[||S_n(.)||^2 \leqslant a^2\right] - P\left[Q \leqslant a^2\right]\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

C'est-à-dire :

1) $\left[\frac{1}{n}\right]^{1/4} (b_n)^{(k-2)/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) $n^{9/16}\ \alpha(n^{1/4})\ (b_n)^{(k-2)/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

seul le point 1) pose problème car pour le point 2) à b_n donné on peut toujours choisir $\alpha(n)$ (la suite $\alpha(n)$ étant à notre disposition) pour que $n^{9/16}\ \alpha(n^{1/4})\ (b_n)^{(k-2)/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On montre aisément que la suite $b_n = (n)^{1/4(k-1)}$ convient.

En effet :

1) $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} (b_n)^{(k-2)/2} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} n^{k-2/8(k-1)} = n^{-k/8(k-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) $n^{9/16}\ \alpha(n^{1/4})(b_n)^{(k-2)/2} = n^{9/16}\ \alpha(n^{1/4})\ n^{(k-2)/8(k-1)}$

$$= n^{(11k-13)/16(k-1)}\ \alpha(n^{1/4})$$

$n^{(11k-13)/16(k-1)}\ \alpha(n^{1/4}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (il suffit pour cela de prendre $\alpha(n) = a\ \rho^n$, $a > 0$, $\rho \in [0,1[$ et $n \geqslant 1$).

On montre de même qu'en prenant $b_n = \mathrm{Log}(2+n) \quad n \geq 1$, on a convergence de la vitesse de convergence.

L'ensemble des suites $(\mathcal{a}_n)$ que nous avons défini plus haut n'est donc pas vide.

On a le :

Corollaire 3.- Sous les hypothèses du théorème 5.

$\alpha(n)$ étant une suite à notre disposition.

Il existe un ensemble de suites $(\mathcal{a}_n)$ tel que quelle que soit la suite b_n $(\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty)$ appartenant à $(\mathcal{a}_n)$.

$$\sup_{\substack{a \leq b_n \\ b_n \in \mathcal{a}_n}} \left| P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[Q \leq a^2\right] \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

plus précisément :

$$\sup_{\substack{a \leq b_n \\ b_n \in \mathcal{a}_n}} \left| P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[Q \leq a^2\right] \right| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + 0\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} (b_n)^{(k-2)/2}\right]$$

$$+ 0\left(n^{9/16}\, \alpha(n^{1/4})\, (b_n)^{(k-2)/2}\right) .$$

Remarque : La vitesse de convergence obtenue dépend de b_n c'est-à-dire du rayon de la boule.

2 - *Exemples*.

Prenons pour toute la suite $b_n = (n)^{1/4(k-1)}$ on a :

$$\sup_{a \leq (n)^{1/4(k-1)}} \left| P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[Q \leq a^2\right] \right| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} +$$

$$0\left[\frac{1}{n^{k/2(k-1)}}\right]^{1/4} + 0\left[n^{(11k-13)/16(k-1)}\, \alpha(n^{1/4})\right] \quad (21)$$

faisons deux choix successifs du coefficient de mélangeance.

a) $\alpha(n) = a\,\rho^n$, $a > 0$, $0 \leq \rho < 1$ et $n \geq 1$.

Corollaire 4.- Sous les hypothèses du théorème 5

1) Si $b_n = n^{1/4(k-1)}$

2) Si $\alpha(n) = a\,\rho^n$, $a > 0$, $0 \leq \rho < 1$ et $n \geq 1$.

Alors :

$$\sup_{a \leq n^{1/4(k-1)}} \left[P\left[||S_n(.)||^2 \leq a^2\right] - P\left[Q \leq a^2\right]\right| = O\left[\frac{1}{n^\gamma}\right]^{1/4}$$

$$\gamma = \inf\left(\frac{k-1}{k} , \frac{k}{2(k-1)}\right)$$

b) $\alpha(n) = \frac{A}{n^\beta}$, $A > 0$ $\beta = \frac{11k-13}{4(k-1)} + \delta$, $\delta > 0$.

Corollaire 5.- Sous les hypothèses du théorème 5

1) Si $b_n = n^{1/4(k-1)}$

2) Si $\alpha(n) = \frac{A}{n^\beta}$, $A > 0$, $\beta = \frac{11k-13}{4(k-1)} + \delta$, $\delta > 0$

alors :

$$\sup_{a \leq n^{1/4(k-1)}} \left|P\left[||S_n(.)||^2 \leq a^2\right] - P\left[Q \leq a^2\right]\right| = O\left[\frac{1}{n^{\delta'}}\right]^{1/4}$$

$$\delta' = \inf\left(\frac{k-1}{k} , \frac{k}{2(k-1)} , \delta\right) .$$

Démonstration : Pour les 2 corollaires 4 et 5 il suffit de prendre dans (21) successivement

$$\alpha(n) = a\,\rho^n \quad \text{et} \quad \alpha(n) = \frac{A}{n^\beta}$$

Remarque : Dans ce chapitre en dehors de l'hypothèse générale H, nous n'avons fait d'autre hypothèse particulière (nous avons supposé Σ inversible ce qui n'est pas une hypothèse "contraignante" pour de faible dépendance). Ceci dit la vitesse de convergence obtenue dépend du coefficient de mélangeance et de la suite b_n (rappelons que nous avons fait notre majoration dans une boule de rayon a).

Si $\alpha(n)$ vérifie $n^{9/16}\,\alpha(n^{1/4})\,a^{(k-2)/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Cette vitesse de convergence n'excède pas $O\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} a^{(k-2)/2}\right]$. Si $n^{9/16}\,\alpha(n^{1/4})\,a^{(k-2)/2}$ ne tend pas vers 0 ou $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} a^{(k-2)/2}$ ne tend pas vers 0 , le théorème 5 reste vrai mais sans intérêt. Ce qui nous a d'ailleurs amené à considérer l'ensemble des suites (a_n) assurant la convergence de la vitesse de convergence.

CHAPITRE IV

ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DANS LES CAS :

- D'UN NOYAU DE DIMENSION FINIE QUI VARIE AVEC LA TAILLE DE L'ECHANTILLON.
- D'UN NOYAU FIXE DE DIMENSION INFINIE.

A - INTRODUCTION ET NOTATIONS.-

Ce chapitre est consacré à l'extension des résultats obtenus au chapitre III aux deux importants cas :

1) $K(x,t) = \sum_{j=1}^{k_n} e_j(x)\, e_j(t) \quad (x,t) \in E \times E$

$$e_1 \equiv 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty \ .$$

2) $K(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, e_j(x)\, e_j(t) \ (x,t) \in E \times E \quad e_1 \equiv 1 \ , \ \lambda_1 \equiv 1$

$$1 \geq |\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}| > 0 \quad \text{pour} \quad j \geq 1$$

on suppose en outre que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$.

On suppose que les e_j forment un système orthonormal dans $L^2(\mu)$ et que la convergence de $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, e_j \otimes e_j$ a lieu au sens de $L^2(\mu \otimes \mu)$.

- Si le noyau est de dimension finie qui varie avec la taille de l'échantillon, nous posons :

$$S_n(.) = \sqrt{n} \sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}\, e_j(.) \qquad \text{où} \qquad \hat{a}_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_j(X_i)$$

$$U_{k_n} = \sum_{j=2}^{k_n} Z_j\, e_j(.) \qquad \text{où} \qquad Z_j \sim N(0,\sigma_j^2) \quad \text{(cf. chapitre I).}$$

$||U_{k_n}||^2$ $(||U_{k_n}||^2 = \sum_{j=2}^{k_n} Z_j^2)$ est une v.a. dont la fonction caractéristique est $\left[\det(I_{k_n-1} - 2it\Sigma)\right]^{-1/2}$.

I_{k_n-1} désigne la matrice unité dans $\mathbb{R}^{k_n-1}$.

$$\Sigma = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\dots k_n \\ j'=2\dots k_n}} \qquad (\sigma_{jj'} \text{ défini au chapitre I})$$

faisons enfin l'hypothèse H' suivante :

$$H' \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sup\limits_{x\in E} \sup\limits_{j=2\dots k_n} |e_j(x)| = M_1 < +\infty \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty \end{cases}$$

- Si le noyau est de dimension infinie, nous posons :

$$S_n(.) = \sqrt{n} \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j \hat{a}_{jn} e_j(.)$$

$$U = \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j Z_j e_j(.)$$

$$||U||^2 = \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2 Z_j^2$$

soit H" l'hypothèse suivante :

$$H'' \begin{cases} \sup\limits_{x\in E} \sup\limits_{j\geq 2} |e_j(x)| = M_2 < +\infty \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty . \end{cases}$$

Dans le cas d'indépendance D. Bosq dans [5], [6] , [7] en supposant que la loi des X_i est μ (μ étant la loi introduite à notre chapitre I) a, obtenu les vitesses de convergence suivantes :

a) dans le cas où le noyau est de dimension finie qui varie avec la taille de l'échantillon

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left| P\left[||S_n(.)||^2 \leq a\right] - P\left[Q_n \leq a\right] \right| = O\left[\frac{k_n^4}{\sqrt{n}}\right]$$

Q_n étant une suite de v.a.r. qui suivent des lois du χ^2 à (k_n-1) d.d.ℓ.

b) Dans le cas où le noyau est de dimension infinie

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left| P\left[||S_n(.)||^2 \leq a\right] - P\left[||U||^2 \leq a\right] \right| = O\left[\Lambda_{k_n}^{2/3}\right] + O\left[\frac{k_n^4}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\text{où} \quad \Lambda_{k_n} = \sum_{j=k_n+1}^{\infty} \lambda_j^2 \quad \text{et} \quad U = \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j \zeta_j e_j(.)$$

les ζ_j étant des lois normales centrées réduites et indépendantes (si les v.a. X_n sont indépendantes alors $S_n(.) \xrightarrow{L} \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j e_j(.)$ voir [5] p. 13).

B - <u>CAS OU LE NOYAU EST DE DIMENSION FINIE QUI VARIE AVEC LA TAILLE DE L'ECHANTILLON.-</u>

I - <u>CONDITION D'APPLICATION DES CALCULS EFFECTUES AU CHAPITRE III.</u>

Le point de départ de la démarche effectuée au chapitre III est le lemme 4 (où nous avons effectué un groupement sous forme de paquets de la statistique S'_n , $S'_n = Y_n + Z_n$) et nous avons successivement calculé $E||Y_i||^2$ et $E||Z_i||^2$ pour $1 \leq i \leq \ell$, $E||Z_{\ell+1}||^2$ et $E||Z_n||^2$ (lemme 5).

Rappelons que ce groupement nous a été indispensable pour la détermination de la vitesse de convergence (calcul des quantités A, et C voir p. 61-66).

Il nous faudrait donc pour étendre l'étude faite au chapitre III.

Vérifier les conditions d'application des lemmes 4 et 5 au cas où la dimension est fonction de la taille de l'échantillon avec $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$.

En écrivant successivement ce que sont $E||Y_i||^2$ et $E||Z_i||^2$ pour $1 \leq i \leq \ell$ et $E||Z_{\ell+1}||^2$ (voir lemme 4) et $E||Z_n||^2$ (voir lemme 5).

On obtient aisément la condition $\frac{k_n^4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (c'est-à-dire $E||Z_n||^2 = o(1)$) pour que les lemmes 4 et 5 demeurent valables dans le présent cas.

En conclusion la démarche adoptée au chapitre III s'applique ici si on a :

$$\frac{k_n^4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad .$$

Notons une fois pour toute par H''' l'hypothèse

$$(H''')\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty \\ \\ \frac{k_n^4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad . \end{cases}$$

II - *VITESSE DE CONVERGENCE.*

1 - *Le cas général.*

Avec nos notations (voir A)), on a (cf. chap. III p. 47-48).

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leqslant a^2] - P[||U_{k_n}||^2 \leqslant a^2]| \leqslant P[||Z_n||^2 > \varepsilon] +$$

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||U_{k_n}||^2 \leqslant (a+\varepsilon)^2] - P[||U_{k_n}||^2 \leqslant a^2]| +$$

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||Y_n||^2 \leqslant (a+\varepsilon)^2] - P[||U_{k_n}|| \leqslant (a+\varepsilon)^2]|.$$

Il suffira alors pour déterminer la vitesse de convergence de calculer les quantités :

$$A_{k_n} = P[||Z_n|| > \varepsilon]$$

$$B_{k_n} = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||U_{k_n}||^2 \leqslant (a+\varepsilon)^2] - P[||U_{k_n}||^2 \leqslant a^2]|$$

$$C_{k_n} = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||Y_n||^2 \leqslant (a+\varepsilon)^2] - P[||U_{k_n}||^2 \leqslant (a+\varepsilon)^2]| \quad .$$

Les calculs sont déjà effectués au chapitre III p. 60 à 66.

Réécrivons les :

$$A_{k_n} \leqslant \left(\frac{k_n^4}{n}\right)^{1/4} \times \frac{1}{\varepsilon^2} \qquad ((7)\ \text{p. } 60)$$

$$B_{k_n} \leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{(2d^3)^{1/2}}\right)(\varepsilon^2 + 2a\varepsilon) \qquad ((8)\ \text{p. } 62)$$

$$C'_{1k_n} \leqslant \frac{2b_2}{eb_1^2}\left[\frac{1}{2k_n}\right]^{k_n/2} k_n^{1/2}\,\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{(k_n-2)/2} \ell\alpha(m) \qquad ((9')\ \text{p. } 64)$$

$$C''_{1k_n} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi e^2}}\, \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k_n/2} k_n\, \ell\alpha(m)\, \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{(k_n-2)/2} \frac{1}{\varepsilon^{k_n/2}} \qquad ((10')\ p.65)$$

$$C'_{2k_n} \leqslant \frac{b_2}{b_1^2} \frac{1}{8e\pi} \left[\frac{\sqrt{3}}{2\pi\, k_n\, \sqrt{\beta_1}}\right]^{k_n/2} k_n^{3/2} \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{(k_n-2)/2} g_n^3 \qquad ((11')\ p.\ 66)$$

$$C''_{2k_n} \leqslant \frac{b_2}{b_1^2} \frac{1}{8e\pi} \left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi k_n\, \sqrt{\beta_1}}\right]^{k_n/2} e^{-(\beta_1)/8\, g_n^{-3/2}} \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{(k_n-2)/2} \qquad ((12)\ p.66)$$

$$C''_{22k_n} \leqslant \frac{b_2}{b_1^2} \frac{1}{8e\pi} \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi\, k_n\, \sqrt{\beta_1}}\right]^{k_n/2} e^{-(\beta_1)/2\, g_n^{-3/2}} \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{(k_n-2)/2} \qquad ((13)\ p.\ 66)$$

Comme $0 < \varepsilon < a$ on obtient en définitive :

$$A_{k_n} = O\left[\left(\frac{k_n^4}{n}\right)^{1/4} \frac{1}{\varepsilon^2}\right] \qquad (1)$$

$$B_{k_n} = O[a\varepsilon] \qquad (2)$$

$$C'_{1k_n} = O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n/2} k_n^{1/2}\, a^{(k_n-2)/2}\, \ell\alpha(m)\right] \qquad (3)$$

$$C''_{1k_n} = O\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k_n/2} k_n\, \ell\alpha(m)\, a^{(k_n-2)/2} \frac{1}{\varepsilon^{k_n/2}}\right] \qquad (4)$$

$$C'_{2k_n} = O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n/2} k_n^{3/2}\, a^{(k_n-2)/2}\, g_n^3\right] \qquad (5)$$

$$C''_{21k_n} = O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n/2} e^{-(\beta_1)/8\, g_n^{-3/2}}\, a^{(k_n-2)/2}\right] \qquad (6)$$

$$C''_{22k_n} = O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n/2} e^{-(\beta_1)/2\, g_n^{-3/2}}\, a^{(k_n-2)/2}\right] \qquad (7)$$

Prenons maintenant $\varepsilon = \varepsilon_n = g_n^{1/2}$.

Nous obtenons la :

Proposition 6.-

1) Si la loi des X_i est μ.

2) Sous les hypothèses H' et H''' .

Pour n assez grand, on a :

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left|P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[\|U_{k_n}\|^2 \leq a^2\right]\right| = O\left[\left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/6}\right] +$$

$$O\left[\left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/24} \times a\right] + O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} a^{k_n}\right] + O\left[(na)^{k_n} \alpha(n^{1/4})\right] .$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left|P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[\|U_{k_n}\|^2 \leq a^2\right]\right| = O\left[\left(\frac{k_n^4}{n}\right)^{1/4} \times \frac{1}{\varepsilon^2}\right] + O(a\varepsilon) +$$

$$O\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k_n/2} k_n \ \alpha(m) \ a^{k_n/2} \frac{1}{\varepsilon^{k_n/2}}\right] + O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n/2} k_n^{3/2} a^{k_n/2} g_n^3\right] \quad (8)$$

Par ailleurs nous savons que (lemme 11).

1) $g_n^3 \leq K_2 \left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/4}$

2) $g_n^3 \geq K_3 \, n^{-1/4}$.

Il suffira alors de remplacer dans (8) ; ε, ℓ , m et g_n^3 par leurs valeurs ($\ell = O(n^{1/2})$, $m = O(n^{1/4})$, $\varepsilon = g_n^{1/2}$) pour obtenir le résultat annoncé.

Pour $a = k_n$ $\quad \left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} a^{k_n} = 1$.

La vitesse de convergence ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini pour cette valeur de a, ce qui est sans intérêt.

Pour qu'il y ait convergence il est donc nécessaire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a < b_n$ (bien entendu cette condition n'est pas suffisante).

Soit alors $(\mathcal{A}_n)$ l'ensemble des suites tel que quelle que soit la suite b_n ($\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, on fait tendre le rayon de la boule vers l'infini) appartenant à $(\mathcal{A}_n)$ on ait :

$$\sup_{\substack{a\leq b_n \\ b_n \in \mathcal{A}_n}} \left| P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[\|U_{k_n}\|^2 \leq a^2\right]\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

L'ensemble $(\mathcal{A}_n)$ n'est pas vide puisque ,

en prenant $b_n = \text{Log}(2+n)$ $n \geq 1$.

Il suffit de prendre :

- $k_n = [n^\beta]$ $0 < \beta < 1/6$,

- $\alpha(n) = a' \rho^n$, $a' > 0$, $n \geq 1$ $\rho < \frac{1}{n}$

pour assurer la convergence.

Corollaire 6.- Sous les hypothèses de la proposition 6 .

Il existe un ensemble de suites $(\mathcal{A}_n)$ tel que quelle que soit la suite b_n ($\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$) appartenant à $(\mathcal{A}_n)$ et si :

1) $k_n = [n^\beta]$ $0 < \beta < 1/6$ $n \geq 1$,

2) $\alpha(n) = a' \rho^n$, $a' > 0$, $\rho < \frac{1}{n}$ $n \geq 1$

on ait :

$$\sup_{\substack{a\leq b_n \\ b_n \in \mathcal{A}_n}} \left| P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[\|U_{k_n}\|^2 \leq a^2\right]\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et plus précisément, on a :

$$\sup_{\substack{a \leq b_n \\ b_n \in \mathcal{A}_n}} \left| P\left[||S_n(.)||^2 \leq a^2 \right] - P\left[||U_{k_n}||^2 \leq a^2 \right] \right| = O\left[\left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/24} b_n \right] + O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} b_n^{k_n} \right] + O\left[(n\, b_n)^{k_n} \alpha(n^{1/4}) \right] . \qquad (9)$$

Si :

- les suites b_n sont telles que :

$$* \ \left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/24} b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$* \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n < k_n \ .$$

- le coefficient de mélangeance est tel que :

$$\alpha(n) = a' \rho^n \ , \ a' > 0 \ , \quad \rho < \frac{1}{n} \quad , \quad n \geq 1 \ .$$

alors la vitesse de convergence tend vers 0.

2 - Exemple.

Corollaire 7.- Sous les hypothèses de la proposition 6 .

Si en plus

1) $b_n = \text{Log}(2+n) \quad n \geq 1$

2) $k_n = [n^\beta] \qquad 0 < \beta < 1/6$

3) $\alpha(n) = a' \rho^n \ , \ a' > 0 \ , \ \rho < \frac{1}{n} \ , \ n \geq 1$

alors

$$\sup_{a \leq \text{Log}(2+n)} \left| P\left[||S_n(.)||^2 \leq a^2 \right] - P\left[||U_{k_n}||^2 \leq a^2 \right] \right| = O\left[n^{\delta/4} \,\text{Log}(2+n) \right]$$

$$- \frac{1}{6} < \delta < 0 \ .$$

Démonstration : Il suffit de remplacer les différentes quantités (k_n, $\alpha(n)$, et b_n) par leurs valeurs dans l'expression (9) du corollaire 6 et de prendre :

$$k_n = [n^{\beta}] = [n^{1/6 + \delta}] \quad \text{où} \quad -\frac{1}{6} < \delta < 0$$

Remarque : Il est évident qu'on peut faire d'autres choix de b_n, k_n et $\alpha(n)$. Par exemple si $b_n = \mathrm{Log}(2+n)$ et $k_n = [\mathrm{Log}(3+n)]$ il suffit de prendre $\alpha(n) = a' \rho^n$ avec $\rho < \frac{1}{\mathrm{Log}(2+n)}$, $a' > 0$, pour que la vitesse de convergence tende vers 0 quand n tend vers l'infini.

C - *CAS OU LE NOYAU EST FIXE DE DIMENSION INFINIE.-*

I - *INTRODUCTION ET NOTATIONS.*

Nous reprenons les notations de A) (cas infini) et nous posons dans cette partie :

$$S_{k_n}(.) = \sqrt{n} \sum_{j=2}^{k_n} \lambda_j \hat{a}_{jn} e_j(.) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$$

$$U_{k_n} = \sum_{j=2}^{k_n} \lambda_j Z_j e_j(.) \quad .$$

Nous supposerons réalisée l'hypothèse H" .

II - *VITESSE DE CONVERGENCE.*

1 - *Le cas général.*

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| \leq \sup |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] -$$

$$P[||S_{k_n}(.)||^2 \leq a^2]| + \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_{k_n}(.)||^2 \leq a^2] - P[||U_{k_n}||^2 \leq a^2]| +$$

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||U_{k_n}||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| \; .$$

La recherche de la vitesse de convergence consistera donc à calculer les 3 quantités suivantes :

$$A_1 = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||S_{k_n}(.)||^2 \leq a^2]|$$

$$A_2 = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_{k_n}(.)||^2 \leq a^2] - P[||U_{k_n}||^2 \leq a^2]|$$

$$A_3 = \sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||U_{k_n}||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| \ .$$

Commençons par quelques lemmes :

Lemme 12.- En posant

$$\Lambda_{k_n} = \sum_{k_n+1}^{\infty} \lambda_j^2 \sigma_j^2 \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k_n+1}^{\infty} \lambda_j^2 Z_j^2$$

on a :

$$\Lambda_{k_n}^2 \leq E[R_n^2] \leq 3\Lambda_{k_n}^2 \ .$$

Démonstration : On utilise essentiellement l'inégalité de Schwarz.

Lemme 13.- Sous l'hypothèse H" .

En posant $R'_n = n \sum_{k_n+1}^{\infty} \lambda_j^2 \hat{a}_{j_n}^2$ et $\Lambda'_{k_n} = \sum_{k_n+1}^{\infty} \lambda_j^2$.

Alors :

$$E[R'_n]^2 \leq (K_1 + K_2)\Lambda'^2_{k_n}$$

où

$$K_1 = 3072\, M_2^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} \quad \text{et} \quad K_2 = (1 + 8 M_2^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i))^2$$

Démonstration : On utilise l'inégalité de Schwarz et le lemme 2 p. 4.

Lemme 14.-

$$|P[||U_{k_n}||^2 \leqslant a^2] - P[||U||^2 \leqslant a^2]| \leqslant \left[3 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2d^3)^{1/2}}\right] \Lambda_{k_n}^{2/3}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser le lemme 12 et notre majoration de la fonction densité en p. 57 et le principe de la démonstration est le même que celui adopté dans [5] p. 17 - 18.

Lemme 15.-

1) Si la loi des X_i est μ.

2) Sous les hypothèses H' et H''' .

Pour n assez grand, on a :

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^+} |P[||S_{k_n}(.)||^2 \leqslant a^2] - P[||U_{k_n}||^2 \leqslant a^2]| = O\left[\left[\frac{k_n^6}{n}\right]^{1/24} \times a\right] + O\left[\left[\frac{k_n^6}{n}\right]^{1/6}\right] +$$

$$+ O\left[\left[\frac{1}{k_n}\right]^{k_n} a^{k_n}\right] + O\left[(na)^{k_n/2} \alpha(n^{1/4})\right] .$$

Démonstration : Elle est la même que celle effectuée au paragraphe B) moyennant quelques modifications de détail , les $e_j(X_n)$ deviennent des $\lambda_j\, e_j(X_n)$ et la matrice $\sum = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k_n \\ j'=2\ldots k_n}}$ devient

$$\sum{}' = (\lambda_j\, \lambda_{j'}\, \sigma_{jj'})_{\substack{j=2\ldots k_n \\ j'=2\ldots k_n}} .$$

Lemme 16.-

1) Si la loi des X_i est μ.

2) Sous les hypothèses H'' et H''' .

Pour n assez grand, on a :

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||S_{k_n}(.)||^2 \leq a^2]| = O\left[\left[\frac{k_n^6}{n}\right]^{1/24} \times a\right] +$$

$$O\left[\frac{k_n^6}{n}\right]^{1/6} + O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} a^{k_n}\right] + O\left[(na)^{k_n} \alpha(n^{1/4})\right] + O(\Lambda'^{2/3}_{k_n}) \quad .$$

Démonstration : voir [5] p. 20-21 .

Proposition 7.-

1) Si la loi des X_i est μ.

2) Sous les hypothèses H'' et H''' .

Pour n assez grand, on a :

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| = O\left[\left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/24} \times a\right] + O\left[\frac{k_n^6}{n}\right]^{1/6}$$

$$O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} a^{k_n}\right] + O\left[(na)^{k_n} \alpha(n^{1/4})\right] + O\left[\Lambda^{2/3}_{k_n}\right] + O\left[\Lambda'^{2/3}_{k_n}\right]$$

Démonstration : C'est une conséquence des lemmes 14, 15, 16.

Comme précédemment soit $(\mathcal{A}_n)$ l'ensemble des suites tel que quelle que soit la suite b_n appartenant à cet ensemble on ait :

$$\sup_{\substack{a\leq b_n \\ b_n\in\mathcal{A}_n}} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En supposant $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$ et $\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2 \sigma_j^2 < +\infty$ pour k_n et $\alpha(n)$ convenablement choisis la suite $b_n = \mathrm{Log}(2+n)$ assure la convergence de la vitesse de convergence (voir p. 80).

Corollaire 8.- Sous les hypothèses de la proposition 7.

Il existe un ensemble de suites $(\mathcal{a}_n)$ tel que, quelle que soit la suite b_n $(\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty)$ appartenant à $(\mathcal{a}_n)$ et si :

1) $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$ et $\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2 \sigma_j^2 < +\infty$

2) $k_n = [n^{\beta}]$ $0 < \beta < 1/6$

3) $\alpha(n) = a' \rho^n$, $a' > 0$, $\rho < \frac{1}{n}$ $n \geq 1$,

on ait :

$$\sup_{\substack{a\in b_n \\ b_n \in \mathcal{a}_n}} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 ,$$

plus précisément :

$$\sup_{\substack{a\in b_n \\ b_n \in \mathcal{a}_n}} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| = 0\left[\left[\frac{k_n^6}{n}\right]^{1/24} \times b_n\right] +$$

$$0\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} b_n^{k_n}\right] + 0\left[(nb_n)^{k_n} \alpha(n^{1/4})\right] + 0(\Lambda_{k_n}^{2/3}) + 0(\Lambda_{k_n}'^{2/3})$$

2) *Exemple*.

Corollaire 9.- Sous les hypothèses 1 et 2 du corollaire 8 et si

1) $b_n = \mathrm{Log}(2+n)$ $n \geq 1$.

2) $\alpha(n) = a' \rho^n$, $a' > 0$, $n \geq 1$ $\rho < \frac{1}{n}$.

alors

$$\sup_{a \leq Log(2+n)} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| = O[n^{\delta/4} \, Log(2+n)] +$$

$$O(\Lambda_{k_n}^{2/3}) + O(\Lambda'^{2/3}_{k_n}) \quad \text{où} \quad -\frac{1}{6} < \delta < 0 \ .$$

Prenons maintenant

$$\Lambda_{k_n} = O(\frac{1}{k_n})$$

$$\Lambda'_{k_n} = O(\frac{1}{k_n})$$

Ce choix est possible puisque

$$\Lambda_{k_n} = \sum_{k_n+1}^{\infty} \lambda_j^2 \, \sigma_j^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k_n+1}^{\infty} \lambda_j^2 = \Lambda'_{k_n} \ .$$

Corollaire 10.- Sous les hypothèses du corollaire 9.

Si en plus

$$\Lambda_{k_n} = O[\frac{1}{k_n}] \quad , \quad \Lambda'_{k_n} = O[\frac{1}{k_n}]$$

alors

$$\sup_{a \leq Log(2+n)} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[||U||^2 \leq a^2]| = O[n^{\delta/4} \, Log(2+n)]$$

$$-\frac{1}{6} < \delta < 0 \ .$$

Les vitesses de convergence ainsi obtenues nous permettront d'établir quelques résultats généraux relatifs à toute une classe de tests dont le test du χ^2 usuel est un cas particulier.

C'est l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE V

APPLICATION : CONSTRUCTION ET PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DU TEST.

Dans ce chapitre nous utilisons essentiellement les résultats obtenus aux chapitre III et IV. Nous donnons des résultats analogues à ceux obtenus par Bosq [5] p. 25-38.

A - CONSTRUCTION DU TEST.-

I - CAS DU NOYAU DE DIMENSION FINIE k .

1 - *Construction du test.*

a) *Le cas général.*

On suppose l'hypothèse (H) du chapitre III réalisée dans cette partie. Nous allons tester l'hypothèse H_o "la loi des X_i est μ" contre l'hypothèse H_1 (k) "la loi des X_i est une probabilité ν telle que $\int e_j \, d\mu$ existe et est non nulle pour au moins un j dans $\{2...k\}$ " .

Sous H_o : $||S_n(.)||^2 \longrightarrow Q$ (proposition 1)

Sous H_1 (k) : $||S_n(.)||^2 \xrightarrow{p.s.} + \infty$ (proposition 2) .

Comme $||S_n(.)||^2 = n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2$

d'où un test de la forme $\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$.

Soit alors $\alpha \in [0,1[$ et w tel que $P[Q > w] = \alpha$.

Le test $\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2$ est alors de niveau asymptotique α.

Sous H_o , on a (voir théorème 5).

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[||S_n(.)||^2 \leq a^2] - P[Q \leq a^2]| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + 0[(\tfrac{1}{n})^{1/4}\, a^{(k-2)/2}]$$

$$+ 0[n^{9/16}\, \alpha(n^{1/4})\, a^{(k-2)/2}]$$

c'est-à-dire encore

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} |P[n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 \leq a^2] - P[Q \leq a^2]| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + 0[(\tfrac{1}{n})^{1/4}\, a^{(k-2)/2}]$$

$$+ 0[n^{9/16}\, \alpha(n^{1/4})\, a^{(k-2)/2}] .$$

En prenant $a^2 = w$ et en passant au complémentaire, on a :

$$\sup_{w\in\mathbb{R}^+} |P[\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > \tfrac{w}{n}] - \alpha| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + 0[(\tfrac{1}{n})^{1/4}\, w^{(k-2)/4}]$$

$$+ 0[n^{9/16}\, \alpha(n^{1/4})\, w^{(k-2)/4}] .$$

Sous $H_1(k)$: $||S_n(.)||^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} + \infty$

d'où il est évident que :

$$\lim_{n\to+\infty} P[n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > w] = 1 .$$

En conclusion : si α est le niveau asymptotique du test $\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2$ on a :

1) sous H_o $|P[\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > \frac{w}{n}] - \alpha| = 0\left[\frac{1}{n^{k-1/k}}\right]^{1/4} + 0[(\tfrac{1}{n})^{1/4}\, w^{(k-2)/4}]$

$$+ 0[n^{9/16}\, \alpha(n^{1/4})\, w^{(k-2)/4}] \qquad (1)$$

2) sous $H_1(k)$ $\quad \lim P\left[\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > \frac{w}{n}\right] = 1$.

Nous avons montré au chapitre III qu'il existe un ensemble de suites $(\mathcal{O}_n)$ tel que quelle que soit la suite b_n appartenant à cet ensemble on ait :

$$\sup_{a \leq b_n} \left| P\left[\|S_n(.)\|^2 \leq a^2\right] - P\left[Q \leq a^2\right] \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

C'est-à-dire encore en posant $c_n = b_n^2$

$$\sup_{w \leq c_n} \left| P\left[\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > \frac{w}{n}\right] - \alpha \right| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + 0\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} c_n^{(k-2)/4}\right] +$$

$$0\left[n^{9/16}\ \alpha(n^{1/4})\ c_n^{(k-2)/4}\right] \qquad (2)$$

avec les conditions

$$- \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} c_n^{(k-2)/4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$- n^{9/16}\ \alpha(n^{1/4})\ c_n^{(k-2)/4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

b) <u>Exemple</u>.

Prenons $c_n = n^{1/2(k-1)}$.

La relation (2) p. 83 donne

$$\sup_{w \leq n^{1/2(k-1)}} \left| P\left[\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > \frac{w}{n}\right] - \alpha \right| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + 0\left[\frac{1}{n^{(k)/2(k-1)}}\right]^{1/4} +$$

$$0\left[n^{(11k-13)/16(k-1)}\ \alpha(n^{1/4})\right] \qquad (3)$$

faisons deux choix successifs de $\alpha(n)$.

$*$ $\alpha(n) = \frac{A}{n^{\beta}}$, $A > 0$, $n \geq 1$ $\quad \beta = \frac{11k-13}{4(k-1)} + \delta,\ \delta > 0$.

La relation (3) ci-dessus devient :

$$\sup_{w \leq n^{1/2(k-1)}} \left| P\left[\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > \frac{w}{n}\right] - \alpha \right| = O\left[\frac{1}{n^{\delta'}}\right]^{1/4}$$

$$\delta' = \inf\left(\frac{k-1}{k} , \frac{k}{2(k-1)} , \delta\right) .$$

$*$ $\alpha(n) = a\,\rho^n$, $a > 0$, $\rho \in \,]0,1[$ $n \geq 1$.

La relation (3) ci-dessus devient :

$$\sup_{w \leq n^{1/2(k-1)}} \left| P\left[\sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > \frac{w}{n}\right] - \alpha \right| = O\left[\frac{1}{n^{\gamma}}\right]^{1/4}$$

$$\gamma = \inf\left(\frac{k-1}{k} , \frac{k}{2(k-1)}\right) .$$

2 - *Utilisation du test.* voir [5] p. 9

II - CAS DU NOYAU DE DIMENSION FINIE QUI VARIE AVEC LA TAILLE DE L'ECHANTILLON.

Compte tenu de nos résultats précédents (chapitre IV - A.II), pour tester l'hypothèse H_o "la loi commune des X_i est μ" on peut utiliser un test de la forme $\sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$.

L'alternative $H_1(k_n)$ sera l'ensemble des lois ν tel que, pour au moins un $j = 2 \ldots k_n$ $\int e_j \, d\nu$ existe et soit non nulle. $H_1(k_n)$ contient alors toutes les lois (différentes de μ) qui admettent une densité appartenant à $L^2(\mu)$.

Les propriétés asymptotiques de ce test seront étudiées au paragraphe B.II .

III - CAS DU NOYAU DE DIMENSION INFINIE.

Pour tester l'hypothèse H_o : "la loi des X_i est μ" contre l'hypothèse $H_1(\lambda_n)$ (les λ_j étant définies au chapitre IV p. 73) : "la loi des X_i est ν telle qu'il existe au moins un $j \geq 2$ tel que $\int e_j \, d\nu$ existe et soit non nulle" , on peut utiliser le test de région critique $||S_n(.)||^2 > w_n$.

Les propriétés asymptotiques de ce test seront étudiées au paragraphe B. III.

B - PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DU TEST : CONVERGENCE DU TEST.

Nous dirons qu'un test est convergent si son niveau α_n tend vers 0 et sa puissance $p_n(\nu)$ tend vers 1 (quand n tend vers l'infini) pour toute loi de l'alternative.

I - CAS DU NOYAU DE DIMENSION FINIE k.

1 - *Le cas général.*

Nous reprenons ici les données du chapitre III.

Si α_n est le niveau du test $n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ alors

$$\alpha_n = P\left[n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn} > w_n\right]$$

Proposition 8.- Sous l'hypothèse générale (H).

1) Si en plus

a) $(\frac{1}{n})^{1/4} \, c_n^{(k-2)/4} \longrightarrow 0$

b) $n^{9/16} \, \alpha(n^{1/4}) \, c_n^{(k-2)/4} \longrightarrow 0$

$$c)\begin{cases} w_n \leq c_n \\ w_n \to +\infty \\ \dfrac{w_n}{n} \to 0 \end{cases}$$

alors le test $n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ est convergent .

2) La convergence de la puissance est uniforme sur tout $H_2 \subset H_1(k)$ tel que :

$$\delta(H_2) = \inf_{\nu \in H_2} \max_{j=2\ldots k} \left[\int e_j \, d\nu\right]^2 > 0 \quad .$$

3) Soit $(\nu_n) \subset H_1(k)$ telle que :

$$\frac{n}{4(k-1)} \sum_{j=2}^{k} \left[\int e_j \, d\nu_n\right]^2 \geq w_n \qquad n \geq 1$$

alors si a) et b) sont vérifiées.

Si en plus $w_n \leq c_n$ et $w_n \to +\infty$ on a simultanément :

$$\alpha_n \to 0 \quad \text{et} \quad p_n(\nu_n) \longrightarrow 1 \ .$$

<u>Démonstration</u> :

1) Utilisant le corollaire 3 on a :

$$\sup_{w_n \leq c_n} |P[Q > w_n] - \alpha_n| = 0\left[\frac{1}{n^{(k-1)/k}}\right]^{1/4} + 0\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} (c_n)^{(k-2)/4}\right] + 0\left[n^{9/16} \, \alpha(n^{1/4}) \, (c_n)^{(k-2)/4}\right] \quad .$$

D'où sous les hypothèses a) et b) on a :

$$\sup_{w_n \leq c_n} |\alpha_n - P[Q \leq w_n]| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc si $w_n \leq c_n$ $\quad |\alpha_n - P[Q > w_n]| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

par suite $\quad \alpha_n \to 0 \Longleftrightarrow w_n \longrightarrow +\infty$.

Supposons maintenant $\frac{w_n}{n} \longrightarrow 0$.

On va alors considérer $\nu \in H_1(k)$ et $j = 2\ldots k$ tel que $a_j = \int e_j \, d\nu \neq 0$ on va se donner un entier $m > 1$.

Soit $N(a_j,m)$ le plus petit entier tel que $\frac{w_n}{n} < \frac{a_j^2}{m^2}$ pour $n \geq N(a_j,m)$.

Cet entier existe puisque $\frac{w_n}{n} \to 0$.

$$P[|\hat{a}_{jn} - a_j| \geq \frac{m-1}{m} |a_j|] \leq \frac{E[\hat{a}_{jn} - a_j]^4}{a_j^4} \left(\frac{m}{m-1}\right)^4 \quad \text{(inégalité de Tchebychev)} .$$

$$P[|\hat{a}_{jn} - a_j| \geq \frac{m-1}{m} |a_j|] = 1 - P[|\hat{a}_{jn} - a_j| < \frac{m-1}{m} |a_j|]$$

$$= 1 - p_n(\nu)$$

$p_n(\nu)$ étant la puissance du test.

On déduit alors :

$$1 - p_n(\nu) \leq \frac{E[\hat{a}_{jn} - a_j]^4}{a_j^4} \left(\frac{m}{m-1}\right)^4$$

$$E[\hat{a}_{jn} - a_j]^4 \leq 3072 \times 2^4 \times M^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} \times \frac{1}{n^2} \quad \text{(cf. proposition 2)} ,$$

donc

$$1 - p_n(\nu) \leq \frac{3072 \times 2^4 \times M^4}{a_j^4} \left(\frac{m}{m-1}\right)^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} \times \frac{1}{n^2}$$

donc $1 - p_n(\nu) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où le résultat annoncé .

2) Pour n assez grand on a :

$$\frac{w_n}{n} < \frac{\delta(H_2)}{n^2} \qquad m > 1 \quad .$$

En se servant de la démonstration précédente et en remplaçant a_j^2 par $\delta(H_2)$ alors :

$$\sup_{\nu \in H_2} \left[1 - p_n(\nu)\right] \leqslant \frac{3072 \times 2^4 \times M^4}{\delta^2(H_4)} \left(\frac{m}{m-1}\right)^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} \times \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc :

$$\sup_{\nu \in H_2} \left[1 - p_n(\nu)\right] \longrightarrow 0$$

d'où la convergence uniforme annoncée.

3) Soit $j_o \in \{2 \ldots k\}$ tel que $\left[\int e_{j_o} \, d\nu_n\right]^2 = \max\limits_{2 \leqslant j \leqslant k} \left[\int e_j \, d\nu_n\right]^2$ pour $n \geqslant 1$ $\dfrac{n}{4(k-1)} \sum\limits_{j=2}^{k} \left[\int e_j \, d\nu_n\right]^2 \geqslant w_n$,

d'où

$$\frac{1}{4(k-1)} \sum_{j=2}^{k} \left[\int e_j \, d\nu_n\right]^2 \geqslant \frac{w_n}{n} \Longrightarrow \frac{w_n}{n} \leqslant \frac{\left[\int e_{j_o} \, d\nu_n\right]^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{w_n}{n}} \leqslant \frac{\left|\int e_{j_o} \, d\nu_n\right|}{2} \qquad \text{(ici on a pris } m = 2 \text{)} .$$

En remplaçant alors a_j par $\int e_{j_o} \, d\nu_n$ et m par 2 dans la démonstration de 1) on a :

$$1 - p_n(\nu_n) \leqslant \frac{3072 \times 2^4 \times M^4 \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}}{w_n^2} \xrightarrow[w_n \to +\infty]{} 0 \quad .$$

Sous a), b), $w_n \leqslant c_n$ et $w_n \to +\infty$

$$\alpha_n \to 0 \qquad \text{(cf. 1))} .$$

Remarques :

1) Les conditions :

$$- \ w_n \to +\infty$$

$$- \ \frac{w_n}{n} \to 0$$

sont nécessaires pour assurer la convergence du test mais ne sont pas suffisantes :

2) $$1 - p_n(\nu_n) \leqslant \frac{3072 \times 2^4 \times M^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)}}{w_n^2}$$

donc

$$1 - p_n(\nu_n) = 0\left[\frac{1}{w_n^2}\right] .$$

Ce qui nous permet d'avoir la vitesse de convergence de la puissance du test.

2 - *Exemples*.

Prenons $c_n = n^{1/2(k-1)}$.

Corollaire 11.- Sous l'hypothèse (H).

Si en plus :

1) $w_n \leqslant n^{1/2(k-1)}$.

2) $\alpha(n) = a\,\rho^n \;,\quad a > 0 \;,\; \rho \in \left]0,1\right[\quad n \geqslant 1$

ou

2') $\alpha(n) = \dfrac{A}{n^\beta} \;,\quad A > 0 \;,\; \beta = \dfrac{11k-13}{4(k-1)} + \delta \;,\; \delta > 0$

3) $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

alors le test $n \sum_{j=2}^{k} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ est convergent .

Démonstration : Evident, voir corollaires 4 et 5 et la démonstration du point 1 de la proposition 8.

II - CAS DU NOYAU DE DIMENSION FINIE QUI VARIE AVEC LA TAILLE DE L'ECHANTILLON.

Nous reprenons ici les données du chapitre IV - A.

α_n étant le niveau du test $n \sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ alors

$$\alpha_n = P\left[n \sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}^2 > w_n\right] .$$

1 - *Le cas général.*

Proposition 9.- Sous l'hypothèse générale H' .

Sous l'hypothèse générale H' .

Si en plus

1) $\left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/24} c_n^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) $\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} c_n^{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3) $\alpha(n^{1/4}) \, (n\, c_n)^{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4) $\begin{cases} w_n \leq c_n \\ w_n \to +\infty \\ \frac{w_n}{n} \to 0 \end{cases}$

Alors le test $n \sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ est convergent .

Démonstration : On utilise le corollaire 6.

$$\sup_{w_n \leq c_n} \left| P\left[n \sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}^2 > w_n\right] - \alpha_n \right| = O\left[\left(\frac{k_n^6}{n}\right)^{1/24} \times c_n^{1/2}\right] +$$

$$O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} c_n^{k_n}\right] + O\left[(n\, c_n)^{k_n} \alpha(n^{1/4})\right]$$

d'où le résultat annoncé.

Proposition 10.-

Sous l'hypothèse H' .

1) Soit $H_3 \subset H_1(k_n)$ telle que, pour tout entier n assez grand

$$\inf_{\nu \in H_3} \max_{j=2\ldots k} \left|\int e_j \, d\nu\right| \geq m \sqrt{\frac{w_n}{n}} \ .$$

où m est un nombre donné supérieur à 1, alors la convergence de la puissance est uniforme sur H_3 dès que $w_n \to +\infty$, plus précisément on a :

$$\sup_{\nu \in H_3} \left[1 - p_n(\nu)\right] = O\left[\frac{1}{w_n^2}\right] \ .$$

2) Soit $(\nu_n) \subset H_1(k_n)$ et $j_n \subset \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\int e_{j_n} \, d\nu_n\right| \geq m \sqrt{\frac{w_n}{n}}$$

alors $p_n(\nu_n) \to 1$ dès que $w_n \to +\infty$.

3) α_n étant le niveau du test

$$\alpha_n = O\left[\frac{k_n^2}{w_n}\right] \ .$$

<u>Démonstration</u> : Pour 1) et 2) la démonstration est analogue à celle donnée à la proposition 8 aux points 2) et 3).

3) $\alpha_n = P\left[\sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}^2 > \frac{w_n}{n}\right] \leqslant \sum_{j=2}^{k_n} P\left[\hat{a}_{jn}^2 > \frac{w_n}{n(k_n-1)}\right]$

$$\alpha_n \leqslant \sum_{j=2}^{k_n} P\left[|\hat{a}_{jn}| > \sqrt{\frac{w_n}{n(k_n-1)}}\right]$$

$$P\left||\hat{a}_{jn}| > \sqrt{\frac{w_n}{n(k_n-1)}}\right| \leqslant \frac{E|\hat{a}_{jn}^2|}{w_n} n\, k_n$$

et en utilisant le lemme 1 p. 3 on obtient

$$\alpha_n \leqslant (1 + 8\, M_1^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)) \frac{k_n^2}{w_n}$$

$(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha(i)} < +\infty \Longrightarrow \sum \alpha(i) < +\infty)$ d'où le résultat annoncé .

2 - <u>Exemple</u>.

<u>Corollaire</u> 12.- Sous l'hypothèse H' .

Si en plus :

1) $c_n = \mathrm{Log}(2+n)$

2) $w_n \leqslant \mathrm{Log}(2+n)$ et $w_n \to +\infty$

3) $\alpha(n) = a\,\rho^n$, $a > 0$, $n \geqslant 1$ $\rho < \frac{1}{n}$,

4) $k_n = [n^\beta]$ $\beta < 1/6$

alors le test $n \sum_{j=2}^{k_n} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ est convergent .

Démonstration : Voir le corollaire 7 et la proposition 8.

Remarque :

$$\sup_{\nu\in H_3} [1 - p_n(\nu)] = 0\left[\frac{1}{w_n^2}\right]$$

$$\alpha_n = 0\left[\frac{k_n^2}{w_n}\right] \qquad \text{(cf. proposition 10).}$$

Prenons :

$$k_n = [n^{(2\gamma-1)/12\gamma+3}] \qquad w_n = 0[n^{(2\gamma-1)/4\gamma+1}] \qquad \gamma > 1/2$$

d'où

$$\sup_{\nu\in H_3} [1 - p_n(\nu)] = 0[n^{-(4\gamma-2)/4\gamma+1}]$$

$$\alpha_n = 0[n^{-(2\gamma-1)/12\gamma+3}] .$$

III - CAS DU NOYAU DE DIMENSION INFINIE.

Nous reprenons ici les hypothèses du chapitre IV.

α_n étant le niveau du test $n \sum_{j=2}^{\infty} \hat{a}_{jn} > w_n$

$$\alpha_n = P[n \sum_{j=2}^{\infty} \hat{a}_{jn}^2 > w_n] .$$

1 - Le cas général.

Proposition 11.-

Sous l'hypothèse H" .

Si en plus

1) $(\frac{k_n^6}{n})^{1/24} c_n^{1/2} \to 0$

2) $(\frac{1}{k_n})^{k_n} c_n^{k_n} \to 0$

3) $(n\, c_n)^{k_n}\, \alpha(n^{1/4}) \longrightarrow 0$

4) $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$ et $\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2\, \sigma_j^2 < +\infty$

5) $\begin{cases} w_n \leq c_n \\ w_n \to +\infty \\ \dfrac{w_n}{n} \to 0 \end{cases}$

alors le test $n \sum_{j=2}^{\infty} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ est convergent.

<u>Démonstration</u> : On utilise le corollaire 8 et on considère $\nu \in H_1(\lambda_n)$ et soit $j_o \geq 2$ tel que $\int e_{j_o}\, d\nu = a_{j_o} \neq 0$.

Comme $||S_n(.)||^2 \leq w_n$ alors $n\, \lambda_{j_o}^2\, \hat{a}_{j_{on}}^2 \leq w_n$

d'où

$$P[||S_n(.)||^2 \leq w_n] \leq P[|\hat{a}_{j_{on}}| \leq \sqrt{\frac{w_n}{n}}\, |\lambda_{j_o}|^{-1}] .$$

Comme $\frac{w_n}{n} \to 0$, on aura pour n assez grand

$$\frac{w_n}{n} \leq \frac{a_{j_o}^2\, \lambda_{j_o}^2}{m^2} \qquad (m > 1) ,$$

on obtient alors

$$P[||S_n(.)||^2 \leq w_n] \leq P[|\hat{a}_{j_{on}} - a_{j_o}| > \frac{m-1}{m}\, |a_{j_o}|]$$

et on termine comme à la proposition 8 .

Remarques.- Sous l'hypothèse H" .

1) La convergence de la puissance du test est uniforme sur tout $H_4 \subset H_1(\lambda_n)$ tel que :

$$\delta(H_4) = \inf_{\nu \in H_4} \max_{j \geq 2} \left[\int e_j \, d\nu\right]^2 > 0 .$$

2) La vitesse de convergence de la puissance est $O(\frac{1}{n^2})$, mais elle dépend des a_j (ceci se démontre aisément en utilisant la proposition 11 et le lemme 2).

Proposition 12.-

1) Sous l'hypothèse H" .

2) Sous 1, 2, 3, 4, de la proposition 11 et si $w_n \leq c_n$.

Alors

$$\alpha_n = O\left[\left[\frac{k_n^6}{n}\right]^{1/24} c_n^{1/2}\right] + O\left[\left(\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} c_n^{k_n}\right] + O\left[(n\, c_n)^{k_n} \alpha(n^{1/4})\right] + O(\Lambda_{k_n}^{2/3}) + O(\Lambda'^{2/3}_{k_n}) + O(\frac{1}{w_n^2}) .$$

Démonstration : Elle se fait à partir du corollaire 8 et des inégalités de Bienaymé Tchebychev et de Schwarz.

2) *Exemple*.

Corollaire 13.- Sous l'hypothèse H" .

Si en plus

1) $w_n \leq \mathrm{Log}(2+n)$,

2) $w_n \to +\infty$

3) $\alpha(n) = a\,\rho^n \quad a > 0 , \quad n \geq 1 \quad \rho < \frac{1}{n}$,

4) $k_n = [n^{\beta}] \qquad 0 < \beta < 1/6$

5) $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$ et $\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2 \sigma_j^2 < +\infty$

alors le test $n \sum_{j=2}^{\infty} \hat{a}_{jn}^2 > w_n$ est convergent .

Le corollaire 13 reste valable si on prend $k_n = [\mathrm{Log}(3+n)]$ et $\rho < \dfrac{1}{\mathrm{Log}(2+n)}$

Remarques.-

1) Prenons $c_n = \mathrm{Log}(2+n)$ et $w_n = \mathrm{Log}(2+n)$,

$$k_n = [n^{\beta}] \qquad \beta < 1/6$$

$$\Lambda_{k_n} = 0(\frac{1}{k_n}) \quad \text{et} \quad \Lambda'_{k_n} = 0(\frac{1}{k_n})$$

$$\alpha(n) = a\,\rho^n \ , \quad a > 0 \ , \quad \rho < \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 1$$

$$\alpha_n = 0\Big[\frac{1}{\mathrm{Log}(2+n)}\Big]^2 \qquad \text{(voir proposition 12).}$$

2) D'une manière générale il se pose le problème de l'optimalité asymptotique du test que nous venons de construire.

La convergence du test dépend de trois facteurs

- le rayon de la boule ,
- la dimension k_n du noyau,
- le coefficient de mélangeance.

C - *CAS PARTICULIER DU TEST DU* χ^2.-

Nous avons montré au chapitre II que

$$\hat{B}_n^{-1} S_n \xrightarrow{L} N(0, I_{k-1})$$

où I_{k-1} désigne la matrice identique dans $\mathbb{R}^{k-1}$.

Puis utilisant le fait que la convergence en loi se conserve par continuité on a montré que :

$$||\hat{B}_n^{-1} \; S'_n||^2 = ||S'_n(.)||^2 \xrightarrow{L} \chi^2_{k-1} \quad .$$

Nous utiliserons ceci pour faire une simulation sur un autorégressif d'ordre 1. ($x_t = \rho \; x_{t-1} + \varepsilon_t$ où $|\rho| < 1$ et $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Le test du χ^2 est un cas particulier de la famille de tests étudiée. En effet donnons nous une partition $A_1 \ldots A_k$ B-mesurable de E où E est l'espace des observations défini au chapitre I et B une tribu sur E.

Soit $p_j = \mu(A_j)$ $j = 1 \ldots k$ tel que $p_j \in]0,1[$ et où μ est la loi définie au chapitre I.

$\{e_j = p_j^{-1/2} \; 1\!\!1 \, A_j \; , \; j = 1 \ldots k\}$ est un système orthonormal dans $L^2(\mu)$ qui engendre un espace vectoriel de dimension k et contenant les constantes

$$||S_n(.)||^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} 1\!\!1 \, A_j(X_i) - n \, p_j\right)^2}{n \, p_j} \longrightarrow \chi^2_{k-1} \quad .$$

(voir [36] p. 27-28).

On pourra consulter [42] pour des tests similaires au test du χ^2 dans le cas d'une chaîne de Markov.

C O N C L U S I O N .

Cette première tentative de généralisations de certains résultats obtenus par D. Bosq dans le cas des v.a. indépendantes, au cas des processus strictement stationnaires et α-fortement mélangeant est susceptible d'améliorations.

Peut être des majorations plus serrées améneraient-elles à une meilleure vitesse de convergence. Ou encore une majoration dans la classe des convexes mesurables de $\mathbb{R}^k$ (telle que l'a fait Sazonov dans [16] et [17] pour des v.a. indépendantes) nous permettrait-elle d'éviter de considérer l'ensemble des suites (α_n) que nous avons introduit pour assurer la convergence.

Ce qui nous permettrait éventuellement de donner des conditions nécessaire et suffisante de convergence du test.

Un autre problème qui se pose également est l'optimalité asymptotique du test étudié.

On pourrait de même se poser le problème du processus linéaire (théorème central limite multidimentionnel, vitesse de convergence ...). De même on pourrait se pencher sur le cas d'un processus faiblement stationnaire.

Un autre problème réside dans la convergence du test du χ^2 . En effet l'étude de la convergence du test exige le calcul de la vitesse de convergence c'est-à-dire la recherche de la quantité

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^+} \left| P\left[||\hat{B}_n^{-1} S'_n||^2 \leq a^2 \right] - P\left[Q \leq a^2 \right] \right|$$

où Q est la loi du χ^2 à $(k-1)$ d.d.ℓ .

Ce qui nous permettrait d'étudier les propriétés asymptotiques du test du χ^2 et de comparer ce test par exemple aux tests de Kolmogorov - Smirnov et de Von Mises.

"Malheureusement" la matrice $\hat{B}_n^{-1}$ semble assez difficile à manipuler compte tenu de la forme de ses éléments.

Nous avons considéré le système orthonormal $e_j = p_j^{-1/2}\, \mathbb{1}_{A_j}$ $j = 1 \ldots k$ où $p_j = \mu(A_j)$, $p_j \in]0,1[$ $A_1 \ldots A_k$ une partition B-mesurable de E, mais les calculs ne semblent pas assez aisé non plus.

Cependant nous pensons qu'en choisissant un "bon" système orthonormal on devrait pouvoir résoudre le problème.

Nous espérons revenir sur ces questions ultérieurement.

Ceci dit, les résultats nouveaux obtenus ici en appellent d'autres et bien de problèmes restent ouverts.

Pour terminer ce travail, en appendice nous simulons un autorégressif d'ordre 1.

APPENDICE

S I M U L A T I O N.

A - INTRODUCTION.-

Afin d'illustrer les résultats obtenus au chapitre II, on a réalisé une simulation sur un autorégressif d'ordre 1.

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

avec $X_o = 0$, $|\rho| < 1$ et $(\varepsilon_t)_{t \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi normale $N(0,1)$.

On construit un échantillon de taille n du processus : en appelant pour chaque t une v.a. ε_t générée par un sous-programme et en utilisant l'équation (1).

Nous avons choisi des valeurs de ρ pour générer le processus $(X_t)_{t \geq 1}$. La matrice $\hat{\Sigma}'_n$ (cf. chapitre II) étant fonction du système orthonormal considéré, nous avons choisi pour les calculs deux systèmes orthonormés :

- celui obtenu à partir des polynômes de Legendre définis sur l'intervalle $[a,b]$,

- celui obtenu à partir des fonctions trigonométriques.

Pour chaque dimension et chaque échantillon considérés, on calcule les quantités $\hat{\sigma}_j^2$ et $\hat{\sigma}_{jj'}$, on obtient donc $\hat{\Sigma}_n$ et par suite $\hat{\Sigma}'_n$ $(\hat{\Sigma}'_n = \hat{\Sigma}_n + \alpha_n I$, $\alpha_n = |\inf\limits_{||t|| \leq 1} < \hat{\Sigma}_n t, t>| + \frac{1}{n})$.

Par conséquent on a $\hat{B}_n$ $(\hat{B}_n^2 = \hat{\Sigma}'_n$, $\hat{B}_n$ n'a été déterminée que si la matrice $\hat{\Sigma}_n$ est définie positive, c'est le cas pour la majeur partie des exemples traités).

On compare alors la valeur calculée $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2$ à la valeur du χ^2 à (k-1) d.d.ℓ. et à p % lue sur la table (k représentant la dimension considérée).

$$X_t = \rho\ X_{t-1} + \varepsilon_t \quad .$$

Les ε_t étant des v.a. N(0,1) et indépendantes alors le processus $(X_t)_{t\geq 1}$ est gaussien.

<u>Test d'hypothèse</u> :

- si $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2 \geq \chi^2_{k-1,p\%}$ on rejette l'hypothèse H_o "le processus $(X_t)_{t\ 1}$ est gaussien de moyenne nulle".

- si $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2 < \chi^2_{k-1,p\%}$ on accepte l'hypothèse H_o "le processus $(X_t)_{t\geq 1}$ est gaussien de moyenne nulle" .

La région critique du test est donc

$$\{||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2 \geq \chi^2_{k-1,p\%}\} \ .$$

Nous avons calculé la quantité $||S'_n||^2$, pour la comparer à $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2$; dans les cas de faible dépendance, ces deux quantités devraient être sensiblement les mêmes, donc dans la pratique on pourrait plutôt utiliser $||S'_n||^2$ compte tenu de la complexité de la matrice $\hat{B}_n$.

A cause du coût que représenterait le traitement des données en dimension et taille de l'échantillon assez élevées (par exemple pour une matrice 2×2 , en prenant $\rho = 0,3$; le temps de calcul est de 0,41 minute pour $n = 100$ et de 3,77 minutes pour $n = 300$; on voit donc que le temps de calcul augmente assez rapidement) nous nous sommes limités à une matrice scalaire et à une matrice 2×2 ; pour la taille n de l'échantillon nous avons considéré $n = 100$, $n = 200$, $n = 300$, $n = 500$.

B - RESULTATS.-

I - POLYNÔMES DE LEGENDRE.

1) $\rho = 0{,}3$

Nombre de d.d.ℓ	χ^2 5%	Taille de l'échantillon	Troncature	$\lVert \hat{B}_n^{-1} S'_n \rVert^2$	$\lVert S'_n \rVert^2$
1	3,84	100	$d_n = 98$	0,991079	1,22277
			$d_n = 80$	1,05661	
			$d_n = 50$	1,07897	
		200	$d_n = 198$	0,997118	0,345185
			$d_n = 190$	0,9310509	
			$d_n = 180$	0,9921275	
		300	$d_n = 298$	0,9999158	0,335534
			$d_n = 290$	0,977692	
2	5,99	100	$d_n = m_n = 98$	0,265138	
			$d_n = m_n = 80$	3,04522	
			$d_n = m_n = 50$	7,237005	
		300	$d_n = m_n = 298$	0,184435	45,0681
			$d_n = m_n = 290$	0,934270	
			$d_n = m_n = 280$	1,56090	

2) $\rho = 0,2$

Nombre de d.d.ℓ.	χ^2 5%	Taille de l'échantillon	Troncature	$\|\|\hat{B}_n^{-1} S'_n\|\|^2$	$\|\|S'_n\|\|^2$
1	3,84	100	$d_n = 98$	0,993025	1,49861
			$d_n = 80$	1,04509	
			$d_n = 50$	1,12925	
		200	$d_n = 198$	0,988106	0,484346
			$d_n = 180$	0,987661	
			$d_n = 150$	1,06511	
		300	$d_n = 298$	1,00028	0,358670
			$d_n = 290$	0,979216	
			$d_n = 280$	0,9646099	
2	5,99	100	$d_n = m_n = 98$	13,1629	1823,54
			$d_n = m_n = 90$	30,7574	
			$d_n = m_n = 80$	117,452	
		200	$d_n = m_n = 198$	$6,99.10^{-2}$	15,8797
			$d_n = m_n = 190$	0,1002	
		300	$d_n = m_n = 298$	$5,05737.10^{-2}$	12,2487
			$d_n = m_n = 290$	$4,19740.10^{-2}$	
			$d_n = m_n = 280$	$9,49726.10^{-2}$	

3) $\rho = 0{,}10$

Nombre de d.d.ℓ.	χ^2 5%	Taille de l'échantillon	Troncature	$\|\|\hat{B}_n^{-1} S'_n\|\|^2$	$\|\|S'_n\|\|^2$
1	3,84	100	$d_n = 98$ $d_n = 80$ $d_n = 50$	0,9945 1,03905 1,16732	1,86096
		200	$d_n = 198$ $d_n = 180$ $d_n = 150$	0,99084 0,992895 1,05720	0,620499
		300	$d_n = 298$ $d_n = 290$ $d_n = 280$	1,000345 0,98815168 0,98217574	0,542318
		500	$d_n = 498$ $d_n = 490$ $d_n = 480$	1,000183 0,996217 0,999858	1,18727
2	5,99	100	$d_n = m_n = 98$ $d_n = m_n = 90$ $d_n = m_n = 80$	0,485554 0,336987 0,564275	46,6050
		200	$d_n = m_n = 198$ $d_n = m_n = 190$	$4{,}062587.10^{-2}$ 0,427037	10,5039
		300	$d_n = m_n = 298$ $d_n = m_n = 290$ $d_n = m_n = 280$	$9{,}573197.10^{-2}$ $2{,}95007.10^{-2}$ $3{,}499122.10^{-2}$	8,3282
		500	$d_n = m_n = 498$ $d_n = m_n = 490$	2,0001831 1,9962372	3,0032

II - FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) $\rho = 0,20$

Nombre de d.d.ℓ.	χ^2 5%	Taille de l'échantillon	Troncature	$\|\|\hat{B}_n^{-1} \; S'_n\|\|^2$	$\|\|S'_n\|\|^2$
2	5,99	100	$d_n = m_n = 98$	$\hat{\Sigma}_n$ non définie positive.	0,277279
			$d_n = m_n = 90$	1,12117	0,277279
			$d_n = m_n = 80$	$\hat{\Sigma}_n$ non définie positive	0,277279
		200	$d_n = m_n = 198$	3,06266	0,907760
			$d_n = m_n = 190$	4,59296	0,907760
			$d_n = m_n = 180$	6,42588	0,907760

2) $\rho = 0,30$

Nombre de d.d.ℓ.	χ^2 5 %	Taille de l'échantillon	Troncature	$\|\|\hat{B}_n^{-1} \; S'_n\|\|^2$	$\|\|S'_n\|\|^2$
2	5,99	100	$d_n = m_n = 98$	$\hat{\Sigma}_n$ non définie positive	0,287759
			$d_n = m_n = 90$	0,901077	0,287759
			$d_n = m_n = 80$	$\hat{\Sigma}_n$ non définie positive	0,287759
		200	$d_n = m_n = 198$	1,13295	0,785282
			$d_n = m_n = 190$	2,56268	0,785282
			$d_n = m_n = 180$	2,84952	0,785282

C - *CONCLUSION*.-

1 - *Test d'hypothèse*.

- Pour 1 d.d.ℓ. et au seuil 5 % la région critique du test est :

$$\{||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2 \geq 3,84\} .$$

- Pour 2 d.d.ℓ. et au seuil 5 % la région critique du test est :

$$\{||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2 \geq 5,99\} .$$

Ce qui nous permet d'accepter ou de rejeter l'hypothèse H_o : "le processus $(X_t)_{t\geq 1}$ est gaussien de moyenne nulle" au seuil 5 % .

On pourra facilement comparer les valeurs calculées $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2$ et les valeurs du χ^2 au seuil 5 % (cf. les tableaux). Par exemple pour $n = 200$ en utilisant les fonctions trigonométriques on accepte H_o au seuil 5 %.

Bien entendu les quantités $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2$ sont fonction de la matrice $\hat{\Sigma}'_n$ donc de $\hat{\Sigma}_n$; par ailleurs nous avons utilisé des estimateurs qui sont le périodogramme (ou densité spectrale empirique) "tronqué en d_n et m_n" et les troncatures d_n et m_n ont été choisis ici de manière arbitraire ; il se pose donc le problème de l'optimalité de ce choix.

Il aurait été intéressant de considérer d'autres estimateurs voir [10] p. 516-532 ou [12] (puisque $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2 \xrightarrow{L} \chi^2_{k-1}$ est indépendant de l'estimateur utilisé) et de comparer les résultats obtenus.

Par manque de temps nous n'avons pu le faire.

De même $||\hat{B}_n^{-1}\ S'_n||^2$ est fonction du système orthonormal choisi.

2 - *Comparaison de* $||\hat{B}_n^{-1} \; S'_n||^2$ *et* $||S'_n||^2$.

Les résultats obtenus montrent que $||\hat{B}_n^{-1} \; S'_n||^2$ et $||S'_n||^2$ sont différents. Cet écart pourrait être dû :

a) au système orthonormé utilisé,

b) à l'estimateur considéré.

Nous pensons qu'en effectuant les calculs à partir de plusieurs estimateurs (cf. [10] et [12]) et plusieurs systèmes orthonormés, pour de faible dépendance (ρ assez petit) on pourrait obtenir de meilleurs résultats.

Finalement ces calculs encore incomplets vont être poursuivis.

BIBLIOGRAPHIE

[10] ANDERSON T.W. (1971)
The statistical Analysis of time series
J. Willey, New-York.

[9] BARRA J. (1971)
Notions fondamentales de statistiques mathématiques
Dunod

[41] BARTON D.E. (1956)
Neyman's ψ_k^2 test of goodness of fit when the null hypothesis is composite
Skand-Aktuarietidskr 39, p. 216-245.

[31] BHARUCHA REID A.J. (1972)
Random Integral equations
Academic Press

[21] BHATTACHARYA R.N. (1977)
Refinements of the multidimensional central limit theorem and applications
The Annals of Probability vol. 5, n° 1, p. 1-27.

[39] BICKEL et ROSENBLATT (1973)
Ann. Stat. Vol. 1, n° 6, p. 1071-1095.

[3] BILLINGSLEY P. (1968)
Convergence of Probability measures
J. Wiley, New-York

[5] BOSQ D. (1978)
Tests d'ajustement hilbertiens.
Publications internes de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Lille I, n° 125.

[6] BOSQ D. (1978)
Tests hilbertiens et test du χ^2
C.R.A.S. série A, t. 286 p. 946-948.

[7] BOSQ D. (1980)
Sur une classe de tests qui contient le test du χ^2
Publication I.S.U.P.

[33] BOSQ D. (1980-1981)
Séries chronologiques : polycopié de cours D.E.A.
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Lille I.

[27] CAMPBELL R. (1966)
Les intégrales eulériennes et leurs applications
Dunod.

[12] CARBON M. (1982)
Sur l'estimation asymptotique d'une classe de paramètres fonctionnels pour un processus stationnaire.
Thèse 3ème cycle, Lille I.

[24] DELECROIX M. (1975)
Sur l'estimation des densités marginale et de transition d'un processus stationnaire et mélangeant.
Thèse 3ème cycle, Lille I.

[28] DEO C.M. (1973)
A note on empirical processes of strong mixing sequences
Ann. Probability, 1, p. 870-875.

[36] DEVOLDER J. (1977)
D'autres inégalités de type exponentiel - Applications.
Publication n° 120, U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Lille I.

[30] DIEUDONNÉ J. (1974)
Eléments d'Analyse.
Gautier-Villars.

[29] DOOB J.L. (1953)
Stochastic processes
Wiley, New-York.

[2] DUC-JACQUET (1973)
Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces hilbertiens auto-reproduisants.
Thèse, Université scientifique et médicale de Grenoble.

[15] ESSEEN C.G. (1945)
Fourier analysis of distribution functions
Acta Maths 77, p. 1-125.

[8] FOURGEAUD C.-FUCHS A. (1967)
Statistique - Dunod.

[37] GADIAGA D.
Sur une classe de tests qui contient le test du χ^2
Le cas d'un processus stationnaire
(article en préparation).

[32] GUILBART C. (1978)
Estimation par projections. Tests à noyaux.
Thèse d'Etat, Lille I.

[11] GRENANDER U.-ROSENBLATT R. (1957)
Statistical Analysis of stationary time series
Wiley, New-York.

[4] IBRAGIMOV I.A.-LINNIK I.U.V. (1965)
Independent and stationnary sequences of random variables
Nauka, Moscow.

[34] IBRAGIMOV I.A. (1962)
Some limit theorems for stationnary processes theory of Probability and its applications ; vol. VII, n° 4, p. 349-382.

[18] MATTHES J.K. (1975)
The multivariate central limit theorem for regular convex sets
The Annals of Probability, vol. 3, n° 3, p. 503-525.

[39] NADARAJA E.A. (1976)
A quadratic measure of the deviation of a density estimation theory
of Proba. and applications (21) p. 843-850.

[26] NEVEU J. (1970)
Bases mathématiques du calcul des probabilités
Maçon et Cie.

[38] NEYMAN J. (1937)
"Smooth test" for goodness of fit
Skand. Aktuar. 20, 149.

[14] PARREAU M. (1971-72)
Compléments d'Analyse : Cours polycopié
U.E.R. de Mathématiques, Lille I.

[13] RIESZ et NAGY
Leçons d'Analyse fonctionnelle.

[35] ROSENBLATT M. (1956)
A central limit theorem and a strong mixing condition
proceeding vol. 42, p. 43-47.

[17] SAZONOV V.V. (1968)
On ω^2 criterion
Sankhya A, 30, p. 205-210.

[16] SAZONOV V.V. (1968)
On the multidimensional central limit theorem
Sankhya A, 30, p. 191-206.

[19] SAZONOV V.V. (1974)
A new general estimate of the rate of convergence in the central
limit theorem in R^k.
Zroc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 71, n° 1, p. 118-121.

[22] SAZONOV V.V. (1981)
Normal approximation - Some recent advances.
Lectures notes in mathematics n° 879.
Springer Verlag.

[20] SWEETING T.J. (1977)
Speeds of convergence for the multidimensional central limit theorem
the Annals of Probability, vol. 5, n° 1, p. 28-41.

[1] WALTER Philipp (1969)
The central limit problem for mixing sequences of random variables
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 12, p. 155-171.

[25] WALTER Philipp (1969)
The remainder in the central limit theorem for mixing stochastic processes.
A.M.S. Vol. 40, n° 2, p. 601-609.

[23] WATSON
Theory of Bessel functions.

[42] Z. GOLD RUTH (1962)
Tests auxiliary to χ^2 tests in a Markov chain.
Columbia University.

RÉSUMÉ

Ce travail est essentiellement consacré à l'étude d'une classe de tests non paramétriques basés sur des statistiques fonctionnelles pour un processus stationnaire. Le fameux test du χ^2 fait partie de cette classe.

Les éléments d'une matrice de covariances sont estimés, des lois limites obtenues.

Des résultats relatifs à la vitesse de convergence sont fournis, ainsi que des exemples.

On étudie les propriétés asymptotiques du test sous diverses alternatives.

Enfin des simulations illustrent cette étude.

MOTS CLÉS : - PROCESSUS STATIONNAIRE ,

- STATISTIQUE FONCTIONNELLE ,
- TEST NON PARAMETRIQUE ,
- SIMULATION .