N° d'ordre : 924

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3e CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

ROGER Patrick

FONCTION DE CONCENTRATION ET MESURES ALEATOIRES. ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES DE CONTINUITE.

MEMBRES DU JURY :

Président : J. GEFFROY (Université de Paris VI)

Rapporteur : P. JACOB } Université de Lille I

Examinateur : D. BOSQ } Université de Lille I

SOUTENUE LE 29 SEPTEMBRE 1982.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. GEFFROY qui me fait aujourd'hui l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Depuis deux ans, Monsieur le Professeur P. JACOB a dirigé mes travaux. Son "intuition" est à l'origine de la plupart des résultats obtenus et sa rigueur a permis la mise au point de bon nombre de démonstrations. Pour ces qualités et la patience dont il a fait preuve à mon égard, je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur D. BOSQ a bien voulu accepter de juger ce travail ; qu'il en soit vivement remercié.

J'ai beaucoup apprécié l'aide amicale que j'ai trouvée auprès de Monsieur G. BARBAISE ; les discussions que nous avons eues m'ont été très profitables et à cette occasion, je l'en remercie.

En ce jour, j'ai une pensée reconnaissante pour Madame MATTHIEU, Professeur au Lycée Paul Hazard d'Armentières qui m'a initialement donné le goût des Mathématiques.

Madame Lengaigne a dactylographié cette thèse avec diligence et compétence ; qu'il me soit permis de la remercier chaleureusement ainsi que tous les gens ayant participé à la réalisation matérielle de ce travail.

INTRODUCTION.

La fonction de concentration d'une variable aléatoire réelle a été définie par P. Levy dans sa monographie sur la théorie de l'addition des variables aléatoires ([12], 1937). La plupart des travaux sur le sujet sont relatifs aux inégalités reliant concentration et variance d'une variable aléatoire réelle ([6], [8]) ou aux relations entre la concentration d'une somme de variables aléatoires indépendantes et celle de ses composantes ([11], [17], [18]). Pour généraliser cette notion à des espaces de dimension supérieure ou un, la première difficulté à surmonter réside dans le choix d'une définition ; en effet sur $\mathbb{R}$ la fonction de concentration (f.c.) est définie à partir de probabilités d'intervalles et peut donc être étendue de différentes manières aux espaces $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ notamment en utilisant les mesures de boules ([6]), ou de convexes ([5]). Dans ce travail nous avons choisi la première des solutions précédentes car elle permet de se placer dans des espaces métriques généraux et de plus se calcule simplement au niveau des applications.

Hentgartner et Théodorescu ont consacré un ouvrage à l'étude de ces fonctions [8] et ont donné des exemples de ces extensions au cas multidimensionnel sachant qu'il n'existe pas de "meilleure" définition dans le cas général ; ils ont abordé la généralisation au cas de probabilités définies sur la tribu borélienne d'un espace métrique séparable. C'est dans ce cadre que nous avons réalisé ce travail en nous attachant particulièrement aux problèmes de convergence des suites de f.c. de mesures positives.

Certaines propriétés importantes nécessitent des hypothèses complémentaires sur la structure de l'espace des états cependant tous les résultats sont applicables aux mesures définies sur les espaces de dimension finie. Il semble d'ailleurs que ce soit le champ privilégié d'application de cette notion essentiellement spatiale qu'est la concentration. Plus particulièrement, elle intervient naturellement dans l'étude de phénomènes géographiques et l'auteur l'a utilisée dans le domaine du marketing pour des problèmes de localisation de points de vente ([25]).

Dans le chapitre I, nous commençons par rappeler certains résultats sur la convergence faible à distance finie des mesures positives, essentiellement dûs à Geffroy, Zeboulon, Quidel ([7], [16], [23]). Nous étudions les propriétés générales des fonctions de concentration de mesures bornées, en particulier la continuité à droite qui sert de base au dernier chapitre. Ce résultat est montré, d'une part lorsque l'espace des états est hilbertien, d'autre part lorsqu'il est métrique séparable et tel que ses boules fermées sont compactes. Nous présentons une définition sous forme intégrale de la "concentration à distance finie" d'une mesure positive, qui conserve les principales propriétés des f.c. de mesures bornées. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la construction d'un algorithme de calcul de la f.c. d'une répartition ponctuelle dans $\mathbb{R}^n$. Pour la clarté de l'exposé nous avons traité le cas de répartitions sans points doubles mais il n'y a aucune difficulté d'adaptation au cas de mesures discrètes à support fini. La convergence de cet algorithme est montrée à l'aide de la propriété de continuité à droite. Nous établissons ensuite que la seule connaissance de la matrice de distances entre points de la répartition suffit à déterminer la concentration cependant nous n'avons pu exploiter ce résultat dans les applications.

Le chapitre II est consacré à l'établissement de conditions suffisantes de continuité de l'application qui à une mesure fait correspondre la valeur de sa concentration pour un rayon fixé ; les résultats que nous obtenons sont du même type que ceux de Billingsley - Topsoe ([3]) dans leur étude des classes uniformes. La convergence uniforme par rapport à t d'une suite de f.c. de mesures bornées est ensuite montrée en faisant l'hypothèse que les boules de l'espace métrique considéré sont relativement compactes. Nous étudions ensuite les convergences stochastiques dans le cas de mesures aléatoires et généralisons les conditions obtenues au début de ce chapitre.

Dans le troisième chapitre nous étudions la f.c. d'une mesure bornée comme élément de l'espace fonctionnel $D[0, +\infty[$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles, continues à droite et possédant une limite à gauche en tout point ; cet espace est une extension de l'espace $D[0,1]$ bien connu ([2], [20]). Il est tout d'abord muni de la topologie J_1 de Skorokhod ; nous montrons à l'aide d'un contre-exemple que la f.c. n'est en général pas continue en temps qu'application de l'espace M_b des mesures bornées muni de la métrique de Geffroy dans $D[0, +\infty[$ muni de la topologie J_1. Toutefois cette propriété est vérifiée en tout point μ de M_b tel que la f.c. de μ est continue comme application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Nous introduisons alors la topologie M_1 de Skorokhod qui est plus faible que J_1 et pour laquelle nous définissons une métrique. Si $D[0, +\infty[$ est muni de cette topologie la fonction de concentration est alors continue. Nous obtenons ensuite des résultats analogues pour les mesures aléatoires et terminons en présentant une méthode d'approximation de la f.c. dans l'espace fonctionnel déjà cité.

SOMMAIRE.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES FONCTIONS DE CONCENTRATION.

Précisons tout d'abord les notations les plus utilisées dans la suite :

- X désigne toujours un espace métrique séparable même si la séparabilité n'est pas explicitement rappelée.

- $\mathcal{B}_X$ est la tribu borélienne de X .

- $\mathcal{M}$ est l'ensemble des mesures positives sur $\mathcal{B}_X$, finies sur l'anneau des boréliens bornés (noté $\mathcal{B}_b$).

- $\mathcal{M}_b$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ constitué des éléments bornés.

- $\mathcal{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ des probabilités.

- d désigne la distance sur X.

- $B(x,t)$ (resp. $B^o(x,t)$) est la boule fermée (resp. ouverte) de centre $x \in X$ et de rayon $t \in \mathbb{R}^+$.

- ∂B est la frontière du borélien $B \in \mathcal{B}_X$.

- B^ε (resp. $B^{\varepsilon]}$) est le dilaté ouvert (resp. fermé) d'ordre ε du borélien B, c'est-à-dire :

$$B^\varepsilon = \{x \in X \ ; \ d(x,B) < \varepsilon\}$$

$$B^{\varepsilon]} = \{x \in X \ ; \ d(x,B) \leq \varepsilon\}$$

- On note $\partial_\delta B$ (resp. $\partial_{\delta]} B$) la δ frontière ouverte (resp. fermée) de B

$$\partial_\delta B = B^\delta \cap (B^c)^\delta = \{x \in X \; ; \; d(x,B) < \delta \text{ et } d(x,B^c) < \delta\}$$

$$\partial_{\delta]} B = B^{\delta]} \cap (B^c)^{\delta]}$$

I - CONVERGENCE FAIBLE A DISTANCE FINIE SUR M.-

1 - *Construction de la métrique* ρ.

I-1 - Définition.- On appelle distance de la convergence faible à distance finie la métrique ρ construite de la façon suivante sur M :

Soit O une origine fixée arbitrairement dans X ; pour tout nombre $r \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall(\mu,\nu) \in M^2 \quad \sigma_r(\mu,\nu) = \operatorname{Inf}\{\delta > 0 \;/\; \forall A \in \mathcal{B}_X \text{ tel que } A^\delta \subset B(O,r) \quad \mu(A) \leq \nu(A^\delta) + \delta\}$$

$$\forall(\mu,\nu) \in M^2 \quad \rho_r(\mu,\nu) = \operatorname{Max}(\sigma_r(\mu,\nu), \sigma_r(\nu,\mu))$$

$$\forall(\mu,\nu) \in M^2 \quad \rho(\mu,\nu) = \sum_{r=1}^{+\infty} 2^{-r} \frac{\rho_r(\mu,\nu)}{1 + \rho_r(\mu,\nu)}$$

Remarque : Le choix du point O est sans importance dans la mesure ou la métrique ρ' définie à partir d'un point O' différent de O est uniformément équivalente à ρ (cf. [23] p. 11).

Nous noterons $\mathcal{B}_M$ la tribu borélienne de l'espace métrique (M,ρ).

Comme le montre le théorème suivant, la construction de la métrique ρ permet d'envisager une notion de convergence de mesures σ-finies, finies sur les boréliens bornés, voisine de la convergence faible classique.

I-2 - Théorème.- ([23] p. 14).- *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μ *des éléments de* M. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$.

2) $\forall A \in \mathcal{B}_b$ *vérifiant* $\mu(\partial A) = 0$ *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

2 - Mesures aléatoires.

I-3 - Définition.- Soit T une tribu de parties de M; on dit que (M,T) est adapté à $(X,\mathcal{B}_X)$ si l'application

$$\phi_B : M \to \mathbb{R}^+$$

$$: \mu \to \phi_B(\mu) = \mu(B)$$ est mesurable au sens de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tribu borélienne de $\mathbb{R}$, et ceci pour tout B de $\mathcal{B}_X$.

I-4 - Définition.- Soit (M,T) espace mesurable adapté à $(X,\mathcal{B}_X)$, (Ω,A,P) un espace probabilisé. On appelle mesure aléatoire sur $(X,\mathcal{B}_X)$ toute application mesurable de (Ω,A) dans (M,T).

Remarque : L'espace $(M,\mathcal{B}_M)$ est adapté à $(X,\mathcal{B}_X)$ et de plus la tribu $\mathcal{B}_M$ est engendrée par les applications ϕ_B .

I-5 - Proposition.- *Pour tout* B *de* $\mathcal{B}_X$, *l'application de* Ω *dans* $\mathbb{R}^+$ *définie par*

$$\omega \to \mu^{\omega}(B) = \phi_B \circ \mu^{\bullet}(\omega)$$

est une variable aléatoire ($\mu^{\bullet}$ *désigne une mesure aléatoire).*

La proposition suivante, dont la démonstration détaillée figure dans [23] nous sera très utile pour étudier les propriétés de convergence de suites de fonctions de concentration de mesures aléatoires.

I-6 - <u>*Proposition*</u>.- *Soit* (M,T) *un espace mesurable de mesures positives adapté à un espace métrique* $(X,\mathcal{B}_X)$, $\mu^\bullet$ *une mesure aléatoire définie sur un espace probabilisé* (Ω,A,P), *à valeurs dans* (M,T) *et* B *un élément de la tribu* $\mathcal{B}_X$.

On suppose que $\mu^\bullet(B) < +\infty$ *presque sûrement et on note* $\{B_i, i \in J\}$ *une partition quelconque de* B *en boréliens* (J *est un ensemble d'indices) alors l'ensemble* I *défini par*

$$I = \{i \in J \ / \ P[\mu^\bullet(B_i) > 0] > 0\}$$

est fini ou dénombrable.

La métrique ρ construite précédemment permet de définir les différentes convergences stochastiques de mesures aléatoires : il apparaît qu'elles sont équivalentes aux convergences stochastiques du même type pour les mesures des boréliens bornés de X.

I-7 - <u>*Théorème*</u>.- *Soit* $(\mu^\bullet_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\mu^\bullet$ *des mesures aléatoires définies sur* (Ω,A,P) *à valeurs dans* (M,T). *Pour que* $\mu^\bullet_n$ *converge presque sûrement (resp. en probabilité) vers* $\mu^\bullet$, *il faut et il suffit que* $\mu^\bullet_n(A)$ *converge presque surement (resp. en probabilité) vers* $\mu^\bullet(A)$ *pour tout* A *de* $\mathcal{B}_b$ *tel que* $\mu^\bullet(\partial A) = 0$ p.s.

I-8 - <u>*Théorème*</u>.- *Avec les mêmes hypothèses que précédemment, pour que* $\mu^\bullet_n$ *converge en loi vers* $\mu^\bullet$ *dans* (M,ρ) *il faut et il suffit que pour tout entier* k *positif et tout système* $B_1,\ldots,B_k$ *d'éléments de* $\mathcal{B}_b$ *satisfaisant la relation*

$$\mu^\bullet(\partial B_i) = 0 \quad \textit{presque surement pour tout} \quad i \in \{1,\ldots,k\}$$

on ait $(\mu^\bullet_n(B_1),\ldots,\mu^\bullet_n(B_k))$ *converge en loi vers* $(\mu^\bullet(B_1),\ldots,\mu^\bullet(B_k))$

II - FONCTION DE CONCENTRATION : PROPRIETES GENERALES.-

1 - *Définitions, généralités.*

Pour une probabilité définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, P. Levy ([12]) a donné de la fonction de concentration la définition suivante.

II-1 - Définition.- On appelle fonction de concentration de la probabilité P définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la fonction Q de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad Q(P,t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} P([x, x+t]) \quad .$$

Pour définir la concentration d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_b$ nous adopterons dans les pages suivantes la généralisation la plus couramment utilisée de la définition précédente (cf. [8] p. 121).

II-2 - Définition.- Soit $\mu \in \mathcal{M}_b$; on appelle fonction de concentration de μ l'application Q de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad Q(\mu,t) = \sup_{x \in X} \mu(B(x,t)) \quad .$$

Remarques :

a) La généralisation de la définition II.2 vient du fait qu'assez naturellement on passe des intervalles sur la droite aux boules dans des espaces vectoriels de dimension supérieure ou plus généralement dans des espaces métriques. Cependant, si l'on se restreint aux espaces vectoriels, il est une autre définition de la concentration qui peut sembler satisfaisante et qui ne privilégie pas les ensembles particuliers que sont les boules.

Si par exemple $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des convexes fermés de X et λ la mesure de Lebesgue sur X; on peut alors définir une fonction de concentration Q' par $\forall t \in \mathbb{R}^+ \; Q'(\mu,t) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ \lambda(C)=t}} \mu(C)$.

Cette définition n'est toutefois aisément utilisable que si l'on se restreint aux mesures bornées absolument continues par rapport à λ.

b) La définition II.2 a été donnée pour les mesures bornées. L'objet de la proposition suivante est de montrer que dans le cas d'éléments de M (non bornés), cette définition perd beaucoup de son intérêt.

II-3 - <u>Proposition</u>.- Posons $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* μ *un élément de* M *; les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\exists t' \in \mathbb{R}^{+*}$ t.q $\sup\limits_{x \in X} \mu(B(x,t')) = +\infty$

b) $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sup\limits_{x \in X} \mu(B(x,t)) = +\infty$.

<u>Démonstration</u> : (b) $\Longrightarrow$ (a) est évident.

Montrons (a) $\Longrightarrow$ (b) ;

Soit t_o la borne inférieure de l'ensemble $\{t \; ; \sup\limits_{x \in X} \mu(B(x,t)) = +\infty\}$, nous supposerons que t_o est strictement positif (dans le cas contraire la démonstration est terminée).

La fonction $t \to \mu(B(x,t))$ est croissante pour tout x de X donc pour tout $t > t_o$ $\sup\limits_{x \in X} \mu(B(x,t)) = +\infty$.

Soit $h > 0$ et $x_o \in X$; la boule $B(x_o, t_o + h)$ est compacte donc peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon strictement inférieur à t_o (notons t_1 un tel rayon) :

$$B(x_o, t_o + h) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, t_1)$$

où les $(y_i)_{i=1,\dots,N}$ sont les centres des boules utilisées pour recouvrir $B(x_o, t_o + h)$; ces points dépendent de x_o nous les noterons $(y_i(x_o))_{i=1,\dots,N}$.

Soit $z_o \in X$ un point différent de x_o la boule $B(z_o, t_o + h)$ peut être recouverte de la même façon que $B(x_o, t_o + h)$ en translatant du vecteur $(z_o - x_o)$ les boules $B(y_i(x_o), t_1)$, $i \in \{1,\ldots,N\}$

d'où $$B(z_o, t_o + h) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i(z_o), t_1)$$

Pour tout x de X on a alors

$$\mu(B(x, t_o + h)) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(B(y_i(x), t_1)) \qquad (*)$$

Notons i_x l'indice de $\{1,\ldots,N\}$ tel que

$$\mu(B(y_{i_x}(x), t_1)) = \operatorname*{Max}_{i=1}^{N} \mu(B(y_i(x), t_1))$$

On déduit de l'inégalité (*)

$$\mu(B(x, t_o + h)) \leq N\, \mu(B(y_{i_x}(x), t_1))$$

d'où $$\sup_{x\in X} \mu(B(x, t_o + h)) \leq N \sup_{x\in X} \mu(B(y_{i_x}(x), t_1)) \leq N \sup_{x\in X} \mu(B(x, t_1))$$

ce qui montre que :

$$\sup_{x\in X} \mu(B(x, t_1)) = +\infty$$

et contredit la définition de t_o.

Nous présentons donc maintenant une définition de la "concentration à distance finie" pour les éléments de M afin de pallier l'inconvénient montré dans la proposition précédente.

Dans la définition ci-après X_r désigne la boule de centre O et de rayon r, O étant le point ayant servi à construire la métrique ρ.

II-4 - Définition.- On appelle fonction de concentration d'un élément μ de M la fonction $\tilde{Q}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \tilde{Q}(\mu,t) = \int_0^{+\infty} e^{-r} \frac{Q_r(\mu,t)}{1 + Q_r(\mu,t)} \, dr$$

avec $Q_r(\mu,t) = \sup\limits_{x \in X_r} \mu(B_r(x,t))$ et $B_r(x,t)$ la boule fermée de centre x et de rayon t dans le sous-espace métrique X_r.

Remarques :

a) La justification de cette définition nécessite la mesurabilité de l'application $r \to \dfrac{Q_r(\mu,t)}{1 + Q_r(\mu,t)}$ or cette application est croissante ($r \to Q_r(\mu,t)$ est croissante de même que $x \to \dfrac{x}{1+x}$) . Nous montrerons au chapitre II que dans certains cas l'application $r \to Q_r(\mu,t)$ est continue à droite.

b) Les fonctions Q_r peuvent en fait être considérées comme des restrictions de Q aux sous-espaces métriques X_r , $r \in \mathbb{R}^+$; c'est pourquoi la plupart des résultats que nous établirons auront trait aux éléments de M_b en utilisant la définition II.2 ; le cas général ($\mu \in M$) sera le plus souvent traité en corollaire.

Dans la suite de ce paragraphe nous montrons les propriétés générales nécessaires pour aborder les problèmes de convergence des chapitres suivants.

II-5 - Proposition.- Soit $\mu \in M_b$ *; la fonction* $Q(\mu,.)$ *possède les propriétés suivantes :*

a) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $Q(\mu,t) < +\infty$

b) $Q(\mu,.)$ *est une fonction croissante de* t.

c) Si μ *n'est pas identiquement nulle, pour tout* $t > 0$, $Q(\mu, t) > 0$.

Démonstration :

a) Il suffit de remarquer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ , \quad Q(\mu,t) \leq \mu(X) < +\infty \quad \text{car} \quad \mu \in M_b$$

b) $t > t' \Longrightarrow \mu(B(x,t)) \geq \mu(B(x,t')) \Longrightarrow Q(\mu,t) \geq Q(\mu,t')$

c) X est séparable ; pour tout $t > 0$ il existe un recouvrement dénombrable de X par des boules de rayon t. Notons $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite des centres des boules du recouvrement :

$$\left.\begin{array}{l} X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B(x_k,t) \\ \mu(X) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sup_{x\in X} \mu(B(x,t)) > 0 .$$

II-6 - Proposition.- Soit $\mu \in M_b$ *; posons*

$$N_t = \{x \in X \; ; \; Q(\mu,t) = \mu(B(x,t))\}$$

alors N_t *est fermé dans* X.

Démonstration : Notons $N_{t,\eta} = \{x \in X \; ; \; Q(\mu,t) - \eta \leq \mu(B(x,t))\}$ $N_t = \bigcap_{\eta>0} N_{t,\eta}$, il suffit donc de montrer que $N_{t,\eta}$ est fermé dans X pour $\eta > 0$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'éléments de $N_{t,\eta}$ de limite $x \in X$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* , \quad n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow d(x_n,x) < \varepsilon$$

donc $Q(\mu,t) - \eta \leq \mu(B(x_n,t)) \leq \mu(B(x, t + \varepsilon))$, de plus $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu(B(x,t + \varepsilon)) = \mu(B(x,t))$.

Ce qui montre que $Q(\mu,t) - \eta \leq \mu(B(x,t))$ c'est-à-dire $x \in N_{t,\eta}$ et par conséquent $N_{t,\eta}$ est fermé dans X.

II-7 - Proposition.- *Soit* $\mu \in M_b$, $x \in X$, $t \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $\mu(\partial B(x,t)) = 0$ *alors* $\phi_{B(x,t)}$ *est continue au point* μ.

Démonstration : Evidente (cf. théorème I-2) ; ce qui servira principalement dans la suite est la semi-continuité inférieure de $\phi_{B(x,t)}$.

2 - Propriétés de continuité.

Dans les deux théorèmes suivants nous montrons que pour tout t de $\mathbb{R}^+$ la fonction $t \to Q(\mu,t)$ est continue à droite. Nous ferons cependant certaines hypothèses sur l'espace X ; dans le premier cas nous supposerons que les boules fermées de X sont compactes (cas des espaces vectoriels de dimension finie ou espaces de Montel ([19] p. 339)) alors que le deuxième résultat sera montré par des techniques tout à fait différentes lorsque X est un espace de Hilbert séparable.

II-8 - Théorème.- *Soit* X *un espace métrique séparable dont les boules fermées sont compactes et* μ *un élément de* M_b *; la fonction* $t \to Q(\mu,t)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\exists x \in X$ *tel que* $Q(\mu,t) = \mu(B(x,t))$

b) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $Q(\mu,.)$ *est continue à droite au point* t .

Démonstration :

a) Posons $\theta = Q(\mu,t)$, nous supposerons $\theta > 0$ (le cas $\theta = 0$ est trivial). Par définition de Q, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que $|\mu(B(x_\varepsilon,t)) - Q(\mu,t)| < \varepsilon$.

On peut donc trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(B(x_n,t)) = \theta.$$

On peut supposer sans perte de généralité qu'il existe δ, $\theta > \delta > 0$ tel que, pour tout n, $\mu(B(x_n,t)) > \delta$ (si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne vérifie pas cette propriété, elle possède une sous-suite qui la vérifie car $\theta > 0$).

Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite convergente.

- 2 cas sont à envisager :

1) $B(x_1,t) \cap B(x_n,t) \neq \emptyset$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2) $\exists N_o \in \mathbb{N}^*$, tel que $B(x_1,t) \cap B(x_{N_o},t) = \emptyset$.

Premier cas -

Soit $y_n \in B(x_1,t) \cap B(x_n,t)$

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,y_n) + d(x_n,y_n) \leq 2t \quad .$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est incluse dans $B(x_1,2t)$ qui est compacte, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de limite $x \in X$.

Le lemme suivant nous permettra de conclure :

II-9 - Lemme.- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite convergente d'éléments de X de limite $x \in X$, on a alors :

$$\limsup_n \mu(B(x_n,t)) \leq \mu(B(x,t)) \quad \textit{pour tout } t \textit{ de } \mathbb{R}^+$$

Démonstration du lemme :

$$B(x_n,t) \subset B(x,t + d(x_n,x)) \Longrightarrow \mu(B(x_n,t)) \leq \mu(B(x,t + d(x_n,x)))$$

On sait d'autre part que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B(x, t + d(x_n,x)) = \mu(B(x,t))$ on peut donc conclure $\limsup_n \mu(B(x_n,t)) \leq \mu(B(x,t))$.

Reprenons la démonstration du théorème :

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(B(x_{n_k},t)) = \theta = Q(\mu,t) \quad \text{par hypothèse sur la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} .$$

Par application du lemme II-9 on a $Q(\mu,t) \leq \mu(B(x,t))$. La définition de Q entraine que l'on a en fait l'égalité.

Deuxième cas -

$$\exists N_o \in \mathbb{N}^* , \ B(x_1,t) \cap B(x_{N_o},t) = \emptyset \qquad (*)$$

On supposera que N_o est le plus petit indice vérifiant $(*)$.

Posons $B_1 = B(x_1,t) \cup B(x_{N_o},t)$ on se ramène aux deux cas de départ :

1) $B_1 \cap B(x_n,t) \neq \emptyset$ pour tout $n > N_o$

2) $\exists N_1 > N_o$ tel que $B_1 \cap B(x_{N_1},t) = \emptyset$.

De la même façon que précédemment dans le cas n° 1 on peut inclure la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans la boule de centre x_1 et de rayon $2t + d(x_1,x_{N_o})$ qui est compacte, on conclut alors comme précédemment.

Dans le cas n° 2 on itère le processus en posant $B_2 = B_1 \cup B(x_{N_1},t)$ où N_1 est le plus petit indice tel que $B_1 \cap B(x_{N_1},t) = \emptyset$.

Si le processus ne se termine pas après un nombre fini d'itérations comme au premier cas, on aura alors construit une suite de boules disjointes $B(x_{N_k},t)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \mu(B(x_{N_k},t)) > \delta$, ce qui contredit le fait que μ est bornée.

b) Soit $t_o \in \mathbb{R}^+$; montrons que $Q(\mu,.)$ est continue à droite en t_o .

Notons $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs de limite t_o . En utilisant la partie (a) du théorème, on peut écrire :

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X \quad \text{telle que} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mu(B(x_n,t_n)) = Q(\mu,t_n) \quad .$$

La fonction $Q(\mu,.)$ est croissante d'où $\mu(B(x_n,t_n)) \geq Q(\mu,t_o)$ (*) .

1) Supposons que toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite convergente.

Notons $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente d'une sous-suite quelconque de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et x_o sa limite.

Montrons que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu(B(x_{n_k},t_{n_k})) = \mu(B(x_o,t_o))$.

Fixons $\varepsilon' > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \quad , \quad k \geq N \Longrightarrow \begin{cases} d(x_{n_k},x_o) < \varepsilon'/2 \\ \\ |t_{n_k} - t_o| < \varepsilon'/2 \end{cases}$$

d'où $B(x_{n_k},t_{n_k}) \subset B(x_o,t_o + \varepsilon')$ pour $k \geq N$ (il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire).

Nous avons vu précédemment que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mu(B(x_o,t_o + \varepsilon')) = \mu(B(x_o,t_o))$ par conséquent

$$\limsup_{k\to+\infty} \mu(B(x_{n_k},t_{n_k})) \leq \mu(B(x_o,t_o)) \leq Q(\mu,t_o) \ .$$

Par l'inégalité (*) on a de plus $\liminf\limits_{k\to+\infty} \mu(B(x_{n_k},t_{n_k})) \geq \mu(B(x_o,t_o))$

donc $$\lim_{k\to+\infty} \mu(B(x_{n_k},t_{n_k})) = \mu(B(x_o,t_o))$$

c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty} Q(\mu,t_{n_k}) = Q(\mu,t_o)$, la fonction $Q(\mu,.)$ est croissante, ce qui permet de conclure.

2) Supposons maintenant qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui ne possède pas de sous-suite convergente. Nous noterons encore $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cette sous-suite afin de ne pas alourdir les notations.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(Q(\mu,t_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers $Q(\mu,t_o)$ alors

$$\exists \varepsilon > 0 \ , \ |\mu(B(x_{n_p},t_{n_p})) - Q(\mu,t_o)| > \varepsilon$$

pour une sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ de la sous-suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

L'hypothèse faite sur $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ entraîne que tout compact ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Soit k_1 ce nombre, notons $(y_j^1)_{j=1,\dots,k_1}$ les points de $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ inclus dans $B(x_{n_1},t_{n_1})$.

Posons $t_1' = \mathrm{Max}(t_j^1)_{j=1,\dots,k_1}$, t_j^1 étant le rayon correspondant à y_j^1 ; j_1 est le plus petit indice p tel que $x_{n_p} \notin B(x_{n_1},t_{n_1} + t_1')$.

Par construction, $B(x_{n_1},t_{n_1}) \cap B(x_{n_{j_1}},t_{n_{j_1}}) = \emptyset$ (la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante).

Remarquons que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $\mu(B(x_{n_p},t_{n_p})) > \varepsilon$ car

$$\mu(B(x_{n_p},t_{n_p})) = Q(\mu,t_{n_p}) \geq Q(\mu,t_o)$$

et $$|Q(\mu,t_{n_p}) - Q(\mu,t_o)| > \varepsilon$$

On a alors $\mu(B(x_{n_1},t_{n_1}) \cup B(x_{n_{j_1}},t_{n_{j_1}})) > 2\varepsilon$.

Soit B_2 une boule centrée en x_{n_1} et contenant $B(x_{n_1},t_{n_1}) \cup B(x_{n_{j_1}},t_{n_{j_1}})$.

Comme précédemment, on note (y_j^2) $j = 1,\ldots,k_2$ les points de $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ inclus dans B_2 et l'on pose $t'_2 = \operatorname{Max}_{j=1}^{k_2} t_j^2$.

Si l'on appelle s_2 le rayon de B_2 la boule $B(x_{n_1},s_2 + t'_2)$ a une μ-mesure supérieure à 2ε.

On pose j_2 le plus petit indice p tel que $x_{n_p} \notin B(x_{n_1},s_2 + t'_2)$ alors $B(x_{n_{j_2}},t_{n_{j_2}}) \cap B(x_{n_1},s_2) = \emptyset$.

On construit ainsi une suite B_1 , B_2 ,..., B_p ,... telles que $\mu(B_p) > p\varepsilon$; ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle μ est bornée.

Remarque : Si $\mu \in \mathcal{M}$, les propositions II.5 , II.6 et le théorème II.8 sont encore vrais pour les fonctions $Q_r(\mu,.)$ car μ est bornée sur $B(0,r)$.

Dans le théorème suivant X est un espace de Hilbert séparable ; $\|\ \|$, $<\ >$ désignent respectivement la norme et le produit scalaire sur X.

II-10 - Théorème.- Soit $\mu \in \mathcal{M}_b$ *; la fonction* $Q(\mu,.)$ *est continue à droite en tout point* t *de* $\mathbb{R}^+$

Démonstration :

a) X est un espace métrique complet donc μ est tendue (cf. [2] p. 10, théorème I-4) d'où :

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \subset X$ tel que K_ε est compact et $\mu(K_\varepsilon) > \mu(X) - \varepsilon$.

Notons C_ε l'enveloppe convexe fermée équilibrée de K_ε ; C_ε est compact (corollaire 35.7 p. 140 de [1]).

$$C_\varepsilon \supset K_\varepsilon \Longrightarrow \mu(C_\varepsilon) > \mu(X) - \varepsilon$$

Montrons que $Q(\mu,.)$ est continue à droite au point $t \in \mathbb{R}^+$

$$Q(\mu,t) = \sup_{x\in X} \mu(B(x,t)) \leq \sup_{x\in X} \mu(B(x,t) \cap C_\varepsilon) + \varepsilon$$

$$= \mathrm{Max}(\sup_{x\in C_\varepsilon} \mu(B(x,t) \cap C_\varepsilon), \sup_{x\in C_\varepsilon^c} \mu(B(x,t) \cap C_\varepsilon)) + \varepsilon.$$

Supposons tout d'abord que pour tout t_o de $\mathbb{R}^+$ et tout x de C_ε^c il existe $y \in C_\varepsilon$ tel que $B(y,t_o) \cap C_\varepsilon \supset B(x,t_o) \cap C_\varepsilon$ (cette affirmation sera démontrée dans la partie (b) ci-après).

On a alors : $Q(\mu,t) \leq \sup_{x\in C_\varepsilon} \mu(B(x,t) \cap C_\varepsilon) + \varepsilon$

C_ε est compact ; le théorème II.8 implique que la fonction de concentration de la restriction de μ à C_ε est continue à droite en t.

Par conséquent, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs de limite $t \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\forall\delta > 0 , \exists N \in \mathbb{N}^* , \quad n \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in C_\varepsilon} \mu(B(x,t_n) \cap C_\varepsilon) \leq \sup_{x\in C_\varepsilon} \mu(B(x,t) \cap C_\varepsilon) + \delta$$

d'où $Q(\mu,t_n) \leq \sup_{x\in C_\varepsilon} \mu(B(x,t_n) \cap C_\varepsilon) + \varepsilon$

$$\leq \sup_{x\in C_\varepsilon} \mu(B(x,t) \cap C_\varepsilon) + \varepsilon + \delta \leq Q(\mu,t) + \varepsilon + \delta.$$

D'autre part $Q(\mu,.)$ est croissante, ce qui entraîne que :

$$Q(\mu,t) \leq Q(\mu,t_n) \leq Q(\mu,t) + \varepsilon + \delta$$

pour tout couple $(\varepsilon,\delta) \in \mathbb{R}^{+2}$ donc $Q(\mu,.)$ est continue à droite au point t.

b) Montrons que pour tout $(\varepsilon,x,t) \in \mathbb{R}^{+*} \times C_\varepsilon^c \times \mathbb{R}^+$ il existe $y \in C_\varepsilon$ tel que

$$B(y,t) \cap C_\varepsilon \supset B(x,t) \cap C_\varepsilon$$

Nous supposerons que $B(x,t) \cap C_\varepsilon \neq \emptyset$ (le cas contraire est trivial).

Notons x_o la projection sur $B(x,t) \cap C_\varepsilon$ de x , et montrons que pour tout $z \in B(x,t) \cap C_\varepsilon$ $||z - x_o|| \leq ||z - x|| \leq t$.

x_o est la projection de x sur $B(x,t) \cap C_\varepsilon$ entraîne que

$$\forall z \in B(x,t) \cap C_\varepsilon \qquad Re(x - x_o, z - x_o) \leq 0$$

or $||z - x||^2 = ||z - x_o||^2 + ||x - x_o||^2 - 2\, Re(x - x_o, z - x_o)$

par conséquent $||z - x||^2 \geq ||z - x_o||^2$.

On a donc bien $B(x_o,t) \cap C_\varepsilon \supset B(x,t) \cap C_\varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

III - APPROXIMATION ET CALCUL DE LA f.c. D'UNE REPARTITION PONCTUELLE.-

III-1 - Définition (cf. [16] p. 6).- On appelle répartition ponctuelle sur X toute application f de X dans $\bar{\mathbb{N}}$ telle que l'ensemble

$$S = \{x \,/\, x \in X \,,\, f(x) > 0\}$$

soit fini ou dénombrable.

Nous appellerons effectif du borélien B pour f la quantité

$$N(f,B) = \sum_{x \in B} f(x) \quad .$$

On associe donc de manière naturelle à f une mesure μ sur $\mathcal{B}_X$ définie par $\mu(B) = N(f,B)$.

Il s'agira dans ce paragraphe de construire un algorithme permettant de calculer la fonction de concentration de la mesure μ associée à f.

III-2 - Proposition.- Soient f *et* μ *définies comme précédemment et telles que* $\sum_{x \in X} f(x) < +\infty$ *(donc* $\mu \in M_b$*) alors :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \; , \; \exists x \in X \text{ tel que } N(f,B(x,t)) = Q(\mu,t) \; .$$

Démonstration :

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $Q(\mu,t) < +\infty$ d'où par définition de Q

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tel que $Q(\mu,t) \leq N(f,B(x,t)) + \varepsilon$

Pour $\varepsilon < 1$ l'inégalité précédente se transforme en

$$Q(\mu,t) = N(f,B(x,t))$$

car $Q(\mu,t)$ et $N(f,B(x,t))$ sont entiers.

III-3 - Corollaire.- Si X *est un espace métrique séparable dont les boules fermées sont compactes (ou* X *est un espace de Hilbert)* $Q(\mu,.)$ *est une fonction étagée croissante, continue à droite et à valeurs entières.*

Nous supposerons dans la suite de ce paragraphe que $\underline{X = \mathbb{R}^p}$, $p \in \mathbb{N}^*$. f désigne une répartition ponctuelle finie sur $\mathbb{R}^p$ dont les points sont notés $x_1,\dots,x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que f est sans point double, c'est-à-dire que pour tout x de X , $f(x) \in \{0,1\}$.

t étant fixé dans la suite, nous allons décrire un processus itératif permettant de calculer la valeur de $Q(\mu,t)$; la difficulté de ce calcul provient du fait que Q est définie comme une borne supérieure sur tous les points de $\mathbb{R}^p$.

Remarquons que $Q(\mu,.)$ prend ces valeurs dans l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ et de plus est étagée. Il suffit donc de connaître les points de discontinuité de Q.

III-4 - Proposition.-

$$\operatorname*{Max}_{i=1}^{n} N(f,B(x_i,t)) \leq Q(\mu,t) \leq \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} N(f,B(x_i,2t)) .$$

Démonstration :

La première inégalité est une conséquence immédiate de la définition de Q.

$$\mathcal{N}_t = \{x \in X \;/\; Q(\mu,t) = N(f,B(x,t))\}$$

Notons k la valeur de $Q(\mu,t)$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $\{x_1(x), x_2(x), \ldots, x_k(x)\}$ l'ensemble des points de la répartition contenus dans $B(x,t)$, $x \in \mathcal{N}_t$.

$$\forall j \in \{1,\ldots,k\} \quad d(x,x_j(x)) \leq t$$

d'où $B(x_j(x),2t) \supset B(x,t) \Longrightarrow N(f,B(x,t)) \leq \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} N(f,B(x_i,2t)$

et par conséquent $\quad Q(\mu,t) \leq \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} N(f,B(x_i,2t))$.

III-5 - *Description de l'algorithme.*

Soit C le plus petit parallélépipède contenant $\{x_1,\ldots,x_n\}$
$C = \prod_{i=1}^{p} [\alpha_i,\beta_i]$, $(\alpha_i,\beta_i) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$.

On construit une suite $(C_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de quadrillages de C de la façon suivante :

$C_o = C$

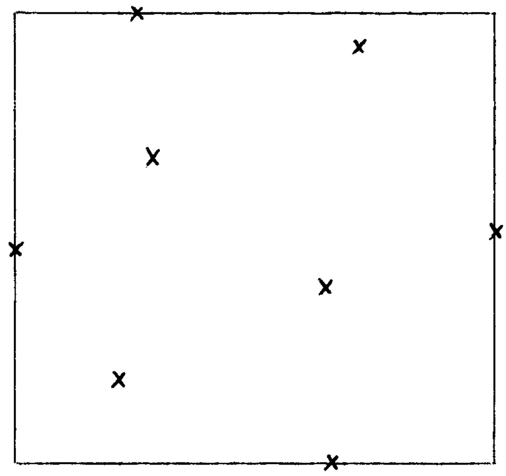
C_j est déterminé par les sommets de chaque cellule dont les coordonnées sont définies par

$$\left[(1-\varepsilon_i^j)\ \alpha_i + \varepsilon_i^j\ \beta_i\right]_{i\in\{1,\ldots,p\}}$$

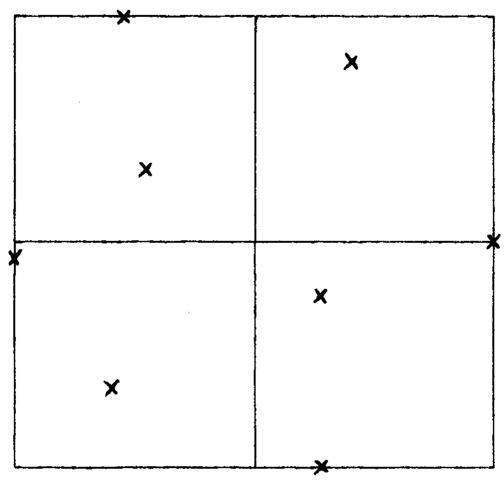
$\varepsilon_i^j = \dfrac{\ell}{2^j}$, $\ell = 0,1,\ldots,2^j$.

Ce quadrillage a donc $(2^j+1)^p$ sommets. La figure ci-après montre une telle suite de quadrillages dans $\mathbb{R}^2$

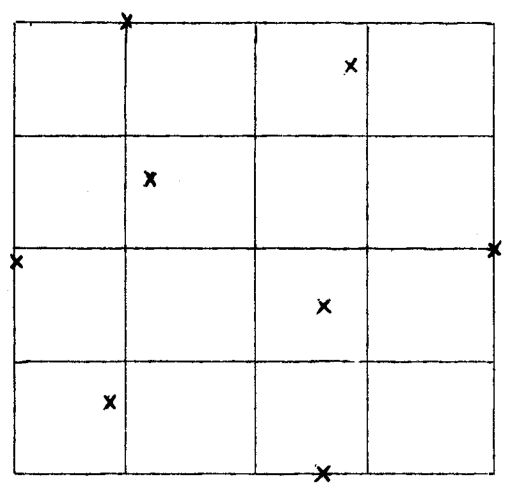
Etape 0



Etape 1



Etape 2



On note ξ_j la demi longueur des diagonales des cellules à l'étape j et a_k^j , $k \in \{1,\ldots,(2^j+1)^p\}$ les sommets de ce quadrillage.

III-6 - Proposition.-

$$Q(\mu,t) \leq \operatorname*{Max}_{k=1}^{(2^j+1)^p} N(f,B(a_k^j\ , t + \xi_j)) \leq Q(\mu,\ t + \xi_j)\ .$$

Démonstration : La deuxième inégalité est évidente par définition de $Q(\mu,.)$.

L'ensemble $\mathcal{N}_t = \{x \in X /\ Q(\mu,t) = N(f,B(x,t))\}$ est non vide (prop. III-2).

Tout élément de $\mathcal{N}_t$ appartient à une cellule du quadrillage (éventuellement à plusieurs) et donc

$$\forall x \in \mathcal{N}_t\ ,\ \exists k_o \in \{1,\ldots,(2^j+1)^p\} \text{ tel que } d(x,a_{k_o}^j) \leq \xi_j$$

par conséquent $B(x,t) \subset B(a_{k_o}^j\ , t + \xi_j)$, ce qui montre la première inégalité.

III-7 - Proposition.- Il existe j_o *, élément de* $\mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\forall j \geq j_o\ ,\ Q(\mu,t) = \operatorname*{Max}_{k=1}^{(2^j+1)^p} N(f,B(a_k^j, t + \xi_k)).$$

Démonstration : Cette proposition est une conséquence directe de la propriété de continuité à droite de l'application $t \to Q(\mu,t)$.

En effet la suite $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle ce qui entraîne que :

$$\lim_{j\to+\infty} Q(\mu,\ t + \xi_j) = Q(\mu,t)$$

La fonction Q ne peut prendre que des valeurs entières ; à partir d'un certain rang j_o on aura $Q(\mu,\ t + \xi_{j_o}) = Q(\mu,t)$.

En appliquant l'inégalité de la proposition III-6 on constate que la valeur de $Q(\mu,t)$ sera atteinte au bout d'un nombre fini d'itérations par la quantité $\displaystyle\operatorname*{Max}_{k=1}^{(2^j+1)^p} N(f,B(a_k^j, t+\xi_j))$.

En annexe sont présentées des applications de l'algorithme précédent qui montrent que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'optimum est le plus souvent faible. Cependant, au niveau du calcul il est nécessaire d'apporter des améliorations à la méthode précédente car sous cette forme, le temps - machine et la place en mémoire utilisés sont importants en raison du nombre de distances à calculer et du nombre de sommets $((2^j+1)^p)$.

La proposition III-4 nous donne une minoration de $Q(\mu,t)$ par

$$Q(\mu,t) \geq \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} N(f,B(x_i,t)) \ .$$

Dans le calcul de $Q(\mu,t)$ il est donc possible d'éliminer tous les points x_j tels que

$$N(f,B(x_j,2t)) < \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} N(f,B(x_i,t)) \qquad (*)$$

En effet si x_j est tel que l'inégalité précédente est vérifiée, il n'appartient à aucune boule $B(x,t)$, $x \in N_t$ (sinon $B(x,t) \subset B(x_j,2t)$ ce qui contredit l' inégalité (*)) .

Dans la proposition suivante $\overline{co}\{x_1,\dots,x_n\}$ désigne l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{x_1,\dots,x_n\}$.

III-8 - __Proposition.__- f et μ étant définies comme précédemment, il existe $y \in \overline{co}\{x_1,\dots,x_n\}$ tel que

$$N(f,B(y,t)) = Q(\mu,t) \ .$$

Démonstration : Soit $x^* \in N_t$, on suppose que x^* n'appartient pas à $\overline{co}\{x_1(x^*),\ldots,x_k(x^*)\}$ où $x_1(x^*)$,..., $x_k(x^*)$ sont les points de la répartition inclus dans $B(x^*,t)$ (sinon $y = x^*$ convient).

En notant x_o la projection de x^* sur $\overline{co}\{x_1(x^*),\ldots,x_k(x^*)\}$ et en raisonnant comme dans le théorème II.10 (b) on montre que

$$B(x_o,t) \cap \overline{co}\{x_1(x^*),\ldots,x_k(x^*)\} \supset B(x^*,t) \cap \overline{co}\{x_1(x^*),\ldots,x_k(x^*)\}$$

c'est-à-dire $Q(\mu,t) = N(f,B(x^*,t)) = N(f,B(x_o,t))$ ce qui achève la démonstration.

Cette proposition montre que lors des quadrillages successifs, il suffit de prendre en compte les sommets inclus dans $\overline{co}\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Le lecteur intéressé pourra se reporter par exemple aux articles de D. MAÏTI ([14], [15]) qui présente des programmes de calcul d'enveloppe convexe d'un nuage de points quand $X = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Il semble cependant que le recours à cette méthode soit délicat car le repérage des sommets à éliminer à chaque itération est assez ardu.

Nous montrons dans la proposition suivante que le calcul de la f.c. de μ nécessite simplement la connaissance des distances séparant les points de la répartition, ce qui correspond à l'idée naturelle selon laquelle la concentration ne dépend pas de la position absolue des points mais de leurs positions relatives.

III-9 - Proposition.- Soit u *une isométrie sur* X *; on note* μ_u *la mesure discrète associée à la répartition ponctuelle* f o u *; on a pour tout* t *de* $\mathbb{R}^+$

$$Q(\mu,t) = Q(\mu_u,t) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in N_t$; posons $Q(\mu,t) = k$, $k \in \mathbb{N}^*$; les points de f inclus dans $B(x,t)$ seront comme précédemment notés $x_1(x), \ldots, x_k(x)$. $\forall (x_i(x), x_j(x)) \in \{x_1(x),\ldots,x_k(x)\}^2$ $d(x_i(x), x_j(x)) \leq 2t$ u étant une isométrie $d(u(x_i(x)), u(x_j(x))) \leq 2t$ par conséquent : $Q(\mu_u,t) \geq Q(\mu,t)$ car $B(u(x),t)$ contient les points $u(x_i(x))_{i=1,\ldots,k}$.

En appliquant le même raisonnement que précédemment à la répartition $f \circ u$ et à l'isométrie u^{-1} on a

$$Q(\mu,t) \geq Q(\mu_u,t) \quad \text{d'où} \quad Q(\mu,t) = Q(\mu_u,t) .$$

Nous concluons ce paragraphe en précisant que nous n'avons pu mettre au point un algorithme efficace de calcul de Q utilisant la propriété précédente, c'est-à-dire n'utilisant que la matrice des distances entre points.

CHAPITRE II

CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS DE CONCENTRATION.

Cette deuxième partie sera consacrée à l'établissement de conditions suffisantes de convergence d'une suite de fonctions de concentration.

Nous étudierons dans un premier temps la convergence simple puis, moyennant certaines hypothèses restrictives sur l'espace métrique X nous montrerons des propriétés de convergence uniforme par rapport à t .

Les conditions que nous obtenons sont assez proches de celles de Billinsgley-Topsoe ([3]) dans leur étude des classes uniformes.

I - THEOREME DE CONVERGENCE SIMPLE.-

1 - Cas des mesures bornées.

La démonstration du théorème principal fait appel essentiellement à la coïncidence des topologies induites par les métriques de Prokhorov et Geffroy sur $\mathcal{P}$, sous-ensemble de $\mathcal{M}$ constitué des probabilités définies sur $\mathcal{B}_X$; cette propriété fait l'objet du résultat suivant :

I-1 - Proposition.- *Soit* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, P *des éléments de* $\mathcal{P}$ *;*
on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(P_n,P) = 0 \Longrightarrow \{\forall A \in \mathcal{B} \ ; \ P(\partial A) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n(A) = P(A)\}$$

Démonstration : L'implication est vérifiée pour les boréliens bornés (en vertu du théorème I.2, chapitre I).

Nous supposerons donc A non borné, $\varepsilon > 0$ fixé.

Soit k, entier naturel choisi tel que $P(B(0,k)) > 1 - \varepsilon$, où 0 est le point intervenant dans la construction de ρ.

Soit $s > k$ tel que $P(\partial B(0,s)) = 0$.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \quad , \quad n \geq N_1 \implies |P_n(B(0,s)) - P(B(0,s))| < \varepsilon$$

Par conséquent $P_n(B(0,s)) > 1 - 2\varepsilon$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} |P_n(A) - P(A)| &= |P_n(A \cap B(0,s)) + P_n(A \cap B(0,s)^c) \\ &\qquad - P(A \cap B(0,s)) - P(A \cap B(0,s)^c)| \\ &\leq |P_n(A \cap B(0,s)) - P(A \cap B(0,s))| \\ &\qquad + P_n(A \cap B(0,s)^c) + P(A \cap B(0,s)^c) \quad . \end{aligned}$$

$A \cap B(0,s)$ est un borélien borné dont la frontière est de P-mesure nulle d'où :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^* \quad , \quad n \geq N_2 \implies |P_n(A \cap B(0,s)) - P(A \cap (B(0,s))| < \varepsilon \quad .$$

D'autre part : $P_n(A \cap B(0,s)^c) < 2\varepsilon$

et $P(A \cap B(0,s)) < \varepsilon$

donc pour $n \geq \mathrm{Max}(N_1,N_2)$ $|P_n(A) - P(A)| < 4\varepsilon$.

ε étant arbitraire on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(A) = P(A)$ pour tout borélien A tel que $P(\partial A) = 0$.

I-2 - Théorème.- Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μ *des éléments de* $\mathcal{M}_b$ *;* $t \in \mathbb{R}^+$ *sous les hypothèses (a), (b), (c) on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} Q(\mu_n,t) = Q(\mu,t)$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$

b) $\lim\limits_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}\limits_{x\in X} \mu(\partial_\delta B(x,t)) = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$.

Remarque : Par un raisonnement analogue à celui du théorème I.1, chapitre II, on voit facilement que les hypothèses (a) et (c) sont équivalentes à la convergence faible de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers μ .

D'autre part, l'hypothèse (b) est vérifiée lorsque $X = \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ et μ une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Démonstration : Remarquons que si $\mu \equiv 0$, l'hypothèse (c) entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n(X) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} Q(\mu_n,t) = 0 = Q(\mu,t) .$$

Supposons maintenant $\mu \not\equiv 0$, fixons $\varepsilon > 0$; l'hypothèse (b) entraîne la semi-continuité inférieure (s.c.i.) de $\phi_{B(x,t)}$ (cf. proposition II.7 chapitre I).

On utilise alors le lemme suivant dont la démonstration figure dans [4] p. 135 .

I-3 - Lemme.- *L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions s.c.i est s.c.i.* .

On déduit de ce lemme que $\sup\limits_{x\in X} \phi_{B(x,t)}$ est s.c.i. au point μ d'où

$$\liminf_n Q(\mu_n,t) \geq Q(\mu,t)$$

Montrons maintenant que $\limsup\limits_n Q(\mu_n,t) \leq Q(\mu,t)$

$\exists\, N_1 \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N_1 \Longrightarrow \mu_n(X) > 0$ (hypothèse (c)) .

Pour $n \geq N_1$ on définit les probabilités τ_n , τ de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathcal{B}_X \quad \tau_n(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_n(X)} \quad \text{et} \quad \tau(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \ .$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\tau_n,\tau) = 0$.

En effet, soit A borélien borné vérifiant $\tau(\partial A) = 0$; ceci entraîne que $\mu(\partial A) = 0$ par définition de τ.

Des hypothèses (a) et (c) on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n(A) = \tau(A)$.

La proposition I.1 permet de conclure que $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers τ faiblement, c'est-à-dire si l'on note ρ_p la métrique de Prokhorov, $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_p(\tau_n,\tau) = 0$.

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$, $N_2 > N_1$, $n \geq N_2 \Longrightarrow \rho_p(\tau_n,\tau) < \varepsilon$

En particulier

$$\tau_n(B(x,t)) \leq \tau(B(x,t)^{\varepsilon}) + \varepsilon$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{\mu_n(B(x,t))}{\mu_n(X)} \leq \frac{\mu(B(x,t)^{\varepsilon})}{\mu(X)} + \varepsilon$$

Par conséquent

$$\frac{\mu(X)}{\mu_n(X)} \mu_n(B(x,t)) \leq \mu(B(x,t)^{\varepsilon}) + \varepsilon\, \mu(X)$$

$$\leq \mu(B(x,t)) + \mu(\partial_{\varepsilon} B(x,t)) + \varepsilon\, \mu(X) \qquad (1)$$

Par passage à la borne supérieure sur x on obtient .

$$\frac{\mu(X)}{\mu_n(X)} Q(\mu_n,t) \leq Q(\mu,t) + \sup_{x\in X} \mu(\partial_{\varepsilon} B(x,t)) + \varepsilon\, \mu(X) \qquad (2)$$

L'inégalité précédente étant réalisée pour tout $\varepsilon > 0$ et μ étant bornée on a :

$$\limsup_{n} Q(\mu_n,t) \leq Q(\mu,t)$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque : La démonstration peut paraître artificielle par l'introduction des probabilités $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et τ, cependant pour passer de l'inégalité (1) à l'inégalité (2) on considère la borne supérieure sur X, ce qui n'est pas possible directement en utilisant la distance de Geffroy (cf. définition I.1, chapitre I).

Le résultat suivant montre la relation liant la continuité de l'application $t \to Q(\mu,t)$ et de l'application $\mu \to Q(\mu,t)$.

I-4 - Théorème.- Soit μ *une mesure bornée ;* s *un point de continuité de la fonction* $t \to Q(\mu,t)$ *. La fonction* $\nu \to Q(\nu,s)$ *est continue au point* μ *lorsque* $\mathcal{M}_b$ *est muni de la topologie de la convergence faible.*

Démonstration : Soit (μ_n) une suite de mesures bornées convergeant faiblement vers μ.

Comme dans la démonstration du théorème I.2 introduisons les probabilités :

$$\tau_n = \frac{\mu_n}{\mu_n(X)} , \ n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\mu}{\mu(X)}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N$ $\rho_p(\tau_n,\tau) < \varepsilon$.

Par conséquent, pour tout $n \geq N$ et toute boule $B(x,s)$, $x \in X$,

$$\begin{aligned}\frac{\mu(X)}{\mu_n(X)} \mu_n(B(x,s)) &\leq \mu(B(x,s)^{\varepsilon}) + \varepsilon\, \mu(X)\\ &\leq \mu(B(x,s+\varepsilon)) + \varepsilon\, \mu(X)\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure sur X on a :

$$\frac{\mu(X)}{\mu_n(X)} Q(\mu_n,s) \leq Q(\mu, s+\varepsilon) + \varepsilon\, \mu(X)$$

ce qui entraîne

$$\limsup_n Q(\mu_n,s) \leq Q(\mu, s+\varepsilon) + \varepsilon\, \mu(X)$$

s est point de continuité de l'application $t \to Q(\mu,t)$ et ε est arbitraire d'où :

$$\limsup_n Q(\mu_n,s) \leq Q(\mu,s) .$$

Lorsque $\varepsilon < s$ on a pour toute boule $B(x, s-\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\frac{\mu_n(X)}{\mu(X)} \mu(B(x, s-\varepsilon)) &\leq \mu_n(B(x, s-\varepsilon)^{\varepsilon}) + \varepsilon\, \mu_n(X)\\ &\leq \mu_n(B(x,s)) + \varepsilon\, \mu_n(X)\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\mu_n(X)}{\mu(X)} Q(\mu,\ s - \varepsilon) \leqslant Q(\mu_n,s) + \varepsilon\ \mu_n(X)$

et par conséquent $Q(\mu,\ s - \varepsilon) \leqslant \liminf\limits_n Q(\mu_n,s) + \varepsilon\ \mu(X)$

s est point de continuité de $Q(\mu,t)$ donc

$$Q(\mu,s) \leqslant \liminf_n Q(\mu_n,s)\ ,$$

ce qui achève la démonstration.

I-4-1 - <u>Corollaire</u>.- *Soit X un espace métrique séparable dont les boules fermées sont compactes (où X est un espace de Hilbert séparable). Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout élément μ de M_b la fonction $\nu \to Q(\nu,t)$ est semi-continue supérieurement au point μ lorsque M_b est muni de la topologie de la convergence faible.*

<u>Démonstration</u> : D'après la démonstration précédente, si s est point de continuité à droite de l'application $t \to Q(\mu,t)$ l'application $\nu \to Q(\nu,s)$ est semi-continue supérieurement. Il suffit alors d'appliquer le théorème II.8 du chapitre I.

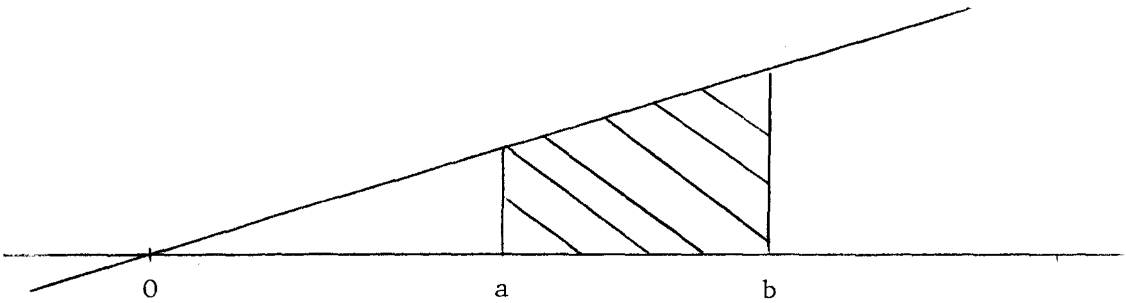
I-4-2 - <u>Corollaire</u>.- *Soit μ une mesure bornée ; M_b étant muni de la topologie de la convergence faible l'ensemble des points $s \in \mathbb{R}^+$ tels que l'application $\nu \to Q(\nu,s)$ soit discontinue au point μ est au plus dénombrable.*

<u>Démonstration</u> : L'application $t \to Q(\mu,t)$ est monotone bornée. L'ensemble de ses points de discontinuité est donc au plus dénombrable.

2 - *Cas général.*

Si μ est un élément de M, la fonction de concentration doit être définie différemment, comme nous l'avons signalé au début du chapitre I. En effet, la propriété pour les éléments de M d'être finis sur les boréliens bornés de X ne suffit pas pour que la fonction de concentration soit finie comme le montre l'exemple simple suivant :

Supposons $X = \mathbb{R}^+$ muni de la métrique usuelle.



μ est définie par $\mu([a,b]) = \int_a^b \alpha x dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

Il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$ $\sup_{y \in \mathbb{R}^+} \mu([y-\varepsilon, y+\varepsilon]) = +\infty$, c'est-à-dire pour tout $t > 0$ $Q(\mu,t) = +\infty$.

Nous avons dans ce cas défini $\tilde{Q}$ (définition II.4, chapitre I) et la convergence d'une suite $\tilde{Q}(\mu_n,t)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\tilde{Q}(\mu,t)$ sera étudiée par l'intermédiaire des fonctions $(Q_r(\mu_n,t))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $r \in \mathbb{R}^+$ qui permettront de se ramener au cas des mesures bornées.

I-5 - <u>Théorème</u>.- *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μ *des éléments de* M , $t \in \mathbb{R}^+$ *sous les hypothèses (a) et (b) on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{Q}(\mu_n,t) = \tilde{Q}(\mu,t)$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$

b) $\lim\limits_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}\limits_{x\in X} \mu(\partial_\delta B(x,t)) = 0$.

Démonstration : Le résultat est une conséquence du lemme suivant que nous démontrerons ensuite.

I-6 - Lemme.- Soit $r \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $\mu(\partial B(0,r)) = 0$ *; les hypothèses du théorème entraînent :*

$$\lim_{n\to+\infty} Q_r(\mu_n,t) = Q_r(\mu,t) .$$

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$; l'ensemble des $r \in \mathbb{R}^+$ tels que $\mu(\partial B(0,r)) > 0$ est dénombrable donc de λ-mesure nulle.

Le lemme I-6 entraîne que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-r} \frac{Q_r(\mu_n,t)}{1 + Q_r(\mu_n,t)} = e^{-r} \frac{Q_r(\mu,t)}{1 + Q_r(\mu,t)} \quad \lambda \text{ presque surement .}$$

Les fonctions $e^{-r} \dfrac{Q_r(\mu_n,t)}{1 + Q_r(\mu_n,t)}$ sont majorées par e^{-r} qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; le théorème de la convergence dominée nous permet d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r} \frac{Q_r(\mu_n,t)}{Q_r(\mu_n,t) + 1}\, dr = \int_0^{+\infty} e^{-r} \frac{Q_r(\mu,t)}{1 + Q_r(\mu,t)}\, dr$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{Q}(\mu_n,t) = \tilde{Q}(\mu,t)$

Démonstration du lemme I-6 :

$$\mu(\partial B(0,r)) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mu_n(B(0,r)) = \mu(B(0,r))$$

(théorème I.2 chapitre I) .

Les restrictions de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et μ au sous-espace $X_r = B(0,r)$ sont bornées. Pour appliquer le théorème I.2 chapitre II il suffit de montrer que $\lim\limits_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}\limits_{x\in X_r} \mu(\partial_\delta B_r(x,t)) = 0$.

Montrons tout d'abord que $\partial_\delta B_r(x,t) \subset \partial_\delta B(x,t) \cup \partial_\delta B(0,r)$.

Soit $y \in \partial_\delta B_r(x,t)$:

$$\begin{cases} d(y,B(x,t) \cap B(0,r)) < \delta \\ \text{et} \\ d(y,[B(x,t) \cap B(0,r)]^c) < \delta \end{cases}$$

d'où $$\begin{cases} d(y,B(x,t)) < \delta \quad \text{et} \quad d(y,B(0,r)) < \delta \\ \text{et} \\ d(y,B(x,t)^c) < \delta \quad \text{ou} \quad d(y,B(0,r)^c) < \delta \end{cases}$$

On en déduit que $y \in \partial_\delta B(x,t)$ ou $y \in \partial_\delta B(0,r)$.

D'autre part on sait que $\lim\limits_{\delta\to 0} \mu(\partial_\delta B(0,r)) = \mu(\partial B(0,r))$ (cf. [23] p. 15) ce qui entraîne que $\lim\limits_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}\limits_{x\in X_r} \mu(\partial_\delta B_r(x,t)) = 0$. On peut conclure en appliquant le théorème I.2, chapitre II.

La propriété suivante montre que, sous certaines hypothèses la fonction $r \to Q_r(\mu,t)$ est continue à droite ; en fait, pour démontrer le théorème I.5, nous n'avions besoin que de sa mesurabilité.

I-7 - <u>*Lemme*</u>*.- Soit* $\mu \in M$ *,* $t \in \mathbb{R}^+$ *; si* X *est un espace métrique dont les boules fermées sont compactes la fonction* $r \to Q_r(\mu,t)$ *est continue à droite en tout point* r *de* $\mathbb{R}^+$*.*

<u>Démonstration</u> : Soit $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{R}^+$; $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs de limite r.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in X_{r_n}$ tel que $\mu(B_{r_n}(x_n,t)) = Q_{r_n}(\mu,t)$

$B_{r_n}(x_n,t) = B(x_n,t) \cap B(0,r_n)$.

$\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N_1 \implies r_n - r < \varepsilon$ d'où

$$n \geq N_1 \implies B(0,r_n) \subset B(0, r + \varepsilon) .$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est incluse dans $B(0,r_1)$ qui est compacte ; notons $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont la limite sera notée x.

Supposons que $x \notin B(0,r)$, c'est-à-dire $d(x, B(0,r)) > 0$.

Soit $\delta > 0$ tel que $x \notin B(0,r + \delta)$; il existe un rang $p_o \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $p \geq p_o$ $x_{n_p} \in B(0, r + \delta)$ (car p_o vérifie $p \geq p_o \implies r_{n_p} < r + \delta$).

On en déduit alors que $x \in B(0, r + \delta)$ ce qui aboutit à une contradiction.

Soit p un indice tel que $n_p \geq N_1$. On a :

$$\mu(B(x_{n_p},t) \cap B(0, r + \varepsilon)) \geq Q_{r_{n_p}}(t)$$

par conséquent $\limsup_{p\to+\infty} \mu(B(x_{n_p},t) \cap B(0,r + \varepsilon)) \geq \limsup Q_{r_{n_p}}(\mu,t)$

d'où $\mu(B(x,t) \cap B(0, r + \varepsilon)) \geq \limsup_p Q_{r_{n_p}}(\mu,t)$

pour tout $\varepsilon > 0$ donc $Q_r(\mu,t) \geq \limsup_p Q_{r_{n_p}}(\mu,t)$.

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ; la définition de Q_{r_n} permet de conclure

$$\lim_{p\to+\infty} Q_{r_{n_p}}(\mu,t) = Q_r(\mu,t) \quad \text{et donc} \quad Q_r(\mu,t) = \lim_{n\to+\infty} Q_{r_n}(\mu,t) .$$

II - CONVERGENCE UNIFORME PAR RAPPORT A t.-

Dans ce paragraphe nous supposerons dans un premier temps que X est un espace métrique compact tel que la fermeture de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon.

La frontière d'une boule de centre x et de rayon t est dans ce cas l'ensemble $\{z \in X \ ; \ d(x,z) = t\}$.

II-1 - Lemme.-

$$\forall x \in X \ , \ \forall t > 0 \ , \ \partial B(x,t) = \{z \in X \ ; \ d(x,z) = t\}.$$

L'hypothèse sur X entraîne de plus :

II-2 - Lemme.- (cf. [24])

$\forall x \in X$, $\forall t > 0$, $B^o(x,t)$, $B(x,t)$ sont connexes.

II-3 - Lemme.-

$$\forall B \subset X \ \ \forall \delta > 0 \ ; \ \partial_\delta B = (\partial B)^\delta \ .$$

Démonstration : L'inclusion $(\partial B)^\delta \subset \partial_\delta B$ est vraie dans un espace métrique quelconque.

Réciproquement, si $x \in \partial_\delta B$, la boule de centre x et de rayon δ rencontre à la fois B et B^c ; cette boule est connexe en vertu du lemme II.2 donc elle rencontre nécessairement ∂B. Il existe alors $y \in \partial B$ tel que $d(x,y) < \delta$ d'où $x \in (\partial B)^\delta$.

On note S l'ensemble des fermés non vides de X (qui sont bornés) muni de la distance de Haussdorff. Rappelons que cette métrique est définie par :

$$\forall (A_1,A_2) \in \mathcal{S} \quad \Delta(A_1,A_2) = \text{Inf}\ \{\delta > 0 \ ; \ A_1 \subset A_2^\delta \ \text{ et } \ A_2 \subset A_1^\delta\}$$

On sait que $\mathcal{S}$ est compact car X est compact ; notons $\partial\mathcal{B}$ la famille des frontières de boules de X

$$\partial\mathcal{B} = \{\partial B(x,t) \ , \ x \in X \ , \ t \in \mathbb{R}^+\}$$

II-4 - Lemme.-

$$\forall A \in \overline{\partial\mathcal{B}} \ , \exists\ C \in \partial\mathcal{B} \ ; \ A \subset C \ .$$

Démonstration : Comme X est compact, il existe $t_o \in \mathbb{R}^+$ tel que $\partial\mathcal{B} = \{\partial B(x,t) \ ; \ x \in X \ , \ t \in [0, t_o]\}$.

Soit F_n une suite d'éléments de $\partial\mathcal{B}$ convergeant vers F.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n = \partial B(x_n,t_n) = \{z \ ; \ d(x_n,z) = t_n\} \ .$$

On extrait de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de limite $x \in X$ et de la sous-suite $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ on extrait une sous-suite $(t_{n_{k_p}})_{p\in\mathbb{N}^*}$ de limite $t \in [0 \ , \ t_o]$.

On peut donc supposer sans perte de généralité que :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} |t-t_n| = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta(F_n,F) = 0$$

Soit $y \in F$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F \subset F_n^{2\Delta(F_n,F)}$ par définition de Δ ; on peut alors trouver $z_n \in F_n$ tel que $d(y,z_n) < 2\Delta(F,F_n)$ et donc

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,z_n) + d(z_n,y) \leq d(x,x_n) + t_n + 2\Delta(F,F_n)$$

et d'autre part

$$d(x_n,z_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,z_n) \quad \text{donc} \quad t_n \leq d(x,x_n) + d(x,y) + 2\Delta(F,F_n)$$

on en déduit $d(x,y) = t$ et $F \subset \partial B(x,t) = \{y \; ; \; d(x,y) = t\}$.

II-5 - <u>*Lemme*</u>.- *Soit* μ *une mesure bornée ne chargeant pas les frontières de boules de* X *, alors :*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{x \in X \\ t \in [0,t_o]}} \mu(\partial_\delta B(x,t)) = 0 .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\eta > 0$ fixé ; $\forall B \in \overline{\partial \mathcal{B}}$, $\exists \, \delta_B > 0$ tel que $\mu(B^{2\delta_B} - B) < \eta$. $B \in \overline{\partial \mathcal{B}} \Longrightarrow \mu(B) = 0$ (cf. lemme II.4, chapitre II) d'où $\mu(B^{2\delta_B}) < \eta$. $\overline{\partial \mathcal{B}}$ est compact par conséquent ;

$\exists \, B_1,\ldots,B_n \in \overline{\partial \mathcal{B}}$ tels que $\forall B \in \overline{\partial \mathcal{B}}$, $\exists \, i \in \{1,\ldots,n\}$, $\Delta(B,B_i) < \delta_{B_i}$.

Posons $\delta = \operatorname{Min}_i \delta_{B_i}$.

$$B \subset B_i^{\delta_{B_i}} \Longrightarrow B^\delta \subset B_i^{\delta+\delta_{B_i}} \subset B_i^{2\delta_{B_i}} \; ; \quad \text{on en déduit} \quad \sup_{B \in \overline{\partial \mathcal{B}}} \mu(B^\delta) < \eta$$

et en particulier $\displaystyle \sup_{\substack{x \in X \\ t \in [0,t_o]}} \mu(\partial B(x,t)^\delta) < \eta$.

On conclut alors en appliquant le lemme II.3, chapitre II.

Les lemmes qui précèdent permettent d'obtenir simplement un théorème de convergence uniforme d'une suite de fonctions de concentration.

II-6 - <u>*Théorème*</u>.- *Soit* X *un espace métrique compact dans lequel la fermeture de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon ;* $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *et* μ *des éléments de* $\mathcal{M}_b$ *. Si les hypothèses (a), (b), (c) sont vérifiées on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}_{t\in\mathbb{R}^+} |Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| = 0$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$

b) $\forall x \in X \; , \; \forall t \in \mathbb{R}^+ \; , \; \mu(\partial B(x,t)) = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\eta > 0$ fixé et $\varepsilon < \eta/4$

$$\exists N_o \in \mathbb{N}^* \; , \; n \geq N_o \Longrightarrow \rho(\mu_n,\mu) < \varepsilon$$

En définissant les probabilités $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et τ de la même façon que dans la démonstration du théorème I.2 chapitre II on a :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \; , \; n \geq N_1 \Longrightarrow \rho_p(\tau_n,\tau) < \varepsilon$$

et en particulier :

$$\forall x \in X \; , \; \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} \tau_n(B(x,t)) \leq \tau(B(x,t)^\varepsilon) + \varepsilon \\[2ex] \tau(B(x,t)) \leq \tau_n(B(x,t)^\varepsilon) + \varepsilon \end{cases}$$

Appliquons le lemme II.3 chapitre II :

$$\forall x \in X \; , \; \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} \tau_n(B(x,t)) \leq \tau(B(x,t)) + \tau((\partial B(x,t))^\varepsilon) + \varepsilon \\[2ex] \tau(B(x,t)) \leq \tau_n(B(x,t)) + \tau_n((\partial B(x,t))^\varepsilon) + \varepsilon \end{cases}$$

et par conséquent :

$$|\tau_n(B(x,t)) - \tau(B(x,t))| \leq \operatorname{Max}(\tau((\partial B(x,t))^\varepsilon), \tau_n((\partial B(x,t))^\varepsilon)) + \varepsilon$$

$n \geq N_1 \Longrightarrow |\tau_n(B(x,t)) - \tau(B(x,t))| \leq \tau((\partial B(x,t))^{2\varepsilon}) + 2\varepsilon$ ce qui entraîne

$$n \geq N_1 \Longrightarrow \operatorname{Sup}_{\substack{x\in X \\ t\in\mathbb{R}^+}} |\tau_n(B(x,t)) - \tau(B(x,t))| \leq \operatorname{Sup}_{\substack{x\in X \\ t\in\mathbb{R}^+}} \tau((\partial B(x,t))^{2\varepsilon}) + 2\varepsilon \; .$$

D'après le lemme II.5, on peut choisir ε tel que

$$\sup_{\substack{x\in X \\ t\in\mathbb{R}^+}} \tau((\partial B(x,t))^{2\varepsilon}) < \eta/2$$

d'où $\quad n \geq N_1 \Longrightarrow \sup_{\substack{x\in X_+ \\ t\in\mathbb{R}^+}} |\tau_n(B(x,t)) - \tau(B(x,t))| \leq \eta \quad (\text{car } \varepsilon < \eta/4)$

η étant arbitrairement fixé

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{x\in X_+ \\ t\in\mathbb{R}^+}} |\tau_n(B(x,t)) - \tau(B(x,t))| = 0 \ ;$$

en appliquant l'hypothèse (c), on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{x\in X_+ \\ t\in\mathbb{R}^+}} |\mu_n(B(x,t)) - \mu(B(x,t))| = 0 \ .$$

La démonstration s'achève en appliquant l'inégalité

$$|Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| \leq \sup_{x\in X} |\mu_n(B(x,t)) - \mu(B(x,t))|$$

Dans la suite de ce paragraphe nous supposerons que X est un espace métrique dont les boules ouvertes sont relativement compactes et possédent pour adhérence les boules fermées de même centre et de même rayon.

II-7 - Lemme.- *Soit* μ *une mesure bornée ne chargeant pas les frontières de boules de* X *:*

$$\forall t_o \in \mathbb{R}^{+*} \quad \lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{x\in X \\ t\in[0,t_o]}} \mu(\partial_\delta B(x,t)) = 0 \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\eta > 0$ fixé ; x_o un point choisi arbitrairement dans X, il existe $r_o > 0$ tel que :

$$\mu(X - B(x_o, r_o)) < \eta$$

Posons $r_1 = r_o + t_o$, $r_2 = r_o + 2t_o$, $r_3 = r_o + 3t_o$ et $B_i = B(x_o, r_i)\, i=0,1,2,3.$

Notons S l'ensemble des fermés de B_3 ; toute boule fermée $B(x,t)$ de centre $x \in B_2$ de rayon $t \leq t_o$ appartient à S ainsi que sa frontière.

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des frontières de ces boules et $\bar{\mathcal{D}}$ la fermeture de $\mathcal{D}$ dans S pour la topologie de Haussdorff ; B_3 est compacte par hypothèse donc $\bar{\mathcal{D}}$ l'est aussi.

Du lemme II.4 on déduit :

$$\forall D \in \bar{\mathcal{D}} \ , \ \exists C \in \mathcal{D} : D \subset C \ .$$

Compte tenu de la compacité de $\bar{\mathcal{D}}$ on obtient comme dans le lemme II.5

$$\exists \delta < t_o \quad \text{tel que} \quad \sup_{D \in \bar{\mathcal{D}}} \mu(D^\delta) < \eta \ ,$$

d'où

$$\sup_{\substack{x \in B_2 \\ 0 \leq t \leq t_o}} \mu(\partial B(x,t)^\delta) < \eta$$

Par ailleurs, $\forall x \in B_2^c$ et $t \leq t_o$, $B(x,t) \subset B_1^c$ donc $\partial B(x,t)^\delta \subset B_o^c$ d'où

$$\sup_{\substack{x \in B_2^c \\ 0 \leq t \leq t_o}} \mu(\partial B(x,t)^\delta) \leq \mu(X - B_o) < \eta$$

Le lemme II.3 permet de conclure .

II-8 - Théorème.- Soit X un espace métrique dans lequel la fermeture de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon et tel que toute boule ouverte soit relativement compacte ; $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μ des éléments de M_b ; si les hypothèses (a),(b),(c) sont vérifiées on a :

$$\forall t_o \in \mathbb{R}^{+*} \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq t_o} |Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| = 0$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$

b) $\forall x \in X$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\mu(\partial B(x,t)) = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$.

La démonstration est celle du théorème II.6 en utilisant le résultat du lemme II.7.

II-9 - Théorème.- Soit X un espace de Hilbert séparable, μ un élément de M_b ne chargeant pas les frontières des parties convexes ; $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de M_b telle que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$

alors
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq t_o} |Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| = 0 .$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; μ_n converge faiblement vers μ (proposition I.1, chapitre 2), il existe donc un compact K tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mu_n(K_\varepsilon) > \mu_n(X) - \varepsilon$.

Soit C_ε l'enveloppe convexe fermée équilibrée de K_ε ; c'est un compact vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mu_n(C_\varepsilon) > \mu_n(X) - \varepsilon$.

En désignant par μ_n^ε la restriction de μ_n à C_ε on a

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $Q(\mu_n^\varepsilon,t) \leq Q(\mu_n,t) \leq Q(\mu_n^\varepsilon,t) + \varepsilon$ (cf. théorème II. 10 chapitre I).

Comme $(\partial C_\varepsilon) = 0$ la suite μ_n^ε converge faiblement vers μ^ε; de plus pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ $|Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| \leq |Q(\mu_n^\varepsilon,t) - Q(\mu^\varepsilon,t)| + \varepsilon$

et donc $\underset{0\leq t\leq t_o}{\operatorname{Sup}} |Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| \leq \underset{0\leq t\leq t_o}{\operatorname{Sup}} |Q(\mu_n^\varepsilon,t) - Q(\mu^\varepsilon,t)| + \varepsilon$.

Il suffit donc pour conclure de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname*{Sup}_{0\leq t\leq t_o} |Q(\mu_n^\varepsilon,t) - Q(\mu^\varepsilon,t)| = 0 .$$

C'est-à-dire de vérifier que :

1) dans C_ε , la fermeture de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon,

2) la frontière de toute boule de C_ε est μ continue ,

et d'appliquer ensuite le théorème II.6 , chapitre II.

Notons β (resp. $\overset{\circ}{\beta}$) les boules fermées (resp. ouvertes) de C_ε et par $\sim$ les fermetures dans C_ε

$\forall x \in C_\varepsilon$, $\forall t \in [0,t_o]$

$\overset{\circ}{\beta}(x,t) = \{y \in C_\varepsilon : ||x-y|| < t\} = \overset{\circ}{B}(x,t) \cap C_\varepsilon$

$\beta(x,t) = \{y \in C_\varepsilon : ||x-y|| \leq t\} = B(x,t) \cap C_\varepsilon$.

On a toujours $\tilde{\overset{\circ}{\beta}}(x,t) \subset \beta(x,t)$; réciproquement si $y \in \beta(x,t)$, $y \in B(x,t) \cap C_\varepsilon$; $[x,y] \subset B(x,t) \cap C_\varepsilon$ qui est convexe

$\forall \lambda \in [0,1[$ $z_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y \in \overset{\circ}{B}(x,t) \cap C_\varepsilon$ et $\lim_{\lambda\to 1} z_\lambda = y$

donc $y \in \widetilde{\overset{\circ}{B}(x,t) \cap C_\varepsilon} = \widetilde{\overset{\circ}{\beta}(x,t)}$ d'où $\beta(x,t) = \widetilde{\overset{\circ}{\beta}(x,t)}$.

$$\partial\beta(x,t) = \beta(x,t) - \overset{\circ}{\beta}(x,t) = \left[B(x,t) - \overset{\circ}{B}(x,t)\right] \cap C_\varepsilon \subset \partial B(x,t)$$

ce qui établit le point (2) car μ ne charge pas les frontières des parties convexes de X.

II-10 - **Proposition**.- *Dans les théorèmes II.8 et II.9, on peut remplacer*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq t_o} |Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| = 0 \quad \text{par} \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| = 0$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $t_o \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mu(X) - Q(\mu,t_o) < \varepsilon$.

Soit n assez grand pour que $|\mu_n(X) - \mu(X)| < \varepsilon$ et $|Q(\mu_n,t_o) - Q(\mu,t_o)| < \varepsilon$. Alors, soit $t > t_o$

Si $Q(\mu_n,t) > Q(\mu,t)$ on a

$$Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t) \leq \mu_n(X) - Q(\mu,t) \leq \mu_n(X) - \mu(X) + \mu(X) - Q(\mu,t) < 2\varepsilon$$

si $Q(\mu_n,t) \leq Q(\mu,t)$

$$Q(\mu,t) - Q(\mu_n,t) \leq \mu(X) - Q(\mu_n,t) \leq \mu(X) - Q(\mu,t_o) + Q(\mu,t_o) - Q(\mu_n,t_o) < 2\varepsilon$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |Q(\mu_n,t) - Q(\mu,t)| = 0$.

III - CONCENTRATION ET MESURES ALEATOIRES.-

Les théorèmes I.7 et I.8 du chapitre I démontrés par H. Zeboulon et concernant les convergences stochastiques de mesures aléatoires nous laissent penser que nous pouvons obtenir des résultats analogues de convergence pour une suite de f.c. de mesures aléatoires.

$\mu^{\bullet}$ étant une mesure aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_b$, nous étudierons tout d'abord la mesurabilité de l'application $Q(\mu^{\bullet},t)$ définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$; le cas où $\mu^{\bullet}$ est à valeurs dans $\mathcal{M}$ sera étudié ensuite :

1 - *Mesurabilité de* $Q(\mu^{\bullet},t)$.

III-1 - Lemme.- Soit $\mu^{\bullet}$ *une mesure aléatoire définie sur* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *à valeurs dans* $\mathcal{M}_b$. *L'application* $\omega \to Q(\mu^{\omega},t)$ *est une variable aléatoire réelle.*

Démonstration : Nous avons le schéma suivant

$$\begin{array}{ccccc}(\Omega,\mathcal{A},P) & \xrightarrow{\mu^{\bullet}} & (\mathcal{M}_b,\mathcal{B}_{\mathcal{M}_b}) & \xrightarrow{\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}}\ \phi_{B(x,t)}} & (\mathbb{R}^+,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}) \\ \omega & \longrightarrow & \mu^{\omega} & \longrightarrow & Q(\mu^{\omega},t)\end{array}$$

Il suffit donc de montrer la mesurabilité de l'application $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}}\ \phi_{B(x,t)}$.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite décroissante de réels positifs de limite t.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}}\ \phi_{B^o(x,t_n)}$ est mesurable car s.c.i. ($B^o(x,t_n)$ est un ouvert borné).

Par continuité à droite de l'application $t \to Q(\mu,t)$, $\mu \in \mathcal{M}_b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}_{x\in X} \phi_{B(x,t_n)}(\mu) = \operatorname{Sup}_{x\in X} \phi_{B(x,t)}(\mu)$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}_{x\in X} \phi_{B^o(x,t_n)}(\mu) = \operatorname{Sup}_{x\in X} \phi_{B(x,t)}(\mu)$.

L'application $\mu \to Q(\mu,t)$ est donc mesurable comme limite d'une suite d'applications mesurables.

Pour établir des théorèmes de convergence de suites de f.c. de mesures aléatoires en utilisant le théorème I.2, il faut s'assurer que l'ensemble

$$D_Q^t = \{\mu \in \mathcal{M}_b \, ; \lim_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}_{x\in X} \mu(\partial_\delta B(x,t)) > 0\} \text{ appartient à } \mathcal{B}_{\mathcal{M}_b} .$$

III-2 - <u>Lemme</u>.- Soit $\mu^\bullet$ *une mesure aléatoire définie sur* (Ω,A,P) *à valeurs dans* $\mathcal{M}_b$ *on a :*

$$\{\mu^\bullet \in D_Q^t\} \in A .$$

<u>Démonstration</u> : $\mu^\bullet$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_b$ il suffit donc de montrer que $D_Q^t \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}_b}$.

Posons $A_{n,p}^t = \{\mu \in \mathcal{M}_b \; ; \operatorname{Sup}_{x\in X} \mu(\partial_{1/n} B(x,t)) > 1/p\}$

$A_{n,p}^t \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}_b}$ en effet $A_{n,p}^t = (\operatorname{Sup}_{x\in X} \phi_{\partial_{1/n} B(x,t)})^{-1} (]1/p \, , +\infty[)$

et $\operatorname{Sup}_{x\in X} \phi_{\partial_{1/n} B(x,t)}$ est s.c.i. car $\partial_{1/n} B(x,t)$ est un ouvert borné

$$D_Q^t = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\geq N} A_{n,p}^t \Longrightarrow D_Q^t \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}_b} .$$

III-3 - <u>Théorème</u>.- Soit $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\mu^\bullet$ *des mesures aléatoires à valeurs dans* $\mathcal{M}_b$ *et* $t \in \mathbb{R}^+$ *les hypothèses (a),(b),(c) entraînent :*

$\lim Q(\mu^\bullet_n,t) = Q(\mu^\bullet,t)$ *p.s. (resp. en probabilité, faiblement)*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu^\bullet_n,\mu^\bullet) = 0$ *p.s. (resp. en probabilité, faiblement)*

b) $P\{\mu^\bullet \in D^t_Q\} = 0$ *pour tout* t *de* $\mathbb{R}^+$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu^\bullet_n(X) = \mu^\bullet(X)$ *p.s.*

<u>Démonstration</u> :

<u>*Convergence presque sûre.*</u>

$$\{\lim_{n\to+\infty} Q(\mu^\bullet_n,t) = Q(\mu^\bullet,t)\} \supset \{\lim_{n\to+\infty} \rho(\mu^\bullet_n,\mu^\bullet) = 0\} \cap \{\mu^\bullet \in D^t_Q\}^c \cap \{\lim_{n\to+\infty} \mu^\bullet_n(X) = \mu^\bullet(X)\}$$

L'inclusion précédente est une conséquence directe du théorème I.2

$$(a) + (b) + (c) \Longrightarrow P\{\lim_{n\to+\infty} Q(\mu^\bullet_n,t) = Q(\mu^\bullet,t)\} = 1 .$$

<u>*Convergence en probabilité.*</u>

Nous la déduisons du lemme suivant :

III-4 - <u>*Lemme*</u>*.- Soit* $(\mathcal{X},d)$, $(\mathcal{Y},\delta)$ *deux espaces métriques ;* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, X *des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé* (Ω,A,P) *à valeurs dans* $\mathcal{X}$ *;* f *une fonction de* $\mathcal{X}$ *dans* $\mathcal{Y}$ *; on note* D_f *l'ensemble des points de discontinuité de* f.

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} X_n \longrightarrow X \text{ en probabilité dans } \mathcal{X} \\ \\ P\{X \in D_f\} = 0 . \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f(X_n) \to f(X) \\ \text{en probabilité dans } \mathcal{Y}. \end{array}$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé, $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/k < 2\varepsilon$.

Posons $E_{k,p} = \{x \in X ; \forall y \in X ; d(x,y) < 1/p \Longrightarrow \delta(f(x),f(y)) < 1/k\}$.

Tout point de continuité de f appartient à l'un des ensembles $E_{k,p}$ d'où :

$$D_f^c \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} E_{k,p} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

La suite $E_{k,p}$ est croissante $(E_{k,p} \subset E_{k,p+1})$ donc

$$\exists R \in \mathbb{N}^* \quad , \quad P(X \in E_{k,R}) > 1 - \varepsilon \ .$$

$d(X_n,X) \to 0$ en probabilité ; par conséquent il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow P\{d(X_n,X) < 1/k\} > 1 - \varepsilon \ .$$

Des remarques précédentes on déduit

$$P\{\delta(f(X_n), f(X)) < 1/k\} > 1 - 2\varepsilon$$

donc $P\{\delta(f(X_n),f(X)) < 2\varepsilon\} > 1 - 2\varepsilon$.

ε est arbitraire d'où $f(X_n) \to f(X)$ en probabilité dans Y .

Nous pouvons conclure que $Q(\dot{\mu}_n,t)$ converge en probabilité vers $Q(\dot{\mu},t)$ en remarquant que D_Q^t est inclus dans l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $\mu \to Q(\mu,t)$.

Convergence en loi.

Pour presque tout ω de Ω, μ^ω est point de continuité de l'application $\mu \to Q(\mu,t)$ (cf. théorème I.2. chapitre II) ; la convergence en loi est alors une conséquence directe du théorème 5.1. de [2] p. 30 .

III-5 - Théorème.- Soit $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\mu^\bullet$ *des mesures aléatoires à valeurs dans* $(M, \mathcal{B}_M)$ $t \in \mathbb{R}^+$ *; les hypothèses (a) et (b) entraînent :*

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{Q}(\mu_n^\bullet, t) = \tilde{Q}(\mu^\bullet, t) \quad \textit{p.s. (resp. en probabilité, faiblement)}$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n^\bullet, \mu^\bullet) = 0$ *p.s. (resp. en probabilité, faiblement) .*

b) $P\{\mu^\bullet \in D_Q^t\} = 0$

Démonstration :

- La convergence presque sûre se déduit directement du théorème I.5 chapitre II et de l'inclusion suivante :

$$\{\lim \rho(\mu_n^\bullet, \mu^\bullet) = 0\} \cap \{\mu^\bullet \in D_Q^t\}^c \subset \{ \lim_{n\to+\infty} \tilde{Q}(\mu_n^\bullet, t) = \tilde{Q}(\mu^\bullet, t)\}$$

- On montre la convergence en probabilité en appliquant le lemme III.4.

- La convergence en loi est ici encore une conséquence du théorème 5.1. de [2] p. 30 .

CHAPITRE III

LA FONCTION DE CONCENTRATION, ELEMENT DE L'ESPACE $D[0, +\infty[$.

Dans le premier chapitre, nous avons montré que la fonction de concentration est continue à droite quand les boules de l'espace métrique X sont compactes ou que X est un espace de Hilbert. Le chapitre II nous a permis d'établir certaines conditions de continuité de la f.c. qui font notamment intervenir les δ-frontières de boules. Ces constatations nous amènent à étudier la f.c. comme élément de l'espace fonctionnel $D[0, +\infty[$ muni d'une topologie définie à l'origine par Skorokhod (M_1) mais qui est plus faible que la topologie de Skorokhod habituelle (J_1) exposée dans l'ouvrage de Billingsley ([2]).

Nous montrons ainsi des résultats généraux de convergence sans imposer d'hypothèses sur la mesure limite.

Tout au long de ce chapitre, X désigne un espace métrique dont les boules fermées sont compactes ou un espace de Hilbert.

I - *TOPOLOGIE* J_1 *SUR* $D[0, +\infty[$ *ET CONTRE-EXEMPLE*.-

I-1 - *Définition*.- $D[0, +\infty[$ (noté D dans la suite) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues à droite et possédant une limite à gauche en tout point $t > 0$.

Nous ne présentons pas ici la construction de la métrique d_{J_1} sur $D[0, +\infty[$ dans la mesure où elle est une généralisation naturelle de la distance définie sur $D[0,1]$ dans [2]. d_{J_1} a été définie par

Lindvall ([13]) et Stone ([21]).

Nous citerons cependant le théorème de caractérisation de la convergence d'une suite dans $(D[0, +\infty[, d_{J_1})$ qui éclaircira le choix du contre-exemple.

On note Λ l'ensemble des fonctions continues strictement croissantes définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\lambda(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t) = +\infty$.

I-2 - <u>Théorème</u>.- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, x *des éléments de* D

$$d_{J_1}(x_n, x) = 0 \iff \exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Lambda$$

telle que

$$\forall \alpha \in T_x \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{0\le t\le\alpha} |x_n(\lambda_n(t)) - x(t)| = 0 \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{0\le t\le\alpha} |\lambda_n(t) - t| = 0 \end{cases}$$

T_x *désigne l'ensemble des points de continuité de* x ([22] p. 70).

Il est clair que pour toute mesure μ de M_b la fonction $t \to Q(\mu,t)$ appartient à D. En étudiant la f.c. comme élément d'un espace fonctionnel comme D, nous devons pouvoir nous affranchir des hypothèses concernant les δ-frontières de boules (cf. théorème I.2 - chapitre II) dans les résultats de convergence. Cependant, le contre-exemple suivant montre que la topologie J_1 ne convient pas.

I-3 - <u>Théorème</u>.- $\exists (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μ *des éléments de* M_b *tels que*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0 \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(X) = \mu(X) \end{array}\right\} \not\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} d_{J_1}(Q(\mu_n,.)\ Q(\mu,.)) = 0$$

<u>Démonstration</u> : $X = \mathbb{R}$; on pose $\mu = 1/2\ \delta_o + 1/2\ \delta_1$ où δ_u désigne la mesure de Dirac au point $u \in \mathbb{R}$.

D'autre part on définit $\mu_n = 1/2\ \delta_o + \gamma_n$ où γ_n est la mesure uniforme de masse $1/2$ sur l'intervalle $[1 - 1/n\ ,\ 1]$.

On a alors

$$Q(\mu,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad t \in [0,\ 1/2[\\ \\ 1 & \text{si} \quad t \in [1/2\ ,\ +\infty[\end{cases}$$

$$Q(\mu_n,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad t \in [0,\ 1/2 - 1/2n[\\ 1 & \text{si} \quad t \in [1/2\ ,\ +\infty[\\ nt + (1 - n/2) & \text{si} \quad t \in [1/2 - 1/2n\ ,\ 1/2[\end{cases}$$

La fonction $t \to Q(\mu,t)$ possède une discontinuité de hauteur $1/2$ au point $t = 1/2$ alors que les fonctions $t \to Q(\mu_n,t)$ sont continues. On ne peut donc avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{J_1}(Q(\mu_n,.),\ Q(\mu,.)) = 0$ car l'ensemble des fonctions continues est nulle part dense dans D (cf. exercice 4 p. 123 de [2]).

On peut cependant obtenir la convergence dans la topologie J_1 si la fonction limite $t \to Q(\mu,t)$ est continue ; ce résultat fait l'objet de la proposition suivante.

I-4 - <u>*Proposition*</u>.- *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μ *des éléments de* M_b ; *sous les hypothèses (a), (b), (c) on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} d_{J_1}(Q(\mu_n,.),\ Q(\mu,.)) = 0$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$

c) la fonction $t \to Q(\mu,t)$ *est continue pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$.

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence directe du lemme suivant.

I-5 - <u>*Lemme*</u>.- *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, f *des fonctions croissantes définies sur* $[0,\alpha]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *telles que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement vers* f *qui est continue.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge alors uniformément vers* f *sur le compact* $[0,\alpha]$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; l'intervalle $[f(0),\ f(\alpha)]$ est découpé en intervalles de longueur inférieure à ε

$$f(0) = x_o < x_1 \ \ldots\ldots < x_k = f(\alpha) \ .$$

On note $t_o, t_1, \ldots, t_k$ le découpage correspondant de $[0,\alpha]$, c'est-à-dire $t_i = f^{-1}(x_i)$, $i = 0,\ldots,k$.

$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon$, $\forall i \in \{0,1,\ldots,k\}$

Soit $t \in [0,\alpha]$; $\exists i \in \{0,\ldots,k-1\}$ tel que $t \in [t_i,\ t_{i+1}[$

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq |f_n(t) - f_n(t_i)| + |f_n(t_i) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(t)| \\ &\leq |f_n(t_{i+1}) - f_n(t_i)| + |f_n(t_i) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(t_{i+1})| \\ &\leq |f_n(t_{i+1}) - f_n(t_i)| + 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geq N(\varepsilon) \ . \end{aligned}$$

D'autre part

$$|f_n(t_{i+1}) - f_n(t_i)| \leqslant |f_n(t_{i+1}) - f(t_{i+1})| + |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$
$$+ |f(t_i) - f_n(t_i)|$$
$$\leqslant 3\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(\varepsilon)$$

Par conséquent :

$$\forall t \in [0,\alpha] \ , \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \ , \ n \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(t) - f(t)| < 5\varepsilon$$

et donc
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,\alpha]} |f_n(t) - f(t)| = 0 \quad .$$

La démonstration de la proposition I.4 est terminée en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \lambda_n(t) = t \ .$$

II - LA TOPOLOGIE M_1 *SUR* D.-

L'introduction de cette topologie sur D va nous permettre de nous affranchir de l'hypothèse (c) de la proposition précédente.
Dans un premier temps, nous étudierons l'espace $D[0,1]$ (noté D' dans la suite) muni de cette topologie pour laquelle nous définirons une métrique.

1 - Représentations paramétriques et graphe complété.

II-1 - Définition.- Soit $x \in D'$; on appelle graphe complété de x l'ensemble :

$$\Gamma_x = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times [0,1] \ ; \ \lim_{t\uparrow b} x(t) \leqslant a \leqslant x(b)\}$$

Γ_x est une courbe continue dans $\mathbb{R} \times [0,1]$.

II-2 - <u>Définition</u>.- Soit (y,t) un couple de fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et $[0,1]$, tel que y est continue et t est continue croissante ; (y,t) définit une représentation paramétrique de Γ_x (on note $(y,t) \in \Gamma_x$) si :

$$\forall (a,b) \in \Gamma_x \ , \ \exists s \in [0,1] \quad \text{tel que} \quad y(s) = a \quad \text{et} \quad t(s) = b \ .$$

<u>*Remarque*</u> : Si $((y_1,t_1), (y_2,t_2)) \in \Gamma_x^2$ il existe $\lambda \in \Lambda'$ telle que

$$y_1(s) = y_2(\lambda(s)) \quad \text{et} \quad t_1(s) = t_2(\lambda(s))$$

(cf. [20] p. 266) ; Λ' est l'ensemble des fonctions continues strictement croissantes de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$.

II-3 - <u>Définition</u>.- (cf. [20] p. 265) .

On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset D'$ est M_1 convergente vers $x \in D'$ s'il existe $(y,t) \in \Gamma_x$ et $(y_n,t_n) \in \Gamma_{x_n}$ telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} \ \sup_{s \in [0,1]} (|y_n(s) - y(s)| + |t_n(s) - t(s)|) = 0$$

L'objet du résultat suivant est de définir sur D' une métrique induisant la topologie M_1 de Skorokhod .

II-4 - <u>Théorème</u>.- L'application d_{M_1} *définie sur* $D' \times D'$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$\forall (x_1,x_2) \in D'^2 \quad d_{M_1}(x_1,x_2) = \inf_{(y_1,t_1) \in \Gamma_{x_1}} \ \sup_{s \in [0,1]} (|y_1(s)-y_2(s)|+|t_1(s)-t_2(s)|)$$

est une métrique telle que (D',d_{M_1}) *est séparable complet ;* (y_2,t_2) *désigne une représentation paramétrique quelconque de* x_2 .

Démonstration : Vérifions tout d'abord que la définition ci-dessus est indépendante du choix de (y_2,t_2). Soit $((y_2,t_2),(y'_2,t'_2)) \in \Gamma^2_{x_2}$; il existe $\lambda \in \Lambda'$ tel que $y_2 = y'_2 \circ \lambda$ et $t_2 = t'_2 \circ \lambda$.

Posons

$$A = \inf_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \sup_{s\in[0,1]} (|y_1(s)-y'_2(s)| + |t_1(s)-t'_2(s)|)$$

Lorsque s parcourt $[0,1]$, $\lambda(s)$ fait de même d'où

$$A = \inf_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \sup_{\lambda(s)\in[0,1]} (|y_1 o\lambda(s)-y'_2 o\lambda(s)| + |t_1 o\lambda(s)-t'_2 o\lambda(s)|)$$

De la même façon, lorsque (y_1,t_1) décrit Γ_{x_1} , $(y_1 \circ \lambda,\ t_1 \circ \lambda)$ le parcourt aussi d'où :

$$A = \inf_{(y_1 o\lambda,t_1 o\lambda)\in\Gamma_{x_1}} \sup_{s\in[0,1]} (|y_1 o\lambda(s) - y_2(s)| + |t_1 o\lambda(s) - t_2(s)|)$$

$$= \inf_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \sup_{s\in[0,1]} (|y_1(s)-y_2(s)| + |t_1(s) - t_2(s)|)$$

La suite de la démonstration nécessite le résultat intermédiaire suivant :

II-5 - Lemme.- Pour tout x *de* D' *,* Γ_x *est fermé dans* $C[0,1]^2$ *muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Comme nous l'avons précisé dans la définition II.2, chapitre 3 nous confondons sous une même notation le graphe complété de x et l'ensemble des représentations paramétriques de x.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $(y_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de représentations paramétriques de x convergeant vers $(y,t) \in C[0,1]^2$. Montrons que $(y,t) \in \Gamma_x$, c'est-à-dire que pour tout couple (a,b) du graphe complété de x, il existe $s \in [0,1]$ tel que $y(s) = a$ et $t(s) = b$.

Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $y_n(s_n) = a$ et $t_n(s_n) = b$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset [0,1]$ donc possède une sous-suite $(s_{n_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $s_o \in [0,1]$.

$(y_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers (y,t) dans $C[0,1]^2$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{s\in[0,1]} (|y_n(s)-y(s)| + |t_n(s)-t(s)|) = 0$$

Soit (ε,α) fixé dans $\mathbb{R}^{+*2}$;

$\exists (P(\alpha), N(\varepsilon)) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que

$$p \geq P(\alpha) \Longrightarrow s_{n_p} \in [s_o - \alpha, s_o + \alpha]$$

$$n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \sup_{s\in[s_o-\alpha s_o+\alpha]} (|y_n(s)-y(s)| + |t_n(s)-t(s)|) < \varepsilon$$

En particulier $n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \sup_{p\geq P(\alpha)} (|y_n(s_{n_p})-y(s_{n_p})| + |t_n(s_{n_p})-t(s_{n_p})|) < \varepsilon$

et par conséquent :

$$\exists P(\alpha,\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,\ p \geq P(\alpha,\varepsilon) \Longrightarrow |y_{n_p}(s_{n_p})-y(s_{n_p})| + |t_{n_p}(s_{n_p})-t(s_{n_p})| < \varepsilon$$

c'est-à-dire : $|a-y(s_{n_p})| + |b-t(s_{n_p})| < \varepsilon$

ε étant arbitraire on a $a = \lim_{p\to+\infty} y(s_{n_p})$ et $b = \lim_{p\to+\infty} t(s_{n_p})$.

$(y,t) \in C[0,1]^2 \Longrightarrow a = y(s_o)$ et $b = t(s_o)$.

Montrons maintenant que d_{M_1} est une métrique

1) Soit $(x_1,x_2) \in D'^2$ tel que $d_{M_1}(x_1,x_2) = 0$; par définition de d_{M_1} on peut trouver $(y_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Gamma_{x_1}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{s\in[0,1]} (|y_n(s)-y(s)| + |t_n(s)-t(s)|) = 0$$

où $(y,t) \in \Gamma_{x_2}$.

Le lemme précédent permet d'affirmer que $(y,t) \in \Gamma_{x_1}$ et donc x_1 et x_2 ont les mêmes représentations paramétriques, et les mêmes graphes complétés ; x_1 et x_2 coïncident alors aux points de continuité communs ce qui entraîne que $x_1 = x_2$ (cf. [2] p. 109).

2) Symétrie.

Posons $\theta((y_1,t_1),(y_2,t_2)) = \sup_{s\in[0,1]} (|y_1(s)-y_2(s)| + |t_1(s)-t_2(s)|)$

$d_{M_1}(x_1,x_2) = \inf_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \theta((y_1,t_1),(y_2,t_2))$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; $\exists (y_1^\varepsilon,t_1^\varepsilon) \in \Gamma_{x_1}$ tel que $d_{M_1}(x_1,x_2) \geq \theta((y_1^\varepsilon,t_1^\varepsilon), (y_2,t_2)) - \varepsilon$ d'où $d_{M_1}(x_1,x_2) \geq d_{M_1}(x_2,x_1) - \varepsilon$.
De la même façon on montrerait que : $d_{M_1}(x_2,x_1) \geq d_{M_1}(x_1,x_2) - \varepsilon$
d'où $d_{M_1}(x_1,x_2) = d_{M_1}(x_2,x_1)$.

3) Inégalité triangulaire.

Soit $(x_1,x_2,x_3) \in D'^3$

$$d_{M_1}(x_1,x_3) = \operatorname*{Inf}_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} (\theta((y_1,t_1),(y_3,t_3))) =$$

$$= \operatorname*{Inf}_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \operatorname*{Sup}_{s\in[0,1]} (|y_1(s)-y_3(s)|+|t_1(s)-t_3(s)|)$$

$$\leq \operatorname*{Inf}_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \operatorname*{Sup}_{s\in[0,1]} (|y_1(s)-y_2(s)|+|y_2(s)-y_3(s)|+|t_1(s)-t_2(s)|+ + |t_2(s)-t_3(s)|)$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{s\in[0,1]} (|y_1(s)-y_2(s)|+|t_1(s)-t_2(s)|) + \operatorname*{Sup}_{s\in[0,1]} (|y_2(s)-y_3(s)|+ + |t_2(s)-t_3(s)|)$$

pour tout $(y_1,t_1) \in \Gamma_{x_1}$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; on peut choisir $(y_2,t_2) \in \Gamma_{x_2}$ de telle façon que :

$$d_{M_1}(x_1,x_3) \leq d_{M_1}(x_1,x_2) + \varepsilon + \operatorname*{Sup}_{s\in[0,1]} (|y_2(s)-y_3(s)|+|t_2(s)-t_3(s)|)$$

Comme nous l'avons montré précédemment $d_{M_1}(x_1,x_3)$ est indépendant du couple (y_3,t_3). On peut donc choisir (y_3,t_3) tel que :

$$\operatorname*{Sup}_{s\in[0,1]} (|y_2(s)-y_3(s)| + |t_2(s)-t_3(s)|) \leq d_{M_1}(x_2,x_3) + \varepsilon$$

Par conséquent $d_{M_1}(x_1,x_3) \leq d_{M_1}(x_1,x_2) + d_{M_1}(x_2,x_3) + 2\varepsilon$; ε étant arbitraire l'inégalité triangulaire est démontrée.

(D', d_{M_1}) est séparable ; un sous-ensemble dénombrable dense est constitué par les fonctions prenant des valeurs rationnelles en $t = 1$ et telles que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, ces fonctions soient constantes et rationnelles sur l'intervalle $[\frac{i-1}{k} , \frac{i}{k}[$, $0 \leq i \leq k$.

Pour montrer que (D', d_{M_1}) est complet, considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans D' et montrons qu'elle possède une sous-suite convergente (cf. [19] p. 130, Théorème T.2, XI, 1 ; 2).

Soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que $d_{M_1}(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$.

Posons $z_k = x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$d_{M_1}(z_k, z_{k+1}) < \frac{1}{2^k} \Longrightarrow \forall (y_k, t_k) \in \Gamma_{z_k}$, $\exists (y_{k+1}, t_{k+1}) \in \Gamma_{x_{k+1}}$ telle que

$\theta((y_k,t_k),(y_{k+1},t_{k+1})) < \frac{1}{2^k}$; $((y_{k+1}, t_{k+1})$ dépend de $(y_k, t_k))$.

La suite (y_k, t_k) est de Cauchy dans $C[0,1]^2$ donc converge vers une limite (y,t) où y est continue et t continue croissante. (y,t) est une représentation paramétrique d'un élément x de D' défini de la façon suivante ; sur tout intervalle $[a,b]$ où t est strictement croissante x sera définie par $x(t(s)) = y(s)$ pour tout s de $[a,b]$. Si t est constante sur un intervalle $[a',b']$ x possédera une discontinuité au point $t(a')$ de hauteur $y(b') - y(a')$ avec

$$\lim_{s\uparrow t(a')} x(s) = y(a') \quad \text{et} \quad x(t(a')) = y(b') = x(t(b')) \ .$$

Remarquons pour terminer que d_{M_1} induit bien la topologie M_1 sur D' puisque si $(x_1, x_2) \in D'^2$ on a :

$$d_{M_1}(x_1,x_2) = \operatorname*{Inf}_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \theta((y_1,t_1), (y_2,t_2))$$

ou (y_2, t_2) est quelconque dans Γ_{x_2} c'est-à-dire que :

$$d_{M_1}(x_1,x_2) = \operatorname*{Inf}_{(y_1,t_1)\in\Gamma_{x_1}} \ \operatorname*{Inf}_{(y_2,t_2)\in\Gamma_{x_2}} \theta((y_1,t_1), (y_2,t_2))$$

2 - *Les ensembles de dimension finie de* (D', d_{M_1}) .

On définit les projections $\Pi_{t_1,\ldots,t_k}$ de D' dans $\mathbb{R}^k$ de façon habituelle par

$$\forall x \in D' \;, \; \forall (t_1,\ldots,t_k) \in [0,1]^k \quad \Pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = (x(t_1),\ldots,x(t_k)) \;.$$

II-6 - Proposition.- Les applications $\Pi_{t_1,\ldots,t_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(t_1,\ldots,t_k) \in [0,1]^k$ *sont mesurables pour la tribu borélienne* $\mathcal{B}_{M_1}$ *de* (D', d_{M_1}) .

Démonstration : Nous montrerons simplement que pour $t \in [0,1]$, Π_t est mesurable.

Posons $h_n(x,t) = n \int_t^{t+1/n} x(u)\, du$.

Par continuité à droite des éléments de D' , pour tout $x \in D'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x,t) = \Pi_t(x)$.

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'application $x \to h_n(x,t)$ est continue.

Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset D'$, $x \in D'$ tels que $\lim\limits_{p\to+\infty} d_{M_1}(x_p,x) = 0$.

En tout point de continuité de x $\lim\limits_{p\to+\infty} x_p(t) = x(t)$. La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée ; en effet si $(y_p,t_p) \in \Gamma_{x_p}$ et $(y,t) \in \Gamma_x$ on a : $\lim\limits_{p\to+\infty} \theta((y_p,t_p),(y,t)) = 0$ donc $(y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée.

De plus $\sup\limits_{s\in[0,1]} y_p(s) = \sup\limits_{s\in[0,1]} x_p(s)$ et $\inf\limits_{s\in[0,1]} y_p(s) = \inf\limits_{s\in[0,1]} x_p(s)$ donc $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée .

L'ensemble des points de discontinuité de x est dénombrable ; en appliquant le théorème de la convergence dominée on peut conclure ;

$$\lim_{p \to +\infty} h_n(x_p, t) = h_n(x,t)$$

Π_t est donc mesurable comme limite d'une suite d'applications continues.

II-7 - <u>Proposition</u>.- Les tribus boréliennes de D' *associées aux métriques* d_{J_1} *et* d_{M_1} *coincident.*

<u>Démonstration</u> : Notons $\mathcal{B}_{J_1}$ et $\mathcal{B}_{M_1}$ les tribus boréliennes de (D', d_{J_1}) et (D', d_{M_1}). $\mathcal{B}_{M_1} \subset \mathcal{B}_{J_1}$ car la topologie J_1 est plus forte que M_1. D'autre part $\mathcal{B}_{J_1}$ est engendrée par les projections ; la proposition précédente entraîne que $\mathcal{B}_{J_1} \subset \mathcal{B}_{M_1}$ d'où l'égalité.

3 - <u>*Critère de convergence dans*</u> (D', d_{M_1}).

Soit $\delta > 0$; notons

$$\omega_x^-(\delta,t) = \sup_{s \in [t-\delta, t]} (x(s) - x(t))\, \gamma(\delta,t,x)$$

$$\omega_x^+(\delta,t) = \sup_{s \in [t, t+\delta]} (x(t) - x(s))\, \gamma(\delta,t,x)$$

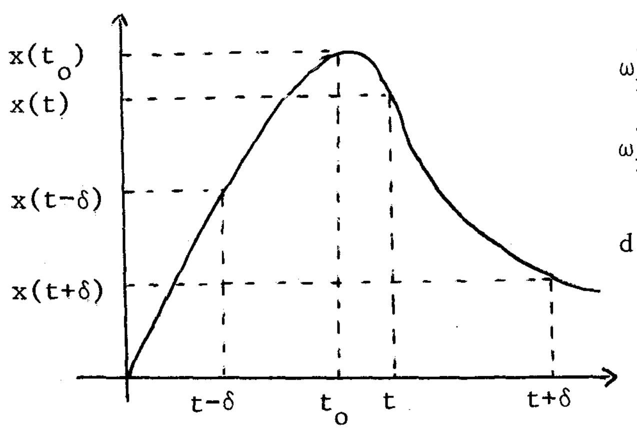
où $\gamma(\delta,t,x) = +1$ si $x(t+\delta) - x(t-\delta) \geq 0$

$= -1$ sinon.

Posons $\beta(\delta,x,t) = \mathrm{Max}(\omega_x^-(\delta,t), \omega_x^+(\delta,t))$

$\beta(\delta,x,t)$ représente en fait la distance séparant $x(t)$ du segment $(x(t-\delta), x(t+\delta))$.

<u>Exemple</u> :



$x(t+\delta) - x(t-\delta) < 0 \Longrightarrow \gamma(\delta,x,t) = -1$

$\omega_x^+(\delta,t) = 0$

$\omega_x^-(\delta,t) = x(t) - x(t-\delta)$

d'où $\beta(x,\delta,t) = x(t) - x(t-\delta)$

Le résultat suivant est dû à Skorokhod (cf. [20]).

II-8 - Théorème.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* D' *soit* M_1 *convergente vers* $x \in D'$ *est que :*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t)$ *en tout point* t *appartenant à un sous-ensemble dense de* $[0,1]$ *contenant* 0 *et* 1 .

2) $\lim\limits_{\delta\to 0} \lim\limits_{n} \sup\limits_{\delta\leq t\leq 1-\delta} \beta(\delta,x_n,t) = 0$.

4 - Généralisation à l'espace D de la topologie M_1.

La définition de la M_1 convergence sur D se fera de la même façon que celle de la J_1 convergence c'est-à-dire :

II-9 - Définition.- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, x des éléments de D. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x pour M_1 dans D , si pour tout α point de continuité de x la restriction de x_n à $[0,\alpha]$ converge vers la restriction de x à $[0,\alpha]$ pour la topologie M_1 dans $D[0,\alpha]$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$; notons r_α l'application définie sur D à valeurs dans $D[0,\alpha]$ par : $\forall x \in D$, $\forall t \in [0,\alpha]$ $r_\alpha(x)(t) = x(t)$. $r_\alpha(x)$ est en fait la restriction de x à l'intervalle $[0,\alpha]$.

II-10 - Proposition.- Pour tout α *de* $\mathbb{R}^+$ *l'application* r_α *est mesurable de* $(D,\mathcal{B}_{M_1})$ *dans* $(D[0,\alpha],\mathcal{B}^\alpha_{M_1})$ *où* $\mathcal{B}^\alpha_{M_1}$ *est la tribu borélienne sur* $D[0,\alpha]$ *associée à la topologie* M_1 .

<u>Démonstration</u> : Notons $h_{\alpha n}$ la restriction de h_n à $[0,\alpha]$.

$\forall x \in D$, $h_{\alpha n}(x,.) \in C[0,\alpha]$. En effet soit $(t_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite de limite $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$|h_{\alpha n}(x,t_p) - h_{\alpha n}(x,t)| \leq n(|\int_{t_p}^{t} x(u)\,du + \int_{t_p+1/n}^{t+1/n} x(u)du|)$$

(pour $t_p < t$ par exemple) donc $\lim\limits_{p\to+\infty} |h_{\alpha n}(x,t_p) - h_{\alpha n}(x,t)| = 0$.

$h_{\alpha n}$ est continue comme application de (D,d_{M_1}) dans $(D[0,\alpha],d^{\alpha}_{M_1})$ (cf. démonstration de la proposition II.6).

r_α est donc mesurable si $\lim\limits_{n\to+\infty} d^{\alpha}_{M_1}(h_{\alpha n}(x,.), r_\alpha(x)) = 0$

(r_α est alors limite d'une suite d'applications continues).

II-11 - Lemme.-

$$\forall x \in D \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \ \lim_{n\to+\infty} d^{\alpha}_{M_1}(h_{\alpha n}(x,.), r_\alpha(x)) = 0 \ .$$

Démonstration : Soit $(x,\alpha) \in D \times \mathbb{R}^+$; $(s_o,\ldots,s_k) \in [0,\alpha]^{k+1}$ tels que :

1) $0 = s_o < s_1 \ldots < s_k = \alpha$

2) l'oscillation de $r_\alpha(x)$ sur $[s_i,s_{i+1}[$, $i \in \{0,\ldots,k-1\}$ est inférieure à $\varepsilon > 0$ fixé . $h_{\alpha n}(x,.) \in C[0,\alpha] \Longrightarrow (h_{\alpha n},I_\alpha) \in \Gamma_{h_{\alpha n}}$

(I_α est l'application identique sur $[0,\alpha]$).

Par conséquent

$$d^{\alpha}_{M_1}(h_{\alpha n}(x,.),r_\alpha(x)) = \inf_{(y,t)\in\Gamma_{r_\alpha(x)}} \ \sup_{s\in[0,\alpha]} (|h_{\alpha n}(x,s) - y(s)| + |t(s) - s|)$$

Posons $\gamma = \operatorname{Min}\limits_{i=0}^{k-1} (s_{i+1} - s_i)$; soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \gamma$, pour $n \geq N$ on pose $\beta_n = s_{i+1} - \frac{1}{n} - s_i$. Si $s \in [s_i, s_i + \beta_n]$ on définit $y(s) = x(s_i)$, $t(s) = s$ on a alors

$$\sup_{s\in[s_i,s_i+\beta_n[}(|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)|+|t(s)-s|)=\sup_{s\in[s_i,s_i+\beta_n[}|h_{\alpha n}(x,s)-x(s_i)|$$

D'autre part pour tout s de $[s_i,s_i+\beta_n[$

$h_{\alpha n}(x,s)\in\left[\min_{s\in[s_i,s_{i+1}[}x(s),\ \max_{s\in[s_i,s_{i+1}[}x(s)\right]$ par définition de $h_{\alpha n}$

(car $s_i+\beta_n=s_{i+1}-\frac{1}{n}$) .

L'oscillation de $r_\alpha(x)$ (et de x) sur $[s_i,\ s_{i+1}[$ est inférieure à ε d'où

$$\sup_{s\in[s_i,s_i+\beta_n[}|h_{\alpha n}(x,s)-x(s_i)|<\varepsilon$$

Il reste à majorer la quantité $\sup_{s\in[s_i+\beta_n,s_{i+1}[}(|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)|+|t(s)-s|)$

La difficulté pour majorer la quantité ci-dessus provient du fait que $r_\alpha(x)$ peut posséder une discontinuité en s_{i+1} de hauteur supérieure à ε ; nous nous placerons dans ce cas. Nous supposerons de plus que $x(s_{i+1})>\lim_{t\uparrow s_{i+1}}x(t)$; le raisonnement est identique lorsque la discontinuité est dans l'autre sens.

$h_{\alpha n}(x,.)\in C[0,\alpha]\implies\exists\theta\in[s_i+\beta_n,\ s_{i+1}[$ tel que

$$\sup_{(s,t)\in[s_i+\beta_n,\theta]}|h_{\alpha n}(x,s)-h_{\alpha n}(x,t)|<\varepsilon\quad.$$

Soit $N_1\in\mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geq N_1$, l'oscillation de $r_\alpha(x)$ sur $[s_{i+1}-\frac{1}{n},\ s_{i+1}[$ soit inférieure à $\varepsilon/2$ de même que sur $[s_{i+1},\ s_{i+1}+\frac{1}{n}[$.

Pour $n\geq\mathrm{Max}(N,N_1)$ $h_{\alpha n}(x,.)$ est croissante sur $[s_{i+1}-\frac{1}{n},\ s_{i+1}[$ en raison de la définition de $h_{\alpha n}$ et du sens de la discontinuité en s_{i+1} qui est de hauteur supérieure à ε.

On a donc : $n \geq \mathrm{Max}(N,N_1) \Longrightarrow |h_{\alpha n}(x,s_{i+1}) - x(s_{i+1})| < \varepsilon/2$.

Nous étudierons les deux cas suivants :

1) $h_{\alpha n}(x, s_{i+1}) \geq x(s_{i+1})$

2) $h_{\alpha n}(x, s_{i+1}) < x(s_{i+1})$.

Cas n° 1.

$\exists \theta' \in [\theta, s_{i+1}[$ tel que $h_{\alpha n}(\theta') = x(s_{i+1})$; on définit alors y et t de la façon suivante :

Sur $[s_i + \beta_n, \theta[$ y varie linéairement entre $x(s_i)$ et $h_{\alpha n}(\theta)$ et $t(s) = s$.

Sur $[\theta,\theta'[$ $y(s) = h_{\alpha n}(x,s)$ et t varie linéairement sur cet intervalle entre les valeurs θ et s_{i+1} .

Sur $[\theta', s_{i+1}[$ y et t sont constantes et égales respectivement à $x(s_{i+1})$ et s_{i+1} . On a alors

$$\sup_{s\in[s_i+1/n, s_{i+1}[}(|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)| + |t(s)-s|) = \mathrm{Max}\Big(\sup_{s\in[s_i+\beta_n,\theta[}(|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)|) ,$$

$$\sup_{s\in[\theta,\theta'[}(|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)|+|t(s)-s|) , \sup_{s\in[\theta',s_{i+1}[}(|h_{\alpha n}(x,s)-x(s_{i+1})|+|s_{i+1}-s|)$$

Nous noterons ces trois termes respectivement A, B, C .

Majoration de A.

$$|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)| \leq |h_{\alpha n}(x,s)-h_{\alpha n}(x,s_i+\beta_n)| + |h_{\alpha n}(x,s_i+\beta_n) - y(s)| \quad (*)$$

L'oscillation de $h_{\alpha n}(x,.)$ sur $[s_i + \beta_n,\theta[$ est inférieure à ε, ce qui permet de majorer le premier des deux termes par ε.

$$h_{\alpha n}(x,\ s_i + \beta_n) \in \left[\underset{s\in[s_i,s_{i+1}[}{\mathrm{Min}} x(s),\ \underset{s\in[s_i,s_{i+1}[}{\mathrm{Max}} x(s) \right]$$

d'où $|h_{\alpha n}(x,\ s_i + \beta_n) - x(s_i)| < \varepsilon$.

D'autre part par définition de $\theta, |h_{\alpha n}(x,\ s_i + \beta_n) - h_{\alpha n}(\theta)| < \varepsilon$ ce qui entraîne la majoration du deuxième terme de (*) par ε car y varie linéairement entre $x(s_i)$ et $h_{\alpha n}(\theta)$. Nous en déduisons donc

$$\underset{s\in[s_i+\beta_n,\theta[}{\mathrm{Sup}} (|h_{\alpha n}(x,s) - y(s)|) < 2\varepsilon$$

Majoration de B.

B se majore par $\frac{1}{n}$ car si $s \in [\theta,\theta']$ $|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)| = 0$.

Majoration de C.

L'oscillation de $h_{\alpha n}(x,.)$ sur $[\theta',s_{i+1}[$ est inférieure à ε pour $n \geq N$ (en effet $\frac{1}{N} < \gamma$ d'où $s_{i+1} + \frac{1}{n} < s_{i+2}$).

D'autre part pour $s \in [\theta',\ s_{i+1}[$ $|t(s)-s| < 1/n$ donc

$$\underset{s\in[\theta',s_{i+1}[}{\mathrm{Sup}} (|h_{\alpha n}(x,s) - x(s_{i+1})| + |t(s) - s_{i+1}|) < \varepsilon + \frac{1}{n} .$$

La majoration globale obtenue est donc

$$\underset{s\in[s_i,s_{i+1}[}{\mathrm{Sup}} (|h_{\alpha n}(x,s) - y(s)| + |t(s) - s|) < 3\varepsilon + \frac{2}{n}$$

où ε est arbitraire, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \underset{s\in[s_i,s_{i+1}[}{\mathrm{Sup}} (|h_{\alpha n}(x,s)-y(s)| + |t(s)-s|) = 0$.

Cas n° 2.

$h_{\alpha n}(x,\ s_{i+1}) < x(s_{i+1})$; on a cependant $|h_{\alpha n}(x,\ s_{i+1})-x(s_{i+1})| < \varepsilon$ pour $n \geq N$ car $s_{i+1} + \frac{1}{n} < s_{i+2}$ et l'oscillation de x sur $[s_{i+1},\ s_{i+2}[< \varepsilon$. On définit alors θ' vérifiant $|h_{\alpha n}(x,\theta')-x(s_{i+1})| < 2\varepsilon$

et y comme une fonction linéaire variant sur $[\theta', s_{i+1}[$ entre $h_{\alpha n}(x,\theta')$ et $x(s_{i+1})$. t est sur cet intervalle constante et égale à s_{i+1}. On obtient alors le même type de majorations que dans le cas n° 1.

II-12 - __Proposition__.- L'application d_M *définie sur* $D \times D$ *par*

$$\forall (x_1,x_2) \in D^2 \quad d_M(x_1,x_2) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha} \frac{d^\alpha_{M_1}(r_\alpha(x_1), r_\alpha(x_2))}{1 + d^\alpha_{M_1}(r_\alpha(x_1), r_\alpha(x_2))} d\alpha$$

définit une métrique telle que (D,d_M) *est séparable complet et induit sur* D *la topologie* M_1 *.*

__Démonstration__ : d_M est une métrique car les $d^\alpha_{M_1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sont des métriques ; d'autre part, pour tout $x \in D$ l'ensemble des points de discontinuité de x est dénombrable donc de mesure de Lebesgue nulle ; on a alors l'équivalence

$$\lim_{n\to+\infty} d_M(x_n,x) = 0 \Longleftrightarrow \forall \alpha \in T_x \ d^\alpha_{M_1}(r_\alpha(x_n), r_\alpha(x)) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

donc d_M induit sur D la topologie M_1 .

(D,d_M) est séparable car (D,d_{J_1}) est séparable et la topologie M_1 est plus faible que la topologie J_1 .

(D,d_M) est complet (cf. démonstration du théorème II-4 , chap. III).

III - *__CONVERGENCE D'UNE SUITE DE__* __f.c.__ *__DANS__* $D[0,+\infty[$.-

A l'aide des longs préliminaires qui nous ont permis de généraliser la topologie M_1 à l'espace D nous allons montrer que nous pouvons simplement, en se plaçant du point de vue fonctionnel se passer des hypothèses faites au chapitre II sur les δ frontières de boules.

III-1 - Théorème.- Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μ *des éléments de* M_b ; *sous les hypothèses (a) et (b) on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} d_M(Q(\mu_n,.),\ Q(\mu,.)) = 0$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n,\mu) = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$.

Démonstration : Nous définissons les probabilités $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, τ comme au chapitre II (théorème I.2) ; nous allons montrer que pour tout point de continuité de l'application $t \to Q(\tau,t)$ on a :

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n}} \sup_{\delta\leq t\leq\alpha-\delta} \beta(\delta,\ Q(\tau_n,.),t) = 0 \quad \text{ou} \quad \beta(\delta,Q(\tau_n,.),t)$$

est la quantité définie au paragraphe 3 de ce chapitre.

Reprenons les notations du théorème II.8 ; nous avions appelé

$$\bar{\omega}_{Q(\tau_n,.)}(\delta,t) = \sup_{s\in[t-\delta,t]} (Q(\tau_n,s) - Q(\tau_n,t))\ \gamma(\delta,t,Q(\tau_n,.))$$

et $$\overset{+}{\omega}_{Q(\tau_n,.)}(\delta,t) = \sup_{s\in[t,t+\delta]} (Q(\tau_n,t) - Q(\tau_n,s))\ \gamma(\delta,t,Q(\tau_n,.))$$

ou $$\gamma(\delta,t,Q(\tau_n,.)) = +1 \quad \text{si} \quad Q(\tau_n,\ t+\delta) - Q(\tau_n,\ t-\delta) \geq 0$$

$$= -1 \quad \text{sinon} .$$

Dans le cas particulier des fonctions de concentration qui sont croissantes on a toujours $\gamma(\delta,t,Q(\tau_n,.)) = +1$ et donc $\bar{\omega}_{Q(\tau_n,.)}(\delta,t) = 0$ pour tout t et tout $\delta > 0$. Pour la même raison $\overset{+}{\omega}_{Q(\tau_n,.)}(\delta,t) = 0$ et donc $\beta(\delta,\ Q(\tau_n,.),t) = 0$ ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_M(Q(\tau_n,.),Q(\tau,.)) = 0$ (cf. définition II.9). Comme au théorème I.2 chapitre II on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} d_M(Q(\mu_n,.),\ Q(\mu,.)) = 0 \quad .$$

III-2 - Corollaire.- Soit D_1 *le sous-ensemble de* D *des fonctions croissantes,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, x *des éléments de* D_1 *alors*

$$d_M(x_n,x) = 0 \iff \forall t \in T_x \quad \lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t) \ .$$

Remarque : D_1 est mesurable (cf. [22]).

On obtient un théorème analogue pour les mesures aléatoires de la façon suivante :

III-3 - Théorème.- Soit $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\mu^\bullet$ *des mesures aléatoires définies sur un espace probabilisé* (Ω,A,P) *à valeurs dans* M_b *. On a alors sous les hypothèses (a) et (b) :*

$$\lim_{n\to+\infty} d_M(Q(\mu_n^\bullet,.),\ Q(\mu^\bullet,.)) = 0 \quad \text{p.s. (resp. en probabilité, faiblement).}$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\mu_n^\bullet,\mu^\bullet) = 0$ *p.s. (resp. en probabilité, faiblement).*

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n^\bullet(X) = \mu^\bullet(X)$ *p.s.*

Démonstration : La convergence p.s. est une conséquence directe du théorème III.1, chapitre III. Les convergences en probabilité et en loi se déduisent respectivement du lemme III.4 chapitre II et du théorème 5.1. de [2] p. 30 .

IV - APPROXIMATION DANS $D[0, +\infty[$.-

Soit $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs de limite nulle et μ un élément de $\mathcal{M}_b$.

Pour chaque indice n de $\mathbb{N}^*$ on fait correspondre à δ_n une suite $(x_n^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} B(x_n^p, \delta_n)$$

ceci est toujours possible car X est séparable .

Posons $Q^n(\mu,t) = \operatorname{Sup}_{p\in\mathbb{N}^*} \mu(B(x_n^p,t))$.

IV-1 - Proposition.- Soit $t_o \in \mathbb{R}^+$ *tel que*

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}_{x\in X} \mu(\partial_\delta B(x,t_o)) = 0$$

alors
$$\lim_{n\to+\infty} Q^n(\mu,t_o) = Q(\mu,t_o) .$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; par continuité à droite de $t \to Q(\mu,t)$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que :

$$\forall \delta' \in \mathbb{R}^+ \quad \delta' < \delta \Longrightarrow Q(\mu,t_o + \delta') - Q(\mu,t_o) < \varepsilon \quad .$$

Soit $x_o \in X$ vérifiant $Q(\mu,t_o) - \mu(B(x_o,t_o)) < \varepsilon$.

$\exists N \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N \Longrightarrow \delta_n < \delta'$.

Par conséquent il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x_n^p,x_o) < \delta'$

d'où
$$Q^n(\mu,t_o) \leq Q(\mu,t_o) \leq \mu(B(x_o,t_o)) + \varepsilon \leq \mu(B(x_n^p, t_o + \delta')) + \varepsilon$$
$$\leq Q^n(\mu,t_o + \delta') + \varepsilon$$

D'autre part $Q^n(\mu,t_o + \delta') \leq Q^n(\mu,t_o) + \sup_{p\in\mathbb{N}^*} \mu(\partial_\delta, B(x_n^p,t_o))$.

Pour δ' suffisamment petit $\sup_{p\in\mathbb{N}^*} \mu(\partial_\delta, B(x_n^p,t_o)) < \varepsilon$ ce qui entraîne :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* , \quad N_1 \geq N , \ n \geq N_1 \implies Q^n(\mu,t_o) \leq Q(\mu,t_o) \leq Q^n(\mu,t_o) + 2\varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

IV-2 - <u>Proposition</u>.-

$\forall \mu \in M_b \quad \lim_{n\to+\infty} d_M(Q^n(\mu,.), Q(\mu,.)) = 0$.

<u>Démonstration</u> : D'après le corollaire III.2, il suffit de montrer qu'en tout point t de continuité de l'application $s \to Q(\mu,s)$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} Q^n(\mu,t) = Q(\mu,t) .$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $x_o \in X$ tel que $\mu(B(x_o,t)) > Q(\mu,t) - \varepsilon$ $\exists \delta > 0$ tel que $Q(\mu,t+\delta) - \varepsilon \leq Q(\mu,t) \leq Q(\mu,t-\delta) + \varepsilon$ car $s \to Q(\mu,s)$ est continue au point t.

$\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$n \geq N \implies d(x_n^p, x_o) < \delta$$

d'où $\quad \mu(B(x_n^p, t+\delta)) \geq \mu(B(x_o,t)) \geq Q(\mu,t) - \varepsilon$.

Par conséquent $Q^n(\mu,t+\delta) \geq Q(\mu,t) - \varepsilon$

et donc $Q(\mu,t) + \varepsilon \geq Q(\mu,t+\delta) \geq Q^n(\mu,t+\delta) \geq Q(\mu,t) - \varepsilon$

De la même façon que précédemment

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* , \; n \geq N_1 \implies Q^n(\mu,t) \geq Q(\mu,t-\delta) \geq Q(\mu,t) - \varepsilon$$

d'où $Q(\mu,t) + \varepsilon \geq Q^n(\mu, t+\delta) \geq Q^n(\mu,t) \geq Q(\mu,t) - \varepsilon$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n(\mu,t) = Q(\mu,t)$.

CONCLUSION.

Nous avons étudié principalement dans ce travail la continuité de la fonction de concentration de P. Levy en temps qu'application définie sur l'ensemble des mesures positives à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ou dans $D[0, +\infty[$. Dans le premier cas nous avons établi des conditions suffisantes pour qu'un point μ de M_b soit point de continuité et des contre-exemples simples construits à partir de répartitions ponctuelles permettent de montrer que ces conditions ne sont pas nécessaires. L'obtention de telles conditions semble délicate par la définition même de la f.c. comme borne supérieure sur X. Par ailleurs, le "défaut" principal de cette fonction est qu'elle n'est pas caractéristique de la mesure ; par exemple toutes les mesures de Dirac ont une f.c. constante égale à 1. Pour pallier cet inconvénient, nous pourrions définir sur M une relation d'équivalence R de la façon suivante :

$$\forall(\mu,\nu) \in M^2 \qquad \mu \, R \, \nu \iff \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad Q(\mu,t) = Q(\nu,t) \ .$$

L'intérêt de cette relation dépend de la possibilité de caractériser géométriquement les classes d'équivalence. Plus précisément, dans le cas de répartitions ponctuelles de $\mathbb{R}^p$ nous conjecturons l'existence d'une réciproque à la proposition III.9 du chapitre I, c'est-à-dire que si deux répartitions ponctuelles f_1 et f_2 sont telles que $f_1 \, R \, f_2$ alors il existe une isométrie transformant f_1 en f_2 .

Pour des probabilités définies sur la droite réelle, Hentgartner et Théodorescu ([8]) ont étudié l'ensemble N_t (proposition II.6 , chapitre I) ; leurs résultats laissent penser que dans des cas plus généraux et sous certaines conditions d'unimodalité, cet ensemble est connexe ; un des développements de ce travail pourrait donc être l'étude des applications $t \to \mathcal{N}_t(\mu)$ pour μ fixé dans $\mathcal{M}_b$ et $\mu \to \mathcal{N}_t(\mu)$ pour t fixé.

Au niveau des applications et du calcul, nous pensons qu'il est possible d'obtenir un algorithme plus simple et plus rapide en utilisant les résultats de M. EYTAN et J. BERTIN ([10], [9]) sur les matrices ordonnables moyennant une légère modification de la définition de Q. En notant $\mathcal{C}$ l'ensemble des convexes fermés de $\mathbb{R}^p$ et en posant $Q(\mu,t) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ \mathrm{diam}(C) \leq 2t}} \mu(C)$ on peut alors présenter le calcul de la fonction de concentration comme suit :

Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^p)^n$ les points de la répartition, on définit pour $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ $t_{ij} = 1$ si $d(x_i,x_j) \leq 2t$, $t_{ij} = 0$ sinon. La matrice $T = (t_{ij})$, $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ induit sur $\{x_1,\ldots,x_n\}$ une relation réflexive et symétrique. La valeur de la f.c. est alors le cardinal du plus grand sous-ensemble de points tel que la restriction de la relation à ce sous-ensemble soit transitive. Pratiquement il s'agit de permuter lignes et colonnes de la matrice T de façon à obtenir autour de la diagonale le plus grand carré composé uniquement de 1.

Dans le chapitre III, nous avons montré (proposition I.4) que si $D[0, +\infty[$ est muni de la topologie J_1 l'application définie par $\nu \to Q(\nu,.)$, $\nu \in \mathcal{M}_b$ est continue en tout point μ tel que $t \to Q(\mu,t)$ est continue. Il est clair que si l'on se restreint à $\mathcal{N}$, ensemble des répartitions ponctuelles on obtient la même propriété de continuité en tout point f tel que $Q(f,.)$ a des discontinuités de hauteur égale à 1. Il serait donc intéressant de déterminer dans quelles conditions une répartition ponctuelle possède cette propriété, mais cela demande sans aucun doute une étude géométrique très délicate.

Enfin, la métrique définie sur $D[0, +\infty[$ dans ce chapitre pourrait être utilisée pour définir sur l'ensemble des mesures à signe sur $\mathbb{R}^+$ une topologie métrisable voisine de celle de la convergence faible classique car la fonction de répartition d'une telle mesure est un élément de $D[0, +\infty[$.

A N N E X E .

Nous présentons quelques conclusions concernant les applications de l'algorithme développé au chapitre I. Il s'agit ici de montrer simplement que l'optimum est atteint en un nombre faible d'itérations autrement dit, que cet algorithme est utilisable, ce dont on peut douter a priori dans la mesure ou le nombre de sommets du quadrillage de l'itération j est $(2^j+1)^p$. La quantité de calculs à effectuer devient donc rapidement prohibitive.

La notion de concentration est particulièrement adaptée à l'étude de phénomènes géographiques aussi avons nous utilisé pour les applications des échantillons de répartitions ponctuelles planes. Les différents essais ont été réalisés, d'une part avec un échantillon de loi normale et d'autre part un échantillon de loi uniforme sur le carré $[0,1] \times [0,1]$. Ce choix peut paraître surprenant car on ne voit pas, a priori, l'intérêt de calculer la concentration dans le cas de points répartis au hasard dans le carré ; il s'agissait simplement ici de vérifier le comportement de l'algorithme dans le plus "mauvais" cas (la procédure d'élimination de points (cf. page 23) étant peu efficace).

Par ailleurs le choix d'une loi normale bidimensionnelle, donc unimodale, n'est pas du au hasard. En effet lorsque l'on a affaire à des lois multimodales ou à des mélanges de lois, les méthodes de la classification automatique sont mieux adaptées au traitement de ces problèmes, la concentration pouvant être évaluée au niveau des classes obtenues. Cette unimodalité a pour conséquences une plus grande efficacité de la méthode d'élimination car les points extrêmes de l'échantillon sont supprimés, ce qui permet de réduire les dimensions du rectange à quadriller.

Dans la suite de ce paragraphe nous utiliserons les notations suivantes :

- n : taille de l'échantillon,
- t : rayon de concentration,
- R : rectangle initial à quadriller,
- R' : rectangle après élimination de points,
- N_j : nombre des sommets du quadrillage à l'itération j,
- ξ_j : demi-diamètre des cellules à l'itération j,
- N' : nombre de points éliminés.

1) *Loi normale,* $n = 50$, $t = 0{,}5$.

$N' = 22$

$$R = [-\ 2{,}064\ ;\ 1{,}766] \times [-\ 1{,}401\ ;\ 2{,}886]$$

$$R' = [-\ 1{,}045\ ;\ 1{,}088] \times [-\ 1{,}078\ ;\ 1{,}514]$$

Nous constatons qu'après application de la procédure d'élimination le rectangle R' a une surface nettement inférieure à celle de R ce qui a pour effet de diviser le diamètre des cellules par 2. Ceci permet de gagner une itération dans le processus ; ce gain est important car sur cet exemple l'optimum est atteint en 6 itérations avec $N_6 = 4225$; comme $N_7 = 16441$ le temps machine nécessaire est diminué de façon importante (il est ici égal à 0,62 minute avec $\xi_6 = 0{,}026$).

2) *Loi normale,* $n = 70$, $t = 0{,}6$.

$N' = 16$

$$R = [-\ 2{,}064\ ;\ 2{,}294] \times [-\ 2{,}430\ ;\ 2{,}886]$$

$$R' = [-\ 1{,}695\ ;\ 1{,}287] \times [-\ 1{,}359\ ;\ 1{,}933]$$

On remarque ici que le nombre de points éliminé est moins important que dans l'exemple précédent ; ceci peut paraître paradoxal mais il faut rappeler qu'un point est éliminé en comparant un minorant de la fonction de concentration avec le nombre des voisins de ce point distants de moins de 2t, il n'y a donc aucune raison pour que le nombre de points éliminés varie de façon monotone en fonction de la taille de l'échantillon. Le temps nécessaire pour atteindre l'optimum est ici de 1,85 minute, cette augmentation par rapport au cas précédent s'explique par une taille d'échantillon plus importante et une itération supplémentaire.

3) *Loi normale*, $n = 100$, $t = 0{,}6$.

$N' = 26$

$R = [-\ 2{,}3\ ;\ 2{,}294] \times [-\ 2{,}43\ ;\ 2{,}886]$

$R' = [-\ 1{,}578\ ;\ 1{,}295] \times [-\ 1{,}163\ ;\ 1{,}933]$

Remarquons ici que, bien que le nombre de points ait augmenté ($n = 100$) la réduction (passage de R à R') est plus importante car 26 points ont été éliminés ; ceci s'explique par une valeur du minorant (cf. proposition III.4 chapitre I) qui est une approximation meilleure de la valeur de la concentration. Nous avons en effet remarqué que ce minorant est souvent très proche de la valeur obtenue à l'optimum. De nombreux tests sont bien sûr nécessaires pour confirmer cette observation cependant il est logique de constater que l'estimation donnée par le minorant est d'autant plus proche de la valeur réelle que la taille de l'échantillon est importante car il est calculé à partir des points de la répartition dont la densité augmente évidemment avec n.

4) *Loi uniforme*, n = 70.

Comme nous l'avons précisé, ces essais ont été réalisés afin d'étudier le comportement de l'algorithme dans un cas "opposé" aux précédents. Il s'avère que pour différents rayons de concentration l'optimum est atteint là aussi en 6 ou 7 itérations. Bien sûr dans ces différents cas le nombre de points éliminés est faible du fait de leur répartition au hasard dans le carré $[0,1] \times [0,1]$. Par exemple pour $t = 0{,}4$, $N' = 1$ et donc la procédure utilisée est inutile ; nous avons cependant réalisé ces essais afin de montrer que même dans un cas défavorable l'optimum est atteint rapidement.

5) *Conclusion.*

Dans cette annexe, nous avons simplement présenté quelques réflexions et observations concernant l'algorithme de calcul de la fonction de concentration d'une répartition ponctuelle plane. Tout d'abord il faut remarquer que dans tous les cas que nous avons traité l'optimum est atteint en un nombre faible d'itérations alors que le temps machine nécessaire est parfois important (de l'ordre de deux minutes). Ceci vient évidemment du fait que le nombre des sommets est multiplié approximativement par 4 à chaque itération $(N_j = (2^j + 1)^2)$; c'est ce nombre de sommets qui détermine le temps nécessaire au calcul et celui-ci deviendrait très couteux s'il fallait poursuivre au-delà de 8 itérations, qui semble une limite correcte.

Il faudrait donc tester cet algorithme un très grand nombre de fois avec des échantillons très différents pour se prononcer sur ses qualités réelles mais nous pensons qu'il serait plus judicieux mais aussi plus difficile de construire une méthode de calcul à partir de la matrice des distances entre points qui donnerait toutes les discontinuités de la fonction de concentration, c'est-à-dire sa valeur en tout point t de $\mathbb{R}^+$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BARBERIAN S.K. : Lectures in functional analysis and operator theory.
Springer-Verlag 1977.

[2] BILLINGSLEY P. : Convergence of probability measures.
Wiley 1968.

[3] BILLINGSLEY - TOPSOE : Uniformity in weak convergence.
Z. Wahrs. Verw. Gebiete 7 p. 1-16 (1967).

[4] CHOQUET G. : Cours d'analyse. Tome II. Topologie.
Masson 1973.

[5] SEBASTYANOV B.A. : On multidimensional concentrations.
Theor. Prob. Appl. Vol. 8 p. 116. 1963.

[6] ESSEEN C.G. : On the Kolmogorov - Rogozin inequality for the concentration function.
Z. Wahrs. Verw. Geb. 5 p. 210-216 (1966).

[7] GEFFROY J.
ZEBOULON H. : Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires.
C.R.A.S. Vol. 280, Série A p. 291 (1975).

[8] HENTGARTNER -
THEODORESCU R. : Concentration functions.
Academic Press 1973.

[9] BERTIN : Graphique et mathématique : généralisation du traitement de l'information.
Annales n° 1, 1969 p. 70-101.

[10] EYTAN M. : Matrices ordonnables ; une étude algébrique.
Maths et Sciences humaines n° 50, 1975, p. 15-22.

[11] KOLMOGOROV : Sur les propriétés des fonctions de concentration de M. P. Levy.
Ann. Inst. H. Poincaré Vol. 16 p. 27-34 1958.

[12] LEVY P. : Théorie de l'addition des variables aléatoires.
Gauthier-Villars 1937 (2ème édition 1954).

[13] LINDVALL : Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D[0, +\infty[$.
J. Appl. Probability p. 109-121 (1973).

[14] MAÏTI D. : L'enveloppe convexe d'un ensemble de points du plan : Algorithme commenté en problème et programme CONVAP.
Les cahiers de l'analyse des données Vol. IV 1979 n° 2 p. 175-188.

[15] MAÏTI D. : Programme de construction et de tracé d'une enveloppe convexe en trois dimensions CONVESP.
Les cahiers de l'analyse des données Vol. IV 1979 n° 2 p. 189-210.

[16] QUIDEL P. : Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires.
Thèse de 3ème cycle 1973 Paris VI.

[17] ROGOZIN : An estimate for concentration function.
Theor. Prob. Appl. Vol. 6 94-97 (1961).

[18] ROGOZIN : On the increase of dispersion of sums of independent random variables.
Theor. Prob. Appl. Vol. 6 97-99 (1961).

[19] SCHWARTZ L. : Topologie et analyse fonctionnelle.
Hermann 1970.

[20] SKOROKHOD : Limit theorems for stochastic processes.
Theor. Prob. Appl. Vol. 1 p. 261-290 1956.

[21] STONE C. : Weak convergence of stochastic processes defined on semi infinite time intervals.
Proc. of the american Math. Society 1963 Vol. 14 p. 694-696.

[22] WHITT W. Some usef ul functions for functional limit theorems. Maths of operations research Vol. 5 n° 1 Fév. 1980.

[23] ZEBOULON H. : Contribution à l'étude des convergences stochastiques des mesures aléatoires.
Thèse de 3ème cycle 1975. Université Pierre et Marie Curie. Paris.

[24] BOURBAKI : Topologie générale. Vol IX.

[25] ROGER P. : Une méthode de détermination de l'aire de marché d'un point de vente.
Cahiers de la recherche de l'I.A.E. de Lille.
n° 82/2.

RÉSUMÉ

La fonction de concentration de P. Levy est étudiée en temps qu'application définie sur l'ensemble des mesures positives à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ou dans $D[0, +\infty[$. Dans le premier cas nous établissons des conditions pour qu'une mesure positive soit point de continuité de cette application. Dans le deuxième cas la continuité est montrée en tout point lorsque l'espace $D[0, +\infty[$ est muni de la topologie M_1 de Skorokhod pour laquelle nous définissons une métrique.

MOTS CLÉS : - CONCENTRATION / FONCTION

- CONVERGENCE STOCHASTIQUE
- MESURE ALEATOIRE
- ESPACE FONCTIONNEL .