N° d'ordre : 1036

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ des SCIENCES et TECHNIQUES de LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

ALLAL Jelloul

PROBLÈMES D'ESTIMATION EN THÉORIE DES PROCESSUS PONCTUELS

Membres du Jury : D. BOSQ, *Président*
P. JACOB, *Rapporteur*
J. DELPORTE, *Examinateur*

Soutenue le 25 MAI 1983

"L'essence des mathématiques c'est la liberté".

G. CANTOR

Monsieur le Professeur Denis BOSQ, me fait aujourd'hui l'honneur de présider le jury de cette thèse, qu'il en soit vivement remercié.

Monsieur le Professeur Pierre JACOB, m'a proposé l'idée originale de ce travail, ma reconnaissance envers lui est profonde pour l'aide efficace et les conseils qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer.

Monsieur le Professeur Jean DELPORTE, a bien voulu accepter de juger ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Arlette Lengaigne a dactylographié ce texte avec patience et savoir faire, qu'il me soit permis de la remercier chaleureusement ainsi que toutes les personnes ayant participé à la réalisation matérielle de ce travail.

P L A N .

INTRODUCTION

1 - PRÉSENTATION DE LA THÈSE.

Le sujet de notre travail se situe au confluent de deux thèmes de recherche développés à l'origine par J. GEFFROY : l'estimation du contour du support d'une loi de probabilité (I) et l'étude des processus ponctuels et des mesures aléatoires (II et III). Les recherches que nous avons entreprises ont débuté après la lecture de la thèse de M.H. GENSBITTEL (IV) ; dans la seconde partie de son ouvrage, s'inspirant de travaux récents de J. CHEVALIER (V). Cet auteur étudie des estimateurs du support d'un processus ponctuel, puis, reprenant le problème traité par J. GEFFROY dans (I), il l'adapte au cas des processus ponctuels.

Notre chapitre I se démarque à vrai dire très peu, du point de vue des méthodes utilisées, des travaux de M.H. GENSBITTEL ; il s'agissait surtout pour nous de débuter en recherche. Notre idée était la suivante : estimer le support S d'une répartition ponctuelle, c'est évidemment estimer l'indicatrice 1_S ; si on suppose à présent l'existence d'une fonction g définie sur l'espace des états, on peut, à chaque réalisation ponctuelle x du processus, associer la valeur $g(x)$ plutôt que la valeur 1. Il est alors facile d'imaginer une approximation de g associée à un échantillon de taille n du processus ; les points fournis par cet échantillon devenant, de façon imagée "denses dans S ", on conçoit que, sous de bonnes conditions, cette approximation converge vers g dans un sens à définir ; c'est l'objet de notre première étude.

Le chapitre II est plus ambitieux : on suppose maintenant que g est une fonction aléatoire Z indexée par l'espace des états du processus pontuel, et on se propose d'estimer sa moyenne $E(Z)$ en observant chaque réalisation de Z aux points fournis par la réalisation du processus ponctuel. Il s'agit d'un problème dont l'aspect pratique est clair : dans l'estimation d'un champ aléatoire (ex : fertilité d'un terrain, zones de pollution, températures mesurées en altitude par ballon-sonde) les points où s'effectuent les mesures ne sont pas nécessairement déterminés librement par l'expérimentateur et sont donc sujets à des déplacements d'une expérience à l'autre ; de plus, certaines mesures peuvent être perdues. On modèlisera ce caractère aléatoire des conditions expérimentales en représentant la localisation des mesures par un processus ponctuel. Ce qui diffère du chapitre I , c'est que, au voisinage de chaque point de S, il faudra un grand nombre d'observations pour obtenir une estimation correcte de $E(Z)$ en ce point ; ici encore, nous nous inspirons de travaux de J. GEFFROY (XIII) pour assurer cette condition. Nous définissons alors un estimateur pour lequel nous donnons des conditions suffisantes de convergence uniforme en probabilité et presque complète ; dans le cas où S est une partie de $\mathbb{R}^k$, ces conditions s'expriment simplement en fonction de k.

Le chapitre III est consacré au problème suivant : le support d'une répartition ponctuelle aléatoire sur le plan rapporté à un système d'axes orthonormés est délimité par un contour formé par l'axe des abcisses, les verticales d'équation $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$, et le graphe d'une fonction positive $y = \Phi(x)$; à l'aide d'un échantillon de cette répartition, on cherche à estimer Φ. Cette question a été étudiée par J. GEFFROY dans [1] dans le cas où la répartition ponctuelle est un processus échantillon, et généralisée systématiquement dans (VI) par M.H. GENSBITTEL à un processus ponctuel quelconque. Nous rappelons brièvement ces résultats, et nous nous attaquons au cas où Φ est un élément de l'espace D des fonctions continues à droite, ayant des limites à gauche. Reprenant l'estimateur Φ_n

de J. GEFFROY et M.H. GENSBITTEL, nous montrons que leurs conditions sont suffisantes pour que Φ_n converge (non plus uniformément, mais en moyenne) en probabilité et presque complètement sûrement. Dans le cas où Φ est en escalier, et le processus sous-jacent de Poisson homogène, nous obtenons la loi limite de Φ_n : il s'agit d'une loi normale dont les paramètres dépendent du pas de l'estimateur.

Nous proposons ensuite, dans le cas où Φ ne présente qu'un nombre fini de discontinuités, un estimateur de l'abcisse des points de discontinuité, et de la hauteur des sauts en ces points, qui convergent également en probabilité et presque complètement sûrement. Nous pensons que ce problème, souvent négligé en pratique, pourraît être repris en estimation de la densité, de la régression, lorsque ces dernières présentent des discontinuités.

Enfin, z_o étant un nombre positif fixé, nous présentons une étude d'un estimateur $\Phi_n^{z_o}$ qui ne converge pas vers Φ, mais plutôt vers la boule de centre Φ et de rayon z_o dans l'espace D muni de la métrique de Skorokhod ; nous donnons ensuite une condition suffisante sur Φ pour qu'il existe une suite $(z_n) \downarrow 0$ telle que $\Phi_n^{z_n}$ converge vers Φ dans cet espace, en probabilité et presque complètement sûrement. Il peut paraître curieux d'utiliser la distance de Skorokhod ; elle présente cependant un certain intérêt puisque l'estimateur $\Phi_n^{z_n}$ ne donne pas, pour n assez grand, de valeur "aberrante" en ordonnée, sous la contrepartie d'accepter une légère imprécision en abcisse.

Nous pensons que de nombreux problèmes restent ouverts ; dans le chapitre II , nous n'avons pas abordé l'estimation de la covariance $E(Z(x) \cdot Z(y))$ du champ aléatoire, et, dans le cas d'un champ homogène ou isotrope, celui de la répartition spectrale. Dans le chapitre III, l'examen d'autres métrisations de D (utilisant par exemple les graphes complétés) serait intéressant, ainsi que l'étude de la loi limite quand le processus ponctuel est plus général (une telle étude, cependant, doit être très difficile si le processus n'est pas à accroissements indépendants). En fait, de nombreuses questions peuvent être envisagées : que se passe-t-il lorsque l'on cherche à estimer une fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Dans le cas où Φ est continue, peut-on estimer son module de continuité ? etc ...

2 - NOTATIONS ET RAPPELS SUCCINTS.

Comme toujours (Ω,A,P) désigne un espace probabilisé ; (X,d) un espace métrique séparable, $\mathcal{B}_X$ sa tribu borélienne, et $\mathcal{B}_b$ l'anneau des boréliens bornés de X.

M désigne l'espace des mesures finies sur $\mathcal{B}_b$, positives, et E le sous-ensemble de M constitué par les mesures discrètes à masses entières, appelées répartitions ponctuelles.

M est muni de la topologie faible à distance finie (II ou III), c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications de M dans $\mathbb{R}$:

$$\mu \to \int f\, d\mu \ ; \ \forall f \text{ continue, bornée, telle que } \{f \neq 0\} \in \mathcal{B}_b$$

E est un fermé de M ; on munit M de la tribu borélienne associée à cette topologie, notée $\mathcal{B}_M$; on notera $\mathcal{B}_E$ la tribu borélienne du sous-espace E : $\mathcal{B}_E = \{A \in \mathcal{B}_M : A \subset E\}$.

Un processus ponctuel ou une répartition ponctuelle aléatoire est une variable aléatoire :

$$f^{\bullet} : (\Omega,A,P) \longrightarrow (E,\mathcal{B}_E) .$$

Nous noterons, selon l'usage, $N(f^\bullet, A)$ l'effectif de $f^\bullet$ sur un borélien A, plutôt que $f^\bullet(A)$.

On démontre (II ou III) que $\mathcal{B}_E$ est aussi la tribu engendrée par les applications de E dans $\mathbb{N}$:

$$f^\bullet \longrightarrow N(f^\bullet, B) \quad ; \quad \forall B \in \mathcal{B}_b \ .$$

Si bien que, pour tout $B \in \mathcal{B}_b$, $N(f^\bullet, B)$ est une variable aléatoire réelle.

Si, pour tout $B \in \mathcal{B}_b$, la variable aléatoire réelle $N(f^\bullet, B)$ possède une espérance mathématique, on définit une fonction d'ensemble sur $\mathcal{B}_b$ (et, en fait sur $\mathcal{B}_X$ tout entier) qui est un élément de $\mathcal{M}$: on appelle μ cette mesure :

$$\mu(A) = E\{N(f^\bullet, A)\} \ , \quad \forall A \in \mathcal{B}_b \ .$$

D'autre part, on appellera charge de $f^\bullet$ la fonction d'ensemble λ, sous additive, définie par :

$$\lambda(A) = P\{N(f^\bullet, A) > 0\} \ , \quad \forall A \in \mathcal{B}_b \ .$$

Le support de $f^\bullet$ est alors défini comme le complémentaire de l'ensemble :

$$\bigcup_{A \in \mathcal{B}_o} A$$

où : $\mathcal{B}_o = \{O$ ouverts de $X : \lambda(O) = 0\}$.

Il est facile de vérifier que, dans le cas où μ existe, le support de $f^\bullet$ et le support de μ coïncident.

Enfin, certaines de nos démonstrations supposent que le processus $f^\bullet$ possède une propriété appelée dans (VI) la propriété "H" ; voici sa définition :

- On dira qu'une répartition ponctuelle aléatoire (r.p.a.) $f^\bullet$ est à accroissements anticorrellés si, pour tout entier positif k, et toute famille $(A_1,\ldots,A_k)$ de boréliens bornés deux à deux disjoints :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{N(f^\bullet,A_j) > 0\}\right) \leq \prod_{j=1}^{k} P(N(f^\bullet,A_j) > 0)$$

- On dira qu'une r.p.a. $f^\bullet$ possède la propriété (H) si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute suite $(f_n^\bullet)_{n\geq 1}$ de r.p.a. indépendantes et de même loi que $f^\bullet$, la superposition $\sum_{k=1}^{n} f_k^\bullet$ est à accroissements anticorrelés un processus ponctuel échantillon, ou un processus à accroissements indépendants possèdent la propriété (H).

Il est suggéré dans (VI) qu'un processus ponctuel à accroissements anticorrelés possède nécessairement la propriété (H), mais nous n'avons pas pu établir cette conjecture.

Rappelons pour terminer qu'un processus ponctuel $f^\bullet$ est dit "de Poisson" si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées

a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall A_1,\ldots,A_k$ boréliens bornés deux à deux disjoints

$$N(f^\bullet,A_1) \ ; \ \ldots \ ; \ N(f^\bullet,A_k)$$

sont des variables aléatoires indépendantes.

b) $\forall A \in \mathcal{B}_b$, $N(f^\bullet,A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$, où μ est un élément de $\mathcal{M}$.

En particulier, si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^k$ le processus est dit homogène si μ est, à un facteur multiplicatif positif près, la mesure de Lebesgue.

CHAPITRE I

APPROXIMATION D'UNE FONCTION OBSERVEE SELON UN PROCESSUS PONCTUEL.

---

1 - PRÉSENTATION DU PROBLÈME.

Imaginons que des mesures physiques d'un phénomène ne puissent être faites qu'en certains points fixés indépendamment de la volonté d'un expérimentateur ; quelle connaissance peut-il avoir du phénomène dans ces conditions ?

Pour modéliser ce problème, on représente le phénomène par une fonction g sur l'espace des états $\mathcal{X}$; nous supposerons ici que g est fixe : le cas où g est elle aussi aléatoire est traité au chapitre suivant ; les points où le phénomène est observé sont représentés par les réalisations de processus ponctuels indépendants et de même loi $f_1^{\bullet},\dots,f_n^{\bullet}$ de support commun S. Il s'agit alors de fournir une approximation de g sur S, convergeant quand n tend vers l'infini, selon certains modes stochastiques. Les méthodes que nous présentons sont de simples adaptations des méthodes d'estimation du support étudiées dans (VI).

2 - MÉTHODE DES PARTITIONS.

Soit $f^{\bullet}$ un processus ponctuel sur X, de support S ; et de charge λ ; on suppose pour commencer que S est contenu dans un compact connu, ce qui revient à supposer X compact. On désigne par $\{X_{n,i}\ ;\ i \in F_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de partitions finies de X ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in F_n$, on pose :

$$\delta_{n,i} = \text{diamètre de } X_{n,i}$$

$$\delta_n = \sup_{i\in F_n} \delta_{n,i}$$

et on suppose que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui décroît vers 0.

On pose également :

$$m(n) = \inf_{X_{n,i}\subset S} \lambda(X_{n,i})$$

$$M(n) = \sup_{X_{n,i}\subset S} \lambda(X_{n,i})$$

On supposera que le phénomène étudié est représenté par une fonction continue g ; pour tout n, on posera :

$$\varphi_n = \sup_{j\in F_n} \sup_{x,y\in X_{n,j}} |g(x) - g(y)|$$

il est clair que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui décroît vers 0.

On notera h la restriction de g au support S : $h = g \cdot 1_S$. Etant donné des répartitions ponctuelles aléatoires $f_1^{\bullet},\dots,f_n^{\bullet}$ indépendantes, de même loi que $f^{\bullet}$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;;\; \forall i \in F_n \;;\; E_{n,i} = \bigcap_{k=1}^{n} \{N(f_k^\bullet, X_{n,i}) = 0\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;;\; I_n = \{j \in F_n \;;\; \exists k = 1,\ldots,n : N(f_k^\bullet, X_{n,i}) > 0\}$$

On définit l'approximation $\hat{h}_n$ de h par :

$$\hat{h}_n = \sum_{j\in I_n} g(x_j) \cdot 1_{X_{n,j}}$$

où, pour tout $j \in I_n$, x_j est un point arbitrairement pris parmi ceux qui tombent dans $X_{n,j}$; on ne donne pas de sens à $\hat{h}_n$ sur les cellules $X_{n,j}$ qui n'ont pas reçu de point.

Définition I.1.- On dira que $\hat{h}_n$ converge en probabilité (resp. : presque complètement) vers h si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;;\; \lim_n P\{\sup_{y\in S_{-\varepsilon}} |\hat{h}_n(y) - h(y)| > \varepsilon\} = 0$$

$$(\text{resp. : } \forall \varepsilon > 0 \;;\; \sum_{n=1}^{\infty} P\{\sup_{y\in S_{-\varepsilon}} |\hat{h}_n(y) - h(y)| > \varepsilon\} < +\infty)$$

où $S_{-\varepsilon} = \{x \in \mathcal{X} : d(x,S^c) \geqslant \varepsilon\}$.

3 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE.

Proposition I.1.- Si S est d'intérieur non vide et si $f^\bullet$ vérifie (H), une condition nécessaire pour que $\hat{h}_n$ converge vers h en probabilité (resp. : presque complètement) et que la suite $w_n = \frac{(1-M(n))^n}{M(n)}$ tende vers 0 avec $1/n$ (resp. : que la série $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ soit convergente).

Démonstration : On fixe $\varepsilon > 0$ et un entier n assez grand pour que $S_{-\varepsilon}$ soit d'intérieur non vide, et pour que δ_n et ψ_n soient inférieurs à ε. On pose :

$$J_n = \{j \in F_n : X_{n,j} \subset S_{-\varepsilon}\}$$

Alors, il est clair que :

$$\{ \sup_{y \in S_{-\varepsilon}} |\hat{h}_n(y) - h(y)| < \varepsilon\} \subset \bigcap_{j \in J_n} E^c_{n,j}$$

puisque l'événement de gauche suppose la définition de $\hat{h}_n$ sur $S_{-\varepsilon}$; comme $f^\bullet$ vérifie (H), on a :

$$P(\bigcap_{j \in J_n} E^c_{n,j}) \leq \prod_{j \in J_n} (1 - (1 - \lambda(X_{n,j}))^n)$$

$$\leq (1 - (1 - M(n))^n)^{\text{Card } J_n} .$$

La convergence de $\hat{h}_n$ vers h en probabilité implique donc que :

$$\lim_{n \to \infty} (1 - M(n))^n . \text{Card } J_n = 0 \quad .$$

Comme $S_{-\varepsilon}$ a un intérieur non vide, il existe une boule $B(x,2\rho)$ contenue dans $S_{-\varepsilon}$ telle que, pour n assez grand :

$$\bigcup_{j \in J_n} X_{n,j} \supset B(x,\rho) \quad .$$

On désigne par α le nombre strictement positif $\lambda(B(x,\rho))$:

$$\alpha = \lambda(B(x,\rho)) \leq \sum_{j \in J_n} \lambda(X_{n,j}) \leq M(n) \cdot \text{Card } J_n$$

pour n assez grand, et alors :

$$0 \leq \frac{(1 - M(n))^n}{M(n)} \leq \frac{(1 - M(n))^n \cdot \text{Card } J_n}{\alpha}$$

ce qui montre que $(\frac{1 - M(n)}{M(n)})^n \xrightarrow[n]{} 0$.

Pour la convergence presque complète, notons que :

$$1 - P(\bigcap_{j \in J_n} E^c_{n,j}) \geq 1 - [1 - (1 - M(n))^n]^{\text{Card } J_n}$$

et, pour n assez grand :

$$1 - [1 - (1 - M(n))^n]^{\text{Card } J_n} \geq \frac{\text{Card } J_n}{2} (1 - M(n))^n .$$

La convergence presque complète de $\hat{h}_n$ vers h implique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - P(\bigcap_{j \in J_n} E^c_{n,j})) < + \infty$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Card } J_n}{2} (1 - M(n))^n < + \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - M(n))^n}{M(n)} < + \infty$.

Proposition 1.2.- Supposons que $f^{\bullet}$ possède une mesure moyenne μ . Une condition suffisante pour que $\hat{h}_n$ converge vers h en probabilité (resp. : presque complètement) est que la suite $w'_n = \frac{(1 - m(n))^n}{m(n)}$ tende vers 0 avec $\frac{1}{n}$ (resp. : que la série $\sum_{n=1}^{\infty} w'_n$ soit convergente).

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, et n assez grand pour que δ_n et ϑ_n soient inférieurs à ε ; posons :

$$J'_n = \{j \in F_n : X_{n,j} \cap S_{-\varepsilon} \neq 0\}$$

Alors : $\bigcap_{j \in J'_n} E^c_{n,j} \subset \{ \sup_{y \in S_{-\varepsilon}} |\hat{h}_n(y) - h(y)| < \varepsilon\}$

puisque $\hat{h}_n$ est définie sur tout $X_{n,j}$, $(j \in J'_n)$, et puisque l'oscillation de h sur $X_{n,j}$ est inférieure à $\emptyset_n$.

Mais alors :

$$P(\bigcap_{j\in J'_n} E^c_{n,j}) \geq 1 - \sum_{j\in J'_n} P(E_{n,j})$$

$$\geq 1 - (\text{Card } J'_n) \cdot (1 - m(n))^n$$

or, en posant $\alpha = \mu(S)$, on a :

$$\alpha \geq \sum_{j\in J'_n} \mu(X_{n,j}) \geq \sum_{j\in J'_n} \lambda(X_{n,j}) \geq (\text{Card } J'_n) \cdot m(n)$$

donc :

$$\frac{(1 - m(n))^n}{m(n)} \geq \frac{(\text{Card } J'_n) \cdot (1 - m(n))^n}{\alpha}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{j\in J'_n} E^c_{n,j}) = 1 \; .$$

Pour la convergence presque complète, on remarque que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Card } J'_n \cdot (1 - m(n))^n < + \infty$$

et on utilise ce qui précède.

Remarques :

1) Dans sa démonstration, M.H. GENSBITTEL suppose l'existence d'une mesure μ telle que : $\forall A$, $\mu(A) \geq \lambda(A)$; il nous a semblé que la mesure moyenne, quand elle existe, remplit parfaitement ce rôle.

2) Dans le cas où $X = [0,1]^k$, et où $f^\bullet$ est un processus de Poisson homogène de paramètre $c.\lambda$, où c est une constante > 0 et λ la mesure de Lebesgue sur X, on peut donner une condition nécessaire et suffisante, liant de façon explicite la taille des cellules et celle de l'échantillon ; supposons en effet, qu'à l'ordre n , $[0,1]^k$ soit divisé

en cellules égales de côté $\frac{1}{k(n)}$; on a, dans ces conditions :

$$m(n) = M(n) = 1 - e^{-c/(k(n))^k} .$$

La condition (nécessaire et suffisante) de convergence en probabilité devient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-cn/k(n)^k}}{1 - e^{-c/k(n)^k}} = 0$$

ce qui est réalisé pour $k(n) = 0(\frac{n}{\text{Log } n})$; cette dernière condition assure aussi la convergence presque complète.

CHAPITRE II

ESTIMATION DE LA MOYENNE D'UN CHAMP ALEATOIRE OBSERVE SELON UN PROCESSUS PONCTUEL.

1 - EXPOSÉ DU PROBLÈME.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'estimer la valeur moyenne d'une fonction aléatoire $(Z(x),\ x \in X)$, où X est un espace métrique séparable. Il nous semble prudent de limiter nos ambitions au cas d'une fonction aléatoire p.s. à trajectoires continues, puisque nous avons en vue des propriétés de convergence uniforme de notre estimateur.

Il convient tout d'abord de remarquer que ce problème est théoriquement résolu depuis longtemps par les travaux nombreux qu'a suscités l'étude de la loi des grands nombres pour des variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans un espace de Banach.

En effet Z étant p.s. à trajectoires continues peut être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace $C(X)$ des fonctions continues bornées sur X, muni de la norme $||.||$ de la convergence uniforme. Cet espace est un Banach que l'on munit de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{C(X)}$.

Considérons alors une suite $Z_1,\ldots,Z_n$, des fonctions aléatoires indépendantes et de même loi que Z ; les sommes partielles $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ ne sont à coup sûr des variables aléatoires que si $C(X)$ est séparable, ce qui nous oblige pratiquement à supposer X compact. Dans ces conditions si : $E(||Z||) < +\infty$ alors :

$$\lim_n \left\|\frac{1}{n} S_n - E(Z)\right\| = 0$$

l'article historique sur la question est (VII), un article récent (VIII). Ces travaux ne sont guère utilisables, cependant, pour le statisticien qui est confronté au problème de l'échantillon.

Il n'est pas possible, en général, de connaître une réalisation $Z_i(\omega)$, sinon en un nombre fini de points $(x_1,\dots,x_k)$ de l'espace X, qui sont de façon imagée, les points où l'expérimentateur a disposé ses appareils de mesure.

Par exemple, si X est un pavé de $\mathbb{R}^k$, on peut imaginer qu'un quadrillage de ce pavé a été réalisé et que les mesures $Z_i(\omega)$ sont faites au centre de chaque cellule du quadrillage : sur une cellule donnée de centre x_j, l'estimateur prendra la valeur $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k(x_k,\omega)$, et ne pourra naturellement converger que si l'on considère des subdivisions de plus en plus fines.

Un tel procédé, à notre avis, idéalise encore trop la situation : les conditions de l'expérience pourront par exemple exiger que les coordonnées des points de mesures soient à déterminer chaque fois, et ces points seront donc sujets à de légers déplacements, de plus certains appareils peuvent être défectueux et provoquer la perte de la mesure.

Il semble alors naturel de modéliser, par les réalisations d'un processus ponctuel $f^\bullet$, la localisation des observations de la fonction aléatoire.

Cela nous conduit au cas le plus général qu'il semble judicieux d'étudier : celui où l'expérimentateur n'a pas lui même le choix des points où la mesure va être faite. Nous supposerons donc que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $f_i^\bullet$, $Z_i(\cdot)$ sont deux éléments aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendants et de même loi produit qu'un couple $(f^{\bullet}, Z(\cdot))$, (laissant de côté le cas redoutable, mais réaliste, où $f_i^{\bullet}$ dépend de Z_i, où même Z_{i-1} !).

$$(f^{\bullet}, Z(\cdot)) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathcal{E} \times C(\mathcal{X}) \ , \ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{C(\mathcal{X})})$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'espace des répartitions ponctuelles, $\mathcal{F}$ sa tribu borélienne, pour la topologie de la convergence faible à distance finie. Un échantillon de taille n comprendra donc :

1) n répartitions ponctuelles : $f_1^{\bullet}(\omega), \ldots, f_n^{\bullet}(\omega)$ où : pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f_i^{\bullet}(\omega)$ est représenté par l'ensemble des points, éventuellement vide : $\{x_i^j(\omega),\ j = 1, \ldots, N(f_i^{\omega}, \mathcal{X})\}$.

2) n ensembles de "mesures" de la fonction aléatoire : pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\{Z_i(x_i^j(\omega), \omega) \ , \ j = 1, \ldots, N(f_i^{\omega}, \mathcal{X})\} .$$

Il va de soi que l'on ne pourra faire mieux que d'estimer $E(Z(x))\, 1_S(x)$ où S désigne le support de $f^{\bullet}$, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathcal{X}$ où l'on peut espérer voir tomber des points du processus ponctuel :

$$S = \{x \in \mathcal{X} \ , \ \forall A \text{ ouvert } , \ x \in A \ , \ P(N(f^{\bullet}, A) > 0) > 0\} .$$

De plus comme on ne peut pas, d'un point de vue physique, réaliser une infinité dénombrable de mesures sur $Z_i(\omega)$, l'hypothèse de compacité de S qu'on fera par la suite, n'est pas une grande restriction.

Pour conclure cette introduction, c'est la moindre des choses de signaler que, confrontés à un problème qui implique l'estimation du support d'une r.p.a., et à l'utilisation d'un estimateur ayant une certaine parenté avec le régressogramme, nous nous inspirons d'idées originales de J. Geffroy, souvent reprises par de nombreux auteurs (XIII, XIV, XV), c'est le cas en particulier pour le lemme 5.

2 - HYPOTHÈSES FONDAMENTALES.

1) Concernant le processus $f^{\bullet}$, son support S et l'espace des états X, la formulation correcte des hypothèses que nous allons faire nécessite une étude préalable de propriétés simples du support d'une r.p.a.

Lemme 1.- Soit $f^{\bullet}$ une r.p.a. de mesure moyenne μ et de "charge" λ où λ est la fonction d'ensembles sous-additives définie par :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b \quad , \quad \lambda(A) = P(N(f^{\bullet},A) > 0)$$

appelons, comme d'habitude $\mathrm{supp}(f^{\bullet})$ l'ensemble :

$$\{x \in X \quad , \quad \forall A \text{ ouvert}, \quad x \in A : \lambda(A) > 0\}$$

et $\mathrm{supp}(\mu)$ l'ensemble :

$$\{x \in X \quad , \quad \forall A \text{ ouvert}, \quad x \in A \, , \, \mu(A) > 0\}$$

Alors : $$\mathrm{supp}(f^{\bullet}) = \mathrm{supp}(\mu).$$

Preuve : D'après l'inégalité de Markov, pour tout $A \in \mathcal{B}_b$; $\lambda(A) \leq \mu(A)$. Réciproquement, si $x \notin \mathrm{supp}(f^{\bullet})$, il existe un ouvert B contenant x tel que

$$P(N(f^{\bullet},B) > 0) = 0$$

et par conséquent :

$$\mu(B) = 0 \quad \text{et donc} \quad x \notin \operatorname{supp}(\mu).$$

Lemme 2.- Soit $f^{\bullet}$ un processus ponctuel (p.p) de mesure moyenne μ, supposons que μ possède une densité g, par rapport à une mesure ν chargeant les boules ouvertes et si de plus $\overbrace{\operatorname{supp} g}^{o} \supset \{g > 0\}$, (ou si g est continue) ; alors :

$$\operatorname{supp}(\mu) = \operatorname{supp}(g).$$

Preuve : Par définition, $\operatorname{supp}(g) = \overline{\{x \in X \;,\; g(x) > 0\}}$.

Soit x un élément de $\operatorname{supp}(g)$, pour tout ouvert A contenant x , il existe un nombre $\rho > 0$, et une boule ouverte $B(x,\rho) \subset A$ or :

$$B(x,\rho) \cap \overbrace{\operatorname{supp} g}^{o} \neq \emptyset$$

soit y un point de cette intersection, et r un nombre positif tel que :

$$B(y,r) \subset B(x,\rho) \cap \overbrace{\operatorname{supp} g}^{o}$$

(une telle boule existe puisque $\overbrace{\operatorname{supp} g}^{o}$ est un ouvert).

Alors :

$$\mu(B(y,r)) = \int_{B(y,r)} g(z)\ \nu(dz) > 0$$

puisque $\nu(B(y,r)) > 0$ par hypothèse. Ainsi :

$$\mu(A) > \mu(B(y,r)) > 0 \ .$$

Réciproquement si $x \in \text{supp}(\mu)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{B(x,1/n)} g(z)\ \nu(dz) = \mu(B(x,1/n)) > 0$$

On peut donc choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un point $z_n \in B(x,1/n)$ tel que $g(z_n) > 0$ comme z_n converge vers x, on obtient :

$$x \in \overline{\{z\ ,\ g(z) > 0\}}.$$

Lemme 3.- Soit $f^\bullet$ un p.p. de mesure moyenne μ ; supposons que μ possède une densité g continue sur S, par rapport à une mesure ν chargeant les boules ouvertes, supposons de plus que S soit compact et que son intérieur soit contenu dans $\{g > 0\}$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α positif tel que $g(x) > \alpha$ sur $S_{-\varepsilon} = \{x\ ,\ d(x,S^c) \geq \varepsilon\}$.

Preuve : Nous distinguerons 2 cas :

* S^c est vide : dans ce cas, X est compact et $S = X$.

S'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$, telle que $g(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, alors on peut extraire une sous-suite $x_{n_k} \underset{n}{\longrightarrow} x \in X$ et par conséquent $g(x) = 0$ ce qui contredit le fait que $S \subset \{g > 0\}$.

* S^c n'est pas vide : dans ce cas, le même raisonnement avec $x_n \in S_{-\varepsilon}$ montre qu'il existe $x \in S_{-\varepsilon} \subset \overset{\circ}{S}$ tel que $g(x) = 0$, donc $d(x,S^c) = 0$.

Lemme 4.- Sous les hypothèses du lemme 3, on obtient le résultat suivant : soient $0 < \eta < \varepsilon$ des réels fixés ; il existe $\alpha > 0$ telle que, quel que soit le borélien A de diamètre inférieur à η, rencontrant $S_{-\varepsilon}$:

$$\mu(A) > \alpha\ \nu(A) .$$

Preuve : Pour tous points $x \in A$, $y \in A \cap S_{-\varepsilon}$, $z \in S^c$:

$$d(x,z) \geq d(z,y) - d(x,y)$$

$$\geq \min_{\substack{z'\in S^c \\ y'\in S_{-\varepsilon}}} d(z',y') - \max_{\substack{x'\in A \\ y'\in S_{-\varepsilon}\cap A}} d(x',y') \geq \varepsilon - \eta = \delta > 0 .$$

Par conséquent :

$$d(x,S^c) \geq \delta , \quad \text{et} \quad A \subset S_{-\delta}$$

il existe donc $\alpha > 0$, tel que $g(x) > \alpha$ sur $S_{-\delta}$, si bien que :

$$\mu(A) = \int_A g(z)\ \nu(dz) > \alpha\ \nu(A) .$$

Définition II.1. - On dit qu'un processus ponctuel $f^{\bullet}$ de mesure moyenne μ possède une charge λ qui est (k,δ)-régulière s'il existe deux réels positifs k et δ tels que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b , \quad \mu(A) < \delta \Longrightarrow \mu(A) < k\ \lambda(A) .$$

En utilisant, avec un léger abus, les notations de Landau : $\mu = O(\lambda)$.

Justification :

a) L'idée est qu'il faudra éviter la situation suivante : des boréliens sont chargés très rarement, mais avec des charges énormes ; par exemple il existe une suite de boréliens $(A_n)_{n\geq 1}$ bornés tels que :

$$P(N(f^{\bullet},A_n) = 2^n) = 1 - P(N(f^{\bullet},A_n) = 0) = \frac{1}{2^n} ,$$

ce qui rendrait pratiquement l'échantillonnage impossible ; ce qui est important c'est de pouvoir "souvent" faire la mesure de la fonction aléatoire dans un borélien donné, d'où la notion de charge régulière.

b) La classe des processus ponctuels à charges régulières comporte au moins le processus échantillon et le processus de Poisson :

* Soit $f_n^{\bullet}$ un processus échantillon d'une loi P_X :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b : \lambda(A) = 1 - (1 - P_X(A))^n$$

et $$\mu(A) = n\, P_X(A) .$$

Il est clair que pour $P_X(A)$ assez petit, $\mu(A) < 2\lambda(A)$.

* Soit $f_n^{\bullet}$ un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne μ :

$$\forall A \in \mathcal{B}_b : \lambda(A) = 1 - e^{-\mu(A)}$$

ici encore, pour $\mu(A)$ assez petit, $\mu(A) < 2\lambda(A)$.

Cette étude étant faite, voici notre première hypothèse :

H_1 $f^{\bullet}$ est un processus ponctuel se réalisant dans un sous-ensemble K compact connu de l'espace métrique séparable (X,d), son support S est inconnu, cependant $f^{\bullet}$ possède une mesure moyenne μ à densité par rapport à une mesure ν sur $(X,\mathcal{B}_X)$ qui charge les ouverts, il existe une version continue sur S , g de $\frac{d\mu}{d\nu}$, et S vérifie la propriété $\overset{\circ}{S} \subset \{g > 0\}$; enfin la charge λ de $f^{\bullet}$ est (k_1,δ) - régulière où k_1 , δ sont des réels positifs quelconques.

La deuxième hypothèse concerne la mesure ν :

(H$_2$) Il existe une suite de partitions finies $(X_{n,j})_{j\in F_n}$ du compact K , vérifiant la propriété :

$$\lim_{n} \sup_{j\in F_n} \nu(X_{n,j}) = 0$$

enfin et posant :

$$\delta_n = \max_{j\in F_n} \operatorname{diam} X_{n,j}$$

on supposera :

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 .$$

3 - HYPOTHÈSES CONCERNANT LA FONCTION ALÉATOIRE $(Z(x),\ x \in X)$.

(H$_3$) $\forall (x,y) \in K \times K \quad , \quad E|Z(x) - Z(y)| \leq k_2\, d(x,y)^{1+\beta}$ où k_2, β sont des constantes positives.

Rappelons que si K est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, l'hypothèse :

$$\forall (s,t) \in K \times K \ , \ E(|Z(s) - Z(t)|^{\alpha}) \leq k_2 |t-s|^{1+\beta} \ , \text{ où } \quad \alpha,\ \beta,\ k_2$$

sont des constantes positives, n'est autre que la condition de Kolmogorov pour que le processus séparable $(Z(t),\ t \in K)$ soit p.s. à trajectoires continues.

(H$_4$) La propriété H_4 est une propriété de la loi de $Z(x)$, destinée à assurer une vitesse de convergence exponentielle, uniformément en x, dans la loi des grands nombres, il suffit par exemple de supposer $|Z(x)|$ majorée par une constante M , uniformément en x, et d'appliquer l'inégalité de Bernstein pour obtenir cette propriété (IX). Il est plus général de faire l'hypothèse suivante (X, XI) :

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists$ $M_\varepsilon > 0$ et t_ε tels que $\forall t \in [-t_\varepsilon , t_\varepsilon]$, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in K$.

$$\prod_{k=1}^{n} E(e^{t(Z_k(x)-z(x))}) \leq M_\varepsilon \, . \, e^{|t|.\varepsilon.n}$$

Dans ces conditions, il existe des constantes $A > 0$, $0 < r < 1$, tels que :

$$\forall x \in K , \quad \forall n \geq 1 \quad P\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |Z_k(x) - z(x)| > \varepsilon\} < A \, . \, r^n .$$

4 - DÉFINITION DE L'ESTIMATEUR DE $z(x) = E(Z(x)) . 1_S(x)$.

Etant donné un échantillon de taille n , on pose :

$$I_n = \{i \in F_n , \exists k = 1,\ldots,n : N(f_k^\bullet, X_{n,i}) > 0\}$$

$\{X_{n,i} , i \in I_n\}$ est donc l'ensemble des cellules de la $n^{\text{ième}}$ partition qui ont été chargées au moins une fois par les réalisations des processus ponctuels $f_1^\bullet,\ldots,f_n^\bullet$:

$$\forall j \in F_n \quad , \quad R_{n,j} = \{k = 1,\ldots,n : N(f_k^\bullet, X_{n,j}) > 0\} .$$

$\{f_k^\omega , k \in R_{n,j}^\omega\}$ est donc l'ensemble des réalisations des processus ponctuels $f_1^\bullet,\ldots,f_n^\bullet$ qui chargent la cellule $X_{n,j}$ de la $n^{\text{ième}}$ partition.

$$\nu_{n,j} = \text{Card } R_{n,j} .$$

$\nu_{n,j}$ est donc une variable aléatoire donnant le nombre de fois où la cellule $X_{n,j}$ de la $n^{\text{ième}}$ partition a été chargée depuis le début de l'échantillonnage.

Enfin :

$$\forall j \in F_n \quad , \quad E_{n,j} = \bigcap_{k=1}^{n} \{N(f_k^\bullet, X_{n,j}) = 0\} .$$

On définit alors l'estimateur $\hat{z}^{\bullet}_n$ de z par :

$$\hat{z}^{\bullet}_n = \sum_{j \in I_n} \left(\frac{1}{\nu_{n,j}} \sum_{k \in R_{n,j}} Z_k(\tilde{x}_{k,j}) \right) 1_{X_{n,j}}$$

où $\tilde{x}_{k,j} \in \{x \in X_{n,j} : N(f^{\bullet}_k, \{x\}) > 0\}$.

Remarquons que le choix des $\tilde{x}_{k,j}$ se fait arbitrairement parmi les points qui tombent dans $X_{n,j}$ lors de la $k^{\text{ième}}$ observation ; nous procédons de la sorte dans un but de simplification, et on pourrait trouver plus judicieux de tenter d'améliorer la vitesse de convergence de cet estimateur en remplaçant $Z_k(\tilde{x}_{k,j})$, par la moyenne arithmétique de l'ensemble :

$$\{Z_k(x),\ x \in X_{n,j} : N(f^{\bullet}_k, \{x\}) > 0\} .$$

Il y a lieu de remarquer cependant que, s'il s'avérait au cours de l'échantillonnage qu'un grand nombre de points différents puisse être choisi dans chaque cellule, cela indiquerait un choix maladroit de la suite de partition : la meilleure estimation (hypothétique) de la valeur moyenne du processus Z sur la cellule serait alors obtenue au prix d'une moins bonne précision du point de vue local.

Définition II.2.- On dira que $\hat{z}^{\bullet}_n$ converge en probabilité vers z si :

$$\forall \eta > 0 \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ ; \ \lim_n P^*\{ \sup_{y \in S_{-\varepsilon}} |\hat{z}^{\bullet}_n(y) - z(y)| > \eta\} = 0$$

et que $\hat{z}^{\bullet}_n$ converge presque complètement vers z si :

$$\forall \eta > 0 \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ : \ \sum_{n \geq 1} P^*\{ \sup_{y \in S_{-\varepsilon}} |\hat{z}^{\bullet}_n(y) - z(y)| > \eta\} < + \infty$$

5 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR.

Dans le premier lemme de ce paragraphe, on donne une condition suffisante pour que l'effectif des cellules des partitions $(X_{n,j})_{j\epsilon F_n}$ par les réalisations de $\dot{f}_1,\dots,\dot{f}_n$ s'accroisse presque sûrement uniformément plus précisément,

fixons $\varepsilon > 0$, assez petit pour que $S_{-\varepsilon} \neq \emptyset$ et posons :

$$R_n = \{j \in F_n : X_{n,j} \cap S_{-\varepsilon} \neq \emptyset\}$$

Posons :

$$\nu_n = \inf_{j\epsilon F_n} \nu_{n,j} \ .$$

Lemme 5.- Supposons que : pour tout $\rho \in \,]0,1]$, on a :

$$\inf_{j\epsilon F_n} \nu(X_{n,j}) \geq \frac{\log n}{n\,\rho} \ , \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \ .$$

Dans ces conditions, il existe une suite $r(n)$, telle que : $r(n) \xrightarrow[n]{} +\infty$, et

$$\sum_{n\geq 1} P(\nu_n \leq r(n)) < +\infty \ .$$

Preuve : Il est clair que pour ρ assez petit :

$$\sum_{n\geq 1} P(\nu_n \leq r(n)) < +\infty \quad \text{et donc} \quad P(\lim\sup(\nu_n \leq r(n)) = 0$$

soit que $\nu_n \xrightarrow[n]{} +\infty$ p.s.

Il existe un entier n_1 tel que :

$$\forall n \geq n_1 \ , \quad 0 < \delta_n < \varepsilon \ ,$$

alors d'après le lemme 4 et l'hypothèse H_1, pour tout $X_{n,j}$, $j \in R_n$:

$$\mu(X_{n,j}) > \alpha\, \nu(X_{n,j})$$

où α est un nombre positif ne dépendant que de ε et de δ_{n_1},

pour n assez grand ($n \geq n_2$), on a, d'après H_2 :

$$\sup_{j \in F_n} \nu(X_{n,j}) < \delta / \|g\|$$

donc : $\displaystyle\sup_{j \in F_n} \mu(X_{n,j}) \leq \|g\| \,.\, \sup_{j \in F_n} \nu(X_{n,j}) < \delta$.

Comme : $f^{\bullet}$ est à charge (k_1, δ) - régulière :

$$\forall j \in F_n \; , \; \mu(X_{n,j}) < k_1\, \lambda(X_{n,j}) \; .$$

En utilisant l'hypothèse du lemme 5 on a :

$$\exists n_3 \text{ : tel que } \forall n \geq n_3 : \inf_{j \in F_n} \nu(X_{n,j}) \geq \frac{\text{Log } n}{n\, \rho}$$

par suite :

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2, n_3) \; , \; \forall j \in R_n :$$

$$\lambda(X_{n,j}) \geq \frac{\alpha}{k_1}\, \nu(X_{n,j}) \geq \frac{\alpha}{k_1}\, \frac{\text{Log } n}{n\, \rho}$$

on pose alors :

$$r(n) = \left[c' \frac{\text{Log } n}{\rho}\right] \; , \quad \text{avec} \quad c' \in \left]0, c/2\right] \; :$$

Il existe une suite ρ'_n croissante telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \rho'_n = c' \qquad \text{et} \qquad r(n) = \rho'_n \frac{\text{Log } n}{\rho} \; .$$

Comme pour tout $j \in R_n$, $\nu_{n,j}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda(X_{n,j}))$,

et comme $r(n) \leq c' \frac{\text{Log } n}{\rho} < n\,\lambda(X_{n,j}) = E(\nu_{n,j})$.

On peut écrire l'inégalité classique (XII) :

$$P(\nu_{n,j} \leq r(n)) \leq C_n^{r(n)}\ \lambda(X_{n,j})^{r(n)}(1-\lambda(X_{n,j}))^{n-r(n)}\ \frac{(n-r(n))\lambda(X_{n,j})}{n\lambda(X_{n,j})-r(n)}$$

comme

$n\,\lambda(X_{n,j}) \geq 2r(n)$, un calcul facile montre que :

$$\frac{[n-r(n)]\lambda(X_{n,j})}{n\lambda(X_{n,j})-r(n)} \leq 2 \quad .$$

Ensuite en utilisant la formule de Steirling on a :

$$C_n^{r(n)} = \Psi_{nr(n)}\ \left(\frac{n}{2\pi r(n)(n-r(n))}\right)^{1/2} \left(\frac{n}{r(n)}\right)^{r(n)} \left(\frac{n}{n-r(n)}\right)^{n-r(n)}$$

où

$$\Psi_{nr(n)} = \frac{1+\varepsilon_n}{(1+\varepsilon'_{r(n)})\ (1+\varepsilon''_{nr(n)})} \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_n \xrightarrow[n]{} 0 \\ \varepsilon'_{r(n)} \xrightarrow[n]{} 0 \\ \varepsilon''_{nr(n)} \xrightarrow[n]{} 0 \end{array} \right.$$

on voit que $\Psi_{nr(n)} \xrightarrow[n]{} 1$

d'autre part : $\left(\frac{n}{2\pi r(n)(n-r(n)}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi r(n)(1-1/n)}\right)^{1/2} \xrightarrow[n]{} 0$,

par suite :

$$\lim_n \Psi_{nr(n)}\ \left(\frac{n}{2\pi r(n)(n-r(n))}\right)^{1/2} = 0 \qquad \text{ou encore}$$

$$\Psi_{nr(n)}\ \left(\frac{n}{2\pi r(n)(n-r(n))}\right)^{1/2} = O(1)$$

enfin en remarquant que la fonction $u(p) = p^r(1-p)^{n-r}$ est décroissante pour $p > \frac{r}{n}$, et que :

$$\frac{r(n)}{n} \leq c \frac{\text{Log } n}{n\,\rho} \leq \lambda(X_{n,j})$$

on obtient :

$$\lambda(X_{n,j})^{r(n)} (1-\lambda(X_{n,j}))^{n-r(n)} \leq (c \frac{\text{Log } n}{n\,\rho})^{r(n)} (1 - c \frac{\text{Log } n}{n\,\rho})^{n-r(n)}$$

donc pour tout $j \in R_n$ et pour n assez grand :

$$P(\nu_{n,j} \leq r(n)) < (\frac{n}{r(n)})^{r(n)} (\frac{n}{n-r(n)})^{n-r(n)} (c \frac{\text{Log } n}{n\,\rho})^{r(n)} (1 - c \frac{\text{Log } n}{n\,\rho})^{n-r(n)} \,.\, O(1)$$

On pose :

$$\begin{cases} a = \rho'_n \dfrac{\text{Log } n}{\rho} \\ b = c \dfrac{\text{Log } n}{\rho} \end{cases}$$

On a alors

$$P(\nu_{n,j} \leq r(n)) \leq ((\frac{b}{a})^a (\frac{a-b}{n-a})^{n-a}) \,.\, O(1) \,, \quad \text{pour } n \text{ assez grand .}$$

Mais :

$$(\frac{n-b}{n-a})^{n-a} = (1 - \frac{b-a}{n-a})^{n-a} \qquad \text{et :}$$

$$(\frac{b-a}{n-a}) = \frac{\text{Log } n(c - \rho'_n)}{n - \rho'_n \text{ Log } n} \xrightarrow[n]{} 0$$

et puisque $1 - x \leq e^{-x}$ on obtient :

$$(\frac{n-b}{n-a})^{n-a} \leq \exp - (n-a)\, (\frac{b-a}{n-a}) = \exp - (b-a) \,.$$

par suite :

$$P(\nu_{n,j} \leq r(n)) \leq ((\frac{b}{a})^a \exp(a-b)) \cdot O(1) ,$$

pour n assez grand, mais pour $a, b \geq 0$ on a :

$$(\frac{b}{a})^a \exp(a-b) \leq \exp - \frac{(a-b)^2}{t} \quad \text{où} \quad t = \max(a,b)$$

donc $$P(\nu_{n,j} \leq r(n)) \leq (\exp - \frac{(a-b)^2}{2b}) \cdot O(1)$$

soit que :

$$P(\nu_{n,j} \leq r(n)) \leq \exp - \frac{(\frac{\rho'_n \operatorname{Log} n}{\rho} - \frac{c \operatorname{Log} n}{\rho})^2}{2c \frac{\operatorname{Log} n}{\rho}} = \exp - \frac{\operatorname{Log} n}{2c\rho} (\rho'_n - c)^2 .$$

Or, (ρ'_n) est une suite qui croit vers c', donc

$$(\rho'_n - c)^2 \xrightarrow[n]{} (c' - c)^2$$

en décroissant, par suite :

$$(\rho'_n - c)^2 > (c' - c)^2 > c^2/4 ,$$

d'où

$$P(\nu_{n,j} \leq r(n)) \leq (\exp - \frac{\operatorname{Log} n}{2c\rho} \frac{c^2}{4}) \cdot O(1) \quad \text{pour} \quad n > \max(n_o, n_1, n_3)$$

mais :

$$\bigcup_{j \in R_n} X_{n,j} \subset S$$

et donc : $$\nu(\bigcup_{j \in R_n} X_{n,j}) = \sum_{j \in R_n} \nu(X_{n,j}) \leq \nu(S)$$

et $$\sum_{j \in R_n} \nu(X_{n,j}) \geq \operatorname{card} R_n \cdot \frac{\operatorname{Log} n}{n\rho}$$

donc $$\operatorname{card} R_n \leq \rho\ \nu(S) \cdot \frac{n}{\operatorname{Log} n}$$

par conséquent :

$$P\left(\bigcup_{j\in R_n} \nu_{n,j} \leq r(n)\right) \leq \operatorname{card} R_n \cdot \max_{j\in R_n} P(\nu_{n,j} \leq r(n)) \leq \left(\rho\ \nu(S)\ \frac{n^{1-c/8\rho}}{\operatorname{Log} n}\right) \cdot O(1)$$

et donc puisque ceci est vrai pour tout $\rho \in \,]0,1]$:

$$\sum_{n\geq 1} P(\nu_n \leq r(n)) < +\infty$$

Théorème II.1.- Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4 et celle du lemme 5 on a :

a) Une condition suffisante pour que $\hat{z}^{\bullet}_n$ converge vers z, en probabilité est que :

$$\lim_n F_n \cdot \delta_n^{1+\beta} = 0 \quad .$$

b) Une condition suffisante pour que $\hat{z}^{\bullet}_n$ converge presque complètement vers z est que :

$$\sum_{n\geq 1} F_n \cdot \delta_n^{1+\beta} < +\infty \, .$$

Remarque : Ainsi le nombre de cellules des partitions $(X_{n,j})_{j\in F_n}$ et leur diamètre se trouvent étroitement liés ; nous discuterons de ces conditions, dans le cas où $X = \mathbb{R}^k$, après la démonstration.

Preuve : $\varepsilon > 0$ est toujours fixé de façon que $S_{-\varepsilon}$ ne soit pas vide, et n assez grand $(n \geq n_1)$ pour que $\delta_n < \varepsilon$; $\eta > 0$ est fixé arbitrairement.

Posons :

$$\Omega_n = \{\sup_{j\in R_n} (\sup_{y\in X_{n,j}} |\frac{1}{\nu_{n,j}} \sum_{k\in R_{n,j}} Z_k(\tilde{x}_{k,j}) - z(y)| > \eta\} \quad .$$

Il est clair que :

$$\{ \sup_{y\in S_{-\varepsilon}} |\hat{z}^{\bullet}_n(y) - z(y)| > \eta\} \subset \Omega_n \quad .$$

Posons alors, pour tout $j \in R_n$:

$$\Omega_{n,j} = \{ \sup_{y\in X_{n,j}} |\frac{1}{\nu_{n,j}} \sum_{k\in R_{n,j}} Z_k(\tilde{x}_{k,j}) - z(y)| > \eta\} \quad .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in R_n$, on fixe un point $u_{n,j}$ dans $X_{n,j}$ et on pose :

$$\Omega'_{n,j} = \{\frac{1}{\nu_{n,j}} | \sum_{k\in R_{n,j}} Z_k(\tilde{x}_{k,j}) - z(u_{k,j})| + \sup_{y\in X_{n,j}} |z(u_{n,j}) - z(y)| > \eta\} \quad .$$

Pour n assez grand $(n \geq n_2)$, on a pour tout $j \in R_n$:

$$\sup_{y\in X_{n,j}} |z(u_{n,j}) - z(y)| \leq \sup_{y\in X_{n,j}} E|Z(u_{n,j}) - Z(y)| < k\, \delta_n^{1+\beta} < \eta/2$$

pour $n \geq n_1$ et $j \in R_n$ on a donc :

$$P^*(\Omega_{n,j}) \leq P^*(\Omega'_{n,j}) \leq P(\Omega''_{n,j}) \qquad \text{où} \quad :$$

$$\Omega''_{n,j} = \{\frac{1}{\nu_{n,j}} | \sum_{k\in R_{n,j}} Z_k(\tilde{x}_{k,j}) - z(u_{n,j})| > \eta/2\} \quad .$$

Or la famille des points $(\tilde{x}_{k,j})$ est, rappelons le, choisie de la façon suivante : on considère le n-uple de p.p. : $f^{\bullet}_{1/X_{n,j}}$,......, $f^{\bullet}_{n/X_{n,j}}$ représentant les restrictions de $f^{\bullet}_1$,..., $f^{\bullet}_n$ à $X_{n,j}$, et pour tout $k \in \langle 1,n\rangle$, tel que $N(f^{\bullet}_k,X_{n,j}) > 0$, on choisit par une procédure aléatoire quelconque un point unique de $X_{n,j}$ parmi les points de $f^{\bullet}_k$, on peut donc représenter la famille $(\tilde{x}_{k,j})$ comme la réalisation d'un n-uple de processus ponctuels :

$$(h^n_{1,j}, \ldots\ldots, h^n_{n,j})$$

se réalisant dans $X_{n,j}$, et, tel que pour $k = 1,\ldots,n$:

$$N(h^n_{k,j}, X_{n,j}) = 0 \quad \text{ou} \quad 1$$

Appelons $P_{n,j}$ la loi de probabilité de ce n-uple de processus ponctuels (c'est une loi de probabilité sur un espace produit d'espaces de répartitions ponctuelles qu'il est inutile d'expliciter).

$$P(\Omega''_{n,j}) = \int P(\Omega''_{n,j} \mid (h^n_{1,j},\ldots,h^n_{n,j}) = (x_1,\ldots,x_n))\, P_{n,j}(d(x_1,\ldots,x_n))$$

où $(x_1,\ldots,x_n)$ est une façon commode de noter une réalisation quelconque de $(h^n_{1,j},\ldots,h^n_{n,j})$, c'est-à-dire que pour tout k, x_k est soit un point obtenu dans $X_{n,j}$ à la $k^{\text{ième}}$ observation, soit n'est pas défini.

Cependant, comme les éléments aléatoires $(Z_k)_{k\geq 1}$, $(f^\bullet_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants :

$$P(\Omega''_{n,j} \mid (h^n_{1,j},\ldots,h^n_{n,j}) = (x_1,\ldots,x_n)) = P(|\frac{1}{\ell} \sum_{k\in K_\ell} Z_k(x_k) - z(u_{n,j})| > \eta/2$$

$$(\text{ou } P(|z(u_{n,j})| > \eta/2))$$

où K_ℓ est l'ensemble des indices $k \in \{1,\ldots,n\}$ tels que x_k est défini et $\ell = \mathrm{Card}(K_\ell)$.

Etant donné que $(Z_1,\ldots,Z_n)$ sont indépendantes et de même loi

$$P(\Omega''_{n,j}/(h^n_{1,j},\dots,h^n_{n,j}) = (x_1,\dots,x_n)) = P(\frac{1}{\ell}\,|\sum_{k=1}^{\ell} Z_k(x_k) - z(u_{n,j})| > \eta/2) \leq$$

$$P(\frac{1}{\ell}\,|\sum_{k=1}^{\ell} |Z_k(x_k) - Z_k(u_{n,j})| + \frac{1}{\ell}\,|\sum_{k=1}^{\ell} Z_k(u_{k,j}) - z(u_{n,j})| > \eta/2) \leq$$

$$P(\frac{1}{\ell}\,|\sum_{k=1}^{\ell} |Z_k(x_k) - Z_k(u_{n,j})| > \eta/4) + P(\frac{1}{\ell}\,|\sum_{k=1}^{n} Z_k(u_{n,j}) - z(u_{n,j})| > \eta/4) .$$

Or d'après l'inégalité de Markov et l'hypothèse H_3 :

$$P\{\frac{1}{\ell}\,|\sum_{k=1}^{\ell} Z_k(x_k) - Z_k(u_{n,j})| > \eta/4\} < \frac{4 \cdot \sum_{k=1}^{\ell} E|Z_k(x_k)-Z_k(u_{n,j})|}{\eta \cdot \ell} \leq \frac{4 \cdot k_2 . \delta_n^{1+\beta}}{\eta}$$

De plus, d'après l'hypothèse H_4 : il existe des constantes $A > 0$ et $0 < r < 1$, indépendantes de $u_{n,j}$, telles que :

$$P\{\frac{1}{\ell}\,|\sum_{k=1}^{\ell} Z_k(u_{n,j}) - z(u_{n,j})| > \eta/4\} < A \cdot r^{\ell} .$$

En notant E_ℓ : l'ensemble des $(x_1,\dots,x_n)$, où x_k est défini pour ℓ indices $k \in \{1,\dots,n\}$:

$$\int P(\Omega''_{n,j}/(h^n_{1,j},\dots,h^n_{n,j}) = (x_1,\dots,x_k))\; P_{n,j}(d(x_1,\dots,x_n)) =$$

$$\sum_{\ell=0}^{n} \int_{E_\ell} P(\Omega''_{n,j}/(h^n_{1,j},\dots,h^n_{n,j}) = (x_1,\dots,x_k))\; P_{n,j}(d(x_1,\dots,x_k)) \leq$$

$$\sum_{\ell=0}^{r(n)} P(\nu_{n,j} = \ell) + \sum_{\ell=r(n)+1}^{n} (\frac{4\ k\ \delta_n^{1+\beta}}{\eta} + A\ r^{\ell}) \cdot P(\nu_{n,j} = \ell)$$

par conséquent, pour $n \geq n_2$, et pour tout $j \in R_n$:

$$P^*(\Omega''_{n,j}) \leq P(\nu_{n,j} \leq r(n)) + (A \cdot r^{r(n)+1} + \frac{4\ k\ \delta_n^{1+\beta}}{\eta})$$

et

$$P^*\{\sup_{y\in S_{-\varepsilon}} |\hat{z}_n(y) - z(y)| > \eta\} \leq P^*(\Omega_n) \leq \sum_{j\in R_n} P(\nu_{n,j} \leq r(n)) +$$

$$+ \text{Card } R_n \, . \, (A \, . \, r^{r(n)+1} + \frac{4\, k_2\, \delta_n^{1+\beta}}{\eta})$$

$$\leq \text{Card } R_n \, . \, \max_{j\in R_n} P(\nu_{n,j} \leq r(n)) + F_n \, . \, A \, . \, r^{r(n)+1} + \frac{4\, F_n\, k_2\, \delta_n^{1+\beta}}{\eta}$$

Or d'après le lemme 5 : $[\text{Card } R_n \, . \, \max_{j\in R_n} P(\nu_{n,j} \leq r(n))]_{n\geq 1}$ est le terme général d'une série convergente.

D'autre part, en posant $\gamma = \nu(K)$:

$$\gamma = \sum_{j\in F_n} \nu(X_{n,j}) \geq F_n \, . \, \frac{\text{Log } n}{n\, \rho} \quad , \text{ pour tout } \rho \text{ de }]0,1], \; n \text{ assez grand .}$$

$$F_n \leq \frac{n\, \rho\, \gamma}{\text{Log } n} = \frac{n\, \gamma'}{\text{Log } n} \qquad \text{pour } n \text{ assez grand .}$$

Par suite :

$$A \, . \, F_n \, . \, r^{r(n)+1} < \rho\, \gamma \frac{n}{\text{Log } n}\, e^{c' \frac{\text{Log } n}{\rho} \, . \, \text{Log } r} = \rho\, \gamma\, \frac{n^{1-R/\rho}}{\text{Log } n} \, ,$$

avec $R = - c' \text{ Log } r$ et pour ρ assez petit on a :

$$\sum_{n\geq 1} F_n \, . \, A' \, . \, r^{r(n)+1} < + \infty$$

par conséquent, selon que : $F_n \, . \, \delta_n^{1+\beta} \xrightarrow[n]{} 0$, ou que : $\sum_{n\geq 1} F_n \, . \, \delta_n^{1+\beta} < + \infty$.

$\hat{z}_n^{\bullet}$ converge en probabilité, ou presque complètement.

Discussion : Cas où $X = \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.

Supposons que K soit un compact de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, on peut sans perte de généralité, supposer :

$$K \subset [0,1]^k \quad .$$

Munissons $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, de la distance d, définie par :

$$\forall x = (x_1,\dots,x_k) \quad ; \quad y = (y_n,\dots,y_k)$$

$$d(x,y) = \max_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$$

supposons que ν désigne, dans l'hypothèse H_1 , la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$, et que $(X_{n,j})_{j\in F_n}$, pour tout n , soit un quadrillage de $[0,1]^k$ par des cellules d'arête $\frac{1}{s(n)}$.

On a donc, pour tout n : $\delta_n = \frac{1}{s(n)}$

et $$\nu(X_{n,j}) = \frac{1}{s(n)^k} \geq \frac{\text{Log } n}{n\ \rho} \qquad \text{pour } n \text{ assez grand .}$$

Mais : $$F_n \cdot \delta_n^{1+\beta} \leq \delta_n^{1+\beta} \cdot s(n)^k = s(n)^{k-(1+\beta)}$$

$$\leq \left[\frac{n}{\text{Log } n}\right]^{1-(1+\beta/k)}$$

et donc si $1 + \beta > (1+\alpha)k$ où $\alpha > 1$.

$$F_n \cdot \delta_n^{1+\beta} \leq \left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)^{\alpha}.$$

Théorème II.2.- <u>Dans les conditions précises ci-dessus, pour que</u> $\hat{z}^{\bullet}_n$ <u>converge en probabilité vers, il suffit, dans l'hypothèse</u> H_3 , <u>que</u> $\beta + 1 > k$, <u>où</u> k <u>est la dimension de l'espace</u>.

<u>Pour que</u> $\hat{z}^{\bullet}_n$ <u>converge presque complètement vers</u> z, <u>il suffit que, dans l'hypothèse</u> H_3 , $\beta + 1 > (1+\alpha)k$ <u>où</u> $\alpha > 1$.

<u>*Remarque*</u> : Les méthodes développées dans ce chapitre permettent de revenir utilement sur le problème du chapitre précédent, en supposant cette fois que toute mesure du phénomène physique étudié est entaché d'une certaine erreur.

Nous faisons toujours les hypothèses H_1 et H_2 , et nous plaçons notre étude sous l'hypothèse du lemme 5.

Cependant, la fonction aléatoire Z est supposée fixe, et donc égale, comme dans le chapitre précédent, à une fonction z continue.

Il nous reste à modéliser les erreurs de mesures ; nous supposons que toute mesure de z en un point x comporte une erreur additive représentée par une variable aléatoire E_x ; autrement dit, ce qui est observé, c'est : $z(x) + E_x$; nous supposerons que E_x est une variable aléatoire centrée (Cette hypothèse revient à dire que, si E_x n'est pas centrée, sa moyenne est connue de l'expérimentateur qui peut procéder à la correction adéquate).

Nous supposerons également que

G_1) $\sup_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{Var}(E_x) = c < +\infty$

G_2) E_x possède des moments de tout ordre, pour tout $x \in \mathcal{X}$.

G_3) Pour tout $k \geq 2$, pour tout $x \in \mathcal{X}$, $E(E_x^k) < c \cdot M^{k-2} \cdot k!$, où M est une constante indépendante de k et de x.

Un échantillon de taille n comprendra donc

* n répartitions ponctuelles : $f_1^\bullet(\omega)$;.....; $f_n^\bullet(\omega)$, où , pour tout $i = 1,\dots,n$:

$$f_i^\bullet(\omega) = \{x_i^j(\omega) \; ; \; j = 1, \dots, N(f_i^\bullet(\omega);\mathcal{X})\} .$$

* n ensembles de mesures erronnées : pour tout $i = 1,\dots,n$:

$$\{z(x_i^j(\omega)) + E_{(i,j)}(\omega) \; ; \; j = 1,\dots, N(f_i^\bullet(\omega) \; ; \; X)\}$$

Nous ferons enfin l'hypothèse d'indépendance entre les diverses erreurs :

G_4) Pour tout $i = 1,\dots,n$ et $j = 1,\dots, N(f_i^\bullet(\omega); X)$, les variables aléatoires $E_{(i,j)}$ ont pour loi la loi de E_x au point $x = x_i^j(\omega)$ et sont indépendantes entre elles.

Avec les notations déjà utilisées dans ce chapitre, posons :

$$\bar{z}_n = \sum_{j\in I_n} \left(\frac{1}{\nu_{n,j}} \sum_{k\in R_{n,j}} (z(\tilde{x}_{k,j}) + E_{\tilde{x}_{k,j}})\right) 1_{X_{n,j}}$$

avec la convention : $\bar{z}_n = 0$ sur $X_{n,j}$ si $\nu_{n,j} = 0$

et $\tilde{x}_{k,j} \in \{x \in X_{n,j} : N(f_k^\bullet , \{x\}) > 0\}$.

Voyons maintenant que, sous ces conditions $\bar{z}_n$ converge vers z presque complètement, au sens de la définition II.2.

On fixe $\varepsilon > 0$ de façon que $S_{-\varepsilon}$ ne soit pas vide, et n assez grand $(n \geq n_1)$ pour que $\delta_n < \varepsilon$; η est un nombre positif fixé arbitrairement ; on a, comme dans la démonstration du théorème II.1 :

$$\{\sup_{y\in S_{-\varepsilon}} |\bar{z}_n(y) - z(y)| > \eta\} \subset \bigcup_{j\in R_n} \Omega_{n,j}$$

où

$$\Omega_{n,j} = \{\sup_{y\in X_{n,j}} \left|\frac{1}{\nu_{n,j}} \sum_{k\in R_{n,j}} (z(\tilde{x}_{k,j}) + E_{\tilde{x}_{k,j}}) - z(y)\right| > \eta\} \; .$$

Comme z est continue sur le compact K , il existe $n_2 \geq n_1$ tel que, pour $n \geq n_2$:

$$\max_{j\in R_n} \sup_{(x,y)\in X_{n,j}} |z(x) - z(y)| < \eta/2 \; .$$

Donc, pour tout $n \geqslant n_2$ et tout $j \in R_n$, pour tout $y \in X_{n,j}$

$$\left|\frac{1}{\nu_{n,j}} \sum_{k\in R_{n,j}} z(\tilde{x}_{k,j}) - z(y)\right| \leqslant \frac{1}{\nu_{n,j}} \sum_{k\in R_{n,j}} |z(\tilde{x}_{k,j}) - z(y)| \leqslant \eta/2 \ .$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_2$ et tout $j \in R_n$:

$$\Omega_{n,j} \subset \{\frac{1}{\nu_{n,j}} \Big| \sum_{k\in R_{n,j}} E_{\tilde{x}_{k,j}} \Big| > \eta/2\}$$

et

$$P\{\sup_{y\in S_{-\varepsilon}} |\bar{z}_n(y) - z(y)| > \eta\} \leqslant \sum_{j\in R_n} P\{\frac{1}{\nu_{n,j}} \Big| \sum_{k\in R_{n,j}} E_{\tilde{x}_{k,j}} \Big| > \eta/2\} \ .$$

Avec les notations de la démonstration précédente,

$$P\{\frac{1}{\nu_{n,j}} \Big| \sum_{k\in R_{n,j}} E_{\tilde{x}_{k,j}} \Big| > \eta/2\} =$$

$$\int P\{\frac{1}{\nu_{n,j}} \Big| \sum_{k\in R_{n,j}} E_{\tilde{x}_{k,j}} \Big| > \eta/2 \ / \ (h^n_{1,j};\ldots;h^n_{n,j}) = (x_1,\ldots,x_n)\} \ P_{n,j}(dx_1,\ldots,dx_n)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \int_{E_\ell} P\{\frac{1}{\nu_{n,j}} \Big| \sum_{k\in R_{n,j}} E_{\tilde{x}_{k,j}} \Big| > \eta/2 \ / \ (h^n_{1,j};\ldots;h^n_{n,j}) = (x_1,\ldots,x_n)\} \ P_{n,j}(dx_1,\ldots,dx_n)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \int_{E_\ell} P\{\frac{1}{\ell} \Big| \sum_{k\in K_\ell} E_{x_k} \Big| > \eta/2 \ / \ (h^n_{1,j};\ldots;h^n_{n,j}) = (x_1,\ldots,x_n)\} \ P_{n,j}(dx_1,\ldots,dx_n)$$

et pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in E_\ell$, d'après G_4,

$$P\{\frac{1}{\ell} \Big| \sum_{k\in K_\ell} E_{x_k} \Big| > \eta/2 \ / \ (h^n_{1,j};\ldots;h^n_{n,j}) = (x_1,\ldots,x_n)\} =$$

$$P\{\frac{1}{\ell} \Big| \sum_{k\in K_\ell} E_{x_k} \Big| > \eta/2\}$$

et, d'après G_1 , G_2 , G_3 et une inégalité voisine de celle de Frechet [15]

$$P\{\frac{1}{\ell} \mid \sum_{k\in K_\ell} E_{x_k} \mid > \eta/2\} \leq 2 \exp[- \ell\, \eta^2/ (8\, c + 2\, \eta\, M)]$$

Alors, en posant $r_\eta = \exp[- \eta^2 / (8\, c + 2\, \eta\, M)]$, on obtient :

$$P\{\frac{1}{\nu_{n,j}} \mid \sum_{k\in R_{n,j}} E_{\tilde{x}_{k,j}} \mid > \eta/2\} \leq$$

$$\sum_{\ell=0}^{r(n)} P\{\nu_{n,j} = \ell\} + 2 \sum_{\ell=r(n)+1}^{n} r_\eta^\ell \,.\, P\{\nu_{n,j} = \ell\} \leq P\{\nu_{n,j} \leq r(n)\} + 2\, r_\eta^{r(n)+1} \,.$$

Ainsi, $$P\{ \sup_{y\in S_{-\varepsilon}} |\bar{z}_n(y) - z(y)| > \eta\} \leq \mathrm{Card}(R_n) \,.\, \max_{j\in R_n} P\{\nu_{n,j} \leq r(n)\} + 2\, \mathrm{Card}(R_n)\, r_\eta^{r(n)+1} \,.$$

D'après la démonstration précédente, sous les hypothèses du lemme 5, le terme de gauche est le terme général d'une série convergente.

CHAPITRE III

ESTIMATION DU CONTOUR DISCONTINU DU SUPPORT D'UNE REPARTITION PONCTUELLE ALEATOIRE.

1 - PRÉSENTATION DU PROBLÈME.

L'origine du problème remonte à un article de J. GEFFROY, en 1964, [I], qui étudiait l'estimation du contour du support d'une loi de probabilité sur le plan, ce contour était supposé délimité par l'axe des abscisses, les verticales $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$ et une fonction positive continue ψ.

Ce problème devrait être repris et prolongé par plusieurs élèves de Geffroy, notamment J. CHEVALIER, en 1976, [V], qui considérait un support délimité par une courbe continûment différentiable, et par M.H. GENSBITTEL, en 1979 [IV], qui étudiait le problème de l'estimation du support d'une répartition ponctuelle aléatoire, quand ce support est de la forme indiquée dans le paragraphe ci-dessus.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étendre les résultats de ces différents auteurs, au cas où ψ n'est plus continu, mais présente des discontinuités de première espace.

Il convient tout d'abord de procéder à quelques rappels élémentaires concernant l'espace $D[0,1]$; on trouvera la démonstration de ces quelques propriétés dans le livre de BILLINGSLEY [XVI].

$D[0,a]$ ou D_a désigne l'espace des fonctions Φ définies sur $[0,a]$ continue à droite et ayant des limites à gauche :

1) $\forall x \in [0,a]$, $\Phi(x^+) = \lim\limits_{y \downarrow x} \Phi(y)$ existe et $\Phi(x^+) = \Phi(x)$

2) $\forall x \in]0,a]$, $\Phi(x^-) = \lim\limits_{y \uparrow x} \Phi(y)$ existe .

Les éléments de $D[0,a]$ ne présentent donc que des discontinuités de première espèce ; pour toute fonction Φ de $D[0,a]$ et tout intervalle de $[0,a]$ on pose

$$w_\Phi(I) = \sup\{|\Phi(x) - \Phi(y)| \ , \ x \ , y \in I\} \ .$$

Un résultat élémentaire mais essentiel pour notre étude est le suivant :

Propriété III.1.- Soit Φ un élément de D_1 et ε un nombre positif fixé ; il existe une partition de $[0,1]$: $0 = x_o < x_1 < \ldots < x_\ell = 1$ telle que :

$$w_\Phi([x_{i-1}, x_i[) < \varepsilon \ , \quad \text{pour tout} \quad i = 1,\ldots,\ell \ .$$

On en déduit notamment qu'il existe, pour $\Phi \in D_1$, au plus un nombre fini de sauts de hauteur absolue supérieure à un nombre positif donné ; par conséquent l'ensemble des points de discontinuités de Φ est au plus dénombrable, et Φ est bornée et mesurable.

Il est clair que D_1 n'est pas séparable pour la distance uniforme :

$$u(\Phi,\Psi) = \sup_{x \in [0,1]} |\Phi(x) - \Psi(x)| \ .$$

Aussi bien, dans le problème que nous nous posons, ne peut-on espérer voir notre estimateur (une fonction en escalier aléatoire) converger uniformément vers une fonction Φ présentant des discontinuités inconnues ; il faudra donc se contenter de distances plus faibles ; dans ce chapitre, nous utiliserons essentiellement la distance L définie par :

$$L(\Phi,\Psi) = \int_0^1 |\Phi(x) - \Psi(x)|dx$$

et la distance de Skorokhod d_S dont nous rappelons plus loin la définition ; d_S est plus forte que L, mais l'emploi de l'une ou l'autre est justifié par le fait que pour L , l'estimateur que nous utilisons est toujours l'estimateur défini par Geffroy, tandis que, pour d_S , la construction de l'estimateur sera, on le verra, plus compliqué.

Soit Λ la classe des fonctions strictement croissantes et continues de $[0,1]$ dans lui-même ; pour tout couple (Φ,Ψ) d'éléments de D_1 , on pose :

$$d_S(\Phi,\Psi) = \{\inf \varepsilon > 0 : \exists\lambda \in \Lambda : \sup_{x\in[0,1]} |\lambda(x) - x| \leq \varepsilon ;$$
$$\sup_{x\in[0,1]} |\Phi(x) - \Psi(\lambda x)| \leq \varepsilon\} .$$

Une suite (Φ_n) converge dans (D_1,d_S) vers Φ si et seulement si il existe une suite (λ_n) d'élément de Λ telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_n \sup\limits_{x\in[0,1]} |\lambda_n(x) - \lambda(x)| = 0 \\ \lim\limits_n \sup\limits_{x\in[0,1]} |\Phi_n(\lambda_n(x) - \Phi(\lambda(x))| = 0 . \end{cases}$$

Bien entendu, on peut remplacer la seconde condition par :

$$\lim_n \sup_{x\in[0,1]} |\Phi_n(x) - \Phi(\lambda_n(x))| = 0$$

(D_1,d_S) est un espace métrique séparable.

Dans la suite, nous utiliserons des notations qu'il faut mieux préciser une fois pour toutes :

$f^{\bullet}$ est une répartition ponctuelle aléatoire, sur le plan rapporté à un certain système d'axes rectangulaires (Ox,Oy), définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Le support de $f^{\bullet}$ est définie par

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq \max(\Phi(x) \ ; \ \Phi(x^-))\}$$

où Φ est un élément de D_1 et $\Phi(x^-)$ la notation classique pour $\lim\limits_{s \uparrow x} \Phi(s)$.

<u>*Remarque*</u> : Il convient de vérifier que S est bien fermé ; pour ce faire, considérons une suite (x_n,y_n) d'éléments de S qui converge vers (x,y). On montre tout d'abord qu'il est possible de supposer que, pour tout n, x_n est un point de continuité de Φ.

$n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, il existe une suite $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de points de continuité de Φ qui converge vers x_n ; si $\Phi(x_n^-) < \Phi(x_n)$, on choisit une suite $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ décroissante ; pour k assez grand, on a :

1) $|x_{n,k} - x_n| < \frac{1}{n}$

2) $|\Phi(x_{n,k}) - \Phi(x_n)| < \frac{1}{2n}$

il est donc possible de choisir un point y_{n,k_n} tel que :

$|y_{n,k_n} - y_n| < \frac{1}{n}$ et $y_{n,k_n} < \Phi(x_{n,k_n})$ $(= \Phi(x^-_{n,k_n}))$ si $\Phi(x_n^-) > \Phi(x_n)$,

on choisit une suite $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ croissante ; pour k assez grand, on a :

1) $|x_{n,k} - x_n| < \frac{1}{n}$

2) $|\Phi(x_{n,k}) - \Phi(x_n^-)| < \frac{1}{2n}$

Il est donc possible de choisir un point y_{n,k_n} tel que : $|y_{n,k_n} - y_n| < \frac{1}{2n}$ et $y_{n,k_n} < \Phi(x_{n,k_n})$ $(= \Phi(x_{n,k_n}^-))$.

Il est clair que $(x_{n,k_n} \; ; \; y_{n,k_n})$ est aussi une suite d'éléments de S qui converge vers (x,y).

Ainsi, on peut sans perte de généralité supposer que (x_n,y_n) est une suite de points de S telle que pour tout n, x_n est un point de continuité de Φ , et que (x_n) est une suite monotone ;

- si (x_n) est décroissante, on obtient :

$$y = \lim_n y_n < \lim_n \Phi(x_n) = \Phi(x) < \max(\Phi(x) \; ; \; \Phi(x^-))$$

- si (x_n) est croissante, on obtient :

$$y = \lim_n y_n < \lim_n \Phi(x_n) = \Phi(x^-) < \max(\Phi(x) \; ; \; \Phi(x^-)) \; .$$

On se propose d'estimer Φ à l'aide d'un échantillon de taille n de $f^\bullet$: $f_1^\bullet,\ldots,f_n^\bullet$ par une fonction empirique Φ_n définie au moyen des éléments suivants :

- (k_n) est une suite d'entiers positifs qui tend vers l'infini avec n.

. $D_{n,r} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{r-1}{k_n} \leqslant x < \frac{r}{k_n} \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant \max[\Phi(x) \ ; \ \Phi(x^-)]\}$

pour $r = 1,2,\ldots,k_{n-1}$

. $D_{n,k_n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{k_{n-1}}{k_n} \leqslant x \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant \max[\Phi(x) \ ; \ \Phi(x^-)]\}$

. $S_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists i \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n : f_i^\omega\{(x,y)\} > 0\}$ pour $\omega \in \Omega$

. $S^\omega_{n,r} = S^\omega_n \cap D_{n,r} \quad , \quad r = 1,\ldots,k_n$.

. $U^\omega_{n,r} = 0$ si $S^\omega_{n,r} = \emptyset$

. $U^\omega_{n,r} = \max\{y, (x,y) \in S^\omega_{n,r}\}$ si $S^\omega_{n,r} \neq \emptyset$.

$$\Phi^\omega_n(x) = \sum_{r=1}^{k_n} U^\omega_{n,r} \, 1_{[r-1/k_n \, , \, r/k_n[}(x) \ .$$

Etant entendu, que pour $r = k_n$, il convient de fermer l'intervalle $[\frac{r-1}{k_n} \, , \, \frac{r}{k_n}[$ mais nous négligeons désormais ce détail.

On remarque que cet estimateur n'est autre que celui proposé par Gensbittel dans le cas où Φ est continu ; il est amusant de constater que, pour le cas que nous envisageons, cet estimateur est propre dans ce sens que :

$$(P(\Phi_n \in D_1) = 1 \quad , \quad \forall n)$$

pour tout $r = 1,\ldots,k_n$, on notera :

$$M_{n,r} = \sup_{x \in [r-1/k_n \, , \, r/k_n[} \Phi(x)$$

$$m_{n,r} = \inf_{x \in [r-1/k_n \, , \, r/k_n[} \Phi(x) \ .$$

Pour tout nombre réel positif z, on appellera $D_{n,r}(z)$ la partie de $D_{n,r}$ constituée par les points d'ordonnée supérieure ou égale à $M_{n,r} - z$ et $E_{n,r}(z)$ l'événement consistant en ce qu'aucune partie $D_{n,r}(z)$ n'est chargée par l'un des processus ponctuels $\dot{f}_i$, $i = 1,\dots,n$.

$$E_{n,r}(z) = \bigcap_{i=1}^{n} \{N(\dot{f}_i, D_{n,r}(z)) = 0\} .$$

2 - ÉTUDE DE L'EFFICACITÉ DE L'ESTIMATION DE Φ DANS (D_1,L).

On propose deux théorèmes concernant une condition suffisante de convergence, le premier sera analogue à celui proposé par GENSBITTEL [IV] dans le cas où Φ est continue, le deuxième, en renforçant les hypothèses sur $\dot{f}$ sera analogue à celui proposé par GEFFROY [I].

On appellera $A(n,z)$ l'ensemble des rectangles de côtés parallèles aux axes Ox et Oy ; contenus dans S , de hauteur $z/2$ et de largeur $1/k_n$, pour z assez petit, cet ensemble n'est pas vide, et on pose alors :

$$C_{k,n}(z) = \inf_{B\in A(n,z)} P\{N(\dot{f},B) > 0\} .$$

Enfin on appellera $B(n,z)$ l'ensemble des rectangles de côtés parallèles aux axes Ox et Oy , de hauteur z et de largeur $1/k_n$, on pose :

$$G_{k,n}(z) = \sup_{B\in A(n,z)} P\{N(\dot{f},B) > 0\} .$$

Théorème III.1.a.- Une condition suffisante pour que Φ_n converge vers Φ en probabilité (respectivement presque complètement (p.co.)) dans l'espace métrique (D_1, L) est que pour tout réel positif z, la suite $u_n(z) = k_n \cdot (1 - C_{k_n}(z))^n$ tende vers 0 avec $1/n$ (resp. que la série de terme général $u_n(z)$ soit convergente).

Démonstration : $z > 0$ étant fixé, soit :

$$x_o = 0 < x_1 < \ldots\ldots < x_j < \ldots\ldots < x_\ell = 1$$

une partition de $[0, 1]$ telle que :

$$\forall j = 1, \ldots, \ell \ : \ w_\Phi([x_{j-1}, x_j[) < z/8$$

lorsque n est assez grand chacun des intervalles $[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}[$, $r = 0, 1, \ldots, k_{n-1}$ contient au plus un point x_j, $j = 0, \ldots, \ell$: on supposera donc sans perte de généralité, que c'est le cas pour tout n.

On notera K_n l'ensemble $\{0, 1, \ldots, k_{n-1}\}$ et L_n le sous-ensemble de k_n des entiers r tels que $[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}[$ contient un point x_j, $(j = 0, 1, \ldots, \ell)$. Il est facile de vérifier que :

$$\int_0^1 |\Psi_n(x) - \Psi(x)| \, dx \leq \sum_{r \in K_n - L_n} \frac{1}{k_n} \max \left[(M_{n,r} - U_{n,r}) \ ; \ (M_{n,r} - m_{n,r})\right]$$

$$+ \sum_{r \in L_n} \frac{1}{k_n} M_{n,r}$$

il existe un entier n_1 tel que pour $n \geq n_1$:

$$\sum_{r \in L_n} \frac{1}{k_n} M_{n,r} < \frac{\ell}{k_n} \sup_{x \in [0,1]} \Phi(x) < z/2$$

et

$$\frac{k_n}{k_n - \ell} > 1/2 \quad .$$

Alors l'événement : $\{\int_0^1 |\Phi_n(x) - \Phi(x)|\, dx > z\}$ implique :

$$\{\sum_{r\in K_n - L_n} \frac{1}{k_n} \max\left[(M_{n,r} - U_{n,r})\ ;\ (M_{n,r} - m_{n,r})\right] > z/2\}$$

qui implique à son tour :

$$\bigcup_{r\in K_n - L_n} \{\max\left[(M_{n,r} - U_{n,r})\ ;\ (M_{n,r} - m_{n,r})\right] > z/2\ \frac{k_n}{k_n - \ell}\}$$

Ainsi l'un des événements : $\{\max\left[(M_{n,r} - U_{n,r}), (M_{n,r} - m_{n,r})\right] > z/4\}$ est réalisé pour $r \in K_n - L_n$; cependant, comme $[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{n}[$ ne contient pas de point x_j, l'oscillation de Φ sur cet intervalle est inférieur à $z/8$, c'est donc un événement :

$$\{(M_{n,r} - U_{n,r}) > z/4\},\quad \text{pour}\quad r \in K_n - L_n\ ,$$

qui est réalisé, désignons alors par $A_{n,r,z}$ le pavé :

$$[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}[\times [M_{n,r} - z/4\ ,\ M_{n,r} - z/8[$$

Il ne contient aucun point de $\{f_1^\bullet, \dots, f_n^\bullet\}$: l'événement ci-dessous est donc réalisé :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{N(f_i^\bullet, A_{n,r,z}) = 0\}\ .$$

En résumé, on a donc, pour $n \geq n_1$:

$$\{\int_0^1 |\Phi_n(x) - \Phi(x)|\, dx > z\} \subset \bigcup_{r\in K_n - L_n} \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{N(f_i^\bullet, A_{n,r,z}) = 0\}\right)$$

et donc

$$P\{\int_0^1 |\Phi_n(x) - \Phi(x)|\, dx > z\} \leq \sum_{r\in K_n - L_n} (1 - P\{N(f^\bullet, A_{n,r,z}) > 0)^n\ .$$

Or, pour $r \in K_n - L_n$, $A_{n,r,z}$ est un rectangle contenu dans le support de $f^\bullet$, puisque l'oscillation de Φ sur $[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}[$ est inférieur à $z/8$; on a donc :

$$P(L(\Phi_n,\Phi) > z) \leqslant (k_n - \ell)\ (1 - C_{k_n}(z/8))^n \leqslant k_n(1 - C_{k_n}(z/8))^n$$

et donc selon que :

$$k_n(1 - C_{k_n}(z')) \longrightarrow 0 \qquad \text{ou}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} k_n(1 - C_{k_n}(z')) < +\infty$$

On obtient la convergence en probabilité ou la convergence presque complète de notre estimateur dans (D_1,L).

On suppose maintenant que $f^\bullet$ est une r.p.a. admettant une mesure moyenne μ à densité g par rapport à ν mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, on suppose de plus que $f^\bullet$ est (k_o,δ)-régulière , on a alors le théorème suivant :

Théorème III.1.b.- S'il existe deux constantes positives A et B telles que :

$$A \leqslant g(x,y) \leqslant B \qquad \forall (x,y) \in S\ .$$

Une condition suffisante pour que Φ_n converge en probabilité et presque complètement vers Φ dans (D_1,L) est que :

$$k_n = O(\frac{n}{\mathrm{Log}\ n}) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\ .$$

<u>*Démonstration*</u> : $z > 0$ étant fixé , soit :

$$x_o = 0 < x_1 < \ldots\ldots < x_j < \ldots\ldots < x_\ell = 1$$

une partition de $[0,1]$ telle que :

$$\forall j \in \{1,\ldots,\ell\} : w_\Phi([x_{j-1},x_j[) < z/8$$

quand n devient grand, chacun des intervalles $[\frac{r}{r_n} , \frac{r+1}{k_n}[$, $r = 0,1,\ldots,k_{n-1}$ contient au plus un point x_j , $j = 1,2,\ldots,\ell$, on supposera que c'est le cas pour tout n.

On pose $K_n = \{0,1,\ldots,k_{n-1}\}$

L_n = sous-ensemble des r tel que $[\frac{r}{k_n} , \frac{r+1}{k_n}[$ contient un point x_j , $j = 1,\ldots,\ell$; pour $x \in I_{n,r} = [\frac{r}{k_n} , \frac{r+1}{k_n}[$:

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant (M_{n,r} - U_{n,r}) + (M_{n,r} - m_{n,r}) = A_{n,r}$$

$$\int_{I_{n,r}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|\, dx \leqslant \frac{A_{n,r}}{k_n} \quad .$$

Par conséquent ,

$$\int_0^1 |\Phi_n(x) - \Phi(x)|\, dx \leqslant \sum_{r\in K_n - L_n} \frac{A_{n,r}}{k_n} + \sum_{r\in L_n} \int_{I_{n,r}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|\, dx$$

$$\leqslant \sum_{r\in K_n - L_n} \frac{A_{n,r}}{k_n} + 2 \sum_{r\in L_n} \frac{M_{n,r}}{k_n}$$

il existe un entier n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$:

$$2 \sum_{r\in L_n} \frac{M_{n,r}}{k_n} \leqslant 2 \frac{\ell}{k_n} \sup_{x\in[0,1]} \Phi(x) < z/4$$

et $$\frac{k_n}{k_n - \ell} > 1/2 .$$

On a alors :

$$\int_0^1 |\Phi_n(x) - \Phi(x)|\, dx \leq 2\, Z_n + 2 \sup_{1 \leq r \leq k_n - \ell} (M_{n,r} - m_{n,r}) + z/4$$

avec :

$$Z_n = \sup_{1 \leq r \leq k_n - \ell} (M_{n,r} - U_{n,r})$$

comme pour $r \in K_n - L_n$: $\left[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}\right[$ ne contient pas de point x_j , l'oscillation de Φ sur cet intervalle est inférieur à $z/8$ et donc :

$$L(\Phi_n, \Phi) < 2\, Z_n + z/2 ,$$

ce qui prouve l'inclusion :

$$\{L(\Phi_n, \Phi) > z\} \subset (Z_n > z/4)$$

supposons que k_n satisfasse à la condition du théorème :

$$\exists\ \varepsilon_n \xrightarrow[n]{} 0 \ : \ k_n = \frac{n\, \varepsilon_n}{\mathrm{Log}\ n}$$

en admettant que : $0 < z < 4 \inf_{x \in [0,1]} \Phi(x)$ et comme $f^{\bullet}$ est (k_o, δ)-régulière : on a :

$$\mu(D_{n,r}(z/4)) = \int_{D_{n,r}(z/4)} g\, d\nu \leq B\, \nu(D_{n,r}(z/4)) \leq \frac{Bz}{4\, k_n}$$

et donc il existe n_2 tel que pour $n \geq n_2$ et tout $r \in K_n - L_n$:

$$\mu(D_{n,r}(z/4)) < \delta$$

donc : $$\lambda(D_{n,r}(z/4)) > \mu(D_{n,r}(z/4)) \;/\; k_o$$

or $$\mu(D_{n,r}(z/4)) = \int_{D_{n,r}(z/4)} g\, d\nu \geq A\, \nu(D_{n,r}(z/4)) \geq \frac{Az}{8\, k_n}$$

donc : pour $n \geqslant n_2$ et tout $r \in K_n - L_n$

$$\lambda(D_{n,r}(z/4) > \frac{Az}{8\, k_o\, k_n}$$

et

$$P(E_{n,r}(z/4)) \leqslant (1 - \lambda(D_{n,r}(z/4)))^n$$

$$\leqslant (1 - \alpha \frac{z}{k_n})^n \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{A}{8\, k_o}$$

or

$$P(Z_n > z/4) = P(\bigcup_{r \in K_n - L_n} E_{n,r}(z/4)) \leqslant \sum_{r \in K_n - L_n} P(E_{n,r}(z/4))$$

d'où

$$P(L(\Phi_n, \Phi) > z) \leqslant (k_n - \ell)\, (1 - \frac{\alpha z}{k_n})^n \leqslant k_n (1 - \frac{\alpha z}{k_n})^n$$

or

$$w_n(z) = k_n(1 - \frac{\alpha z}{k_n})^n = \frac{n\, \varepsilon_n}{\text{Log } n}\, (1 - \frac{\alpha z \text{ Log } n}{n\, \varepsilon_n})^n$$

$$\frac{n\, \varepsilon_n}{\text{Log } n}\, e^{- \alpha z \text{ Log } n/\varepsilon_n} = n^{(1 - \alpha z/\varepsilon_n)} \cdot \frac{\varepsilon_n}{\text{Log } n}$$

et, il existe $n_3 \geqslant n_2$ tel que, $\forall n \geqslant n_3$,

$$\frac{\varepsilon_n}{\text{Log } n} < 1 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{\alpha z}{\varepsilon_n} < -2$$

donc $\qquad w_n(z) < n^{-2}$.

3 - LOI LIMITE DE $L(\Phi_n,\Phi)$.

Dans l'hypothèse où $f^{\bullet}$ est un processus ponctuel de Poisson, de paramètre $c \,.\, \lambda_S$, où λ_S est la restriction de la mesure de Lebesgue à S ; nous allons chercher la loi limite de $L(\Phi_n,\Phi)$; nous procéderons par ordre de complexité croissante en examinant les deux cas suivants :

1) Φ est contante.

2) Φ est une fonction en escalier.

1^er^ Cas

Théorème III.2.- Supposons que $\Phi(x) = a$ où a est une constante positive, et que $k_n = O(\frac{n}{\text{Log } n})$. Dans ces conditions on a :

$$\frac{n\,c}{\sqrt{k_n}} L(\Phi_n,\Phi) - \sqrt{k_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) .$$

Démonstration : $f_1^{\bullet},\ldots,f_n^{\bullet}$ étant indépendants et de même loi que $f^{\bullet}$, leur superposition $\sum_{i=1}^{n} f_i^{\bullet}$ est un processus ponctuel de Poisson de paramètre $n \,.\, c \,.\, \lambda_S$.

Sur un rectangle $\left[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}\right[\times [0,a[= H_{n,r}$, la restriction de $\sum_{i=1}^{n} f_i^{\bullet}$ est un processus de Poisson de paramètre $n \,.\, c \,.\, \lambda_{H_{n,r}}$.

Soit $N_{n,r}$: le nombre de points de $\sum_{i=1}^{n} f_i^{\bullet}$ tombés dans le rectangle $H_{n,r}$: sous la condition $\{N_{n,r} = \nu\}$, ces points sont répartis comme un échantillon de la loi uniforme sur ce rectangle. Par conséquent : pour tout $u : 0 \leq u \leq a$

$$P(U_{n,r} \leq u \mid N_{n,r} = \nu) = (\frac{u}{a})^{\nu}$$

pour $\nu = 0$

$$P(U_{n,r} \leq u \mid N_{n,r} = 0) = 1 \ .$$

Or $N_{n,r}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{n\,c\,a}{k_n} = a_n$ si bien que :

$$P(U_{n,r} \leq u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a_n} \frac{a_n^{\nu}}{\nu!} \left(\frac{u}{a}\right)^{\nu} = e^{a_n(u/a\,-1)}$$

On voit donc que la loi de $U_{n,r}$ présente une masse e^{-a_n} en 0 , et que le reste de la masse est réparti par la densité $\frac{a_n}{a} e^{a_n(u/a\,-\,1)}$ entre 0 et a. On déduit :

$$E(U_{n,r}) = 0 \ . \ e^{-a_n} + \int_0^a e^{-a_n} \frac{a_n}{a}\, x\, e^{a_n/a\, x}\, dx$$

et un calcul simple fournit :

$$E(U_{n,r}) = a - \frac{a}{a_n} + \frac{a}{a_n} e^{-a_n}$$

on pose :

$$m_n = a - E(U_{n,r}) \ .$$

D'autre part :

$$E(U_{n,r}^2) = 0 \ . \ e^{-a_n} + \int_0^1 e^{-a_n} \frac{a_n}{a}\, x^2\, e^{a_n/a\, x}\, dx$$

donc

$$E(U_{n,r}^2) = a^2 - \frac{2\,a^2}{a_n} + \frac{2\,a^2}{a_n^2} - \frac{2\,a^2}{a_n^2} e^{-a_n}$$

et

$$V(U_{n,r}) = \frac{a^2}{a_n^2} - \frac{a^2}{a_n^2} e^{-2a_n} - \frac{2\,a^2}{a_n} e^{-a_n} = \sigma_n^2 \ .$$

Or

$$L(\Phi_n, \Phi) = \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} (a - U_{n,r}) \ .$$

Posons :

$$\xi_{n,r} = \frac{a - U_{n,r}}{k_n} - \frac{m_n}{k_n} .$$

De façon que : $E(\xi_{n,r}) = 0$

et $$V(\xi_{n,r}) = \frac{1}{k_n^2} V(U_{n,r})$$

donc en posant :

$$s_n^2 = \mathrm{Var}\left(\sum_{r=1}^{k_n} \xi_{n,r}\right) = \sum_{r=1}^{k_n} V(\xi_{n,r}) = \frac{\sigma_n^2}{k_n}$$

puisque $\xi_{n,1},\ldots,\xi_{n,k_n}$ sont indépendantes : compte-tenu de l'indépendance de la suite $(\xi_{n,r})_{r=1,\ldots,k_n}$, et si la condition de Lindeberg ([16], page 42) est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \frac{1}{s_n^2} \sum_{r=1}^{k_n} \int_{\{|\xi_{n,r}| \geq \varepsilon s_n\}} \xi_{n,r}^2 \, dP \xrightarrow[n]{} 0$$

on a :

$$\frac{1}{s_n} \sum_{r=1}^{k_n} \xi_{n,r} = \frac{L(\Phi_n,\Phi) - m_n}{\sigma_n/\sqrt{k_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \quad .$$

Cependant, on sait que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers X, (α_n) et (β_n) sont deux suites de nombres qui convergent vers α et β respectivement, alors :

$$\alpha_n X_n + \beta_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha X + \beta$$

Posons :

$$m_n' = \frac{a}{a_n} \quad , \quad \sigma_n' = \frac{a}{a_n}$$

un calcul simple fournit :

$$\frac{\sigma'_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n]{} 1$$

et

$$\frac{m_n - m'_n}{\sigma'_n / \sqrt{k_n}} = - \sqrt{k_n}\, e^{-a_n} = - \sqrt{k_n}\, e^{-n.c.a./\sqrt{k_n}}$$

or $\quad \frac{n.c.a.}{k_n} = \frac{\text{Log } n}{\varepsilon_n} \quad$ où $\quad \varepsilon_n \xrightarrow[n]{} 0$.

Ainsi :

$$\frac{m'_n - m_n}{\sigma'_n / \sqrt{k_n}} = \sqrt{k_n}\, e^{-\text{Log } n/\varepsilon_n} = \sqrt{k_n}\, n^{-1/\varepsilon_n} < \sqrt{\frac{k_n}{n}} \quad \text{dès que} \quad \varepsilon_n < 2 \; .$$

Donc

$$\frac{\sigma_n}{\sigma'_n} \left(\frac{L(\Phi_n,\Phi) - m_n}{\sigma_n / \sqrt{k_n}}\right) - \left(\frac{m_n - m'_n}{\sigma'_n / \sqrt{k_n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

C'est-à-dire : $\quad \frac{a_n}{a} \sqrt{k_n}\, L(\Phi_n,\Phi) - \sqrt{k_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$

ou encore : $\quad \frac{n\,c}{\sqrt{k_n}} L(\Phi_n,\Phi) - \sqrt{k_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$.

La condition de Lindeberg est, en fait, difficile à vérifier, et nous allons démontrer directement la convergence en loi de $\left(\frac{n\,c}{\sqrt{k_n}} L(\Phi_n,\Phi) - \sqrt{k_n}\right)$ vers $N(0,1)$: cherchons la fonction caractéristique de $U_{n,r}$:

$$E(e^{itU_{n,r}}) = e^{-a_n} + \int_0^a \frac{a_n}{a}\, e^{a_n(x/a - 1)}\, e^{itx}\, dx$$

$$= e^{-a_n} + e^{-a_n} \frac{a_n}{a} \, \frac{e^{ita+a_n} - 1}{it + \frac{a_n}{a}}$$

$$= e^{-a_n} + \frac{e^{ita} - e^{-a_n}}{1 + it\frac{a}{a_n}}$$

Alors :

$$E\left(e^{it\left(nc/\sqrt{k_n}\cdot\frac{1}{k_n}\sum_{r=1}^{k_n}(a-U_{n,r})-\sqrt{k_n}\right)}\right) =$$

$$= e^{-it\sqrt{k_n}}\prod_{r=1}^{k_n} E\left(e^{itnc/(k_n)^{3/2}(a-U_{n,r})}\right)$$

$$= e^{it(n.c.a./\sqrt{k_n}-\sqrt{k_n})}\left(e^{-a_n} + \frac{e^{-itnca/(k_n)^{3/2}} - e^{-a_n}}{1-itnca/(k_n)^{3/2}a_n}\right)^{k_n}$$

$$= \left[e^{it(a_n-1)/\sqrt{k_n}}\left(e^{-a_n} + \frac{e^{-ita_n/\sqrt{k_n}} - e^{-a_n}}{1-it/\sqrt{k_n}}\right)\right]^{k_n}$$

$$= \left[e^{-it/\sqrt{k_n}}\left(e^{ita_n/\sqrt{k_n}-a_n} + \frac{1-e^{ita_n/\sqrt{k_n}-a_n}}{1-it/\sqrt{k_n}}\right)\right]^{k_n}$$

$$= \left[e^{-it/\sqrt{k_n}}\left(\frac{1-(it/\sqrt{k_n})\ e^{ita_n/\sqrt{k_n}-a_n}}{1-it/\sqrt{k_n}}\right)\right]^{k_n}$$

or, pour n assez grand :

$$\left(\frac{e^{-it/\sqrt{k_n}}}{1-it/\sqrt{k_n}}\right) = \left(1 - \frac{it}{\sqrt{k_n}} + \frac{i^2t^2}{2\,k_n} + O\left(\frac{t^2}{k_n}\right)\right)\left(1 + \frac{it}{\sqrt{k_n}} + \frac{i^2t^2}{k_n} + O\left(\frac{t^2}{k_n}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2\,k_n} + O\left(\frac{t^2}{k_n}\right) .$$

D'autre part posons :

$$z_n = it\sqrt{k_n}\ e^{-ita_n/\sqrt{k_n}-a_n} .$$

Alors :

$$(1 - \frac{it}{\sqrt{k_n}} e^{ita_n/\sqrt{k_n} - a_n})^{k_n} = (1 - \frac{z_n}{k_n})^{k_n}$$

converge vers 1, compte tenu du fait déjà établi :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k_n} \, . \, e^{-a_n} = 0 \quad .$$

Ainsi on a le résultat :

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{it(nc/\sqrt{k_n} . \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} (a-U_{n,r}) - \sqrt{k_n})}\right) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t^2}{2k_n} + O(\frac{t^2}{k_n}))^{k_n}$$

$$= e^{-t^2/2}$$

qui n'est rien d'autre que la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite.

2ème Cas

Les hypothèses concernant le processus $f^{\bullet}$ sont les mêmes que dans l'étude précédente, mais on suppose cette fois que Φ est une fonction en escalier : on considère une partition $0 = x_o < x_1 < \ldots < x_\ell = 1$ telle que :

$$\forall i = 1,\ldots,\ell \quad ; \quad \forall x \in [x_{i-1};x_i[\; ; \quad \Phi(x) = a_i > 0 \; .$$

Pour n assez grand, les discontinuités appartiennent à des intervalles $[\frac{r-1}{k_n}, \frac{r}{k_n}[$ non contigus, et nous nous plaçons d'emblée dans ce cas. Pour tout $i = 1,\ldots,\ell$, on notera alors $k_{n,i}$ le nombre d'intervalles de ce type strictement inclus dans $[x_{i-1},x_i[$, et, pour $i = 1,\ldots,\ell-1$, on désignera par r_i l'entier tel que x_i appartienne à $[\frac{r_i-1}{k_n}, \frac{r_i}{k_n}]$.

Enfin on pose $r_o = 0$ et $r_\ell = k_n + 1$.

Les remarques évidentes qui suivent seront utiles dans la suite :

1) $k_n = \sum_{i=1}^{\ell} k_{n,i} + \ell - 1$

2) $k_{n,i}/k_n \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant (k_{n,i}+2)/k_n$ pour $i = 2,\dots,\ell-1$

3) $k_{n,i}/k_n \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant (k_{n,i}+1)/k_n$ pour $i = 1$ et $i = \ell$.

Pour tout $i = 1,\dots,\ell-1$, on posera :

$$Z_{i,n} = \int_{[r_i - 1/k_n ; r_i/k_n[} |U_{n,r_i} - \Phi(x)| \, dx$$

Alors :

$$L(\Phi_n, \Phi) = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{r=r_{i-1}}^{r_i - 1} (a_i - U_{n,r}) + \sum_{i=1}^{\ell-1} Z_{i,n} .$$

<u>*Lemme 1*</u>.- <u>Sous l'hypothèse</u> $k_n = O(\frac{n}{\text{Log } n})$, <u>et pour tout</u> $i = 1,\dots,\ell$:

$$\frac{nc}{\sqrt{k_{n,i}}} \frac{1}{k_n} \sum_{r=r_{i-1}}^{r_i - 1} (a_i - U_{n,r}) - \sqrt{k_{n,i}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) .$$

<u>*Démonstration*</u> : Les calculs sont voisins de ceux de la précédente démonstration : en désignant par j le complexe unité, on écrit la fonction caractéristique de la variable aléatoire en question :

$$E\left(\exp\left[jt\,\frac{nc}{\sqrt{k_{n,i}}}\,\frac{1}{k_n}\sum_{r=r_{i-1}}^{r_i-1}(a_i - U_{n,r}) - \sqrt{k_{n,i}}\right]\right)$$

$$= e^{-jt\sqrt{k_{n,i}}}\prod_{r=r_{i-1}}^{r_i-1} E\left(e^{jtnc(a_i-U_{n,r})/k_n\sqrt{k_{n,i}}}\right)$$

$$= e^{-jt\sqrt{k_{n,i}}(1-nca_i/k_n)}\left(e^{-a_{n,i}} + \frac{e^{-jtnca_i/k_n\sqrt{k_{n,i}}} - e^{-a_{n,i}}}{1-jtnca_i/a_nk_n\sqrt{k_{n,i}}}\right)^{k_{n,i}}$$

où $a_{n,i} = nca_i/k_n$

$$= \left[e^{-jt/\sqrt{k_{n,i}}}\left(e^{jta_{n,i}/\sqrt{k_{n,i}}-a_{n,i}} + \frac{1 - e^{jta_{n,i}/\sqrt{k_{n,i}}-a_{n,i}}}{1-jt/\sqrt{k_{n,i}}}\right)\right]^{k_{n,i}}$$

$$= \left[e^{-jt/\sqrt{k_{n,i}}}\left(\frac{1 - (jt/\sqrt{k_{n,i}})\,e^{jta_{n,i}/\sqrt{k_{n,i}}-a_{n,i}}}{1-jt/\sqrt{k_{n,i}}}\right)\right]^{k_{n,i}}$$

Comme dans la démonstration précédente :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{-jt/\sqrt{k_{n,i}}}}{(1-jt/\sqrt{k_{n,i}})}\right]^{k_{n,i}} = e^{-t^2/2}$$

d'autre part en remarquant que :

$$\sqrt{k_{n,i}}\;e^{-a_{n,i}} \sim \sqrt{k_n(x_i-x_{i-1})}\;e^{-nca_i/\sqrt{k_n}}$$

on obtient, comme dans la démonstration précédente :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - (jt/\sqrt{k_{n,i}})\;e^{jta_{n,i}/\sqrt{k_{n,i}}-a_{n,i}}\right)^{k_{n,i}} = 1$$

ce qui achève la démonstration. Pour poursuivre, nous utiliserons un lemme de convergence en loi d'apparence classique, mais qui ne figure pas, à notre connaissance, dans les livres usuels.

Lemme 2.- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un vecteur aléatoire de dimension ℓ $\{X_{i,n}\}_{i=1,\dots,\ell}$, à composantes indépendantes, des nombres $\{m_{i,n}\}_{i=1,\dots,\ell}$ et des nombres positifs $\{\sigma_{i,n}\}_{i=1,\dots,\ell}$. On suppose que :

1) $\{(X_{i,n} - m_{i,n})/\sigma_{i,n}\}_n \xrightarrow{L} N(0,1)$, pour tout $i = 1,\dots,\ell$

2) la suite $\{\sigma_{i,n} / \sqrt{\sigma_{1,n}^2 + \dots + \sigma_{\ell,n}^2}\}_n$ converge vers un certain nombre p_i, pour tout $i = 1,\dots,\ell$

3) $p_1^2 + \dots + p_\ell^2 = 1$.

Alors : $$\sum_{i=1}^{\ell} (X_i - m_{i,n}) / \sqrt{\sigma_{1,n}^2 + \dots + \sigma_{\ell,n}^2} \xrightarrow{L} N(0,1) .$$

Démonstration : D'après 1), pour tout $i = 1,\dots,\ell$, et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{jt(X_{i,n}-m_{i,n})/\sigma_{i,n}}) = e^{-1/2\, t^2}$$

et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné ; (Feller XVII, p. 508). Par conséquent, uniformément sur tout pavé compact, on a, pour tout $(t_1,\dots,t_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$:

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{j\sum_{i=1}^{\ell} t_i(X_{i,n}-m_{i,n})/\sigma_{i,n}}) = e^{-1/2 \sum_{i=1}^{\ell} t_i^2}$$

Pour t fixé, posons : $t_{i,n} = t \cdot \sigma_{i,n} / \sqrt{\sigma_{1,n}^2 + \dots + \sigma_{\ell,n}^2}$ et $t_i = t \cdot p_i$.

Pour ε fixé, il existe $\eta > 0$ tel que ;

$\forall (u_1,\dots,u_\ell)$ et $(v_1,\dots,v_\ell) \in \prod_{i=1}^{\ell} [t_i-\eta \; ; \; t_i+\eta]$:

$$\left| e^{-1/2 \sum_{i=1}^{\ell} u_i^2} - e^{-1/2 \sum_{i=1}^{\ell} v_i^2} \right| < \varepsilon$$

d'après 2), pour n assez grand : $(t_{1,n} \; ; \dots ; \; t_{\ell,n}) \in \prod_{i=1}^{\ell} [t_i-\eta \; ; \; t_i+\eta]$, donc :

$$0 \leq \left| E\left(e^{jt \sum_{i=1}^{\ell} t_{i,n} \frac{X_{i,n}-m_{i,n}}{\sigma_{i,n}}} \right) - e^{-1/2 \sum_{i=1}^{\ell} t_i^2} \right|$$

$$\leq \left| E\left(e^{jt \sum_{i=1}^{\ell} t_{i,n} \frac{X_{i,n}-m_{i,n}}{\sigma_{i,n}}} \right) - e^{-1/2 \sum_{i=1}^{\ell} t_{i,n}^2} \right| + \varepsilon$$

$$\leq \sup_{u_1,\dots,u_\ell \in \prod_{i=1}^{\ell} [t_i-\eta ; t_i+\eta]} \left| E\left(e^{jt \sum_{i=1}^{\ell} u_i (X_{i,n}-m_{i,n})/\sigma_{i,n}} \right) - e^{-1/2 \sum_{i=1}^{\ell} u_i^2} \right| + \varepsilon$$

donc, $\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq \limsup_n \left| E\left(e^{jt \sum_{i=1}^{\ell} t_{i,n} (X_{i,n}-m_{i,n})/\sigma_{i,n}} \right) - e^{-1/2 \sum_{i=1}^{\ell} t_i^2} \right| \leq \varepsilon$

et, ε étant arbitraire : $\lim_{n\to\infty} E \; e^{jt \sum_{i=1}^{\ell} (X_{i,n}-m_{i,n})/\sqrt{\sigma_{1,n}^2+\dots+\sigma_{\ell,n}^2}} = e^{-1/2 \, t^2}$.

Les lemmes 1 et 2 ont pour conséquence :

<u>*Propriété*</u> *III.2.-* Sous l'hypothèse $k_n = O(\frac{n}{\text{Log } n})$:

$$\frac{nc}{k_n \sqrt{k_n-\ell+1}} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{r=r_{i-1}}^{r_i-1} (a_i - U_{n,r}) - \sqrt{k_n-\ell+1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) .$$

Démonstration : Le processus $f^{\bullet}$ étant à accroissements indépendants, les variables aléatoires

$$\frac{nc}{\sqrt{k_{n,i}}} \cdot \frac{1}{k_n} \cdot \sum_{r=r_i-1}^{r_i-1} (a_i - U_{n,r}) - \sqrt{k_{n,i}} \quad ; \quad i = 1,\dots,\ell \quad ,$$

sont, pour n fixé, indépendantes ; en posant :

$$X_{i,n} = \frac{1}{k_n} \sum_{r=r_{i-1}}^{r_{i+1}-1} (a_i - U_{n,r}) \; ; \; m_{i,n} = \frac{k_{n,i}}{n.c} \; ; \; \sigma_{i,n} = \frac{\sqrt{k_{n,i}}}{n.c.}$$

on a donc, comme dans le lemme 2 :

$$\{((X_{i,n} - m_{i,n}) / \sigma_{i,n})\}_{i=1,\dots,\ell} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \bigotimes_{i=1}^{\ell} N(0,1)$$

d'autre part :

$$\sigma_{i,n} / \sqrt{\sigma_{1,n}^2 + \dots + \sigma_{\ell,n}^2} = \sqrt{k_{n,i}} / \sqrt{k_{n,1} + \dots + k_{n,\ell}} \; , \quad \text{pour} \quad i=1,\dots,\ell$$

et, compte tenu des remarques préliminaires :

$$\lim_{n\to\infty} k_{n,i}/k_{n,1} + \dots + k_{n,\ell} = x_i - x_{i-1} \quad .$$

En posant $p_i = \sqrt{x_i - x_{i-1}}$, pour $i = 1,\dots,\ell$, nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme 2 : il ne reste plus qu'à remarquer :

$$\sum_{i=1}^{\ell} (X_i - m_{i,n}) / \sqrt{\sigma_{1,n}^2 + \dots + \sigma_{\ell,n}^2} = \frac{nc}{k_n \sqrt{k_n - \ell + 1}} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{r=r_{i-1}}^{r_i-1} (a_i - U_{n,r}) - \sqrt{k_n - \ell + 1} .$$

Théorème III.3.- Sous les hypothèses : $k_n = O(\frac{n}{\operatorname{Log} n})$ et $n^2 = O(k_n^3)$, on a :

$$\frac{nc}{\sqrt{k_n - \ell - +1}} L(\Phi_n, \Phi) - \sqrt{k_n - \ell + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

Démonstration :

a) La condition supplémentaire $n^2 = O(k_n^3)$ est destinée à rendre négligeable l'effet perturbateur du comportement de Φ_n sur les intervalles où Φ est discontinue. Remarquons que cette condition est parfaitement compatible avec $k_n = O(\frac{n}{\mathrm{Log}\, n})$; il suffit par exemple de prendre $k_n = [n^{2/3} \,.\, \mathrm{Log}\, n]$ pour que les deux conditions soient réalisées.

b) La propriété I et un théorème classique (Billingsley, XVI, p.25) permettent de conclure, dès que l'on a remarqué :

$$0 \leqslant \frac{nc}{\sqrt{k_n - \ell + 1}} \sum_{i=1}^{\ell-1} Z_{i,n} \leqslant 2\,(\ell-1) \,.\, \frac{nc}{k_n \sqrt{k_n - \ell + 1}} \,.\, \max_{i=1}^{\ell} \{a_i\}$$

donc : $$(nc \,/\, \sqrt{k_n - \ell + 1}) \sum_{i=1}^{\ell-1} Z_{i,n} \xrightarrow[p.s.]{} 0 \quad .$$

Pour terminer ce paragraphe, rappelons le résultat obtenu par M.H. GENSBITTEL (IV) dans le cas où Φ est constante, $f^\bullet$ un processus ponctuel de Poisson de paramètres, $c\,\lambda_S$ et $k_n = O(\frac{n}{\mathrm{Log}\, n})$:

$$\frac{n}{k_n} \sup_{x \in [0,1]} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| - \frac{\mathrm{Log}(k_n)}{c}$$

converge en loi vers la loi de GUMBEL de fonction de répartition :

$$F(z) = \exp(-e^{-cz}) \quad , \quad z > 0$$

Si Φ est lipschitzienne d'ordre γ et si, en outre, $n^{1/1+\gamma} = O(k_n)$, on obtient le même résultat.

4 - DÉTECTION D'UN SAUT DE LA FONCTION Φ.

On suppose que Φ est uniformément continue sur $[0,x_o[$ et $[x_o,1]$, et présente un saut de hauteur z_o en x_o :

$$z_o = \lim_{x \uparrow x_o} |\Phi(x) - \Phi(x_o)| .$$

On se propose d'estimer x_o et z_o, pour cela, on reprend l'estimateur Φ_n de Φ déjà utilisé et on note X_n l'abscisse du plus grand saut de Φ_n, il se peut, naturellement, que X_n ne soit pas déterminé de façon unique, dans ce cas, on fait un choix arbitraire ; de toute façon, comme on va le voir, X_n est p.s. défini pour n assez grand, posons donc :

$\forall r = 1,\ldots,k_{n-1}$

$$H_r = \lim_{x \uparrow r/k_n} |\Phi_n(x) - \Phi(\frac{r}{k_n})| ;$$

$$X_n = \frac{s}{k_n} \quad \text{de telle sorte que :} \quad \forall r = 1,\ldots,k_{n-1} : H_s \geq H_r$$

$$Z_n = H_{X_{n-1}} + H_{X_n} + H_{X_{n+1}} .$$

Pour tout n, on note r_o, l'entier tel que : $\frac{r_o}{k_n} \leq x_o < \frac{r_o+1}{k_n}$.

Nous allons démontrer que $X_n \xrightarrow[n]{p} x_o$, $Z_n \xrightarrow[n]{p} z_o$ (ou p.co) sous des conditions analogues à celle du théorème III.1.a.

A - *Convergence de* X_n .

Posons $z : z_o/9$, et fixons un entier n_1 tel que l'oscillation de Φ soit inférieur à $z/2$, pour $n \geq n_1$:

a) sur tout intervalle $[\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}[$, $r \neq r_o$

b) sur $[\frac{r_o}{k_n}, x_o[$ et sur $[x_o, \frac{r_o+1}{k_n}[$.

Avec des notations déjà précisées, supposons $\bigcap_{r\neq r_o} E^c_{n,r,z}$ réalisé, alors, pour tout couple $(r, r+1)$ tel que $r \neq r_o$ et $r+1 \neq r_o$ on a :

$$\forall x \in [\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}[\ , \qquad \forall y \in [\frac{r+1}{k_n}, \frac{r+2}{k_n}[\ :$$

$$|\Phi_n(x)-\Phi_n(y)| \leq |\Phi_n(x)-M_{n,r}| + |M_{n,r}-M_{n,r+1}| + |M_{n,r+1}-\Phi_n(y)|$$

$$< z + 2\ z/2 + z < z_o/3 \ .$$

Considérons maintenant l'intervalle $[\frac{r_o}{k_n}, \frac{r_o+1}{k_n}[$ et supposons sans perte de généralité, que :

$$\Phi(x_o) < \lim_{x\uparrow x_o} \Phi(x) = \Phi(x_o^-) \ .$$

Notons :

$$m'_{n,r_o,z} = \min_{r_o/k_n\leq x<x_o} \Phi(x) \qquad M'_{n,r_o,z} = \max_{x_o\leq x<r_o+1/k_n} \Phi(x) \ .$$

Il est clair que :

$$m'_{n,r_o,z} - M'_{n,r_o,z} > z_o - 2\ z/2$$

et comme :

$$m'_{n,r_o,z} \leq M_{n,r_o-1} \qquad \text{et} \qquad M'_{n,r_o,z} \geq M_{n,r_o+1} - z \ .$$

On obtient :

$$M_{n,r_o-1} - M_{n,r_o+1} > z_o - 2z$$

par conséquent :

si $\bigcap_{r\neq r_o} E^c_{n,r,z}$ est réalisé, et si $x \in [\frac{r_o-1}{k_n}, \frac{r_o}{k_n}[$ et $y \in [\frac{r_o+1}{k_n}, \frac{r_o+2}{k_n}[$:

$$\Phi_n(x) - \Phi_n(y) > \Phi_n(x) - M_{n,r_o+1} > M_{n,r_o-1} - z - M_{n,r_o+1} > z_o - 3z > 2\, z_o/3 ,$$

et si $u \in [\frac{r_o}{k_n}, \frac{r_o+1}{k_n}[$:

$$\max\{|\Phi_n(x)-\Phi_n(u)| \ ; \ |\Phi_n(u)-\Phi_n(y)|\} > z_o/3$$

ce qui implique :

$$\{X_n = \frac{r_o}{k_n}\} \quad \{X_n = \frac{r_o+1}{k_n}\} ,$$

et donc $$\{|X_n - x_o| < \frac{1}{k_n}\} ,$$

En résumé ; pour n assez grand, dépendant de Φ uniquement ,

$$\bigcap_{r\neq r_o} E^c_{n,r,z} \subseteq \{|X_n - x_o| < \frac{1}{k_n}\}$$

et d'après ce qui précède, ceci implique :

$$P\{|X_n - x_o| < \frac{1}{k_n}\} \leq (k_n-1)\ (1 - C_{k_n}(z))^n .$$

Remarque : Le cas d'un nombre fini de discontinuités $x_1 < \ldots < x_\ell$ se traite de façon similaire :

soient : $z_1,\ldots,z_\ell$ les hauteurs de ces discontinuités,

$X^n_1 < \ldots < X^n_\ell$ les abscisses des ℓ plus grands sauts de Φ_n .

$z = \min(z_1,\ldots,z_\ell)/9$, et n_1 tel que :

1) $\forall j = 1,\dots,\ell-1$, x_j et x_{j+1} n'appartiennent pas à des intervalles $[\frac{r}{k_n} , \frac{r+1}{k_n}[$ jointifs.

2) $\text{osc}(\Phi) < z/2$ sur tout intervalle $[\frac{r}{k_n} , \frac{r+1}{k_n}[$ tel que $r \neq r_1,\dots,r_\ell$.

3) $\text{osc}(\Phi) < z/2$ sur tout intervalle $[\frac{r_j}{k_n} ; x_j[$ et $[x_j , \frac{r_j+1}{k_n}[$ $j = 1,\dots,\ell$.

Si $\bigcap\limits_{\substack{r\neq r_j \\ j=1,\dots,\ell}} E^c_{n,r,z}$ est réalisé, pour $(r , r+1)$ tel que $r \neq r_j$ et $r+1 \neq r_j$, $j = 1,\dots,\ell$, et si $x \in [\frac{r}{k_n} , \frac{r+1}{k_n}[$, $y \in [\frac{r+1}{k_n} , \frac{r+2}{k_n}[$, alors :

$$|\Phi_n(x)-\Phi_n(y)| < 3z .$$

De la même façon que précédemment on a :

si $x \in [\frac{r_j-1}{k_n} , \frac{r_j}{k_n}[$, $y \in [\frac{r_j+1}{k_n} , \frac{r_j+2}{k_n}[$, $u \in [\frac{r_j}{k_n} , \frac{r_j+1}{k_n}[$, $j = 1,\dots,\ell$

$$\max\{|\Phi_n(x) - \Phi_n(u)|, |\Phi_n(u)-\Phi_n(y)|\} > 3z$$

et finalement on obtient :

$$P(|X^n_1 - x_1| < \frac{1}{k_n} ,\dots, |X^n_\ell - x_\ell| < \frac{1}{k_n}\} < (k_n - \ell)\ (1 - C_{k_n}(2z))^n$$

$$< k_n . (1 - C_{k_n}(2z))^n .$$

B - Convergence de Z_n.

On étudie maintenant la convergence de Z_n , d'après la partie A : pour $z < z_o/9$ et pour $n \geq n_1$:

$$\bigcap_{r\neq r_o} E^c_{n,r}(z) \subset \{|X_n - x_o| < \frac{1}{k_n}\}$$

et si l'événement $\{|X_n - x_o| < \frac{1}{k_n}\}$ est réalisé, la somme $Z_n = H_{X_{n-1}} + H_{X_n} + H_{X_{n+1}}$ comporte nécessairement les sauts de la fonction Φ_n aux extrémités $\frac{r_o}{k_n}$ et $\frac{r_o+1}{k_n}$ de l'intervalle contenant x_o, auquels s'ajoute un saut de Φ_n entre deux intervalles ne contenant pas de discontinuité. Ce dernier saut est $H_{X_{n-1}}$ ou $H_{X_{n+1}}$ selon que $X_n = \frac{r_o}{k_n}$ ou $X_n = \frac{r_o+1}{k_n}$ et, nous supposerons sans perte de généralité , que $X_n = \frac{r_o}{k_n}$, alors, $H_{X_{n-1}} < 3z$ d'après le partie A.

Désignons sous les hypothèses de la partie A, $(\Phi(x_o) < \Phi(x_o^-))$, par $D_{n,r_o}(z)$: la partie de D_{n,r_o} constituée par les points d'ordonnée supérieure ou égale à $M'_{n,r_o,z} - z$, et posons :

$$E'_{n,r_o}(z) = \bigcap_{i=1}^{n} \{N(\dot{f}_i, D_{n,r_o}(z)) = 0\}$$

si $E'^{c}_{n,r_o}(z) \cap (\bigcap_{r \neq r_o} E^{c}_{n,r}(z))$ est réalisé, et si :

$$v \in \left[\frac{r_o-1}{k_n}, \frac{r_o}{k_n}\right[\; ; \quad u \in \left[\frac{r_o}{k_n}, \frac{r_o+1}{k_n}\right[\; ; \quad w \in \left[\frac{r_o+1}{k_n}, \frac{r_o+2}{k_n}\right[$$

On a

$$H_{X_n} + H_{X_{n+1}} = |\Phi_n(v) - \Phi_n(u)| + |\Phi_n(u) - \Phi_n(w)|$$

$$= |\Phi_n(v) - M_{n,r_o-1} + M_{n,r_o-1} - \Phi(\frac{r_o}{k_n}) + \Phi(\frac{r_o}{k_n}) - \Phi(x_o^-) + \Phi(x_o^-) - \Phi_n(u)|$$

$$+ |\Phi_n(u) - \Phi(x_o) + \Phi(x_o) - \Phi(\frac{r_o+1}{k_n}) + \Phi(\frac{r_o+1}{k_n}) - M_{n,r_o+1} + M_{n,r_o+1} - \Phi_n(w)|$$

$$\leq z + z/2 + z/2 + |\Phi(x_o^-) - \Phi_n(u)| + |\Phi_n(u) - \Phi(x_o)| + z/2 + z/2 + z$$

donc $$Z_n \leq 7z + |\Phi(x_o^-) - \Phi_n(u)| + |\Phi_n(u) - \Phi(x_o)|$$

Trois cas sont à envisager :

$*$ si $\Phi_n(u) \in [\Phi(x_o) ; \Phi(x_o^-)]$, alors :

$$Z_n \leqslant 7z + z_o \ .$$

$*$ si $\Phi_n(u) > \Phi(x_o^-)$, alors :

$$Z_n \leqslant 7z + z_o + 2(\Phi_n(u) - \Phi(x_o^-)) \leqslant 8z + z_o \ .$$

$*$ si $\Phi_n(u) < \Phi(x_o)$, alors :

$$Z_n \leqslant 7z + z_o + 2(\Phi(x_o) - \Phi_n(u)) \leqslant 9z + z_o \ .$$

Ainsi dans tous les cas :

$$Z_n \leqslant 9z + z_o \ .$$

De même :

$$\begin{aligned} z_o = \Phi(x_o^-) - \Phi(x_o) &\leqslant |\Phi(x_o^-) - \Phi_n(u)| + |\Phi_n(u) - \Phi(x_o)| \\ &\leqslant |\Phi_n(u) - \Phi(x_o^-) + \Phi(\tfrac{r_o}{k_n}) - \Phi(\tfrac{r_o}{k_n}) + M_{n,r_o-1} - M_{n,r_o-1} + \Phi_n(v) - \Phi_n(v)| \\ &+ |\Phi_n(u) - \Phi(x_o) + \Phi(\tfrac{r_o-1}{k_n}) - \Phi(\tfrac{r_o+1}{k_n}) + M_{n,r_o+1} - M_{n,r_o+1} - \Phi_n(w) - \Phi_n(w)| \\ &\leqslant H_{X_n} + z/2 + z/2 + z + H_{X_{n+1}} + z/2 + z/2 + z < H_{X_n} + H_{X_{n+1}} + 4z \\ &< Z_n + 4z \end{aligned}$$

par conséquent :

$$E'^c_{n,r_o}(z) \cap \Big(\bigcap_{r \neq r_o} E^c_{n,r_o}(z)\Big) \subseteq \{|Z_n - z_o| < 9z\} \ ,$$

donc :

$$P\{|Z_n - z_o| < 9z\} \leq P(E'_{n,r_o}(z)) + \sum_{r \neq r_o} P(E_{n,r}(z))$$

$$\leq P(E'_{n,r_o}(z)) + (k_n - 1)\ (1 - C_{k_n}(z))^n .$$

Mais on sait que l'oscillation de Φ sur $[x_o\ ,\ \frac{r_o+1}{k_n}[$ est inférieure à $z/2$; le pavé $[x_o\ ,\ \frac{r_o+1}{k_n}] \times [M'_{n,r_o,z} - z\ ,\ M'_{n,r_o,z} - z/2]$ est donc contenu dans S. D'autre part, comme l'oscillation de Φ sur $[\frac{r_o}{k_n}\ ,\ x_o[$ est inférieure à $z/2$, comme $z < z_o/9$, et comme $\Phi(x_o^-) > \Phi(x_o)$,

$$[\frac{r_o}{k_n}\ ,\ x_o] \times [M'_{n,r_o,z} - z\ ;\ M'_{n,r_o,z} - z/2] \subset S$$

Par conséquent :

$$P(E'_{n,r_o}(z)) \leq (1 - C_{k_n}(z))^n$$

et : $$P(|Z_n - z_o| < 9z) \leq k_n\ .\ (1 - C_{k_n}(z))^n ,$$

dès que $9z < z_o$ et que n est supérieur à un entier n_1 dépendant de Φ par l'intermédiaire de z.

On peut donc énoncer le théorème :

Théorème III.4.- Une condition suffisante pour que X_n converge en probabilité vers x_o , et pour que Z_n converge en probabilité vers z_o , est que, pour tout $z > 0$, $\lim_{n\to\infty} k_n(1 - C_{k_n}(z))^n = 0$, pour que ces convergences soient presque complète il suffit que :

$$\sum_{n\geq 1} k_n\ (1 - C_{k_n}(z))^n < +\infty .$$

5 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE AU SENS DE SKOROKHOD.

z_o étant un nombre positif fixé, on construit un estimateur $\Phi_n^{z_o}$ en modifiant

$$\Phi_n(\omega) = \sum_{r=1}^{k_n} U^{\omega}_{n,r} \cdot 1_{[r-1/k_n , r/k_n[} .$$

Pour ce faire on pose :

$$\text{sur } \left[0, \frac{1}{k_n}\right[\quad \Phi_n^{z_o}(\omega) = U^{\omega}_{n,1}$$

$$\text{sur } \left[\frac{1}{k_n}, \frac{2}{k_n}\right[\quad \Phi_n^{z_o}(\omega) = \begin{cases} U^{\omega}_{n,2} & \text{si } \quad |U^{\omega}_{n,1} - U_{n,2}| < z_o/4 \\ U^{\omega}_{n,1} & \text{sinon .} \end{cases}$$

$$\text{sur } \left[\frac{2}{k_n}, \frac{3}{k_n}\right[\quad \Phi_n^{z_o}(\omega) = \begin{cases} U^{\omega}_{n,3} & \text{si } \begin{cases} \Phi_n(\omega) \text{ a été modifié sur la cellule précédente.} \\ \text{ou} \\ \text{si } |U^{\omega}_{n,2} - U^{\omega}_{n,3}| < z_o/4 \end{cases} \\ U^{\omega}_{n,2} & \text{si } \begin{cases} \Phi_n(\omega) \text{ n'a pas été modifié sur la cellule précédente} \\ \text{et} \\ \text{si } |U^{\omega}_{n,2} - U^{\omega}_{n,3}| > z_o/4 \quad . \end{cases} \end{cases}$$

D'une façon générale :

$$\text{sur } \left[\frac{r-1}{k_n}, \frac{r}{k_n}\right[$$

$$\Phi_n^{z_o}(\omega) = \begin{cases} U^{\omega}_{n,r} & \text{si } \begin{cases} \Phi_n(\omega) \text{ a été modifié sur la cellule précédente.} \\ \text{ou} \\ \text{si } |U^{\omega}_{n,r-1} - U^{\omega}_{n,r}| < z_o/4 \text{ .} \end{cases} \\ U^{\omega}_{n,r-1} & \text{si } \begin{cases} \Phi_n(\omega) \text{ n'a pas été modifié sur la cellule précédente} \\ \text{et} \\ \text{si } |U^{\omega}_{n,r-1} - U^{\omega}_{n,r}| > z_o/4 \text{ .} \end{cases} \end{cases}$$

Posons $z = z_o/12$.

Il existe une partition de $[0,1]$:

$x_o = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j < \dots < x_\ell = 1$.

Telle que l'oscillation de Φ soit sur chaque intervalle $[x_{j-1}, x_j[$, $j = 1,\dots,\ell$ inférieure à $z/2$.

Il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, les points x_j , $(j=1,\dots,\ell)$ soient séparés par au moins trois intervalles $[\frac{r-1}{k_n}, \frac{r}{k_n}[$, on notera $[\frac{r_j-1}{k_n}, \frac{r_j}{k_n}[$ l'intervalle contenant x_j , $(j=1,\dots,\ell-1)$.

L'oscillation de Φ est donc inférieure à $z/2$ sur chaque intervalle $[\frac{r-1}{k_n}, \frac{r}{k_n}[$ $r \neq r_1, \dots, r_{\ell-1}$ et aussi sur chaque intervalle de la forme $[\frac{r_j-1}{k_n}, x_j[$ ou $[x_j, \frac{r_j}{k_n}[$, $j = 1,\dots,\ell-1$.

Les seuls sauts de Φ de hauteur supérieure à $z/2$ ne peuvent être, s'ils existent, qu'aux points $x_1,\dots,x_{\ell-1}$.

Supposons que $\bigcap_{r\neq r_1,\dots,r_{\ell-1}} E^c_{n,r}(z)$ réalisé, et considérons deux intervalles consécutifs $I_r = [\frac{r-1}{k_n}, \frac{r}{k_n}[$ et $I_{r+1} = [\frac{r}{k_n}, \frac{r+1}{k_n}[$, ne contenant pas de discontinuité de hauteur supérieure à $z/2$.

$$\forall x \in I_r \ , \ \forall y \in I_{r+1} : |U_{n,r} - U_{n,r+1}| = |\Phi_n(x) - \Phi(x) + \Phi(x) - \Phi(y) + \Phi(y) - \Phi_n(y)|$$

$$\leq 2z + \sup_{\substack{x\in I_r \\ y\in I_{r+1}}} |\Phi(x)-\Phi(y)|$$

$$\leq z_o/4$$

par conséquent :

$$\forall y \in I_{r+1} \quad , \qquad \Phi_n^{z_o}(y) = U_{n,r+1} = \Phi_n(y) \ .$$

Il en résulte que, si $\bigcap\limits_{r \neq r_1,\dots,r_\ell} E^c_{n,r}(z)$ est réalisé, les seuls intervalles sur lesquels $\Phi_n^{z_o} \neq \Phi_n$, sont parmi les intervalles I_{r_j} ou I_{r_j+1} , $j = 1,\dots,\ell-1$.

La définition d'une fonction convenable dans Λ se fait alors de la façon suivante :

pour ω fixé dans $\bigcap\limits_{r \neq r_1,\dots,r_{\ell-1}} E^c_{n,r}(z)$, on note

$$I_{r_1^*} ,\dots, I_{r_s^*} \ , \ I_{r_{s+1}^*+1} ,\dots, I_{r_t^*+1}$$

les intervalles où l'estimateur $\Phi_n^{z_o}$ est différent de Φ_n ; $x_1^* ,\dots, x_s^* \ , \ x_{s+1}^* ,\dots, x_t^*$ les abscisses de hauteur supérieure à $z/2$ dans $I_{r_1^*} ,\dots, I_{r_{s+1}^*+1} ,\dots, I_{r_{t+1}^*}$. On pose :

$$\lambda\left(\frac{r_1^*-1}{k_n}\right) = \frac{r_1^*-1}{k_n} \quad , \quad \lambda\left(\frac{r_1^*}{k_n}\right) = x_1^* \quad ; \quad \lambda\left(\frac{r_1^*+1}{k_n}\right) = \frac{r_1^*+1}{k_n}$$

λ étant ensuite définie par interpolation linéaire entre les points $\left(\frac{r_1^*-1}{k_n} , x_1^*\right)$, $\left(\frac{r_1^*}{k_n} , x_1^*\right)$, $\left(\frac{r_n^*}{k_n} , \frac{r_1^*+1}{k_n}\right)$. On procède de même pour $I_{r_2^*} ,\dots, I_{r_s^*}$, d'autre part : on pose :

$$\lambda\left(\frac{r_{s+1}^*-1}{k_n}\right) = \frac{r_{s+1}^*-1}{k_n} \quad , \ \lambda\left(\frac{r_{s+1}^*+1}{k_n}\right) = x_{s+1}^* \ , \ \lambda\left(\frac{r_{s+1}^*+2}{k_n}\right) = \frac{r_{s+1}^*+2}{k_n}$$

λ étant ensuite définie par interpolation linéaire entre les points : $\left(\frac{r_{s+1}^*-1}{k_n} ; \frac{r_{s+1}^*}{k_n}\right)$; $\left(\frac{r_{s+1}^*+1}{k_n} ; x_{s+1}^*\right)$.

On procède de même pour $I_{r^*_{s+2}+1}, \ldots, I_{r^*_t+1}$. On complète en posant : $\lambda(x) = x$ sur tous les autres intervalles.

Il est clair que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |\lambda(x)-x| = \mathrm{Max}\{\frac{r_1^*}{k_n} - x_1^*, \ldots, \frac{r_o^*}{k_n} - x_o^+ ; \frac{r^*_{s+1}+1}{k_n} - $$

$$- x^*_{s+1}, \ldots, \frac{r_t^*+1}{k_n} - x_t^*\} \leqslant \frac{2}{k_n} .$$

D'autre part :

$\Phi_n^{z_o}$ est égale à U_{n,r_1^*-1} sur $I_{r_1^*-1}$ et sur $I_{r_1^*}$, cependant , comme $I_{r_1^*-1}$ est un intervalle sur lequel $\lambda(x) = x$.

$$\sup_{x\in I_{r_1^*-1}} |U_{n,r^*-1} - \Phi(\lambda(x))| = \sup_{x\in I_{r_1^*-1}} |U_{n,r_1^*-1} - \Phi(x)| < z .$$

Alors pour tout $y \in I_{r_1^*-1}$:

$$\sup_{x\in I_{r_1^*}} |U_{n,r_1^*-1} - \Phi(\lambda(x))| \leqslant |U_{n,r_1^*-1} - \Phi(y)| + \sup_{x\in I_{r_1^*}} |\Phi(y) - \Phi(\lambda(x))|$$

$$\leqslant z + z/2 + z/2 = 2z$$

puisque $\lambda(x)$ parcourt $[\frac{r_1^*-1}{k_n}, x_1^*[$ quand x parcourt $I_{r_1^*}$.

De plus, sur $I_{r_1^*+1}$, $\Phi_n^{z_o}$ est égal à U_{n,r_1^*+1} et on sait que $\sup_{x\in I_{r_1^*+1}} |U_{n,r_1^*+1} - \Phi(x)| < z$; cependant si x parcourt $I_{r_1^*+1}$, $\lambda(x)$ parcourt $[x_1^*, \frac{r_1^*+1}{k_n}[$, l'oscillation de Φ sur $[x_1^*, \frac{r_1^*}{k_n}[$ et sur $[\frac{r_1^*}{k_n}, \frac{r_1^*+1}{k_n}[$ étant inférieure à $z/2$ on a :

$$\sup_{x \in I_{r_1^*+1}} \left| U_{n,r_1^*+1} - \Phi(\lambda(x)) \right| < 2z \ .$$

On obtient les mêmes majorations sur $I_{r_2^*-1}$; $I_{r_2^*}$; $I_{r_2^*+1}$,..., $I_{r_s^*-1}$; $I_{r_s^*}$, $I_{r_s^*+1}$.

Enfin, $\Phi_n^{z_o}$ est égal à $U_{n,r^*_{s+1}-1}$ sur $I_{r^*_{s+1}-1}$ et

$$\sup_{x \in I_{r^*_{s+1}-1}} \left| U_{n,r^*_{s+1}-1} - \Phi(\lambda(x)) \right| = \sup_{x \in I_{r^*_{s+1}-1}} \left| U_{n,r^*_{s+1}-1} - \Phi(x) \right| < z$$

Cependant, comme $\Phi_n^{z_o}$ est égale à $U_{n,r^*_{s+1}}$ sur $I_{r^*_{s+1}}$ on a :

$$\left| U_{n,r^*_{s+1}} - U_{n,r^*_{s+1}-1} \right| < 3z$$

et sur $I_{r^*_{s+1}+1}$, on a encore $\Phi_n^{z_o} = U_{n,r^*_{s+1}}$.

Cependant quand x décrit $I_{r^*_{s+1}} \cup I_{r^*_{s+1}+1}$, $\lambda(x)$ décrit $\left[\frac{r^*_{s+1}-1}{k_n}, x^*_{s+1}\right[$ donc l'oscillation de $\Phi(\lambda(x))$ est inférieur à $z/2$.

On a donc :

$$\forall y \in I_{r^*_{s+1}-1} : \sup_{x \in I_{r^*_{s+1}} \cup I_{r^*_{s+1}+1}} \left| U_{n,r^*_{s+1}} - \Phi(\lambda(x)) \right| <$$

$$< \left| U_{n,r^*_{s+1}} - U_{n,r^*_{s+1}-1} \right| + \left| U_{n,r^*_{s+1}-1} - \Phi(y) \right|$$

$$+ \sup_{x \in I_{r^*_{s+1}} \cup I_{r^*_{s+1}+1}} \left| \Phi(y) - \Phi(\lambda(x)) \right|$$

$$< 3z + z + z = 5z < z_o \ .$$

Enfin, quand x décrit $I_{r^*_{s+1}+2}$, $\lambda(x)$ décrit $\left[x^*_{s+1} ; \frac{r^*_{s+1}+2}{k_n}\right[$,
donc l'oscillation de $\Phi(\lambda(x))$ est inférieur à $z/2$, cependant :

$$\sup_{x\in I_{r^*_{s+1}+2}} |U_{n,r^*_{s+1}+2} - \Phi(x))| < z$$

par conséquent :

$$\sup_{x\in I_{r^*_{s+2}+2}} |U_{n,r^*_{s+1}+2} - \Phi(\lambda(x))| < 2z \; .$$

On procède aux mêmes majorations pour $I_{r^*_{s+2}-1}$; $I_{r^*_{s+2}}$, $I_{r^*_{s+2}+1}$,.... .

En conclusion : si $\omega \in \bigcap_{r\neq r_1,\ldots,r_\ell} E^c_{n,r}(z)$, il existe une fonction $\lambda \in \Lambda$ (dépendant de ω) telle que :

$$\begin{cases} \sup_{x\in[0,1]} |\lambda(x) - x| \leqslant 2/k_n \\ \sup_{x\in[0,1]} |\Phi_n^{z_o}(x) - \Phi(\lambda(x))| < z_o \end{cases}$$

donc

$$\bigcap_{r\neq r_1,\ldots,r_\ell} E^c_{n,r}(z) \subset \{d_S(\Phi_n^{z_o}, \Phi) < \max(2/k_n, z_o)\}$$

et pour n assez grand :

$$\bigcap_{r\neq r_1,\ldots,r_\ell} E^c_{n,r}(z) \subset \{d_S(\Phi_n^{z_o}, \Phi) < z_o)\}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P\{d_S(\Phi_n^{z_o},\Phi) > z_o\} &\leqslant \sum_{r\neq r_1,\ldots,r_\ell} P(E_{n,r,z}) \\ &\leqslant \sum_{r\neq r_1,\ldots,r_\ell} (1 - \lambda(D_{n,r}(z))^n \\ &\leqslant (k_n-\ell)\ (1 - C_{k_n}(z))^n \\ &\leqslant k_n\ (1 - C_{k_n}(z))^n \; . \end{aligned}$$

On vient de construire, pour z_o fixé, un estimateur qui ne converge pas vers Φ, mais d'une certaine façon vers la boule de centre Φ et de rayon z_o dans l'espace (D_1, d_S).

. si $\lim\limits_{n\to\infty} k_n \,(1 - C_{k_n}(z))^n = 0$ alors $P(\Phi_n^{z_o} \notin B(\Phi, z_o)) \xrightarrow[n]{} 0$.

On dira que $\Phi_n^{z_o}$ converge en probabilité vers $B(\Phi, z_o)$.

. si $\sum\limits_{k\geq 1} k_n \,(1 - C_{k_n}(z))^n < +\infty$ alors $\sum\limits_{n\geq 1} P(\Phi_n^{z_o} \notin B(\Phi, z_o)) < +\infty$.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, pour tout ω, après $N(\omega)$, $\Phi_n^{z_o}$ ne quitte plus la boule $B(\Phi, z_o)$.

On dira que $\Phi_n^{z_o}$ converge presque complètement vers $B(\Phi, z_o)$.

Théorème III.5.- Pour tout $z_o > 0$, il existe un estimateur $\Phi_n^{z_o}$ de la boule de centre Φ et de rayon z_o dans (D_1, d_S) ; une condition suffisante pour que, pour tout z_o , $\Phi_n^{z_o}$ converge en probabilité vers cette boule est que ,

$$\forall z > 0 \; : \; \lim_{n\to\infty} k_n \,(1 - C_{k_n}(z))^n = 0 \; .$$

Une condition suffisante pour que ces convergences soient presque complètes est que :

$$\forall z > 0 \; , \; \sum_{n=1}^{\infty} k_n \,(1 - C_{k_n}(z))^n < +\infty \; .$$

Cas où $\emptyset$ est Lipschitz-discontinue.

P. BILLINGSLEY ([XVI] page 110) a défini un module de discontinuité sur D_1 , qui joue un rôle similaire du "module de continuité" ω sur $C[0,1]$:

$$\forall x \in C[0,1] \; ; \; \forall \delta > 0 : \; w_x(\delta) = \sup_{|t-s|<\delta} |x(s) - x(t)|$$

$$\forall x \in D[0,1] \; ; \; \forall \delta > 0 : \; w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \leq i \leq r} w_x([t_{i-1}, t_i[)$$

où l'infinimum est pris sur les ensembles finis $\{t_i\}$ de points satisfaisants :

$$0 = t_o < t_1 < \ldots < t_r = 1$$

$$t_i - t_{i-1} > \delta \, , \quad i = 1,2,\ldots,r \, .$$

De même que $x \in C_1 \Longleftrightarrow \lim_{\delta \to 0} w_x(\delta) = 0$. On a :

$$x \in D_1 \Longleftrightarrow \lim_{\delta \to 0} w'_x(\delta) = 0 \, .$$

Nous introduisons ici la notion de fonction Lipschitz - discontinue : de même que $x \in C_1$ est dite lipschitzienne si :

$$\exists k > 0 : w_x(\delta) < k \, . \, \delta \, .$$

On dira que $x \in D_1$ est Lipschitz - discontinue si :

$$\exists k > 0 : w'_x(\delta) < k \, . \, \delta \, .$$

Nous supposerons, dans ce qui suit, que Φ est Lipschitz - discontinue, d'un rapport k fixé.

Une condition essentielle, dans la démonstration précédente, était que les points de discontinuité de hauteur supérieure à $z/2$ soient séparés par au moins trois intervalles de largeur $1/k_n$, on doit donc avoir :

$$w'_\Phi(4/k_n) < z/2 \, .$$

En effet, dans ces conditions, il existe un nombre fini de points ; t_o , $t_1,\ldots,t_r$ où les discontinuités de hauteur supérieure à $z/2$ sont susceptibles de se trouver et deux points consécutifs étant séparés d'une longueur au moins égale à $4/k_n$, ils sont nécessairement séparés par trois intervalles $[\frac{r-1}{k_n}, \frac{r}{k_n}[$.

Si on veut faire varier z selon une suite $z_{(n)}$, telle que $\lim_{n\to\infty} z_{(n)} = 0$, il faudra donc que :

$$w'_\Phi(4/k_n) < z(n)/2$$

Or :

$$w'_\Phi(4/k_n) < k \cdot 4/k_n \ .$$

Donc il suffit que :

$$z_{(n)} = \frac{8k}{k_n} \ .$$

Remarquons aussi que le nombre d'intervalles où un saut de hauteur supérieure à $z(n)/2$ peuvent se trouver est au plus de $k_n/4$, si ces sauts ont des abscisses

$$x_{j(1)}, \dots, x_{j(n)}, \dots, x_{\ell(n)-1} \text{ . on a de toute façon } \ell(n) < \frac{k_n}{2} \ .$$

Si on suppose que $\bigcap_{r\neq r_1,\dots r_{\ell(n)-1}} E^c_{n,r}(z_{(n)})$ réalisé, on a comme précédemment :

$$\{d_S(\Phi_n^{z(n)}, \Phi) < \max(\frac{2}{k_n}, \frac{96k}{k_n})\}$$

Donc :

$$P\{d_S(\Phi_n^{12z(n)}, \Phi) > \max(\frac{2}{k_n}, \frac{96k}{k_n})\} \leq (k_n-\ell(n))\ (1 - C_{k_n}(\frac{6k}{k_n}))^n$$

$$\leq k_n\ (1 - C_{k_n}(\frac{8k}{k_n}))^n$$

ce qui fournit une condition suffisante de convergence en probabilité et presque complète.

Théorème III.6.- Supposons que Φ soit Lipschitz - discontinue de rapport $k > 0$, une condition suffisante pour que Φ_n^{8k/k_n} converge en probabilité vers Φ dans (D_1,d_S) est que :

$$\lim_{n\to\infty} k_n \left(1 - C_{k_n}(8k/k_n)\right)^n = 0$$

et une condition suffisante pour que Φ_n^{8k/k_n} converge presque complètement vers Φ est que

$$\sum_{n\geq 1} k_n \left(1 - C_{k_n}(8k/k_n)\right)^n < +\infty .$$

Corollaire.- Dans les conditions du théorème ci-dessus, quand $f^{\bullet}$ est un processus ponctuel de Poisson homogène de paramètre $c.\lambda_S$, la condition :

$$k_n = O\left(\sqrt{\frac{n}{\mathrm{Log}\ n}}\right)$$

suffit à assurer les convergences en probabilité et presque complète de Φ_n^{8k/k_n} vers Φ dans (D_1,d_S).

Démonstration : On a :

$$C_{k_n}(8k/k_n) \geq P(N(f^{\bullet}, A(n\ ,\ 8k/k_n) > 0) \qquad \text{où}$$

$A(n, 8k/k_n)$ est un rectangle contenu dans le rectangle de hauteur $4k/k_n$ et de largeur $1/k_n$.

Donc :

$$\lambda_S(A(n,\ 8k/k_n)) = 4k/k_n^2$$

et

$$C_{k_n}(8k/k_n) = 1 - e^{-4ck/k_n^2} ,$$

On obtient donc :

$$P\{d_S(\Phi_n^{12z(n)}, \Phi) > \max(2/k_n , 72k/k_n)\} \leq k_n \cdot e^{-4ck\, n/k_n^2}$$

en prenant $k_n = \sqrt{\frac{n}{\text{Log } n}} \cdot a_n$, $a_n \xrightarrow[n]{} 0$

on a :

$$k_n \cdot e^{-4ck\, n/k_n^2} = a_n \sqrt{\frac{n}{\text{Log } n}}\; e^{-4ck \text{ Log } n/a_n^2}$$

$$= \frac{a_n}{\text{Log } n}\; n^{1/2 - 4ck/a_n^2} < n^{-2}$$

pour n assez grand.

Condition nécessaire de convergence.

Cette étude nous a semblé inextricable dans le cas où Φ est quelconque, aussi allons nous supposer que Φ est égale à une constante positive a.

Nous allons voir que, dans ce cas particulier partout "favorable" la condition nécessaire est équivalente à celle obtenue pour la convergence uniforme en probabilité de Φ_n vers Φ de l'estimateur de Gensbittel ; cela n'a rien d'étonnant si on se rappelle que la convergence au sens de Skorokhod d'une suite de fonctions g_n vers une fonction g équivaut à la convergence uniforme, et si on considère que $\Phi_n^{z_o}$ est peu différent de Φ_n ; dans le cas où le processus ponctuel $f^{\bullet}$ est homogène, nous allons constater que la condition nécessaire et suffisante coïncident.

z_o étant fixé, supposons que sur deux intervalles consécutifs I_{r-1} et I_r se produisent les deux événements :

$$|U_{n,r-1} - a| > z_o \quad \text{et} \quad |U_{n,r} - a| > z_o$$

comme $\Phi_n^{z_o}$ est égal à $U_{n,r}$ ou à $U_{n,r-1}$ sur I_r, on a de toute façon :

$$|\Phi_n^{z_o} - a| > z_o \quad .$$

Il est clair que cette erreur ne pourra être "corrigé" par aucune fonction $\lambda \in \Lambda$ puisque : $\forall\lambda \in \Lambda$, $\forall x \in [0,1]$, $\Phi(x) = \Phi(\lambda(x)) = a$.

Nous obtenons :

$$\bigcup_{r=2}^{k_n} \{E_{n,r-1}(z_o) \cap E_{n,r}(z_o)\} \subset \{d_S(\Phi_n^{z_o} , \Phi) > z_o\} \quad .$$

En particulier, en supposant que, pour tout n, k_n est pair, de façon à simplifier l'écriture :

$$\bigcup_{r=2}^{k_n/2} \{E_{n,2r-1}(z_o) \cap E_{n,2r}(z_o)\} \subset \{d_S(\Phi_n^{z_o} , \Phi) > z_o\} \quad .$$

Posons pour tout $r = 1,2,\dots k_n/2$.

$$A_{n,2r}(z_o) = \left[\frac{2(r-1)}{k_n} ; \frac{2r}{k_n}\right] \times [a - z_o , a] \quad .$$

Nous obtenons :

$$\bigcup_{r=1}^{k_n/2} \{N(\sum_{i=1}^{n} \dot{f}_i , A_{n,2r}(z_o)) = 0\} \subset \{d_S(\Phi_n^{z_o} , \Phi) > z_o\} \; .$$

Supposons que : $\dot{f}$ vérifie (H) :

$$P\{d_S(\Phi^{z_o} , \Phi) < z_o\} \leq \prod_{r=1}^{k_n/2} P\{N(\sum_{i=1}^{n} \dot{f}_i , A_{n,2r}(z_o)) > 0\}$$

puisque les pavés $\{A_{n,2r}(z_o) \; ; \; r = 1,\dots, k_n/2\}$ sont disjoints .

Nous en déduisons que :

$$P\{d_S(\Phi_n^{z_o}, \Phi) < z_o\} \leq \prod_{r=1}^{k_n/2} \left[1 - P\{N(f^\bullet, A_{n,2r}(z_o)) = 0\}\right]$$

$$\leq \left[1 - (1 - G_{k_n/2}(z_o))^n\right]^{k_n/2}$$

si $\Phi_n^{z_o}$ converge en probabilité vers Φ dans (D_1, d_S) , nous obtenons :

$$\lim_{n\to\infty} (1 - (1 - G_{k_n/2}(z_o))^n)^{k_n/2} = 1$$

donc $$\lim_{n\to\infty} k_n (1 - G_{k_n/2}(z_o))^n = 0 \quad .$$

Si le processus $f^\bullet$ est homogène, compte tenu du fait que Φ est constante nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} k_n (1 - C_{k_n}(2z_o))^n = 0 \quad .$$

Sans faire un théorème de cette propriété, constatons que dans le cas où Φ est constante et où $f^\bullet$ est un processus ponctuel homogène vérifiant le propriété (H), les conditions du théorème (p. 47) sont nécessaires et suffisantes.

BIBLIOGRAPHIE.

I - J. GEFFROY - Sur un problème d'estimation géométrique.
I.S.U.P. - Vol. XIII - 4 - 1964.

II - J. GEFFROY et P. QUIDEL - Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires.
Revista Da Fasculada de Ciências da Universidade de Coïmbra - Vol. XLIX, 1974.

III - J. GEFFROY et H. ZEBOULON - Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels.
C.R.A.S., 280, Série A, 1975, p. 291.

IV - M.H. GENSBITTEL - Contribution à l'étude statistique des répartitions ponctuelles aléatoires.
Thèse de 3ème cycle présentée à l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI - 1979.

V - J. CHEVALIER - Estimation du support et du contour du support d'une loi de probabilité.
A.H.I.P. - Section B - Vol. 12 - 1976.

VI - J. CHEVALIER - Contribution à l'étude des statistiques d'ordre, de l'estimation géométrique et du maximum de vraisemblance.
Thèse, Paris 1975.

VII - E. MOURIER - Eléments aléatoires dans un espace de Banach.
A.H.I.P. 13 (1953) pp. 159-224.

VIII - T.A. AZLAROV et N.A. VOLODIN - Laws of large numbers for identically distributed Banach space valued random vairables.
Theory of probability and its applications.

IX - M. FRECHET - Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités (1950) premier livre (2ème édi.).

X - LE BAUM, M. KATZ - R.R. READ - Exponential rates for the law of large numbers.
Trans. Amer. Math. Soc. 102, 1961.

XI - P. REVESZ - The laws of large numbers.
Academic Press, 1968.

XII - W. FELLER - An introduction to probability theory and its applications.
1964, vol. I (2ème édi.).

XIII - J. GEFFROY - Etude de la convergence du régressogramme
I.S.U.P. 1980 - Vol. XXV, fasc. 1-2, 41-56.

XIV - J.P. LECOUTRE - Estimation convergente de la régression pour une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach.
I.S.U.P. 1980 - Vol. XXV, fasc. 1-2.

XV - M. BERTRAND - RETALL et J. GEFFROY - Sur la convergence uniforme des estimateurs d'une densité de probabilité.
Publications internes de l'Université de Paris.

XVI - P. BILLINGSLEY - Convergences of probability measures.
Wiley 1968.

XVII - W. FELLER - An introduction to probability theory ant its Applications.
1964, Vol. II p. 508 .

RÉSUMÉ

On reprend les méthodes de GEFFROY, utilisées par GENSBITTEL dans l'estimation du support et du contour du support d'un processus ponctuel, pour établir une condition suffisante de convergence uniforme en probabilité et presque complète, d'un estimateur $\hat{Z}_n$, de la moyenne d'un champ aléatoire $(Z(x), x \in X)$, où X est un espace métrique séparable, mesurée aux points de réalisations d'un processus ponctuel.

On propose ensuite un estimateur du contour du support quand celui-ci présente des discontinuités de première espèce, estimateur convergeant stochastiquement sous de simples conditions, dans $D[0,1]$, lorsque celui-ci est muni de la topologie S de Skorokhod , ou plongé dans $L[0,1]$.

MOTS CLÉS : CONVERGENCE STOCHASTIQUE

CHAMP ALEATOIRE

PROCESSUS PONCTUEL .