N° d'ordre : 1042

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ des SCIENCES et TECHNIQUES de LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

CHAFI Boudekhil

PRINCIPE DU MINIMUM POUR LES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

Membres du Jury : M. PARREAU, *Président*
G. CŒURÉ, *Rapporteur*
Ph. ANTOINE,
D. BOICHU,
P. LELONG, *Examinateurs*

Soutenue le 10 JUIN 1983

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Gérard Coeuré, qui m'a initié aux techniques et méthodes de l'Analyse Complexe, de m'avoir fait bénéficier de son aide constante et de ses conseils généreux au cours de la préparation de ce travail.

Qu'il veuille bien accepter ici l'expression de ma reconnaissance et de ma profonde gratitude.

Il m'est agréable d'exprimer mes remerciements les plus vifs à Monsieur le Professeur Pierre Lelong dont la présence au jury de cette thèse me fait un très grand honneur.

Je remercie également Monsieur le Professeur Michel Parreau d'avoir bien voulu présider cette thèse, ainsi que Monsieur le Professeur Ph. Antoine et Monsieur Daniel Boichu qui ont accepté de se joindre au jury.

Que Madame Raymonde Bérat, qui a assuré la réalisation matérielle de cette thèse avec célérité, soin et compétence, ainsi que les services de l'Imprimerie de l'Université de Lille I, trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

INTRODUCTION

Etant donnée une fonction u plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Si u est indépendante de $\operatorname{Im} y$, $y \in \mathbb{C}^n$.

Alors, la fonction

$$v(\xi) = \operatorname*{Inf}_{g} u(\xi,y)$$

est plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^m$.

Ce résultat qu'on appelle Principe du Minimum pour les fonctions plurisousharmoniques est dû à C.O. Kiselman [8].

En constatant que l'ensemble $\{y \in \mathbb{C}^n \;;\; \operatorname{Re} y = 0\}$ est un sous-groupe fermé du groupe additif $(\mathbb{C}^n,+)$ et en s'inspirant des méthodes de l'article de C.O. Kiselman, nous sommes conduits à faire une étude des fonctions plurisousharmoniques sur certains groupes de Lie complexes et invariantes à droite par un sous-groupe fermé.

Ce travail comprend quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous faisons une étude des fonctions plurisousharmoniques indéfiniment différentiables sur les groupes de Lie complexes. Nous nous sommes intéressés, plus précisément, aux fonctions plurisousharmoniques de classe C^∞ sur un groupe de Lie complexe G, admettant un sous-groupe fermé H comme forme réelle (voir définition 1.2.), et invariantes à droite par H. Nous relions la forme de Levi de ces fonctions sur G avec leur Hessien sur l'espace homogène $G_{/H}$.

Dans le chapitre II, nous donnons une démonstration du Principe du Minimum pour les fonctions strictement plurisousharmoniques régulières sur un ouvert d'une variété complexe $X \times G$ où G est un groupe de Lie complexe admettant un sous-groupe fermé H comme forme réelle, en supposant que les fonctions et Ω sont invariants à droite par H et que les fibres de Ω, au-dessus de chaque point ξ de X, sont connexes.

Le chapitre III étudie le Principe du Minimum pour les fonctions plurisousharmoniques (sans hypothèse de régularité) sur un ouvert Ω d'un groupe de Lie complexe $M \times G$ où G et Ω satisfont aux hypothèses énoncées au chapitre II.

A cet effet, nous établissons un théorème sur l'approximation des fonctions plurisousharmoniques par des fonctions plurisousharmoniques de classe C^{∞}, respectant la symétrie du problème, de telle sorte que l'invariance à droite par H soit conservée par le procédé d'approximation. Ainsi, nous sommes à même d'exhiber une classe d'ouverts de Stein dans certains groupes de Lie complexes $M \times G$ dont la projection sur M est faiblement pseudoconvexe (voir définition 2.1.).

Dans la dernière partie de notre thèse, nous nous inspirons d'une idée de C.O. Kiselman pour pallier à la connexité des fibres ; cette hypothèse s'étant avérée essentielle, comme nous l'avons illustré par un exemple au chapitre II). L'idée consiste à identifier les points situés sur une même composante connexe de la fibre pour construire une variété étalée sur laquelle le Principe du Minimum s'appliquera.

CHAPITRE I

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES SUR LES GROUPES DE LIE.

Soit M une variété complexe de dimension n.

On notera :

$C^{\infty}(M)$ l'algèbre des fonctions de classe C^{∞}, à valeurs complexes, sur M ;

$\mathcal{O}$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur M ;

$T(M)$ le $C^{\infty}(M)$-module des champs de vecteurs opérants sur $C^{\infty}(M)$.

Soit $X \in T(M)$, $\bar{X}$ désignera le champ de vecteurs conjugué de X défini par :

$$\bar{X}(f) = \overline{X(\bar{f})} \quad \text{pour} \quad f \in C^{\infty}(M).$$

On notera aussi :

C^{∞}_{x} l'algèbre des germes des fonctions de classe C^{∞}, à valeurs complexes, en x ;

S_{x} la sous-algèbre de C^{∞}_{x} des germes des fonctions stationnaires en x ;

$\mathcal{O}_{x}$ l'algèbre des germes des fonctions holomorphes en x ;

$\bar{\mathcal{O}}_{x}$ l'algèbre des germes des fonctions anti-holomorphes en x ;

$[X,Y]$ le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y.

Soit $f \in C^{\infty}_{x}$; si $z_1,\dots,z_n$ est un système de coordonnées en x, on a par la formule de Taylor :

$$f = \{f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(x)(z_j - x_j) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(x)(\bar{z}_j - \bar{x}_j)\} \quad (\text{mod. } S_x)$$

d'où $$C_x^\infty = \mathcal{O}_x + \bar{\mathcal{O}}_x + S_x$$

et finalement

$$C_x^\infty / S_x = {}^x/\mathcal{O}_x \cap S_x \oplus \bar{\mathcal{O}}_x / \bar{\mathcal{O}}_x \cap S_x \quad .$$

Soit

$$P_x : C_x^\infty / S_x \longrightarrow \mathcal{O}_x / \mathcal{O}_x \cap S_x$$

la projection sur le premier facteur,

$$\bar{P}_x : C_x^\infty / S_x \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}_x / \bar{\mathcal{O}}_x \cap S_x$$

la projection sur le second facteur.

On définit des champs de vecteurs PX et $\bar{P}X$ opérants sur $C^\infty(M)$ par :

$$\begin{aligned} PX : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \{x \mapsto X_x(P_x f)\} \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} \bar{P}X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \{x \mapsto X_x(\bar{P}_x f)\}. \end{aligned}$$

Etant donné un système $(z_j)_{j=1,\dots,n}$ de coordonnées locales en x et $\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ la forme locale de X, on a :

$$P_x f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(x)(z_j - x_j) \quad ; \quad \bar{P}_x f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(x)(\bar{z}_j - \bar{x}_j)$$

$$(PX)_x f = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial f}{\partial z_j}(x) \quad ; \quad (\bar{P}X)_x f = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(x).$$

Ainsi : PX et $\bar{P}X$ ont respectivement pour formes locales $\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$.

Désignons par $T^{1,0}(M)$ (resp. $T^{0,1}(M)$) l'image de $T(M)$ par l'application P (resp. $\bar{P}$), les relations précédentes entraînent :

. $T(M) = T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M)$,

. $T^{1,0}(M)$ et $T^{0,1}(M)$ sont des sous-algèbres de Lie de $T(M)$; en chaque point x de M, $T_x^{1,0}(M)$ et $T_x^{0,1}(M)$ sont de dimension complexe n,

. L'opération de conjugaison transforme $T^{1,0}(M)$ en $T^{0,1}(M)$ par la relation $\overline{PX} = \bar{P}\bar{X}$.

1. FORME DE LEVI.

La forme de Lévi de M, notée $\mathcal{L}$, est définie sur $T^{1,0}(M) \times T^{1,0}(M)$ par :

$$\mathcal{L}(X,Y) = X\bar{Y} - \bar{P}[X,\bar{Y}].$$

Soit f une fonction de classe C^∞, à valeurs réelles, sur M.

Proposition 1.1.

a) La valeur de $\mathcal{L}(X,Y)f$ *en* x *ne dépend que de* X_x, Y_x *et du germe* f_x.

b) L'application $(X_x,Y_x) \to \mathcal{L}(X,Y)f(x)$ *est une forme hermitienne sur* $T_x^{1,0}(M) \times T_x^{1,0}(M)$.

c) Etant donné un système $(z_j)_{j=1,\dots,n}$ *de coordonnées locales en* x *et les formes locales* $\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ *et* $\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ *de* X *et* Y *dans* $T_x^{1,0}(M)$, *on a :*

$$\mathcal{L}(X,Y)f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_j \bar{b}_k \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x).$$

Démonstration : L'expression locale décrite au c) s'obtient directement à partir de la définition de $\mathcal{L}$; les propriétés a) et b) s'en déduisent immédiatement. □

On notera $\mathcal{L}_x f$: l'application $(X_x, Y_x) \mapsto \mathcal{L}(X,Y)f(x)$.

Rappelons [10] qu'une fonction f de classe C^∞ sur M, à valeurs réelles, est plurisousharmonique (resp. strictement plurisousharmonique) si pour tout x de M, la forme hermitienne $\mathcal{L}_x f$ est positive (resp. strictement positive) sur $T_x^{1,0}(M)$.

2. FORME DE LEVI ET GROUPES DE LIE.

G un groupe de Lie complexe connexe, de dimension n ; son algèbre de Lie complexe formée par les vecteurs tangents de $T(G)$ invariant à gauche est noté $\mathcal{G}$; son algèbre de Lie réelle formée par les X de $\mathcal{G}$ tels que $X = \bar{X}$ est notée $\mathrm{Re}\,\mathcal{G}$.

On introduit aussi :

$$T^{1,0}(\mathcal{G}) = T^{1,0}(G) \cap \mathcal{G} \quad ; \quad T^{0,1}(\mathcal{G}) = T^{0,1}(G) \cap \mathcal{G} .$$

Proposition 1.2.

a) $\underline{T^{1,0}(\mathcal{G})}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathcal{G}$ *et* $\overline{T^{1,0}(\mathcal{G})} = T^{0,1}(\mathcal{G})$.

b) $T^{1,0}(\mathcal{G})$ *et* $T_e^{1,0}(G)$ *sont isomorphes par l'application* $X \mapsto X_e$ *; l'élément neutre de* G *est noté* e.

c) $T_g^{1,0}(\mathcal{G}) = T_g^{1,0}(G)$, $\forall\, g \in G$.

d) Etant donné un système $(z_j)_{j=1,\dots,n}$ *de coordonnées locales sur un ouvert* U *de* G*, alors les composantes sur* $(\frac{\partial}{\partial z_j})_{j=1,\dots,n}$ *de tout* X *de* $T^{1,0}(\mathcal{G})$ *sont dans* $\mathcal{O}(U)$.

e) $[T^{1,0}(\mathcal{G}), T^{0,1}(\mathcal{G})] = \{0\}$.

<u>*Démonstration*</u> :

a) La propriété est vérifiée par $T^{1,0}(G)$, elle se conserve après intersection avec $\mathcal{G}$.

b) On sait que l'application $X \mapsto X_e$ est injective de $\mathcal{G}$ dans $T_e(G)$; étant donné Y_e dans $T_e^{1,0}(G)$, posons $X_g = L_g^*(Y_e)$, où L_g^* est la différentielle en e de la translation à gauche $L_g : x \mapsto g.x$; on sait que X est dans $\mathcal{G}$ et $X_e = Y_e$; comme L_g est holomorphe L_g^* applique $T_e^{1,0}(G)$ dans $T_g^{1,0}(G)$ ce qui achève de démontrer b).

c) $T_g^{1,0}(\mathcal{G})$ est un sous-espace de $T_g^{1,0}(G)$ et $\dim T_g^{1,0}(\mathcal{G}) = \dim T_e^{1,0}(G)$, d'après b) $= n = \dim T_g^{1,0}(G)$.

d) Tout champ de vecteurs X de $T^{1,0}(\mathcal{G})$ s'écrit d'après le b) sous la forme $X_g = L_g^*(X_e)$; la propriété résulte alors de l'holomorphie de l'application $g \to L_g^*$ de G dans $\mathcal{G}^*$.

e) Etant donnés X et Y dans $T^{1,0}(\mathcal{G})$; ils ont des expressions locales de la forme $\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial z_j}$; alors

$[X,\bar{Y}] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right] = 0$ car les coefficients a_j et b_j sont holomorphes. □

Corollaire 1.1.

Il résulte de c), qu'étant donné un groupe de Lie complexe G, *sa forme de Levi* $\mathcal{L}_g$ *en un point* g *de* G *est complétement définie sur* $T_g^{1,0}(\mathcal{G}) \times T_g^{1,0}(\mathcal{G})$.

CONJUGAISON CANONIQUE SUR Re $\mathcal{G}$:

Désignons par Φ l'application $X \to X + \bar{X}$ de $T^{1,0}(\mathcal{G})$ dans Re $\mathcal{G}$.

Proposition 1.3.

Φ *est un* $\mathbb{R}$*-isomorphisme d'algèbre de Lie.*

Démonstration :

Soit $X \in T^{1,0}(\mathcal{G})$, il est clair que $\Phi(X) \in \text{Re}\,\mathcal{G}$ et que Φ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Pour que Φ soit un $\mathbb{R}$-isomorphisme, il suffit de montrer que Φ est injective puisque $\dim_{\mathbb{R}} T^{1,0}\mathcal{G} = \dim_{\mathbb{R}} \text{Re}\,\mathcal{G} = 2n$.

Supposons que $\Phi(X)f = 0$ pour tout $f \in C^{\infty}(G)$.
Or, pour $f \in \mathcal{O}$, $\Phi(X)f = Xf + \bar{X}f = Xf + \overline{X\bar{f}} = Xf$ d'où $Xf = 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}$, ce qui prouve que Φ est injective.

Soit X et Y de $T^{1,0}(\mathcal{G})$,

$[\Phi(X),\Phi(Y)] = [X,Y] + [X,\bar{Y}] + [\bar{X},Y] + [\bar{X},\bar{Y}]$.

Or, $[X,\bar{Y}] = [\bar{X},Y] = 0$ d'après le e) de la proposition 1.2., d'où $[\Phi(X),\Phi(Y)] = [X,Y] + \overline{[X,Y]} = \Phi([X,Y])$.

Φ est bien un $\mathbb{R}$-isomorphisme d'algèbre de Lie.

Définition 1.1.

Pour tout X *de* $\operatorname{Re}\mathcal{G}$, *on pose* $JX = \Phi(i\,\Phi^{-1}(X))$.

Proposition 1.4.

$J^2 = \mathrm{id}$ *et* $[JY,Z] = [Y,JZ] = J[Y,Z]$ *sur* $\operatorname{Re}\mathcal{G}$.

Démonstration :

Soit X, Y et Z de $\operatorname{Re}\mathcal{G}$,

$$J^2X = J\,JX = \Phi(i\,\Phi^{-1}(JX)) = \Phi(i\,\Phi^{-1}(\Phi(i\,\Phi^{-1}(X)))) =$$

$$= \Phi(-\Phi^{-1}(X) = -\Phi(\Phi^{-1}(X)) = -X$$

d'où

$$J^2 = -\mathrm{id}\,.$$

$$[JY,Z] = [\Phi(i\,\Phi^{-1}(Y)),Z] = \Phi([i\,\Phi^{-1}(Y),\Phi^{-1}(Z)]).$$

• $\Phi([i\,\Phi^{-1}(Y),\Phi^{-1}(Z)]) = \Phi([\Phi^{-1}(Y),i\,\Phi^{-1}(Z)]) = [Y,\Phi(i\,\Phi^{-1}(Z))] = [Y,JZ]$.

• $\Phi([i\,\Phi^{-1}(Y),\Phi^{-1}(Z)]) = \Phi(i[\Phi^{-1}(Y),\Phi^{-1}(Z)]) = \Phi(i(\Phi^{-1}([Y,Z])) = J[Y,Z]$

d'où $[JY,Z] = [Y,JZ] = J[Y,Z]$.

EXPONENTIELLE COMPLEXE DE G :

On sait [6] que pour tout X dans $T^{1,0}(\mathcal{G})$, il existe un homomorphisme de $\mathbb{C}$ dans G, noté $z \mapsto \operatorname{Exp} zX$ tel que pour toute fonction holomorphe sur G on ait :

$$\left(\frac{d}{dz} f(g\operatorname{Exp} zX)\right)_{z=0} = X_g(f).$$

L'application $X \mapsto \operatorname{Exp} X$ de $T^{0,1}(\mathcal{G})$ dans G est holomorphe et forme un système de coordonnées locales dans un voisinage de l'élément neutre de G.

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ une base de $T^{1,0}(\mathcal{G})$; posons $zX = \sum_{j=1}^{n} z_j X_j$ avec $z = (z_j)_{j=1,\ldots,n}$ dans $\mathbb{C}^n$, et $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Désignons par $\exp(.)$ l'exponentielle réelle de G associée à sa structure analytique réelle sous-jacente ; puisque $(\Phi(X), \Phi(iX))$ forment une base de $\mathrm{Re}\,\mathcal{G}$, on a, pour z assez petit :

$$\mathrm{Exp}\, zX = \exp \beta(z)\Phi(iX) . \exp \alpha(z)\Phi(X) \quad ,$$

les applications $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont des coordonnées canoniques de seconde espèce de $\mathrm{Exp}\, zX$ et sont des applications analytiques réelles [6].

Proposition 1.5.

On a pour tout Y dans $T^{1,0}(\mathcal{G})$:

a) $\mathrm{Exp}\, Y = \exp \Phi(Y)$;

b) $\mathrm{Exp}\, iY = \exp J\Phi(Y)$.

Démonstration :

a) Les applications :

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R} \to G & ; & \mathbb{R} \to G \\ t \mapsto \mathrm{Exp}\, tY & ; & t \mapsto \exp t\Phi(Y) \end{array}$$

sont deux sous-groupes à un paramètre.

Pour démontrer leur identité, il suffit d'établir l'égalité de leurs vecteurs tangents en e.

Soit $f \in C_e^\infty$; $f = \{u + \bar{v}\} \pmod{S_e}$ où $u, v \in \mathcal{O}_e$

$$Y_e f = \left(\frac{d}{dt} f(\mathrm{Exp}\, tY)\right)_{t=0} = Y_e(u) + \overline{Y_e(v)} = Y_e(u) + \bar{Y}_e(\bar{v}) = (Y+\bar{Y})_e(u+\bar{v}) =$$

$$= \Phi(Y)_e(u+\bar{v}) = \left(\frac{d}{dt} f(\exp\Phi(Y))\right)_{t=0} = \Phi(Y)_e f.$$

b) La deuxième assertion s'obtient directement à partir du a) en remplaçant Y par iY. □

Proposition 1.6.

$(d\alpha)_o(z) = x \quad ; \quad (d\beta)_o(z) = y.$

Démonstration :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_o \operatorname{Exp} zX = X_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(\exp \beta(z)\,\Phi(iX).\exp \alpha(z)\Phi(X))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\right)_o\Phi(X) + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\right)_o\Phi(iX)\right) - \frac{i}{2}\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\right)_o\Phi(X) + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y_j}\right)_o\Phi(iX)\right)$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\right)_o + i\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\right)_o - i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_i}\right)_o + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y_j}\right)_o\right)X \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\right)_o - i\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\right)_o - i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\right)_o - \left(\frac{\partial\beta}{\partial y_j}\right)_o\right)\bar{X}\ . \end{array}\right.$$

L'identification conduit à :

$\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j} = \delta_{j,k}$; $\frac{\partial\beta_k}{\partial x_j} = \frac{\partial\alpha_k}{\partial y_j} = 0$; $\frac{\partial\beta_k}{\partial y_j} = \delta_{j,k}$, où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker. □

Définition 1.2.

On dit qu'un groupe de Lie complexe G *admet un sous-groupe fermé* H *comme forme réelle si* $\operatorname{Re}\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus J\mathcal{H}$, *où* $\mathcal{H}$ *est l'algèbre de Lie de* H.

On a alors $T^{1,0}(\mathcal{G}) = \Phi^{-1}(\mathcal{H}) \oplus i.\Phi^{-1}(\mathcal{H})$, et $\Phi^{-1}(\mathcal{H})$ est une sous-algèbre de Lie de $T^{1,0}(\mathcal{H})$ d'après la proposition 1.3.

L'existence d'une forme réelle dans G est une hypothèse naturelle lorsque la variété de G est de Stein :

Soit K un sous-groupe compact maximal d'un groupe de Lie complexe et connexe G ; désignons par $\tilde{K}$ le sous-groupe de Lie complexe de G associé à la sous-algèbre de Lie de $T^{1,0}(\mathcal{G})$ définie par $\Phi^{-1}(\mathcal{K}) + i\,\Phi^{-1}(\mathcal{K})$, où $\mathcal{K}$ est l'algèbre de Lie de K.

Alors :

a) [12] : $\tilde{K}$ est un sous-groupe fermé de G et la variété $G/\tilde{K}$ est isomorphe à un espace $\mathbb{C}^{\ell}$.

De plus, $\tilde{K}$ est de la forme $\tilde{S}.\tilde{Z}$, où l'algèbre de Lie de S est l'idéal semi-simple $[\mathcal{K},\mathcal{K}]$ de $\mathcal{K}$, par conséquent $\tilde{S}$ est semi-simple et isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe $Gl(n,\mathbb{C})$.

$\tilde{Z}$ est le centre connexe de $\tilde{K}$ et est isomorphe au quotient d'un groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*)^m$ par un sous-groupe fermé isomorphe à un espace $\mathbb{C}^s$, et $\tilde{S} \cap \tilde{Z}$ est un groupe fini.

b) L'application du théorème de Cartan-Grauert [4,5] au fibré $G/\tilde{K}$, qui est holomorphiquement trivial d'après a), entraîne que la variété de G est holomorphiquement homéomorphe à $\mathbb{C}^{\ell} \times \tilde{K}$.

c) G est une variété de Stein si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

(i) $\mathcal{K} \cap J\mathcal{K} = \{0\}$ [11] ;

(ii) $\tilde{Z}$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^m$ [12].

On dira que la structure de groupe de G est normal si G est isomorphe pour sa structure de groupe de Lie à $\mathbb{C}^{\ell} \times \tilde{K}$; alors, si G est de Stein et normal, G admet comme forme réelle $H = \mathbb{R}^{\ell} \times K$.

Soit H un sous-groupe fermé de G. Considérons l'espace homogène $G_{/H}$ des classes à gauche gH, $g \in G$. On sait [6] qu'il peut être muni d'une structure de variété C^∞ telle que :

a) L'application canonique Π de G sur $G_{/H}$ soit de classe C^∞,

b) L'application tangente Π_* est un morphisme de l'espace tangent $T_g(G)$ sur l'espace tangent $T_{\Pi(g)}(G_{/H})$ dont le noyau est formé des dérivations qui annulent les germes des fonctions de classe C^∞ invariantes à droite par H.

Considérons une fonction f qui soit de classe C^∞ sur G, telle que f soit invariante à droite par H. Cette fonction f induit une fonction $\dot{f}$ qui sera de classe C^∞ sur $G_{/H}$ et l'on a :

$$\begin{cases} \dot{f} \circ \Pi = f \\ \Pi_*(Z)\dot{f}(\Pi(g)) = Zf(g) \qquad \forall\, Z_g \in T_g(G). \end{cases}$$

En particulier, Π transforme les points critiques de f en les points critiques de $\dot{f}$.

Si g_o est un point critique de f, on notera la restriction de son Hessien à la diagonale de l'espace tangent en g_o, soit T_{g_o}, par :

$$(\mathrm{Hess} f)_{g_o}(Z,Z) \quad \text{avec} \quad Z_{g_o} \in T_{g_o}.$$

On a :

$$(\mathrm{Hess}\ \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*(Z),\Pi_*(Z)) = (\mathrm{Hess}\ f)_{g_o}(Z,Z).$$

Etant donné un ouvert Ω de G, l'ouvert de $G_{/H}$ image de Ω par Π sera noté $\dot{\Omega}$.

Proposition 1.7.

Soit g_o *dans* G *et* f *une fonction indéfiniment différentiable sur un voisinage de* g_oH *dans* G.

Si f *est invariante à droite par* H *et si* g_o *est point critique de* f, *on a :*

$$\mathcal{L}_{g_o}(X,X)(f) = \frac{1}{4}\left((\mathrm{Hess}\ \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(X),\Pi_*\Phi(X))+(\mathrm{Hess}\ \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(iX),\Pi_*\Phi(iX))\right).$$

Démonstration :

Soit X et Y dans $T^{1,0}(\mathcal{G})$, X et Y sont donc respectivement de la forme $A + iB$ et $A' + iB'$ avec A, A', B et B' dans $\Phi^{-1}(\mathcal{H})$.

Posons $U_1 = \Phi(A) = A + \bar{A}$; $V_1 = \Phi(iA) = i(A-\bar{A})$

$U_2 = \Phi(B)$; $V_2 = \Phi(iB)$.

On a :

$$X = \frac{1}{2}(U_1 + V_2 + i(U_2-V_1))$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{2}(U_1' + V_2' - i(U_2'-V_1')).$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{L}_{g_o}(X,Y)(f) &= \{X\bar{Y} - \bar{P}[X,\bar{Y}]\}(f)(g_o)\\ &= X_{g_o}(\bar{Y}f) - (\bar{P}[X,\bar{Y}])_{g_o} f \quad ;\end{aligned}$$

g_o étant un point critique de f, $(\bar{P}[X,\bar{Y}])_{g_o} f = 0$

donc $$\mathcal{L}_{g_o}(X,Y)(f) = X_{g_o}(\bar{Y}f) .$$

Dans la suite du calcul, pour alléger les notations, nous omettons f et l'indice g_o.

$$\mathcal{L}(X,Y) = \frac{1}{4}\,(U_1(U_1' + V_2' - i(U_2'-V_1')) + V_2(U_1' + V_2' - i(U_2'-V_1')) +$$

$$+ iU_2(U_1' + V_2' - i(U_2'-V_1')) - iV_1(U_1' + V_2' - i(U_2'-V_1'))).$$

Puisque U_1 et U_2 sont dans $\mathcal{H}$ et f est invariante à droite par H, on a :

$$U_1 f = U_2 f = \frac{d}{dt}\, f(g \text{ expt } U) = 0$$

car expt U est dans H.

D'autre part, on peut commuter les vecteurs U et V au point critique g_o ; en utilisant ces deux remarques, la forme de Levi de f en g_o se réduit à :

$$\mathcal{L}_{g_o}(X,X)(f) = \frac{1}{4}\,(V_2V_2 + V_1V_1)_{g_o}(f) .$$

• $(\text{Hess } \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(X),\Pi_*\Phi(X)) = (\text{Hess } f)_{g_o}(\Phi(X),\Phi(X))$

$$= \Phi(X)_{g_o}\Phi(X)(f).$$

$\Phi(X)\Phi(X) = (U_1 + V_2)(U_1 + V_2)$, en utilisant une nouvelle fois les remarques ci-dessus, on obtient :

$$(\text{Hess } \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(X),\Pi_*\Phi(X)) = V_{2_{g_o}}(V_2 f) .$$

• $(\text{Hess } \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(iX),\Pi_*\Phi(iX)) = V_{1_{g_o}}(V_1 f)$.

D'où

$$\mathcal{L}_{g_o}(X,X)f = \frac{1}{4}\,((\text{Hess } \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(X),\Pi_*\Phi(X))+(\text{Hess } \dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(iX),\Pi_*\Phi(iX)). \;\square$$

Corollaire 1.2.

Soit f *une fonction plurisousharmonique (resp. strictement plurisousharmonique) et indéfiniment différentiable sur un ouvert* Ω *de* G.

Si f *et* Ω *sont invariants à droite par* H, *alors le Hessien de* $\dot{f}$ *est positif (resp. strictement positif) en tout point critique.*

Démonstration : Appliquons le proposition 1.7. avec X dans $\Phi^{-1}(\mathcal{H})$ puisque $\mathcal{H}f = 0$, on a :

$$\mathcal{L}_{g_o}(X,X)f = \frac{1}{4}\,(\text{Hess }\dot{f})_{\Pi(g_o)}(\Pi_*\Phi(iX),\Pi_*\Phi(iX)).$$

Or $\Pi_*\Phi(iX)$ engendre $T(G_{/H})$, lorsque X décrit $\Phi^{-1}(\mathcal{H})$, ce qui achève d'établir le corollaire. □

3. LEMME DE MORSE.

Nous donnons ici une démonstration directe d'une propriété qui est une conséquence de la théorie générale des points critiques de Morse [14].

Soit V une variété C^∞, connexe ; une fonction f sur V, à valeurs dans $[-\infty,+\infty[$ est dite d'exhaustion si pour tout $c \in \mathbb{R}$ la partie

$V^c = \{x \in V \; ; \; f(x) < c\}$ est relativement compacte dans V.

Théorème 1.1.

Soit f *une fonction de classe* C^∞ *et d'exhaustion sur* V.

Si en tout point critique de f, *le Hessien de* f *est strictement positif, alors* f *admet un et un seul minimum local.*

Démonstration :

L'infimum m_o de f sur V est aussi l'infimum de f sur V^c, tel que $c > m_o$; il est donc atteint en un point x_o au moins de V qui est aussi un point critique de f.

Considérons :

• Γ_m = composante connexe contenant x_o de V^m.

• $E = \{m \in \bar{\mathbb{R}}/\Gamma_m$ n'ait que x_o comme point critique$\}$.

Montrons que $E \neq \emptyset$:

Comme x_o est un point critique, $(\mathrm{Hess}\, f)_{x^o}$ est strictement positif, donc x_o est un point critique isolé. V étant localement connexe et localement compact, on peut trouver un voisinage compact et connexe U de x_o n'ayant que x_o comme point critique. Puisque x_o est un minimum local strict, pour tout m dans l'intervalle $]m_o, \inf\limits_{x\in\partial U} f(x)[$, Γ_m est contenu dans U et ne contiendra que x_o comme point critique de f ; par suite, $E \neq \emptyset$.

Constatons maintenant que pour $m > m_o$, le bord de Γ_m ne contient aucun point critique de f ; si un tel point x_1 existait on aurait $f(x_1) = m$ et $(\mathrm{Hess}\, f)_{x^1} >> 0$, ainsi x_1 étant minimum local strict, serait un point isolé de Γ_m ce qui s'oppose à la connexité de Γ_m. Aussi tout x de $\partial\Gamma_m$ admet un voisinage U_x ouvert connexe tel que $\{y \in V/f(y) \leqslant m\} \cap U_x$ soit connexe ; soit :

$$\Omega_m = \Gamma_m \cup \left(\bigcup_{x\in\partial\Gamma_m} U_x \right)$$

c'est un ouvert connexe tel que :

$$\Gamma_m = \{x \in \Omega_m / f(x) \leqslant m\}.$$

Supposons que f ait un second point critique x_1 ; puisque V est connexe x_1 serait dans l'un des Γ_m et $M = \mathrm{Sup}(E)$ serait fini ; montrons qu'il n'en est rien.

Supposons d'abord que $M \notin E$; Γ_M contiendrait un second point critique x_1 et d'après ce qui a été vu plus haut on aurait $f(x_1) < M$.

Désignons par $\tilde{f}$ la restriction de f à Ω_M ; pour tout a dans $]f(x_1), M[$, $\tilde{f}^{-1}([a,M])$ contiendrait un point critique x_a car sinon d'après un théorème de Morse [14], $\tilde{f}^{-1}([a,M])$ étant compact $\{y \in \Omega_M / \tilde{f}(y) \leqslant a\}$ serait difféomorphe à $\{y \in \Omega_M / \tilde{f}(y) \leqslant M\} = \Gamma_M$ et par conséquent connexe.

Ainsi Γ_a contiendrait $\{y \in \Omega_M / \tilde{f}(y) \leqslant a\}$ et par conséquent, les points x_o et x_1 ; ce qui est impossible, car, alors, a ne serait pas dans E et M ne pourrait être la borne supérieure de E. Par compacité, il existe un point $x \in \partial\Gamma_M$ adhérent à la suite (x_a) lorsque a tend vers M ; ce point x serait un point critique de $\partial\Gamma_M$ pour f ce qui est impossible.

Supposons maintenant que $M \in E$; M étant borne supérieure, il existe une suite $(m_n)_n$ qui tend par valeur supérieure vers M telle que Γ_{m_n} ait un point critique x_1^n autre que x_o ; puisque V^c est compact pour tout c assez grand, la suite x_1^n admet une valeur d'adhérence x^1 appartenant à $\bigcap_n \Gamma_{m_n} = \Gamma_M$; comme x_o est un point critique isolé, x^1 est un point critique distinct de x_o, on obtient donc une contradiction avec le fait que M est dans E. □

A partir du lemme de Morse et du corollaire 1.2., on obtient la propriété suivante des fonctions plurisousharmoniques :

Théorème 1.2.

Soit G *un groupe de Lie complexe connexe qui admet un sous-groupe fermé* H *comme forme réelle ; étant donnée une fonction* f *indéfiniment différentiable, strictement plurisousharmonique et invariante à droite par* H *sur un ouvert connexe* Ω *de* G *invariant à droite par* H, *alors si* $\dot{f}$ *est d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}$, $\dot{f}$ *admet un seul minimum local sur* $\dot{\Omega}$.

Remarque :

Cette propriété généralise la situation suivante connue ([3] , [9]) si f est strictement plurisousharmonique et régulière sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et invariante par les translations réelles, alors la trace de f sur l'espace imaginaire pure est strictement convexe.

CHAPITRE II

PRINCIPE DU MINIMUM

(Cas des fonctions strictement plurisousharmoniques régulières).

X est une variété analytique complexe de dimension m.

G est un groupe de Lie complexe connexe de dimension n ayant un sous-groupe fermé H comme forme réelle.

Soit Ω un ouvert de $X \times G$ dont les fibres Ω_ξ au-dessus des points ξ de X sont invariantes à droite par H ; on désigne par ω la projection de Ω sur X. On note :

Π : l'application canonique de G sur l'espace homogène $G/_H$ et $\gamma = (id_X, \Pi)$; on pose $\dot{g} = \Pi(g)$.

$\dot{\Omega}$ (resp. $\dot{\Omega}_\xi$) : l'image de Ω par γ (resp. l'image de la fibre Ω_ξ de Ω au-dessus d'un point ξ de ω).

Etant donnée une fonction u sur Ω, invariante à droite par H sur chaque fibre Ω_ξ, on note $\dot{u}$ la fonction sur $\dot{\Omega}$ telle que $\dot{u} \circ \gamma = u$; si u est indéfiniment différentiable sur Ω, il en est de même pour $\dot{u}$.

<u>*Théorème*</u> *2.1. (Principe du Minimum).*

On suppose chaque fibre $\dot{\Omega}_\xi$ connexe.

Soit u une fonction indéfiniment différentiable, plurisousharmonique sur Ω telle que pour tout ξ dans ω :

(i) $u(\xi,.)$ soit strictement plurisousharmonique et invariante à droite par H sur Ω_ξ.

(ii) $\dot{u}(\xi,.)$ *soit d'exhaustion sur chaque fibre* $\dot{\Omega}_\xi$,

alors :

$$v(\xi) = \inf_g u(\xi,g)$$

est plurisousharmonique sur ω.

<u>*Démonstration*</u> : $v(\xi) = \operatorname{Inf}_g u(\xi,g)$ est semi-continue supérieurement sur ω puisque u est continue en ξ, il reste à prouver que v satisfait à l'inégalité de la moyenne, c'est-à-dire pour tout $\xi_o \in \omega$ et $\Psi : \xi \mapsto x = (x_1(\xi),\ldots,x_m(\xi))$ un système de coordonnées locales sur un voisinage ouvert connexe U de ξ_o dans ω :

$$v(\xi_o) \leqslant \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} v \circ \Psi^{-1}(x_o+rta)\,\frac{dt}{t}$$

pour tout a dans $\mathbb{C}^m$ et $r > 0$, assez petit.

La stricte plurisousharmonicité de $u(\xi,.)$, la connexité de $\dot{\Omega}_\xi$ et l'hypothèse (ii) entraîne selon le théorème 1.2. que $\operatorname{Inf}_{\dot{g}} \dot{u}(\xi,\dot{g})$ est atteint en un et un seul point $\dot{g}_\xi$.

$$v(\xi) = \operatorname{Inf}_g u(\xi,g) = \operatorname{Inf}_{\dot{g}} \dot{u}(\xi,\dot{g}) = \dot{u}(\xi,\dot{g}_\xi).$$

Montrons que l'application $\phi : \xi \mapsto \dot{g}_\xi$ de ω dans $G_{/H}$ est indéfiniment différentiable.

On sait que : $\Pi(g_{\xi_o} \exp yJY) \to y$ est un système de coordonnées locales dans un voisinage de $\dot{g}_{\xi_o}$, où $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$ est une base de l'algèbre de Lie de H, et y est dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Considérons le système d'équation suivant :

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\,\dot{u}(\Psi^{-1}(x),\Pi(g_{\xi_o} \exp yJY)) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n\ .$$

Le Hessien de $\dot{u}(\xi_o,.)$ a pour forme locale :

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \dot{u}(\Psi^{-1}(x_o),\Pi(g_{\xi_o} \exp yJY))\right)_{y=0} h_j h_k \ , \ h_j \in \mathbb{R}.$$

Comme $\dot{g}_{\xi_o}$ est un point critique de $\dot{u}(\xi_o,.)$, ce Hessien est strictement positif d'après le corollaire 1.2. le déterminant de cette forme quadratique qui est aussi le Jacobien du système d'équations considéré est donc non nul en $(x_o,0)$.

Par suite, d'après le théorème des fonctions implicites, les solutions de notre système d'équations sont données pour x assez voisin de x_o et y assez voisin de 0 par $(x,w(x))$ où $x \to w(x)$ est une application de classe C^∞ dans un voisinage de x_o.

Comme $\dot{u}(\xi,.)$ a un seul minimum local, on a pour x assez voisin de x_o :

$$v \circ \Psi^{-1}(x) = u(\Psi^{-1}(x), g_{\xi_o} \exp w(x)JY).$$

Par l'isomorphisme $Z \to Y = Z + \bar{Z}$ entre $T^{1,0}(\mathcal{G})$ et $\mathrm{Re}\,\mathcal{G}$, on a (proposition 1.5.) :

$$\mathrm{Exp} zZ = \exp \beta(z)JY.\exp \alpha(z)Y \ ,$$

où α et β sont analytiques réelles, $z \to \mathrm{Exp} zZ$ est holomorphe, pour z assez voisin de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.

Soit $\theta(t)$ une application holomorphe sur D, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, continue sur $\bar{D}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

$\tilde{\theta}(t) = u(\Psi^{-1}(x_o+rta),g_{\xi_o} \mathrm{Exp}\, \theta(t)Z)$ est sousharmonique sur D et continue sur $\bar{D}$, comme composée d'une fonction plurisousharmonique et d'une application holomorphe.

De plus :

$$\tilde{\theta}(t) = u(\Psi^{-1}(x_o+rta), g_{\xi_o} \exp \beta o \theta(t) JY . \exp \alpha o \theta(t) Y$$

$$= u(\Psi^{-1}(x_o+rta), g_{\xi_o} \exp \beta o \theta(t) JY).$$

Supposons que l'on puisse trouver une telle application θ telle que :

$$\beta \circ \theta(t) = w(x_o+rta), \quad \text{pour} \quad |t| = 1.$$

On aura :

$$v(\xi_o) = v \circ \Psi^{-1}(x_o) = \operatorname*{Inf}_g u(\xi_o, g) \leqslant u(\xi_o, g_{\xi_o} \exp \beta \circ \theta(0) JY)$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} u(\Psi^{-1}(x_o+rta), g_{\xi_o} \exp w(x_o+rta) JY) \frac{dt}{t} \quad ,$$

d'où $$v(\xi_o) \leqslant \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} v \circ \Psi^{-1}(x_o+rta) \frac{dt}{t} \quad .$$

Ainsi v vérifie l'inégalité de la moyenne. Il reste à prouver l'existence de θ ce qui résultera du lemme suivant :

Soit :

A(D) : L'algèbre de Banach des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert D telles que :

$$f(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n \quad \text{avec} \quad \sum_{n \geqslant 0} |a_n| < +\infty$$

muni de la norme définie par $||f||_A = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|$.

H($\mathbb{T}$) : L'algèbre de Banach des fonctions à valeurs réelles sur le cercle unité $\mathbb{T}$ satisfaisant à :

$$f(e^{is}) = \sum_{n \geqslant 0} b_n e^{ins} + \bar{b}_n e^{-ins} \quad \text{avec} \quad \sum_{n \geqslant 0} |b_n| < +\infty$$

muni de la norme définie par $||f||_H = \sum_{n\geq 0} 2|b_n|$.

Lemme 2.1.

Etant donnée une application β *analytique réelle dans un voisinage de l'origine de* $\mathbb{C}^n$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, *telle que* $(d\beta)_o(z) = \text{Im } z$ *et* $\beta(0) = 0$.

L'application $\theta \to \beta \circ \theta$ *est une surjection d'un voisinage de l'origine de* $(A(D))^n$ *sur un voisinage de l'origine de* $(H(\mathbb{T}))^n$.

Démonstration :

Soit ρ le rayon d'une boule ouverte centrée à l'origine de $\mathbb{C}^n$, contenue dans le domaine de $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ et Δ la boule ouverte de rayon ρ, centrée à l'origine, dans $(A(D))^n$.

Pour tout θ dans Δ, $\beta \circ \theta$ est dans $(H(\mathbb{T}))^n$; en effet, écrivons le développement en série de β_j :

$$\beta_j(z) = \sum_{\mu,\nu} a^j_{\mu,\nu}\, x^\mu\, y^\nu \,, \quad \text{où} \quad z = x + iy \quad \text{et} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,.$$

Considérons cette série numérique, comme une série dans l'algèbre de Banach $(H(\mathbb{T}))^n \times (H(\mathbb{T}))^n$.

On a :

$$||a^j_{\mu,\nu}\, x^\mu\, y^\nu||_H \leq |a^j_{\mu,\nu}|\ ||x_1||_H^{\mu_1} \ldots ||x_n||_H^{\mu_n}\ ||y_1||_H^{\nu_1} \ldots ||y_n||_H^{\nu_n} \,.$$

Ainsi, lorsque $||x_k||_H$ et $||y_k||_H$ sont inférieurs à ρ, cette série converge normalement dans $(H(\mathbb{T}))^n \times (H(\mathbb{T}))^n$; elle définit donc, une application analytique sur la boule de rayon ρ centrée à l'origine de $(H(\mathbb{T}))^n \times (H(\mathbb{T}))^n$, et par conséquent β est de classe C^1. Lorsque θ est dans Δ, Re θ et Im θ restreints au cercle unité sont dans cette boule ; ainsi $\theta \xmapsto{\chi} \beta \circ \theta$ est une application de classe C^1 de Δ dans $(H(\mathbb{T}))^n$, $\chi(0) = 0$ et $\chi'(0)(\theta) = \text{Im } \theta$ (où $\chi'(0)$

désigne la différentielle de χ en 0).

De plus $\chi'(0)$ est surjective, car étant donné $f(e^{is}) = \sum_{n\geq 0} b_n e^{ins} + \bar{b}_n e^{-ins}$ dans $H(\mathbb{T})$, alors $F(t) = i(b_o+\bar{b}_o+\sum_{n\geq 1} 2b_n t^n)$ est dans $A(D)$ et $\operatorname{Im} F = f$ sur $\mathbb{T}$.

Par un théorème de Penot [15] (inversion à droite d'application non linéaire), il existe un voisinage Δ' de 0 dans $[A(D)]^n$ et un voisinage W de $0 = \chi(0)$ dans $(H(\mathbb{T}))^n$ tels que l'application χ est surjective de Δ' sur W. □

Achevons maintenant la démonstration du théorème 2.

En choisissant r positif assez petit tel que $w(x_o+rta)$ soit bien défini pour $|t| \leq 1$, l'application $\{t \mapsto w(x_o+rta)\}$ étant de classe C^∞ est dans $(H(\mathbb{T}))^n$; de plus, $w(x_o) = 0$, donc pour r assez petit $w(x_o+rta)$ est dans W et par suite il existe $\theta \in \Delta'$ tel que : $\beta \circ \theta(t) = w(x_o+rta)$, $\forall\ |t| = 1$. □

Pour être complet, on donne maintenant une démonstration selon Ph. Antoine [1] du résultat de Penot utilisé ci-dessus.

Proposition :

Soient E, F *et* G *des espaces de Banach,* U *un ouvert de* $E \times F$, f *une application de* U *dans* G *et* (a,b) *un point de* U. *On suppose que* f *est continue et partiellement continûment différentiable en la seconde variable. Si* $f(a,b) = c$ *et si* $d_2f(a,b)$ *est surjective, il existe un voisinage* V *de* a *dans* E *et une application continue* ψ *de* V *dans* F *telle que* $\psi(a) = b$ *et* $f(x,\psi(x)) = c$ *pour tout* x *de* V.

Démonstration :

On se ramène par translation au cas où $c = 0$. D'après le théorème de sélection continue de Michael [13], il existe une application continue (mais non linéaire) v, positivement homogène de degré 1, de G dans F telle que :

$$\forall z \in G \qquad d_2f(a,b).v(z) = z$$
$$\exists K > 0 \qquad \forall z \in G \qquad ||v(z)|| \leq K||z||.$$

L'application d_2f étant continue, il existe $r > 0$ tel que

$$B_E(a,r) \times B_F(b,r) \subset U$$

et

$$\forall x \in B_E(a,r), \quad \forall y \in B_F(b,r), \quad ||d_2f(x,y) - d_2f(a,b)|| \leq \frac{1}{2K} \ .$$

L'application f étant continue, il existe s, $0 < s \leq r$, tel que :

$$\forall x \in B_E(a,s) \qquad ||f(x,b)|| \leq \frac{r}{2K} \ .$$

On construit par récurrence une suite d'applications continues ψ_n de $B_E(a,s)$ dans $B_F(b,r)$ par $\psi_o = b$ et

$$\psi_{n+1}(x) = \psi_n(x) - v(f(x,\psi_n(x))) \ .$$

Il faut montrer que si $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n$ prennent leurs valeurs dans $B_F(b,r)$, il en est de même pour ψ_{n+1}. Pour tout k, $1 \leq k \leq n$, on a :

$$f(x,\psi_k(x)) = f(x,\psi_{k-1}(x)) + \left(\int_0^1 d_2f(x,(1-\lambda)\psi_{k-1}(x)+\lambda\psi_k(x))d\lambda\right).(\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)).$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$f(x,\psi_{k-1}(x)) = d_2f(a,b).v(f(x),\psi_{k-1}(x))$$
$$= -d_2f(a,b).(\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x))$$

d'où :

$$f(x,\psi_k(x)) = (\int_0^1 (d_2f(x,(1-\lambda)\psi_{k-1}(x)+\lambda\psi_k(x)) - d_2f(a,b))d\lambda)(\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)).$$

Comme par hypothèse $x \in B_E(a,s)$ et

$$(1-\lambda)\psi_{k-1}(x) + \lambda\psi_k(x) \in B_F(b,r).$$

On a :

$$||f(x,\psi_k(x))|| \leqslant (\frac{1}{2K})||\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)|| = (\frac{1}{2K})||v(f(x,\psi_{k-1}(x)))||$$
$$\leqslant (\frac{1}{2})||f(x,\psi_{k-1}(x))||.$$

d'où :

$$\forall\, k \leqslant n \qquad ||f(x)\psi_k(x))|| \leqslant (\frac{1}{2^k})||f(x,b)||.$$

Alors

$$||\psi_{n+1}(x) - b|| \leqslant \sum_{k=0}^{n} ||\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)||$$
$$\leqslant K \sum_{k=0}^{n} ||f(x,\psi_k(x))|| \leqslant 2K||f(x,b)|| \leqslant r.$$

On peut donc construire ψ_n quel que soit n. La série de terme général $\psi_n - \psi_{n-1}$ est normalement convergente puisque :

$$||\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)|| \leqslant K||f(x,\psi_{n-1}(x))|| \leqslant K\, 2^{-n+1}||f(x,b)|| \leqslant r\, 2^{-n}$$

donc ψ_1 converge uniformément vers une application continue ψ et, en faisant tendre n vers l'infini dans

$$||f(x,\varphi_n(x))|| \leqslant 2^{-n}||f(x,b)||$$

il vient que $f(x,\varphi(x)) = 0$. $\square$

Corollaire :

Les hypothèses étant celles de la proposition, il existe un voisinage V *de* a, *un voisinage* W *de* $c = f(a,b)$ *et une application continue* ϕ *de* $V \times W$ *dans* F *telle que* $\phi(a,c) = b$ *et* $f(x,\phi(x,z)) = z$ *pour tout* (x,z) *de* $V \times W$.

Démonstration :

On applique la proposition à l'application $\tilde{f}$ définie sur un voisinage de (a,c,b) dans $E \times G \times F$ par :

$$\tilde{f}(x,z,y) = f(x,y) - z. \quad \square$$

En appliquant ce corollaire avec $E = \{0\}$, on obtient :

Corollaire (PENOT) :

Soient F *et* G *des espaces de Banach,* U *un ouvert de* F, g *une application de* U *dans* G *de classe* C^1 *et* b *un point de* U. *Si* $dg(b)$ *est surjective, il existe un voisinage* W *de* $c = g(b)$ *et une application continue* Ψ *de* W *dans* F *telle que* $\Psi(c) = b$ *et* $g(\Psi(z)) = z$ *pour tout* z *de* W.

Remarque 1.

L'exemple suivant s'inspire de celui donné par C.O. Kiselman dans [8] ; il montre que la connexité des fibres $\dot{\Omega}_\xi$ est essentiel pour que le principe du Minimum énoncé dans le théorème 1.1. soit valide. Nous étudierons au chapitre IV comment il faut modifier cet énoncé pour se débarrasser de la connexité.

On prend $X = \mathbb{C}$, $G = (\mathbb{C},+)$: le groupe additif et $H = \{y \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}\ y = 0\}$; $G_{/H}$ s'identifie à $\{y \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\ y = 0\}$.

Considérons :

$$\Omega = \{(\xi,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} / \mathrm{Re}(\xi e^{iy}) > 0\}$$

c'est un ouvert pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^2$ invariant par H puisque l'application $(\xi,y) \to \xi e^{iy}$ est holomorphe.

(Voir figure, page 28).

Il est clair que Ω est connexe, les fibres $\dot{\Omega}_\xi$ ne sont pas connexes et la projection ω de Ω sur $\mathbb{C}(\xi)$ est $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

On définit sur Ω :

$$h(\xi,y) = \mathrm{Im}(\mathrm{Log}(\xi e^{iy})) - \mathrm{Re}\ y$$

$$k(\xi,y) = \mathrm{Im}(\mathrm{Log}(\xi e^{iy})) = \mathrm{Arg}(\xi e^{iy})$$

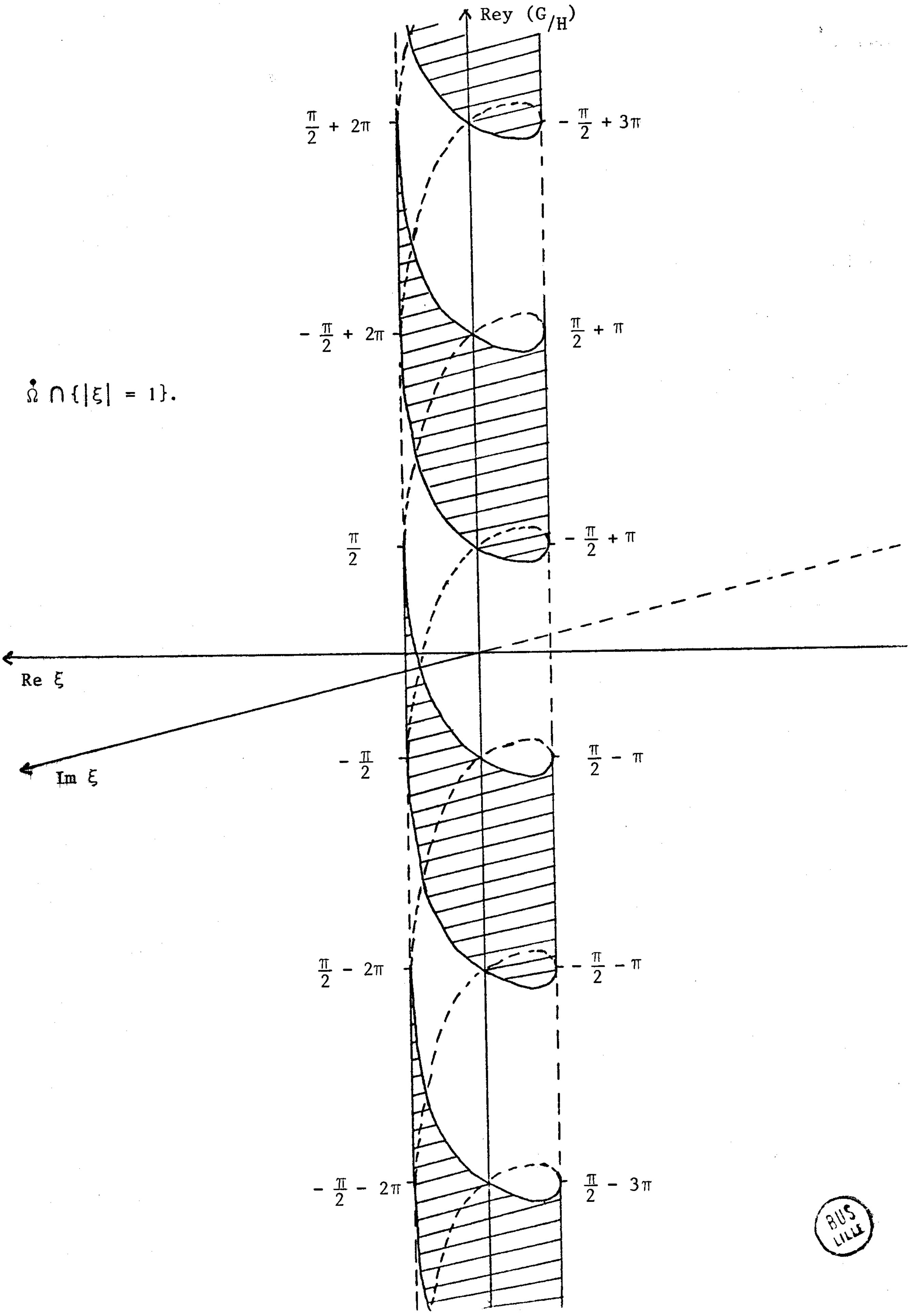
où Log désigne la détermination principale du logarithme.

La détermination principale du logarithme étant holomorphe sur $\{t \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(t) > 0\}$, h et k sont des fonctions indéfiniment différentiables et pluriharmoniques sur Ω.

De plus, $h(\xi,y)$ et $k(\xi,y)$ sont indépendantes de $\mathrm{Im}\ y$ sur Ω, l'argument principal de ξe^{iy} est dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui entraîne : $(\frac{\pi}{2})^2 - (k(\xi,y))^2 > 0$.

On prend :

$$u_\varepsilon(\xi,y) = \varphi_1(\xi,y) + \varepsilon(\mathrm{Re}\ y)^2 + \varepsilon\,\varphi_2(\xi,y)\ ,$$


Rey (G/H)
$\frac{\pi}{2} + 2\pi$
$-\frac{\pi}{2} + 3\pi$
$-\frac{\pi}{2} + 2\pi$
$\frac{\pi}{2} + \pi$
$\overset{\bullet}{\Omega} \cap \{|\xi| = 1\}.$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2} + \pi$
Re ξ
Im ξ
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2} - \pi$
$\frac{\pi}{2} - 2\pi$
$\frac{\pi}{2} - \pi$
$-\frac{\pi}{2} - 2\pi$
$\frac{\pi}{2} - 3\pi$

avec :

$$\psi_1(\xi,y) = \sqrt{(h(\xi,y))^2 + \varepsilon^2}, \qquad \psi_2(\xi,y) = \frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2 - (k(\xi,y))^2} .$$

Il est clair que u_ε est indéfiniment différentiable et indépendante de Im y.

Montrons que ψ_1 et ψ_2 sont plurisousharmonique sur Ω :

• $$\mathcal{L}\psi_1 = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial\psi_1}{\partial z_i \bar{z}_j} a_i\bar{a}_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} + h\frac{\partial h}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) - h\frac{\partial h}{\partial z_i} \cdot \frac{h\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j}}{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}}{h^2+\varepsilon^2} a_i\bar{a}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}\, h\frac{\partial h}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + \sqrt{h^2+\varepsilon^2}\frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} - \frac{h^2}{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}\frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j}}{h^2+\varepsilon^2} a_i\bar{a}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}\, h\frac{\partial h}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}\frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j}}{h^2+\varepsilon^2} a_i\bar{a}_j$$

$$= \frac{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}{h^2+\varepsilon^2}\, h \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial h}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i\bar{a}_j + \frac{\varepsilon^2}{(h^2+\varepsilon^2)\sqrt{h^2+\varepsilon^2}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} a_i\bar{a}_j$$

$$= \frac{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}{h^2+\varepsilon^2}\, h \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial h}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i\bar{a}_j + \frac{\varepsilon^2}{(h^2+\varepsilon^2)\sqrt{h^2+\varepsilon^2}} \left|\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial h}{\partial z_i} a_i\right|^2$$

h étant pluriharmonique, on a $\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial h}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j = 0$

d'où $\mathcal{L}\psi_1 = \frac{\varepsilon^2}{(h^2+\varepsilon^2)\sqrt{h^2+\varepsilon^2}} \left| \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial h}{\partial z_i} a_i \right|^2 \geqslant 0$.

ψ_1 est donc plurisousharmonique.

• $\mathcal{L}\psi_2 = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j =$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{2\left(\frac{\partial k}{\partial z_i}\frac{\partial k}{\partial \bar{z}_j} + k\frac{\partial k}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^2+4k^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)\frac{\partial k}{\partial z_i}\frac{\partial k}{\partial \bar{z}_j}}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^4} a_i \bar{a}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^2 k\frac{\partial k}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + 2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^2\frac{\partial k}{\partial z_i}\frac{\partial k}{\partial \bar{z}_j} + 4k^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)\frac{\partial k}{\partial z_i}\frac{\partial k}{\partial \bar{z}_j}}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^4} a_i \bar{a}_j$$

$$= \frac{2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^2 k \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial k}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j + 2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^2\left|\sum_{i}^{2}\frac{\partial k}{\partial z_i} a_i\right|^2 + 4k^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)\left|\sum_{l=i}^{2}\frac{\partial k}{\partial z_i} a_i\right|^2}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-k^2\right)^4}$$

k étant pluriharmonique, $\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial k}{\partial z_l \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j = 0$

d'où :

$$\mathcal{L}\psi_2 = \frac{2((\frac{\pi}{2})^2 - k^2)^2 \left|\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial k}{\partial z_i} a_i\right|^2 + 4k^2((\frac{\pi}{2})^2 - k^2)\left|\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial k}{\partial z_i} a_i\right|^2}{((\frac{\pi}{2})^2 - k^2)^4} \geqslant 0 \ .$$

ψ_2 est donc plurisousharmonique.

u_ε étant une combinaison linéaire positive de fonctions plurisousharmoniques, elle est aussi plurisousharmonique et pour chaque ξ fixé $u_\varepsilon(\xi,.)$ est strictement plurisousharmonique sur la fibre Ω_ξ puisque la fonction $y \to (\mathrm{Re}\ y)^2$ est strictement plurisousharmonique.

Maintenant, montrons que $\dot{u}_\varepsilon(\xi,.)$ est d'exhaustion sur la fibre $\dot{\Omega}_\xi$.

Pour $(\xi,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $\dot{u}_\varepsilon(\xi,y) = u_\varepsilon(\xi,y)$.

Lorsque y dans $\dot{\Omega}_\xi$ tend vers un point frontière $|k(\xi,y)|$ tend vers $\frac{\pi}{2}$; lorsque y tend vers l'infini $\dot{u}_\varepsilon(\xi,y)$ tend vers $+\infty$; ainsi $\dot{u}_\varepsilon(\xi,.)$ n'est pas borné supérieurement sur toute partie non relativement compact dans $\dot{\Omega}_\xi$.

Supposons que $v_\varepsilon(\xi) = \operatorname{Inf}_y u_\varepsilon(\xi,y)$ soit plurisousharmonique sur ω, alors $v(\xi) = \operatorname{Inf}_\varepsilon v_\varepsilon(\xi)$ serait aussi plurisousharmonique sur ω, car v croit avec ε.

On a $v(\xi) = \operatorname{Inf}_y |h(\xi,y)|$.

Pour $\mathrm{Arg}(\xi) \in \left]-\pi,\pi\right]$,

$$\mathrm{Arg}(\xi e^{iy}) = \mathrm{Arg}\ \xi + \mathrm{Re}\ y + 2p(y)\pi, \qquad p(y) \in \mathbb{Z}.$$

$$h(\xi,y) = \mathrm{Arg}(\xi e^{iy}) - \mathrm{Re}\ y = \mathrm{Arg}\ \xi + 2p(y)\pi.$$

d'où $v(\xi) = \operatorname{Inf}_y |h(\xi,y)| = \operatorname{Inf}_y |\mathrm{Arg}\ \xi + 2p(y)\pi| = |\mathrm{Arg}\ \xi|$.

Or $|\mathrm{Arg}\ \xi|$ n'est pas sousharmonique au voisinage de -1, car cette fonction atteignant son maximum au point intérieur -1, serait constante.

Remarque 2.

La condition (ii) entraîne que chaque fibre Ω_ξ est de Stein lorsque G est normal.

En effet, H est alors de la forme $\mathbb{R}^\ell \times K$; désignons par $(z,\tilde{k})$ un point de $\mathbb{C}^\ell \times \tilde{K}$; la fonction :

$\Psi(\xi,z,\tilde{k}) = u(\xi,z,\tilde{k}) + \sum_{i=1}^{\ell} (\mathrm{Re}\ z_i)^2$ est strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur Ω_ξ.

Application :

On suppose que X est une variété de Stein et G est un groupe de Lie complexe connexe, complexifié de l'un de ses sous-groupes compacts maximaux K (Ex : $Gl(n,\mathbb{C})$ ou $(\mathbb{C}^*)^m$). La variété est alors de Stein [7] ; soit u une fonction strictement plurisousharmonique, de classe C^∞ et d'exhaustion sur $X \times G$. Posons :

$$\tilde{u}(\xi,g) = \int u(\xi,gk)dk$$

où dk est la mesure de Haar, normalisée et invariante à gauche de K.

Définition 2.1.

Une variété analytique complexe est dite faiblement pseudo-convexe si elle possède une fonction d'exhaution plurisousharmonique.

Théorème 2.2.

La projection de l'ouvert de Stein $\Omega_u = \{(\xi,g) \in X \times G \;;\; \tilde{u}(\xi,g) < c\}$ *sur* X *est faiblement pseudo-convexe.*

Démonstration :

La fonction $\tilde{u}$ est clairement strictement plurisousharmonique (son minorant de plurisousharmonicité en (ξ,g) est minoré par l'infimum des minorants de plurisousharmonicité de u sur le compact $\{\xi\} \times g.K$; la fonction $\frac{1}{c-\tilde{u}}$ est donc strictement plurisousharmonique de classe C^∞ et d'exhaustion sur l'ouvert Ω_u, invariante à droite par K ainsi que Ω_u ; les fibres $\dot{\Omega}_\xi$ dans $G_{/K}$ sont connexes, car sinon $\dot{\tilde{u}}(\xi,.)$ aurait au moins deux minima locaux distincts dans $G_{/K}$ contrairement au théorème 1.2.

On peut appliquer le théorème 2.1. à la fonction $\frac{1}{c-\tilde{u}}$; en prenant l'infimum sur chaque fibre $(\Omega_u)_\xi$, on obtient une fonction d'exhaustion plurisousharmonique sur la projection de Ω_u sur X. □

CHAPITRE III

PRINCIPE DU MINIMUM

(Cas général)

Définition 3.1.

Soit u *une fonction semi-continue supérieurement sur une variété analytique complexe connexe* M *et* θ *une* (1,1)*-forme hermitienne continue sur* M *; on dira que la forme de Levi de* u *est minorée par* θ *(abrév.* $\mathcal{L}u \geq \theta$*) si pour tout* $\psi \in \mathcal{D}_+(M)$, *on a :*

$$(1) \quad \int u(x)\, \mathcal{L}_x \psi(X,X)\, d\lambda(x) \geq \int \psi(x)\theta_x(X,X)\, d\lambda(x), \quad \forall\, X \in T^{1,0}(M)$$

où $d\lambda$ *est une mesure positive sur* M, *équivalente dans toute carte locale à la mesure de Lebesgue.*

On sait [10] que u est plurisousharmonique sur M si sa forme de Levi admet un minorant positif ; de plus, si $u = v + w$, avec v plurisousharmonique et w strictement plurisousharmonique de classe C^∞, alors une intégration par partie montre que $\mathcal{L}u \geq \mathcal{L}w$.

Supposons maintenant que M soit un groupe de Lie complexe de dimension m et $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie ; soit χ une fonction de $\mathcal{D}_+(\mathbb{R})$ à support dans l'intervalle $[-1,1]$, normalisée par $\int_{\mathbb{C}^n} \chi(|z|^2)\, d\lambda(z) = 1$.

Pour toute fonction u, semi-continue supérieurement sur un ouvert Ω de M, on pose :

(2) $$u_\varepsilon(x) = \int u((\mathrm{Exp}\, z'Y)x)\chi_\varepsilon(z')d\lambda(z')$$

avec $$\chi_\varepsilon(z) = \left(\frac{|z|^2}{\varepsilon^2}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2m}}$$

$Y = (Y_1,\dots,Y_m)$: une base de $T^{1,0}(\mathcal{M})$.

Proposition 3.1.

Etant donnée une fonction u *semi-continue supérieurement sur un ouvert* Ω *du groupe de Lie* M *dont la forme de Levi est minorée par* θ, *alors étant donné un compact* K *de* M, u_ε *est de classe* C^∞ *sur un voisinage de* K *pour* ε *assez petit et* $\mathcal{L}u_\varepsilon \geq \theta_\varepsilon$ *où* θ_ε *est une* (1-1)*-forme hermitienne convergeant uniformément sur tout compact vers* θ *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

De plus, si u *est plurisousharmonique,* u_ε *croit avec* ε *et converge simplement vers* u *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

a) Construction de θ_ε : Il suffit de la construire localement, son existence globale s'obtiendra ensuite par une partition C^∞ de l'unité.

Soit $x_o \in \Omega$; posons $\tilde{u}(z) = u((\mathrm{Exp}\, zY).x_o)$, pour z assez petit, tel que $z \mapsto \mathrm{Exp}zY$ soit une carte locale.

On sait, d'après la formule de Campbell-Hausdorff que :

$$\mathrm{Exp}z'Y.\mathrm{Exp}zY = \mathrm{Exp}\, \eta(z',z)Y ,$$

où η est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$.

L'application :

$$\eta_{z'} : z \to \eta(z',z).$$

est biholomorphe dans un voisinage U de l'origine de $\mathbb{C}^m$, et la différentielle partielle $d_z\eta_{z'}$ converge uniformément vers l'identité lorsque z' tend vers 0.

Alors :

(3) $$\int \tilde{u}_\varepsilon(z)\,\mathcal{L}_z\psi(X,X)d\lambda(z) = \int \tilde{u} \circ \eta_{z'}(z)\,\mathcal{L}_z\psi(X,X)\chi_\varepsilon(z')d\lambda(z)d\lambda(z') .$$

Prenons ψ dans $\mathcal{D}_+(U)$, alors $\Psi_{z'} = \psi \circ \eta_{z'}^{-1}$ est dans $\mathcal{D}_+(\mathbb{C}^m)$ pour z' assez petit et :

$$\mathcal{L}_z\psi(X,X) = \mathcal{L}_{\eta_{z'}(z)}\Psi_{z'}(d_z\eta_{z'}(X),d_z\eta_{z'}(X))$$

Effectuons dans (3) le changement de variable :

$$\eta_{z'}(z) = \xi.$$

(4) $$\int \tilde{u}_\varepsilon(z)\,\mathcal{L}_z\psi(X,X)d\lambda(z) =$$

$$= \int \tilde{u}(\xi)\,\mathcal{L}_\xi\Psi_{z'}(d_z\eta_{z'}(X),d_z\eta_{z'}(X)) \left|\frac{dz}{d\xi}\right|^2 \chi_\varepsilon(z')d\lambda(\xi)d\lambda(z')$$

$$\geqslant \int \Psi_{z'}(\xi)\tilde{\theta}_\xi\left(d_z\eta_{z'}(X).\left|\frac{dz}{d\xi}\right| , d_z\eta_{z'}(X).\left|\frac{dz}{d\xi}\right|\right)\chi_\varepsilon(z')d\lambda(\xi)d\lambda(z').$$

En effectuant le changement de variable inverse, on constate que :

$$\mathcal{L}\,\tilde{u}_\varepsilon \geqslant \tilde{\theta}_\varepsilon$$

avec

(5) $$(\tilde{\theta}_\varepsilon)_z(X,X) = \int \tilde{\theta}_{\eta_{z'}(z)}(d_z\eta_{z'}(X),d_z\eta_{z'}(X))\chi_\varepsilon(z')d\lambda(z') .$$

On a ainsi construit θ_ε vérifiant (1) dans un voisinage de x_o . Soit maintenant ε_o telle que u_ε soit définie dans un voisinage

W de K, pour $\varepsilon < \varepsilon_o$.

Soit un ouvert relativement compact V vérifiant $K \subset V \subset \bar{V} \subset W$; recouvrons $\bar{V}$ par un nombre fini d'ouverts (U_i) sur lesquels sont définies θ^i_ε au moyen de la relation (5) et minorants $\mathcal{L}u_\varepsilon$ sur U_i . Soit (α_i) une partition C^∞ de l'unité sur $\bar{V}$, subordonnée au recouvrement (U_i) ; posons $\theta_\varepsilon = \sum_i \alpha_i \theta^i_\varepsilon$, avec $\varepsilon < \varepsilon_o$.

Pour tout ψ dans $\mathcal{D}_+(V)$, on a :

$$\int u(x)\, \mathcal{L}_x \psi(X,X)d\lambda(x) = \sum_{i,j} \int \alpha_i(x)\alpha_j(x)u(x)\mathcal{L}_x\psi(X,X)d\lambda(x) =$$

$$= \sum_{i,j} \int_{U_i \cap U_j} u(x)\mathcal{L}_x\psi(\alpha_i(x)X,\alpha_j(x)X)d\lambda(x) \geqslant \sum_{i,j}\int_{U_i\cap U_j} \psi(x)(\theta^i_\varepsilon)_x(\alpha_i(x)X,\alpha_j(x)X)d\lambda(x)$$

$$= \sum_j \int \psi(x)\alpha_j(x)(\theta_\varepsilon)_x(X,X)d\lambda(x) = \int \psi(x)(\theta_\varepsilon)_x(X,X)d\lambda(x).$$

Ainsi θ_ε minore $\mathcal{L}u$ sur V.

En effectuant le changement de variable $z' = \varepsilon z''$, on constate que θ_ε converge uniformément vers θ sur K lorsque $\varepsilon \to 0$ car $\eta_{\varepsilon z''}$ converge uniformément vers l'identité dans le domaine d'intégration.

b) La régularité de u_ε s'obtient à partir de l'expression :

$$\tilde{u}_\varepsilon(z) = \int \tilde{u} \circ \eta_z(z')\chi_\varepsilon(z')d\lambda(z')$$

en effectuant le changement de variable $\xi = \eta_z(z')$ qui est régulier en z comme on l'a vu plus haut.

c) Supposons que u est plurisousharmonique ; on peut prendre $\theta = 0$.

$$u_\varepsilon(x) = \int u((\mathrm{Exp}\varepsilon z'Y).x)\chi(|z'|^2)d\lambda(z') \; .$$

Sur cette expression, on constate que $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon(x)$ est une fonction sousharmonique du complexe ε qui ne dépend que de $|\varepsilon|$, il est classique que u croit avec ε ; la convergence vers u lorsque $\varepsilon \to 0$ est alors conséquence de la semi-continuité supérieure de u. □

<u>Remarque</u> :

Si u est invariante à droite par un sous-groupe de M, alors u_ε est aussi invariante par ce sous-groupe.

<u>Théorème</u> 3.1. (Principe du Minimum) :

Soit M *et* G *deux groupes de Lie complexes connexes de dimension* m *et* n. *On suppose que* G *admet un sous-groupe fermé* H *comme forme réelle. On désigne par* $(\dot{})$ *l'image d'un objet de* $M \times G$ *dans* $M \times G_{/H}$ *par l'application canonique.*

Soit Ω *un ouvert de* $M \times G$, *invariant à droite par* H *tel que les fibres* $\dot{\Omega}_\xi$ *de* $\dot{\Omega}$ *au-dessus des points* ξ *de* M *soient connexes.*

On suppose qu'il existe une fonction φ *plurisousharmonique sur* Ω, *invariante à droite par* H, *telle que* $\dot{\varphi}$ *soit d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}$ *et dont la forme de Levi est minorée par une* (1-1)*-forme hermitienne continue* θ *strictement positive et invariante à droite par* H.

Alors, pour toute fonction u *plurisousharmonique sur* Ω *et invariante à droite par* H,

$$v(\xi) = \operatorname*{Inf}_{g} u(\xi,g)$$

est plurisousharmonique sur la projection ω *de* Ω *sur* M.

Avant d'établir ce résultat, discutons l'existence de la fonction ψ.

<u>*Proposition*</u> *3.2.*

Lorsque l'ouvert Ω *est de Stein et invariant à droite par* H *dans* M × G, *on peut assurer l'existence d'une telle fonction* ψ *dans les deux cas suivants :*

a) G *est le complexifié de l'un de ses sous-groupes compacts maximaux* K *: c'est-à-dire* $\mathcal{K} \cap J\mathcal{K} = \{0\}$ et $\operatorname{Re} \mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus J\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ *désigne l'algèbre de Lie de* K.

On prend H = K.

b) Les variétés de M *et* G *sont des ouverts dans des espaces* $\mathbb{C}^?$, **G** *est, de plus, normal et de Stein : c'est-à-dire de la forme* $\mathbb{C}^\ell \times \tilde{K}$, *où* $\tilde{K}$ *est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal* K *de* G *(par exemple,* $\tilde{K} = Gl(n,\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^*)^m$). *On prend alors* $H = \mathbb{R}^\ell \times K$.

<u>*Démonstration*</u> :

a) Il existe une fonction Ψ strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur Ω [7] ; on prend

$$\psi(\xi,\tilde{k}) = \int \Psi(\xi,\tilde{k}.k)\,dk$$

où dk désigne la mesure de Haar normalisée et invariante à gauche de K.

ψ est strictement plurisousharmonique car ψ admet comme minorant de plurisousharmonique au point $(\xi,\tilde{k})$, l'infimum des minorants de plurisousharmonicité de Ψ sur le compact $\{\xi\}\times\tilde{k}.K$.

$\dot{\Omega}^{c}_{\psi}$ est contenu dans $\dot{\Omega}^{c'}_{\Psi}$ pour $c' > c$ et $\dot{\Omega}^{c'}_{\Psi}$ est relativement compact dans $\dot{\Omega}$, ainsi $\dot{\psi}$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}$.

ψ est évidemment invariante à droite par K.

b) Désignons par d^{Ω} la distance au bord de Ω ; puisque Ω est pseudoconvexe, $-\operatorname{Log} d^{\Omega}$ est plurisousharmonique [7] et invariante par $\mathbb{R}^{\ell}$ comme Ω.

Désignons par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et par $(\xi,z,\tilde{k})$ un point courant de $M \times (G = \mathbb{C}^{\ell} \times \tilde{K})$. Puisque $\tilde{K}$ est de Stein, il existe une fonction Ψ strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur $\tilde{K}$.

Soit $\theta(\xi,z,\tilde{k}) = \int \Psi(\tilde{k}k)dk + \|\operatorname{Im} z\|^2 + \|\xi\|^2$ et prenons pour ψ la fonction $\operatorname{Max}\left[\theta, \int -\operatorname{Log} d^{\Omega}(\xi,z,\tilde{k}k)dk\right]$.

ψ est invariante à droite par $H = (\operatorname{Re} \mathbb{C}^{\ell}) \times K$, et sa forme de Levi est minorée par celle de θ qui est strictement positive.

$\dot{\theta}$ est d'exhaustion dans le produit cartésien de l'espace $\mathbb{C}^?$ sous-jacent à M par $G_{/H}$.

Alors Ω_{ψ}^{c} est contenu dans $\{(\xi,z,\tilde{k}) \in M \times G / \theta(\xi,z,\tilde{k}) < c\}$; ainsi $\dot{\Omega}_{\psi}^{c}$ est relativement compact dans $\mathbb{C}^? \times G_{/H}$. Soit $c' > c$; quelque soit $(\xi,z,\tilde{k})$ dans Ω_{ψ}^{c}, $-\operatorname{Log} d^{\Omega}(\xi,z,\tilde{k}k)$ prend une valeur $< c'$ pour au moins un k dans K.

Ainsi, tout point de $\dot{\Omega}_{\psi}^{c}$ possède un voisinage contenu dans $\dot{\Omega}$, ce qui établit la compacité de $\overline{\dot{\Omega}_{\psi}^{c}}$ dans $\dot{\Omega}$. □

Démonstration du Principe du Minimum (*théorème 3.1.*) :

La fonction $v(\xi) = \operatorname{Inf}_{g} u(\xi,g)$ est semi-continue supérieurement, puisque les fonctions $u(\xi,g)$ sont semi-continues supérieurement en ξ.

Soit ω_1 un ouvert connexe relativement compact dans ω.

Dans un premier temps, on suppose que $\dot{u}$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}$.

v étant s.c.s., elle est donc bornée supérieurement sur ω_1 :

$$v < a \quad \text{sur} \quad \omega_1 .$$

Ainsi, pour tout $\xi \in \omega_1$, il suffit de prendre l'infimum sur les fibres $\dot{\Omega}^a_\xi$:

$$v(\xi) = \operatorname*{Inf}_{g} u(\xi,g) = \operatorname*{Inf}_{\dot{g}} \dot{u}(\xi,\dot{g}) = \operatorname*{Inf}_{\dot{g}\in\dot{\Omega}^a_\xi} \dot{u}(\xi,\dot{g}) .$$

$\overline{\dot{\Omega}^a}$ étant compact dans $\dot{\Omega}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overline{\dot{\Omega}^a} \subset \dot{\Omega}^b_\psi = \{(\xi,\dot{g}) \in \dot{\Omega}/\dot{\psi}(\xi,\dot{g}) < b\} \subset\subset \dot{\Omega} .$$

Soit ξ_o dans ω_1 ; la fibre de $\overline{\dot{\Omega}^b_\psi}$ au-dessus de ξ_o est compacte et contenue dans l'ouvert connexe $\dot{\Omega}_{\xi_o}$ de $G_{/H}$, elle est donc contenue dans un compact K connexe de $\dot{\Omega}_{\xi_o}$. Il existe alors un voisinage connexe $\dot{W}$ de K dans $G_{/H}$ et un voisinage connexe ω_o de ξ_o tel que :

$$\omega_o \times \dot{W} \subset\subset \dot{\Omega} .$$

Maintenant, en restreignant ce voisinage ω_o de ξ_o s'il le faut, on peut supposer :

$$(\omega_o \times G_{/H}) \cap \dot{\Omega}^b_\psi \subset \omega_o \times \dot{W} \subset\subset \dot{\Omega} .$$

Soit c tel que $\overline{\omega_o \times \dot{W}} \subset \dot{\Omega}^c_\psi \subset\subset \dot{\Omega}$

Il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que u_ε soit indéfiniment différentiable, plurisousharmonique et invariante à droite par H, sur $\overline{\Omega^c_\psi}$ pour $\varepsilon < \varepsilon_o$.

Soit $c' > c$, appliquons la proposition 3.1. aux fonctions u et ψ sur le compact $\overline{\dot{\Omega}^{c'}_\psi}$; il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que u_ε (resp. ψ_ε)

soit indéfiniment différentiable plurisousharmonique (resp. strictement plurisousharmonique) et invariante à droite par H, sur $\overline{\Omega_{\psi}^{c'}}$ pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$; u_ε et ψ_ε convergent vers u et ψ en décroissant lorsque $\varepsilon \to 0$; d'après le théorème de Dini, on peut choisir ε_o tel que $\psi_{\varepsilon_o} < c'$ sur Ω_{ψ}^{c}.

Posons $\psi_o = \psi_{\varepsilon_o}$:

$$\overline{\omega_o \times \dot{W}} \subset \dot{\Omega}_{\psi}^{c} \subset \dot{\Omega}_{\psi_o}^{c'} \subset \dot{\Omega}_{\psi}^{c'} .$$

Considérons la fonction :

$$\hat{u}_\varepsilon(\xi,g) = u_\varepsilon(\xi,g) + \frac{\varepsilon}{c'-\psi_o(\xi,g)} \quad ;$$

elle est de classe C^∞, croissante par rapport à ε sur $\Omega_{\psi}^{c'}$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \hat{u}_\varepsilon = u$.

Calculons la forme de Levi de $\hat{u}_\varepsilon$:

$$\mathcal{L}\,\hat{u}_\varepsilon = \sum_{j,k=1}^{m+n} \frac{\partial^2 \hat{u}_\varepsilon}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k$$

$$\mathcal{L}\,\hat{u}_\varepsilon = \mathcal{L} u_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{(c'-\psi_o)^2} \mathcal{L}\,\psi_o + \frac{2\varepsilon}{(c'-\psi_o)^3} \sum_{j,k=1}^{m+n} \frac{\partial \psi_o}{\partial z_j} \frac{\partial \psi_o}{\partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k$$

$$= \mathcal{L} u_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{(c'-\psi_o)^2} \mathcal{L}\,\psi_o + \frac{2\varepsilon}{(c'-\psi_o)^3} \left| \sum_{j=1}^{m+n} \frac{\partial \psi_o}{\partial z_j} a_j \right|^2 .$$

ψ_o étant C^∞ strictement plurisousharmonique et invariante à droite par H, $\hat{u}_\varepsilon$ est donc aussi de classe C^∞, strictement plurisousharmonique sur $\Omega_{\psi}^{c'}$ et invariante à droite par H, pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$.

D'autre part, la fonction $\dot{u}_\varepsilon$ est continue sur $\bar{\dot{\Omega}}^{c'}_{\psi}$, la fonction $\hat{\dot{u}}_\varepsilon = \dot{u}_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{c'-\dot{\psi}_o}$ a donc la propriété d'exhaustion sur $\dot{\Omega}^{c'}_{\psi_o}$ et par conséquent sur chaque composante connexe des fibres $(\dot{\Omega}^{c'}_{\psi_o})_\xi$.

Désignons par $\dot{\Gamma}_\xi$ la composante connexe de $\dot{W}$ dans $(\dot{\Omega}^{c'}_{\psi_o})_\xi$. La réunion des $\{\xi\} \times \dot{\Gamma}_\xi$ lorsque ξ décrit ω_o est un ouvert $\dot{\Omega}_o$ connexe dans $\dot{\Omega}$, en effet :

Soit ξ_o dans ω_o et $\dot{g}$ dans $\dot{\Gamma}_{\xi_o}$, il existe un compact K contenant $\dot{g}$, coupant $\dot{W}$ et contenu dans $\dot{\Gamma}_{\xi_o}$; soit $\omega_2 \times \dot{U}$ un voisinage connexe de $\{\xi_o\} \times K$ contenu dans $\dot{\Omega}^{c'}_{\psi_o} \cap \omega_o \times G_{/H}$; alors, $\dot{U}$ est contenu dans $\dot{\Gamma}_\xi$ quelque soit ξ dans ω_2 ; ainsi $\omega_2 \times \dot{U}$ est un voisinage de $(\xi_o,\dot{g})$ contenu dans $\dot{\Omega}_o$.

En résumé $\hat{u}_\varepsilon$ est indéfiniment différentiable, strictement plurisousharmonique sur Ω_o, invariante à droite par H et $\hat{\dot{u}}_\varepsilon(\xi,.)$ est d'exhaustion sur chacune des fibres $\dot{\Omega}_{o_\xi}$ qui sont de plus connexes, on peut donc lui appliquer le théorème 2.1., et par suite :

$$v(\xi) = \operatorname*{Inf}_{g} \dot{u}(\xi,\dot{g}) = \operatorname*{Inf}_{\dot{g}\in\dot{\Omega}^a_\xi} \dot{u}(\xi,\dot{g}) = \operatorname*{Inf}_{\dot{g}\in\dot{\Omega}^b_\xi} \dot{u}(\xi,\dot{g})$$

$$= \operatorname*{Inf}_{\dot{g}\in\dot{W}} \dot{u}(\xi,\dot{g}) = \operatorname*{Inf}_{g\in\dot{\Omega}_{o_\xi}} \dot{u}(\xi,\dot{g}) =$$

$$= \operatorname*{Inf}_{\dot{g}\in\dot{\Omega}_{o_\xi}} \operatorname*{Inf}_{\varepsilon} \hat{\dot{u}}_\varepsilon(\xi,\dot{g}) = \operatorname*{Inf}_{\varepsilon} \operatorname*{Inf}_{\dot{g}\in\dot{\Omega}_{o_\xi}} \hat{\dot{u}}_\varepsilon(\xi,\dot{g})$$

$$= \operatorname*{Inf}_{\varepsilon} v_\varepsilon(\xi).$$

Or v_ε est plurisousharmonique sur ω_o d'après le théorème 2.1. et tend vers v en décroissant lorsque $\varepsilon \to 0$. Ainsi v est plurisousharmonique sur ω_o. Le théorème 3.1. est donc démontré lorsque $\dot{u}$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}$.

Maintenant, on considère u plurisousharmonique sur Ω et invariante à droite par H (sans hypothèse supplémentaire).

Posons

$$u_k = \mathrm{Sup}(-k,u) + \frac{\psi^+}{k} \quad .$$

u_k est plurisousharmonique sur Ω, invariante à droite par H et $\dot{u}_k$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}$, car $\{(\xi,\dot{g}) \in \dot{\Omega}\ ;\ \dot{u}_k(\xi,g) < a\}$ est contenu dans $\dot{\Omega}_{\psi}^{ak-k^2}$.

D'après la première partie, la fonction

$$v_k(\xi) = \operatorname*{Inf}_{g} u_k(\xi,g)$$

est plurisousharmonique sur ω ; or v_k converge en décroissant vers v, ce qui termine la démonstration du théorème 3.1. □

<u>Corollaire</u> 3.1.

M *et* G *sont deux groupes de Lie complexes connexes,* G *admettant un sous-groupe fermé* H *comme forme réelle ;* Ω *est un ouvert de* $M \times G$*, si* Ω *vérifie les propriétés énoncées au théorème 3.1., sa projection* ω *sur* M *est faiblement pseudoconvexe.*

En particulier, G *étant de Stein et normal, si* $G = \tilde{K}$ *ou si la variété de* G *est un ouvert de* $\mathbb{C}^?$*, alors la projection sur* M *d'un ouvert de Stein dans* $M \times G$*, invariant à droite par* H *et à fibres au-dessus de* M *connexes, est un ouvert faiblement pseudoconvexe ; si la variété de* M *est aussi un ouvert de* $\mathbb{C}^?$*, alors cette projection est de Stein.*

Démonstration :

La fonction $v(\xi) = \operatorname{Inf}_{\dot{g}} \dot{\psi}(\xi,\dot{g})$ est plurisousharmonique sur ω, d'après le théorème 3.1., de plus v est d'exhaustion car l'ensemble $\{\xi \in \omega \; ; v(\xi) < c\}$ est la projection de $\{(\xi,\dot{g}) \in \dot{\Omega}/\dot{\psi}(\xi,\dot{g}) < c'\}$, pour $c' = c$ et ce dernier est relativement compact dans $\dot{\Omega}$.

Dans le cas particulier cité où ω est un ouvert d'une puissance de $\mathbb{C}$, on sait alors [7] que les ouverts faiblement pseudoconvexes sont de Stein. □

Remarque : Extrayons du dernier résultat les deux cas particuliers suivants :

- $M = \mathbb{C}^n$ et $G = \mathbb{C}^\ell$; le corollaire 3.1. est alors le corollaire de C.O. Kiselman dans [8].
- M est un groupe de Lie complexe connexe, $G = (\mathbb{C}^*)^m$ et Ω est un ouvert de Stein dans $M \times G$ dont les fibres au-dessus de M sont des domaines de Reinhardt, alors la projection de Ω sur M est faiblement pseudoconvexe et donc de Stein lorsque la variété de M est un ouvert d'un espace $\mathbb{C}^?$.

CHAPITRE IV

NOUS ETENDONS ICI LE PRINCIPE DU MINIMUM AU CAS OU LES FIBRES DE L'OUVERT $\dot{\Omega}$ NE SONT PAS CONNEXES.

A cette fin, on utilise une idée de C.O. Kiselman [8] qui consiste à identifier les points situés sur une même composante connexe d'une fibre pour en faire une variété étalée sur laquelle le Principe du Minimum s'appliquera.

Les notations sont les mêmes qu'au chapitre III.

M et G sont deux groupes de Lie complexes et connexes ; on suppose que G admet un sous-groupe fermé H comme forme réelle.

Soit Ω un ouvert de $M \times G$, invariant à droite par H ; on considère sur $\dot{\Omega}$ la relation d'équivalence définie ainsi : $(\xi,\dot{g}) \sim (\xi',\dot{g}')$ si et seulement si : $\xi = \xi'$, $\dot{g}$ et $\dot{g}'$ sont dans une même composante connexe de la fibre $\dot{\Omega}_\xi$ au-dessus du point ξ de M.

Soit Γ l'espace topologique quotient $\dot{\Omega}/\sim$.

On désignera par p, la projection de Γ sur M.

Théorème 4,1.

Sous les hypothèses du théorème 3.1., c'est-à-dire s'il existe une fonction Ω, *plurisousharmonique sur* Ω, *invariante à droite par* H, *telle que* $\dot{\psi}$ *soit d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}$ *et dont la forme de Levi est minorée par une* (1-1)*-forme hermitienne strictement positive, continue et invariante à droite par* H.

Alors :

Γ *est une variété étalée par* p *sur la projection* ω *de* Ω *sur* M.

<u>*Démonstration*</u> :

L'étape essentielle consiste à vérifier que la topologie de Γ est séparée.

A cet effet, on va montrer que [2] la relation $\sim$ est ouverte et que l'ensemble :

$$C = \{((\xi,\dot{g}),(\xi',\dot{g}')) \in \dot{\Omega} \times \dot{\Omega} / (\xi,\dot{g}) \sim (\xi',\dot{g}')\}$$

est fermé dans $\dot{\Omega} \times \dot{\Omega}$.

Montrons, d'abord, que la relation $\sim$ est ouverte, c'est-à-dire que le saturé d'un ouvert de $\dot{\Omega}$ est aussi un ouvert de $\dot{\Omega}$:

Soit Δ un ouvert de $\dot{\Omega}$, et posons $\mathrm{Sat}(\Delta)$ le saturé de Δ.

Soit $(\xi_o,\dot{g}_o) \in \mathrm{Sat}(\Delta)$; il existe $\dot{g}_1 \in G_{/H}$ tel que $(\xi_o,\dot{g}_1) \in \Delta$ et $(\xi_o,\dot{g}_1) \sim (\xi_o,\dot{g}_o)$, c'est-à-dire $\dot{g}_o$ et $\dot{g}_1$ appartiennent à une même composante connexe T de la fibre $\dot{\Omega}_{\xi_o}$.

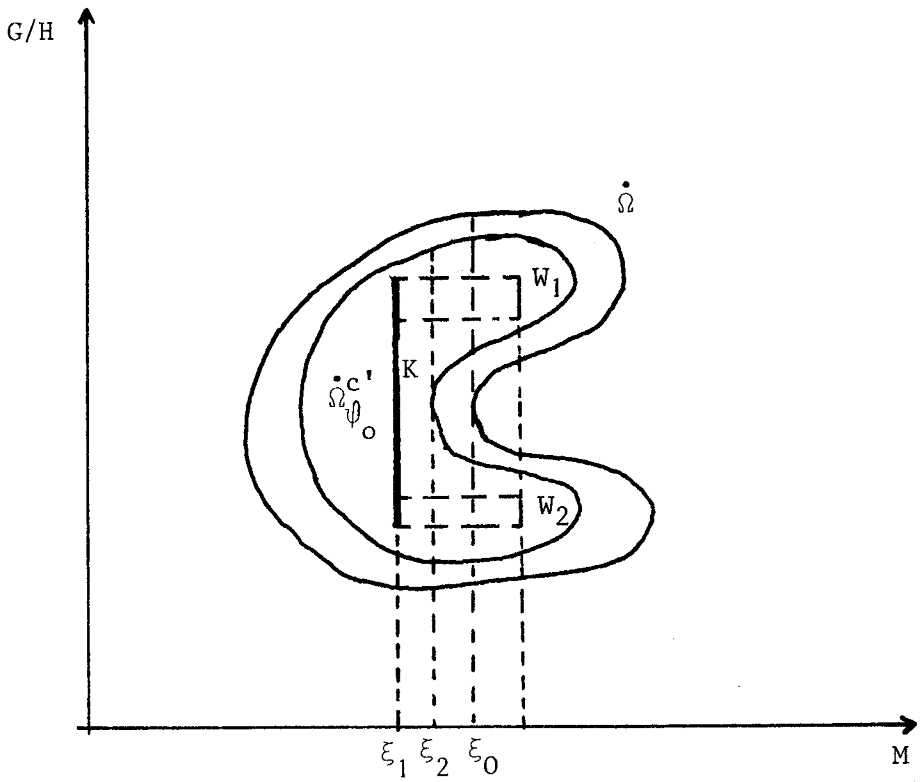
Puisque $G_{/H}$ est localement connexe, T est une sous-variété connexe, localement connexe et ouverte de $G_{/H}$; il existe donc un compact connexe K contenu dans T et contenant $\dot{g}_o$ et $\dot{g}_1$.

Il existe alors ω_o et W voisinages connexes de respectivement ξ_o et K tels que $\omega_o \times W$ soit contenu dans $\dot{\Omega}$. En prenant ω_o assez petit, il existe un voisinage connexe U de $\dot{g}_1$ dans $G_{/H}$ tel que $\omega_o \times U$ soit contenu dans Δ et U contenu dans W. Dans ces conditions :

$\omega_o \times W \subset \mathrm{Sat}(\omega_o \times U) \subset \mathrm{Sat}(\Delta)$.

Ainsi $\omega_o \times W$ est un voisinage de $(\xi_o, \dot{g}_o)$ contenu dans $\mathrm{Sat}(\Delta)$, ce qui prouve que ce dernier est ouvert.

Soit maintenant $((\xi_o, \dot{g}_1), (\xi_*, \dot{g}_2)) \in \bar{C}$, où évidemment $\xi_o = \xi_*$.



Soit ω_o, W_1 et W_2 des voisinages connexes de respectivement ξ_o, $\dot{g}_1$ et $\dot{g}_2$ tels que $\omega_o \times W_1$ et $\omega_o \times W_2$ soient relativement compacts dans $\dot{\Omega}$.

Puisque $((\xi_o, \dot{g}_1), (\xi_o, \dot{g}_2))$ est adhérent à C, il existe ξ_1 dans ω_o tel que $\dot{g}_1$ et $\dot{g}_2$ soient dans une même composante connexe de $\dot{\Omega}_{\xi_1}$, il existe alors un compact connexe K de $\dot{\Omega}_{\xi_1}$ contenant W_1 et W_2 ; par suite, pour un c convenable, $\dot{\Omega}^c_{\psi}$ contient $K \cup (\omega_o \times W_1) \cup (\omega_o \times W_2)$. Prenons $c' > c$; d'après la proposition 3.1., il existe $\psi_o \geq \psi$, strictement plurisousharmonique sur $\bar{\Omega}_\psi^{c'}$ et invariante à droite par H telle que :

$$\dot{\Omega}_\psi^c \subset \dot{\Omega}_{\psi_o}^{c'} \subset \dot{\Omega}_\psi^{c'} \quad .$$

Désignons par $\Gamma_\xi(\dot{g}_1)$ et $\Gamma_\xi(\dot{g}_2)$ les composantes connexes de $\dot{g}_1$ et $\dot{g}_2$ dans $(\dot{\Omega}_{\psi_o}^{c'})$ pour ξ dans ω_o et introduisons $\omega_1 = \{\xi \in \omega_o \; ; \; \Gamma_\xi(\dot{g}_1) = \Gamma_\xi(\dot{g}_2)\}$, c'est un ouvert contenant ξ_1.

Supposons que C ne soit pas fermé, c'est-à-dire que $\dot{g}_1$ et $\dot{g}_2$ ne soient pas dans une même composante connexe de $\dot{\Omega}_{\xi_o}$; a fortiori, $\Gamma_{\xi_o}(\dot{g}_1)$ et $\Gamma_{\xi_o}(\dot{g}_2)$ seraient disjoints et ξ_o ne serait pas dans ω_1 ; ainsi il existerait ξ_2 sur la frontière de ω_1 dans ω_o.

Considérons la fonction $\dfrac{1}{c'-\psi_o}$; comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 3.1., c'est une fonction de classe C^∞, strictement plurisousharmonique sur $\Omega_\psi^{c'}$, invariante à droite par H, et $\dfrac{1}{c'-\dot{\psi}_o}$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}_{\psi_o}^{c'}$; d'après le théorème 1.2., $\dfrac{1}{c'-\dot{\psi}_o(\xi,.)}$ a un minimum unique sur chacune des composantes connexes $\Gamma_\xi(\dot{g}_1)$ et $\Gamma_\xi(\dot{g}_2)$ atteint en des points notés $\dot{\alpha}_1(\xi)$ et $\dot{\alpha}_2(\xi)$; on a vu, d'autre part, par application au théorème 2.1., que ces deux fonctions sont indéfiniment différentiables, donc continues.

Soit, enfin, une suite ξ_n dans ω_1 convergente vers ξ_2 on aurait $\dot{\alpha}_1(\xi_n) = \dot{\alpha}_2(\xi_n)$ et $\dot{\alpha}_1(\xi_2) \neq \dot{\alpha}_2(\xi_2)$ ce qui est absurde : ainsi C est fermé.

Il reste à vérifier que p est un homéomorphisme local.

Notons s l'application canonique de $\dot{\Omega}$ sur Γ.

Soit $(\xi,\Gamma_\xi(\dot{g}))$ un point de Γ, considérons un voisinage $\omega_o \times U_o$, connexe de $(\xi,\dot{g})$ dans $\dot{\Omega}$; on a démontré dans la première partie de la séparation que l'application s est ouverte ; ainsi $s(\omega_o \times U_o)$ est un voisinage de $(\xi,\Gamma_\xi(\dot{g}))$ sur lequel p est une bijection sur ω_o, c'est-à-dire biholomorphe.

La composée $p\circ s$ qui est la projection de $\dot{\Omega}$ sur M, est évidemment continue ; il en résulte que p est continue d'après la définition de la topologie quotient.

Il reste à vérifier que p est ouverte ; soit O un ouvert de Γ ; sa projection sur M est aussi la projection sur M de $s^{-1}(O)$ qui est ouvert. □

Théorème 4.2.

Soit Ω *un ouvert de* $M \times G$ *vérifiant les hypothèses du théorème précédant.*

Pour toute fonction u *plurisousharmonique sur* Ω, *et invariante à droite par* H, *la fonction :*

$$V(t) = \operatorname{Inf}\{\dot{u}(\xi,\dot{g}),\ s(\xi,\dot{g}) = t\}$$

est plurisousharmonique sur la variété Γ *associée par le théorème 4.1. à* Ω.

Démonstration :

Soit $t_o \in \Gamma$; il existe un voisinage ω_o de $\xi_o = p(t_o)$ tel que si $\tilde{\Omega}_o$ est la composante connexe de $p^{-1}(\omega_o)$ contenant t_o, la restriction de p à $\tilde{\Omega}_o$ est un homéomorphisme.

Soit $\dot{\Omega}_o = s^{-1}(\tilde{\Omega}_o)$, les fibres $(\Omega_o)_\xi$ sont connexes du fait de l'injectivité de p sur $\tilde{\Omega}_o$.

Si l'on admet que $\dot{\Omega}_o$ est la composante connexe de $\omega_o \times G_{/H} \cap \dot{\Omega}$ contenant $s^{-1}(t_o)$, la démonstration se termine ainsi :

On peut supposer que ω_o est un ouvert de Stein en restreignant ω_o à une carte locale de Stein dans M ; soit $\rho(\xi)$ une fonction strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur ω_o.
La fonction $\tilde{\rho} = \mathrm{Max}(\rho,\varphi)$ a une forme de Levi minorée par le minorant θ de la forme de Levi de φ, et est invariante à droite par H, et $\dot{\tilde{\rho}}$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}_o$ car $\{(\xi,\dot{g}) \in \omega_o \times G_{/H} \cap \dot{\Omega}/\dot{\tilde{\rho}}(\xi,\dot{g}) < c\}$ est relativement compact dans $\omega_o \times G_{/H} \cap \dot{\Omega}$, donc sur chaque connexe de cet ouvert et en particulier sur $\dot{\Omega}_o$. Ainsi $\dot{\Omega}_o$ vérifie les hypothèses du théorème 3.1. ; et par suite :

$$v \circ p^{-1}_{|\tilde{\Omega}_o}(\xi) = \mathrm{Inf}\{\dot{u}(\xi,\dot{g}) \;\; ; \;\; s(\xi,\dot{g}) = p^{-1}_{|\tilde{\Omega}_o}(\xi)\}$$

$$= \mathrm{Inf}\{\dot{u}(\xi,\dot{g}), \dot{g} \in (\dot{\Omega}_o)_\xi\}$$

est plurisousharmonique sur ω_o d'après le théorème 3.1.

Il reste à vérifier la propriété admise de $\dot{\Omega}_o$.

• $\dot{\Omega}_o$ est connexe : On prend une partition de $\dot{\Omega}_o$ en deux ouverts A et B ; comme s est surjective et ouverte, $\tilde{\Omega}_o$ est recouvert par les ouverts s(A) et s(B) ; soit $(\xi,t) \in s(A) \cap s(B)$, alors $(\dot{\Omega}_o)_\xi \cap A$ et $(\dot{\Omega}_o)_\xi \cap B$ auraient t en commun, ce qui est impossible car l'un des deux est vide puisque $(\dot{\Omega}_o)_\xi$ est connexe ; ainsi s(A) et s(B) forment une partition ouverte du connexe $\tilde{\Omega}_o$; l'un des ouverts A ou B est donc vide.

• $\dot{\Omega}_o$ est une composante connexe de $\omega_o \times G_{/H} \cap \dot{\Omega}$: soit A connexe contenu dans $\omega_o \times G_{/H} \cap \dot{\Omega}$ et contenant $\dot{\Omega}_o$; alors s(A) est un connexe contenant $\tilde{\Omega}_o$ et contenu dans $p^{-1}(\omega_o)$; ainsi $s(A) = \tilde{\Omega}_o$, c'est-à-dire $A = \dot{\Omega}_o$. □

Remarque :

Les théorèmes 4.1. et 4.2. s'appliquent, d'après la proposition 3.2., pour un ouvert de Stein dans $M \times G$, dans les deux cas suivants :

a) G est le complexifié de l'un de ses sous-groupes compacts maximaux K, et l'on prend $H = K$.

b) La variété de M est un ouvert d'un espace $\mathbb{C}^?$ et G est de la forme $\mathbb{C}^\ell \times Gl(n,\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^*)^m$, alors $H = \mathbb{R}^\ell \times U(n) \times \mathbb{T}^m$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANTOINE, Ph. : Le théorème des Fonctions Implicites, Pub. IRMA - LILLE, Vol. 3, fasc. 5 (1981).

[2] BOURBAKI, N. : Topologie Générale, (Chap. I et II).

[3] BREMERMANN, H.J. : Complex Convexity, Trans. Amer. Math. Soc., 17-51, 82 (1956).

[4] GRAUERT, H. : Analytische Faserungen über Holomorphvollständigen Raumen. Math. Ann., 135 (1958).

[5] GRAUERT, H. : Analytic Fibre Bundles over Holomorphically complete spaces, Seminars on Analytic Functions, Inst. Adv. Stud. (1958).

[6] HOCHSCHILD, G. : La structure des groupes de Lie. Dunod, Paris (1968).

[7] HÖRMANDER, L. : An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1968).

[8] KISELMAN, C.O. : The Partial Legendre Transformation for Plurisubharmonic Functions. Inventiones Math., 137-148, 49 (1978).

[9] LELONG, P. : Fonctionnelles Analytiques et Fonctions Entières (n variables). Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal (1968), (Séminaire de Mathématiques Supérieures. Eté, 1967).

[10] LELONG, P. : Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Différentielles Positives. Gordon & Breach, 1968. (Cours et Documents de Mathématiques et de Physiques).

[11] MATSUSHIMA, Y. et MORIMOTO, A. : Sur Certains Espaces Fibrés Holomorphes sur une variété de Stein. Bull. Soc. Math. France, 137-155, 88 (1960).

[12] MATSUSHIMA, Y. : Espaces Homogènes de Stein des Groupes de Lie Complexes. Nagoya Math. Journ., 205-218, 16 (1960).

[13] MICHAEL, E. : Continuous selections I. Ann. of Math., 361-382, 63 (1956).

[14] MILNOR, J. : Morse Theory. Notes by M. Spivak et R. Wells. Princeton University Press (1963).

[15] PENOT, J.P. : Inversion à Droite d'Applications Non Linéaires. Applications. C.R.Acad. Sc. Paris, 997-1000, t. 290 (1980).

RÉSUMÉ

Le Principe du Minimum, établi par C.O. Kiselman, constate que pour toute fonction plurisousharmonique $u(\xi,y)$ invariante par $\mathrm{Im}.\mathbb{C}^m$ sur un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, lui-même invariant par $\mathrm{Im}.\mathbb{C}^m$ et à fibres connexes au-dessus de $\mathbb{C}^n$, la fonction $v(\xi) = \inf_y u(\xi,y)$ est plurisousharmonique.

Nous généralisons le Principe du Minimum pour les fonctions strictement plurisousharmoniques régulières sur un ouvert Ω d'une variété analytique complexe $X \times G$, où G est un groupe de Lie complexe admettant sur un sous-groupe fermé H comme forme réelle ; on suppose que Ω et u sont invariants par H, que les fibres de Ω au-dessus de X dans $G/_H$ sont connexes et que u est d'exhaustion sur ces fibres. Nous étendons ce résultat aux fonctions plurisousharmoniques non régulières en supposant que X est aussi un groupe de Lie et que Ω vérifie des propriétés de pseudoconvexité. On peut ainsi exhiber une classe d'ouverts de Stein dans $X \times G$, invariants par H, dont les projections sur X sont faiblement pseudoconvexes. En particulier, si lorsque $G = Gl(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^*)^\ell$, H étant alors $U(n) \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{T})^\ell$, le résultat précédant s'applique à tout ouvert de Stein de $\mathbb{C}^q \times G$ invariant par H et à fibres connexes au-dessus de $\mathbb{C}^q$.

Enfin, on construit une variété étalée qui permet d'énoncer le Principe du Minimum lorsque les fibres ne sont pas connexes.

MOTS CLES :

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES.

GROUPES DE LIE.

VARIETES DE STEIN.