

N° d'ordre : 1040

50376  
1983  
109

50376  
1983  
109

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

HANTOUT Youssef



RÉSIDUS ET CLASSES RIGIDES  
DES FEUILLETAGES



030 021725 5

Membres du Jury : R. BARRE, *Président*

D. LEHMANN, *Rapporteur*

B. CENKL

V. SERGIESCU

} *Examineurs*

SOUTENUE LE 6 JUIN 1983

*Je voudrais exprimer ici mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé dans ce travail. Tout d'abord, je tiens à dire toute ma gratitude à Daniel LEHMANN qui a guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique.*

*Je tiens également à remercier Bohumil CENKL qui a marqué un vif intérêt pour mes travaux. Son aide généreuse m'a permis de progresser dans un problème difficile.*

*Je remercie également Raymond BARRE et Vlad SERGIESCU d'avoir accepté de participer à ce jury.*

*Madame Claudine EVRARD a dactylographié ce travail avec soin et rapidité. Je l'en remercie vivement, ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille I.*

# PLAN

<u>CHAPITRE I</u>	<u>TECHNIQUES DES RESIDUS ET THEOREMES DES RESIDUS</u>	
	1. Données	1
	2. Notations supplémentaires	2
	3. Résidus	4
	4. Comment tester l'exotisme par des Résidus	6
<u>CHAPITRE II</u>	<u>SITUATION PARTICULIERE DES FEUILLETAGES</u>	9
	1. Données	9
	2. Lemme 0	10
	3. Lemme 1	12
	4. Lemme 2	13
	5. Théorème II.1.	16
	6. Théorème II.2.	22
<u>CHAPITRE III</u>	<u>CALCUL DES RESIDUS ASSOCIES A CERTAINS MODULES DE CLIFFORD</u>	24
	1. Données	24
	2. Détermination de $\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)} \psi$ pour $\deg \psi = 2q$	34
	3. Théorème III.1	35
<u>CHAPITRE IV</u>	<u>DETERMINATION DE <math>\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)}^{h_I c_J}</math></u>	54
	Théorème 4.	56
<u>CHAPITRE V</u>	<u>CALCUL DE <math>\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, X_I, B\Gamma)}^{c_{2q}}</math></u>	61
	1. Proposition 1	61
	2. Proposition 2	66
	3. Proposition 3	72
	4. Proposition 4	77

<u>CHAPITRE VI</u>	<u>CLASSES CARACTERISTIQUES ET GEOMETRIE DU</u>	
	<u>FEUILLETAGE</u>	82
	<i>Théorème 6</i>	83
	<i>Démonstration</i>	84-96
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>		95

## INTRODUCTION

Ce travail est organisé comme suit :

Dans la première partie, on donne la situation de géométrie différentielle qui permet de tester les classes exotiques en termes des résidus. On énonce et on démontre les théorèmes I-1 et I-2 des résidus dans le langage des  $J$ -connexions. C'est une généralisation, qui peut s'appliquer aux classes éventuellement rigides, de la technique des résidus de Heitsch.

Dans, la deuxième partie, on se restreint à la situation particulière des feuilletages. On considère une variété feuilletée  $(M, \mathcal{F}_0)$  et  $r$ -automorphismes infinitésimaux  $\{X_1, \dots, X_r\}$  du feuilletage  $\mathcal{F}_0$ .

On suppose que  $\mathcal{F}_0$  et  $\{X_1, \dots, X_r\}$  engendrent un feuilletage singulier de codimension  $q-r$ . On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse : Le lien singulier de  $\mathcal{F}_0$  et  $\{X_1, \dots, X_r\}$  est une réunion finie de feuilles propres isolées de  $\mathcal{F}_0$ .

On adapte la notion générale des résidus à cette situation particulière, et on définit  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}_0, \{X_1, \dots, X_r\}, W)}$ . Le théorème II-1 permet de ramener la situation au cas où le lien singulier est constitué d'une seule feuille.

Le théorème II-2, ramène le calcul des classes caractéristiques du feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}$  engendré par  $\mathcal{F}_0$  et  $\{X_1, \dots, X_r\}$ , au calcul de  $\text{Rés}_{(\tilde{\mathcal{F}}_0, \{X_1, \dots, X_r\}, W)}$ .

Dans la troisième partie, on suppose que  $\{X_1, \dots, X_r\}$  hérite d'une structure d'algèbre de Clifford. Ceci nous permet d'établir la formule :

$$\text{Rés} \left( \mathcal{F}_0, \{X_1, \dots, X_r\}, W \right)_{I^c J}^{h_I c_J} = \alpha(h_I) f_J(B_1, \dots, B_r) \text{ Rés} \left( \mathcal{F}_0, \{X_1, \dots, X_r\}, W \right)^c$$

avec  $|J| = q$ .

Dans cette situation les résidus sont proportionnelles à

$$\text{Rés} \left( \mathcal{F}_0, \{X_1, \dots, X_r\}, W \right)^c$$

Dans la quatrième partie, on établit que  $\text{Rés} \left( \mathcal{F}_0, \{X_1, \dots, X_r\}, W \right)^c$  est  $\left( -\chi(\xi_h) \right)$ ; où  $\chi(\xi_h)$  est la classe d'Euler du fibré normal à la feuille  $W$  de  $\mathcal{F}_0$ .

Il est important de remarquer que les situations dans lesquelles  $\chi(\xi_h)$  est non nulle sont très rares. Il n'y a que l'exemple de Milnor, ou des produits d'exemples de Milnor qui sont connus.

Par contre il est plus facile d'exhiber des situations où  $\chi(\xi_h)$  est nulle. Par exemple si  $\Pi_1(W) \in \Lambda$  où  $\Lambda$  désigne la plus petite classe de groupes qui contient les groupes moyennables et qui est stable par produits libre et par extensions finies, alors  $\chi(\xi_h) = 0$ .

Ce phénomène de nullité de la classe d'Euler, confirme la conjecture de Bott qui consiste à dire que pour construire des feuilletages à classes caractéristiques rigides non nulles, il faut sortir du cadre linéaire.

Dans la dernière partie on interprète ce phénomène de nullité en terme de la géométrie des feuilles du feuilletage.

## CHAPITRE I

### TECHNIQUES DES RESIDUS ET THEOREMES DES RESIDUS

On rappelle la situation de géométrie différentielle permettant de tester les classes exotiques en termes de Résidus (Généralisation de la technique de Heitsch [ ]).

Pour plus de détails (cf. D. Lehmann [1], [2]).

#### 1. Données :

Soit  $E \rightarrow V$  un  $G$ -fibré principal différentiable ( $G$  groupe de Lie réductif),  $W$  une sous-variété de codimension  $q$  dans  $V$ . Soit

$$I(G) = [S(\mathcal{G}^*)]^G$$

l'algèbre des polynômes sur l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$  qui sont invariants par la représentation adjointe de  $G$ . Cette algèbre  $I(G)$  est supposée graduée en dimension paire par le double du degré du polynôme.

On se donne 3 idéaux gradués :  $\mathcal{J}' \supset \mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}_0$  de  $I(G)$ , ainsi que 3 connexions :

- $\omega_0$  une  $\mathcal{J}_0$ -connexion sur  $E$
- $\omega$  une  $\mathcal{J}$ -connexion sur  $E$
- $\omega'$  une  $\mathcal{J}'$ -connexion sur  $E|_{V-W}$

tel que  $\omega|_U$  et  $\omega'|_U$ , les restrictions de  $\omega$  et  $\omega'$  au complémentaire  $U = V-T$  d'un voisinage tubulaire fermé (différentiable)  $T$  de  $W$  coïncident.

On rappelle que si  $\lambda_\omega : I(G) \rightarrow Z\Omega_{DR}(V)$  désigne l'homomorphisme de Chern-Weil associé à  $\omega$ , on dit que  $\omega$  est une  $\mathcal{J}$ -connexion si  $\mathcal{J} \subset \text{Ker } \lambda_\omega$ .

## 2. NOTATIONS SUPPLEMENTAIRES.

Soit  $P_G$  l'espace vectoriel gradué (en dimension impaire) des éléments primitifs de l'algèbre extérieure  $\Lambda(\mathcal{J}^*)$  des cochaines scalaires sur  $\mathcal{J}^*$ .

$$t : P_G \xrightarrow{\cong} Q_G \subset I(G) = S(Q_G)$$

une transgression.

Rappel :  $I(G)$  est une algèbre symétrique et  $t$  est un isomorphisme de degré +1 de  $P_G$  sur un système de générateurs  $Q_G$  de  $I(G)$ .

Soit

$$A(\mathcal{J}, \mathcal{J}_0) = I(G)/\mathcal{J} \otimes I(G)/\mathcal{J}_0 \otimes \Lambda(P_G)$$

l'algèbre différentielle graduée, munie de la différentielle  $d$  définit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(P(\text{mod } \mathcal{J}) \otimes 1 \otimes 1) = d(1 \otimes P(\text{mod } \mathcal{J}_0) \otimes 1) = 0 \\ du = tu(\text{mod } \mathcal{J}) \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes tu(\text{mod } \mathcal{J}_0) \otimes 1 \\ \text{pour } u \in P_G \end{array} \right.$$

On définit, de même

$$A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0) = I(G)/\mathcal{J}' \otimes I(G)/\mathcal{J}_0 \otimes \Lambda P_G$$



et puisque,  $\mathcal{J}$  est inclus dans  $\mathcal{J}'$ , un homomorphisme, surjectif naturel  $\rho$  d'A.D.G.(c), dont on notera  $I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0)$  le noyau, est défini.

On a la suite exacte :

$$(1) \quad 0 \rightarrow I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0) \xrightarrow{\varepsilon} A(\mathcal{J}, \mathcal{J}_0) \xrightarrow{\rho} A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0) \rightarrow 0$$

On notera

$$\partial : H^k(A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0)) \rightarrow H^{k+1}(I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0))$$

le connectant de la suite exacte longue de cohomologie associée à (1).

Soit

$$\Delta_{\omega_0, \omega} : (I(G))^{2k} \rightarrow \Omega_{DR}^{2k-1}(V)$$

l'opérateur différence (qui vérifie  $d \circ \Delta_{\omega_0, \omega} = \lambda_{\omega} - \lambda_{\omega_0}$ ).

Rappelons que l'on définit un homomorphisme d'A.D.G.(c) :

$$\alpha_{\omega_0, \omega} : A(\mathcal{J}, \mathcal{J}_0) \rightarrow \Omega_{DR}(V)$$

en posant :

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha_{\omega_0, \omega} \left( P(\text{mod } \mathcal{J}) \otimes 1 \otimes 1 \right) = \lambda_{\omega}(P) \\ \alpha_{\omega_0, \omega} \left( 1 \otimes P(\text{mod } \mathcal{J}_0) \otimes 1 \right) = \lambda_{\omega_0}(P) \\ \alpha_{\omega_0, \omega}(u) = \Delta_{\omega_0, \omega}(tu) \quad \text{pour } u \in P_G \end{array} \right.$$

et de même

$$\alpha_{\omega_0, \omega'} : A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0) \rightarrow \Omega_{DR}(V-W).$$

### 3. RESIDUS.

Notons  $i : U \rightarrow V$  et  $j : U \rightarrow V-W$  les inclusions naturelles.

Puisque  $\omega|_U = \omega'|_U$ , on a :

$$i^* \circ \alpha_{\omega_0, \omega} = j^* \circ \alpha_{\omega_0, \omega'} \circ \rho$$

Notons  $e : \Omega_{DR}^c(\overset{\circ}{T}) \rightarrow \Omega_{DR}(V)$  l'extension naturelle par 0 en dehors de  $T$  des formes à support compact dans  $\overset{\circ}{T}$  à tout  $V$ ,

$$\text{Im } e = \text{Ker } i^*$$

Puisque  $\rho \circ \varepsilon = 0$ , on en déduit que  $\alpha_{\omega_0, \omega}$  se factorise en un morphisme  $\alpha_{\omega_0, \omega}^c$  d'A.D.G.(c) rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0) & \xrightarrow{\alpha_{\omega_0, \omega}^c} & \Omega_{DR}^c(\overset{\circ}{T}) \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow e \\ A(\mathcal{J}; \mathcal{J}_0) & \xrightarrow{\alpha_{\omega_0, \omega}} & \Omega_{DR}(V) \\ \downarrow \rho & & \downarrow i^* \\ A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0) & \xrightarrow{j^* \circ \alpha_{\omega_0, \omega'}} & \Omega_{DR}(U) \end{array}$$

Munissons  $T$  d'une structure de fibrés en disques  $D$  de dimension  $q$  et de base  $W$ . Notons :

$$\int_D : \Omega_{DR}^k(T) \rightarrow \Omega_{DR}^{k-q}(W)$$

l'intégration le long de la fibre,

$$f : \Omega_{DR}^c(\overset{\circ}{T}) \rightarrow \Omega_{DR}(T)$$

l'extension naturelle des formes à supports compacts sur  $\overset{\circ}{T}$  et soit  $s_1 : \partial T \rightarrow T$  l'inclusion naturelle.

Puisque  $s_1^* \circ f = 0$ , la formule de Stokes généralisée

$$\int_D \circ d + (-1)^{q+1} d \circ \int_D = \int_S \circ s_1^*$$

(où  $\int_S : \Omega_{DR}^k(\partial T) \rightarrow \Omega_{DR}^{k-q+1}(W)$  désigne l'intégration le long de la fibre  $S = \partial D$  du fibré en sphère  $\partial T \rightarrow W$ ) montre que l'homomorphisme (de degré  $-q$ ) d'espaces vectoriels gradués :

$$\int_D \circ f : \Omega_{DR}^c(\overset{\circ}{T}) \rightarrow \Omega_{DR}(W).$$

commute, au signe près, avec la différentielle.

(3.0.). Définition. Appelons "résidu" et notons

$$\text{Rés}_{(\omega, \omega', \omega_0)} : H^k(I(\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}_0)) \rightarrow H_{DR}^{k-q}(W)$$

l'application linéaire induite en cohomologie par

$$\int_D \circ f \circ \alpha_{\omega_0, \omega}^c : I(\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}_0) \rightarrow \Omega_{DR}(W)$$

Si  $\varphi \in Z^k(I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0))$ , on notera

$$\text{Rés} [\varphi] (\omega, \omega'; \omega_0)$$

l'image de  $[\varphi]$  par cette application.

(3.1.). Théorème 1.1.

$$\forall [\varphi] \in H(I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0))$$

$$[\alpha_{\omega_0, \omega}]([\varepsilon\psi]) = ([e] \circ \mathcal{C})(\text{Rés}[\psi](\omega, \omega'; \omega_0))$$

où  $\mathcal{C} : H_{\text{DR}}^{k-q}(W) \xrightarrow{\cong} H_c^k(T)$  désigne l'isomorphisme de Thom.

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

i)  $e \circ \alpha_{\omega_0, \omega}^c = \alpha_{\omega_0, \omega} \circ \varepsilon$

ii)  $\mathcal{C}$  est l'isomorphisme inverse de celui induit par  $\int_D \circ f$  en cohomologie.

4. COMMENT TESTER L'EXOTISME  $[\alpha_{\omega_0, \omega'}]$  PAR DES RESIDUS.

(4.1). Théorème 1.2. Le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
 H^k(A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0)) & \xrightarrow{\partial} & H^{k+1}(I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0)) \\
 \downarrow [\alpha_{\omega_0, \omega'}] & & \searrow \text{Rés}(\omega, \omega', \omega_0) \\
 H_{\text{DR}}^k(V-W) & \xrightarrow{s^*} & H_{\text{DR}}^k(\partial T) \xrightarrow{\int_S} H_{\text{DR}}^{k+1-q}(W)
 \end{array}$$

Démonstration : En effet, si  $\psi = \rho \varphi \in Z^k(A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0))$ ,  $d\varphi \in Z^{k+1} I(\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}_0)$  et  $\partial[\psi]$  est la classe de cohomologie de  $d\varphi$  dans  $I(\mathcal{J}, \mathcal{J}'; \mathcal{J}_0)$ .

De la définition du résidu, il résulte que,  $\text{Rés}_{\partial}[\psi](\omega, \omega', \omega_0)$  est la classe de cohomologie dans  $H_{\text{DR}}^{k+1-q}(W)$  de  $\int_D f \alpha_{\omega_0, \omega}^c d\varphi$ .

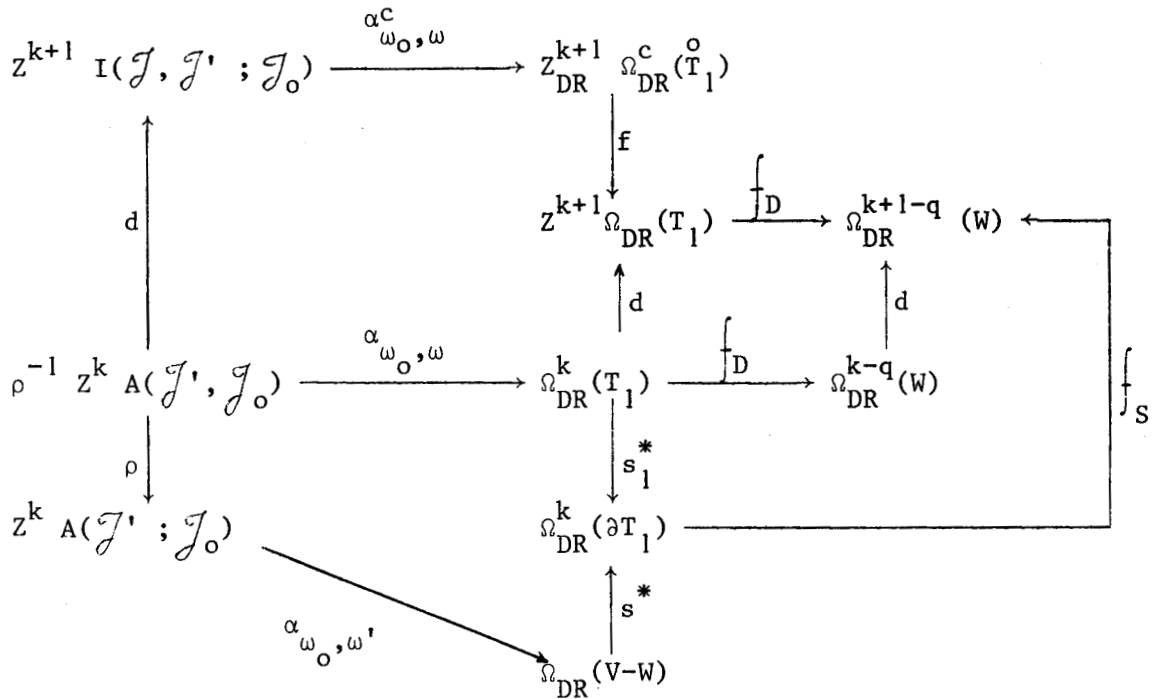
Soit  $T_1$  le voisinage tubulaire fibré en disques sur  $W$  avec des disques de rayon la moitié.

On a  $\bar{T}_1 \subset \overset{\circ}{T}$ .

On peut appliquer la formule de Stokes sur  $T_1$  :

$$\int_S \circ s_1^* = \int_D \circ d + (-1)^{q+1} d \circ \int_D$$

d'autre part dans le diagramme ci-dessous, les 2 carrés de gauche commutent puisque  $\omega$  et  $\omega'$  coïncident sur  $\partial T_1 \subset U = V - T_1$ .



On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_D f \alpha_{\omega_0, \omega}^c d\psi &= \int_D d \alpha_{\omega_0, \omega} \psi \\ &= \int_S s_1^* \alpha_{\omega_0, \omega} \psi + \text{cobord} \\ &= \int_S s^* \alpha_{\omega_0, \omega'} \psi + \text{cobord} \end{aligned}$$

d'où le théorème pour  $T = T_1$ .

Quitte à restreindre  $T$  à  $T_1$  on peut toujours supposer que  $\omega$  et  $\omega'$  coïncident sur  $\partial T$ .

On remarque d'autre part que la définition du Résidu est indépendante du choix du voisinage tubulaire  $T$ , c'est une conséquence immédiate des propriétés de l'opération d'intégration le long de la fibre. On en déduit que le théorème est vrai pour tout voisinage tubulaire  $T$  de  $W$ .

Ceci achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE II

SITUATION PARTICULIERE DES FEUILLETAGES

1. DONNEES.

On se donne un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension  $q$  sur une variété  $V$ .

Soit  $\tau$  le sous-fibré de  $TV$  consistant des vecteurs tangents aux feuilles de  $\mathcal{F}$ , et  $\nu$  le fibré normal.

On se donne aussi  $r$  automorphismes infinitésimaux du feuilletage  $X_1, \dots, X_r$  ( $1 \leq r \leq q$ ) c'est-à-dire  $r$ -champs de vecteurs  $X_i$  sur  $V$  tels que :

$$[X_i, \Gamma(\tau)] \subset \Gamma(\tau)$$

$\Gamma(\tau)$  désignant le module des champs de vecteurs tangents aux feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}$  et tels que, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $[X_i, X_j]$  soit une combinaison  $R$ -linéaire des champs de vecteurs  $X_i$  et de  $\Gamma(\tau)$ .

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k \text{ mod } \Gamma(\tau)$$

On suppose entre autre que  $X_1, \dots, X_r$  sont à la fois transverses aux feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}$  et linéairement indépendants sur le complémentaire d'une réunion finie  $W = \bigsqcup_{i=1}^m W_i$  de feuilles propres et isolées  $W_i$  de  $\mathcal{F}$ , appelées les "feuilles singulières" de  $\mathcal{F}$  et  $(X_1, \dots, X_r)$ .

Soit  $E \rightarrow V$  le fibré principal des repères de  $\nu$  ( $G = GL(q; R)$ ).

Sur  $V-W$ ,  $\hat{\tau} = \tau \oplus \{X_1, \dots, X_r\}$  est un sous-fibré de  $T(V-W)$  qui est involutif par construction même.

En appliquant le théorème de Frobenius on démontre donc que ce fibré est intégrable.  $\hat{\tau}$  donc est le fibré des vecteurs tangents aux feuilles d'un feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}$  de codimension  $q-r$ .

Soit  $\hat{\nu}$  un supplémentaire de  $\hat{\tau}$  dans le fibré tangent  $T(V-W)$ . On peut assimiler  $\nu|_{V-W}$  à la somme directe  $\{X_1, \dots, X_r\} \oplus \hat{\nu}$ . Relativement à cette décomposition, le fibré principal  $\hat{E} \rightarrow V-W$  associé à  $\hat{\nu}$  (groupe structural  $GL(q-r; \mathcal{R})$ ) s'identifie au sous-fibré principal de  $E|_{V-W}$  formé des repères de  $\nu|_{V-W}$  dont les  $r$ -premiers vecteurs sont les valeurs au point considéré de  $X_1, \dots, X_r$ .

Prenons alors pour idéaux de

$$I(GL(q; \mathcal{R}) = \mathcal{R}[c_1, \dots, c_q] \quad (\text{poids de } c_i = i)$$

- l'idéal  $\mathcal{J} = \{> q\}$  des polynômes de poids  $> q$
- l'idéal  $\mathcal{J}' = \{> q-r\}$
- l'idéal  $\mathcal{J}_0 = \{c_1, c_3, \dots, c_{2i+1}, \dots\}$

Prenons pour

- $\omega'_0$  une connexion de Bott sur  $\hat{E}$ , en identifiant  $\hat{E}$  à un sous-fibré principal de  $E$ ,  $\omega'_0$  s'étend en une connexion  $\omega'$  sur  $E$ .
- $\omega$  une connexion de Bott sur  $E$  (qui est une  $\mathcal{J}$ -connexion), coïncidant avec  $\omega$  sur  $U = V-T$ .

Une telle connexion  $\omega$  existe. En effet on a le lemme :

Lemme 0. Pour chaque  $T$  voisinage tubulaire différentiable fermé de  $W$ , il existe une connexion  $\omega$  telle que

$$\omega|_{V-T} = \omega'|_{V-T} .$$



Démonstration : Soit  $T_1$  un voisinage tubulaire fermé de  $W$  fibré en disques au-dessus de  $W$  telle que :

$$T_1 \subset \overset{\circ}{T}$$

La variété  $V$  est recouverte par deux ouverts

$$U_1 = V - T_1 \quad \text{et} \quad U_2 = \overset{\circ}{T} .$$

Soit  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i=1,2}$ .

Soit  $\omega_2$  une connexion de Bott du feuilletage  $\mathcal{F}|_{U_2}$  et  $\omega_1^{\circ}$  une connexion de Bott du feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}|_{U_1}$  qui coïncide avec  $\omega_0$  sur  $U$ .

On prolonge  $\omega_1^{\circ}$  en une connexion  $\omega_1$  définie sur  $E|_{U_1}$  et coïncidant avec  $\omega$  sur  $E|_U$ .

Soit  $\Pi : E \rightarrow V$  la projection. Il suffit de prendre pour  $\omega$  la connexion

$$(\gamma_1 \circ \Pi)\omega_1 + (\gamma_2 \circ \Pi)\omega_2 .$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

On choisit comme troisième connexion :

-  $\omega_0$  une connexion métrique sur  $E$ . (i.e. adaptée à une  $O(q)$ -réduction de  $E$ ).

Soit  $WO_q$  l'algèbre  $\mathcal{R}[c_1, \dots, c_q] / \{> q\} \otimes (\wedge^i)_{1 \leq i \text{ impair} \leq q}$  et  $\mathcal{A} : WO_q \rightarrow A(\mathcal{J}, \mathcal{J}_0)$  l'inclusion naturelle.  $\mathcal{A}$  induit un isomorphisme en cohomologie.

Pour plus de détails (cf. D. Lehmann [1]).

De même l'inclusion naturelle

$$b : \text{WO}_{q-r} \otimes \left( \Lambda(h_i) \right)_{q-r+1 \leq i \text{ impair} \leq q} \hookrightarrow A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0)$$

induit un isomorphisme en cohomologie, et  $\rho \circ \mathcal{Q}$  prend ses valeurs dans  $\text{Im } b$ , d'où l'homomorphisme surjectif, noté encore  $\rho$

$$\text{WO}_q \xrightarrow{\rho} \text{WO}_{q-i} \otimes \left( \Lambda(h_i) \right)_{q-r+1 \leq i \text{ impair} \leq q}$$

dont le noyau est le même que celui de

$$A(\mathcal{J}, \mathcal{J}_0) \rightarrow A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0)$$

soit

$$I(\mathcal{J}, \mathcal{J}' ; \mathcal{J}_0) = \left\{ \text{polynômes de poids } k \right\}_{q-r+1 \leq k \leq q} \otimes \left( \Lambda(h_i) \right)_{1 \leq i \text{ impair} \leq q}$$

dans  $\mathcal{R}[c_1, \dots, c_q]$ .

Dans la suite, on notera  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W)}$  au lieu de  $\text{Rés}_{(\omega, \omega', \omega_0)}$  les résidus correspondants à la situation que nous venons de décrire.

Avant d'adapter les théorèmes I-1 et I-2 à cette situation, nous allons montrer que la définition des résidus est intrinsèque.

Lemme 1.  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W)} \psi$  est indépendante du choix du voisinage tubulaire en disque  $T$ .

Démonstration : Il suffit de se restreindre au cas où le lien singulier est constitué d'une seule feuille singulière  $W$ .

Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux voisinages tubulaires qui se fibrent en disques au-dessus de  $W$ .

Soit  $T_3$  un voisinage tubulaire de  $W$  qui se fibre en disques au-dessus de  $W$  et qui vérifie :

$$T_3 \subset T_1 \cap T_2$$

Soit  $\omega$  une connexion adaptée au voisinage tubulaire  $T_3$  comme dans le lemme 0 précédent.

Soit  $e_j : \Omega_{DR}^c(T_3) \rightarrow \Omega_{DR}^c(T_j)$   $j = 1, 2$ . L'extension naturelle des formes à support compact sur  $T_3$  a des formes à support compact sur  $T_j$ .

On remarque que si  $\Omega$  est la courbure de  $\omega$ , on a :

$$e_j \psi(\Omega)|_{T_3} = \psi(\Omega)|_{T_j}$$

Or, on a d'autre part le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{DR}^k(T_1; \mathcal{R}) & \xleftarrow{e_1^*} & H_{DR}^k(T_3; \mathcal{R}) & \xrightarrow{e_2^*} & H_{DR}^k(T_2; \mathcal{R}) \\
 & \searrow \int_{D_1} & \downarrow \int_{D_3} & \swarrow \int_{D_2} & \\
 & & H_{DR}^{k-q}(W, \mathcal{R}) & & 
 \end{array}$$

où  $H_{DR}^k(\cdot; \mathcal{R})$  désigne la cohomologie à support compact.

Le fait que ce diagramme commute provient de la construction même de  $\int_D$ . En effet l'opération d'intégration le long de la fibre est indépendante de la structure fibré particulière qu'on choisit sur  $T$ .

Ceci termine la démonstration du lemme.

**Lemme 2.** Rés  $(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W)$   $\psi$  est indépendant du choix des connexions  $\omega, \omega'$  et  $\omega_0$ .

Avant de démontrer le lemme, rappelons la construction de l'opérateur différence  $\Delta_{\omega_0, \omega_1}$  associé à deux connexions  $\omega_0$  et  $\omega_1$  qui sont

définis sur le même G-fibré principal  $E \xrightarrow{\Pi} V$ .

On considère la connexion  $[\overrightarrow{\omega}_0, \omega_1]$  définie sur  $E \times I \rightarrow V \times I$  par :

$$[\overrightarrow{\omega}_0, \omega_1] \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = 0$$

$$[\overrightarrow{\omega}_0, \omega_1] |_{E \times \{t\}} = t\omega_1 + (1-t)\omega_0.$$

On définit

$$\Delta_{\omega_0, \omega_1} : I^k(G) \rightarrow \Omega_{DR}^{2k-1}(V) \quad \text{par}$$

$$\Delta_{\omega_0, \omega_1} = \int_0^1 \circ \lambda [\overrightarrow{\omega}_0, \omega_1]$$

Soit  $\Omega_t$  la courbure sur  $E \times \{t\}$  de la connexion

$$\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0.$$

La courbure  $\tilde{\Omega}$  de  $[\overrightarrow{\omega}_0, \omega_1]$  est donc égale à :

$$\tilde{\Omega} = (dt \wedge (\omega_1 - \omega_0)) + \Omega_t.$$

On a donc

$$\Delta_{\omega_0, \omega_1}(\psi) = k \int_0^1 \psi(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t) dt.$$

Démonstration du lemme 2. Soient  $\omega, \omega', \omega_0$  trois connexions sur  $E$  permettant de calculer

$$\text{Rés}(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W)$$

et  $\hat{\omega}, \hat{\omega}', \hat{\omega}_0$  trois autres connexions sur  $E$  ayant les mêmes propriétés.

Quitte à restreindre le voisinage tubulaire, on peut supposer que  $T$  est à la fois adapté à  $\omega$  et à  $\hat{\omega}$ .

Donc pour  $\varphi \in I(\mathcal{J}, \mathcal{J}' ; \mathcal{J}_0)$

$$\alpha_{\omega_0, \omega}^c(\varphi) \in \Omega_{DR}^c(\overset{\circ}{T})$$

$$\alpha_{\hat{\omega}_0, \hat{\omega}}^c(\varphi) \in \Omega_{DR}^c(\overset{\circ}{T})$$

On rappelle que  $\text{Rés}_{(\omega, \omega', \omega_0)}$  est le morphisme induit en cohomologie par le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} I(\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}_0) & \xrightarrow{\alpha_{\omega_0, \omega}^c} & \Omega_{DR}^c(\overset{\circ}{T}) \xrightarrow{f} \Omega_{DR}(\overset{\circ}{T}) \\ & \searrow & \uparrow \int_D \\ & & \Omega_{DR}(W) \end{array}$$

On définit les trois connexions suivantes sur

$$E \times I \rightarrow V \times I.$$

- $\tilde{\omega} = [\overrightarrow{\omega, \hat{\omega}}]$
- $\tilde{\omega}' = [\overrightarrow{\omega', \hat{\omega}'}]$
- $\tilde{\omega}_0 = [\overrightarrow{\omega_0, \hat{\omega}_0}]$

Soit  $P_1 : V \times I \rightarrow V$  la première projection. On considère sur  $V \times I$ , le feuilletage  $p_1^* \mathcal{F}$  et les  $r$ -automorphismes infinitésimaux de  $p_1^* \mathcal{F}$ ,  $\{p_1^* X_1, \dots, p_1^* X_r\}$ .

Du fait que l'ensemble des connexions de Bott est convexe, il en résulte que  $\tilde{\omega}$  vérifie les conditions du lemme 0, avec un voisinage tubulaire adapté  $T \times I$ .

Donc  $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}', \tilde{\omega}_0$  peuvent être choisis pour calculer

$$\text{Rés}_{(p_1^* \mathcal{F}, \{p_1^* X_1, \dots, p_1^* X_r\}, W \times I)}$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 I(\mathcal{J}, \mathcal{J}' ; \mathcal{J}_0) & \xrightarrow{f_{D \times I} \circ f \circ \alpha_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0}} & \Omega_{DR}(W \times I) \\
 & \searrow^{f_{D'} \circ f \circ \alpha_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0}^c} & \downarrow i_0^* \\
 & \searrow_{f_D \circ f \circ \alpha_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0}^c} & \Omega_{DR}(W) \\
 & & \downarrow i_1^*
 \end{array}$$

où

$$\begin{aligned}
 i_t : W &\longrightarrow W \times I \\
 x &\longrightarrow i_t(x) = (x, t).
 \end{aligned}$$

Par passage à la cohomologie, on en déduit que :

$$\text{Rés}_{(\omega, \omega', \omega_0)} = \text{Rés}_{(\hat{\omega}, \hat{\omega}', \hat{\omega}_0)} = \int_0^1 \text{Rés}_{(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}', \tilde{\omega}_0)}.$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

Comme conséquence des lemmes précédents, on peut adapter le théorème I-1 général des résidus à cette situation. On obtient alors le

$$\left[ \begin{array}{l}
 \text{Théorème II.1. } \forall [\psi] \in H^k(I(\mathcal{J}, \mathcal{J}' ; \mathcal{J}_0)) \\
 \alpha_{\mathcal{F}}^* \left( [\varepsilon \psi] \right) = \left( [e] \circ \mathcal{E} \right) \left( \text{Rés}_{(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W)} \psi \right) \\
 \text{où } \mathcal{E} : H_D^{k-q}(W) \xrightarrow{\cong} H_C^k(T) \text{ désigne l'isomorphisme de Thom.}
 \end{array} \right.$$

Dans la suite, on veut adapter le théorème I.2 général des résidus à cette situation.

Remarque. A priori  $\omega'$ , et  $\omega_0$  sont des  $GL(q; \mathcal{R})$  et  $O(q; \mathcal{R})$  connexions. Leurs lois de dérivations covariantes sont définies sur  $v$  et non sur  $\hat{v}$ .

Par contre, pour construire les classes exotiques du feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}$ , on choisit une connexion de Bott  $\theta$  pour  $\hat{\mathcal{F}}$  et une connexion riemannienne  $\theta_0$  sur le fibré normal  $\hat{v}$  à  $\hat{\mathcal{F}}$ .

Il s'agit de comparer  $\alpha_{\theta, \theta_0}$  et  $\alpha_{\omega', \omega_0}$ . Soit

$$i : WO_{q-r} \hookrightarrow A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0)$$

L'inclusion naturelle. En utilisant les notations de la page ,  $i$  est la restriction de  $b$  à  $WO_{q-r}$ .

On va montrer que le résultat reste encore vrai.

Proposition. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 WO_{q-r} & \xrightarrow{i} & A(\mathcal{J}', \mathcal{J}_0) \\
 \searrow \alpha_{\theta, \theta_0} & & \searrow \alpha_{\omega', \omega_0} \\
 & & \Omega_{DR}(V-W)
 \end{array}$$

Démonstration : Soit  $\hat{\tau} = \tau \oplus \{X_1, \dots, X_r\}$  et  $\hat{v} = T(V-W) / \hat{\tau}$  le fibré normal à  $\hat{\mathcal{F}}$ .

Soit  $\xi$  le sous-fibré de  $T(V-W)$  engendré par  $\{X_1, \dots, X_r\}$ .

On a la suite exacte de fibrés vectoriels au-dessus de  $V-W$

$$0 \rightarrow \xi \xrightarrow{\varepsilon} v \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} \hat{v} \rightarrow 0 \quad (1)$$

où  $\varepsilon : \xi \rightarrow T(V-W) \rightarrow \nu$  et  $\hat{\varepsilon} : T(V-W)/\tau \rightarrow T(V-W)/\hat{\tau}$  sont les projections naturelles.

On choisit une scission  $j$  de la suite exacte (1).

Soit  $\theta$  une connexion sur  $\hat{\nu}$ , on va se servir de  $j$  pour construire une connexion  $j\theta$  sur  $\nu$  au-dessus de  $V-W$ .

Soit  $\Gamma(\nu)$  le  $C^\infty(V-W)$ -module des sections du fibré vectoriel  $\nu$  au-dessus de  $V-W$ .

Si  $\sigma$  est une section de  $\nu$  alors  $\sigma$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\sigma = j \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \sigma + \sum_{i=1}^r \lambda_{\sigma}^i \varepsilon(X_i)$$

où  $\lambda_{\sigma}^i \in C^\infty(V-W)$ .

On va définir  $j\theta$  par sa loi de dérivation covariante  $j\nabla$ .

On définit

$$(j\nabla)_Y \sigma = j \nabla_Y (\hat{\varepsilon} \cdot \sigma) + \sum_{i=1}^r Y(\lambda_{\sigma}^i) \varepsilon(X_i)$$

où  $\nabla$  est la loi de dérivation covariante de  $\theta$ .

On remarque, que quelle que soit la connexion  $\theta$ .

$$(j\nabla)_Y \varepsilon(X_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq r$$

Donc  $\varepsilon(X_i)$  est une section plate pour toute  $j\theta$ . On en déduit que si  $\theta$  est une connexion métrique sur  $\hat{\nu}$ , alors  $j\theta$  est une connexion métrique sur  $\nu$ , au-dessus de  $V-W$ .

Dans la suite, on va comparer les 1-formes locales de connexions de  $\theta$  et  $j\theta$  et leurs formes de courbures.

Soit  $\theta$  une connexion quelconque sur  $\hat{\nu}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $V-W$ , à la fois trivialisant pour le fibré  $\hat{\nu}$  et  $\nu$ .



Soit  $s_1, \dots, s_{q-r}$  une base du  $C^\infty(U)$ -module  $\Gamma(\hat{v}|_U)$ . Une base du  $C^\infty(U)$ -module  $\Gamma(v|_U)$  est donnée par :

$$js_1, \dots, js_{q-r}, \varepsilon(X_1), \dots, \varepsilon(X_r).$$

Soit  $(\theta_{ik})_{1 \leq i, k \leq q-r}$  la matrice des 1-formes locales  $\theta_{ik} \in \Omega_{DR}^1(U)$  qui définit la connexion  $\theta|_U$ .

Par définition :

$$\nabla_X(s_i) = \sum_{k=1}^{q-r} \theta_{ik}(X) s_k.$$

On a de même

$$(j\nabla)_X(j s_i) = \sum_{k=1}^{q-r} (j \theta_{ik})(X) (j s_k)$$

Soit

$$j\theta_{ik} = \begin{cases} \theta_{ik} & i, k = 1, \dots, q-r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\Omega$  la forme de courbure de  $\theta$  et  $j\Omega$  celle de  $j\theta$ .

Relativement à l'ouvert  $U$ , la forme de courbure est définie par une matrice  $(\Omega_{ik})_{1 \leq i, k \leq q-r}$  où

$$\Omega_{ik} \in \Omega_{DR}^2(U).$$

la base locale de sections étant fixée.

L'équation qui donne l'expression de la courbure locale est :

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2} \theta \wedge \theta$$

où  $d\theta$  est la matrice  $(d\theta_{ik})_{1 \leq i, k \leq q-r}$  et  $\frac{1}{2} \theta \wedge \theta$  est le produit de la matrice  $\theta$  par elle-même.

La multiplication des coefficients étant le produit extérieur

des 1-formes :

$$(i.e.) \quad \frac{1}{2} \theta \wedge \theta = (\alpha_{ik})_{1 \leq i, k \leq q-r}$$

$$\text{où } \alpha_{ik} = \sum_{h=1}^{q-r} \theta_{ih} \wedge \theta_{hk}. \text{ Donc}$$

$$\Omega = (\Omega_{ik}) \quad 1 \leq i, k \leq q-r$$

où

$$\boxed{\Omega_{ik} = d\theta_{ik} + \sum_{h=1}^{q-r} \theta_{ih} \wedge \theta_{hk}}.$$

Soit  $j\Omega = (j\Omega_{ik})_{1 \leq i, k \leq q}$  la forme de courbure de  $j\theta$ .

On a donc

$$j\Omega_{ik} = \begin{cases} \Omega_{ik} & i, k = 1, \dots, q-r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque d'autre part que l'injection naturelle de  $GL_{q-r}$  dans  $GL_q$  :

$$GL_{q-r} \xrightarrow{i} GL_q$$

$$A \longrightarrow i(A) = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{r-1} \end{array} \right)$$

induit une inclusion de  $I(GL_{q-r}) \subset I(GL_q)$ .

Soit  $\varphi \in I^k(GL_{q-r}) \subset I^k(GL_q)$ . On remarque que si  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{G}_q$  sont de la forme

$$B_i = \left( \begin{array}{c|c} A_i & \begin{array}{c} * \\ * \\ o \\ o \end{array} \\ \hline o & \begin{array}{c} o \\ o \end{array} \end{array} \right) \quad \text{où } A_i \in \mathcal{G}_{q-r}$$

alors

$$\psi(B_1, \dots, B_k) = \psi(A_1, \dots, A_k).$$

Donc si  $\theta$  est une connexion de Bott (de courbure  $\Omega$ ) sur  $\hat{v}$  pour  $\hat{\mathcal{G}}$  au-dessus de  $V-W$ , et  $\theta_o$  une connexion métrique sur  $\hat{v}$ , on a d'après ce qui précède :

$$\Delta_{c_i}(\theta, \theta_o) = \Delta_{c_i}(j\theta, j\theta_o)$$

$$c_i(\Omega) = c_i(j\Omega)$$

On en déduit, donc :

$$\alpha_{(\theta, \theta_o)} = i \circ \alpha_{(j\theta, j\theta_o)}.$$

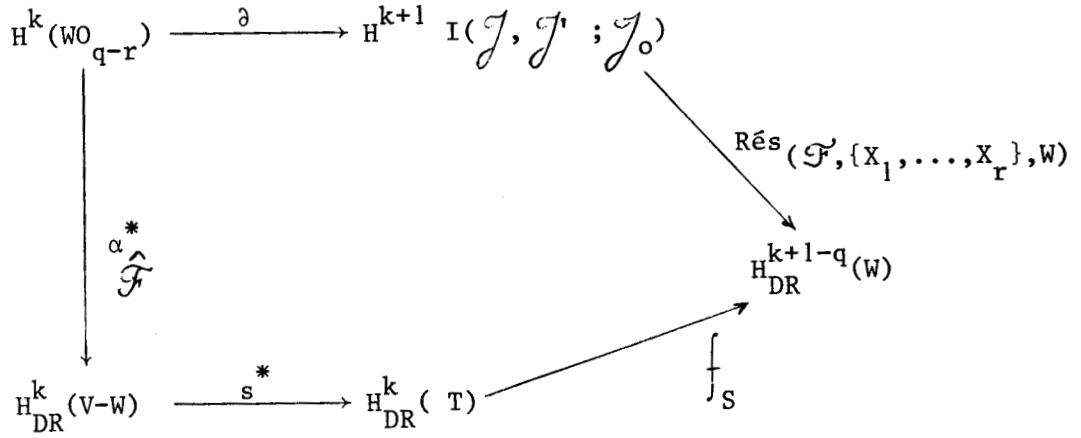
Pour terminer la démonstration de la proposition, il suffit de remarquer, qu'on peut prendre

$$\omega' = j\theta \quad \text{et} \quad \omega_o = j\theta_o.$$

C.Q.F.D.

D'après ce qui précède, on déduit le

Théorème II.2. Le diagramme ci-dessous commute

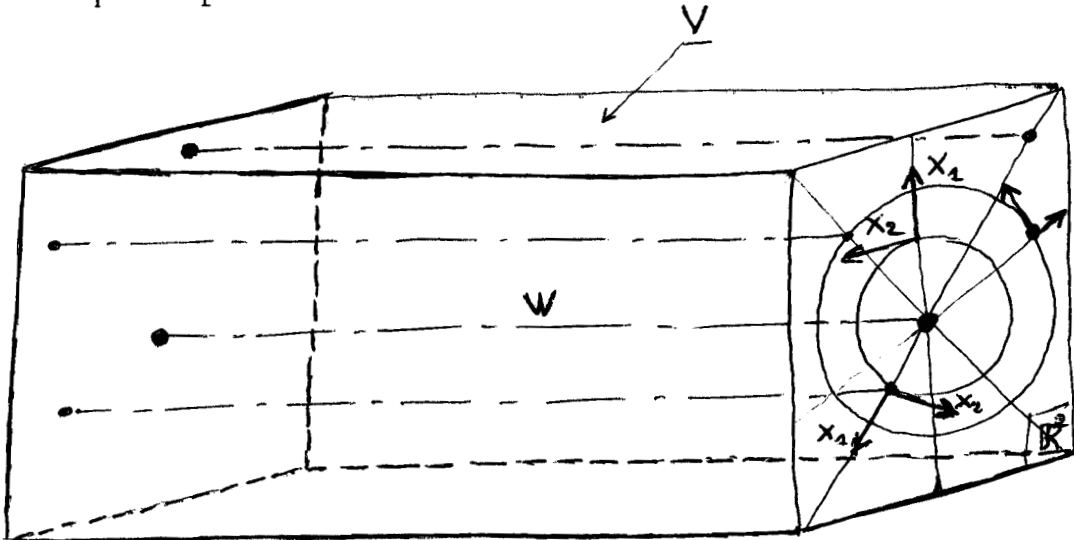


On a donc la formule suivante :

$$\int_S s^* \circ \alpha_{\hat{\mathcal{F}}}^*(\varphi) = \text{Rés}(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W) \partial \varphi$$

Pour tout  $\varphi \in Z WO_{q-r}$ .

Remarque. Cette formule ramène le calcul de  $\alpha_{\hat{\mathcal{F}}}^*$  au calcul de  $\text{Rés}(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W)$



La figure ci-dessus illustre la situation géométrique considérée avec  $r = 2$ .

En particulier si

$$\text{Rés}(\mathcal{F}, \{X_1, \dots, X_r\}, W) \neq 0,$$

alors

$$\alpha_{\mathcal{F}}(\psi) \neq 0.$$

CHAPITRE III

CALCUL DES RESIDUS ASSOCIES A

CERTAINS MODULES DE CLIFFORD.

1. Les données :

(1.1.). L'algèbre de Clifford  $c_k$  :

$c_k$  est l'algèbre associative engendrée par  $(1, e_1, \dots, e_k)$  astreints aux seules relations :

$$\begin{cases} (e_i)^2 = -1 & , \quad 1 \leq i \leq k, \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Une base de  $c_k$  pour la structure de R-espace vectoriel est constituée par 1 et l'ensemble des éléments  $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p}$  tels que :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k.$$

Soit  $(k)$  l'ensemble des familles  $\sigma = (i_1, \dots, i_p)$  telles que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k$ . Avec la convention, pour  $p = 0$ ,  $\phi \in \mathcal{P}(k)$ .

On notera  $\bar{\sigma}$  l'ensemble  $\{i_1, \dots, i_p\}$  sous-jacent à  $\sigma$  et  $|\sigma|$  le nombre d'éléments de  $\bar{\sigma}$ .

Soient  $\sigma, \tau$  deux éléments de  $\mathcal{P}(k)$ . On considère la différence symétrique :

$$\bar{\sigma} \Delta \bar{\tau} = \bar{\sigma} \cup \bar{\tau} - \bar{\sigma} \cap \bar{\tau}$$

et  $\sigma \Delta \tau$  l'ensemble précédent ordonné de façon à être dans  $\mathcal{P}(k)$ .

A chaque  $j \in \tau$ , on associe l'ensemble

$$\Omega_j(\sigma) = \{i_\alpha \in \bar{\sigma} : i_\alpha > j\},$$

On note  $\rho(\sigma, j)$  le nombre d'éléments de  $\Omega_j(\sigma)$ , et on pose

$$\rho(\sigma, \tau) = \sum_{j \in \tau} \rho(\sigma, j)$$

formule : Proposition. La multiplication dans  $c_k$  est définie par la

$$e_\sigma \cdot e_\tau = (-1)^{\rho(\sigma, \tau) + |\sigma \wedge \tau|} e_{\sigma \Delta \tau}.$$

Démonstration : Soient  $\sigma, \tau \in \mathcal{P}(k)$

$$\sigma = (i_1, \dots, i_p) \quad i_1 < \dots < i_p$$

et

$$\tau = (j_1, \dots, j_\ell) \quad j_1 < \dots < j_\ell$$

on a :

$$e_\sigma e_\tau = e_{i_1} \dots e_{i_p} e_{j_1} \dots e_{j_\ell}$$

On considère l'ensemble

$$\Omega_{j_1}(\sigma) = \{i_\alpha \in \bar{\sigma} : i_\alpha > j_1\}$$

et

$$\Delta_{j_1}(\sigma) = \sigma - \Omega_{j_1}(\sigma).$$

On a :

$$e_\sigma e_\tau = \prod_{i_\alpha \in \Delta_{j_1}(\sigma)} e_{i_\alpha} \left( \prod_{i_\alpha \in \Omega_{j_1}(\sigma)} e_{i_\alpha} e_{j_1} \right) (e_{j_2} \dots e_{j_\ell})$$

Or

$$\prod_{i_\alpha \in \Omega_{j_1}(\sigma)} e_{i_\alpha} e_{j_1} = (-1)^{\rho(\sigma, j_1)} e_{j_1} \prod_{i_\alpha \in \Omega_{j_1}(\sigma)} e_{i_\alpha}$$

Comme  $j_2 > j_1$ , on a :

$$\Omega_{j_2}(\sigma) = \{\alpha \in \bar{\sigma} : \alpha > j_2\} = \{\alpha \in \Omega_{j_1}(\sigma) : \alpha > j_2\}$$

Donc

$$\Omega_{j_n}(\sigma) \subset \Omega_{j_1}(\sigma) \quad 1 \leq n \leq \ell .$$

On définit :

$$\Delta_{j_2}(\sigma) = \Omega_{j_1}(\sigma) - \Omega_{j_2}(\sigma) .$$

et

$$\Delta_{j_n}(\sigma) = \Omega_{j_{n-1}}(\sigma) - \Omega_{j_n}(\sigma) \quad 2 \leq n \leq \ell .$$

On en déduit

$$e_\sigma e_\tau = \left( \prod_{h=1}^{\ell} (-1)^{\rho(\sigma, j_h)} \prod_{\alpha \in \Delta_{j_h}(\sigma)} e_\alpha e_{j_h} \right) \prod_{\alpha \in \Omega_{j_n}(\sigma)} e_\alpha .$$

Soit

$$e_\sigma e_\tau = (-1)^{\sum_{n=1}^{\ell} \rho(\sigma, j_n)} \left( \prod_{\alpha \in \sigma \Lambda \tau} e_\alpha^2 \right) e_{\sigma \Lambda \tau}$$

Or

$$\prod_{\alpha \in \sigma \Lambda \tau} e_\alpha^2 = \prod_{\alpha \in \sigma \Lambda \tau} (-1) = (-1)^{|\sigma \Lambda \tau|}$$



Soit enfin :

$$e_{\sigma} e_{\tau} = (-1)^{(\sigma, \tau) + |\sigma \wedge \tau|} e_{\sigma \Delta \tau}$$

C.Q.F.D.

(1.2.) Structure d'Algèbre de Lie sur  $c_k$  :

C'est la structure naturelle d'algèbre de Lie associée à une algèbre associative : le crochet est défini par

$$[e_{\sigma}, e_{\tau}] = e_{\sigma} \cdot e_{\tau} - e_{\tau} \cdot e_{\sigma}$$

On vérifie facilement que :

$$(\tau, \sigma) \equiv (\sigma, \tau) + |\sigma| \cdot |\tau| + |\sigma \wedge \tau| \pmod{2}$$

On en déduit :

$$[e_{\sigma}, e_{\tau}] = \varepsilon(\sigma, \tau) e_{\sigma \Delta \tau}$$

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = (-1)^{(\sigma, \tau) + |\sigma \wedge \tau|} \left( 1 + (-1)^{|\sigma| \cdot |\tau| + |\sigma \wedge \tau| + 1} \right)$$

(1.3.) Structure de  $c_k$ -module sur  $\mathbb{R}^q$  ; l'algèbre de Lie  $\tilde{\mathcal{G}}_0$  :

Dans ce paragraphe, on associe à une sous-algèbre de Lie  $\mathcal{G}_0$  de  $(c_k, [,])$ , une algèbre de Lie  $\tilde{\mathcal{G}}_0$  de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$ .

On munit  $\mathbb{R}^q$  d'une structure de  $c(k)$ -module, en se donnant une multiplication orthogonale normalisée (\*)

Autrement dit, on se donne une application linéaire injective

$$\tilde{\mu} : \mathbb{R}^k \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^q)$$

---

(\*) Référence Husemoller [ ])

qui vérifie :

$$(1) \quad \begin{cases} \tilde{\mu}(e_i)^2 = -I & 1 \leq i \leq k \\ \tilde{\mu}(e_i) \cdot \tilde{\mu}(e_j) + \tilde{\mu}(e_j) \cdot \tilde{\mu}(e_i) = 0 & i \neq j \quad 1 \leq i, j \leq k \end{cases}$$

L'application  $\tilde{\mu}$  s'étend de façon unique à l'algèbre  $c_k$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & & \\ \downarrow i & \searrow \tilde{\mu} & \\ c_k & \xrightarrow{\eta} & \text{End}(\mathbb{R}^q) \end{array}$$

L'application  $\eta$  est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

D'autre part  $\text{End}(\mathbb{R}^q)$  s'identifie naturellement à une  $\mathbb{R}$ -sous-algèbre de Lie de l'algèbre  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^q)$  des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$ , par l'application  $A \rightarrow \tilde{A}$ , qui à la matrice  $A$ , associe le champ de vecteurs linéaire  $\tilde{A}$  sur  $\mathbb{R}^q$  tel que  $\tilde{A}_m$  soit le vecteur d'origine  $m$  équipollent à  $\langle A, \vec{om} \rangle$ .

Soit  $\tilde{\eta} = \tilde{\cdot} \circ \eta : c_k \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^q)$  l'homomorphisme d'algèbres de Lie obtenu par composition.

Soit  $\mathcal{G}_0$  une sous-algèbre de Lie de  $c_k$  et  $\tilde{\mathcal{G}}_0 = \tilde{\eta}(\mathcal{G}_0)$ .

Définition. On dira que  $\mathcal{G}_0$  est  $\eta$ -régulière (ou régulière s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $\eta$ ) si :

$$\forall m \in \mathbb{R}^q - \{0\} \quad \dim(\tilde{\mathcal{G}}_0)_m = \text{Cste}$$

cette constante étant bien entendu indépendante de  $m$ , pour  $m \in \mathbb{R}^q - \{0\}$ .

(1.4.) Exemples de  $\tilde{\mathcal{G}}_0$  régulière.

a) Cas où  $\mathcal{G}_0$  est  $c_k$  tout entier.

$$(1) \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$



et

$$A_i = \begin{pmatrix} B_i & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ & & B_i \end{pmatrix} \quad \text{où :}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \bigcirc \\ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} ; \quad B_2 = \begin{pmatrix} \bigcirc & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \bigcirc \end{pmatrix} ;$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \bigcirc & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \bigcirc \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$q = 8n, k = 3, \mathbb{C}$  est l'algèbre des octaves de Cayley.

La multiplication orthogonale est définie par la structure de  $\mathbb{C}$ -module sur  $\mathbb{R}^{8n} = \mathbb{C}^n$ . Elle induit la fibration de Hopf

$$(3)' \quad \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^{8n-1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}).$$

Dans ce cas, la dimension de cette algèbre est  $2^3 = 8$ . Une base est donnée par les 8 champs  $\{\hat{I}, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_7\}$ , où  $I$  est l'identité de  $GL(8n; \mathbb{R})$  et

$$A_i = \begin{pmatrix} C_i & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ & & C_i \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \circ & \bigcirc \\ \circ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \bigcirc \\ \bigcirc & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \circ \\ \bigcirc & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \bigcirc \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} \circ & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \bigcirc \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \circ & \bigcirc \\ \bigcirc & \circ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bigcirc & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \circ \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \circ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \bigcirc \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \circ & \bigcirc \\ \bigcirc & \circ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \bigcirc & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \circ \end{pmatrix}$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} \bigcirc & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \circ \\ \circ & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \bigcirc \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \circ & \bigcirc \\ \circ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \bigcirc \end{pmatrix}$$

$$c_5 = \begin{pmatrix} \bigcirc & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \circ \\ \bigcirc & \circ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \circ & \bigcirc \\ \circ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \bigcirc \end{pmatrix}$$

$$c_6 = \begin{pmatrix} \bigcirc & \circ & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bigcirc & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \circ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \circ & \bigcirc \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \circ & \bigcirc \end{pmatrix}$$



$$C_7 = \begin{pmatrix} & & & \circ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \circ & & \\ & & \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \circ \\ \circ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \circ & & \circ \end{pmatrix}$$

b) Exemple avec  $\dim \tilde{\mathcal{G}}_0 = 4$  :

Soit  $Z_k$  l'ensemble des familles  $\Omega$  telle que  $\Omega \subset P(k)$  et :

- 1)  $\phi \in \Omega$
- 2)  $\sigma, \tau \in \Omega$  alors  $\sigma \Delta \tau \in \Omega$

A chaque  $\Omega \in Z_k$ , on associe de façon unique la sous-algèbre de Lie de  $C_k$  :

$$\mathcal{G}(\Omega) = \{e_\sigma\}_{\sigma \in \Omega}$$

et réciproquement.

On choisit  $\Omega_0 = \{\phi, \{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \in Z_k$ .

Dans ce cas :

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(\Omega_0) = \{1, e_i, e_j, e_i e_j\}$$

Il est facile de voir que dans ce cas que  $\mathcal{G}_0$  est  $\eta$ -régulière.

(1.5.) Les données :

Hypothèse 1. On choisit  $\Omega_0 \in Z_k$  tel que  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(\Omega_0)$  soit  $\eta$ -régulière.

On notera dans la suite  $(\tilde{A}_0) = \tilde{\eta}(\sigma)$  et on suppose

$$\Omega_0 = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}\} \quad \text{avec } \sigma_0 = \emptyset.$$

Hypothèse 2. On se donne une représentation

$$h : \Pi_1(W, w_0) \longrightarrow GL(q ; \mathbb{R})$$

telle que,  $\forall \sigma \in \Omega_0, \forall \gamma \in \Pi_1(W, w_0)$  on ait :

$$h(\gamma) \cdot A_\sigma \cdot h(\gamma^{-1}) = A_\sigma.$$

On considère, le fibré vectoriel plat  $\tilde{W} \times_h \mathbb{R}^q = V \xrightarrow{\Pi} W$ , noté  $\xi_h$  dans la suite. On note  $\mathcal{F}_h$  le feuilletage sur  $V$  transverse à  $\Pi$ , associé à la structure plate de  $\xi_h$ .

Les champs de vecteurs  $\{\tilde{A}_\sigma\}_{\sigma \in \Omega_0}$  sur  $\mathbb{R}^q$  sont invariants par  $h$ ; il existe  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{r-1} \in \Omega_0$  telles que  $\tilde{\mathcal{J}}_0 = \{\tilde{A}_{\sigma_0}, \dots, \tilde{A}_{\sigma_{r-1}}\}$  et  $\tilde{A}_{\sigma_0}, \dots, \tilde{A}_{\sigma_{r-1}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}^q - \{0\}$ .

Les champs de vecteurs  $\{\tilde{A}_{\sigma_i}\}_{0 \leq i \leq r-1}$  induisent sur  $V$  les champs de vecteurs  $\{B_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$ ; qui sont tangents aux fibres de  $V \xrightarrow{\Pi} W$  et linéairement indépendants sur  $V - s_0(W)$ , où  $s_0 : W \rightarrow V$  est la section nulle du fibré vectoriel plat  $\xi_h$ .

On en déduit une algèbre de Lie  $\tilde{\mathcal{J}} = \{B_0, \dots, B_{r-1}\}$  de champs sur  $V$ . Notons  $i \Delta j$  l'indice  $k$  tel que

$$\sigma_i \Delta \sigma_j = \sigma_k.$$

Cette algèbre de Lie vérifie :

$$[B_i, B_j] = \varepsilon(\sigma_i, \sigma_j) B_k.$$

D'autre part les champs de vecteurs  $B_i$  ( $0 \leq i \leq r-1$ ) sont des automorphismes infinitésimaux du feuilletage  $\mathcal{F}_h$ . Le lieu singulier c'est-à-dire  $\mathcal{L}(\mathcal{F}_h, \{B_0, \dots, B_{r-1}\})$  du couple  $(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{J}})$  est  $s_0(W)$  identifié dans la suite à  $W$ .

On est donc dans la situation du chapitre II (page 9).

On pose

$$\text{Rés} (\mathcal{F}_h, \{B_0, \dots, B_{r-1}\}, W) = \text{Rés} (\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)$$

2. Détermination de  $\text{Rés} (\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)^\psi$  pour  $\deg \psi = 2q$  :

Soit  $C_J \in I(\mathcal{G}_q)$  avec  $|J| = q$ . A chaque  $C_J$ , on associe la fonction :

$$f_J : \underbrace{\mathcal{G}_q \times \dots \times \mathcal{G}_q}_{r \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

de la façon suivante.

A chaque suite d'entiers  $K = (k_1, \dots, k_r)$  telle que :

$|K| = k_1 + \dots + k_r$ , on associe l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, \dots, q\}$  qui sont de la forme :

$$\alpha = \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{1 \dots k_1}^{k_1 \text{ fois}} & \overbrace{(k_1+1) \dots (k_1+k_2)}^{k_2 \text{ fois}} & \dots & \overbrace{(k_1+\dots+k_{r-1}+1) \dots q}^{k_r \text{ fois}} \\ \underbrace{\alpha(1) \dots \alpha(k_1)} & \underbrace{\alpha(k_1+1) \dots \alpha(k_1+k_2)} & \dots & \underbrace{\alpha(k_1+\dots+k_{r-1}+1) \dots \alpha(q)} \end{array} \right)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\left(\sum_{i=0}^{\ell} k_i + 1\right) < \alpha\left(\sum_{i=0}^{\ell} k_i + 2\right) < \dots < \alpha\left(\sum_{i=0}^{\ell+1} k_i\right) \\ 0 \leq \ell \leq r-1 \text{ avec la convention } k_0 = 0. \end{array} \right.$$

On désigne cet ensemble par  $\Lambda_k$ .

a) La fonction  $\lambda_k$  :

Si  $C_1, \dots, C_r$  désignent  $r$ -matrices de  $\mathcal{G}_q$  et  $\alpha \in \Lambda_k$ , on définit  $(\alpha(C_1), \dots, \alpha(C_r))$  comme étant la matrice de  $\mathcal{G}_q$ .



$$(\alpha(C_1), \dots, (C_r)) = \begin{pmatrix} (\alpha(C_1)) & & \bigcirc \\ & (\alpha(C_2)) & \\ \bigcirc & & (\alpha(C_r)) \end{pmatrix}$$

c'est la matrice par r-blocs, dont le j-ème bloc est la matrice rectangulaire.

$$(C_j) = \left( C_j^{\alpha \left( \sum_{i=1}^{j-1} k_i + s \right) \alpha \left( \sum_{i=1}^{j-1} k_i + p \right)} \right)_{1 \leq s, p \leq k_j}$$

où  $C_j = (C_{\ell m}^j)_{1 \leq \ell, m \leq q}$ .

On définit

$$\lambda_k(C_1, \dots, C_r) = \frac{(-1)^{q-(r+1)}}{q!} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} \det(\alpha(C_1), \dots, \alpha(C_r))$$

b) La fonction  $f_J$  :

On définit :

$$f_J(C_1, \dots, C_r) = \frac{(-1)^{r+1}}{q!} \sum_{|K|=q} (-1)^{\left( \sum_{\ell=1}^{r-1} |\sigma_\ell| k_{\ell+1} \right)} \prod_{\ell=1}^{r-1} (k_\ell + \dots + k_r)!$$

$$C_J(\underbrace{C_1, \dots, C_1}_{k_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{C_r, \dots, C_r}_{k_r \text{ fois}}) \lambda_k(C_1, \dots, C_r)$$

On peut énoncer le

Théorème III.1. Pour  $C_J$  telle que  $|J| = q$ , on a :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)} C_J = f_J(A_{\sigma_0}, \dots, A_{\sigma_{r-1}}) \chi(\xi_h)$$

où  $\chi(\xi_h)$  est la classe d'Euler du fibré vectoriel  $\xi_h$ .

(Remarque : on verra sur les exemples que  $\chi(\xi_h)$  peut être  $\neq 0$ ).

Démonstration : Elle se fait en 5 étapes.

1ère étape.

Lemme 1. Il existe des familles de 1-formes  $(\omega_j)_{0 \leq j \leq r-1}$  sur  $V$  telle qu'à l'extérieur d'un voisinage tubulaire  $T$  de la feuille singulière  $W$ , on ait :

$$i) \quad \omega_j(B_k) = \delta_{jk} \begin{cases} = 0 & \text{si } j \neq k \\ = 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

$$ii) \quad \omega_j|_{T\mathcal{F}_h} \equiv 0 .$$

Démonstration :  $\mathbb{R}^q - \{0\}$  est  $h$ -invariant. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} \times (\mathbb{R}^q - \{0\}) & \longrightarrow & \tilde{W} \times_h (\mathbb{R}^q - \{0\}) = V - W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{W} & \longrightarrow & W \end{array}$$

Soit  $i : V - W \hookrightarrow V$  l'injection canonique. Soit  $\xi$  le fibré vectoriel de base  $V - W$  engendré par  $\{B_0, \dots, B_{r-1}\}$  ( $\text{rg}(\xi) = r$ ).

On a la suite exacte de fibrés vectoriels au-dessus de  $V - W$  :

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \xi \longrightarrow i^* \nu \longrightarrow \hat{\nu} \longrightarrow 0$$

où  $\nu$  est le fibré normal au feuilletage  $\mathcal{F}_h$  identifié au sous-fibré de  $T(V) \rightarrow V$  des vecteurs tangents aux fibres de  $V \rightarrow W$  lui-même identifié à  $\Pi^*(\xi_h)$  où  $\Pi$  est la projection  $V \rightarrow W$ . Et  $\hat{\nu}$  est le fibré normal au feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}$ , défini par  $\hat{\tau} = i^* \tau_h \oplus \xi$  où  $\tau_h = T\mathcal{F}_h$ .

Soit  $R_\xi$  la métrique sur  $\xi$  telle que :

$$R_\xi(B_j, B_k) = \delta_{jk} .$$

On choisit, une scission de la suite exacte (1), soit :

$$i^*_\nu = \xi \oplus \hat{\nu} .$$

On définit sur  $i^*_\nu$ , la métrique riemannienne.

$$R_{i^*_\nu} = R_\xi \oplus R_{\hat{\nu}}$$

où  $R_{\hat{\nu}}$  est une métrique riemannienne quelconque sur  $\hat{\nu}$ .

Soit  $R_0$  une métrique riemannienne sur  $\xi_h = (V \xrightarrow{\Pi} W)$  et  $T$  le voisinage tubulaire de  $W$  dans  $V$ , dont les fibres sont les disques  $D^q$  de rayon 1, pour cette métrique  $R_0$ . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} j^*_\nu & \longrightarrow & \nu = \Pi^* \xi_h & \longrightarrow & \xi_h = V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Pi \\ T & \xrightarrow{j} & V & \xrightarrow{\Pi} & W \end{array}$$

où  $j$  est l'inclusion naturelle de  $T$  dans  $V$ . On considère la métrique  $R_{j^*_\nu} = (\Pi \circ j)^* R_0$ . C'est une métrique riemannienne sur  $j^*_\nu = \nu|_T$ . Soit  $\overset{\circ}{T}_1$  le voisinage tubulaire de  $W$  dont les fibres sont les disques de rayon 1/2 pour la métrique  $R_0$ , ( $\overset{\circ}{T}_1 \subset T$ ). La variété  $V$  est recouverte par  $\{V - \overset{\circ}{T}_1, \overset{\circ}{T}_1\}$ . Soit  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  une partition  $C^\infty$  de l'unité subordonnée à ce recouvrement ouvert. Sur  $\nu$ , on définit la métrique  $R_\nu$  par

$$R_\nu = \gamma_1 R_{i^*_\nu} + \gamma_2 R_{j^*_\nu} .$$

Par construction, on a  $R_\nu(B_j, B_k) = \delta_{jk}$  à l'extérieur de  $T$ .

On a d'autre part :

$$TV = \tau_h \oplus \nu .$$

Soit  $R_h$  une métrique riemannienne sur  $\tau_h$  ; on définit

$$R = R_h \oplus R_\nu .$$

Soit  $\Pi_\nu : TV \rightarrow \nu$ , la projection de  $TV$  sur  $\nu$  parallèlement à  $\tau_h$ . On pose :

$$\omega_j(Y) = R(B_j, Y) = R_\nu(B_j, \Pi_\nu Y)$$

Les 1-formes  $\omega_j$  ( $0 \leq j \leq r-1$ ) vérifient les propriétés du lemme. En effet :

i)  $\omega_j(B_k) = R_\nu(B_j, B_k) = \delta_{jk}$  à l'extérieur de  $T$  si  $Y \in \Gamma(\tau_h)$ ,

on a

$$\Pi_\nu Y = 0$$

et

$$\omega_j(Y) = R_\nu(B_j, 0) = 0.$$

Donc

ii)  $\omega_j|_{\tau_h} \equiv 0.$

C.Q.F.D.

On remarque, dans la suite qu'on a un isomorphisme naturel de fibrés plats (non vectoriels, de fibre  $TR^q$ ), au-dessus de  $W$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \nu & \xrightarrow[\cong]{J} & T(R^q) \times_{dh} \tilde{W} \\
 \downarrow & & \swarrow \\
 V & & \\
 \downarrow & & \\
 W & & 
 \end{array}$$

Soit  $\bar{\nabla} : \Gamma(\tau_h) \times \Gamma(v) \rightarrow \Gamma(v)$  la connexion partielle qui définit la partie intrinsèque des différentes connexions de Bott pour  $\mathcal{F}_h$  sur  $v$  :

$$\bar{\nabla}_Y s = \Pi_v [Y, s] \quad (\Gamma(v) \subset \mathcal{X}(V))$$

$\Pi_v : TV \rightarrow v$  est la projection sur  $v$  parallèlement à  $\tau_h$ .

On définit la connexion

$$\nabla : \mathcal{X}(V) \times \Gamma(v) \rightarrow \Gamma(v)$$

$$\nabla_Y s = \bar{\nabla}_{Y_{\mathcal{F}}} (s) + \sum_{j=0}^{r-1} \omega_j(Y_v) \Pi_v [B_j, s]$$

où  $Y = Y_{\mathcal{F}} + Y_v$  est la décomposition relative à  $\mathcal{X}(V) = \Gamma(\tau_h) \oplus \Gamma(v)$ .

Par construction même,  $\nabla$  vérifie les propriétés du lemme 0

(page 14).

2ème étape.

Lemme 2. Il existe un recouvrement de  $V$  par des ouverts  $U_a$  tels que :

- 1)  $v|_{U_a}$  est trivial
- 2)  $\exists$  une trivialisations  $(s_1^a, \dots, s_q^a)$  de  $v|_{U_a}$  telle que :

$$\nabla_X s_\alpha^a = 0 \quad \text{dès que } X \in \Gamma(\tau_h).$$

Démonstration : C'est une propriété bien connue des fibrés vectoriels plats.

C.Q.F.D.

(Lire : ce qu'il fallait dire au lieu de ce qu'il fallait démontrer!).

On en déduit que relativement à l'atlas  $(U_a, \{s_1^a, \dots, s_q^a\})$ , la 1-forme de connexion locale (à coefficients dans  $\mathcal{H}(q; \mathbb{R})$ ) de  $\nabla$  est :

$$\theta_a = - \sum_{j=0}^{r-1} (\omega_j|_{U_a}) A_{\sigma_j}$$

La 2-forme de courbure de la connexion  $\nabla$  relativement à l'atlas  $(U_a, \{s_1^a, \dots, s_q^a\})$  est :

$$\Omega_a = d\theta_a + \frac{1}{2} \theta_a \wedge \theta_a$$

or

$$d\theta_a = - \sum_{k=0}^{r-1} (d\omega_k|_{U_a}) A_{\sigma_k}$$

et

$$\theta_a \wedge \theta_a = 2 \sum_{j < \ell} \omega_j \wedge \omega_\ell [A_{\sigma_j}, A_{\sigma_\ell}] .$$

Soit :

$$\Omega_a = - \sum_{k=0}^{r-1} (d\omega_k|_{U_a}) A_{\sigma_k} + \sum_{j < \ell} \omega_j \wedge \omega_\ell [A_{\sigma_j}, A_{\sigma_\ell}]$$

3ème étape :

Dans cette étape, on va supposer en plus que  $\psi$  est un polynôme homogène de degré  $2q$ , de  $I(\text{GL}(q; \mathbb{R}))$ .  $I(\text{GL}(q; \mathbb{R})) = \mathbb{R}[\Sigma_1, \dots, \Sigma_q]$  où

$$\Sigma_\ell(A) = \text{trace}(A^\ell).$$

Dire que  $\psi \in I^q(\text{GL}(q; \mathbb{R}))$  est équivalent à

$$\psi = \sum_{|K|=q} \delta_K \Sigma_K \quad \text{où} \quad \Sigma_K = \Sigma_{k_1} \dots \Sigma_{k_\ell} \quad \text{et où} \quad K = (k_1, \dots, k_\ell).$$

Lemme 3. Pour  $\psi \in I^q(\text{GL}(q; \mathbb{R}))$ , on a :

$$\psi(\Omega_a) = \psi(d\theta_a).$$

Démonstration : L'atlas  $(U_a)$  de  $V$  est à la fois trivialisant

pour  $\nu$  et  $\tau_h$ .

Soit  $I_a(\tau_h)$  l'idéal dans  $\Omega_{\text{DR}}(U_a)$  engendré par ceux des 1-formes qui sont nulles sur  $\Gamma(\tau_h|_{U_a})$ . On remarque que les 1-formes  $\omega_j|_{U_a} \in I_a(\tau_h)$ .

Ceci par construction même. Donc

$$\theta_a = - \sum_{j=0}^{r-1} \omega_j A_{\sigma_j} = (\hat{b}_{\ell m})_{1 \leq \ell, m \leq q}$$

est une  $q \times q$  matrice de 1-formes où :

$$\hat{b}_{\ell m} = - \sum_{j=0}^{r-1} \omega_j a_{jm}^{\ell}$$

où

$$(a_{jm}^{\ell})_{1 \leq \ell, m \leq q} = A_{\sigma_j}$$

On en déduit que  $\hat{b}_{\ell m} \in I_a(\tau_h)$ .

Puisque  $\mathcal{F}_h$  est un feuilletage, par le théorème de Frobenius,

on en déduit que :

$$dI_a(\tau_h) \subset I_a(\tau_h).$$

Donc  $d\theta_a = (d\hat{b}_{\ell m})_{1 \leq \ell, m \leq q}$  est telle que  $d\hat{b}_{\ell m} \in I_a(\tau_h)$ .

D'autre part :  $\frac{1}{2} \theta_a \wedge \theta_a = (\hat{C}_{\ell m})_{1 \leq \ell, m \leq q}$  où :

$$\hat{C}_{\ell m} = \sum_{s=1}^q \hat{b}_{\ell s} \wedge \hat{b}_{sm}.$$

On en déduit que  $\hat{C}_{\ell m} \in I_a^2(\tau_h)$ . Puisque  $\text{Codim } \mathcal{F}_h = q$ , pour des

raisons de dimension, on a :

$$I_a^p(\tau_h) = 0 \quad \text{pour } p \geq q+1.$$

Soit  $K = (k_1, \dots, k_\ell)$  une suite d'entiers tel que

$|K| = k_1 + \dots + k_\ell = q$ . Il suffit de démontrer le lemme pour  $\psi = \Sigma_k = \Sigma_{k_1} \dots \Sigma_{k_\ell}$ .

On a par ailleurs :

$$\Sigma_{k_i}(\Omega_a) = \text{trace} (\widehat{db}_{\ell m} + \widehat{c}_{\ell m})^{k_i}$$

Soit

$$\Sigma_{k_i}(\Omega_a) = \text{trace} \left[ \sum_{p=0}^{k_i} C_{k_i}^p (\widehat{db}_{\ell m})^p \cdot (\widehat{c}_{\ell m})^{k_i-p} \right]$$

$$\Sigma_{k_i}(\Omega_a) = \sum_{p=0}^{k_i} C_{k_i}^p \text{trace} \left[ (\widehat{db}_{\ell m})^p \cdot (\widehat{c}_{\ell m})^{k_i-p} \right]$$

On en déduit que

$$\text{trace} \left[ (\widehat{db}_{\ell m})^p \cdot (\widehat{c}_{\ell m})^{k_i-p} \right] \in I_a(\tau_h)^{2k_i-p} \quad 0 \leq p \leq k_i$$

On en déduit que :

$$(I) \quad \Sigma_K(\Omega_a) = \prod_{i=1}^{\ell} \Sigma_{k_i}(\Omega_a) = \sum_{\substack{p_i \leq k_i \\ 1 \leq i \leq \ell}} \prod_{i=1}^{\ell} C_{k_i}^{p_i} \text{trace} \left[ (\widehat{db}_{\ell m})^{p_i} (\widehat{c}_{\ell m})^{k_i-p_i} \right]$$

Or

$$\prod_{i=1}^{\ell} C_{k_i}^{p_i} \text{trace} \left[ (\widehat{db}_{\ell m})^{p_i} \cdot (\widehat{c}_{\ell m})^{k_i-p_i} \right] \in I_a(\tau_h)^{2(\sum_{i=1}^{\ell} k_i) - (\sum_{i=1}^{\ell} p_i)}$$

Or

$$(1) \quad 2\left(\sum_{i=1}^{\ell} k_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{\ell} p_i\right) = 2q - \sum_{i=1}^{\ell} p_i$$

avec  $0 \leq p_i \leq k_i$ .



Si l'un des  $p_i < k_i$ , le nombre  $2q - \sum_{i=1}^{\ell} p_i$  est supérieur ou égal à  $q+1$ , et la forme est nulle.

La seule forme non nulle dans la somme (I) s'obtient pour  $p_i = k_i$  ( $1 \leq i \leq \ell$ ).

$$\text{Donc } \Sigma_k(\Omega_a) = \prod_{i=1}^{\ell} \text{trace} \left[ (d\hat{b}_{\ell m})^{k_i} \right].$$

Soit

$$\Sigma_k(\Omega_a) = \Sigma_k(d\theta_a).$$

Par linéarité, on en déduit que :

$$\psi(\Omega_a) = \sum_{|K|=q} \delta_k \Sigma_k(\Omega_a) = \sum_{|K|=q} \delta_k \Sigma_k(d\theta_a) = \psi(d\theta_a).$$

C.Q.F.D.

4ème étape.

Choix convenable des 1-formes  $(\omega_j)_{0 \leq j \leq r-1}$

Dans cette étape, on va essentiellement se servir de la structure d'algèbre de Clifford.

Soit  $p_1 : \tilde{W} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \tilde{W}$  la première projection et  $p_2 : \tilde{W} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  la deuxième projection. On identifie dans la suite  $\text{TR}^q$  à

$$\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{q_1} \mathbb{R}^q \quad \text{où} \quad q_1(x, y) = x.$$

On a :

$$T(\tilde{W} \times \mathbb{R}^q) = p_1^* T\tilde{W} \oplus p_2^* \text{TR}^q.$$

On définit pour chaque  $\sigma_j$  ( $0 \leq j \leq r-1$ ) l'isomorphisme fibré :

$$\begin{array}{ccc} \bar{A}_{\sigma_j} : T(\tilde{W} \times \mathbb{R}^q) & \longrightarrow & T(\tilde{W} \times \mathbb{R}^q) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \tilde{W} \times \mathbb{R}^q & \end{array}$$

i)  $\bar{A}_{\sigma_j} |_{p_1^* \tilde{T}W} = id_{p_1^* \tilde{T}W}$

ii) en identifiant  $p_2^* T\mathbb{R}^q$  à  $\tilde{W} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$

$$\begin{array}{l} \bar{A}_{\sigma_j} |_{p_2^* T\mathbb{R}^q} : \tilde{W} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \rightarrow \tilde{W} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \\ (w, x, y) \rightarrow (w, x, A_{\sigma_j}^{-1} y) \end{array}$$

On remarque que la structure d'algèbre de Clifford nous permet d'écrire :

$$A_{\sigma_j}^{-1} = (-1)^{|\sigma_j|} A_{\sigma_j}$$

où  $|\sigma_j|$  est le nombre d'éléments de  $\sigma_j$ .

Lemme 4.

i) Les isomorphismes fibrés  $\bar{A}_{\sigma_j}$  induisent des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}_{\sigma_j} : TV & \longrightarrow & TV \\ & \searrow & \swarrow \\ & V & \end{array}$$

ii) Soient  $\hat{A}_{\sigma_j}^*$  les morphismes induits au niveau des formes.

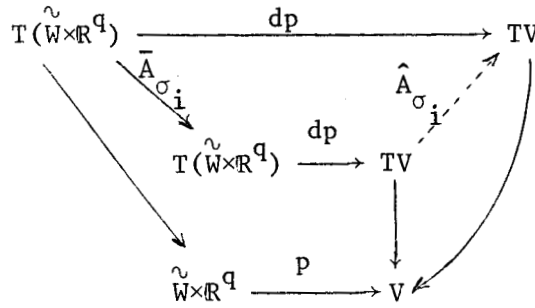
Les formes  $\omega_j$  ci-dessous vérifient les hypothèses du lemme 1.

$$\omega_j = \hat{A}_{\sigma_j}^*(\omega_0) \quad (0 \leq j \leq r-1)$$

(Rappelons que  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0(\Omega)$  avec  $\sigma_0 = \emptyset$ ).

Démonstration : Soit  $p : \tilde{W} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \tilde{W} \times_h \mathbb{R}^q = V$  la projection.

On a le diagramme commutatif suivant :



Puisque  $A_{\sigma_i}$  est  $h$ -invariant et que  $h$  est linéaire, le morphisme  $dp \circ \bar{A}_{\sigma_i}$  passe aux quotients et définit  $\hat{A}_{\sigma_i}$ .

On a par ailleurs que :

$$\bar{A}_{\sigma_i} \circ \bar{A}_{\sigma_j}^{-1}(w, x, y) = \bar{A}_{\sigma_i}(w, x, A_{\sigma_j} y) = (w, x, A_{\sigma_i}^{-1} A_{\sigma_j} y).$$

En utilisant la structure d'algèbre de Clifford, on a :

$$A_{\sigma_i}^{-1} A_{\sigma_j} = (-1)^{|\sigma_i|} A_{\sigma_i} A_{\sigma_j}$$

et

$$A_{\sigma_i} A_{\sigma_j} = \varepsilon(\sigma_i, \sigma_j) A_{\sigma_{i\Delta j}}$$

où  $i\Delta j$  est l'indice tel que :

$$\sigma_i \Delta \sigma_j = \sigma_{i\Delta j} \quad .$$

Donc

$$A_{\sigma_i}^{-1} A_{\sigma_j} = (-1)^{|\sigma_i|} \varepsilon(\sigma_i, \sigma_j) A_{\sigma_{i\Delta j}} \quad .$$

On en déduit que :

$$\omega_i(B_j) = \left( \hat{A}_{\sigma_i}^* \omega_o \right) (B_j)$$

Soit

$$\omega_i(B_j) = (-1)^{|\sigma_i|-1} \epsilon(\sigma_i, \sigma_j) \omega_o(B_{i\Delta j}) .$$

Or d'après le lemme 1 (1ère étape), on a à l'extérieur de  $T$ ,  
si  $i \neq j$ ,  $\omega_o(B_{i\Delta j}) = 0$ .

D'autre part si  $i = j$ ,  $\omega_i(B_i) = \omega_o(B_o) = 1$  à l'extérieur de  $T$ .

On a d'autre part :

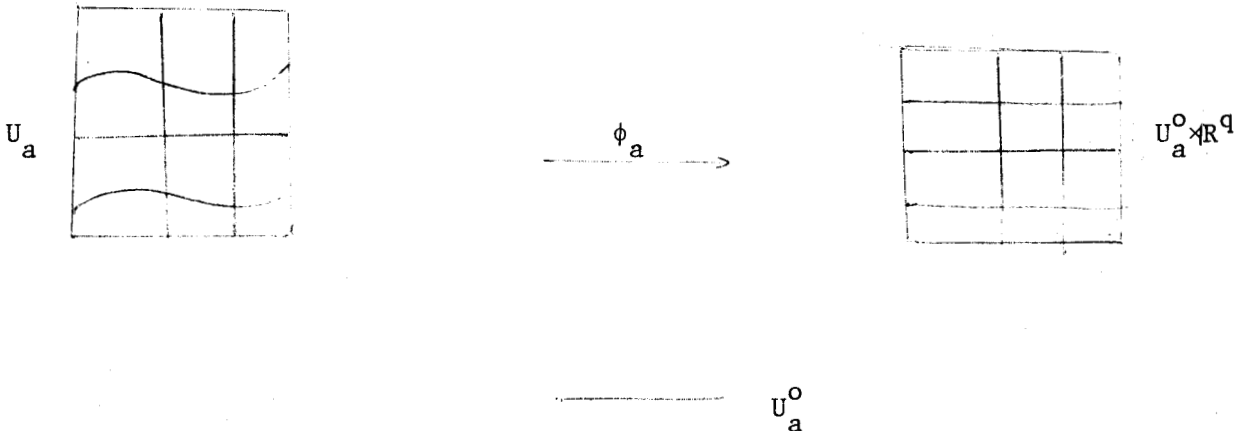
$$\omega_i|_{\tau_h} = \hat{A}_{\sigma_i}^* \omega_o|_{\tau_h} = \hat{A}_{\sigma_i}^* (0) = 0 .$$

C.Q.F.D.

5ème étape.

On suppose désormais les  $\omega_j$  définis comme au lemme 4.

$V$  est recouverte par les ouverts  $(U_a)$ , comme dans le lemme 2  
(2ème étape)  $U_a = \Pi^{-1}(U_a^o)$ . On a la figure suivante :



A chaque  $\sigma_j$ , on associe  $(-1)^{|\sigma_j|-1} A_{\sigma_j} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ . On définit :

$$\hat{A}_{\sigma_j} : U_a^0 \times \mathbb{R}^q \rightarrow U_a^0 \times \mathbb{R}^q$$

$$\hat{A}_{\sigma_j}(w, (x_1, \dots, x_q)) = (w, (-1)^{|\sigma_j|-1} A_{\sigma_j}(x_1, \dots, x_q)) .$$

Sur  $U_a$ , on choisit le système de coordonnées suivant :

$(w, u_1, \dots, u_q)$ , où

$$\begin{aligned} w : U_a &\xrightarrow{\phi_a} U_a^0 \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{p_1} U_a^0 \\ u_j : U_a &\xrightarrow{\phi_a} U_a^0 \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}^q \xrightarrow{p_j} \mathbb{R} \end{aligned}$$

où

$$p_j(x_1, \dots, x_q) = x_j .$$

Soit  $\omega_0$  la 1-forme sur  $V$  associée à  $\sigma_0 = \emptyset$ , qui vérifie les conditions du lemme 1 (1ère étape), on pose :

$$\omega_0|_{U_a} = \sum_{j=1}^q \beta_j(w, u) du_j .$$

Par le lemme 4 (4ème étape), on peut choisir

$$\omega_k = \hat{A}_{\sigma(k)}^*(\omega_0) .$$

Par le lemme 3 (3ème étape), on a pour  $|J| = q$  :

$$C_J(\Omega) = (-1)^q C_J \left( \sum_{k=0}^{r-1} A_{\sigma_k} \cdot \hat{A}_{\sigma_k}^*(d\omega_0) \right) .$$

Comme  $C_J$  est multilinéaire, on en déduit :

$$C_J(\Omega) = (-1)^q \sum_{|K|=q} \left[ \prod_{\ell=1}^r (k_\ell + \dots + k_r)! C_J(\underbrace{A_{\sigma_0}, \dots, A_{\sigma_0}}_{k_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{A_{\sigma_{r-1}}, \dots, A_{\sigma_{r-1}}}_{k_r \text{ fois}}) \right. \\ \left. \frac{1}{k_1! \dots k_r!} \cdot (d\omega_0)^{k_1} \wedge \dots \wedge (d\omega_{r-1})^{k_r} \right].$$

Il reste à calculer  $(d\omega_0)^{k_1} \wedge \dots \wedge (d\omega_{r-1})^{k_r}$ .

Lemme 5.

$$(d\omega_0)^{k_1} \wedge \dots \wedge (d\omega_{r-1})^{k_r} = \frac{(-1)^{q-(r+1)}}{q!} \prod_{j=0}^{r-1} (k_{j+1})! (-1)^{\sum_{\ell=0}^{r-1} |\sigma_\ell| k_{\ell+1}} \\ \lambda_k(A_{\sigma_0}, \dots, A_{\sigma_{r-1}}) (d\omega_0)^q.$$

où  $\lambda_k$  est la fonction explicitée précédemment

$$|K| = k_1 + \dots + k_r = q.$$

Démonstration : Sur l'ouvert  $U_a$ ,  $\omega_0$  s'écrit :

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^q \beta_j(w, u) du_j$$

où

$$\beta_j(w, u) = \sum_{m=1}^q u_m R_{\nu} \left( \frac{\partial}{\partial u_m}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right)$$

( $\beta_j = u_j$  à l'extérieur de  $T$ ).

$R_{\nu}$  étant la métrique vérifiant les conditions du lemme 1 (1ère étape). On note  $d_W$  la dérivée le long de  $U_a^0 \subset W$ . Donc :

$$d\omega_0 = \sum_{j=1}^q d\beta_j \wedge du_j.$$

On en déduit :

$$(d\omega_o)^q = (-1)^{q-1} q! d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_q \wedge du_1 \wedge \dots \wedge du_q .$$

Soit encore :

$$(d\omega_o)^q = (-1)^{q-1} q! (d_{\mathbb{W}}\beta_1 \wedge \dots \wedge d_{\mathbb{W}}\beta_q) \wedge (du_1 \wedge \dots \wedge du_q) .$$

Soit comme avant :

$$\hat{A}_{\sigma_j} : U_a \rightarrow U_a$$

$$\hat{A}_{\sigma_j}(w, u) = (w, (-1)^{|\sigma_j|-1} A_{\sigma_j}(u))$$

On note

$$A_{\sigma_j}(u) = (u_{1,j}, \dots, u_{q,j}) = (-1)^{|\sigma_j|-1} A_j(u_1, \dots, u_q) .$$

On remarque que :

$$\omega_j = \sum_{m=1}^q \beta_m(w, A_{\sigma_j}(u)) du_{m,j}$$

Donc

$$d\omega_j = \sum_{m=1}^q d\beta_m \wedge du_{m,j}$$

On en déduit

$$(d\omega_j)^{k_j} = (-1)^{k_j-1} (k_j)! \sum_{m_1 < \dots < m_{k_j}} d\beta_{m_1} \wedge \dots \wedge d\beta_{m_{k_j}} \wedge du_{m_1,j} \wedge \dots \wedge du_{m_{k_j},j} .$$

Désignons par :

$$\Lambda_\ell = \{M = (m_1, \dots, m_\ell) \in \{1, 2, \dots, q\}^\ell \text{ telle que } m_1 < \dots < m_\ell\}.$$

A chaque  $M \in \Lambda_\ell$ , on associe

$$d\beta_M = d\beta_{m_1} \wedge \dots \wedge d\beta_{m_\ell}$$

et  $du_{M,j} = du_{m_1,j} \wedge \dots \wedge du_{m_\ell,j}$ .

Avec ces notations, on a :

$$(d\omega_j)^{k_j} = (-1)^{j^{k_j-1}} (k_j)! \sum_{M \in \Lambda_{k_j}} d\beta_M \wedge du_{M,j}$$

On en déduit :

$$\prod_{j=0}^{r-1} (d\omega_j)^{k_{j+1}} = (-1)^{q-r} \left( \prod_{j=0}^{r-1} (k_{j+1})! \right) \sum_{M_j \in \Lambda_{k_{j+1}}} \prod_{j=0}^{r-1} d\beta_{M_j} \wedge du_{M_j,j}$$

Or

$$\prod_{j=0}^{r-1} d\beta_{M_j} \wedge du_{M_j,j} = (-1)^{\varepsilon(M_0, \dots, M_{r-1})} d\beta_{M_0} \wedge \dots \wedge d\beta_{M_{r-1}} \wedge \prod_{j=0}^{r-1} du_{M_j,j}$$

Désignons par :

$$\Lambda_\ell = \{M = (m_1, \dots, m_\ell) \in \{1, 2, \dots, q\}^\ell \text{ telle que } m_1 < \dots < m_\ell\}.$$

A chaque  $M \in \Lambda_\ell$ , on associe

$$d\beta_M = d\beta_{m_1} \wedge \dots \wedge d\beta_{m_\ell}$$

et

$$du_{M,j} = du_{m_1,j} \wedge \dots \wedge du_{m_\ell,j}$$





Avec ces notations, on a :

$$(d\omega_j)^{k_j} = (-1)^{k_{j-1}} (k_j)! \sum_{M \in \Lambda_{k_j}} d\beta_M \wedge du_{M,j}$$

On en déduit

$$\prod_{j=0}^{r-1} (d\omega_j)^{k_{j+1}} = (-1)^{q-r} \prod_{j=0}^{r-1} (k_{j+1})! \sum_{M_j \in \Lambda_{k_{j+1}}} \prod_{j=0}^{r-1} d\beta_{M_j} \wedge du_{M_j,j}$$

Or

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{r-1} d\beta_{M_j} \wedge du_{M_j,j} &= (-1)^{\varepsilon(M_0, \dots, M_{r-1})} d\beta_{M_0} \wedge \dots \wedge d\beta_{M_{r-1}} \wedge \prod_{j=0}^{r-1} du_{M_j,j} \\ &= (-1)^{\varepsilon(M_0, \dots, M_{r-1})} d_W \beta_{M_0} \wedge \dots \wedge d_W \beta_{M_{r-1}} \wedge \prod_{j=0}^{r-1} du_{M_j,j} \end{aligned}$$

Soit  $\Lambda_K$  l'ensemble des permutations  $\alpha$  de  $\{1, 2, \dots, q\}$  qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \sum_{i=0}^{\ell} k_{i+1} < \alpha \sum_{i=0}^{\ell} k_{i+2} < \dots < \alpha \sum_{i=0}^{\ell+1} k_i \\ 0 \leq \ell \leq r-1 \text{ avec la convention } k_0 = 0. \end{array} \right.$$

On remarque que si  $(M_0, \dots, M_{r-1}) = \alpha$  n'est pas dans  $\Lambda_K$

$$\prod_{j=0}^{r-1} d_{M_j} \wedge du_{M_j,j} = 0.$$

D'autre part si  $(M_0, \dots, M_{r-1}) = \alpha \in \Lambda_K$ , on a :

$$\prod_{j=0}^{r-1} d\beta_{M_j} \wedge du_{M_j,j} = (-1)^{\varepsilon(\alpha)} \prod_{j=0}^{r-1} J(A_j^{-1}; M_j) d_W \beta_1 \wedge \dots \wedge d_W \beta_q du_1 \wedge \dots \wedge du_q .$$

Or  $\prod_{j=0}^{r-1} J \left( A_{\sigma_j}^{-1} ; \begin{pmatrix} M_j \\ M_j \end{pmatrix} \right) = \text{dét}(\alpha(A_{\sigma_0}^{-1}), \dots, (A_{\sigma_{r-1}}^{-1}))$  et

$$\text{dét}(\alpha(A_{\sigma_0}^{-1}), \dots, (A_{\sigma_{r-1}}^{-1})) = (-1)^{q + \sum_{\ell=0}^{r-1} |\sigma_\ell| k_{\ell+1}} \det(\alpha(A_{\sigma_0}), \dots, \alpha(A_{\sigma_{r-1}}))$$

Donc

$$\prod_{j=0}^{r-1} d\beta_{M_j} \wedge du_{M_{j,j}} = (-1)^q (-1)^{\varepsilon(\alpha)} (-1)^{\sum_{\ell=0}^{r-1} |\sigma_\ell| k_{\ell+1}} \det(\alpha(A_{\sigma_0}), \dots, \alpha(A_{\sigma_{r-1}}))$$

$$(d_W \beta_1 \wedge \dots \wedge d_W \beta_q) \wedge (du_1 \wedge \dots \wedge du_q)$$

et

$$(d_W \beta_1 \wedge \dots \wedge d_W \beta_q) \wedge (du_1 \wedge \dots \wedge du_q) = (-1)^{q-1} \frac{(d\omega_0)^q}{q!} .$$

Soit enfin :

$$\prod_{j=0}^{r-1} (d\omega_j)^{k_{j+1}} = \frac{(-1)^{q-(r+1)}}{q!} \prod_{j=0}^{r-1} (k_{j+1})! \left[ \sum_{\alpha \in \Lambda_K} (-1)^{\sum_{\ell=0}^{r-1} |\sigma_\ell| k_{\ell+1}} \right]$$

$$(-1)^{\varepsilon(\alpha)} \det(\alpha(A_{\sigma_0}), \dots, (A_{\sigma_{r-1}})) (d\omega_0)^q .$$

Soit

$$\prod_{j=0}^{r-1} (d\omega_j)^{k_{j+1}} = \frac{(-1)^{q-(r+1)}}{q!} \left( \prod_{j=0}^{r-1} (k_{j+1})! \right) (-1)^{\sum_{\ell=0}^{r-1} |\sigma_\ell| k_{\ell+1}}$$

$$\lambda_K(A_{\sigma_0}, \dots, A_{\sigma_{r-1}}) (d\omega_0)^q .$$

C.Q.F.D.

Pour terminer la démonstration du théorème, on a :

$$C_J(\Omega) = f_J(A_{\sigma_0}, \dots, A_{\sigma_{r-1}}) (d\omega_0)^q$$

Soit :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)} C_J = \int_{D^q} f_J(A_{\sigma_0}, \dots, A_{\sigma_{r-1}}) (d\omega_0)^q = f_J(A_{\sigma_0}, \dots, A_{\sigma_{r-1}}) \int_{D^q} (d\omega_0)^q.$$

Or,

$$\int_{D^q} (d\omega_0)^q = \text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, B_0, W)} C_q$$

où  $B_0$  est le champ associé à la matrice identité. Pour terminer la démonstration du théorème, on remarque que :

$$(1) \quad \text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, B_0, W)} C_q = \chi(\xi_h)$$

où  $\chi(\xi_h)$  est la classe d'Euler du fibré vectoriel plat  $\xi_h$ .

C.Q.F.D.

Remarque 1. L'égalité (1) est due à Heitsch (cf. Heitsch [ ]).

Remarque 2. Dans le cas de certains feuilletages localement homogènes, on peut montrer par un calcul direct que  $\int_{D^q} (d\omega_0)^q$  est une forme volume de la feuille singulière  $W$ .

CHAPITRE IV

DETERMINATION DE  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{J}}, W)}^{h_I c_J}$

Dans ce chapitre, on fait les mêmes hypothèses qu'au chapitre précédent.

On se propose d'établir le lien entre  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{J}}, W)}^{h_I c_J}$  et  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{J}}, W)}^{c_J}$ .

On considère le fibré vectoriel plat orienté  $\xi_h = (V \xrightarrow{\Pi} W)$  de fibre  $\mathbb{R}^q$ .

On définit l'homomorphisme qui donne les classes caractéristiques exotiques du fibré vectoriel plat  $\xi_h$ , munit d'une  $SO(q)$ -réduction, de la façon suivante :

$$\text{Soient - } \mathcal{J} = I^+(GL_q^+) = \{c_1, \dots, c_q\}$$

$$\text{- } \mathcal{J}' = \{c_1, c_3, \dots\}.$$

On choisit :

i) La connexion plate  $\theta$  sur  $\xi_h$  d'holonomie  $h$  : c'est une  $\mathcal{J}$ -connexion.

ii) une connexion  $\theta^r$  sur  $\xi_h$  préservant une métrique riemannienne arbitraire sur  $\xi_h$ . C'est une  $\mathcal{J}'$ -connexion.

Soit

$$\alpha_{(\theta, \theta^r)} : A(\mathcal{J}, \mathcal{J}') \longrightarrow \Omega_{DR}(W)$$

l'homomorphisme qui donne l'exotisme. C'est un cas particulier de l'exotisme décrit au début (cf. page [ ]).

Soit  $\alpha : H^*(A(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) \rightarrow H_{DR}^*(W)$

le morphisme induit en cohomologie.

1er cas : Si q est impair

On a

$$H^*(A(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) = \Lambda(h_1, h_3, \dots)$$

En effet, soit  $Q_G$  une base de  $S(Q_G) = I(G)$  et  $\tau_G : Q_G \rightarrow P_G$  une transgression.

On a un morphisme  $S(Q_G) = I(G) \xrightarrow{\rho^*} S(Q_H) = I(H)$ .

Ici  $G = GL^+(q; \mathbb{R})$  et  $H = SO(q; \mathbb{R})$   $q = 2r-1$ .

$A(\mathcal{J}, \mathcal{J}') = S(Q_H) \otimes \Lambda P_G$  avec la différentielle

$$\begin{cases} D|_{Q_H} = 0 \\ D|_{P_G} = \rho^* \circ \tau_G \end{cases}$$

Or  $S(Q_H) = I(H) = S(p_1, \dots, p_{r-1})$  pour  $q = 2r-1$  et  $\Lambda(P_G) = \Lambda(h_1, \dots, h_q)$  avec

$$Dh_{2i+1} = 0 \quad \text{et} \quad Dh_{2i} = (-1)^i p_i .$$

Donc :

$$S(Q_H) \otimes \Lambda(P_G) = \Lambda(h_1, h_3, \dots) \otimes \Lambda(h_2, h_4, \dots, h_{2(r-1)}) \otimes S(p_1, \dots, p_{r-1})$$

Comme le sous-complexe  $\Lambda(h_2, \dots, h_{2(r-1)}) \otimes S(p_1, \dots, p_{r-1})$  est une sous-algèbre contractile, on en déduit le résultat annoncé.

2ème cas :  $q$  est pair :  $q = 2r$

Dans ce cas

$$A(\mathcal{J}, \mathcal{J}') \subsetneq S(Q_H) \otimes \Lambda^p_G .$$

Mais le morphisme  $\alpha_{(\theta, \theta^r)}$  se prolonge à tout  $(S(Q_H) \otimes \Lambda^p_G, D)$ .

On en déduit, de la même façon que

$$H^*(S(Q_H) \otimes \Lambda^p_G) = \Lambda(h_1, h_3, \dots) \otimes S(X) / \chi^2 \quad \text{où } \chi^2 = p_r .$$

On remarque que  $H^*(S(Q_H) \otimes \Lambda^p_G)$  n'est autre que  $H^*(\mathcal{J}^+(q), SO(q))$ . Dans la suite le morphisme

$$\alpha : H^*(\mathcal{J}^+(q), SO(q)) \rightarrow H^*_{DR}(W)$$

sera le morphisme  $\alpha^*_{(\theta, \theta^r)}$  si  $q = 2r-1$  et le prolongement de

$\alpha^*_{(\theta, \theta^r)}$  si  $q = 2r$ .

Pour plus de détails, cf. D. Lehmann [ ] .

On a le théorème, qui généralise celui de Heitsch ([ ]).

Théorème 4. Soit  $I = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_\ell)$ . On suppose que  $q-r+1 \leq |J| \leq q$

i) si  $i_1 \geq r$  alors :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{J}}, W)}^{h_I} c_J = \alpha(h_I) \text{ Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{J}}, W)}^{c_J}$$

ii) si  $|J| = q$

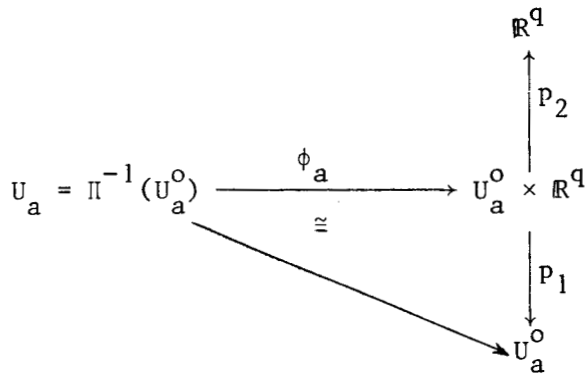
$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{J}}, W)}^{h_I} c_J = \alpha(h_I) \chi(\xi_h) f_J(A_{\sigma_0}, \dots, A_{r-1})$$

où  $f_J$  est la fonction explicite du chapitre III.

Démonstration : Soit  $\Pi : V \rightarrow W$  la projection. Rappelons que  $\Pi^*V$  est identifié naturellement au fibré  $\nu_h$  normal à  $\mathcal{F}_h$ .

Lemme. La connexion  $\Pi^*\theta$  sur  $\nu_h$  est une connexion de Bott pour le feuilletage  $\mathcal{F}_h$ .

Démonstration : Localement



L'image par  $(\phi_a)^{-1}$  de la fibration  $p_1$  est la fibration  $\Pi$  restreinte à  $U_a$ .

L'image par  $(\phi_a)^{-1}$  de la fibration  $p_2$  est le feuilletage  $\mathcal{F}_h$  restreint à  $U_a$ .

Soit  $X \in \mathcal{X}(U_a^0)$  et  $Y_0 \in \mathbb{R}^q$ .

$Y_0 \in \mathbb{R}^q$  définit un champ unique  $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^q)$ .

$Y_m$  est le vecteur d'origine  $m$  équipotent à  $Y_0$ .

On a  $[X, Y] = 0$ . Or

$$\bar{X} = (\phi_a)^{-1}X \in \Gamma(\tau_h)$$

et  $\bar{Y} = (\phi_a)^{-1}Y$  est une section de  $\nu_h$ , de la forme  $\Pi^*Y_0$  où  $Y_0$  est une section à dérivée covariante nulle de  $\xi_h$ . Donc

$$\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} = 0.$$

si  $\nabla$  est la dérivée covariante associée à  $\Pi^*\theta$ , et  $[\bar{X}, \bar{Y}]$  aussi. On en déduit que  $\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}$  est la projection sur  $v_h$  de  $[\bar{X}, \bar{Y}]$ , pour  $\bar{X}, \bar{Y}$  de la forme ci-dessus.

Mais comme les sections  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  de  $\tau_h$  et  $v_h$  qui sont de la forme ci-dessus engendrent toutes les autres pour la structure de  $C^\infty(V)$ -module, le lemme en résulte.

Soit  $\Pi^*\theta^R$ , l'image réciproque d'une  $O_q$ -connexion sur  $V \xrightarrow{\Pi} W$  et  $\theta^b$  une  $\{B_0, \dots, B_{r-1}\}$ -connexion (cf. Lemme 0 (page )).

Par construction même de  $\theta^b$ , on a :

$$c_J(\Omega^b) = 0$$

à l'extérieur d'un voisinage tubulaire  $T$  de la section nulle  $s_0(W) = W$ , pour  $|J| > q-r$ .

En effet la courbure  $\Omega^b$  appartient à  $I(\hat{\tau}|_{V-T})$  où

$$\hat{\tau} = \tau_h \oplus \tilde{\mathcal{G}}$$

et  $I(\hat{\tau}|_{V-T})$  désigne l'idéal des formes qui sont nulles sur les feuilles du feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}|_{V-T}$ .

On a d'autre part la formule

$$(1) \quad \Delta_{c_i}(\theta^b, \Pi^*\theta^R) = \Delta_{c_i}(\Pi^*\theta, \Pi^*\theta^R) - \Delta_{c_i}(\theta^b, \Pi^*\theta) + \text{cobord.}$$

Puisque  $\theta^b$  et  $\Pi^*\theta$  sont deux connexions de Bott pour  $\mathcal{F}_h$ , on a :

$$\Delta_{c_i}(\theta^b, \Pi^*\theta) \in I(\tau_h)^i$$

où  $I(\tau_h)$  est l'idéal des formes qui sont nulles sur les feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}_h$ .



Comme,  $\text{codim } \mathcal{F}_h = q$ , on a :

$$(2) \quad I(\tau_h)^k = 0 \quad \text{pour } k \geq q+1$$

Si  $\Omega$  est la courbure de  $\Pi^*\theta$ , on a  $\Omega = 0$ , donc

$$c_i(\Omega) = 0$$

et si  $i$  est impair  $c_i(\Omega^R) = 0$  où  $\Omega^R$  est la courbure de  $\Pi^*\theta^R$ .

D'après la définition de Rés  $(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)$  on a :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{G}}, W)} h_I c_J = \left[ \int_{D^q} \Delta_{c_{i_1}}(\theta^b, \Pi^*\theta^R) \dots \Delta_{c_{i_k}}(\theta^b, \Pi^*\theta^R) c_J(\Omega^b) \right].$$

On considère les partitions de  $I = (i_1 < \dots < i_k)$  en  $I' \cup I''$  où

$$I' = (i'_1 < \dots < i'_{k'}) \quad \text{et} \quad I'' = (i''_1 < \dots < i''_{k''})$$

avec  $I' \neq \emptyset$  (i.e)  $k' \geq 1$ .

On a :

$$c_J(\Omega^b) c_{i'_1}(\theta^b, \Pi^*\theta) \in I(\tau_h)^{|J|+i'_1}$$

sous les conditions i) ou ii), on a :

$$|J| + i'_1 \geq q+1.$$

Donc :

$$\Delta_{c_{i'_1}}(\theta^b, \Pi^*\theta) \dots \Delta_{c_{i'_{k'}}}(\theta^b, \Pi^*\theta) \Delta_{c_{i''_1}}(\Pi^*\theta, \Pi^*\theta^R) \dots \Delta_{c_{i''_{k''}}}(\Pi^*\theta, \Pi^*\theta^R) c_J(\Omega^b) \equiv 0$$

et

$$\left[ \int_{D^q} \Delta_{c_{i_1}}(\theta^b, \Pi^* \theta) \dots \Delta_{c_{i_{k'}}}(\theta^b, \Pi^* \theta) \Delta_{c_{i_1''}}(\Pi^* \theta, \Pi^* \theta^R) \dots \Delta_{c_{i_{k''}}}(\Pi^* \theta, \Pi^* \theta^R) c_J(\Omega^b) \right] = 0.$$

On en déduit que :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{F}}, W)}^{h_I} c_J = \left[ \int_{D^q} \Delta_{c_{i_1}}(\Pi^* \theta, \Pi^* \theta^R) \dots \Delta_{c_{i_k}}(\Pi^* \theta, \Pi^* \theta^R) c_J(\Omega^b) \right]$$

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{F}}, W)}^{h_I} c_J = \left[ \int_{D^q} \Pi^* (\Delta_{c_{i_1}}(\theta, \theta^R) \dots \Delta_{c_{i_k}}(\theta, \theta^R)) c_J(\Omega^b) \right]$$

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{F}}, W)}^{h_I} c_J = \left[ \Delta_{c_{i_1}}(\theta, \theta^R) \dots \Delta_{c_{i_k}}(\theta, \theta^R) \right] \left[ \int_{D^q} c_J(\Omega^b) \right]$$

d'où :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{F}}, W)}^{h_I} c_J = \alpha(h_I) \text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, \tilde{\mathcal{F}}, W)}^{c_J}$$

C.Q.F.D.

CHAPITRE V

CALCUL DE Rés  $(\mathcal{F}_h, X_I, B\Gamma) \text{ } ^c_{2q}$

Dans ce chapitre, on fait l'hypothèse supplémentaire que la feuille singulière  $W$  est un  $K(\Gamma, 1)$ .

On se donne un groupe de Lie  $G$  semi-simple inclus dans  $GL(2q; \mathbb{R})$ . Quitte à remplacer  $G$  par un sous-groupe de  $GL(2q; \mathbb{R})$  qui est conjugué à  $G$ , on peut toujours supposer que le sous-groupe compact  $K = G \cap O(2q)$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ .

Puisque  $G$  est semi-simple, le théorème de Borel implique que  $G$  possède un sous-groupe  $\Gamma$  tel que :

- i)  $\Gamma \backslash G$  soit compact.
- ii)  $\Gamma$  opère de façon totalement discontinue sur  $G/K$ .

[ Hypothèse 1. On choisit  $W = B\Gamma = \Gamma \backslash G/K$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe qui vérifie i) et ii).

Hypothèse 2. On suppose que  $\dim B\Gamma = 2q = \dim G/K$ .

Soit  $\xi_h$  le fibré vectoriel plat  $\mathbb{R}^{2q} \times_h G/K \rightarrow B\Gamma$  associé à l'inclusion naturelle  $h : \Gamma \hookrightarrow GL(2q; \mathbb{R})$ .

[ Proposition 1. Le fibré  $\xi_h$  est isomorphe au fibré vectoriel  $\xi$  associé au  $K$ -fibré principal suivant :

$$K \longrightarrow \Gamma \backslash G \longrightarrow B\Gamma = \Gamma \backslash G/K \quad .$$

Démonstration : Soit  $\phi : G \times \mathbb{R}^{2q} \rightarrow G \times \mathbb{R}^{2q}$

$$\phi(g, v) = (g, gv)$$

On considère  $G \times \mathbb{R}^{2q} \xrightarrow{\rho'_k} G|_K \times \mathbb{R}^{2q}$

$$\rho'_k(g, v) = (gk, v)$$

Soit

$$\rho'_\Gamma : G|_K \times \mathbb{R}^{2q} \longrightarrow G|_K \times_\Gamma \mathbb{R}^{2q} = V$$

La projection qui définit le fibré vectoriel plat  $\xi_h$ .

On définit  $\rho' = \rho'_\Gamma \circ \rho'_k$ . On a  $(\rho')^*(\mathcal{F}_h) = \mathcal{F}'_0$  où

$$(\mathcal{F}'_0)_{(g, v)} = G \times \{v\}.$$

On considère  $\mathcal{F} = (\phi)^*(\mathcal{F}'_0)$ . On a :

$$(\mathcal{F})_{(g, v)} = \{(g, g^{-1}v), g \in G\}.$$

Sur  $G \times \mathbb{R}^{2q}$ , on fait agir  $K$  de la façon suivante :

$$(G \times \mathbb{R}^{2q}) \times K \rightarrow (G \times \mathbb{R}^{2q})$$

$$(g, v) \cdot k = (gk, k^{-1}v).$$

Et on fait agir  $\Gamma$  de la façon suivante

$$\Gamma \times (G \times \mathbb{R}^{2q}) \rightarrow (G \times \mathbb{R}^{2q})$$

$$\gamma \cdot (g, v) = (\gamma g, v).$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (G \times \mathbb{R}^{2q}, \mathcal{F}'_0) & \xrightarrow{\phi} & (G \times \mathbb{R}^{2q}, \mathcal{F}'_0) \\
 \downarrow \rho & & \downarrow \rho' \\
 (M = \Gamma \backslash G \times \mathbb{R}^{2q}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & (V, \mathcal{F}_h) \\
 \searrow \Pi & & \swarrow \Pi' \\
 & B\Gamma &
 \end{array}$$

On a  $\rho(g, v) = \rho(g_1, v_1) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \exists k \in K$  tel que

$$(g_1, v_1) = (\gamma g k, k^{-1} v)$$

donc

$$\phi(g_1, v_1) = (\gamma g k, \gamma g v) \Leftrightarrow \rho'(\phi(g_1, v_1)) = \rho'(\phi(g, v))$$

Il suffit, de poser :

$$\psi(\rho(g, v)) = \rho'(\phi(g, v))$$

$\psi$  est trivialement un difféomorphisme entre  $M$  et  $V$ .

On remarque d'autre part que  $\mathcal{F}_0$  est invariant par l'action de  $\Gamma$  et de  $K$ . En effet :

$$\text{si } \gamma \in \Gamma \quad \left( \gamma \cdot (\mathcal{F}_0)_{(g, v)} \right) = \{(\gamma g, g^{-1} v), g \in G\} = \{(g', g'^{-1} \gamma v), g' \in G\}.$$

donc

$$\gamma \cdot \left( (\mathcal{F}_0)_{(g, v)} \right) = \mathcal{F}_0_{(g, \gamma v)}$$

$\mathcal{F}_0$  est  $\Gamma$ -invariant. Si  $k \in K$ ,

$$\left( (\mathcal{F}_0)_{(g, v)} \right) \cdot k = \{(gk, k^{-1} g^{-1} v), g \in G\} = \{(g', g'^{-1} v), g' \in G\}$$

donc

$$\left( (\mathcal{F}_0)_{(g, v)} \right) \cdot k = (\mathcal{F}_0)_{(g, v)}.$$

Chaque feuille de  $\mathcal{F}_0$  est préservée par l'action de  $K$ .

On a finalement les égalités  $\rho^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_0$  et  $\psi^*(\mathcal{F}_h) = \mathcal{F}$ .

C.Q.F.D.

On distinguera dans la suite les 2 variétés (difféomorphes par  $\psi$ )  
M et V.

Sur  $G \times \mathbb{R}^{2q}$ , on considère le champ de vecteurs qui s'écrit

$$\tilde{X}_I(g ; (x_1, \dots, x_{2q})) = \sum_{i=1}^{2q} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Le champ de vecteurs  $\tilde{X}_I$  passe aux quotients et définit un champ de vecteurs sur M noté encore  $X_I$ . Comme conséquence de la proposition 1, on a :

$$\text{Rés}(\mathcal{F}_h, X_I, B\Gamma) \subset \mathbb{R}^{2q} = \text{Rés}(\mathcal{F}, X_I, B\Gamma) \subset \mathbb{R}^{2q} .$$

Remarque 1. Soit  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de G.

A chaque  $Y \in \mathcal{G}$ , on associe le champ de vecteurs sur  $G \times \mathbb{R}^{2q}$  défini par le flot :

$$\psi_Y : \mathbb{R} \times (G \times \mathbb{R}^{2q}) \rightarrow (G \times \mathbb{R}^{2q})$$

$$(\psi_Y)_t(g, v) = (g \cdot \exp tX, \exp(-tY) \cdot v)$$

si on identifie  $\mathfrak{X}(G \times \mathbb{R}^{2q})$  à  $\mathfrak{X}(G) \oplus \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2q})$ .

C'est le champ  $Y - Y^*$  où  $Y^*$  est le champ linéaire sur  $\mathbb{R}^{2q}$  associé à la matrice  $\exp Y$ . Autrement dit son flot est :

$$(\mathcal{A}_t) : \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$$

$$(\mathcal{A}_t)(v) = (\exp tY) \cdot v.$$

On remarque que  $Y-Y^*$  est tangent aux feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}_0$ .

En effet :

$$(\psi_Y)_t(e,v) = (\exp tY, (\exp tY)^{-1}v)$$

donc

$$(\psi_Y)_t(e,v) \in (\mathcal{F}_0)_{(e,v)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$(\psi_Y)_t(g,v) \in (\mathcal{F}_0)_{(g,v)} .$$

Soit  $\tau_0$  le sous-fibré des vecteurs, tangents aux feuilles de  $\mathcal{F}_0$ .

Pour tout  $Y \in \mathcal{G}$ ,  $Y-Y^*$  est une section de  $\tau_0$ .

Remarque 2. Le groupe  $G$  opère à gauche sur  $G \times \mathbb{R}^{2q}$

$$G \times (G \times \mathbb{R}^{2q}) \rightarrow (G \times \mathbb{R}^{2q})$$

$$g_0 \cdot (g,v) = (g_0 g, v).$$

On remarque que l'action à gauche de  $G$  commute avec l'action à droite de  $K$  définie par

$$(g,v) \cdot k = (gk, k^{-1}v)$$

En effet :

$$g_0 \cdot [(g,v) \cdot k] = g_0 (gk, k^{-1}v) = (g_0 gk, k^{-1}v) = (g_0 g, v) \cdot k$$

Soit

$$g_0 \cdot [(g,v) \cdot k] = [g_0 \cdot (g,v)] \cdot k.$$

Le feuilletage  $\mathcal{F}_0$  est en fait  $G$ -invariant, car :

$$g_0 \cdot (\mathcal{F}_0)_{(e,v)} = \{(g_0 g, g^{-1}v), g \in G\} = \{(g', g'^{-1}g_0 v), g' \in G\}$$

$$g_o \cdot (\mathcal{F}_o(e, v)) = \mathcal{F}_o(e, g_o v) \quad .$$

Comme conséquence de cette remarque, le groupe  $G$  agit sur  $M$

$$\mu : G \times M \rightarrow M$$

et le feuilletage  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariant.

Soit  $k$  l'algèbre de Lie de  $K$ .

Hypothèse 3. On choisit un sous-groupe  $N$  de  $G$  tel que :

$$\eta \oplus k = \mathcal{G},$$

$\eta$  étant l'algèbre de Lie de  $N$  (dimension  $2q$ ).

Remarque : Un tel sous-groupe existe, d'après la décompositions d'Iwasawa pour les groupes semi-simples. (Pour plus de détails, cf. M. Naimark, A. Stern [ ]).

On considère, sous cette hypothèse, l'application

$$\rho_N : N \times \mathbb{R}^{2q} \hookrightarrow G \times \mathbb{R}^{2q} \xrightarrow{\rho} \Gamma \backslash G \times_K \mathbb{R}^{2q} = M$$

On a la

Proposition 2. Il existe un recouvrement fini  $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$  de  $B\Gamma$  par des ouverts tels que :

i)  $\xi|_{U_j} \simeq U_j \times \mathbb{R}^{2q}$

ii)  $\tau|_{U_j \times \mathbb{R}^{2q}}$  est engendré par  $(\rho_N)_*(Y_i - Y_i^*) = \bar{Y}_i - Y_i^*$  où

$\{Y_1, \dots, Y_{2q}\}$  est une base de  $\eta$ .

Démonstration : Comme  $\eta \oplus k = \mathcal{G}$ ,  $(d\rho_N)_{(e, v)} : T_{(e, v)}(N \times \mathbb{R}^{2q})$

$\rightarrow T_{\rho(e, v)}M$  est un isomorphisme. Par le théorème d'inversion locale  $\rho_N$  est



un difféomorphisme d'un voisinage de  $(e, v)$  dans  $N \times \mathbb{R}^{2q}$  sur un voisinage de  $\rho(e, v)$  dans  $M$ .

Si  $(n_0, v_0)$  est un point quelconque de  $N \times \mathbb{R}^{2q}$ , on considère la transformation

$$\alpha(n_0) : N \times \mathbb{R}^{2q} \rightarrow N \times \mathbb{R}^{2q}$$

$$\alpha(n_0)(n, v) = (n_0 n, v)$$

et  $\mu(n_0) : M \rightarrow M$  l'action de  $n_0$  sur  $M$ .

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} N \times \mathbb{R}^{2q} & \xrightarrow{\alpha(n_0)} & N \times \mathbb{R}^{2q} \\ \rho_N \downarrow & & \downarrow \rho_N \\ M & \xrightarrow{\mu(n_0)} & M \end{array}$$

On en déduit que :

$$(d\rho_N)_{(n_0, v_0)} : T_{(n_0, v_0)}(N \times \mathbb{R}^{2q}) \rightarrow T_{\rho(n_0, v_0)}M$$

est un isomorphisme. Donc  $\rho_N$  est un difféomorphisme local.

On remarque que le feuilletage  $\mathcal{F}_0$  sur  $G \times \mathbb{R}^{2q}$  est transverse à la sous-variété  $N \times \mathbb{R}^{2q}$  et le feuilletage induit est  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  où :

$$(\tilde{\mathcal{F}}_0)_{(v)} = \{(g, g^{-1}v), g \in N\}.$$

Conséquence 1.  $(N \times \mathbb{R}^{2q}, \tilde{\mathcal{F}}_0) \xrightarrow{\rho_N} (M, \mathcal{F})$

On a  $\rho_N^* \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}_0$  et  $\rho_N$  est un difféomorphisme local.

En outre  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  est  $N$ -invariant et  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariant.

Conséquence 2. On considère l'application

$$\varepsilon : N \hookrightarrow N \times \mathbb{R}^{2q} \xrightarrow{\rho_N} M \xrightarrow{\Pi} B\Gamma$$

$$\varepsilon(g) = \Pi(\rho_N(g, 0)).$$

$\varepsilon$  est encore un difféomorphisme local.

Donc tout point  $x$  dans  $B\Gamma$  possède un voisinage ouvert  $U$ , tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (W \times \mathbb{R}^{2q}, \tilde{\mathcal{F}}_0|_{W \times \mathbb{R}^{2q}}) & \xrightarrow{\rho_N} & (\rho_N(W \times \mathbb{R}^{2q}) \simeq U \times \mathbb{R}^{2q}, \mathcal{F}|_{\Pi^{-1}(U)}) \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \Pi \\ W & \xrightarrow{\varepsilon} & U \end{array}$$

Soit  $\tilde{\tau}_0 = T\tilde{\mathcal{F}}_0$ . Une base de  $\Gamma(\tilde{\tau}_0|_{W \times \mathbb{R}^{2q}})$  est constituée des champs de vecteurs  $Y_i - Y_i^*$ , où  $\{Y_1, \dots, Y_{2q}\}$  est une base de  $\eta$ .

Dans la suite, on identifie  $\rho_N(W \times \mathbb{R}^{2q})$  et  $U \times \mathbb{R}^{2q}$ .

Donc

$$(\rho_N)_* : \mathfrak{X}(W) \oplus \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2q}) \rightarrow \mathfrak{X}(U) \oplus \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2q}).$$

On notera dans la suite :  $(\rho_N)_*(Y_i, 0) = ((\varepsilon)_*(Y_i), 0)$  et  $(\varepsilon)_*(Y_i) = \bar{Y}_i$ .

Ceci achève la démonstration de la proposition 2.

C.Q.F.D.

Comme le fibré vectoriel  $\xi$  est associé au  $K$ -fibré principal

$$K \rightarrow \Gamma \backslash G \rightarrow B\Gamma = \Gamma \backslash G / K$$

et que  $K$  est inclus dans  $O(2q; \mathbb{R})$ , le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^{2q}$  est  $K$ -invariant, donc il définit une métrique  $\mathcal{R}$  sur  $\xi$ .

On considère sur  $G \times \mathbb{R}^{2q}$  la 1-forme :

$$(\tilde{\omega}_I)(g, (x_1, \dots, x_{2q})) = \sum_{i=1}^{2q} x_i dx_i$$

$\tilde{\omega}_I$  est la 1-forme duale du champ radial  $\tilde{X}_I$  par rapport au produit scalaire euclidien

$$(i.e.) \quad (\tilde{\omega}_I)(Y) = \langle \tilde{X}_I, Y \rangle .$$

Pour  $k \in K$ , on a :

$$[k^*(\tilde{\omega}_I)](Y) = \langle \tilde{X}_I, (dk)Y \rangle$$

comme l'action est linéaire,  $dk = k$ .

On remarque, d'autre part que

$$(dk)(\tilde{X}_I) = k(\tilde{X}_I) = \tilde{X}_I$$

soit

$$[k^*(\tilde{\omega}_I)](Y) = \langle k \tilde{X}_I, k Y \rangle$$

Comme ce produit scalaire est  $O(2q ; \mathbb{R})$ -invariant, on a :

$$\langle k \tilde{X}_I, k Y \rangle = \langle \tilde{X}_I, Y \rangle$$

donc

$$k^*(\tilde{\omega}_I) = \tilde{\omega}_I \quad \forall k \in K.$$

On en déduit  $\omega_I \in \Omega_{DR}^1(M)$  telle que :

$$\rho^* \omega_I = \tilde{\omega}_I .$$

La 1-forme  $\omega_I$  est la forme duale du champ radial  $X_I$  par rapport au produit scalaire défini par  $\mathcal{R}$ .

Soit

$$D^{2q} = \{ \rho(g; (x_1, \dots, x_{2q})) \mid (g; (x_1, \dots, x_{2q})) \in G \times \mathbb{R}^{2q} \text{ et } \sum_{i=1}^{2q} x_i^2 \leq 1 \}.$$

et

$$\partial D^{2q} = \{ \rho(g; (x_1, \dots, x_{2q})) \mid (g; (x_1, \dots, x_{2q})) \in G \times \mathbb{R}^{2q} \text{ et } \sum_{i=1}^{2q} x_i^2 = 1 \}.$$

On définit  $\theta$  comme étant l'unique connexion de Bott sur  $v|_{U \times \mathbb{R}^{2q}}$  telle que :

$$\nabla_Y \frac{\partial}{\partial x_i} = \omega_I(Y) [X_I, \frac{\partial}{\partial x_i}] \quad \text{pour } Y \in \Gamma(v|_{U \times \mathbb{R}^{2q}})$$

On remarque que  $\theta$  est bien définie. Mais cette connexion n'est pas  $\{X_I\}$ -basique.

On peut cependant utiliser  $\theta$  pour calculer  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X_I, B)} c_{2q}$ .  
En effet, soit :

$$D^{2q}_{1/2} = \{ \rho(g, v) \mid (g, v) \in G \times \mathbb{R}^{2q} \text{ tel que } \|v\| \leq 1/2 \}.$$

$M$  est recouverte par  $\mathcal{U} = \{M-D^{2q}_{1/2}, D^{2q}\}$ . Soit  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  une partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{U}$ . Soit  $\nabla^2$  une connexion de Bott quelconque sur  $v$ .

On définit la connexion de Bott  $\theta_0$  par :

$$\nabla_Y^0 \frac{\partial}{\partial x_i} = \gamma_1 \cdot \frac{\mathcal{R}(X_I, Y)}{\mathcal{R}(X_I, X_I)} [X_I, \frac{\partial}{\partial x_i}] + \gamma_2 \nabla_Y^2 \frac{\partial}{\partial x_i}$$

pour  $Y \in \Gamma(v|_{U \times \mathbb{R}^{2q}})$ .

$\theta_0$  est une connexion  $\{X_I\}$ -basique et  $\theta_0$  coïncide avec  $\theta$  sur  $v|_{\partial D^{2q}}$ .

On a :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X_I, B\Gamma)} c_{2q} = \left[ \int_{D^{2q}} c_{2q}^{(\Omega^0)} \Big|_{D^{2q}} \right]$$

où  $\Omega^0$  est la courbure de  $\theta_0$ . Soit  $\Omega$  la courbure de  $\theta$ . Or

$$\int_{D^{2q}} (c_{2q}^{(\Omega)} - c_{2q}^{(\Omega^0)}) \Big|_{D^{2q}} = \int_{D^{2q}} (d\Delta_{c_{2q}}(\theta, \theta^0)) \Big|_{D^{2q}}.$$

Par le théorème de Stokes, on a :

$$\int_{D^{2q}} (d\Delta_{c_{2q}}(\theta, \theta^0)) \Big|_{D^{2q}} = d \int_{D^{2q}} (\Delta_{c_{2q}}(\theta, \theta^0)) \Big|_{D^{2q}} \pm \int_{\partial D^{2q}} (\Delta_{c_{2q}}(\theta, \theta^0)) \Big|_{\partial D^{2q}}$$

Or

$$(\theta - \theta^0) \Big|_{\partial D^{2q}} = 0.$$

Donc  $\int_{\partial D^{2q}} (\Delta_{c_{2q}}(\theta, \theta^0)) \Big|_{\partial D^{2q}} = 0$  et

$$\int_{D^{2q}} (c_{2q}^{(\Omega)} - c_{2q}^{(\Omega^0)}) \Big|_{D^{2q}} = d \left( \int_{D^{2q}} (\Delta_{c_{2q}}(\theta, \theta^0)) \Big|_{D^{2q}} \right).$$

Soit :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X_I, B\Gamma)} c_{2q} = \left[ \int_{D^{2q}} c_{2q}^{(\Omega)} \Big|_{D^{2q}} \right].$$

On considère l'application :

$$\varepsilon : N \rightarrow N \times \mathbb{R}^{2q} \xrightarrow{\rho_N} M \xrightarrow{\Pi} B\Gamma$$

$$\varepsilon(n) = \Pi \circ \rho_N(n, 0) .$$

Soient  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 2q}$  les 1-formes duales des champs  $Y_i \in \eta$ .

$$\alpha_i \in \eta^* \quad \text{et} \quad \alpha_i(Y_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Soient  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq 2q}$  les 1-formes  $\varepsilon^*(\omega_i) = \alpha_i$  sur  $B\Gamma$ .

Proposition 3. Soit  $[\omega]$  la classe de cohomologie de la forme volume  $\prod_{i=1}^{2q} \omega_i$  sur  $B\Gamma$ .

On a :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X_I, B\Gamma)} c_{2q} = (-1)(2q)! \left( \prod_{j=1}^{2q} \int_{x_j^2 \leq 1} d(\tilde{\omega}_I(Y_i^*)) \right) \cdot [\omega]$$

Démonstration : Soit  $U$  comme dans la proposition 2. Les

$\{\bar{Y}_i\}_{1 \leq i \leq 2q}$  engendrent  $TU$ . Sur  $\nu|_{U \times \mathbb{R}^{2q}}$ , on choisit pour base de sections

$\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{1 \leq i \leq 2q}$ . On a :

$$\nabla_{\partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = - \tilde{\omega}_I \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$\nabla_{\bar{Y}_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\bar{Y}_j - Y_j^*} \frac{\partial}{\partial x_i} + \nabla_{Y_j^*} \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Or

$$\nabla_{\bar{Y}_j - Y_j^*} \frac{\partial}{\partial x_i} = -[Y_j^*, \frac{\partial}{\partial x_i}]$$

Soit

$$\nabla_{\bar{Y}_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = - \left( [Y_j^*, \frac{\partial}{\partial x_i}] + \tilde{\omega}_I(Y_j^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

Soit  $\theta$  la 1-forme locale de connexion relativement à cette base. On a donc :

$$\theta = - \left( \omega_I + \sum_{j=1}^{2q} (\tilde{\omega}_I(Y_j^*)) \cdot \omega_j \right) \cdot I + \sum_{j=1}^{2q} \omega_j \cdot A_j$$

où  $I$  est la matrice identité,  $A_j$  la matrice qui représente  $Y_j \in \eta$  et  $Y_j^*$  est le champ linéaire associé à la matrice  $A_j$ .

$$\text{Si } A_j = (a_{j\beta}^\alpha), \text{ on a } \tilde{\omega}_I(Y_j^*) = \sum_{\alpha, \beta} a_{j\beta}^\alpha x_\alpha x_\beta.$$

Donc :

$$\theta(u, x) = - \left( \omega_I + \sum_{j=1}^{2q} \omega_j \left( \sum_{\alpha, \beta} a_{j\beta}^\alpha x_\alpha x_\beta \right) \right) I + \sum_{j=1}^{2q} \omega_j \cdot A_j$$

ou

$$x = (x_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 2q}$$

On a :

$$\Omega = d\theta + \frac{1}{2} \theta \wedge \theta$$

Comme  $d\omega_I = 0$ . On a :

$$d\theta = (-1) \left[ d \left( \sum_{j=1}^{2q} \omega_j \sum_{\alpha, \beta} (a_{j\beta}^\alpha x_\alpha x_\beta) \right) \right] \cdot I + \sum_{j=1}^{2q} d\omega_j \cdot A_j$$

et 
$$1/2 \theta \wedge \theta = \sum_{i < j} \omega_i \wedge \omega_j [A_i, A_j] .$$

On remarque que l'équation de structure de Maurer-Cartan pour le groupe de Lie  $N$ , nous donne :

$$\sum_{j=1} \omega_j \wedge A_j + \sum_{i < j} (\omega_i \wedge \omega_j) [A_i, A_j] = 0 .$$

Donc

$$\Omega = (-1) \cdot d \left( \sum_{j=1}^{2q} \left( \sum_{\alpha, \beta} (a_{j\beta}^\alpha x_\alpha x_\beta) \cdot \omega_j \right) \right) \cdot I .$$

Dans la suite, on pose  $u_j(x_1, \dots, x_{2q}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{j\beta}^\alpha x_\alpha x_\beta$ . On a :

$$c_{2q}(\Omega) = d \left( \sum_{j=1}^{2q} u_j \omega_j \right)^{2q}$$

soit

$$c_{2q}(\Omega) = \left( \sum_{j=1}^{2q} (du_j \wedge \omega_j + u_j \cdot d\omega_j) \right)^{2q}$$

d'où :

$$c_{2q}(\Omega) = \sum_{p=1}^{2q} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{2q}} (du_{\sigma(1)} \wedge \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge du_{\sigma(p)} \wedge \omega_{\sigma(p)}) \wedge u_{\sigma(p+1)} d\omega_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(2q)} \cdot d\omega_{\sigma(2q)}$$

Or

$$\begin{aligned} & \left( du_{\sigma(1)} \wedge \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge du_{\sigma(p)} \wedge \omega_{\sigma(p)} \right) \wedge \left( u_{\sigma(p+1)} d\omega_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(2q)} \cdot d\omega_{\sigma(2q)} \right) \\ &= (-1)^{\nu(\sigma, p)} \left[ \left( du_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge du_{\sigma(p)} \right) \cdot \left( u_{\sigma(p+1)} \dots u_{\sigma(2q)} \right) \right] \wedge \\ & \quad \left[ \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(p)} \right] \wedge \left( d\omega_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge d\omega_{\sigma(2q)} \right) . \end{aligned}$$



Comme  $\left( du_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge du_{\sigma(p)} \right) \cdot \left( u_{\sigma(p+1)} \dots u_{\sigma(2q)} \right)$  est une forme de degré  $p$ .

On a :

$$\int_D^{2q} \left[ \left[ du_{\sigma(1)} \dots du_{\sigma(p)} \right] \cdot \left( u_{\sigma(p+1)} \dots u_{\sigma(2q)} \right) \right] \wedge \left[ \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(p)} \right] \wedge \left( d\omega_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge d\omega_{\sigma(2q)} \right) =$$

$$\left[ \left( \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(p)} \right) \wedge \left( d\omega_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge d\omega_{\sigma(2q)} \right) \right] \int_D^{2q} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ x_{\alpha}^2 \leq 1}}^{2q} \left[ du_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge du_{\sigma(p)} \right] \cdot \left( u_{\sigma(p+1)} \dots u_{\sigma(2q)} \right).$$

Et cette forme est nulle si  $p < 2q$ . Ceci par définition même de  $\int_D^{2q}$ .

Donc, le seul terme qui intervient est :

$$(-1)^{2q-1} (2q)! \prod_{j=1}^{2q} \omega_j \times \prod_{j=1}^{2q} du_j.$$

Soit :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X_I, B\Gamma)} c_{2q} = (-1) (2q)! \left( \int_D^{2q} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ x_{\alpha}^2 \leq 1}}^{2q} du_1 \wedge \dots \wedge du_{2q} \right) [\omega].$$

C.Q.F.D.

Conséquence. Pour montrer que  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X_I, B\Gamma)} c_{2q}$  est non nul, il suffit de montrer que  $\delta = \int_D^{2q} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ x_{\alpha}^2 \leq 1}}^{2q} du_1 \wedge \dots \wedge du_{2q}$  est non nul.

Expression de  $\delta$ . On considère la transformation

$$H : \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$$

$$(x_1, \dots, x_{2q}) \rightarrow H(x_1, \dots, x_{2q}) = (u_1, \dots, u_{2q})$$

où

$$u_j(x_1, \dots, x_{2q}) = \tilde{\omega}_I(Y_j^*) = \sum_{\alpha, \beta} a_{j\beta}^\alpha x_\alpha x_\beta.$$

On a :

$$du_1 \wedge \dots \wedge du_{2q} = \frac{D(u_1, \dots, u_{2q})}{D(x_1, \dots, x_{2q})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2q}$$

où

$$\frac{D(u_1, \dots, u_{2q})}{D(x_1, \dots, x_{2q})} = \det \left( \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \right)_{1 \leq \ell, k \leq 2q}$$

soit enfin :

$$\delta_{2q} = \int_{\sum_{\alpha=1}^{2q} x_\alpha^2 \leq 1} \det \left( \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \right)_{1 \leq \ell, k \leq 2q} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2q}$$

Remarque : Dans ce chapitre, on ne s'est pas servi du fait que  $\dim B = n$  est un entier pair.

On a vu :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, X_I, B\Gamma)} c_n = (-1)^{n-1} n! \delta_n[\omega]$$

où

$$\delta_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_n} \prod_{i=1}^n a_{i\beta_i}^{\sigma(i)} \left( \int_{\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^2 \leq 1} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \right).$$

Proposition 4.

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, X_I, B\Gamma)} c_n = (-1)\chi(\xi_h)$$

où  $n = \dim B\Gamma$ , que  $n$  soit pair ou non.

Démonstration : A chaque fibré vectoriel plat  $\xi_\rho$

$$\xi_\rho = (\tilde{W} \times_{\rho} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Pi} W)$$

(où  $\rho : \Pi_1(W) \rightarrow GL^+(n; \mathbb{R})$ ), on associe la classe de cohomologie

$$\mathcal{N}(\xi_\rho) = \text{Rés}_{(\mathcal{F}, X_I, W)} c_n \in H^n(W, \mathbb{R}).$$

On veut montrer

$$\mathcal{N}(\xi_h) = -\chi(\xi_h).$$

On remarque que  $\mathcal{N}(\xi_\rho)$  est un invariant différentiable de  $\xi_\rho$ .

On a d'autre part la naturalité :

$$\mathcal{N}(f^* \xi_\rho) = f^* \mathcal{N}(\xi_\rho).$$

Donc  $\mathcal{N} \in H_{\text{diff}}^*(B \hat{GL}_n^+)$ , où  $H_{\text{diff}}^*(B \hat{GL}_n^+)$  est la cohomologie différentiable de l'espace classifiant  $B \hat{GL}_n^+$ ,  $\hat{GL}_n^+$  étant le groupe linéaire des matrices de déterminant positif munit de la topologie discrète. (se rappeler que  $\mathcal{N}(\xi_h) \in \text{Im } \alpha$ ).

On a le théorème de Van-Est (cf. Van-Est [ ])

$$H^*(\mathcal{G}L_n^+ \mathbb{R}, SO_n) \xrightarrow[\cong]{\lambda} H_{\text{diff}}^*(B \hat{GL}_n^+)$$

$\lambda$  est un isomorphisme. Dans la suite on identifie  $\lambda^{-1}(\mathcal{N})$  et  $\mathcal{N}$ .

On rappelle que :

$$H^*(\mathcal{G}L_{2q}^+ \mathbb{R}, SO_{2q}) = \Lambda(h_1, h_3, \dots, h_{2q-1}) \otimes S(\chi)/\chi^2$$

et

$$H^*(\mathfrak{gl}_{2q-1}^+, SO_{2q-1}, \mathbb{R}) = \Lambda(h_1, h_3, \dots, h_{2q-1}).$$

On peut écrire, de façon universelle :

$$\mathcal{N} = b_0 \chi + \sum b_I h_I \quad (b_0, b_I \in \mathbb{R})$$

où  $I = (i_1, \dots, i_p)$   $2|I| - p = n$  et  $h_I = h_{i_1} \dots h_{i_p}$  si  $n = 2q$

et

$$\mathcal{N} = \sum b_I h_I \quad \text{si } n = 2q-1 \quad (b_I \in \mathbb{R}).$$

La proposition va résulter des deux lemmes qui vont suivre :

Lemme 1.

$$\mathcal{N}(\xi_h) = b_0 \chi(\xi_h).$$

Démonstration : Soit  $\rho(\mathfrak{g}, K) : H^*(\mathfrak{gl}_n^+, SO_n) \rightarrow H^*(\mathfrak{g}, K)$  le morphisme naturel défini par l'inclusion  $(G, K) \subset (GL^+(n, \mathbb{R}), SO(n))$  du chapitre V.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathfrak{gl}_n^+, SO_n) & \xrightarrow{\rho(\mathfrak{g}, K)} & H^*(\mathfrak{g}, K) \xleftarrow{0} \\ \searrow \alpha & & \swarrow \alpha(\mathfrak{g}, K) \\ & & H^*(B\Gamma) \end{array}$$

(cf. définition de l'exotisme des fibrés plats du chapitre IV - page [ ]).

Ainsi :

$$\rho(\mathfrak{g}, K)(\mathcal{N}) = b_0 \rho(\mathfrak{g}, K)(\chi) + \sum b_I \rho(\mathfrak{g}, K)(h_I).$$

Or, on remarque que si  $n = 2q-1$

$$\delta_{2q-1} = 0.$$

En effet, la fonction  $\psi_{\beta_1, \dots, \beta_{2q-1}}(x_1, \dots, x_{2q-1}) = x_{\beta_1} \times \dots \times x_{\beta_{2q-1}}$  est impaire, d'où :

$$I_{\beta_1, \dots, \beta_{2q-1}} = \int_{\sum_{\alpha=1}^{2q-1}} \psi_{\beta_1, \dots, \beta_{2q-1}}(x_1, \dots, x_{2q-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2q-1} = 0$$

et

$$\delta_{2q-1} = \frac{1}{(2q-1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2q-1}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_{2q-1}} \prod_{i=1}^{2q-1} a_{i\beta_i}^{\sigma(i)} I_{\beta_1, \dots, \beta_{2q-1}} = 0.$$

Donc

$$\mathcal{N}(\xi_h) = \sum b_I \alpha(h_I) = 0 \quad \text{si } n = 2q-1.$$

Comme  $\alpha(\mathcal{G}, K)$  est injective (d'après Matsushima, puisque  $G$  est semi-simple et  $K$  compact maximal dans  $G$ ), on en déduit :

$$\sum b_I \rho(\mathcal{G}, K)(h_I) = 0$$

et

$$\rho(\mathcal{G}, K)(\mathcal{N}) = b_0 \rho(\mathcal{G}, K)(\chi),$$

soit

$$\mathcal{N}(\xi_h) = b_0 \chi(\xi_h).$$

C.Q.F.D.

[ Lemme 2.  $b_0 = -1$  pour  $n = 2q$ .

Démonstration : On choisit  $G_0 = \prod_{i=1}^q \text{SL}(2; \mathbb{R})$  et  $K_0 = \prod_{i=1}^q \text{SO}(2; \mathbb{R})$ .

Dans ce cas particulier, soit :  $(x_1, y_1, \dots, x_q, y_q)$  les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^{2q}$ , on a :

$$\delta_0^{2q} = \int_{\sum_{i=1}^q (x_i^2 + y_i^2) \leq 1} \prod_{i=1}^q (x_i^2 + y_i^2) dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_{2q} \wedge dy_{2q}$$

soit enfin  $(2q)! \delta_0^{2q} = \pi^q$

et

$$\mathcal{N}^o(\xi_{h_0}) = -\pi^q [\omega]$$

D'autre part :

$$\chi(\xi_{h_0}) = \pi^q [\omega].$$

En effet pour  $q = 1$ ,  $\chi(\xi_{h_0}) = \pi[\omega]$  (cf. Milnor [ ]).

En utilisant la formule du cup-produit pour la classe d'Euler, on a le résultat voulu.

Donc

$$b_0 = -1.$$

On a finalement :

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}_h, X_I, B\Gamma)} c_n = -\chi(\xi_h)$$

C.Q.F.D.

CHAPITRE VI

CLASSES CARACTERISTIQUES ET

GEOMETRIE DU FEUILLETAGE

Dans ce chapitre, on se propose de relier les classes caractéristiques d'un feuilletage à la géométrie de ces feuilles.

On considère  $(M, \mathcal{F})$  une variété feuilletée, avec  $\text{codim } \mathcal{F} = q$ , on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse.  $\exists X \in \mathcal{X}(M)$  tel que  $[X, \Gamma(\tau)] \subset \Gamma(\tau)$  où

$$\tau = T\mathcal{F}.$$

Autrement dit  $\mathcal{F}$  possède au moins un automorphisme infinitésimal.

Si  $\Lambda$  désigne la plus petite classe de groupes qui contient les groupes moyennables et qui satisfait :

1) si  $G \in \Lambda$ ,  $H \in \Lambda$  alors le produit libre  $G *_H \in \Lambda$ . ( $\Lambda$  est stable par produits libres).

2) si  $G \in \Lambda$  et  $G$  a un indice fini dans  $K$ , alors  $K \in \Lambda$  ( $\Lambda$  est stable par extensions finies).

On démontre que s'il existe une classe  $h_{I_0} c_{J_0}(\mathcal{F})$  non nulle pour  $|J_0| = q$ , le feuilletage admet au-moins une feuille  $L$ , dont ni le groupe fondamental  $\Pi_1(L)$  ni le groupe d'holonomie linéaire n'appartiennent à  $\Lambda$ .

On remarque que si  $\Sigma_g$  est une surface de genre  $g$  ( $g \geq 2$ )  $\Pi_1(\Sigma_g) \notin \Lambda$ , mais  $Z * Z \in \Lambda$ .

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème, on fait quelques rappels.

Groupes moyennables.

Soit un  $G$ -espace, c'est-à-dire que  $G$  est identifié avec un sous-groupe du groupe des transformations de  $M$ .

Soit  $E$  l'espace vectoriel topologique des fonctions continues sur  $M$  à valeurs réelles.

On s'intéresse aux fonctionnelles linéaires sur  $E$  qui sont positives et invariantes par l'action de  $G$ .

Définition. Soit  $G$  un groupe,  $B(G)$  l'espace de toutes les fonctions continues bornées sur  $G$ , avec la norme  $\|f\| = \sup_{u \in G} |f(u)|$

$G$  est moyennable s'il existe :

$$\mu : B(G) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que :}$$

i)  $\mu$  est linéaire et invariante à gauche

$$(i.e) \quad \forall g \in G \quad \forall f \in B(G)$$

$$\mu(g f) = \mu(f)$$

ii)  $\mu(f) \geq 0$  pour  $f \geq 0$  et  $\mu(1) = 1$ .

2) Théorème VI .

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension  $q$  sur une variété  $M$ .

On suppose :

i)  $\exists X \in \mathfrak{X}(M)$  tel que  $\forall Y \in \Gamma(\tau), [X, Y] \in \Gamma(\tau)$  où

$$\tau = T\mathcal{F}.$$

ii) Le lien singulier de  $\mathcal{F}$  et  $X$  est une réunion finie de feuilles de  $\mathcal{F}$ .

$$(i.e.) \quad \zeta_{(\mathcal{F}, X)} = \bigsqcup_{i=1}^n L_i .$$



S'il existe une classe  $h_{I_0 c_{J_0}}(\mathcal{F}) \neq 0$  où  $|J_0| = q$ , alors il existe au-moins une feuille  $L$  du feuilletage  $\mathcal{F}$  telle que :

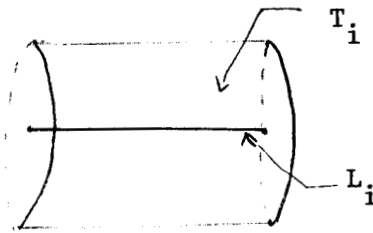
- 1)  $\Pi_1(L, x_0) \not\subset \Lambda$
- 2) La représentation d'holonomie de  $\Pi_1(L, x_0)$  dans  $\text{Diff}(S^{q-1})$  ne peut conserver de mesure sur  $S^{q-1}$ .

Démonstration :  $\zeta(\mathcal{F}, X) = \bigcup_{i=1}^n L_i$ , où  $L_i$  sont des feuilles propres de  $\mathcal{F}$ .

D'après le lier théorème des résidus, on a pour  $|J| = q$  :

$$\alpha_{\mathcal{F}}^*(h_{I c_J}) = \sum_{i=1}^n t_i(\text{Rés}(\mathcal{F}, X, L_i)) h_{I c_J}$$

où



$t_i$  est l'isomorphisme de Thom, (i.e.) l'isomorphisme inverse de  $\int_{D_i}$ .

Soit

$$\begin{array}{ccc} h_o^i : \Pi_1(L_i, x_o) & \xrightarrow{\tilde{h}_o^i} & GL(q ; \mathbb{R}) \\ & \searrow h_o^i & \downarrow \tau \\ & & \text{Diff}(S^{q-1}) \end{array}$$

où  $\tilde{h}_o^i$  est l'holonomie linéaire de la feuille singulière  $L_i$  et

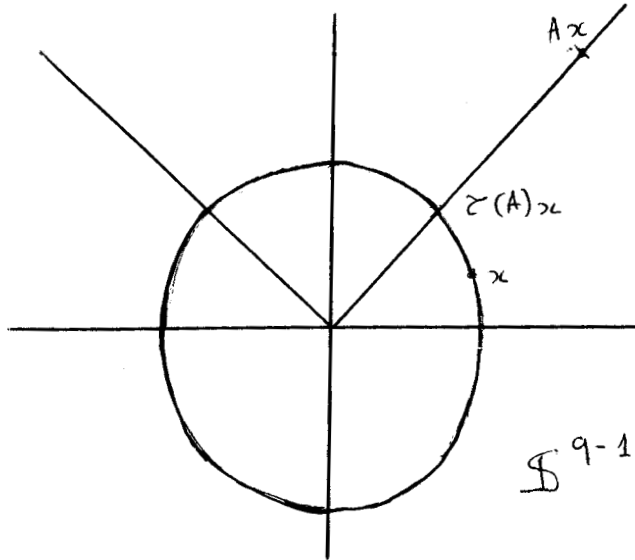
$$\tau : GL(q ; \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Diff}(S^{q-1})$$

$$A \longrightarrow \tau(A)$$

où :

$$\tau(A) : \mathbb{S}^{q-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{q-1}$$

$$\tau(A)x = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$



On regarde  $\mathbb{S}^{q-1}$  comme étant l'espace des orbites du champ radial  $X_I = \sum_{i=1}^q x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

L'action de  $GL(q; \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^q$  étant linéaire, elle conserve le champ radial  $X_I$ , donc elle induit une action sur l'espace des orbites de  $X_I$  qui est la sphère  $\mathbb{S}^{q-1}$ .

Soit  $h^i : \Pi_1(L_i, x_0) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^q, 0)$  l'holonomie de la feuille propre  $L_i$ . On suspend cette représentation, soit :

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_1(L_i, x_0) & \longrightarrow & \tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q & \longrightarrow & \tilde{L}_i \times_{h^i} \mathbb{R}^q = V_i \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_1(L_i, x_0) & \longrightarrow & \tilde{L}_i & \longrightarrow & L_i \end{array}$$

On restreint ensuite  $\tilde{L}_i \times_{h^i} \mathbb{R}^q$  à un voisinage tubulaire  $T_i$ , plongé dans  $M$ , convenable de  $L_i$ .

On remarque que pour calculer  $\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X, L_i)} h_{I^c J}$ , il suffit de prendre  $M = V_i$ , où cette fois-ci :

$$V_i \xrightarrow{\Pi_i} L_i$$

est un fibré  $\text{Diff}(\mathbb{R}^q, 0)$ -plat. On identifie dans la suite  $M$  avec  $V_i$ , et le fibré normal de  $\mathcal{F}$  avec le sous-fibré de  $TV_i$  formé des vecteurs tangents aux fibres de  $V_i \xrightarrow{\Pi_i} L_i$ .

On peut aussi supposer que l'automorphisme infinitésimal  $X$  est tangent aux fibres de  $V_i \rightarrow L_i$ . En effet, on a :

Lemme 1. Si  $Y \in \Gamma(\tau)$  où  $\tau = T\mathcal{F}$  alors

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X+Y, L_i)} = \text{Rés}_{(\mathcal{F}, X, L_i)} \quad .$$

Démonstration : Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_i \times [0, 1] & \xrightarrow{p_1} & V_i \\ \downarrow & & \downarrow \Pi_i \\ L_i \times [0, 1] & \xrightarrow{p_1} & L_i \end{array}$$

où  $p_1(x, t) = x$ .

On considère sur  $V_i \times [0, 1]$  le feuilletage  $(p_1^* \mathcal{F})$ . On construit le champ de vecteur  $\tilde{X}$  sur  $V \times I$ , défini par :

$$\tilde{X}_{(v, t)} = (X)_v + t (Y)_v.$$

On remarque que  $X+tY$  est encore un automorphisme infinitésimal de  $\mathcal{F}$ . Donc  $\tilde{X}$  est un automorphisme infinitésimal de  $(p_1^* \mathcal{F})$ . Le lieu singulier est :

$$\zeta_{(p_1^* \mathcal{F}, X)} = L_i \times [0, 1] \quad .$$

Soit

$$i_t : L_i \rightarrow L_i \times [0,1]$$

$$i_t(x) = (x,t).$$

Par construction même, on a :

$$i_0^*(p_1^* \mathcal{F}) = i_1^*(p_1^* \mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

Soient  $\omega, \omega', \omega_0$  trois connexions telle que :

$$\text{Rés}_{(\omega, \omega', \omega_0)} = \text{Rés}_{(p_1^* \mathcal{F}, \tilde{X}, L_i \times [0,1])}.$$

On en déduit que  $i_t^* \omega, i_t^* \omega', i_t^* \omega_0$  sont trois connexions telles que

$$\text{Rés}_{(i_t^* \omega, i_t^* \omega', i_t^* \omega_0)} = \text{Rés}_{(\mathcal{F}, X+tY, L_i)}.$$

Finalement, on a :

$$i_0^* \text{Rés}_{(p_1^* \mathcal{F}, \tilde{X}, L_i \times [0,1])} = i_1^* \text{Rés}_{(p_1^* \mathcal{F}, \tilde{X}, L_i \times [0,1])}.$$

Soit

$$\text{Rés}_{(i_0^* p_1^* \mathcal{F}, i_0^* X, L_i)} = \text{Rés}_{(i_1^* p_1^* \mathcal{F}, i_1^* X, L_i)}$$

d'où

$$\text{Rés}_{(\mathcal{F}, X, L_i)} = \text{Rés}_{(\mathcal{F}, X+Y, L_i)}$$

C.Q.F.D.

Dans la suite à l'automorphisme infinitésimal  $X$ , on associe la matrice  $A$  définie comme suit :

On identifie d'abord  $M$  avec  $V_i$  sur une fibre de  $V_i$ , identifiée à  $\mathbb{R}^q$  avec les coordonnées  $x_1, \dots, x_q$ , on a :

$$X|_{\mathbb{R}^q} = \sum_{j=1}^q \alpha_j(x_1, \dots, x_q) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

On définit  $A = (a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq q}$  où  $a_{k\ell} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_\ell}(0, \dots, 0)$ .

Autrement dit  $A$  est l'endomorphisme :

$$A : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$A(u) = [u^\#, X|_{\mathbb{R}^q}]_0$$

où  $u^\#$  est le champ constant sur  $\mathbb{R}^q$  égal à  $u$ .

Ce choix n'est pas intrinsèque, la matrice  $A$  n'est bien définie qu'à conjugaison près par une matrice inversible. Mais par contre,  $c_i(A)$  est bien défini.  $c_i$  étant le  $i$ -ème polynôme de Chern sur  $\mathcal{G}_q(\mathbb{R})$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Soit } h_0^i : \Pi_1(L_i, x_0) & \xrightarrow{h_i} & \text{Diff}(\mathbb{R}^q, 0) \\ & \searrow \tilde{h}_0^i & \downarrow D \\ & & \text{GL}(q; \mathbb{R}) \end{array}$$

l'holonomie linéaire de  $L_i$ ,  $D$  étant la différentielle prise en zéro, en suspendant  $\tilde{h}_0^i$ , on a un  $\text{GL}(q; \mathbb{R})$ -fibré vectoriel plat :

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_1(L_i; x_0) & \longrightarrow & \tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q & \longrightarrow & V_i^0 = \tilde{L}_i \times_{\tilde{h}_0^i} \mathbb{R}^q \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \Pi_i^0 \\ \Pi_1(L_i; x_0) & \longrightarrow & \tilde{L}_i & \longrightarrow & L_i \end{array}$$

Soit  $\mathcal{F}_0$  le feuilletage défini par la structure plate de  $(V_i^0 \xrightarrow{\Pi_i^0} L_i)$ .

On considère, d'autre part le champ de vecteurs linéaire sur  $\tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q$

$$\tilde{X}_A(m, (x_1, \dots, x_q)) = \sum_{k, \ell=1}^q a_{k\ell} x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} .$$

Ce champ est  $\tilde{h}_0^i$ -invariant. Il définit donc un champ de vecteurs  $X_A$  sur  $V_i^0$ .

On a le lemme de linéarisation (cf. Heitsch [ ]).

Lemme 2.

$$\text{Rés}(\mathcal{F}, X, L_i) = \text{Rés}(\mathcal{F}_0, X_A, L_i)$$

Démonstration : Pour  $t > 0$ , on considère :

$$\lambda_t : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$\lambda_t(x) = \frac{x}{t} .$$

Soit

$$h_t^i : \Pi_1(L_i, x_0) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^q, 0)$$

$$h_t^i = \lambda_t \circ h^i \circ \lambda_{1/t} .$$

Soit  $\tilde{X}_t = (\lambda_t)_* (X|_{\mathbb{R}^q})$ . Par ce procédé on construit une famille à un paramètre de variétés feuilletées  $(V_i^t, \mathcal{F}_t)$

$$\tilde{L}_i \times_{h_t^i} \mathbb{R}^q = V_i^t \xrightarrow{\Pi_i^t} L_i$$

$\mathcal{F}_t$  étant le feuilletage défini par la structure  $\text{Diff}(\mathbb{R}^q, 0)$ -plate sur  $(V_i^t \xrightarrow{\Pi_i^t} L_i)$ .

Le champ  $\tilde{X}_t$  est  $h_t^i$ -invariant, il induit donc un champ  $X_t$  sur  $V_i^t$ , tangent aux fibres de  $V_i^t \xrightarrow{\Pi_i^t} L_i$ .

$X_t$  est un automorphisme infinitésimal de  $\mathcal{F}_t$  et le lien singulier est :

$$\zeta(\mathcal{F}_t, X_t) = s_0^t(L_i) = L_i$$

où  $s_0^t$  est la section nulle de  $V_i^t \xrightarrow{\Pi_i^t} L_i$ .

On considère pour  $t > 0$  :

$$\tilde{\phi}_t : \tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q \rightarrow \tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q$$

$$\tilde{\phi}_t(m, x) = (m, \lambda_t(x)).$$

Les  $\tilde{\phi}_t$  vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \tilde{\phi}_t \circ h^i = h_t^i \circ \tilde{\phi}_t \\ 2) \quad (\tilde{\phi}_t)_* \tilde{X}_{\tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q} = X_t. \end{array} \right.$$

Donc  $\tilde{\phi}_t$  passe au quotient et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q & \xrightarrow{\tilde{\phi}_t} & \tilde{L}_i \times \mathbb{R}^q \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_i^t & \xrightarrow{\phi_t} & V_i \end{array}$$

et on a :

- 1)  $\phi_t(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_t$
- 2)  $(\phi_t)_*(X) = X_t$ .

On en déduit que :

$$\forall t > 0 \quad \text{Rés}(\mathcal{F}_t, X_t, L_i) \psi = \text{Rés}(\mathcal{F}, X, L_i) \psi$$

et puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} X_t = X_A$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} h_t^i(\gamma) = \tilde{h}_0^i(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Pi_1(L_i, x_0)$ . La convergence étant uniformément  $c^k$  sur les compacts.

On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Rés}(\mathcal{F}_t, X_t, L_i) \psi = \text{Rés}(\mathcal{F}, X, L_i) \psi .$$

Soit enfin :

$$\text{Rés}(\mathcal{F}_0, X_A, L_i) \psi = \text{Rés}(\mathcal{F}, X, L_i) \psi$$

C.Q.F.D.

Lemme 3. Si  $\Pi_1(L_i) \in \Lambda$  où si  $h_0^i(\Pi_1(L_i))$  conserve une mesure sur  $S^{q-1}$ , alors

$$\text{Rés}(\mathcal{F}, X, L_i) h_I c_J = 0 \quad \text{pour } |J| = q.$$

Démonstration : Comme conséquence de ce qui précède, on a :

$$\text{Rés}(\mathcal{F}, X, L_i) h_I c_J = h_I(\xi_i) \chi(\xi_i) \frac{c_J(A)}{c_q(A)}$$

où  $\xi_i$  est le fibré vectoriel plat :

$$\xi_i = (V_i^0 = \tilde{L}_i \times_{h_0^i} \mathbb{R}^q \rightarrow L_i)$$

$\chi(\xi_i)$  est la classe d'Euler de ce fibré vectoriel plat et  $A$  la matrice associée au champ  $X$ , comme précédemment.



Le lemme 3 résulte du fait que  $\chi(\xi_i) = 0$ .

Donc, pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de montrer que  $\chi(\xi_i) = 0$ .

Lemme 4. Si  $\Pi_1(L_i)$  est moyennable ou  $h_0^i(\Pi_1(L_i))$  est moyennable alors

$$\bar{\Pi}^* : H_{DR}^*(L_i) \rightarrow H_{DR}^*(M_i)$$

est injective.

$S(\xi_i) = (M_i \xrightarrow{\bar{\Pi}} L_i)$  est le  $S^{q-1}$ -fibré en sphères associé à  $\xi_i$ .

Démonstration : Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Pi}^* M_i & \longrightarrow & M_i \\ \downarrow p & & \downarrow \bar{\Pi} \\ M_i & \xrightarrow{\bar{\Pi}} & L_i \end{array}$$

où  $S(\xi_i) = (M_i \xrightarrow{\bar{\Pi}} L_i)$  est le  $S^{q-1}$ -fibré en sphères associé à  $\xi_i$ .

On remarque que sous les hypothèses du lemme,  $h_0^i(\Pi_1(L_i))$  laisse fixe une mesure  $\mu$ . Ceci va permettre de construire un inverse à gauche à :

$$\bar{\Pi}^* : \Omega_{DR}(L_i) \rightarrow \Omega_{DR}(M_i) .$$

On remarque que  $M_i \xrightarrow{\bar{\Pi}} L_i$  est un fibré plat.

Soit  $(U_{i,\alpha})_{\alpha \in I}$  un recouvrement de  $L_i$  par des ouverts simplement connexes, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Pi}^{-1}(U_{i,\alpha}) & \xleftarrow{\phi_{i,\alpha}} & U_{i,\alpha} \times S^{q-1} \\ \searrow \bar{\Pi} & & \swarrow p_1 \\ & U_{i,\alpha} & \end{array}$$

où  $\phi_{i,\alpha}$  est un isomorphisme de fibrés plats.

Soit  $\omega \in \Omega_{DR}^k(M_i)$ . A chaque  $y \in \mathbb{S}^{q-1}$ , on associe :

$$\phi_y : U_{i,\alpha} \rightarrow \bar{\Pi}^{-1}(U_{i,\alpha})$$

$$\phi_y(x) = \phi_{i,\alpha}(x,y)$$

Cette transformation consiste à envoyer  $U_{i,\alpha}$  sur la feuille  $L_{\phi_y(x)}$  du feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}|_{\bar{\Pi}^{-1}(U_{i,\alpha})}$ .

( $\hat{\mathcal{F}}$  étant le feuilletage défini par la structure  $\text{Diff}(\mathbb{S}^{q-1})$ -plate).

Soient  $X_1, \dots, X_k \in T_{m_0}(L_i)$ . On définit

$$f_{\alpha,\omega,(X_1,\dots,X_k)} : \mathbb{S}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{\alpha,\omega,(X_1,\dots,X_k)}(y) = (\phi_y^* \omega)(X_1, \dots, X_k)$$

et

$$\rho_\alpha(\omega)(X_1, \dots, X_k) = \int_{\mathbb{S}^{q-1}} f_{\alpha,\omega,(X_1,\dots,X_k)} d\mu$$

où  $\mu$  est la mesure  $h_0^i(\Pi_1(L_i))$ -invariante.

On remarque que  $\rho_\alpha : \Omega_{DR}(\bar{\Pi}^{-1}(U_{i,\alpha})) \rightarrow \Omega_{DR}(U_{i,\alpha})$ . On vérifie facilement que :

$$\rho_\alpha(d\omega) = d(\rho_\alpha \omega)$$

et

$$\rho_\alpha(\bar{\Pi}^* \theta) = \theta.$$

On remarque que les applications  $\rho_\alpha$  se recollent et définissent un morphisme d'algèbres différentielles graduées :

$$\rho : \Omega_{DR}(M_i) \rightarrow \Omega_{DR}(L_i)$$

En effet :

$$\rho_\alpha(\omega) \Big|_{\bar{\Pi}^{-1}(U_{i,\alpha} \cap U_{i,\beta})} = \rho_\beta(\omega) \Big|_{\bar{\Pi}^{-1}(U_{i,\alpha} \cap U_{i,\beta})}$$

Soit

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega \Big|_{\bar{\Pi}^{-1}(U_{i,\alpha} \cap U_{i,\beta})},$$

On a :

$$f_{\alpha, \omega_{\alpha\beta}}(X_1, \dots, X_k) = f_{\beta, \omega_{\alpha\beta}}(X_1, \dots, X_k) \circ g_i^{\alpha, \beta}(m_0)$$

où  $g_i^{\alpha, \beta}(m_0)$  est la fonction de transition.

Comme  $g_i^{\alpha, \beta}(m_0) \in h_0^i(\Pi_1(L_i))$ , on a :

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(\omega_{\alpha\beta})(X_1, \dots, X_k) &= \int_{\mathfrak{S}^{q-1}} f_{\alpha, \omega_{\alpha\beta}}(X_1, \dots, X_k) \, d\mu \\ &= \int_{\mathfrak{S}^{q-1}} f_{\beta, \omega_{\alpha\beta}}(X_1, \dots, X_k) \, d\mu \\ &= \rho_\beta(\omega_{\alpha\beta})(X_1, \dots, X_k). \end{aligned}$$

On en déduit que  $\bar{\Pi}^* : H_{DR}^*(L_i) \rightarrow H_{DR}^*(M_i)$  est injective.

C.Q.F.D.

Remarque. Le lemme 4 est un cas particulier du théorème général de Thuston-Hirsch (cf. Thuston [ ]) qui dit que  $\bar{\Pi}^*$  reste encore injective, lorsque  $\Pi_1(L_i) \in \Lambda$  ou  $h_0^i(\Pi_1(L_i)) \in \Lambda$ . Mais la démonstration est plus compliquée.

[ Lemme 5. Si  $\Pi_1(L_i) \in \Lambda$  ou si  $h_0^i(\Pi_1(L_i)) \in \Lambda$   
 $\chi(\xi_i) = 0.$

Démonstration : Il suffit de remarquer que  $\bar{\Pi}^*(M_i) \xrightarrow{p} M_i$  a une classe d'Euler nulle.

En effet  $\bar{\Pi}^*(M_i) = \{(u,v) \in M_i \times M_i \text{ tel que } \bar{\Pi}(u) = \bar{\Pi}(v)\}$  et  $p(u,v) = u$ . Soit  $s_0 : M_i \longrightarrow \bar{\Pi}^*(M_i)$

$$s_0(u) = (u,u) \quad (\text{i.e. la section diagonale})$$

$s_0$  est une section de ce fibré en sphères.

Donc

$$\chi(\bar{\Pi}^*(\xi_i)) = 0.$$

Par functorialité, on a :  $\bar{\Pi}^*(\chi(\xi_i)) = 0$ .

Comme  $\bar{\Pi}^*$  est injective, on a

$$\chi(\xi_i) = 0.$$

C.Q.F.D.

Ceci achève la démonstration du lemme 3 et par suite la démonstration du théorème.

Remarque. Dans le cas où  $\Pi_1(L_i)$  est moyennable ou  $h_0^i(\Pi_1(L_i))$  moyennable on peut donner une autre démonstration du lemme 5 en se servant des résultats de Gromov sur la cohomologie bornée.

D'après Gromov, les classes caractéristiques d'un fibré plat sont dans la cohomologie bornée de la base.

D'autre part, le théorème fondamental de Gromov dit que la cohomologie bornée d'un espace est égale à la cohomologie bornée de son groupe fondamental.

Et finalement, la cohomologie bornée d'un groupe moyennable est nulle.

(Pour plus de détails cf. Gromov [ ]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts.*  
(Annals of Math, Vol. 57, 1953 page 115 à 207).
- [2] A. BOREL *Compact Clifford-Klein Forms of Symmetric spaces.*  
(Topology, Vol. 2, page 111-122).
- [3] R. BOTT *Lectures on characteristic classes and foliations,*  
Lectures Notes in Mathematics 279 (1972), 279-342.
- [4] BAUM-BOTT *Singularities of holomorphic foliations,*  
J. Differential Geometry 7 (1972), 279-342.
- [5] BOTT-HAEFLIGER *On characteristic classes of  $\Gamma$ -foliations,*  
Bull. AMS 78 (1972), 1038-1044.
- [6] R. BOTT *On the Lefschetz Formula and exotic characteristic classes,*  
Sympos. Math. Vol X, Rome 1972, pp. 95-105.
- [7] R. BOTT *On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms*  
(Colloquium on Topology and Algebra, Surich, April (1977)
- [8] B. CENKL *Residues of singularities of holomorphic foliations,*  
J. Differential Geometry 13 (1978) 11-23.
- [9] B. CENKL *Formulas for the characteristic classes of groups of diffeomorphisms,*  
Rendiconti di Math (81)
- [10] S.S. CHERN *Selected papers*
- [11] S.S. CHERN, J. SIMONS *Some cohomology classes in principal Fibre Bundles,*  
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 68, n°4, 1971.
- [12] S.S. CHERN, J. SIMONS *Characteristic Forms and Transgressions,*  
Ann. of Math. 99 (1974), pp.48-69.
- [13] DUPONT *Curvature and characteristic classes*
- [14] DUPONT *Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles,*  
Topology 15, 233-245 (1976).
- [15] J. HEITSCH *Independent variation of secondary classes,*  
Annals of Math. 108 (1978), 421-460.
- [16] HUSEMELLER *Fibre Bundles*
- [17] HELGASON *Differential Geometry and Symmetric spaces*





## RÉSUMÉ

Dans ce travail, on généralise la technique des résidus de Heitsch, qui consiste à tester les classes exotiques en termes de résidus. Cette technique s'applique aux classes caractéristiques éventuellement rigides des feuilletages.

Ceci nous permet d'établir des formules explicites pour certaines classes caractéristiques (éventuellement rigides) d'une large classe de feuilletages.

Dans le dernier chapitre on relie les classes caractéristiques d'un feuilletage à la géométrie de ces feuilles. On considère un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension  $q$  qui admet au moins un automorphisme infinitésimal transverse si  $\Lambda$  désigne la plus petite classe de groupes qui contient les groupes moyennables et qui est stable par produit libre et par extension finie ; on démontre que s'il existe une classe  $h_{I_0} c_{J_0}(\mathcal{F})$  non nulle, avec  $|J_0| = q$ ,  $\mathcal{F}$  possède au moins une feuille  $L$ , tel que  $\pi_1(L, x_0) \notin \Lambda$  et l'holonomie linéaire de la feuille  $L$  ne peut pas conserver de mesure sur la sphère  $S^{q-1}$ .

MOTS CLÉS : RÉSIDUS  
EXOTISME