THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

Abdou Kouider BEN NAOUM

Solutions périodiques de l'équation

$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t, x, u, u_{xx})$

Membres du Jury : MM. PARREAU M., Président

HECQUET G., Rapporteur

ANTOINE Ph., COEURÉ G., MAWHIN J., Examinateurs

Soutenue le 23 juin 1983

A mes parents,

A toute ma famille,

R E M E R C I E M E N T S

*
* *

Je tiens, tout d'abord, à remercier très chaleureusement Monsieur le Professeur Michel PARREAU d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Que Monsieur Gérard HECQUET, qui m'a initié aux techniques et méthodes de l'analyse non linéaire et qui a dirigé ce travail en ne cessant de m'encourager, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je suis très honoré que Monsieur le Professeur Jean MAWHIN ait bien voulu accepter de faire partie du jury. Je l'en remercie très vivement.

Mes remerciements vont aussi à l'équipe d'Analyse de l'U.E.R. de Mathématiques de LILLE I et, principalement, à Messieurs les Professeurs Gérard COEURÉ et Philippe ANTOINE pour leur participation à ce jury.

Je n'aurais garde d'oublier tous les enseignants de l'Institut de Mathématiques d'ORAN et, plus particulièrement, Monsieur Daniel BOICHU sans qui ce travail n'aurait abouti.

Madame Raymonde BÉRAT a dactylographié ce texte avec beaucoup de soin et de compétence et a rendu possible la réalisation matérielle de ce travail avec amabilité. Madame Monique LLORET a toujours accepté gentiment de me photocopier rapidement les documents qui m'ont été utiles. Je tiens à les remercier pour l'aide précieuse qu'elles m'ont apportée.

Je ne veux pas oublier, dans mes remerciements, Madame Elisabeth LOCATELLI pour le montage typographique de la couverture, ainsi que Messieurs Albert GOURNAY, Michel PROVOST, Madame Françoise WDOWCZYK pour la diligence avec laquelle cette thèse fut tirée et empilée.

INTRODUCTION

L'existence de solutions périodiques de l'équation des ondes a fait l'objet de plusieurs travaux ces quinze dernières années.

Plusieurs types d'équations ont été étudiés. Dans le chapitre I, nous verrons comment ces questions ont été résolues ; notamment, les travaux de H. PETZELTOVA [11], W.S. HALL [8], L. CESARI - R. KANNAN [4] H. BREZIS - NIRENBERG [3], BAHRI - SANCHEZ [2], BAHRI - BREZIS [1], et, enfin, J. MAWHIN [9], [10] dont nous adopterons le point de vue. Celui-ci, dans [9], étudie l'existence de solutions périodiques de l'équation :

$$(1) \qquad u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = f(t,x,u), \qquad \alpha \in Q.$$

Pour laquelle, il définit la notion de solution périodique généralisée (SPG). Plus précisément, $u \in L^2([0,2\pi]^2)$ est dite solution périodique généralisée de (1) si pour tout $v \in P^2$, on a :

$$(u, v_{tt} - \alpha^2 v_{xx}) = (f(.,.,u(.,.)),v)$$

ou $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel de $L^2((0,2\pi)^2)$ et P^2 l'ensemble des fonctions de $C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et 2π-périodiques en leurs deux variables.

Dans ces conditions, J. MAWHIN prouve que sous certaines hypothèses convenables et si f vérifie

(2) $$a \leqslant \frac{f(t,x,u) - f(t,x,v)}{u - v} \leqslant b \qquad a,b \in \mathbb{R} \text{ convenables.}$$

Alors (1) possède une SPG unique.

On se propose ici d'étudier l'existence de solutions périodiques de l'équation :

(3) $$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u,u_{xx})$$

on exhibera une condition suffisante sur f, permettant d'étendre le champ de validité de la méthode de J. MAWHIN [9] a propos de l'équation (1).

L'argument fort de cette étude est basée sur l'inversion d'un opérateur conduisant à une application du théorème point fixe de Banach.

Dans une première étape, on étudiera les équations :

(4) $$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u)$$

(5) $$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u_{xx}) \; .$$

Dans ces 2 cas, si f vérifie (2), le problème admet une solution périodique généralisée unique dans un espace de Banach convenable.

Dans une seconde partie, on étudie l'équation (3) ; on se placera dans $L^2([0,2\pi]^2) \times L^2([0,2\pi]^2)$ et l'on supposera que $f(.,.,u,v) \in L^2([0,2\pi]^2)$ si $u, v \in H$. Dans ces conditions, pour λ, μ deux réels convenables, $q_{\lambda,\mu} = \inf_{(m,n)\in Z^2} \{n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda\} > 0$

s'il existe pour $u,\bar{u},v,\bar{v} \in H$, deux fonctions α, β,

$$\alpha : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R} \quad ; \quad (t,x,u,\bar{u},v) \to \alpha(t,x,u,\bar{u},v)$$

$$\beta : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R} \quad ; \quad (t,x,u,v,\bar{v}) \to \beta(t,x,u,v,\bar{v})$$

telles que :

i) $$\alpha(.,.,u,\bar{u},v) = \frac{f(.,.,u,v) - f(.,.,\bar{u},v)}{u - \bar{u}}$$

$$\beta(.,.,u,v,\bar{v}) = \frac{f(.,.,u,v) - f(.,.,u,\bar{v})}{v - \bar{v}} \quad .$$

ii) pour tout $u,\bar{u},v,\bar{v} \in \mathbb{R}$

$$\sup_{R^5} \frac{||\alpha - \lambda|| + ||\beta - \mu||}{q} \leqslant k < 1$$

ou q est la distance de (λ,μ) aux droites

$$n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda = 0.$$

Alors l'équation (3) admet une SPG unique.

Une étude graphique permettra de montrer la possibilité de déterminer (λ,μ) pris dans un espace convenable, de telle manière que la condition ii) du théorème puisse être satisfaite.

CHAPITRE I

QUELQUES RÉSULTATS CONNUS

Le problème de l'existence de solutions périodiques d'équations aux dérivées partielles non linéaires a reçu une considérable attention ces dix dernières années.

I) Etant au début, inspiré des méthodes de J.K. HALL [7] et L. CESARI, portant sur les équations différentielles ordinaires, William S. HALL (1970) étudia l'existence de solutions périodiques d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles :

(1) $$u_{tt}(t,x) + (-1)^p D_x^p u(t,x) = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),\dots,D_x^p u(t,x))$$

satisfaisant les conditions de périodicité :

(2) $$u(t+2\pi,x) = u(t,x) = u(t,x+2\pi)$$

plus simplement on écrit (1) sous la forme :

(3) $$Lu = \varepsilon F(.,.,u)$$

où F est la composition de fonctions : f est supposée 2π-périodique en t et x

$$F(t,x,u) = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),\dots,D_x^p u(t,x))$$

et L l'opérateur différentiel :

(4) $$L = D_{tt} + (-1)^p D_x^{2p} .$$

L'idée de la résolution de ce problème est la suivante : on se place dans un espace de Banach H de fonctions 2 -périodiques en t,x, pouvant se décomposer en deux sous-espaces supplémentaires M et $M^\perp$, où M est le noyau dans H de l'opérateur L. Puisque M est non-trivial, L est borné et inversible seulement sur $M^\perp$ le complémentaire de M dans H.

D'autre part, si l'on remplace l'équation (1) par l'équation :

(5) $$Lv = (I-Q)F(.,.,v)$$

où Q est la projection de H sur M, alors L peut-être inversé ce qui nous donne l'équation intégrale suivante :

(6) $$v(y,\varepsilon) = y + \varepsilon K(I-Q)F(.,.,v(y,\varepsilon))$$

où $K : M \to M$ est l'inverse de L sur M et y un élément quelconque de M.

Par le théorème du point fixe de Banach, (6) admet une unique solution dans H pour tout $y \in M$ et ε suffisamment petit.

Evidemment $v(y,\varepsilon)$ ne vérifie (1) que si $QF(.,.,v(y,\varepsilon)) = 0$. Or y est choisit arbitrairement dans M. Par conséquent, s'il existe $y(\varepsilon)$ dans M tel que $QF(.,.,v(y,\varepsilon)) = 0$, alors $v(y(\varepsilon),\varepsilon)$ est solution périodique de (1).

L'équation :

$$QF(.,.,v(y,\varepsilon)) = 0$$

étant plus simple que l'équation (1), reste tout de même en général assez difficile à résoudre, même si on la considère comme une application directe du théorème des fonctions implicites.

W.S. HALL [8] conclut son étude par les théorèmes suivants :

Théorème :

Soit f *ne dépendant que de* t,x,u. u *étant* 2π*-périodique en* t *et* .

On suppose que f *admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre* pk+2, $k \geq 2$ *et*

i) $f_u(t,x,u) \geq \beta > 0$;

ii) $||f_t(t,x,u)|| \leq N(1+|u|)$.

Alors, pour ε *suffisamment petit, il existe une unique solution* 2π*-périodique* $u(.,.,\varepsilon) \in H_{p,k}$ (*).

Dans le cas où l'équation étudiée est :

$$Lu = u_{tt} + (-1)^p D_x^{2p} u = \varepsilon(\alpha u_t + f(.,.,u)).$$

on a le théorème suivant.

Théorème :

Soit $k \geq 3$, *et supposons que* :

i) f *est continûment différentiable d'ordre* pk+2 ;

ii) $f(t,-x,-u) = -f(t,x,u)$;

iii) f 2π*-périodique en* t *et* x ;

iv) *il existe* $r > 0$, *tel que* $\sup\limits_{t,x,|s|<r} |f(t,x,s)| \leq \frac{\alpha r}{c}$;

v) *pour ce même* r, $\sup\limits_{t,x,|s|\leq r} |f_u(t,x,s)| < \alpha$.

(*) $H_{p,k}$ désigne simplement l'ensemble des distributions dont les coefficients de Fourier sont de carré sommable par rapport au poids $\mu(m,n;p,k) = (1+m^2+n^{2p})^{k/2}$.

Alors, pour ε assez petit, l'équation ci-dessus admet une solution 2π-périodique satisfaisant :

$$\mathcal{D}_x^{2(j-1)} u(t,0,\varepsilon) = \mathcal{D}_x^{2(j-1)} u(t,\pi,\varepsilon) \qquad j = 1,2,\dots,p.$$

Une application de ce théorème est l'exemple suivant :

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(u_t + au + bu^3 + g(.,.))$$

$$u(t,0,\varepsilon) = u(t,\pi,\varepsilon) = 0.$$

On notera que cet exemple a été étudie précédemment par J.K. HALE [7] qui montre que cette équation admettrait une solution 2π-périodique pour ε, b assez petits et $a \neq 0$.

Une généralisation est l'étude de :

$$u_{tt} + (-1)^p D_x^{2p} u = \varepsilon(u + au + bu^3 + g(.,.)) \qquad p = 1,2,\dots$$

II) Dans le même esprit, H. PETZELTOVA (1972) reprenant les idées de l'école tchèque (VEJVODA-KRYLOVA) étudia l'existence de solutions périodiques du problème :

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = f(.,.,u,u_t) \\ u(t,0) = u_{xx}(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \\ f \text{ périodique en } t. \end{cases}$$

Le cadre de résolution du problème est le même que celui de W.S. HALL :

on se place dans un espace de Banach $A = B \oplus C$ où B est le noyau de $L = u_{tt} + u_{xxxx}$ et L est borné et inversible seulement sur C le complémentaire de B dans A. On note P_1 et P_2 les projections orthogonales de A sur B et C respectivement et on cherche la solution sous la forme $u = v + w$, avec $v \in B$, $w \in C$. Ainsi le problème (1) est équivalent au système :

$$\begin{cases} p_1 F(v + w) = 0 & (2) \\ Lw = \varepsilon p_2 F(v + w) & (3) \end{cases}$$

L'hypothèse essentielle faite pour résoudre (2) est l'existence de $\gamma > 0$ tel que :

$$f_{u_t} \geq \gamma > 0$$

ou $\quad f_u \geq \gamma > 0$ si f ne dépend que t,x,u.

Le théorème du point fixe de Banach permet de résoudre (3) et en achève l'étude.

Ainsi H. PETZELTOVA contourne la difficulté de la méthode de W.S. HALL en imposant l'hypothèse ci-dessus, qui est plus facile à vérifier que les hypothèses nécessaires à l'utilisation du théorème des fonctions implicites.

Les deux résultats fondamentaux de H. PETZELTOVA à propos de l'équation (1) sont les suivants :

<u>*Théorème*</u> :

Soit f *vérifiant les hypothèses suivantes :*

il existe $R > 0$, $r > 0$ *tels que :*

i) f *admet des dérivées continues d'ordre* $2(n-1)$ *sur*

$$G_1 = G \times \left[- c_o(R+r), c_o(R+r)\right]^2 .$$

ii) $\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} F(u)(t,0) = \dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} F(u)(t,\pi)$, $\quad k = 0,1,\dots,n-1$.

iii) $f_{u_t} \geqslant \gamma > 0$ *sur* G_1.

iv) $\gamma - \frac{1}{2} (\sup\limits_{G_1} f_u(t,x,u_1,u_2) - \inf\limits_{G_1} f_u(t,x,u_1,u_2)) = \alpha > 0$.

v) $\sup\limits_{G_1} |f_t(t,x,u_1,u_2)| < \alpha R$.

Alors pour ε *assez petit l'équation* (1) *admet une unique solution* 2π-*périodique dans* $B_n^R \times C_n^r$ (**).

(**)

<u>*Définition de*</u> B_n^r, C_n^r .

Soit $I = [0,2\pi] \times [0,\pi]$, $\quad G = R \times [0,\pi]$.

$D = \{\psi$ réelles, 2π-périodiques, indéfiniment différentiable sur G ;
$\partial^{2k}/\partial x^{2k}\psi(t,0) = \partial^{2k}/\partial x^{2k}\psi(t,\pi) = 0, \quad k = 1,\dots\}$.

A_n le complété de D pour la norme :

$$||u||_n = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n} u(t,x)\right|^2 + \left|\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(t,x)\right|^2\right)dxdt\right)^{1/2} .$$

Soit B_n l'ensemble des solutions de l'équation $Lu = u_{tt} + u_{xxxx} = g \in A_n$ et donc C_n le complémentaire de B_n dans A_n.

D'où :

$$B_n^R = \{u \in B_n \quad ; \quad ||u|| \leqslant R\}.$$

$$C_n^r = \{u \in C_n \quad ; \quad ||u|| < r\}.$$

Une généralisation de la même manière que W.S. HALL pour l'équation $Lu = \varepsilon(\alpha u_t + f(.,.,u))$ est donnée par le théorème :

<u>*Théorème*</u> :

Supposons qu'il existe $R, \ r > 0$ *tels que* f *continûment différentiable d'ordre* $2(n-1)$ *sur* G_3 ,

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} F(u)(t,0) = \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} F(u)(t,\pi) = 0 , \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

et 2π*-périodique en* t. *En plus, on suppose que :*

$\sup\{|f(t,x,u)|,(t,x,u) \in G_3\} < \alpha R$. *Alors, il existe une unique solution du problème* $Lu = \varepsilon(\alpha u_t + f(.,.,u))$.

Dans $B_n^R \times C_n^r$ *pour* ε *assez petit.*

III) Toujours à propos de l'existence de solutions périodiques d'équations aux dérivées partielles, L. CESARI - R. KANNAN [4] dans un esprit de généralisation de ces questions, étudient le problème en considérant l'équation :

$$(1) \qquad Ex = Nx \qquad x \in X$$

où X est un espace d'Hilbert, E un opérateur dont le noyau est de dimension finie ou infinie (cas elliptique ou cas hyperbolique) et N un opérateur non linéaire.

Sous certaines hypothèses, ils prouvent l'existence de solutions de (1).

En particulier, il en résulte l'existence de solutions d'équations de la forme :

$$u_{tt} - Au = f(.,.,u)$$
$$u_{tt} - Au = f(.,.,u,u_t,u_x)$$

qui contiennent comme cas particulier les équations de W.S. HALL et H. PETZELTOVA seulement pour $f = \varepsilon g$ où ε est un paramètre réel assez petit.

Comme nous allons le voir, dans ce cadre général d'études, l'hypothèse essentielle de H. PETZELTOVA n'est pas nécessaire. Les hypothèses de L. CESARI - R. KANNAN apparaissent a priori "draconniennes", mais en fait, dans la pratique, elles décrivent la situation de plusieurs équations aux dérivées partielles non linéaires, l'opérateur E n'étant pas nécessairement auto-adjoint, un exemple du cas hyperbolique étant l'équation :

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u,\ldots).$$

Hypothèses et réduction du problème de CESARI-KANNAN.

Soient X et Y deux espaces de Banach réels, $\|\ \|_X$, $\|\ \|_Y$ leurs normes respectives, $\mathcal{D}(E)$ et $\mathcal{R}(E)$ le domaine et l'image de l'opérateur linéaire E. $E : \mathcal{D}(E) \to Y$; $\mathcal{D}(E) \subset X$, et $N : X \to Y$ l'opérateur non linéaire.

On considère l'équation :

(1) $$Ex = Nx \quad ; \quad x \in \mathcal{D}(E).$$

Soient $P : X \to X$; $Q : Y \to Y$ des projecteurs, dont les images et les noyaux sont donnés par :

$R(P) = PX = X_o$; $\operatorname{Ker} P = R(I-P) = (I-P)X = X_1$.

$R(Q) = QY = Y_o$; $\operatorname{Ker} Q = R(I-Q) = (I-Q)Y = Y_1$.

On suppose que P et Q sont choisis tels que :

$\operatorname{Ker} E = PX$ et $R(E) = Y_1 = (I-Q)Y$.

Cela suppose évidemment que $\operatorname{Ker} E$ et $R(E)$ soient fermes dans X et Y respectivement.

Ainsi E est linéaire, bijectif de $\mathcal{D}(E) \cap X_1$ sur Y_1 ; on notera H son inverse de $Y_1 \to \mathcal{D}(E) \cap X_1$.

On suppose également que H est borné, non nécessairement compact et vérifiant :

i) $H(I-Q)E = I-P$

ii) $EP = QE$

iii) $EH(I-Q) = I-Q$.

Enfin, soit L une constante telle que :

$||Hy||_X \leqslant L||y||_Y$ pour tout $y \in Y$.

Dans ces conditions, l'équation (1) est équivalente au système :

(2) $x = Px + H(I-Q)Nx$.

(3) $Q(Ex - Nx) = 0$.

Autrement dit, si l'on pose $x^* = Px \in X_o$, et $\operatorname{Ker} E = X_o = PX$

(4) $x = x^* + H(I-Q)Nx$.

(5) $QNx = 0$.

Par conséquent, pour tout $x^* \in X_o$, l'équation (4) apparait comme un problème de point fixe ; $x = Tx$ avec $Tx = x^* + H(I-Q)Nx$.

L'équation (1) étant réduite à un système d'équations, plusieurs situations et plusieurs cas peuvent être envisagés :

a) $X = Y$ un espace de Hilbert réel ; CESARI-KANNAN ont donné des conditions suffisantes pour résoudre (1) en utilisant la théorie des opérateurs monotones.

b) $X = Y$ un espace de Hilbert réel séparable, E auto-adjoint N lipschitzien. CESARI montre qu'il est toujours possible de choisir X et, par conséquent, P,Q de telle manière que l'opérateur T est une contraction dans X, et donc l'équation $x = Tx$ admet une solution unique dans une boule convenable de X.

c) En général, pour E non nécessairement auto-adjoint, X et Y espaces de Banach réels, CESARI et KANNAN dans toute une série d'articles ont considéré la situation où Y est un espace d'opérateurs linéaires sur X, telle que l'application $\langle y,x\rangle$, $Y \times X \to R$ est définie, linéaire en x et y vérifiant les conditions naturelles suivantes :

(H_1) $\quad |\langle y,x\rangle| \leq K\|x\|_X \|y\|_Y$ $\quad K$ constante, x et $y \in X$ et Y.

Il est toujours possible dans ce cas de choisir des normes dans X et Y ou l'application $\langle y,x\rangle$ de telle manière que $K = 1$.

(H_2) $\quad$ pour $y \in Y$, on suppose que $y \in \mathcal{R}(E) = Y_1$ $\quad$ i.e. :
$Qy = 0$ si et seulement si $\langle Qy,x^*\rangle = 0$ pour tout $x^* \in X_o$.

Quelques exemples de cette situation ci-dessus :
soit G un domaine borné de R^ν :

a) $X = Y = L^2(G)$; $|<y,x>| = \left|\int_G y(t)x(t)dt\right| \leqslant ||y||\ ||x||$

avec les normes usuelles dans $L^2(G)$.

b) $X = L^2(G)$ muni de la norme usuelle, $Y = L^\infty(G)$ muni de la norme $||\ \ ||_\infty$ et donc :

$$|<y,x>| = \left|(\text{mes } G)^{-1/2}\int_G y(t)x(t)dt\right| \leqslant ||y||_\infty ||x||_{L^2} .$$

c) $X = L^\infty(G)$, $Y = L^\infty(G)$ et donc aussi :

$$|<y,x>| = \left|(\text{mes } G)^{-1/2}\int_G y(t)x(t)dt\right| \leqslant ||y||_\infty ||x||_\infty .$$

d) enfin, on prend :

$X = H^m(G)$ muni de la norme de Sobolev $||x||_m$;

$Y = L^2(G)$ et donc :

$$|<y,x>| = \left|\int_G y(t)x(t)dt\right| \leqslant ||y||_{L^2} ||x||_{L^2} \leqslant ||y||_{L^2} ||x||_m .$$

Une application directe des travaux de CESARI-KANNAN est l'étude du problème :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u,\ldots) & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0, & \\ u(t+2\pi,x) = u(t,x), \quad 0 < x < \pi, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $I = [0,\pi] \times [0,2\pi]$, $G = [0,\pi] \times \mathbb{R}$

$D =$ $u(t,x)$, 2π-périodiques en t, de classe C^∞ sur G ;

$\mathcal{D}_x^{2k}u(t,0) = \mathcal{D}_x^{2k}u(t,\pi) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$

A_m le complété de D pour la norme :

$$||u||_m = \left(\iint_I \left[(\mathcal{D}_t^m u)^2 + (\mathcal{D}_x^{2m} u)^2\right] dxdx\right)^{1/2} .$$

Alors, A_m est un espace d'Hilbert réel dont le produit scalaire est :

$$(u,v)_m = (\mathcal{D}_t^m u, \mathcal{D}_t^m v) + (\mathcal{D}_x^{2m} u, \mathcal{D}_x^{2m} v) \qquad u,v \in A_m .$$

(,) désigne le produit scalaire de $L^2(I)$; et donc $A_o = L^2(I)$.

Si on considère le problème ci-dessus avec $f = 1$ ou $f = x$, la condition de PETZELTOVA n'est pas nécessaire ; des solutions élémentaires sont données respectivement par :

$$u(t,x) = 24^{-1}x^4 - 12^{-1}\pi x^3 + 24^{-1}\pi^3 x$$

$$= 4\pi^{-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell-1)^{-5} \sin(2\ell-1)x$$

et

$$u(t,x) = 120^{-1}x^5 - 36^{-1}\pi^2 x^3 + 7(360)^{-1}\pi^4 x$$

$$= 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \ell^{-5} \sin \ell x$$

pour $F(t,x) = 1 = 4\pi^{-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell-1)^{-1} \sin(2\ell-1)n$

$$F(t,x) = x = 2 \sum_{\ell=1} (-1)^{\ell+1} \ell^{-1} \sin \ell x$$

sont analytiques dans G, mais n'appartiennent pas à A_1.

Nous avons le théorème du problème :

Théorème :

Soit $f(t,x,u,u_t,u_x) \in C^2(G \times \mathbb{R}^3)$.

Supposons qu'il existe deux constantes R_o , r *telles que* :

a) pour tout $u^* \in X$, $u_1 \in X_{1n}$, $||u_1||_X \leq r$, *on a* :

$$\int_I (f(t,x,u,u_t,u_x))_t u^*_{tt} dtdx \leq 0 \qquad (ou \ \geq 0).$$

b) $L \leq r$.

Alors, le problème hyperbolique admet au moins une solution $u(t,x) \in A_2$ *avec* $||u||_2 \leq R = (R_o{}^2 + r^2)^{1/2}$.

IV) J. MAWHIN, quelques années plus tard (1976), en étudiant l'équation :

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = f(t,x,u)$$

montre, par une méthode simple, comment des résultats nouveaux peuvent s'obtenir par des moyens élémentaires dans le domaine de l'existence de solutions périodiques d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Il montre également que l'étude de son équation conduit à des questions de théorie des nombres, et, en particulier à l'étude de l'équation de Pell.

D'ailleurs, ce sera le point de vue que nous allons adopter et sa méthode que nous allons utiliser pour étudier l'équation :

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u,u_{xx}) \ .$$

V) Plus récemment H. BREZIS - L. NIRENBERG (1977) en étudiant la caractérisation de l'image de certains opérateurs non linéaires donnent suffisamment de conditions d'existence de solutions périodiques de certaines équations. Ils développent toute une série de méthodes de résolutions dans un espace d'Hilbert de l'équation :

$$Au + Bu = f \in H.$$

Ils montrent en particulier que :

$$\mathit{Im}(A + B) \simeq \mathit{Im}(A) + \mathrm{Conv}\ \mathit{Im}(B)\ .$$

$S \simeq T$ signifie que S et T admettent les mêmes intérieurs et les mêmes fermetures.

De plus, grâce à la notion de fonction de récession d'un opérateur non linéaire, définie par :

$$J_B(u) = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ v\to u}} \inf (B(tv),u)$$

et sous certaines hypothèses convenables, ils prouvent les équivalences suivantes :

pour $f \in H$

$$f \in \mathit{Im}(A+B) \iff J_B(v) \geqslant (f,v) \qquad \forall\, v \in \mathrm{Ker}\, A.$$

$$f \in \mathit{Int}\ \mathit{Im}(A+B) \iff J_B(v) > (f,v) \qquad \forall\, v \in \mathrm{Ker}\, A, \quad v \neq 0.$$

Une application des travaux de BREZIS-NIRENBERG est l'étude du problème suivant :

$$u_{tt} - u_{xx} - g(x,t,u) = 0.$$

Dans Ω : $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

avec les conditions :

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

pour lequel, ils recherchent des solutions périodiques par rapport à t et de période 2π. g étant supposée périodique de période 2π par rapport à t, mesurable en (x,t), continue en u, non décroissante par rapport à u et vérifiant p.p en (x,t), $\forall\, u$:

$$\eta|u| - h_1(x,t) \leqslant |g(x,t,u)| \leqslant \gamma|u| + h_2(x,t)$$

où $\eta > 0$, h_1, $h_2 \in L^2(\Omega)$, $\gamma > 3$ ou $\gamma < 1$, selon qu'on considère g ou $-g$.

<u>*Théorème*</u> :

Sous les hypothèses ci-dessus, le problème possède au moins une solution dans L^2.

De plus, si $g \in C^\infty$ *et* $\pm\, g_u \geqslant \varepsilon > 0$, *alors la solution est* C^∞.

<u>*Théorème*</u> :

En plus des hypothèses du théorème précédent, si l'on a g *vérifiant* :

$$|g(x,t,u) - g(x,t,v)| \leqslant \gamma|u - v| \qquad \text{p.p}(x,t) \quad \forall\, u,v$$

avec $\gamma < 3$ *ou* $\gamma < 1$ *respectivement, selon que l'on considère* g *ou* $-g$.

Alors la solution est unique modulo Ker A.

Si g *est strictement monotone en* u *pour tout* (x,t) *la solution est unique.*

Reprenant les travaux de BREZIS - NIRENBERG, dans toute une série d'articles, A. BAHRI - L. SANCHEZ, A. BAHRI - H. BREZIS étudient également l'existence de solutions périodiques des équations :

(*) $u_{tt} + u_{xxxx} + F(t,x,u) = 0$;

F étant "sous-linéaire" et non décroissante en u.

(*) $u_{tt} + u_{xxxx} + a|u|^{\sigma}u = 0$, $a > 0$ et $1 < \sigma < 2$.

CHAPITRE II

A) ETUDE DE L'ÉQUATION $u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u)$.

Introduction :

L'objet de cette première partie est l'existence de solutions périodiques de l'équation :

$$(1) \qquad u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u).$$

Pour cela, on définit la notion, introduite par J. MAWHIN [9], de solution périodique généralisée.

I - Notations :

On pose $J = I^2 = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

$H = L^2(J)$ muni du produit scalaire usuel.

$P = \{f \in C^4(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\ 2\pi\text{-périodiques en leurs 2 variables}\}$

et $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction telle que $f(.,.,u(.,.)) \in H$ pour tout $u \in H$.

Définition 1.-

On dira que $u \in H$ est une solution périodique généralisée (SPG) de l'équation :

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u)$$

si pour tout $v \in P$, on a :

$$(u, v_{tt} + v_{xxxx}) = (f(.,.,u(.,.)), v)$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel dans H.

Remarque :

Si f est continu et si u est une (SPG) de (1) qui est de classe C^4 dans J, alors u est une solution classique de (1) 2π-périodique en t et x.

II - *Etude du problème linéaire associé.*

Soit l'équation linéaire :

$$(2) \qquad u_{tt} + u_{xxxx} - \lambda u = h(t,x)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$; $h \in H$.

Proposition 1.-

Soient $u \in H$, $h \in H$ avec :

$$(3) \qquad u(t,x) = \sum_{m,n \in Z} u_{mn} \exp i(mt + nx) \qquad u_{-m-n} = \overline{u_{mn}}$$

$$(4) \qquad h(t,x) = \sum_{m,n \in Z} h_{mn} \exp i(mt + nx) \qquad h_{-m-n} = \overline{h_{mn}} \quad .$$

Alors u est une SPG de (2) si et seulement si :

$$(5) \qquad (n^4 - m^2 - \lambda) u_{mn} = h_{mn} \quad (m,n \in Z).$$

Preuve : immédiate.

Posons :

$Q_\lambda(m,n) = n^4 - m^2 - \lambda$

$M_\lambda = \{(m,n) \in Z^2 \; ; \; Q_\lambda(m,n) = 0\}$; M_λ est éventuellement vide et $N_\lambda = Z^2 \setminus M_\lambda$ son complémentaire dans Z^2.

Nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 1.-

Une condition nécessaire pour que (2) *possède une (SPG) est que* (6) *pour tout* $(m,n) \in M_\lambda \; : \; h_{mn} = 0$.

En effet, si la condition (6) est vérifiée, le système (5) est résoluble par rapport aux u_{mn}, mais il est évident que ce n'est peut-être pas suffisant pour que (2) possède une (SPG).

Théorème 1.-

L'équation (2) *possède une SPG si et seulement si* (6) *est vérifiée et s'il existe* $\rho > 0$ *tel que pour tout* $(m,n) \in N_\lambda$

$$|Q_\lambda(m,n)| \geq \rho > 0$$

* *On désignera cette dernière condition sous le nom de condition* B .

Preuve :

Condition nécessaire :

Il résulte du corollaire (1) que (6) est nécessaire. Supposons maintenant que B ne soit pas satisfaite. Il existe alors une suite $\{(m_j,n_j)\}$ telle que $(m_j,n_j) \in N$ et $Q_\lambda(m_j,n_j) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$.

On peut donc extraire de cette suite, une sous-suite $\{(m'_j, n'_j)\}$ telle que :

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} Q_\lambda^2(m'_j, n'_j) < \infty.$$

La série de Fourier :

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_\lambda(m'_j, n'_j) \exp i(mt + nx)$$

définit un élément $\tilde{h} \in H$ dont les coefficients vérifient (6). Si maintenant u est une SPG de (2) avec $h = \tilde{h}$, alors on a :

$$Q_\lambda(m'_j, n'_j) u_{m'_j n'_j} = \tilde{h}_{m'_j n'_j} = Q_\lambda(m'_j, n'_j) \quad \text{ou encore}$$

$$u_{m'_j n'_j} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

la contradiction résulte du fait que cette fonction $u \notin H$.

Condition suffisante :

Si $h \in H$ vérifie (6), alors la série de Fourier :

$$(8) \qquad \sum_{m,n \in N_\lambda} Q_\lambda^{-1}(m,n) h_{mn} \exp i(mt + nx)$$

qui est telle que :

$$\sum_{m,n \in N_\lambda} Q_\lambda^{-2}(m,n) |h_{mn}|^2 \leqslant \rho^{-2} \sum_{m,n \in N_\lambda} |h_{mn}|^2$$

définit un élément $u \in H$, qui est alors une (SPG) de (2) en vertu de la proposition (1).

*) Soit $H_\lambda = \{h \in H \; ; \; h_{mn} = 0$ pour tout $(m,n) \in M_\lambda\}$ et si $h \in H_\lambda$, désignons par $T_\lambda h$ la série de Fourier

$$\sum_{(m,n)\in N_\lambda} Q_\lambda^{-1}(m,n) h_{mn} \exp i(mt + nx).$$

<u>*Théorème 2*</u> :

T_λ est un endomorphisme continu de H_λ si et seulement si la condition B *est satisfaite. Dans ce cas :*

$$|T_\lambda| = \{ \inf_{(m,n)\in N_\lambda} |Q_\lambda(m,n)| \}^{-1} = q_\lambda^{-1} .$$

<u>*Preuve*</u> :

. La première partie est immédiate. En effet, si $h \in H_\lambda$, alors (6) est vérifiée ; d'après le théorème (1), (2) possède une (SPG) donnée par (8), qui est exactement $T_\lambda h$.

. D'autre part, si $h \in H_\lambda$:

$$|T_\lambda h|^2 = \sum_{(m,n)\in N_\lambda} Q_\lambda^{-2}(m,n) |h_{mn}|^2 \leqslant \{ \inf_{(m,n)\in N_\lambda} |Q_\lambda(m,n)| \}^{-2} |h|^2.$$

Par définition de q_λ, il existe une suite $\{(m_j,n_j)\}, (m_j,n_j) \in N_\lambda$ $(j = 1,2,\dots)$ telle que : $|Q_\lambda(m_j,n_j)| \xrightarrow[j\to+\infty]{} q_\lambda$

d'où si on pose : $\Psi_{m_j,n_j}(t,x) = \frac{1}{2\pi} \exp i(mt + ux)$ $(j = 1,\dots)$

il vient :

$$|T_\lambda \Psi_{m_j n_j}| = |Q_\lambda(m_j,n_j)|^{-1}$$

et donc :

$$q_\lambda^{-1} \geq |T_\lambda| \geq \sup_{j\in\mathbb{N}^*} |T_\lambda \Psi_{m_j n_j}| = \sup_{j\in\mathbb{N}^*} |Q_\lambda(m_j,n_j)|^{-1} = q_\lambda^{-1} \quad , \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire 2 :

Si $M_\lambda = \Phi$ *et si* (B) *est satisfaite, alors* (2) *possède pour tout* $h \in H$ *une S.P.G. unique* u *donnée par* :

(12) $$u = T_\lambda h.$$

III - *Un problème de théorie des nombres.*

Posons :

$$R = \{\lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad T_\lambda \text{ est un endomorphisme continu de } H\}$$

et son complémentaire Σ donné par :

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad M_\lambda \neq \Phi\} \; .$$

D'après le théorème (2), R s'écrit :

$$R = \{\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \notin \Sigma \text{ et } (B) \text{ est satisfaite}\}.$$

Nous allons maintenant étudier le spectre de λ i.e. Σ ; c'est-à-dire étudier la résolubilité en nombres entiers de l'équation $n^4 - m^2 - \lambda = 0$.

D'après J. MAWHIN [9], cette équation n'est pas résoluble pour $\lambda \notin (2Z+1) \cup 4Z$.

a) Considérons le cas où $\lambda = 4q$, i.e. $\lambda \in 4Z$.
Comme l'équation : $4q = n^2 - m^2$ admet la solution

$$\begin{cases} n = q+1 \\ m = q-1 \end{cases}$$

l'équation $4q = n^4 - m^2$ aura donc une solution pourvu que $q+1$ soit un carré.

Soit donc $q = k^2 - 1$ et

$n^4 - m^2 = k^4 - (k^2 - 2)^2 = 4(k^2 - 1)$ i.e. $\lambda = 4(k^2 - 1)$.

b) Considérons maintenant le cas où $\lambda = 2q + 1$.

Comme l'équation $n^2 - m^2 = 2q+1$ admet la solution

$$\begin{cases} n = q+1 \\ m = q \end{cases}$$

l'équation $2q+1 = n^4 - m^2$ aura une solution pourvu que $q+1$ soit un carré.

Soit donc $q = k^2 - 1$, auquel cas :

$$\lambda = 2k^2 - 1.$$

Ainsi : $\Sigma = Sp(\lambda) = \bigcup_{k>0} 4(k^2-1) \cup \bigcup_{k>0} 2k^2 - 1.$

On obtient ainsi les valeurs de λ :

$-1, 0, 1, 7, 12, 17, 31, 32, 49, 60, 71, 96, 97.$

Remarque :

On a $Q_\lambda(m,n) = n^4 - m^2 - \lambda$

d'où $|Q_\lambda(m,n)| = |\lambda - (n^4 - m^2)|$

par conséquent :

$$\inf_{(m,n)\in N_\lambda} |Q_\lambda(m,n)| = \inf_{(m,n)\in N_\lambda} |\lambda - (n^4 - m^2)|$$

$$= \inf_{n^4-m^2\in\Sigma} |\lambda - (n^4 - m^2)|$$

$$= \inf_{\nu\in\Sigma}|\lambda - \nu| = d(\lambda,\Sigma) .$$

Ainsi, on a prouvé que :

$$|T_\lambda| = d(\lambda,\Sigma)^{-1} .$$

Le problème non linéaire :

Soit $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$(t,x,u) \to f(t,x,u)$; mesurable en (t,x) pour chaque $U \in \mathbb{R}$.

et telle que $f(.,.,0) \in H$.

Le problème est d'étudier l'existence de solutions périodiques généralisées de l'équation non linéaire :

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u).$$

Théorème 3 :

Supposons qu'il existe μ *et* $\nu \in \Sigma$, $\mu < \nu$ tels que $]\mu,\nu[\subset R$ *et deux réels* a, b *avec* :

$$u < a \leqslant b < \nu$$

tels que pour tout $(t,x) \in J$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $u \neq v$

$$\text{(14)} \qquad a \leqslant \frac{f(t,x,u) - f(t,x,v)}{u - v} \leqslant b .$$

Alors l'équation (1) *possède un S.P.G. unique.*

Preuve :

Soit $\lambda \in]\mu,\nu[$. Il est évident que l'équation (1) est équivalente à l'équation :

(15) $$u_{tt} + u_{xxxx} - \lambda u = f(t,x,u) - \lambda u.$$

Définissons F_λ sur H par :

$$F_\lambda u = f(.,.,u) - \lambda u \quad : H \text{ dans } H.$$

Alors, d'après (14), F_λ applique H en lui-même et si $u, v \in H$

$$|F_\lambda u - F_\lambda v| \leqslant \mathrm{Max}(|a-\lambda|,|b-\lambda|)|u-v|$$
$$= k_\lambda |u-v|.$$

Puisque $\lambda \in R$, i.e. $M_\lambda = \Phi$; d'après le corollaire (2) et (15), la recherche des SPG de (1) équivaut à la résolution dans H de l'équation :

$$u = T_\lambda F_\lambda u = G_\lambda u .$$

Où, pour tout $u, v \in H$,

$$||G_\lambda u - G_\lambda v|| \leqslant k_\lambda q_\lambda^{-1} ||u - v|| = \frac{k_\lambda}{d(\lambda,\Sigma)} ||u - v||.$$

G_λ sera donc une contraction dans H si λ peut être choisi tel que : $k_\lambda q^{-1} < 1$, c'est-à-dire tel que :

$$\mathrm{Max}(|a-\lambda|,|b-\lambda|) < d(\lambda,\Sigma) = \inf_{(m,n)\in Z^2} |Q_\lambda(m,n)|.$$

or,

$$\inf_{(m,n)\in Z^2} Q_\lambda(m,n) = \min\Big(\inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ Q_\lambda(m,n)>0}} Q_\lambda(m,n), \; - \sup_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ Q_\lambda(m,n)<0}} Q_\lambda(m,n)\Big)$$

et

$$\inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ Q_\lambda(m,n)>0}} Q_\lambda(m,n) = \inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ n^4-m^2>\lambda}} (n^4 - m^2 - \nu) + (\nu - \lambda)$$

$$= \inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ n^4-m^2\geq\nu}} (n^4 - m^2 - \nu) + (\nu - \lambda)$$

puisque par hypothèse il n'existe pas d'éléments de la forme $n^4 - m^2$ dans $]\lambda,\nu[$.

D'ailleurs,

$$\inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ n^4-m^2\geq\nu}} (n^4 - m^2 - \nu) = 0$$

en effet, si le membre de gauche était égal à $\delta > 0$, on aurait :

$$\inf_{(m,n)\in Z^2} |Q_\lambda(m,n)| \geq \min (\delta,\nu - \mu) > 0.$$

Puisque par hypothèse,

$$\inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ n^4-m^2\leq\nu}} (n^4 - m^2 - \nu) = \inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ n^4-m^2\leq\mu}} |(n^4 - m^2 - \nu)| \geq \nu - \mu.$$

Par le théorème (2) et ce qui précède, on aurait alors $\mu \in R$, ce qui contredit l'hypothèse.

Dès lors

$$\inf_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ Q_\lambda(m,n)>0}} Q_\lambda(m,n) = \nu - \lambda,$$

et, par un raisonnement analogue,

$$- \sup_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ Q_\lambda(m,n)<0}} Q_\lambda(m,n) = \lambda - \mu .$$

Ce qui entraîne :

$$\inf_{(m,n)\in Z^2} |Q_\lambda(m,n)| = \min(\nu - \lambda, \lambda - \mu).$$

Une discution élémentaire montre que l'inégalité

$$\mathrm{Max}(|a - \lambda|, |b - \lambda|) < \min(\nu - \lambda, \lambda - \mu)$$

est satisfaite si et seulement si on choisit λ dans $]\mu,\nu[$ tel que

$$\frac{\mu+b}{2} < \lambda < \frac{\nu+a}{2}$$

ce qui est toujours possible. Le théorème du point fixe de Banach appliqué à G_λ achève alors la démonstration.

B) ETUDE DE L'ÉQUATION : $u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u_{xx})$. (1).

0 - *Introduction* :

Dans ce cas là et, contrairement au problème étudié dans la partie (A) , on se placera dans $\tilde{H}$ un sous-espace vectoriel de $H = L^2(J)$ défini comme suit :

$$\tilde{H} = \{u \in L^2(J) \; ; \; u \;\; 2\pi\text{-périodique en } t \text{ et } x \; ; \; u_{xx} \in L^2(J) \; ; \int_0^{2\pi} u(t,x)\,dx = 0\}.$$

Il est bien évident que l'introduction de $\tilde{H}$ assure l'existence de u_{xx} et, par conséquent, celle de $f(t,x,u_{xx})$ plus tard.

Nous utiliserons les notations de la partie (A) .

1 - *Problème linéaire associé* :

Lemme :

$\tilde{H}$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$||u||_{\tilde{H}} = ||u_{xx}||_H \, .$$

Preuve :

La première partie est évidente si l'on a montré que $|| \; ||_{\tilde{H}}$ est effectivement une norme :

Pour cela, il suffit de voir que :

$$||u||_{\tilde{H}} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; u = 0.$$

En effet, soit $u \in \tilde{H}$ tel que $||u||_{\tilde{H}} = 0$; alors $u_{xx} = 0$. Dans ce cas : $u_x = \alpha(t)$, d'où $u = x\alpha(t) + \beta(t)$.

Or, en vertu de la périodicité de $u(t,x)$ en x, $\alpha(t) \equiv 0$.

D'autre part, d'après la définition de $\tilde{H}$,

$$\int_0^{2\pi} u(t,x)dx = \int_0^{2\pi} \beta(t)dx = 0 .$$

Par conséquent, $\beta(t) \equiv 0$ d'où $u \equiv 0$.

Considérons l'équation linéaire :

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \mu u_{xx} = h(t,x) \tag{2}$$

$\mu \in \mathbb{R}$; $h \in H$.

Pour les démonstrations des propositions qui suivent dans ce paragraphe, on pourra se référer à la partie A . Celles-ci sont analogues.

Proposition 1 :

Soit $u \in \tilde{H}$, $h \in H$ *avec :*

(3) $$u(t,x) = \sum_{m,n} u_{mn} \exp i(mt + nx)$$

(4) $$h(t,x) = \sum_{m,n} h_{mn} \exp i(mt + nx).$$

Alors u *est une SPG de* (2) *si et seulement si :*

(5) $$(n^4 - m^2 - \mu n^2)u_{mn} = h_{mn} .$$

Soit l'ensemble (éventuellement vide)

$$M_\mu = \{(m,n) \in Z^2 ; Q_\mu(m,n) = 0\}$$

où $$Q_\mu(m,n) = n^4 - m^2 - \mu n^2 ,$$

et N_μ son complémentaire dans Z^2.

Corollaire 1 :

Une condition nécessaire pour que (2) *possède une SPG est que pour tout* $(m,n) \in M_\mu$: $h_{mn} = 0$. (6)

Théorèmes d'existence du problème linéaire :

On a les mêmes résultats que pour le problème étudié dans la partie (A) .

Théorème 1 :

L'équation (2) *possède une SPG si et seulement si* (6) *est vérifiée et s'il existe* $\rho > 0$, *tel que pour tout* $(m,n) \in N_\mu$

$$|Q_\mu(m,n)| \geq \rho > 0 .$$

On désignera cette condition également sous le nom de condition (B) .

Introduisons le sous-espace vectoriel fermé de H :

$$H_\mu = \{h \in H, \quad h_{mn} = 0 \quad \text{pour tout} \quad (m,n) \in M_\mu\}$$

et si $h \in H_\mu$, désignons par $T_\mu h$ la série de Fourier :

$$\sum_{m,n \in N} Q_\mu^{-1}(m,n) h_{mn} \exp i(mt + nx).$$

Il est clair que T_μ est une application linéaire de H dans l'espace des séries de Fourier.

On a le résultat suivant :

Théorème 2 :

T_μ est un endomorphisme continu de H_μ si et seulement si, la condition B est satisfaite. Dans le cas :

(7) $$||T_\mu|| = \{ \inf_{m,n \in N_\mu} |Q_\mu(m,n)| \}^{-1} = q_\mu^{-1} .$$

Un corollaire immédiat de ce théorème est le :

Corollaire 2 :

Si $M_\mu = \Phi$ et si la condition B est satisfaite, alors l'équation (2) possède une SPG unique u donnée par :

(8) $$u = T_\mu h .$$

Preuve :

Par les théorèmes 1 et 2, l'équation (2) possède pour tout h une solution donnée par (8) avec $N_\mu = Z^2$ et l'unicité résulte aisément de la proposition 1.

2 - Un problème de théorie des nombres :

Désignons par R l'ensemble :

$$R = \{\mu \in \mathbb{R} \ ; \ T_\mu \text{ est un endomorphisme continu de } H\}$$

et par Σ son complémentaire dans $\mathbb{R}$.

Σ s'écrit : $\Sigma = \{\mu \in \mathbb{R}, \ M_\mu \neq \Phi\}$.

Par conséquent, il résulte du théorème 2 que :

$$R = \{\mu \in \mathbb{R} \ ; \ \mu \notin \Sigma \text{ et la condition B est satisfaite}\}.$$

Il serait souhaitable, comme dans la partie (A) , d'avoir une description aussi précise que possible de R. Pour cela, il faut :

a) Déterminer Σ, c'est-à-dire étudier la résolubilité en nombres entiers de l'équation :

$$Q_\mu(m,n) = n^4 - m^2 - \mu n^2 = 0.$$

b) Etant donné un $\mu \notin \Sigma$, vérifier si la condition (B) est satisfaite, autrement dit étudier la valeur minimum atteinte par $Q_\mu(m,n)$.

Problèmes non encore résolus dans toute leurs généralités.

3 - *Etude de la suite double* $(n^2 - \frac{m^2}{n^2})_{m,n \in \mathbb{N}^*}$

On montre que les valeurs d'adhérence de la suite double $(n^2 - \frac{m^2}{n^2})_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ sont les entiers pairs ; en effet :

Proposition :

Tout entier pair $x = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ *est limite de la suite* $(n^2 - \frac{(n^2-k)^2}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Lemme :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $\varepsilon > 0$, n,m *entiers* > 0 *tels que* $n > \sup(\sqrt{2}|x|, \frac{|x|}{\sqrt{\varepsilon}})$ *et* $|x - n^2 + \frac{m^2}{n^2}| < \varepsilon$; *alors* $|m - n^2 + \frac{x}{2}| < 2\varepsilon$.

Preuve :

*) posons $\alpha = m - \sqrt{n^2(n^2-x)}$ i.e. $(m = \alpha + \sqrt{n^2(n^2-x)})$;

alors, on a : $$|x + \frac{m^2}{n^2} - n^2| = |\alpha| \left| \frac{m}{n^2} + \sqrt{\frac{n^2 - x}{n^2}} \right|$$

puisque $x < \frac{n^2}{2}$; $\sqrt{\frac{n^2 - x}{n^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où : $|\alpha| \left| \frac{m}{n^2} + \sqrt{\frac{n^2 - x}{n^2}} \right| \geqslant \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}$

et d'après l'hypothèse :

$$|\alpha| < \varepsilon\sqrt{2} \ .$$

*) De même posons : $\beta = \sqrt{1 - \frac{x}{n^2}} - (1 - \frac{x}{2n^2})$; β s'écrit aussi :

$$\beta = \frac{-\frac{x^2}{4n^4}}{\sqrt{1 - \frac{x}{n^2}} + (1 - \frac{x}{2n^2})} \quad \text{alors} \quad |\beta| \leqslant \frac{x^2}{4n^4} \quad (\text{puisque} \quad |\frac{x}{n^2}| < \frac{1}{2})$$

par conséquent, puisque $\frac{|x|}{\sqrt{\varepsilon}} < n$,

$$|n^2\beta| < \frac{n^2}{4n^2} < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

Finalement :

$$|m-n^2+ \frac{x}{2}| = |\alpha+n^2 \sqrt{1- \frac{x}{n^2}} - n^2 + \frac{x}{2}| = |\alpha+n^2\beta| \leqslant |\alpha| + |n^2\beta| < \varepsilon(\sqrt{2} + \frac{1}{4}) < 2\varepsilon.$$

Preuve de la proposition :

Toute valeur d'adhérence est un entier pair ; en effet, supposons que x soit un réel qui ne soit pas un entier pair.

Il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que pour tout entier $N \in Z$,

$$|N + \frac{x}{2}| \geqslant 2\varepsilon.$$

D'après le lemme, si $N = m-n^2$, il n'existe aucun couple (m,n) tel que :

$$n > \sup(\sqrt{2|x|}, \frac{|x|}{\sqrt{\varepsilon}}) \quad \text{et} \quad |x - n^2 + \frac{m^2}{n^2}| < \varepsilon.$$

D'autre part, il n'existe qu'un nombre fini de couple (m,n) tels que

$$n \leqslant \sup(\sqrt{2|x|}, \frac{|x|}{\sqrt{\varepsilon}}) \quad \text{et} \quad |x - n^2 + \frac{m^2}{n^2}| < \varepsilon$$

x n'est donc pas valeur d'accumulation de la suite double. En conclusion, tout intervalle ouvert n'incluant pas d'entiers pairs ne contiendra qu'un nombre fini d'éléments de la suite $(n^2 - \frac{m^2}{n^2})$.

4 - *Le problème non linéaire.*

Soit $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(t,x,u) \to f(t,x,u)$.

Une fonction mesurable en (t,x) pour chaque u dans H.

On a le théorème du problème non linéaire.

Théorème 3 :

Supposons qu'il existe deux réels $\lambda, \nu \in \Sigma$ *tels que :* $\lambda < \nu$ *et* $]\lambda,\nu[\subset R$, *et deux réels* a, b *avec :*

$$\lambda < a \leqslant b < \nu$$

tels que pour tout $(t,x) \in J$, $u, v \in H$, $u \neq v$

$$(9) \qquad a \leqslant \frac{f(t,x,u) - f(t,x,v)}{u - v} \leqslant b$$

alors l'équation (1) *possède une SPG unique.*

Preuve :

Soit $\mu \in]\lambda,\nu[$, il est clair que (1) est équivalente à

(10) $$u_{tt} + u_{xxxx} - \mu u_{xx} = f(t,x,u_{xx}) - \mu u_{xx} .$$

On définit F_μ sur H par :

$F_\mu u = f(t,x,u_{xx}) - \mu u_{xx}$ alors $F_\mu u \in H$.

On a alors si $u,v \in H$ en vertu de (9)

$$\begin{aligned}||F_\mu u - F_\mu v|| &\leqslant \mathrm{Max}(|a-\mu|,|b-\mu|)\,||u_{xx} - v_{xx}||_{\tilde{H}} \\ &= k_\mu ||u-v||_H .\end{aligned}$$

En outre, puisque $\mu \in R$, il résulte aussitôt de (10) et du corollaire (2) que la recherche des SPG de (1) dans $\tilde{H}$, équivaut à la résolution dans H de l'équation :

$$u_{xx} = S_\mu F_\mu u = G_\mu u_{xx}$$

où S_μ est l'opérateur défini par :

$$S_\mu f = \sum_{m,n} - n^2 Q_\mu^{-1}(m,n) f_{mn} \exp i(mt + nx).$$

Par conséquent :

$$||S_\mu|| = \{ \inf_{m,n \in N_\mu} n^{-2} |Q_\mu(m,n)| \}^{-1} = p_\mu^{-1} .$$

Ainsi pour tout $u, v \in H$

$$||G_\mu u - G_\mu v|| \leqslant k_\mu p^{-1} ||u - v||.$$

G_μ sera donc une contraction dans H si μ peut être choisi tel que $k_\mu p_\mu^{-1} < 1$; c'est-à-dire tel que :

$$\mathrm{Max}(|a-\mu|,|b-\mu|) < \inf_{m,n\in Z^2} n^{-2}|Q_\mu(m,n)| .$$

<u>Or</u> :

$$\inf_{m,n\in Z^2} n^{-2}|Q_\mu(m,n)| = \inf_{m,n\in Z^2} |n^2 - \frac{m^2}{n^2} - \mu| = \inf_{m,n\in Z^2} |P_\mu(m,n)|$$

où $P_\mu(m,n) = n^2 - \frac{m^2}{n^2} - \mu.$

On a :

$$\inf_{m,n\in Z^2} P_\mu(m,n) = \min\Big(\inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ P_\mu(m,n)>0}} P_\mu(m,n), \ - \sup_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ P_\mu(m,n)<0}} P_\mu(m,n)\Big)$$

et :

$$\inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ P_\mu(m,n)>0}} P_\mu(m,n) = \inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ n^2 - \frac{m^2}{n^2} > \mu}} (n^2 - \frac{m^2}{n^2} - \nu) + (\nu - \mu) =$$

$$\inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ n^2 - \frac{m^2}{n^2} \geqslant \mu}} (n^2 - \frac{m^2}{n^2} - \nu) + (\nu - \mu) .$$

Puisque, par hypothèse, il n'existe pas d'éléments de la forme $n^2 - \frac{m^2}{n^2}$ dans $]\lambda,\nu[$.

D'ailleurs,

$$\inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ n^2 - \frac{m^2}{n^2} \geqslant \nu}} \left(n^2 - \frac{m^2}{n^2} - \nu\right) = 0$$

En effet, si le membre de gauche était égal à $\delta > 0$, on aurait :

$$\inf_{m,n\in Z^2} |P_\mu(m,n)| \geqslant \min(\delta, \nu - \mu) > 0.$$

puisque par hypothèse,

$$\inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ n^2 - \frac{m^2}{n^2} < \nu}} \left|\left(n^2 - \frac{m^2}{n^2} - \nu\right)\right| = \inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ n^2 - \frac{m^2}{n^2} \leqslant \lambda}} \left|\left(n^2 - \frac{m^2}{n^2} - \nu\right)\right| \geqslant \nu - \lambda.$$

On aurait alors en vertu du théorème (2) et ce qui précède $\lambda \in R$, ce qui contredit les hypothèses.

Dès lors,

$$\inf_{\substack{m,n\in Z^2 \\ P_\mu(m,n)>0}} P_\mu(m,n) = \nu - \mu ,$$

et par un raisonnement analogue,

$$-\sup_{\substack{(m,n)\in Z^2 \\ P_\mu(m,n)<0}} P_\mu(m,n) = \mu - \lambda \quad ;$$

ce qui entraîne

$$\inf_{m,n\in Z^2} |P_\mu(m,n)| = \min(\nu - \mu, \mu - \lambda) .$$

Une discussion élémentaire montre que l'inégalité

$$\mathrm{Max}(|a - \mu|, |b - \mu|) < \min(\nu - \mu, \mu - \lambda)$$

est satisfaite si et seulement si on choisit μ dans $]\lambda,\mu[$ tel que

$$\frac{\lambda+b}{2} < \mu < \frac{\nu+a}{2}$$

ce qui est toujours possible.

Le théorème du point fixe de Banach appliqué à G_μ assure l'existence et l'unicité de u solution de $u_{xx} = G_\mu u_{xx}$ dans H et, par conséquent, l'existence de u dans $\tilde{H}$. L'unicité de u dans $\tilde{H}$ est assurée par les propriétés de l'espace $\tilde{H}$.

C) ETUDE DE L'ÉQUATION : $u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u,u_{xx})$.

0 - Introduction :

De la même manière que précédemment dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions périodiques de l'équation :

(1) $$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u,u_{xx}) .$$

Avec u une fonction périodique de période 2π en ces 2 variables. On se placera dans l'espace Hilbertien $H = L^2(J)$ où $J = I^2$; $I = [0,2\pi]$; $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(.,.,u,u_{xx}) \in H$ pour tout $u \in H$. Nous étudierons dans une première étape le problème linéaire.

1 - Le problème linéaire :

Remarque : On énoncera les résultats de ce paragraphe sans les démontrer (cf. paragraphes précédents).

Soit l'équation linéaire :

(2) $$u_{tt} + u_{xxxx} - \lambda u - \mu u_{xx} = f(t,x)$$

où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$; $f \in H$.

Proposition 1 :

Soient $u, f \in H$ *avec :*

$$u(t,x) = \sum_{m,n\in Z} u_{mn} \exp i(mt + nx) \quad ; \quad u_{-m,-n} = \bar{u}_{mn}$$

$$f(t,x) = \sum_{m,n\in Z} f_{mn} \exp i(mt + ux) \quad ; \quad f_{-m,-n} = \bar{f}_{mn} \quad .$$

Alors u *est une SPG de* (2) *si et seulement si*

(3) $$(n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda)u_{mn} = f_{mn} \qquad (m,n \in Z).$$

Posons :

$$Q_{\lambda,\mu}(m,n) = n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda \qquad (m,n) \in Z^2$$

et soit l'ensemble (éventuellement vide) $M_{\lambda,\mu}$ défini de la manière suivante :

$$M_{\lambda,\mu} = \{(m,n) \in Z^2 \ ; \ Q_{\lambda,\mu}(m,n) = 0\} \quad ,$$

et son complémentaire $N_{\lambda,\mu} = Z^2 \setminus M_{\lambda,\mu}$.

Une conséquence immédiate de la proposition (1) est le :

Corollaire 1 :

Une condition nécessaire pour que (2) *possède une SPG est que pour tout* $(m,n) \in M_{\lambda,\mu}$,

(4) $$f_{mn} = 0 \ .$$

Si la condition (4) est vérifiée, le système (3) est évidemment résoluble par rapport aux u_{mn} , mais ce n'est pas en général suffisant pour que (2) possède une SPG.

Théorème 1 :

L'équation (2) *possède une SPG si et seulement si* (4) *est* *vérifiée et s'il existe* $\rho > 0$ *tel que, pour tout* $(m,n) \in N_{\lambda,\mu}$

(5) $$|Q_{\lambda,\mu}(m,n)| \geq \rho$$

on désignera cette condition sous le nom de condition Ⓑ .

Introduisons le sous-espace vectoriel fermé de H :

$$H_{\lambda,\mu} = \{f \in H \ ; \ f_{mn} = 0 \ \text{ pour tout } \ (m,n) \in M_{\lambda,\mu}\}$$

et si $f \in H_{\lambda,\mu}$ désignons par $T_{\lambda,\mu}f$ la série de Fourier :

$$\sum_{(m,n)\in N_{\lambda,\mu}} Q^{-1}_{\lambda,\mu}(m,n) f_{mn} \exp i(mt + nx) \quad .$$

Alors manifestement $T_{\lambda,\mu}$ est une application linéaire de $H_{\lambda,\mu}$ dans l'espace des séries de Fourier.

On a le résultat suivant :

<u>*Théorème 2*</u> :

$T_{\lambda,\mu}$ *est un endomorphisme continu de* $H_{\lambda,\mu}$ *si et seulement si la condition* Ⓑ *est satisfaite.*

Dans ce cas :

$$|T_{\lambda,\mu}| = \{ \inf_{(m,n)\in N_{\lambda,\mu}} |Q_{\lambda,\mu}(m,n)| \}^{-1} = q^{-1}_{\lambda,\mu} \ .$$

<u>*Preuve*</u> :

La première partie du théorème résulte aisément du théorème 1 si on note que u donnée par $\sum_{m,n\in N_{\lambda,\mu}} Q^{-1}_{\lambda,\mu} f_{mn} \exp i(mt + nx)$ est égale à $T_{\lambda,\mu}f$. D'autre part, si $f \in H_{\lambda,\mu}$

$$|T_{\lambda,\mu}f|^2 = \sum_{(m,n)\in N_{\lambda,\mu}} Q^{-2}_{\lambda,\mu}(m,n)|f_{mn}|^2 \leqslant \{\sum_{m,n\in N_{\lambda,\mu}} |Q_{\lambda,\mu}(m,n)|\}^{-2}|f|^2$$

par définition de $q_{\lambda,\mu}$, il existe une suite $\{(m_j,n_j)\}$ avec $(m_j,n_j) \in N_{\lambda,\mu}$ $(j = 1,2,\ldots)$ telle que :

$$|Q_{\lambda,\mu}(m_j,n_j)| \to q_{\lambda,\mu} \qquad \text{si } j \to \infty .$$

Dès lors, si

$$\Psi_{m_j,n_j}(t,x) = (2\pi)^{-1} \exp i(mt + ux) \qquad (j = 1,2,\ldots)$$

il vient

$$|T_{\lambda,\mu}\Psi_{m_jn_j}| = |Q_{\lambda,\mu}(m_j,n_j)|^{-1}$$

et par conséquent :

$$q^{-1}_{\lambda,\mu} \geqslant |T_{\lambda,\mu}| \geqslant \sup_{j\in\mathbb{N}^*}|T_{\lambda,\mu}\Psi_{m_jn_j}| = \sup_{j\in\mathbb{N}^*}|Q_{\lambda,\mu}(m_j,n_j)|^{-1} = q^{-1}_{\lambda,\mu} .$$

Corollaire 2 :

Si $M_{\lambda,\mu} = \Phi$ *et si la condition* (B) *est satisfaite, alors l'équation* (2) *possède pour tout* $f \in H$, *une SPG unique* u *donnée par* :

(6) $$u = T_{\lambda,\mu}f.$$

Par les théorèmes 1, 2, l'équation (2) possède pour tout f une solution donnée par $T_{\lambda,\mu}f$ avec $N_{\lambda,\mu} = Z^2$, c'est-à-dire par (6) et l'unicité résulte aisément de la proposition 1.

2 - *Un problème de théorie des nombres.*

Désignons par R l'ensemble :

$$R = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ T_{\lambda,\mu} \text{ est un endomorphisme continu de } H\}.$$

Son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$, avec

par $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$, $\Sigma^2 = \Phi$.

$$\Sigma^1 = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ M_{\lambda,\mu} \neq \Phi\} .$$

Il résulte aisément du théorème 2 que

$$R = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (\lambda,\mu) \notin \Sigma^1 \text{ et la condition } (B) \text{ est satisfaite}\}.$$

Il aurait été souhaitable d'avoir une description aussi précise que possible de R. Pour cela, il aurait fallu :

a) Déterminer Σ^1, c'est-à-dire étudier la résolubilité en nombres entiers de l'équation :

$$Q_{\lambda,\mu}(m,n) = n^4 - \mu n^2 - m^2 - \lambda = 0.$$

b) Etant donné un couple $(\lambda,\mu) \notin \Sigma^1$, vérifier si la conditon (B) est satisfaite ; c'est-à-dire étudier la valeur minimum atteinte par $Q_{\lambda,\mu}$.

Il s'agit là de problèmes de théorie des nombres qui ne sont pas, à notre connaissance complétement résolus.

3 - *Le problème non linéaire* :

Soit $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x,u,v) \to f(t,x,u,v)$ une fonction mesurable en (t,x) pour chaque $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

On a les lemmes suivants :

Lemme 1 :

On a : $||T_{\lambda,\mu}|| \leqslant \frac{1}{q}$; $||S_{\lambda\ \mu}|| \leqslant \frac{1}{q}$ *où* $(\lambda,\mu) \in R$, *où* q *est la distance du point* (λ,μ) *à* Σ *et* $S_{\lambda,\mu}$ *est l'opérateur défini comme suit :*

$$S_{\lambda,\mu}f = \sum_{m,n} - n^2 Q^{-1}_{\lambda,\mu}(m,n) f_{mn} \exp i(mt + nx) \qquad f \in H.$$

Preuve :

En effet, soit $q_{m,n}$ la distance de (λ,μ) à la droite :

$n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda = 0.$

Alors

$$q_{m,n} = \frac{|n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda|}{\sqrt{n^4 + 1}} .$$

Par conséquent :

$$|n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda| \geqslant \sqrt{n^4 + 1}\ q_{m,n} \geqslant q_{m,n} \geqslant q.$$

et
$$q = \inf_{(m,n)\in Z^2} q_{m,n} \leqslant \inf_{(m,n)\in Z^2} |n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda|$$

donc

$$||T_{\lambda,\mu}|| \leqslant q^{-1} .$$

D'autre part, on a :

$$||S_{\lambda,\mu}|| = \{ \inf_{(m,n)\in Z^2} n^2 |Q_{\lambda,\mu}| \}^{-1}$$

or, on a également :

$$n^{-2}|n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda| \geq \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2} q_{m,n} \geq q_{m,n} \geq q$$

donc $\quad ||S_{\lambda,\mu}|| \leq q^{-1}.$

<u>*Lemme*</u> *2 :*

Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ *sont deux matrices à valeurs propres* $(0, a_1+a_2)$ *et* $(0, b_1+b_2)$ *respectivement. Alors, la matrice* AB *a pour valeurs propres*

$$(0,\ (a_1+a_2)(b_1+b_2)).$$

Le lemme 2 est immédiat.

<u>*Le théorème du problème non linéaire*</u>.

<u>*Théorème*</u> *3 :*

Soit $(\lambda,\mu) \in R$.

Supposons que pour tout $u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R}$, *il existe deux fonctions* α *et* β :

$\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (t,x,u,\bar{u},v) \to \alpha(t,x,u,\bar{u},v)$

$\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (t,x,u,v,\bar{v}) \to \beta(t,x,u,v,\bar{v})$

telles que :

$$\text{i)}\quad f(.,.,u,v) - f(.,.,\bar{u},v) = \alpha(.,.,u,\bar{u},v)(u-\bar{u})$$

$$f(.,.,u,v) - f(.,.,u,\bar{v}) = \beta(.,.,u,v,\bar{v})(v-\bar{v}) \quad ;$$

$$\text{ii)}\quad \sup_{R^5} \frac{||\alpha(.,.,u,\bar{u},v) - \lambda|| + ||\beta(.,.,u,v,\bar{v}) - \mu||}{q} \leqslant k < 1$$

Alors l'équation (1) *possède une SPG unique.*

<u>*Preuve*</u> :

Soit $(\lambda,\mu) \in R$, il est clair que l'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \lambda u - \mu u_{xx} = f(t,x,u,u_{xx}) - \lambda u - \mu u_{xx} .$$

Définissons $F_{\lambda,\mu}$ sur $H \times H$ par :

$$F_{\lambda,\mu}(u,v) = f(.,.,u,v) - \lambda u - \mu v.$$

Il est immédiat de voir que $F_{\lambda,\mu}$ applique $H \times H$ dans H et que si $u, \bar{u}, v, \bar{v} \in H$, on a en vertu de i)

$$||F_{\lambda,\mu}(u,v) - F_{\lambda,\mu}(\bar{u},\bar{v})|| \leqslant ||\alpha(.,.,u,\bar{u},v) - \lambda|| \; ||u-\bar{u}|| + ||\beta(.,.,u,v,\bar{v}) - \mu|| \; ||v-\bar{v}||.$$

En outre, puisque $(\lambda,\mu) \in R$, d'après le corollaire (2) la recherche des SPG de (1) équivaut à la résolution dans H du système d'équations :

$$\begin{cases} u = T_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u,v) \\ v = S_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u,v). \end{cases}$$

Unicité :

On a d'après ce qui précède :

$$||u-\bar{u}|| \leqslant ||T_{\lambda,\mu}|| \left[||\alpha-\lambda|| \; ||u-\bar{u}|| + ||\beta-\mu|| \; ||v-\bar{v}||\right]$$

$$||v-\bar{v}|| \leqslant ||S_{\lambda,\mu}|| \left[||\alpha-\lambda|| \; ||u-\bar{u}|| + ||\beta-\mu|| \; ||v-\bar{v}||\right]$$

et d'après le lemme 1,

$$\begin{cases} ||u-\bar{u}|| \leqslant q^{-1}\left[||\alpha-\lambda|| \; ||u-\bar{u}|| + ||\beta-\mu|| \; ||v-\bar{v}||\right] \\ ||v-\bar{v}|| \leqslant q^{-1}\left[||\alpha \; \lambda|| \; ||u-\bar{u}|| + ||\beta-\mu|| \; ||v-v||\right] \end{cases}$$

système qui s'écrit encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ||u-\bar{u}|| \\ ||v-\bar{v}|| \end{pmatrix} \leqslant \frac{1}{q} \begin{pmatrix} ||\alpha-\lambda|| & ||\beta-\mu|| \\ ||\alpha-\lambda|| & ||\beta-\mu|| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||u-\bar{u}|| \\ ||v-\bar{v}|| \end{pmatrix}$$

s'il existe donc une solution, d'après l'hypothèse ii) elle est unique ; puisque la deuxième valeur propre est strictement inférieure à 1 (la première étant nulle).

Existence :

Nous allons procéder par approximations successives.

En effet, soient u_o, $v_o \in H$.

Posons :

$$u_1 = T_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_o,v_o) \qquad v_1 = S_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_o,v_o)$$

$$u_2 = T_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_1,v_1) \qquad v_2 = S_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_1,v_1)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$u_{n+1} = T_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_n,v_n) \qquad v_{n+1} = S_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_n,v_n) \quad .$$

On a :

$$u_2-u_1 = T_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_1,v_1) - T_{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(u_o,v_o)$$

$$||u_2-u_1|| \leqslant \frac{1}{q}\Big[||\alpha(.,.,u_1,u_o,v_o)-\lambda||\ ||u_1-u_o||+\beta(.,.,u_1,v_o,v_1)-\mu||\ ||v_1-v_o||\Big].$$

de la même manière :

$$\begin{pmatrix} ||u_3-u_2|| \\ ||v_3-v_2|| \end{pmatrix} \leqslant \frac{1}{q} \begin{pmatrix} ||\alpha_2-\lambda|| & ||\beta_2-\mu|| \\ ||\alpha_2-\lambda|| & ||\beta_2-\mu|| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||u_2-u_1|| \\ ||v_2-v_1|| \end{pmatrix}$$

$$\leqslant \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} ||\alpha_2-\lambda|| & ||\beta_2-\mu|| \\ ||\alpha_2-\lambda|| & ||\beta_2-\mu|| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ||\alpha_1-\lambda|| & ||\beta_1-\mu|| \\ ||\alpha_1-\lambda|| & ||\beta_1-\mu|| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ||u_1-u_o|| \\ ||v_1-v_1|| \end{pmatrix}$$

et plus généralement :

$$\begin{pmatrix} ||u_{n+1}-u_n|| \\ ||v_{n+1}-v_n|| \end{pmatrix} \leqslant \frac{1}{q^n} \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} ||\alpha_i-\lambda|| & ||\beta_i-\mu|| \\ ||\alpha_i-\lambda|| & ||\beta_i-\mu|| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||u_1-u_o|| \\ ||v_1-v_o|| \end{pmatrix}$$

où $\alpha_i = \alpha(.,.,u_i,u_{i-1},v_{i-1})$, $\beta_i = \beta(.,.,u_{i-1},v_{i-1},v_i)$.

D'après le lemme 2, la matrice :

$$\prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} ||\alpha_i-\lambda|| & ||\beta_i-\mu|| \\ ||\alpha_i-\lambda|| & ||\beta_i-\mu|| \end{pmatrix}$$

admet pour valeurs propres 0 et $\prod_{i=1}^{n} (||\alpha_i-\lambda|| + ||\beta_i-\mu||)$ inférieure à $k^n q^n$ (d'après (ii)).

Ainsi donc :

$$||u_{n+1}-u_n|| \leqslant 2k^n(||u_1-u_o|| + ||v_1-v_o||)$$

$$||v_{n+1}-v_n|| \leqslant 2k^n(||u_1-u_o|| + ||v_1-v_o||) .$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc convergentes.

Il existe donc une solution périodique généralisée unique de l'équation (1).

Exemple d'application - *Cas particulier*.

On se propose d'examiner la possibilité de déterminer $(\lambda,\mu) \in R$, de telle manière que la condition (ii) du théorème du problème non linéaire puisse être satisfaite.

Pour cela, examinons le cas particulier où α et β sont "petits" en sachant que les normes de $S_{\lambda,\mu}$ et $T_{\lambda,\mu}$ sont majorées par la distance de (λ,μ) à Σ.

On commence par rechercher les régions du plan voisines de l'origine dans lesquelles les droites $n^4 - m^2 - \mu n^2 - \lambda = 0$ ne pénètrent pas.

De plus, pour n fixé, on obtient une famille de droites parallèles, on ne retiendra donc que celles qui sont les plus proches de l'origine.

Cette première étude montre que si n prend toutes les valeurs, les droites $\lambda = -\mu n^2$ passent par l'origine, mais restent incluses dans l'angle formé par l'axe des λ et la seconde bissectrice.

Pour une valeur donnée de n, on doit prendre les valeurs de m telle que :

$$m_1 = \sup_m(\{n^4-m^2\} \quad ; \quad n^4-m^2 < 0)$$

$$m_2 = \sup_m(\{n^4-m^2\} \quad , \quad n^4-m^2 > 0) \; .$$

Alors, on a : $\quad m_1 = n^2+1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad m_2 = n^2-1$

auquel cas les droites voisines de l'origine sont :

(1) $\quad \lambda = n^4 - (n^2+1)^2 - \mu n^2$

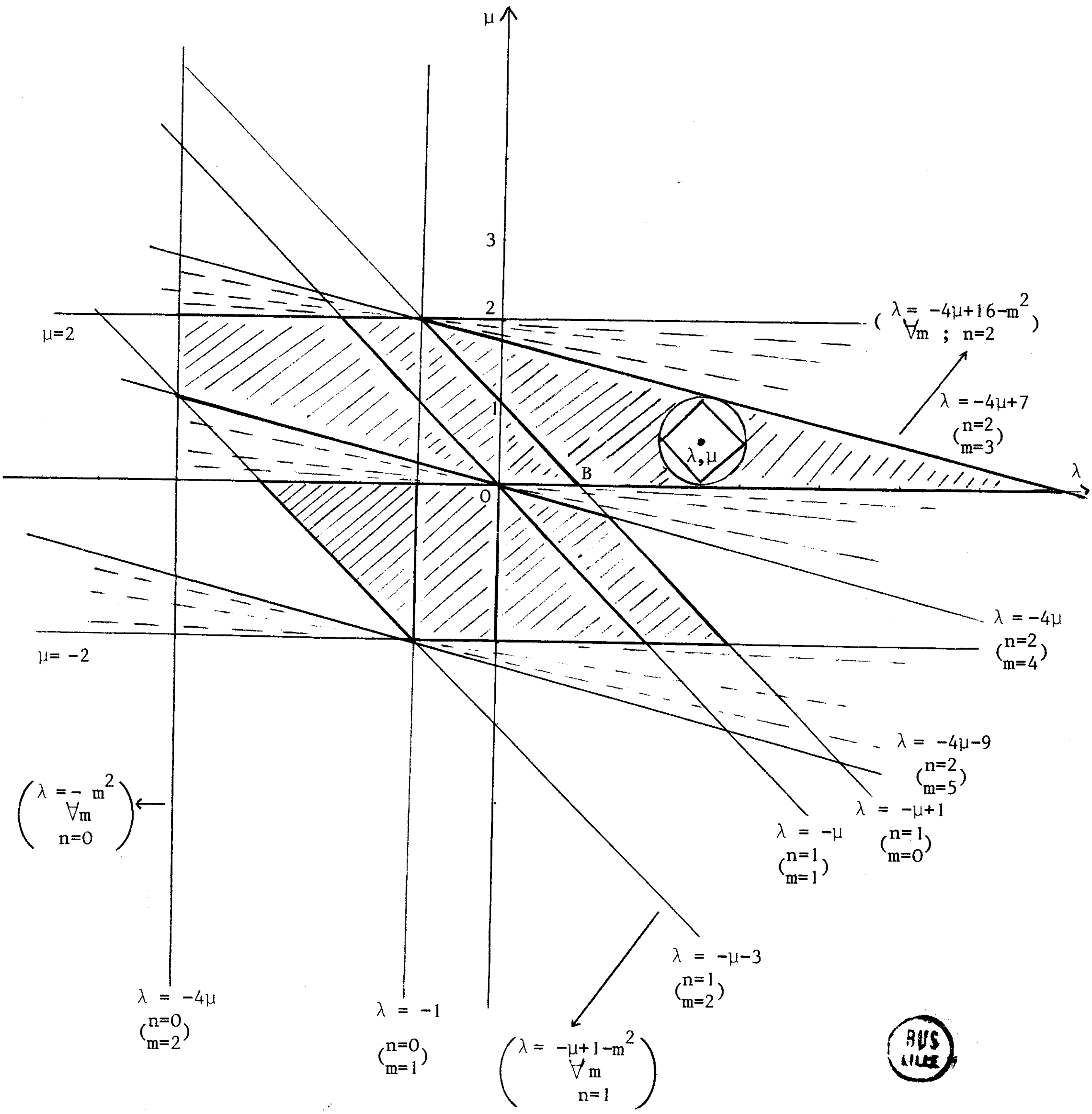
(2) $\quad \lambda = n^4 - (n^2-1) \quad - \mu n^2$.

Ce qui nous amène à ne considérer que les parties hachurées.

Dans cette partie restante formée par deux parallélogrammes, à part les droites parallèles à l'axe des μ, on est sûr de la non existence du passage des droites de la famille (m,n).

Ainsi, la condition à remplir se traduit par le fait que l'on doit trouver un carré à diagonales parallèles aux axes tel que son cercle circonscrit soit entièrement contenu dans l'une ou l'autre des parties considérées.

Si (α,β) varient dans un domaine δ, et s'il est possible d'inclure δ dans un carré dont le cercle circonscrit est entièrement contenu dans l'union des parties considérées, alors on choisira pour (λ,μ) le centre de ce cercle afin de satisfaire la condition du théorème.


μ
λ
3
2
1
0
B
λ,μ
μ=2
μ= -2
(λ = -4μ+16-m², ∀m ; n=2)
λ = -4μ+7 (n=2, m=3)
λ = -4μ (n=2, m=4)
λ = -4μ-9 (n=2, m=5)
λ = -μ+1 (n=1, m=0)
λ = -μ (n=1, m=1)
λ = -μ-3 (n=1, m=2)
(λ = - m², ∀m, n=0)
λ = -4μ (n=0, m=2)
λ = -1 (n=0, m=1)
(λ = -μ+1-m², ∀m, n=1)

B I B L I O G R A P H I E

[1] A. BAHRI - H. BREZIS - Periodic solutions of a nonlinear wave equations, Proceeding of the royal society of Edimbourg, 85 A, 313-320, 1980.

[2] A. BAHRI - L. SANCHEZ - Periodic solution of a non linear telegraph equation in one dimension 1/80, CNAF.

[3] H. BREZIS - L. NIREMBERG - Characterizations of the Ranges of some non linear operators and applications to boundary value problems, Ann. Sc. Norm. Sup. PISA 5 (1978), p. 225-326.

[4] L. CESARI - R. KANNAN - Existence of solutions of non linear hyperbolic equations,

[5] L. CESARI - R. KANNAN - An abstract existence theorem at resonnance, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 63, Number 2, April 1977.

[6] S. FUCIK - J. MAWHIN - Generalized Periodic Solutions of non linear telegraph equations. Non linear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 2, N° 5, pp. 609-617.

[7] J.K. HALE - Periodic solutions of a class of Hyperbolic equations containing a small parameter, Arch. Rat. Mech. Anal. 23 (1967), pp. 380-398.

[8] W.S. HALL - Periodic solutions of a class of weakly non linear evolutions equations, Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 39, 4, pp. 294-322.

[9] J. MAWHIN - Solutions périodiques d'équations aux dérivées partielles. Hyperboliques non linéaires. Rapport n° 84, février 1976. Séminaires de Mathématiques pures et appliquées. Université catholique de Louvain.

[10] J. MAWHIN - Periodic solutions of non linear telegraph equations, Rapport n° 92, juin 1976.

[11] H. PETZELTOVA - Periodic solutions of the equations $u_{tt} + u_{xxxx} = \varepsilon f(.,.,\ ,u_t)$, Czechoslovak Mathematical journal 23 (98) 1973, PRAHA.

RÉSUMÉ

L'objet de ce travail est la recherche des solutions périodiques en t et x de l'équation $u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x,u,u_{xx})$.

Après un aperçu des différentes méthodes utilisées pour ce type d'équation nous nous inspirons de l'étude de J. MAWHIN concernant l'équation $u_{tt} - u_{xx} = f(t,x,u)$. Le premier chapitre est relatif au cas où f ne dépend que de l'une ou l'autre des variables u, u_{xx}. Le second chapitre est consacré au cas général. Une discussion finale précise les conditions nécessaires d'existence des solutions pour f presque linéaire en u et u_{xx}.

MOTS CLÉS :

PERIODIQUE, SOLUTION.

NON LINEAIRE, EQUATION.