

N° d'ordre : 600

50 376

1 983

159

50376

1983

159

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES**

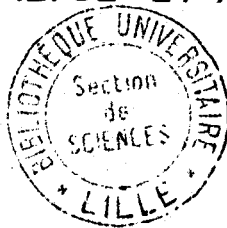
par

**Geneviève DAUPHIN TANGUY**

Ingénieur I.D.N.  
Docteur - Ingénieur

## **SUR LA REPRÉSENTATION MULTI-MODÈLE DES SYSTÈMES SINGULIÈREMENT PERTURBÉS**

*APPLICATION A L'ANALYSE ET A LA SYNTHÈSE.*



Soutenue le 27 octobre 1983 devant le Jury d'Examen

<b>MM</b>	<b>J.C. GENTINA</b>	Président
	<b>P. BORNE</b>	Rapporteur
	<b>Lj.T. GRUJIĆ</b>	Rapporteur
	<b>S.G. TZAFESTAS</b>	Rapporteur
	<b>J.J. VAN DIXHOORN</b>	Rapporteur
	<b>A. FOSSARD</b>	Examineur
	<b>F. LHOTE</b>	Examineur
	<b>P. VIDAL</b>	Examineur
	<b>P. BERTRAND</b>	Invité

*A mon père*

AVANT-PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I et au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Institut Industriel du Nord, sous la Direction de Monsieur le Professeur P. BORNE.

Nous tenons tout d'abord à rendre à Monsieur le Professeur LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique, un hommage posthume et à exprimer notre peine pour sa disparition précoce. Il avait su nous encourager, et les échanges, tant du point de vue enseignement que recherche, avaient toujours été fructueux. Nous garderons de lui le souvenir d'un esprit très brillant et d'une personnalité attachante qui avait noué des liens d'amitié profonde avec les membres de son Laboratoire.

Monsieur le Professeur GENTINA a suivi avec bienveillance et intérêt notre travail. Nous sommes très honorée qu'il ait accepté de présider notre Jury et nous l'en remercions.

C'est avec empressement que nous voulons remercier Monsieur le Professeur BORNE pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser et pour l'accueil qu'il nous a réservé au sein de son équipe de recherche. Malgré ses lourdes charges, il a toujours accordé à la recherche une place privilégiée, et le dévouement qu'il a montré en s'intéressant à nos travaux nous a beaucoup encouragés. Une même approche des problèmes soulevés dans ce mémoire, des discussions très fructueuses et un soutien moral constant ont largement contribué à la réalisation de ce travail.

Malgré l'éloignement géographique, Monsieur le Professeur GRUJIC a suivi régulièrement et avec intérêt l'évolution de nos travaux. Son jugement très compétent et ses conseils avisés nous ont beaucoup aidés. Qu'il reçoive ici nos très vifs et très sincères remerciements.

Monsieur le Professeur TZAFESTAS nous fait un grand honneur en acceptant de juger notre travail et de participer au Jury de Thèse. Nous lui exprimons toute notre reconnaissance.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur VAN DIXHOORN pour l'intérêt qu'il a montré pour nos travaux. Sa haute compétence dans le domaine des Bond-Graphs nous a encouragée à faire évoluer notre travail dans cette voie. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude pour la bienveillance et la gentillesse qu'il nous a toujours témoignées.

Monsieur le Professeur FOSSARD nous a apporté, par des remarques judicieuses fondées sur sa connaissance très étendue du sujet étudié, une aide précieuse pour la mise au point définitive de ce mémoire. Nous sommes très honorée de sa présence dans ce Jury et nous l'en remercions.

Monsieur le Professeur LHOÏE nous a permis d'établir des contacts intéressants pour des applications pratiques de nos résultats. Qu'il soit remercié de l'intérêt qu'il montre pour nos travaux en participant au Jury de Thèse.

Nous adressons à Monsieur le Professeur VIDAL l'expression de notre gratitude pour l'entente et la coopération qui ont toujours régné au sein de l'équipe d'enseignement. Sa participation à ce Jury de Thèse montre l'intérêt qu'il porte à nos travaux et nous l'en remercions vivement.

Nous sommes très honorée que Monsieur BERTRAND, Maître de Recherches au C.N.R.S., ait accepté de participer à ce Jury. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude.

Nous tenons enfin à remercier tous les membres du Laboratoire de Systématique pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée, tant du point de vue scientifique que sur le plan des contacts amicaux.

Que Madame TRICOT, Madame FERRAR et Monsieur SOYEZ, sans qui la réalisation matérielle de ce mémoire n'aurait pu être faite, soient aussi remerciés pour leur compétence et leur gentillesse.

SOMMAIRE

## INTRODUCTION GENERALE

### CHAPITRE I : MODELISATION ET SIMPLIFICATION DES MODELES

	page
<u>INTRODUCTION</u> .....	1
<u>I - QUELQUES DEFINITIONS TRES GENERALES</u> .....	2
I.1 - <u>Structure des systèmes continus</u> .....	2
I.2 - <u>Stabilité d'un système dynamique</u> .....	3
<u>II - PRESENTATION DES DIFFERENTS MODELES</u> .....	5
II.1 - <u>Cas linéaire stationnaire</u> .....	6
II.2 - <u>Cas linéaire non stationnaire</u> .....	8
II.3 - <u>Cas non linéaire</u> .....	12
II.3.1 - <u>Systèmes de type Lur'e Postnikov</u> .....	12
II.3.2 - <u>Systèmes non linéaires en général</u> .....	14
<u>III - MODELISATION PAR GRAPHES A LIENS (ou BOND-GRAPHS)</u> .....	16
<u>IV - METHODES DE SIMPLIFICATION DES MODELES</u> .....	27
IV.1 - <u>Classification</u> .....	27
IV.2 - <u>Méthodes du modèle</u> .....	28
IV.3 - <u>Approximations de type "Padé"</u> .....	29

IV.4 - <u>Méthodes d'agrégation</u> .....	31
IV.4.1 - Agrégation linéaire .....	31
IV.4.2 - Agrégation par troncature .....	33
IV.4.3 - Simplification à partir du modèle bond-graph .	35
IV.5 - <u>Méthodes de perturbations</u> .....	36
IV.5.1 - Perturbations régulières .....	36
IV.5.2 - Perturbations singulières .....	37
V - <u>QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX CONCERNANT LES SYSTEMES</u>	
<u>A PLUSIEURS ECHELLES DE TEMPS</u> .....	39
V.1 - <u>Cas général : Systèmes non linéaires</u> .....	39
V.2 - <u>Développement asymptotique</u> .....	42
V.3 - <u>Présentation dans le cas linéaire de la méthode</u>	
<u>des perturbations singulières</u> .....	43
V.3.1 - Etude de la partie lente .....	44
V.3.2 - Etude de la partie rapide .....	44
V.4 - <u>Quelques exemples de systèmes à plusieurs dynamiques</u> .	45
<u>CONCLUSION</u> .....	49

## CHAPITRE II : ETUDE DES SYSTEMES A DEUX DYNAMIQUES

<u>INTRODUCTION</u> .....	53
I - <u>PRESENTATION DES METHODES ANALYTIQUES DE MISE EN EVIDENCE</u>	
<u>DES DYNAMIQUES</u> .....	55
I.1 - <u>Définitions d'un système à double échelle des temps</u> ..	55



I.2 - <u>Mise sous forme bloc-diagonale</u> .....	56
I.3 - <u>Méthodes de détermination des matrices L et M</u> .....	59
I.3.1 - Calcul des suites $L_k$ et $M_k$ .....	59
I.3.2 - Utilisation des valeurs propres et vecteurs propres .....	61
I.3.3 - Cas des systèmes singulièrement perturbés .....	66
I.3.4 - Cas d'une séparation dynamique peu marquée .....	68
 II - <u>METHODE GEOMETRIQUE DE MISE EN EVIDENCE DES DYNAMIQUES</u> .....	70
II.1 - <u>Systèmes linéaires</u> .....	72
II.1.1 - Matrice bien conditionnée .....	72
II.1.2 - Matrice mal conditionnée .....	75
II.1.2.1 - Détermination approchée des racines d'un polynôme .....	76
II.1.2.2 - Mise sous forme en flèche de la matrice caractéristique .....	79
II.2 - <u>Systèmes non linéaires</u> .....	81
II.2.1 - Matrice bien conditionnée .....	81
II.2.2 - Matrice mal conditionnée pour un système de type Lur'e Postnikov .....	82
II.2.3 - Systèmes fortement non linéaires avec matrice Compagnon .....	85
II.3 - <u>Interprétation des résultats</u> .....	87
 III - <u>MODELISATION ET DECOUPLAGE TEMPOREL DES SYSTEMES DE       TYPE LUR'E POSTNIKOV</u> .....	88
III.1 - <u>Mode de représentation utilisé</u> .....	89
III.2 - <u>Découplage Partie lente / Partie rapide</u> .....	92
III.2.1 - Etude de la partie rapide .....	93
III.2.2 - Etude de la partie lente .....	93

IV -	<u>ETUDE DU REGIME TRANSITOIRE RAPIDE</u>	100
IV.1 -	<u>Définitions et propriétés du système réciproque</u>	101
IV.1.1 -	Définitions	102
IV.1.2 -	Propriétés	108
IV.2 -	<u>Application du système réciproque à l'étude des composantes rapides</u>	111
IV.2.1 -	Première forme matricielle	114
IV.2.2 -	Deuxième forme matricielle	115
IV.2.3 -	Interprétation des résultats	117
IV.3 -	<u>Application à un système non linéaire de type Lur'e Postnikov</u>	118
V -	<u>MISE EN EVIDENCE DES PROPRIETES PARTICULIERES DES MATRICES EN FLECHE POUR L'ANALYSE DES PROCESSUS. APPLICATION AUX SYSTEMES A DEUX DYNAMIQUES</u>	120
V.1 -	<u>Condition de stabilité d'un système non linéaire de type Lur'e Postnikov</u>	122
V.2 -	<u>Condition suffisante de stabilité d'un système non linéaire de type Lur'e Postnikov</u>	125
V.3 -	<u>Etude de la robustesse de la stabilité par rapport à <math>\mu</math></u>	129
VI -	<u>DETERMINATION DE LA COMMANDE QUASI-OPTIMALE DES SYSTEMES SINGULIEREMENT PERTURBES EN FLECHE</u>	130
	<u>CONCLUSION</u>	135

CHAPITRE III : MISE EN ŒUVRE PRATIQUE DE LA TRANSFORMATION RECIPROQUE  
POUR LA REDUCTION ET LA COMMANDE OPTIMALE DES SYSTEMES A DEUX ECHELLES  
DE TEMPS

	page
<u>INTRODUCTION</u> .....	139
<u>I - REPRESENTATION ET REDUCTION DES SYSTEMES A DEUX ECHELLES DE TEMPS A PARTIR D'UN MODELE BOND-GRAPH</u> .....	140
I.1 - <u>Mise en évidence des dynamiques</u> .....	140
I.2 - <u>Séparation des dynamiques</u> .....	140
I.2.1 - Etude de la partie rapide simplifiée .....	140
I.2.2 - Etude de la partie lente .....	141
I.3 - <u>Interprétation</u> .....	141
<u>II - COMPARAISON SUR UN EXEMPLE MECANIQUE DE LA REDUCTION PAR LA METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES ET LA SIMPLIFICATION DU MODELE BOND-GRAPH</u> .....	142
II.1 - <u>Présentation des différents modes de représentation</u> .	142
II.1.1 - Equations différentielles .....	143
II.1.2 - Matrice de transfert .....	143
II.1.3 - Equation d'état obtenue à partir du modèle bond-graph .....	144
II.2 - <u>Modélisation sous forme singulièrement perturbée</u> ....	148
II.3 - <u>Séparation des dynamiques</u> .....	149
II.3.1 - Etude de la partie rapide .....	149
II.3.1.1 - Simplification sur le modèle Bond-Graph	150
II.3.1.2 - Méthode des perturbations singulières .	151

II.3.2 - Etude de la partie lente .....	153
II.3.2.1 - Simplification du modèle bond-graph ...	153
II.3.2.2 - Méthode des perturbations singulières .	154
II.4 - <u>Interprétation des résultats</u> .....	155
III - <u>MISE EN ŒUVRE PRATIQUE DE LA TRANSFORMATION RECIPROQUE</u> <u>POUR L'ETUDE DU COMPORTEMENT HAUTE FREQUENCE D'UN</u> <u>SYSTEME MECANIQUE</u> .....	156
III.1 - <u>Détermination du système réciproque</u> .....	156
III.2 - <u>Recherche du système rapide réduit</u> .....	159
III.3 - <u>Quelques remarques fondamentales</u> .....	160
IV - <u>RESOLUTION DES PROBLEMES SINGULIERS EN COMMANDE OPTIMALE</u> <u>PAR LES SYSTEMES RECIPROQUES</u> .....	162
IV.1 - <u>Commande de la partie lente découplée</u> .....	162
IV.2 - <u>Commande de la partie rapide découplée</u> .....	164
V - <u>INTERET DE LA TRANSFORMATION RECIPROQUE POUR L'OPTIMISATION</u> <u>DE TRAJECTOIRES</u> .....	166
V.1 - <u>Détermination de la trajectoire optimale</u> .....	167
V.2 - <u>Commande quasi-optimale par décomposition temporelle</u> .	168
V.3 - <u>Utilisation des systèmes réciproques</u> .....	169
V.4 - <u>Mise en oeuvre sur un exemple</u> .....	171
V.5 - <u>Interprétation des résultats</u> .....	173
<u>CONCLUSION</u> .....	175

CHAPITRE IV : EXTENSION AUX SYSTEMES MULTIVARIABLES MULTIVITESSES.  
CAS DES SYSTEMES INTERCONNECTES

	page
<u>INTRODUCTION</u> .....	179
<u>I - MODELISATION DE SYSTEMES POSSEDANT PLUSIEURS DYNAMIQUES</u> .....	180
I.1 - <u>Cas où les dynamiques sont proches</u> .....	181
I.2 - <u>Cas où les dynamiques sont bien séparées</u> .....	183
I.3 - <u>Présentation d'un mode de représentation permettant de           prendre en compte les deux cas</u> .....	184
<u>II - PRESENTATION DE DEUX METHODES DE DECOUPLAGE DES DYNAMIQUES</u> ..	187
II.1 - <u>Dégénérescence progressive</u> .....	187
II.2 - <u>Séparation en une étape partie lente/partie rapide</u> ..	191
<u>III - ETUDE PRECISE PAR LA METHODE PS + R DES COMPORTEMENTS RAPIDES           DES SYSTEMES MULTI-ECHELLE DE TEMPS</u> .....	194
III.1 - <u>Dégénérescence progressive</u> .....	194
III.2 - <u>Séparation directe partie lente/partie rapide</u> .....	196
<u>IV - INTERPRETATION FREQUENTIELLE DE LA SEPARATION DES DYNAMIQUES</u>	197
IV.1 - <u>Troncature du diagramme de Bode</u> .....	199

IV.2 - <u>Méthode des perturbations singulières</u> .....	200
IV.3 - <u>Cas de système non linéaire de type Lur'e Postnikov</u> .	201
V - <u>ETUDE DES SYSTEMES INTERCONNECTES DE TYPE LUR'E POSTNIKOV</u> ...	204
V.1 - <u>Détermination de l'opérateur symbolique de transfert matriciel</u> .....	204
V.2 - <u>Représentation d'état associée</u> .....	206
V.3 - <u>Etude des systèmes à plusieurs échelles de temps</u> .....	209
V.3.1 - Chaque sous-système a un comportement dynamique différent .....	209
V.3.1.1 - Etude de la partie lente .....	209
V.3.1.2 - Etude du sous-système rapide par la méthode (PS + R) .....	218
V.3.2 - Chaque sous-système comporte des dynamiques différentes .....	220
V.4 - <u>Généralisation à N systèmes interconnectés</u> .....	221
<u>CONCLUSION</u> .....	223

CONCLUSION GENERALE

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à l'étude des systèmes continus multi-échelles de temps. Elle concerne deux domaines très importants : la modélisation et la réduction de dimensionnalité par découplage des dynamiques en vue de l'analyse et de la synthèse des processus.

Les systèmes physiques concernés sont nombreux et variés. Nous pouvons citer à titre d'exemples les robots composés de parties mécaniques - hydro-pneumatiques lentes et de parties électroniques - informatiques rapides, les processus lents avec actionneurs et capteurs rapides, les systèmes commandés à travers un grand gain.

Dans tous les cas se pose le problème de choix d'un modèle, lié au but poursuivi (analyse, synthèse, commande optimale). Lorsque le type de représentation retenu conduit à un modèle de grande dimension, ou lorsque les valeurs numériques mises en jeu interviennent avec des ordres de grandeur très différents, il s'avère souvent nécessaire de réduire l'ordre du système, pour simplifier et réduire les calculs (commande en temps réel par exemple), ou pour supprimer des imprécisions et des divergences d'algorithmes.

La méthode des perturbations singulières (P.S.) fournit une solution à ces problèmes. Lorsque les variables d'évolutions différentes sont identifiées et regroupées, la technique P.S. permet le découplage des dynamiques et la détermination d'un système réduit correspondant au domaine dynamique ou fréquentiel concerné, avec cependant des problèmes d'imprécisions pour l'étude des composantes rapides.

Les résultats nouveaux présentés dans ce mémoire peuvent se regrouper en plusieurs grands thèmes :

- présentation d'une méthode géométrique simple et rapide de détermination des dynamiques du système étudié,



- mise en œuvre sur une forme matricielle particulière (forme en flèche) de la méthode PS dans le cas de système non linéaire de type Lur'e Postnikov,

- définition de conditions particulières de stabilité des systèmes multivités,

- généralisation au cas non linéaire de symbolismes associés au linéaire,

- définition de la notion de système réciproque et développement de la méthode (PS + Réciproque),

- comparaison des résultats obtenus par simplification directe d'un modèle Bond-graph et par la méthode PS.

Des exemples d'application permettent une mise en œuvre pratique de ces travaux. Ils montrent l'intérêt très net de ces résultats, en particulier lors de la simulation du comportement rapide d'un système mécanique, et pour les calculs de commande optimale et la détermination de trajectoires optimales.

Dans une première partie, un exposé récapitulatif des différents modes de représentation des systèmes continus (équations différentielles, équations d'état, graphes à liens) ainsi que de diverses formes matricielles d'état (compagnon, forme en flèche) permet d'introduire les notations utilisées dans le mémoire. Dans un but de simplicité de présentation, seul le cas monovarié est pris en compte, les systèmes multivariés étant plus particulièrement étudiés dans le Chapitre IV. Diverses méthodes de simplification (approximants de Padé, agrégation, méthode des perturbations) sont ensuite rappelées, avec leurs domaines d'application, leurs avantages et inconvénients.

Le Chapitre II développe tout d'abord une méthode géométrique, basée sur le tracé des cercles de Gershgorine, de détermination des modes dy-

namiques, s'appliquant aux cas non linéaires contrairement aux méthodes analytiques classiques. La forme en flèche se révèle très intéressante pour la séparation des dynamiques et la mise en œuvre de la méthode PS pour les systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov et conduit à une détermination simplifiée du système découplé et à une condition suffisante (et nécessaire dans certains cas) de stabilité asymptotique.

La notion de transformation réciproque, qui entraîne une inversion du comportement dynamique et fréquentiel du système étudié est développée pour les différents types de représentation précédemment décrits. Appliquée conjointement à la technique PS, cette méthode permet d'obtenir une partie découplée qui tient compte de l'évolution de la partie lente, contrairement à la méthode PS seule. Une représentation multi-modèle est alors possible, sans modification des conditions initiales.

La mise en œuvre pratique de ces résultats nouveaux, pour la réduction et la commande optimale des systèmes à deux échelles de temps est développée dans la troisième partie du mémoire.

Le cas multivariable multivitesse est ensuite étudié dans le Chapitre IV. Une nouvelle représentation des systèmes à plusieurs dynamiques est proposée. Elle généralise les types de représentations classiques et permet une plus grande souplesse pour la détermination des sous-systèmes découplés. Les résultats précédemment décrits dans le cas monovisible sont développés pour des systèmes multivariables et interconnectés, ce qui conduit à la mise en évidence d'invariants caractéristiques du processus.

CHAPITRE I

MODELISATION ET SIMPLIFICATION DES MODELES

INTRODUCTION

La description des systèmes complexes ou de grande dimension comprend trois grands types de problèmes, la modélisation, la simulation et l'identification.

Parmi ces trois thèmes, la modélisation est un domaine de recherche important ayant déjà conduit à de nombreuses publications.

Après la détermination préliminaire d'un modèle physique, souvent schématique et simplificateur, la mise en équations, par application de lois physiques, mène à différents modèles mathématiques caractérisant le même système. Les représentations les plus courantes sont ici présentées, comme fonctions (ou matrices) de transfert, et différentes formes canoniques d'équations d'état. Pour prendre en compte les échanges d'énergie à l'intérieur d'un même procédé et mettre en évidence le phénomène de conservation de puissance, nous introduisons les graphes à liens (ou bond-graphs), qui conduisent à une représentation par variables d'état généralisées, et permettent des analogies entre grandeurs de types différents.

Ces modèles mathématiques sont choisis en fonction du but poursuivi. Ils peuvent être dans certains cas simplifiés, en vertu du compromis précision-rapidité d'exploitation. Nous présentons un bref rappel des méthodes de réduction les plus couramment utilisées, avec leurs domaines d'application, leurs avantages et inconvénients. Parmi ces différentes approches, la méthode des perturbations singulières, concernant les systèmes multi-échelle de temps, est plus longuement détaillée, et quelques exemples d'application sont exposés.

## I - QUELQUES DEFINITIONS TRES GENERALES

### I.1 - Structure des systèmes continus

La notion de système physique est généralement associée à la définition de deux ensembles de variables :

- \* les variables de sortie supposées accessibles à la mesure,
- \* les variables d'entrée (et de commande) permettant d'agir sur le processus.

A ces deux ensembles, il convient d'adjoindre la notion d'état qui caractérise l'ensemble des informations dont il suffit de disposer à l'instant  $t_0$  pour prédire, à partir d'un modèle connu, le comportement du processus sur l'intervalle de définition  $[t_0, +\infty[$ .

Nous noterons  $x$ , le vecteur état de dimension  $n$ , défini sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x_0$  représente l'état initial du processus à l'instant  $t_0$ , la relation de dépendance entre le vecteur état, les commandes et l'état initial  $x_0$  se définit à tout instant de l'intervalle d'observation  $]t_0, t_1]$  sous la forme de la fonction de transition

$$(I.1) \quad x(t) = x(x_0 ; u [t_0, t] ; t_0, t)$$

où  $u [t_0, t]$  est le vecteur définissant l'évolution des commandes sur l'intervalle  $[t_0, t]$ .

Le vecteur  $x(t)$  contient le minimum d'informations nécessaires, dont le nombre définit l'ordre du processus.

De façon analogue, les variables de sortie  $y(t)$  sont définies par la relation suivante :

$$(I.2) \quad y(t) = y(x_0 ; u [t_0, t] ; t_0, t)$$

## I.2 - Stabilité d'un système dynamique

Nous noterons de façon simplifiée :

$$x(t) = x(t, x_0, t_0)$$

Les définitions de la stabilité sont nombreuses. Nous rappelons ici celles qui seront utilisées par la suite.

### Définition 1

Soient  $x(t, x_0, t_0)$  et  $x(t, x_1, t_0)$  deux mouvements d'un même processus évoluant à partir de conditions initiales distinctes  $x_0(t_0)$ ,  $x_1(t_0)$ . La distance entre les trajectoires est obtenue par :

$$(I.3) \quad d(t; t_0, x_0, x_1) = \|x(t; x_0, t_0) - x(t; x_1, t_0)\|$$

avec  $\|x\|^2 = x^T x$  norme euclidienne de  $x$

### Définition 2

Le mouvement est stable ssi il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , et quel que soit  $t_0$  appartenant à  $\mathcal{R}$ , un nombre  $\delta(t_0, \varepsilon)$  tel que :

$$(I.4) \quad \|x_0 - x_1\| < \delta(t_0, \varepsilon) \text{ implique } d(t; t_0, x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$\forall t \in [t_0, +\infty[$$

### Définition 3

Le mouvement est attractif si, pour tout nombre  $\eta > 0$ , et quel que soit  $t_0$  appartenant à  $\mathcal{R}$ , il existe un nombre  $T(\eta, t_0)$  tel que :

$$(I.5) \quad d(t, t_0, x_0, x_1) < \eta \quad \forall t \in ]t_0 + T, +\infty[$$

Définition 4

Si le mouvement est à la fois attractif et stable, il est dit asymptotiquement stable.

Définition 5

L'ensemble  $\mathcal{D}_a(t_0)$  est le domaine d'attraction à  $t_0 \in \mathbb{R}$  de l'origine  $x=0$  si et seulement si :

$$(I.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0$$

et si  $\mathcal{D}_a(t_0)$  est un voisinage de  $x=0$ .

L'ensemble  $\mathcal{D}_a = \{(x, t) / x \in \mathcal{D}_a(t), t \in \mathbb{R}\}$  est le domaine d'attraction de  $x=0$  si et seulement si  $\mathcal{D}_a(t_0)$  est le domaine d'attraction de  $x=0$  à  $t_0$ , pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Définition 6 : Domaine de stabilité /Grujić, 1975/

L'ensemble  $\mathcal{D}_s(t_0)$  est le domaine de stabilité de  $x=0$  pour tout  $t \geq t_0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  si et seulement si :

a) pour tout  $t'_0 \geq t_0$  et tout  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ , la relation  $\|x(t; t'_0, x_0)\| < \varepsilon$  est satisfaite,  $\forall t \in [t'_0, +\infty[$  pour tout  $x_0 \in \mathcal{D}_s(t'_0, \varepsilon)$  où  $\mathcal{D}_s(t'_0, \varepsilon)$  est un voisinage de  $x=0$ .

$$b) \quad \mathcal{D}_s(t) = \cup \left[ \mathcal{D}_s(t, \varepsilon) : \varepsilon \in ]0, +\infty[ \right]$$

$$c) \quad \mathcal{D}_s(t_0) = \{(t, x) : \text{pour } t \geq t_0 \quad x \in \mathcal{D}_s(t)\}$$

Définition 7

Lorsque le domaine de stabilité et d'attraction est constitué de tout l'espace de définition du vecteur état  $x$ , on dit qu'il s'agit de stabilité asymptotique globale.

## II - PRESENTATION DES DIFFERENTS MODELES

L'application des lois physiques régissant l'évolution d'un processus conduit très souvent à une équation différentielle :

$$(I.7) \quad f(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)}, t) = 0$$

où  $y \in \mathbb{R}^p$  et  $u \in \mathbb{R}^r$  représentent respectivement le vecteur des sorties et le vecteur des entrées.

Si l'équation (I.7) peut s'écrire sous la forme

$$(I.8) \quad \sum_{i=0}^n A_i(.) y^{(i)} = \sum_{i=0}^m B_i(.) u^{(i)}$$

$$\text{où } \begin{cases} A_i(.) = \{a_{jk}(\cdot)\}_i \in \mathbb{R}^{p \times p} \\ B_i(.) = \{b_{jk}(\cdot)\}_i \in \mathbb{R}^{r \times r} \end{cases}$$

sont des matrices dont les coefficients dépendent du temps et/ou des entrées  $u_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) et/ou des sorties  $y_i$  ( $i=1, \dots, p$ ) et/ou de paramètres extérieurs, il est possible de déduire de (I.8) une matrice  $Z(\lambda, \cdot)$  obtenue par :

$$(I.9) \quad \begin{cases} y(\lambda) = Z(\lambda, \cdot) u(\lambda) \\ \text{avec } Z(\lambda, \cdot) = \begin{cases} Z_{ij}(\lambda, \cdot), & i = 1, \dots, p \\ & j = 1, \dots, r \end{cases} \end{cases}$$

si l'opérateur  $L(\lambda) = \lambda^i A_i(\cdot)$  défini par la transformation  $y^i \rightarrow \lambda^i y(\lambda)$  est inversible. Ceci correspond dans le cas linéaire à la transformation de Laplace, conduisant à la matrice de transfert  $Z(p)$ .

Pour une classe importante de systèmes : systèmes linéaires stationnaires, systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov, ..., l'évolution du processus peut être décrite sous la forme :

$$(I.10) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(\cdot) x + B(\cdot) u \\ y = C x + D u \end{cases}$$



où  $x$  est le vecteur état  $x \in \mathbb{R}^n$

$A(.)$  matrice caractéristique du système  $A(.) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B(.)$  matrice de commande  $B(.) \in \mathbb{R}^{n \times r}$

$C$  matrice d'observation  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$D$  matrice associée au transfert direct de l'information  $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$

Nous présentons ici dans le cas monovarié, quelques formes matricielles canoniques remarquables et les notations qui seront utilisées par la suite.

### II.1 - Cas linéaire stationnaire

L'équation (I.8) pour les systèmes monovariés se simplifie sous la forme suivante :

$$(I.11) \quad \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}$$

ce qui conduit à la fonction de transfert associée d'ordre  $n$ ,

$$(I.12) \quad W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

Pour la suite, nous poserons les hypothèses suivantes :

$$* a_n = 1$$

$$* m \leq n - 1 \quad (\text{pas de transfert direct d'information, donc } D \equiv 0).$$

L'équation d'état associée, caractérisée par le triplet  $(A,B,C)$  peut se présenter, lorsque  $A$  est une matrice de type compagnon, sous la forme suivante :

$$(I.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_c = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] \end{array} \right.$$

Si A est une matrice de type Frobenius, alors le triplet  $(A_f, B_f, C_f)$  est obtenu par :

$$(I.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_f = A_c^T \\ B_f = C_c^T \\ C_f = B_f^T \end{array} \right.$$

Lorsque le système est modélisé directement sous une forme matricielle quelconque, il existe toujours, sous la seule condition de commandabilité de la paire  $(A,B)$  une matrice de transformation M ( $x = M\tilde{x}$ ) qui met la matrice A sous la forme d'une matrice compagnon  $A_c$  et B sous la forme  $B_c$  /Fossard A, 1972/.

Par le changement de base de matrice  $P_1$  :

$$(I.15) \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 \\ (-\alpha_1)^{n-2} & (-\alpha_2)^{n-2} & \dots & \dots & (-\alpha_{n-1})^{n-2} & 0 \\ (-\alpha_1)^{n-1} & (-\alpha_2)^{n-1} & \dots & \dots & (-\alpha_{n-1})^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$



$$(I.18) \quad W(\lambda, t) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i(t) \lambda^i}{\sum_{i=0}^n a_i(t) \lambda^i} \quad a_n = 1$$

Une méthode habituelle de mise en équation d'état par identification à partir de l'équation différentielle à coefficients non stationnaires consiste à choisir les composantes du vecteur état de la forme suivante /Boudarel et al, 1967/ :

$$(I.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 + \alpha_1(t) u \\ \vdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} + \alpha_{n-1}(t) u \end{array} \right.$$

ce qui conduit à une formulation dans l'espace d'état (A(t),B(t),C) avec

$$(I.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \\ \text{matrice de type compagnon} \\ B(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-1}(t) \end{bmatrix} \\ C(t) = [ 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 ] \end{array} \right.$$

La matrice B(t) est formée des coefficients obtenus par identification pour éliminer les dérivées de l'entrée, grâce aux termes  $\alpha_i(t)$ .

Les coefficients  $\beta_i(t)$  sont composés des termes  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$  ainsi que de leurs dérivées. Les paramètres  $\alpha_i(t)$  n'apparaissent pas dans  $B(t)$  puisqu'ils s'expriment en fonction des  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  par résolution d'équations récurrentes, dont l'expression devient très importante quand l'ordre du système augmente.

Ainsi, les premières relations donnant  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\alpha_3(t)$  sont de la forme :

$$(I.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{n-1}(t) + \alpha_1(t) = 0 \\ b_{n-2}(t) + a_{n-1}(t) \alpha_1(t) + (n-1) \dot{\alpha}_1(t) + \alpha_2(t) = 0 \\ b_{n-3}(t) + a_{n-2}(t) \alpha_1(t) + (n-2) a_{n-1}(t) \dot{\alpha}_1(t) + (n-1) \ddot{\alpha}_1(t) + \\ a_{n-1}(t) \alpha_2(t) + (n-2) \dot{\alpha}_2(t) + \alpha_3(t) = 0 \end{array} \right.$$

Nous proposons ici une méthode rapide de passage d'une équation différentielle à coefficients non stationnaires à une équation d'état caractérisée par une matrice de type Frobenius.

Proposition

Si le système étudié se présente sous la forme initiale (I.11) avec les coefficients  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  fonctions du temps ( $i = 0, \dots, n-1$ ) alors la représentation matricielle sous forme Frobenius qui s'en déduit s'exprime par :

$$(I.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_f(t) x + B(t) u \\ y = C x \end{array} \right. \quad \text{avec :}$$

$$A_f(t) = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 & -\alpha_0(t) \\ & 1 & & & & \vdots \\ & & 0 & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$B_f(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \vdots \\ \beta_1(t) \end{bmatrix}$$

$$C_f = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

les coefficients  $\alpha_i(t)$  et  $\beta_i(t)$  étant obtenus par le changement de variable suivant :

$$(I.23) \quad \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = P_2 \begin{bmatrix} a_0(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-1}(t) \end{bmatrix} = P_2 \begin{bmatrix} b_0(t) \\ \vdots \\ b_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

avec

$$(I.24) \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{d}{dt} & \frac{d^2}{dt^2} & \dots & \dots & \dots & (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \\ 0 & 1 & -2 \frac{d}{dt} & \dots & \dots & \dots & \binom{n-1}{n} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-2} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \binom{n}{n-1} \left(-\frac{d}{dt}\right) \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

Les éléments  $P_2(i,j)$  correspondent aux termes du développement de l'expression  $((-d/dt) + 1)^j$  :



$$P_2(ij) = \begin{bmatrix} j \\ j-i \end{bmatrix} \left[ -\frac{d}{dt} \right]^i \quad j \text{ fixé } \in [0 ; n-1] ; i = 0, \dots, j$$

(I.25) avec

$$\begin{bmatrix} j \\ j-i \end{bmatrix} = \frac{j!}{i! (j-i)!} \quad \text{coefficients du binôme}$$

Ce résultat se démontre aisément par récurrence.

La démarche inverse, consistant à rechercher l'équation différentielle associée à cette représentation d'état, s'obtient de la même manière, les coefficients  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  étant déduits des  $\alpha_i(t)$  et  $\beta_i(t)$  par le changement de variable de matrice  $P_3$  dont les termes sont obtenus par la relation suivante :

$$(I.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_3(ij) = \begin{bmatrix} j \\ j-i \end{bmatrix} \left[ \frac{d}{dt} \right]^i \quad \left\{ \begin{array}{l} j \text{ fixé } \in [0 ; n-1] \\ i = 0, \dots, j \end{array} \right. \\ P_3(ij) = (-1)^i P_2(ij) \quad i = 0, \dots, j \end{array} \right.$$

### II.3 - Cas non linéaire

#### II.3.1 - Systèmes de type Lur'e Postnikov

Un système de type Lur'e Postnikov est représenté par le schéma-bloc suivant :

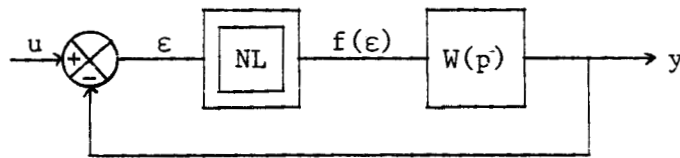


Figure 1

comportant, dans la chaîne d'action :

\* une partie linéaire modélisée par la fonction de transfert  $W(p)$  :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad \begin{array}{l} m \leq n - 1 \\ a_n = 1 \end{array}$$

\* une non-linéarité séparable  $f(\epsilon)$  qui est une fonction de classe  $\Phi$  :

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} f / f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\epsilon) = f^*(\epsilon) \cdot \epsilon \\ f^*(\epsilon) \in [\underline{L}, \bar{L}] \subset \mathbb{R}, \underline{L} \leq \bar{L} \end{array} \right\}$$

La représentation d'état correspondante est alors, si  $(A, B, C)$  est le triplet matriciel associé à la partie linéaire,

$$(I.27) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf(\epsilon) \\ y = Cx \\ \epsilon = -Cx + u \end{cases}$$

ce qui donne en boucle fermée :

$$(I.28) \quad \begin{cases} \dot{x} = (A - BCf^*)x + Bf^*u \\ y = Cx \end{cases}$$

En notant  $A^* = A - BCf^*$ , nous obtenons la représentation sous forme compagnon du système bouclé :

$$(I.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -f^*b_0 & \dots & -a_{n-1} & -f^*b_{n-1} \end{bmatrix} \\ B_c^* = f^* B_c \end{array} \right.$$

qui donne le triplet correspondant  $(\bar{A}_c^*, \bar{B}_c^*, \bar{C}_c)$  de forme en flèche d'expression semblable à (I.16) avec un nouveau polynôme caractéristique à



coefficients non constants :

$$P(\lambda, f^*) = D(\lambda) + f^* N(\lambda)$$

Cette formulation nous conduit à introduire la notion d'"opérateur symbolique de transfert scalaire" du système en boucle fermée  $W_{BF}(\lambda, f^*)$  déduite de la fonction de transfert en boucle ouverte  $W_{BO}(p) = W(p) = N(p)/D(p)$  /Dauphin-Tanguy, Borne, Meizel, 1982/ :

$$(I.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{BF}(\lambda, f^*) = \frac{f^* N(\lambda)}{D(\lambda) + f^* N(\lambda)} \\ f^* \in [\underline{L}, \bar{L}] \subset \mathbb{R} \end{array} \right.$$

### II.3.2 - Systèmes non linéaires

Cette étude concerne les systèmes non linéaires qui admettent une représentation d'état :

$$(I.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A(.) x + B(.) u \\ y = C x \end{array} \right.$$

La détermination des matrices  $A(.)$ ,  $B(.)$  peut être, dans certains cas, très complexe.

Lorsque la modélisation initiale se présente sous forme différentielle (I.11) avec les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  fonctions du temps et/ou de l'entrée et/ou de l'état et/ou de paramètres extérieurs, il n'existe pas de méthode générale de détermination du triplet  $(A(.), B(.), C)$ . La méthode par identification s'applique dans de nombreux cas, avec certaines limitations concernant les coefficients  $a_i(.)$  et  $b_i(.)$ .

Les résultats présentés précédemment (§ II.2) sont, sous certaines hypothèses, applicables dans ce cas et la formulation (I.20) (ou I.22) est valable. Les relations de récurrence (I.21) sont encore valides, avec cependant quelques précautions à prendre concernant l'existence et le calcul des termes

$$\frac{d\alpha_i(.)}{dt} = \frac{\partial \alpha_i(.)}{\partial(.)} \cdot \frac{\partial(.)}{\partial t}$$

Soit, à titre d'exemple, le système caractérisé par l'équation suivante d'ordre 3 :

$$(I.32) \quad y^{(3)} + a_2(.) y^{(2)} + a_1(.) y^{(1)} + a_0(.) y = b_2(.) u^{(2)} + b_1(.) u^{(1)} + b_0(.) u$$

L'équation d'état obtenue est alors :

$$(I.33) \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(.) & -a_1(.) & -a_2(.) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1(.) \\ \beta_2(.) \\ \beta_3(.) \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] x \end{cases}$$

avec :

$$(I.34) \quad \begin{cases} \beta_1(.) = -\alpha_1(.) = b_2(.) \\ \beta_2(.) = -\alpha_2(.) = b_1(.) - a_2(.) b_2(.) - 2 \frac{d}{dt} b_2(.) \\ \beta_3(.) = b_0(.) + a_1(.) \alpha_1(.) + a_2(.) \alpha_2(.) + \frac{d^2 \alpha_1(.)}{dt^2} + \frac{d\alpha_2(.)}{dt} \end{cases}$$

De ces résultats obtenus à l'ordre 3, il est possible de déduire des conclusions générales concernant les formes autorisées des coefficients  $a_i(.)$  et  $b_i(.)$  permettant une obtention aisée de la représentation (I.33)

\*  $b_{n-1}(.)$  est dérivé (n-1) fois par rapport au temps, il peut être fonction seulement de y et t

\*  $b_{n-2}(.)$  et  $a_{n-1}(.)$  sont dérivés (n-2) fois, ils peuvent dépendre de y,  $y^{(1)}$  et t

etc...

Cette modélisation est donc valable directement pour les coeffi-

cients de la forme générale :

$$(I.35) \quad \begin{cases} b_{n-i}(\cdot) = b_{n-i}(y, y^{(1)}, \dots, y^{(i-1)}, t) \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \\ a_{n-i}(\cdot) = a_{n-i}(y, y^{(1)}, \dots, y^{(i)}, t) \text{ pour } i = 1, \dots, n-2 \end{cases}$$

$b_0(\cdot)$ ,  $a_1(\cdot)$ ,  $a_0(\cdot)$  ne subissent aucune contrainte puisqu'ils n'apparaissent jamais sous forme dérivée.

### III - MODELISATION PAR BOND-GRAPHS

La représentation par bond-graphs (ou graphes à liens) d'un système apporte au modèle une structure physique identique à celle que l'on trouve dans les diagrammes associés aux circuits électriques. La propriété de conservation de puissance est fondamentalement liée au graphe qui reproduit exactement tous les échanges d'énergie intervenant au cours de l'évolution du système /Karnopp, 1969/.

Tous les systèmes physiques ne peuvent pas être entièrement décrits par les bond-graphs. Parfois une modulation d'un paramètre intervient, qui ne demande pas de puissance (pour le gyrateur-modulé par exemple) ou qui nécessite une puissance si faible qu'elle en est négligeable.

Ce type de couplage dans un système est alors mieux décrit sous forme de signal, et représenté non pas sous forme de lien ( $\rightarrow$ ) mais par une flèche complète ( $\longrightarrow$ ) /Van Dixhoorn, 1982/.

Un bond-graph est composé d'éléments de base associés à des portes, I et C (Stockage d'énergie), R (Dissipation),  $S_e$  et  $S_f$  (Sources d'énergie).

Ces éléments sont interconnectés par une structure de jonction, composée d'éléments 0 (Jonction parallèle), 1 (Jonction série), de transformateurs (TF), de modulateurs (CY), qui assure les échanges d'énergie entre les différentes parties du système dynamique en imposant certaines contraintes.

Tous les bond-graphs, composés à partir de ces éléments de base, peuvent être organisés dans la forme symbolique décrite par le schéma suivant :

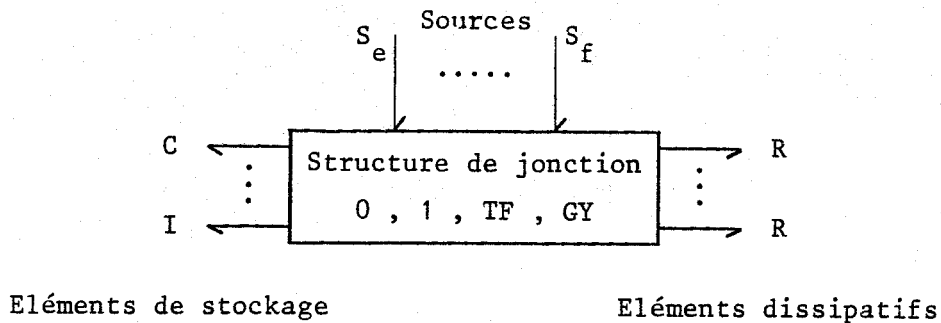


Figure 2

La structure de jonction, conservatrice de l'énergie, fournit une relation entre les efforts et les flux apparaissant à ses portes. Elle constitue un cas spécial d'un multiporte résistif ne dissipant pas d'énergie /Rosenberg, 1971/.

La représentation par graphe à liens apporte une base unifiée pour la formulation des modèles dynamiques dans les domaines physiques spécialisés et des disciplines intéressant les ingénieurs tels que Mécanique, Electromécanique, Electromagnétique, phénomènes de Transport de matière, Cinétique de réactions chimiques, Thermodynamique irréversible et d'autres encore /Karnopp, Rosenberg, 1975, 1983/ /Thoma, 1975/.

Les variables de puissance mises en jeu portent le nom général de "variable d'effort"  $e$  et de "variable de flux"  $f$ , et la puissance échangée au sein du système s'obtient par :

$$(I.36) \quad P = e.f$$

Aux variables de puissance  $e$  et  $f$  sont associées des variables d'énergie  $p$  "moment généralisé" et  $q$  "déplacement généralisé" obtenues par :

$$(I.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \int e \, dt \\ q = \int f \, dt \end{array} \right.$$

Le tableau 1 donne les équivalences de ces variables pour les différents domaines d'application.

Variables généralisées

	Effort e	Flux f	Moment généralisé p	Déplacement généralisé q
TRANSLATION	force F  N	vitesse v  ms <sup>-1</sup>	impulsion p  Ns	déplacement x  m
ROTATION	couple M  Nm	vitesse angulaire ω  rad s <sup>-1</sup>	impulsion angulaire h  Nms	angle φ  rad
HYDRAULIQUE	pression P  Nm <sup>-2</sup>	débit volumique Q  m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>	impulsion de pression Γ  Nm <sup>-2</sup> s	volume V  m <sup>3</sup>
ACOUSTIQUE	pression P  Nm <sup>-2</sup>	vitesse volumique φ <sub>v</sub>  m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>	impulsion Γ  Nm <sup>-2</sup> s	volume V  m <sup>3</sup>
ELECTRIQUE	tension u  V	courant i  A	flux ψ  V.s	charge q  C
MAGNETIQUE	force magnéto-motrice λ  A	dérivée du flux magnétique φ̇  Wb s <sup>-1</sup>		flux magnétique φ  Wb
CHIMIQUE	potentiel chimique u  J.mole <sup>-1</sup>	flux molaire Ṅ  Mol.s <sup>-1</sup>		masse molaire N  mol
THERMODYNAMIQUE	température T  K	flux d'entropie Ṡ		entropie S  JK <sup>-1</sup>

TABLEAU 1



Le tableau 2 indique les relations mises en jeu au sein des différents éléments de base composant les graphes à liens.

Eléments standards

		NOMS	RELATIONS ELEMENTAIRES	EXEMPLES
1 porte	SOURCES	SE → Source e	$e(t)$ donnée	Gravité (m.g) Source de pression
		SF → Source f	$f(t)$ donnée	Source de débit Source de courant
		S → Source	$\phi(e, f) = 0$	Caractéristique d'une alimentation : Batterie, Pompe, ...
	STOCKAGE	D* → R Résistance	* $e = R.f$ $\phi(e, f) = 0$	Amortisseur Résistance électrique
		→ C Capacité	* $e = e(0) + \frac{1}{C} \int f dt$ $\phi(e, q) = 0$	Ressort, Accumulateur Réservoir de stockage, Compressibilité
	→ I Inertie	* $f = f(0) + \frac{1}{I} \int e dt$ $\phi(f, p) = 0$	Masse Inductance	
2 portes	TRANSDUCTEURS	1 → TF → 2 Transformateur	* $e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$	Roue et pignon Vérin
		1 → GY → 2 Gyrateur	* $e_1 = r f_2$ $e_2 = r f_1$	Système électro-dynamique
		1 → MTF → 2 Transformateur modulé	$e_1 = m(t).e_2$ $f_2 = m(t).f_1$	Réducteur variable Cinématique de mécanismes
		1 → MGY → 2 Gyrateur modulé	$e_1 = r(t).f_2$ $e_2 = r(t).f_1$	Moteur électrique Pompe centrifuge
multiporte	JUNCTION	1 → 0 → n Jonction 0	$e_1 = e_2 = \dots = e_n$ $\sum f = 0$	Force commune Connexion en parallèle
		1 → 1 → n Jonction 1	$f_1 = f_2 = \dots = f_n$ $\sum e = 0$	Vitesse commune Connexion en série

\* D : DISSIPATION

+ cas linéaire

TABLEAU 2

Le tétragone de Paynter représente de façon claire les liens existant entre les 4 types de variables (Fig. 3) :



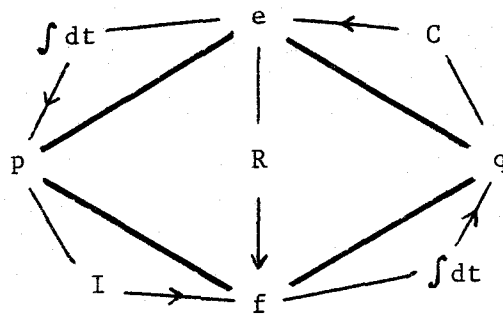


Figure 3

Les énergies mises en jeu apparaissent comme l'aire des courbes suivantes :

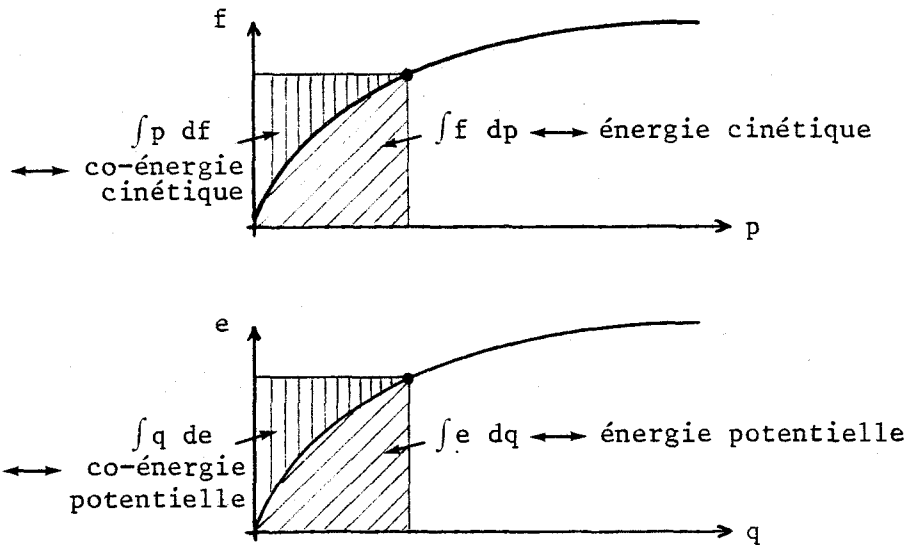


Figure 4

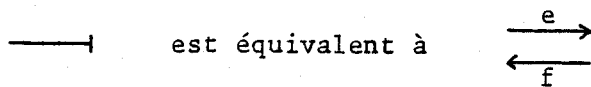
Lorsque la structure physique du système étudié a été complètement spécifiée dans la notation graphe à liens, les équations du système sont connues. Pour des petits systèmes, elles sont facilement organisées en un ensemble d'équations d'état, sous forme de bloc diagramme ou d'équations différentielles.

Pour des systèmes de plus grande dimension, la procédure d'élimination, la détection et la solution d'équations implicites (boucles algébriques) et de variables d'état liées ou incontrôlables peuvent entraîner des difficultés importantes.

Il s'agit donc de définir une structure de calcul qui indique le sens des affectations pour les variables à déterminer à partir des variables connues. Ainsi, pour un élément R, le choix doit être fait entre les deux formules (a) et (b) suivantes :

(I.38) (a)  $e := R.f$  et (b)  $f := \frac{1}{R} e$

La description de cette structure de calcul se fait par l'affectation de la causalité, représentée par un "trait causal" ajouté au lien (ex :  $\longrightarrow$ ), qui indique en plus la direction de propagation de l'effort (et du flux en sens inverse). Ainsi :



Le tableau 3 indique les causalités possibles sur les éléments de base et les équations qui s'en déduisent.

Causalité en Bond-Graphs

$\xrightarrow{\phi(t)} SE \longrightarrow$	$e = \phi(t)$	$\xrightarrow{\phi(t)} SF \longrightarrow$	$f = \phi(t)$
$\xrightarrow{\quad} R \longrightarrow$	$e = R.f$	$\xrightarrow{\quad} R \longrightarrow$	$f = G.e$
$\xrightarrow{\quad} C \longrightarrow$	$e = e(0) + \frac{1}{C} \int f dt$	$\xrightarrow{\quad} C \longrightarrow$	$f = C \frac{de}{dt}$
$\xrightarrow{\quad} I \longrightarrow$	$e = I \frac{df}{dt}$	$\xrightarrow{\quad} I \longrightarrow$	$f = f(0) + \frac{1}{I} \int e dt$
$\xrightarrow{1} TF \xrightarrow{2} : m$	$e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$	$\xrightarrow{1} TF \xrightarrow{2} : m$	$e_2 = \frac{1}{m} e_1$ $f_1 = \frac{1}{m} f_2$
$\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2} : r$	$e_1 = r f_2$ $e_2 = r f_1$	$\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2} : r$	$f_1 = \frac{1}{r} e_2$ $f_2 = \frac{1}{r} e_1$
$\xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{3} : 2 \nearrow$	$e_1 = e_2$ $e_3 = e_2$ $f_2 = -f_1 = f_3$	$\xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{3} : 2 \nearrow$	$f_1 = f_2$ $f_3 = f_2$ $e_2 = e_3 - e_1$

Tableau 3



Certaines règles, concernant l'affectation des causalités, sont imposées :

\* La causalité intégrale est préférable pour les éléments I et C, pour obtenir des variables d'état indépendantes. Exemple :

$$(I.39) \quad \begin{array}{c} \text{C} \\ \longleftarrow \end{array} \quad e = e_{(0)} + \underbrace{\frac{1}{C} \int f dt}_{\text{causalité intégrale}} \quad \text{"causalité effort"}$$

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \longrightarrow \end{array} \quad f = f_{(0)} + \frac{1}{I} \int e dt \quad \text{"causalité flux"}$$

\* Une seule causalité effort doit apparaître à une jonction 0 et une seule causalité flux à un noeud 1. Exemple :

$$(I.40) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{3} \\ \nearrow 2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = e_2 \\ e_3 = e_2 \\ f_2 = -f_1 + f_3 \end{array} \right.$$

$$(I.41) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{3} \\ \nearrow 2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_2 \\ f_3 = f_2 \\ e_2 = e_3 - e_1 \end{array} \right.$$

Remarque

Un petit changement dans la structure physique du système (suppression d'une petite masse ou d'une petite capacité) a toujours des conséquences sur la structure de calcul puisque la causalité des autres éléments est alors modifiée.

La forme symbolique d'un graphe à liens en causalité intégrale apparaît Figure 5.

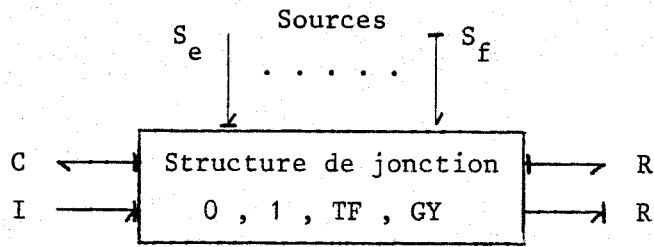


Figure 5

ce qui peut être représenté en mettant en évidence les vecteurs d'effort et de flux sous la forme de blocs diagramme (Figure 6).

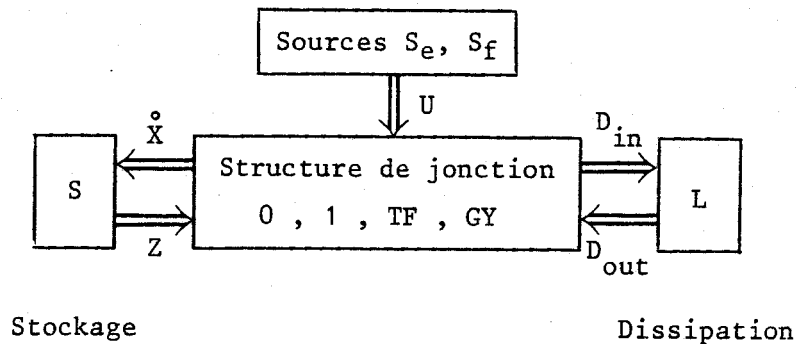


Figure 6

$X = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  est le vecteur état associé aux variables d'énergie (moment généralisé  $p$ , déplacement généralisé  $q$ ) qui vérifie l'équation d'état (dans le cas d'un bond-graph linéaire) :

$$(I.42) \quad \dot{X} = AX + BU \quad X \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} p \in \mathbb{R}^m \\ q \in \mathbb{R}^{n-m} \end{bmatrix} \quad U \in \mathbb{R}$$

où  $A$  est une matrice liée à la structure de jonction

$Z$  est le vecteur des co-énergies défini par :

$$(I.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = [F_I \quad E_C]^T \\ F_I = I^{-1} p \\ E_C = C^{-1} q \end{array} \right.$$

tel que :

$$(I.44) \quad Z = S X = \begin{bmatrix} I^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} X \quad S \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Le multiporte des dissipations est caractérisé par la matrice L, carrée, formée de termes d'admittances et de résistances telle que :

$$(I.45) \quad D_{out} = L D_{in}$$

où  $D_{out}$  est le vecteur des sorties et  $D_{in}$  le vecteur des entrées.

#### Equations de la structure de jonction

En supposant que les éléments TF et GY possèdent un module constant, ce qui est toujours le cas pour un système linéaire, nous pouvons écrire l'équation matricielle suivante :

$$(I.46) \quad \begin{bmatrix} \dot{X} \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{SS} & J_{SL} & J_{SU} \\ J_{LS} & J_{LL} & J_{LU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ U \end{bmatrix}$$

La conservation de puissance se manifeste par les propriétés suivantes :

\*  $J_{SS}$  et  $J_{LL}$  sont antisymétriques

\*  $J_{SL} = - J_{LS}^T$

L'équation d'état qui s'en déduit s'écrit :

$$(I.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = AX + BU \\ \text{avec} \quad A = (J_{SS} + J_{SL} L (I - J_{LL} L)^{-1} J_{LS}) S \\ \quad \quad B = J_{SU} + J_{SL} L (I - J_{LL} L)^{-1} J_{LU} \end{array} \right.$$

La matrice A apparaît sous forme d'un produit de matrices  $A_1 \times S$ . La matrice S déduite des multiportes de stockage d'énergie est symétrique, conformément aux relations de réciprocité de Maxwell. La matrice  $A_1$  contient une partie symétrique  $A_1^s$  caractérisant les propriétés de conservation de l'énergie de la structure de jonction et une partie antisymétrique  $A_1^a$  traduisant la dissipation de l'énergie du multiporte dissipatif.

Cette représentation en variables d'énergie est très générale et tout à fait liée aux phénomènes d'échanges dynamiques du système.

L'ordre du vecteur état  $X = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  est essentiel. Avec cet ordre, le système (I.42) peut être partitionné de la façon suivante /Margolis, Young, 1977/ :

$$(I.48) \quad \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pq} \\ A_{qp} & A_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{pe} & B_{pf} \\ B_{qe} & B_{qf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e \\ u_f \end{bmatrix}$$

avec :

$$A_{pp} \in R^{m \times m} \quad A_{pq} \in R^{m \times n-m} \quad A_{qp} \in R^{n-m \times m} \quad A_{qq} \in R^{n-m \times n-m}$$

La décomposition du vecteur entrée U en un vecteur  $u_e$  des sources efforts de dimension s et un vecteur  $u_f$  des sources flux de dimension r-s entraîne un partitionnement de B :

$$B_{pe} \in R^{m \times s} \quad B_{pf} \in R^{m \times r-s} \quad B_{qe} \in R^{n-m \times s} \quad B_{qf} \in R^{n-m \times r-s}$$

Cette représentation conduit à un système différentiel du second ordre, de dimension m obtenu à partir de (I.48) en écrivant :

$$(I.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = I \dot{y} \\ \int_0^t p dt = I y \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} y \in R^m \\ \dot{y} \in R^m \end{array} \quad I \in R^{m \times m}$$

Les vecteurs  $y$  et  $\dot{y}$  sont composés des nouvelles variables d'état. Celles-ci correspondent par exemple dans le cas d'un système mécanique aux déplacements absolus (ou rotations) et aux vitesses (ou vitesses angulaires) des éléments inertiels du modèle.  $I$  est une matrice diagonale composée des éléments inertiels.

$$(I.50) \quad I \overset{\circ}{\ddot{y}} + \bar{R} \overset{\circ}{\dot{y}} + \bar{C} y = \bar{B} \begin{bmatrix} u_e \\ u_f \\ \int u_e dt \\ \int u_f dt \end{bmatrix}$$

avec les matrices  $\bar{R}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{B}$  obtenues à partir de (I.48) par les expressions suivantes :

$$(I.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{C} \\ \bar{R} \\ \bar{B} \\ \text{commandes} \end{array} \right. = \begin{bmatrix} A_{pq} \times A_{qq} \times A_{pq}^{-1} \times A_{pp} - A_{pq} \times A_{qp} \\ - A_{pq} \times A_{qq} \times A_{pq}^{-1} - A_{pp} \\ B_{pe}, B_{pf}, A_{pq} \times (B_{qe} - A_{qq} A_{pq}^{-1} B_{pe}), \\ A_{pq} \times (B_{qf} - A_{qq} A_{pq}^{-1} B_{pf}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ I \\ \\ \end{bmatrix}$$

Si les vecteurs  $p$  et  $q$  sont de même dimension  $n/2$ , alors la matrice  $A_{pq}$  est carrée, de dimension  $n/2$  et  $A_{pq}^{-1}$  correspond à la définition classique de l'inverse d'une matrice. De même  $\bar{R}$  et  $\bar{C}$  sont carrées, de dimension  $n/2$ .

Dans le cas contraire, si  $p$  et  $q$  sont de dimensions  $m$  et  $n-m$  différentes,  $A_{pq}$  est rectangulaire de dimension  $[m \times n-m]$  et  $A_{pq}^{-1}$  correspond alors à la pseudo-inverse à gauche de  $A_{pq}$  telle que :

$$A_{pq}^{-1} \cdot A_{pq} = I_{(n-m \times n-m)}$$

avec  $A_{pq}^{-1} \in \mathcal{R}^{n-m \times m}$

Dans ce cas,  $\bar{R}$  et  $\bar{C}$  sont encore carrées, de dimension  $m$ . A partir de (I.50) peut être aisément déduite une représentation dans l'espace

de phase, en choisissant comme variables d'état  $y$  et  $\dot{y}$ , soit donc un système de dimension 2 m.

#### IV - METHODES DE SIMPLIFICATION DES MODELES

La recherche de modèles de représentation dans des domaines les plus divers (éducation, systèmes urbains, économie, réseaux de transport ou de communication, ...) conduit, par souci de réalisme à des systèmes de grande taille, dont l'analyse devient très complexe, la simulation trop coûteuse nécessitant l'emploi de calculateurs de très grande taille, la réalisation d'une commande très difficile /Shieh, Chow, Yates, 1976/.

D'autre part, la nécessité de créer des systèmes autonomes fonctionnant avec leurs modules de calcul indépendants (avions, vaisseaux spatiaux, station de guidage ou repérage des satellites) conduit à rechercher des modèles simplifiés, sachant qu'il est souvent aussi précis et toujours plus rapide d'augmenter le nombre d'itérations tout en simplifiant l'algorithme par rapport au calcul initial.

##### IV.1 - Classification

La notion de simplification est très large puisqu'elle englobe à la fois les simplifications d'ordre structurel, les décompositions du système initial en sous-systèmes et les diminutions d'ordre d'un modèle donné sans modification de structure.

Les simplifications de structure consistent à remplacer un modèle par un autre représenté par des équations plus simples ou plus faciles à traiter. Ainsi, il est habituel d'étudier un système non linéaire au voisinage d'un point de fonctionnement, donc de linéariser le modèle correspondant. Suivant le problème posé, il peut être intéressant de remplacer un système d'équations aux dérivées partielles par des équations différentielles ordinaires, ou des équations de récurrence par des équations différentielles.

La notion de décomposition consiste à partitionner le système initial en plusieurs sous-systèmes, à traiter et résoudre les problèmes sur ces derniers, et ensuite à coordonner l'ensemble afin d'atteindre ou

d'approcher l'objectif global. C'est la démarche utilisée en commande hiérarchisée.

Cependant, c'est la notion de réduction de dimensionnalité du modèle qui a suscité le plus de travaux au cours des dernières années. De nombreux articles de synthèse sont parus, qui répertorient un nombre important d'articles /Sandell, Variaya, Safonov, 1978/ /Decoster, Van Cauwenberghe, 1976/.

Les différentes techniques utilisées peuvent se regrouper en quatre grandes classes de méthodes, avec certaines solutions équivalentes /Bertrand, Michaïlesco, Siret, 1976/ :

\* la "méthode du modèle" consistant à minimiser "l'erreur" entre le modèle initial et le modèle simplifié choisi à priori, pour différents types d'entrées,

\* les approximations de l'opération de transfert par un développement limité,

\* les approches modales consistant à retenir dans le modèle simplifié les modes prépondérants du système initial ; dans cette catégorie entrent les méthodes d'agrégation et de troncature,

\* les méthodes de perturbations qui normalisent, grâce à un petit paramètre  $\mu \in ]0, 1]$ , les termes d'ordres de grandeur très différents et qui permettent, par passage à la limite  $\mu \rightarrow 0$  de déterminer le modèle approché.

Les travaux sur ces différentes approches sont très nombreux et il serait illusoire d'en fournir une liste bibliographique complète.

Nous nous limiterons à quelques références significatives.

#### IV.2 - Méthodes du modèle

Ces méthodes consistent à choisir à priori un modèle d'ordre inférieur à celui du système initial, dont les paramètres sont déterminés de façon à minimiser l'écart entre les comportements des deux modèles

pour différents types d'entrées.

\* pour les approches temporelles (réponse impulsionnelle, indicielle), on peut citer /Meier, Luenberger, 1967/ /Sinha, Bereznaï, 1971/ /Galiana, 1973/ /Riggs, Edgar, 1974/ /Wilson, 1974/ /Edgar, 1975/ /Hirzinger, Kreisselmeir, 1975/ /Mishra, Wilson, 1980/ /Siret, Michailesco, Bertrand, 1977/,

\* pour les approches fréquentielles, citons /Hsia, 1972/ /Reddy, 1976/ /Rein, 1980/. /Lin et Wu, 1982/ utilisent cette méthode pour déterminer le numérateur de la fonction de transfert obtenue après réduction du polynôme de Hurwitz associé.

L'inconvénient de ces méthodes réside dans le fait que la signification physique du modèle simplifié n'existe généralement plus et l'utilisation du modèle pour construire des commandes s'avère délicate.

Elles peuvent être utilisées conjointement à d'autres quand celles-ci laissent suffisamment de degrés de liberté pour effectuer une optimisation.

#### IV.3 - Approximations de type "Padé"

Cet ensemble de méthodes consiste à tronquer le développement en fractions continues de la fonction  $F(p)$  ou de la matrice de transfert  $Z(p)$ . Elles conservent généralement, pour un système réduit d'ordre  $q$ ,  $2q$  paramètres parmi les  $2n$  paramètres du système initial de dimension  $n$  /Ashoor, Singh, 1982/ /Gutman, Mannerfelt, Molander, 1982/ /Inooka, Obinata, 1982/.

La méthode de Routh /Hutton, Friedland, 1975/ conserve les premiers éléments du tableau de Routh, ce qui garantit la stabilité du système réduit si le système initial est stable. Elle fournit une bonne approximation pour les hautes fréquences.

Les méthodes fondées sur le développement sous forme de Cauer ne sont pas toujours applicables (le développement n'est pas toujours défini) et elles ne garantissent pas la stabilité du système réduit, même si le système initial est stable. La 1ère forme de Cauer (développement au voisi-



nage de  $p = \infty$ ) réduite donne une bonne approximation aux hautes fréquences, la 2ème forme de Cauer (développement au voisinage de  $p = 0$ ), réduite, pour les basses fréquences et la 3ème forme réduite (développement au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$ ) pour les deux domaines de fréquence.

Le développement limité de la fonction de transfert, au voisinage de  $p = 0$  ou  $p = \infty$  fait apparaître des invariants du système, les moments  $V_i = -C A^{-i} B$  ( $i = 1, \dots, \infty$ ) ou les paramètres de Markov  $M_i = C A^{i-1} B$  ( $i = 1, \dots, \infty$ ).

Le modèle simplifié d'ordre  $q$  coïncide, pour les  $2q$  premiers termes de son développement limité, avec le système initial.

L'équivalence stricte entre certaines de ces méthodes a été démontrée par /Lal et Mitra, 1974/.

Un certain nombre de difficultés d'application sont apparues : mauvaise approximation du début des transitoires, non respect des modes dominants du système initial. Ces problèmes ont conduit à améliorer ces développements : utilisation des polynômes de Tchebyshev pour apporter plus de précision sur une gamme de fréquences /Bistriz, Langholz, 1979/; développement au voisinage de  $p = \alpha$  /Shamash, 1975/.

Ces méthodes sont très bien adaptées au calcul numérique, ce qui explique leur attrait. Cependant, elles ont l'inconvénient de ne plus rien représenter du vecteur état initial, donc d'avoir peu de sens physique et d'être mal adaptées aux problèmes de commande.

Une autre méthode, fondée sur la factorisation de la fonction de transfert sous la forme

$$W(p) = W_1(p) \cdot L(p)$$

où  $W_1(p)$  et  $L(p)$  sont des fonctions de transfert d'ordres respectifs  $n_1$  et  $n_2$  ( $n_1 + n_2 = n$  ordre de  $W(p)$ ) a été développée par /Field et Owens, 1980/ et consiste à retenir dans  $W_1(p)$  tous les pôles et zéros dominants. Une solution générale pour  $L(p)$  est :

$$(I.52) \quad L(p) = 1 + W_2(p)$$

obtenue par les relations suivantes, si  $W(p) = C (pI - A)^{-1} B$ ,

$$(I.53) \quad \begin{cases} W_1(p) = C (pI - A + BF_0)^{-1} B \\ W_2(p) = F_0 (pI - A)^{-1} B \end{cases}$$

où  $F_0$  est unique si  $(A,B,C)$  est commandable et pour un choix spécifique de  $W_1(p)$  et  $W_2(p)$ .

#### IV.4 - Méthodes d'agrégation

##### IV.4.1 - Agrégation linéaire

Ces méthodes consistent à substituer au modèle initial un modèle de taille réduite, qui conserve certaines des caractéristiques importantes, comme les modes dominants et regroupe plusieurs de ses variables d'état.

La notion d'agrégation, utilisée très longtemps en économie dans l'analyse du régime statique de modèles entrées/sorties a été étendue par /Aoki, 1968/ aux systèmes dynamiques.

Le principe de l'agrégation linéaire est le suivant :

Si  $(S)$ , modèle initial est représenté par :

$$(I.54) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in R^n \quad u \in R^q \quad y \in R^p$$

le modèle réduit  $(\hat{S})$  est alors représenté par :

$$(I.55) \quad \begin{cases} \dot{z} = Fz + Gu \\ \hat{y} = Hz \end{cases} \quad z \in R^m$$

avec  $z(t) = Lx(t) \quad L \in R^{m \times n}$

où  $L$ , matrice d'agrégation, existe si les relations suivantes sont vérifiées :

$$(I.56) \quad \begin{cases} FL = LA \\ G = LB \end{cases}$$

Si l'on veut que les sorties  $\hat{y}$  soient proches de  $y$ , alors il faut en plus :

$$(I.57) \quad HL \approx C$$

Le spectre de  $F$  est inclus dans celui de  $A$  /Michaïlesco, Siret, Bertrand, 1976/ et la forme générale des matrices d'agrégation est la suivante :

$$(I.58) \quad L = M L_0$$

où  $M$  est une matrice quelconque régulière de dimension  $m$  et  $L_0$  est donnée par :

$$(I.59) \quad L_0 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

avec  $T$ , matrice modale de  $A$ .

Les méthodes d'agrégation sont utilisées pour construire des régulateurs sous-optimaux du système initial /Aoki, 1968/ /Lamba, Rao, 1974/ /Bertrand, Michaïlesco, Siret, 1976/.

La question importante reste de savoir quels modes doivent être retenus dans le modèle agrégé /Gopal, Mehta, 1982/.

Si les modes instables sont dans le système agrégé, un correcteur  $u = K_r z$  calculé sur le système réduit stabilise le système réel :

$$(I.60) \quad \dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B K_r L x$$

Ce résultat important est utilisé par /Rao et Lamba, 1975/ pour déplacer les pôles d'un système donné.

La conservation des modes initiaux et les degrés de liberté restant

qui peuvent donner lieu à des optimisations rendent cette méthode attrayante.

Elle présente cependant le défaut de ne plus représenter, par le vecteur état  $z$ , les variables d'état du système initial, donc les caractéristiques physiques.

#### IV.4.2 - Agrégation par troncature

Si  $\Sigma(A,B,C)$  est le système initial de dimension  $n$ , alors une classe de méthode de réduction à l'ordre  $q$  est définie par les propriétés suivantes :

\* il existe deux matrices  $Q^+ \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , de rang  $q$ , telles que  $Q^+$  est une pseudo-inverse à gauche quelconque de  $Q$ , c'est-à-dire  $Q^+ Q = I_{qq}$ , matrice identité d'ordre  $q$ .

\* le système réduit de dimension  $q$  est défini par l'équation d'état

$$(I.61) \quad \begin{cases} \hat{\dot{x}} = Q^+ A Q \hat{x} + Q^+ B u \\ \hat{y} = C Q \hat{x} \end{cases}$$

Cette réduction peut être assimilée à un changement de base tronqué défini par  $Q^+$  et  $Q$ , ou encore à une projection.

Ce changement de base peut être rattaché à un changement de base classique si l'on définit les matrices  $Q^+$  et  $Q$  par :

$$(I.62) \quad \begin{cases} Q^+ = Q_0^t T^{-1} \\ Q = T Q_0 \end{cases}$$

où  $T$  est une matrice carrée inversible d'ordre  $n$  et  $Q_0$  une matrice rectangulaire définie par :

$$(I.63) \quad Q_0^t = (I_{qq}, 0_{q \times (n-q)}) \quad (0_{q \times (n-q)} \text{ désigne la matrice nulle})$$

Les matrices  $Q^+$  et  $Q$  ne sont pas uniques. Elles dépendent de la formulation (A,B,C) du système initial dans l'espace d'état.

Le vecteur état du système réduit est obtenu par troncature du vecteur état  $T^{-1}x$ .

Les modes propres du système réduit peuvent être choisis arbitrairement, et l'on démontre que seules deux éventualités sont possibles :

\* il existe une infinité de choix possibles pour  $T$ ,

\* il n'existe pas de solution pour  $T$  /Pinguet, 1981/.

De même que pour le couple  $(Q, Q^+)$  défini précédemment, il est possible de définir le couple  $(R, R^+)$  par :

$$(I.64) \quad \begin{cases} R^+ = R_o^t T^{-1} \\ R = T R_o \end{cases}$$

où  $R_o$  est une matrice rectangulaire définie par :

$$(I.65) \quad R_o = \left( 0_{(n-q) \times q} ; I_{(n-q) \times (n-q)} \right)$$

La matrice  $R$  (respectivement  $R^+$ ) est formée des  $r$  dernières colonnes (respectivement lignes) de  $T$  (respectivement  $T^{-1}$ ).

Les matrices  $T$  et  $T^{-1}$  se présentent sous la forme :

$$(I.66) \quad \begin{cases} T = (Q, R) \\ T^{-1} = \begin{pmatrix} Q^+ \\ R^+ \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec  $T.T^{-1} = QQ^+ + RR^+$

Le vecteur état  $x$  s'écrit alors :

$$(I.67) \quad x = Qx_1 + Rx_2 \quad \text{avec} \quad x_1 \in R^q \quad x_2 \in R^{n-q}$$

ce qui permet d'introduire la notion de processus d'erreur E, défini comme celui qui a comme réponse impulsionnelle la différence des réponses impulsionnelles du système initial et du système réduit.

$$(I.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = Q E_1 + R E_2 \\ \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = x_1 - \hat{x} \\ E_2 = x_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le processus d'erreur admet une représentation d'état

$$(I.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{E}} = A E + \tilde{B} u \\ \tilde{E} = C E \end{array} \right.$$

avec :

$$(I.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{B} = R R^+ B \\ \tilde{E} = y - \hat{y} \end{array} \right.$$

Il peut donc être considéré comme un système dynamique, ce qui permet l'application de tous les résultats classiques, comme les études de stabilité ou de commande optimale.

#### IV.4.3 - Simplification à partir du modèle bond-graph

Cette méthode proposée par /Margolis et Young, 1977/ consiste à effectuer une décomposition modale de l'équation différentielle (I.50) en diagonalisant les matrices I,  $\bar{R}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{B}$  intervenant dans cette expression.

La forme obtenue met en évidence les différentes dynamiques, la réduction consiste alors à retenir dans l'expression les modes dominants, ce qui correspond alors à la troncature de l'expression (I.50). Le bond-graph correspondant à cette réduction est ensuite reconstruit.

#### IV.5 - Méthodes de perturbations

Ces méthodes sont très couramment utilisées par les mathématiciens, pour obtenir des théorèmes de "passage à la limite" qui permettent d'obtenir les solutions du système approché quand la perturbation tend vers zéro. Elles sont également très employées dans d'autres domaines, en mécanique /François, 1981/, en mécanique céleste /Roth, 1979/, en automatique /Sandell et al, 1978/, dans de nombreux domaines mettant en jeu des petits paramètres /Kokotovic, O'Malley, Sannuti, 1976/ /O'Reilly, 1982/ /Kokotovic, Saksena, O'Reilly, 1982/.

Deux classes de perturbations apparaissent :

\* les perturbations régulières correspondant à des faibles couplages intervenant au sein d'un système global,

\* les perturbations singulières dues à des dynamiques différentes ou à des ordres de grandeur disproportionnés entraînant des divergences ou des imprécisions dans les algorithmes de calcul /Miranker, 1981/.

##### IV.5.1 - Perturbations régulières

Les équations de couplage faible sont de type :

$$(I.71) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = f(x_1, \epsilon x_2, u) & x_1 \in R^{n_1} \\ \dot{\bar{x}}_2 = g(\epsilon x_1, x_2, u) & x_2 \in R^{n_2} \end{cases}$$

ce qui donne, quand  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$(I.72) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = f(\bar{x}_1, u) \\ \dot{\bar{x}}_2 = g(\bar{x}_2, u) \end{cases}$$

Le système reste de dimension  $n = (n_1 + n_2)$  mais il se découple en deux sous-systèmes indépendants, chacun d'ordre inférieur à  $n$ .

Cette méthode ne fait pas abstraction d'une partie du système initial. De plus, si  $f$  et  $g$  possèdent des propriétés de dérivabilité conve-

nables, un développement au voisinage de  $\varepsilon = 0$  permet d'obtenir des solutions plus fines. Ce découplage spatial est à rapprocher de la décomposition en sous-systèmes précédemment présentée.

Ces méthodes ont été appliquées par /Milne, 1965/ et /Bailey, Ramapriyan, 1973/ pour des systèmes linéaires.

Cependant, ces méthodes puissantes pour une classe importante de systèmes présentent l'inconvénient de ne pas conduire directement à un modèle d'ordre inférieur.

#### IV.5.2 - Perturbations singulières

Cette terminologie s'applique aux systèmes que l'on peut modéliser par les équations du type suivant :

$$(I.73) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, z, u, \mu, t) & x \in \mathbb{R}^{n_1} \\ \mu \dot{z} = g(x, z, u, \mu, t) & z \in \mathbb{R}^{n_2} \end{cases}$$

Il s'agit, en général, de système composé d'une partie lente  $x$  et d'une partie rapide  $z$ . La perturbation est singulière car  $g/\mu$  n'est pas définie pour  $\mu \rightarrow 0$ , et la valeur  $\mu = 0$  fait disparaître  $n_2$  équations.

Le coefficient  $\mu$  n'est pas défini à priori, mais dépend du système étudié :

\* il peut correspondre au rapport entre les échelles de temps de la partie lente ( $t$ ) et de la partie rapide ( $\tau$ )

$$\mu = (t - t_0) / \tau \quad t_0 : \text{instant initial}$$

\* il peut avoir une signification physique : rapport de 2 masses, de 2 raideurs, de 2 concentrations,

\* pour un système linéaire, il peut être obtenu par le rapport des valeurs propres extrêmes correspondant aux deux parties :

$$\mu = \frac{|\lambda_{\max}(\text{partie lente})|}{|\lambda_{\min}(\text{partie rapide})|}$$



Pour  $\mu = 0$ , (I.73) devient :

$$(I.74) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, 0, t) & (a) \\ 0 = g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, 0, t) & (b) \end{cases}$$

La solution de l'équation algébrique (I.74-b),  $\bar{z} = h(\bar{x}, \bar{u}, t)$  conduit au système réduit de dimension  $n_1$ , caractérisant l'évolution de la partie lente réduite.

$$(I.75) \quad \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, h(\bar{x}, \bar{u}, t), \bar{u}, t)$$

Dans le cas linéaire, en régime autonome :

$$(I.76) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}z \\ \mu \dot{z} = A_{21}\bar{x} + A_{22}z \end{cases}$$

devient :

$$(I.77) \quad \dot{\bar{x}} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\bar{x}$$

Cette méthode est à rapprocher des méthodes à pôles dominants, puisque les valeurs propres de la matrice  $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$  approchent les  $n_1$  valeurs propres lentes, de même que les  $n_2$  valeurs propres rapides sont voisines de celles de  $A_{22}/\mu$ .

Le sens physiques des variables est conservé, puisque ce sont les variables d'état initiales qui sont utilisées. Un des avantages de cette méthode sur celles présentées précédemment, réside dans la prise en compte de l'effet de la partie négligée sur le système réduit, ce qui entraîne une plus grande précision dans les résultats.

Cette méthode est particulièrement adaptée pour répondre aux exigences de la réduction d'ordre décrites en préliminaire, pour des systèmes linéaires ou non linéaires. Elle entraîne une diminution de l'ampleur des calculs, une détermination plus aisée des correcteurs et une maîtrise approfondie du fonctionnement.

Nous détaillerons plus particulièrement dans le prochain paragraphe cette technique de réduction.

V - QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX CONCERNANT LES SYSTEMES A PLUSIEURS ECHELLES DE TEMPS

/Kokotovic et al, 1976 puis 1982/, /O'Reilly, 1982/, dans des articles de synthèse comportant une étude bibliographique très complète, ont fait le point sur les différents domaines d'application des techniques des perturbations singulières et sur les principaux résultats obtenus pour l'analyse et la synthèse des systèmes comportant plusieurs dynamiques.

Les problèmes concernent la réduction de l'ordre des systèmes, la stabilité /Grujić, 1976, 1978, 1979, 1981/ /Khalil, Kokotovic, 1979/, le calcul de trajectoires optimales /O'Malley, 1972/ /Wilde, Kokotovic, 1973/ /Sannuti, 1973/, les systèmes à retard, les équations aux dérivées partielles.

Ils s'appliquent aux systèmes stochastiques /Delebecque, Quadrat, 1978/ /Altshuler, Haddad, 1978/ /Bensoussan, 1981/ /Phillips, Kokotovic, Haddad, 1976/ /Haddad, Kokotovic, Khalil, 1978/ /Teneketzis, Sandell, 1977/, aux systèmes discrets /Phillips, 1980/ /Blankenship, 1981/ /Dorato, Levis, 1971/ /Guardabassi, 1982/ /Rao, Naïdu, 1981/ /Rajagopalan, Naïdu, 1980/ /Naïdu, Rao, 1981/ /Dauphin-Tanguy, Noël, Borne, 1982/.

V.1 - Cas général : systèmes non linéaires /Kokotovic et al, 1976/

Soit le système d'ordre élevé écrit sous la forme :

$$(I.78) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, z, u, \mu, t) & (a) & x \in \mathbb{R}^{n_1} \\ \mu \dot{z} = g(x, z, u, \mu, t) & (b) & z \in \mathbb{R}^{n_2} \end{cases}$$

Nous supposons que  $f$  et  $g$  sont deux fois continûment différentiables par rapport à tous leurs arguments. Le paramètre scalaire  $\mu$  représente tous les termes à négliger,  $\mu \in ]0, 1]$ .

Quand nous posons  $\mu = 0$ , l'équation (I.78-b) devient algébrique :

$$(I.79) \quad 0 = g(x_\ell, z_\ell, u_\ell, 0, t)$$

En supposant que cette équation admet au moins une racine réelle,

$$(I.80) \quad z_\ell = h(x_\ell, u_\ell, t)$$

et en substituant dans (I.78-a)

$$(I.81) \quad \dot{x}_\ell = f(x_\ell, h(x_\ell, u_\ell, t), u_\ell, 0, t)$$

nous obtenons un modèle simplifié dont l'état est  $x_\ell$

$$(I.82) \quad \dot{x}_\ell = \bar{f}(x_\ell, u_\ell, t) \quad x_\ell \in \mathbb{R}^{n_1}$$

La variable  $z$ , rapide, a disparu du modèle simplifié. Elle est remplacée par un substitut  $z_\ell$ , déduit de  $x_\ell$  et  $u_\ell$  par (I.80). Contrairement à la variable originelle  $z$ , partant à l'instant  $t_0$  avec la valeur  $z_0$ ,  $z_\ell$  n'est pas libre de partir de  $z_0$  et il peut y avoir une différence importante entre  $z_\ell(t_0) = h(x_\ell(t_0), u_\ell(t_0), t_0)$  et  $z(t_0, \mu) = z_0$ ;  $z_\ell$  ne peut donc pas être une approximation uniforme de  $z$ .

L'approximation

$$(I.83) \quad z(t, \mu) = z_\ell(t) + O(\mu)$$

est seulement valable en dehors du voisinage de  $t_0$ , c'est-à-dire pour  $t \in [t_1, T]$  avec  $t_1 > t_0$ .

Par contre, si nous prenons pour  $x_\ell(t_0)$  la condition initiale  $x(t_0)$ , alors l'approximation

$$(I.84) \quad x(t, \mu) = x_\ell(t) + O(\mu)$$

est uniforme, donc valable sur  $[t_0, T]$ .

Le problème posé est un problème de raccordement ("couche limite") entre les conditions initiales  $z(t_0)$  et le mouvement d'entraînement  $z_\ell(t)$  ( $t > t_0$ ) des variables rapides par les variables lentes  $x_\ell(t)$ .

Les conditions pour que cette approximation soit valable ont été données par /Tikhonov, 1952/. Elles reposent sur les hypothèses suivantes :

Posons :

$$\mu \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{t - t_0}{\mu}$$

(quand  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  sauf pour  $t = t_0$ ).

Pendant que  $z$  et  $\tau$  changent presque instantanément,  $x$  reste à la valeur initiale  $x_0$  et  $u$  à  $u_0$ . Pour décrire l'évolution de  $z$  en fonction de  $\tau$ , nous utilisons l'équation dite de "couche limite" déduite de (I.78-b)

$$(I.85) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{d\tau} = g(x_0, z(\tau), u_0, 0; t_0) \\ \text{avec} \quad z(\tau=0) = z_0 \end{array} \right.$$

Nous ajoutons alors à (I.83) la correction due à la couche limite

$$(I.86) \quad z(t, \mu) = z_\ell(t) + z(\tau) - z_\ell(t_0) + o(\mu)$$

La validité de (I.83) (I.84) et (I.86) dépend des propriétés de stabilité de (I.85).

#### Hypothèse 1

Le point d'équilibre  $z_\ell(t_0)$  de (I.85) est asymptotiquement stable,  $z(\tau)$  part de  $z_0$  et  $z_0$  appartient au domaine d'attraction du point d'équilibre  $z_\ell(t_0)$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = z_\ell(t_0)$$

#### Hypothèse 2

Les valeurs propres de  $\partial g / \partial \tau$  évaluées le long de  $(x_\ell(t), z_\ell(t), u_\ell(t))$ , pour tout  $t \in [t_0, T]$  sont à parties réelles négatives.

Théorème /Tikhonov, 1952/

Si les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites, alors l'épaisseur de la couche limite  $(t_0, t_1)$  peut être rendue arbitrairement petite en choisissant  $\mu$  suffisamment petit.

De plus, (I.84) et (I.86) sont vérifiées pour  $t \in [t_0, T]$  et (I.83) est vérifiée pour  $t \in [t_1, T]$ .

V.2 - Développement asymptotique

Lorsque l'approximation à l'ordre zéro est insuffisante, une méthode habituelle, détaillée par /O'Malley, 1974/ /Hoppensteadt, 1974/ présentée pour des applications mécaniques par /François, 1981/ consiste à déterminer les développements asymptotiques des fonctions  $f$  et  $g$  par rapport à  $\mu$ .

En supposant  $f$  et  $g$  infiniment dérivables, on obtient :

$$(I.87) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, z, u, t, \mu) = \sum_{i=0}^N f_i(x, z, u, t) \cdot \mu^i + o(\mu^{N+1}) \\ g(x, z, u, t, \mu) = \sum_{i=0}^N g_i(x, z, u, t) \cdot \mu^i + o(\mu^{N+1}) \end{array} \right.$$

Les solutions  $x(t)$  et  $z(t)$  des équations (I.78) ainsi modifiées se présentent sous forme d'une combinaison d'une partie rapide, dépendant de  $\tau$  et d'une partie lente dépendant de  $t$ ,

$$(I.88) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = X(t) + \xi(\tau) \\ z(t) = Z(t) + \eta(\tau) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \xi(\tau) \rightarrow 0 \text{ quand } \tau \rightarrow \infty \\ \eta(\tau) \rightarrow 0 \text{ quand } \tau \rightarrow \infty \end{array}$$

et admettent un développement asymptotique

$$(I.89) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(t) = \sum_{i=0}^N X_i(t) \mu^i + o(\mu^{N+1}) \\ \xi(\tau) = \sum_{i=0}^N \xi_i(\tau) \mu^i + o(\mu^{N+1}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} Z(t) = \sum_{i=0}^N Z_i(t) \mu^i + o(\mu^{N+1}) \\ \eta(\tau) = \sum_{i=0}^N \eta_i(\tau) \mu^i + o(\mu^{N+1}) \end{array} \right.$$

La solution du système (I.78) est obtenue par  $X(t)$  et  $Z(t)$  quand le raccordement est effectué.

Chacun des termes  $X_i(t)$  et  $Z_i(t)$  est obtenu, par identification des termes de même puissance en  $\mu$ , en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$(I.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_0}{dt} = f(X_0, Z_0, u, 0, t) \\ 0 = g(X_0, Z_0, u, 0, t) \\ X_0(0) = x(0) \end{array} \right.$$

et pour  $i = 1, \dots, N$

$$(I.91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, X_0, Z_0, t) X_i + \frac{\partial f_i}{\partial z}(t, X_0, Z_0, t) Z_i + p_i(t) \\ \frac{dZ_{i-1}}{dt} = \frac{\partial g_i}{\partial x}(t, X_0, Z_0, t) X_i + \frac{\partial g_i}{\partial z}(t, X_0, Z_0, t) Z_i + q_i(t) \end{array} \right.$$

Les fonctions  $p_i(t)$  et  $q_i(t)$  dépendent de  $t, X_0, Z_0, \dots, X_{i-1}, Z_{i-1}$  et sont obtenues directement au moment de l'identification.

### V.3 - Présentation dans le cas linéaire de la méthode des perturbations singulières

Nous supposons ici que les problèmes de modélisation sous forme d'un système singulièrement perturbé sont résolus (la discussion à ce sujet sera faite dans le deuxième chapitre).

Le système (S) se présente donc sous la forme (I.92) :

$$(I.92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u \quad x(0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}^{n_1} \\ \mu \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u \quad z(0) = z_0 \quad z \in \mathbb{R}^{n_2} \\ y = C_1x + C_2z \end{array} \right.$$

avec  $\mu \in ]0 ; 1]$ .

### V.3.1 - Etude de la partie lente

Après la phase initiale où la partie rapide est prépondérante, les modes rapides deviennent négligeables, ce qui revient au même que de les considérer comme infiniment rapides, donc de faire tendre  $\mu$  vers zéro.

Pour  $\mu = 0$ , les variables  $x$ ,  $z$ ,  $u$ ,  $y$  de (I.92) sont approchées par  $x_\ell$ ,  $z_\ell$ ,  $u_\ell$ ,  $y_\ell$

$$(I.93) \quad \begin{cases} \dot{x}_\ell = A_{11}x_\ell + A_{12}z_\ell + B_1u_\ell & (a) \\ 0 = A_{21}x_\ell + A_{22}z_\ell + B_2u_\ell & (b) \\ y_\ell = C_1x_\ell + C_2z_\ell \end{cases}$$

L'équation (a) décrit l'évolution des variables lentes, les variables rapides ont atteint leur régime quasi-permanent. Le système n'est plus que d'ordre  $n_1$ .

L'équation (b) décrit le mouvement d'entraînement des composantes lentes des variables rapides,  $z_\ell$  par les variables lentes  $x_\ell$ .

L'équation d'état associée à la partie lente s'écrit alors, si  $A_{22}^{-1}$  existe :

$$(I.94) \quad \begin{cases} \dot{x}_\ell = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) x_\ell + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2) u_\ell \\ y_\ell = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}) x_\ell - C_2A_{22}^{-1}B_2 u_\ell \end{cases}$$

avec  $x_\ell(0) = x(0)$ .

Le système réduit obtenu comporte une transmission directe de l'information.

### V.3.2 - Etude de la partie rapide

Pour définir la partie rapide, nous supposons que les variables lentes du système sont immobiles pendant les transitoires rapides, c'est-à-dire :

$$(I.95) \quad \dot{x}_\ell = 0 \iff x_\ell = \text{constante}$$

Les composantes rapides des variables sont définies de façon suivante :

$$(I.96) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_r = 0 \\ z_r = z - z_\ell \\ u_r = u - u_\ell \\ y_r = y - y_\ell \end{array} \right.$$

En calculant la différence entre le système réel et le système lent simplifié, l'équation caractérisant la partie rapide est alors :

$$(I.97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \dot{z}_r = A_{22} z_r + B_2 u_r \\ y_r = C_2 z_r \\ z_r(0) = z(0) + A_{22}^{-1} A_{21} x(0) \end{array} \right. \quad \text{d'après (I.93-b)}$$

Le système global apparaît ainsi découplé temporellement. Selon le domaine de fréquences pris en compte, le système réduit sera constitué de la partie lente ou de la partie rapide.

#### V.4 - Quelques exemples de systèmes à plusieurs dynamiques

Les domaines d'application de cette méthode sont très variés et concernent aussi bien les problèmes de mécanique classique ou céleste /François, 1981/, le pilotage d'un avion ou d'une fusée /Calise, 1976, 1979/, les systèmes électriques /Desoer, 1977/, les systèmes fournisseurs d'énergie /Delebecque, Quadrat, 1978/ /Avramovic et al, 1980/ /Winkelman et al, 1980/, les réactions chimiques de cinétiques variées, les procédés de diffusion /Cohen et al, 1977/, les processus biologiques /Lakin et al, 1977/, l'évaluation des politiques de maintenance pour des systèmes complexes réparables /Muron, 1980/.

La simplification d'un système par élimination des dynamiques rapides peut dans certains cas entraîner des modifications de structure qui se rapprochent plutôt des premières méthodes de réduction précédemment



envisagées.

Ainsi, considérons le cas d'un système non linéaire de type Lur'e Postnikov bouclé à travers un grand gain.

Le système sans bouclage additionnel est représenté par les équations (I.27) avec le triplet  $(\bar{A}_c^*, \bar{B}_c^*, C_c)$  sous la forme (I.28). Soit :

$$(I.98) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & / & / & & | \\ 0 & & & & 1 \\ \hline -a_0 & -f^*b_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} & -f^*b_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ \hline f^* \end{bmatrix} u$$

Si on boucle le système à travers un grand gain  $g$ , la commande  $u$  est de la forme :

$$(I.99) \quad u = g \begin{bmatrix} k_0 & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix} x$$

qui entraîne, pour le système bouclé,

$$(I.100) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & / & / & & | \\ 0 & & & & 1 \\ \hline -a_0 & -f^*b_0 + gf^*k_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} & -f^*b_{n-1} + gf^*k_{n-1} \end{bmatrix} x$$

Il est alors possible de partitionner le système, en faisant apparaître le petit coefficient  $\mu = 1/g$ , sous forme d'un modèle à deux dynamiques.

$$(I.101) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \frac{1}{g} \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{-a}{g} - \frac{f \cdot b}{g} + f \cdot k_0 & \dots & \dots & \dots & \frac{-a_{n-1}}{g} - \frac{f \cdot b_{n-1}}{g} + f \cdot k_{n-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Le système réduit correspondant, pour  $\mu = 0$  ( $g \rightarrow \infty$ ) est alors :

$$(I.102) \quad \dot{x}_\ell = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \cdot k_{n-1} \\ \dots \\ f \cdot k_0 \dots f \cdot k_{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \cdot k_0 \dots f \cdot k_{n-2} \\ \dots \\ f \cdot k_{n-1} \end{bmatrix} \right\} x_\ell$$

soit

$$(I.103) \quad \dot{x}_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -k_0 / k_{n-1} & \dots & \dots & \dots & -k_{n-2} / k_{n-1} \end{bmatrix} x_\ell$$

Le système réduit d'état  $x_\ell$  est de dimension  $n-1$ . Il est linéaire, totalement indépendant du système initial et seulement fonction de la loi de retour  $u$ , toutes les caractéristiques non linéaires ayant été reportées sur la partie rapide.



Ce résultat peut être utilisé pour simplifier l'étude du système correspondant par linéarisation du modèle non linéaire, également comme méthode de placement de pôles, l'équation caractéristique du système correspond en effet à :

$$(I.104) \quad k_{n-1} p^{n-1} + k_{n-2} p^{n-2} + \dots + k_0 = 0$$

Un autre exemple spécifique concerne le problème de l'influence des dynamiques des capteurs et actionneurs sur les performances du système bouclé. Lorsqu'il est nécessaire, pour satisfaire les spécifications imposées d'utiliser des gains de boucle élevés, les modes créés par le bouclage sont accélérés et peuvent atteindre l'ordre de grandeur des modes des actionneurs et capteurs. Le dilemme Précision-Rapidité se pose alors : faut-il négliger, comme parasite, les dynamiques des capteurs et actionneurs, qui en boucle ouverte sont effectivement négligeables, ou faut-il introduire dans le modèle ces dynamiques au risque de se heurter à des problèmes de calcul liés à l'augmentation de l'ordre ou à un mauvais conditionnement ?

La méthode des perturbations singulières permet de mettre en évidence ces phénomènes d'interaction modes propres-modes créés. Elle permet de justifier la pratique courante qui consiste à négliger les modes capteurs et actionneurs quand la bande passante en Basse Fréquence du système bouclé est inférieure à celle de ces éléments.

CONCLUSION

Il n'y a donc pas de modèle universel, ni de méthode de réduction générale. Des critères de choix existent, fondés sur le but poursuivi et le domaine d'application concerné. Les méthodes linéaires sont en pratique les plus utilisées car elles peuvent être mises en œuvre très simplement et de façon systématique. La méthode des perturbations singulières, encore peu connue au niveau direct de l'utilisateur est actuellement en grand développement.

Elle apparaît comme une technique très importante de réduction de dimensionnalité, avec des champs d'application très variés.

Dans les prochains chapitres, nous étudierons le problème de la modélisation sous forme de systèmes à plusieurs échelles de temps et de la mise en évidence de ces dynamiques.



CHAPITRE II



ETUDE DES SYSTEMES A DEUX DYNAMIQUES

INTRODUCTION

Après un exposé récapitulatif des méthodes analytiques permettant de déterminer les variables lentes et rapides d'un système dynamique et de les séparer, nous proposons une méthode géométrique, fondée sur la localisation des modes dans le plan complexe, qui renseigne de façon simple sur les possibilités de découplage des parties de dynamiques différentes, et qui s'applique au cas non linéaire, contrairement aux méthodes analytiques classiques.

Lorsque la modélisation sous forme d'un système à deux dynamiques permet l'application de la méthode des perturbations singulières, le système découplé alors obtenu dépend de la forme de représentation d'état initialement choisie. La forme en flèche pour la matrice caractérisant le système global se révèle très intéressante et conduit, dans le cas de systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov, à une détermination très simplifiée et directement exploitable numériquement du système découplé. Elle permet d'énoncer une condition suffisante de stabilité asymptotique des systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov, qui est même, dans certains cas, une condition nécessaire et suffisante de stabilité. La détermination de la commande quasi-optimale dans le cas linéaire se fait de façon plus économique puisqu'elle nécessite seulement la résolution de l'équation de Riccati correspondant aux variables lentes, avec la précision obtenue habituellement pour la commande composite portant sur les variables lentes et rapides.

Lorsque l'étude concerne le comportement haute fréquence du système, les transitoires rapides, ou les phénomènes de parasites, la méthode des perturbations singulières ne donne pas suffisamment de précision, lors du découplage, pour le sous-système rapide. Nous introduisons ici une nouvelle notion de système réciproque, qui conduit à une inversion du comportement fréquentiel et dynamique du système étudié. La partie rapide est alors obtenue par l'application conjointe de la transformation réci-



proche et de la méthode des perturbations singulières, avec beaucoup plus de précision puisqu'elle prend en compte l'influence de la partie lente.

Cette approche conduit à une représentation multi-modèle du système global.

I - PRESENTATION DES METHODES ANALYTIQUES DE MISE EN EVIDENCE DES DYNAMIQUES

I.1 - Définitions d'un système à double échelle des temps

Définition 1 :

Un système linéaire stationnaire caractérisé par l'équation d'état :

$$(II.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

possède la propriété de double échelle des temps s'il peut être décomposé en deux sous-systèmes :

$$(II.2) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_\ell \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_r \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_\ell & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell \\ x_r \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} x_\ell \in \mathbb{R}^{n_1} \\ x_r \in \mathbb{R}^{n_2} \end{cases} \quad n_1 + n_2 = n$$

et si les valeurs propres de  $A_\ell$  et  $A_r$  sont telles que :

$$(II.3) \quad |\lambda_{\max}(A_\ell)| \ll |\lambda_{\min}(A_r)|$$

Si on suppose, comme /Chow, Kokotovic, 1976/, que le système initial est stable ou déjà stabilisé et que les valeurs propres sont telles que :

$$|\operatorname{Im} \lambda(A)| \ll |\operatorname{Re} \lambda(A)|$$

alors, la relation (II.3) indique une décroissance vers zéro de  $e^{A_r t}$  plus rapide que celle de  $e^{A_\ell t}$ .

Toute matrice carrée A et sa norme euclidienne  $\|A\|$  vérifient la relation :

$$|\lambda_{\max}(A)| \leq \|A\|$$

et si  $A^{-1}$  existe,

$$|\lambda_{\min}(A)|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$$

Cette propriété permet d'en déduire une nouvelle définition.

Définition 2 :

Le système (II.1), décomposé sous forme (II.2) possède la propriété de double échelle des temps si :

$$(II.4) \quad \|A_r^{-1}\| \ll \|A_\ell\|^{-1}$$

I.2 - Mise sous forme bloc-diagonale

Dans le cas de systèmes linéaires, l'existence de plusieurs échelles de temps et des sous-systèmes associés peut être mise en évidence par les méthodes classiques de transformation modale et de bloc-diagonalisation. Le système (II.1) décomposé en (II.5) :

$$(II.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \end{array}$$

correspond à une partition, pour l'instant arbitraire du vecteur état initial.

Par la transformation

$$(II.6) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(II.5) devient :

$$(II.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & A_{12} \\ R(L) & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_r \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_\ell & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

avec :

$$(II.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_\ell = A_{11} - A_{12} L \\ A_r = A_{22} + L A_{12} \\ R(L) = A_{21} + L A_{11} - L A_{12} L - A_{22} L \\ B_r = L B_1 + B_2 \\ C_\ell = C_1 - C_2 L \end{array} \right.$$

Le système (II.7) est bloc-triangularisé si  $R(L) = 0$ , donc si  $L$  est solution de l'équation de Riccati suivante :

$$(II.9) \quad A_{21} + L A_{11} - L A_{12} L - A_{22} L = 0$$

La transformation suivante :

$$(II.10) \quad \begin{bmatrix} x_\ell \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix}$$

modifie le système (II.7) (en prenant  $R(L) = 0$ ) sous la forme :

$$(II.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_\ell \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & R(M) \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_r \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_\ell & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell \\ x_r \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

avec :

$$(II.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(M) = A_{12} + A_\ell M - M A_r \\ B_\ell = B_1 - M B_r \\ C_r = C_2 + C_\ell M \end{array} \right.$$

Le système (II.11) apparaît alors sous forme bloc-diagonale si la matrice M est solution de l'équation de Lyapunov :

$$(II.13) \quad A_{12} + A_\ell M - M A_r = 0 = R(M)$$

L'existence et le calcul des solutions L et M des équations (II.9) et (II.13) ont été étudiées par de nombreux auteurs /Kokotovic, 1975/ /Chow, Kokotovic, 1976/ /Magni, 1981/ /Avramovic, 1979/ /Anderson, 1978/.

Le but de la bloc-diagonalisation est de rassembler dans le vecteur état  $x_\ell$  les composantes lentes et dans le vecteur  $x_r$  les composantes rapides.

La solution L de (II.9) doit donc réaliser cette contrainte ; elle n'est pas unique puisqu'elle dépend aussi de l'ordre dans lequel sont prises les composantes du vecteur état.

Plusieurs méthodes de détermination de L existent : leur validité et la précision des résultats dépendent de la séparation plus ou moins marquée des modes et de la connaissance "à priori" des variables lentes et des variables rapides.

I.3 - Méthodes de détermination des matrices L et M

I.3.1 - Calcul de suites  $L_k$  et  $M_k$

Une première approche proposée par /Kokotovic, 1975/, appliquée par /Chow, Kokotovic, 1976/, consiste à définir une suite :

$$(II.14) \quad \begin{cases} L_{k+1} = A_{22}^{-1} (A_{21} + L_k A_{11} - L_k A_{12} L_k) \\ L_0 = A_{22}^{-1} A_{21} \end{cases}$$

qui converge vers une racine réelle bornée de (II.9) si les conditions suivantes sont réalisées :

$$(II.15) \quad \begin{cases} \cdot A_{22} \text{ inversible} \\ \cdot \|A_{22}^{-1}\| \leq \frac{1}{3 (\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|)} \end{cases}$$

avec :

$$(II.16) \quad A_0 = A_{11} - A_{12} L_0$$

Cette approximation de L est valable pour de faibles valeurs de  $\|A_{22}^{-1}\|$ .

De plus,

$$(II.17) \quad \|L_{k+1} - L\| \leq \|L_k - L\| \quad k = 0, 1, \dots$$

En particulier, écrire  $k=0$  dans (II.14) conduit à :

$$(II.18) \quad L_1 - L_0 = A_{22}^{-1} L_0 A_0$$

soit :

$$(II.19) \quad \frac{\|L_1 - L_0\|}{\|L_0\|} \leq \|A_{22}^{-1}\| \|A_0\|$$

Si l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$(II.20) \quad \|A_{22}^{-1}\| \leq \mu \|A_0\|^{-1} \quad \text{avec} \quad \mu \in ]0 ; 1 ]$$

alors

$$(II.21) \quad \frac{\|L_1 - L_0\|}{\|L_0\|} < \mu$$

ce qui permet d'utiliser  $L_0$  comme une approximation à  $0(\mu)$  de  $L$ , ainsi,

$$(II.22) \quad L = L_0 + 0(\mu) = A_{22}^{-1} A_{21} + 0(\mu)$$

d'où :

$$(II.23) \quad \begin{cases} A_l = A_{11} - A_{12} L = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} + A_{12} 0(\mu) \\ A_r = A_{22} + L A_{12} = A_{22} + A_{22}^{-1} A_{21} A_{12} + A_{12} 0(\mu) \end{cases}$$

Si le système (II.5) vérifie une condition plus sévère que (II.15),

$$(II.24) \quad \|A_{22}^{-1}\| \ll (\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|)^{-1}$$

alors (II.23) s'écrit :

$$(II.25) \quad \begin{cases} A_l = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} + 0(\mu) \\ A_r = A_{22} + 0(\mu) \end{cases}$$

De la même façon, la solution  $M$  de l'équation (II.13) peut être calculée par la récurrence :

$$(II.26) \quad \begin{cases} M_{k+1} = \left[ (A_{11} - A_{12} L) M_k - M_k L A_{12} \right] A_{22}^{-1} + A_{12} A_{22}^{-1} \\ M_0 = A_{12} A_{22}^{-1} \end{cases}$$

avec  $L = L_0 + 0(\mu)$  obtenue par (II.18)

ce qui donne :

$$(II.27) \quad M = A_{12} A_{22}^{-1} + O(\mu)$$

Il faut noter qu'un système, caractérisé par les équations (II.1), peut posséder la propriété de double échelle de temps sans que les relations (II.15-b) et (II.24) soient vérifiées. On est alors amené à effectuer des opérations de permutation et de calibrage.

### I.3.2 - Utilisation des valeurs propres et vecteurs propres

La recherche de la solution L peut aussi se faire à partir du calcul des valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.

Ainsi, supposons que les valeurs propres de A sont distinctes et soit  $V_1$  la matrice des vecteurs propres associés ( $V_1$  de dimension  $n \times n_1$ ); comme  $x_r$  ne contient aucun des modes de  $A_0$  et que  $x_r = L x_1 + x_2$ , la relation suivante est vérifiée :

$$(II.28) \quad [L, I] V_1 = 0$$

En partitionnant  $V_1$  en  $\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}$  avec  $V_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$  et  $V_{21} \in R^{n-n_1 \times n_1}$ , et en supposant  $V_{11}$  inversible, la solution L assurant la séparation des modes est obtenue par :

$$(II.29) \quad L = -V_{21} V_{11}^{-1}$$

La matrice L ainsi obtenue est indépendante du calibrage des vecteurs propres.

Au lieu de considérer la matrice des vecteurs propres à droite et de prendre en compte la matrice des vecteurs propres  $V_1$  associée aux  $n_1$  modes lents, il est possible de déterminer  $W_2$ , matrice des vecteurs propres à gauche associée aux  $n_2$  modes rapides.

$W_2$  partitionnée en  $\begin{bmatrix} W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$  conduit à la solution :

$$(II.30) \quad L = W_{22}^{-1} W_{21}$$



Cette méthode de détermination de L nécessite la connaissance exacte des valeurs propres et vecteurs propres associés de A.

Deux algorithmes de calcul existent, fondés sur le même principe que précédemment, mais qui ne demandent au départ que des valeurs approchées.

Le premier, dû à /Anderson, 1978/ a pour but d'améliorer la précision sur L (ou M) en dépit des erreurs initiales.

Soit  $L_0 = -V_{21} V_{11}^{-1}$ , la valeurs initiale calculée de L. L'erreur de fermeture de l'équation de Riccati (II.9), à l'étape i :

$$(II.31) \quad R_i = A_{21} + L_i A_{11} - L_i A_{12} L$$

donne une idée de la précision obtenue dans le calcul de L. Si  $\|R_i\| > \epsilon$ ,  $L_i$  est corrigé par :

$$(II.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{i+1} = L_i + D_i \\ \text{avec} \\ D_i = (A_{22} + L_i A_{12})^{-1} R_i \end{array} \right.$$

jusqu'à ce que  $\|R_i\|$  devienne inférieur à  $\epsilon$ .

L'algorithme converge d'autant plus rapidement que la séparation dynamique est plus grande.

En effet, on a l'équivalence suivante :

$$\frac{\|R_{i+1}\|}{\|R_i\|} \approx \frac{|\text{valeur propre lente la + rapide}|}{|\text{valeur propre rapide la + lente}|} = \frac{|\lambda_{n_1}|}{|\lambda_{n_1+1}|}$$

(si les valeurs propres sont ordonnées en module croissant).

De la même façon, la matrice M peut être calculée de manière itérative :

$$(II.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{i+1} = M_i + D_i \\ M_0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} D_i = R_i A_r^{-1} \\ R_0 = A_{12} \end{array} \right.$$

$$(II.34) \quad R_{i+1} = A M_i - M_i A_r + A_{12}$$

Le deuxième algorithme, dû à /Avramovic, 1979/ repose sur le calcul itératif de la solution L sous la forme (II.30), par calcul du sous-espace propre à gauche associé aux  $n_2$  valeurs propres rapides.

La récurrence est la suivante :

$$(II.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} (W_{21_{k+1}}, W_{22_{k+1}}) = S_k (W_{21_k}, W_{22_k}) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ (W_{21_{(0)}}, W_{22_{(0)}}) \text{ valeur initiale calculée} \end{array} \right.$$

où  $S_k$  est une matrice de calibrage, régulière, de dimension  $n_2 \times n_2$ .

A chaque itération,

$$(II.36) \quad L_k = W_{22_{(k)}}^{-1} \cdot W_{21_{(k)}}$$

satisfait la relation suivante :

$$(II.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{k+1} = L_k + (A_{22} + L_k A_{12})^{-1} R(L_k) \\ \text{avec :} \\ \left\{ \begin{array}{l} R(L_k) = A_{21} + L_k A_{11} - L_k A_{12} L_k - A_{22} L_k \\ L_0 = A_{22}^{-1} A_{21} \end{array} \right. \quad (I.9) \end{array} \right.$$

et converge vers  $L = W_{22}^{-1} W_{21}$  (II.30).

Le principal avantage de cet algorithme réside dans le fait que le nombre  $n_2$  de composantes rapides est redéfini au cours du procédé d'itération. Le calcul permute l'ordre des états jusqu'à ce que les dernières  $n_2$  colonnes de  $(W_{21}, W_{22})$  constituant  $W_{22}$  soient les plus linéairement indépendantes possible. Ceci ne demande donc pas une connaissance initiale très précise des paramètres  $n_1$  et  $n_2$ .

Une solution due à /Magni, 1981/ fait appel aux polynômes annulateurs de A et ne demande que le calcul des vecteurs propres.

Soient  $\Psi$  un polynôme annulateur de A de dimension  $n_1 + n_2 = n$ , et  $\Psi_1, \Psi_2$  deux polynômes tels que :

$$(II.38) \quad \Psi_1 \cdot \Psi_2 = \Psi$$

( $\Psi$  peut être le polynôme caractéristique de A).

Les racines de  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  appartiennent à deux ensembles  $C_1$  et  $C_2$  de valeurs propres de A tels que :

$$\begin{cases} C_1 \cap C_2 = \emptyset \\ C_1 \cup C_2 = C \end{cases}$$

( $C_1$  regroupe les valeurs propres lentes et  $C_2$  les valeurs propres rapides)

et engendrent des matrices de vecteurs propres,  $X_1$  et  $X_2$ .

Soient  $N(\Psi_i(A))$  la matrice formée par les vecteurs  $v$  tels que  $\Psi_i(A) \cdot v = 0$ , de dimension  $n \times n_i$ , ( $i = 1, 2$ ) et P la matrice de changement de base telle que :

$$(II.39) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_l \\ x_r \end{bmatrix}$$

qui permet de diagonaliser la matrice A du système (II.5). La matrice P est obtenue par :

$$(II.40) \quad P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & M \\ -L & I-LM \end{bmatrix}$$

/Magni, 1981/ a montré que P est obtenue à partir des matrices  $N(\Psi_i(A))$  par :

$$(II.41) \quad P = [N(\Psi_1(A)) ; N(\Psi_2(A))]$$

La matrice  $N(\Psi_1(A))$  peut être partitionnée en  $\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$  et  $N(\Psi_2(A))$  en  $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ .

Il existe une permutation de  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  telle que  $S$  soit régulière. Pour cette permutation, la matrice  $V - TS^{-1}U$  est aussi régulière et on obtient :

$$(II.42) \quad \begin{cases} L = -TS^{-1} \\ M = U(V + LU)^{-1} \end{cases}$$

Les matrices  $\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$  peuvent être calculées à partir des vecteurs propres de  $A$ , ce qui se rapproche sensiblement de la méthode précédente :  $\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}$ .

Une autre démarche consiste, après avoir calculé  $\Psi_1(A)$ , à opérer de la façon suivante :

- 1) Chercher une permutation des états telle que :

$$\text{rang} \left[ \Psi_1(A) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix} \right] = n_2$$

- 2) Pour cette permutation,  $L$  est solution de :

$$\Psi_1(A) \cdot \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ -L \end{bmatrix} = 0.$$

ce qui ne nécessite que l'inversion d'une matrice  $n_2 \times n_2$ .

Une variante de cette méthode permet d'éviter tout calcul de vecteurs propres, de rang, d'inversion de matrice, en se limitant à des combinaisons linéaires des  $n_2$  dernières colonnes avec les  $n_1$  premières d'une matrice de dimension  $2n \times n$  définie par :

$$(II.43) \quad M = \begin{bmatrix} \Psi_1(A) \\ I_n \end{bmatrix}$$

de manière à faire apparaître la forme :

$$(II.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} n \\ n_1 \\ n_2 \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \Psi_1(A) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \hline I & 0 \\ \hline -L & I \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n_2}$

mettant en évidence la matrice (-L) cherchée.

Les conditions d'existence d'une solution L réside dans la non singularité, soit de  $V_{11}$  dans (II.29), soit de  $S^{-1}$  dans (II.42).

On montre (/Magni, 1981/) qu'une condition nécessaire pour que L existe est que les modes ingouvernables de  $(A_{11}, A_{12})$  soient dans  $A_\ell$  et les modes inobservables de  $(A_{22}, A_{12})$  soient dans  $A_r$ . Ceci découle des équations (II.8-a et II.8-b).

Dans la mesure où l'on a en général multiplicité des solutions pour L, pour  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  donnés, suivant l'ordre des états de x, une solution de norme minimale ou une solution de forme spéciale (par exemple un seul élément non nul par ligne, égal à -1) est souvent recherchée.

### 1.3.3 - Cas des systèmes singulièrement perturbés

Comme il a été vu dans le chapitre précédent, un modèle singulièrement perturbé fait apparaître un petit paramètre  $\mu \in ]0 ; 1]$  en facteur multiplicatif de la dérivée d'une partie du vecteur état sous la forme :

$$(II.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \mu \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2^* \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_1 \in R^{n_1} \quad x_2 \in R^{n_2} \end{array} \right.$$

Avec cette notation, les matrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}^*$ ,  $A_{22}^*$ ,  $B_1$ ,  $B_2^*$  sont à priori du même ordre de grandeur.

En présentant ce système sous la forme (II.5) on aurait :

$$A_{21} = \frac{A_{21}^*}{\mu} \quad A_{22} = \frac{A_{22}^*}{\mu} \quad B_2 = \frac{B_2^*}{\mu}$$

Les quantités précédemment définies  $L_0$  dans (II.14) et  $A_0$  dans (II.16) sont indépendantes de  $\mu$ .

$$(II.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0 = A_{22}^{-1} A_{21} = \left[ \frac{A_{22}^*}{\mu} \right]^{-1} \cdot \frac{A_{21}^*}{\mu} = A_{22}^{*-1} A_{21}^* \\ A_0 = A_{11} - A_{12} L_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \end{array} \right.$$

Si  $\mu$  est suffisamment petit, la relation (II.24) est satisfaite.

$$\left\| \left[ \frac{A_{22}^*}{\mu} \right]^{-1} \right\| = \mu \left\| A_{22}^{*-1} \right\| \ll (\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|)^{-1}$$

Il en résulte, à une précision  $O(\mu)$  près :

$$(II.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = L_0 = A_{22}^{-1} A_{21} \\ A_l = A_{11} - A_{12} L_0 \\ A_r = A_{22} = A_{22}^* / \mu \end{array} \right.$$

Ce résultat peut être bien obtenu à partir de (II.45) en faisant tendre  $\mu$  vers 0, c'est ce qui est fait habituellement (Chapitre I - § V).

Les équations de Riccati et Lyapunov définissant  $L$  et  $M$  s'écrivent respectivement :

$$(II.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{21}^* - A_{22}^* L + \mu L (A_{11} - A_{12} L) = 0 \\ A_{12} + (A_{11} - A_{12} L) M - \frac{M}{\mu} (A_{22}^* + \mu L A_{12}) = 0 \end{array} \right.$$

Quand  $\mu \rightarrow 0$ , il est clair que  $L \rightarrow L_0 = A_{22}^{-1} A_{21}^*$  et que M est de l'ordre de  $\mu A_{12} A_{22}^{*-1}$ .

Pour trouver une valeur exacte de L, plusieurs solutions sont possibles, soit utiliser une méthode itérative présentée § I.3, soit chercher une solution de la forme  $L = L_0 + \mu G$  limitée au premier ordre.

#### I.3.4 - Cas d'une séparation dynamique peu marquée

Dans la pratique, et surtout quand il s'agit de décomposer un système global de grande dimension, l'existence de deux classes dynamiques très séparées est assez rare et le premier problème qui se pose est de définir  $n_1$  et  $n_2$ .

Deux classes de méthodes existent :

- la première suppose la connaissance des valeurs propres et/ou des vecteurs propres,

- la deuxième s'affranchit de cette contrainte.

##### a) Valeurs propres et/ou vecteurs propres connus :

La méthode proposée par /Syracos, Sannuti, 1982/ consiste non seulement à déterminer l'ordre  $n_1$  des variables lentes, mais aussi à mettre le système sous forme singulièrement perturbée.

Il s'agit donc de trouver  $n_1$  et  $n_2$ , et l'ordre des variables pour que, après permutation et calibrage, le système initial (II.5) vérifie la propriété (II.24).

Pour cela, après avoir ordonné toutes les valeurs propres selon les modules croissants et calculé la matrice des vecteurs propres normalisés correspondants  $V = [V_1, V_2]$ , la transformation :

$$(II.49) \quad X = V \hat{X} = V_1 \hat{X}_1 + V_2 \hat{X}_2$$

est appliquée au système (II.5) ce qui le met sous la forme :

$$(II.50) \quad \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres lentes étant dans  $\hat{A}_1$ , les valeurs propres rapides dans  $\hat{A}_2$ .

Si on note  $R_{\ell_i}$  et  $R_{r_i}$  les normes euclidiennes des  $i^{\text{ème}}$  lignes de  $V_1$  et  $V_2$ , pour chaque état  $x_i$ , le rapport des composantes lentes aux composantes rapides peut être exprimé par :

$$(II.51) \quad R_i = \frac{R_{\ell_i}}{R_{r_i}}$$

Pour une première approximation en deux classes, estimée à partir du spectre de valeurs propres, les indices  $R_i$  sont calculés. Les états associés aux  $n_1$  plus grandes valeurs de  $R_i$  sont ceux qui contiennent le plus fort pourcentage de modes lents.

Si, pour  $n_1$  choisi, on constate une séparation nette entre les indices  $R_i$  ( $i = 1, \dots, n_1$ ) et  $R_i$  ( $i = n_1+1, \dots, n_1+n_2$ ), la valeur supposée  $n_1$  est retenue. Sinon, elle est modifiée. Ceci peut entraîner une séparation différente de celle estimée sur la base des valeurs propres.

b) Valeurs propres inconnues :

Lorsque ni le nombre, ni les valeurs des valeurs propres ne sont connues, un premier essai est fait à priori, avec la méthode proposée par /Magni, 1981/. Soit  $n_1$  le nombre des valeurs propres lentes, supposées toutes nulles. Le polynôme annulateur de  $A$ ,  $\Psi_1$  associé à ces  $n_1$  valeurs propres est  $p^{n_1}$ . Par la méthode exposée en (I.3 - b), on en déduit une matrice  $L^* = -TS^{-1}$  avec  $N(\Psi_1(A)) = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$  qui met la matrice  $A$  sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{\ell}^* & A_{12} \\ R(L^*) & A_r^* \end{bmatrix}$$



le terme  $R(L^*)$  n'étant nul que si le système a effectivement  $n_1$  valeurs propres nulles : la norme de  $R(L^*)$  est une indication du nombre de valeurs propres lentes. Lors d'une exploration pour des valeurs successives de  $n_1$ ,  $\|R(L^*)\|$  passe par un minimum quand la séparation des valeurs propres est correcte.

Les valeurs propres de  $A_\ell^*$  et  $A_r^*$ , associées au minimum de  $\|R(L^*)\|$  sont proches des valeurs propres réelles à cause de la pseudo-triangularisation correspondante.

## II - METHODE GEOMETRIQUE DE MISE EN EVIDENCE DES DYNAMIQUES

D'après l'exposé des méthodes analytiques de détermination de la forme singulièrement perturbée du modèle initial, il ressort que la principale difficulté réside dans le choix des composantes du vecteur état qui composeront la partie lente et la partie rapide du système, c'est-à-dire dans le partitionnement du système initial (II.5). Toutes ces méthodes reposent sur le calcul exact ou la détermination approchée des valeurs propres du système. Le problème se complique dans le cas non linéaire et il n'existe plus alors de méthode adaptée.

Différents domaines ont été définis pour la localisation des valeurs propres dans le plan complexe ; régions de Gudkov /Chambat, 1981/, disques de Gershgorine /Bauer, 1968/ /Deif, 1982/, ainsi que des homotopies permettant de transformer un domaine en un autre (par exemple le demi-plan complexe à gauche de l'axe imaginaire en cercle unité) /Gutman, Jury, 1981/ /Barnett, Scraton, 1982/. Les disques de Gershgorine ont été appliqués à des études de stabilité /Limebeer, 1982/ /Gentina, 1976/. Nous proposons ici une méthode, fondée sur la détermination des cercles de Gershgorine, qui permet de mettre en évidence les dynamiques d'un système /Dauphin-Tanguy, Borne, 1982/.

### Définition :

Si  $A$  est la matrice caractérisant le système, d'éléments  $\{a_{ij} ; i, j = 1, \dots, n\}$ , alors les valeurs propres de  $A$  appartiennent au domaine formé par l'union des cercles de rayons respectifs  $R_i$  et de centres  $a_{ii}$  définis par :

$$(II.52) \quad |\lambda - a_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = R_i$$

Ces cercles de Gershgorine (d'après le théorème de Gershgorine) définis ici en ligne peuvent être également définis en colonnes par :

$$(II.53) \quad |\lambda - a_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$$

Théorème :

Si les cercles  $C_i (a_{ii}, R_i)$  et  $C_k (a_{kk}, R_k)$  sont tels que  $|a_{ii} - a_{kk}| \gg (R_i + R_k) \forall i \in I_i$  et  $\forall k \in I_k$ , avec  $I_i \cap I_k = \emptyset$ , alors la matrice  $A$  possède deux ensembles de valeurs propres séparées, de modules très différents.

La précision du résultat dépend du rapport  $\varepsilon$  :

$$(II.54) \quad \varepsilon = \max_{\substack{i \in I_i \\ k \in I_k}} \frac{R_i + R_k}{|a_{ii} - a_{kk}|}$$

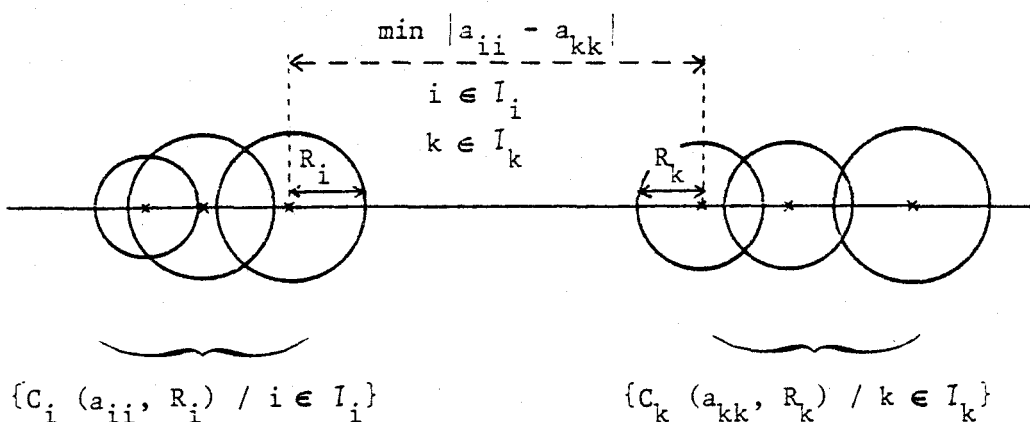
qui doit être inférieur à 1.

Démonstration :

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ii} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Les cercles de Gershgorine associés à A apparaissent sur la figure suivante :



Il est évident, d'après la figure, que si la relation :

$$(R_i + R_k) < |a_{ii} - a_{kk}| \quad \forall i \in I_i \quad \forall k \in I_k$$

est vérifiée alors les cercles de Gershgorine associés à A peuvent être regroupés en deux domaines disjoints, associés à deux sous-ensembles de valeurs propres disjoints, d'où l'existence de deux dynamiques différentes.

Plusieurs cas sont à envisager :

- Pour un système linéaire, la matrice peut être bien conditionnée (diagonale dominante par exemple) ou mal conditionnée (cas d'une matrice de type Compagnon).

- Pour un système non linéaire, il s'agit alors de déterminer le plus grand domaine de variation des valeurs propres obtenues lors de la variation des termes non constants.

## II.1 - Systèmes linéaires

### II.1.1 - Matrice bien conditionnée

Ces systèmes sont généralement représentés par une matrice ayant des termes non nuls dans la diagonale, et de préférence à diagonale dominante.

Il est parfois utile, pour diminuer les rayons des cercles, d'effectuer un calibrage des termes hors diagonaux, c'est-à-dire un changement de base de matrice diagonale  $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ . La détermination d'une matrice diagonale optimale  $S$  peut être envisagée, comme l'indique /Mees, 1981/ pour un autre domaine d'étude, concernant la stabilité des systèmes linéaires, en utilisant la théorie de Perron-Frobenius pour les matrices non négatives /Limebeer, 1982/.

En application, nous proposons l'exemple suivant concernant un générateur de vapeur étudié par /Chow, Kokotovic, 1976/ et caractérisé par le système :

$$(II.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A x \\ \text{avec :} \\ A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 4.75 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.167 & -0.167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0.025 & 0.0233 & 0.035 & -0.1125 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Chow et Kokotovic utilisent la méthode exposée précédemment qui consiste à vérifier la condition (II.24) :

$$(II.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|A_{22}^{-1}\| \ll (\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|)^{-1} \\ \text{où :} \\ L_0 = A_{22}^{-1} A_{21} \quad \text{et} \quad A_0 = A_{11} - A_{12} L_0 \end{array} \right.$$

Un premier calcul de (II.24), non concluant, entraîne une première transformation de  $A$ , par permutation des variables, de matrice de passage  $P = (e_4, e_5, e_2, e_3, e_1)$  où  $e_i$  est un vecteur colonne élémentaire dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est la seule non nulle égale à 1, regroupant les variables supposées lentes et les variables supposées rapides.

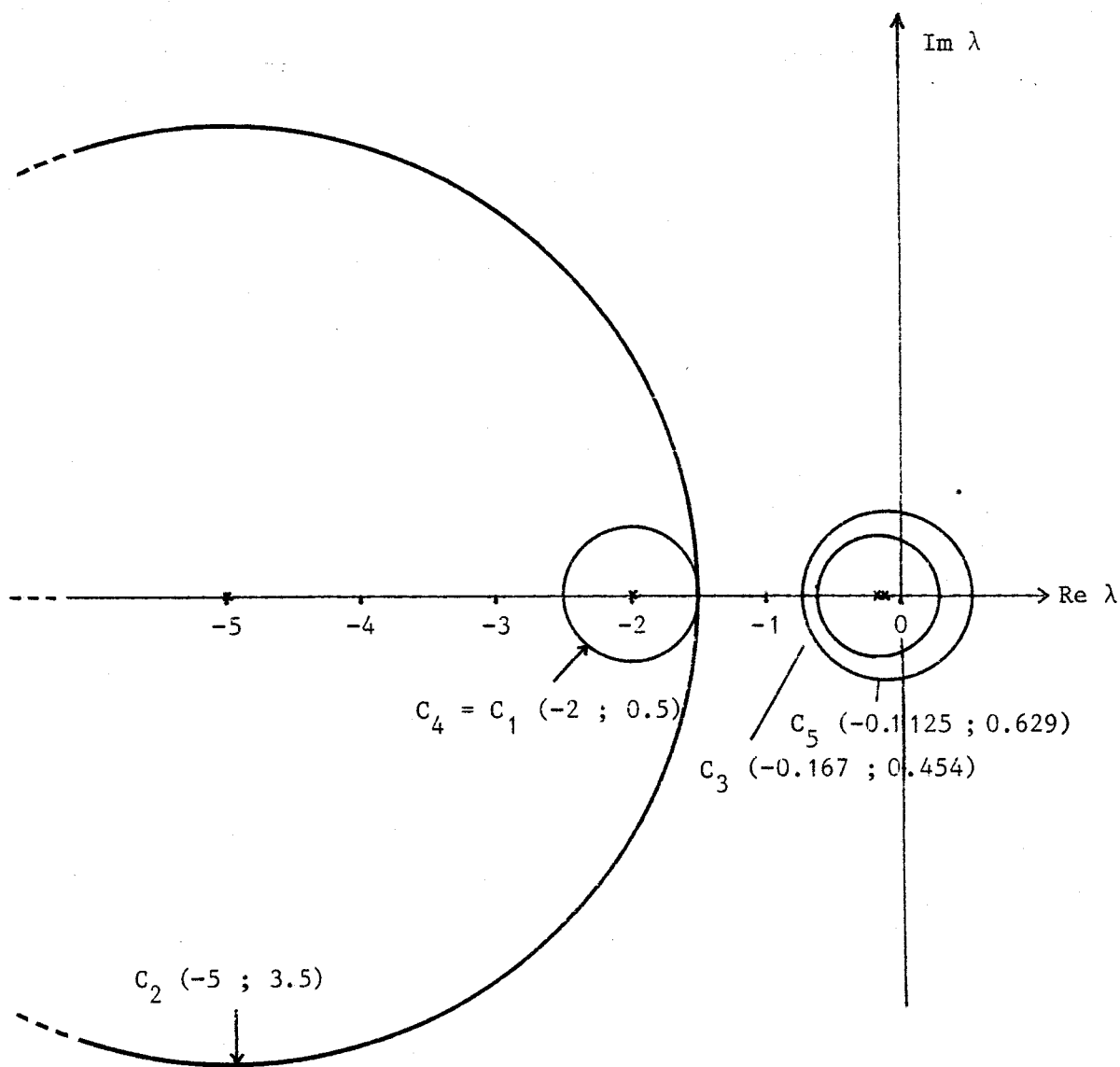
Une autre vérification, encore négative, montre la nécessité d'un calibrage par  $S = \text{diag}(4, 1, 1, 2, 1)$ , ce qui entraîne alors la réalisation de la condition (II.24) et la séparation en 2 variables lentes et 3 variables rapides.

La méthode proposée ici consiste en un simple changement de base diagonal et en un tracé de cercles, et nécessite moins de calcul.

Par  $S = \text{diag} (1, 1.36, 0.5, 1, 0.125)$ ,  $A$  devient :

$$(II.56) \quad A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 3.5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.454 & -0.167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0 \\ 0 & 0.272 & 0.092 & 0.28 & -0.1125 \end{bmatrix}$$

d'où le tracé suivant :





Les éléments  $\alpha_i$  peuvent être choisis librement sous les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \neq \alpha_j \quad \text{pour} \quad i \neq j \\ \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right.$$

Le critère de choix retenu pour  $\alpha_i$  consiste à minimiser les termes hors diagonaux de  $\bar{A}_C$  pour obtenir des rayons minimaux pour les cercles de Gershgorine. Il faut donc choisir les termes  $(-\alpha_i)$  les plus voisins possible des racines du polynôme  $P(\lambda)$ .

Plusieurs cas sont à envisager :

- Les racines de  $P(\lambda)$  sont connues, réelles, distinctes, et constantes ; alors, la matrice  $\bar{A}_C$  peut se mettre sous forme diagonale puisque les termes  $P(-\alpha_i)$  sont tous nuls, la conclusion concernant la propriété de multi-échelle peut être obtenue directement.

- Les racines de  $P(\lambda)$  sont inconnues ou le polynôme  $P(\lambda)$  est à coefficients non constants. Nous proposons une méthode de détermination approchée des racines d'un polynôme, consistant en une estimation de leur ordre de grandeur et de multiplicité.

#### II.1.2.1 - Détermination approchée des racines d'un polynôme :

Pour simplifier la présentation de la méthode, nous développerons ici le cas d'un polynôme de dimension  $n$ , pour lequel il est possible de séparer les racines en trois sous-ensembles, le  $i^{\text{ème}}$  possédant  $n_i$  racines voisines de  $(-\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  ;  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ . La méthode consiste à simplifier l'étude en considérant comme égales les  $n_i$  racines voisines de  $\lambda_i$ .

Il vient :

$$(II.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(\lambda) = (\lambda + \lambda_1)^{n_1} (\lambda + \lambda_2)^{n_2} (\lambda + \lambda_3)^{n_3} \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \\ P(\lambda) = \sum_{i=0}^n \sigma_i \lambda^i \end{array} \right.$$

avec :

$$(II.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n-p} = \sum_{\substack{i \leq n_1 \\ j \leq n_2 \\ k \leq n_3 \\ i+j+k=n-p}} C_{n_1}^i \lambda_1^i C_{n_2}^j \lambda_2^j C_{n_3}^k \lambda_3^k \\ \sigma_n = 1 \end{array} \right.$$

Ainsi, le terme  $\sigma_{n-1}$  s'écrit :

$$\sigma_{n-1} = C_{n_1}^1 \lambda_1 + C_{n_2}^1 \lambda_2 + C_{n_3}^1 \lambda_3 = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + n_3 \lambda_3$$

Dans l'hypothèse réelle (ou dans le cas complexe quand la partie réelle est très grande en valeur absolue devant la partie imaginaire), la condition  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$  permet d'approcher la valeur de  $\lambda_1$  par  $\sigma_{n-1} / n_1$ . Mais d'autres possibilités sont également offertes suivant les valeurs des paramètres  $n_i$ .

Dans le cas général, les valeurs  $\lambda_i$  estimées sont à choisir parmi les valeurs suivantes, correspondant respectivement à  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , pour différentes valeurs de  $p$  variant de 1 à  $n$ , et en faisant des hypothèses successives sur  $n_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

$$(II.59) \quad \frac{C_{n_1}^{n-p+1}}{C_{n_1}^{n-p}} \frac{\sigma_{n-p}}{\sigma_{n-p+1}} ; \frac{C_{n_2}^{n-p-n_1-1}}{C_{n_2}^{n-p-n_2}} \frac{\sigma_{n-p}}{\sigma_{n-p+1}} ; \frac{C_{n_3}^{n-p-n_1-n_2-1}}{C_{n_3}^{n-p-n_1-n_2}} \frac{\sigma_{n-p}}{\sigma_{n-p+1}}$$

La valeur  $\lambda_i$  retenue est celle qui minimise l'expression  $P(-\lambda_i)$ .

Exemple 1 :

Soit le polynôme de degré 3 suivant :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 11.6 \lambda^2 + 16.15 \lambda + 1.5$$

L'application de la méthode précédente conduit aux estimations rapides suivantes :



$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = 1 \quad \lambda_1 = \sigma_2 = 11.6 \rightarrow P(-\lambda_1) = - 185.84 \\ n_2 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1.392 \rightarrow P(-\lambda_2) = - 1.201 \\ n_3 = 1 \quad \lambda_3 = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} = 0.093 \rightarrow P(-\lambda_3) = 0.0976 \end{array} \right.$$

Les estimations de  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  donnent des valeurs faibles pour  $P(-\lambda_i)$ ,  $i = 2, 3$ . Un recalage peut être fait pour  $\lambda_1$  par  $\lambda_1 = \sigma_2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 10.115$ , ce qui donne pour  $P(-10.115) = -9.91$ .

Les valeurs réelles des racines de  $P(\lambda)$  sont en fait  $(-10 ; -1.5 ; -0.1)$  au lieu de  $(-10.115 ; -1.392 ; -0.093)$  ce qui correspond à une précision suffisante pour l'application présente.

Exemple 2 :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 22 \lambda^2 + 140 \lambda + 200$$

Lors d'une première approximation (en testant les valeurs de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  et les  $\lambda_i$  associées), les meilleurs résultats obtenus correspondent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = 2 \quad \lambda_1 = \frac{\sigma_2}{2} = 11 \rightarrow P(-11) = - 9.00 \\ n_2 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1.429 \rightarrow P(-1.429) = + 41.947 \end{array} \right.$$

ce qui nécessite une correction pour  $\lambda_2$ , valeur la plus défavorable.

Après recalage par  $\sigma_0$  et  $\sigma_2$ , les valeurs retenues sont :

- une racine double  $(-10.0065)$  : valeur réelle  $(-10)$ ,
- une racine simple  $(-1.997)$  : valeur réelle  $(-2)$ .

### II.1.2.2 - Mise sous forme en flèche de la matrice caractéristique :

La matrice en flèche  $\bar{A}_C$  est alors obtenue en choisissant pour  $\alpha_i$  les valeurs approchées  $\lambda_i$  calculées précédemment. Si le polynôme admet des racines multiples, il faut choisir dans ce cas des  $\alpha_i$  de même ordre de grandeur, mais distinctes, ce qui correspond à un ensemble de modes groupés (Les termes  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) doivent être tous positifs).

La matrice  $\bar{A}_C$  s'écrit alors :

$$\bar{A}_C = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & -\lambda_i & & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & -P(-\lambda_i) & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1}$

$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i - a_{n-1}$

et par souci d'optimisation des rayons des cercles de Gershgorine, un changement de base diagonal, de matrice R, normalise les termes symétriques par rapport à la diagonale.

$$R = \text{diag} (R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, 1)$$

avec :

$$(II.60) \quad R_i = \sqrt{\frac{|P(-\lambda_i)|}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |\lambda_j - \lambda_i|}} \quad i = 1, \dots, n-1$$

En posant :

$$(II.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{signe } n_i) = \text{signe} (-P(-\lambda_i)) \quad i = 1, \dots, n-1 \\ (\text{signe } i_n) = \text{signe} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_i) \end{array} \right.$$



## II.2 - Systèmes non linéaires

L'avantage de la méthode proposée apparaît nettement pour des systèmes caractérisés par une matrice à coefficients non constants.

### II.2.1 - Matrice bien conditionnée

La méthode proposée précédemment pour les systèmes linéaires bien conditionnés s'applique ici directement sur une majorante du système initial obtenue par le choix de la norme  $p(x) = [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|]^T$ .

Les cercles de Gershgorine constituent alors un faisceau de cercles de centres variables  $(-a_{ii}(\cdot))$  et de rayons majorés fixes  $\sum_{j=1}^n \max |a_{ij}(\cdot)|$ .

Soit par exemple, le système représenté par la matrice :

$$(II.63) \quad A = \begin{bmatrix} -1 - 0.1 \sin y & -0.9 - 0.1 \sin y & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ -9 + 0.1 \sin y - e^{-|y|} & 0.9 + 0.1 \sin y & -10 - e^{-|y|} \end{bmatrix}$$

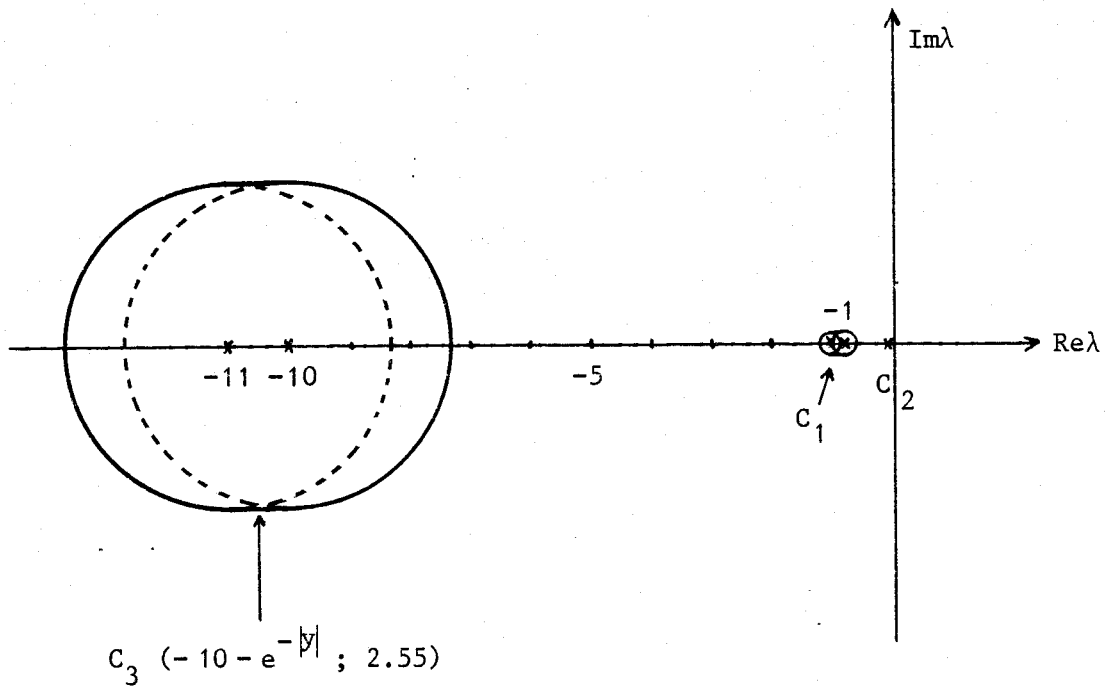
La matrice majorante obtenue par la norme  $p(x)$  précédemment définie est alors :

$$(II.64) \quad M(A) = \begin{bmatrix} 1 - 0.1 \sin y & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 10.1 & 1 & -10 - e^{-|y|} \end{bmatrix}$$

ce qui donne après calibrage par la matrice diagonale  $D = [0.25; 0.025; 1]$

$$(II.65) \quad \bar{M}(A) = \begin{bmatrix} -1 - 0.1 \sin y & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 2.525 & 0.025 & -10 - e^{-|y|} \end{bmatrix}$$

ce qui conduit au tracé suivant :



Donc trois dynamiques distinctes caractérisées par les rapports :

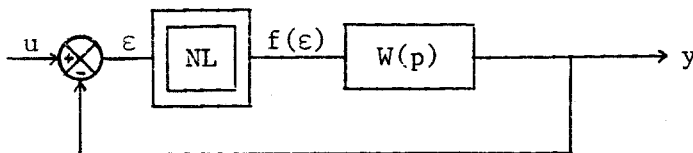
$$\max_y (\varepsilon_1) = \frac{2.55 + 0.1}{|10 - 1.1|} = 0.298$$

et

$$\max_y (\varepsilon_2) = \frac{0.1}{|+0.9 - 0.1|} = 0.125$$

### II.2.2 - Matrice mal conditionnée pour un système de type Lur'e Postnikov

Le schéma bloc d'un tel système est le suivant :



où

$$\begin{cases} f(\varepsilon) = f^*(\varepsilon) \cdot \varepsilon \\ f^*(\varepsilon) \in [\underline{f} ; \bar{f}] \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{et} \quad W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

La représentation d'état, sous forme d'une matrice compagnon  $\bar{A}_C^*$ , présentée dans (I.29), peut être mise sous la forme en flèche suivante :

$$(II.66) \quad \bar{A}_C^* = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & -\alpha_i & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ \dots & -P(-\alpha_i, f^*) & \dots & \dots & \cdot \\ & & & \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - a_{n-1} - f^* b_{n-1} & \cdot \end{bmatrix}$$

où  $P(\lambda, f^*) = D(\lambda) + f^* N(\lambda)$

représente le polynôme caractéristique du système. Deux étapes vont être effectuées pour la mise en œuvre de la méthode :

a) Recherche des coefficients  $\alpha_i$  :

Les valeurs des éléments  $\alpha_i$  correspondent aux valeurs des racines de  $P(\lambda, f_0^*) = D(\lambda) + f_0^* N(\lambda)$  avec  $f_0^* = (\underline{f} + \bar{f}) / 2$ , déterminées soit par la méthode d'estimation rapide des racines du polynôme, soit plus précisément par le calcul numérique.

b) Recherche des cercles de Gershgorine :

Les éléments non constants sont isolés dans la dernière ligne et sont tous des fonctions linéaires de la non linéarité  $f^*$ . Leurs valeurs extrêmes sont donc obtenues aux bornes de l'intervalle de variation  $[\underline{f}, \bar{f}]$  de  $f^*$ . L'ensemble des cercles est alors formé de :

- . (n-1) cercles à centre et rayon fixes
- . 1 faisceau de cercles à centre variable et rayon fixe.

A titre d'exemple, étudions le système suivant caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot W(p) = \frac{p^2 + 6p + 5}{p^3 + 11.3p^2 + 13.12p + 1.2} \\ \cdot f^* \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda, f^*) = \lambda^3 + (11.3 + f^*)\lambda^2 + (13.12 + 6f^*)\lambda + 1.2 + 5f^*$$

Pour  $f^* = f_0^* = 0.5$ , les valeurs approchées des racines de  $P(\lambda, f_0^*)$  retenues sont (en valeur absolue) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 10.204 \\ \lambda_2 = 1.366 \\ \lambda_3 = 0.230 \end{array} \right.$$

ce qui entraîne :

$$\begin{array}{l} P(-\lambda_1, f^*) = -18.559 + 47.9 f^* \begin{array}{l} \nearrow - 18.559 \text{ pour } f^* = 0 \\ \searrow 29.338 \text{ pour } f^* = 1 \end{array} \\ P(-\lambda_2, f^*) = 1.814 - 1.33 f^* \begin{array}{l} \nearrow 1.814 \text{ pour } f^* = 0 \\ \searrow 0.484 \text{ pour } f^* = 1 \end{array} \end{array}$$

Les rayons maximaux pour les cercles de Gershgorine sont alors :

$$(II.67) \quad R_i = \max_{f^*} \sqrt{\frac{|P(-\lambda_i, f^*)|}{2 \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} (\lambda_j - \lambda_i)}}$$

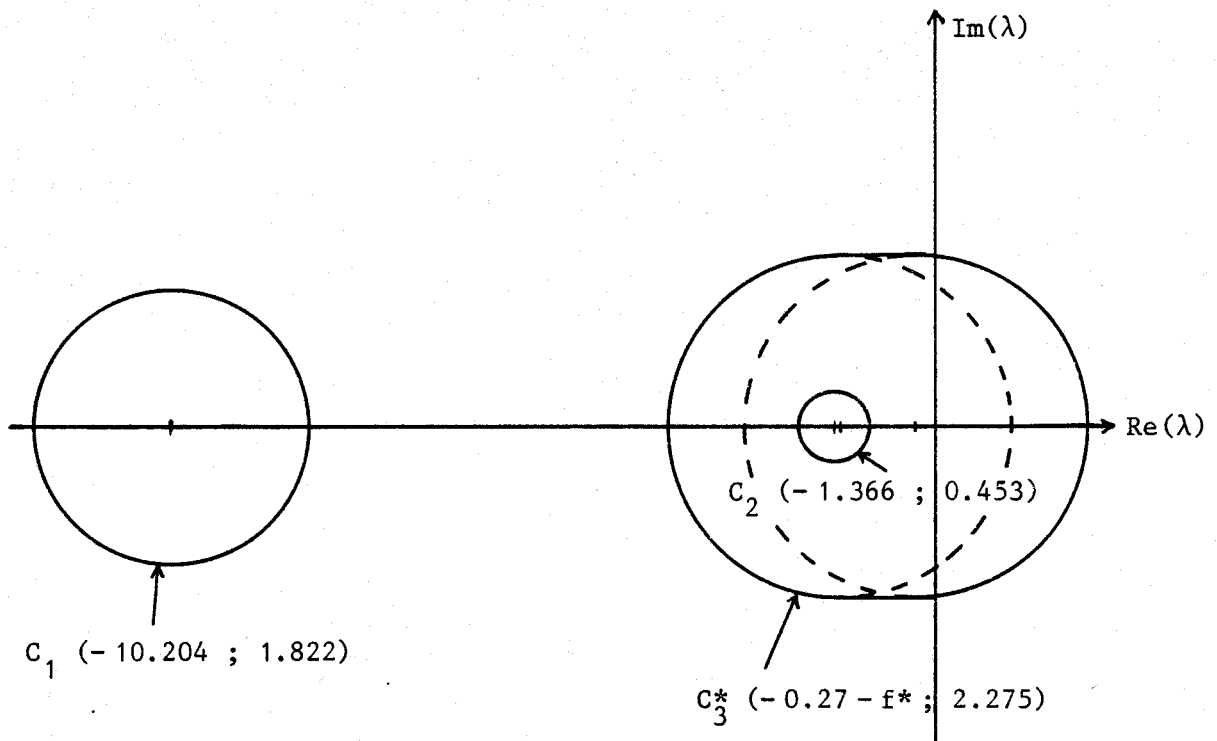
ce qui donne :

$$R_1 = 1.822 \quad R_2 = 0.453$$

Le centre du cercle  $C_3$ , correspondant à :

$$\lambda_1 + \lambda_2 - 11.3 - f^* = -0.27 - f^*$$

varie entre  $-0.27$  ( $f^* = 0$ ) et  $-1.27$  ( $f^* = 1$ ), ce qui donne le faisceau de cercles  $C_3^*$ , d'où le tracé des cercles :



Le coefficient  $\varepsilon$  précédemment défini est ici :

$$\varepsilon = \frac{(2.275 + 1.822)}{|10.204 - 1.366|} = 0.463$$

ce qui donne une très bonne séparation des dynamiques en deux blocs.

### II.2.3 - Systèmes fortement non linéaires avec matrice Compagnon

Cette méthode s'applique à tout type de système pouvant être caractérisé par une matrice de forme Compagnon (voir Chapitre I).

De l'équation différentielle à coefficients non constants ou directement de la matrice d'état, il suffit de déduire la matrice en flèche associée en choisissant les termes  $\alpha_i$  comme précédemment, c'est-à-dire correspondant aux racines du polynôme caractéristique moyen  $P_{\text{moyen}}(\lambda, .)$  obtenu en prenant la valeur moyenne des termes non constants, et ensuite en majorant les termes hors-diagonaux.

A titre d'exemple, considérons le système non linéaire représenté par l'équation différentielle suivante :



$$(II.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(y) y^{(3)} + \beta(y) y^{(2)} + \gamma(y) y^{(1)} + y = u \\ \text{avec :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha(y) = 1 + 0.1 e^{-|y|} \\ \beta(y) = 11.1 + 0.11 e^{-|y|} \\ \gamma(y) = 11.1 + 0.01 e^{-|y|} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La matrice d'état associée peut être de forme Compagnon, si on choisit comme vecteur état  $\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ y \end{bmatrix}$ , puisque les dérivées de l'entrée n'interviennent pas. Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$(II.69) \quad P(\lambda, y) = \lambda^3 + \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} \lambda^2 + \frac{\gamma(y)}{\alpha(y)} \lambda + \frac{1}{\alpha(y)}$$

$$\text{avec} \quad \begin{array}{l} 0.91 < \frac{1}{\alpha(y)} < 1 \\ 11.1 < \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} < 12.33 \\ 11.1 < \frac{\gamma(y)}{\alpha(y)} < 12.22 \end{array}$$

Le polynôme  $P_{\text{moyen}}(\lambda) = \lambda^3 + 11.715 \lambda^2 + 11.66 \lambda + 0.955$  admet comme racines approchées :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_1 = -10.638 \\ -\lambda_2 = -0.995 \\ -\lambda_3 = -0.082 \end{array} \right.$$

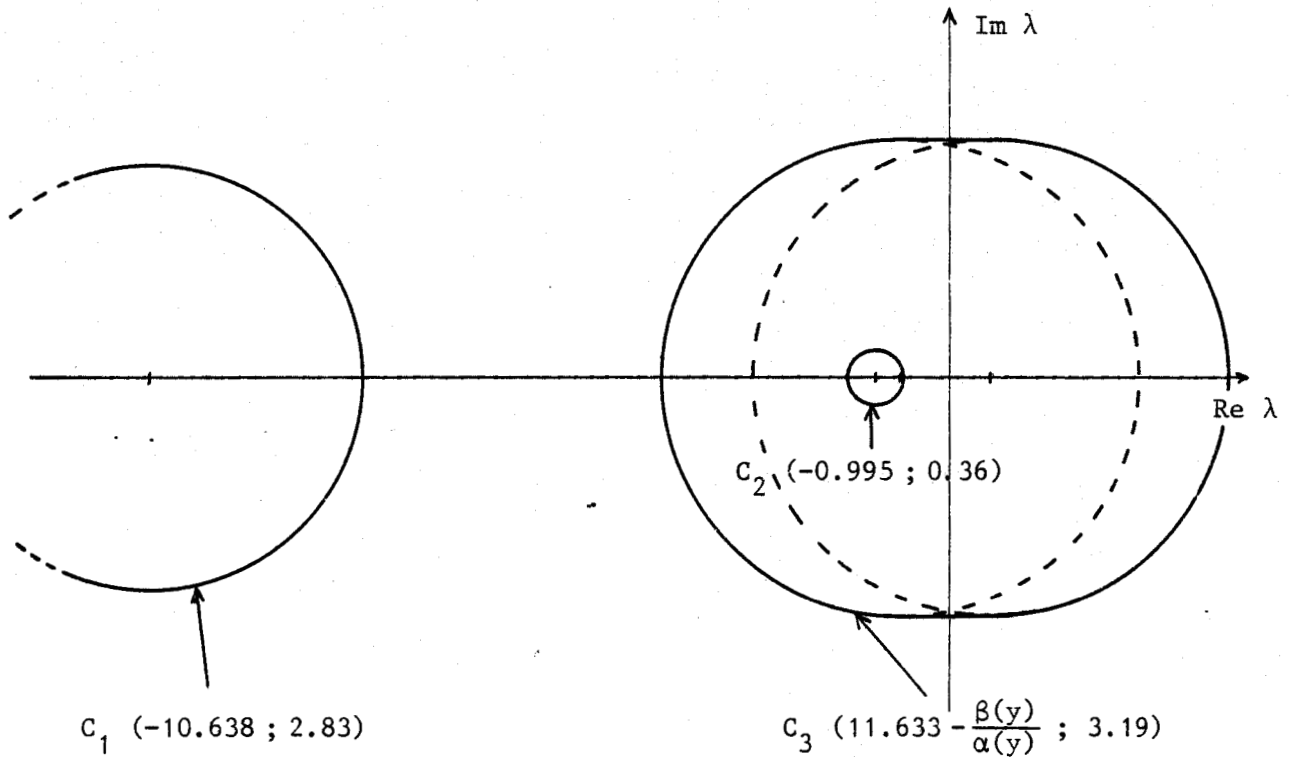
La matrice en flèche associée est alors :

$$(II.70) \quad \bar{A}_C(y) = \begin{bmatrix} -10.638 & 0 & -0.104 \\ 0 & -0.995 & 0.104 \\ -P(-10.628, y) & -P(-0.995, y) & 11.633 - \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} \end{bmatrix}$$

ce qui donne les rayons maximaux des cercles de Gershgorine :

$$R_1 = 2.83$$

$$R_2 = 0.36$$



Les cercles sont séparés en deux sous-ensembles, correspondant au rapport :

$$\epsilon = \frac{2.83 + 3.19}{|10.638 - 0.995|} = 0.627$$

### II.3 - Interprétation des résultats

Cette méthode géométrique de mise en évidence des dynamiques sélectionne parmi les  $n$  composantes du vecteur état initial les composantes lentes et les composantes rapides et les groupe en 2 ou plusieurs sous-ensembles de dynamiques différentes.

Cette approche permet alors une ré-organisation de la matrice caractéristique initiale, par permutation. Elle ne concerne aucunement la bloc-diagonalisation du système comme les méthodes analytiques précédentes, mais permet, par un choix approprié du petit paramètre  $\mu$ , de modéliser le système sous forme d'un système singulièrement perturbé.

Ce paramètre  $\mu$  peut être choisi de multiples façons :

- en accord avec des caractéristiques physiques du processus étudié : rapport de masses, de raideurs, de concentrations, ...

- comme rapport des échelles de temps  $(t - t_0) / \tau$  des parties lentes ( $t$ ) et rapides ( $\tau$ ), avec  $t_0$ , instant initial

- correspondant au rapport des normes des parties lentes et rapides réduites

$$\frac{\|A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}\|}{\|A_{22}\|}$$

- égal au coefficient  $\varepsilon$  précédemment défini en (II.54), qui indique le degré de séparation des domaines définis par les cercles de Gershgorine.

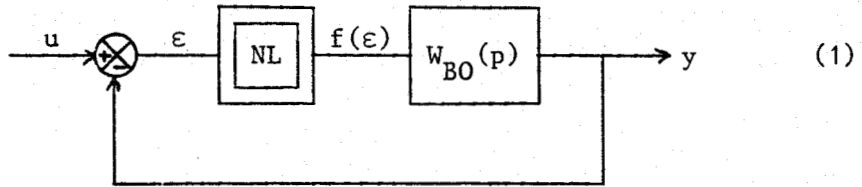
Il faut dans ce cas tenir compte du fait que  $\varepsilon$  dépend du conditionnement de la matrice, et qu'une optimisation peut être rendue nécessaire dans certains cas pour rendre la matrice la plus diagonale dominante possible, minimisant ainsi les rayons des cercles donc  $\varepsilon$ .

De nombreux résultats (stabilité, optimalité, ...) étant obtenus avec une précision  $O(\mu)$ , le choix de  $\mu$  égal à  $\varepsilon$  ne se justifie que pour de faibles valeurs de  $\varepsilon$  inférieures à 0.5.

### III - MODELISATION ET DECOUPLAGE TEMPOREL DE SYSTEMES DE TYPE LUR'E POSTNIKOV

La classe de systèmes non linéaires pris en compte ici concerne les systèmes de type Lur'e Postnikov, pour lesquels il est possible de mettre en évidence deux dynamiques différentes, quelle que soit la variation de la non linéarité  $f^*$  dans l'intervalle  $[\underline{f}, \bar{f}]$ .

Le système étudié, représenté par le schéma-bloc suivant



et modélisé pour la partie linéaire par la fonction de transfert en boucle ouverte  $W_{BO}(p)$ , peut également être représenté par le bloc-diagramme :



où  $W_{BF}(\lambda, f^*)$  est "l'opérateur symbolique de transfert scalaire" en boucle fermée du système, définie en (I.30). L'intérêt de ce bouclage unitaire porte sur l'analyse du système /Benrejeb, Borne, Laurent, 1982/.

Nous nous proposons ici d'étudier le comportement dynamique de ce type de système et d'effectuer un découplage temporel partie lente/ partie rapide par la méthode des perturbations singulières, pour une forme de représentation.

### III.1 - Mode de représentation utilisé

Le système représenté sous forme schéma-bloc (2) est modélisé dans l'espace d'état sous forme (I.29) composé du triplet  $(A_c^*, B_c^*, C_c^*)$  avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - f^* b_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} - f^* b_{n-1} \end{bmatrix} \\ B_c^* = [0 \quad \dots \quad 0 \quad f^*]^T \quad C_c^* = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] \end{array} \right.$$

où les  $a_i$  et  $b_i$  ( $i=0, \dots, n-1$ ) sont respectivement les coefficients du dénominateur  $D_{B_0}(p)$  et du numérateur  $N_{B_0}(p)$  de la fonction de transfert  $W_{B_0}(p)$ .

Par le changement de base défini dans le Chapitre I, la forme Compagnon (I.29) se transforme en une matrice en flèche et le triplet correspondant est alors  $(\bar{A}_c^*, \bar{B}_c^*, \bar{C}_c^*)$ , soit :

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_c^* &= \begin{bmatrix} \cdot & & & & & & \cdot \\ & \cdot & & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & -\alpha_i & & \beta_i \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_i^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha_n^* \end{bmatrix} \\
 \text{avec} & \quad \cdot \beta_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_j - \alpha_i)^{-1} \\
 & \quad \cdot \gamma_i^* = -P(-\alpha_i, f^*) \\
 & \quad \text{où } P(\lambda, f^*) \text{ est le polynôme caractéristique} \\
 & \quad \text{de } \bar{A}_c^*, \text{ c'est-à-dire le dénominateur de} \\
 & \quad W_{BF}(\lambda, f^*) \\
 & \quad \cdot \alpha_n^* = \sum_{i=1}^{n-1} (-\alpha_i) + a_{n-1} + f^* b_{n-1} \\
 \bar{B}_c^* &= [0 \dots 0 \quad f^*]^T = B_c^* \\
 \bar{C}_c^* &= [N(-\alpha_1), N(-\alpha_2), \dots, N(-\alpha_{n-1}), b_{n-1}]
 \end{aligned}
 \tag{II.71}$$

Le premier problème qui se pose concerne la mise en évidence des dynamiques et la modélisation sous forme d'un système singulièrement perturbé. Nous utiliserons la méthode présentée dans le paragraphe précédent.

Par le choix des coefficients  $\alpha_i$ , le système étudié, modélisé sous forme (II.71) se trouve directement sous forme singulièrement perturbée. En effet, les éléments  $\alpha_i$  correspondent aux valeurs (approchées ou exactes) des racines du polynôme

$$P(\lambda, f_o^* = \frac{f + \bar{f}}{2})$$

et sont ordonnés par module décroissant ( $|\alpha_i| > |\alpha_j|$  pour  $i < j$ ), ce qui permet, après vérification par la méthode géométrique, présentée précédemment, de partitionner le système en deux blocs de dynamiques différentes, ainsi :

$$(II.72) \quad \begin{cases} \dot{X} = \bar{A}_c^* X + \bar{B}_c^* u \\ y = \bar{C}_c^* X \end{cases}$$

devient :

$$(II.73) \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mu \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2^* \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \\ z \in R^{n_1} & \quad x \in R^{n_2} \quad n_1 + n_2 = n \\ \text{où} & \\ A_{11} &= \mu \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\alpha_{n_1} \end{bmatrix} \\ A_{12} &= \mu \begin{bmatrix} & \beta_1 \\ 0 & \vdots \\ & \beta_{n_1} \end{bmatrix} \quad A_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_1^* \dots \gamma_{n_1}^* \end{bmatrix} \\ A_{22}^* &= \begin{bmatrix} -\alpha_{n_1+1} & & & & & & & \beta_{n_1+1} \\ & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & \circ & & & & & \beta_{n_1+n_2-1} \\ & & & \circ & & & & \vdots \\ \gamma_{n_1+1}^* & \dots & \dots & \dots & \gamma_{n_1+n_2-1}^* & & & -\alpha_{n_1+n_2}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^* \end{bmatrix}$$

Les principales propriétés de cette modélisation sont les suivantes :

\* La partie rapide, par construction ( $\alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ ) est caractérisée par une matrice diagonale à coefficients constants, stable, et elle est toujours inversible.

\* Les matrices de couplage  $A_{12}$  et  $A_{21}^*$  sont formées d'éléments nuls sauf, respectivement, une colonne et une ligne.

\* La matrice  $A_{22}^*$  conserve la forme en flèche.

\* Le coefficient  $\mu$  peut être choisi aisément, par le calcul

de  $\left| \frac{\alpha_{n_1+1}}{\alpha_{n_1}} \right|$  ou du coefficient  $\varepsilon$  précédemment défini par  $\max_{\substack{i \leq n_1 \\ j > n_1}} \frac{(R_i + R_j)}{|\alpha_i - \alpha_j|}$

avec  $R_i = \sqrt{\max_{f^*} \left| \frac{P(-\alpha_i, f^*)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_j - \alpha_i)} \right|}$

La matrice de commande de la partie rapide,  $B_1$  est nulle. Le système global est donc faiblement commandable, mais cela n'entraîne aucun problème puisque la partie rapide est stable.

### III.2 - Découplage Partie lente / Partie rapide

Par application de la méthode des perturbations singulières, en posant  $\mu = 0$ , le système est découplé en deux parties de dynamiques différentes.

### III.2.1 - Etude de la partie rapide

La partie rapide découplée de l'ensemble est caractérisée par :

$$(II.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_r = \frac{A_{11}}{\mu} z_r + \frac{B_1}{\mu} u \quad B_1 \equiv 0 \\ y_r = C_1 z_r \\ z_r(0) = z(0) + A_{11}^{-1} A_{12} x(0) \end{array} \right.$$

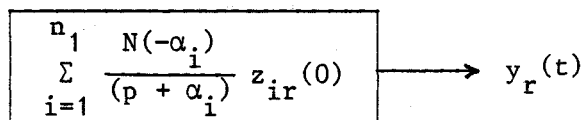
La matrice  $A_{11} / \mu$  étant diagonale, la solution de ce système pour  $t_0 = 0$  est obtenue directement sous la forme :

$$(II.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_r(t) = C_1 z_r(t) = C_1 e^{A_{11}t/\mu} z_r(0) \\ y_r(t) = \sum_{i=1}^{n_1} N(-\alpha_i) e^{-\alpha_i t} \left[ z_i(0) - \frac{\beta_i}{\alpha_i} x_{n_2}(0) \right] \end{array} \right.$$

Seule la dernière composante de  $x(0)$ , la plus lente,  $x_{n_2}(0)$  apparaît sous forme de valeur initiale.

Le mouvement de la partie rapide est donc composé d'une superposition d'exponentielles décroissantes et ce résultat est très facilement utilisable.

Le schéma-bloc associé à cette partie rapide découplé est le suivant :



### III.2.2 - Etude de la partie lente

La partie lente est obtenue par les relations :



$$(II.76) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_\ell = A_\ell x_\ell + B_\ell u \\ y_\ell = C_\ell x_\ell + D_\ell u \end{array} \right. \\ \text{avec} \\ \left\{ \begin{array}{l} A_\ell = A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12} \\ B_\ell = B_2^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} B_1 = B_2^* \\ C_\ell = C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12} \\ D_\ell = -C_1 A_{11}^{-1} B_1 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Ce résultat, dû à la forme} \\ \text{particulière de la matrice} \\ B_1 \text{ simplifie l'expression} \\ \text{finale.} \end{array} \right.$$

La matrice  $A_{11}$ , diagonale à termes tous non nuls est toujours inversible. Calculons les termes des matrices  $A_\ell$  et  $C_\ell$ , en prenant en compte les formes particulières des matrices  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) du système original.

$$A_\ell = \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n_2} & \\ \hline & \overbrace{\hspace{2cm}}^{n_1} \quad \overbrace{\hspace{2cm}}^{n_1} \quad \overbrace{\hspace{2cm}}^{n_1} \\ \hline \text{-----} & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n_2} \\ \hline \\ \hline \end{array}} \right\} n_2 - n_2 \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} \bigcirc & \\ \hline \text{-----} & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \bigcirc & \\ \hline \bigcirc & \diagdown \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \bigcirc & \\ \hline \bigcirc & | \end{array} \right] \right\} n_2$$

(les éléments non constants sont représentés par des croix)

$$A_\ell = \left[ \begin{array}{c|c} \diagdown & | \\ \hline \text{-----} & \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c|c} \bigcirc & \\ \hline & \alpha^* \end{array} \right]$$

Tous les termes de  $A_\ell$ , sauf un situé à la pointe de la flèche, sont identiques aux termes de  $A_{22}^*$ .

$$(II.77) \left\{ \begin{array}{l} \alpha^* = - \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i^* \frac{\beta_i}{\alpha_i} \\ A_\ell = \begin{bmatrix} -\alpha_{n_1+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_{n_1+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\alpha_{n_1+n_2-1} & \beta_{n_1+n_2-1} \\ \gamma_{n_1+1}^* & \dots & \dots & \dots & \gamma_{n_1+n_2-1}^* & -\alpha_\ell^* \end{bmatrix} \\ \text{avec } \alpha_\ell^* = \alpha_{n_1+n_2}^* + \alpha^* \end{array} \right.$$

$$C_\ell = \underbrace{[\text{---}]}_{n_2} - \underbrace{[\text{---}]}_{n_1} \left\{ \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \diagdown \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]}_{n_1} \right\} \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]}_{n_2}$$

$$C_\ell = [\text{---}] - [0 \text{ --- } 0 \text{ (-b)}]$$

avec :

$$b = \sum_{i=1}^{n_1} N(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

La matrice d'observation  $C_\ell$  a donc aussi un seul terme modifié

$$(II.78) \quad C_\ell = \left[ N(-\alpha_{n_1+1}), \dots, N(-\alpha_{n_1+n_2-1}), b_{n_1+n_2-1} + \sum_{i=1}^{n_1} N(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right]$$

Cette forme matricielle conduit à l'opérateur symbolique de transfert scalaire du système lent  $W_\ell(\lambda, f^*)$ , de même forme que celle du système initial, soit :

$$(II.79) \quad W_{\ell_{BF}}^*(\lambda, f^*) = \frac{f^* N_{\ell}(\lambda)}{D_{\ell}(\lambda) + f^* N_{\ell}(\lambda)}$$

obtenue par :

$$(II.80) \quad W_{\ell_{BF}}^*(\lambda, f^*) = C_{\ell} (\lambda I - A_{\ell})^{-1} B_{\ell}$$

Le dénominateur de  $W_{\ell_{BF}}^*(\lambda, f^*)$  correspond au déterminant de  $(\lambda I - A_{\ell})$  qui doit être différent de zéro pour toute valeur de  $f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$ .

$$(II.81) \quad \det (\lambda I - A_{\ell}) = \prod_{j=n_1+1}^{n_1+n_2-1} (\lambda + \alpha_j) (\lambda + \alpha_{\ell}^*) - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2-1} \beta_i \gamma_i^* \prod_{\substack{j=n_1+1 \\ j \neq i}}^{n_1+n_2-1} (\lambda + \alpha_j)$$

D'après les notations utilisées précédemment (II.71) et (II.77) les termes  $\gamma_i^*$  et  $\alpha_{\ell}^*$  peuvent être séparés en deux parties, une constante et une non constante où  $f^*$  apparaît comme terme multiplicatif, ce qui permet de séparer l'expression (II.81) également en deux parties, la première correspondant à  $D_{\ell}(\lambda)$  et la deuxième à  $N_{\ell}(\lambda)$ .

$$(II.82) \quad \gamma_i^* = -P(-\alpha_i, f^*) = - \left[ D(-\alpha_i) + f^* N(-\alpha_i) \right]$$

$$(II.83) \quad \alpha_{\ell}^* = - \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i^* \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n_1} D(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} + f^* \sum_{i=1}^{n_1} N(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

$$(II.84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\ell}^* = \alpha_{n_1+n_2}^* + \alpha_{\ell}^* = \alpha_{\ell_1} + f^* \alpha_{\ell_2} \\ \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} (-\alpha_i) + a_{n_1+n_2-1} + \sum_{i=1}^{n_1} D(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \\ \alpha_{\ell_2} = b_{n_1+n_2-1} + \sum_{i=1}^{n_1} N(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$(II.85) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{\ell}(\lambda) = \prod_{j=n_1+1}^{n_1+n_2-1} (\lambda + \alpha_j) (\lambda + \alpha_{\ell_1}) + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2-1} \beta_i D(-\alpha_i) \prod_{\substack{j=n_1+1 \\ j \neq i}}^{n_1+n_2-1} (\lambda + \alpha_j) \\ N_{\ell}(\lambda) = \prod_{j=n_1+1}^{n_1+n_2-1} (\lambda + \alpha_j) \alpha_{\ell_2} + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2-1} \beta_i N(-\alpha_i) \prod_{\substack{j=n_1+1 \\ j \neq i}}^{n_1+n_2-1} (\lambda + \alpha_j) \end{array} \right.$$

Ce formalisme conduit ainsi directement à la fonction de transfert lente, en boucle ouverte  $W_{\ell_{BO}}(p)$  définie par :

$$(II.86) \quad W_{\ell_{BO}}(p) = \frac{\bar{N}_{\ell}(p)}{D_{\ell}(p)}$$

et permet dénoncer le théorème suivant :

Théorème II.1 :

Tout système non linéaire de type Lur'e Postnikov, représenté par un triplet matriciel  $(\bar{A}_c^*, \bar{B}_c^*, \bar{C}_c^*)$  où  $\bar{A}_c^*$  est une matrice en flèche, composée de  $n_1$  premières composantes rapides et de  $n_2$  composantes lentes, peut être découplé temporellement. Le système rapide découplé est linéaire. Le système lent réduit obtenu est également un système de type Lur'e Postnikov, représentée par une matrice en flèche, dont la fonction de transfert réduite (II.86) est obtenue directement à partir de la fonction de transfert initiale par les relations (II.84) et (II.85).

Théorème II.2 :

Le gain statique du système initial est conservé dans la partie lente réduite.

Démonstration :

Pour une matrice en flèche  $\bar{A}_c^*$  de dimension  $n$ , le déterminant de  $\bar{A}_c^*$  est obtenu par :

$$(II.87) \quad \det \bar{A}_c^* = (-1)^n P(0, f^*) \quad /Benrejeb, Borne, Laurent, 1982/$$

Or,  $\bar{A}_c^*$  est partitionnée en  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}$  et  $A_{11}$  est inversible

Le théorème de /Rosenbrock, 1970/ conduit à la relation suivante :

$$(II.88) \quad \det \bar{A}_c^* = \left[ \det A_{11} \right] \cdot \left[ \det (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \right]$$

ce qui donne :

$$(II.89) \quad (-1)^{n_1+n_2} P(0, f^*) = \left[ \begin{array}{c} n_1 \\ \prod_{i=1} (-\alpha_i) \end{array} \right] \cdot \left[ (-1)^{n_2} P_\ell(0, f^*) \right]$$

d'où :

$$(II.90) \quad D(0) + f^* N(0) = \prod_{i=1}^{n_1} (\alpha_i) \cdot \left[ D_\ell(0) + f^* N_\ell(0) \right]$$

ce qui entraîne, par identification :

$$(II.91) \quad W_{BO}(0) = \frac{N(0)}{D(0)} = \frac{N_\ell(0)}{D_\ell(0)} = W_{\ell_{BO}}(0)$$

Nous proposons, à titre d'application, l'étude du système représenté par :

$$(II.92) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(p) = \frac{(p^2 + 5p + 6)}{p^4 + 24.5 p^3 + 176.5 p^2 + 333 p + 180} = \frac{N(p)}{D(p)} \\ f^* \in [0 ; 2] \end{array} \right.$$

Le choix des termes  $(-\alpha_i)$  de la matrice  $\bar{A}_c^*$  parmi les racines de  $P^*(\lambda, f_o^*=1)$  conduit au tracé de quatre cercles de Gershgorine :

$$\begin{array}{ll} C_1 (-11.48 ; 2.856) & C_2 (-10.5 ; 2.677) \\ C_3 (-1.48 ; 0.093) & C_4 (-1.04 ; 5.626) \end{array}$$

ce qui donne  $\varepsilon = 0.878$  et permet de séparer le système initial en deux parties de dynamiques différentes, la partie rapide étant formée des termes diagonaux  $-\alpha_1 = -11.48$  et  $-\alpha_2 = -10.5$ .

Conformément aux relations (II.74) et (II.75), la sortie rapide apparaît sous la forme symbolique suivante :

$$(II.93) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_r(p) = \frac{80.4}{p+11.48} z_{1r}(0) + \frac{63.75}{p+10.5} z_{2r}(0) \\ \text{avec} \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_r(0) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}(0) + \begin{bmatrix} -8.8 \cdot 10^{-3} \\ 0.011 \end{bmatrix} x_2(0) \end{array} \right.$$

La partie lente, par application des équations (II.85) est représentée en boucle ouverte par la relation :

$$(II.94) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{l_{BO}}(p) = \frac{(p + \alpha_3) \alpha_{l_2} + \beta_3 N(-\alpha_3)}{(p + \alpha_3)(p + \alpha_{l_1}) + \beta_3 D(-\alpha_3)} \\ \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_{l_2} = b_3 + \sum_{i=1}^2 N(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \\ \alpha_{l_1} = \sum_{i=1}^3 (-\alpha_i) + a_3 + \sum_{i=1}^2 D(-\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \end{cases} \end{array} \right.$$

ce qui donne, en choisissant  $(-\alpha_3) = -1.48$  :

$$(II.94') \quad W_{l_{BO}}(p) = \frac{0.0282 p + 0.0504}{p^2 + 2.492 p + 1.488}$$

Remarques :

\* Cette méthode de simplification de la fonction de transfert d'un système à deux dynamiques est applicable directement à partir de la

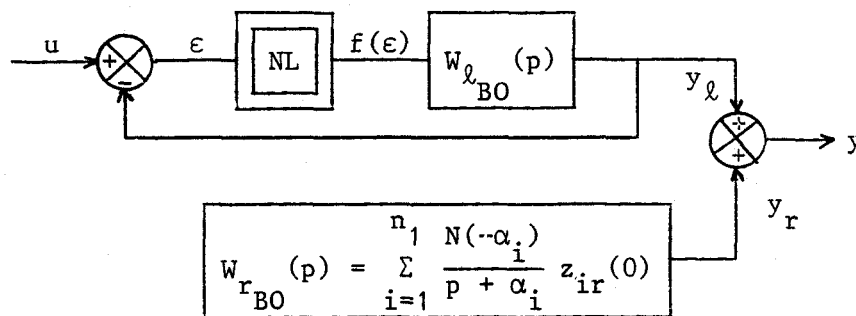


fonction de transfert initiale, sans passer par l'équation d'état (une fois tout problème de modélisation résolu), en évitant les difficultés liées aux systèmes non linéaires.

\* Elle peut être aisément programmée numériquement, ce qui permet de l'appliquer à des systèmes de grande dimension.

\* Lorsque le système étudié est linéaire, ce qui correspond à  $f^* = K$  constant, il est alors tout à fait justifié de calculer le fonction de transfert en boucle ouverte du système lent réduit par cette méthode ; la précision portant sur  $W_{\ell BO}(p)$  étant beaucoup plus grande que si l'on avait effectué une simple réduction modale par élimination simple des termes à faible constante de temps.

\* Le schéma-bloc correspondant à ce découpage temporel est donc :



#### IV - ETUDE DU REGIME TRANSITOIRE RAPIDE

La méthode des perturbations singulières permet, en posant  $\mu = 0$ , de déconnecter les différentes parties d'un système possédant deux dynamiques, et d'obtenir avec une précision suffisante (d'autant plus grande que  $\mu$  est petit) le système lent réduit.

Mais, quand le but de la réduction est d'étudier le comportement transitoire rapide du système, cette technique de réduction ne donne pas toujours des résultats suffisamment précis, car le système rapide découplé ne tient pas compte de l'évolution de la partie lente, celle-ci n'intervient en effet que sous forme de conditions initiales.

Nous proposons ici une méthode d'étude de ces transitions rapides qui utilise simultanément la notion de système réciproque et la méthode des perturbations singulières.

#### IV.1 - Définitions et propriétés du système réciproque

La littérature fournit de nombreuses définitions concernant les transformations possibles d'un système.

Le système adjoint est obtenu à partir du système initial par transformation de la matrice caractéristique  $A$  en  $(-A^T)$ . Le système dual (ou adjoint modifié) possède la propriété de "remonter le temps" et est obtenu à partir du système adjoint par changement de la variable temps  $t \in [t_o, t_f]$  en  $(t_f - \theta) \in [0; t_f - t_o]$  /Boudarel, Delmas, Guichet, 1967/.

La notion de système inverse /Lovass-Nagy, Miller, Powers, 1976/ /Kouvaritakis, 1976/ /Rosenbrock, 1970/ consiste à déterminer la fonction de transfert  $G^{-1}(p)$  à partir de  $G(p)$ , qui conduit à définir l'entrée du système  $u$  en termes de dérivées de la sortie  $y$ . Cette formulation est intéressante pour déterminer les systèmes compensateurs idéaux. Elle établit également la dualité Pôles/Zéros, modes propres et vecteurs propres associés. Cette dualité apparaît nettement pour les matrices  $B$  et  $C$  de commande et d'observation dans la mise en équation d'état correspondante /Mac Farlane, Karcianas, 1976/.

/Reza, 1982/ utilise le terme de réciprocité lorsqu'il définit, pour des systèmes électriques, à partir d'une matrice  $A$  à coefficients complexes, la matrice  $A^*$  imaginaire conjuguée et transposée de  $A$  (ceci est la définition généralisée de la transposée d'une matrice).

Cette transformation conduit donc au système adjoint quand  $A$  est réelle.

La notion de système réciproque, telle qu'elle sera définie par la suite, a été introduite par /Hutton, Friedland, 1975/ pour des problèmes de réduction par la méthode de Routh, développée par /Dauphin-Tanguy, El Moudni, Borne, 1982/ et généralisée par /Dauphin-Tanguy, Lebrun, Borne, 1983/ pour les systèmes à plusieurs dynamiques.



V.1.1 - Définitions

Nous présentons ici la notion de système réciproque dans le cas monovarié pour différents modes de représentation. Elle sera aisément étendue par la suite au cas multivarié.

Définition 1 :

Considérons le système non linéaire ( $\Sigma$ ) représenté par l'équation différentielle à coefficients non constants suivante :

$$(II.95) \quad \sum_{i=0}^n a_i(.) y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i(.) u^{(i)}$$

où les coefficients  $a_i(.)$  et  $b_i(.)$  peuvent dépendre du temps, de la sortie et/ou de paramètres extérieurs.

Le système réciproque ( $\tilde{\Sigma}$ ) est défini par l'équation différentielle suivante :

$$(II.96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n a_i(.) y^{(n-i)} = \sum_{i=0}^m b_i(.) u^{(n-1-i)} \\ \text{avec, si } m=n, \text{ le terme } u^{(-1)} \text{ défini par :} \\ u^{(-1)} = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \end{array} \right.$$

Définition 2 :

Si l'on note  $\lambda$  l'opérateur symbolique tel que, à  $y^{(i)}$  corresponde  $\lambda^i y(\lambda)$ , alors l'expression (II.95) conduit à la fraction rationnelle :

$$(II.97) \quad W(\lambda) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i(.) \lambda^i}{\sum_{i=0}^n a_i(.) \lambda^i}$$

qui coïncide dans le cas linéaire avec la fonction de transfert. Le système réciproque est alors représenté, à partir de (II.96), par la fraction rationnelle :

$$(II.98) \quad \tilde{W}(\lambda) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(.) \lambda^{n-1-i}}{\sum_{i=0}^n a_i(.) \lambda^{n-i}} = \frac{\tilde{N}(\lambda)}{\tilde{D}(\lambda)}$$

qui est obtenue à partir de  $W(\lambda)$  par :

$$(II.99) \quad \tilde{W}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} W\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Il y a donc retournement des indices, inversion des pôles et des zéros de la fraction, ce qui correspond à une inversion de la réponse modale du système, donc du comportement dynamique. (Ceci est directement vrai dans le cas linéaire. Dans le cas non linéaire, il s'agit alors de définir des domaines de variation des modes en fonction des variations des coefficients).

Plusieurs cas sont à envisager :

- \* Si le coefficient  $a_0(.)$  est différent de zéro, alors :
  - si  $m \leq n-1$ , le degré de  $\tilde{N}(\lambda)$  est  $n-1$  et celui de  $\tilde{D}(\lambda)$  est  $n$
  - si  $m = n$ , alors le degré de  $\tilde{N}(\lambda)$  est  $n$  et celui de  $\tilde{D}(\lambda)$  est  $n+1$ , avec apparition d'un terme  $1/\lambda$

- \* Si le coefficient  $a_0(.)$  est nul, ce qui correspond à une fonction  $W(\lambda)$  comportant un terme  $1/\lambda$ , alors :
  - si  $m \leq n-1$ ,  $d^\circ(\tilde{N}(\lambda)) = d^\circ(\tilde{D}(\lambda)) = n-1$
  - si  $m = n$ ,  $d^\circ(\tilde{N}(\lambda)) = d^\circ(\tilde{D}(\lambda)) = n$

Définition 3 :

1) Quand  $m \leq n-1$ , alors le triplet matriciel  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  associé à la fraction  $\tilde{W}(\lambda)$  est déduit du triplet initial  $(A, B, C)$  associé à  $W(\lambda)$  par les relations suivantes :

$$(II.100) \quad (a) \begin{cases} \tilde{A} = A^{-1} \\ \tilde{B} = -A^{-1} B \\ \tilde{C} = C \end{cases} \quad \text{ou} \quad (b) \begin{cases} \tilde{A} = A^{-1} \\ \tilde{B} = B \\ \tilde{C} = -C A^{-1} \end{cases}$$

(Conditions : A inversible pour toutes valeurs des coefficients  $a_i(.)$ ,  $b_i(.)$ )

Il suffit pour déterminer ces relations d'expliciter  $W(\lambda)$  en :

$$W(\lambda) = C (\lambda I - A)^{-1} B$$

d'où :

$$\tilde{W}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} C \left(\frac{1}{\lambda} I - A\right)^{-1} B = -C (\lambda A - I)^{-1} B$$

$$(II.101) \quad \begin{cases} (a) \tilde{W}(\lambda) = -C (\lambda I - A^{-1})^{-1} A^{-1} B \\ (b) \tilde{W}(\lambda) = -C A^{-1} (\lambda I - A^{-1})^{-1} B \end{cases}$$

ce qui donne par identification (II.100) (a) ou (b).

Dans le cas linéaire, si la forme canonique de la matrice caractéristique initiale A est Compagnon,

$$(II.102) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [b_0 \dots b_m \ 0 \dots 0] \end{array} \right.$$

alors le système réciproque est représenté par :

$$(II.103) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & & a_{n-1} & a_n \\ -\frac{a_1}{a_0} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_n}{a_0} \\ 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & \diagdown & & & \\ \vdots & & \diagdown & & \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} a_n \\ \frac{a_n}{a_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = C \end{array} \right.$$

à partir des relations (II.100 (a)).

2) Quand  $m=n$ , la fraction rationnelle  $W(\lambda)$  peut être transformée pour faire apparaître la transmission directe de l'entrée, à partir de (II.97) en :

$$(II.104) \quad W(\lambda) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (b_i(.) - \frac{b_n(.)}{a_n(.)} a_i(.)) \lambda^i}{\underbrace{\sum_{i=0}^n a_i(.) \lambda^i}_{\bar{W}(\lambda)}} + \frac{b_n(.)}{a_n(.)} \quad (a_n(.) \neq 0)$$

La fraction rationnelle réciproque correspondante est obtenue comme précédemment, c'est-à-dire :

$$\tilde{W}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[ \bar{W}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{b_n}{a_n} \right] = \tilde{\tilde{W}}(\lambda) + \frac{b_n(.)}{a_n(.)} \frac{1}{\lambda}$$

$$(II.105) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}(\lambda) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i(.) \lambda^{n-1-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(.) \lambda^{n-i}} + \frac{b_n(.)}{a_n(.)} \frac{1}{\lambda} \\ \text{avec :} \\ \bar{b}_i(.) = b_i(.) - \frac{b_n(.)}{a_n(.)} a_i(.) \quad \text{pour } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right.$$

Le triplet matriciel associé à (II.105) est alors  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  défini à partir du triplet  $(A, B, C)$  déduit de  $\bar{W}(\lambda)$ , conformément aux relations (II.100).

Il apparaît un terme  $\tilde{D}(u)$  défini comme suit, à partir du terme D initial ( $D = b_n(.) / a_n(.)$ )

$$(II.106) \quad \tilde{D}(u) = \int_{t_0}^t D u(t) dt$$

Le système réciproque est alors représenté dans l'espace d'état par les équations suivantes, mises sous forme canonique :

$$(II.107) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ \dot{\tilde{v}} = u \\ \tilde{y} = \tilde{C} \tilde{x} + D v \end{array} \right. \quad (\text{cas où } D \text{ est indépendante du temps})$$

ce qui introduit une variable d'état supplémentaire, correspondant à un mode nul.

Définition 4 : (Bond-Graph réciproque) /Dauphin-Tanguy, Lebrun, Borne, 1983/

Pour la définition du Bond-Graph réciproque, nous considérons le régime autonome du système, car la transformation réciproque n'influence pas le vecteur de commande ; elle modifie seulement les variables internes (état) et le vecteur de sortie.

Comme indiqué précédemment dans l'équation (I.47), la matrice d'état associée à une représentation par bond-graph s'écrit :

$$A = (A_1^s + A_1^a) \times S^s$$

où  $A_1^s$  et  $S^s$  sont des matrices symétriques, associées pour la première à la structure de jonction et pour la seconde aux multiportes de stockage d'énergie. La matrice  $A_1^a$ , correspondant aux multiportes dissipatifs d'énergie est antisymétrique.

Le système réciproque étant (par la définition 3) caractérisé par la matrice  $A^{-1}$ , inverse de la matrice  $A$  du système initial, il est donc justifié de calculer ici cette matrice  $A^{-1}$  (en supposant  $A$  inversible).

$$A^{-1} = (S^s)^{-1} \times (A_1^s + A_1^a)^{-1}$$

ce qui conduit, pour conserver la même forme que pour  $A$ , à effectuer la transposition suivante :

$$(A^{-1})^T = \left[ (A_1^s + A_1^a)^{-1} \right]^T \times \left[ (S^s)^{-1} \right]^T$$

$$(A^{-1})^T = \left[ (A_1^s + A_1^a)^T \right]^{-1} \times (S^s)^{-1}$$

ce qui donne, avec la propriété  $(A_1^a)^T = -A_1^a$  (les éléments diagonaux sont toujours nuls).

$$(A^{-1})^T = \underbrace{(A_1^s - A_1^a)^{-1}}_{A_1^*} \times \underbrace{(S^s)^{-1}}_{S^*}$$

Cette forme matricielle peut donc, par identification, être assimilée à un bond-graph, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition :

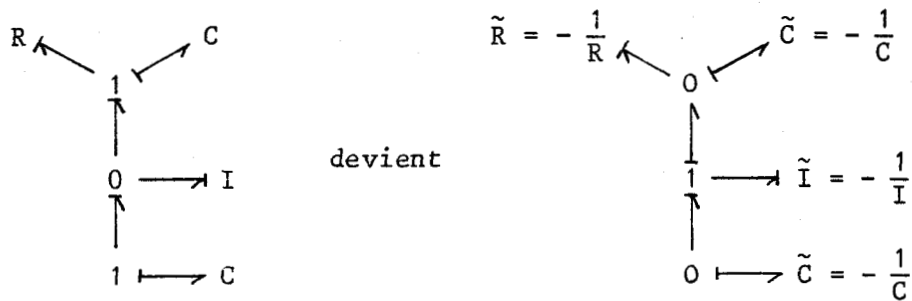
Le bond-graph réciproque d'un bond-graph initial est obtenu par les transformations suivantes :

\* La structure de jonction est la duale de la structure initiale, dans le cas d'une jonction composée de 0 et de 1. Quand elle contient un élément TF (structure de type modulée), cet élément est conservé mais son module est inversé.

\* Les causalités sont conservées sur les éléments I et C. Les causalités sur les éléments R sont affectées de façon à assurer la compatibilité avec la structure de jonction.

\* Tous les éléments, ports et multiports sont inversés et changés de signe (S devient  $-S^{-1}$  et L devient  $-L^{-1}$ ).

Ainsi, par exemple :



$\Sigma$  initial

$\Sigma$  réciproque

IV.1.2 - Propriétés du système réciproque

Elles sont énoncées dans le cas linéaire.

IV.1.2.1 - Etude des conditions initiales :

Soit ( $\Sigma$ ) le système initial défini par :

$$(II.108) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x \\ x(0) : \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

La sortie  $y(t)$  est obtenue par superposition de l'effet de l'entrée et des conditions initiales, soit sous forme symbolique :

$$(II.109) \quad y(p) = C (pI - A)^{-1} B u(p) + C (pI - A)^{-1} x(0)$$

Le système réciproque par définition 3 peut être représenté sous deux formes (II.110 - a) et (II.110 - b) qui conduisent à deux expressions différentes pour  $\tilde{y}(p)$  :

$$(II.110) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \tilde{y}(p) = - C (pI - A^{-1})^{-1} A^{-1} B u(p) - C (pI - A^{-1})^{-1} A^{-1} x(0) \\ \text{b) } \tilde{y}(p) = - C A^{-1} (pI - A^{-1})^{-1} B u(p) - C A^{-1} (pI - A^{-1})^{-1} x(0) \end{array} \right.$$

ce qui donne deux définitions possibles pour  $\tilde{x}(0)$  :

$$(II.111) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \tilde{x}(0) = - A^{-1} x(0) \\ \text{b) } \tilde{x}(0) = x(0) \end{array} \right.$$

#### IV.1.2.2 - Conservation de la forme matricielle :

##### Propriété :

Si le système initial  $\Sigma(A,B,C)$  est obtenu à partir de la fonction de transfert  $W(p)$ , alors la forme matricielle de  $A$  peut être conservée par la transformation réciproque pour la matrice  $\tilde{A}$ .

Dans ce cas, le triplet  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  n'est pas obtenu directement par les relations (II.110) mais il est nécessaire d'introduire une matrice de permutation  $M$  définie par :

$$(II.112) \quad M = \begin{bmatrix} & 0 & 1 \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$



telle que :

$$(II.113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = M A^{-1} M \\ \tilde{B} = - M A^{-1} B \\ \tilde{C} = C M \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = M A^{-1} M \\ \tilde{B} = M B \\ \tilde{C} = - C A^{-1} M \end{array} \right.$$

Toute matrice (à condition que (A,B) soit commandable /Fossard, 1972/) pouvant se mettre sous forme Compagnon (conservée par la transformation réciproque), cette propriété est donc applicable à toute forme de matrice.

#### IV.1.2.3 - Diagramme pseudo-asymptotique réciproque :

Le diagramme pseudo-asymptotique du lieu de Bode du système réciproque est obtenu à partir du diagramme de Bode initial par les transformations suivantes :

\* Pour la courbe de gain, par retournement dans le plan vertical et ajout de (-1) à toutes les pentes (la valeur 1 correspondant à une pente de 20 dB par décade).

\* Pour la courbe de phase, par combinaison d'un retournement dans le plan vertical, d'une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $\phi = 0$  et d'une addition de  $(-\pi/2)$ .

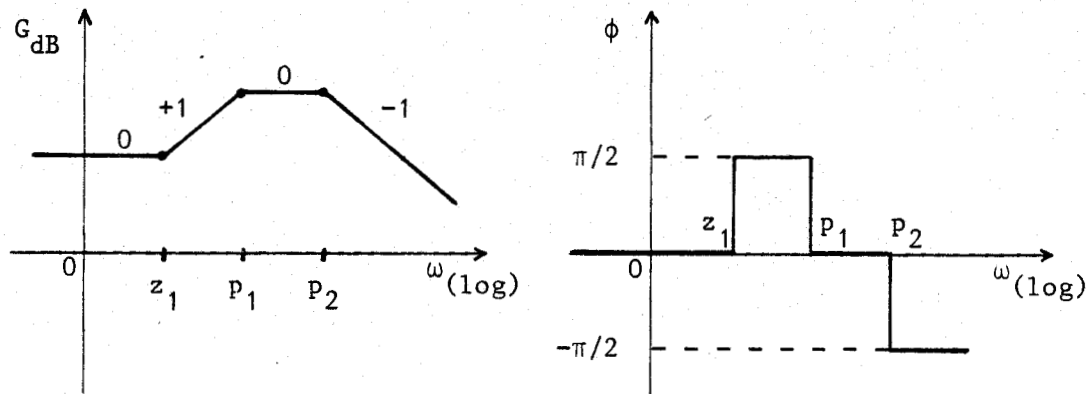
En effet, la transformation réciproque, par le changement  $p \rightarrow 1/p$  inverse les ordres de grandeur des termes caractéristiques  $\omega_i = 1/\tau_i \rightarrow \tau_i$  ce qui entraîne le retournement de la courbe.

Le terme  $1/p$  multiplicatif introduit une variation de (-1) pour le gain et de  $-\pi/2$  pour la phase.

Ainsi, par exemple, soit :

$$(II.114) \quad W(p) = \frac{(p + z_1)}{(p + p_1)(p + p_2)} \quad \text{avec} \quad z_1 < p_1 < p_2$$

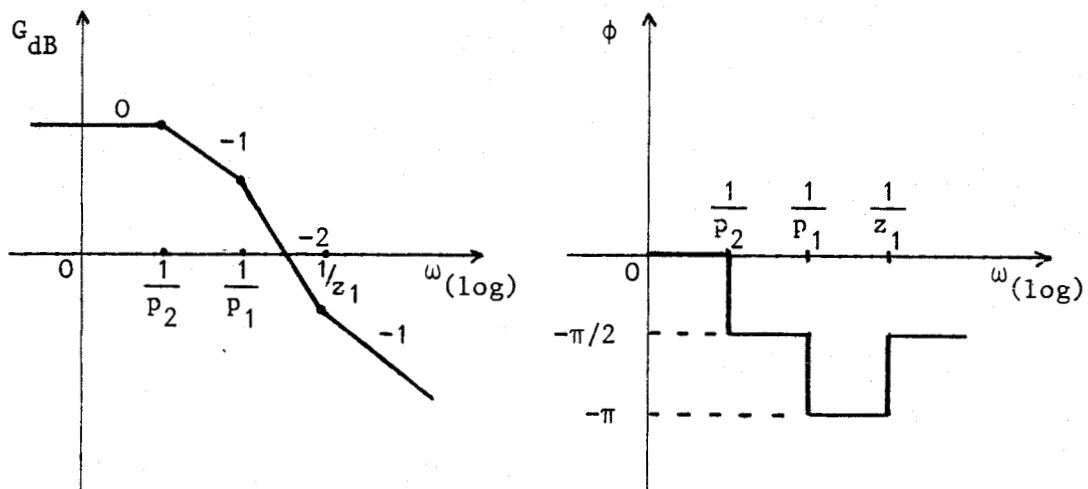
ce qui donne les diagrammes pseudo-asymptotiques suivants :



Le système réciproque est représenté par :

$$(II.115) \quad W(p) = \frac{1}{p} \frac{\left(\frac{1}{p} + z_1\right)}{\left(\frac{1}{p} + p_1\right)\left(\frac{1}{p} + p_2\right)} = \frac{1 + z_1 p}{(1 + p_1 p)(1 + p_2 p)}$$

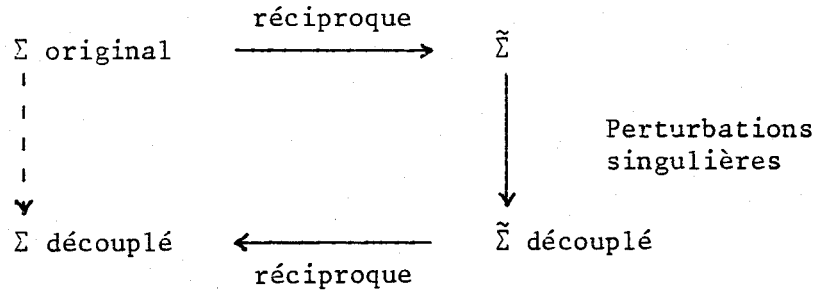
avec  $1/p_2 < 1/p_1 < 1/z_1$ , soit :



#### IV.2 - Application du système réciproque à l'étude des composantes rapides

La transformation réciproque inverse les dynamiques du système. Les termes de la matrice A de forte amplitude, qui composent la partie rapide initiale du système initial sont alors les composantes lentes du système réciproque, pour lesquelles la technique des perturbations singulières s'applique directement.

La démarche proposée est donc la suivante :



Le système qui se présente sous forme initiale :

$$\text{(II.116)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}/\mu & A_{22}/\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2/\mu \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) \\ z(0) \end{cases} \text{ conditions initiales}$$

devient par le biais de la transformation réciproque :

$$\text{(II.117)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ \tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Les composantes rapides du système réciproque sont alors rassemblées dans  $\tilde{x}$ . Après vérification rapide, par exemple par tracé des cercles de Gershgorine, le système réciproque est alors modélisé sous forme d'un système singulièrement perturbé :

$$\text{(II.118)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \tilde{\mu} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} \tilde{A}_{11} & \tilde{\mu} \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mu} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ \tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{x}(0) \\ \tilde{z}(0) \end{cases} \text{ conditions initiales}$$

Par  $\tilde{\mu} = 0$  la partie lente réciproque est découplée et les relations suivantes représentent l'évolution de  $\tilde{z}_\ell$  :

$$(II.119) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{z}}_\ell = \tilde{A}_\ell \tilde{z}_\ell + \tilde{B}_\ell u \\ \tilde{y}_\ell = \tilde{C}_\ell \tilde{z}_\ell + \tilde{D}_\ell u \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \tilde{z}_\ell(0) = \tilde{z}(0)$$

avec :

$$(II.120) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_\ell = \tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \\ \tilde{B}_\ell = \tilde{B}_2 - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{B}_1 \\ \tilde{C}_\ell = \tilde{C}_2 - \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \\ \tilde{D}_\ell = -\tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{B}_1 \end{array} \right.$$

La partie rapide réciproque est obtenue directement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mu} \dot{\tilde{x}}_r = \tilde{\mu} \tilde{A}_{11} \tilde{x}_r + \tilde{\mu} \tilde{B}_1 u \\ \tilde{y}_r = \tilde{C}_1 \tilde{x}_r \\ \tilde{x}_r(0) = \tilde{x}(0) + \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \tilde{z}(0) \end{array} \right.$$

Après nouvelle application de la transformation réciproque, le système rapide découplé apparaît sous la forme :

$$(II.121) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{z}}_r = \tilde{A}_r \tilde{z}_r + \tilde{B}_r u \\ \tilde{y}_r = \tilde{C}_r \tilde{z}_r + \int \tilde{D}_\ell u dt \\ \tilde{z}_r(0) \end{array} \right.$$

(l'indice  $\tilde{r}$  indique le découplage de la partie rapide par le biais du réciproque).

Suivant la représentation d'état choisie pour la définition du système réciproque (II.110 - a) et II.110 - b), l'expression de (II.121) sera différente.

De même pour la partie lente qui s'exprime par :

$$(II.122) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{\tilde{z}} = A_{\tilde{z}} \tilde{x}_{\tilde{z}} + B_{\tilde{z}} u \\ y_{\tilde{z}} = C_{\tilde{z}} \tilde{x}_{\tilde{z}} \\ \tilde{x}_{\tilde{z}}(0) \end{cases}$$

ce qui conduit à la matrice du système global découplé :

$$(II.123) \quad A_d = \begin{bmatrix} A_{\tilde{z}} & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$$

IV.2.1 - Première forme matricielle (II.100 - a)

Le triplet matriciel  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  est alors :

$$(II.100 - a) \quad \begin{cases} \tilde{A} = A^{-1} \\ \tilde{B} = -A^{-1} B \\ \tilde{C} = C \end{cases}$$

et le vecteur conditions initiales est :

$$(II.111 - a) \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{z}(0) \end{bmatrix} = -A^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

ce qui donne, en fonction du système initial :

$$(II.124) \quad \begin{cases} \tilde{A} = \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & -\mu (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & \mu A_{22}^{-1} (I + A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}) \end{bmatrix} \\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) \\ A_{22}^{-1} B_2 - A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les expressions (II.120) donnent alors :

$$(II.125) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_\ell = \mu A_{22}^{-1} \\ \tilde{B}_\ell = -A_{22}^{-1} B_2 \\ \tilde{C}_\ell = C_2 + \mu C_1 A_{12} A_{22}^{-1} \\ \tilde{D}_\ell = C_1 (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) \end{array} \right.$$

ce qui conduit à une première forme des équations (II.121) :

$$(II.126) \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_r = \frac{A_{22}}{\mu} z_r + \frac{B_2}{\mu} u \\ y_r = (C_2 + \mu C_1 A_{12} A_{22}^{-1}) z_r + \int_{t_0}^t C_1 (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u dt \end{array} \right.$$

et une première forme des équations (II.122) :

$$(II.127) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_\ell = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) x_\ell + (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) u \\ y_\ell = C_1 x_\ell \end{array} \right.$$

avec le vecteur des conditions initiales :

$$(II.128) \begin{bmatrix} x_\ell(0) \\ z_r(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & -0 \\ 0 & \frac{A_{22}}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\mu A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

qui s'exprime de façon complexe en fonction du vecteur global  $\begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$ .

#### IV.2.2 - Deuxième forme matricielle (II.100 - b)

Dans ce cas, le triplet  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  est :

$$(II.100 - b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = A^{-1} \\ \tilde{B} = B \\ \tilde{C} = - C A^{-1} \end{array} \right.$$

et les conditions initiales vérifient :

$$(II.111 - b) \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$(II.129) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = A^{-1} \quad \text{de même forme que dans (II.124)} \\ \tilde{B} = B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2/\mu \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = \left[ - C_\ell A_\ell^{-1} ; \mu (C_\ell A_\ell^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} - C_2 A_{22}^{-1}) \right] \\ \text{avec } \begin{cases} C_\ell = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} \\ A_\ell = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \end{cases} \end{array} \right.$$

ce qui conduit à la deuxième forme pour (II.120) :

$$(II.130) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_\ell = \mu A_{22}^{-1} \\ \tilde{B}_\ell = B_2/\mu + A_{22}^{-1} A_{21} B_1 \\ \tilde{C}_\ell = - \mu C_2 A_{22}^{-1} \\ \tilde{D}_\ell = C_\ell B_1 \end{array} \right.$$

Les équations (II.121) s'écrivent alors :

$$(II.131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_r = \frac{A_{22}}{\mu} z_r + \left( \frac{B_2}{\mu} + A_{22}^{-1} A_{21} B_1 \right) u \\ y_r = C_2 z_r + \int_{t_0}^t (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) B_1 u dt \end{array} \right.$$

avec le vecteur des états initiaux suivant :

$$(II.132) \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_\ell(0) \\ \tilde{z}_r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\mu A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

#### IV.2.3 - Interprétation des résultats

La méthode des perturbations singulières, utilisée seule ou couplée avec la transformation réciproque permet de découpler les parties lente et rapide avec le maximum de précision sur la partie lente ou sur la partie rapide.

Suivant le but poursuivi, réduction de dimensionnalité ou découplage, il faudra utiliser, soit l'une de ces deux approches, soit les deux conjointement.

Ainsi, dans le cas du découplage, le système obtenu, déterminé avec le maximum de précision sur chaque partie, est alors :

$$(II.133) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_\ell \\ \dot{\tilde{z}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_\ell \\ \tilde{z}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_r \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_\ell & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_\ell \\ \tilde{z}_r \end{bmatrix} + D_\ell u + \int_{t_0}^t \tilde{D}_\ell u dt \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_\ell(0) = x(0) \\ \tilde{z}_r(0) \end{array} \right.$$

Suivant la forme choisie pour le système réciproque, les modifications apportées au système rapide par rapport aux expressions habituelles (I.97) portent :

- sur la matrice de sortie  $C_r$  par addition du terme  $\mu C_1 A_{12} A_{22}^{-1}$



et d'un terme intégral (équations (II.126)) avec des conditions initiales  $z_r(0)$  différentes de  $z(0)$

- sur la matrice de commande par addition du terme  $\mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1$  et d'un terme intégral (équations (II.131)), avec des conditions initiales  $z_r(0)$  égales à  $z(0)$ .

La conservation des conditions initiales pour la partie rapide nous conduit à choisir la deuxième définition (II.100 - b) du système réciproque, donc les équations (II.131) pour le système rapide découplé.

Ce résultat est très important car il supprime les problèmes de raccordement ("couche limite") posés par l'écart entre les valeurs initiales  $z(0)$  et  $z_r(0)$  de la partie rapide avant et après découplage. Le calcul des trajectoires optimales à horizon fini et à états finaux fixés en est très largement simplifié.

#### IV.3 - Application à un système non linéaire de type Lur'e Postnikov

Prenons, à titre d'exemple, le système de type Lur'e Postnikov précédemment étudié et représenté par l'équation (II.92)

$$\left\{ \begin{array}{l} W(p) = \frac{(p^2 + 5p + 6)}{p^4 + 24.5 p^3 + 176.5 p^2 + 333 p + 180} \\ f^* \in [0 ; 2] \end{array} \right.$$

Le système réciproque est caractérisé par :

$$(II.134) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}(p) = \frac{0.0333 p^3 + 0.0278 p^2 + 0.0056 p}{p^4 + 1.85 p^3 + 0.98 p^2 + 0.136 p + 0.0056} \\ f^* \in [0 ; 2] \end{array} \right.$$

Après choix des coefficients  $(-\alpha_i)$  correspondant aux racines de  $\tilde{P}(\lambda, f_o^*=1)$ , le tracé des cercles de Gershgorine définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_1 (-1.039 ; 0.193) \\ \tilde{c}_2 (-0.657 ; 0.073) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_3 (-0.119 ; 0.0256) \\ \tilde{c}_4 (-0.069-0.0333f^* ; 0.292) \end{array} \right.$$

permet de séparer le système en deux blocs de dynamiques différentes ( $\tilde{\epsilon} = 0.686$ ).

En choisissant  $-\tilde{\alpha}_1 = -1.039$  et  $-\tilde{\alpha}_2 = 0.657$ , la partie lente réciproque réduite, par application des équations (II.85) est alors représentée en boucle ouverte par la fonction de transfert réduite :

$$(II.135) \quad \tilde{W}_{\lambda BO}(p) = \frac{0.0101 p + 0.00054}{p^2 + 0.1771 p + 0.0076}$$

Après passage au système réciproque, la fonction de transfert réduite correspondant à la partie rapide apparaît sous la forme :

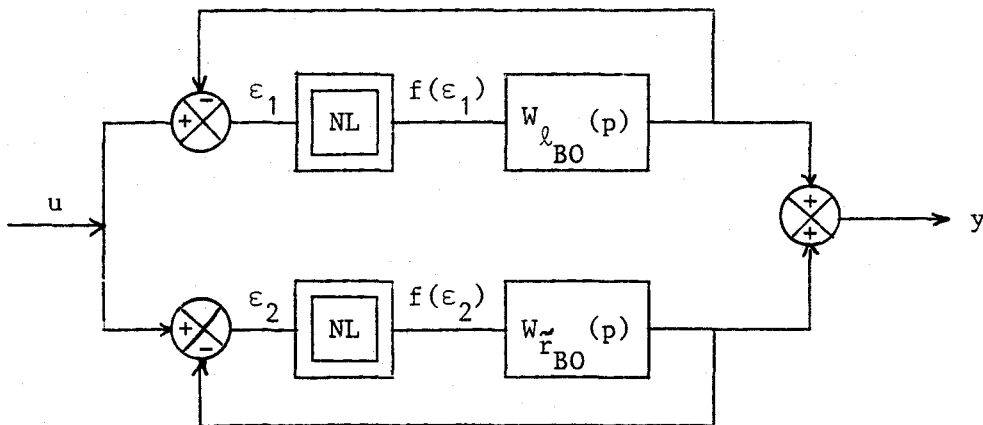
$$(II.136) \quad W_{r BO}(p) = \frac{0.0172 p + 1.331}{p^2 + 23.354 p + 131.79}$$

Le système rapide découplé n'est plus indépendant de la non linéarité.

Le système global sous forme découplé, si chaque sous système est présenté sous sa forme réduite la plus précise est caractérisé par le système matriciel suivant :

$$(II.137) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{z}_r \\ \dot{x}_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.54 & -0.074 & & \\ 1.098(1-f^*) & -9.81-0.0172f^* & & \\ & & -1.48 & 0.011 \\ 0 & & 0.79(1-f^*) & -1.012-0.0282f^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ x_\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f^* \\ 0 \\ f^* \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1.098 & 0.0172 & 0.79 & 0.0282 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ x_\lambda \end{bmatrix} \\ \\ \text{avec les valeurs initiales} \quad \begin{bmatrix} x_\lambda(0) = x(0) \\ z_r(0) = z(0) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Le système non linéaire de type Lur'e Postnikov est ainsi décomposé suivant le schéma-bloc suivant :



Chaque sous-système étant lui-même de type Lur'e Postnikov.

V - MISE EN EVIDENCE DES PROPRIETES PARTICULIERES DES MATRICES EN FLECHE POUR L'ANALYSE DES PROCESSUS. APPLICATION AUX SYSTEMES A DEUX DYNAMIQUES

De nombreux travaux concernant l'analyse des systèmes singulièrement perturbés existent dans la littérature /Grujić , 1978, 1979, 1981/ /Khalil, Kokotovic, 1979/. Le cas général des systèmes de Lur'e Postnikov a été étudié par /Grujić, 1978, 1981/ et le cas des systèmes représentés par une matrice en flèche a été envisagé par /Benrejeb, Borne, Laurent, 1982/.

La modélisation des systèmes de type Lur'e Postnikov présentée dans le paragraphe III, sous la forme (II.71) (II.73) apporte à l'analyse des systèmes singulièrement perturbés une contribution importante tant du point de vue des résultats que de la simplicité de mise en œuvre.

La matrice caractérisant le système étudié est une matrice en flèche  $\bar{A}_C^*$  telle que :

(II.71)

$$\bar{A}_C^* = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \gamma_i^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha_n^* \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \gamma_i^* = -P(-\alpha_i, f^*) \\ \beta_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_j - \alpha_i)^{-1} \\ \alpha_n^* = \sum_{i=1}^{n-1} (-\alpha_i) + a_{n-1} + f^* b_{n-1} \end{cases}$$

Le système correspondant est modélisé, par la méthode définie plus haut sous la forme :

(II.73)

$$\begin{bmatrix} \mu \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}$$

(nous étudions pour la stabilité le comportement en régime autonome du système).

avec :

$$\begin{cases} A_{11} = \mu \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & & -\alpha_{n_1} \end{bmatrix} & A_{12} = \mu \begin{bmatrix} & \beta_1 \\ 0 & \\ & \beta_{n_1} \end{bmatrix} \\ A_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_1^* \cdot \cdot \cdot \gamma_{n_1}^* \end{bmatrix} \\ A_{22}^* = \begin{bmatrix} -\alpha_{n_1+1} & & & & & & & & \beta_{n_1+1} \\ & \cdot & & & & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & & & -\alpha_{n_1+n_2-1} & & \beta_{n_1+n_2-1} \\ \gamma_{n_1+1}^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\gamma_{n_1+n_2-1}^* & & -\alpha_{n_1+n_2}^* \end{bmatrix} \end{cases}$$

ce qui donne après découplage :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_r \\ \dot{x}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_\ell \end{bmatrix}$$

avec :

$$A_r = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\alpha_{n_1} \end{bmatrix}$$

$$A_\ell = \begin{bmatrix} -\alpha_{n_1+1} & \dots & \dots & \beta_{n_1+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n_1+1}^* & \dots & -\alpha_{n_1+n_2}^* & -\alpha^* \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \alpha^* = - \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i^* \frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

V.1 - Condition de stabilité d'un système non linéaire de type Lur'e Postnikov

Définition :

$\bar{A}_C^*$  est une (-z) matrice si ses éléments diagonaux sont négatifs et ses éléments hors diagonaux positifs.

Théorème 1 /Grujić, Gentina, Borne, 1976/ :

1) Si la matrice  $\bar{A}_C^*$  caractérisant le système est une (-z) matrice, et si tous ses éléments non constants sont isolés dans une seule rangée, alors le système vérifie la conjecture linéaire. Si les conditions de Kotelyanski sont réalisées, alors le système est asymptotiquement stable.

2) Si la matrice  $\bar{A}_C^*$  ne vérifie pas la condition (1), alors il est possible de se ramener au cas précédent s'il existe une norme vectorielle  $p(x)$  telle que :

$$(II.138) \quad \frac{d}{dt} p(x) \leq M(\bar{A}_C^*) p(x)$$

où  $M(\bar{A}_C^*)$  vérifie ces contraintes.

Les conditions de Kotelyanski pour l'étude de la stabilité portent sur les déterminants des mineurs principaux de la matrice caractéristique qui doivent vérifier :

$$(II.139) \quad (-1)^r \det_r \bar{A}_C^* \geq \epsilon > 0 \quad \forall r = 1, \dots, n \quad \forall f^* \in [\underline{f}; \bar{f}]$$

Pour une matrice en flèche  $\bar{A}_C^*$ , par construction, les (n-1) premières conditions s'écrivent :

$$(II.140) \quad (-1)^r \det_r \bar{A}_C^* = (-1)^r \prod_{i=1}^r (-\alpha_i) \quad r = 1, \dots, n-1$$

ce qui donne

$$(II.141) \quad (-1)^r \det_r \bar{A}_C^* = \prod_{i=1}^r \alpha_i \geq \epsilon > 0 \quad \text{vrai par construction}$$

La seule condition à vérifier concerne donc le déterminant d'ordre n et s'écrit :

$$(-1)^n \det_n \bar{A}_C^* \geq \epsilon > 0 \quad \forall f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$$

La matrice  $\bar{A}_C^*$  se présentant sous la forme précédemment décrite

$$\bar{A}_C^* = \left[ \begin{array}{cc|cc} & & & \\ & A_{11} & & A_{12} \\ & \text{---} & \text{---} & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & A_{21}^* & & A_{22}^* \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} n_1 \\ \} n_2 \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n_2}$

nous proposons le théorème suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système étudié.

Théorème 2 :

Si la matrice en flèche  $\bar{A}_C^*$  caractérisant le système de type Lur'e Postnikov est une (-M) matrice, alors une condition nécessaire et suffisante de stabilité de ce système est obtenue par l'application des conditions de Kotelyanski et s'écrit :

$$(-1)^{n_2} \det \begin{bmatrix} A_{22}^* & -A_{21}^* & A_{11}^{-1} & A_{12} \end{bmatrix} \geq \epsilon > 0 \quad \forall f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$$

Démonstration :

Si  $\bar{A}_C^*$  est une (-M) matrice, alors la matrice  $A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12}$  est aussi une (-M) matrice (elle ne diffère de  $A_{22}^*$  que par un terme ajouté à la pointe de la flèche, comme montré précédemment). Le système global est stable si :

$$(-1)^{n_1+n_2} \det \bar{A}_C^* \geq \epsilon > 0 \quad \forall f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$$

ce qui s'écrit en développant le déterminant suivant la méthode de Rosenbrock :

$$(-1)^{n_1+n_2} \det \bar{A}_C^* = ((-1)^{n_1} \det A_{11}) \cdot ((-1)^{n_2} \det (A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12}))$$

avec :

$$(-1)^{n_1} \det A_{11} \geq \epsilon > 0 \quad \text{par construction.}$$

Il y a donc équivalence rigoureuse des conditions de stabilité.

Corollaire :

Si le système global représenté par la matrice  $\bar{A}_C^*$  possède la propriété de double échelle de temps et peut être décomposé en une partie rapide caractérisée par la matrice  $A_{11}$  et une partie lente représentée par  $A_\lambda = A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12}$ , alors la condition de stabilité obtenue pour le système réduit par l'application des conditions de Kotelyanski conformément au Théorème 1.1 est une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système global.

V.2 - Condition suffisante de stabilité d'un système non linéaire de type Lur'e Postnikov

Comme dans le paragraphe précédent, les résultats exposés ici sont valables pour un système quelconque ou un système à double échelle de temps. Pour la simplicité d'écriture, et sans restriction de généralité, nous noterons  $A_\ell$  la matrice  $A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12}$  comme précédemment.

Lorsque la matrice globale  $\bar{A}_C^*$  n'est pas une (-z) matrice, le théorème 2 n'est plus valide et est remplacé par le théorème 3 suivant :

Théorème 3 :

La condition suffisante de stabilité du système lent obtenue par l'application des conditions de Kottenlyanski à la matrice majorante déduite de  $\bar{A}_C^*$  (éléments diagonaux négatifs) à partir de la norme vectorielle  $p(x_\ell) = |x_\ell|$  implique la stabilité du système global initial.

Démonstration :

1er cas

$\bar{A}_C^*$  n'est pas une (-z) matrice, mais  $A_{22}^*$  l'est. Alors, soit  $M(\bar{A}_C^*)$  la matrice définie par la norme  $p(x) = |x|$ , telle que :

$$(II.134) \quad M(\bar{A}_C^*) = \begin{bmatrix} A_{11} & |A_{12}| \\ |A_{21}^*| & A_{22}^* \end{bmatrix}$$

Le système global est stable si :

$$(-1)^{n_1+n_2} \det M(\bar{A}_C^*) \geq \epsilon > 0 \quad \forall f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$$

ce qui s'écrit :

$$(II.135) \quad (-1)^{n_1+n_2} \det M(\bar{A}_C^*) = \underbrace{((-1)^{n_1} \det A_{11})}_{\geq \epsilon > 0 \text{ (par construction)}} \cdot \underbrace{((-1)^{n_2} \det (A_{22}^* - |A_{21}^*| A_{11}^{-1} |A_{12}|))}_{(C_1) \geq \epsilon > 0}$$



Il s'agit donc de comparer la relation (C<sub>1</sub>) avec la relation (C<sub>2</sub>) portant sur A<sub>ℓ</sub> (A<sub>ℓ</sub> vérifie la conjecture linéaire puisque A<sub>22</sub><sup>\*</sup> la vérifie).

$$(C_2) : (-1)^{n_2} \det (A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12}) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$$

$$A_\ell = A_{22}^* + \begin{bmatrix} 0 & \phi \\ -\theta & -\alpha^* \end{bmatrix}$$

Donc :

$$(II.136) \quad \det A_\ell = \det A_{22}^* + \det \begin{bmatrix} -\alpha_{n_1+1} & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & 0 \\ & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & \alpha_{n_1+n_2-1} & & & 0 \\ \gamma_{n_1+1}^* & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma_{n_1+n_2-1}^* & & -\alpha^* \end{bmatrix}$$

(développement du déterminant de A<sub>ℓ</sub> par rapport à la dernière colonne)

ou encore :

$$(II.137) \quad \det A_\ell = \det A_{22}^* + (-\alpha^*) \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2-1} (-\alpha_i)$$

$$(-1)^{n_2} \det A_\ell = (-1)^{n_2} \det A_{22}^* + (-1)^{n_2} (-1)^{n_2-1} (-\alpha^*) \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2-1} (\alpha_i)$$

$$(II.138) \quad (-1)^{n_2} \det A_\ell = (-1)^{n_2} \det A_{22}^* + \left[ \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2-1} \alpha_i \right] \left[ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\gamma_i^* \beta_i}{\alpha_i} \right]$$

$$(II.139) \quad (-1)^{n_2} \det \left[ A_{22}^* - |A_{21}^*| A_{11}^{-1} |A_{12}| \right] = (-1)^{n_2} \det A_{22}^* + \left[ \begin{array}{c} n_1+n_2-1 \\ \prod \\ i=n_1+1 \end{array} \alpha_i \right] \left[ \begin{array}{c} n_1 \\ \sum \\ i=1 \end{array} \frac{|\gamma_i^*| |\beta_i|}{\alpha_i} \right]$$

.  $\alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_1$

. si  $\gamma_i^* \beta_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_1$  alors :

$$\sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i^* \beta_i = \sum_{i=1}^{n_1} |\gamma_i^*| |\beta_i|$$

. si  $\exists k \in [1, \dots, n_1]$  tel que  $\gamma_k^* \beta_k < 0$  alors :

$$\sum_{i=1}^{n_1} \gamma_i^* \beta_i < \sum_{i=1}^{n_1} |\gamma_i^*| |\beta_i|$$

d'où :

$$(II.140) \quad (-1)^{n_2} \det A_\ell \leq (-1)^{n_2} \det \left[ A_{22}^* - |A_{21}^*| A_{11}^{-1} |A_{12}| \right]$$

Donc :

$$(-1)^{n_2} \det A_\ell \geq \varepsilon > 0 \implies (-1)^{n_2} \det \left[ A_{22}^* - |A_{21}^*| A_{11}^{-1} |A_{12}| \right] \geq \varepsilon > 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-1)^{n_1+n_2} \det M(\bar{A}_C^*) \geq \varepsilon > 0$$

2ème cas

$\bar{A}_C^*$  n'est pas une (-z) matrice, de même que  $A_{22}^*$ . Alors :

$$(II.141) \quad M(\bar{A}_C^*) = \begin{bmatrix} A_{11} & |A_{12}| \\ |A_{21}| & M(A_{22}^*) \end{bmatrix}$$

Le système global est stable si :

$$(II.142) \quad (-1)^{n_1+n_2} \det M(\bar{A}_C^*) = ((-1)^{n_1} \det A_{11}) \cdot (-1)^{n_2} \det \left[ M(A_{22}^*) - |A_{21}| A_{11}^{-1} |A_{12}| \right]$$

$$\geq \epsilon > 0 \quad \forall f^* \in [ \underline{f}, \bar{f} ]$$

Le système lent est stable si :

$$(-1)^{n_2} \det M \left[ A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12} \right] \geq \epsilon > 0 \quad \forall f^* \in [ \underline{f}, \bar{f} ]$$

$$(II.143) \quad (-1)^{n_2} \det \left[ M(A_{22}^*) - |A_{21}^*| A_{11}^{-1} |A_{12}| \right] =$$

$$(-1)^{n_2} \det M(A_{22}^*) + \left[ \begin{array}{c} n_1+n_2-1 \\ \prod \\ i=n_1+1 \end{array} \alpha_i \right] \left[ \begin{array}{c} n_1 \\ \sum \\ i=1 \end{array} \frac{|\gamma_i^*| |\beta_i|}{\alpha_i} \right]$$

$$(II.144) \quad M \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc} A_{22}^* & -A_{21}^* & A_{11}^{-1} A_{12} \end{array} \right]}_{A_\ell} = \left[ \begin{array}{ccc} & & \\ & -\alpha_i & |\beta_i| \\ \dots & |\gamma_i^*| & -\alpha_{n_1+n_2} - \alpha^* \end{array} \right]$$

$$= M(A_{22}^*) + \left[ \begin{array}{ccc} & & \\ & -\alpha_i & \\ - & |\gamma_i^*| & -\alpha^* \end{array} \right]$$

d'où :

$$(II.145) \quad (-1)^{n_2} \det M(A_\ell) = (-1)^{n_2} \det M(A_{22}^*) + \left[ \begin{array}{c} n_1+n_2-1 \\ \prod \\ i=n_1+1 \end{array} \alpha_i \right] \left[ \begin{array}{c} n_1 \\ \sum \\ i=1 \end{array} \frac{|\gamma_i^*| |\beta_i|}{\alpha_i} \right]$$

d'où le résultat.

V.3 - Etude de la robustesse de la stabilité par rapport à  $\mu$

Nous proposons le théorème suivant :

Théorème :

Lorsque le système global à deux dynamiques est modélisé sous la forme (II.73), alors la propriété de stabilité est robuste par rapport à  $\mu$ .

Démonstration :

Le système représenté par (II.73) s'écrit aussi :

$$(II.146) \quad \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}/\mu & A_{12}/\mu \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}}_{\bar{A}_c^*} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}$$

En cas de vérification du théorème (2), la condition nécessaire et suffisante de stabilité du système global s'écrit :

$$(II.147) \quad ((-1)^{n_1} \det \frac{A_{11}}{\mu}) ((-1)^{n_2} \det (A_{22}^* - A_{21}^* A_{11}^{-1} A_{12})) \geq \epsilon > 0$$

$\mu$  étant positif par définition, cette propriété de stabilité ne dépend pas de  $\mu$ , elle est donc robuste par rapport à  $\mu$ .

De même, dans le cas d'application du théorème (3), la propriété de stabilité est encore robuste par rapport à  $\mu$ .

VI - DETERMINATION DE LA COMMANDE QUASI-OPTIMALE DE SYSTEMES SINGULIEREMENT PERTURBES EN FLECHE

Les travaux concernant la commande des systèmes singulièrement perturbés sont multiples /Kokotovic, Haddad, 1975/ /Chow, Kokotovic, 1976/ /Fossard, Magni, 1980/ /Kokotovic, O'Malley, Sannuti, 1976/ /Saksena, O'Reilly, Kokotovic, 1982/.

Nous nous intéressons ici à la commande linéaire quadratique à horizon infini des systèmes à deux dynamiques, modélisés par une matrice en flèche, de structure équivalente à celle des systèmes de type Lur'e Postnikov précédemment décrits pour lesquels la non linéarité est remplacée par un gain constant :

$$(II.148) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mu \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Le critère à minimiser est :

$$(II.149) J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (y^T y + u^T R u) dt \quad R \text{ définie } > 0$$

et la solution optimale est obtenue par :

$$(II.150) u = - R^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T / \mu & B_2^T \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}$$

où K est solution de l'équation de Riccati :

$$(II.151) KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + C^T C = 0$$

La matrice K, définie par /Kokotovic, Yackel, 1972/ pour les systèmes à deux échelles de temps se présente ici sous la forme :

$$(II.152) \quad K = \begin{bmatrix} \mu K_{11} & \mu K_{12}^T \\ \mu K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$$

En effectuant dans (II.151) les produits matriciels, avec K exprimée par (II.152) et en posant  $\mu = 0$ , on obtient un système de 4 équations matricielles, simplifiées par rapport au cas général puisque  $B_1 = 0$ .

Soient :

$$(II.153) \quad \begin{cases} \text{a) } K_{11} A_{11} + A_{11}^T K_{11} + C_1^T C_1 = 0 \\ \text{b) } K_{11} A_{12} + A_{11}^T K_{12}^T + A_{21}^T K_{22} + C_1^T C_2 = 0 \\ \text{c) } K_{12} A_{11} + K_{22} A_{21} + A_{12}^T K_{11} + C_2^T C_1 = 0 \\ \text{d) } K_{22} A_{22} + A_{22}^T K_{22} + K_{12} A_{12} + A_{12}^T K_{12}^T - K_{22} B_2 R^{-1} B_2^T K_{22} \\ \quad + C_2^T C_2 = 0 \end{cases}$$

La relation (II.153 - a) permet de déterminer très simplement  $K_{11}$ . En effet,  $A_{11}$  est diagonale ; donc :

$$A_{11} = A_{11}^T = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ & & & \circ \\ & & & & -\alpha_{n_1} \end{bmatrix}$$

Si  $K_{11} = \{K_{11}(i,j) / i,j = 1, \dots, n_1\}$ , alors (II.153 - a) s'écrit :

$$(II.154) \quad K_{11}(i,j) \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & \circ \\ & \circ & \\ & & -\alpha_{n_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 & & \circ \\ & \circ & \\ & & -\alpha_{n_1} \end{bmatrix} K_{11}(i,j) + \begin{bmatrix} \vdots \\ C_1(i) \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots C_1(j) \dots \end{bmatrix} = 0$$

d'où la relation exprimant les éléments de la matrice  $K_{11}$  :

$$(II.155) \quad K_{11}(i,j) = \frac{C_1(i) \cdot C_1(j)}{\alpha_i + \alpha_j} \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n_1$$

avec  $C_1(i) = N(-\alpha_i)$  ( $N(p)$  numérateur de la fonction de transfert).

De la relation (II.153 - c) est obtenue l'expression de  $K_{12}$  :

$$(II.156) \quad K_{12} = - \left[ K_{22} A_{21} + A_{12}^T K_{11} + C_2^T C_1 \right] A_{11}^{-1}$$

qui conduit à la relation suivante, en remplaçant  $K_{12}$  dans (II.153 - d) :

$$(II.157) \quad \begin{cases} K_{22} A_{22} + A_{22}^T K_{22} - \left[ K_{22} A_{21} + A_{12}^T K_{11} + C_2^T C_1 \right] A_{11}^{-1} A_{12} \\ - A_{12}^T (A_{11}^{-1})^T \left[ A_{21}^T K_{22} + K_{11} A_{12} + C_1^T C_2 \right] \\ - K_{22} B_2 R^{-1} B_2^T K_{22} + C_2^T C_2 = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$(II.158) \quad \begin{cases} K_{22} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) + (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^T K_{22} - K_{22} B_2 R^{-1} B_2^T K_{22} \\ + C_2^T (C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}) - A_{12}^T \left[ K_{11} A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1})^T K_{11} \right] A_{12} \\ - A_{12}^T (A_{11}^{-1})^T C_1^T C_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit, en utilisant la relation (II.153 - a), à la relation :

$$(II.159) \quad \begin{cases} K_{22} A_\ell + A_\ell^T K_{22} - K_{22} B_\ell R^{-1} B_\ell^T K_{22} + C_\ell^T C_\ell = 0 \\ \text{avec : } \begin{cases} A_\ell = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \\ B_\ell = B_2 \\ C_\ell = C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12} \\ D_\ell = 0 \end{cases} \end{cases}$$

L'équation (II.159) ainsi obtenue correspond à l'équation de Riccati du système lent découplé.

La commande calculée ici est une commande quasi-optimale, d'où une précision  $O(\mu^2)$  pour le critère J par rapport à la commande optimale /Chow, Kokotovic, 1976/ avec une seule résolution d'équation de Riccati pour  $K_{22}$  associée aux variables lentes.

Le système rapide découplé n'étant pas commandable, il est impossible de concevoir une commande composite :

$$u_c = u_\ell + u_r$$

qui aurait donné la même précision, mais avec résolution de deux équations de Riccati.

La commande déterminée par cette méthode est la suivante :

$$u = - R^{-1} B^T K X$$
$$u = - R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu K_{11} & \mu K_{12}^T \\ \mu K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}$$

d'où :

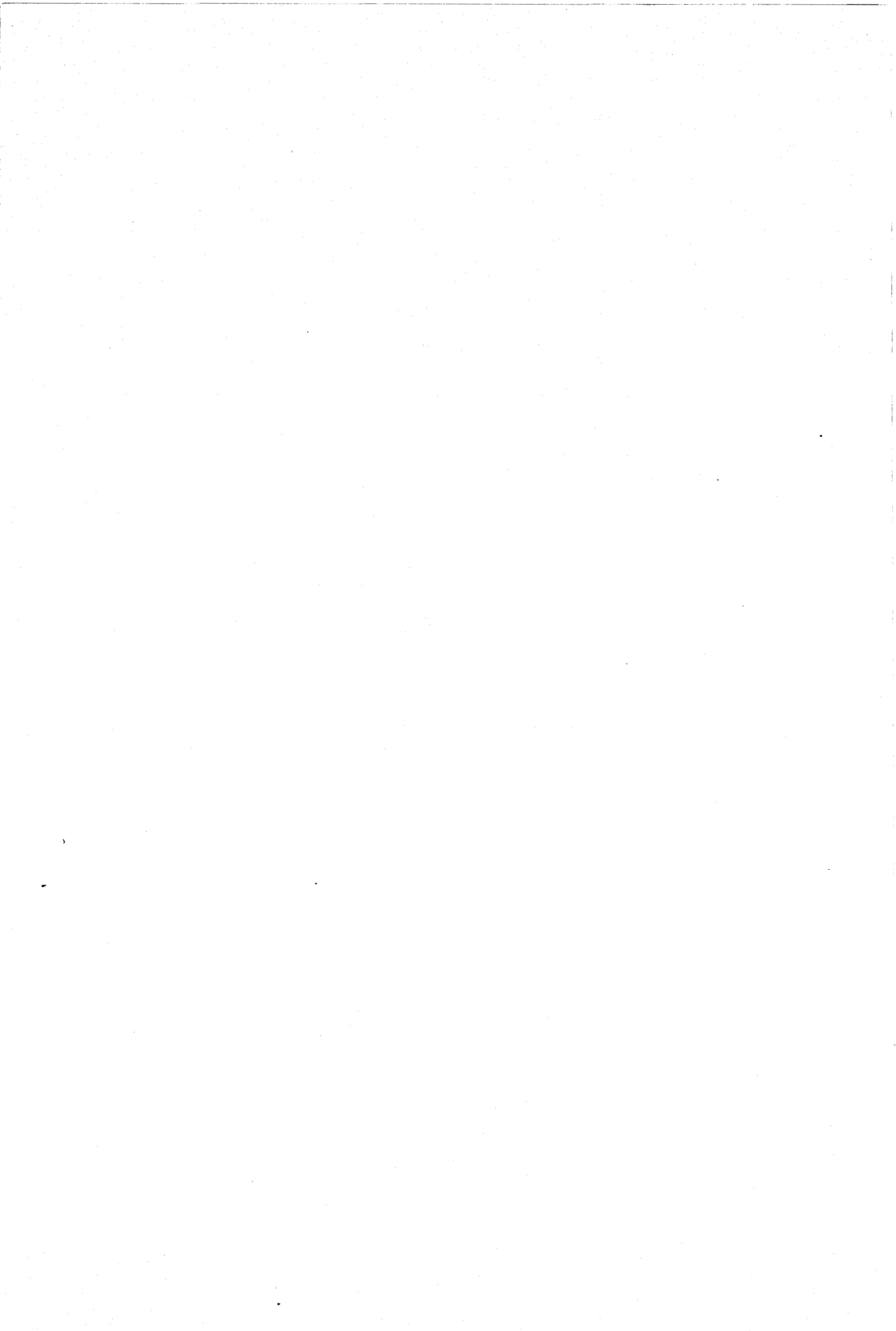
$$u = - R^{-1} (\mu B_2 K_{12} z + B_2 K_{22} x)$$

avec :

$$K_{12} = - \left[ K_{22} A_{21} + A_{12}^T K_{11} + C_2^T C_1 \right]$$

La partie rapide, non commandable isolément, est commandée ici par l'intermédiaire de la variable lente, l'influence de la variable rapide ayant coefficientée par  $\mu$ .





### CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats nouveaux concernant la modélisation des systèmes à deux dynamiques sous forme singulièrement perturbée et les avantages qu'offre la forme matricielle en flèche pour la réduction, l'analyse et la commande optimale des processus à deux échelles de temps, avec une attention particulière concernant les systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov.

La définition de la transformation réciproque, pour différents modes de représentation permet l'étude des systèmes singulièrement perturbés dans les dynamiques élevées avec la même précision que celle obtenue pour les parties lentes habituellement étudiées par la méthode des perturbations singulières. Cette approche permet également de découpler des sous-systèmes avec une précision satisfaisante même quand les dynamiques ne sont pas très nettement séparées, puisque chaque partie tient compte du comportement dynamique de l'autre. Le Chapitre III mettra en évidence l'intérêt de cette méthode pour la modélisation mais aussi pour la commande.



CHAPITRE III



MISE EN ŒUVRE PRATIQUE DE LA TRANSFORMATION RECIPROQUE  
POUR LA REDUCTION ET LA COMMANDE OPTIMALE  
DES SYSTEMES A DEUX ECHELLES DE TEMPS

INTRODUCTION

Le modèle bond-graph est généralement utilisé comme outil de représentation d'un système physique permettant de définir tous les échanges énergétiques internes, dans un but de simulation.

Nous proposons ici une méthode de réduction du modèle bond-graph correspondant à un système comportant plusieurs dynamiques distinctes. Après une phase de détermination rapide des différents modes, la simplification du bond-graph (BG) permet d'obtenir un graphe réduit qui ne conserve que les dynamiques du domaine fréquentiel concerné.

Cette réduction est rendue systématique par l'application de la transformation réciproque. La méthode des perturbations singulières (PS) réduit la dimension du système étudié, ce qui conduit également à un graphe simplifié. Nous présentons, sur un exemple mécanique concernant la suspension d'une voiture, une étude comparative des résultats obtenus par ces deux méthodes simplificatives BG et PS.

L'étude précise de la partie rapide découplée est possible si la réduction par la méthode PS est accompagnée de l'application de la transformation réciproque.

Nous montrons pour deux domaines très importants de l'étude des systèmes, la simulation et la commande optimale, l'apport très net de cette méthode de réduction (PS + R) pour les systèmes à dynamique élevée.

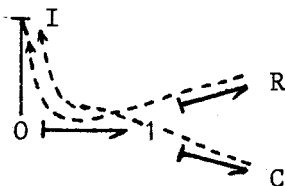
## I - REPRESENTATION ET REDUCTION DES SYSTEMES A DEUX ECHELLES DE TEMPS A PARTIR D'UN MODELE BOND-GRAPH

### I.1 - Mise en évidence des dynamiques

Nous avons présenté dans le chapitre I, le mode de représentation par Bond-Graph qui conduit à une équation d'état en variables d'énergie  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  ou en variables de phase  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}$ .

Cette modélisation s'avère très intéressante pour la mise en évidence des différentes dynamiques qui composent le système. En effet, il est possible d'obtenir une approximation des valeurs propres du système, donc des modes par calcul des gains des boucles de causalité /Rosenberg, Andry, 1979/.

Ainsi, le bond-graph suivant :



permet de mettre en évidence deux boucles causales caractérisées par les gains :

$$\lambda_1 = \frac{R}{I} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{IC}}$$

Cette détermination approchée des modes peut s'avérer inexacte quand le couplage entre les éléments est très important (par exemple, cas d'une ligne hydraulique), mais dans la plupart des cas elle peut renseigner de façon très utile sur les possibilités de réduction.

### I.2 - Séparation des dynamiques /Dauphin-Tanguy, Lebrun, Borne, 1983/

#### I.2.1 - Etude de la partie rapide simplifiée

Pour obtenir la partie rapide simplifiée d'un modèle bond-graph, il est possible de considérer que la partie lente, définie par des gains

de boucle faibles (modes lents) est statique, et ainsi déterminer quels sont les éléments (inertiels ou capacitifs) à rendre infinis pour annuler ces petits gains.

Cette démarche permet alors de simplifier le bond-graph global en supprimant les liens associés à ces éléments.

Ce bond-graph réduit conduit à une équation d'état simplifiée et à une fonction de transfert (dans le cas linéaire) réduite.

### I.2.2 - Etude de la partie lente

Pour obtenir la partie lente réduite, l'hypothèse usuelle est de supposer une réponse instantanée de la partie rapide, ce qui est difficile à exprimer sur le bond-graph direct. Nous proposons donc d'utiliser la transformation réciproque décrite dans le cas d'un modèle bond-graph dans le précédent chapitre. Elle inverse les dynamiques, ce qui conduit à étudier la partie rapide réciproque, de la même façon que la partie rapide directe. Les éléments réciproques inertiels et capacitifs de la partie lente réciproque tendent vers l'infini, ce qui est équivalent à annuler les éléments inertiels et capacitifs de la partie rapide initiale ( $\tilde{I} = -I^{-1}$  ;  $\tilde{C} = -C^{-1}$  par définition du bond-graph réciproque).

Le bond-graph réduit associé à la partie lente est ainsi facilement obtenu par suppression des liens correspondants sur le modèle initial, de même que la formulation dans l'espace d'état qui en résulte.

### I.3 - Interprétation

Cette simplification sur le modèle bond-graph est à rapprocher des méthodes modales de réduction qui consistent à ne prendre en compte que les modes correspondant au domaine fréquentiel (ou temporel) étudié.

/Margolis et Young, 1977/ proposent une méthode de réduction pour des systèmes en modèle bond-graph, représentés dans l'espace de phase par l'équation différentielle du second ordre :

$$(III.1) \quad I \ddot{y} + \bar{C} \dot{y} = B_{pe} E + A_{pq} B_{qf} \int_0^t F dt$$



(voir les équations (I.50) et (I.51))

donc en absence d'éléments dissipatifs (matrice  $\bar{R} \equiv 0$ ).

La solution de cette équation sans second membre étant de la forme  $y = \text{Re } y_0 e^{j\omega t}$ , il est possible, après détermination des pulsations caractéristiques  $\omega_n^2$ , de définir la matrice modale, formée des vecteurs propres associés aux modes propres et de diagonaliser, par changement de base, le système (III.1).

Cette présentation permet ensuite de retenir les termes associés aux modes dominants.

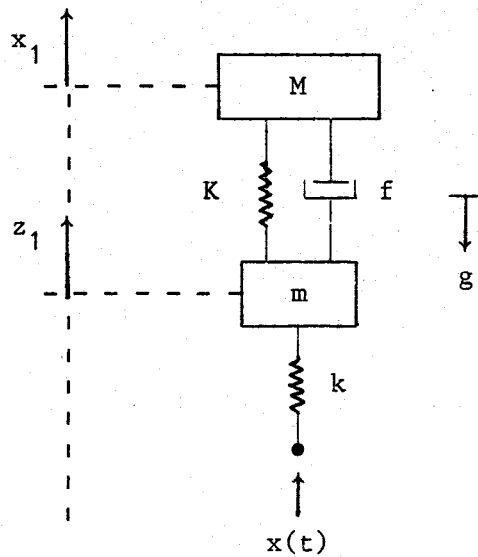
La méthode proposée ici présente l'avantage d'être très générale et de ne faire aucune hypothèse sur la nature des éléments composant le bond-graph. Elle est très simple à mettre en œuvre et peut être facilement programmée pour une recherche automatique des gains de boucle et une réduction correspondante du graphe, lors d'essais de simulation par exemple. Elle s'adapte tout à fait aux calculs en temps réel, même pour des systèmes à éléments non constants. Il s'agit alors de définir une représentation multi-modèle du système, avec des domaines de validité du système simplifié.

Lorsque les dynamiques sont nettement séparées, les résultats sont très proches de ceux obtenus par la méthode des perturbations singulières, ce qui justifie bien une telle simplification.

## II - COMPARAISON SUR UN EXEMPLE MECANIQUE DE LA REDUCTION PAR LA METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES ET LA SIMPLIFICATION DU MODELE BOND-GRAPH

### II.1 - Présentation des différents modes de représentation

Soit le système physique représenté Figure 7, correspondant à la modélisation de la suspension d'une voiture.



Modèle physique de la suspension de voiture

Figure 7

x(t) représente le profil de la route et g la pesanteur. Le système est supposé linéaire. Il peut être décrit par différentes représentations, présentées dans le chapitre I.

II.1.1 - Equations différentielles

Le système étudié est multivariable puisqu'il comporte deux entrées (x et g) et deux sorties (x<sub>1</sub> et z<sub>1</sub>). Les équations différentielles obtenues par application du principe fondamental de la mécanique sont les suivantes :

$$(III.2) \quad \begin{cases} M \ddot{x}_1 + K(x_1 - z_1) + f(\dot{x}_1 - \dot{z}_1) + M g = 0 \\ m \ddot{z}_1 + k(z_1 - x) + K(z_1 - x_1) + f(\dot{z}_1 - \dot{x}_1) + m g = 0 \end{cases}$$

II.1.2 - Matrice de transfert

Soient

$$\begin{cases} u(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ g \end{bmatrix} & \text{le vecteur des entrées} \\ y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} & \text{le vecteur des sorties} \end{cases}$$

La matrice de transfert  $z(p)$  est définie par :

(III.3)  $y(p) = z(p) u(p)$

avec :

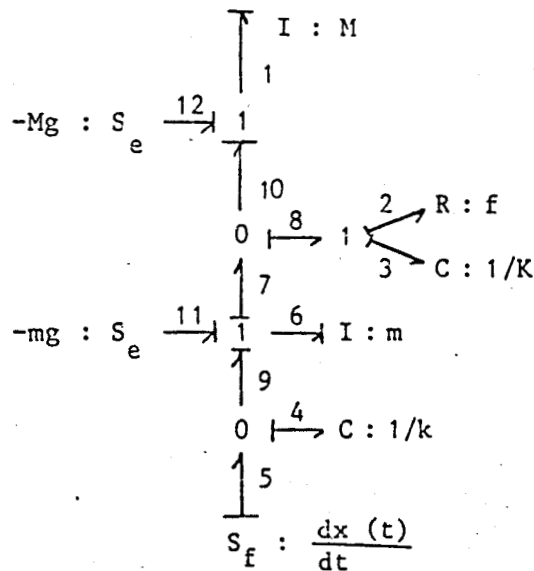
(III.4) 
$$\left\{ \begin{aligned} z_{11}(p) &= \frac{(K + fp) k}{D(p)} \\ z_{12}(p) &= \frac{-(Mmp^2 + f(M+m)p + (K+k)M + mK)}{D(p)} \\ z_{22}(p) &= \frac{-(mMp^2 + f(m+M)p + K(m+M))}{D(p)} \\ z_{21}(p) &= \frac{k(Mp^2 + fp + K)}{D(p)} \end{aligned} \right.$$

où :

$$D(p) = Mmp^4 + f(m+M)p^3 + (Km + (k+K)M)p^2 + fkp + kK$$

II.1.3 - Equation d'état obtenue à partir du modèle bond-graph

Le modèle bond-graph est représenté Figure 8.



Modèle Bond-Graph de la suspension de voiture

Figure 8

Le vecteur des entrées est composé de deux sources-effort correspondant aux effets de la pesanteur et d'une source-flux associée à la vitesse de variation du profil de la route.

Les différents éléments, inerties associées aux masses, compliances aux ressorts et résistance à l'amortisseur sont linéaires, mais il est tout à fait possible d'envisager des ressorts avec butées ou un amortisseur à coefficient de frottement variable avec la vitesse.

La mise en équation d'état, à partir du vecteur état associé aux variables d'énergie  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  a été présentée dans le Chapitre I avec les relations (I.42) à (I.47).

Nous rappelons dans le cas précis les différentes variables.

$$(III.5) \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_3 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ p_6 \\ p_1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_3 \\ f_6 \\ f_1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} f_5 \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

$$D_{in} = f_2$$

$$D_{out} = e_2$$

$q_3$  et  $q_4$  correspondent à la déformation des ressorts et  $p_1$  et  $p_6$  sont les impulsions appliquées aux masses.

Des relations précédentes, nous obtenons :

$$(III.6) \quad S = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/M \end{bmatrix}$$

L'équation :

$$(I.46) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{SS} & J_{SL} & J_{SU} \\ J_{LS} & J_{LL} & J_{LU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ U \end{bmatrix}$$

devient ici :

$$(III.7) \quad \begin{bmatrix} f_4 \\ f_3 \\ e_6 \\ e_1 \\ \frac{f_1}{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} J_{SS} & J_{SL} & J_{SU} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} J_{LS} & J_{LL} & J_{LU} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_3 \\ f_6 \\ f_1 \\ \hline e_2 \\ \hline f_5 \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

ce qui donne, par application des relations (I.47), l'équation d'état :

$$(III.8) \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{p}_6 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m & -1/M \\ k & -K & -f/m & f/M \\ 0 & K & f/m & -f/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ p_6 \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_5 \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

Une autre formulation dans l'espace d'état est obtenue par changement de base en choisissant comme variables d'état les variables de phase. La transformation, définie par les équations (I.48) à (I.51) conduit à l'équation suivante, en posant  $x_2 = \dot{x}_1$  et  $z_2 = \dot{z}_1$  :

$$(III.9) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K/M & -f/M & K/M & f/M \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ K/m & f/m & \frac{-(K+k)}{m} & -f/m \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -1 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne, avec les valeurs numériques suivantes :

$$m = 1 \quad M = 10 \quad \frac{K}{M} = 60 \text{ s}^{-2} \quad \frac{f}{M} = 4 \text{ s}^{-1} \quad \frac{k+K}{M} = 1000 \text{ s}^{-2}$$

$$(III.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -60 & -4 & 60 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 600 & 40 & -10000 & -40 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 9400 & -1 \end{bmatrix} \\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Cinq boucles apparaissent sur le graphe de la Figure 8, qui permettent de mettre en évidence les deux sous-ensembles de dynamiques.

a) Partie lente :

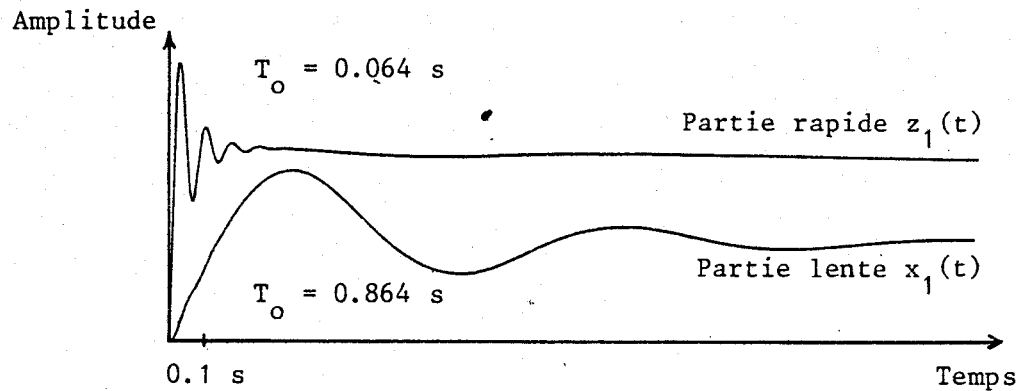
$$\frac{f}{M} = 4 \quad \sqrt{\frac{K}{M}} = 7,752$$

b) Partie rapide :

$$\frac{f}{m} = 40 \quad \sqrt{\frac{K}{m}} = 24,51 \quad \sqrt{\frac{k}{m}} = 97,09$$

Ce découplage en deux sous-ensembles de variables lentes et rapides apparaît Figure 9, la partie lente correspondant à l'habitacle et la partie rapide au pneu.

Pour l'ensemble des simulations, nous avons considéré l'accélération de la pesanteur  $g$  égale à 10 et l'entrée indicielle  $x(t)$  égale à 0,1.



Mise en évidence des deux dynamiques

Figure 9

## II.2 - Modélisation sous forme singulièrement perturbée

Le système initial se présentant sous la forme (III.10), il est nécessaire de définir un petit paramètre  $\mu$  qui permette de modéliser le système sous forme d'un système singulièrement perturbé et d'appliquer ensuite la méthode des perturbations singulières.

Ce paramètre  $\mu$  peut être choisi de multiples façons. Ici :

- il peut correspondre au rapport des masses

$$\frac{m}{M} = 0.1$$

- il peut être choisi comme rapport des raideurs

$$\frac{K}{k} = \frac{600}{9400} = 0.064$$

- il peut être déduit de la comparaison entre les périodes propres des diverses parties du système

$$\frac{T_0(\text{rapide})}{T_0(\text{lent})} = 0.074$$

Nous choisissons  $\mu = 0.1$  qui permet de normaliser simplement les termes de la matrice et qui apparaît comme le rapport le plus défavo-

nable entre les grandeurs physiques.

Remarque :

Le choix exact de la valeur de  $\mu$  importe peu puisque le coefficient  $\mu$  disparaît des expressions matricielles après réduction.

Le système initial se présentant sous la forme :

$$(III.11) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix}$$

devient :

$$(III.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \mu \dot{z}_1 \\ \mu \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \\ \\ \text{avec } \begin{cases} A_{21}^* = \mu A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 60 & 4 \end{bmatrix} & A_{22}^* = \mu A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -1000 & -4 \end{bmatrix} \\ B_{21}^* = \mu B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 940 \end{bmatrix} & B_{22}^* = \mu B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} \end{cases} \end{array} \right.$$

### II.3 - Séparation des dynamiques

#### II.3.1 - Etude de la partie rapide

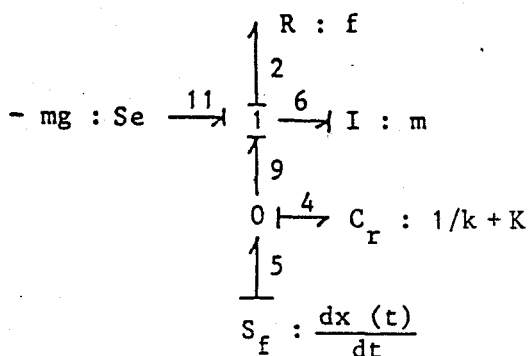
Les composantes rapides du vecteur état sont les variables  $z_1$  et  $z_2 = \dot{z}_1$ .



Nous distinguerons les systèmes réduits obtenus par chacune des méthodes par l'indice correspondant BG (Simplification du modèle Bond-Graph) et PS (application de la méthode des Perturbations Singulières).

II.3.1.1 - Simplification sur le modèle Bond-Graph :

La partie rapide (pneu) est ici obtenue en considérant que la partie lente est immobile, c'est-à-dire que la masse de l'habitacle M est infinie devant la masse du pneu m. Les liens 1, 10 et 12 disparaissent de la Figure 8. Les liens 3 et 4 peuvent être regroupés en un seul, caractérisé par l'élément capacitif  $C_r$ , ce qui conduit au bond-graph réduit de la Figure 10 suivante :



Bond-Graph réduit associé à la partie rapide

Figure 10

L'équation d'état en variables de phase déduite de ce graphe réduit est :

$$(III.13) \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}_{r_{BG}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10000 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10000 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix}$$

L'étude concerne le mouvement du pneu  $(z_1)_{r_{BG}}$ , l'équation de transfert correspondante s'écrit :

$$(III.14) \quad z_{1rBG}(p) = \frac{10000 x(p)}{p^2 + 40p + 10000} - \frac{g(p)}{p^2 + 40p + 10000}$$

Ce système est oscillant et caractérisé par les paramètres suivants :

- Fréquence de résonance  $f_{rBG} = 15.28 \text{ Hz}$
- Coefficient d'amortissement  $\xi_{rBG} = 0.2$

### II.3.1.2 - Méthode des perturbations singulières :

L'équation matricielle caractérisant la partie rapide obtenue par cette méthode a été explicitée dans le Chapitre I, équation (I.97), qui s'exprime ici par :

$$(III.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}_{rPS} = A_{22}^* \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{rPS} + \begin{bmatrix} B_{21}^* & B_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \\ y_{rPS} = C_2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{rPS} \end{array} \right.$$

ce qui correspond en valeurs numériques à :

$$(III.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}_{rPS} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10000 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{rPS} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9400 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \\ y_{rPS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{rPS} \end{array} \right.$$

La relation entrées-sorties apparaît sous la forme symbolique suivante :

$$y_{rPS}(p) = C_2 \left[ pI - A_{22} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

ou encore :

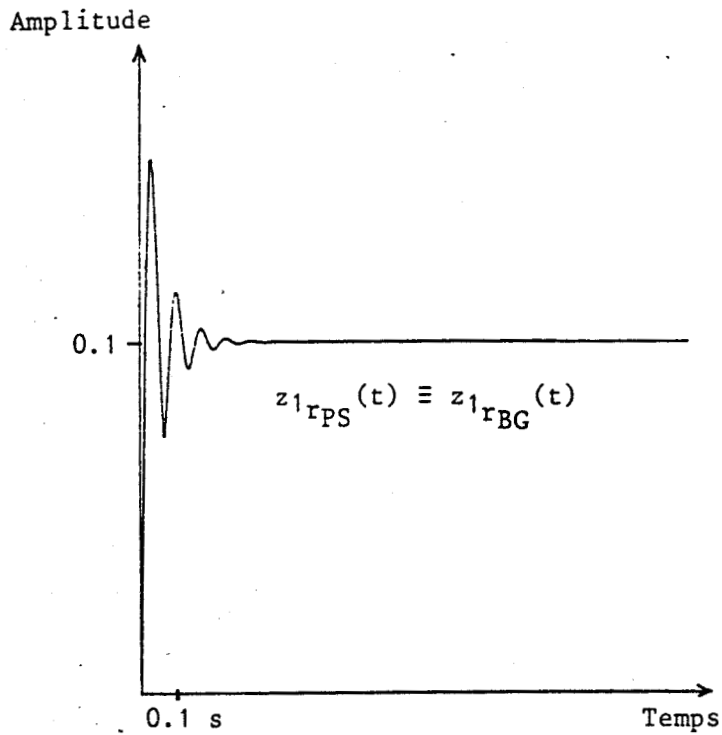
$$(III.17) \quad z_{1rPS}(p) = \frac{9400}{p^2 + 40p + 10000} x(p) - \frac{1}{p^2 + 40p + 10000} g(p)$$

Les paramètres du système oscillant ainsi obtenu sont les suivants :

- Coefficient d'amortissement  $\xi_{rPS} = 0.2$

- Fréquence de résonance  $f_{rPS} = 15.28 \text{ Hz}$

Le bond-graph réduit déduit de la forme matricielle (III.16) a exactement la même structure que celui décrit Figure 10. La seule différence apparaît au niveau du gain statique associé à l'entrée x.



Sortie rapide découplée  $z_{1r}(t)$

Figure 11

Les résultats de simulation sont trop proches pour paraître distincts sur les courbes de réponse obtenues.

### II.3.2 - Etude de la partie lente

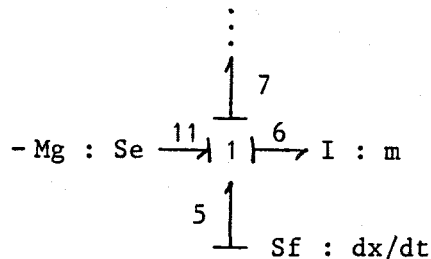
#### II.3.2.1 - Simplification du modèle bond-graph :

Pour obtenir la partie lente, il est nécessaire d'appliquer d'abord la transformation réciproque précédemment définie. Le calcul des gains de boucle du bond-graph réciproque permet de déterminer les éléments associés à la partie lente réciproque, et d'annuler ces faibles gains.

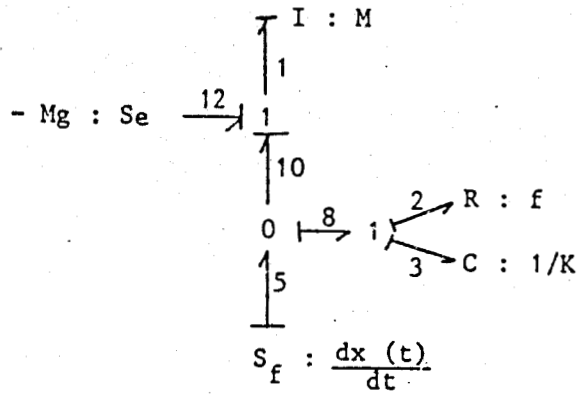
Un calcul rapide donne ici :

- a) pour la partie lente réciproque :  $\sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = 0.0103$      $\sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{M}}} = 0.0326$   
 b) pour la partie rapide réciproque :  $\sqrt{\frac{\tilde{K}}{\tilde{M}}} = 0.129$      $\frac{\tilde{K}}{\tilde{f}} = 0.0667$

Il suffit donc d'écrire  $\tilde{k} = 0$  soit  $k = \infty$ . Les liens 4 et 9 correspondants sont supprimés du bond-graph initial (Figure 8), la partie inférieure du graphe alors obtenu étant :



Il apparaît pour l'élément I une causalité différentielle, ce qui montre que I est devenu dépendant des autres termes. La variable d'état associée à I est déterminée par la source Sf : I ne joue plus de rôle pour la dynamique du système, mais intervient seulement comme force supplémentaire éprouvée par la source (route). Le lien 6 associé à I peut donc être supprimé, d'où le bond-graph réduit de la Figure 12.



Bond-Graph réduit de la partie lente

Figure 12

L'équation d'état associée s'écrit :

$$(III.18) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_{\ell_{BG}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -60 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\ell_{BG}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 60 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix}$$

Les paramètres I, C, R restant sont inchangés.

Les paramètres du système oscillant ainsi obtenus sont alors :

- Coefficient d'amortissement  $\xi_{\ell_{BG}} = 0.258$

- Fréquence de résonance  $f_{\ell_{BG}} = 1.151 \text{ Hz}$

### II.3.2.2 - Méthode des perturbations singulières :

Les expressions (I.94) donnent ici :

$$(III.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_{\ell_{PS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -56.4 & -3.76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\ell_{PS}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 56.4 & 1.006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \\ \\ y_{\ell_{PS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6.10^{-2} & 4.10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\ell_{PS}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.94 & -10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La sortie prise en compte ici correspond au mouvement  $x_{1\ell_{PS}}$  d'où l'équation de transfert :

$$(III.20) \quad x_{1\ell_{PS}}(p) = \frac{56.4}{p^2 + 3.76 p + 56.4} x(p) - \frac{1.006}{p^2 + 3.76 p + 56.4} g(p)$$

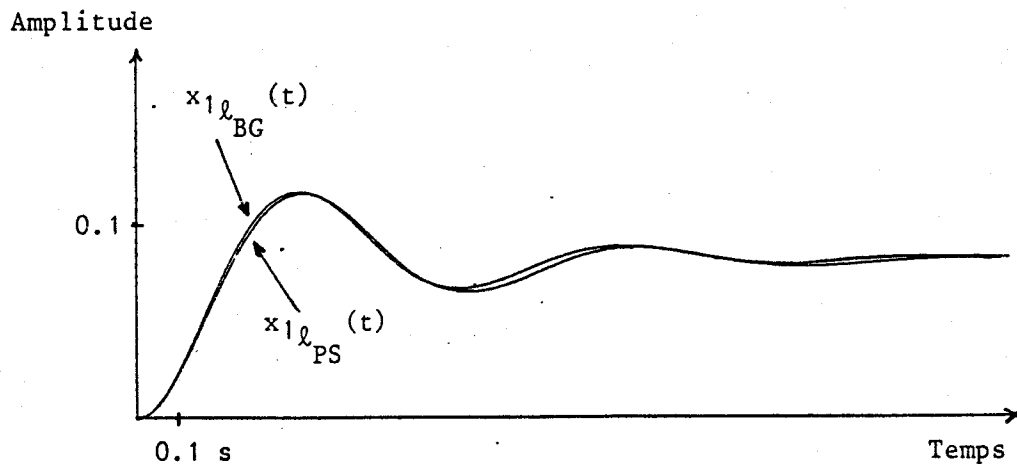
ce qui correspond aux paramètres suivants :

- Coefficient d'amortissement  $\xi_{\ell_{PS}} = 0.250$
- Fréquence de résonance  $f_{\ell_{PS}} = 1.118 \text{ Hz}$

Le bond-graph réduit déduit de (III.19) a la même structure que celui de la Figure 12, avec pour nouvelles valeurs des paramètres :

$$f = 37.6 \text{ (au lieu de 40)} \quad \text{et} \quad K = 564 \text{ (au lieu de 600).}$$

Les résultats de simulation montrent encore des résultats très voisins (Figure 13).



Sortie lente découplée  $x_{1\ell}(t)$

Figure 13

#### II.4 - Interprétation des résultats

Les sous-systèmes réduits obtenus par les deux méthodes sont très voisins. Les bond-graphs réduits ont la même structure, les paramètres

sont tout à fait comparables et les courbes de simulation pratiquement confondues. Il faut toutefois préciser que l'exemple proposé possède deux groupes de dynamiques bien séparées (périodes propres dans un rapport 13.5), ce qui limite l'influence réciproque de chaque groupe sur l'autre et conduit à des résultats très voisins pour les deux approches de réduction.

Lorsque les dynamiques sont moins nettement séparées (rapport  $T_0(\text{lent}) / T_0(\text{rapide}) < 5$ ), la simplification sur le bond-graph risque d'entraîner des erreurs assez importantes, et dans ce cas, la méthode des perturbations singulières apportera dans la détermination du sous-système lent réduit une précision plus satisfaisante.

Cependant, la simplicité de mise en œuvre de cette méthode de simplification sur le graphe est un atout non négligeable, surtout quand le mode de représentation choisi initialement ne conduit pas à une équation d'état (systèmes fortement non linéaires par exemple). De plus, les bond-graphs réduits ainsi obtenus conservent tous deux des éléments du graphe initial qui n'influencent pas le comportement dynamique (dans l'exemple proposé, il s'agit du lien associé à  $R:f$ ). Il ne s'agit donc pas d'une troncature sévère du graphe.

### III - MISE EN ŒUVRE PRATIQUE DE LA TRANSFORMATION RECIPROQUE POUR L'ETUDE DU COMPORTEMENT HAUTE FREQUENCE D'UN SYSTEME MECANIQUE

Comme il a été montré dans le Chapitre II, la méthode des perturbations singulières ne permet pas d'obtenir pour la partie rapide découplée la même précision que sur la partie lente réduite, puisqu'elle ne prend pas en compte l'influence des variables lentes sur les variables rapides.

L'application simultanée de la transformation réciproque et de la méthode des perturbations singulières apporte au système rapide réduit cette précision.

#### III.1 - Détermination du système réciproque

L'équation d'état réciproque est caractérisée par le triplet :

$$(II.100b) \quad \begin{cases} \tilde{A} = A^{-1} \\ \tilde{B} = B \\ \tilde{C} = - C A^{-1} \end{cases}$$

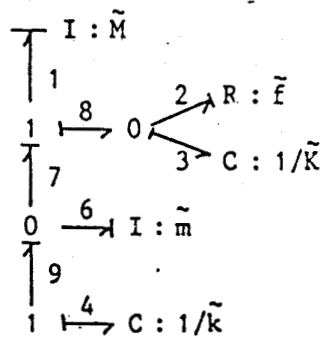
Le calcul de  $A^{-1}$  peut être, dans certains cas, complexe quand le système étudié est de grande dimension, ou quand les éléments de  $A$  sont d'ordres de grandeur très différents, ce qui entraîne des risques de divergence ou d'imprécision dans les calculs.

Par contre, la définition du système réciproque est très simple et conduit de façon systématique à une équation d'état.

Le bond-graph décrit Figure 14, présenté en absence d'entrées, est déduit du bond-graph de la Figure 2 par les transformations suivantes :

$$\begin{array}{ll} * 0 \rightarrow 1 & * I \rightarrow \tilde{I} = - 1/I \\ 1 \rightarrow 0 & C \rightarrow \tilde{C} = - 1/C \\ & R \rightarrow \tilde{R} = - 1/R \end{array}$$

\* La causalité intégrale est conservée sur les éléments  $I$  et  $C$ .



Bond-Graph réciproque de la suspension de voiture

Figure 14

En choisissant comme vecteur état réciproque :



$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_4 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{p}_6 \\ \tilde{p}_1 \end{bmatrix}$$

la matrice d'état réciproque  $\tilde{A}$  s'écrit

$$(III.21) \quad \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\tilde{m} & 1/\tilde{M} \\ 0 & -\tilde{K}/\tilde{F} & 0 & 1/\tilde{M} \\ -\tilde{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{k} & -\tilde{K} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et devient dans l'espace de phase :

$$(III.22) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -\tilde{K}/\tilde{F} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(\tilde{k}+\tilde{K})}{\tilde{M}} & 0 & -\tilde{k}/\tilde{M} & 0 \\ \tilde{K}/\tilde{F} & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{k}/\tilde{m} & 0 & -\tilde{k}/\tilde{m} & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice étant définie par  $\tilde{A} = (A^{-1})^T$ , il suffit pour obtenir le système réciproque d'effectuer une transposition, d'où, en valeurs numériques :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{60} & \frac{-1000}{940 \times 60} & \frac{4}{60} & \frac{-1}{9400} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{940} & 0 & \frac{-1}{9400} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 9400 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{60} & \frac{-1000}{940 \times 60} & \frac{4}{60} & \frac{-1}{9400} \\ 0 & \frac{-1}{940} & 0 & \frac{-1}{9400} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix}$$

### III.2 - Recherche du système rapide réduit

Les composantes  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  apparaissent maintenant comme les variables rapides, alors que  $\tilde{z}_1$  et  $\tilde{z}_2$  sont les variables lentes.

La séparation en deux sous-ensembles distincts est moins nette que pour le système initial, ce qui montre l'importance des termes de couplage.

Après découplage de la partie lente réciproque  $\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix}$  et application d'une nouvelle transformation réciproque, le système rapide est alors :

$$(III.23) \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}_{\tilde{r}_{PS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10000 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{\tilde{r}_{PS}} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{10000} \\ 9400 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix}$$

$$y_{\tilde{r}_{PS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{\tilde{r}_{PS}} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & -4 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} dt$$

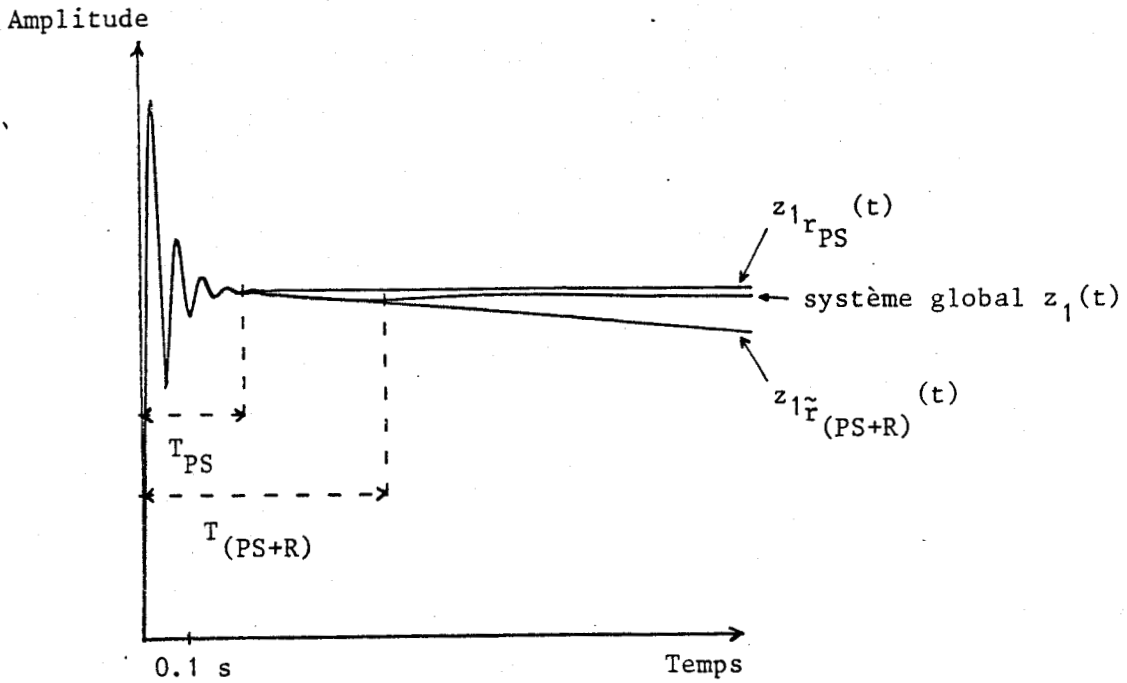
obtenu à partir des relations (II.131). Ce qui donne l'équation de transfert suivante :

$$(III.24) \quad z_{1\tilde{r}_{PS}}(p) = \frac{9400}{p^2 + 40p + 10000} x(p) + \left[ \frac{4 \cdot 10^{-4} p - 0.984}{p^2 + 40p + 10000} - \frac{4 \cdot 10^{-3}}{p} \right] g(p)$$

Remarque :

La différence entre les expressions (III.24) et (III.17) porte uniquement sur le deuxième terme correspondant à l'entrée g.

Les courbes de réponse indicielle de la partie rapide du système global, la partie rapide réduite obtenue par la méthode des perturbations seule (PS) et celle obtenue par perturbation singulière avec réciproque (PS+R) sont présentées Figure 15.



Réponses de la partie rapide (système global et système réduit)

Figure 15

III.3 - Quelques remarques fondamentales

Les courbes présentées Figure 15 montrent de façon très nette l'intérêt de la nouvelle méthode de réduction (PS + R) présentée dans le Chapitre II et appliquée ici.

Il apparaît tout d'abord, que la sortie  $z_1(t)$  du système global est le résultat de la superposition de deux phénomènes distincts :

- l'entrée  $x(t)$  crée une réponse oscillante très rapide amortie en 4 périodes, que nous noterons  $z_{1r}(t)$ ,

- la pesanteur  $g$  est la cause d'oscillations de fréquence et d'amplitude faibles, la grandeur associée à ce comportement très lent sera notée  $z_{1\ell}(t)$ , correspondant à la partie lente de la variable rapide  $z_1(t)$ .

La réduction par la méthode des perturbations singulières (ou la simplification sur le modèle bond-graph) conduit à une très bonne approximation de la composante rapide  $z_{1r}(t)$ . Les courbes  $z_1(t)$  et  $z_{1r}(t)$  sont exactement confondues, pendant 80 % du temps d'amortissement du mouvement  $z_{1r}(t)$ . Après cet intervalle de temps noté  $T_{PS}$ , il y a décollement entre les deux courbes, avec cependant un régime permanent présentant une bonne précision statique.

Par contre, il est évident que la courbe obtenue par réduction (PS + Réciproque),  $z_{1\tilde{r}(PS+R)}(t)$  représente exactement l'évolution de la sortie rapide  $z_1(t) = z_{1r}(t) + z_{1\ell}(t)$  pendant un intervalle de temps  $T_{PS+R}$  que l'on peut estimer au double de  $T_{PS}$ .

Le domaine de validité temporelle et spatiale du modèle réduit (PS + R) ainsi obtenu est 2 fois plus important que par la méthode PS classique.

Cette amélioration sensible est due au terme intégral  $\int_{t_0}^t \tilde{D}u dt$  obtenu par application de la transformation réciproque.

Dans le cas de l'exemple proposé, le terme  $\tilde{D}u = -4.10^{-3}.g$  a un coefficient très faible qui n'intervient qu'au bout d'un temps qui correspond à l'amortissement du régime transitoire rapide  $z_{1r}(t)$ . Cette fonction rampe représente donc la partie lente  $z_{1\ell}(t)$  de la variable rapide, pendant un intervalle de temps égal à  $T_{PS}$ . Passé ce délai, ce modèle n'est plus valable, la sortie  $z_{1\ell}(t)$  étant obtenue alors par entraînement par la variable lente  $x_{1\ell PS}(t)$  (équation I.93-b).

Les conditions initiales sont conservées (voir Chapitre II) :

$$z_{1\tilde{r}(PS+R)}(0) = z_1(0)$$

ce qui peut simplifier considérablement les problèmes de raccordement ("couche limite").

IV - RESOLUTION DES PROBLEMES SINGULIERS EN COMMANDE OPTIMALE PAR LES SYSTEMES RECIPROQUES

Soit le système linéaire à deux dynamiques suivant :

$$(III.25) \quad \begin{cases} \dot{x} = A_{11} x + A_{12} z + B_1 u \\ \mu \dot{z} = A_{21} x + A_{22} z + B_2 u \\ y = C_1 x + C_2 z \end{cases}$$

Le but de l'étude concerne la détermination de la commande optimale minimisant le critère :

$$(III.26) \quad J = 1/2 \int_0^{+\infty} y^T y dt$$

Si  $\Psi_x$  et  $\Psi_z$  sont les vecteurs associés à  $x$  et  $z$ , alors soit  $H$  le hamiltonien défini par :

$$(III.27) \quad H = \frac{1}{2} (y^T y) + \Psi_x^T (A_{11} x + A_{12} z + B_1 u) + \Psi_z^T \left( \frac{A_{21} x}{\mu} + \frac{A_{22} z}{\mu} + \frac{B_2 u}{\mu} \right)$$

$H$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 0$$

Le problème est donc singulier /Jacobson Bell, 1975/ et l'application du principe du maximum ne permet pas le calcul de la trajectoire optimale.

La décomposition temporelle du système (III.25), par la méthode PS pour la partie lente, et par l'association PS+Réciproque pour la partie rapide, lève cette singularité /Dauphin-Tanguy, Moreigne, Borne, 1983/.

IV.1 - Commande de la partie lente découplée

En effet, le système lent réduit s'écrit :

$$(III.28) \quad \begin{cases} \dot{x}_l = A_l x_l + B_l u \\ y_l = C_l x_l + D_l u \end{cases}$$

et la commande quasi-optimale associée à (III.28) minimise maintenant le critère :

$$J_l = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y_l^T y_l dt$$

soit :

$$J_l = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x_l^T C_l^T C_l x_l + 2 x_l^T C_l^T D_l u + u^T D_l^T D_l u) dt$$

ce qui se ramène, par le changement de variable :

$$(III.29) \quad u_l = u + D_l^{-1} C_l x_l$$

à un problème linéaire quadratique classique d'équation :

$$(III.30) \quad \begin{cases} \dot{x}_l = (A_l - B_l D_l^{-1} C_l) x_l + B_l u_l \\ y_l = D_l u_l \\ J_l = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u_l^T D_l^T D_l u_l dt \end{cases}$$

Si  $(A_l - B_l D_l^{-1} C_l)$  est stable, la commande optimale est :

$$u_l = 0$$

soit pour la valeur optimale  $u_l$  de la commande  $u$  :

$$(III.31) \quad \begin{cases} u_l = - D_l^{-1} C_l x_l \\ \text{avec} \quad \begin{cases} C_l = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} \\ D_l = - C_2 A_{22}^{-1} B_2 \end{cases} \end{cases}$$

Si  $(A_\lambda - B_\lambda D_\lambda^{-1} C_\lambda)$  n'est pas stable, il faut chercher une commande qui stabilise le système en boucle fermée.

#### IV.2 - Commande de la partie rapide découplée

La partie rapide découplée obtenue par les perturbations singulières est représentée par :

$$(III.32) \quad \begin{cases} \mu \dot{z}_r = A_{22} z_r + B_2 u \\ y_r = C_2 z_r \end{cases}$$

ce qui ne supprime pas la singularité du critère, puisque l'entrée n'apparaît pas dans l'expression de la sortie.

Par contre, la méthode proposée dans le Chapitre II conjugant la transformation réciproque et la méthode PS conduit à la forme réduite suivante (II.131) :

$$\begin{cases} \mu \dot{z}_r = A_{22} z_r + (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) u \\ y_r = C_2 z_r + (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) B_1 \int_{t_0}^t u dt \end{cases}$$

ce qui donne, en introduisant une nouvelle variable d'état (rapide) :

$$(III.33) \quad v = \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^t u dt$$

et en effectuant le changement de variable suivant :

$$(III.34) \quad z_r = z_r - (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) v$$

le nouveau système rapide découplé :

$$(III.35) \quad \begin{cases} \mu \dot{z}_r = A_{22} z_r + A_{22} (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) v \\ y_r = C_2 z_r + (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) v \end{cases}$$

Le critère J se décompose de la façon suivante :

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} y^T y dt}_{J_r} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_1}^{+\infty} y^T y dt}_{J_\ell} \quad \text{/Magni-Fossard, 1982/}$$

la partie  $J_r$  étant associée à la variable rapide, avec  $t_1$  infiniment petit, et  $J_\ell$  associée aux variables lentes.

$J_r$  s'exprime alors, à partir de (III.35), par :

$$(III.36) \quad J_r = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ Z_r^T C_2^T C_2 Z_r + 2 Z_r^T C_2^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) v + v^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) v \right] dt$$

Le changement de variable, du même type que (III.29) :

$$(III.37) \quad u_r = v + (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^{-1} C_2 Z_r$$

conjugué avec le changement d'échelle des temps :

$$\tau = \frac{t}{\mu}$$

conduit à :

$$(III.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dZ_r}{d\tau} = (A_{22} - A_{22} (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^{-1} C_2) Z_r \\ \quad + A_{22} (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) u_r \\ y_r = (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) u_r \\ J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u_r^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) u_r d\tau \end{array} \right.$$



La commande optimale, dans le cas où le système (III.38) est stable, est alors :

$$u_{\tilde{r}} = 0$$

soit pour la valeur optimale  $v_{\tilde{r}}$  de la commande  $v$  :

$$(III.39) \quad v_{\tilde{r}} = - (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^{-1} C_2 z_{\tilde{r}}$$

Par la relation (III.33), nous obtenons :

$$\frac{dv_{\tilde{r}}}{d\tau} = u_{\tilde{r}} = - (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^{-1} C_2 \frac{dz_{\tilde{r}}}{d\tau}$$

ce qui donne, en remplaçant  $z_{\tilde{r}}$  par (III.34) et (III.35) :

$$(III.40) \quad u_{\tilde{r}} = - (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^{-1} C_2 A_{22} z_{\tilde{r}}$$

La commande composite obtenue comme approximation de la commande optimale du problème (III.25-26) est alors :

$$(III.41) \quad u_c^* = (C_2 A_{22}^{-1} B_2)^{-1} (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) x_{\ell}(t) - (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^{-1} C_2 A_{22} z_{\tilde{r}}(\tau)$$

## V - INTERET DE LA TRANSFORMATION RECIPROQUE POUR L'OPTIMISATION DE TRAJECTOIRES

Nous proposons ici une étude comparative des résultats obtenus sur un exemple pour la détermination de la trajectoire optimale d'un système à deux dynamiques, par le calcul de la commande optimale minimisant un critère linéaire quadratique à horizon infini et des commandes quasi-optimales obtenues par réduction du système global par la méthode PS et par l'action conjointe PS + Transformation Réciproque.

La partie lente réduite obtenue par ces deux approches étant la même, nous nous intéresserons aux seules variables rapides.

Le problème à résoudre peut donc se résumer comme suit :

$$(III.42) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_{11} x + A_{12} z + B_1 u \\ \mu \dot{z} = A_{21} x + A_{22} z + B_2 u \\ y = C_1 x + C_2 z \\ x(0), z(0) \text{ conditions initiales} \\ \text{Critère à minimiser : } J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (y^T y + u^T R u) dt \\ R \text{ définie positive} \end{array} \right.$$

V.1 - Détermination de la trajectoire optimale

Si  $\Psi_x$  et  $\Psi_z$  sont les vecteurs adjoints associés aux vecteurs  $x$  et  $z$ , l'Hamiltonien  $H$  est alors défini par :

$$(III.43) \quad H = \frac{1}{2} (y^T y + u^T R u) + \Psi_x^T (A_{11} x + A_{12} z + B_1 u) + \frac{\Psi_z^T}{\mu} (A_{21} x + A_{22} z + B_2 u)$$

L'application du principe du maximum conduit au système suivant :

$$(III.44) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\Psi}_x \\ \dot{\Psi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \Psi_x} \\ \frac{\partial H}{\partial \Psi_z} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \\ -\frac{\partial H}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -B_1 R^{-1} B_1^T & -B_1 R^{-1} \frac{B_2^T}{\mu} \\ A_{21}/\mu & A_{22}/\mu & -\frac{B_2}{\mu} R^{-1} B_1^T & -\frac{B_2}{\mu} R^{-1} \frac{B_2^T}{\mu} \\ -C_1^T C_1 & -C_1^T C_2 & -A_{11}^T & -\frac{A_{21}^T}{\mu} \\ -C_2^T C_1 & -C_2^T C_2 & -A_{12}^T & -\frac{A_{22}^T}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ \Psi_x \\ \Psi_z \end{bmatrix}$$

La commande optimale est donnée par :

$$(III.45) \quad u = - R^{-1} \left( B_1^T \psi_x + \frac{B_2^T}{\mu} \psi_z \right)$$

V.2 - Commande quasi-optimale par décomposition temporelle  
/Kokotovic, Yackel, 1972/

Le problème (III.42) se ramène au problème réduit suivant, qui correspond à la solution intérieure lente :

$$(III.46) \quad \begin{cases} \dot{x}_\ell = A_\ell x_\ell + B_\ell u \\ y_\ell = C_\ell x_\ell + D_\ell u \\ z_\ell = - A_{22}^{-1} (A_{21} x_\ell + B_2 u) \\ J_\ell = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x_\ell^T C_\ell^T C_\ell x_\ell + 2 x_\ell^T C_\ell^T D_\ell u + u^T (R + D_\ell^T D_\ell) u) dt \end{cases}$$

La détermination de la commande optimale  $u_\ell$  permet de calculer la trajectoire optimale  $x_\ell$  et d'en déduire la trajectoire optimale de la partie lente de la variable rapide  $z_\ell$  correspondant à la solution intérieure. Un problème de raccordement ("couche limite") dû à l'écart entre les valeurs initiales  $z(0)$  et  $z_\ell(0)$  apparaît, qu'il est nécessaire de résoudre par l'élaboration d'une couche limite initiale utilisant le temps dilaté  $\tau = t/\mu$  et le sous système associé à la partie rapide découplée.

$$(III.47) \quad \begin{cases} \mu \dot{z}_r = A_{22} z_r + B_2 u \\ y_r = C_2 z_r \\ z_r(0) = z(0) - z_\ell(0) \end{cases}$$

La minimisation du critère  $J_r = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (y_r^T y_r + u^T R u) dt$  nécessite la résolution du système :

$$(III.48) \quad \begin{cases} \mu \dot{z}_r = A_{22} z_r - B_2 R^{-1} B_2^T \psi_z \\ \mu \dot{\psi}_z = - C_2^T C_2 z_r - A_{22}^T \psi_z \end{cases}$$

qui s'écrit aussi :

$$(III.49) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \frac{dz_r}{d\tau} \\ \frac{d\Psi_z}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -C_2^T C_2 & -A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ \Psi_z \end{bmatrix} \\ \text{avec } \begin{cases} z_r(0) = z(0) - z_\ell(0) \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} z_r(\tau) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

La résolution de ce problème conduit à une solution optimale  $z_r(\tau)$ .

La trajectoire de la variable rapide s'écrit alors :

$$(III.50) \quad z(t) = z_\ell(t) + z_r(\tau) + O(\mu)$$

Remarque :

La détermination de la commande optimale peut se faire aussi par résolution de l'équation de Riccati associée au problème posé.

### V.3 - Utilisation des systèmes réciproques

La partie rapide obtenue par la méthode PS + Réciproque est définie par la relation (II.131), ce qui devient, par application des relations (III.33) et (III.34) :

$$(III.51) \left\{ \begin{array}{l} \mu \dot{\tilde{z}}_r = A_{22} \tilde{z}_r + A_{22} (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) v \\ \mu \dot{v} = u \\ \tilde{y}_r = C_2 \tilde{z}_r + (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) v \end{array} \right.$$

L'indice de coût associé est alors :

$$(III.52) \quad J_r = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left( \tilde{z}_r^T C_2^T C_2 \tilde{z}_r + 2 \tilde{z}_r^T C_2^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) v + v^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) v + u^T R u \right) dt$$

Si  $\Psi_{Z_r}$  et  $\Psi_v$  sont les vecteurs adjoints associés à  $Z_r$  et  $v$ , la détermination de l'Hamiltonien du système (III.51-52) conjuguée à l'application du principe du maximum conduit au système suivant :

$$(III.53) \quad \begin{bmatrix} \mu \dot{Z}_r \\ \mu \dot{v} \\ \mu \dot{\Psi}_{Z_r} \\ \mu \dot{\Psi}_v \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \frac{d Z_r}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \\ \frac{d\Psi_{Z_r}}{d\tau} \\ \frac{d\Psi_v}{d\tau} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Z_r \\ v \\ \Psi_{Z_r} \\ \Psi_v \end{bmatrix}$$

avec  $M =$

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{22}(B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \\ -C_2^T C_2 & -C_2^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) & -A_{22}^T & 0 \\ -(C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^T C_2 & -(C_2 B_2 + \mu C_1 B_1)^T (C_2 B_2 + \mu C_1 B_1) & -(B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1)^T A_{22}^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ Z_r(0) = z_r(0) - (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) v(0) \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = 0 \end{cases}$$

Ce système correspond à un problème de commande linéaire quadratique à horizon infini de dimension  $(n_2 + r)$  avec  $r$  dimension du vecteur entrée  $u$ .

La trajectoire optimale est alors obtenue par :

$$(III.54) \quad z(t) = z_\ell(t) + z_r(\tau)$$

V.4 - Mise en œuvre sur un exemple

Considérons le problème suivant :

$$(III.55) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -0.1 x + 0.03 y + 0.5 u \\ \mu \dot{z} = 0.1 x - 0.15 y + 0.1 u \quad (\mu = 0.1) \\ y = x + z \\ x(0), z(0) : \text{conditions initiales} \\ \text{Critère à minimiser : } J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x^2 + z^2 + u^2) dt \end{array} \right.$$

Les équations des trajectoires optimales, déterminées par les 3 méthodes précédemment décrites sont exprimées en fonction des conditions initiales (qui interviennent comme constantes d'intégration).

1) Trajectoire optimale :

$$(III.56) \quad z^*(t) = (0.1033 x(0) - 0.0106 z(0)) \cdot e^{-0.5483t} \\ + (-0.1033 x(0) + 1.0106 z(0)) \cdot e^{-1.8081t}$$

2) Trajectoire quasi-optimale 1 (Méthode PS) :

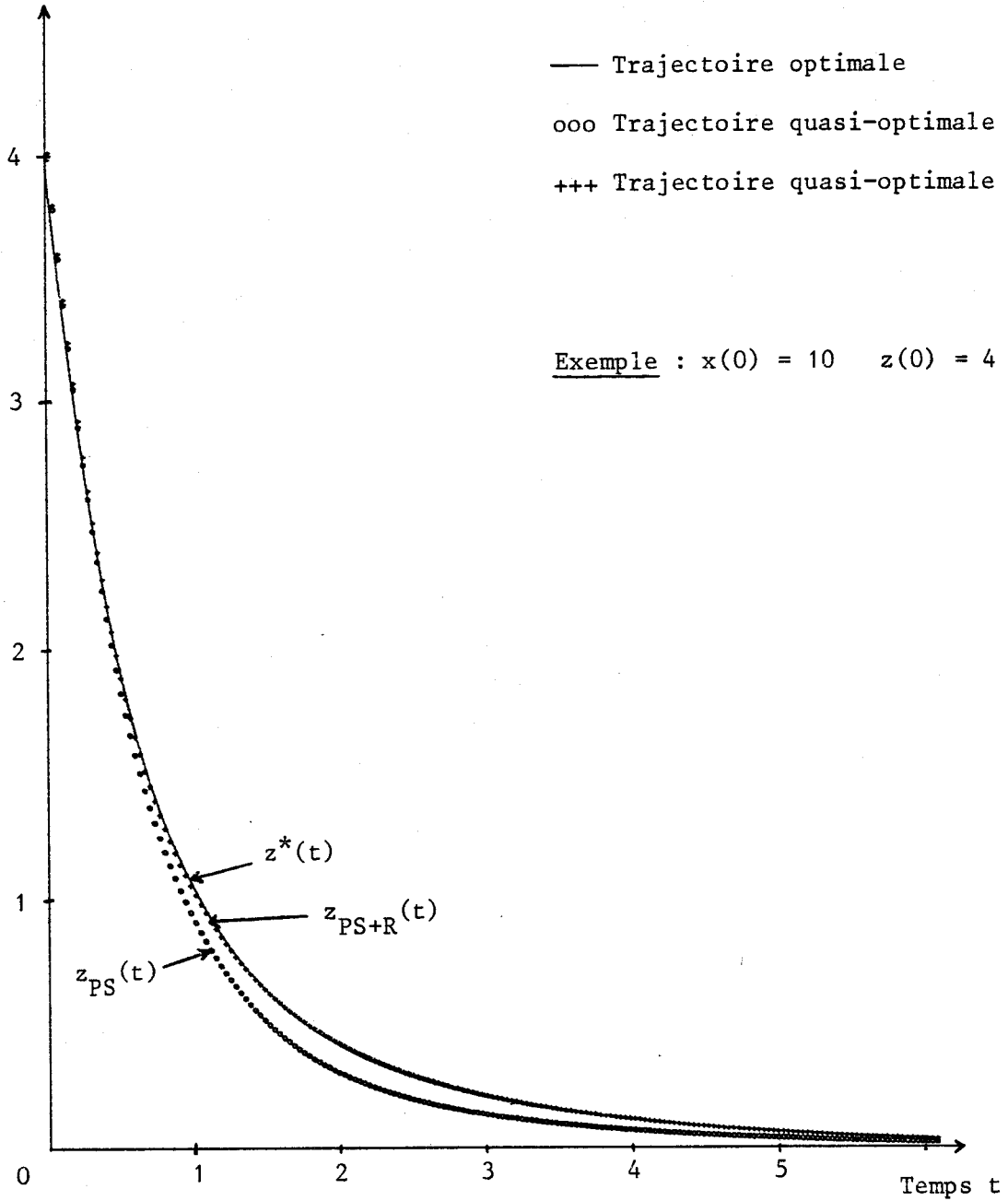
$$(III.57) \quad z_{PS}(t) = \underbrace{0.0642 \cdot e^{-0.5499t} x(0)}_{z_l(t)} + \underbrace{(z(0) - 0.0642 x(0)) \cdot e^{-1.8028t}}_{z_r(t)}$$

3) Trajectoire quasi-optimale 2 (PS + R) :

$$(III.58) \quad z_{PS+R}(t) = 0.0642 e^{-0.5499t} x(0) \quad \left. \vphantom{z_{PS+R}(t)} \right\} z_l(t) \\ + (-0.0099 x(0) + 0.1538 z(0)) \cdot e^{-0.6158t} \quad \left. \vphantom{z_{PS+R}(t)} \right\} z_{\tilde{r}}(t) \\ + (-0.0543 x(0) + 0.8462 z(0)) \cdot e^{-2.030t} \quad \left. \vphantom{z_{PS+R}(t)} \right\}$$

ce qui donne les courbes suivantes, pour les conditions initiales  $x(0) = 10$  et  $z(0) = 4$  :

Trajectoire  $z(t)$



Comparaison des trajectoires optimales et quasi-optimales

Figure 16

### V.5 - Interprétation des résultats

La trajectoire optimale (III.56) contient deux termes exponentiels décroissants de coefficients :

$$\lambda_1 = - 0.5483 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = - 1.8081$$

associés respectivement aux modes d'évolution lent et rapide.

La trajectoire quasi-optimale 1, pour la partie correspondant à la couche limite  $z_r(t)$  ne prend en compte que l'évolution rapide associée à  $\lambda_2^1 = - 1.8028$ . Par contre, la trajectoire quasi-optimale 2 fait apparaître dans  $z_r(t)$ , un terme associé à  $\lambda_1^2 = - 0.6158$  qui correspond à l'évolution lente de la partie rapide, ce qui montre bien que cette approche (PS+R) donne, sur un intervalle de temps correspondant à la couche limite, une valeur plus exacte de la variable rapide.

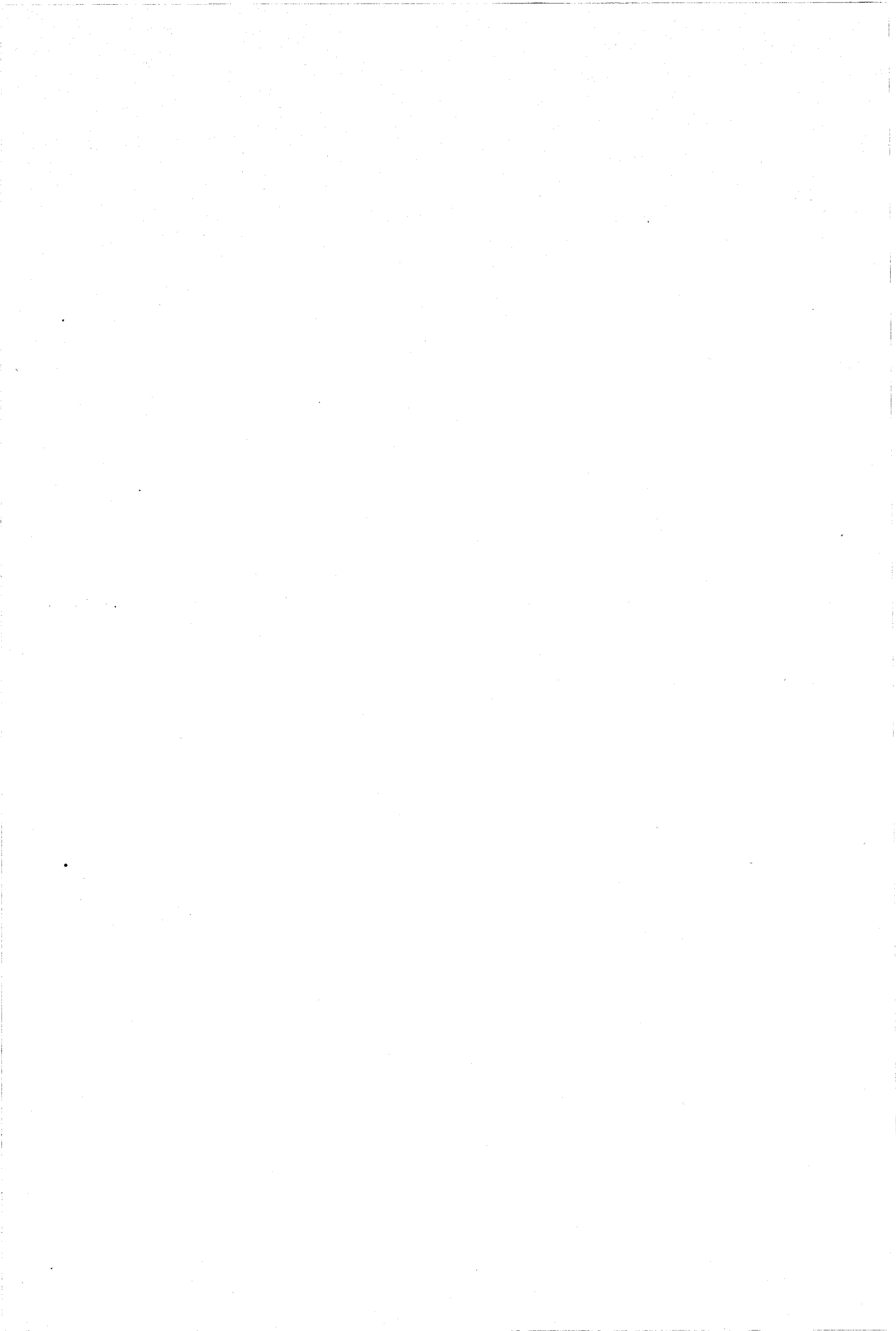
La Figure 16 montre de façon très nette, la supériorité de la méthode proposée (PS+R). En effet, l'écart entre  $z^*(t)$  optimale et  $z_{PS+R}(t)$  est insignifiant par rapport à celui existant entre  $z^*(t)$  et  $z_{PS}(t)$ .

Les équations (III.56-57-58) dépendent des conditions initiales  $x(0)$  et  $z(0)$ . Une étude est actuellement en cours sur les conditions de validité de cette méthode (PS+R) vis à vis des conditions initiales. Il semble de plus, que les résultats obtenus correspondent à un développement asymptotique des solutions à l'ordre 1 en  $\mu$ .

Les résultats obtenus ici concernant la couche limite en temps initial, peuvent être appliqués à la couche limite en temps final, ce qui permet la résolution de problème d'optimisation de trajectoires à horizon fini et états finaux fixés.

Cette étude est en cours /Moreigne/.





CONCLUSION

L'avantage de la nouvelle méthode de réduction (PS + R) apparaît très nettement sur les exemples proposés. Il est plus sensible quand les dynamiques ne sont pas très séparées. Cependant, grâce au terme intégral introduit dans l'expression de la sortie, nous n'obtenons pas une approximation de la variables rapide (comme dans la méthode PS), mais une estimation précise de la variable rapide elle-même, avec ses composantes lente et rapide.

Ceci est très important pour le découplage temporel du système global, puisque la représentation multi-modèle alors obtenue comporte la même précision quel que soit le domaine considéré, transitoires rapides ou régime lent.

La modélisation Bond-Graph permet, par son caractère graphique proche de la réalité physique, une approche plus "sensitive" des problèmes de simplification de modèle puisque chacun des éléments du graphe est associé à un composant physique du système réel, contrairement aux modèles mathématiques beaucoup plus abstraits.



CHAPITRE IV



EXTENSION AUX SYSTEMES MULTIVARIABLES MULTIVITESSES  
- CAS DES SYSTEMES INTERCONNECTES -

INTRODUCTION

Nous présentons ici tout d'abord une méthode originale de modélisation sous forme singulièrement perturbée des systèmes multivitesSES, qui regroupe sous forme unique les systèmes à paramètres multiples et ceux qui peuvent être assimilés à des systèmes à paramètre unique. Cette modélisation permet, pour la réduction, deux approches différentes appelées "dégénérescence progressive" et "séparation directe partie lente/partie rapide", et conduit à un algorithme de séparation. La méthode (PS + R), d'étude de la partie rapide fournit des résultats différents suivant la démarche utilisée.

Une interprétation fréquentielle de la séparation des dynamiques est ensuite proposée, par comparaison avec les résultats obtenus par troncature du diagramme asymptotique de Bode. Cette représentation, propre au linéaire, est étendue au cas non linéaire des systèmes de type Lur'e Postnikov, et permet, par la définition de l'opérateur symbolique de transfert scalaire, de tracer un "pseudo-domaine asymptotique de Bode".

Le cas de système interconnecté, composé de sous-systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov est ensuite envisagé. Grâce à une formulation symbolique semblable à celle utilisée en linéaire, nous présentons des résultats concernant la réduction du système global. Quand toutes les dynamiques rapides sont concentrées dans un seul sous-système, cette méthode conduit à la mise en évidence d'invariants.

I - MODELISATION DE SYSTEMES POSSEDANT PLUSIEURS DYNAMIQUES

De nombreux modèles de systèmes de grande dimension mettent en évidence des phénomènes dynamiques interactifs de vitesses très différentes. Ainsi, dans un système de puissance, les constantes de temps s'échelonnent depuis des fractions de secondes, correspondant aux transitoires rapides, aux régulateurs de tension, aux phénomènes de stockage d'énergie électrique jusqu'à plusieurs minutes, correspondant aux temps de transfert du combustible, aux phénomènes de stockage d'énergie thermique, ....

Plusieurs approches existent pour ce type de problème, suivant que les différentes dynamiques sont du même ordre de grandeur ou très différentes.

Considérons le système linéaire représenté par les équations suivantes :

$$(IV.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_0 x + \sum_{j=1}^N A_{0j} z_j \\ \mu_i \dot{z}_i = A_{i0} x + \sum_{j=1}^N A_{ij} z_j \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ z_i(0) = z_0 \end{array}$$

avec :  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$        $z_i \in \mathbb{R}^{n_{2i}}$

Ce système est modélisé sous forme d'un système singulièrement perturbé à paramètres multiples.

Les paramètres  $\mu_1, \dots, \mu_N$ , appartenant à l'intervalle  $]0, 1]$  sont ordonnés et sont les composantes d'un vecteur  $\mu \in \mathbb{R}^N$ .

L'hypothèse :

$$\mu_{i+1} / \mu_i \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|\mu\| \rightarrow 0$$

met en évidence N échelles de temps rapides et ordonne les variables  $z_i$  suivant les vitesses croissantes ( $z_{i+1}$  étant plus rapide que  $z_i$ ).

I.1 - Cas où les dynamiques sont proches

Il s'agit donc de systèmes modélisés sous forme (IV.1) pour lesquels les paramètres  $\mu_i$  sont du même ordre de grandeur. De tels problèmes sont très souvent reformulés en problèmes à paramètre unique /Kokotovic, O'Malley, Sannuti, 1976/ /Hoppensteadt, 1969/. Il faut alors exprimer les scalaires  $\mu_1, \dots, \mu_N$  sous forme de multiples d'un paramètre unique  $\varepsilon$  sous la forme :

$$(IV.2) \quad \mu_i = \beta_i \cdot \varepsilon$$

Les valeurs possibles de  $\mu$  étant limitées à un cône  $H \subset \mathbb{R}^N$ .

La principale limite de cette scalarisation est que les résultats dépendent des coefficients  $\beta_i$  qui sont généralement inconnus.

La validité du résultat est restreinte à une droite de l'espace des  $\mu_1, \dots, \mu_N$ , définie par un ensemble particulier de valeurs  $\beta_1, \dots, \beta_N$ . Même si la solution du problème complet (IV.1) converge vers la solution du système réduit obtenu par  $\mu \rightarrow 0$  le long de toute droite d'un cône  $H$ , il n'en résulte pas une condition suffisante de convergence quand  $\mu \rightarrow 0$  le long d'une courbe arbitraire de  $H$ .

/Grujić, 1977, 1979/ et /Khalil, Kokotovic, 1979/ étudient le cas où les paramètres  $\mu_i$  sont du même ordre de grandeur, mais les rapports  $\mu_i/\mu_j$  bornés par des termes positifs, constants,  $\bar{m}_{ij}, \bar{M}_{ij}$  tels que :

$$(IV.3) \quad \bar{m}_{ij} \leq \frac{\mu_i}{\mu_j} \leq \bar{M}_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N$$

Le système (IV.1) est alors réécrit sous une forme ressemblant à un système à paramètre unique :

$$(IV.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_o x + A_{or} z \\ \varepsilon(\mu) \dot{z} = D(\mu) \left[ A_{ro} x + A_r z \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = x_o \\ z(0) = z_o \end{array}$$



mais qui en diffère parce que :

$$(IV.5) \quad \varepsilon = \varepsilon(\mu) = (\mu_1 \times \dots \times \mu_N)^{1/N}$$

et

$$(IV.6) \quad D = D(\mu) = \text{bloc-diag} \left[ \frac{\varepsilon}{\mu_1} I_1, \dots, \frac{\varepsilon}{\mu_N} I_N \right]$$

dépendent de tous les  $\mu_i$ .

Grâce à la relation (IV.3), il est évident que les éléments de D sont bornés par :

$$(IV.7) \quad m_i \leq \frac{\varepsilon}{\mu_i} \leq M_i \quad \forall \mu \in H \quad i = 1, \dots, N$$

où  $m_i$  et  $M_i$  dépendent de  $\bar{m}_{ij}$  et  $\bar{M}_{ij}$ .

La partie rapide découplée est ici définie par :

$$(IV.8) \quad \frac{dz_r}{d\tau} = D(\mu) A_r z_r(\tau) \quad \text{avec} \quad z_r(0) = z_o - z_\ell(0)$$

avec :  $\tau = t / \varepsilon(\mu)$

Les modes rapides sont ici du même ordre de grandeur. Il faut vérifier la stabilité asymptotique des modes rapides pour tout vecteur  $\mu \in H$  suffisamment petit, tel que :

$$(IV.9) \quad \text{Re } \lambda(D(\mu) A_r) < 0 \quad \forall \mu \in H$$

Il s'agit donc ici de définir des classes de matrices  $A_r$  qui satisfont (IV.9) pour toutes matrices diagonales D du type (IV.6), (IV.7), ce qui entraînera la D-stabilité de  $A_r$ .

## I.2 - Cas où les dynamiques sont bien séparées

Dans ce cas, les coefficients  $\mu_i$  sont différents et il est impossible de se ramener à un problème à paramètre unique /Grujić, 1978/.

Ainsi, /Sandell, Varaiya, Athans, Safonov, 1978/ présentent l'exemple d'un système linéaire de la forme :

$$(S) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mu_1 \dot{y} \\ \mu_2 \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{BB} & A_{BM} & A_{BH} \\ A_{MB} & A_{MM} & A_{MH} \\ A_{HB} & A_{HM} & A_{HH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Les états  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  correspondent respectivement aux parties basses fréquences, moyennes fréquences et hautes fréquences du système (S).

Pour obtenir une approximation basse fréquence, il suffit d'écrire  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 = 0$ , ce qui conduit à :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

de même qu'une approximation moyenne fréquence est obtenue par  $\mu_2 = 0$  ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mu_1 \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

l'équation  $\mu_2 \dot{z} = A_{HH} z$  correspondant à l'approximation haute fréquence. Lorsqu'il s'agit de systèmes du type (IV.1) à N dynamiques différentes, une séparation itérative de différents sous-systèmes est effectuée, de la même manière que pour un système à deux dynamiques, en commençant par la partie la plus rapide avec  $\mu_N = 0$ .

I.3 - Présentation d'un mode de représentation permettant de prendre en compte les deux cas précédents

Lorsque les dynamiques ne sont pas nettement séparées, ou quand une liberté de choix est souhaitée pour la détermination de la dimension du système réduit suivant des critères estimés en temps réel comme la précision ou la rapidité des calculs, la modélisation sous forme (IV.1) apparaît trop rigide et figée.

Nous proposons une modélisation plus souple sous la forme suivante :

$$(IV.10) \quad \begin{bmatrix} \mu_1 \ddot{x}_1 \\ \mu_2 \mu_1 \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \mu_N \prod_{i=1}^N \mu_i \ddot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

/Dauphin-Tanguy, 1981/.

(Le coefficient  $\mu_1$  apparaît ici dans un but de symétrie des équations, mais il sera pris par la suite égal à 1).

Les coefficients  $\mu_j^! = \prod_{i=1}^j \mu_i$  ne sont pas indépendants, contrairement aux cas précédents.

Chacun des paramètres  $\mu_i$  appartenant à l'intervalle  $]0, 1]$ , les scalaires  $\mu_j^!$  sont donc tels que :

$$0 < \mu_k^! \leq \mu_j^! \quad \text{pour} \quad k > j$$

ce qui ordonne les variables rapides par vitesses croissantes.

Si  $\tau_1$  est l'échelle des temps des composantes lentes  $x_1$  et  $\tau_i$  l'échelle des temps des variables rapides  $x_i$  ( $i = 2, \dots, N$ ), alors  $\mu_j^!$  peut se décompo-

ser de la façon suivante :

$$(IV.11) \quad \mu_j' = \frac{t-t_0}{\tau_j} = \underbrace{\frac{t-t_0}{\tau_2}}_{\mu_2} \times \underbrace{\frac{\tau_2}{\tau_3}}_{\mu_3} \times \dots \times \underbrace{\frac{\tau_{j-1}}{\tau_j}}_{\mu_j}$$

avec  $t_0$  : instant initial.

Chacun des scalaires  $\mu_i$  ( $i=2, \dots, N$ ) permet de comparer la vitesse des variables  $x_i$  avec celles des variables  $x_{i-1}$ .

Cette forme n'apparaît dans la littérature que dans /O'Malley, 1974/ et /Dauphin-Tanguy, 1981, 1982/. O'Malley la présente dans le cas du système de dimension 3 suivant :

$$(IV.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \varepsilon_1 \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales :

$$(IV.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0 ; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = x_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ y(0 ; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ z(0 ; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{array} \right.$$

Le système réduit est obtenu pour  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  et  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  simultanément, ce qui revient à considérer le problème comme un problème à paramètre unique.

L'intérêt de cette modélisation réside pour O'Malley, dans les faits suivants :

-  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  étant inférieurs à 1, il n'existe pas d'ambiguïté

pour le classement des variables rapides l'une par rapport à l'autre :  
 $\epsilon_1 \epsilon_2 < \epsilon_2$ .

- La solution asymptotique du système (IV.12) (IV.13) apparaît comme la superposition du développement extérieur dépendant de  $t$ , de la correction de couche limite dépendant de la variable rapide la plus faible  $y$ , et de la contribution de la variable la plus rapide  $z$ .

Un exemple de cette technique, concernant un réacteur chimique est proposé par /Chen, O'Malley, 1974/.

Nous envisageons de montrer ici que cette forme de modélisation particulière des systèmes multivitesse possède des avantages importants pour la réduction de dimensionnalité, et donne beaucoup plus de souplesse d'utilisation que la forme (IV.1).

Les deux approches précédemment décrites sont en effet possibles :

- si les parties rapides ont des vitesses de même ordre de grandeur, la séparation partie lente/partie rapide se fait directement en une seule étape en posant  $\mu_2 = 0$ . Le système multiparamètre est alors étudié comme un système à paramètre unique. Cette modélisation se rapproche du cas où tous les paramètres  $\mu_i$ ,  $\forall i = 2, \dots, N$ , sont égaux à  $\mu$ , ce qui donne des petits scalaires  $\mu_j'$  en puissances de  $\mu$  ( $\mu_j' = \mu^{j-1}$  ;  $j = 2, \dots, N$ ),

- si les vitesses sont toutes différentes, le système est alors étudié comme un système à paramètres multiples et la "dégénérescence" se fait progressivement en posant  $\mu_N = 0$ , puis  $\mu_{N-1} = 0$ , ....

Si, dans les composantes rapides, une variable  $x_{N-k}$  "impose" sa vitesse, les  $x_i$  ( $i < N-k$ ) composent alors la partie lente et les  $x_j$  ( $j \geq N-k$ ) composent la partie rapide, il est alors possible d'effectuer la séparation de façon progressive en posant  $\mu_N = 0$  puis  $\mu_{N-1} = 0$ , ..., puis  $\mu_{N-k} = 0$ .

Mais une autre démarche consiste à poser  $\mu_{N-k} = 0$  directement dans l'équation (IV.10), ce qui ramène le problème à  $N$  paramètres à un problème à  $(N-k-1)$  paramètres (avec  $\mu_1 = 1$ ).

II - PRESENTATION DE DEUX METHODES DE DECOUPLAGE DES DYNAMIQUES

/Dauphin-Tanguy, Borne, Benrejeb, 1982/

Soit le système S multivariable suivant :

$$(IV.14) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mu_1 \ddot{x}_1 \\ \mu_2 \mu_1 \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \mu_i \ddot{x}_i \\ \vdots \\ \mu_N \ddot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{N1} & \dots & B_{Nr} \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & \dots & C_{pN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{p1} & \dots & D_{pr} \end{bmatrix} u \end{array} \right.$$

avec :

$$(IV.15) \left\{ \begin{array}{l} u \in R^r \quad y \in R^p \quad x \in R^{n_i} \\ A = \{A_{ij} \in R^{n_i \times n_j} / i, j = 1, \dots, N\} \\ B = \{B_{ij} \in R^{n_i \times 1} / i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, r\} \\ C = \{C_{ij} \in R^{1 \times n_j} / i = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, N\} \\ D = \{D_{ij} \in R / i = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, r\} \\ \mu_1 = 1 \quad \mu_i \in ]0, 1] \quad \forall i = 2, \dots, N \end{array} \right.$$

II.1 - Dégénérescence progressive

La méthode progressive qui consiste à annuler  $\mu_N$ , puis  $\mu_{N-1}$ , ..., fait apparaître une récurrence qui permet de calculer, en partant du plus rapide vers le plus lent, l'équation d'état du système dégénéré.

A chaque étape, des conditions d'inversibilité apparaissent pour la matrice caractérisant la partie rapide découplée.

Nous noterons  $S^{k+1}$  le système obtenu après  $(k+1)$  pas de dégénérescence et  $S^0 = (A^0, B^0, C^0, D^0)$  le système initial correspondant à (IV.14) (IV.15).

Soit l'algorithme correspondant (A).

$$S^0 \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A_{ij}^0 & (i, j = 1, \dots, N) \\ C_{ij}^0 & (i = 1, \dots, p) \\ & (j = 1, \dots, N) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} B_{ij}^0 & (i = 1, \dots, N) \\ & (j = 1, \dots, r) \\ D_{ij}^0 & (i = 1, \dots, p) \\ & (j = 1, \dots, r) \end{array} \right.$$

$$\downarrow \quad \mu_N = 0$$

$$S^1 \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A_{ij}^1 = A_{ij}^0 - A_{iN}^0 A_{NN}^{0-1} A_{Nj}^0 & (i, j = 1, \dots, N-1) \\ B_{ij}^1 = B_{ij}^0 - A_{iN}^0 A_{NN}^{0-1} B_{Nj}^0 & \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, N-1) \\ (j = 1, \dots, r) \end{array} \right. \\ C_{ij}^1 = C_{ij}^0 - C_{iN}^0 A_{NN}^{0-1} A_{Nj}^0 & \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, p) \\ (j = 1, \dots, N-1) \end{array} \right. \\ D_{ij}^1 = D_{ij}^0 - C_{iN}^0 A_{NN}^{0-1} B_{Nj}^0 & \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, p) \\ (j = 1, \dots, r) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\downarrow \quad \mu_{N-1} = 0$$

$$S^2 \left\{ \begin{matrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_{N-2}^2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A_{ij}^2 = A_{ij}^1 - A_{i,N-1}^1 A_{N-1,N-1}^{1-1} A_{N-1,j}^1 & (i, j = 1, \dots, N-2) \\ B_{ij}^2 = B_{ij}^1 - A_{i,N-1}^1 A_{N-1,N-1}^{1-1} B_{N-1,j}^1 & \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, N-2) \\ (j = 1, \dots, r) \end{array} \right. \\ C_{ij}^2 = C_{ij}^1 - C_{i,N-1}^1 A_{N-1,N-1}^{1-1} A_{N-1,j}^1 & \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, p) \\ (j = 1, \dots, N-2) \end{array} \right. \\ D_{ij}^2 = D_{ij}^1 - C_{i,N-1}^1 A_{N-1,N-1}^{1-1} B_{N-1,j}^1 & \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, p) \\ (j = 1, \dots, r) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\downarrow \quad \mu_{N-2} = 0$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 \mu_{N-k} = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 S^{k+1} \left\{ \begin{array}{l} x_1^{k+1} \\ \vdots \\ x_{N-k-1}^{k+1} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 A_{ij}^{k+1} = A_{ij}^k - A_{i,N-k}^k A_{N-k,N-k}^{k-1} A_{N-k,j}^k \quad (i, j = 1, \dots, N-k-1) \\
 B_{ij}^{k+1} = B_{ij}^k - A_{i,N-k}^k A_{N-k,N-k}^{k-1} B_{N-k,j}^k \quad \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, N-k-1) \\ (j = 1, \dots, r) \end{array} \right. \\
 C_{ij}^{k+1} = C_{ij}^k - C_{i,N-k}^k A_{N-k,N-k}^{k-1} A_{N-k,j}^k \quad \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, p) \\ (j = 1, \dots, N-k-1) \end{array} \right. \\
 D_{ij}^{k+1} = D_{ij}^k - C_{i,N-k}^k A_{N-k,N-k}^{k-1} B_{N-k,j}^k \quad \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, \dots, p) \\ (j = 1, \dots, r) \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

(A) : Algorithme de séparation des dynamiques.

L'ordre d'arrêt  $k$  est variable et peut être choisi en vertu de différents critères :

- La matrice  $A_{N-k,N-k}^k$  n'est pas inversible.
- La réduction d'ordre est jugée suffisante pour simplifier les calculs sans nuire de façon trop importante à la précision des calculs.
- La variable  $x_{N-k}^k$  la plus rapide du système réduit est de stabilité incertaine, ce qui conduit l'utilisateur à la conserver dans le système global.

Le système découplé ainsi obtenu se présente sous la forme suivante :



(IV.16) 
$$\left[ \begin{array}{c} \dots \\ \mu_2 x_2^{k+1} \\ \vdots \\ \prod_{i=2}^{N-k-1} \mu_i x_{N-k-1}^{k+1} \\ \hline \prod_{i=2}^{N-k} \mu_i x_{N-k}^k \\ \vdots \\ \prod_{i=2}^N \mu_i x_N^0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \dots \\ A^{k+1} \\ \vdots \\ \hline A_{N-k, N-k}^k \\ \vdots \\ \hline A_{NN}^0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-k-1}^{k+1} \\ \hline x_{N-k}^k \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N^0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \dots \\ B^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{N-k}^k \\ \vdots \\ \vdots \\ B_N^0 \end{array} \right] u$$

$$y = y_\ell + y_r$$

avec 
$$\left\{ \begin{array}{l} y_\ell = \left[ C^{k+1} \right] \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-k-1}^{k+1} \end{bmatrix} + \left[ D^{k+1} \right] u \\ y_r = C_{N-k}^k x_{N-k}^k + C_{N-k+1}^{k-1} x_{N-k+1}^{k-1} + \dots + C_N^0 x_N^0 \end{array} \right.$$

avec la convention d'écriture :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_j^i = \left[ B_{j1}^i \dots B_{jr}^i \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 0, \dots, k \\ j = N-k, \dots, N \end{array} \right. \\ \\ C_j^i = \begin{bmatrix} C_{1j}^i \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{pj}^i \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 0, \dots, k \\ j = N-k, \dots, N \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases}
 A^{k+1} = \{ A_{ij}^{k+1} ; i, j = 1, \dots, N-k-1 \} \\
 B^{k+1} = \{ B_{ij}^{k+1} ; i = 1, \dots, N-k-1 \\
 \quad j = 1, \dots, r \} \\
 C^{k+1} = \{ C_{ij}^{k+1} ; i = 1, \dots, p \\
 \quad j = 1, \dots, N-k-1 \} \\
 D^{k+1} = \{ D_{ij}^{k+1} ; i = 1, \dots, r \\
 \quad j = 1, \dots, p \}
 \end{cases}$$

## II.2 - Séparation en une étape partie lente/partie rapide

Cette approche intervient dans deux cas précis :

- Toutes les dynamiques rapides sont comparables, et le système est à paramètre unique. Les résultats des précédents chapitres s'appliquent alors directement.

- La variable  $x_{N-k}$  marque la limite entre les variables pouvant globalement être considérées comme lentes par rapport aux autres variables rapides  $x_{N-k}, \dots, x_N$ . Dans ce cas, écrire  $\mu_{N-k} = 0$  revient à remplacer  $k+1$  équations différentielles par autant d'équations algébriques.

Le système réduit correspondant, de dimension  $\sum_{i=1}^{N-k-1} n_i$ , ne peut être obtenu que si la matrice caractérisant les variables rapides est inversible, soit :

$$(IV.17) \quad A_r = \begin{bmatrix} A_{N-k, N-k} & \dots & A_{N-k, N} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N, N-k} & \dots & A_{N, N} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \det A_r \neq 0$$

Si toutes les matrices  $A_{ii}$  ( $i = N-k, \dots, N$ ) sont inversibles, le système découplé sera évidemment identique à celui obtenu par la première méthode de découplage progressif.

Par contre, si une des variables  $x_j$  ( $j \in [N-k, \dots, N]$ ) est caractérisée par une matrice  $A_{jj}$  non inversible, la séparation progressive ne

sera pas applicable, contrairement à la méthode globale qui ne fait d'hypothèse d'inversibilité que pour la matrice bloc  $[A_{ij} ; i, j = N-k, \dots, N]$ .

Le système découplé alors obtenu se présente sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \overset{k+1}{x}_1 \\ \vdots \\ \overset{k+1}{x}_{N-k-1} \\ \hline \overset{\circ}{x}_{N-k} \\ \vdots \\ \overset{\circ}{x}_N \end{array} \right] \\ \text{N-k-1} \\ \prod_{i=2} \mu_i \\ \text{N-k} \\ \prod_{i=2} \mu_i \\ \text{N} \\ \prod_{i=2} \mu_i \end{array} \right] = \\
 (IV.18) \quad & \left[ \begin{array}{cc} \overset{k+1}{A}_\ell & 0 \\ \hline 0 & A_r \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \overset{k+1}{x}_1 \\ \vdots \\ \overset{k+1}{x}_{N-k-1} \\ \hline \overset{\circ}{x}_{N-k} \\ \vdots \\ \overset{\circ}{x}_N \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \overset{k+1}{B}_\ell \\ \hline B_r \end{array} \right] u \\
 & y = \left[ \begin{array}{cc} \overset{k+1}{C}_\ell & C_r \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \overset{k+1}{X}_\ell \\ \hline X_r \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \overset{k+1}{D}_\ell \end{array} \right] u
 \end{aligned}$$

avec :

$${}^{k+1}X_{\ell} = \begin{bmatrix} k+1 & & & \\ & x_1 & & \\ & \vdots & & \\ & & & \\ k+1 & & & \\ & & & x_{N-k-1} \end{bmatrix} \quad X_r = \begin{bmatrix} x_{N-k} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

(L'indice  $k+1$  est ici placé à gauche, pour éviter les confusions avec la première approche).

Les matrices  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  caractérisant la partie rapide, sont obtenues directement à partir de l'expression du système global (IV.14).

Les matrices associées au système lent réduit sont obtenues de façon classique, en utilisant la notation inspirée de celle de Binet-Cauchy

$$A \begin{bmatrix} \text{indices lignes conservés} \\ \text{indices colonnes conservés} \end{bmatrix}$$

$$(IV.19) \left\{ \begin{array}{l} {}^{k+1}A_{\ell} = A \begin{bmatrix} 1 \dots N-k-1 \\ 1 \dots N-k-1 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} 1 \dots N-k-1 \\ N-k \dots N \end{bmatrix} \cdot A_r^{-1} \cdot A \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ 1 \dots N-k-1 \end{bmatrix} \\ {}^{k+1}B_{\ell} = B \begin{bmatrix} 1 \dots N-k-1 \\ 1 \dots r \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} 1 \dots N-k-1 \\ N-k \dots N \end{bmatrix} \cdot A_r^{-1} \cdot B \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ 1 \dots r \end{bmatrix} \\ {}^{k+1}C_{\ell} = C \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ 1 \dots N-k-1 \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ N-k \dots N \end{bmatrix} \cdot A_r^{-1} \cdot A \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ 1 \dots N-k-1 \end{bmatrix} \\ {}^{k+1}D_{\ell} = D \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ 1 \dots r \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ N-k \dots N \end{bmatrix} \cdot A_r^{-1} \cdot B \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ 1 \dots r \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

III - ETUDE PRECISE PAR LA METHODE PS + R DES COMPORTEMENTS RAPIDES DES SYSTEMES MULTI-EHELLES DES TEMPS

Nous avons présenté dans le précédent paragraphe, deux méthodes de séparation des parties lentes et rapides du système global (IV.14), qui donnent une bonne précision pour la partie lente découplée.

Pour la partie rapide, la méthode PS + R exposée dans le chapitre II conduit à deux expressions matricielles possibles, suivant la définition du système réciproque retenue, soit dans le cas de deux dynamiques différentes :

$$(II.126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \dot{\tilde{z}}_r = A_{22} \tilde{z}_r + B_2 u \\ y_r = (C_2 + \mu C_1 A_{12} A_{22}^{-1}) \tilde{z}_r + \int_{t_0}^t C_1 (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u dt \\ \tilde{z}_r(0) = z(0) \end{array} \right.$$

ou :

$$(II.131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \dot{\tilde{z}}_r = A_{22} \tilde{z}_r + (B_2 + \mu A_{22}^{-1} A_{21} B_1) u \\ y_r = C_2 \tilde{z}_r + \int_{t_0}^t (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) B_1 u dt \\ \tilde{z}_r(0) = z(0) \end{array} \right.$$

Ces expressions peuvent être généralisées au cas multivitesse, avec des formes différentes suivant la démarche utilisée pour le découplage.

III.1 - Dégénérescence progressive

Cette approche est caractérisée par l'algorithme (A). A la première étape, la partie rapide, de variable  $x_N$ , est décrite par l'une des deux expressions suivantes :

$$(IV.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=2}^N \mu_i \dot{x}_{N\tilde{r}} = A_{NN}^o x_{N\tilde{r}} + B_N^o u \\ y_{N\tilde{r}} = \left[ C_N^o + \prod_{i=2}^N \mu_i \left[ \sum_{j=1}^{N-1} C_j^o A_{jN}^o \right] A_{NN}^{o-1} \right] x_{N\tilde{r}} + \int_{t_0}^t \left[ C_1^o \dots C_{N-1}^o \right] B^1 u dt \end{array} \right.$$

ou :

$$(IV.21) \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=2}^N \mu_i \dot{x}_{N\tilde{r}}^0 = A_{NN}^0 x_{N\tilde{r}} + \left[ B_N^0 + \prod_{i=2}^N \mu_i A_{NN}^{0-1} \left( \sum_{j=1}^{N-1} A_{Nj}^0 B_j^0 \right) \right] u \\ y_{N\tilde{r}} = C_N^0 x_{N\tilde{r}} + \int_{t_0}^t C^1 \begin{bmatrix} B_1^0 \\ \vdots \\ B_{N-1}^0 \end{bmatrix} u dt \end{array} \right.$$

A l'étape k+1, la partie rapide obtenue  $x_{(N-k)\tilde{r}}^k$  s'écrit donc sous la forme :

$$(IV.22) \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=2}^{N-k} \mu_i \dot{x}_{(N-k)\tilde{r}}^k = A_{N-k,N-k}^k x_{(N-k)\tilde{r}}^k + B_{N-k}^k u \\ y_{(N-k)\tilde{r}} = \left[ C_{N-k}^k + \prod_{i=2}^{N-k} \mu_i \left( \sum_{j=1}^{N-k-1} C_j^k A_{jN-k}^k \right) A_{N-k,N-k}^{k-1} \right] x_{(N-k)\tilde{r}}^k \\ + \int_{t_0}^t \left[ C_1^k \dots C_{N-k-1}^k \right] B^k u dt \end{array} \right.$$

ou :

$$(IV.23) \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=2}^{N-k} \mu_i \dot{x}_{(N-k)\tilde{r}}^k = A_{N-k,N-k}^k x_{(N-k)\tilde{r}}^k \\ + \left[ B_{N-k}^k + \prod_{i=2}^{N-k} \mu_i A_{N-k,N-k}^{k-1} \left( \sum_{j=1}^{N-k-1} A_{N-k,j}^k B_j^k \right) \right] u \\ y_{(N-k)\tilde{r}} = C_{N-k}^k x_{(N-k)\tilde{r}}^k + \int_{t_0}^t C^k \begin{bmatrix} B_1^k \\ \vdots \\ B_{N-k-1}^k \end{bmatrix} u dt \end{array} \right.$$

III.2 - Séparation directe partie lente/partie rapide

Si la variable  $x_{N-k}$  marque la séparation partie lente/partie rapide, poser  $\mu_{N-k} = 0$  conduit au découplage indiqué (IV.18).

La partie rapide obtenue par la méthode (PS + R) se présente alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} N-k \\ \prod_{i=2} \mu_i \overset{\circ}{x}_{N-k} \\ \vdots \\ N \\ \prod_{i=2} \mu_i \overset{\circ}{x}_N \end{array} \right]_{\tilde{r}} = A \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ N-k \dots N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-k} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_{\tilde{r}} + B \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ 1 \dots r \end{bmatrix} u \\
 (IV.24) \quad & y_{\tilde{r}} = \left[ C \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ N-k \dots N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N-k & & 0 \\ \prod_{i=2} \mu_i & \dots & N \\ 0 & & \prod_{i=2} \mu_i \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ 1 \dots N-k-1 \end{bmatrix} \right] \\
 & A \begin{bmatrix} 1 \dots N-k-1 \\ N-k \dots N \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ N-k \dots N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{N-k} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_{\tilde{r}} \\
 & + \int_{t_0}^t C \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ 1 \dots N-k-1 \end{bmatrix} {}^{k+1}B_{\ell} u dt
 \end{aligned}$$

${}^{k+1}B_{\ell}$  est défini dans (IV.19)

ou :

$$(IV.25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} N-k \\ \prod_{i=2} \mu_i \cdot \ddot{x}_{N-k} \\ \vdots \\ N \\ \prod_{i=2} \mu_i \cdot \ddot{x}_N \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ N-k \dots N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-k} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \tilde{r} \\ & + \begin{bmatrix} B \\ 1 \dots r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ \prod_{i=2} \mu_i \cdot \dots \cdot \prod_{i=2} \mu_i \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ N \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ N-k \dots N \end{bmatrix}^{-1} \\ & \left[ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{bmatrix} N-k \dots N \\ 1 \dots N-k-1 \\ 1 \dots r \end{bmatrix} \right] u \\ & \tilde{y}_r = C \begin{bmatrix} 1 \dots p \\ N-k \dots N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-k} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t C_{k+1} B \begin{bmatrix} 1 \dots N-k-1 \\ 1 \dots r \end{bmatrix} u dt \end{aligned} \right.$$

IV - INTERPRETATION FREQUENTIELLE DE LA SEPARATION DES DYNAMIQUES

Dans un but de simplicité, nous étudierons un système de dimension 3, possédant 3 dynamiques distinctes et représenté par la fonction de transfert suivante :

$$(IV.26) \quad W(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

avec :  $\tau_1 \gg \tau_2 \gg \tau_3$



La représentation d'état associée, dans la base modale, s'écrit :

$$(IV.27) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & & 0 \\ & -1/\tau_2 & \\ 0 & & -1/\tau_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Les coefficients  $\beta_i \cdot \gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) sont les résidus associés aux pôles  $-1/\tau_i$  dans la décomposition en éléments simples de  $W(p)$  et sont obtenus par la relation :

$$(IV.28) \quad \beta_i \cdot \gamma_i = \frac{K \tau_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\tau_i - \tau_j)}$$

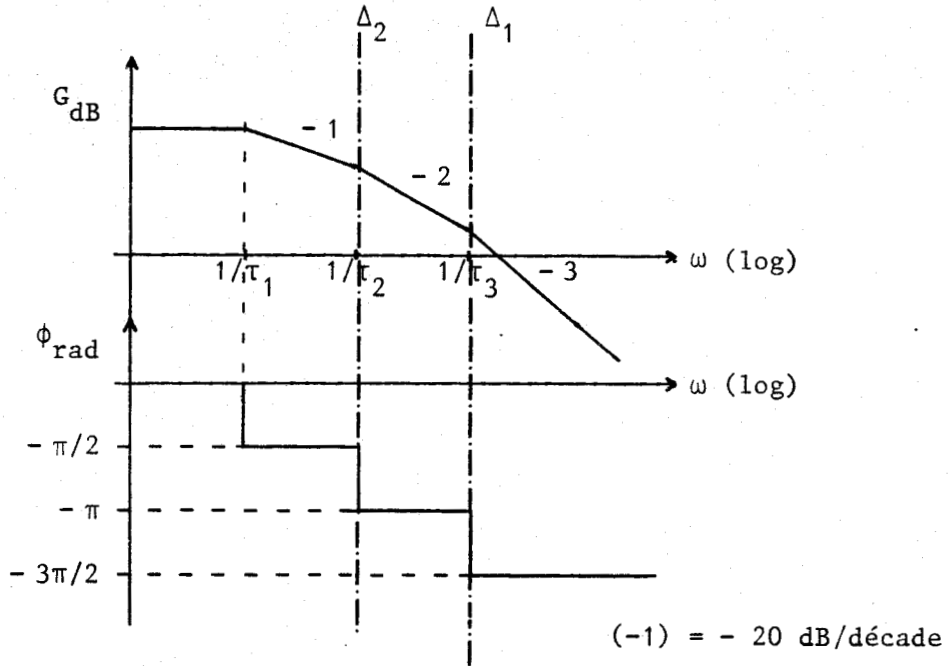
Le système (IV.27) a des termes d'ordres de grandeur très différents. Il peut être modélisé sous la forme singulièrement perturbée suivante :

$$(IV.29) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \mu_2 \dot{x}_2 \\ \mu_3 \mu_2 \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & & 0 \\ & -1/\tau_2' & \\ 0 & & -1/\tau_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

où les paramètres  $\mu_i$  ( $i=2, 3$ ) sont définis conformément à la relation (IV.11).

IV.1 - Troncature du diagramme de Bode

Le diagramme asymptotique de Bode associé à  $W(p)$  est présenté sur la Figure suivante :



Considérer que la variable  $x_3$  est très rapide par rapport à  $x_1$  et  $x_2$  revient à ne prendre en compte dans le diagramme que le domaine situé à gauche de l'axe  $\Delta_1$ , ce qui conduit à la fonction de transfert réduite :

$$(IV.30) \quad W_B^1(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{K \tau_i}{(\tau_i - \tau_j)} \frac{1}{(p + 1/\tau_i)}$$

Si  $\tau_2 \ll \tau_1$ , alors le système lent réduit est obtenu par :

$$(IV.31) \quad W_B^2(p) = \frac{K}{1 + \tau_1 p}$$

et le diagramme de Bode réduit se limite au domaine situé à gauche de  $\Delta_2$ .

Cette troncature du diagramme de Bode revient donc à une réduction modale.

IV.2 - Méthode des perturbations singulières

Nous appliquerons ici la méthode de dégénérescence progressive présentée dans le précédent chapitre.

En posant  $\mu_3 = 0$  dans le système (IV.29), nous obtenons le système lent réduit suivant, mis sous forme générale :

$$(IV.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \gamma_3 \beta_3 \tau_3 u \end{array} \right.$$

ce qui conduit, par l'application de la transformation de Laplace à la fonction de transfert réduite :

$$(IV.33) \quad W_{PS}^1(p) = \sum_{i=1}^2 \frac{\beta_i \gamma_i}{(p + 1/\tau_i)} + \gamma_3 \beta_3 \tau_3$$

d'où, avec la relation (IV.28) :

$$(IV.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{PS}^1(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \left[ 1 - \tau_3 p + \sigma(|\tau_3^2 p|) \right] \\ \text{avec} \\ \sigma(|\tau_3^2 p|) = \left| \frac{-\tau_3^2 p}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_3)} (1 - \tau_1 \tau_2 p) \right| \end{array} \right.$$

où  $\sigma(|x|)$  représente une fonction complexe telle que :

$$|\sigma(|x|)| \ll |x|$$

La forme de  $W_{PS}^1(p)$  entraîne quelques remarques :

- Le terme  $1 - \tau_3 p$  apparaissant au numérateur entraîne un déphasage de  $-\pi/2$ , la courbe de phase du diagramme de Bode ainsi obtenue reste donc pratiquement inchangée.

- La courbe de gain reste inchangée pour les valeurs  $\omega$  inférieures à  $1/\tau_3$ .

Cette décomposition apporte donc plus de précision pour la séparation des dynamiques, en particulier pour la commande des processus linéaires, quand les notions de marge de phase/marge de gain jouent un grand rôle.

La deuxième étape dans la réduction conduit à une fonction de transfert du 1er ordre :

$$(IV.35) \quad W_{PS}^2(p) = \frac{\gamma_1 \beta_1 \tau_1}{(1 + \tau_1 p)} + \gamma_2 \beta_2 \tau_2 + \gamma_3 \beta_3 \tau_3$$

qui peut également se mettre sous une forme comparable à (IV.34), soit :

$$(IV.36) \quad W_{PS}^2(p) = \frac{K}{1 + \tau_1 p} (1 - \tau_2 p + \sigma(|\tau_2 p|))$$

ce qui entraîne les mêmes remarques que précédemment.

#### IV.3 - Cas de système non linéaire de type Lur'e Postnikov

Nous avons défini dans le Chapitre II, § III, la notion d'"opérateur symbolique de transfert scalaire"  $W_{BF}(\lambda, f^*)$  pour un système non linéaire de type Lur'e Postnikov, obtenu à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte  $W_{BO}(p)$  par :

$$W_{BF}(\lambda, f^*) = \frac{f^* N_{BO}(\lambda)}{D_{BO}(\lambda) + f^* N_{BO}(\lambda)} = \frac{N_{BF}(\lambda, f^*)}{D_{BF}(\lambda, f^*)}$$

Le pseudo-gain statique de cet opérateur s'écrit :

$$(IV.37) \quad k_0^* = W_{BF}(0, f^*) = \frac{f^* N(0)}{D(0) + f^* N(0)} = \frac{f^* W(0)}{1 + f^* W(0)}$$

C'est une fonction homographique, de variable  $f^*$  variant dans l'intervalle  $[\underline{L}, \bar{L}]$ , qui n'est pas définie pour  $f^* = -1/W(0)$ . Le gain statique  $k_0^*$  est alors infini, ce qui est équivalent à l'introduction d'un terme  $1/\lambda$  dans  $W_{BF}(\lambda, f^*)$  donc à un changement de comportement qualitatif. Il est dans ce cas difficile d'obtenir une même représentation, donc un même modèle pour tout le domaine de variation de  $f^*$ .

Nous supposons donc que cette valeur  $-1/W(0)$  n'appartient pas au domaine de variation de  $f^*$ , ce qui permet de conclure que la fonction  $k_0^*$  est monotone pour  $f^* \in [\underline{L}, \bar{L}]$ .

La fraction rationnelle  $W_{BF}(\lambda, f^*)$  est composée de deux fonctions  $N_{BF}(\lambda, f^*)$  et  $D_{BF}(\lambda, f^*)$  linéaires en  $f^*$ , dont les valeurs extrêmes des racines sont obtenues pour les valeurs extrêmes de  $f^*$ .

Il est donc possible de factoriser  $N_{BF}(\lambda, f^*)$  et  $D_{BF}(\lambda, f^*)$  sous la forme :

$$(IV.38) \quad \frac{N_{BF}(\lambda, f^*)}{D_{BF}(\lambda, f^*)} = \frac{\prod_i (\lambda + z_i^*)^{n_i}}{\prod_j (\lambda + p_j^*)^{n_j}}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_i n_i = d^0 N_{BF} & \sum_j n_j = d^0 D_{BF} \\ z_i^* \in [\underline{z}_i, \bar{z}_i] & p_j^* \in [\underline{p}_j, \bar{p}_j] \end{array} \right.$$

ce qui permet alors de tracer le "pseudo-domaine asymptotique de Bode".

Ainsi, à titre d'exemple, considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{BF}(\lambda, f^*) = \frac{f^* (\lambda^2 + 5\lambda + 6)}{\lambda^4 + 24.5\lambda^3 + (176.5 + f^*)\lambda^2 + (333 + 5f^*)\lambda + 180 + 6f^*} \\ f^* \in [1 ; 4] \end{array} \right.$$

Le pseudo-gain statique  $k_o^*$  s'exprime par :

$$k_o^* = \frac{f^*}{30 + f^*}$$

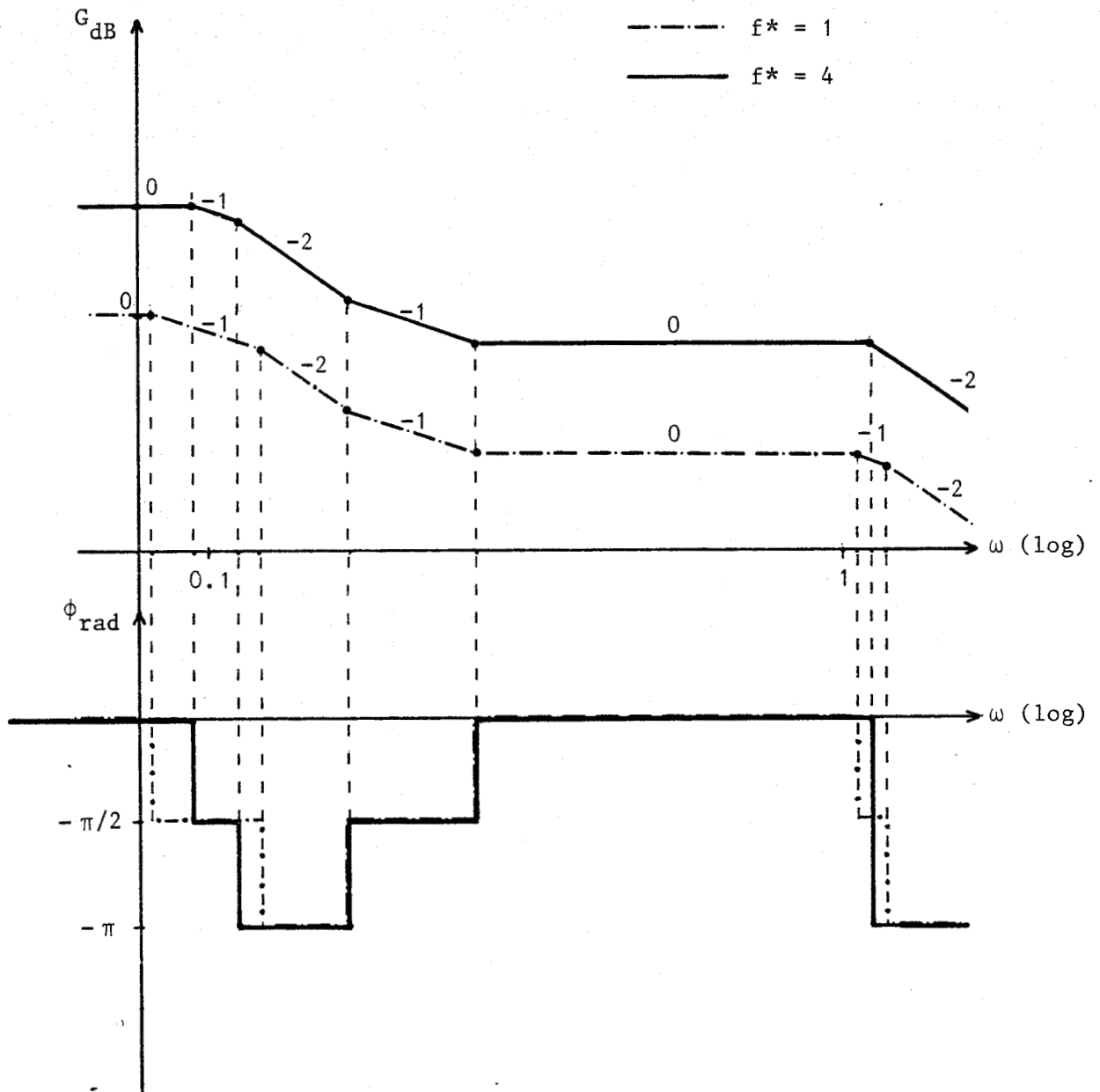
Les éléments caractéristiques, correspondant à l'opposé des pôles et zéros sont :

- $z_1 = 2$  et  $z_2 = 3$
- $p_1 \in [1.042 (f^* = 1) ; 1.203 (f^* = 4)]$
- $p_2 \in [1.39 (f^* = 4) ; 1.482 (f^* = 1)]$
- $p_3 = 10.5$  ) sont distincts pour  $f^* = 1$  et
- $p_4 = 11.5$  ) deviennent imaginaires conjugués pour  $f^* = 4$ ,

de valeurs  $10.95 \pm 1.43 i$

ce qui donne la pseudo-pulsation naturelle  $p_{34} = 11.047$ , d'où le pseudo-domaine asymptotique de Bode tracé Figure 17, page suivante.

Ainsi, par ce formalisme proche du linéaire, il est possible de comparer les résultats obtenus par troncature du diagramme de Bode et par réduction par la méthode PS et d'énoncer les mêmes remarques que précédemment.



Pseudo-domaine asymptotique de Bode

Figure 17

V - ETUDE DES SYSTEMES INTERCONNECTES DE TYPE LUR'E POSTNIKOV

V.1 - Détermination de l'opérateur symbolique de transfert matriciel

La notion d'opérateur symbolique de transfert scalaire défini précédemment pour un système non linéaire de type Lur'e Postnikov, peut se généraliser sous la forme d'"opérateur symbolique de transfert matriciel"

pour des systèmes multivariables ou interconnectés.

Ainsi, considérons le système décrit par le schéma-bloc suivant :

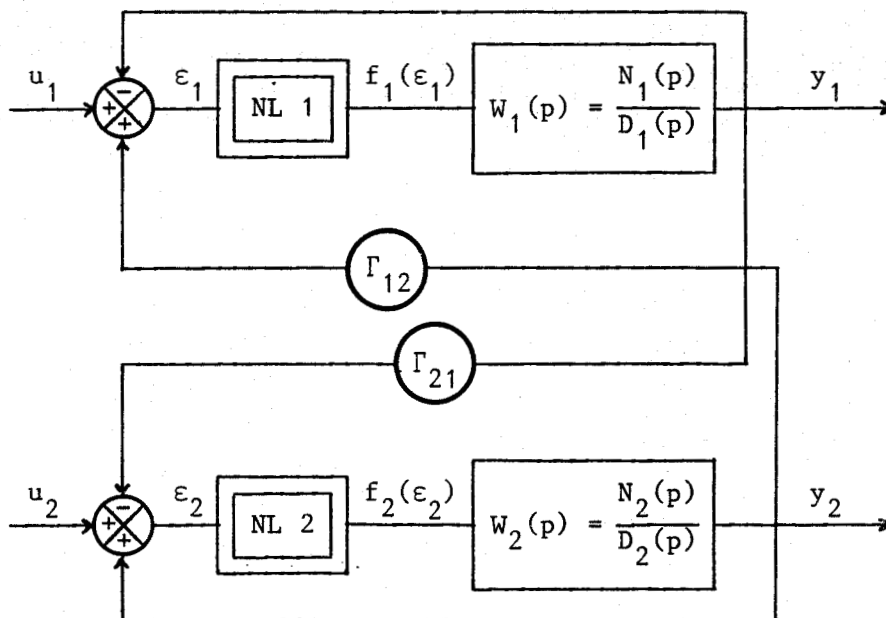


Figure 18

qui se transforme, en utilisant la notation d'opérateur symbolique de transfert scalaire  $W_{BF}(\lambda, f^*)$ , sous la forme schéma-bloc :

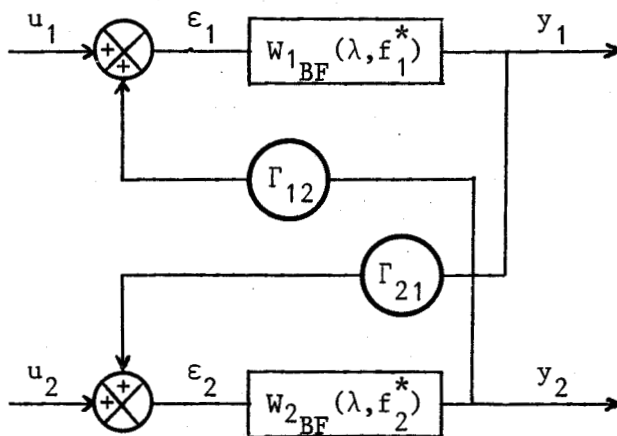


Figure 19

ou encore, avec l'opérateur symbolique de transfert matriciel :



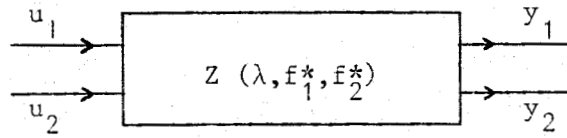


Figure 20

avec :

$$(IV.39) \left\{ \begin{array}{l} Z(\lambda, f_1^*, f_2^*) = \frac{1}{1 - \Gamma_{12} \Gamma_{21} W_{1BF} W_{2BF}} \begin{bmatrix} W_{1BF} & \Gamma_{12} W_{1BF} W_{2BF} \\ \Gamma_{21} W_{1BF} W_{2BF} & W_{2BF} \end{bmatrix} \\ \text{avec } W_{iBF}(\lambda, f_i^*) = \frac{f_i^* N_i(\lambda)}{D_i(\lambda) + f_i^* N_i(\lambda)} \quad i = 1, 2 \end{array} \right.$$

V.2 - Représentation d'état associée

Si  $(A_{ii}, B_i, C_i)$  est le triplet matriciel associé à la partie linéaire du sous-système  $S_i$  de dimension  $n_i$ , et  $x_i$  le vecteur état correspondant ( $i=1, 2$ ), le schéma-bloc Figure 18 conduit à la représentation d'état suivante, pour le système global  $S = \bigcup_i S_i$

$$(IV.40) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - f_1^* B_1 C_1 & \Gamma_{12} f_1^* B_1 C_2 \\ \Gamma_{21} f_2^* B_2 C_1 & A_{22} - f_2^* B_2 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 f_1^* & 0 \\ 0 & B_2 f_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Le même symbolisme que pour les systèmes linéaires peut être utilisé ici en notant  $\lambda$  l'équivalent de l'opérateur symbolique de dérivation, ce qui permet d'obtenir, à partir de (IV.40) directement l'opé-

rateur  $Z(\lambda, f_1^*, f_2^*)$  par les relations (IV.41) :

$$(IV.41) \left\{ \begin{array}{l} z_{ii} = C_i \left[ A_{ii} - \Gamma_{12} \Gamma_{21} f_1^* f_2^* B_i C_j A_{jj}^{-1} B_j C_i \right]^{-1} B_i f_i^* \\ \\ i, j = 1, 2 \quad i \neq j \\ \\ z'_{ij} = \Gamma_{ij} f_1^* f_2^* C_i \left[ A_{ii} - \Gamma_{12} \Gamma_{21} f_1^* f_2^* B_i C_j A_{jj}^{-1} B_j C_i \right]^{-1} \\ \\ \qquad \qquad \qquad B_i C_j A_{jj}^{-1} B_j \\ \\ \text{avec} \quad A_{ii} = \lambda I_i - (A_{ii} - f_i^* B_i C_i) \end{array} \right.$$

Des conditions d'inversibilité doivent être vérifiées par  $A_{ii}$  et par  $[A_{ii} - \Gamma_{12} \Gamma_{21} f_1^* f_2^* B_i C_j A_{jj}^{-1} B_j C_i]$ , pour toutes valeurs de  $f_1^*$  et  $f_2^*$  variant dans les intervalles  $[\underline{L}_1, \bar{L}_1]$  et  $[\underline{L}_2, \bar{L}_2]$ , pour  $i, j = 1, 2$ .

Lorsque la représentation d'état choisie pour chaque sous-système  $S_i$  est une forme en flèche, les équations (IV.40) sont alors sous la forme schématique correspondante.

$$(IV.42) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ \text{---} & 0 \\ 0 & \text{---} \\ \text{---} & A_{22}^* \\ A_{21}^* & \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \\ + \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \times & \vdots \\ 0 & 0 \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$y = \left[ \begin{array}{c|c} C_{11} & 0 \\ \hline 0 & C_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

les matrices  $A_{ii}^*$  étant définies, conformément aux relations (II.71).

(IV.43) 
$$A_{ii}^* = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & -\alpha_{ki} & \cdot \\ & & & & \beta_{ki} \\ & & & & \cdot \\ \dots & & & \gamma_{ki}^* & \dots \\ & & & & -\alpha_{ni}^* \end{bmatrix} \quad A_{ii}^* \in R^{n_i \times n_i}$$

avec 
$$\beta_{ki} = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n_i-1} (\alpha_{\ell i} - \alpha_{ki})^{-1}$$

$$\gamma_{ki}^* = -P_i(-\alpha_{ki}, f_i^*) \quad \text{avec} \quad P_i(\lambda, f^*) = D_{BF}(\lambda, f^*)$$

$$\alpha_{ni}^* = \sum_{k=1}^{n_i-1} (-\alpha_{ki}) + a_{n-1,i} + f_i^* b_{n-1,i}$$

$$A_{ij}^* = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ \dots & & & f_i^* N_j(-\alpha_{kj}) & \dots \\ & & & & f_i^* b_{n-1,j} \end{bmatrix} \in R^{n_i \times n_j}$$

$$B_{ii}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f_i^* \end{bmatrix} \in R^{n_i \times 1} \quad B_{ij}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad i \neq j$$

$$C_{ii} = [\dots \dots N_i(-\alpha_{ki}) \dots \dots b_{n-1,i}] \in R^{1 \times n_i}$$

$$C_{ij} = [0 \text{ --- } 0] \quad i \neq j$$



Comme il a été précisé dans les précédents chapitres, le choix des coefficients  $\alpha_{ki}$  est libre, sous certaines contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ki} > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n_i - 1 \\ \alpha_{li} \neq \alpha_{ki} \quad \text{pour } l \neq k \end{array} \right.$$

### V.3 - Etude des systèmes à plusieurs échelles de temps

Dans le cas de deux systèmes interconnectés, deux cas peuvent être envisagés :

- Chaque sous-système regroupe les dynamiques de même ordre de grandeur. Le découplage par la méthode des perturbations singulières ne modifie pas la structure interne de chaque sous-système.

- Chaque sous-système possède des variables lentes et des variables rapides. La réduction consiste alors à effectuer sur chaque sous-système déconnecté la séparation des dynamiques, et à reconstruire un système global réduit composé des sous-systèmes réduits pour lesquels sont conservées les variables de comportement dynamique correspondant à l'étude.

La modélisation sous forme singulièrement perturbée du système (IV.40) demande une détermination préalable des domaines de variation des valeurs propres de la matrice caractéristique de  $S = S_1 \cup S_2$  quand  $f_1^*$  et  $f_2^*$  varient. La méthode géométrique précédemment exposée utilisant les disques de Gershgorine renseigne directement sur les variables lentes et rapides.

#### V.3.1 - Chaque sous-système a un comportement dynamique différent

##### V.3.1.1 - Etude de la partie lente :

Nous supposons que les variables rapides sont regroupées dans  $x_2$ .

Dans ce cas, la partie lente sera caractérisée par :

$$(IV.45) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_l = A_l^* x_l + B_l^* u \\ y_l = C_l x_l + D_l u \\ \text{avec :} \end{array} \right. \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad y_l = \begin{bmatrix} y_{1l} \\ y_{2l} \end{bmatrix}$$

La matrice caractéristique est obtenue par :

$$A_l^* = A_{11}^* - A_{12}^* A_{22}^{*-1} A_{21}^*$$

ce qui se représente sous forme schématique :

$$A_l^* = \begin{bmatrix} \diagdown & \\ & | \\ \times \times \times \times & \times \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & 0 \\ \times \times \times & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown & \\ & | \\ \times \times \times \times & \times \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} & 0 \\ \times \times \times \times & \end{bmatrix}$$

Soit V, la dernière colonne de  $A_{22}^{*-1}$

$$A_l^* = \begin{bmatrix} \diagdown & \\ & | \\ \times \times \times \times & \times \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & 0 \\ \times \times \times & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & & \times \\ \times & \times & \dots & \times \\ \times & \times & & \times \end{bmatrix}$$

Colonnes  
proportionnelles à V

$$A_l^* = \begin{bmatrix} \diagdown & \\ & | \\ \times \times \times \times & \times \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & 0 \\ \times \times \times & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagdown & \\ & | \\ \times \times \times \times & \times \end{bmatrix}$$

La forme en flèche est conservée.



La matrice de commande réduite lente s'obtient par :

$$B_{\ell}^* = \begin{bmatrix} B_{\ell 1}^* & B_{\ell 2}^* \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B_{\ell i}^* = B_{1i}^* - A_{12}^* A_{22}^{*-1} B_{2i}^* \quad i = 1, 2$$

ce qui se schématise sous la forme :

$$B_{\ell}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ | & | \\ 0 & | \\ \times & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \times \times \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \times \times \times \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ | & \vdots \\ 0 & \times \end{bmatrix}$$

ou

$$B_{\ell}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ | & | \\ 0 & | \\ \times & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \times \times \times \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & * \\ | & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ | & | \\ 0 & 0 \\ \times & \times \end{bmatrix}$$

$f_2^* V$

La matrice de commande réduite lente prend en compte les deux entrées  $u_1$  et  $u_2$ . La matrice de sortie réduite lente est obtenue par :

$$C_{\ell}^* = \begin{bmatrix} C_{\ell 1}^* \\ C_{\ell 2}^* \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad C_{\ell i}^* = C_{i1}^* - C_{i2}^* A_{22}^{*-1} A_{21}^*$$

ce qui donne :

$$C_{\ell}^* = \begin{bmatrix} \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \times \times \times \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \text{---} \end{bmatrix}$$



$$C_{\ell}^* = \begin{bmatrix} \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

La matrice de sortie, qui était à coefficients constants comporte maintenant des termes non constants et a deux lignes d'éléments non nuls.

$$D_{\ell}^* = \begin{bmatrix} D_{\ell 1} \\ D_{\ell 2} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad D_{\ell i} = - C_{i2} A_{22}^{*-1} B_{2i}^*$$

$$D_{\ell}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ | \\ * \\ | \\ * \\ | \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ | & | \\ 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Le quadruplet  $(A_{\ell}^*, B_{\ell}^*, C_{\ell}^*, D_{\ell}^*)$  dépend donc de la dernière colonne V de  $A_{22}^{*-1}$ .

La colonne V est composée d'éléments obtenus par les relations suivantes :

$$(IV.46) \quad \begin{cases} v_i = - \frac{1}{\det A_{22}} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_2-1} (-\alpha_{k2}) \right) \beta_{i2} & i = 1, \dots, n_2-1 \\ v_{n_2} = \frac{1}{\det A_{22}} \prod_{k=1}^{n_2-1} (-\alpha_{k2}) \end{cases}$$

Le déterminant d'une matrice en flèche s'obtient très facilement par la relation : /Benrejeb, Borne, Laurent, 1982/

$$(IV.47) \quad \det A_{22} = (-1)^{n_2} P_2(0, f_2^*) = (-1)^{n_2} D_{2BF}(0, f_2^*)$$

Chaque matrice du quadruplet  $(A_{\ell}^*, B_{\ell}^*, C_{\ell}^*, D_{\ell}^*)$  s'obtient donc à partir de  $V$  par les relations suivantes :

$$A_{\ell}^* = A_{11}^* - \Gamma_{12} \Gamma_{21} f_1^* f_2^* C_{22} V B_{11} C_{11}$$

avec :

$$f_2^* C_{22} V = f_2^* \left[ \begin{array}{c} n_2^{-1} \\ \Sigma \\ \ell=1 \end{array} N_2 (-\alpha_{\ell 2}) v_{\ell} + b_{n_2^{-1}, 2} v_{n_2} \right]$$

ce qui donne, en développant et en regroupant les termes :

$$(IV.48) \quad f_2^* C_{22} V = -W_{2BF}(0, f_2^*)$$

pseudo-gain statique du sous-système  $S_2$ .

D'où :

$$(IV.49) \quad A_{\ell}^* = A_{11}^* + \Gamma_{12} \Gamma_{21} W_{2BF}(0, f_2^*) B_{11}^* C_{11}$$

De même pour la matrice  $B_{\ell}^*$  qui s'exprime par :

$$B_{\ell}^* = \begin{bmatrix} B_{11}^* & 0 \end{bmatrix} - \Gamma_{12} \begin{bmatrix} 0 & f_2^* B_{11}^* C_{22} V \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$(IV.50) \quad B_{\ell}^* = \begin{bmatrix} B_{11}^* & \Gamma_{12} W_{BF}(0, f_2^*) B_{11}^* \end{bmatrix}$$

La matrice  $C_{\ell}^*$  réduite est obtenue par :

$$C_{\ell}^* = \begin{bmatrix} C_{11} \\ 0 \end{bmatrix} - \Gamma_{21} f_2^* \begin{bmatrix} 0 \\ C_{22} \end{bmatrix} V$$

ce qui s'écrit aussi :



$$(IV.51) \quad C_{\ell}^* = \begin{bmatrix} C_{11} \\ \Gamma_{21} W_{2BF}(0, f_2^*) C_{11} \end{bmatrix}$$

La matrice de transmission directe de l'entrée  $D_{\ell}^*$ , représentée par un scalaire est :

$$D_{\ell}^* = - f_2^* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} v$$

$$(IV.52) \quad D_{\ell}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_{2BF}(0, f_2^*) \end{bmatrix}$$

Remarques :

- Il est intéressant de constater que la partie rapide n'intervient ici, dans le sous-système lent caractérisé par la quadruplet  $(A_{\ell}^*, B_{\ell}^*, C_{\ell}^*, D_{\ell}^*)$ , que par son pseudo-gain statique  $W_{2BF}(0, f_2^*)$ .

- La forme en flèche est conservée, et seuls les éléments de la dernière ligne sont modifiés (ce résultat est aussi valable pour des systèmes à matrice caractéristique Compagnon /Dauphin-Tanguy, 1981/).

Ainsi, la relation (IV.49) permet de déterminer de façon explicite les termes de la matrice réduite  $A_{\ell}^*$ .

En posant :

$$k_{20}^* = W_{2BF}(0, f_2^*)$$

et en exprimant le produit  $B_1^* C_1$ , la relation (IV.49) donne :



obtenu à partir des relations (IV.41).

La forme remarquable de cette expression est due à la forme particulière du quadruplet.

Soit, à titre d'exemple, les sous-systèmes interconnectés suivants :

$$S_1 \left\{ \begin{array}{l} W_1(p) = \frac{(p+1.5)}{(p^2+3p+2)} \\ f_1^* \in [0, 2] \end{array} \right.$$

avec  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 1$

$$S_2 \left\{ \begin{array}{l} W_2(p) = \frac{(p+11)}{(p^2+22p+120)} \\ f_2^* \in [0, 2] \end{array} \right.$$

La mise en équation d'état se fait suivant la démarche exposée dans le Chapitre II et consiste à choisir pour coefficients  $(-\alpha_{ki})$  les racines du polynôme :

$$P_i(\lambda, f_{i0}^* = \frac{L_i + \bar{L}_i}{2})$$

L'opérateur symbolique de transfert matriciel représentant S est obtenu par les relations (IV.39) et se présente sous la forme :

$$Z(\lambda, f_1^*, f_2^*) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} f_1^*(\lambda+1.5) & f_1^* f_2^*(\lambda+1.5)(\lambda+11) \\ f_1^* f_2^*(\lambda+1.5)(\lambda+11) & f_2^*(\lambda+11) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\Delta(\lambda) = P_1(\lambda, f_1^*) \cdot P_2(\lambda, f_2^*) - f_1^* f_2^* N_1(\lambda) \cdot N_2(\lambda)$$

soit :

$$\Delta(\lambda) = \left[ \lambda^2 + (3 + f_1^*)\lambda + 2 + 1.5 f_1^* \right] \left[ \lambda^2 + (22 + f_2^*)\lambda + 120 + 11 f_2^* \right] - f_1^* f_2^* (\lambda + 1.5) (\lambda + 11)$$

Le système matriciel correspondant est :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A^* = \left[ \begin{array}{cc|cc}
 -1.293 & 1 & 0 & 0 \\
 0.207(1-f_1^*) & -1.707-f_1^* & 0.62f_1^* & f_1^* \\
 \hline
 0 & 0 & -10.38 & 1 \\
 0.207f_2^* & f_2^* & 0.62(1-f_2^*) & -11.62-f_2^*
 \end{array} \right] \\
 B^* = \left[ \begin{array}{cc}
 0 & 0 \\
 f_1^* & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & f_2^*
 \end{array} \right] \quad C = \left[ \begin{array}{cccc}
 0.207 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.62 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array} \right.$$

Le système réduit lent est obtenu, par application des relations (IV.49), (IV.50), (IV.51), (IV.52) :

$$A_{\lambda}^* = \left[ \begin{array}{cc}
 -1.293 & 1 \\
 0.207 \left( 1 - \frac{120 f_1^*}{120 + 11 f_2^*} \right) & -1.707 - \frac{120 f_1^*}{120 + 11 f_2^*}
 \end{array} \right]$$

Le polynôme caractéristique réduit associé à  $A_{\lambda}^*$  s'exprime par la relation :

$$P_{1\lambda}(\lambda, f_1^*, f_2^*) = D_1(\lambda) + \frac{120 f_1^* f_2^*}{120 + 11 f_2^*} N_1(\lambda)$$

Les matrices de commande et de sortie réduites sont respectivement :

$$B_{\ell}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1^* & \frac{11 f_1^* f_2^*}{120 + 11 f_2^*} \end{bmatrix}$$

$$C_{\ell}^* = \begin{bmatrix} 0.207 & 1 \\ \frac{0.207 \times 11 f_2^*}{120 + 11 f_2^*} & \frac{11 f_2^*}{120 + 11 f_2^*} \end{bmatrix}$$

La transmission directe de l'entrée se fait par :

$$D_{\ell}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{11 f_2^*}{120 + 11 f_2^*} \end{bmatrix}$$

L'opérateur symbolique de transfert matriciel réduit correspondant est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{\ell}(\lambda, f_1^*, f_2^*) = \frac{f_1^* (\lambda + 1.5)}{(\lambda^2 + 3\lambda + 2) + f_1^* (1 - k_{20}^*) (\lambda + 1.5)} \begin{bmatrix} 1 & k_{20}^* \\ k_{20}^* & k_{20}^{*2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{20}^* \end{bmatrix} \\ \text{avec :} \\ k_{20}^* = \frac{11 f_2^*}{120 + 11 f_2^*} \end{array} \right.$$

V.3.1.2 - Etude du sous-système rapide par la méthode (PS + R) :

La relation (II.131) fournit l'expression de la partie rapide, caractérisée ici par  $S_2$ , obtenue par la méthode (PS + R).

$$(IV.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{2\tilde{r}} = A_{22}^* x_{2\tilde{r}} + \left[ \begin{array}{cc} B_{21}^* & B_{22}^* \end{array} \right] + A_{22}^{*-1} A_{21}^* \left[ \begin{array}{cc} B_{11}^* & B_{12}^* \end{array} \right] u \\ y_{\tilde{r}} = \left[ \begin{array}{c} C_{12} \\ C_{22} \end{array} \right] x_{2\tilde{r}} + \int_{t_0}^t \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} C_{11} & - \left[ \begin{array}{c} C_{12} \\ C_{22} \end{array} \right] A_{22}^{*-1} A_{21}^* \\ C_{21} & C_{22} \end{array} \right]}_{C_{\tilde{l}}^*} \left[ \begin{array}{cc} B_{11}^* & B_{12}^* \end{array} \right] u dt \end{array} \right.$$

Compte tenu de la forme particulière des matrices caractérisant le système, l'expression (IV.56) se schématise de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{2\tilde{r}} = \left[ \begin{array}{c|c} \diagdown & \\ \hline \times & \times \end{array} \right] x_{2\tilde{r}} + \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \times \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c|c} \diagdown & \\ \hline \times & \times \end{array} \right]^{-1} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \times \times \times \times \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \times & 0 \end{array} \right] \\ \hline \end{array} \right] u \\ y_{\tilde{r}} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \hline \end{array} \right] x_{2\tilde{r}} + \int_{t_0}^t \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{c} \hline \times \times \times \times \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \times & 0 \end{array} \right] \\ \hline \end{array} \right] u dt \end{array} \right.$$

soit :

$$(IV.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{2\tilde{r}} = A_{22}^* x_{2\tilde{r}} + \left[ \begin{array}{c} \Gamma_{21} f_1^* f_2^* \\ \det A_{22} \end{array} \right] b_{n_2-1,2} v ; B_{22}^* \right] u \\ y_{\tilde{r}} = \left[ \begin{array}{c} C_{12} \\ C_{22} \end{array} \right] x_{2\tilde{r}} + \int_{t_0}^t \left[ \begin{array}{ccc} b_{n_2-1,2} & f_1^* & 0 \\ b_{n_2-1,2} k_{20}^* & f_1^* & 0 \end{array} \right] u dt \\ \text{avec } \det A_{22} = (-1)^{n_2} D_{BF}(0, f_2^*) \\ V \text{ dernière colonne de } A_{22}^{-1} \text{ définie par les relations (IV.46)} \end{array} \right.$$

ce qui conduit à l'opérateur symbolique de transfert matriciel réduit associé à la partie rapide en accord avec les relations (IV.41).

Appliquons ces résultats à l'exemple précédent. Le sous-système  $S_{2\tilde{r}}$  est caractérisé, en accord avec les relations (IV.57), par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{2\tilde{r}} = \begin{bmatrix} -10.38 & 1 \\ 0.62(1-f_2^*) & -11.62-f_2^* \end{bmatrix} x_{2\tilde{r}} \\ \quad + \begin{bmatrix} f_1^* & f_2^* \\ 120+11 & f_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10.38 \end{bmatrix} u \\ y_{2\tilde{r}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.62 & 1 \end{bmatrix} x_{2\tilde{r}} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} f_1^* & 0 \\ k_{20}^* & f_1^* \end{bmatrix} u dt \end{array} \right.$$

### V.3.2 - Chaque sous-système comporte des dynamiques différentes

La démarche proposée dans ce cas consiste en une réduction séparée de chaque sous-système, qui retient la partie dynamique correspondant au domaine fréquentiel ou temporel étudié.

Le système global réduit est alors formé de l'interconnection des sous-systèmes réduits.

Nous avons présenté dans le chapitre II les résultats obtenus lors du découplage d'un système non linéaire de type Lur'e Postnikov. Les relations (II.76), (II.77), (II.78) fournissent les expressions matricielles d'état réduites et les relations (II.85) permettent de définir directement l'opérateur symbolique de transfert scalaire réduit associé.

Le système global réduit a donc une structure globale identique à

celle du système initial. Les relations (IV.39), (IV.40), (IV.41) sont encore valables, à condition de remplacer chaque opérateur symbolique de transfert  $W_{iBF}$  ( $i=1, 2$ ) par l'opérateur réduit correspondant.

V.4 - Généralisation à N systèmes interconnectés

Les résultats présentés précédemment dans le cas de 2 systèmes interconnectés peuvent être aisément étendus à N systèmes.

Pour la détermination de l'opérateur symbolique de transfert matriciel  $Z(\lambda, f_1^*, \dots, f_N^*)$ , il suffit de procéder par étapes successives en regroupant les systèmes par 2 et en calculant pas à pas l'opérateur associé. La forme générale (IV.39) se conserve, mais la dimension de  $Z(\lambda, f_i^*, i=1, \dots, N)$  augmente.

Ainsi dans le cas de trois systèmes interconnectés  $S_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), couplés par les coefficients de couplage  $\Gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3 ; i \neq j$ ), la matrice de transfert est obtenue par les relations :

$$(IV.58) \left\{ \begin{array}{l} Z_{ii} = \frac{1}{\Delta} \left[ R_j R_k - \Gamma_{jk} \Gamma_{kj} \right] \\ Z_{ij} = \frac{1}{\Delta} \left[ \Gamma_{ik} \Gamma_{kj} - \Gamma_{ij} R_k \right] \\ \text{avec :} \\ \Delta = \prod_{i=1}^3 R_i - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \Gamma_{ij} \Gamma_{ji} R_k + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \Gamma_{ij} \Gamma_{jk} \Gamma_{ki} \\ R_i = \frac{1}{W_{iBF}(0, f_i^*)} \end{array} \right. \quad i, j, k = 1, 2, 3 ; i \neq j \neq k$$

De même, l'équation d'état s'exprime sous une forme semblable aux équations (IV.40), soit :



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - f_1^* B_1 C_1 & \Gamma_{12} f_1^* B_1 C_2 & \Gamma_{13} f_1^* B_1 C_3 \\ + \Gamma_{21} f_2^* B_2 C_1 & A_{22} - f_2^* B_2 C_2 & \Gamma_{23} f_2^* B_2 C_3 \\ \Gamma_{31} f_3^* B_3 C_1 & \Gamma_{32} f_3^* B_3 C_2 & A_{33} - f_3^* B_3 C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} B_1 f_1^* & & \\ & B_2 f_2^* & \\ & & B_3 f_3^* \end{bmatrix} \\
 & y = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \text{(IV.59)}
 \end{aligned}$$

Les méthodes de réduction présentées précédemment dans le cas de 2 systèmes sont donc directement applicables,



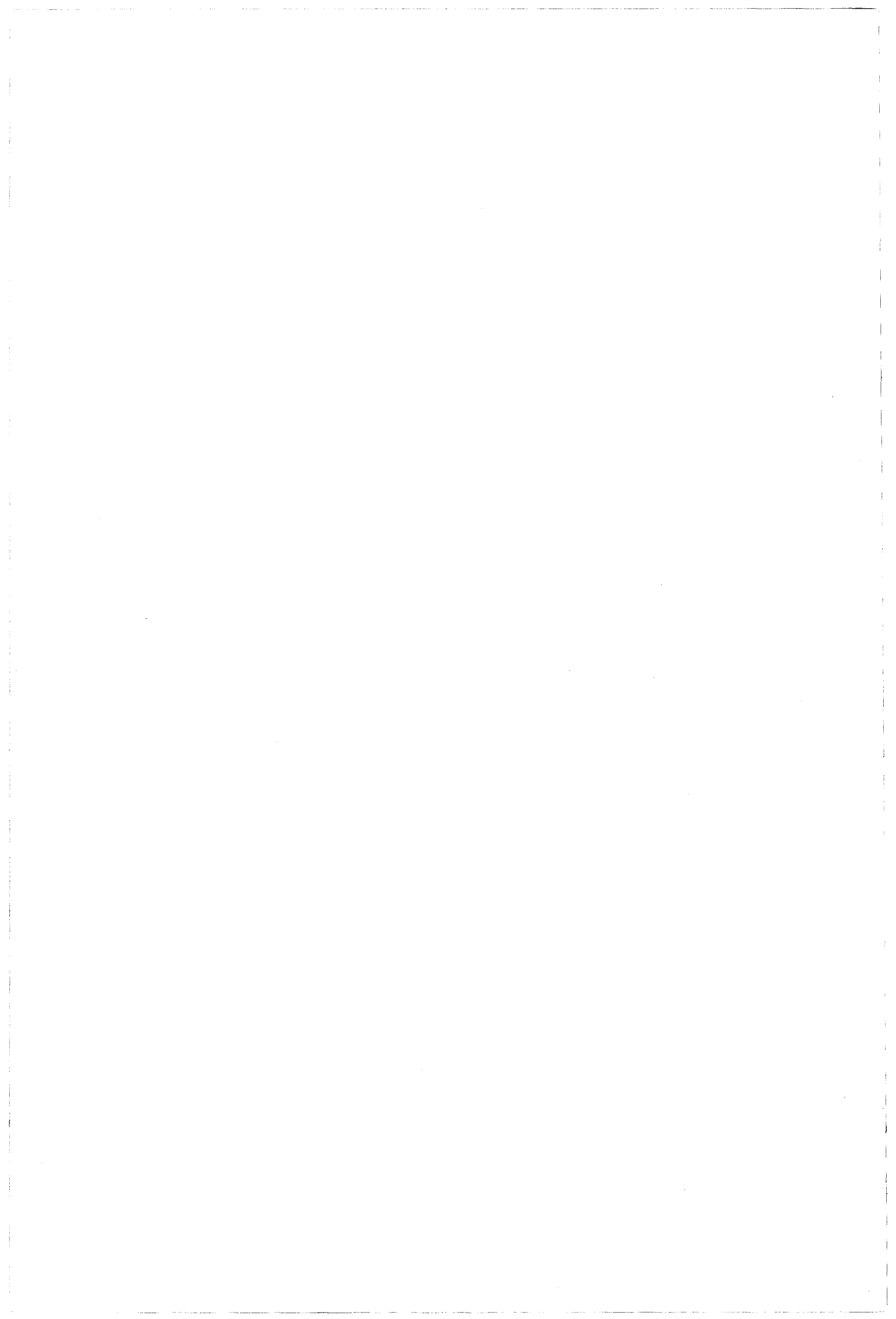
## CONCLUSION

Ce chapitre est donc une généralisation au cas multivariable multi-vitesse des résultats énoncés dans les précédents chapitres.

La modélisation sous forme singulièrement perturbée à paramètres multiplicatifs s'avère très intéressante puisqu'elle donne plus de souplesse dans la détermination du système réduit en supprimant certaines contraintes relatives à l'inversibilité des matrices et à la stabilité des variables rapides.

La méthode de découplage (PS + R) s'adapte très bien aux deux approches proposées et fournit une grande précision sur chaque sous-système découplé.

La forme en flèche se présente encore, dans le cas des systèmes interconnectés, comme un mode de représentation très performant permettant de passer directement du système initial au système réduit. Elle permet de mettre en évidence des invariants, comme la forme matricielle et le pseudo-gain statique, qui rendent systématique la mise en œuvre de cette méthode.



CONCLUSION GENERALE



La modélisation des systèmes sous forme singulièrement perturbée est un problème complexe, particulièrement dans le cas de systèmes non linéaires, qui apparaît toujours en préalable à toute réduction. La méthode géométrique proposée, ainsi que l'estimation des gains de boucle dans le cas d'un modèle bond-graph contribuent à simplifier la détermination des différents modes.

La forme matricielle en flèche se révèle un mode de représentation d'état très intéressant pour la caractérisation des dynamiques, la réduction d'ordre, le découplage, l'analyse et la détermination de commandes quasi-optimales. Elle permet de plus la mise en évidence d'invariants lors de la réduction, ce qui s'accompagne d'une grande facilité d'implantation sur ordinateur.

L'utilisation de la transformation réciproque, conjointement à la méthode des perturbations singulières, permet donc d'envisager une représentation multi-modèle très précise des systèmes multivitesse, puisqu'elle fournit pour la partie rapide les mêmes avantages que ceux obtenus sur la partie lente par la méthode PS seule, tant par la conservation des conditions initiales que par la précision apportée lors du découplage.

Les problèmes de couche limite sont simplifiés, certains cas singuliers en commande optimale trouvent une solution, et les trajectoires quasi-optimales ainsi obtenues sont plus proches de la solution optimale.

Cette nouvelle méthode doit être développée pour des systèmes fortement non linéaires. Le problème de détermination d'une trajectoire optimale à horizon fini et états finaux fixés n'est pas résolu. Il semble que les conditions initiales jouent dans ce cas un rôle très important. C'est dans cette voie que nous pensons poursuivre nos travaux.



BIBLIOGRAPHIE

---





- A ALTSHULER D., HADDAD A.H. (1978)  
*"Near optimal smoothing for singularly perturbed linear systems"*  
Automatica, Vol. 14, pp. 81-87.
- ANDERSON L. (1978)  
*"Decomposition of two time scale linear systems"*  
Proc. JACC, pp. 153-163.
- ARDEMA M. (1980)  
*"Non linear singularly perturbed optimal control problems with singular arcs"*  
Automatica, Vol. 16, pp. 99-104.
- ARDEMA M. (1982)  
*"Solution algorithms for non linear singularly perturbed optimal control problems"*  
IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.
- ASHOOR N., SINGH V. (1982)  
*"A note on low-order modelling"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 5, pp. 1124-1126.
- AVRAMOVIC B. (1979)  
*"Subspace iteration approach to the time scale separation"*  
Proc. of IEEE Conf. on Dec and Control, pp. 684-687.
- B BARNETT S., SCRATON R.E. (1982)  
*"Location of matrix eigenvalues in the complex plane"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 966-967.
- BAUER F.L. (1968)  
*"Fields of values and Gershgorin disks"*  
Numerische Mathematik, n° 12, pp. 91-95.
- BELL D.J., JACOBSON D.H. (1975)  
*"Singular optimal control problems"*  
Mathematics in Science and Engineering, Vol. 117, Academic Press.

BENREJEB M., DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P. (1981)

*"Sur une nouvelle approche de la modélisation et de la simulation des processus non linéaires"*

Int. Journal of Modelling and Simul., Vol. 1, n° 1, pp. 7-11.

BENREJEB M., BORNE P., LAURENT F. (1982)

*"Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus"*

RAIRO Automatique, Vol. 16, n° 2, pp. 133-146.

BENSOUSSAN A. (1981)

*"Singular perturbation results for a class of stochastic control problems"*

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-26, n° 5, pp. 1071 - 1080.

BERTRAND P., MICHAILESCO G., SIRET J.M. (1976)

*"Sur la synthèse de modèles réduits par agrégation"*

RAIRO, Vol. 10, n° 7, pp. 105-112.

BISTRITZ Y., LANGHOLZ G. (1979)

*"Model reduction by Chebyshev polynomial techniques"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-24, n° 5, pp. 741-747.

BLANKENSHIP G. (1981)

*"Singularly perturbed difference equations in optimal control problems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 4, pp. 911-917.

BORNE P., DAUPHIN-TANGUY G. (1981)

*"Un modèle, pour quoi faire ? Choix, réduction, validation"*

Conférence d'Introduction, Journée AFCET, Lyon.

BOUDAREL R., DELMAS J., GUICHET P. (1967)

*"Commande optimale des processus"*

Techniques de l'Automatisme, Dunod, Paris.

C CALISE A.J. (1976)

*"Singular perturbation methods for variational problems in aircraft flight"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, n° 3, pp. 345-353.

CALISE A.J. (1979)

*"A singular perturbation analysis of optimal aerodynamic and thrust magnitude control"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-24, n° 5, pp. 720-730.

CAMPBELL S.L. (1981)

*"A more singular singularly perturbed linear system"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 2, pp. 507-510.

CAMPBELL S.L. (1981)

*"On an assumption guaranteeing boundary layer convergence of singularly perturbed systems"*

Automatica, Vol. 17, n° 4, pp. 645-646.

CAMPBELL S.L. (1982)

*"Higher index time varying and non linear singular systems"*

IFAC Workshop on Singular Perturbations, Ohrid, Yougoslavie.

CARLUCCI D., VALLAURI M. (1981)

*"The use of simplified models for stability analysis of large scale systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 2, pp. 543-545.

CHAMBAT M. (1971)

*"Localisation des valeurs propres, régions de Gudkov"*

RIRO, n° R-3, pp. 82-88.

CHOW J.H., KOKOTOVIC P.V. (1976)

*"Eigenvalue placement in two-time scale systems"*

Proc. of IFAC Symposium on Large Scale Systems, Udine, Italie, pp. 321-326.

CHOW J.H., KOKOTOVIC P.V. (1976)

*"A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, pp. 701-705.

CHOW J.H., KOKOTOVIC P.V. (1978)

*"Near optimal feedback stabilization of a class of non linear singularly perturbed systems"*

SIAM J. Control and Optimization, Vol. 16, n° 5, pp. 756-770.

CHOW J.H., ALLEMONG J.J., KOKOTOVIC P.V. (1978)

*"Singular perturbation analysis of systems with sustained high frequency oscillations"*

Automatica, Vol. 14, pp. 271-279.

D DAUPHIN-TANGUY G. (1981)

*"Sur une nouvelle méthode d'approche de la stabilité des processus continus non linéaires et des systèmes à perturbations singulières"*

Thèse de Doctorat d'Ingénieur, Lille.

DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P., BENREJEB M. (1981)

*"Application of singular perturbation methods to modelization and analysis of non linear multi-time scale processes"*

Proc. MEKO 81, Le Caire, pp. 86-92.

DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P., MEIZEL D. (1982)

*"Application of order reduction algorithms to the determination of state space representation for multi-time scale multi-variable interconnected systems"*

Congrès MIC and ROBOTICS, Davos, Suisse.

DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P. (1982)

*"Présentation d'une méthode géométrique permettant de séparer les diverses dynamiques d'évolution d'un système de grande dimension"*

Congrès International AMSE, Paris.

DAUPHIN-TANGUY G., NOEL M., BORNE P. (1982)

*"Présentation d'algorithmes de séparation des échelles de temps d'un processus discret"*

Congrès MEKO 82, Tunis, Tunisie, pp. 161-165.

DAUPHIN-TANGUY G., EL MOUDNI A., BORNE P. (1982)

*"Sur une estimation des régimes transitoires des processus à plusieurs échelles de temps"*

Congrès MECO 82, Tunis, Tunisie, pp. 151-155.

DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P., MEIZEL D. (1982)

*"On order reduction of multi-time scale systems by singular perturbation and frequency-like methods"*

IEEE LSS Symposium, Virginia Beach, U.S.A., pp. 190-196.

DAUPHIN-TANGUY G., LEBRUN M., BORNE P. (1983)

*"Interprétation de la notion de système réciproque par les bond-graphs pour les processus multi-échelles de temps"*

Congrès IASTED AI 83, Lille, pp. 137-144.

DAUPHIN-TANGUY G., LEBRUN M., BORNE P. (1983)

*"Order reduction of multi-time scale systems using bond-graphs, reciprocal systems and singular perturbation method"*

Conférence au Workshop "Physical Structure in Modelling", Enschede, Pays-Bas, à paraître dans Journal of Franklin Institute.

DAUPHIN-TANGUY G., MOREIGNE O., BORNE P. (1983)

*"Singular perturbation method and reciprocal transformation on multi-time scale systems"*

Congrès IASTED MECO 83, Athènes.

DEIF A.S. (1982)

*"Advanced matrix theory for scientists and engineers"*

Abacus Press, Halsted Press, England.

DELEBECQUE F., QUADRAT J.P. (1978)

*"Contribution of stochastic control singular perturbation averaging and team theories to an example of large scale systems : management of hydropower production"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-23, n° 2, pp. 209-221.

DESCUSSE J., DION J.M. (1982)

*"On the structure at infinity of linear square decoupled systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 971-974.

DESOER C.A. (1977)

*"Distributed networks with small parasitic elements : input-output stability"*  
IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-24, n° 1, pp. 1-7.

DORATO P., LEVIS A.H. (1971)

*"Optimal linear regulators : the discrete time case"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-16, n° 6, pp. 613-620.

DUC G., MICHAILESCO G., SIRET J.M. (1982)

*"Evaluation des performances d'une commande calculée par agrégation"*  
Proc. of IASTED MIC Symposium, Davos, Suisse, pp. 254-259.

E EL YAAGOUBI E., LEBRUN M., SCAVARDA S. (1981)

*"Analyse et simulation d'un système électrohydraulique de commande de clapet"*  
Proc. of AMS 81, Lyon.

F FAHMY M.M., O'REILLY J. (1982)

*"On eigenstructure assignment in linear multivariable systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 3, pp. 690-693.

FERNANDO K.V., NICHOLSON H. (1982)

*"Singular perturbational model reduction of balanced systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 2, pp. 466-468.

FERNANDO K.V., NICHOLSON H. (1982)

*"Singular perturbational model reduction in the frequency domain"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 969-970.

FIELD A.D., OWENS D.H. (1980)

*"Pole and zero retention in the factorization of multivariable systems, with application to model reduction"*  
Int. J. Systems Sc., Vol. 11, n° 12, pp. 1481-1489.

FOSSARD A.J. (1972)

*"Commande des systèmes multidimensionnels"*  
Techniques de l'Automatisme, Dunod, Paris.

FOSSARD A.J., MAGNI J.F. (1980)

*"A frequential analysis of singularly perturbed systems with state or output control"*  
Large Scale Systems, n° 1, pp. 223-228.

FOSSARD A.J., MAGNI J.F. (1982)

*"Modélisation, commande et applications des systèmes à échelles de temps multiples"*  
RAIRO Automatique / Syst. Anal. and Cont., Vol. 16, n° 1, pp. 5-23.

FOSSARD A.J. (1982)

*"Modélisation et analyse des systèmes à échelles de temps multiples"*  
Cours ENSAE, Toulouse.

G GANTMACHER F.R. (1966)

*"Théorie des matrices"*  
Tomes 1 et 2, Dunod, Paris.

GENTINA J.C. (1976)

*"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes non linéaires de grande dimension"*  
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Lille.

GEORGAKIS C., BAUER R.F. (1978)

*"Order reduction and modal controllers for systems with slow and fast modes"*  
Proc. Congrès IFAC, Helsinki, Vol. 4, pp. 2409-2413.

GOPAL M., MEHTA S.I. (1982)

*"On the selection of the eigenvalues to be retained in the reduced order models"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 3, pp. 688-690.



GRUJIĆ Lj.T. (1975)

*"Novel development of Lyapunov stability of motion"*

Int. J. of Control, Vol. 22, n° 4, pp. 525-549.

GRUJIĆ Lj.T. (1976)

*"Vector Lyapunov functions and singularly perturbed large scale systems"*

Proc. of JACC, Lafayette, Indiana, pp. 408-416.

GRUJIĆ Lj.T. (1977)

*"Quasi-singular perturbations of time-discrete systems"*

*"Converse lemma and singularly perturbed large scale systems"*

Proc. of JACC, San Francisco, pp. 857-862 et pp. 1107-1112.

GRUJIĆ Lj.T. (1978)

*"Singular perturbations, uniform asymptotic stability and large scale systems"*

Proc. JACC, Philadelphie, pp. 339-347.

GRUJIĆ Lj.T. (1979)

*"Singular perturbations and large scale systems"*

Int. J. Cont., Vol. 29, n° 1, pp. 159-169.

GRUJIĆ Lj.T., BORNE P., GENTINA J.C. (1979)

*"Matrix approaches to the absolute stability of time varying Lurie'Postnikov systems"*

Int. J. Cont., Vol. 30, n° 6, pp. 967-980.

GRUJIĆ Lj.T. (1979)

*"Singular perturbations, large scale systems and asymptotic stability of invariant sets"*

Int. J. Syst. Sc., Vol. 10, n° 12, pp. 1323-1341.

GRUJIĆ Lj.T. (1981)

*"Uniform asymptotic stability of non linear singularly perturbed general and large scale systems"*

Int. J. Cont., Vol. 33, n° 3, pp. 481-504.

GRUJIĆ Lj.T. (1981)

*"Lyapunov-like solutions for stability problems of the most general stationary Lurie'Postnikov systems"*

Int. J. Syst. Sc., Vol. 12, n° 7, pp. 813-833.

GUARDABASSI G. (1982)

*"Asymptotic analysis of two-time-steps discrete time systems"*

IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

GUTMAN S., JURY E.I. (1981)

*"A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 4, pp. 853-863.

GUTMAN P.O., MANNERFELT C.F., MOLANDER P. (1982)

*"Contributions to the model reduction problem"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 2, pp. 454-455.

H HADDAD A.H., KOKOTOVIC P.V. (1971)

*"Note on singular perturbation of linear state regulators"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-Juin 71, pp. 279-281.

HADDAD A.H. (1976)

*"Linear filtering of singularly perturbed systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Short Paper, Vol. AC-Août 76, pp. 515-519.

HADDAD A.H., KOKOTOVIC P.V. (1977)

*"Stochastic control of linear singularly perturbed systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-22, n° 5, pp. 815-821.

HINAMOTO T., FAIRMAN F.W. (1982)

*"Reduced order observer design for a linear map of the state"*

Journal of Franklin Institute, Vol. 314, n° 2, pp. 95-108.

HOPPENSTEADT F. (1969)

*"On systems of ordinary differential equations with several parameters multiplying the derivatives"*

J. of Differential Equations, n° 5, pp. 106-116.

HOPPENSTEADT F. (1974)

*"Asymptotic stability in singular perturbation problems : problems having matched asymptotic expansion solutions"*

J. of Differential Equations, n° 15, pp. 510-521.

HUTTON M.F., FRIEDLAND B. (1975)

*"Routh approximations for reducing order of linear, Time-invariant systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, n° 3, pp. 329-337.

HWANG C., SHIH Y.P. (1981)

*"A combined time and frequency domain method for model reduction of discrete systems"*

J. of Franklin Institute, Vol. 311, n° 6, pp. 391-402.

I INOOKA H., OBINATA G. (1982)

*"Relations of moments in composite systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 967-969.

IOANNOU P., KOKOTOVIC P.V. (1982)

*"Singular perturbations and robust redesign of adaptative control"*

IFAC Workshop on singular perturbations, Ohrid, Yougoslavie.

J JAVID S.H. (1978)

*"The time optimal control of a class of non linear singularly perturbed systems"*

Int. J. Cont., Vol. 27, n° 6, pp. 831-836.

JAVID S.H. (1980)

*"Observing the slow states of a singularly perturbed system"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-25, n° 2, pp. 277-280.

JAVID S.H. (1982)

*"Stabilization of time-varying singularly perturbed systems by observer-based slow state feedback"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 3, pp. 702-704.

K KARNOPP D. (1969)

*"Power conserving transformations : physical interpretations and applications using bond-graphs"*

J. of Franklin Institute, Vol. 288, n° 3, pp. 175-201.

KARNOPP D., ROSENBERG R. (1975)

*"System dynamics : a unified approach"*

John Wiley and Sons, N.-Y..

KARNOPP D. (1981)

*"Using bond-graphs in non linear simulation problems"*

Simulation, pp. 183-192.

KARNOPP D., ROSENBERG C. (1983)

*"Introduction to physical system dynamics"*

Mac Graw Hill.

KHALIL H.K. (1978)

*"Control of linear singularly perturbed systems with colored noise disturbance"*

Automatica, Vol. 14, pp. 153-156.

KHALIL H.K., KOKOTOVIC P.V. (1978)

*"Control strategies for decision makers using different models of the same system"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-23, n° 2, pp. 289-298.

KHALIL H.K., KOKOTOVIC P.V. (1979)

*"D-Stability and multi-parameter singular perturbation"*

SIAM J. Cont. and Optim., Vol. 17, n° 1, pp. 56-65.

KHALIL H.K., KOKOTOVIC P.V. (1979)

*"Control of linear systems with multi-parameter singular perturbations"*

Automatica, Vol.. 15, pp. 197-207.

KHALIL H.K., KOKOTOVIC P.V. (1979)

"Feedback and well-posedness of singularly perturbed nash games"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-24, n° 5, pp. 699-708.

KHALIL H.K., KOKOTOVIC P.V. (1980)

"Decentralized stabilization of systems with slow and fast modes"  
Large Scale Systems, n° 1, pp. 141-148.

KOKOTOVIC P.V., YACKEL R.A. (1972)

"Singular perturbation of linear regulators : basic theorems"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-17, n° 1, pp. 29-37.

KOKOTOVIC P.V., HADDAD A.H. (1975)

"Singular perturbations of a class of time optimal controls"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, pp. 163-164.

KOKOTOVIC P.V., HADDAD A.H. (1975)

"Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, pp. 111-113.

KOKOTOVIC P.V. (1975)

"A Riccati equation for block-diagonalization of ill-conditioned systems"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, pp. 812-814.

KOKOTOVIC P.V., O'MALLEY R.E., SANNUTI P. (1976)

"Singular perturbations and order reduction in control theory. An overview"  
Automatica, Vol. 12, pp. 123-132.

KOKOTOVIC P.V., ALLEMONG J.J., WINKELMAN J.R., CHOW J.H. (1980)

"Singular perturbation and iterative separation of time-scales"  
Automatica, Vol. 16, pp. 23-33.

KOUVARITAKIS B. (1976)

"A geometric approach to the inversion of multivariable systems"  
Int. J. Cont., Vol. 24, n° 5, pp. 609-626.

KRIKORIAN K.V., LEONDES C.T. (1982)

*"Dynamic programming using singular perturbations"*

J. of Optim. Theory and Applic., Vol. 38, n° 2, pp. 221-230.

L LAL M., MITRA R. (1974)

*"Simplification of large system dynamics using a moment evaluation algorithm"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-19, n° 5, pp. 602-603.

LAL M., MITRA R. (1974)

*"A comparison of transfer function simplification methods"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-19, n° 5, pp. 617-618.

LEBRUN M., SCAVARDA S. (1981)

*"Prédiction des performances d'un système mécanique entraîné par des asservissements électrohydrauliques"*

Proc. Congrès IASTED AMS 81, Lyon.

LIMEBEER D.J.N. (1982)

*"The application of generalized diagonal dominance to linear system stability theory"*

Int. J. Cont., Vol. 36, n° 2, pp. 185-212.

LIN P.L., WU Y.C. (1982)

*"Reduction of transfer functions from the stability equation method and complex curve fitting"*

J. of Franklin Institute, Vol. 314, n° 2, pp. 109-121.

LINDNER D.K., PERKINS W.R., MEDANIC J. (1982)

*"Near unobservability in singularly perturbed systems"*

IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

LITZ L., ROTH H. (1981)

*"State decomposition for singular perturbation order-reduction. A modal approach"*

Int. J. Control, Vol. 34, n° 5, pp. 937-954.

LOCATELLI A. (1976)

*"State observation and output feedback stabilization of linear singularly perturbable systems"*

Proc. of IFAC Symposium on Large Scale Systems, Udine, Italy, pp. 335-343.

LOVASS-NAGY V., MILLER R.J., POWERS D.L. (1976)

*"On the application of matrix generalized inverses to the construction of inverse systems"*

Int. J. Control, Vol. 24, n° 5, pp. 733-739.

M MAGNI J.F. (1981)

*"Analyse et commande des systèmes à plusieurs échelles de temps"*

Thèse D.I./E.N.S.A.E., Toulouse.

MAGNI J.F., FOSSARD A.J. (1982)

*"Commande en deux étapes des systèmes linéaires à deux dynamiques"*

RAIRO Automatique / Syst. Anal. and Control, Vol. 16, n° 1, pp. 25-38.

MARCUS S.I., WILLEMS J.C. (1975)

*"Non stationary network synthesis via state-space techniques"*

IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, n° 9, pp. 713-720.

MARGOLIS D.L., YOUNG G.E. (1977)

*"Reduction of models of large scale lumped structures using normal modes and bond-graphs"*

J. of Franklin Institute, Vol. 304, n° 1, pp. 65-79.

MEES A.I. (1981)

Systems and Control Letters, n° 1, p. 155.

MEIZEL D., PINGUET P., DAUPHIN-TANGUY G. (1982)

*"Une méthode de réduction de dimensionnalité des systèmes multivariables strictement réels positifs"*

Proc. IASTED AMS 82, Paris.

MIRANKER W.L. (1981)

*Numerical methods for Stiff Equations"*

Mathematics and its Applications, D. Reidel Publishing Company.

MOORE B.C. (1981)

*"Principal component analysis in linear systems : controllability, observability and model reduction"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 1, pp. 17-32.

MURON O. (1980)

*"Evaluation de politiques de maintenance pour un système complexe"*

RAIRO, Vol. 14, n° 3, pp. 265-282.

N NAIDU D.S., RAO K.A. (1981)

*"Singular perturbation method for initial value problems with inputs in discrete control systems"*

Int. J. Control, Vol. 33, n° 5, pp. 953-965.

O O'MALLEY R.E. (1974)

*"Introduction to singular perturbations"*

Academic Press N.-Y.

O'MALLEY R.E., JAMESON A. (1975)

*"Singular perturbations and singular arcs - Part I"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, n° 2, pp. 218-226.

O'MALLEY R.E., JAMESON A. (1977)

*"Singular perturbations and singular arcs - Part II"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-22, n° 3, pp. 328-337.

O'MALLEY R.E., FLAHERTY J.E. (1980)

*"Analytical and numerical methods for non linear singular singularly-perturbed initial value problems"*

SIAM J. Applied Math., Vol. 38, n° 2, pp. 225-248.



O'REILLY J. (1979)

*"Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems"*

Int. J. Control, Vol. 30, n° 5, pp. 745-756.

O'REILLY J. (1980)

*"Dynamical feedback control for a class of singularly perturbed linear systems using a full order observer"*

Int. J. Control, Vol. 31, n° 1, pp. 1-10.

O'REILLY J. (1982)

*"Recent progress in singular perturbation and two-time scale methods of control"*

IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

ÖZGÜNER Ü. (1977)

*"Decentralized observers for a large scale system with two-time scales"*

Proc. JACC, pp. 1119-1123.

ÖZGÜNER Ü. (1979)

*"Near optimal control of composite systems : the multi-time scale approach"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-24, n° 4, pp. 652-655.

ÖZGÜNER Ü. (1982)

*"Near-nash feedback control of a composite system with a time-scale hierarchy"*

IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern., Vol. SMC-12, n° 1, pp. 62-66.

P PERNEBO L., SILVERMAN L.M. (1982)

*"Model reduction via balanced state space representations"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 2, pp. 382-387.

PHILLIPS R.G. (1980)

*"Reduced-order modelling and control of two time scale discrete systems"*

Int. J. Cont., Vol. 31, n° 4, pp. 765-780.

PHILLIPS R.G., KOKOTOVIC P.V. (1981)

*"A singular perturbation approach to modelling and control of Markov chains"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 5, pp. 1087-1094.

PINGUET P. (1981)

*"Sur une classe de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes dans l'espace d'état"*

Thèse de Doctorat d'Ingénieur, Lille.

PORTER B., SHENTON A.T. (1975)

*"Singular perturbation analysis of the transfert function matrices of a class of multivariable linear systems"*

Int. J. Control, Vol. 21, n° 4, pp. 655-660.

PORTER B. (1977)

*"Singular perturbation methods in the design of full-order observers for multivariable linear systems"*

Int. J. Control, Vol. 26, n° 4, pp. 589-594.

PORTER B. (1977)

*"Singular perturbation methods in the design of stabilizing state feedback controllers for multivariable linear systems"*

Int. J. Control, Vol. 26, n° 4, pp. 583-587.

PORTER B. (1978)

*"Invariant zeros and zero directions of multivariable linear systems with slow and fast modes"*

Int. J. Control, Vol. 28, n° 1, pp. 81-91.

PORTER B. (1978)

*"Closed-loop eigenstructure assignment by state feedback in multivariable linear systems with slow and fast modes"*

Int. J. Control, Vol. 28, n° 1, pp. 93-100.

PORTER B., TSINGAS A. (1978)

*"Singular perturbation methods in the design of linear multivariable tracking systems for plants with polynomial command inputs"*

Int. J. Control, Vol. 27, n° 4, pp. 639-650.

R RAJAGOPALAN P.K., NAIDU D.S. (1980)

*"A singular perturbation method for discrete control systems"*

Int. J. Control, Vol. 32, n° 5, pp. 925-936.

RAO K.A., NAIDU D.S. (1981)

*"Singularly perturbed boundary-value problems in discrete systems"*

Int. J. Control, Vol. 34, n° 6, pp. 1163-1173.

REDDY P.B., SANNUTI P. (1975)

*"Optimal control of a coupled-core nuclear reactor by a singular perturbation method"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., short paper, pp. 766-768.

REZA F.M. (1982)

*"A global energy theorem for linear systems"*

J. of Franklin Institute, Vol. 313, n° 2, pp. 97-105.

ROSENBERG R.C. (1971)

*"State-space formulation for bond-graph models of multiport systems"*

J. of Dynamic Syst., Meas. and Cont., pp. 35-40.

ROSENBERG R.C., ANDRY A.N. (1979)

*"Solvability of bond-graph junction structures with loops"*

IEEE Trans. on Circuits and Syst., Vol. CAS-26, n° 2, pp. 130-137.

ROSENBROCK H.H. (1970)

*"State-space and multivariable theory"*

Nelson, Londres.

ROTH E.A. (1979)

*"On the higher-order stroboscopic method"*

J. Appl. Math. and Phys., Vol. 30, pp. 315-325.

S SAKSENA V.R., CRUZ J.B. (1981)

*"Stabilization of singularly perturbed linear time-invariant systems using low-order observers"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 2, pp. 510-513.

SAKSENA V.R., KOKOTOVIC P.V. (1981)

*"Singular perturbation of the Popov-Kalman-Yakubovitch Lemma"*

Systems and Control Letters, Vol. 1, n° 1, pp. 65-68.

SAKSENA V.R., O'REILLY J., KOKOTOVIC P.V. (1982)

*"Singular perturbations in control theory : survey 1976-1982"*

IFAC Workshop on Singular Perturbations, Ohrid, Yougoslavie.

SANDELL N.R., VARAIYA P., ATHANS M., SAFONOV M. (1978)

*"Survey of decentralized control methods for large scale systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-23, n° 2, pp. 108-128.

SANDELL N.R. (1979)

*"Robust stability of systems with application to singular perturbations"*

Automatica, Vol. 15, pp. 467-470.

SANNUTI P. (1969)

*"Continuity and differentiability properties of optimal control with respect to singular perturbations"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-14, pp. 762-763.

SANNUTI P., KOKOTOVIC P.V. (1969)

*"Near-optimum design of linear systems by a singular perturbation method"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-14, n° 1, pp. 15-21.

SANNUTI P. (1974)

*"A note on obtaining reduced order-optimal control problems by singular perturbations"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-19, pp. 256-257.

SANNUTI P. (1977)

*"On the controllability of singularly perturbed systems"*

IEEE Trans on Aut. Cont., Vol. AC-22, n° 4, pp. 622-624.

SHAMASH Y. (1974)

*"Stable reduced-order models using Padé-type approximations"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-19, pp. 615.

SHIEH L.S., CHOW H.Z., YATES R.E. (1976)

*"Modelling multivariable system with industrial specifications"*

Int. J. Cont., Vol. 24, n° 5, pp. 693-704.

SILJAK D.D. (1972)

*"Singular perturbation of absolute stability"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-17, pp. 720-769.

SKELTON R.E. (1980)

*"Cost decomposition of linear systems with application to model reduction"*

Int. J. Cont., Vol. 32, n° 6, pp. 1031-1055.

SKELTON R.E. (1982)

*"Analysis of structural perturbations in systems via cost decomposition methods"*

IFAC Workshop on Singular Perturbations, Ohrid, Yougoslavie.

SUZUKI M., MIURA M. (1976)

*"Stabilizing feedback controllers for singularly perturbed linear constant systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, pp. 123-124.

SUZUKI M. (1981)

*"Composite controls for singularly perturbed systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 2, pp. 505-507.

SUZUKI M. (1982)

*"Robustness of system properties in a class of non linear singularly perturbed systems"*

IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

SYRCOS G.P., SANNUTI P. (1982)

*"Singular perturbation modelling of continuous and discrete physical systems"*

IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

- T TENEKETZIS D., SANDELL N.R. Jr (1977)  
*"Linear regulator design for stochastic systems by a multiple time-scales method"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-22, n° 4, pp. 615-621.
- THOMA J. (1975)  
*"Introduction to Bond-Graphs and their applications"*  
Pergamon Press.
- TITLI A. (1979)  
*"Analyse et commande des systèmes complexes"*  
Monographie AFCET, Cepadues Editions.
- V VAN DIXHOORN J.J. (1982)  
*"Bond-graphs and the challenge of a unified modelling theory of physical systems"*  
Progress in Modelling and Simulation, Academic Press, Londres.
- VERGHESE G.C., LEVY B.C., KAILATH T. (1981)  
*"A generalized state-space for singular systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 4, pp. 811-831.
- W WILDE R., KOKOTOVIC P.V. (1973)  
*"Optimal open and closed-loop control of singularly perturbed linear systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-18, n° 6, pp. 616-625.
- WINKELMAN J.R., CHOW J.H., ALLEMONG J.J. (1980)  
*"Multi-time scale analysis of a power system"*  
Automatica, Vol. 16, pp. 35-43.
- Y YOUNG K.K., KOKOTOVIC P.V., UTKIN V. (1977)  
*"A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems"*  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-22, n° 6, pp. 931-938.

YOUNG K.K., KOKOTOVIC P.V. (1982)

*"Analysis of feedback-loop interactions with actuator and sensor parasitics"*

Automatica, Vol. 18, n° 5, pp. 577-582.

YOUNG K.K. (1982)

*"Multiple time scale decomposition and canonical singularly perturbed systems"*

IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

Z ZIEN L. (1973)

*"An upper bound for the singular parameter in a stable singularly perturbed system"*

J. of the Franklin Institute, Vol. 295, n° 5, pp. 373-381.



## RESUME

Les travaux présentés constituent une contribution à l'étude des systèmes continus multi-échelle de temps. Ils concernent deux domaines très importants, la modélisation et la réduction de dimensionnalité par découplage des dynamiques en vue de l'analyse et de la synthèse des processus.

Après la présentation d'une méthode géométrique de détermination des modes d'un système, la méthode des perturbations singulières (PS) est mise en œuvre sur une forme matricielle particulière (forme en flèche) pour des systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov, ce qui conduit à la définition de conditions de stabilité pour les systèmes multivitesse.

La notion de transformation réciproque est développée. Par application conjointe avec la technique PS, cette méthode (PS + R) permet une représentation très précise des transitoires rapides et du comportement haute fréquence d'un système, en supprimant les problèmes de "couche limite". Le cas de systèmes multivitesse multivariables et interconnectés est pris en compte.

Une étude comparative des résultats obtenus par simplification directe d'un modèle Bond-Graph, par les techniques PS et (PS + R) est faite pour un système mécanique, ainsi que l'application de ces résultats nouveaux pour le calcul de commande optimale et la détermination de trajectoires optimales.

## MOTS - CLEFS

- MODELISATION
- REDUCTION
- PERTURBATION SINGULIERE
- TRANSFORMATION RECIPROQUE
- GRAPHE A LIENS (= BOND-GRAPH)
- COMMANDE OPTIMALE