Nº d'ordre : 1102

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

Mustapha MECHAB

PROBLÈME DE CAUCHY C^∞ A CARACTÉRISTIQUES DE MULTIPLICITÉ VARIABLE

Membres du Jury : Président : J. VAILLANT, Professeur à l'Université de Paris VI
Rapporteur : D. GOURDIN, Maître-Assistant à l'Université de Lille I
Examinateurs R. BERZIN, Professeur à l'Université de Lille I
J.C. DE PARIS, Professeur à l'Université de Lille I
M. TERBECHE, Maître-Assistant à l'Université d'Oran

SOUTENUE LE 26 OCTOBRE 1983

A la mémoire de mon père

A ma mère

A mes frères Lounes, Harid et Yahya

A toute ma famille.

A Claudine et Stéphanie

A tous mes amis.

Ce travail a été fait sous la direction de Monsieur Daniel GOURDIN. L'attention qu'il y a portée, les conseils qu'il m'a donnés ainsi que nos fréquentes et heureuses discussions m'ont été précieux pour son accomplissement. Je lui en suis reconnaissant.

Je remercie Monsieur le Professeur Jean VAILLANT de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Messieurs les Professeurs Robert BERZIN et Jean-Claude DE PARIS et Monsieur Mekki TERBECHE se sont intéressés aussi à ce travail et ont bien voulu faire partie de ce jury, je les remercie.

Je remercie les membres du secrétariat scientifique, en particulier Madame Claudine EVRARD qui s'est chargée de la frappe de cette thèse, les membres du service technique qui en ont assuré l'impression, et l'U.E.R de Mathématiques de l'Université de Lille I qui m'a accueilli pendant cette période de mes études.

Je tiens à remercier aussi mon amie Dalila BEKHTAOUI pour les discussions intéressantes tenues ensemble.

TABLE DES MATIERES

* *

*

INTRODUCTION

Depuis les travaux de O.A. Oleinik [19], le problème de Cauchy C^∞ non caractéristique, pour les opérateurs faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable au plus égale à deux a été abordé par plusieurs mathématiciens dans le cas scalaire.

Lorsque la multiplicité est supérieure ou égale à trois, il y a peu de résultats connus ; citons ceux de T. Nishitani [17], K. Kitagawa-T. Sadamatsu [12], K. Yamamoto [24], H. Uryu [20], et M. Zeman [25].

La situation est encore plus compliquée dans le cas matriciel, même quand les multiplicités sont au plus égales à deux, peu de mathématiciens l'ont abordé à ma connaissance ; citons les travaux de D. Gourdin [4], H. Kumano-go [15], et H. Uryu [21].

Ce travail examine les sujets précédents dans plusieurs situations différentes. Il a pour origine un article de Y. Ohya [18] traitant des opérateurs faiblement hyperboliques scalaires, à caractéristiques de multiplicité variable au plus deux, et une question posée par D. Gourdin, qui m'a fait remarquer que la méthode énergétique de Y. Ohya pouvait se généraliser au cas des multiplicités variables supérieures à deux lorsque l'opérateur vérifie une condition de bonne décomposition, généralisant celle de J.C. De Paris [3] établie pour les multiplicités constantes. Il suffit pour celà d'introduire une fonction d'énergie $\phi(x_o)$, généralisant celle de Y. Ohya [18] (cf. Chapitre I et IV).

Cette condition de bonne décomposition, généralisée aux multiplicités variables, a pu être affaiblie en un certain sens ; c'est ce que l'on a appelé "opérateurs ν-décomposables" dans le premier chapitre, où l'on a aussi résolu le problème de Cauchy correspondant. La technique des opérateurs ν-décomposables nous a permis, dans le deuxième chapitre, de donner des conditions suffisantes sur des opérateurs scalaires, à caractéristiques de multiplicité variable au plus trois, pour que le problème de Cauchy C^{∞} associé soit bien posé.

Dans le premier paragraphe du troisième chapitre, nous avons étendu cette notion de ν-décomposabilité aux opérateurs matriciels, à caractéristiques de multiplicité variable quelconque, et on a montré que le problème de Cauchy C^{∞} associé est bien posé. Dans le deuxième paragraphe, on a appliqué ce résultat aux opérateurs matriciels à caractéristiques de multiplicité variable au plus deux, en réduisant la ν-décomposabilité matricielle à des conditions scalaires, suffisantes pour que le problème de Cauchy C^{∞} associé soit bien posé ; Les conditions obtenues sont plus faibles que celles de [4] lorsque des points critiques du déterminant caractéristique se trouvent sur l'hyperplan des données de Cauchy.

Dans le quatrième chapitre, on a montré que le problème de Cauchy C^{∞}, associé aux opérateurs bien décomposables, est bien posé, et en s'inspirant du premier chapitre, on a pu affaiblir la condition de bonne décomposition (sous la nouvelle appellation "condition de bonne décomposition généralisée") qui devient d'après la dernière remarque du chapitre IV une extension de la notion de ν-décomposabilité.

Signalons que, les résultats de ce chapitre IV ont été étendus au cas des opérateurs différentiels matriciels et complétés par l'étude de l'existence d'un domaine de dépendance dans un travail qui fera l'objet d'une publication [7] avec proposition de Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [7'].

CHAPITRE I

OPERATEURS FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES ν-DECOMPOSABLES ET LE PROBLEME DE CAUCHY ASSOCIE

§.1 - *Notations - Définitions et Propriétés fondamentales.*

Soient $X_o > 0$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, et Ω la bande $[0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell$;

On désigne par (X,ζ) le point générique du fibré cotangent $T^*(\mathbb{R}^{\ell+1})$ avec :

$$X = (x_o,x_1,\ldots,x_\ell) = (x_o,x)$$

$$\zeta = (\xi_o,\xi_1,\ldots,\xi_\ell) = (\xi_o,\xi)$$

On utilisera les notations usuelles :

$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (\forall j = 0,1,\ldots,\ell)$$

et

$$D_X^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\alpha_o}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)^{\alpha_\ell}$$

$$(\forall\alpha = (\alpha_o,\ldots,\alpha_\ell) \in \mathbb{N}^{\ell+1}, \quad \text{et} \quad |\alpha| = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j)$$

et on notera $\|\ \|_s$ la norme sur l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^\ell)$

a) Sur $C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$ on définit les semi-normes suivantes :

$$\|D^n U(x_o)\|_s = \sup_{0\leq j\leq n} \|D_o^j\, U(x_o,\cdot)\|_{s+n-j}$$

$$\forall x_o \in [0,X_o] \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(On pose $\|D^{-n}U(x_o)\|_s = 0, \quad \forall n > 0$).

Remarque. $\int_0^{X_o} \|D^n\, \mathcal{U}(x_o)\|_s\, dx_o$ est une norme sur $H_{n,s}(\Omega)$ équivalente à celle donnée par L. Hörmander [8], [10].

Propriété 1. Pour $s \in \mathbb{R}$, n et k dans $\mathbb{N}$ on a :

1. $\|D_o^n \mathcal{U}(x_o)\|_s \leqslant \|D^n \mathcal{U}(x_o)\|_s \qquad (\forall x_o \in [0,X_o])$

2. $\|D^n \mathcal{U}(x_o)\|_s \leqslant \|D^k \mathcal{U}(x_o)\|_s \qquad (\forall x_o \in [0,X_o]$ et $n \leqslant k)$

3. $\|D^n \mathcal{U}(x_o)\|_{s+k} \leqslant \|D^{n+k} \mathcal{U}(x_o)\|_s \qquad (\forall x_o \in [0,X_o])$

4. Pour $S \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_{n,S} > 0$ (dépendant de S et n) telle que pour tout $\mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o], \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$, et $x_o \in]0,X_o]$

$$\|D^n(x_o^S \mathcal{U})(x_o)\|_s \leqslant C_{n,S} \sum_{j=0}^{K} \|D^{n-j}\, \mathcal{U}(x_o)\|_s\, x_o^{S-j}$$

avec $K = n$ si $S \notin \mathbb{N}$ et $K = \min(S,n)$ si $S \in \mathbb{N}$.

b) Introduisons maintenant les classes d'opérateurs pseudo-différentiels utilisées dans ce travail (cf. [2], [13], [14], [16]).

Définition 1. On dit que $p(x,\xi)$ est un symbole d'ordre m sur $\mathbb{R}^\ell$ et on note $p \in S^m(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ si $p \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ vérifie :

i) $\forall K \subset\subset \mathbb{R}^\ell$, $\forall \alpha$ et β dans $\mathbb{N}^\ell$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}(K)$ telle que :

$$|D_x^\alpha \partial_\xi^\beta\, p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(K)(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

$\forall x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^\ell \setminus 0$ où $\partial_\xi^\beta = (i)^{|\beta|}\, D_\xi^\beta$.

ii) Il existe une suite $\{p_{m-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ homogènes d'ordres $(m-j)$ en ξ telles que $\forall N \in \mathbb{N}$

$$|D_x^\beta\{p - \sum_{j=0}^{N} p_{m-j}\}(x,\xi)| = O(|\xi|^{m-N-1}) \quad \text{quand} \quad |\xi| \to +\infty$$

Uniformément par rapport à x sur chaque compact $K \subset\subset \mathbb{R}^\ell$.

On écrira alors $p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_{m-j}(x,\xi)$; $p_m(x,\xi)$ est le symbole principal de p.

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$ et $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u définie par

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^\ell} e^{-i<x,\xi>} u(x)\, \cancel{d}x \qquad \text{avec } \cancel{d}x = \frac{1}{(2\Pi)^{\ell/2}}\, dx \quad .$$

Définition 2. On appelle opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^\ell$, d'ordre m et de symbole $p(x,\xi) \in S^m = S^m(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ l'opérateur $P(x,D_x)$ défini par :

$$P(x,D_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} e^{i<x,\xi>} p(x,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, \cancel{d}\xi$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)$.

Propriétés 2. [13], [14], [16], [18]. Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m sur $\mathbb{R}^\ell$, et de symbole $p \in S^m$. Alors

1. $\forall s \in \mathbb{R}^\ell$, on peut prolonger d'une façon unique $P(x,D_x)$ en un opérateur continu de $H^s(\mathbb{R}^\ell)$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R}^\ell)$.

2. L'adjoint formel $P^*(x,D_x)$ de $P(x,D_x)$ défini par

$$<P^*(x,D_x)u,v>_{L^2} = <u,P(x,D_x)v>_{L^2} \quad (\forall u,v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m, dont le symbole $p^*(x,\xi)$ vérifie :

$$p^*(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^\ell} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \overline{p(x,\xi)}$$

3. Soit $Q(x,Dx)$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre n de symbole $q \in S^n$. Alors l'opérateur composé

$$R(x,D_x) = Q(x,D_x) \circ P(x,D_x)$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $(n+m)$, de symbole $r(x,\xi)$ vérifiant :

$$r(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^\ell} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha\, q(x,\xi) \times D_x^\alpha\, p(x,\xi)$$

Cette dernière propriété est connue sous le nom de "formule de composition des opérateurs pseudo-différentiels".

Après ces rappels, on va donner un résultat généralisant la formule de composition (proposition 1).

Pour simplifier l'écriture on pose :

$$\partial^\alpha = D_x^\alpha$$

$$\partial_\alpha = \partial_\xi^\alpha$$

$$\partial_\alpha^\beta = D_x^\beta\, \partial_\xi^\alpha$$

($\forall\alpha$ et β dans $\mathbb{N}^\ell$) et on conviendra de considérer les termes indexés sur un ensemble vide comme des éléments neutres vis à vis de la loi considérée

$$\text{(par exemple } \Big(\sum_{j=1}^{0} x_j\Big) \times y = \Big(\sum_{j=1}^{0} x_j\Big) + y = y).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = I = \{1,\ldots,(k-1)\}$, et pour $i \in I_k = I$ on pose $I_{k,i} = J_i = \{1,\ldots,(k-i-1)\}$.

Proposition 1. Soient $P_j(x,D_x)$ $(j = 1,\ldots,k)$ k opérateurs pseudo-différentiels respectivement d'ordre m_j et de symbole $p_j(x,\xi)$. Alors $P(x,D_x) = P_1(x,D_x)\circ\ldots\circ P_k(x,D_x)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m = \sum_{j=1}^{k} m_j$, et de symbole $p(x,\xi)$ vérifiant :

$$p(x,\xi) \sim \sum_{\substack{i\in I,\ j\in J_i \\ \alpha_i\in\mathbb{N}^\ell,\ \alpha_i^n\in\mathbb{N}^\ell \\ \alpha_i^j\leq\alpha_i - \sum\limits_{n=1}^{(j-1)}\alpha_i^n}} \frac{1}{\prod\limits_{i\in I}\Big(\prod\limits_{j\in J_i}\alpha_i^j!\Big)\Big(\alpha_i - \sum\limits_{j\in J_i}\alpha_i^j\Big)!} \prod_{i\in I} \partial_{\alpha_i}^{\sum\limits_{j=1}^{(i-1)}\alpha_j^{i-j}} p_i(x,\xi)$$

$$\times\ \partial^{\sum\limits_{i\in I}\big(\alpha_i - \sum\limits_{j\in J_i}\alpha_i^j\big)} p_k(x,\xi)$$

La preuve de cette proposition se fait par récurrence sur le nombre k d'opérateurs intervenant dans la composition en utilisant le lemme suivant qui est une généralisation de la formule de Leibnitz de dérivation d'un produit et qui se démontre aussi par récurrence sur k.

Lemme 1. Soient f_j $(j=1,\dots,k)$ k fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$. Alors $f = \prod\limits_{j=1}^{k} f_j$ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, et on a :

$$\partial^\alpha f(x) = \sum_{\substack{j=1,\dots,(k-1) \\ \alpha_i\in\mathbb{N}^\ell \\ \alpha_j\leq\alpha-\sum\limits_{i=1}^{j-1}\alpha_i}} \cdot \frac{\alpha!}{\prod\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j!\,\Big(\alpha-\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j\Big)!} \prod_{j=1}^{k-1}\partial^{\alpha_j} f_j(x)\ \partial^{\alpha-\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_j} f_k(x)$$

c) <u>On va considérer maintenant des classes d'opérateurs</u> $P(X,D)$ <u>différentiels en</u> x_o, <u>et pseudo-différentiels en</u> x.

Définition 3. Un opérateur $P(X,D)$ différentiel en x_o, et pseudo-différentiel en x est dit de type Kowalewskien d'ordre m s'il est de la forme :

$$P(X,D) = D_o^m + \sum_{j=0}^{m-1} A_{m-j}(X,D_x)D_o^j$$

avec $A_{m-j}(X,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel en x d'ordre $m-j$ dépendant du paramètre x_o, et de symbole $A_{m-j} \in C^\infty([0,X_o], S^{m-j}(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0))$.

Citons la propriété suivante de ces opérateurs.

Propriété 3. [18]. Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m. Alors : pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ telle que

$$\|D^{n+m}\mathcal{U}(x_o)\|_s \leq C\{\| D^n(P(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s + \sum_{j=0}^{m-1} \|D_o^j\mathcal{U}(x_o)\|_{s+n+m-j}\}$$

$\forall \mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o], \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$ et $\forall x_o \in [0,X_o]$.

d) Classe des opérateurs strictement hyperboliques.

Soient $P(X,D)$ un opérateur différentiel en x_o, et pseudo-différentiel en x de type Kowalewskien d'ordre m de symbole principal $P_m(X,\zeta)$ qui est homogène d'ordre m en ζ, et polynômial en ξ_o de degré m ; $N = (\underbrace{1,0,\ldots,0}_{\ell})$ est un champ de covecteurs constant.

Définition 4. On dit que $P(X,D)$ est strictement hyperbolique suivant la direction N si : $P_m(X,\zeta)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P_m(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{m} (\xi_o-\lambda_j(X,\xi))$$

où toutes les $\lambda_j \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$, sont homogènes d'ordre 1 en ξ et à valeurs réelles ($j = 1,\ldots,m$) sont telles que : $\exists\delta > 0$

$$\inf[|\lambda_j(X,\xi) - \lambda_k(X,\xi)| \quad (X,\xi) \in \Omega \times \{|\xi| = 1\}] > \delta$$

$\forall j \neq k \quad j,k \in \{1,\ldots,m\}$.

Propriété 4.1. [18][27][28]. Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m strictement hyperbolique suivant la direction $N = (1,0,\dots,0)$. Alors : pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ tel que :

$$\left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s\right)\right| \leqslant C\{\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s + \|D^n(P(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s\}$$

p.p $[0,X_o]$ et $\forall \mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$.

e) Les classes $L^s(m,k)$ d'opérateurs $P(X,D)$ singulièrs.

Définition 5. Soient $s \in \mathbb{R}$, m et k dans $\mathbb{N}$ avec $k \leqslant m$. On note $L^s(m,k)$ l'espace des opérateurs $P(X,D)$ différentiels en $x_o \in \,]0,X_o]$ et pseudo-différentiels en x d'ordre m, et de symbole :

$$p(X,\zeta) \sim \sum_{j=0}^{k} \frac{p_{m-j}(X,\zeta)}{(x_o)^{j+s}} + \frac{p_{m-k-1}(X,\zeta)}{x_o^s}$$

$\forall (X,\zeta) \in \,]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$ avec :

$$p_{m-j} \in C^\infty([0,X_o],\ S^{m-j}(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0)) \qquad 0 \leqslant j \leqslant k+1.$$

Propriété 5. Soit $P(X,D) \in L^{s_1}(m_1,k_1)$. Alors :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ telle que :

$$\|D^n(P(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s \leqslant C \sum_{j=0}^{n+k_1} \frac{\|D^{n+m_1-j}\mathcal{U}(x_o)\|_s}{x_o^{s_1+j}} \qquad \forall x_o \in \,]0,X_o]$$

pour tout $\mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$.

2. $P^*(X,D) \in L^{s_1}(m_1,m_1)$.

3. Pour $Q(X,D) \in L^{s_2}(m_2,k_2)$ on a :

$$R(X,D) = Q(X,D) \circ P(X,D) \in L^{s_1+s_2}(m_1+m_2,\ m_2+k_1)$$

Pour démontrer les propriétés 2 et 3, il suffit d'utiliser respectivement la formule de l'adjoint (propriété 2.2) et celle de composition (propriété 2.3).

<u>Preuve de la propriété 5.1.</u>

Soit $P(X,D) \in L^{s_1}(m_1,k_1)$, d'après la définition 5, on a :

$$P(X,D) = \sum_{j=0}^{k_1} \frac{P_{m_1-j}(X,D)}{(x_o)^{j+s_1}} + \frac{P_{m_1-k_1-1}(X,D)}{(x_o)^{s_1}} .$$

En utilisant la continuité des opérateurs $P_{m-j}(X,D)$, $j = 0,\dots,(k_1+1)$ et la propriété 1.4. on aura pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ telle que $\forall j = 0,\dots,k_1$

$$\left\| D^n\left(\frac{P_{m_1-j}(X,D)\mathcal{U}}{(x_o)^{s_1+j}}\right)(x_o)\right\|_s \leq C \sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\|D^{n+m_1-\gamma-j}\,\mathcal{U}(x_o)\|_s}{(x_o)^{s_1+\gamma+j}} \qquad \forall x_o \in \left]0,X_o\right].$$

En faisant le changement d'indices $(j+\gamma) = \gamma$ on aura :

$$\left\| D^n\left[\frac{P_{m_1-j}(X,D)\mathcal{U}}{(x_o)^{s_1+j}}\right](x_o)\right\|_s \leq C \sum_{\gamma=0}^{n+k_1} \frac{\|D^{n+m_1-\gamma}\,\mathcal{U}(x_o)\|_s}{x_o^{s_1+\gamma}} \qquad \forall x_o \in \left]0,X_o\right]$$

le même raisonnement donne :

$$\left\| D^n\left[\frac{P_{m_1-k_1-1}(X,D)\mathcal{U}}{x_o^{s_1}}\right](x_o)\right\| \leq C \sum_{\gamma=0}^{n+k_1} \frac{\|D^{n+m_1-\gamma}\,\mathcal{U}(x_o)\|_s}{x_o^{s_1+\gamma}} \qquad \forall x_o \in \left]0,X_o\right] .$$

Pour terminer la preuve on utilise l'inégalité :

$$\|D^n[P(X,D)\mathcal{U}](x_o)\|_s \leq \sum_{j=0}^{k_1} \|D^n[\frac{P_{m_1-j}(X,D)\mathcal{U}}{(x_o)^{j+s_1}}](x_o)\|_s +$$

$$+ \left\|D^n\ [\frac{P_{m_1-k_1-1}(X,D)\mathcal{U}}{(x_o)^{s_1}}](x_o)\right\|_s \quad \forall x_o \in \,]0,X_o].$$

f) <u>Opérateurs strictement hyperboliques singuliers</u>.

Après avoir introduit les espaces d'opérateurs $L^s(m,k)$, on va donner une extension de la propriété 4.1., qui sera l'outil essentiel pour l'étude du problème de Cauchy par la suite.

Lemme 2. Soit $P(X,D) \in L^o(m,k)$ $(k \leq m)$ dont le symbole principal $p_m(X,\zeta)$ est strictement hyperbolique suivant la direction $N = (1,0,\ldots,0)$.

Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ tel que :

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\ \|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\ \|_s^2)\right| \leq C\{\ \|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\ \|_s^2 + \sum_{j=0}^{n+k-1} \frac{\|D^{n+m-1-j}\ \mathcal{U}(x_o)\|_s^2}{(x_o)^{2j+1}} +$$

$$+ x_o\ \|D^n[P(X,D)\mathcal{U}](x_o)\|_s^2\ \} \quad \text{p.p.} \quad [0,X_o]$$

$\forall \mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$.

<u>Preuve</u> : Soit $P(X,D) \in L^o(m,k)$, on a donc :

$$P(X,D) = P_m(X,D) + \sum_{j=1}^{k} \frac{P_{m-j}(X,D)}{(x_o)^j} + P_{m-k-1}(X,D).$$

$P_m(X,D)$ étant strictement hyperbolique suivant la direction $N = (1,0,..,0)$; d'après la propriété 4.1. : pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ tel que :
$\forall \mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s)\right| \leq C\{\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s + \|D^n(P_m(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s\} \quad \text{p.p } [0,X_o]$$

Par ailleurs, on a :

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s^2)\right| = 2\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s \left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s)\right|$$

p.p. $[0,X_o]$.

En utilisant l'inégalité précédente, on aura :

$$(*) \quad \left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s^2)\right| \leq C\{\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s^2 + \\ + \|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s \|D^n(P_m(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s\}$$

p.p. $[0,X_o]$.

Comme $P_m(X,D) = P(X,D) - \sum_{j=1}^{k} \frac{P_{m-j}(X,D)}{(x_o)^j} - P_{m-k-1}(X,D)$,

$\forall X \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell$, alors :

$$\|D^n(P_m(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s \leq \{\|D^n(P(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s + \|D^n(P_{m-k-1}(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s + \\ + \sum_{j=1}^{k} \|D^n\left[\frac{P_{m-j}(X,D)\mathcal{U}}{(x_o)^j}\right](x_o)\|_s\} \qquad \forall x_o \in]0,X_o].$$

En utilisant la continuité des $P_{m-j}(X,D)$ $(j=1,\ldots,(k+1))$, et la propriété 1.4., on aboutit à :

$$\|D^n(P_m(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s \leq C\{\|D^n(P(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s + \\ + \sum_{j=0}^{k+n-1} \frac{\|D^{n+m-1-j}\mathcal{U}(x_o)\|_s}{(x_o)^{j+1}}\} \qquad \forall x_o \in]0,X_o].$$

(avec C une constante ne dépendant pas de $\mathcal{U}$).

En reportant cette majoration dans l'inégalité (*) et en utilisant l'inégalité, $ab \leqslant \frac{a^2}{x_o} + x_o b^2 \quad \forall x_o \in \left]0,X_o\right]$, on aboutit facilement au résultat escompté à savoir :

$$\left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s^2\right)\right| \leqslant C\{ \|D^{n+m-1}\mathcal{U}(x_o)\|_s^2 + \sum_{j=0}^{n+k-1} \frac{\|D^{n+m-1-j}\mathcal{U}(x_o)\|_s^2}{x_o^{2j+1}} +$$

$$+ x_o \|D^n(P(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_s^2\} \qquad \text{p.p. } [0,X_o]$$

g) <u>Opérateurs faiblement hyperboliques réguliers, ν-décomposables</u>.

<u>*Définition*</u> *6*. Soit $P(X,D)$ un opérateur différentiel en x_o et pseudo-différentiel en x de type Kowalewskien d'ordre m. Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$ $\nu \leqslant m$.

On dit que $P(X,D)$ est ν-décomposable si ; il existe ν-opérateurs $Q_j(X,D) \in L^o(m_j,m_j)$ $(j=1,\ldots,\nu)$ avec $m = \sum_{j=1}^{\nu} m_j$, de symboles principaux strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\ldots,0)$ et tels que :

$$[P(X,D)-Q_1(X,D) \circ \ldots \circ Q_\nu(X,D)] \in L^\nu(m-\nu,m-\nu).$$

<u>*Remarque*</u>. Posons $Q(X,D) = Q_1(X,D) \circ \ldots \circ Q_\nu(X,D)$, d'après la propriété 5.3. $Q(X,D) \in L^o(m,m)$ i.e. :

$$q(X,\zeta) \sim \sum_{j=0}^{m} \frac{q_{m-j}(X,\zeta)}{(x_o)^j} + q_{(-1)}(X,\zeta)$$

où $q_{(-1)}(X,\zeta)$ est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel en x d'ordre (-1).

Comme $[P(X,D)-Q(X,D)] \in L^\nu(m-\nu,m-\nu)$, on voit qu'on a nécessairement $q_{m-j}(X,\zeta)$ divisible par $(x_o)^j$ $\quad j = 0,\ldots,\nu-1$.

Propriété 6. La notion de ν-décomposabilité est invariante par passage à l'adjoint.

i.e. : si $P(X,D)$ est ν-décomposable, $P^*(X,D)$ l'est aussi.

Preuve : Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m, ν-décomposable. Alors il existe ν opérateurs $Q_j(X,D)$ dans $L^o(m_j,m_j)$ $(j=1,\ldots,\nu)$ de symboles principaux strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\ldots,0)$ tels que :

$$[P(X,D)-Q_1(X,D) \circ \ldots \circ Q_\nu(X,D)] \in L^\nu(m-\nu,m-\nu)$$

donc d'après la propriété 5.2.

$$[P^*(X,D)-(Q_1(X,D) \circ \ldots \circ Q_\nu(X,D))^*] \in L^\nu(m-\nu,m-\nu)$$

et on sait que

$$(Q_1(X,D) \circ \ldots \circ Q_\nu(X,D))^* = Q_\nu^*(X,D) \circ \ldots \circ Q_1^*(X,D).$$

Par ailleurs les symboles principaux des $Q_j(X,D)$ $(j=1,\ldots,\nu)$ étant strictement hyperboliques donc à valeurs réelles, d'après la formule de l'adjoint, le symbole principal de $Q_j^*(X,D)$ est le même que celui de $Q_j(X,D)$ $(j=1,\ldots,\nu)$.

Ainsi $\exists R_j(X,D) \in L^o(m_j,m_j)$ $(j=1,\ldots,\nu)$ de symboles principaux strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\ldots,0)$ tels que :

$$[P^*(X,D)-R_1(X,D) \circ \ldots \circ R_\nu(X,D)] \in L^\nu(m-\nu,m-\nu)$$

où $R_j(X,D) = Q^*_{\nu-j+1}(X,D)$, $j = 1,\ldots,\nu$.

C.Q.F.D.

§.2 - *Etude du problème de Cauchy faiblement hyperbolique associé aux opérateurs ν-décomposables*.

Le but de ce paragraphe est de montrer que le problème de Cauchy associé à un opérateur $P(X,D)$ ν-décomposable est bien posé dans $H^{+\infty}(\Omega)$; c'est-à-dire que l'on a : pour $f \in H^{+\infty}(\Omega)$, $\phi_j \in H^{+\infty}(\Omega)$ $j = 0,\dots,(m-1)$ données il existe une unique fonction $\mathcal{U} \in H^{+\infty}(\Omega)$ telle que :

$$(1) \quad \begin{cases} P(X,D)\mathcal{U}(X) = f(X) & (\forall X \in \Omega) \\ D_o^j \mathcal{U}(0,x) = \phi_j(x) & (\forall x \in \mathbb{R}^\ell) \quad j = 0,\dots,(m-1) \end{cases}$$

Pour celà nous procéderons par la méthode des inégalités d'énergies ; en mettant en évidence des inégalités d'énergies relatives à $P(X,D)$ et à son adjoint $P^*(X,D)$, on déduira alors l'existence et l'unicité d'une solution $\mathcal{U}$ de (1)

a) Enoncés des résultats.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m ν-décomposable. Alors :

Proposition 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tels que $\forall \mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o], \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$ on ait :

$$\|D^{n+m-\nu}\mathcal{U}(x_o)\|_S^2 \leq C\{\sum_{j=0}^{(m-1)} \|D_o^j \mathcal{U}(0)\|^2_{S+2(N+m)+n-j} + \|D^{n+m+2N} f(0)\|_S^2 +$$

$$+ \int_0^{x_o} \|D^{N+n+1} f(\tau)\|_S^2 \, d\tau\} \qquad \forall x_o \in [0,X_o]$$

avec $f(X) = P(X,D)\mathcal{U}(X)$ sur Ω.

Une conséquence directe de la proposition 2 est l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1).

Proposition 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$, $\exists C_1, C_2 > 0$ tel que : $\forall U \in C^\infty([0,X_o], \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$

$$x_o^{C_1+1} \|D^{n+m-\nu}U(x_o)\|_S^2 \leq C_2\{\sum_{j=0}^{m-1} \|D_o^j U(x_o)\|^2_{S+n+m-\nu-j} +$$

$$+ \|D^{n-\nu} g(x_o)\|_S^2 + \int_{x_o}^{X_o} \|D^n g(\tau)\|_S^2 \, d\tau\}. \qquad \forall x_o \in [0,X_o]$$

avec $g(X) = P^*(X,D)U(X) \qquad \forall X \in \Omega$.

Des propositions 2 et 3 on déduit :

Théorème 1. Pour tout $f \in C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$, $\phi_j \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)$ $(j = 0,\ldots,(m-1))$ données ; il existe $U \in C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ unique telle que :

$$(1) \qquad \begin{cases} P(X,D)U(X) = f(X) & \forall X \in \Omega \\ D_o^j U(0,x) = \phi_j(x) & \forall x \in \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\ldots,(m-1) \end{cases}$$

de plus U vérifie l'inégalité de la proposition 2.

b) Démonstrations.

Pour démontrer ces deux propositions on a besoin d'abord de transformer le problème (1).

Soient $P(X,D)$ un opérateur ν-décomposable, et ν opérateurs $Q_j(X,D) \in L^o(m_j, m_j)$ $(j = 1,\ldots,\nu)$ de symboles principaux strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\ldots,0)$ satisfaisants la définition 6.

Pour étudier le problème de Cauchy

$$(1)\quad \begin{cases} P(X,D)U(X) = f(X) & \forall X \in \Omega \\ D_o^j U(0,x) = \phi_j(x) & \forall x \in \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\dots,(m-1) \end{cases}$$

Nous allons transformer (1) en un autre problème faisant intervenir les $Q_j(X,D)$ $(j = 1,\dots,\nu)$ pour lesquels le lemme 2 est vrai.

Posons :

$$\begin{cases} x_o^{\nu-1}\, V_\nu(X) = U(X) \\ x_o^{j-2}\, V_{(j-1)}(X) = Q_j(X,D)(x_o^{(j-1)} V_j)(X) \qquad j = \nu,\dots,2 \\ \text{pour } X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell. \end{cases}$$

Alors de (1) on tire :

$$(2)\quad \begin{cases} x_o^{\nu-1} V_\nu(X) = U(X) \\ Q_j(X,D)V_j(X) = \dfrac{V_{j-1}(X)}{x_o} - \dfrac{[Q_j, x_o^{j-1}]V_j(X)}{x_o^{j-1}} \\ Q_1(X,D)V_1(X) = -[P(X,D)-Q_1(X,D)\circ\dots\circ Q_\nu(X,D)](x_o^{\nu-1}V_\nu)(X) + f(X) \\ \forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell. \end{cases}$$

où $[\cdot,\cdot]$ est le commutateur.

i.e.

$$[Q_j, x_o^{j-1}]V_j(X) = Q_j(X,D)(x_o^{j-1}V_j)(X) - x_o^{j-1}Q_j(X,D)V_j(X) \quad .$$

Posons :

$$M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k \qquad j = 1,\dots,\nu \qquad \text{d'où } M_\nu = m, \text{ et } M_1 = m_1 .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$ donnés, on note :

$$\phi_S^n(x_o) = \phi(x_o) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n+M_j-j} \frac{\| D^{n+M_j-j-k} V_j(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+1}} \qquad x_o \in \left]0,X_o\right].$$

Nous obtenons la proposition suivante (dont la démonstration sera données par la suite) préparant les démonstrations des propositions 2 et 3.

Proposition 4. Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m ν-décomposable. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ tel que :

$$\left| \frac{d}{dx_o}(x_o\phi)(x_o) \right| \leq C\{x_o\ \phi(x_o) + \phi(x_o) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\| D^{n-k} f(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k}}\} \quad \text{p.p. } [0,X_o]$$

avec $f(X) = P(X,D)U(X)$ et C ne dépend pas des V_j.

b$_1$) Preuve de la proposition 2.

De cette proposition 4, on tire : $\exists C > 0$ tel que :

$$x_o \frac{d}{dx_o} \phi(x_o) + \phi(x_o) \leq C\{x_o\,\phi(x_o) + \phi(x_o) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\| D^{n-k} f(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k}}\} \quad \text{p.p. } [0,X_o]$$

Si nous multiplions les deux membres de cette inégalité par $(x_o^{-c}\ e^{-cx_o})$ nous aurons :

$$\frac{d}{dx_o}(x_o^{-c+1}\ e^{-cx_o}\ \phi)(x_o) \leq C\ e^{-cx_o} \sum_{k=0}^{n} \frac{\| D^{n-k} f(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+c}} \qquad \text{p.p. } [0,X_o]$$

Soit $x_o \in [0,X_o]$; l'intégration des deux membres de cette inégalité entre 0 et x_o donne :

$$(\mathrm{I}.1) \qquad x_o^{-c+1} e^{-cx_o} \phi(x_o) - (x_o^{-c+1} e^{-cx_o} \phi(x_o))_{x_o=0} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=0}^{n} \int_0^{x_o} \frac{\| D^{n-k} f(\tau) \|_S^2}{\tau^{2k+c}} \, d\tau \; .$$

Cette inégalité ainsi prise ne présenterait pas d'intérêt si $(x_o^{-c+1} e^{-cx_o} \phi(x_o))_{x_o=0}$, et le second membre n'étaient pas déterminés.

Mais nous allons l'utiliser pour un autre problème comme dans [18].

Posons :

$$Z(X) = \mathcal{U}(X) - \sum_{j=0}^{N+m+1} \frac{(i\, x_o)^j}{j!} D_o^j\, \mathcal{U}(0,x) \qquad \forall X \in \Omega$$

où N est un entier naturel arbitraire qu'on choisira par la suite (assez grand).

Ainsi de (1), on tire :

$$(3) \qquad \begin{cases} P(X,D)Z(X) = g(X) & \forall X \in \Omega \\ D_o^j\, Z(0,x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^\ell \quad j = 0,\dots,(N+m). \end{cases}$$

avec $g(X) = f(X) - \sum_{j=0}^{N+m+1} P(X,D) \left[\frac{(ix_o)^j}{j!} D_o^j\, \mathcal{U}(0,\cdot)\right](X)$. Comme $D_o^j Z(0,\cdot) \equiv 0$ $(j = 0,\dots,(N+m))$; on peut facilement voir que :

$$D_o^j(P(X,D)Z)(0,x) = 0 \qquad j = 0,\dots,N \qquad \forall x \in \mathbb{R}^\ell .$$

Par suite :

$$D_o^j\, g(0,x) = 0 \qquad j = 0,\dots,N \qquad \forall x \in \mathbb{R}^\ell .$$

Lemme 3. [18] $\forall n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ (indépendante de g) telle que

$$\| D^n g(x_o) \|_S^2 < C \cdot x_o^{2(N-n)+1} \int_0^{x_o} \| D^{N+n+1} g(\tau) \|_S^2 \, d\tau \qquad \forall x_o \in [0, X_o] \,.$$

La preuve de ce lemme se fait en utilisant le développement de Taylor avec reste intégral en tenant compte du fait que $D_o^j g(0,x) = 0$ $j = 0,\ldots,N$ $\forall x \in \mathbb{R}^{\ell}$.

Ainsi si nous écrivons l'inégalité (I.1) pour le problème (3) en utilisant le lemme 3, nous obtenons pour un $N \in \mathbb{N}$ assez grand :

$$x_o^{-c+1} e^{-cx_o} \phi(x_o) - (x_o^{-c+1} e^{-cx_o} \phi(x_o))_{x_o=0} \leq C^{ste} \int_0^{x_o} \| D^{N+n+1} g(\tau) \|_S^2 \, d\tau$$

$\forall x_o \in]0, X_o]$.

Reste à montrer que $(x_o^{-c+1} e^{-cx_o} \phi(x_o))_{x_o=0}$ a un sens.

Pour celà, nous montrerons plus exactement :

$$[x_o^{-c+1} \phi(x_o)]_{x_o=0} = 0 \tag{I.2}$$

Nous avons posé

$$\begin{cases} x_o^{\nu-1} \, V_\nu(X) = Z(X) \\ Q_j(X,D) V_j(X) = \dfrac{V_{j-1}(X)}{x_o} + \dfrac{[Q_j, x_o^{j-1}] V_j(X)}{x_o^{j-1}} & j = \nu,\ldots,2. \\ Q_1(X,D) V_1(X) = -[P(X,D) - Q_1(X,D) \circ \ldots \circ Q_\nu(X,D)](x_o^{\nu-1} V_\nu)(X) + g(X). \end{cases}$$

Par un calcul direct nous pouvons montrer qu'il existe une $C^{ste} > 0$ (indépendante des V_j) tel que :

$$\phi(x_o) \leq C^{ste} \sum_{k=0}^{n+m-\nu} \frac{\| D^{n+m-\nu-k} V_\nu(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+1}} \qquad \forall x_o \in]0, X_o]$$

d'où pour que (I.2) soit vérifiée il suffit que :

$$\left[\sum_{k=0}^{n+m-\nu} \frac{\| D^{n+m-\nu-k} V_\nu(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+1}}\right]_{x_o=0} = 0$$

or

$$x_o^{\nu-1} \; V_\nu(X) = Z(X) \qquad \forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell$$

donc

$$V_\nu(X) = \frac{Z(X)}{x_o^{\nu-1}} \qquad \forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell$$

La propriété 1.4 nous donne :

$$\| D^{n+m-\nu-k} \; V_\nu(x_o) \|_S^2 \leq C^{ste} \sum_{j=0}^{n+m-\nu-k} \frac{\| D^{n+m-\nu-k-j} Z(x_o) \|_S^2}{x_o^{2(\nu-1+j)}}$$

$\forall x_o \in \left]0,X_o\right]$, et où la C^{ste} ne dépend pas de V_ν, ni de x_o.

Par suite :

$$\text{(I.3)} \qquad \sum_{k=0}^{n+m-\nu} \frac{\| D^{n+m-\nu-k} V_\nu(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+1}} \leq C^{ste} \sum_{k=0}^{n+m-\nu} \frac{\| D^{n+m-\nu-k} Z(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+2\nu-1}}$$

$\forall x_o \in \left]0,X_o\right]$, et la C^{ste} ne dépend que de n et S. Si nous appliquons le lemme 3 à Z, alors de (I.3) nous pourrons tirer

$$x_o^{-c+1} \sum_{k=0}^{n+m-\nu} \frac{\| D^{n+m-\nu-k} V_\nu(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+1}} \leq C^{ste} \; x_o^{2(N-n)-c+2} \int_0^{x_o} \| D^{N+2m+n-\nu} \; Z(\tau) \|_S^2 \, d\tau$$

d'où pour N assez grand $(N > \frac{c}{2} + n)$ le second membre s'annulle quand $x_o = 0$ par suite le premier terme aussi, ce qui montre que (I.2) est vérifiée.

Ainsi pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, nous avons :

$$x_o^{-c+1} e^{-cx_o} \phi(x_o) \leq C^{ste} \int_0^{x_o} \|D^{N+n+1} g(\tau)\|_S^2 \, d\tau \qquad \forall x_o \in \left]0,X_o\right]$$

où la $C^{ste} > 0$ est indépendante des V_j et de $x_o \in \left]0,X_o\right]$. Comme $Z(X) = x_o^{\nu-1} V_\nu(X)$ $\forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell$, nous pouvons facilement voir qu'il existe une $C^{ste} > 0$ (indépendante de Z et V_ν, ainsi que de $x_o \in \left]0,X_o\right]$) telle que

$$\|D^{n+m-\nu} Z(x_o)\|_S^2 \leq C^{ste} \phi(x_o) \qquad \forall x_o \in \left]0,X_o\right]$$

D'où il existe une $C^{ste} > 0$ (indépendante de Z et de g) telle que :

$$\text{(I.5)} \qquad \|D^{n+m-\nu} Z(x_o)\|_S^2 \leq C^{ste} \int_0^{x_o} \|D^{N+m+1} g(\tau)\|_S^2 \, d\tau \qquad \forall x_o \in \left]0,X_o\right].$$

Comme $D_o^j Z(0,\cdot) = 0$ $(j = 0,\ldots,(N+m))$, pour N assez grand on voit que (1.5) est trivialement vérifiée pour $x_o = 0$. Nous rappelons qu'on a posé :

$$Z(X) = U(X) - \sum_{k=0}^{N+m+1} \frac{(ix_o)^k}{k!} D_o^k U(0,x) \quad \text{et}$$

$$g(X) = f(X) - \sum_{j=0}^{N+m+1} P(X,D)\left[\frac{(ix_o)^j}{j!} D_o^j U(0,\cdot)\right](X)$$

Alors si nous reportons ces expressions dans (I.5) nous aurons

$$\|D^{n+m-\nu} U(x_o)\|_S^2 \leq C^{ste}\left\{\int_0^{x_o} \|D^{N+m+1} f(\tau)\|_S^2 \, d\tau + \|D^{2(N+m)+n+1} U(0)\|_S^2\right\}$$

$$\forall x_o \in \left[0,X_o\right]$$

et pour terminer la preuve de la proposition 2, il suffit de majorer la deuxième partie du second membre de cette inégalité en appliquant la propriété 3.1.

b_2) Preuve de la proposition 3.

Soit $P(X,D)$ un opérateur ν-décomposable ; d'après la propriété 6 $P^*(X,D)$ l'est aussi ; par suite la proposition 4 est vérifiée par $P^*(X,D)$ c'est-à-dire : pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ tel que :

$$\left|\frac{d}{dx_o}(x_o\phi)(x_o)\right| \leq C\{x_o\phi(x_o)+\phi(x_o) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n-k}g(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k}}\} \quad \text{p.p. } [0,X_o]$$

avec $g(X) = P^*(X,D)U(X) \quad \forall X \in \Omega$.

D'où :

$$-x_o\frac{d}{dx_o}\phi(x_o)-\phi(x_o) \leq C\{x_o\phi(x_o)+\phi(x_o) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n-k}g(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k}}\} \text{ p.p. } [0,X_o].$$

Si nous multiplions cette inégalité par $x_o^c\, e^{cx_o}$ nous aurons :

$$-\frac{d}{dx_o}(x_o^{c+1}\, e^{cx_o}\phi)(x_o) \leq C\sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n-k}g(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k-c}} \quad \text{p.p. } [0,X_o].$$

Pour $x_o \in [0,X_o]$, l'intégration de cette inégalité sur $[x_o,X_o]$ donne :

$$x_o^{c+1}\, e^{cx_o}\phi(x_o) - X_o^{c+1}\, e^{cX_o}\phi(X_o) \leq C\sum_{k=0}^{n}\int_{x_o}^{X_o} \frac{\|D^{n-k}g(\tau)\|_S^2}{\tau^{2k-c}}\, d\tau \ .$$

Pour c assez grand cette inégalité devient

$$\text{(I.6)} \qquad x_o^{c+1}\, e^{+cx_o}\phi(x_o) \leq C^{ste}\{\phi(X_o) + \sum_{k=0}^{n}\int_{x_o}^{X_o} \|D^{n-k}\, g(\tau)\|_S^2 d\tau\} \ .$$

Par un calcul simple on peut montrer qu'il existe une $C^{ste} > 0$ (indépendante des V_j) telle que :

$$\phi(X_o) \leq C^{ste} \; \|D^{n+m-\nu} V_\nu(X_o)\|_S^2$$

Par ailleurs :

$$\frac{\|D^{n+m-\nu} V_\nu(x_o)\|_S^2}{x_o} \leq \phi(x_o) \qquad \forall x_o \in]0,X_o]$$

et comme $x_o^{\nu-1} V_\nu(X) = U(X) \quad \forall X \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell$, d'après la proposition 1.4 nous aurons : $\exists C^{ste} > 0$ (indépendante de U et V_ν) telle que :

$$\|D^{n+m-\nu} U(x_o)\|_S^2 \leq C^{ste} \; \|D^{n+m-\nu} V_\nu(x_o)\|_s^2$$

et

$$\|D^{n+m-\nu} V_\nu(X_o)\|_S^2 \leq C^{ste} \; \|D^{n+m-\nu} U(X_o)\|_S^2$$

Ainsi de (I.6) on tire :

$$x_o^c \, \|D^{n+m-\nu} U(x_o)\|_S^2 \leq C^{ste} \{ \|D^{n+m-\nu} U(X_o)\|_S^2 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \int_{x_o}^{X_o} \|D^{n-k} g(\tau)\|_S^2 \, d\tau \}$$

$\forall x_o \in [0,X_o]$ et c ne dépend pas de g, U et x_o.

Pour terminer la preuve de la proposition 3, il suffit de majorer $\|D^{n+m-\nu} U(X_o)\|_S$ en utilisant la propriété 3 ; et la propriété 1.2 qui donne

$$\|D^{n-k} g(x_o)\|_S^2 \leq \|D^n g(x_o)\|_S^2 \quad \forall k \leq n.$$

b_3) <u>Preuve de la proposition</u> 4.

On rappelle qu'on a posé :

$$\begin{cases} x_o^{\nu-1} V_\nu(X) = U(X) \\ x_o^{j-2}\, V_{j-1}(X) = Q_j(X,D)(x_o^{j-1} V_j)(X) \qquad j = \nu,\dots,2. \\ \forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell \end{cases}$$

et de (1) on avait tiré :

$$(2)\quad \begin{cases} x_o^{\nu-1} V_\nu(X) = U(X) \\ Q_j(X,D) V_j(X) = \dfrac{V_{j-1}(X)}{x_o} + \dfrac{[Q_j, x_o^{j-1}] V_j(X)}{x_o^{j-1}} \qquad j = \nu,\dots,2 \\ Q_1(X,D) V_1(X) = -[P(X,D) - Q_1(X,D)\circ\dots\circ Q_\nu(X,D)]\,(x_o^{\nu-1} V_\nu)(X) + f(X) \\ \forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell \end{cases}$$

avec $f(X) = P(X,D)U(X) \quad \forall X \in \Omega$. On pose :

$$M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k \qquad j = 1,\dots,\nu.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$.

Les $Q_j(X,D) \in L^o(m_j,m_j)$ $(j = 1,\dots,\nu)$ étant des opérateurs de symboles principaux strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\dots,0)$, alors d'après le lemme 2 nous aurons : $\exists C > 0$ (indépendante des V_j) tel que :

$$(\mathrm{I}.7)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{d}{dx_o}\left(\| D^{n+M_j-j} V_j(x_o) \|_S^2 \right) \right| = \left| \dfrac{d}{dx_o}\left(\| D^{n+M_{j-1}-(j-1)+m_j-1} V_j(x_o) \|_S^2 \right) \right| \\ \leq C\Big\{ \| D^{n+M_j-j} V_j(x_o) \|_S^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n+M_j-j} \frac{\| D^{n+M_j-j-k} V_j(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k+1}} + \\ \qquad + x_o \| D^{n+M_{j-1}-(j-1)} (Q_j(X,D) V_j)(x_o) \|_S^2 \Big\} \quad \text{p.p. } [0,X_o] \end{cases}$$

$j = \nu,\dots,2.$

où $\quad Q_j(X,D)V_j(X) = \dfrac{V_{j-1}(X)}{x_o} + \dfrac{[Q_j,x_o^{j-1}]V_j(X)}{x_o^{j-1}} \qquad X \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^{\ell}.$

Comme $Q_j(X,D) \in L^o(m_j,m_j)$, on peut facilement voir (propriété 5.3) que $[Q_j,x_o^{j-1}] \in L^{-(j-1)}(m_j,m_j)$ est de symbole principal nul, donc

$$[Q_j,x_o^{j-1}] \in L^{-j+2}(m_j-1,m_j-1).$$

En utilisant les propriétés (1.4) et (5.1) on aura :

$\exists C^{ste} > 0$ telle que :

$$\|D^{n+M_{j-1}-(j-1)}(Q_j(X,D)V_j)(x_o)\|_S^2 \leq$$

$$\leq C^{ste}\{\sum_{k=0}^{n+M_{j-1}-(j-1)} \frac{\|D^{n+M_{j-1}-(j-1)-k} V_{j-1}(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k+2}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n+M_j-j} \frac{\|D^{n+M_j-j-k} V_j(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k+2}}\} \qquad \forall x_o \in]0,X_o]$$

(la constante ne dépend pas des V_j).

Reportons ces majorations dans (I.7) ; on aura : $\exists C^{ste} > 0$ telle que :

$$(\text{I.8}) \begin{cases} \left|\dfrac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+M_j-j} V_j(x_o)\|_S^2\right)\right| \leq C^{ste}\{\|D^{n+M_j-j} V_j(x_o)\|_S^2 + \\ + \displaystyle\sum_{k=0}^{n+M_j-j} \frac{\|D^{n+M_j-j-k}V_j(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+M_{j-1}-(j-1)} \frac{\|D^{n+M_{j-1}-(j-1)-k} V_{j-1}(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k+1}} \\ \text{p.p. } [0,X_o] \quad , \ j = \nu,\dots,2. \end{cases}$$

Ces inégalités (I.8) sont vraies pour tout $n \in N$, et en particulier pour $(n-\gamma)$ avec $\gamma \leq n+M_{j-1}-(j-1)$.

Mais quand $\gamma > n+M_{j-1}-(j-1)$ alors $n+M_j-j-\gamma = (n+M_{j-1}-(j-1)-\gamma) + m_j-1$ avec $n+M_{j-1}-(j-1)-\gamma < 0$ donc (I.8) n'est plus vrai dans ce cas car le lemme 2 sur lequel (I.8) est basé n'est pas applicable.

Alors on va utiliser le lemme suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 4. Soient $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$ et $U \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$.

Alors :

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^n U(x_o)\|_S^2)\right| \leq \frac{\|D^n U(x_o)\|_S^2}{x_o} + x_o\|D^{n+1}U(x_o)\|_S^2 \quad \text{p.p. } [0,X_o]$$

Grâce à ce lemme, après quelques changements d'indices, on aboutit à : $\exists C^{ste} > 0$ tel que :

$$\text{(I.9)}\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma=0}^{n+M_j-j}\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+M_j-j-\gamma}V_j(x_o)\|_S^2)\right|\cdot\frac{1}{x_o^{2\gamma}} \leq C^{ste}\{\sum_{\gamma=0}^{n+M_j-j}\frac{\|D^{n+M_j-j-\gamma}V_j(x_o)\|_S^2}{x_o^{2\gamma}} + \\ \displaystyle + \sum_{\gamma=0}^{n+M_j-j}\frac{\|D^{n+M_j-j-\gamma}V_j(x_o)\|_S^2}{x_o^{2\gamma+1}} + \sum_{\gamma=0}^{n+M_{j-1}-(j-1)}\frac{\|D^{n+M_{j-1}-(j-1)-\gamma}V_{j-1}(x_o)\|_S^2}{x_o^{2\gamma}}\} \\ \text{p.p. } [0,X_o] \text{ et } j=\nu,\dots,2. \end{cases}$$

Utilisons la dernière équation de (2).

On a $Q_1(X,D) \in L^o(m_1,m_1)$ et à symbole principal strictement hyperbolique, alors d'après le lemme 2. On aura pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$; $\exists C^{ste} > 0$ tel que :

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+m_1-1}V_1(x_o)\|_S^2)\right| \leq C^{ste}\{\|D^{n+m_1-1}V_1(x_o)\|_S^2 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n+m_1-1}\frac{\|D^{n+m_1-1-k}V_1(x_o)\|_S^2}{x_o^{2k+1}} + x_o\|D^n(Q_1(X,D)V_1)(x_o)\|_S^2\} \quad \text{p.p. } [0,X_o].$$

Comme $[P(X,D)-Q_1(X,D)o\ldots oQ_\nu(X,D)] \in L^\nu(m-\nu,m-\nu)$ et

$$Q_1(X,D)V_1(X) = -[P(X,D)-Q_1(X,D)o\ldots oQ_\nu(X,D)](x_o^{\nu-1}V_\nu)(X) + f(X)$$

d'après les propriétés (5.1.) et (1.4.), nous aurons :

$$||D^n(Q_1(X,D)V_1)(x_o)||_S^2 \leqslant C^{ste}\{\sum_{k=0}^{n+m-\nu} \frac{||D^{n+m-\nu-k}V_\nu(x_o)||_S^2}{x_o^{2k+2}} + ||D^n f(x_o)||_S^2\}$$

$\forall x_o \in]0,X_o]$ et la $C^{ste} > 0$ ne dépend pas des V_j et de x_o. Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier pour $(n-\gamma)$ avec n fixé et $\gamma \leqslant n$.

Pour $n < \gamma \leqslant n+m_1-1$ on utilise le lemme 4 pour majorer

$$\left|\frac{d}{dx_o}(||D^{n+m_1-1-\gamma}V_1(x_o)||_S^2)\right|$$

Par suite, en faisant des changements d'indices convenables, on aboutit à :

$$\sum_{\gamma=0}^{n+m_1-1}\left|\frac{d}{dx_o}(||D^{n+m_1-1-\gamma}V_1(x_o)||_S^2)\right| \frac{1}{x_o^{2\gamma}} \leqslant C^{ste}\{\sum_{\gamma=0}^{n+m_1-1}\frac{||D^{n+m_1-1-\gamma}V_1(x_o)||_S^2}{x_o^{2\gamma}} +$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{n+m-\nu}\frac{||D^{n+m-\nu-\gamma}V_\nu(x_o)||_S^2}{x_o^{2\gamma+1}} + \sum_{\gamma=0}^{n}\frac{||D^{n-\gamma}f(x_o)||_S^2}{x_o^{2\gamma}}\} \qquad \text{p.p. } [0,X_o]$$

(la $C^{ste} > 0$ ne dépend pas des V_j ni de $x_o \in [0,X_o]$).

En remarquent que $m = M_\nu$, et $m_1 = M_1$; si on additionne membre à membre cette inégalité et les inégalités (I.9) on aura :

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{\gamma=0}^{n+M_j-j} \left| \frac{d}{dx_o} (\| D^{n+M_j-j-\gamma} V_j(x_o) \|_S^2 \right| \frac{1}{x_o^{2\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant C^{ste} \{ \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{\gamma=0}^{n+M_j-j} \frac{\| D^{n+M_j-j-\gamma} V_j(x_o) \|_S^2}{x_o^{2\gamma}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{\gamma=0}^{n+M_j-j} \frac{\| D^{n+M_j-j-\gamma} V_j(x_o) \|_S^2}{x_o^{2\gamma+1}} + x_o \sum_{k=0}^{n} \frac{\| D^{n-k} f(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k}} \} \qquad \text{p.p. } [0,X_o]$$

Si on pose :

$$\phi(x_o) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{\gamma=0}^{n+M_j-j} \frac{\| D^{n+M_j-j-\gamma} V_j(x_o) \|_S^2}{x_o^{2\gamma+1}}$$

on peut facilement voir que :

$$\left| \frac{d}{dx_o}(x_o \phi)(x_o) \right| \leqslant C^{ste} \{ x_o \phi(x_o) + \phi(x_o) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\| D^{n-k} f(x_o) \|_S^2}{x_o^{2k-1}} \} \qquad \text{p.p.} \quad [0,X_o].$$

La preuve de la proposition 4 est ainsi achevée.

Preuve du théorème 1.

D'après la proposition 2 si $f \in C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ $\phi_j \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)$ $j = 0,\dots,(m-1)$, alors s'il existe $U \in C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ telle que

$$(1) \quad \begin{cases} P(X,D)U(X) = f(X) & \forall X \in \Omega \\ D_o^j U(0,x) = \phi_j(x) & \forall x \in \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\dots,m-1 \end{cases}$$

U est unique dans $C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$.

Existence :

On considère

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (P(X,D)\mathcal{V}, \mathcal{V}(0,\cdot), D_o\mathcal{V}(0,\cdot), \ldots, D_o^{m-1}\mathcal{V}(0,\cdot)) \quad \text{avec} \\ \mathcal{V} \in C^\infty([0,X_o], \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)) \end{array} \right\}$$

On a :

$$G \subset C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)) \times \underbrace{H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell) \times \ldots \times H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)}_{m} = E$$

et G est dense dans E.

Pour montrer cela il suffit de montrer que :

$\forall U = (\mathcal{U}, \mathcal{U}_o, \ldots, \mathcal{U}_{m-1}) \in E$ tel que :

$$\int_\Omega \mathcal{U}(X) \cdot P(X,D)\mathcal{V}(X)dX + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^\ell} \mathcal{U}_j(x) \cdot D_o^j \mathcal{V}(0,x)dx = 0 \quad \forall \mathcal{V} \in C^\infty([0,X_o], \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$$

alors $U = 0$.

Ainsi soit $U = (\mathcal{U}, \mathcal{U}_o, \ldots, \mathcal{U}_{m-1}) \in E$ tel que $\forall \mathcal{V} \in C^\infty([0,X_o], \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$

on a :

$$\int_\Omega \mathcal{U}(X) \cdot P(X,D)\mathcal{V}(X)dX + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^\ell} \mathcal{U}_j(x) \cdot D_o^j \mathcal{V}(0,x)dx = 0 \tag{I.10}$$

donc (I.10) est vrai en particulier pour tout $\mathcal{V} \in \mathcal{D}(]0,X_o[\times\mathbb{R}^\ell)$ d'où :

$$\int_\Omega \mathcal{U}(X) \cdot P(X,D)\mathcal{V}(X)dX = 0 \qquad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{D}(]0,X_o[\times\mathbb{R}^\ell)$$

par suite

$$\int_\Omega P^*(X,D)\mathcal{U}(X) \cdot \mathcal{V}(X)dX = 0 \qquad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{D}(]0,X_o[\times\mathbb{R}^\ell)$$

i.e. $$P^*(X,D)U(X) = 0 \qquad \forall X \in \Omega.$$

Ainsi en utilisant le fait que $P^*(X,D)U = 0$ sur Ω et la formule de GREEN, de (I.10) on déduit :

$$<U_{X_o}, \Gamma_{X_o}(V_{X_o})> = 0 \qquad \forall V \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(R^\ell))$$

tel que : $D_o^j V(0,\cdot) = 0 \qquad j = 0,\dots,(m-1)$

avec
$$U_{X_o} = (U(X_o,\cdot), D_o U(X_o,\cdot),\dots,D_o^{m-1}U(X_o,\cdot))$$

Alors d'après la surjectivité de l'application Γ_{X_o} [10] on tire

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} D_o^j U(X_o,x)\omega(x)dx = 0 \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell) \qquad j = 0,\dots,(m-1)$$

d'où

$$D_o^j U(X_o,\ ) = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\dots,(m-1).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} P^*(X,D)U(X) = 0 & \text{sur } \Omega \\ D_o^j U(X_o,\cdot) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\dots,m-1 \end{cases}$$

comme $U \in C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$, de la proposition 3 on tire que :

$$U = 0 \qquad \text{sur } \Omega.$$

En reportant cela dans (I.10), on aura :

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^\ell} U_j(x)\ D_o^j V(0,x)dx = 0 \qquad \forall V \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$$

de la surjectivité de l'application trace [8] [10] on tire :

$$U_j = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\dots,(m-1).$$

ce qui montre que G est dense dans E.

Ainsi pour $f \in C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ $\phi_j \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)$ $j = 0,\dots,(m-1)$ il existe une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ telle que

$$P(X,D)U_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \quad \text{dans} \quad H^{+\infty}([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$$

et

$$D_o^j U_k(0,\cdot) \xrightarrow[k\to\infty]{} \phi_j \quad \text{dans} \quad H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell) \quad j = 0,\dots,(m-1)$$

de l'inégalité de la proposition 2 on tire que U_k est une suite de Cauchy dans $H^{+\infty}([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ d'où $\exists U \in H^{+\infty}([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ tel que :

$$U_k \xrightarrow[k\to\infty]{} U \quad \text{dans} \quad H^{+\infty}([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)).$$

Ainsi :

$$P(X,D)U_k \xrightarrow[k\to\infty]{} P(X,D)U \qquad H^{+\infty}([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$$

$$D_o^j U_k(0,\cdot) \xrightarrow[k\to\infty]{} D_o^j U(0,\cdot) \qquad H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)$$

comme on est dans des espaces séparés on conclue que :

$$(1) \quad \begin{cases} P(X,D)U = f & \text{sur } \Omega \\ D_o^j\ (0,\cdot) = \phi_j & j = 0,\dots,(m-1) \end{cases}$$

ce qui achève la preuve du théorème 1.

CHAPITRE II

APPLICATION A L'ETUDE DE CONDITIONS SUFFISANTES D'HYPERBOLICITE FAIBLE POUR DES OPERATEURS SCALAIRES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE AU PLUS EGALE A TROIS

§.1 - *Introduction et définitions.*

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 1.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m, $P(X,D)$ est dit faiblement hyperbolique dans la bande $\Omega = [0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell$ si le problème de Cauchy C^∞ a données sur l'hyperplan $x_o = 0$ est bien posé dans cette bande.

D'après le théorème de Lax-Mizohata, pour que $P(X,D)$ soit faiblement hyperbolique dans la bande Ω, il est nécessaire que les racines caractéristiques en ξ_o soient toutes réelles quel que soit $X \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^\ell$.

Ainsi $P_m(X,\zeta)$ désignant le symbole principal de $P(X,D)$ on suppose que :

$$P_m(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{m} (\xi_o - \lambda_j(X,\xi))$$

où les $\lambda_j \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ sont homogènes d'ordre un en ξ, et à valeurs réelles.

On se place alors dans le cadre suivant des opérateurs à caractéristiques de multiplicités variables :

Définition 2.

On dira que $P(X,D)$ est à caractéristiques de multiplicités variables au plus égales à ν si on a : $\exists p \leq m$, $k_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1,\dots,p)$ tels que $\sum_{j=1}^{p} k_j = m$, $k_1 \leq \dots \leq k_p = \nu$, et

$$P_m(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{p} (\xi_o - \lambda_j^1(X,\xi)) \dots (\xi_o - \lambda_j^{k_j}(X,\xi))$$

où $\lambda_j^i(X,\xi) \neq \lambda_{j'}^{i'}(X,\xi)$ si $j \neq j'$ $(\forall X \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0)$ mais pour $j \in \{1,\dots,p\}$, $\exists (X^j,\xi^j) \in \Omega \times \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0$ tel que

$$\lambda_j^1(X^j,\xi^j) = \dots = \lambda_j^{k_j}(X^j,\xi^j)$$

sans que les $(\lambda_j^i)_{i=1}^{k_j}$ soient identiques sur $\Omega \times \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0$.

On supposera de plus que : $\forall i \in \{1,\dots,k_j\}$, $\forall i' \in \{1,\dots,k_{j'}\}$ avec $j \neq j'$.

$$\inf\{|\lambda_j^i(X,\xi) - \lambda_{j'}^{i'}(X,\xi)|,\quad X \in \Omega,\ |\xi| = 1\} > 0$$

On fait les remarques suivantes :

Remarques.

1. Pour un opérateur $P(X,D)$ à caractéristiques de multiplicités variables au plus égales à ν, on ne peut pas trouver moins de ν opérateurs strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\dots,0)$ tels que le produit de tous leurs symboles principaux soit égal à $P_m(X,\zeta)$.

2. Dans les conditions précédentes, d'après le chapitre I toute condition de K-décomposabilité devient une condition d'hyperbolicité faible.

3. De la remarque 1 il s'ensuit que si un opérateur à caractéristiques de multiplicités variables au plus égales à ν est K-décomposable alors $K \geq \nu$.

Ces remarques vont motiver notre façon de procéder.

Etant donné un opérateur à caractéristiques de multiplicités variables au plus égales à ν, à racines caractéristiques réelles en ξ_o, pour donner des conditions suffisantes de faible hyperbolicité dans Ω on va chercher des conditions suffisantes pour que cet opérateur soit ν-décomposable.

Avant de commencer l'étude du cas où la multiplicité des racines caractéristiques ne dépasse pas trois, on va donner un résumé des résultats connus lorsque la multiplicité des racines est au plus deux et on effectuera le lien entre ces résultats et la 2-décomposabilité.

Lien avec les résultats d'OHYA.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m, dont les racines caractéristiques sont de multiplicités variables au plus égales à deux.

On pose :

$$P_m(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{S} (\xi_o-\lambda_j(X,\xi)) \prod_{j=S+1}^{m} (\xi_o-\lambda_j(X,\xi)) = R_1(X,\zeta)\cdot R_2(X,\zeta)$$

avec :

et
$$\begin{cases} R_1(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{S} (\xi_o-\lambda_j(X,\xi)) \\ R_2(X,\zeta) = \prod_{j=S+1}^{m} (\xi_o-\lambda_j(X,\xi)) \end{cases}$$

strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\ldots,0)$.

Alors une condition suffisante pour que $P(X,D)$ soit faiblement hyperbolique dans Ω est :

$$(L_\varepsilon)\left\{\begin{array}{l}\left[P_{m-1}(X,\zeta) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2 P_m}{\partial\xi_\alpha \partial x_\alpha}(X,\zeta) + \varepsilon\,\frac{1}{2}\prod_{\substack{k\neq j,j+S\\ k=1}}^{m} \Delta_k\cdot\{\Delta_j,\Delta_{j+S}\}\right]_{\xi_o=\lambda_j(X,\xi)} \times x_o \\ \text{est divisible par } (\lambda_j-\lambda_{j+S}) \text{ dans la classe des fonctions } C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell\smallsetminus 0) \\ \text{avec } \varepsilon = +1 \text{ ou } -1\end{array}\right.$$

où $\Delta_j(X,\zeta) = \xi_o-\lambda_j(X,\xi)$ $(j=1,\dots,m)$, et $\{\cdot\ \cdot\}$ désigne le crochet de Poisson.

Cette condition (suffisante pour que $P(X,D)$ soit 2-décomposable) est plus faible que celle donnée par Y. Ohya [18] ainsi que celle donnée par T. Nishitani [17] qui se réduisent à L_{-1}. Elles ont été étendues en partie par D. Gourdin [4] pour les systèmes (cf. chapitre III).

§.2 - *Conditions suffisantes d'hyperbolicité faible pour les opérateurs à caractéristiques de multiplicités variables au plus égale à trois.*

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m.

On fait les hypothèses suivantes :

$[H_1]$: il existe $S\in\mathbb{N}^*$ tel que $3S\leq m$ et

$$P_m(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{S}(\xi_o-\lambda_j(X,\xi))\prod_{j=1}^{S}(\xi_o-\lambda_{j+S}(X,\xi))\prod_{j=1}^{m-2S}(\xi_o-\lambda_{j+2S}(X,\xi)) =$$

$$= R_1(X,\zeta)\cdot R_2(X,\zeta)\cdot R_3(X,\zeta)$$

avec :

$$R_1(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{S}(\xi_o-\lambda_j(X,\xi))\ ,\qquad R_2(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{S}(\xi_o-\lambda_{j+S}(X,\xi))$$

et $$R_3(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{m-2S}(\xi_o-\lambda_{j+2S}(X,\xi))\ ,$$

strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,0,\dots,0)$.

$[H_2]$; tous les λ_j sont distincts deux à deux sur $\Omega\times R^{\ell} \setminus 0$ sauf pour les couples (j,k) avec $k = j+S$ $(j=1,\dots,2S)$ ou $k = j+2S$ $j = (1,\dots,S)$.

On suppose en plus que : $\forall j = 1,\dots,S$ $\exists \theta_j \in C^{\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^{\ell} \setminus 0)$ tel que

$$\lambda_j(X,\xi)-\lambda_{j+S}(X,\xi) = \theta_j(X,\xi)(\lambda_{j+S}(X,\xi)-\lambda_{j+2S}(X,\xi))$$

La dernière partie de l'hypothèse $[H_2]$ n'est pas nécessaire, on l'a supposé surtout pour simplifier les conditions d'hyperbolicité faible.

a) <u>Dans ce qui suit on va donner des résultats d'ordre général qui nous seront utiles par la suite</u>

Lemme 1.

Soit $P(X,\xi_o,\xi)$ un polynôme en ξ_o, à coefficients indéfiniment dérivables en $(X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0$. Alors si $P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j(X,\xi)}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$ dans la classe des fonctions $C^{\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^{\ell} \setminus 0)$ $j = 1,\dots,S$.

$P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_{j+S}(X,\xi)}$ (resp. $\xi_o = \lambda_{j+2S}(X,\xi)$) sera divisible par

$$(\lambda_{j+S}-\lambda_j)(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S}) \quad (\text{resp. } (\lambda_{j+2S}-\lambda_j)(\lambda_{j+2S}-\lambda_{j+S})) \quad j = 1,\dots,S.$$

<u>Preuve</u> :

Supposons que $P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$ dans la classe des fonctions $C^{\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^{\ell} \setminus 0)$ $j = 1,\dots,S$.

Si on fait le développement de Taylor à l'ordre 1 de $\dfrac{P(X,\xi_o,\xi)}{\lambda_j-\lambda_{j+S}}$ en $\xi_o = \lambda_j$ on aura :

$$\frac{P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}}{\lambda_j-\lambda_{j+S}} = \frac{P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}}}{\lambda_j-\lambda_{j+S}} + (\lambda_j-\lambda_{j+2S})\theta$$

où $\theta \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$.

Comme $P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$ on déduit alors que :

$P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+2S})(\lambda_j-\lambda_{j+S})$.

Or $\lambda_j-\lambda_{j+S} = \theta_j(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S})$ d'où :

$P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}}$ est divisible par $(\lambda_{j+2S}-\lambda_j)(\lambda_{j+2S}-\lambda_{j+S})$

$j = 1,\ldots,S$.

* Montrons que $P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_{j+S}}$ est divisible par $(\lambda_{j+S}-\lambda_j)(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S})$ $j = 1,\ldots,S$. On a :

$$\lambda_j-\lambda_{j+2S} = \lambda_j-\lambda_{j+S}+\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S} = (\theta_j+1)(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S}) \quad j = 1,\ldots,S$$

d'où si $P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$ alors il sera aussi divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S})$.

Par suite si on fait le développement de Taylor à l'ordre 1 de $\dfrac{P(X,\xi_o,\xi)}{\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S}}$ en $\xi_o = \lambda_j$ on aura :

$$\frac{P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}}{\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S}} = \frac{P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_{j+S}}}{\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S}} + (\lambda_{j+S}-\lambda_j)\theta$$

comme $P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S})$,
$P(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_{j+S}}$ est donc divisible par $(\lambda_{j+S}-\lambda_j)(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S})$.

Ce qui termine la preuve du lemme 1.

Lemme 2.

Soit $f \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ alors :

$f(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$ $j = 1,\dots,S$

si et seulement si :

$\frac{\partial^2}{\partial\xi_o^2}\left[(R_1)^2 f\right](X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}$ est divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$
$j = 1,\dots,S.$

La preuve du lemme 2 est immédiate.

Lemme 3. [1]

Soient A une matrice $(m\times m)$ de rang $(m-\nu)$ $\nu \in \mathbb{N}^*$;
$F = {}^t(F^1,\dots,F^m)$, alors le système d'équation (1) $A\cdot X = F$ est résolvable si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{m} A^{1,\dots\dots\dots\dots,\nu}_{1,\dots,(\bar{F}-1),k,(\bar{F}+1)\dots\nu}\, F^k = 0 \qquad \forall\bar{F} \in \{1,\dots,\nu\}.$$

avec la notation des co-facteurs de J. Vaillant [22].

Ces conditions sont dites : conditions de compatibilité du système (1). En particulier si $\nu = 1$ on aura une seule condition qui va se résumer à ;

$$\sum_{j=1}^{m} A^1_j\, F^j = 0.$$

b) A l'aide de ces trois lemmes nous allons exhiber des conditions suffisantes pour que $P(X,D)$ soit 3-décomposable.

On cherche à déterminer trois opérateurs $Q_j(X,D) \in L^o(m_j,m_j)$ $j = 1,2,3$ où $m_1 = m_2 = S$ et $m_3 = m-2S$ tels que :

$$[P(X,D)-Q_1(X,D) \circ Q_2(X,D) \circ Q_3(X,D)] \in L^3(m-3,m-3)$$

En particulier, si on pose $Q(X,D) = Q_1(X,D) \circ Q_2(X,D) \circ Q_3(X,D)$, les parties homogènes en ζ d'ordres m, $(m-1)$ et $(m-2)$ des symboles de $P(X,D)$ et $Q(X,D)$ sont identiques sur $(]0,X_o]\times\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$.

Considérons les opérateurs $Q_j(X,D)$ $(j = 1,2,3)$ de symboles

$$Q_j(X,\zeta) = R_j(X,\zeta) + \frac{1}{i}\, q_j^1(X,\zeta) + \frac{1}{i^2}\, q_j^2(X,\zeta) \qquad X \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell$$

où $\quad q_j^1(X,\zeta) = \dfrac{1}{x_o}\, \tilde{q}_j^1(X,\zeta) \quad$ et $\quad q_j^2(X,\zeta) = \dfrac{1}{(x_o)^2}\, \tilde{q}_j^2(X,\zeta)$

avec $\tilde{q}_j^k$ des fonctions de $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$, homogènes d'ordre (m_j-k) en ζ et polynomiales en ξ_o de degrés (m_j-k) $j = 1,2,3$ et $k = 1,2$.

Alors d'après la "formule de composition généralisée" (proposition 1, chapitre I), on a , en écrivant le symbole de $Q(X,D)$ sous la forme :

$$Q(X,\zeta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^j q^{m-j}(X,\zeta) \qquad X \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell \quad ;$$

$$q^m(X,\zeta) = R_1(X,\zeta)R_2(X,\zeta)R_3(X,\zeta) = P_m(X,\zeta),$$

$$q^{m-1}(X,\zeta) = R_1R_2q_3^1(X,\zeta) + R_2R_3q_1^1(X,\zeta) + R_1R_3q_2^1(X,\zeta) +$$

$$+ R_1 \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_3 + \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R_2R_3) \ ,$$

$$q^{m-2}(X,\zeta) = R_1R_2q_3^2(X,\zeta)+R_2R_3q_1^2(X,\zeta)+R_1R_3q_2^2(X,\zeta) +$$

$$+ R_1\Big[q_2^1q_3^1(X,\zeta) + \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} q_3^1 + \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} q_2^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_3 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} (\frac{\partial}{\partial\zeta})^\alpha R_2 (\frac{\partial}{\partial X})^\alpha R_3\Big] + q_1^1\Big[R_2q_3^1+R_3q_2^1 +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_3\Big] + \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} q_1^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R_2R_3) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} (\frac{\partial}{\partial\zeta})^\alpha R_1 (\frac{\partial}{\partial X})^\alpha (R_2R_3) + \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Big[R_2q_3^1 + R_3q_2^1 +$$

$$+ \sum_{\beta=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\beta} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_3\Big].$$

Ainsi pour que $P(X,D)$ soit 3-décomposable , il suffit qu'il existe $q_j^1(X,\zeta)$ et $q_j^2(X,\zeta)$ $j = 1,2,3$ tels que :

$$\begin{cases} q^{m-1}(X,\zeta) = P_{m-1}(X,\zeta) \\ q^{m-2}(X,\zeta) = P_{m-2}(X,\zeta) \end{cases}$$

avec $P(X,\zeta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{i})^j P_{m-j}(X,\zeta)$.

Par suite :

Proposition 1.

Pour qu'il existe $\tilde{q}_j^1 \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ $(j=1,2,3)$ tels que :

$$q^{m-1}(X,\zeta) = P_{m-1}(X,\zeta) \qquad \forall(X,\zeta) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0$$

il faut et il suffit que :

$$x_o(K(X,\zeta) - \tfrac{1}{2}\{\Delta_n,\Delta_{n+S}\Delta_{n+2S}\}C_n(X,\zeta))_{\xi_o=\lambda_n}$$

soit divisible par $(\lambda_n-\lambda_{n+S})(\lambda_n-\lambda_{n+2S})$ dans la classe des fonctions $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell\setminus 0)$ pour $n = 1,\dots,S$ où

$$K(X,\zeta) = P_{m-1}(X,\zeta) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha} P_m(X,\zeta) ,$$

est le polynôme sous-caractéristique de $P(X,D)$

$$C_n(X,\zeta) = \prod_{\substack{j\neq n,n+S \\ n+2S \\ j=1}}^{S} \Delta_j(X,\zeta) \quad \text{avec} \quad \Delta_j(X,\zeta) = \xi_o-\lambda_j(X,\zeta)$$

Démonstration :

$P_{m-1}(X,\xi_o,\xi)$ et $q^{m-1}(X,\xi_o,\xi)$ étant des polynômes en ξ_o de degrés $(m-1)$; alors pour qu'ils soient égaux il faut et il suffit que : pour tout (X,ξ) fixé, les deux polynômes en ξ_o soient égaux en m points, en particulier pour $\xi_o = \lambda_j(X,\xi)$ $j = 1,\dots,m$ c'est-à-dire :

$$P_{m-1}(X,\zeta) = q^{m-1}(X,\zeta) \quad \forall(X,\zeta) \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0$$

si et seulement si

$$P_{m-1}(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j} = q^{m-1}(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j} \qquad j = 1,\dots,m. \tag{2.1}$$

Posons :

$$C_{m-1}(X,\zeta) = P_{m-1}(X,\zeta) - R_1\sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_3 - \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_2R_3 .$$

Alors d'après l'expression de $q^{m-1}(X,\zeta)$, (2.1) sera équivalente à :

$$C_{m-1}(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j} = \frac{1}{x_o}\left[R_1R_2\tilde{q}_3^1+R_1R_3\tilde{q}_2^1+R_2R_3\tilde{q}_1^1\right]_{\xi_o=\lambda_j} \qquad j = 1,\dots,m . \tag{2.2}$$

Comme $R_1(X,\lambda_j(X,\xi),\xi) = R_2(X,\lambda_{j+S}(X,\xi),\xi) = 0 \quad j = 1,\dots,S$ et

$$R_3(X,\lambda_j(X,\xi),\xi) = 0 \qquad j = 2S+1,\dots,m$$

on voit que (2.2) est équivalente à

$$(2.3)\begin{cases} C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j} = \dfrac{1}{x_o}\displaystyle\prod_{k=1}^{S}(\lambda_j-\lambda_{k+S})\prod_{k=1}^{m-2S}(\lambda_j-\lambda_{k+2S})\,\tilde{q}_1^1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j} & j = 1,\dots,S \\ C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}} = \dfrac{1}{x_o}\displaystyle\prod_{k=1}^{S}(\lambda_{j+S}-\lambda_k)\prod_{k=1}^{m-2S}(\lambda_{j+S}-\lambda_{k+2S})\tilde{q}_2^1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}} & j = 1,\dots,S \\ C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}} = \dfrac{1}{x_o}\displaystyle\prod_{k=1}^{S}(\lambda_{j+2S}-\lambda_k)\prod_{k=1}^{S}(\lambda_{j+2S}-\lambda_{k+S})\tilde{q}_3^1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}} & j=1,\dots,m-2S \end{cases}$$

Comme les λ_j sont distincts deux à deux sur $\Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$ sauf pour les couples $(j,j+S)$ $j = 1,\dots,2S$ et $(j+S,j+2S)$ $j = 1,\dots,S$. Alors pour que (2.3) soit vérifié il faut que :

(2.4) $\quad x_o C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j}$ soit divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$ $j = 1,\dots,S$

Inversement si (2.4) est vérifiée, alors d'après le lemme 1,

$x_o C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}}$ est divisible par $(\lambda_{j+S}-\lambda_j)(\lambda_{j+S}-\lambda_{j+2S})$ $j = 1,\dots,S$ et

$x_o C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}}$ est divisible par $(\lambda_{j+2S}-\lambda_j)(\lambda_{j+2S}-\lambda_{j+S})$ $j = 1,\dots,S$.

Donc pour résoudre (2.3) il suffit de résoudre :

$$(2.5)\begin{cases} \dfrac{x_o C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j}}{R_2(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j}\cdot R_3(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j}} = \tilde{q}_1^1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j} & j = 1,\dots,S \\ \dfrac{x_o C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}}}{R_1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}}\cdot R_3(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}}} = \tilde{q}_2^1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}} & j = 1,\dots,S \\ \dfrac{x_o C_{m-1}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}}}{R_1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}}\cdot R_2(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}}} = \tilde{q}_3^1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}} & j=1,\dots,m-2S \end{cases}$$

Comme les $\{\lambda_j\}_{j=1}^{S}$ (resp. $\{\lambda_{j+S}\}_{j=1}^{S}$, $\{\lambda_{j+2S}\}_{j=1}^{m-2S}$) sont distincts deux à deux sur $\Omega \times \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0$, et que les $\tilde{q}_j^1(X,\xi_o,\xi)$ sont des polynômes en ξ_o de degrés m_j $j = 1,2,3$ (avec $m_1 = m_2 = S$ et $m_3 = m-2S$), alors les systèmes (2.5) sont de type Van Dermonde qui ont des solutions uniques ; d'où :

La condition (2.4) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des $\tilde{q}_j^1$ $j = 1,2,3$ tels que $q^{m-1} = P_{m-1}$.

Ainsi pour terminer la preuve de la proposition 1, il suffit de montrer l'équivalence de (2.4) avec la condition donnée dans la proposition.

Pour celà, il suffit d'écrire :

$$\sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial R_1}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_2 R_3 = \frac{1}{2}\{ \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_\alpha \partial x_\alpha} + \{R_1, R_2 R_3\} - R_2 R_3 \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi_\alpha \partial x_\alpha} -$$

$$- R_1 \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2 R_2 R_3}{\partial \xi_\alpha \partial x_\alpha}\}$$

et reporter cette expression dans celle de $C_{m-1}(X,\zeta)$ en tenant compte du fait que $R_1(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j} = 0$ $(j = 1,\dots,S)$ et

$$[R_2(X,\zeta) R_3(X,\zeta)]_{\xi_o=\lambda_j} \text{ est divisible par } (\lambda_j - \lambda_{j+S})(\lambda_j - \lambda_{j+2S}) \quad j=1,\dots,S.$$

Supposons que la condition de la proposition 1 est vérifiée, alors on peut déterminer les $\tilde{q}_j^1$ $j = 1,2,3$ tels que

$$P_{m-1}(X,\zeta) = q^{m-1}(X,\zeta) \qquad \forall (X,\zeta) \text{ avec } x_o \neq 0$$

Ceci étant, on va chercher à donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils existent $\tilde{q}_j^2(X,\zeta)$ $(j = 1,2,3)$ des fonctions de $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0)$, homogènes d'ordres m_j en ζ et polynomiales en ξ_o de degrés m_j

$(j = 1,2,3)$ telles que :

$$P_{m-2}(X,\zeta) = q^{m-2}(X,\zeta) \qquad \forall (X,\zeta) \in \,]0,X_o] \times \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0$$

Les q_j^1 étant déterminés dans la proposition 1, on pose :

$$\begin{aligned} C_{m-2}(X,\zeta) = {} & P_{m-2}(X,\zeta) - R_1\{q_2^1 q_3^1 + \sum_{\alpha=0}^{\ell} [\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} q_2^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_3 + \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} q_3^1] + \\ & + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!}(\frac{\partial}{\partial\zeta})^{\alpha} R_2 (\frac{\partial}{\partial X})^{\alpha} R_3\} - q_1^1\{R_2 q_3^1 + R_3 q_2^1 + \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_3\} - \\ & - \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} q_1^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_2 R_3 - \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [R_2 q_3^1 + R_3 q_2^1 + \sum_{\beta=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\beta} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_3] - \\ & - \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!}(\frac{\partial}{\partial\zeta})^{\alpha} R_1 (\frac{\partial}{\partial X})^{\alpha} R_2 R_3. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2, pour que $C_{m-2}(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j}$ soit divisible par $(\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$ $(j = 1,\dots,S)$ il faut et il suffit que

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_o^2}((R_1)^2 C_{m-2})(X,\xi_o,\xi)_{\xi_o=\lambda_j} \text{ soit divisible par } (\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S})$$

$(j = 1,\dots,S)$.

Compte tenu du fait que :

$$P_{m-1} - \sum_{\alpha=0}^{\ell} [\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_2 R_3 + R_1 \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} R_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_3] = R_1 R_2 q_3^1 + R_1 R_3 q_2^1 + R_2 R_3 q_1^1$$

on peut facilement voir que :

$$(2.6)\qquad (x_o)^2 C_{m-2}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j} \quad \text{est divisible par } (\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S}) \quad j=1,\dots,S$$

si et seulement si

$$(x_o)^2\left[\frac{\partial^2 C^*_{m-2}(X,\zeta)}{\partial\xi_o^2}\right]_{\xi_o=\lambda_j} \quad \text{est divisible par } (\lambda_j-\lambda_{j+S})(\lambda_j-\lambda_{j+2S}) \quad j=1,\dots,S$$

où

$$(2.7)\quad \begin{cases} C^*_{m-2} = (R_1)^2\Big[P_{m-2}-\sum\limits_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{\alpha}R_1\left(\frac{\partial}{\partial}\right)^{\alpha}(R_2R_3) - \sum\limits_{\alpha=0}^{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}q_1^1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}R_2R_3\Big] - \\ \quad - R_1\Big[q_1^1C^*_{m-1}+\sum\limits_{\alpha=0}^{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}R_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}C^*_{m-1}\Big] + C^*_{m-1}\sum\limits_{\alpha=0}^{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}R_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}R_1 \end{cases}$$

avec :

$$C^*_{m-1}(X,\zeta) = P_{m-1} - \sum_{\alpha=0}^{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}R_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(R_2R_3) - R_2R_3\,q_1^1$$

Par ailleurs, on dit que $C_{m-2}(X,\zeta)$ vérifie les conditions de compatibilité (C) si en plus de la condition de divisibilité (2.6), $C_{m-2}(X,\zeta)$ vérifie :

$$(2.8)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{S} C_k^1(X,\xi)\dfrac{C_{m-2}(X,\lambda_k(X,\xi),\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{S}(\lambda_k-\lambda_{j+S})\prod\limits_{j=1}^{m-2S}(\lambda_k-\lambda_{j+2S})}\,x_o^2 = 0 \\[2ex] \sum\limits_{k=1}^{S} C_k^2(X,\xi)\dfrac{C_{m-2}(X,\lambda_{k+S}(X,\xi),\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{S}(\lambda_{k+S}-\lambda_j)\prod\limits_{j=1}^{m-2S}(\lambda_{k+S}-\lambda_{j+2S})}\,x_o^2 = 0 \\[2ex] \forall (X,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^{\ell}\setminus 0 \end{cases}$$

où $C_k^1(X,\xi) = (-1)^{k+1} \prod_{\substack{j>n \\ j,n\in I_k}} (\lambda_j-\lambda_n)$

$$C_k^2(X,\xi) = (-1)^{k+1} \prod_{\substack{j>n \\ j,n\in I_k}} (\lambda_{j+S}-\lambda_{n+S})$$

avec $I_k = \{1,\dots,(k-1),(k+1),\dots,S\}$; et $C_k^1 \equiv C_k^2 \equiv 0$ si $S = 1$ ou 2.

Proposition 2.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m vérifiant les hypothèses $[H_1]$ et $[H_2]$. Alors, pour qu'il existe trois opérateurs $Q_j(X,D) \in L^o(m_j,m_j)$ $(j = 1,2,3)$ respectivement, de symboles principaux $R_j(X,\zeta)$ $(j = 1,2,3)$ tels que :

$$[P(X,D)-Q_1(X,D) \circ Q_2(X,D) \circ Q_3(X,D)] \in L^3(m-3,m-3)$$

il faut et il suffit que :

1) $[K(X,\zeta) - \frac{1}{2}\{\Delta_n,\Delta_{n+S}\Delta_{n+2S}\}C_n(X,\zeta)]_{\xi_o=\lambda_n} \times x_o$ soit divisible par

$(\lambda_n-\lambda_{n+S})(\lambda_n-\lambda_{n+2S})$ $n = 1,\dots,S$.

2) Les conditions de compatibilité (C) définies par (2.6) et (2.8) soient vérifiées par $C_{m-2}(X,\zeta)$.

Démonstration :

D'après la proposition 1, la première condition est nécessaire. Alors supposons qu'elle est vérifiée. Il existe donc $\tilde{q}_j^1$ $j = 1,2,3$ tels que

$$P_{m-1}(X,\zeta) = q^{m-1}(X,\zeta) \quad (X,\zeta) \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell \sim 0.$$

Ainsi pour qu'il existe trois opérateurs $Q_j(X,D) \in L^o(m_j,m_j)$ $(j = 1,2,3)$ (resp.) de symboles principaux $R_j(X,\zeta)$ $(j = 1,2,3)$ tels que :

$$[P(X,D)-Q_1(X,D) \circ Q_2(X,D) \circ Q_3(X,D)] \in L^3(m-3,m-3)$$

il faut et il suffit qu'ils existent $\tilde{q}_j^2$ $j = 1,2,3$ tels que :

$$q^{m-2}(X,\zeta) = P_{m-2}(X,\zeta) \qquad \forall (X,\zeta) \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0.$$

Ce qui est équivalent à la résolution de :

$$x_o^2 C_{m-2}(X,\zeta) = R_1R_2\,\tilde{q}_3^2(X,\zeta) + R_1R_3\,\tilde{q}_2^2(X,\zeta) + R_2R_3\,\tilde{q}_1^2(X,\zeta).$$

Puisque ce sont des polynômes en ξ_o de degrés $(m-2)$, celà revient donc à la résolution des systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_o^2 C_{m-2}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_j} = [R_2R_3\,\tilde{q}_1^2(X,\zeta)]_{\xi_o=\lambda_j} & & j = 1,\dots,S \\ x_o^2 C_{m-2}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+S}} = [R_1R_3\,\tilde{q}_2^2(X,\zeta)]_{\xi_o=\lambda_j} & & j = 1,\dots,S. \\ x_o^2 C_{m-2}(X,\zeta)_{\xi_o=\lambda_{j+2S}} = [R_1R_2\,\tilde{q}_3^2(X,\zeta)]_{\xi_o=\lambda_{j+2S}} & & j = 1,\dots,m-2S-1 \\ \forall (X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0. & & \end{array}\right.$$

Comme on recherche des fonctions $\tilde{q}_j^2$ dans $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ $(j = 1,2,3)$, on voit que la condition de divisibilité (2.6) est nécessaire.

Supposons qu'elle est donc vérifiée.

- Les $\tilde{q}_j^2$ $(j = 1,2,3)$ étant des polynômes en ξ_o, le dernier système de (2.9) se réduira à la résolution d'un système carré du type

Van Dermonde qui est bien déterminé du fait que les λ_{j+2S} $(j = 1,\ldots,m-2S)$ sont distincts deux à deux pour tout $(X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{\ell} \setminus 0$, ce qui détermine $\tilde{q}_3^2$.

- Pour $S = 1$ ou 2, $\tilde{q}_1^2(X,\xi_o,\xi)$ et $\tilde{q}_2^2(X,\xi_o,\xi)$ sont des fonctions indépendantes de ξ_o, d'où sous la condition (2.6) $\tilde{q}_1^2$ et $\tilde{q}_2^2$ sont aussi déterminées sans aucune autre condition.

- Pour $S > 2$, pour déterminer $\tilde{q}_1^2$ et $\tilde{q}_2^2$ on aura à résoudre deux systèmes de S équations à $(S-1)$ inconnues, ce qui nous amène à imposer des conditions de compatibilité à l'aide du lemme 3 et qui sont exactement les conditions (2.8) qui sont nécessaires et suffisantes.

Ce qui termine la démonstration de la proposition 2.

Remarques.

1. On peut trouver d'autres conditions suffisantes de 3-décomposabilité que celles données dans la proposition 2, par exemple en donnant des conditions suffisantes pour qu'il existe trois opérateurs $Q_j(X,D) \in L^o(m_j-m_j)$ $(j = 1,2,3)$ respectivement de symboles principaux $R_j(X,\zeta)$ $(j = 1,2,3)$ tels que :

$$\left[P(X,D)-Q_2(X,D) \circ Q_3(X,D) \circ Q_1(X,D)\right] \in L^3(m-3,m-3).$$

ALors on peut voir que dans les conditions suffisantes pour l'existence de tels opérateurs, la première condition de la proposition 2 est remplacée par :

$$\left[K(X,\zeta) - \frac{1}{2}\{\Delta_{n+S},\Delta_{n+2S}\Delta_n\}\right]_{\xi_o=\lambda_n} \times x_o \quad \text{divisible par} \quad (\lambda_n-\lambda_{n+S})(\lambda_n-\lambda_{n+2S})$$

$(n = 1,\ldots,S)$ qui ne lui est pas équivalente.

Donc, on peut donner autant de conditions suffisantes pour la 3-décomposabilité qu'il y a de façons de composer les opérateurs $Q_j(X,D)$ $(j = 1,2,3)$, c'est-à-dire six conditions non équivalentes deux à deux.

2. Pour illustrer notre proposition 2, on considère l'exemple suivant qui a été déjà donnée par K. Kitagawa - T. Sadamatsu [12].

Soit

$$P(X,D) = D_o^3 - (x_o^{2n}D_x^2 + a\, x_o^j D_x)D_o - (b\, x_o^k D_x^2 + C\, x_o^h D_x) \quad .$$

Alors d'après la proposition 2, si : $k \geq 2n-1$, $j+k \geq 4n-2$, $h \geq 2n-2$, $P(X,D)$ est bien décomposable, donc le problème de Cauchy associé à $P(X,D)$ est bien posé. On fait remarquer que dans [12] K. Kitagawa et T. Sadamatsu affirment que si : $k \geq 2n-1$, $j \geq n-1$ et $h \geq n-2$, alors le problème de Cauchy associé à $P(X,D)$ est bien posé et d'un travail de Ivrii [11] ils déduisent que ces conditions sont aussi nécessaires.

3. Après cette remarque, on est tenté de dire que les conditions de [12] sont plus faibles que les conditions suffisantes de 3-décomposition. C'est un fait pour l'exemple précédent, mais, en général cela n'est pas vrai et on peut citer d'autres exemples où notre condition de 3-décomposabilité est plus faible que celle de [12]. En particulier si dans la proposition 2 $S = 1$ ou 2 (cas où il n'y a qu'une ou deux racines de multiplicité trois) on n'a besoin que des deux conditions de divisibilité (2.4) et (2.6), faisant intervenir respectivement $P_{m-1}(X,\zeta)$ et $P_{m-2}(X,\zeta)$, pour que le problème de Cauchy associé à $P(X,D)$ soit bien posé ; par contre dans [12] on a besoin de trois conditions de divisibilité pour affirmer cela.

CHAPITRE III

PROBLEME DE CAUCHY POUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES

§.1 - *Opérateurs matriciels ν-décomposables.*

Dans ce paragraphe on va étendre la notion d'opérateur ν-décomposable, donnée dans le cas scalaire, au cas matriciel. On utilisera les notions déjà introduites au chapitre I sans y faire référence.

Soient m, t et ν dans N^* avec $m > 1$, $\nu \leq t$.

On considère $h(X,D) = [h_B^A(X,D)]_{A,B=1}^m$ une matrice $(m\times m)$ d'opérateurs différentiels en x_o, et pseudo-différentiels en x d'ordre t.

On dit que $h(X,D)$ est de type kowalewskien si :

$$h(X,D) = D_o^t I_m + \sum_{j=0}^{t-1} h'^{(t-j)}(X,D_x)D_o^j$$

où I_m désigne la matrice identité $(m\times m)$, et $h'^{(t-j)}(X,D_x)$ sont des matrices d'opérateurs pseudo-différentiels en x d'ordres $(t-j)$ dont les symboles, dépendant du paramètre $x_o \in [0,X_o]$, sont de classe $C^\infty([0,X_o], S^{t-j}(R^\ell \times R^\ell \smallsetminus 0))$.

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq t$.

On note $L_m^s(t,k)$ l'espace des matrices $(m\times m)$ d'opérateurs de classe $L^s(t,k)$.

Par $\mathcal{L}_m^o(t,k)$ on désignera l'espace des opérateurs $h(X,D) \in L_m^o(t,k)$ dont la matrice caractéristique

$$H(X,\zeta) = [H_B^A(X,\zeta)]_{A,B=1}^m$$

vérifie $H_B^A(X,\zeta) \equiv 0$ si $A \neq B$ $A,B \in \{1,\dots,m\}$ et $H_A^A(X,\zeta)$ $(A = 1,\dots,m)$ sont des polynômes en ζ de degrés t, strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,\underbrace{0,\dots,0}_{\ell})$ et de classe $B^\infty(\Omega)$ en X.

La partie principale de ces opérateurs est diagonale.

Définition 1.

Soit $h(X,D)$ un opérateur matriciel de type kowalewskien d'ordre t. On dit que $h(X,D)$ est ν-décomposable si : il existe ν opérateurs $Q_j(X,D) \in L_m^0(\tau_j,\tau_j)$ $j = 1,\dots,\nu$; avec $\sum_{j=1}^{\nu} \tau_j = t$, tels que :

$$[h(X,D) - Q_1(X,D) \circ \dots \circ Q_\nu(X,D)] \in L_m^\nu(t-\nu,t-\nu).$$

Après l'introduction de ces opérateurs ν-décomposables, on va donner les normes sur les espaces de Sobolev

$$[H_{n,S}(\Omega)]^m = [\bigcap_{j=0}^{n} H^j([0,X_0],\ H^{S+n-j}(R^\ell))]^m \qquad [8]\,[10]$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$ (avec un abus de notation) on note :

pour $U = (U_j)_{j=1}^m \in [C^\infty([0,X_0],\mathcal{D}(R^\ell))]^m$

$$|||D^n U(x_0)|||_S = \|D^n U(x_0)\|_S = \sum_{j=1}^{m} \|D^n U_j(x_0)\|_S =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sup_{0\leq k\leq n} \|D_0^k U_j(x_0,\cdot)\|_{S+n-k} \qquad \forall x_0 \in [0,X_0].$$

L'intégration de cette expression sur $[0,X_0]$ donne une norme équivalente à la norme usuelle sur $[H_{n,S}(\Omega)]^m$ [10].

Remarque.

Il est évident qu'on a la continuité des opérateurs matriciels différentiels en x_0 et pseudo-différentiels en x sur de tels espaces.

Lemme 1.

Soit $h(X,D) \in L^{o}_{m}(\tau,0)$, alors : pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $S \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ tel que :

$$\forall U \in [C^{\infty}([0,X_o],\mathcal{D}(R^{\ell}))]^m$$

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+\tau-1}U(x_o)\|_S)\right| \leq C\{\|D^{n+\tau-1}U(x_o)\|_S + \|D^n(h(X,D)U)(x_o)\|_S\}$$

p.p. $[0,X_o]$.

Preuve :

Soit $U = (U_j)_{j=1}^{m} \in [C^{\infty}([0,X_o],\mathcal{D}(R^{\ell}))]^m$. On pose :

$$h(X,D)U = f = (f_j)_{j=1}^{m}$$

Comme $h(X,D) \in L^{o}_{m}(\tau,0)$ on pourra écrire :

$$(*) \qquad h^{\tau}_{j,j}(X,D)U_j = f_j - \sum_{k=1}^{m} h^{\tau-1}_{j,k}(X,D)U_k(X) \qquad j = 1,\ldots,m$$

où $h^{\tau}_{j,j}(X,D)$ sont des opérateurs scalaires de type kowalewskien d'ordre τ strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,\underbrace{0,\ldots,0}_{\ell})$, $(j = 1,\ldots,m)$, et $h^{\tau-1}_{j,k}(X,D)$ des opérateurs scalaires d'ordre $(\tau-1)$ $(j,k \in \{1,\ldots,m\})$.

Ainsi en appliquant la propriété 4.1 du chapitre I aux opérateurs $h^{\tau}_{j,j}(X,D)$ on obtient : pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ (indépendante des U_j) tel que :

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+\tau-1}U_j(x_o)\|_S)\right| \leq C\{\|D^{n+\tau-1}U_j(x_o)\|_S + \|D^n(h^{\tau}_{j,j}(X,D)U_j)(x_o)\|_S\}$$

p.p. $[0,X_o]$.

Les $h^{\tau-1}_{j,k}(X,D)$ étant des opérateurs d'ordre $(\tau-1)$, alors de (*) on déduit : $\exists C > 0$ (indépendante des $\mathcal{U}_j$ $j = 1,\dots,m$) tel que :

$$\|D^n h^{\tau}_{j,j}(X,D)\mathcal{U}_j(x_o)\|_S \leq C\{\|D^n f_j(x_o)\|_S + \sum_{k=1}^{m} \|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}_k(x_o)\|_S\}$$

$\forall x_o \in [0,X_o]$.

En reportant cette estimation dans l'inégalité précédente, on aura

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}_j(x_o)\|_S)\right| \leq C\{\|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}_j(x_o)\|_S + \sum_{k=1}^{m} \|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}_k(x_o)\|_S +$$

$$+ \|D^n f_j(x_o)\|_S\} \quad \text{p.p. } [0,X_o] \quad j = 1,\dots,m.$$

Ainsi :

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}(x_o)\|_S)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}_j(x_o)\|_S)\right| \leq$$

$$\leq C\{\sum_{j=1}^{m} \|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}_j(x_o)\|_S + \sum_{j=1}^{m} \|D^n f_j(x_o)\|_S\}$$

p.p. $[0,X_o]$.

Ce qui achève la preuve du lemme 1.

Avec la même démarche que pour la preuve du lemme 2 du chapitre I on peut montrer le lemme suivant :

Lemme 2.

Soit $h(X,D) \in L^o_m(\tau,k)$ $(k \leq \tau)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ tel que : $\forall \mathcal{U} \in [C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(R^\ell))]^m$

$$\left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}(x_o)\|_S^2)\right| \leq C\{\|D^{n+\tau-1}\mathcal{U}(x_o)\|_S^2 + \sum_{j=0}^{n+k} \frac{\|D^{n+\tau-j}\mathcal{U}(x_o)\|_S^2}{x_o^{2j+1}} +$$

$$+ x_o\|D^n(h(X,D)\mathcal{U})(x_o)\|_S^2\} \quad \text{p.p. } [0,X_o].$$

Ainsi, en reprenant exactement les calculs faits pour le cas scalaire (Chapitre I) en se servant de ce lemme on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 1.

Soit $h(X,D)$ un opérateur de type kowaslewskien d'ordre τ, ν-décomposable ; alors pour $f \in [C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$, $\phi_j \in [H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m$ $j = 0,\dots,\tau-1$ données ; il existe $U \in [C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(R^\ell))]^m$ unique tel que :

$$(1) \quad \begin{cases} h(X,D)U(X) = f(X) & \forall X \in \Omega \\ D_o^j U(0,x) = \phi_j(x) & \forall x \in \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\dots,(\tau-1) \end{cases}$$

de plus U vérifie les inégalités d'énergies suivantes : pour $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ (indépendants de U) tel que :

$$\|D^{n+\tau-\nu}U(x_o)\|_S^2 \leq C\{\sum_{j=0}^{\tau-1} \|\phi_j\|^2_{S+2(N+\tau)+n-j} + \|D^{2N+\tau+n+1}f(0)\|_S^2 + \\ + \int_0^{x_o} \|D^{n+N+1}f(\zeta)\|_S^2\, d\zeta\} \qquad \forall x_o \in [0,X_o].$$

Remarque.

Dans le cas où $h(X,D)$ est ν-décomposable avec les $Q_j(X,D)$ $(j = 1,\dots,\nu)$, figurant dans la définition 1, de classe $L_m^o(\tau_j,0)$ $(j=1,\dots,\nu)$ la preuve du théorème 1 est alors beaucoup plus simple, et la solution U de (1) vérifie les inégalités d'énergies suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ (indépendante de U) tel que :

$$\|D^{n+\tau-\nu}U(x_o)\|_S \leq C\{\sum_{j=0}^{\tau-1} \|\phi_j\|_{S+n+\tau-\nu-j+1} + \|D^{n-\nu}f(0)\|_S + \\ + \int_0^{x_o} \|D^n f(\zeta)\|_S d\zeta\} \qquad \forall x_o \in [0,X_o]$$

§.2 - *Etude du problème de Cauchy pour un système d'équations à caractéristiques de multiplicités variables au plus double.*

Dans ce paragraphe on va étudier un problème de Cauchy plus concret, et celà en se basant sur le théorème 1 pour conclure.

Hypothèses. [23], [4].

Soit $h(X,D)$ un opérateur matriciel $(m\times m)$ de type kowalewskien d'ordre t ; on note par $H(X,\zeta) = [H_B^A(X,\zeta)]_{A,B=1}^m$ sa matrice caractéristique au sens de Cauchy-Kowalewki ; $H(X,\zeta)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$[H_1]$: son déterminant $\det H(X,\zeta)$ est une fonction polynomiale en ζ possédant la décomposition en facteurs H_j $j = 1,\ldots,\sigma$ noté :

$$\det H(X,\zeta) = [H_1(X,\zeta)]^{\nu_1} \times \ldots \times [H_\sigma(X,\zeta)]^{\nu_\sigma}$$

où les $H_j(X,\zeta)$ sont des polynômes en ζ irréductibles sur $\mathbb{R}[\zeta]$ et de classe $B^\infty(\Omega)$ en X tels que :

$$\inf\{|H_j(X,I_X)| \quad , X \in \Omega\} > 0 \qquad j = 1,\ldots,\sigma$$

où pour tout $X \in \Omega$, I_X désigne le co-vecteur de coordonnées $(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{\ell})$.

Le radical caractéristique sera noté par $R(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{\sigma} H_j(X,\zeta)$, et on suppose :

$[H_2]$: il existe $\tau, S \in \mathbb{N}$ avec $2S \leq \tau$ tels que :

$$R(X,\zeta) = R(X,I_X) \prod_{j=1}^{\tau} (\xi_o - p_o^j(X,\xi))$$

où les $p_o^j \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$, homogènes d'ordre un en ξ , $(j=1,\ldots,\tau)$, sont distincts deux à deux sauf pour les couples $(j,j+S)$ $j = 1,\dots,S$ pour lesquels $\exists (X^j,\xi^j) \in \Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0$ tel que :

$$p_o^j(X^j,\xi^j) = p_o^{j+S}(X^j,\xi^j)$$

et

$$p_o^j \not\equiv p_o^{j+S} \qquad \text{sur} \quad \Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$$

De plus on supposera que :

$$\inf\{|p_o^j(X,\xi) - p_o^{j'}(X,\xi)| \;,\quad X \in \Omega, \quad |\xi| = 1\} > 0$$

pour $j \neq j'$ dans $\{1,\dots,S\}$ et dans $\{S+1,\dots,\tau\}$.

$[H_3]$: Pour tout $X \in \Omega$ fixé et $j \in \{1,\dots,\sigma\}$, dans l'anneau principal ϕ_j localisé de $\mathbb{R}[\zeta]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_j, dont les éléments sont les fractions à dénominateur non divisible par H_j dans $\mathbb{R}[\zeta]$, on a la forme réduite suivante de la matrice $H(X,\zeta)$ à l'aide de ses facteurs invariants :

$$H(X,\zeta) \underset{\phi_j}{\sim} \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} H_j & & \\ & \ddots & \\ & & H_j \end{matrix}\right\}\nu_j & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

D'après cette hypothèse $[H_3]$, si on note par $A' = A'(X,\zeta)$ la matrice des co-facteurs de $H(X,\zeta)$ dans le développement de $\det H(X,\zeta)$, alors il existe $A = A(X,\zeta)$ matrice $(m\times m)$ de fonctions, polynomiales en ζ, et de classe $B^\infty(\Omega)$ en X telle que :

$$A'(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{\sigma} [H_j(X,\zeta)]^{\nu_j - 1} \cdot A$$

et $$AH = HA = R(X,\zeta)\cdot I_m$$

$[H_4]$: $A_1^1(X,\zeta)\Big|_{\xi_o = p_o^j(X,\xi)} \neq 0$ pour $j = 1,\ldots,S$ et $(X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell$; de plus on suppose que les p_o^j, $j = 1,\ldots,2S$ ne peuvent être racines que des H_k tels que $\nu_k = 1$.

Remarque.

L'hypothèse $[H_4]$ est introduite seulement pour pouvoir donner une condition scalaire suffisante pour que le problème de Cauchy (1) soit bien posé.

Considérons le problème de Cauchy associé à $h(X,D)$

$$(1) \quad \begin{cases} h(X,D)\mathcal{U}(X) = f(X) & \forall X \in \Omega \\ D_o^j\mathcal{U}(0,x) = \phi_j(x) & \forall x \in \mathbb{R}^\ell \quad j = 0,\ldots,(t-1) \end{cases}$$

avec $f \in [C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$

$$\phi_j \in [H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m \qquad j = 0,\ldots,(t-1)$$

Soit $a(X,D) = a$ un opérateur matriciel $(m\times m)$ d'ordre $(\tau-t)$ et de matrice caractéristique $A(X,\zeta)$. En s'inspirant de [4], on réduit l l'opérateur $h(X,D)$ d'ordre t et de symbole principal $H(X,\zeta)$, à un opérateur différentiel en x_o et pseudo-différentiel en x, d'ordre $\tau \geq t$ et de symbole principal $\frac{R(X,\zeta)}{R(X,I_X)} I_m$ de type scalaire (au facteur multiplicatif I_m près) en faisant dans (1) le changement de fonctions inconnues

$$\mathcal{U} = a\, \mathcal{V}$$

et en posant : $k(X,D) = k = \frac{1}{R(X,I_X)} h(X,D) \circ a(X,D)$.

Le problème (1) se transforme en :

(2_1) $$kV = \frac{f}{R(X,I_X)} = f'$$

(2_2) $$\left[\frac{\partial^j}{\partial x_o^j}(a\,V)\right]_{x_o=0} = \phi_j \qquad j = 0,\ldots,(t-1)$$

Comme $A(X,I_X)$ est inversible, on peut résoudre les équations (2_2) et calculer $\psi_j(x) = \frac{\partial^j}{\partial x_o^j} V(0,x)$, $j = 0,\ldots,(\tau-1)$ en fonction des ϕ_j $j = 0,\ldots,(t-1)$ (cette résolution n'étant pas unique).

Les fonctions ψ_j $(j = 0,\ldots,(\tau-1))$ étant ainsi calculées, on obtient un nouveau problème de Cauchy (2) et la proposition suivante.

Proposition 1. [4]

Le second membre f de (1) étant choisi dans $[C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ et les données initiales ϕ_j dans $[H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m$ $j = 0,\ldots,(t-1)$. On peut déterminer des données initailes $\psi_j \in [H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m$ $(j = 0,\ldots,(\tau-1))$ en fonction des données ϕ_j $(j = 0,\ldots,t-1)$ telles que pour toute solution V dans $[C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ du problème :

(2) $$\begin{cases} kV = f' & \text{dans } \Omega \\ D_o^j V(0,\cdot) = \psi_j & j = 0,\ldots,(\tau-1) \end{cases}$$

$U = a\,V \in [C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ soit solution de (1).

D'après l'hypothèse $[H_3]$, la matrice caractéristique de $k(X,D)$ est

(3) $$K(X,\zeta) = \frac{R(X,\zeta)}{R(X,I_X)}\, I_m = \prod_{j=1}^{\tau} (\xi_o - p_o^j(X,\xi))\cdot I_m$$

Ainsi si on pose $\partial_j = D_o - p_o^j(X,D_x)$, $j = 1,\dots,\tau$ avec $p_o^j(X,D_x)$ l'opérateur pseudo-différentiel en x de symbole $p_o^j(X,\xi)$. On peut écrire $k(X,D)$ sous la forme :

$$(4)_1 : \quad k(X,D) = (\partial_1 \circ \dots \circ \partial_\tau) I_m + C_{\tau-1}(X,D)$$

ou

$$(4)_2 : \quad k(X,D) = (\partial_\tau \circ \dots \circ \partial_1) I_m + C_{\tau-1}(X,D)$$

où $C_{\tau-1}(X,D)$ est un opérateur matriciel $(m\times m)$ différentiel en x_o et pseudo-différentiel en x, d'ordre $(\tau-1)$; par $C^o_{\tau-1}(X,\zeta)$ on désigne le symbole principal de $C_{\tau-1}(X,D)$. Ainsi

Proposition 2.

Pour que (2) soit bien posé, il suffit que dans $(4)_1$ ou $(4)_2$ $x_o C^o_{\tau-1}(X,\zeta)\big|_{\xi_o = p_o^j}$ soit divisible, dans la classe des matrices de fonctions $C^\infty(\Omega\times R^\ell \setminus 0)$, par $(p_o^j - p_o^{j+S})$, $j = 1,\dots,S$.

Remarque.

Cette proposition 2 généralise la proposition 2 de [4].

Preuve de la proposition 2.

Pour montrer cette proposition, il suffit de montrer que cette condition est suffisante pour que $k(X,D)$ soit 2-décomposable.

Considérons l'expression $(4)_1$,

i.e. $$k(X,D) = (\partial_1 \circ \dots \circ \partial_\tau) I_m + C_{\tau-1}(X,D).$$

On va montrer que sous la condition de la proposition 2, il existe deux opérateurs matriciels $(m\times m)$:

$$Q_1(X,D) = (\partial_1 \circ \dots \circ \partial_S) I_m + \frac{q_1^1(X,D)}{x_o}$$

et

$$Q_2(X,D) = (\partial_{S+1} \circ \dots \circ \partial_\tau) I_m + \frac{q_2^1(X,D)}{x_o}$$

où $q_1^1(X,D)$ (respectivement $q_2^1(X,D)$) est un opérateur matriciel d'ordre $(S-1)$ (respectivement $\tau-S-1$), tels que :

$$[k(X,D)-Q_1(X,D) \circ Q_2(X,D)] \in L_m^2(\tau-2,\tau-2)$$

cette relation s'écrit

$$[C_{\tau-1}(X,D)-\partial_1 \circ \dots \circ \partial_S \circ \frac{q_2^1(X,D)}{x_o} - \frac{q_1^1(X,D)}{x_o} \circ \partial_{S+1} \circ \dots \partial_\tau$$

$$- \frac{q_1^1(X,D)}{x_o} \circ \frac{q_2^1(X,D)}{x_o}] \in L_m^2(\tau-2,\tau-2).$$

Ainsi pour qu'il existe de tels opérateurs $Q_1(X,D)$ et $Q_2(X,D)$, il suffit qu'il existe deux matrices $q_1^1(X,\zeta)$ et $q_2^1(X,\zeta)$ de fonctions de $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ polynomiales en ξ_o (respectivement) de degré $(S-1)$ et $(\tau-S-1)$, et homogènes d'ordre $(S-1)$ et $(\tau-S-1)$ en ζ, telles que :

$$(5) \qquad C^o_{\tau-1}(X,\zeta) = \frac{1}{x_o}[\prod_{j=1}^{S} \Delta_j \cdot q_2^1(X,\zeta) + \prod_{j=S+1}^{\tau} \Delta_j \cdot q_1^1(X,\zeta)]$$

$\forall (X,\zeta) \in]0,X_o[\times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$ avec $\Delta_j = \xi_o - p_o^j$ $(j = 1,\dots,\tau)$. Etant en présence de polynômes en ξ_o de degrés $(\tau-1)$, alors (5) sera équivalente à :

$$(6) \qquad \begin{cases} x_o C^o_{\tau-1}(X,\zeta)\Big|_{\xi_o=p_o^j} = \prod_{k=S+1}^{\tau} (p_o^j-p_o^k)\, q_1^1(X,\zeta)\Big|_{\xi_o=p_o^j} & (j = 1,\dots,S) \\ x_o C^o_{\tau-1}(X,\zeta)\Big|_{\xi_o=p_o^j} = \prod_{k=1}^{S} (p_o^j-p_o^k)\, q_2^1(X,\zeta)\Big|_{\xi_o=p_o^j} & j = (S+1,\dots,\tau) \\ \forall (X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0. \end{cases}$$

Comme $q_1^1(X,\zeta)$ est une matrice de polynômes en ξ_o de degré (S-1), alors sous la condition de la proposition 2, la $1^{\text{ère}}$ partie de (6) revient à la résolution de m^2 systèmes de S équations à S inconnues tous résolubles puisque ce sont des systèmes du type Van Dermonde dont le déterminant de la matrice principale est $\prod\limits_{\substack{j<K \\ k,j\in\{1,\ldots,S\}}} (p_o^j - p_o^k) \neq 0 \quad \forall (X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$ d'après $[H_2]$.

Ainsi la condition de la proposition 2 est suffisante (aussi nécessaire) pour déterminer $q_1^1(X,\zeta)$. Par ailleurs la condition de la proposition 2 est équivalente à :

$$x_o C^o_{\tau-1}(X,\zeta)\Big|_{\xi_o = p_o^{j+S}} \quad \text{divisible par} \quad (p_o^{j+S} - p_o^j) \quad j = 1,\ldots,S$$

d'où avec le même raisonnement on peut déterminer $q_2^1(X,\zeta)$ vérifiant la deuxième partie de (6) ; ce qui montre que la condition de la proposition 2 relative au développement $(4)_1$ est suffisante pour que $k(X,D)$ soit 2-décomposable. Le même raisonnement reste valable pour $(4)_2$; et pour terminer la preuve de la proposition 2, il suffit d'appliquer le théorème 1. Ainsi une condition assurant l'existence d'une solution du problème (1) est :

> Il existe un opérateur $a(X,D)$ de matrice caractéristique $A(X,\zeta)$ tel que $k(X,D) = \dfrac{h(X,D)\circ a(X,D)}{R(X,I_X)}$ vérifie une des conditions de la proposition 2.

Unicité de la solution du problème (1).

L'adjoint de l'opérateur $h(X,D) = (h_{i,j}(X,D))_{i,j=1}^m$ est égal à la matrice transposée des opérateurs adjoints de chaque élément i.e. $h^*(X,D) = {}^T(h^*_{i,j}(X,D))^m_{i,j=1}$. D'autre part, pour que la solution du problème (1) soit unique il faut et il suffit que le problème adjoint ait toujours une solution.

i.e. $\forall f \in [C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$, $\phi_j \in [H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m$ $j = 0,\dots,(t-1)$
$\exists V \in [C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ tel que :

$$(1)^* \quad \begin{cases} h^*(X,D)V = f \\ D_o^j V(X_o,\cdot) = \phi_j & j = 0,\dots,(t-1) \end{cases}$$

D'après la définition de $h^*(X,D)$, sa matrice caractéristique sera

$$H^* = H^*(X,\zeta) = {}^T[H(X,\zeta)]$$

d'où

$$(7) \qquad {}^TA\, H^* = {}^TA\,{}^TH = {}^T(HA) = {}^T(AH) = H^*\,{}^TA = R(X,\zeta)\,Im$$

et de $[H_1]$ on déduit que ${}^TA(X,I_X)$ est inversible.

Considérons $b(X,D)$ un opérateur de matrice caractéristique

$$B(X,\zeta) = {}^TA(X,\zeta)$$

On pose :

$$k'(X,D) = \frac{h^*(X,D) \circ b(X,D)}{R(X,I_X)}$$

Proposition 1 bis. [4]

Le second membre f de $(1)^*$ étant choisi dans $[C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ et les données ϕ_j dans $[H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m$ $j = 0,\dots,(t-1)$, on peut déterminer des données $\psi_j \in [H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m$ $j = 0,\dots,(\tau-1)$ en fonction des ϕ_j $(j = 0,\dots,(t-1))$, tels que pour toute solution U dans $[C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ du problème :

$$(2)^* \quad \begin{cases} k'(X,D)U = f' = \dfrac{f}{R(X,I_X)} \\ D_o^j U(X_o,\cdot) = \psi_j & j = 0,\dots,(\tau-1) \end{cases}$$

$V = b(X,D)U \in [C^{\infty}([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^{\ell}))]^m$ soit solution de $(1)^*$.

D'après (7), on peut écrire $k'(X,D)$ sous la forme :

$$(8)_1 \qquad k'(X,D) = (\partial_1 \circ \ldots \circ \partial_\tau)I_m + C_{\tau-1}(X,D)$$

ou

$$(8)_2 \qquad k'(X,D) = (\partial_\tau \circ \ldots \circ \partial_1)I_m + C_{\tau-1}(X,D)$$

Proposition 3.

Pour que le problème $(2)^*$ soit bien posé, il suffit que dans le développement $(8)_1$ ou $(8)_2$ de $k'(X,D)$, $x_o C^o_{\tau-1}(X,\zeta)\Big|_{\xi_o = p_o^j}$ soit divisible par $(p_o^j - p_o^{j+S})$ $j = 1,\ldots,S$ dans la classe $C^{\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^{\ell} \setminus 0)$.

La preuve de cette proposition se fait d'une manière analogue à celle de la proposition 2.

Après cette proposition, on va donner une condition suffisante pour que le problème (1) soit bien posé.

On dira que $h(X,D)$ vérifie la condition (D) si :

(D) Il existe deux opérateurs $a(X,D)$ et $b(X,D)$ respectivement de matrice caractéristique $A(X,\zeta)$ et ${}^{T}A(X,\zeta)$ tels que : $k(X,D)$ (resp. $k'(X,D)$) vérifie une des conditions de la proposition 2 (reps. Prop. 3).

Proposition 4.

Si $h(X,D)$ vérifie la condition (D), alors pour tous $f \in [C^{\infty}([0,X_o], H^{+}(\mathbb{R}^{\ell}))]^m$, $\phi_j \in [H^{+}(\mathbb{R}^{\ell})]^m$ $j = 0,\ldots,(t-1)$; il existe $U \in [C^{\infty}([0,X_o], H^{+}(\mathbb{R}^{\ell}))]^m$ unique telle que :

$$(1) \qquad \begin{cases} h(X,D)U = f & \text{sur } \Omega \\ D_o^j U(0,\cdot) = \phi_j & \text{sur } \mathbb{R}^{\ell} \qquad j = 0,\ldots,(t-1) \end{cases}$$

Cette proposition est un corollaire direct des proposition 2 et 3.

Reformulation de la condition (D).

On note

* $H_{t-1}(X,\zeta) = H_{t-1} = [(H_{t-1})^{A}_{B}]^{m}_{A,B=1}$, la partie homogène d'ordre $(t-1)$ en ζ du symbole $h(X,\zeta)$ de $h(X,D)$

* $$K(X,\zeta) = K = \sum_{j,k=1}^{m} \{[(H_{t-1})^{j}_{k} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2 H^j_k}{\partial\xi_\alpha \partial x_\alpha}] A^l_j A^k_j - \frac{1}{2} H^j_k \{A^l_j, A^k_l\}.\}$$

Le polynôme sous-caractéristique de l'opérateur $h(X,D)$ [23]

* $$C^j(X,\xi) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j, j+S}}^{\tau} (p^j_o(X,\xi) - p^k_o(X,\xi)) \qquad j = 1,\dots,S.$$

* $$L^j_\varepsilon(X,\xi) = \left[K - \frac{\varepsilon}{2} R(X,I_X)\cdot A^l_l \cdot C^j(X,\xi)\cdot\{\Delta_j,\Delta_{j+S}\}\right]_{\xi_o = p^j_o}$$

$j = 1,\dots,S$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

La proposition suivante et sa démonstration sont inspirées de la proposition 5 de [4] (*)

Proposition 5.

$x_o L^j_1(X,\xi)$ (respectivement $x_o L^j_{-1}(X,\xi)$) est divisible dans la classe des fonctions $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ par $(p^j_o - p^{j+1}_o)$ $j = 1,\dots,S$ si et seulement si : il existe deux opérateurs $a(X,D)$ et $b(X,D)$ de matrices caractéristiques $A(X,\zeta)$ et ${}^{T}A(X,\zeta)$ tels que dans $(4)_1$ et $(8)_2$

(*) Je remercie M. D. Gourdin de m'avoir communiqué les démonstrations détaillées de cet article.

(respectivement $(4)_2$ et $(8)_1$) $C^o_{\tau-1}(X,\zeta)\Big|_{\xi_o=p^j_o}$ est divisible par $(p^j_o-p^{j+S}_o)$ $j=1,\ldots,S$.

Preuve :

Nécessité de la condition (D).

On a :

$$(4)_1 : \qquad \frac{h(X,D) \text{ o } a(X,D)}{R(X,I_X)} = (\partial_1 \text{ o } \ldots \text{ o } \partial_\tau)\mathrm{Im} + C_{\tau-1}(X,D)$$

si on désigne par $A_{\tau-t-1}(X,\zeta)$ la partie homogène d'ordre $(\tau-t-1)$ du symbole $a(X,\zeta)$ de $a(X,D)$, on aura :

$$\frac{1}{R(X,I_X)}\{H\, A_{\tau-t-1} + H_{t-1}\, A + \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} H \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A\} = C^o_{\tau-1}(X,\zeta) +$$

$$+ \sum_{\substack{j>k \\ j,k\in\{1,\ldots,\tau\}}} \Big[\sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\Delta_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta_j\Big] \prod_{\substack{\gamma\neq j,k \\ \gamma=1}}^{\tau} \Delta_\gamma \cdot I_m$$

Par un calcul simple on peut montrer : pour $\alpha \in \{0,\ldots,\ell\}$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha}(X,\zeta) = R(X,I_X)\left\{\sum_{\substack{k>j \\ k,j\in\{1,\ldots,\tau\}}} \Big[\frac{\partial\Delta_j}{\partial\xi_\alpha}\cdot\frac{\partial\Delta_k}{\partial x_\alpha} \cdot \prod_{\substack{\gamma\neq j,k \\ \gamma=1}}^{\tau}\Delta_\gamma\Big] + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k<j \\ k,j\in\{1,\ldots,\tau\}}} \Big[\frac{\partial\Delta_j}{\partial\xi_\alpha}\cdot\frac{\partial\Delta_k}{\partial x_\alpha} \cdot \prod_{\substack{\gamma\neq j,k \\ \gamma=1}}^{\tau}\Delta_\gamma\Big] + \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\partial^2\Delta_k}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha} \prod_{\substack{\gamma\neq k \\ \gamma=1}}^{\tau}\Delta_\gamma\Big]\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,[R(X,I_X)] \sum_{k=1}^{\tau} \Big[\frac{\partial\Delta_k}{\partial\xi_\alpha} \cdot \prod_{\substack{\gamma\neq k \\ \gamma=1}}^{\tau}\Delta_\gamma\Big]$$

d'où pour $n \in \{1,\dots,S\}$, $\alpha \in \{0,\dots,\ell\}$ $\exists f_\alpha^n \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ tel que

$$R(X,I_X)\left\{\sum_{\substack{k>j\\ k,j\in\{1,\dots,\tau\}}} \frac{\partial\Delta_j}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\Delta_k}{\partial x_\alpha}\prod_{\substack{\gamma\neq j,k\\ \gamma=1}}^{\tau}\Delta_\gamma\right\}_{\xi_o=p^n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha}(X,\zeta) + R(X,I_X)\prod_{\substack{\gamma\neq n,n+S\\ \gamma=1}}^{\tau}\Delta_\gamma \cdot \left[\frac{\partial\Delta_n}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\Delta_{n+S}}{\partial x_\alpha} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial\Delta_n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Delta_{n+S}}{\partial\xi_\alpha}\right]\right\}_{\xi_o=p_o^n} + (p_o^n-p_o^{n+S})f_\alpha^n$$

Ainsi :

(*) Il existe $a(X,D)$ tel que dans $(4)_1$ $x_o\, C^o_{\tau-1}(X,\zeta)_{\xi_o=p_o^n}$ soit divisible par $(p_o^n-p_o^{n+S})$ $(n = 1,\dots,S)$ si et seulement si : il existe une matrice $A_{\tau-t-1}$ telle que :

$$x_o\{HA_{\tau-t-1} + H_{t-1}A + \sum_{\alpha=0}^{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}H\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}A - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R(X,\zeta)}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha}I_m\right] -$$

$$- \frac{1}{2}R(X,I_X)\prod_{\substack{\gamma\neq n,n+S\\ \gamma=1}}^{\tau}\Delta_\gamma\{\Delta_n,\Delta_{n+S}\}\}_{\xi_o=p_o^n} \quad \text{soit divisible par } (p_o^n-p_o^{n+S})$$

$n = 1,\dots,S.$

Comme $H\,A = R(X,\zeta)I_m$, alors :

$$\sum_{\alpha=0}^{\ell}\left[\frac{\partial H}{\partial\xi_\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}A - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R(X,\zeta)}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha}\right] = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell}\left[\frac{\partial H}{\partial\xi_\alpha}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}H\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}A\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha}\cdot A + H\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha}\right].$$

D'où si on utilise cette égalité dans (*) et si on multiplie à gauche par $A(X,\zeta)_{\xi_o=p_o^n}$, en prenant le terme de la 1ère ligne et de la 1ère colonne dans l'expression finale et en tenant compte du fait que $\Delta_n(\xi_o=p_o^n) = R(X,\zeta)_{\xi_o=p_o^n} = 0$ on déduit :

(9) s'il existe $a(X,D)$ tel que dans $(4)_1$ $x_o C^o_{\tau-1}(X,\zeta)_{\xi_o=p_o^n}$ soit divisible par $(p_o^n-p_o^{n+S})$ $n = 1,\ldots,S$ alors :

$$x_o\{\sum_{j,k=1}^{m} \{A_j^1 (H_{t-1})_k^j A_1^k + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell} A_j^1 [\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} H_k^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_1^k - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_k^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_1^k] -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell} A_j^1 \frac{\partial^2 H_k^j}{\partial\xi_\alpha\partial x_\alpha} A_1^k\}_{\xi_o=p_o^n} - \frac{1}{2} R(X,I_X)[A_1^1\cdot\{\Delta_n,\Delta_{n+S}\}\cdot \prod_{\substack{\gamma\neq n,n+S\\ \gamma=1}}^{\tau} \Delta_\gamma]_{\xi_o=p_o^n}\}$$

est divisible par $(p_o^n-p_o^{n+S})$ $n = 1,\ldots,S$.

Comme $A\,H = R(X,\zeta)Im$, on peut montrer que pour $n \in \{1,\ldots,S\}$ et $\alpha \in \{0,\ldots,\ell\}$ $\exists f_\alpha^n$ et g_α^n dans $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{m} [A_j^1 \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} H_k^j]_{\xi_o=p_o^n} = - \sum_{j=1}^{m} [H_k^j \frac{\partial A_j^1}{\partial\xi_\alpha}]_{\xi_o=p_o^n} + (p_o^n-p_o^{n+S})\, f_\alpha^n \qquad \text{et}$$

$$\sum_{j=1}^{m} [A_j^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_k^j]_{\xi_o=p_o^n} = - \sum_{j=1}^{m} [H_k^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_j^1]_{\xi_o=p_o^n} + (p_o^n-p_o^{n+S})\, g_\alpha^n .$$

Ainsi si on reporte ces égalités dans (9), en tenant compte de l'expression du sous-caractéristique K on aura : pour qu'il existe $a(X,D)$ tel que dans $(4)_1$ $x_o C^o_{\tau-1}(X,\zeta)_{\xi_o=p_o^n}$ soit divisible par $(p^n-p_o^{n+S})$ $n = 1,\ldots,S$ il faut que :

$$x_o\Big[K(X,\zeta) - \frac{1}{2} A_1^1 \; R(X,I_X)\cdot\{\Delta_n,\Delta_{n+S}\} \prod_{\substack{\gamma\neq n,n+S\\ \gamma=1}}^{\tau} \Delta_\gamma\Big]_{\xi_o=p_o^n}$$ soit divisible par

$(p_o^n-p_o^{n+S})$ $n = 1,\dots,S$.

Ce qui achève la preuve de la nécessité.

<u>*Suffisance de la condition*</u> (D).

On se contentera de montrer que si $x_oL_1^j(X,\zeta)$ est divisible par $(p_o^j-p_o^{j+S})$ $j = 1,\dots,S$, alors il existe un opérateur $a(X,D)$ de matrice caractéristique $A(X,\zeta)$ tel que dans le développement $(4)_1$ de $k(X,D) = \dfrac{k(X,D)oa(X,D)}{R(X,I_X)}$, $x_oC^o_{\tau-1}(X,\zeta)\Big|_{\xi_o=p_o^n}$ est divisible par $(p_o^n-p_o^{n+1})$ $n = 1,\dots,S$; et par le même calcul on peut montrer qu'il existe un opérateur $b(X,D)$ de matrice caractéristique ${}^TA(X,\zeta)$ tel que dans le développement $(8)_2$ de $k'(X,D) = \dfrac{h^*(X,D)ob(X,D)}{R(X,I_X)}$, $x_oC^o_{\tau-1}(X,\zeta)\Big|_{\xi_o=p_o^n}$ est divisible par $(p_o^n-p_o^{n+S})$ $n = 1,\dots,S$.

D'après (*) (page 65), le problème est de déterminer une matrice $A_{\tau-t-1}(X,\zeta)$ dont les éléments soient dans $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$, homogènes d'ordre $(\tau-t-1)$ en ζ et polynômes de degrés $(\tau-t-1)$ en ξ_o telle que :

$$x_o\{HA_{\tau-t-1}+H_{t-1}A + \sum_{\alpha=0}^{\ell}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} H \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A - \frac{\partial^2(HA)}{\partial\xi_\alpha-\partial x_\alpha}\Big] - \frac{R(X,I_X)}{2}\{\Delta_n,\Delta_{n+S}\}C^n I_m\}_{\xi_o=p_o^n}$$

est divisible par $(p_o^n-p_o^{n+S})$ $n = 1,\dots,S$.

Posons $(L_B^A)_{A,B=1}^m$ la somme des quatre derniers termes de cette expression (B désigne le numéro de la colonne) ; on voit qu'il est suffisant de montrer que si l'on fixe B dans $\{1,\dots,m\}$ on peut trouver un vecteur $((A_{\tau-t-1})_B^C)_{c=1}^m$ tel que :

$$(10)\begin{cases} \sum_{c=1}^{m} [H_C^{\hat{A}}(A_{\tau-t-1})_B^C + L_B^{\hat{A}}]_{\xi_o=p_o^n} = 0 & \hat{A} = 2,\dots,m \text{ et} \\ x_o[\sum_{c=1}^{m} H_C^1(A_{\tau-t-1})_B^C + L_B^1]_{\xi_o=p_o^n} & \text{divisible par } (p_o^n-p_o^{n+S}) \quad n = 1,\dots,S. \end{cases}$$

On va montrer que cela est possible si $x_o L_1^n(X,\xi)$ est divisible par $(p_o^n-p_o^{n+S})$ $n = 1,\dots,S$; mais avant on fait les rappels suivant sur les co-facteurs en utilisant les notations de J. Vaillant [22] et la convention de sommation d'Einstein.

Si $E \neq A$ $\quad H_C^E\, A'^{BC}_{AD} = A'^B_A\, \delta_D^E$ $\quad$ (δ_D^E le symbole de Kronecker)

$$A'^{AB}_{CD} = -\, A'^{AB}_{DC}$$

$$A'^1_1\, A'^A_F - A'^1_F\, A'^A_1 = A^{1A}_{1F} \det H$$

Cette dernière identité est dite de Jacobi.

Soit $n \in \{1,\dots,S\}$, on a : $\det\left[\left(H^{\hat{A}}_{\hat{C}}\right)_{\hat{A},\hat{C}=1}^{m}\right] = A'^1_1 = \prod_{j=1}^{\sigma} (H_j)^{\nu_j-1} A_1^1$. D'où de l'hypothèse $[H_4]$ on déduit :

$$[\det (H^A_{\hat{C}})_{\hat{A},\hat{C}=1}^{m}]_{\xi_o=p_o^n(X,\xi)} \neq 0 \qquad \forall(X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \smallsetminus 0$$

par suite, si on choisit dans (10) $[A_{\tau-t-1}(X,\zeta)]^1_B\big|_{\xi_o=p_o^n} \equiv 0$ sur $\Omega\times\mathbb{R}^\ell \smallsetminus 0$.

Alors la solution du 1$^{\text{ier}}$ système d'équations de (10) sera :

$$(11)\begin{cases} [A_{\tau-t-1}(X,\zeta)]^1_B\big|_{\xi_o=p_o^n} \equiv 0 & \Omega \times \mathbb{R}^\ell \smallsetminus 0 \\ [A_{\tau-t-1}(X,\zeta)]^{\hat{C}}_B\big|_{\xi_o=p_o^n} = -[\frac{1}{A'^1_1}\, A'^{1\hat{C}}_{1\hat{A}}\, L^{\hat{A}}_B]_{\xi_o=p_o^n} & \hat{C} = 2,\dots,m. \end{cases}$$

En reportant les solutions (11) dans la dernière expression de (10). On aura :

$$x_o[H^1_C(A_{\tau-t-1})^C_B + L^1_B]_{\xi_o=p^n_o} = x_o[-\frac{1}{A'^1_1} H^1_{\hat{C}} A'^{1\hat{C}}_{1\hat{A}} L^{\hat{A}}_B]_{\xi_o=p^n_o} +$$

$$+ x_o[L^1_B]_{\xi_o=p^n_o} = x_o[\frac{1}{A'^1_1}(H^1_{\hat{C}} A'^{1\hat{C}}_{\hat{A}1} L^{\hat{A}}_B + A'^1_1 L^1_B]_{\xi_o=p^n_o} =$$

$$= x_o[\frac{1}{A'^1_1} A'^1_A L^A_B]_{\xi_o=p^n_o} .$$

En remplaçant L^A_B par leurs expressions et en utilisant l'identité de Jacobi on aboutit à :

$$x_o[H^1_C(A_{\tau-t-1})^C_B + L^1_B]_{\xi_o=p^n_o} = x_o\left[\frac{(K - \frac{1}{2} A^1_1 R(X,I_X)\{\Delta_n,\Delta_{n+S}\}C^n(X,\zeta))A^1_B}{(A^1_1)^2}\right]_{\xi_o=p^n_o} +$$

$$+ (p^n_o - p^{n+S}_o) f^n_B .$$

Ainsi si $x_o\ L^n_1(X,\xi)$ est divisible par $(p^n_o-p^{n+S}_o)$ alors on peut déterminer $(A_{\tau-t-1}(X,p^n_o(X,\xi),\xi))^C_B$ qui vérifie (10) et par suite on peut déterminer $A_{\tau-t-1}(X,\xi_o,\xi)$ tel que (10) soit vérifié, ce qui termine la preuve de la suffisance de la condition (D).

Pour $x_o L^j_{-1}(X,\xi)$ les calculs sont exactement les mêmes.
Ainsi : on dit que "la condition de Levi généralisée" est vérifiée si :

$x_o L^j_1(X,\xi)$ est divisible par $(p^j_o-p^{j+S}_o)$ $\quad j = 1,\ldots,S.$

ou $x_o L^j_{-1}(X,\xi)$ est divisible par $(p^j_o-p^{j+S}_o)$ $\quad j = 1,\ldots,S.$

et on aura :

Théorème 2.

Si la "condition de Levi généralisée" est vérifiée par $h(X,D)$ alors : $\forall f \in [C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ et $\phi_j \in [H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)]^m$ $j = 0,\dots,(t-1)$; $\exists\, \mathcal{U} \in [C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))]^m$ unique telle que :

$$(1) \quad \begin{cases} h(X,D)\cdot\mathcal{U} = f & \text{sur } \Omega \\ D_o^j\mathcal{U}(0,\cdot) = \phi_j & \text{sur } \mathbb{R}^\ell \qquad j = 0,\dots,(t-1) \end{cases}$$

Remarques.

1. Dans le cas où $h(X,D)$ est tel que : $\forall j \in \{1,\dots,S\}$ $\exists f_j \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$ tel que :

$$p_o^j(X,\xi) - p_o^{j+S}(X,\xi) = x_o f_j(X,\zeta) \qquad \forall (X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$$

avec $f_j(X,\xi) \neq 0$, $\forall (X,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$ alors le problème de Cauchy associé à $h(X,D)$ est bien posé d'après le théorème 2, ce résultat ne pouvait être déduit de [4].

2. Dans [18], pour donner la condition de "Levi généralisée" (2) (p.767) affaiblissant la condition de Levi (1) (p. 767), Y. Ohya suppose l'hypothèse suivante : $(p_o^j-p_o^{j+S})$ divisible, dans la classe des fonctions $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$, par x_o. Cette hypothèse n'est pas vraiment nécessaire, c'est-à-dire que sans cette hypothèse la condition (2) est plus faible que la condition (1). Pour s'en convaincre, il suffit d'exhiber un opérateur scalaire $P(X,D)$ d'ordre deux (sur $[0,X_o] \times \mathbb{R}$) à caractéristiques de multiplicité variable, ne varifiant pas l'hypothèse précédente et tel que la condition de Levi généralisée soit vérifiée sans que la condition (1) le soit. Par la même on aura montré que notre condition de Levi généralisée est plus faible que celle de [4] même dans le cas où aucune racine caractéristique n'est

de multiplicité deux sur l'hyperplan des données de Cauchy (on utilise le fait que C^∞ n'est pas intègre).

Soient $K_j = R \times [-j,+j]$ $(j = 1,2,3)$, et f_1, f_2 deux fonctions de $C^\infty([0,X_o] \times \mathbb{R})$ indépendantes de x_o, telles que :

$$f_1(X) = f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } K_2 \\ 1 & \text{sur } \complement K_3 \end{cases}$$

$$f_2(X) = f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } \complement K_2 \\ 1 & \text{sur } K_1 \end{cases}$$

Alors $f_1\, f_2 = 0$ sur $\Omega = [0,X_o] \times \mathbb{R}$. Considérons l'opérateur suivant :

$$P(X,D) = D_o^2 - ((x_o+f_1)D)D_o + P_1(X,D)$$

donc ses racines caractéristiques sont

$$\lambda_1(X,\xi) = (x_o+f_1(x))\xi \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 \equiv 0$$

d'où $(\lambda_1-\lambda_2)$ n'est pas divisible par x_o dans $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R} \setminus 0)$ par aileurs :

$$K(X,\zeta) = P_1(X,\zeta) + \frac{1}{2}\,\xi(1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_o}) + \frac{1}{2}\,\xi_o\,\frac{\partial f_1}{\partial x}$$

d'où :

$$L(X,\zeta) = K(X,\zeta) + \frac{1}{2}\{\Delta_1,\Delta_2\} = P_1(X,\zeta) + \frac{1}{2}\,\xi_o \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

Comme on sait que la condition de Levi généralisée (2) de [18] est équivalente à

$$x_o\left[K(X,\zeta) + \frac{1}{2}\,\{\Delta_1,\Delta_2\}\right]_{\xi_o=\lambda_1} \qquad \text{divisible par} \quad (\lambda_1-\lambda_2)$$

et que l'on a :

$$x_o\left[K(X,\zeta) + \frac{1}{2}\{\Delta_1,\Delta_2\}\right]_{\xi_o=\lambda_1} = x_o\left[P_1(X,\zeta) + \frac{1}{2}\xi_o \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}\right]_{\xi_o=\lambda_1}$$

alors si on choisit $P_1(X,\zeta) = -\frac{1}{2}\xi_o \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \xi \cdot f_2$. La condition de Levi généralisée est vérifiée, car dans ce cas,

$$x_o\left[K(X,\zeta) + \frac{1}{2}\{\Delta_1,\Delta_2\}\right]_{\xi_o=\lambda_1} = x_o\xi \cdot f_2 = (x_o+f_1)\cdot f_2 \cdot \xi \ .$$

Par contre la condition (1) de [18] ne l'est pas.

i.e. $[L(X,\zeta)]_{\xi_o=\lambda_1}$ n'est pas divisible par $(\lambda_1-\lambda_2)$ car sinon on aurait : $\exists g \in C^\infty([0,X_o]\times\mathbb{R})$ tel que

$$f_2 \cdot \xi = (x_o + f_1)\cdot g \cdot \xi$$

donc $\forall x \in [-2,2]$ et $x_o = 0$, $x_o + f_1(x) = 0$ d'où $\forall x \in [-1,1]$ $f_2(x) = 0$ ce qui est en contradiction avec la construction de f_2.

Ainsi :

$$P(X,D) = (D_o-(x_o+f_1)D)D_o + f_2D - \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x}D_o$$

vérifie la condition de Levi généralisée (2) de [18] sans vérifier la condition (1) ni la condition de divisibilité de $\lambda_1-\lambda_2$ par x_o dans $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R} \setminus 0)$.

CHAPITRE IV

OPERATEURS FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES BIEN DECOMPOSABLES ET LE PROBLEME DE CAUCHY ASSOCIE (*)

§.1 - *Opérateurs bien décomposables.*

On considère $P(X,D)$ un opératur de type Kowalewskien d'ordre m, à caractéristiques de multiplicité variable au plus $\nu \leq m$. On suppose que le symbole principal $P_m(X,\zeta)$ de $P(X,D)$ se factorise sous la forme :

$$P_m(X,\zeta) = \prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{k_j} (\xi_o - \lambda_j^i(X,\xi))$$

avec : $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_p = \nu$, et les $\lambda_j^i \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^\ell \setminus 0)$, homogènes d'ordre un en ξ à valeurs réelles, telles que :

i) $\forall j \in \{1,\ldots,p\}$ $\exists (X^j,\xi^j) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0$ tel que : $\lambda_j^1(X^j,\xi^j) = \ldots. = \lambda_j^{k_j}(X^j,\xi^j)$, (sans que les $(\lambda_j^i)_{i=1}^{k_j}$ soient identiques sur $\Omega \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0)$.

ii) $\forall i \in \{1,\ldots,\nu\}$, $\prod_{j\in I_i} (\xi_o - \lambda_j^i(X,\xi))$ (où $I_i = \{j \;/\; k_j \geq i\}$) est un polynôme en ξ_o strictement hyperbolique vérifiant :

$$\inf_{\substack{j\neq j' \\ j,j'\in I_i}} \{|\lambda_j^i(X,\xi)-\lambda_{j'}^i(X,\xi)| \;,\; X \in \Omega,\; |\xi| = 1\} > 0 \quad (i = 1,\ldots,\nu)$$

Posons : $\partial_j^i = D_o - \lambda_j^i(X,D_x)$, où $\lambda_j^i(X,D_x)$ est l'opérateur pseudo-différentiel en x de symbole $\lambda_j^i(X,\xi)$;

(*) Dans un travail qui sera publié ultérieurement [7], on étend cette notion à une classe contenant à la fois les opérateurs ν-décomposables et les opérateurs bien décomposables matriciels, et l'on résout le problème de Cauchy dans $C^\infty(\Omega)$.

$$m_1 = \text{Card } I_i, \qquad M_i = \sum_{j=1}^{i} m_j \qquad i \in \{1,\dots,\nu\}.$$

Définition 1.

On dit que $P(X,D)$ vérifie la condition de bonne décomposition si : il existe des opérateurs $B_j(X,D)$ $(j = 2,\dots,\nu)$ différentiels en x_o et pseudo-différentiels en x, d'ordre $(M_{(j-1)}-(j-1))$ et de symboles :

$$B_j(X,\zeta) = \sum_{k=0}^{M_{j-1}-(j-1)} b_k(X,\xi)(\xi_o)^{M_{j-1}-(j-1)-k} \qquad \text{avec}$$

$b_k \in C^\infty([0,X_o], S^k(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \setminus 0))$ $\qquad k = 0,\dots,M_{(j-1)}-(j-1)$,

tels que :

$$P(X,D) - (\partial_1^1 o \dots o \partial_{m_1}^1 o \partial_1^2 o \dots o \partial_{m_2}^2 o \dots o \partial_1^\nu o \dots o \partial_{m_\nu}^\nu +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\nu} B_j(X,D) \partial_1^j o \dots o \partial_{m_j}^j o \dots o \partial_1^\nu o \dots o \partial_{m_\nu}^\nu)$$

est d'ordre $(m-\nu)$.

On voit que cette définition est une extension naturelle de la notion de bonne-décomposition au sens de J.C. De Paris [3] inspirée par la condition (C) introduite dans le cas d'opérateurs matriciels à caractéristiques de multiplicité constante dans [5] et par un autre article [6] ; cette définition m'a été suggérée par D. Gourdin.

Théorème 1.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m vérifiant la condition de bonne décomposition ; alors pour $f \in C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$, $\phi_j \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)$ $(j = 0,\dots,m-1)$ données, il existe $U \in C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ unique telle que :

$$(1) \qquad \begin{cases} P(X,D)U = f & \text{sur } \Omega \\ D_o^j U(0,\cdot) = \phi_j & \text{sur } \mathbb{R}^\ell \quad j = 0,\dots,(m-1) \end{cases}$$

de plus U vérifie les inégalités d'énergie suivantes :

$$\forall n \in N, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x_o \in [0,X_o].$$

$$\|D^{n+m-\nu}U(x_o)\|_s \leq C\{\sum_{j=0}^{m-1} \|\phi_j\|_{s+n+m-j} + \|D^n f(0)\|_s + \int_0^{x_o} \|D^n f(\tau)\|_s \, d\tau\}.$$

Preuve :

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur la propriété 4.1 qu'on a rappelée au chapitre I et sur une transformation de (1) qui nous permet d'utiliser cette propriété pour mettre en évidence des inégalités d'énergie relatives à $P(X,D)$ et à son adjoint $P^*(X,D)$ et conclure comme dans le premier chapitre.

Ainsi soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m vérifiant la condition de bonne décomposition.

Posons : $\partial_1^j \circ \ldots \circ \partial_{m_j}^j = R_j(X,D) \quad j = 1,\ldots,\nu$ donc on a :

$$P(X,D) - R_1 \circ \ldots \circ R_\nu - \sum_{j=2}^{\nu} B_j(X,D)R_j \circ \ldots \circ R_\nu = Q_{m-\nu}(X,D) \tag{2}$$

où $B_j(X,D)$ $(j = 2,\ldots,\nu)$ sont des opérateurs d'ordres $(M_{j-1}-(j-1))$ et $Q_{m-\nu}(X,D)$ d'ordre $(m-\nu)$.

1.1. Inégalités d'énergie relatives à $P(X,D)$.

Soit $U \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$, on pose :

$$\begin{cases} P(X,D)U = f & \text{sur } \Omega \\ V_\nu = U & \text{sur } \Omega \\ R_j(X,D)V_j = V_{j-1} & \text{sur } \Omega \quad j = \nu,\ldots,2. \end{cases}$$

alors, en utilisant (2) on déduit le système suivant :

$$(3)\quad \begin{cases} R_j(X,D)V_j(X) = V_{j-1}(X) \qquad j = \nu,\dots,2 \\ R_1(X,D)V_1(X) = -\sum\limits_{j=2}^{\nu} B_j(X,D)V_{j-1}(X) - Q_{m-\nu}(X,D)V_\nu(X) + f \\ \forall X \in \Omega \quad \text{avec} \quad V_\nu = U \end{cases}$$

Proposition 1.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ (indépendante de U) tel que :

$$\|D^{n+m-\nu}U(x_o)\|_s \leq C\{\sum_{j=0}^{m-1} \|D_o^j U(0)\|_{s+n+m-j} + \|D^n f(0)\|_s + \int_0^{x_o} \|D^n f(\tau)\|_s d\tau\}$$

$\forall x_o \in [0,X_o]$.

Preuve de la proposition 1.

Les $R_j(X,D)$ étant strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,\underbrace{0,\dots,0}_{\ell})$, d'après la propriété 4.1 du chapitre 1, on aura : pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ (indépendantes des V_j) tel que : $\forall j \in \{2,\dots,\nu\}$.

$$(3.1)\quad \begin{aligned} \left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+M_j-j} V_j(x_o)\|_s)\right| &= \left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+M_{j-1}-(j-1)+m_j-1} V_j(x_o)\|_s)\right| \leq \\ &\leq C\{ \|D^{n+M_j-j} V_j(x_o)\|_s + \|D^{n+M_{j-1}-(j-1)} V_{j-1}(x_o)\|_s\} \quad \text{p.p. } [0,X_o]. \end{aligned}$$

et de la dernière équation de (3) on déduit :

$$(3.2)\quad \begin{aligned} \left|\frac{d}{dx_o}(\|D^{n+m_1-1} V_1(x_o)\|_s)\right| &\leq C\{ \|D^{n+m_1-1} V_1(x_o)\|_s + \|D^n f(x_o)\|_s + \\ &\|D^n(Q_{m-\nu}(X,D)V_\nu)(x_o)\|_s + \sum_{j=2}^{\nu} \|D^n(B_j(X,D)V_{j-1})(x_o)\|_s\} \quad \text{p.p } [0,X_o]. \end{aligned}$$

$Q_{m-\nu}(X,D)$ étant d'ordre $(m-\nu)$, et les $B_j(X,D)$ d'ordres $(M_{j-1}-(j-1))$ $(j = 2,\dots,\nu)$ on aura alors : $\exists C > 0$ (indépendante des V_j) tel que :

$$\|D^n(Q_{m-\nu}(X,D)V_\nu)(x_o)\|_s \leq C\,\|D^{n+m-\nu}V_\nu(x_o)\|_s$$

et $\qquad \|D^n(B_j(X,D)V_{j-1})(x_o)\|_s \leq C\,\|D^{n+M_{j-1}-(j-1)}V_{j-1}(x_o)\|_s \quad j = 2,\dots,\nu$

$\forall x_o \in [0,X_o]$.

Alors, en reportant ces inégalités dans (3.2) et en faisant la somme membre à membre avec (3.1) on aura :

$$\sum_{j=1}^{\nu}\left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+M_j-j}V_j(x_o)\|_s\right)\right| \leq C\{\sum_{j=1}^{\nu}\|D^{n+M_j-j}V_j(x_o)\|_s + \|D^n f(x_o)\|_s\} \text{ p.p. } [0,X_o]$$

D'où, on posant :

$$\phi(x_o) = \sum_{j=1}^{\nu}\|D^{n+M_j-j}V_j(x_o)\|_s \qquad x_o \in [0,X_o]$$

on obtient :

$$\left|\frac{d}{dx_o}\phi(x_o)\right| \leq C\{\phi(x_o) + \|D^n f(x_o)\|_s\} \qquad \text{p.p. } [0,X_o].$$

La multiplication des deux membres de cette inégalité par e^{-cx_o} et son intégration sur $[0,x_o]$ (pour $x_o \in [0,X_o]$) donne :

$$e^{-cx_o}\phi(x_o) \leq \phi(0) + C^{ste}\int_0^{x_o}\|D^n f(\tau)\|_s d\tau \qquad \forall x_o \in [0,X_o].$$

Comme : $V_{j-1} = R_j(X,D)V_j$, $\qquad j = 2,\dots,\nu$, $\qquad V_\nu = U$, et

$$\|D^{n+m-\nu}V_\nu(x_o)\|_s \leq \phi(x_o) \qquad \forall x_o \in [0,X_o] \;;$$

On peut facilement déduire l'existence d'une constante $C > 0$ (indépendante de U et de $x_o \in [0,X_o]$) telle que :

$$\|D^{n+m-\nu}\mathcal{U}(x_o)\|_s \leq C\{\|D^{n+m-1}\mathcal{U}(0)\|_s + \int_0^{x_o}\|D^n f(\tau)\|_s d\tau\} \quad \forall x_o \in [0,X_o]$$

$P(X,D)$ étant de type Kowalewskien d'ordre m, pour terminer la preuve de la proposition 1., il suffit d'utiliser la propriété 3 du chapitre I.

1.2. Inégalités d'énergie relatives à $P^*(X,D)$.

$P(X,D)$ étant un opérateur vérifiant la condition de bonne décomposition, alors en passant à l'adjoint dans (2), on aura :

$$(2)^* \qquad P^*(X,D) - R_\nu^* \circ\ldots\circ R_1^* - \sum_{j=2}^{\nu} R_\nu^* \circ\ldots\circ R_j^* \circ B_j^*(X,D) = Q_{m-\nu}^*(X,D)$$

Pour $\mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$ on pose :

$$\begin{cases} P^*(X,D)\mathcal{U} = f \\ \mathcal{V}_o = \mathcal{U} \\ R_j^*(X,D)\mathcal{V}_{j-1} = \mathcal{V}_j - B_{j+1}^*(X,D)\mathcal{V}_o & j = 1,\ldots,\nu-1 \end{cases}$$

Alors de $(2)^*$ on déduit le système suivant :

$$(3)^* \qquad \begin{cases} \mathcal{V}_o(X) = \mathcal{U}(X) \\ R_j^*(X,D)\mathcal{V}_{j-1}(X) = \mathcal{V}_j(X) - B_{j+1}^*(X,D)\mathcal{V}_o(X) & j = 1,\ldots,\nu-1 \\ R_\nu^*(X,D)\mathcal{V}_{\nu-1}(X) = f(X) - Q_{m-\nu}^*(X,D)\mathcal{V}_o(X) \\ \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Proposition 2.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ tel que : $\forall \mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$

$$\|D^{n+m-\nu}\mathcal{U}(x_o)\|_s \leq C\{\sum_{j=0}^{m-1}\|D_o^j\mathcal{U}(X_o)\|_{s+m+n+\nu-j} + \|D^{n+\nu}f(x_o)\|_s + \int_{x_o}^{X_o}\|D^{n+\nu}f(\tau)\|_s d\tau\}$$

$\forall x_o \in [0,X_o]$, avec $f = P^*(X,D)\mathcal{U}$ sur Ω.

Les $R_j^*(X,D)$ sont strictement hyperboliques suivant la direction $N = (1,\underbrace{0,\ldots,0}_{\ell})$ $(j = 1,\ldots,\nu)$ comme opérateurs adjoints d'opérateurs strictement hyperboliques suivant la même direction N.

Ainsi d'après la propriété 4.1 du chapitre I on aura : pour $n \in \mathbb{N}$ $s \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ (indépendant des V_j) tel que : $\forall j \in \{1,\ldots,\nu\}$.

$$(3.1)^* \quad \left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-M_{j-1}+(j-1)} V_{j-1}(x_o)\|_s\right)\right| = \left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{(n+m-M_j+j)+m_j-1} V_{j-1}(x_o)\|_s\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\{ \|D^{n+m-M_{j-1}+(j-1)} V_{j-1}(x_o)\|_s + \|D^{n+m-M_j+j}(R_j^*(X,D)V_{j-1})(x_o)\|_s\} \text{ p.p. } [0,X_o]$$

D'après les $(\nu-1)$ premières équations de $(3)^*$, si on remplace dans $(3.1)^*$ $R_j^*(X,D)V_{j-1}$ par son expression on aura : $\forall j \in \{1,\ldots,\nu-1\}$

$$(3.2)^* \quad \left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-M_{j-1}+(j-1)} V_{j-1}(x_o)\|_s\right)\right| \leqslant C\{ \|D^{n+m-M_{j-1}+(j-1)} V_{j-1}(x_o)\|_s +$$
$$+ \|D^{n+m-M_j+j} V_j(x_o)\|_s + \|D^{n+m-M_j+j}(B_{j+1}^*(X,D)V_o)(x_o)\|_s\} \text{ p.p. } [0,X_o]$$

et en remplaçant dans $(3.1)^*$ $R_\nu^*(X,D)V_{\nu-1}$ par son expression donnée dans $(3)^*$ on aura : (puisque $m = M_\nu$)

$$(3.3)^* \quad \left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-M_{\nu-1}+(\nu-1)} V_{\nu-1}(x_o)\|_s\right)\right| \leqslant C\{ \|D^{n+m-M_\nu+(\nu-1)} V_{\nu-1}(x_o)\|_s +$$
$$+ \|D^{n+\nu}(Q_{m-\nu}^*(X,D)V_o)(x_o)\|_s + \|D^{n+\nu}f(x_o)\|_s\} \quad \text{p.p. } [0,X_o].$$

Les $B_{j+1}^*(X,D)$ étant d'ordre (M_j-j) $(j = 1,\ldots, (\nu-1))$, et $Q_{m-\nu}^*(X,D)$ d'ordre $(m-\nu)$, alors de $(3.2)^*$ et $(3.3)^*$ on déduit :

$$\left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-M_{j-1}+(j-1)} V_{j-1}(x_o)\|_s\right)\right| \leqslant C\{ \|D^{n+m-M_{j-1}+(j-1)} V_{j-1}(x_o)\|_s +$$

$$+ \|D^{n+m-M_j+j} V_j(x_o)\|_s + \|D^{n+m} V_o(x_o)\|_s\} \qquad \text{p.p. } [0,X_o]. \ (j=1,\ldots,(\nu-1))$$

et :

$$\left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-M_{\nu-1}+(\nu-1)} V_{\nu-1}(x_o)\|_s\right)\right| \leqslant C\{ \|D^{n+m-M_{\nu-1}+(\nu-1)} V_{\nu-1}(x_o)\|_s +$$

$$\|D^{n+m} V_o(x_o)\|_s + \|D^{n+\nu} f(x_o)\|_s\} \qquad \text{p.p. } [0,X_o].$$

En faisant la somme membre à membre de ces inéqgalités on aura : (sachant que $M_o = 0$)

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} \left|\frac{d}{dx_o}\left(\|D^{n+m-M_j+j} V_j(x_o)\|_s\right)\right| \leqslant C\{ \sum_{j=0}^{\nu-1} \|D^{n+m-M_j+j} V_j(x_o)\|_s +$$

$$\|D^{n+\nu} f(x_o)\|_s\} \qquad \text{p.p. } [0,X_o]$$

Ainsi si on pose $\phi(x_o) = \sum_{j=1}^{\nu-1} \|D^{n+m-M_j+j} V_j(x_o)\|_s \quad x_o \in [0,X_o]$
on aura :

$$\left|\frac{d}{dx_o} \phi(x_o)\right| \leqslant C \{\phi(x_o) + \|D^{n+\nu} f(x_o)\|_s\} \qquad \text{p.p. } [0,X_o]$$

d'oũ :

$$-\frac{d}{dx_o} \phi(x_o) - c\,\phi(x_o) \leqslant C \|D^{n+\nu} f(x_o)\|_s \qquad \text{p.p. } [0,X_o].$$

Si on multiplie cette inégalité par e^{cx_o}, en l'intégrant sur $[x_o,X_o]$ avec $x_o \in [0,X_o]$ on aura :

$$(3.4)^{*} \qquad e^{cx_o}\phi(x_o) \leq e^{cX_o}\phi(X_o) + C\int_{x_o}^{X_o} e^{c\tau}\,\|D^{n+\nu}f(\tau)\|_s d\tau \qquad \forall x_o \in [0,X_o]$$

Comme $\phi(x_o) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \|D^{n+m-M_j+\nu}\, V_j(x_o)\|_s \qquad \forall x_o \in [0,X_o]$

On a :

$$\|D^{n+m}V_o(x_o)\|_s \leq \phi(x_o) \qquad \forall x_o \in [0,X_o]$$

et des expressions des V_j dans $(3)^{*}$ $(j = 1,\dots,\nu-1)$ on peut montrer que :

$$\phi(X_o) \leq C^{ste}\,\|D^{n+m+\nu-1}V_o(X_o)\|_s$$

(où la $C^{ste} > 0$ ne dépend pas des V_j).

D'où, en reportant ces deux inégalités dans $(3.4)^{*}$ en tenant compte du fait que $V_o = U$ on aura : $\exists C > 0$ tel que :

$$\|D^{n+m}U(x_o)\|_s \leq C\,\{\|D^{n+m+\nu}U(X_o)\|_s + \int_{x_o}^{X_o} \|D^{n+\nu}f(\tau)\|_s d\tau\}$$

$\forall x_o \in [0,X_o]$;

et pour terminer la preuve de la proposition 2, il suffit d'utiliser la propriété 3 du chapitre I.

Ainsi, comme on l'a déjà fait remarquer, la preuve du théorème 1 découlera directement des proposition 1 et 2.

§.2 - *Condition de bonne décomposition généralisée.*

Définition 2.

Sous les hypothèses i) et ii) du §.1, on dit que $P(X,D)$ vérifie la condition de "bonne décomposition généralisée" si : il existe $(\nu-1)$ opérateurs $B_j(X,D) \in L^{j-1}(M_{j-1}-(j-1)\,,M_{j-1}-(j-1))$ $(j = 2,\dots,\nu)$ tels que :

$$\Big[P(X,D)-R_1 \text{ o}\ldots\text{o } R_\nu - \sum_{j=2}^{\nu} B_j(X,D) \text{ o } R_j(X,D) \text{ o}\ldots\text{o } R_\nu(X,D)\Big] = Q_{m-\nu}(X,D)$$

soit dans $L^\nu(m-\nu,m-\nu)$ (cf. chapitre I).

Théorème 2.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m vérifiant la condition de "bonne décomposition généralisée",

Alors pour $f \in C^\infty([0,X_o],H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$, $\phi_j \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell)$ $j = 0,\ldots,(m-1)$ données, il existe $\mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o], H^{+\infty}(\mathbb{R}^\ell))$ unique vérifiant :

$$(1) \quad \begin{cases} P(X,D)\mathcal{U}(X) = f(X) & \forall X \in \Omega \\ D_o^j\mathcal{U}(0,x) = \phi_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^\ell & (j=0,\ldots,(m-1)) \end{cases}$$

Preuve :

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur le lemme 3 du chapitre I et sur des transformations du problème (1) et de son adjoint.

a) Inégalités d'énergie relatives à $P(X,D)$.

Pour $\mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$ on note :

$$(1) \qquad P(X,D)\mathcal{U} = f$$

Posons :

$$\begin{cases} (x_o)^{\nu-1}V_\nu(X) = \mathcal{U}(X) \\ (x_o)^{j-2}V_{j-1}(X) = R_j(X,D)((x_o)^{j-1}V_j)(X) \qquad j = \nu,\ldots,2. \\ \forall X \in \,]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell. \end{cases}$$

de (1) on déduit :

$$(2)\quad \begin{cases} (x_o)^{\nu-1}V_\nu(X) = U(X) \\ (x_o)^{j-2}V_{j-1}(X) = R_j(X,D)((x_o)^{j-1}V_j)(X) \qquad j=\nu,\dots,2 \\ R_1(X,D)V_1(X) = f(X) - \sum_{j=2}^{\nu} B_j(X,D)((x_o)^{j-2}V_{j-1})(X) - \\ \qquad - Q_{m-\nu}(X,D)(x_o^{\nu-1}V_\nu)(X), \quad \forall X \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell. \end{cases}$$

En utilisant le commutateur $[R_j,(x_o)^{j-1}]$ $(j = \nu,\dots,2)$, on peut écrire (2) sous la forme suivante :

$$(3)\quad \begin{cases} (x_o)^{\nu-1}V_\nu(X) = U(X) \\ R_j(X,D)V_j(X) = \dfrac{V_{j-1}(X)}{x_o} - \dfrac{[R_j,(x_o)^{j-1}]V_j(X)}{(x_o)^{j-1}} \qquad j=\nu,\dots,2 \\ R_1(X,D)V_1(X) = f(X) - \sum_{j=2}^{\nu} B_j(X,D)\ (x_o^{j-2}V_{j-1})(X) - \\ \qquad - Q_{m-\nu}(X,D)(x_o^{\nu-1}\ V_\nu)(X), \quad \forall X \in]0,X_o] \times \mathbb{R}^\ell. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant le lemme 2 du chapitre I pour $R_j(X,D)$ et les propriétés des opérateurs de classes $L^S(m;k)$, on peut montrer (comme pour les opérateurs ν-décomposables) la propriété suivante :

Proposition 3.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m vérifiant la condition de "bonne décomposition généralisée", alors : pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tels que : $\forall U \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$

$$||D^{n+m-\nu}U(x_o)\ ||_s^2 \leqslant C\{\sum_{j=0}^{m-1} ||D_o^jU(0)\ ||^2_{s+n+2(N+m)+1-j} + ||D^{n+2N+m+1}\ f(0)\ ||_s^2 +$$

$$+ \int_0^{x_o} ||D^{n+N+1}f(\tau)\ ||_s^2\ d\tau\} \qquad \forall x_o \in [0,X_o] \text{ avec } f = P(X,D)U.$$

b) Inégalités d'énergie relatives à $P^*(X,D)$.

Comme $P(X,D)$ vérifie la condition de "bonne décomposition généralisée" on aura :

$$(1)^* \qquad P^*(X,D) - R^*_\nu(X,D) \circ \ldots \circ R^*_1(X,D) - \sum_{j=2}^{\nu} R^*_\nu(X,D) \circ \ldots \circ R^*_j(X,D) \circ B^*_j(X,D)$$

$$= Q^*_{m-\nu}(X,D)$$

est dans $L^\nu(m-\nu,m-\nu)$.

Soit $\mathcal{U} \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$. Posons :

$$(2)^* \begin{cases} P^*(X,D)\mathcal{U}(X) = f(X) \qquad \forall X \in \Omega \\ (x_o)^{\nu-1}\mathcal{V}_o(X) = \mathcal{U}(X) \\ R^*_j(X,D)((x_o)^{\nu-j}\mathcal{V}_{j-1})(X) = (x_o)^{\nu-(j+1)}\mathcal{V}_j(X) - B^*_{j+1}(X,D)((x_o)^{\nu-1}\mathcal{V}_o)(X) \\ (j = 1,\ldots,(\nu-1)) \qquad \forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell. \end{cases}$$

En utilisant $(1)^*$, de $(2)^*$ on déduit :

$$(3)^* \begin{cases} (x_o)^{\nu-1}\mathcal{V}_o(X) = \mathcal{U}(X) \\ R^*_j(X,D)((x_o)^{\nu-j}\mathcal{V}_{j-1})(X) = (x_o)^{\nu-(j+1)}\mathcal{V}_j(X) - B^*_{j+1}(X,D)((x_o)^{\nu-1}\mathcal{V}_o)(X) \\ (j= 1,\ldots,(\nu-1)) \\ R^*_\nu(X,D)\mathcal{V}_{\nu-1}(X) = f(X) - Q^*_{m-\nu}(X,D)((x_o)^{\nu-1}\ \mathcal{V}_o)(X) \\ \forall X \in \left]0,X_o\right] \times \mathbb{R}^\ell. \end{cases}$$

à l'aide du commutateur $[R^*_j, (x_o)^{\nu-j}]$, on met $(3)^*$ sous la forme suivante :

$$(4)^* \begin{cases} (x_o)^{\nu-1}V_o(X) = U(X) \\ R_j^*(X,D)V_{j-1}(X) = \dfrac{V_{j-1}(X)}{x_o} - \dfrac{B_{j+1}^*(X,D)((x_o)^{\nu-1}V_o)(X)}{(x_o)^{\nu-j}} + \\ \qquad + \dfrac{[R_j^*,(x_o)^{\nu-j}]V_j(X)}{(x_o)^{\nu-j}} \qquad (j = 1,\dots,(\nu-1)) \\ R_\nu^*(X,D)V_{\nu-1}(X) = f(X) - Q_{m-\nu}^*(X,D)((x_o)^{\nu-1}V_o)(X) \\ \forall X \in \,]0,X_o] \times \mathbb{R}^{\ell}. \end{cases}$$

Ainsi, comme précédemment, en utilisant le lemme 2 du premier chapitre et les propriétés des opérateurs de classes $L^S(m,k)$, on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 4.

Soit $P(X,D)$ un opérateur de type Kowalewskien d'ordre m vérifiant la condition de "bonne décomposition généralisée", alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tel que : $\forall U \in C^\infty([0,X_o],\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell))$

$$(x_o)^{N+2(n+\nu)-1} \|D^{n+m}U(x_o)\|_s^2 \leq C\{\sum_{j=0}^{m-1} \|D_o^j U(X_o)\|_{s+n+m-j} + \|D^n f(X_o)\|_s^2 + \\ + \int_{x_o}^{X_o} \|D^{n+\nu} f(\tau)\|_s^2 d\tau\} \qquad \forall x_o \in [0,X_o].$$

avec $f(X) = P^*(X,D)U(X) \qquad \forall X \in \Omega.$

Ainsi le théorème 2 devient un corollaire des propositions 3 et 4.

Remarque.

Dans les définitions 1 et 2 (respectivement), on peut remplacer $R_j(X,D) = \partial_1^j \circ \dots \circ \partial_{m_j}^j$ $(j = 1,\dots,\nu)$ par, $R_j(X,D)$ des opérateurs différentiels en x_o et pseudo-différentiels en x d'ordre m_j (respectivement de classes $L^o(m_j, m_j)$) de symboles principaux

$$R_j^{m_j}(X,\zeta) = \prod_{k=1}^{m_j} (\xi_o - \lambda_k^j(X,\xi)) \qquad \text{(cf. [7])}$$

Le chapitre IV devient alors une généralisation du chapitre I.

B I B L I O G R A P H I E

[1] K. BELABBES : *Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique multiple...* Thèse de 3ème cycle - Lille - janvier 1982.

[2] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU : *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.* Gauthier-Villars - Paris - 1981.

[3] J.C. DE PARIS : *Problème de Cauchy oscilatoire pour un opérateur à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité.* J. Math. Pures Appl. (9) 51 (1972) 231-256.

[4] D. GOURDIN : *Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. Domaine de dépendance.* Comm. Partial. differential equation 4 (1979) n°5, 447-507.

[5] D. GOURDIN : *Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiques de multiplicité constante, bien décomposables et le problème de Cauchy non caractéristique associé.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977) n°3, 539-566.

[6] D. GOURDIN : *Le problème de Cauchy pour les systèmes linéaires, faiblement hyperboliques, à caractéristiques multiples.* C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B 282 (1976) n°18, A ii A 1105-A 1107.

[7] D. GOURDIN, M. MECHAB : *Etude du problème de Cauchy faiblement hyperbolique C^∞ et du domaine de dépendance pour des systèmes à caractéristiques de multiplicité variable.* A paraître.

[7'] D. GOURDIN, M. MECHAB : *Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable.* Proposition de Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

[8] L. HÖRMANDER : *Linear Partial differential operators.* Springer-Verlag 3ème ed. (1969).

[9] L. HÖRMANDER : *Fourier Integral operators I.* Acta Math. 127 (1971) n°1-2, 79-183.
(avec Duistermaat J.J) II - Acta Math. 128 (1972) n°3-4, 183-269.

[10] M. ITANO, K. YOSHIDA : *Energy inequalities and Cauchy problems for a system of linear partial differential equations.* Hiroshima, Math. J. 1 (1971) 75-108.

[11] V. Ja. IVRII : *The Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations.* Soviet. Math. Dokl. 12 (1971), 483-486.

[12] K. KITAGAWA, T. SADAMATSU : *Sur une condition suffisante pour que le problème de Cauchy faiblement hyperbolique soit bien posé. Cas de multiplicité des caractéristiques au plus triple.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977) n°3 465-499.

[13] J.J. KOHN, L. NIRENBERG : *An algebra of pseudo-differential operators.* Comm. Pure. Appl. Math. 18 (1965) 269-305.

[14] H. KUMANO-GO : *Remarks on pseudo-differential operators.* J. Math. Soc. Japan 21 (1969) 413-439.

[15] H. KUMANO-GO : *Fundamental solution for a hyperbolic system with diagonal principal part.* Comm. Partial Differential Equations 4 (1979) n°9, 959-1015.

[16] L. NIRENBERG : *Pseudo-differential operators in Global analysis.* Proc. Sympos. Pure Math. 16 (1970), Amer. Math. Soc. 149-167.

[17] T. NISHITANI : *Some remarks on the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977) n°2, 245-268.

[18] Y. OHYA : *Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl Sci (4) 4 (1977) n°4, 757-805.

[19] O.A. OLEINIK : *On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations.* Comm. Pure. Appl. Math. 23 (1970) 569-586.

[20] H. URYU : *The Cauchy problem for weakly hyperbolic operators.* Comm. Partial differential equations 5 (1980) n°1, 23-40.

[21] H. URYU : *The Cauchy problem for hyperbolic systems with variable multiple caracteristics.* Publ. Res. Int. Math. Sci. 15 (1979) n°3, 719-739.

[22] J. VAILLANT : *Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15 (1965) fasc. 2, 225-311.

[23] J. VAILLANT : *Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques.* J. Math. Pures. Appl. (9) 47 (1968) 1-40.

[24] K. YAMAMOTO : *The Cauchy problem for some class of hyperbolic differential operators with variable multiple characteristics.* J. Math. Soc. Japan 31 (1979) n°3, 481-502.

[25] M. ZEMAN : *The well-posedness of the Cauchy problem for partial differential equations with multiple caracteristics.* Comm. Partial Differential Equations 2 (1977) n°3, 223-249.

[26] A. MENIKOFF : *The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations.* Amer. J. Math. 97 (1975) 548-558.

[27] J. LERAY : *Hyperbolic partial differential equations.* Cours de Princeton 1954.

[28] S. MIZOHATA : *Theory of partial differential equations.* Cambridge University - Press. 1973.

[29] J. LERAY et Y. OHYA : *Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts.* Colloque de Liège, 1964, C.N.R.B.

RÉSUMÉ

Depuis le travail de O.A. OLEINIK (1970), le problème de Cauchy C^∞ à caractéristiques de multiplicité variable au plus deux a été étudié par plusieurs auteurs ; mais quand la multiplicité des caractéristiques est supérieure ou égale à trois ou lorsque l'opérateur différentiel est matriciel, peu de mathématiciens l'ont abordé.

Dans ce travail, on s'est proposé de résoudre le problème de Cauchy C^∞ non caractéristique dans plusieurs situations différentes en généralisant des travaux de Y. OHYA (1976) et D. GOURDIN (1978).

On a introduit une classe d'opérateurs scalaires à caractéristiques de multiplicité variable au plus égale à ν (ν entier quelconque) dits "ν-décomposables", et on a montré que le problème de Cauchy associé est bien posé. Cette notion de ν-décomposabilité a été ensuite étendue au cas matriciel ; lorsque $\nu \leq 2$ on a donné alors de nouvelles conditions scalaires suffisantes d'hyperbolicité.

Enfin, on a donné deux extensions faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable quelconque de la notion d'opérateur différentiel scalaire bien décomposable au sens de J.C. DE PARIS.

MOTS CLÉS : Cauchy problème de
Hyperbolique
Multiplicité variable
Caractéristique multiplicité variable
Problème de Cauchy C^∞
Equation dérivée partielle