N° d'ordre 1135

50376
1983
179

50376
1983
179

THESE
PRESENTEE A
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR DE 3eme CYCLE

SPECIALITE : **MATHEMATIQUES PURES**

par

Mohammed BOUCHEKIF

Stabilité et presque périodicité pour une classe d'équations hyperboliques non linéaires du second ordre en t.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

Membres du Jury : PARREAU M., Président
HECQUET G., Rapporteur
COEURE G., } Examinateurs
HARAUX A., } Examinateurs

SOUTENUE LE 19 DECEMBRE 1983

A la mémoire de mon grand-père
Abdeslam,

A ceux qui me sont chers.

R E M E R C I E M E N T S

Je tiens, tout d'abord, à remercier très chaleureusement Monsieur le Professeur Michel PARREAU d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Monsieur Gérard HECQUET m'a confié le sujet de cette étude. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour ses précieux conseils, son aide morale et les nombreuses discussions qui ont permis l'aboutissement de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Alain HARAUX pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, l'aide qu'il m'a apportée et pour l'honneur qu'il me fait en participant au jury de cette thèse.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ et je tiens particulièrement à le remercier de sa participation au jury de cette thèse.

Que tous les chercheurs et étudiants chercheurs d'Analyse Fonctionnelle trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leurs concours, notamment mes amis Mademoiselle F. ABI-AYAD et Monsieur B. MEBKHOUT pour nos fréquentes discussions fructueuses.

Mes remerciements vont, enfin, à Madame Raymonde BÉRAT pour la rapidité et le soin apportés à la présentation de cette thèse, à Madame Françoise WDOWCZYK, Messieurs Albert GOURNAY et Michel PROVOST qui ont assuré l'impression et la reliure, à Madame Monique LLORET qui a toujours photocopié mes documents avec gentillesse.

*

*   *

*

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de l'existence, l'unicité, la presque-périodicité et le comportement asymptotique de la solution bornée de l'équation d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + (A+\psi(t)L)u(x,t) + \rho(x,\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)) + \beta(x,u(x,t)) = f(x,t) & \text{sur} \quad \Omega\times\mathbb{R} \quad (1) \\ D^\alpha u = 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leqslant m-1 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times\mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$

(Ω étant un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de bord $\partial\Omega$ de dimension $N-1$ que l'on supposera suffisamment régulier)

avec $\quad Au = \sum\limits_{\substack{|\alpha|\leqslant m \\ |\gamma|\leqslant m}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_{\alpha\gamma}(x)D^\gamma u)$

où α et γ sont des multi-indices ; $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ de longueur

$|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$, $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \Omega$ et $D^\alpha = \prod\limits_{i=1}^{N} D_i^{\alpha_i}$ où $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

L'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + A(t)u(x,t) + \rho(x, \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)) + \beta(x,u(x,t)) = f(x,t) & \text{sur} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ D^\alpha u = 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leqslant m-1 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

a été étudié depuis les années 60, par plusieurs auteurs essentiellement dans le cas où $A(t)$ est un opérateur auto-adjoint indépendant du temps t. En particulier, dans le cas où $\beta(.,u) = 0$ par L. Amério et G. Prouse [1],

M. Biroli [3,4], A. Haraux [9,11,12], J.L. Lions [13], G. Prouse [19,20], etc...

Les résultats obtenus restent sans changement notable lorsque $\beta(.,u)$ diffèrent de zéro est continue et croissante par rapport à u et $\rho(.,v) = kv$ avec k constante positive. M. Biroli [5], A. Haraux [10] etc...

Par contre si $\beta(.,u)$ n'est pas monotone, M. Nakao [17] a surmonté cette difficulté en utilisant la méthode des énergies introduites par Sattinger [25], méthode qui lui a permis de substituer l'hypothèse de la monotonie de $\beta(.,u)$ à celle de f "petite".

Le cas où l'opérateur $A(t)$ dépend explicitement de t a donné lieu à un certain nombre de travaux. Par exemple, Lions et Strauss [15] étudient l'équation :

$$u_{tt}(t) + A(t)u(t) + \beta(t,u(t),u'(t)) = f(t)$$

par des méthodes de compacité ou de monotonie sous l'hypothèse $\frac{dA(t)}{dt} \leq 0$. Ils établissent l'existence d'une solution faible du problème à valeur de bord initiale.

Citons encore Clements [7] et Yamaguchi [26] qui utilisent le théorème du point fixe pour obtenir l'existence de solution à <u>caractère périodique</u>.

Sur les conseils de A. Haraux, nous allons perturber l'opérateur A par un terme de la forme $\varphi(t)L$ avec φ fonction mesurable, bornée de norme L^∞ petite et L opérateur différentiel linéaire continu d'ordre strictement inférieur à m.

Ce travail est divisé en deux chapitres.

Dans le chapitre I, on montre que pour les conditions initiales (u_o,u_1) assez petites dans $H_o^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et f et ψ assez "petites", le problème de Cauchy associé à (1) avec valeur initiale (u_o,u_1) a <u>une solution globale et une seule</u> qui est en fait dans $L^\infty(\mathbb{R}^+,H_o^m(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$.

Sur la base des résultats obtenus, on établira dans le chapitre II que l'on a en fait pour f et ψ toujours assez petites une solution unique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $H_o^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Si, de plus, f et ψ sont presque-périodiques la solution correspondante est elle-même presque périodique. On établira, en conclusion, la stabilité asymptotique de cette solution et on exhibera un exemple.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

PROBLEME DE CAUCHY ASSOCIÉ A (1).

§ 1 - *Notations et rappels, cadre fonctionnel.*

• Les fonctions considérés seront à valeurs réelles.

• La norme de l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ sera notée par :

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \qquad \text{pour } 1 \leqslant p < +\infty$$

$$|u|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |u(x)|$$

pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert dont on notera son produit scalaire par $(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$.

• L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $m = 1,2,\ldots$ par : $W^{m,p}(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ avec $|\alpha| \leqslant m\}$

de norme : $||u||_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u|_p^p\right)^{1/p}$ pour $1 \leqslant p < \infty$

et $||u||_{m,+\infty} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u|_\infty$.

$(W^{m,p}(\Omega), ||u||_{m,p})$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert noté $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire noté $(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$ et de norme :

$||u||_m = ||u||_{m,2}$.

Par définition : $W_o^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$

$W^{-m,p'}(\Omega) = (W_o^{m,p})'$ (dual de $W_o^{m,p}(\Omega)$) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

pour $p = 2$, on pose $H_o^m(\Omega) = W_o^{m,2}(\Omega)$ et $H^{-m}(\Omega) = (H_o^m(\Omega))'$

$u \in H^{-m}(\Omega)$ s'écrit alors sous la forme :

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_\alpha \quad \text{avec} \quad u_\alpha \in L^2(\Omega).$$

Soit X un espace de Banach, on désignera par $L^p(0,T;X)$ l'ensemble :

$$\left\{ f \,|\, f : [0,T] \to X \text{ fortement mesurable telle que } \begin{array}{l} \bullet \int_0^T ||f(t)||_X^p dt < +\infty \\ \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \bullet \sup\limits_{t\in[0,T]} \text{ess} ||f(t)||_X < +\infty \\ \quad \text{si } p = +\infty \end{array} \right\}$$

$C^k([0,T];X)$ = ensemble des fonctions k fois continûment différentiable de $[0,T] \to X$.

On définit pour $J = \mathbb{R}$ ou $J = \mathbb{R}^+$ et $1 \leq p < +\infty$ l'espace de Stépanov $S^p(J,X)$

$$S^p(J,X) = \{f \in L^p_{Loc}(J,X) \mid \sup_{t\in J}(\int_t^{t+1} ||f(s)||_X^p ds) < +\infty\}.$$

La dérivée par rapport à t de la fonction $u :]0,T[\to X$ sera notée $u'(t)$.

On identifie $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a une fonction vectorielle $u : \mathbb{R} \to W^{m,p}(\Omega)$, de même $\frac{\partial u}{\partial t} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à $u' : \mathbb{R} \to L^2(\Omega)$.

Dorénavant, on écrira notre problème (1) - (2) formellement sous la forme :

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) + \psi(t)Lu(t) + \rho(.,u'(t)) + \beta(.,u(t)) = f(t) \\ u(t) \in H_o^m(\Omega). \end{cases}$$

Lemme 1 (de Sobolev) [24] :

Si $u \in H_o^m(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$ pour $0 < p \leqslant \frac{2N}{N-2m}$ si $N > 2m$ ou $0 < p < +\infty$ si $N \geqslant 2m$ c'est-à-dire

$$|u|_p \leqslant S_p ||u||_m$$

S_p désignant la constante de Sobolev.

§ 2 - *Définition, propriétés de fonctions presque-périodiques et hypothèses.*

Définition de la fonction presque-périodique :

Soient X un espace de Banach, f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, f est dite presque-périodique (que l'on note par P.P.) sur $\mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\ell(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $\ell(\varepsilon)$ contient au moins un nombre τ vérifiant : $||f(t+\tau) - f(t)||_X \leqslant \varepsilon \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \ell(\varepsilon) > 0$, $\forall a$: $\exists \tau \in [a,a+\ell(\varepsilon)]$ tel que : $\sup\limits_{t\in R} ||f(t+\tau) - f(t)||_X \leqslant \varepsilon$.

Le nombre τ est appelé ε-presque-période de f.

Remarque : Cette définition est l'extension de la définition de Bohr pour les fonctions numériques à des fonctions vectorielles.

Propriétés [1] :

i) Si f est P.P. alors l'image de f ($\mathrm{Im}\, f$) est relativement compacte.

- Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, i) signifie qu'une fonction f P.P. est bornée.

ii) Une fonction f P.P. est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

iii) Si f_n est P.P. pour $n = 1,2,\ldots$ et si la suite $\{f_n\}$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$ alors f est P.P.

iv) La somme de deux fonctions P.P. est une fonction P.P.

v) Le produit d'une fonction vectorielle P.P par une fonction numérique P.P est une fonction vectorielle P.P.

vi) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors on a l'équivalence suivante :

f est P.P. si et seulement si $\begin{cases} \text{De toute suite } \{s_n\} \text{ on peut extaire une} \\ \text{sous suite } \{c_n\} \text{ telle que : } f(t+c_n) \\ \text{converge uniformément.} \end{cases}$

Hypothèses :

H_0) On considère $A(t) = A + \phi(t)L$.

$$A = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\gamma|\leq m}} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha\gamma}(x)D^{\gamma}) \text{ avec } a_{\alpha\gamma}(x) = a_{\gamma\alpha}(x),\ a_{\alpha\gamma} \in L^{\infty}(\Omega)\ \forall \alpha,\gamma \in \mathbb{N}^N$$

est la partie principale de $A(t)$ auto-adjointe $A^* = A$.

On définit l'opérateur $A : H_0^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega)$ par :

$$<Au,v> = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\gamma|\leq m}} \int_\Omega a_{\alpha\gamma}(x) D^\gamma u(x) D^\alpha v(x)\,dx \qquad u,v \in H_o^m(\Omega).$$

• A est coercive sur $H_o^m(\Omega)$ c'est-à-dire qu'il existe une constante $c_o^{-2} > 0$ telle que $<Au,u> \geq c_o^{-2}||u||_m^2$ si $u \in H_o^m(\Omega)$.

On vérifie sans peine que $u \to <Au,u>^{1/2}$ définit une norme sur $H_o^m(\Omega)$ que l'on note $||u||_A$ équivalente à $||u||_m$ c'est-à-dire qu'il existe deux constantes c_o et c_1 positives telles que

$$c_1||u||_m \geq ||u||_A \geq c_o^{-1}||u||_m.$$

• ψ est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$ de norme $|\psi|_\infty$.

• L opérateur linéaire de $H_o^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, continu :

$$|Lu|_2 \leq k||u||_m \leq kc_o^{-1}||u||_A.$$

H_1) $\rho(x,v)$ désigne une fonction mesurable sur $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $\rho(x,0) = 0$, $K_o|v_1-v_2|^2 \leq (\rho(x,v_1) - \rho(x,v_2))(v_1-v_2)$ et $|\rho(x,v_1) - \rho(x,v_2)| \leq K_1|v_1-v_2|$.

Ceci pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $v_1,v_2 \in \mathbb{R}$ où K_i, $i = 0,1$ sont des constantes positives.

H_2) $\beta(x,u)$ désigne une fonction mesurable sur $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\beta(x,u) \leq K_2|u|^{\nu+1}, \quad |\beta(x,u_1) - \beta(x,u_2)| \leq K_3(|u_1|^\nu + |u_2|^\nu)|u_1-u_2|$$

où K_2 et K_3 sont des constantes positives.

Ceci pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $u,u_1,u_2 \in \mathbb{R}$ avec :

$$0 < \nu \leqslant \frac{2m}{N-2m} \qquad \text{si} \quad N > 2m$$

$$\text{et} \quad 0 < \nu < +\infty \qquad \text{si} \quad 1 \leqslant N \leqslant 2m$$

$H_3)$: $f \in S^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$-bornée c'est-à-dire :

$$M_f = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} |f(s)|_2^2 ds \right)^{1/2} < +\infty$$

$H_3)_+$: H_3 avec $\mathbb{R}^+$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Remarque : De l'hypothèse $H_1)$ et du lemme 1, on déduit :

$$\beta(.,u) \in L^2(\Omega) \quad \text{si} \quad u \in H_o^m(\Omega).$$

Dans ce chapitre, on établit un théorème d'existence d'une unique solution bornée du problème de Cauchy associé à (1) avec pour conditions initiales $u_o \in H_o^m(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Le problème de Cauchy associé à (1) est :

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) + \vartheta(t)Lu + \rho(.,u'(t)) + \beta(.,u(t)) = f(t) & (1) \\ u(0) = u_o & \\ u'(0) = u_1 & \end{cases} \qquad (3)$$

Pour la résolution de ce problème, on utilise la méthode des énergies [25].

§ 3 - *Détermination de l'ensemble "des bons potentiels".*

$K(u) = \frac{1}{2}|u'(t)|_2^2$ est l'énergie cinétique ;

$J_o(u) = \frac{1}{2} ||u||_A^2 + \int_\Omega \int_o^{u(x,t)} \beta(x,s)ds\, dx$ est l'énergie potentielle associée à (1) et $E(u) = K(u) + J_o(u)$ est l'énergie totale.

Supposons que J_o admette un minimum local en 0 alors par analogie avec le minimum local de la fonction potentielle pour un système mécanique avec un nombre fini de degré de liberté, on doit imaginer un ensemble de "bons potentiels" en 0 dans l'espace des fonctions $H_o^m(\Omega)$.

D'où l'utilité de la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à approcher l'équation donnée (1) (généralement en dimension infinie) par des équations définies sur des espaces de dimensions finies.

On procède à la construction des "bons potentiels" W.

Soit $J_o(u) = \frac{1}{2}||u||_A^2 + \int_\Omega \int_o^{u(x)} \beta(x,s)ds\, dx$.

Grâce à l'hypothèse H_2) et au lemme 1, on minore $J_o(u)$ par $\tilde{J}_o(u)$:

$$\tilde{J}_o(u) \leq J_o(u) \quad \forall\, u \in H_o^m(\Omega) \quad \text{avec } \tilde{J}_o(u) = \frac{1}{2}||u||_A^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2}\, ||u||_A^{\nu+2}$$

($C_\nu = K_2\, c_o^{\nu+2} S_{\nu+2}^{\nu+2}$: K_2 relative à β, c_o à A, $S_{\nu+2}$ la constante de Sobolev).

Pour $u \neq 0$ fixé dans $H_o^m(\Omega)$, on a :

$$\tilde{J}_o(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2}||u||_A^2 - \frac{C_\nu \lambda^{\nu+2}}{\nu+2}\, ||u||_A^{\nu+2} \qquad \tilde{J}_o(\lambda u)_{|\lambda=0} = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{J}_o(\lambda u) = \lambda ||u||_A^2 - C_\nu\, \lambda^{\nu+1} ||u||_A^{\nu+2} \qquad \frac{d}{d\lambda} \tilde{J}_o(\lambda u)_{|\lambda=0} = 0$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \tilde{J}_o(\lambda u) = ||u||_A^2 - (\nu+1)C_\nu ||u||_A^{\nu+2} \qquad \frac{d^2}{d\lambda^2} \tilde{J}_o(\lambda u)_{|\lambda=0} = ||u||_A^2 > 0$$

$\tilde{J}_o$ a donc un minimum local en $u = 0$.

$J_o(\lambda u)_{|\lambda=0} = 0$

$$\frac{d}{d\lambda} J_o(\lambda u) = \lambda ||u||_A^2 + \int_\Omega \beta(x,\lambda u)u \, dx = \frac{1}{\lambda} \{\lambda^2 ||u||_A^2 + \int_\Omega \beta(x,\lambda u)\lambda u \, dx\} = \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda u).$$

En posant $J_1(u) = ||u||_A^2 + \int_\Omega \beta(x,u)u \, dx$.

En utilisant l'hypothèse H_2 et lemme 2, on minore $J_1(u)$ par $\tilde{J}_1(u)$.

$$\tilde{J}_1(u) \leqslant J_1(u) \quad \forall\, u \in H_o^m(\Omega) \quad \text{avec} \quad \tilde{J}_1(u) = ||u||_A^2 - C_\nu ||u||_A^{\nu+2} \;;$$

on a : $\frac{d}{d\lambda} J_o(\lambda u) = \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda u) \geqslant \frac{1}{\lambda} \tilde{J}_1(\lambda u)$ pour $\lambda < \lambda_1(u)$ où

$$\lambda_1(u) = \left(\frac{1}{C_\nu}\right)^{1/\nu} . \frac{1}{||u||_A} .$$

On définit le nombre $\tilde{d}_o$ par :

$$\tilde{d}_o = \inf_{\substack{u \in H_o^m(\Omega) \\ u \neq 0}} \left(\operatorname{Sup}_{\lambda \geqslant 0} \tilde{J}_o(\lambda u)\right) = \left(\frac{1}{C_\nu}\right)^{\frac{2}{\nu}} . \frac{\nu}{\nu+2} > 0.$$

L'ensemble des "bons potentiels" associés à $\tilde{J}_o$ est :

$$W_{\tilde{J}_o} = \{u \in H_o^m(\Omega) \mid 0 \leqslant \tilde{J}_o(\lambda u) < \tilde{d}_o \quad \forall\, \lambda \in [0,1]\}.$$

Remarque : Si on définit W_{J_o} comme étant :

$$W_{J_o} = \{u \in H_o^m(\Omega) \mid 0 \leqslant J_o(\lambda u) < \tilde{d}_o \quad \forall\, \lambda \in [0,1]\}$$

on a alors $W_{J_o} \subset W_{\tilde{J}_o}$.

Pour plus de commodité dans notre travail, on choisira W sous-ensemble de W_{J_o} comme suit :

A la fonctionnelle $\tilde{J}_1(u)$, on associe la fonction $g(x) = x^2 - C_\nu x^{\nu+2}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et on désigne par x_o le nombre réel correspondant au maximum de $g(x)$ i.e.

$$g(x_o) = \max_{x\geq 0} g(x) \quad \text{où} \quad x_o = \left(\frac{2}{C_\nu(\nu+2)}\right)^{1/\nu} .$$

Posons $d_o = \frac{1}{2} x_o^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2} x_0^{\nu+2} < \max_{x\geq 0}(\frac{1}{2} x^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2} x^{\nu+2})$.

Ainsi l'ensemble des "bons potentiels" sera défini par :

$$W = \{u \in H_o^m(\Omega) \;\mid\; 0 \leqslant J_o(\lambda u) < d_o \quad \forall \lambda \in [0,1]\}$$

et l'ensemble de stabilité S par :

$$S = \{(u_o,u_1) \in W \times L^2(\Omega) \;\mid\; \frac{1}{2} |u_1|_2^2 + J_o(u_o) < d_o \quad \text{et} \quad ||u_o||_A < x_o\} .$$

§ 4 - *Construction des solutions "approchées" par la méthode de Faedo-Galerkin.*

Soit $\{\omega_j\}$ une base de $H_o^m(\Omega)$ (elle existe car $H_o^m(\Omega)$ est un espace séparable).

On cherche alors $u_n(t)$ solution "approchée" de notre problème sous la forme :

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} g_{jn}(t)\omega_j .$$

Les $g_{jn}(t)$ étant solutions du système d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$(I_n)\begin{cases}(u_n''(t),\omega_j)+\langle Au_n(t),\omega_j\rangle+(\psi(t)Lu_n(t),\omega_j)+(\rho(.,u_n'(t)),\omega_j)+(\beta(.,u_n(t)),\omega_j)=(f(t),\omega_j) & (E_n)\\ u_n(0)=u_{on}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}\omega_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_o \text{ fortement dans } H_o^m(\Omega) \\ u_n'(0)=u_{1n}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{jn}\omega_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_1 \text{ fortement dans } L^2(\Omega).\end{cases}$$

D'après la théorie des équations différentielles ordinaires, pour chaque n fixé, le problème (I_n) possède une unique solution $u_n(t)$ sur $[0,\delta_n]$ avec $\delta_n > 0$.

Lemme 2 :

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ fortement dans $H_o^m(\Omega)$ alors $J_o(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} J_o(u)$.

Preuve : Il suffit de prouver que :

$$\int_\Omega \mathcal{B}(x,u_n(x))dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega \mathcal{B}(x,u(x))dx \quad \text{avec } \mathcal{B}(x,\zeta) = \int_o^\zeta \beta(x,s)ds \ ;$$

$$\text{or } \mathcal{B}(x,u_n(x)) - \mathcal{B}(x,u(x)) = \int_o^1 \beta(x,\tau(u_n(x)-u(x))+u(x))(u_n(x)-u(x))d\tau$$

$$\left|\int_\Omega \mathcal{B}(x,u_n(x))-\mathcal{B}(x,u(x)))dx\right| \leq \int_\Omega\int_o^1 |\beta(x,\tau(u_n(x)-u(x))+u(x))|\,|(u_n(x)-u(x))|d\tau dx$$

$$\leq K_2\int_\Omega\int_o^1 |\tau(u_n-u)+u|^{\nu+1}|u_n(x)-u(x)|d\tau dx$$

$$\leq K_2\left(\int_\Omega (|u_n-u|+|u|)^{2(\nu+1)}dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |u_n(x)-u(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leq K_2 c_o^{\nu+1} S_{2\nu+2}^{\nu+1} c_o S_2(||u_n-u||_A+||u||_A)^{\nu+1}||u_n-u||_A$$

C.Q.F.D.

§ 5 - *Estimations a priori sur ces solutions approchées.*

Lemme 3 :

Sous les hypothèses $H_0)$, $H_1)$, $H_2)$, $H_3)_+$ pour $(u_o,u_1) \in S$ il existe un voisinage $D_1 \cap D_2$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que si $(M_f, |\psi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$, les solutions "approchées" $\{u_n(t)\}$ existent sur $[0,+\infty[$ pour n assez grand et satisfont aux estimations :

$$||u_n(t)||_A \leqslant x_o \quad \text{et} \quad |u_n'(t)|_2 < (2d_o)^{1/2}$$

où x_o désigne la plus petite solution positive de l'équation :

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2}x^{\nu+2} = d_o \, .$$

Démonstration :

On veut montrer $\delta_n = +\infty$ pour n assez grand et que les relations (4) sont vérifiées pour tout t.

Pour cela il suffit de prouver que l'on a :

$$\frac{1}{2}|u_n'(t)|_2^2 + J_o(u_n(t)) < d_o \qquad \forall\, t \in [0,\delta_n] \qquad (*)$$

Soit $E_o = \frac{1}{2}|u_1|_2^2 + J_o(u_o)$, pour $(u_o,u_1) \in S$, on a $E_o < d_o$, on peut donc poser $\varepsilon_o = d_o - E_o > 0$ puisque $(u_n(0),u_n'(0)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (u_o,u_1)$ fortement dans $H_o^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o[$ on a à partir d'un certain rang :

$$\frac{1}{2}|u_n'(0)|_2^2 - \frac{1}{2}|u_1|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$J_o(u_n(0)) - J_o(u_o) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Par suite $E(u_n(0)) \leqslant \varepsilon + E_o \leqslant \varepsilon + d_o - \varepsilon_o \leqslant d_o - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_o[$.

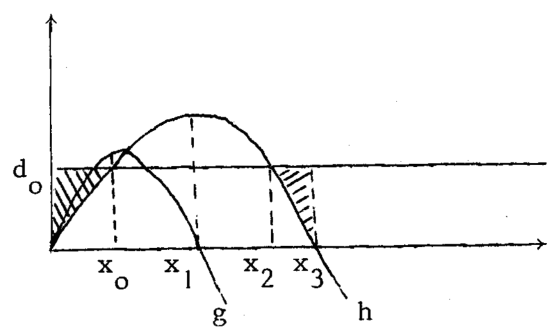
Soient h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2} x^{\nu+2}$ et l'application $u \to ||u||_A \to h(||u||_A)$ définie sur $H_o^m(\Omega)$.

$h^{-1}([0,x_o[)$ est la réunion de deux intervalles disjoints $[0,x_o[$ et $]x_2,x_3]$.

Désignons par M_1, M_2 les images réciproques correspondantes dans $H_o^m(\Omega)$.

$M_1 = \{u \in H_o^m(\Omega) \mid 0 \leqslant \tilde{J}_o(u) < d_o$ et $||u||_A < x_o\}$

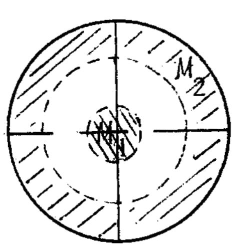
$M_2 = \{u \in H_o^m(\Omega) \mid 0 \leqslant \tilde{J}_o(u) < d_o$ et $x_2 < ||u||_A \leqslant x_3\}$.



x_1 / $\max\limits_{x \geqslant 0} h(x) = h(x_1)$

x_2 / $h(x_2) = d_o$

x_3 / $h(x_3) = 0$



On a pour n assez grand $E(u_n(0)) < d_o$ et comme $||u_n(0)||_A \leqslant ||u_o||_A < x_o$ alors $u_n(0) \in M_1$ pour n assez grand.

Supposons que (*) ne soit pas réalisé, il existe alors au moins un $t^* \in [0,\delta_n]$ pour lequel $E(u_n(t^*)) \geqslant d_o$. Compte tenu de l'existence d'un $t^* \in [0,\delta_n]$ tel que $E(u_n(t^*)) \geqslant d_o$ et de la continuité de l'application $t \rightsquigarrow E(u_n(t))$ il existera $\bar{t} = \inf\{t\in[0,\delta_n]/E(u_n(t))=d_o\}$ et donc $E(u_n(t)) \leqslant d_o \quad \forall\, t \in [0,\bar{t}\,]$.

La continuité de $u_n(t)$ sur $[0,\bar{t}]$ associée au fait que $u_n(0) \in M_1$ implique $u_n(t) \in \bar{M}_1$ donc $||u_n(t)||_A \leqslant x_o$ pour pour $t \in [0,\bar{t}\,]$.

Pour mettre en évidence la contradiction de (*), on montrera d'abord que $\bar{t} > 1$ autrement dit $[\bar{t}-1,\bar{t}] \subset [0,\delta_n]$. Sur cet intervalle $[\bar{t}-1,\bar{t}]$ on montrera l'existence des trois nombres $\bar{t}_1,\bar{t}_2$ et $\bar{t}_o \in [\bar{t}_1,\bar{t}_2]$ pour lesquels la contradiction apparaîtra.

Multiplions (E_n) par $g'_{j,n}(t)$, sommons sur j de 1 à n et intégrons sur un intervalle quelconque $[t_1,t_2]\subset[0,\delta_n]$, on a :

$$(6)\quad E(u_n(t_2))+\int_{t_1}^{t_2}(\rho(.,u'_n(s)),u'_n(s))ds = E(u_n(t_1))+\int_{t_1}^{t_2}(f(s),u'_n(s))ds-\int_{t_1}^{t_2}(\psi(s)Lu_n(s),u'_n(s))ds.$$

Avec $t_2 = \bar{t}$ et $t_1 = 0$ (6) devient :

$$E(u_n(\bar{t})) + \int_0^{\bar{t}}(\rho(.,u'_n(s)),u'_n(s))ds = E(u_n(0)) + \int_0^{\bar{t}}(f(s),u'_n(s))ds - \int_0^{\bar{t}}(\psi(s)Lu_n(s),u'_n(s))ds.$$

Compte-tenu de ce que nous avons vu précédemment, de l'hypothèse H_1 et de l'inégalité de Young :

$$ab \leqslant \frac{1}{K_o}a^2 + \frac{K_o}{2}b^2 \qquad a,b \geqslant 0,\ K_o > 0.$$

on a pour $\varepsilon < \varepsilon_o$ et pour n assez grand :

$$\varepsilon + K_o \int_0^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds \leqslant \frac{1}{K_o} \int_0^{\bar t} |f(s)|_2^2 ds + \frac{K_o}{2} \int_0^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds + \frac{k^2\, c_o^2\, x_o^2}{K_o} |\psi|_\infty^2 . \bar t + \frac{K_o}{2} \int_0^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds$$

Soit $K_o \varepsilon \leqslant \int_0^{\bar t} |f(x)|_2^2 ds + k^2\, c_o^2\, x_o^2 |\psi|_\infty^2 . \bar t$ pour n assez grand. (7)

Supposons que : $(M_f, |\psi|_\infty) \in D_1$ (8)

où $D_1 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / y^2 + (k^2\, c_o^2\, x_o^2) z^2 < K_o \varepsilon_o\}$.

De (7) et (8), il résulte que $\bar t$ est strictement supérieur à 1 pour n assez grand.

Reprenons (6) avec $t_2 = \bar t$ et $t_1 = \bar t - 1$, on a :

$$E(u_n(\bar t)) + \int_{\bar t - 1}^{\bar t} (\rho(.,u'_n(s)), u'_n(s)) ds = E(u_n(\bar t - 1)) + \int_{\bar t - 1}^{\bar t} f(s), u'_n(s)) ds - \int_{\bar t - 1}^{\bar t} (\psi(s) L u_n(s), u'_n(s)) ds$$

or $E(u_n(\bar t - 1)) \geqslant E(u_n(\bar t))$

$$K_o \int_{\bar t - 1}^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds \leqslant \frac{1}{K_o} \int_{\bar t - 1}^{\bar t} |f(x)|_2^2 ds + \frac{K_o}{4} \int_{\bar t - 1}^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds + \frac{k^2\, c_o^2\, x_o^2}{K_o} |\psi|_\infty^2 + \frac{K_o}{4} \int_{\bar t - 1}^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds$$

c'est-à-dire $\displaystyle \frac{K_o}{2} \int_{\bar t - 1}^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds \leqslant \frac{1}{K_o} \int_{\bar t - 1}^{\bar t} |f(s)|_2^2 ds + \frac{k^2\, c_o^2\, x_o^2}{K_o} |\psi|_\infty^2$ ou

$$\int_{\bar t - 1}^{\bar t} |u'_n(s)|_2^2 ds \leqslant \frac{2}{K_o^2} \{M_f^2 + k^2\, c_o^2\, x_o^2 |\psi|_\infty^2\} \qquad (8)$$

On désignera par A^2 le second membre de (9), il existe alors deux nombres $\bar t_1 \in [\bar t - 1, \bar t - \frac{3}{4}]$ et $\bar t_2 \in [\bar t - \frac{1}{4}, \bar t]$ tels que :

$$|u'_n(\bar t_i)|_2 \leqslant 4A \qquad i = 1,2. \qquad (9)$$

Multiplions (E_n) par $g_{j,n}(t)$, sommons sur j de 1 à n, puis intégrons sur $[\bar{t}_1,\bar{t}_2] \subset [\bar{t}-1,\bar{t}]$ on a :

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}\{||u_n(s)||_A^2+\int_\Omega \beta(x,u_n(x,s))u_n(x,s)dx\}ds \leqslant |(u_n'(\bar{t}_1),u_n(\bar{t}_1))|+|(u_n'(\bar{t}_2),u_n(\bar{t}_1))|+$$

$$+\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}|u_n'(s)|_2^2 ds+\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}|(\rho(.,u_n'(s)),u_n(s))|ds+\int_{\bar{t}_1}^{t_2}(f(s),u_n(s))ds+\int_{\bar{t}_1}^{t_2}|(\psi(s)Lu_n(s),u_n(s))|ds$$

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} J_1(u_n(s))ds \leqslant 8c_oS_2x_oA+A^2+K_1c_oS_2x_oA+c_oS_2x_oM_f+kc_o^2S_2x_o^2|\psi|_\infty .$$

D'autre part, on a :

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} J_1(u_n(s))ds \geqslant \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \tilde{J}_1(u_n(s))ds=\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}||u_n(s)||_A^2(1-C_\nu||u_n(s)||_A^\nu)ds \geqslant (1-C_\nu x_o^\nu)\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}||u_n(s)||_A^2 ds$$

$$\text{or} \quad 1-C_\nu x_o^\nu = \frac{\nu}{\nu+2} > 0$$

$$\text{donc} \quad \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}||u_n(s)||_A^2 ds \leqslant \frac{\nu+2}{\nu}\{(8+K_1)c_oS_2x_oA+A^2+c_oS_2x_oM_f+kc_o^2S_2x_o^2|\psi|_\infty\}. \qquad (11)$$

De (9) et (11), il résulte l'existence de $\bar{t}_o \in [\bar{t}_1,\bar{t}_2]$ tel que :

$$|u_n'(\bar{t}_o)|_2^2 + ||u_n(\bar{t}_o)||_A^2 \leqslant 2\theta_1(M_f,|\psi|_\infty)$$

$$\text{où} \quad \theta_1(M_f,|\psi|_\infty) = \frac{2\nu+1}{\nu}A^2 + \frac{\nu+2}{\nu}\{(8+K_1)c_oS_2x_oA + c_oS_2x_oM_f + kc_o^2S_2|\psi|_\infty x_o^2\}$$

$$\text{avec} \quad A = \frac{2}{K_o^2}\{M_f^2 + k^2c_o^2x_o^2|\psi|_\infty^2\}.$$

Reprenons à nouveau (6) avec $t_2 = \bar{t}$ et $t_1 = \bar{t}_o$ on a :

$$E(u_n(\bar{t}))+\int_{\bar{t}_o}^{\bar{t}}(\rho(.,u_n'(s)),u_n'(s))ds = E(u_n(\bar{t}_o)) + \int_{\bar{t}_o}^{\bar{t}}(f(x),u_n'(s))ds - \int_{\bar{t}_o}^{\bar{t}}(\psi(s)Lu_n(s),u_n'(s)ds$$

$$E(u_n(\bar{t})) \leqslant \frac{1}{2}||u_n(\bar{t}_o)||_A^2 + \frac{1}{2}|u_n'(\bar{t}_o)|_2^2 + \int_\Omega\int_0^{u_n(x,\bar{t}_o)} \beta(x,s)ds\, dx + \int_{\bar{t}_o}^{\bar{t}} (f(x),u_n'(s))ds +$$

$$+ \int_{\bar{t}_o}^{\bar{t}} |(\psi(s)Lu_n(s),u_n'(s))|ds$$

$$d_o \leqslant \theta_1(M_f,|\psi|_\infty) + \frac{C_\nu}{\nu+2}(\theta_1(M_f,|\psi|_\infty))^{\frac{\nu+2}{2}} + M_f A + k\, c_o\, x_o\, A.|\psi|_\infty = \theta_2(M_f,|\psi|_\infty).$$

On voit immédiatement la contradiction : en effet $\theta_2(M_f,|\psi|_\infty)$ tend vers 0 lorsque M_f et $|\psi|_\infty$ tendent vers 0 et peuvent être choisis pour nier $d_o \leqslant \theta_2\left[M_f,|\psi|_\infty\right]$.

Pour n assez grand, pour M_f et $|\psi|_\infty$ petits, on a :

$E(u_n(t)) < d_o$, $\forall\, t \in [0,\delta_n]$, par conséquent :

$||u_n(t)||_A < x_o$ et $|u_n'(t)|_2 < (2d_o)^{1/2}$ $\forall\, t \in [0,\delta_n]$ avec n assez grand,

d'où il résulte que : $\delta_n = +\infty$ pour n assez grand.

Désignons par :

$$D_2 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+/\theta_2(y,z) < d_o\}.$$

Pour n assez grand, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour $(M_f,|\psi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$

on a donc : $\frac{1}{2}|u_n'(t)|_2^2 + J_o(u_n(t)) < d_o$

par conséquent : $|u_n'(t)|_2 < (2d_o)^{1/2}$ et $||u_n(t)||_A < x_o$.

Remarque : On a un résultat beaucoup plus fin à savoir :

$$\frac{1}{2}|u_n'(t)|_2^2 + J_o(u_n(t)) \leqslant \theta_2(M_f,|\psi|_\infty) \qquad \forall\, t \geqslant 0$$

et par conséquent : $||u_n(t)||_A \leqslant x_o(M_f,|\psi|_\infty)$ et $|u_n'(t)| \leqslant (2\theta_2(M_f,|\psi|_\infty))^2$

où $x_o(M_f,|\psi|_\infty)$ est la plus petite solution positive de

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2}x^{\nu+2} = \theta_2(M_f,|\psi|_\infty).$$

Notons que $\theta_2(M_f,|\psi|_\infty)$ et $x_o(M_f,|\psi|_\infty)$ tendent vers 0 lorsque M_f et $|\psi|_\infty$ tendent vers 0.

§ 6 - *Existence de la solution du problème de Cauchy associé à (1).*

Nous venons de construire une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$. Grâce à des propriétés de compacité permettant le passage à la limite dans les termes non linéaires nous allons établir la convergence de cette suite vers la solution du problème de Cauchy associée à (1) - (3).

Définition d'une solution bornée du problème de Cauchy (1) - (3).

$u(x,t)$ est dite solution bornée de (1) - (3) de conditions initiales (u_o,u_1) si :

i) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+,H_o^m(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+,H_o^m(\Omega))$

ii) $u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$

iii) $\beta(.,u) \in L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$ et $\rho(.,u'(t)) \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$

iv) $$\int_{\mathbb{R}^+}\{-(u'(t),h'(t))+<Au(t),h(t)>+(\psi(t)Lu(t),h(t))+(\rho(.,u'(t)),h(t))+$$
$$+(\beta(.,u(t)),h(t))-(f(t),h(t))\}dt = 0$$

$\forall\, h \in L^1(\mathbb{R}^+,H_o^m(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$ à support compact sur $\mathbb{R}^+$.

v) $u(0) = u_o$ et $u'(0) = u_1$.

Théorème 1.-

Supposons que les hypothèses H_0, H_1, H_2, $H_3)_+$ soient vérifiées, que $(u_o,u_1) \in S$ alors, pour tout $(M_f,|\psi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$, notre problème (1) - (3) admet une solution bornée de conditions initiales (u_o,u_1) et satisfaisant à :

$$||u(t)||_A < x_o \quad \text{et} \quad |u'(t)|_2 < (2d_o)^{1/2}$$

où x_o étant la plus petite solution positive de :

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2}x^{\nu+2} = d_o.$$

Démonstration :

On est dans les hypothèses du lemme 3 donc l'existence des solutions approchées $\{u_n(t)\}$ sur $\mathbb{R}^+$ pour n assez grand est assurée. De plus, ces solutions vérifient les estimations suivantes

$$|u_n'(t)|_2 < (2d_o)^{1/2} \quad \text{et} \quad ||u_n(t)||_A < x_o$$

donc u_n demeure dans un ensemble borné de $L^\infty(\mathbb{R}^+, H_o^m(\Omega))$.

u_n' demeure dans un ensemble borné de $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$.

D'après le théorème de Dunford-Pettis, le dual de $L^1(\mathbb{R}^+, H^{-m}(\Omega))$, noté $(L^1(\mathbb{R}^+, H^{-m}(\Omega)))'$ est $L^\infty(\mathbb{R}^+, H_o^m(\Omega))$. De même $(L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))'$ est $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)$.

Or, on sait que dans un espace de Banach, la boule unité du dual est $*$ faiblement compacte. Par conséquent, on peut extraire de $\{u_n\}$ une sous-suite que l'on note encore par $\{u_n\}$ telle que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \text{ faiblement étoilé dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, H_o^m(\Omega)) \qquad (C_1)$$

$$u_n' \longrightarrow \tilde{u} \text{ faiblement étoilé dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \qquad (C_2)$$

$\tilde{u} = u'$ (résulte du fait que la dérivée au sens des distributions est continue).

Lemme de compacité [13] :

On se donne trois espaces de Banach B_o, B, B_1 avec

i) $B_o \subset B \subset B_1$ $\quad B_i$ réflexif $i = 0,1$

ii) l'injection de $B_o \hookrightarrow B$ est compacte.

On définit $W = \{v | v \in L^{p_o}(0,T;B_o), \quad v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$ où T est fini et où $1 < p_i < +\infty$, $i = 0,1$.

muni de la norme : $||v||_W = ||v||_{L^{p_o}(0,T;B_o)} + ||v'||_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$.

W est un espace de Banach et on a : $W \subset L^{p_o}(0,T;B)$.

Enoncé du lemme :

Sous les hypothèses i) et ii) et si $1 < p_i < +\infty$, $i = 0,1$ l'injection de W dans $L^{p_o}(0,T;B)$ est compacte.

On applique ce lemme en prenant $B_o = H^m_o(\Omega)$, $B = H^{m-1}_o(\Omega)$ et $B_1 = L^2(\Omega)$ avec $p_i = 2$, $i = 0,1$. ii) résulte du théorème de Rellich. On déduit que l'injection de W dans $L^2(0,T;H^{m-1}_o(\Omega))$ est compacte avec $W = \{v | v \in L^2(0,T;H^m_o(\Omega)),\ v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$.

Comme la suite $\{u_n\}$ demeure dans un borné de $L^2(0,T;H^m_o(\Omega))$ et que la suite $\{u'_n\}$ reste dans un borné de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$; alors, d'après ce qui précède la suite $\{u_n\}$ est relativement compacte dans $L^2(0,T,H^{m-1}_o(\Omega))$.

On peut extraire donc une sous-suite que l'on note encore par $\{u_n\}$ telle que :

$$D^\gamma u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_\gamma \text{ fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ \forall\ |\gamma| \leqslant m-1 \qquad (C_3)$$

On vérifie sans peine que $u_\gamma = D^\gamma u$ pour $|\gamma| \leqslant m-1$ et $D^\gamma u_n(x,t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} D^\gamma u(x,t)$ p.p $x,t \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ (car T est arbitraire) pour $|\gamma| \leqslant m-1$.

D'autre part : $|\beta(.,u_n(t))|_2 \leqslant K_2\, c_o^{\nu+1} S_{2(\nu+1)}^{\nu+1} ||u_n(t)||_A^{\nu+1}$

donc $\{\beta(.,u_n(t))\}_{n\geqslant 0}$ est borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$.

On peut extraire une sous-suite $\{u_n\}$ qui vérifie, outre C_1, C_2 et C_3 :

$$\beta(.,u_n(t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(t) \quad \text{faiblement étoilé dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)).$$

Reste à montrer que : $\zeta = \beta(.,u(t))$.

<u>*Lemme 4*</u> [13] :

Soit θ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, g_n et g des fonctions de $L^q(\theta)$, $1 < q < +\infty$ telles que : $|g_n|_q \leqslant C$; $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ p.p dans θ.

Alors $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ faiblement dans $L^q(\theta)$.

$$\beta(.,u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta \quad \text{faiblement étoilé dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$$

entraîne que $\beta(.,u_n(t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta$ faiblement dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

$$(L^2(0,T;L^2(\Omega)) \simeq L^2(Q_T)) \qquad Q_T = \Omega \times]0,T[.$$

Appliquons le lemme 4 en prenant $\theta = Q_T$, $g_n = \beta(.,u_n)$ $g = \beta(.,u)$

$|\beta(.,u_n(t))| \leqslant C$ et $\beta(x,u_n(x,t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta(x,u(x,t)$ p.p $x,t \in Q_T$ (car $u_n(x,t)) \to u(x,t)$ p.p x,t).

Alors $\beta(.,u_n(t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta(.,u(t))$ dans $L^2(Q_T)$ (C_4)

d'où il résulte que $\zeta = \beta(.,u)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$

$$\int_0^T |(\rho(.,u_n'))|_2^2 dt \leqslant K_2^2 \int_T^T |u_n'(t)|_2^2 dt \leqslant 2T\, K_2^2\, d_o$$

$\rho(.,u_n'(t))$ demeure dans un borné de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et on peut extraire une sous-suite $\{u_n\}$ qui vérifie outre C_1, C_2, C_3 et C_4 :

$$\rho(.,u_n'(t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \chi(t) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \simeq L^2(Q_T).$$

De plus, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+} |\psi(s)(Lu_n(s)-Lu(s),g(s))\, ds \leq |\psi|_\infty \int_{\mathbb{R}^+} |(Lu_n(s)-Lu(s),g(s))|ds =$$

$$= |\psi|_\infty \int_{\mathbb{R}^+} |(u_n(s)-u(s),L^* g(s))|ds \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \forall\, g \in L^1(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$$

(car $u_n \xrightarrow[n]{} u \quad \omega^*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+,H^m_o(\Omega))$,

donc $\psi(t)Lu_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(t)Lu(t)$ faiblement étoilé dans $L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))$.

Prouvons qu'on a : $u''(t) + Au(t) + \psi(t)Lu(t) + \chi(t) + \beta(.,u(t)) = f(t)$.

Posons :

$$\mathcal{B} = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \{(u''_n(t),h(t)) + \langle Au_n(t),h(t)\rangle + (\psi(t)Lu_n(t),h(t)) + (\rho(.,u'_n(t)),h(t)) +$$
$$+ \beta(.,u_n(t)),h(t)) - (f(t),h(t))\}dt$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \{-(u'_n(t),h'(t)) + (u_n(t),h(t))_m - (\psi(t)Lu_n(t),h(t)) + (\rho(.,u'_n(t)),h(t)) +$$
$$+ (\beta(.,u_n(t)),h(t)) - (f(t),h(t))\}dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \{-(u'(t),h'(t)) + (u(t),h(t))_m + (\psi(t)Lu(t),h(t)) + (\chi(t),h(t)) +$$
$$+ (\beta(.,u(t)),h(t)) - (f(t),h(t))\}dt.$$

Ceci pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^+,H^m_o(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ à support compact sur $\mathbb{R}^+$.

Mais l'ensemble des combinaisons linéaires finies des ω_j est dense dans l'ensemble $H^m_o(\Omega)$, les fonctions $u_n(t)$ sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires (I_n) alors $\mathcal{B} = 0$.

Par conséquent : $u''(t) + Au(t) + \mathcal{V}(t)Lu(t) + \chi(t) + \beta(.,u(t)) = f(t)$.

Il reste à montrer que :

i) $u(0) = u_0$ et $u'(0) = u_1$;

ii) $\chi(t) = \rho(.,u'(t))$;

iii) $u(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, H_0^m(\Omega))$ et $u'(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$.

i) $\underline{u_o = u(0)}$?

Lemme 5 [13] :

Soit X un espace de Banach.

Si $f \in L^p(0,T;X)$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;X)$ $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ alors f est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de (0,T), continue de [0,T] dans X.

Soit $T > 0$ arbitraire, l'appartenance de u à $L^\infty(\mathbb{R}^+, H_o^m(\Omega))$ implique celle de u à $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$. Comme $u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, u est continue de [0,T] dans $L^2(\Omega)$ et u(0) un sens.

Considérons $\Psi = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j \otimes \omega_j$ avec $\Psi_j(T) = 0$ et $\Psi_j \in C^1([0,T])$.

$(u_n(0),\Psi(0)) = -\int_0^T (u_n'(s),\Psi(s))ds - \int_0^T (u_n(s),\Psi'(s))ds$ et passons à la limite quant n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$-\int_0^T (u'(s),\Psi(s))ds - \int_0^T (u(s),\Psi'(s))ds = (u(0),\Psi(0)) .$$

or, $\Psi(0)$ est une combinaison linéaire arbitraire de $\omega_1,\dots,\omega_n$, par suite

$$u_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(0) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega) ,$$

par hypothèse $u_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_o$ fortement dans $H_o^m(\Omega)$ donc dans $L^2(\Omega)$

on a alors : $u_o = u(0)$.

$\underline{u_1 = u'(0)}$?

$$u''(t) = f(t)-Au(t)-\psi(t)Lu(t)-\beta(.,u(t))-\chi(t) \in L^2(0,T;H^{-m}(\Omega)+L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-m}(\Omega))$$

$$u'(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-m}(\Omega)).$$

D'après le lemme 5, il résulte que $u'(t)$ est continue de $[0,T] \to H^{-m}(\Omega)$

donc $u'(0)$ a un sens.

On reconsidère $\Psi = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j \otimes \omega_j$ $\quad \Psi_j \in C^{(1)}([0,T])$ $\quad \Psi_j(T) = 0$

$$\int_0^T (u_n''(s),\Psi(s))ds = -\int_0^T (u_n'(s),\Psi'(s))ds-(u_n'(0),\Psi(0)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\int_0^T (u'(s),\Psi'(s))ds-(u_1,\Psi(0)).$$

D'autre part, on a :

$$\int_0^T (u_n''(s),\Psi(s))ds = \int_0^T \{(f(s),\Psi(s))-<Au_n(s),\Psi(s)>-(\psi(s)Lu_n(s),\Psi(s))-(\rho(.,u_n'(s)),\Psi(s)) +$$
$$- (\beta(.,u_n(s)),\Psi(s))\}ds.$$

$$\downarrow n\to+\infty$$

$$\int_0^T \{(f(s),\Psi(s))-<Au(s),\Psi(s)>-(\psi(s)Lu(s),\Psi(s))-(\chi(s),\Psi(s))-(\beta(.,u(s)),\Psi(s))\}ds$$
$$= \int_0^T (u''(s),\Psi(s))ds$$

à la limite, on a :

$$\int_0^T (u''(s),\Psi(s))ds = -\int_0^T (u'(s),\Psi'(s))ds-(u_1,\Psi(0)).$$

Il s'ensuit que : $(u_1,\Psi(0)) = (u'(0),\Psi(0))$

donc $u_1 = u'(0)$ (car $\Psi(0)$ est une combinaison linéaire arbitraire de $\omega_1,\ldots,\omega_n$).

ii) $\chi(t) = \rho(.,u'(t))$.

Lemme 6 [13] ou [15] :

Soit ω une fonction telle que :

$\omega \in L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$ et $\omega' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $T > 0$ arbitraire.

$\omega''(t) + A\omega(t) = F(t,\omega(t))$

$\omega(0) = \omega_0$ et $\omega'(0) = \omega_1$ avec $F(t,\omega(t)) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)+H^{-m}(\Omega))$.

Alors pour presque tout $t \in [0,T]$ on a :

$$||\omega(t)||_A^2 + |\omega'(t)|_2^2 \geqslant ||\omega_0||_A^2 + |\omega_1|_2^2 + 2\int_0^t (F(s,\omega(s)),\omega'(s))ds.$$

Appliquons ce lemme à notre cas avec : $\begin{cases} \omega = u \\ F(t,u(t))=f(t)-\beta(.,u(t))-\chi(t)-\varphi(t)Lu(t) \end{cases}$

nous avons :

$$||u(t)||_A^2+|u'(t)|_2^2+2\int_0^t (\beta(.,u(s)),u'(s))ds+2\int_0^t (\chi(s),u'(s))ds+2\int_0^t (\varphi(s)Lu(s),u'(s))ds \geqslant$$

$$2\int_0^t (f(s),u'(s))ds + ||u_0||_A^2 + |u_1|_2^2 \quad \text{p.p} \quad t \in [0,T] \qquad (*)$$

Choisissons une suite de nombres $\{t_k\}$ convergente vers T telle que (*) soit vérifiée en chacun des t_k.

On sait que pour chaque t, $\{u_n(t)\}$ est bornée dans $H_o^m(\Omega)$ et $\{u_n'(t)\}$ aussi bornée dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire donc une sous-suite (que l'on note encore $\{u_n(t)\}$) telle que :

$$u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Psi_o(t) \text{ faiblement dans } H_o^m(\Omega)$$

$$\text{et} \quad u_n'(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Psi_1(t) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

D'après ce que nous avons vu précèdemment en i) et ii)

$$\Psi_o(t) = u(t) \text{ dans } H_o^m(\Omega) \text{ et } \Psi_1(t) = u'(t) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Soit $t = t_1$, de $\{u_n(t_1)\}$, on peut extraire une sous-suite $\{u_{1n}(t_1)\}$ telle que :

$$u_{1n}(t_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t_1) \text{ faiblement dans } H_o^m(\Omega)$$

$$\text{et} \quad u_{1n}'(t_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t_1) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Soit $t = t_2$, de $\{u_{1n}(t_2)\}$, on peut extraire une sous-suite $\{u_{2n}(t_2)\}$ telle que :

$$u_{2n}(t_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t_1) \text{ faiblement dans } H_o^m(\Omega)$$

$$u_{2n}(t_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t_2) \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\text{et} \quad u_{2n}'(t_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t_1) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)$$

$$u_{2n}'(t_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t_2) \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Soit $t = t_q$, de $\{u_{(q-1)n}(t_q)\}$ on peut extraire une sous-suite $\{u_{qn}(t_q)\}$ telle que :

$$u_{qn}(t_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t_1) \quad \text{faiblement dans} \quad H_o^m(\Omega)$$

$$u_{qn}(t_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t_2) \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\ldots \quad u_{qn}(t_q) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t_q) \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\text{et} \quad u'_{qn}(t_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t_1) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega)$$

$$u'_{qn}(t_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t_2) \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\ldots \quad u'_{qn}(t_q) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t_q) \quad \text{"} \quad \text{"}$$

On extrait alors la suite diagonale $\{u_{nn}\}$ de $\{u_n\}$ telle que :

$$u_{nn}(t_q) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t_q) \quad \text{faiblement dans} \quad H_o^m(\Omega) \quad \text{pour} \quad q = 1,2,\ldots$$

$$u'_{nn}(t_q) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t_q) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{pour} \quad q = 1,2,\ldots$$

Reprenons maintenant (6) avec $t_2 = t$ et $t_1 = 0$ pour établir le résultat, on a :

$$|u'_n(t)|_2^2 + ||u_n(t)||_A^2 + 2\int_\Omega\int_0^{u_n(x,t)} \beta(x,s)ds\, dx + 2\int_0^t (\vartheta(s)Lu_n(s),u'_n(s))ds +$$

$$+ 2\int_0^t (\rho(.,u'_n(s)),u'_n(s))ds =$$

$$= 2\int_0^t (f(s),u'_n(s))ds+2\int_\Omega\int_0^{u_n(x,0)} \beta(x,s)ds\, dx+||u_n(0)||_A^2+|u'_n(0)|_2^2 \qquad (**)$$

et passons à la limite inférieure en tenant compte des propriétés :

(1) Si (x_n) est majorée et (y_n) convergente $\underline{\lim}(x_n+y_n) = \underline{\lim}\, x_n + \lim y_n$;

(2) Si (x_n) et (y_n) sont majorées $\underline{\lim}(x_n+y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$;

(3) Si (x_n) est une suite d'un espace de Hilbert réel convergente faiblement vers x, $\underline{\lim}||x_n||^2 \geqslant ||x||^2$;

(4) $$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \int^{u_n(x,0)} \beta(x,s)ds\, dx = \int_\Omega \int_0^{u(x,0)} \beta(x,s)ds\, dx.$$

La dernière propriété résulte du théorème de Vitali :

Théorème de Vitali [20] :

Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions uniformément absolument intégrale et si $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ p.p. $x \in \Omega$

alors $\begin{cases} 1) & f \in L^1(\Omega) \ ; \\ 2) & \int_\Omega f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx. \end{cases}$

L'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\zeta \to \int_0^\zeta \beta(x,s)ds \quad \text{est continue pour presque tout } x \in \Omega.$$

Soit t fixé, posons $F_n(x,t) = \int_0^{u_n(x,t)} \beta(x,s)ds$

et $F(x,t) = \int_0^{u(x,t)} \beta(x,s)ds.$

On a : $F_n(x,t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x,t)$ p.p $x \in \Omega$ car $u_n(x,t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x,t)$ p.p $x \in \Omega$.

Il suffit de montrer que $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0$ tq $E \subset \Omega$ avec $\text{mes}(E) < \delta$

$$\Longrightarrow \int_E |f_n| < \varepsilon \quad \text{pour } n = 1,2,\ldots$$

Soit $E \subset \Omega$ quelconque.

$$\int_E |F_n(x,t)|\,dx = \int_E \left| \int_0^{u_n(x,t)} \beta(x,s)\,ds \right| dx \leq \frac{K_2}{\nu+2} \int_E |u_n(x,t)|^{\nu+2} dx$$

$$\leq \frac{K_2}{\nu+2} (\text{mes } E)^{\frac{\nu}{2\nu+2}} c_o^{\nu+2} S_{2\nu+2}^{\nu+2} ||u_n(s)||_A^{\nu+2}$$

$$\leq \frac{K_2}{\nu+2} c_o^{\nu+2} S_{2\nu+2}^{\nu+2} c_o^{\nu+2} x_o^{\nu+2} (\text{mes } E)^{\frac{\nu}{2\nu+2}}$$

$$\text{mes } E < \left[\frac{\nu+2}{K_2\, c_o^{\nu+2}\, S_{2\nu+2}^{\nu+2}\, x_o^{\nu+2}} \,.\varepsilon \right]^{\frac{2\nu+2}{\nu}}$$

On prend $\quad \delta(\varepsilon) = \left[\frac{\nu+2}{K_2\, c_o^{\nu+2}\, S_{2\nu+2}^{\nu+2}\, x_o^{\nu+2}} \,.\varepsilon \right]^{\frac{2\nu+2}{\nu}}$

(5) Enfin, la compacité de L implique :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t (\psi(s) L u_n(s), u_n'(s))\,ds = \int_0^t (\psi(s) L u(s), u'(s))\,ds$$

puisque

$$\int_0^t |\psi(s)((Lu_n(s),u_n'(s))-(Lu(s),u'(s)))|\,ds \leq |\psi|_\infty \int_0^t |(Lu_n(s)-Lu(s),u_n'(s))|\,ds +$$

$$+ |\psi|_\infty \int_0^t |(Lu(s),u_n'(s)-u'(s))|\,ds \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Prenons la limite inférieure de la relation (**), en tenant compte des propriétés précédentes :

$$\underline{\lim_n}|u_n'(t)|_2^2+\underline{\lim_n}||u_n(t)||_A^2+2\lim_n\int_\Omega\int^{u_n(x,t)}\beta(x,s)ds\,dx+2\underline{\lim_n}\int_0^t(\psi(s)Lu_n(s),u_n'(s))ds\,+$$

$$+2\underline{\lim_n}\int_0^t(\rho(.,u_n'(s)),u_n'(s))ds\leqslant 2\lim_n\int_0^t(f(s),u_n'(s))ds+2\lim_n\int_\Omega\int_0^{u_n(x,t)}\beta(x,s)ds\,dx\,+$$

$$+\lim_n||u_n(0)||_A^2+\lim_n|u_n'(0)|_2^2$$

$$|u'(t)|_2^2+||u(t)||_A^2+\int_\Omega\int_0^{u(x,t)}\beta(x,s)ds\,dx+2\int_0^t(\psi(s)Lu(s),u'(s))ds+2\underline{\lim_n}\int_0^t(\rho(.,u_n'(s)),u_n'(s))ds$$

$$\leqslant 2\int_0^t(f(s),u'(s))ds+2\int_\Omega\int_0^{u(x,0)}\beta(x,s)ds\,dx+||u_o||_A^2+|u_1|_2^2 \qquad (\square)$$

Cette dernière estimation jointe à $(*)$ entraîne

$$\int_0^t(\chi(s),u'(s))ds\geqslant\underline{\lim_n}\int_0^t(\rho(.,u_n'(s)),u_n'(s))ds\quad\text{pour}\quad t=t_k \qquad (i)$$

Utilisons la technique de Minty [16] appliquée à des opérateurs monotones (non linéaires) dans des espaces de Hilbert.

Soit $\Psi\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ arbitraire, on a les relations suivantes :

$$-\int_0^t(\rho(.,\Psi(s)),u'(s))ds=-\lim_{n\to+\infty}\int_0^t(\rho(.,\Psi(s)),u_n'(s))ds \qquad (ii)$$

$$-\int_0^t(\chi(s),\Psi(s))ds=-\lim_{n\to+\infty}\int_0^t(\rho(.,u_n'(s)),\Psi(s))ds \qquad (iii)$$

et $$\int_0^t(\rho(.,\Psi(s)),\Psi(s))ds\;. \qquad (iv)$$

Additionnant membre à membre i), ii), iii) et iv), on a :

$$\int_0^t (\chi(s)-\rho(.,\Psi(s)),(u'-\Psi)ds \geqslant \underline{\lim_n} \int_0^t (\rho(.u'_n(s))-\rho(.,\Psi(s)),u'_n(s)-\Psi(s))ds$$

pour $t = t_k$.

Comme la fonction $\rho(.,v)$ est non décroissante par rapport à v.

$$\int_0^{t_k} (\chi(s)-\rho(.,\Psi(s)),u'-\Psi)ds \geqslant 0$$

lorsque $t_k \to T$ on a par passage à la limite

$$\int_0^T (\chi(s) - \rho(.,\Psi(s)),u'-\Psi)ds \geqslant 0.$$

En prenant Ψ sous la forme $\Psi = u'-\lambda\Psi_1$ avec $\lambda > 0$, et Ψ_1 quelconque dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

$$\int_0^T (\chi(s) - \rho(.,u'-\lambda\Psi_1),\Psi_1)ds \geqslant 0$$

et si on fait tendre λ vers 0, on a $\int_0^T (\chi(s)-\rho(.,u'(s)),\Psi_1(s))ds \geqslant 0$, Ψ_1 étant arbitraire.

Ceci ne sera possible que dans le cas où $\chi(t) = \rho(.,u'(t))$.

iii) $\underline{u(t) \in C(\mathbb{R}^+,H_0^m(\Omega)) \text{ et } u'(t) \in C(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))}$.

Lemme 7 [14], [22].

Soient X et Y deux espaces de Banach $X \to Y$ avec injection continue, X étant réflexif. On pose :

$C_s(0,T;Y)$ = espace des fonctions $f \in L^\infty(0,T;Y)$ qui sont scalairement continues de $[0,T] \to Y$.

(i.e. $t \longrightarrow \langle f(t), y' \rangle$ est continue sur $[0,T]$ $\forall\, y' \in Y'$).

Alors $L^\infty(0,T;X) \cap C_S(0,T;Y) = C_S(0,T;X)$.

On peut toujours supposer (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) que $u \in C_S(0,T;H_0^m(\Omega))$, $u' \in C_S(0,T;L^2(\Omega))$. En effet, on sait que $u \in L^\infty(0,T;H_0^m(\Omega))$ et que $u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, donc u est en particulier continue de $[0,T] \to L^2(\Omega)$ (Lemme 7) et donc $u \in C_S(0,T;H_0^m(\Omega))$.

Ensuite pour $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u''(t) = g - Au(t) \in L^2(0,T;H^{-m}(\Omega))$ donc u' est continue de $[0,T]$ dans $H^{-m}(\Omega)$ d'où $u'(t) \in C_S(0,T;L^2(\Omega))$.

Lemme 8 (Egalité de l'énergie) [22] :

Si $u \in L^\infty(0,T;H_0^m(\Omega))$, $u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap C_S(0,T,L^2(\Omega))$ alors u vérifie pour tout $t \in [0,T]$:

$$||u(t)||_A^2 + |u'(t)|_2 = ||u(0)||_A^2 + |u'(0)|_2^2 + 2\int_0^t (f(s),u'(s))ds -$$

$$- 2\int_0^t (\psi(s)Lu(s),u'(s))ds - 2\int_0^t (\beta(.,u(s)),u'(s))ds - 2\int_0^t (\rho(.,u'(s)),u'(s)ds.$$

Corollaire 1 :

$$t \rightsquigarrow |u'(t)|_2^2 + ||u(t)||_A^2 \text{ est continue.}$$

On a : $|u'(t_n) - u'(t)|_2^2 + ||u(t_n) - u(t)||_A^2 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

En effet :

$$|u'(t_n)-u'(t)|_2^2 + ||u(t_n)-u(t)||_A^2 = |u'(t_n)|_2^2 + |u'(t)|_2^2 - 2(u'(t_n),u'(t)) +$$

$$+ ||u(t_n)||_A^2 + ||u(t)||_A^2 - 2(Au(t),u(t_n))$$

tend vers 0 car d'après le corollaire 1 :

$$|u'(t_n)|_2^2 + ||u(t_n)||_A^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |u'(t)|_2^2 + ||u(t)||_2^2 \,.$$

Il résulte que : $u(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(t)$ fortement dans $H_o^m(\Omega)$.

et $u'(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'(t)$ fortement dans $L^2(\Omega)$.

c'est-à-dire $u \in C(\mathbb{R}^+, H_o^m(\Omega))$ et $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$.

§ 7 - *Unicité et comportement asymptotique.*

Soient u et v deux solutions bornées du problème de Cauchy associé à (1) de conditions initiales respectives (u_o,u_1) et (v_o,v_1) appartenant à l'ensemble de stabilité S.

Posons
$$\omega = u - v$$
$$\omega(0) = u_o - v_o$$
$$\omega'(0) = u_1 - v_1 \quad \text{et} \quad a = \sup(||u||_A, ||v||_A).$$

f et ψ sont ici fixés de normes respectives "assez petites", on a l'équation :

$$\omega''(t) + A\omega(t) + \psi(t)L\omega(t) + \rho(.,u'(t)) - \rho(.,v'(t)) + \beta(.,u(t)) - \beta(.,v(t)) = 0 \qquad (E)$$

On multiplie (E) par $\omega'(t)$:

$$(\omega''(t),\omega'(t))+(A\omega(t),\omega'(t))+(\psi(t)L\omega(t),\omega'(t))+(\rho(.,u'(t))-\rho(.,v'(t)),\omega'(t)) +$$
$$+ (\beta(.,u(t)) - \beta(.,v(t)),\omega'(t)) = 0.$$

Par suite :

$$\frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}(|\omega'(t)|_2^2+||\omega(t)||_A^2) = -(\psi(t)L\omega(t),\omega'(t)) - (\rho(.,u'(t))-\rho(.,v'(t)),\omega'(t)) +$$
$$- (\beta(.,u(t)) - \beta(.,v(t)),\omega'(t)).$$

$$\frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}(|\omega'(t)|_2^2 + ||\omega(t)||_A^2)\} \leqslant |\psi(t)||k\ c_o\ S_2||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2 - K_o|\omega'(t)|_2^2 +$$
$$+ \int_\Omega K_3(|u(x,t)|^\nu + |v(x,t)|^\nu)|\omega(x,t)|\ |\omega'(x,t)|dx .$$

Utilisons l'inégalité de Hölder pour majorer le dernier terme :

$$K_3 \int_\Omega |u(x,t)|^\nu|\omega(x,t)||\omega'(x,t)|dx + K_3 \int_\Omega |v(x,t)|^\nu|\omega(x,t)||\omega'(x,t)\ dx$$

$$\int_\Omega |u(x,t)|^\nu|\omega(x,t)||\omega'(x,t)|dx \leqslant (\int_\Omega |u(x,t)|^{2\nu}|\omega(x,t)|^2dx)^{1/2}(\int_\Omega |\omega'(x,t)|^2dx)^{1/2}$$

$$\leqslant \left[(\int_\Omega |u(x,t)|^{2\nu(\frac{\nu+1}{\nu})}dx)\right]^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}\left[(\int_\Omega |\omega(x,t)|^{2(\nu+1)}dx)\right]^{\frac{1}{2(\nu+1)}}(\int_\Omega |\omega'(x,t)|^2\ dx)^{1/2}$$

$$\leqslant |u(t)|_{2(\nu+1)}^\nu |\omega(t)|_{2(\nu+1)}|\omega'(t)|_2 .$$

$$\int_\Omega |u(x,t)|^\nu|\omega(x,t)||\omega'(x,t)|dx \leqslant S_{2(\nu+1)}^\nu c_o^\nu||u(t)||_A^\nu S_{2(\nu+1)}c_o||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2$$
$$\leqslant S_{2(\nu+1)}^\nu c_o^{\nu+1} S_{2(\nu+1)}||u(t)||_A^\nu||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2.$$

De même, on a :

$$\int_\Omega |v(x,t)|^\nu|\omega(x,t)||\omega'(x,t)|dx \leqslant S_{2(\nu+1)}^\nu S_2\ c_o^{\nu+1}||v(t)||_A^\nu||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2$$

c'est-à-dire

$$K_3 \int_\Omega (|u(x,t)|^\nu + |v(x,t)|^\nu)|\omega(x,t)||\omega'(x,t)|dx$$

$$\leqslant K_3\, S^\nu_{2(\nu+1)} S_{2(\nu+1)} c_o^{\nu+1}(||u(t)||_A + ||v(t)||_A)||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2.$$

On peut écrire comme u et v sont deux solutions bornées sur $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{d}{dt}\{\frac{1}{2}(|\omega'(t)|_2^2 + ||\omega(t)||_A^2)\} \leqslant C||\omega||_A|\omega'(t)|_2 - K_o|\omega'(t)|_2^2$$

avec $C = |\psi|_\infty\, k\, c_o\, S_2 + K_3\, c_o\, S_{2(\nu+1)} S_{2(\nu+1)} c_o^{\nu+1}(||u(t)||_A + ||v(t)||_A^\nu)$.

D'autre part, en multipliant l'équation (E) par $\omega(t)$

$$\frac{d}{dt}(\omega'(t),\omega(t)) = (\omega'(t),\omega'(t)) + (\omega''(t),\omega(t))$$

$$= |\omega'(t)|_2^2 - (A\omega(t),\omega(t)) - (\psi(t)L\omega(t),\omega(t)) +$$

$$+ (\rho(.,u'(t))-\rho(.,v'(t)),\omega(t))-(\beta(.,u(t))-\beta(.,v(t)),\omega(t)).$$

c'est-à-dire pour un ε positif arbitraire pour l'instant.

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(\omega'(t),\omega(t)) = \varepsilon|\omega'(t)|_2^2-\varepsilon(A\omega(t),\omega(t))-\varepsilon\psi(t)(L\omega(t),\omega(t)) +$$

$$-\varepsilon(\rho(.,u'(t))-\rho(.,v'(t)),\omega(t))+\varepsilon(\beta(.,u(t))-\beta(.,v(t)),\omega(t)).$$

$$\leqslant \varepsilon|\omega'(t)|_2^2 - \varepsilon||\omega(t)||_A^2+\varepsilon|\psi|_\infty k\, c_o^2||\omega(t)||_A^2+\varepsilon K_1 c_o S_2|\omega'(t)|_2||\omega(t)||_A +$$

$$+ 2K_3 S^\nu_{\nu+1} S^2_{2(\nu+1)} c_o^{\nu+2} a^\nu ||\omega||_A^2 .$$

Définissons maintenant V_ε sur $\mathbb{R}$ par

$V_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}(|\omega'(t)|_2^2 + ||\omega(t)||_A^2) + \varepsilon(\omega(t),\omega'(t))$, pour ε assez petit, dont la racine carrée est une norme équivalente à la norme sur $H_o^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$ si ε est assez petit.

En effet :

$$\varepsilon(\omega(t),\omega'(t)) \leqslant \varepsilon|\omega(t)|_2|\omega'(t)|_2 \leqslant \varepsilon\, S_2\, c_o||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon\, S_2\, c_o}{2}(||\omega(t)||_A^2 + |\omega'(t)|_2^2)$$

avec S_2 la constante de Sobolev.

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon S_2 c_o)(||\omega(t)||_A^2+|\omega'(t)|_2^2) \leqslant V_\varepsilon(t) \leqslant \frac{1}{2}(1+\varepsilon S_2 c_o)(||\omega(t)||_A^2+|\omega'(t)|_2^2).$$

Ainsi donc $||\omega(t)||_A^2 + |\omega'(t)|_2^2 \geqslant 2(1+\varepsilon S_2 c_o)^{-1}V_\varepsilon(t)$.

En regroupant les inégalités précédentes

$$\frac{d}{dt}V_\varepsilon(t) \leqslant C||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2-K_o|\omega'(t)|_2^2+\varepsilon|\omega'(t)|_2^2-\varepsilon||\omega(t)||_A^2+\varepsilon|\psi|_\infty k\, c_o^2||\omega(t)||_A^2 +$$

$$+ \varepsilon K_1 c_o S_2|\omega'(t)|_2||\omega(t)||_A + 2\varepsilon K_3 S_{\nu+1}^\nu S_{2(\nu+1)}^2 c_o^{\nu+1} a^\nu||\omega(t)||_A^2$$

ou

$$\frac{d}{dt}V_\varepsilon(t) \leqslant \frac{C}{2}||\omega(t)||_A^2+\frac{C}{2}|\omega'(t)|_2^2 - K_o|\omega'(t)|_2^2+\varepsilon|\omega'(t)|_2^2-\varepsilon||\omega(t)||_A^2+\varepsilon|\psi|_\infty k c_o^2||\omega(t)||_A^2$$

$$+ \frac{\varepsilon\, c_o\, K_1\, S_2}{\lambda}||\omega(t)||_A^2 + \lambda\,\varepsilon\, S_2 c_o K_1|\omega'(t)|_2^2 + 2\varepsilon K_3 S_{\nu+1}^\nu S_{2(\nu+1)}^2 c_o^{\nu+1} a^\nu||\omega(t)||_A^2$$

avec $\lambda > 0$.

Prenons alors $\lambda = 2\, c_o\, K_1\, S_2$

$$\frac{d}{dt}V_\varepsilon(t) \leqslant (\frac{C}{2} - \varepsilon + \varepsilon|\psi|_\infty k\, c_o^2 + \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon K_3 S_{\nu+1}^\nu S_{2(\nu+1)}^2 c_o^{\nu+1} a^\nu)||\omega(t)||_A^2 +$$

$$+ (\frac{C}{2} - K_o + \varepsilon + 2\varepsilon S_2\, c_o^2\, K_1^2)|\omega'(t)|_2^2 .$$

et choisissons ψ et a de sorte que :

$$|\psi|_\infty k c_o^2 + 2K_3 S_{\nu+1}^{\nu} S_{2(\nu+1)}^2 c_o^{\nu+1} a^{\nu} \leq \frac{1}{10} .$$

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq (\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{10}) ||\omega(t)||_A^2 + (\frac{C}{2} - K_o + \varepsilon + 2\varepsilon\, c_o^2\, K_1^2) |\omega'(t)|_2^2$$

Fixons maintenant ε et $C \leq \frac{\varepsilon}{10}$, on pourra écrire

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq - \frac{7\varepsilon}{20} ||\omega(t)||_A^2 + (\frac{\varepsilon}{20} - K_o + \varepsilon + 2\varepsilon\, c_o^2\, K_1^2) |\omega'(t)|_2^2 .$$

Mais si ε vérifie $\frac{\varepsilon}{20} - K_o + \varepsilon + 2\varepsilon S_2\, c_o^2\, K_1^2 \leq - \frac{7\varepsilon}{20}$

c'est-à-dire $\varepsilon < \dfrac{K_o}{\frac{7}{5} + 2c_o^2\, S_2\, K_1^2}$, on aura

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq - \frac{7\varepsilon}{20} (||\omega(t)||_A^2 + |\omega'(t)|_2^2)$$

et compte tenu de la relation entre $V_\varepsilon(t)$ et $||\omega(t)|_2^2 + |\omega'(t)|^2$

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq - \frac{7\varepsilon}{10} (1+\varepsilon S_2 c_o)^{-1} V_\varepsilon(t)$$

soit $\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq - \delta(\varepsilon) V_\varepsilon(t)$

où $V_\varepsilon(t) \leq V_\varepsilon(0) e^{-\delta(\varepsilon)t}$ avec $\delta(\varepsilon) = \frac{7\varepsilon}{10} (1+\varepsilon S_2 c_o)^{-1} > 0$.

Ainsi donc

$$||\omega(t)||_A^2 + |\omega'(t)|_2^2 \leq \frac{1+\varepsilon S_2 c_o}{1-\varepsilon S_2 c_o} (||\omega(0)||_A^2 + |\omega'(0)|_2^2) e^{-\delta(\varepsilon)t} .$$

Cette dernière relation montre en plus de l'unicité le comportement asymptotique de la solution quand t tend $+\infty$.

§ 8 - *Etude de la variation de* $u(t)$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *en fonction de* $u(0)$, $u'(0)$, $f(t)$ *et* $\psi(t)$:

Soient u et v deux solutions bornées sur $\mathbb{R}^+$ respectives du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) + \psi(t)Lu(t) + \rho(.,u'(t)) + \beta(.,u(t)) = f(t) \\ u(0) = u_o \\ u'(0) = u_1 \qquad (u_o,u_1) \in S \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v''(t) + Av(t) + \Psi(t)Lv(t) + \rho(.,v'(t)) + \beta(.,v(t)) = g(t) \\ v(0) = v_o \\ v'(0) = v_1 \qquad (v_o,v_1) \in S \end{cases}$$

$(f,\psi) \in S^2(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}^+)$ telles que $(M_f,|\psi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$

et $(g,\Psi) \in S^2(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}^+)$ telles que $(M_g,|\Psi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$.

Posons : $\omega = u - v$

$$\omega(0) = u(0) - v(0) = u_o - v_o$$

$$\omega'(0) = u'(0) - v'(0) = u_1 - v_1 .$$

$$\omega''(t)+A\omega(t)+\psi(t)Lu(t)-\Psi(t)Lv(t)+\rho(.,u'(t))-\rho(.,v'(t))+\beta(.,u(t))-\beta(.,v(t)) = f(t)-g(t)$$

or $\psi(t)Lu(t)-\Psi(t)Lv(t) = \psi(t)Lu(t)-\psi(t)Lv(t)+\psi(t)Lv(t)-\Psi(t)Lv(t)$

$$= \psi(t)L\omega(t)+(\psi(t)-\Psi(t))Lv(t).$$

Posons : $\Delta\rho(t) = \rho(.,u'(t))-\rho(.,v'(t))$ et $\Delta\beta(t) = \beta(.,u(t))-\beta(.,v(t))$, on a l'équation :

$$\omega''(t)+A\omega(t)+\psi(t)L\omega(t)+(\psi(t)-\Psi(t))Lv(t)+\Delta\rho(t)+\Delta\beta(t) = f(t)-g(t)$$

$$(\omega''(t),\omega'(t))+(A\omega(t),\omega'(t))+(\psi(t)L\omega(t),\omega'(t))+((\psi(t)-\Psi(t))Lv(t),\omega'(t))+(\Delta\rho(t),\omega'(t))+$$
$$+(\Delta\beta(t),\omega'(t)) = (f(t)-g(t),\omega'(t)).$$

$$\frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}(|\omega'(t)|_2^2+||\omega(t)||_A^2)\} \leqslant |\vartheta(t)|kc_o||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2+|\vartheta(t)-\Psi(t)|kc_o||v(t)||_A|\omega'(t)|_2 +$$

$$- K_o|\omega'(t)|_2^2+K_3S^\nu_{2(\nu+1)}S_{2(\nu+1)}c^{\nu+1}(||u(t)||_A^\nu+||v(t)||_A^\nu)||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2+|f(t)-g(t)|_2|\omega'(t)|_2.$$

$$\frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}(|\omega'(t)|_2^2+||\omega(t)||_A^2)\} \leqslant C||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2+kc_oa|\vartheta(t)-\Psi(t)||\omega'(t)|_2-Ko|\omega'(t)|_2^2 \quad +$$

$$+ \quad |f(t)-g(t)|_2|\omega'(t)|_2$$

$$\text{avec} \begin{cases} C = kc_o|\vartheta|_\infty + 2K_3S^\nu_{2(\nu+1)}S_{2(\nu+1)}c^{\nu+1}a^\nu \\ a = \sup(||u(t)||_A,||v(t)||_A). \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(\omega'(t),\omega(t)) = (\omega''(t),\omega(t)) + (\omega'(t),\omega'(t))$$

$$\frac{d}{dt}(\omega'(t),\omega(t)) = |\omega'(t)|_2^2-(A\omega(t),\omega(t))- (\vartheta(t)L\omega(t),\omega(t))-((\vartheta(t)-\Psi(t))Lv(t),\omega(t)) +$$

$$- (\Delta\rho(t),\omega(t))-(\Delta\beta(t),\omega(t))+(f(t)-g(t),\omega(t)).$$

De la même façon que dans le paragraphe précédent, introduisons $V_\varepsilon(t)$ pour cela :

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(\omega'(t),\omega(t)) = \varepsilon|\omega'(t)|_2^2-\varepsilon||\omega(t)||_A^2-\varepsilon(\vartheta(t))L\omega(t),\omega(t))-\varepsilon((\vartheta(t)-\Psi(t))Lv(t),\omega(t)) +$$

$$- \varepsilon(\Delta\rho(t),\omega(t))-\varepsilon(\Delta\beta(t),\omega(t))+\varepsilon(f(t)-g(t),\omega(t))$$

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(\omega'(t),\omega(t)) \leqslant \varepsilon|\omega'(t)|_2^2-\varepsilon||\omega(t)||_A^2+\varepsilon|\vartheta(t)|kc_o^2S_2||\omega(t)||_A^2 +$$

$$+\varepsilon kc_o^2S_2|\vartheta(t)-\Psi(t))||v(t)||_A||\omega(t)||_A+\varepsilon c_oK_1S_2|\omega'(t)|_2||\omega(t)||_A +$$

$$+\varepsilon K_3S^\nu_{\nu+1}S^2_{2(\nu+1)}c_o^{\nu+2}(||u||_A^\nu+||v||_A^\nu)||\omega(t)||_A^2+S_2c_o\varepsilon|f(t)-g(t)|_2||\omega(t)||_A.$$

Avec $v_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}(|\omega'(t)|_2^2 + ||\omega(t)||_A^2) + \varepsilon(\omega(t),\omega'(t))$ (pour ε assez petit).

donc

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq C||\omega(t)||_A|\omega'(t)|_2+kc_oa|\vartheta(t)-\Psi(t)||\omega'(t)|_2-K_o|\omega'(t)|_2^2+|f(t)-g(t)|_2|\omega'(t)|_2 +$$

$$+\varepsilon|\omega'(t)|_2^2-\varepsilon||\omega(t)||_A^2+kc_o^2S_2\varepsilon|\vartheta(t)|||\omega(t)||_A^2+\varepsilon kc_o^2S_2a|\vartheta(t)-\Psi(t))||\omega(t)||_A +$$

$$+\varepsilon K_1c_oS_2|\omega'(t)|_2||\omega(t)||_A+2\varepsilon K_3S_{\nu+1}^{\nu}S_{2(\nu+1)}^2c_o^{\nu+2}a^{\nu}||\omega(t)||_A^2+S_2c_o\varepsilon|f(t)-g(t)|_2||\omega(t)||_A.$$

Utilisons l'inégalité de Young : $ab \leq \frac{a^2}{\lambda} + b^2\lambda, \quad \forall\, \lambda > 0, \quad a,b \geq 0.$

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq \frac{C}{2}||\omega(t)||_A^2+ \frac{C}{2}|\omega'(t)|_2^2+a^2|\omega'(t)|_2^2+k^2c_o^2|\vartheta(t)-\Psi(t)|^2-K_o|\omega'(t)|_2^2 + \frac{1}{\lambda_1}|f-g|_2^2 +$$

$$+ \lambda_1|\omega'(t)|_2^2+\varepsilon|\omega'(t)|_2^2-\varepsilon||\omega(t)||_A^2+\varepsilon kc_o^2S_2|\vartheta(t)|||\omega(t)||_A^2+\varepsilon kc_o^2S_2a|\vartheta(t)-\Psi(t)|^2 +$$

$$+\varepsilon kc_o^2a||\omega(t)||_A^2+ \frac{\varepsilon K_1c_oS_2}{\lambda_2}||\omega(t)||_A^2+\varepsilon K_1c_oS_2\lambda_2|\omega'(t)|_2^2+2\varepsilon K_3S_{\nu+1}^{\nu}S_{2(\nu+1)}^2c_o^{\nu+2}a^{\nu}||\omega(t)||_A^2 +$$

$$+\varepsilon S_2c_o\lambda_3||\omega(t)||_A^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda_3} S_2c_o|f(t)-g(t)|_2^2 .$$

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq \left[\frac{C}{2} -\varepsilon+\varepsilon kc_o^2S_2|\vartheta|_\infty+\varepsilon kc_o^2a+ \frac{\varepsilon K_1c_oS_2}{\lambda_2} +2\varepsilon K_3S_{\nu+1}^{\nu}S_{2(\nu+1)}^2c_o^{\nu+2}a^{\nu}+\varepsilon S_2c_o\lambda_3\right]||\omega(t)||_A^2 +$$

$$+ \left[\frac{C}{2} +a^2-K_o+\lambda_1+\varepsilon+\varepsilon K_1c_o\lambda_2S_2\right]|\omega'(t)|_2^2+\left[\varepsilon kc_o^2S_2a+k^2c_o^2\right]|\vartheta(t)-\Psi(t)|^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon}{\lambda_3} S_2c_o\right]|f(t)-g(t)|_2^2 .$$

Prenons alors : $\lambda_1 = \frac{K_o}{2}$; $\lambda_2 = 4K_1c_oS_2$ et $\lambda_3 = 4S_2c_o$

on a :

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leq \left[\frac{C}{2} +\varepsilon(- \frac{1}{2} +kc_o^2S_2|\vartheta|_\infty+kc_o^2a+2K_3S_{\nu+1}^{\nu}S_{2(\nu+1)}^2c_o^{\nu+2}a^{\nu})\right]||\omega(t)||_A^2 +$$

$$+ \left[\frac{C}{2} + a^2 - \frac{K_o}{2} +\varepsilon(1+4K_1^2c_o^2S_2^2)\right]|\omega'(t)|_2^2+(k^2c_o^2+\varepsilon kc_o^2S_2a)|\vartheta(t)-\Psi(t)|^2+(\frac{2}{K_o} + \frac{\varepsilon}{4})|f(t)-g(t)|_2^2 .$$

Choisissons ψ et a de sorte que :

$$kc_o^2 S_2 |\psi|_\infty + kc_o^2 a + 2K_3 S_{\nu+1}^\nu S_{2(\nu+1)}^2 c_o^{\nu+2} a^\nu < \frac{1}{10} .$$

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leqslant \left[\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{10}\right] ||\omega(t)||_A^2 + \left[\frac{C}{2} + a^2 - \frac{K_o}{2} + \varepsilon(1+4K_1^2 c_o^2 S_2^2)\right] |\omega'(t)|_2^2 +$$

$$+ (k^2 c_o^2 + \varepsilon k c_o^2 S_2 a) |\psi(t) - \Psi(t)|^2 + (\frac{2}{K_o} + \frac{\varepsilon}{4}) |f(t) - g(t)|_2^2 .$$

Fixons maintenant ε et $C \leqslant \frac{\varepsilon}{10}$. On pourra écrire

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leqslant -\frac{7}{20} \varepsilon ||\omega(t)||_A^2 + \left[\frac{\varepsilon}{20} + a^2 - \frac{K_o}{2} + \varepsilon(1+4K_1^2 c_o^2)\right] |\omega'(t)|_2^2 + (k^2 c_o^2 + \varepsilon k c_o^2 S_2 a) |\psi(t) - \Psi(t)|^2 +$$

$$+ (\frac{2}{K_o} + \frac{\varepsilon}{4}) |f(t) - g(t)|_2^2 .$$

Mais si ε vérifie : $\frac{\varepsilon}{20} + a^2 - \frac{K_o}{2} + \varepsilon(1+4K_1^2 c_o^2) < -\frac{7\varepsilon}{20}$;

c'est-à-dire $\varepsilon < \dfrac{\frac{K_o}{2} - a^2}{\frac{7}{5} + 4K_1^2 c_o^2}$ avec $2a^2 < K_o$

on aura :

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leqslant -\frac{7\varepsilon}{20} (||\omega(t)||_A^2 + |\omega'(t)|_2^2) + (k^2 c_o^2 + \varepsilon k c_o^2 S_2 a) |\psi(t) - \Psi(t)|^2 + (\frac{2}{K_o} + \frac{\varepsilon}{4}) |f(t) - g(t)|_2^2 .$$

Et compte tenu de la relation entre $V_\varepsilon(t)$ et $||\omega(t)||_A^2 + |\omega'(t)|_2^2$:

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) \leqslant -\frac{7\varepsilon}{10} (1+\varepsilon S_2 c_o)^{-1} V_\varepsilon(t) + (k^2 c_o^2 + \varepsilon k c_o^2 S_2 a) |\psi(t) - \Psi(t)|^2 + (\frac{2}{K_o} + \frac{\varepsilon}{4}) |f(t) - g(t)|_2^2 .$$

$$\text{Soit}\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dt}V_\varepsilon(t) \leqslant -\delta_o(\varepsilon)V_\varepsilon(t)+\delta_1(\varepsilon)|\varphi(t)-\Psi(t)|^2+\delta_2(\varepsilon)|f(t)-g(t)|_2^2. \\ \text{avec}\quad \delta_o(\varepsilon) = \dfrac{7\varepsilon}{10}(1+\varepsilon S_2 c_o)^{-1} \\ \delta_1(\varepsilon) = k^2c_o^2 + \varepsilon k c_o^2 S_2 a \\ \delta_2(\varepsilon) = \dfrac{2}{K_o}+\dfrac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta_o(\varepsilon)t}V_\varepsilon(t)\right) < e^{\delta_o(\varepsilon)t}\delta_1(\varepsilon)|\varphi-\Psi|_\infty^2 + e^{\delta_o(\varepsilon)t}\delta_2(\varepsilon)|f(t)-g(t)|_2^2$$

$$e^{\delta_o(\varepsilon)t}V_\varepsilon(t) \leqslant V_\varepsilon(0) + \int_0^t e^{\delta_o(\varepsilon)s}\delta_1(\varepsilon)|\varphi-\Psi|_\infty^2 ds + \int_s^t e^{\delta_o(\varepsilon)s}\delta_2(\varepsilon)|f(s)-g(s)|_2^2 ds$$

$$V_\varepsilon(t) \leqslant e^{-\delta_o(\varepsilon)t}V_\varepsilon(0) + e^{-\delta_o(\varepsilon)t}\delta_1(\varepsilon)\int_o^t e^{\delta_o(\varepsilon)s}|\varphi-\Psi|_\infty^2 ds +$$

$$+ e^{-\delta_o(\varepsilon)t}\delta_2(\varepsilon)\int_o^t e^{\delta_o(\varepsilon)s}|f(s)-g(s)|_2^2 ds .$$

Soit $h(t) = |f(t)-g(t)|_2^2$, on a avec $[t] = n$ ($[t]$: partie entière de t)

$$\int_0^t e^{\delta_o(\varepsilon)s}h(s)ds = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^{\delta_o(\varepsilon)s}h(s)ds + \int_n^t e^{\delta_o(\varepsilon)s}h(s)ds$$

$$\leqslant \sup_{\tau\geqslant 0}\int_\tau^{\tau+1}h(\sigma)d\sigma \times \left[1+e^{-\delta_o(\varepsilon)} + \dots + e^{-\delta_o(\varepsilon)n}\right]e^{\delta_o(\varepsilon)t} \quad ;$$

or $$1+e^{-\delta_o(\varepsilon)}+\left(e^{-\delta_o(\varepsilon)}\right)^2+ \quad + \left(e^{-\delta_o(\varepsilon)}\right)^n = \frac{1-e^{-(n+1)\delta_o(\varepsilon)}}{1-e^{-\delta_o(\varepsilon)}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-\delta_o(\varepsilon)}}$$

$$\leqslant \frac{e^{\delta_o(\varepsilon)t}}{1-e^{-\delta_o(\varepsilon)}}\sup_{\tau\geqslant 0}\int_\tau^{\tau+1}h(\sigma)d\sigma = \frac{e^{\delta_o(\varepsilon)t}}{1-e^{-\delta_o(\varepsilon)}}M^2_{(f-g)}$$

donc

$$V_\varepsilon(t) \leqslant e^{-\delta_o(\varepsilon)t} V_\varepsilon(0) + \delta_1(\varepsilon)|\vartheta-\Psi|_\infty^2 + \frac{\delta_2(\varepsilon)}{1-e^{-\delta_o(\varepsilon)}} M_{f-g}^2 .$$

Ainsi donc

$$||\omega(t)||_A^2+|\omega'(t)|_2^2 \leqslant \frac{1+\varepsilon S_2 c_o}{1-\varepsilon S_2 c_o} (||\omega(o)||_A^2+|\omega'(o)|_2^2)e^{-\delta_o(\varepsilon)t} + \frac{2\delta_1(\varepsilon)}{1-\varepsilon S_2 c_o}|\vartheta-\Psi|_\infty^2$$

$$+ \frac{2\delta_2(\varepsilon)}{(1-\varepsilon S_2 c_o)(1-e^{-\delta_o(\varepsilon)})} M_{f-g}^2$$

c'est-à-dire

$$||u(t)-v(t)||_A^2+|u'(t)-v'(t)|_2^2 \leqslant M_1(\varepsilon)\left[||u(o)-v(o)||_A^2+|u'(o)-v'(o)|_2^2\right]e^{-\delta_o(\varepsilon)t} +$$

$$+ M_2(\varepsilon)|\vartheta-\Psi|_\infty^2 + M_3(\varepsilon) M_{f-g}^2 ,$$

avec $M_1(\varepsilon) = \dfrac{1+\varepsilon S_2 c_o}{1-\varepsilon S_2 c_o}$, $M_2(\varepsilon) = \dfrac{2\delta_1(\varepsilon)}{1-\varepsilon S_2 c_o}$ et $M_3(\varepsilon) = \dfrac{2\delta_2(\varepsilon)}{(1-\varepsilon S_2 c_o)(1-e^{-\delta_o(\varepsilon)})}$.

Donc l'application non linéaire :

$$H_o^m(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^\infty(\mathbb{R}^+) \times S^2(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)) \longrightarrow H_o^m(\Omega) \times L^2(\Omega))$$

$$(u_o,\ u_1,\ \vartheta,\ f) \quad \overset{\pi}{\rightsquigarrow} \quad (u(t),u'(t))$$

est continue.

CHAPITRE II

EXISTENCE, UNICITE ET PRESQUE-PERIODICITÉ DE LA SOLUTION BORNEE SUR $\mathbb{R}$.

§ 1 - *Préliminaires.*

Considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) + \varphi_n(t)Lu(t) + \rho(.,u'(t)) + \beta(.,u(t)) = f_n(t) \quad \text{pour} \quad t \geq -n & (1)' \\ u(-n) = u_{on} & (3)'' \\ u'(-n) = u_{1n} \end{cases}$$

n étant fixé et $(u_{on},u_{1n}) \in S$

$$\text{avec} \quad \varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pour } t \geq -n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } t \geq -n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Sous les hypothèses H_0, H_1, H_2, $H_3)_{++}^{(*)}$ et $(M_f,|\varphi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$ notre problème de Cauchy 1)', 3)' admet une unique solution bornée sur $[-n,+\infty[$ satisfaisant :

$$||u_n(t)||_A^2 \leq x_o \;, \quad |u_n'(t)|_2 < (2d_o)^{1/2} \quad \forall\, t \geq -n$$

où x_o est la plus petite solution positive de :

$$\frac{1}{2}\, x^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2}\, x^{\nu+2} = d_o .$$

$u_n(t) \in C([-n,+\infty[, H_o^m(\Omega)), u_n'(t) \in C([-n,+\infty[,L^2(\Omega))$

(*) $H_3)_{++}$: H_3 sur $[-n,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}$, au lieu de $\mathbb{R}$.

et

$$||u_n(t)||_A^2+|u_n'(t)|_2^2 \leqslant M_1(\varepsilon)(||u_{on}||_A^2+|u_{1n}|_2^2)e^{-\delta_o(\varepsilon)(t+n)}+M_2(\varepsilon)|\psi|^2+M_3(\varepsilon)M_f^2 .$$

§ 2 - *Existence d'une solution bornée.*

Soit $v_n(t)$ la solution bornée du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} v''(t)+Av(t)+\Psi_n(t)Lv(t)+\rho(.,v'(t))+\beta(.,v(t)) = g_n(t) \text{ pour } t \geqslant -n \\ v(-n) = v_{on} \\ v'(-n) = v_{1n} \end{cases}$$

avec

$$\Psi_n(t) = \begin{cases} \Psi(t) & \text{pour } t \geqslant -n \\ 0 & \text{aillleurs} \end{cases} , \quad g_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } t \geqslant -n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$(v_{on},v_{1n}) \in S$ et $(M_g,|\Psi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$.

d'après le paragraphe 8 du chapitre précédent, on a :

$$||u_n(t)-v_n(t)||_A^2+|u_n'(t)-v_n'(t)|_2^2 \leqslant M_1(\varepsilon)(||u_n(-n)-v_n(-n)||_A^2+|u_n'(-n)-v_n'(-n)|_2^2)e^{-\delta_o(\varepsilon)(t+n)} +$$

$$+ M_2(\varepsilon) \sup_{t\in[-n,+\infty[} \text{ess}|\psi_n(t)-\Psi_n(t)|^2 + M_3(\varepsilon) \sup_{t\geqslant -n} \int_t^{t+1} |f_n(s)-g_n(s)|_2^2 \, ds.$$

Si les fonctions Ψ et g sont nulles, la solution v_n correspondante au problème de Cauchy de conditions initiales (0,0) est la solution nulle.

On a donc pour $t \geqslant -n$.

$$||u_n(t)||_A^2+|u_n'(t)|_2^2 \leqslant M_1(\varepsilon)(||u_n(-n)||_A^2+|u_n'(-n)|_2^2)e^{-\delta_o(\varepsilon)(t+n)}+M_2(\varepsilon)|\psi|_\infty^2+M_3(\varepsilon)M_f^2 .$$

Comme notre problème 1), 2) ne dépend pas du choix de la condition initiale du problème de Cauchy 1)' - 3)' pourvu qu'elle appartient à l'ensemble de stabilité S on a alors en désignant cette fois u_n la solution correspondante à $u_{on} = 0$ et $u_{1n} = 0$.

$$||u_n(t)||_A^2 + |u_n'(t)|_2^2 \leqslant M_2(\varepsilon)|\psi|_\infty^2 + M_3(\varepsilon)M_f^2 = D \qquad \forall\, t \geqslant -n\,.$$

De plus, pour $n_1 > n$ et $t \geqslant -n$, on a

$$||u_n(t)-u_{n_1}(t)||_A^2 + |u_n'(t)-u_{n_1}'(t)|_2^2 \leqslant M_1(\varepsilon)(||u_{n_1}(-n)||_A^2+|u_{n_1}'(-n)|_2^2)e^{-\delta_o(\varepsilon)(t+n)} \quad \forall\, t \geqslant -n$$

grâce au fait que f_n et f_{n_1} coïncident sur $[-n,+\infty[$ ainsi que ψ_n et ψ_{n_1}.

Par conséquent sur l'intervalle $[-k,+\infty[$ la suite (u_n,u_n') est de Cauchy dans $C([-k,+\infty[,H_o^m(\Omega)) \times C([-k,+\infty[,L^2(\Omega))$, elle converge donc uniformément vers (u,u') sur $[-k,+\infty[$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

D'autre part, l'estimation sur $||u_n(t)||_A^2 + |u_n'(t)|_2^2$ valable sur $[-n,+\infty[$ à savoir inférieure ou égale à $M_2(\varepsilon)|\psi|^2 + M_3(\varepsilon)M_f^2$ uniformément par rapport à n nous permet de conclure en l'existence d'une solution de $C(\mathbb{R},H_o^m(\Omega)) \times C(\mathbb{R},L^2(\Omega))$ bornée.

Comme dans le chapitre précédent, on peut extraire une sous-suite de $\{u_n\}$ telle que :

$u_n(t) \to u(t)$ - dans $H_o^m(\Omega)$, uniformément sur $[-k,+\infty[$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$

- faiblement étoilé dans $H_o^m(\Omega)$

- p.p. sur $\Omega \times \mathbb{R}$

$u'_n(t) \to u'(t)$ - dans $L^2(\Omega)$, uniformément sur $[-k,+\infty[$ $\forall k \in \mathbb{N}$

- faiblement étoilé dans $L^2(\Omega)$

- p.p. sur $\Omega \times \mathbb{R}$

et on a :

$\beta(.,u_n(t)) \to \beta(.,u(t))$ faiblement étoilé dans $L^\infty(\mathbb{R},L^2(\Omega))$

$\rho(.,u'_n(t)) \to \rho(.,u'(t))$ faiblement dans $L^2_{Loc}(\mathbb{R},L^2(\Omega))$.

Par conséquent, l'équation variationnelle associée à (1) est vérifiée, on a alors le théorème suivant :

Théorème 2 :

Sous les hypothèses H_0 , H_1 , H_2 , H_3 , pour $(M_f,|\psi|_\infty) \in D_1 \cap D_2$ et pour $\theta_2(M_f,|\psi|_\infty)$ assez petit il existe une solution bornée du problème 1) - 2) telle que :

$$||u(t)||_A \leqslant x_o(M_f,|\psi|_\infty) \quad \text{et} \quad |u'(t)|_2 \leqslant (2\theta_2(M_f,|\psi|_\infty))^{1/2}$$

où $x_o(M_f,|\psi|_\infty)$ désigne la plus petite solution positive de :

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{C_\nu}{\nu+2} x^{\nu+2} = \theta_2(M_f,|\psi|_\infty).$$

§ 3 - *Unicité de la solution bornée.*

Soient u et v deux solutions bornées de 1), 2) sur $\mathbb{R}$ et $s \leqslant t$ on a :

$$||u(t)-v(t)||_A^2+|u'(t)-v'(t)|_2^2 \leqslant M_1(\varepsilon)(||u(s)-v(s)||_A^2+|u'(s)-v'(s)|_2^2)e^{-\delta_o(\varepsilon)(t-s)}$$

$$\leqslant M_1(\varepsilon)D\ e^{-\delta_o(\varepsilon)(t-s)} .$$

Prenons t fixe et $s = -n$ dans la relation précédente et faisons tendre n vers $+\infty$, nous voyons alors $u \equiv v$ et $u' \equiv v'$.

Théorème 3 :

Sous les hypothèses du théorème 2, le problème 1) - 2) admet une unique solution bornée.

§ *4 - Presque-périodicité de la solution bornée.*

Théorème 4 :

En plus des hypothèses du théorème 2, on suppose que ψ est $\mathbb{R}$-presque-périodique et f est $S^2(\mathbb{R},L^2(\Omega))$-presque-périodique.

Alors la solution bornée du problème 1) - 2) est $H_o^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$ presque-périodique c'est-à-dire $u(t)$ est $H_o^m(\Omega)$-presque-périodique et u' est $L^2(\Omega)$- presque-périodique.

Démonstration :

Soit $(S_p)_p$ une suite de nombres réels. Dans le but de prouver le théorème il suffit de montrer qu'on peut extraire de $\{s_p\}$ une sous-suite que l'on notera encore par $\{s_p\}$ telle que :

$u(t+s_p) \to u(t)$ fortement dans $H_o^m(\Omega)$, uniformément sur $\mathbb{R}$.
$u'(t+s_p) \to u'(t)$ fortement dans $L^2(\Omega)$, uniformément sur $\mathbb{R}$.

Comme ψ et f sont presque périodiques, alors on peut extraire une sous-suite notée par $\{s_p\}$ telle que :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t+s_p) - \psi(t+s_q)| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } p \text{ et } q \to +\infty .$$

de même $$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |f(\zeta+s_p)-f(\zeta+sq)|_2^2 d\zeta \longrightarrow 0 \text{ lorsque } p \text{ et } q \to +\infty$$

Considérons les équations suivantes :

$$u''(t+s_p)+Au(t+s_p)+\psi(t+s_p)Lu(t+s_p)+\rho(.,u'(t+s_p))+\beta(.,u(t+s_p)) = f(t+s_p)$$

$$u''(t+s_q)+Au(t+s_q)+\psi(t+s_q)Lu(t+s_q)+\rho(.,u'(t+s_q))+\beta(.,u(t+s_q)) = f(t+s_q)$$

Posons :

$$\omega_{pq}(t) = u(t+s_p) - u(t+s_q),\ \psi_{pq}(t) = \psi(t+s_p)-\psi(t+s_q),\ f_{pq}(t) = f(t+s_p)-f(t+s_q) .$$

$$\begin{aligned}\psi(t+s_p)Lu(t+s_p)- (t+s_q)Lu(t+s_q) &= \psi(t+s_p)Lu(t+s_p)-\psi(t+s_p)Lu(t+s_q) + \\ &+ \psi(t+s_p)Lu(t+s_q)-\psi(t+s_q)Lu(t+s_q) \\ &= \psi(t+s_p)L\omega_{p,q}(t)+\psi_{pq}(t)Lu(t+s_q) .\end{aligned}$$

Posons :

$$\Delta_{pq}\rho(t) = \rho(.,u'(t+s_p))-\rho(.,u'(t+s_q)) \text{ et } \Delta_{pq}\beta(t) = \beta(.,u(t+s_p))-\beta(.,u(t+s_q)),$$

on a alors :

$$\omega''_{pq}(t)+A\omega_{pq}(t)+\psi(t+s_p)L\omega_{p,q}(t)+\psi_{pq}(t)Lu(t+s_q)+\Delta_{pq}\rho(t)+\Delta_{pq}\beta(t) = f_{pq}(t).$$

Faisant le même raisonnement que dans le paragraphe 8 du chapitre I, on a pour $s \leqslant t$

$$\begin{aligned}||\omega_{pq}(t)||_A^2+|\omega'_{pq}(t)|_2^2 &\leqslant M_1(\varepsilon)\Big[||\omega_{pq}(s)||_q^2+|\omega'_{pq}(s)\Big]_2^2 e^{-\delta_o(\varepsilon)(t-s)} + \\ &+ M_2(\varepsilon)\sup_{t\geqslant s}|\psi_{pq}(t)|^2 + M_3(\varepsilon)\sup_{t\geqslant s}\int_t^{t+1} |f_{pq}(\chi)|^2 d\chi .\end{aligned}$$

soit

$$||u(t+s_p) - u(t+s_q)||_A^2 + |u'(t+s_p) - u'(t+s_q)|_2^2 \leqslant D\, M_1(\varepsilon) e^{-\delta_o(\varepsilon)(t-s)} +$$

$$+ M_2(\varepsilon) \sup_{t \geqslant s} |\psi(t+s_p) - \psi(t+s_q)|^2 + M_3(\varepsilon) \sup_{t \geqslant s} \int_t^{t+1} |f(\zeta+s_p) - f(\zeta+s_q)|_2^2 \, d\zeta.$$

Prenons t fixe et $s = -n$ dans la relation précédente et faisons tendre n vers $+\infty$:

$$||u(t+s_p) - u(t+s_q)||_A^2 + |u'(t+s_p) - u'(t+s_q)|_2^2 \leqslant M_2(\varepsilon) \sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi(t+s_p) - \psi(t+s_q)|^2 +$$

$$+ M_3(\varepsilon) \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |f(\zeta+s_p) - f(\zeta+s_q)|_2^2 \, d\zeta \qquad \forall\, p,q \in \mathbb{N}.$$

Faisons tendre p et q vers $+\infty$ et compte tenu de l'hypothèse que f et ψ sont presque-périodiques on a alors :

$$||u(t+s_p) - u(t+s_q)||_A^2 + |u'(t+s_p) - u'(t+s_q)|_2^2 \text{ tend vers } 0.$$

Corollaire :

Si, en plus des hypothèses du théorème 1, f et ψ sont périodiques alors la solution bornée du problème 1) - 2) est aussi périodique.

BUS LILLE

§ 5 - *Conclusion.*

1) *Exemple* :

Les résultats précédents s'appliquent sans difficultés aux équations du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) + \left[\varepsilon_o(\sin t)u(x,t)+\varepsilon_1(\cos \pi t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + k|u(x,t)|^\nu u(x,t) + \\ \qquad\qquad + k_1 \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f(x,t) \quad \text{sur} \quad]a,b[\times \mathbb{R} \\ u(a,t) = u(b,t) = 0 \\ u'(a,t) = u'(b,t) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad a \text{ et } b \text{ finis.} \end{cases}$$

avec ε_i, $i = 0,1$, sont des nombres réels assez petits, k_i, $i = 0,1$, sont des constantes positives et ν un réel quelconque positif.

2) *Remarque* :

Dans le cas où la fonction ρ est linéaire $\rho(.,v) = kv$ k constante positive, il est possible de prendre pour L un opérateur d'ordre inférieur ou égal à m.

En effet, il n'est plus utile d'appliquer l'argument de Minty pour prouver que $\rho(.,v_n) \to \rho(.,v)$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] L. AMERIO - G. PROUSE - *"Almost-Periodic Functions and Functional Equations"*. Van Nostrand Reinold Compagny N.Y. 1971.

[2] P. BENILAN - H. BREZIS - *"Solutions faibles d'équations d'évolutions dans les espaces de Hilbert"*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. 22, 1972, p. 311-329.

[3] M. BIROLI - *"Sur les solutions bornées et presque-périodiques des équations et inéquations d'évolution"*. Annali di Mat., Ser. 4, t. 93, 1972, p. 1-79.

[4] M. BIROLI - *"Bounded or almost-periodic solutions of the nonlinear vibrating membrane equation"*. Ricerche Mat., t. 22, 1973, p. 190-202.

[5] M. BIROLI - *"Sur l'équation des ondes avec un terme non linéaire monotone dans la fonction inconnue"*. Nota 1, Atti. Accad. Naz. Lincei, t. 53, 1972, p. 359-361.

[6] M. BIROLI - A. HARAUX - *"Asymptotic behavior for an almost periodic, strongly dissipative wave equation"*. J. Differential Equations, t. 38, 1980, p. 422-440.

[7] J.C. CLEMENTS - *"Existence theorems for some non-linear equations of evolution"*. Canad. J. Math., t. 22, 1970, p. 726-745.

[8] A.M. FINK - *"Almost periodic differential equations"*. Lecture Notes in Mathematics 377 (Berlin : Springer, 1974).

[9] A. HARAUX - *"Nonlinear evolution equations. Global behavior of solutions".* Springer, Lecture Notes in Math. n° 841, 1981.

[10] A. HARAUX - *"Dissipativity in the sense of Levinson for a class of second order nonlinear evolution equations.* Nonlinear Analysis, vol. 6, n° 11, p. 1207-1220, 1982.

[11] A. HARAUX - *"Almost-periodic forcing for a wave equation with a nonlinear, local damping term".* Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, t. 94 A, p. 195-212, 1983.

[12] A. HARAUX - *"Systèmes dissipatifs non linéaires".* Cours de D.E.A. d'Analyse Numérique, Paris VI, 1981-1982.

[13] J.L. LIONS - *"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires".* Dunod, Paris, 1969.

[14] J.L. LIONS - E. MAGENES - *"Problèmes aux limites non homogènes et applications".* Volume 1, Dunod, Paris, 1968.

[15] J.L. LIONS - W.A. STRAUSS - *"Some nonlinear evolution equations".* Bull. Soc. Math. FRANCE, t. 93, 1965, p. 43-96.

[16] J. MINTY - *"Monotone (non linear) operators in Hilbert Space".* Duke Math. Journal, t. 29 (1962), p. 341-346.

[17] M. NAKAO - *"Bounded, Periodic or Almost periodic solutions of a nonlinear hyperbolic partial differential equations".* Journal of differential equations t. 23, p. 368-386, 1977.

[18] M. NAKAO - *"Bounded, periodic and almost periodic classical solutions of some nonlinear wave equations with a dissipative terme".* Journal. Math. Soc. Japan, vol. 30, n° 3, 1978.

[19] G. PROUSE - *"Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde non omogenea con termine dissipativo quadratico".* Ricerche di Mat. t. 13, 1964, p. 261-280.

[20] G. PROUSE - *"Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo non lineare".* Rend. Accad. Naz. Lincei. I vol. 38, 1965, p. 38-39.

[21] W. RUDIN - *"Analyse relle et complexe".* MASSON - 1978.

[22] W.A. STRAUSS - *"On the continuity of functions with values in various Banach Spaces".* Pacific J. Math., t. 19, 1966, p. 543-551.

[23] W.A. STRAUSS - *"The energy method in nonlinear partial differential".* Notas de Mathematica, Brasilia, 1969.

[24] S.L. SOBOLEV - *"Applications of functional analysis in Mathematical Physics".* American Mathematical Society, Providence, 1963.

[25] D.H. SATTINGER - *"On global solution of nonlinear hyperbolic equations".* Arch. rat. Mech. Analysis t. 30, p. 148-172, 1968.

[26] M. YAMAGUCHI - *"Existence of quasi-periodic solutions of perturbed nonlinear and quasi-linear partial differential of standard types".* Journal of Mathematical Analysis and Applications t. 59, p. 15-28, 1977.

RÉSUMÉ

L'objet de ce travail est l'examen des solutions presque-périodiques en t de l'équation :

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + A(t)u(x,t) + \rho\left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + \beta(x,u(x,t)) = f(x,t) \\ D^\alpha u\big|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0 \qquad |\alpha| \leqslant m-1 \end{cases}$$

définie sur $\Omega\times\mathbb{R}$ avec Ω ouvert borné suffisamment régulier de $\mathbb{R}^N$.

Cette étude étend les résultats de M. Nakao et d'A. Haraux au cas où l'opérateur $A(t)$ est de la forme $A(t) = A + \psi(t)L$ avec A partie principale auto-adjointe d'ordre $2m$ et L opérateur d'ordre strictement inférieur à m et ψ une fonction mesurable presque périodique "petite".

Avec ces hypothèses pour des fonctions f presque périodiques en t "petites" il existe une solution de (I) presque-périodique unique. Pour ce faire, on ramène le problème (I) à un problème de Cauchy sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ qu'on résout à l'aide de la méthode des énergies puis on construit une suite de fonctions définies sur $\Omega \times [-n,+\infty[$ qui converge convenablement vers la solution cherchée.

MOTS CLÉS :
- Equation d'évolution
- Equation hyperbolique
- Equation non linéaire
- Solution presque-périodique