N° d'ordre : 1121

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ des SCIENCES et TECHNIQUES de LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Dominique DELESALLE

PROPRIÉTÉS DE LIMITE CENTRALE RELATIVES AUX MESURES ALÉATOIRES

Membres du Jury : D. BOSQ, *Président*
P. JACOB, *Rapporteur*
J. DELPORTE, R. MOCHÉ *Examinateurs*

Soutenue le 14 DÉCEMBRE 1983

Monsieur le Professeur Denis BOSQ m'a fait l'honneur de présider ce jury, et je l'en remercie très vivement.

Monsieur le Professeur Pierre JACOB m'a proposé le sujet de cette thèse. Les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués, m'ont permis de la mener à bien. Puisse-t-il trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur Jean DELPORTE est aussi à l'origine de ce travail. En acceptant d'en juger le résultat, il donne une nouvelle preuve de son attention constante. Qu'il me permette d'exprimer toute ma gratitude à son égard.

Monsieur le Professeur Raymond MOCHÉ a manifesté tout l'intérêt qu'il prenait à mes travaux, et a accepté de faire partie du jury. Je l'en remercie tout particulièrement.

Je tiens aussi à remercier les membres de l'équipe des Probabilistes et Statisticiens de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille I, qui m'ont aidé de leurs remarques et entouré de leur sympathie.

Madame Arlette Lengaigne a dactylographié le texte avec soin et diligence. Qu'il me soit permis de l'en remercier chaleureusement, ainsi que toutes les personnes ayant participé à la réalisation matérielle de cette thèse.

P L A N.

Pages

INTRODUCTION.-

Un des problèmes majeurs de la statistique inférentielle est de tester l'hypothèse selon laquelle une variable aléatoire X suit une loi de probabilité donnée P, à partir d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ associé à des observations sur une population donnée. Le théorème de limite centrale a pour objet d'étudier la convergence en loi du processus empirique $\nu_n = \sqrt{n}\,(P_n - P)$, où P_n désigne la loi empirique associée à l'échantillon considéré. Sur ce problème, P. GAENSSLER et W. STUTE [X] ont recensé les résultats obtenus, notamment au cours des années 1968-1978. R.M. DUDLEY [I], entre autres, a substitué au processus empirique une famille de variables aléatoires indexée par certains boréliens de l'espace dans lequel la variable aléatoire X prend ses valeurs.

Les idées initiales de notre travail ont été, d'une part, de considérer que le processus empirique était un cas particulier de mesure aléatoire et, d'autre part, de tenter une généralisation des méthodes de R.M. DUDLEY au cas où la variable aléatoire parente X prend elle-même ses valeurs dans un espace de mesures.

Ce nouveau point de vue nous amène à préciser comment peuvent intervenir, dans la modélisation mathématique des systèmes observables, le concept même de mesure aléatoire et ses différents aspects développés ici. Dans une telle approche, il s'agit de rendre compte de l'état d'une répartition spatiale de masse sujette à des fluctuations imprévisibles ; on entendra le terme de masse en un sens suffisamment général pour englober, par exemple, la nébulosité du ciel en météorologie, et l'occupation par des populations zoologiques. En décrivant la répartition au moyen d'une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$, on considère que son état générique $\mu^{\omega}(B)$ dépend à la fois du hasard, par l'intermédiaire de l'élément ω relatif à un espace probabilité (Ω, A, Pr) et du choix d'une zone d'observation dans l'espace ambiant, associée au borélien B. La répartition de masse étudiée fait l'objet de mesures physiques relatives à k zones B_1 , B_2 ,..., B_k , ce qui permet de rejoindre une interprétation classique des lois de dimension finie d'un processus stochastique. Il est vrai que ce dernier concept a trouvé son origine dans la description de phénomènes naturels dont l'évolution, gouvernée par le hasard, se fait au cours du temps. Cependant, par la suite, on s'est affranchi de la dimension temporelle en considérant des familles de variables aléatoires indexées non plus seulement par des nombres réels, mais par des éléments d'espaces bien plus généraux ; il s'agira dans le cas présent, de boréliens d'un espace métrique.

C'est sur un tel espace que nous considérerons la suite des échantillons d'une mesure aléatoire. Après avoir mis en évidence, par passage à la limite, une classe de processus gaussiens, nous définissons des conditions sous lesquelles on se rapproche des propriétés classiques de limite centrale. Il s'agira, pour une part, d'envisager une propriété de stabilité : dans quelle mesure les processus limites trouvés jouissent-ils d'un statut comparable à celui des processus empiriques ? Pour une autre part, nous définissons, dans ce contexte, la notion de convergence en loi. Tels sont les deux aspects de ce que nous appellerons "problème de limite centrale".

Un tel programme s'avère ambitieux, et nous avons seulement, dans le cadre de la présente étude, tenté de cerner ce problème par différentes approches avec, pour chacune d'elles, l'appareil technique qui lui est propre. Le chapitre premier est essentiellement consacré à la définition des processus de limite centrale et à la mise en évidence de propriétés qui, de prime abord, permettraient d'assimiler ces processus à des mesures aléatoires. L'idée générale d'un tel lien, déjà évoquée dans les lignes qui précèdent, doit pourtant être abandonnée lorsque l'on examine soigneusement le cas particulier du pont brownien. Faute de l'obtenir, nous montrons ensuite comment une hypothèse d'accroissements non corrélés, relative à la mesure aléatoire parente de l'échantillon, fournit pour les processus limites une propriété relative à la σ-additivité et, par ailleurs, l'existence d'une modification séparable et mesurable. Toujours sous les mêmes hypothèses, nous utilisons la construction classique de l'intégrale stochastique [XI] pour développer en série les processus de limite centrale. Une telle représentation pourrait être le point de départ d'une théorie linéaire plus approfondie, dans la ligne des travaux entrepris par K. KARHUNEN [XII], et développés ensuite par X. FERNIQUE [XIII] ; les résultats récents de S.M. BONKIAN [XIV] y contribueraient.

Une autre approche du problème de limite centrale est proposée dans le chapitre II. Elle consiste à plonger dans un espace topologique compact l'ensemble des mesures réelles considérées. Nous retrouvons le second processus canonique associé à une famille de variables aléatoires, défini par P.A. MEYER [XV], au moyen d'une construction explicite dont l'idée est inspirée des propriétés, citées par E. NELSON [XVI], relatives aux probabilités boréliennes régulières sur un espace topologique. Ainsi se trouvera mis en évidence un théorème de limite centrale relatif aux mesures aléatoires, sous une forme assez satisfaisante, exprimant la convergence faible d'une suite de probabilités.

Pour le chapitre III, la méthode utilisée généralise celle retenue par R.M. DUDLEY [I] dans le cas où la mesure aléatoire parente de l'échantillon est la mesure de Dirac associée à une variable aléatoire réelle. La convergence en loi vers un processus de limite centrale est obtenue en plongeant dans un espace métrique l'ensemble des mesures prises comme point de départ. Elle ne sera effective que sous la condition de restreindre les processus envisagés à des classes dites de Donsker dans l'ensemble des boréliens. Le chapitre IV, plus technique, précise cette troisième approche du problème de limite centrale, en faisant intervenir une notion d'entropie. Celle-ci est définie à partir du moment d'ordre deux relatif à la mesure aléatoire parente. Elle permet de formuler une condition suffisante pour qu'une classe de boréliens soit de Donsker, analogue à la condition intégrale obtenue dans [I].

CHAPITRE I

PROCESSUS DE LIMITE CENTRALE ASSOCIE A UNE MESURE ALEATOIRE.

I.1. - INTRODUCTION.-

Nous rappellerons d'abord comment une mesure aléatoire relative à la tribu borélienne d'un espace métrique est définie comme variable aléatoire à valeurs dans un espace de mesures, muni d'une tribu appropriée.

Il apparaît naturel d'approcher la connaissance de la loi d'une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ par l'intermédiaire des lois des vecteurs aléatoires correspondant aux valeurs que prend $\mu^\bullet$ sur les suites finies de boréliens :

$$(\mu^\bullet(B_1), \mu^\bullet(B_2), \ldots, \mu^\bullet(B_k)) .$$

De là vient l'idée de considérer les processus stochastiques $[\mu^\bullet(B)]$ indexés par les boréliens. Nous analysons les conditions de σ-additivité des trajectoires, selon lesquelles de tels processus peuvent être assimilés à des mesures aléatoires.

Ensuite, à un n-échantillon d'une mesure aléatoire $\mu^\bullet$, nous associons la mesure aléatoire empirique normalisée $\eta_n^\bullet$. Par la considération des lois de dimension finie, nous construisons le processus de limite centrale $\eta^\bullet$, processus gaussien indexé par les boréliens.

Nous étudions alors quelques propriétés d'additivité liées aux trajectoires du processus $\dot{\eta}$; ces propriétés restent insuffisantes, et nous devons conclure provisoirement à l'impossibilité de considérer $\dot{\eta}$ comme une mesure aléatoire.

Une hypothèse d'accroissements non corrélés, relative à la mesure aléatoire parente $\dot{\mu}$ permet de mettre en évidence pour le processus $\dot{\eta}$ un phénomène dit de pseudo-σ-additivité ; la propriété en question se trouve bien affaiblie, car on a renoncé à la définir en termes de trajectoires. Vient ensuite la notion de mesure spectrale, qui sera utilisée à deux reprises pour l'étude des processus $\dot{\eta}$. D'une part, en vue d'une étude éventuelle des trajectoires, le problème se pose de savoir si ces processus admettent une modification qui est mesurable et séparable ; nous serons amenés à introduire une pseudo-métrique appropriée sur l'ensemble des boréliens. D'autre part, nous adaptons la construction, devenue classique, de l'intégrale stochastique relativement à un processus à accroissements orthogonaux , telle qu'elle est exposée, par exemple dans J.L. DOOB [XI], pages 425 à 433). Nous tirons de ces résultats, en exploitant l'aspect gaussien des processus $\dot{\eta}$, la possibilité de les développer en série. Cette représentation pourrait servir de prélude à une théorie linéaire plus approfondie, dans la ligne des travaux déjà cités [XII], [XIII], [XIV].

I.2. - Mesures aléatoires.-

Définition I.2.1.-

1°) X étant un espace métrique séparable et $\mathcal{B}_b$ l'anneau des boréliens bornés de X, on appelle mesure réelle signée à distance finie sur X ou, plus simplement, *mesure réelle sur* X, toute application λ de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) λ est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute suite (B_n) d'éléments de $\mathcal{B}_b$, deux à deux disjoints, tels que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}_b ,$$

la suite $(\lambda(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, et :

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(B_n) .$$

Nous désignerons par M l'ensemble des mesures réelles sur X.

2°) On appelle mesure réelle positive à distance finie sur X ou, plus simplement *mesure positive sur* X, tout élément λ de M prenant ses valeurs dans l'ensemble des réels positifs.

Nous désignerons par M_+ l'ensemble des mesures positives sur X.

Comme $\mathcal{B}$ est la classe monotone engendrée par $\mathcal{B}_b$, tout élément positif de M possède un prolongement unique à la tribu $\mathcal{B}$, qui est, lui aussi, σ-additif. M^+ désignera aussi l'ensemble de ces prolongements.

D'autre part, si λ_1 et λ_2 sont deux éléments de M^+, leur différence $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ définit un élément de M. On sait aussi (voir [XVIII], p 356) que réciproquement, tout élément λ de M possède une décomposition analogue à celle de Hahn-Jordan :

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^- ,$$

où λ^+ et λ^- sont deux éléments de M^+. On définit alors la mesure positive :

$$|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^- .$$

En vue de définir les mesures aléatoires proprement dites, nous introduisons sur M (resp. M_+) la topologie F (resp. F_+) de la convergence faible à distance finie, admettant comme système fondamental de voisinages :

$$V(\lambda_o;h_1,h_2,\ldots,h_n;\varepsilon) = \bigcap_{1\leq i\leq n} \{\lambda : \left|\int h_i \, d\lambda_o - \int h_i \, d\lambda\right| < \varepsilon\} ,$$

où $\lambda_o \in M$ (resp. M_+), $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et où $(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ est un n-uplet d'applications de X dans $\mathbb{R}$, continues et bornées, nulles en dehors d'un élément de $\mathcal{B}_b$. Nous savons, d'après P. JACOB [XVIII], théorème I, page 361, que la tribu borélienne $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_+$) associée à la topologie F (resp. F_+) rend mesurable, pour tout borélien borné B, l'application ϕ_B de M (resp. M_+) dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi_B(\lambda) = \lambda(B) ,$$

l'ensemble $\mathbb{R}$ étant muni de sa tribu borélienne $\mathcal{R}$. Nous savons aussi (voir encore [XVIII]) que la tribu $\mathcal{F}_+$ est engendrée par la famille d'applications :

$$(\phi_B)_{B\in\mathcal{B}_b} ,$$

mais il n'en est pas de même, en général, pour la tribu $\mathcal{F}$. En outre, la topologie F_+ est métrisable, au moyen de la distance introduite par J. GEFFROY.

Définition I.2.2.- Soit (Ω, A, Pr) un espace probabilisé. *Une mesure aléatoire réelle sur X (resp. mesure aléatoire positive sur X)* est une application de Ω dans M (resp. M_+), mesurable relativement à la tribu A et à la tribu F (resp. F_+). La loi de probabilité d'une mesure aléatoire réelle (resp. mesure aléatoire positive) est donc définie sur (M,F) (resp. (M_+, F_+)).

Les deux résultats qui suivent caractérisent les mesures aléatoires.

Proposition I.2.1.-

1°) Une application $\mu^{\bullet}$ de Ω dans M_+ est une mesure aléatoire positive si et seulement si pour tout borélien borné B de X l'application :

$$\phi_B \circ \mu^{\bullet}$$

de Ω dans $\mathbb{R}_+$, qui à tout élément ω associe $\mu^{\omega}(B)$, est une variable aléatoire positive.

2°) Une application $\mu^{\bullet}$ de Ω dans M est une mesure aléatoire réelle si et seulement si $\mu^{\bullet}$ est la différence de deux mesures aléatoires positives.

Signalons en outre deux énoncés permettant de déterminer la loi d'une mesure aléatoire positive. Le premier est cité par J. GEFFROY et H. ZEBOULON [XIX] ; le second est directement inspiré par J. NEVEU [XX], pages 254 et 255 :

Proposition I.2.2.- La loi d'une mesure aléatoire réelle positive $\mu^{\bullet}$ sur X est entièrement définie par les lois des variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^k, R^k)$:

$$(\mu^{\bullet}(B_1), \mu^{\bullet}(B_2), \ldots, \mu^{\bullet}(B_k)) ,$$

correspondant aux k-uplets $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ de boréliens bornés sur X, deux à deux disjoints.

Proposition I.2.3.- Soit $\mathcal{I}$ une classe de boréliens bornés de $\mathcal{X}$, possédant les propriétés suivantes :

i) $\mathcal{I}$ est stable par intersection finie.

ii) $\mathcal{I}$ engendre la tribu borélienne de $\mathcal{X}$.

iii) $\mathcal{I}$ contient une suite croissant vers $\mathcal{X}$, ou une partition dénombrable de $\mathcal{X}$.

Nous avons alors les résultats suivants :

i) Pour qu'une application $\mu^\bullet$ de Ω dans M_+ soit une mesure aléatoire positive sur $\mathcal{X}$, il suffit que pour tout élément I de $\mathcal{I}$, l'application $\mu^\bullet(I)$ soit une variable aléatoire réelle positive.

ii) La loi de $\mu^\bullet$ est alors entièrement déterminée par les lois des vecteurs aléatoires :

$$(\mu^\bullet(I_1), \mu^\bullet(I_2), \ldots, \mu^\bullet(I_k))$$

correspondant à toutes les suites finies :

$$(I_1, I_2, \ldots, I_k)$$

d'éléments de $\mathcal{I}$.

Avec ces définitions et ces premières propriétés relatives aux mesures aléatoires, nous retrouvons les situations étudiées classiquement dans le cadre du théorème de limite centrale :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on introduit la mesure de Dirac $\delta_{X(\omega)}$, qui est un élément de M_+. L'application δ_X est bien une mesure aléatoire positive sur $\mathcal{X}$ puisque, pour tout borélien borné B de $\mathcal{X}$, nous avons :

$$\phi_B \circ \delta_X = \delta_X(B) = 1_{X^{-1}(B)} .$$

La mesure empirique associée à un n-échantillon $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ d'une variable aléatoire X à valeurs dans $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ est la mesure aléatoire positive $\bar{\mu}_n^{\bullet}$ définie par :

$$\bar{\mu}_n^{\bullet} = \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \dots + \delta_{X_n}) ,$$

Notre propos est d'étudier la situation plus générale où l'élément parent de l'échantillon n'est plus seulement une variable aléatoire réelle X ou, ce qui revient au même, une mesure aléatoire de Dirac δ_X , mais se trouve être une mesure aléatoire positive, au sens qui vient d'être défini.

I.3. - PROCESSUS STOCHASTIQUE ASSOCIÉ À UNE MESURE ALÉATOIRE.-

Il ressort du paragraphe I.2. qu'une mesure aléatoire peut être considérée comme un processus stochastique indexé par $\mathcal{B}_b$.

Proposition 1.3.1.-

1°) La donnée d'une mesure aléatoire positive est équivalente à celle d'un processus stochastique réel à valeurs positives, indexé par $\mathcal{B}_b$:

$$\mu^{\bullet} = [\mu^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{B}_b} ,$$

tel que pour tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire μ^{ω} est un élément de $\mathcal{M}_+$.

2°) La donnée d'une mesure aléatoire réelle est équivalente à la donnée de deux processus vérifiant les propriétés qui viennent d'être indiquées.

On dit qu'une mesure aléatoire positive est *d'ordre un* si le processus stochastique :

$$[\mu^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{B}_b}$$

est d'ordre un. La fonction moyenne du processus, notée :

$$\mu = [E\{\mu^{\bullet}(B)\}]_{B\in\mathcal{B}_b} \quad \text{ou encore} \quad E\{\mu^{\bullet}\}$$

définit alors une mesure μ, élément de M_+, appelée *mesure moyenne* de $\mu^\bullet$.

Soit $\mu^\bullet = \mu^{+\bullet} - \mu^{-\bullet}$ la décomposition de Hahn-Jordan d'une mesure aléatoire réelle ; on dit que $\mu^\bullet$ est d'ordre un si $\mu^{+\bullet}$ et $\mu^{-\bullet}$ sont d'ordre un ; la mesure moyenne de $\mu^\bullet$ est alors l'élément μ de M défini par :

$$\mu = \mu^+ - \mu^- ,$$

où $\mu^+ = E\{\mu^{+\bullet}\}$ et $\mu^- = E\{\mu^{-\bullet}\}$.

Si $\mu^\bullet$ est une mesure aléatoire réelle, $\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet$ est une mesure aléatoire réelle sur l'espace produit $X \times X$ (voir S.M. BONKIAN, [XIV], propriété IV.1). Nous dirons que $\mu^\bullet$ est d'ordre deux si et seulement si $\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet$ est d'ordre un. Son *moment d'ordre deux* et sa *covariance* sont alors respectivement :

$$E\{\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet\}$$

$$\Gamma = \mathrm{Cov}\{\mu^\bullet\} = E\{(\mu^\bullet - \mu) \otimes (\mu^\bullet - \mu)\} ,$$

où μ désigne la mesure moyenne associée à $\mu^\bullet$. Nous avons, en particulier, pour tous boréliens bornés B_1 et B_2, les valeurs suivantes :

$$E\{\mu^\bullet \otimes \mu^\bullet\}(B_1 \times B_2) = E\{\mu^\bullet(B_1)\, \mu^\bullet(B_2)\}$$

$$\Gamma(B_1,B_2) = \mathrm{Cov}\{\mu^\bullet\}(B_1,B_2) = E\{[\mu^\bullet(B_1) - \mu(B_1)]\,[\mu^\bullet(B_2) - \mu(B_2)]\} ;$$

on retrouve ainsi les définitions relatives aux processus usuels.

Exemple de la mesure aléatoire de Dirac.

Soit δ_X la mesure aléatoire positive sur X associée à une variable aléatoire X à valeurs dans (X,B), qui a été introduite en I.2. Nous énonçons deux propriétés élémentaires du processus stochastique réel associé, encore noté δ_X. Nous désignons par π la probabilité sur (X,B) qui est la loi de la variable aléatoire X.

Proposition I.3.2. (*Lois de dimension finie de* δ_X).-

Soit $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ un k-uplet de boréliens bornés deux à deux disjoints. La variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$:

$$(\delta_X(B_1),\ \delta_X(B_2)\ ,\ldots,\ \delta_X(B_k))$$

prend les valeurs $(0,0,\ldots,0)$ avec les probabilités $1 - \sum_{i=1}^{k} \pi(B_i)$

$(1,0,\ldots,0)$ " " " $\pi(B_1)$

$(0,1,\ldots,0)$ " " " $\pi(B_2)$

- -

$(0,0,\ldots,1)$ " " " $\pi(B_k)$.

Proposition I.3.3.- La mesure aléatoire δ_X est du second ordre. Elle admet pour moyenne la probabilité π, et sa covariance Γ est donnée par :

$$\Gamma(B_1,B_2) = \pi(B_1 \cap B_2) - \pi(B_1)\ \ \pi(B_2)\ .$$

Cas particulier d'une mesure aléatoire réelle sur $\mathbb{R}$.

Rappelons tout d'abord qu'une mesure réelle sur $\mathbb{R}$ est liée, de façon bijective, à sa fonction de répartition au moyen d'un théorème classique (C.M. MARLE, [XXIV], propositions 8.3.3. et 8.3.6.).

Nous en déduisons le résultat suivant :

Théorème I.3.- A toute mesure aléatoire réelle $\mu^{\bullet}$ sur $]a,b[$ est associé un processus stochastique :

(1.1) $$\xi = (\xi_t)_{t \in]a,b[}$$

défini par :

(1.2) $$\xi_t = \mu^{\bullet}(]a,t[)\ ,$$

et vérifiant la propriété :

(1.3) $\begin{cases} \text{Pour tout } \omega \in \Omega, \ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \xi_x(\omega) = 0 . \\ \underline{\text{Les trajectoires de}} \ \xi \ \underline{\text{sont à variation bornée et continues}} \\ \underline{\text{à gauche}}. \end{cases}$

<u>Réciproquement, à tout processus</u> ξ, <u>noté comme en (1.1), et vérifiant (1.3), est associé, au moyen de la formule (1.2), une mesure aléatoire réelle</u> $\mu^{\bullet}$ <u>sur</u> $]a,b[$.

Preuve : La première partie de ce résultat s'obtient immédiatement à partir de la proposition 8.3.3. de [XXIV].

La proposition 8.3.6. de [XXIV] permet également d'obtenir, à partir d'un processus ξ vérifiant (1.3), l'existence, pour tout $\omega \in \Omega$, d'une mesure réelle, borélienne, bornée, μ^{ω}, sur $]a,b[$, telle que pour tout réel t de l'intervalle $]a,b[$:

$$\xi_t(\omega) = \mu^{\omega}(]a,t[) .$$

Désignons par $\mu^{+\omega} - \mu^{-\omega}$ la décomposition de Hahn-Jordan de μ^{ω}. Pour établir que $\mu^{\bullet}$ est une mesure aléatoire réelle sur $]a,b[$, nous sommes amenés, d'après la proposition I.2.1., à montrer que $\mu^{+\bullet}$ et $\mu^{-\bullet}$ sont des mesures aléatoires positives sur $]a,b[$. D'après la proposition I.2.3., il suffit pour cela que, pour tout intervalle $[u,v[$ inclus dans $]a,b[$, $\mu^{+\bullet}([u,v[)$ et $\mu^{-\bullet}([u,v[)$ soient des variables aléatoires réelles positives ; nous savons que :

$$\xi_v - \xi_u = \mu^{\bullet}([u,v[) = \mu^{+\bullet}([u,v[) - \mu^{-\bullet}([u,v[)$$

est une variable aléatoire réelle, et que d'après [XXIV], 8.3.6.,

$$\mu^{+\bullet}([u,v[) + \mu^{-\bullet}([u,v[) = |\mu| \ ([u,v[)$$

est la variation totale de ξ sur $[u,v[$. Il nous reste donc à établir que cette variation totale, notée $V(\xi,u,v)$, est une variable aléatoire réelle. La formule de définition :

$$(1.4) \qquad V(\xi,u,v) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}| ,$$

où le supremum est pris relativement à l'ensemble des subdivisions $t_o = u < t_1 < \ldots < t_n < v$ de l'intervalle $[u,v[$, ne permet pas de répondre directement à la question.

Cependant, comme $\xi_t(\omega)$ est, pour tout $\omega \in \Omega$, continue à gauche sur $]a,b[$, le supremum est atteint si l'on ne considère que la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de partitions de la forme :

$$u_o = u < u_1 = u + \frac{w}{k+1} <\ldots< u_i = u + \frac{iw}{k+1} <\ldots< u_k = u + \frac{kw}{k+1} \quad v ,$$

où $w = v - u$.

En effet, soit $p = (t_i)_{0\leq i\leq n}$, où

$$t_o = u < t_1 < \ldots < t_n < v ,$$

et

$$0 \leq V[\xi(\omega),u,v] - \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_{t_{i+1}}(\omega) - \xi_{t_i}(\omega)| < \varepsilon .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et tout nombre entier naturel i compris entre 1 et n, désignons par u_k^i le premier élément, s'il existe, de p_k , supérieur à t_i. Il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq K$:

$$t_o = u < t_1 \leq u_k^1 < \ldots < t_i \leq u_k^i < \ldots < t_n \leq u_k^n < v ,$$

et :

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_{t_{i+1}}(\omega) - \xi_{t_i}(\omega)| - \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_{u_k^{i+1}}(\omega) - \xi_{u_k^i}(\omega)| \right| < \varepsilon \quad .$$

Nous avons alors :

$$0 \leq V[\xi(\omega),u,v] - \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_{u_k^{i+1}}(\omega) - \xi_{u_k^{i}}(\omega)| < 2\varepsilon \quad ,$$

et, a fortiori :

$$0 \leq V[\xi(\omega),u,v] - \sum_{j=0}^{k} |\xi_{u_{k+1}}(\omega) - \xi_{u_k}(\omega)| < 2\varepsilon \quad . \blacksquare$$

I.4. - CONSTRUCTION DU PROCESSUS DE LIMITE CENTRALE $\eta^{\bullet}$.-

Soit $\mu^{\bullet}$ une mesure aléatoire réelle positive sur l'espace métrique séparable X. Dans toute la suite, nous supposons que $\mu^{\bullet}$ est du second ordre, et nous notons μ la mesure moyenne associée.

Définition I.4.1.- Pour tout n-*échantillon de* $\mu^{\bullet}$:

$(\mu_1^{\bullet}, \mu_2^{\bullet}, \ldots, \mu_n^{\bullet})$,

nous appellerons *mesure aléatoire empirique normalisée associée au* n-*échantillon* $(\mu_1^{\bullet}, \mu_2^{\bullet}, \ldots, \mu_n^{\bullet})$ la mesure aléatoire réelle :

$$\eta_n^{\bullet} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^{\bullet} - \mu) \ .$$

Il est clair que pour tout nombre entier naturel non nul n, $\eta_n^{\bullet}$ est une mesure aléatoire, comme différence de la mesure aléatoire positive :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{\bullet}$$

et de la mesure positive $\sqrt{n}\,\mu$.

Dans le cas où $\mu = \delta_X$, exposé en I.3., on retrouve la mesure aléatoire correspondant à la fonction de répartition empirique associée à une variable aléatoire X (voir, par exemple P. BILLINGSLEY, [XXI], p 103, ou P. GAENSLER et W. STUTE [X], page 196).

Nous désignerons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies de boréliens bornés et par P_n la probabilité sur $(M,\mathcal{F})$ qui est la loi de la mesure aléatoire $\eta_n^{\bullet}$. A tout élément S de $\mathcal{S}$, noté :

$$S = (B_1, B_2, \dots, B_k) ,$$

nous associons la loi de dimension finie de $\eta_n^{\bullet}$, notée $P_{n,S}$, qui est la loi du vecteur aléatoire réel k-dimensionnel :

$$(\eta_n^{\bullet}(B_1), \eta_n^{\bullet}(B_2), \dots, \eta_n^{\bullet}(B_k)) .$$

Ce vecteur peut s'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \theta_i ,$$

où, pour tout nombre entier compris entre 1 et n :

$$\theta_i = ((\mu_i^{\bullet} - \mu)(B_1), (\mu_i^{\bullet} - \mu)(B_2), \dots, (\mu_i^{\bullet} - \mu)(B_k)) .$$

La suite $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est constituée de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$, centrées, et dont la matrice de covariance :

$$(\gamma_{ij})_{(i,j)\in\{1,2,\dots,k\}^2}$$

est la même que celle de $\mu^{\bullet}$, c'est-à-dire définie par :

$$\gamma_{ij} = E\{\mu^{\bullet}(B_i)\, \mu^{\bullet}(B_j)\} - \mu(B_i)\, \mu(B_j) .$$

Proposition 1.4.1.- Pour tout élément S de $\mathcal{S}$, la suite de probabilités sur $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$:

$$(P_{n,S})_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge faiblement vers P_S, probabilité gaussienne sur $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$, centrée, et dont la matrice de covariance est (γ_{ij}).

Preuve : Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de limite centrale relatif aux variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$. ∎

Pour $k \leq k'$, et deux éléments S et S' de $\mathcal{S}$:

$$S = (B_1, B_2, \dots, B_k),$$

$$S' = (B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_{k'}),$$

les termes de S se retrouvant dans S', on note $\pi_{SS'}$ la projection canonique de $\mathbb{R}^{k'}$ sur $\mathbb{R}^k$, définie par :

$$\pi_{SS'}(t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k'}) = (t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Les probabilités P_S et $P_{S'}$ vérifient la condition de compatibilité :

$$P_S = P_{S'} \circ \pi_{SS'}^{-1}.$$

Considérons maintenant l'espace produit $\mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}$, et pour tout élément S de $\mathcal{S}$, noté :

$$S = (B_1, B_2, \dots, B_k),$$

la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}$ sur $\mathbb{R}^k$, notée π_S, et définie par :

$$\pi_S(\lambda) = (\lambda(B_1), \lambda(B_2), \dots, \lambda(B_k)).$$

En outre, nous désignons par $\mathcal{R}^{\mathcal{B}_b}$ la tribu produit sur $\mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}$ à partir de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Il existe une probabilité P sur $(\mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}, \mathcal{R}^{\mathcal{B}_b})$ telle que pour tout élément S de $\mathcal{S}$, la projection canonique π_S ait pour loi P_S (théorème de Kolmogorov-Bochner, [XXII], p 230).

Définition I.4.2.- Nous appellerons *processus de limite centrale associé à la mesure aléatoire* $\overset{\bullet}{\mu}$ tout processus stochastique réel indexé par $\mathcal{B}_b$,

$$\overset{\bullet}{\eta} = [\overset{\bullet}{\eta}(B)]_{B\in\mathcal{B}_b}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) les variables aléatoires $\overset{\bullet}{\eta}(B)$ sont définies sur le même espace probabilisé que la mesure aléatoire $\overset{\bullet}{\mu}$.

ii) Le processus $\overset{\bullet}{\eta}$ est gaussien, centré.

iii) La covariance de $\overset{\bullet}{\eta}$ est donnée par celle de $\overset{\bullet}{\mu}$; pour tous boréliens bornés B_1 et B_2 :

$$\mathrm{Cov}\{\overset{\bullet}{\eta}(B_1), \overset{\bullet}{\eta}(B_2)\} = E\{(\overset{\bullet}{\mu} - \mu) \otimes (\overset{\bullet}{\mu} - \mu)(B_1 \times B_2)\} .$$

La mesure aléatoire d'ordre deux $\overset{\bullet}{\mu}$ est appelée *mesure aléatoire parente* du processus de limite centrale $\overset{\bullet}{\eta}$.

I.5. - SUR LES PROPRIÉTÉS D'ADDITIVITÉ RELATIVES AUX TRAJECTOIRES DES PROCESSUS DE LIMITE CENTRALE.-

A - *Propriétés de pseudo-additivité.*

Nous désignerons par $\overset{\bullet}{\eta}$ un processus de limite centrale associé à une mesure aléatoire $\overset{\bullet}{\mu}$ sur X, qui est supposée positive et d'ordre deux.

Proposition I.5.1.- Tout couple (B_1,B_2) de boréliens bornés disjoints possède la propriété :

$$\overset{\bullet}{\eta}(B_1 \cup B_2) = \overset{\bullet}{\eta}(B_1) + \overset{\bullet}{\eta}(B_2) \quad \text{p.s.} \quad .$$

Preuve : La méthode est la suivante : pour montrer qu'une variable aléatoire réelle ξ , de carré intégrable, est presque sûrement nulle, il suffit d'établir que $E\{\xi\} = \mathrm{Var}\{\xi\} = 0$.

Considérons deux éléments quelconques, B_1 et B_2 , de $\mathcal{B}_b$, tels que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Tout d'abord, le processus gaussien $\eta^{\bullet}$ étant centré, il est clair que :

$$E\{\eta^{\bullet}(B_1 \cup B_2) - \eta^{\bullet}(B_1) - \eta^{\bullet}(B_2)\} = 0 .$$

Ensuite, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}(A \cup B) - \eta^{\bullet}(A) - \eta^{\bullet}(B)\} = \\
&= E\{\eta^{\bullet}(A \cup B)\}^2 + E\{\eta^{\bullet}(A)\}^2 + E\{\eta^{\bullet}(B)\}^2 - 2E\{\eta^{\bullet}(A \cup B)\ \eta^{\bullet}(A)\} \\
&- 2E\{\eta^{\bullet}(A \cup B)\ \eta^{\bullet}(B)\} + 2E\{\eta^{\bullet}(A)\ \eta^{\bullet}(B)\} .
\end{aligned}$$

Sachant que le processus $\eta^{\bullet}$ a même covariance que $\mu^{\bullet}$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}(A \cup B) - \eta^{\bullet}(A) - \eta^{\bullet}(B)\} = \\
&= \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(A \cup B)\} + \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(A)\} + \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\} \\
&- 2\ \mathrm{Cov}\{\mu^{\bullet}(A \cup B)\ \mu^{\bullet}(A)\} - 2\ \mathrm{Cov}\{\mu^{\bullet}(A \cup B)\ \mu^{\bullet}(B)\} \\
&+ 2\ \mathrm{Cov}\{\mu^{\bullet}(A)\ \mu^{\bullet}(B)\} \\
&= E\{\mu^{\bullet}(A \cup B) - \mu(A \cup B) - \mu^{\bullet}(A) + \mu(A) - \mu^{\bullet}(B) + \mu(B)\}^2 = 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemme I.5.- Soit $\mu^{\bullet}$ une mesure aléatoire d'ordre deux. Toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{B}_b$, décroissante et d'intersection vide vérifie la propriété :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(B_n)\} = 0 .$$

Preuve : Nous avons d'abord, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\mu(B_n) = E\{\mu^\bullet(B_n)\} .$$

Comme μ est une mesure sur X :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0 ,$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} E\{\mu^\bullet(B_n)\} = 0 .$$

Il nous reste à établir que :

$$\lim_{n\to\infty} E\{\mu^\bullet(B_n)\}^2 = 0 .$$

Pour cela, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mu^\bullet(B_n) \leq \mu^\bullet(B_1) ;$$

d'autre part, $\mu^\bullet(B_1)$ est de carré intégrable, et pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu^\omega(B_n) = 0 .$$

Le théorème de convergence dominée dans $L^2(\Omega,A,Pr)$ implique alors :

$$\lim_{n\to\infty} E\{[\mu^\bullet(B_n)]^2\} = 0 . \blacksquare$$

Proposition I.5.2.- Toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de boréliens bornés deux à deux disjoints vérifie la propriété :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \eta^\bullet(B_n) = \eta^\bullet(B) \quad \text{m.q. .}$$

Preuve : Nous avons, d'après la proposition I.5.1. :

$$\eta^\bullet(B) - \sum_{k=1}^{n} \eta^\bullet(B_k) = \eta^\bullet(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k) \quad \text{p.s. .}$$

Comme la suite $\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, le lemme I.5. entraîne :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\{\mu^\bullet(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k)\} = 0 \ .$$

Cela donne, en sachant que le processus $\eta^\bullet$ est centré et a même covariance que $\mu^\bullet$:

$$\lim_{n\to\infty} E\{\eta^\bullet(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k)\}^2 = 0 \ ,$$

ou encore : $$\lim_{n\to\infty} E\{\eta^\bullet(B) - \sum_{k=1}^{n} \eta^\bullet(B_k)\}^2 = 0 \ . \blacksquare$$

Nous observons que les propriétés énoncées dans les propositions I.5.1. et I.5.2. ne s'expriment pas en termes de trajectoires. Nous reviendrons, dans le paragraphe I.6.B, sur le terme de pseudo-additivité.

B - *Problèmes posés par le cas particulier du pont brownien.*

Soit X une variable aléatoire réelle, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, et dont la loi de probabilité est la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$. En désignant par $\eta^\bullet$ un processus de limite centrale associé à la mesure aléatoire δ_X , considérons le processus stochastique réel $\xi = (\xi_t)_{t\in[0,1]}$, défini par :

$$\xi_t = \eta^\bullet(]0,t[) \ .$$

Introduisons par ailleurs l'espace probabilisé $(C[0,1], \mathcal{C}[0,1], W_o)$ formé par l'espace $C[0,1]$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la distance de la convergence uniforme, de sa tribu borélienne, et de la mesure de Wiener du pont brownien W_o (Voir P. BILLINGSLEY, [XXI], page 65). Le résultat élémentaire selon lequel le processus stochastique associé à W_o possède presque-sûrement des trajectoires à variation non bornée, interdit tout espoir de considérer $\eta^\bullet$, dans le cas général, comme une mesure aléatoire. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'établir soigneusement ce contre-exemple.

Proposition 1.5.3.- Il existe une modification $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_t)_{t\in[0,1]}$ de ξ qui est une variable aléatoire à valeurs dans $(C[0,1], \mathcal{C}[0,1])$, et dont la loi de probabilité est W_o.

Preuve : Le processus ξ est continu en probabilité, puisque pour tous nombres réels s et t tels que $0 \leq s \leq t \leq 1$, nous avons :

$$E\{(\xi_t-\xi_s)^2\} = (t-s)\,[1-(t-s)]. \tag{1.5}$$

Il existe donc, d'après J. NEVEU ([V], page 87), une modification $\xi' = (\xi'_t)_{t\in[0,1]}$ de ξ qui est séparable. D'autre part, le caractère gaussien du processus ξ et la relation (1.5) montrent que W_o a les mêmes lois de dimension finie que ξ. On en déduit, avec P. BILLINGSLEY ([XXI], théorème 9.2) que le processus ξ' est presque-sûrement à trajectoires continues ; il existe alors un élément Ω_o de la tribu A de l'espace probabilisé de base (Ω,A,Pr) tel que $Pr(\Omega_o) = 1$, et tel que pour tout $\omega \in \Omega_o$, l'application $t \longmapsto \xi'_t(\omega)$ est continue. Définissons un nouveau processus $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_t)_{t\in[0,1]}$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0,1]$, $\tilde{\xi}_t(\omega) = \xi'_t(\omega)$ si $\omega \in \Omega_o$, et $\tilde{\xi}_t(\omega) = 0$ si $\omega \in \Omega - \Omega_o$. Toutes les trajectoires de $\tilde{\xi}$ sont ainsi continues et, d'après [V], page 57, $\tilde{\xi}$ définit une variable aléatoire, encore notée de la même façon, à valeurs dans $(C[0,1], \mathcal{C}[0,1])$, et de loi W_o. ■

Proposition 1.5.4.- Un processus de limite centrale $\eta^{\bullet}$ associé à la mesure aléatoire parente δ_X ne peut être considéré comme une mesure aléatoire.

Preuve : D'après [XXI], pages 63-64, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} |\tilde{\xi}_{i/2^n} - \tilde{\xi}_{i-1/2^n}| = \infty \quad \text{p.s. .}$$

Par ailleurs, la proposition I.5.3. montre que :

$$\sum_{i=1}^{2^n} |\tilde{\xi}_{i/2^n} - \tilde{\xi}_{i-1/2^n}| = \sum_{i=1}^{2^n} |\xi_{i/2^n} - \xi_{i-1/2^n}| \text{ p.s..}$$

Le processus ξ possède donc presque-sûrement des trajectoires à variation non bornée ; le théorème I.3. montre alors que $\eta^\bullet$ ne peut être une mesure aléatoire. ■

I.6. - ETUDE DU CAS OÙ LA MESURE ALÉATOIRE PARENTE EST À ACCROISSEMENTS NON CORRÉLÉS.-

Définition I.6.1.- Une mesure aléatoire d'ordre deux, admettant Γ pour covariance est dite *à accroissements non corrélés* si pour tous boréliens bornés B_1 et B_2 tels que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, on a :

$$\Gamma(B_1,B_2) = 0 .$$

A - *Mesure spectrale associée.*

Cette notion classique (voir, par exemple, I.I. GIHMAN et A.V. SKOROHOD [XXIII], I, page 231) est reprise dans le contexte qui nous intéresse : la mesure spectrale est ici une véritable mesure.

Théorème I.6.1.- Soit $\mu^\bullet$ une mesure aléatoire sur X, à accroissements non corrélés. L'application m de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$m(B) = \mathrm{Var}\{\mu^\bullet(B)\} ,$$

est une mesure positive sur X. De plus, la covariance, Γ , de $\mu^\bullet$ est donnée par :

$$\Gamma(B_1,B_2) = m(B_1 \cap B_2) .$$

Preuve :

Considérons un processus de limite centrale $\eta^{\bullet}$ associé à $\mu^{\bullet}$. Nous savons que $\eta^{\bullet}$ est gaussien, centré, et que pour tous boréliens bornés B_1 et B_2 :

$$(1.6) \qquad E\{\eta^{\bullet}(B_1)\,\eta^{\bullet}(B_2)\} = \Gamma(B_1,B_2) .$$

Soit (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{B}_b$, disjoints deux à deux et dont la réunion est encore un borélien borné B. Pour tout nombre entier naturel non nul n, nous avons, d'après la proposition I.5.1. :

$$\eta^{\bullet}(B) = \eta^{\bullet}(B_1) + \eta^{\bullet}(B_2) + \dots + \eta^{\bullet}(B_n) + \eta^{\bullet}\Big(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\Big) ;$$

puis, sachant que $\mu^{\bullet}$ est à accroissements non corrélés, il résulte de la relation (1.6) :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}(B_k)\} = \mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}(B)\} - \mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}\Big(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\Big)\} .$$

Le lemme I.5 donne alors :

$$\mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}(B)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\ \eta^{\bullet}(B_n) ,$$

et le résultat annoncé découle du fait que pour tout borélien borné B :

$$\mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}(B)\} = \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\} = m(B) .$$

L'égalité $\Gamma(B_1,B_2) = m(B_1 \cap B_2)$ est classique. ∎

Définition I.6.2.- La mesure positive m sur X est appelée *mesure spectrale* associée à la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$.

$\mathcal{B}$ - *Propriété de pseudo* σ-*additivité des processus* $\eta^{\bullet}$.

Théorème I.6.2.- Si la mesure aléatoire parente $\mu^{\bullet}$ est à accroissements non corrélés, alors tout processus de limite centrale associé vérifie la propriété dite de pseudo σ-additivité :

(1.7) Pour toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{B}_b$, disjoints deux à deux, et dont la réunion appartient encore à $\mathcal{B}_b$, la suite $[\eta^{\bullet}(B_n)]_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable (au sens de la convergence presque sûre), et :

$$\eta^{\bullet}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \eta^{\bullet}(B_n) \quad \text{p.s.} \quad .$$

On exprime seulement qu'il existe une partie Ω_o de Ω telle que $\Pr(\Omega_o) = 1$, et vérifiant, pour tout $\omega \in \Omega_o$:

$$\eta^{\omega}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \eta^{\omega}(B_n) \ ,$$

l'ensemble Ω_o dépendant du choix de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. C'est pourquoi nous avons été amenés à employer le terme de pseudo-additivité.

Preuve du théorème I.6.2. : Puisque $\mu^{\bullet}$ est à accroissements non corrélés, nous avons, pour tout couple (i,j) de nombres entiers naturels non nuls :

$$E\{\eta^{\bullet}(B_i)\ \eta^{\bullet}(B_j)\} = \Gamma(B_1,B_2) = 0 \ .$$

Il en résulte, vu le caractère gaussien du processus $\eta^{\bullet}$, l'indépendance des variables aléatoires de la suite :

$$[\eta^{\bullet}(B_n)]_{n\in\mathbb{N}^*} \ .$$

Comme ces variables sont centrées, la convergence de la série de terme général $\mathrm{Var}\{\eta^\bullet(B_n)\}$, obtenue d'après la proposition I.5.2, et la condition suffisante de Kolmogorov (voir, par exemple, C.M. MARLE, [XXIV], proposition 10.6.3), impliquent la convergence presque sûre de la série de terme général $\eta^\bullet(B_n)$. Ce résultat, joint à celui de la proposition I.5.1, achève la démonstration. ■

C - *Séparabilité des processus* $\eta^\bullet$.

Désignons par δ la pseudo-distance sur l'ensemble $\mathcal{B}_b$, définie par :

$$\delta(B_1,B_2) = E\{[\eta^\bullet(B_1) - \eta^\bullet(B_2)]^2\} .$$

Nous commencerons par une propriété relative à la continuité des processus de limite centrale :

Proposition I.6.- Les processus stochastiques $\eta^\bullet$ sont continus en probabilité sur $(\mathcal{B}_b,\delta)$.

Preuve : Considérons deux boréliens bornés B_1 et B_2 , ainsi que la variable aléatoire réelle $\eta^\bullet(B_1) - \eta^\bullet(B_2)$. Sachant que $E\{\eta^\bullet(B_1) - \eta^\bullet(B_2)\} = 0$, on a : $\mathrm{Var}\{\eta^\bullet(B_1) - \eta^\bullet(B_2)\} = \delta(B_1,B_2)$, et l'inégalité de Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Pr\{|\eta^\bullet(B_1) - \eta^\bullet(B_2)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\delta(B_1,B_2)}{\varepsilon^2} ,$$

et par conséquent, $\lim\limits_{B_1\to B_2} \Pr\{|\eta^\bullet(B_1) - \eta^\bullet(B_2)| \geq \varepsilon\} = 0$. ■

Lemme I.6.1.- Si la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ est à accroissements non corrélés, la pseudo-distance δ est aussi définie par :

$$\delta(B_1,B_2) = m(B_1 \Delta B_2) ,$$

où m désigne la mesure spectrale associée à $\mu^{\bullet}$, et Δ l'opération de différence symétrique.

Preuve : A partir du développement :

$$E[\eta^{\bullet}(B_1)-\eta^{\bullet}(B_2)]^2 = E[\eta^{\bullet}(B_1)]^2 + E[\eta^{\bullet}(B_2)]^2 - 2E[\eta^{\bullet}(B_1)\ \eta^{\bullet}(B_2)],$$

on utilise le fait que les variables aléatoires réelles $\eta^{\bullet}(B_i)$ ($i = 1$ ou 2) sont centrées, et la définition de la mesure spectrale m :

$$E[\eta^{\bullet}(B_1)\ \eta^{\bullet}(B_2)] = m(B_1 \cap B_2) .$$

Il en résulte que :

$$\delta(B_1,B_2) = m(B_1) + m(B_2) - 2m(B_1 \cap B_2) = m(B_1 \Delta B_2) . \blacksquare$$

Dans l'étude qui suit, nous nous ramènerons aux propriétés données en exercice dans HALMOS [XXV], sec. 40, en considérant l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ des boréliens de X qui possèdent une m-mesure finie, et en remarquant que la distance δ admet un prolongement, noté $\tilde{\delta}$, à $\tilde{\mathcal{B}}$; en effet,

$$m(B) = \mathrm{Var}\{\eta^{\bullet}(B)\} = \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\} ,$$

et donc $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ si et seulement si $\mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\} < \infty$.

Lemme I.6.2.- L'espace pseudo-métrique $(\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\delta})$ est complet.

Preuve : Considérons une suite de Cauchy, (B_n) dans $(\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\delta})$, et un nombre réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$.

Nous avons, avec des notations évidentes, pour tous nombres entiers naturels n et k assez grands :

$$m(B_n \Delta B_k) = m\{|1_{B_n} - 1_{B_k}| \geq \varepsilon\} ,$$

donc la suite (1_{B_n}) est une suite de Cauchy en mesure ; il existe alors une classe d'équivalence de fonctions mesurables, notée f, telle que :

$$\lim_{n\to\infty} m\{|1_{B_n} - f| \geq \varepsilon\} = 0 . \qquad (1.8)$$

Supposons que :

$$m\{f \notin \{0,1\}\} > 0 ;$$

il existe alors des nombres réels α et ε_o tels que :

$$\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_o \in]0, \tfrac{1}{2}[,$$

et

$$m\{f \notin]-\varepsilon_o, \varepsilon_o[\cup]1-\varepsilon_o, 1+\varepsilon_o[\} > \alpha ,$$

d'où l'on tire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m\{|1_{B_n} - f| \geq \varepsilon_o\} > \alpha > 0 ,$$

ce qui contredit (1.8). Ainsi,

$$f = 0 \text{ ou } 1 , \quad m\text{-p.p.} ,$$

et il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que :

$$f = 1_B .$$

On remarque ensuite que le borélien B ainsi mis en évidence est un élément de $\tilde{\mathcal{B}}$, en remarquant que :

$$m(B \Delta B_n) = \int |1_B - 1_{B_n}| \, dm ,$$

on voit que la suite (1_{B_n}) converge vers 1_B dans l'espace $L^1(X,\mathcal{B},m)$, ce qui achève la démonstration. ■

Avant d'aborder le résultat essentiel de ce paragraphe, rappelons la définition générale de la séparabilité :

Un processus $\hat{\eta}^{\bullet}$ est *séparable* s'il existe une partie dénombrable S de $\mathcal{B}_b$ et une partie négligeable N de Ω telles que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et pour tout borélien borné B, on ait :

$$\hat{\eta}^{\omega}(B) \in \{\hat{\eta}^{\omega}(B') : B' \in S \cap \beta^{o}(B,\varepsilon)\} ,$$

$\beta^{o}(B,\varepsilon)$ désignant la boule ouverte de centre B et de rayon ε dans l'espace pseudo-métrique $(\mathcal{B}_d,\delta)$.

Théorème I.6.3.- Soit $\eta^{\bullet}$ un processus de limite centrale associé à une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$. Si $\mu^{\bullet}$ est à accroissements non corrélés, il existe une modification de $\eta^{\bullet}$ qui est mesurable et séparable.

Preuve : Tout d'abord, comme l'espace métrique X est séparable, la tribu $\mathcal{B}$ admet une base dénombrable ; comme par ailleurs m est une mesure σ-finie sur $(X,\mathcal{B})$, le théorème B de P.R. HALMOS ([XXV], p 168) permet d'affirmer que $(\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\delta})$ est séparable.

Le processus $\eta^{\bullet} = [\eta^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{B}_b}$ peut être prolongé en un processus indexé par $\tilde{\mathcal{B}}$, encore noté $\eta^{\bullet}$:

$$\tilde{\eta}^{\bullet} = [\eta^{\bullet}(B)]_{B\in\tilde{\mathcal{B}}} .$$

En tenant compte du lemme I.6.2, et de la séparabilité de $(\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\delta})$, ce processus $\tilde{\eta}^{\bullet}$ admet une modification séparable et mesurable, d'après le résultat de I.I. GIHMAN et A.V. SKOROHOD [XXIII], I, page 170. Il en est de même pour le processus $\eta^{\bullet}$. ■

D - Représentation linéaire des processus $\overset{\bullet}{\eta}$.

L'hypothèse d'accroissements non corrélés, formulée pour la mesure aléatoire parente permet,par l'intermédiaire de la mesure spectrale qui lui est associée, d'utiliser les techniques hilbertiennes en vue d'une représentation des processus gaussiens centrés $\overset{\bullet}{\eta}$. Le résultat que nous obtenons constitue une ébauche de généralisation des propriétés relatives au processus du mouvement brownien réel à une dimension (voir, par exemple, J. DELPORTE, [XXVI]).

Rappelons les définitions suivantes, (J. NEVEU [XXVII], pages 21 et 63) :

i) *Un espace gaussien réel* est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert réel $L^2(\Omega,A,Pr)$ constitué des classes d'équivalence de variables aléatoires réelles gaussiennes centrées.

ii) *Une mesure gaussienne réelle* sur un espace mesuré $(\mathcal{X},\mathcal{B},m)$ est une isométrie de l'espace hilbertien $L^2(\mathcal{X},\mathcal{B},m)$ dans un espace gaussien.

Nous prendrons ici comme espace gaussien la fermeture du sous-espace H engendré par les classes d'équivalence des variables aléatoires $\overset{\bullet}{\eta}(B)$, correspondant à l'ensemble des boréliens bornés B.

Lemme I.6.3.- Soit $\overset{\bullet}{\mu}$ une mesure aléatoire à accroissements non corrélés, de mesure spectrale m. Tout processus de limite centrale associé $\overset{\bullet}{\eta}$ définit une mesure gaussienne réelle sur $(\mathcal{X},\mathcal{B},m)$.

La démonstration de ce résultat découle de J. NEVEU [XXVII], proposition 4.4., page 67, et de propriétés déjà mises en évidence : l'existence de la mesure spectrale (théorème I.6.1),et la pseudo σ-additivité de $\overset{\bullet}{\eta}$ (théorème I.6.2.).

On remarquera que cette isométrie prolonge l'application faisant correspondre, à la fonction indicatrice 1_B $(B \in \mathcal{B}_b)$, la variable aléatoire $\eta^{\bullet}(B)$.

Théorème I.6.4.- Soit $\eta^{\bullet}$ un processus de limite centrale associé à une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$. En supposant que $\mu^{\bullet}$ est à accroissements non corrélés, il existe une représentation de $\eta^{\bullet}$ telle que pour tout borélien borné B de X, on ait :

$$\eta^{\bullet}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n \lambda_n(B) \quad \text{p.s. .}$$

Dans cette égalité, chaque terme $\xi_n \lambda_n$ est le produit d'une variable aléatoire réelle ξ_n gaussienne, centrée, réduite, et d'une mesure sur X, non aléatoire, notée λ_n , absolument continue par rapport à la mesure spectrale m associée à $\mu^{\bullet}$.

Preuve : Comme l'espace X est séparable, la tribu $\mathcal{B}$ admet une base dénombrable ; la remarque de P.R. HALMOS ([XXV], page 177) permet d'affirmer que l'espace de Hilbert $L^2(X,\mathcal{B},m)$, obtenu par passage aux classes d'équivalence des fonctions pour l'égalité m-presque partout est séparable.

Désignons par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de cet espace. Un élément f de $L^2(X,\mathcal{B},m)$ étant donné, soit $\lambda_n(f)$ le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f relatif à cette base. Nous avons :

$$(1.9) \qquad \lambda_n(f) = \int_X f f_n \, dm$$

et :

$$(1.10) \qquad f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(f) \, f_n \, .$$

En particulier, la relation (1.9) donne, pour tout $B \in \mathcal{B}_b$, et pour $f = 1_B$:

$$\lambda_n(1_B) = \int_B f_n \, dm \; .$$

En notant ce terme $\hat{\lambda}_n(B)$, on définit une application $\hat{\lambda}_n$ de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathbb{R}$, qui est une mesure absolument continue, de densité f_n par rapport à la mesure spectrale m.

Par ailleurs, l'isométrie $\eta^{\bullet}$ entre $L^2(\mathcal{X},\mathcal{B},m)$ et l'espace gaussien H , fournie par le lemme I.6.3. donne, à partir de (1.10), le développement en série :

$$\eta^{\bullet}(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(f)\, \eta^{\bullet}(f_n) \; , \tag{1.11}$$

qui est convergent en moyenne quadratique pour tout élément f de $L^2(\mathcal{X},\mathcal{B},m)$. Posons alors :

$$\xi_n = \eta^{\bullet}(f_n) \; .$$

Du fait que H est un espace gaussien, (ξ_n) est une suite de v.a. gaussiennes centrées réduites et indépendantes.

Considérons un borélien borné B quelconque. La formule (1.11) implique :

$$\eta^{\bullet}(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n \, \lambda_n(B) \quad (\text{m.q.}) \; .$$

La convergence presque sûre de cette série résultera de la convergence des séries de termes généraux :

$$E\{\xi_n \, \lambda_n(B)\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}\{\xi_n \, \lambda_n(B)\}$$

(condition de Kolmogorov, [XXIV], proposition 10.6.3.).

La première série est manifestement convergente, puisque les variables aléatoires ξ_n sont centrées. Pour la seconde, nous remarquerons que pour tout nombre entier naturel n :

$$\mathrm{Var}\{\xi_n \lambda_n(B)\} = \lambda_n(B) \ ,$$

et que :

$$\lambda_n(B) = \lambda_n(1_B) = \int_X 1_B f_n \, dm \ ;$$

$\lambda_n(B)$ est ainsi un coefficient de Fourier de l'application 1_B et le résultat cherché découle du théorème de Parseval. ∎

Signalons, pour terminer ce chapitre, que des prolongements du théorème I.6.4. peuvent être envisagés, dans la ligne des résultats obtenus par S.M. BONKIAN ([XIV], pages 73 et 74) sur la convergence en moyenne quadratique des suites de mesures aléatoires positives d'ordre deux.

CHAPITRE II

ETUDE DE LA CONVERGENCE EN LOI PAR PLONGEMENT DANS UN ESPACE TOPOLOGIQUE COMPACT.

II.1. - Introduction.-

Le théorème de Kolmogorov a permis d'établir l'existence des processus de limite centrale $\eta^{\bullet}$ par l'intermédiaire de leur loi de probabilité P relative à l'espace produit $\mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}$.

Un tel processus possède encore peu de propriétés intéressantes : d'une part, il n'est pas assimilable à une mesure aléatoire, du fait que ses trajectoires ne sont pas σ-additives ; d'autre part, les outils maniés jusqu'à présent ne permettent pas d'assurer la convergence en loi, vers $\eta^{\bullet}$, de la suite des mesures empiriques normalisées $(\eta^{\bullet}_n)$. Pour contribuer à résoudre ces difficultés, nous plongerons dans un espace topologique compact Ω_c l'ensemble M des mesures réelles sur X.

Cette construction reprend une idée de KAKUTANI (voir [XXVIII]) qui est d'utiliser l'espace $\bar{\mathbb{R}}^T$ (où $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) comme instrument d'étude des processus indexés par un ensemble quelconque T. Dans un contexte proche, E. NELSON [XVI] a précisé le rôle des probabilités boréliennes régulières sur un espace topologique compact, et P.A. MEYER [XV] a défini le second processus canonique associé à une famille de variables aléatoires. Nous appliquons à l'espace $\Omega_c = \mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}$ une variante du théorème de Riesz-Markov relatif à la correspondance entre fonctionnelles linéaires et probabilités boréliennes régulières. Ce point de vue permettra la construction de processus $\tilde{\eta}^{\bullet}_n$

et $\tilde{\eta}^{\bullet}$, équivalents respectivement à $\eta_n^{\bullet}$ et $\eta^{\bullet}$, et qui jouissent des propriétés suivantes : d'une part, la convergence en loi, en un sens qui sera précisé, de la suite $(\tilde{\eta}_n^{\bullet})$ vers $\tilde{\eta}^{\bullet}$; d'autre part, la possibilité de définir, presque-sûrement, des trajectoires additives, ce qui confère au processus de limite centrale $\eta^{\bullet}$ une propriété proche de celle des mesures aléatoires.

II.2. - THÉORÈMES D'APPROXIMATION DANS L'ENSEMBLE DES FONCTIONS CONTINUES SUR L'ESPACE Ω_c .-

Considérons l'espace $\Omega_c = \bar{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}_b}$, muni de la topologie produit. D'après le théorème de Tychonov, Ω_c est compact. Les éléments de Ω_c , qui sont les applications de $\mathcal{B}_b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, seront notés λ. Désignons par C l'algèbre des applications continues de Ω_c dans $\mathbb{R}$, munie de la norme de la convergence uniforme.

A tout élément S de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire à toute suite finie de boréliens bornés :

$$S = (B_1, B_2, \dots, B_k) ,$$

associons la projection π_S, qui est l'application de Ω_c dans $\mathbb{R}^k$ définie par :

$$\pi_S(\lambda) = (\lambda(B_1), \lambda(B_2), \dots, \lambda(B_k)) ,$$

et l'ensemble C_S des applications continues de Ω_c dans $\mathbb{R}$, notées ϕ et vérifiant, pour tous éléments λ_1 et λ_2 de Ω_c , la relation suivante :

$$\begin{cases} \text{Si} \quad \pi_S(\lambda_1) = \pi_S(\lambda_2) \quad , \\ \text{alors} \quad \phi(\lambda_1) = \phi(\lambda_2) \quad . \end{cases}$$

Nous considérerons aussi l'ensemble :

$$\hat{C} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} C_S \ .$$

Théorème II.2.1.- L'ensemble $\hat{C}$ constitue une sous-algèbre dense dans l'algèbre C.

Ce résultat est une conséquence immédiate du fait que les applications continues dépendant seulement d'un nombre fini de coordonnées forment une sous-algèbre dense dans C (L. SCHWARTZ, [XXIX], p 382).

Considérons maintenant une suite finie de boréliens bornés, toujours notée :

$$S = (B_1, B_2, \ldots, B_k),$$

et un élément ϕ de C_S .

A tout élément $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ de $\bar{\mathbb{R}}^k$ est associé au moins un élément λ de Ω_c , prenant les valeurs t_i sur les boréliens bornés B_i , c'est-à-dire tel que :

$$\pi_S(\lambda) = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \ .$$

Pour tous éléments λ_1 et λ_2 de Ω_c , la relation :

$$\pi_S(\lambda_1) = \pi_S(\lambda_2)$$

et la définition même de C_S entraînent $\phi(\lambda_1) = \phi(\lambda_2)$. Il en résulte l'existence d'une application ϕ_S de $\bar{\mathbb{R}}^k$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\phi_S(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \phi(\lambda) \quad ,$$

et telle que $\phi = \phi_S \circ \pi_S$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega_c = \mathbb{R}^{\mathcal{B}_b} \arrow[r, "\pi_S"] \arrow[dr, "\phi"'] & \bar{\mathbb{R}}^S = \bar{\mathbb{R}}^k \arrow[d, "\phi_S"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Théorème II.2.2.- L'application ϕ_S est continue et bornée.

Preuve :

1°) L'application ϕ_S est bornée : ϕ étant continue sur Ω_c et l'espace Ω_c étant compact, l'application de Ω_c dans $\mathbb{R}$ est bornée, donc aussi l'application ϕ_S de $\bar{\mathbb{R}}^k$ dans $\mathbb{R}$.

2°) L'application ϕ_S est continue. Pour l'établir, introduisons la relation d'équivalence entre éléments de Ω_c définie par :

$$\begin{cases} \lambda_1 \sim \lambda_2 \quad \text{si et seulement si :} \\ \pi_S(\lambda_1) = \pi_S(\lambda_2) \ . \end{cases}$$

Il est immédiat que l'application π_S est aussi la projection canonique de Ω_c sur l'espace quotient de Ω_c par cette relation d'équivalence, noté $\Omega_c/\sim$. Or, 0 est un ouvert de $\Omega_c/\sim$ si et seulement si $\pi_S^{-1}(0)$ est un ouvert de Ω_c ; en écrivant Ω_c sous la forme de l'espace produit $\bar{\mathbb{R}}^S \times \bar{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}_b - S}$, où $\bar{\mathbb{R}}^S$ désigne $\mathbb{R}^k$, sachant que $S = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$, nous avons :

$$\pi_S^{-1}(0) = 0 \times \mathbb{R}^{\mathcal{B}_b - S} \ .$$

Cependant, $0 \times \bar{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}_b - S}$ est ouvert dans Ω_c si et seulement si 0 est ouvert dans $\bar{\mathbb{R}}^S$. Par conséquent, nous pouvons identifier topologiquement $\bar{\mathbb{R}}^S$ et $\Omega_c/\sim$. Alors, comme $\phi = \phi_S \circ \pi_S$ est une application continue de Ω_c dans $\mathbb{R}$, ϕ_S est une application continue de $\bar{\mathbb{R}}^S$ dans $\mathbb{R}$. ■

II.3. - THÉORÈME DE NELSON-KOLMOGOROV RELATIF AUX FORMES LINÉAIRES SUR C_S .-

Après avoir rappelé la notion de probabilité borélienne régulière, nous citons un résultat classique, qui constitue une variante du théorème de Riesz-Markov relatif à la correspondance entre fonctionnelles linéaires et probabilités boréliennes régulières.

Définition II.3.- Soit P une probabilité borélienne sur un espace topologique compact E. On dit que P est *régulière* si pour tout borélien $\mathbb{B}$ de E,

$$P(\mathbb{B}) = \sup_{F \subset \mathbb{B}} P(F) = \inf_{\mathbb{B} \subset O} P(O) ,$$

F et O désignant respectivement un fermé et un ouvert quelconques dans E.

Théorème II.3.1.- Soient E un espace topologique compact, et $C(E)$ l'ensemble des applications continues (et bornées) de E dans $\mathbb{R}$. La relation :

$$\forall f \in C(E) \qquad L(f) = \int f \, dP$$

définit une bijection entre :

- l'ensemble des formes linéaires positives L sur $C(E)$, telles que $L(1) = 1$.

- l'ensemble des probabilités boréliennes régulières sur E.

Preuve : Voir, par exemple, J. NEVEU [V], proposition II.7.2..

Nous utiliserons ce théorème dans le contexte suivant. Rappelons les notations introduites au paragraphe I.4. : si S est un élément de $\mathcal{S}$, noté :

$$S = (B_1, B_2, \dots, B_k),$$

$P_{n,S}$ (resp. P_S) désigne la loi sur $\mathbb{R}^k$ du vecteur aléatoire :

$$(\eta_n^\bullet(B_1), \eta_n^\bullet(B_2), \dots, \eta_n^\bullet(B_k))$$

$$(\text{resp. } (\eta^\bullet(B_1), \eta^\bullet(B_2), \dots, \eta^\bullet(B_k)))\ .$$

Au couple $(n,S) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{S}$, est associé la forme linéaire positive $L_{n,S}$ sur C_S, définie par :

$$\forall \phi \in C_S \quad L_{n,S}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^k} \phi_S \, dP_{n,S}\ .$$

On définit de même la forme linéaire L_S par :

$$\forall \phi \in C_S \quad L_S(\phi) = \int_{\mathbb{R}^k} \phi_S \, dP_S\ .$$

Lemme II.3.- Pour tout nombre entier naturel non nul n, la famille des formes linéaires $(L_{n,S})_{S\in\mathcal{S}}$ (resp. $(L_S)_{S\in\mathcal{S}}$) vérifie la propriété de compatibilité suivante :

Si $S \leq S'$ (au sens défini en I.4),

alors $L_{n,S}$ (resp. L_S) est la restriction de $L_{n,S'}$ (resp. $L_{S'}$) à C_S.

Preuve : Raisonnons avec la famille $(L_{n,S})_{S\in\mathcal{S}}$, la démarche étant identique pour $(L_S)_{S\in\mathcal{S}}$.

Nous utiliserons à nouveau l'application $\pi_{SS'}$, déjà définie en I.4 , qui est la projection canonique de $\mathbb{R}^{k'}$ sur $\mathbb{R}^k$ $(k \leq k')$:

$$\pi_{SS'}(t_1,t_2,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_{k'}) = (t_1,t_2,\ldots,t_k) .$$

Partons alors des deux relations :

i) $\phi_{S'} = \phi_S \circ \pi_{SS'}$,

valable pour les éléments S et S' de $\mathcal{S}$ tels que $S \leq S'$.

Cette relation résulte de la définition même de ϕ_S .

ii) $P_{n,S} = P_{n,S'} \circ \pi_{SS'}^{-1}$,

qui exprime la compatibilité de la famille $(P_{n,S})_{S\in\mathcal{S}}$.

Ces relations entraînent, pour tout élément ϕ de C_S ,

$$\int_{\mathbb{R}^{k'}} \phi_{S'}\, dP_{n,S'} = \int_{\mathbb{R}^k} \phi_S \circ \pi_{SS'}\, dP_{n,S'} = \int_{\mathbb{R}^k} \phi_S\, dP_{n,S} ,$$

au moyen du changement de variable :

$$t = \pi_{SS'}(t') , \quad t \in \mathbb{R}^k , \quad t' \in \mathbb{R}^{k'} .$$

Il en résulte finalement :

$$L_{n,S'}(\phi) = L_{n,S}(\phi) . \blacksquare$$

Nous en venons maintenant au théorème qui est la clé de la construction du présent chapitre, et dont la démonstration est directement inspirée par [XVI] :

Théorème II.3.2. - (Nelson-Kolmogorov).

Il existe une unique suite $(\tilde{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de probabilités boréliennes régulières sur Ω_c, et une probabilité $\tilde{P}$ de même nature, telles que pour tout élément S de $\mathcal{S}$ et pour toute application ϕ de C_S, on ait :

i) Pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$L_{n,S}(\phi) = \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n$$

ii) $L_S(\phi) = \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}$.

Preuve : Raisonnons dans le cas de la famille $(L_{n,S})_{S\in\mathcal{S}}$.

1°) Existence de $\tilde{P}_n$. Soit $\phi \in \hat{C}$. Il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que $\phi \in C_S$. Posons $L_n(\phi) = L_{n,S}(\phi)$; la propriété de compatibilité ci-dessus permet d'affirmer que $L_n(\phi)$ ne dépend pas du choix de S.

On vérifie de façon immédiate que L_n est une forme linéaire continue sur $\hat{C}$, et possède en outre les deux propriétés :

$$\begin{cases} L_n(\phi) \geq 0 \quad \text{pour} \quad \phi \geq 0 \\ L_n(1) = 1 . \end{cases}$$

Comme $\hat{C}$ est dense dans C, L_n admet un unique prolongement continu à C, prolongement encore noté L_n, qui est aussi une forme linéaire positive telle que $L_n(1) = 1$.

L'espace Ω_c étant compact, le théorème II.3.1. fournit l'existence d'une unique probabilité borélienne régulière sur Ω_c, telle que :

$$L_n(\phi) = \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n .$$

De plus, pour tout $S \in \mathcal{S}$, la restriction à C_S de la forme linéaire $\phi \mapsto \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n$ est L_S, par définition même de L_n.

2°) Unicité de $\tilde{P}_n$. Si $\tilde{P}_n$ et $\tilde{P}'_n$ sont deux probabilités boréliennes régulières telles que pour tout élément ϕ de C_S ,

$$\int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n = \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}'_n \, ,$$

les formes linéaires associées L et L' coïncident sur $\hat{C}$, donc sur C, et l'on a : $\tilde{P}_n = \tilde{P}'_n$. ■

II.4. - CONSTRUCTION DES SECONDS PROCESSUS CANONIQUES $\tilde{\eta}^{\bullet}_n$ ET $\tilde{\eta}^{\bullet}$.-

Remarquons tout d'abord que chaque probabilité $P_{n,S}$ (resp. P_S) possède, de façon immédiate, une extension unique à $(\bar{\mathbb{R}}^S , \bar{R}^S)$; c'est ce prolongement, noté encore $P_{n,S}$ (resp. P_S) qui sera considéré dans la suite de ce chapitre. Ainsi, la probabilité P_n (resp. P) se trouve définie sur la tribu produit $\bar{R}^{\mathcal{B}_b}$, en vertu du théorème de Kolmogorov-Bochner.

Nous allons vérifier que les lois de dimension finie associées à P_n et $\tilde{P}_n$ (resp. P et $\tilde{P}$) sont les mêmes, ou, en d'autres termes, que $\tilde{P}_n$ (resp. $\tilde{P}$) a pour restriction à $\bar{R}^{\mathcal{B}_b}$ la probabilité P_n (resp. P). Inversement, en remarquant que $\bar{R}^{\mathcal{B}_b}$ est aussi la tribu de Baire de Ω_c (E. NELSON, [XVI]), et que toute probabilité définie sur la tribu de Baire d'un espace compact s'étend de manière unique à sa tribu borélienne (P.R. HALMOS, [XXV], p 239), nous pouvons aussi affirmer que $\tilde{P}_n$ (resp. $\tilde{P}$) est l'extension unique de P_n (resp. P) à la tribu borélienne de Ω_c. La raison qui nous a conduit à construire les probabilités $\tilde{P}_n$ et $\tilde{P}$ selon la méthode indiquée par E. NELSON, plutôt que de tirer parti de la remarque ci-dessus, est l'utilisation explicite de la construction au cours des raisonnements qui suivent, et dont l'objet est de restreindre $\tilde{P}$ à un sous-ensemble de Ω_c. Nous noterons, comme P.A. MEYER [XV], $\tilde{\eta}^{\bullet}$ et $\tilde{\eta}^{\bullet}_n$ les seconds processus canoniques :

$$(\Omega_c , \mathcal{B}_{\Omega_c} , \tilde{P} , (\pi_B)_{B\in\mathcal{B}_b})$$

et $$(\Omega_c , \mathcal{B}_{\Omega_c} , \tilde{P}_n , (\pi_B)_{B\in\mathcal{B}_b})$$

où $\mathcal{B}_{\Omega_c}$ désigne la tribu borélienne de l'espace Ω_c ; ces processus sont équivalents respectivement à $\dot{\eta}$ et $\dot{\eta}_n$.

Théorème II.4.- La probabilité $\tilde{P}_n$ est l'unique extension de P_n à la tribu $\mathcal{B}_{\Omega_c}$.

Preuve : Pour toute suite finie de boréliens bornés, notée :

$$S = (B_1, B_2 ,\dots, B_k) ,$$

et pour toute application f de $\bar{\mathbb{R}}^k$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée, l'application $\phi_S = f \circ \pi_S$ est un élément de C_S . Notons $Q_{n,S}$ la mesure image de $\tilde{P}_n$ par π_S ; nous avons, d'après le théorème II.3.2. :

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}^k} f \, dP_{n,S} = \int_{\Omega_c} \phi_S \, d\tilde{P}_n$$

et, d'après le théorème de transfert :

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}^k} f \, dQ_{n,S} = \int_{\Omega_c} \phi_S \, d\tilde{P}_n .$$

Nous obtenons ainsi, pour tout élément S de $\mathcal{S}$:

$$Q_{n,S} = P_{n,S} ,$$

ce qui achève la démonstration. ■

II.5. - CONVERGENCE EN LOI, VERS $\tilde{\eta}^{\bullet}$, DE LA SUITE $(\tilde{\eta}_n^{\bullet})$.-

L'intérêt majeur des processus $\tilde{\eta}_n^{\bullet}$ et $\tilde{\eta}^{\bullet}$ réside dans le théorème II.5., qui exprime la propriété de convergence en loi de la suite $(\tilde{\eta}_n^{\bullet})$ vers $\tilde{\eta}^{\bullet}$. Ce résultat représente un progrès notable par rapport à la seule convergence en loi, pour tout k-uplet de boréliens bornés $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$, de la suite :

$$(\eta_n^{\bullet}(B_1), \eta_n^{\bullet}(B_2), \ldots, \eta_n^{\bullet}(B_k))$$

vers le vecteur aléatoire :

$$(\eta^{\bullet}(B_1), \eta^{\bullet}(B_2), \ldots, \eta^{\bullet}(B_k)) ,$$

qui avait été exprimée au paragraphe I.4. Nous obtenons ainsi une deuxième approche du théorème de limite centrale relatif aux mesures aléatoires.

La convergence en loi des variables aléatoires s'exprime par la convergence faible des probabilités associées. Nous précisons cette dernière notion, en nous inspirant de V.S. VARADARAJAN [XVII], page 181 :

Définition II.5.- Une suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de probabilités boréliennes sur un espace topologique compact E *converge faiblement* vers la probabilité borélienne π sur E si et seulement si pour toute application continue ϕ de E dans $\mathbb{R}$, la suite $(\int_E \phi \, d\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_E \phi \, d\pi$.

Théorème II.5.- La suite $(\tilde{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de probabilités sur Ω_c converge faiblement vers $\tilde{P}$.

Preuve : Soit $\phi \in C$, et soit ε un nombre réel strictement positif. L'ensemble $\hat{C}$ étant dense dans C, il existe un élément Ψ de C_S tel que :

$$(2.1) \qquad \sup_{\lambda\in\Omega_c} |\Psi(\lambda) - \phi(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Par définition de $\hat{C}$, il existe un élément S de $\mathcal{S}$ tel que :

$$\Psi \in C_S\,,$$

et vérifiant donc, pour tout nombre entier naturel n :

$$\int_{\Omega_c} \Psi \, dP_n = \int_{\mathbb{R}^k} \Psi_S \, dP_{n,S}\,.$$

L'application Ψ_S est continue et bornée, d'après le théorème II.2.2. ; d'autre part, d'après la proposition I.4.1., la suite $(P_{n,S})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_S ; il en résulte que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \Psi_S \, dP_{n,S} = \int_{\mathbb{R}^k} \Psi_S \, dP_S\,,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}_n = \int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}\,,$$

ou encore, pour n assez grand :

$$(2.2) \qquad \left|\int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}_n - \int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\left|\int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n - \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}\right| \leq \left|\int_{\Omega_c} (\phi-\Psi) \, d\tilde{P}_n\right| + \left|\int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}_n - \int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}\right| + \left|\int_{\Omega_c} (\phi-\Psi) \, d\tilde{P}\right|\,,$$

et donc, pour tout n assez grand, d'après (2.2) :

$$\left|\int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n - \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}\right| \leq 2 \sup_{\lambda\in\Omega_c} |\Psi(\lambda) - \phi(\lambda)| + \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Le nombre réel strictement positif ε étant arbitraire, on tire alors de (2.1) le résultat annoncé. ■

II.6. - SUR LE PROBLÈME D'ADDITIVITÉ DES TRAJECTOIRES DU PROCESSUS DE LIMITE CENTRALE.-

Nous nous proposons d'établir que le processus $\tilde{\eta}^{\bullet}$, construit au paragraphe II.4, est presque sûrement à trajectoires additives, en un sens qui sera précisé. Après un lemme technique, nous énonçons un premier résultat fondamental, où la régularité des probabilités $\tilde{P}_n$ et $\tilde{P}$ joue un rôle essentiel.

Désignons par $\bar{M}$ l'adhérence de M dans l'espace topologique Ω_c.

Lemme II.6.- Pour tout élément S de S, noté :

$$S = (B_1, B_2, \dots, B_k) ,$$

l'image directe $\pi_S(\bar{M})$ de $\bar{M}$ par π_S est mesurable par rapport à la tribu $\bar{R}^k$ de $\bar{\mathbb{R}}^k$, et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n,S}(\pi_S(\bar{M})) = 1 .$$

Preuve : Soit S un élément quelconque de S.

1°) L'application π_S de Ω_c dans $\bar{\mathbb{R}}^k$ est continue, et $\bar{M}$ est une partie compacte de Ω_c ; $\pi_S(\bar{M})$ est alors compacte, donc élément de la tribu borélienne de $\bar{\mathbb{R}}^k$, qui est aussi la tribu produit $\bar{R}^k$.

2°) Par définition même de cette tribu produit, l'application π_S de Ω_c dans $\bar{\mathbb{R}}^k$, est mesurable relativement aux tribus $\bar{R}^{\mathcal{B}_b}$ et $\bar{R}^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P_{n,S}$ est aussi une loi de dimension finie de P_n, si bien que :

(2.3) $$P_{n,S}\,[\pi_S(\bar{M})] = P_n\,[\pi_S^{-1}(\pi_S(\bar{M}))]\ .$$

A toute partie, Λ, de Ω_C, associons alors $P_n^*(\Lambda)$, infimum des probabilités $P_n(R)$, où R est un élément de la tribu produit $\bar{R}^{\mathcal{B}_b}$, qui contient Λ.
Nous avons :

(2.4) $$P_n^*(M) \leq P_n^*(\bar{M}) \leq P_n\,[\pi_S^{-1}(\pi_S(\bar{M}))]\ .$$

Il nous reste à démontrer que

$$P_n^*(M) = 1\ ;$$

les relations (2.3) et (2.4) donneront le résultat annoncé.

3°) Considérons à nouveau, pour tout borélien borné B de X, l'application ϕ_B de M dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\phi_B(\lambda) = \lambda(B)\ ,$$

déjà introduite au paragraphe I.2.. La tribu T de parties de M engendrée par la famille :

$$(\phi_B)_{B\in\mathcal{B}_b}$$

coïncide avec la tribu trace sur M de la tribu produit $\bar{R}^{\mathcal{B}_b}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, désignons par P_n^o la loi, sur (M,T), de la mesure aléatoire $\dot{\eta}_n$, caractérisée par la famille des lois de dimension finie :

$$(P_{n,S})_{S\in\mathcal{S}}\ ,$$

et par Q_n le prolongement de P_n^o à la tribu $\bar{R}^{\mathcal{B}_b}$, défini par :

$$Q_n(R) = P_n^o(M \cap R) .$$

Nous avons ainsi pour tout élément S de $\mathcal{S}$, noté $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$, et pour tout borélien R de $\mathbb{R}^k$:

$$Q_{n,S}(R) = Q_n \{\lambda \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}_b} : (\lambda(B_1), \lambda(B_2) \ldots \lambda(B_k) \in R\}$$

$$= P_n^o \{\lambda \in M : (\lambda(B_1), \lambda(B_2), \ldots, \lambda(B_k)) \in R\}$$

$$= P_{n,S}(R) .$$

Les probabilités P_n et Q_n ont donc mêmes lois de dimension finie, et par conséquent P_n est le prolongement de P_n^o à $\bar{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}_b}$. Il s'ensuit que pour tout élément R de $\bar{\mathcal{R}}^{\mathcal{B}_b}$,

$$P_n(R) = P_n^o(M \cap R) ,$$

et en particulier, si R est un élément de $\bar{\mathcal{R}}^{\mathcal{B}_b}$ contenant M,

$$P_n(R) = P_n^o(M) = 1 ;$$

d'où finalement :

$$P_n^*(M) = 1 . \quad \blacksquare$$

<u>*Théorème II.6.1.*</u>- <u>Les probabilités</u> $\tilde{P}_n$ <u>et</u> $\tilde{P}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ <u>sont concentrées sur l'espace</u> $\bar{M}$, <u>adhérence de</u> M <u>dans</u> Ω_c . <u>En d'autres termes, nous avons</u> :

$$\tilde{P}_n(\bar{M}) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{P}(\bar{M}) = 1 .$$

<u>*Preuve*</u> :

1°) Montrons tout d'abord que, pour tout nombre entier naturel non nul n, $\tilde{P}_n(\bar{M}) = 1$.

Pour cela, soit O une partie ouverte de Ω_c contenant $\bar{M}$. L'espace Ω_c est compact, donc normal ; il existe une application ϕ de Ω_c dans $\mathbb{R}$, continue, telle que :

$$1_{\bar{M}} \leqslant \phi \leqslant 1_O ,$$

$1_{\bar{M}}$ et 1_O désignant les indicatrices des ensembles $\bar{M}$ et O. En passant aux intégrales, nous obtenons, avec la partie droite de cette double inégalité :

$$(2.5) \qquad \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n \leqslant \tilde{P}_n(O) .$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. L'ensemble $\hat{C}$ étant dense dans C, d'après le théorème II.2.1., il existe une application Ψ, élément de $\hat{C}$, telle que :

$$(2.6) \qquad \sup_{\lambda \in \Omega_c} |\Psi(\lambda) - \phi(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Par définition de $\hat{C}$, il existe un élément S de $\mathcal{S}$ tel que :

$$\Psi \in C_S ;$$

nous associons à Ψ l'application Ψ_S de $\bar{\mathbb{R}}^k$ dans $\mathbb{R}$, comme au paragraphe II.2., et nous avons :

$$(2.7) \qquad \int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}_n = \int_{\bar{\mathbb{R}}^k} \Psi_S \, dP_{n,S} .$$

D'après le lemme II.6., $P_{n,S}$ est concentrée sur $\pi_S(\bar{M})$, donc :

$$\int_{\Omega_c} \Psi \, d\tilde{P}_n = \int_{\pi_S(\bar{M})} \Psi_S \, dP_{n,S} .$$

Or, pour tout k-uplet $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ de $\pi_S(\bar{M})$, il existe un élément λ de $\bar{M}$ tel que :

$$\lambda(B_1) = t_1 \ , \ \lambda(B_2) = t_2 \ ,\dots, \ \lambda(B_k) = t_k \ ;$$

nous avons alors :

$$\Psi_S(t_1, t_2 ,\dots, t_k) = \Psi(\lambda) \ .$$

D'après (2.6), $\Psi(\lambda) > \phi(\lambda) - \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour tout k-uplet de réels $(t_1, t_2 ,\dots, t_k)$ appartenant à $\pi_S(\bar{M})$,

$$\Psi_S(t_1, t_2 ,\dots, t_k) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

et par conséquent, nous tirons de (2.7) :

(2.8) $$\int_{\Omega_c} \Psi \ d\tilde{P}_n > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Par ailleurs, il résulte aussi de (2.6) :

$$\left|\int_{\Omega_c} \Psi \ d\tilde{P}_n - \int_{\Omega_c} \phi \ d\tilde{P}_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

d'où nous tirons :

$$\int_{\Omega_c} \phi \ d\tilde{P}_n \geqslant \int_{\Omega_c} \Psi \ d\tilde{P}_n - \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

et d'après (2.8),

$$\int_{\Omega_c} \phi \ d\tilde{P}_n \geqslant 1-\varepsilon \ .$$

Le nombre réel strictement positif ε étant arbitraire, nous obtenons

$$\int_{\Omega_c} \phi \ d\tilde{P}_n \geqslant 1 \ ,$$

et finalement, la relation (2.5) donne :

$$\tilde{P}_n(0) = 1 \ .$$

L'ouvert O, pris au départ, étant arbitraire, et la probabilité $\tilde{P}_n$ régulière, le résultat annoncé en découle.

2°) Montrons maintenant que $\tilde{P}(\bar{M}) = 1$.

Soit O un ouvert de Ω_c contenant $\bar{M}$. Comme dans le paragraphe qui précède, il existe une application de Ω_c dans $\mathbb{R}$, continue, telle que :

$$1_{\bar{M}} \leq \phi \leq 1_O .$$

En passant aux intégrales, nous obtenons :

$$\tilde{P}_n(\bar{M}) \leq \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P}_n$$

et

$$\int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P} \leq \tilde{P}(O) .$$

Sachant que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers $\tilde{P}$, et que ϕ est élément de C, nous tirons des deux inégalités précédentes :

$$\limsup_{n\to\infty} \tilde{P}_n(\bar{M}) \leq \int_{\Omega_c} \phi \, d\tilde{P} .$$

Comme $\tilde{P}_n(\bar{M}) = 1$, nous avons finalement $\tilde{P}(O) = 1$.

L'ouvert O contenant $\bar{M}$ étant arbitraire, et la probabilité $\tilde{P}$ régulière, le résultat annoncé en découle, comme précédemment. ■

Le théorème II.6.1. met en évidence le rôle joué par l'espace $\bar{M}$. Nous considérerons désormais que $\tilde{P}_n$ et $\tilde{P}$ sont définies sur $\bar{M}$. Observons en outre que la condition :

$$\lambda \in \bar{M}$$

n'entraîne pas nécessairement que λ est finie sur les boréliens bornés.

Nous disposons du contre-exemple suivant : posons pour $a \in X$ et $B \in \mathcal{B}_b$

$$\delta_a^n(B) = \begin{cases} n & \text{si} \quad a \in B \\ 0 & \text{si} \quad a \notin B \end{cases}$$

$$\lambda_a(B) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a \in B \\ 0 & \text{si} \quad a \notin B \end{cases} .$$

Il est immédiat que pour tout borélien borné B ,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_a^n(B) = \lambda_a(B) ,$$

donc que :

$$\lim_{n\to\infty} \delta_a^n = \lambda_a$$

dans l'espace Ω_c muni de la topologie produit ; il en résulte que $\lambda_a \in \overline{M}$.

Cela prouve aussi que l'espace M n'est pas séquentiellement fermé.

En réalité, l'intérêt de l'espace $\overline{M}$ réside dans le résultat qui suit :

Théorème II.6.2.- Les éléments λ de $\overline{M}$ sont additifs au sens suivant : pour tous boréliens bornés B_1 et B_2 disjoints, tels que

$$\lambda(B_1) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{et} \quad \lambda(B_2) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} ,$$

nous avons :

$$\lambda(B_1 \cup B_2) = \lambda(B_1) + \lambda(B_2) .$$

Preuve : Soient $\lambda \in \bar{M}$, B_1 et B_2 éléments de $\mathcal{B}_b$, tels que :

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$\lambda(B_1) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\lambda(B_2) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} .$$

Dans l'espace $\bar{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}_b}$, muni de la topologie produit, l'élément λ admet comme système fondamental de voisinages :

$$(V_{\lambda,S})_{S\in\mathcal{S}}$$

où, pour $S = (B_1, B_2,\ldots, B_k)$, on a posé :

$$V_{\lambda,S} = \bigcap_{1\leq i\leq k} \{\nu : \nu(B_i) \in V_{B_i}\} ,$$

V_{B_i} étant un voisinage de $\lambda(B_i)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ muni de la topologie naturelle associée à l'ordre.

Prenons $S = (B_1, B_2, B_1 \cup B_2)$. Comme $\lambda \in \bar{M}$, pour tous voisinages de $\lambda(B_1)$, $\lambda(B_2)$, $\lambda(B_1 \cup B_2)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, notés respectivement V_{B_1} , V_{B_2} , $V_{B_1 \cup B_2}$, il existe $\nu \in M$ tel que :

$$\nu(B_1) \in V_{B_1}$$

$$\nu(B_2) \in V_{B_2}$$

$$\nu(B_1 \cup B_2) \in V_{B_1 \cup B_2} .$$

Distinguons plusieurs cas :

1

<u>*1^{er} cas :*</u> $\lambda(B_1) \in \mathbb{R}$, $\lambda(B_2) \in \mathbb{R}$.

Montrons tout d'abord que $\lambda(B_1 \cup B_2) \in \mathbb{R}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde, en supposant que $\lambda(B_1 \cup B_2) = +\infty$. Alors, les hypothèses faites impliquent l'existence, pour tous $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, de $\nu \in \mathcal{M}$ tels que :

(2.9) $$|\nu(B_1) - \lambda(B_1)| < \varepsilon$$

(2.10) $$|\nu(B_2) - \lambda(B_2)| < \varepsilon$$

(2.11) $$\nu(B_1 \cup B_2) > A \ .$$

En tenant compte de (2.9) et (2.10), et de l'additivité de ν, nous obtenons :

$$\lambda(B_1) + \lambda(B_2) > \nu(B_1 \cup B_2) - 2\varepsilon \quad ,$$

puis, au moyen de (2.11),

$$\lambda(B_1) + \lambda(B_2) > A - 2\varepsilon \quad .$$

Les nombres réels A et ε étant arbitraires, cela implique :

$$\lambda(B_1) + \lambda(B_2) = +\infty,$$

ce qui contredit le fait que $\lambda(B_1) \in \mathbb{R}$ et $\lambda(B_2) \in \mathbb{R}$.

Montrons maintenant que $\lambda(B_1 \cup B_2) = \lambda(B_1) + \lambda(B_2)$. Les hypothèses faites impliquent l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, de $\nu \in \mathcal{M}$ tel que l'on ait les relations (2.9) et (2.10), ainsi que :

$$|\nu(B_1 \cup B_2) - \lambda(B_1 \cup B_2)| < \varepsilon \quad .$$

Sachant que ν est additive, l'inégalité triangulaire donne :

$$|\lambda(B_1 \cup B_2) - \lambda(B_1) - \lambda(B_2)| \leq |\lambda(B_1 \cup B_2) - \nu(B_1 \cup B_2)|$$

$$+ |\nu(B_1) - \lambda(B_1)| + |\nu(B_2) - \lambda(B_2)| < 3\varepsilon \ .$$

Le nombre réel ε étant arbitraire, nous obtenons le résultat annoncé.

<u>$2^{ème}$ *cas*</u> : $\lambda(B_1) = +\infty$ et $\lambda(B_2) \in \mathbb{R}$.

Montrons que, nécessairement, $\lambda(B_1 \cup B_2) = +\infty$. Pour cela, raisonnons par l'absurde, en supposant que $\lambda(B_1 \cup B_2) \in \mathbb{R}$. Alors, pour tous nombres réels $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\nu \in \mathcal{M}$ tel que :

$$\nu(B_1) > A$$

$$|\lambda(B_2) - \nu(B_2)| < \varepsilon$$

$$|\lambda(B_1 \cup B_2) - \nu(B_1 \cup B_2)| < \varepsilon .$$

Comme précédemment, nous en tirons :

$$\lambda(B_1 \cup B_2) > \nu(B_1 \cup B_2) - \varepsilon = \nu(B_1) + \nu(B_2) - \varepsilon > A + \lambda(B_2) - 2\varepsilon.$$

Les nombres réels A et ε étant arbitraires, nous avons :

$$\lambda(B_1 \cup B_2) = +\infty.$$

Il en résulte une contradiction.

<u>$3^{ème}$ *cas*</u> : $\lambda(B_1) = +\infty$ et $\lambda(B_2) = +\infty$.

Montrons qu'alors $\lambda(B_1 \cup B_2) = +\infty$. Comme précédemment, si l'on suppose $\lambda(B_1 \cup B_2) \in \mathbb{R}$, pour tous nombres réels $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\nu \in \mathcal{M}$ vérifiant :

$$\nu(B_1) > A$$

$$\nu(B_2) > A$$

$$|\lambda(B_1 \cup B_2) - \nu(B_1 \cup B_2)| < \varepsilon ,$$

d'où l'on tire :

$$\lambda(B_1 \cup B_2) > \nu(B_1 \cup B_2) - \varepsilon = \nu(B_1) + \nu(B_2) - \varepsilon > 2A - \varepsilon,$$

et $$\lambda(B_1 \cup B_2) = +\infty ,$$

ce qui contredit l'hypothèse faite. ■

II.7. - CONCLUSION.-

Nous avons pu, dans ce chapitre, exprimer un théorème de limite centrale pour les mesures aléatoires, en définissant sur l'espace $\bar{M}$, muni de sa tribu borélienne, des probabilités $\tilde{P}_n$ et $\tilde{P}$ dont les lois de dimension finie sont celles des processus $\dot{\eta}_n$ et $\dot{\eta}$. Comme toute application continue de $\bar{M}$ dans $\mathbb{R}$ admet un prolongement continu à Ω_C tout entier, le théorème en question s'exprime comme la convergence faible vers $\tilde{P}$, de la suite $(\tilde{P}_n)$, ce qui est, d'un point de vue formel, assez satisfaisant. Cependant, de nombreux points nous laissent sur notre faim, et le lecteur partagera sans doute cette opinion. Tout d'abord, la propriété d'additivité que présentent les éléments de $\bar{M}$ est perturbée par les valeurs infinies que peuvent prendre les trajectoires ; pour l'instant, nous ne parvenons pas à démontrer que :

$$\tilde{P}^*(\bar{M} \cap \mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}) = 1 ,$$

ni même que :

$$P^*(\bar{M} \cap \mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}) = 1 ,$$

bien qu'il soit évident, d'après la démonstration du lemme II.6. que :

$$P_n^*(\bar{M} \cap \mathbb{R}^{\mathcal{B}_b}) = 1 .$$

D'ailleurs, même si nous avions poursuivi dans cette direction, il n'en resterait pas moins vrai que l'espace des applications additives de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathbb{R}$ est trop vaste pour donner lieu à des résultats directement exploitables.

Une voie de recherche consiste alors à exhiber, par exemple, pour $X = [0,1]$, des classes de mesures aléatoires parentes $\dot{\mu}$ qui permettent d'obtenir, pour les trajectoires du processus $\dot{\eta}$, des propriétés plus substantielles. L'ampleur du problème qui est ainsi posé nous a incité, dans un premier temps, à une tentative de généralisation de résultats actuellement disponibles sur le théorème de limite centrale relatif au processus empirique ; la référence, dans ce domaine, reste l'article de R.M. DUDLEY [I]. Le point de vue adopté dans les chapitres suivants consiste à restreindre le processus $\eta^\bullet = [\eta^\bullet(B)]_{B\in\mathcal{B}_b}$ à des sous-ensembles de $\mathcal{B}_b$; cela permet au moins de mettre en évidence une réponse satisfaisante à la question de régularité des trajectoires.

CHAPITRE III

ETUDE DE LA CONVERGENCE EN LOI PAR PLONGEMENT DANS UN ESPACE METRIQUE. CLASSES DE DONSKER DANS L'ENSEMBLE DES BORELIENS.

III.1. - INTRODUCTION.-

Dans le présent chapitre, nous proposons une troisième approche du théorème de limite centrale. La méthode utilisée généralise celle retenue par R.M. DUDLEY [I] dans le cas où la mesure aléatoire parente $\mu^{\bullet}$ est la mesure aléatoire de Dirac δ_{ξ} associée à une variable aléatoire réelle ξ. Nous abordons le problème de la convergence en loi de la mesure empirique normalisée $\eta_n^{\bullet}$ vers le processus de limite centrale $\eta^{\bullet}$ en plongeant dans un espace métrique Ω_m l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures signées. A cet espace métrique s'applique une autre variante du théorème de Riesz-Markov sur la correspondance entre fonctionnelles linéaires et probabilités boréliennes.

Nous prendrons comme espace métrique Ω_m une partie de l'espace des applications bornées de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathbb{R}$, ce qui amènera à restreindre l'indexation des processus envisagés $\eta_n^{\bullet}$ et $\eta^{\bullet}$. Pour une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}_b$, convenablement choisie en fonction de la mesure aléatoire parente $\mu^{\bullet}$, nous considérerons les processus $[\eta_n^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{C}}$ et $[\eta^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{C}}$ au lieu de $[\eta_n^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{B}_b}$ et $[\eta^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{B}_b}$. Nous donnerons une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\mathcal{C}$, pour que la suite de variables aléatoires $(\eta_n^{\bullet})$ converge en loi vers $\eta^{\bullet}$, en un sens qui sera précisé.

III.2. L'ESPACE D(C).-

Nous munissons d'une pseudo-distance d l'ensemble $\mathcal{B}_b$ des boréliens bornés de l'espace métrique X. Nous n'exigeons pas pour d la propriété de séparation, c'est-à-dire que l'on peut avoir :

$$B \neq B' \quad \text{et} \quad d(B,B') = 0 .$$

On remarquera que la construction faite dans ce chapitre ne nécessite pas une détermination explicite de la pseudo-distance d ; nous ne l'introduirons qu'ultérieurement, pour préciser les résultats déjà élaborés.

Pour une partie C de l'ensemble $\mathcal{B}_b$, nous désignerons par B(C) (resp. C(C)) l'espace vectoriel des applications λ de C dans $\mathbb{R}$, bornées (resp. d-continues et bornées). Nous munissons ces deux espaces de la norme de la convergence uniforme, définie par :

$$(3.1) \qquad ||\lambda|| = \sup_{B \in C} |\lambda(B)| ,$$

et nous désignons aussi par d la pseudo-distance induite par d sur C.

Si la classe C vérifie la condition :

$$(3.2) \qquad \forall \omega \in \Omega \qquad \sup_{B \in C} \mu^{\omega}(B) < \infty ,$$

alors il est immédiat que pour tout nombre entier naturel non nul n et pour tout élément ω de Ω,

$$\eta_n^{\omega} \in B(C) .$$

Soit D(C) le sous-espace vectoriel de B(C) formé des applications λ de C dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent :

$$\lambda = \phi + \nu ,$$

où ϕ est un élément de $C(\mathcal{C})$ et où ν est une application bornée de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$, qui est la restriction à $\mathcal{C}$ d'une mesure réelle sur $\mathcal{X}$. D'après ces définitions, nous avons :

$$D(\mathcal{C}) \subset B(\mathcal{C}) .$$

Il est par ailleurs immédiat que pour tout $\omega \in \Omega$, η_n^ω est une mesure réelle sur $\mathcal{X}$; la condition (3.2) entraîne alors que pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout nombre entier naturel n, la restriction à $\mathcal{C}$ de η_n^ω (encore notée de la même façon) est un élément de $D(\mathcal{C})$.

Après un éventuel passage au quotient, pour tenir compte de la non-séparation, l'espace $D(\mathcal{C})$ constitue l'espace métrique Ω_m cherché, dans lequel les applications $\eta_n^\bullet$ prennent leurs valeurs (sous réserve de la condition (3.2)) ; nous verrons, au paragraphe III.6., sous quelle condition supplémentaire l'application $\eta^\bullet$ prend aussi ses valeurs dans $D(\mathcal{C})$.

III.3. - Convergence faible des probabilités sur $D(\mathcal{C})$.-

Comme le suggère R.M. DUDLEY [IV], nous munirons cet espace de la tribu, notée $\mathbb{B}$, engendrée par les boules ouvertes pour la distance définie en (3.1), et nous considérerons simultanément sur $D(\mathcal{C})$ des probabilités boréliennes et des probabilités relatives à la tribu $\mathbb{B}$. Cette dernière tribu est contenue dans la tribu borélienne de $D(\mathcal{C})$, l'inclusion étant stricte en général.

L'intérêt des probabilités boréliennes réside dans le résultat classique suivant, qui correspond au théorème II.3.1., et qui constitue une autre variante du théorème de Riesz-Markov :

Théorème III.3.1.- Soient E un espace métrique, et $C(E)$ l'ensemble des applications continues et bornées de E vers $\mathbb{R}$.

La relation suivante :

$$\forall f \in C(E) \qquad L(f) = \int f\, dP$$

définit une bijection entre :

- l'ensemble des formes linéaires positives L définies sur $C(E)$; telles que $L(1) = 1$, et jouissant de la propriété de continuité séquentielle :

$$\lim \downarrow L(f_p) = 0 \quad \text{si} \quad f_p \downarrow 0 \quad \text{sur } E$$

- l'ensemble des probabilités boréliennes sur E.

Preuve : Voir J. NEVEU [V], proposition II.7.2.

Par ailleurs, à une application f de $D(C)$ dans $\mathbb{R}$, supposée bornée, et à une probabilité P sur $(D(C), \mathbb{B})$, on associe :

- l'intégrale inférieure :

$$\int_* f\, dP ,$$

supremum des intégrales $\int g\, dP$, où g est une application de $D(C)$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{B}$-mesurable, P-intégrable, et telle que :

$$g \leq f .$$

- l'intégrale supérieure :

$$\int^* f\, dP ,$$

infimum des intégrales $\int h\, dP$, où h est une application de $D(C)$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{B}$-mesurable, P-intégrable, et telle que $f \leq h$.

Comme le fait R.M. DUDLEY, nous utiliserons les probabilités relatives à $\mathbb{B}$ pour définir la notion de convergence faible.

Définitions III.3.1.-

1°) Soient (P_n) une suite de probabilités sur $(D(C), \mathbb{B})$, et P une probabilité borélienne sur $D(C)$. Nous dirons que *la suite* (P_n) *converge faiblement vers* P si pour toute application f continue et bornée de $D(C)$ dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int^* f\, dP_n = \lim_{n\to+\infty} \int_* f\, dP_n = \int f\, dP .$$

2°) Soit (P_n) une suite de probabilités sur $(D(C), \mathbb{B})$. (P_n) *est faiblement relativement compacte si* toute suite $(P_{n'})$ extraite de (P_n) admet elle-même une sous-suite $(P_{n''})$ qui converge faiblement vers une probabilité borélienne P.

A une partie séparable A de $D(C)$ et à un réel γ strictement positif, on associe l'ensemble A^γ des éléments λ de $D(C)$ tels qu'il existe un élément λ' de A vérifiant :

$$||\lambda-\lambda'|| < \gamma \quad ;$$

en d'autres termes, si l'on désigne par $\beta^o(\lambda,\gamma)$ la boule ouverte de centre λ et de rayon γ dans l'espace métrique $D(C)$, nous avons :

$$A^\gamma = \bigcup_{\lambda\varepsilon A} \beta^o(\lambda,\gamma) .$$

Remarquons que A^γ est aussi une réunion dénombrable de boules ouvertes, et que, par conséquent, $A^\gamma \varepsilon \mathbb{B}$.

Par ailleurs, le choix de la norme (3.1) fait que l'espace $C(\mathcal{C})$ est fermé dans $D(\mathcal{C})$, puisque la limite de toute suite uniformément convergente d'applications continues est encore continue. Nous utiliserons à plusieurs reprises le rôle essentiel joué par les parties compactes du sous-espace $D(\mathcal{C})$.

Définition III.3.2.-

1°) Soit (P_n) une suite de probabilités sur $(D(\mathcal{C}), \mathbb{B})$. Cette suite sera dite *quasi-tendue* si à tout nombre réel $\varepsilon > 0$ est associée une partie compacte K de $D(\mathcal{C})$ telle que pour tout nombre réel $\gamma > 0$ et pour tout nombre entier n assez grand, on ait :

$$P_n(K^\gamma) \geq 1 - \varepsilon .$$

2°) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $(D(\mathcal{C}), \mathbb{B})$, et pour tout nombre entier naturel n , P_n la loi de X_n. Nous dirons que (X_n) est *quasi-tendue* si la suite (P_n) l'est, au sens de la définition précédente.

Les résultats établis par R.M. DUDLEY (Voir [IV]), relatifs à la convergence des suites de probabilités sur les espaces métriques non séparables peuvent s'appliquer ici. Nous utiliserons surtout, comme conséquence du théorème III.3.1., le résultat suivant :

Théorème III.3.2.- Soit (P_n) une suite de probabilités sur $(D(\mathcal{C}), \mathbb{B})$. Si (P_n) est quasi-tendue, alors elle est faiblement relativement compacte.

La démonstration de ce résultat est directement inspirée de [IV]. Le ressort essentiel en est l'utilisation du théorème III.3.1. sur la correspondance entre fonctionnelles linéaires et probabilités boréliennes.

III.4. - CONDITION OSCILLATOIRE RELATIVE À LA SUITE $(\eta_n^\bullet)$.-

Nous formulerons deux hypothèses relatives au couple $(\mu^\bullet, C)$. La première permettra de considérer les applications $\eta_n^\bullet$ comme des variables aléatoires à valeurs dans $(D(C), \mathbb{B})$. La seconde est une condition limitant l'oscillation de chaque application $\eta_n^\bullet$. Nous verrons aux paragraphes III.5 et III.6, comment elle implique, d'une part, la quasi-tension de la suite $(\eta_n^\bullet)$ des mesures empiriques normalisées, et d'autre part une propriété de continuité des trajectoires pour un processus de limite centrale $\eta^\bullet$.

Définition III.4.1.- Nous supposons que la classe C vérifie la condition (3.2). C est dite *empiriquement mesurable* relativement à $\mu^\bullet$ si pour tout nombre entier naturel n non nul, l'application $\eta_n^\bullet$ de Ω dans $D(C)$ est mesurable par rapport aux tribus A et $\mathbb{B}$.

Dans ce cas, nous désignerons par P_n la probabilité sur $(D(C), \mathbb{B})$ qui est la loi de la variable aléatoire $\eta_n^\bullet$.

Nous serons amenés à considérer, pour toute partie X de Ω,

$$Pr^*(X) = \inf Pr(A) ,$$

l'infimum étant pris relativement aux éléments A de la tribu A tels que $X \subset A$. Par ailleurs, pour tous nombres réels strictement positifs ρ et ε, notons $\Lambda_{\rho,\varepsilon}$ l'ensemble des éléments λ de $D(C)$ pour lesquels il existe des boréliens B et B' de la classe C vérifiant simultanément les relations :

$$d(B,B') < \rho \quad \text{et} \quad |\lambda(B) - \lambda(B')| > \varepsilon \ .$$

Définition III.4.2.- Soit C une classe vérifiant la condition (3.2), et empiriquement mesurable relativement à $\mu^\bullet$. Nous dirons que *la suite* $(\eta_n^\bullet)$ *est faiblement oscillante sur* C si, à tout nombre réel $\varepsilon > 0$ est associé un nombre réel $\rho > 0$ tel que l'on ait, pour tout n assez grand :

$$Pr^*\{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\varepsilon}\} < \varepsilon ,$$

c'est-à-dire :

$$Pr^*\{ \sup_{\substack{(B,B')\in C^2 \\ d(B,B')<\rho}} |\eta_n^\bullet(B) - \eta_n^\bullet(B')| > \varepsilon\} < \varepsilon .$$

III.5. - QUASI-TENSION DE LA SUITE $(\eta_n^\bullet)$.-

Lemme III.5.- Soient (E,d) un espace métrique, A une partie de E, et f une application de A dans $\mathbb{R}$, vérifiant la condition de Lipschitz :

Il existe un nombre réel $k > 0$ tel que pour tous éléments x et x' de A, on ait :

$$|f(x) - f(x')| \leq k\, d(x,x') .$$

Alors il existe un prolongement de f à E tout entier, qui vérifie, sur E, la même condition de Lipschitz.

Preuve : Voir E.J. MAC SHANE [VI].

Théorème III.5.- Soit C une classe empiriquement mesurable relativement à $\mu^\bullet$, satisfaisant à la condition (3.2), et à la condition supplémentaire :

$$\sup_{B\in C} \operatorname{Var} \mu^\bullet(B) < \infty . \tag{3.3}$$

Si, de plus, $\mathcal{C}$ vérifie les deux conditions suivantes :

. $\mathcal{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathcal{B}_b,d)$.

. La suite $(\eta_n^\bullet)$ est faiblement oscillante sur $\mathcal{C}$,

alors la suite $(\eta_n^\bullet)$ est quasi-tendue.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$; nous pouvons, sans perte de généralité, supposer $0 < \varepsilon < 1$. Nous procéderons en six étapes successives.

1°) *Existence d'un nombre réel* A *tel que l'on ait, pour tout* n *assez grand :* $\Pr\{||\eta_n^\bullet|| \geqslant A\} \leqslant \varepsilon/2$.

Comme la suite $(\eta_n^\bullet)$ est faiblement oscillante, il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que l'on ait, pour tout n assez grand :

(3.4) $$\Pr^*\{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\ \varepsilon/4}\} < \varepsilon/4 .$$

Par ailleurs, la classe $\mathcal{C}$ étant précompacte, il existe une partie finie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ telle qu'à tout élément B de $\mathcal{C}$ soit associé un élément B' de $\mathcal{F}$ vérifiant :

(3.5) $$d(B,B') < \rho .$$

Posons $k = \operatorname{Card} \mathcal{F}$ et, d'après (3.2),

$$M = \sup_{B\in\mathcal{C}} \operatorname{Var} \mu^\bullet(B) .$$

Supposons $M \neq 0$ (si $M = 0$, la restriction de $\mu^\bullet$ à la classe $\mathcal{C}$ est une application constante, et la propriété annoncée devient triviale).
Prenons alors $A > 2$ tel que :

$$(A-2)^{-2} \leqslant \frac{\varepsilon}{4kM} .$$

Pour tout élément B de $\mathcal{F}$, l'inégalité de Tchebychev, appliquée à la variable aléatoire $\eta_n^\bullet(B)$ donne :

$$\Pr\{|\eta_n^\bullet(B)| \geq A-2\} \leq \frac{\operatorname{Var} \eta_n^\bullet(B)}{(A-2)^2} \ .$$

Sachant que $\eta_n^\bullet = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^\bullet - \mu)$, et sachant que les mesures aléatoires $\mu_i^\bullet$ sont indépendantes et de même loi, nous avons :

$$\operatorname{Var} \eta_n^\bullet(B) = \operatorname{Var} \mu^\bullet(B) \ ,$$

et par conséquent :

$$\Pr\{|\eta_n^\bullet(B)| \geq A-2\} \leq \frac{\varepsilon}{4k} \ .$$

Sachant que :

$$\{\max_{B\in F} |\eta_n^\bullet(B)| \geq A-2\} = \bigcup_{B\in F} \{|\eta_n^\bullet(B)| \geq A-2\} \ ,$$

nous obtenons alors :

$$\Pr\{\max_{B\in F} |\eta_n^\bullet(B)| \geq A-2\} \leq \varepsilon/4 \ . \tag{3.6}$$

Par ailleurs, nous avons, d'après (3.5), et par application de l'inégalité triangulaire :

$$\{\max_{B\in F} |\eta_n^\bullet(B)| < A-2\} \cap \{\eta_n^\bullet \notin \Lambda_{\rho,\varepsilon/2}\} \subset \{\sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B)| < A-2 + \varepsilon/2\} \ ,$$

et puisque $\varepsilon < 1$,

$$\{\sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B)| \geq A\} \subset \{\sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B)| \geq A-2 + \varepsilon/2\} \ .$$

En tenant compte des deux relations d'inclusion qui précèdent, nous obtenons :

$$\Pr\{\sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B)| \geq A\} \leq \Pr^*\{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\varepsilon/2}\} + \Pr\{\max_{B\in F} |\eta_n^\bullet(B)| \geq A-2\}$$

puis, d'après (3.4), (3.6), et l'inclusion évidente :

$$\{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\varepsilon/2}\} \subset \{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\varepsilon/4}\} \ ,$$

nous avons finalement :

$$Pr^*\{\sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B)| \geqslant A\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

2°) *Construction d'une partie* K *compacte et séparable dans* D(C).

Considérons une suite $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs, telle que l'on ait, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\rho_{i+1} < \frac{\rho_i}{2} ,$$

et, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout n assez grand,

$$Pr^*\{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho_i,\varepsilon/2^i}\} < \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

Posons, en outre,

(3.7) $$\sigma_i = \frac{\varepsilon\,\rho_i}{2^{i+1}\,A} ,$$

et désignons par K l'ensemble des éléments λ de B(C) vérifiant les deux relations suivantes :

. $||\lambda|| \leqslant A$

. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tous boréliens bornés tels que :

$$d(B,B') < \frac{\sigma_i}{2}$$

on a : $$|\lambda(B)-\lambda(B')| \leqslant \frac{3\varepsilon}{2^i} .$$

Il est immédiat que K est une partie fermée, et que $K \subset C(C)$. De plus, K est une partie compacte de C(C). En effet, K est une partie bornée et équicontinue de C(C). C étant précompacte, nous pouvons appliquer le théorème de Arzelà-Ascoli [VII] au complété de l'espace métrique associé à (C,d). Il en résulte que K est relativement compacte dans C(C), et le résultat annoncé en découle.

Il est important de remarquer que K est contenu dans le sous-espace de Banach séparable $U(\mathcal{C})$ des fonctions uniformément continues sur $\mathcal{C}$; la séparabilité de $U(\mathcal{C})$ provient de la précompacité de $\mathcal{C}$ (K.R. PARTHASARATHY, [VIII], Lemme 6.3.).

3°) *Construction d'une suite* (F_n) *de parties de* $D(\mathcal{C})$, *telle que pour tout nombre entier* $m \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* n *assez grand, on ait* : $\Pr\{\dot{\eta}_n \notin F_m\} < \varepsilon$.

Posons, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\Lambda_i = \Lambda_{\rho_i, \varepsilon/2^i} .$$

Considérons un élément λ de $D(\mathcal{C})$ tel que $||\lambda|| \leqslant A$ et $\lambda \notin \Lambda_i$, ainsi que deux boréliens quelconques B et B' pris dans la classe $\mathcal{C}$. Comme $||\lambda|| \leqslant A$, nous avons :

$$|\lambda(B) - \lambda(B')| \leqslant 2A .$$

Nous avons, par ailleurs, l'alternative suivante :

- si $d(B,B') < \rho_i$, alors $|\lambda(B) - \lambda(B')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}$, puisque $\lambda \notin \Lambda_i$,
- si $d(B,B') \geqslant \rho_i$, alors, d'après (3.7),

$$|\lambda(B) - \lambda(B')| \leqslant 2A \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i} \frac{d(B,B')}{\sigma_i} .$$

Il en résulte :

$$|\lambda(B) - \lambda(B')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i} \max(1 , \frac{d(B,B')}{\sigma_i}) . \tag{3.8}$$

A tout nombre entier naturel non nul i, associons l'ensemble E_i des éléments λ de $D(\mathcal{C})$ vérifiant, pour tous éléments B et B' de $\mathcal{C}$, la relation (3.8).

Nous venons d'établir :

$$\beta(0,A) \cap \Lambda_i^c \subset E_i , \tag{3.9}$$

où l'on désigne par $\beta(0,A)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon A dans l'espace métrique $D(C)$.

Pour tout nombre entier naturel non nul m, posons :

$$F_m = \beta(0,A) \cap \left[\bigcap_{2 \leq i \leq m} E_i \right],$$

et montrons que l'on a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout n assez grand :

$$Pr^*(\dot{\eta}_n \notin F_m) < \varepsilon .$$

Pour cela, les inclusions :

$$(\dot{\eta}_n \notin F_m) \subset (\|\dot{\eta}_n\| > A) \cup \left[\bigcup_{2 \leq i \leq m} (\dot{\eta}_n \in E_i^c) \right]$$

et $\qquad E_i^c \subset [\beta(0,A)]^c \cup \Lambda_i \quad$, provenant de (3.7)

entraînent :

$$Pr^*(\dot{\eta}_n \notin F_m) \leq Pr^*(\|\dot{\eta}_n\| > A) + \sum_{2 \leq i \leq m} Pr^*(\dot{\eta}_n \in \Lambda_i) .$$

Sachant que, pour n assez grand, $Pr^*(\|\dot{\eta}_n\| > A) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et que $Pr^*(\dot{\eta}_n \in \Lambda_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, on obtient bien :

$$Pr^*(\dot{\eta}_n \notin F_m) < \varepsilon .$$

4°) *Preuve de l'inclusion* : $F_m \subset K^\gamma$. *Réduction aux relations* : $\hat{\lambda} \in K$ *et* $\|\lambda - \hat{\lambda}\| < \gamma$.

Pour tous $\gamma > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, tels que :

$$\frac{\varepsilon}{2^m} < \frac{\gamma}{2} ,$$

montrons que $F_m \subset K^\gamma$. Au réel strictement positif σ_m défini en (3.7), est associée, d'après le lemme de Zorn, une partie maximale de C, notée $\mathcal{F}_m$, telle que pour tous éléments B et B' de $\mathcal{F}_m$, distincts, on ait :

$$d(B,B') \geqslant \sigma_m .$$

Comme, par hypothèse, la partie $\mathcal{C}$ est précompacte, $\mathcal{F}_m$ est finie, et l'on a, pour tout $B \in \mathcal{C}$, l'existence de $B' \in \mathcal{F}_m$ telle que :

$$d(B,B') < \sigma_m .$$

Pour toute la suite de la démonstration, désignons par λ un élément de F_m. Tous éléments B et B' de $\mathcal{F}_m$, distincts vérifient, d'après ce qui précède :

$$|\lambda(B) - \lambda(B')| \leqslant \frac{\varepsilon\, d(B,B')}{2^m \sigma_m} . \tag{3.10}$$

En vertu du lemme III.5., la restriction de λ à $\mathcal{F}_m$ se prolonge en une application $\bar{\lambda}$ de $\mathcal{C}$ tout entier dans $\mathbb{R}$, vérifiant la même condition de Lipschitz.

Nous définissons alors une nouvelle application, notée $\hat{\lambda}$, de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$\hat{\lambda}(B) = \max(-A, \min(\bar{\lambda}(B), A)) .$$

Pour établir que $F_m \subset K^\gamma$, il suffit de vérifier que $\hat{\lambda} \in K$ et que $||\lambda-\hat{\lambda}|| < \gamma$.

5°) *Preuve de la relation* : $\hat{\lambda} \in K$.

Il est immédiat que $||\hat{\lambda}|| \leqslant A$, d'après la définition de $\hat{\lambda}$. Considérons par ailleurs un nombre entier naturel non nul i, et deux éléments B et B' de $\mathcal{C}$ tels que :

$$d(B,B') < \frac{\sigma_i}{2} . \tag{3.11}$$

Pour $i \geq m$, comme :

$$\frac{\varepsilon}{2^m \rho_m} \leq \frac{\varepsilon}{2^i \rho_i} ,$$

nous avons :

$$|\hat{\lambda}(B) - \hat{\lambda}(B')| \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} .$$

Pour $i < m$, considérons deux éléments B_m et B'_m de $\mathcal{F}_m$ tels que :

$$d(B,B_m) < \sigma_m \quad \text{et} \quad d(B',B'_m) < \sigma_m .$$

L'inégalité triangulaire, la relation (3.11), et le fait que pour $i < m$, $\sigma_m < \frac{\sigma_i}{4}$ d'après les définitions de ρ_i et σ_i , entraînent :

$$d(B_m,B'_m) < \sigma_i$$

puis, comme $\lambda \in F_m$ et $F_m \subset E_i$:

$$|\lambda(B_m) - \lambda(B'_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2^i} ,$$

ainsi que :

$$|\hat{\lambda}(B_m) - \hat{\lambda}(B'_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

Une nouvelle application de l'inégalité triangulaire donne :

$$|\hat{\lambda}(B) - \hat{\lambda}(B')| \leq |\hat{\lambda}(B) - \hat{\lambda}(B_m)| + |\hat{\lambda}(B_m) - \hat{\lambda}(B'_m)|$$

$$+ |\hat{\lambda}(B'_m) - \hat{\lambda}(B')| .$$

Les deux termes extrêmes de la somme sont majorés par $\frac{\varepsilon}{2^m}$, d'après la définition de E_m , et donc aussi par $\frac{\varepsilon}{2^i}$, puisque $i < m$.

6°) *Preuve de la relation* : $||\lambda - \hat{\lambda}|| < \gamma$.

Soient $B \in \mathcal{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in F_m$ et soit $B_m \in F_m$ tel que :

$$d(B,B_m) < \sigma_m .$$

Nous avons :

$$|\lambda(B) - \hat{\lambda}(B)| \leq |\lambda(B) - \lambda(B_m)| + |\hat{\lambda}(B_m) - \hat{\lambda}(B)| .$$

Si, de plus, $\lambda \in F_m$, le premier terme de la somme est majoré, d'après (3.8), en prenant $i = m$, par :

$$\frac{\varepsilon}{2^m} \max(1, \frac{d(B,B_m)}{\sigma_m}) = \frac{\varepsilon}{2^m} .$$

Le second terme est aussi majoré par $\frac{\varepsilon}{2^m}$, d'après (3.10), et la définition des applications $\bar{\lambda}$ et $\hat{\lambda}$. Sachant que $\frac{\varepsilon}{2^m} < \frac{\gamma}{2}$, nous obtenons bien, pour tout $B \in \mathcal{C}$, $|\lambda(B) - \hat{\lambda}(B)| < \gamma$.

Finalement, comme nous avons, pour tout n assez grand , $Pr^*\{\eta_n^\bullet \notin F_m\} < \varepsilon$, et $F_m \subset K^\gamma$, nous aurons aussi :

$$Pr\{\eta_n^\bullet \in K^\gamma\} > 1 - \varepsilon. \blacksquare$$

III.6. - CLASSES DE CONTINUITÉ RELATIVEMENT À $\mu^\bullet$.

Définition III.6.- Soit $\mathcal{C}$ une partie de l'ensemble $\mathcal{B}_b$. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est une *classe de continuité associée à* $\mu^\bullet$ *si :*

i) $\mathcal{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathcal{B}_b,d)$.

ii) Il existe un processus de limite centrale $\eta^\bullet$ dont, presque sûrement, les restrictions à $\mathcal{C}$ des trajectoires :

$$\eta^{\omega} : B \longmapsto \eta^{\omega}(B) \qquad (\omega \in \Omega)$$

sont uniformément continues.

Un tel processus sera dit *processus admissible de limite centrale.*

Proposition III.6.- Si C est une classe de continuité associée à $\mu^{\bullet}$, alors tout processus admissible de limite centrale $\eta^{\bullet}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $U(C)$, muni de sa tribu borélienne. Il s'ensuit qu'un tel processus admet une loi P qui est une probabilité borélienne sur $D(C)$, concentrée sur le borélien séparable $U(C)$.

Preuve : Comme la classe C est pseudo-métrisable et précompacte, elle admet une partie $\mathcal{D}$ dénombrable et dense.

Soient ϕ un élément quelconque de $U(C)$, γ un nombre réel strictement positif, et β la boule fermée de centre ϕ et de rayon γ. En notant :

$$\eta^{\bullet -1}(\beta) = \{\omega \in \Omega : \eta^{\omega} \in \beta\} ,$$

nous avons :

$$\eta^{\bullet -1}(\beta) = \bigcap_{B \in \mathcal{D}} \{\omega \in \Omega : \phi(B) - \gamma \leq \eta^{\omega}(B) \leq \phi(B) + \gamma\} .$$

Puisque pour tout borélien borné B , $\eta^{\bullet}(B)$ est une variable aléatoire réelle, et que $\mathcal{D}$ est dénombrable, la relation ci-dessus donne : $\eta^{\bullet -1}(\beta) \in A$. Comme $U(C)$ est séparable, toute partie ouverte est réunion dénombrable de boules ouvertes, donc aussi de boules fermées. Il en résulte que l'image réciproque par $\eta^{\bullet}$ de tout borélien de $U(C)$ est un élément de A , et que $\eta^{\bullet}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $U(C)$, muni de sa tribu borélienne, et possède une loi de probabilité, P, relative à cette tribu. Cette démonstration montre aussi que toute loi de probabilité sur $U(C)$ est déterminée par ses lois de dimension finie.

Il reste à vérifier que $U(\mathcal{C})$ est un borélien de $D(\mathcal{C})$, ce qui est immédiat, puisque $U(\mathcal{C})$ est fermé. Par conséquent, si Λ est un borélien de $D(\mathcal{C})$, nous pouvons poser :

$$P(\Lambda) = P(\Lambda \cap U(\mathcal{C})) \ ,$$

ce qui définit une probabilité borélienne sur $D(\mathcal{C})$, encore notée P, et concentrée sur le sous-espace $U(\mathcal{C})$. ■

Désignant toujours par $\mathcal{D}$ une partie dénombrable et dense de la classe précompacte $\mathcal{C}$, nous considérerons une suite $(\mathcal{D}_m)$, croissante (au sens de l'inclusion), de parties finies de $\mathcal{D}$, notées :

$$\mathcal{D}_m = \{B_1, B_2, \ldots, B_{k(m)}\} \ ,$$

et dont la réunion est $\mathcal{D}$. A tout couple (m,n) de nombres entiers naturels et à tout nombre réel $\rho > 0$, nous associons les variables aléatoires réelles :

$$M(\rho) = \max |\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)|$$

$$M(m,\rho) = \max |\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)|$$

$$M_n(m,\rho) = \max |\eta_n^{\bullet}(B_i) - \eta_n^{\bullet}(B_j)| \ ,$$

les maximums étant pris relativement aux couples (B_i, B_j) d'éléments de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}_m$) tels que : $d(B_i, B_j) < \rho$. Nous énonçons trois résultats préliminaires qui permettront d'obtenir un théorème donnant une condition suffisante pour que $\mathcal{C}$ soit une classe de continuité.

Lemme III.6.1.- Soient p un nombre entier naturel non nul, et Σ_p un ensemble de couples (i,j) d'indices pris dans $\{1,2,\ldots,p\}$. L'application de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ qui au p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ associe :

$$\max_{(i,j)\in\Sigma_p} |x_i - x_j|$$

est continue.

Preuve : Elle est immédiate, compte tenu du fait que l'application ci-dessus est le maximum d'un nombre fini d'applications élémentaires :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \longmapsto |x_i - x_j| ,$$

et que chacune d'entre elles, correspondant à un couple (i,j), est continue.■

Lemme III.6.2.- Pour tout nombre entier naturel m et pour tout nombre réel $\rho > 0$, la suite de variables aléatoires réelles $[M_n(m,\rho)]$ converge en loi vers $M(m,\rho)$.

Preuve : Elle résulte du lemme III.6.1., du fait que, comme l'indique la proposition I.4.1., pour tout k-uplet $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ de boréliens bornés de $\mathcal{X}$, la suite de vecteurs aléatoires :

$$[(\eta_n^{\bullet}(B_1), \eta_n^{\bullet}(B_2), \ldots, \eta_n^{\bullet}(B_k)]$$

converge en loi vers $(\eta^{\bullet}(B_1), \eta^{\bullet}(B_2), \ldots, \eta^{\bullet}(B_k))$, et de la préservation de la convergence en loi par les applications continues.■

Lemme III.6.3.- Pour tout nombre entier naturel m et pour tous nombres réels strictement positifs ε et ρ,

$$\Pr\{M(m,\rho) = \varepsilon\} = 0 .$$

Preuve : Sachant que :

$$\Pr\{M(m,\rho) = \varepsilon\} \leqslant \Pr\{\cup\, |\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)| = \varepsilon\} ,$$

la réunion étant prise relativement aux couples (B_i, B_j) d'éléments de $\mathcal{D}_m$ tels que $d(B_i, B_j) < \rho$, il suffit d'établir que pour tout couple (i,j) pris dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,k(m)\}$,

$$\Pr\{|\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)| = \varepsilon\} = 0 \ .$$

Le vecteur aléatoire $(\eta^{\bullet}(B_i), \eta^{\bullet}(B_j))$ étant gaussien, la loi de la variable aléatoire $\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)$ est gaussienne. Si cette loi n'est pas dégénérée, nous avons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Pr\{|\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)| = \varepsilon\} = 0 \ ;$$

sinon, comme :

$$E\{\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)\} = E\{\eta^{\bullet}(B_i)\} - E\{\eta^{\bullet}(B_j)\} = 0 \ ,$$

nous aurons :

$$\Pr\{\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j) = 0\} = 1 \ ,$$

et donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Pr\{|\eta^{\bullet}(B_i) - \eta^{\bullet}(B_j)| = \varepsilon\} = 0 \ . \blacksquare$$

Théorème III.6.- Toute partie $\mathcal{C}$ de l'ensemble $\mathcal{B}_b$, vérifiant les deux conditions :

i) $\mathcal{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathcal{B}_b, d)$.

ii) La suite $(\eta_n^{\bullet})$ est faiblement oscillante sur $\mathcal{C}$,

est une classe de continuité associée à $\mu^{\bullet}$.

Preuve : A partir des lemmes III.6.1, 2 et 3, nous exprimons la convergence, en tout point de continuité de la limite, de la suite des fonctions de répartition associée aux variables aléatoires $M_n(m,\rho)$; pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tous $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{M_n(m,\rho) > \varepsilon\} = \Pr\{M(m,\rho) > \varepsilon\} \ .$$

Nous en tirons, compte tenu de l'hypothèse de faible oscillation pour la suite $(\dot{\eta}_n)$, et de la définition III.4.2, l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un nombre réel $\rho > 0$, tel que l'on ait, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\Pr\{M(m,\rho) > \varepsilon\} < \varepsilon .$$

Comme $\mathcal{D} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_m$, et comme la suite $[M(m,\rho)]_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante, la formule obtenue donne, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de $\rho > 0$ tel que :

$$(3.12) \qquad \Pr\{M(\rho) > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon .$$

Pour tous nombres réels strictement positifs ρ et ε, notons alors $\bar{\Lambda}_{\rho,\varepsilon}$ l'ensemble des éléments λ de $D(\mathcal{C})$ pour lesquels il existe des boréliens B et B' de la classe $\mathcal{C}$ vérifiant simultanément les relations :

$$d(B,B') < \rho \quad \text{et} \quad |\lambda(B) - \lambda(B')| > \varepsilon .$$

En désignant par $\bar{\dot{\eta}}$ la restriction de $\dot{\eta}$ à $\mathcal{D}$, la relation (3.12) s'écrit :

$$\Pr\{\bar{\dot{\eta}} \in \bar{\Lambda}_{\rho,\varepsilon}\} \leqslant \varepsilon .$$

Fixons, pour toute la suite de cette démonstration, un nombre $\varepsilon > 0$, et choisissons, d'après ce qui précède, une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs telle que pour tout nombre entier naturel non nul k :

$$\Pr\{\bar{\dot{\eta}} \in \bar{\Lambda}_{\rho_k,\varepsilon/2^k}\} \leqslant \varepsilon/2^k .$$

Nous obtenons alors :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \Pr\{\bar{\dot{\eta}} \in \bar{\Lambda}_{\rho_k,\varepsilon/2^k}\} < \infty ,$$

et par application du lemme de Borel-Cantelli :

$$\Pr\{\liminf_{k\to\infty}(\bar{\eta}^{\bullet} \notin \bar{\Lambda}_{\rho_k,\varepsilon/2^k})\} = 1 .$$

Il existe donc un élément Ω_o de la tribu $\mathcal{A}$ de l'espace probabilisé de base $(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ tel que $\Pr(\Omega_o) = 1$, et vérifiant la propriété suivante : à tout $\omega \in \Omega_o$, est associé un nombre entier naturel $N(\omega)$, avec lequel tout nombre entier $k > N(\omega)$ donnera :

$$\bar{\eta}^{\omega} \notin \bar{\Lambda}_{\rho_k,\varepsilon/2^k} ,$$

ou, ce qui revient au même, pour tous boréliens B et B' éléments de $\mathcal{D}$, l'alternative suivante :

$$d(B,B') > \rho_k$$

ou

(3.13) $$|\bar{\eta}^{\omega}(B) - \bar{\eta}^{\omega}(B')| < \frac{\varepsilon}{2^k} ;$$

nous aurons, en particulier, l'inégalité (3.13) pour tous éléments B et B' de $\mathcal{D}$ tels que $d(B,B') \leq \rho_k$. Ainsi le processus $\bar{\eta}^{\bullet}$ possède-t-il presque sûrement des trajectoires uniformément continues sur $\mathcal{D}$. Pour chaque $\omega \in \Omega_o$, l'application $\bar{\eta}^{\omega}$ possède un prolongement à $\mathcal{C}$, noté de la même façon, qui est uniformément continu ; si $\omega \notin \Omega_o$, on pose par exemple $\bar{\eta}^{\omega} = 0$. Comme le processus $\eta^{\bullet}$ est continu en probabilité, on conclut à l'existence d'un processus $\bar{\eta}^{\bullet} = [\bar{\eta}^{\bullet}(B)]_{B\in\mathcal{C}}$ qui est une modification de $\eta^{\bullet}$, et dont presque sûrement les trajectoires sont uniformément continues.

III.7. - CLASSES DE DONSKER DANS L'ENSEMBLE DES BORÉLIENS BORNÉS.-

Rappelons que nous avons désigné par P_n la probabilité sur $(D(\mathcal{C}), \mathbb{B})$ qui est la loi de la variable aléatoire $\eta_n^\bullet$, et par P la probabilité borélienne sur l'espace métrique $(D(\mathcal{C}), ||.||)$ qui est la loi de $\eta^\bullet$.

Définition III.7.- Nous supposons que la classe $\mathcal{C}$ vérifie la condition (3.2), et que $\mathcal{C}$ est empiriquement mesurable relativement à $\mu^\bullet$. $\mathcal{C}$ est appelée *classe de Donsker pour* $\mu^\bullet$ *si* :

. $\mathcal{C}$ est une classe de continuité relativement à $\mu^\bullet$.

. La suite (P_n) converge faiblement vers P.

Nous serons amenés à caractériser les classes de Donsker au moyen de la condition de faible oscillation pour la suite $(\eta_n^\bullet)$. Pour cela nous utiliserons le lemme :

Lemme III.7.- Soient (E,d) un espace métrique, P une probabilité borélienne sur E, concentrée sur un borélien séparable de E, et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $(E, \mathbb{B})$, où $\mathbb{B}$ est la tribu engendrée par les boules ouvertes de (E,d).

Si (P_n) converge faiblement vers P, il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},Pr)$ et des variables aléatoires X et X_n $(n \in \mathbb{N})$ définies sur Ω à valeurs dans E, telles que :

i) X est une application mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{A}$ et à la tribu borélienne de E.

ii) Pour tout nombre entier n, X_n est une application mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathbb{B}$.

iii) Les variables aléatoires X et X_n ont pour lois respectives P et P_n.

iv) La suite (X_n) converge presque sûrement vers X.

Preuve : Nous renvoyons à M.J. WICHURA [IX], Théorème 2.

Théorème III.7.- Soit C une classe empiriquement mesurable relativement à $\mu^\bullet$, et vérifiant la condition (3.2).

Si C est une classe de Donsker pour $\mu^\bullet$, alors :

(3.14) C est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathcal{B}_b, d)$;

(3.15) La suite $(\eta_n^\bullet)$ est faiblement oscillante sur C.

Inversement, sous l'hypothèse supplémentaire (3.3), les conditions (3.14) et (3.15) entraînent que C est une classe de Donsker pour $\mu^\bullet$.

Preuve : 1°) Supposons d'abord que C soit une classe de Donsker pour $\mu^\bullet$.

En premier lieu, on établit que C est précompacte (condition (3.14)), comme dans R.M. DUDLEY [I], proposition 3.

Ensuite, puisque C est une classe de continuité associée à $\mu^\bullet$, la probabilité P est concentrée sur un borélien séparable de $D(C)$, d'après la proposition III.6.. Le lemme III.7. permet alors d'affirmer, en modifiant au besoin l'espace probabilisé de base (Ω, A, Pr), que la suite des variables aléatoires $(\eta_n^\bullet)$ converge presque - sûrement vers $\eta^\bullet$, c'est-à-dire :

$$(3.16) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B) - \eta^\bullet(B)| = 0 \qquad \text{p.s. .}$$

Nous avons vu que l'événement :

$$\{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\varepsilon}\}$$

figurant dans la condition de faible oscillation (3.15) s'écrit aussi :

$$\{ \sup_{\substack{(B,B')\in C^2 \\ d(B,B')<\rho}} |\eta_n^\bullet(B) - \eta_n^\bullet(B')| > \varepsilon\} \; .$$

Le nombre réel strictement positif ε étant donné, nous tirons de l'inégalité triangulaire :

$$|\eta_n^\bullet(B) - \eta_n^\bullet(B')| \leqslant |\eta_n^\bullet(B) - \eta^\bullet(B)| + |\eta^\bullet(B) - \eta^\bullet(B')| + |\eta^\bullet(B') - \eta_n^\bullet(B')|$$

la relation suivante :

$$(3.17) \qquad \begin{aligned} \{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\varepsilon}\} \subset & \{\sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B) - \eta^\bullet(B)| > \tfrac{\varepsilon}{3}\} \\ & \cup \{ \sup_{(B,B')\in C^2} |\eta^\bullet(B) - \eta^\bullet(B')| > \tfrac{\varepsilon}{3}\} \\ & \cup \{\sup_{B'\in C} |\eta^\bullet(B') - \eta_n^\bullet(B')| > \tfrac{\varepsilon}{3}\} \; . \end{aligned}$$

En considérant un processus admissible $\eta^\bullet$, nous pouvons affirmer qu'il existe $\rho > 0$ tel que :

$$Pr^*\{ \sup_{\substack{(B,B')\in C^2 \\ d(B,B')<\rho}} |\eta^\bullet(B) - \eta^\bullet(B')| > \frac{\varepsilon}{3}\} < \frac{\varepsilon}{3} \; .$$

D'après la relation (3.16), nous avons, pour tout n assez grand :

$$Pr^*\{\sup_{B\in C} |\eta_n^\bullet(B) - \eta^\bullet(B)| > \frac{\varepsilon}{3}\} < \frac{\varepsilon}{3} \; .$$

D'où, finalement, en tenant compte de (3.17),

$$Pr^*\{\eta_n^\bullet \in \Lambda_{\rho,\varepsilon}\} < \varepsilon \; .$$

2°) Inversement, supposons satisfaites les conditions (3.3), (3.14) et (3.15).

D'une part, C est une classe de continuité pour $\mu^\bullet$, d'après le théorème III.6..

D'autre part, d'après les théorèmes III.3.2. et III.5., la suite (P_n) est faiblement relativement compacte. Ainsi, toute sous-suite $(P_{n'})$ extraite de (P_n) admet elle-même une sous-suite $(P_{n''})$ faiblement convergente vers une probabilité borélienne, notée P_o, sur $D(C)$. Il nous reste à établir que $P_o = P$. Tout d'abord, d'après la proposition III.6., P est concentrée sur un borélien séparable de $C(C)$. Nous allons montrer que P_o possède la même propriété. A cet effet, nous remarquerons que, d'après le théorème III.5., la suite (P_n) est quasi-tendue et que, par conséquent, pour tout nombre entier naturel non nul j, il existe une partie compacte K_j de $C(C)$ telle que avec tout $\gamma > 0$ on ait, pour tout nombre entier naturel n assez grand :

$$P_n(K_j^\gamma) > 1 - \frac{1}{j} . \tag{3.18}$$

Comme la suite $(P_{n''})$ converge faiblement vers P_o, nous en déduisons, avec les mêmes conditions pour j et γ :

$$P_o(K_j^\gamma) \geq 1 - \frac{1}{j} . \tag{3.19}$$

En effet, en posant, pour tous $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in D(C)$,

$$g_\varepsilon(\lambda) = \min(1, \frac{1}{\varepsilon} \max[d(\lambda,K) - \frac{\gamma}{2}, 0]) ,$$

on définit une application g_ε de $D(C)$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue et mesurable relativement aux tribus $\mathbb{B}$ et $\mathcal{R}$, puisque le compact K contient un sous-ensemble dénombrable dense ; de plus, l'application g_ε vérifie les relations suivantes :

$$g_\varepsilon(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \in K^{\gamma/2}$$

$$0 \leq g_\varepsilon(\lambda) \leq 1 \quad \text{si} \quad \lambda \in K^{(\gamma/2)+\varepsilon} - K^{\gamma/2}$$

$$g_\varepsilon(\lambda) = 1 \quad \text{si} \quad \lambda \in D(C) - K^{(\gamma/2)+\varepsilon} ;$$

la convergence faible de $(P_{n''})$ vers P_o implique :

$$\lim_{n''\to\infty} \int g_\varepsilon \, dP_{n''} = \int g_\varepsilon \, dP_o \ ;$$

il en résulte :

$$P_o(D(C) - K^{(\gamma/2)+\varepsilon}) \leq \int g_\varepsilon \, dP_o \leq \liminf_{n''\to\infty} P_{n''}(X - K^{\gamma/2}) \ ,$$

et aussi :

$$\limsup_{n''\to\infty} P_{n''}(K^{\gamma/2}) \leq P_o(K^{(\gamma/2)+\varepsilon}) \quad ;$$

d'où en posant $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$, la relation annoncée (3.19).

De la relation (3.18), nous tirons, toujours avec les mêmes conditions sur j et γ :

(3.20) $$P_o(K_j) \geq 1 - \frac{1}{j} \ ,$$

en considérant, pour une suite $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs convergeant vers 0, le fait que la suite $(K_j^{\gamma_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers K_j , et en utilisant la propriété de continuité monotone de toute probabilité. Cette même propriété permet d'affirmer, à partir de l'inégalité (3.20), que P_o est concentrée sur la réunion dénombrable de compacts de $U(C)$: $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} K_j$, en utilisant les inégalités, valables pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$P_o(\bigcup_{j=1}^{n} K_j) \geq P_o(K_n) \geq 1 - \frac{1}{n} \ .$$

Ensuite, la construction des processus de limite centrale $\eta^\bullet$, réalisée au chapitre I, indique la propriété suivante : pour toute suite finie

$$S = (B_1, B_2, \ldots, B_k) \ ,$$

la loi du vecteur aléatoire :

$$(\eta^{\bullet}(B_1),\ \eta^{\bullet}(B_2)\ ,\dots,\ \eta^{\bullet}(B_k))$$

est la projection de dimension finie $P_{o,S}$. Finalement, comme toute probabilité borélienne sur $U(C)$ est entièrement définie par ses projections de dimension finie, les probabilités P_o et P sont égales. La loi P est ainsi la seule limite faible possible de toute sous-suite $(P_{n'})$ extraite de (P_n) ; cette dernière suite converge donc faiblement vers P. ∎

CHAPITRE IV

CONDITIONS D'ENTROPIE ET CLASSES DE DONSKER.

IV.1. - INTRODUCTION.-

Dans ce qui suit, nous allons mettre en évidence une condition suffisante simple pour qu'une classe de boréliens soit une classe de Donsker relativement à une mesure aléatoire donnée $\mu^{\bullet}$. Pour cela, nous serons amenés à spécifier la pseudo-distance d prise sur l'ensemble des boréliens bornés.

Ce problème avait été envisagé par R.M. DUDLEY [I] dans le cas particulier où $\mu^{\bullet}$ est la mesure aléatoire de Dirac δ_ξ , ξ étant une variable aléatoire de loi π sur $(X,\mathcal{B})$. La pseudo-distance d était définie par $d(B,B') = \pi(B \,\Delta\, B')$, où Δ désigne l'opération de différence symétrique. L'absence d'une trop grande dispersion des boréliens à l'intérieur d'une classe $\mathcal{C}$ y était caractérisée par la notion de ε-entropie ("metric entropy with inclusion"), au moyen d'inégalités du type :

$$\pi(B) < \varepsilon .$$

Les résultats obtenus reposaient essentiellement sur le fait que pour tout borélien B , les deux premiers moments de la variable aléatoire de Bernoulli $\delta_\xi(B)$ sont déterminés par la loi de probabilité π.

Dans la situation plus générale envisagée ici, nous substituons à la mesure aléatoire de Dirac δ_ξ une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$. Le rôle de la loi de probabilité π sera joué par ce que nous appellerons "fonction d'entropie", définie à partir du moment d'ordre deux de la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$.

Nous pourrons alors, moyennant des hypothèses supplémentaires qui portent notamment sur les moments de $\mu^{\bullet}$, établir une "condition intégrale" analogue à celle obtenue par R.M. DUDLEY.

IV.2. - NOTION D'ENTROPIE.-

Comme précédemment, $\mu^{\bullet}$ désignera une mesure aléatoire réelle positive, d'ordre 2, μ sa mesure moyenne et $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{B}_b$ des boréliens bornés.

Définition IV.2.1.- Nous appellerons *fonction d'entropie* associée à $\mu^{\bullet}$ l'application ϕ de $\mathcal{B}_b$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\phi(B) = ||\mu^{\bullet}(B)||_2 \quad ,$$

où $||.||_2$ désigne la norme relative à l'espace $L^2(\Omega,A,Pr)$.

Proposition IV.2.1.- L'application ϕ possède les propriétés suivantes :

(4.1) $\phi(\emptyset) = 0$.

(4.2) ϕ est croissante : pour tous éléments B et B' de $\mathcal{B}_b$ tels que $B \subset B'$, on a : $\phi(B) \leq \phi(B')$.

(4.3) ϕ est sous-additive : pour tous éléments B et B' de $\mathcal{B}_b$, on a : $\phi(B \cup B') \leq \phi(B) + \phi(B')$.

(4.4) Pour tout élément B de $\mathcal{B}_b$, on a : $\mu(B) \leq \phi(B)$.

Preuve :

. La condition (4.1) est immédiate, puisque $\mu^\bullet(\emptyset) = 0$.

. Si $B \subset B'$, alors $\mu^\bullet(B) \leqslant \mu^\bullet(B')$ et $E\{[\mu^\bullet(B)]^2\} \leqslant E\{[\mu^\bullet(B')]^2\}$.

. $||\mu^\bullet(B \cup B')||_2 = ||\mu^\bullet(B) + \mu^\bullet(B'-B)||_2 \leqslant ||\mu^\bullet(B)||_2 + ||\mu^\bullet(B'-B)||_2$
$\leqslant ||\mu^\bullet(B)||_2 + ||\mu^\bullet(B')||_2$.

. La condition (4.4) résulte de l'inégalité de Jensen.

Définition IV.2.2.-

1°) Nous dirons que *la classe* C *possède une entropie relativement à la mesure aléatoire* $\mu^\bullet$ si à tout nombre réel ρ strictement positif est associée au moins une suite finie de boréliens bornés :

$$(A_1, A_2, \ldots, A_k)$$

vérifiant la condition :

Pour tout $B \in C$, il existe deux boréliens bornés $A_{s(B)}$ et $A_{t(B)}$, où $1 \leqslant s(B) \leqslant k$ et $1 \leqslant t(B) \leqslant k$, tels que :

$$A_{s(B)} \subset B \subset A_{t(B)}$$

et :

$$\phi(A_{t(B)} - A_{s(B)}) < \rho \ .$$

2°) On suppose que C possède une entropie relativement à $\mu^\bullet$. Pour $\rho > 0$, on définit $\Gamma(\rho)$ comme étant le plus petit nombre entier naturel k vérifiant la condition ci-dessus. Le nombre réel $\mathrm{Log}\,\Gamma(\rho)$ sera appelé ρ-*entropie de* C *relativement à* $\mu^\bullet$, la suite

$$S_\rho = (A_1, A_2, \ldots, A_{\Gamma(\rho)})$$

sera appelée *suite* ρ-*approximante pour* C *relativement à* $\mu^\bullet$, et ρ sera appelé *module d'approximation de* C *par* S_ρ .

IV.3. - PSEUDO-DISTANCE SUR L'ENSEMBLE DES BORÉLIENS BORNÉS.-

Il est immédiat que l'on définit une pseudo-distance d sur l'ensemble $\mathcal{B}_b$ en posant :

$$d(B,B') = \phi(B \,\Delta\, B').$$

En effet, pour tout borélien B , on a : d(B,B) = 0 ; par ailleurs, l'inégalité triangulaire est vérifiée grâce à la relation d'inclusion :

$$B \,\Delta\, B'' \subset (B \,\Delta\, B') \cup (B' \,\Delta\, B'').$$

IV.4. - INÉGALITÉ DE BERNSTEIN-FRÉCHET RELATIVE À UNE SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES.-

Ce résultat classique est souvent formulé avec des hypothèses trop contraignantes, exprimant le fait que les variables aléatoires sont bornées (voir, par exemple, G. BENNETT, [II]), ou exprimant une limitation de l'écart entre la variable aléatoire somme et son espérance mathématique (M. FRÉCHET, [III]). Nous retenons ici l'énoncé dû à P. JACOB, qui évite ces clauses trop restrictives pour notre étude.

Proposition IV.4.- Soient $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_i,\ldots)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé (Ω,A,Pr), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang n associée à cette suite :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i .$$

Si $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_i,\ldots$ sont mutuellement indépendantes, possèdent des moments de tous ordres, et vérifient la condition suivante :

Il existe un nombre réel $K > 1$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2 ,

$$E\{|\xi_i - E(\xi_i)|^p\} \leq K^{p-2}\, p!\, \mathrm{Var}(\xi_i) ,$$

alors pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$ et pour tout nombre réel u strictement positif, on a :

$$\Pr\{|S_n - E(S_n)| \geq u\} \leq 2 \exp\left(- \frac{u^2}{4\,\mathrm{Var}(S_n) + 2\,K\,u}\right) .$$

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$E(\xi_n) = m_n \quad ; \quad \mathrm{Var}(\xi_n) = \sigma_n^2$$

$$E(S_n) = M_n \quad ; \quad \mathrm{Var}(S_n) = s_n^2 .$$

Remarquons d'abord que, pour tout $|t| < 1 / K$, tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k!} E\{|t|^k\, |\xi_i - m_i|^k\} \leq t^2\, \sigma_i^2\, |t\,K|^{k-2}$$

est le terme général d'une série convergente, si bien que, d'après un théorème classique d'intégration, la série de terme général :

$$t^k(\xi_i - m_i)^k / k!$$

est presque sûrement convergente et d'espérance $E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\}$; on peut alors procéder aux majorations suivantes

$$\begin{aligned} E\{e^{t(\xi_i-m_i)}\} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} |t|^k\, E\{|\xi_i - m_i|^k\} / k! \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} |t|^k\, \sigma_i^2\, K^{k-2} = 1 + t^2\, \sigma_i^2 / (1-|t|K) \\ &\leq \exp(t^2\, \sigma_i^2 / (1-|t|K)) . \end{aligned}$$

Compte tenu de l'indépendance des variables aléatoires $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $|t| < 1/K$:

$$E\{e^{t(S_n - M_n)}\} = \prod_{i=1}^{n} E\{e^{t(\xi_i - m_i)}\} \leq \exp(t^2\ s_n^2 \ /\ (1-|t|K)) \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $0 < t < 1/K$ et tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$E\{e^{t(S_n - M_n)}\} \geq \exp(\varepsilon\ t\ s_n)\quad \Pr\{S_n - M_n \geq \varepsilon\ s_n\}$$

fournit la majoration suivante :

$$\Pr\{S_n - M_n \geq \varepsilon\ s_n\} \leq \exp(-\ t\ \varepsilon\ s_n + t^2\ s_n^2\ /\ (1-tK)) \ .$$

Posons alors :

$$t_n = \varepsilon\ /\ (2\ s_n + \varepsilon\ K),\ \text{où}\quad \varepsilon/2 = t_n\ s_n\ /\ (1-t_n K) \ .$$

Le cas où s_n^2 est nul étant trivial, on vérifie immédiatement que $0 \leq t_n < 1/K$, ce qui permet d'écrire la majoration :

$$\Pr\{S_n - M_n \geq \varepsilon\ s_n\} \leq \exp(-\ t_n\ \varepsilon\ s_n + t_n\ \varepsilon\ s_n/2)$$

$$= \exp(-\ s_n\ \varepsilon^2\ /\ (4\ s_n + 2\ \varepsilon\ K)) \ .$$

Une majoration similaire est obtenue pour $\Pr\{S_n - M_n \leq -\ \varepsilon\ s_n\}$, si bien que :

$$\Pr\{|S_n - M_n| \geq \varepsilon\ s_n\} \leq 2\ \exp(-\ s_n\ \varepsilon^2\ /\ (4\ s_n + 2\ \varepsilon\ K))$$

ou, en posant $u = \varepsilon\ s_n$:

$$\Pr\{|S_n - M_n| \geq u\} \leq 2\ \exp(-\ u^2\ /\ (4\ s_n^2 + 2\ K\ u)).$$

L'intérêt que présente cette majoration peu différente de celle obtenue par FRÉCHET dans sa généralisation de l'inégalité de Bernstein est d'éviter la restriction : $u < s_n^2 / K$. Cette condition, non contraignante dans les applications usuelles, amenait cependant de graves difficultés techniques dans l'étude qui suit.

IV.5. - APPLICATION DE L'INÉGALITÉ DE BERNSTEIN-FRÉCHET À LA MESURE ALÉATOIRE $\eta_n^\bullet$.-

Nous supposerons que la mesure aléatoire $\mu^\bullet$ satisfait à la double condition suivante :

(4.5) i) $\mu^\bullet$ possède des moments de tous ordres.

ii) Il existe un nombre réel $K > 0$ tel que pour tous $B \in \mathcal{B}_b$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \geq 2$,

$$E\{|\mu^\bullet(B) - \mu(B)|^p\} \leq K^{p-2}\ p!\ \mathrm{Var}\{\mu^\bullet(B)\}.$$

Proposition IV.5.- La condition (4.5) implique, pour tout borélien B, pour tout nombre réel $u > 0$ et pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, l'inégalité :

$$\Pr\{|\eta_n^\bullet(B)| > u\} \leq 2 \exp\left(- \frac{u^2}{4[\phi(B)]^2 + \frac{2\,K\,u}{\sqrt{n}}}\right) .$$

Preuve : Considérons, pour tout $B \in \mathcal{B}_b$, la variable aléatoire :

$$\xi_i = \mu_i^\bullet(B) .$$

La suite $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ est constituée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ; en reprenant les notations de la proposition IV.4., on a :

$$\text{Var } S_n = n \text{ Var}\{\mu^\bullet(B)\}$$

$$S_n - E(S_n) = \sqrt{n}\ \eta_n^\bullet(B) .$$

Il en résulte alors :

$$\Pr\{|\sum_{i=1}^{n} \mu_i(B) - n\,\mu(B)| \geq u\sqrt{n}\} \leq 2 \exp - \frac{n\,u^2}{4n \text{ Var}\{\mu^\bullet(B)\} + 2\,K\,u\sqrt{n}}$$

Sachant que : $\eta_n^\bullet(B) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [\mu_i(B) - \mu(B)]$

et que : $\text{Var}\{\mu^\bullet(B)\} \leq [\phi(B)]^2$,

on en déduit l'inégalité annoncée. ∎

IV.6. - Oscillation de $\eta_n^\bullet$ le long d'une suite ρ-approximante pour C.-

Nous supposons que la classe C possède une entropie relativement à $\mu^\bullet$. Soient $\rho > 0$ et S_ρ une suite ρ-approximante pour C, notée :

$$S_\rho = (A_q)_{1 \leq q \leq \Gamma(\rho)} .$$

A tout borélien borné B appartenant à la classe C sont associés deux indices $s(B)$ et $t(B)$ tels que :

$$A_{s(B)} \subset B \subset A_{t(B)}$$

$$\phi(A_{t(B)} - A_{s(B)}) < \rho .$$

Considérons la variable aléatoire réelle :

$$\omega_{n,\rho} = \max_{[S_\rho]} |\eta_n^\bullet(A_t) - \eta_n^\bullet(A_s)| ,$$

où le supremum est pris sur la classe $[S_\rho]$ des couples de boréliens A_t et A_s de la suite S_ρ tels que :

$$A_s \subset A_t$$

$$\phi(A_t - A_s) < \rho$$

$$(s,t) \in \{1,2,\dots,\Gamma(\rho)\}^2 .$$

La variable aléatoire $\omega_{n,\rho}$ sera appelée oscillation de $\eta_n^\bullet$ le long de S_ρ.

Lemme IV.6.- Si la mesure aléatoire $\mu^\bullet$ satisfait à la condition (4.5), alors pour tous nombres réels strictement positifs ρ et u, et pour tout nombre entier naturel non nul n, nous avons :

$$\Pr\{\omega_{n,\rho} > u\} \leq 2\,[\Gamma(\rho)]^2 \exp - \frac{u^2}{4\,\rho^2 + \frac{2\,K\,u}{\sqrt{n}}} .$$

Preuve : Comme $A_s \subset A_t$, nous avons :

$$\eta_n^\bullet(A_t) - \eta_n^\bullet(A_s) = \eta_n^\bullet(A_t - A_s) \quad ,$$

et, par conséquent, l'événement $\{\omega_{n,\rho} > u\}$ est contenu dans la réunion des événements :

$$\{|\eta_n^\bullet(A_t - A_s)| > u\} ,$$

les indices s et t décrivant l'ensemble :

$$\{1,2,\dots,\Gamma(\rho)\}.$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\Pr\{\omega_{n,\rho} > u\} \leq \sum_{(s,t)\in\{1,2,\dots,\Gamma(\rho)\}^2} \Pr\{|\eta_n^\bullet(A_t - A_s)| > u\} .$$

Les différents termes de la somme sont ensuite majorés uniformément au moyen de la proposition IV.5. et de l'inégalité :

$$\phi(A_t - A_s) < \rho \ . \ \blacksquare$$

IV.7. - CONSTRUCTIONS D'UN MODULE D'APPROXIMATION À PARTIR D'UNE CONDITION INTÉGRALE PORTANT SUR L'APPLICATION Γ.-

Nous supposons que la mesure aléatoire $\mu^\bullet$ vérifie la condition (4.5) relative aux moments, que la classe C possède une entropie relative à $\mu^\bullet$ et vérifie la condition intégrale :

(4.6) $$\int_0^1 \left[\mathrm{Log}\ \Gamma(x^2)\right]^{1/2} dx < \infty \ .$$

La condition (4.6) implique :

(4.7) $$\lim_{x\to 0_+} x\ \mathrm{Log}\ \Gamma(x) = 0$$

et

(4.8) $$\int_0^1 \left[\mathrm{Log}\ \Gamma(y)\right]^{1/2} y^{-1/2}\, dy < \infty \ .$$

La relation (4.8) entraîne à son tour, du fait de la décroissance de l'application $y \to \left[\mathrm{Log}\ \Gamma(y)\right]^{1/2} y^{-1/2}$,

(4.9) $$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\frac{1}{K\ 2^\ell}\ \mathrm{Log}\ \Gamma\left(\frac{1}{K\ 2^\ell}\right)\right]^{1/2} < \infty \ .$$

Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et choisissons un nombre réel α tel que $0 < \alpha < 1/3$, et un nombre entier naturel ℓ_o tels que l'on ait simultanément les relations (4.10) à (4.13) :

(4.10) $$\Gamma(x) \leq \exp \frac{\varepsilon^2}{4096\ (K+1)\ x} \ , \quad \text{pour tout nombre réel } x$$

tel que $0 < x \leq \alpha$, d'après (4.7) ;

(4.11) $$\exp - \frac{\varepsilon^2}{2048(K+1)\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{32} \; ;$$

(4.12) $$\sum_{\ell=\ell_o}^{\infty} \left[\frac{1}{K\,2^{\ell}} \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{1}{K\,2^{\ell}}\right)\right]^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{32\sqrt{10(K+2)}} \quad \text{, d'après (4.9) ;}$$

(4.13) $$\sum_{\ell=0}^{\infty} \exp\left(- \frac{K\,\varepsilon^2\, 2^{\ell+\ell_o}}{5(K+2)2^{11}\,(\ell+1)^4}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{32} \; .$$

En outre, désignons par r un nombre entier naturel tel que l'on ait simultanément :

(4.14) $$r \geqslant \ell_o$$

et :

(4.15) $$\frac{1}{K\,2^r} \leqslant \alpha < \frac{1}{3} \; .$$

Posons enfin :

(4.16) $$\rho_\varepsilon = \frac{1}{K\,2^r} \; ;$$

dans cette notation, l'indice ε rappelle que r dépend de ε, par l'intermédiaire de (4.14) et de (4.15).

IV.8. - <u>ETUDE DE L'OSCILLATION RELATIVE À UNE SUITE ρ_ε-APPROXIMANTE</u>.-

Considérons une suite ρ_ε-approximante pour C relativement à $\mu^\bullet$:

$$S_{\rho_\varepsilon} = (A_1, A_2, \ldots, A_{\Gamma(\rho_\varepsilon)}) \; .$$

Pour tout borélien B de la classe $\mathcal{C}$ on notera $A_{s(B)}$ et $A_{t(B)}$ tous boréliens de classe S_{ρ_ε} tels que l'on ait simultanément :

(4.17) $$A_{s(B)} \subset B \subset A_{t(B)}$$

(4.18) $$\phi(A_{t(B)} - A_{s(B)}) < \rho_\varepsilon .$$

Définition IV.8.- Le nombre réel strictement positif ε étant donné, nous appellerons *oscillation de* $\eta_n^{\bullet}$ *relative à la suite* S_{ρ_ε} la variable aléatoire réelle :

(4.19) $$O_{n,\varepsilon} = \sup_{\substack{(B,B')\in\mathcal{C}^2 \\ d(B,B')<\rho_\varepsilon}} |\eta_n^{\bullet}(A_{t(B)}) - \eta_n^{\bullet}(A_{t(B')})| .$$

Proposition IV.8.- Sous les hypothèses (4.5) et (4.6), nous avons pour n assez grand :

(4.20) $$\Pr\{O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2}\} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Preuve : L'inégalité triangulaire relative à la pseudo-distance d sur l'ensemble $\mathcal{B}_b$ donne, pour tous éléments B et B' de la classe $\mathcal{C}$:

$$d(A_{t(B)}, A_{t(B')}) \leq d(A_{t(B)}, B) + d(B,B') + d(B', A_{t(B')}) ,$$

puis, par définition de d, et d'après (4.17) et (4.18) :

$$d(A_{t(B)}, A_{t(B')}) \leq \phi(A_{t(B)} - B) + d(B,B') + \phi(A_{t(B')} - B')$$

$$\leq 2\,\rho_\varepsilon + d(B,B') .$$

Il en résulte que la condition :

$$d(B,B') < \rho_\varepsilon$$

implique :

$$d(A_{(t(B)}, A_{t(B')}) < 3\,\rho_\varepsilon .$$

De ce fait, en posant :

$$\pi_{n,\varepsilon} = \Pr\{\sup_{[3\,\rho_\varepsilon]} |\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2}\} ,$$

où le supremum est pris relativement à la classe $[3\,\rho_\varepsilon]$ des couples (s,t) tels que l'on ait simultanément :

$$(4.21) \qquad \begin{cases} (s,t) \in \{1,2,\ldots,\Gamma(\rho_\varepsilon)\}^2 \\ d(A_s,A_t) < 3\,\rho_\varepsilon , \end{cases}$$

nous obtenons :

$$\Pr\{O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2}\} < \pi_{n,\varepsilon} .$$

Par ailleurs, en remarquant les relations évidentes :

$$|\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| = |\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s) + \eta_n^{\bullet}(A_t \cap A_s) - \eta_n^{\bullet}(A_s \cap A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s - A_t)|$$

$$\leq |\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s)| + |\eta_n^{\bullet}(A_s - A_t)| ,$$

nous avons l'inclusion :

$$\{|\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{|\eta_n^{\bullet}(A_t - A_s)| > \frac{\varepsilon}{4}\} \cup \{|\eta_n^{\bullet}(A_s - A_t)| > \frac{\varepsilon}{4}\}$$

et, compte tenu de la proposition IV.5.,

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(A_t) - \eta_n^{\bullet}(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \leq 2\exp\left(\frac{\varepsilon^2}{64[\phi(A_t - A_s)]^2 + \frac{8\,K\,\varepsilon}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$+ 2\exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{64[\phi(A_s - A_t)]^2 + \frac{8\,K\,\varepsilon}{\sqrt{n}}}\right) .$$

Sachant que $\phi(A_t - A_s) \leq \phi(A_t \,\Delta\, A_s) = d(A_t, A_s) < 3\,\rho_\varepsilon$, que, d'après (4.15) et (4.16), $3\,\rho_\varepsilon < 1$, que, par conséquent $[\phi(A_t - A_s)]^2 < 3\,\rho_\varepsilon$, et qu'une majoration analogue vaut pour $\phi(A_s - A_t)$, nous obtenons :

$$\Pr\{|\eta_n^\bullet(A_t) - \eta_n^\bullet(A_s)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \leq 4 \exp(-\frac{\varepsilon^2}{192\,\rho_\varepsilon + \frac{8\,K\,\varepsilon}{\sqrt{n}}}) .$$

Supposons que l'on ait :

$$\sqrt{n} \geq \frac{\varepsilon\, K^2\, 2^r}{8(16K+13)} . \tag{4.22}$$

Nous obtiendrons, d'après (4.16) :

$$\frac{K\,\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq 8(16\,K + 13)\,\rho_\varepsilon$$

et, compte tenu de la condition (4.21) :

$$\pi_{n,\varepsilon} \leq 4\,[\Gamma(\rho_\varepsilon)]^2 \exp - \frac{\varepsilon^2}{1024(K+1)\rho_\varepsilon} .$$

Les relations (4.10) et (4.15) donnent alors :

$$\pi_{n,\varepsilon} \leq 4 \exp(-\frac{\varepsilon^2}{2048(K+1)\rho_\varepsilon}) ,$$

et, enfin, d'après (4.11), et sous réserve de la condition (4.22),

$$\Pr\{O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2}\} < \frac{\varepsilon}{2} . \blacksquare$$

IV.9. - INTRODUCTION D'UNE SUITE ρ_ε^n-APPROXIMANTE.-

Pour tout nombre entier naturel n non nul, désignons par $p(n)$ l'unique entier naturel tel que l'on ait :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon\, K\, 2^{p(n)+r-4}} \leq 1 , \tag{4.23}$$

et posons :

$$\rho_\varepsilon^n = \frac{1}{K\, 2^{p(n)+r}} \ ; \tag{4.24}$$

dans cette notation, l'indice ε rappelle que l'entier naturel r dépend de ε, par l'intermédiaire des relations (4.10), (4.11), (4.12), (4.14), (4.15). Considérons alors la suite ρ_ε^n-approximante :

$$(A_{p(n),q})_{1\leq q\leq \Gamma(\rho_\varepsilon^n)} \ .$$

Ainsi, à tout borélien B de la classe $\mathcal{C}$ sont associés deux indices :

$$s[p(n),\ B] \quad \text{et} \quad t[p(n),\ B] \ ,$$

tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} A_{p(n),s[p(n),B]} \subset B \subset A_{p(n),t[p(n),B]} \ . \\ \phi(A_{p(n),t[p(n),B]} - A_{p(n),s[p(n),B]}) < \rho_\varepsilon^n \ . \end{array}\right. \tag{4.25}$$

Compte tenu de la majoration suivante, qui est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &\{|\dot\eta_n(B) - \dot\eta_n(A_{t(B)})| > \frac{\varepsilon}{4}\} \subset \\ &\{|\dot\eta_n(B) - \dot\eta_n(A_{p(n),t[p(n),B]})| > \frac{\varepsilon}{8}\} \\ &\cup \{|\dot\eta_n(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \dot\eta_n(A_{t(B)})| > \frac{\varepsilon}{8}\} \ , \end{aligned} \tag{4.26}$$

nous introduirons les variables aléatoires réelles :

$$E'_{n,\varepsilon} = \sup_{B \in C} |\eta^{\bullet}_n(B) - \eta^{\bullet}_n(A_{p(n),t[p(n),B]})| , \tag{4.27}$$

qui sera appelée dans ce qui suit *erreur d'approximation relative à la suite* $S_{\rho^n_\varepsilon}$, et :

$$E''_{n,\varepsilon} = \sup_{B \in C} |\eta^{\bullet}_n(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \eta^{\bullet}_n(A_{t(B)})| , \tag{4.28}$$

appelée erreur *d'approximation entre les suites* S_{ρ_ε} *et* $S_{\rho^n_\varepsilon}$.

Nous serons amenés, dans les paragraphes qui suivent, à établir les inégalités :

$$\Pr\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

et

$$\Pr\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} \leq \frac{\varepsilon}{8} .$$

IV.10. - ETUDE DE L'ERREUR D'APPROXIMATION RELATIVE À LA SUITE $S_{\rho^n_\varepsilon}$.-

Nous touchons ici le noeud du problème car, outre une nouvelle application de l'inégalité de Bernstein-Fréchet, la proposition qui suit fait intervenir la définition même de la mesure aléatoire empirique normalisée d'ordre n :

$$\eta^{\bullet}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu^{\bullet}_i - \mu) .$$

Proposition IV.10.- Toujours sous les hypothèses (4.5) et (4.6), nous avons, pour tout entier naturel non nul n :

(4.29) $$\Pr\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} \leq \frac{\varepsilon}{8} .$$

Preuve : A partir de la définition de $\overset{\bullet}{\eta}_n$, rappelée ci-dessus, nous avons, pour tout borélien B appartenant à la classe $\mathcal{C}$, pour tout nombre entier naturel n, et pour le borélien :

$$A_{p(n),t[p(n),B]}$$

qui leur est associé par (4.24) et (4.25) :

$$\overset{\bullet}{\eta}_n(B) - \overset{\bullet}{\eta}_n(A_{p(n),t[p(n),B]}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [\overset{\bullet}{\mu}_i(B) - \overset{\bullet}{\mu}_i(A_{p(n),t[p(n),B]})] + \sqrt{n}\, [\mu(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \mu(B)] .$$

Comme la mesure aléatoire $\overset{\bullet}{\mu}$ est positive, la double inclusion figurant dans (4.25) donne les inégalités :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [\overset{\bullet}{\mu}_i(B) - \overset{\bullet}{\mu}_i(A_{p(n),t[p(n),B]})] \leq 0$$

$$\mu(B) \geq \mu(A_{p(n),s[p(n),B]}) ,$$

et par conséquent :

$$\overset{\bullet}{\eta}_n(B) - \overset{\bullet}{\eta}_n(A_{p(n),t[p(n),B]}) \leq \sqrt{n}\, \mu(A_{p(n),t[p(n),B]} - A_{p(n),s[p(n),B]}) .$$

En tenant compte de (4.4), de (4.25), et de la partie droite de la double inégalité (4.23), nous obtenons alors :

(4.30) $$\overset{\bullet}{\eta}_n(B) - \overset{\bullet}{\eta}_n(A_{p(n),t[p(n),B]}) \leq \frac{\varepsilon}{16} .$$

On établit de la même façon que :

$$\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),s[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(B) \leqslant \frac{\varepsilon}{16} .$$

Comme $\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(B) = \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),t[p(n),B]} - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),s[p(n),B]})$

$$+ \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),s[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(B) ,$$

on déduit de ce qui précède :

$$(4.31) \quad \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(B) \leqslant \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),s[p(n),B]}) + \frac{\varepsilon}{16} .$$

Par ailleurs, l'application du lemme IV.6. donne :

$$(4.32) \qquad \Pr\{ \sup_{[S_{\rho_\varepsilon^n}]} |\eta_n^{\bullet}(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \eta_n^{\bullet}(A_{p(n),s[p(n),B]})| > \frac{\varepsilon}{16}\}$$

$$\leqslant 2 \, [\Gamma(\rho_\varepsilon^n)]^2 \exp(- \frac{\varepsilon^2}{256 \, [4(\rho_\varepsilon^n)^2 + \frac{K \varepsilon}{8 \sqrt{n}}]} .$$

Nous avons, d'après (4.24), (4.15) et (4.16) :

$$\rho_\varepsilon^n = \frac{1}{K \, 2^{p(n)+r}} \leqslant \frac{1}{K \, 2^r} < 1 ,$$

d'où il résulte :

$$(\rho_\varepsilon^n)^2 \leqslant \rho_\varepsilon^n .$$

De plus, la partie gauche de la double inégalité (4.23) implique :

$$\frac{K \varepsilon}{8 \sqrt{n}} \leqslant 4K \rho_\varepsilon^n ,$$

et d'après (4.10) et (4.15), nous avons :

$$\Gamma(\rho_\varepsilon^n) \leq \exp \frac{\varepsilon^2}{4096(K+1)\rho_\varepsilon^n} .$$

Il résulte alors des trois dernières inégalités que le second membre de (4.32) est majoré par :

$$2 \exp - \frac{\varepsilon^2}{2048(K+1)\rho_\varepsilon^n} ,$$

ou encore, d'après (4.15) et (4.11) , par $\frac{\varepsilon}{16}$.

Ce résultat, joint à l'inégalité (4.31) donne la relation annoncée :

$$\Pr\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} \leq \frac{\varepsilon}{8} . \blacksquare$$

IV.11.- INTRODUCTION DES SUITES $\rho_{\varepsilon,\ell}$-APPROXIMANTES.-

Pour tout nombre entier naturel ℓ, posons :

$$\rho_{\varepsilon,\ell} = \frac{1}{K\ 2^{\ell+r}} ,$$

et considérons une suite $\rho_{\varepsilon,\ell}$ approximante :

$$S_{\varepsilon,\ell} = (A_{\ell,q})_{1\leq q\leq \Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell})} .$$

Ainsi, à tout borélien B de la classe $\mathcal{C}$ sont associés deux indices $s(\ell,B)$ et $t(\ell,B)$ appartenant à l'ensemble des nombres entiers $\{1,2,\ldots,\Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell})\}$, tels que :

$$(4.33) \qquad \begin{cases} A_{\ell,s(\ell,B)} \subset B \subset A_{\ell,t(\ell,B)} \\ \phi(A_{\ell,t(\ell,B)} - A_{\ell,s(\ell,B)}) < \rho_{\varepsilon,\ell} . \end{cases}$$

Posons aussi, pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{C}$,

$$\tilde{A}_{\ell,B} = A_{\ell,t(\ell,B)} - A_{\ell+1,t(\ell+1,B)}$$

$$\tilde{A}'_{\ell,B} = A_{\ell+1,t(\ell+1,B)} - A_{\ell,t(\ell,B)} .$$

Proposition IV.11.- Sous les hypothèses (4.5) et (4.6) relatives à $\mu^{\bullet}$ et $\mathcal{C}$, nous avons, pour tout nombre réel $u > 0$, pour tout naturel $n \geq 1$, pour tout $\ell \in \{0,1,\dots,p(n)-1\}$, et pour tout borélien B appartenant à la classe $\mathcal{C}$:

$$\Pr\{|\eta^{\bullet}_n(\tilde{A}_{\ell,B})| > u\} \leq 2 \exp\left(- \frac{u^2}{4\,\rho_{\varepsilon,\ell} + \frac{2\,K\,u}{\sqrt{n}}}\right) ,$$

ainsi qu'une relation analogue avec $\tilde{A}'_{\ell,B}$.

Preuve : Comme l'application ϕ est croissante, les relations (4.33) ainsi que les relations :

$$\begin{cases} A_{\ell+1,s(\ell+1,B)} \subset B \subset A_{\ell+1,t(\ell+1,B)} \\ \phi(A_{\ell+1,t(\ell+1,B)} - A_{\ell+1,s(\ell+1,B)}) < \rho_{\varepsilon,\ell+1} \end{cases} ,$$

qui en sont une conséquence immédiate, impliquent :

$$\phi(\tilde{A}_{\ell,B}) < \rho_{\varepsilon,\ell}$$

$$\phi(\tilde{A}'_{\ell,B}) < \rho_{\varepsilon,\ell+1} .$$

Par ailleurs, la proposition IV.5. donne :

$$\Pr\{|\eta^{\bullet}_n(\tilde{A}_{\ell,B})| > u\} \leq 2 \exp - \frac{u^2}{4\,[\phi(\tilde{A}_{\ell,B})]^2 + \frac{2\,K\,u}{\sqrt{n}}} .$$

Sachant que

$$\phi(\tilde{A}'_{\ell,B}) \leq \rho_{\varepsilon,\ell+1} \leq \rho_{\varepsilon,\ell} ,$$

et que $\qquad (\rho_{\varepsilon,\ell})^2 \leq \rho_{\varepsilon,\ell}$,

du fait que : $K\, 2^{r+\ell} \geq K\, 2^r \geq 1$, d'après (4.15), on obtient les inégalités annoncées. ■

IV.12. - INTRODUCTION DE LA SUITE MODULAIRE $(u_{\varepsilon,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$.-

Posons, pour tout nombre entier naturel ℓ :

(4.34) $$u_{\varepsilon,\ell} = \max\left(\frac{\varepsilon}{32(\ell+1)^2} , \left[10(K+2)\, \rho_{\varepsilon,\ell+1} \operatorname{Log} \Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell+1})\right]^{1/2}\right) .$$

Lemme IV.12.- <u>La suite</u> $(u_{\varepsilon,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ <u>définie par (4.34) vérifie les propriétés suivantes</u> :

(4.35) $$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} u_{\varepsilon,\ell} < \frac{\varepsilon}{16} .$$

(4.36) <u>Pour tout nombre entier naturel</u> ℓ,

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell+1}) \leq \exp \frac{(u_{\varepsilon,\ell})^2}{10(K+2)\rho_{\varepsilon,\ell+1}} .$$

(4.37) <u>Pour tout nombre entier naturel</u> ℓ <u>tel que</u> $\ell \in \{0,1,\dots,p(n)-1\}$,

$$u_{\varepsilon,\ell} < \rho_{\varepsilon,\ell} \sqrt{n} .$$

Preuve :

1°) Du fait que :

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{1}{(\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} ,$$

nous tirons, de façon immédiate :

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{32(\ell+1)^2} < \frac{10\,\varepsilon}{192} .$$

Par ailleurs, du fait que $r \geqslant \ell_o$ (hypothèse 4.14), et d'après (4.12), nous avons :

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \left[\rho_{\varepsilon,\ell+1} \operatorname{Log} \Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell+1})\right]^{1/2} = \sum_{\ell\geqslant r+1} \left[\frac{1}{K\,2^{\ell}} \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{1}{K\,2^{\ell}}\right)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{32\sqrt{10(K+2)}} \leqslant \frac{\varepsilon}{96} .$$

L'inégalité (4.36) en résulte alors.

2°) Par définition même de $u_{\varepsilon,\ell}$, nous avons :

$$\left[5(4+2K)\,\rho_{\varepsilon,\ell+1} \operatorname{Log} \Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell+1})\right]^{1/2} \leqslant u_{\varepsilon,\ell} ,$$

et par conséquent :

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell+1}) \leqslant \exp \frac{(u_{\varepsilon,\ell})^2}{10(K+2)\rho_{\varepsilon,\ell+1}} .$$

3°) Nous avons, d'après (4.35) :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \qquad u_{\varepsilon,\ell} \leqslant \sum_{\ell\in\mathbb{N}} u_{\varepsilon,\ell} < \frac{\varepsilon}{16} ,$$

et, d'après la partie gauche de l'inégalité (4.23) :

$$\frac{\varepsilon}{16} < \frac{2\sqrt{n}}{K\ 2^{p(n)+r}} .$$

L'inégalité annoncée résulte alors de ce que : $\ell \leqslant p(n) - 1$. ■

Proposition IV.12. - <u>Toujours sous les hypothèses (4.5) et (4.6), nous avons, pour</u> n <u>assez grand :</u>

$$\Pr\{\sum_{0\leqslant\ell\leqslant p(n)-1} \sup_{B\in C} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\} \leqslant \frac{\varepsilon}{16} ,$$

<u>ainsi qu'une inégalité analogue pour</u> $\tilde{A}'_{\ell,B}$.

<u>*Preuve*</u> : Raisonnons sur $\tilde{A}_{\ell,B}$; la démarche est analogue avec $\tilde{A}'_{\ell,B}$. D'après (4.35), nous avons les inclusions :

$$\{\sum_{0\leqslant\ell\leqslant p(n)-1} \sup_{B\in C} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\}$$

$$\subset \{\sum_{0\leqslant\ell\leqslant p(n)-1} \sup_{B\in C} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > \sum_{\ell\in\mathbb{N}} u_{\varepsilon,\ell}\}$$

$$\subset \bigcup_{0\leqslant\ell\leqslant p(n)-1} \{\sup_{B\in C} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > u_{\varepsilon,\ell}\} ,$$

puis, en passant aux probabilités, l'inégalité :

$$\text{(4.38)} \quad \Pr\{\sum_{0\leqslant\ell\leqslant p(n)-1} \sup_{B\in C} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\} \leqslant \sum_{\ell=0}^{p(n)-1} \Pr\{\sup_{B\in C} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > u_{\varepsilon,\ell}\}.$$

La proposition IV.11 donne, pour tout nombre entier naturel ℓ :

$$\Pr\{|\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > u_{\varepsilon,\ell}\} \leqslant 2\exp\left(-\frac{(u_{\varepsilon,\ell})^2}{4\,\rho_{\varepsilon,\ell} + \frac{2\,K\,u_{\varepsilon,\ell}}{\sqrt{n}}}\right) .$$

Nous obtenons alors, d'après la définition de $\tilde{A}_{\ell,B}$ et celle des indices $t(\ell,B)$, données au paragraphe IV.11.,

(4.39) $$\Pr\{\sup_{B\in\mathcal{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B})| > u_{\varepsilon,\ell}\}$$

$$\leqslant 2\ \Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell})\ \Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell+1})\ \exp\Big(- \frac{(u_{\varepsilon,\ell})^2}{4\ \rho_{\varepsilon,\ell} + \frac{2\ K\ u_{\varepsilon,\ell}}{\sqrt{n}}}\Big) \ .$$

De la définition IV.2.2., il résulte que l'application Γ est décroissante, et comme :

$$\rho_{\varepsilon,\ell} = \frac{1}{K\ 2^{r+\ell}} \ ,$$

nous avons, pour tout nombre entier naturel $\ell \geqslant 1$:

$$\Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell}) \leqslant \Gamma(\rho_{\varepsilon,\ell+1}) \ .$$

Avec cette dernière inégalité, jointe à (4.36) et (4.37), le premier membre de (4.39) est majoré par :

$$2\ \exp - \frac{(u_{\varepsilon,\ell})^2}{10\ (K+2)\ \rho_{\varepsilon,\ell}} \ ,$$

ou encore, en tenant compte de (4.14) et de (4.34), par :

$$2\ \exp\Big(- \frac{K\ \varepsilon^2\ 2^{\ell+\ell_o}}{5(K+2)\ 2^{11}\ (\ell+1)^4}\Big) \ .$$

Nous obtenons alors, d'après (4.38), et (4.13) :

$$\Pr\{\sum_{0\leqslant\ell\leqslant p(n)-1}\ \sup_{B\in\mathcal{C}} |\eta_n^{\bullet}(\tilde{A}_{\ell,B}) > \frac{\varepsilon}{16}\} \leqslant 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \exp\Big(- \frac{K\ \varepsilon^2\ 2^{\ell+\ell_o}}{5(K+2)\ 2^{11}\ (\ell+1)^4}\Big)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{16} \ . \ \blacksquare$$

IV.13.- ETUDE DE L'ERREUR D'APPROXIMATION ENTRE LES SUITES S_{ρ_ε} ET $S_{\rho_\varepsilon^n}$.-

Proposition IV.13.- Toujours sous les hypothèses (4.5) et (4.6), nous avons, pour tout entier naturel non nul n :

$$(4.40) \qquad \Pr\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} \leq \frac{\varepsilon}{8} .$$

Preuve : Observons d'abord que l'inégalité triangulaire entre nombres réels donne, pour tout nombre entier naturel n, et pour tout borélien B appartenant à la classe C, les majorations :

$$(4.41) \qquad |\dot{\eta}_n(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \dot{\eta}_n(A_{t(B)})| \leq$$

$$\leq \sum_{0\leq \ell \leq p(n)-1} |\dot{\eta}_n(A_{\ell,t(\ell,B)}) - \dot{\eta}_n(A_{\ell+1,t(\ell+1,B)})| \leq$$

$$\leq \sum_{0\leq \ell \leq p(n)-1} |\dot{\eta}_n(\tilde{A}_{\ell,B})| + \sum_{0\leq \ell \leq p(n)-1} |\dot{\eta}_n(A'_{\ell,B})| ,$$

et l'inclusion :

$$(4.42) \qquad \{\sup_{B\in C} |\dot{\eta}_n(A_{p(n),t[p(n),B]}) - \dot{\eta}_n(A_{t(B)})| > \frac{\varepsilon}{8}\}$$

$$\subset \{ \sum_{0\leq \ell \leq p(n)-1} \sup_{B\in C} |\dot{\eta}_n(\tilde{A}_{\ell,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\}$$

$$\cup \{ \sum_{0\leq \ell \leq p(n)-1} \sup_{B\in C} |\dot{\eta}_n(\tilde{A}'_{\ell,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\} .$$

Par conséquent, nous avons, en tenant compte de (4.28) :

$$\Pr\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} \leq \Pr\{ \sum_{0\leq \ell \leq p(n)-1} \sup_{B\in C} |\dot{\eta}_n(\tilde{A}_{\ell,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\}$$

$$+ \Pr\{ \sum_{0\leq \ell \leq p(n)-1} \sup_{B\in C} |\dot{\eta}_n(A'_{\ell,B})| > \frac{\varepsilon}{16}\} ,$$

et, d'après la proposition IV.12.

$$\Pr\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} \leqslant \frac{\varepsilon}{8} \quad . \blacksquare$$

IV.14.- Une condition suffisante pour qu'une classe soit de Donsker.-

Théorème IV.14.- Soit $\mu^{\bullet}$ une mesure aléatoire possédant des moments de tous ordres, et satisfaisant à la condition (4.5) :

Il existe un nombre réel $K > 0$ tel que pour tous $B \in \mathcal{B}_b$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \geqslant 2$,

$$E\{|\mu^{\bullet}(B) - \mu(B)|^p\} \leqslant K^{p-2}\, p!\, \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\}.$$

Soit $\mathcal{C}$ une classe de boréliens bornés, empiriquement mesurable et possédant une entropie relativement à $\mu^{\bullet}$ (définitions IV.4 et IV.2.2), et qui de plus, satisfait aux conditions (4.2) et (4.3) :

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, \ \sup_{B\in\mathcal{C}} \mu^{\omega}(B) < \infty \text{ p.s.}$$

$$\sup_{B\in\mathcal{C}} \mathrm{Var}\{\mu^{\bullet}(B)\} < \infty .$$

Sous ces hypothèses, la condition intégrale :

$$\int_0^1 [\mathrm{Log}\, \Gamma(x^2)]^{1/2}\, dx < \infty$$

entraîne que $\mathcal{C}$ est une classe de Donsker relativement à $\mu^{\bullet}$.

Preuve : Nous nous ramenons aux hypothèses du théorème III.7. Puisque $\mathcal{C}$ possède une entropie pour $\mu^{\bullet}$, $\mathcal{C}$ est précompacte dans l'espace pseudo-métrique $(\mathcal{B}_b, d)$. Afin d'obtenir la condition de faible oscillation, il suffit de montrer que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, la mesure aléatoire vérifie, lorsque n est assez grand :

(4.43) $$\Pr\{ \sup_{\substack{(B,B')\in \mathcal{C}^2 \\ d(B,B')<\rho_\varepsilon}} |\dot{\eta}_n(B) - \dot{\eta}_n(B')| > \varepsilon\} < \varepsilon ,$$

le nombre ρ_ε ayant été défini en (4.16).

Pour cela, nous partirons de l'inclusion suivante, valable pour tous boréliens B et B' de la classe $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\{|\dot{\eta}_n(B) - \dot{\eta}_n(B')| > \varepsilon\} \subset & \{|\dot{\eta}_n(B) - \dot{\eta}_n(A_{t(B)})| > \frac{\varepsilon}{4}\} \\ & \cup \{|\dot{\eta}_n(A_{t(B)}) - \dot{\eta}_n(A_{t(B')})| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\ & \cup \{|\dot{\eta}_n(A_{t(B')}) - \dot{\eta}_n(B')| > \frac{\varepsilon}{4}\} ,\end{aligned}$$

qui est conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. Nous obtenons alors, d'après (4.19), (4.26), (4.27) et (4.28),

$$\Pr\{ \sup_{\substack{(B,B')\in \mathcal{C}^2 \\ d(B,B')<\rho_\varepsilon}} |\dot{\eta}_n(B) - \dot{\eta}_n(B')| > \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \Pr\{O_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2}\} + 2\left[\Pr\{E'_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\} + \Pr\{E''_{n,\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{8}\}\right] .$$

Il résulte, finalement, des relations (4.20), (4.29) et (4.40), la relation annoncée (4.43). ∎

B I B L I O G R A P H I E.

[I] DUDLEY (R.M.) - Central limit theorems for empirical measures. *Ann. Probability.* 6, 1978, pp 899-929.

[II] BENNETT (G.) - Probability inequalities for the sum of independant random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.*. 57, 1962, pp 33-45.

[III] FRÉCHET (M.) - *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités.*- Premier livre, 1950.

[IV] DUDLEY (R.M.) - Weak convergence of probability measures. *Illinois Journal.* 1, 1966, pp 109-126.

[V] NEVEU (J.) - *Bases mathématiques du calcul des probabilités.*- Paris, Masson, 1964.

[VI] MAC SHANE (E.J.) - Extension of range of functions.- *Bull. Amer. Math. Soc.*. 10, 1934, pp 837-842.

[VII] HENGARTNER (W.), LAMBERT (M.), REISCHER (C.) - *Introduction à l'analyse fonctionnelle.*- Presses de l'Université du Québec, 1981.

[VIII] PARTHASARATHY (K.R.) - *Probability measures on metric spaces.*- London, Academic Press, 1967.

[IX] WICHURA (M.J.) - On the construction of almost uniformly convergent random variables with given weakly convergent image laws. *Ann. Math. Statist.* 41, 1970, pp 284-291.

[X] GAENSSLER (P.), STUTE (W.) - Empirical processes : a survey of results for independant and identically distributed random variables. *Ann. Probability.* 7, 1979, pp 193-243.

[XI] DOOB (J.L.) - *Stochastic processes.*- New York, Wiley, 1953.

[XII] KARHUNEN (K.) - Uber Lineäre Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Scient. Fennicae.* A I, n° 37, 1947, pp 1-79.

[XIII] FERNIQUE (X.) - Processus linéaires, processus généralisés. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 17, 1, 1967, pp. 1-92.

[XIV] BONKIAN (S.M.) - *Contribution à l'étude des mesures aléatoires du second ordre.* (Thèse de 3ème cycle, Université de Lille I, 1983).

[XV] MEYER (P.A.) - *Probabilités et potentiel.*- Paris, Hermann, 1966.

[XVI] NELSON (E.) - Regular probability measures on function space. *Ann. of Math.*. 69, n° 3, 1959, pp 630-643.

[XVII] VARADARAJAN (V.S.) - Measures on topological spaces. *Annals of Math. Society Translations.* 48, 1965, pp 161-199.

[XVIII] JACOB (P.) - Convergence uniforme à distance finie des mesures signées. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* Vol XV, n° 4, 1979, pp 355-373.

[XIX] GEFFROY (J.), ZEBOULON (H.) - Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et processus ponctuels. *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 280, n° 5, 1975, pp 291-293.

[XX] NEVEU (J.) - *Processus ponctuels.*- Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour. VI. 1976. Lecture Notes. Springer Verlag, 1977.

[XXI] BILLINGSLEY (P.) - *Convergence of probability measures.*- New York, Wiley, 1968.

[XXII] MÉTIVIER (M.) - *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*.- Paris, Dunod, 1972.

[XXIII] GIHMAN (I.I.), SKOROHOD (A.V.) - *The theory of stochastic processes*.- t.I. Berlin. Heidelberg, Springer Verlag, 1974.

[XXIV] MARLE (C.M.) - *Mesures et probabilités*.- Paris, Hermann, 1974.

[XXV] HALMOS (P.R.) - *Measure theory*.- New York, Van Nostrand, 1950.

[XXVI] DELPORTE (J.) - Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé. *Ann. Inst. Henri Poincaré*. Vol. I, n° 2, 1964, pp 111-215.

[XXVII] NEVEU (J.) - *Processus aléatoires gaussiens*.- Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[XXVIII] BOURBAKI - Chapitre IX. *Intégration sur les espaces topologiques séparés*.- Paris, Hermann, 1969.

[XXIX] SCHWARTZ (L.) - *Topologie générale et analyse fonctionnelle*.- Paris, Hermann, 1970.

RÉSUMÉ

Pour un n-échantillon d'une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ sur un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, on considère la mesure aléatoire empirique normalisée :

$$\eta_n^{\bullet} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i^{\bullet} - \mu) ,$$

μ étant la mesure moyenne associée à $\mu^{\bullet}$. Par l'intermédiaire des lois de dimension finie, on construit des processus gaussiens $\eta^{\bullet}$ indexés par l'ensemble $\mathcal{B}$ des boréliens. La question est alors posée de savoir si de tels processus peuvent être assimilés à des mesures aléatoires.

Le problème de la convergence en loi de la suite $(\eta_n^{\bullet})$ vers $\eta^{\bullet}$ est examiné sous différents aspects. Une première méthode consiste à plonger l'espace $\mathcal{M}$ des mesures signées dans un espace topologique compact approprié ; elle permet notamment d'établir un théorème de limite centrale qui exprime la convergence faible d'une suite de probabilités. Une seconde méthode amène à plonger $\mathcal{M}$ dans un espace métrique et à définir des classes de Donsker par rapport à l'ensemble $\mathcal{B}$.

MOTS CLÉS

- THEOREME CENTRAL LIMITE.
- MESURE ALEATOIRE.
- PROCESSUS GAUSSIEN.
- CONVERGENCE FAIBLE.
- MESURE SPECTRALE.
- ENTROPIE.