N° d'ordre : 1101

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Dalila BEKHTAOUI

SOLUTIONS NULLES ET PARAMÉTRIX POUR UN OPÉRATEUR MATRICIEL, A CARACTÉRISTIQUES DE MULTIPLICITÉS CONSTANTES, DE TYPE (v, v, ..., v, o, ..., o) AVEC CONDITIONS DE BONNE DÉCOMPOSITION

Membres du Jury : Président : J. VAILLANT, Professeur à l'Université de Paris VI

Rapporteur : J.C. DE PARIS, Professeur à l'Université de Lille I

Examinateurs
R. BERZIN, Professeur à l'Université de Lille I
D. GOURDIN, Maître-Assistant à l'Université de Lille I
M. TERBECHE, Maître-Assistant à l'Université d'Oran (Algérie)

SOUTENUE LE 26 OCTOBRE 1983

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Jean-Claude De Paris m'a proposé l'idée de ce travail et l'a dirigé avec un intérêt constant ; ses nombreuses remarques m'ont permis de simplifier notablement certaines démonstrations, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur Jean Vaillant est à l'origine de ce sujet, je le remercie de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté la présidence du jury.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur Robert Berzin pour ses remarques et ses critiques fécondes et le remercie d'avoir accepter de faire partie du jury.

Que Messieurs Daniel Gourdin et Mekki Terbèche soient également remerciés pour leur participation au jury.

Un grand merci à mes collègues Sidi Mohammed Sedjelmaci, Mahdi Boukrouche et Mustapha Mechab pour nos fréquentes discussions fructueuses.

Mes remerciements vont, enfin, à Madame Raymonde Bérat pour la rapidité et le soin apportés à la présentation de cette thèse, à Madame Françoise Wdowczyk, Messieurs Albert Gournay et Michel Provost qui en ont assuré l'impression et la reliure, à Madame Monique Lloret qui a toujours photocopié mes documents avec gentillesse.

*

* *

INTRODUCTION

On sait depuis longtemps que l'existence d'une onde asymtptotique permet la construction de solutions nulles (voir, par exemple, l'article de Mizohata en 1962 [30]) et que la résolution du problème de Cauchy asymptotique permet la construction d'une paramétrix (voir l'article de Ludwig en 1960 [28]).

L'étude du problème de Cauchy asymptotique entreprise dans le cas des systèmes par Jean Vaillant ([36], [37]) puis par Berzin ([3]) et Berzin-Vaillant ([5], [6]) et dans le cas scalaire par J.C. De Paris ([9], [11]), a servi de base à notre travail. Plusieurs thèses de 3ème cycle ([1], [7], [17], [34]) ont été soutenues sur ces questions en 1982 dans l'équipe de recherche en équations aux dérivées partielles de l'Université de Lille I, dirigée par J.C. De Paris.

Notre travail se place dans la suite logique des précédents et donne une étape nouvelle avant l'étude du cas le plus général.

La partie fondamentale de cette thèse est constituée par le chapitre I, qui donne la construction d'une onde asymptotique pour un opérateur différentiel matriciel vérifiant deux types d'hypothèses :

1) Des hypothèses de localisation utilisant la classification des caractéristiques donnée par Jean Vaillant ([36]) et faisant intervenir des anneaux locaux convenables.

2) Des hypothèses de bonne décomposition pour un opérateur matriciel convenable, utilisant la notion introduite par J.C. De Paris dans [9].

La méthode utilisée, généralise les résultats obtenus dans [1], [17], [34], mais laisse échaper le cas étudié dans [7]. On donne, dans le chapitre II, l'application des résultats précédents à la construction d'un solution nulle dans des classes de fonctions ultra-différentiables, ou d'ultradistributions. Les techniques utilisées sont les mêmes que dans l'article [22] de Komatsu et sont basées pour l'essentiel sur un calcul de majorantes.

Le chapitre III consiste en faisant des hypothèses convenables d'hyperbolicité à "regrouper" les ondes asymptotiques pour résoudre le problème de Cauchy asymptotique. L'introduction de nouvelles fonctions inconnues comme dans [7] et [34] permet de façon agréable, la résolution du problème d'identification des données de Cauchy. On utilise pour cela une idée fondamentale de [5] qui consiste à prouver que certaines équations vraies pour $\alpha \in \{0,\dots,t-1\}$ le sont en fait pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Dans le chapitre IV, on utilise les résultats du chapitre III et les opérateurs intégraux de Fourier pour construire une paramétrix pour h, suivant la méthode utilisée par Chazarain en 1972 [8] et Berzin-Vaillant [6]. Cette construction permet l'étude du problème de Cauchy en C^∞ et montre que sous les hypothèses H, L et $\mathcal{D}$, l'opérateur h est hyperbolique (c'est-à-dire que le problème de Cauchy est bien posé pour h).

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN OPERATEUR A CARACTERISTIQUE DE MULTIPLICITE CONSTANTE.

CHAPITRE II

SOLUTIONS NULLES.

.../...

CHAPITRE III

LE PROBLEME DE CAUCHY ASYMPTOTIQUE.

CHAPITRE IV

LE PROBLEME DE CAUCHY EN C^∞.

CHAPITRE I

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN OPERATEUR A CARACTERISTIQUE DE MULTIPLICITE CONSTANTE.

----

§ 1 - *Notations.*

X désignera une variété C^{∞} (respectivement analytique), de dimension $(n+1)$; $n \in \mathbb{N}$.

S une hypersurface C^{∞} (respectivement analytique) de X.

a un point de S, Ω un voisinage de a tel que :

$\Omega \cap S = \{x \in X / \varphi(x) = 0\}$ où φ est une fonction C^{∞} (respectivement analytique).

S sera supposée régulière en a, c'est-à-dire que :

$$\operatorname{grad} \varphi(a) \neq \vec{0}.$$

Les coordonnées locales, au voisinage de a, d'un point x de X, seront notées $(x^{o}, x^{1}, \ldots, x^{n}) = (x^{o}, x')$. Un point de l'espace cotangent $T^{*}(X)$ par (x, ξ).

On notera comme dans [6], [36]

$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad \text{et} \quad \partial^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \quad ; \quad \alpha \in \{0, 1, \ldots, n\} .$$

On utilisera la convention d'Einstein :

si α varie de 0 à n $\quad \ell^{\alpha}u_{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \ell^{\alpha}u_{\alpha}$

si A varie de 1 à m $\quad z^{A}y_{A} = \sum_{A=1}^{m} z^{A}y_{A}$

Soit $h(x,D) = \left[h^{A}_{B}(x,D)\right]_{1\leqslant A,B\leqslant m}$, un opérateur différentiel linéaire matriciel $m \times m$; $m \in \mathbb{N}^{*}$, de classe C^{∞} (respectivement analytique) et d'ordre t sur X ; $t \geqslant 1$.

On notera par $H(x,\xi) = \left[H^{A}_{B}(x,\xi)\right]_{1\leqslant A,B\leqslant m}$, la matrice caractéristique de h, au sens de Cauchy-Kowalewsky :

$$H^{A}_{B}(x,\xi) = \begin{cases} \text{symbole principal de } h^{A}_{B} \text{ si } \operatorname{ord}(h^{A}_{B}) = t \\ \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

On supposera que $H(x,\xi)$ n'est pas dégénéré en a, c'est-à-dire que : $\det H(a,\xi)$ n'est pas identiquement nul. C'est donc un polynôme homogène en ξ de degré mt.

Soient $(A_1,\ldots,A_r)$ et $(B_1,\ldots,B_r)$ des r-uples de $\{1,\ldots,m\}$, dont les éléments sont deux à deux distincts.

On notera comme d'habitude $A^{B_1\ldots B_r}_{A_1\ldots A_r}$, le coefficient de $H^{A_1}_{B_1}.H^{A_2}_{B_2}\ldots H^{A_r}_{B_r}$ dans $\det\left[H^{A}_{B}\right]$;

C'est un cofacteur d'ordre (m-r) de H.

On étend cette notion aux r-uples quelconques en convenant que si deux des indices supérieurs, ou deux des indices inférieurs sont égaux, le cofacteur considéré est nul.

Soit k un entier donné, inférieur ou égal à m.

Un indice A variant de 1 à k sera surbarré :

$$1 \leqslant \bar{A} \leqslant k$$

Un indice C variant de (k+1) à m sera "chapeauté" :

$$k + 1 \leqslant \hat{C} \leqslant m.$$

§ 2 - *Rappels sur quelques opérateurs.*

Soient f une ultradistribution sur $\mathbb{R}$ et φ une fonction C^∞ (respectivement analytique) de plusieurs variables. Pour une fonction C^∞ (respectivement analytique) y, on a ([2], [9], [26]) :

$$h(y \times f \circ \varphi) = \sum_{r=0}^{t} H_\varphi^r(y) \times f^{(t-r)} \circ \varphi$$

où H_φ^r est un opérateur d'ordre inférieur ou égal à r.

En particulier, H_φ^o est la multiplication par $H(x,\text{grad }\varphi(x))$.

On convient que si $r > t$:

$$H_\varphi^r = 0 .$$

Si $h_1,\dots,h_k$ sont des opérateurs différentiels, matriciels, linéaires d'ordres respectifs $t_1,\dots,t_k$.

Si $h = h_1 \circ \dots \circ h_k$ on a alors [9] :

$$h(y \times f \circ \varphi) = \sum_{r=0}^{T} \{ \sum_{\substack{r_1+\dots+r_k=r \\ 0\leqslant r_j\leqslant t_j}} H_{1,\varphi}^{r_1} \circ \dots \circ H_{k,\varphi}^{r_k} \} (y) \times f^{(T-r)} \circ \varphi$$

où $T = t_1 + \dots + t_k$

c'est-à-dire :

$$H^{r}_{\psi} = \sum_{\substack{r_1+\dots+r_k=r \\ 0\leqslant r_j\leqslant t_j}} H^{r_1}_{1,\psi} \circ \dots \circ H^{r_k}_{k,\psi} .$$

Expression utilisée de H^{r}_{ψ}.

$$h(y \times f \circ \psi) = \sum_{r=0}^{t} H^{r}_{\psi}(y) \times f^{(t-r)} \circ \psi$$

on a : $$D^{\alpha}(f \circ \psi) = \sum_{p=0}^{|\alpha|} F^{\alpha}_{p}(\psi) \times f^{(p)} \circ \psi$$

où $D^{\alpha} = D^{\alpha_0}_{x_0} \circ D^{\alpha_1}_{x_1} \circ \dots \circ D^{\alpha_n}_{x_n}$

avec $$\begin{cases} F^{\alpha}_{|\alpha|}(\psi) = (\operatorname{grad} \psi)^{\alpha} \\ F^{\alpha}_{1}(\psi) = D^{\alpha}\psi \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0 \quad ; \quad F^{0}_{1}(\psi) = 0 \\ F^{\alpha}_{0}(\psi) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0 \quad ; \quad F^{0}_{0}(\psi) = 1. \end{cases}$$

Si $h = \sum_{|\alpha|\leqslant t} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$ on a :

$$h(y \times f \circ \psi) = \sum_{|\alpha|\leqslant t} a_{\alpha} \sum_{\beta\leqslant\alpha} C^{\beta}_{\alpha} D^{\beta}(f \circ \psi) D^{\alpha-\beta} y$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant t} a_{\alpha} \sum_{\beta\leqslant\alpha} C^{\beta}_{\alpha} \left[\sum_{p=0}^{|\beta|} F^{\beta}_{p}(\psi) \times f^{(p)} \circ \psi \right] \times D^{\alpha-\beta} y$$

$$= \sum_{r=0}^{t} \left\{ \sum_{t-r\leqslant|\alpha|\leqslant t} a_{\alpha} \sum_{\substack{t-r\leqslant|\beta| \\ \beta\leqslant\alpha}} C^{\beta}_{\alpha} F^{\beta}_{t-r}(\psi) \times D^{\alpha-\beta} y \right\} f^{(t-r)} \circ \psi .$$

Soit :

$$H_{\psi}^{r} = \sum_{t-r\leqslant|\alpha|\leqslant t} a_{\alpha} \sum_{\substack{t-r\leqslant|\beta| \\ \beta\leqslant\alpha}} C_{\alpha}^{\beta} F_{t-r}^{\beta}(\psi) \times D^{\alpha-\beta} .$$

Comme $|\alpha| \leqslant t$ et $|\beta| \geqslant t-r$, $|\alpha-\beta| = r \iff |\alpha| = t$ et $|\beta| = t-r$.

La partie d'ordre r de H_{ψ}^{r} est donc en posant $\gamma = \alpha - \beta$ et en utilisant $F_{|\gamma|}^{\gamma} = (\text{grad } \psi)^{\gamma}$:

$$\sum_{|\gamma|=r} \left[\sum_{|\alpha|=t} a_{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha-\gamma} (\text{grad } \psi)^{\alpha-\gamma} \right] D^{\gamma}.$$

Soit encore :

$$\sum_{|\gamma|=r} \frac{1}{\gamma!} D_{\xi}^{\gamma} H(.,\text{grad } \psi) D^{\gamma}$$

En particulier, en isolant le terme en $\partial_{o(r)}$, on peut écrire :

$$\boxed{H_{\psi}^{r} = \frac{1}{r!} \partial^{o(r)} H(.,\text{grad } \psi) \partial_{o(r)} + t^{r}}$$

où t^{r} est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant r$ et d'ordre strictement inférieur à r par rapport à ∂_{o}.

§ 3 - *Position du problème.*

Le problème posé dans ce chapitre est la recherche d'un développement asymptotique :

$$Y = \sum_{j=0}^{+\infty} Y_j \times (f_j \circ \varphi)$$

(avec $Y_j = (Y_j^B)_{1\leqslant B\leqslant m}$ et $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'ultradistributions sur un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$f'_j = f_{j-1}$$

tel que :

$$h(Y) = F = \sum_{j=0}^{\infty} F_j \times (f_{j-t} \circ \varphi).$$

Les Y_j^B sont des fonctions C^∞ (respectivement analytiques) définies sur un même voisinage de a, et sont appelées coefficients du développement asymptotique.

φ est C^∞ (respectivement analytique), appelée phase du développement asymptotique.

Formellement, nous aurons :

$$hY = \sum_{j=0}^{+\infty} \{ \sum_{r=0}^{\min(t,j)} H_\varphi^r(Y_{j-r}) \} f_{j-t} \circ \varphi.$$

En convenant que $Y_j = F_j = 0$ si $j < 0$; alors pour que Y vérifie : $hY = F$, il suffit de choisir les Y_j tels que :

$$\forall\, j \geqslant 0 \qquad \sum_{r=0}^{\min(t,j)} H_\varphi^r(Y_{j-r}) = F_j.$$

§ 4 - *Hypothèses*.

On fera les hypothèses suivantes :

On suppose qu'il existe H' et H'' C^{∞} en x (respectivement analytiques) au voisinage de a, polynomiaux en ξ ; $H'(x,.)$ irréductible en ξ pour tout x dans Ω ; tels que

(H)

a) $\exists k \in \mathbb{N}^{*}, \exists \nu \in \mathbb{N}^{*}$ tels que $\det H = (H')^{k\nu} H''$;

b) S n'est pas caractéristique en a pour H''. C'est-à-dire que : $H''(a,\operatorname{grad} \psi(a)) \neq 0$;

c) S est caractéristique totale simple pour H', au voisinage de a. C'est-à-dire que :

$$\forall x \in \Omega \qquad H'(x,\operatorname{grad} \psi(x)) = 0$$

et $(p^{\alpha}(a))_{0 \leqslant \alpha \leqslant n} \neq \vec{0}$ où $p^{\alpha}(x) = \partial^{\alpha} H'(x,\operatorname{grad} \psi(x))$.

(L)
Localisation

a) $\forall x \in \Omega$; dans l'anneau localisé ϕ'_x des polynômes par rapport à l'idéal engendré par $H'(x,.)$, la matrice $H(x,.)$ est équivalente à :

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} [H'(x,.)]^{\nu} & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & [H'(x,.)]^{\nu} & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m$$

b) S n'est pas caractéristique en a pour $A^{1\ldots k}_{1\ldots k}$ (c'est-à-dire que $A^{1\ldots k}_{1\ldots k}(a,\operatorname{grad}\ (a)) \neq 0$).

L'hypothèse (L) b) traduit la régularité de S pour la localisation.

§ 5 - *Construction d'une suite d'opérateurs.*

Pour traiter le cas de multiplicité triple (de rang m-1) (le cas T.R. 2 de Berzin-Vaillant [6]), Sedjelmaci [34] construit un opérateur k, qui donne la résolution formelle, et qui s'exprime en fonction de l'opérateur k_1 introduit par J.C. De Paris [17] dans le cas de la multiplicité double. L'idée a donc été de construire une suite d'opérateurs dont chaque terme sera l'opérateur donnant la résolution formelle, pour une multiplicité correspondante.

On note $a_{A_1 \ldots A_r}^{B_1 \ldots B_r}$ un opérateur différentiel de* symbole principal. $A_{A_1 \ldots A_r}^{B_1 \ldots B_r}$, en convenant que :

$a_{A_1 \ldots A_r}^{B_1 \ldots B_r}$ est identiquement nul si deux des indices supérieurs ou deux des indices inférieurs sont égaux.

On pose alors :

$$\underline{a} = \left[a_{1 \ldots\ldots\ldots \bar{F} \ldots\ldots\ldots k}^{1 \ldots (\bar{F}-1) B (\bar{F}+1) \ldots k} \right]_{\substack{1 \leqslant B \leqslant m \\ 1 \leqslant \bar{F} \leqslant k}}$$

$$\bar{a} = \left[a_{1 \ldots (\bar{F}-1) A (\bar{F}+1) \ldots k}^{1 \ldots\ldots\ldots \bar{F} \ldots\ldots\ldots k} \right]_{\substack{1 \leqslant \bar{F} \leqslant k \\ 1 \leqslant A \leqslant m}}$$

$$b = \left[a_{1 \ldots kC}^{1 \ldots kB} \right]_{1 \leqslant B, C \leqslant m} \quad .$$

Puis on construit par récurrence la suite $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en posant :

$p_1 = \underline{a}$

et pour $j \geqslant 2$

$$p_j = p_{j-1} \, . \, a^{1\ldots k}_{1\ldots k} - b.h.p_{j-1}$$

p_j est un opérateur matriciel à m lignes et k colonnes :

$$p_j = (p^{B}_{\overline{F},j})_{\substack{1\leqslant B\leqslant m \\ 1\leqslant \overline{F}\leqslant k}} \, .$$

Et pour $j \geqslant 1$, on pose :

$$q_j = \bar{a}.h.p_j$$

q_j est un opérateur différentiel matriciel $k \times k$:

$$q_j = (q^{\overline{F}}_{\overline{D},j})_{1\leqslant \overline{F},\overline{D}\leqslant k}$$

Proposition 1.-

$\forall \; j \geqslant 1$ on a :

i) $\operatorname{ord}(p_j) = j(m-k)t$;

ii) $P_j = \underline{A}(A^{1\ldots k}_{1\ldots k})^{j-1}$; P_j désignant le symbole principal de p_j ;

iii) $\operatorname{ord}(bhp_j) < \operatorname{ord}(p_j.a^{1\ldots k}_{1\ldots k})$;

iv) $\forall \; \hat{A} \in \{k+1,\ldots,m\}$; $\forall \; \overline{F} \in \{1,\ldots,k\}$

$\operatorname{ord}(h^{\hat{A}}_{B}.p^{B}_{\overline{F},j}) \leqslant T_{j-j}$; $T_j = j(m-k)t+t$

on pose alors $\ell^{\hat{A}}_{\overline{F},j} = (-1)^{j+1} h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\overline{F},j}$.

Démonstration i), ii), iii), iv) :

Pour $j = 1$, $p_1 = \underline{a}$; comme $P_1 = \underline{A} \neq 0$, $\mathrm{ord}(p_1) = (m-k)t$ et $\mathrm{ord}(bhp_1) \leqslant (m-k-1)t + t + (m-k)t = 2(m-k)t$.

Calculons la partie d'ordre $2(m-k)t$ de bhp_1 :

$$BHP_1 = BH\underline{A} = \left[A^{1\ldots kB}_{1\ldots kC}\, H^C_D\, A^{1\ldots D\ldots k}_{1\ldots \overline{F}\ldots k}\right]_{\substack{1\leqslant B\leqslant m\\ 1\leqslant \overline{F}\leqslant k}} .$$

Comme $A^{1\ldots kB}_{1\ldots kC} = 0$ si B ou $C \in \{1,\ldots k\}$,

on a : $A^{1\ldots kB}_{1\ldots kC} H^C_D\, A^{1\ldots D\ldots k}_{1\ldots \overline{F}\ldots k} = A^{1\ldots kB}_{1\ldots k\hat{C}} H^{\hat{C}}_D\, A^{1\ldots D\ldots k}_{1\ldots \overline{F}\ldots k} = 0$

car on a [36] : $H^{\hat{C}}_D A^{1\ldots D\ldots k}_{1\ldots \overline{F}\ldots k} = 0$ donc $BHP_1 = 0$

et $\mathrm{ord}(bhp_1) < 2(m-k)t$

comme $\mathrm{ord}(p_1 a^{1\ldots k}_{1\ldots k}) = 2(m-k)t$ on a : $\mathrm{ord}(bhp_1) < \mathrm{ord}(p_1\, a^{1\ldots k}_{1\ldots k})$

car $a^{1\ldots k}_{1\ldots k}$ est scalaire et $\mathrm{ord}(p_1) = (m-k)t$.

D'autre part, $\mathrm{ord}(h^{\hat{A}}_B p^B_{\overline{F},1}) = \mathrm{ord}(h^{\hat{A}}_B a^{1\ldots B\ldots k}_{1\ldots \overline{F}\ldots k}) \leqslant t + (m-k)t = T_1$

mais comme la partie d'ordre T_1 de cet opérateur est nulle, puisque : $H^{\hat{A}}_B A^{1\ldots B\ldots k}_{1\ldots \overline{F}\ldots k} = 0$, l'ordre effectif de $h^{\hat{A}}_B p^B_{\overline{F},1}$ est inférieur ou égal à $T_1 - 1$.

On pose alors $\ell^{\hat{A}}_{\overline{F},1} = h^{\hat{A}}_B p^B_{\overline{F},1}$.

Hypothèses de récurrence :

On suppose que pour $j \geqslant 1$, on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{i)} & \mathrm{ord}(p_j) = j(m-k)t \\ \text{ii)} & P_j = \underline{A}(A^{1\ldots k}_{1\ldots k})^{j-1} \\ \text{iii)} & \mathrm{ord}(bhp_j) < \mathrm{ord}(p_j\ a^{1\ldots k}_{1\ldots k}) \\ \text{iv)} & \mathrm{ord}(h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\underline{F},j}) \leqslant T_j - j \quad , \quad T_j = j(m-k)t+t\ . \end{array}\right.$$

Montrons que ces relations sont encore vraies pour $j+1$:

Comme $p_{j+1} = p_j\ a^{1\ldots k}_{1\ldots k} - bhp_j$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathrm{ord}(p_{j+1}) = \mathrm{ord}(p_j\ a^{1\ldots k}_{1\ldots k}) = j(m-k)t + (m-k)t = (j+1)(m-k)t \qquad \text{(i)}$$

$$P_{j+1} = P_j A^{1\ldots k}_{1\ldots k} = \underline{A}(A^{1\ldots k}_{1\ldots k})^j \qquad \text{(ii) et}$$

$$\text{(iii)}\ \mathrm{ord}(bhp_{j+1}) \leqslant \mathrm{ord}(bhp_j\ a^{1\ldots k}_{1\ldots k}) < \mathrm{ord}(p_j(a^{1\ldots k}_{1\ldots k})^2) = \mathrm{ord}(p_{j+1}\ a^{1\ldots k}_{1\ldots k}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence iv), nous pouvons poser $\ell^{\hat{A}}_{\underline{F},j} = (-1)^{j+1} h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\underline{F},j}$, avec $\mathrm{ord}(\ell^{\hat{A}}_{\underline{F},j}) \leqslant T_j - j$.

Calculons $h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\underline{F},j+1}$

$$h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\underline{F},j+1} = h^{\hat{A}}_{B}\left[p^{B}_{\underline{F},j}\ a^{1\ldots k}_{1\ldots k} - a^{1\ldots kB}_{1\ldots kC} h^{C}_{E} p^{E}_{\underline{F},j}\right]$$

$$= (-1)^{j+1}\ell^{\hat{A}}_{\underline{F},j}\ a^{1\ldots k}_{1\ldots k} - (-1)^{j+1} h^{\hat{A}}_{\hat{B}}\ a^{1\ldots k\hat{B}}_{1\ldots k\hat{C}} \ell^{\hat{C}}_{\underline{F},j} \quad .$$

Comme $H^{\hat{A}}_{\hat{B}}\ A^{1\ldots k\hat{B}}_{1\ldots k\hat{C}} = A^{1\ldots k}_{1\ldots k} \delta^{\hat{A}}_{\hat{C}}$ [36]

on a : $H^{\hat{A}}_{\hat{B}}\ A^{1\ldots k\hat{B}}_{1\ldots k\hat{C}} L^{\hat{C}}_{\underline{F},j} = L^{\hat{A}}_{\underline{F},j}\ A^{1\ldots k}_{1\ldots k}$

$$\Rightarrow \text{ord}(h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\bar{F},j+1}) \leqslant \text{ord}(\ell^{\hat{A}}_{\bar{F},j}\, a^{1\ldots k}_{1\ldots k}) - 1 \leqslant T_j - j + (m-k)t - 1 .$$

Soit $\text{ord}(h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\bar{F},j+1}) \leqslant T_{j+1} - (j+1)$;

on pose alors :

$$\ell^{\hat{A}}_{\bar{F},j+1} = (-1)^{j+2} h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\bar{F},j+1}$$

ce qui prouve iv) et qui achève la démonstration de la proposition 1.

Notation : Pour toute fonction f du couple (x,ξ), nous noterons dans la suite :

$$\tilde{f}(x) = f(x, \text{grad}\, \varphi(x)) .$$

Proposition 2.-

Sous l'hypothèse " $A^{1\ldots k}_{1\ldots k}$ non divisible par H' ", on a pour tout $j \geqslant 1$ l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) q_j est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité j.

ii) hp_j est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité j.

Remarque : Il s'agit de la bonne décomposition au sens de De Paris [9], [10], [11] :

q_j est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité j, s'il existe des opérateurs différentiels, linéaires, matriciels $\lambda_{\ell,j}$; $\ell = 0,\ldots,j$; tels que :

$$\begin{cases} q_j = \sum_{\ell=0}^{j} \lambda_{\ell,j} [h']^{j-\ell} \\ \mathrm{ord}(q_j - \sum_{\ell=0}^{r} \lambda_{\ell,j} [h']^{j-\ell}) < T_{j+1}-r, \quad \forall\ 0 \leqslant r \leqslant j-1. \end{cases}$$

h' étant un opérateur différentiel linéaire de symbole principal H'. $\lambda_{o,j}$ est tel que sa matrice caractéristique $\Lambda_{o,j}$ ne soit pas divisible par H'. On note : $\Lambda_{o,j} \not\equiv 0 \ (\equiv H')$.

On notera comme dans [34] : q_j est b.d.j/H'.

Pour démontrer la proposition 2, on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.-

Soit p un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant T$, et soit ℓ un opérateur différentiel scalaire d'ordre s, de symbole principal non divisible par H'.

On pose $q = \ell \circ p$. Alors on a l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) Il existe des opérateurs différentiels matriciels : $\lambda_o,\dots,\lambda_j$ tels que :

$$q = \sum_{r=0}^{j} \lambda_r (h')^{j-r} \quad \text{avec}$$

$$\forall\ r \in \{0,\dots,j\} \qquad \mathrm{ord}(q - \sum_{\rho=0}^{r} \lambda_\rho (h')^{j-\rho}) < T+s-r \ ;$$

ii) Il existe des opérateurs différentiels matriciels $\ell_o,\dots,\ell_j$ tels que :

$$p = \sum_{r=0}^{j} \ell_r (h')^{j-r} \quad \text{avec}$$

$$\forall\ r \in \{0,\dots,j\} \qquad \operatorname{ord}(p - \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho (h')^{j-\rho}) < T-r\ .$$

Démonstration :

ii) => i).

Si p vérifie ii), il existe $\ell_o,\dots,\ell_j$ tels que

$$p = \sum_{r=0}^{j} \ell_r (h')^{j-r} \quad \text{avec,}$$

$$\forall\ r \in \{0,\dots,j\} \qquad \operatorname{ord}(p - \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho (h')^{j-\rho}) < T-r.$$

Comme $q = \ell \circ p$ on a :

$$q = \sum_{r=0}^{j} \ell.\ell_r (h')^{j-r}\ .$$

On pose pour tout $r \in \{0,\dots,j\}$ $\qquad \lambda_r = \ell.\ell_r$.

Soit $r \in \{0,\dots,j\}$, on a :

$$\operatorname{ord}(q - \sum_{\rho=0}^{r} \lambda_\rho (h')^{j-\rho}) = \operatorname{ord}(\ell \circ p - \sum_{\rho=0}^{r} \ell.\ell_\rho (h')^{j-\rho})$$

$$= \operatorname{ord}(\ell) + \operatorname{ord}(p - \sum_{\rho=0}^{r} \ell_\rho (h')^{j-\rho}) \quad \text{(car } \ell \text{ est scalaire).}$$

Et donc :

$$\operatorname{ord}(q - \sum_{\rho=0}^{r} \lambda_\rho (h')^{j-\rho}) < T+s-r.$$

Montrons que i => ii) par récurrence.

Hypothèse de récurrence :

On suppose qu'il existe $j \geqslant 0$ tel que pour tout $0 \leqslant k \leqslant j$, on ait :

s'il existe $\lambda_o,\ldots,\lambda_k$ tels que $q = \sum_{r=0}^{k} \lambda_r (h')^{k-r}$ avec les conditions sur les ordres, alors il existe $\ell_o,\ldots,\ell_k$ tels que :

$$p = \sum_{r=0}^{k} \ell_r (h')^{k-r} \quad \text{avec les conditions sur les ordres.}$$

Pour $j = 0$, c'est trivial.

On suppose que c'est vrai pour $0,\ldots,j-1$ et on le démontre pour j :

Supposons qu'il existe $\lambda_o,\ldots,\lambda_j$ tels que :

$$q = \sum_{r=0}^{j} \lambda_r (h')^{j-r} \quad \text{avec}$$

$$\operatorname{ord}(q - \sum_{\rho=0}^{r} \lambda_\rho (h')^{j-\rho}) < T+s-r \quad \text{pour tout} \quad r \in \{0,\ldots,j\}.$$

Comme $\operatorname{ord}(q) \leqslant T+s$ et $\operatorname{ord}(q-\lambda_o(h')^j) \leqslant T+s-1$, on a : $\operatorname{ord}(\lambda_o(h')^j) \leqslant T+s$.

Si on note $\sigma_m(q)$ la partie d'ordre m d'un opérateur q, d'ordre $\leqslant m$ (c'est-à-dire le symbole principal de q s'il est d'ordre m, 0 sinon).

On aura : $\sigma_{T+s}(q) \equiv 0 \quad (\equiv (H')^j)$.

D'autre part, comme $q = \ell.p$, ℓ est scalaire d'ordre s et p d'ordre inférieur ou égal à T, on a :

$$\sigma_{T+s}(q) = \sigma_s(\ell).\sigma_T(p) .$$

Par hypothèse : $\sigma_s(\ell) \not\equiv 0$ $(\equiv H')$; $H'(x,.)$ étant irréductible pour tout x de Ω,

on a : $$\sigma_T(p) \equiv 0 \quad (\equiv [H']^j).$$

Et puisque $\text{ord}(p) \leqslant T$, il existe des opérateurs ℓ_o (éventuellement nul) et p_1 tels que :

$$p = \ell_o(h')^j + p_1 \quad \text{avec} \quad \text{ord}(p_1) \leqslant T-1.$$

Et donc :

$$q = \ell.p = \ell.\ell_o(h')^j + \ell.p_1 = \sum_{r=0}^{j} \lambda_r(h')^{j-r} \quad .$$

On pose $q_1 = \ell p_1 = (\lambda_o - \ell.\ell_o)(h')^j + \sum_{r=1}^{j} \lambda_r(h')^{j-r}$.

Posons $\tilde{\lambda}_o = (\lambda_o - \ell.\ell_o)h' + \lambda_1$ et pour $1 \leqslant r \leqslant j-1$, $\tilde{\lambda}_r = \lambda_{r+1}$, on a alors :

$$q_1 = \sum_{r=0}^{j-1} \tilde{\lambda}_r(h')^{j-1-r} \quad , \quad \text{ord}(q_1) \leqslant T+s-1$$

et pour $r \in \{0,\dots,j-1\}$:

$$\text{ord}(q_1 - \sum_{\rho=0}^{r} \tilde{\lambda}_\rho(h')^{j-1-\rho}) = \text{ord}(\sum_{\rho=r+1}^{j-1} \tilde{\lambda}_\rho(h')^{j-1-\rho})$$

$$= \text{ord}(\sum_{\rho=r+2}^{j} \lambda_\rho(h')^{j-\rho}) = \text{ord}(q - \sum_{\rho=0}^{r+1} \lambda_\rho(h')^{j-\rho}) < T + s -(r+1).$$

Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à q_1 et p_1. Et finalement, il existe $\ell_o,\dots,\ell_j$ tels que $p = \sum_{r=0}^{j} \ell_r(h')^{j-r}$, avec les conditions sur les ordres.

Corollaire 2.-

Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 2 on a l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

i) $q = \ell.p$ est b.d. j / H' ;

ii) p est b.d.j/H'.

D'après le lemme 2, il reste à voir qu'on a l'équivalence suivante :

$$\Lambda_o \not\equiv 0 \quad (\equiv H') \quad <==> \quad L_o \not\equiv 0 \quad (\equiv H')$$

où Λ_o et L_o sont les matrices caractéristiques respectives de λ_o et ℓ_o.

Comme $q = \ell p$, on a :

$$Q = \Lambda_o(H')^j = L.L_o(H')^j$$

$$=> \qquad \Lambda_o = L.L_o \; .$$

Comme $L \not\equiv 0$ $(\equiv H')$ et H' irréductible, on a l'équivalence voulue.

Démonstration de la proposition 2 :

On a : $q_j = \bar{a}\ h\ p_j$ soit :

$$q^{\bar{F}}_{\bar{D},j} = a^{1\ldots\bar{F}\ldots k}_{1\ldots A\ldots k} h^{A}_{B} p^{B}_{\bar{D},j} = a^{1\ldots\bar{F}\ldots k}_{1\ldots\bar{A}\ldots k} h^{\bar{A}}_{B} p^{B}_{\bar{D},j} + a^{1\ldots\bar{F}\ldots k}_{1\ldots\hat{A}\ldots k} h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\bar{D},j} \quad .$$

D'après la proposition 1 :

$$q^{\bar{F}}_{\bar{D},j} = a^{1\ldots k}_{1\ldots k} h^{\bar{F}}_{B} p^{B}_{\bar{D},j} + (-1)^{j+1} a^{1\ldots\bar{F}\ldots k}_{1\ldots\hat{A}\ldots k} \ell^{\hat{A}}_{\bar{D},j}$$

avec ord($\ell^{\hat{A}}_{\bar{D},j}$) $\leqslant T_j - j$.

La bonne décomposition de q_j équivaut alors à la bonne décomposition de $a^{1\ldots k}_{1\ldots k}[h^{\bar{F}}_{B}.p^{B}_{\bar{D},j}]$. Comme $A^{1\ldots k}_{1\ldots k}$ n'est pas divisible par H' (d'après l'hypothèse de localisation), on a d'après le lemme 2 :

$$q_j \text{b.d.j/H'} \iff [h^{\bar{F}}_{B} p^{B}_{\bar{D},j}] \text{b.d.j/H'}.$$

Et comme $h^{\hat{A}}_{B} p^{B}_{\bar{D},j} = (-1)^{j+1} \ell^{\hat{A}}_{\bar{D},j}$ est d'ordre $\leqslant T_j - j$, on a :

$$q_j \text{b.d.j/H'} \iff h.p_j \text{ b.d.j/H'} .$$

C.Q.F.D.

§ 6 - *Hypothèses et résolution formelle.*

Hypothèses de bonne décomposition ($\mathcal{D}_\nu$) :

On dira que h vérifie ($\mathcal{D}_\nu$) si et seulement si :

a) Il existe des opérateurs différentiels matriciels $\underline{a}$, $\bar{a}$, b, de matrice caractéristique respective :

$$(A^{1\ldots \underline{B} \ldots k}_{1\ldots \bar{F} \ldots k})_{\substack{1\leqslant \underline{B}\leqslant m \\ 1\leqslant \bar{F}\leqslant k}} \quad ; \quad (A^{1\ldots \bar{F} \ldots k}_{1\ldots B \ldots k})_{\substack{1\leqslant \bar{F}\leqslant k \\ 1\leqslant B\leqslant m}} \quad ; \quad (A^{1\ldots kB}_{1\ldots kC})_{1\leqslant B,C\leqslant m}$$

tels que l'opérateur différentiel matriciel q_ν, d'ordre $T_{\nu+1}$, construit par récurrence au paragraphe 5, soit bien décomposable par rapport à H', avec la multiplicité ν.

b) S est régulière en a, pour cette décomposition. C'est-à-dire que S n'est pas caractéristique en a pour l'opérateur matriciel $\lambda_{o,\nu}$, intervenant dans la bonne décomposition de q_ν.

Résolution formelle.

Dans tout ce qui suit, ν étant fixé on écrira $q_\nu = q$ et $p_\nu = p$.

Sous les hypothèses (H), (L) et $(\mathcal{D}_\nu)$, nous allons construire un développement asymptotique Y, solution de :

$$hY = F$$

où F est un développement asymptotique donné :

$$F = \sum_{j \in N} F_j \times (f_{j-t} \circ \psi).$$

Au paragraphe 3, nous avons vu que pour déterminer Y il suffisait de résoudre les équations suivantes :

$$\forall\, j \geqslant 0 \qquad \sum_{r=0}^{\min(t,j)} \mathcal{H}_\psi^r(Y_{j-r}) = F_j\ .$$

On convient alors que $F_j = 0$ si $j \leqslant \nu - 1$.

Ce sont ces équations que nous allons étudier dans ce paragraphe.

Remarque :

Dans la suite, nous aurons à résoudre des systèmes du type : $\mathcal{H}_\psi^o(Z) = G$.

Comme $\mathcal{H}_\psi^o = \tilde{H}$, Z est solution d'un système linéaire non homogène, de rang (m-k).

La condition de compatibilité de ce système est :

$$\bar{a}_\psi^o . G = 0$$

Car $\bar{\mathfrak{a}}^{o}_{\psi} = \left[\tilde{A}^{1\ldots\bar{F}\ldots k}_{1\ldots B\ldots k}\right]_{\substack{1\leqslant\bar{F}\leqslant k\\ 1\leqslant B\leqslant m}}$ est constitué de vecteurs de la base à gauche du noyau de $\tilde{H}(x)$. [37].

Lorsque cette condition de compatibilité est réalisée, la solution Z de ce système est alors la somme d'une solution du système homogène, c'est-à-dire d'une combinaison linéaire des vecteurs d'une base à droite de $\operatorname{Ker}\tilde{H}(x)$, et d'une solution particulière.

D'après [37], une base de $\operatorname{Ker}\tilde{H}(x)$ est donnée par :

$$(\tilde{A}^{1\ldots\underline{B}\ldots k}_{1\ldots\bar{F}\ldots k})_{1\leqslant B\leqslant m} \quad ; \quad 1 \leqslant \bar{F} \leqslant k.$$

Comme $\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}$ ne s'annule pas au voisinage de a et

$\tilde{P}^{\underline{B}}_{\bar{F}} = \tilde{A}^{1\ldots\underline{B}\ldots k}_{1\ldots\bar{F}\ldots k}\left[\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}\right]^{\nu-1}$; la matrice $\mathcal{P}^{o}_{\psi}$ est constituée de vecteurs d'une base de $\operatorname{Ker}\tilde{H}$. La solution Z sera alors cherchée sous la forme :

$$\boxed{Z = \mathcal{P}^{o}_{\psi}(\lambda) + \frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}}\,\mathcal{B}^{o}_{\psi}(G)}$$

*

Afin de simplifier l'écriture, on pose pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\varphi^{r} = -\frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \cdot \mathcal{B}^{o}_{\psi} \circ (\mathrm{hop})^{r}_{\psi}$$

$$\omega^{r} = -\bar{\mathfrak{a}}^{o}_{\psi}.(\mathrm{hop})^{r}_{\psi}$$

$$\mu^{r} = -\bar{\mathfrak{a}}^{o}_{\psi}.\mathcal{H}^{r}_{\psi}$$

$$\sigma^r = \frac{-1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \mathcal{B}^o_\psi \circ \mathcal{H}^r_\psi \quad .$$

On conviendra que pour toute fonction f_j et tout couple d'entiers (r,k) tels que $r \leqslant k$ on a :

$$\sum_{j=k}^{r} f_j = 0 \ .$$

Définitions :

Soit $\{F_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite donnée

1) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on appelle (E_j) le système suivant :

$$\sum_{r=0}^{\min(t,j)} \mathcal{H}^r_\psi(Y_{j-r}) = F_j \ .$$

2) A toute suite $\lambda = \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, on associe une suite $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ définie par la formule de récurrence :

$$\alpha_j(\lambda) = \sum_{r=\nu}^{j} \mathfrak{C}^r(\lambda_{j-r}) + \sum_{r=1}^{\min(t,j)} \sigma^r(\alpha_{j-r}) + \frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \mathcal{B}^o_\psi(F_j).$$

Et une suite $\{\Omega_j(\lambda)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$\Omega_j(\lambda) = \sum_{r=\nu+1}^{j} \omega^r(\lambda_{j-r}) + \sum_{r=1}^{\min(t,j)} \mu^r(\alpha_{j-r}) + \bar{\mathfrak{a}}^o_\psi(F_j)$$

Remarques :

1) $\alpha_j(\lambda)$ est connu dès que l'on connait λ_ℓ pour $\ell \leqslant j-\nu$. (La démonstration est immédiate par récurrence sur j).

2) $\Omega_j(\lambda)$ est connu dès que l'on connait λ_ℓ pour $\ell \leqslant j-\nu-1$.

3) Si $\lambda_j = 0$ pour $j < 0$, alors $\alpha_j = 0$ pour $j < \nu$ et $\Omega_j = 0$ pour $j < \nu$ (puisque $F_j = 0$ si $j < \nu$).

Proposition 3.-

Pour tout $J \in \mathbb{Z}$, si pour $j \leqslant J$ les λ_j sont solutions du système :

$$(\mathcal{B}_j) \;:\; \mathcal{Q}^{\nu}_{\psi}(\lambda_j) = \Omega_{j+\nu}$$

alors les systèmes $(\mathcal{E}_j)$ pour $j \leqslant J+\nu$ sont compatibles et il existe $\lambda_{J+1},\dots,\lambda_{J+\nu}$ (à déterminer) tels que :

$\{Y_j\}_{j\leqslant J+\nu}$ solution des systèmes $\mathcal{E}_j$ pour $j \leqslant J+\nu$ entraîne que :

$$\forall\, j \leqslant J+\nu \qquad Y_j = \sum_{\ell=0}^{j} \mathcal{P}^{\ell}_{\psi}(\lambda_{j-\ell}) + \alpha_j \qquad (1)$$

Démonstration : On fait une récurrence sur J :

Pour $J \leqslant -\nu-1$.

Si on convient que $\lambda_j = 0$ si $j < 0$, alors pour tout $j \leqslant -\nu-1$, λ_j vérifie trivialement le système $(\mathcal{B}_j)$.

Car, dans ce cas, $\lambda_j = 0$ et $\Omega_{j+\nu} = 0$ puisque $j+\nu < 0$. D'autre part, comme pour $j < 0$, $Y_j = F_j = 0$, les systèmes $(\mathcal{E}_j)$ pour $j < 0$ sont trivialement vérifiées, et Y_j vérifie la relation (1).

Hypothèse de récurrence :

On suppose qu'il existe $J \in \mathbb{Z}$, tel que :

si les λ_j sont solutions du système $(\mathcal{B}_j)$ pour $j \leqslant J-1$, alors les systèmes $(\mathcal{E}_j)$ pour $j \leqslant J-1+\nu$ sont compatibles ; et il existe

$\lambda_J, \dots, \lambda_{J+\nu-1}$ (à déterminer) tels que les solutions Y_j ; $j \leqslant J+\nu-1$ des systèmes $(\mathcal{E}_j)$; $j \leqslant J+\nu-1$, s'écrivent :

$$Y_j = \sum_{\ell=0}^{j} P_\psi^\ell(\lambda_{j-\ell}) + \alpha_j .$$

Montrons alors que si pour $j \leqslant J$, λ_j est solution de :

$\mathcal{Q}_\psi^\nu(\lambda_j) = \Omega_{j+\nu}$ alors le système $(\mathcal{E}_{J+\nu})$ est compatible et sa solution $Y_{J+\nu}$ est de la forme :

$$Y_{J+\nu} = \sum_{\ell=0}^{J+\nu} P_\psi^\ell(\lambda_{J+\nu-\ell}) + \alpha_{J+\nu}$$

où $\lambda_{J+\nu}$ est à déterminer.

Ecrivons le système $\mathcal{E}_{J+\nu}$:

$$\sum_{r=0}^{J+\nu} H_\psi^r(Y_{J+\nu-r}) = F_{J+\nu} \qquad \text{soit}$$

$$H_\psi^o(Y_{J+\nu}) + \sum_{r=1}^{J+\nu} H_\psi^r(Y_{J+\nu-r}) = F_{J+\nu} .$$

Comme pour $r \geqslant 1$, $J+\nu-r \leqslant J+\nu-1$, on a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$Y_{J+\nu-r} = \sum_{\ell=0}^{J+\nu-r} P_\psi^{J+\nu-r-\ell}(\lambda_\ell) + \alpha_{J+\nu-r} \qquad ;$$

Remplaçons ces valeurs dans l'équation :

$$H_\psi^o(Y_{J+\nu}) + \sum_{r=1}^{J+\nu} \{ \sum_{\ell=0}^{J+\nu-r} H_\psi^r . P_\psi^{J+\nu-r-\ell}(\lambda_\ell) + H_\psi^r(\alpha_{J+\nu-r}) \} = F_{J+\nu} .$$

$$\text{Soit } \; H_\psi^o(Y_{J+\nu}) + \sum_{\ell=0}^{J+\nu-1} (\sum_{r=1}^{J+\nu-\ell} H_\psi^r o P_\psi^{J+\nu-r-\ell})(\lambda_\ell) + \sum_{r=1}^{J+\nu} H_\psi^r(\alpha_{J+\nu-r}) = F_{J+\nu} .$$

Comme : $\sum_{r=1}^{J+\nu-\ell} H_\psi^r o P_\psi^{J+\nu-r-\ell} = (h.p)_\psi^{J+\nu-\ell} - H_\psi^o \text{ o } P_\psi^{(J+\nu-\ell)}$,

on a :

$$H_\psi^o(Y_{J+\nu}) + \sum_{\ell=0}^{J+\nu-i} \{(h.p)_\psi^{J+\nu-\ell} - H_\psi^o . P_\psi^{(J+\nu-\ell)}\}(\lambda_\ell) + \sum_{r=1}^{J+\nu} H_\psi^r(\alpha_{J+\nu-r}) = F_{J+\nu}$$

Soit encore :

$$H_\psi^o[Y_{J+\nu} - \sum_{k=1}^{J+\nu} P_\psi^k(\lambda_{J+\nu-k})] = F_{J+\nu} - \sum_{k=1}^{J+\nu} (h.p)_\psi^k(\lambda_{J+\nu-k}) - \sum_{r=1}^{J+\nu} H_\psi^r(\alpha_{J+\nu-r}).$$

Comme pour $k < \nu$ $(h.p)_\psi^\ell = 0$, et d'après les conventions prises (cf. p. 22), $Y_{J+\nu}$ est solution de :

$$H_\psi^o[Y_{J+\nu} - \sum_{k=1}^{J+\nu} P_\psi^k(\lambda_{J+\nu-k})] = F_{J+\nu} - \sum_{k=\nu}^{J+\nu} (h.p)_\psi^k(\lambda_{J+\nu-k}) - \sum_{r=1}^{J+\nu} H_\psi^r(\alpha_{J+\nu-r}) .$$

$Y_{J+\nu}$ est donc solution d'un système d'équations linéaires, dont la condition de compatibilité est :

$$\bar{\mathfrak{a}}_\psi^o[F_{J+\nu} - \sum_{k=\nu}^{J+\nu} (h.p)_\psi^k(\lambda_{J+\nu-k}) - \sum_{r=1}^{J+\nu} H_\psi^r(\alpha_{J+\nu-r})] = 0.$$

Soit :

$$\bar{\mathfrak{a}}_\psi^o(h.p)_\psi^\nu(\lambda_J) = \bar{\mathfrak{a}}_\psi^o(F_{J+\nu}) - \sum_{k=\nu+1}^{J+\nu} \bar{\mathfrak{a}}_\psi^o(h.p)_\psi^k(\lambda_{J+\nu-k})$$

$$- \sum_{r=1}^{J+\nu} \bar{\mathfrak{a}}_\psi^o . H_\psi^r(\alpha_{J+\nu-r}).$$

Soit d'après nos notations et puisque $(h.p)_\psi^r = 0$ si $r < \nu$:

$$\mathcal{Q}^{\nu}_{\psi}(\lambda_J) = \bar{\mathfrak{a}}^{o}_{\psi}(F_{J+\nu}) + \sum_{k=\nu+1}^{J+\nu} \omega^{k}(\lambda_{J+\nu-k}) + \sum_{r=1}^{J+\nu} \mu^{r}(\alpha_{J+\nu-r}) \iff \mathcal{Q}^{\nu}_{\psi}(\lambda_J) = \Omega_{J+\nu}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la condition de compatibilité est vérifiée. La résolution du système nous donne alors :

$\left[Y_{J+\nu} - \sum_{k=1}^{J+\nu} \mathcal{P}^{k}_{\psi}(\lambda_{J+\nu-k})\right]$ est égal à la somme d'une solution du système homogène associé : $\mathcal{P}^{o}_{\psi}(\lambda_{J+\nu})$; où $\lambda_{J+\nu}$ est à déterminer ; et d'une solution particulière :

$$\frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \mathcal{B}^{o}_{\psi}(F_{J+\nu}) - \sum_{k=\nu}^{J+\nu} \frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \mathcal{B}^{o}_{\psi}.(h.p)^{k}_{\psi}(\lambda_{J+\nu-k}) - \sum_{r=1}^{J+\nu} \frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \mathcal{B}^{o}_{\psi} \circ \mathcal{H}^{r}_{\psi}(\alpha_{J+\nu-r}) =$$

$$\frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \mathcal{B}^{o}_{\psi}(F_{J+\nu}) + \sum_{k=\nu}^{J+\nu} \varphi^{k}(\lambda_{J+\nu-k}) + \sum_{r=1}^{J+\nu} \sigma^{r}(\alpha_{J+\nu-r}) = \alpha_{J+\nu}.$$

On a donc :

$$Y_{J+\nu} = \sum_{k=0}^{J+\nu} \mathcal{P}^{k}_{\psi}(\lambda_{J+\nu-k}) + \alpha_{J+\nu}.$$

Ce qui démontre la proposition 3.

Remarque à propos des conditions de compatibilité ($\mathcal{B}_j$).

L'opérateur q, étant bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité ν, et S étant régulière pour cette décomposition, la condition de compatibilité se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires le long des courbes bicaractéristiques par rapport à H', des hypersurfaces caractéristiques d'équations $\psi(x)$ = constante.

En effet :

q étant b.d.ν./H' on a :

$$\mathcal{Q}^{\nu}_{\varphi} = \tilde{\Lambda}_o [(h')^{\nu}]^{\nu}_{\varphi} + \tilde{\Lambda}_1 [(h')^{\nu-1}]^{\nu-1}_{\varphi} + \ldots + \tilde{\Lambda}_{\nu} .$$

Comme pour tout $r \geqslant 1$, $[(h')^r]^r_{\varphi} = [(h')^1_{\varphi}]^r$ [9], [11]

$$\mathcal{Q}^{\nu}_{\varphi} = \tilde{\Lambda}_o [(h')^1_{\varphi}]^{\nu} + \ldots + \tilde{\Lambda}_{\nu} .$$

Et $(h')^1_{\varphi}$ est l'opérateur de dérivation le long des courbes bicaractéristiques. Dans une carte locale,

$$(h')^1_{\varphi} = p^{\alpha}\partial_{\alpha} + \beta.$$

On peut alors se ramener, en utilisant les équations d'Hamilton-Jacobi, à des dérivations en $\frac{d}{dt}$. Et $\mathcal{Q}^{\nu}_{\varphi}$ détermine alors un système d'équations différentielles ordinaires.

Remarque : Dans le cas analytique, nous utiliserons le théorème de Cauchy-Kowalewsky, qui nous assure de l'existence d'une solution λ_o analytique au voisinage de a.

Dans ce cas, nous pouvons travailler aussi bien avec l'opérateur $q_{\nu-1}$, qu'avec q_{ν}.

Néanmoins, lorsque nous travaillons en C^{∞}, nous avons besoin de l'opérateur de dérivation le long des courbes bicaractéristiques, et donc nous utiliserons l'opérateur q_{ν}, pour nous ramener à des équations différentielles ordinaires.

§ 7 - *Passage des* $\lambda_j(0,x')$ *aux* $\bar{Y}_j(0,x') = (Y^{\bar{F}}_j(0,x'))_{1\leqslant \bar{F}\leqslant k}$.

Soit Q une hypersurface transverse à S d'équation locale $x^o = 0$.

Le problème posé dans ce paragraphe est le suivant :

On se fixe ν données initiales sur Q :

$$\partial_{o(\alpha)}\bar{Y}_j(0,x') \quad ; \quad \alpha = 0,\dots,\nu-1 .$$

On cherche alors à déterminer, à partir de ces valeurs, les ν données initiales sur Q :

$$\partial_{o(\alpha)}\lambda_j(0,x') \quad ; \quad \alpha = 0,\dots,\nu-1 .$$

Remarque :

Comme le rang de la matrice $\tilde{H}(x)$ est $(m-k)$, la dimension du noyau de $\tilde{H}(x)$ est k, et une base particulière de $\mathrm{Ker}\,\tilde{H}(x)$ est donnée par : [36]

$$(\tilde{P}^{B}_{\bar{F}})(x)_{1\leqslant B\leqslant m} , 1 \leqslant \bar{F} \leqslant k .$$

De plus, on a :

$$\det\left[\tilde{P}^{\bar{B}}_{\bar{F}}(x)\right]_{1\leqslant\bar{B},\bar{F}\leqslant k} = \det\left[\delta^{\bar{B}}_{\bar{F}}(\tilde{A}^{1\dots k}_{1\dots k})^{\nu}\right]_{1\leqslant\bar{B},\bar{F}\leqslant k} = (\tilde{A}^{1\dots k}_{1\dots k})^{k\nu} .$$

Comme $\tilde{A}^{1\dots k}_{1\dots k}(x) \neq 0$ par hypothèse ; $\det(\tilde{P}^{\bar{B}}_{\bar{F}}(x)) \neq 0$.

On notera cette matrice inversible $k \times k$ par $\bar{P}$.

*

Nous allons maintenant estimer les $\partial_{o(\alpha)}\lambda_j$, $\alpha = 0,\dots,\nu-1$ en fonction des $\partial_{o(\alpha)}\bar{Y}_j$, $\alpha = 0,\dots,\nu-1$.

Rappelons l'expression des Y_j en fonction des λ_j :

$$Y_j = \sum_{\ell=0}^{j} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \alpha_j \ .$$

On convient que $\lambda_j = 0$ si $j < 0$ et on pose :

$$Y_j = \sum_{\ell=0}^{r} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + X_{j,r}$$

où $X_{j,r} = \sum_{\ell=r+1}^{j} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \alpha_j .$

N.B. Si $r \geqslant j$, comme par convention $\sum_{r+1}^{j} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) = 0$ alors $X_{j,r} = \alpha_j$ et donc

$$Y_j = \sum_{\ell=0}^{r} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \alpha_j = \sum_{\ell=0}^{j} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \sum_{\ell=j+1}^{r} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \alpha_j \ .$$

Comme $\lambda_j = 0$ si $j < 0$, la dernière somme est nulle et on a bien :

$$Y_j = \sum_{\ell=0}^{j} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \alpha_j \ .$$

*

Pour $r = \nu-k-1$, on aura alors :

$$\bar{Y}_{j-k} = \sum_{\ell=0}^{\nu-k-1} \bar{\mathcal{P}}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \bar{X}_{(j-k),(\nu-k-1)}$$

où $\bar{p} = (p_{\bar{F}}^{\bar{B}})_{1\leqslant\bar{B},\bar{F}\leqslant k}$ et $\bar{X}_{(j-k),(\nu-k-1)} = \sum_{\ell=\nu-k}^{j-k} \bar{\mathcal{P}}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-\ell}) + \bar{\alpha}_{j-k}$;

$$\bar{\alpha}_j = (\alpha_j^{\bar{B}})_{1\leqslant\bar{B}\leqslant k} \ .$$

Comme $\bar{P}^{\ell}_{\psi} = \frac{1}{\ell!}\,\widetilde{\partial^{o(\ell)}\bar{P}\partial_o^{(\ell)}} + \bar{t}^{\ell}$

avec $\bar{t}^{o} \equiv 0$ et $\bar{t}^{\ell}$ opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à ℓ en x et strictement inférieur à ℓ en x^{o}, on a :

$$\bar{Y}_{j-k} = \sum_{\ell=0}^{\nu-k-1} \frac{1}{\ell!}\,\widetilde{\partial^{o(\ell)}\bar{P}\partial_o^{(\ell)}}(\lambda_{j-k-\ell}) + \sum_{\ell=1}^{\nu-k-1} \bar{t}^{\ell}(\lambda_{j-k-\ell}) + \bar{X}_{(j-k);(\nu-k-1)}.$$

En dérivant k fois cette expression par rapport à x^{o}, on obtient :

$$\partial_o^{(k)}(\bar{Y}_{j-k}) = \sum_{\ell=0}^{\nu-k-1} \frac{1}{\ell!}\,\widetilde{\partial^{o(\ell)}\bar{P}\partial_o^{(\ell+k)}}(\lambda_{j-k-\ell}) + \bar{R}^{(k)}_{j-k}$$

avec :

$$\bar{R}^{(k)}_{j-k} = \sum_{\ell=0}^{\nu-k-1} \frac{1}{\ell!} \sum_{1\leqslant s\leqslant k} C_k^s\,\partial_o^{(s)}\widetilde{\partial^{o(\ell)}\bar{P}\partial_o^{(\ell+k-s)}}(\lambda_{j-k-\ell}) + \sum_{\ell=1}^{\nu-k-1} \partial_o^{(k)}.\bar{t}^{\ell}(\lambda_{j-k-\ell}) +$$

$$+ \partial_o^{(k)}(\bar{X}_{(j-k),(\nu-k-1)} .$$

Soit encore :

$$\boxed{\partial_o^{(k)}(\bar{Y}_{j-k}) = \sum_{\ell=k}^{\nu-1} \frac{1}{(\ell-k)!}\,\widetilde{\partial^{o(\ell-k)}\bar{P}\partial_o^{(\ell)}}(\lambda_{j-\ell}) + R^{(k)}_{j-k}} \quad .$$

Considérons le système suivant, qu'on notera S^{j}, et où les fonctions qui interviennent sont prises en $(0,x')$:

$$S^j \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{Y}_j & = & \sum_{\ell=0}^{\nu-1} \frac{1}{\ell!} \widetilde{\partial^{o(\ell)}\bar{P}}\partial_o^{(\ell)}(\lambda_{j-\ell}) + \bar{R}_j^{(o)} \\ \partial_o(\bar{Y}_{j-1}) & = & \sum_{\ell=1}^{\nu-1} \frac{1}{(\ell-1)!} \widetilde{\partial^{o(\ell-k)}\bar{P}}\partial_o^{(\ell)}(\lambda_{j-\ell}) + \bar{R}_{j-1}^{(1)} \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \partial_o^{(k)}(\bar{Y}_{j-k}) & = & \sum_{\ell=k}^{\nu-1} \frac{1}{(\ell-k)!} \widetilde{\partial^{o(\ell-k)}\bar{P}}\partial_o^{(\ell)}(\lambda_{j-\ell}) + \bar{R}_{j-k}^{(k)} \\ & \vdots & \\ \partial_o^{(\nu-1)}(\bar{Y}_{j-(\nu-1)}) & = & \tilde{\bar{P}}\partial_o^{(\nu-1)}(\lambda_{j-(\nu-1)} + \bar{R}_{j-(\nu-1)}^{(\nu-1)} \end{array} \right.$$

C'est un système d'équations linéaires, d'ordre $k\nu \times k\nu$, des variables $\partial_o^{(k)}(\bar{Y}_{j-k})$, $0 \leqslant k \leqslant \nu-1$; en fonction des inconnues $\partial_o^{(\ell)}(\lambda_{j-\ell})$, $0 \leqslant \ell \leqslant \nu-1$.

Supposons pour le moment qu'au système S^j, $\bar{R}_{j-k}^{(k)}$; $0 \leqslant k \leqslant \nu-1$ soient connues. On montre alors qu'on peut déterminer les inconnues $\partial_o^{(\ell)}(\lambda_{j-\ell})$, $0 \leqslant \ell \leqslant \nu-1$ en fonction des $\partial_o^{(k)}(\bar{Y}_{j-k})$, $0 \leqslant k \leqslant \nu-1$.

En effet, le système S^j étant "triangulaire", et la matrice $\bar{P}$ étant inversible, la dernière équation nous donne

$$\partial_o^{(\nu-1)}(\lambda_{j-(\nu-1)}) = \left[\tilde{\bar{P}}\right]^{-1}(\partial_o^{(\nu-1)}(\bar{Y}_{j-(\nu-1)} - \bar{R}_{j-(\nu-1)}^{(\nu-1)})$$

En substituant $\partial_o^{(\nu-1)}(\lambda_{j-(\nu-1)})$ dans l'avant dernière équation, nous obtenons $\partial_o^{(\nu-2)}(\lambda_{j-(\nu-2)})$ en fonction de $\partial_o^{(\nu-1)}(\bar{Y}_{j-(\nu-1)})$

et de $\partial_o^{(\nu-2)}(\bar{Y}_{j-(\nu-2)})$.

Ainsi, de proche en proche, en substituant, chaque $\partial_o^{(\ell)}\lambda_{j-\ell}$ connu dans l'équation précédente, nous obtenons finalement :

$\lambda_j(0,x'),\dots,\partial_o^{(\nu-1)}\lambda_{j-(\nu-1)}(0,x')$ en fonction de

$\bar{Y}_j(0,x'),\dots,\partial_o^{(\nu-1)}\bar{Y}_{j-(\nu-1)}(0,x')$.

• Montrons qu'effectivement $\vec{R}_j$ est connu au système S^j. Pour cela, on suppose résolus les systèmes $S^o,\dots,S^{j-1}$. Rappelons que les inconnues d'un système S^{j-r} sont :

$$\lambda_{j-r}(0,x'),\dots,\partial_o^{(\nu-1)}(\lambda_{j-r-(\nu-1)})(0,x').$$

Donc si $r > k$ et $k \leqslant \nu-1$, $\partial_o^{(k)}\lambda_{j-r}(0,x')$ est déterminé au système $S^{j-(r-k)}$ ainsi que toutes ses dérivées par rapport à x'.

Par conséquent, si $r \geqslant \nu-1$, λ_{j-r} est connu, car connaissant ses traces sur Q, on a pu intégrer l'équation qui le détermine.

Calcul de $\bar{R}_{j-k}^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant \nu-1$.

$$\bar{R}_{j-k}^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{\nu-k-1} \frac{1}{\ell!} \sum_{1\leqslant s\leqslant k} C_k^s\, \partial_o^{(s)}\, \widetilde{\partial_o^{(\ell)}\bar{P}}\, \partial_o^{(\ell+k-s)}(\lambda_{j-k-\ell}) + \sum_{\ell=1}^{\nu-k-1} \partial_o^{(k)}\bar{t}^{\ell}(\lambda_{j-k-\ell})$$

$$+ \partial_o^{(k)}(\bar{X}_{(j-k),(\nu-k-1)}).$$

Dans la première sommation, les $\partial_o^{(\ell+k-s)}(\lambda_{j-k-\ell})$ sont connus car $s \geqslant 1$ et $\ell+k-s \leqslant \nu-2$.

Dans la seconde sommation, comme $\bar{t}^{\ell}$ est un opérateur différentiel d'ordre strictement inférieur à ℓ en x^o, les dérivations en x^o, intervenant dans ce terme, sont du type : $\partial_o^{(u)}(\lambda_{j-k-\ell})$ avec $u \leqslant k+\ell-1 \leqslant \nu-2$; comme $k+\ell-u \geqslant 1$, ceux-ci sont connus.

Les autres dérivations de ce terme étant par rapport à x', les $\partial_o^{(k)} \circ \bar{t}^{\ell}(\lambda_{j-k-\ell})(0,x')$ sont connus.

Calcul de $\partial_o^{(k)}(\bar{X}_{(j-k),(\nu-k-1)})$.

$$(\bar{X}_{(j-k),(\nu-k-1)} = \bar{\alpha}_{j-k} + \sum_{\ell=\nu-k}^{j-k} \bar{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-k-\ell}) .$$

Dans la sommation, comme $k+\ell \geqslant \nu$ on connait les $\lambda_{j-k-\ell}$ ainsi que toutes leurs dérivées. Et donc

$$\partial_o^{(k)}(\sum_{\ell=\nu-k}^{j-k} \bar{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{j-k-\ell})) \text{ est connu.}$$

Il reste à voir que :

$$\partial_o^{(k)}(\bar{\alpha}_{j-k}) \text{ est connu.}$$

Puisque $k \geqslant 0$, $\lambda_o,\ldots,\lambda_{j-k-\nu}$ sont connus, donc d'après la remarque 1 de la page 21, α_{j-k} est connu et, en particulier, $\partial_o^{(k)}\bar{\alpha}_{j-k}(0,x')$ est connu. Au système S_j, on a donc $\overrightarrow{R_j}$ qui est connu.

Conclusion :

La donnée de $\partial_o^{(k)}\bar{Y}_j(0,x')$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour $k \in \{0,\ldots,\nu-1\}$, détermine de façon unique les valeurs initiales $\partial_o^{(k)}\lambda_j(0,x')$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,\ldots,\nu-1\}$. Et d'après les équations que vérifient les λ_j, ceux-ci sont déterminés de manière unique, et servent à leur tour à déterminer les Y_j, avec la formule 1 de la proposition 3.

Ce résultat sera utilisé au chapitre II, lorsqu'on imposera des données initiales aux Y_j, pour que le développement asymptotique Y permette de trouver une solution nulle pour h.

N.B. L'indice k, défini dans (H)(a) page 7 ($\det H = (H')^{k\nu}H''$, $A^{1\ldots k}_{1\ldots k}$, $(p^{\bar{F}}_{\bar{D}})_{1\leqslant\bar{F},\bar{D}\leqslant k}$, ...) a été utilisé abusivement à partir de la page 28 comme un indice quelconque

$(Y_{j-k}, X_{j-k,\nu-k-1}, \lambda_{j-k-\ell}, \bar{R}^{(k)}_{j-k}, \partial^{(k)}_{o}\bar{Y}_{j-k}, \ldots)$.

On s'est autorisé cet abus dans la mesure où il n'y a aucun risque de confusion.

CHAPITRE II

SOLUTIONS NULLES

----

§ 1 - Rappels sur les fonctions majorantes.

Soit E une algèbre de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $E[[X^1,\dots,X^n]]$ l'algèbre des séries formelles en X, à coefficients dans E.

Définition 1.-

Soient $u \in E[[X^1,\dots,X^n]]$ et $U \in \mathbb{C}[[X^1,\dots,X^n]]$

$$u = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} u_\alpha X^\alpha \quad \text{et} \quad U = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} U_\alpha X^\alpha .$$

On dit que U est une série majorante de u, ou que U majore u, si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad ||u_\alpha|| \leqslant U_\alpha$$

et on note $u << U$.

Cette relation est stable par dérivation et vérifie la propriété suivante :

Si $u << U$ et $v << V$ alors $u+v << U+V$ et $u.v << U.V$.

Définition 2.-

Soit $u \in E[[X^1,\dots,X^n]]$. On appelle domaine de convergence de u, l'ensemble :

$$\mathcal{D}(u) = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tels que : } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|u_\alpha\|_E |x|^\alpha < \infty\}.$$

Propriété :

Soient $u \in E[[X^1,\dots,X^n]]$ et $U \in \mathbb{C}[[X^1,\dots,X^n]]$ telles que $u << U$. Alors : $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(u)$.

Soit $x \in \mathcal{D}(U)$; on note abusivement $u(x)$ et $U(x)$ la somme de ces séries.

On note alors : $u(x) << U(x)$, cela équivaut à :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad \|D^\alpha u(0)\| \leqslant D^\alpha U(0).$$

Définition :

$U(x)$ est appelée fonction majorante de $u(x)$.

Propriété :

Si $u << U$ et

$|x| \leqslant X$ c'est-à-dire : $\forall\, i = 1,\dots,n \quad |x^i| \leqslant X^i$.

Alors :

$$|u(x)| \leqslant U(X).$$

En particulier, on aura :

$$|u(x)| \leqslant U(|x|) \quad \text{si} \quad |x| = (|x^1|,\dots,|x^n|).$$

Définition :

Si $U(X) = (U^1(X),\dots,U^m(X))$ et

$u(X) = (u^1(X),\dots,u^m(X))$. Alors :

$$u(X) << U(X) \iff \forall\, B \in \{1,\dots,m\} \quad u^B(X) << U^B(X).$$

Soient $r,R',R \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R' < R$. On a la proposition ([38], [16]).

Proposition 1.-

Soit $\theta(t)$ une série formelle d'une variable t, telle que :

$$\theta(t) \gg 0 \quad \text{et} \quad (R'-t)\theta(t) \gg 0.$$

Alors : $\forall\, j \in \mathbb{N}$

a) $\theta^{(j)}(t) \ll R'\theta^{(j+1)}(t)$;

b) $\frac{1}{R-t}\, \theta^{(j)}(t) \ll \frac{1}{R-R'}\, \theta^{(j)}(t)$.

Remarque : On a le même résultat si on prend $\boldsymbol{\theta}(t) = (\theta(t),\dots,\theta(t))$.

Démonstration :

On montre que $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $\theta^{(j)}$ vérifie les mêmes hypothèses que θ : La relation $\ll$ étant stable par dérivation, on a :

$$\theta^{(j)}(t) \gg 0, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

Dérivons j fois $(R'-t)\theta(t)$, on obtient :

$$(R'-t)\theta^{(j)}(t) - j\theta^{(j-1)}(t) \gg 0.$$

Comme dans $\mathbb{C}[[X]]$, la relation $\ll$ est stable pour l'addition de séries positives, on a :

$$(R'-t)\theta^{(j)}(t) \gg j\theta^{(j-1)}(t) \gg 0$$

$$\Longrightarrow \quad (R'-t)\theta^{(j)}(t) \gg 0.$$

Montrons que θ vérifie a) et b) pour $j = 0$:

on a : $R'\theta'(t) - (R'-t)\theta'(t) = t\theta'(t) \gg 0$.

En ajoutant la série positive $(R'-t)\theta'(t)$, il vient que :

$$R'\theta'(t) \gg (R'-t)\theta'(t).$$

Dérivons l'expression $(R'-t)\theta(t) \gg 0$, on obtient :

$$(R'-t)\theta'(t) - \theta(t) \gg 0 \implies \theta(t) \ll (R'-t)\theta'(t) \ll R\theta'(t)$$

$$\implies \qquad \theta(t) \ll R'\theta'(t) \quad \text{c'est a) pour } j = 0.$$

D'autre part, comme :

$$(R'-t)\theta(t) \gg 0 \quad ; \quad \frac{1}{R-t} \gg 0 \quad \text{et} \quad (R-R') > 0 \quad \text{on a :}$$

$$\frac{1}{(R-R')}\,\theta(t) - \frac{1}{(R-t)}\,\theta(t) = \frac{(R'-t)}{(R-R')}\,\frac{\theta(t)}{(R-t)} \gg 0$$

$$\implies \qquad \frac{1}{R-t}\,\theta(t) \ll \frac{1}{(R-R')}\,\theta(t) \qquad \text{c'est b) pour } j = 0.$$

Ce qui démontre la proposition 1.

Proposition 2 [38].-

Soit $C(x,D)$ un opérateur différentiel linéaire matriciel d'ordre ℓ en x et ℓ_1 en x^o, à coefficients analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{C}^{n+1}$. Alors :

Il existe une constante positive B ne dépendant que de $C(x,D)$ telle que :

Si $u \ll \theta^{(j)} \circ t$ alors $C(u) \ll B\rho^{\ell_1}\theta^{(j+\ell)} \circ t$ où $t(x) = \rho x^o + x^1 + \ldots + x^n$; $\rho \geqslant 1$ et $\theta(t)$ est une série formelle en t, vérifiant les hypothèses de la proposition 1.

Lemme 1 [10].-

Soit $C(x,D)$ un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre ℓ en x et d'ordre strictement inférieur à ℓ en x^o à coefficients analytiques au voisinage de 0.

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_o^{(\ell)} u = C(u) + f \\ \partial_o^{(k)} u(0,x') = z_k(x') \quad ; \quad 0 \leqslant k \leqslant \ell-1. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{C}(x,D)$ un opérateur majorant $C(x,D)$, et soient : F une majorante de f ; Z_k de z_k.

Alors si U est telle que :

$$\begin{cases} \partial_o^{(\ell)} U \gg \mathcal{C}(x,D)U(x) + F(x) \\ \partial_o^{(k)} U(0,x') \gg Z_k(x') \quad ; \quad 0 \leqslant k \leqslant \ell-1. \end{cases}$$

On a : $u(x) \ll U(x)$.

Proposition 3 [10].-

Si $f \ll W\theta^{(j+\ell)} \circ t$ et

$z_k(x') \ll w_k \theta^{(j+k)} \circ t\,(0,x') \quad ; \quad \forall\ 0 \leqslant k \leqslant \ell-1$

Alors il existe $\rho_o > 0$ tel que :

$\forall\, \rho \geqslant \rho_o$, $\exists B_1$ indépendant de θ telle que la solution $u(x)$ de :

$$\begin{cases} \partial_o^{(\ell)} u = C(x,D)u + f \\ \partial_o^{(k)} u(0,x') = z_k(x') \quad ; \quad 0 \leqslant k \leqslant \ell-1 \end{cases}$$

vérifie : $u(x) \ll B_1 \theta^{(j)} \circ t$.

$C(x,D)$ étant un opérateur d'ordre ℓ en x et $\leqslant \ell-1$ en x^o.

Démonstration :

On peut trouver $R > 0$ tel que les coefficients de $C(x,D)$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur un voisinage du polydisque $PD(0,R)$, et soient majorés par $\frac{M}{R-t(x)}$, $M > 0$. On pose alors :

$$\mathcal{C}(x,D) = \frac{M}{R-t(x)} \sum_{\substack{\alpha_o<\ell \\ |\alpha|\leqslant\ell}} D^\alpha ,$$

et on a : $C(x,D) << \mathcal{C}(x,D)$

D'après le lemme, il suffit de trouver B_1 tel que :

$$\begin{cases} \partial_o^{(\ell)}(B_1\theta^{(j)} \circ t) >> \mathcal{C}(x,D)(B_1\theta^{(j)} \circ t) + W\theta^{(j+\ell)} \circ t \\ \partial_o^{(k)}B_1\theta^{(j)} \circ t >> w_k\theta^{(j+k)} \circ t \quad ; \quad 0 \leqslant k \leqslant \ell-1 . \end{cases}$$

Et d'après la proposition 2, il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} B_1\rho^\ell\theta^{(j+\ell)} \circ t >> (BB_1\rho^{\ell-1} + W)\theta^{(j+\ell)} \circ t \\ B_1\rho^k\theta^{(j+k)} >> w_k\theta^{(j+k)} \circ t \quad ; \quad 0 \leqslant k \leqslant \ell-1. \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} B_1\rho^\ell \geqslant BB_1\rho^{\ell-1} + W \\ B_1 \rho^k \geqslant w_k \qquad \forall \ 0 \leqslant k \leqslant \ell-1. \end{cases}$$

Ceci impose $\rho > B = \rho_o$ et on cherche B_1 tel que :

$$\begin{cases} B_1 \geqslant \dfrac{W}{\rho^\ell(1-\frac{B}{\rho})} \\ B_1 \geqslant \dfrac{w_k}{\rho^k} \qquad \forall \ 0 \leqslant k \leqslant \ell-1. \end{cases}$$

On pose alors :

$$B_1 = \max\left(\frac{W}{\rho^{\ell}(1-\frac{B}{\rho})}\,,\ w_o,\ \frac{w_1}{\rho},\dots,\ \frac{w_{\ell-1}}{\rho^{\ell-1}}\right) .$$

Ce qui démontre la proposition 3.

§ 2 - *Définition et théorème.*

Dans ce chapitre, h est un opérateur différentiel matriciel à coefficients analytiques au voisinage de a.

Q est une hypersurface d'équation locale $x^o = 0$, transverse à S.

On se placera dans une carte locale où l'hypersurface caractéristique S a pour équation $\psi(x) = x^1 = 0$.

Le vecteur $(p^{\alpha}(a))_{1\leqslant\alpha\leqslant n}$ n'étant pas nul, on supposera que c'est $p^o(x) \neq 0$ sur Ω (Le choix de $\psi(x) = x^1$ nous donne avec l'identité d'Euler $p^1(x) = 0$).

Définition :

Soit h(x,D) un opérateur différentiel linéaire d'ordre t à coefficients analytiques sur un voisinage Ω d'un point a de X. Soit ψ une fonction analytique sur Ω, à valeur dans $\mathbb{R}$ et S l'hypersurface passant par a, d'équation $\psi(x) = 0$. Une solution nulle pour h, en a, relative à S, est une ultradistribution u définie sur un voisinage Ω' de a, $\Omega' \subset \Omega$, telle que :

$$hu = 0 \quad \text{sur } \Omega'$$
$$a \in \text{Supp } u \subset \Omega'$$
$$u|_{N \cap \Omega'} = 0 \quad \text{où } N = \{x \in \Omega/\psi(x) < 0\}.$$

Au chapitre I, nous avons construit un développement asymptotique $Y = \sum_{j \geq 0} Y_j \times (f_j \circ \varphi)$

solution de :

$$hY = F .$$

Dans ce chapitre, nous prendrons $F = 0$; Y est alors une onde asymptotique pour $h(x,D)$.

Les coefficients Y_j, $j \geq 0$, de Y sont déterminés en fonction des λ_j, $j \geq 0$, solutions d'équations différentielles d'ordre ν. Pour que l'onde Y permette de construire une solution nulle pour h, nous imposerons, dans les prochains paragraphes, les données de Cauchy suivantes :

$$\forall\ j \geq 0, \quad \partial_o^{(\ell)} \bar{Y}_j(0,x) = (\delta_o^\ell \delta_j^o) \vec{1} \qquad \ell \in \{0,\dots,\nu-1\}$$

où $\vec{1} = (1,0,\dots,0)$.

Comme nous l'avons vu au § 7 du chap. I, ces données déterminent de façon unique les données de Cauchy :

$$j \geq 0,\ \partial_o^{(\ell)} \lambda_j(0,x') \quad , \quad \ell \in \{0,\dots\dots,\nu-1\}.$$

Au paragraphe 3, nous majorerons celles-ci, afin d'obtenir des majorations sur les Y_j. On pose pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \{0,\dots,\nu-1\}$: $\partial_o^{(\ell)}(\lambda_j)(0,.) = d_j^\ell$.

Théorème :

Soit $h(x,D)$ un opérateur différentiel linéaire matriciel $m \times m$ et soit S une hypersurface caractéristique en a pour $h(x,D)$, d'équation $\varphi(x) = 0$.

Si $h(x,D)$ vérifie les hypothèses suivantes :

(H) a) $\det H = (H')^{k\nu}H''$

b) $H''(a,\mathrm{grad}\ \varphi(a)) \neq 0$

c) $H'(x,\mathrm{grad}\ \varphi(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega$

$$(p^{\alpha}(a))_{0\leqslant\alpha\leqslant n} \neq \vec{0}\ .$$

(L) a) $\forall\ x \in \Omega$

$$H(x,.)\underset{\phi'_x}{\sim}\left.\left[\begin{array}{ccc|ccc} [H'(x,.)]^{\nu} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & [H'(x,.)]^{\nu} & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m$$

b) $A^{1\ldots k}_{1\ldots k}(a,\mathrm{grad}\ \varphi(a)) \neq 0$

$(\mathcal{D}_{\nu})$ a) q_{ν} est b.d. ν/H'

b) S est régulière pour cette décomposition.

Alors, il existe une solution nulle en a, fonction ultradifférentiable de type $\{M_p\}$, ou ultradistribution de type (M_p) pour h, relativement à S.

N.B. Ce théorème montre la non-unicité de la solution du problème de Cauchy caractéristique (cf. théorème de Holgreen [19]).

§ 3 - *Majoration des coefficients de distorsion.*

a) Majoration de Y_o.

Y_o est donné par la formule :

$$Y_o = \mathcal{P}^o_\psi(\lambda_o)$$

où λ_o est solution du système :

$$\mathcal{Q}^\nu_\psi(\lambda_o) = 0$$

avec

$$\mathcal{Q}^\nu_\psi = \tilde{\Lambda}_o(x)(p^o(x))^\nu \partial_o^{(\nu)} + d(x,D)$$

où $d(x,D)$ est un opérateur différentiel matriciel d'ordre strictement inférieur à ν en x^o.

Comme $p^o(x) \neq 0$, et la matrice $\tilde{\Lambda}_o(x)$ est inversible (car S est régulière pour la bonne décomposition de q), on pose :

$$C(x,D) = -\frac{1}{p^o(x))^\nu}\left[\tilde{\Lambda}_o(x)\right]^{-1}.d(x,D) .$$

λ_o est alors solution du système :

$$\begin{cases} \partial_o^{(\nu)}(\lambda_o) = C(x,D)(\lambda_o) \\ \partial_o^{(\ell)}(\lambda_o)(0,x') = d_o^\ell(x'), \qquad 0 \leqslant \ell \leqslant \nu-1 . \end{cases}$$

Pour majorer λ_o, nous allons utiliser la proposition 3. Pour cela nous allons majorer $d_o^\ell(x')$, en faisant une récurrence sur ℓ :

Comme $Y_o = \mathcal{P}^o_\psi(\lambda_o)$

pour $\ell \in \{0,\dots,\nu-1\}$, on a :

$$\partial_o^{(\ell)}\bar{Y}_o = \tilde{\bar{\bar{P}}}\,\partial_o^{(\ell)}(\lambda_o) + \sum_{1\leqslant s\leqslant \ell} C_\ell^s\,\partial_o^{(s)}(\tilde{\bar{\bar{P}}}).\partial_o^{(\ell-s)}(\lambda_o)$$

et donc :

$$d_o^\ell = \left[\tilde{\bar{\bar{P}}}\right]^{-1}\left[\delta_o^\ell\vec{1} - \sum_{1\leqslant s\leqslant \ell} C_\ell^s\,\partial_o^{(s)}(\tilde{\bar{\bar{P}}})\,d_o^{\ell-s}\right] .$$

Pour $\ell = 0$, $d_o^o = \left[\tilde{\bar{\bar{P}}}\right]^{-1}(\vec{1})$

comme $1 \ll \frac{1}{\theta_o}\,\theta \circ t$

(où θ_o est le premier terme de la série $\theta(t)$) et en appliquant la proposition 2, on a :

$$d_o^o \ll \frac{B}{\theta_o}\,\theta \circ t .$$

<u>*N.B.*</u> Lorsqu'on utilisera la proposition 2, on conviendra de prendre la même constante B pour chaque opérateur.

Hypothèse de récurrence : Soit $\ell \in \{1,\dots,\nu-1\}$.

On suppose que pour tout $k \in \{0,\dots,\ell-1\}$, on a :

$$d_o^k \ll \frac{B}{\theta_o}\,\rho^k\theta^{(k)} \circ t .$$

Montrons alors que :

$$d_o^\ell \ll \frac{B}{\theta_o}\,\rho^\ell\theta^{(\ell)} \circ t$$

$$d_o^\ell = \left[\tilde{\bar{\bar{P}}}\right]^{-1} \sum_{1\leqslant s\leqslant \ell} C_\ell^s\,\partial_o^{(s)}\tilde{\bar{\bar{P}}}\,d_o^{\ell-s} .$$

Comme pour $s \geqslant 1$, $\ell - s \leqslant \ell - 1$, on a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$d_o^{\ell-s} << \frac{B}{\theta_o} \rho^{\ell-s} \theta^{(\ell-s)} \text{ o t.}$$

En appliquant la proposition 2 on a :

$$d_o^{\ell} << \sum_{1 \leqslant s \leqslant \ell} \frac{B^2}{\theta_o} \rho^{\ell-s} \theta^{(\ell-s)} \text{ o t.}$$

D'après la proposition 1 a) $\theta^{(\ell-s)}$ o t $<< (R')^s \theta^{(\ell)}$ o t

$$\Rightarrow \qquad d_o^{\ell} << \sum_{1 \leqslant s \leqslant \ell} \left(\frac{R'}{\rho}\right)^s \rho^{\ell} \frac{B^2}{\theta_o} \theta^{(\ell)} \text{ o t.}$$

On pose $C_o(\rho) = \sum_{1 \leqslant s \leqslant \nu-1} \left(\frac{R'}{\rho}\right)^s \leqslant \frac{2R'}{\rho}$ si $\rho \geqslant 2R'$ et on choisit

$\rho \geqslant 2BR'$, $\rho \geqslant 1$ et $\rho \geqslant 2R'$, on a alors :

$$d_o^{\ell} << \frac{B}{\theta_o} \rho^{\ell} \theta^{(\ell)} \text{ o t.}$$

Pour majorer λ_o, nous allons appliquer la proposition 3 avec :
$\ell = \nu$, $f = 0$, $W = 0$, $Z_\ell = d_o^\ell$, $j = 0$ et $w_\ell = \frac{B}{\theta_o} \rho^\ell$:

Il existe alors $\rho_o > 0$ tel que :

$\forall \rho \geqslant \rho_o$, $\exists$ B_1 tel que :

$\lambda_o << B_1 \theta \text{o t}$

avec $B_1 = \max\left(\frac{W}{\rho^\nu (1 - \frac{B}{\ell})} , w_o, \frac{w_1}{\rho}, \ldots, \frac{w_{\nu-1}}{\rho^{\nu-1}} \right) = \frac{B}{\theta_o}$.

Comme $Y_o = \mathcal{P}_\psi^o(\lambda_o)$, nous aurons en appliquant la proposition 2.

$$Y_o << \frac{B^2}{\theta_o} .\theta \text{ o t.}$$

b) Majoration de α_ν.

$\alpha_\nu = \mathcal{C}^\nu(\lambda_o)$ où

$$\mathcal{C}^\nu = - \frac{1}{\tilde{A}^{1\ldots k}_{1\ldots k}} \mathcal{B}^o_{\psi}\cdot(hp)^\nu_\psi$$

est un opérateur d'ordre ν. D'après la proposition 2, on a alors :

$$\alpha_\nu << \frac{B^2}{\theta_o} \rho^\nu \theta^{(\nu)} \text{ o } t .$$

On pose $C_1 = \dfrac{B^2}{\theta_o}$, on a donc :

$$\begin{cases} \lambda_o << \dfrac{C_1}{B} \theta \text{ o } t \\ Y_o << C_1 \theta \text{ o } t \\ \alpha_\nu << C_1 \rho^\nu \theta^{(\nu)} \text{ o } t. \end{cases}$$

c) Majoration de λ_j, Y_j, $\alpha_{j+\nu}$ pour $j \geqslant 0$. Récurrence.

Hypothèse de récurrence :

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $j \leqslant p$, on a :

$$\text{(H-R)} \quad \begin{cases} \lambda_j << \dfrac{C_1}{B} c^j \theta^{(j)} \text{ o } t \\ Y_j << C_1 c^j \theta^{(j)} \text{ o } t \\ \alpha_{\nu+j} << C_1 c^j \rho^\nu \theta^{(j+\nu)} \text{ o } t \end{cases}$$

c.1. Majoration de λ_{p+1}.

λ_{p+1} est solution de :

$$\mathcal{Q}_{\psi}^{\nu}(\lambda_{p+1}) = \Omega_{p+1+\nu}$$

en posant $\Omega'_{p+1+\nu} = \dfrac{1}{[p^{o}]^{\nu}} \left[\tilde{\Lambda}_{o}\right]^{-1} \Omega_{p+1+\nu}$,

λ_{p+1} est solution de :

$$\begin{cases} \partial_{o}^{(\nu)}(\lambda_{p+1}) = C(x,D)(\lambda_{p+1}) + \Omega'_{p+1+\nu} \\ \partial_{o}^{(\ell)}(\lambda_{p+1}) = d_{p+1}^{\ell} \qquad \ell \in \{0,\dots,\nu-1\}. \end{cases}$$

Pour pouvoir utiliser la proposition 3, nous allons majorer $\Omega'_{p+1+\nu}$ et d_{p+1}^{ℓ} pour $\ell \in \{0,\dots,\nu-1\}$.

c_1) α) <u>Majoration de</u> d_{p+1}^{ℓ}, <u>pour</u> $\ell \in \{0,\dots,\nu-1\}$.

Comme $Y_{p+1} = \sum\limits_{k=0}^{p+1} \mathcal{P}_{\psi}^{k}(\lambda_{p+1-k}) + \alpha_{p+1}$, on a pour tout $\ell \in \{0,\dots,\nu-1\}$:

$$\partial_{o}^{(\ell)}\bar{Y}_{p+1} = \tilde{\bar{P}}\, \partial_{o}^{(\ell)}(\lambda_{p+1}) + \sum_{1 \leqslant s \leqslant \ell} C_{\ell}^{s}\, \partial_{o}^{(s)}\tilde{\bar{P}}\, \partial_{o}^{(\ell-s)}(\lambda_{p+1})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p+1} \partial_{o}^{(\ell)}\bar{\mathcal{P}}_{\psi}^{k}(\lambda_{p+1-k}) + \partial_{o}^{(\ell)}(\bar{\alpha}_{p+1}).$$

Puisque $\partial_{o}^{(\ell)}Y_{p+1}(0,x') = \vec{0}$, on a :

$$d_{P+1}^{\ell} = \left[-\tilde{\bar{P}}\right]^{-1} \left[\sum_{1 \leqslant s \leqslant \ell} C_{\ell}^{s}\, \partial_{o}^{(s)}\tilde{\bar{P}}\, d_{p+1}^{\ell-s} + \sum_{k=1}^{p+1} \partial_{o}^{(\ell)} . \bar{\mathcal{P}}_{\psi}^{k}(\lambda_{p+1-k}) + \partial_{o}^{(\ell)}(\bar{\alpha}_{p+1}) \right].$$

Pour $\ell = 0$, on a :

$$d_{p+1}^{o} = \left[-\tilde{\bar{P}}\right]^{-1} \{ \sum_{k=1}^{p+1} \bar{\mathcal{P}}_{\psi}^{k}(\lambda_{p+1-k}) + \bar{\alpha}_{p+1} \}.$$

Comme pour $k \geqslant 1$, $p+1-k \leqslant p$, alors d'après (*H-R*)

$$\lambda_{p+1-k} << \frac{C_1}{B} C^{p+1-k} \theta^{(p+1-k)} \circ t$$

en appliquant la proposition 2, on aura

$$\left[\overset{\sim}{-\bar{P}}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{p+1} \bar{\mathcal{P}}_{\psi}^{k}(\lambda_{p+1-k}) << C_1 C^{p+1} \theta^{(p+1)} \circ t \sum_{k=1}^{p+1} \left(\frac{\rho}{C}\right)^k \quad .$$

Si $\frac{\rho}{C} \leqslant \frac{1}{2}$, c'est majoré par : $2C_1 C^{p+1} \frac{\rho}{C} \theta^{(p+1)} \circ t$.

D'autre part, si $p+1 < \nu$, $\alpha_{p+1} = 0$ et si $p+1 \geqslant \nu$, $\exists$ r tel que $p+1 = r+\nu$, et donc $r = p+1-\nu \leqslant p$ (car $\nu \geqslant 1$), alors d'après (*H-R*) :

$$\bar{\alpha}_{p+1} << C_1 C^{p+1} \left(\frac{\rho}{C}\right)^{\nu} \theta^{(p+1)} \circ t$$

$$\Rightarrow \quad \left[\overset{\sim}{-\bar{P}}\right]^{-1} \bar{\alpha}_{p+1} << B C_1 C^{p+1} \frac{\rho}{C} \theta^{(p+1)} \circ t$$

car $\left(\frac{\rho}{C}\right)^{\nu} \leqslant \frac{\rho}{C}$ $\quad \left(\frac{\rho}{C} \leqslant 1\right)$.

Donc :

$$d^{o}_{p+1} << C_1 C^{p+1} \theta^{(p+1)} \circ t \left[2+B\right] \frac{\rho}{C} \quad ;$$

on choisit : $\frac{\rho}{C} \leqslant \frac{1}{B(B+2)}$;

on a alors :

$$d^{o}_{p+1} << \frac{C_1}{B} C^{p+1} \theta^{(p+1)} \circ t .$$

Hypothèse de récurrence :

Soit $\ell \in \{1,\ldots,\nu-1\}$, on suppose que pour tout $k \in \{0,\ldots,\ell-1\}$, on a :

$$d^k_{p+1} << \frac{C_1}{B}\, C^{p+1}\theta^{(p+1+k)}\ \text{o}\ t\ \rho^k\ .$$

Montrons alors que :

$$d^\ell_{p+1} << \frac{C_1}{B}\, C^{p+1}\theta^{(p+1+\ell)}\ \text{o}\ t\ \rho^\ell\ .$$

$$d^\ell_{p+1} = \left[-\tilde{\bar{P}}\right]^{-1}\left[\sum_{1\leqslant s\leqslant\ell} C^s_\ell\ \partial_o^{(s)}\tilde{\bar{P}}\ d^{\ell-s}_{p+s} + \sum_{k=1}^{p+1} \partial_o^{(\ell)}\bar{P}^k_\psi(\lambda_{p+1-k}) + \partial_o^{(\ell)}(\bar{\alpha}_{p+1})\right]$$

1) pour $s \geqslant 1$, $\ell-s \leqslant \ell-1$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$d^{\ell-s}_{p+1} << \frac{C_1}{B}\, C^{p+1}\rho^{\ell-s}\theta^{(p+1+\ell-s)}\ \text{o}\ t << \frac{C_1}{B}\, C^{p+1}\rho^\ell\left(\frac{R'}{\rho}\right)^s\theta^{(p+1+\ell)}\ \text{o}\ t.$$

En appliquant la proposition 2, on a :

$$\left[-\tilde{\bar{P}}\right]^{-1}\ \sum_{1\leqslant s\leqslant\ell} C^s_\ell\ \partial_o^{(s)}\tilde{\bar{P}}\ d^{\ell-s}_{p+1} << C_1 C_\rho^{p+1} \sum_{1\leqslant s\leqslant\ell}\left(\frac{R'}{\rho}\right)^s\theta^{(p+1+\ell)}\ \text{o}\ t\ \rho^\ell$$

$$<< C_1 . C^{p+1} . \rho^\ell .\ \frac{2R'}{\rho}\ \theta^{(p+1+\ell)}\ \text{o}\ t.$$

2) Pour $k \geqslant 1$, $p+1-k \leqslant p$ alors d'après $(H\text{-}R)$ on a :

$$\lambda_{p+1-k} << \frac{C_1}{B}\, C^{p+1-k}\theta^{(p+1-k)}\ \text{o}\ t$$

$$\Rightarrow \quad \left[\tilde{\bar{P}}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{p+1} \partial_o^{(\ell)} . P^k_\psi(\lambda_{p+1-k}) << C_1 C^{p+1}\rho^\ell \sum_{k=1}^{p+1}\left(\frac{\rho}{C}\right)^k\theta^{(p+1+\ell)}\ \text{o}\ t \quad ;$$

si $\frac{\rho}{C} \leqslant \frac{1}{2}$ c'est majoré par $C_1 C^{p+1}\rho^\ell 2\,\frac{\rho}{C}\,\theta^{(p+1+\ell)}\ \text{o}\ t$.

3) Si $p+1 < \nu$, $\alpha_{p+1} = 0$, et si $p+1 \geqslant \nu$ $\exists r$ tel que $p+1 = r+\nu$ et on a $r \leqslant p+1-\nu \leqslant p$ (car $\nu \geqslant 1$) et donc d'après $(H\text{-}R)$:

$$\bar{\alpha}_{p+1} << C_1 (\frac{\rho}{C})^{\nu} C^{p+1} \theta^{(p+1)} \quad o \ t$$

$$=> \quad \left[\tilde{\bar{P}}\right]^{-1} \partial_o^{(\ell)} (\bar{\alpha}_{p+1}) << BC_1 (\frac{\rho}{C})^{\nu} \rho^{\ell} C^{p+1} \theta^{(p+1+\ell)} \quad o \ t$$

comme $(\frac{\rho}{C})^{\nu} \leqslant \frac{\rho}{C}$, on a :

$$\left[\tilde{P}\right]^{-1} \partial_o^{(\ell)} (\bar{\alpha}_{p+1}) << BC_1 \rho^{\ell} C^{p+1} \frac{\rho}{C} \theta^{(p+1+\ell)} \quad o \ t.$$

Finalement, on a :

$$d^{\ell}_{p+1} << C_1 C^{p+1} \rho^{\ell} \left[2 \frac{R'}{\rho} + \frac{\rho}{C} (2+B)\right] \theta^{(p+1+\ell)} \quad o \ t.$$

On choisit alors, $\rho \geqslant 4BR'$

et $\frac{\rho}{C} \leqslant \frac{1}{2(B+2)B}$

on a alors :

$$\frac{2R'}{\rho} + \frac{\rho}{C} (B+2) \leqslant \frac{1}{B}$$

et donc :

$$d^{\ell}_{p+1} << \frac{C_1}{B} C^{p+1} \rho^{\ell} \theta^{(p+1+\ell)} \quad o \ t.$$

c_1) β) Majoration de $\Omega'_{p+1+\nu}$.

$$\Omega'_{p+1+} = \frac{1}{(p^o)^{\nu}} \left[\tilde{\Lambda}_o\right]^{-1} \left[\sum_{k=\nu+1}^{\nu+1+p} \omega^k (\alpha_{p+1+\nu-k}) + \sum_{r=1}^{p+1+\nu} \mu^r (\alpha_{p+1+\nu-r}) \right].$$

Comme $p+1+\nu-k \leqslant p$, d'après $(H\text{-}R)$, on a :

$$\lambda_{p+1+\nu-k} \ll \frac{C_1}{B}\, C^{p+1+\nu-k}\,\theta^{(p+1+\nu-k)}\ \circ\ t$$

$\frac{1}{(p^o)^\nu}\left[\tilde{\Lambda}_o\right]^{-1}.\omega^k$ étant un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant k$, on a en utilisant la proposition 2 :

$$\frac{1}{(p^o)^\nu}\left[\tilde{\Lambda}_o\right]^{-1}.\omega^k(\lambda_{p+1+\nu-k}) \ll C_1 C^{p+1+\nu-k}\rho^k\theta^{(p+1+\nu)}\ \circ\ t.$$

D'autre part, pour $r \geqslant 1$, on a $p+1-r \leqslant p$, alors d'après (*H-R*), on a :

$$\alpha_{\nu+p+1-r} \ll C_1 C^{p+1-r}\rho^\nu\theta^{(p+1+\nu-r)}\ \circ\ t.$$

Comme $\frac{1}{(p^o)^\nu}\left[\tilde{\Lambda}_o\right]^{-1}\mu^r$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant r$, on a :

$$\frac{1}{(p^o)^\nu}\left[\tilde{\Lambda}_o\right]^{-1}\mu^r(\alpha_{p+1+\nu-r}) \ll BC_1 C^{p+1-r}\rho^{\nu+r}\theta^{(\nu+p+1)}\ \circ\ t$$

$$\Rightarrow \quad \Omega'_{p+1+\nu} \ll C_1 C^{p+1}\theta^{(p+1+\nu)}\ \circ\ t\left[\sum_{k=1}^{p+1}\left(\frac{\rho}{C}\right)^k + \sum_{r=1}^{p+1+\nu}\left(\frac{\rho}{C}\right)^r B\right]\rho^\nu \quad ;$$

si on impose $\frac{\rho}{C} \leqslant \frac{1}{2}$, on aura :

$$\Omega'_{p+1+\nu} \ll C_1 C^{p+1}\rho^\nu\left[2\,\frac{\rho}{C}\,(B+1)\right]\theta^{(p+1+\nu)}\ \circ\ t.$$

c$_1$) γ) Majoration de λ_{p+1}.

On applique la proposition 3 et on a :

$$\lambda_{p+1} \ll C_1 C^{p+1}\theta^{(p+1)}\ \circ\ t\ \max\left[2\,\frac{\rho}{C}\,\frac{(B+1)}{C(1-\frac{B}{\rho})}\ ;\ 2\,\frac{R'}{\rho} + \frac{\rho}{C}\,(B+2)\right] \quad ;$$

soit encore si $\rho \geqslant 2B$

$$\lambda_{p+1} << C_1 C^{p+1} B_1(\rho,C)\theta^{(p+1)} \quad o \quad t$$

avec $B_1(\rho,C) = \max\left[4(B+1)\,\frac{\rho}{C}\ ;\ \frac{2R'}{\rho} + \frac{\rho}{C}\,(B+2)\right]$.

Si on choisit ρ et C tels que :

$$B_1(\rho,C) \leqslant \frac{1}{B}$$

alors :

$$\lambda_{p+1} << \frac{C_1}{B}\, C^{p+1}\theta^{(p+1)} \quad o \quad t.$$

c_2) <u>Majoration de</u> $\alpha_{\nu+p+1}$.

$$\alpha_{\nu+p+1} = \sum_{r=\nu}^{\nu+p+1} \mathscr{C}^r(\lambda_{\nu+p+1-r}) + \sum_{r=1}^{p+1+\nu} \sigma^r(\alpha_{p+1+\nu-r})$$

$$= \mathscr{C}^\nu(\lambda_{p+1}) + \sum_{r=\nu+1}^{\nu+p+1} \mathscr{C}^r(\lambda_{\nu+p+1-r}) + \sum_{r=1}^{p+1+\nu} \sigma^r(\alpha_{p+\nu+1-r}) \ .$$

comme $\lambda_{p+1} << C_1 C^{p+1} B_1(\rho,C)\theta^{(p+1)} \quad o \quad t$

on a en appliquant la proposition 2 :

$$\mathscr{C}^\nu(\lambda_{p+1}) << BC_1\rho^\nu C^{p+1}\theta^{(\nu+p+1)} \quad o \quad t \quad B_1(\rho,C).$$

D'autre part, pour $r \geqslant \nu+1$, $\nu+p+1-r \leqslant p$, alors d'après $(\mathcal{H}\text{-}\mathcal{R})$, on a :

$$\lambda_{p+1+\nu-r} << \frac{C_1}{B}\, C^{p+1+\nu-r}\theta^{(p+1+\nu-r)} \quad o \quad t$$

et donc $\mathscr{C}^r(\lambda_{p+1+\nu-r}) << C_1 C^{p+1+\nu-r}\theta^{(p+1+\nu)} \quad o \quad t \quad \rho^r$

$$\Rightarrow \sum_{r=\nu+1}^{\nu+p+1} \mathscr{C}^r(\lambda_{p+1+\nu-r}) \ll C_1 C^{p+1+\nu} \theta^{(p+1+\nu)} \; o \; t \sum_{r=\nu+1}^{\nu+p+1} \left(\frac{\rho}{C}\right)^r$$

$$\ll C_1 C^{p+1} \theta^{(p+1+\nu)} \; o \; t \; \rho^{\nu} \; 2 \, \frac{\rho}{C} .$$

Pour $r \geqslant 1$, $p+1-r \leqslant p$, alors d'après $(H\text{-}R)$, on a :

$$\alpha_{\nu+p+1-r} \ll C_1 \rho^{\nu} C^{p+1-r} \theta^{(\nu+p+1-r)} \; o \; t$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^r(\alpha_{\nu+p+1-r}) \ll C_1 \rho^{\nu+r} C^{p+1-r} B \; \theta^{(\nu+p+1)} \; o \; t$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{p+1+\nu} \sigma^r(\alpha_{\nu p+1-r}) \ll C_1 C^{p+1} \rho^{\nu} B \; \theta^{(\nu+p+1)} \; o \; t \quad 2 \, \frac{\rho}{C} .$$

Finalement :

$$\alpha_{\nu+p+1} \ll C_1 C^{p+1} \rho^{\nu} \theta^{(p+1+\nu)} \; o \; t \left[B \; B_1(\rho,C) + 2(B+1) \, \frac{\rho}{C} \right] .$$

Si ρ et C sont tels que : $B \; B_1(\rho,C) + 2 \, \frac{\rho}{C} \, (B+1) \leqslant 1$

alors $\alpha_{\nu+p+1} \ll C_1 C^{p+1} \rho^{\nu} \theta^{(p+1+\nu)} \; o \; t$.

On choisira ρ et C tels que $B_1(\rho,C) \leqslant \frac{1}{2B}$ et $\frac{\rho}{C} \leqslant \frac{1}{4(B+1)}$.

c_3) <u>Majoration de</u> Y_{p+1}.

$$Y_{p+1} = \sum_{\ell=0}^{p+1} P_{\psi}^{\ell}(\lambda_{p+1-\ell}) + \alpha_{p+1}$$

$$= P_{\psi}^{o}(\lambda_{p+1}) + \sum_{\ell=1}^{p+1} P_{\psi}^{\ell}(\lambda_{p+1-\ell}) + \alpha_{p+1}$$

$$P_{\psi}^{o}(\lambda_{p+1}) \ll B C_1 C^{p+1} B_1(\rho,C) \theta^{(p+1)} \; o \; t$$

et pour $\ell \geqslant 1$:

$$\mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{p+1-\ell}) << C_1 C^{p+1-\ell} \rho^{\ell} \theta^{(p+1)} \circ t$$

et donc :

$$\sum_{\ell=1}^{p+1} \mathcal{P}_{\psi}^{\ell}(\lambda_{p+1-\ell}) << C_1 C^{p+1}\, 2\, \frac{\rho}{C}\, \theta^{(p+1)} \circ t$$

$$\alpha_{p+1} << C_1 C^{p+1-\nu} \rho^{\nu} \theta^{(p+1)} \circ t << C_1 C^{p+1} \frac{\rho}{C}\, \theta^{(p+1)} \circ t$$

on a alors :

$$Y_{p+1} << C_1 C^{p+1} \theta^{(p+1)} \circ t \; (B\, B_1(\rho,C) + 3\, \frac{\rho}{C}).$$

On choisit ρ et C tels que :

$$B\, B_1(\rho,C) + 3\, \frac{\rho}{C} \leqslant 1$$

on a alors :

$$Y_{p+1} << C_1 C^{p+1} \theta^{(p+1)} \circ t.$$

On choisira ρ et C tels que $B_1(\rho,C) \leqslant \frac{1}{2B}$ et $\frac{\rho}{C} \leqslant \frac{1}{6}$.

On pose $\rho_o = \max(1, 8BR', 2R', 2B)$

et $K = \max(6, 4(B+1), 8B(B+1))$.

Alors, pour tout

$$\rho \geqslant \rho_o$$

$$\text{et} \qquad C \geqslant K\rho$$

on a :

$$\begin{cases} \lambda_{p+1} \ll \frac{C_1}{B} C^{p+1}\theta^{(p+1)} \circ t \\ Y_{p+1} \ll C_1 C^{p+1}\theta^{(p+1)} \circ t \\ \alpha_{\nu+p+1} \ll C_1 \rho^{\nu} C^{p+1}\theta^{(p+1+\nu)} \circ t \end{cases}$$

On choisit maintenant :

$$\theta(t) = \frac{1}{r-t}$$

pour $k \geqslant 0$, on a $\theta^{(k)}(t) = \dfrac{k!}{(r-t)^{k+1}}$.

La série $\theta(t)$ vérifie les hypothèses de la proposition 1 :

$\theta(t) \gg 0$

et $(R'-t)\theta(t) \gg 0$ pour tout $0 < r < R' < R$.

Comme $Y_j(x) \ll C_1 C^j \theta^{(j)} \circ t(x)$

on en déduit, d'après une propriété des majorantes, que pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $t(|x|) < r$, tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ et tout $j \in \mathbb{N}$:

$$|D^{\alpha} Y_j(x)| \leqslant C_1 \rho^{\alpha_o} C^j \theta^{(j+|\alpha|)} \circ t(|x|).$$

Soit V_o un voisinage de zéro tel que : $t(|x|) \leqslant \frac{r}{2}$.

Pour $x \in V_o$ on a, puisque $\theta^{j+|\alpha|}$ est croissante sur $]-r,r[$:

$$|D^{\alpha} Y_j(x)| \ll C_1 \rho^{\alpha_o} C^j \frac{(j+|\alpha|)!}{(\frac{r}{2})^{j+|\alpha|+1}} \leqslant \frac{2C_1}{r} (\frac{2C}{r})^{|\alpha|+j} (j+|\alpha|)!$$

(car $\rho \geqslant 1$ et $\frac{\rho}{C} \leqslant 1$).

On pose $C_1' = \dfrac{2C_1}{r}$ et $C' = \dfrac{2C}{r}$, on a alors :

$$|D^{\alpha}Y_j(x)| \leqslant C_1'(C')^{|\alpha|+j}(j+|\alpha|)!$$

ce résultat sera utilisé au § 4.

§ 4 - *Solutions nulles ultradifférentiables de classe* $\{M_p\}$.

Soit $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$; on définit pour cette suite les propriétés suivantes :

M_o : $M_o = 1$;

M_1 : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\quad M_p^2 \leqslant M_{p-1}M_{p+1}$;

M_2 : $\exists\, A > 0, \exists\, H > 0$ tels que $\forall\, p \in \mathbb{N}$:

$$M_p \leqslant A\,H^p \min_{0\leqslant q\leqslant p} (M_q \times M_{p-q}) \;;$$

M_3 : $\exists\, A > 0$, tel que $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leqslant A.p.\frac{M_p}{M_{p+1}} \;;$$

M_2' : $\exists\, A > 0, \exists\, H > 0$ tels que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\; M_{p+1} \leqslant A\,H^p M_p \;;$$

M_3' : $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < +\infty$.

M_1, M_2, M_3 traduisent respectivement les propriétés de convexité logarithmique, forte stabilité par opérateurs ultra-différentiels et forte non-quasi analycité.

Les conditions M_2 et M_3 sont dites fortes car elles entraînent respectivement M_2' et M_3'.

Pour une suite (M_p) vérifiant M_o, M_1, M_2 et M_3, on note $\mathcal{E}(\Omega,\{M_p\})$ l'espace des fonctions ultra-différentiables de type Roumieu ([27], [31], [32]).

N.B. Si $\{M_p\} = \{p!\}$, $\mathcal{E}(\Omega,p!)$ est l'espace des fonctions analytiques sur Ω.

Critère de convergence dans $\mathcal{E}(\Omega,\{M_p\})$.

Si une série : $\sum_{j\geqslant 0} Z_j$, $Z_j \in \mathcal{E}(\Omega,\{M_p\})$ est telle que pour tout compact K de Ω, il existe $L > 0$, $\exists$ $A > 0$ telsque :

$$\forall x \in K, \quad \forall \alpha \in N^{n+1} \quad \sum_{j\geqslant 0} |D^{\alpha} Z_j(x)| \leqslant A\, L^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$$

alors cette série converge dans $\mathcal{E}(\Omega,\{M_p\})$.

Ce critère découle de la définition de la topologie $\mathcal{E}(\Omega,\{M_p\})$.

Choix de la suite f_j.

On pose :

$$f_o(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\xi)^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{M_p}{M_{p-1}} \xi\right)^{-1} e^{\xi y} d\xi .$$

D'après [21] :

$f_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\{M_p\})$

$f_o = 0$ sur $]-\infty,0]$

$0 \in \text{Supp}\, f_o$.

Pour $j \geqslant 1$, f_j est la primitive d'ordre j de f_o, s'annulant j fois en 0.

Pour $j \leqslant 0$, f_j est la dérivée d'ordre $(-j)$ de f_o.

On montre que $\sum_{j\geqslant 0} Y_j \times (f_j \circ \varphi)$ converge dans $[\mathcal{E}(\Omega,\{M_p\})]^m$ ([22]).

Pour cela, on montre qu'il existe un voisinage Ω_o de a, tel que :

$\forall$ K compact de Ω_o, $\exists$ H > 0, $\exists$ A > 0 tels que :

$\forall x \in K$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |D^{\alpha}(Y_j \times f_j \circ \varphi)(x)| \leqslant A\, H^{|\alpha|} M_{|\alpha|} .$$

Pour que $Y = \sum_{j\geqslant 0} Y_j \times (f_j \circ \varphi)$ soit une solution nulle pour h il reste à voir que :

1) $Y(x) = 0$ si $\varphi(x) = x^1 \leqslant 0$ ce qui est vérifié, car
$\forall j \in \mathbb{Z}$ $f_j(x^1) = 0$ si $x^1 \leqslant 0$.

2) $0 \in \text{Supp } Y$. On a :

$$Y^1(0,x') = Y_0^1(0,x')f_o(x^1) + \sum_{j\geqslant 1} Y_j^1(0,x')f_j(x^1)$$

comme $Y_o^1(0,x') = 1$ et $Y_j^1(0,x') = 0$ pour $j \geqslant 1$, on a :
$Y^1(0,x') = f_o(x^1)$. Et puisque $0 \in \text{Supp } f_o$, on a $0 \in \text{Supp } Y^1$.

Y est donc une solution nulle ultradifférentiable de classe $\{M_p\}$ pour h au voisinage de a.

§ 5 - *Solutions nulles ultradistributions.*

Pour une suite (M_p) vérifiant M_o, M_1, M_2 et M_3, on note $\mathcal{D}'(\Omega,(M_p))$ l'espace des ultradistributions du type Beurling, relatives à la suite (M_p) ([21], [27]).

N.B. Si (M_p) vérifie M_1 et M_3' , on a :

$$\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega,(M_p)) .$$

Choix de la suite f_j :

On pose : $\phi_o(z) = \frac{1}{z}$;

pour $j \geqslant 1$, $\phi_j(z) = \frac{z^{j-1}}{(j-1)!}(\text{Log } z - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{j-1}))$

pour $j \leqslant 0$, $\phi_j(z) = \phi_o^{(-j)}(z)$

où Log z est défini sur le domaine de Riemann $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^*/ -\theta < \arg z < \theta + 2\pi \;;\; \theta > 0\}.$$

Pour tout $j \in Z$, les ϕ_j sont holomorphes sur $\mathcal{D}$ et vérifient :

$$\phi'_j = \phi_{j-1}.$$

Puis on pose :

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\psi_j(z) = -\frac{1}{2i\pi} P(D)(\phi_j)(z)$

où $P(D) = \prod_{p=1}^{\infty} (1 - i \frac{M_p}{M_{p-1}} D)$ est un opérateur ultradifférentiable de classe (M_p).

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les ψ_j sont holomorphes sur $\mathcal{D}$ et vérifient :

$$\psi'_j = \psi_{j-1} .$$

La valeur au bord, au sens des hyperfonctions ([33]) :

$$f_j(y) = \psi_j(y+io) - \psi_j(y-io)$$

est alors une ultra-distribution de classe (M_p) ([21])

$$(f_o(y) = P(D)\delta_y).$$

D'autre part, comme :

$$Y_j(x) << C_1 C^j \frac{j!}{[r-t(x)]^{j+1}} \quad .$$

Y_j est analytique et se prolonge en une fonction holomorphe sur

$\Delta = \{Z \in \mathbb{C}^{n+1} / \rho|Z^o| + |Z^1| + \dots + |Z^n| < r\}$.

On montre alors que : ([22])

$$|\sum_{j\geqslant 0} Y_j(Z) \times \psi_j(Z^1)| \leqslant \frac{A}{(\varepsilon)^3} e^{M^*(\frac{L}{||y||})}$$

où $y = Im_Z$;

$$M^*(\rho) = \sup_{p\in\mathbb{N}}(\mathrm{Log}\ (\frac{p!\rho^p}{M_p})) \quad .$$

On conclut que $Y(x) = \sum_{j\geqslant 0} Y_j(x) f_j \circ \psi(x)$ est une ultra-distribution de classe (M_p), grâce au théorème suivant :

Théorème [21].-

Soit (M_p) une suite vérifiant M_1, M_2, M_3, telle que : $\exists$ L, $\exists$ C telles que :

$$M_p \leqslant CL^p M_p^* p!$$

où

$$M_p^* = M_o \sup_{\rho\in\mathbb{N}} \frac{\rho^p}{\exp(M^*(\rho))}$$

(cette relation s'écrit $M_p \subset M_p^* p!$).

Soit Γ un cône convexe ouvert, V un ouvert de Stein, $V_\Gamma = (\mathbb{R}^n + i\Gamma) \cap V$ et $\Omega = \mathbb{R}^n \cap V$.

Si une fonction F holomorphe sur V_Γ vérifie la condition suivante :

$\forall$ K compact de Ω, $\forall$ Γ' sous-cône fermé de Γ,
$\forall$ $L > 0$, $\exists$ $C > 0$, $\exists$ $\alpha > 0$ tels que :

$$\sup_{x \in K} |F(x+iy)| \leqslant C \exp(M^*(\frac{L}{||y||}))$$

pour $y \in \Gamma'$ et $||y|| < \alpha$.

Alors la valeur au bord $F(x+i\Gamma_o)$ de F, au sens des hyperfonctions est dans $\mathcal{D}'(\Omega,(M_p))$.

CHAPITRE III

LE PROBLEME DE CAUCHY ASYMPTOTIQUE

Les notations de cette partie sont les mêmes qu'au Chapitre I :

X est une variété réelle C^∞ de dimension $(n+1)$;

h est un opérateur différentiel matriciel de classe C^∞, d'ordre inférieur ou égal à t au voisinage Ω d'un point a de X, et d'ordre t en a.

§ 1 - *Hypothèses.*

On fera les hypothèses suivantes :

(*H*) 1) $\det H(x,\xi)$ se décompose en un produit de puissance de facteurs premiers :

Il existe $\sigma > 0$, tel que pour tout $s \in \{0,\ldots,\sigma\}$, il existe des fonctions polynomiales en ξ, $H_s(x,\xi)$, de degré τ_s, C^∞ en x sur Ω, et des entiers non nuls k_s, ν_s tels que :

$$\det H = \prod_{s=0}^{\sigma} (H_s)^{k_s \nu_s} .$$

(*L*) Pour tout $s \in \{0,\ldots,\sigma\}$, on note ϕ_x^s, l'anneau localisé de $\mathbb{R}[\xi_o,\ldots,\xi_n]$ par rapport à l'idéal premier engendré par $H_s(x,.)$.

Pour tout $x \in \Omega$, la matrice $H(x,.)$ est équivalente dans ϕ_x^s à :

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} [H_s(x,.)]^{\nu_s} & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & \\ & & [H_s(x,.)]^{\nu_s} & & & \\ \hdashline & 0 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} k_s \\ \\ \\ \end{array}\right\} m$$

(*H*) 2) Soit Q une hypersurface passant par a, d'équation locale $x^o = 0$ au voisinage de a, et non caractéristique pour h.

On suppose que la forme tangente en a à Q est une direction de stricte hyperbolicité pour le radical caractéristique :

$$P(a,\xi) = \prod_{s=0}^{\sigma} H_s(a,\xi).$$

***

On note τ le degré de P : $\tau = \sum_{s=0}^{\sigma} \tau_s$.

Soit Ψ une fonction C^∞ sur Q telle que $\operatorname{grad} \Psi(a) \neq 0$.

L'hypothèse de stricte hyperbolicité, appliquée à $\xi = (0, \operatorname{grad} \Psi(a))$, $(\xi \neq \vec{0})$ se traduit par le fait que :

l'équation $P(a;p_o,\operatorname{grad} \Psi(a)) = 0$ possède τ racines réelles distinctes en p_o, $\{p_o^\ell(a)\}_{1 \leq \ell \leq \tau}$.

On ordonne ces racines, comme dans [37] de la manière suivante :
Pour $1 \leq \ell \leq \tau_o$, les τ_o premières racines $p_o^\ell(a)$ sont issues de H_o
pour $\tau_o+1 \leq \ell \leq \tau_o+\tau_1$, les τ_1 racines $p_o^\ell(a)$ sont issues de H_1,
pour $\tau_o+\ldots+\tau_{s-1}+1 \leq \ell \leq \tau_o+\ldots+\tau_s$, les τ_s racines $p_o(a)$ sont issues de H_s ;

pour $\tau-\tau_\sigma+1\leqslant\ell\leqslant\tau$, les τ_σ racines $p_o^\ell(a)$ sont issues de H_σ.

Il résulte de la théorie des équations de Hamilton-Jacobi qu'il existe τ fonctions φ^ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \tau$, C^∞ au voisinage de a, solutions de :

$$\begin{cases} P(x,\text{grad } \varphi^\ell(x)) = 0 \\ \varphi^\ell(0,x') = \Psi(x') \\ \partial_o\varphi^\ell(a) = p_o^\ell(a). \end{cases}$$

§ 2 - *Position du problème.*

On se donne t développements formels :

$$B_\alpha(x') = \sum_{j=0}^{\infty} B_{j,\alpha}(x') \times (f_{j-\alpha} \circ \Psi(x')) \quad ; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant t-1$$

et $$F = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} F_j \times (f_{j-t} \circ \varphi^\ell).$$

Le problème de Cauchy asymptotique est alors la recherche d'un développement formel

$$Y = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j\in\mathbb{Z}} Y_j^\ell \times (f_j \circ \varphi^\ell)$$

vérifiant :

$$\text{I} \quad \begin{cases} hY = F \\ \partial_o^{(\alpha)}(Y)(0,.) = B_\alpha \end{cases} \quad ; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant t-1.$$

On pose $F^\ell = \sum_{j\in\mathbb{N}} F_j^\ell \times (f_{j-t} \circ \varphi^\ell)$ et

$$Y^\ell = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Y_j^\ell \times (f_j \circ \varphi^\ell)$$

Pour que $Y = \sum_{\ell=1}^{\tau} Y^{\ell}$ vérifie :

$$hY = F = \sum_{\ell=1}^{\tau} F^{\ell}$$

il suffit de résoudre pour tout $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$:

$$hY^{\ell} = F^{\ell}.$$

Comme pour tout $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$, $\text{grad}\ \varphi^{\ell}(a) \neq \vec{0}$ (puisque $\text{grad}\ \Psi(a) \neq \vec{0}$), en prenant des hypothèses de bonne décomposition relatives à chaque H_s, $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, de même type que celle du chapitre I, on construit avec la même technique les développements Y^{ℓ}, $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$. Ils sont alors obtenus en fonction de paramètres λ_j^{ℓ}, $j \in \mathbb{Z}$. Ces derniers sont solutions d'équations différentielles dont on précise l'ordre μ_{ℓ} :

Pour tout $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$, il existe $s \in \{0,\dots,\sigma\}$ unique qu'on note $s(\ell)$, tel que :

$$\tau_o + \dots + \tau_{s-1} + 1 \leqslant \ell \leqslant \tau_o + \dots + \tau_s \quad \text{et} \quad \mu_{\ell} = \nu_{s(\ell)}.$$

Les paramètres λ_j^{ℓ} seront déterminés de façon unique si l'on se fixe pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $1 \leqslant \ell \leqslant \tau$:

$$\partial_o^{(u)} \lambda_j(0,.) \quad ; \quad 0 \leqslant u \leqslant \mu_{\ell} - 1.$$

Nous allons voir comment les données B_{α} du problème I, vont déterminer les $\partial_o^{(u)} \lambda_j^{\ell}(0,.)$. A cette fin, on calcule formellement les $\partial_o^{(\alpha)} Y(0,.)$ qu'on identifie aux B_{α}, $0 \leqslant \alpha \leqslant t-1$.

§ 3 - *Les données initiales du problème.*

Pour toute fonction g de x, on note : $\bar{g} = g(0,\cdot)$.

Pour tout $\alpha \in \{0,\dots,t-1\}$

$$\partial_o^{(\alpha)} Y(0,\bullet) = B_\alpha .$$

On a, d'après [9], pour tout $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$\partial_o^{(\alpha)} Y^\ell = \sum_{j\in\mathbb{Z}} G_{j,\alpha}^\ell \times (f_{j-\alpha} \circ \psi^\ell)$$

avec

$$G_{j,\alpha}^\ell = \sum_{s=0}^{\alpha} C_\alpha^s (\partial_o \psi^\ell)^{\alpha-s} \partial_o^{(s)} Y_{j-s}^\ell + \sum_{0\leqslant u\leqslant v\leqslant\alpha} \Gamma_{v,\alpha}^{u,\ell} \partial_o^{(u)} Y_{j-v}^\ell$$

où $\Gamma_{v,\alpha}^{u,\ell}$ sont des fonctions connues indépendantes de j.

On a alors formellement :

$$\partial_o^{(\alpha)} Y(0,.) = \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \bar{G}_{j,\alpha}^\ell \times (f_{j-\alpha} \circ \Psi), \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \{0,\dots,t-1\}.$$

En identifiant cette relation avec les données initiales B_α, on a :
$\forall\, \alpha \in \{0,\dots,t-1\}$, $\forall\, j \in \mathbb{Z}$:

$$(1)_j \qquad \sum_{\ell=1}^{\tau} \bar{G}_{j,\alpha}^\ell = B_{j,\alpha} .$$

On convient que si $j < 0$, $B_{j,\alpha} \equiv 0$ et que si $s > \alpha$, $C_\alpha^s = 0$ et $\sum_{s\leqslant p\leqslant\alpha} (\cdot)_p = 0$.

On pose : $\xi^\ell = \partial_o \psi^\ell$.

Avec ces conventions, le système $(1)_j$ s'écrit :

$$\sum_{\ell=1}^{\tau} \{ \sum_{p=0}^{\alpha} C_\alpha^p (\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} \overline{\partial_o^{(p)} Y_{j-p}^\ell} + \sum_{0\leqslant u<p\leqslant\alpha} \bar{\Gamma}_{p,\alpha}^{u,\ell} \overline{\partial_o^{(u)} Y_{j-p}^\ell} \} = B_{j,\alpha} .$$

Soit :

$$\sum_{\ell=1}^{\tau}\ \sum_{p=0}^{\mu_\ell-1} C_\alpha^p(\bar\xi^\ell)^{\alpha-p}\,\overline{\partial_o^{(p)}Y_{j-p}^\ell} = c_{j,\alpha}$$

où

$$c_{j,\alpha} = B_{j,\alpha} - \sum_{\ell=1}^{\tau}\Big\{ \sum_{0\leqslant u<p\leqslant\alpha} \bar\Gamma^{u,\ell}_{p,\alpha}\,\overline{\partial_o^{(u)}Y^\ell_{j-p}} - \sum_{p=\mu_\ell}^{\alpha} C^p_\alpha(\bar\xi^\ell)^{\alpha-p}\,\overline{\partial_o^{(p)}Y^\ell_{j-p}}\Big\}$$

on a, avec des notations analogues à celles du § 7 chapitre I :

$$\partial_o^{(p)}Y^\ell_{j-p} = \sum_{r=p}^{\mu_\ell-1}\frac{1}{(r-p)!}\,\widetilde{\partial^{o(r-p)}P^\ell}^{\,\ell}\,\partial_o^{(r)}(\lambda^\ell_{j-r}) + R^{(p),\ell}_{j-p}$$

où le signe $\sim\ell$ signifie qu'on prend la fonction considérée en $(x,\text{grad}\ \varphi^\ell(x))$, et où les opérateurs P^ℓ intervenant sont construit par récurrence comme au chapitre I et correspondent au rang μ_ℓ.

Le fait que pour tout $\ell\in\{1,\dots,\tau\}$, λ^ℓ_{j-u} soit solution d'un système différentiel d'ordre μ_ℓ, nous incite à prendre comme inconnues du système $(1)_j$ les :

$$\overline{\partial_o^{(u)}\lambda^\ell_{j-u}} \quad \text{pour} \quad u\in\{0,\dots,\mu_\ell-1\}.$$

N.B. Pour alléger les notations, on posera pour tout $\ell\in\{1,\dots,\tau\}$ et tout $r\in\{0,\dots,\mu_\ell-1\}$

$$K^\ell_r = \frac{1}{r!}\,\widetilde{\partial^{(o)r}P^\ell}^{\,\ell}\ .$$

Nous allons donc remplacer dans $(1)_j$ les $\overline{\partial_o^{(p)}Y^\ell_{j-p}}$:

$$\sum_{\ell=1}^{\tau}\ \sum_{p=0}^{\mu_\ell-1} C^p_\alpha(\bar\xi^\ell)^{\alpha-p}\left[\sum_{r=p}^{\mu_\ell-1}\bar K^\ell_{r-p}\ \overline{\partial_o^{(r)}(\lambda^\ell_{j-r})} + \bar R^{(p),\ell}_{j-p}\right] = c_{j,\alpha}\ .$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_\ell -1} \left[\sum_{p=0}^{r} C_\alpha^p (\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} \bar{K}_{r-p}^\ell \right] \overline{\partial_o^{(r)}(\lambda_{j-r}^\ell)} = D_{j,\alpha}}$$

où

$$D_{j,\alpha} = C_{j,\alpha} - \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{p=0}^{\mu_\ell -1} \bar{R}_{j-p}^{(p),\ell} \, C_\alpha^p (\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} .$$

Nombre d'inconnues du système $(1)_j$.

Le système $(1)_j$ est carré d'ordre $mt \times mt$.

En effet :

Pour $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$ et pour $r \in \{0,\dots,\mu_\ell -1\}$, $\bar{K}_{r-p}^\ell$ est une matrice $m \times k_{s(\ell)}$ et $\overline{\partial_o^{(r)}(\lambda_{j-r}^\ell)}$ est un vecteur à $k_{s(\ell)}$ composantes.

Il y a donc $\sum_{s=0}^{\sigma} \tau_s \nu_s k_s = mt$ inconnues scalaires et lorsque α varie entre 0 et t-1, il y a mt équations scalaires.

Avant de résoudre le système $(1)_j$, nous allons montrer que si on suppose résolus les systèmes $(1)_o,\dots,(1)_{j-1}$ alors $D_{j,\alpha}$, $\alpha \in \{0,\dots,t-1\}$ est connu.

On rappelle que les inconnues d'un système $(1)_{j-r}$, sont :

$$\overline{\partial_o^{(u)} \lambda_{j-u-r}^\ell} \quad ; \quad 1 \leqslant \ell \leqslant \tau, \qquad 0 \leqslant u \leqslant \mu_\ell -1.$$

Et donc pour ℓ fixé dans $\{1,\dots,\tau\}$, si $r \geqslant \mu_\ell$ et

$u \leqslant \mu_\ell - 1$, $\overline{\partial_o^{(u)}\lambda^\ell_{j-r}}$ est déterminé au système $(1)_{j-(r-u)}$. Par conséquent, λ^ℓ_{j-r} est connu, car on a pu intégrer l'équation qui le détermine.

$$D_{j,\alpha} = C_{j,\alpha} - \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{p=0}^{\mu_\ell-1} \bar{R}^{(p),\ell}_{j-p}\, C^p_\alpha(\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} .$$

Pour tout $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$ et tout $p \in \{0,\dots,\mu_\ell-1\}$ $\bar{R}^{(p),\ell}_{j-p}$ est connu au système $(1)_j$. (C'est la même démonstration qu'au § 7 du chapitre I).

D'autre part :

$$C_{j,\alpha} = B_{j,\alpha} - \sum_{\ell=1}^{\tau} \{ \sum_{0\leqslant u<p\leqslant\alpha} \bar{\Gamma}^{u,\ell}_{p,\alpha}\, \overline{\partial_o^{(u)} Y^\ell_{j-p}} - \sum_{p=\mu_\ell}^{\alpha} C^p_\alpha(\bar{\xi}\ )^{\alpha-p}\overline{\partial_o^{(p)} Y^\ell_{j-p}} \}.$$

1) Dans la première sommation, on a :

$$\overline{\partial_o^{(u)} Y^\ell_{j-p}} = \{ \sum_{0\leqslant s\leqslant u} C^s_u\, \partial_o^{(s)} \overset{\sim\ell}{P} \partial_o^{(u-s)}(\lambda^\ell_{j-p}) + \partial_o^{(u)}(\alpha^\ell_{j-p})$$

$$+ \sum_{r=1}^{j-p} \partial_o^{(u)} . P^{\ell,r}_\psi(\lambda^\ell_{j-p-r}) \}(0,.) \quad .$$

Pour $0 \leqslant u < p \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant s \leqslant u$, on a : $p-u+s > 0$ et donc $\overline{\partial_o^{(u-s)}(\lambda^\ell_{j-p})}$ est déterminé au système $(1)_{j-(p+u-s)}$.

Pour $0 \leqslant u < p \leqslant \alpha$ et $1 \leqslant r \leqslant j-p$, $P^{\ell,r}_\psi$ étant un opérateur d'ordre $< r$ en x^o, les dérivations en x^o intervenant dans ce terme, sont du type :

$$\overline{\partial_o^{(s)}(\lambda^\ell_{j-p-r})} \quad \text{avec} \quad s \leqslant u+r-1 \ .$$

* pour $r \leqslant \mu_\ell - p - 1$ on a $s \leqslant \mu_\ell - 2$

et donc $\overline{\partial_o^{(s)}(\lambda_{j-p-r}^\ell)}$ est connu au système $(1)_{p+r-s}$

(car $p+r-s \geqslant 2$) et par suite $\partial_o^{(u)} P_\psi^{\ell,r}(\lambda_{j-p-r}^\ell)$ est connu.

* pour $r \geqslant \mu_\ell - p$ les λ_{j-p-r}^ℓ sont connus ainsi que toutes leurs dérivées (car $p+r \geqslant \mu_\ell$). Et donc les $\partial_o^{(u)} P_\psi^{\ell,r}(\lambda_{j-r-p}^\ell)$ sont connus.

D'autre part, si $p \geqslant 0$, $\lambda_o^\ell, \ldots, \lambda_{j-p-\mu_\ell}^\ell$ sont connus, donc α_{j-p}^ℓ, l'est aussi (Remarque 1, p. 21) et par suite $\partial_o^{(u)} \alpha_{j-p}^\ell$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, \tau\}$.

2) Dans la seconde sommation :

$p \geqslant \mu_\ell$ et donc $\overline{\partial_o^{(p)} Y_{j-p}^\ell}$ est connu.

Finalement, les $D_{j,\alpha}$ sont connus.

§ 4 - *Etude du système* $(1)_j$.

Pour montrer que le déterminant du système $(1)_j$ n'est pas nul, on montre que le système homogène associé n'admet que la solution nulle : on note R_α l'équation :

$$\sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_\ell - 1} \left[\sum_{p=0}^{r} C_\alpha^p \, (\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} \, \bar{K}_{r-p}^\ell \right] Z_r^\ell = 0$$

et S le système des équations $\{R_\alpha\}_{0 \leqslant \alpha \leqslant t-1}$.

Dans un premier temps, on montre que les équations R_α sont encore vraies pour $\alpha \geqslant t$.

On ordonne comme dans [37] la matrice polynomiale $H(x,\xi)$ suivant les puissances de ξ_o :

$$H(x,\xi) = \sum_{r=0}^{t} L^r(x,\xi')(\xi_o)^r$$

où pour $0 \leqslant r \leqslant t$, $L^r(x,\xi')$ est une matrice polynomiale en ξ' à coefficients C^∞ en x.

On rappelle que pour ℓ fixé dans $\{1,\dots,\tau\}$, la matrice $\tilde{P}^{\ell}$ est composée de vecteurs de base du noyau de $\tilde{H}^{\ell}$, on a donc :

$$\tilde{H}^{\ell} \times \tilde{P}^{\ell} = 0$$

$$\text{et} \quad \overline{\text{grad}\ \psi^{\ell}} = (\bar{\xi}^{\ell}, \text{grad}\ \Psi)\ .$$

On aura, en posant, $\mathcal{L}^r(x') = L^r((0,x');\text{grad}\ \Psi(x'))$

$$\left[\sum_{r=0}^{t} \mathcal{L}^r(\bar{\xi}^{\ell})^r\right]\bar{\tilde{P}}^{\ell} = 0 \quad \text{pour tout} \quad \ell \in \{1,\dots,\tau\}.$$

Avant de montrer que les équations $\mathcal{R}_\alpha$ sont vraies pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, montrons le lemme suivant, qui sera utile pour les calculs :

Lemme.-

Pour $1 \leqslant \ell \leqslant \tau$ et pour tout $r \in \{0,\dots,\mu_\ell - 1\}$, on a

$$\mathcal{L}^o.\bar{K}^{\ell}_r = - \sum_{s=0}^{r} \sum_{p=1}^{t} C^s_p\, \mathcal{L}^p.\bar{K}^{\ell}_{r-s}(\bar{\xi}^{\ell})^{p-s}\ .$$

Démonstration :

Comme $HP^{\ell} \equiv 0 \left[H^{\mu_\ell}_{s(\ell)}\right]$ pour tout $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$,

on a, pour tout $r \in \{0,\dots,\mu_\ell - 1\}$

$$\partial^{o(r)}[H.P^{\ell}] \equiv 0 \qquad (\equiv (H_s)^{\mu_{\ell}-r}$$

$$\Rightarrow \qquad \widetilde{\partial^{o(r)}(H.P^{\ell})}^{\ell} = 0.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on aura :

$$\tilde{H}^{\ell}\ \widetilde{\partial^{o(r)}\ P^{\ell}}^{\ell} = -\sum_{1\leqslant s\leqslant r} C_r^s\ \widetilde{\partial^{o(s)}H}^{\ell}\ \widetilde{\partial^{o(r-s)}P^{\ell}}^{\ell} .$$

Comme $H(x,\xi) = \sum_{r=0}^{t} L^r(x,\xi')(\xi_o)^r$, on a

$$\partial^{o(s)}H(x,\xi) = \sum_{r=s}^{t} L^r(x,\xi')\ \frac{r\,!}{(r-s)\,!}\ (\xi_o)^{r-s}$$

en prenant $(x,\xi) = (0,x';\mathrm{grad}\ \psi^{\ell}(0,x'))$, on a :

$$\overline{\widetilde{\partial^{o(s)}H}^{\ell}} = \sum_{p=s}^{t} L^p\ \frac{p!}{(p-s)!}\ (\bar{\xi}^{\ell})^{p-s}$$

et donc :

$$\Rightarrow \quad \bar{\tilde{H}}^{\ell}\ \widetilde{\partial^{o(r)}\ \ P^{\ell}}^{\ell} = -\sum_{s=1}^{r} C_r^s \sum_{p=s}^{t} L^p\ \frac{p!}{(p-s)!}\ \overline{\widetilde{\partial^{o(r-s)}\ P^{\ell}}^{\ell}}(\bar{\xi}^{\ell})^{p-s} .$$

Comme pour $p \geqslant s$ et $r \geqslant s$, on a :

$$C_r^s\ \frac{p!}{(p-s)!} = \frac{r!}{(r-s)!}\ C_p^s$$

alors

$$\bar{\tilde{H}}^{\ell}\overline{\widetilde{\partial^{o(r)}\ \ P^{\ell}}^{\ell}} = -\sum_{s=1}^{r}\ \sum_{p=s}^{t}\ \frac{r!}{(r-s)!}\ C_p^s\ L^p\ \overline{\widetilde{\partial^{o(r-s)}\ P^{\ell}}^{\ell}}(\bar{\xi}^{\ell})^{p-s} .$$

Comme $\bar{\tilde{H}}^{\ell} = \sum_{p=0}^{t} L^p(\bar{\xi}^{\ell})^p$, on a :

$$L^o \bar{K}_r^{\ell} = - \sum_{p=1}^{t} L^p (\bar{\xi}^{\ell})^p \bar{K}_r^{\ell} - \sum_{s=1}^{r} \sum_{p=s}^{t} C_p^s L^p \bar{K}_{r-s}^{\ell} (\bar{\xi}^{\ell})^{p-s} .$$

Soit encore, puisqu'on a posé $C_p^s = 0$ si $s > p$

$$L^o \bar{K}_r^{\ell} = - \sum_{s=0}^{r} \sum_{p=1}^{t} C_p^s L^p \bar{K}_{r-s}^{\ell} (\bar{\xi}^{\ell})^{p-s}.$$

Ce qui démontre le lemme.

Montrons maintenant que les équations R_{α} sont vraies pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Comme $R_o,\ldots,R_{t-1}$ sont vraies par hypothèse, on montre par récurrence sur t' que $R_{t'+t-1}$ est vérifiée.

Pour $t' = 0$, on sait que R_{t-1} est vraie.

On montre que s'il existe $t' \geqslant 0$ tel que pour tout $\alpha \in \{0,\ldots,t+t'-1\}$ les équations (R_{α}) sont réalisées, alors $R_{t+t'}$ l'est aussi.

Pour cela, on "multiplie" $R_{t'}$ par la matrice L^o

$$\sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_{\ell}-1} \sum_{s=0}^{r} C_{t'}^s (\bar{\xi}^{\ell})^{t'-s} L^o \bar{K}_{r-s}^{\ell} Z_r^{\ell} = 0$$

en remplaçant $L^o \bar{K}_{r-s}^{\ell}$ grâce au lemme, on aura :

$$\sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_{\ell}-1} \sum_{s=0}^{r} C_{t'}^s (\bar{\xi}^{\ell})^{t'-s} \sum_{\rho=0}^{r-s} \sum_{p=1}^{t} C_p^{\rho} L^p \bar{K}_{r-\rho-s}^{\ell} (\bar{\xi}^{\ell})^{p-\rho} Z_r^{\ell} = 0 .$$

On pose $u = \rho + s$, on a :

$$\sum_{p=1}^{t} L^p \{ \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_{\ell}-1} \sum_{u=0}^{r} (\sum_{s+\rho=u} C_{t'}^s C_p^{\rho}) (\bar{\xi}^{\ell})^{t'+p-u} \bar{K}_{r-u}^{\ell} Z_r^{\ell} \} = 0.$$

Comme $\sum_{s+\rho=u} C_{t'}^s C_p^{\rho} = C_{t'+p}^u$ et comme pour $p \leqslant t-1$ les équations en $\alpha = t'+p \leqslant t'+t-1$ sont vérifiées, on a :

$$L^t \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_\ell-1} \sum_{u=0}^{r} C^u_{t'+t} (\bar{\xi}^\ell)^{t'+t-u} \bar{K}^\ell_{r-u} \; Z^\ell_r = 0$$

or, $\det L^t = \det(H(0,x';1,0,\dots,0)) \neq 0$ car Q n'est pas caractéristique pour h.

On a donc : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_\ell-1} \sum_{u=0}^{r} C^u_{t'+t} (\bar{\xi}^\ell)^{t'+t-u} \bar{K}^\ell_{r-u} \; Z^\ell_r = 0$

c'est-à-dire $R_{t+t'}$.

On a donc un système à une infinité d'équations :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \quad : \quad \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{r=0}^{\mu_\ell-1} \sum_{p=0}^{r} C^p_\alpha (\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} \bar{K}^\ell_{r-p} \; Z^\ell_r = 0$$

donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \quad : \quad \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{p=0}^{\mu_\ell-1} C^p_\alpha (\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} \left[\sum_{r=p}^{\mu_\ell-1} \bar{K}^\ell_{r-p} \; Z^\ell_r \right] = 0$$

on pose $V^\ell_p = \displaystyle\sum_{r=p}^{\mu_\ell-1} \bar{K}^\ell_{r-p} \; Z^\ell_r$.

V^ℓ_p est un vecteur à m composantes, puisque $\bar{K}^\ell_{r-p}$ est une matrice $m \times k_{s(\ell)}$ et Z^ℓ_r un vecteur à $k_{s(\ell)}$ composantes.

Comme $1 \leqslant \ell \leqslant \tau$ et $0 \leqslant p \leqslant \mu_\ell - 1$, il y a :

$N = \displaystyle\sum_{s=0}^{\sigma} \tau_s \nu_s$ vecteurs inconnus V^ℓ_p.

On fait varier alors α de 0 à N-1 et on considère le système carré $N \times N$ aux inconnues vectorielles V^ℓ_p.

Son déterminant est alors égal à :

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} & \vdots & \\ \cdots & C_\alpha^p\ (\bar{\xi}^\ell)^{\alpha-p} & \cdots \\ & \vdots & \end{vmatrix}_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant\tau \\ 0\leqslant p\leqslant\mu_\ell-1 \\ 0\leqslant\alpha\leqslant N-1}}$$

et on sait, d'après [9], qu'il n'est pas nul.

Donc, pour tout $\ell \in \{1,\ldots,\tau\}$ et tout $p \in \{0,\ldots,\mu_\ell-1\}$, on a :

$$V_p^\ell = \sum_{r=p}^{\mu_\ell-1} \bar{K}_{r-p}^\ell\ Z_r^\ell = 0.$$

Pour $p = \mu_\ell-1$, on a :

$$\bar{K}_o^\ell\ Z_{\mu_\ell-1}^\ell = 0 \qquad \forall\ \ell \in \{1,\ldots,\tau\}.$$

Comme $\bar{K}_o^\ell = \bar{\tilde{P}}^\ell$ c'est une matrice de rang $k_{s(\ell)}$ et comme le vecteur $Z_{\mu_\ell-1}^\ell$ a $k_{s(\ell)}$ composantes, on a : $Z_{\mu_\ell-1}^\ell = 0$ pour tout $\ell \in \{1,\ldots,\tau\}$.

On prend ensuite $p = \mu_\ell-2,\ldots$ et on obtient finalement que $Z_r^\ell = 0$ pour tout $\ell \in \{1,\ldots,\tau\}$ et tout $r \in \{0,\ldots,\mu_\ell-1\}$.

Le déterminant du système $(1)_j$ est donc $\neq 0$, et la donnée des B_α détermine de manière unique les $\overline{\partial_o^{(r)}\lambda_j^\ell}$ pour tout $\ell \in \{1,\ldots,\tau\}$ et tout $r \in \{0,\ldots,\mu_\ell-1\}$. Les λ_j^ℓ sont donc déterminés de manière unique, ainsi que les λ_j^ℓ, et on a le

Théorème.-

Sous les hypothèses ($\mathcal{H}$) 1), 2), ($\mathcal{L}$) et ($\mathcal{D}$), (on fait pour chaque $s \in \{0,\dots,\sigma\}$ l'hypothèse D_{ν_s} relative au facteur H_s), alors le problème de Cauchy asymptotique est bien posé pour h.

CHAPITRE IV

LE PROBLEME DE CAUCHY EN C^∞.

----

§ 1 - *Hypothèses et Résultats*.

On suppose maintenant que $X = [0,T_+] \times X'$, avec $T_+ > 0$ et X' variété réelle, compacte, connexe, de dimension n, et $\mathcal{C}^\infty$

h est un opérateur différentiel à m lignes, m colonnes, de de classe C^∞, et d'ordre égal à t en tout point de X.

On rappelle ([6]) la

Définition.-

Le problème de Cauchy C^∞ est bien posé pour h dans X si et seulement si

a) $\forall\, T \in [0,T_+[$, $\forall\, f \in C^\infty(X;\mathbb{R}^m)$, $\forall\, g_o,\dots,g_{t-1}$ dans $C^\infty(X',\mathbb{R}^m)$, $\exists\,!\ u \in C^\infty(X,\mathbb{R}^m)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l} .\ h(u) = f \\ .\ \partial_o^{(\alpha)} u(T,x') = g_\alpha(x') \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \{0,\dots,t-1\}. \end{array}\right.$$

b) $\forall\, T$, $\forall\, T'$ tels que $0 \leqslant T < T' < T_+$

$\forall\, u \in \mathcal{D}'(X) \qquad h(u)\Big|_{x^o<T'} = 0$ et $\operatorname{supp}(u) \subset [0,T] \times X' \implies$

$u\Big|_{x^o<T'} = 0.$

Les résultats démontrés au chapitre III permettent de démontrer le

Théorème 1.-

Si h vérifie

H 1) Il existe $\sigma \in \mathbb{N}$, et, pour tout $s \in \{0,\dots,\sigma\}$, des applications H_s de $T^*(X)$ dans R polynomiales et irréductibles en ξ pour tout $x \in X$, C^∞ en x sur X, et des nombres entiers non nuls k_s et ν_s tels que

$$\det H = \prod_{s=0}^{\sigma} (H_s)^{k_s \nu_s} .$$

H 2) $P = \prod_{s=0}^{\sigma} H_s$ est strictement hyperbolique en tout point x de X par rapport à la direction $(1,0,\dots,0)$.

L 1) $\forall s \in \{0,\dots,\sigma\}$, $\forall x \in X$, $H(x,.)$ est équivalente dans ϕ_x^s à

$$\left[\begin{array}{cccccc} (H_s(x,.))^{\nu_s} & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & (H_s(x,.)^{\nu_s} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \end{array}}\right\} k_s \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \end{array}}\right\} m-k_s \end{array}$$

2) $\forall s \in \{0,\dots,\sigma\}$, $\exists$ un cofacteur d'ordre $m-k_s$ de H dont l'ensemble caractéristique ne rencontre pas celui de H_s.

D 1) $\forall s \in \{0,\ldots,\sigma\}$, il existe un opérateur différentiel p_{ν_s} (construit par récurrence comme au § 5 du chapitre I) tel que hp_{ν_s} soit bien décomposable par rapport à H_s avec la multiplicité ν_s

(1)' même condition que (1) pour $\hat{h}$ adjoint de h.

Alors le problème de Cauchy C^{∞} est bien posé pour h dans X.

Remarques :

1) L'hypothèse *H* 2) implique que pour tout $T \in [0,T_+]$, $x^o = T$ n'est caractéristique en aucun point pour h.

2) L'hypothèse *L* 1) implique que

$\forall s \in \{0,\ldots,\sigma\}$, $\forall x \in X$, il existe un cofacteur d'ordre $m-k_s$ de $H(x,.)$ non divisible par $H_s(x,.)$, mais ceci ne suffit pas pour assurer *L* 2.

3) L'utilisation d'une partition de l'unité, comme indiqué dans [6] permet de remplacer *L* 2) par l'hypothèse plus faible *L'* 2) ci-dessous.

L' 2) : $\forall s \in \{0,\ldots,\ \}$, $\forall x \in X$, il existe un cofacteur d'ordre $m-k_s$ de $H(x,.)$ dont le cône caractéristique a comme intersection avec celui de $H_s(x,.)$ le seul point $(x,0)$ de $T^*_x(X)$.

4) On doit pouvoir montrer (voir les cas étudiés dans [6]) que *D*(1) implique *D*(1)' qui serait donc une hypothèse superflue. Faute d'avoir fait le calcul explicitement dans le cas général, on a laissé l'hypothèse *D*(1)'.

§ 2 - Résolution du problème de Cauchy.

Les techniques utilisées pour démontrer le théorème 1 quand on a résolu le problème de Cauchy asymptotique (voir chapitre III) sont tout à fait standarts et on se bornera à rappeler les différentes étapes du processus.

A) *Construction de relations canoniques.*

Il résulte de *H*.2 que

$\forall\, T \in [0,T_+]$, $\forall\, \xi' \neq 0$, il existe τ fonctions $\Psi^{\ell}_{\xi'}$, solutions de

$$\begin{cases} P(x;\text{grad}\ \Psi^{\ell}_{\xi'}(x) \equiv 0 \\ \Psi^{\ell}_{\xi'}(T,x') = <\xi'.x'> \\ \partial_o \Psi^{\ell}_{\xi'}(T,0) = \xi^{\ell}_o(T,0,\xi') \end{cases}$$

avec $\{\xi^{\ell}_o(x,\xi')\}_{1\leqslant\ell\leqslant\tau}$ sont les τ solutions, rangées comme expliqué au chapitre III, de l'équation en ξ_o : $P(x,\xi_o,\xi') = 0$.

On pose $\varphi^{\ell}(x,\xi') = \Psi^{\ell}_{\xi'}(x)$; c'est une fonction C^{∞} en x homogène de degré 1 en ξ', définie sur un voisinage conique d'un point (T,x'_o,ξ'^{o}) de $\mathbb{R} \times (T^*(X')\setminus 0)$.

On définit la relation canonique

$C_{\ell}(T) = \{(x,\xi;y',\eta')\,|\,(x,\xi)$ appartient à la bande bicaractéristique de φ^{ℓ} issue de $(T,y';\xi^{\ell}_o(T,y';\eta'),\eta')\}$

et on pose $C(T) = \bigcup\limits_{\ell=1}^{\tau} C_{\ell}(T)$. C'est une relation canonique de $T^*(X) \setminus 0$ sur $T^*(X') \setminus 0$ comme réunion disjointe de relations canoniques homogènes ([12]).

B) *Construction du noyau du problème de Cauchy.*

Proposition 1.-

Si h vérifie les hypothèses *H*, *L*, *D* du théorème 1, alors $\forall\, \beta \in \{0,\dots,t-1\}$, $\forall\, T \in [0,T_+]$, $\exists\ E_{\beta}(T)$, matrice $m \times m$ à coefficients dans $I^{\mu-\beta-1-\frac{1}{4}}(X,X';C(T))$ telle que

$$\begin{cases} h(E_\beta(T)) \equiv 0 \text{ modulo un opérateur à noyau } C^\infty \ ; \\ \gamma_\alpha(E_\beta(T)) \equiv \delta_{\alpha,\beta} I \text{ modulo un opérateur à noyau } C^\infty \text{ pour tout } \\ \qquad \alpha \in \{0,\dots,t-1\} \ ; \end{cases}$$

avec $\mu = \max\limits_{1 \leqslant \ell \leqslant \tau} (\mu_\ell)$ et γ_α est l'opérateur de trace associé à $\partial_o^{(\alpha)}$ sur $x^o = T$.

On cherche comme d'habitude $E_\beta(T)$ sous la forme $\sum\limits_{\ell=1}^{\tau} F_{\beta,\ell}(T)$, où pour tout $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$ $F_{\beta,\ell}(T)$ est une matrice $m \times m$ à coefficients dans $I^{\mu_\ell-\beta-1-\frac{1}{4}}(X,X';C_\ell(T))$ telle que $h(F_{\beta,\ell}(T)) \equiv 0$ modulo un opérateur à noyau C^∞.

Les opérateurs $F_{\beta,\ell}(T)$ sont déterminés modulo un opérateur régularisant par un développement asymptotique

$$F_{\beta,\ell}(T) \sim \sum_{j=0}^{\infty} F^j_{\beta,\ell}(T)$$

avec pour tout $j \geqslant 0$

$F^j_{\beta,\ell}(T)$ est une matrice $m \times m$ à coefficients dans $I^{\mu_\ell-\beta-1-\frac{1}{4}-j}(X,X';C_\ell(T))$ et on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

1) $h \circ (\sum\limits_{j<p} F^j_{\beta,\ell}(T))$ est à coefficients dans $I^{t+\mu_\ell-\beta-\frac{1}{4}-1-p}(X,X';C_\ell(T))$;

2) $\gamma_\alpha(\sum\limits_{\ell=1}^{\tau} \sum\limits_{j<\mu_\ell+p} F^j_{\beta,\ell}(T)) - \delta_{\alpha,\beta} I$ est à coefficients dans

$L^{\alpha-\beta-p}(X')$ pour tout $\alpha \in \{0,\dots,t-1\}$.

Le raisonnement classique ([8], [6]) permet alors de prouver que, localement, les symboles $a^j_{\beta,\ell}(T)$ de $F^j_{\beta,\ell}(T)$ sont des matrices $m \times m$ telles que si $a^{j,C}_{\beta,\ell}(T)$ est la $C^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice, alors pour C, β et T fixés, les $\{a^{j,C}_{\beta,\ell}(T)\}_{\substack{1\leq\ell\leq T\\ j\in\mathbb{N}}}$ vérifient le même système d'équations que celui trouvé lors de la résolution du problème de Cauchy asymptotique.

Les hypothèses $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{L})$, $(\mathcal{D})$ permettent la résolution au voisinage de chaque point de X, car les hypothèses du chapitre III sont vérifiées en chaque point a de X.

On a donc construit une paramétrix pour h ; comme l'adjoint de h vérifie des hypothèses analogues, on peut aussi construire une paramétrix pour ce dernier. On en déduit, par le procédé habituel ([8], [6]) le théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BELABBES K. - *"Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique, relativement à une hypersurface caractéristique multiple avec une condition de type hyperbolicité forte".* Thèse de 3ème cycle, Lille, janvier 1982.

[2] BERGER - *"Formes harmoniques".* Séminaire Lichnerowicz-Avez-Berger, Collège de France.

[3] BERZIN R. - *"Ondes asymptotiques et problème de Cauchy à données singulières pour un système d'équations linéaires avec une caractéristique double".* C.R.A.S. t. 275 série A, p. 1091-94, 1972.

[4] BERZIN R. - *"Le problème de Cauchy pour un système hyperbolique d'équations linéaires avec une caractéristique double".* C.R.A.S. t. 280 série A, p. 443-445, 1975.

[5] BERZIN R. - VAILLANT J. - *"Paramétrix du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à caractéristiques multiples".* C.R.A.S. t. 283 série A, p. 485-87, 1976.

[6] BERZIN R. - VAILLANT J. - *"Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples".* Journal de math. pures et appl. t. 58, p. 165-216, 1979.

[7] BOUKROUCHE M. - *"Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique triple, premier cas, avec conditions de décomposition".* Thèse de 3ème cycle, Lille, mars 1982.

[8] CHAZARAIN - *"Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante".* Annales de l'Institut Fourier de Grenoble, t. 24-1, p. 173-202, 1974.

[9] DE PARIS J.C. - *"Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité".* Journal de math. pures et appl. t. 51, p. 231-256, 1972.

[10] DE PARIS J.C. - *"Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable".* Journal de math. pures et appl. t. 51, p. 465-488, 1972.

[11] DE PARIS J.C. - *"Problème de Cauchy asymptotique. Lien avec l'hyperbolicité".*
Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1972-1973.

[12] DUISTERMAAT - *"Applications of Fourier intégral".*
Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1971-1972.

[13] DUISTERMAAT-HÖRMANDER - *"Fourier integral operators II".*
Acta math. t. 128, 1971.

[14] GARDING - *"Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients".*
Acta math. t. 85, 1951.

[15] GOURDIN D. - *"Les opérateurs faiblement hyperboliques, matriciels à caractéristiques de multiplicité constante, bien décomposables et le problème de Cauchy non caractéristique associé".*
Journal de math. Kyoto univ. t. 173, 1977.

[16] HAMADA - *"Problème analytique de Cauchy à caractéristiques multiples".*
C.R.A.S. t. 275, 1973.

[17] HEBBAR O. - *"Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique double avec une condition de décomposition".*
Thèse de 3ème cycle, Lille, janvier 1982.

[18] HADAMARD - *"Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques".*
Hermann, Paris, 1932.

[19] HÖRMANDER - *"Linear partial differential operators".*
Springer, 1964.

[20] HÖRMANDER - *"Fourier integral operators I".*
Acta mathematica t. 127, 1970.

[21] KOMATSU - *"Ultradistributions I, Structure théorème α a characterization".*
J. of the fac. of Sc. Univ. of Tokyo - Sec IA, vol. 20, n° 1, p. 25-105, 1973.

[22] KOMATSU - *"Irregularity of characteristic elements α construction of null-solution".*
J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo - Sec IA, vol. 23, p. 297-342, 1976.

[23] KOMATSU - *"Irregularity of characteristic elements α hyperbolicity".*
Publications of the research institute for mathematical sciences Kyoto university, vol. 12, supplement 77, 1977.

[24] KNOPP - *"Theory α applications of infinite series".*
Presses académiques, p. 218-225, 1957.

[25] LAX P.D. - *"Asymptotic solution of oscilatory initial value problem".*
Duke math. vol. 24, p. 627-646, 1957.

[26] LERAY
KOTAKE
GARDING - *"Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes".*
Bull. Soc. math. Fr. t. 92, p. 263-361, 1964.

[27] LIONS-MANGENES -*"Problèmes aux limites non-homogènes et applications".*
Dunod - Paris, vol. 3, 1970.

[28] LUDWIG - *"Exact and asymptotic solution of the Cauchy problem".*
Commun. on pure α appl. math. vol. 13, p. 473-508, 1960.

[29] MIZOHATA - *"Some remarks on Cauchy problem".*
J. math. Kyoto univ. 1-1, 1961.

[30] MIZOHATA - *"Solutions nulles et solutions non-analytiques".*
J. math. Kyoto univ. 1-2, 1962.

[31] ROUMIEU - *"Sur quelques extensions de la notion de distribution".*
Annales scientifiques de l'E.N.S. 3ème série, t. 77, 1960.

[32] ROUMIEU - *"Ultradistributions définies sur* $\mathbb{R}^n$ *et sur certaines classes de variétés différentiables".*
J. analyse math. t. 10, p. 153-192, 1962.

[33] SATO - *"Theory of hyperfonction I"*
"Theory of hyperfonction II"
J. Fac. Scien. Univ. Tokyo. Sec I-8, 1959 - 1960.

[34] SEDJELMACI - *"Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel".*
Thèse de 3ème cycle, Lille, mars 1982.

[35] TREVES - *"Introduction to Fourier integral operators".*
t. 2 - Plenum Press - New-York and London, 1980.

[36] VAILLANT J. - *"Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficient constant".*
Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 15-2, p. 225-311, 1965.

[37] VAILLANT J. - *"Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques".*
J. math. pures et appl. t. 50, 1971.

[38] WAGSCHAL - *"Problème de Cauchy analytique à données méromorphes".*
Journal de math. pures et appl. t. 51, p. 375-397, 1972.

RÉSUMÉ

On sait depuis Mizohata et Komatsu qu'une onde asymptotique permet de construire des solutions nulles ultradifférentiables ou ultradistributions, et depuis Chazarain que la résolution du problème de Cauchy asymptotique permet la construction d'une paramétrix par la méthode des opérateurs intégraux de Fourier.

On étudie, dans ce travail, le cas d'un opérateur matriciel de type $(\nu,\nu,\ldots,\nu,0,\ldots,0)$ qui généralise de manière non triviale trois des quatre cas étudiés dans un travail de BERZIN-VAILLANT ; en particulier, les méthodes utilisées sont originales et nettement différentes ; elles sont basées essentiellement sur les techniques d'opérateurs différentiels bien décomposables au sens de DE PARIS.

MOTS CLÉS

- *Hyperbolique système*
- *Asymptotique développement*
- *Solution nulle*
- *Paramétrix*
- *Hyperbolique problème de Cauchy*