

50376  
1983  
19

N° d'ordre : 1038

50376  
1983  
19

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

**LE TITRE DE DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE**

«**Mathématiques Appliquées**»

Marc PREVOST

## **SOMMATION DE CERTAINES SERIES FORMELLES PAR APPROXIMATION DE LA FONCTION GENERATRICE**



0 5936

Thèse soutenue le 9 Juin 1983 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président	P. POUZET
Rapporteur	C. BREZINSKI
Examineur	S. PASZKOWSKI

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean	Physique
M. BONNOT Ernest	Biologie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M. DURCHON Maurice	Biologie
M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. HEUBEL Joseph	Chimie
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LANSRAUX Guy	Physique
M. LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M. LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie

M. MAILLET Pierre	S.E.S.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

-----

M. AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOBE Bernard	S.E.S.
M. BODART Marcel	Biologie
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique
M. DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. GERVAIS Michel	S.E.S.
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HANGAN Théodore	Mathématiques
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LAURENT François	I.E.E.A.
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques

M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LENTACKER Firmin	G.A.S.
M. LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M. LHENAFF René	G.A.S.
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M. LOUAGE Francis	B.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mlle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
Mme NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mlle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RICHARD Alain	Biologie
M. RIETSCH François	B.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	M.P.A.
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M. SCHAMPS Joël	Physique
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mlle SPIK Geneviève	Biologie
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. WALLART Francis	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

-----

M. TOP Gérard	S.E.S.
M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

-----

M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFACK Jacques	I.P..A
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

*La présidence du jury par Monsieur le Professeur P. Pouzet m'honore profondément.*

*La confiance, les encouragements et l'efficacité de Monsieur le Professeur Claude Brezinski ont été déterminants dans l'élaboration de ce travail.*

*Je remercie Monsieur S. Paskowski, Professeur associé à l'Université de Lille 1, qui me fait l'honneur de juger cet exposé.*

*L'amitié, les remarques et conseils judicieux de J.P. Delahaye, B. Germain-Bonne, P. Sablonnière et A. Draux, m'ont incité à m'investir à fond dans cette recherche.*

*Je remercie Françoise Tailly qui, avec patience, gentillesse et intelligence a su rendre un certain attrait à ces propos parfois fastidieux et Madame Debock pour le soin qu'elle a apporté à la mise en page de cette thèse.*

*A Catherine*



## TABLE DES MATIERES

- \* -

	<i>Pages</i>
INTRODUCTION	
CHAPITRE 1 : RAPPELS	
1 - Comparaison des suites .....	1
2 - Approximants de type Padé .....	4
CHAPITRE 2 : APPROXIMATION DE SERIES	
1 - Théorème principal.....	7
2 - Sommation de séries .....	12
3 - Exemples .....	28
4 - Relations de récurrence .....	30
CHAPITRE 3 : APPLICATION DU THEOREME PRINCIPAL	
1 - $L^\infty$ -approximation de la fonction génératrice .....	33
2 - $L^1$ -approximation de la fonction génératrice .....	42
3 - $L^2$ -approximation de la fonction génératrice .....	42
4 - Approximants de Padé .....	47
5 - Développement de la fonction génératrice en fonction des $T_n$ .....	49
6 - Développement de la fonction génératrice en fonction des $U_n$ .....	55
7 - Remarque sur la transformation $E_{\alpha, \beta}$ de Niethammer .....	60
CHAPITRE 4 : APPLICATION AUX SUITES $T_M$ et $T_O$	
1 - Régularité .....	64
2 - Accélération des suites $T_M$ ou $T_O$ .....	69
CHAPITRE 5 : ETUDE D'AUTRES PROCEDES	
1 - Interprétation du $\Delta^2$ d'Aitken et généralisation .....	82
2 - Interprétation du procédé W de Lubkin .....	93
3 - Polynômes de Bernstein .....	95
4 - Interpolation des points équidistants .....	100
5 - Approximation de la fonction génératrice sur $D(0,1)$ .....	108
6 - Résultat négatif pour $T_M$ .Log .....	109
CHAPITRE 6 : APPROXIMANTS RATIONNELS DE $e^{-x}$ SUR $[0, +\infty[$	
1 - Développement de $e^x$ en fonction des $T_n$ .....	119
2 - Approximants de type-Padé pour $e^{-x}$ .....	133
CHAPITRE 7 : APPLICATIONS NUMERIQUES	
REFERENCES	159

## INTRODUCTION

L'introduction récente des approximants de type Padé [3] a permis de construire des approximants rationnels de séries formelles, le choix du dénominateur étant libre. C'est cet avantage des approximants de type Padé par rapport aux approximants de Padé classiques qui constitue le thème de cette étude.

Le chapitre 1 rappelle les critères de comparaison de suites convergentes, ainsi que la définition d'une classe de suites importante, l'ensemble des suites totalement monotones noté  $TM$  ; enfin un bref rappel de la définition des approximants de type Padé ainsi que de leurs principales propriétés.

Le chapitre 2 comporte les résultats théoriques généraux de cette thèse. On montre principalement qu'un choix judicieux des dénominateurs des approximants de type Padé permet de sommer une certaine classe de fonctions analytiques en dehors de leur disque de convergence. Des relations de récurrence permettant le calcul effectif de ces approximants seront ensuite établies.

Le chapitre 3 détaille les nombreuses applications, notamment en ce qui concerne les fonctions de Stieltjes : approximation de la fonction génératrice dans  $L^\infty$ ,  $L^1$ ,  $L^2$  ainsi que les approximants de Padé classiques. Il est surprenant de constater que le développement de la fonction génératrice en fonction des polynômes de Chebychev de seconde espèce aboutit au procédé  $E_{\alpha, \beta}$ , mis au point par W. Niethammer [18]. Ces résultats sont ensuite étendus à une classe plus vaste de fonctions analytiques.

Le chapitre 4 est la traduction en terme de suites des résultats des chapitres précédents. On y montre notamment que l'ensemble des suites totalement monotones non logarithmiques est accéléré par n'importe quel procédé défini dans le chapitre 2.

Une interprétation nouvelle des procédés connus comme le  $\Delta^2$  d'Aitken ou de Lubkin est décrite dans le chapitre 5, ce qui permet d'en trouver une généralisation. La suite de ce chapitre est consacrée à l'étude des approximants

de type Padé obtenus pour divers choix de dénominateurs.

Enfin un résultat négatif pour l'ensemble des suites totalement monotones non logarithmiques est établi.

Le chapitre 6 contient deux types d'approximants rationnels pour la fonction exponentielle sur  $[0, +\infty[$ .

Enfin, tous ces résultats théoriques seront confortés par des applications numériques dans le chapitre 7.

## CHAPITRE I

### RAPPELS

## I - COMPARAISON DES SUITES.

Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles convergeant vers 0.

Définition 1 : Si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$  on ait :

$$|v_n| < \varepsilon |u_n|$$

On écrit alors  $v_n = o(u_n)$ .

Théorème 1 : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergeant vers 0.  
S'il existe un naturel  $N$  et deux réels  $a$  et  $b$  vérifiant  
 $a < 1 < b$  tels que pour tout  $n > N$  on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \notin [a, b]$$

et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = A$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta v_n}{\Delta u_n} = A$  où  $\Delta$  est l'opérateur

différence :  $\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ .

Définition 2 : Soient  $(u_n)$  une suite convergeant vers  $c \in \mathbb{R}$  et  $v_n = T(u_n)$ ,  
image de  $u_n$  par une certaine transformation de suite.

Si  $(v_n - c) = o(u_n - c)$ , on dit que  $T$  accélère la convergence  
de  $(u_n)$ .

Voyons maintenant quelle est la relation entre l'accélération de la  
convergence et les rayons de convergence des séries  $\sum u_n z^n$  et  $\sum v_n z^n$  respecti-  
vement  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

Supposons que  $u_n \rightarrow 0$  et  $v_n \rightarrow 0$  et que la suite  $|u_n|^{1/n}$  converge, alors :

$$\frac{1}{\rho_1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n}$$

On obtient :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\limsup |v_n|^{\frac{1}{n}}}{\limsup |u_n|^{\frac{1}{n}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n}{u_n} \right|^{1/n}$$

ce qui signifie que  $\rho_2/\rho_1$  est le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{v_n}{u_n}\right) z^n$

Propriété : Si  $\rho_1 < \rho_2$  ( $\Leftrightarrow \rho_2/\rho_1 > 1$ ), il en résulte que  $\frac{v_n}{u_n} \rightarrow 0$  et donc que  $(v_n)$  converge plus vite que la suite  $(u_n)$ .

Ce résultat sera souvent utilisé par la suite.

Définition 3 : Suites totalement monotones.

On dit que la suite réelle  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totalement monotone si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (-1)^k \Delta^k c_n \geq 0.$$

L'ensemble des suites totalement monotones est noté TM.

Exemples  $\frac{1}{n+1}$ ,  $a^n$  avec  $a \in [0,1]$ .

Propriété : Des suites totalement monotones.

- (i) Une suite de TM est convergente dans  $\mathbb{R}^+$
- (ii) Si  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in TM$  alors  $((-1)^k \Delta^k c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in TM, \forall k \in \mathbb{N}$
- (iii) Si  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in TM$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}^{-c}}{c_n^{-c}} = \rho \in ]0,1]$  où  $c$  désigne désigne la limite de la suite  $(c_n)$ . Si  $\rho = 1$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite logarithmique.

Définition 4 : La suite  $(c_n)_{n \geq 0}$  est dite totalement oscillante si et seulement si :

$$((-1)^n c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in TM.$$

On écrit alors  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T.O.$

Propriétés :

- (i) Une suite de  $T_0$  convergente, converge vers 0.
- (ii) Si  $(c_n) \in T_0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \rho \in [-1, 0[ \quad [4]$ .

Théorème 2 : Une suite  $(c_n)_{n \geq 0}$  est totalement monotone si et seulement si (Hausdorff) il existe une fonction  $\mu$  non décroissante, bornée dans  $[0, 1]$  telle que :

$$\forall n \geq 0 \quad c_n = \int_0^1 x^n d\mu(x)$$

Définition 5 : Une suite de réels  $(c_n)_{n \geq 0}$  est appelée suite de moments de Stieltjes si il existe une fonction  $\mu$  bornée non décroissante dans  $[0, \infty[$  telle que :

$$c_n = \int_0^\infty x^n d\mu(x) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

On notera  $(c_n) \in M S$ .

Exemples :  $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$  (avec  $\rho > 0$ ) ;  $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$

Propriétés : [6]

- (i) Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $(c_n) \in T M$  est que  $(c_n) \in M S$  et soit convergente.
- (ii) Le produit de deux suites de  $M S$  est une suite de  $M S$

Définition 6 : On dit que la série  $C$  :

$$C(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

est une série de Stieltjes si  $(c_n)_{n \geq 0}$  est une suite de moments de Stieltjes.

Définition 7 : Une fonction de la forme

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{d\mu(x)}{1-xz}$$

est appelée fonction de Stieltjes.

Si la série de Stieltjes a un rayon de convergence  $\rho > 0$  alors elle s'identifie à la série de Taylor de la fonction de Stieltjes

$$f(z) = \int_0^{1/\rho} \frac{d\mu(x)}{1-xz}$$

où  $f$  est analytique dans le plan complexe coupé selon l'axe des réels  $[\rho, +\infty[$ . Dans ce cas la fonction  $\mu$  est constante en dehors de l'intervalle  $]0, \frac{1}{\rho}[$ .

## II - APPROXIMANTS DE TYPE-PADÉ, [3, p. 9-11]

Soit  $f$  une série formelle de puissances d'une variable

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$$

Définissons la fonctionnelle linéaire  $c$  agissant sur l'ensemble des polynômes par :

$$c(x^i) = c_i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots$$

Le nombre  $c_i$  est appelé : moment d'ordre  $i$  de la fonctionnelle  $c$ .

Nous obtenons immédiatement

$$f(t) = c \left( \frac{1}{1-xt} \right)$$

La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  est appelée fonction génératrice de la série  $f$ .

Soit  $v$  un polynôme arbitraire de degré  $k$  :

$$v(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$$

et  $w$  le polynôme de degré  $(k-1)$  défini par :

$$w(t) = c \left[ \frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right]$$



où  $c$  agit sur  $x$ ,  $t$  étant un paramètre.

Définissons maintenant  $\tilde{w}$  et  $\tilde{v}$  par :

$$\tilde{w}(t) = t^{k-1} w(t^{-1})$$

et

$$\tilde{v}(t) = t^k v(t^{-1})$$

Nous avons :

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} - f(t) = O(t^k) \quad t \rightarrow 0.$$

Un tel approximant rationnel de  $f$  est appelé un approximant de type-Padé et il est noté :

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = (k-1/k)_f(t)$$

$v$  est appelé le polynôme générateur de l'approximant.

C. Brezinski a démontré les résultats suivants :

Théorème 3 : Si  $P$  est le polynôme de Lagrange interpolant la fonction génératrice de  $f$  en  $k$  points arbitraires distincts du plan complexe  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , alors :

$$c(P) = (k-1/k)_f(t)$$

où le polynôme générateur  $v$  de cet approximant est :

$$v(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$$

Remarque : Si certains des points d'interpolation  $x_i$  coïncident, nous avons encore

$$c(P) = (k-1/k)_f(t)$$

$P$  étant le polynôme général d'interpolation d'Hermite de la fonction génératrice de  $f$ .

Cette propriété sera très souvent utilisée par la suite.

On a :

$$P(x) = \frac{1}{1-xt} \left[ 1 - t^k \frac{v(x)}{v(t)} \right]$$

avec  $v(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)$

Théorème 4 : Convergence des approximants de type-Padé.

Soit  $t \in D$ , domaine de convergence de  $f$ .

Si, pour tout  $k$ , les racines  $x_i$  de  $v$  sont telles que  $t x_i \in [-a, 0]$  avec  $a > 0$ , alors la suite  $(k-1/k)_f(t)$  converge vers  $f(t)$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Dans cet exposé, on appliquera principalement les résultats au cas particulier où  $f$  s'écrit :

$$f(t) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1 - xt}$$

où  $\alpha$  est une fonction bornée et non décroissante sur l'intervalle  $[a, b]$ .

## CHAPITRE 2

### APPROXIMATION DE SÉRIES

## INTRODUCTION

Une classe importante de fonctions est l'ensemble des fonctions de Stieltjes.

$$f(t) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1-xt} \quad \text{pour } t^{-1} \in \mathbb{C} - [a, b].$$

On montre, dans ce chapitre, que l'interpolation de la fonction génératrice aux racines de polynômes orthogonaux par rapport à une certaine distribution, fournit un procédé sommant la série  $f(t)$  dans  $\mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$ , une borne d'erreur étant dans ce cas établie.

Le résultat précédent est ensuite étendu à l'ensemble des fonctions analytiques dans  $\mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$ , avec la convention suivante que si  $0 \in [a, b]$   $[a^{-1}, b^{-1}]$  désigne  $]-\infty, a^{-1}[ \cup ]b^{-1}, +\infty[$ .

### I - THÉORÈME PRINCIPAL.

Soit  $\mu$  une fonction à valeurs réelles, non décroissante et bornée, prenant une infinité de valeurs différentes ( $\mu$  est alors appelée distribution).

La dérivée d'une distribution absolument continue  $\mu$  sera appelée fonction poids :

$$w(x) = \mu'(x).$$

Le support de  $d\mu$ , c'est à dire l'ensemble des points de discontinuité de  $\mu(x)$  sera noté :  $Br(d\mu)$ .

Le théorème principal sera une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 1 : [11, p. 117]

Si  $Br(d\mu) \subseteq [-1, 1]$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt[n]{|R_n(z)|}}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \right| \geq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} - [-1, 1]$$

où  $R_n$  est le polynôme orthogonal de degré  $n$  par rapport à la distribution  $d\mu$ .

Remarque :  $\sqrt{z^2-1}$  désigne la détermination qui prend des valeurs positives pour  $z$  réel  $>1$ .

La fonction  $|z + \sqrt{z^2-1}|$  est toujours supérieure à 1 quel que soit  $z$  appartenant au plan complexe coupé selon le segment  $[-1, 1]$ .

Exemple : 1°) Les polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids  $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  sur  $[-1, 1]$  sont les polynômes de Chebychev.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ si } x \in [-1, 1]$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n] \text{ si } |x| > 1.$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \sqrt{T_n(x)}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right| = 1 \text{ pour } x > 1.$$

2°) Si  $w(x) = (1-x^2)^{1/2}$  alors les polynômes  $R_n$  sont les polynômes de Chebychev de seconde espèce  $U_n$

$$U_n(x) = (1-x^2)^{-1/2} \sin((n+1) \arccos x) \text{ pour } x \in [-1,1]$$

et

$$U_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{[(x + \sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{n+1}]}{\sqrt{x^2-1}} \text{ si } |x| > 1$$

Dans ce cas encore on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \sqrt{U_n(x)}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right| = 1 \text{ si } x > 1$$

Lemme 2 : [11, p. 123-124]

Si  $Br(d\mu) = [-1, 1]$  et  $\mu'(x) > 0$  pour presque tout  $x$  de  $[-1,1]$  (c'est à dire : l'ensemble des points de  $[-1,1]$  où  $\mu'$  est nulle est de mesure nulle.

alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|R_n(x)|} \leq 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Exemple :  $\forall x \in [-1, 1] \quad |T_n(x)| \leq 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(x)|^{1/n} \leq 1$

$\forall x \in [-1, 1] \quad |U_n(x)| \leq n+1$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n(x)|^{1/n} \leq 1$

Les variables définies ci-dessous seront souvent utilisées.

Soit  $\tau$  l'application de  $[a, b]$  vers  $[-1, 1]$  définie par  $y \in [a, b] \rightarrow \tau(y) = \frac{y-(a+b)/2}{(b-a)/2}$ .

On désignera en général par  $X$  un élément de  $[-1, 1]$ , par  $x$  l'antécédent de  $X$  par  $\tau$ , par  $A$  l'image de  $t^{-1}$  par

$$X = \tau(x)$$

$$A = \tau(t^{-1})$$

et

$$B = A - \sqrt{A^2 - 1} \quad (\forall A \in \mathbb{C} - [-1, 1], \text{ on a } |B| < 1)$$

Théorème principal :

Soit  $f(t) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1-xt}$ ,  $t^{-1} \notin [a, b]$

$\alpha$  bornée et non décroissante.

Soit  $R_n^*(x) = R_n(\tau(x)) = R_n(X)$  pour  $x \in [a, b]$ , où  $R_n$  est le polynôme orthogonal de degré  $n$  par rapport à une certaine distribution  $d\mu$  telle que  $\text{Br}(d\mu) \subseteq [-1, 1]$  et  $\mu'(X) > 0$  pour presque tout  $X \in [-1, 1]$ . (Cette dernière condition peut être remplacée par  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|R_n(X)|} \leq 1, \forall X \in [-1, 1]$ ).

Soit  $P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}^*(x)/R_{n+1}^*(t^{-1})}{1 - xt}$  le polynôme interpolant

$x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  aux racines de  $R_{n+1}^*$ .

Sous ces hypothèses nous avons :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)|^{1/n} \leq |B| < 1$$

$$\text{avec } B = A - \sqrt{A^2 - 1}, \text{ où } A = \tau(t^{-1})$$

Preuve.

Notons l'erreur  $c(P_n) - f(t) = e_n$

$$e_n = c(P_n) - f(t) = \int_a^b \left( P_n(x) - \frac{1}{1-xt} \right) d\alpha(x)$$

$$e_n = \int_a^b \frac{-R_n^*(x)/R_n^*(t^{-1})}{1-xt} d\alpha(x) = \frac{-2}{(b-a)t} \cdot \frac{1}{R_n(A)} \int_{-1}^1 \frac{R_n(X)}{A-X} d\beta(X)$$

avec

$$d\beta(X) = d\alpha(\tau^{-1}(X)) = d\alpha(x).$$

$$\Rightarrow |e_n| \leq \frac{2}{(b-a)|t| \cdot |R_n(A)|} \cdot \sup_{-1 \leq X \leq 1} |R_n(X)| \cdot \sup_{-1 \leq X \leq 1} \frac{1}{|A-X|} \cdot \int_{-1}^1 d\beta(X).$$

$$t^{-1} \notin [a, b] \Rightarrow A = \tau(t^{-1}) \notin [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |e_n|^{1/n} \leq \frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [\sup_{-1 \leq X \leq 1} |R_n(X)|]^{1/n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(A)|^{1/n}}$$

Le lemme 2 donne :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |e_n|^{1/n} \leq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(A)|^{1/n}}$$

Le lemme 1 permet de conclure :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |e_n|^{1/n} \leq \frac{1}{|A + \sqrt{A^2 - 1}|} = |A - \sqrt{A^2 - 1}| = |B| < 1.$$

□

Théorème 1 : Quand  $n$  tend vers l'infini,  $c(P_n)$  converge vers  $f(t)$  uniformément sur tout compact  $K$  de  $\mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$ .

Preuve.

$$\sup_{t \in K} |f(t) - c(P_n)| \leq \frac{2}{(b-a)} \cdot \int_{-1}^1 d\beta(X) \cdot \sup_{-1 \leq X \leq 1} |R_n(X)| \cdot \sup_{t \in K} \left[ \frac{\sup_{-1 \leq X \leq 1} \frac{1}{|A-X|}}{|t| \cdot |R_n(A)|} \right]$$

Si  $t$  parcourt un compact  $K$  de  $\mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$  alors  $A$  parcourt un compact  $K'$  de  $\mathbb{C} - [-1, 1]$ .

Par conséquent  $\sup_{-1 \leq X \leq 1} \frac{1}{|A-X|}$  est borné pour  $A \in K'$

$$\Rightarrow \sup_{t \in K} |f(t) - c(P_n)| \leq M \cdot \sup_{A \in K'} [ |B|^n ], \text{ } M \text{ constante indépendante de } t.$$

Or  $\forall A \in \mathbb{C} - [-1, 1] \quad |B| < 1$  et pour  $A \in K' \subset \mathbb{C} - [-1, 1] \quad |B| \leq \rho < 1.$

$$\Rightarrow \sup_{t \in K} |f(t) - c(P_n)| \leq M \cdot \rho^n. \text{ } M \text{ et } \rho \text{ indépendants de } t.$$

La convergence de  $c(P_n)$  vers  $f(t)$  est donc uniforme sur tout compact de  $\mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$ .

□



## II - SOMMATION DE SÉRIES.

Dans ce paragraphe, nous établissons le lien entre les procédés de sommation et l'interpolation de la fonction génératrice.

Soit la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  quelconque de réels, de limite  $S$ .

$$S_n = \sum_{i=0}^n c_i \quad \text{où} \quad c_0 = s_0 \quad \text{et} \quad c_i = \Delta S_{i-1}$$

Posons  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ , on a  $f(1) = S$ .

Soit  $R_{n+1}$  un polynôme quelconque de degré  $n+1$ .

$$R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k^{(n+1)} x^k \quad \text{tel que} \quad R_{n+1}(1) = 1$$

$P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}(x)}{1 - x}$   $P_n$  interpole la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$  aux racines de  $R_{n+1}$ .

$$c(P_n(x)) = c \left[ \frac{1 - R_{n+1}(x)}{1 - x} \right] = c \left[ \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k^{(n+1)} \frac{(1-x^k)}{1-x} \right]$$

$$c(P_n(x)) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k^{(n+1)} c \left( \frac{1-x^k}{1-x} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k^{(n+1)} c(1+x+x^2 + \dots + x^{k-1})$$

$$c(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k^{(n+1)} \left( \sum_{i=0}^{k-1} c_i \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k^{(n+1)} S_{k-1}$$

$$c(P_n(x)) = \mu_1^{(n+1)} S_0 + \mu_2^{(n+1)} S_1 + \dots + \mu_{n+1}^{(n+1)} S_n$$

$\mu_0^{(n)}$  n'intervenant pas dans le calcul de  $c(P_n)$  on peut le supposer nul. Pour des commodités de notation on pose  $\mu_k^{(n+1)} = a_{k-1}^{(n)}$ .

On a encore  $\sum_{k=0}^n a_k^{(n)} = 1.$

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0^1 & a_1^1 & 0 & \dots \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^0 s_0 \\ a_0^1 s_0 + a_1^1 s_1 \\ a_0^2 s_0 + a_1^2 s_1 + a_2^2 s_2 \end{pmatrix}$$

Définition : On appelle polynôme caractéristique de degré  $n$  de la matrice triangulaire de Toeplitz  $(a_k^{(n)})$ , le polynôme

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k$$

On obtient alors un procédé de sommation appelé tableau de Toeplitz [30].

On a :

$$R_{n+1}(x) = x C_n(x).$$

Avec les notations ci-dessus, le lemme 2 de Wimp [30, p. 3] devient :

Théorème 2 : Convergence.

Si  $P_n$  interpole la fonction génératrice  $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$  en  $x_i^{(n)} \in [-a, 0]$  avec  $a > 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(P_n) = S.$$

Puisque le procédé consistant à interpoler la fonction génératrice  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  aux racines de polynômes orthogonaux sur  $[a, b]$  somme la série

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ , pour tout  $t \in \mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$  si  $c_i$  s'écrit  $c_i = \int_a^b x^i d\alpha(x)$ , à

l'aide du théorème de Perron Knopp, on peut démontrer que ce même procédé

somme la série  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  pour tout  $t \in \mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$  si  $f$  est analy-

tique dans  $\mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$ .

Définition : Soit  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  et  $f_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$ .

On dit que le procédé  $T$  somme la fonction  $f$  au point  $t_0$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T f_n(t_0) = f(t_0)$$

Le domaine de sommation d'une fonction est l'ensemble des points en lesquels le procédé somme cette fonction.

Théorème de Perron-Knopp :

$\Gamma$  étant le domaine de sommation de la fonction

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}, \text{ si } f \text{ est holomorphe dans } \mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}],$$

alors le domaine de sommation de  $f$  est l'ensemble des  $t \in \mathbb{C}$  vérifiant :

$$\{t/\zeta, \zeta \text{ singularité de } \tilde{f}\} \subset \Gamma$$

Ce théorème permet de déterminer le domaine de sommation de  $f$  par le procédé si les deux singularités  $a$  et  $b$  de la fonction analytique  $f$  sont connues.

Lemme 3 : Si  $(R_n)_{n \geq 0}$  est une suite de polynôme orthogonaux vérifiant les conditions du théorème principal et si

$$P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}(x)/R_{n+1}(t^{-1})}{1 - xt} \text{ alors}$$

$$c(P_n) \rightarrow g(t) = \frac{1}{1-t}, \forall t \in \mathbb{C} - [1, +\infty[$$

Preuve.

$$g(t) = \int_0^1 \frac{1}{1-xt} d\alpha(x) \text{ avec } d\alpha = d\delta_{(1)} \text{ (Dirac)}$$

$$g(t) - c(P_n) = \frac{1}{R_{n+1}(t^{-1})} \int_0^1 \frac{R_{n+1}(x)}{1-xt} d\alpha(x) = \frac{R_{n+1}(1)}{R_{n+1}(t^{-1})} \cdot \frac{1}{1-t}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(x)|^{1/n} \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$t \in \mathbb{C} - [1, +\infty[ \Leftrightarrow t^{-1} \notin [0,1] \Leftrightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_n(t^{-1})|^{1/n} \geq \frac{1}{|B|} > 1$$

D'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{R_{n+1}(1)}{R_{n+1}(t^{-1})} \right|^{1/n} \leq |B| < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} c(P_n) = g(t)$$

□

Théorème 3 : Quelle que soit la suite  $(R_n)_{n \geq 0}$  de polynômes orthogonaux vérifiant les conditions du théorème principal,  $P_n$  étant défini comme dans le lemme précédent, alors, quelle que soit la fonction  $f$ , holomorphe dans  $\mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$  on a :

$$c(P_n) \rightarrow f(t) \quad \forall t \text{ tel que } t/\zeta \notin [1, +\infty[, \quad \forall \zeta$$

singularité de  $f$ .

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème de Perron-Knopp.

Le procédé permettra de sommer la fonction  $f$  dans l'étoile de Mittag-Leffler. L'étoile de Mittag-Leffler de  $f$  est le domaine obtenu en enlevant à  $\mathbb{C}$  les demi-droites dont le support passe par 0 et d'origine chaque singularité de  $f$ . [13 p. 77].

Le lemme suivant va servir à établir une borne d'erreur pour la sommation des séries holomorphes dans  $\mathbb{C} - ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Lemme 4 : Soit  $(S_n)$  une suite de  $\mathbb{C}$ , alors :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{il existe } s \in \mathbb{C} \text{ tel que} \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n - s|^{1/n} = \rho > 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta S_n|^{1/n} = \rho > 1 \right]$$

Preuve pour  $\Leftarrow$

Soit  $S_n$  telle que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta S_n|^{1/n} = \rho < 1$

Posons

$$c_n = \Delta S_n = S_{n+1} - S_n \quad c_0 = S_0$$

On a :

$$S_n = \sum_{i=0}^n c_i$$

$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} |c_i|^{1/i} = \rho \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$  est le rayon de convergence de la série :

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$$

La fonction  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  est par conséquent holomorphe dans le disque de centre 0 et de rayon  $R > 1$ .

Soit

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i, \quad S = f(1), \quad S_n = f_n(1)$$

$$f(t) - f_n(t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i t^i = c_{n+1} t^{n+1} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{c_i}{c_{n+1}} t^{i-n-1}$$

$\epsilon > 0$  fixé, choisissons  $N_\epsilon$  tel que  $n > N \Rightarrow \rho \leq \left| \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \right| < \rho + \epsilon$

on obtient :

$$\forall i \geq n+1 \quad \rho^{i-n-1} < \left| \frac{c_i}{c_{n+1}} \right| < (\rho + \epsilon)^{i-n-1}$$

$$c_{n+1} t^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\rho t} < |f(t) - f_n(t)| < |c_{n+1}| t^{n+1} \frac{1}{1-(\rho+\epsilon)t} \quad \forall \epsilon > 0, n > N_\epsilon$$

avec  $t = 1$ , la relation ci-dessus devient :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n - S|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \rho$$

Preuve par  $\Rightarrow$ .

De l'inégalité triangulaire :

$$|S_{n+1} - S_n| \leq |S_{n+1} - S| + |S_n - S| \leq 2 \text{Max} \{|S_{n+1} - S|, |S_n - S|\}$$

On tire :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_{n+1} - S_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_{n+1} - S|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n - S|^{\frac{1}{n}} \leq \rho$$

Si  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_{n+1} - S_n|^{\frac{1}{n}}$  était égale à  $\rho' < \rho$  on aurait avec la condition suffisante :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n - S|^{\frac{1}{n}} = \rho'$$

ce qui n'est pas.

□

Notation.

$$H_G = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ holomorphe dans } G\}$$

Sauf indication contraire,  $G = \mathbb{C} - ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

Théorème 4 : Si  $P_n$  est le développement tronqué à l'ordre  $n$  de  $\frac{1}{1-xt}$  en fonction des  $U_n(x)$ , polynômes de Chebychev de seconde espèce alors :

pour toute fonction  $f$  de  $H_G$ , on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1 \quad \forall t \in G$$

avec

$$t^{-1} = \frac{1}{2} \left( B + \frac{1}{B} \right), \quad B = t^{-1} \sqrt{t^2 - 1}$$

Preuve.

On a :

$$\frac{1}{1-xt} = (B^2 + 1) \sum_{k=0}^{\infty} B^k U_k(x)$$

$(B^2 + 1) \sum_{k=0}^{\infty} B^k c(U_k(x))$  est une série convergente (voir théorème 3) de limite

$$f(t) = f\left(\frac{2B}{B^2+1}\right), \quad \forall t \in G.$$

Elle est donc holomorphe dans  $D(0,1)$  car l'application  $z \rightarrow \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  applique de façon biunivoque le disque  $D(0,1)$  sur  $\mathbb{C} - ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

Par suite :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |c(U_k(x))|^{\frac{1}{k}} \leq 1.$$

Si l'on pose :

$$P_n(x) = (B^2 + 1) \sum_{k=0}^n B^k U_k(x)$$

on a :

$$c(P_{n+1}(x)) - c(P_n) = (B^2 + 1) B^{n+1} c(U_{n+1}(x))$$

Puis :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_{n+1}) - c(P_n)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(U_{n+1}(x))|^{\frac{1}{n}} = |B| < 1$$

Le lemme 1 permet de conclure.

□

On applique le même raisonnement pour le développement en fonction des  $T_n$ , polynômes de Chebychev de première espèce et on obtient le :

Théorème 5 : Si  $P_n$  est le développement tronqué à l'ordre  $n$  de  $x \frac{1}{1-xt}$  en fonction des  $T_n(x) = \cos(n \arcs x)$  alors :

pour toute fonction  $f$  de  $H_G$  on a :

$$\overline{\lim} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1 \quad \forall t \in G$$

avec

$$t^{-1} = \frac{1}{2} \left( B + \frac{1}{B} \right) \quad B = t^{-1} - \sqrt{t^2 - 1}$$

Preuve.

On a :

$$\frac{1}{1-xt} = 2 \frac{(1+B^2)}{1-B^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_k(x).$$

$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |c(T_k(x))|^{\frac{1}{k}} \leq 1$  (preuve identique à celle du théorème 4) et donc si :

$$P_n(x) = \frac{2(1+B^2)}{(1-B^2)} \sum_{k=0}^{n'} B^k T_k(x):$$

On a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_{n+1}) - c(P_n)|^{\frac{1}{n}} \leq |B|. \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(T_n)|^{\frac{1}{n}} \leq |B|$$

□

Remarque.

Si  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} - ]-\infty, -\xi/\delta] \cup [\xi, +\infty[$  avec  $\delta > 0$  et  $\xi \in \mathbb{C}$ , les théorèmes précédents s'appliquent en remplaçant  $t^{-1}$  par

$\frac{t^{-1-\beta}}{\alpha}$  avec  $\beta = \frac{1-d}{2\xi}$  et  $\alpha = \frac{1+\delta}{2\xi}$ . Si  $\delta = 0$ , la coupure de gauche est omise.



Théorème 6 : si  $P_n$  est le polynôme de degré  $n$  en  $x$ , interpolant la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  aux racines de  $U_{n+1}(x)$  alors :

pour toute fonction  $f$  de  $H_G$ , on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1 \quad \forall t \in G$$

avec

$$t^{-1} = \frac{1}{2} \left( B + \frac{1}{B} \right) \quad B = t^{-1} - \sqrt{t^2 - 1}$$

Preuve.

$$P_n(x) = \frac{1 - U_{n+1}(x) / U_{n+1}(t^{-1})}{1 - xt}$$

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{\frac{U_{n+1}(x)}{U_{n+1}(t^{-1})} - \frac{U_{n+2}(x)}{U_{n+2}(t^{-1})}}{1 - xt}$$

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{U_{n+1}(x) U_{n+2}(t^{-1}) - U_{n+2}(x) U_{n+1}(t^{-1})}{U_{n+2}(t^{-1}) U_{n+1}(t^{-1}) (1-xt)}$$

Puis avec la relation de Christoffel :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{2}{t} \left[ \sum_{j=0}^{n+1} U_j(t^{-1}) U_j(x) \right] / (U_{n+2}(t^{-1}) U_{n+1}(t^{-1}))$$

$$c(P_{n+1}) - c(P_n) = \frac{2}{t U_{n+2}(t^{-1}) U_{n+1}(t^{-1})} \cdot \sum_{j=0}^{n+1} U_j(t^{-1}) c(U_j(x))$$

La série  $\sum_{j=0}^{n+1} \frac{U_j(t^{-1})}{U_{n+1}(t^{-1})} c(U_j(x))$  est majorée en module par

$$\sum_{j=0}^{n+1} \left| \frac{U_j(t^{-1})}{U_{n+1}(t^{-1})} \right| |c(U_j(x))| \leq \sum_{j=0}^{n+1} |B^{n-j}| \cdot |c(U_j(x))|.$$

Le dernier membre est majoré par une constante M car c'est une série convergente ( $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |c(U_j(x))|^{1/j} \leq 1$  et  $|B| < 1$ ).

Par suite :

$$c(P_{n+1}) - c(P_n) \leq \frac{2}{t U_{n+2}(t^{-1})} M$$

Puis

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_{n+1}) - c(P_n)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_{n+2}(t^{-1})|^{1/n}} = |B| < 1$$

et par le lemme 4 :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1, \forall t \in G$$

□

Théorème 7 : Le théorème 6 reste vrai en remplaçant  $U_n(x)$  par  $T_n(x)$ .

Tous ces résultats étendent de façon intéressante le théorème principal de ce chapitre qui établissait une borne d'erreur seulement pour les séries de Stieltjes, de rayon de convergence non nul.

La suite est une généralisation des théorèmes précédents à une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une distribution vérifiant certaines conditions.

Définition [14, p. 31] ou [11, p. 190].

Soit  $\alpha(x)$  une fonction bornée à valeurs réelles et prenant une infinité de valeurs différentes, définie dans  $[-1, 1]$ .

Soit  $\mu_1$  définie sur  $[-\pi, +\pi]$  par :

$$\mu_1(\theta) = \begin{cases} \alpha(1) - \alpha(\cos \theta) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \alpha(\cos \theta) - \alpha(1) & -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

Si  $\alpha$  est absolument continue avec  $\alpha'(x) = w(x)$ , alors  $\mu_1(\theta)$  est aussi absolument continue et :

$$\mu_1'(\theta) = w(\cos \theta) |\sin \theta|$$

On dira que

$$\alpha \in A \iff \int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log} [\mu_1'(\theta)] d\theta > -\infty.$$

Lemme 5 : Soit  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes orthogonaux par rapport à une distribution  $d\alpha$  sur  $[-1, 1]$  vérifiant  $\alpha \in A$ .

Soit :

$$\frac{1}{1-xt} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) R_k(x)$$

le développement de la fonction  $\frac{1}{1-xt}$  en fonction des  $R_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t^{-1} \notin [-1, 1]$ .

Alors :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k(t)|^{1/k} = |B| < 1$$

avec

$$B = t^{-1} - \sqrt{t^{-2} - 1} \iff t^{-1} = \frac{1}{2} \left( B + \frac{1}{B} \right).$$

De plus, comme  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)|^{1/n} = 1$ , [11, p. 124]  $\forall x \in [-1, 1]$ , la convergence de la série  $\sum \alpha_k(t) P_k(x)$  a lieu quel que soit  $x \in [-1, 1]$ .

Preuve.

La suite  $\alpha_k(t)$  vérifie : [11, p. 138]

$$\alpha_k(t) = \int_{-1}^1 \frac{R_k(x)}{1-xt} d\alpha(x) \quad \forall t, t^{-1} \in \mathbb{C} - [-1, 1]$$

La suite  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$R_{-1} = 0 \quad R_0(x) = 1$$

$$R_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) R_n(x) - C_n R_{n-1}(x) \quad C_n \geq 0$$

$$A_n, B_n \in \mathbb{R}.$$

Higgins [14] a démontré que si  $\alpha \in A$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1.$$

La suite  $(\alpha_{k+1}(t))_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\alpha_{k+1}(t) = \left( \frac{1}{t} + \frac{B_k}{A_k} \right) \frac{A_{k+1}}{C_{k+1}} \alpha_k(t) - \frac{A_{k+1}}{A_{k-1} C_{k+1}} \alpha_{k-1}(t) \quad k \geq 1.$$

La suite  $(\alpha_{k+1}(t)/\alpha_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence limite :

$$\frac{\alpha_{k+1}(t)}{\alpha_k(t)} = \frac{2}{t} - \frac{1}{\frac{\alpha_k(t)}{\alpha_{k-1}(t)}}$$

D'où

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k(t)|^{\frac{1}{k}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}(t)}{\alpha_k(t)} \right| = |t^{-1} - \sqrt{t^{-2} - 1}| = |B|$$

Lemme 6 : Soit  $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \frac{1}{1-t}$  avec  $c_i = 1 \forall i \in \mathbb{N}$ .

Soit  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) R_k(x)$  le développement tronqué de la fonction génératrice en fonction des  $R_k(x)$ .

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(P_n(x)) = g(t) \quad \forall t, t^{-1} \in \mathbb{C} - [-1, 1].$$

Preuve.

Puisque  $c(x^i) = c_i = 1 \forall i \in \mathbb{N}$ , on a :

$$c(P_n(x)) = P_n(1) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) R_k(1)$$

et par conséquent  $c(P_n(x))$  converge vers  $\frac{1}{1-t}$  quand  $n$  tend vers l'infini, quel que soit  $t \in \mathbb{C} - ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  généralisation des théorèmes 4 et 5.  
Généralisation des théorèmes 4 et 5.

Théorème 8 : Soit  $f$ , fonction de  $\mathbb{H}_G$ .

Soit  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) R_k(x)$  le développement tronqué de la fonction génératrice en fonction des  $R_k$ , polynômes orthogonaux par rapport à une distribution  $\alpha$  telle que  $\alpha \in A$ .

Alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1 \quad \forall t \in G.$$

avec

$$B = t^{-1} - \sqrt{t^{-2} - 1}$$

et  $c(x^i) = c_i$ , la fonctionnelle définie par  $f$ .

Preuve.

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \alpha_{n+1}(t) R_{n+1}(x)$$

$$c(P_{n+1}) - c(P_n) = \alpha_{n+1}(t) c(R_{n+1}(x))$$

Or  $\forall t \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ ,  $c(P_n)$  converge vers  $f(t)$ . (Théorème de Perron et lemme 6).

Par suite :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k(t) c(R_k(x))|^{\frac{1}{k}} \leq 1 \quad \forall t \in G$$

Comme

$$\sup_{t \in G} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k(t)|^{\frac{1}{k}} = 1$$

On a :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |c(R_k(x))|^{\frac{1}{k}} \leq 1.$$

On en déduit :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_{n+1}) - c(P_n)|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n+1}(t)|^{\frac{1}{n}} = |B| < 1 \quad (\text{lemme 5})$$

Le lemme 4 permet de conclure.

□

Lemme 7 : Soit  $u_n$  une suite de  $\mathbb{C}$ .

On a :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{\frac{1}{k}} = \rho > 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^n |u_k| \right]^{\frac{1}{n}} \leq \rho$$

Preuve.

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{\frac{1}{k}} = \rho \text{ implique que}$$

$$\forall \rho_2, \rho_2 > \rho_1 \quad |u_n|^{\frac{1}{n}} \leq \rho_2$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de  $n$

$$\sum_{k=0}^n |u_k| = \sum_{k=0}^N |u_k| + \sum_{k=N}^n |u_k|$$

$N$  étant l'indice maximum pour lequel  $|u_N|^{\frac{1}{N}} > \rho_2$  ( $N$  ne dépend que de  $\rho_2$ )

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n |u_k| \leq M + \sum_{k=N}^n (\rho_2)^k$$

$M$  constante ne dépendant que de  $\rho$ .

La seconde série est géométrique de raison  $\rho_2$ .

Donc :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^n |u_k| \right]^{\frac{1}{n}} \leq \rho_2$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie quel que soit  $\rho_2$  supérieure à  $\rho$ , on en déduit :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^n |u_k| \right]^{\frac{1}{n}} \leq \rho$$

Remarque.

Si on a seulement  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{\frac{1}{k}} \leq \rho$  alors  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^n |u_k| \right]^{\frac{1}{n}} \leq \sup(\rho, 1)$

Théorème 9 : Soit  $f$  fonction de  $H_G$ .

Soit  $P_n$  le polynôme de degré  $n$  en  $x$  interpolant la fonction génératrice aux racines de  $R_n$ , orthogonaux par rapport à la distribution  $d\alpha$ ,  $\alpha \in A$ .

Alors :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1 \quad \forall t \in G$$

avec  $B = t^{-1} - \sqrt{t^{-2} - 1}$  et  $c(x^i) = c_i$  fonctionnelle définie par  $f$ .

Preuve.

$P_n$  s'exprime par :

$$P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}(x)/R_{n+1}(t^{-1})}{1-xt}$$

donc

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = \frac{R_n(x) R_{n+1}(t^{-1}) - R_{n+1}(x) R_n(t^{-1})}{R_n(t^{-1}) R_{n+1}(t^{-1}) (1-xt)}$$

$$= \frac{(t^{-1}-x) A_n \sum_{k=0}^n R_k(x) R_k(t^{-1})}{(1-xt) R_n(t^{-1}) R_{n+1}(t^{-1})}$$

relation de Christoffel

$$\Rightarrow c(P_n) - c(P_{n-1}) = \frac{A_n}{t R_n(t^{-1}) R_{n+1}(t^{-1})} \sum_{k=0}^n R_k(t^{-1}) c(R_k(x))$$

Or les conditions imposées à la distribution  $d\alpha$  impliquent que :



[ 11, p. 123 ] :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{\frac{1}{k}} \leq |B^{-1}| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |c(R_k(x))|^{\frac{1}{k}} \leq |B^{-1}| \cdot 1 = |B^{-1}|$$

(Voir preuve du théorème 8)

Le lemme 7 permet d'affirmer :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^n R_k(t^{-1}) c(R_k(x)) \right|^{\frac{1}{n}} \leq |B^{-1}|$$

et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - c(P_{n-1})|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_n \frac{|A_n|^{\frac{1}{n}} |B^{-1}|}{|B^{-1}| |B^{-1}|} = B$$

car  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2$  (voir preuve du lemme 5).

Le résultat découle du lemme 4.

□

### III - EXEMPLES

Soit  $f(t) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1-xt}$ ,  $t^{-1} \in \mathbb{C} - [a,b]$   $\alpha$  bornée et non décroissante.

$R_n$  orthogonal par rapport à  $w(x)$  sur  $[a,b]$ .

1°) -  $w(x) = (1-x^2)^{-1/2} \Rightarrow R_n(x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .

$$\sup_{-1 \leq X \leq 1} |T_n(X)| = 1.$$

et

$$T_n(A) = \frac{1}{2} [(A + \sqrt{A^2-1})^n + (A - \sqrt{A^2-1})^n], \quad |A| > 1$$

On a donc

$$e_n \leq \frac{4}{(b-a)t} \cdot \frac{1}{(A + \sqrt{A^2-1})^n + (A - \sqrt{A^2-1})^n} \cdot \sup_{-1 \leq X \leq 1} \left| \frac{1}{A-X} \right| \cdot \int_{-1}^1 d\beta(x)$$

si

$$A > 1 \quad B = A - \sqrt{A^2-1} \in [0,1[$$

$$A < -1 \quad B = A + \sqrt{A^2-1} \in ]-1,0]$$

$$e_n \leq \frac{4}{(b-a)t} \cdot \frac{1}{B^n + B^{-n}} \cdot \sup_{-1 \leq X \leq 1} \frac{1}{|A-X|} \cdot \int_{-1}^1 d\beta(X)$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |e_n|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1$$

$$2^\circ) - w(x) = (1-x^2)^{1/2} \Rightarrow R_n(x) = U_n(x) = (1-x^2)^{-1/2} \sin((n+1)\arccos x) \text{ pour } x \in [-1,1]$$

$$U_n(A) = \frac{1}{2} \frac{(A + \sqrt{A^2-1})^{n+1} - (A - \sqrt{A^2-1})^{n+1}}{\sqrt{A^2-1}} \text{ pour } |A| > 1$$

$$|e_n| \leq \frac{4}{(b-a)t} \cdot \frac{\sqrt{A^2-1}}{|B^{n+1} - B^{-n-1}|} \cdot (n+1) \cdot \sup_{-1 \leq X \leq 1} \frac{1}{|A-X|} \times \int_{-1}^1 d\beta(X)$$

où B est défini comme ci-dessus.

Il faut remarquer que cette borne d'erreur est beaucoup moins favorable que la précédente puisqu'elle comporte le facteur (n+1) en numérateur.

#### IV - RELATIONS DE RÉCURRENCE.

L'avantage de l'utilisation de polynômes orthogonaux en tant que polynômes générateurs des approximants de type-Padé réside dans le fait qu'ils suivent une relation de récurrence à trois termes.

Soit  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes orthogonaux sur  $[-1, 1]$  par rapport à une certaine distribution  $\mu$ .

Il existe donc trois suites de réels  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que :

$$(1) \quad R_{n+1}(X) = (A_n X + B_n) R_n(X) - C_n R_{n-1}(X)$$

avec

$$C_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{voir [9]})$$

et

$$R_{-1} = 0, R_0 = 1.$$

Il faut remarquer que chaque  $R_n$  a ses racines dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .  
Posons comme dans le chapitre 2, I :

$$P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}^*(x)/R_{n+1}^*(t^{-1})}{1 - xt}$$

où  $R_{n+1}^*(x) = R_{n+1}(\tau(x)) = R_{n+1}(X)$ .

La suite  $(R_{n+1}^*)_{n \geq 0}$  vérifie :

$$(2) \quad R_{n+1}^*(x) = (A_n \tau(x) + B_n) R_n^*(x) - C_n R_{n-1}^*(x)$$

Posons

$$\sigma_{n+1} = R_{n+1}^*(t^{-1}) = R_{n+1}(\tau(t^{-1})) = R_{n+1}(A)$$

On a :

$$\sigma_{n+1} = (A_n t^{-1} + B_n) \sigma_n - C_n \sigma_{n-1} \quad (3)$$

et

$$P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}^*(x)/\sigma_{n+1}}{1 - xt}$$

$$\Leftrightarrow [1 - (1-xt) P_n(x)] \sigma_{n+1} = R_{n+1}^*(x).$$

Reportée dans (2) :

$$(1 - (1-xt) P_n(x)) \sigma_{n+1} = (A_n \tau(x) + B_n) [1 - (1-xt) P_{n+1}(x)] \sigma_n$$

$$- C_n [1 - (1-xt) P_{n-1}(x)] \sigma_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{n+1} (1-xt) P_n(x) = (A_n \tau(x) + B_n) (1-xt) P_{n-1}(x) \cdot \sigma_n - C_n (1-xt) P_{n-2}(x) \sigma_{n-1}$$

$$- (A_n x + B_n) \sigma_n + C_n \sigma_{n-1} + (A_n t^{-1} + B_n) \sigma_n - C_n \sigma_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow P_n(x) = (A_n \tau(x) + B_n) \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} P_{n-1}(x) - C_n \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n+1}} P_{n-2} + A_n \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} t^{-1}$$

D'où :

$$c(P_n(x)) = A_n \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} c(\tau(x) P_{n-1}(x)) + B_n \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} c(P_{n-1}(x)) - C_n \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n+1}} c(P_{n-2})$$

$$+ A_n \cdot \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} t^{-1} \cdot c_0.$$

Donc, le calcul de  $c(P_n)$  sera effectué à partir des valeurs de  $c(P_{n-1})$ ,  $c(P_{n-2})$  et aussi  $c(\tau(x) P_{n-1}(x))$ .

Cette dernière quantité étant égale à :

$$c\left(\frac{x-(a+b)/2}{(b-a)/2} \cdot P_{n-1}(x)\right) = \frac{2}{(b-a)} c(x P_{n-1}(x)) - \frac{a+b}{b-a} c(P_{n-1}(x)).$$

Il convient de remarquer que les calculs seront plus précis si les coefficients  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  ne dépendent pas de  $n$ .

Ce sera notamment le cas pour les algorithmes qui seront décrits dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE III

### APPLICATIONS DU THÉORÈME PRINCIPAL

## INTRODUCTION.

Ce chapitre consiste en une étude détaillée des différentes applications du théorème principal du chapitre II.

On remplace la fonction génératrice successivement par son approximation polynomiale dans  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$ .

Puis on retrouve la borne d'erreur des approximants de Padé pour les fonctions de Stieltjes.

Enfin les développements de la fonction génératrice en fonction des polynômes de Chebyshev de première espèce  $T_n$  ou de seconde espèce  $U_n$  (étudié par W. Niethammer) sont encore des cas particuliers du chapitre II.

### I - APPROXIMATION $L^\infty$ DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE.

La fonction  $f(t) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1-xt}$  avec  $\alpha$  à variation bornée et non décroissante.

Appliquons le changement de variable transformant  $[a,b]$  en  $[-1, 1]$  (voir théorème principal, chapitre II).

$$f(t) = \frac{2}{(b-a)t} \int_{-1}^1 \frac{1}{A-X} d\beta(X) \quad \text{avec} \quad d\beta(X) = d\alpha(\tau^{-1}(X)) = d\alpha(x)$$

Pour des raisons de simplification, on considérera que  $f$  est écrite sous la forme

$$f(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{X-A} d\beta(X)$$

La distribution  $d\beta$  étant à priori inconnue, il paraît logique de remplacer la fonction  $\frac{1}{X-A}$  par son polynôme de meilleure approximation  $P_n$  sur  $[-1, 1]$ . De plus, par le théorème d'alternance de Chebychev, nous savons que ce polynôme interpolera  $\frac{1}{X-A}$  en  $(n+1)$  points de  $[-1, 1]$  et par conséquent  $c(P_n)$  sera un approximant de type Padé  $(n-1/n)$  pour la fonction  $f(t)$ . (Vrai même si  $f(t)$  est une série quelconque).

Dans [18, p. 33-34], on peut lire l'expression de la meilleure approximation polynomiale  $P_n$  de la fonction  $X \rightarrow \frac{1}{X-A}$  pour  $X \in [-1, 1]$ ,  $A$  réel,  $|A| > 1$

$$P_n(X) = \frac{1}{X-A} - \frac{B^n}{A^2-1} \cos(n\phi + \delta)$$

où

$$B = A - \text{sign}(A) \cdot \sqrt{A^2-1}, \quad \cos \phi = X \quad \text{et} \quad \frac{AX-1}{X-A} = \cos \delta.$$

Remarquons que

$$A = \frac{1}{2} \left( B + \frac{1}{B} \right), \quad 2AB = B^2 + 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{B} = A + \text{sign}(A) \sqrt{A^2-1}$$

$$P_0(X) = \frac{-A}{A^2-1}$$

$$P_1(X) = \frac{-X + (B-A)}{A^2-1}$$

$P_n$  interpole la fonction  $X \rightarrow \frac{1}{X-A}$  aux racines du polynôme  $R_{n+1}(X) = (X-A) \cos(n\phi + \delta)$ , de degré  $(n+1)$ .

Montrer que  $(R_{n+1})_{n \geq 0}$  vérifie les conditions du théorème principal équivaut à trouver la relation de récurrence à trois termes que vérifie la suite  $(R_n)_{n \geq 1}$ .

Dans le cas particulier où  $P_n$  est le polynôme de meilleure approximation de  $\frac{1}{X-A}$ ,  $R_n$  s'exprime en fonction des polynômes de Chebyshev  $T_n$ .

Lemme 1 :  $R_{n+1}(X) = (X-A) \cos(n\phi + \delta)$

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2B} T_{n+1}(X) - T_n(X) + \frac{B}{2} T_{n-1}(X) \quad \forall n \geq 0.$$

où  $B$  a la même signification que ci-dessus.



Preuve.

Il suffit de développer  $\cos(n\phi + \delta)$

$$\begin{aligned} \cos(n\phi + \delta) &= \cos(n\phi) \cos\delta - \sin(n\phi) \sin\delta \\ &= T_n(X) \cdot \frac{AX-1}{X-A} - U_{n-1}(x) \cdot \sqrt{1-X^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{AX-1}{X-A}\right)^2} \end{aligned}$$

Expression dans laquelle

$$T_n(X) = \cos(n \arccos X) \text{ pour } X \in [-1, 1]$$

$$U_n(X) = \frac{\sin((n+1) \arccos X)}{\sqrt{1-X^2}} \text{ pour } X \in [-1, 1]$$

$U_n$  et  $T_n$  sont liés par :

$$U_n(X) = \frac{T_{n+2}(X) - T_n(X)}{2(X^2 - 1)}$$

$$R_{n+1}(X) = (X-A) \cos(n\phi + \delta)$$

$$R_{n+1}(X) = T_n(X) \cdot (AX-1) - U_{n-1}(X) \cdot \sqrt{1-X^2} \sqrt{(1-X^2)(A^2-1)} \times \frac{(X-A)}{|X-A|}$$

or si  $A > 1$ ,  $X-A < 0$  et si  $A < -1$ ,  $X-A > 0$

$$\Rightarrow R_{n+1}(X) = T_n(X)(AX-1) + U_n(X) \sqrt{A^2-1} \cdot \text{sign}(A) \cdot (1-X^2).$$

$$R_{n+1}(X) = T_n(X)(AX-1) + \text{sign}(A) \sqrt{A^2-1} \left( \frac{T_{n-1}(X) - T_{n+1}(X)}{2} \right)$$

Puis utilisant la relation de récurrence liant les  $T_n$  :

$$T_{n+1}(X) = 2X T_n(X) - T_{n-1}(X).$$

$$R_{n+1}(X) = A \left( \frac{T_{n+1}(X) + T_{n-1}(X)}{2} \right) - T_n(X) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(A) \sqrt{A^2 - 1} (T_{n-1}(X) - T_{n+1}(X))$$

$$R_{n+1}(X) = T_{n+1}(X) \cdot \frac{A - \operatorname{sign}(A) \sqrt{A^2 - 1}}{2} - T_n(X) + T_{n-1}(X) \cdot \frac{A + \operatorname{sign}(A) \sqrt{A^2 - 1}}{2}.$$

□

Lemme 2 : La suite  $(R_n)_{n \geq 1}$  suit la relation de récurrence à trois termes :

$$R_{n+1}(X) = 2X R_n(X) - R_{n-1}(X) \quad \forall n \geq 2$$

$$R_1(X) = AX - 1$$

$$R_2(X) = \frac{1}{B} X^2 - X + (B-A)$$

Preuve.

Immédiate à partir de l'expression des  $R_n$  en fonction des  $T_n$ .

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2B} T_{n+1}(X) - T_n(X) + \frac{B}{2} T_{n-1}(X).$$

$$n=0 \quad R_1(X) = \frac{1}{2B} X - 1 + \frac{B}{2} X$$

(convention  $T_{-n} = T_n$ ).

$$= \frac{X}{2} \left( B + \frac{1}{B} \right) - 1 = AX - 1.$$

$$n=1 \quad R_2(X) = \frac{1}{2B} (2X^2 - 1) - X + \frac{B}{2} = \frac{X^2}{B} - X + \frac{B - \frac{1}{B}}{2}$$

□

Lemme 3 : La suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence :

$$\left| \begin{array}{l} P_{n+1}(X) = 2BX P_n(X) - B^2 P_{n-1}(X) - 2B \quad \forall n \geq 1. \\ P_0(X) = \frac{-A}{A^2-1} \\ P_1(X) = \frac{-X + (B-A)}{A^2-1} \end{array} \right.$$

Preuve.

$$P_n(X) = \frac{1 - R_{n+1}(X) \cdot B^n / A^{2-1}}{X-A} = \frac{B^n}{A^2-1} \left[ \frac{\frac{A^2-1}{B^n} - R_{n+1}(X)}{X-A} \right]$$

$$P_n(X) = \frac{B^n}{A^2-1} \left[ \frac{R_{n+1}(A) - R_{n+1}(X)}{X-A} \right]$$

$R_{n+1}(X) = [1 - (X-A) P_n(X)] \frac{A^2-1}{B^n}$  substituée dans la relation du lemme 2 donne :

$$[1 - (X-A) P_{n+1}(X)] \frac{A^2-1}{B^{n+1}} = 2X [1 - (X-A) P_n(X)] \frac{A^2-1}{B^n} - [1 - (X-A) P_{n-1}(X)] \frac{A^2-1}{B^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 1 - (X-A) P_{n+1}(X) = 2X [1 - (X-A) P_n(X)] B - B^2 [1 - (X-A) P_{n-1}(X)]$$

$$(X-A) P_{n+1}(X) = 2X B(X-A) P_n(X) - B^2(X-A) P_{n-1}(X) + (1-2XB + B^2)$$

Or

$$(1 - 2XB + B^2) = (2AB - 2XB) = 2B(A-X)$$

et donc

$$P_{n+1}(X) = 2BX P_n(X) - B^2 P_{n-1}(X) - 2B.$$

$$P_0(X) = \frac{1 - R_1(X)/A^{2-1}}{X-A} = \frac{1 - \frac{AX-1}{A^{2-1}}}{X-A} = \frac{-A}{A^{2-1}}$$

$$P_1(X) = \frac{1 - R_2(X)B/A^{2-1}}{X-A} = \frac{1 - \frac{X^2 - BX + B(B-A)}{A^{2-1}}}{X-A}$$

$$P_1(X) = \frac{A^2 - X^2 - AB + BX}{(A^2 - 1)(X - A)} \quad \text{car } AB - B^2 - 1 = -AB$$

$$\Rightarrow P_1(X) = \frac{-X - A + B}{A^2 - 1}$$

□

Théorème 1 : Soit  $f(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{X-A} d\beta(X)$  et  $P_n$  le polynôme de meilleure approximation de  $X \rightarrow \frac{1}{X-A}$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$  alors :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)| \frac{1}{n} \leq |B| < 1$$

Preuve.

Il suffit de prouver que  $P_n$  interpole  $X \rightarrow \frac{1}{X-A}$  aux racines d'une suite de polynômes orthogonaux vérifiant les conditions du théorème principal (chapitre II).

La relation de récurrence du lemme 2

$$R_{n+1}(X) = 2X R_n(X) - R_{n-1}(X)$$

montre que les polynômes  $(R_n)_{n \geq 1}$  sont orthogonaux par rapport à une distribution sur un intervalle réel. Cet intervalle est exactement  $[-1, 1]$  à cause du théorème d'alternance de Chebychev.

De plus, la relation du lemme 1 :

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2B} T_{n+1}(X) - T_n(X) + \frac{B}{2} T_{n-1}(X)$$

implique :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(X)|^{\frac{1}{n}} \leq 1 \quad \forall X \in [-1, 1]$$

car

$$|T_n(X)| \leq 1 \quad \forall n \geq 0, \forall X \in [-1, 1]$$

$R_n$  vérifie donc les conditions du théorème principal et par suite

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1.$$

□

Des applications numériques seront données plus loin.

L'expression exacte des polynômes  $R_n$  va permettre de donner ci-dessous une expression plus précise de la borne d'erreur.

Théorème 2 : Soit  $f(t) = \int_{-1}^1 \frac{d\beta(X)}{X-A}$  et  $P_n$  le polynôme de meilleure approximation de  $X \rightarrow \frac{1}{X-A}$  sur  $[-1, 1]$  alors

$$|e_n| = |c(P_n) - f(t)| \leq \frac{|B|^n}{(A^2-1)} \int_{-1}^1 d\beta(X)..$$

Preuve.

$$P_n(X) = \frac{1 - R_{n+1}(X)B^n/A^2 - 1}{X-A}$$

$$c(P_n) - f(t) = - \frac{B^n}{A^2-1} \int_{-1}^1 \frac{R_{n+1}(X)}{X-A} d\beta(X)$$

$$\Rightarrow |e_n| = |c(P_n) - f(t)| \leq \frac{|B^n|}{A^2-1} \int_{-1}^1 |\cos(n\phi+\delta)| d\beta(x) \leq \frac{|B|^n}{A^2-1} \int_{-1}^1 d\beta(x).$$

□

Remarque : 1°) Si  $f(t)$  est écrite sous la forme :

$$f(t) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1-xt}$$

il conviendra de multiplier  $P_n$  par  $\frac{-2}{(b-a)t}$ , ainsi que  $e_n$ .

2°) Si  $t \notin \mathbb{R}$  alors  $A \notin \mathbb{R}$ . Dans ce cas,  $P_n$  n'est plus polynôme de meilleure approximation mais il demeure polynôme d'interpolation en certains  $x_i \in \mathbb{C}$  et la formule du théorème 1 reste vraie.

Donnons un exemple :

$$f(t) = -\frac{\text{Log}(1-t)}{t} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \text{ avec } c_i = \frac{1}{i+1} = \int_0^1 x^i dx$$

Pour  $\text{Log } 2 = f(-1)$  nous avons :

$$t = -1 ; [a, b] = [0, 1]$$

$$A = \frac{t^{-1} - (a+b)/2}{(b-a)/2} = -3 \text{ et } B = A + \sqrt{A^2-1} = -3 + \sqrt{8}$$

$$M = \int_0^1 dx = 1.$$

On obtient :

$$|f(-1) - c(P_n)| = |e_n| \leq \frac{|-3 + \sqrt{8}|^n}{8} \times 1 \times \frac{2}{|-1|}$$

$$|e_n| \leq \frac{(3 - \sqrt{8})^n}{4}$$

On a

$$P_n^*(X) = - \sum_{k=0}^n (2k+1) q_k(A) p_k(X)$$

$$= \frac{1}{X-A} - \frac{n+1}{X-A} \{p_{n+1}(X) q_n(A) - p_n(X) q_{n+1}(A)\}$$

où  $p_n(X)$  désigne le polynôme de Legendre de degré  $n$  et  $q_n(X)$  la fonction de Legendre associée :

$$q_n(X) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{p_n(t)}{X-t} dt$$

où l'intégrale est la valeur principale de Cauchy quand  $X \in [-1, 1]$

$P_n^*$  interpole  $\frac{1}{X-A}$  aux racines de  $p_{n+1}(X) q_n(A) - p_n(X) q_{n+1}(A)$ .

Posons donc :

$$R_{n+1}(X) = p_{n+1}(X) - p_n(X) \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)}$$

On a :

$$R_{n+1}(A) = \frac{1}{(n+1)q_n(A)}$$

**Théorème 3 :**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n^*(X))|^{1/n} \leq |B| < 1$  où  $P_n^*$  est la meilleure approximation polynomiale de  $\frac{1}{X-A}$  sur  $[a, b]$  et où

$$f(t) = \int_{-1}^1 \frac{dg(X)}{X-A}$$

Preuve.

Il suffit de vérifier que  $R_{n+1}(X)$  satisfait aux conditions du théorème principal, c'est à dire que  $R_{n+1}$  est orthogonal par rapport à une certaine mesure  $d\mu$  avec  $\text{Br}(d\mu) \subseteq [-1, 1]$  et  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_n(X)|^{1/n} \leq 1 \quad \forall X \in [-1, 1]$ .

ce qui implique :

$$|e_n| \leq 10^{-16} \text{ pour } n = 20.$$

En fait, cette précision de  $10^{-16}$  est atteinte pour  $n=16$  (voir les applications numériques dans le chapitre 7).

Notations.

$$L^p = \{ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid [ \int_{-1}^1 |\psi(x)|^p dx ]^{1/p} < +\infty \}$$

$$L^\infty = \{ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{-1 \leq x \leq 1} |\psi(x)| < +\infty \}$$

L'approximation de la fonction génératrice dans  $L^\infty$  sur  $[-1,1]$  entrant dans le cadre du théorème principal, il est intéressant de rechercher la même propriété pour l'approximation dans  $L^1$  (§. II) puis dans  $L^2$  (§. III).

## II - APPROXIMATION $L^1$ DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE.

Akhiezer [1] a prouvé que le polynôme  $P_n^*(x)$  qui minimise la quantité

$$\int_{-1}^1 |P_n^*(x) - \frac{1}{x-A}| dx = \| |P_n^*(x) - \frac{1}{x-A}| \|_1$$

est le polynôme d'interpolation de  $x \rightarrow \frac{1}{x-A}$  aux racines de  $U_{n+1}(x)$ , polynôme de Chebychev de deuxième espèce.

Ce cas particulier a été traité dans l'exemple 2°) du paragraphe III, chapitre 2.

## III - APPROXIMATION $L^2$ DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE.

Dans leur article, Jurkatt et Sawyer [15] donnent l'expression de la meilleure approximation polynomiale en norme  $L^2$  de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x-A}$  avec  $A > 1$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , notée  $P_n^*(x)$ .



Jurkatt et Sawyer ont démontré que :

$$\frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)} \sim B^{-1} \quad (n \rightarrow \infty) \text{ avec } B = A - \sqrt{A^2 - 1}$$

De la relation  $R_{n+1}(X) = p_{n+1}(X) - p_n(X) \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)}$ , on déduit que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(X)|^{1/n+1} \leq 1 \text{ car } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |p_n(X)|^{1/n} = 1.$$

([27] p. 195).

Pour prouver que  $R_{n+1}$  est orthogonal par rapport à une certaine distribution  $\mu$  sur  $[-1, 1]$ , il faut trouver la relation de récurrence à trois termes entre  $R_{n+1}$ ,  $R_n$  et  $R_{n-1}$ .

$p_n$ , polynôme de Legendre vérifie :

$$p_{n+1}(X) = \frac{2n+1}{n+1} X p_n(X) - \frac{n}{n+1} p_{n-1}(X)$$

([27] p. 194).

Dans la relation :

$$R_{n+2}(X) = p_{n+2}(X) - p_{n+1}(X) \frac{q_{n+2}(A)}{q_{n+1}(A)}$$

remplaçons  $p_{n+2}$  par son expression en fonction de  $p_{n+1}$  et  $p_n$

$$R_{n+2}(X) = \frac{2n+3}{n+2} X p_{n+1}(X) - \frac{n+1}{n+2} p_n(X) - p_{n+1}(X) \frac{q_{n+2}(A)}{q_{n+1}(A)}$$

Puis

$$R_{n+1}(X) = p_{n+1}(X) - p_n(X) \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)}$$

et

$$R_n(X) = p_n(X) - p_{n-1}(X) \frac{q_n(A)}{q_{n-1}(A)} = p_n(X) - \frac{q_n(A)}{q_{n+1}(A)} \left[ \frac{2n+1}{n+1} X p_n(X) - p_{n+1}(X) \right] \frac{(n+1)}{n}$$

On obtient donc  $R_{n+2}$ ,  $R_{n+1}$ ,  $R_n$  en fonction de  $p_n$  et  $p_{n+1}$ .

L'élimination de  $p_n$  et  $p_{n+1}$  fournira la relation liant  $R_{n+2}$ ,  $R_{n+1}$ ,  $R_n$ .

$$(1) \quad R_{n+2}(X) = \left( \frac{2n+3}{n+2} X - \frac{q_{n+2}(A)}{q_{n+1}(A)} \right) p_{n+1}(X) - \frac{n+1}{n+2} p_n(X)$$

$$(2) \quad R_{n+1}(X) = p_{n+1}(X) - \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)} p_n(X)$$

$$(3) \quad R_n(X) = \left[ 1 - \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{q_n(A)}{q_{n-1}(A)} \cdot X \right] p_n(X) + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{q_n(A)}{q_{n-1}(A)} p_{n+1}(X)$$

Puis utilisant la relation de récurrence liant les polynômes  $q_n$ ,  $q_{n+1}$ ,  $q_{n+2}$  on trouve :

$$R_{n+2}(X) = \left[ \frac{2n+3}{n+2} X - \frac{q_{n+2}(A)}{q_{n+1}(A)} + \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)} \cdot \frac{(2n+3)(n+1)}{(n+2)(2n+1)} \right] R_{n+1}(X) - \left[ q_{n-1}(A) \frac{q_{n+1}(A)}{q_n^2(A)} \cdot \frac{(2n+3)n}{(n+2)(2n+1)} \right] R_n(X).$$

$q_{n+1}(A)$  a même signe que  $A^{n+1}$  et donc :

$$\frac{q_{n-1}(A) q_{n+1}(A)}{q_n^2(A)} \cdot \frac{(2n+3)n}{(n+2)(2n+1)} > 0$$

et d'après le théorème de Favard [9]  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une certaine distribution  $\mu$  dont le support est un intervalle réel. Il reste à montrer que cet intervalle est inclus dans

$[-1, 1]$ , c'est à dire que  $R_n$  n'a aucune racine à l'extérieur de  $[-1, 1]$ .

On sait que

$$q_{n+1}(A) = \frac{2n+1}{n+1} A q_n(A) - \frac{n}{n+1} q_n(A)$$

$$\Rightarrow \frac{q_n(A)}{q_{n+1}(A)} = \frac{1}{\frac{2n+1}{n+1} A - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{q_{n-1}(A)}{q_n(A)}}$$

La même relation vaut pour  $p_n, p_{n+1}$  et  $p_{n-1}$ .

Prouver que  $R_n(X) \neq 0 \quad \forall X \notin [-1, 1]$  équivaut à montrer que

$$\frac{q_{n-1}(A)}{q_n(A)} \neq \frac{p_{n-1}(X)}{p_n(X)} \quad \forall A > 1 \text{ et } \forall X \in \mathbb{R} - [-1, 1].$$

Preuve par récurrence.

1°)

$$\frac{q_{n-1}(A)}{q_n(A)} > \frac{p_{n-1}(X)}{p_n(X)} \quad \forall X > 1, \forall A > 1.$$

Ceci est vrai pour  $n = 1$  en effet :

$$\frac{q_0(A)}{q_1(A)} = \frac{1}{A - \frac{2}{A - \log \left| \frac{A+1}{A-1} \right|}} \quad \text{et } p_0(X) = \frac{1}{X}.$$

Un calcul simple montre que :

$$\frac{q_0(A)}{q_1(A)} > \frac{p_0(X)}{p_1(X)} \quad \forall A > 1, \forall X > 1.$$

Maintenant, si  $\frac{q_{n-1}(A)}{q_n(A)} > \frac{p_{n-1}(X)}{p_n(X)}$ , alors

$$\frac{2n+1}{n+1} A - \frac{n}{n+1} \frac{q_{n-1}(A)}{q_n(A)} < \frac{2n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} \frac{p_{n-1}(X)}{p_n(X)}$$

$$\Rightarrow \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)} < \frac{p_{n+1}(X)}{p_n(X)}$$

$\frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)}$  a le même signe que A et donc est strictement positif et on déduit :

$$\frac{q_n(A)}{q_{n+1}(A)} > \frac{p_n(X)}{p_{n+1}(X)} \quad \forall A > 1, \forall X > 1, \forall n \geq 0.$$

$$p_{n+1}(X) > p_n(X) \cdot \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)}$$

puisque  $p_{n+1}(X) > 0$  pour  $X > 1$  et par suite  $R_{n+1}(X) > 0 \quad \forall X > 1.$

2°) Si, maintenant,  $X < -1$ , alors

$$\frac{p_n(X)}{p_{n+1}(X)} < 0 \quad \forall X < -1 \quad \text{et} \quad \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)} > 0$$

$$R_{n+1}(X) = p_{n+1}(X) - p_n(X) \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)}$$

$$R_{n+1}(X) = p_n(X) \left[ \frac{p_{n+1}(X)}{p_n(X)} - \frac{q_{n+1}(A)}{q_n(A)} \right]$$

$R_{n+1}(X)$  et  $p_n(X)$  sont donc de signes contraires et  $R_{n+1}(X) \neq 0$  pour  $X < -1$ .

Les polynômes  $R_n$  sont par conséquent orthogonaux par rapport à une certaine distribution  $\mu$  dont le support est inclus dans  $[-1, 1]$  et tels que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_n(X)|^{1/n} \leq 1$ .

Le théorème principal permet de conclure.

□

Il resterait à démontrer que la meilleure approximation polynomiale de  $\frac{1}{X-A}$  sur  $[-1, 1]$  en norme  $L^p$  est un polynôme qui interpole cette fonction aux racines de certains polynômes orthogonaux sur  $[-1, 1]$ , le résultat étant vrai pour  $p = 1, 2$  et  $\infty$ .

#### IV - APPROXIMANTS DE PADÉ.

Théorème 4 : L'approximant de Padé  $[n-1/n]_f(t)$  de la série  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  avec  $c_i = \int_a^b x^i d\alpha(x)$ ,  $t^{-1} \in \mathbb{C} - [a, b]$

à bornée, non décroissante dans  $[a, b]$  vérifie :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |[n-1/n]_f(t) - f(t)|^{1/n} \leq |B|^2$$

avec  $B$  défini comme précédemment.

#### Preuve.

Nous savons que le polynôme générateur de l'approximant de Padé  $[n-1/n]_f(t)$  est orthogonal par rapport à la distribution définissant  $(c_i)_{i \geq 0}$ .

On a :

$$f(t) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1-xt} = \frac{2}{(b-a)t} \int_{-1}^1 \frac{d\beta(X)}{A-X}$$

où  $d\beta(X) = d\alpha(\tau^{-1}(X)) = d\alpha(x)$ .

Si l'on considère la suite de polynômes  $R_n$  orthogonaux non plus par rapport à une distribution quelconque, mais précisément par rapport à la distribution  $d\beta$  sur

[-1, 1], on obtient :

$$e_n = \frac{2}{(b-a) t R_n(A)} \int_{-1}^1 \frac{R_n(X)}{A-X} d\beta(X)$$

Le lemme 1, chapitre II donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(A)|^{1/n} \geq |B|^{-1} = |A + \sqrt{A^2 - 1}| > 1$$

avec  $B = A - \sqrt{A^2 - 1}$ .

Remplaçons dans l'expression de  $e_n$ , la fonction  $\frac{1}{X-A}$  par son développement en série des polynômes de Chebychev de première espèce  $T_n$ .

Voir [21, p. 153] ou [23].

$$\frac{1}{A-X} = \frac{4B}{1-B^2} \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_k(X)$$

(convergence uniforme sur [-1, 1])

avec  $A = \frac{1}{2} (B + \frac{1}{B})$ ,  $|B| < 1$  et où  $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0}{2} + u_1 + u_1 + \dots + u_n$

$$\Rightarrow e_n = \frac{2}{(b-a) t R_n(A)} \cdot \frac{4B}{1-B^2} \sum_{k=n}^{\infty} B^k \int_{-1}^1 T_k(X) R_n(X) d\beta(X).$$

puisque  $\int_{-1}^1 T_k(X) \cdot R_n(X) d\beta(X) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Maintenant, pour tout  $X \in [-1, 1]$   $|T_n(X)| \leq 1$  par construction des  $T_n$ .

Donc :

$$\left| \int_{-1}^1 T_k(X) R_n(X) d\beta(X) \right| \leq \left[ \int_{-1}^1 d\beta \cdot \int_{-1}^1 |R_n(X)|^2 d\beta(X) \right]^{1/2}$$

$$\leq \left[ \int_{-1}^1 d\beta(X) \right]^{1/2} = M$$

et

$$|e_n| \leq \frac{2}{(b-a)|t||R_n(A)|} \cdot \left| \frac{4B}{1-B^2} \right| \cdot \frac{B^n M}{1-|B|}$$

D'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |e_n| \leq \frac{B}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_n(A)|} = |B|^2 < 1$$

Ce résultat a été obtenu par Baker [2, p. 220], mais de façon différente.

A priori la borne supérieure de  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |e_n|^{1/n}$  paraît plus favorable avec les approximants de Padé qu'avec les méthodes précédentes. En fait, le calcul de  $[n-1/n]_f(t)$  nécessitant la connaissance des  $2n$  premiers coefficients de la série  $f(t)$ , les méthodes sont donc équivalentes.

## V - DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE EN FONCTION DES $T_n$ .

Dans l'expression

$$f(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{X-A} d\beta(X)$$

remplaçons la fonction  $\frac{1}{X-A}$  par son développement en série des  $T_n$ , polynômes de Chebychev de première espèce.

On a :

$$\frac{1}{X-A} = \frac{-4B}{1-B^2} \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_k(X)$$

pour  $|A| > 1$  (voir chapitre 3, IV).

Posons

$$P_n(X) = \frac{-4B}{1-B^2} \sum_{k=0}^n B^k T_k(X)$$

$$P_n(X) = \frac{-4B}{1-B^2} \left[ \frac{1}{2} + B T_1(X) + B^2 T_2(X) + \dots + B^n T_n(X) \right]$$

Soit  $R_{n+1}(X)$  défini par :

$$P_n(X) = \frac{1 - R_{n+1}(X)/R_{n+1}(A)}{X-A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_{n+1}(X)}{R_{n+1}(A)} = 1 + (X-A) \cdot \frac{4B}{(1-B^2)} \sum_{k=0}^n B^k T_k(X)$$

Lemme 4 : On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{n+1}(X) = -\frac{1}{2B} T_{n+1}(X) + \frac{1}{2} T_n(X) \\ R_{n+1}(A) = \frac{B^2-1}{4 \cdot B^{n+2}} \end{array} \right.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}(X)}{R_{n+1}(A)} &= (X-A) \left[ \frac{1}{X-A} + \frac{4B}{1-B^2} \sum_{k=0}^n B^k T_k(X) \right] \\ &= (X-A) \left[ \frac{-4B}{1-B^2} \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_k(X) + \frac{4B}{1-B^2} \sum_{k=0}^n B^k T_k(X) \right] \end{aligned}$$



$$= (X-A) \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} B^k T_k(X) \right] \times \frac{(-4B)}{1-B^2}$$

$$= (X-A) \frac{(-4B^{n+2})}{1-B^2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_{k+n+1}(X) \right]$$

Posons  $R_{n+1}(X) = (X-A) \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_{k+n+1}(X)$ .

Il vient :

$$R_{n+1}(A) = \frac{B^2-1}{4 B^{n+2}}$$

$$R_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k X \cdot T_{k+n+1}(X) - A \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_{k+n+1}(X)$$

En utilisant la relation qui lie les  $T_n$  :

$$X T_n(X) = \frac{T_{n+1}(X) + T_{n-1}(X)}{2}$$

on a :

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} B^k [T_{n+k+2}(X) + T_{n+k}(X)] - A \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_{k+n+1}(X)$$

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (B^k + B^{k-2}) T_{n+k}(X) + \frac{1}{2} T_n(X) + \frac{B}{2} T_{n+1}(X) - A \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_{k+n+1}(X)$$

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (B^k + B^{k-2} - 2A B^{k-1}) T_{n+k}(X) + \frac{1}{2} T_n(X) + \frac{B}{2} T_{n+1}(X) - A T_{n+1}(X)$$

Or

$$B^k + B^{k-2} - 2A B^{k-1} = B^{k-2} [B^2 + 1 - 2AB] = a$$

et

$$\frac{B}{2} - A = -\frac{1}{2B}.$$

D'où

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} T_n(X) - \frac{1}{2B} T_{n+1}(X).$$

□

L'expression de  $R_n$  en fonction des  $T_n$  va permettre de trouver la relation de récurrence à trois termes engendrant la suite  $(R_n)_{n \geq 1}$ :

Lemme 5 :

$$\left[ \begin{array}{l} R_{n+1}(X) = 2X R_n(X) - R_{n-1}(X) \quad n \geq 1 \\ R_1(X) = \frac{-X + B}{2B} \\ R_2(X) = \frac{-2X^2 + BX + 1}{2B} \end{array} \right.$$

Preuve.

Immédiate à partir du lemme 4.

$$R_1(X) = -\frac{1}{2B} T_1(X) + \frac{1}{2} T_0(X) = -\frac{X}{2B} + \frac{1}{2}$$

$$R_2(X) = -\frac{1}{2B} T_2(X) + \frac{1}{2} T_1(X) = \frac{-2X^2 + 1}{2B} + \frac{X}{2}.$$

□

La relation du lemme 5 indique que la suite  $(R_n)_{n \geq 1}$  est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une distribution  $d\mu$  dont le support est un intervalle réel.

Lemme 6 :  $\text{Br}(d\mu) \subseteq [-1, 1]$  ou de façon équivalente  $R_{n+1}$  n'a aucune racine en dehors de l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Preuve.

Soit  $X_0$  une racine de  $R_{n+1}$

$$R_{n+1}(X_0) = 0 \Leftrightarrow T_{n+1}(X_0) = B T_n(X_0)$$

$$\Leftrightarrow |T_{n+1}(X_0)| = |B| \cdot |T_n(X_0)|$$

$$\Leftrightarrow |T_{n+1}(X_0)| < |T_n(X_0)| \text{ car } |B| < 1 \forall A.$$

Cette dernière inégalité n'étant réalisable que dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , on en déduit que  $X_0 \in [-1, 1]$ .

□

Théorème 5 :  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c.(P_n(X))|^{1/n} \leq |B| < 1$  où  $P_n$  est le développement tronqué de la fonction génératrice en fonction de  $T_n$ , à l'ordre  $n$ , et où  $f(t) = \int_{-1}^1 \frac{d\beta(X)}{X-A}$ .

Preuve.

On a : \*  $(R_n)_{n \geq 1}$  orthogonaux par rapport à  $d\mu$ , avec  $Br(d\mu) \subseteq [-1, 1]$

$$* R_n(X) = -\frac{1}{2B} T_n(X) + \frac{1}{2} T_{n-1}(X) \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_n(X)|^{1/n} \leq 1.$$

Les hypothèses du théorème principal sont satisfaites.

Le théorème 5 en découle.

□

Connaissant explicitement les polynômes  $R_n$ , nous pouvons écrire une borne d'erreur plus précise.

Théorème 6 : Avec les notations du théorème 5, on a :

$$|f(t) - c(P_n)| = |e_n| \leq \frac{4 |B|^{n+2}}{(B^2-1)(1-|B|)} \cdot \int_{-1}^1 d\beta(X)$$

Preuve.

$$P_n(X) = \frac{1 - R_{n+1}(X)/R_{n+1}(A)}{X-A}$$

$$f(t) - c(P_n(X)) = \frac{1}{R_{n+1}(A)} \int_{-1}^1 \frac{R_{n+1}(X)}{X-A} d\beta(X) = \frac{4 B^{n+2}}{B^2-1} \int_{-1}^1 \frac{R_{n+1}(X)}{X-A} d\beta(X)$$

$$f(t) - c(P_n(X)) = \frac{4 B^{n+2}}{B^2-1} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} B^k T_{n+k+1}(X) d\beta(X)$$

$$\Rightarrow |f(t) - c(P_n)| \leq \frac{4 |B|^{n+2}}{B^2-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |B|^k \int_{-1}^1 d\beta(X)$$

$$\leq \frac{4 |B|^{n+2}}{B^2-1} \times \frac{\int_{-1}^1 d\beta(X)}{1 - |B|}$$

Exemple.

Pour Log 2 on obtient : (voir théorème 2 chapitre III)

$$|e_n| \leq \frac{(3 - \sqrt{8})^n}{3, 9}$$

Cette borne d'erreur est légèrement supérieure à celle obtenue en remplaçant la fonction génératrice par son polynôme de meilleure approximation.

## VI - DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE EN FONCTION DES $U_n$

Lemma 7 :  $\forall A, |A| > 1$  on a :

$$\frac{1}{X-A} = -2B \sum_{k=0}^{\infty} B^k U_k(X)$$

pour  $X \in [-1, 1]$ .

Preuve.

$$U_k(X) = \frac{\sin((k+1) \arccos X)}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} U_k(X)(X-A) = \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} \left[ \frac{U_{k+1} + U_{k-1}}{2} - A U_k \right]$$

Utilisant  $A = \frac{1}{2} (B + \frac{1}{B})$  on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} U_k(X)(X-A) &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} U_{k+1} - B^k U_k + B^{k+1} U_{k-1} - B^{k+2} U_k \right] \\ &= \frac{1}{2} (-B^0 U_0) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Rappels. (Voir Paskowski [21, P. 49] ou [23]).

La suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  vérifie

$$U_{n+1}(X) = 2X U_n(X) - U_{n-1}(X)$$

$$U_0(X) = 1$$

$$U_1(X) = 2X$$

$$\sup_{X \in [-1, I]} |U_n(X)| = U_n(1) = (n+1)$$

Dans l'expression  $f(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{X-A} d\beta(X)$ , remplaçons  $\frac{1}{X-A}$  par son développement en fonction des  $U_n$ .

$$\text{Posons } P_n(X) = -2B \sum_{k=0}^n B^k U_k(X).$$

Soit  $R_{n+1}(X)$  défini par :

$$P_n(X) = \frac{1 - R_{n+1}(X)/R_{n+1}(A)}{X-A}$$

$$\frac{R_{n+1}(X)}{R_{n+1}(A)} = -2B(X-A) \sum_{k=n+1}^{\infty} B^k U_k(X).$$

Lemme 8 : La suite  $(R_n)_{n \geq 1}$  vérifie :

$$\left| \begin{array}{l} R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} U_n(X) - \frac{1}{2B} U_{n+1}(X) \\ R_{n+1}(A) = -\frac{1}{2 B^{n+2}} \end{array} \right.$$

Preuve.

$$\text{Posons } R_{n+1}(X) = (X-A) \sum_{k=n+1}^{\infty} B^{k-n-1} U_k(X).$$

Dans ce cas

$$R_{n+1}(A) = -\frac{1}{2 B^{n+2}}$$

$$R_{n+1}(X) = \sum_{k=n+1}^{\infty} X \cdot B^{k-(n+1)} U_k(X) - A \sum_{k=n+1}^{\infty} B^{k-(n+1)} U_k(X)$$

Or

$$X U_k(X) = \frac{U_{k+1}(X) + U_{k-1}(X)}{2}$$

$$\Rightarrow R_{n+1}(X) = \sum_{k=n+1}^{\infty} B^{k-(n+1)} \frac{U_{k+1}(X) + U_{k-1}(X)}{2} - A \sum_{k=n+1}^{\infty} B^{k-(n+1)} U_k(X)$$

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} U_n(X) + \frac{B}{2} U_{n+1}(X) - A U_{n+1}(X)$$

Les autres termes s'annulent car ils comportent le facteur nul  $(B^2+1-2AB)$

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} U_n(X) + \left(\frac{B}{2} - A\right) U_{n+1}(X) = \frac{1}{2} U_n(X) - \frac{1}{2B} U_{n+1}(X)$$

□

L'expression de  $R_n$  en fonction des  $U_n$  va nous permettre de trouver la relation de récurrence à trois termes satisfaite par les  $(R_n)_{n \geq 1}$ .

Lemme 9 :  $R_{n+1}(X) = 2X R_n(X) - R_{n-1}(X) \quad n \geq 1$

$$R_1(X) = -\frac{X}{B} + \frac{1}{2}$$

$$P_2(X) = -\frac{2X^2}{B} + X + \frac{1}{2B}$$

Preuve.

Immédiate à partir du lemme 8.

$$R_1(X) = \frac{1}{2} U_0(X) - \frac{1}{2B} U_1(X) = \frac{1}{2} - \frac{X}{B}$$

$$R_2(X) = \frac{1}{2} U_1(X) - \frac{1}{2B} U_2(X) = X - \frac{1}{2B} (4X^2 - 1)$$

□

La relation de récurrence du lemme 9 indique que les polynômes  $(R_n)_{n \geq 1}$  sont orthogonaux par rapport à une distribution  $\mu$  dont le support est un intervalle réel.

Lemme 10 :  $Br(d\mu) \subseteq [-1, 1]$  ou de façon équivalente le polynôme  $R_{n+1}$  n'a aucune racine à l'extérieur de  $[-1, 1]$ .

Preuve.

Identique à celle du lemme 6.

Soit  $X_0$  une racine de  $R_{n+1}$

$$R_{n+1}(X_0) = 0 \iff U_{n+1}(X_0) = B U_n(X_0)$$

$$\Rightarrow |U_{n+1}(X_0)| < |U_n(X_0)| \Rightarrow X_0 \in [-1, 1]$$

□

Théorème 7 :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n(X))|^{1/n} \leq |B| < 1$$

où  $P_n$  est le développement tronqué de la fonction génératrice en fonction des  $U_n$ , à l'ordre  $n$  et où

$$f(t) = \int_{-1}^1 \frac{d\beta(X)}{X-A}$$

Preuve.

D'une part, le lemme 10 montre que les  $(R_n)_{n \geq 1}$  sont des polynômes orthogonaux sur  $[-1, 1]$  et d'autre part la formule du lemme 8

$$R_{n+1}(X) = \frac{1}{2} U_n(X) - \frac{1}{2B} U_{n+1}(X)$$

donne



$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(X)|^{1/n} \leq 1 \text{ car } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_{n+1}(X)|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/n} = 1$$

Le théorème 7 apparaît donc comme une conséquence du théorème principal.

□

Les polynômes  $R_n$  étant connus on obtient le

Théorème 8 : Avec les notations du théorème 7 on a :

$$|f(t) - c(P_n)| = |e_n| \leq \frac{2 |B|^{n+1} (n+1-n|B|)}{(1-B^2)} \int_{-1}^1 d\beta(X)$$

Preuve.

$$P_n(X) = \frac{1 - R_{n+1}(X)/R_{n+1}(A)}{X-A}$$

$$f(t) - c(P_n) = \frac{1}{R_{n+1}(A)} \int_{-1}^1 \frac{R_{n+1}(X)}{X-A} d\beta(X) = -2 B^{n+2} \int_{-1}^1 \frac{R_{n+1}(X)}{X-A} d\beta(X)$$

$$|f(t) - c(P_n)| \leq 2|B|^{n+2} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |B|^{k-n-1} (k+1) \cdot \int_{-1}^1 d\beta(X).$$

$$\leq 2|B|^{n+2} \cdot \frac{|B|^{-1}(n+1-n|B|)}{1 - |B|^2} \cdot \int_{-1}^1 d\beta(X).$$

□

Exemple.

Pour Log 2 on obtient

$$|e_n| < (3 - \sqrt{8})^n \cdot 0,7 \cdot (0,828 n + 1)$$

borne d'erreur beaucoup moins bonne que dans les cas précédents puisqu'elle comporte un facteur n en numérateur.

Ce procédé de sommation décrit ci-dessus a été étudié mais de façon tout à fait différente par W. Niethammer [20].

C'est ce lien que nous établissons dans le paragraphe suivant.

## VII - REMARQUE SUR LA TRANSFORMATION $E_{\alpha, \beta}$ DE W. NIETHAMMER.

Dans l'article [20], l'auteur considère la matrice de sommation  $P = (P_{i,j})_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 0}}$  pour sommer  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m$  avec  $p(\phi) = \frac{\alpha\phi}{1-\beta\phi-\gamma\phi^2}$  où p est holomorphe et injective dans un voisinage du disque unité et  $p(0) = 0$  et  $p(1) = 1$ .

On a :

$$[P(\phi)]^j = \sum_{m=j}^{\infty} P_{m,j} \phi^m$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & 0 & \text{---} & & & \\ 0 & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & \\ 0 & 0 & P_{22} & P_{23} & \dots & \\ 0 & 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} P_{00} = 1 \\ P_{11} = \alpha \end{matrix}$$

### Cas particulier.

$p(\phi) = \frac{\phi}{2 - \phi}$  redonne la transformation d'Euler :

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j z^j \text{ transformé en } \frac{1}{1-z} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^j \Delta^j u_0$$

On pose

$$F(\phi : z) = f(z, p(\phi)) = \sum_{m \geq 0} u_m z^m [p(\phi)]^m$$

$$\text{d\underline{e}f} \sum_{m=0}^{\infty} v_m(z) \phi^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^m p_{m,j} u_j z^j \right) \phi^m$$

et

$$F(1 : z) = f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^m P_{mj} u_j z^j \right)$$

$$(u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n) \text{ transform\u00e9 en } \sum_{m=0}^n \left( \sum_{j=0}^m P_{mj} u_j z^j \right).$$

Soit :

$$S_n = \sum_{j=0}^n u_j z^j \text{ transform\u00e9 en } \sum_{m=0}^n \left( \sum_{j=0}^m P_{mj} (S_j - S_{j-1}) \right).$$

Posons

$$R_n(\lambda) = \sum_{m=0}^n \left( \sum_{j=0}^m P_{mj} (\lambda^j - \lambda^{j-1}) \right)$$

$R_n$  est le polyn\u00f4me caract\u00e9ristique de la matrice de sommation suivante (voir d\u00e9finition chap. II, \u00a7. 2)

$$\begin{pmatrix} P_{00} & 0 & 0 & \dots \\ 1-P_{11} & P_{11} & 0 & \dots \\ 1-P_{11}-P_{21} & P_{11}+P_{21}-P_{22} & P_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$R_0(\lambda) = 1$$

$$R_1(\lambda) = P_{11}\lambda + (1 - P_{11}) = \alpha\lambda + (1-\alpha)$$

De la relation  $[p(\phi)]^m \cdot [p(\phi)] = [p(\phi)]^{m+1}$ , on tire :

$$P_{jm} = \alpha P_{j-1,m-1} + \beta P_{j-1,m} + \gamma P_{j-2,m}$$

Puis

$$R_n(\lambda) = (\alpha\lambda + \beta) R_{n-1}(\lambda) + \gamma R_{n-2}(\lambda).$$

W. Niethammer considère les fonctions  $f(z) = \sum_{m \geq 0} u_m z^m$  holomorphes dans  $\mathbb{C} - S(z_0, \delta)$ , où  $S(z_0, \delta)$  est la coupure  $[-\delta z_0, z_0]$ ,  $z_0$  point de  $\mathbb{C}$  où l'on veut sommer  $f(z_0)$ .

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta}(\phi) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{P_{\alpha,\beta}(\phi)} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{\phi} - \beta - \gamma\phi \right).$$

Pour cela  $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$  doit appliquer  $D(0, r)$  avec  $r > 1$  sur  $\mathbb{C} - S(z_0, \delta)$ .  
Après changement de variable, il faut trouver :

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta} : D(0,1) \rightarrow \mathbb{C} - [-1, 1]$$

et on obtient

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta}(\phi) = \frac{1}{2} \left( \phi + \frac{1}{\phi} \right) \Rightarrow P(\phi) = \frac{2\phi}{1 + \phi^2}$$

Avec ce changement de variable on a :

$$R_n(\lambda) = 2\lambda R_{n-1}(\lambda) - R_{n-2}(\lambda).$$

Prouvons que  $R_n(\lambda) = U_n(\lambda) - \theta U_{n-1}(\lambda)$ ,  $U_n$  polynôme de Chebychev de 2ème espèce, où  $\theta = (\sqrt{1+\delta z_0} - \sqrt{1-z_0})^2 / z_0(1+\delta)$ .

$$\text{Vrai pour } n = 0 \quad R_0(\lambda) = 1 \text{ et } U_0(\lambda) - \theta U_{-1}(\lambda) = 1.$$

$$n = 1 \quad R_1(\lambda) = 2\lambda - \theta \text{ et } U_1(\lambda) - \theta U_0 = 2\lambda - \theta.$$

Hyp récurrence.

$$\begin{cases} R_n(\lambda) = U_n(\lambda) - \theta U_{n-1}(\lambda) \\ R_{n-1}(\lambda) = U_{n-1}(\lambda) - \theta U_{n-2}(\lambda) \end{cases}$$

$$R_{n+1}(\lambda) = 2\lambda R_n(\lambda) - R_{n-1}(\lambda) = 2\lambda(U_n - \theta U_{n-1}) - (U_{n-1} - \theta U_{n-2})$$

$$R_{n+1}(\lambda) = (2\lambda U_n - U_{n-1}) - \theta(2U_{n-1} - U_{n-2})$$

$$R_{n+1}(\lambda) = U_{n+1}(\lambda) - \theta U_n(\lambda)$$

Le relation ci-dessus montre que ce procédé est exactement celui consistant à tronquer le développement  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  en fonction des  $U_n$ , polynômes de Chebychev de seconde espèce (voir § VI).

## CHAPITRE IV

APPLICATIONS AUX SUITES (TM) ET (TO)

Ce chapitre contient essentiellement le résultat suivant :

L'ensemble des suites totalement monotones et l'ensemble des suites totalement oscillantes sont accélérés par tous les procédés reposant sur des suites de polynômes orthogonaux vérifiant les conditions du théorème principal.

## I - RÉGULARITÉ.

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels.

Transformons la en somme partielle d'une série en posant :

$$c_0 = S_0 \text{ et } c_i = \frac{\Delta S_{i-1}}{t^i} = \frac{S_i - S_{i-1}}{t^i}, \quad i \geq 1$$

On a alors :

$$S_n = \sum_{i=0}^n c_i t^i \text{ et } S = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{si elle existe}$$

Si l'on pose  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ ,  $S_n$  apparaît comme la somme partielle de la série  $f$ .

Soit  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une distribution  $d\mu$  vérifiant les conditions du théorème principal, (voir chap. 2, § I), à savoir

$$* \text{ Br}(d\mu) \subseteq [-1, 1]$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} * \text{ Br}(d\mu) = [-1, 1] \text{ et } \mu'(X) > 0 \text{ pour presque tout } X \in [-1, 1] \\ \text{ou} \\ * \overline{\lim}^n \sqrt{|R_n(X)|} \leq 1 \quad \forall X \in [-1, 1] \end{array} \right.$$

Le polynôme

$$P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}^*(x) / R_{n+1}^*(t^{-1})}{1-xt}$$

interpole la fonction génératrice  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  aux racines de

$$R_{n+1}^*(x) = R_{n+1}(\tau(x)) = R_{n+1}(X).$$

Si l'on pose :

$$R_{n+1}^*(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i^{(n+1)} x^i$$

on a

$$R_{n+1}^*(t^{-1}) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i^{(n+1)} t^{-i}$$

$$R_{n+1}^*(t^{-1}) - R_{n+1}^*(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n+1)} (t^{-i} - x^i) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n+1)} (1-x^i t^i) t^{-i}$$

Le coefficient  $a_0^{(n+1)}$  n'intervenant pas, on peut le supposer nul.

Si la fonctionnelle  $c$  est définie par :

$$c(x^i) = c_i$$

on a :

$$c\left(\frac{1-x^i t^i}{1-xt}\right) = c(1 + xt + x^2 t^2 + \dots + x^{i-1} t^{i-1})$$

pour  $i \geq 1$

$$= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{i-1} t^{i-1} = S_{i-1}$$

D'où



$$c(P_n) = \frac{1}{R_{n+1}^*(t^{-1})} c \left[ \frac{R_{n+1}^*(t^{-1}) - R_{n+1}^*(x)}{1 - xt} \right]$$

$$c(P_n) = \frac{1}{R_{n+1}^*(t^{-1})} \left[ \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n+1)} S_{i-1} t^{-i} \right]$$

$$c(P_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i^{(n+1)}}{t^i R_{n+1}^*(t^{-1})} \cdot S_{i-1}$$

$$c(P_n) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i^{(n+1)}}{t^{i+1} \cdot R_{n+1}^*(t^{-1})} \cdot S_i$$

En posant :

$$\mu_i^{(n)} = a_{i+1}^{(n+1)} / (t^{i+1} \cdot R_{n+1}^*(t^{-1}))$$

On obtient :

$$c(P_n) = \sum_{i=0}^n \mu_i^{(n)} S_i$$

Remarquer que :

$$\sum_{i=0}^n \mu_i^{(n)} = \frac{1}{R_{n+1}^*(t^{-1})} \sum_{i=0}^n a_{i+1}^{(n+1)} t^{-i-1} = \frac{R_{n+1}^*(t^{-1})}{R_{n+1}^*(t^{-1})} = 1$$

On pose :

$$T(S_n) = \sum_{i=0}^n \mu_i^{(n)} S_i = c(P_n)$$



Théorème 1 : Soit  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une distribution  $\mu$  vérifiant les conditions du théorème principal.

$$\text{Soit } R_n^*(x) = R_n(\tau(x)) = R_n\left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) = R_n(X).$$

Si  $[ta, tb] \subset \mathbb{R}^-$ , alors le procédé de sommation basé sur les  $R_n^*$  est régulier. C'est à dire :

$$[ta, tb] \subset \mathbb{R}^- \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} c(P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(S_n) = \lim_{+\infty} S_n$$

où

$$P_n(x) = \frac{1 - R_{n+1}^*(x)/R_{n+1}^*(t^{-1})}{1 - xt}$$

Preuve.

$R_n$  étant le polynôme de degré  $n$  orthogonal par rapport à une distribution dans  $[-1, 1]$ , les racines de  $R_n$  sont dans  $[-1, 1]$ . Ceci implique que  $R_n^*$  a toutes racines dans  $[a, b]$  puis, par le lemme 1, que les racines de  $c_n$  sont dans l'intervalle  $[ta, tb]$ . Le lemme 2 permet de conclure.

□

Dans toute la suite du chapitre,  $T$  désignera un procédé défini ci-dessus sans qu'il soit besoin de le préciser.

## II - ACCÉLÉRATION DES SUITES TOTALEMENT MONOTONES OU TOTALEMENT OSCILLANTES.

Définition : On adopte pour la suite les notations suivantes :

$$\text{TM.LOG} = \{(S_n) \in \text{TM} / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = 1 \text{ où } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S\}$$

$$\text{TM.NL} = \{(S_n) \in \text{TM} / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \rho \in ]0, 1[ \text{ où } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S\}$$

$$\text{TO.C} = \{(S_n) \in \text{TO} / S_n \text{ soit convergente}\}.$$

Remarque.

Une suite de (TO) convergente a pour limite 0.

Théorème 2 : Soit  $S_n$  une suite de réels de limite  $s$ .  
S'il existe un réel  $t \in ]-\infty, 1[$  tel que

$$\left\{ \frac{\Delta S_{n-1}}{t^n} \right\}_{n \geq 1} \in \text{TM}$$

alors  $T(S_n)$  converge vers  $s$  et :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(S_n) - s|^{1/n} \leq |B| < 1$$

où

$$B = \left(\frac{2}{t} - 1\right) - \text{sign}(t) \sqrt{\left(\frac{2}{t} - 1\right)^2 - 1}$$

Preuve.

En posant  $c_n = \frac{\Delta S_{n-1}}{t^n}$ ,  $c_0 = S_0$ , on a :

$$S_n = \sum_{i=0}^n c_i t^i$$

$$c_n \in \text{TM} \Rightarrow c_n = \int_0^1 x^n d\alpha(x), \alpha \text{ non décroissante et bornée.}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \int_0^1 \frac{1}{1-xt} d\alpha(x)$$

$$t \in ]-\infty, 1] \Rightarrow t^{-1} \notin [0, 1]$$

Le théorème principal s'applique donc et l'on obtient :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(P_n) - f(t)| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |T(S_n) - S| \leq |B| < 1$$

où  $B = A - \text{sign}(A) \sqrt{A^2 - 1}$  où  $A = \frac{2}{t} - 1$ .

□

Le théorème précédent n'est rien d'autre que la traduction du théorème principal en terme de suite.

Les deux lemmes suivants seront utilisés dans la démonstration du théorème 3.

Lemme 3 :  $T$  accélère toutes les suites  $(S_n)$  totalement oscillantes convergentes telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = -1.$$

Preuve.

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{TO.C}$

On a

$$(-\Delta S_{n-1})_{n \geq 1} \in \text{TO}$$

donc

$$(-1)^{n-1} (-\Delta S_{n-1})_{n \geq 1} \in \text{TM}$$

(Voir rappels chapitre 1)

et

$$\left( \frac{\Delta S_{n+1}}{(-1)^n} \right)_{n \geq 1} \in TM$$

ce qui permet d'appliquer le théorème 2, avec  $t = -1$ , et on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |T(S_n) - S|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |T(S_n)|^{1/n} \leq |-3 + \sqrt{8}|$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n|^{1/n} = 1$$

Donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T(S_n) - S}{S_n - S} \right|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T(S_n)}{S_n} \right|^{1/n} \leq 3 - \sqrt{8}$$

et par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(S_n)}{S_n} = 0.$$

□

Lemme 4 : Si  $(S_n) \in TM$  alors  $\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho^n} \right)_{n \geq 1} \in TM$  avec

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}.$$

Preuve.

On sait (chapitre 1) que  $\rho \in ]0, 1[$ .

Si  $\rho = 1$  le lemme est démontré. On peut donc supposer  $\rho < 1$ .

1<sup>ère</sup> étape.

Soit  $t > \rho$  alors  $\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{t^n} \right) \in \text{TM}$ . En effet  $\left( \frac{1}{t^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de M.S  
(Voir déf 5 chap. 1)

$$(S_n) \in \text{TM} \Rightarrow (-\Delta S_{n-1}) \in \text{TM} \subset \text{MS}$$

donc  $\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{t^n} \right)_{n \geq 1} \in \text{MS}$  car produit de deux suites de MS.

De plus

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S} \rightarrow \rho \neq 1 \Rightarrow \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \rightarrow \rho \quad n \rightarrow \infty$$

[8, p. 218]

et

$$\frac{-\Delta S_n}{t^{n+1}} \cdot \frac{t^n}{-\Delta S_{n-1}} = \frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}} \cdot \frac{1}{t} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\rho}{t} < 1$$

$\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{t^n} \right)_{n \geq 1}$  suite de M.S, convergente appartient donc à TM.

2<sup>ème</sup> étape.

Posons  $c_n^{(p)} = \frac{-\Delta S_{n-1}}{\left(\rho + \frac{1}{p}\right)^n}$   $p \in \mathbb{N}^*$  et

$$c_n = \frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho^n}$$

On a :

$c_n^{(p)} \in \text{TM} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$  (voir 1<sup>ère</sup> étape).

Donc

$$(-1)^k \Delta^k c_n^{(p)} \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

$$(-1)^k \Delta^k c_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^k \Delta^k c_n^{(p)} \geq 0. \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$(c_n)$  appartient donc à TM.

□

Théorème 3 : Soit  $(S_n) \in \text{TO.C}$  ; alors T accélère  $(S_n)$ .

Preuve.

$$(S_n)_{n \geq 0} \in \text{TO} \Rightarrow (-\Delta S_{n-1})_{n \geq 1} \in \text{TO} \Rightarrow ((-1)^{n-1} \Delta S_{n-1})_{n \geq 1} \in \text{TM}$$

Soit  $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$  on sait que  $\rho \in [-1, 0[$  (chap. 1).

1er Cas :

$$\text{Si } \rho = -1 \text{ alors } \frac{-\Delta S_{n-1}}{(-1)^n} \in \text{TM}$$

2e Cas :

$$\rho \in ]-1, 0[ .$$

Dans ce cas,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \quad [8, p. 218]$$

et

$$-\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+2} \Delta S_{n+1}}{(-1)^{n+1} \Delta S_n}$$



Si  $c_n = -\frac{(-1)^n \Delta S_{n-1}}{(-\rho)^n}$ , on a  $(c_n) \in TM$  (Lemme 4) et par suite  $\left(\frac{-\Delta S_{n-1}}{t^n}\right) \in TM$

avec  $t = +\rho \in ]-1, 0[$ .

Dans les deux cas, le théorème 2 donne :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |T(S_n)|^{1/n} \leq |B| = \left| \left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{2}{\rho} - 1\right)^2 - 1} \right|$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n|^{1/n} = |\rho|.$$

La quantité  $\left| \left(\frac{2}{\rho} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{2}{\rho} - 1\right)^2 - 1} \right|$  étant strictement inférieure à  $|\rho|$  quel que soit  $\rho \in [-1, 0[$ ,  $T$  accélère la convergence de  $(S_n)$  vers 0.

Corollaire 1 : Si  $(S_n)$  converge vers une limite  $S$  et s'il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que  $(A S_n + B)_n \in TO$  alors  $(T(S_n))$  converge vers  $S$  plus vite que  $(S_n)$ .

Preuve.

Posons  $S'_n = A \cdot S_n + B$ . On a  $(S'_n)_n \in TO$ .

$S'_n$  converge vers 0.

Donc  $T(S'_n)$  converge vers 0 (théorème 3).

(I chap 4)

$$T(S'_n) = \sum_{i=0}^n \mu_i^{(n)} S'_i = \sum_{i=0}^n \mu_i^{(n)} (A \cdot S_i + B) = A \cdot T(S_n) + B$$

$$|T(S_n) - S| = \frac{1}{|A|} |T(A \cdot S_n + B) - (A \cdot S + B)| = \frac{1}{|A|} |T(S'_n)|$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T(S_n) - S}{S_n - S} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T(S'_n)}{S'_n} \right| = 0.$$

□

Théorème 4 : Soit  $(S_n) \in \text{TM.NL}$   
 Alors  $T$  accélère  $(S_n)$ .

Preuve.

$$S_n \in \text{TM.NL} \Rightarrow \rho = \lim_n \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \in ]0, 1[$$

On a  $\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho^n} \right)_{n \geq 1} \in \text{T M}$  (Lemme 4).

Il résulte du théorème 2 que :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(S_n) - S|^{1/n} \leq |B| = \left| \frac{2}{\rho} - 1 - \sqrt{\left(\frac{2}{\rho} - 1\right)^2 - 1} \right| < 1 \text{ car } \rho < 1$$

La quantité  $\left| \frac{2}{\rho} - 1 - \sqrt{\left(\frac{2}{\rho} - 1\right)^2 - 1} \right|$  étant strictement inférieure à  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n|^{1/n}$  quel que soit  $\rho \in ]0, 1[$ ,  $T$  accélère la convergence de  $(S_n)$ .

□

Exemple.

$$S_n = \frac{(0,9)^n}{n+1} \quad \rho = 0,9 \quad t = 0,9 \quad B = 0,52.$$

et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(S_n)|^{1/n} \leq 0,52.$$

Corollaire 2 : Si  $(S_n)$  converge vers  $S$  et s'il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$(A S_n + B)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{TM.NL}$$

alors  $T$  accélère la convergence de  $(S_n)$  vers  $S$ .

Preuve.

Identique à celle du corollaire 1.

On pourra remarquer que les théorèmes d'accélération 3 et 4 utilisent le fait que toutes les suites TM et TO vérifient :

$\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{t^n} \right) \in \text{TM}$  avec  $t < 1$ . Par le théorème suivant, nous allons montrer qu'elles sont les seules à vérifier cette condition.

Théorème 5 : Si  $(S_n)$  converge vers  $S$  et si il existe  $t \in ]-\infty, 1[$  tel que  $\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{t^n} \right) \in \text{TM}$ , alors il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que  $(A S_n + B) \in \text{TM} \cup \text{TO}$ .

Preuve.

Remarquons que  $t$  ne peut pas appartenir à l'intervalle  $]-\infty, -1[$  car  $S_n$  est une suite convergente.

$$\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{t^n} \right)_n \in \text{TM} \Rightarrow -\Delta S_{n-1} = t^n u_n \text{ avec } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{TM}$$

on obtient :

$$-S_n + S_0 = \sum_{i=1}^n t^i u_i$$

$(-S_n + S_0)$  est donc une série de Stieltjes.

Par suite : si

$$t \in ]0, 1] \quad (-S + S_0) - (-S_n + S_0) = S_n - S \in \text{TM}$$

et si

$$t \in [-1, 0[ \quad (-S_n + S_0) - (-S + S_0) = S - S_n \in \text{TO}$$

voir [4].

□

Théorème 6 : Si  $S_n = a u_n + b v_n$  avec  $(u_n) \in TM$  et  $(v_n) \in T.O.C$  et  $a, b \in \mathbb{R}^+$  alors  $T$  accélère  $S_n$ .

Preuve.

Soit  $\rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n}$   $\rho_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|^{1/n}$

\* Supposons  $\rho_1 \geq \rho_2$

Dans ce cas

$$\frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho_1^n} = a \cdot \frac{-\Delta u_{n-1}}{\rho_1^n} + b \cdot \frac{-\Delta v_{n-1}}{\rho_1^n}$$

$$\frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho_1^n} = a \cdot \frac{-\Delta u_{n-1}}{\rho_1^n} + b \cdot \frac{-\Delta v_{n-1}}{(-\rho_2)^n} \cdot \left(\frac{-\rho_2}{\rho_1}\right)^n$$

$$(u_n) \in (TM) \Rightarrow \frac{-\Delta u_{n-1}}{\rho_1^n} \in TM \quad (\text{lemme 4})$$

$$\left. \begin{array}{l} v_n \in TO \Rightarrow \frac{-\Delta v_{n-1}}{(-\rho_2)^n} \in TM \\ \left(\frac{-\rho_2}{\rho_1}\right)^n \in TO \text{ (car } \rho_2 < \rho_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-\Delta v_{n-1}}{(-\rho_2)^n} \left(\frac{-\rho_2}{\rho_1}\right)^n \in T.O$$

Donc

$$\frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho_1^n} = a \int_0^1 x^n d\alpha(x) + b \int_{-\rho_2/\rho_1}^0 x^n d\beta(x)$$

$\alpha$  et  $\beta$  fonctions bornées non décroissantes

$$\frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho_1^n} = \int_{-\rho_2/\rho_1}^1 x^n [a d\alpha(x) + b d\beta(x)] = \int_{-\rho_2/\rho_1}^1 x^n d\gamma(x)$$

$\gamma$  est bornée et non décroissante sur  $[-\rho_2/\rho_1, 1]$ .

Le théorème 2 donne :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(S_n) - S|^{1/n} \leq |B|$$

où

$$|B| = |A - \sqrt{A^2 - 1}| \quad \text{avec } A = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1 - \rho_2/\rho_1}{1 + \rho_2/\rho_1} > 1$$

La quantité  $|B|$  étant strictement inférieure à  $\rho_1$  quel que soit  $\rho_1 \in ]0, 1[$ , on en conclut que  $T$  accélère  $(S_n)$  car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S|^{1/n} = \text{Max}(\rho_1, \rho_2) = \rho_1.$$

\* Supposons  $\rho_2 \geq \rho_1$ .

Dans ce cas on aura :

$$\frac{-\Delta S_{n-1}}{(-\rho_2)^n} = \int_{-1}^{\rho_1/\rho_2} x^n d\gamma(x)$$

et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(S_n) - S|^{1/n} \leq |B| < |\rho_2|$$

où

$$|B| = |A + \sqrt{A^2 - 1}| \quad \text{avec } A = -\frac{1}{\rho_2} - \frac{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}{\frac{\rho_1}{\rho_2} + 1} \leq -1$$

alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S|^{1/n} = \text{Max}(\rho_2, \rho_1) = \rho_2.$$

□

On a, plus généralement :

Théorème 7 : Si  $(S_n)$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs, de suites de TM.NL ou de suites de TOC, alors T accélère  $(S_n)$ .

Preuve.

$$S_n = \sum_{i=1}^p a_i u_n^{(i)} \text{ avec } a_i \in \mathbb{R}^+ \text{ pour } i = 1, \dots, p \text{ et } (u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \in \text{TM.NL} \cup \text{TO.C}$$

$$i = 1, \dots, p.$$

$$\text{Soit } \rho_i = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n^{(i)}|^{1/n} \quad \rho_p < \rho_{p-1} < \dots < \rho_2 < \rho_1 < 1, \quad u_n^{(1)} \in \text{TM}.$$

On a :

$$\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{\rho_1^n} \right)_{n \geq 0} = \int_{-\rho/\rho_1}^1 x^n d\gamma(x)$$

$\gamma$  bornée, non décroissante et  $\rho$  choisi tel que :

$$\rho = \text{Max}_{i=1,p} \{ \rho_i / u_n^{(i)} \in \text{TO} \}.$$

On obtient :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(S_n) - S|^{1/n} \leq |B| < \rho_1$$

où

$$|B| = |A - \sqrt{A^2 - 1}| \quad \text{avec } A = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_1}}{1 + \frac{\rho}{\rho_1}} > 1$$

T accélère donc la convergence de  $S_n$  puisque :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S|^{1/n} = \rho_1.$$

□

Remarque 1.

Si  $(u_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \in T.O$  on prendra :

$$\left( \frac{-\Delta S_{n-1}}{(-\rho_1)^n} \right) = \int_{-1}^{\rho/\rho_1} x^n d\gamma(x)$$

avec

$$\rho = \text{Max}_{i=1,p} \{ \rho_i / u_n^{(i)} \in TM \}$$

et

$$|B| = |A + \sqrt{A^2 - 1}| \quad \text{avec } A = -\frac{1}{\rho_1} - \frac{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}{\frac{\rho_1}{\rho_2} + 1} < -1.$$

Remarque 2.

Si les coefficients ne sont pas tous positifs, on ne peut plus affirmer que T accélère la combinaison linéaire de suites TM.NL ou T.O.C mais on a encore :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(S_n) - S|^{1/n} \leq |B| < 1$$

On n'a plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S|^{1/n} = \text{Max}(\rho_i, i = 1, p)$  comme le prouve le contre exemple suivant :

$$S_n = u_n - v_n$$

avec

$$u_n = \frac{(0,5)^n}{n+1} + \frac{(0,9)^n}{n+1} \in TM$$

$$\rho_1 = 0,9$$

$$v_n = \frac{(0,9)^n}{n+1}$$

$$\rho_2 = 0,9$$

$$s_n = \frac{(0,5)^n}{n+1}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |s_n|^{1/n} = 0,5.$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |T(s_n)|^{1/n} \leq |B| \text{ avec } B = A - \sqrt{A^2 - 1} \text{ et } A = 1,22$$

$$|B| = 0,51 > 0,5 \dots$$



## CHAPITRE V

### ÉTUDE D'AUTRES PROCÉDÉS

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous verrons que certains algorithmes comme le  $\Delta^2$  d'Aitken ou le procédé W de Lubkin sont en fait obtenus en interpolant la fonction génératrice  $\frac{1}{1-x}$  en certains points dépendant de la suite à accélérer, ce qui va permettre d'en trouver une généralisation.

La suite sera consacrée à l'étude du procédé obtenu dans le cas où l'on remplace la fonction génératrice par son polynôme de Bernstein de degré n, par son polynôme d'interpolation en des points équidistants, ou par son polynôme de meilleure approximation sur le disque unité.

Enfin il sera démontré qu'aucun procédé de sommation ne peut accélérer l'ensemble des suites totalement monotones logarithmiques.

### Remarque.

Si les points d'interpolation  $x_1, \dots, x_k$  sont tels que

$$x_1 = \dots = x_k = 0$$

alors on obtient la série de Taylor en 0.

Le cas où  $x_1 = \dots = x_k = 1$  conduit au procédé d'Euler.

## I - INTERPRÉTATION DU $\Delta^2$ D'AITKEN ET GÉNÉRALISATION

### A - INTERPRÉTATION DU $\Delta^2$ .

On sait que le  $\Delta^2$  est donné par :

$$\Delta_2^{(n)} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} = S_{n+1} - \frac{S_{n+2} - S_{n+1}}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

$$\Delta_2^{(n)} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n+1} - \Delta S_n} - S_{n+2} \frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1} - \Delta S_n}$$

si  $S_n = \sum_{i=0}^n c_i$  on a  $c_n = \Delta S_{n-1}$   $n \geq 1$

$$S_n = c \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) \text{ et } S = c \left( \frac{1}{1-x} \right) \text{ où } c(x^i) = c_i$$

$$\Delta_2^{(n)} = S_{n+1} \cdot \frac{c_{n+2}}{c_{n+2} - c_{n+1}} - S_{n+2} \cdot \frac{c_{n+1}}{c_{n+2} - c_{n+1}}$$

Si l'on pose (Voir chap. 4, I)

$$R_{n+3}(x) = \frac{c_{n+2}}{c_{n+2} - c_{n+1}} x^{n+2} - \frac{c_{n+1}}{c_{n+2} - c_{n+1}} x^{n+3}$$

et

$$P_{n+2}(x) = \frac{1 - R_{n+3}(x)}{1 - x}$$

On obtient :

$$C(P_{n+2}) = \Delta_2^{(n)}.$$

$\Delta_2^{(n)}$  apparaît donc comme le procédé qui consiste à remplacer la fonction génératrice  $\frac{1}{1-x}$  par son polynôme d'interpolation en 0 à l'ordre (n+2) et en  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$  à l'ordre 1.

Cas particulier.

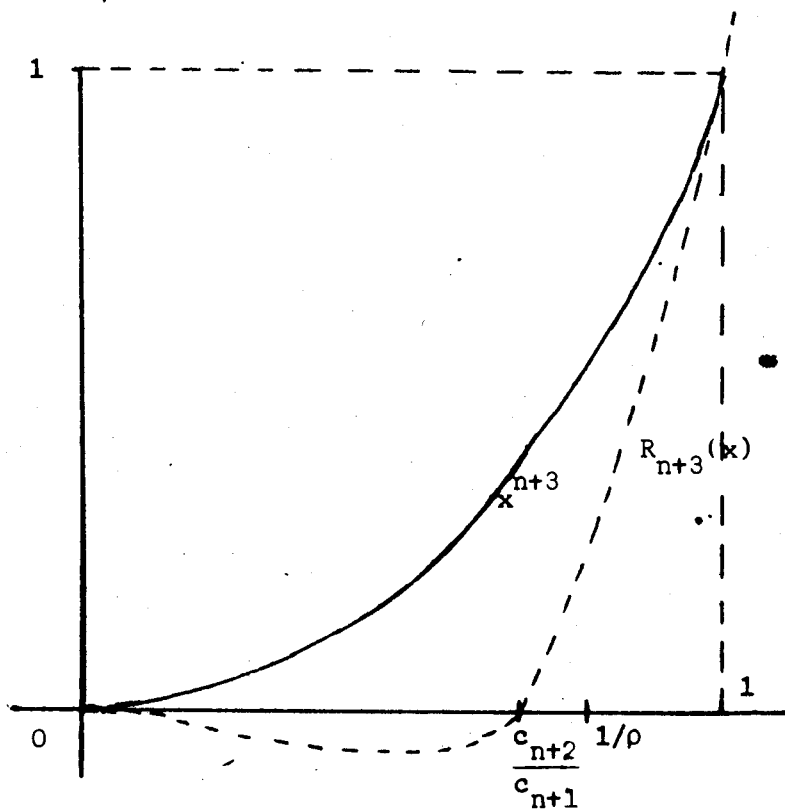
Si  $c_i = \int_0^{1/\rho} x^i d\alpha(x)$ ,  $\rho > 1$ , avec  $\alpha$  fonction bornée et non décroissante sur  $[0, \frac{1}{\rho}]$ , on a :

$$s = \int_0^{1/\rho} \frac{1}{1-x} d\alpha(x)$$

et

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$$

Dans ce cas, le  $\Delta^2$  consiste à interpoler  $\frac{1}{1-x}$  en 0 à l'ordre  $n+2$  et en  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$  (approximation de  $\frac{1}{\rho}$  inconnu à priori) à l'ordre 1



$$s - S_{n+2} = \int_0^{1/\rho} \frac{x^{n+3}}{1-x} d\alpha(x)$$

$$s - \Delta^2(S_n) = \int_0^{1/\rho} \frac{R_{n+3}(x)}{1-x} d\alpha(x)$$

Remarque.

Le polynôme  $R_{n+3}$  n'est pas unique car son expression dépend de la manipulation effectuée sur l'expression de  $\Delta_2^{(n)}$ .

On peut tenter d'améliorer le  $\Delta^2$  en interpolant  $\frac{1}{1-x}$  en 0 à l'ordre (n+1) et en  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$  à l'ordre 2.

On a :

$$R_{n+3}(x) = x^{n+1} \left[ \frac{c_{n+2} - c_{n+1} x}{c_{n+2} - c_{n+1}} \right]^2 ; R_{n+3}(1) = 1$$

$$\Rightarrow R_{n+3}(x) = \frac{x^{n+1} c_{n+2}^2 + c_{n+1}^2 x^{n+3} - 2 c_{n+1} c_{n+2} x^{n+2}}{(\Delta^2 S_n)^2}$$

$$\Rightarrow c(P_{n+2}) = S_n \frac{c_{n+2}^2}{(\Delta^2 S_n)^2} + \frac{c_{n+1}^2}{(\Delta^2 S_n)^2} S_{n+2} - \frac{2 c_{n+1} c_{n+2}}{(\Delta^2 S_n)^2} S_{n+1}$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+1} + \frac{1}{(\Delta^2 S_n)^2} \left[ -c_{n+2}^2 c_{n+1} + c_{n+1}^2 c_{n+2} \right]$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+1} + \frac{c_{n+1} c_{n+2}}{(\Delta^2 S_n)^2} \left[ c_{n+1} - c_{n+2} \right]$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+1} - \frac{\Delta S_n \Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} = \Delta_2^{(n)}$$

On peut énoncer le :

Théorème 1 :  $\Delta_2^{(n)} = c(P_{n+2})$  où  $P_{n+2}$  est indifféremment le polynôme d'interpolation de  $\frac{1}{1-x}$  en 0 à l'ordre  $(n+2)$  et en  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$  à l'ordre 1, ou en 0 à l'ordre  $(n+1)$  et en  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$  à l'ordre 2.

B - GENERALISATION DU  $\Delta^2$  D'AITKEN.

L'interpolation de la fonction génératrice en 0 à l'ordre  $n$  et en  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$  de l'ordre 3 va conduire à un nouvel algorithme noté  $\Delta_3^{(n)}$ , dont nous montrerons qu'il accélère l'ensemble des suites à convergence linéaire.

Si l'on pose

$$P_{n+2}(x) = \frac{1 - R_{n+3}(x)}{1-x}$$

avec

$$R_{n+3}(x) = x^n \frac{(c_{n+2} - c_{n+1} x)^2}{(\Delta^2 S_n)^3}, \quad R_{n+3}(1) = 1$$

$P_{n+2}$  interpole  $\frac{1}{1-x}$  en 0 (ordre  $n$ ) et en  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$  (ordre 3)

$$c(P_{n+2}) = \frac{-c_{n+1}^3}{(\Delta^2 S_n)^3} S_{n+2} + \frac{3 c_{n+2} c_{n+1}^2}{(\Delta^2 S_n)^2} S_{n+1} - \frac{3 c_{n+2}^2 c_{n+1}}{(\Delta^2 S_n)^3} S_n + \frac{c_{n+2}^3}{(\Delta^2 S_n)^3} S_{n-1}$$

Or

$$S_{n+2} = S_{n+1} + \Delta S_{n+1} = S_{n+1} + c_{n+2}$$

$$S_n = S_{n+1} - \Delta S_n = S_{n+1} - c_{n+1}$$

$$S_{n-1} = S_{n+1} - \Delta S_n - \Delta S_{n-1} = S_{n+1} - c_{n+1} - c_n$$

D'où :

$$c(P_{n+2}) = S_{n+1} + \frac{1}{(\Delta^2 S_n)^3} \left[ -c_{n+1}^3 c_{n+2} + 3c_{n+2}^2 c_{n+1}^2 - c_{n+2}^3 c_{n+1} - c_{n+2}^3 c_n \right]$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+1} + \frac{c_{n+2}}{(\Delta^2 S_n)^3} \left[ -c_{n+1} (c_{n+1} - c_{n+2})^2 + c_{n+1}^2 c_{n+2} - c_{n+2}^2 c_n \right]$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1} \Delta S_n}{(\Delta^2 S_n)} + \frac{c_{n+2}}{(\Delta^2 S_n)^3} \left[ c_{n+1}^2 - c_n c_{n+2} \right]$$

Posant  $c(P_{n+2}) = \Delta_3^{(n)}$  on obtient :

$$(1) \quad \Delta_3^{(n)} = \Delta_2^{(n)} + \frac{(\Delta S_{n+1})^2}{(\Delta^2 S_n)^3} \left[ (\Delta S_n)^2 - \Delta S_{n-1} \cdot \Delta S_{n+1} \right]$$

APPLICATION NUMERIQUE.

1°)  $\Delta_2^{(n)}$  et  $\Delta_3^{(n)}$  appliqués à  $\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots = 0,69314718056$ .

	$\Delta_2^{(n)}$		$\Delta_3^n$
$S_0 = 1$			$S_0$
$S_1 = 0,5$	→ 0,7		$S_1$
$S_2 = 0,833$	0,69047		$S_2$
$S_3 = 0,5833$	0,69444		$S_3$
$S_4 = 0,783$	0,69242		$S_4$
$S_5 = 0,6166$	0,69358		$S_5$
$S_6 = 0,7595$	0,69285		$S_6$
$S_7 = 0,6345$	0,69334		$S_7$
$S_8 = 0,7456$	0,69300		$S_8$
$S_9 = 0,6456$	→ 0,69325		$S_9$
$S_{10} = 0,7365$			$S_{10}$

$$|\Delta_2^{(8)} - \text{Log } 2| \sim 10^{-4}$$

$$|\Delta_3^{(7)} - \text{Log } 2| \sim 1,3 \cdot 10^{-5}$$

2°)  $\Delta_2^{(n)}$  et  $\Delta_2^{(n)}$  appliqués à  $S_n = \frac{1}{n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = 0$ .



On a

$$\Delta_2^{(n)} = \frac{1}{2(n+1)}$$

et

$$\Delta_3^{(n)} = \frac{1}{4(n+2)\left(1 + \frac{3}{n^2-4}\right)}$$

$$|\Delta_3^{(n)} - s| < \frac{1}{2} |\Delta_2^n - s|$$

On peut réarranger les termes de la relation (1) ci-dessus et on obtient une expression plus simple :

$$\Delta_3^{(n)} = s_{n+2} - (\Delta s_{n+1})^3 \frac{\Delta^3 s_{n-1}}{(\Delta^2 s_n)^3}$$

Preuve.

Dans l'expression de  $c(P_{n+2})$ , on exprime  $S_n$ ,  $S_{n-1}$  et  $S_{n+1}$  en fonction de  $S_{n+2}$ .

On obtient :

$$c(P_{n+2}) = s_{n+2} + \frac{1}{(\Delta^2 s_n)^3} [-3 c_{n+2}^2 c_{n+1}^2 + 3 c_{n+2}^3 c_{n+1} + 3 c_{n+2}^2 c_{n+1}^2 - c_{n+2}^4 - c_{n+2}^3 c_{n+1} - c_n c_{n+2}^3]$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+2} + \frac{c_{n+2}^3}{(\Delta^2 S_n)^3} [3c_{n+1} - c_{n+2} - c_{n+1} - c_n]$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+2} - \frac{c_{n+2}^3}{(\Delta^2 S_n)^3} [c_{n+2} - 2c_{n+1} + c_n]$$

$$c(P_{n+2}) = S_{n+2} - \frac{(\Delta S_{n+1})^3}{(\Delta^2 S_n)^3} [\Delta S_{n+1} - 2\Delta S_n + \Delta S_{n-1}]$$

□

PROPRIETES DU  $\Delta_3^{(n)}$ .

Propriété 1 : si  $S_n = S + \alpha\lambda^n$  alors  $\Delta_3^{(n)} = S$

$$S \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

$$S_n = S + \alpha\lambda^n$$

$$S_n - S = \alpha\lambda^n(\lambda - 1)$$

$$\Delta^2 S_n = \alpha(\lambda - 1)^2 \lambda^n$$

$$\Delta^3 S_n = \alpha(\lambda - 1)^3 \lambda^n$$

$$\Delta_3^{(n)} = S_{n+2} - \frac{(\Delta S_{n+1})^3}{(\Delta^2 S_n)^3} \Delta^3 S_{n-1} = S + \alpha\lambda^{n+2} - \frac{\alpha^3 \lambda^{3n+3} (\lambda-1)^6 \alpha \lambda^{n-1}}{\alpha^3 (\lambda-1)^6 \lambda^{3n}}$$

$$\Delta_3^{(n)} = S + \alpha\lambda^{n+2} - \alpha\lambda^{n+2} = S$$

□

Propriété 2 : Soit  $\Delta_3$  la transformation de suites

$$\Delta_3 : (S_n) \rightarrow \Delta_3^{(n)}$$

Alors  $\Delta_3$  accélère l'ensemble des suites à convergence linéaire.

Preuve.

On dit que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à convergence linéaire si  $\exists \lambda \neq 1$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \lambda$$

$$(\Delta_3^{(n)}) \text{ converge plus vite que } (S_n) \iff \frac{\Delta_3^{(n)} - S}{S_{n+2} - S} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \frac{(\Delta S_{n+1})^3 \Delta^3 S_{n-1}}{(\Delta^2 S_n)^3 (S_{n+2} - S)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\Delta S_{n+1})^3 \Delta^3 S_{n-1}}{(\Delta^2 S_n)^3 (S_{n+2} - S)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} \left(1 - \frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}}\right)^3} \cdot \frac{S_{n+2} - 3S_{n+1} + 3S_n - S_{n-1}}{S_{n+2} - S}$$

$$= \frac{1}{\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} \left(1 - \frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}}\right)^3} \cdot \left[ 1 - 3 \frac{S_{n+1} - S}{S_{n+2} - S} + \frac{S_n - S}{S_{n+1} - S} \cdot \frac{S_{n+1} - S}{S_{n+2} - S} - \frac{S_{n-1} - S}{S_n - S} \cdot \frac{S_n - S}{S_{n+1} - S} \cdot \frac{S_{n+1} - S}{S_{n+2} - S} \right]$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^3} \left(1 - \frac{3}{\rho} + \frac{3}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^3}\right) = 1 \text{ si } \rho \neq 1.$$

□

C - AUTRE GENERALISATION DU  $\Delta^2$  D'AITKEN.

L'interpolation de  $\frac{1}{1-x}$  en 0 à l'ordre (n+1) et en  $\frac{c_{n+k}}{c_{n+k-1}}$  à l'ordre k fournira un procédé noté  $\Delta_k^{(n)}$ .

$$R_{n+k+1}(x) = \frac{x^{n+1} (c_{n+k} - c_{n+k-1} x)^k}{(c_{n+k} - c_{n+k-1})^k}$$

$$R_{n+k+1}(x) = \frac{1}{(\Delta^2 S_{n+k-2})^k} \cdot x^{n+1} \left[ \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} x^p c_{n+k-1}^p c_{n+k}^{k-p} \right]$$

$$c_{n+k}^{(p)} = \frac{1}{(\Delta^2 S_{n+k-2})^k} \cdot \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} S_{n+p} (\Delta S_{n+k-2})^p (\Delta S_{n+k-1})^{k-p}$$

$$c_{n+k}^{(p)} = \Delta_k^{(n)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \frac{(\Delta S_{n+k-2})^p (\Delta S_{n+k-1})^{k-p}}{(\Delta^2 S_{n+k-2})^k} \cdot S_{n+p}$$

PROPRIETES DU  $\Delta_k^{(n)}$ .

1°) Si  $(S_n)$  est une suite à convergence linéaire alors  $\Delta_k$  accélère  $S_n$  (pour k fixé) où  $\Delta_k : (S_n) \rightarrow (\Delta_k^{(n)})$ .

Preuve.

$$\Delta_k \text{ accélère } (S_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_k^{(n)} - S}{S_{n+k} - S} = 0$$

$$\frac{\Delta_k^{(n)} - S}{S_n - S} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \frac{S_{n+p} - S (\Delta S_{n+k-2})^p (\Delta S_{n+k-1})^{k-p}}{S_{n+k} - S (\Delta^2 S_{n+k-2})^k}$$

$(S_n)$  est à convergence linéaire  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \lambda \neq 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n+p} - S}{S_{n+k} - S} = \frac{1}{\lambda^{k-p}}$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_k^{(n)} - S}{S_{n+k} - S} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \frac{1}{\lambda^{k-p}} \frac{(-\lambda)^{k-p}}{(1-\lambda)^k} = \frac{1}{(1-\lambda)^k} \cdot \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} = 0$$

□

2°) Si  $S_n = S + \alpha \lambda^n$  alors  $\Delta_k^{(n)} = S$ .

$$\frac{\Delta S_{n+k-1}}{\Delta S_{n+k-2}} = \frac{\alpha(\lambda^{n+k} - \lambda^{n+k-1})}{\alpha(\lambda^{n+k-1} - \lambda^{n+k-2})} = \lambda$$

$$\Delta_k^{(n)} - S = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \alpha \lambda^{n+p} \frac{\lambda^{k-p} (-1)^{k-p}}{(1-\lambda)^k}$$

$$\Delta_k^{(n)} - S = \alpha \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \frac{\lambda^{n+k}}{(1-\lambda)^k} = \frac{\alpha \lambda^{n+k}}{(1-\lambda)^k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} = 0$$

## II - INTERPRÉTATION DU PROCÉDÉ W DE LUBKIN.

Le procédé W de Lubkin est la transformation de suite donnée par :

$$T(S_n) = \frac{S_n (\Delta S_{n+1} \Delta^2 S_{n-1}) - S_{n+1} (\Delta S_{n-1} \Delta^2 S_n)}{(\Delta S_{n+1} \Delta^2 S_{n-1}) - (\Delta S_{n-1} \Delta^2 S_n)}$$

On a :

$$T(S_n) = c(P_{n+1})$$

où

$$P_{n+1}(x) = \frac{1 - R_{n+2}(x)}{1 - x}$$

avec

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}(\Delta S_{n+1} \Delta^2 S_{n-1}) - x^{n+2}(\Delta S_{n-1} \Delta^2 S_n)}{(\Delta S_{n+1} \Delta^2 S_{n-1}) - (\Delta S_{n-1} \Delta^2 S_n)}$$

$P_{n+1}$  interpole  $\frac{1}{1-x}$  en 0 à l'ordre  $n+1$  et en  $\xi_n = \frac{\Delta S_{n+1} \Delta^2 S_{n-1}}{\Delta S_{n-1} \Delta^2 S_n}$  à l'ordre 1.

Le procédé W de Lubkin consiste donc à interpoler la fonction  $\frac{1}{1-x}$  en 0 (ordre  $n+1$ ) et en  $\xi_n$  (ordre 1).

Remarque.

Si  $(\Delta S_n)$  est une suite totalement monotone non logarithmique alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{1}{\rho} \in ]0, 1[$$

Dans ce cas :

$$\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \frac{1 - \rho}{1 - \rho} = \frac{1}{\rho} \text{ et } \xi_n < \frac{1}{\rho}$$

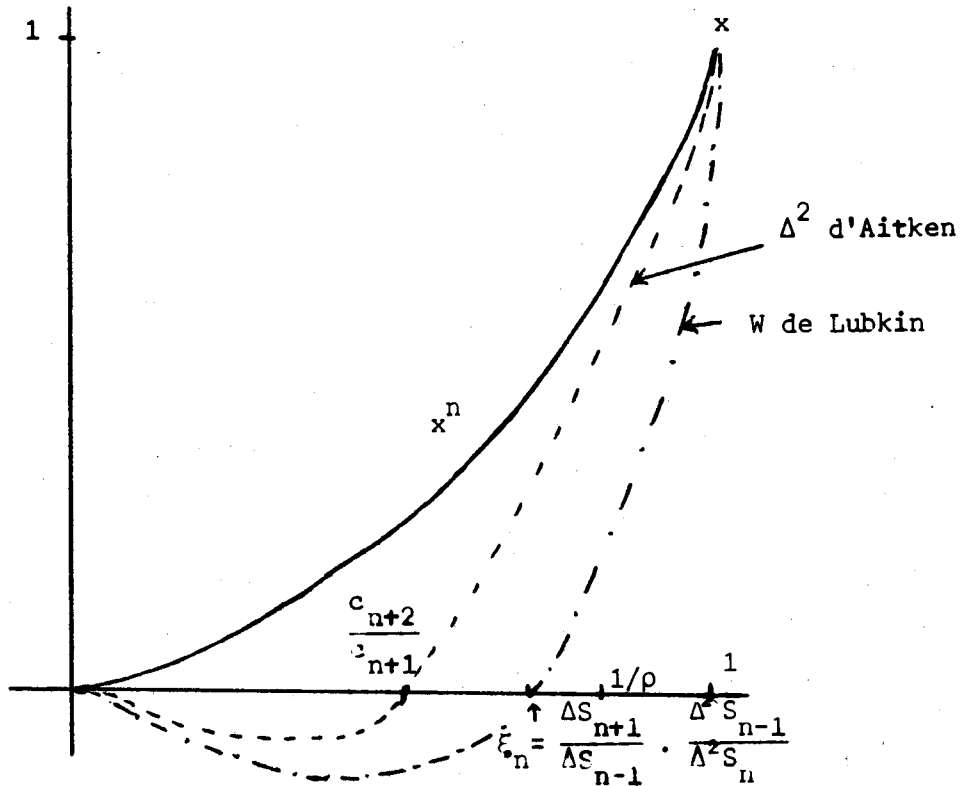
car

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n+2}} < \frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}}$$

Il n'est donc pas surprenant que le procédé W de Lubkin donne de meilleurs résultats que le  $\Delta^2$  d'Aitken dans le cas de suites totalement monotones, car ...

la racine  $\xi_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n-1}} \cdot \frac{\Delta^2 S_{n-1}}{\Delta^2 S_n}$  est plus proche de la limite  $\frac{1}{\rho}$  que la racine

$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$  dans le cas du  $\Delta^2$ .



### III - POLYNÔMES DE BERNSTEIN [29, p. 101]

L'idée de ce paragraphe est de substituer dans la relation  $f(t) = c \left( \frac{1}{1-xt} \right)$  les polynômes de Bernstein à la fonction génératrice  $\frac{1}{1-xt}$ .

Nous traiterons uniquement le cas particulier où  $c$  est donné par :

$$c(x^i) = c_i = \int_0^1 x^i d\alpha(x)$$

avec  $\alpha$  fonction bornée sur  $[0, 1]$  et non décroissante.

On a :

$$f(t) = \int_0^1 \frac{d\alpha(x)}{1-xt}, \quad t^{-1} \notin [0, 1]$$

La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des polynômes de Bernstein de la fonction  $\frac{1}{1-xt}$  est définie par :

$$\left| \begin{array}{l} B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{1 - \frac{k}{n}t} x^k (1-x)^{n-k} \quad n \geq 1 \\ B_0(x) = 1 \end{array} \right.$$

La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $\frac{1}{1-xt}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on a le théorème de convergence :

Théorème 2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(B_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 B_n(x) d\alpha(x) = f(t)$$

pour tout  $t$  réel fixé,  $t^{-1} \notin [0, 1]$ .

Le calcul effectif de  $c(B_n(x))$  est facilité par la formule :

$$c(B_n(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} \Delta^{n-k}(c_k)}{1 - \frac{k}{n}t}$$

En effet :

$$c(B_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{1 - \frac{k}{n}t} c_k c((x-1)^{n-k}) \cdot (-1)^{n-k}$$

et

$$c((x-1)^{n-k}) = \Delta^{n-k} c_k$$

avec

$$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$$

$$\Delta^p c_k = \Delta(\Delta^{p-1} c_k)$$



Remarquons que  $c(B_n(x))$  est le rapport de deux polynômes de degré  $n$  en  $t$ , dont les pôles sont en  $\frac{n}{k}$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

Exemple.

$$B_0(x) = 1$$

$$c(B_0) = c_0$$

$$B_1(x) = 1 + \frac{xt}{1-t}$$

$$c(B_1) = c_0 + \frac{c_1 t}{1-t}$$

$$B_2(x) = (1-x)^2 + \frac{4}{2-t} x(1-x) + \frac{x^2}{1-t}; \quad c(B_2) = (c_2 - 2c_1 + c_0) + \frac{4(c_1 - c_2)}{2-t} + \frac{c_2}{1-t}$$

Théorème 3 :

$$c(B_n) - f(t) = \theta(t^2)$$

Preuve.

Immédiate car  $B_n(x)$  interpole la fonction  $\frac{1}{1-xt}$  aux deux points 0 et 1.

□

Il convient de remarquer que  $B_n(x)$  n'interpolant pas  $\frac{1}{1-xt}$  en des points tous situés dans l'intervalle  $[0, 1]$ , on ne peut pas espérer avoir une convergence très rapide de la suite  $c(B_n)$  vers  $f(t)$ .

Cette convergence peu rapide provient de ce que les polynômes de Bernstein convergent uniformément vers toute fonction continue, mais assez lentement.

APPLICATION NUMERIQUE.

$$\text{Si } f(t) = \int_0^1 \frac{1}{1-xt} dx = -\frac{1}{t} \text{Log}(1-t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} + \dots$$

$$f(-1) = \text{Log } 2 = 0,69314718 \dots$$

Tableau des  $\Delta^{n-k} c_k$ .

$c_0 = 1$

- 1/2

$c_1 = 1/2 \quad 1/3$

- 1/6      - 1/4

$c_2 \quad 1/3 \quad 1/12 \quad 1/5$

- 1/12      - 1/20

$c_3 = 1/4 \quad 1/30$

- 1/20

$c_4 = 1/5$

$c(B_4) = \frac{1/5}{1-t} + \frac{4/20}{1-3t/4} + \frac{6/30}{1-2t/4} + \frac{4/20}{1-t/4} + \frac{1}{5}$

en  $t = -1$  on a :

$c(B_4) = 0,707619$

$t=-1$

$t=-2$

n	$c(B_n)$
1	0,75
2	0,722
3	0,712
4	0,707
5	0,704
10	0,6988
20	0,6960
30	0,6951

n	$c(B_n)$
1	0,66
2	0,61
3	0,5904
10	0,5613
30	0,5513

$\frac{\text{Log } 3}{2} = 0,549306 \dots$

pour  $t = -10$   $c(B_{30}) = 0,2509$  et  $\frac{\text{Log } 11}{10} = 0,2397 \dots$

Etablissons maintenant une borne d'erreur.

Théorème 4 : Si  $f(t) = \int_0^1 \frac{1}{1-xt} da(x)$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n |c(B_n) - f(t)| \leq \frac{t(t + \sqrt{t^2 - t + 1})}{(2 - t - \sqrt{t^2 - t + 1})^3} \cdot M$$

où

$$M = \int_0^1 da(x).$$

Preuve.

Les polynômes de Bernstein vérifient la formule d'erreur suivante :



$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [B_n(F(x)) - F(x)] = \frac{-x(1-x)}{2} F''(x),$$

si  $F''(x)$  existe.

Appliquons cette relation à  $F(x) = \frac{1}{1-xt}$ , et on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (B_n(\frac{1}{1-xt}, x) - \frac{1}{1-xt}) = -\frac{x(1-x)}{2} \cdot \frac{2t^2}{(1-xt)^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n (B_n(x) - \frac{1}{1-xt}) \leq t^2 \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x(1-x)}{(1-xt)^3} \right|$$

Posons

$$g(x) = \frac{x(1-x)}{(1-xt)^3}.$$

On a  $|g(x)| \leq |g(x_0)|$  avec  $x_0$  solution de  $x^2 + 2(1-t)x - 1 = 0$  et  $x_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| n(B_n(x) - \frac{1}{1-xt}) \right| \leq \frac{|t^2 + t\sqrt{t^2-t+1}|}{(2-t-\sqrt{t^2-t+1})^3}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n|c(B_n) - f(t)| \leq \frac{|t|(t + \sqrt{t^2-t+1})}{(2-t-\sqrt{t^2-t+1})^3} \cdot \int_0^1 d\alpha(x).$$

□

On obtiendrait une meilleure borne d'erreur si l'on connaissait une plus fine majoration de la quantité :

$$\left| B_n\left(\frac{1}{1-xt}, x\right) - \frac{1}{1-xt} \right|$$

## CONCLUSION.

Les polynômes de Bernstein interpolant  $\frac{1}{1-xt}$  en des points n'appartenant pas tous à  $[0, 1]$ , ne sont donc pas d'une grande utilité pour la sommation des séries  $\sum c_i t^i$ , avec  $c_i$  totalement monotone.

## IV - INTERPOLATION EN DES POINTS ÉQUIDISTANTS.

Au lieu d'interpoler la fonction génératrice  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  aux racines de polynômes orthogonaux sur un certain intervalle  $[a, b]$ , nous allons l'interpoler par un polynôme de degré  $n$  en des points équidistants de  $[a, b]$  et montrer que dans ce cas, on obtient encore une accélération des sommes partielles de la série  $\sum c_i t^i$  avec une borne d'erreur un peu moins favorable que précédemment.

On a :

$$f(t) = \sum c_i t^i = c\left(\frac{1}{1-xt}\right)$$

avec

$$c_i = c(x^i) = \int_a^b \frac{d\alpha(x)}{1-xt}$$

avec  $\alpha$  bornée et non décroissante.

A l'aide d'un changement de variable, on peut se ramener au cas où  $[a, b] = [-1, 1]$ .

Dans  $f(t) = \int_{-1}^1 \frac{d\beta(X)}{1-Xt}$ , remplaçons  $X \rightarrow \frac{1}{1-Xt}$  par

$$P_n(X) = \frac{1 - \frac{R_{n+1}(X)}{R_{n+1}(t^{-1})}}{1 - Xt}$$

où

$$R_{n+1}(X) = \prod_{i=0}^n (X - \xi_i),$$

$\xi_i$  points équidistants de l'intervalle  $[-1, 1]$ .

On obtient :

$$e_n = f(t) - c(P_n) = \frac{1}{R_{n+1}(t^{-1})} \int_{-1}^1 \frac{d\beta(X) \cdot R_{n+1}(X)}{1-Xt}$$

et donc

$$\overline{\lim}_n |e_n|^{1/n} \leq \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(t^{-1})|} \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [\sup_{X \in [-1, 1]} R_{n+1}(X)]^{1/n}$$

Il convient donc avant de trouver une borne d'erreur, de minorer  $R_{n+1}(t^{-1})$  puis de majorer  $R_{n+1}(X)$ ,  $X \in [-1, 1]$ .

Remarque.

Pour la commodité de la démonstration, on va supposer  $n$  pair.

$$n = 2m, m \in \mathbb{N}.$$

Lemme 1 :  $\forall X \in [-1, 1]$  on a  $|R_{n+1}(X)| \leq \frac{(n+1)!}{m^{n+1}}$

et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \sup_{-1 \leq X \leq 1} |R_{n+1}(X)| \right]^{1/n} \leq \frac{2}{\rho}$$

Preuve.

$$R_{n+1}(X) = \prod_{i=-m}^{i=+m} (X - \xi_i) \text{ avec } \xi_i = \frac{i}{m}.$$

Soit  $X \in [-1, 1]$  ; alors  $X \in [\xi_{p-1}, \xi_p]$  avec  $-m+1 \leq p \leq m$

$$|R_{n+1}(X)| = \prod_{i=-m}^m |X - \xi_i|$$

Nous allons majorer chacune des distances  $|X - \xi_i|$

$$|R_{n+1}(X)| \leq \prod_{i=-m}^{p-1} |\xi_p - \xi_i| \times \prod_{i=p}^m |\xi_{p-1} - \xi_i|$$

$$\leq \prod_{i=-m}^{p-1} \left| \frac{p}{m} - \frac{i}{m} \right| \times \prod_{i=p}^m \left| \frac{p-1}{m} - \frac{i}{m} \right|$$

$$\leq \left| \frac{p}{m} + \frac{m}{n} \right| \cdot \left| \frac{p}{m} - \frac{-m+1}{m} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{p}{m} - \frac{p-1}{m} \right| \cdot \left| \frac{p-1}{m} - \frac{p}{m} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{p-1}{m} - \frac{n}{m} \right|$$

$$\leq \frac{|p+m| \cdot |p+m-1| \cdot \dots \cdot |1| \cdot |1| \cdot |2| \cdot \dots \cdot |-p+1+m|}{m^{m+p} \cdot m^{m-p+1}}$$

$$|R_{n+1}(X)| \leq \frac{(m+p)! (m+1-p)!}{m^{2m+1}} \quad \forall p \in [-m+1, m] \cap \mathbb{Z}.$$

On a

$$\binom{2m+1}{m+p} = \frac{(2m+1)!}{(m+p)! (m+1-p)!} \geq 1 \quad \forall p \in [-m+1, m] \cap \mathbb{Z}$$

d'où

$$|R_{n+1}(X)| \leq \frac{(2m+1)!}{\binom{2m+1}{m+p} m^{2m+1}} \leq \frac{(n+1)!}{m^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sup_{-1 \leq X \leq 1} R_{n+1}(X) \right|^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^{1/n}}{m \frac{n+1}{n}}$$

De la formule de Stirling on tire :

$$\frac{(n+1)!}{m^{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi(n+1)} (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{m^{n+1}}$$

et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(n+1)!}{m^{n+1}} \right]^{1/n} = 2 e^{-1} = \frac{2}{e}$$

□

Lemma 2 :  $\forall X \in \mathbb{R} - [-1, 1]$  on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(X)|^{1/n} \geq \frac{(X+1)^{\frac{X+1}{2}}}{(X-1)^{\frac{X-1}{2}}} \cdot \frac{1}{e}$$

Preuve.

$$R_{n+1}(X) = \prod_{i=-m}^m |X - \xi_i| = \prod_{i=-m}^m \left| X - \frac{i}{m} \right|$$

$$= \frac{1}{m^{2n+1}} \cdot |nX + n| \cdot |nX + (n-1)| \dots |nX| \dots |nX - n|$$

Soit  $j$  l'entier tel que  $j/m \leq X < (j+1)/m$

Si  $X > 1$  alors  $j \geq m+1$

Si  $X < -1$  alors  $j \leq -m-1$

$$R_{n+1}(X) \geq \prod_{i=-m}^m \left| \frac{j}{m} - \frac{i}{m} \right| = \frac{1}{m^{2n+1}} \prod_{i=-m}^m |j-i|$$

$$R_{n+1}(X) \geq \frac{1}{m^{2n+1}} |j+n| \dots |j-n| = \frac{1}{m^{2n+1}} \frac{(j+n)!}{(j-n-1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(X)|^{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{m^{2n+1}} \times \frac{\sqrt{2\pi} (j+m)^{j+m+1/2} e^{-(j+m)}}{\sqrt{2\pi} (j-m-1)^{j-n-1/2} e^{-(j-m-1)}} \right]^{1/n}$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(mX+m-1)^{mX-1/2+m} e^{mX-m-2}}{m^{2n+1} (mX-m-1)^{mX-m-1/2} e^{mX+m}} \right]^{1/n}$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{mX+m-1}{mX-m-1} \right)^{mX-1/2} \cdot \frac{(mX+m-1)^m (mX-m-1)^{+m} e^{-2m+2}}{m^{2n+1}} \right]^{1/n}$$

$$\geq \left( \frac{X+1}{X-1} \right)^{X/2} \cdot (X+1) \cdot (X-1) \cdot e^{-1}$$



$$\geq \frac{(X+1)^{\frac{X+1}{2}}}{(X-1)^{\frac{X-1}{2}}} \cdot \frac{1}{8}$$

Exemple.

Si  $X = 1,2$   $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(X)|^{1/n} \geq 1,02865.$

Théorème 5 : Si l'on interpole  $X + \frac{1}{1-Xt}$  sur  $[-1, 1]$  dans  $f(t) = \int_{-1}^1 \frac{d\beta(X)}{1-Xt}$ ,

$\beta$  bornée, par un polynôme de degré  $n$  en  $X$  en des points équidistants sur  $[-1,1]$  on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n)|^{1/n} \leq 2 \sqrt{\frac{(t^{-1}-1)^{t^{-1}-1}}{(t^{-1}+1)^{t^{-1}+1}}}$$

pour  $n$  pair.

Preuve.

$$P_n(X) = \frac{1 - \frac{R_{n+1}(X)}{R_{n+1}(t^{-1})}}{1 - Xt}, \text{ avec } R_n \text{ défini comme précédemment ; } P_n(X)$$

interpole  $\frac{1}{1-Xt}$  en les racines de  $R_n$

$$c(P_n) - f(t) = \frac{1}{R_{n+1}(t^{-1})} \int_{-1}^1 \frac{R_{n+1}(X) d\beta(X)}{1 - Xt}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n)|^{1/n} \leq \frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\sup_{-1 \leq X \leq 1} R_{n+1}(X)|^{1/n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(t^{-1})|^{1/n}}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n)|^{1/n} \leq \frac{2/e}{\frac{\frac{1}{e}(t^{-1}+1)^{\frac{t^{-1}+1}{2}}}{(t^{-1}-1)^{\frac{t^{-1}-1}{2}}}} = 2 \sqrt{\frac{(t^{-1}-1)^{t^{-1}-1}}{(t^{-1}+1)^{t^{-1}+1}}}$$

□

Corollaire 1 : En remplaçant  $[-1, 1]$  par l'intervalle  $[a, b]$  on obtient :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n)|^{1/n} \leq 2 \frac{|A-1|^{(A-1)/2}}{|A+1|^{(A+1)/2}}$$

pour  $n$  pair, où  $A = \tau(t^{-1})$ .

Corollaire 2 : Soit  $f(t) = \int_0^{1/R} \frac{d\alpha(x)}{1-xt}$  avec  $\alpha$  bornée et non décroissante sur  $[0, 1/R]$  et  $P_n(x)$  le polynôme d'interpolation de  $\frac{1}{1-xt}$  en  $(n+1)$  points équidistants de  $[0, 1/R]$ .

On a :

$$c(P_n) - f(t) = O(f_n(t) - f(t))$$

pour  $n$  pair avec

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \text{ et } c_i = \int_0^{1/R} x^i d\alpha(x)$$

Preuve.

$R$  étant le rayon de convergence de la série  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(t) - f(t)|^{1/n} = \left| \frac{t}{R} \right|$$

Du corollaire 1 on tire :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n)|^{1/n} \leq 2 \frac{|A-1|^{\frac{A-1}{2}}}{|A+1|^{\frac{A+1}{2}}}$$

avec  $A = \frac{2R}{t} - 1$

$$\frac{|A-1| \frac{A-1}{2}}{|A+1| \frac{A+1}{2}} = \frac{\left| \frac{R}{t} - 1 \right| \frac{\frac{R}{t} - 1}{2}}{\left| \frac{R}{t} \right| \frac{\frac{R}{t} + 1}{2}} = \left| 1 - \frac{t}{R} \right| \cdot \left| \frac{t}{R} \right|$$

D'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(t) - c(P_n)|^{1/n} \leq 2 \left| \frac{t}{R} \right| \cdot \left| 1 - \frac{t}{R} \right|^{\frac{R}{t} - 1}$$

Cette borne d'erreur étant toujours strictement inférieure à  $\frac{t}{R}$  on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(t) - c(P_n)}{f(t) - f_n(t)} \right|^{1/n} = 0$$

**APPLICATION NUMERIQUE.**

Pour  $f(t) = \frac{\text{Log}(1+t)}{t}$  en  $t = 1$

$[a, b] = [-1, 0] \quad A = -\frac{2}{t} - 1 = -3.$

$2 \frac{|A-1| \frac{A-1}{2}}{|A+1| \frac{A+1}{2}} = \frac{1}{4} = 0,25$  ce qui comparé à  $3 - \sqrt{8} = 0,172$  du procédé consistant

à remplacer  $\frac{1}{1-xt}$  par son polynôme de meilleure approximation est un peu moins favorable mais plus simple..

Remarque.

Si  $n$  est impair,  $n = 2m+1$ , tous les résultats ci-dessus sont encore vrais (il suffit de remplacer dans la démonstration du lemme 1 les points d'interpolation  $\xi_i = \frac{i}{m} \quad i = m, \dots, 0$  par  $\xi'_i = \frac{2i-1}{2m+1} \quad i = -m, \dots, m+1$ ).

V - APPROXIMATION DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE SUR  $D(0, 1)$ .

Lemme 1 : Le polynôme de meilleure approximation de la fonction

$z \rightarrow \frac{1}{1-zt}$  sur  $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$  où  $t \in \mathbb{C}$  et

$|t| < 1$  est donné par :

$$P_n(z) = \frac{1}{1-zt} - C z^n \frac{\frac{z}{t} - 1}{1-zt} = \frac{1 - Cz^n(z/\bar{t} - 1)}{1 - zt}$$

où

$$C = \frac{t^n}{\frac{1}{|t|^2} - 1}$$

Preuve.

Dans [16, p. 32 et 33].

Théorème 6 : Soit la série  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ ,  $t \in \mathbb{C}$ ,  $|t| < 1$ .

$P_n$  défini comme ci-dessus.

On a :

$$c(P_n) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + \frac{c_n t^n}{1 - |t|^2}$$

Preuve.

$$P_n(z) = \frac{1 - \frac{t^n}{|t|^2} z^n (\frac{z}{t} - 1)}{\frac{1}{|t|^2} - 1} = \frac{1 - \frac{t^n}{|t|^2} z^{n+1} + t^n z^n}{(\frac{1}{|t|^2} - 1)(1 - zt)}$$

$$P_n(z) = \frac{-1}{\frac{1}{|t|^2} - 1} \cdot \frac{1 - z^n t^n}{1 - zt} + \frac{\frac{1}{|t|^2}}{\frac{1}{|t|^2} - 1} \cdot \frac{1 - z^{n+1} t^{n+1}}{1 - zt}$$

$$P_n(z) = \frac{-|t|^2}{1 - |t|^2} (1 + zt + \dots + z^{n-1} t^{n-1}) + \frac{1}{1 - |t|^2} (1 + zt + \dots + z^n t^n)$$

$$P_n(z) = 1 + zt + \dots + z^{n-1} t^{n-1} + \frac{z^n t^n}{1 - |t|^2}$$

Par suite,  $c$  étant définie par  $c(z^i) = c_i$  on a :

$$c(P_n) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + \frac{c_n t^n}{1 - |t|^2}$$

## VI - RÉSULTAT NÉGATIF POUR TM.LOG.

L'accélération des suites totalement monotones logarithmiques (TM.LOG) est à l'heure actuelle encore irrésolue.

On pense, notamment, qu'il existe aucun algorithme capable d'accélérer l'ensemble de toutes ces suites.

Pendant, utilisant les méthodes précédemment décrites nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 7 : *Il n'existe aucun procédé de sommation capable d'accélérer l'ensemble des suites totalement monotones logarithmiques.*

Lemme : *si  $(S_n) \in \text{TM.LOG}$  alors  $(-\Delta S_n) \in \text{TM.LOG}$*

Preuve.

Rappelons que  $(S_n)$  est dite T.M si :

$$(-1)^k \Delta^k S_n \geq 0 \quad \forall k.$$

et que  $(S_n) \in \text{LOG}$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = 1$

On a :

$$(S_n) \in \text{TM} \Rightarrow (-\Delta S_n) \in \text{TM} \quad (\text{voir chap. 1})$$

Il reste à prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-\Delta S_{n+1}}{-\Delta S_n} \right) = 1$$

$$(-\Delta S_n) \in \text{TM} \Rightarrow \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \leq \dots \leq 1 \quad [3]$$

La suite  $\left( \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  admet donc une limite a inférieure à 1.

Si a était différent de 1 alors on aurait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \rightarrow a \quad [8, \text{p. 218}]$$

ce qui conduirait alors  $(S_n) \in \text{LOG}$ .

□

#### PREUVE DU THEOREME 4.

1ère étape : représentation des suites de TM.LOG.

\* Si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{TM})$  alors  $(-1)^k \Delta^k S_n \geq 0 \quad \forall k, \forall n$ .

On a dans ce cas :

$$(-\Delta S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{TM}.$$

Posons  $c_i = \Delta S_{i-1}$ .

On a :

$$(-c_i)_{i \geq 1} \in \text{TM}, c_0 = S_0.$$

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n c_i ; S_n \rightarrow S \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{Soit } f(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i.$$

On a :

$$f(1) = S.$$

$$(-c_i) \in \text{TM} \iff -c_i = \int_0^1 x^i d\alpha(x),$$

avec  $\alpha$  non décroissante bornée.

\* Si  $(S_n) \in \text{TM.LOG}$  alors  $(-\Delta S_n) \in \text{TM.LOG}$  (lemme).

De plus, si il existait un réel  $b \in ]0, 1[$  tel que :

$$-c_i = \int_0^b x^i d\alpha(x)$$

on aurait :

$$-c_i = \int_0^1 b^i x^i d\alpha(bX) = b^i \int_0^1 x^i d\alpha(bX)$$

$$-c_i = b^i d_i \text{ avec } (d_i) \in \text{TM}$$

d'où

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{-c_{i+1}}{-c_i} = b \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_{i+1}}{d_i} \leq b < 1$$

Il y aurait alors contradiction avec le fait que  $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini.

Par suite si  $S_n \in \text{TM.LOG}$  alors :

$$(-\Delta S_n) = \int_0^1 x^n d\alpha(x), n \geq 1$$

avec 1 = borne supérieure du support de  $\alpha$ .

2ème étape :

$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  est une série de Stieltjes.

$$f(t) = \int_0^1 \frac{d\alpha(x)}{1-xt} \Rightarrow f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1-x} d\alpha(x)$$

Cette dernière intégrale est convergente car  $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  et  $(S_n)$  étant TM, elle est convergente :

$$S_n = \int_0^1 \sum_{i=0}^n x^i d\alpha(x) = \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} d\alpha(x).$$

D'où

$$|S_n - f(1)| = |S_n - S| = \left| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x} d\alpha(x) \right|$$

3ème étape :

Soit  $(a_{ij}^j)_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N}}}$  la matrice d'un procédé de sommation avec  $\sum_{i=0}^j a_{ij}^j = 1$ .



$$\begin{bmatrix} a_0^0 & 0 & \text{-----} & & \\ a_0^1 & a_1^1 & \text{-----} & & \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & 0 & \text{----} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^0 S_0 \\ a_0^1 S_0 + a_1^1 S_1 \\ a_0^2 S_0 + a_1^2 S_1 + a_2^2 S_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Voir Wimp})$$

Soit  $T(S_n) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} S_i$  et  $C_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \lambda^i$  le polynôme caractéristique de la matrice de Toeplits  $(a_i^j)_{i,j}$ .

Posons  $P_{n-1}(x) = \frac{1 - R_n(x)}{1 - x}$  où  $R_n$  est un polynôme de degré  $n$  en  $x$  vérifiant

$$R_n(1) = 1.$$

$P_{n-1}$  interpole  $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$  aux racines de  $R_n$ .

$\Rightarrow c(P_{n-1}) = (n-1/n)_f(1)$  approximant de type Padé de  $f$ .

$$\text{et } R_n = C_n.$$

Donc l'existence d'un procédé de sommation se réduit à l'existence d'un polynôme de degré  $n$  en  $x$  et l'erreur commise est :

$$f(1) - c(P_{n-1}) = \int_0^1 \frac{1}{1-x} d\alpha(x) - \int_0^1 \frac{1-R_n(x)}{1-x} d\alpha(x)$$

$$f(1) - c(P_{n-1}) = \int_0^1 \frac{R_n(x)}{1-x} d\alpha(x)$$

4ème étape :

Pour qu'il y ait accélération il faut et il suffit que :

$$[f(1) - \alpha(P_{n-1})] = o [S - S_{n-1}]$$

et ceci quelle que soit la suite  $(S_n)$  totalement monotone logarithmique

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{R_n(x)}{1-x} d\alpha(x) = o \left[ \int_0^1 \frac{x^n}{1-x} d\alpha(x) \right] \quad \forall \alpha.$$

$$\Leftrightarrow R_n(x) = o(x^n) \quad \forall x < 1 \text{ (et } R_n(1) = 1).$$

En effet si il existait  $x_0 \in ]0, 1[$  tel que

$$\frac{R_n(x_0)}{x_0^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \neq 0$$

Il suffit dans ce cas de "charger" le point  $x_0$  :  $d\alpha = d\delta_{x_0}$  et

$$\int_0^1 \frac{R_n(x)}{1-x} d\alpha(x) = \frac{R_n(x_0)}{1-x_0} ; \quad \int_0^1 \frac{x^n}{1-x} d\alpha(x) = \frac{x_0^n}{1-x_0}$$

et par conséquent on n'aurait plus :

$$\int_0^1 \frac{R_n(x)}{1-x} d\alpha(x) = o \left[ \int_0^1 \frac{x^n}{1-x} d\alpha(x) \right]$$

5ème étape :

Il n'existe aucun polynôme  $R_n$  de degré  $n$  en  $x$  vérifiant les deux conditions :

$$R_n(x) = o(x^n) \quad \forall x \in ]0, 1[$$

et

$$R_n(1) = 1.$$

En effet :

$$\text{soit } R_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} x^i = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} x + \dots + a_n^{(n)} x^n$$

$$\text{et } \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} = 1$$

$$\begin{array}{l}
 R_n(x) = o(x^n) \\
 R_n(1) = 1
 \end{array}
 \left| \Leftrightarrow \begin{array}{l}
 \frac{R_n(x)}{x^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in ]0, 1[ \\
 \text{et } \frac{R_n(x)}{x^n} \rightarrow 1 \quad \text{si } x = 1.
 \end{array}
 \right.$$

Supposons donc que  $R_n(x)$  vérifie  $\frac{R_n(x)}{x^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  et montrons que dans ce cas,  $R_n(1)$  ne peut pas être égal à 1.

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{a_0^{(n)}}{x^n} + \frac{a_1^{(n)}}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(n)}}{x} + a_n^{(n)}$$

$$\text{Soit } \tilde{R}_n(X) = X^n R_n\left(\frac{1}{X}\right) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X + \dots + a_n^{(n)} X^n$$

$$\tilde{R}_n(X) \rightarrow 0 \quad \forall X > 1.$$

$$* \forall X > 1, \forall \epsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}X + \dots + a_n^{(n)}X^n| < \epsilon$$

Faisons successivement  $X = X_0, X = X_1, \dots, X = X_n$  avec  $X_0 < X_1 < \dots < X_n$ .

On a alors :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_0, n > N_0 \Rightarrow |a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X_0 + \dots + a_n^{(n)} X_0^n| < \epsilon$$

$$\exists N_1, n > N_1 \Rightarrow |a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X_1 + \dots + a_n^{(n)} X_1^n| < \epsilon$$

$$\exists N_n, n > N_n \Rightarrow |a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X_n + \dots + a_n^{(n)} X_n^n| < \epsilon$$

Donc

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = \sup(N_0, \dots, N_n)$$

$$n > N \Rightarrow |a_0^{(n)} + \dots + a_n^{(n)} X_0^n| < \epsilon$$

$$n > N \Rightarrow |a_0^{(n)} + \dots + a_n^{(n)} X_n^n| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists N, n > N \Rightarrow a_0^{(n)} + \dots + a_n^{(n)} X_0^n = \epsilon_0$$

$$\epsilon_i < \epsilon, \forall i = 0, n$$

$$a_0^{(n)} + \dots + a_n^{(n)} X_n^n = \epsilon_n$$

On résoud le système en  $a_i^{(n)}, i = 0, n$ .

et on a

$$a_i^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & X_0 & \dots & \epsilon_0 & \dots & X_0^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_1 & \dots & \epsilon_1 & \dots & X_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & \epsilon_n & \dots & X_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & X_0 & \dots & X_0^i & \dots & X_0^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_1 & \dots & X_1^i & \dots & X_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^i & \dots & X_n^n \end{vmatrix}} = \frac{\epsilon_0 D_0 + \dots + \epsilon_n D_n}{X_0^i D_0 + \dots + X_n^i D_n}$$

avec

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^{i-1} & \dots & X_1^{i+1} & \dots & X_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_2 & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^{i-1} & \dots & X_n^{i+1} & \dots & X_n^n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & X_0 & \dots & X_0^{i-1} & \dots & X_0^{i+1} & \dots & X_0^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{n-1} & \dots & X_{n-1}^{i-1} & \dots & X_{n-1}^{i+1} & \dots & X_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

Soit  $X > X_n$   $a_i^{(n)} X^i = \frac{\epsilon_0 D_0 + \dots + \epsilon_n D_n}{X_0^i D_0 + \dots + (\frac{X_n}{X})^i D_n} \Rightarrow a_i^{(n)} X^i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \forall i = 0, n$

et donc  $a_i^{(n)} = o(X^{-i})$ ,  $\forall i = 0, n$ .

Il reste à prouver que  $\sum_{i=0}^n a_i^{(n)}$  ne peut pas être égal à 1, ni même tendre vers 1.

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \right| = \left| \sum_{i=0}^n (a_i^{(n)} x^i) x^{-i} \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i^{(n)} x^i| x^{-i} \leq \sum_{i=0}^n x^{-i} = \frac{x^{-n-1} - 1}{x^{-1} - 1} \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \right| \leq \frac{-1}{x^{-1} - 1} = \frac{x}{x-1} ; \quad \forall x > 1$$

Par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \right| = 0$  et ne peut donc pas être égale à 1.

□

## CHAPITRE VI

APPROXIMANTS RATIONNELS DE  $e^{-x}$  SUR  $[0, +\infty[$

# I - DÉVELOPPEMENT DE $e^x$ EN FONCTION DES $T_n$ .

## INTRODUCTION

Cody, Meinardus et Varga [7] ont montré que la fraction constituée par l'inverse des sommes partielles de l'exponentielle était telle que :

$$\left| \frac{1}{s_n(x)} - e^{-x} \right|_{[0, +\infty[} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On peut donc penser qu'en développant l'exponentielle en fonction de polynômes autres que  $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , on aura la même borne d'erreur.

C'est ce qui va être traité avec les polynômes de Chebyshev.

Le développement de  $e^{qx}$  en fonction des  $T_n$  est :

$$(1) \quad e^{qx} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k(q) T_k(x) = 2 \left[ \frac{I_0(q)}{2} T_0(x) + I_1(q) T_1(x) + \dots \right]$$

où  $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$  et

$$I_m(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{m+2k}}{2^{m+2k} (m+k)! k!} \quad (\text{fonction de Bessel})$$

Appliquant (1) avec  $q=1$ , on trouve :

$$(2) \quad e^x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k(1) T_k(x)$$

On a :

$$I_0(1) = 1,266065877749$$

On pose  $I_m = I_m(1)$ .



$$I_1(1) = 0,5651591039921$$

$$I_n(1) = \frac{1}{2} [I_{n-1}(1) - I_{n+1}(1)]$$

et

$$I_m \in \left] \frac{1}{2^m \cdot m!}, \frac{4}{3 \cdot 2^m \cdot m!} \right[$$

$$\text{Posons } H_n(x) = 2 \sum_{k=0}^n I_k(1) T_k(x).$$

On a le :

Théorème 1 :

$$(3) \quad 0 < \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[$$

Preuve.

Elle va se décomposer en deux parties :

$$a) \quad \forall x \in [1, +\infty[ \text{ on a } H_n(x) > s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

En effet, en utilisant :

$$x^k = 2^{-k+1} \sum_{\ell=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} T_{k-2\ell}(x)$$

[21, p. 29] ou [23].

où  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  désigne la partie entière de  $k/2$  et

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i T_{k_i}(x) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{1}{2} \alpha_i \text{ si } k_i = 0, \alpha_i \text{ si } k_i \neq 0 \right) T_{k_i}(x)$$

On déduit :

$$\begin{aligned}
 H_n(x) - s_n(x) &= 2 \sum_{k=0}^n I_k \cdot T_k(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^n I_k \cdot T_k(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} [2^{-k+1} \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{k!}{i!(k-i)!} T_{k-2i}(x)]
 \end{aligned}$$

n étant supposé pair,

$$\begin{aligned}
 H_n(x) - s_n(x) &= 2 \sum_{k=0}^n I_k \cdot T_k(x) - T_0 \left[ 1 + \frac{2^{-1}}{2 \cdot (1!)^2} + \frac{2^{-3}}{2 \cdot (2!)^2} + \dots + \frac{2^{-n+1}}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{n}{2}!)^2} \right] \\
 &\quad - T_1 \left[ 1 + \frac{2^{-2}}{1!2!} + \frac{2^{-4}}{2!3!} + \dots + \frac{2^{-n+2}}{(\frac{n}{2} - 1)! (\frac{n}{2})!} \right] \\
 &\quad - T_n \left[ \frac{1}{n!} 2^{-n+1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_n(x) - s_n(x) &= T_0 \left[ I_0 - \left( 1 + \frac{1}{2^2 (1!)^2} + \frac{1}{2^4 (2!)^4} + \dots + \frac{1}{2^n (\frac{n}{2}!)^2} \right) \right] \\
 &\quad + T_1 \left[ 2I_1 - 2 \left( \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^3 \cdot 1!2!} + \dots + \frac{1}{2^{n-1} (\frac{n}{2} - 1)! \frac{n}{2}!} \right) \right] \\
 &\quad + \dots + T_n \left[ 2I_n - \frac{2}{n! 2^n} \right]
 \end{aligned}$$

La définition des  $I_k$  montre que les quantités entre crochets sont toujours positives.

Comme

$$T_k(x) > 0 \quad \forall x, x \geq 1 \quad \forall k = 0, n$$

on a

$$H_n(x) - s_n(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow e^x > H_n(x) > s_n(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow e^{-x} < \frac{1}{H_n(x)} < \frac{1}{s_n(x)} \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} < \frac{1}{s_n(x)} - e^{-x} < \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

b) Il reste à prouver la même inégalité pour  $x \in [0, 1]$ .

\* On a  $H_n(x) > 0,99 \quad \forall x > 0$ .

En effet, démontrons que  $H'_n(x) > 0, \forall x > 0$  et  $H_n(0) = 0,99$ .

$$H'_n(x) = 2 \sum_{k=0}^n I_k \cdot T_k(x) = 2 \sum_{k=0}^n I_k \cdot k \cdot U_{k-1}(x)$$

où

$$U_{k-1}(x) = \frac{\sin(k \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$U_0 = 1, U_1 = 2x > 0 \quad \forall x > 0.$$

On a  $U_{k-1}(x) \geq -k, \forall x \in [0, +\infty[$ .

$$H'_n(x) = 2 [I_1 U_0 + 2 I_2 U_1 + 3 I_3 U_2 + \dots + n I_n U_{n-1}]$$

$$H'_n(x) \geq 2 [I_1 + 3 I_3 U_2 + 4 I_2 U_3 + \dots + n I_n U_{n-1}]$$

$$H'_n(x) \geq 2 [I_1 - (9 I_3 + 16 I_4 + \dots + n^2 I_n)] \quad \forall x \geq 0$$

Or

$$I_m \leq \frac{4}{3 \cdot 2^m \cdot m!}$$

$$\Rightarrow m^2 I_m \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{1}{(m-2)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2-m}}{(m-2)!} \quad \text{pour } m \geq 3$$

$$\Rightarrow \sum_{m=3}^n m^2 I_m \leq \sum_{m=3}^{\infty} I_m \cdot m^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{2^{2-m}}{(m-2)!} \leq \frac{1}{2} (e^{-2} - 1)$$

$$\Rightarrow H'_n(x) \geq 2 (I_1 - \frac{1}{2} (e^{-2} - 1)) = 0,26 > 0 \quad \forall x > 0.$$

Le polynôme  $H_n(x)$  est donc une fonction croissante sur  $[0, +\infty[$  et par suite

$$H_n(x) \geq H_n(0) = I_0 - 2 I_2 + 2 I_4 - 2 I_6 + \dots$$

$$H_n(x) \geq 1 - 2 \cdot \frac{4}{3 \cdot 2^2} + \frac{2}{2^4 \cdot 4!} - \frac{2 \times 4}{3 \times 2^6 \times 6!} + \dots$$

$$\frac{I_m}{I_{m-2}} < \frac{\frac{4}{3 \cdot 2^m \cdot m!}}{\frac{1}{2^{m-2} \cdot (m-2)!}} = \frac{1}{3m(m-1)} \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 I_m \leq I_{m-2}$$

D'où :

$$H_n(x) \geq I_0 - 2I_2 = 0,9945 > 0,99.$$

Enfin :

$$e^x - H_n(x) = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} I_k \cdot T_k(x)$$

$$\Rightarrow |e^x - H_n(x)| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} I_k \text{ pour } |x| < 1$$

$$\leq 2 \cdot \frac{4}{3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} = \frac{8}{3} (e^{1/2} - s_n(1/2))$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} \right| \leq \frac{8}{3} \times \frac{2}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{1}{H_n(x) e^x} \text{ pour } |x| < 1$$

Utilisant  $H_n(x) > 0,99 \forall x > 0$  on obtient :

$$\left| \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} \right| \leq \frac{8}{3 \cdot e^0} \cdot \frac{2}{2^{n+1} (n+1)!} \cdot \frac{1}{0,99} < \frac{1}{2^n} \text{ pour } n \geq 1$$

et pour  $n = 0, H_0(x) = I_0$  et  $\frac{1}{I_0} - e^{-x} = 0,78 - e^{-x} \leq 0,42$ .

□

Les expériences numériques ont donné les résultats suivants.

n	$\left\  \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} \right\ _{[0, +\infty[}^{1/n}$
1	0,21
2	0,24
5	0,339
10	0,399
15	0,45
40	0,46
50	0,47

Nous allons améliorer la borne supérieure  $\frac{1}{2^n}$  en montrant que l'inégalité (3) est vraie encore si  $x \geq -\alpha n$ .

Théorème 2 : Pour tout entier  $n \geq 0$ , nous avons :

$$\max_{0 \leq x < \infty} \left| \frac{e^{-n}}{H_n(x-\alpha n)} - e^{-x} \right| \leq \frac{1}{(2e^\alpha)^n} = (0,43501)^n$$

avec  $\alpha$  tel que  $2\alpha e^{2\alpha+1} = 1$ .

Preuve.

Prouvons que :



$$(4) \quad \left| \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

non seulement pour  $x \geq 0$  mais aussi pour  $x \geq -\alpha n$  avec  $2\alpha e^{2+1} = 1$ .

Alors, en faisant  $x = t - \alpha n$ , il vient :

$$\left| \frac{1}{H_n(t - \alpha n)} - e^{-(t - \alpha n)} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall t \geq 0$$

ce qui donne :

$$\left| \frac{e^{-\alpha n}}{H_n(t - \alpha n)} - e^{-t} \right| \leq \frac{1}{(2e^\alpha)^n}, \quad \forall t \geq 0.$$

Pour prouver (4), écrivons :

$$H_n(-y) = e^{-y} - 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} (-1)^j I_j T_j(y)$$

\* Pour  $1 \leq y \leq \alpha n < n+1$  on a :

$$H_n(-y) = e^{-y} - 2 [(-1)^{n+1} I_{n+1} T_{n+1}(y) + \dots]$$

et

$$I_{n+2} T_{n+2}(y) < I_{n+1} T_{n+1}(y) \text{ pour } y \in [1, \alpha n]$$

En effet :

$$\frac{T_{n+2}(y)}{T_{n+1}(y)} \leq 2y \leq 2\alpha_n \approx 0,26n$$

et

$$\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \geq \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3 \times 2^{n+2} \cdot (n+2)!}{4} = \frac{3(n+2)}{2} = \frac{3}{2}n + 3.$$

Donc pour n pair

$$e^{-y} \leq H_n(-y) \leq e^{-y} + 2 I_{n+1} \cdot T_{n+1}(y)$$

et pour n impair

$$e^{-y} - 2 I_{n+1} \cdot T_{n+1}(y) \leq H_n(-y) \leq e^{-y} \text{ pour } 1 \leq y \leq \alpha n$$

Or

$$T_{n+1}(y) < \frac{1}{2} (2y)^{n+1}$$

$$I_{n+1} \leq \frac{4}{3 \cdot 2^{n+1} (n+1)!}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} \cdot T_{n+1}(y) \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{n pair } e^{-y} \leq H_n(-y) \leq e^{-y} + \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\text{A}) \\ \text{n impair } e^{-y} - \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \leq H_n(-y) \leq e^{-y} \quad (\text{B}) \end{array} \right.$$

$$e^{-y} - \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \geq e^{-\alpha n} - \frac{4}{3} \cdot \frac{(\alpha n)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} e^{-\alpha n} - \frac{4}{3} \alpha^{n+1} \right\}$$

$$\geq \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{-(1+\alpha)n}}{[\sqrt{2\pi n} - \frac{4}{3} \alpha (\alpha e^{1+\alpha})^n]}$$

Mais puisque  $\alpha e^{1+\alpha} = \frac{1}{2e^\alpha}$  ( $\alpha \approx 0,13923 \dots$ ) et  $\sqrt{2\pi n} - \frac{4}{3} \alpha (\frac{1}{2e^\alpha})^n > 1$  pour  $n \geq 1$ .



On déduit :

$$(C) \quad e^{-y} - \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} > \frac{n^{n+1} e^{-(1+\alpha)^n}}{(n+1)!}, \quad \forall n \geq 1, \forall y, 1 \leq y \leq \alpha n$$

Les inégalités (B) et (C) impliquent :

- pour n impair :

$$0 < \frac{1}{H_n(-y)} - e^y < \frac{1}{e^{-y} - \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}} - e^{-y} = \frac{\frac{4}{3} y^{n+1} e^y}{(n+1)! [e^{-y} - \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}]}$$

$$\frac{1}{H_n(-y)} - e^y \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha^{n+1} n^{n+1} e^{\alpha n}}{n^{n+1} e^{-(1+\alpha)^n}} = \frac{4}{3} \alpha (\alpha e^{2\alpha+1})^n = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha}{2^n}$$

Donc  $0 < \frac{1}{H_n(-y)} - e^y < \frac{1}{2^n}$  pour n impair et  $1 \leq y \leq \alpha n$ .

- pour n pair :

De l'inégalité  $e^{-y} < H_n(-y) < e^{-y} + \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$ .

On tire

$$0 > \frac{1}{H_n(-y)} - e^{-y} > \frac{1}{e^{-y} + \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}} - e^{-y}$$

$$0 > \frac{1}{H_n(-y)} - e^{-y} \geq \frac{-\frac{4}{3} y^{n+1} e^y}{(n+1)! [e^{-y} + \frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}]} \geq -\frac{4}{3} \cdot \frac{y^{n+1} e^{2y}}{(n+1)!}$$

$$0 > \frac{1}{H_n(-y)} - e^{-y} \geq -\frac{4}{3} \cdot \frac{n^{n+1} e^{-n} \alpha (\alpha e^{2\alpha+1})^n}{(n+1)!}$$

$$\geq -\frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha}{2^n} \geq -\frac{1}{2^n}$$

En conséquence :

Pour  $1 \leq y \leq \alpha_n$  on a :

$$\left| \frac{1}{H_n(-y)} - e^y \right| < \frac{1}{2^n}$$

et donc  $-\alpha_n \leq t \leq -1$  on a :

$$\left| \frac{1}{H_n(t)} - e^{-t} \right| < \frac{1}{2^n}$$

Il reste à montrer la même inégalité pour  $t \in [-1, 0]$ .

Pour cela, on utilise la même méthode que pour la deuxième partie b) du théorème 1.

$$H'_n(x) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} I_k \cdot k \cdot U_{k-1}(x)$$

$$H'_n(x) = 2 [I_1 U_0 + 2 I_2 U_1 + 3 I_3 U_2 + \dots + n I_n U_{n-1}]$$

On montre facilement que :

$$I_1 U_0 + 2 I_2 U_1 + 3 I_3 U_2 = I_1 U_0 + 2 I_2 (2x) + 3 I_3 (4x^2 - 1)$$

est supérieur à 0,22, minimum pour  $x = -1$ .

$$U_{k-1}(x) \geq -k \quad \forall x \in [-1, +\infty[ \Rightarrow$$

$$4I_4 U_3 + 5I_5 U_4 + \dots + n I_n U_{n-1} \geq -16 I_4 - 25 I_5 \dots - n^2 I_n$$

$$I_m \leq \frac{4}{3 \cdot 2^m \cdot m!} \Rightarrow \sum_{m=4}^n m^2 I_m \leq \sum_{m=4}^{\infty} m^2 \cdot \frac{4}{3 \cdot 2^m \cdot m!}$$

$$\sum_{m=4}^n m^2 I_m \leq \sum_{m=4}^{\infty} \frac{4m}{3 \cdot 2^m (m-1)!} \leq \sum_{m=4}^{\infty} \frac{4}{3 \cdot 2^m \cdot (m-3)!} \leq \frac{4}{3 \cdot 2^3} \left[ \sum_{m=4}^{\infty} \frac{2^{-m+3}}{(m-3)!} \right]$$

$$\sum_{m=4}^n m^2 I_m \leq \frac{4}{3 \cdot 2^3} (e^{1/2} - 1) \leq 0,109.$$

D'où  $H'_n(x) \geq 2(0,22 - 0,109) \geq 0$  pour  $x \geq -1$ .

$H_n$  croissante sur  $[-1, +\infty[ \Rightarrow H_n(x) \geq H_n(-1)$ .

- Calcul de  $H_n(-1)$  :

$$H_n(-1) = I_0 - 2I_1 + 2I_2 - 2I_3 + \dots$$

$$H_n(-1) \geq 1,25 - 2 \cdot \frac{4}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{2}{2^2 \cdot 2} + \dots$$

$I_m$  étant inférieure à  $I_{m+1}$  on a  $I_m - I_{m+1} > 0$ .

D'où

$$H_n(x) \geq H_n(-1) \geq I_0 - 2I_1 + 2I_2 - 2I_3 = 0,3629, \quad \forall x \geq -1.$$

Enfin

$$e^x - H_n(x) = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} I_k \cdot T_k(x)$$

$$e^x - H_n(x) \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} I_k \text{ pour } |x| < 1$$

$$\leq 2 \times \frac{4}{3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k!} \text{ pour } |x| < 1$$

$$|e^x - H_n(x)| \leq \frac{8}{3} (e^{1/2} - s_n(1/2))$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} \right| \leq \frac{8}{3} \times \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} \times \frac{1}{H_n(x) e^x} \text{ pour } |x| < 1$$

Or  $H_n(x) > 0,36$  pour  $x > -1$ ,  $e^x > e^{-1}$  entraîne :

$$\left| \frac{1}{H_n(x) - e^{-x}} \right| \leq \frac{8}{3} \times \frac{2}{2^{n+1}(n+1)} \times \frac{1}{0,36 \times e^{-1}}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \left[ \frac{8/3}{e^{-1} \times 0,36 \times (n+1)!} \right] \leq \frac{20}{(n+1)!} \times \frac{1}{2^n}$$

Or pour que (-1) soit supérieur à  $-\alpha n$  il faut que  $n$  soit supérieur à  $\frac{1}{\alpha}$  donc à 7 et  $8! > 20$ .

D'où

$$\left| \frac{1}{H_n(x)} - e^{-x} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \text{ pour } x \geq -1.$$

□

## CONCLUSION.

\* Il faut remarquer que dans tout ce qui précède,  $\frac{1}{H_n(x)}$  n'est pas un approximant de type Padé pour  $e^{-x}$ , contrairement à ce qui se passe pour  $\frac{1}{s_n(x)}$ .

Une suite à ce travail serait de garder le même dénominateur  $H_n(x)$  et de trouver le numérateur de sorte que le développement en fonction des polynômes de Chebychev  $T_n$  coïncide avec celui de  $e^{-x}$  jusque l'ordre  $(n-1)$  inclus. Nous pouvons alors espérer que le facteur de convergence sera inférieur au précédent.

\* On a :

$$e^t = I_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_k \cdot T_k(t)$$

Si l'on pose :

$$g(x,t) = \frac{1 - x^2}{2(1 - 2xt + x^2)}$$

On a  $g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} x^i T_i(t)$  et donc  $e^t = c(g(x,t))$  avec  $c(x^k) = c_k = 2I_k$ ,  $k \geq 0$ .

$$\Rightarrow e^{-t} = c(g(x, -t)).$$

La suite  $(c_k)_{k \geq 0}$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{k+1} = c_{k-1} - 2kc_k \\ c_0 = 2I_0 \\ c_1 = 2I_1 \end{array} \right.$$

$(c_k)$  n'est pas une suite totalement monotone car :

$$c_k = 2I_k \leq \frac{8}{3 \cdot 2^k \cdot k!} = o(\lambda^k) \quad \forall \lambda > 0 \quad [3, p. 225]$$

Enfin, dans la relation  $e^{-t} = c(g(x, -t))$ , on pourrait songer à remplacer  $g(x, -t)$  par son polynôme de meilleure approximation sur un intervalle qui reste à déterminer.

## II - APPROXIMANTS DE TYPE PADÉ POUR $e^{-x}$ .

D'après Luke [17], on a l'égalité suivante :

$$z^{n+1} \int_0^1 e^{-uz} R_n(u) du = H_n(z) - e^{-z} G_n(z)$$

où

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k D^{n-k} R_n(0)$$

et

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k D^{n-k} R_n(1) \text{ et } D^k = \frac{d^k}{du^k}$$

La fraction  $\frac{H_n(z)}{G_n(z)}$  est donc un approximant de type Padé pour  $e^{-z}$ .

### Exemples.

$$1^\circ) \quad R_n(u) = u^n \quad . \quad G_n(z) = n! s_n(z)$$

$$H_n(z) = n!$$

$$\Rightarrow \frac{H_n(z)}{G_n(z)} = \frac{1}{s_n(z)}$$

et cette approximation est telle que :

$$\left\| \frac{1}{s_n(z)} - e^{-z} \right\|_{[0, +\infty[} \leq \frac{1}{2^n}$$

(Voir I)

2°)  $R_n(u) = u^k (1-u)^m$  avec  $n = m+k$  on a : [19]

$$a) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \frac{H_n(z)}{G_n(z)} - e^{-z} \right\|_{[0, +\infty[}^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{2}$$

avec  $d^\circ H_n = m$  et  $d^\circ G_n = k$ .

$$b) \quad \text{si } m = [k/3], \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{H_n(z)}{G_n(z)} - e^{-z} \right\|_{[0, +\infty[}^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{3}$$

Le but de ce paragraphe est de prouver que l'on a le même facteur de convergence  $\frac{1}{2}$  pour  $R_n(u) = u^k (u - \alpha)^m$ ,  $\alpha$  fixé dans  $]0,1[$ .

Notations.

$$E_k^m(z) = \frac{H_k^m(z)}{G_k^m(z)} - e^{-z} = \frac{z^{n+1}}{G_k^m(z)} \cdot \int_0^1 e^{-uz} \cdot R_n(u) du, \quad n = m + k.$$

$$G_k^m(z) = \sum_{j=0}^n z^j D^{n-j} R_n(1)$$

$$H_k^m(z) = \sum_{j=0}^n z^j \cdot D^{n-j} R_n(0)$$

avec  $R_n(u) = u^k (u - \alpha)^m$

On pose également :

$$S_k^m(z) = E_k^m(z) G_k^m(z) = H_k^m(z) - G_k^m(z) e^{-z}.$$

Quand il ne pourra y avoir de confusion, on omettera l'argument  $z$ .

Lemme 1 : La suite  $(G_k^m)_{k,m}$  vérifie :

$$(1) \quad d^\circ G_k^m = n = m + k$$

$$(2) \quad G_k^m(z) = k \cdot G_{k-1}^m(z) + m G_k^{m-1}(z) + z^n(1 - \alpha)^m$$

$$(3) \quad G_k^m(z) = z G_{k-1}^m(z) - z \cdot D G_{k-1}^m(z) + n \cdot G_{k-1}^m(z)$$

$$(4) \quad G_{k+1}^m(z) = (1 + n + \alpha z) G_k^m(z) - \alpha k z G_{k-1}^m(z) + z^{n+1} (1 - \alpha)^{m+1}$$

Preuve.

$$(1) \quad d^\circ G_k^m = n \text{ car } D^\circ R_n(1) = (1 - \alpha)^m \neq 0.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad G_k^m &= \sum_{j=0}^n z^{n-j} D^j [u^k(u - \alpha)^m] \\ &= \sum_{j=1}^n z^{n-j} D^{j-1} [k u^{k-1} (u - \alpha)^m + m u^k (u - \alpha)^{m-1}] + z^n(1 - \alpha)^m \\ &= k \sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} D^p [u^{k-1}(u - \alpha)^m] + m \sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} D(u^k (u - \alpha)^{m-1}) \\ &\quad + z^n (1 - \alpha)^m. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_k^m = k \cdot G_{k-1}^m + m G_k^{m-1} + z^n(1 - \alpha)^m.$$

$$(3) \quad G_k^m(z) = \sum_{j=0}^n z^{n-j} D^j [u^k(u - \alpha)^m]$$

Utilisant  $u^k = u^{k-1} \cdot u$  et la formule de Leibnitz



$$\begin{aligned}
 G_k^m(z) &= \sum_{j=0}^n z^{n-j} [D^j(u^{k-1}(u-\alpha)^m) + j D^{j-1}(u^{k-1}(u-\alpha)^m)] \\
 &= z G_{k-1}^m(z) + \sum_{j=1}^n j D^{j-1}(u^{k-1}(u-\alpha)^m) z^{n-j} \\
 &= z G_{k-1}^m(z) + \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) D^p(u^{k-1}(u-\alpha)^m) z^{n-p-1} \\
 &= z G_{k-1}^m(z) + (-z) \sum_{p=0}^{n-1} (n-p-1) z^{n-p-2} D^p(u^{k-1}(u-\alpha)^m) \\
 &\quad + n \sum_{p=0}^{n-1} z^{n-1-p} D^p(u^{k-1}(u-\alpha)^m)
 \end{aligned}$$

$$G_k^m = z \cdot G_{k-1}^m - z \cdot D G_{k-1}^m + n G_{k-1}^m$$

$$(4) \quad G_k^m = \sum_{j=0}^n z^{n-j} D^j(u^k(u-\alpha)^{m-1}(u-\alpha))$$

$$G_k^m = G_{k+1}^{m-1} - \alpha z G_k^{m-1}$$

Cette relation, combinée avec la relation (2) donne :

$$G_{k+1}^{m-1} - \alpha z G_k^{m-1} = k (G_k^{m-1} - \alpha z G_{k-1}^{m-1}) + m G_k^{m-1} + z^n (1 - \alpha)^m$$

$$G_{k+1}^{m-1} = G_k^m(z) (\alpha z + k + m) - \alpha k z G_{k-1}^{m-1} + z^n (1 - \alpha)^m.$$

□

Toutes ces relations ainsi que les suivantes sont nécessaires à la comparaison des erreurs  $E_k^m$  et  $E_{k+1}^m$ .

Lemme 2 : La suite  $(H_k^m)_{k,m}$  vérifie :

$$(1) \quad d^{\circ} H_k^m = m$$

$$(2) \quad H_k^m = k \cdot H_{k-1}^m + m \cdot H_k^{m-1}$$

$$(3) \quad H_k^m = H_{k+1}^{m-1} - \alpha z H_k^{m-1}$$

$$(4) \quad H_{k+1}^m = H_k^m \cdot (m + k + 1 + \alpha z) - \alpha k z H_{k-1}^m$$

$$(5) \quad H_k^m = m! \sum_{j=0}^m \frac{(-\alpha z)^j}{j!} \cdot \frac{(n-j)!}{(m-j)!}$$

$$(6) \quad D H_k^m = -m\alpha H_k^{m-1}.$$

Preuve.

$$(1) \quad d^{\circ} H_k^m = m \text{ car } D^{n-j} (u^k (u-\alpha)^m)_{u=0} = 0 \text{ pour } n-j = 0 \text{ à } k-1$$

donc pour  $j = n$  à  $n-k+1$

$$D^k (u^k (u-\alpha)^m)_{u=0} = k! (-\alpha)^m \neq 0.$$

$$(2) \quad H_k^m = \sum_{j=0}^n z^{n-j} \cdot D^j (u^k (u-\alpha)^m)_{u=0}$$

$$H_k^m = \sum_{j=1}^n z^{n-j} D^{j-1} [k u^{k-1} (u-\alpha)^m + m u^k (u-\alpha)^{m-1}]_{u=0}$$

$$H_k^m = \sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} \cdot D^p [k u^{k-1} (u-\alpha)^m + m u^k (u-\alpha)^{m-1}]_{u=0}$$

$$H_k^m = k \cdot H_{k-1}^m + m \cdot H_k^{m-1}.$$

$$(3) \quad H_k^m = \sum_{j=0}^n z^{n-j} \cdot D^j [u^k (u-\alpha)^{m-1} (u-\alpha)]_{u=0}$$

$$H_k^m = \sum_{j=0}^n z^{n-j} D^j [u^{k+1} (u-\alpha)^{m-1}]_{u=0} - \alpha \sum_{j=0}^n z^{n-j} D^j [u^k (u-\alpha)^{m-1}]_{u=0}$$

$$H_k^m = H_{k+1}^{m-1} - \alpha z \cdot H_k^{m-1}$$

(4), (2) et (3) donnent :

$$H_{k+1}^{m-1} - \alpha z H_k^{m-1} = k [H_k^{m-1} - \alpha z \cdot H_{k-1}^{m-1}] + m H_k^{m-1}$$

$$H_{k+1}^{m-1} = (\alpha z + k + m) H_k^{m-1} - \alpha k z \cdot H_{k-1}^{m-1}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad D^j [u^k (u - \alpha)^m] &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} D^i (u^k) D^{j-i} ((u - \alpha)^m)_{u=1} \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} k(k-1) \dots (k-i+1) u^{k-i} m(m-1) \dots (m-j+i+1) (-\alpha)^{m-j+i} \end{aligned}$$

Le seul terme non nul est obtenu si  $i = k$ .

$$= \binom{j}{k} k(k-1) \dots 2 \times 1 \times m(m-1) \dots (m-j+1+k) (-\alpha)^{m-j+k}$$

$$= \frac{j!}{k!(j-k)!} \cdot k! \cdot \frac{m!}{(m+k-j)!} (-\alpha)^{m-j+k}$$

$$H_k^m(z) = \sum_{j=0}^n z^{n-j} \frac{j!}{k!(j-k)!} \cdot \frac{k! \cdot m!}{(m+k-j)!} (-\alpha)^{m-j+k} \quad j \geq k.$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{j! \cdot m!}{(j-k)!(m+k-j)!} (-\alpha z)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=k}^n \frac{j! \cdot m!}{(j-k)!(n-j)!} (-\alpha z)^{n-j}$$

$$= \sum_{p=0}^m \frac{(n-p)! \cdot m!}{(n-p-k)! \cdot p!} (-\alpha z)^p = \sum_{p=0}^m \frac{(n-p)! \cdot m!}{(m-p)! \cdot p!} (-\alpha z)^p.$$

ou avec les notations hypergéométriques.

$$H_k^m(z) = n! {}_1F_1(-m, -n, -\alpha z)$$

$$(6) \quad D H_k^m(z) = \sum_{p=1}^m \frac{(n-p)! m! (-\alpha) (-\alpha z)^{p-1}}{(m-p)! (p-1)!}$$

$$= m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(n-1-j)! (m-1)! (-\alpha) (-\alpha z)^{p-1}}{(m-1-p+1)! (p-1)!}$$

$$D H_k^m(z) = -m\alpha H_k^{m-1}(z).$$

□

Lemme 3 : La suite  $(S_{k,m}^m)$  vérifie :

$$(1) \quad S_k^m = -z^{m+k} (1-\alpha)^m e^{-z} + k S_{k-1}^m(z) + m S_k^{m-1}(z)$$

$$(2) \quad S_k^m(z) = S_{k+1}^{m-1}(z) - \alpha z \cdot S_k^{m-1}(z)$$

$$(3) \quad S_{k+1}^m(z) = S_k^m(z) (m+k+1+\alpha z) - \alpha k z S_{k-1}^m(z) - z^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} e^{-z}$$

Preuve.

$$(1) \quad S_k^m = z^{n+1} \int_0^1 e^{-uz} u^k (u-\alpha)^m du$$

$$S_k^m = z^{m+k+1} \left[ (u^k (u-\alpha)^m \frac{e^{-uz}}{-z}) \Big|_0^1 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{z} \int_0^1 e^{-uz} \cdot [k u^{k-1} (u-\alpha)^m + m u^k (u-\alpha)^{m-1}] du \right]$$

$$S_k^m = -z^{m+k} (1-\alpha)^m e^{-z} + k S_{k-1}^m + m S_k^{m-1}$$

$$(2) \quad S_k^m = z^{m+k+1} \int_0^1 e^{-uz} u^k (u-\alpha)^{m-1} (u-\alpha) du$$

$$= z^{m+k+1} \int_0^1 e^{-uz} u^{k+1} (u-\alpha)^{m-1} du - \alpha z^{m+k+1} \int_0^1 e^{-uz} u^k (u-\alpha)^{m-1} du$$

$$S_k^m = S_{k+1}^{m-1} - \alpha z S_k^{m-1}$$

(3) En combinant (1) et (2) on obtient :

$$S_{k+1}^{m-1} - \alpha z S_k^{m-1} = -z^{m+k} \cdot (1-\alpha)^m e^{-z} + k [S_k^{m-1} - \alpha z S_{k-1}^{m-1}] + m S_k^{m-1}$$

$$S_{k+1}^{m-1} = S_k^m(z) (k+m+\alpha z) + S_{k-1}^{m-1}(z) (-\alpha k z) - z^{m+k} (1-\alpha)^m e^{-z}.$$

□

Lemme 4 : *Inégalités*

(1)  $G_k^m(z) \geq n G_{k-1}^m(z) + z^n (1-\alpha)^m$  pour  $z \geq 0$

(2)  $G_{k+1}^{m-1}(z) \geq \alpha z G_k^{m-1}(z)$  pour  $z \geq 0$

(3)  $G_{k+1}^m(z) \leq (z+n+1) G_k^m(z)$  pour  $z \geq 0$ .

Preuve.

(1) 
$$G_k^m - n G_{k-1}^m = \sum_{j=1}^n z^{n-j} [D^j(u^k(u-\alpha)^m) - n D^{j-1}(u^{k-1}(u-\alpha)^m)] + z^n (1-\alpha)^m$$

Or

$$D^j[u^k(u-\alpha)^m] - n D^{j-1}[u^{k-1}(u-\alpha)^m] = m D^{j-1}[u^{k-1}(u-\alpha)^{m-1} \alpha]_{u=1} \geq 0$$

Donc

$$G_k^m(z) \geq n \cdot G_{k-1}^m(z) + z^n (1-\alpha)^m, z \in [0, +\infty[.$$

(2) La formule (4) du lemme 1

$$G_k^m = G_{k+1}^{m-1} - \alpha z G_k^{m-1}$$

associée à  $G_k^m(z) > 0$  pour  $z > 0$  donne :

$$G_{k+1}^{m-1}(z) \geq \alpha z G_k^{m-1}(z) \quad \forall z \in [0, +\infty[$$

(3) De la relation (2) du lemme 1) on tire :

$$G_k^m(z) \leq z G_{k-1}^m(z) + n G_{k-1}^m(z), \quad z > 0$$

car

$$D G_{k-1}^m(z) > 0 \quad \forall z > 0$$

□

Lemme 5 :

$$\text{Soit } R_k^m(z) = G_k^m(z) H_{k-1}^m(z) - G_{k-1}^m(z) H_k^m(z)$$

$$(d^0 R_k^m(z) = m+2k-1)$$

alors :

$$(1) \quad R_k^m(z) = \alpha(k-1)z R_{k-1}^m(z) + z^n(1-\alpha)^{m+1} H_{k-1}^m(z)$$

$$(2) \quad R_{k+1}^m(z) = (\alpha k + \alpha z + n)z R_k^m(z) + (\alpha z + n + z)(-\alpha)(k-1)z^2 R_{k-1}^m(z) \\ + \alpha^2(k-1)(k-2)z^4 R_{k-2}^m(z)$$

Preuve.

Dans la relation

$$R_{k+1}^m = G_{k+1}^m \cdot H_k^m - G_k^m \cdot H_{k+1}^m$$

remplaçons  $G_{k+1}^m$  et  $H_{k+1}^m$  par leurs valeurs (relations(4) lemme 1 et (4) lemme 2)

$$\begin{aligned}
 R_{k+1}^m &= (n+1+\alpha z), G_k^m H_k^m - \alpha k z G_{k-1}^m H_k^m + z^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} H_k^m \\
 &\quad - (n+1-\alpha z) H_k^m G_k^m + \alpha k z G_k^m H_{k-1}^m \\
 \Rightarrow R_{k+1}^m &= \alpha k z R_k^m + z^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} H_k^m \tag{1}
 \end{aligned}$$

Utilisant (1) ci-dessus et (4) lemme 2 :

$$\begin{aligned}
 \frac{R_{k+1}^m - \alpha k z R_k^m}{z^{n+1} (1-\alpha)^{m+1}} &= (m+k+\alpha z) \left[ \frac{R_k^m - \alpha(k-1)z R_{k-1}^m}{z^n (1-\alpha)^{m+1}} \right] \\
 &\quad - \alpha(k-1)z \left[ \frac{R_{k-1}^m - \alpha(k-2)z R_{k-2}^m}{z^{n-1} (1-\alpha)^{m+1}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{k+1}^m &= R_k^m \cdot [\alpha k z + (m+k+\alpha z)z] + R_{k-1}^m [-\alpha(k-1)(n+\alpha z)z^2 - \alpha(k-1)z^3] \\
 &\quad + R_{k-2}^m [\alpha^2(k-1)(k-2)z^4]
 \end{aligned}$$

Lemme 6 : Soit  $(A_n)_{n \geq 0}$ ,  $(B_n)_{n \geq 0}$  et  $(C_n)_{n \geq 0}$  trois suites de réels vérifiant :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} = \rho_1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |B_n|^{\frac{1}{n}} = \rho_2$$

et

$$C_n = A_n + B_n$$

alors :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}} = \sup(\rho_1, \rho_2).$$

Preuve.

$$|C_n|^{\frac{1}{n}} = |A_n + B_n|^{\frac{1}{n}} = |B_n|^{\frac{1}{n}} \left[ \left| \frac{A_n}{B_n} + 1 \right| \right]^{\frac{1}{n}}$$

si  $\rho_2 \geq \rho_1$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |B_n|^{\frac{1}{n}} \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n}{B_n} + 1 \right|^{\frac{1}{n}}$$

Or le deuxième facteur de ce produit a pour limite 1 car  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$ .  
D'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |B_n|^{\frac{1}{n}} = \rho_2$$

□

Théorème 3 : Si  $z_k$  est tel que  $E_k^m(z)$  soit maximum en  $z_k$  alors on a :

$$(1) \quad 0 = E_k^m(z_k) \frac{n+1}{z_k} - \frac{D G_k^m(z_k)}{G_k^m(z_k)} E_k^m(z_k) - \frac{1}{k} \frac{G_{k+1}^m(z_k)}{G_k^m(z_k)} E_{k+1}^m(z_k)$$

$$(2) \quad E_k^m(z_k) = \frac{\alpha k z_k G_{k-1}^m E_{k-1}^m(z_k) + z_k^{m+k+1} (1 - \alpha)^{m+1} e^{-z_k}}{(z+n+1+\alpha z) G_k^m(z_k) - G_{k+1}^m(z_k)}$$

$$(3) \quad E_k^m(z_k) = \frac{G_{k-1}^m(z_k) R_{k+1}^m(z_k)}{G_{k-1}^m(z_k) R_{k+1}^m(z_k) + z_k G_k^m(z_k) R_k^m(z_k)} \cdot E_{k-1}^m(z_k)$$

Preuve de (1).

$$z_k \text{ est tel que } \frac{d E_k^m(z_k)}{dz} = 0.$$

En dérivant l'expression donnant  $E_k^m$ , on obtient :



$$\frac{d}{dz} E_k^m(z_k) = 0 = (n+1) \frac{z_k^n}{G_k^m(z_k)} \int_0^1 e^{-uz_k} u^k (u-\alpha)^m du$$

$$+ z_k^{n+1} \cdot \frac{-D G_k^m(z_k)}{[G_k^m(z_k)]^2} \int_0^1 e^{-uz_k} u^k (u-\alpha)^m du - \frac{z_k^{n+1}}{G_k^m(z_k)} \int_0^1 e^{-uz_k} u^{k+1} (u-\alpha)^m du$$

ce qui fournit (1).

De (3), lemme 3, on déduit après division par  $G_k^m(z_k)$

$$\frac{G_{k+1}^m}{G_k^m} \cdot E_{k+1}^m = E_k^m \cdot (k+1+m+\alpha z_k) - \alpha k z_k \frac{G_{k-1}^m}{G_k^m} \cdot E_{k-1}^m$$

$$- z_k^{m+k+1} (1-\alpha)^{m+1} \frac{e^{-z_k}}{G_k^m}$$

En remplaçant  $E_{k+1}^m$  dans (1) :

$$0 = E_k^m \cdot \frac{n+1}{z_k} - \frac{D G_k^m}{G_k^m} \cdot E_k^m - \frac{1}{z_k} [E_k^m (n+1+\alpha z) - \alpha k z_k \frac{G_{k-1}^m}{G_k^m} E_{k-1}^m]$$

$$+ z_k^m (1-\alpha)^{m+1} \frac{e^{-z_k}}{G_k^m}$$

$$E_k^m = \frac{\alpha k G_{k-1}^m \cdot E_{k-1}^m + z_k^n (1-\alpha)^{m+1} \cdot e^{-z_k}}{D G_k^m + \alpha G_k^m}$$

Utilisons (3) lemme 1 :

$$E_k^m = \frac{\alpha k z_k G_{k-1}^m \cdot E_{k-1}^m + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} e^{-z_k}}{(\alpha z + 1 + z + n) G_k^m - G_{k+1}^m} \quad (2)$$

Enfin, pour démontrer (3), il faut exprimer  $e^{-z}$  en fonction des autres quantités

$$\left. \begin{aligned} E_{k-1}^m &= \frac{H_{k-1}^m}{G_{k-1}^m} - e^{-z} \\ E_k^m &= \frac{H_k^m}{G_k^m} - e^{-z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{-z} = \frac{G_{k-1}^m H_k^m E_{k-1}^m - G_k^m H_{k-1}^m E_k^m}{R_k^m}$$

Substituons la relation ci-dessus dans (2) :

$$E_k^m = \frac{\alpha^k z_k G_{k-1}^m E_{k-1}^m + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} [G_{k-1}^m H_k^m E_{k-1}^m - G_k^m H_{k-1}^m E_k^m] / R_k^m}{(\alpha z_k + 1 + z_k + n) G_k^m - G_{k+1}^m}$$

$$E_k^m = \frac{[\alpha z_k G_{k-1}^m R_k^m + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} G_{k-1}^m \cdot H_k^m] E_{k-1}^m}{(\alpha z_k + 1 + z_k + n) G_k^m R_k^m - G_{k+1}^m R_k^m + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} G_k^m H_{k-1}^m}$$

$$E_k^m = \frac{G_{k-1}^m R_{k+1}^m E_{k-1}^m}{(\alpha z_k + 1 + z_k + n) G_k^m R_k^m - R_k^m [G_k^m \cdot (1+n+\alpha z_k) - \alpha z_k G_{k-1}^m + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1}] + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} G_k^m H_{k-1}^m}$$

$$E_k^m = \frac{G_{k-1}^m R_{k+1}^m E_{k-1}^m}{z_k G_k^m R_k^m - R_k^m \cdot (-\alpha z_k G_{k-1}^m + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1}) + z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} (R_k^m + G_{k-1}^m H_k^m)}$$

ce qui donne (3).

□

Exemple.

$$\text{Si } \alpha = 0 \quad \left. \begin{array}{l} G_k^m(z) = n! s_n(z) \\ H_k^m(z) = n! \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{H_k^m}{G_k^m} = \frac{1}{s_n(z)}$$

$$R_k^m = n! s_n(z) \cdot (n-1)! - (n-1)! s_{n-1}(z) \cdot n!$$

$$R_k^m(z) = z^n \cdot (n-1)! \quad \text{et} \quad R_{k+1}^m(z) = z^{n+1} \cdot n!$$

$$\Rightarrow E_k^m(z_k) = \frac{E_{k-1}^m(z_k)}{1 + z_k^n \frac{n! s_n(z_k)(n-1)! z_k^n}{(n+1)! s_{n-1}(z_k)n! z_k^{n+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{s_n(z)}{s_{n-1}(z)}} \cdot E_{k-1}^m(z_k)$$

Or  $s_n(z) \geq s_{n-1}(z) \forall z \geq 0$

D'où

$$E_k^m(z_k) = \sup_{z \in [0, \infty[} |E_k^m(z)| \leq \frac{1}{2} |E_{k-1}^m(z_k)| \leq \frac{1}{2} \sup_{z \in [0, \infty[} |E_k^m(z)|$$

On retrouve ainsi le résultat de Varga [7]

$$\left\| \frac{1}{s_n(z)} - e^{-z} \right\|_{[0, \infty[} \leq \frac{1}{2^n}$$

Montrons maintenant que  $E_k^m$  est la somme de deux quantités  $A_n$  et  $B_n$  vérifiant :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n| \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |B_n| \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Théorème 4 :  $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{H_k^m(z)}{G_k^m(z)} - e^{-z} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}$$

$$d^{\circ} H_k^m = m$$

$$d^{\circ} G_k^m = n = m+k$$

La démonstration de ce théorème nécessite deux lemmes.

Lemme 7 :  $G_k^m \geq k! m! s_k(z)$  avec  $s_k(z) = \sum_{i=0}^k z^i / i!$ .

Preuve.

$$\begin{aligned} G_k^m(z) &= \sum_{i=0}^n z^{n-i} D^i (u^k (u - \alpha)^m)_{u=1} \\ &= \sum_{i=0}^n z^{n-i} \left( \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} D^j (u^k) D^{i-j} (u - \alpha)^m \right)_{u=1} \\ &= \sum_{i=0}^n z^{n-i} \left( \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} k(k-1)\dots(k-j+1) m(m-1)\dots(m-i+j+1) (1-\alpha)^{m-i+j} \right) \\ &\geq \sum_{i=m}^n z^{n-i} \left[ \binom{i}{i-m} k(k-1)\dots(k-i+m+1) m(m-1)\dots \times 2 \times 1 \right] \end{aligned}$$

$$G_k^m(z) \geq \sum_{p=0}^k z^p \left[ \binom{n-p}{k-p} k(k-1)\dots(p+1) \cdot m! \right]$$

$$\geq n! \sum_{p=0}^k \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{k! m! (n-p)!}{(k-p)! (n-k)!} = n! \sum_{p=0}^k \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{k! (n-p)!}{(k-p)!}$$

$$\geq n! \cdot \frac{k! m!}{n!} \left[ \sum_{p=0}^k \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{(n-p)! n!}{m! (k-p)!} \right]$$

$$\Rightarrow G_k^m(z) \geq k! m! \sum_{p=0}^k \frac{z^p}{p!} \text{ car } \frac{n!}{m!} \geq 1 \text{ et } \frac{(n-p)!}{(k-p)!} \geq 1 \text{ (n=m+k)}$$

□

Lemme 8 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} e^{-z}}{(z+n+1+\alpha z) G_k^m - G_{k+1}^m} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall m \text{ fixé dans } \mathbb{N}.$$

Preuve.

Le dénominateur de ce quotient est supérieur à  $\alpha z G_k^m$  (Inégalité (3) du lemme 4).

D'où

$$\left| \frac{z^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} e^{-z}}{(z+n+1+\alpha z) G_k^m - G_{k+1}^m} \right| \leq \frac{z^n (1-\alpha)^{m+1} e^{-z}}{\alpha G_k^m} \leq \frac{(1-\alpha)^{m+1} e^{-z} z^n}{\alpha \cdot k! m! s_k(z)}$$

(lemme 7).

De l'encadrement  $0 < \frac{1}{s_k(z)} - e^{-z} < \frac{1}{2^k}$  on tire :

$$2^k (e^z - s_k(z)) < e^z s_k(z)$$

On en déduit :

$$\frac{(1-\alpha)^{m+1} e^{-z} z^n}{\alpha \cdot k! m! s_k(z)} \leq \frac{(1-\alpha)^{m+1} z^n}{\alpha \cdot k! m! 2^k (e^z - s_k(z))}$$

$$\leq \frac{(1-\alpha)^{m+1} z^n}{\alpha \cdot k! m! \cdot 2^k \cdot \frac{z^n}{n!}} = \frac{(1-\alpha)^{m+1}}{\alpha \cdot 2^k} \cdot \frac{n!}{k! m!} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \frac{(1-\alpha)^{m+1}}{\alpha}$$

$m$  étant fixé  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\alpha)^{\frac{m+1}{n}}}{\alpha^{1/n}} = 1$  et  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$  ce qui achève la démonstration.

□

Preuve du théorème 4.

Il suffit de remarquer que, dans la relation (2) du théorème 3,  $E_k^m$  est la somme de deux quantités vérifiant les conditions du lemme 6.

$$E_k^m = \frac{\alpha k z_k G_{k-1}^m E_{k-1}^m}{(z_k + n + 1 + \alpha z_k) G_k^m - G_{k+1}^m} + \frac{z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} e^{-z_k}}{(z_k + n + 1 + \alpha z_k) G_k^m - G_{k+1}^m}$$

Utilisons la relation (4) du lemme 1

$$E_k^m = \frac{\alpha k z_k G_{k-1}^m E_{k-1}^m}{z_k G_k^m + \alpha k z_k G_{k-1}^m - z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1}} + \frac{z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} e^{-z_k}}{(z_k + n + 1 + \alpha z_k) G_k^m - G_{k+1}^m}$$

$$E_k^m \leq \frac{\alpha k G_{k-1}^m E_{k-1}^m}{(n + \alpha k) G_{k-1}^m} + B_n$$

(relation (1) lemme 4 pour la majoration).

La quantité  $\frac{\alpha k}{\alpha k + n}$  est inférieure à  $\frac{1}{2}$  car  $n \geq k$  et  $\alpha \in [0, 1]$

$E_k^m$  est donc la somme de deux quantités  $A_n = \frac{\alpha k E_{k-1}^m}{(\alpha k + n)}$  et

$$B_n = \frac{z_k^{n+1} (1-\alpha)^{m+1} e^{-z_k}}{(z_k + n + 1 + \alpha z_k) G_k^m - G_{k+1}^m}$$

vérifiant  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}$  et  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |B_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}$  (lemme 8). Le lemme 6 permet de conclure.

□

Le résultat du théorème 4 peut paraître faible au regard de ce qui est connu [25], [26], [28], mais peut être existe-t-il un  $\alpha$  optimal dans  $[0,1]$  diminuant le facteur de convergence.

Remarquons que la formule (3) du théorème 3 n'a pas été utilisée dans les différentes démonstrations, mais donnant une expression simple de l'erreur, elle sera précieuse dans des travaux ultérieurs, notamment pour la recherche du réel  $\alpha$  optimal dans  $[0, 1]$  et éventuellement montrer que :

$$\text{si } m = [k/3] \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{H_k^m(z)}{G_k^m(z)} - e^{-z} \right\| \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}, \quad [0, \infty[$$

cette dernière inégalité étant vraie pour  $\alpha = 1$  (Nemeth [17]).

De plus, dans la formule de l'erreur,

$$\frac{H_n(z)}{G_n(z)} - e^{-z} = \frac{z^{n+1}}{G_n(z)} \int_0^1 e^{-uz} R_n(u) du$$

on peut songer à chercher le polynôme  $R_n$  rendant minimale l'intégrale, par exemple  $R_n = T_n$ , et ainsi diminuer le facteur de convergence.

## CHAPITRE VII

### APPLICATIONS NUMÉRIQUES



Dans ce chapitre, on applique les formules de sommation exposées précédemment, aux sommes partielles des fonctions

$$1^\circ) \quad t^{-1} \cdot \text{Log} (1 + t)$$

$$2^\circ) \quad \text{Arctg} t.$$

Puis à la suite

$$3^\circ) \quad S_n = ((-0,7)^n + (0,5)^n)/(n+1).$$

Rappel.

Soit  $f(t)$  une série de Stieltjes,  $t \in \mathbb{C}$  ;

$$f(t) = \int_a^b \frac{1}{1-xt} d\alpha(x) = c \left( \frac{1}{1-xt} \right) t^{-1} \notin [a, b]$$

avec  $\alpha$  bornée, non décroissante sur  $[a, b]$  et  $c(x^i) = c_i = \int_a^b x^i d\alpha(x)$ .

On a  $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  de façon formelle.

Approximons la fonction génératrice  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  par un polynôme  $P_n(x)$

nous obtenons alors une approximation de  $f(t)$  par  $c(P_n)$ .

Le théorème principal (voir chapitre 2) énonce que si  $P_n$  interpole la fonction génératrice aux racines d'une suite de polynômes orthogonaux vérifiant certaines conditions alors l'erreur  $e_n = f(t) - c(P_n)$  vérifie :

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |e_n|^{\frac{1}{n}} \leq |B| < 1 \quad \forall t \in \mathbb{C} - [a^{-1}, b^{-1}]$$

$$\text{avec } B = A - \sqrt{A^2 - 1} \text{ et } A = \frac{t^{-1} - (a+b)/2}{(b-a)/2}.$$

(1) signifie que la suite  $|e_n|$  converge vers 0 de la "même façon" que  $|B|^n$ .

La formule (1) est en particulier vraie pour

- a)  $P_n$  polynôme de meilleure approximation de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  sur  $[a, b]$ .
- b)  $P_n$  polynôme d'interpolation de  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  aux racines de  $T_n$ , polynômes de Chebychev de première espèce sur  $[a, b]$ .
- c)  $P_n$  polynôme d'interpolation de la fonction génératrice aux racines de  $R_n$ , polynômes orthogonaux par rapport à la fonctionnelle  $c$  définissant  $f(t)$ .  $c(P_n)$  est alors l'approximant de Padé de  $f(t)$ .

### I - FONCTION $\text{Log}(1+t)/t$ .

$$f(t) = \frac{\text{Log}(1+t)}{t} = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-xt} dx$$

Dans les tableaux 1, 2 et 3, on a pris pour  $P_n$ , le polynôme de meilleure approximation de  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  sur  $[-1, 0]$ .

$c(P_n)$  converge vers  $f(t)$  quel que soit  $t$  appartenant au plan complexe coupé selon  $]-\infty, -1[$ .

Dans le tableau 4,  $P_n$  est le polynôme de degré  $n$  qui interpole  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  aux racines des polynômes de Legendre sur  $[-1, 0]$ .  $c(P_n)$  n'est donc rien d'autre que l'approximant de Padé classique de  $\text{Log}(1+t)/t$ . Il n'est donc pas surprenant d'obtenir plus rapidement la limite que dans le tableau 1 car l'approximant de Padé nécessite en fait la connaissance des  $2n$  premiers coefficients de la série  $f(t)$ .

Tableau 1.

t=1 A=3 B=0,172

n	$ e_n ^{\frac{1}{n}}$	$c(P_n)$
0	1.000	.7500000000000000
1	.014	.7071067811865475
2	.018	.6928090415820632
3	.044	.6932299277390091
4	.036	.6931457505076198
5	.064	.6931482284539529
6	.049	.6931471664769530
7	.078	.6931471977386370
8	.061	.6931471803710348
9	.088	.6931471808822891
10	.070	.6931471805569454
11	.096	.6931471805665228
12	.078	.6931471805598924
13	.103	.6931471805600875
14	.085	.6931471805599444
15	.108	.6931471805599487
16	.098	.6931471805599454
17	.116	.6931471805599453
18	.133	.6931471805599453
19	.130	.6931471805599454
20	.165	.6931471805599452

Tableau 2.

t=-1-i A=i |B| = 0,4142

n	$ e_n ^{\frac{1}{n}}$	$c(P_n)$	Partie réelle	Partie imaginaire
0	1.000	.5000000000000000	.5000000000000000	.5000000000000000
1	.111	.7071067811865477E+00	.7071067811865477E+00	.7071067811865477E+00
2	.114	.7761423749153969E+00	.7761423749153968E+00	.7761423749153968E+00
3	.154	.7879870102263094E+00	.7879870102263093E+00	.7879870102263093E+00
4	.133	.7856180831641267E+00	.7856180831641266E+00	.7856180831641266E+00
5	.192	.7852116395368003E+00	.7852116395368012E+00	.7852116395368012E+00
6	.161	.7853858296627969E+00	.7853858296627978E+00	.7853858296627978E+00
7	.220	.785415159635566E+00	.785415159635549E+00	.785415159635549E+00
8	.184	.7853991124631370E+00	.7853991124631330E+00	.7853991124631330E+00
9	.240	.785396263728304E+00	.7853962637528360E+00	.7853962637528360E+00
10	.204	.7853980765684712E+00	.7853980765685240E+00	.7853980765685240E+00
11	.257	.7853983875985078E+00	.7853983875984336E+00	.7853983875984336E+00
12	.220	.7853981722700603E+00	.7853981722699608E+00	.7853981722700603E+00
13	.270	.7853981353251953E+00	.7853981353256714E+00	.7853981353251953E+00
14	.233	.7853981624183746E+00	.7853981624182822E+00	.7853981624183746E+00
15	.280	.7853981670660879E+00	.7853981670674521E+00	.7853981670660879E+00
16	.244	.7853981635149339E+00	.7853981635087379E+00	.7853981635149339E+00
17	.289	.7853981628970175E+00	.7853981629075974E+00	.7853981628970175E+00
18	.257	.7853981633817852E+00	.7853981633786020E+00	.7853981633817852E+00
19	.297	.7853981634662546E+00	.7853981634612523E+00	.7853981634662546E+00
20	.303	.7853981633964509E+00	.7853981633562057E+00	.7853981633964509E+00



Tableau 3.

t=-10-14i A = 0,93+0,0095i B = 0,798

n	$ e_n /n$	$c(P_n)$
0	1,000	.483734512633790E+00 .2527075812274362E-01
1	.112	.1174589334264728E+00 .2151454758316807E+00
2	.272	-.4639592976495716E-02 .2784370484015932E+00
3	.249	.1567334664043430E-01 .1931921037885140E+00
4	.291	.1161075871704710E-01 .2102410927111321E+00
5	.337	.5079199426244540E-02 .2011826474009206E+00
6	.342	.7878439122307930E-02 .2050648382481685E+00
7	.398	.4840395898578950E-02 .2047984942590915E+00
8	.384	.6528197689895299E-02 .2049464631421466E+00
9	.443	.5754051967845019E-02 .2056989209316615E+00
10	.419	.6246690156994855E-02 .2052200841475300E+00
11	.477	.6272517871390870E-02 .2056570769256379E+00
12	.447	.6254637183627818E-02 .2053545432368205E+00
13	.504	.6408001949288567E-02 .2054718899856419E+00
14	.471	.6295535492205777E-02 .2053858338227115E+00
15	.527	.6383865473892640E-02 .2053674188429943E+00
16	.492	.6316254500652084E-02 .2053815191800429E+00
17	.546	.6337635621831223E-02 .20534287634733356E+00
18	.510	.6319972057197545E-02 .2053741625938061E+00
19	.564	.6315653388564651E-02 .2053512028745703E+00
20	.572	.6311221702678783E-02 .2053828464972006E+00

Tableau 4.

t=1 A=3 B = 0,172

n	$ e_n /n$	$c(P_n)$
0	1,000	.0566666666666666667
1	.001	.6923076923076922
2	.005	.6931216931216931
3	.009	.6931464174454829
4	.012	.6931471578530402
5	.015	.6931471798865281
6	.016	.6931471805400137
7	.018	.6931471805593561
8	.019	.6931471805599279
9	.020	.6931471805599449
10	.024	.6931471805599454
11	.034	.6931471805599454
12	.049	.6931471605599453
13	.055	.6931471805599455
14	.073	.6931471805599453
15	.084	.6931471805599454
16	.101	.6931471805599453
17	.116	.6931471805599453
18	.127	.6931471805599454
19	.137	.6931471805599455
20	.165	.6931471805599452

## II - FONCTION Arctg t/t

$$f(t) = \frac{\text{Arctg } t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} + \dots$$

La fonction f est holomorphe dans le plan complexe coupé selon les deux demi-droites opposées [i, +∞[ et ]-∞, -i].

On prend pour  $P_n$  (tableau 5), le polynôme d'interpolation de la fonction génératrice aux racines de  $T_n$ , polynômes de Chebychev ramenés à [-i, i]. Le théorème 3 du chapitre 2 assure la convergence de  $c(P_n)$  vers f(t) et le théorème 8 donne :

$$\overline{\lim} |c(P_n) - f(t)|^{\frac{1}{n}} \leq |B|^{\frac{1}{n}}$$

avec  $B = A - \sqrt{A^2 - 1}$  et  $A = it^{-1}$ .

Tableau 5.

t=1	A=i	B  = 0,414
n	$ e_n ^{\frac{1}{n}}$	$c(P_n)$
0	1,000	,5000000000000000
1	,078	,7071067811865477
2	,096	,7761423749153967
3	,137	,7879870102263094
4	,122	,7856180831641268
5	,180	,7852116395368016
6	,152	,7853858296627981
7	,209	,7854157159635561
8	,177	,7853991124631350
9	,231	,7853962637528285
10	,197	,7853980765684781
11	,249	,7853983875984714
12	,213	,7853981722700144
13	,262	,7853981353234921
14	,227	,7853981624181420
15	,274	,7853981670665056

$$f(1) = \frac{\pi}{4} = 0,785398163397448$$

16	,239	,7853981635118746
17	,284	,7853981629019962
18	,249	,7853981633834791
19	,292	,7853981634660884
20	,258	,7853981633992141
21	,299	,7853981633877403
22	,266	,7853981633972167
23	,305	,7853981633988450
24	,273	,7853981633974709
25	,311	,7853981633972446
26	,280	,7853981633974441
27	,316	,7853981633974786
28	,286	,7853981633974469
29	,320	,7853981633974439
30	,274	,7853981633974483
31	,326	,7853981633974491



Tableau 6.

$t = -1 - i$      $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$      $|B| = 0,588$

n	$e_n \frac{1}{n}$	$c(P_n)$	
0	1.000	.2000000000000000	-.4000000000000000
1	.148	.5688644810057035	-.3515775842541424
2	.182	.6418193080077107	-.3354367740055238
3	.213	.7137224121135433	-.2985389610940436
4	.199	.7043411913403168	-.3059185246703198
5	.269	.7104123879098572	-.3086802441248440
6	.237	.7099535608086512	-.3075012243612455
7	.308	.7095325472050380	-.3073721907382280
8	.269	.7097664436514900	-.3074438700843493
9	.338	.7098359619070383	-.3073455814614054
10	.245	.7097911230171434	-.3074203144054824
11	.361	.7097906225545182	-.3074449204442592
12	.317	.7097913844132592	-.3074320343420290
13	.380	.7097880434214263	-.3074240714944484
14	.336	.7097904934021041	-.3074312445100075
15	.396	.7097916082567465	-.3074310415351175
16	.351	.7097907557020201	-.3074312019911055
17	.404	.7097906154465214	-.3074314609111091
18	.365	.7097907262402307	-.3074312517631530
19	.420	.7097906430401246	-.3074311824112232
20	.377	.7097907149228795	-.3074312435001235
21	.430	.7097907421547215	-.3074312441510274
22	.368	.7097907237892071	-.3074312444814594
23	.438	.7097907185432487	-.3074312484863861
24	.397	.7097907229579092	-.3074312451210453
25	.446	.7097907229176188	-.3074312432221140
26	.406	.7097907229008451	-.3074312448453480
27	.452	.7097907233487800	-.3074312451911078
28	.413	.7097907230212031	-.3074312448934115
29	.458	.7097907228580592	-.3074312444931763
30	.420	.7097907230002118	-.3074312448907468
31	.464	.7097907230216521	-.3074312448531308
32	.427	.7097907230028895	-.3074312448931088



### III - SUITE $S_n$ .

$$S_n = \frac{(-0,7)^n + (0,5)^n}{n+1}$$

$S_n$  est la somme d'une suite totalement monotone  $\frac{(0,5)^n}{n+1}$  et d'une suite totalement oscillante  $\frac{(-0,7)^n}{n+1}$  de limite 0.

Dans le tableau 6,  $P_n$  désigne le polynôme de meilleure approximation de la fonction génératrice  $x \rightarrow \frac{1}{1-xt}$  sur l'intervalle  $[-0,7 ; 0,5]$ .

On a  $t = 1$  et  $A = \frac{5}{3}$  d'où  $B = 0,297$ .

$c(P_n)$  converge plus vite que  $S_n$  (théorème 6 et 7 du chapitre 4).

Tableau 7.

n	$ e_n ^{\frac{1}{n}}$	$c(P_n)$	$S_n$
0	1.000	.2588235294117647E+01	.2000000000000000E+01
1	.066	-.6598953946049738E-01	-.9999999999999987E-01
2	.592	-.3501526375396319E+00	.2466666666666666E+00
3	.244	-.1446939776431138E-01	-.5449999999999986E-01
4	.404	.2659555647678049E-01	.6052000000000010E-01
5	.341	.4636096626428239E-02	-.2280333333333322E-01
6	.354	-.1961346530907067E-02	.1903914285714296E-01
7	.347	-.6108952322747378E-03	-.9317724999999884E-02
8	.318	.1038545629297206E-03	.6839362222222330E-02
9	.343	.6578437197282422E-04	-.3840048199999887E-02
10	.276	-.2544953608043382E-05	.2656735218181928E-02
11	.335	-.6055581210433080E-05	-.1607082181666555E-02
12	.294	-.4214938138853599E-06	.1083494448153956E-02
13	.327	.4940596526213380E-06	-.6833450320141745E-03
14	.313	.8728984806131122E-07	.4562177256494439E-03
15	.318	-.3455265616332106E-07	-.2948152457385139E-03
16	.319	-.1133608124082797E-07	.1963854027073225E-03
17	.307	.1900248677610812E-08	-.1288153191854902E-03
18	.319	.1191204343930616E-08	.8590675237779891E-04
19	.286	-.4560278369637875E-10	-.5689910849511418E-04
20	.318	-.1102149960437608E-09	.3804173034737399E-04
21	.295	-.7149695292775381E-11	-.2536677393102915E-04
22	.315	.8980773159779918E-11	.1700958797563000E-04
23	.307	.1546433269525131E-11	-.1139867767119155E-04
24	.310	-.6389297585462204E-12	.7665633441124534E-05
25	.311	-.2017724821068218E-12	-.5156809986197157E-05
26	.304	.3505393159703999E-13	.347739646469064E-05
27	.311	.2097892452002114E-13	-.2346603992156893E-05
28	.290	-.881436955059072E-15	.1586288729240951E-05





## RÉFÉRENCES

- [1] N.I. AKHIEZER  
*Theory of approximation*  
Frederick Ungar Publishing Co, New-York, 1956.
- [2] G.A. BAKER  
*Essentials of Padé Approximants*  
Academic Press, New-York, 1975.
- [3] C. BREZINSKI  
*Padé-type approximants and general orthogonal polynomials*  
ISNM vol 50, Birkhauser Verlag, Basel, 1980.
- [4] C. BREZINSKI  
*Convergence acceleration of some sequence by the  $\varepsilon$ -algorithm*  
Numer. Math., 29 - (1978), 173-177.
- [5] C. BREZINSKI  
*Accélération de la convergence en analyse numérique*  
Springer Verlag, Berlin and New-York, 1977.
- [6] C. BREZINSKI  
*Matrices semi-définies positives et suites de moments*  
Unpublished.
- [7] W.J. CODY, G. MEINARDUS and R.S. VARGA  
*Chebyshev rational approximation to  $e^{-x}$  in  $[0, +\infty[$  and applications to Heat-Conduction problems*  
J. Approx. Theory 2 (1969), 50-65.
- [8] J.P. DELAHAYE  
*Théorie des transformations de suites en analyse numérique*  
Thèse, Université de Lille I, 1982.

- [ 9] J. FAVARD  
*Sur les polynômes de Tchebischeff*  
C.R. Acad. Sc. Paris 200, (1935), 2052-2053.
- [10] H. FIEDLER and W.G. JURKATT  
*A remark on best approximation of alternating series*  
J. Approx. Theory 34 (1982), 423-425.
- [11] G. FREUD  
*Orthogonal Polynomials*  
Pergamon Press, 1966.
- [12] S.Å. GUSTAFSON  
*Convergence Acceleration on a general class of Power series*  
Computing 21 (1978) 53-69.
- [13] G.H. HARDY  
*Divergent Series*  
Oxford : Clarendon Press 1948.
- [14] R.L. HIGGINS  
*Topics in the application of summation methods*  
Ph. D, Drexel University, 1976.
- [15] W.B. JURKATT and B.L.R. SHAWYER  
*Best approximation of alternating series*  
J. Approx. Theory 34 (1982), 397-422.
- [16] G.G. LORENTZ  
*Approximation of functions*  
Holt, 1966.
- [17] Y.L. LUKE  
*Rational Approximations to the exponential function*  
Journal of ACM, n° 4, 1957, 24-29.

- [18] G. MEINARDUS  
*Approximation of functions. Theory and numerical methods*  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.
- [19] G. NEMETH  
*Geometric convergence of some two-point Padé approximations*  
Preprint
- [20] W. NIETHAMMER  
*Numerical application of Euler's series transformation and its generalizations*  
Numer. Math., 34, 271-283 (1980).
- [21] S. PASZKOWSKI  
*Zastosowania numeryczne Wielomianow i szeregow Czebyszewa*  
Warszawa 1975.
- [22] M. PREVOST  
*Padé-type approximants with orthogonal generating Polynomials*  
J. Comp. Appl. Math., à paraître.
- [23] TH. J. RIVLIN  
*An introduction to the approximation of functions*  
DORA, 1981.
- [24] E.B. SAFF, A. SCHÖNHAGE and R.S. VARGA  
*Geometric convergence to  $e^{-z}$  by rational functions with real poles*  
Numer. Math., 25 (1976) 307-322.
- [25] A. SCHÖNHAGE  
*Rational approximation to  $e^{-x}$  and related  $L^2$ -problems*  
Siam J. Numer. Anal., Vol 19, n° 5, October 1982.

- [26] A. SCHÖNHAGE  
*Zur rationalen approximierarbeit von  $e^{-x}$  über  $[0, +\infty[$*   
J. Approx. Theory 7 (1973), 395-398.
- [27] F.G. TRICOMI  
*Vorlesungen über Orthogonalreihen*  
Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New-York, 1970.
- [28] R.S. VARGA  
*Topics in Polynomial and rational interpolation and approximation.*  
Presses de l'Université de Montréal - 1982.
- [29] D.V. WIDDER  
*The Laplace transform*  
Princeton Univ. Press, Princeton, New-Jersey, 1946.
- [30] J. WIMP  
*Toeplitz Arrays, Linear sequence transformations and orthogonal polynomials*  
Numer. Math., 23, (1974) 1-17.

