N° d'ordre : 1106

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Mohamed El Djalil KATEB

ITERATIONS D'ALGORITHMES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

Soutenue le 17 novembre 1983 devant la Commission d'Examen

MEMBRES DU JURY :

Président	C. BREZINSKI
Rapporteur	B. GERMAIN BONNE
Examinateur	S. PASZKOWSKI

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique
M.	DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques
M.	FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	GERVAIS Michel	S.E.S.
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HANGAN Théodore	Mathématiques
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M.	KREMBEL Jean	Biologie
M.	LAURENT François	I.E.E.A.
Mle	LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle	LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

ITERATIONS D'ALGORITHMES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE*

* TRAVAIL EFFECTUE DANS LE CADRE DE LA SUBVENTION DE RECHERCHE OTAN 027-81

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout, à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur P. POUZET, Professeur à l'Université de LILLE I, d'avoir bien voulu m'accorder la préparation du 3ème cycle en Mathématiques appliquées.

Je remercie, Monsieur C. BREZINSKI, Professeur à l'Université de LILLE I, d'avoir bien voulu présider le Jury de la Thèse.

Ma profonde reconnaissance pour Monsieur B. GERMAIN-BONNE, Professeur à l'Université de LILLE I, pour ses remarques pertinentes, et surtout pour sa chaleur humaine qui a beaucoup compté dans mon travail.

Ma profonde gratitude à Monsieur PASZKOWSKI, Professeur associé à l'Université de LILLE I, d'avoir voulu juger ce travail, et pour sa participation au Jury.

Vu le nombre, je m'excuse de ne pas citer tous ceux qui ont, de près comme de loin, participé à l'élaboration de ce travail.

Mes remerciements à Mademoiselle B. FIEVET pour le soin et la rapidité qu'elle a apportés dans la dactylographie de cette Thèse, et à Madame DEBOCK pour le tirage.

A mes parents qui ont tant sacrifié pour mes études.

A mes frères et soeurs.

A mes amis ; qui sous d'autres cieux orageux et flamboyants ; se battent pour l'avènement d'un nouveau monde.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE II : ITERATIONS D'ALGORITHMES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

CHAPITRE III : UNE ITERATION PARTICULIERE DE LA PROCEDURE θ

CHAPITRE IV : ACCELERATION DE LA CONVERGENCE PAR LE PROCEDE δ^2 AITKEN ITERE DANS UN HILBERT REEL

CHAPITRE I

POSSIBILITES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

PAR L'ITERATION DU PROCEDE δ^2 D'AITKEN

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions la possibilité d'accélération de la convergence de suites convergentes par l'itération du procédé δ^2 AITKEN.

En littérature, les ouvrages traitant du procédé δ^2 AITKEN sont très nombreux, nous retiendrons surtout ceux d'AITKEN [1] et de SHANKS [15].

On trouvera des études théoriques sur le procédé δ^2 AITKEN itéré dans les articles d'AITKEN [1], de SHANKS [15] et de LUBKIN [13].

Plusieurs expériences numériques ont été faites par BREZINSKI dans [3], par WYNN [18] et par LUBKIN [13]. Cependant, l'itération du procédé δ^2 AITKEN nécessite une étude théorique plus profonde et c'est l'objet de ce premier chapitre.

Nous commençons par rappeler certaines définitions et propriétés du procédé δ^2 AITKEN. Nous étudions ensuite les possibilités d'accélération de la convergence de suites à convergence linéaire et leurs applications à certaines suites T.M. ou T.O. Après avoir donné quelques exemples numériques, nous tenterons d'accélérer la convergence de certaines suites à convergence logarithmique par un procédé dérivé du procédé δ^2 AITKEN itéré.

NOTATIONS, DEFINITIONS

On appelera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

On désignera toujours par (S_n) une suite de réels supposée convergente de limite S^*.

S_n désignera le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite (S_n).

On notera e_n l'erreur commise en prenant l'itéré S_n comme approximation de S^* : $e_n = S_n - S^*$. (e_n) désigne la suite erreur.

On supposera $e_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ΔS_n désignera la différence entre deux termes consécutifs de la suite (S_n) :

$$\Delta S_n = S_{n+1} - \Delta S_n.$$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels de limite nulle ; on écrit $v_n = O\,(u_n)$ si :

$$\exists N \text{ et } C > 0 : \forall n > N \text{ on a } |v_n| < C|u_n|.$$

Procédé d'accélération :

Soit (S_n) de limite S^* et considérons un procédé transformant (S_n) en une suite (T_n).

Le procédé est dit :

- exact pour (S_n) s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N \quad T_n = S^*$

- régulier pour (S_n) si $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = S^*$

- Accélérant la convergence de (S_n) si $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

I. PRESENTATION ET PROPRIETES DU PROCEDE δ^2 AITKEN

Le but de ce paragraphe est de rappeler la définition du procédé δ^2 AITKEN, procédé qu'on trouve exposé dans la plupart des ouvrages traitant d'analyse numérique [2], [17], [15]. Par la suite, nous énoncerons les propriétés du procédé δ^2 AITKEN dont les démonstrations sont dans [2], [17].

a) Présentation du procédé δ^2 AITKEN

Soit (S_n) une suite convergente telle que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$ et appartenant à l'ensemble noté LIN défini par

$$\text{LIN} = \{(x_n) \text{ convergente} \,/\, \exists\rho,\ 0 \leq |\rho| \leq 1,\ \rho \neq 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \rho\}.$$
$$x_n \to x^*$$

D'après la définition de LIN, si $(S_n) \in$ LIN alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} \left(\frac{\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1}{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} \quad \text{car } \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} \neq 1$$

Supposons qu'à partir d'un certain rang on ait :

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$$

Il est facile de déduire $S^* = \dfrac{S_{n+1}\,\Delta e_n - S_n\,\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n - \Delta e_{n+1}}$

Soit en développant : $S^* = \dfrac{S_{n+1}^2 - S_n\,S_{n+2}}{-S_{n+2} + 2S_{n+1} - S_n} = \dfrac{S_n\,S_{n+2} - S_{n+1}^2}{S_{n+2} - 2\,S_{n+1} + S_n}$

Ce qui nous amène à définir le procédé δ^2 AITKEN - qu'on notera T - le procédé suivant :

$(S_n) \xrightarrow{T} T(S_n) = (\varepsilon_2^{(n)})_{n\geq 0}$ où la quantité $\varepsilon_2^{(n)}$ est donnée par :

$$\varepsilon_2^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{S_n\,S_{n+2} - S_{n+1}^2}{S_{n+2} - 2\,S_{n+1} + S_n} & \text{si } \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \neq 1 \\[2em] S_n & \text{si } \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 \end{cases}$$

Cette définition garantit l'existence de $\varepsilon_2^{(n)}$ $\forall n \geq 0$.

b) Propriétés du procédé δ^2 AITKEN

Etant donné un procédé transformant une suite (S_n) en une autre ; il est naturel d'en savoir les propriétés de régularité, d'exactitude, et d'accélération. Concernant le δ^2 AITKEN, on a les propriétés suivantes :

P1) Régularité : Le δ^2 AITKEN est défini et régulier pour toute suite (S_n) vérifiant :

$$\left|\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right| \geq \delta, \ \delta > 0, \ n \geq 0$$

P2) Exactitude : Le δ^2 AITKEN est exact pour toute suite (S_n) de la forme $S_n = S^* + c\,\lambda^n$, $\lambda \neq 1$.

P3) Accélération : Soit (S_n) une suite convergente : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$ avec la quantité $e_n = S_n - S^*$ vérifiant :

- $e_n \neq 0 \ \forall n$
- $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + \omega_n$

où ρ est une constante telle que $-1 \leq \rho < 1$ et (ω_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. Alors $(\varepsilon_2^{(n)})$ est définie pour n assez grand et de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_n - S^*} = 0$.

REMARQUES

Remarque 1 : Par définition, $\varepsilon_2^{(n)}$ est construit à partir de S_n, S_{n+1}, S_{n+2} et il serait donc plus logique de comparer $\varepsilon_2^{(n)}$ avec S_{n+2}.

Supposons (S_n) vérifiant : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ où $\begin{matrix}\rho \neq 0 \\ \rho \neq 1\end{matrix}$ et $0 < |\rho| \leq 1$.

D'après P3), on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_n - S^*} = 0$ et comme on a $\rho \neq 0$; on déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_{n+2} - S^*} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_n - S^*} \cdot \frac{S_n - S^*}{S_{n+2} - S^*} = \frac{0}{\rho^2} = 0$$

Supposons maintenant ρ égal à zéro. On n'a pas toujours $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_{n+2} - S^*} = 0$ et l'utilisation du procédé δ^2 AITKEN s'avérait inutile vu que le procédé T_1 : $(S_n) \xrightarrow{T_1} (S_{n+1})$ accélère la convergence de la suite (S_n).

Ceci nous amène à écarter par la suite le cas ρ nul et on considèrera alors le rapport d'accélération $\frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_n - S^*}$ au lieu du rapport $\frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_{n+2} - S^*}$.

Remarque 2 : Soit (S_n) une suite appartenant à LIN ; il existe alors ρ tel que $\frac{e_{n+1}}{e_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho$, $0 < \underset{\rho\neq 1}{|\rho|} \leq 1$.

Considérons les deux suites $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ et $\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}$. Dans le cas où ρ est différent de -1 ; on montre dans [20] que les deux suites ont des comportements équivalents.

En d'autres termes ; ceci veut dire qu'on peut remplacer une hypothèse difficilement vérifiable sur le plan pratique par une autre plus contrôlable.

Par souci de présentation ; et bien que le cas $\rho = -1$ sont épineux, on considèrera deux classes de suites de LIN, une classe de suites (S_n) définies par une propriété sur l'erreur $e_n = s_n - s^*$ et une autre classe de suites (S_n) définies par une propriété sur l'erreur $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$.

II. PROCEDE δ^2 AITKEN ITERE ET LES DIFFICULTES LIEES A LA DETERMINATION DE SON ENSEMBLE D'ACCELERATION

a) Présentation

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente à laquelle on applique un procédé T. Soit $T_n^{(1)}$ la suite obtenue. On applique de nouveau T à $T_n^{(1)}$ pour obtenir $T_n^{(2)}$ à laquelle on applique T et ainsi de suite. On obtient ainsi un tableau à double indice (n, k) où k varie en diagonale :

$$
\begin{array}{llll}
T_0^{(0)} = S_0 & & & \\
T_1^{(0)} = S_1 & T_0^{(1)} & & \\
T_2^{(0)} = S_2 & T_1^{(1)} & T_0^{(2)} & \\
T_3^{(0)} = S_3 & T_2^{(1)} & T_1^{(2)} & T_0^{(3)} \\
T_4^{(0)} = S_4 & T_3^{(1)} & T_2^{(2)} & \ddots \\
T_5^{(0)} = S_5 & T_4^{(1)} & \vdots & \\
T_6^{(0)} = S_6 & \vdots & & \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

L'accélération de la convergence de la suite (S_n) peut se faire de plusieurs façons. On peut alors étudier la transformation $\mathcal{S}_k^{(0)} : (s_n) \to (T_n^{(k)})_{\substack{n\geq 0 \\ k\geq 1}}$ et examiner les conditions sur (S_n) pour que la colonne k converge plus vite que la colonne initiale. i.e. quand pour k fixe, $T_n^{(k)}$ converge plus vite que S_n vers $\lim S_n$.

Ou alors étudier la transformation $\mathcal{S}_k : (T_n^{(k)})_{n\geq 0} \to (T_n^{(k+1)})_{n\geq 0}$; et examiner les conditions sur (S_n) pour que la colonne (k+1) converge plus vite que la colonne k.

Dans ce chapitre on pourra aussi considérer la transformation diagonale $(S_n) \to (T_p^{(k)})_{k\geq 0}$ p fixé.

Examinons le cas particulier suivant :

Application T = procédé δ^2 AITKEN.

On obtient alors des quantités $T_n^{(k)} = {}_{(k)}\varepsilon_2^{(n)}$ que l'on calculera récursivement :

$$(1) \quad \begin{cases} {}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} = {}_k\varepsilon_2^{(n)} - \dfrac{(\Delta_k \varepsilon_2^{(n)})^2}{\Delta^2{}_k\varepsilon_2^{(n)}} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ {}_0\varepsilon_2^{(n)} = S_n \end{cases}$$

On conviendra que s'il existe $m / \dfrac{\Delta_m \varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_m \varepsilon_2^{(n)}} = 1$ alors ${}_k\varepsilon_2^{(n)} = {}_m\varepsilon_2^{(n)}$ $\forall k > m$.

Cette définition garantit bien l'existence des quantités ${}_k\varepsilon_2^{(n)}$.

b) Accélération par le procédé δ^2 AITKEN itéré

Soit à considérer l'algorithme $S_k^{(0)} : s_n \to S_k^{(0)}(S_n) = {}_k\varepsilon_2^{(n)}$, où $({}_k\varepsilon_2^{(n)})_{\substack{n\geq 0\\ k\geq 1}}$ désignent les quantités calculées en (1).

La question la plus évidente qui vient à l'esprit est :

$S_k^{(0)}$ accélère-t-il la convergence de toute suite convergente appartenant à Lin.

Avant de répondre à la question, nous avons besoin d'introduire des notations et un théorème qui permet de caractériser certains procédés accélérant l'ensemble des suites $(S_n) / \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ où $0 < |\rho| < 1$; ce travail a été élaboré par GERMAIN-BONNE [10].

Soit $G : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$. Pour toute suite (S_n) convergente on définit

$$S_n^{(k)} = G(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k}).$$

G vérifiant :

1) G continue sur $\mathbb{R}^{k+1}$.

2) G homogène ; $G(\lambda x) = \lambda G(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{k+1}$.

3) G translative ; $G(x+\alpha e) = G(x)+\alpha$, $x \in \mathbb{R}^{k+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$e = (1,\dots, 1)$.

Soit $\mathcal{D}_{k+1}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{k+1}$ / $x_i = x_j \Longleftrightarrow i = j$ $\begin{array}{l} 1 \le i < k \\ 1 \le j \le k+1 \end{array}$

Soient $\mathcal{F}_{k-1}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^{k-1}$ / $x_i \neq 0$, $1 \le i \le k-1$, et
$\mathcal{G}_{k-1}$ le sous-espace de $\mathcal{F}_{k-1}$ intérieur à l'hypercube $|x_i| < 1$.

On a alors le théorème suivant :

<u>*Théorème 1*</u> : Soit G continue sur $\mathcal{D}_{k+1}$ satisfaisant 2) et 3) ; on peut écrire :

$$G(x) = G(x_0, x_1,\dots, x_k) = x_0 + (x_1 - x_0)\, g\left[\frac{x_2-x_1}{x_1-x_0}, \frac{x_3-x_2}{x_2-x_1},\dots,\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}-x_{k-2}}\right]$$

où g est définie et continue sur $\mathcal{F}_{k-1}$.

Il est clair que d'après l'écriture $S_n^{(k)} = G(S_n,\dots, S_{n+k})$, G accélère (S_n) convergente si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(k)} - S^*}{S_n - S^*} = 0$

Employons les notations suivantes :

$$- \rho_n = \frac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1}-S_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n},\ a_n \neq 0 \quad (n \ge 0)$$

$$- e_n = s_n - s^*,\ h_n = \frac{e_{n+1}}{e_n},\ e_n^{(k)} = s_n^{(k)} - s^*$$

on suppose que G satisfait aux conditions 2) et 3).

D'après le théorème 1 on peut écrire :

$$s_n^{(k)} = G(s_n,\dots, s_{n+k}) \Rightarrow e_n^{(k)} = e_n + \Delta r_n\, g(\rho_n,\dots, \rho_{n+k-2}).$$

Considérons le sous-ensemble A_ρ de Lin défini par

$$(S_n) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho, \text{ fixé, } 0 < |\rho| < 1.$$

On a alors le théorème qu'on utilisera tout le long de ce travail.

Théorème 2 : Soit g définie sur G_{k-1}, $k \geq 2$.

G accélère $A_\rho \iff$ g est continue dans un voisinage de ρ e

(e = (1,..., 1) et $g(\rho\ e) = \frac{1}{1-\rho}$.

Grâce au théorème 2 ; et en tenant compte des propriétés énoncées précédemment du δ^2 AITKEN, nous allons montrer que $S_k^{(0)}$ n'accélère pas A_ρ et donc Lin.

Pour $k=2$ on a $S_2^{(0)}$: $(s_n) \to ({}_2\varepsilon_2^{(n)})$; nous allons essayer d'écrire ${}_2\varepsilon_2^{(n)}$ sous la forme :

$${}_2\varepsilon_2^{(n)} = s_n + \Delta s_n\ g(\rho_n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2})$$

(Le k correspondant au théorème 1 vaut 4).

Ensuite pour montrer que $S_2^{(0)}$ n'accélère pas A_p, on doit montrer que g n'est pas continue en ρ e où e = (1, 1, 1).

$$\text{On a } {}_2\varepsilon_2^{(n)} = {}_1\varepsilon_2^{(n)} - \frac{(\Delta_1\varepsilon_2^{(n)})^2}{(\Delta^2\ {}_1\varepsilon_2^{(n)})} = s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2\ s_n} - \frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\dfrac{\Delta^2\ {}_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} - 1}$$

Calcul de $\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}$

$$\text{On a } {}_1\varepsilon_2^{(n)} = s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n} \Rightarrow \Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta s_n - \frac{(\Delta s_{n+1})^2}{\Delta^2 s_{n+1}} + \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n}$$

ce qui équivaut à $\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta s_n - \dfrac{\Delta s_{n+1}}{\dfrac{\Delta s_{n+2}}{\Delta s_{n+1}} - 1} + \dfrac{\Delta s_n}{\dfrac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} - 1}$.

$$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1} + \frac{1}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} \right]$$

$$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n \left[\frac{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} - \frac{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1} \right]$$

$$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_{n+1} \left[\frac{1}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} - \frac{1}{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1} \right]$$

en tenant compte des notations précédentes : $\rho_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ on écrit alors :

$$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_{n+1} \left[\frac{1}{\rho_n - 1} - \frac{1}{\rho_{n+1} - 1} \right]$$

i.e. $$\boxed{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_{n+1} \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{(\rho_{n+1}-1)(\rho_n-1)}} \qquad (2)$$

<u>Calcul de</u> $\dfrac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}$

D'après (2) on tire $\dfrac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} = \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \cdot \dfrac{\rho_{n+2} - \rho_{n+1}}{\rho_{n+1} - \rho_n} \; \dfrac{\rho_{n+1} - 1}{\rho_{n+2} - 1} \quad \dfrac{\rho_n - 1}{\rho_{n+1} - 1}$

$$\boxed{\frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} = \rho_{n+1} \cdot \frac{\rho_{n+2} - \rho_{n+1}}{\rho_{n+1} - \rho_n} \; \frac{\rho_n - 1}{\rho_{n+2} - 1}} \qquad (2')$$

Expression de ${}_2\varepsilon_2^{(n)}$ en fonction de ρ_n, ρ_{n+1}, ρ_{n+2}

On a $${}_2\varepsilon_2^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} - \frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+2)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} - 1},$$

$${}_2\varepsilon_2^{(n)} = S_n + \Delta S_n \left[\frac{1}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - \frac{\frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n}}{\frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+2)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} - 1} \right]$$

De (2) il vient : $$\frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{(1-\rho_{n+1})(1-\rho_n)} = \rho_n \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{(1-\rho_{n+1})(1-\rho_n)}$$

de même d'après (2') on obtient :

$${}_2\varepsilon_2^{(n)} = S_n + \Delta S_n \left[\frac{1}{1-\rho_n} - \frac{\rho_n \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{(1-\rho_{n+1})(1-\rho_n)}}{\rho_{n+1} \frac{\rho_{n+2} - \rho_{n+1}}{\rho_{n+1} - \rho_n} \frac{\rho_n - 1}{\rho_{n+2} - 1} - 1} \right]$$

i.e. $${}_2\varepsilon_2^{(n)} = S_n + \Delta S_n \, g(\rho_n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2})$$

avec $$g(x, y, z) = \frac{1}{1-x} - \frac{x \frac{y-x}{(1-y)(1-x)}}{y \frac{z-y}{y-x} \cdot \frac{x-1}{z-1} - 1}$$

En posant $$g_2(x, y, z) = \frac{y-x}{y \frac{z-y}{y-x} \frac{x-1}{z-1} - 1}$$

On écrit alors $$g(x, y, z) = \frac{1}{1-x} - g_2(x, y, z) \frac{x}{(1-y)(1-x)}$$

Pour montrer que g n'est pas continu en $(\rho, \rho, \rho) \neq (1, 1, 1)$ nous allons montrer que g_2 est non bornée au voisinage de (ρ, ρ, ρ).

faisons $y = \rho$ dans l'expression $g_2(x, y, z)$:

$$g_2(x, \rho, z) = \frac{\rho - x}{(\rho \frac{z-\rho}{\rho-x} \frac{x-1}{z-1} - 1)} = \frac{\rho - x}{\rho\left[\frac{z-\rho}{\rho-x} \cdot \frac{x-1}{z-1} - \frac{1}{\rho}\right]}$$

Nous allons montrer que g_2 est non bornée quand $(x-\rho, z-\rho)$ parcourt un cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon ε où ε est un réel choisi suffisamment voisin de zéro et $0 < \varepsilon < 1$.

On a alors $\begin{matrix} x-\rho = \varepsilon \cos\theta \\ z-\rho = \varepsilon \sin\theta \end{matrix}$ $\quad 0 < \theta < 2\pi$

Ce qui nous amène à étudier l'expression :

$$g_1(\theta) = \frac{\varepsilon \cos\theta}{\frac{\varepsilon \sin\theta}{\varepsilon \cos\theta} \frac{\rho-1+\varepsilon \cos\theta}{\rho-1+\varepsilon \sin\theta} + \frac{1}{\rho}} = \frac{\varepsilon\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta \cdot \frac{\rho-1+\varepsilon \cos\theta}{\rho-1+\varepsilon \sin\theta} + \frac{1}{\rho}} = \frac{N(\theta)}{D(\theta)}$$

Nous allons montrer qu'il existe une valeur de θ telle que :

$N(\theta)$ s'annule au voisinage de cette valeur de θ tout en ayant $N(\theta) \neq 0$ il s'en suivra alors que g_2 n'est pas bornée au voisinage de (ρ, ρ, ρ).

Posons $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$; quand $0 < \theta < 2\pi$ t parcourt $]-\infty, +\infty[$

On sait alors que $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$

On a alors :

$$\operatorname{tg}\theta \frac{\rho-1+\varepsilon \cos\theta}{\rho-1+\varepsilon \sin\theta} + \frac{1}{\rho} = \frac{2t}{1-t^2} \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\rho-1} \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2\varepsilon}{\rho-1} \frac{t}{1+t^2}} + \frac{1}{\rho}$$

A ε fixe, $0 < \varepsilon < |\rho-1|$ étudions la fonction :

$$h_\varepsilon(t) = \frac{2\,t}{1-t^2}\,\frac{1+\dfrac{\varepsilon}{\rho-1}\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\dfrac{2\varepsilon}{\rho-1}\,\dfrac{t}{1+t^2}} + \frac{1}{\rho}.$$

h_ε n'est pas défini pour t tel que :

- $1-t^2 = 0$ i.e. $t = \pm 1$

- $1+\dfrac{2\varepsilon}{\rho-1}\,\dfrac{t}{1+t^2} = 0 \iff (\rho-1)\,t^2 + 2\,\varepsilon\,t + (\rho-1) = 0$

Cependant le trinôme en t : $(\rho-1)\,t^2 + 2\,\varepsilon\,t + (\rho-1)$ n'admet pas de racines réelles ; en effet son descriminant vaut $\varepsilon^2 - (\rho-1)^2$ qui est négatif vu qu'on a pris la précaution de prendre $\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < 1-\rho$.

Donc h_ε est continue dans $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$.

De plus $\begin{cases} \lim\limits_{t\to -1_+} h_\varepsilon(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to +1_-} h_\varepsilon(t) = +\infty \\ h_\varepsilon(0) = \dfrac{1}{\rho} \end{cases}$

h_ε étant continue dans l'intervalle $]-1,\ 1[$, $\exists$ alors $t_1 \in\ ]-1,\ 1[$ tel que $h_\varepsilon(t_1) = 0$ (Théorème des valeurs intermédiaires).

La fonction tg étant surjective $\exists$ alors $\theta_1 \mid \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} = t_1$ et on a $h(\varepsilon,\ \theta_1) = 0$ et par conséquent g_2 n'est pas borné au voisinage de $(\rho,\ \rho)$ et donc non continue en $(\rho,\ \rho)$.

On en conclut que g n'est pas continue en $(\rho,\ \rho,\ \rho)$.

On s'aperçoit donc que l'on a besoin d'informations supplémentaires sur (S_n).

Trouver ces informations par le biais de l'accélération par $S_k^{(0)}$ s'avère difficilement manipulable sur le plan théorique.

Ce qui serait plus judicieux et intéressant sur le plan pratique, ce serait de considérer l'accélération par le procédé δ^2 AITKEN itéré de la suite initiale tout en ayant accélération d'une colonne k+1 par rapport à la colonne k.

c) Algorithme d'accélération d'une colonne k+1 par rapport à la colonne k

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^*, après application du procédé δ^2 AITKEN itéré nous obtenons les quantités $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$.

Définissons S_k le procédé : $({}_{k-1}\varepsilon_2^{(n)}) \to ({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ $k \geq 1$ où $({}_0\varepsilon_2^{(n)}) = S_n$.

Introduisons les ensembles $(\mathcal{D}_k)_{k\geq 0}$ qu'on définit par :

$(S_n) \in \mathcal{D}_k \iff ({}_i\varepsilon_2^{(n)})$ converge plus vite que $({}_{i-1}\varepsilon_2^{(n)})$ vers S^*, $i = 1,\ldots, k$.

Il s'en découle automatiquement alors que $\mathcal{D}_1$ = LIN et que l'on a alors Trivialement $\ldots\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}_{p-1} \subset\ldots\subset \mathcal{D}_1$ = LIN, ce qui nous amène alors à considérer $\mathcal{D} = \bigcap_{k>0} \mathcal{D}_k$.

La question la plus naturelle que l'on peut se poser est :

- $\mathcal{D}$ = LIN ?

sinon montrons au moins que $\mathcal{D}$ est non vide.

Montrons par un contre-exemple que $\mathcal{D}$ n'est pas LIN.

Pour cela montrons qu'$\exists\, k_1 \in \mathbb{N}^*, k_2 \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{D}_{k_1} \subset \mathcal{D}_{k_2}$ au sens strict (Inclusion stricte !).

Faisons $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$.

Cherchons la condition sur (S_n) pour que $(S_n) \in \mathcal{D}_2$.

Comme $(S_n) \in \text{LIN} = \mathcal{D}_1$, $\exists$ alors ρ tel que $0 < |\rho| \leq 1$ tel que $\rho \neq 1$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + u_n \text{ où } \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

$$(S_n) \in \mathcal{D}_2 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{{}_2\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*} = 0.$$

$$\text{or } {}_2\varepsilon_2^{(n)} - S^* = {}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^* - \frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\dfrac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta\,\varepsilon_2^{(n+1)}} - 1},$$

$$\text{d'où } \frac{{}_2\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*} = 1 - \frac{\dfrac{{}_1\varepsilon_2^{(n+1)} - S^*}{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*} - 1}{\dfrac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} - 1}$$

$$\text{d'où } \lim_{n\to\infty} \frac{{}_2\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*} = 0 \iff \frac{\dfrac{{}_1\varepsilon_2^{(n+1)} - S^*}{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*} - 1}{\dfrac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad (C_1)$$

Si nous arrivons à montrer que la seule condition $(S_n) \in \mathcal{D}_1$ ne suffit pas pour avoir (C_1) alors on aura montré que $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ (Inclusion stricte) par définition de $\mathcal{D}_2$.

<u>Evaluation de</u> $\dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1} - S^*}{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*} = \dfrac{{}_1\varepsilon^{(n+1)}}{{}_1\varepsilon_n}$

où ${}_1\varepsilon_n = {}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*$.

$$\text{On a } \varepsilon_n = \frac{e_n\, e_{n+2} - e_{n+1}^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n} = \frac{e_n\, e_{n+1}\left(\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n}\right)}{e_n\left(\frac{e_{n+2}}{e_n} - \frac{2e_{n+1}}{e_n} + 1\right)}$$

i.e. $$\varepsilon_n = e_{n+1}\,\frac{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{\frac{e_{n+2}}{e_n} - \frac{2e_{n+1}}{e_n} + 1}$$

D'où

$$\frac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} = \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}\;\frac{\frac{e_{n+3}}{e_{n+2}} - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n}}\;\frac{\frac{e_{n+2}}{e_n} - \frac{2e_{n+1}}{e_n} + 1}{\frac{e_{n+3}}{e_{n+1}} - \frac{2e_{n+2}}{e_{n+1}} + 1}$$

i.e. $\dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} = (\rho + u_{n+1})\,\dfrac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}\,\dfrac{K_n}{K_{n+1}}$ où (K_n) est une suite de limite $(\rho-1)^2$.

On en déduit alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} = \rho \lim \dfrac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$

Exhibons une suite $(S_n) \in$ LIN de telle manière que (C_1) ne soit pas vérifiée.

Définissons une suite (S_n) par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3^n}\right) \text{ si } n \text{ impair,} \\ S_{n+1} = S_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) \text{ si } n \text{ pair,} \\ S_0 \text{ choisi près de zéro, } S_0 > 0. \end{cases}$$

Il est clair que la suite (S_n) décroissante, positive converge. La limite S^* vérifiant $S^* = \frac{S^*}{2}$. Comme le cas $S^* = \infty$ ne peut avoir lieu, on a alors $S^* = 0$.

Dans ce cas $e_n = S_n$ et $u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & n \text{ impair} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ pair} \end{cases}$

Il est clair que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et donc que $S_n \in$ LIN [avec $\rho = \frac{1}{2}$].

<u>Soit à évaluer</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$

Supposons n pair ; il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

$$\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} = \frac{u_{2k+2} - u_{2k+1}}{u_{2k+1} - u_{2k}} = \frac{\frac{1}{2^{2k+2}} - \frac{1}{3^{2k+1}}}{\frac{1}{3^{2k+1}} - \frac{1}{2^{2k}}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1 - (\frac{2}{3})^{2k}\frac{4}{3}}{(\frac{2}{3})^{2k}\frac{1}{3} - 1}\right]$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} = -\frac{1}{4}$.

Supposons n impair, il existe alors $k/n = 2k+1$.

$$\text{d'où } \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} = \frac{u_{2k+3} - u_{2k+2}}{u_{2k+2} - u_{2k+1}} = \frac{(\frac{1}{3})^{2k+3} - (\frac{1}{2})^{2k+2}}{(\frac{1}{2})^{2k+2} - (\frac{1}{3})^{2k+1}}$$

$$\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k+2}}\left|\frac{(\frac{2}{3})^{2k}\frac{27}{4} - 1}{1 - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{2k+1}}\right|$$

d'où $\frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$.

Comme $\frac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} \sim \rho \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$ à partir d'un certain rang

On obtient alors $\begin{cases} \dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} - 1 \sim -\dfrac{\rho}{4} - 1 \text{ si n est pair} \\ \\ \dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} - 1 \sim -\rho - 1 \text{ si n est impair} \end{cases}$

Calculons $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta_1\varepsilon_{n+1}}{\Delta_1\varepsilon_n}$

On a $\dfrac{\Delta_1\varepsilon_{n+1}}{\Delta_1\varepsilon_n} = \dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} \left[\dfrac{\dfrac{{}_1\varepsilon_{n+2}}{{}_1\varepsilon_{n+1}} - 1}{\dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} - 1}\right]$

Supposons n pair : il existe alors $k \mid n = 2k$.

$$\frac{\Delta_1\varepsilon_{n+1}}{\Delta_1\varepsilon_n} = \frac{{}_1\varepsilon_{2k+1}}{{}_1\varepsilon_{2k}} \left[\frac{\dfrac{{}_1\varepsilon_{2k+2}}{{}_1\varepsilon_{2k+1}} - 1}{\dfrac{{}_1\varepsilon_{2k+1}}{{}_1\varepsilon_{2k}} - 1}\right] \longrightarrow \frac{-\rho}{4}\left[\frac{-\rho - 1}{-\frac{\rho}{4} - 1}\right]$$

la condition (C_1) n'est pas vérifiée dans ce cas en effet :

$$\frac{-\frac{\rho}{4} - 1}{-\frac{\rho}{4}\left[\dfrac{\rho + 1}{\frac{\rho}{4} + 1}\right] - 1} \neq 1 \quad \text{pour } \rho = \frac{1}{2}.$$

Car $\dfrac{+\frac{\rho}{4} + 1}{\frac{\rho}{4}\left[\dfrac{\rho + 1}{\frac{\rho}{4} + 1}\right] + 1} = 1$ impliquerait que $\dfrac{\rho}{4} + 1 = \dfrac{\rho}{4}\,\dfrac{\rho + 1}{\frac{\rho}{4} + 1} + 1$

i.e. $\dfrac{\rho}{4} = \dfrac{\rho + 1}{\frac{\rho}{4} + 1}\,\dfrac{\rho}{4}$ i.e. $\dfrac{\rho + 1}{\frac{\rho}{4} + 1} = 1$

ce qui n'est pas vrai quand ρ est différent de zéro.

La condition (C_1) n'étant pas vérifiée, on conclut alors que $\mathcal{D} \neq$ Lin.

Ce qui nous amène à répondre à la deuxième question : $\mathcal{D}$ est-il non vide.

Nous allons donner la réponse en cherchant un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_1$ de telle façon que $\forall\ (S_n) \in \mathcal{S}$, alors $({}_1\varepsilon_2^{(n)}) \in \mathcal{S}$. On dit dans ce cas que $\mathcal{S}$ est stable par le procédé δ^2 AITKEN.

Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_1$ = LIN il est clair que si $(S_n) \in \mathcal{S}$ alors $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ converge plus vite vers S^* que $({}_{k-1}\varepsilon_2^{(n)})$ et donc $(S_n) \in \mathcal{D}$.

Le sous-ensemble étant inclus dans LIN ; nous essayerons de la caractériser - suite à la remarque 2, paragraphe 1 - de deux manières :

- Première manière dans laquelle on donne une proposition où (S_n) est caractérisée par des propriétés sur l'erreur (e_n).

- Deuxième manière, où l'on donnera une proposition où (S_n) est caractérisée par des propriétés sur $(\Delta S_n) = (S_{n+1} - S_n)$.

III. DETERMINATION D'UN ENSEMBLE $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_1$ STABLE PAR LE PROCEDE δ^2 AITKEN ET APPLICATIONS AUX SUITES DEFINIES PAR UNE PROPRIETE SUR L'ERREUR $e_n = S_n - S^*$

a) Détermination d'un ensemble stable par AITKEN

Soit $(S_n)_{n\geq 0} \in$ LIN. Il existe $(w_n)_{n\geq 0}$ convergente de limite nulle, et une constante ρ_0, $0 < |\rho_0| \leq 1$ $\rho_0 \neq 1$ telles que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho_0 + w_n$

Nous allons donner davantage d'informations sur w_n, ces informations nous permettant d'itérer le procédé δ^2 AITKEN tout en ayant une accélération de la convergence d'une colonne par rapport à l'autre.

La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ peut avoir deux types de convergence : convergence linéaire ou logarithmique.

Caractérisons S dans le cas où la suite (S_n) est définie par une propriété sur e_n et où la suite w_n est à convergence linéaire ; on a alors la proposition suivante :

Proposition 1 :

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ *une suite convergence de limite* S^* *vérifiant :*

- $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho_0 + w_n$ *où* ρ_0 *est une constante :* $0<|\rho|\leq 1$ $\rho_0 \neq 1$ *et* (w_n)

une suite de limite nulle.

On suppose de plus que $w_n = \alpha_p^{(0)} u_n^p + \alpha_{p+1} u_n^{p+1} + \ldots + \alpha_{p+i}^{(0)} u_n^{p+i} + \ldots$ *à partir d'un certain rang ; où* p *est un entier* ≥ 1, *les* $\alpha_1^{(0)}$ *des réels non tous nuls avec* $\alpha_p^{(0)} \neq 0$ *et où* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de limite nulle vérifiant à partir d'un certain rang* $u_{n+1} = \phi(u_n)$, ϕ *étant une fonction analytique au voisinage de zéro vérifiant :*

- $\phi(0) = 0$

- $0<|\phi'(0)|<1$

Alors pour n *suffisamment grand on a :*

Cas 1) : $\dfrac{{}_1\varepsilon_2^{(n+1)} - S^*}{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*} = \dfrac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} = \rho_1 + w_n^{(1)}$.

où ρ_1 *est une constante :* $0<|\rho|<1$ *et* $w_n^{(1)}$ *une suite de limite nulle s'écrivant* $w_n^{(1)} = \alpha_{p_1}^{(1)} u_n^{p_1} + \alpha_{p_1+1}^{(1)} u_n^{p_1+1} + \ldots\ldots$

où $p_1 \in \mathbb{N}^*$, *les* $(\alpha_{p_1+i}^{(1)})_{i\geq 0}$ *des réels non tous nuls,* $\alpha_{p_1}^{(1)} \neq 0$.

Cas 2) : $\exists m \,/\, {}_k\varepsilon_2^{(n)} = S^*$, *et ce pour tout* $k > m$.

Démonstration :

Précédemment nous avons vu que si $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho_0 + w_n$, on a alors :

$$\frac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n}\,\frac{(\rho_0 + w_{n+1})}{(\rho_0 + w_n)}\,\frac{\Delta w_{n+1}}{\Delta w_n}\,\frac{1+K_n}{1+K_{n+1}} = (\rho_0 + w_{n+1})\,\frac{\Delta w_{n+1}}{\Delta w_n}\cdot\frac{1+K_n}{1+K_{n+1}}$$

où $K_n = \dfrac{\rho_0\; w_n - 2w_n + \rho_0\; w_{n+1} + w_{n+1}\; w_n}{(\rho_0 - 1)^2}$

<u>Intéressons-nous au terme $(\rho_0 + w_{n+1})$</u>

On a par hypothèse $w_n = \alpha_p^{(0)}\; u_n^p + \alpha_{p+n}^{(0)}\; u_n^{p+1} + \ldots + \alpha_{p+i}^{(0)}\; u_n^{p+i} + \ldots$

et ce pour n assez grand.

Ecrivons w_n autrement ; on va remplacer u_n par x et w_n par $w(x)$:

$$w(x) = \alpha_p^{(0)}\; x^p + \alpha_{p+1}^{(0)}\; x^{p+1} + \ldots + \alpha_{p+i}^{(0)}\; x^{p+i} + \ldots$$

pour x assez petit, cette expression converge vers 0 (Hypothèse $w_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$) et donc définit une fonction analytique pour x appartenant à un voisinage $W_1(0)$ de zéro.

Examinons de près $w(\phi(x))$ où ϕ est la fonction définie par $u_{n+1} = \phi(u_n)$, ϕ analytique dans un voisinage de 0 qu'on notera par $W_2(x)$. Il est clair que $W_1(0) \cap W_2(0)$ est non vide (il contient au moins $\{0\}$).

On déduit, d'après la théorie élémentaire des fonctions analytiques (voir [4], [6] et [7]) que la composée $w \circ \phi(x)$ est analytique, de plus pour x assez petit ou plus précisément quand $x \in W_2(0) \cap W_1(0)$ on a :

$$w(\phi(x)) = \alpha_p^{(0)}(\phi(x))^p + \alpha_{p+1}^{(0)}(\phi(x))^{p+1} + \ldots + \alpha_{p+i}^{(0)}(\phi(x))^{p+i} + \ldots$$

Essayons d'exprimer le deuxième membre de cette égalité en fonction de x.

ϕ analytique on a alors $\phi(x) = \phi(0) + x\,\phi'(0) + \dfrac{x^2}{2}\,\phi''(0) + \ldots + \dfrac{x^{(\ell)}}{\ell!}\,\phi^{(\ell)}(0) + \ldots$

Comme $\phi(0) = 0$, on aura $\phi(x) = x\,\phi'(0) + \frac{x^2}{2}\phi''(0) + \ldots + \frac{x^{(\ell)}}{\ell!}\phi^{(\ell)}(0) + \ldots$

On a pour tout r appartenant à $\mathbb{N}^*$:

$$(\phi(x))^r = x^r(\phi'(0) + x\,\frac{\phi''(0)}{2} + \ldots + \frac{x^{\ell-1}\,\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!} + \ldots)^r$$

$$(\phi(x))^r = x^r\left[(\phi'(0))^r + r\,x\,\phi'(0)^{r-1}\,\frac{\phi''(0)}{2} + \ldots\right]$$

$$(\phi(x))^r = (x^r(\phi'(0))^r) + x^{r+1}\,r\,\frac{\phi'(0)^{r-1}\,\phi''(0)}{2} + \ldots$$

d'où

$$w(\phi(x)) = \alpha_p^{(0)}\,x^p(\phi'(0))^p + x^{p+1}\left[\alpha_p^{(0)}\,p\,\frac{\alpha'(0)^{p-1}\,\phi''(0)}{2} + \alpha_{p+1}^{(0)}\right] + \ldots$$

ou sous forme simplifiée :

$$w(\phi(x)) = \gamma_p^{(0)}\,x^p + \gamma_{p+1}^{(0)}\,x^{p+1} + \ldots \tag{6}$$

avec $\gamma_p^{(0)} = \alpha_p^{(0)}(\phi'(0))^p \neq 0$

On revient aux anciennes notations ; $w(\phi(x))$ correspondant à w_{n+1}, on a :

$$w_{n+1} = \gamma_p^{(0)}\,u_n^p + \gamma_{p+1}^{(0)}\,u_n^{p+1} + \ldots$$

d'où

$$\boxed{\rho_0 + w_{n+1} = \rho_0 + \gamma_p^{(0)}\,u_n^p + \gamma_{p+1}^{(0)}\,u_n^{\ell+1} + \ldots} \tag{6'}$$

<u>Intéressons-nous au terme</u> $\frac{\Delta w_{n+1}}{\Delta w_n}$

On a par hypothèse : $w_n = \alpha_p^{(0)}\,u_n^p + \ldots + \alpha_{p+i}^{(0)}\,u_n^{p+i} + \ldots$

On remplace, comme on l'a fait auparavant, u_n par x, w_n par $w(x)$: Il est clair qu'à w_{n+1} correspondra $w(\phi(x))$ et à w_{n+2} $w(\phi^2(x))$.

On a : $w(x) = \alpha_p^{(0)} x^p + \ldots + \alpha_{p+1}^{(0)} x^{p+i} + \ldots$

(6) donne $w(\phi(x)) = \gamma_p^{(0)} x^p + \ldots + \gamma_{p+1}^{(0)} x^{p+i} + \ldots$

d'où :

$$w(\phi(x)) - w(x) = (\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)})\, x^p + (\gamma_{p+1}^{(0)} - \alpha_{p+1}^{(0)})\, x^{p+1} + \ldots + (\gamma_{p+i}^{(0)} - \alpha_{p+i}^{(0)})\, x^{p+i} + \ldots \tag{6'}$$

avec $\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)} = [\alpha_p^{(0)}(\phi'(0))^p - \alpha_p^{(0)}] = \alpha_p^{(0)}[(\phi'(0))^p - 1]$

Avec les notations en x ; il est clair qu'à $w_{n+2} - w_{n+1}$ va correspondre

$w(\phi^2(x)) - w(\phi(x))$ qui s'écrira d'après (6') :

$$w(\phi^2(x)) - w(\phi(x)) = (\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)})(\phi(x))^p + (\gamma_{p+1}^{(0)} - \alpha_{p+1}^{(0)})(\phi(x))^{p+1} + \ldots + (\gamma_{p+i}^{(0)} - \phi_{p+i}^{(0)})(\phi(x))^{p+i} + \ldots$$

ϕ étant analytique ; comme précédemment on aura

$$\boxed{\begin{aligned} w(\phi^2(x)) - w(\phi(x)) &= (\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)})(\phi'(0))^p\, x^p + \ldots \\ &= \beta_p^{(0)}\, x^p + \beta_{p+1}^{(0)}\, x^{p+1} + \ldots \\ \text{où } \beta_p^{(0)} &= (\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)})(\phi'(0))^p = ((\phi'(0))^p\, \alpha_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)})\, \phi'(0)^p \\ \beta_p^{(0)} &= \alpha_p^{(0)}(\phi'(0))^p\, ((\phi'(0))^p - 1) \neq 0 \end{aligned}} \tag{7}$$

<u>Calcul de</u> $\dfrac{w(\phi^2(x)) - w(\phi(x))}{w(\phi(x) - w(x)}$

Notons $A(x) = \dfrac{w(\phi^2(x)) - w(\phi(x))}{w(\phi(x)) - w(x)}$

D'après (6) et (7), on a :

$$A(x) = \frac{\beta_p^{(0)}\, x^p + \beta_{p+1}^{(0)}\, x^{p+1} + \ldots + \beta_{p+i}^{(0)}\, x_i^{p+i}}{(\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)}\, x^p + (\gamma_{p+1}^{(0)} - \alpha_{p+1}^{(0)})\, x^{p+1} + \ldots + (\gamma_{p+i}^{(0)} - \alpha_{p+i}^{(0)})\, x^{p+i} + \ldots}$$

$$A(x) = \frac{\beta_p^{(0)}}{(\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)})} \left[\frac{1 + \dfrac{\beta_{p+1}^{(0)}}{\beta_p^{(0)}}\, x + \ldots + \dfrac{\beta_{p+1}^{(0)}}{\beta_p^{(0)}}\, x^{p+i-1} + \ldots}{1 + \dfrac{\gamma_{p+1}^{(0)} - \alpha_{p+1}^{(0)}}{\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)}} + \ldots + \dfrac{\gamma_{p+i}^{(0)} - \alpha_{p+i}^{(0)}}{\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)}}\, x^{p+i-1} + \ldots} \right]$$

En remplaçant $\beta_p^{(0)}$ et $\gamma_p^{(0)}$ par leurs valeur respectives :

$$A(x) = \frac{\alpha_p^{(0)}(\phi'(0))^p\ (\beta'(0)^p - 1)}{\alpha_p^{(0)}(\phi'(0)^p - 1)} \left[\frac{1 + \dfrac{\beta_{p+1}^{(0)}}{\beta_p^{(0)}}\, x + \ldots + \dfrac{\beta_{p+i}^{(0)}}{\beta_p^{(0)}}\, x^{p+i-1} + \ldots}{1 + \dfrac{\gamma_{p+1}^{(0)} - \alpha_{p+1}^{(0)}}{\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)}}\, x + \ldots} \right]$$

D'après cette expression, pour x assez petit, on aura le développement en série entière de x :

$$A(x) = [\phi'(0)]^p \left[1 + \left[\frac{\beta_{p+1}^{(0)}}{\beta_p^{(0)}} - \frac{\gamma_{p+1}^{(0)} - \alpha_{p+1}^{(0)}}{\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)}} \right] x + \ldots \right]$$

i.e. : $A(x) = [\phi'(0)]^p\ (1 + \theta_1^{(0)}\, x + \ldots + \theta_{p+i}^{(0)}\, x^{p+i} + \ldots)$

$$\text{où } \theta_1^{(0)} = \frac{\beta_{p+1}^{(0)}}{\beta_p^{(0)}} - \frac{\gamma_{p+1}^{(0)} - \alpha_{p+1}^{(0)}}{\gamma_p^{(0)} - \alpha_p^{(0)}}$$

D'où en revenant aux anciennes notations il vient :

$$\boxed{\frac{\Delta w_{n+1}}{\Delta w_n} = (\phi'0))^p\ (1 + \theta_1^{(0)}\, u_n + \ldots + \theta_{p+i}^{(0)}\, u_n^{p+i} + \ldots} \qquad (8)$$

<u>Intéressons-nous à la quantité</u> $\dfrac{1+K_n}{1+K_{n+1}}$

Ecrivons $K_n = \dfrac{\rho w_n - 2w_n + \rho_0\, w_{n+1} + w_{n+1}\, w_n}{(\rho_0 - 1)^2}$

En utilisant les notations en x où x remplace u_n à partir d'un certain rang, et notant K_n par K(x) on obtient :

$$K(x) = \frac{\rho_0\, w(x) - 2w(x) + \rho_0\, w(\phi(x)) + w(x)\, w(\phi(x))}{(\rho_0 - 1)^2}$$

Dans un voisinage de zéro (exemple : $W_3 \subset W_2(0) \cap W_1(0)$), l'expression K se développe en série entière de x de la manière suivante :

$$K(x) = \delta_p^{(0)}\, x^p + \delta_{p+1}^{(0)}\, x^{p+1} + \ldots + \delta_{p+i}^{(0)}\, x^{p+i} + \ldots$$

où $\delta_p^{(0)}$ vaut plus précisément : $\dfrac{\alpha_p^{(0)}(\rho_0 - 2 + \rho_0\, \phi'(0)^p)}{(\rho_0 - 1)^2} \neq 0$ car $\begin{matrix} 0 < |\rho_0| < 1 \\ 0 < |\phi'(0)| < 1 \end{matrix}$

Supposant $\dfrac{1+K_n}{1+K_{n+1}} = 1 + a_p^{(0)}\, u_n^p + \ldots$

On aura alors :

$$\frac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} = (\rho_0 + \gamma_p^{(0)}\, u_n^p + \gamma_{p+1}^{(0)}\, u_n^{p+1} + \ldots)(\phi'(0))^p\, (1 + \theta_1^{(0)}\, u_n + \ldots + \theta_{p+i}^{(0)}\, u_n^{p+i} + \ldots)$$
$$(1 + a_p^{(0)}\, u_n^p + \ldots$$

Le deuxième membre s'écrit en posant $u_n = x$ - pour n assez grand - :

$$(\rho_0 + \gamma_p^{(0)}\, x^p + \gamma_{p+1}^{(0)}\, x^{p+1} + \ldots)(\phi'(0))^p(1 + \theta_1^{(0)}\, x + \ldots + \theta_{p+i}^{(0)}\, x^{p+i} + \ldots)(1 + a_p^{(0)}\, x^p + \ldots)$$

Soit B(x) cette expression.

B est développable en série entière de x ; pour x assez voisin de 0, de plus $B(0) = \rho_0(\phi'(0))^p$.

D'où $B(x) = B(0) + \dfrac{B^{(p_1)}(0)}{p_1!}\, x^{p_1} + \ldots$

où p_1 désigne le plus petit entier $\ell_1 \geq 1\,/\,B^{(\ell_1)}(0) \neq 0$.

D'où en posant $\alpha^{(1)}_{m_1} = \dfrac{B^{(m_1)}(0)}{m_1 !}$ $m_1 \geq 1$, on a :

$$B(x) = (\rho_0)(\phi'(0))^p + \alpha^{(1)}_{p_1} x^{p_1} + \ldots$$

En posant $(\rho_0)(\phi'(0))^p = \rho_1$ il est clair que $0 < |\rho_1| < 1$ et que

$$B(x) = \rho_1 + \alpha^{(1)}_{p_1} x^{p_1} + \ldots$$

où p_1 désigne un entier non nul.

On revient aux notations en u_n ; à $B(x)$ correspond $\dfrac{1^{\varepsilon_{n+1}}}{1^{\varepsilon_n}}$:

$$\frac{1^{\varepsilon_{n+1}}}{1^{\varepsilon_n}} = \rho_1 + \alpha^{(1)}_{p_1} u_n^{p_1} + \ldots + \alpha^{(1)}_{p_1+i} u_n^{p_1+i} + \ldots$$

Ce qui démontre le cas 1) de la proposition 2.

Nous allons maintenant justifier le fait

$$\frac{1 + K_n}{1 + K_{n+1}} 1 + a_p^{(0)} u_n^p + \ldots$$

A K_{n+1}, on fait correspondre $K(\phi(x))$ qui est évidemment développable en série entière de x :

$$K(\phi(x)) = \xi_p^{(0)} x^p + \xi_{p+1}^{(0)} x^{p+1} + \ldots$$

où $\xi_p^{(0)} = (\phi'(0))^p \delta_p^{(0)} \neq 0$.

D'où :

$$\frac{1 + K(x)}{1 + K(\phi(x))} = \frac{1 + \delta_p^{(0)} x^p + \delta_{p+1}^{(0)} x^{p+1} + \ldots}{1 + \xi_p^{(0)} x^p + \xi_{p+1}^{(0)} x^{p+1} + \ldots}$$

Pour x assez voisin de 0, cette expression se développe en série entière de x :

$$\frac{1 + K(x)}{1 + K(\phi(x))} = 1 + a_p^{(0)} x^p + a_{p+1}^{(0)} x^{p+1} = \ldots$$

avec $a_p^{(0)} = \delta_p^{(0)} - \xi_p^{(0)} = (1 - \phi'(0))^p \delta_p^{(0)} \neq 0$.

Posant $x = u_n$, on obtient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1+K_n}{1+K_{n+1}} &= 1 + a_p^{(0)}\, u_n^p + a_{n+1}^{(0)}\, u_n^{p+1} + \ldots \\ a_p^{(0)} &= \alpha_p^{(0)}(1-\phi'(0))^p\, (\rho_0 - 2 + \rho_0^{p+1}) \end{aligned}} \tag{9}$$

Tenant compte de (6)' ; (8) ; de (9) et du fait que

$$\frac{{}_1\varepsilon_{n+1}}{{}_1\varepsilon_n} = (\rho_0 + w_{n+1})\, \frac{\Delta w_{n+1}}{\Delta w_n} \cdot \frac{1+K_n}{1+K_{n+1}}.$$

On a alors :

Si nous appelons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites (S_n) telles que (S_n) vérifie les hypothèses de la proposition 2, Il est clair qu'alors $\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \subset$ Lin. De plus le cas 1) montre que (S_n) $\mathcal{S}$ implique que $\mathcal{S}_1$ (on fait $k = 1$ dans $\mathcal{S}_k : {}_{k-1}\varepsilon_2^{(n)} \to {}_k\varepsilon_2^{(n)}$, ${}_0\varepsilon_2^{(n)} = S_n$) appliqué à S_n donne naissance à une suite ${}_1\varepsilon_2^{(n)} \in \mathcal{S}$ et on peut alors appliquer $\mathcal{S}_2$ à ${}_1\varepsilon_2^{(n)}$ pour obtenir ${}_2\varepsilon_2^{(n)}$ et ainsi de suite.

A une étape q de $\mathcal{S}_k$ on aura ${}_q\varepsilon_2^{(n)}$ avec :

$$\frac{{}_q\varepsilon_{n+1}}{{}_q\varepsilon_n} = \rho_q + \alpha_{p_q}^{(q)}\, u_n^q + \ldots + \alpha_{p_q+i}^{(q+i)}\, u_n^{q+i} + \ldots$$

Cependant il se peut qu'à une valeur $m = q$ on ait tous les $(\alpha_{p_i}^{(i)})_{i \geq m}$ nuls.

i.e. : $\dfrac{{}_m\varepsilon_{n+1}}{{}_m\varepsilon_n} = \rho_m \Rightarrow {}_m\varepsilon_2^{(n)} = S^* + c\, \rho_m^n \qquad c \neq 0$

$({}_m\varepsilon_2^{(n)})$ est une suite géométrique et donc à partir d'un certain rang on aura ${}_{m+1}\varepsilon_2^{(n)} = \mathcal{S}_{m+1}({}_{m-1}\varepsilon_2^{(n)}) = S^*$ et on a alors le cas 2 de la proposition 2, en vertu de la définition (1) donnée en page 8.

On a ainsi démontré toute la proposition 1.

Remarque : Dire qu'une suite (S_n) est dans LIN revient à dire que S_n vérifie une propriété asymptotique ; il n'y a pas lieu alors d'expliciter le "n assez grand".

b) Applications aux suites définies par une propriétés sur l'erreur

b1) Un cas assez important d'application du δ^2 itéré est la détermination du point x^* vérifiant $x^* = \phi_1(x^*)$ où ϕ_1 est une fonction vérifiant des propriétés que nous précisons dans la proposition suivante.

Proposition 2 :

Soit (S_n) *une suite de nombres réels vérifiant* $S_{n+1} = \phi_1(S_n)$ $n \geq 0$, *où* ϕ_1 *est une fonction analytique dans un intervalle centré en* S^* ; S^* *étant le seul point de cet intervalle vérifiant* $S^* = \phi_1(S^*)$.

On suppose $e_0 = S_0 - S^*$ *choisi suffisamment voisin de zéro et* $0 < |\phi_1'(S^*)| < 1$

On a alors : (S_n) *appartient à* S.

Démonstration : ϕ étant analytique dans un voisinage S^* ; (S_n) étant une suite convergente de limite S^*, on a pour n assez grand :

$$S_{n+1} = \phi_1(S_n) = \phi_1(S^* + (S_n - S^*)) = \phi_1(S^*) + \phi_1'(S^*)(S_n - S^*) + \frac{\phi_1^{(p')}}{p'!}(S_n - S^*)^{p'} + \ldots$$

où p' est la plus petit indice $i \geq 2$ tel que : $\phi_1^{(i)}(S^*) \neq 0$.

Comme $\phi_1(S^*) = S^*$ on a alors :

$$e_{n+1} = \phi_1'(S^*)\, e_n + \frac{\phi_1^{(p')}(S^*)}{p'!} e_n^{p'} + \ldots + \frac{\phi_1^{(p'+i)}(S^*)}{(p'+i)!} e_n^{p'+i} + \ldots \qquad i \geq 0 \qquad (9)$$

d'où

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \phi_1'(S^*) + \frac{\phi_1^{(p')}(S^*)\, e_n^{p'-1}}{p'!} + \ldots + \frac{\phi_1^{(p'+i)}(S^*)}{(p'+i)!} e_n^{p'+i-1} + \ldots \qquad i \geq 0 \qquad (9')$$

Posant $\phi_1'(S^*) = \rho_0$ et $p'-1 = p$ on obtient alors :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho_0 + \frac{\phi_1^{(p)}(S^*)}{(p+1)!} e_n^p + \ldots + \frac{\phi_1^{(p+i)}(S^*)}{(p+i+1)!} e_n^{p+i} + \ldots \qquad i \geq 0 \tag{9'}$$

L'égalité (9) montre bien que (S_n) vérifie les hypothèses de la proposition 2 avec :

- $\rho_0 = \phi_1'(S^*)$
- $\alpha_k^{(0)} = \dfrac{\phi_1^{(k)}(S^*)}{(k+1)!} \qquad k \geq p$
- $u_n = e_n$; l'égalité (9) montre que $e_{n+1} = \phi(e_n)$ avec $\phi(x) = \phi_1(x+S^*) - S^*$ pour n assez grand.

On déduit alors par définition de S que (S_n) appartient à S.

b2) Hillion [9] montre que le δ^2 itéré est efficace pour l'accélération de la convergence des suites (S_n) qui s'écrivent :

$$e_{n+1} = -(\alpha_0 + \beta_0^n)\, e_n, \text{ avec } -1 < \alpha_0 < 1 \text{ et } -1 < \beta_0 + \alpha_0 < 1.$$

On suppose de plus $|\beta_0| < 1$, α_0 et β_0 non nuls.

De telles suites appartiennent à S ; en effet :

$$e_{n+1} = -(\alpha_0 + \beta_0^n)\, e_n \text{ implique } \frac{e_{n+1}}{e_n} = -(\alpha_0 + \beta_0^n).$$

Ce qui implique l'appartenance de (S_n) à S avec :

- $\rho_0 = -\alpha_0$
- $w_n = u_n = \beta_0^n$
- $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \xrightarrow{f} f(x) = \beta_0\, x$$

b3) Application du procédé δ^2 AITKEN itéré à la suite des convergents de

$$b_0 + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \dots}}}}$$

avec $b^2 + 4a > 0$, b_0 pouvant être différent de b.

Considérons la fraction continue $b_0 + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \dots}}}$ (1)

qu'on notera $S^* = b_0 + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \dots$

Considérons le $n^{\text{ième}}$ convergent de (1) qu'on appellera S_n.

On a $S_n = b_0 + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \dots \frac{a|}{|b} = \frac{A_n}{B_n}$ $\quad n \geq 0$.

où les A_n et B_n sont calculés récursivement à l'aide des relations

(voir [2])
$$\begin{cases} A_n = b\,A_{n-1} + a\,A_{n-2} \\ B_n = b\,B_{n-1} + a\,B_{n-2} \end{cases} \qquad n = 1, 2, \dots$$

avec les conditions initiales $A_0 = b_0 \qquad A_{-1} = 1$

$B_0 = 1 \qquad B_{-1} = 0$

et la supposition que $B_n \neq 0 \quad \forall n \geq 0$.

A_n et B_n sont donnés par des équations aux différences dont la solution est $x_n = K_1\, y_1^n + K_2\, y_2^n$ où y_1 et y_2 sont solution de l'équation $x^2 - bx - a = 0$, y_1 et y_2 existent vu qu'on a pris la précaution de poser $b^2 + 4a > 0$ et sont distinctes. i.e. : $y_1 \neq y_2$.

On obtient alors $A_n = K_1 \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}\right)^n + K_2 \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}\right)$

$$B_n = K_1' \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}\right)^n + K_2' \left(\frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2}\right)$$

avec K_1, K_2, K_1' et K_2' calculés grâce aux conditions :

$$(1)' \begin{cases} A_0 = b_0 \\ B_0 = 1 \end{cases} \qquad \text{et } (1)'' \begin{cases} A_1 = b\, b_0 + a \\ B_1 = b \end{cases}$$

i.e. : En posant $y_1 = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4\,a}}{2a}$ et $y_2 = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + a\,c}}{2}$

on a
$$\left.\begin{aligned} K_1 + K_2 &= b_0 \\ K_1\, y_1 + K_2\, y_2 &= b\, b_0 + a \end{aligned}\right\} \qquad \begin{cases} K_1' + K_2' = 1 \\ K_1'\, y_1 + K_2'\, y_2 = b \end{cases}$$

K_1, K_2, K_1', K_2' existent vu que $y_1 \neq y_2$ $(b^2 + 4\,a > 0)$.

On obtient alors :

$$S_n = \frac{K_1\, y_1^n + K_2\, y_2^n}{K_1'\, y_1^n + K_2'\, y_2'}$$

Supposons $\left|\dfrac{y_2}{y_1}\right| < 1$. On aura alors :

$$S_n = \frac{K_1}{K_1'} \cdot \frac{1 + \dfrac{K_2}{K_1}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)^n}{1 + \dfrac{K_2'}{K_1'}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)^n} \qquad n \geq 0$$

(Sinon si $\left|\dfrac{y_2}{y_1}\right| > 1$ alors $\left|\dfrac{y_1}{y_2}\right| < 1$ et on divisera par $K_2\, y_2^n$ pour obtenir

$$S_n = \frac{K_2}{K_2'} \cdot \frac{1 + \dfrac{K_1}{K_2}\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^n}{1 + \dfrac{K_1'}{K_2'}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)^n}$$
)

La suite (S_n) convergeant vers S^* on doit alors avoir $\frac{K_1}{K'_1} = S^*$ (compatibilité).

$$\text{d'où } S_n = S^* \left[\frac{1 + \frac{K_2}{K_1}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n}{1 + \frac{K'_2}{K'_1}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n}\right] = S^*\left(1 + \frac{\left(\frac{K_2}{K_1} - \frac{K'_2}{K_1}\right) x^n}{1 + \left(\frac{K'_2}{K'_1}\right) x^n}\right)$$

où $x = \frac{y_2}{y_1}$, $|x| < 1$.

Et on remarque alors qu'on peut utiliser le procédé δ^2 AITKEN itéré, afin d'accélérer la convergence de (S_n) vers S^* ; en effet montrons que (S_n) vérifie les hypothèses de la proposition 2.

$$\text{on a } S_n = S^*\left(1 + \frac{\left(\frac{K_2}{K_1} - \frac{K'_2}{K'_1}\right) x^n}{1 + \frac{K'_2}{K'_1} x^n}\right)$$

$$\text{d'où } S_n - S^* = S^* \frac{\left(\frac{K_2}{K_1} - \frac{K'_2}{K'_1}\right) x_n}{1 + \frac{K'_2}{K'_1} x^n} = e_n$$

$$\text{d'où } \frac{e_{n+1}}{e_n} = x \cdot \frac{1 + \frac{K'_2}{K'_1} x^n}{1 + \frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1}} = x\left(1 + \frac{\frac{K'_2}{K'_1} x^n(1-x)}{1 + \frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1}}\right)$$

$$\text{i.e. : } \frac{e_{n+1}}{e_n} = x + \frac{\frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1}(1-x)}{1 + \frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1}}$$

Pour n assez grand $\left|\frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1}\right| < 1$; et on peut donc écrire

$$\frac{1}{1 + \frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1}} = 1 - \frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1} + \left(\frac{K_2}{K'_1}\right)^2 x^{2n+2} + \ldots$$

d'où $\frac{e_{n+1}}{e_n} = x + (1-x)\frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1} + \ldots$

On remarque que $(S_n) \in \mathcal{S}$ en effet :

S_n vérifie bien les hypothèses de la proposition 1 avec

$$\rho = x \;;\; w_n = \frac{K'_2}{K'_1} \frac{x^{n+1}(1-x)}{1+\frac{K'_2}{K'_1} x^{n+1}}$$

$$u_n = x^n$$

Il est clair que $|x| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ et que $u_{n+1} = x\, u_n$.

On prend alors $\phi(u_n) = x\, u_n$. On a bien $\phi(0) = 0$ et $|\phi'(0)| = |x| < 1$.

Et donc le δ^2 itéré accélère la convergence de S_n vers S^* ; S^* étant sous la forme (1).

IV. DETERMINATION D'UN ENSEMBLE $\mathcal{S}$ STABLE PAR AITKEN ET APPLICATIONS AUX SUITES (S_n) DEFINIES PAR UNE PROPRIETE SUR $(\Delta S_n) = (S_{n+1}-S_n)$

Dans certains cas ; il est plus avantageux de remplacer l'hypothèse $\frac{e_{n+1}}{e_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho_0$ par $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho_0$ car la première hypothèse nécessite la connaissance de S^*.

Nous allons étudier, dans ce paragraphe, le cas de figure suivant : (S_n) suite convergente de limite S^* et telle que :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho_0 + w_n \text{ où :}$$

- ρ_0 est une constante telle que : $\begin{array}{l} -1 \le \rho_0 < 1 \\ \rho_0 \neq 0 \end{array}$

- (w_n) suite à convergence logarithmique.

Un cas d'application sera alors l'ensemble des suites (S_n) telles que :

$$\Delta S_n = \frac{\rho_0^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha > 1 \text{ quand } 0 < \rho_0 < 1 \\ \alpha \geq 1 \text{ quand } -1 < \rho_0 < 0 \end{cases}$$

Nous caractérisons alors l'ensemble S stable par AITKEN dans la proposition suivante :

__Proposition 3__ :

Soit (S_n) *une suite convergente de limite* S^* *et vérifiant pour* n *assez grand* :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho_0 + t_n \qquad -1 \leq \rho_0 < 1, \text{ où } (t_n) \text{ *est une suite telle que*}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$
- $t_n = c_p^{(0)} u_n^p + c_{p+1}^{(0)} u_n^{p+1} + \ldots + c_{p+i}^{(0)} u_n^{p+i} + \ldots \qquad i \geq 0$, *où*

  - p est un entier supérieur ou égal à un.
  - les $(c_j^{(0)})_{j\geq p}$ sont des réels non tous nuls avec en particuliers $c_p^{(0)} \neq 0$.
  - (u_n) est une suite convergente de limite nulle s'écrivant $u_{n+1} = \phi(u_n)$, pour n assez grand ; ϕ étant une fonction analytique au voisinage de zéro vérifiant : $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = 1$.

On a alors les deux cas suivants qui peuvent se produire ; pour n assez grand :

__Cas n° 1__ : $\dfrac{\Delta_1\, \varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\, \varepsilon_2^{(n)}} = \rho_0 + t_n^{(1)}$

où $(t_n^{(1)})$ est une suite de limite nulle vérifiant :

$$t_n^{(1)} = c_{p_1}^{(1)} u_n^{p_1} + c_{p_1+1}^{(1)} u_n^{p_1+1} + \ldots$$

où p_1 est un entier non nul et où les $(c_{p_1+j}^{(1)})_{j\geq 0}$ sont des réels non tous nuls.

Cas n° 2 : Il existe un entier m supérieur ou égal à 2 tel que :

$$_k\varepsilon_2^{(n)} = S^* \qquad \forall k \geq m+1.$$

Démonstration :

On va donner l'expression de $\dfrac{\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n)}}$ en fonction de $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$.

Appelons $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = R_n$.

On a $_1\varepsilon_2^{(n)} = S_n - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} = S_n - \dfrac{\Delta S_n}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} = S_n - \dfrac{\Delta S_n}{R_n - 1}$

$$\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n - \frac{\Delta S_{n+1}}{R_{n+1} - 1} + \frac{\Delta S_n}{R_n - 1}.$$

$$\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{R_{n+1} - 1} + \frac{1}{k_n - 1}\right].$$

$$\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{R_n}{R_{n+1} - 1} + \frac{1}{R_n - 1}\right] = \Delta S_n \left[\frac{R_n}{R_n - 1} - \frac{R_n}{R_{n+1}}\right]$$

$$\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n \left[R_n\ \frac{1}{R_n - 1} - \frac{1}{R_{n+1} - 1}\right] = \Delta S_n \left[\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\ \frac{R_{n+1} - R_n}{(R_n - 1)(R_{n+1} - 1)}\right]$$

finalement $\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_{n+1}\ \dfrac{R_{n+1} - R_n}{(R_n - 1)(R_{n+1} - 1)}$

d'où $\dfrac{\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\ \varepsilon_2^{(n)}} = \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\ \dfrac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_{n+1} - R_n} \cdot \dfrac{1 - R_n}{1 - R_{n+2}}.$

$$\frac{\Delta_1 \varepsilon_1^{(n+1)}}{\Delta_1 \varepsilon_2^{(n)}} = R_{n+1} \cdot \frac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_{n+1} - R_n} \frac{1 - R_n}{1 - R_{n+2}}$$

$$\frac{\Delta_1 \varepsilon_1^{(n+1)}}{\Delta_1 \varepsilon_2^{(n)}} = (\rho_0 + t_{n+1}) \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \cdot \frac{(1-\rho_0) - t_n}{(1-\rho_0) - t_{n+2}} \qquad (10)$$

On va s'intéresser au second membre de (10) terme par terme.

Examinons $\rho_0 + t_{n+1} = R_{n+1}$

On a par hypothèse : pour n assez grand

$$t_n = c_p^{(0)} u_n^p + c_{p+1}^{(0)} u_n^{p+1} + \dots$$

Posons $u_n = x$; et $t_n = t(x)$ d'où :

$$t(x) = c_p^{(0)} x^p + c_{p+1}^{(0)} x^{p+1} + \dots$$

Pour x assez petit, cette série de fonction converge vers 0 quand x tend vers 0 dans un voisinage de 0 V_1, elle définit une fonction analytique en x.

De plus ϕ étant aussi analytique dans un voisinage de 0 qu'on appelle par $V_2(0)$; alors $t \circ \phi$ est aussi analytique dans $V_3 \subset V_1 \cap V_2(0)$.

L'écriture de $\phi(x) = \phi(0) + x\,\phi'(0) + \dots$

$$= x + \frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!} x^\ell + \dots$$

(où ℓ représente le plus petit entier $k \geq 2 \,/\, \phi^{(k)}(0) \neq 0$)

conduit à :

$$t \circ \phi(x) = c_p^{(0)} (\phi(x))^p + c_{p+1}^{(0)} (\phi(x))^{p+1} + \dots$$

$$t\circ\phi(x) = c_p^{(0)}(x + \frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}x^\ell + \dots)^p + c_{p+1}^{(0)}(x + \frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}x^\ell + \dots)^{p+1} + \dots$$

$$t(\phi(x)) = c_p^{(0)}\,x^p + c_p^{(0)}\,p\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,x^{\ell+p-1} + c_{p+1}^{(0)}\,x^{p+1} + \dots$$

$$\text{d'où}\quad \begin{cases} t\circ\phi(x) = c_p^{(0)}\,x^p + x^{p+1}\left[c_p^{(0)}\,p\,\frac{\phi''(0)}{2} + c_{p+1}^{(0)}\right] + \dots & \text{si } \ell = 2 \\ t\circ\phi(x) = c_p^{(0)}\,x^p + c_{p+1}^{(0)}\,x^{p+1} + c_p^{(0)}\,p\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,x^{\ell+p-1} + \dots & \text{si } \ell > 2 \end{cases}$$

En revenant aux notations en u_n (et ce pour n assez grand) et remarquant que $t\circ\phi(x)$ représente t_{n+1} on a :

$$(11)\quad \begin{cases} t_{n+1} = c_p^{(0)}\,u_n^p + u_n^{p+1}\left[c_p^{(0)}\,p\,\frac{\phi''(0)}{2} + c_{p+1}^{(0)}\right] + \dots & \text{si } \ell = 2 \\ t_{n+1} = c_p^{(0)}\,u_n^p + c_{p+1}^{(0)}\,u_n^{p+1} + c_p^{(0)}\,p\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,u_n^{\ell+p-1} + \dots & \text{si } \ell > 2 \end{cases}$$

Examinons l'expression $\dfrac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_{n+1} - R_n}$

$$\frac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_{n+1} - R_n} = \frac{\rho_0 + t_{n+2} - \rho_0 - t_{n+1}}{\rho_0 + t_{n+1} - \rho_0 - t_n} = \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n}.$$

D'après (11) on a :

a) Cas où $\ell = 2$:

$$t_{n+1} - t_n = c_p^{(0)}\,u_n^p - c_p^{(0)}\,u_n^p + u_n^{p+1}\left[c_p^{(0)}\,p\,\frac{\phi''(0)}{2} + c_{p+1}^{(0)}\right] - c_{p+1}^{(0)}\,u_n^{p+1} + \dots$$

$$\Delta t_n = u_n^{p+1}\,c_p^{(0)}\,p\,\frac{\phi''(0)}{2} + O_1(u_n)$$

où O_1 désigne un développement en série entière de u_n / $\dfrac{O_1(u_n)}{u_n^{p+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

De même $\Delta t_{n+1} = u_{n+1}^{p+1}\ p\ C_p^{(0)}\ \frac{\phi''(0)}{2} + 0_1(u_{n+1})$

d'où : $$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = \frac{u_{n+1}^{p+1}\ C_p^{(0)}\ p\ \frac{\phi''(0)}{2} + 0_1(u_{n+1})}{u_n^{p+1}\ C_p^{(0)}\ p\ \frac{\phi''(0)}{2} + 0_1(u_n)}$$

en posant $0_2 = \dfrac{0_1}{C_p^{(0)}\ p\ \frac{\phi''(0)}{2}}$ on obtient alors

$$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = \left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]^{p+1} \left[\frac{1 + \dfrac{0_2(u_{n+1})}{u_{n+1}^{p+1}}}{1 + \dfrac{0_2(u_n)}{u_n^{p+1}}}\right]$$

or $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{\phi''(0)}{2}\ u_n + \ldots$

$$\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]^{p+1} = 1 + (p+1)\ \frac{\phi''(0)}{2}\ u_n + \ldots$$

Examinons $\dfrac{0_2(u_n)}{u_n^{p+1}}$.

Pour n suffisamment grand, on remplace u_n par x.

Par définition de 0_2, il existe une fonction g analytique dans un voisinage de zéro, non identiquement nulle telle que $0_2(x) = x^{p+1}\ g(x)$.

Soit ℓ_1 le premier indice k non nul tel que $g^{(k)}(0) \neq 0$; on a alors :

$$0_2(x) = x^{p+1}\ b_{\ell_1}\ x^{\ell_1} + \ldots \quad \text{où } b_{\ell_1} \neq 0.$$

d'où $\dfrac{0_2(x)}{x^{p+1}} = b_{\ell_1}\ x^{\ell_1} + \ldots$

i.e. : $$\frac{0_2(u_n)}{u_n^{p+1}} = b_{\ell_1}\ u_n^{\ell_1} + \ldots$$

Ce qui donne alors :

$$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = (1 + (p+1)\,\frac{\phi''(0)}{2}\,u_n + \ldots)\left[\frac{1 + b_{\ell_1}\,u_{n+1}^{\ell_1} + \ldots}{1 + b_{\ell_1}\,u_n^{\ell_1} + \ldots}\right]$$

$$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = (1 + (p+1)\,\frac{\phi''(0)}{2}\,u_n + \ldots)(1 + b_{\ell_1}(u_{n+1}^{\ell_1} - u_n^{\ell_1}) + \ldots)$$

i.e. : $$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = 1 + (p+1)\,\frac{\phi''(0)}{2}\,u_n + \ldots$$

Remarquons au passage, que le fait que g ne soit pas identiquement nulle n'influe pas sur le résultat.

<u>b) Cas où ℓ est strictement supérieur à 2</u>

$$t_{n+1} - t_n = c_p^{(0)}\left[u_{n+1}^p - u_n^p\right] + c_{p+1}^{(0)}\left[u_{n+1}^{(p+1)} - u_n^{p+1}\right] + \ldots$$

$\Delta t_n = c_p^{(0)}\; p\; \frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\; u_n^{p+\ell-1} + O_3(u_n)$ où O_3 désigne un développement en série entière de u_n telle que $\frac{O_3(u_n)}{u_n^{p+\ell-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Un calcul identique au calcul précédent (cas a) montre :

(12) $$\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = 1 + (\ell+p-1)\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,u_n + \ldots$$

<u>Examinons le rapport</u> $\frac{1 - R_n}{1 - R_{n+2}} = \frac{(1-\rho_0) - t_n}{(1-\rho_0) - t_{n+2}}$

On a $t_n = c_p^{(0)}\,u_n^p + c_{p+1}^{(0)}\,u_n^{p+1} + \ldots$

$$t_{n+2} = c_p^{(0)}\,u_{n+2}^p + c_{p+1}^{(0)}\,u_{n+2}^{p+1} + \ldots$$

Pour n assez grand, on obtient tenant compte du fait que : $1-\rho_0 \neq 0$:

$$\frac{(1-\rho_0)-t_n}{(1-\rho_0)-t_{n+2}} = \left[1-\frac{t_n}{1-\rho_0}\right]\left[1+\frac{t_{n+2}}{1-\rho_0}+\left(\frac{t_{n+2}}{1-\rho_0}\right)^2+\dots\right]$$

$$\frac{(1-\rho_0)-t_n}{(1-\rho_0)-t_{n+2}} = 1+\frac{t_{n+2}-t_n}{1-\rho_0}+\dots$$

or : $t_{n+2}-t_n = c_p^{(0)}(u_{n+2}^p-u_n^p)+c_{p+1}^{(0)}(u_{u+2}^{p+1}-u_n^{p+1})+\dots$

et $u_{n+2} = \phi(u_{n+1}) = \phi(\phi(u_n)) = \phi^2(u_n) = u_n+2\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,u_n+\dots$

On obtient donc $u_{n+2}^p - u_n^p = 2p\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,u_n^{\ell+p-1}+\dots$

Ce qui donne :

$$\frac{(1-\rho_0)-t_n}{(1-\rho_0)-t_{n+2}} = 1+2\,c_p^{(0)}\;p\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,u_n^{\ell+p-1}+\dots$$

i.e. : $$\frac{1-R_n}{1-R_{n+2}} = 1+2\,c_p^{(0)}\;p\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\,u_n^{\ell+p-1}+\dots \qquad (13)$$

Tenant compte de (11), (12) et (13) et de :

$$\frac{\Delta_1\,\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\,\varepsilon_2^{(n)}} = (\rho_0+t_{n+1})\,\frac{R_{n+2}-R_{n+1}}{R_{n+1}-R_n}\,\frac{1-R_n}{1-R_{n+2}}.$$

On a alors :

$$\frac{\Delta_1\,\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\,\varepsilon_2^{(n)}} = \rho_0+\rho_0\,\frac{\ell+p-1}{\ell!}\,\phi^{(\ell)}(0)\,u_n+c_p^{(0)}\,u_n^p+\dots \qquad \text{si } p>1$$

$$\frac{\Delta_1\,\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\,\varepsilon_2^{(n)}} = \rho_0+u_n\left[\rho_0\,\frac{\phi^{(\ell)}(0)}{(\ell-1)!}+c_1^{(0)}\right]+\dots \qquad \text{si } p=1$$

d'où la démonstration du cas 1) de la proposition 3). On précise de plus que :

$$C^{(1)}_{p_1} = C^{(1)}_{1} = C^{(0)}_{p} + \rho_0 \frac{\phi^{(\ell)}(0)}{(\ell-1)!} \qquad \text{si } p = 1$$

$$C^{(1)}_{p_1} = C^{(1)}_{1} = \rho_0 \frac{(\ell+p-1)}{!} \phi^{(\ell)}(0) \qquad \text{si } p > 1.$$

On rencontre, dans la pratique, surtout le cas $u_n = \frac{1}{n}$. On a alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{u_n}{u_n+1} = \phi(u_n) \qquad \text{vérifie :}$$

- $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ et $\phi''(0) = -2$ et on retrouve alors le cas particulier étudié par LUBKIN [13].

La proposition 3 montre que si on applique à (S_n) le procédé δ^2 AITKEN avec (S_n) vérifiant les hypothèses de la proposition 3, on obtient une suite $({}_1\varepsilon_2^{(n)})$ vérifiant ces hypothèses et à laquelle on pourra appliquer le procédé δ^2 AITKEN pour obtenir une suite $({}_2\varepsilon_2^{(n)})$ vérifiant les hypothèses de la proposition 3 et ainsi de suite, arrivé à l'étape q de l'itération on a

$$\frac{\Delta_q\ \varepsilon_{n+1}}{\Delta_q\ \varepsilon_n} = \rho_0 + C^{(q)}_{q_q}\ u_n^{p_q} + \ldots + C^{(q)}_{p_q+i}\ u^{p_q+i} + \ldots$$

Cependant arrivé à une étape m par exemple on peut avoir le fait suivant :

Tous les $(C^{(i)}_{p_i})_{i\geq q}$ sont nuls. On a alors $R_n^{(n)} = \rho_0$.

Comme le δ^2 AITKEN est régulier sur l'ensemble des suites (S_n) /

$\left|\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right| \geq \delta$ $\quad \delta > 0$. On en conclut alors que ${}_{q+1}\varepsilon_2^{(n)} = \text{cste} = S^*$

d'où le cas 2) en vertu de la définition des $({}_k\varepsilon_2^{(k)})$ donnée au paragraphe 1.

C.Q.F.D.

Nous allons nous poser la question : A-t-on $\frac{{}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{{}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad k > 0$?

Dans le cas où $\rho_0 \neq -1$; il est clair que l'on a accélération d'une colonne k+1 par rapport à la colonne k d'après la remarque 2 faite au paragraphe 1.

Dans le cas où $\rho_0 = -1$, on est amenés à utiliser le théorème suivant démontré par LUBKIN dans [13] page 231.

Théorème :

Soit (S_n) *convergente de limite* S^* *avec* $(R_n) = \left[\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right]$ *vérifiant* :

- $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = -1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+R_{n+1}}{1+R_n} = 1$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{{}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_n - S^*} = 0.$

Le cas 1) implique que pour $k > 0$ $\quad R_n^{(k)} \sim -1 + C_{p_k}^{(k)} u_n^{p_k} \qquad C_{p_k} \neq 0$

d'où $R_n^{(k)} \to -1$. De plus $\dfrac{R_{n+1}^{(k)} + 1}{1 + R_n^{(k)}} \sim \dfrac{u_{n+1}^{p_k}}{u_n^{p_k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\frac{{}_{k+1}\varepsilon_n}{{}_k\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Nous faisons abstraction du cas 2) car ce cas est uniquement une précaution à prendre sur le plan pratique. Sur le plan théorique ; les résultats ne concernent que les nombres calculables.

La plupart des expériences numérique ont été faites sur les suites (S_n) définies par $S_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu \rho_0$ avec $-1 < \rho_0 \leq 1$ où (a_ν) est une suite de limite nulle vérifiant pour n assez grand $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{\alpha_1}{n} + \dfrac{\alpha_2}{n^2} + \ldots$

(Voir expériences numériques). De plus, la plupart des suites (a_n) utilisées dans nos expériences numériques sont des suites totalement monotones.

Nous allons alors justifier, en quelque sorte, nos expériences pratiques.

c) Application de la proposition 3 au cas des suites (S_n) définies par

$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu x_0$ avec $-1 < x_0 \leq 1$, $(a_\nu)_{\nu\geq 0}$ appartenant à l'ensemble

des suites totalement monotones

Nous allons chercher une classe de suites (a_n) totalement monotones, telles qu'à partir d'un certain rang on ait :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{n^p} + \ldots$$

où $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ sont des constantes non toutes nulles, $\alpha_1 < 0$.

Commençons avec tout par donner quelques définitions :

Définition 1 :

Une fonction f est dite complètement monotone dans $[0, +\infty[$ (resp. $(]0,+\infty])$ si $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, +\infty[$ (resp. $\forall x > 0$) (On appelle $f^{(k)}(x_0)$ la dérivée d'ordre k de f au point x_0).

Définition 2 :

Une suite (S_n) est dite totalement monotone (on notera (S_n) T.M.).

Si $(-1)^k \Delta^k S_n \geq 0$ où Δ^k est défini par

$$\begin{cases} \Delta^0 S_n = S_n & n \geq 0 \\ \Delta S_n = S_{n+1} - S_n & n \geq 0 \\ \Delta^k S_n = \Delta^{k-1} S_{n+1} - \Delta^{k-1} S_n & k \geq 1,\ n \geq 0 \end{cases}$$

Définition 3 :

Une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est dite totalement monotone minimale si elle cesse d'être totalement monotone quand S_0 est remplacé par $S_0 - \varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$.

Exemple de suite totalement monotone minimale : $\{S_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$

Si on rempalce S_1 par $S_1 - \varepsilon = T_1$ on montre aisément - par récurence - que :

$(-1)^k \Delta^k T_1 = \frac{1}{k+1} - \varepsilon$ $(k > 0)$.

On remarque alors que $(-1)^k \Delta^k T_1$ cesse d'être positif pour k suffisamment grand.

Nous allons donner maintenant les théorèmes essentiels concernant les suites T.M. minimales. L'ouvrage de base, concernant la démonstration de ces théorèmes est de WIDDER [16].

Théorème 1 :

Une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ *est dite T.M. si et seulement si* $S_n = \int_0^1 x^n \, d\, g(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ *où* g *est une fonction bornée non décroissante dans* $[0, 1]$.

Théorème 2 :

Une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ *est une suite totalement monotone minimale si et seulement si* $S_n = \int_0^1 x^n \, d\, g(x)$, g *non décroissante bornée et continue en zéro.*

Théorème 3 :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction f *complètement monotone sur* $0 \leq x < \infty$ (resp. $0 < x < \infty$) *telle que* $f(n) = a_n$ *est que* a_n *soit une suite totalement monotone minimale.*

Théorème 4 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que f *soit complètement monotone en* $0 \leq x < \infty$ (resp. $0 < x < \infty$) *est que* $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \, d\, \alpha(t)$, α *bornée, non décroissante sur* $[0, +\infty[$ *avec l'intégrale convergeant pour* $0 \leq x < +\infty$ (resp. $0 < x < +\infty$).

Définition 5 :

La fonction $f(n) = \int_0^\infty e^{-nt}\,\phi(t)\,dt$ *est une fonction entière en* $\frac{1}{n}$ *si et seulement si* ϕ *est entière et* $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mathrm{Log}||\phi'(t)||}{|t|} < \infty$

Définissons l'ensemble K_{TM} comme suit :

$$K_{TM}(S^*) = \{s_n \text{ convergente vers } S^* \,/\, S_n = \int_0^\infty e^{-nt}\, d\,\alpha(t) \text{ où } \alpha \text{ vérifie } P_\alpha\}$$

On dit que α vérifie la propriété P_α si :

- α est bornée sur $[0, +\infty[$
- α est non décroissante sur $[0, +\infty[$
- α est entière
- $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mathrm{Log}|\alpha'(t)|}{|t|} < +\infty$

On a alors

Proposition 4 :

$K_{TM}(S^*) \subset TM(S^*)$ *où* $TM(S^*)$ *désigne les suites* (S_n) *totalement monotones convergeant vers* S^*.

Démonstration :

$S_n \in K_{TM}(S^*)$; S_n s'écrit alors

$$(1)_* \qquad S_n = \int_0^\infty e^{-nu}\, d\,\alpha(u)$$

On suppose que tous les termes $S_0, S_1, \ldots S_i, \ldots$ sont connus (et finis) sinon si la suite (S_n) n'est définie que pour $n \geq k$, on fera le raisonnement avec $(t_n)_{n\geq 0} = (S_{n-k})_{n\geq k}$.

D'après $(1)_*$ on a $S_0 = \int_0^\infty d\,\alpha(t) = \alpha(\infty) - \alpha(0)$.

d'où $\alpha(\infty) = S_0 + \alpha(0)$.

Faisons un changement de variables dans $(1)_*$, remplaçons u par

$u = \text{Log}\, t^{-1}$ d'où si $0 \leq u < \infty$ alors $0 < t \leq 1$

On a alors $S_n = \int_1^0 t^n \, d\,\alpha(\text{Log}\, t^{-1})$

On pose $\beta(t) = -\alpha(\text{Log}\, t^{-1})$.

Pour la continuité de β en zéro : on pose $\beta(0_+) = \beta(0) = -\alpha(\infty)$

i.e. : $\beta(0_+) = \beta(0) = -(S_0 + \alpha(0))$

α étant continue en zéro ; β l'est aussi

d'où $S_n = \int_0^1 t^n \, d\,\beta(t)$.

β est bornée ; continue en zéro et non décroissante.

En effet, si $t_1 < t_2$ alors $\text{Log}\, t_2^{-1} < \text{Log}\, t_1^{-1}$, d'où $\alpha(\text{Log}\, t_2^{-1}) < \alpha(\text{Log}\, t_1^{-1})$

$-\alpha(\text{Log}\, t_1^{-1}) < -\alpha(\text{Log}\, t_2^{-1}) \Rightarrow \beta(t_1) < \beta(t_2)$.

On écrit alors $S_n = \int_0^1 t^n \, d\,\alpha(t)$ où β est bornée et décroissante dans $[0, 1]$ continue en zéro et on déduit alors du théorème 2 que (S_n) est une suite T.M, de limite S^*.

C.Q.F.D.

Montrons maintenant que toute suite $(S_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu x_0^\nu$, $-1 < x_0 \leq 1$, $x_0 \neq 0$ avec $a_\nu \in K_{TM}(0)$ - est dans S défini par les hypothèses de la proposition 3.

On a la proposition suivante :

Proposition 5 :

Soit (S_n) *une suite de limite* S^* *vérifiant*

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu x_0 \text{ où}$$

- x_0 *est telle que* $-1 < x_0 \leq 1$, $x_0 \neq 0$

- $a_\nu \in K_{TM}(0)$

Alors (S_n) *vérifie les hypothèses de la proposition 3 avec* $u_n = \frac{1}{n}$, $p = 1$

Démonstration :

Dire que $a_\nu \in K_{TM}(0)$ revient à dire que (a_ν) est une suite convergente de limite nulle avec $a_n = \int_0^\infty e^{-nt}\, d\alpha(t)$ où α vérifie P_α

D'après le théorème 5 on déduit que $a_n = g(n)$ est développable en série entière $\frac{1}{n}$ pour n assez grand, ce qui nous permet d'écrire

$$a_n = g(x) = g(\infty) + \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n^2} + \ldots + \frac{k_p}{n^p} + \ldots$$

comme $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ alors $a_n = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n^2} + \ldots + \frac{k_p}{n^p} + \ldots$ pour n assez grand,

Où $k_1 \neq 0$.

De même à partir d'un certain rang :

$$a_{n+1} = \frac{k_1}{n+1} + \frac{k_2}{(n+1)^2} + \ldots + \ldots = \frac{k_1}{n} + \frac{1}{n^2}(k_2 - k_1) + \ldots$$

$$a_{n+2} = \frac{k_1}{n+2} + \frac{k_2}{(n+2)^2} + \ldots + \ldots = \frac{k_1}{n} + \frac{1}{n^2}(k_2 - 2k_1) + \ldots$$

d'où pour n assez grand $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{1 + \frac{1}{n}\frac{k_2 - 2k_1}{k_1} + \ldots}{1 + \frac{1}{n}\frac{k_2 - k_1}{k_1} + \ldots} = 1 - \dfrac{k_1}{k_1 n} + \ldots$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \ldots$$

Comme $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu x_0$ on obtient alors :

$$\Delta S_n = (-1)^{n+1} a_{n+1} x_0^{n+1} \text{ et } \Delta S_{n+1} = (-1)^{n+2} a_{n+2} x_0^{n+2}$$

Ce qui donne : $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -x_0 \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = -x_0\left[1 - \frac{1}{n} + \ldots\right]$

i.e. $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -x_0 + \dfrac{x_0}{n} + \ldots$

Ceci montre bien que (S_n) vérifie les hypothèses de la proposition 3 avec :

- $\rho_0 = -x_0$
- $w_n = \dfrac{x_0}{n} + \ldots = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} + x_0$
- $u_n = \dfrac{1}{n}$

et donc que le procédé δ^2 AITKEN itéré applique aux suites (S_n) convergentes de limite S^* définies par $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu x_0^\nu$ avec (a_ν) appartenant à $\mathcal{K}_{TM}(0)$ et $-1 < x_0 \leq 1$ donne des quantités $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}_{k+1}\varepsilon_2^{(n+1)} - S^*}{{}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*} = 0,\ k \geq 0.$$

Exemples :

• Supposons $\alpha(t) = -e^{-t}$. $\alpha(t)$ vérifie bien les conditions $\mathcal{P}_\alpha$

Soit $a_n = -\int_0^\infty e^{-nt}\, d(e^{-t})$ on a alors $a_n = \frac{1}{n+1}$ et donc (S_n) définie par $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{x^\nu}{\nu+1}$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.

Pour $-1 < x \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \mathrm{Log}(1+x)$.

• Soit $\alpha(t) = -4\, e^{-\frac{t}{2}}$; $\alpha(t)$ vérifie bien les conditions $\mathcal{P}_\alpha$

Soit $a_n = \int_0^\infty e^{-nt}\, d(-4\, e^{-\frac{t}{2}})$; on a alors : $a_n = \frac{4}{2n+1}$.

(S_n) définie par $S_n = 4 \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{2\nu+1}$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.

Si $x = 1$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n = \pi$.

V. RESULTATS NUMERIQUES

Nous allons étudier d'une façon pratique le δ^2 AITKEN itéré dans les trois cas de figure b1), b2) et b3) traitées dans la partie b) du paragraphe 2.

Dansla pratique, nous devons songer à donner un test d'arrêt, c'est-à-dire à préciser l'entier $k_1 \geq 1$ tel qu'on ne peut plus appliquer le procédé δ^2 AITKEN à ${}_{k_1}\varepsilon_2^{(n)}$.

Etant donnée une suite (S_n) vérifiant les hypothèses de la proposition 1, on a alors $\lim_{n\to\infty} \frac{{}_{k_1}\varepsilon_{n+1}}{{}_k\varepsilon_n} = \rho_0(\phi'(0))^m$ où $m \geq k_1$, $k_1 \geq 1$.

Théoriquement, ceci voudrait dire qu'à partir d'un certain rang N la suite $({}_{k_1}\varepsilon_2^{(n)})$ est alors :

- Soit monotone [cas correspondant à $\rho_0(\phi'(0))^m > 0$].

- Soit oscillante [cas correspondant à $\rho_0(\phi'(0))^m < 0$] et on a alors le schéma suivant :

(*) $\quad {}_{k_1}\varepsilon_2^{(N)} < {}_{k_1}\varepsilon_2^{(N+2)} < {}_{k_1}\varepsilon_2^{(N+4)} < \ldots < S^* < \ldots < {}_{k_1}\varepsilon_2^{(N+5)} < {}_{k_1}\varepsilon_2^{(N+3)} < {}_{k_1}\varepsilon_2^{(N+1)}$

En pratique, vu la difficulté de préciser le rang N on se le fixe égal à zéro.

Et on a alors les deux tests d'arrêts suivants :

1° Arrivé à l'étape k_1, si on a $|\Delta^2\, {}_{k_1}\varepsilon_2^{(n)}| < 10^{-60}$ $n \geq 0$ on s'arrête.

2° On a soit perte de monotonie pour la suite $({}_{k_1}\varepsilon_2^{(n)})$, soit le schéma (*) n'est plus respecté.

Nous avons obtenu les résultats suivants :

1) Estimation de la racine S^* du polynôme $p(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

On sait que la racine S^* du polynôme $p(x) = 0$ est :

$S^* = 1.36880810782137\ldots$

Considérons la suite (S_n) définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{20}{S_n^2 + 2S_n + 10} \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

(S_n) est une suite convergente de limite S^* et vérifiant :

$S_{n+1} = \phi(S_n)$ où $\phi(x)$ est la fonction définie par :

$$\phi(x) = \frac{20}{10 + x^2 + 2x}$$

Il est clair que ϕ est analytique au voisinage de S^* et vérifie :

- $\phi(S^*) = S^*$

- $|\phi'(S^*)| = \dfrac{40\ (S^* + 1)}{(S^{*2} + 2S^* + 10)^2} = \dfrac{40\ (S^* + 1)(S^*)^2}{400} = \dfrac{(S^*)^2\ (S^* + 1)}{10} < 1$

$(S_n) \in \mathcal{S}$ d'après ce qui a été fait précédemment. On obtient alors après application du δ^2 itéré à (S_n) les résultats suivants :

n	$S_n^{(1)} = {}_1\varepsilon_2^{(n)}$ COLONNE 1	$S_n^{(2)} = {}_2\varepsilon_2^{(n)}$ COLONNE 2	$S_n^{(3)} = {}_3\varepsilon_2^{(n)}$ COLONNE 3
1	~~.137081388260723D+01~~	~~.136878100118031D+01~~	.136880806318803D+01
2	~~.136925542525683D+01~~	~~.136880990743762D+01~~	~~.136880810597811D+01~~
3	.136889171990199D+01	.136880792919329D+01	.136880810775224D+01
4	.136882097105402D+01	.136880812276755D+01	.136880810781865D+01
5	.136881139520606D+01	.136880810648957D+01	.136880810782127D+01

n	$S_n^{(3)} = {}_3\varepsilon_2^{(n)}$ COLONNE 4
~~1~~	.136880810782697D+01
~~2~~	~~.136880810782124D+01~~
3	.136880810782137D+01
4	.136880810782137D+01
5	.136880810782137D+01

Nous avons ${}_3\varepsilon_2^{(3)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts.

Le calcul de ${}_3\varepsilon_2^{(3)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \ldots, S_{11}$.

Or à titre de comparaison on a :

n	S_n
6	.137068600340182D+01
9	.136827102361284D+01
~~10~~	~~.136905981209740D+01~~
~~11~~	~~.136869639755552D+01~~
12	.136865766862673D+01
13	.136878610257799D+01
~~14~~	~~.136861787439609D+01~~
~~15~~	~~.136860577314565D+01~~

2) Soit à estimer la racine S^* de l'équation $x-\rho^{-x} = 0$

Considérons la suite (S_n) définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = e^{-S_n} \\ S_0 > 0 \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$; soit $\phi / x \xrightarrow{\phi} e^{-x}$; alors ϕ est contractante et on en déduit que (S_n) est convergente de limite S^* ; S^* vérifiant $S^* = e^{-S^*}$.

De plus $\phi(x)$ est bien analytique dans un voisinage de S^*.

L'application du δ^2 itéré à (S_n) a donné : pour $S_0 = 0.5$:

n	$S_n^{(1)} = {}_1\varepsilon_2^{(n)}$	$S_n^{(2)} = {}_2\varepsilon_2^{(n)}$	$S_n^{(3)} = {}_3\varepsilon_2^{(n)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
~~1~~	~~.567623876410920D+00~~	~~.567141993912812D+00~~	.567143291704776D+0
~~2~~	~~.567298989326510D+00~~	~~.567143533177061D+00~~	~~.567143290542135D+0~~
3	.567193142398218D+00	.567143246775268D+00	.567143290423568D+0
4	.567159304489405D+00	.567143298436652D+00	.567143290411204D+0
5	.567148453258233D+00	.567143288952429D+00	.567143290409931D+0
~~6~~	~~.567144952376405D+00~~	~~.567143290676358D+00~~	.567143290409799D+0
~~7~~	~~.567143824737777D+00~~	~~.567143290361230D+00~~	~~.567143290409786D+0~~
~~8~~	~~.567143462321430D+00~~	.567143290418649D+00	.567143290409784D+0
9	.567143345697323D+00	.567143290408168D+00	.567143290409784D+0
10	.567143308194579D+00	.567143290410079D+00	.567143290409784D+0

n	$S_n^{(4)} = {}_4\varepsilon_2^{(n)}$
	COLONNE 4
1	.567143290410104D+00
2	~~.567143290409765D+00~~
3	.567143290409785D+00
4	.567143290409784D+00
5	.567143290409784D+00
6	.567143290409784D+00
7	~~.567143290409784D+00~~
8	.567143290409784D+00
9	.567143290409784D+00
10	.567143290409785D+00

Nous avons ${}_4\varepsilon_2^{(4)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts. Le calcul de ${}_4\varepsilon_2^{(4)}$ a nécessité la connaissance de S_1, $S_2, \ldots, S_{12}$.

A titre de comparaison on a obtenu :

n	S_n
9	.5660809452746921D+00
10	.5675596342082242D+00
11	.5669072129355471D+00
12	.567277195970779D+00
13	.5670967351853726D+00
14	.567186360987636D+00
15	.567118064256980D+00

3) Estimation de la racine S^* du polynôme $p(x) = x^2 - 4x + 2 = 0$

On considère la suite (S_n) définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{1}{4}(S_n^2 + 2) \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

(S_n) est une suite de la forme $S_{n+1} = \phi(S_n)$; ϕ définie par :

$$x \overset{\phi}{\to} \phi(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2).$$

ϕ est bien analytique dans $\mathbb{R}$ et vérifie :

- $\phi(S^*) = S^*$
- $\phi'(S^*) = \frac{S^*}{2} < 1$

où $S^* = 2 - \sqrt{2} = 0.5857864040856\ldots$

Ayant choisi $S_0 - S^*$ assez petit, (S_n) est alors une suite convergente de limite S^*. De plus $(S_n) \in \mathcal{S}$.

L'application du δ^2 itéré à (S_n) donne alors les résultats numériques suivants :

n	$_1\varepsilon_2^{(n)} = S_n^{(n)}$	$S_n^{(2)} = {}_2\varepsilon_2^{(n)}$	$S_n^{(3)} = {}_3\varepsilon_2^{(n)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.571428571428571D+00	.585761963026619D+00	.585786434404406D+00
2	.585106382978723D+00	.585786170705392D+00	.585786437615868D+00
3	.585731978134609D+00	.585786431562835D+00	.585786437626831D+00
4	.585781850482163D+00	.585786437478590D+00	.585786437626905D+00
5	.585786046163774D+00	.585786437623207D+00	.585786437626905D+00
6	.585786404095686D+00	.585786437626813D+00	.585786437626905D+00
7	.585786434751659D+00	.585786437626902D+00	.585786437626905D+00
8	.585786437380260D+00	.585786437626905D+00	.585786437626905D+00
9	.585786437605749D+00	.585786437626905D+00	.585786437626905D+00
10	.585786437625090D+00	.585786437626905D+00	.585786437626905D+00
11	.585786437626749D+00	.585786437626905D+00	.585786437626905D+00

On a ${}_3\varepsilon_2^{(4)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts. Le calcul de ${}_3\varepsilon_2^{(4)}$ a nécessité le calcul de S_1, S_2,... S_{10}. A titre de comparaison on a :

n	S_n
8	.585737634199000D+00
9	.585772144029496D+00
10	.585782251100228D+00
11	.585765211494494D+00
12	.585786676489217D+00
13	.585786377437051D+00
14	[illegible]

4) Estimation de $\sqrt{2}$

L'écriture de $\sqrt{2}$ sous forme de fraction continue donne :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2} + \dots}}$$

On a bien $\sqrt{2} = b_0 + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b} + \dots}$

avec $b_0 = 1$; $a = 1$, $b = 2$.

Soit (S_n) la suite définie par :

S_n est le $n^{\text{ième}}$ convergent de la fraction continue $\sqrt{2}$. On obtient :

$$S_n = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 - x^{n+1}}\right) \quad \text{où } x = 2\sqrt{2} - 3.$$

L'application du δ^2 itéré à (S_n) donne alors :

n	$S_n^{(1)} = {}_1\varepsilon_2^{(n)}$	$S_n^{(2)} = {}_2\varepsilon_2^{(n)}$	$S_n^{(3)} = {}_3\varepsilon_2^{(3)}$
1	.1416666666666667D+01	.1414213564213564D+01	.1414213562373100D+01
2	.1414285714285714D+01	.1414213562374690D+01	.1414213562373100D+01
3	.1414215686274510D+01	.1414213562373100D+01	.141421356237309[illegible]D+01
4	.1414213624894870D+01	.1414213562373100D+01	.1414213562373100D+01
5	.1414213564213560D+01	.141421356237309[illegible]D+01	.14142135623730[illegible]D+01
6	.1414213562427270D+01	.14142135623731[illegible]D+01	.1414213562373100D+01
7	.1414213562374690D+01	.1414213562373090D+01	.1414213562373090D+01
8	.1414213562373140D+01	.1414213562373090D+01	.1414213562373090D+01
9	.1414213562373140D+01	.14142135623731[illegible]D+01	.1414213562373091D+01
10	.1414213562373090D+01	.1414213562373090D+01	.14142135623730[illegible]D+01

Nous avons $S_3^{(3)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts. Le calcul de $S_3^{(3)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \ldots, S_9$.

A titre de comparaison on a :

n	S_n
1	.9999999999999999D+00
2	.1500000000000000D+01
3	.1400000000000000D+01
4	.1416666666666667D+01
5	.1413793103448280D+01
6	.1414285714285714D+01
7	.1414201183431950D+01
8	.1414215686274510D+01
9	.1414213197969540D+01
10	.1414213624894870D+01
11	.1414213551646050D+01
12	.1414213564213560D+01

5) Calcul de π

Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_n = 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ S_0 = 4 \end{cases}$$

(S_n) est une suite convergente de limite $S^* = \pi$.

De plus on remarque que $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu$.

où $a_\nu = 4 \int_0^\infty e^{-nt} \, d\phi(t)$

où $\phi(t) = - e^{-t/2}$.

Il est clair que $\phi(t)$ est entière ; vérifiant :

$- \phi'(t) > 0$

$- \lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{Log} \dfrac{|\phi'(t)|}{|t|} = -\dfrac{1}{4} < \infty$

Ce qui montre que $R_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ s'écrit :

$R_n = -1 + \dfrac{\alpha_1}{n} + \dfrac{\alpha_2}{n^2} + \ldots$

L'application du δ^2 itéré à (S_n) donne alors :

n	$s_n^{(5)} = {}_5\varepsilon_2^{(n)}$	$s_n^{(6)} = {}_6\varepsilon_2^{(n)}$	$s_n^{(7)} = {}_7\varepsilon_2^{(n)}$
1	.314159265397529D+01	.3141592653591[illegible]D+01	.31415926535897[illegible]D+0
2	.314159265347710D+01	.314159265358924D+01	.314159265358979D+0
3	.314159265362505D+01	.314159265358998D+01	.314159265358979D+0
4	.314159265357781D+01	.314159265358973D+01	.314159265358979D+0
5	.314159265359420D+01	.31415926535898[illegible]D+01	.314159265358979D+0

On a obtenu ${}_7\varepsilon_2^{(2)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts. La connaissance de ${}_7\varepsilon_2^{(2)}$ a nécessité le calcul de $S_1, S_2, \ldots, S_{16}$.

A titre de comparaison, on a :

n	S_n
49	.316199869299505D+01
50	.312159465259101D+01

6) Calcul de Ln 2

Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} \\ \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

(S_n) est une suite convergente de limite $S^* = \text{Ln } 2$.

On remarque que $S_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu$ avec :

$$a_\nu = \int_0^\infty e^{-nt}\, d(\phi(t)) \qquad \text{où } \phi(t) = -e^{-t}$$

$\phi(t)$ est une fonction entière vérifiant :

- $\phi'(t) > 0$

- $\lim\limits_{t\to\infty} \text{Log } \dfrac{|\phi'(t)|}{|t|} = 1 < \infty$

Il s'ensuit alors que $R_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ s'écrit :

$$R_n = -1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots$$

L'application du δ^2 itéré donne alors :

n	${}_5\varepsilon_2^{(n)}$	${}_6\varepsilon_2^{(n)}$	${}_7\varepsilon_2^{(n)}$
1	.69314718066356 4D+00	.693147180560904 0D+00	.693147180559944D+00
2	.693147180528748D+00	.693147180559785D+00	.693147180559945D+00
3	.693147180570118D+00	.693147180560000D+00	.693147180559945D+00
4	.693147180556345D+00	.693147180559926D+00	.693147180559945D+00
5	.693147180561320D+00	.693147180559952D+00	.693147180559945D+00
6	.693147180559384D+00	.693147180559942D+00	.693147180559945D+00
7	.693147180560189D+00	.693147180559946D+00	.693147180559945D+00
8	.693147180559834D+00	.693147180559945D+00	.693147180559945D+00
o	.693147180559999D+00	.693147180559946D+00	.693147180559945D+00
10	.693147180559918D+00	.693147180559945D+00	.693147180559945D+00
11	.693147180559959D+00	.693147180559945D+00	.693147180559945D+00

On a ${}_7\varepsilon_2^{(n)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts. La connaissance de ${}_7\varepsilon_2^{(n)}$ a nécessité le calcul de S_1, S_2,... S_{16}. Or à titre de comparaison, on a :

n	S_n
49	.7032471605759180+00
50	.6832471605759180+00

D'autres exemples numériques sont traités dans LUBKIN [13].

Comparaison avec l'ε-Algorithme :

Nous avons essayé de comparer les résultats numériques du procédé AITKEN itéré et ceux donnés par l'ε-Algorithme.

Nous avons utilisé, pour l'ε-Algorithme, la subroutine donnée dans [3]

Pour l'exemple 1), on a obtenu :

$\varepsilon_0^{(1)}=$ .100000000000000D+01
$\varepsilon_0^{(2)}=$ .153846153846154D+01
$\varepsilon_2^{(1)}=$ .157081308260723D+01
$\varepsilon_2^{(2)}=$ .156925542525683D+01
$\varepsilon_4^{(1)}=$ .136877798976250D+01
$\varepsilon_4^{(2)}=$ .136881016957316D+01
$\varepsilon_6^{(1)}=$ .136880811083833D+01

SINGULARITE NON ISOLEE DANS EPS1.IMPOSSIBILITE DE CONTINUER

$\varepsilon_6^{(2)}=$ .136880811083833D+01
$\varepsilon_8^{(1)}=$ .136880811083833D+01
$\varepsilon_8^{(2)}=$ .136880811083833D+01
$\varepsilon_{10}^{(1)}=$ .136880811083833D+01
$\varepsilon_{10}^{(2)}=$ .136880811083833D+01

On a $\varepsilon_{10}^{(1)} = 1.36880811083833$ calculé avec 8 chiffres significatifs exacts. Pour le calcul de $\varepsilon_{10}^{(1)}$ on a eu besoin de $S_1,\ldots,S_{11}$. Or, pour le même nombre de termes de la suite S_n on a obtenu ${}_3\varepsilon_2^{(3)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts.

Pour l'exemple 2), on a obtenu :

```
1   .500000000000000D+00
2   .606530659712637D+00
3   .567623876410920D+00
4   .567290909326510D+00
5   .567140868596407D+00
6   .567143729129942D+00

SINGULARITE NON ISOLEE DANS EPS1.IMPOSSIBILITE DE CONTINUER

7   .567143729129942D+00
8   .567143729129942D+00
9   .567143729129942D+00
10  .567143729129942D+00
11  .567143729129942D+00
12. .567143729129942D+00 = ε10(2)
```

On a $\varepsilon_{10}^{(2)} = 0.567143729129942$ avec 9 chiffres significatifs exacts.

Le calcul de $\varepsilon_{10}^{(2)}$ a nécessité le calcul de $S_1, S_2, \ldots S_{12}$. Or, avec $S_1, S_2, \ldots S_{12}$ on a obtenu ${}_4\varepsilon_2^{(4)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts.

```
1   .100000000000000D+01
2   .500000000000000D+00
3   .700000000000000D+00
4   .690476190476190D+00
5   .693333333333333D+00
6   .693089430894309D+00
7   .693152454780362D+00
8   .693145743145743D+00

SINGULARITE NON ISOLEE DANS EPS1.IMPOSSIBILITE DE CONTINUER

9   .693145743145743D+00
10  .693145743145743D+00
11  .693145743145743D+00
12  .693145743145743D+00
13  .693145743145743D+00
14  .693145743145743D+00
15  .693145743145743D+00
16  .693145743145743D+00
```

On a $\varepsilon_{14}^{(2)} = 0.693145743145743$ avec 5 chiffres significatifs exacts.

Le calcul de $\varepsilon_{14}^{(2)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \ldots S_{16}$. Or, avec $S_1, S_2, \ldots S_{16}$ on a obtenu ${}_7\varepsilon_2^{(n)}$ avec 15 chiffres significatifs exacts.

VI. DETERMINATION D'UN ENSEMBLE DE SUITES A CONVERGENCE LOGARITHMIQUE STABLE PAR δ^2 AITKEN

a) Introduction

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^*. On dit que $(S_n)_{n\geq 0}$ est à convergence logarithmique si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = 1.$$

On note par Log = $\{(S_n)$ convergente $/ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1\}$ et par

$$\text{LOGSF} = \{(S_n) \text{ convergente } / \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = 1\}.$$

DELAHAYE et GERMAIN-BONNE [5] ayant montré qu'il n'existe pas d'algorithme universel capable d'accélérer toutes les suites de Log et de LOGSF ; on s'intéresse généralement à accélérer la convergence de suites appartenant à des sous-ensembles stricts de LOGSF.

Cependant le δ^2 AITKEN est loin d'être l'algorithme efficace pour cette accélération.

Nous allons discuter les possibilités d'accélération de suites appartenant à des sous-ensembles stricts de LOGSF par l'utilisation de la transformation diagonale après application du δ^2 itéré à ces suites.

Nous nous inspirons de l'exemple $(S_n) = \frac{1}{n}$.

L'application du δ^2 AITKEN donne

$${}_1\varepsilon_2^{(n)} = \frac{1}{2(n+1)} \text{ et l'application du } \delta^2 \text{ AITKEN donne : } {}_k\varepsilon_2^{(n)} = \frac{1}{2^k(n+k)} \begin{matrix} n \geq \\ k \geq \end{matrix}$$

Il est clair que :

- $\lim\limits_{n\to\infty} {}_k\varepsilon_2^{(n)} = 0$, à k fixé

- $\lim\limits_{k\to\infty} {}_k\varepsilon_2^{(n)} = 0$, à n fixé

- $\lim\limits_{k\to\infty} {}_k\varepsilon_2^{(k)} = 0$

Ce qui nous permet de remarquer pour la suite S_n, deux choses :

1° Si nous fixons k on a alors $\lim\limits_{n} \frac{{}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)}}{{}_k\varepsilon_2^{(n)}} = \frac{1}{2}$ et on a alors des chances d'extraire une suite diagonale qui serait dans LIN.

2° Si nous faisons $n = k$ et posons $(d_k)_{k\geq 1} = ({}_k\varepsilon_2^{(k)})_{k\geq 1}$.

Alors $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{1}{2}$. Ce qui implique que $(d_k)_{k\geq 1} \in$ LIN.

Comme $\lim\limits_{k\to\infty}[d_k] = \lim\limits_{k\to\infty}[S_k]$ on pourrait alors appliquer le procédé δ^2 AITKEN itéré à $(d_k)_{k\geq 1}$ afin d'accélérer la convergence de la suite $(S_k)_{k\geq 1}$ vers sa limite, $(d_k)_{k\geq 0}$ représente la diagonale principale du procédé δ^2 AITKEN itéré.

Nous avons fait un essai numérique sur la suite $(S_n) = (\frac{1}{n})$ et avons obtenu des résultats encourageants mais cependant perturbés par la propagation d'erreurs ; néanmoins on s'y attendait vu les résultats théoriques concernant le conditionnement du procédé δ^2 AITKEN appliqué à des suites $(S_n) / \frac{e_{n+1}}{e_n} \to \rho$ avec ρ proche ou égal à 1.

Cet essai numérique donne, en faisant remarquer que l'on a noté $(C_n^{(k)})$ les quantités obtenues après application du δ^2 AITKEN itéré à (d_n) !

n	S_n
1	.1000000000000000D+01
2	.5000000000000000D+00
3	.3333333333333333D+00
4	.2500000000000000D+00
5	.2000000000000000D+00
6	.1666666666666667D+00
7	.1428571428571430D+00
8	.1250000000000000D+00
9	.1111111111111111D+00
10	.1000000000000000D+00
11	.9090909090909090D-01
12	.8333333333333333D-01
13	.7692307692307690D-01
14	.7142857142857140D-01
15	.6666666666666667D-01
16	.6250000000000000D-01
17	.5882352941176470D-01
18	.5555555555555556D-01
19	.5263157894736840D-01
20	.5000000000000000D-01
21	.4761904761904760D-01
22	.4545454545454545D-01
23	.4347826086956520D-01
24	.4166666666666667D-01
25	.4000000000000000D-01
26	.3846153846153850D-01
27	.3703703703703700D-01
28	.3571428571428570D-01
29	.3448275862068970D-01
30	.3333333333333333D-01
31	.3225806451612900D-01
32	.3125000000000000D-01
33	.3030303030303030D-01
34	.2941176470588240D-01
35	.2857142857142860D-01
36	.2777777777777778D-01
37	.2702702702702700D-01
38	.2631578947368420D-01
39	.2564102564102560D-01
40	.2500000000000000D-01

n	d_n	$c_n^{(1)}$	$c_1^{(2)}$
1	.2500000000000000D+00	.8928571428463890D-02	.1371408647849060D-03
2	.6249999999999990D-01	.1893939466272160D-02	
3	.2083333333332682D-01	.4882033345197530D-03	

Le calcul de $c_1^{(2)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{13}$.

Nous avons souligné S_{13} et remarquons qu'il y a effectivement accélération de la convergence de la suite (S_n) par application du procédé précédemment décrit.

On pourrait se demander si l'application d'un tel procédé à des suites possédant la même propriété que la suite $(S_n) = (\frac{1}{n})$ n'accélèrerait pas leur convergence.

Dans un premier lieu nous chercherons les propriétés que possèdent la suite $(S_n) = (\frac{1}{n})$ ensuite nous essaierons numériquement le procédé sur les suites ayant une propriété équivalente à $(S_n) = (\frac{1}{n})$.

Les propriétés de la suite $(\frac{1}{n})$ se conçoivent de deux façons :

<u>1ère façon</u> : Montrons que la suite $(S_n) = (\frac{1}{n})$ s'écrit à partir d'un certain rang : $S_{n+1} = \phi(S_n)$ où ϕ vérifie une propriété $\mathcal{E}_f^{(p)}(S^*)$ définie par :

<u>*Définition 4*</u> :

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie une propriété $\mathcal{E}_f^{(p)}(S^*)$ dans un voisinage $\mathcal{V}$ de S^* où S^* est le seul point fixe de f dans $\mathcal{V}$ si :

- f est analytique dans $\mathcal{V}$.
- $f'(S^*) = 1$.
- $\exists p \geq 2$ tel que $\begin{cases} f''(S^*) = \ldots = f^{(p-n)}(S^*) = 0 \\ f^{(p)}(S^*) = C \neq 0 \end{cases}$

avec les conditions p impair et c positif non réalisées simultanément.

Tenant compte de cette définition de $\mathcal{E}_f^{(p)}(S^*)$, on est amenés à définir un sous-ensemble de Log appelé $\mathcal{L}_p^{(1)}(S^*)$.

<u>*Définition 5*</u> :

On dit qu'une suite (S_n) est dans $\mathcal{L}_p^{(1)}(S^*)$ si à partir d'un certain rang N ; $S_{n+1} = \phi(S_n)$ où ϕ est une fonction vérifiant la propriété $\mathcal{E}_\phi^{(p)}(S^*)$.

<u>Remarque</u> : Kowalewski dans [12] montre que toute suite de $\mathcal{L}_p^{(1)}(S^*)$ converge vers S^* ; cette convergence étant logarithmique.

<u>Exemple</u> : Soit $(S_n) = (\frac{1}{n})$ alors $(S_n) \in L_1^{(1)}(0)$.

En effet $S_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \phi(S_n)$.

et à partir de $n > 1$ ϕ est analytique dans un voisinage de zéro et vérifie la propriété $E_\phi^{(1)}(S^*)$.

Une autre façon de caractériser la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est :

<u>2ème façon</u> : $S_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \Delta S_n = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$

d'où $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = + \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = + \frac{n}{n+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}}$

pour $n > 2$ on a alors $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \ldots$

Ce qui nous amène à définir $L_1^{(2)}(S^*)$ le sous-ensemble de Log suivant :

<u>Définition 6</u> :

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente de limite S^*.

On dit que $(S_n) \in L_1^{(2)}(S^*)$, si à partir d'un certain rang (S_n) peut s'écrire :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots$$

où les (α_i) sont des réels non tous nuls et $\alpha_1 < -1$.

GERMAIN-BONNE et DELAHAYE dans [5] montrent que la famille des suites à convergence logarithmique est rémanente c'est-à-dire qu'il n'existe pas un algorithme accélérant la convergence de toutes les suites à convergence logarithmique.

Nous essayerons d'accélérer la convergence de suites (S_n) appartenant à des sous-ensembles stricts de LOGSF.

Dans les définition 5 et 6, nous avons défini $L_p^{(1)}(S^*)$ et $L_1^{(2)}(S^*)$.

Montrons alors que :

- $L_1^{(2)}(S^*) \subset \text{LOGSF}$

- $L_1^{(2)}(S^*) \subset \text{LOGSF}$

L'inclusion $L_1^{(2)}(S^*) \subset \text{LOGSF}$ ne nécessite pas de démonstration.

Nous allons plutôt montrer que $L_p^{(1)}(S^*) \subset \text{LOGSF}$.

$L_p^{(1)}(S^*) \subset \text{LOGSF}$

$$S_n \in L_p^{(1)}(S^*) \Rightarrow S_{n+1} = \phi(S_n) \qquad n \geq N$$

ϕ analytique dans un voisinage de S^* on écrit :

$$S_{n+1} = \phi(S_n) = \phi(S^*) + \phi'(S')(S_n - S) + \frac{\phi^{(p)}(S')(S_n - S^*)^p}{p!} + \ldots$$

d'où $S_{n+1} = S^* + e_n + \dfrac{\phi^{(p)}(S^*)\ e_n^p}{p!} + \ldots$

$$e_{n+1} = e_n + \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!}\ e_n^p + \ldots$$

Il est clair que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} \to \phi'(S^*) = 1.$

On a :

$$\Delta e_n = \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!}\ e_n^p + \ldots \Rightarrow \lim_{n\to N} \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \lim_{n\to N}\left(\frac{e_{n+1}}{e_n}\right)^p = 1$$

d'où $(S_n) \in \text{LOGSF}$.

b) Possibilités d'accélération de $L_p^{(1)}(S^*)$ et $L_1^{(2)}(S^*)$

Nous avons testé numériquement l'algorithme suivant sur $L_p^{(1)}(S^*)$ et $L_1^{(2)}(S^*)$.

Soit (S_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$.

On applique le δ^2 itéré à (S_n) pour obtenir les quantités $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$.

On prend ensuite la diagonale : $(d_k) = ({}_k\varepsilon_2^{(k)})$.

On applique ensuite le δ^2 itéré à la suite (d_k) ; on notera par $(C_n^{(k)})$ les quantités obtenues.

<u>Inconvénients</u> :

Cet algorithme n'est pas stable du point de vue numérique ; on pouvait s'y attendre étant donné que le δ^2 AITKEN est mal conditionné quand il est appliqué à des suites (S_n) de limite S^* telle que

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho$$

avec ρ voisin de 1.

On trouvera plus de détails dans [19].

Nous avons vu précédemment que le δ^2 itéré appliqué à $(\frac{1}{n})$ donnait le résultat suivant :

- Soient $(t_k) = ({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ à n fixé, et $(d_k) = ({}_k\varepsilon_2^{(k)})$ alors :

$(t_k) \in$ LIN et $(d_k) \in$ LIN.

<u>Question</u> : En est-il de même pour toute suite appartenant à $L_p^{(1)}(S^*)$ où à $L_1^{(2)}(S^*)$?

Notre réponse ne sera pas précise mais ce que l'on peut dire c'est que l'on a des chances pour qu'une diagonale $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$, n fixe, soit dans LIN. L'intuition principale qu'on a eu est donnée dans les propositions 5 et 6 suivantes :

b1) Propriété de $L_p^{(1)}(S^*)$

Proposition :

Soit $(S_n)_{n\geq 0} \in L_p^{(1)}(S^*)$, on a alors :

1° $\quad {}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^* = O_k(e_n)$

O_k *étant une fonction analytique dans un voisinage de zéro avec*

1b $\quad O_k(0) = 0$

2b $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{O_k(e_n)}{e_n} = \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k$

3b $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{{}_{k+1}\varepsilon^{(n)}}{{}_k\varepsilon^{(n)}} = \dfrac{p-1}{p}$

Il est clair que b) résulte de a).

Démonstration :

Récurrence sur k.

k = 1 : On a ${}_1\varepsilon_n = e_n - \dfrac{(\Delta e_n)^2}{\Delta^2 e_n} = e_n - \dfrac{\Delta e_n}{\dfrac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1}$

Comme $S_{n+1} = \phi(S_n)$, ϕ vérifiant $E_\phi^{(p)}(S^*)$ il vient :

$$e_{n+1} = e_n + \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^p + \ldots + \frac{\phi^{(p+i)}(S^*)}{(p+i)!} e_n^{p+i} + \ldots \qquad (*)_1$$

d'où $\Delta e_n = \dfrac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^p + \ldots + \dfrac{\phi^{(p+i)}(S^*)}{(p+i)!} e_n^{p+i} + \ldots$

On a alors :

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{\frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_{n+1}^p + \ldots + \frac{\phi^{(p+i)}(S^*)}{(p+i)!} e_{n+1}^{p+i} + \ldots}{\frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^p + \ldots + \frac{\phi^{(p+i)}(S^*)}{(p+i)!} e_n^{p+i} + \ldots}$$

i.e. : $$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \left(\frac{e_{n+1}}{e_n}\right)^p \left[\frac{1 + a_1^{(p)} e_{n+1} + a_2^{(p)} e_{n+1}^2 + \ldots + a_i^{(p)} e_{n+1}^i + \ldots}{1 + a_1^{(p)} e_n + a_2^{(p)} e_n^2 + \ldots + a_i^{(p)} e_n^i + \ldots}\right] \qquad (*)_2$$

avec $a_i^{(p)} = \frac{\phi^{(p+i)}(S^*)}{(p+i)!} \qquad \forall i \geq 1$

D'après $(*)_1$ il vient :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 + \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^{p-1} + \ldots + \frac{\phi^{(p+i)}}{(p+i)!} e_n^{p+i-1} + \ldots$$

d'où $$\frac{e_{n+1}}{e_n}^p = 1 + p \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^{p-1} + \ldots$$

Pour n assez grand ; la suite e_n vérifiant la condition de Gauss (ϕ vérifie $E_\phi^{(p)}(S^*)$ e_n est dans un voisinage de zéro ; ainsi que l'expression

$$a_1^{(p)} e_n + a_2^{(p)} e_n^2 + \ldots + a_i^{(p)} e_n^{k_1} + \ldots$$

D'où $\frac{1}{1 + a_1^{(p)} e_n + a_2^{(p)} e_n^2 + \ldots}$ est développable en série entière de e_n, et ce pour e_n dans un voisinage de zéro.

Il vient donc d'après $(*)_2$:

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = 1 + p \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^{p-1} + \ldots$$

d'où $$\frac{\Delta e_n}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = \frac{\frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^p + \ldots + \frac{\phi^{(p+i)}(S^*)}{(p+i)!} e_n^{p+i} + \ldots}{p \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} e_n^{p-1} + \ldots}$$

Il est clair qu'on en déduit $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\Delta e_n}{e_n \left(\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1\right)} = \frac{1}{p}$

d'où $\exists$ $O_1^{(1)}$ analytique dans un voisinage de zéro ; $O_1^{(1)}(0) = 0$

et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{O_1^{(1)}(e_n)}{e_n} = \dfrac{1}{p}$ et tel que $\dfrac{\Delta e_n}{\dfrac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = O_1^{(1)}(e_n)$.

En posant $e_n - O_1^{(1)}(e_n) = O_1(e_n)$

Il vient ${}_1\varepsilon_n = O_1(e_n)$

On a $O_1(0) = 0$.

et $\dfrac{O_1(e_n)}{e_n} = 1 - \dfrac{O_1^{(1)}(e_n)}{e_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p}$.

ce qui finit la démonstration pour $k = 1$.

On suppose ${}_k\varepsilon_n = O_k(e_n)$ avec O_k vérifiant les propriété citées précédemment. Démontrons que ${}_{k+1}\varepsilon_n = O_{k+1}(e_n)$ avec O_{k+1} vérifiant la propriété : O_{k+1} analytique dans un voisinage de zéro, $O_{k+1}(0) = 0$ et :

$$\frac{O_{k+1}(e_n)}{e_n} \to \left[\frac{p-1}{p}\right]^{k+1}$$

On a :

$${}_{k+1}\varepsilon_n = {}_k\varepsilon_n - \frac{\Delta_k\varepsilon_n}{\dfrac{\Delta_k\varepsilon_{n+1}}{\Delta_k\varepsilon_n} - 1}.$$

On a ${}_k\varepsilon_n = O_k(e_n)$.

Pour des raisons de commodité on va remplacer pour n assez grand e_n par x en tenant compte que si $S_{n+1} = \phi(S_n)$ ϕ analytique dans un voisinage de S^* alors $e_{n+1} = g(e_n)$ avec g analytique dans un voisinage de zéro les conditions supplémentaires faites sur ϕ (ϕ vérifie $E_\phi^{(p)}(S^*)$) feront aussi que $g(0) = 0$; $g'(0) = 1$.

On a alors :

$${}_k\varepsilon_n = O_k(x) \text{ et } {}_k\varepsilon_{n+1} = O_k(g(x)),\ {}_k\varepsilon_{n+2} = O_k(g^2(x))$$

0_k et g étant analytiques dans des voisinages V_1 et V_2 de zéro dans un voisinage $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ il vient que 0_k, $0_k \circ g$ et $0_k \circ g^2$ sont analytiques.

Nous supposons ${}_k\varepsilon_n = 0_k(e_n)$ avec 0_k vérifiant :

- 0_k analytique dans un voisinage de zéro.

- $0_k(0) = 0$

- $\dfrac{0_k(e_n)}{e_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k$

et montrons que ${}_{k+1}\varepsilon_n = 0_{k+1}(e_n)$ avec 0_{k+1} vérifiant :

- 0_{k+1} analytique dans un voisinage de 0.

- $0_{k+1}(0) = 0$

- $\dfrac{0_{k+1}(e_n)}{e_n} \to \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^{k+1}$

On a par définition : ${}_{k+1}\varepsilon_n = {}_k\varepsilon_n - \dfrac{\Delta_k\varepsilon_n}{\dfrac{\Delta_k\varepsilon_{n+1}}{\Delta_k\varepsilon_n} - 1}$

comme $S_{n+1} = \phi(S_n)$ ϕ analytique dans un voisinage de S^* on a

$$e_{n+1} = e_n + \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!}\, e_n^p + \ldots$$

d'où $e_{n+1} = g(e_n)$; g analytique dans un voisinage de zéro avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

On écrira alors : $\Delta_k\, \varepsilon_n = {}_k\varepsilon_{n+1} - {}_k\varepsilon_n = 0_k(e_{n+1}) - 0_k(e_n) = 0_k(g(e_n)) - 0_k(e_n)$

et $\dfrac{\Delta_k\varepsilon_{n+1}}{\Delta_k\varepsilon_n} = \dfrac{0_k(g^2(e_n)) - 0_k(g(e_n))}{0_k(g(e_n)) - 0_k(e_n)}$

Nous allons remplacer, pour n assez grand, remplacer e_n par x

$|x|$ étant assez voisin de zéro, on obtient alors :

<u>Etude de $0_k(g(x)) - 0_k(x)$</u>

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0_k(x)}{x} = \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k$ on a :

$$0_k(x) = \left[\frac{p-1}{p}\right]^k x + f_k(x)$$

où f_x est analytique dans un voisinage de 0 avec $f_k(0) = 0$

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_k(x)}{x} = f_k'(0) = 0$

d'où $0_k(g(x)) = \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k g(x) + f_k(g(x))$

d'où $0_k(g(x)) - 0_k(x) = (g(x) - x) \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k + f_k(g(x)) - f_k(x)$.

d'après $(*)_1$ $g(x) = x + \dfrac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} x^p + \dots$

d'où $g(x) - x = \dfrac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} x^p + \dots + \dfrac{\phi^{(p+i)}}{(p+i)!} x^{p+i} + \dots$

On en déduit alors que

$$0_k(g(x)) - 0_k(x) = \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} \cdot \left[\frac{p-1}{p}\right]^k x^p + f_k(g(x)) - f_k(x).$$

Montrons que $\dfrac{f_k(g(x)) - f_k(x)}{x^p} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

On sait que $\dfrac{f_k(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ d'où $f_k(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$

d'où $f_k(g(x)) = \alpha_2 g(x)^2 + \alpha_3 (g(x))^3 + \dots$

d'où $f_k(g(x)) - f(x) = \alpha_2 [(g(x))^2 - x^2] + \alpha_3 [(g(x))^3 - x^3] + \dots$

i.e. : $\dfrac{f_k(g(x)) - f_k(x)}{g(x) - x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$

or $g(x) - x = \dfrac{\phi^{(p)}(S\ )}{p!} x^p + \dots$ avec $\phi^{(p)}(S\ ) \neq 0$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_k(g(x)) - f_x(x)}{x^p} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_k(g(x)) - f_k(x)}{g(x) - x} = 0$

$$\frac{0_k(g^2(x)) - 0_k(g(x))}{0_k(g(x)) - 0_k(x)} = 1 + p\,\frac{\phi^{(p)}(S\ )}{p!}\,x^{p-1} + \ldots$$

d'où pour x assez petit on a :

$$\frac{0_k(g(x)) - 0_k(x)}{\dfrac{0_k(g^2(x)) - 0_k(g(x))}{0_k(g(x)) - 0_k(x)} - 1} = \left[\frac{p-1}{p}\right]^k x \left[\frac{1}{p} + 0_k^{(1)}(x)\right]$$

où $0_k^{(1)}$ est analytique dans un voisinage de zéro

$$0_k^{(1)}(0) = 0.$$

En revenant aux notations $e_n = x$ pour n assez grand on a :

$$\frac{\Delta_k \varepsilon_n}{\dfrac{\Delta_k \varepsilon_{n+1}}{\Delta_k \varepsilon_n} - 1} = \frac{e_n}{p}\left[\frac{p-1}{p}\right]^k + e_n \left[\frac{p-1}{p}\right]^k 0_k^{(1)}(e_n)$$

d'où $_{k+1}\varepsilon_n = {}_k\varepsilon_n - \dfrac{\Delta_k \varepsilon_n}{\dfrac{\Delta_k \varepsilon_{n+1}}{\Delta_k \varepsilon_n} - 1} = 0_k(e_n) - \left[\dfrac{e_n}{p}\left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k + e_n \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k 0_k^{(1)}(e_n)\right]$

On pose $0_{k+1}(e_n) = 0_k(e_n) - \dfrac{e_n}{p}\left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k - e_n \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k P_k^{(1)}(e_n)$

- On a bien 0_{k+1} analytique dans un voisinage de zéro,

- $0_{k+1}(0) = 0$

- $\dfrac{0_{k+1}(e_n)}{e_n} = \dfrac{0_k(e_n)}{e_n} - \dfrac{1}{p}\left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k - \left[\dfrac{p-1}{p}\right]^k 0_k^{(1)}(e_n)$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\frac{0_k(e_n)}{e_n} \to \left[\frac{p-1}{p}\right]^k$$

Comme $0_k^{(1)}(e_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il vient alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{O_{k+1}(e_n)}{e_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{O_k(e_n)}{e_n} - \left[\frac{p-1}{p}\right]^k \frac{1}{p} = \left[\frac{p-1}{p}\right]^k (1-\frac{1}{p}).$$

i.e. : $$\lim_{n\to\infty} \frac{O_{k+1}(e_n)}{e_n} = \left[\frac{p-1}{p}\right]^{k+1}$$

ce qui donne (3b) □

Nous nous intéressons maintenant au cas de suites appartenant à $L_1^{(2)}(S^*)$.

b2) Propriétés de $L_1^{(2)}(S^*)$

Concernant $L_1^{(2)}(S^*)$ on a la proposition suivante :

Proposition 6 :

Soit $(S_n) \in L_1^{(2)}(S^*)$ *; on a alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{k+1}\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta_k\varepsilon_2^{(n)}} = C_1^{(k)} = C_1 \text{ où } 0 < C_1 < 1$$

Démonstration :

Montrons que $L_1^{(2)}(S^*)$ est stable par le procédé δ^2 AITKEN et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \text{Cste} = C \qquad 0 < C < 1$$

1ère Etape :

Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = C \qquad 0 < C < 1$

On a $${}_1\varepsilon_2^{(n)} = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

d'où : $$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n - \frac{\Delta S_{n+1}}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1} + \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

$$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_n} - 1} + \frac{1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}\right]$$

$$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_n \left[\frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1}\right]$$

$$\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_{n+1} \left[\frac{1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} - \frac{1}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1}\right] = \Delta S_{n+1} \left[\frac{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\left[\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right]\left[\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1\right]}\right]$$

<u>Calculons</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n}$

Comme $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$; on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right)\left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1\right)}$

Dire que $(S_n) \in L_1^{(2)}(S^*)$ revient à dire qu'il existe des constantes $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ non toutes nulles, $\alpha_1 < -1$ et telles que :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots$$

d'où pour n assez grans $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1 \sim \frac{\alpha_1}{n}$ (2)

De même $\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1 \sim \frac{\alpha_1}{n+1}$

d'où $\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \sim \alpha_1 \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right]$

i.e. : $$\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \sim - \frac{\alpha_1}{n^2}$$

De (2) on tire que $\left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1\right)\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right) \sim \frac{\alpha_1^2}{n^2}$

d'où $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right)\left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)} = - \frac{1}{\alpha_1}$$

d'après (1) on a alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_1 \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = - \frac{1}{\alpha_1}$

<u>$2^{\text{ème}}$ Etape</u> :

Montrons que $(\varepsilon_2^{(n)}) \in L_1^{(2)}(S\ )$ avec

$$\frac{\Delta_1 \varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1 \varepsilon_2^{(n)}} = 1 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots$$

où $\beta_1 = \alpha_1$.

On a en posant $R_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

$$\Delta_1 \varepsilon_2^{(n)} = \Delta S_{n+1} \frac{R_{n+1} - R_n}{(1 - R_n)(1 - R_{n+1})} \Rightarrow \frac{\Delta_1 \varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1 \varepsilon_2^{(n)}} = R_{n+1} \frac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_{n+1} - R_n} \frac{1 - R_n}{1 - R_{n+2}}$$

Nous allons poser pour n assez grand $\frac{1}{n} = x$ et ramener en termes de "x assez petit".

On considère alors la fonction $p(x) = R(\phi(x)) \left[\frac{R(\phi^2(x)) - R(\phi(x))}{R(\phi(x)) - R(x)}\right] \frac{1 - R(x)}{1 - R(\phi^2(x)}$

où $\phi(x) = \frac{x}{x+1} = x - x^2 + \ldots + (-1)^i x^{i+1} + \ldots$

et où $R(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$

pour x assez petit R(x) définit une fonction analytique au voisinage de zéro.

De même que $R(\phi(x))$ vu que ϕ est analytique au voisinage de zéro.

On a alors :

$$R(\phi(x)) = 1 + \alpha_1 \phi(x) + \alpha_2(\phi(x))^2 + \ldots$$

$$R(\phi(x)) = 1 + \alpha_1 x + x^2(\alpha_2 - \alpha_1) + x^3(\alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1) + \ldots$$

d'où $R(\phi(x)) - R(x) = -\alpha_1 x^2 + x^3(\alpha_1 - 2\alpha_2) + \ldots$

On constate alors qu'il existe une fonction $R_1(x)$ analytique au voisinage de zéro et telle que : $R_1(0) = -\alpha_1$ et $R(\phi(x)) - R(x) = -x^2 R_1(x)$.

D'où $\dfrac{R(\phi^2(x)) - R(\phi(x))}{R(\phi(x)) - R(x)} = \left(\dfrac{\phi(x)}{x}\right)^2 \dfrac{R_1(\phi(x))}{R_1(x)}$

Si $R_2(x) = \dfrac{R_1(\phi(x))}{R_1(x)}$ comme $R_1(0) = -\alpha_1 \neq 0$ il est clair que R_1 est analytique au voisinage de zéro ; de plus $R(x) = 1 + O(x^2)$.

Comme $\dfrac{\phi(x)}{x} = 1 - x^2 + x^3 \ldots \Rightarrow \left(\dfrac{\phi(x)}{x}\right)^2 = 1 - 2x^2 + O_1(x)$.

où O_1 représente une fonction analytique au voisinage de zéro telle qua $O_1(x) = O(x^3)$.

On tire alors que $\dfrac{R(\phi^2(x) - R\ (x))}{R(\phi(x) - R(x)} = (1 - 2x^2 + O_1(x)) \dfrac{R_1(\phi(x))}{R_1(x) -} = 1 - 2x^2 + R_3(x$

où R_3 est analytique au voisinage de zéro telle que $R_3(x) = O(x^3)$.

On montre de la même façon que $R_4(x) = \dfrac{1-R(x)}{1-R(\phi^2(x))}$ est analytique au voisinage de zéro avec $R_4(x) = 1+O(x^2)$.

On peut donc trouver des constantes $(\gamma_i)_{i\geq 2}$ telles que

$$\frac{R(\phi^2(x))-R(\phi(x))}{R(\phi(x)-R(x)}\;\frac{1-R(x)}{1-R(\phi^2(x))} = 1+\gamma_2\;x^2+\gamma_3\;x^3\;+\ldots$$

Comme $R(x) = 1+\alpha_1\;x+\alpha_2\;x^2\;+\ldots$ on a $R(\phi(x)) = 1+\alpha_1\;x\;+\ldots$

d'où $R(x) = \dfrac{R(\phi^2(x))-R(\phi(x))}{R(\phi(x))-R(x)}\;\dfrac{1-R(x)}{1-R(\phi^2(x))} = 1+\alpha_1\;x+\beta_2\;x^2+\beta_3\;x^3\;+\ldots$

où les $(\beta_i)_{i\geq 2}$ sont calculés à partir des $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ et $(\gamma_i)_{i\geq 2}$.

Posant $x = \frac{1}{n}$ où n est assez grand, et remarquant le fait que

$P(\frac{1}{n}) = \dfrac{\Delta_1\;\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\;\varepsilon_2^{(n)}}$ on conclut :

(3) $$\frac{\Delta_1\;\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\;\varepsilon_2^{(n)}} = 1+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\beta_2}{n^2}+\ldots \text{ pour n assez grand.}$$

Ce qui montre que $L_1^{(2)}(S^*)$ est stable par le procédé δ^2 AITKEN.

On fait le même raisonnement avec ${}_1\varepsilon_2^{(n)}$ au lieu de (S_n) et on trouve :

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_2\;\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_2\;\varepsilon_2^{(n)}} = -\frac{1}{\alpha_1}$$

- $$\frac{\Delta_2\;\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_2\;\varepsilon_2^{(n)}} = 1+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\beta_2^{(1)}}{n^2}+\ldots$$

et ainsi de suite. Arrivé à l'étape (k+1) on trouve :

$$\lim\frac{\Delta_{k+1}\;\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta_k\;\varepsilon_2^{(n)}} = -\frac{1}{\alpha_1},\qquad k>0$$

C.Q.F.D.

Nous avons les deux tests numériques suivants :

n	S_n
1	.25000000000000000D+01
2	.25714285714285710D+01
3	.26250000000000000D+01
4	.26666666666666670D+01
5	.27000000000000000D+01
6	.27272727272727273D+01
7	.27500000000000000D+01
8	.27692307692307700D+01
9	.27857142857142900D+01
10	.28000000000000000D+01
11	.28125000000000000D+01
12	.28235294117647100D+01
13	.28333333333333330D+01
14	.28421052631578900D+01
15	.28500000000000000D+01
16	.28571428571428600D+01
17	.28636363636363600D+01
18	.28695652173913000D+01
19	.28750000000000000D+01
20	.28800000000000000D+01
21	.28846153846153800D+01
22	.28888888888888890D+01
23	.28928571428571400D+01
24	.28965517241379300D+01
25	.29000000000000000D+01
26	.29032258064516100D+01
27	.29062500000000000D+01
28	.29090909090909100D+01
29	.29117647058823500D+01
30	.29142857142857100D+01
31	.29166666666666670D+01
32	.29189189189189200D+01
33	.29210526315789500D+01
34	.29230769230769200D+01
35	.29250000000000000D+01
36	.29268292682926800D+01
37	.29285714285714300D+01
38	.29302325581395300D+01
39	.29318181818181800D+01
40	.29333333333333330D+01

n	d_n	$C_n^{(1)}$	$C_1^{(2)}$
1	.27857142857142800+01	.29955849889239400+01	
2	.29166666666666790+01	.29986565135322100+01	.29999303524379700+01
3	.29659090908941800+01	.29995569278550800+01	

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{9}{6 - S_n} \\ S_0 = 2,5 \end{cases}$$

cette suite (S_n) appartient à $L_2^{(1)}(3)$.

Le calcul de $C_1^{(2)}$ à nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{13}$.

On remarque que l'on a effectivement une accélération de la convergence de la suite (S_n) par le procédé dérivé du δ^2 AITKEN itéré précédemment décrit.

n	S_n
1	.10000000000000D+01
2	.12500000000000D+01
3	.13611111111111D+01
4	.14236111111111D+01
5	.14636111111111D+01
6	.14913888888889D+01
7	.15117970521541 9D+01
8	.15274220521541 9D+01
9	.15397677311665 4D+01
10	.15497677311665 4D+01
11	.15580321939764 6D+01
12	.15649766384209 0D+01
13	.15708937981842 1D+01
14	.15759958390005 4D+01
15	.15804402834449 9D+01
16	.15843465334449 9D+01
17	.15878067410574 4D+01
18	.15908931608105 3D+01
19	.15936632439130 2D+01
20	.15961632439130 2D+01
21	.15984308176091 7D+01
22	.16004969333116 5D+01
23	.16023872924798 9D+01
24	.16041234035910 0D+01
25	.16057234035910 0D+01
26	.16072026935318 3D+01
27	.16085744356443 1D+01
28	.16098499458483 9D+01
29	.16110390064904 8D+01
30	.16121501176015 9D+01
31	.16131907003279 2D+01
32	.16141672628279 2D+01
33	.16150855364734 7D+01
34	.16159505883765 8D+01
35	.16167669149071 9D+01
36	.16175385198454 7D+01
37	.16182689800353 8D+01
38	.16189615008110 1D+01
39	.16196189630069 3D+01
40	.16202439630069 3D+01

n	d_n	$C_n^{(1)}$	$C_1^{(2)}$
1	.14500000000000D+01	.16382321310127 2D+01	
2	.15902960706838 0D+01	.16434632696308 5D+01	
3	.16260245133892 3D+01	.16446208377991 4D+01	.16449497785861 1D+01

Soit (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k^2}$. On a : $(S_n) \in L_1^{(2)}(\frac{\pi^2}{6})$.

Le calcul de $C_1^{(2)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{13}$.

Ce que l'on peut remarquer est l'accélération de la convergence de la suite (S_n).

En conclusion ; on remarque à quel point le δ^2 itéré peut être efficace pour accélérer la convergence de certaines suites à convergence linéaire.

J'aurai aimé montrer que l'ensemble des suites totalement monotones à convergence linéaire est stable par le procédé δ^2 AITKEN, c'est-à-dire répondre à la question : Si (S_n) est T.M. a-t-on $({}_1\varepsilon_2^{(n)})$ T.M. ?

La réponse par l'affirmative nous aurait permis de montrer que pour toute suite (S_n) totalement monotone à convergence monotone ; $\lim\limits_{k\to\infty} {}_k\varepsilon_2^{(n)} = S^*$, n fixé, où S^* désigne la limite de la suite (S_n).

Ce travail nous permettra d'envisager la possibilité d'accélération de la convergence linéaire ou logarithmique par l'itération du θ_2-algorithme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AITKEN :*"On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations"*. Proceedings of Royal Society of Edinburgh, Vol. 46 (1926), pp. 289-305.

[2] C. BREZINSKI : *Accélération de la convergence en Analyse Numérique"*. Springer-Verlag, (1977).

[3] C. BREZINSKI : *Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique"*. Technips, (1978).

[4] H. CARTAN : *"Théorie élémentaire des fonctions analytiques"*. Hermann, (1960).

[5] J.P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE : *"The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated"*. SIAM J. Numer. Anal. (1982), pp. 840-844.

[6] DIEUDONNE : *"Foundations of modern Analysis"*. Wiley, New-York, (1960).

[7] EVGARVOF : *"Analytic-Functions"*. W.B. Saunders Company, Philadelphia and London, (1966).

[8] HENRICI : *"Elements of numerical analysis"*. Wiley, New-York, (1964).

[9] HILLION : *"Methode d'AITKEN itérée pour suites oscillantes d'approximation"*. C.R. Acad. Sc. Paris, A. 280, (1975), pp. 1701-1703.

[10] B. GERMAIN-BONNE : *"Estimation de la limite de suites et formalisation de procédés d'accélération de la convergence"*. Thèse, Lille I, (1978).

[11] K. KNOPP : *"Infinite series"*. Academic-Press, Wiley, (1924).

[12] C. KOWALEWSKI : *"Possibilités d'accélération de la convergence logarithmique"*. Thèse 3ème Cycle, Lille I, (1981).

[13] LUBKIN : *"A method of summing infinite séries"*.J. of Research of N.B.S., Vol. 48 n° 3, March (1952), pp. 226-254.

[14] I.M. ORTEGA and W.C. RHEINBOLDT : *"Iteration solution of non linear equations in several variables"*. Academic Press, (1970).

[15] D. SHANKS : *"Non linear transformations of divergent and slowly convergent sequences"*. J. Math. Phys. 34, (1955), pp. 1-42.

[16] D. WIDDER : *"The laplace-Transform"*. Primceton-University-Press, (1946).

[17] J. WIMP : *"Sequence Transformations and their applications"*. Academic Press, (1981).

[18] WYNN : *"Transformation de séries à l'aide de l'ε-Algorithme"*. C.R.A.S., (1975), A. 275, p. 1351.

[19] N.M. SENHADJI : Thèse de 3ème Cycle, en préparation.

[20] J.P. DELAHAYE : *"Theorie des transformations de suites en Analyse Numérique"*. Applications, Thèse d'Etat, Lille I, (1982).

CHAPITRE II

ITERATIONS D'ALGORITHMES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

DEFINITIONS ET PROPRIETES

1. On dit qu'une suite (S_n) convergente de limite S^* appartient à Log si :

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ où e_n représente la quantité $S_n - S^*$.

2. On dit qu'une suite (S_n) convergente de limite S^* appartient à L_ρ s'il existe ρ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = \rho.$$

3. Une suite (S_n) convergente de limite S^* est dite RAABE-Convergente si :

$\lim\limits_{n\to\infty} (n+1) \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right) = \lambda > 1.$

4. Une suite (S_n) convergente de limite S^* appartient à LOGSF si
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1.$

5. Soient T un procédé et E un ensemble de suite convergentes. E est dit stable par T si

$$\forall (S_n) \in E, \text{ alors } (T(S_n)) \in E$$

Rappelons les propriétés suivantes :

P1) *Toute suite RAABE-Convergente appartient à LOGSF.*

P2) *Toute suite de LOGSF est strictement monotone à partir d'un certain rang.*

P3) *Log et LOGSF ne sont pas accélérables.*

I. INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME

Au chapitre I, nous avons énoncé un théorème (cf. théorème 1) montrant l'efficacité du δ^2 AITKEN pour accélérer la convergence de suites appartenant à LIN. Cependant, ce procédé est loin d'être un procédé d'accélération de la convergence de suites appartenant à des sous-ensembles stricts de LOGSF.

Certain auteurs [12], [2] suggèrent alors de modifier la formule du δ^2 la formule du δ^2 AITKEN :

$$(S_n) \to (\varepsilon_2^{(n)}) = \left(S_n - \frac{\Delta S_n \cdot \Delta S_n}{\Delta(\Delta S_n)}\right) \tag{1}$$

et de la remplacer par une autre du type :

$$(S_n) \to (S_n^{(1)}) = \left(S_n - \frac{b_n \cdot \Delta S_n}{\Delta b_n}\right) \tag{1'}$$

où (b_n) est une suite de paramètres tendant vers zéro.

Un choix judicieux de la suite (b_n) rendrait alors (1') efficace pour accélérer la convergence de suites à convergence linéaire et celle de suites appartenant à des sous-ensembles stricts de LOGSF.

Des études ont été faites sur les cas de suites (b_n) suivants :

C1) $(b_n)_{n\geq 1} = \left(\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}}}\right)_{n\geq 1}$ on obtient alors la première colonne du

θ-Algorithme étudié par BREZINSKI dans [1] et par CORDELLIER dans [4].

C2) $(b_n) = -\left(-\dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}\right)_{n\geq 0}$ on a alors la procédure standard étudiée par

GERMAIN-BONNE dans [7] et KOWALEWSKI dans [8].

C3) $(b_n) = (\Delta S_n)^{1/p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. La transformation a été étudiée par KOWALEWSKI pour accélérer la convergence de suites de $L_{1/p}$.

C4) Dans le cas où (S_n) est une suite RAABE-Convergente on pose pour $p \in \mathbb{N}^*$: $(b_n) = ((n+p)\,\Delta S_n)$ et on obtient alors la première colonne d'un procédé étudié par LEVIN [9].

C5) $(b_n) = (\Delta S_n)$. On a alors le procédé (1) c'est-à-dire le procédé δ^2 AITKEN.

Dans chacun des cas, on a à faire à des procédés non linéaires : b_n est construit à partir de S_n, S_{n+1}, S_{n+2} dans les cas C3), C4), C5) et à partir de S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3} dans le cas 2).

Pour le cas C1) et pour $n \geq 1$; b_n est construit à partir de S_{n-1}, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}. Le but de ce chapitre sera de trouver :

- Un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset$ LIN stable par le procédé (1') dans chacun des cas C1), C2), C5).

- Un sous-ensemble $S_{LOG} \subset$ LOGSF stable et accélérable par le procédé (1') dans chacun des cas C1), C2), C3), C4).

Une fois qu'on aura trouvé ces deux sous-ensembles, on pourra alors envisager l'itération du procédé (1') dans chacun des cas cités.

On procèdera de la manière suivante :

Etant donné une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ convergente de limite S^* ; on construit à partir de p termes de la suite (S_n) - avec p fini - la suite (b_n) convergente de limite nulle. Nous pouvons alors définir le procédé T suivant

$$T : S_n \xrightarrow{T} S_n^{(1)} = S_n - \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n, \; n \geq 0.$$

Si on possède des informations suffisantes sur (S_n) et (b_n) pour l'itération du procédé T ; on peut définir des quantités $s_n^{(k)}$ de la manière récursive suivante :

$$
(3) \quad \begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta S_n^{(k)} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ S_n^{(0)} = S_n & \\ b_n^{(k)} \text{ construit à partir de p termes de la suite } (S_n^{(k)}) & \end{cases}
$$

Afin de donner un sens à (3) on supposera que s'il existe m naturel / $\frac{b_{n+1}^m}{b_n^m} = 1$ alors $S_n^{(m_1)} = S_n^{(m)}$ $\forall m_1 \geqslant m+1$.

Les questions qui viennent alors le plus naturellement à l'esprit sont :

Q1) Conditions que l'on doit avoir pour que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(k)} = S^*$, $k > 0$?

Q2) Conditions que l'on doit avoir pour que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0$, $k > 0$?

La réponse est alors donnée par des résultats de convergence.

II. RESULTATS DE CONVERGENCE

Le but de ce paragraphe sera d'étudier à l'aide de chacun des cas de suites $b_n^{(k)}$ donnés au paragraphe 1, le problème de l'accélération de la convergence tout en essayant de répondre à la question Q2).

Avant de répondre aux questions Q1) et Q2), on supposera que la suite $(b_n^{(k)})_{n\geq 0}$ vérifie pour $k \geq 0$ le fait suivant :

F_1 $\begin{cases} \text{Si l'application du procédé (3) aux suites } (S_n)_{n\,0} \text{ et } (a\,S_n + b)_{n\,0} \\ \text{- où a différent de zéro et b sont deux constantes arbitraires -} \\ \text{fournit respectivement } S_n^{(k)} \text{ et } t_n^{(k)} \text{ alors } t_n^{(k)} = a\,S_n^{(k)} + b. \end{cases}$

<u>Exemple</u> : Si (b_n) est choisie comme dans les cas C1), C2), C3), C4) C5) alors F_1 est vérifié.

Nous allons donner une proposition permettant de répondre partiellement à Q1).

Proposition 1 :

Soit $k \in \mathbb{N}$, k *fixé. Supposons que* $\lim_{n\to\infty} S_n^{(k)} = S^*$ *et qu'il existe* α *et* β *deux constantes telles que* $0<\alpha<1<\beta$ *et* $\dfrac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} \notin [\alpha, \beta]$, $k \in \mathbb{N}$, *alors* $\lim_{n\to\infty} S_n^{(k+1)} = S^*$

Démonstration :

D'après (3) on a :

$$S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \frac{b_n^{(k)}}{b_n^{(k)}} \Delta S_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}\, b_{n+1}^{(k)} - S_n^{(k)}\, b_n^{(k)} - S_{n+1}^{(k)}\, b_n^{(k)} + S_n^{(k)}\, b_n^{(k)}}{b_{n+1}^{(k)} - b_n^{(k)}}$$

$$\text{i.e. : } S_n^{(k+1)} = S_{n+1}^{(k)} \frac{b_n^{(k)}}{b_n^{(k)} - b_{n+1}^{(k)}} - \frac{S_n^{(k)}\, b_n^{(k)}}{b_n^{(k)} - b_{n+1}^{(k)}}$$

On peut considérer que la transformation $S_n^{(k)} \to S_n^{(k+1)}$ pour k fixé est un procédé de sommation. On est alors en mesure d'appliquer le théorème suivant :

Théorème de Toeplitz :

Soit (S_n) une suite convergente et (V_n) la suite déduite de (S_n) par

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \\ \vdots \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_n \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{où } A = (a_{nk})_{\substack{n\geq 0 \\ k\geq 0}}$$

et où A est une matrice infinie. Une condition nécessaire pour que $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ est que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

① $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < M \qquad \forall n$

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \qquad \forall k$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

Dans notre cas on a une matrice $A^{(n)}$ bidiagonale infinie avec :

$$\begin{cases} a_{i,i}^{(k)} = -\dfrac{b_{i+1}^{(k)}}{b_{i+1}^{(k)} - b_i^{(k)}} \\[2ex] a_{i,i+1}^{(k)} = \dfrac{b_i^{(k)}}{b_{i+1}^{(k)} - b_i^{(k)}} \\[2ex] a_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \begin{matrix} j \neq i \\ j \neq i+1 \end{matrix} \end{cases}.$$

Donc les conditions ② et ③ sont automatiquement vérifiées.

Pour la condition ① on doit avoir :

$$\left|\frac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}}\right| + \left|\frac{b_{n+1}^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}}\right| < M_k \qquad \forall n \quad \text{où} \quad M_k > 0$$

i.e. : $$\frac{1}{\left|1 - \dfrac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}}\right|} + \frac{1}{\left|1 - \dfrac{b_n^{(k)}}{b_{n+1}^{(k)}}\right|} < M_k \qquad \forall n.$$

d'où en posant $N_k = \frac{1}{M_k}$ on doit avoir la condition :

$$N_k < \left| 1 - \frac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} \right| \quad \forall n$$; condition automatiquement vérifiée s'il existe α, β tels que $\alpha < 1 < \beta$ et $\dfrac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} \notin [\alpha, \beta]$ $\forall n$

C.Q.F.D.

Traitons maintenant le problème de l'accélération de la convergence et donnons une réponse à Q2).

Proposition 2 :

Supposons que les hypothèses de la proposition 2 soient vérifiées.

Si la quantité $e_n^{(k)} = S_n^{(k)} - S^*$ *vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{e_{n+1}^{(k)}}{e_n^{(k)}} - 1}{\dfrac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} - 1} = 0$$

alors $(S_n^{(k+1)})$ *converge plus vite que* $(S_n^{(k)})$ *vers* S^* *dans le sens :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0.$$

Démonstration :

Les hypothèses de la proposition 2 étant vérifiées, on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(k+1)} = S^*$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} e_n^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} e_n^{(k+1)} = 0$.

D'après (3) on a $S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}\ \Delta S_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}}$.

Tenant compte de F_1 ; en posant a = 1 et b = - S^* on a alors :

$$S_n^{(k+1)} - S^* = S_n^{(k)} - S^* - \frac{b_n^{(k)} \Delta S_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}}$$

i.e. : $$e_n^{(k+1)} = e_n^{(k)} - \frac{b_n^{(k)} \Delta e_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} = e_n^{(k)} - \frac{\Delta e_n^{(k)}}{\dfrac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} - 1}$$

D'où : $$\frac{e_n^{(k+1)}}{e_n^{(k)}} = 1 - \frac{\dfrac{e_{n+1}^{(k)}}{e_n^{(k)}} - 1}{\dfrac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} - 1}.$$

La quantité $(e_n^{(k)})$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{e_{n+1}^{(k)}}{e_n^{(k)}} - 1}{\dfrac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} - 1} = 1$ on a alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e_n^{(k+1)}}{e_n^{(k)}} = 0.$

C.Q.F.D.

Il est clair que les propositions 1 et 2 ne sont pas intéressantes vu que les hypothèses dépendent de $(S_n^{(k)})$ et de $(b_n^{(k)})$ et il nous est donc impossible de savoir si ces hypothèses sont vérifiées ou non.

Nous allons essayer d'exhiber un ensemble de suites (S_n) et de suites (b_n) de telle manière que $(S_n^{(k)})$ et $(b_n^{(k)})$ vérifient les hypothèses des propositions 1 et 2.

Nous procèderons en deux étapes :

- La première étape concernera une étude sur les suites appartenant à LIN.

- La deuxième étape concernera une étude sur les suites appartenant à des sous-ensembles stricts de LOGSF.

III. DETERMINATION D'UN ENSEMBLE $\mathcal{S} \subset$ LIN STABLE PAR LE PROCEDE DEFINI EN (1') ET APPLICATION AUX SUITES (S_n) CONVERGENTES DE LIMITE S^* DEFINIES PAR DES PROPRIETES SUR L'ERREUR $e_n = S_n - S^*$

a) Détermination de $\mathcal{S}$

Avant de déterminer ce sous-ensemble de LIN ; on va donner quelques définitions.

Définition 1 :

Soit (u_n) une suite convergente de limite nulle.

On dit que (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}_\phi$ si pour n assez grand:

$u_{n+1} = \phi(u_n)$ où ϕ est une fonction analytique au voisinage de zéro vérifiant :

- $\phi(0) = 0$
- $-1 \leq \phi'(0) < 1, \ \phi'(0) \neq 0$

Définition 2 :

Soit (w_n) une suite convergente de limite nulle. On dit que (w_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$ si :

- Il existe un entier m non nul ; des constantes $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_i^{(0)}, \ldots$

tel que $\begin{cases} \alpha_k^{(0)} = 0 & k < m \\ \alpha_m^{(0)} \neq 0 \end{cases}$, et une suite (u_n) vérifiant

la propriété $\mathcal{P}_\phi$ tels que : $w_n = \alpha_m^{(0)} u_n^m + \alpha_{m+1}^{(0)} u_n^{m+1} + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots \quad i \geq 0$, pour n assez grand.

Définition 3 :

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^* et vérifiant :

$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + w_n$ où ρ est une constante telle que $-1 \le \rho < a < 1$ et $\rho \neq 0$, où a est un réel : $0 < a < 1$ et (w_n) une suite convergente de limite nulle.

On dit que (S_n) vérifie la propriété $P(w_n)$ si (w_n) est une suite vérifiant la propriété $P((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$ et si

$$\rho \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} \neq \pm 1.$$

La recherche d'un ensemble $\mathcal{S} \subset$ LIN stable par (1') revient à trouver des hypothèses sur (S_n) et (b_n) de telle manière que $(S_n^{(1)})$ possède une propriété équivalente à celle de (S_n).

Faisons sur (S_n) l'hypothèse $H_1)$ suivante :

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^* telle que $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + w_n$ où :

ρ est une constante telle que $-1 \le \rho < a < 1$ où a est un réel tel que $0 < a < 1$, (w_n) est une suite de limite nulle.

On suppose de plus que (S_n) vérifie la propriété $P(w_n)$.

Soit (b_n) une suite convergente de limite nulle vérifiant :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} + f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}, \dots, \frac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}}\right)$$

où p est un entier fini, $p \ge 2$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; continue au voisinage de $(\rho, \rho, \dots, \rho)$ et prenant la valeur zéro en ce point.

On suppose de plus que f vérifie la condition suivante :

Si (S_n) vérifie $P(w_n)$ alors la suite $\left\{f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}, \dots, \frac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}}\right)\right\}$ vérifie une propriété $P((\beta_i^{(0)}), (u_n), m')$ où $m' \in \mathbb{N}^*$, et les $(\beta_{m'+i}^{(0)})_{i\geq 1}$ sont des constantes calculées à partir des $(\alpha_{m+i}^{(i)})_{i\geq 0}$. On dira qu'alors (b_n) vérifie l'hypothèse H_2).

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3 :

Soient (S_n) *et* (b_n) *deux suites vérifiant respectivement les hypothèses* H_1) *et* H_2). *On peut avoir les deux alternatives suivantes* :

A1) *La suite* $(S_n^{(1)})$ *définie par (1') est une suite convergente de limite* S^* *vérifiant* $\frac{S_{n+1}^{(1)} - S}{S_n^{(1)} - S} = \rho_1 + w_n^{(1)}$ *où* :

- ρ_1 *est une constante telle que* $-1 < \rho_1 < a < 1$ *et* $\rho_1 \neq 0$

- $w_n^{(1)}$ *une suite de limite nulle vérifiant une propriété* $P((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m_1)$ *où* $m_1 \in \mathbb{N}^*$ *et où les constantes* $(\alpha_{m_1+i}^{(1)})_{i\geq 0}$ *sont non toutes nulles calculées à partir des* $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$.

A2) $\frac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0$ *pour* $n > N$.

Démonstration :

(b_n) vérifiant H_2) ; l'hypothèse de la proposition 1 est vérifiée et on a alors $S_n^{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} S^*$.

D'après (1') on a $S_n^{(1)} = S_n - \frac{b_n \, \Delta S_n}{\Delta b_n}$

De (F_1) on tire alors que :

$$S_n^{(1)} - S^* = (S_n - S^*) - \frac{b_n}{\Delta b_n}\Delta S_n = e_n - \frac{b_n\,\Delta S_n}{\Delta b_n}.$$

En posant $(e_n^{(1)}) = (S_n^{(1)} - S^*)$ on a alors :

$$e_n^{(1)} = e_n \bullet \left[1 - \frac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{b_{n+1}}{b_n} - 1}\right] = e_n \bullet \frac{\dfrac{b_{n+1}}{b_n} - \dfrac{e_{n+1}}{e_n}}{\dfrac{b_{n+1}}{b_n} - 1}$$

d'où : (4) $$\boxed{\frac{e_{n+1}^{(1)}}{e_n^{(1)}} = \frac{e_{n+1}}{e_n}\,\frac{\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} - \dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{\dfrac{b_{n+1}}{b_n} - \dfrac{e_{n+1}}{e_n}} \bullet \frac{1 - \dfrac{b_{n+1}}{b_n}}{1 - \dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}}}$$

S_n vérifiant l'hypothèse H_1) on a alors :

$\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + w_n$ où $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. w_n vérifiant $\mathcal{P}((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$, b_n vérifiant l'hypothèse H_1), on a alors :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\ell im \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right) + f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \ldots, \frac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}}\right) = \rho + f_n$$

où $f_n = f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \ldots, \dfrac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}}\right)$ vérifie $\mathcal{P}((\beta_i^{(0)}), (u_n), m')$.

(4) donne alors

(4') $$\boxed{\frac{e_{n+1}^{(1)}}{e_n^{(1)}} = (\rho + w_n)\left(\frac{f_{n+1} - w_{n+1}}{f_n - w_n}\right) \bullet \frac{(1-\rho) - f_n}{(1-\rho) - f_{n+1}}}$$

Par hypothèse on a $w_n = \alpha_m^{(0)}\, u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)}\, u_n^{m+i} + \ldots$

et $f_n = \beta_{m'}^{(0)}\, u_n^{m'} + \ldots + \beta_{m'+i}^{(0)}\, u_n^{m'+i} + \ldots$

Pour n assez grand on remplace u_n par x ; il est clair que $|x|$ est alors suffisamment voisin de zéro. Nous remplacerons f_n par $f(x)$, f_{n+1} par $f_+(x)$, u_n par $w(x)$ et w_{n+1} par $w_+(x)$.

$$\text{On a alors } w(x) = \alpha_m^{(0)} x^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

$$f(x) = \beta_{m'}^{(0)} x^{m'} + \ldots + \beta_{m'+i}^{(0)} x^{m'+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

x étant voisin de zéro, w et f définissent alors des fonctions analytiques au voisinage de zéro. Il s'ensuit alors d'après la théorie élémentaire des fonctions analytiques (voir [3] et [6]) que $w(x) - f(x)$ définit une fonction analytique au voisinage de zéro, développable dans son disque de convergence en une série entière $w(x) - f(x) = \gamma_\ell^{(0)} x^\ell + \ldots + \gamma_{\ell+i}^{(0)} x^{\ell+i} + \ldots \qquad i \geq 0$

Si tous les $\gamma_{\ell+i}^{(0)}$ sont nuls, on aura alors $w(x) - f(x)$ identiquement nulle dans son disque de convergence. En revenant aux notations en u_n, on aura alors $w_n - f_n = 0$ pour n assez grand. D'après la formule :

$e_n^{(1)} = e_n \dfrac{w_n - f_n}{(1-\rho) - f_n}$ on déduit que $\dfrac{e_n^{(1)}}{e_n} = 0$ pour n assez grand, d'où A2).

On suppose alors les $(\gamma_{\ell+i}^{(0)})_{i \geq 0}$ non tous nuls avec en particulier $\gamma_\ell^{(0)} \neq 0$. Il existe alors une fonction $h(x)$ analytique au voisinage de zéro non identiquement nulle dans ce voisinage avec $h(0) = 1$ et telle que

$$w(x) - f(x) = \gamma_\ell^{(0)} x^\ell h(x).$$

On fait la même chose avec $w_+(x)$ et $f_+(x)$ en remarquant que pour x suffisamment voisin de zéro $w_+(x) = w(\phi(x))$ et $f_+(x) = f(\phi(x))$ et on a :
$w_+(x) - f_+(x) = \gamma_\ell^{(0)} (\phi(x))^\ell h(\phi(x))$,

d'où $\dfrac{w_+(x) - f_+(x)}{w(x) - f(x)} = \left(\dfrac{\phi(x)}{x}\right)^\ell \dfrac{h(\phi(x))}{h(x)}$.

$$\text{On a } \frac{w_+(x) - f_+(x)}{w(x) - f(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} (\phi'(0))^\ell$$

Il est clair que pour x assez voisin de zéro, $\frac{h(\phi(x))}{h(x)}$ est analytique au voisinage de zéro. De même ϕ vérifiant $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) \neq 0$ alors $\frac{\phi(x)}{x}$ est analytique au voisinage de zéro en non identiquement nulle dans ce voisinage.

Il s'ensuit alors qu'il existe une fonction h_1 analytique au voisinage de zéro telle que $h_1(0) = 0$ et

$$(5) \qquad \boxed{\frac{w_+(x) - f_+(x)}{w(x) - f(x)} = (\phi'(0))^{\ell} + h_1(x)}$$

La fonction $(1-\rho) - f_+(x)$ est analytique au voisinage de zéro et non identiquemnet nulle dans ce voisinage car $(1-\rho) - f_+(0) = 1-\rho \neq 0$. On en déduit alors qu'il existe $h_2(x)$ une fonction analytique au voisinage de zéro telle que :

- $h_2(0) = 0$

$$(6) \qquad \boxed{\frac{(1-\rho) - f(x)}{(1-\rho) - f_+(x)} = 1 + h_2(x)}$$

De (5) et (6), on déduit alors que l'expression :

$$P(x) = (\rho + w(x)) \frac{f_+(x) - w_+(x)}{f(x) - w(x)} \cdot \frac{(1-\rho) - f(x)}{(1-\rho) - f_+(x)}$$

s'écrit au voisinage de zéro :

$$P(x) = \rho(\phi'(0))^{\ell} + h_3(x)$$

où $h_3(x)$ est une fonction analytique au voisinage de zéro avec $h_3(0) = 0$.

Posons $x = u_n$ où n est assez grand ; on a :

x remplacé par u_n - n assez grand- P(x) devient alors $\frac{e_{n+1}^{(1)}}{e_n^{(1)}}$ d'après (4')

et on a $\frac{e_{n+1}^{(1)}}{e_n^{(1)}} = \rho_1 + w_n^{(1)}$,

$$\text{où } \begin{cases} \rho_1 = \rho(\phi'(0))^{\ell} \\ \\ w_n^{(1)} = h_3(u_n) \end{cases}$$

D'après la condition posée dans la définition $P(w_n)$ - définition 3 - on a :

$$\lim_{n\to\infty} \rho \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} \neq 0$$

Comme (u_n) vérifie P_ϕ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \phi'(0)$ où $-1 \leq \phi'(0) < 1$

$\phi'(0) \neq 0$

ce qui implique $-1 < \rho(\phi'(0))^\ell < 1$ et $\rho(\phi'(0))^\ell \neq 0$

c'est-à-dire $\begin{cases} -1 < \rho_1 < \rho < a < 1 \\ \rho_1 \neq 0 \end{cases}$

<u>Montrons que $(w_n^{(1)})$ vérifie la propriété $P((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m_1)$</u>

On a $w_n^{(1)} = h_3(u_n)$ où h_3 est une fonction analytique au voisinage de zéro avec $h_3(0) = 0$. Il s'ensuit alors qu'elle s'écrit dans son disque $\mathcal{D}$ de convergence :

$$h_3(x) = \alpha_{m_1}^{(1)} x^{m_1} \alpha_{m_1+1}^{(1)} x^{m_1} + \ldots + \alpha_{m_1+i}^{(1)} x^{m_1+i} + \ldots \qquad i \geq 0,\ m_1 \geq 1.$$

Choisissons N suffisamment grand tel que $u_n \in \mathcal{D}$ pour $n > N$. On a alors :

$$w_n^{(1)} = h_3(u_n) = \alpha_{m_1}^{(1)} u_n^{m_1} + \alpha_{m_1} u_n^{m_1+1} + \ldots + \alpha_{m_1+i}^{(1)} u_n^{m_1+i} + \ldots$$

et donc $w_n^{(1)}$ vérifie la propriété $P((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m_1)$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

La proposition montre que si (S_n) et (b_n) vérifient les hypothèses H_1) et H_2) alors le procédé (1') appliqué à (S_n) donne une suite $(S_n^{(1)})$ qui a un comportement équivalent à celui de (S_n). En choisissant $b_n^{(1)}$ de limite nulle telle que

$$\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = \rho_1 + f\left(\frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}}, \ldots, \frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_{n+p-1}^{(1)}}\right)$$ le procédé (1') appliqué à $(S_n^{(1)})$ avec $(b_n^{(1)})$ au lieu de (b_n) donne naissance à une suite $(S_n^{(2)})$ qui a le même comportement que celui de $S_n^{(1)}$ et on peut itérer ainsi le procédé (1').

Arrivé à l'étape k ; on obtient une suite $(S_n^{(k)})$ possédant une propriété équivalente à celle de (S_n) et telle que

$$\frac{S_{n+1}^{(k)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = \rho_k + w_n^{(k)} \text{ où } (w_n^{(k)}) \text{ vérifie la proposition}$$

$P((\alpha_i^{(k)}), (u_n), m_k)$.

En choisissant $(b_n^{(k)})$ de limite nulle et telle que

$$\frac{b_{n+1}^{(k)}}{b_n^{(k)}} = \rho_k + f\left(\frac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}, \ldots, \frac{\Delta S_{n+p}^{(k)}}{\Delta S_{n+p-1}^{(k)}}\right) = \rho_k + f_n^{(k)}$$

d'après l'hypothèse faite sur f, comme $(S_n^{(k)})$ vérifie une propriété équivalente à H_1 on déduit que $f_n^{(k)}$ possède une propriété $P((\alpha_i^{(k)}), (u_n), m_k')$ et la conclusion de la proposition (3) donne alors :

$$-\frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k+1)} - S^*} = \rho_{k+1} + w_n^{(k+1)} \text{ où } (w_n^{(k+1)})_{n\geq 0} \text{ vérifie une propriété}$$

$((\alpha_i^{(k+1)}), (u_n), m_{k+1})$, et $\qquad -1 < \rho_{k+1} < 1$, $\rho_{k+1} \neq 0$

$$\text{d'où } \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0 \ ; \ n > N$$

D'après le choix de S_n et de (b_n) on déduit alors de la proposition, le corollaire suivant :

Corollaire 1 :

Soit (S_n) et (b_n) deux suites vérifiant les hypothèses de la proposition 3 alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0 \qquad k > 0.$$

Démonstration :

Par un raisonnement par récurrence et en tenant compte de la proposition 3, on montre que les hypothèses de la proposition 1 et de la proposition 2 sont vérifiées et on obtient alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0.$$

Nous allons donner quelques applications à la proposition 3. Dans une première étape on donne des exemples de suites (S_n) vérifiant l'hypothèse H_1), et des exemples de suites (b_n) vérifiant l'hypothèse H_2) ; ensuite nous donnerons les procédés (1') correspondant à chaque cas de suites (b_n) et dont l'itération donne une accélération de la convergence de toute suite (S_n) vérifiant l'hypothèse H_1).

b) Applications aux suites (S_n) convergentes de limite S^* et déterminées par une propriété sur l'erreur $e_n = S_n - S^*$

Un cas important est le cas de suites des points fixes. Nous cherchons la solution S^* de l'équation $F(x) = x$, F vérifiant des hypothèses qu'on donnera dans le sous-paragraphe suivant :

b1) Suites de point fixe

Soit (S_n) une suite de nombres réels vérifiant : $S_{n+1} = F(S_n)$, $n \geq 0$ où F est une fonction analytique dans un intervalle centré en S^* où S^* est le seul point fixe de cet intervalle vérifiant $0 < |F'(S^*)| < 1$.

Pour des raisons de convergence ; on supposera avoir choisi $S_0 - S^*$ suffisamment petit de telle façon que l'itération converge.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 4 :

● *La suite* $(S_n) = (S_n - S^*)$ *vérifie la propriété*

P_ϕ *où* ϕ *est la fonction* $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \phi(x) = F(x+S^*) - F(S^*)$

● La suite (S_n) vérifie l'hypothèse H_1).

Démonstration : 1ère (e_n) vérifie P_ϕ

F étant analytique au voisinage de S^*, on a alors.

$$S_{n+1} = F(S_n) = F(S^* + (S_n - S^*)) = F(S^*) + \frac{F'(S^*)}{m!}(S_n - S^*) + \frac{F^{(m)}(S^*)}{m!} + \ldots$$

où $m \in \mathbb{N}^*$ représente le plus petit entier $p \geq 2 \,/\, F^{(p)}(S^*) \neq 0$

Tenant compte du fait que $F(S^*) = S^*$ on a alors :

$$S_{n+1} - S^* = F'(S^*)(S_n - S^*) + \frac{F^{(m)}(S^*)}{m!}(S_n - S^*)^m + \ldots + \frac{F^{(m+i)}(S^*)}{(m+i)!} e_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

$$\text{i.e.} \underset{(*)}{:} \; e_{n+1} = F'(S^*)\, e_n + \frac{F^{(m)}(S^*)}{m!} e_n^m + \ldots + \frac{F^{(m+i)}(S^*)}{(m+i)!} e_n^{(m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

Soit ϕ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(x) = F(x+S^*) - S^*.$$

F étant analytique au voisinage de zéro, ϕ est alors une fonction analytique au voisinage de zéro et son développement en série entière donne :

$$\phi(x) = F'(S^*)\,x + \frac{F^{(m)}(S^*)}{m!} x^m + \ldots + \frac{F^{(m+i)}(S^*)}{(m+i)!} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

en particulier pour e_n – n étant assez grand – :

$$\phi(e_n) = F'(S^*)\, e_n + \frac{F^{(m)}(S^*)}{m!} e_n^m + \ldots + \frac{F^{(m+i)}(S^*)}{(m+i)!} e_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

La comparaison avec (*) donne alors :

$e_{n+1} = \phi(e_n) = F(e_n + S^*) - S^*$ pour n assez grand et d'après la définition de la propriété P_ϕ on déduit que (e_n) vérifie la propriété P_ϕ avec $\phi(x) = F(x + S^*) - S^*$.

2 (S_n) vérifie l'hypothèse H_1)

D'après la démonstration de 1 on a $e_{n+1} = \phi'(0)\, e_n + \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} e_n^m + \ldots$

à partir d'un certain rang.

D'où $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \phi'(0) + \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} e_n^{m-1} + \ldots + \frac{\phi^{(m+i)}(0)}{(m+i)!} e_n^{m+i-1} + \ldots$

posons $\rho = \phi'(0)$, comme on a par hypothèse :

$$w_n = \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} e_n^{m-1} + \ldots + \frac{\phi^{(m+i)}(0)}{(m+i)!} e_n^{m+i-1} + \ldots$$

On a bien $0 < |\rho| < 1$ et $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$.

Si nous montrons que (w_n) vérifie une propriété $P((\alpha_i^{(0)}), (u_n), \ell)$; $\ell \geq 1$ avec $u_n = e_n$, comme e_n vérifie la propriété P_ϕ ; on aura complètement montré la proposition 4.

<u>On a</u> : $w_n = \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} e_n^{m-1} + \ldots + \frac{\phi^{(m+i)}(0)}{(m+i)!} e_n^{(m-1)+i} + \ldots \qquad i \geq 0$

$$\text{Posons} \begin{cases} \ell = m-1 \\ \alpha_j^{(0)} = \dfrac{\phi^{(j+1)}(0)}{(j+1)!} \qquad j \geq m-1 \end{cases}$$

On a alors :

$$w_n = \alpha_\ell^{(0)} e_n^\ell + \ldots + \frac{\phi^{(m+i)}(0)}{(m+i)!} e_n^{(m-1)+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

Ce qui d'après la définition de la propriété $P((\alpha_i^{(0)}), (u_n), \ell)$ montre que w_n vérifie la propriété $P((\alpha_i^{(0)}), (e_n), \ell)$.

C.Q.F.D.

Donnons un deuxième exemple :

b2) Cas des suites (S_n) oscillantes convergentes

Au chapitre I, on a traité le cas de suites (S_n) convergente de limite S^* et telle que l'erreur $(e_n) = (S_n - S^*)$ vérifie à partir d'un certain rang

$$(*)\ 1 \quad \begin{cases} e_{n+1} = -(\alpha_0 + \beta_0^n)\ e_n \\ \quad -1 < \alpha_0 < 1,\ \alpha_0 \neq 0 \\ \quad -1 < \alpha_0 + \beta_0 < 1 \\ 0 < |\beta_0| < 1 \end{cases}$$

On a la proposition suivante :

Proposition 4 bis :

Soit (S_n) *une suite convergente de limite* S^* *et telle que* (e_n) *vérifie* $(*)_1$, *alors* (S_n) *vérifie l'hypothèse* H_1).

Démonstration :

En effet d'après $(*)_1$ on déduit alors :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = -\alpha_0 - \beta_0^n$$

On a alors $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + w_n$ avec :

- $-1 < \rho = -\alpha_0 < 1,\ \rho \neq 0$

- $w_n = -\beta_0^n$.

Montrons que w_n vérifie la propriété $P((\alpha_i^{(0)}), (u_n), 1)$ où (u_n) est une suite de limite nulle vérifiant la propriété P_ϕ.

Il est clair que $w_n = \alpha_1^{(0)}\ u_n + \ldots + \alpha_i^{(0)}\ u_n^i + \ldots$ pour n assez grand

où $\alpha_1^{(0)} = -1$ et $\alpha_i^{(0)} = 0 \ \ \forall i \geq 2$ et $u_n = \beta_0^n$.

Montrons que u_n vérifie $\mathcal{P}_\phi$

On a $u_{n+1} = \beta_0^{n+1} = \beta_0\ \beta_0^n = \beta_0\ u_n = \phi(u_n)$

où ϕ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\phi(x) = x\ \beta_0$.

Il est clair que ϕ est analytique dans $\mathbb{R}$ car polynôme en x de degré 1.

On déduit alors que (u_n) vérifie $\mathcal{P}_\phi$.

C.Q.F.D.

3ème Exemple :

b3) Application aux fractions continues du type

$$b_0 + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cdots}}} \qquad (a, b \text{ choisis} / b^2 + 4a > 0).$$

Soit $S^* = b_0 + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cdots}}}$ $\qquad (S^* \neq 0)$

Considérons S_n le $n^{\text{ième}}$ convergent de S^* :

$$S_n = b_0 + \frac{a}{b +}\ \ddots + \frac{a}{b} = \frac{A_n}{B_n} \tag{7}$$

et montrons que la suite (S_n) vérifie l'hypothèse H_1).

Dans le chapitre 1, nous avons montré que S_n défini comme en (7) s'écrivait :

$$S_n = S^* \left(\frac{1 + x^n}{1 - x^n}\right) \qquad n \geq 1$$

où $0 < |x| < 1$

On a alors $S_n = S^*\left(1 + \dfrac{2x^n}{1-x^n}\right)$ implique $S_n = S^* + 2S^* \dfrac{x^n}{1-x^n}$

i.e. : $\quad e_n = 2S^* \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Le rapport $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$ s'écrit alors :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = x \cdot \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} = x \cdot \left(1 + \left[\frac{x^{n+1}-x^n}{1-x^{n+1}}\right]\right) = x + x \cdot \frac{x^{n+1}-x^n}{1-x^{n+1}}$$

en posant $\rho = x$, on obtient alors :

$$w_n = x \cdot \frac{x^{n+1}-x^n}{1-x^{n+1}}$$

Il devient alors clair que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + w_n$ où $\begin{cases} 0 < |\rho| < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0 \end{cases}$

Reste à montrer que (w_n) vérifie $\mathcal{P}((\alpha_i^{(0)}), (u_n), \ell)$ où ℓ est un entier non nul et (u_n) une suite vérifiant $\mathcal{P}_\phi$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = x^n \quad n \geq 1$.

Il est clair que (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}_\phi$ où ϕ est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$y \to \phi(y) = xy \qquad \text{et que } \phi \text{ est analytique.}$$

De plus, on a $0 < |\phi'(0)| = |x| < 1$

On écrit alors $w_n = x \cdot \dfrac{x u_n - u_n}{1 - x u_n}$

Comme pour n assez grand $\dfrac{1}{1-x u_n}$ est analytique au voisinage de zéro, elle est développable en série entière de u_n et s'écrit donc :

$$w_n = \alpha_1^{(0)} u_n + \alpha_2^{(0)} u_n^2 + \ldots$$

avec $\alpha_1^{(0)} = x^2 - x = x(x-1) \neq 0$.

On a ainsi montré que (S_n) vérifie l'hypothèse H_1).

Cherchons maintenant des suites (b_n) de telle manière que :

$*_1$) <u>(b_n) vérifie l'hypothèse H_2).</u>

Si nous arrivons à en trouver ; on aura alors trouvé des procédés du type (1') par lesquels l'ensemble des suites vérifiant l'hypothèse H_1) est stable. Nous noterons dorénavant $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites (S_n) vérifiant H_1) en remarquant que l'on a : $\mathcal{S} \subset$ LIN.

c) Exemples de procédés par lesquels $\mathcal{S}$ est stable

c1) $(b_n) = (\Delta S_n)$

Il est clair qu'alors $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\ell im \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right) + \left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \ell im \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$

et on a alors $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \ell im \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} + f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$ où f est : $f(x) = x - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

Comme (S_n) est par hypothèse convergente on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

De plus $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + w_n$ - où w_n vérifie $\mathcal{P}((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$, où u_n vérifie $\mathcal{P}_\phi$ - implique

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n}\left[\frac{\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1}{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}\right] = \frac{e_{n+1}}{e_n}\left[1 + \frac{\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \dfrac{e_{n+1}}{e_n}}{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}\right]$$

i.e. : $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\rho + w_n)\left[1 + \frac{\Delta w_n}{(\rho-1) + w_n}\right] = \rho + \rho\,\frac{\Delta w_n}{(\rho-1)+w_n} + w_n\left[1 + \frac{\Delta w_n}{(\rho-1)+w_n}\right].$$

Il s'ensuit alors que : $$f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right) = \rho\,\frac{\Delta w_n}{(\rho-1)+w_n} + w_n\left[1 + \frac{\Delta w_n}{(\rho-1)+w_n}\right].$$

L'hypothèse H_2) ne sera complètement montrée que si l'on montre que :

$*_2$) $\left[((S_n) \text{ vérifie } H_1) \Longrightarrow \left(f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)\right)\right.$ est une suite vérifiant $\left.P((\beta_i^{(0)}), (u_n), m_1)\right]$

(S_n) vérifie H_1) implique alors que (w_n) vérifie $P((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$, pour n assez grand - on aura alors

$$f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$$

est une suite de limite nulle vérifiant $P((\beta_i^{(0)}), (u_n, m_1)$ où $m_1 \in \mathbb{N}^*$ et où les $(\beta_{m_1+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ sont des constantes calculées à partir des $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$.

Ce qui montre $*_2$).

La proposition 3 permet alors de conclure :

<u>Conclusion 1</u> :

S est stable par le procédé δ^2 AITKEN et on retrouve alors les résultats du Chapitre 1.

c2) $(b_n) = \left(\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)$

Le fait que $(S_n) \in H_1$) implique automatiquement que :

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho$

Expression du rapport $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\left[\frac{1-\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1-\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right] = \left[\rho + \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right]\left(1 + \frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1-\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right)$$

i.e. : $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \rho + \rho\frac{\left(\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)}{1-\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} + \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right)\left(1 + \frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1-\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right)$$

On a alors : $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \rho + f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)$,

où f est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \rho\left(\frac{y-x}{1-y}\right) + (x-\rho)\left(1 + \frac{y-x}{1-y}\right)$$

et vérifiant $f(\rho, \rho) = 0$.

Montrons que : $*_3)$ $\left[((S_n) \text{ vérifie } H_1)\right] \Rightarrow \left(\left(f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)\right)\right)$ vérifie

$\mathcal{P}((\beta_i^{(0)}, (u_n), m_1)$

Comme (S_n) vérifie $H_1)$; d'après ce qui a été fait en C1) (paragraphe 2),

On déduit : $\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right)$ vérifie $\mathcal{P}((\gamma_i^{(0)}), (u_n), m')$ où les $(\gamma_{m'+i}^{(0)})_{i\geq 0}$

sont déduits des $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ et où (u_n) est une suite vérifiant $\mathcal{P}_\phi$; il s'ensuit alors d'après :

$$f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right) = \rho\frac{\left(\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right) - \left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{S_n} - \rho\right)}{(1-\rho) - \left(\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right)} + \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right)\left[1 + \frac{\left(\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right) - \left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right)}{(1-\rho) - \left(\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right)}\right]$$

que $\left[f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \right) \right]$ est une suite vérifiant $P((\beta_i^{(0)}), (u_n), m_1)$ où $m_1 \in \mathbb{N}^*$ et où les $(\beta^{(0)}_{m_1+i})_{i\geq 0}$ sont déduits à partir de $(\gamma^{(0)}_{m'+i})_{i\geq 0}$.

Ce qui montre $*_3$).

La proposition 4 permet alors de conclure :

Conclusion 2 :

S est stable par le procédé P suivant :

$$(S_n) \xrightarrow{P} (S_n^{(1)}) = \left(S_n - \frac{\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}}{\Delta\left(\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} \right)} \Delta S_n \right)$$

Ce procédé peut être écrit de la façon suivante :

$$P(S_n) = S_n^{(1)} = S_n - \frac{(\varepsilon_2^{(n)} - S_n)}{\Delta(\varepsilon_2^{(n)} - S_n)} \Delta S_n.$$

C'est le procédé standard étudié par GERMAIN-BONNE [7] et par KOWALEWSKI dans [8] ; il accélère la convergence de toute suite de LIN.

Il s'ensuit alors qu'en itérant ce procédé on obtient des quantités $S_n^{(k)}$:

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{\dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}}}{\Delta\left(\dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}} \right)} \Delta S_n^{(k)} & k \geq 0 \\ S_n^{(0)} = S_n \end{cases}$$

Comme $\mathcal{S} \subset$ LIN on déduit alors que : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0.$$

c3) θ_2-itéré

Le θ_2 se définit de la façon suivante :

$$(S_n) \to S_{n+1}^{(1)} = \theta_2^{(n+1)} = S_n - \frac{b_n \, \Delta S_n}{\Delta b_n}$$

$$\text{où } b_n = \frac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}}} \qquad n \geq 1$$

Au lieu de cette formule, nous allons utiliser la suivante :

$$\left.\begin{aligned} &(S_n) \to \theta_2^{(n)} = S_{n+1} - \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_{n+1} \\ &\text{où } b_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} \end{aligned}\right\} n \geq 0$$

Il est clair que cette deuxième forme est équivalente à la première.

<u>On a alors</u> : (b_n) est une suite de limite nulle et vérifie :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}$$

(S_n) vérifiant H_1) on a alors $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho$

$$\text{d'où } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \left[\rho + \left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right)\right] \cdot \left[1 + \frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right]$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \rho + \rho\,\frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} + \left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right)\left[1 + \frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right]$$

i.e. : $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \rho + f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)$

où f est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \rho\,\frac{y-x}{1-y} + (y-\rho)\left(1 + \frac{y-x}{1-y}\right)$$

on a bien $f(\rho, \rho) = 0$ car $\rho \neq 1$.

Montrons que si (S_n) vérifie H_1) alors $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n} - \rho\right) = f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)$ suite de limite nulle vérifie la propriété $\mathcal{P}((\beta_i^{(0)}), (u_n), m_1)$ où (u_n) est une suite de limite nulle vérifiant $\mathcal{P}_\phi$.

On a : (S_n) vérifie H_1) implique l'existence de (w_n) suite de limite nulle vérifiant $\mathcal{P}((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$ où m est un entier non nul et (u_n) une suite de limite nulle vérifiant $\mathcal{P}_\phi$ - et telle que :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + w_n.$$

On a montré dans ce même paragraphe en C1) que si (S_n) vérifie H_1) alors $\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right)$ vérifie $\mathcal{P}((\gamma_i^{(0)}), (u_n), m')$ où les $(\gamma_{m'+i}^{(0)})$ se déduisent à partir des $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$; il s'ensuit alors d'après :

$$f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right) = \rho \left[\frac{\left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right) \qquad \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right)}{(1-\rho) - \left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right)}\right] + \left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right) \left[1 + \frac{\left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right) - \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho\right)}{(1-\rho) - \left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho\right)}\right].$$

que $\left(f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)\right)$ est une suite vérifiant la propriété $P((\beta_i^{(0)}, (u_n), m_1)$ où m_1 est un entier non nul et les $(\beta_{m_1+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ sont des constantes calculées à partir des $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$.

Ce qui montre que si (S_n) vérifie $H_1)$ alors $(b_n) = \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)$ vérifie $H_2)$

<u>Conclusion</u> :

$\mathcal{S}$ est stable par le Θ_2-algorithme.

Les deux assertions suivantes :

- Lin est accélérable par le Θ_2-algorithme,

- $\mathcal{S} \subset$ LIN,

permettent d'affirmer alors que l'itération du Θ_2-algorithme donne des quantités $(S_n^{(k)})$ définies par :

$$\boxed{\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_{n+1}^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta S_n^{(k)} & k \geq 0 \\ & n \geq 0 \\[2ex] b_n^{(k)} = \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}} & k \geq 0 \\ & n \geq 0 \\[2ex] S_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}}$$

et qui vérifient : $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0.$

□

Il existe cependant des suites (S_n) à convergence linéaire pour lequelles des informations sur le rapport $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ sont plus faciles à déterminer que le rapport $\frac{e_{n+1}}{e_n}$. Nous allons essayer de trouver une classe de suites (S_n) stable par des procédés du type (1') dans le cas où des hypothèses sur $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ sont remplacées par des hypothèses sur le rapport $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$.

Nous donnerons ensuite des exemples de suites (S_n) et d'algorithmes du type (1) dont l'itération est efficace sur ces suites.

IV. DETERMINATION D'UN ENSEMBLE $\mathcal{S}_1 \subset$ LIN STABLE PAR LE PROCEDE DEFINI EN (1') DANS LE CAS OU LES SUITES (S_n) APPARTENANT A $\mathcal{S}_1$ SONT DEFINIEES PAR DES PROPRIETES SUR ΔS_n

Nous étudions dans ce paragraphe principalement des suites (S_n) telles que

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho_0 + w_n \text{ : où :}$$

- $-1 < \rho_0 < 1$

- $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$

Avant de détailler cette étude, nous donnons quelques définitions qui sont assez proches de celles données au paragraphe 2.

Définition 4 :

On dit qu'une suite (u_n) convergente de limite nulle vérifie $M_\phi^{(\ell)}$, si à partir d'un certain rang $u_{n+1} = \phi(u_n)$ où ϕ est une fonction analytique au voisinage de zéro telle que :

$\phi'(0) = 1$, $\phi''(0) = \ldots = \phi^{(\ell-1)}(0) = 0$ et $\phi^{(\ell)}(0) \neq 0$; ℓ étant un entier supérieur ou égal à 2.

Définition 5 :

Soit (t_n) une suite convergente de limite nulle. On dit que (t_n) vérifie la propriété $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$ si :

- il existe un entier m non nul, une suite (u_n) vérifiant la propriété $M_\phi^{(\ell)}$ et des constantes $\alpha_0^{(0)}, \ldots, \alpha_i^{(0)}, \ldots$ - telles que $\alpha_k = 0$ si $k < m$ et $\alpha_m^{(0)} \neq 0$ -, tels que $t_n = \alpha_m^{(0)} u_n^m + \alpha_{m+1}^{(0)} u_n^{m+1} + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots$ pour n assez grand.

Nous allons donner des hypothèses sur les suites (S_n) et (b_n) de telle manière que $(S_n^{(1)})$ définie par (1') ait une propriété équivalente à celle de (S_n).

Hypothèses H_3) sur (S_n)

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^* telle qu'à partir d'un certain rang on ait :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho_0 + t_n \text{ où :}$$

- ρ_0 est une constante non nulle telle que $-1 \leq \rho_0 < 1$
- (t_n) est une suite convergente de limite nulle vérifiant la propriété $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$, avec $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Soit (b_n) une suite convergente de limite nulle tel que le rapport $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ s'écrit : $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} + f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \ldots, \frac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}}\right)$

où $p \geq 1$ est fini et (S_n) une suite vérifiant l'hypothèse H_3).

On suppose f fonction $\mathbb{R}^{\rho} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- $f(\rho_0, \ldots, \rho_0) = 0$

- $\forall (S_n)$ vérifiant H_3), $\left\{ f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \ldots, \frac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}} \right) \right\}$ est une suite de limite nulle vérifiant la propriété $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m_1')$ avec :

$m_1' \geq 1$ et les $(\beta_{m'+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ sont déduits à partir des $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$

Nous dirons alors que (b_n) vérifie l'hypothèse H_4).

On a alors la proposition suivante :

Proposition 5 :

Soient (S_n) et (b_n) deux suites vérifiant respectivement les hypothèses H_3) et H_4).

On a alors les deux alternatives suivantes :

A1 - La suite $(S_n^{(1)})$ définie par (1') est une suite convergente de limite S^* et vérifie :

$$\frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = \rho_0 + t_n^{(1)} \text{ où}$$

$$- \rho_0 = \lim \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$$

- $(t_n^{(1)})$ est une suite de limite nulle vérifiant la propriété $M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m_1)$

$m_1 \geq 1$, et où les $(\alpha_{m_1+i}^{(1)})_{i\geq 0}$ sont déduits à partir des $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$.

A2 - $\frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n} = 0$ pour n assez grand.

Démonstration :

La suite (b_n) vérifiant H_4) ; l'hypothèse de la proposition 1 est vérifiée et on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$.

D'après (1') on a : $\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n - \Delta\left(\frac{b_n\ \Delta S_n}{\Delta b_n}\right)$

i.e. : $$\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n - \frac{b_{n+1}}{\Delta b_{n+1}} \Delta S_{n+1} + \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n$$

i.e. : $$\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} - 1} + \frac{1}{\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1}\right]$$

i.e. : $$\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n \left[\frac{\frac{b_{n+1}}{b_n}}{\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1} - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} - 1}\right]$$

Soit en posant $B_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ et $R_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$:

(8) $$\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n \left[\frac{B_n}{B_n - 1} - \frac{R_n}{B_{n+1} - 1}\right] = \Delta S_n \left[\frac{B_n(B_{n+1} - 1) - R_n(B_n - 1)}{(B_n - 1)(B_{n+1} - 1)}\right]$$

<u>On obtient alors</u> :

(8') $$\boxed{\frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = R_n^{(1)} = R_n\ \frac{B_{n+1}(B_{n+2} - 1) - R_{n+1}(B_{n+1} - 1)}{B_n(B_{n+1} - 1) - R_n(B_n - 1)} \cdot \frac{1 - B_n}{1 - B_{n+2}}}$$

En tenant compte du fait que $R_n = \rho_0 + t_n$ et $B_n = \rho + f_n$

où $f_n = f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \ldots, \frac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}}\right)$, on écrit alors :

(9) $$\boxed{\frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = R_n^{(1)} = (\rho_0 + t_n) \left[\frac{\rho_0(f_{n+2} - f_{n+1}) + (\rho_0 - 1)(f_{n+1} - t_{n+1}) + f_{n+1}(f_{n+2} - t_{n+1})}{\rho_0(f_{n+1} - f_n) + (\rho_0 - 1)(f_n - t_n) + f_n(f_{n+1} - t_n)}\right] \left[\frac{1 - \rho_0 - f_n}{1 - \rho_0 - f_{n+2}}\right]}$$

Tenant compte des hypothèses on a :

$$- t_n = \alpha_m^{(0)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0,\ m \geq 1.$$

$$- f_n = \beta_{m_1'}^{(0)} u_n^{m_1} + \ldots + \beta_{m'+i}^{(0)} u_n^{m_1+i} + \ldots \qquad i \geq 0,\ m_1' \geq 1.$$

Pour n assez grand ; on remplace u_n par x ; f_n par f(x) et f_{n+1} par $f_+(x)$. De même nous remplacerons t_n par t(x) et t_{n+1} par $t_+(x)$.

On a alors pour $|x|$ assez petit :

$$t(x) = \alpha_m^{(0)} x^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0,\ m \geq 1$$

$$f(x) = \beta_{m_1'}^{(0)} x^{m_1'} + \ldots + \beta_{m_1'+i}^{(0)} x^{m_1'+i} + \ldots \qquad i \geq 0,\ m_1' \geq 1$$

Pour x assez voisin de zéro ; f(x) et t(x) définissent des fonctions analytiques au voisinage de zéro. Comme ϕ est analytique au voisinage de zéro ; $f_+(x) = f(\phi(x))$ et $t_+(x) = t(\phi(x))$ définissent des fonctions analytiques au voisinage de zéro et il s'ensuit alors que :

$\rho_0(f(\phi(x))-f(x)) + (\rho_0-1)(f(x)-t(x)) + f(x)(f(\phi(x))-t(x))$ définit une fonction $0_1(x)$ analytique au voisinage de zéro vérifiant : $0_1(0) = 0$ et dévelopable en série entière dans ce voisinage.

$$0_1(x) = \delta_\ell^{(0)} x^\ell + \ldots + \delta_{\ell+i}^{(0)} x^{\ell+i} + \ldots \qquad i \geq 0,\ \ell \geq 1$$

où les $(\delta_{\ell+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ sont calculés à partir des $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$.

Si tous les $(\delta_{\ell+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ sont nuls, $0_1^{(x)}$ est alors identiquement nulle dans ce voisinage ; ce qui est donc vrai pour $x = u_n$ à partir d'un certain rang. $0_1(u_n) = 0$ pour n assez grand implique d'après (8) :

$$\frac{\Delta e_n^{(1)}}{\Delta e_n} = 0 \text{ pour n assez grand ; d'où A2).}$$

On suppose alors les $(\delta_{\ell+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ non tous nuls avec en particulier $\delta_\ell^{(0)} \neq 0$.

Il existe une fonction G(x) analytique au voisinage de zéro, pour x assez voisin de zéro, non identiquement nulle dans ce voisinage telle que $G(0) = \delta_\ell^{(0)}$ et $O_1(x) = x^\ell\, G(x)$.

Et on a alors $\dfrac{O_{1+}(x)}{O_1(x)} = \dfrac{O_1(\phi(x))}{O_1(x)} = \left(\dfrac{\phi(x)}{x}\right)^\ell \dfrac{G(\phi(x))}{G(x)}$

On a :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{O_{1+}(x)}{O_1(x)} = (\phi'(0))^\ell = 1$

- Pour x assez voisin de zéro, $\dfrac{G(\phi(x))}{G(x)}$ définit une fonction analytique au voisinage de zéro, de même que $\dfrac{\phi(x)}{x}$.

Il s'ensuit alors qu'il existe une fonction G_1 analytique au voisinage de zéro telle que :

- $G_1(0) = 0$

- (10) $\boxed{\dfrac{O_{1+}(x)}{O_1(x)} = (\phi'(0))^\ell + G_1(x) = 1 + G_1(x)}$

<u>Intéressons-nous au rapport $\dfrac{(1-\rho_0) - f_n}{(1-\rho_0) - f_{n+2}}$</u>

En remplaçant à partir d'un certain rang u_n par x, on pose :

$$f(x) = \beta^{(0)}_{m'_1}\, x^{m'_1} + \ldots + \beta^{(0)}_{m'_1+i}\, x^{m'_1+i} + \ldots \qquad \begin{array}{l} i \geq 0 \\ m'_1 \geq 1 \end{array}$$

On a : $f_n = f(u_n)$ et $f(\phi^2(u_n)) = f_{n+2}$.

Comme $\phi(x)$ est analytique au voisinage de zéro, il s'ensuit alors que pour x assez voisin de zéro $(1-\rho_0) - f(\phi^2(x))$ définit une fonction analytique au voisinage de zéro prenant la valeur $(1-\rho_0)$ au point $x = 0$.

Comme $(1-\rho_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{(1-\rho_0) - f(\phi^2(x))}$ définit donc une fonction analytique au voisinage de zéro et il existe une fonction $G_2(x)$ analytique au voisinage de zéro telle que :

- $G_2(0) = 0$

- (11) $$\boxed{\frac{(1-\rho_0) - f(x)}{(1-\rho_0) - f(\phi^2(x))} = 1 + G_2(x)}$$

De (10) et (11) on déduit que l'expression :

$$R^{(1)}(x) = (\rho_0 + t(x)) \frac{0_1(\phi(x))}{0_1(x)} \cdot \frac{(1-\rho_0) - f(x)}{(1-\rho_0) - f(\phi^2(x))}$$

s'écrit pour x assez voisin de zéro :

$R^{(1)}(x) = \rho_0 + G_3(x)$ où $G_3(x)$ est une fonction analytique au voisinage de zéro calculée à partir de $G_1(x)$, $G_2(x)$, $w(x)$ et $t(x)$ et vérifiant $G_3(0) = 0$.

Revenant aux notations en u_n pour n assez grand, $R^{(1)}(x)$ devient alors d'après (9) :

$$R^{(1)}(u_n) = \frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = \rho_0 + w_n^{(1)} \quad \text{où } w_n^{(1)} = G_3(u_n)$$

Il est clair que $w_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

<u>Montrons que $(w_n^{(1)})$ vérifie $M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m_1)$</u>

G_3 étant analytique au voisinage de zéro ; on a alors à partir d'un certain rang :

$$w_n^{(1)} = G_3(u_n) = \alpha_{m_1}^{(1)} u_n^{m_1} + \ldots + \alpha_{m_1+i}^{(0)} u_n^{m_1+i} + \ldots \qquad \begin{array}{l} i \geq 0 \\ m_1 \geq 1 \end{array}$$

$$\text{où } \alpha_{m_1+i}^{(1)} = \frac{G_3^{(m_1+i)}(0)}{(m_1+i)!} \qquad \begin{array}{l} m_1 \geq 1 \\ i \geq 0 \end{array}$$

Comme (u_n) vérifie la propriété $M_\phi^{(\ell)}$, $w_n^{(1)}$ vérifie alors la propriété $M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m_1)$

C.Q.F.D.

Par la suite, nous appelerons $S_1 = \{(S_n) \text{ convergente} / (S_n) \text{ vérifie H3}\}$

Donnons quelques exemples de suites (S_n) et de suites (b_n) vérifiant respectivement les hypothèses $H_3)$ et $H_4)$.

a) Exemple de suites (S_n) vérifiant $H_3)$

Au chapitre I, nous avons étudié l'exemple de suites (S_n) convergente de limite S^* et vérifiant :

$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu \rho_0'^{\nu}$ où (a_ν) est une suite appartenant à $K_{TM}(0)$, (cf. paragraphe 3, partie a) et où $-1 < \rho_0' \leq 1$.

On a montré que pour n assez grand :

$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -\rho_0' + t_n$ où (t_n) est une suite convergente de limite nulle et vérifiant

à partir d'un certain rang :

$$t_n = \frac{\alpha_1^{(0)}}{n} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_1^{(0)}}{n^i} + \ldots \qquad i > 0$$

avec $\alpha_1^{(0)} < -1$.

Montrons que $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ vérifie la propriété $M_\phi^{(2)}$

On a : $u_{n+1} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{u_n}{1+u_n} = \phi(u_n)$.

Pour n assez grand $n > 1$; ϕ est analytique au voisinage de zéro et vérifie :

$$- \phi(0) = \left.\frac{x}{x+1}\right|_{x=0} = 0$$

$$- \phi'(0) = \left.\frac{1}{(x+1)^2}\right|_{x=0} = 1 \text{ et } \phi''(0) = \left.\frac{-2}{(x+1)^3}\right|_{x=0} = -2.$$

D'après la définition 5, $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ vérifie $M_{\phi}^{(2)}$.

Il s'ensuit alors que (t_n) vérifie la propriété $((\alpha_i^{(0)}), \left(\frac{1}{n}\right), 1)$, d'où (S_n) vérifie H_3).

Nous avons comme exemples de suite $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)\, a_\nu\, \rho_0'^{\nu} \quad -1 < \rho_0' \leq 1$,

les sommes partielles de séries numériques qui ont été traitées au chapitre 1 :

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} \to S^* = L_n(x+1) \text{ pour } -1 < x \leq 1$$

$$S_n = 4 \sum_{\nu=0}^{n} \left. \frac{(-1)^\nu x^\nu}{2\nu+1} \right|_{x=1} \to S^* = \pi.$$

b) Exemples de suites (b_n) vérifiant H_4)

b1) $(b_n) = (\Delta S_n)$ où (S_n) est une suite vérifiant H_3)

Il est clair que :

- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho_0$

On écrit alors $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \rho_0 + \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho_0\right) = \rho_0 + f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$

où f est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x - \rho_0$$

On a bien $f(\rho_0) = 0$.

De plus, pour toute suite vérifiant H_3) on a :

$\left(f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)\right) = (t_n)$ vérifie la propriété $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m_1)$ avec $m_1 = m$,

$\beta_{m+i}^{(0)} = \alpha_{m+i}^{(0)}$ $i \geq 0$ et u_n vérifiant $M_\phi^{(\ell)}$, $\ell \geq 2$.(b_n) vérifie donc l'hypothèse H_4).

La proposition 5 permet alors de conclure :

Conclusion :

S_1 est stable par le procédé δ^2 AITKEN :

$$(S_n) \to (S_n^{(1)}) = (\varepsilon_2^{(n)}) = \left(S_n - \frac{\Delta S_n\, \Delta S_n}{\Delta(\Delta S_n)}\right)$$

et on obtient alors les résultats du chapitre I.

b2) $(b_n) = \left(\dfrac{(\Delta S_n)}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)$ où (S_n) est une suite vérifiant H_3)

Il est clair que :

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \rho_0 \dfrac{1-\rho_0}{1-\rho_0} = \rho_0$

On a alors :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} = \left(\rho_0 + \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho_0\right)\left(1 + \frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right)$$

$$\text{i.e. :} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \rho_0 + \rho_0 \frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} + \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \rho_0\right)\left(1 + \frac{\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right)$$

$\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ est bien de la forme $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \rho_0 + f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)$

où f est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \xrightarrow{f} \rho_0 \frac{y-x}{1-y} + (x-\rho_0)\left(1 + \frac{y-x}{1-y}\right)$$

On a bien $f(\rho_0, \rho_0) = 0$.

De plus, pour toute suite (S_n) vérifiant H_3) on a :

$$f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right) = \rho_0 \frac{\Delta t_n}{(1-\rho_0) - t_{n+1}} + t_n \left(1 + \frac{\Delta t_n}{(1-\rho_0) - t_{n+1}}\right)$$

où $\rho_0 \neq 1$ et (t_n) suite de limite nulle vérifiant $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$.

Il s'ensuit alors que $\left(f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)\right)$ est une suite de limite nulle

vérifiant $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m_1)$ où $m_1 \in \mathbb{N}^*$ et les $(\beta^{(0)}_{m_1+i})_{i\geq 0}$ sont calculés à

partir des $(\alpha^{(0)}_{m+i})_{i\geq 0}$.

Ce qui montre bien que (b_n) vérifie H_4).

La proposition 5 permet donc de conclure :

<u>Conclusion</u> :

S_1 est stable par le procédé P suivant :

$$(S_n) \xrightarrow{P} (S_n^{(1)}) = \left(S_n - \frac{\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}}{\Delta\left(\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)} \Delta S_n\right)$$

C'est le procédé standard étudié par GERMAIN-BONNE [7] ; il accélère la convergence de toute suite de LIN.

En itérant ce procédé on obtient des quantités $(S_n^{(k)})$ définies récursivement par :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{\dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1-\dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}}}{\Delta\left(\dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1-\dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}}\right)}\,\Delta S_n^{(k)} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ \\ S_n^{(0)} = S_n \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

Comme $S_1 \subset$ LIN ; il s'ensuit alors que pour toute suite (S_n) appartenant à S_1 : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0$.

b3) $(b_n) = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$ avec (S_n) suite vérifiant H_3)

(S_n) étant une suite vérifiant H_3), il s'ensuit automatiquement que :

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \rho_0$

$b_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$ implique alors que :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} = \left[\rho_0 + \left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \rho_0\right)\right] \left[1 + \frac{\left(\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right]$$

i.e. : $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \rho_0 + f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)$

où $f(x, y)$ est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (y - \rho_0)\left(1 + \frac{y - x}{1 - y}\right) + \rho_0 \frac{y - x}{1 - y}.$$

On a bien $f(0, 0) = 0$.

Pour toute suite (S_n) vérifiant $H_3)$, on écrit alors :

$$f\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right) = \rho_0 \frac{\Delta t_n}{(1 - \rho_0) - t_{n+1}} + t_{n+1}\left(1 + \frac{\Delta t_n}{(1 - \rho_0) - t_{n+1}}\right)$$

où $\rho_0 \neq 1$ et (t_n) est une suite de limite nulle vérifiant $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m)$.

On déduit alors que $\left(f\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}, \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}\right)\right)$ est une suite de limite nulle vérifiant $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m_1')$ où $m_1' \in \mathbb{N}^*$ et où les $(\beta^{(0)}_{m_1'+i})_{i\geq 0}$ sont calculées à partir des $(\alpha^{(0)}_{m+i})_{i\geq 0}$.

La proposition 5 permet alors de conclure :

<u>Conclusion</u> :

S_1 est stable par le procédé Θ_2-Algorithme défini par :

$$(S_n) \to (\theta_2^{(n)}) = \left(S_{n+1} - \frac{\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)}{\Delta\left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)} \Delta S_n \right)$$

Ce procédé a été étudié d'une façon théorique et pratique par BREZINSKI respectivement dans [1] et dans [2].

En itérant ce procédé on obtient alors des quantités $S_n^{(k)}$ définies par

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_{n+1}^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta S_{n+1}^{(k)} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ b_n^{(k)} = \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ S_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

Comme $\mathcal{S}_1 \subset$ LIN est stable par le θ_2 (Proposition 5) et que LIN est accélérable par le θ_2-Algorithme ; on déduit alors que pour toute suite

$$(S_n) \in \mathcal{S}_1 : \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n^{(k+1)}}{\Delta S_n^{(k)}} = 0.$$

V. ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE SUITES APPARTENANT A DES SOUS-ENSEMBLES STRICTS DE LOGSF

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^* et vérifiant :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n$$

où (λ_n) est une suite de limite nulle.

Par définition, $(S_n) \in$ LOGSF.

Comme nous l'avons fait dans le cas des suites à convergence linéaire, on va étudier les possibilités d'accélération de la convergence de la suite (S_n) par l'itération du procédé défini en (1') avec les informations suivantes :

$$(12)\quad \begin{cases} (1')\ (S_n) \to (S_n^{(1)}) = (S_n - \dfrac{b_n}{\Delta b_n}\Delta S_n) \\ \text{où } (b_n) \text{ est une suite convergente de limite nulle et telle} \\ \text{que } \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + f_n \text{ où } (f_n) \text{ est une suite de limite nulle, dépen-} \\ \text{dant de } \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p-1} \text{ où p est entier non nul et fini.} \end{cases}$$

Des exemples de suites (b_n) seront donnés plus tard.

D'après le travail fait par DELAHAYE et GERMAIN-BONNE dans [12] et par KOWALEWSKI dans [8], le procédé (11') n'est efficace que si l'on possède des informations sur la suite (λ_n). Notre première tâche sera donc de trouver les informations que doit avoir (λ_n) pour que $(S_n^{(1)})$ converge plus vite que (S_n) vers S^*. Une fois ces informations obtenues, on aura alors trouvé des sous-ensembles stricts de LOGSF parmi lesquels on fera un tri. Ce tri devant répondre à la question :

Q3) Trouver un ensemble $S_{LOG} \subset$ LOGSF tel que :

- S_{LOG} est accélérable par le procédé défini en (11)

- S_{LOG} est stable par ce même procédé

Commençons par trouver (λ_n) pour que $(S_n^{(1)})$ converge plus vite que (S_n) vers S^*.

a) Résultats de convergence

On a : $S_n^{(1)} = S_n - \dfrac{b_n}{\Delta b_n}\ S_n.$

d'où : $\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n - \dfrac{b_{n+1}}{\Delta b_{n+1}}\ \Delta S_{n+1} + \dfrac{b_n}{\Delta b_n}\Delta S_n$

i.e. : $$\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{b_{n+1}}{\Delta b_{n+1}} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} + \frac{b_n}{\Delta b_n}\right]$$

Posant $B_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ et $R_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$, obtient alors :

$$\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{R_n}{B_{n+1} - 1} + \frac{1}{B_n - 1}\right] = \Delta S_n \left[\frac{B_n}{B_n - 1} - \frac{R_n}{B_{n+1} - 1}\right]$$

i.e. : $$\frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = \frac{B_n(B_{n+1} - 1) - R_n(B_n - 1)}{(B_n - 1)(B_{n+1} - 1)}$$

Posons $f_n = B_n - 1$; on a :

$$(12) \quad \boxed{\frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = \frac{(1 + f_n)\, f_{n+1} - (1 + \lambda_n)\, f_n}{f_n\, f_{n+1}} = \frac{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)}{f_n\, f_{n+1}}}$$

De (12), on déduit alors la proposition suivante :

Proposition 6 :

On suppose $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$.

Si (λ_n) *est une suite vérifiant la condition* :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)}{f_n\, f_{n+1}} = 0$$

alors : $$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0$$

Démonstration :

De la relation (12) on tire: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)}{f_n\, f_{n+1}} = 0$ implique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = 0.$$

Nous supposerons par la suite que la suite $(z_n) = \left(\dfrac{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)}{f_n\, f_{n+1}}\right)$ est une suite de limite nulle.

Intéressons-nous aux conditions que doit vérifier (λ_n) pour que $(S_n^{(1)}) \in$ LOGSF.

Il est clair que la seule condition $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ à elle seule n'implique pas $(S_n^{(1)}) \in$ LOGSF ; nous devons donner une condition supplémentaire sur la suite (z_n). On a alors le lemme suivant :

Lemme 1 :

Soient (S_n) une suite de limite S^* et (b_n) une suite de limite nulle telles que :

- $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n$ où $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$

- $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + f_n$ où $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$

On suppose de plus que $(z_n) = \left(\dfrac{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)}{f_n\, f_{n+1}}\right)$ est une suite de limite nulle et à convergence logarithmique et que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$.

Alors :

- $S_n^{(1)} \in$ LOGSF

- $(S_n^{(1)})$ converge plus vite que (S_n) vers S^*

Démonstration :

D'après (12), on déduit : $\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n\, z_n$, ce qui implique :

$$\frac{\Delta S^{(1)}_{n+1}}{\Delta S^{(1)}_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{z_{n+1}}{z_n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$ on déduit alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S^{(1)}_{n+1}}{\Delta S^{(1)}_n} = 1.$$

Le fait que $(S^{(1)}_n)$ converge plus vite que (S_n) résulte de la proposition 6.

□

- Si les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées, on a $(S^{(1)}_n) \in$ LOGSF, ce qui implique l'existence d'une suite $(\lambda^{(1)}_n)$ de limite 0 et telle que :

- $\frac{\Delta S^{(1)}_{n+1}}{\Delta S^{(1)}_n} = 1 + \lambda^{(1)}_n$, où $\lambda^{(1)}_n \xrightarrow[n]{} 0.$

Notant $(f^{(1)}_n)$ la suite définie par $\left(\frac{b^{(1)}_{n+1}}{b^{(1)}_n} - 1\right)$ où $\left[b^{(1)}_n\right]$ est construit comme $[b_n]$ à partir d'un nombre fini de termes de la suite $(S^{(1)}_n)$; la recherche de S_{LOG} répondant à Q3) revient à chercher les conditions pour que $(\lambda^{(1)}_n)$ ait un comportement équivalent à celui de (λ_n) qui vérifie :

$$z_n = \frac{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - f_n)}{f_n \; f_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; ; \; \frac{z_{n+1}}{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

b) Recherche de l'ensemble S_{LOG} stable et accélérable par le procédé (12)

Nous énonçons une proposition qui nous permettra par la suite d'identifier S_{LOG}.

Proposition 7 :

Soit (S_n) *une suite convergente de limite* S^* *vérifiant l'hypothèse* $H_5)$ *suivante :*

H5)

$$\begin{cases} \bullet \ \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1+\lambda_n \text{ où } (\lambda_n) \text{ est une suite de limite nulle et telle que :} \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta S_n}{\lambda_n} = 0 \text{ (ce qui veut dire que le procédé } \delta^2 \text{ AITKEN transforme} \\ (S_n) \text{ en une suite qui converge vers } S^*) \\ \bullet \ (\lambda_n) \text{ vérifie la propriété } M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m) \text{ où } m \text{ est un entier non} \\ \text{nul et } (u_n) \text{ une suite convergente de limite nulle vérifiant la propriété} \\ M_\phi^{(m+1)}. \\ \text{On suppose de plus que :} \\ \alpha_m^{(0)} - \dfrac{m}{(m+1)!}\phi^{(m+1)}(0) \neq 0 \\ u_n \neq 0 \ \forall n \end{cases}$$

Soit (b_n) *une suite convergente de limite nulle et vérifiant :*

$$\begin{cases} -\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + f_n \text{ où } f_n \text{ est une suite de limite nulle vérifiant} \\ \quad f_n = f(\lambda_n, \ldots, \lambda_{n+p-1}) \text{ où } p \text{ est un entier fini non nul.} \\ \text{On suppose de plus que : } \forall S_n \text{ vérifiant H5) ; alors } f(n) \text{ est une suite de limi} \\ \text{nulle vérifiant } M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m) \text{ avec } \beta_m^{(0)} = \alpha_m^{(0)} - \dfrac{m}{(m+1)!}\phi^{(m+1)}(0). \end{cases}$$

Alors pour n *assez grand* $(S_n^{(1)})$ *suite définie par* (12) *est une suite convergente de limite* S^* *vérifiant :*

- $(S_n^{(1)})$ *converge plus vite que* (S_n) *vers* S^*.
- $\dfrac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = 1+\lambda_n^{(1)}$ *où* $(\lambda_n^{(1)})$ *est une suite de limite nulle vérifiant la propriété* $M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m)$ *où* $(\alpha_m^{(1)})$ *vérifie :* $\alpha_m^{(1)} - \dfrac{m}{(m+1)!}\phi^{(m+1)}(0) \neq 0$ *pour* $m=1$, *l'égalité pouvant avoir lieu quand* m *est strictement supérieur à 1.*

De plus quand $m = 1$, $\lambda_n^{(1)}$ *vérifie les propriétés :*

$M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), 1)$ *et* $\dfrac{\Delta S_n^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration :

Comme $\dfrac{\Delta S_n}{\lambda_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ on a alors $\dfrac{\Delta S_n}{f_n} = \dfrac{\Delta S_n}{\lambda_n} \cdot \dfrac{\lambda_n}{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(car $\dfrac{\lambda_n}{f_n} \to \dfrac{\alpha_m^{(0)}}{\beta_m^{(0)}}$) ce qui donne : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim \dfrac{\Delta S_n}{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$.

Pour montrer que $S_n^{(1)}$ converge plus vite vers S^* que (S_n), on montre $\dfrac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après (12) on a : $\dfrac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = \dfrac{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)}{f_n\ f_{n+1}}$

Evaluons $z_n = \dfrac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n}$ en fonction de u_n

Par hypothèse (f_n) vérifie la propriété $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m)$ où (u_n) vérifie la propriété $M_\phi^{(m+1)}$. Ce qui donne pour n assez grand :

$$f_n = \beta_m^{(0)}\ u_n^m + \beta_{m+1}^{(0)}\ u_n^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)}\ u_n^{m+i} + \ldots \quad \begin{matrix} i \geq 0 \\ m \geq 1 \end{matrix} \quad \text{où } \beta_m^{(0)} \neq 0$$

(λ_n) vérifiant la propriété $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$ on a alors :

$$\lambda_n = \alpha_m^{(0)}\ u_n^m + \alpha_{m+1}^{(0)}\ u_n^{m+1} + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)}\ u_n^{m+i} + \ldots \quad \begin{matrix} i \geq 0 \\ m \geq 1 \end{matrix}$$

pour n assez grand, $\alpha_m^{(0)} \neq 0$.

Choisissons N suffisamment grand ; pour que u_n appartienne à un voisinage V convenable de zéro quand : $n > N$, on supposera V ouvert.

Remplaçons, pour $n > N$, u_n par x et posons

$$(\square_1) \quad f(x) = \beta_m^{(0)} x^m + \beta_{m+1}^{(0)} x^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots$$

$$f_+(x) = f(\phi(x))$$

où ϕ est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

- $\phi(0) = 0$
- $\phi'(0) = 1$
- $\phi''(0) = \ldots = \phi^{(m-1)}(0) = \phi^{(m)}(0) = 0$
- $\phi^{(m+1)}(0) \neq 0$
- ϕ analytique dans $\mathcal{V}$

Pour x appartenant à $\mathcal{V}$ on écrit alors :

$$(\square_2) \quad \phi(x) = x + \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)} x^{m+1} + \ldots + \frac{\phi^{(m+i+1)}(0)}{(m+i+1)!} x^{m+1+i} + \ldots \qquad \begin{matrix} i \geq 0 \\ m \geq 1 \end{matrix}$$

Comme (u_n) vérifie $M_\phi^{(m+1)}$, pour $n > N$: $\phi(u_n) = u_{n+1}$

De même, on pose :

$$(\square_3) \quad \lambda(x) = \alpha_m^{(0)} x^m + \alpha_{m+1}^{(0)} x^{m+1} + \ldots + \lambda_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

$$\lambda_+(x) = \lambda(\phi(x)).$$

D'après les notations, il est clair qu'on a alors

- $f(u_n) = f_n$, $f_+(u_n) = f_{n+1}$, $\lambda(u_n) = \lambda_n$ et $\lambda_+(u_n) = \lambda_{n+1}$

pour $n > N$.

D'après $(\square_1)$, $(\square_2)$ $(\square_3)$ f, ϕ et λ définissent pour $x \in \mathcal{V}$ des fonctions analytiques. D'après la théorie élémentaire des fonctions analytiques [3], [6], on déduit alors que $f_+(x) - f(x) + f(x)\ (f_+(x) - \lambda(x))$ définit une fonction analytique dans $\mathcal{V}$ pour x "assez voisin de zéro".

Cherchons le développement en série entière de cette fonction $x \in V$

a) Evaluation de $f_+(x) - f(x)$

$$f_+(x) = \beta_m^{(0)} \phi(x)^m + \beta_{m+1}^{(0)} \phi(x)^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} \phi(x)^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

$$f(x) = \beta_m^{(0)} x^m + \beta_{m+1}^{(0)} x^{m+1} + \ldots + \beta_{m+1}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

d'où :

$$f_+(x) - f(x) = \beta_m^{(0)}((\phi(x))^m - x^m) + \beta_{m+1}^{(0)}((\phi(x))^{m+1} - x^{m+1}) + \ldots +$$

$$\beta_{m+i}^{(0)}((\phi x))^{m+i} - x^{m+i}) + \ldots \qquad i \geq 0$$

De $(\square_2)$ on déduit que :

$$\begin{cases} (\phi(x))^r = x^r + r \dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^{m+r} + O(x^{m+r+1}) & r > 0 \\ \phi(x)^r - x^r = r \dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^{m+r} + O(x^{m+r+1}) & r > 0 \end{cases}$$

si $r = m$ on a alors :

$$\phi(x)^m - x^m = m \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^{2m} + O(x^{2m+1})$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$f_+(x) - f(x) = \beta_m^{(0)}(\phi(x)^m - x^m) + \beta_{m+1}^{(0)}(\phi(x)^{m+1} - x^{m+1}) + \ldots$$

$$\boxed{f_+(x) - f(x) = m\, \beta_m^{(0)} \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^{2m} + O(x^{2m+1})}$$

b) Evaluation de $f(x)[f_+(x) - \lambda(x)]$

$$f_+(x) - \lambda(x) = \beta_m^{(0)}(\phi(x)^m) - x^m \alpha_m^{(0)} + \beta_{m+1}^{(0)} \phi(x)^{m+1} - \alpha_{m+1}^{(0)} x^{m+1} + \ldots$$

$$f_+(x) - \lambda(x) = x^m(\beta_m^{(0)} - \alpha_m^{(0)}) + O(x^{m+1}).$$

d'où :

$$f(x)\ (f_+(x) - \lambda(x)) = (\beta_m^{(0)}\ x^m + 0(x^{m+1}))\ ((\beta_m^{(0)} - \alpha_m^{(0)})\ x^m + 0(x^{m+1}))$$

i.e. : $$f(x)\ (f_+(x) - \lambda(x)) = \beta_m^{(0)}\ x^{2m}(\beta_m^{(0)} - \alpha_m^{(0)}) + 0(x^{2m+1})$$

d'où <u>l'expression finale de $f_+(x) - f(x) + f(x)\ (f_+(x) - \lambda(x))$</u>

$$f_+(x) - f(x) + f(x)(f_+(x) - \lambda(x)) = \beta_m^{(0)}\left[\beta_m^{(0)} - \alpha_m^{(0)} + m\ \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\right]\ x^{2m} + 0(x^{\ell})$$

où $\ell \geq 2m+1$.

c) Evaluation de $f_+(x)\ f(x)$

$$f_+(x)\ f(x) = \left[\beta_m^{(0)}\ (\phi(x))^m + 0(\phi(x)^{m+1})\right]\ \left[\beta_m^{(0)}\ x^m + o(x^{m+1})\right]$$

i.e. : $$f_+(x)\ f(x) = \beta_m^{(0)}(\phi(x))^m \cdot \beta_m^{(0)}\ x^m + 0(x^{2m+1})$$

Comme $(\phi(x))^m = x^m + 0(x^{m+1})$ on déduit alors que :

$$f_+(x)\ f(x) = \beta_m^{(0)}\ x^{2m} + 0(x^{2m+1}) \qquad (\square_4)$$

D'où

$$z(x) = \frac{f_+(x) - f(x)\ (f_+(x) - \lambda(x))}{f_+(x)\ f(x)} = \frac{\beta_m^{(0)}\ \left[\beta_m^{(0)} - \alpha_m^{(0)} + \frac{m\ \phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\right]\ x^{2m} + 0(x^{\ell})}{(\beta_m^{(0)})^2\ x^{2m} + 0(x^{2m+1})}$$

où ℓ est un entier tel que $\ell \geq 2m+1$.

Or par hypothèse

$$\begin{cases} \beta_m^{(0)} - \alpha_m^{(0)} + \dfrac{m\ \phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} = 0 \\ \beta_m^{(0)} \neq 0 \end{cases}$$

d'où $z(x) = \dfrac{0(x^{\ell})}{(\beta_m^{(0)})^2\ x^{2m} + 0(x^{2m+1})}$ avec $\ell \geq 2m+1$

Comme (u_n) est telle que $(u_n) \in V$ pour $n > N$ on a :

$$z_n = z(u_n) = \frac{O(u_n^{\ell})}{(\beta_m^{(0)})^2 \; u_n^{2m} + O(u_m^{2m+1})} \sim u_n^{\ell-2m} \qquad \text{avec } \ell \geq 2m+1$$

ce qui donne $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Comme (λ_n) vérifie $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$ et (f_n) la propriété $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m)$ on a :

$$\frac{\lambda_n}{f_n} \sim \frac{\alpha_m^{(0)} \; u_n^m}{\beta_m^{(0)} \; u_n^m} = \frac{\alpha_m^{(0)}}{\beta_m^{(0)}}$$

i.e. :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{f_n} = \frac{\alpha_m^{(0)}}{\beta_m^{(0)}}$$

ce qui donne : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim \left(S_n - \frac{\Delta S_n}{f_n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{f_n}$

i.e. : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$.

D'après la proposition (6) on déduit alors que $\dfrac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Montrons que $\dfrac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = 1 + \lambda_n^{(1)}$ où $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{(1)} = 0$, $(\lambda_n^{(1)})$ vérifiant la propriété $M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m)$ avec $\left[\alpha_m^{(1)} - \frac{m}{(m+1)!} \phi^{(m+1)}(0) \neq 0 \text{ pour } m = 1\right]$

D'après (12) on a :

$$\frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \left[\frac{\Delta f_{n+1} + f_{n+1}(f_{n+2} - \lambda_{n+1})}{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)} \right] \cdot \frac{f_n}{f_{n+2}}$$

Intéressons-nous à la quantité $\dfrac{f_{n+1} + f_{n+1}(f_{n+2} - \lambda_{n+1})}{f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)} \cdot \dfrac{f_n}{f_{n+1}}$

Soit $N(x) = f_+(x) - f(x) + f(x)(f_+(x) - \lambda(x))$.

D'après les propriétés de $\phi(x)$, de $\lambda(x)$ et de $f(x)$ et le fait que $N(x) = 0(x^\ell)$ où $\ell \geq 2m+1$, on déduit que $N(x)$ définit une fonction analytique pour $x \in V$ et admet un développement en série entière :
$N(x) = \delta_\ell^{(0)}\, x^\ell + \ldots + \delta_{\ell+i}^{(0)}\, x^{\ell+i} + \ldots \quad i \geq 0.$

Supposons un instant $\delta_j^{(0)} = 0 \quad \forall j \geq \ell$, c'est-à-dire le cas où $N(x)$ est identiquement nulle pour $x \in V$. On aura alors

$$z(x) = \frac{N(x)}{f(x)\; f_+(x)} = 0 \quad \forall x \in V$$

En particulier pour $n > N$, $u_n \in V$ et on a alors :

$$z_n = z(u_n) = 0 \quad \forall n > N \quad \text{i.e. : d'après (12)} \ \frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = 0 \text{ pour } n > N.$$

Ce qui implique en particulier que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = 0.$$

Comme $(S_n) \in$ LOGSF, on déduit alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0$

On supposera désormais $\delta_\ell^{(0)} \neq 0$. Il existe alors une fonction $H(x)$ analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$ et telle que :

- $H(0) = \delta_\ell^{(0)} \neq 0$

- $N(0) = x^\ell\, H(x)$.

Il s'ensuit alors que pour $x \in V$:

$$\boxed{\frac{N_+(x)}{N(x)} = \frac{N(\phi(x))}{N(x)} = \left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^\ell \frac{H(\phi(x))}{H(x)}} \qquad (\square_5)$$

$H(x)$ et $\phi(x)$ étant analytiques au voisinage de zéro pour $x \in V$, on obtient alors une fonction $H_3(x)$ analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$ telle que

$$- \ H_3(0) = \frac{H(\phi(0))}{H(0)} = \frac{\delta_\ell^{(0)}}{\delta_\ell^{(0)}} = 1$$

$$- \ H_3(x) = 0(\phi^s(x) - x^s) \text{ où } s \in \mathbb{N}^*$$

$$- \ \frac{H(\phi(x))}{H(x)} = 1 + H_3(x) = 1 + 0(\phi(x)^s - x^s) \ s \in \mathbb{N}^*$$

Comme $\phi(x) = x + 0(x^{m+1})$ on déduit que

$$\frac{H(\phi(x))}{H(x)} = 1 + 0(x^{m+s}) \qquad s \in \mathbb{N}^*$$

De même $\phi(x)$ étant analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$, vérifiant $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ il s'ensuit alors que

$\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^\ell$ est une fonction analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$, développable en série entière pour $x \in V$: $\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^\ell = 1 + \ell \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^m + 0(x^{m+s'})$ $s' \in \mathbb{N}^*$.

De $[\square_5]$ on tire que $\frac{N_+(x)}{N(x)}$ est une fonction analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$, et il existe alors des constantes $(a_{m+i}^{(0)})_{i \geq 0}$ non toutes nulles tel que :

$$(\square_6) \begin{cases} a_m^{(0)} = \dfrac{\ell \ \phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \neq 0 \\[2ex] x \in V \ ; \ \dfrac{N_+(x)}{N(x)} = 1 + a_m \ x^m + \ldots + a_{m+i} \ x^{m+i} + \ldots \quad i \geq 0 \end{cases}$$

Intéressons-nous à l'expression $\dfrac{f(x)}{f(\phi^2(x))}$

f(x) est une fonction analytique dans V et vérifie :

$$f(0) = \ldots = f^{(k)}(0) = 0 \qquad k \leq m-1$$

$$\frac{f^{(m)}(0)}{m!} = \beta_m^{(0)} \neq 0$$

Il s'ensuit qu'il existe $H_1(x)$ analytique au voisinage de zéro telle que :

- $H_1(0) = \beta_m^{(0)} \neq 0$

- $f(x) = x^m H_1(x)$

d'où :

$$(\square_6') \quad \boxed{\frac{f(x)}{f(\phi^2(x))} = \left(\frac{x}{\phi^2(x)}\right)^m \frac{H_1(x)}{H_1(\phi^2(x))} = \left(\frac{\phi^2(x)}{x}\right)^{-m} \cdot \frac{H_1(x)}{H_1(\phi^2(x))}}$$

Il est clair que $\dfrac{H_1(x)}{H_1(\phi^2(x))}$ est une fonction analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$ vérifiant :

$$\frac{H_1(x)}{H_1(\phi^2(x))} = 1 + O(x^{m+s_1}), \quad s_1 \in \mathbb{N}^*$$

De même $\phi(x)$ étant analytique au voisinage V de zéro pour $x \in V$ et vérifiant $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ il s'ensuit alors

$$\left(\frac{\phi^2(x)}{x}\right)^{-m}$$

est une fonction analytique au voisinage V de zéro pour $x \in V$ et vérifiant :

$$\left(\frac{\phi^2(x)}{x}\right)^{-m} = 1 - 2m\,\frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\,x^m + O(x^{m+s_1'}), \qquad s_1' \in \mathbb{N}^*$$

On tire alors de ($\square_6$') que $\dfrac{f(x)}{f(\phi^2(x))}$ est une fonction analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$ et il existe alors des constantes $(b_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ non toutes nulles telles que :

$$(\square_7) \begin{cases} b_m^{(0)} = -2m \dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \neq 0 \\ x \in V, \ \dfrac{f(x)}{f(\phi^2(x))} = 1 + b_m^{(0)} x^m + \ldots + b_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \quad i \geq 0 \end{cases}$$

De ($\square_6$) et ($\square_7$) ; on déduit qu'il existe des constantes $(c_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ non toutes nulles, calculées à partir des $(a_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ et $(b_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ et telles que :

$$\begin{cases} c_m^{(0)} = (\ell - 2m) \dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \\ \dfrac{f(x)}{f(\phi^2(x))} \cdot \dfrac{N_+(x)}{N(x)} = 1 + c_m^{(0)} x^m + \ldots + c_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \quad i \geq 0 \\ \text{et ce pour } x \in V \end{cases}$$

En particulier quand $x = u_n$ pour $n > N$ on a alors :

$$\frac{f(u_n)}{f(\phi^2(u_n))} \cdot \frac{N_+(u_n)}{N(u_n)} = 1 + c_m^{(0)} u_n^m + \ldots + c_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

où $c_m^{(0)} = (\ell - 2m) \dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}$

or :

$$\frac{f(u_n)}{f(\phi^2(u_n))} \cdot \frac{N_+(u_n)}{N(u_n)} = \frac{\Delta f_{n+1} + f_{n+1}(f_{n+2} - \lambda_{n+1})}{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)} \cdot \frac{f_n}{f_{n+2}} .$$

Comme $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n$ où $\lambda_n = \alpha_m^{(0)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$

On déduit que pour n assez grand ; il existe des constantes $(\alpha_{m+i}^{(1)})_{i\geq 0}$ calculées à partir des $(c_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ et $(\alpha_{m+i}^{(0)})_{i\geq 0}$ telles que :

$$\begin{cases} \alpha_m^{(1)} = \alpha_m^{(0)} + c_m^{(0)} = \alpha_m^{(0)} + (\ell - 2m)\,\dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} & m \geq 1 \\ & \ell \geq 2m+1 \\ \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \dfrac{\Delta f_{n+1} + f_{n+1}(f_{n+2} - \lambda_{n+1})}{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)} \cdot \dfrac{f_n}{f_{n+2}} = 1 + \alpha_m^{(1)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(1)} u_n^{m+i} + \ldots & \\ & i \geq 0 \end{cases}$$

or $\dfrac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \left[\dfrac{\Delta f_{n+1} + f_{n+1}(f_{n+2} - \lambda_{n+1})}{\Delta f_n + f_n(f_{n+1} - \lambda_n)}\right] \dfrac{f_n}{f_{n+2}}$, d'où :

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = 1 + \alpha_m^{(1)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(1)} u_n^{m+i} + \ldots & i \geq 0,\ m \geq 1 \\ \text{où} & \\ \alpha_m^{(1)} = \alpha_m^{(0)} + \dfrac{(\ell - 2m)}{(m+1)!}\,\phi^{(m+1)}(0) & m \geq 1 \\ & \ell \geq 2m+1 \end{cases}$$

Ce qui montre que $\dfrac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = 1 + \lambda_n^{(1)}$ où $(\lambda_n^{(1)})$ est la suite de limite nulle :

$$-\lambda_n^{(1)} = \alpha_m^{(1)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(1)} u_n^{m+i} + \ldots \qquad \begin{matrix} i \geq 0 \\ m \geq 1 \end{matrix}$$

où $\alpha_m^{(1)} = \alpha_m^{(0)} + \dfrac{\ell-2m}{(m+1)!}\,\phi^{(m+1)}(0)$

Montrons que $\alpha_m^{(1)} \neq 0$

Considérons : $\alpha_m^{(1)} u_n^m = \alpha_m^{(0)} u_n^m + (\ell - 2m)\, u_n^m \cdot \dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}$

Le fait que $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n \sim 1 + \alpha_m^{(0)} u_n^m$ et que $(S_n) \in$ LOGSF implique automatiquement que $\alpha_m^{(0)} u_n^m < 0$ pour n assez grand.

De même le fait que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} u_n^m + \ldots$ et $(u_n) \in$ LOGSF

implique que pour n assez grand $\frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} u_n^m < 0$.

Comme $\ell \geq 2m+1$ on aura alors $(\ell - 2m) \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} u_n^m < 0$.

D'où pour n assez grand :

$$\alpha_m^{(0)} u_n^m + \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} (\ell - 2m) u_n^m < 0$$

i.e. $\alpha_m^{(1)} u_n^m < 0$.

Comme $u_n \neq 0$ $\forall n$ on déduit alors que $\alpha_m^{(1)} \neq 0$

Ce qui montre que $\lambda_n^{(1)}$ vérifie la propriété $M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), m)$

<u>Il ne nous reste plus qu'à montrer</u> :

$\alpha_m^{(1)} - \frac{m}{(m+1)!} \phi^{(m+1)}(0) \neq 0$ pour m = 1 ; l'éventualité

$\phi_m^{(1)} - \frac{m}{(m+1)!} \phi^{(m+1)}(0) = 0$ pouvant se produire pour m > 1 .

On a : $\alpha_m^{(1)} = \alpha_m^{(0)} + (\ell - 2m) \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}$

d'où :

$$\alpha_m^{(1)} - \frac{m}{(m+1)!} \phi^{(m+1)}(0) = \alpha_m^{(0)} + \frac{(\ell - 3m)}{(m+1)!} \phi^{(m+1)}(0).$$

Posons $\theta_m^{(0)} = \alpha_m^{(0)} + \frac{(\ell - 3m)}{(m+1)!} \phi^{(m+1)}(0)$, $\ell \geq 2m+1$

Si m = 1 on a $\theta_1^{(0)} = \alpha_1^{(0)} + \frac{\ell-3}{2} \phi''(0)$ $\quad \ell \geq 3$

<u>si $\ell = 3$</u> : $\theta_1^{(0)} = \alpha_1^{(0)} \neq 0$ (par hypothèse $\alpha_1^{(0)} \neq 0$)

<u>si $\ell > 3$</u> : Montrons que $\theta_1^{(0)} u_n < 0$ pour n assez grand.

$$\theta_1^{(0)} u_n = \alpha_1^{(0)} u_n + \frac{\ell-3}{2} \phi''(0) u_n$$

Le fait que $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ implique :

$\alpha_1^{(0)}\ u_n < 0$ et $\phi''(0)\ u_n < 0$ pour n assez grand.

Comme $\ell > 3$, On a alors $\frac{\ell-3}{2}\ \phi''(0)\ u_n < 0$, (n assez grand).

Ce qui donne : $\alpha_1^{(0)}\ u_n + \frac{\ell-3}{2}\ \phi''(0)\ u_n < 0$ pour n assez grand, c'est-à-dire $\theta_1^{(0)}\ u_n < 0$ pour n assez grand.

Ce qui montre que $\theta_1^{(0)} \neq 0$

i.e. : $\alpha_1^{(1)} - \frac{\phi''(0)}{2} \neq 0$

Dans le cas où m est quelconque, $(m > 1)$ cela ne marche pas et ceci est dû au fait que : $\ell \geq 2m+1$ n'implique pas toujours $\ell \geq 3m$ quand $m > 1$.

Pour $m > 1$ prenons ℓ tel que : $\ell \geq 2m+1$ et $\ell < 3m$.

(un tel ℓ existe, <u>exemple</u> : $m = 2$ et $\ell = 2m+1 = 5$).

Le fait que l'on ait $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ implique :

$\alpha_m^{(0)}\ u_n^m < 0$ et $\frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\ u_n^m < 0$ pour n assez grand.

Comme $\ell < 3m$, $\frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\ u_n^m < 0 \Rightarrow \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\ u_n^m\ (\ell - 3m) > 0$

et on pourra donc avoir l'éventualité $\left(\alpha_m^{(0)} + \frac{\ell-3m}{(m+1)!}\ \phi^{(m+1)}(0)\right) u_n^m = 0$

i.e. : $\alpha_m^{(0)} + \frac{\ell-3m}{(m+1)!}\ \phi^{(m+1)}(0) = 0.$

Quand $\lambda_n^{(1)}$ vérifie $M((\alpha_i^{(1)}), (u_n), 1)$ on a alors :

$$\frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = z_n \Rightarrow \frac{\Delta S_n^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}} = \frac{\Delta S_n}{\lambda_n^{(1)}}\ z_n = \frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(1)}} . z_n$$

Or λ_n vérifie $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), 1)$ avec $\alpha_1^{(0)} \neq 0$

i.e. : pour n assez grand : $\lambda_n \sim \alpha_1^{(0)}\ u_n$; de même $\lambda_n^{(1)} \sim \alpha_1^{(1)}\ u_n$,

d'où :

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(1)}} \to C = \frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1^{(1)}} \neq 0. \text{ Ce qui donne : } \frac{\Delta S_n^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

C.Q.F.D.

Il découle donc de la proposition 7 que si on appelle S_{LOG} l'ensemble des suites (S_n) convergentes de limite S^* et vérifiant l'hypothèse H5) pour $m = 1$, alors S_{LOG} est stable et accélérable par

$$T : (S_n) \to (S_n^{(1)}) = \left\{ S_n - \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n \right\}$$

où (b_n) est une suite de limite nulle vérifiant H6) pour $m = 1$.

c) Applications

Nous allons donner des exemples de suites (S_n) et suites (b_n) vérifiant respectivement les hypothèses H5) et H6) pour $m = 1$, ce qui nous permettra d'exhiber des algorithmes d'accélération assez connus dont l'itération pourrait accélérer la convergence de suites appartenant à des sous-ensembles stricts de LOGSF.

c1) Exemple de suites (S_n) vérifiant H5) pour $m = 1$

1) Nous avons défini au chapitre I, l'ensemble $L_1^{(2)}(S^*) \subset$ LOGSF par :

$S_n \in L_1^{(2)}(S^*)$ si (S_n) est une suite convergente de limite S^* et telle que

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{n^p} + \ldots \qquad p \geq 1$$

avec $\alpha_1 < -1$, pour n assez grand.

Posant $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1 = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{n^p} + \ldots \qquad = \lambda_n$, on considère $R^{(2)}(S^*)$

l'ensemble de suites $(S_n) \in L_1^{(2)}(S^*)$ telle que :

$$\frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} = \frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pour montrer que $\mathcal{R}^{(2)}(S^*) \subset S_{LOG}$; il faut montrer uniquement :

$(u_n) = (\frac{1}{n})$ vérifie $M_\phi^{(2)}$. Il est clair que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

De plus : $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{u_n}{1+u_n} = \phi(u_n)$

Pour n assez grand $(n > 1)$ ϕ est analytique dans un voisinage de zéro et vérifie :

- $\phi(0) = 0$

- $\phi'(0) = \left.\frac{1}{(1+x)^2}\right|_{x=0} = 1$

- $\phi''(0) = \left.\frac{-2}{(x+1)^2}\right|_{x=0} = -2$

Ce qui montre que (u_n) est une suite de limite nulle vérifiant la propriété $M_\phi^{(2)}$ d'où par définition (λ_n) vérifie $\mathcal{M}(\alpha_1^{(0)}), (u_n), 1)$.

Un premier cas d'application est l'ensemble des suites (S_n) de limite S^* s'écrivant $S_n = S^* + \int_0^\infty e^{-nt}\, d\phi(t)$ où $\phi(t)$ est une fonction vérifiant :

$$(13)\quad \begin{cases} \bullet\ \phi(t) \text{ non décroissante sur } [0, +\infty[\\ \bullet\ \phi(t) \text{ entière sur } [0, +\infty[\text{ et } \overline{\lim_{t\to\infty}} \dfrac{\operatorname{Log}|\phi'(t)|}{|t|} < \infty \\ \bullet\ \phi(t) \text{ bornée sur } [0, +\infty[\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\, d\phi(t) = 0 \end{cases}$$

D'après le travail fait au chapitre I, on montre q'une telle suite est T.M. et vérifie :

$e_n = S_n - S^* = \frac{k_p}{n^p} + \ldots + \frac{k_{p+i}}{n^{p+i}} + \ldots \qquad i \geq 0$ et ce pour n suffisamment grand ;

p désigne le plus petit entier $j \geq 1$ tel que $\phi^{(j)}(0) \neq 0$ et k_p est un réel non nul.

Il s'ensuit alors qu'il existe des constantes $(\ell_i)_{i \geq p+1}$ calculées à partir des $(k_i)_{i \geq 1}$ telles que :

$$\Delta S_n = \frac{\ell_{p+1}}{n^{p+1}} + \ldots + \frac{\ell_{p+i}}{n^{p+i}} + \ldots \quad i \geq 1 \text{ où } \ell_{p+1} = -pk_p \neq 0$$

pour n assez grand.

On déduit alors que $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n = 1 - \frac{p+1}{n} + \frac{\ell'_2}{n^2} + \ldots + \frac{\ell'_i}{n^i} + \ldots \quad i \geq 1$

pour n assez grand, les $(\ell'_i)_{i \geq 2}$ se calculant à partir des $(\ell_i)_{i \geq 1}$.

De plus on a $\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \sim -\frac{\ell_{p+1}}{(p+1)} \frac{n}{n^{p+1}}$ d'où $\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Ce qui montre que $(S_n) \in R^{(2)}(S^*)$.

Quelques exemples de suites T.M. appartenant à $R^{(2)}(S^*)$

• $\phi(t) = t$

Les propriétés (13) sont vérifiées par $\phi(t)$.

On déduit alors que $(S_n) = \left(\int_0^\infty e^{-nt}\, dt\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \in R^{(2)}(0)$

• Soit $\phi(t) = \frac{t^2}{2}$

On a $\int_0^\infty e^{-xt}\, d\,(t) = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$. Il devient alors clair que $\phi(t)$ vérifie (13).

On conclut alors que $(S_n)_{n \geq 1} = \left(\int_0^\infty e^{-nt}\, d\phi(t))_{n \geq 1}\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1} \in R^{(2)}(0)$

• Soit $\beta(t)$ la fonction

$$\beta(t) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right) e^{-t} = e^{-t} \left[\frac{e^t - 1 - t}{(te^t - 1)}\right]$$

$\beta(t)$ est une fonction entière en effet :

La fonction $\frac{te^{-t}}{e^t-1} = g(t)$ est entière, de même que la fonction $h(t) = \frac{e^t-1-t}{t}$

ce qui donne $\beta(t) = g(t) \cdot h(t)$ est une fonction entière.

De plus $\displaystyle \lim_{|t|\to\infty} \frac{\text{Log}|\phi(t)|}{|t|} = \lim_{|t|\to+\infty} \frac{\text{Log } e^{-t}}{|t|} + \lim_{|t|\to+\infty} \frac{\text{Log}|e^t-1-t|}{|t|} - \lim_{|t|\to+\infty} \frac{\text{Log}|t|}{|t|} -$

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{\text{Log}|e^t-1|}{|t|}$$

On a bien $\displaystyle \lim_{|t|\to\infty} \frac{\text{Log}|\beta(t)|}{|t|} < \infty$

De plus : $\beta(t) > 0\ \forall t > 0$ et $\beta(t)$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

Considérons la suite (S_n) définie par $S_n = \gamma + \int_0^\infty e^{-nt}\,\beta(t)\,dt$ où γ désigne la constante d'Euler. La fonction $\phi(t)$ définie par $\phi'(t) = \beta(t)$ vérifie les conditions (13). Un calcul détaillé dans [10] montre que

$S_n = \gamma + \int_0^\infty e^{-nt}\,d\phi(t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \text{Log } n$; et on déduit alors que cette suite (S_n) est dans $\mathcal{R}^{(2)}(\gamma)$.

Examinons maintenant le cas de suites (S_n) convergente de limite S^* telle que

$$S^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ avec } a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } a_n = \int_0^\infty e^{-nt}\,d\phi(t) \text{ où } \phi \text{ vérifie :}$$

$$(13') \begin{cases} \bullet\ \phi'(t) > 0 \text{ sur } [0, +\infty[\text{ (resp. sur }]0, +\infty[) \\ \bullet\ \phi'(0) = 0 \\ \bullet\ \phi(t) \text{ bornée sur } [0, +\infty[\text{ (resp. sur }]0, +\infty[) \\ \bullet\ \overline{\lim_{|t|\to\infty}} \dfrac{\text{Log}|\phi'(t)|}{|t|} \to \infty \text{ et } \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-xt}\,\phi(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

D'après le travail fait au chapitre I, on montre que $(S^* - S_n)$ est une suite T.M.

Montrons que $(S_n) \in R^{(2)}(S^*)$

On déduit d'après le théorème 14a, page 94 et corollaire 14b page 95 de [12] que :

$a_n = \frac{S'_p}{n^p} + \ldots + \frac{S'_{p+i}}{n^{p+i}} + \ldots \quad i \geq 0,\ p \geq 2$ où $S'_p \neq 0$, et ce pour n assez grand.

Tenant compte du fait que pour n assez grand :

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \ldots$$

On déduit alors que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \lambda_n = 1 - \frac{p}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_i}{n^i} + \ldots \quad i \geq 1.$

De plus on remarque que $\frac{a_n}{\lambda_n} \sim - \frac{S'_p}{p} \frac{1}{n^{p-1}}$, comme $p \geq 2$

On a alors : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} = 0.$

On a alors $(S_n) = \left(\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\right) \in R^{(2)}(S^*)$

Un exemple assez rencontré en pratique est le cas où $\phi(t) = \frac{t^2}{2}$.

$\phi(t)$ vérifie (13') et on a : $a_n = \int_0^\infty e^{-nt}\, t\, dt = \frac{1}{n^2}$.

On déduit alors que $(S_n)_{n\geq 1} = \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2}\right) \in R^{(2)}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$.

2) Suites de $L_2^{(1)}(S^*)$

On a défini au chapitre I paragraphe 4 l'ensemble $L_p^{(1)}(S^*)$; $L_2^{(1)}(S^*)$ sera défini comme étant $L_p^{(1)}(S^*)$ pour $p = 2$.

On a alors $(S_n) \in \mathcal{L}_2^{(1)}(S^*)$ implique $S_{n+1} = \phi_1(S_n)$ où ϕ_1 est une fonction analytique dans un voisinage V_{S^*} de S^*, S^* étant le seul point fixe de ϕ_1 dans un voisinage ; i.e. : $\phi_1(S^*) = S^*$.

On suppose de plus que :

- $\phi_1'(S^*) = 1$

- $\phi_1''(S^*) = C \neq 0$ avec $Ce_n = C(S_n - S^*) < 0$ pour n assez grand

D'après la propriété 17 de la page 47 de [8], (S_n) est une suite convergente de limite S^*. On a alors

$$e_{n+1} = e_n + \frac{\phi_1''(S^*)}{2} e_n^2 + \ldots \qquad \text{où } e_n = S_n - S^*$$

$$\text{i.e. : } \Delta S_n = \frac{\phi_1''(S^*)}{2} e_n^2 + \ldots + \frac{\phi_1^{(p_1)}}{p_1!}(S^*)\, e_n^p + \ldots \qquad p_1 \geq 1$$

D'après la propriété des fonctions analytiques, on a alors pour n assez grand :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n \text{ où } (\lambda_n) \text{ est une suite de limite nulle s'écrivant :}$$

$$\lambda_n = \phi_1''(S^*)\, e_n + \ldots + \alpha_i\, e_n^i + \ldots \qquad i \geq 1$$

Comme $\Delta S_n \sim \frac{\phi''(S\ )}{2} e_n^2$ on déduit alors que $\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Si nous appelons $\phi(x)$ la fonction définie par $\phi(x) = \phi_1(x + S^*) - S^*$ ϕ vérifie :

- $\phi(0) = \phi_1(S^*) - S^* = 0$
- $\phi'(0) = \phi_1'(S^*) = 1$
- $\phi''(0) = \phi_1''(S^*) = 0$

Montrons que (f_n) est une suite de limite nulle vérifiant $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), 1)$

Ayant supposé (S_n) vérifiant H5) ; il existe alors une suite (u_n) vérifiant $M_\phi^{(2)}$ et des constantes $\alpha_1^{(0)},\dots, \alpha_i^{(0)},\dots$ $i \geq 1$ telles que :

$$\lambda_n = \alpha_1^{(0)} u_n + \dots + \alpha_i^{(0)} u_n^i + \dots \quad i \geq 1,\ \alpha_1^{(0)} \neq 0$$

d'où $\lambda_{n+1} = \alpha_1^{(0)} u_{n+1} + \dots + \alpha_i^{(0)} u_{n+1}^{(1)} + \dots$

et ce pour n assez grand.

Choisissons N assez grand de telle manière que u_n appartienne à un voisinage V convenable de zéro pour $n < N$. On supposera V ouvert.

Pour $u_n \in V$; remplaçons u_n par x, λ_n par $\lambda(x)$ et f_n par $f(x)$.

Il est clair alors que $\lambda_{n+1} = \lambda(u_{n+1}) = \lambda(\phi(u_n))$.

On a $\lambda(x) = \alpha_1^{(0)} x + \dots + \alpha_i^{(0)} x^i + \dots \quad i \geq 1,\ \alpha_1^{(0)} \neq 0$.

Pour $x \in V$; $\lambda(x)$ définit une fonction analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$ et d'après la définition de $\phi(x)$; $\lambda(\phi(x))$ définit alors une fonction analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$.

Le développement de $\lambda(\phi(x))$ en série entière s'écrit alors :

$$\lambda(\phi(x)) = \alpha_1^{(0)} \phi(x) + \alpha_2^{(0)} \phi(x) + \dots + \alpha_i^{(0)}(\phi(x))^i + \dots \quad i \geq 1$$

Comme $\phi(x) = x + \frac{\phi''(0)}{2} x^2 + \dots \quad \phi''(0) \neq 0$; on obtient :

$$\lambda(\phi(x)) = \alpha_1^{(0)} x + \left(\alpha_2^{(0)} + \alpha_1^{(0)} \frac{\phi''(0)}{2}\right) x^2 + \dots \qquad \text{d'où :}$$

$$\lambda(\phi(x)) - \lambda(x) = \alpha_1^{(0)} \frac{\phi''(0)}{2} x^2 + k_3 x^3 + \dots + k_i x^i + \dots \qquad i \geq 2$$

avec $k_2 = \alpha_1^{(0)} \frac{\phi''(0)}{2} \neq 0$.

Il s'ensuit alors qu'il existe une fonction analytique G(x) au voisinage de zéro pour $x \in V$ /

$$\begin{cases} G(0) = \alpha_1^{(0)} \dfrac{\phi''(0)}{2} \neq 0 \\ \lambda(\phi(x)) - \lambda(x) = x^2\, G(x) \end{cases}$$

On déduit alors que $\dfrac{\lambda(\phi(x)) - \lambda(x)}{\lambda(\phi(x))} = \dfrac{x^2\, G(x)}{\lambda(\phi(x))}$.

Comme $\lambda(\phi(0)) = \lambda(0) = 0$ et $\lambda'(\phi(0)) = \alpha_1^{(0)} \neq 0$,

Il existe $G_1(x)$ analytique au voisinage de zéro pour $x \in V$ telle que :

- $G_1(0) = \alpha_1^{(0)} \neq 0$

- $\lambda(\phi(x)) = x\, G_1(x)$

d'où :

$$\frac{\lambda(\phi(x)) - \lambda(x)}{\lambda(\phi(x))} = \frac{x^2\, G(x)}{x\, G_1(x)} = x \cdot \frac{G(x)}{G_1(x)}.$$

Comme G et G_1 sont analytiques au voisinage V de zéro pour $x \in V$,

vérifiant $\dfrac{G(x)}{G_1(x)} = \dfrac{\phi''(0)}{2} \neq 0$; on déduit alors qu'il existe $\ell_1, \dots, \ell_i, \dots \quad i \geq 1$

tels que : $x \in V, \dfrac{x\, G(x)}{G_1(x)} = \ell_1 x + \ell_2 x^2 + \dots + \ell_i x^i + \dots \qquad i \geq 1$

où $\ell_1 = \dfrac{\phi''(0)}{2} \neq 0$.

Comme $\dfrac{\lambda(\phi(x)) - \lambda(x)}{\lambda(\phi(x))} = x \dfrac{G(x)}{G_1(x)}$, on a alors :

$$\frac{\lambda(\phi(x)) - \lambda(x)}{\lambda(\phi(x))} = \frac{\phi''(0)}{2} x + \ell_2 x^2 + \dots + \ell_i x^i + \dots \qquad i \geq 1$$

De la même façon on montre que :

$$\frac{[\lambda(x)]^2}{\lambda(\phi(x))} = \ell_1' x + \ell_2' x^2 + \dots + \ell_i' x^i + \dots \qquad i \geq 1$$

où :

$$\ell_1' = \frac{(\alpha_1^{(0)})^2}{\alpha_1^{(0)}} = \alpha_1^{(0)}$$

On déduit alors que (e_n) est une suite de limite nulle vérifiant $M_{\phi}^{(2)}$, et donc que (λ_n) vérifie $M((\alpha_i^{(0)}), (e_n), 1)$ avec $\alpha_1^{(0)} = \phi_1''(S^*)$.

D'où $L_2^{(1)}(S^*) \subset S_{LOG}$.

c2) Exemples de suites (b_n) vérifiant H6) avec $m=1$

$$1 - b_n = -\frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$$

$$b_n = \frac{\Delta S_n}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}.$$ Si (S_n) est choisie / $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n$ avec

$$\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ alors } b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

d'où

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} = \left(1 + \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right) \left[1 + \frac{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right]$$

i.e. :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} + \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right) \left[1 + \frac{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}\right]$$

On suppose (S_n) vérifiant H5), avec $m=1$: On a alors $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

et

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} + \lambda_n \left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}}\right)$$

et donc $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + f_n$

où :

$$f_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} + \lambda_n \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$$

d'où :

$$f(x) = \frac{\lambda(x) - \lambda(\phi(x))}{\lambda(\phi(x))} + \frac{(\lambda(x))^2}{\lambda(\phi(x))} = \left(\alpha_1^{(0)} - \frac{\phi''(0)}{2}\right) x + \beta_2^{(0)} x^2 + \ldots + \beta_i^{(0)} x^i + \ldots \qquad i \geq 1$$

Comme par hypothèse $\alpha_1^{(0)} - \frac{\phi''(0)}{2} \neq 0$ on a alors :

$$f(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_i x^i + \ldots \qquad i \geq 1$$

avec $\beta_1 = \alpha_1^{(0)} - \frac{\phi''(0)}{2}$.

Choisissant en particulier $x = u_n$ pour $u_n > N$ on a :

$$f_n = f(u_n) = \beta_1 u_n + \beta_2 u_n^2 + \ldots + \beta_i u_n^i + \ldots \qquad i \geq 1.$$

Il est clair que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et que (f_n) vérifie la propriété $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), 1)$ avec $\beta_1^{(0)} \neq 0$.

Ce qui montre que (b_n) vérifie l'hypothèse H6) avec $m = 1$.

La proposition 7 permet alors de conclure :

Conclusion :

S_{LOG} est stable et accélérable par le procédé P:

$$(S_n) \xrightarrow{P} (S_n^{(1)}) = \left(S_n - \frac{\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}}{\Delta\left(\dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)} \Delta S_n \right)$$

C'est un cas particulier du procédé standard étudié par GERMAIN-BONNE [7] et KOWALEWSKI [8].

Itérant ce procédé, on obtient les quantités $(S_n^{(k)})$ définies récursivement par :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{\dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}}}{\Delta \left(\dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}} \right)} \Delta S_n^{(k)} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ S_n^{(0)} = S_n \end{cases}$$

et il s'ensuit alors d'après la proposition 7 que pour toute suite $(S_n) \in S_{LOG}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n^{(k+1)}}{\Delta S_n^{(k)}} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0, \quad k > 0$$

$$2 - b_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$$

Soit (S_n) une suite de limite S^* et vérifiant H5).

On a alors $b_n = - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; où (λ_n) vérifie $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), 1)$;

(u_n) étant une suite de limite nulle vérifiant $M_\phi^{(2)}$.

<u>De plus</u> :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \cdot \frac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (1 + \lambda_{n+1}) \left(1 - \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right)$$

i.e. : $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1}\lambda_n}{\lambda_{n+1}}.$$

En procédant de la même façon que précédemment on montre que pour n assez grand :

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + f_n$ où f_n est une suite de limite nulle telle que :

$$f_n = \beta_1^{(0)} u_n + \beta_2^{(0)} u_n^2 + \ldots + \beta_i^{(0)} u_n^i + \ldots \qquad i \geq 1$$

où $\beta_1 = \alpha_1^{(0)} - \frac{\phi''(0)}{2} \neq 0$.

Donc par définition (f_n) vérifie $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), 1)$.

Ce qui montre que (b_n) vérifie l'hypothèse H6) avec $m = 1$.

La proposition 7 permet alors de conclure :

<u>Conclusion</u> : S_{LOG} est stable et accélérable par le procédé :

$$(S_n) \xrightarrow{\theta_2} (S_n^{(1)}) = \left(S_{n+1} - \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_{n+1} \right)$$

où
$$(b_n) = \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} \right).$$

C'est la première étape d'un procédé assez connu : le θ_2-Algorithme.

Itérant ce procédé, on obtient alors des quantités $(S_n^{(k)})$ définies récursivement par :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_{n+1}^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta S_{n+1}^{(k)} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\[2ex] b_n^{(k)} = \dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\[2ex] S_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

et il s'ensuit alors que pour toute suite (S_n) convergente appartenant à S_{LOG} et de limite S^* on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0$$

<u>3 - $b_n = n\,\Delta S_n$</u>

On va étudier ce cas de suites quand $(S_n) \in \mathcal{R}^{(2)}(S^*) \subset S_{LOG}$.

Je rappelle que $(S_n) \in \mathcal{R}^{(2)}(S^*)$ si (S_n) est une suite convergente de limite S^* telle que :

$$* \qquad \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \frac{\alpha_1^{(0)}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_p^{(0)}}{n^p} + \ldots \qquad p \geq 1 \text{ pour n assez grand.}$$

Posant $\lambda_n = \frac{\alpha_1^{(0)}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_p^{(0)}}{n^p} + \ldots$, on a : $\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (par définition de $\mathcal{R}^{(2)}(S^*)$) et $\alpha_1^{(0)} < -1$.

D'où : $\quad b_n = n \;\; \Delta S_n = n\,\lambda_n \frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \sim \alpha_1^{(0)} \frac{\Delta S_n}{\lambda_n}$.

Ce qui implique : $\qquad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

De plus : $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (1 + \frac{1}{n}) \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$.

i.e. : $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{\beta_1^{(0)}}{n} + \frac{\beta_2^{(0)}}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_i^{(0)}}{n^i} + \ldots \qquad i \geq 1$$

où $\beta_1^{(0)} = \alpha_1^{(0)} + 1 \neq 0$.

Comme $(u_n) = \frac{1}{n}$ vérifie la propriété $M_\phi^{(2)}$ avec $\phi(x) = \frac{x}{x+1}$ et $\phi''(0) = -2$,

On a alors $\beta_1^{(0)} = \alpha_1^{(0)} - \frac{\phi''(0)}{2}$.

Ce qui montre que (b_n) vérifie l'hypothèse H6) quand $m = 1$.

La proposition 7 permet alors de conclure :

Conclusion :

- $\mathcal{R}^{(2)}(S^*)$ S_{LOG} est accélérable par le procédé

$$(S_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{L} (S_n^{(1)})_{n\geq 1} = \left\{ S_n - \frac{n\, b_n}{\Delta(n\, b_n)} \Delta S_n \right\}_{n\geq 1}$$

- $\mathcal{R}^{(2)}(S^*)$ est stable par L.

L est un procédé qui correspond à la première étape du procédé étudié par LEVIN [9].

Itérant L, on obtient alors des quantités $(S_n^{(k)})$ définies récursivement par :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{n\,\Delta S_n^{(k)}}{(n\,\Delta S_n^{(k)})} \Delta S_n^{(k)} & \begin{matrix} n \geq 1 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ S_n^{(0)} = S_n \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

et il s'ensuit alors que pour toute suite $(S_n) \in \mathcal{R}^{(2)}(S^*)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0,\ k > 0.$$

<u>4 - $b_n = |\Delta S_n|^{\frac{1}{2}}$</u>

On étudie ce cas de suites quand $(S_n) \in L_2^{(1)}(S^*) \subset S_{LOG}$.

$S_n \in L_2^{(1)}(S\ )$ si $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S^*$ et $S_{n+1} = \phi_1(S_n)$, pour $n \geq 0$, ϕ_1 est supposée analytique dans un voisinage de S^*, vérifiant $\phi_1'(S^*) = 1$,

$\phi_1''(S^*) \neq 0$.

On a montré dans la partie 2 de c1) qu'on avait alors :

$$\bullet \ \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n$$

où $\lambda_n = \phi''(S^*)\, e_n + \ldots + \omega_i\, e_n^i + \ldots \quad i \geq 1$ pour $n > N_2$, où $(e_n) = (S_n - S^*)$ vérifie $M_\phi^{(2)}$, où ϕ est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\phi(x) = \phi_1(x+S^*) - \phi_1(S^*) = \phi_1(x+S^*) - S^*$.

Il est clair que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

De plus comme $(S_n) \in L_2^{(1)}(S^*) \subset$ LOGSF ; il s'ensuit qu'à partir d'un certain rang (S_n) est monotone et donc à partir de ce rang ΔS_n est de signe constant.

Appelant N_1 ce rang on a alors pour $n > N_3 > \mathrm{Sup}(N_1, N_2)$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left[\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right]^{1/2} = (1+\phi''(S^*)\, e_n + \ldots + \omega_i\, e_n^i + \ldots)^{1/2}$$

i.e. : $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \beta_1^{(0)}\, e_n + \ldots + \beta_i^{(0)}\, e_n^i + \ldots \qquad i \geq 1$$

avec $\beta_1^{(0)} = \dfrac{\phi''(S^*)}{2} = \phi''(S^*) - \dfrac{\phi''(S^*)}{2}$.

Ce qui montre que (b_n) vérifie l'hypothèse H6).

La proposition 7 permet alors de conclure :

<u>Conclusion</u> :

$L_2^{(1)}(S^*)$ est stable et accélérable par le procédé :

$$(S_n) = (S_n^{(0)}) \xrightarrow{K} (S_n^{(1)}) = \left\{S_n - \frac{\sqrt{|\Delta S_n|}}{\Delta(\sqrt{|\Delta S_n|})}\,\Delta S_n\right\}.$$

Ce procédé a été étudié par KOWALEWSKI dans [8].

En itérant K, on obtient des quantités $(S_n^{(k)})$ définies récursivement par :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{\sqrt{|\Delta S_n^{(k)}|}}{\Delta(\sqrt{|\Delta S_n^{(k)}|})} \Delta S_n^{(k)} \\ \\ S_n^{(0)} = S_n \end{cases}$$

et il s'ensuit alors que pour toute suite $(S_n) \in L_2^{(1)}(S^*)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n^{(k)} - S^*} = 0$$

VI. EXEMPLES NUMERIQUES

Tenant compte des résultats théoriques des paragraphes 2, 3 et 4, nous avons testé l'itération des algorithmes décrits dans ces paragraphes.

Signalons que les tests d'arrêts sont pareils à ceux du procédé δ^2 AITKEN itéré.

a) Cas de la convergence linéaire

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^*.

Nous allons appeler $(S_n^{(k)})$ les suites obtenues après application du procédé standard itérée :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta S_n^{(k)} & \begin{matrix} k \geq 0 \\ n \geq 0 \end{matrix} \\ \\ b_n^{(k)} = \dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ \\ S_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

et $t_n^{(k)}$ les suites obtenues après application itérée de la première colonne du θ_2-Algorithme à la suite (S_n) :

$$\begin{cases} t_n^{(k+1)} = t_{n+1}^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta t_{n+1}^{(k)} & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \\ b_n^{(k)} = \dfrac{\Delta t_{n+1}^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta t_{n+1}^{(k)}}{\Delta t_k^{(k)}}} & \begin{matrix} k \geq 0 \\ n \geq 0 \end{matrix} \\ t_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons appliqué chacune des transformations à des suites (S_n) étudiées au chapitre I.

1 - Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{20}{S_n^2 + 2S_n + 10} \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

On a $S_n \to S^* = 1,\ 3660810782137...$

<u>On obtient</u> :

n	$s_n^{(1)}$	$s_n^{(2)}$	$s_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.136974374147919D+01	.136880969745887D+01	.136880810801186D+01
2	.136900225144127D+01	.136880798891552D+01	.136880810782960D+01
3	.136884558186587D+01	.136880811882054D+01	.136880810782168D+01
4	.136881555963578D+01	.136880810688549D+01	.136880810782139D+01
5	.136880956970233D+01	.136880810790415D+01	<u>.136880810782137</u>D+01
6	.136880839031729D+01	.136880810761417D+01	.136880810782137D+01
7	.136880816460423D+01	.136880810782200D+01	.136880810782137D+01

$s_n^{(4)}$

```
COLONNE 4
 .136880810782138D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
```

n	$t_n^{(1)}$ COLONNE 1	$t_n^{(2)}$ COLONNE 2	$t_n^{(3)}$ COLONNE 3
1	.136973372932040D+01	.136881008374651D+01	.136880810777835D+01
2	.136900348760464D+01	.136880793291119D+01	.136880810781927D+01
3	.136894548822303D+01	.136880812922249D+01	.136880810782130D+01
4	.136881556037202D+01	.136880810649538D+01	.136880810782137D+01
5	.136880956690003D+01	.136880810793705D+01	.136880810782137D+01

$t_n^{(4)}$

```
COLONNE 4
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
 .136880810782137D+01
```

Le calcul de $s_2^{(4)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{13}, S_{14}$ tandis que celui de $t_1^{(4)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{12}, S_{13}$.

2 - Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = e^{-S_n} \\ S_0 = 0.5 \end{cases}$$

On a $S_n \to S^* = 0.56714809974113...$

On obtient après application de chacun des procédés cités précédemment :

n	$s_n^{(1)}$	$s_n^{(2)}$	$s_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.567418270574797D+00	.567142609974113D+00	.567143290416091D+00
2	.567231121204900D+00	.567143376188256D+00	.567143290410418D+00
3	.567171646510029D+00	.567143274409381D+00	.567143290409850D+00
4	.567152391255263D+00	.567143293329990D+00	.567143290409791D+00
5	.567146221269312D+00	.567143289877209D+00	.567143290409765D+00
6	.567144232467936D+00	.567143290506952D+00	.567143290409784D+00
7	.567143593543275D+00	.567143290392060D+00	.567143290409784D+00

n	$t_n^{(1)}$	$t_n^{(2)}$	$t_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.567416544535247D+00	.567143524644967D+00	.567143290318827D+00
2	.567231445651742D+00	.567143245862413D+00	.567143290400362D+00
3	.567171568369347D+00	.567143296344222D+00	.567143290408810D+00
4	.567152401969107D+00	.567143286942741D+00	.567143290409663D+00
5	.567146219320253D+00	.567143290675362D+00	.567143290409773D+00
6	.567144232823557D+00	.567143290361126D+00	.567143290409783D+00
7	.567143593470523D+00	.567143290418036D+00	.567143290409784D+00

$t_n^{(4)}$
COLONNE 4
.567143290409783D+00
.567143290409784D+00
.567143290409784D+00
.567143290409784D+00
.567143290409784D+00
.567143290409784D+00
.567143290409784D+00

Le calcul de $S_6^{(3)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \ldots, S_{14}, S_{15}$

tandis que celui de $t_2^{(4)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \ldots, S_{14}$.

3 - Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{1}{4}(S_n^2 + 2) \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

$$S_n \to S^* = 0.585786437626905\ldots$$

Pour cette suite on a obtenu :

n	$S_n^{(1)}$	$S_n^{(2)}$	$S_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.587500000000000D+00	.585786939125607D+00	.585786437626906D+0
2	.5859660870300752D+00	.585786438151893D+00	.585786437626904D+0
3	.585801979039484D+00	.585786437630096D+00	.585786437626905D+0
4	.585787771262225D+00	.585786437626928D+00	.585786437626905D+0
5	.585786552037498D+00	.585786437626904D+00	.585786437626905D+0
6	.585786447441802D+00	.585786437626905D+00	.585786437626905D+0

n	$t_n^{(1)}$	$t_n^{(2)}$	$t_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.591439688715953D+00	.585785726296740D+00	.585786437628587D+0
2	.585991615364278D+00	.585786430709684D+00	.585786437626911D+0
3	.585802511170104D+00	.585786437473199D+00	.585786437626905D+0
4	.585787764091830D+00	.585786437623169D+00	.585786437626905D+0
5	.585786552356081D+00	.585786437626812D+00	.585786437626905D+0
6	.585786447449780D+00	.585786437626903D+00	.585786437626905D+0

Le calcul de $S_3^{(3)}$ et de $t_3^{(3)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \ldots, S_{12}$.

4 - Soit la suite (S_n) définie par :

$$\begin{cases} S_n = 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ S_0 = 4 \end{cases}$$

$$S_n \to S^* = \pi.$$

On a obtenu :

n	$s_n^{(1)}$ COLONNE 1	$s_n^{(2)}$ COLONNE 2	$s_n^{(3)}$ COLONNE 3	$s_n^{(4)}$ COLONNE 4	$s_n^{(5)}$ COLONNE 5
1	.314529914529915D+01	.314159300511406D+01	.314159257798827D+01	.314159265358628D+01	.314159265358783D+01
2	.314038267875126D+01	.314159205771764D+01	.314159265538340D+01	.314159265359293D+01	.314159265358740D+01
3	.314208241501369D+01	.314159293550566D+01	.314159265343102D+01	.314159265357943D+01	.314159265358979D+01
4	.314136060799680D+01	.314159252697356D+01	.314159265360305D+01	.314159265359120D+01	.314159265358979D+01
5	.314171575727029D+01	.314159271277508D+01	.314159265359273D+01	.314159265358962D+01	.314159265358979D+01
6	.314152157307222D+01	.314159262435856D+01	.314159265358654D+01	.314159265358981D+01	.314159265358979D+01
7	.314163645546559D+01	.314159266882910D+01	.314159265359185D+01	.314159265358979D+01	.314159265358979D+01

n	$t_n^{(1)}$ COLONNE 1	$t_n^{(2)}$ COLONNE 2	$t_n^{(3)}$ COLONNE 3	$t_n^{(4)}$ COLONNE 4	$t_n^{(5)}$ COLONNE 5
1	.314666666666667D+01	.314159962234208D+01	.314159265551997D+01	.314159265358584D+01	.314159265358979D+01
2	.314013605442177D+01	.314159076321730D+01	.314159265287191D+01	.314159265359006D+01	.314159265358978D+01
3	.314215167548501D+01	.314159326589785D+01	.314159265384062D+01	.314159265358976D+01	.314159265358935D+01
4	.314133543224452D+01	.314159242494846D+01	.314159265349798D+01	.314159265358979D+01	.314159265358979D+01
5	.314172660494189D+01	.314159274921672D+01	.314159265362566D+01	.314159265358980D+01	.314159265358979D+01
6	.314151626151626D+01	.314159260976346D+01	.314159265357484D+01	.314159265358979D+01	.314159265358979D+01
7	.314163929112026D+01	.314159267523866D+01	.314159265359641D+01	.314159265358979D+01	.314159265358979D+01

Le calcul de $S_3^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{20}$.

Le calcul de $t_1^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{16}$.

5 - Soit (S_n) la suite définei par :

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

La suite (S_n) est convergente et de limite Log2.

On a obtenu pour cette suite les résultats suivants :

n	$S_n^{(1)}$	$S_n^{(2)}$	$S_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.694174757281554D+00	.693147546447802D+00	.693147176614063D+
2	.692771084337349D+00	.693146971360211D+00	.693147180810453D+
3	.693312906734555D+00	.693147274781962D+00	.693147180534901D+
4	.6930636967505446D+00	.693147137500630D+00	.693147180560353D+
5	.693193524050478D+00	.693147201212251D+00	.693147180561749D+
6	.693119460945354D+00	.693147170075200D+00	.693147180558620D+0
7	.693164720182657D+00	.693147180165997D+00	.693147180560729D+0

$S_n^{(4)}$	$S_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.693147180557821D+00	.693147180560644D+00
.693147180561480D+00	.693147180560799D+00
.693147180560767D+00	.693147180560758D+00
.693147180560615D+00	.693147180559945D+00
.693147180559923D+00	.693147180559945D+00
.693147180559948D+00	.693147180559945D+00
.693147180559945D+00	.693147180559945D+00

n	$t_n^{(1)}$	$t_n^{(2)}$	$t_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.6944444444444444D+00	.693148951554591D+00	.693147161165299D+00
2	.6927083333333333D+00	.693146053212243D+00	.693147180548407D+00
3	.6933333333333333D+00	.693147364710030D+00	.693147180635241D+00
4	.6930555555555556D+00	.693147107557092D+00	.693147180531491D+00
5	.6931972789115050D+00	.693147212597314D+00	.693147180571433D+00
6	.6931175595238090D+00	.693147165209084D+00	.693147180559064D+00
7	.6931657848324510D+00	.693147180352723D+00	.693147180562194D+00

$t_n^{(4)}$	$t_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.693147180559450D+00	.693147180559939D+00
.693147180559978D+00	.693147180559943D+00
.693147180559940D+00	.693147180559945D+00
.693147180559942D+00	.693147180559945D+00
.693147180559947D+00	.693147180559945D+00
.693147180559944D+00	.693147180559945D+00
.693147180559945D+00	.693147180559945D+00

Le calcul de $S_4^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{19}$.

Le calcul de $t_3^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{18}$.

Conclusion : Ces résultats numériques confirment les résultats théoriques d'accélération de la convergence linéaire mis en relief dans les propositions 3 et 5.

b) Cas de la convergence logarithmique

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^*. On notera par $S_n^{(k)}$, $t_n^{(k)}$, $u_n^{(k)}$, $v_n^{(k)}$ les quantités définies récursivement par :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n^{(k)} - \dfrac{S_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta S_n^{(k)} & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ b_n^{(k)} = \dfrac{\Delta S_n^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}^{(k)}}{\Delta S_n^{(k)}}} & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ S_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_n^{(k+1)} = t_{n+1}^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta t_{n+1}^{(k)} & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ b_n^{(k)} = \dfrac{\Delta t_{n+1}^{(k)}}{1 - \dfrac{\Delta t_{n+1}^{(k)}}{\Delta t_n^{(k)}}} & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ t_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_n^{(k+1)} = u_n^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta u_n^{(k)} & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ b_n^{(k)} = \sqrt{|\Delta u_n^{(k)}|} & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ u_n^{(0)} = S_n & n \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_n^{(k)} = v_n^{(k)} - \dfrac{b_n^{(k)}}{\Delta b_n^{(k)}} \Delta v_n^{(k)}, & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ b_n^{(k)} = n\, \Delta v_n^{(k)} & \\ v_n^{(0)} = S_n & \end{cases}$$

Nous avons alors obtenu les résultats numériques suivants :

1 - On considère la suite (S_n) définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{9}{6 - S_n} = \dfrac{9}{3 - (S_n - 3)} \\ S_0 = 2.5. \end{cases}$$

La suite (S_n) est convergente de limite $S^* = 3$.

On a bien $S_{n+1} = \phi(S_n)$ où ϕ est la fonction définie par :

$$x \to \phi(x) = \frac{9}{6 - x} = \frac{9}{3(1 - \frac{x-3}{3})} = \frac{3}{1 - \frac{x-3}{3}}.$$

Il est clair que ϕ est analytique dans un voisinage de S^* pour x assez voisin de S^* ; De plus ϕ vérifie :

- $\phi(3) = 3$.

- $\phi'(3) = \dfrac{9}{(6-3)^2} = 1$ et $\phi''(3) = \dfrac{18}{27} \neq 0$.

Ce qui montre que (S_n) appartient à $L_2^{(1)}(3)$.

Nous avons alors obtenu les résultats suivants :

n	$S_n^{(1)}$	$S_n^{(2)}$	$S_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.2957142857142857D+01	.2998711424058620D+01	.2999982523297410D+01
2	.2965909090909090D+01	.2999029515639600D+01	.2999987762619820D+01
3	.2972222222222220D+01	.2999249591555650D+01	.2999990910801920D+01
4	.2976923076922298D+01	.2999407096392330D+01	.2999993080375390D+01
5	.2980519480519481D+01	.2999522097060960D+01	.2999994615450160D+01
6	.2983333333333336D+01	.2999610292169710D+01	.2999995011936200D+01
7	.2985576923076920D+01	.2999677359516700D+01	.2999997062552740D+01
8	.2987394957983190D+01	.2999727773001670D+01	.2999995092316540D+01
9	.2988888888888890D+01	.2999771352349930D+01	.2999999055510700D+01
10	.2990131578947360D+01	.2999804776146400D+01	.2999997310701210D+01
11	.2991176470588390D+01	.2999831954086970D+01	.2999996482042730D+01
12	.2992063492063010D+01	.2999854293729030D+01	.3000003169807270D+01

n	$t_n^{(1)}$	$t_n^{(2)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2
1	.3000000000000003D+01	.3000000000000002D+01
2	.3000000000000000D+01	.2999999999999999D+01
3	.3000000000000010D+01	.3000000000000099D+01
4	.2999999999999986D+01	.3000000000000003D+01

n	$u_n^{(1)}$	$u_n^{(2)}$	$u_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.3033150115366980D+01	.2968015441990200D+01	.3004451106270660D+01
2	.3025105016067690D+01	.2990968737178010D+01	.3003328727980510D+01
3	.3019672331458310D+01	.2992950433528600D+01	.3002578009157530D+01
4	.3015831239517780D+01	.2994355605591260D+01	.3002052609446780D+01
5	.3013015242955950D+01	.2995377721033750D+01	.3001671304536640D+01
6	.3010889326626150D+01	.2996146366088700D+01	.3001366221469170D+01
7	.3009245013430920D+01	.2996736724729580D+01	.3001107728287680D+01
8	.3007947033327760D+01	.2997204723010120D+01	.3000996721408280D+01
9	.3006900449676497D+01	.2997577819838520D+01	.3000860453468050D+01
10	.3006054496391690D+01	.2997681110097590D+01	.3000750166583370D+01

$u_n^{(4)}$	$u_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.2998289581904150D+01	.3000687133659150D+01
.2998734993639440D+01	.3000500434884410D+01
.2999030282866470D+01	.3000378139054610D+01
.2999235052500760D+01	.3000294242997140D+01
.2999382330092230D+01	.3000234029543800D+01
.2999491498065040D+01	.3000195084972170D+01
.2999574474018250D+01	.3000145916799350D+01
.2999639032844410D+01	.3000157754874240D+01
.2999689828575110D+01	.3000095471522260D+01
.2999731163079650D+01	.3000083813097990D+01

Pour le calcul de $S_9^{(3)}$ on a eu besoin de $S_1, S_2, \dots, S_{17}, S_{18}$.

Le calcul de $t_2^{(1)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \dots, S_5$.

Le calcul de $u_9^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{23}, S_{24}$.

A titre de comparaison ; on a pour la suite (S_n) :

n	S_n
49	.290404040404040D+01
50	.290505050505050D+01

Il est à remarquer que $t_2^{(1)}$ donne la meilleure estimation de S^*.

2 - Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n \cdot \dfrac{1 - S_n}{1 + S_n} \\ S_0 = 0.8 \end{cases}$$

(S_n) est une suite convergente de limite nulle.

On a bien $S_{n+1} = \phi(S_n)$ où ϕ est la fonction définie par :

$$\phi(x) = x \cdot \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Pour x assez voisin de zéro, $\phi(x)$ est analytique dans un voisinage de zéro, de plus ϕ vérifie :

- $\phi(0) = 0$
- $\phi'(0) = 1$
- $\phi''(0) = -4$.

$(S_n) \in L_2^{(1)}(0)$.

On obtient alors

	$s_1^{(1)}$	$s_1^{(2)}$	$s_1^{(3)}$	$s_1^{(4)}$	$s_1^{(5)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3	COLONNE 4	COLONNE 5
	.36318918569064OD-01	.12601727243310 4D-02	.23556017023495 5D-04	-.35491793001279 0D-06	.56521228148801 4D-07

n	$t_n^{(1)}$	$t_n^{(2)}$	$t_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.99303663336360 8D-01	-.65513162842140 5D-02	.17544403149894 6D-03
2	-.40360146093213 3D-02	.50042752056621 8D-04	-.13331701411523 6D-06
3	-.28070571666291 4D-02	.30464363580848 3D-04	-.63846890242164 2D-07
4	-.20754323488232 2D-02	.19980750524501 4D-04	-.32159710131756 7D-07
5	-.16015746255174 8D-02	.13837944277907 9D-04	-.22754248766962 7D-07

n	$t_n^{(4)}$	$t_n^{(5)}$
	COLONNE 4	COLONNE 5
1	.29816222824826 2D-06	-.27451939667527 9D-07
2	-.22717281455625 1D-07	-.54135696780833 1D-07
3	-.30618682657672 5D-07	-.78434460661284 6D-08
4	-.13378123677168 7D-07	-.80848917116085 2D-08
5	-.72989077184688 2D-08	-.82540260986772 2D-08

n	$u_n^{(1)}$	$u_n^{(2)}$	$u_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	-.296296296296295D-01	.269542631666641D-02	-.119649235874590D-03
2	-.317602358010446D-02	.106136408876147D-02	-.304163706617918D-03
3	-.230325916676317D-02	.773758000110068D-03	-.265669308165125D-03
4	-.175299210463252D-02	.590496401922563D-03	-.202615705910909D-03
5	-.138193712529890D-02	.466159831326669D-03	-.159763921562074D-03
6	-.111908144885956D-02	.377752051864739D-03	-.129288206320373D-03
7	-.925680499141076D-03	.312554638391321D-03	-.106825724257418D-03
8	-.779028246478297D-03	.263045980480302D-03	-.897641265974987D-04
9	-.605056835224698D-03	.224536541678916D-03	-.765432064703054D-04
10	-.574652179485297D-03	.193974540016098D-03	-.660471945000150D-04
11	-.501688553712192D-03	.169302206408963D-03	-.575839158810504D-04
12	-.441919912920997D-03	.149089841931895D-03	-.506585557883890D-04

$u_n^{(4)}$	$u_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
-.788961912079579D-03	.352079420003323D-03
.128576603968559D-03	-.468370271446221D-04
.933729656540647D-04	-.336335366811182D-04
.708814456268149D-04	-.253374364876925D-04
.556506006536022D-04	-.196635798428665D-04
.448600121631825D-04	-.157422755647139D-04
.369399481133470D-04	-.129729900288687D-04
.309547455736040D-04	-.107094832229031D-04
.263188866207287D-04	-.919145906152610D-05
.226572713994056D-04	-.712698160996057D-05 *
.197118519148302D-04	-.777560946710134D-05
.173201833048300D-04	-.919389471153856D-05

Le calcul de $S_1^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{16}$.

Le calcul de $t_3^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{18}$.

Le calcul de $u_{10}^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{25}$.

La meilleure estimation de S^* est donnée par $t_3^{(5)}$.

A titre de comparaison on a :

n	S_n
49	.929411090601504D-02
50	.912294078503660D-02

3 - Soit (S_n) la suite définie par :

$$S_n = \frac{1}{n} \qquad n \geq 1.$$

On a montré que (S_n) appartenait à $R^{(2)}(0)$.

Cette suite a aussi la propriété d'appartenir à $L_2^{(1)}(0)$; En effet :

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{S_n}{1+S_n}$$

On a $S_{n+1} = \phi(S_n)$ avec $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$\phi(x) = \frac{x}{x+1}$. Il est classique lorsque x est assez voisin de zéro, $\phi(x)$ est analytique au voisinage de zéro et vérifie de plus :

- $\phi(0) = 0$
- $\phi'(0) = 1$
- $\phi''(0) = -2 \neq 0$

On a obtenu les résultats suivants :

n	$S_n^{(1)}$ COLONNE 1	$S_n^{(2)}$ COLONNE 2	$S_n^{(3)}$ COLONNE 3
1	.100000000000000D+00	.395802957371516D-02	.919331235784493D-04
2	.555555555555555D-01	.210925812796582D-02	.421658730712898D-04
3	.357142857142855D-01	.128007491703775D-02	.221384426808505D-04
4	.250000000000007D-01	.843949288629251D-03	.130080550818913D-04
5	.185185185185191D-01	.589395928500420D-03	.833593133170815D-05
6	.142857142857111D-01	.429525307211532D-03	.569205565785789D-05
7	.113636363636391D-01	.323494796655843D-03	.408335701838105D-05

$S_n^{(4)}$ COLONNE 4	$S_n^{(5)}$ COLONNE 5
.274928837344075D-05	.950400799472225D-06
.145902237731810D-05	.649229400509654D-06
.626541745654488D-06	.616605057359239D-06
.468062698206700D-06	-.729600441837674D-07 *
-.562264287199942D-06	-.319085588247711D-06
.872531417424042D-06	-.542231393115791D-06
-.297840397421793D-05	.675244623384337D-06

n	$t_n^{(1)}$ COLONNE 1
1	.222044604925031D-15
2	-.555111512312580D-15
3	.000000000000000D+00 *

n	$u_n^{(1)}$	$u_n^{(2)}$	$u_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	-.183012701892219D+00	.622644678209970D-01	-.222889995077690D-01
2	-.690355937288491D-01	.249161144324176D-01	-.936523679936373D-02
3	-.363743060919757D-01	.132752094670436D-01	-.502567763766014D-02
4	-.224744871391590D-01	.819781569136874D-02	-.309117051223619D-02
5	-.152679963849934D-01	.554694243731951D-02	-.207650331937405D-02
6	-.110500384556606D-01	.399485260993649D-02	-.148370276135517D-02
7	-.836833868923047D-02	.301042094072788D-02	-.110957598733931D-02
8	-.655744381943951D-02	.234798554889774D-02	-.859336384061601D-03
9	-.527707983925678D-02	.188144480293639D-02	-.664203160664828D-03
10	-.433841431865081D-02	.154075965556763D-02	-.557101498599427D-03
11	-.362977554205163D-02	.128454463695855D-02	-.462073831351207D-03
12	-.308167114363921D-02	.108709175665437D-02	-.389242756710520D-03

$u_n^{(4)}$	$u_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.844282592174334D-02	-.339850818260736D-02
.369277525192408D-02	-.153784305240340D-02
.198925751053623D-02	-.830537529153247D-03
.121465966118342D-02	-.502476541619198D-03
.807174707388141D-03	-.329315489634364D-03
.570139198021261D-03	-.229025074056344D-03
.421668550740490D-03	-.166863500543333D-03
.323239887784875D-03	-.125968955178208D-03
.254981385157255D-03	-.931524701354775D-04
.205890948545138D-03	-.761386198949040D-04
.169500333363030D-03	-.638165046889275D-04
.141837273994913D-03	-.526955646015078D-04 *

n	$v_n^{(1)}$	$v_n^{(2)}$	$v_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	-.500000000000000D+00	.166666666666664D+00	-.416666666666325D-
2	-.166666666666667D+00	.416666666666666D-01	-.833333333336919D-
3	-.833333333333335D-01	.166666666666730D-01	-.277777777800308D-
4	-.500000000000002D-01	.833333333333368D-02	-.119047618968700D-
5	-.333333333333330D-01	.476190476187256D-02	-.595238096420565D-
6	-.238095238095233D-01	.297619047624051D-02	-.330687829007103D-
7	-.178571428571439D-01	.198412698409335D-02	-.198412702643870D-
8	-.138888888888886D-01	.138888888895237D-02	-.126262616189096D-
9	-.111111111111113D-01	.101010100992993D-02	-.841751003633974D-
10	-.909090909090766D-02	.757575757856540D-03	-.582750424076571D-
11	-.757575757575946D-02	.582750582482656D-03	-.416250500828700D-
12	-.641025641025436D-02	.457875457973134D-03	-.305250265486845D-
13	-.549450549450585D-02	.366300366298828D-03	-.228937796626270D-

$v_n^{(4)}$	$v_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.833333333246246D-02	-.138888894512025D-02
.138888889343047D-02	-.198412565542204D-03
.396825386064590D-03	-.496034728595907D-04
.148809543826440D-03	-.165334256046922D-04
.661375170368600D-04	-.661654537980839D-05
.330689231520554D-04	-.300019881185719D-05
.180372007710138D-04	-.151254958106516D-05
.105223831985964D-04	-.798831392048385D-06
.647449090491734D-05	-.472323627795545D-06
.416287200850509D-05	-.266891636309188D-06
.277470694466392D-05	-.186192337980401D-06
.190820454964982D-05	-.106460639698627D-06
.134635950399447D-05	-.513698095739551D-07 *

Le calcul de $S_4^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{19}$.

Le calcul de $t_3^{(1)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_6$.

Le calcul de $u_{12}^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{27}$.

Le calcul de $v_{13}^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{28}$.

La meilleure estimation de la limite S^* est donnée par $t_3^{(1)}$, ce qui a fallu le calcul de $S_2, \ldots, S_6$.

A titre de comparaison ; on a pour la suite (S_n) :

n	S_n
49	.204081632653061D-01
50	.200000000000000D-01

4 - Considérons la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

(S_n) est une convergente de limite $S^* = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934066846559\ldots$

On a vu que (S_n) appartient à $\mathcal{R}_2(\frac{\pi^2}{6})$.

On a obtenu les résultats numériques suivants :

n	$s_n^{(1)}$	$s_n^{(2)}$	$s_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.157388663967611D+01	.164201597112303D+01	.164486008496819D+01
2	.160116598079560D+01	.164323155555256D+01	.164489975849450D+01
3	.161521371312176D+01	.164384063154480D+01	.164491418052957D+01

$s_n^{(4)}$	$s_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.164493229620658D+01	.164493313471269D+01
.164493313550338D+01	.164493313552624D+01
.164493321713539D+01	.164493489238477D+01 *

n	$t_n^{(1)}$	$t_n^{(2)}$	$t_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.163888888888889D+01	.164492258652055D+01	.164493405576917D+01

$t_1^{(4)}$	$t_1^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.164493411508698D+01	.164493406662454D+01 *

n	$v_n^{(3)}$	$v_n^{(4)}$	$v_n^{(5)}$
	COLONNE 3	COLONNE 4	COLONNE 5
1	.170229676419195D+01	.163359795997388D+01	.164691851467755D+01
2	.165645805493682D+01	.164297623900714D+01	.164522281418754D+01
3	.164883145023476D+01	.164436401009046D+01	.164500720691066D+01
4	.164662327186507D+01	.164471768131487D+01	.164495867338805D+01
5	.164578573036022D+01	.164483708124279D+01	.164494395248621D+01
6.	.164541019544603D+01	.164488527566906D+01	.164493869573958D+01
7.	.164522113145089D+01	.164490732631187D+01	.164493606413387D+01
8.	.164511744501777D+01	.164491842512664D+01	.164493593377156D+01
9.	.164505609064439D+01	.164492436593204D+01	.164493387128660D+01

Le calcul de $S_3^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{18}$.

Le calcul de $t_1^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{16}$.

Le calcul de $v_9^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_{24}$.

La meilleure estimation de S^* est donnée par $t_1^{(5)}$.

A titre de comparaison, pour la suite (S_n) on a :

n	S_n
49	.162473273362152D+01
50	.162513273362152D+01

5 - Considérons la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ avec } a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} + \operatorname{Log} \dfrac{k}{k+1} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

(S_n) est une suite convergente de limite $S^* = 0.577215664901533 = C$ où C désigne la constante d'Euler.

On a vu que (S_n) appartenait à $R^{(2)}(C)$.

Pour cette suite, les résultats obtenus sont :

n	$t_n^{(1)}$	$t_n^{(2)}$	$t_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.5776207837862096D+00	.577454939662680D+00	.57721586275028[illegible]
2	.577534691184963D+00	.577258043849568D+00	.5772156721390[illegible]1D+00
3	.5774031440179668D+00	.577220487295121D+00	.57721566394[illegible]+00

$t_n^{(4)}$	$t_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.577215663957116D+00	.577215663952047D+00
.577215663952131D+00	.577215663948060D+00
.577215663953803D+00	.577215664785223D+00 *

n	$v_n^{(1)}$	$v_n^{(2)}$	$v_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.236844060327507D+00	.666344414141754D+00	.553325516837221D+00
2	.473512808206567D+00	.600243091748425D+00	.572459852992160D+00
3	.526641070294014D+00	.586522759047062D+00	.575630144561497D+00
4	.547211515266909D+00	.581892923254964D+00	.576535753134175D+00
5	.557339608601864D+00	.579896457875272D+00	.576875524285599D+00
6	.563075898491269D+00	.578894506394818D+00	.577026615472489D+00
7	.566640507018773D+00	.578336477435310D+00	.577102196575666D+00
8	.569007378324745D+00	.578001061287088D+00	.577143438556187D+00
9	.570659287416754D+00	.577787327905575D+00	.577167503967958D+00
10	.571657950281558D+00	.577644690052875D+00	.577182317161894D+00
11	.572755334675264D+00	.577545858247705D+00	.577191841934025D+00
12	.573444627058218D+00	.577475215891002D+00	.577198192876162D+00

$v_n^{(4)}$	$v_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.581942828710033D+00	.576422941283650D+00
.578006995070359D+00	.577102195116243D+00
.577442257812224D+00	.577187251426786D+00
.577300756129155D+00	.577206182793733D+00
.577253518763724D+00	.577211871988892D+00
.577234604117201D+00	.577213931544473D+00
.577226000606417D+00	.577214810158503D+00
.577221695261941D+00	.577215196627846D+00
.577219377445935D+00	.577215383048312D+00
.577218051988999D+00	.577215554196234D+00
.577217254920292D+00	.577215455353476D+00
.577216761541445D+00	.577215764015521D+00

n	$s_n^{(1)}$	$s_n^{(2)}$	$s_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.621333984994672D+00	.578922296121409D+00	.577258030828611D+00
2	.602705348711690D+00	.578175723547106D+00	.577235745164078D+00
3	.593943246524111D+00	.577814376638739D+00	.577226659305818D+00

$s_n^{(4)}$	$s_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.577216496409828D+00	.577216412369222D+00
.577216269938586D+00	.577215161500899D+00
.577215675957240D+00	.577215697845751D+00 *

Le calcul de $S_3^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{18}$.

Le calcul de $t_3^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{18}$.

Le calcul de $v_{12}^{(5)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{27}$.

La meilleure estimation de S^* a été donnée par $t_3^{(5)}$.

A titre de comparaison ; on a :

n	S_n
49	.587385040218799D+00
50	.587182332901279D+00

CONCLUSION

Ces expériences numériques semblent ainsi confirmer les résultats théoriques obtenus concernant l'accélération de la convergence de suite appartenant à $\mathcal{R}_2(S^*)$ et $\mathcal{L}_2^{(1)}(S^*)$.

Ce que l'on peut remarquer est l'efficacité du θ_2-itéré pour accélérer de telles suites et dans certains cas, exemple 1, exemple 3, il n'est pas utile d'itérer la première colonne du θ-algorithme ; la première colonne en elle-même est suffisante et plus efficace que les autres procédés étudiés dans ce chapitre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BREZINSKI : *"Accélération de la convergence en Analyse numérique".* (Springer-Verlag, 1977).

[2] C. BREZINSKI : *"Algorithmes d'accélération de la convergence en Analyse numérique".* (Technips, 1978).

[3] E. CARTAN : *"Théorie élémentaire des fonctions analytiques".* (Hermann, (Paris, 1960).

[4] F. CORDELLIER : *"Caractérisation des suites que la première étape du θ-algorithme en suites constantes".* C.R.A.S, Paris T284 (1977), pp. 389-392.

[5] J.P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE : *"The set of logarithmically convergent sequences connot be accelerated".* SIAM J. Numer. Anal. 19, 1982, pp. 840-844.

[6] EVGARVOF : *"Analytic Functions".* (W.B. Saunders Company, Phyladelphia, and London, 1966).

[7] B. GERMAIN-BONNE : *"Estimation de la limite de suites et formalisation de procédés d'accélération de la convergence".* (Thèse, Lille 1, 1978).

[8] C. KOWALEWSKI : *"Possibilités d'accélération de la convergence logarithmique".* (Thèse de 3ème cycle, Lille 1, 1981).

[9] D. LEVIN : *"Developpement of non linear transformations for improving sequences".* Interna. J. Comp. Math. V; B3, pp. 371-388.

[10] A. SIDI : *"Convergence of the T-transform of Power series".* (Math. Comp., 1979).

[11] WIDDER : *"Laplace Transform".* (Princeton University, Press, 1981).

[12] J. WIMP : *"Sequence Transformations their applications".* Academic Press 19

CHAPITRE III

UNE ITERATION PARTICULIERE LA PROCEDURE θ

I. INTRODUCTION

Soit (S_n) une suite de nombres réels. La transformation de Shanks consiste en la transformation d'une suite (S_n) en une autre $(e_k(S_n))$ avec :

$$e_k(S_n) = \frac{H_{k+1}(S_n)}{H_k(\Delta^2 S_n)}$$

$$\text{où } H_k(S_n) = \begin{vmatrix} S_n & \cdots\cdots & S_{n+k-1} \\ S_{n+1} & \cdots\cdots & S_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n+k-1} & \cdots\cdots & S_{n+2k-2} \end{vmatrix}$$

et $\Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n$.

On peut éviter le calcul de tels déterminants en utilisant la définition de Wynn :

$$(1) \begin{cases} \varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \qquad \varepsilon_0^{(n)} = S_n \qquad\qquad n = 0, 1, \ldots \\ \\ \varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \dfrac{1}{\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)}} \end{cases}$$

Wynn démontre $\varepsilon_{2k}^{(n)} = e_k(S_n)$.

Dans [1] (Brézinski) ; on montre comment la modification de (1) donne naissance au Θ-Algorithme dont les règles sont :

$$(2) \begin{cases} \Theta_{-1}^{(n)} = 0 \ ; \ \Theta_0^{(n)} = S_n \qquad n = 0, 1, \ldots \\ \\ \Theta_{2k+2}^{(n)} = \Theta_{2k}^{(n+1)} - \dfrac{\Delta\Theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta D_{2k+1}^{(n)}} D_{2k+1}^{(n)} \qquad n, k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

où $D_k^{(n)} = \dfrac{1}{\Theta_k^{(n+1)} - \Theta_k^{(n)}}$,

et où $\Theta_{2k+1}^{(n)} = \Theta_{2k-1}^{(n+1)} + D_{2k}^{(n)}$.

En fait, voir [2] (Brézinski) on montre que (2) est obtenu à partir de la formule

(2') $\varepsilon_{2k+2}^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} + D_{2k+1}^{(n)}$ où les $(\varepsilon_k^{(n)})$ sont obtenus à partir de (1).

Formalisons cette façon de transformer la règle d'un algorithme en une autre.

Soit S un ensemble de suites de nombres réels, et soit S' : $S' \subset S \mid S' = \{(b_n) / \Delta b_n \neq 0.\ \forall_n\}$.

Considérons les applications f, g, h envoyant $S \times S' \to S$ définis par :

$$f : [(a_n), (b_n)] \to f((a_n), (b_n)) = a_n - \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} b_n.$$

$$g : [(a_n), (b_n)] \to g((a_n), (b_n)) = - \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} b_n$$

$$h : [(a_n), (b_n)] \to h((a_n), (b_n)) = - \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} b_{n+1}$$

On a alors $f((a_n), (b_n)) = (a_n) + g((a_n), (b_n)) = a_{n+1} + h((a_n), (b_n))$.

Nous notons $f(a_n, b_n)$ le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite $f((a_n), (b_n))$; et il en est de même pour g et h.

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^* ; et (b_n) une suite de limite nulle, considérons l'algorithme de la forme :

$$c_n = S_n + b_n \tag{3}$$

On dit avoir appliqué la procédure - θ - à cet algorithme si la forme (3) est remplacée par la règle $\theta(c_n) = f(S_n, b_n)$ (3').

L'application de la procédure - θ - peut être considérée comme une extrapolation linéaire en zéro des points (b_n, S_n) et (b_{n+1}, S_{n+1}).

Exemple : Le θ-algorithme (2) est obtenu en appliquant la procédure - θ - à l'ε-Algorithme (1).

On peut écrire (3') : $\theta(c_n) = f(S_n, b_n) = S_n + [f(S_n, b_n) - S_n]$ (4) et on peut alors appliquer la procédure - θ - à (4) pour obtenir :

$$\theta^{(2)}(c_n) = \theta(\theta(c_n)) = f(S_n, f(S_n, b_n) - S_n) = f(S_n, \theta(c_n) - S_n).$$

Remarquant qu'on peut écrire :

$$\theta^2(c_n) = f(S_n), \theta(c_n) - S_n) = S_n + (\theta^2(c_n) - S_n) \qquad (4')$$

On applique alors la procédure - θ - à (4') pour obtenir :

$$\theta^{(3)}(c_n) = f(S_n, \theta^{(2)}(c_n) - S_n).$$

Et on peut alors continuer à itérer l'application de la procédure θ pour obtenir un algorithme dont les règles sont définies par :

$$\begin{cases} \theta^{(0)}(c_n) = c_n = S_n + b_n \\ \theta^{(k)}(c_n) = f(S_n, \theta^{(k-1)}(c_n) - S_n) \end{cases}$$

La $k^{\text{ième}}$ application de la procédure - θ - consiste a remplacer la règle $c_n = a_n + b_n$ par $\theta^{(k)}(c_n) = f^{(k)}(S_n, b_n)$.

Posant $(S_n^{(k)}) = (\theta^{(k)}(c_n)$, on obtient alors des quantités $(S_n^{(k)})$ définies récursivement par :

$$(5) \begin{cases} S_n^{(0)} = S_n + b_n \\ S_n^{(k+1)} = S_n - \dfrac{(S_n^{(k)} - S_n)}{\Delta(S_n^{(k)} - S_n)} \Delta S_n & \begin{matrix} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{matrix} \end{cases}$$

Le but de ce chapitre sera de chercher des conditions sur (S_n) et (b_n) pour que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(k)} - S^*}{S_n - S^*} = 0, \quad k > 0.$

<u>Démonstration</u> :

Nous allons donner une démonstration par une récurrence sur k.

Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0.$

On a : $S_n^{(1)} - S^* = (S_n - S^*) - \dfrac{S_n^{(0)} - S_n}{\Delta(S_n^{(0)} - S_n)} \Delta S_n.$

Comme $S_n^{(0)} = S_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S^*$ on a alors :

$$S_n^{(1)} - S^* = (S_n - S^*) - \frac{[(S_n^{(0)} - S^*) - (S_n - S^*)]}{\Delta(S_n^{(0)} - S^*)-(S_n - S^*))} \Delta S_n.$$

i.e. : $$S_n^{(1)} - S^* = (S_n - S^*) - \frac{\Delta S_n}{\dfrac{(S_{n+1}^{(0)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(0)} - S^*)-(S_n - S^*)} - 1}.$$

d'où :

$$\boxed{\frac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{\dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} - 1}{\dfrac{(S_{n+1}^{(0)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(0)} - S^*) - (S_n - S^*)} - 1}} \qquad (6)$$

Si on montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(S_{n+1}^{(0)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(0)} - S^*) - (S_n - S^*)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \rho \neq 1.$

Comme nous l'avons fait pour des deux chapitres précédents, on distinguera les deux cas de convergence :

1^er^ cas : (S_n) est à convergence linéaire.

2^ème^ cas : (S_n) appartient à des sous-ensemble stricts de LOGSF.

II. RESULTATS DE CONVERGENCE ET DETERMINATION D'UN ENSEMBLE $S_\theta \subset$ LIN (au sens large)

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^*, et soit (b_n) une suite convergente de limite nulle et tel que b_n est construit à partir de $S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+p}$ où p est un entier non nul et fini.

On suppose de plus que $(S_n) \in$ LIN.

Les conditions que l'on doit avoir pour que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)} - S^*}{S_n - S^*} = 0$$

sont alors données par la proposition suivante :

Proposition 1 : Soit (S_n) *une suite convergente de limite* S^**, et soit* (b_n) *une suite convergente de limite nulle telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{S_n - S^*} = a \qquad \text{où a est un réel fini et non nul.}$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)} - S^*}{S_n - S^*} = 0,\ k \geq 1 \text{ pour toute suite } (S_n) \text{ appartenant à LIN.}$$

On aura alors d'après (6) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{\rho-1}{\rho-1} = 0.$$

Calculons $\underline{\lim_{n\to\infty} \frac{(S_{n+1}^{(0)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(0)} - S^*) - (S_n - S^*)}}$

$$\text{On a :} \quad \frac{(S_{n+1}^{(0)} - S^*) - S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(0)} - S^*) - (S_n - S^*)} = \frac{(S_{n+1} - S^*)}{(S_n - S^*)} \cdot \left[\frac{\dfrac{S_{n+1}^{(0)} - S^*}{S_{n+1} - S^*} - 1}{\dfrac{S_n^{(0)} - S^*}{S_n - S^*} - 1}\right]$$

or $S_{n+1}^{(0)} = S_{n+1} + b_{n+1}$ ce qui implique : $S_{n+1}^{(0)} - S^* = (S_{n+1} - S^*) + b_{n+1}$.

i.e. : $$\frac{S_{n+1}^{(0)} - S^*}{S_{n+1} - S^*} = 1 + \frac{b_{n+1}}{S_{n+1} - S^*}$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{S_{n+1}^{(0)} - S^*}{S_{n+1} - S^*} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{S_{n+1} - S^*} = a.$$

et on obtient :

$$(6') \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(S_{n+1}^{(0)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(0)} - S^*) - (S_n - S^*)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(S_{n+1} - S^*)}{(S_n - S^*)} \left[\frac{a}{a}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$$

Par hypothèse $(S_n) \in$ LIN, il existe donc une constante ρ, telle que

$-1 \leq \rho < 1$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \rho.$$

De (6') on tire alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(S_{n+1}^{(0)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(0)} - S^*) - (S_n - S^*)} = \rho.$

Ce qui montre que la propriété est vraie pour k = 1.

On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(k)} - S^*}{S_n - S^*}$, k > 0. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0.$$

On a : $S_n^{(k+1)} - S^* = (S_n - S^*) - \left[\dfrac{\Delta S_n}{\Delta(S_n^{(k)} - S^*)} (S_n^{(k)} - S_n)\right]$

d'où

$$(7) \qquad \boxed{\frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{\dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} - 1}{\dfrac{(S_{n+1}^{(k)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(k)} - S^*) - (S_n - S^*)} - 1}}$$

Calculons $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(S_{n+1}^{(k)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(k)} - S^*) - (S_n - S^*)}}$

On a :

$$\frac{(S_{n+1}^{(k)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(k)} - S^*) - (S_n - S^*)} = \frac{S_{n+1} - S^*}{(S_n - S^*)} \cdot \frac{\dfrac{S_{n+1}^{(k)} - S^*}{S_{n+1} - S^*} - 1}{\dfrac{S_n^{(k)} - S^*}{S_n - S^*} - 1}$$

Or par hypothèse : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1}^{(k)} - S^*}{S_{n+1} - S^*} = 0.$

$$\text{d'où } \lim_{n\to\infty} \frac{(S_{n+1}^{(k)} - S^*) - (S_{n+1} - S^*)}{(S_n^{(k)} - S^*) - (S_n - S^*)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \rho \neq 1$$

de (7) on déduit alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{\rho-1}{\rho-1} = 0.$$

C.Q.F.D.

Donnons un exemple important de suites (b_n) telle que

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{S_n - S^*} = a$, a fini et différent de zéro

<u>$b_n = \varepsilon_2^{(n)} - S_n$</u> :

Soit $(\varepsilon_2^{(n)})$ la suite obtenue après application du procédé δ^2 AITKEN à (S_n).

On rappelle : $(S_n) \xrightarrow{\delta^2} (\varepsilon_2^{(n)}) = (S_n - \frac{(\Delta S_n)}{\Delta^2 S_n})$.

D'après la propriété de régularité du δ^2 AITKEN sur LIN, on a pour toute suite (S_n) convergente de limite S^* et appartenant à LIN^* :

- $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_2^{(n)} = \lim_{n\to\infty} S_n = S^*$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_n - S^*} = 0.$

Il s'ensuit alors que :

- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{S_n - S^*} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\varepsilon_2^{(n)} - S^*) - (S_n - S^*)}{(S_n - S^*)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{S_n - S^*} - 1 = -1.$$

(b_n) vérifie bien les hypothèses de la proposition 1 avec a = -1.

Le procédé-accélérant LIN obtenu est alors :

$$(8)\quad (S_n) \to \left[\begin{aligned} & S_n^{(k+1)} = S_n - \frac{(S_n^{(k)} - S_n)}{\Delta(S_n^{(k)} - S_n)} \Delta S_n \\ & \\ & S_n^{(0)} = \varepsilon_2^{(n)} \end{aligned}\right] \begin{array}{l} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{array}$$

Pour k = 1, le procédé (8) devient :

$$(S_n) \to (S_n^{(k)}) = \left[S_n - \frac{(\varepsilon_2^{(n)} - S_n)}{\Delta(\varepsilon_2^{(n)} - S_n)} \Delta S_n \right].$$

C'est un procédé obtenu comme cas particulier de la procédure standard étudié par B. GERMAIN-BONNE dans [3].

III. RESULTATS DE CONVERGENCE DANS LE CAS DE LA CONVERGENCE LOGARITHMIQUE

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^* et telle que :

$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n$, où (λ_n) est une suite convergente de limite nulle.

Une telle suite (S_n) appartient à LOGSF.

Nous voulons chercher une meilleure approximation de S^* en appliquant à (S_n) le procédé (5) :

$$(S_n) \to \left\{\begin{aligned} & (S_n^{(k+1)}) = (S_n - \frac{(S_n^{(k)} - S_n)}{\Delta(S_n^{(k)} - S_n)} \Delta S_n) \\ & \\ & (S_n^{(k)}) = (S_n + b_n) \end{aligned}\right.$$

D'après les résultats de GERMAIN-BONNE et DELAHAYE [4], cette recherche de la meilleure approximation de S^* nécessite des informations sur la suite (λ_n).

Nous allons donner dans ce chapitre, en plus d'informations sur (b_n), quelques informations sur (λ_n) pour avoir :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)} - S^*}{S_n - S^*} = 0, \qquad k \geq 1.$$

a) Recherche d'informations sur (λ_n) et (b_n)

On suppose (b_n) convergente de limite nulle et vérifiant

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + f_n$ où (f_n) est une suite de limite nulle.

Quelles informations doit-on posséder sur (f_n) et (λ_n) pour que $\frac{S_n^{(1)} - S^*}{S_n - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?

On a par définition : $S_n^{(1)} = S_n - \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n$.

d'où : $\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n - \frac{b_{n+1}}{\Delta b_{n+1}} \Delta S_{n+1} + \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n$.

i.e. : $\Delta S_n^{(1)} = \Delta S_n \left[1 - \frac{b_{n+1}}{\Delta b_{n+1}} \cdot \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} + \frac{b_n}{\Delta b_n}\right]$

Ce qui revient à écrire :

$$\frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = 1 - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} - 1} + \frac{1}{\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1} = \frac{\frac{b_{n+1}}{b_n}}{\frac{b_{n+1}}{b_{n+1}} - 1} - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} - 1}$$

Soit en tenant compte du fait que $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \lambda_n$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + f_n$:

$$\frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = \frac{1 + f_n}{f_n} - \frac{(1 + \lambda_n)}{f_{n+1}} = \frac{(1 + f_n) f_{n+1} - (1 + \lambda_n) f_n}{f_n \, f_{n+1}}$$

Supposons que (f_n) et (λ_n) vérifient les hypothèses suivantes :

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{f_n} = K$ ou K est un réel fini non nul.

- $\frac{\ell im(1+f_n)f_{n+1}-(1+\lambda_n)f_n}{f_n\ f_{n+1}} = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n}{\lambda_n} = 0$

<u>On aura alors</u> :

$$\lim S_n^{(1)} = \lim(S_n - \frac{b_n}{\Delta b_n}\Delta S_n) = \lim S_n - \lim \frac{\Delta S_n}{f_n}$$

on a : $\frac{\Delta S_n}{f_n} = \frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n}{f_n} \to 0.$

d'où $\lim S_n^{(1)} = \lim S_n = S^*$.

Comme $\frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} = \frac{(1+f_n)f_{n+1}-(1+\lambda_n)f_n}{f_n\ f_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et comme (S_n) ; (S_n) est

donc monotone à partir d'un certain rang, on déduit :

$$\frac{\Delta S_n^{(1)}}{\Delta S_n} \to 0 \Longrightarrow \frac{S_n^{(1)}-S^*}{S_n-S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le problème qui se pose maintenant est de trouver des hypothèses supplémentaires sur (λ_n) et (f_n) pour que la suite $(b_n^{(1)}) = (S_n^{(1)} - S_n)$ ait des propriétés équivalentes à celles de (b_n). i.e. :

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}}-1} = K^{(1)}$ où $K^{(1)}$ est un réel fini non nul.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+f_n^{(1)})\ f_{n+1}^{(1)}-(1+\lambda_n)\ f_n^{(1)}}{f_n^{(1)}\ f_{n+1}^{(1)}} = 0$ où $f_n^{(1)} = \frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}}-1.$

La proposition suivante résoud ce problème :

Proposition 2 :

Soit (S_n) *une suite convergente de limite* S^* *et vérifiant l'hypothèse* $H_5)$ *de la proposition 7 (cf. Chapitre II) et* (b_n) *une suite de limite nulle et vérifiant l'hypothèse* $H_6)$ *de cette même proposition.*

Alors pour n assez grand, $(S_n^{(1)})$ *suite définie par (11) est une suite convergente telle que :*

- $(S_n^{(1)})$ *converge plus vite que* (S_n) *vers* S^*
- *La suite* $(b_n^{(1)}) = (S_n^{(1)} - S_n)$ *est une suite de limite nulle vérifiant :*

  $\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = 1 + f_n^{(1)}$ *où* $f_n^{(1)}$ *est une suite de limite nulle vérifiant la propriété* $M((\beta_i^{(1)}), (u_n), m)$ *avec* $\beta_m^{(1)} = \beta_m^{(0)}$.

Démonstration :

Ayant montré dans la démonstration de la proposition 7 (Chapitre II) que $(S_n^{(1)})$ converge plus vite vers S^* que (S_n), on doit montrer que la suite $(b_n^{(1)})$ est une suite de limite nulle vérifiant :

$\frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = 1 + f_n^{(1)}$ où $(f_n^{(1)})$ est une suite de limite nulle vérifiant la propriété

$M((\beta_i^{(1)}), (u_n), m)$ avec $\beta_m^{(1)} = \beta_m^{(0)}$.

Montrons que $\lim b_n^{(1)} = 0$

$$\text{On a : } b_n^{(1)} = S_n^{(1)} - S_n = -\frac{b_n}{\Delta b_n}\Delta S_n = \frac{\Delta S_n}{1 - \frac{b_{n+1}}{b_n}} = -\frac{\Delta S_n}{f_n}$$

$$\text{i.e. : } \quad b_n^{(1)} = -\frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n}{f_n}.$$

(λ_n) véfifie la propriété $M((\alpha_i^{(0)}), (u_n), m)$ ce qui revient à écrire :

$\lambda_n = \alpha_m^{(0)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots + \ldots, i \geq 0, m \geq 1$, avec $\alpha_m^{(0)} \neq 0$ et (u_n) une suite de limite nulle vérifiant $M_\phi^{(m+1)}$.

De même (f_n) vérifie $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m)$ implique :

$f_n = \beta_m^{(0)} u_n^m + \ldots \beta_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots + i \geq 0, m \geq 1.$

On déduit alors :

$$\frac{\lambda_n}{f_n} = \frac{\alpha_m^{(0)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots}{\beta_m^{(0)} u_n^m + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha_m^{(0)}}{\beta_m^{(0)}}.$$

Ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(1)} = -\frac{\alpha_m^{(0)}}{\beta_m^{(0)}} \lim \frac{\Delta S_n}{\lambda_n} \text{ ; on a alors :}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(1)} = 0.$$

<u>Montrons que $(f_n^{(1)})$ vérifie la propriété $M((\beta_i^{(1)}), (u_n), m)$ avec $\beta_m^{(1)} = \beta_m^{(0)}$</u>

<u>Calcul de $f_n^{(1)}$:</u>

On a :

$$S_n^{(1)} = S_n - \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n \Rightarrow S_n^{(1)} - S_n = b_n^{(1)} = -\frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n = \frac{\Delta S_n}{1 - \frac{b_{n+1}}{b_n}}$$

d'où

$$\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{1-\dfrac{b_{n+1}}{b_n}}{1-\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\left[1+\frac{\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}-\dfrac{b_{n+1}}{b_n}}{1-\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}}\right]$$

i.e. : $$\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = (1+\lambda_n)\left[1+\frac{f_n-f_{n+1}}{f_{n+1}}\right]$$

i.e. : $$\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = 1+\left[\lambda_n\left(1+\frac{f_n-f_{n+1}}{f_{n+1}}\right)-\frac{\Delta f_n}{f_{n+1}}\right]$$

d'où $$f_n^{(1)} = \lambda_n - \lambda_n \frac{\Delta f_n}{f_{n+1}} - \frac{\Delta f_n}{f_{n+1}}$$

$f_n^{(1)}$ est une suite de limite nulle, en effet :

(f_n) vérifiant la propriété $M((\beta_i^{(0)}), (u_n), m)$ on a alors :

$$f_n = \beta_m^{(0)} u_n^m + \beta_{m+1}^{(0)} u_n^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots$$

d'où : $$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\beta_m^{(0)} u_{n+i}^{m+1} + \beta_{m+1}^{(0)} u_{n+i}^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} u_{n+i}^{m+1} + \ldots}{\beta_m^{(0)} u_n^{m+1} + \beta_{m+1}^{(0)} u_n^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots} \qquad i \geq 0$$

(u_n) vérifiant la propriété $M_\phi^{(m+1)}$ on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

d'où : $$\frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\beta_m^{(0)}}{\beta_m^{(0)}} = 1.$$

On conclut alors $\dfrac{\Delta f_n}{f_{n+1}} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ce qui donne $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta f_n}{f_{n+1}} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta f_n}{f_{n+1}} = 0.$

On a par hypothèse :

$$f_n = \beta_m^{(0)} u_n^m + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} + \ldots \qquad i \geq 0$$

$$\lambda_n = \alpha_m^{(0)} u_n^m + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} u_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

où (u_n) est une suite de limite nulle vérifiant pour n assez grand :
$u_{n+1} = \phi(u_n)$ où ϕ est analytique dans un voisinage convenable de zéro et vérifiant :

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi'(0) = 1 \\ \phi''(0) = \ldots = \phi^{(m+1)}(0) = \phi^{(m)}(0) = 0 \\ \phi(m+1)_{(0)} \neq 0 \end{cases}$$

m étant un entier ≥ 1.

u_{n+1} s'écrit alors :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} u_n^{m+1} + \ldots + \frac{\phi^{(m+i)}(0)}{(m+i)!} u_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 1.$$

V étant un voisinage convenable de zéro ; posons pour $x \in V$:

$$f(x) = \beta_m^{(0)} x^m + \beta_{m+1}^{(0)} x^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

$$f_+(x) = f(\phi(x)).$$

$$\lambda(x) = \alpha_m^{(0)} x^m + \alpha_{m+1}^{(0)} x^{m+1} + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0.$$

Considérons l'expression :

$$P(x) = \lambda(x) \left[1 + \frac{f(x) - f_+(x)}{f_+(x)} \right] - \frac{f_+(x) - f(x)}{f_+(x)}$$

pour $x \in V$.

Nous allons chercher le développement en série entière convergente de P(x) pour $x \in V$.

1ère étape : Calcul de $f_+(x) - f(x)$

On a : $f_+(x) = f(\phi(x)) = \beta_m^{(0)}(\phi(x))^m + \beta_{m+1}^{(0)}(\phi(x))^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}(\phi(x))^{m+i} + \ldots$ $\quad i \geq 0$

$$f(x) = \beta_m^{(0)} x^m + \beta_{m+1}^{(0)} x^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

d'où :

$$f_+(x) - f(x) = \beta_m^{(0)}[(\phi(x))^m - x^m] + \beta_{m+1}^{(0)}[(\phi(x))^{m+1} - x^{m+1}] + \ldots + \beta_{m+i}^{(0)}[(\phi(x))^{m+i} - x^{m+i}] + \ldots$$

$$i \geq 0$$

$$\text{Comme } \phi(x) = x + \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^{m+1} + \ldots + \frac{\phi^{(m+i)}(0)}{(m+i)!} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

on déduit alors que $(\phi(x))^\tau - x^\tau = \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \tau x^{m+\tau} + 0(x^{m'_i})$ où $m'_i \geq m + \tau + 1$

d'où

$$f_+(x) - f(x) = m\, \beta_m^{(0)} \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^{2m} + 0(x^{m'}) \quad \text{où} \quad m' \geq 2m+1.$$

f_+ et f étant analytiques au voisinage V de zéro pour $x \in V$, on tire alors qu'il existe $H(x)$ une fonction analytique au voisinage V de zéro pour $x \in V$ telle que :

$$(\square_1) \begin{cases} f_+(x) - f(x) = m\, \beta_m^{(0)} \dfrac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} x^{2m} H(x) \\ H(0) = 1 \end{cases}$$

2ème étape : Calcul de $\dfrac{f_+(x) - f(x)}{f_+(x)}$

On sait que $f_+(x) = \beta_m^{(0)}(\phi(x))^m + \ldots + \beta_m^{(0)}(\phi(x))^{m+i} + \ldots$ $i \geq 0$

i.e. : $\quad f_+(x) = \beta_m^{(0)} x^m + 0(x^{m+1}).$

Il existe alors une fonction $H_1(x)$ analytique au voisinage V de zéro pour $x \in V$ telle que :

$$(\square_2) \begin{cases} f_+(x) = \beta_m^{(0)}\ x^m\ H_1(x) \\ \\ H_1(0) = 1 \end{cases}$$

d'où $$\frac{f_+(x) - f(x)}{f_+(x)} = \frac{m\ \beta_m^{(0)}\ \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\ x^{2m}\ H(x)}{\beta_m^{(0)}\ x^m\ H_1(x)} = m\ \frac{\phi(m+1)(0)}{(m+1)!}\ \frac{H(x)}{H_1(x)}\ x^m$$

Posant $G(x) = \frac{H(x)}{H_1(x)}$; $G(x)$ est analytique au voisinage V de zéro pour $x \in V$ vérifiant $G(0) = 1$; de plus

$$\frac{f_+(x) - f(x)}{f_+(x)} = m\ \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\ G(x)\ x^m.$$

On déduit alors que :

$$P(x) = \lambda(x) - \lambda(x)\ m\ \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\ G(x)\ x^m - m\ \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\ G(x)\ x^m.$$

$G(x)$ étant analytique au voisinage V de zéro, il existe alors $\delta_1, \ldots, \delta_i, \ldots$ $(i \geq 1)$ tels que : $G(x) = 1 + \delta_1 x + \ldots + \delta_i\ x^i + \ldots \qquad i \geq 0$

Or par hypothèse $\lambda(x) = \alpha_m^{(0)}\ x^m + \alpha_{m+1}^{(0)}\ x^{m+1} + \ldots + \alpha_{m+i}^{(0)}\ x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0.$

D'où

$$-\ \lambda(x)\ x^m\ G(x) = \alpha_m^{(0)}\ x^{2m} + w_{m+1}^{(0)}\ x^{2m+1} + \ldots + w_{m+i}^{(0)}\ x^{2m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

où les $(w_i)_{i \geq m+1}$ se calculent à partir des $(\alpha_i)_{i \geq m}$ et $(\delta_i)_{i \geq 1}$, et :

$$G(x)\ x^m = x^m + \delta_1\ 2^{m+1} + \ldots + \delta_i\ x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0.$$

On déduit alors que

$$P(x) = \left[\alpha_m^{(0)} - m\ \frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\right]\ x^{\bar{m}} + \beta_{m+1}^{(1)}\ x^{m+1} + \ldots + \beta_{m+i}^{(1)}\ x^{m+i} + \ldots$$

les $(\beta^{(1)}_{m+i})_{i\geq 1}$ se calculant à partir des $(\alpha_i)_{i\geq m}$, $(\delta_i)_{i\geq 1}$ et $(w_i)_{i\geq 1}$.

Soit en posant $\beta^{(1)}_m = \left[\alpha^{(0)}_m - m\,\frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\right]$ on écrit alors :

$$P(x) = \beta^{(1)}_m x^m + \beta^{(1)}_{m+1} x^{m+1} + \ldots + \beta^{(1)}_{m+i} x^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0.$$

Soit N l'entier naturel tel que $u_n \in V$ pour $n > N$.

Faisons $x = u_n$, $n > N$. On a alors :

$$P(u_n) = \beta^{(1)}_m u_n^m + \beta^{(1)}_{m+1} u_n^{m+1} + \ldots + \beta^{(1)}_{m+i} u_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

or

$$P(u_n) = \lambda(u_n)\left[1 - \frac{f(u_n) - f_+(u_n)}{f_+(u_n)}\right] - \frac{f(u_n) - f_+(u_n)}{f_+(u_n)}$$

c'est-à-dire $P(u_n) = f^{(1)}_n$ et donc :

$$f^{(1)}_n = \beta^{(1)}_m u_n^m + \beta^{(1)}_{m+1} u_n^{m+1} + \ldots + \beta^{(1)}_{m+i} u_n^{m+i} + \ldots \qquad i \geq 0$$

Ce qui montre que $(b^{(1)}_n)$ est une suite de limite nulle vérifiant la propriété $M((\beta^{(1)}_i), (u_n), m)$ avec

$$\beta^{(1)}_m = \alpha^{(0)}_m - m\,\frac{\phi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} = \beta^{(0)}_m .$$

C.Q.F.D.

L'application du procédé (5) à toute suite (S_n) vérifiant les hypothèses de la proposition 2 donne alors des quantités (S^k_n) définies par :

$$\begin{cases} S^{(k+1)}_n = S_n - \dfrac{S^{(k)}_n - S_n}{\Delta(S^{(k)}_n - S_n)}\,\Delta S_n & \begin{matrix} k \geq 0 \\ n \geq 0 \end{matrix} \\[2ex] S^{(0)}_n = S_n + b_n & n \geq 0 \end{cases}$$

où (b_n) est une suite vérifiant les hypothèses de la proposition 2.

Il découle alors de la proposition 2 le corollaire suivant :

Corollaire :

Pour toute suite (S_n) *vérifiant les hypothèse de la proposition 2 ; si* (b_n) *vérifie les hypothèses de la proposition 2 alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0, \qquad k \geq 0.$$

Démonstration :

En effet, de la proposition 2 on déduit que $(b_n^{(k)}) = (S_n^{(k)} - S_n)$ est une suite de limite nulle vérifiant la propriété $\mathcal{M}^{(m)}(\beta^{(k)}, u_n)$ avec $\beta_m^{(k)} = \beta_m^{(0)} = \alpha_m^{(0)} - \frac{m}{(m+1)!}\,\phi^{(m+1)}(0) \neq 0$.

Ce qui donne alors :

* $S_n^{(k+1)}$ converge plus vite que (S_n) vers S^*.

IV. APPLICATIONS

D'après le travail du Chapitre II, on a montré que :

- Toute suite $(S_n) \in \mathcal{R}^{(2)}(S^*)$ vérifiait les hypothèses de la proposition 7 (Chapitre II).
- Toute suite $(S_n) \in \mathcal{L}_2^{(1)}(S^*)$ vérifiait les hypothèses de la proposition 7.

On a montré aussi que dans le cas où $(S_n) \in \mathcal{R}^{(2)}(S^*) \cup \mathcal{L}_2^{(1)}(S^*)$ alors :

- $(b_n) = (\varepsilon_2^{(n)} - S_n) = \dfrac{\Delta S_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$ vérifie les hypothèses $H_6)$ de la proposition 7.

• $(b_n) = \left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}\right)$ vérifie les hypothèses H_6) de la proposition 7.

On a vu que dans le cas où $(S_n) \in R^{(2)}(S\ )$ alors :

• $(b_n)_{n\geq 1} = (n\ \Delta S_n)_{n\geq 1}$ vérifiait les hypothèses de la proposition 7

et dans le cas où $(S_n) \in L_2^{(1)}(S^*)$ alors :

• $(b_n) = \sqrt{\Delta S_n}$ vérifiait les hypothèses H_6) de la proposition 7.

Ce qui nous permet de déduire que :

1 Soit

$$(*_1)\ \begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n - \dfrac{S_n^{(k)} - S_n}{\Delta(S_n^{(k)} - S_n)}\,\Delta S_n \\[2ex] S_n^{(0)} = \varepsilon_2^{(n)} = S_n - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} \end{cases}$$

Alors pour toute suite $(S_n) \in R^{(2)}(S^*) \cup L_2^{(1)}(S^*)$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0, \qquad k \geq 0$$

2 Soit :

$$(*_2)\ \begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n - \dfrac{(S_n^{(k)} - S_n)}{\Delta(S_n^{(k)} - S_n)}\,\Delta S_n & n \geq 1 \\ & k \geq 0 \\[2ex] S_n^{(0)} = S_n + n\,\Delta S_n & n \geq 1 \end{cases}$$

Alors pour toute suite $(S_n) \in R^{(2)}(S^*)$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0, \qquad k \geq 0$$

③ Soit :

$$(*_3)\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n - \dfrac{(S_n^{(k)} - S_n)}{\Delta(S_n^{(k)} - S_n)}\,\Delta S_n & n \geq 1 \\ & k \geq 0 \\ S_n^{(0)} = \sqrt{|\Delta S_n|} + S_n \end{cases}$$

Pour toute suite $(S_n) \in L_2^{(1)}(S^*)$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k+1)} - S^*}{S_n - S^*} = 0, \qquad k \geq 0.$$

V. EXEMPLES NUMERIQUES

Tenant compte des déductions ①, ②, et ③ on a testé chacun des procédés sur $L_2^{(1)}(S^*)$ et $R^{(2)}(S^*)$.

Nous précisons que le test d'arrêt est le même que celui du δ^2 AITKEN itéré. On traitera les deux cas de convergence :

- linéaire

- suites de $L_2^{(1)}(S^*)$ et $R^{(2)}(S^*)$.

Soit (S_n) une suite convergente de limite S^*.

Soient $S_n^{(k)}$, $u_n^{(k)}$ et $v_n^{(k)}$ les quantités suivantes :

$$\begin{cases} S_n^{(k+1)} = S_n - \dfrac{(S_n^{(k)} - S_n)}{\Delta(S_n^{(k)} - S_n)}\; S_n & n \geq 0 \\ & k \geq 0 \\ S_n^{(0)} = \varepsilon_2^{(n)} & n \geq 0 \end{cases}$$

où $\varepsilon_2^{(n)} = S_n - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$

$$\begin{cases} u_n^{(k+1)} = S_n - \dfrac{(u_n^{(k)} - s_n)}{\Delta(u_n^{(k)} - s_n)}\,\Delta S_n & \begin{array}{l} k \geq 0 \\ n \geq 0 \end{array} \\ \\ u_n^{(0)} = S_n + \sqrt{|\Delta S_n|} & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n^{(k+1)} = S_n - \dfrac{(v_n^{(k)} - S_n)}{\Delta(v_n^{(k)} - S_n)}\,\Delta S_n & \begin{array}{l} n \geq 0 \\ k \geq 0 \end{array} \\ \\ v_n^{(0)} = S_n + n\,\Delta S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

a) Suites de LIN

On a expérimenté le procédé (5) avec $b_n = \varepsilon_2^{(n)} - S_n$ sur les suites suivantes :

1 Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{1}{4}\,(S_n^2 + 2) \\ \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

On sait (cf. Chapitre I), que (S_n) est une suite convergente de limite S^* où $S^* = 2 - \sqrt{2}$; et appartient à LIN.

On a obtenu les résultats suivants :

n	$S_n^{(2)}$	$S_n^{(3)}$	$S_n^{(4)}$
	COLONNE 2	COLONNE 3	COLONNE 4
1	.585704079361919D+00	.585746938182883D+00	.585806156556649D+00
2	.585740664120771D+00	.585797482525327D+00	.585784002037956D+00
3	.585782054033158D+00	.585787600991700D+00	.585786101662157D+00
4	.585786051183095D+00	.585786549285360D+00	.585786405499741D+00
5	.585786404221125D+00	.585786447372786D+00	.585786434787004D+00
6	.585786434754806D+00	.585786438467156D+00	.585786437381169D+00
7	.585786437380358D+00	.585786437609093D+00	.585786437605771D+00
8	.585786437605751D+00	.585786437633100D+00	.585786437625090D+00
9	.585786437625090D+00	.585786437627436D+00	.585786437626750D+00
10	.585786437626749D+00	.585786437626951D+00	.585786437626890D+00
11	.585786437626892D+00	.585786437626908D+00	.585786437626905D+00
12	.585786437626903D+00	.585786437626906D+00	.585786437626904D+00
13	.585786437626905D+00	.585786437626905D+00	.585786437626905D+00

$S_{11}^{(4)}$ est la meilleure estimation de S^*, et pour son calcul, on a eu besoin de $S_1, \ldots, S_16$. Or pour la suite (S_n) on a :

n	S_n
18	.585786437460170D+00
19	.585786437575049D+00
20	.585786437607454D+00
21	.585786437621206D+00
22	.585786437625230D+00
23	.585786437626410D+00
24	.5857864[illegible]762D+00
25	.585786437626863D+00
26	.585786437626693D+00

Ce qui montre l'áccélération de la convergence de la suite (S_n) par le procédé (5) avec $b_n = \varepsilon_2^{(n)} - S_n$.

② Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = e^{-S_n} \\ S_0 = 0.5. \end{cases}$$

On a vu que (S_n) était convergente de limite $S^* = 0{,}5671482904784\ldots$ et appartenait à LIN.

On a les résultats suivants :

n	$S_n^{(1)}$	$S_n^{(2)}$	$S_n^{(3)}$
18	.567143290410939D+00	.567143290410439D+00	.567143290410156D+00
19	.567143290410156D+00	.567143290409995D+00	.567143290409903D+00
20	.567143290409903D+00	.567143290409852D+00	.567143290409822D+00
21	.567143290409822D+00	.567143290409806D+00	.567143290409796D+00
22	.567143290409796D+00	.567143290409791D+00	.567143290409788D+00
23	.567143290409788D+00	.567143290409786D+00	.567143290409785D+00
24	.567143290409785D+00	.567143290409785D+00	.567143290409784D+00
25	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00
26	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00
27	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00

Une meilleure estimation de S est donnée par $S_{24}^{(3)}$; ce qui a nécessité la connaissance de $S_1, S_2, \ldots, S_{28}$.

Pour la suite (S_n) on a :

30	.567143295344367D+00
31	.567143287611168D+00
~~32~~	~~.567143291097000D+00~~
~~33~~	~~.567143289509005D+00~~
34	.567143290920314D+00
35	.567143290610240D+00
~~36~~	~~.567143290573907D+00~~
~~37~~	~~.567143290716052D+00~~
38	.567143290402005D+00
39	.567143290370020D+00
40	.567143290426773D+00

Ceci montre qu'il y a accélération de cette suite par le procédé (5) avec $b_n = \varepsilon_2^{(n)} - S_n$.

b) Suites de $L_2^{(1)}(S^*)$ et $R^{(2)}(S^*)$

A partir des conclusions faites dans le paragraphe 4 ; on a testé les procédés étudiés dans ce chapitre sur des suites de $L_2^{(1)}(S^*)$ et $R^{(2)}(S^*)$. On a obtenu :

1 Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{9}{6 - S_n} \\ S_0 = 2.5. \end{cases}$$

On a vu que (S_n) appartenait à $L_2^{(1)}(3)$.

Les résultats numériques obtenus sont :

n	$S_n^{(1)}$ COLONNE 1	$S_n^{(2)}$ COLONNE 2
1	.295714285714267D+01	.302109548482593D+01
2	.296590909090909D+01	.301860687022965D+01
3	.297222222222222D+01	.301637764932397D+01
4	.297692307692298D+01	.301444568869080D+01
5	.298051948051948D+01	.301279163314603D+01
6	.298333333333336D+01	.301137980085309D+01
7	.298557692307692D+01	.301017512154203D+01
8	.298734495796319D+01	.300913620247797D+01
9	.298686868686869D+01	.300824659727773D+01
10	.299013157894736D+01	.300747466216503D+01
11	.299117647058839D+01	.300680295131806D+01
12	.299206349206301D+01	.300621552648685D+01
13	.299282296650768D+01	.300569931877302D+01
14	.299347826086973D+01	.300524356495610D+01
15	.299404761904689D+01	.300483940023185D+01
16	.299454545454552D+01	.300447959729387D+01
17	.299498327759209D+01	.300415787791340D+01

$S_n^{(3)}$ COLONNE 3	$S_n^{(4)}$ COLONNE 4
.300355144805536D+01	.298449657350902D+01
.300074221772842D+01	.298748154326158D+01
.299903475900777D+01	.299000663236178D+01
.299800416966985D+01	.299206975677032D+01
.299739626590577D+01	.299373111977329D+01
.299705595967277D+01	.299506182615051D+01
.299688671747208D+01	.299612678303785D+01
.299682734106633D+01	.299698025933522D+01
.299683840862483D+01	.299765946699936D+01
.299689418536392D+01	.299821846313648D+01
.299697769661658D+01	.299866494442665D+01
.299707765824417D+01	.299902682016689D+01
.299718654549663D+01	.299932081612743D+01
.299729933515935D+01	.299956010272410D+01
.299741268934417D+01	.299975526485286D+01
.299752442285966D+01	.299991440693062D+01
.299763312362748D+01	.300004457642886D+01

n	$u_n^{(1)}$	$u_n^{(2)}$	$u_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	.303315011536697D+01	.297917940596486D+01	.300876890707665D+0
2	.302510501606709D+01	.29833367326527D+01	.300799538999911D+0
3	.301967233145831D+01	.298635993027853D+01	.300719803063907D+0
4	.301583123951778D+01	.298863160930407D+01	.300645390762916D+0
5	.301301524295595D+01	.299038004163599D+01	.300578663630231D+0
6	.301088932062615D+01	.299175415347061D+01	.300519923567961D+0
7	.300924501343092D+01	.299285361696532D+01	.300468533054219D+0
8	.300794703332777D+01	.299374700592864D+01	.300423676971551D+0
9	.300690449676496D+01	.299448276669190D+01	.300384490692840D+0
10	.300605442639169D+01	.299509590784456D+01	.300350178316368D+0
11	.300535236809822D+01	.299561223472926D+01	.300320039468334D+0
12	.300476568997849D+01	.299605110608455D+01	.300293472770228D+0
13	.300427046474125D+01	.299642727379227D+01	.300269967890586D+0
14	.300384862245568D+01	.299675213819967D+01	.300249094087380D+0
15	.300346634629789D+01	.299703462188242D+01	.300230488385405D+0
16	.300317292524620D+01	.299728170879799D+01	.300213844736053D+0
17	.300289995233047D+01	.299749929019831D+01	.300198904639022D+0
18	.300266075439262D+01	.299769169057196D+01	.300185449125415D+0
19	.300244997998403D+01	.299786270909894D+01	.300173292203972D+0

$u_n^{(4)}$	$u_n^{(5)}$
COLONNE 4	COLONNE 5
.300331835230226D+01	.299144618007619D+01
.300159280770299D+01	.299293262793212D+01
.300049213454255D+01	.299424725389072D+01
.299978744856926D+01	.299535074623310D+01
.299933750259662D+01	.299625615559320D+01
.299905384018194D+01	.299699183806578D+01
.299888009022286D+01	.299758762194647D+01
.299877970087803D+01	.299807010997681D+01
.299872858836705D+01	.299846151446109D+01
.299871065468332D+01	.299877987951924D+01
.299871500779215D+01	.299903955273859D+01
.299873419696570D+01	.299925206691756D+01
.299876308997546D+01	.299942647095380D+01
.299879812532654D+01	.299956992791213D+01
.299883682085431D+01	.299968632899280D+01
.299887745328725D+01	.299978606367043D+01
.299891881570167D+01	.299986723581604D+01
.299896009154514D+01	.299993406341601D+01
.299900069423165D+01	.299999001540822D+01

On a une bonne estimation de la limite de la suite (S_n dans :

- $S_{17}^{(4)}$ et $u_{19}^{(5)}$. Cela nous a valu la connaissance de $S_1, \ldots, S_{25}$.

Or on a vu que pour cette suite on avait :

S_{50} = 2.945454545454545...

Ce qui montre qu'il y a accélération de la convergence de (S_n).

2 Soit (S_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n \cdot \dfrac{1-S_n}{1+S_n} \\ \\ S_0 = 0.8 \end{cases}$$

On a vu que $(S_n) \in L_2^{(1)}(0)$.

Les résultats numériques obtenus sont :

n	$u_n^{(1)}$ COLONNE 1	$u_n^{(2)}$ COLONNE 2	$u_n^{(3)}$ COLONNE 3
~~1~~	~~-.296296296296297D-01~~	.125990288951550D-03	.228049378599374D-02
~~2~~	~~-.317602358016446D-02~~	~~.204657937288379D-02~~	~~-.797857015883280D-03~~
~~3~~	~~-.230325916676317D-02~~	.158631289704132D-02	-.743490362726390D-03
4	-.175299210463252D-02	.120693251153445D-02	-.609685745423754D-03

$u_n^{(4)}$

COLONNE 4
-.118779273870648D-02
~~-.463126300534120D-03~~
-.208934572684602D-03
-.627454932838473D-04

Le calcul de $u_4^{(4)}$ a nécessité la connaissance de $S_1, \ldots, S_9$.

Or on a vu que S_{50} = 0.091229407850366...

Ce qui montre qu'il y a accélération de la convergence par le procédé (5) avec $b_n = \sqrt{|\Delta S_n|}$ pour cette suite S_n).

3 Soit (S_n) la suite définie par :

$$S_n = \frac{1}{n}.$$

On a vu que (S_n) appartient à $L_1^{(1)}(0)$ et $R^{(2)}(0)$.

On a obtenu les résultats numériques suivants :

n	$s_n^{(1)}$	$s_n^{(2)}$	$s_n^{(3)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
1	-.183012701892219D+00	.365986889714485D-01	.121113043080063D-0
2	-.690355937238491D-01	.242048916177006D-01	.106990679498935D-0
3	-.363743060919757D-01	.164706931059287D-01	-.214931003433916D-0
4	-.224744871391590D-01	.118500247549983D-01	-.301722196097028D-0
5	-.152679963649934D-01	.891203369526142D-02	-.310263910240843D-0
6	-.110500384550606D-01	.694017801172336D-02	-.292296902572700D-0
7	-.836833868923047D-02	.555544224490467D-02	-.266512999936194D-0
8	-.655744381943851D-02	.454608990718919D-02	-.239934354698509D-0
9	-.527707983925678D-02	.378944356527258D-02	-.215130254287720D-0

$s_n^{(4)}$
COLONNE 4
-.101966615665754D-01
-.875688557345959D-02
-.568011584874993D-02
-.345020177120062D-02
-.201376424701941D-02
-.110611743116956D-02
-.530935908203634D-03
-.164044841023780D-03
.708504814379701D-04

On a obtenu la meilleure estimation de la limite dans $s_n^{(2)}$; ce qui a nécessité la connaissance de $S_1, \dots, S_{14}$.

Or a titre de comparaison, on fait remarquer que :

$$S_{50} = \frac{1}{50} = 0.02.$$

Ce qui montre qu'on a accélération de la convergence de cette suite par la propriété (5) avec $b_n = \varepsilon_2^{(m)} - S_n$.

CONCLUSION

Les résultats numériques montrent ; que pour certains cas de suites (b_n) on a accélération de la convergence de la suite (S_n) par le procédé (5).

Cependant, on a remarqué l'instabilité du procédé (5) avec $b_n = n\,\Delta S_n$. sur les suites de $\mathcal{R}^{(2)}(S^*)$; Je suggèrerais l'utilisation du procédé (5) avec $b_n = \sqrt{|\Delta S_n|}$; cependant une question se pose alors :

- Y-a-t-il une relation d'inclusion ou même d'égalité entre $\mathcal{R}^{(2)}(S^*)$ et $\mathcal{L}_2^{(1)}(S^*)$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BREZINSKI, *"Accélération de la convergence en Analyse Numérique"*. (Springer-Verlag, 1977).

[2] C. BREZINSKI, *"Some new Convergence acceleration methods"*. (Mathematics of Computation, Vol. 29, n° 159, pp. 133-146, 1982.

[3] B. GERMAIN-BONNE, *"Estimation de la limite de suites et formalisation des procédés d'accélération de la convergence"*. (Thèse, Lille 1, 1978).

[4] B. GERMAIN-BONNE et DELAHAYE, *"The set of logarithmically sequences cannot be a accelerated"*. SIAM, Journal Numer. Anal.

CHAPITRE IV

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE PAR LE PROCEDE δ^2 AITKEN ITEREE DANS UN HILBERT REEL

INTRODUCTION

Dans le chapitre I, nous avons étudié le procédé δ^2 AITKEN itéré appliqué à une suite de nombres réels. Dans ce chapitre IV, nous nous plaçons dans le cadre plus général de suites d'éléments d'un espace H de Hilbert pour étudier l'itération d'un procédé T appliqué à une suite d'éléments de H.

$$
(1)\quad \begin{cases} \text{On définit T par une application } H \to H \;/\; (S_n) \to (T(S_n)) = (\varepsilon_2^{(n)}) \\ \text{où } \varepsilon_2^{(n)} = \begin{cases} S_n - \dfrac{\langle \Delta S_n, \phi \rangle_H}{\langle \Delta^2 S_n, \phi \rangle_H} \Delta S_n \text{ si } \dfrac{\langle \Delta S_{n+1}, \phi \rangle_H}{\langle \Delta S_n, \phi \rangle_H} \neq 1 \\ \\ S_n \text{ si } \dfrac{\langle \Delta S_{n+1}, \phi \rangle}{\langle \Delta S_n, \phi \rangle} = 1 \end{cases} \end{cases}
$$

ϕ étant un élément de H tel que $\langle \Delta^2 S_n, \phi \rangle \neq 0 \; \forall n$ et $\langle , \rangle_H$ désignant le produit scalaire dont est muni H.

Dans certains ouvrages [1], [4], T est obtenu comme cas particulier de la généralisation de la transformation de Shanks dans un espace topologique.

Nous étudierons l'accélération de la convergence de suites (S_n) telles que :

$$S_{n+1} = A\, S_n + b$$

$$S_0 \text{ donné}$$

où A est opérateur compact, auto-adjoint envoyant H dans H, telle que $(I - A)$ soit inversible et b un élément de H.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, un rappel de définitions est nécessaire.

DEFINITIONS - NOTATIONS

Soit H un espace de Hilbert réel, muni d'un produit scalaire noté par $<,>_H$ et d'une norme notée par $\| \ \|_H$.

Définition 1 :

On appelle opérateur linéaire $A : H \to H$ *une application qui vérifie* $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$, $\forall x_1, x_2 \in H$, α *et* β *étant réels.*

Définition 2 :

Un opérateur $A : H \to H$ *est dit compact si pour tout ensemble* M *borné dans* H *on a* $\overline{A(M)}$ *est compact.*

On appelle opérateur adjoint de A *l'opérateur* A^* *défini par :*

$$<y, Ax>_H = <A^* y, X>_H, \qquad \begin{array}{l} y \in H \\ x \in H \end{array}$$

Quand $A^* = A$, A *est dit opérateur auto-adjoint.*

On notera : $\text{Ker } A = \{x \in H / Ax\} = 0$.

Définition 3 :

Soient (S_n) *et* (T_n) *deux suites d'éléments de* H *convergentes ayant respectivement pour limite* S^* *et* T^*.

On dira que $[S_n - S^*] \sim [T_n - T^*]$ si :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|S_n - S^*\|}{\|T_n - T^*\|} = 1$$

On remarque que la relation $\sim$ *est transitive.*

Pour finir, nous énonçons un théorème (Théorème de Hilbert-Schmidt) qui nous servira par la suite :

Théorème 1 :

Pour tout opérateur linéaire compact auto-adjoint A *dans un espace de Hilbert* H *il existe un système orthonormé* $\{\phi_n\}$ *de vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles* $\{\lambda_n\}$*, tel que tout élément* $\xi \in H$ *peut s'écrire d'une manière unique sous la forme :*

$$\xi = \sum_K C_k \phi_k + \xi'$$

où $\xi' \in \text{Ker } A$.

De plus si le système $\{\phi_n\}$ *est infini on a :* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

I. RAPPELS DE PROPRIETES ET POSITION DU PROBLEME

a) Rappels de propriétés

Nous allons donner les propriétés d'exactitude et d'accélération de la convergence du procédé T défini en (1).

Soit H un espace de Hilbert et (S_n) une suite d'éléments de H convergente et de limite S^*. Nous utiliserons les notations :

- $e_n = S_n - S^*$
- $\varepsilon_n = \varepsilon_2^{(n)} - S^*$, $\varepsilon_2^{(n)}$ étant la quantité définie par (1)
- $K = \{f \in H / \langle\phi, f\rangle_H = 0\}$ où ϕ est un élément de H tel que $\{\Delta^2 S_n, \phi\} \neq 0, \ \forall n$.

On a alors :

Propriété 1 :

Si (S_n) *est telle que :* $S_0 - S^* = e_0 \in K$ *et si* $S_n = S^* + \lambda^n e_0$ *où* λ *est un réel non nul différent de 1, alors :*

$$\varepsilon_2^{(n)} = S^*.$$

Démonstration :

Si $S_n = S^* + \lambda^n e_0$ on a alors :

$$\Delta^2 S_n = (\lambda^{n+2} - 2\lambda^{n+1} + \lambda^n)\, e_0 = \lambda^n e_0(\lambda - 1)^2$$

$$\Delta S_n = \lambda^{n+1} e_0 - \lambda^n e_0 = \lambda^n e_0(\lambda - 1)$$

d'où $\varepsilon_2^{(n)} - S^* = (S_n - S^*) - \dfrac{(\Delta S_n, \varepsilon)_H}{(\Delta^2 S_n, \phi)_N} \Delta S_n$ implique :

$$\varepsilon_n = e_n - \frac{\lambda^n(\lambda-1)(e_0, \phi)_H}{\lambda^n(\lambda-1)^2\ (e_0 - \phi)_H} \lambda^n (\lambda - 1)\, e_0.$$

i.e. : $\varepsilon_n = e_n - \dfrac{\lambda^{2n}}{\lambda^n} \dfrac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2} \dfrac{<e_0, \phi>_H}{<e_0, \phi>_H} e_0.$

Comme $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ et $<e_0, \phi>_H \neq 0$ on a alors :

$$\varepsilon_n = e_n - \lambda^n e_0 = 0.$$

Concernant l'accélération de la convergence, nous avons la propriété suivante :

Propriété 2 :

Si la suite (S_n) *est telle que* :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{<\phi, e_{n+1}>_H}{<\phi, e_n>_H} = \rho \text{ où } \rho \text{ est une constante} / 0 < |\rho| < 1$$

alors : $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{<\varepsilon_n, \phi>_H}{<e_n, \phi>_H} = 0.$

Si de plus $\dfrac{||e_{n+1} - \rho e_n||_H}{||e_n||} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *alors* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{||\varepsilon_n||_H}{||e_n||_H} = 0.$

Démonstration :

L'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{<\phi, e_{n+1}>_H}{<\phi, e_n>_H} = \rho$ implique :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{<\Delta S_{n+1}, \phi>_H}{<\Delta S_n, \phi>_H} = \lim_{n\to\infty} \frac{<e_{n+2}, \phi>_H - <e_{n+1}, \phi>_H}{<e_{n+1}, \phi>_H - <e_n, \phi>_H} = \lim_{n\to\infty} \frac{<e_{n+1}, \phi>_H}{<e_n, \phi>_H} \frac{\left[\dfrac{<e_{n+2}, \phi>_H}{<e_{n+1}, \phi>_H} - 1\right]}{\left[\dfrac{<e_{n+1}, \phi>H}{<e_n, \phi>_H} - 1\right]}$$

i.e. : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{<\Delta S_{n+1}, \phi>_H}{<\Delta S_n, \phi>_H} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{<e_{n+1}, \phi>}{<e_n, \phi>} = \rho.$

Comme $\varepsilon_n = e_n - \dfrac{<\Delta e_n, \phi>_H}{<\Delta^2 e_n, \phi>_H} \Delta S_n = e_n - \dfrac{\Delta S_n}{\left(\dfrac{<\Delta e_{n+1}, \phi>_H}{<\Delta e_n, \phi>_H} - 1\right)}$

i.e. : $(\varepsilon_n, \phi) = (e_n, \phi) \left[1 - \dfrac{\dfrac{<e_{n+1}, \phi>_H}{<e_n, \phi>_H} - 1}{\dfrac{<e_{n+1}, \phi>_H}{<e_n, \phi>_H} - 1}\right],$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{<\varepsilon_n, \phi>}{<e_n, \phi>} = 1 - \dfrac{\rho-1}{\rho-1} = 0.$

Intéressons-nous à la quantité $\dfrac{||\varepsilon_n||_H}{||e_n||_H}.$

Posons $\rho_n = \dfrac{<\Delta e_{n+1}, \phi>_H}{<\Delta e_n, \phi>_H}.$

On a alors : $\varepsilon_n = e_n - \dfrac{<\Delta S_n}{\rho_n - 1} = \dfrac{e_n \rho_n - e_n - e_{n+1} + e_n}{\rho_n - 1}$

i.e. : $||\varepsilon_n|| = \dfrac{||e_n \rho_n - e_{n+1}||}{||\rho_n - 1||}$

d'où : $\dfrac{||\varepsilon_n||}{||e_n||} = \dfrac{1}{||1 - \rho_n||} \dfrac{||e_{n+1} - \rho_n e_n||}{||e_n||}.$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho$, si on suppose $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{||e_{n+1} - \rho e_n||}{||e_n||} = 0$, on aura alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||\varepsilon_n||}{||e_n||} = 0$$

□

b) Position du problème

Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur linéaire compact envoyant H dans H, et b un élément de H.

Considérons la suite (S_n) d'éléments de H telle que :

$$(2) \quad \begin{cases} S_{n+1} = AS_n + b \\ \\ S_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Si $||A|| < 1$; on sait que $||S_n - S^*||_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; S^* étant l'unique élément de H vérifiant $S^* = AS^* + b$.

L'application itérée du procédé T à une suite (S_n) de la forme (2) donne alors des quantités $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ définies récursivement par :

$$(3) \quad \begin{cases} {}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} = {}_k\varepsilon_2^{(n)} - \dfrac{<\Delta_k \varepsilon_2^{(n)}, \phi>_H}{<\Delta_k \varepsilon_2^{(n)}, \phi>} \Delta_k \varepsilon_2^{(n)} & \begin{matrix} k \geq 0 \\ n \geq 0 \end{matrix} \\ {}_0\varepsilon_2^{(n)} = S_n & n \geq 0 \end{cases}$$

On précisera que $\Delta_k \varepsilon_2^{(n)} = {}_k\varepsilon_2^{(n+1)} - {}_k\varepsilon_2^{(n)}$.

On suppose que s'il existe m / $\dfrac{<\Delta_m \varepsilon_2^{(n+1)}, \phi>}{<\Delta_m \varepsilon_2^{(n)}, \phi>} = 1$, on pose alors :

$${}_k\varepsilon_2^{(n)} = {}_m\varepsilon_2^{(n)} \qquad \forall k \geqslant m+1.$$

Cette définition garantit alors l'existence des quantités $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$.

Nous nous posons la question suivante :

A-t-on $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|{}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*\|}{\|{}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*\|} = 0,\ k > 0$?

Nous essaierons de répondre à la question dans le cas où A est un opérateur linéaire auto-adjoint compact. Nous expliquerons par la suite la raison pour laquelle le cas A non auto-adjoint n'implique pas le même résultat que dans le cas auto-adjoint.

II. ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DANS LE CAS AUTO-ADJOINT

Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint compact envoyant l'espace de Hilbert réel H dans lui-même. On suppose que :

- $\|A\| < 1$

- Les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots$ de A sont différentes de zéro et distinctes deux à deux. On les suppose rangées de la façon suivante : $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_p| > , \ldots$

Soit (S_n) une suite d'éléments de H générée par

$S_{n+1} = AS_n + b$, où b est un élément de H. On sait qu'alors (S_n) est convergente dans le sens : $\|S_n - S^*\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ où S^* est l'unique élément de H vérifiant $S^* = AS^* + b$.

L'application itérée du procédé T défini en (1) avec $\phi = S_1 - S_0 = \Delta S_0$ donne des quantités $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ définies en (3) et dont la caractérisation est donnée par :

Proposition 1 :

On suppose S_0 *donné tel que* $(S_0 - S^*, v_i) = \alpha_i \neq 0\ \forall i$; v_i *étant la valeur propre associée à la valeur propre* λ_i.

Les quantités $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ *vérifient alors :*

$${}_k\varepsilon_2^{(n)} \sim S^* + \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i \lambda_i^n v_i, \qquad k \geq 0$$

Démonstration :

On procède par une récurrence sur k.

$k = 0$:

D'après le théorème 1 ; $\exists \xi \in \mathrm{Ker}\, A$ tel que

$$S_0 - S^* = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i + \xi$$

Comme $S_{n+1} = AS_n + b$ et $S^* = AS^* + b$ on tire alors :

$$S_{n+1} - S^* = A(S_n - S^*) = \ldots = A^{n+1}(S_0 - S^*)$$

d'où $S_{n+1} - S^* = A^{n+1}(\Sigma\alpha_i v_i + \xi) = A^{n+1} \Sigma\alpha_i v_i$

i.e. : $S_{n+1} - S^* = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \lambda_i^{n+1} v_i \qquad n \geq 0.$

Montrons la proposition 1 pour k = 1

Comme ${}_1\varepsilon_2^{(n)} = S_n - \dfrac{(\Delta S_n, \Delta S_0)_H}{(\Delta^2 S_n, \Delta S_0)_H} \Delta S_n$; nous allons en premier lieu calculer l'expression :

$$\frac{(\Delta S_n, \Delta S_0)_H}{(\Delta^2 S_n, \Delta S_0)_H}$$

Pour $n \geq 1$ on a $\Delta S_n = \Sigma\alpha_i \lambda_i^{n+1} v_i - \Sigma\alpha_i \lambda_i^n v_i = \Sigma\alpha_i \lambda_i^n(\lambda_i - 1) v_i$

et $\Delta^2 S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \lambda_i^{n+1}(\lambda_i - 1)v_i - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \lambda_i^n(\lambda_i - 1)v_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \lambda_i^n(\lambda_i - 1)^2 v_i.$

On a : $\Delta S_0 = S_1 - S_0 = S_1 - S^* - S_0 + S^* = A(S_0 - S^*) - (S_0 - S^*) = (A - I)(S_0 - S^*)$

i.e. : $\Delta S_0 = (A - I)\, \Sigma\alpha_i v_i + (A - I)\, \xi = \Sigma\alpha_i(\lambda_i - 1)v_i - \xi.$

On obtient alors :

$$(\Delta S_n, \Delta S_0)_H = (\Delta S_n, \Sigma\alpha_i(\lambda_i - 1)v_i)_H - (\Delta S_n, \xi)_H$$

or $\Delta S_n = A\,\Delta S_{n-1}$ d'où :

$$(\Delta S_n, \xi)_H = (A\,\Delta S_{n-1}, \xi)_H = (\Delta S_{n-1}, A^*\xi)_H = (\Delta S_{n-1}, A\xi)_H = 0.$$

d'où $(\Delta S_n, \Delta S_0)_H = (\Delta S_n, \Sigma\alpha_i(\lambda_i - 1)v_i)_H = (\Sigma\alpha_i\,\lambda_i^n(\lambda_i - 1)v_i, \Sigma\alpha_i(\lambda_i - 1)v_i)$

Comme A est auto-adjoint, on a $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

D'où : $(\Delta S_n, \Delta S_0) = \sum_{i\geq 1} \alpha_i^2\,\lambda_i^n(\lambda_i - 1)^2.$

i.e. :

$$(\Delta S_n, \phi)_H = \lambda_1^n\,\alpha_1^2(\lambda_1 - 1)^2 \left[1 + \sum_{i\geq 2} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n \frac{(\lambda_i - 1)}{(\lambda_1 - 1)^2}\right].$$

Comme on a $1 > |\lambda_1| > \ldots > |\lambda_p| > \ldots$

On obtient alors : $(\Delta S_n, \phi)_H \sim \lambda_1^n\,\alpha_1^2(\lambda_i - 1)^2 \qquad (n \to \infty)$

De même : $(\Delta^2 S_n, \phi) \sim \lambda_1^n\,\alpha_1^2(\lambda_1 - 1)^3 \qquad (n \to \infty)$

et $\Delta S_n \sim \lambda_1^n\,\alpha_1(\lambda_1 - 1)v_1 \qquad (n \to \infty)$

d'où : $${}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^* = (S_n - S^*) - \frac{(\Delta S_n, \phi)_H}{(\Delta^2 S_n, \phi)_H} \sim \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\lambda_i^n\,v_i - \frac{\lambda_1^{2n}\,\alpha_1^3(\lambda_1 - 1)^3}{\lambda_1^n\,\alpha_1^2(\lambda_1 - 1)^3}\,v_1$$

i.e. : $${}_1\varepsilon_2^{(n)} - S^* \sim \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\lambda_i^n\,v_i - \lambda_1^n\,\alpha_1\,v_1 \qquad (n \to \infty)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{{}_1\varepsilon_2^{(n)} \sim S^* + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i\, \lambda_i^n\, v_i \qquad (n \to \infty)}$$

On suppose démontrée la proposition pour ${}_k\varepsilon_2^{(n)}$; et montrons-la pour ${}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)}$.

<u>Hypothèse de récurrence</u> : ${}_k\varepsilon_2^{(n)} \sim S^* + \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i\, \lambda_i^n\, v_i$

Par définition on a ${}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} = {}_k\varepsilon_2^{(n)} - \dfrac{(\Delta_k\, \varepsilon_2^{(n)}, \phi)_H}{(\Delta_k^2\, \varepsilon_2^{(n)}, \phi)_H}\, \Delta_k\, \varepsilon_2^{(n)}$

où $\phi = \Delta S_0$.

<u>Evaluons l'expression $\dfrac{(\Delta_k\, \varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0)_H}{(\Delta_k^2\, \varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0)_H}$ pour n assez grand :</u>

On a : $(\Delta_k\, \varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0)_H \sim \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i\, \lambda_i^n(\lambda_i - 1)v_i,\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\lambda_i - 1)v_i - \xi\right)_H$

i.e. : $(\Delta_k\varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0) \sim \sum_{i\geq k+1} \alpha_i^2\, \lambda_i^n(\lambda_i - 1)^2 - \sum_{i\geq k+1} \alpha_i(\lambda_i - 1)(\lambda_i^n\, v_i, \xi)_H \qquad (n\to 0)$

or $(\lambda_i^n\, v_i, \xi)_H = \lambda_2^{n-1}(\lambda_i\, v_i, \xi)_H = \lambda_2^{n-1}(Av_i, \xi)_H = \lambda_2^{n-1}(v_i, A^*\xi)_H = \lambda_2^{n-1}(v_i, A\xi)_H = 0$

d'où $(\Delta_k\varepsilon_2^{(n)}, \phi)_H \sim \sum_{i\geq k+1} \alpha_i^2\, \lambda_i^n(\lambda_i - 1)^2 \qquad (n \to \infty).$

Tenant compte du fait que :

$$\sum_{i\geq k+1} \alpha_i^2\, \lambda_i^n(\lambda_i - 1)^2 = \alpha_{k+1}^2\, \lambda_{k+1}^n(\lambda_{k+1} - 1)^2 \left[1 + \sum_{i\geq k+2} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{k+1}}\right)^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right)^n \left(\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_{k+1} - 1}\right)^2\right]$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| > \ldots$$

On obtient alors :

$$(\Delta_k\varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0)_H \sim \alpha_{k+1}^2\, \lambda_{k+1}^n(\lambda_{k+1} - 1)^2 \qquad (n \to \infty)$$

De la même façon, on obtient :

$$(\Delta^2\, {}_k\varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0)_H \sim \alpha_{k+1}^2\, \lambda_{k+1}^n (\lambda_{k+1} - 1)^3 \qquad (n \to \infty)$$

$$\Delta\, {}_k\varepsilon_2^{(n)} \sim \alpha_{k+1}\, \lambda_{k+1}^n (\lambda_{k+1} - 1) v_{k+1} \qquad (n \to \infty)$$

d'où :

$${}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} = S^* + ({}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*) - \frac{(\Delta_k\varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0)}{(\Delta_k^2\varepsilon_2^{(n)}, \Delta S_0)}\, \Delta_k\varepsilon_2^{(n)} \sim S^* + \sum_{i \geq k+1} \alpha_i\, \lambda_i^n\, v_i - \frac{\alpha_{k+1}^3\, \lambda_{k+1}^{2n} (\lambda_{k+1} - 1)^3\, v_{k+1}}{\alpha_{k+1}^2\, \lambda_{k+1}^n (\lambda_{k+1} - 1)^3}$$

<u>i.e.</u> : ${}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^* \sim \sum_{i \geq k+1} \alpha_i\, \lambda_i^n\, v_i - \alpha_{k+1}\, \lambda_{k+1}^n\, v_{k+1}$.

D'où :

$${}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} \sim S^* + \sum_{i \geq k+2} \alpha_i\, \lambda_i^n\, v_i \qquad (n \to \infty)$$

□

De la proposition 1 ; on déduit alors le corollaire suivant :

<u>*Corollaire 1*</u> : *Les quantités* $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ *vérifient* :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{({}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*, \Delta S_0)}{({}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*, \Delta S_0)} = 0.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\| {}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^* \|_H}{\| {}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^* \|_H} = 0$$

<u>Démonstration</u> : De la proposition 1 on déduit alors que :

(4) $\quad {}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^* \sim \alpha_{k+1}\, \lambda_{k+1}^n\, v_{k+1} \qquad (n \to \infty) \qquad k \geq 0$

d'où :

$$({}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*,\ \Delta S_0)_H \sim \alpha_{k+1}\, \lambda_{k+1}^n (v_{k+1},\ \Sigma\alpha_i(\lambda_i - 1)v_i - \xi).$$

<u>i.e.</u> : $({}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*,\ \Delta S_0)_H \sim \alpha_{k+1}^2\, \lambda_{k+1}^n(\lambda_{k+1} - 1) \qquad (n \to \infty)$

d'où :

$$\frac{({}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*,\ \Delta S_0)_H}{({}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*,\ \Delta S_0)_H} \sim \left(\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}}\right)^n$$

Comme $\left|\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}}\right| < 1$, on déduit alors que :

$$\frac{({}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*,\ \Delta S_0)_H}{({}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*,\ \Delta S_0)_H} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De (4) on déduit que $||{}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*||_H \sim \alpha_{k+1}\, \lambda_{k+1}^n \qquad (n \to \infty)$

d'où :

$$\frac{||{}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*||_H}{||{}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*||_H} \sim \frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}} \left(\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}}\right)^n.$$

Ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||{}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*||_H}{||{}_k\varepsilon_2^{(n)} - S^*||_H} = 0.$$

□

Dans le cas où A n'est pas auto-adjoint ; le résultat n'est pas toujours valable car il n'existe pas de théorème équivalent au théorème 1 [Hilbert-Schmidt] dans le cas non-auto-adjoint.

APPLICATIONS

Posons $H = \mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme et du produit scalaire usuels.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix}$ alors :

$$- \ ||x||_{\mathbb{R}^p} = ||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}$$

$$- \ (x, y)_{\mathbb{R}^p} = (x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i \, y_i .$$

Soit B une matrice à coefficients réels, symétrique, inversible et telle que $||I - B|| < 1$. On suppose de plus que les valeurs propres $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ de de $(I - B)$ sont distinctes deux à deux et rangées dans l'ordre : $1 > |\lambda_1| > \ldots > |\lambda_p$

Soient $(v_i)_{i\geq 1}$ les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i\geq 1}$.

Posons $A = I - B$ et considérons la suite (S_n) définie par :

$S_{n+1} = AS_n + b$ où b est un vecteur de $\mathbb{R}^p$. On a alors :

$\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n - S^*||$ où S^* est l'unique solution du système :

$$x = Ax + b \qquad \text{i.e. : } Bx = b.$$

Choisissant S_0 tel que $(S_0 - S^*, v_i) = \alpha_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p$: nous appliquons à cette suite (S_n) le procédé T défini en (1) avec $\varepsilon = \Delta S_0 = S_1 - S_0$.

Comme $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie, A est un opérateur linéaire compact de plus comme B est symétrique A l'est aussi et nous sommes en mesure alors d'appliquer la proposition 1 pour obtenir :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||{}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} - S^*||}{||{}_{k}\varepsilon_2^{(n)} - S^*||} = 0 \ ; \qquad k = 0, \ldots, p-1.$$

Exemple 1 : Résolution $\begin{cases} \Delta u = 0 & \Omega \\ u\big|_\Gamma = 0 \end{cases}$

où Ω désigne le rectangle : $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \begin{matrix} 0 \le x \le \alpha \\ 0 \le y \le \beta \end{matrix}\right\}$.

α et β étant des réels donnés, et Γ la frontière de Ω.

On rappelle $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Le problème se ramène à un problème de différences finies.

Prenant les entiers Mx et My choisis de telle manière que

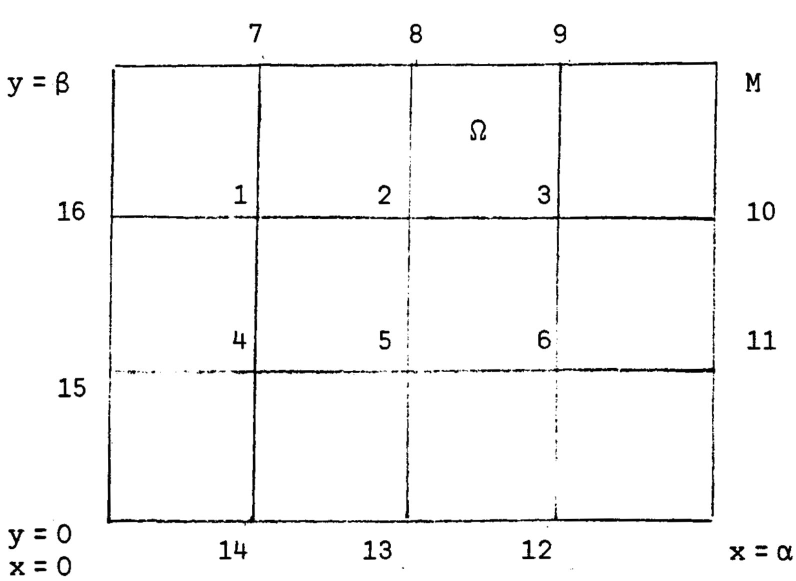
$$\Delta x = \frac{\alpha}{Mx} \text{ et } \Delta y = \frac{\beta}{My}$$

On a à résoudre $\forall i, j \; \frac{1}{4}(v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1}) = 0.$

$$i = 1, 2, \ldots, M_{x-1}, \; j = 1, 2, \ldots, M_{y-1}$$

avec $V_{0,j} = V_{i,0} = V_{Mx,j} = V_{i,My} = 0$ (1)

Quand Mx = 4 et My = 3 on a le cas suivant :



Les points numérotés de 1 à 6 sont des points intérieurs ; les points numérotés de 7 à 16 sont des points de Γ et la valeur de V en chacun de ces points est donnée par 1.

Finalement, le problème se ramène à la résolution du système :

$$A'x = 0 \quad \text{où} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On remarque que A' est une matrice symétrique, inversible.

L'application du δ^2 itéré topologique à la suite (S_n) générée par :

$S_{n+1} = AS_n$ avec $S_o = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ et $A = I - A'$.

Exemple 2 : Estimons la solution S^* du système :

$$A'x = b \text{ où } A' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{47}{30} \end{pmatrix}$$

La solution exacte est $S^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

n	${}_1\varepsilon_2^{(n)}$	${}_2\varepsilon_2^{(n)}$	${}_3\varepsilon_2^{(n)}$	${}_4\varepsilon_2^{(n)}$	${}_5\varepsilon_2^{(n)}$
1	.3000000000000000D+01	.1250000000000000D+00	.2350464091547140D-03	.5923173063916380D-08	-.7391366558741780D-12
1	.2000000000000000D+01	.8333333333333330D-01	.1566976061026340D-03	.3948783773755610D-08	-.5007214982080490D-12
1	.3000000000000000D+01	.1250000000000000D+00	.2350464091547140D-03	.5923173063916380D-08	-.7391366558741780D-12
1	.3000000000000000D+01	.1250000000000000D+00	.2350464091547140D-03	.5923173063916380D-08	-.7391366558741780D-12
1	.2000000000000000D+01	.8333333333333330D-01	.1566976061026340D-03	.3948783773755610D-08	-.5007214982080490D-12
1	.3000000000000000D+01	.1250000000000000D+00	.2350464091547140D-03	.5923173063916380D-08	-.7391366558741780D-12
2	-.5000000000000000D+00	-.5928853754939010D-02	-.3559694455255600D-05	-.1826143449212910D-10	.9044675037728540D-12
2	-.3333333333333330D+00	-.3952569169959870D-02	-.2373129635071950D-05	-.1218228206543860D-10	.6361255337886600D-12
2	-.5000000000000000D+00	-.5928853754939010D-02	-.3559694455255600D-05	-.1826143449212910D-10	.9044675037728540D-12
2	-.5000000000000000D+00	-.5928853754939010D-02	-.3559694455255600D-05	-.1826143449212910D-10	.9044675037728540D-12
2	-.3333333333333330D+00	-.3952569169959870D-02	-.2373129635071950D-05	-.1218228206543860D-10	.6361255337886600D-12
2	-.5000000000000000D+00	-.5928853754939010D-02	-.3559694455255600D-05	-.1826143449212910D-10	.9044675037728540D-12

L'accélération de la convergence par le procédé (1) avec $\phi = \Delta S_0$ est évidente.

Il est à signaler que l'itération : $\begin{cases} S_{n+1} = AS_n \\ S_0 = 1 \end{cases}$ est divergente.

Exemple 1

On applique le δ^2 itéré topolotique (cf. formule (1)) à la suite (S_n) définie par

$$\begin{cases} S_{n+1} = AS_n + b, \quad S_0 = (0, 0, 0)^T \\ \text{où } A = I - A' \end{cases}$$

On remarque que :

(S_n) est une suite divergente. Cependant, l'application de la transformation (1) avec $\phi = \Delta S_0$ donne :

n	${}_{1}\varepsilon_{2}^{(n)}$	${}_{2}\varepsilon_{2}^{(n)}$	${}_{2}\varepsilon_{3}^{(n)}$	${}_{2}\varepsilon_{4}^{(n)}$	${}_{2}\varepsilon_{5}^{(n)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3	COLONNE 4	COLONNE 5
1	-.310758515655268D+01	.678931500609895D+01	.100008424273835D+01	.999997803343873D+00	.999999995347067D+00
	.129482714856362D+00	.384413365809505D+01	.200032464250963D+01	.200000725937171D+01	.200000001538028D+01
	.243427503929960D+01	.407427673241681D+01	.299991152803288D+01	.299996810134520D+01	.299999993242010D+01
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3	COLONNE 4	COLONNE 5
2	.139701304090197D+02	.104140688351958D+01	.999976928508940D+00	.999999996078873D+00	.100000000437228D+01
	-.653934349868173D+01	.201348546831441D+01	.200000685367002D+01	.200000001296185D+01	.199999998554675D+01
	.526419976136620D+01	.300758018199112D+01	.299999691914816D+01	.299999999430470D+01	.300000000635064D+01
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3	COLONNE 4	COLONNE 5
3	.149352415066740D+01	.100045838988429D+01	.999999993853648D+00	.999999999985084D+00	.999999999978161D+00
	.217175465553562D+01	.200015680969863D+01	.200000001957088D+01	.200000000004928D+01	.200000000072110D+01
	.308649413472644D+01	.300008128657092D+01	.299999999133369D+01	.299999999997837D+01	.299999999996835D+01
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3	COLONNE 4	COLONNE 5
4	.105697379854534D+01	.100000468445571D+01	.999999999983906D+00	.999999999965836D+00	.100000000000222D+01
	.201982542827687D+01	.200000169235614D+01	.200000000005303D+01	.200000000011275D+01	.199999999999286D+01
	.300998596423363D+01	.300000085866811D+01	.299999999997670D+01	.299999999995051D+01	.300000000000316D+01
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3	COLONNE 4	COLONNE 5
5	.100693555809018D+01	.100000005189403D+01	.999999999999915D+00	.100000000000004D+01	.100000000000004D+01
	.200241339084255D+01	.200000001803812D+01	.200000000000012D+01	.200000000000004D+01	.200000000000004D+01
	.300121561778094D+01	.300000000910252D+01	.299999999999991D+01	.300000000000001D+01	.300000000000001D+01

On voit que l'application du δ^2 itéré topologique à (S_n) semble marcher, sur les exemples 1 et 2 ; l'instabilité se manifeste au fur et à mesure de l'itération en raison de la divergence de la suite (S_n).

Exemple 3 : Résolvons le système suivant :

$$A'x = b$$

où $A' = \begin{pmatrix} 0,78 & -0,02 & -0,12 & -0,14 \\ -0,02 & 0,86 & -0,04 & +0,06 \\ -0,12 & -0,04 & +0,72 & -0,08 \\ -0,14 & 0,06 & -0,08 & 0,74 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0,76 \\ 0,08 \\ 1,12 \\ 0,68 \end{pmatrix}$

En appliquant pour améliorer la précision de la solution le procédé (1) à la suite (S_n) définie par

$$(1)^* \begin{cases} S_{n+1} = AS_n + b \\ S_0 = b \\ A = I - A' \end{cases}$$

Les valeurs propres de A sont $\begin{cases} \lambda_1 = 0.5 \\ \lambda_2 = 0.26 \\ \lambda_3 = 0.52 \\ \lambda_4 = 0.54 \end{cases}$

Ce qui donne $||A|| = |\lambda_4| < 1$. Le processus itératif (1) est convergent ; l'application du procédé (1) avec $\phi = \Delta S_0$ donne alors :

n	${}_1\varepsilon_2^{(n)}$	${}_2\varepsilon_2^{(n)}$	${}_3\varepsilon_2^{(n)}$
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
11	.153496503258173D+01	.153496503496587D+01	.153496503496524D+01
	.122009585389995D+00	.122009569379274D+00	.122009569378294D+00
	.197515643616991D+01	.197515642252438D+01	.197515642252472D+01
	.141295544719174D+01	.141295546558660D+01	.141295546558695D+01
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
12	.153496503439372D+01	.153496503496514D+01	.153496503496510D+01
	.122009573221555D+00	.122009569378128D+00	.122009569378094D+00
	.197515642579906D+01	.197515642252477D+01	.197515642252480D+01
	.141295546117217D+01	.141295546558701D+01	.141295546558701D+01
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
13	.153496503482800D+01	.153496503496504D+01	.153496503496504D+01
	.122009570300528D+00	.122009569378021D+00	.122009569377987D+00
	.197515642331058D+01	.197515642252485D+01	.197515642252483D+01
	.141295546452747D+01	.141295546558702D+01	.141295546558705D+01
	COLONNE 1	COLONNE 2	COLONNE 3
14	.153496503493216D+01	.153496503496504D+01	.153496503496504D+01
	.122009569599409D+00	.122009569377980D+00	.122009569377983D+00
	.197515642271341D+01	.197515642252483D+01	.197515642252483D+01
	.141295546533275D+01	.141295546558706D+01	.141295546558705D+01

Nous avons obtenu la solution avec une précision de 10^{-16}.

CONCLUSION :

On voit que le δ^2 itéré topologique (cf. Formule (1)) avec $\phi = \Delta S_0$. marche assez bien sur les exemples 1, 2, 3. Nous avons traité le cas particulier où A est une matrice symétrique, inversible, cependant on manque de résultats dans le cas où A n'est pas symétrique. Un prolongement logique à ce travail serait d'appliquer, comme le fait Brezinski dans [1] pour l'ε-Algorithme vectoriel, la proposition 1 au calcul des valeurs propres d'une matrice A symétrique inversible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BREZINSKI, *"Accélération de la convergence en Analyse Numérique"*. Springer-Verlag, 1977).

[2] C. BREZINSKI, *"Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude Numérique"*. (Technips, 1978).

[3] B. GERMAIN-BONNE, *"Estimation de la limite de suites et formalisation de procédés d'accélération de convergence"*. Thèse, Lille 1978).

[4] J. WIMP, *"Sequence transformations and their applications"*. (Acacemic-Press, 1981).

RESUME

Le but de ce travail est d'étudier les possibilités d'accélération de la convergence de certaines suites convergentes, par l'itération de certains procédés d'accélération du type :

(1) $(S_n) \to (S_n^{(1)}) = (S_n - \frac{b_n}{\Delta b_n} \Delta S_n)$

où (b_n) est une suite de limite nulle, construite à partir de S_n, S_{n+1}, S_{n+p} où p est un entier non nul et fini.

Dans les deux premiers chapitres, on procède de la façon suivante :

a) Trouver un ensemble S inclus dans LIN de telle manière que S soit stable par certains procédés du type (1) ; et nous caractérisons ainsi une classe de suites dont la convergence est accélérée par l'itération de Δ^2 Aitken (cas où $(b_n) = (\Delta S_n)$) ; et de la première colonne du Θ-algorithme

$$\left[\text{cas où } (b_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{\Delta S_n}{1 - \frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}}} \right)_{n\geq 1} \right].$$

b) Trouver un ensemble S_{LOG} inclus dans LOGSF de telle manière que S_{LOG} soit accélérable et stable par certains procédés du type (1), et nous caractérisons ainsi une classe de suites à convergence logarithmique dont la convergence est accélérée par l'itération de la première colonne du Θ-algorithme, de la première colonne d'un algorithme étudié par LEVIN ($b_n = n\Delta S_n$) etc...

Dans le troisième chapitre, une étude est consacrée à une itération particulière de la procédure -Θ. Des études sont faites dans les cas linéaire et logarithmique. Enfin, dans le quatrième chapitre, nous étudions l'itération du Δ^2 Aitken dans le cas d'un Hilbert H réel.

Dans chaque chapitre, des exemples numériques viennent confirmer les résultats théoriques obtenus.

MOTS CLES

- Accélération de la convergence
- Algorithmes d'accélération
- Convergence logarithmique
- Convergence linéaire
- Fonction analytique
- Fonction entière
- Itérations
- Opérateur compact. Opérateur auto-adjoint
- Procédé δ^2 AITKEN
- Procédé standard
- Série entière
- Suite convergente
- Suite totalement monotone
- θ-Algorithme
- Voisinage d'un point