

N° d'ordre : 1116

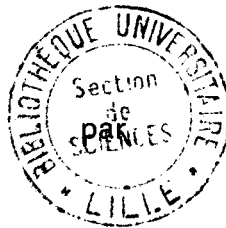
50376
1983
193

50376
1983
193

THÈSE
présentée à
L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES



DEMATTE Jean-Paul

UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE
DE LA THÉORIE D'HOMOLOGIE BIVARIANTE

donnée dans la théorie de pseudo-bordisme et pseudo-cobordisme
d'Eladio Dominguez

Membres du Jury : HECTOR G., Président
BRASSELET J.P., Rapporteur
DIDIERJEAN A. } Examineurs
TANRÉ D. }

Soutenue le 8 décembre 1983

j'adresse une pensée émue à mon épouse,
qui m'a encouragé à reprendre mes études, ainsi,
qu'à toute ma famille.

Ce travail a été fait sous la direction de Monsieur Jean-Paul BRASSELET. Le temps qu'il m'a consacré, les conseils qu'il m'a prodigués m'ont été d'un précieux secours. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Monsieur Gilbert HECTOR de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Messieurs Daniel TANRÉ et André DIDIERJEAN et je les remercie de faire partie du jury.

Je remercie également les membres du secrétariat scientifique, tout particulièrement Madame Raymonde BÉRAT qui a assuré la frappe de cette thèse et le personnel du service technique qui s'est chargé de l'impression.

PLAN

INTRODUCTION.

| | |
|---|----|
| CHAPITRE I - <u>D-BORDISME ET D-COBORDISME.</u> | 3 |
| A) <u>RAPPELS ET DEFINITIONS.</u> | 3 |
| B) <u>D-COBORDISME.</u> | 11 |
| C) <u>D-BORDISME.</u> | 23 |
| | |
| CHAPITRE II - <u>DUALITE.</u> | 33 |
| A) <u>DUALITE DE POINCARÉ.</u> | 33 |
| B) <u>L'ISOMORPHISME D'ALEXANDER.</u> | 35 |
| C) <u>L'HOMOMORPHISME DE THOM.</u> | 43 |
| D) <u>RELATION ENTRE LES HOMOMORPHISMES DE POINCARÉ,</u> <u>ALEXANDER ET THOM.</u> | 47 |
| E) <u>LES PRODUITS $\times [Y]^n$.</u> | 49 |
| | |
| CHAPITRE III - <u>THEORIE BIVARIANTE.</u> | 54 |
| A) <u>DEFINITION DES GROUPES BIVARIANTS.</u> | 54 |
| B) <u>LES TROIS OPERATIONS BIVARIANTES.</u> | 57 |
| | |
| <u>BIBLIOGRAPHIE.</u> | 81 |

INTRODUCTION

Eladio Dominguez définit dans [1] une théorie de pseudobordisme (nous dirons : D-bordisme), c'est-à-dire une théorie d'homologie ordinaire sur la catégorie des paires d'espaces topologiques, et il construit dans [5] un isomorphisme entre cette théorie et l'homologie singulière :

$$S\Omega_*(X,A) \simeq H_*(X,A) .$$

D'autre part, il définit dans [2] une théorie de pseudocobordisme (nous dirons : D-cobordisme), c'est-à-dire une théorie de cohomologie ordinaire sur la catégorie des paires de polyèdres compacts, et il construit dans [6] un isomorphisme entre cette théorie et la cohomologie singulière :

$$S\Omega^*(P,Q) \simeq H^*(P,Q) .$$

Son article [8] est une application des théories précédentes : lorsque M est une variété, l'isomorphisme de Poincaré $S\Omega^*(W) \simeq S\Omega_*(W)$ a une formulation simple.

Dans ce travail, nous construisons d'abord des produits en D-cobordisme, puis des cup-produits (correspondant par l'isomorphisme construit en [6] à ceux qui sont connus en cohomologie). Nous construisons également des cap-produits (correspondant par les isomorphismes construits en [5] et [6] à ceux qui sont connus en homologie et cohomologie). Ceci est la matière développée dans le chapitre I. (Voir note page 32).

Dans le chapitre II, nous construisons les homomorphismes d'Alexander et de Thom dans l'esprit des théories de Dominguez et nous

montrons qu'ils forment avec l'homomorphisme de Poincaré [8] un diagramme commutatif comme en homologie et cohomologie singulières.

Le chapitre III est consacré à la construction d'une théorie de D-bordisme bivariant, c'est-à-dire une théorie telle que celle définie en ([14], § 3), mais dans le cadre des théories de Dominguez, alors les définitions et les démonstrations sont généralement plus simples.

Pour tout morphisme $p \xrightarrow{f} Q$ dans la catégorie des polyèdres compacts nous construisons des groupes abéliens notés $T^i(P \xrightarrow{f} Q)$ avec $i \in \mathbb{Z}$ de sorte que :

$$T^i(P \xrightarrow{\text{id}} P) = S\Omega^i(P) \quad (\text{D-Cobordisme sur } P)$$

$$T^i(P \rightarrow p^t) = S\Omega_{-i}(P) \quad (\text{D-Bordisme sur } P).$$

Nous construisons enfin trois opérations en D-bordisme bivariant :

- 1) Le produit bivariant : il généralise le cup et le cap-produit.
- 2) L'image directe bivariante : elle généralise la functorialité covariante du D-bordisme.
- 3) L'image réciproque bivariante : elle généralise la functorialité contravariante du D-cobordisme.

CHAPITRE I

D-BORDISME ET D-COBORDISME

Nous reprenons les résultats établis en [1], [2], [5] et [6] et nous construisons les produits extérieurs, puis les cup et cap-produits.

A) RAPPELS ET DEFINITIONS ([10], [11], [13]).

§ 1 - Catégorie des polyèdres.

Tous les polyèdres considérés sont compacts, donc triangulés par des complexes simpliciaux géométriques finis. Les pseudovariétés sont au sens de ([1], I.1), c'est-à-dire, P est une n -pseudovariété si c'est un polyèdre triangulé par un complexe K de dimension n et si :

- 1) tout simplexe de K est face d'un n -simplexe de K .
- 2) tout $(n-1)$ simplexe de K est face d'au plus deux n -simplexes de K .

En l'absence de toute précision un morphisme $f : P \rightarrow Q$ entre polyèdres est une application linéaire par morceaux : on sait qu'il existe alors des triangulations de P et Q respectivement rendant f simpliciale ([10], Lemme 1.10).

§ 2 - Conventions d'orientation.

Si x_0, \dots, x_n sont $n+1$ points affinement indépendant d'un

espace euclidien E^n , avec $n \geq 1$, les vecteurs $\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}$ considérés dans cet ordre déterminent une orientation de l'espace vectoriel réel sous-jacent. La paire formée de l'enveloppe convexe des points x_0, \dots, x_n et de l'orientation précédente est un n-simplexe orienté noté

$$\sigma^n = [x_0, \dots, x_n].$$

$|\sigma^n|$ est le polyèdre défini par σ^n , $\partial\sigma^n$ est son bord, $\overset{\circ}{\sigma}^n$ son intérieur.

En changeant l'orientation, on obtient l'opposé de σ^n noté

$$-\sigma^n = [x_{\psi(0)}, \dots, x_{\psi(n)}]$$

où ψ est une permutation impaire de $\{0; \dots; n\}$.

Par convention, orienter un point (0-simplexe), c'est lui attribuer un coefficient $+1$ ou -1 (ou le signe $+$ ou $-$). Un point a orienté positivement pourra être noté a^+ , et a^- dans le cas contraire. On pose évidemment $-a^+ = a^-$ et $-a^- = a^+$.

Si ψ est une permutation quelconque de $\{0; \dots; n\}$ on a $[x_{\psi(0)}, \dots, x_{\psi(n)}] = (-1)^{\varepsilon(\psi)} \sigma^n$, $\varepsilon(\psi)$ étant la signature de cette permutation.

Si $F_i \sigma^n = [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$ ($0 \leq i \leq n$) est la $i^{\text{ème}}$ face orientée de σ^n on pose par définition :

$$(2.1) \quad [\sigma^n : F_i \sigma^n] = (-1)^i.$$

La notation (2.1) est un crochet d'incidence, sa valeur est un nombre d'incidence.

Par $[x_i]$ on considérera le 0-simplexe orienté par la valeur (ou le signe) de $(-1)^i$, donc $[x_i] = x_i^+ \iff i$ est pair.

Soient P et Q deux pseudovariétés orientées telles que $\dim P - \dim Q = 1$ et $Q \subset \partial P$. Si τ est un simplexe de dimension maximum

de la triangulation de Q , alors τ est face d'un unique simplexe σ de la triangulation de P , si le nombre d'incidence $[\sigma : \tau]$ est indépendant de τ on dit que les orientations de P et Q sont comparables ([2], I.3), et ce sera toujours le cas dans ce travail, on posera alors

$$(2.2) \quad [P : Q] = [\sigma : \tau].$$

Remarque : Q est donc muni de l'orientation induite par celle de P ou l'opposée de cette orientation.

§ 3 - Orientation définie par une base vectorielle.

Avec les notations du § 2, un simplexe orienté $\sigma = [x_0, \dots, x_n]$, avec $n \geq 1$, est associé à une base vectorielle ordonnée $B = (\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n})$ de l'espace vectoriel sous-jacent à l'espace affine engendré par σ .

Pour $1 \leq i \leq n$, nous avons la sous-base

$$B_i = (\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_i}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}), \quad \text{associée à } F_i \sigma.$$

On pose par définition $[B : B_i] = [\sigma : F_i]$, donc

$$(3.1) \quad [B : B_i] = (-1)^i.$$

§ 4 - Orientation produit.

Soient des simplexes orientés $\sigma^n = [x_0, \dots, x_n]$ et $\tau^p = [y_0, \dots, y_p]$. On peut considérer la cellule $|\sigma| \times |\tau|$ dans un espace euclidien de dimension $n+p$.

On suppose d'abord $n \geq 1$ et $p \geq 1$. La base vectorielle ordonnée $(\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}, \overrightarrow{y_0 y_1}, \dots, \overrightarrow{y_0 y_p})$ de l'espace vectoriel sous-jacent détermine, par définition, l'orientation sur cette cellule. On notera $\sigma \times \tau$ la $(n+p)$ -cellule ainsi orientée.

Si $n = 0$ ou $p = 0$, on posera pour tout point a :

$$a^+ \times \tau = \tau \times a^+ = \tau \quad \text{et} \quad a^- \times \tau = \tau \times a^- = -\tau.$$

§ 5 - Proposition.

$$\tau \times \sigma = (-1)^{np} \sigma \times \tau.$$

Démonstration : Si $n \geq 1$ et $p \geq 1$ l'orientation de $\tau \times \sigma$ est déterminée par la base vectorielle ordonnée

$$(\overrightarrow{y_o y_1}, \dots, \overrightarrow{y_o y_p}, \overrightarrow{x_o x_1}, \dots, \overrightarrow{x_o x_n}).$$

Il est clair que np transpositions suffisent à la transformer en la base vectorielle ordonnée

$$(\overrightarrow{x_o x_1}, \dots, \overrightarrow{x_o x_n}, \overrightarrow{y_o y_1}, \dots, \overrightarrow{y_o y_p}),$$

d'où le résultat.

Enfin, si $n = 0$ ou $p = 0$ la proposition résulte immédiatement du § 4.

§ 6 - Lemme.

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$, σ^n et τ^p deux simplexes orientés, σ' (resp. τ') une face de codimension 1 de σ (resp. τ). Alors :

- a) $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [\sigma : \sigma']$;
- b) $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = (-1)^n [\tau : \tau']$.

Démonstration : Si $n \geq 2$ et $p \geq 2$ l'orientation de $\sigma \times \tau$ est définie par la base vectorielle ordonnée

$$(\overrightarrow{x_o x_1}, \dots, \overrightarrow{x_o x_n}, \overrightarrow{y_o y_1}, \dots, \overrightarrow{y_o y_p}) = B.$$

Remarquons d'abord que les nombres d'incidence ne changent pas si on change l'ordre des sommets des simplexes par une permutation paire, on pourra donc toujours supposer que σ' (resp. τ') est la 1ère ou la 2ème face de σ (resp. τ).

a) Calcul de $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau]$.

a₁) si $n \geq 2$:

1er cas : $[\sigma : \sigma'] = 1$. On peut supposer que $\sigma' = F_2 \sigma$ c'est-à-dire

$\sigma' = [x_0, x_1, x_3, \dots, x_n]$. L'orientation de $\sigma' \times \tau$ est déterminé par

$$B_2 = (\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_0 x_3}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}, \overrightarrow{y_0 y_1}, \dots, \overrightarrow{y_0 y_p}).$$

Par définition $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [B : B_2] = 1$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [\sigma : \sigma']$.

2ème cas : $[\sigma : \sigma'] = -1$. On peut supposer que $\sigma' = F_1 \sigma$ c'est-à-dire

$\sigma' = [x_0, x_2, \dots, x_n]$. L'orientation de $\sigma' \times \tau$ est déterminée par

$$B_1 = (\overrightarrow{x_0 x_2}, \overrightarrow{x_0 x_3}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}, \overrightarrow{y_0 y_1}, \dots, \overrightarrow{y_0 y_p}).$$

Par définition $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [B : B_1] = -1$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [\sigma : \sigma']$.

a₂) si $n = 1$.

Alors $\sigma = [x_0, x_1]$ et l'orientation de $\sigma \times \tau$ est déterminée

par $B' = (\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{y_0 y_1}, \dots, \overrightarrow{y_0 y_p})$.

1er cas : $[\sigma : \sigma'] = 1$. Alors $\sigma' = F_0 \sigma = [x_1]$.

On a (§§2 et 4) $\sigma' \times \tau = [x_1] \times \tau = x_1^- \times \tau = -\tau$.

L'orientation de τ est déterminée par $B'_1 = (\overrightarrow{y_0 y_1}, \dots, \overrightarrow{y_0 y_p})$,

alors $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [\sigma \times \tau : -\tau] = -[\sigma \times \tau : \tau] = -[B' : B'_1]$

$$= -(-1) = 1$$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [\sigma : \sigma']$

2ème cas : $[\sigma : \sigma'] = -1$. Alors $\sigma' = F_1 \sigma = [x_0]$.

On a (§§ 2 et 4) $\sigma' \times \tau = [x_0] \times \tau = x_0^+ \times \tau = \tau$.

Alors $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [\sigma \times \tau : \tau] = [B' : B'_1] = 1$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma' \times \tau] = [\sigma : \sigma']$.

b) Calcul de $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau']$.

b₁) si $p \geq 2$:

1er cas : $[\tau : \tau'] = 1$. On peut supposer que $\tau' = F_2 \tau$ c'est-à-dire

$\tau' = [y_0, y_1, y_3, \dots, y_p]$. L'orientation de $\sigma \times \tau'$ est déterminée par

$$B_{n+2} = (\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}, \overrightarrow{y_0 y_1}, \overrightarrow{y_0 y_3}, \dots, \overrightarrow{y_0 y_p}).$$

Par définition $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = [B : B_{n+2}] = (-1)^{n+2} = (-1)^n$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = (-1)^n [\tau : \tau']$.

2ème cas : $[\tau : \tau'] = -1$. On peut supposer que $\tau' = F_1 \tau$ c'est-à-dire

$\tau' = [y_0, y_2, \dots, y_p]$. L'orientation de $\sigma \times \tau'$ est déterminée par

$$B_{n+1} = (\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}, \overrightarrow{y_0 y_2}, \overrightarrow{y_0 y_3}, \dots, \overrightarrow{y_0 y_p}).$$

Par définition $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = [B : B_{n+1}] = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = (-1)^n [\tau : \tau']$.

b₂) si $p = 1$:

Alors $\tau = [y_0, y_1]$ et l'orientation de $\sigma \times \tau$ est déterminée par

$$B'' = (\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}, \overrightarrow{y_0 y_1}).$$

1er cas : $[\tau : \tau'] = 1$. Alors $\tau' = F_0 \tau = [y_1]$.

On a (§§2 et 4) $\sigma \times \tau' = \sigma \times [y_1] = \sigma \times y_1^- = -\sigma$. L'orientation de σ

est déterminée par $(\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_n}) = B''_{n+1}$ alors

$$[\sigma \times \tau : \sigma : \tau'] = [\sigma \times \tau : -\sigma] = -[\sigma \times \tau : \sigma] = -[B'' : B''_{n+1}]$$

$$= -(-1)^{n+1} = (-1)^n$$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = (-1)^n [\tau : \tau']$.

On a (§§ 2 et 4) $\sigma \times \tau' = \sigma \times [y_0] = \sigma \times y_0^+ = \sigma$.

Alors $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = [\sigma \times \tau : \sigma] = [B'' : B''_{n+1}] = (-1)^{n+1}$

donc $[\sigma \times \tau : \sigma \times \tau'] = (-1)^n [\tau : \tau']$.

§ 7 - Lemme.

Pour tous simplexes orientés σ et τ :

$$(-\sigma) \times \tau = \sigma \times (-\tau) = -(\sigma \times \tau).$$

C'est évident d'après les conventions prises au § 4.

§ 8 - Colliers ($[11]$).

8.1.- Définition.- Etant donnés des polyèdres $P \subset Q$, un collier de P dans Q est un plongement $c : P \times I \rightarrow Q$, où I est l'intervalle unité, tel que pour tout x de P : $c(x,0) = x$, et l'image de c est un voisinage de P dans Q .

Si P est une pseudovariété à bord ∂P , on appellera collier de P un collier de ∂P dans P.

8.2.- Un contre-exemple.

On sait que toute variété compacte à bord admet un collier. Ce résultat n'est plus vrai en général dans le cas des pseudovariétés.

La figure (8.1) représente une 2-pseudovariété. Supposons qu'elle admette un collier : pour tout $x \in \partial P$, $\Gamma_x = \{c(x,t)/t \in I\}$ doit être un chemin d'origine $c(x,0) = x$ et d'extrémité $c(x,1)$. Ceci est possible pour tout x dans $\partial P - \{S\}$, mais pas si $x = S$ puisque tout voisinage de S dans \mathbb{R}^2 coupe les deux triangles de sommet commun S , $c(S,t)$ ne pourrait pas être déterminé pour $t \neq 0$ (fig. 8.2).

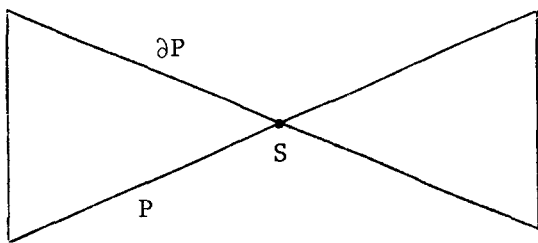


fig. 8.1

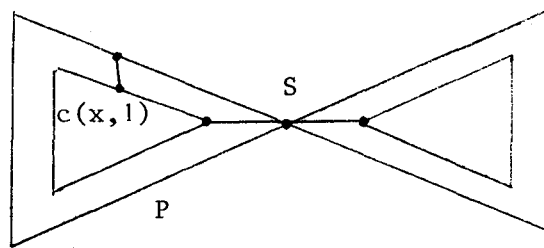


fig. 8.2

§ 9 - Colliers locaux.

9.1.- Définition ([11]. 2. collars).-

Soient deux polyèdres $P \subset Q$ et $a \in P$. On dit que P admet un collier local en a s'il existe des voisinages $N(a,P)$ et $N(a,Q)$ de a dans P et Q respectivement tels que

$$N(a,Q) = N(a,P) \times I \text{ et } N(a,P) \times 0 = N(a,P).$$

9.2.- Proposition ([11]. 2.25).

Il existe un collier de P dans Q si et seulement si il existe un collier local en tout point de P.

Remarque : Dans l'exemple précédent, il n'existe pas de collier local en S.

§ 10 - Collier d'un produit.

Proposition.- Soient pour $i = 1;2$ des pseudovariétés P_i à bord ∂P_i . Si chaque P_i admet un collier, alors $P_1 \times P_2$ admet un collier.

Nous démontrons ce résultat car nous ne l'avons pas trouvé dans la littérature.

D'après la proposition du § 9, ∂P_1 et ∂P_2 admettent en tout point un collier local. Il suffit de construire un collier local en tout point de $\partial(P_1 \times P_2)$: par la réciproque de la proposition précitée il existera un collier pour $P_1 \times P_2$.

D'abord $\partial(P_1 \times P_2) = (\partial P_1 \times P_2) \cup (P_1 \times \partial P_2)$. Il suffit de considérer un point $(a,b) \in \partial P_1 \times P_2$. Par hypothèse, il existe un collier local en a , c'est-à-dire des voisinages $N(a, \partial P_1)$ et $N(a, P_1)$ tels que

$$N(a, P_1) = N(a, \partial P_1) \times I \quad \text{et} \quad N(a, \partial P_1) \times 0 = N(a, \partial P_1).$$

Soit V_b un voisinage de b dans P_2 . On définit un voisinage de (a,b) dans $\partial P_1 \times P_2$ en posant

$$N((a,b), \partial P_1 \times P_2) = N(a, \partial P_1) \times V_b.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } N((a,b), \partial P_1 \times P_2) \times I &= [N(a, \partial P_1) \times I] \times V_b \\ &= N(a, P_1) \times V_b \end{aligned}$$

donc $N((a,b), \partial P_1 \times P_2) \times I$ est un voisinage de (a,b) dans $P_1 \times P_2$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} N((a,b), \partial P_1 \times P_2) \times 0 &= [N(a, \partial P_1) \times 0] \times V_b = N(a, P_1) \times V_b \\ &= N((a,b), \partial P_1 \times P_2). \end{aligned}$$

Finalement $N((a,b), \partial P_1 \times P_2)$ détermine le collier local cherché.

B) D-COBORDISME.

§ 11 - Rappels.

On sait qu'une n-boule est un polyèdre homéomorphe à un n -

simplexe. Un ensemble fini K de boules est un complexe si :

- 1) $\forall \sigma, \tau \in K ; \sigma \neq \tau ; \text{ alors } \overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\tau} = \emptyset.$
- 2) $\forall \sigma \in K, \partial\sigma$ (noté aussi $\overset{\circ}{\sigma}$) est une union d'éléments de K .

Si K et L sont deux complexes de boules, en posant $K \times L = \{\sigma \times \tau / \sigma \in K, \tau \in L\}$ on obtient encore un complexe de boules (ce n'est pas vrai si on remplace "complexe de boules" par "complexe simplicial").

§ 12 - Définition d'un pseudo-fibré en blocs (P.F.B) ([2]. I.4).

Un P.F.B de base K est un triple $\xi = (E(\xi), p_\xi, K)$ satisfaisant aux 5 axiomes suivants.

PFB . $E(\xi)$ est un polyèdre (c'est l'espace total) ;

PFB . K est un complexe de boules orientées ;

PFB₃ . $p_\xi : E(\xi) \rightarrow |K|$ est un morphisme ;

PFB₄ . $\forall \sigma \in K : p_\xi^{-1}(\sigma) = \xi_\sigma$ (bloc au-dessus de σ) est une pseudo-variété orientée satisfaisant à :

(i) $\dim \sigma - \dim \xi_\sigma$ ne dépend pas de $\sigma \in K$. Cet entier relatif sera appelé le rang de ξ ;

(ii) $\partial \xi_\sigma = \xi_{\partial\sigma}$;

(iii) $\partial \xi_\sigma$ admet un collier dans ξ_σ .

PFB₅ . (conservation des nombres d'indidence).

Soient $\sigma, \tau \in K$ tels que $\tau < \sigma$. Puisque $\tau \subset \partial\sigma$, alors $\xi_\tau \subset \partial \xi_\sigma$ d'après l'axiome précédent, alors $[\xi_\sigma : \xi_\tau]$ existe (§2 - 2) et on a :

$$[\xi_\sigma : \xi_\tau] = [\sigma : \tau].$$

Notations.

Si n est le rang de ξ , et K la base de ξ , on notera indifféremment le P.F.B : $\xi, \xi^n, \xi/K, \xi^n/K$.

Si L est un sous-complexe de K tel que pour tout $\sigma \in L$, alors $\xi_\sigma = \phi$, on notera $\xi/(K,L)$.

Remarques.

1) La convention de signe pour n est l'opposée de celle utilisée dans [2], [6] et [12] pour des raisons de commodité.

2) L'ensemble vide est considéré comme une pseudo-variété de dimension quelconque.

§ 13 - Un exemple de P.F.B.

Soient $\sigma = [a, b]$ et $\tau = [b, c]$ deux 1-simplexes orientés. Choisissons les orientations ponctuelles a^+, b^-, c^- . On a alors $[\sigma : a^+] = [\sigma : b^-] = [\tau : c^-] = 1$ et $[\tau : b^-] = -1$.

Alors la figure 13.1 représente un P.F.B de rang -1, dont la base est le complexe simplicial engendré par σ et τ . L'espace total $E(\xi)$ est une surface, le bloc au-dessus de $\{c\}$ est vide.

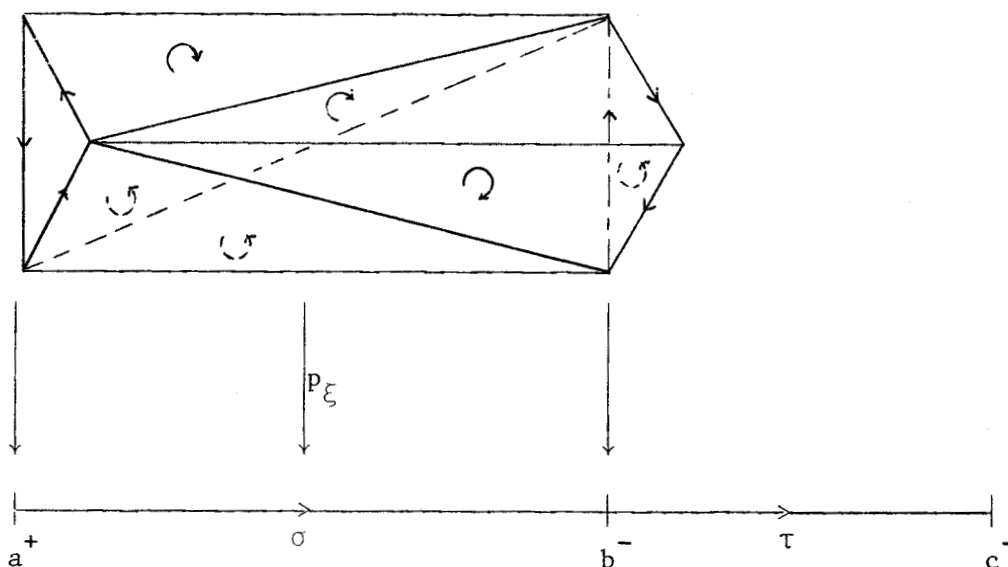


fig. 13.1

§ 14 - Morphisme de P.F.B.

Définition. - Soient ξ_1 et ξ_2 deux P.F.B de même base K .

Un morphisme $f : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ est la donnée d'un morphisme entre polyèdres

$f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ conservant les blocs et les nombres d'incidence ;

c'est-à-dire :

i) $\forall \sigma \in K : f(\xi_{1\sigma}) = \xi_{2\sigma}$;

ii) $\forall \sigma, \tau \in K$ tels que $\tau < \sigma : [f(\xi_{1\sigma}) : f(\xi_{1\tau})] = [\xi_{1\sigma} : \xi_{1\tau}]$.

Remarque : Si ξ_1 et ξ_2 sont de même rang et si f est bi-jectif alors f^{-1} est encore un morphisme de P.F.B. On dira alors que f est un isomorphisme de P.F.B et on notera $\xi_1 \simeq \xi_2$ ([2].I.6).

§ 15 - Produit de deux P.F.B.

15.1.- Définition. - Soient (K, K') et (L, L') , deux paires de complexes de boules orientés et deux P.F.B $\xi^q / (K, K')$ et $\eta^r / (L, L')$. Le produit des deux P.F.B, noté $\xi \times \eta$, est le P.F.B de rang $q+r$, de base $(K \times L, (K \times L') \cup (K' \times L))$, d'espace total $E(\xi \times \eta) = E(\xi) \times E(\eta)$, tel que $P_{\xi \times \eta} = P_\xi \times P_\eta$.

15.2.- Proposition. - L'objet $\xi \times \eta$ défini précédemment est un P.F.B au sens du § 12.

Démonstration : On montre que les axiomes P.F.B₁ à P.F.B₅ du § 12 sont bien vérifiés.

PFB₁ : $E(\xi) \times E(\eta)$ est évidemment un polyèdre.

PFB₂ : $K \times L$ est un complexe de boules, muni de l'orientation produit.

PFB₃ : $P_{\xi \times \eta}$ est évidemment linéaire par morceaux.

PFB₄ : Soit $\sigma \times \tau \in K \times L$. Le bloc au-dessus de cette boule est

$(p_\xi \times p_\xi)^{-1}(\sigma \times \tau) = p_\xi^{-1}(\sigma) \times p_\eta^{-1}(\tau)$, c'est-à-dire $(\xi \times \eta)_{\sigma \times \tau} = \xi_\sigma \times \eta_\tau$,
et c'est une pseudo-variété, munie de l'orientation produit.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \dim(\sigma \times \tau) - \dim(\xi \times \eta)_{\sigma \times \tau} &= \dim \sigma + \dim \tau - \dim \xi_\sigma - \dim \eta_\tau \\ &= (\dim \sigma - \dim \xi_\sigma) + (\dim \tau - \dim \eta_\tau) = q+r ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \partial(\xi \times \eta)_{\sigma \times \tau} &= \partial(\xi_\sigma \times \eta_\tau) = (\partial \xi_\sigma \times \eta_\tau) \cup (\xi_\sigma \times \partial \eta_\tau) \\ &= (\xi_{\partial \sigma} \times \eta_\tau) \cup (\xi_\sigma \times \eta_{\partial \tau}) \\ &= (\xi \times \eta)_{\partial \sigma \times \tau} \cup (\xi \times \eta)_{\sigma \times \partial \tau} \\ &= (\xi \times \eta)_{(\partial \sigma \times \tau)} \cup (\sigma \times \partial \tau) \\ &= (\xi \times \eta)_{\partial(\sigma \times \tau)} ; \end{aligned}$$

(iii) $\partial(\xi \times \eta)_{\sigma \times \tau}$ admet un collier dans $(\xi \times \eta)_{\sigma \times \tau}$ d'après § 10.

PFB₅ : Une face de codimension 1 de $\sigma \times \tau$ est ou bien de la forme

$\sigma' \times \tau$ ou bien de la forme $\sigma \times \tau'$ avec σ' (resp. τ')

face de codimension 1 de σ (resp. τ). Chaque $\xi_\sigma \times \eta_\tau$ est muni de l'orientation produit, alors d'après les §§ 2.2 ; 6, la conservation des nombres d'incidence est assurée.

Nous montrons, enfin, que les blocs au-dessus de $(K \times L') \cup (K' \times L)$ sont vides : soit, par exemple, $\sigma \times \tau \in K \times L'$, donc $\sigma \in K$ et $\tau \in L'$, alors on a $(\xi \times \eta)_{\sigma \times \tau} = \xi_\sigma \times \eta_\tau = \phi$ car $\eta_\tau = \phi$ par hypothèse.

§ 16 - D-cobordisme.

Définition. ([2].I.17 et [3]).- Soit I le complexe de boules $\{[0,1], \{0\}, \{1\}\}$. Deux P.F.B. ξ/K et η/K de même rang n sont D-cobordants s'il existe un P.F.B. $\Psi/K \times I$ de rang n tel que :
 $\Psi/K \times 0 \simeq \xi$ et $\Psi/K \times 1 \simeq \eta$.

Notation : $\xi R \eta$.

§ 17 - Les groupes de D-cobordisme $S\Omega^n(P,Q)$ ([2], [3]).

Le D-cobordisme est une relation d'équivalence.

On note $S\Omega^n(K)$ l'ensemble des classes des P.F.B de base K et de rang n . Pour toute paire (K,L) de complexes de boules $S\Omega^n(K,L)$ est l'ensemble des classes des P.F.B tels que, de plus, leurs blocs au-dessus de L soient vides. Les ensembles $S\Omega^n(K), S\Omega^n(K,L)$ ont une structure de groupe abélien induite par la réunion disjointe des P.F.B de base K ou (K,L) . Si deux complexes de boules K' et K définissent le même polyèdre $P = |K'| = |K|$, Dominguez démontre dans ([2].II.12) que $S\Omega^n(K') \approx S\Omega^n(K)$ et on peut donc noter $S\Omega^n(P)$ et supposer que K est simplicial. Ces résultats sont valables aussi dans le cas relatif : pour toute paire (P,Q) de polyèdres, on a $S\Omega^n(P,Q) = S\Omega^n(K,L)$ où (K,L) est une triangulation de (P,Q) .

Si $f : P \rightarrow P'$ est un morphisme, il existe des triangulations K et K' de P et P' respectivement rendant f simpliciale. Un élément de $S\Omega^n(P')$ est une classe $[\xi']$ ou ξ' est un représentant, c'est-à-dire un P.F.B (§ 12), on peut former alors le carré fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 E(\xi', \#) & \xrightarrow{f^\#} & E(\xi') \\
 \downarrow p_{\xi'}^\# & & \downarrow p_\xi \\
 |K| & \xrightarrow{f} & |K'|
 \end{array}$$

par image réciproque f détermine un P.F.B $\xi', \#$ et l'homomorphisme $S\Omega^n(f) : S\Omega^n(P') \rightarrow S\Omega^n(P)$ est défini par $S\Omega^n(f)([\xi']) = [\xi', \#]$ ($\xi', \#$ se note aussi $f^\# \xi'$).

Compte-tenu de la convention faite au § 12 sur le rang de ξ , on a :

Théorème ([6].12).- $S\Omega^n(P,Q) \approx H^n(P,Q)$ pour toute paire de polyèdres (P,Q) .

§ 18 - Proposition.- Si deux P.F.B sont isomorphes, alors il sont D-cobordants.

Démonstration : Supposons que $\xi_1/K \approx \xi_2/K$. On définit le P.F.B $\xi_{/K \times I}$ en posant $E(\xi) = E(\xi_1) \times I$ (isomorphe à $E(\xi_2) \times I$ d'après l'hypothèse).

Pour tout $t \in I$, il est clair que $\xi_{/K \times t} \approx \xi_1 \approx \xi_2$ et on a en particulier

$$\xi_{/K \times 0} \approx \xi_1 \quad \text{et} \quad \xi_{/K \times 1} \approx \xi_2, \quad \text{donc } \xi \text{ réalise le D-cobordisme.}$$

§ 19 - Proposition.- Le produit des P.F.B est compatible avec la relation de D-cobordisme.

Démonstration : On reprend les notations du § 15. Il suffit de raisonner dans le cas absolu, c'est-à-dire avec $K' = L' = \phi$, et de supposer $\xi R \xi'$.

Par hypothèse il existe un P.F.B $\Psi_{/K \times I}$ tel que $\Psi_{/K \times 0} \approx \xi$ et $\Psi_{/K \times 1} \approx \xi'$.

Considérons le produit $\Psi \times \eta_{/(K \times I) \times L}$. On peut le considérer comme un P.F.B de base $(K \times L) \times I$, alors

$$\Psi \times \eta_{/(K \times L) \times 0} \approx \Psi \times \eta_{/(K \times 0) \times L} = \Psi_{/K \times 0} \times \eta_{/L} \approx \xi \times \eta$$

$$\Psi \times \eta_{/(K \times L) \times 1} \approx \Psi \times \eta_{/(K \times 1) \times L} = \Psi_{/K \times 1} \times \eta_{/L} \approx \xi' \times \eta$$

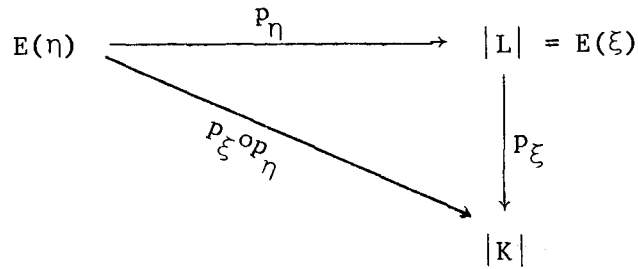
donc, par définition, on a bien $(\xi \times \eta) R (\xi' \times \eta)$.

§ 20 - Composé de deux P.F.B.

Proposition. - Soient deux P.F.B ξ^q/K et η^r/L avec $|L| = E(\xi)$.

Alors l'application composée $p_\xi \circ p_\eta$ détermine un P.F.B de rang $q+r$, noté $\xi * \eta$, de base K , et tel que $E(\xi * \eta) = E(\eta)$, $p_{\xi * \eta} = p_\xi \circ p_\eta$.

Démonstration : Le diagramme suivant résume la situation :



Il s'agit de vérifier les axiomes PFB_1 à PFB_5 du § 12. Les trois premiers sont trivialement vérifiés.

Soit $\sigma \in K$: le bloc ξ_σ n'a aucune raison d'être compatible avec L , aussi est-il commode de remplacer L par une subdivision L' de L de sorte que les blocs ξ_σ correspondent à des sous-complexes de L' (cela ne modifie pas $E(\xi), E(\eta)$, ni les classes de D-cobordisme d'après [2]-16 et 21).

Alors on peut utiliser les résultats de ([2].5) et ([6].1) :

η_{ξ_σ} est une pseudo-variété orientée de dimension égale à $(\dim \sigma - q) - r$ et de bord $\partial \eta_{\xi_\sigma} = \eta_{\partial \xi_\sigma} = \eta_{\xi_\sigma \partial \sigma}$. Ce bord admet un collier. D'autre part, on a $(\dim \sigma - q) - r$ égale $\dim \sigma - (q+r)$ donc PFB_4 est vérifié.

Enfin, si $\tau < \sigma$ on a :

$$[\sigma : \tau] = [\xi_\sigma : \xi_\tau] = [\eta_{\xi_\sigma} : \eta_{\xi_\tau}] = [(\xi * \eta)_\sigma : (\xi * \eta)_\tau]$$

d'où l'axiome PFB_5 .

§ 21 - Produit extérieur en D-cobordisme.

Définition.- On définit le produit extérieur en D-cobordisme de la manière suivante :

Avec les notations et les résultats des §§ 15 à 19, c'est l'application :

$$\begin{aligned} S\Omega^q(K, K') \times S\Omega^r(L, L') &\xrightarrow{\times} S\Omega^{q+r}(K \times L, (K \times L') \cup (K' \times L)) \\ [\xi] \quad , \quad [\eta] &\longmapsto [\xi \times \eta]. \end{aligned}$$

§ 22 - La classe unité $[e_K]$.

Définition.- Soit K un complexe de boules orienté. L'application $|K| \xrightarrow{\text{id}} |K|$ définit un P.F.B de rang 0 et de base K , que l'on notera e_K . Sa classe de D-cobordisme dans $S\Omega^0(K)$ est notée $[e_K]$. On définit aussi de façon évidente une classe relative $[e_{(K,L)}] \in S\Omega^0(K, L)$.

§ 23 - Propriétés du produit extérieur.

Proposition.- Le produit extérieur en D-cobordisme est bilinéaire, associatif, vérifie l'égalité $[\eta] \times [\xi] = (-1)^{qr} [\xi] \times [\eta]$ et la classe $[e p^t] \in S\Omega^0(p^t)$ est élément unité.

Démonstration : La bilinéarité résulte du fait que l'addition dans les groupes de D-cobordisme est définie par l'union disjointe et que le produit cartésien est distributif par rapport à l'union.

Avec des notations évidentes, les P.F.B $(\xi \times \eta) \times \theta$ et $\xi \times (\eta \times \theta)$ sont isomorphes donc ils définissent la même classe (§ 18) d'où l'associativité.

Les conventions d'orientation qui ont été prises font qu'au niveau des P.F.B on a déjà la relation $\eta \times \xi = (-1)^{qr} \xi \times \eta$ et on sait que $-[\xi] = [-\xi]$.

Soit enfin $[\xi] \in S\Omega^q(K, K')$. On suppose $L = p^t$ et $L' = \phi$, $r = 0$. Evidemment : $[e p^t] \times [\xi] = [\xi] \times [e p^t]$. On a $E(\xi \times p^t) \simeq E(\xi)$ et $K \times p^t \simeq K$. Alors $\xi \times e p^t$ et ξ sont isomorphes, donc ils sont D-cobordants et finalement $[\xi] \times [e p^t] = [\xi]$.

§ 24 - La première définition du cup-produit.

Soit K un complexe de boules orienté et $\Delta : K \rightarrow K \times K$ l'application diagonale.

Le cup-produit est le composé du produit extérieur par l'application déduite de l'application diagonale en D-cobordisme.

$$\begin{array}{ccc}
 S\Omega^q(K) \times S\Omega^r(K) & \xrightarrow{\quad \times \quad} & S\Omega^{q+r}(K \times K) \\
 & \searrow \cup & \downarrow S\Omega^{q+r}(\Delta) \\
 & & S\Omega^{q+r}(K).
 \end{array}$$

Autrement dit : soit le carré fibré

$$\begin{array}{ccc}
 E(\Delta^\#(\xi \times \eta)) & \xrightarrow{\quad \Delta^\# \quad} & E(\xi) \times E(\eta) \\
 \downarrow (p_{\xi \times p_\eta})^\# & & \downarrow p_{\xi \times p_\eta} \\
 K & \xrightarrow{\quad \Delta \quad} & K \times K
 \end{array}$$

Alors par définition de $S\Omega^{q+r}(\Delta)$, on a

24.1

$$\boxed{[\xi] \cup [\eta] = [\Delta^\#(\xi \times \eta)]} .$$

On peut définir aussi le cup-produit relatif :

$$S\Omega^q(K, K') \times S\Omega^r(K, K'') \xrightarrow{U} S\Omega^{q+r}(K, K' \cup K'')$$

puisque évidemment : $\Delta(K' \cup K'') \subset (K \times K') \cup (K \times K'')$.

§ 25 - La deuxième définition du cup-produit.

Quitte à remplacer K par une subdivision K' de K , on peut supposer que les représentants ξ et η des classes $[\xi]$ et $[\eta]$ sont tels que :

- (i) K est simplicial ;
- (ii) $p_\eta : E(\eta) \rightarrow K$ est une application simpliciale ([10].I.10 ; [2].I.16 et 21).

On peut appliquer les résultats de ([2].II.10) et former le carré fibré :

$$\begin{array}{ccc} E(p_\eta^\# \xi) & \xrightarrow{p_\eta^\#} & E(\xi) \\ \downarrow p_\xi^\# & & \downarrow p_\xi \\ E(\eta) & \xrightarrow{p_\eta} & |K| . \end{array}$$

Alors (§ 20) $p_\eta \circ p_\xi^\#$ détermine un P.F.B noté $\eta * p_\eta^\# \xi$ d'espace total $E(p_\eta^\# \xi)$ et de base K .

Le cup-produit est défini par :

25.1

$$\boxed{[\xi] \cup' [\eta] = [\eta * p_\eta^\# \xi]} .$$

§ 26 - Proposition. - Les deux définitions (24.1 et 25.1) du cup-produit sont équivalentes.

Démonstration :

Dans 24.1, on a $E(\Delta^\#(\xi \times \eta)) = \{(k, x, y) \in |K| \times E(\xi) \times E(\eta) : k = p_\xi(x) = p_\eta(y)\}$
 et dans 25.1, $E(\eta * p_\eta^\# \xi) = \{(y, x) \in E(\eta) \times E(\xi) : p_\eta(y) = p_\xi(x)\}$.

Alors, en posant $f(k, x, y) = (y, x)$, on définit un isomorphisme entre ces deux P.F.B, donc ils déterminent la même classe de D-cobordisme dans $S\Omega^{q+r}(K)$.

§ 27 - Propriétés du cup-produit.

Proposition. - Le cup-produit est bilinéaire, associatif, vérifie l'égalité $[\eta] \cup [\xi] = (-1)^{qr} [\xi] \cup [\eta]$ et, pour tout K, la classe $[e_K]$ est élément-unité.

Démonstration :

Les trois premières assertions résultent immédiatement du § 23 car $S\Omega^{q+r}(\Delta)$ est un homomorphisme de groupes abéliens.

Posons $[\Psi] = [\xi] \cup [e_K]$. Par définition Ψ est le P.F.B obtenu dans le carré fibré :

$$\begin{array}{ccc} E(\Psi) & \xrightarrow{p_1} & E(\xi) \times |K| \\ p_\Psi \downarrow & & \downarrow p_\xi \times \text{id} \\ |K| & \xrightarrow{\Delta} & |K| \times |K| \end{array}$$

Il vient :

$$E(\Psi) = \{(x, y, z) \in |K| \times E(\xi) \times |K| / \Delta(x) = (p_\xi \times \text{id})(y, z)\}$$

c'est-à-dire $E(\Psi) = \{(p_\xi(y), y, p_\xi(y)) / y \in E(\xi)\}$.

L'application $y \mapsto (p_\xi(y), y, p_\xi(y))$ détermine un isomorphisme de P.F.B entre ξ et Ψ , alors $[\xi] = [\Psi]$ donc $[\xi] = [\xi] \cup [e_K]$.

C) D-BORDISME.

§ 28 - Les groupes de D-bordisme $S\Omega_n(X,A)$ ([1] et [5]).

Une pseudo-variété singulière sur une paire (X,A) d'espaces topologiques est un couple (P,f) où P est une pseudo-variété orientée à bord et $f : P \rightarrow X$ une application continue telle que $f(\partial P) \subset A$.

Deux tels couples (P_1, f_1) et (P_2, f_2) sont D-bordants, et on notera $(P_1, f_1) \sim (P_2, f_2)$ s'il existe une paire de pseudo-variétés (Q, Q_0) avec $\dim Q = 1 + \dim P_1$
 $= 1 + \dim P_2$

et une application continue $(Q, Q_0) \xrightarrow{f} (X,A)$ telles que

- i) $\partial Q = (P_1 \cup -P_2) \cup Q_0$;
- ii) $F_{/P_i} = f_i$ ($i = 1;2$).

L'union disjointe induit sur les classes de D-bordisme une structure de groupe abélien, noté $S\Omega_n(X,A)$, n désignant la dimension commune des pseudo-variétés intervenant dans les couples (P,f) .

Dominguez démontre ([1].II.12) qu'on a ainsi une théorie d'homologie ordinaire et qu'elle est isomorphe canoniquement à l'homologie singulière ([5].7.). Nous rappelons la définition de l'homomorphisme $S\Omega_n(g) : S\Omega_n(X,A) \rightarrow S\Omega_n(Y,B)$ induit par l'application continue $g : (X,A) \rightarrow (Y,B)$: pour toute classe de D-bordisme $[P, f] \in S\Omega_n(X,A)$ on a $S\Omega_n(g)([P, f]) = [P, g \circ f]$.

§ 29 - Théorème ([13], chap. XI, §§ 5-1 et 2).

Soient P et Q deux polyèdres compacts, une application continue $f : P \rightarrow Q$. Il existe des triangulations K et L de P et Q respectivement, une application simpliciale $s : |K| \rightarrow |L|$ telle que f et s soient homotopes.

Démonstration : On se réfère à l'ouvrage précité : d'après § 5.1 f admet une approximation simpliciale, d'après § 5.2 f est homotope à toute approximation simpliciale, d'où le théorème.

§ 30 - Corollaire.

Soit P un polyèdre compact et $[M, f]$ une classe de D-bordisme dans $S\Omega_n(P)$. Il existe dans cette classe un représentant (M, s) tel que s soit simpliciale.

On peut donner deux démonstrations de ce résultat qui servira pour la construction du cap-produit (§ 31).

1ère démonstration :

D'après § 29, il existe des triangulations de M et P, une application simpliciale $s : M \rightarrow P$ telles que f et s soient homotopes. On va montrer que $[M, f] = [M, s]$.

Soit H une homotopie entre f et s, c'est-à-dire une application continue $H : M \times I \rightarrow P$ telle que $\forall x \in M$ on ait $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = s(x)$.

$$\text{On a : } \partial(M \times I) = (M \times 0) \cup (M \times 1) = M \cup (-M)$$

$$H_{/M \times 0} = f \text{ et } H_{/M \times 1} = s.$$

Alors $(M \times I, H)$ réalise le D-bordisme entre (M, f) et (M, s) .

2ème démonstration :

L'application continue $f : M \rightarrow P$ induit un homomorphisme

$$S\Omega_n(M) \xrightarrow{S\Omega_n(f)} S\Omega_n(P) \text{ défini par } S\Omega_n[N, g] = [N, fog].$$

f est homotope à une application simpliciale (§ 29), alors $S\Omega_n(f) = S\Omega_n(s)$ puisque $S\Omega_n(\dots)$ est une théorie d'homologie.

En particulier, on a

$$S\Omega_n(f)[M, id] = S\Omega_n(s)[M, id]$$

c'est-à-dire $[M, f] = [M, s]$.

§ 31 - Définition du cap-produit.

Soit P un polyèdre compact, triangulé par un complexe simplicial K . Le cap-produit est une forme bilinéaire :

$$S\Omega_n(P) \times S\Omega^q(P) \xrightarrow{\cap} S\Omega_{n-q}(P)$$

définie de la manière suivante.

Si $[M, f]$ est une classe de D-bordisme dans $S\Omega_n(P)$, on peut supposer K choisi tel que f soit simpliciale (§ 30). Soit ξ un P.F.B de rang q et de base K , définissant une classe de D-cobordisme $[\xi] \in S\Omega^q(P)$. D'après ([2].II.10). On peut former le produit fibré des morphismes $M \xrightarrow{f} P$ et $E(\xi) \xrightarrow{p_\xi} P$, d'où le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(f\#_\xi) & \xrightarrow{f\#} & E(\xi) \\ \downarrow p_\xi\# & & \downarrow p_\xi \\ M & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

et, d'après l'article précité, $p_\xi\#$ définit un P.F.B de rang q avec

$E(f^{\#}\xi)$ de dimension égale à $\dim M - q = n-q$, $fop_{\xi}^{\#}$ étant continue on a défini un élément $[E(f^{\#}\xi), fop_{\xi}^{\#}] \in S\Omega_{n-q}(P)$.

On pose alors :

$$31.1 \quad \boxed{[\bar{M}, f] \cap [\xi] = [E(f^{\#}\xi), fop_{\xi}^{\#}]} \quad .$$

Les deux paragraphes qui suivent montrent que ceci ne dépend pas du choix des représentants.

§ 32 - Lemme.

Le cap-produit ne dépend pas du choix d'un représentant dans la classe de D-bordisme de (M, f) .

Démonstration : Supposons que $(M, f) \sim (M', f')$. Il existe une paire (Q^{n+1}, F) où Q^{n+1} est une pseudo-variété, $F : Q^{n+1} \rightarrow P$ une application continue, et $\partial Q = M \cup (-M')$, $F/M = f$, $F/M' = f'$.

Comme au § 31, on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(f^{\#}\xi) & \xrightarrow{f^{\#}} & E(\xi) \\ \downarrow p_{\xi}^{\#} & & \downarrow p_{\xi} \\ M' & \xrightarrow{f'} & P \end{array} \quad .$$

Il faut donc montrer que $(E(f^{\#}\xi), fop_{\xi}^{\#}) \sim (E(f'^{\#}\xi), f'op_{\xi}^{\#})$.

On peut former le carré fibré :

$$\begin{array}{ccc} E(F\xi) & \xrightarrow{F^{\#}} & E(\xi) \\ \downarrow \sim p_{\xi} & & \downarrow p_{\xi} \\ Q & \xrightarrow{F} & P \end{array} \quad .$$

Q étant une pseudo-variété, il en est de même de $E(F^{\#}\xi)$
 ([6].1), $\partial E(F^{\#}\xi)$ est un bloc au-dessus de ∂Q , donc au dessus de
 $M \cup (-M')$, donc

$$\begin{aligned} \partial E(F^{\#}\xi) &= f^{\#}_{\xi_M} \cup f'^{\#}_{\xi_{M'}} \\ &= E(f^{\#}\xi) \cup E(f'^{\#}\xi). \end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que $F \circ p_{\xi/E(f^{\#}\xi)}^{\sim} = f \circ p_{\xi}^{\#}$

$$F \circ p_{\xi/E(f'^{\#}\xi)} = f' \circ p_{\xi'}^{\#}.$$

Ainsi $(E(F^{\#}\xi), F \circ p_{\xi}^{\sim})$ réalise le D-bordisme cherché.

§ 33 - Lemme.

Le cap-produit ne dépend pas du choix d'un représentant dans la classe de D-cobordisme de ξ .

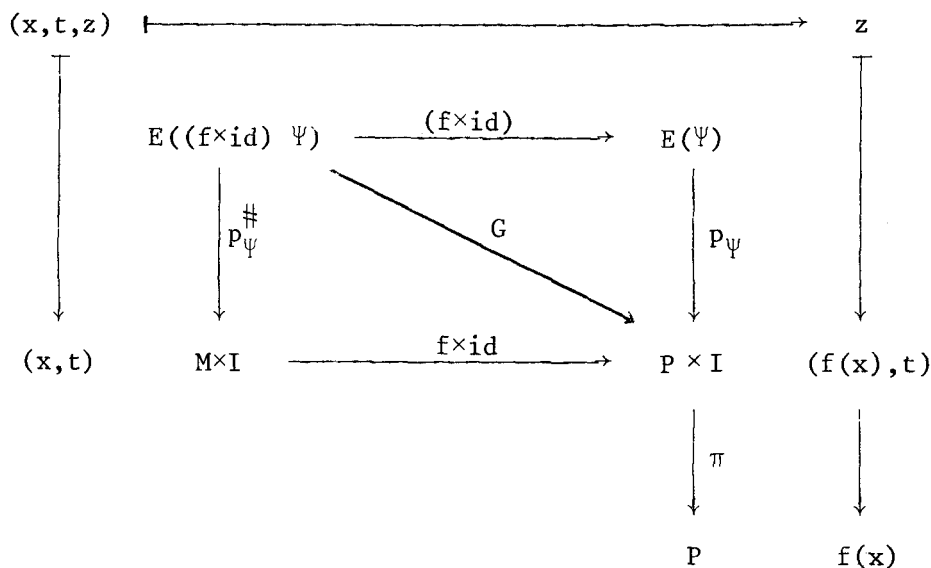
Démonstration : Supposons que $\xi \sim \xi'$. Comme au § 31, on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E(f^{\#}\xi') & \xrightarrow{f'^{\#}} & E(\xi') \\ \downarrow p_{\xi'}^{\#} & & \downarrow p_{\xi'} \\ M & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

Par hypothèse, il existe un P.F.B $\psi^q / K \times I$ tel que $\psi / K \times 0 \approx \xi$
 et $\psi / K \times 1 \approx \xi'$.

$|K \times I|$ étant un polyèdre quelconque, il n'y a pas de raison

pour que $E(\Psi)$ soit une pseudo-variété, mais on peut construire une pseudo-variété $Q = E((f \times id)^{\# \Psi})$ en utilisant le carré fibré :



$(M \times I)$ est une $(n+1)$ pseudo-variété, alors Q est une $(n+1-q)$ pseudo-variété et ∂Q est le bloc au-dessus de $\partial(M \times I)$, c'est-à-dire au-dessus de $(M \times 0) \cup ((-M) \times 1)$.

D'autre part, le bloc de $(f \times id)^{\# \Psi}$ au dessus de $M \times 0$ est formé des $(x,0,z)$ avec $x \in M$, $z \in E(\Psi)$ et $p_{\Psi}(z) = (f(x),0)$.

Mais $\Psi_{/K \times 0} \simeq \xi$ donc $z \in E(\xi)$ et d'après le diagramme du § 31 ces triples $(x,0,z)$ s'identifient aux (x,z) avec $f(x) = p_{\xi}(z)$, donc ils décrivent $E(f^{\# \xi})$.

Ainsi le bloc de $(f \times id)^{\# \Psi}$ au dessus de $M \times 0$ est $E(f^{\# \xi})$. De même celui au dessus de $M \times 1$ est $-E(f^{\# \xi'})$ car $M \times 1$ a l'orientation opposée à celle de M , il en est de même pour les blocs d'après les axiomes des P.F.B.

On a donc $\partial Q = E(f^{\# \xi}) \cup (-E(f^{\# \xi'}))$. On détermine maintenant la restriction $\pi \circ G_{/E(f^{\# \xi})}$. Un élément $(x,y) \in E(f^{\# \xi})$ s'identifie à $(x,0,y) \in E((f \times id)^{\# \Psi})$ tel que $\pi \circ G_{/E(f^{\# \xi})} = f \circ p_{\xi}^{\#}$,

de même $\pi_{0G} /_{E(f^{\#}_{\xi'})} = fop^{\#}_{\xi'}$.

En résumé (Q, π_{0G}) réalise le D-bordisme entre $(E(f^{\#}_{\xi}), fop^{\#}_{\xi})$ et $(E(f^{\#}_{\xi'}), fop^{\#}_{\xi'})$, ce qui achève la démonstration.

§ 34 - Cap-produits relatifs.

Si Q est un sous-polyèdre de P , d'après § 31, on a de façon évidente les cap-produits relatifs

$$34.1 \quad S\Omega_n(P, Q) \times S\Omega^q(P) \xrightarrow{\cap} S\Omega_{n-q}(P, Q)$$

$$34.2 \quad S\Omega_n(P, Q) \times S\Omega^q(P, Q) \xrightarrow{\cap} S\Omega_{n-q}(P)$$

$$34.3 \quad S\Omega_n(P) \times S\Omega^q(P, Q) \xrightarrow{\cap} S\Omega_{n-q}(P).$$

§ 35 - Propriétés du cap-produit.

Proposition. - Le cap-produit $S\Omega_n(P) \times S\Omega^q(P) \xrightarrow{\cap} S\Omega_{n-q}(P)$ est bilinéaire, $[e_p] \in S\Omega^0(P)$ est élément-unité à droite.

Démonstration : Soient d'abord $[M, f]$ et $[M', f']$ deux classes de D-bordisme dans $S\Omega_n(P)$. Les notations sont celles du § 31.

$([M, f] + [M', f']) \cap [\xi] = [M \sqcup M', f \sqcup f'] \cap [\xi]$ par définition de l'addition dans $S\Omega_n(P)$. Par définition du cap-produit, on obtient donc :

$[E(f \sqcup f')^{\#}_{\xi}, (f \sqcup f') \circ p^{\#}_{\xi}]$. Mais le produit fibré au-dessus d'une union disjointe est l'union disjointe des produits fibrés, donc ceci est encore égal à :

$[E(f^{\#}_{\xi}) \sqcup E(f'^{\#}_{\xi}), (fop^{\#}_{\xi}) \cup f'op^{\#}_{\xi}]$, par définition de l'addition dans $S\Omega_n(P)$, c'est aussi

$$[E(f^{\#}_{\xi}), fop^{\#}_{\xi}] + [E(f'^{\#}_{\xi}), f'op^{\#}_{\xi}]$$

c'est-à-dire d'après la définition du cap-produit :

$$[M, f] \cap \xi + [M', f'] \cap [\xi].$$

On montrerait de même que

$$[M, f] \cap ([\xi] + [\xi']) = [M, f] \cap [\xi] + [M, f] \cap [\xi'].$$

Soient enfin $E(\xi) = P$ et $p_\xi = \text{id}_P$. Le carré suivant est

fibré :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & P \\ \text{id}_M \downarrow & \searrow & \downarrow \text{id}_P \\ M & \xrightarrow{f} & P \end{array} .$$

Par définition du cap-produit et de $[e_P]$ (§ 22), on a

$$[M, f] \cap [e_P] = M, \text{foid}_M = [M, f].$$

§ 36 - Relation entre le cup et cap-produit.

Proposition. - Soient P un polyèdre. Pour toutes classes $a \in S\Omega_n(P), b \in S\Omega^q(P), c \in S\Omega^r(P)$, on a :

$$\boxed{(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cup c)} .$$

Démonstration : Nous nous contentons d'en donner les grandes lignes et nous passons des détails longs et fastidieux.

On considère des représentants $(M, f), \xi, \eta$ des classes a, b, c respectivement.

1) Calcul de $(a \cap b) \cap c$

pour calculer $a \cap b$, par définition (§ 31)

on considère le carré fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 E(f^{\#}_{\xi}) & \xrightarrow{f^{\#}} & E(\xi) \\
 \downarrow p^{\#}_{\xi} & & \downarrow p_{\xi} \\
 M & \xrightarrow{f} & P
 \end{array}$$

alors $a \cap b = [E(f^{\#}_{\xi}), fop^{\#}_{\xi}]$.

Ensuite, pour l'expression de $(a \cap b) \cap c$, on considère le carré fibré

$$\begin{array}{ccc}
 E(\Psi) & \xrightarrow{(fop^{\#}_{\xi})^{\#}} & E(\eta) \\
 \downarrow p^{\#}_{\eta} & & \downarrow p_{\eta} \\
 E(f^{\#}_{\xi}) & \xrightarrow{fop^{\#}_{\xi}} & P
 \end{array}$$

alors

$$36.1 \quad (a \cap b) \cap c = [E(\Psi), fop^{\#}_{\xi} \circ p^{\#}_{\eta}]$$

2) Calcul de $a \cap (b \cup c)$

Pour calculer $b \cup c$, par définition (§ 24), on considère le carré fibré

$$\begin{array}{ccc}
 E(\theta) & \xrightarrow{\Delta^{\#}} & E(\xi) \times E(\eta) \\
 \downarrow (p_{\xi} \times p_{\eta})^{\#} & & \downarrow p_{\xi} \times p_{\eta} \\
 P & \xrightarrow{\Delta} & P \times P
 \end{array}$$



(pour simplifier, on a noté $\theta = \Delta^\#(\xi \times \eta)$)

alors $b \cup c = [\theta]$

définissons $p_\Psi : E(\Psi) \rightarrow M$ par $p_\Psi(y, x, m) = m$

$\tilde{f} : E(\Psi) \rightarrow E(\theta)$ par $\tilde{f}(y, x, m) = (x, y, f(m))$

pour tous $x \in E(\xi)$, $y \in E(\eta)$, $m \in M$.

Il n'est pas difficile (mais long) de voir que le carré suivant est fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 E(\Psi) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\theta) \\
 \downarrow p_\Psi & & \downarrow (p_\xi \times p_\eta)^\# \\
 M & \xrightarrow{f} & P
 \end{array}$$

alors, par définition du cap-produit on a

$$36.2 \quad a \cap (b \cup c) = [E(\Psi), \text{fop}_\Psi].$$

Il est facile de voir que $\text{fop}_\Psi = \text{fop}_\xi^\# \circ p_\eta^\#$.

Alors il suffit de comparer 36.1 et 36.2 pour conclure.

Note : André Didierjean m'informe qu'Eladio Dominguez a défini également le produit extérieur, le cup-produit et le cap-produit ([16], II) de la même façon que dans ce travail.

Mais E. Dominguez ne donne qu'une esquisse des démonstrations, il ne donne pas la 2ème définition du cup produit (§ 25), ni les propriétés du cup et du cap-produit.

CHAPITRE II

DUALITÉ

Dominguez définit dans [8] l'homomorphisme de Poincaré β : $S\Omega^q(P) \rightarrow S\Omega_{n-q}(P)$. Celui-ci est un isomorphisme lorsque P est une n -variété. Compte-tenu des isomorphismes $S\Omega^q(P) \xrightarrow{\cong} H^q(P)$ et $S\Omega_{n-q}(P) \xrightarrow{\cong} H_{n-q}(P)$, l'homomorphisme β commute avec l'homomorphisme de Poincaré connu en homologie et cohomologie ([8].11).

Nous définissons dans ce chapitre l'isomorphisme d'Alexander et l'homomorphisme de Thom en D -bordisme et D -homomorphisme. Nous montrons qu'ils forment avec l'homomorphisme β un diagramme commutatif.

Nous construisons enfin des isomorphismes, notés $\approx \times [\gamma]^n$, qui serviront au chapitre III.

A) DUALITÉ DE POINCARÉ.

§ 37 - L'homomorphisme de Poincaré.

Définition. - Soit $P = |K|$ une n -pseudo-variété sans bord. Si $[\xi] \in S\Omega^q(P)$, l'application continue $E(\xi) \xrightarrow{p_\xi} P$ définit une pseudo-variété singulière $(E(\xi), p_\xi)$. L'homomorphisme de Poincaré $\beta : S\Omega^q(P) \rightarrow S\Omega_{n-q}(P)$ est défini par $\beta[\xi] = [E(\xi), p_\xi]$.

Remarque :

([8].8 corollaire) Si P est une n -variété, alors β est un isomorphisme.

§ 38 - Classe fondamentale d'une pseudo-variété.

Définition.- Soit P une n -pseudo-variété sans bord. La classe fondamentale de P est l'élément :

$$[P, id_p] \in S\Omega_n(P).$$

Remarque : Par l'isomorphisme ([5].8) cette classe fondamentale correspond à celle qui est connue en homologie.

§ 39 - Proposition.-

Soit P une n -pseudo-variété sans bord. L'homomorphisme de Poincaré $\beta : S\Omega^q(P) \rightarrow S\Omega_{n-q}(P)$ est le cap-produit par la classe fondamentale de P .

Démonstration :

Etant donné $[\xi] \in S\Omega^q(P)$ le carré suivant est fibré :

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{p_\xi} & P \\ \downarrow id & & \downarrow id_p \\ E(\xi) & \xrightarrow{p_\xi} & P \end{array}$$

on peut donc considérer le cap-produit

$$S\Omega_n(P) \times S\Omega^q(P) \xrightarrow{\cap} S\Omega_{n-q}(P).$$

En particulier :

$$[P, id_p] \cap [\xi] = [E(\xi), p_\xi] = \beta[\xi].$$

§ 40 - Relation entre l'homomorphisme de Poincaré, le cup et le cap-produit.

Proposition. - Soit P une n -pseudo-variété, pour tout $q \in \mathbb{Z}$;

$\beta_q : S\Omega^q(P) \rightarrow S\Omega_{n-q}(P)$ l'homomorphisme de Poincaré. Pour toutes classes de D-cobordisme $a \in S\Omega^q(P)$, $b \in S\Omega^r(P)$ on a :

$$\beta_q(a) \cap b = \beta_{q+r}(a \cup b)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \beta_q(a) \cap b &= ([P, \text{id}] \cap a) \cup b && (§ 39) \\ &= [P, \text{id}] \cap (a \cup b) && (§ 36) \\ &= \beta_{q+r}(a \cup b) && (§ 39). \end{aligned}$$

B) L'ISOMORPHISME D'ALEXANDER.

1°) Introduction.

Soit une n -pseudo-variété W contenue dans une m -variété M . On va définir un ε -voisinage T de W dans M , qui sera une variété à bord ∂T tel que $\partial T \cap W \neq \emptyset$.

Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ on connaît les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^{q+m-n}(M, M-W) & \xrightarrow{\approx f} & H^{q+m-n}(T, T-W) & \xrightarrow{\approx g} & H^{q+m-n}(T, \partial T) & \xrightarrow{\approx h} & S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T) \\ \downarrow \text{Alexander} & & & & & & \swarrow \\ H_{n-q}(W) & \xleftarrow{\approx k} & S\Omega_{n-q}(W) & \xleftarrow{\approx \pi_*} & S\Omega_{n-q}(T) & & \end{array}$$

où f est une excision, g est une rétraction, h et k sont construits par E. Dominguez dans [6] et [5] respectivement.

Enfin π_* est induite par la rétraction naturelle (§ 47).

L'objet de ce qui suit est la construction directe de l'isomorphisme d'Alexander $\alpha : S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T) \rightarrow S\Omega_{n-q}(T)$.

§ 41 - Définition de α .

Soit $[\xi] \in S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T)$ et le carré fibré

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\text{id}} & E(\xi) \\ P_\xi \downarrow & \searrow P_\xi & \downarrow P_\xi \\ T & \xrightarrow{\text{id}} & T \end{array}$$

α est le cap-produit (§ 31) par la classe fondamentale du voisinage T .

$$\alpha[\xi] = [T, \text{id}_T] \cap [\xi] = [E(\xi), P_\xi]$$

§ 42 - Théorème.

α est un isomorphisme.

La démonstration fait l'objet des §§ 43 à 51.

2°) Voisinages simpliciaux.

§ 43 - L'application simpliciale ψ_L .

Pour toute paire de complexes simpliciaux (K, L) on désignera par voisinage simplicial de L dans K aussi bien le sous-complexe de K :

$$N(L; K) = \{ \sigma \in K : \sigma < \tau, \tau \cap |L| \neq \emptyset \}$$

que le polyèdre sous-jacent.

ψ_L est l'unique application simpliciale $K \rightarrow [0,1]$ telle que $\psi_L(v) = 0$ pour tout sommet v de L et $\psi_L(v) = 1$ pour tout sommet de v de $K-L$.

§ 44 - Théorème ([11].3.2).-

Pour une paire simpliciale (K,L) les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $L = \psi_L^{-1}(0)$.
- (ii) $\forall \sigma \in K : \sigma \cap |L| = \emptyset$ ou $\sigma \cap |L| < \sigma$
- (iii) $\forall \sigma \in K-L : \sigma \cap |L| \neq \partial\sigma$
- (iv) $\forall \sigma \in K : \underline{\text{si tous les sommets de } \sigma \text{ sont dans } |L|}$,
alors $\sigma \in L$.

La démonstration est facile. Si L satisfait à l'une des conditions précédentes, on dit que L est plein dans K et on notera $L \not\in K$.

§ 45 - Théorème.

Pour toute paire simpliciale (K,L) il existe une subdivision L' de L telle que $L' \not\in K$.

Nous n'avons pas trouvé la démonstration de ce résultat dans la littérature. Elle est cependant facile : si $L \not\in K$, d'après (iii) du § 44 il existe des simplexes $\sigma \in K-L$ tels que $\sigma \cap |L| = \partial\sigma$. Pour chacun de ces σ choisissons un point $b(\sigma) \in \overset{\circ}{\sigma}$ et remplaçons σ par la subdivision obtenue en étoilant σ à partir de $b(\sigma)$ (voir, par exemple [10] I.2). Alors le sous-complexe L' de K ainsi obtenu est plein dans K puisqu'il vérifie alors (iii) du § 44.

45.1.- Corollaire.

Pour toute paire de polyèdres (P,Q) il existe des triangulations K et L de P et Q respectivement telles que $L \cap K = \emptyset$.

C'est ce qu'on supposera toujours par la suite.

§ 46 - Voisinages dérivés.

Soit (K,L) une paire de complexes simpliciaux.

Un complexe dérivé de K près de L est une subdivision K' de K obtenue en étoilant ([10].I.2 ou [11].2.subdivisions) tous les simplexes de K ayant au moins un sommet dans L et au moins un sommet dans $K-L$. Notons que les simplexes de L ne sont pas subdivisés.

Le voisinage simplicial $N(L;K')$ s'appelle alors un voisinage dérivé de L dans K.

Un cas particulier de voisinages dérivés est le suivant : soit $0 < \epsilon < 1$, les simplexes que l'on étoile sont étoilés en un point de $\Phi_L^{-1}(\epsilon)$. Le voisinage obtenu s'appelle en ϵ -voisinage, il est noté $N_\epsilon(L;K)$.

La figure 46.1 représente un ϵ -voisinage avec $\dim L = 1$, $\dim K = 2$ et $\epsilon = \frac{2}{3}$

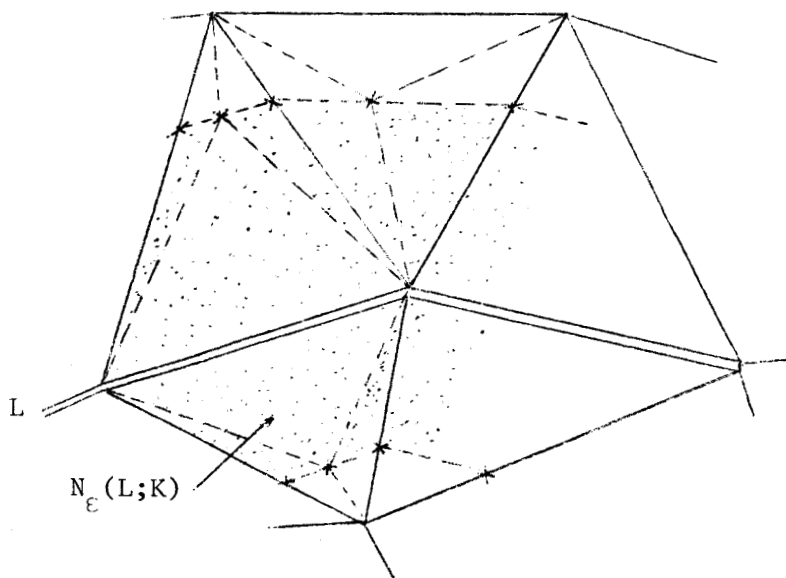


Fig. 46.1

§ 47 - Proposition.

Soient des polyèdres $W = |L|$, $M = |K|$ tels que $W \subset M$, $|T|$ un ε -voisinage de W dans M . Alors W est un rétract par déformation de $|T|$.

Démonstration :

On supposera (par nécessité) que $L \not\subset K$. Le ε -voisinage $|T|$ admet une décomposition en cellules du type $\sigma \cap \psi_L^{-1}(\varepsilon)$ ou $\sigma \cap \psi_L^{-1}[0, \varepsilon]$ où σ est un simplexe ayant au moins un sommet dans L et au moins un sommet dans $K-L$. Un sommet d'une telle cellule est ou bien un sommet dans L , ou bien un point x intérieur à un unique 1-simplexe $[a, b]$ tel que $a \in K-L$ et $b \in L$. On sait qu'on peut construire une triangulation J de $|T|$ dont les sommets sont exactement ceux des cellules précédentes.

La figure 47.1. représente un simplexe $\sigma = [a, b, c]$ avec b et c dans L , a dans $K-L$. Les points t, y, z sont dans $\sigma \cap \psi_L^{-1}(\varepsilon)$ et σ est étoilé (en pointillés) en t, y, z . La cellule $(t z c b)$ peut être décomposée en les simplexes $[t, z, b]$, $[z, b, c]$.

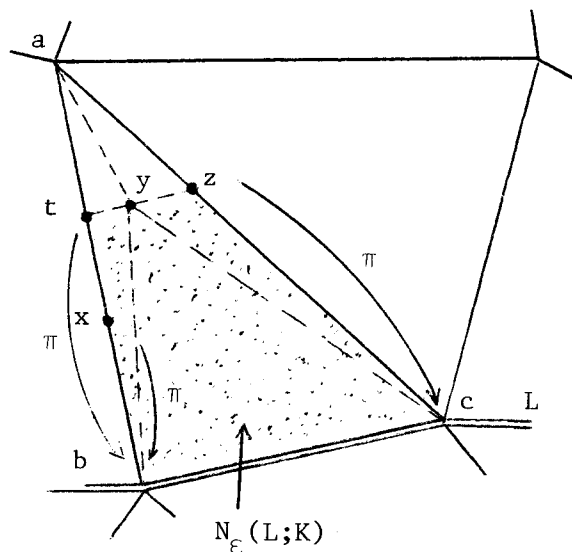


Fig. 47.1

On peut définir une application simpliciale $\pi : J \rightarrow L$ de la façon suivante :

si $b \in L$, alors $\pi(b) = b$

si $x \in]a, b[$, alors $\pi(x) = b$ (fig. 47.1)

et on prolonge π par linéarité sur les simplexes de J .

Notons encore $\pi : |T| \rightarrow W$ l'application entre polyèdres déterminée par l'application simpliciale π .

Il est évident que $\pi|_W = \text{id}_W$. On va montrer que $i \circ \pi$ est homotope à $\text{id}_{|T|}$.

$$\begin{array}{ccc} |T| & & \\ \pi \downarrow & \searrow i \circ \pi & \\ W & \xrightarrow{\quad} & |T| \end{array} .$$

Pour cela, on définit $H : |T| \times I \rightarrow |T|$ comme suit :

- si $x \notin W$ alors $x \neq \pi(x)$ par définition de π , donc $[x, \pi(x)]$ est un segment, on pose

$$H(x, t) = tx + (1-t)\pi(x)$$

- si $x \in W$ on pose

$$H(x, t) = x = \pi(x).$$

Pour montrer la continuité de H le seul problème réside au voisinage d'un point $x' \in W$. Soit $x \notin W$, on a $H(x, t) = tx + (1-t)\pi(x)$ et $H(x', t) = \pi(x')$, si x tend vers x' , alors $\pi(x)$ tend vers $\pi(x') = x'$ donc $H(x, t)$ tend vers $tx' + (1-t)x' = x' = \pi(x')$, c'est-à-dire vers $H(x', t)$.

On a bien $H(x,0) = \pi(x)$ et $H(x,1) = x$ pour tout x de $|T|$.
D'où H réalise l'homotopie cherchée.

§ 48 - Corollaire.

$$S\Omega_*(W) \simeq S\Omega_*(T).$$

En effet, puisque $S\Omega_*$ est une théorie d'homologie (§ 28),
l'homomorphisme $\pi_* = S\Omega_*(\pi)$ induit par π réalise un tel isomorphisme.

§ 49 - Théorème.

Les hypothèses étant celles du § 47, supposons que M soit une m -variété. Alors $|T|$ est aussi une m -variété.

Démonstration :

Nous utilisons des résultats de [10].

D'abord il est évident que $|T| = \phi_L^{-1}([0, \varepsilon])$, alors ([10], lemme 2.6)

$|T|$ est un voisinage dérivé de W dans M . D'après ([10], théorème 2.11)

$|T|$ est un voisinage régulier, enfin ([10] II.4. définition) $|T|$ est une m -variété.

3°) L'isomorphisme d'Alexander.

§ 50 - Théorème ([8].3)

Supposons que :

- 1) $|K|$ est une pseudo-variété orientée avec bord $\partial K \in K$ et ∂K admet un collier dans K .
- 2) $|L|$ est une variété orientable.
- 3) $f : K \rightarrow L$ est une application simpliciale telle que $f^{-1}(\partial L) = \partial K$.

Alors il existe un Pseudo-Fibré en Blocs $|K| \xrightarrow{f'} |L|$ tel
que les pseudo-variétés singulières $(|K|, f)$ et $(|K|, f')$ soient
D-bordantes.

Remarque : L'hypothèse selon laquelle $|\partial K|$ admet un collier dans $|K|$ n'est pas restrictive : Dominguez démontre dans [4] que la théorie de D-bordisme dans le cas général est la même que pour celle des pseudo-variétés à colliers. De façon plus précise : toute pseudo-variété singulière (P, f) est D-bordante à une autre pseudo-variété singulière (P', f') telle que $\partial P'$ admette un collier dans P' .

§ 51 - Démonstration du théorème du § 42.

On a posé $\alpha : S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T) \rightarrow S\Omega_{n-q}(T)$

$$\alpha([\xi]) = [T, \text{id}] \cap [\xi] = [E(\xi), p_{\xi}]$$

α est donc défini par un cap-produit relatif (§ 34-2)

$$S\Omega_m(T, \partial T) \times S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T) \longrightarrow S\Omega_{n-q}(T) .$$

On sait que α est un homomorphisme de groupes car le cap-produit est bilinéaire.

On va construire un homomorphisme réciproque

$$\alpha' : S\Omega_{n-q}(T) \longrightarrow S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T) .$$

Soit donc $[P, f] \in S\Omega_{n-q}(T)$. On peut supposer que f est simpliciale (§ 30). D'après § 49, $|T|$ est une m -variété. D'autre part, $\partial P = \emptyset$ par hypothèse et donc (§ 50) il existe un P.F.B

$\eta : P \xrightarrow{f'} |T|$ tel que

$$(1) \quad (P, f') \sim (P, f)$$

On pose $\alpha'([\bar{P}, \bar{f}]) = [\bar{\eta}]$ (i est une classe de D-cobordisme).
est bien définie d'après (1).

Alors $\alpha \circ \alpha'([\bar{P}, \bar{f}]) = \alpha([\bar{\eta}]) = [\bar{P}, \bar{f}']$ par définition de α .

$\alpha \circ \alpha'([\bar{P}, \bar{f}]) = [\bar{P}, \bar{f}]$ d'après (1)

et $\alpha' \circ \alpha([\bar{\xi}]) = \alpha'([\bar{E}(\xi), p_{\bar{\xi}}]) = [\bar{\xi}]$ d'après la définition de α' et puisque ξ est un P.F.B.

Finalement α' est l'homomorphisme réciproque de α et α est un isomorphisme.

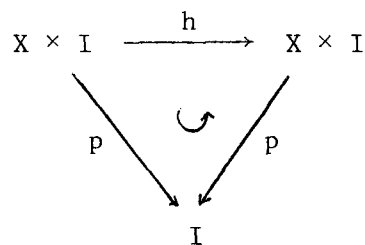
C) L'HOMOMORPHISME DE THOM.

§ 52 - Rappels : isotopies [10].

Une isotopie ambiante d'un polyèdre X est un homéomorphisme linéaire par morceaux $h : X \times I \rightarrow X \times I$ tel que

1) $\forall x \in X : h(x, 0) = (x, 0)$.

2) Le diagramme suivant est commutatif, p désignant la projection canonique sur I :



Autrement dit pour tout $t \in I$ et tout $x \in X$, $h(x, t)$ est de la forme $(h_t(x), t)$ où h_t est un homéomorphisme $X \xrightarrow{\cong} X$ linéaire par morceaux. Notons que $h_0 = id_X$.

Si X_1 et X_2 sont deux sous-polyèdres de X tels que $h_1(X_1) = X_2$, on dit qu'ils sont isotopes et que h envoie X_1 sur X_2 .

Si un homéomorphisme $k : X \xrightarrow{\cong} X$ vérifie $k = h_1$, on dit que k est isotope à l'identité.

On dit enfin que h est fixe sur un sous-polyèdre X_0 de X si $h|_{X_0 \times I} = \text{id}_{X_0 \times I}$.

§ 53 - Isotopie des voisinages dérivés.

Lemme ([10].2.9).-

Soit W un sous-polyèdre d'un polyèdre M . Alors si N_1 et N_2 sont deux voisinages dérivés de W dans M , il existe une isotopie ambiante de M , fixe sur W , qui envoie N_1 sur N_2 .

§ 54 - Corollaire.

Avec les notations et les hypothèses précédentes soient T un ε -voisinage de W dans M et U un voisinage tubulaire. Alors $S\Omega^*(T, \partial T) = S\Omega^*(U, \partial U)$ et $S\Omega_*(T, \partial T) = S\Omega_*(U, \partial U)$.

Démonstration : D'après § 53, T et U sont homéomorphes et, d'autre part, $S\Omega^*$ et $S\Omega_*$ sont des théories de cohomologie et d'homologie.

§ 55 - Proposition.

Tout voisinage tubulaire de W dans M se rétracte sur W .

Démonstration : Soit d'abord T un ε -voisinage de W dans M : alors il existe (§ 47) une rétraction par déformation $\pi : T \rightarrow W$.

Si U est un voisinage tubulaire, c'est a fortiori un voisinage dérivé et par § 53 il existe une isotopie ambiante h de M telle que

$$(1) \quad h_1(U) = T$$

$$(2) \quad h_{/W \times I} = \text{id}_{W \times I}.$$

Soit $r : U \rightarrow W$ défini par $r = \pi \circ h_1$. Si $x \in W$ alors $r(x) = \pi \circ h_1(x) = \pi(x)$ d'après (2), donc $r(x) = x$ car π est une rétraction de T sur W , donc $r_{/W} = \text{id}_W$.

Soit $H : T \times I \rightarrow T$ l'homotopie entre π et id_T utilisée dans la démonstration du § 47, on définit :

$$F : U \times I \rightarrow U \quad \text{par} \quad F(x,t) = h_1^{-1} \circ H(h_1(x),t)$$

(cela a un sens car h_1 est un homéomorphisme).

On a $F(x,0) = h_1^{-1} \circ H(h_1(x),0) = h_1^{-1} \circ \pi \circ h_1(x)$ (définition de H).

$$\begin{aligned} F(x,0) &= h_1^{-1} \circ r(x) && \text{(définition de } r) \\ &= r(x) && \text{(d'après (2) et le fait que } r(x) \in W) \end{aligned}$$

$$F(x,1) = h_1^{-1} \circ H(h_1(x),1) = h_1^{-1} \circ h_1(x)$$

$$F(x,1) = x.$$

Cela montre que r est bien une rétraction par déformation de U sur W .

§ 56 - La classe de Thom.

Soit une pseudo-variété W^n contenue dans une variété orientée M^m . Soit T un voisinage tubulaire (ou un ε -voisinage) de W dans M , J la triangulation de T , J^* une décomposition cellulaire duale de T relativement à une subdivision barycentrique J' de J .

On construit un P.F.B. η d'espace total $E(\eta) = W$, de base

J^* et tel que $p_\eta : W \hookrightarrow T = |J^*|$ est l'injection canonique, donc :

$$56.1 \quad \boxed{p_\eta^{-1}(d) = \eta_d = d \cap W} \quad \text{pour tout } d \in J^*.$$

Cela satisfait aux axiomes du § 12 : trivialement pour les trois premiers.

Pour PFB_4 , soit $d \in J^*$, $\eta_d = d \cap W$ est l'intersection de deux pseudo-variétés orientées, il en est de même de η_d .

Chaque cellule d étant transverse à W , on a :

$$\text{codim } \eta_d = \text{codim}(d \cap W) = \text{codim } d + \text{codim } W$$

$$m - \dim \eta_d = (m - \dim d) + (m-n), \quad \text{donc :}$$

$$\dim d - \dim \eta_d = m-n \quad \text{est une constante.}$$

$\partial \eta_d = \partial(d \cap W) = \partial d \cap W$ car $\partial W = \emptyset$ par hypothèse donc d'après 56.1 : $\partial \eta_d = \eta_{\partial d}$.

Pour montrer que $\partial \eta_d$ admet un collier dans η_d il suffit de montrer que $\partial \eta_d$ admet en tout point un collier local dans η_d (§ 9.2).

Pour toute cellule $d \in J^*$, $\partial d \cap W$ est un sous-complexe simplicial de J' ([15]-2). Si $\partial d \cap W \neq \emptyset$, un élément x de $\partial d \cap W$ est dans ∂d et une face σ d'un simplexe τ de J' , contenu dans W .

Alors $x \in \partial d \cap \partial \tau \subseteq \partial(d \cap \tau)$ donc x admet un collier dans $d \cap \tau$, donc dans $d \cap W$, car $d \cap \tau$ est une variété.

Toute cellule d de J^* est duale d'un simplexe σ de J , elle sera munie de l'orientation telle que : l'orientation de σ suivie de celle de d donne l'orientation de M ([15].2). Alors les nombres d'incidence $[d : d']$ sont bien définis lorsque $d' < d$ dans J^* et si les blocs $d \cap W, d' \cap W$ sont non vides (si non il n'y a rien à vé-

rifier) on a :

$[\eta_d : \eta_d] = [d \cap W : d' \cap W] = [d : d']$, d'où la conservation des nombres d'incidence.

Puisqu'enfin $W \cap \partial T = \emptyset$ on a ainsi déterminé un élément $[\eta] \in S\Omega^{m-n}(T, \partial T)$, appelé classe de Thom de W dans M.

Remarque : Par l'isomorphisme de [6], cette classe de Thom correspond à la classe de Thom connue en cohomologie.

§ 57 - L'homomorphisme de Thom.

Définition. - L'homomorphisme de Thom : $\lambda : S\Omega^q(T) \rightarrow S\Omega^{q+m-n}(T, T)$ est le cup-produit par la classe de Thom $[\eta]$.

Remarques :

1. On verra au § 58 que si W est une variété, λ est un isomorphisme.
2. Par les isomorphismes de Dominguez ([5] et [6]) λ correspond à l'homomorphisme de Thom classique.

D) RELATION ENTRE LES HOMOMORPHISMES DE POINCARÉ, ALEXANDER ET THOM.

§ 58 - Théorème.

Soit $\beta : S\Omega^q(W) \rightarrow S\Omega_{n-q}(W)$ l'homomorphisme de Poincaré (§ 37),
 $\alpha : S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T) \xrightarrow{\cong} S\Omega_{n-q}(T)$ l'isomorphisme d'Alexander (§ 41),
 $\lambda : S\Omega^q(T) \rightarrow S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T)$ l'homomorphisme de Thom (§ 57) et $\pi : T \rightarrow W$
une rétraction par déformation.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 S\Omega^q(W) & \xrightarrow{\cong \pi^*} & S\Omega^q(T) \\
 \downarrow \beta & & \searrow \lambda \\
 & & S\Omega^{q+m-n}(T, \partial T) \\
 & & \swarrow \alpha \cong \\
 S\Omega_{n-q}(W) & \xleftarrow{\cong \pi_*} & S\Omega_{n-q}(T)
 \end{array}$$

Démonstration : Soit $[\xi] \in S^q(W)$, par définition on a $\beta([\xi]) = [E(\xi), p_\xi]$.

Considérons les carrés fibrés :

$$\begin{array}{ccccc}
 E(\tilde{p}_\xi p^\#_\xi) & \xrightarrow{p^\#_\eta} & E(p^\#_\xi) & \xrightarrow{\pi^\#} & E(\xi) \\
 \downarrow \tilde{p}_\xi & & \downarrow p^\#_\xi & & \downarrow p_\xi \\
 E(\eta) = W & \xrightarrow{p_\eta} & T & \xrightarrow{\pi} & W
 \end{array}$$

Par définition (§ 17), on a $\pi^*([\xi]) = [p^\#_\xi]$, par § 57, on a $\lambda([p^\#_\xi]) = [p^\#_\xi] \cup [\eta] = [\eta * \tilde{p}_\xi p^\#_\xi]$ (§ 25) mais puisque $\pi \circ p = \text{id}_W$ (π est une rétraction par déformation) alors le P.F.B $\tilde{p}_\xi p^\#_\xi$ n'est autre que ξ (à un isomorphisme près), donc $\lambda([p^\#_\xi]) = [\eta * \xi]$.

D'autre part (§ 41) $\alpha([\eta * \xi]) = [E(\eta * \xi), p(\eta * \xi)]$
 c'est-à-dire $\alpha([\eta * \xi]) = [E(\xi), p_\eta \circ p_\xi]$.

Enfin (§ 28) : $\pi_*([E(\xi), p_\eta \circ p_\xi]) = [E(\xi), \pi \circ p_\eta \circ p_\xi]$,
 mais $p_\eta \circ p_\xi$ est à valeurs dans W , comme $\pi/W = \text{id}_W$ et que $p_\eta : W \rightarrow T$
 est l'inclusion canonique, la classe précédente est donc $[E(\xi), p_\xi]$,
 d'où la commutativité du diagramme.

58.1.- Corollaire.- Si W est une variété, l'homomorphisme de Thom est un isomorphisme.

C'est évident puisque l'homomorphisme de Poincaré est alors un isomorphisme.

E) LES PRODUITS $X[\gamma]^n$

Ces produits permettent de déterminer des isomorphismes entre certains groupes de D-cobordisme.

§ 59 - Définition.

Soit σ un 1-simplexe orienté (on peut considérer que c'est $I = [0,1]$ muni de son orientation habituelle) et soit $E(\gamma)$ un point (orienté + par exemple) se projetant dans σ (fig. 59.1)

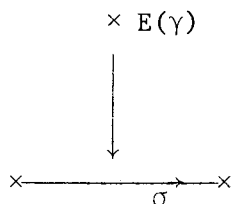


Fig. 59.1

Ceci détermine de façon évidente un P.F.B. (§ 12) de rang 1 et une classe de D-cobordisme notée

$$[\gamma] \in S\Omega^1(\sigma, \partial\sigma) .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $[\gamma]^n$ comme suit :
 d'abord $[\gamma]^1 = [\gamma]$ et si $n \geq 2$ on peut définir le produit $\gamma^n = \gamma \times \gamma \times \dots \times \gamma$ de n P.F.B. égaux à γ et le produit extérieur $[\gamma]^n = [\gamma] \times [\gamma] \times \dots \times [\gamma]$, élément de $S\Omega^n(\partial^n, \partial\sigma^n)$ (§§ 15 et 21).



Notons qu'ici $\sigma^n = \sigma \times \sigma \times \dots \times \sigma$ (n facteurs) et il est clair que $[\gamma]^n = [\gamma^n]$.

59.1.- Remarque : D'après § 15, γ^n est un P.F.B. dont l'espace total est un point se projetant dans σ^n .

§ 60 - Théorème.

Soit (P, Q) une paire de polyèdres compacts. Alors pour tout
 $i \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application
 $S\Omega^i(P, Q) \xrightarrow{\times [\gamma]^n} S\Omega^{i+n}(P \times \sigma^n, (P \times \partial \sigma^n) \cup (Q \times \sigma^n))$ est un isomorphisme.

Démonstration :

Il suffit naturellement de considérer le cas $n = 1$. Alors on a $[\bar{\gamma}]^1 = [\bar{\gamma}]$. Les produits extérieurs étant bilinéaires, on sait déjà que $\times [\bar{\gamma}]^n$ est un homomorphisme de groupes.

$\times [\bar{\gamma}]$ est injectif.

Soit donc $[\xi] \in S\Omega^i(P, Q)$ tel que $[\xi] \times [\bar{\gamma}] = 0$. Cela signifie que $(\xi \times \gamma)R \emptyset$, il existe donc un P.F.B $\theta / (P \times \sigma) \times I$ tel que

1) $\theta / (P \times \sigma) \times 0 = \theta / P \times \sigma = \xi \times \gamma$

2) $\theta / (P \times \sigma) \times 1 = \emptyset$.

Notons $\sigma = [a, b]$ et soit le P.F.B $\Psi = \theta / (P \times a) \times I$. On a

$\Psi / (P \times a) \times 0 = \theta / (P \times a) \times 0 = \theta / P \times a = \xi \times \gamma / P \times a$ (d'après (1),

donc $\Psi / (P \times a) \times 0 = \xi / P$ car $E(\gamma)$ est un point.

$$3) \quad \Psi /_{(P \times a) \times 0} = \xi /_P .$$

Des conditions $P \times a \times 1 \subset P \times \sigma \times 1$ et 2) il résulte que

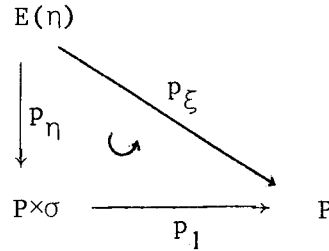
$$4) \quad \Psi /_{(P \times a) \times 1} = \emptyset ,$$

d'après 3) et 4), on a $\xi \mathcal{R} \emptyset$, d'où $[\xi] = 0$.

$\times [\gamma]$ est surjectif.

Soit $[\eta] \in S^{i+1}(P \times \sigma, (P \times \partial \sigma) \cup (Q \times \sigma))$. On va construire $[\xi] \in S^i(P, Q)$ telle que $[\xi] \times [\gamma] = [\eta]$.

On pose $E(\xi) = E(\eta)$ et $p_\xi = p_1 \circ p_\eta$ (diagramme)



Il faut s'assurer que ξ est bien un P.F.B. au-dessus de (P, Q) donc pour cela vérifier les axiomes PFB₁ à PFB₅ du § 12 et enfin voir que $(\xi \times \gamma) \mathcal{R} \eta$.

PFB₁ et PFB₂ sont trivialement vérifiés.

p_1 est évidemment linéaire par morceaux, p_η aussi car η est un P.F.B., donc $p_1 \circ p_\eta = p_\xi$ est linéaire par morceaux et PFB₃ est vérifié.

Pour PFB₄, on considère un m -simplexe τ de la triangulation de P . On a $p_1^{-1}(\tau) = \tau \times \sigma$, et, par définition de p_ξ on a $p_\xi^{-1}(\tau) = p_\eta^{-1}(\tau \times \sigma)$ est une pseudo-variété : c'est le bloc $\eta_{\tau \times \sigma}$ car η est un P.F.B. On a donc

$$5) \quad \xi_{\tau} = \eta_{\tau \times \sigma} .$$

Par définition $\text{rg } \eta = i+1$, c'est-à-dire :

$\dim(\tau \times \sigma) - \dim \eta_{\tau \times \sigma} = i+1$. Comme $\dim \sigma = 1$ et compte tenu de 5) on a :

$$\dim \tau + 1 - \dim \xi_{\tau} = i+1$$

$$\dim \tau - \dim \xi_{\tau} = i \quad \text{d'où} \quad \text{rg } \xi = i.$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \partial \xi_{\tau} &= \partial \eta_{\tau \times \sigma} \quad \text{par définition de } \xi \quad ; \\ &= \eta_{\partial(\tau \times \sigma)} \quad \text{car } \eta \text{ est un P.F.B.} \quad ; \\ &= \eta_{(\partial \tau \times \sigma) \cup (\tau \times \partial \sigma)} = \eta_{\partial \tau \times \sigma} \cup \eta_{\tau \times \partial \sigma}. \end{aligned}$$

Mais par définition η , ses blocs sont vides au-dessus de $\tau \times \partial \sigma$. On a donc $\partial \xi_{\tau} = \eta_{\partial \tau \times \sigma}$ donc $\partial \xi_{\tau} = \xi_{\partial \tau}$ d'après 5).

Il est évident que $\xi/Q = \emptyset$. L'égalité 5) entraîne que chaque ξ_{τ} a un collier puisque ceci est vrai pour $\eta_{\tau \times \sigma}$.

Enfin, l'axiome P.F.B.₅ concerne la conservation des nombres d'incidence. On suppose donc $\tau' < \tau$.

$$[\tau \times \sigma : \tau' \times \sigma] = [\tau : \tau']. \quad (\S 6).$$

D'autre part, $[\tau \times \sigma : \tau' \times \sigma] = [\eta_{\tau \times \sigma} : \eta_{\tau' \times \sigma}]$ car η est un P.F.B.

$$\text{Donc } [\tau \times \sigma : \tau' \times \sigma] = [\xi_{\tau} : \xi_{\tau'}] \quad \text{d'après 5)}.$$

$$\text{Finalement, } [\xi_{\tau} : \xi_{\tau'}] = [\tau : \tau'].$$

Pour achever la démonstration, il suffit de construire un isomorphisme entre $\xi \times \gamma$ et η . Pour cela, on définit $f : E(\xi \times \gamma) \rightarrow E(\eta)$ par $f(x, p^{\underline{t}}) = x$.

Il est évident que f détermine un homéomorphisme linéaire par morceaux entre $E(\xi \times \gamma)$ et $E(\eta)$. Il reste à voir que f respecte les blocs et les nombres d'incidence.

Le complexe de boules sous-jacent à $P \times \sigma$ est décrit par les $\tau \times \sigma$ (τ : simplexe de P) et les $\tau \times \sigma'$ ($\sigma' < \sigma$), donc σ' est un point.

Dans le 1er cas $(\xi \times \gamma)_{\tau \times \sigma} = \xi_{\tau} \times \gamma_{\sigma} = \xi_{\tau}$ car γ_{σ} est un point
 $= \eta_{\tau \times \sigma}$ d'après 5)

$f(\xi_{\tau} \times \gamma_{\sigma}) = \xi_{\tau}$ par définition de f , donc

$$f(\xi_{\tau} \times \gamma_{\sigma}) = \eta_{\tau \times \sigma} .$$

Dans le 2ème cas $(\xi \times \gamma)_{\tau \times \sigma'} = \emptyset$ car $\gamma_{\sigma'} = \emptyset$.

D'autre part η ayant ses blocs vides au-dessus de $(P \times \partial \sigma) \cup (Q \times \sigma)$ on a aussi $\eta_{\tau \times \sigma'} = \emptyset$ et donc

$$f(\xi_{\tau} \times \gamma_{\sigma'}) = \eta_{\tau \times \sigma'} .$$

Enfin, par définition de f , la conservation des nombres d'incidence est évidente.

CHAPITRE III

THEORIE BIVARIANTE

Pour chaque morphisme $f : P \rightarrow Q$ dans la catégorie des polyèdres compacts nous définissons des groupes abéliens

$$\begin{aligned} T^i(P \xrightarrow{f} Q) \quad (i \in \mathbb{Z}) \text{ de sorte que :} \\ T^*(P \longrightarrow p^t) \text{ est le D-bordisme sur } P ; \\ T^*(P \xrightarrow{\text{id}} P) \text{ est le D-cobordisme sur } P . \end{aligned}$$

Nous définissons entre ces groupes trois opérations : le produit, l'image directe, l'image réciproque bivariantes.

Ces trois opérations coïncident dans certains cas particuliers avec le cup-produit, le cap-produit ou les homomorphismes induits en D-bordisme et D-cobordisme par les morphismes entre polyèdres.

Ces opérations satisfont à sept axiomes qui les rendent compatibles.

Fulton et Mac Pherson ont construit dans ([14].3) une théorie d'homologie bivariante dans la catégorie des espaces topologiques. On verra (§ 64) que pour les polyèdres compacts cette théorie est la même que celle que nous définissons ici.

A) DEFINITION DES GROUPES BIVARIANTS.

1°) Généralité.

§ 61 - La catégorie de base.

Les objets considérés sont les polyèdres compacts P , donc il

existe un plongement linéaire par morceaux dans un hypercube $\Phi : P \hookrightarrow I^n$.

Les morphismes sont les applications linéaires par morceaux (elles sont donc continues).

§ 62 - Lemme.

Soient P et Q deux polyèdres dans la catégorie de base, un plongement $\Phi : P \hookrightarrow I^n$ et un morphisme $f : P \rightarrow Q$. Alors l'application $(f, \Phi) : P \rightarrow Q \times I^n$ est un plongement.

Démonstration : Il est évident que (f, Φ) est injective.

(f, Φ) est continue puisque f et Φ le sont.

L'application réciproque : $(f, \Phi)^{-1} : (f, \Phi)(P) \rightarrow P$ est également continue puisque P est compact.

(f, Φ) est linéaire par morceaux puisque f et Φ le sont.

Enfin, on sait que la réciproque d'un homéomorphisme linéaire par morceaux est encore linéaire par morceaux.

2°) Définition des groupes $T^i(P \xrightarrow{f} Q)$.

§ 63 - Définition.

Soient P et Q deux polyèdres compacts, un morphisme $f : P \rightarrow Q$, un morphisme $\Phi : P \rightarrow I^n$ tel que $(f, \Phi) : P \rightarrow Q \times I^n$ soit un plongement, soit $\bar{P} = (f, \Phi)(P)$ et T un ε -voisinage de \bar{P} dans $Q \times I^n$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $T^i(P \xrightarrow{f} Q) = S\Omega^{i+n}(T, \partial T)$

§ 64 - Proposition.

Les groupes $T^i(P \xrightarrow{f} Q)$ dépendent uniquement du morphisme f .

Démonstration : Nous n'avons pas trouvé de démonstration interne à la théorie. C'est le seul point pour lequel nous utilisons les résultats de ([14].3).

D'après ([6].12), il existe un isomorphisme $S\Omega^{i+n}(T, \partial T) \simeq H^{i+n}(T, \partial T)$ Il existe une rétraction $\pi : T \rightarrow \bar{P}$ (§ 47), alors il existe aussi une rétraction de $T - \bar{P}$ sur ∂T , donc on a un isomorphisme $H^{i+n}(T, \partial T) \xrightarrow{\simeq} H^{i+n}(T, T - \bar{P})$, mais $H^{i+n}(T, (Q \times I^n - \bar{P}) \cap T) \simeq H^{i+n}(Q \times I^n, Q \times I^n - \bar{P})$.

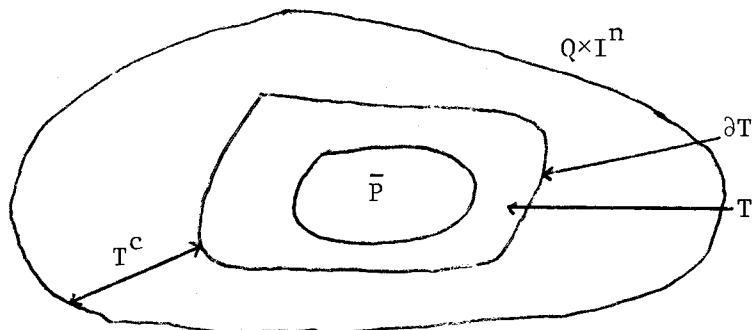
Enfin, les groupes $H^{i+n}(Q \times I^n, Q \times I^n - \bar{P})$ sont les groupes bivariants au sens de ([14] 3.1.4 et 5) et ils sont bien indépendants du plongement \emptyset .

§ 65 - Proposition.

Soit T^c le sous-polyèdre de $Q \times I^n$ formé des simplexes de $Q \times I^n$ disjoints de \bar{T} (c'est-à-dire le complément simplicial de \bar{P} dans $Q \times I^n$ relativement à la subdivision dérivée définissant T).

$$\text{Alors } \boxed{T^i(P \xrightarrow{f} Q) = S\Omega^{i+n}(Q \times I^n, T^c)} .$$

Démonstration : Cela résulte immédiatement du théorème d'excision



§ 66 - Remarque :

Tout groupe bivariant $T^i(P \xrightarrow{f} Q)$ est celui d'un plongement, c'est-à-dire on peut supposer que f est un plongement.

En effet, par §§ 62 et 63, il est clair que

$$T^i(P \xrightarrow{f} Q) = T^i(P \xrightarrow{(f, \Phi)} Q \times I^n).$$

§ 67 - Proposition.

Pour tout polyèdre $P : T^i(P \rightarrow P) = S\Omega^i(P)$; si P est une pseudo-variété $T^i(P \rightarrow p^t) = S\Omega_{-i}^i(P)$.

$P \xrightarrow{\text{id}} P$ est un plongement, comme $P \times I^0 = P \times p^t = P$
on a $T^i(P \xrightarrow{\text{id}} P) = S\Omega^i(T, \partial T)$ où T est le ε -voisinage de P dans P , évidemment $T = P$ et $\partial T = \emptyset$, d'où la lère assertion.

Soit, enfin, un plongement $\Phi : P \hookrightarrow I^n$ et notons $f : P \rightarrow p^t$ l'unique application envoyant P sur le point, par définition

$$T^i(P \rightarrow p^t) = S\Omega^{i+n}(T, \partial T)$$

où T est un ε -voisinage de $(f, \Phi)(P)$ dans $p^t \times I^n$, c'est-à-dire de $\Phi(P)$ dans I^n . D'après §§ 41 et 42 on a $T^i(P \xrightarrow{f} p^t) = S\Omega_{-i}^i(T)$ mais T se rétracte sur $\Phi(P)$ (§ 47), et $\Phi(P)$ est homéomorphe à P , d'où $T^i(P \xrightarrow{f} p^t) = S\Omega_{-i}^i(P)$.

B) LES TROIS OPERATIONS BIVARIANTES.

Les trois opérations bivariantes que nous définissons ici coïncident, dans le cas des polyèdres compacts, avec celles définies dans ([14], 3.1.6; 3.1.7; 3.1.8). Mais les constructions et les démonstrations sont plus simples.

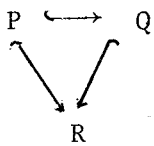
1°) Le produit bivariant.

A tout diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & Q \\ & \searrow h & \swarrow g \\ & & R \end{array}$$
 dans la catégorie

de base on va faire correspondre des produits

$$T^i(P \xrightarrow{f} Q) \times T^j(Q \xrightarrow{g} R) \xrightarrow{\cdot} T^{i+j}(P \xrightarrow{h} R) \text{ où } i, j \in \mathbb{Z}.$$

§ 68 - Cas des plongements.



Le produit bivariant

$$T^i(P \rightarrow Q) \times T^j(Q \rightarrow R) \xrightarrow{\cdot} T^{i+j}(P \rightarrow R)$$

est un cup-produit défini ci-dessous.

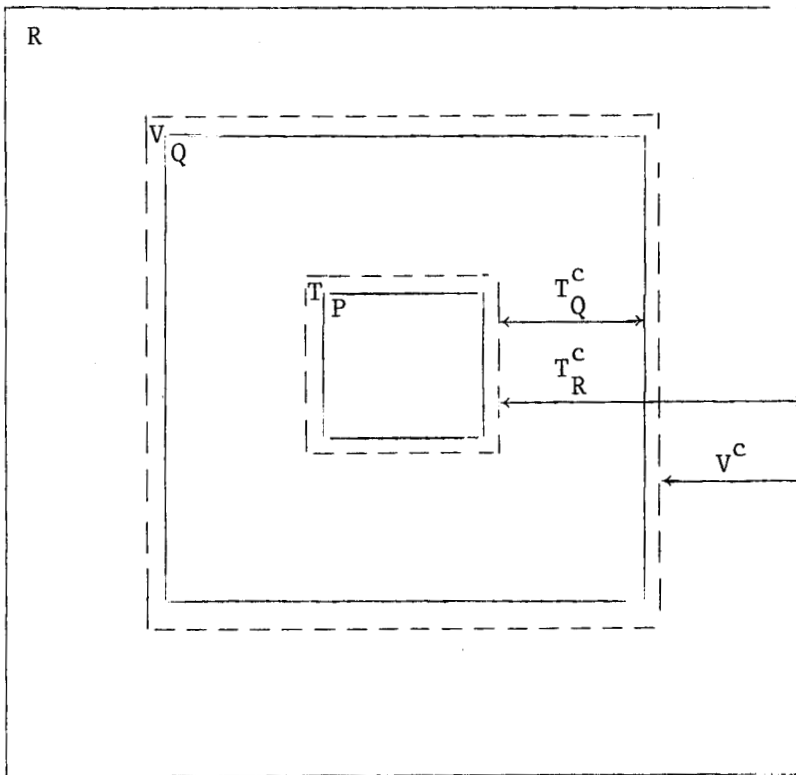
Etant donnée une triangulation de R , soient :

T le ε -voisinage de P dans Q (et donc, dans R)

V " " " Q " R .

Soient V^c le complément simplicial de Q dans R , relativement à la subdivision déterminant V (§ 65), T_Q^c celui de P dans Q , et T_R^c celui de P dans R .

La figure suivante résume la situation et présente toutes les inclusions possibles.



On utilise la deuxième expression des groupes bivariants (§ 65).

Nous avons défini le cup-produit (§ 24)

$$S\Omega^i(R, T_R^c) \times S\Omega^j(R, V^c) \xrightarrow{\cup} S\Omega^{i+j}(R, T_R^c \cup V^c)$$

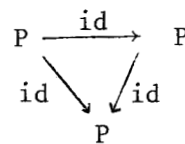
mais $T_R^c \cup V^c = T_R^c$, par excision on a donc un produit

$$S\Omega^i(Q, T_Q^c) \times S\Omega^j(R, V^c) \xrightarrow{\cdot} S\Omega^{i+j}(R, T_R^c)$$

c'est-à-dire $T^i(P \leftrightarrow Q) \times T^j(Q \leftrightarrow R) \xrightarrow{\cdot} T^{i+j}(P \leftrightarrow R)$.

§ 69 - Cas particulier.

Soit le triangle commutatif :

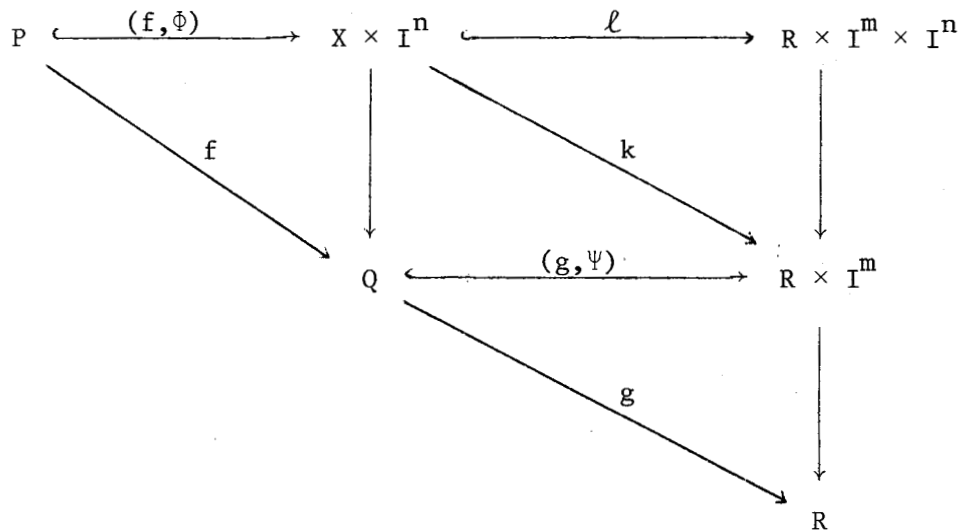


dans ce cas $T_Q^c = T_R^c = V^c = \emptyset$, alors le produit bivariant coïncide avec le cup-produit (§ 24) $S\Omega^i(P) \times S\Omega^j(P) \xrightarrow{\cup} S\Omega^{i+j}(P)$.

§ 70 - Le produit bivariant dans le cas général.

On utilise le fait que tout groupe bivariant est celui d'un plongement (§ 66) et on peut donc appliquer la construction du paragraphe précédent.

Etant donnés des plongements $P \xrightarrow{\Phi} I^n$, $Q \xrightarrow{\Psi} I^m$, on peut former le diagramme commutatif :



où on a posé pour tout $(q, v) \in Q \times I^n$:

$$k(q, v) = (g(q), \Psi(q))$$

$$\ell(q, v) = (g(q), \Psi(q), v).$$

Les morphismes non indiqués étant les projections canoniques.

La projection p induit un homomorphisme

$$S\Omega^j(R \times I^m, U^c) \xrightarrow{S\Omega^j(p)} S\Omega^j(R \times I^m \times I^n, V^c)$$

où U (resp. V) est un ε -voisinage de $(g, \Psi)(Q)$ (resp. $(Q \times I^n)$)

dans $R \times I^m$ (resp. dans $R \times I^m \times I^n$). $S\Omega^j(p)$ définit donc un homomorphisme

$$T^j(Q \xrightarrow{(g, \psi)} R \times I^m) \xrightarrow{S\Omega^j(p)} p^j(Q \times I^n \xrightarrow{k} R \times I^m)$$

c'est-à-dire $T^j(Q \xrightarrow{g} R) \xrightarrow{S\Omega^j(p)} T^j(Q \times I^n \xrightarrow{\ell} R \times I^m \times I^n)$.

Dans le cas général, on définit le produit bivariant comme étant le composé de $\text{id}_{T^i(f)} \times S\Omega^j(p)$ par le produit bivariant correspondant aux plongements (f, ϕ) et ℓ :

$$\begin{array}{ccc}
 T^i(P \xrightarrow{(f, \phi)} Q \times I^n) \times T^j(Q \times I^n \xrightarrow{\ell} R \times I^m \times I^n) & \xrightarrow{\bullet} & T^{i+j}(P \xrightarrow{\ell \circ (f, \phi)} R \times I^m \times I^n) \\
 \parallel & & \parallel \\
 T^i(P \xrightarrow{f} Q) \times T^j(Q \xrightarrow{g} R) & & T^{i+j}(P \xrightarrow{(g \circ f, \psi \circ f, \phi)} R \times I^m \times I^n) \\
 \uparrow \text{id}_{T^i(f)} \times S\Omega^j(p) & & \parallel \\
 T^i(P \xrightarrow{f} Q) \times T^j(Q \xrightarrow{g} R) & \dashrightarrow & T^{i+j}(P \xrightarrow{h} h)
 \end{array}$$

§ 71 - Cas particulier.

Soit le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\text{id}} & P \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & p^t
 \end{array}$$

on a le produit bivariant :

$$T^i(P \xrightarrow{\text{id}} P) \times T^j(P \rightarrow p^t) \xrightarrow{\bullet} T^{i+j}(P \rightarrow p^t)$$

on sait que $T^i(P \xrightarrow{\text{id}} P) = S\Omega^i(P)$, si, de plus, P est une pseudo-variété (plongée dans une variété), alors

$$T^j(P \rightarrow p^t) = S\Omega_{-j}(P) \quad (\S 67)$$

et le produit

$$S\Omega^i(P) \times S\Omega_{-j}(P) \xrightarrow{\bullet} S\Omega_{-i-j}(P)$$

n'est autre que le cap-produit défini au paragraphe 31.

§ 72 - Propriétés du produit bivariant.

1) il est associatif ;

2) dans le cas particulier du produit :

$$T^i(P \xrightarrow{f} P) \times T^j(P \xrightarrow{g} P) \xrightarrow{\bullet} T^{i+j}(P \xrightarrow{h} P) \quad (\text{avec } gof = h),$$

pour tous $a \in T^i(P \xrightarrow{f} P), b \in T^j(P \xrightarrow{g} P)$ alors :

$$a.b = (-1)^{ij} b.a ;$$

3) dans les cas particuliers :

$$T^0(P \xrightarrow{id} P) \times T^j(P \xrightarrow{f} Q) \xrightarrow{\bullet} T^j(P \xrightarrow{f} Q)$$

$$T^i(P \xrightarrow{f} Q) \times T^0(Q \xrightarrow{id} Q) \xrightarrow{\bullet} T^i(P \xrightarrow{f} Q)$$

les classes $[e_p]$ et $[e_Q]$ ($\S 22$) sont des unités à gauche et à droite respectivement.

Démonstration : L'associativité découle des définitions : la composition des homomorphismes et le cup-produit sont associatifs.

La relation $a.b = (-1)^{ij} b.a$ résulte du § 27, de même pour les propriétés de $[e_p]$ et $[e_Q]$.

2°) L'image directe bivariante.

A tout diagramme commutatif $P \xrightarrow{\quad} Q$ dans la catégorie

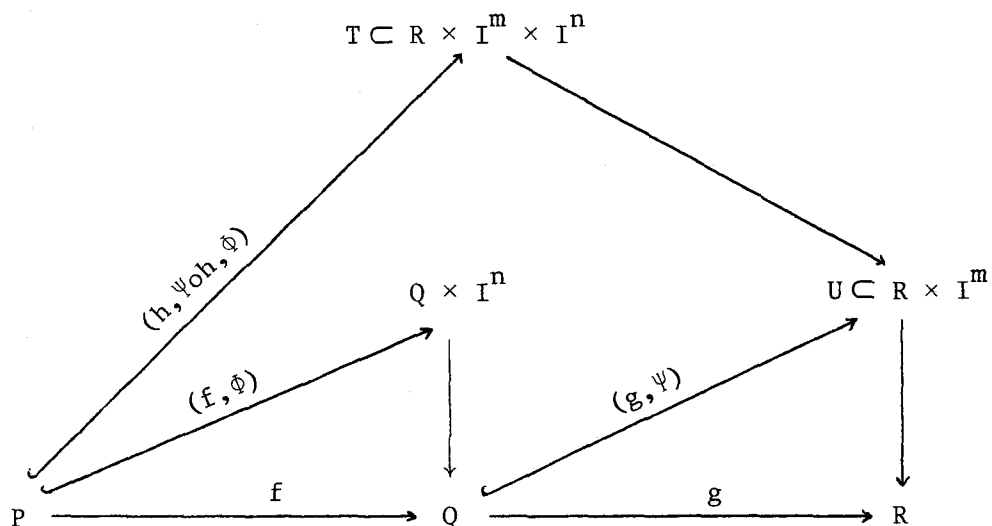
$$\begin{array}{ccc} & & \\ & \searrow h & \swarrow g \\ & & R \end{array}$$

de base on va faire correspondre des homomorphismes

$$T^i(P \xrightarrow{h} R) \xrightarrow{f_*} T^i(Q \xrightarrow{g} R).$$

§ 73 - Définition de f_* .

Le diagramme suivant présente les factorisations par les plongements :



T est un ε -voisinage de $\tilde{P} = (h, \psi o h, \phi)(P)$ dans $R \times I^m \times I^n$.

U est un ε -voisinage de $\tilde{Q} = (g, \psi)(Q)$ dans $R \times I^m$.

L'expression des groupes bivariantes utilisée ici est celle donnée au § 65.

L'inclusion $(R \times I^m \times \partial I^n) \cup (U^c \times I^n) \subset T^c$ qu'on démontre au § 75 induit un homomorphisme ι^* en D-cobordisme, alors par définition f_* est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 T^i(P \xrightarrow{h} R) & \xrightarrow{f_*} & T^i(Q \xrightarrow{g} R) \\
 || & & || \\
 S\Omega^{i+m+n}(R \times I^m \times I^n, T^C) & & S\Omega^{i+m}(R \times I^n, U^C) \\
 & \searrow^{l^*} & \downarrow \approx \\
 & & S\Omega^{i+m+n}(R \times I^m \times I^n, (R \times I^m \times \partial I^n) \cup (U^C \times I^n)) \\
 & & \times [Y]^n
 \end{array}$$

§ 74 - Lemme.

Soit un polyèdre X et deux sous-polyèdres $A_1 \subset A_2 \subset X$.

Alors $N_\varepsilon(A_1; X) \subset N_\varepsilon(A_2; X)$

(autrement dit : les ε -voisinages sont compatibles avec l'inclusion.)

Démonstration : On note $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$ l'application simpliciale déterminée par A_i ($i = 1; 2$).

Soit $x \in N_\varepsilon(A_1; X)$, alors $\psi_1(x) \leq \varepsilon$;

x est dans l'intérieur d'un unique simplexe :

$$\sigma = (s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_p)$$

où on note s_1, \dots, s_n les sommets se trouvant dans A_1 ,

s_{n+1}, \dots, s_m les sommets se trouvant dans $A_2 - A_1$,

s_{m+1}, \dots, s_p les sommets se trouvant dans $X - A_2$,

et on peut écrire $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i s_i$; $\lambda_i \geq 0$; $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

$\psi_1(x) \leq \varepsilon \iff \sum_{i=1}^p \lambda_i \psi_1(s_i) \leq \varepsilon$, mais $\psi_1(s_i) = 0$ lorsque $1 \leq i \leq n$

et $\psi_1(s_i) = 1$ sinon. L'inégalité précédente s'écrit alors :

$$\sum_{i=n+1}^p \lambda_i \leq \varepsilon .$$

D'autre part $\psi_2(x) = \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \leq \sum_{i=n+1}^p \lambda_i$ donc $\psi_2(x) \leq \varepsilon$

et cela prouve que $x \in N(A_2; X)$.

§ 75 - Lemme.

$$\underline{(R \times I^m \times \partial I^n) \cup (U^c \times I^n) \subset T^c .}$$

Démonstration :

L'inclusion $(R \times I^m \times I^n) \subset T^c$ est facile à voir :

si $(x,y,z) \in R \times I^m \times \partial I^n$, alors $(x,y,z) \in \overbrace{R \times I^m \times I^n}^o$ il est clair

que $\overset{o}{T} \subset \overbrace{R \times I^m \times I^n}^o$, alors $(x,y,z) \in T^c$.

On montre maintenant que $U^c \times I^n \subset T^c$.

Il est clair que

(1) si $A \subset B$ alors $B^c \subset A^c$;

(2) pour toutes paires (P,A) ; (Q,B) de polyèdres, on a :

$$N_\varepsilon(A \times B; P \times Q) \subset N_\varepsilon(A; P) \times N_\varepsilon(B; Q)$$

(le ε -voisinage d'un produit est contenu dans le produit des ε -voisinages).

Comme $\bar{P} \subset \bar{Q} \times I^n$, on applique § 74 et (2), d'où :

$$N_\varepsilon(\bar{P}; R \times I^m, I^n) \subset N_\varepsilon(\bar{Q}; R \times I^n) \times N_\varepsilon(I^n, I^n), \text{ c'est-à-dire } T \subset U \times I^n.$$

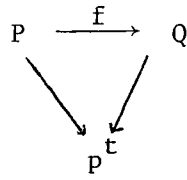
Alors, d'après (1)

$$U^c \times I^n \subset T^c. \text{ D'où le résultat.}$$

Ceci achève la définition de f_* .

§ 76 - Cas particulier.

Soit P et Q deux pseudo-variétés, le triangle commutatif :



alors d'après § 61 on a $T^i(P \rightarrow p^t) = S\Omega_{-i}(P)$ et $T^i(Q \rightarrow p^t) = S\Omega_{-i}(Q)$ et l'image directe bivariante

$$T^i(P \rightarrow p^t) \xrightarrow{f_*} T^i(Q \rightarrow p^t)$$

est l'homomorphisme induit en D-bordisme :

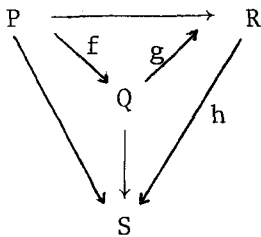
$$S\Omega_{-i}(P) \xrightarrow{S\Omega_{-i}(f)} S\Omega_{-i}(Q) \quad (\S 27)$$

via les isomorphismes du § 67.

§ 77 - Covariance de l'image directe bivariante.

Proposition.

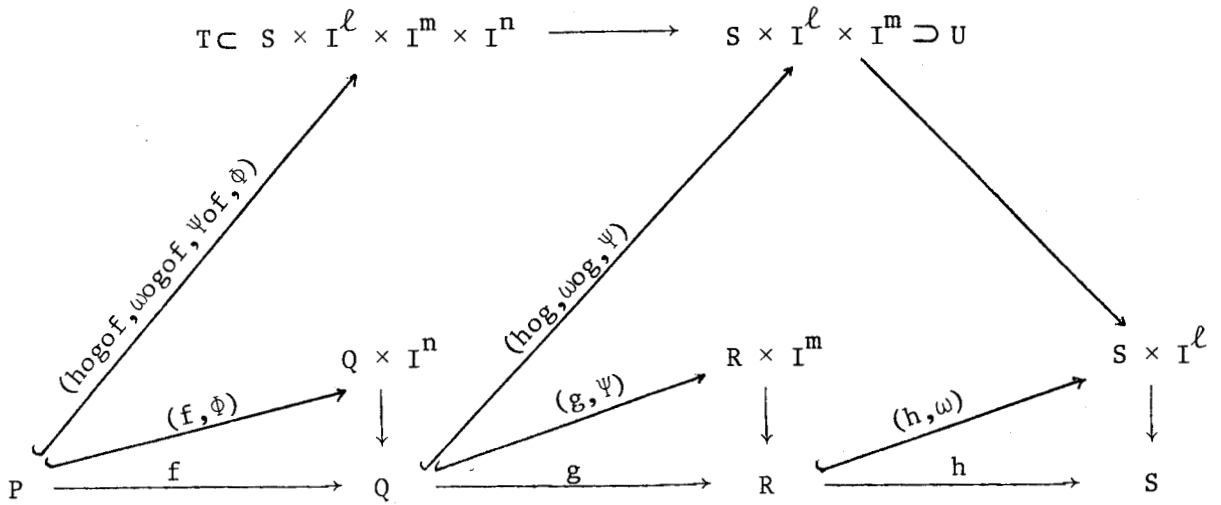
Soit le diagramme commutatif



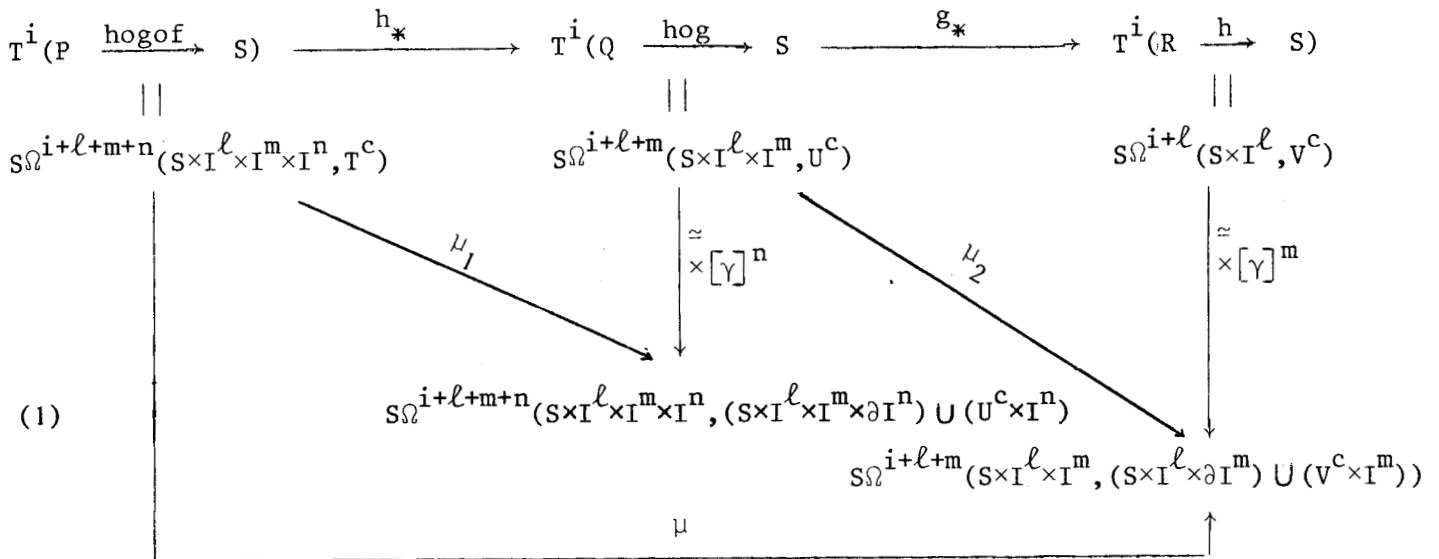
alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Démonstration :

Le diagramme suivant présente les factorisations par des plongements, les hypothèses et les notations sont analogues à celles du § 73.



D'après § 73 f_* et g_* sont les uniques homomorphismes rendant commutatif le diagramme suivant :



où μ_1 et μ_2 sont induits par les inclusions comme dans le § 75 et où on a posé :

$$\mu = \mu_2 \circ (\times [\gamma]^n)^{-1} \circ \mu_1 = (\times [\gamma]^m) \circ g_* \circ f_*$$

De même $(gof)_*$ est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 T^i(P \xrightarrow{\text{hogof}} S) & \xrightarrow{(\text{gof})_*} & T^i(R \xrightarrow{h} S) \\
 \parallel & & \parallel \\
 S\Omega^{i+l+m+n}(S \times I^l \times I^m \times I^n, T^c) & & S\Omega^{i+l}(S \times I^l, V^c) \\
 & \searrow \mathcal{L} & \downarrow \approx \times [\gamma]^{m+n} \\
 & & S\Omega^{i+l+m+n}(S \times I^l \times I^m \times I^n, (S \times I^l \times \partial I^{m+n}) \cup (V^c \times I^{m+n}))
 \end{array}$$

(2)

où ν est induit par une inclusion comme au § 75.

Pour montrer que $(\text{gof})_* = g_* \circ f_*$, il suffit de remarquer que le triangle suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 S\Omega^{i+l+m+n}(S \times I^l \times I^m \times I^n, T^c) & \xrightarrow{\mu} & S\Omega^{i+l+m}(S \times I^l \times I^m, (S \times I^l \times \partial I^m) \cup (V^c \times I^m)) \\
 & \searrow \mathcal{L} & \swarrow \approx \times [\gamma]^n \\
 & & S\Omega^{i+l+m+n}(S \times I^l \times I^{m+n}, (S \times I^l \times \partial I^{m+n}) \cup (V^c \times I^{m+n})).
 \end{array}$$

Le résultat s'en déduit alors en comparant les diagrammes (1) et (2).

3°) L'image réciproque bivariante.

A tout carré fibré

$$\begin{array}{ccc}
 P' & \xrightarrow{g'} & P \\
 \downarrow f' & & \downarrow f \\
 Q' & \xrightarrow{g} & Q
 \end{array}$$

dans la catégorie

de base on va faire correspondre des homomorphismes

$$T^i(P \xrightarrow{f} Q) \xrightarrow{g^*} T^i(P' \xrightarrow{f'} Q').$$

§ 78 - Définition de g^* .

Soit $\phi : P \rightarrow V$ un plongement dans une variété compacte (on peut supposer que $V = I^n$, comme au 1°) et 2°, mais on notera V pour simplifier). Alors $(f, \phi) : P \rightarrow Q \times V$ est un plongement (§ 62), en posant $\phi' : \phi \circ g' : P' \rightarrow V$, il est facile de voir que $(f', \phi') : P' \rightarrow Q' \times V$ est encore un plongement.

Soit T un ε -voisinage de $\bar{P} = (f, \phi)(P)$ dans $Q \times V$;
 U $\bar{P}' = (f', \phi')(P')$ dans $Q' \times V$.

On suppose que les triangulations sur $Q \times V$ et $Q' \times V$ rendent $g \times id_V$ simpliciale. L'expression des groupes bivariants utilisée ici est celle du § 63. On démontrera (§ 79) que :

$$(*) \quad (g \times id_V)(U, \partial U) \subset (T, \partial T)$$

ce qui induit une application

$$(U, \partial U) \xrightarrow{\overline{g \times id_V}} (T, \partial T)$$

d'où un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} S\Omega^*(T, \partial T) & \xrightarrow{S\Omega^*(\overline{g \times id_V})} & S\Omega^*(U, \partial U) \\ \parallel & & \parallel \\ T^*(P \xrightarrow{f} Q) & & T^*(P' \xrightarrow{f'} Q') \end{array}$$

et on pose par définition :

$$\boxed{g^* = S\Omega^*(\overline{g \times id_V})} .$$

§ 79 - Proposition.

L'image réciproque est bien définie.

Il s'agit de démontrer l'inclusion (*) du § 78. On le fera en plusieurs étapes (§§ 79 à 81).

§ 80 - Lemme.

Soit une application simpliciale

$f : |K| = P \rightarrow |L| = Q$, A un sous-polyèdre de P , $N_\varepsilon(A;P)$ un ε -voisi-
nage de A dans P ($0 < \varepsilon < 1$).

Alors $f[\bar{N}_\varepsilon(A;P)] \subset N_\varepsilon(f(A);Q)$.

Démonstration : Soit $\psi_A : P \rightarrow [0;1]$ l'application simpliciale déterminée par A (§ 43).

Par définition $N_\varepsilon(A;P) = \psi_A^{-1}([0;\varepsilon])$. Soit $x \in N_\varepsilon(A;P)$, c'est-à-dire $\psi_A(x) \leq \varepsilon$. x est dans l'intérieur d'un unique simplexe $\sigma = (s_1; \dots; s_n; s_{n+1}; \dots; s_p)$ où on a noté s_1, \dots, s_n les sommets qui sont dans A et s_{n+1}, \dots, s_p ceux qui sont dans $P-A$.

On peut écrire $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i s_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

Alors $\psi_A(x) \leq \varepsilon \iff \sum_{i=n+1}^p \lambda_i s_i \leq \varepsilon$.

D'autre part, $f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(s_i)$ donc :

$$\psi_{f(A)}(f(x)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \psi_{f(A)}(f(s_i))$$

si $1 \leq i \leq n$ alors $s_i \in A$, d'où $f(s_i) \in f(A)$ et $\psi_{f(A)}(f(s_i)) = 0$.

D'où $\psi_{f(A)}(f(x)) = \sum_{i=n+1}^p \lambda_i \psi_{f(A)}(f(s_i))$. D'autre part, par définition

de $\psi_{f(A)}$ on a toujours $\psi_{f(A)}(f(s_i)) \leq 1$ donc

$\psi_{f(A)}(f(x)) \leq \sum_{i=n+1}^p \lambda_i \leq \varepsilon$. D'où, par définition, $f(x) \in N_\varepsilon(f(A); Q)$, ce qui prouve l'inclusion annoncée.

§ 81 - Lemme.

$$\underline{(g \times \text{id}_V)(U) \subset T.}$$

Démonstration : Il est facile de voir que $(g \times \text{id}_V)(\bar{P}') \subset \bar{P}$, d'où d'après § 74 : $N_\varepsilon[(g \times \text{id}_V)(\bar{P}'); Q \times V] \subset N_\varepsilon(\bar{P}; Q \times V)$ c'est-à-dire

$$(1) \quad N_\varepsilon[(g \times \text{id}_V)(\bar{P}'); Q \times V] \subset T.$$

D'autre part le § 80 entraîne :

$$(g \times \text{id}_V)[N_\varepsilon(\bar{P}'; Q \times V)] \subset N_\varepsilon[(g \times \text{id}_V)(\bar{P}'); Q \times V]$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad (g \times \text{id}_V)(U) \subset N_\varepsilon[(g \times \text{id}_V)(\bar{P}'); Q \times V]$$

de (1) et (2) il vient $(g \times \text{id}_V)(U) \subset T$.

§ 82 - Lemme.

$$\underline{(g \times \text{id}_V)(\partial U) \subset \partial T.}$$

Démonstration : Nous montrons d'abord que

$$(*) \quad (g \times \text{id}_V)(U - \bar{P}') \subset T - P'.$$

La figure 82.1 résume la situation.

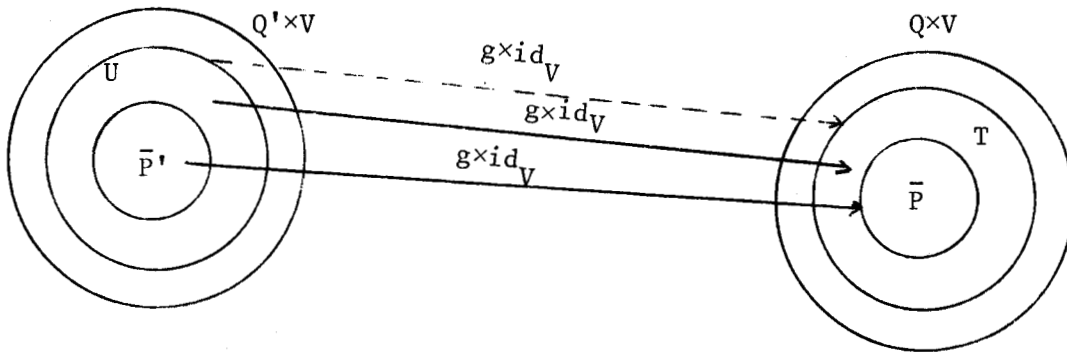


Fig. 82.1

Par § 81, on sait déjà que $(g \times id_V)(U) \subset T$, il suffit donc de montrer que si $x \notin \bar{P}'$ alors $(g \times id_V)(x) \notin \bar{P}$. Il est commode de raisonner par contraposition :

Supposons donc que $(g \times id_V)(x) \in \bar{P}$, on peut poser $x = (q', v) \in Q' \times V$ et $(g \times id_V)(q', v) = (f(p), \phi(p))$ avec $p \in P$.

On a les conditions :

- (1) $g(q') = f(p)$
- (2) $v = \phi(p)$.

(1) signifie que $(q', p) \in P'$, alors $q' = f'(q', p)$ car on a un carré fibré (introduction du 3°), alors (2) peut s'écrire $v = \phi \circ g'(q', p)$, donc

$$(q', v) = (f'(q', p), \phi \circ g'(q', p)) = (f', \phi \circ g')(q', p)$$

cela prouve que $(q', v) \in \bar{P}'$.

On est maintenant en mesure d'achever la démonstration du lemme : soit donc $x \in \partial U$ et σ l'unique simplexe dans U tel que $x \in \overset{\circ}{\sigma}$.

Par définition de ∂U on a $\sigma \cap \bar{P}' = \emptyset$ donc $\sigma \subset U - \bar{P}'$.

D'après (*) $(g \times \text{id}_V)(\sigma) \subset T - \bar{P}$. Et puisque $g \times \text{id}_V$ est simpliciale (§ 78), $(g \times \text{id}_V)(\sigma)$ est un simplexe disjoint de \bar{P} . Il est donc contenu dans ∂T et on a bien $(g \times \text{id}_V)(x) \in \partial T$.

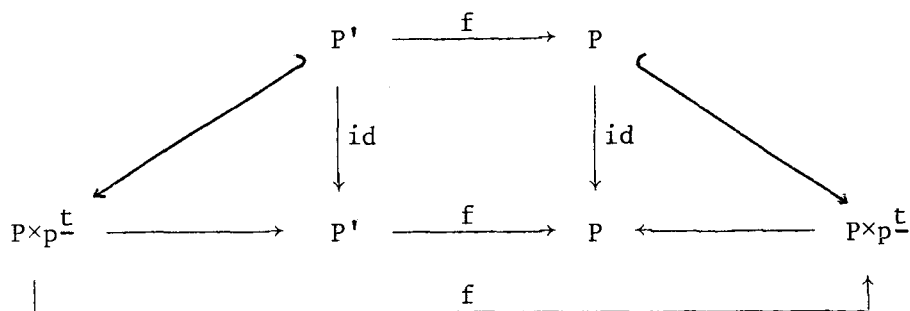
La proposition du § 79 est donc démontrée.

§ 83 - Cas particulier.

Soit un morphisme $f : P' \rightarrow P$, alors l'image réciproque $T^i(P \xrightarrow{\text{id}} P) \xrightarrow{f^*} T^i(P' \xrightarrow{\text{id}} P')$ est l'homomorphisme induit en D-cobordisme :

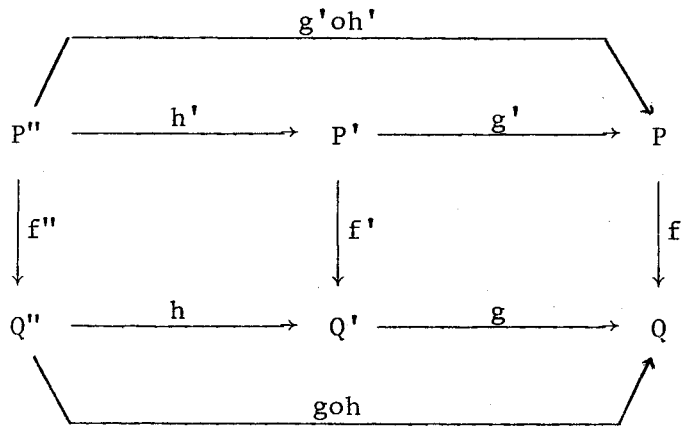
$$S\Omega^i(P) \xrightarrow{S\Omega^i(f)} S\Omega^i(P').$$

Démonstration : Cela résulte immédiatement du § 67 et de la définition donnée au § 78 d'après le diagramme suivant :



§ 84 - Contravariance de l'image réciproque bivariante.

Proposition.- Supposons que les carrés du diagramme suivant soient fibrés :



Alors $(goh)^* = h^* \circ g^*$.

On a en effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned}
 (goh)^* &= S\Omega^*(\overline{(goh) \times id_V}) = S\Omega^*(\overline{(g \times id_V) \circ (h \times id_V)}) \\
 &= S\Omega^*(\overline{g \times id_V} \circ \overline{h \times id_V}) \\
 &= S\Omega^*(\overline{h \times id_V}) \circ S\Omega^*(\overline{g \times id_V}) \quad (\text{contravariance de } S\Omega^*) \\
 &= h^* \circ g^* \quad (\text{par définition}).
 \end{aligned}$$

3°) Propriétés axiomatiques des opérations bivariantes.

Les opérations bivariantes définies précédemment possèdent des propriétés qui sont prises comme axiomes dans la définition d'une théorie bivariante ([14], § 2.2).

La démonstration des propriétés résulte des définitions et de la functorialité des constructions réalisées. Nous nous contenterons de donner le détail de l'une d'elles (§ 90).

Certaines propriétés (celles qui ne concernent qu'une opération bivariante) ont déjà été données et démontrées en détail.

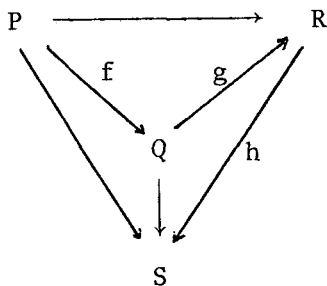
§ 85 - Associativité du produit bivariant : voir § 72.

§ 86 - Functorialité covariante de l'image directe : voir § 77.

§ 87 - Fonctorialité contravariante de l'image réciproque : voir § 84.

§ 88 - Le produit et l'image directe commutent.

Proposition. - Si le diagramme suivant est commutatif :



f induit deux images directes bivariantes

$$f_* : T^i(P \xrightarrow{gof} R) \longrightarrow T^i(Q \xrightarrow{g} R)$$

$$\bar{f}_* : T^{i+j}(P \xrightarrow{hogof} S) \longrightarrow T^{i+j}(Q \xrightarrow{hog} S).$$

Alors pour tous $a \in T^i(P \xrightarrow{gof} R)$ et $b \in T^j(R \xrightarrow{h} S)$ on a :

$$f_*(a).b = \bar{f}_*(a.b)$$

Le principe de la démonstration est d'établir la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 T^i(P \xrightarrow{gof} R) \times T^j(R \xrightarrow{h} S) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & T^{i+j}(P \xrightarrow{hogof} S) \\
 \downarrow f_* \times id & & \downarrow \bar{f}_* \\
 T^i(P \xrightarrow{g} R) \times T^j(R \xrightarrow{h} S) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & T^{i+j}(Q \xrightarrow{hog} S)
 \end{array}$$

§ 89 - Le produit et l'image réciproque commutent.

Proposition. - Si les deux carrés suivants sont fibrés :

$$\begin{array}{ccc}
 P'' & \xrightarrow{f''} & Q'' \\
 \downarrow h' & & \downarrow h \\
 P' & \xrightarrow{f'} & Q' \\
 \downarrow g' & & \downarrow g \\
 P & \xrightarrow{f} & Q .
 \end{array}$$

Alors f induit deux images réciproques :

$$f^* : T^j(Q' \xrightarrow{g} Q) \longrightarrow T^j(P' \xrightarrow{g'} P)$$

$$\bar{f}^* : T^{i+j}(Q'' \xrightarrow{goh} Q) \longrightarrow T^{i+j}(P'' \xrightarrow{g'oh'} P)$$

et pour tous $a \in T^i(Q'' \xrightarrow{h} Q')$ et $b \in T^j(Q' \xrightarrow{g} Q)$ on a :

$f'^*(a) \cdot f^*(b) = \bar{f}^*(a \cdot b)$

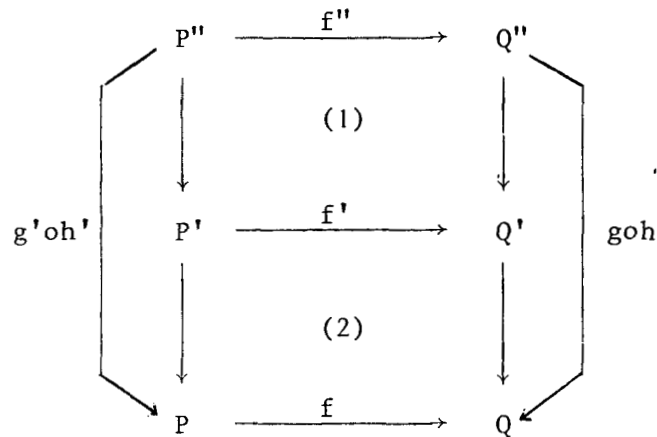
Le principe de la démonstration est d'établir la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 T^i(Q'' \xrightarrow{h} Q') \times T^j(Q' \xrightarrow{g} Q) & \xrightarrow{\cdot} & T^{i+j}(Q'' \xrightarrow{goh} Q) \\
 \downarrow f'^* \times f^* & & \downarrow \bar{f}^* \\
 T^i(P'' \xrightarrow{h'} P') \times T^j(P' \xrightarrow{g'} P) & \xrightarrow{\cdot} & T^{i+j}(P'' \xrightarrow{g'oh'} P) .
 \end{array}$$

§ 90 - L'image directe et l'image réciproque commutent.

Proposition. - Dans le diagramme suivant, on suppose que les carrés (1) et (2) sont fibrés. Alors le carré externe

(3) "Q" Q PP" l'est aussi :



on note f^* l'image réciproque induite par f relativement au carré (2) et \bar{f}^* celle relative au carré (3). Alors, on a dans

$\text{Hom}(T^i(Q'' \xrightarrow{goh} Q), T^i(P' \xrightarrow{g'} P)) :$

$$\boxed{f^* \circ h_* = h'_* \circ \bar{f}^*} .$$

Démonstration :

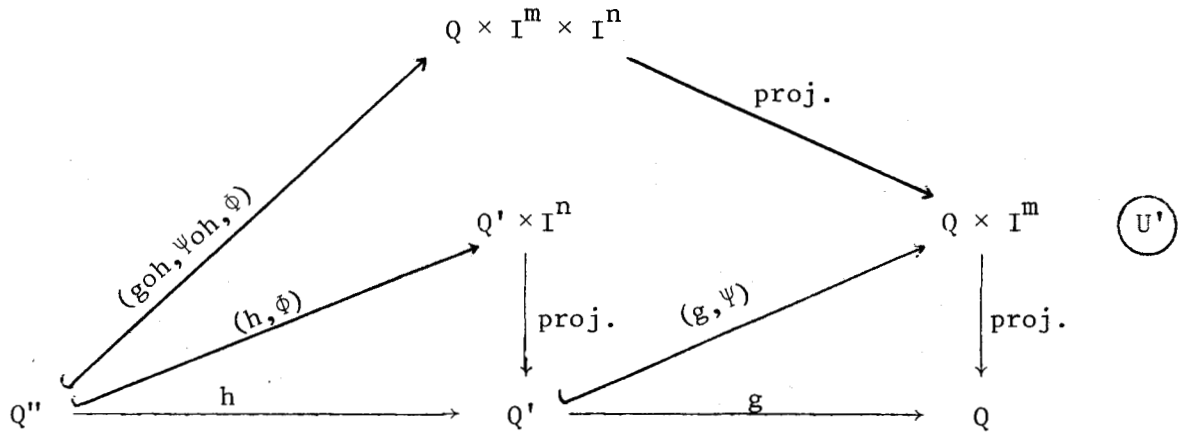
Il s'agit de voir que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 T^i(P'' \xrightarrow{g'oh'} P) & \xrightarrow{h'_*} & T^i(P' \xrightarrow{g'} P) \\
 \uparrow \bar{f}^* & & \uparrow f^* \\
 T^i(Q'' \xrightarrow{goh} Q) & \xrightarrow{h_*} & T^i(Q' \xrightarrow{g} Q)
 \end{array}$$

D'abord une remarque préliminaire : pour l'image directe l'expression des groupes bivariants que l'on utilise est celle du § 65, mais pour l'image réciproque c'est celle du § 63.

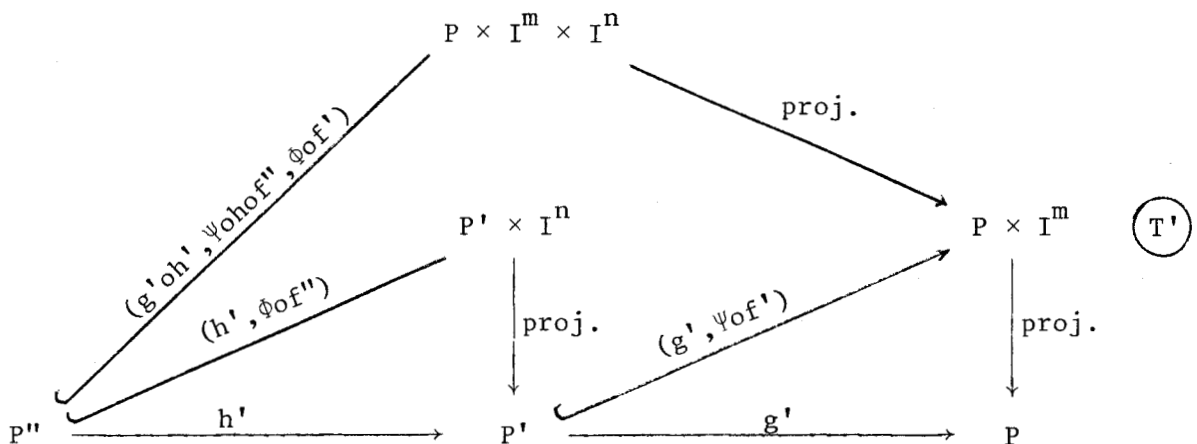
Par hypothèse, il existe des morphismes $Q'' \xrightarrow{\Phi} I^n$ et $Q' \xrightarrow{\Psi} I^m$ permettant de factoriser h et g via un plongement.

Nous en déduisons une factorisation de goh par la méthode de composition (diagramme suivant) :



On note U'' le ε -voisinage de $\bar{Q}'' = (goh, \Psi oh, \Phi)(Q'')$ dans $Q \times I^m \times I^n$
 " U' " " $\bar{Q}' = (g, \Psi)(Q')$ dans $Q \times I^m$.

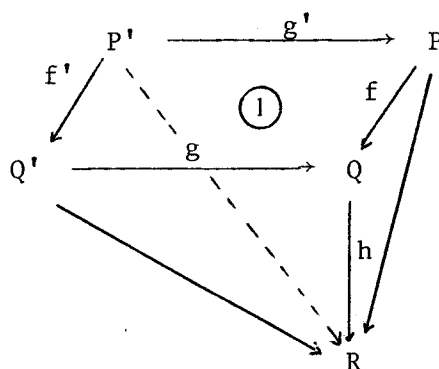
Comme les carrés sont fibrés, on en déduit (§ 78) les factorisations suivantes de $g', h', g'oh'$:



Les flèches non indiquées sont des homomorphismes induits par des inclusions.

§ 91 - Le produit, l'image directe et l'image réciproque commutent.

Proposition. - Dans le diagramme commutatif suivant, on suppose que le carré (1) est fibré.



Alors, pour tout $a \in T^i(P \xrightarrow{f} Q)$, tout $b \in T^j(Q' \xrightarrow{hog} R)$, on a dans $T^{i+j}(P \xrightarrow{hof} R)$

$$a \cdot g_*(b) = g'_*(g^*(a) \cdot b) .$$

Le principe de la démonstration est d'établir la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 T^i(P \xrightarrow{f} Q) \times T^j(Q' \xrightarrow{hog} R) & \xrightarrow{g^* \times id} & T^i(P' \xrightarrow{f'} Q') \times T^j(Q' \xrightarrow{hog} R) \xrightarrow{\cdot} T^{i+j}(P' \xrightarrow{hofog'} R) \\
 \downarrow id \times g_* & & \downarrow g'_* \\
 T^i(P \xrightarrow{f} Q) \times T^j(Q \xrightarrow{h} R) & \xrightarrow{\cdot} & T^{i+j}(P \xrightarrow{hog} R)
 \end{array}$$

B I B L I O G R A P H I E

- [1] E. DOMINGUEZ - Grupos de pseudobordismo. Real Acad. Ciencias de Zaragoza, 1975, XXX, 5-16.
- [2] E. DOMINGUEZ - Grupos de pseudo-cobordismo. Real. Acad. Ciencias de Madrid, 1975, LXIX, 121-147.
- [3] E. DOMINGUEZ - Corrección sobre los grupos de pseudocobordismo. Real Acad. Ciencias de Madrid, LXIX, 869-870.
- [4] E. DOMINGUEZ - Seudocobordismo con modelos admitiendo collar. Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 31 (1975) n° 3-4.
- [5] E. DOMINGUEZ - Interpretación geométrica de la homología singular. Real Acad. Ciencias Madrid, 1975, LXIX, 149-156.
- [6] E. DOMINGUEZ - Interpretación geométrica de la cohomología singular sobre los poliedros compactos. Real Acad. Ciencias Madrid, 1975, LXIX, 857-67.
- [7] E. DOMINGUEZ - Axiomas para una teoría de bordismo singular. Real Acad. Ciencias de Madrid, 1976, LXX, 575-582.
- [8] E. DOMINGUEZ - Geometrical Poincaré duality. Mathematic Seminar notes. Facultad de Ciencias Sevilla, 1978, vol. 6, 555-565.
- [9] T. BENNY-RUSHING - Topological embeddings. Academic Press, 1973.
- [10] J.F.P. HUDSON - Piecewise Linear Topology. Benjamin 1969.
- [11] C.P. ROURKE, B.J. SANDERSON - Introduction to Piecewise Linear Topology. Cambridge University Press 1976.
- [12] BUONCRISTIANO - ROURKE - SANDERSON - A geometric approach to homology theory. Univ. Warwick, Coventry, 1971.
- [13] P.S. ALEXANDROV - Combinatorial Topology. Graylock Press. Rochester NY, 1957.
- [14] W. FULTON and R. Mc PHERSON - Bivariant theories. Brown University Providence, Rhode Island.
- [15] J.P. BRASSELET - Définition combinatoire des homomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom, pour une pseudo-variété Astérisque 82-83, 1981.
- [16] E. DOMINGUEZ - Introduccion geométrica a las teorías de Bordismo. Cours polycopié, Zaragoza, 1979-80.

RÉSUMÉ

Eladio Dominguez définit une théorie d'homologie singulière, prenant comme modèles les pseudo-variétés singulières et une théorie de cohomologie sur la catégorie des polyèdres compacts, prenant comme modèles les pseudo-fibrés en blocs. Nous compléterons ses travaux en construisant des produits et en définissant les homomorphismes d'Alexander, Thom et Poincaré, dans le cadre de ses théories.

Nous construisons ensuite une théorie d'homologie bivariante dans la catégorie des polyèdres compacts en appliquant les techniques et les résultats de Dominguez. A chaque application continue $f : X \rightarrow Y$ on fait correspondre des groupes abéliens $T^*(X \xrightarrow{f} Y)$ tels que $T^*(X \xrightarrow{\text{id}} X)$ soit la cohomologie de X et $T^*(X \rightarrow p^{\underline{L}})$ l'homologie de X . On explicite les trois opérations bivariantes : le produit, l'image directe et l'image réciproque.

Cette théorie bivariante coïncide avec la théorie d'homologie bivariante de Fulton et Mac Pherson dans le cas des polyèdres compacts.

MOTS CLÉS : HOMOLOGIE - COHOMOLOGIE
THEORIE BIVARIANTE
POLYEDRE - PSEUDO-VARIÉTÉ.