

N° d'ordre : 1117

50376
1983
195

50376
1983
195

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

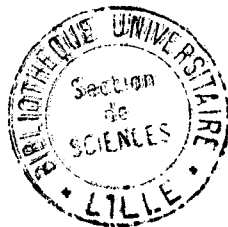
pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

Mohammed EL HAOUARI



SUR LES CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY
EN THÉORIE BIVARIANTE

Membres du Jury : M.H. SCHWARTZ, Présidente
J.P. BRASSELET, Rapporteur
J.C. THOMAS } Examineurs
A. LEGRAND }

Soutenue le 8 décembre 1983

A mes parents

A ma soeur

A mes frères

A Denise

A tous mes amis

Je remercie vivement Madame M.H. SCHWARTZ qui m'a honoré en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Monsieur J.P. BRASSELET m'a invité à travailler sur la théorie bivariante, ses remarques, ses suggestions intéressantes m'ont beaucoup aidé lors de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie Monsieur J.C. THOMAS d'avoir voulu examiner cette thèse.

Monsieur A. LEGRAND me fait un grand honneur de s'être déplacé de l'Université de Toulouse et d'examiner ce travail.

Enfin, je remercie chaleureusement Madame C. EVRARD qui a dactylographié cette thèse avec soin et patience, ainsi que toute l'équipe ayant participé à la réalisation matérielle de ce travail.

PLAN

	pages
INTRODUCTION	-i-
<u>CHAPITRE 0 : THEORIE BIVARIANTE</u>	1
1. Catégorie d'une théorie bivariante	1
2. Opérations d'une théorie bivariante	2
3. Axiomes d'une théorie bivariante	3
<u>CHAPITRE I : LA THEORIE BIVARIANTE \mathbb{F}</u>	5
1. Fonctions constructibles	5
2. Définition de \mathbb{F}	8
3. Opérations sur $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$	13
4. Calcul de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$	24
<u>CHAPITRE II : APPLICATIONS D'EULER ET APPLICATIONS i-CIRCUITS</u>	31
0. Définition de la théorie bivariante H	31
1. Orientations - Applications d'Euler	36
2. Espaces i -circuits (mod 2)	44
3. Applications i -circuits	47
<u>CHAPITRE III : TRANSFORMATION DE STIEFEL-WHITNEY</u>	69
1. Définition d'une transformation de Grothendieck	69
Enoncé du théorème fondamental	69
Présentation de la démonstration	70
Contre exemple à la démonstration de W. Fulton et R. Mac Pherson (Remarque III.1.9)	83
2. Démonstration du théorème	89
BIBLIOGRAPHIE	103

INTRODUCTION

W. Fulton et Mac Pherson ont défini deux théories bivariantes :

a) La théorie bivariante H :

A toute application continue $f : X \rightarrow Y$ d'espaces topologiques, on associe un groupe gradué $H(X \rightarrow Y)$; dans les cas particuliers $f : X \rightarrow \text{pt}$ et $\text{id} : X \rightarrow X$, on retrouve les groupes classiques d'homologie $H_*(X)$ et de cohomologie $H^*(X)$.

b) La théorie bivariante \mathbb{F} :

A toute application linéaire par morceaux (PL) $f : X \rightarrow Y$ d'espaces P.L., on associe le groupe $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$ des fonctions constructibles sur X satisfaisant une certaine condition de **compatibilité avec f** (appelée condition d'Euler locale). (Définition I.2.3).

Ces deux théories bivariantes sont munies de trois opérations : produit, image directe et image réciproque. W. Fulton et Mac Pherson démontrent le théorème fondamental suivant :

Théorème. Il existe une transformation et une seule :

$$\omega : \mathbb{F} \rightarrow H$$

qui préserve les trois opérations et telle que si X est une variété lisse sans bord :

$$\omega(1_X) = W(TX) \cdot [X]$$

où 1_X est la fonction constante 1 sur X , $W(TX)$ est la classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent à X et $[X]$ est la classe fondamentale de X .

Selon l'expression même des auteurs : "The proofs are mostly pleasant exercises in combinatorial geometry. They are either omitted or reduced to a bare sketch". Fulton et Mac Pherson définissent la notion d' "applications i-circuit". Ils basent leur démonstration sur le fait que certaines applications f_i sont des i-circuits. (Proposition 6G de [5]). Nous donnons ici un contre exemple de ce fait. (Remarque III.1.9).

Il nous a donc paru nécessaire, d'une part de donner une démonstration du théorème de Fulton et Mac Pherson, d'autre part d'explicitier cette démonstration en en donnant tous les détails.

Les démonstrations données ici font pratiquement toutes appel aux théories combinatoires. L'idée générale est d'utiliser le résultat de Halperin et Toledo [7] concernant la définition combinatoire des classes de Stiefel-Whitney : il s'agit de construire, pour toute fonction constructible α de $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$ une classe $\omega(\alpha)$, dans $H(X \rightarrow Y)$, telle que si α est la fonction constante 1, la classe $\omega(1)$, restreinte à chaque fibre, donne la classe de Stiefel-Whitney de $f^{-1}(y)$ dans $H(f^{-1}(y) \rightarrow \{y\})$.

L'originalité de la démonstration par rapport à celle de Fulton et Mac Pherson réside dans la construction des classes $[f_i]^\alpha$ (Proposition III.1.3) qui évitent l'utilisation des i-circuits.

Le plan de ce travail est le suivant :

Le chapitre 0 est un rappel des définitions de la théorie bivariante.

Au premier chapitre, nous étudions la théorie bivariante F et nous montrons que les trois opérations proposées par Fulton et Mac Pherson définissent bien une théorie bivariante (toutes les démonstrations sont explicites).

Au second chapitre, nous étudions la théorie bivariante H , les applications i -circuits et nous donnons un exemple d'applications F -orientables (application d'Euler).

Le troisième chapitre est consacré à la démonstration proprement dite du théorème fondamentale.

Le lecteur ayant connaissance du travail de Fulton et Mac Pherson peut aborder directement ce troisième chapitre. Cependant, la démonstration de certains des résultats figurent dans les chapitres précédents.

L'intérêt de ce travail réside dans le fait que le théorème fondamental de Fulton et Mac Pherson est riche en cas particuliers et applications (cf. [5]) : Formule de Riemann-Roch, théorème de Riemann-Roch du type verdier, spécialisation des classes de Stiefel-Whitney et une formule combinatoire des classes de Whitney d'un fibré vectoriel.

CHAPITRE 0

THEORIE BIVARIANTE ([5])

On rappelle la définition d'une théorie bivalente :

0.1. Catégorie d'une théorie bivalente :

Une théorie bivalente T est définie sur une catégorie C pour laquelle, il existe :

- 1) une classe de morphismes dans C appelés morphismes "contraints"
- 2) une classe de carrés commutatifs appelés "carrés indépendants" :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad (*)$$

X' est homéomorphe à $\{(x,y') \in X \times Y' / f(x) = g(y')\}$.

- 1) et 2) satisfaisant aux conditions suivantes :
 - les applications identités sont "contraintes"
 - la composée de deux morphismes "contraints" est un morphisme "contraint".

- tout carré de la forme $X \xrightarrow{id} X$ est indépendant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id} & X \\ f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{id} & Y \end{array}$$

- La composée de deux carrés indépendants est un carré indépendant.

- Dans chaque carré (*), si f (resp. g) est "contrainte"

alors f' (resp. g') est contrainte.

0.2. Opérations d'une théorie bivariante :

Une théorie bivariante T sur une catégorie C est la donnée, pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans C , d'un groupe abélien gradué $T(X \xrightarrow{f} Y)$.

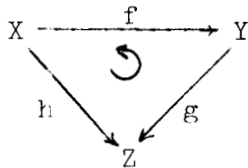
Pour $i \in \mathbb{Z}$, la $i^{\text{ème}}$ composante est notée $T^i(X \xrightarrow{f} Y)$ ou $T^i(f)$.

T est muni de trois opérations bivariantes :

1. Produit. Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, et pour tout $g : Y \rightarrow Z$, dans C ; on a une application produit :

$$T^i(X \xrightarrow{f} Y) \otimes T^j(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{(\cdot)} T^{i+j}(X \xrightarrow{g \circ f} Z).$$

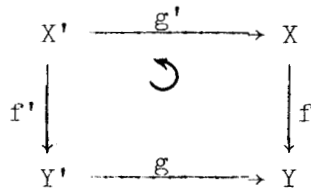
2. Image directe. Pour tout diagramme commutatif dans C :



avec f une application "contrainte" ; on a l'image directe :

$$f_* : T^i(X \xrightarrow{h} Z) \longrightarrow T^i(Y \xrightarrow{g} Z).$$

3. Image réciproque. Pour tout carré indépendant de morphismes de C :



On a une application image réciproque :

$$g^* : T^i(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow T^i(X' \xrightarrow{f'} Y')$$

0.3. Axiomes d'une théorie bivariante.

Les trois opérations sont compatibles avec les sept axiomes suivants :

A1) : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ des morphismes dans C et si $\alpha \in T(X \rightarrow Y)$, $\beta \in T(Y \rightarrow Z)$ et $\gamma \in T(Z \rightarrow W)$ alors $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ dans $T(X \rightarrow W)$.

A2) : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ des morphismes dans C avec $\alpha \in T(X \xrightarrow{h \circ g \circ f} W)$, f et g sont "contraints" alors $(g \circ f)_*(\alpha) = g_* \circ f_*(\alpha)$ dans $T(Z \xrightarrow{h} W)$.

A3) : si on a
$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{h} & X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f'' \downarrow & \curvearrowright & f' \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f \\ Y'' & \xrightarrow{h} & Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$
 sont des carrés

indépendants et si $\alpha \in T(X \xrightarrow{f} Y)$ alors :

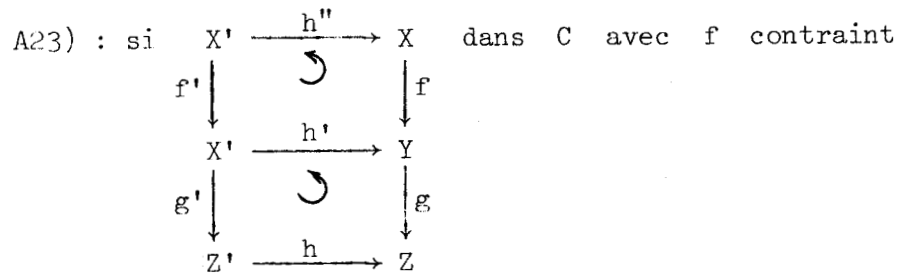
$$(g \circ h)^*(\alpha) = h^* \circ g^*(\alpha)$$

dans $T(X'' \xrightarrow{f''} Y'')$.

A12) : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ des morphismes dans C avec f "contraint", et si $\alpha \in T(X \rightarrow Z)$ et $\beta \in T(Z \rightarrow W)$ alors $f_*(\alpha \cdot \beta) = f_* \alpha \cdot \beta$ dans $T(Y \rightarrow W)$.

A13) : si on a
$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{h''} & X & & \\ f' \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f & & \\ Y' & \xrightarrow{h'} & Y & & \\ g' \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g & & \\ Z' & \xrightarrow{h} & Z & & \end{array}$$
 dans C

et si $\alpha \in T(X \xrightarrow{f} Y)$ et $\beta \in T(Y \xrightarrow{g} Z)$ alors $h^*(\alpha \cdot \beta) = h'^*(\alpha) \cdot h^*(\beta)$ dans $T(X' \rightarrow Z')$.

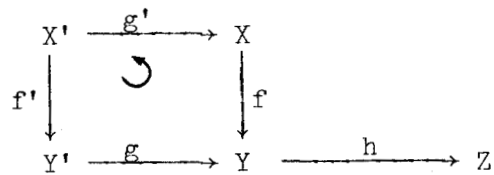


et si $\alpha \in T(X \xrightarrow{g \circ f} Z)$ alors :

$$f'_*(h^* \alpha) = h^*(f_*(\alpha))$$

dans $T(X' \xrightarrow{g'} Z')$.

A123) : si on a le diagramme dans C :



avec g "contraint", et si $\alpha \in T(X \xrightarrow{f} Y)$ et $\beta \in T(Y' \xrightarrow{h \circ g} Z)$ alors

$$g'_*(g^*(\alpha) \cdot \beta) = \alpha \cdot g_*(\beta)$$

dans $T(X \xrightarrow{h \circ f} Z)$.

CHAPITRE I

LA THEORIE BIVARIANTE F ([5])

I.1. Fonctions constructibles.

Un sous-ensemble constructible d'un espace P.L : X est obtenu à partir des sous-espaces P.L de X par un nombre fini des opérations : réunions, intersections et complémentaires.

I.1.1. Définition. ([5]). Soit X un espace P.L, on dit qu'une fonction $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ est constructible si $\alpha^{-1}(1)$ est un sous-ensemble constructible de X (et donc $\alpha^{-1}(0)$ l'est aussi).

I.1.2. Définition. ([5]). Une fonction $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ est constructible si et seulement si il existe une triangulation (K) de X telle que α soit constant à l'intérieur de tout simplexe de (K) .

(K) est alors appelée une triangulation α -adaptée.

I.1.3. Proposition. Les deux définitions sont équivalentes.

Démonstration :

a) (I.1.1.) \implies (I.1.2.).

On suppose que $\alpha^{-1}(1)$ est obtenu à partir des sous-espaces P.L de X par un nombre fini des opérations : réunions, intersections et complémentaires.

On note par $(A_i)_{i \in I}$ ces sous-espaces P.L. et par $(A'_i)_{i \in I}$ les sous-espaces $\partial \bar{A}_i \cap \alpha^{-1}(1)$. I étant un ensemble fini d'indices.

Pour tout i , soit (S_i) une triangulation de \bar{A}_i . Il existe une triangulation (K_i) de X compatible avec une sous-triangulation de (S_i) sur \bar{A}_i ([8]).

De même, soit $(S_1^!)$ une triangulation de $A_1^!$; il existe une triangulation (L_1) de X compatible avec une sous-triangulation de $(S_1^!)$ sur $A_1^!$.

Puisque I est fini, on peut construire une triangulation (K) de X qui est une sous-triangulation commune des triangulations (K_1) et (L_1) ([8]).

On a alors triangularisé X par (K) de telle façon que la restriction de cette triangulation (K) à tout sous-espace \bar{A}_1 donne une triangulation de \bar{A}_1 et que sa restriction à chaque sous-espace $(\partial\bar{A}_1 \cap \alpha^{-1}(1))$ donne une triangulation de $(\partial\bar{A}_1 \cap \alpha^{-1}(1))$.

Ceci prouve que pour tout simplexe δ de (K) , on a :

$$\alpha/\delta = C^{ste}.$$

b) Réciproquement : (I.1.2) \implies (I.1.1).

On suppose qu'il existe une triangulation (K) de X , α -adaptée c'est-à-dire, pour tout simplexe δ de (K) ; on a :

$$\alpha/\delta = C^{ste}.$$

On va montrer que $\alpha^{-1}(1)$ est un sous-ensemble constructible de X .

On note alors : A_i la réunion de tous les simplexes δ de (K) tels que :

$$\dim \delta = i \quad \text{et} \quad \alpha/\delta = 1$$

et pour tout $k : 0 \leq k \leq i : A_i^k$ est la réunion de tous les simplexes δ de (K) tels que :

$$\dim \delta = k \quad \text{et} \quad \alpha/\delta = 0.$$

Les sous-espaces A_i et A_i^k sont des sous-espaces P.L. de X et on a :

$$\alpha^{-1}(1) = \bigcup_{i=0}^{\dim X} \left(A_i \cap \left(\bigcup_{j=0}^i A_i^j \right) \right)$$

donc $\alpha^{-1}(1)$ est un sous-ensemble constructible de X .

C.Q.F.D.

Notation. Dans tout ce qui suit, et pour toute fonction constructible α , on note $\alpha^0(\delta)$ la valeur de δ à l'intérieur des simplexes δ d'une triangulation (K) α -adaptée.

Propriété. L'ensemble $C(X)$ des fonctions constructibles est un groupe additif pour la loi somme.

Démonstration : 1) On montre que si α et β sont 2 fonctions constructibles alors il en est de même pour $\alpha+\beta$. Pour cela, il suffit de remarquer que :

$$(\alpha+\beta)^{-1}(1) = (\alpha^{-1}(0) \cap \beta^{-1}(1)) \cup (\alpha^{-1}(1) \cap \beta^{-1}(0)).$$

et que $\alpha^{-1}(0)$, $\alpha^{-1}(1)$, $\beta^{-1}(0)$ et $\beta^{-1}(1)$ sont des sous-ensembles constructibles de X ; donc $(\alpha+\beta)^{-1}(1)$ est un sous-ensemble constructible de X .

2) L'application nulle de X vers \mathbb{Z}_2 qui à tout élément de X , on fait correspondre l'élément 0 de \mathbb{Z}_2 est une application constructible et est l'élément neutre de $(C(X), +)$.

3) Tout élément α de $C(X)$ est à lui-même son propre inverse.

4) Enfin, il est clair que $(C(X), +)$ est commutatif.

1.2. Définition de \mathbb{F} :

On définit une théorie bivariante qu'on note \mathbb{F} sur la catégorie des espaces P.L. plongeables comme fermés dans des espaces \mathbb{R}^n (n assez grand) et dont les morphismes sont les applications P.L.

1.2.1. Définition. Soit (K) une triangulation d'un espace P.L. X et soit δ un simplexe de (K) . On appelle étoile ouverte de δ et on note $st^{\circ}\delta$ la réunion des intérieurs de tous les simplexes qui rencontrent l'intérieur de δ .

Notations. Si (K) est une triangulation d'un espace P.L., on lira

$\delta_0 < \delta$: δ_0 est une face de δ

$\delta < (K)$: δ est un simplexe de (K) .

1.2.2. Notation. Si α est une fonction constructible de X et A une partie de X , on écrira :

$$\begin{aligned} \chi(A ; \alpha) &= \chi(A \cap \alpha^{-1}(1)) \pmod{2} \\ &= \sum (-1)^i H_c^i(A \cap \alpha^{-1}(1)) \pmod{2} \\ &\quad \text{(cohomologie à supports compacts)} \end{aligned}$$

caractéristique d'Euler de $A \cap \alpha^{-1}(1)$.

Propriété. ([5]) : si (K) est une triangulation α -adaptée de X , et A un sous complexe fini de (K) alors :

$$\chi(A ; \alpha) = \sum_{\delta < (K) \mid \overset{\circ}{\delta} \cap A \neq \emptyset} \alpha(\overset{\circ}{\delta}) \pmod{2}.$$

$\overset{\circ}{\delta}$ étant l'intérieur du simplexe δ .

Cas particulier. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application P.L. et une fonction constructible de X , et soient (K) et (L) deux triangulations de X et Y respectivement telles que f soit simpliciale et que (K) soit α -adaptée. Alors si $x \in \overset{\circ}{\delta_0}$ où δ_0 est un simplexe de (K) ,

et si $y \in Y$ on a :

$$\chi(\text{st}^{\circ} \delta_0 \cap f^{-1}(y) ; \alpha) = \sum \alpha(\delta)$$

la sommation étant étendue aux simplexes δ de (K) tels que

$$\delta_0 < \delta \quad \text{et} \quad \delta \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

1.2.3. Définition. Condition d'Euler locale

Sous hypothèse du cas particulier ci-dessus, si $x \in \delta_0$ où δ_0 est un simplexe de (K) , on dit que α vérifie la condition d'Euler locale (C.E.L) en x si et seulement si :

$$(1) \quad \alpha(x) = \chi(\text{st}^{\circ} \delta_0 \cap f^{-1}(y) ; \alpha) \quad \text{pour tout} \quad y \in \text{st}^{\circ} f(\delta_0).$$

De façon équivalente, l'égalité (1) peut s'écrire : si σ un simplexe de (L) tel que $f(\delta_0) < \sigma$ alors on a :

$$\alpha(x) = \sum \alpha(\delta)$$

la sommation étant étendue aux simplexes δ de (K) tels que $\delta_0 < \delta$ et $f(\delta) = \sigma$.

1.2.4. Proposition. La condition d'Euler locale est indépendante du choix des triangulations (K) et (L) .

Ceci est une conséquence directe du lemme suivant :

1.2.5. Lemme. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application P.L. et $\alpha \in C(X)$. On munit X et Y de métrique induite par l'une des \mathbb{R}^n , on a : α vérifie la C.E.L en x si et seulement si il existe une boule fermée $B(x, \epsilon)$ de centre x , de rayon suffisamment petit $\epsilon > 0$, et une boule fermée $B(f(x), n)$ de centre $f(x)$, de rayon suffisamment petit $n > 0$, telles que :

$$\alpha(x) = \overset{\circ}{\chi}(B(x,\varepsilon) \cap f^{-1}(y)) ; \alpha \text{ pour tout } y \text{ de } \overset{\circ}{B}(f(x),\eta).$$

Démonstration : a) On suppose que α vérifie (1) en x , et soit $B(x,\varepsilon)$ une boule fermée, centrée en x et de rayon suffisamment petit $\varepsilon > 0$ pour que $B(x,\varepsilon)$ soit dans l'étoile ouverte de $\overset{\circ}{\delta}_0$ ($x \in \overset{\circ}{\delta}_0$ où $\overset{\circ}{\delta}_0$ est un simplexe de (K)), et soit $B(f(x),\eta)$ une boule fermée de centre $f(x)$, de rayon suffisamment petit $\eta > 0$ pour qu'on ait :

$$B(f(x),\eta) \subset \text{st}^{\circ} f(\overset{\circ}{\delta}_0) \quad \text{et} \quad B(f(x),\eta) \subset f(B(x,\varepsilon)).$$

Maintenant, on munit $B(x,\varepsilon)$ d'une décomposition cellulaire de la manière suivante : si $h : X \rightarrow |K|$ l'homéomorphisme qui définit la triangulation (K) de X , alors $D = \{\delta \cap h(B(x,\varepsilon)) \text{ avec } \delta \text{ un simplexe de } K \text{ et } \overset{\circ}{\delta}_0 < \delta\}$ est une décomposition cellulaire de $B(x,\varepsilon)$.

On peut identifier $h(B(x,\varepsilon))$ à $B(x,\varepsilon)$.

Une cellule de $B(x,\varepsilon)$ sera notée δ^B avec :

$$\delta^B = \delta \cap B(x,\varepsilon) \quad (\delta < (K) \text{ et } \overset{\circ}{\delta}_0 < \delta).$$

Soit enfin un point y de $B(f(x),\eta)$, il existe un simplexe σ de (L) tel que $y \in \overset{\circ}{\sigma}$ et $f(\overset{\circ}{\delta}_0) < \sigma$. Notons :

$$A = \{\delta < (K) \mid \overset{\circ}{\delta}_0 < \delta \text{ et } f(\delta) = \sigma\}.$$

Pour tout simplexe δ de A , la cellule $\delta^B = \delta \cap B(x,\varepsilon)$ vérifie :

$$\alpha(\overset{\circ}{\delta}) = \alpha(\overset{\circ}{\delta}^B) \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\delta}^B \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \chi(B(x, \varepsilon) \cap f^{-1}(y) ; \alpha) &= \sum_{\substack{\delta \in D \\ \delta \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset}} \alpha(\delta) \\ &= \sum_{\substack{\delta \in (K) \\ \delta_0 < \delta \text{ et } \delta \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset}} \alpha(\delta) \\ &= \alpha(x) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

b) La réciproque se démontre en utilisant le même raisonnement qu'en (a) dans le sens inverse, en remarquant que si :

$$\alpha(x) = \chi(B(x, \varepsilon) \cap f^{-1}(y) ; \alpha) \text{ pour tout } y \text{ de } B(f(x), \eta)$$

alors

$$\alpha(x) = \chi(B(x, \varepsilon') \cap f^{-1}(y) ; \alpha) \text{ pour tout } y \text{ de } B(f(x), \eta')$$

avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$ et $\eta' \leq \eta$ tels que $B(f(x), \eta') \subset f(B(x, \varepsilon'))$.

1.2.6. Définition ([5]). A toute application P.L. $f : X \rightarrow Y$, on associe $\mathbb{F}(X \rightarrow Y) = \mathbb{F}^0(X \rightarrow Y)$ ensemble des fonctions constructibles $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ satisfaisant à la condition d'Euler locale en chaque point x dans X .

Propriété. $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$ est un sous groupe additif de l'ensemble $C(X)$ des fonctions constructibles.

Preuve : soit α et β deux éléments de $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$. Il suffit de montrer que $(\alpha + \beta) \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$, donc que $(\alpha + \beta)$ vérifie la C.E.L en tout point x

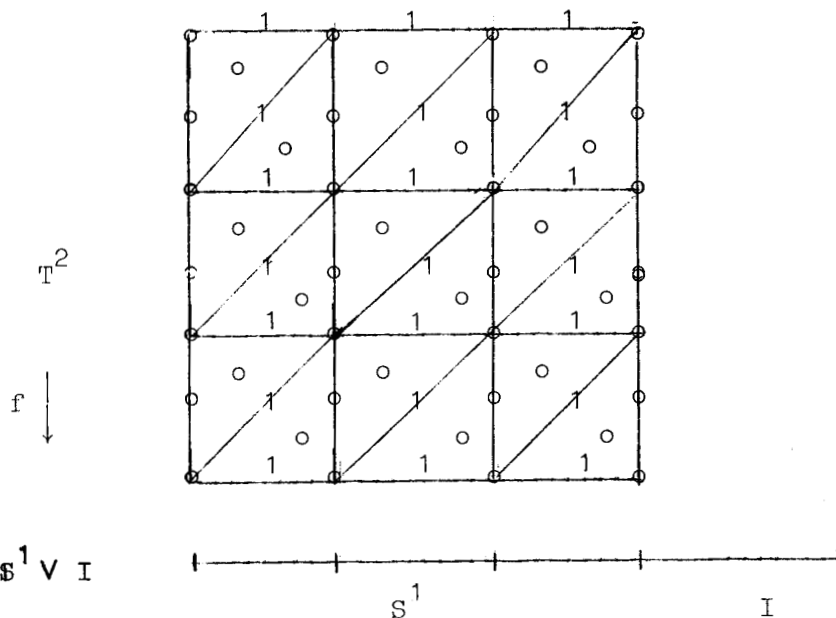
dans X : ceci est évident en écrivant (2) pour α et β , ceci en considérant deux triangulations (K) et (L) de X et Y respectivement telles que : (K) soit α -adaptée et β -adaptée, et que $f : X \rightarrow Y$ soit simpliciale.

1.2.7. Remarque. W. Fulton et Mac Pherson affirment dans ([5]), que si Y est connexe et f est non surjective alors $F(X \rightarrow Y) = 0$.

On va donner un contre exemple à cette affirmation : soit $X = \text{Tore } T^2$, $Y = S^1 \vee I$ où I un segment avec $S^1 \cap I = \text{un point}$ et f la projection de T^2 dans $S^1 \times I$

$$f : X \rightarrow Y$$

α est défini par le schéma suivant :



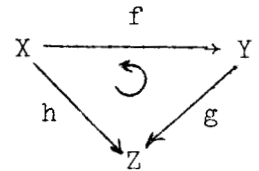
Il est facile de voir que α est dans $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ et α est non nul.

1.3. Opérations sur $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$:

On définit les trois opérations de la théorie bivariente

$\mathbb{F} : ([5])$:

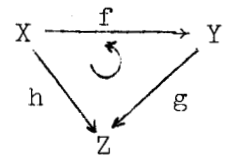
1) Produit : Si on a le diagramme commutatif



$$h = g \circ f$$

et si $\alpha \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ et $\beta \in \mathbb{F}(Y \xrightarrow{g} Z)$, on définit alors le produit $\alpha \cdot \beta$ par $(\alpha \cdot \beta)(x) = \alpha(x) \cdot \beta(f(x))$ pour tout élément x de X .

2) Image directe : Si on a le diagramme commutatif



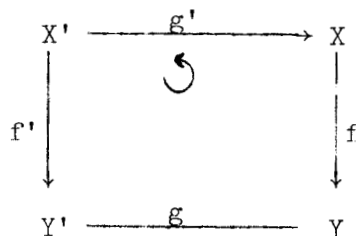
$$h = g \circ f$$

avec f une application propre, et si $\alpha \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{h} Z)$, on définit alors l'image directe de α : $(f_* \alpha)$ par

$$(f_* \alpha)(y) = \chi(f^{-1}(y) ; \alpha)$$

pour tout élément y de Y .

3) Image réciproque : Si on a le carré fibré

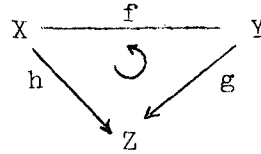


et si $\alpha \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$, on définit l'image réciproque de α : $(g^* \alpha)$ par $(g^* \alpha)(x') = \alpha(g'(x'))$ pour tout élément x' de X' .

1.3.1. Proposition. Ces trois opérations sont bien définies.

Démonstration : 1. Produit :

Soit un diagramme commutatif



$$h = g \circ f.$$

On a défini le produit (\cdot) : pour tout α de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ et pour tout β de $\mathbb{F}(Y \xrightarrow{g} Z)$, on pose $(\alpha \cdot \beta)(x) = \alpha(x) \cdot \beta(f(x))$ pour tout x de X . On veut montrer que ceci définit un produit (\cdot) :

$$\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y) \otimes \mathbb{F}(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{(\cdot)} \mathbb{F}(X \xrightarrow{h} Z).$$

On note (K) , (L) et (M) trois triangulations respectivement de X , Y et Z telles que (K) et (L) soient respectivement α et β -adaptées et que f et g soient simpliciales.

On va montrer que $(\alpha \cdot \beta) \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{h} Z)$. En effet :

a) $(\alpha \cdot \beta)$ est une fonction constructible : si x et x' sont dans l'intérieur d'un même simplexe δ de (K) ; on a $\alpha(x) = \alpha(x')$ et $\beta(f(x)) = \beta(f(x'))$, donc $(\alpha \cdot \beta)(x) = (\alpha \cdot \beta)(x')$. Donc $(\alpha \cdot \beta)$ est constant à l'intérieur de tout simplexe de (K) .

b) On va montrer que $(\alpha \cdot \beta)$ vérifie la C.E.L en tout point x de X :

Pour cela, soit x un point de X et δ_o le simplexe de (K) tel que $x \in \delta_o$; et soit σ_o un simplexe de (M) tel que : $g \circ f(\delta_o) \subset \sigma_o$. On pose alors

$$A = \{\delta \in (K) \mid \delta_o \subset \delta \text{ et } g \circ f(\delta) = \sigma_o\}$$

$$B = \{\tau \in (L) \mid f(\delta_o) \subset \tau \text{ et } g(\tau) = \sigma_o\}$$

et pour tout τ de B , on pose : $C_\tau = \{\delta \mid \delta \in A \text{ et } f(\delta) = \tau\}$

On considère alors le lemme suivant :

1.3.2. Lemme. Avec les hypothèses ci-dessus, on a :

(i) $C_\tau \cap C_{\tau'} = \emptyset$ pour tout $\tau \neq \tau'$ de B

(ii) $A = \bigcup_{\tau \in B} C_\tau$

(iii) Pour tout τ de B :

$$C_\tau = \{ \delta < (K) \mid \delta_0 < \delta \text{ et } f(\delta) = \tau \}$$

(iv) Pour tout τ de B :

$$\alpha(x) = \sum_{\delta \in C_\tau} \alpha(\delta)$$

(v) $\beta(f(x)) = \sum_{\tau \in B} \beta(\tau)$.

Démonstration : (i), (ii) et (iii) sont évidents.

(iv) Il suffit de remarquer que si $\tau \in B$ alors $f(\delta_0) < \tau$, et puisque $x \in \delta_0$, on a :

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{\delta < (K) \text{ tel que} \\ \delta_0 < \delta \text{ et } f(\delta) = \tau}} \alpha(\delta) = \sum_{\delta \in C_\tau} \alpha(\delta) \quad \text{d'après (iii)}$$

(v) On a : $f(x) \in \overline{f(\delta_0)}$ et $g \circ f(\delta_0) < \sigma_0$ donc

$$\beta(f(x)) = \sum_{\substack{\tau < (L) \text{ tel que} \\ f(\delta_0) < \tau \text{ et } g(\tau) = \sigma_0}} \beta(\tau) = \sum_{\tau \in B} \beta(\tau)$$

donc le lemme est démontré.

D'où d'après le lemme I.3.2, puisque $g \circ f(\delta_o) < \sigma_o$, on a

$$\begin{aligned}
 (\alpha \cdot \beta)(x) &= \alpha(x) \cdot \beta(f(x)) \\
 &= \left(\sum_{\delta \in C_\tau} \alpha(\delta) \right) \times \left(\sum_{\tau \in B} \beta(\tau) \right) \text{ d'après (iv) et (v)} \\
 &\quad \text{avec } \tau \in B \\
 &= \sum_{\tau \in B} \sum_{\delta \in C_\tau} \alpha(\delta) \cdot \beta(\tau) \\
 &= \sum_{\tau \in B} \sum_{\delta \in C_\tau} \alpha(\delta) \cdot \beta(f(\delta)) \\
 &= \sum_{\tau \in B} \sum_{\delta \in C_\tau} (\alpha \cdot \beta)(\delta) \\
 &= \sum_{\delta \in A} (\alpha \cdot \beta)(\delta) \text{ d'après (i) et (ii)}
 \end{aligned}$$

Donc le produit vérifie la C.E.L en x .

2. Image directe :

Soit f une application propre et soit le diagramme commutatif :

$$h = g \circ f$$


Pour tout α de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{h} Z)$ et pour tout point y de Y ,

on pose :

$$(f_* \alpha)(y) = \chi(f^{-1}(y); \alpha).$$

On veut montrer que ceci définit une opération :

$$f_* : \mathbb{F}(X \xrightarrow{h} Z) \rightarrow \mathbb{F}(Y \xrightarrow{g} Z).$$

On note (K), (L) et (M) trois triangulations respectivement de X, Y et Z telles que (K) soit α -adaptée et que f et g soient simpliciales.

On veut montrer que $(f_*\alpha)$ est un élément de $\mathbb{F}(Y \xrightarrow{g} Z)$.

Pour cela, on montre d'abord le lemme suivant :

1.3.3. Lemme. Pour tout point y de Y :

$$\chi(f^{-1}(y) ; \alpha) = \sum_{\substack{\delta \langle (K) \text{ tel que} \\ f(\delta) = \sigma}} \alpha(\delta)^{\circ}$$

où σ est le simplexe de (L) tel que $y \in \sigma^{\circ}$.

Démonstration : Soit y un point de Y, et σ le simplexe de (L) tel que $y \in \sigma^{\circ}$.

X est un espace P.L. et f étant une application simpliciale, donc l'ensemble des $\delta \cap f^{-1}(y)$ tels que δ est un simplexe de (K) et $f(\delta) = \sigma$ définit une décomposition cellulaire de $f^{-1}(y)$.

$$\text{En plus : } \overbrace{\delta \cap f^{-1}(y)}^{\circ} = \delta^{\circ} \cap f^{-1}(y) \text{ et } \alpha(\overbrace{\delta \cap f^{-1}(y)}^{\circ}) = \alpha(\delta)^{\circ}.$$

D'autre part, f est une application propre, donc il existe un nombre fini de simplexe δ tel que :

$$\delta \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ et } f(\delta) = \sigma$$

d'où par définition :

$$\begin{aligned} \chi(f^{-1}(y) ; \alpha) &= \sum_{\substack{\delta \cap f^{-1}(y) \text{ tel que} \\ \delta \langle (K) \text{ et } f(\delta) = \sigma}} \alpha(\overbrace{\delta \cap f^{-1}(y)}^{\circ}) \\ &= \sum_{\delta \langle (K) \text{ tel que } f(\delta) = \sigma} \alpha(\delta)^{\circ}. \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Maintenant, on va montrer que $(f_*\alpha) \in \mathbb{F}(Y \xrightarrow{g} Z)$.

a) $(f_*\alpha)$ est une fonction constructible.

Soit σ un simplexe de (L) et soient y et y' dans $\overset{\circ}{\sigma}$.

Alors :

$$(f_*\alpha)(y) = \sum_{\substack{\delta \in (K) \text{ tel que} \\ f(\delta) = \sigma}} \alpha(\delta) = (f_*\alpha)(y') .$$

Donc $(f_*\alpha)$ est constant à l'intérieur des simplexes de (L) .

b) $(f_*\alpha)$ vérifie la C.E.L en tout point y de Y .

Soit y_0 un point de Y , σ_0 le simplexe de (L) tel que $y_0 \in \overset{\circ}{\sigma_0}$, et soit τ un simplexe de M tel que $g(\sigma_0) \subset \tau$.

On veut montrer que :

$$(f_*\alpha)(y_0) = \sum_{\substack{\sigma \in (L) \\ \sigma_0 \subset \sigma \\ g(\sigma) = \tau}} (f_*\alpha)(\overset{\circ}{\sigma})$$

c'est-à-dire :

$$\chi(f^{-1}(y_0) ; \alpha) = \sum_{\substack{\sigma \in (L) \\ \sigma_0 \subset \sigma \\ g(\sigma) = \tau}} \chi(f^{-1}(y) ; \alpha) \quad \text{avec } y \in \overset{\circ}{\sigma}$$

ou encore d'après le lemme (I.3.3.)

$$(1) \quad \sum_{\delta' \in (K') \mid f(\delta') = \sigma_0} \alpha(\delta') = \sum_{\substack{\sigma \in (L) \\ \sigma_0 \subset \sigma \\ g(\sigma) = \tau}} \sum_{\delta \in (K) \mid f(\delta) = \sigma} \alpha(\delta) .$$

Démonstration de (1) : On distingue deux cas :

1) Si $\sigma_0 \notin f(X)$, alors le premier membre de (1) est nul, le deuxième l'est aussi car il n'existe pas de simplexes δ de (K) tel que $f(\delta) = \sigma$ avec $\sigma_0 < \sigma$ et $g(\sigma) = \tau$; s'il en était ainsi, on aurait : $\sigma_0 < f(\delta)$ donc $\sigma_0 \in f(X)$. D'où contradiction.

2) Si $\sigma_0 \in f(X)$. Si δ' est un simplexe de (K) tel que $f(\delta') = \sigma_0$, on a alors :

$$g \circ f(\delta') = g(\sigma_0) \quad \text{et} \quad g(\sigma_0) < \tau$$

d'où puisque α satisfait la C.E.L :

$$\alpha(\delta')^0 = \sum_{\substack{\delta \in (K) \\ \delta' < \delta \\ g \circ f(\delta) = \tau}} \alpha(\delta)^0$$

D'où l'égalité (1) à démontrer devient :

$$(2) \quad \sum_{\substack{\delta' \in (K) \\ f(\delta') = \sigma_0}} \alpha(\delta')^0 = \sum_{\substack{\delta \in (K) \\ \delta' < \delta \\ g \circ f(\delta) = \tau}} \alpha(\delta)^0$$

$$\sum_{\substack{\sigma \in (L) \\ \sigma_0 < \sigma \\ g(\sigma) = \tau}} \alpha(\sigma)^0 = \sum_{\substack{\delta \in (K) \\ f(\delta) = \sigma}} \alpha(\delta)^0$$

Pour montrer l'égalité (2), on pose :

$$A = \{ \delta \in (K) \mid g \circ f(\delta) = \tau \text{ et il existe } \delta' < \delta \text{ tel que } f(\delta') = \sigma_0 \}$$

$$B = \{ \delta \in (K) \mid g \circ f(\delta) = \tau \text{ et } \sigma_0 < f(\delta) \}.$$

D'où montrer l'égalité (2) revient à prouver le lemme suivant.

1.3.4. Lemme. a) $A = B$

b) si $\delta \in A$, alors il existe un nombre impair de simplexes

δ' de (K) tels que :

$$\delta' < \delta \quad \text{et} \quad f(\delta') = \sigma_0$$

(si $\alpha(\delta)$ intervient dans le deuxième membre de (2) avec $\alpha(\delta) = 1$, alors d'après (a), $\delta \in A$ et d'après (b) $\alpha(\delta)$ intervient dans le premier membre puisqu'il figure en nombre impair).

Démonstration : (a) $A = B$. D'une part, si $\delta \in A$, on a $\text{gof}(\delta) = \tau$ et il existe $\delta' < \delta$ tel que $f(\delta') = \sigma_0$, d'où $\sigma_0 < f(\delta)$ donc $\delta \in B$.

Réciproquement, si $\delta \in B$, on a $\text{gof}(\delta) = \tau$ et $\sigma_0 < f(\delta)$, donc il existe un simplexe δ' de (K) tel que

$$\delta' < \delta \quad \text{et} \quad f(\delta') = \sigma_0,$$

donc $\delta \in A$.

(b) Soit $\delta \in A$. On sait que $\sigma_0 < f(\delta)$ d'après (a).

On peut supposer que :

$$f(\delta) = \langle b_0, \dots, b_q, b_{q+1}, \dots, b_m \rangle$$

$$\sigma_0 = \langle b_0, \dots, b_q \rangle$$

et

$$\delta = \langle a_1^0, \dots, a_{i_0}^0 ; a_1^1, \dots, a_{i_1}^1 ; \dots, a_1^q, \dots, a_{i_q}^q ; \dots, a_1^m, \dots, a_{i_m}^m \rangle$$

avec pour $k = 0, \dots, m$: $f(\langle a_1^k, \dots, a_{i_k}^k \rangle) = b_k$.

On veut montrer qu'il existe un nombre impair de simplexes δ' de (K) tels que :

$$\delta' < \delta \quad \text{et} \quad f(\delta') = \sigma_0$$

Posons pour tout $\ell = 0, \dots, q$:

$$B_\ell = \{a_1^\ell, \dots, a_{i_\ell}^\ell\}$$

Pour toute partie non vide C_ℓ de B_ℓ , notons $\delta(C_0, \dots, C_q)$ le simplexe de (K) dont les sommets sont tous les éléments de C_0, \dots, C_q .

Quels que soient C_0, \dots, C_q , on a :

$$\delta(C_0, \dots, C_q) < \delta$$

$$f(\delta(C_0, \dots, C_q)) = \sigma_0$$

Les simplexes δ' cherchés sont tous les simplexes de la forme :

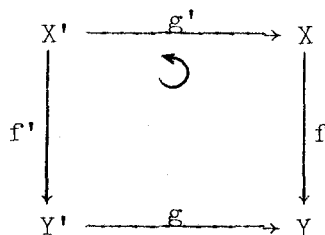
$$\delta(C_0, \dots, C_q) .$$

Le nombre de ces simplexes est égal à :

$$(2^{i_0} - 1)(2^{i_1} - 1) \dots (2^{i_q} - 1),$$

donc impair.

3) Image réciproque. Soit un diagramme commutatif indépendant :



Pour tout α de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ et pour tout point x' de X' ,
on pose :

$$(g^* \alpha)(x') = \alpha(g'(x')).$$

On veut montrer que ceci définit une opération :

$$g^* : \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow \mathbb{F}(X' \xrightarrow{f'} Y').$$

En effet, puisqu'on a un diagramme commutatif indépendant,
 X' est homéomorphe au produit fibré $\{(x, y') \in X \times Y' \mid f(x) = g(y')\}$;
 f' et g' sont les projections canoniques de X' sur Y' et X respec-
tivement.

Ⓐ $(g^* \alpha)$ est une fonction constructible :

$$(g^* \alpha)^{-1}(1) = \{(x, y') \in X' \mid \alpha(x) = 1\} = X' \cap (\alpha^{-1}(1) \times Y')$$

X' et $\alpha^{-1}(1) \times Y'$ sont des sous-ensembles constructibles de X' , donc
 $(g^* \alpha)^{-1}(1)$ l'est aussi.

Ⓑ $(g^* \alpha)$ vérifie la C.E.L en tout point de X' :

Soit $x'_0 = (x_0, y'_0)$ un point de X' , on pose

$$y_0 = f(x_0) = g(y'_0).$$

Puisque $\alpha \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$, d'après le lemme (1.2.5), il existe
une boule fermée $B(x_0, \varepsilon)$ dans X , de centre x_0 , de rayon $\varepsilon > 0$, et une
boule fermée $B(y_0, \eta)$ dans Y , centrée en $y_0 = f(x_0)$, de rayon $\eta > 0$
(pour la norme induite de celle de \mathbb{R}^N , N assez grand) telles que :

$$(1) \alpha(x_0) = \chi(B(x_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(y)) ; \alpha \text{ pour tout élément } y \text{ de } B(y_0, \eta).$$

En outre, soit $B'(x'_0, \varepsilon)$ la boule fermée dans X' , de centre x'_0 , de rayon $\varepsilon > 0$ et $B(y'_0, \eta')$ une boule fermée dans Y' de centre y'_0 , de rayon $\eta' > 0$ suffisamment petit pour que $g(B(y'_0, \eta'))$ soit inclus dans $B(y_0, \eta)$.

On a alors :

$$\overset{\circ}{B}(x'_0, \varepsilon) \cap f'^{-1}(y') = (\overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(y)) \times \{y'\}$$

pour tout y' de $\overset{\circ}{B}(y'_0, \eta')$ tel que $y = g(y') \in \overset{\circ}{B}(y_0, \eta)$. Par définition de $(g^* \alpha)$, la valeur de $(g^* \alpha)$ sur $(\overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(y)) \times \{y'\}$ est égale à la valeur de α sur $\overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(y)$.

D'où pour tout y' de $\overset{\circ}{B}(y'_0, \eta)$ avec $y = g(y')$ dans $\overset{\circ}{B}(y_0, \eta)$, on a :

$$\begin{aligned} & \chi(\overset{\circ}{B}(x'_0, \varepsilon) \cap f'^{-1}(y') ; g^* \alpha) \\ & \quad || \\ & \chi((\overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(y)) \times \{y'\} ; g^* \alpha) \\ & \quad || \\ & \chi(\overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(y) ; \alpha) = \alpha(x_0) = (g^* \alpha)(x'_0) \text{ d'après (1).} \end{aligned}$$

Il existe donc des boules $B(x'_0, \varepsilon)$ et $B'(y'_0, \eta')$ telles que pour tout y' dans $\overset{\circ}{B}'(y'_0, \eta')$:

$$(g^* \alpha)(x'_0) = \chi(\overset{\circ}{B}(x'_0, \varepsilon) \cap f'^{-1}(y') ; g^* \alpha).$$

Ce qui montre d'après le lemme I.2.5 que $(g^* \alpha)$ vérifie la C.E.L en x'_0 .

Remarque. On peut démontrer aussi que $(g^* \alpha)$ est bien défini à l'aide des décompositions cellulaires de X et de Y' , en munissant X' de la décomposition cellulaire : intersection de celle du produit avec X' .

Autre remarque. Pour la théorie \mathbb{F} , on a bien les 7 axiomes

$A_1, A_2, A_3, A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{123}$.

(Il suffit d'appliquer les définitions des 3 opérations : produit, image directe et image réciproque).

1.4. Calcul de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ dans des cas particuliers :

1) Calcul de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{\text{id}} X)$: ([5])

1.4.1. Proposition. ([5]) : Pour tout X , $\mathbb{F}^*(X) = \mathbb{F}(X \xrightarrow{\text{id}} X)$ est l'ensemble des fonctions constructibles qui sont constantes sur toute composante connexe de X .

Démonstration : a) Soit $\alpha \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{\text{id}} X)$. On va montrer que α est constante sur toute composante connexe de X . En effet, soient σ_1 et σ_2 deux simplexes qui sont dans la même composante d'une triangulation (K) de X . Il existe une chaîne de simplexes de (K) :

$$\sigma_1 = \sigma_{i_1} ; \sigma_{i_2} ; \dots ; \sigma_{i_k} = \sigma_2$$

tels que pour tout j , on ait :

$$\sigma_{i_j} < \sigma_{i_{j-1}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{i_{j-1}} < \sigma_{i_j} .$$

Il suffit donc de montrer que pour $\sigma_1 < \sigma_2$ on a $\alpha(\overset{\circ}{\sigma}_1) = \alpha(\overset{\circ}{\sigma}_2)$.

En effet on a :

$$\begin{aligned} \alpha(\overset{\circ}{\sigma}_1) &= \chi(\text{st}^\circ \sigma_1 \cap \text{id}^{-1}(y) ; \alpha) \quad \text{avec} \quad y \in \overset{\circ}{\sigma}_2 \\ &= \chi(\text{st}^\circ \sigma_1 \cap \{y\} ; \alpha) = \alpha(y) = \alpha(\overset{\circ}{\sigma}_2). \end{aligned}$$

b) Soit α une fonction constructible telle que α soit constant sur chaque composante connexe de X , et soit σ_0 un simplexe d'une

triangulation (K) de X. Si σ_1 est un simplexe de (K) tel que $\sigma_0 < \sigma_1$, on a $\alpha(\hat{\sigma}_0) = \alpha(\hat{\sigma}_1)$. D'autre part, on a $\text{id}(\sigma_0) = \sigma_1$ et

$$\sum_{\substack{\sigma \in (K) \\ \sigma_0 < \sigma \\ \text{id}(\sigma) = \sigma_1}} \alpha(\hat{\sigma}) = \alpha(\hat{\sigma}_1)$$

donc $\alpha(\hat{\sigma}_0) = \sum_{\substack{\sigma \in (K) \\ \sigma_0 < \sigma \\ \text{id}(\sigma) = \sigma_1}} \alpha(\hat{\sigma})$ pour tout σ_1 tel que $\text{id}(\sigma_0) < \sigma_1$

d'où d'après (I.2.3), α vérifie la C.E.L. donc

$$\alpha \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{\text{id}} X).$$

2) Calcul de $\mathbb{F}(X \rightarrow \text{pt})$: ([5])

Soit (K) une triangulation de X. Si σ un simplexe de K, on note $\hat{\sigma}$ un barycentre de σ dans une première subdivision barycentrique (K') de (K).

Notation. Chaque fois qu'on notera un simplexe de (K') de la manière suivante : $\langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle$, cela supposera que l'on a : $\sigma_0 < \dots < \sigma_n$.

1.4.2. Définition. Soit σ un simplexe de (K), on appelle "link" de σ dans (K'), et on note $\text{Lk}\sigma$, l'ensemble de tous les simplexes $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle$ de (K') tels que $\langle \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle$ soit un simplexe de (K').

1.4.3. Proposition. ([5]). Pour tout X, $\mathbb{F}(X \rightarrow \text{pt})$ est l'ensemble des fonctions constructibles qui vérifie la condition suivante. Si (K) est une triangulation de X alors

$$\chi(\text{Lk}\sigma ; \alpha) \equiv 0 \pmod{2} \text{ pour tout simplexe } \sigma \text{ de (K).}$$

Démonstration : soit σ un simplexe de (K) , on va montrer d'abord les lemmes suivants :

1.4.4. Lemme. Soit $B(\sigma) = \{ \langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n}, \hat{\sigma} \rangle \langle (K') \mid \sigma_{i_0} \neq \sigma \}$

Alors $B(\sigma)$ est de cardinal un nombre pair.

On rappelle que la notation $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n}, \hat{\sigma} \rangle$ dans (K') implique que $\sigma_{i_0} < \dots < \sigma_{i_n} < \sigma$.

Démonstration : On le montre dans le cas général, en travaillant par récurrence sur la dimension de σ . Si $\dim \sigma = 0$ alors $B(\sigma) = \emptyset$ donc $\text{Card } B(\sigma) = 0$ est pair. On suppose que :

(1) Pour tout σ un simplexe de (K) tel que $\dim \sigma \leq p-1$ alors $\text{card } B(\sigma)$ est pair.

Soit maintenant σ_0 un simplexe de (K) tel que

$$\dim \sigma_0 = p \quad ; \quad p \geq 1.$$

On veut montrer que $\text{card } B(\sigma_0)$ est pair. Il existe un nombre pair $(= 2^{p+1} - 2)$ de faces propres de σ_0 notées :

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{2^{p+1}-2} \quad (\sigma_i \neq \sigma_0).$$

Posons pour tout $i = 1, \dots, 2^{p+1} - 2$:

$$B'(\sigma_i) = \{ \langle \hat{\sigma}_{i_0}, \hat{\sigma}_{i_1}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n}, \hat{\sigma}_i \rangle \langle (K') \}$$

On a :

(i) $\text{Card } B'(\sigma_i)$ est impair pour tout $i = 1, \dots, 2^{p+1} - 2$.

En effet $B'(\sigma_i) = B(\sigma_i) \cup \{ \langle \hat{\sigma}_i \rangle \}$ et $\dim \sigma_i \leq p-1$, donc $\text{Card } B(\sigma_i)$ est pair d'après (1).

$$(ii) \quad B(\sigma_0) \simeq \bigcup_{i=1}^{2^{p+1}-2} B'(\sigma_i) \quad (\text{isomorphisme ensembliste}).$$

En effet, pour tout simplexe $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n}, \hat{\sigma}_0 \rangle$ de $B(\sigma_0)$ il existe un unique simplexe $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle$ de $B(\sigma_i)$ ($\sigma_i = \sigma_{i_n}$).

Réciproquement, à tout simplexe $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n}, \hat{\sigma}_i \rangle$ de $B'(\sigma_i)$, on peut associer un élément $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n}, \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_0 \rangle$ de $B(\sigma_0)$.

(iii) $B'(\sigma_i) \cap B'(\sigma_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ évident. On en déduit de (i), (ii) et (iii) que :

$$\text{Card } B(\sigma_0) = \sum_{i=1}^{2^{p+1}-2} \text{card } B'(\sigma_i)$$

est une somme paire de nombres impairs.

Donc $\text{Card } B(\sigma_0)$ est pair.

1.4.5. Lemme. Soit A l'ensemble des simplexes $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle$ de (K') admettant $\hat{\sigma}$ comme sommet, mais $\sigma_{i_0} \neq \sigma$, et soit $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow \text{pt})$ alors :

$$\sum_{\delta' \in A} \alpha(\delta') \equiv 0 \pmod{2}.$$

Démonstration : On note A' l'ensemble des simplexes de (K') dont le premier sommet est $\hat{\sigma}$.

Pour δ' dans A' , $\sigma_n(\delta')$ le simplexe de (K) dont le barycentre est le dernier sommet de δ' .

Pour $\delta' = \langle \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_p, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle$ dans A' , $E(\delta')$ l'ensemble des simplexes $\langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_{p-2}}, \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_p, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle$ de (K') tels que $\sigma \neq \sigma_{i_0}$.

Il est clair que :

$$(i) \quad A = \bigcup_{\delta' \in A'} E(\delta')$$

$$(ii) \quad E(\delta'_i) \cap E(\delta'_j) = \emptyset \quad \text{pour } \delta'_i \text{ et } \delta'_j \text{ dans } A' \text{ avec } \delta'_i \neq \delta'_j.$$

(iii) Pour tout δ' dans A' : $\text{Card } E(\delta') = \text{Card } B(\sigma)$ est un nombre pair (Lemme I.4.4).

(iv) Pour tout δ'' dans $E(\delta')$ avec :

$$\delta' = \langle \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_p, \dots, \hat{\sigma}_n(\delta') \rangle$$

on a :

$$\alpha(\delta') \overset{\circ}{=} \alpha(\delta'') = \alpha(\overset{\circ}{\sigma}_n(\delta'))$$

Il vient alors d'après (i) et (ii) :

$$\sum_{\delta' \in A'} \alpha(\delta') \overset{\circ}{=} \sum_{\delta' \in A'} \sum_{\delta'' \in E(\delta')} \alpha(\delta'')$$

et d'après (iv) :

$$\begin{aligned} \sum_{\delta'' \in E(\delta')} \alpha(\delta'') \overset{\circ}{=} & \sum_{\delta'' \in E(\delta')} \alpha(\overset{\circ}{\sigma}_n(\delta')) \\ & = (\text{Card } E(\delta')) \times \alpha(\overset{\circ}{\sigma}_n(\delta')) \end{aligned}$$

$$\equiv 0 \pmod{2} \text{ d'après (iii)}$$

d'où le résultat.

1.4.6. Lemme. $\chi(\text{Lk } \sigma ; \alpha) = \sum_{\substack{\delta' \in (K') \mid \delta' \neq \hat{\sigma} \text{ et} \\ \hat{\sigma} \text{ est un sommet de } \delta'}} \alpha(\delta').$

Démonstration : On a d'une part :

$$(2) \quad \chi(\text{Lk } \sigma ; \alpha) = \sum_{\substack{\delta'' \in (K') \mid \delta'' = \langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle \\ \text{avec } \sigma \langle \hat{\sigma}_{i_0} \rangle}} \alpha(\delta'').$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{\delta' \in (K') \\ \left| \begin{array}{l} \langle \hat{\sigma} \rangle \neq \delta' \\ \hat{\sigma} \text{ est un sommet de } \delta' \end{array} \right.}} \alpha(\delta') \\
 &= \sum_{\substack{\delta' \in (K') \\ \left| \begin{array}{l} \delta' = \langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_p}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle \\ \text{et } \sigma_{i_0} \neq \sigma \end{array} \right.}} \alpha(\delta') \\
 &+ \sum_{\substack{\delta' \in (K') \\ \left| \begin{array}{l} \delta' = \langle \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle \\ \sigma \neq \sigma_{i_0} \end{array} \right.}} \alpha(\delta') \\
 &= \sum_{\delta' \in A} \alpha(\delta') + \sum_{\substack{\delta'' \in (K') \\ \left| \begin{array}{l} \delta'' = \langle \hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_n} \rangle \\ \sigma < \sigma_{i_0} \end{array} \right.}} \alpha(\delta'') \\
 &= \sum_{\delta' \in A} \alpha(\delta') + \chi(\text{Lk } \sigma ; \alpha) \text{ d'après (2)} \\
 &= \chi(\text{Lk } \sigma ; \alpha) \text{ d'après le lemme I.4.5).}
 \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 1.4.3. : On a par définition : $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow \text{pt})$ si et seulement si α est une fonction constructible et pour tout simplexe σ de (K) , α vérifie la C.E.L en $\langle \hat{\sigma} \rangle$, c'est-à-dire : $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow \text{pt})$ si et seulement si α est une fonction constructible et pour tout simplexe σ de (K) on a :

$$\alpha(\langle \hat{\sigma} \rangle) = \sum_{\delta' \langle (K') \mid \langle \hat{\sigma} \rangle \subset \delta'} \alpha(\delta')^0$$

ou encore d'après le lemme 1.4.6 : $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$ si et seulement si α est une fonction constructible et pour tout simplexe σ de (K) :

$$0 = \sum_{\substack{\delta' \langle (K') \mid \hat{\sigma} \text{ est un sommet de } \delta' \\ \text{et } \langle \hat{\sigma} \rangle \neq \delta}} \alpha(\delta')^0 = \chi(\text{Lk } \sigma ; \alpha)$$

C.Q.F.D.

CHAPITRE II

APPLICATIONS D'EULER ET APPLICATIONS CIRCUITS : ([5]).

II.0. Définition de la théorie bivariante $H(X \rightarrow Y)$: ([5]).

On rappelle la construction de la théorie bivariante H sur la catégorie des espaces topologiques plongeables comme fermés dans un espace euclidien E et dont les morphismes sont les applications continues.

On prend $E = \mathbb{R}^N$, N assez grand.

A toute application continue $f : X \rightarrow Y$, on va faire correspondre un groupe gradué : $H(X \xrightarrow{f} Y)$ à l'aide de la théorie classique de cohomologie modulo 2.

II.0.1. Définition. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue, si $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue telle que $(f, \phi) : X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^n$ soit un plongement fermé, alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \times \mathbb{R}^n \\
 & \nearrow (f, \phi) & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

s'appellera une factorisation de f , et on dit alors que ϕ factorise f .

On notera $f_\phi(X)$ l'image de X par (f, ϕ) .

Remarque. On peut prendre ϕ un plongement fermé.

II.0.2. Définition. Pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$, si $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ factorise f ; pour tout i , on définit $H^i(X \xrightarrow{f} Y)$ par :

$$H^i(X \xrightarrow{f} Y) = H^{i+n}(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - f_\phi(X))$$

où la cohomologie est à coefficients dans \mathbb{Z}_2 .

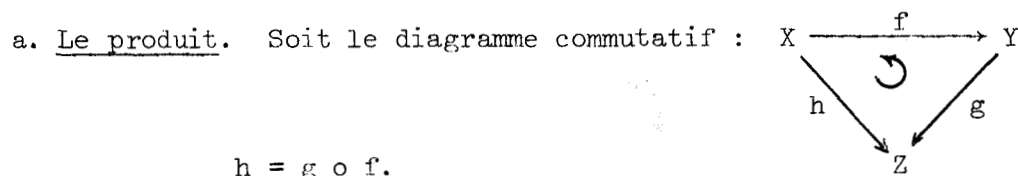
II.0.3. Proposition. Cette définition ne dépend pas du choix de la factorisation.

Pour la démonstration voir ([5],).

Cas particulier.

1. $H^i(X \xrightarrow{\text{id}} X) = H^i(X)$
2. $H^i(X \rightarrow \text{pt}) = H_{-i}^{\mathbb{F}}(X)$. (Homologie à supports fermés)

Maintenant, on définit les trois opérations : produit, image directe et image réciproque.



On va définir le produit bivariant (\cdot) :

$$H^i(X \xrightarrow{f} Y) \otimes H^j(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{(\cdot)} H^{i+j}(X \xrightarrow{h} Z).$$

1er cas : $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des plongements fermés.

Le produit à définir devient alors :

$$(1) \quad H^i(Y, Y-X) \otimes H^j(Z, Z-Y) \rightarrow H^{i+j}(Z, Z-X)$$

Pour cela, soit (U, V) un voisinage ouvert de $(Y, Y-X)$ dans Z tel que $V \cap Y = Y-X$.

Il existe le cup produit :

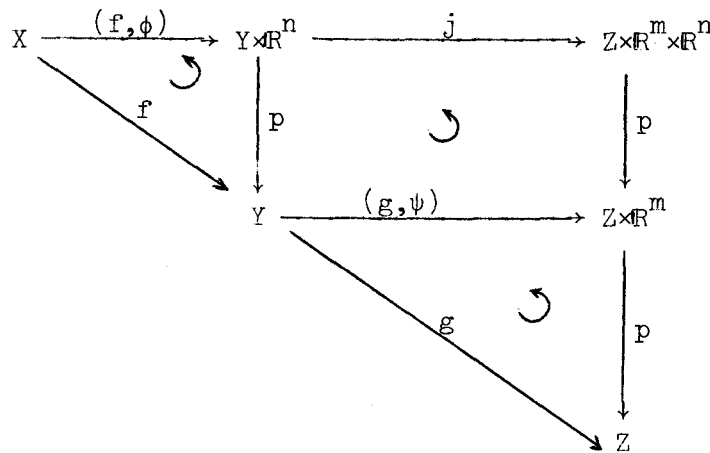
$$(2) \quad H^i(U, V) \otimes H^j(U, U-Y) \longrightarrow H^{i+j}(U, U-X)$$

et puisque par excision :

$$H^*(U, U-Y) = H^*(Z, Z-Y) \quad \text{et} \quad H^*(U, U-X) = H^*(Z, Z-X)$$

le produit est déterminé par le passage à la limite directe dans (2).

2ème cas : Pour $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ quelconques. On choisit $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications continues qui factorisent f et g respectivement : on considère alors le diagramme :

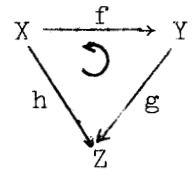


où $j(y, v) = (g(y), \psi(y), v)$ et les applications verticales sont les projections. Le produit est alors l'application composée :

$$\begin{array}{c}
 H^{i+n}(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - f_\phi(X)) \otimes H^{j+m}(Z \times \mathbb{R}^m, Z \times \mathbb{R}^m - g_\psi(Y)) \\
 \downarrow \text{id} \times p^* \\
 H^{i+n}(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - f_\phi(X)) \otimes H^{j+m}(Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n - g_\psi(Y) \times \mathbb{R}^n) \\
 \downarrow (\cdot) \\
 H^{i+j+m+n}(Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n - f_{(\psi f, \phi)}(X))
 \end{array}$$

où le 2ème homomorphisme est le produit défini dans le premier cas.

b. L'image directe. Soit un diagramme commutatif



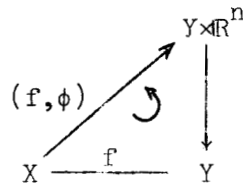
avec f une application propre

$$h = g \circ f.$$

On va définir l'image directe :

$$H^i(X \xrightarrow{h} Z) \xrightarrow{f_*} H^i(Y \xrightarrow{g} Z).$$

Pour cela, puisque f est une application propre, on peut choisir une application $\phi : X \rightarrow I^n$ où I^n est un cube unité fermé dans \mathbb{R}^n et telle que le diagramme



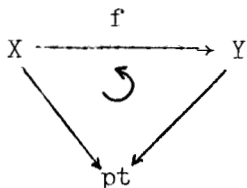
soit une factorisation de f , et soit $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue qui factorise g . L'image directe f_* est la composée :

$$\begin{array}{c}
 H^{i+m+n}(Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n - f_{(\psi, \phi)}(X)) \\
 \downarrow \text{restriction} \\
 H^{i+m+n}(Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (Z \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n - I^n)) \cup ((Z \times \mathbb{R}^n - f_{\psi}(Y)) \times \mathbb{R}^n)) \\
 \downarrow \cong (\times \mathbb{R}^{-n})^{-1} \\
 H^{i+m}(Z \times \mathbb{R}^m, Z \times \mathbb{R}^m - g_{\psi}(Y)).
 \end{array}$$

$(\bar{x}\bar{y}^n)$ est le produit externe par \bar{y}^n , générateur canonique de $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{I}^n)$.

Ce produit externe est un isomorphisme ([5]).

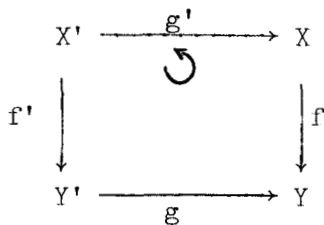
Cas particulier de l'image directe. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application propre, et soit le diagramme commutatif :



alors $f_* : H^i(X \rightarrow \text{pt}) \rightarrow H^i(Y \rightarrow \text{pt})$ est l'application (dans la théorie classique de cohomologie)

$$H_{-i}^{\mathbb{F}}(X) \xrightarrow{f_*} H_{-i}^{\mathbb{F}}(Y).$$

c. L'image réciproque. Soit un carré fibré indépendant :



on va définir l'image réciproque :

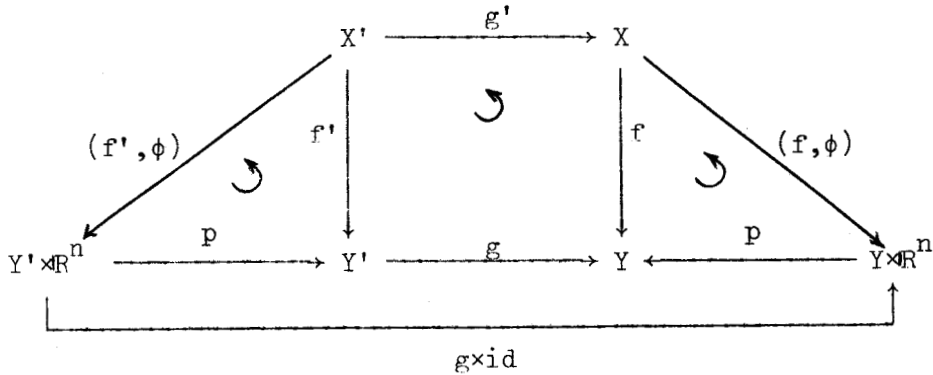
$$H^i(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{g^*} H^i(X' \xrightarrow{f'} Y').$$

Pour cela, soit $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue qui factorise f .

En identifiant X' à l'ensemble des (x, y') de $X \times Y'$ tels que $f(x) = g(y')$, il est facile de voir que

$\phi : X' \rightarrow \mathbb{R}^n$
 factorise f' .
 $(x, y) \mapsto \phi(x)$

D'autre part, si on considère le diagramme :



On a :

$$(g \times id)(f'_{\phi}(X')) \subset f_{\phi}(X).$$

Par définition g^* est l'application

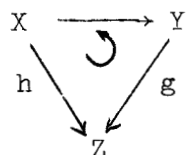
$$H^{i+n}(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(X)) \xrightarrow{(g \times id)^*} H^{n+i}(Y' \times \mathbb{R}^n, Y' \times \mathbb{R}^n - f'_{\phi}(X')).$$

II.1. Orientations - applications d'Euler : ([5]).

a. Orientations - Exemples dans $H(X \rightarrow Y)$ - Orientation canonique.

II.1.1. Définition ([5]) : Soit $f : X \rightarrow Y$ une application et T une théorie bivariante, un élément θ de $T(X \rightarrow Y)$ définit une orientation forte pour f si pour toute application $h : W \rightarrow X$, l'homomorphisme $T(W \rightarrow X) \xrightarrow{\cdot \theta} T(W \xrightarrow{f \circ h} Y)$ est un isomorphisme.

II.1.2. Lemme ([5]) : Soit un diagramme commutatif



$$h = g \circ f$$

Si ϕ et ψ sont des orientations fortes respectivement de f et g alors $\phi \cdot \psi$ est une orientation forte de $g \circ f$.

La preuve étant immédiate d'après la définition II.1.1.

II.1.3. Définition ([5]) : On dit qu'une théorie bivariante T admet un élément neutre s'il existe un élément 1_X de $T^0(X \xrightarrow{\text{id}} X)$ tel que :

(i) Pour toute application $W \rightarrow X$ et pour tout α de $T(W \rightarrow X)$

$$\alpha \cdot 1_X = \alpha$$

(ii) Pour toute application $X \rightarrow W$ et pour tout β de $T(X \rightarrow W)$

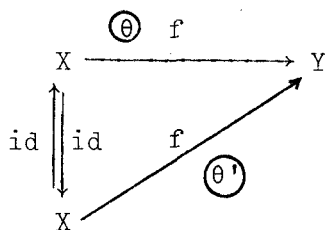
$$1_X \cdot \beta = \beta$$

(iii) Pour toute application $g : X' \rightarrow X$:

$$g^* 1_X = 1_{X'}$$

II.1.4. Proposition. ([5]) : Si T une théorie bivariante admettant un élément neutre, et si θ et θ' sont deux orientations fortes d'une même application $f : X \rightarrow Y$ alors $\theta = \mu \theta'$ où μ est un élément inversible dans $T(X \rightarrow X)$.

Démonstration : D'après le diagramme commutatif suivant :



et d'après la définition II.1.1, il existe μ et μ' dans $T(X \xrightarrow{\text{id}} X)$

tel que :

$$\mu\theta = \theta' \quad \text{et} \quad \mu'\theta' = \theta$$

$$\text{d'où} \quad \mu\mu'\theta' = \theta' \quad \mu'\mu\theta = \theta$$

ce qui donne $\mu\mu' = 1_X$ et $\mu'\mu = 1_X$. D'où le résultat.

Exemple dans $H(X \rightarrow Y)$.

II.1.5. Définition ([5]) : une application $f : X \rightarrow Y$ est appelée normalement non singulière (n.n.s) s'il existe un diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & Y \times \mathbb{R}^n \\ \uparrow \downarrow s_0 \quad \Pi & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où $\Pi : N \rightarrow X$ est un fibré vectoriel de section nulle s_0 , i un plongement ouvert, p la projection canonique et $f = p \circ i \circ s_0$.

Le fibré $N = N_f$ est appelé fibré normal de f , (1) un diagramme normalement non singulier de f et $d = (\text{rang } N) - n$ la codimension de f .

Exemples d'applications normalement non singulières.

1) Si $\Pi : E \rightarrow X$ est la projection d'un fibré vectoriel, alors toute section $s : X \rightarrow E$ est une application normalement non singulière avec fibré normal E et dont un diagramme n.n.s est :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & E \times \mathbb{R}^0 \\ \uparrow \downarrow s_0 & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s} & E \end{array}$$

où i étant l'homéomorphisme défini de la manière suivante : pour tout x un point de X , on note i_x la translation de $\Pi^{-1}(x) \rightarrow \Pi^{-1}(x)$ de vecteur $s(x)$. Si $e \in E$, on pose

$$i(e) = i_{\Pi(e)}(e).$$

Il est facile de voir que : $p \circ i \circ s_0 = s$.

2) Si $\Pi : E \rightarrow X$ la projection d'un fibré vectoriel tel qu'il existe un fibré F où $E \oplus F$ est un fibré trivial, alors la projection $\Pi : E \rightarrow X$ est une application normalement non singulière avec fibré normal Π^*F . En effet on a

$$\begin{array}{ccc} \Pi^*F & \xrightarrow{\quad} & F \\ \Pi^* \downarrow & & \downarrow \Pi' \\ E & \xrightarrow{\quad \Pi \quad} & X \end{array}$$

avec

$$\Pi^*F \simeq \{(e, f) \in E \times F \mid \Pi(e) = \Pi'(f)\}$$

et

$$\begin{array}{ccc} E \oplus F & \xrightarrow{\quad} & E \times F \\ d^*(\Pi) \downarrow & & \downarrow (\Pi, \Pi') \\ X & \xrightarrow{\quad d \quad} & X \times X \end{array} \quad \begin{array}{l} E \oplus F = d^*(E \times F) \\ d^*(\Pi)(e, f, x) = \Pi(e) = x \\ \text{avec :} \\ \Pi(e) = \Pi'(f) = x \end{array}$$

$$E \oplus F \simeq \{(e, f, x) \in E \times F \times X \mid \Pi(e) = \Pi'(f) = x\}.$$

Il est clair que $E \oplus F \simeq \Pi^*F$ (isomorphisme d'espaces totaux des deux fibrés $E \oplus F$ et Π^*F). Or $E \oplus F \xrightarrow{d^*(\Pi)} X$ est un fibré trivial, donc :

$$\begin{array}{ccc} E \oplus F & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & X \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow d^*(\Pi) & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

est un homéomorphisme de fibré : $p \circ \psi = d^*(\Pi)$.

D'où un diagramme normalement non singulier de Π :

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi^* F & \xrightarrow{i} & X \times \mathbb{R}^n \\
 \downarrow \Pi^* & \curvearrowright & \downarrow p \\
 E & \xrightarrow{\Pi} & X
 \end{array}$$

(Note: A vertical arrow labeled s_0 points from E to $\Pi^* F$.)

$i(e, f) = \psi(e, f, \Pi(e))$, i est un homéomorphisme.

On a :

$$\begin{aligned}
 p \circ i \circ s_0(e) &= p \circ i(e, f) && \text{avec } \Pi(e) = \Pi'(f) \\
 &= p \circ \psi(e, f, \Pi(e)) \\
 &= d^*(\Pi)(e, f, \Pi(e)) \\
 &= \Pi(e)
 \end{aligned}$$

donc

$$p \circ i \circ s_0 = \Pi .$$

II.1.6. Proposition ([5]) : Soit $f : X \rightarrow Y$ une application normalement non singulière de codim d avec fibré normal N et $i \circ s_0(X)$ est un fermé dans $Y \times \mathbb{R}^n$. On suppose que N est H^* -orientable (c'est-à-dire N admet une classe de Thom u dans $H^r(N, N-X)$, $r = \text{rang } N$) alors il existe une correspondance biunivoque entre les orientations fortes de f dans $H^d(X \xrightarrow{f} Y)$ et les classes de Thom de N dans $H^r(N, N-X)$.

Démonstration : (esquisse). On a d'une part, par exision :

$$H^r(N, N-X) = H^r(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - X).$$

D'autre part : $H^d(X \xrightarrow{f} Y) = H^r(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - X)$ donc

$$H^r(N, N-X) \approx H^d(X \xrightarrow{f} Y).$$

De plus :

1) Si $g : W \rightarrow X$ est un plongement fermé, l'isomorphisme de Dold-Thom :

$$H^i(X, X-W) \xrightarrow{\Pi^*(\) \cup u} H^{i+r}(N, N-W)$$

exprime bien le fait que :

$$H^i(W \xrightarrow{g} X) \xrightarrow{\cdot u} H^{i+d}(W \xrightarrow{f \circ g} Y)$$

est un isomorphisme.

2) Si $g : W \rightarrow X$ est quelconque, on se ramène à 1) en factorisant g avec un plongement fermé de X dans $X \times \mathbb{R}^n$. Et puisque les classes de Thom et les orientations fortes sont toutes les deux déterminées à une unité près dans $H^0(X \rightarrow X)$, on a la proposition.

Orientations canoniques.

II.1.6. Définition ([5]). Soit T une théorie bivariante définie sur une catégorie C , et soit S une classe d'applications dans C , fermée par composition et contenant l'application identité.

On suppose que pour toute application $f : X \rightarrow Y$ de S , il existe un élément $\theta(f)$ dans $T(X \rightarrow Y)$ satisfaisant

- (i) $\theta(g \circ f) = \theta(g) \cdot \theta(f)$ pour $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ dans S .
- (ii) $\theta(\text{id}_X) = 1_X$ pour tout X .

Les $\theta(f)$ définis pour toute application f de S déterminent des orientations canoniques pour la théorie bivariante T dans S .

On donnera comme exemple les applications d'Euler.

b. Applications d'Euler.

II.1.7. Définition ([5]). Une application d'Euler est une application $f : X \rightarrow Y$ pour laquelle la fonction constructible 1 sur X satisfait à la condition d'Euler locale pour tout x de X . Dans ce cas, on note cette fonction constructible 1_f .

Remarque. L'ensemble E des applications d'Euler est stable pour la composition et les fonctions constructibles 1_f sur E déterminent des orientations canoniques dans E .

Exemples d'applications d'Euler ([5]).

1) $X \rightarrow \text{pt}$ est une application d'Euler si et seulement si X est un espace d'Euler (mod 2) c'est-à-dire pour tout x de X :

$$\chi(X, X - \{x\}) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Démonstration : Le résultat est évident car, si (K) est une triangulation de X et si x est dans l'intérieur d'un simplexe δ de (K) alors

$$\chi(\text{st}^0 \delta) = \chi(X, X - \{x\})$$

donc

$$\chi(\text{st}^0 \delta) \equiv 1 \text{ pour tout } \delta \Leftrightarrow \chi(X, X - \{x\}) \equiv 1 \text{ pour tout } x.$$

C.Q.F.D.

Dans ce cas l'orientation canonique sera notée 1_X .

2) Une fibration localement triviale dont les fibres sont des espaces d'Euler (mod 2) est une application d'Euler.

Démonstration : Soit $f : X \rightarrow Y$ une fibration localement triviale. On suppose que pour tout y dans Y , $F_y = f^{-1}(y)$ est un espace d'Euler (mod 2) ; c'est-à-dire: l'application constructible qui vaut 1 sur F_y est un élément de $\mathbb{F}(F_y \rightarrow \text{pt})$, ou encore d'après le lemme I.2.5 : il existe une boule fermée $B(x, \varepsilon)$ dans F_y , centrée en x dans F_y , de rayon $\varepsilon > 0$ (pour la distance induite de celle de X) telle que :

$$(1) \quad 1 \equiv \chi(B(x, \varepsilon)) \pmod{2}$$

Puisque f est une fibration localement triviale, on peut prendre $B(x, \varepsilon)$ telle que :

$$B(x, \varepsilon) = B'(x, \varepsilon) \cap F_y$$

où $B'(x, \varepsilon)$ est la boule dans X de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$.

D'où (1) devient :

$$1 \equiv \chi(B'(x, \varepsilon) \cap f^{-1}(y)) \pmod{2}$$

et d'après le lemme I.2.5 : $1 \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$. Donc f est une application d'Euler.

Propriétés des applications d'Euler [5].

1. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application d'Euler alors les fibres sont des espaces d'Euler mod 2.

Démonstration : soit y un point de Y , on note $F_y = f^{-1}(y)$ et soit le diagramme indépendant :

$$\begin{array}{ccc} F_y & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f \\ \{y\} & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

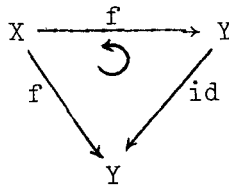
Alors on a $1_f \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ d'après II.1.7 donc :

$$(i^* 1_f) \in \mathbb{F}(Fy \rightarrow \{y\}).$$

Or $(i^* 1_f) = 1_{Fy}$ est un élément de $\mathbb{F}(Fy \rightarrow pt)$, donc $Fy \rightarrow pt$ est une application d'Euler. Et d'après l'exemple 1, Fy est un espace d'Euler (mod 2).

2. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application d'Euler propre, alors $\chi(f^{-1}(y))$ est une fonction localement constante sur Y (mod 2).

Démonstration : Soit le diagramme commutatif



f est propre et $1_f \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ donc $(f_* 1_f) \in \mathbb{F}(Y \xrightarrow{id} Y)$. Or

$$(f_* 1_f)(y) = \chi(f^{-1}(y)) ; 1_f = \chi(f^{-1}(y)) \text{ pour tout } y \text{ de } Y.$$

Donc $\chi(f^{-1}(y)) \in \mathbb{F}(Y \xrightarrow{id} Y)$.

D'où la proposition I.4.1. : $\chi(f^{-1}(y))$ est une fonction constante sur les composantes connexes de Y .

C.Q.F.D.

II.2. i-circuits.

II.2.1. Définition. ([5]). Un i -circuit (mod 2) est un espace X tel que pour une triangulation (K) de X , on a :

- 1) (K) est la réunion de ses i -simplexes.
- 2) Tout $(i-1)$ -simplexe de (K) est face d'un nombre pair de i -simplexes.

II.2.2. Proposition. Cette définition ne dépend pas de la triangulation choisie.

Démonstration : On montre d'abord que si (K) est une triangulation de X et si (K') est une première subdivision barycentrique de (K), on a : (K) vérifie 1) et 2) si et seulement si (K') vérifie 1) et 2).

En effet soit (K) une triangulation de X qui vérifie 1) et 2). Il est évident que (K') vérifie 1). On montre que (K') vérifie 2). Soit δ'_0 un simplexe de (K') de dimension $i-1$. Alors on a avec $\dim \delta'_k = k$ pour tout k ,

ou bien $\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{i-1} \rangle$ avec $\delta_0 < \dots < \delta_{i-1}$

ou bien $\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{j-1}, \hat{\delta}_{j+1}, \dots, \hat{\delta}_i \rangle$ avec $\delta_0 < \dots < \delta_{j-1} < \delta_{j+1} < \dots < \delta_i$

Dans chacun des deux cas, il est facile de voir qu'il existe un nombre pair de simplexes δ' de (K') de dimension i et admettant δ'_0 comme face. Donc (K') vérifie 2).

Réciproquement, on suppose que (K') vérifie 1) et 2). Il est clair que (K) vérifie 1). On montre que (K) vérifie 2). Soit δ_0 un simplexe de (K) de dimension $i-1$ que l'on note

$$\delta_0 = \langle a_0, \dots, a_{i-1} \rangle .$$

Soit

$$\delta'_0 = \langle \hat{a}_0, \langle a_0, a_1 \rangle, \dots, \langle a_0, \dots, a_p \rangle, \dots, \hat{\delta}_0 \rangle$$

$\langle \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_p \rangle$ étant le barycentre du simplexe qui a pour sommets : a_0, \dots , et a_p , $p \leq i-1$.

δ'_0 est un simplexe de (K') de dimension $i-1$, donc il existe un nombre pair de simplexes δ' de (K') de dimension i et admettant δ'_0 pour face.

Ces simplexes s'écrivent $\delta' = \langle \hat{a}_0, \widehat{\langle a_0, a_1 \rangle}, \dots, \hat{\delta}_0, \hat{\delta} \rangle$ avec δ simplexe de (K) , de dimension i et admettant δ_0 comme face.

Il y a donc autant de simplexes de dimension i

- dans (K) admettant δ_0 pour face
- dans (K') admettant δ'_0 pour face.

D'où le résultat.

Maintenant, si (K_1) et (K_2) sont deux triangulations de X , alors il existe (K) subdivision barycentrique itérée commune de (K_1) et (K_2) ([8]). On en déduit que la définition II.2.1 ne dépend pas du choix de la triangulation de X .

II.2.3. Proposition. ([5]). Un i -circuit X admet une unique orientation $[X] \in H_i^{\mathbb{F}}(X, \mathbb{Z}_2)$ qui se restreint à un élément non nul de $H_i^{\mathbb{F}}(X, X-\{p\})$ pour tout p de X .

Démonstration : Soit (K) une triangulation de X , et soit $\{X\}$ la chaîne somme de tous les i -simplexes de (K) à coefficients dans \mathbb{Z}_2 .

D'après 2) de la définition II.2.1, $\{X\}$ est un cycle (mod 2) qu'on note $[X]$.

Donc X admet une orientation $[X]$, celle-ci est unique car les coefficients sont dans \mathbb{Z}_2 .

D'autre part, soit p un point de X et $C_i^{(K)}(X)$ le groupe des i -chaînes de (K) , et soit :

$$j : C_i^{(K)} \longrightarrow C_i^{(K)}(X, X\text{-st}^{\circ}\delta) \quad \text{avec } p \in \delta^{\circ}$$

$$\tau \longmapsto \tau \begin{cases} \text{si } p \in \tau \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a :

$$j(\{X\}) = \sum_{\dim \tau = i} j(\tau) = \sum_{\tau | \tau \in \text{st}^{\circ}\delta} \tau$$

ceci est un cycle dans $C_i^{(K)}(X, X\text{-st}^{\circ}\delta)$, mais n'est pas un bord.

En remarquant que pour tout p de δ° , on a :

$$H_i(X, X\text{-}\{p\}) \approx H_i(X, X\text{-st}^{\circ}\delta)$$

on en déduit que $[j\{X\}]$ est non nul dans $H_i^{\mathbb{F}}(X, X\text{-}\{p\})$.

II.3. Applications i-circuits.

II.3.1. Définition. Soient (K) et (L) deux triangulations de X et Y respectivement telles que $f : X \rightarrow Y$ soit simpliciale, on appelle dimension relative d'un simplexe δ de (K) la différence $\dim \delta - \dim f(\delta)$. On la note : $\dim_{\mathbb{F}} \delta$.

II.3.2. Définition. ([5]). Une application $f : X \rightarrow Y$ est appelée application i-circuit (mod 2) si :

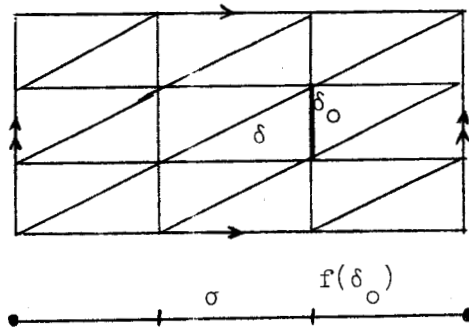
- 1) $f^{-1}(y)$ est un i-circuit (mod 2) pour tout point y de Y .
- 2) Pour (K) et (L) triangulations de X et Y respectivement telles que f soit simpliciale, pour tout simplexe δ_0 de (K) de dimension relative i , on a la condition de parité locale (C.P.L) au sens suivant :

II.3.3. Définition. ([5]). On dit que la condition de parité locale est réalisée pour un simplexe δ_0 de (K) de dimension relative i , si pour tout simplexe σ de (L) tel que $f(\delta_0)$ face de σ , alors il existe un nombre impair de simplexes δ de (K) tel que :

- (i) $\delta_0 < \delta$
- (ii) $\dim_f \delta = i$
- (iii) $f(\delta) = \sigma$.

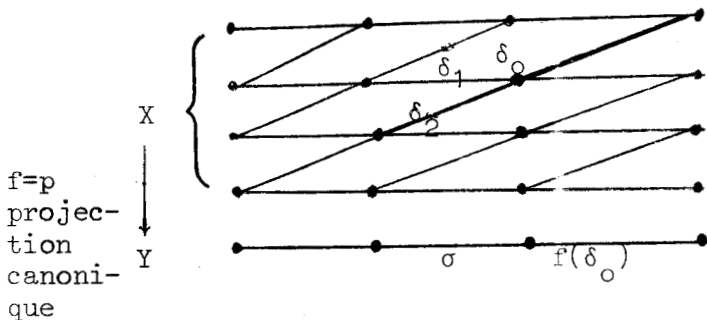
Exemple et contre exemple.

1) La projection canonique P du tore T^2 sur S^1 est une application 1-circuit :



Mais p n'est pas un 0-circuit car $f^{-1}(y)$ n'est pas un 0-circuit (mod 2) pour y de Y .

2) Soit f l'application schématisée ci-dessous :



f vérifie 1) de la définition pour $i = 0$, mais n'est pas un 0-circuit car ne vérifie pas 2) de la définition.

$\dim_f \delta_0 = 0$, $f(\delta_0) < \sigma$ et il existe deux simplexes δ_1 et δ_2 tels que

(i) $\delta_0 < \delta$

(ii) $\dim_f \delta_k = 0$ et $f(\delta_k) = \sigma$ pour $k = 1, 2$.

Donc f ne vérifie pas la condition de parité locale en δ_0 .

II.3.4. Proposition. La définition d'application i -circuit est indépendante du choix des triangulations de X et Y .

Démonstration : De même que pour la démonstration de la proposition II.2.2, il suffit de montrer que pour (K) et (L) deux triangulations de X et Y respectivement telles que f soit simpliciale, et pour (K') et (L') deux premières subdivisions barycentriques de (K) et (L) respectivement telles que f soit toujours simpliciale, on ait :

f vérifie 1) et 2) pour (K) et (L)



f vérifie 1) et 2) pour (K') et (L') .

a) Si f vérifie 1) pour (K) et (L) alors f vérifie 1) pour (K') et (L') (d'après II.2.2).

Si en plus f vérifie la C.P.L pour (K) et (L) , soit δ'_0 un simplexe de (K') de dimension relative i : on pose

$$\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_0, \dots, \hat{\delta}_n \rangle.$$

1) Montrons que $\dim_f \delta'_0 = i$. Soit $x \in \delta'_0$:

$$\dim(f^{-1}f(x) \cap \delta'_0) = \dim \delta'_0 - \dim f(\delta'_0) \text{ dans } (K') \text{ et } (L')$$

et $\dim(f^{-1}f(x) \cap \delta_n) = \dim \delta_n - \dim f(\delta_n) \text{ dans } (K) \text{ et } (L).$

D'autre part :

$$\dim(f^{-1}f(x) \cap \delta'_0) \leq \dim(f^{-1}f(x) \cap \delta_n) \leq \dim(f^{-1}f(x))$$

d'où puisque $\dim_f \delta'_0 = i$ et $\dim(f^{-1}f(x)) = i$, on a

$$\dim(f^{-1}f(x) \cap \delta_n) = i$$

ce qui veut dire :

$$\dim_f \delta_n = i.$$

2) On va montrer que f vérifie la C.P.L pour (K') et (L') en δ'_0 .

Soit σ' un simplexe de (L') tel que $f(\delta'_0) < \sigma'$.

On pose

$$f(\delta'_0) = \langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p \rangle$$

On a :

$$f(\delta_n) = \sigma_p.$$

On suppose que σ' s'écrit

$$\langle \hat{\sigma}_1^0, \hat{\sigma}_2^0, \hat{\sigma}_0^1, \hat{\sigma}_1^1, \hat{\sigma}_2^1, \hat{\sigma}_1^1, \dots, \hat{\sigma}_1^p, \hat{\sigma}_2^p, \hat{\sigma}_p^p, \hat{\sigma}_1^{p+1}, \hat{\sigma}_2^{p+1} \rangle$$

(La démonstration dans le cas général est la même).

L'ensemble A des simplexes δ' de (K') de dimension relative i , admettant δ'_0 pour face et tels que $f(\delta') = \sigma'$ est l'ensemble des simplexes qui s'écrivent sous la forme :

$$(1) \quad \delta' = \langle \hat{\delta}_1^0, \hat{\delta}_2^0, \hat{\delta}_0^1, \hat{\delta}_1^1, \hat{\delta}_2^1, \hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_1^p, \hat{\delta}_2^p, \hat{\delta}_p^p, \hat{\delta}_1^{p+1}, \hat{\delta}_2^{p+1} \rangle$$

avec $f(\delta_\beta^\alpha) = \sigma_\beta^\alpha$; $\alpha = 0, 1, \dots, p+1$ et $\beta = 1, 2$.

Il s'agit de montrer que le cardinal de cet ensemble A est impair.

Pour cela, on va poser

$$B = \{ \delta < (K) / \delta_n < \delta, f(\delta) = \sigma_2^{p+1} \text{ et } \dim_f \delta = i \}$$

et pour tout δ dans B :

$$A(\delta) = \{ \delta' \in A / \delta' \text{ \u00e9tant de la forme (1) avec } \delta_2^{p+1} = \delta \}$$

et on va montrer :

- (i) Card B est impair
- (ii) $A = \bigcup_{\delta \in B} A(\delta)$
- (iii) $A(\delta_1) \cap A(\delta_2) = \emptyset$ si $\delta_1 \neq \delta_2$ dans B
- (iv) Card $A(\delta)$ est impair pour tout δ dans B
- (v) Card A est impair.

En effet :

(i) Il suffit de voir que σ_p est face de σ_2^{p+1} , $f(\delta_n) = \sigma_p$ et $\dim_f \delta_n = i$, et appliquer la C.P.L exprim\u00e9e pour δ_n .

(ii) et (iii) sont \u00e9vidents.

(iv) On va le montrer pour :

$$\sigma' = \langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p, \hat{\sigma}_1^{p+1}, \hat{\sigma}_2^{p+1} \rangle$$

(on utiliserait le m\u00eame raisonnement pour le cas g\u00e9n\u00e9ral) : soit $\delta \in B$,

on a alors :

$A(\delta) = \{\delta' \in A / \delta' \text{ est de la forme :}$

$$\langle \hat{\delta}_0, \dots, \hat{\delta}_n, \hat{\delta}_1^{p+1}, \hat{\delta}_2^{p+1} \rangle \text{ avec } \delta_2^{p+1} = \delta \}$$

Posons $\delta_2^{p+1} = \delta = \langle C_1^0, \dots, C_{i_0}^0, \dots, C_1^s, \dots, C_{i_s}^s \rangle$ et
 $\sigma_2^{p+1} = \langle d_0, \dots, d_s \rangle$ avec $f(C_*^\alpha) = d_\alpha$ pour $\alpha = 0, \dots, s$ et
 $\sigma_p = \langle d_0, \dots, d_{s'} \rangle$ $s' \leq s$

$$\delta_n = \langle C_1^0, \dots, C_{j_0}^0, \dots, C_1^{s'}, \dots, C_{j_{s'}}^{s'} \rangle$$

avec

$$j_k \leq i_k \quad k = 0, \dots, s'$$

et $\sigma_1^{p+1} = \langle d_0, \dots, d_{s'}, \dots, d_\ell \rangle$ avec $s' \leq \ell \leq s$.

Les éléments de $A(\delta)$ sont tous de la forme :

$$\delta' = \langle \hat{\delta}_0, \dots, \hat{\delta}_n, \hat{\delta}_1^{p+1}, \hat{\delta}_2^{p+1} \rangle$$

avec $\delta_2^{p+1} = \delta$ et $f(\delta_1^{p+1}) = \sigma_1^{p+1}$.

Donc il y a autant d'éléments de $A(\delta)$ que de simplexes δ_1^{p+1}
 de (K) tels que

$$\delta_n < \delta_1^{p+1} < \delta_2^{p+1} \quad \text{et} \quad f(\delta_1^{p+1}) = \sigma_1^{p+1} .$$

D'où le cardinal de $A(\delta)$ est égal à :

$$(2^{i_0 - j_0 - 1}) \times \dots \times (2^{i_{s'} - j_{s'} - 1}) \times (2^{i_{s'+1} - 1}) \times \dots \times (2^{i_\ell - 1})$$

qui est un nombre impair.

(v) D'après (ii) et (iii)

$$\text{Card } A = \sum_{\delta \in B} \text{card } A(\delta)$$

et d'après (i) et (iv), $\text{card } A$ est une somme impaire de nombres impairs, donc est impair.

C.Q.F.D.

b) Réciproquement, on suppose que f vérifie 1) et 2) pour (K') et (L') : il est démontré en (II.2.2) que 1) est vrai pour (K) .

Montrons que 2) est aussi vrai pour (K) et (L) . Pour cela, soit δ_0 un simplexe de dimension relative i de (K) . On pose :

$$\delta_0 = \langle c_0^0, \dots, c_{i_0}^0, \dots, c_1^s, \dots, c_{i_s}^s \rangle$$

et

$$f(\delta_0) = \langle d_0, \dots, d_s \rangle$$

avec $f(c_{*}^{\alpha}) = d_{\alpha}$ pour $\alpha = 0, \dots, s$ et soit δ'_0 le simplexe de (K') tel que :

$$\delta'_0 = \langle \widehat{\langle c_0^0 \rangle}, \widehat{\langle c_0^0, c_1^0 \rangle}, \dots, \widehat{\delta_0} \rangle$$

$$f(\delta'_0) = \langle \widehat{\langle d_0 \rangle}, \dots, f(\widehat{\delta_0}) \rangle$$

Par hypothèse $\dim_f \delta'_0 = i$ (car $\dim_f \delta_0 = i$). Soit σ un simplexe de (L) tel que $f(\delta_0) < \sigma$.

Notons :

$$\sigma' = \langle \langle \widehat{d}_0 \rangle, \dots, f(\widehat{\delta}_0), \widehat{\sigma} \rangle$$

Il est clair que $f(\delta')$ est face de σ' .

Posons :

$$C = \{ \delta' \langle (K') \mid \delta'_0 < \delta', \dim_f \delta' = i \text{ et } f(\delta') = \sigma' \}$$

Par hypothèse Card C est impair.

On veut montrer que si :

$$D = \{ \delta \langle (K) \mid \delta_0 < \delta, \dim_f \delta = i \text{ et } f(\delta) = \sigma \}$$

alors Card D est impair.

En fait C et D sont isomorphes. En effet :

1) Tout simplexe δ' dans C s'écrit :

$$\langle \langle \widehat{C}_0^0 \rangle, \langle \widehat{C}_0^0, \widehat{C}_1^0 \rangle, \dots, \widehat{\delta}_0, \widehat{\delta} \rangle \text{ avec } \delta_0 < \delta \text{ et } f(\delta) = \sigma.$$

De plus $\dim_f \delta = i$ (car $\dim_f \delta' = i$), donc $\delta \in D$.

2) Réciproquement, si $\delta \in D$ alors $\delta' = \langle \langle \widehat{C}_0^0 \rangle, \dots, \widehat{\delta}_0, \widehat{\delta} \rangle$

est un simplexe dans C.

On en déduit que Card D est impair, ce qui donne le résultat.

II.3.4. Proposition ([5]). Une application i-circuit $f : X \rightarrow Y$ admet une unique classe $[f]$ dans $H^{-i}(X \rightarrow Y)$, qui se restreint à $[f^{-1}(y)]$ pour tout y dans Y , par le carré fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(y) & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\
 \{y\} & \xleftarrow{k} & Y
 \end{array}$$

Pour démontrer la proposition, on montre d'abord quelques

lemmes.

Pour f application P.L, on note (K) et (L) deux triangulations de X et Y respectivement telles que f soit simpliciale.

Lemme II.1. Pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$, si A et B sont deux sous complexes de Y , alors on a la suite exacte de Mayer-Vietons

$$\begin{array}{ccc}
 H^{-i-1}(f^{-1}(A \cap B)) & \longrightarrow & A \cap B \\
 \downarrow \delta & & \\
 H^{-i}(f^{-1}(A \cup B)) & \longrightarrow & A \cup B \\
 \downarrow (j_1^*, j_2^*) & & \\
 H^{-i}(f^{-1}(A) \rightarrow A) \oplus H^{-i}(f^{-1}(B) \rightarrow B) & & \\
 \downarrow i_1^* - i_2^* & & \\
 H^{-i}(f^{-1}(A \cap B)) & \longrightarrow & A \cap B
 \end{array}$$

Démonstration : Soit $\phi : f^{-1}(A \cup B) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue telle que

$$f^{-1}(A \cup B) \xrightarrow{(f, \phi)} (A \cup B) \times \mathbb{R}^n$$

soit un plongement fermé. On note $(f, \phi) = f_\phi$.

On vérifie d'abord que les restrictions de f à $f^{-1}(A \cap B)$, $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont aussi des plongements fermés.

On le vérifie pour $f^{-1}(A \cap B)$ (la même démonstration reste valable pour $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$).

La restriction du plongement f_ϕ à $f^{-1}(A \cap B)$ est un plongement. Montrons que $f_\phi(f^{-1}(A \cap B))$ est un fermé de $(A \cap B) \times \mathbb{R}^n$. Pour cela il suffit de montrer que :

$$(1) \quad f_\phi(f^{-1}(A \cap B)) \text{ est un fermé de } f_\phi(f^{-1}(A \cup B))$$

$$(\text{donc } f_\phi(f^{-1}(A \cap B)) \text{ est un fermé de } (A \cup B) \times \mathbb{R}^n)$$

$$(2) \quad f_\phi(f^{-1}(A \cap B)) \subset (A \cap B) \times \mathbb{R}^n \subset (A \cup B) \times \mathbb{R}^n$$

(donc d'après (1) $f_\phi(f^{-1}(A \cap B))$ est un fermé de $(A \cap B) \times \mathbb{R}^n$.)

(2) est évident.

(1) $A \cap B$ est un fermé de $A \cup B$ donc $f^{-1}(A \cap B)$ est un fermé de $f^{-1}(A \cup B)$ d'où $f_\phi(f^{-1}(A \cap B))$ est un fermé de $f_\phi(f^{-1}(A \cup B))$ puisque $f^{-1}(A \cup B) \xrightarrow{f_\phi} f_\phi(f^{-1}(A \cup B))$ est un homéomorphisme.

On pose alors :

$$X_1 = A \times \mathbb{R}^n \qquad A_1 = A \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(A))$$

$$X_2 = B \times \mathbb{R}^n \qquad A_2 = B \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(B))$$

$\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ est un couple excisif de paires.

La suite exacte de Mayer-Vietoris de ce couple donne la suite cherchée.

Lemme II.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application P.L et y un point de Y , et soit σ le simplexe de (L) tel que y est dans l'intérieur de σ , et $g : \{y\} \rightarrow \sigma$ l'inclusion de y dans σ , alors l'application :

$$H^{-i}(f^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma) \xrightarrow{g^*} H^{-i}(f^{-1}(y) \rightarrow \{y\})$$

est un isomorphisme.

Démonstration : On veut montrer que si $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue qui factorise f alors :

$$g^* : H^{n-i}(\sigma \times \mathbb{R}^n, \sigma \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(\sigma))) \rightarrow H^{n-i}(y \times \mathbb{R}^n, y \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(y)))$$

est un isomorphisme.

Pour cela, on pose :

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma \times \mathbb{R}^n & A_1 &= \sigma \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(\sigma)) \\ X_2 &= \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n & A_2 &= \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ est un couple excisif de paires. D'autre part :

$$\begin{aligned} X_1 \cup X_2 &= \sigma \times \mathbb{R}^n \\ X_1 \cap X_2 &= \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n \\ A_1 \cup A_2 &= \sigma \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(\partial\sigma)) \\ A_1 \cap A_2 &= \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(\overset{\circ}{\sigma})). \end{aligned}$$

La suite exacte de Mayer-Vietoris du couple $\{(X_1, A_1) ; (X_2, A_2)\}$ s'écrit :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{n-i}(\sigma \times \mathbb{R}^n, \sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\partial\sigma))) & & \\
 \downarrow & & \\
 H^{n-i}(\sigma \times \mathbb{R}^n, \sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\sigma))) \oplus H^{n-i}(\overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n, \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n) & & \parallel \\
 \downarrow & & 0 \\
 (1) \quad H^{n-i}(\overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n, \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\overset{\circ}{\sigma}))) & & \\
 \downarrow & & \\
 H^{n-i-1}(\sigma \times \mathbb{R}^n, \sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\partial\sigma))). & &
 \end{array}$$

a) On montre que :

$$H^*(\sigma \times \mathbb{R}^n, \sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\partial\sigma))) = 0.$$

Il suffit de montrer que $\sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\partial\sigma))$ est contractible.

Pour cela, on vérifie que pour t_0 quelconque dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned}
 r : \sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\partial\sigma)) &\longrightarrow \{(y, t_0)\} \\
 (y', t) &\longmapsto r(y', t) = (y, t_0)
 \end{aligned}$$

est une rétraction par déformation.

(La rétraction est réalisée par l'application :

$$\begin{aligned}
 (\sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\partial\sigma))) \times I &\xrightarrow{\psi} \sigma \times \mathbb{R}^n - f_{\phi}(f^{-1}(\partial\sigma)) \\
 ((y', t), s) &\longmapsto ((1-s)(y', t) + s(y, t_0))
 \end{aligned}$$

b) D'après la suite exacte (1) ci-dessus, pour terminer la démonstration du lemme, il suffit de montrer que :

$$H^{n-i}(\overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n, \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(\overset{\circ}{\sigma})) \xrightarrow{g^*} H^{n-i}(y \times \mathbb{R}^n, y \times \mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(y)))$$

est un isomorphisme.

En effet on a : $f^{-1}(\overset{\circ}{\sigma})$ est homéomorphe à $\overset{\circ}{\sigma} \times f^{-1}(y)$, d'où $\overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(\overset{\circ}{\sigma}))$ est homéomorphe à $\overset{\circ}{\sigma} \times (\mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(y)))$.

De plus $\overset{\circ}{\sigma} \times (\mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(y)))$ se rétracte par déformation sur $y \times (\mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(y)))$.

Donc $H^*(\overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(\overset{\circ}{\sigma}))) \rightarrow H^*(y \times \mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(y)))$ est un isomorphisme.

Comme on a aussi $H^*(\overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^*(y \times \mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme, le lemme des cinq permet de conclure à l'isomorphisme

$$H^{n-i}(\overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^n, \overset{\circ}{\sigma} \times \mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(\overset{\circ}{\sigma}))) \xrightarrow{g^*} H^{n-i}(y \times \mathbb{R}^n, y \times \mathbb{R}^{n-f_\phi}(f^{-1}(y)))$$

C.Q.F.D.

Lemme II.3. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application i-circuit, pour tout simplexe σ de (L) , il existe une unique classe de $f^{-1}(\sigma) \xrightarrow{f} \sigma$; on a :

$$(1) \quad [f^{-1}(\sigma) \xrightarrow{f} \sigma] \text{ est représentée par } \sum_{\substack{\dim_f \delta = i \\ f(\delta) = \sigma}} \delta$$

$$(2) \quad g^*([f^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma]) = [f^{-1}(y)]$$

pour $y \in \overset{\circ}{\sigma}$ et $g : \{y\} \hookrightarrow \sigma$ l'inclusion de y dans σ .

Démonstration : Puisque f est une application i-circuit, pour tout y de Y , il existe une unique orientation de $f^{-1}(y) \rightarrow \{y\}$ qui est $[f^{-1}(y)]$.

Par le lemme 2, il existe donc une unique orientation de $f^{-1}(\sigma) \xrightarrow{f} \sigma$, notée $[f^{-1}(\sigma) \xrightarrow{f} \sigma]$ et dont l'image par g^* est $[f^{-1}(y)]$. On peut représenter

$$[f^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma] \quad \text{par} \quad \sum_{\substack{\dim_f \delta = i \\ f(\delta) = \sigma}} \delta$$

C.Q.F.D.

Dans la suite, on note Y' une partie de Y qui contient tous les $(j-1)$ -simplexes (et éventuellement des j -simplexes), et σ un j -simplexe de (L) non situé dans Y' .

Lemme II.4. Si f est une application i -circuit, alors on a

$$H^{-i-1}(f^{-1}(Y' \cap \sigma) \rightarrow Y' \cap \sigma) = 0.$$

Démonstration : Soit $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue qui factorise f , alors on a :

$$H^{-i-1}(f^{-1}(Y' \cap \sigma) \rightarrow Y' \cap \sigma) = H^{n-i-1}((Y' \cap \sigma) \times \mathbb{R}^n, (Y' \cap \sigma) \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(Y' \cap \sigma)))$$

et par isomorphisme d'Alexander :

$$H^{n-i-1}((Y' \cap \sigma) \times \mathbb{R}^n, (Y' \cap \sigma) \times \mathbb{R}^n - f_\phi(f^{-1}(Y' \cap \sigma))) \simeq H_{i+j}^F(f_\phi(f^{-1}(Y' \cap \sigma)))$$

et on a : $\dim Y' \leq j$; $\dim \sigma = j$ et σ n'est pas un simplexe de Y' donc $\dim(Y' \cap \sigma) = j-1$, d'où :

$$\dim f^{-1}(Y' \cap \sigma) = i+j-1$$

de même $\dim f_\phi(f^{-1}(Y' \cap \sigma)) = i+j-1$ car f_ϕ est un plongement.

Ainsi $H_{i+j}^F(f_\phi(f^{-1}(Y' \cap \sigma))) = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme II.5. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application i -circuit, et soient $\{\sigma_p\}_{p=1, \dots, q}$ les $(j-1)$ -simplexes qui sont faces de σ ; on a $Y' \cap \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_q$.

Pour tout $p = 1, \dots, q$, on note ℓ_p l'inclusion $\sigma_p \hookrightarrow Y' \cap \sigma$. Si a et b sont deux éléments de $H^{-i}(f^{-1}(Y' \cap \sigma) \rightarrow Y' \cap \sigma)$ tels que $\ell_p^*(a) = \ell_p^*(b)$ pour tout p , alors $a = b$.

Démonstration : On pose

$$A_m = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_m \quad ; \quad m = 1, \dots, q$$

et $\ell_{(1, \dots, m)} : A_m \hookrightarrow \sigma \cup Y'$ l'inclusion.

On va montrer que pour tout $m = 1, \dots, q$:

$$\ell_{(1, \dots, m)}^*(a) = \ell_{(1, \dots, m)}^*(b).$$

(Le résultat suivra immédiatement en prenant $m = q$).

La démonstration se fait par récurrence sur m .

Pour $m = 1$ l'égalité est vérifiée par hypothèse, et supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre $k-1$; avec $2 \leq k \leq q-2$. On a alors :

$$A_k = A_{k-1} \cup \sigma_k .$$

La suite exacte de Mayer Vietoris du couple (A_{k-1}, σ_k) s'écrit : (Lemme 1) :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{-i-1}(f^{-1}(A_{k-1} \cap \sigma_k)) & \longrightarrow & A_{k-1} \cap \sigma_k \\
 \downarrow & & \\
 H^{-i}(f^{-1}(A_k)) & \longrightarrow & A_k \\
 \downarrow (r^*, s^*) & & \\
 H^{-i}(f^{-1}(A_{k-1}) \rightarrow A_{k-1}) \oplus H^{-i}(f^{-1}(\sigma_k) \rightarrow \sigma_k) & & \\
 \downarrow & & \\
 H^{-i}(f^{-1}(A_{k-1} \cap \sigma_k)) & \longrightarrow & A_{k-1} \cap \sigma_k
 \end{array}$$

où r et s sont les inclusions :

$$A_{k-1} \xleftarrow{r} A_k \quad \text{et} \quad \sigma_k \xleftarrow{r} A_k .$$

D'autre part, on a :

(i) $H^{-i-1}(f^{-1}(A_{k-1} \cap \sigma_k) \rightarrow A_{k-1} \cap \sigma_k) = 0$ (même démonstration qu'au lemme 4) donc (r^*, s^*) est injectif.

(ii) $\ell_{(1, \dots, k)} \circ r = \ell_{(1, \dots, k-1)}$ et

$$\ell_{(1, \dots, k)} \circ s = \ell_k .$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\ell_{(1, \dots, k-1)}^*(a) = \ell_{(1, \dots, k-1)}^*(b)$$

et d'autre part $\ell_k^*(a) = \ell_k^*(b)$ (hypothèse du lemme), d'où :

$$\begin{cases} (\ell_{(1,\dots,k)} \circ r)^*(a) = (\ell_{(1,\dots,k)} \circ r)^*(b) \\ \text{et} \\ (\ell_{(1,\dots,k)} \circ s)^*(a) = (\ell_{(1,\dots,k)} \circ s)^*(b). \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$(r^*, s^*)(\ell_{(1,\dots,k)}^*(a)) = (r^*, s^*)(\ell_{(1,\dots,k)}^*(b))$$

et puisque (r^*, s^*) est injectif

$$\ell_{(1,\dots,k)}^*(a) = \ell_{(1,\dots,k)}^*(b)$$

C.Q.F.D.

Lemme II.6. Avec les notations définies précédemment, on peut écrire deux diagrammes (où les flèches horizontales sont les inclusions canoniques avec $y_p \in \sigma_p$ et $y \in \sigma$) :

$$\begin{array}{ccccccccc} f^{-1}(y_p) & \hookrightarrow & f^{-1}(\sigma_p) & \hookrightarrow & f^{-1}(Y' \cap \sigma) & \hookrightarrow & f^{-1}(\sigma) & \hookrightarrow & f^{-1}(y) \\ \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f \\ \{y_p\} & \xrightarrow{g_p} & \sigma_p & \xrightarrow{\ell_p} & Y' \cap \sigma & \xrightarrow{i_2} & \sigma & \xleftarrow{g} & \{y\} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(y_p) & \hookrightarrow & f^{-1}(\sigma_p) & \hookrightarrow & f^{-1}(Y' \cap \sigma) & \hookrightarrow & f^{-1}(Y') \\ \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f \\ \{y_p\} & \xrightarrow{g_p} & \sigma_p & \xrightarrow{\ell_p} & Y' \cap \sigma & \xrightarrow{i_1} & Y' \end{array}$$

pour $p = 1, \dots, q$.

Si la condition de parité locale est vérifiée au-dessus des (j-1)-simplexes σ_p du bord de σ , on a :

$$\ell_p^* \circ i_2^*(g^{*-1}[f^{-1}(y)]) = \ell_p^* \circ i_1^*([f^{-1}(Y') \rightarrow Y'])$$

pour tout $p = 1, \dots, q$.

Remarque. La réciproque du lemme 6 est vraie, nous ne nous servons en fait que du résultat du lemme 6.

Démonstration : On montre que pour tout $p = 1, \dots, q$

$$\ell_p^* \circ i_2^*([f^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma]) = [f^{-1}(\sigma_p) \rightarrow \sigma_p].$$

En effet soit p fixé, on a :

$$[f^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma] = \left[\sum_{\substack{\dim \delta = i+j \\ f(\delta) = \sigma}} \delta \right] \quad \text{d'après le lemme 3.}$$

et

$$[f^{-1}(\sigma_p) \rightarrow \sigma_p] = \left[\sum_{\substack{\dim \delta' = i+j-1 \\ f(\delta') = \sigma_p}} \delta' \right]$$

Posons :

$$A = \{ \delta < (K) \mid \dim \delta = i+j \text{ et } f(\delta) = \sigma \}$$

$$B = \{ \delta' < (K) \mid \dim \delta' = i+j-1 \text{ et } f(\delta') = \sigma_p \}$$

On a :

$$1) \quad \ell_p^* \circ i_2^*([f^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma]) = \ell_p^* \circ i_2^* \left(\left[\sum_{\substack{\delta \in A \text{ et } \delta \text{ a une} \\ \text{face dans } B}} \delta \right] \right)$$

puisque si δ n'a pas de face dans B , $\ell_p^* \circ i_2^*(\delta) = 0$.

2) D'autre part, pour tout simplexe δ' dans B tel que $\delta' < \delta$ avec $\delta \in A$, on a $f(\delta') < f(\delta)$ c'est-à-dire $f(\delta') < \sigma$, $\dim_f \delta' = i$ et $f(\delta') = \sigma_p$, alors: la condition de parité locale au-dessus de σ_p exprimée pour δ' implique qu'il existe un nombre impair de simplexes δ tels que :

$$\delta' < \delta \quad , \quad \dim_f \delta = i \quad \text{et} \quad f(\delta) = \sigma$$

Donc, il existe un nombre impair de simplexes δ tels que :

$$\delta' < \delta \quad \text{et} \quad \delta \in A$$

d'où

$$\ell_p^* \circ i_2^* \left(\left[\sum_{\substack{\delta \in A \text{ et } \delta \text{ a} \\ \text{une face dans } B}} \delta \right] \right) = \left[\sum_{\substack{\delta' \in B \text{ et } \delta' < \delta \\ \text{avec } \delta \in A}} \delta' \right]$$

3) Reste à montrer que :

$$\left[\sum_{\substack{\delta' \in B \text{ et } \delta' < \delta \\ \text{avec } \delta \in A}} \delta' \right] = \left[\sum_{\delta' \in B} \delta' \right]$$

Il suffit de montrer que, si $C = \{\delta' \in B \mid \delta' < \delta \text{ avec } \delta \in A\}$, alors $B = C$.

On a bien sûr $C \subset B$. Soit maintenant $\delta' \in B$, la condition de parité locale au-dessus de σ_p , exprimée pour δ' montre qu'il existe au moins un simplexe δ tel que : $\delta \in A$ et $\delta' < \delta$, d'où le résultat.

Remarque. Avec les notations du lemme 6, on a pour tout simplexe δ dans A , il existe un unique simplexe δ' dans B tel que δ' est face de δ .

Démonstration de la proposition. On va la démontrer par récurrence en ajoutant à chaque fois des simplexes σ de (L) par dimension croissante des σ

•) Pour $Y =$ simplexe de $\dim 0$, le résultat est évident

•) On suppose que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $Y' \subset Y$ où Y' est la réunion de tous les $(j-1)$ -simplexes de (L) et contient éventuellement des j -simplexes : soit σ un j -simplexe non situé dans Y' , $y \in \sigma$ et $\{\sigma_p\}_{p=1, \dots, q}$ les $(j-1)$ -simplexes faces de σ . f est un i -circuit, donc la condition de parité locale est vraie, en particulier au-dessus des σ_p . D'après le lemme 6, on a pour tout $p = 1, \dots, q$:

$$l_p^* \circ i_1^*([f^{-1}(Y') \rightarrow Y']) = l_p^* \circ i_2^*(g^{*-1}([f^{-1}(y)]))$$

et d'après le lemme 5 :

$$i_1^*([f^{-1}(Y') \rightarrow Y']) = i_2^*(g^{*-1}([f^{-1}(y)]))$$

Soit :

$$([f^{-1}(Y') \rightarrow Y'] ; g^{*-1}([f^{-1}(y)])) \in \ker(i_1^* - i_2^*).$$

D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris du lemme 1 écrite pour la paire (Y', σ) et par le lemme 4, il existe un unique élément de $H^{-i}(f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma)$, noté $[f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma]$ tel que :

$$j_1^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma]) = [f^{-1}(Y') \rightarrow Y']$$

et

$$j_2^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma]) = g^{*-1}([f^{-1}(y)]).$$

Pour finir la démonstration, on vérifie que pour tout point y_0 de $Y' \cup \sigma$, on a :

$$k^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma]) = [f^{-1}(y_0)]$$

où k est l'inclusion $y \hookrightarrow Y' \cup \sigma$.

En effet, soit $y_0 \in Y' \cup \sigma$

•) Si $y_0 \in Y'$: soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(y_0) & \xleftarrow{\quad} & f^{-1}(Y') & \xleftarrow{\quad} & f^{-1}(Y' \cup \sigma) \\ \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f \\ \{y_0\} & \xleftarrow{k_1} & Y' & \xleftarrow{j_1} & Y' \cup \sigma \end{array}$$

$$k = j_1 \circ k_1$$

$$k^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma]) = k_1^* \circ j_1^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma])$$

$$= k_1^*([f^{-1}(Y') \rightarrow Y']) \text{ voir ci-dessus}$$

$$= [f^{-1}(y_0)] \text{ (hypothèse de récurrence).}$$

•) Si $y_0 \in \sigma$: ou bien y_0 est dans $\partial\sigma$, donc dans Y' (voir ci-dessus), ou bien y_0 est dans $\overset{\circ}{\sigma}$, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(y_0) & \xleftarrow{\quad} & f^{-1}(\sigma) & \xleftarrow{\quad} & f^{-1}(Y' \cup \sigma) \\ \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f \\ \{y_0\} & \xleftarrow{g} & \sigma & \xleftarrow{j_2} & Y' \cup \sigma \end{array}$$

$$k = j_2 \circ g.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}k^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma]) &= g^* \circ j_2^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \rightarrow Y' \cup \sigma]) \\ &= g^* \circ g^{*-1}([f^{-1}(y)]) \text{ (voir ci-dessus)} \\ &= [f^{-1}(y)].\end{aligned}$$

Donc la proposition est démontrée.

CHAPITRE III

TRANSFORMATION DE STIEFEL-WHITNEY

Dans ce chapitre, on va montrer l'existence et l'unicité de la transformation de Whitney de la théorie bivariante \mathbb{F} dans la théorie bivariante \mathbb{H} (théorème III.1.2).

Dans leur démonstration W. Fulton et Mac Pherson introduisent pour toute application $f : X \rightarrow Y$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$, des applications $f_i : X_i(\alpha) \rightarrow Y$, restrictions de f à la réunion $X_i(\alpha)$ des simplexes δ' d'une première subdivision barycentrique d'une triangulation de X tels que :

$$\alpha(\delta') = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{F}} \delta' = i.$$

Ils utilisent le fait que ces applications f_i sont des i -circuits. On donne ici un contre-exemple de ce fait (remarque III.1.9) et on démontre le théorème III.1.2).

III.1.1. Définition ([5]). Soit T_1 et T_2 deux théories bivariantes, une transformation de Grothendieck $\omega : T_1 \rightarrow T_2$ est une collection d'homomorphismes $T_1(X \rightarrow Y) \rightarrow T_2(X \rightarrow Y)$ qui préserve les trois opérations : produit, image directe et image réciproque (voir chapitre 0).

III.1.2. Théorème ([5]). Il existe une unique transformation naturelle de Grothendieck ω de \mathbb{F} dans \mathbb{H} telle que si X est une variété sans bord, on a :

$$\omega(1_X) = W(TX) \cdot [X]$$

avec $W(TX)$ est la classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent à X et $[X]$ est la classe fondamentale de la variété X .

Une telle transformation est appelée transformation de Stiefel-Whitney.

Notations : Soient (K) et (L) deux triangulations de X et Y respectivement telles que f soit simpliciale et (K) soit α -adaptée.

Les simplexes de (K) seront notés par : $\delta, \delta_1, \dots, \delta_i, \dots$ et leurs barycentres par $\hat{\delta}, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_i, \dots$

Les simplexes d'une première subdivision barycentrique (K') de (K) seront notés : $\delta', \delta'_1, \dots, \delta'_i, \dots$ chaque p-simplexe δ' de (K') est de la forme :

$$\delta' = \langle \hat{\delta}_0, \dots, \hat{\delta}_p \rangle \quad \text{avec} \quad \delta_0 < \dots < \delta_p.$$

Enfin les simplexes de (L) seront notés par $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots$ et ceux de (L') par $\sigma', \sigma'_1, \dots, \sigma'_i, \dots$. Et de même chaque p-simplexe σ' de (L') est de la forme :

$$\langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p \rangle \quad \text{avec} \quad \sigma_0 < \dots < \sigma_p.$$

Le théorème va résulter des trois propositions suivantes :

III.1.3. Proposition. Soit $f : X \rightarrow Y$ et $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$. On pose $X_i(\alpha) = \{\delta' \in (K') \mid \alpha(\delta') = 1 \text{ et } \dim_f \delta' = i\}$ et soit $f_i : X_i(\alpha) \rightarrow Y$ la restriction de f à $X_i(\alpha)$, alors il existe une unique classe $[\sum_{\delta' \in X_i(\alpha)} \delta']$ dans $H^{-i}(X_i(\alpha) \rightarrow Y)$ qui se restreint à $[f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha)]$ pour tout y dans Y par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) & \xrightarrow{\quad} & X_i(\alpha) \\ \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f \\ \{y\} & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

On note alors $[f_i]^\alpha = \left[\sum_{\delta' \in X_i(\alpha)} \delta' \right]$.

III.1.4. Définition. Avec les mêmes notations que ci-dessus ; si g_i est l'inclusion $X_i(\alpha) \hookrightarrow X$, on définit un élément $\omega_i(\alpha)$ de $H^{-i}(X \xrightarrow{f} Y)$ par :

$$\omega_i(\alpha) = g_{i*} ([f_i]^\alpha).$$

III.1.5. Proposition. La définition de $\omega_i(\alpha)$ est indépendante des triangulations de X et Y .

On pose alors :

$$\omega(\alpha) = \sum_{i=0}^{\dim X} \omega_i(\alpha).$$

III.1.6. Proposition. La transformation $\omega : \alpha \rightsquigarrow \omega(\alpha)$ satisfait les conditions du théorème.

Pour démontrer la proposition III.1.3., on démontre d'abord les deux lemmes suivants :

III.1.7. Lemme. Soit δ'_0 un simplexe de (K') tel que : $\dim_{\mathbb{F}} \delta'_0 = i$, et σ' un simplexe de (L') tel que : $\dim \sigma' = \dim f(\delta'_0) + 1$ et $f(\delta'_0)$ est une face de σ' , alors on a :

$$\alpha(\delta'_0) = \sum \alpha(\delta')$$

la sommation étant étendue aux simplexes δ' de (K') , de dimension relative i et tels que $\delta'_0 < \delta'$ et $f(\delta') = \sigma'$.

Démonstration : On note $\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_i^0, \hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_{i_1}^1, \dots, \hat{\delta}_1^p, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$ et $f(\delta'_0) = \langle \hat{\sigma}_0^\beta, \dots, \hat{\sigma}_p^\beta \rangle$ avec $f(\delta'_0) = \sigma_\beta$. $\beta = 0, \dots, p$.

On peut distinguer 3 sortes de simplexes σ' vérifiant :

$$\dim \sigma' = \dim f(\delta'_0) + 1 \quad \text{et} \quad f(\delta'_0) < \sigma.$$

1) Les simplexes du type : $\langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p, \hat{\sigma}_{p+1} \rangle$. On a :

$$\sigma_p < \sigma_{p+1} \quad \text{et} \quad f(\delta_{i_p}^p) = \sigma_p$$

de plus

$$\alpha(\delta'_0) = \alpha(\delta_{i_p}^p).$$

D'après la condition d'Euler locale [I.2.3] exprimée pour $\delta_{i_p}^p$, on a :

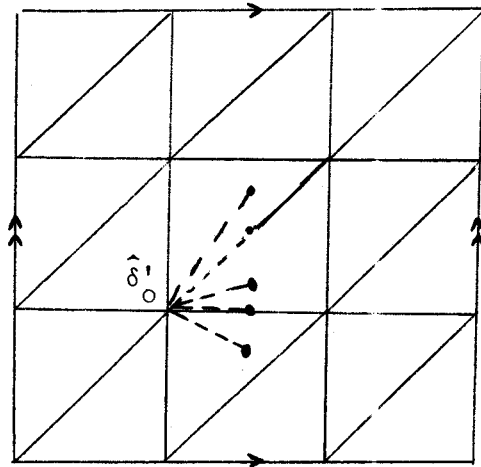
$$\alpha(\delta_{i_p}^p) = \sum_{\substack{\delta < (K) \\ \delta_{i_p}^p < \delta \quad \text{et} \\ f(\delta) = \sigma_{p+1}}} \alpha(\delta)$$

D'où

$$\alpha(\delta'_0) = \sum_{\substack{\delta' < (K') \\ \hat{\delta}' = \langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p, \hat{\delta} \rangle \\ \dim_f \delta' = i \\ f(\delta') = \sigma'}} \alpha(\delta')$$

et le résultat.

Exemple. $T \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1$ la projection canonique du tore T sur le cercle \mathbb{S}^1 . Considérons les triangulations de T et de \mathbb{S}^1 :



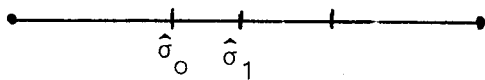
$$\alpha = 1$$

$$i = 0$$

δ'_0 un sommet d'une 1ère subdivision barycentrique

$$\sigma' = \langle \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1 \rangle$$

$$f(\delta'_0) = \langle \hat{\sigma}_0 \rangle$$



$$\alpha(\delta'_0) = \sum_{\substack{\delta' \mid \delta'_0 < \delta' \\ \dim_f \delta' = 0 \\ f(\delta') = \sigma'}} \alpha(\delta')$$

où les δ' sont les simplexes de (K') en pointillés.

2) Les simplexes σ' du type $\langle \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_p \rangle$. Il est clair que si δ' un simplexe de (K') tel que $\delta'_0 < \delta'$, $\dim_f \delta' = i$ et $f(\delta') = \sigma'$ alors δ' est de la forme :

$$\delta' = \langle \hat{\delta}, \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle \text{ où } \delta < \delta_0^0 \text{ et } f(\delta) = \sigma$$

D'où tout revient à montrer qu'il existe un nombre impair de simplexes δ' de la forme :

$$\langle \hat{\delta}, \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle \text{ où } \delta < \delta_0^0 \text{ et } f(\delta) = \sigma.$$

En effet soit δ_{p+1} le simplexe de (K) de dimension maximale tel que $\delta_{p+1} < \delta_0^0$ et $f(\delta_{p+1}) = \sigma$. Les simplexes δ tels que $\delta < \delta_0^0$ et

et $f(\delta) = \sigma$ sont les faces de δ_{p+1} qui s'envoient sur σ .

Si on pose :

$$\delta_{p+1} = \langle d_0^0, \dots, d_{j_0}^0, \dots, d_1^q, \dots, d_{j_q}^q \rangle$$

et

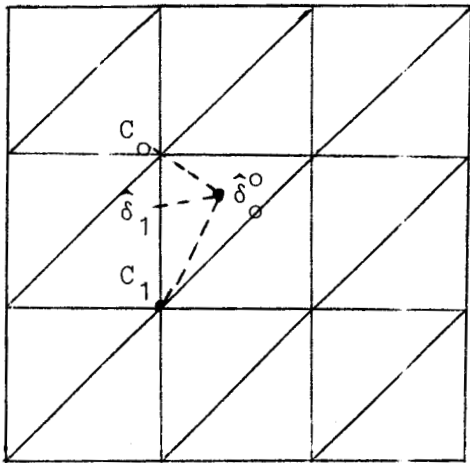
$$\alpha = \langle C_0, \dots, C_q \rangle$$

avec $f(d_*^k) = C_k$, $k = 0, \dots, q$.

Alors il y a $(2^{j_0+1} - 1)(2^{j_1-1}) \dots (2^{j_q-1})$ faces de δ_{p+1} qui s'envoient sur σ , elles sont en nombre impair, d'où le résultat.

Exemple de la situation.

$T \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1$ la projection canonique du tore T sur le cercle \mathbb{S}^1 :

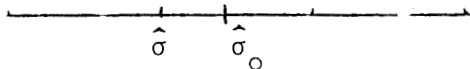


$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad i = 0$$

$$f(\hat{\delta}_0^0) = \langle \hat{\sigma}_0 \rangle$$

$$\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_0^0 \rangle$$

δ_1 joue le rôle de δ_{p+1} de la démonstration.



Les simplexes δ' cherchés sont :

$$\langle \langle C_0 \rangle, \hat{\delta}_0^0 \rangle ; \quad \langle \langle C_1 \rangle, \hat{\delta}_0^0 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_0^0 \rangle$$

3) Les simplexes σ' du type $\langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_{s+1}, \dots, \hat{\sigma}_p \rangle$.

Il est facile de voir que si $\delta'_0 < \delta'$, $f(\delta') = \sigma'$ et $\dim_f \delta' = i$ alors

δ' est de la forme :

$$\delta' = \langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_s}^s, \hat{\delta}, \hat{\delta}_1^{s+1}, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$$

où

$$\delta_0^0 < \dots < \delta_{i_s}^s < \delta < \delta_1^{s+1} < \dots < \delta_{i_p}^p \quad \text{et} \quad f(\delta) = \sigma$$

$$\text{Donc} \quad \alpha(\delta'_0) = \alpha(\delta') = \alpha(\delta_{i_p}^p).$$

Tout revient à montrer qu'il existe un nombre impair de simplexes δ de (K) tels que :

$$\delta_{i_s}^s < \delta < \delta_1^{s+1} \quad \text{et} \quad f(\delta) = \sigma.$$

En effet, posons :

$$\sigma_s = \langle C_0, \dots, C_q \rangle$$

$$\sigma = \langle C_0, \dots, C_q, \dots, C_t \rangle$$

et

$$\delta_{i_s}^s = \langle d_0^0, \dots, d_{j_0}^0, \dots, d_1^q, \dots, d_{j_q}^q \rangle$$

avec

$$f(d_*^k) = C_k \quad k = 0, \dots, q.$$

Soit δ_s le simplexe de dimension maximale de (K) tel que :

$$\delta_{i_s}^s < \delta_s < \delta_1^{s+1} \quad \text{et} \quad f(\delta_s) = \sigma.$$

Il est de la forme :

$$\delta_s = \langle d_0^0, \dots, d_{j_0}^0, d_{j_0+1}^0, \dots, d_{l_0}^0, \dots, d_1^q, \dots, d_{j_q}^q, d_{q+1}^q, \dots, d_{l_q}^q, d_1^{q+1}, \dots, \dots, d_{l_{q+1}}^{q+1}, \dots, d_1^t, \dots, d_{l_t}^t \rangle$$

avec $f(d_*^k) = C_k$, $k = 0, \dots, t$.

Alors il existe $(2^{l_0 - j_0 - 1}) \times \dots \times (2^{l_q - j_q - 1})(2^{l_{q+1} - 1}) \times \dots \times (2^{l_t - 1})$ simplexes δ de (K) tels que :

$$\delta_{i_s}^s < \delta < \delta_1^{s+1} \quad \text{et} \quad f(\delta) = \sigma$$

et les simplexes δ' cherchés sont les simplexes $\langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_s}^s, \hat{\delta}_1^{s+1}, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$ qui sont bien en nombre impair d'où le résultat.

III.1.8. Lemme. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application P.L et $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$

$$X_i(\alpha) = \{ \delta' \langle K' \rangle \mid \dim_{\mathbb{F}} \delta' = i \quad \text{et} \quad \alpha(\delta') = 1 \}$$

Alors pour tout point y de Y , $y \in \sigma'_0$ avec $\sigma'_0 \in (L')$:

$$\sum_{\substack{\delta' \langle K' \rangle \\ \dim_{\mathbb{F}} \delta' = i \\ f(\delta') = \sigma'_0}} \alpha(\delta') \cdot (\delta' \cap f^{-1}(y))$$

définit un cycle dans $H^{-i}(f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) \rightarrow \{y\})$.

Démonstration : Soit $y \in Y$ et σ'_0 le simplexe de (L') tel que $y \in \sigma'_0$, alors l'ensemble $\{ \delta' \cap f^{-1}(y) ; \delta' \in (K') \}$ définit une triangulation cellulaire de $f^{-1}(y)$ et si δ' un simplexe de (K') tel que $f(\delta') = \sigma'_0$

alors $\dim_f \delta' = i$ si et seulement si $\dim(\delta' \cap f^{-1}(y)) = i$. En plus : $(\delta'_1 \cap f^{-1}(y))$ est face de $(\delta'_2 \cap f^{-1}(y))$ si et seulement si δ'_1 est face de δ'_2 .

D'où pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer que : si δ'_0 est de dimension relative $(i-1)$ avec $f(\delta'_0) = \sigma'_0$ alors δ'_0 est face d'un nombre pair de simplexes δ' de dimension relative i tels que :

$$f(\delta') = \sigma'_0 \quad \text{et} \quad \alpha(\delta') = 1$$

Notons

$$D = \{\delta' \langle K' \rangle \mid \delta'_0 < \delta, \dim_f \delta' = i, f(\delta') = \sigma'_0 \quad \text{et} \quad \alpha(\delta') = 1\}.$$

On veut montrer que Card D est pair.

Pour cela, on note :

$$\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_1^0, \dots, \hat{\delta}_i^0, \hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_{i_1}^1, \dots, \hat{\delta}_1^p, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$$

$$\sigma'_0 = \langle \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_p \rangle$$

avec $f(\hat{d}_*^\alpha) = \sigma_\alpha$ et on pose :

$$E_1 = \{\delta' \langle K' \rangle \mid \delta' = \langle \hat{\delta}_1^0, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p, \hat{\delta} \rangle \quad \text{avec}$$

$$f(\delta) = \sigma_p \quad \text{et} \quad \alpha(\delta) = 1$$

$$E_2 = \{\delta' \langle K' \rangle \mid \delta' \text{ est de la forme :}$$

$$\langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_k^\ell, \hat{\delta}, \hat{\delta}_{k+1}^\ell, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$$

$$E_3 = \{\delta' \langle K' \rangle \mid \delta' \text{ est de la forme :}$$

$$\langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_\ell}^\ell, \hat{\delta}, \hat{\delta}_1^{\ell+1}, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle \quad \text{avec} \quad f(\delta) = \sigma_\ell \quad \text{ou} \quad \sigma_{\ell+1}$$

Deux cas se présentent :

- si $\alpha(\delta'_0) = 0$ alors $D = E_1$

- si $\alpha(\delta'_0) = 1$ alors $D = E_1 \cup E_2 \cup E_3$

Il est évident que les E_i sont disjoints 2 à 2.

Tout revient alors à montrer que $\text{Card } E_j$ est pair pour

$j = 1, 2$ ou 3 .

(i) Card E_1 est pair : on a

$$\alpha(\delta'_0) = \alpha(\delta_{i_p}^{op}) = \sum_{\substack{\delta \in (K) \\ \delta_{i_p}^p < \delta \\ f(\delta) = \sigma_p}} \alpha(\delta)$$

(d'après la C.E.L en $\delta_{i_p}^p$).

Donc $\alpha(\delta'_0) = \alpha(\delta'_0) + \sum \alpha(\delta)$ où la somme porte sur les simplexes δ' de la forme $\langle \hat{\delta}_0^o, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p, \hat{\delta} \rangle$ avec $f(\delta) = \sigma_p$ et $\alpha(\delta) = 1$.

D'où $\sum_{\delta' \in E_1} \alpha(\delta') = 0$ et $\text{Card } E_1$ est pair.

(ii) Card E_2 est pair : on pose

$$\delta_k^l = \langle C_0, \dots, C_m \rangle$$

$$\delta_{k+1}^l = \langle C_0, \dots, C_m, C_{m+1}, \dots, C_s \rangle$$

Il existe un nombre pair $(= 2^{s-m}-2)$ de simplexes δ de (K) tels que :

$$\delta_k^l < \delta < \delta_{k+1}^l$$

donc il existe un nombre pair de δ' de (K') de la forme

$$\delta' = \langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_k^\ell, \hat{\delta}, \hat{\delta}_{k+1}^\ell, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$$

d'où le résultat.

(iii) Card E_3 est pair : on pose :

$$\delta_{i_\ell}^\ell = \langle C_1^0, \dots, C_{i_0}^0, \dots, C_1^m, \dots, C_{i_m}^m \rangle$$

$$\sigma_\ell = \langle d_0, \dots, d_m \rangle \text{ avec } f(C_*^\alpha) = d_\alpha$$

$$\delta_1^{\ell+1} = \langle C_1^0, \dots, C_{i_0}^0, \dots, C_{j_0}^0, \dots, C_1^m, \dots, C_{i_m}^m, C_{i_m+1}^m, \dots, C_{j_m}^m, \\ C_1^{m+1}, \dots, C_{j_{m+1}}^{m+1}, \dots, C_1^s, \dots, C_{j_s}^s \rangle$$

$$\delta_{\ell+1} = \langle d_0, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_s \rangle \text{ avec } f(C_*^\alpha) = d_\alpha.$$

Si $f(\delta) = \sigma_\ell$: il existe un nombre pair $(= (2^{j_0 - i_0 - 2}) \times \dots \times (2^{j_m - i_m - 2}))$ de simplexes δ de (K) tels que :

$$\delta_{i_\ell}^\ell < \delta < \delta_1^{\ell+1} \text{ et } f(\delta) = \sigma_\ell$$

donc il existe un nombre pair de simplexes δ' de E_3 tels que $f(\delta) = \sigma_\ell$, on note E_3^ℓ l'ensemble de ces simplexes.

De même, si $f(\delta) = \sigma_{\ell+1}$, il existe un nombre pair $(= (2^{j_0 - i_0 - 2}) \times \dots \times (2^{j_m - i_m - 2}) \times (2^{j_{m+1} - 2}) \times \dots \times (2^{i_s - 2}))$ de simplexes δ tels que

$$\delta_{i_\ell}^\ell < \delta < \delta_1^{\ell+1} \text{ et } f(\delta) = \sigma_{\ell+1}$$

donc il existe un nombre pair de simplexes δ' de E_3 tels que $f(\delta) = \sigma_{\ell+1}$
 on note $E_3^{\ell+1}$ l'ensemble de ses simplexes. Or E_3^ℓ et $E_3^{\ell+1}$ sont disjoints
 et $E_3^\ell \cup E_3^{\ell+1} = E_3$ donc $\text{Card } E_3$ est pair.

Démonstration de la proposition III.1.3. : La proposition se démontre par
 récurrence en construisant Y simplexe par simplexe, par dimension crois-
 sante des simplexes.

•) Pour y un sommet de (L') , d'après le lemme III.1.8.

$$f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) = \left(\sum_{\substack{\dim_f \delta' = i \\ f(\delta') = y \\ \alpha(\delta') = 1}} \delta' \right)$$

est un cycle.

•) On suppose que la proposition est vraie pour Y' avec $Y' \subset Y$,
 Y' contient tous les $(j-1)$ -simplexes de (L') et éventuellement des
 j -simplexes et soit σ' un j -simplexe de (L') tel que σ' n'est pas un
 simplexe de Y' .

On cherche à montrer que la proposition est vraie pour $Y' \cup \sigma'$,
 pour cela, soit la suite de Mayer-Vietoris, écrite pour le couple (Y', σ')
 (même démonstration qu'au lemme II.1)

$$\begin{array}{ccc} H^{-i-1}(f^{-1}(Y' \cap \sigma') \cap X_i(\alpha)) & \longrightarrow & Y' \cap \sigma' \\ \downarrow & & \\ H^{-i}(f^{-1}(Y' \cup \sigma') \cap X_i(\alpha)) & \longrightarrow & Y' \cup \sigma' \\ \downarrow (j_1^*, j_2^*) & & \\ H^{-i}(f^{-1}(Y') \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y') \oplus H^{-i}(f^{-1}(\sigma') \cap X_i(\alpha) \rightarrow \sigma') & & \\ \downarrow i_1^* - i_2^* & & \\ H^{-i}(f^{-1}(Y' \cap \sigma') \cap X_i(\alpha)) & \longrightarrow & Y' \cap \sigma' \end{array}$$

1) On a : $H^{-i-1}(f^{-1}(Y' \cap \sigma') \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y' \cap \sigma') = 0$ (même démonstration qu'au lemme II.4).

Soit l'isomorphisme : (lemme II.3)

$$g^* : H^{-i}(f^{-1}(\sigma') \cap X_i(\alpha) \rightarrow \sigma') \rightarrow H^{-i}(f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) \rightarrow \{y\})$$

où $g : \{y\} \hookrightarrow \sigma'$ est l'inclusion d'un point y de $\overset{o}{\sigma'}$ dans σ' .

On note $[f_i^{-1}(y)]^\alpha$ la classe du cycle :

$$\sum \delta'_y$$

où la sommation est étendue aux simplexes δ' de (K') tels que : $\dim_f \delta' = i$, $f(\delta') = \sigma'$ et $\delta'_y = \delta' \cap f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha)$ (Lemme III.1.6).

2) On montre que $i_1^*([f_i]^\alpha) = i_2^*(g^{*-1}([f_i^{-1}(y)]^\alpha))$ où $[f_i]^\alpha \in H^{-i}(f^{-1}(Y') \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y')$ hypothèse de récurrence.

Pour cela, il suffit de montrer que, sous les mêmes notations du lemme II.6, on ait :

$$\ell_p^* \circ i_1^*([f_i]^\alpha) = \ell_p^* \circ i_2^*(g^{*-1}([f_i^{-1}(y)]^\alpha))$$

(on fait l'intersection de tous les espaces avec $X_i(\alpha)$).

De même, le lemme II.5 reste valable pour les applications $f^{-1}(Y' \cup \sigma') \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y' \cup \sigma'$ et $f^{-1}(\sigma') \cap X_i(\alpha) \rightarrow \sigma'$ et donne le résultat.

On a alors :

$$\ell_p^* \circ i_1^*([f_i]^\alpha) = \left[\sum_{\substack{\dim_f \delta'_p = i \\ f(\delta'_p) = \sigma' \text{ et } \alpha(\delta'_p) = 1}} \delta'_p \right]$$

avec σ'_p un $(j-1)$ -simplexe bord de σ' . D'autre part :

$$\ell_p^* \circ i_2^*(g^{*-1}([f_i^{-1}(y)]^{-\alpha})) = \ell_p^* \circ i_2^* \left(\left[\sum_{\substack{\dim_f \delta' = i \\ f(\delta') = \sigma' \\ \alpha(\delta') = 1}} \delta' \right] \right)$$

Donc tout revient à montrer que :

$$\left[\sum_{\substack{\dim_f \delta'_p = i \\ f(\delta'_p) = \sigma'_p \\ \alpha(\delta'_p) = 1}} \delta'_p \right] = \ell_p^* \circ i_2^* \left(\left[\sum_{\substack{\dim_f \delta' = i \\ f(\delta') = \sigma' \\ \alpha(\delta') = 1}} \delta' \right] \right)$$

et

En effet, posons :

$$A = \{ \delta'_p \in (K') \mid \dim_f \delta'_p = i, \quad f(\delta'_p) = \sigma'_p \quad \text{et} \quad \alpha(\delta'_p) = 1 \}$$

et

$$B = \{ \delta' \in (K') \mid \dim_f \delta' = i, \quad f(\delta') = \sigma' \quad \text{et} \quad \alpha(\delta') = 1 \}$$

Il vient :

i) si $\delta'_p \in A$, alors d'après le lemme III.1.5, il existe un nombre impair de simplexes δ' de (K') tels que :

$$\delta'_p < \delta' \quad \text{et} \quad \delta' \in B.$$

ii) si $\delta' \in B$:

- δ' a une face δ'_p dans A , donc δ'_p figure dans les 2 sommations (d'après le lemme III.1.5).

exécute δ' n'a pas de face dans A et dans ce cas

$$l_p^* \circ i_2^*(\delta') = 0 .$$

D'où

$$(i_1^* - i_2^*)([f_i]^\alpha ; g^{*-1}(f_i^{-1}(y)|^\alpha)) = 0$$

Donc il existe une unique classe $[f^{-1}(Y' \cup \sigma) \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y' \cup \sigma]$ de $H^{-i}(f^{-1}(Y' \cup \sigma) \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y' \cup \sigma)$ telle que :

$$(j_1^*, j_2^*)([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y' \cup \sigma]) = ([f_i]^\alpha ; g^{*-1}([f_i^{-1}(y)]^\alpha)).$$

Pour finir la démonstration de la proposition, on vérifie que pour tout $k : \{y\} \hookrightarrow Y' \cup \sigma$,

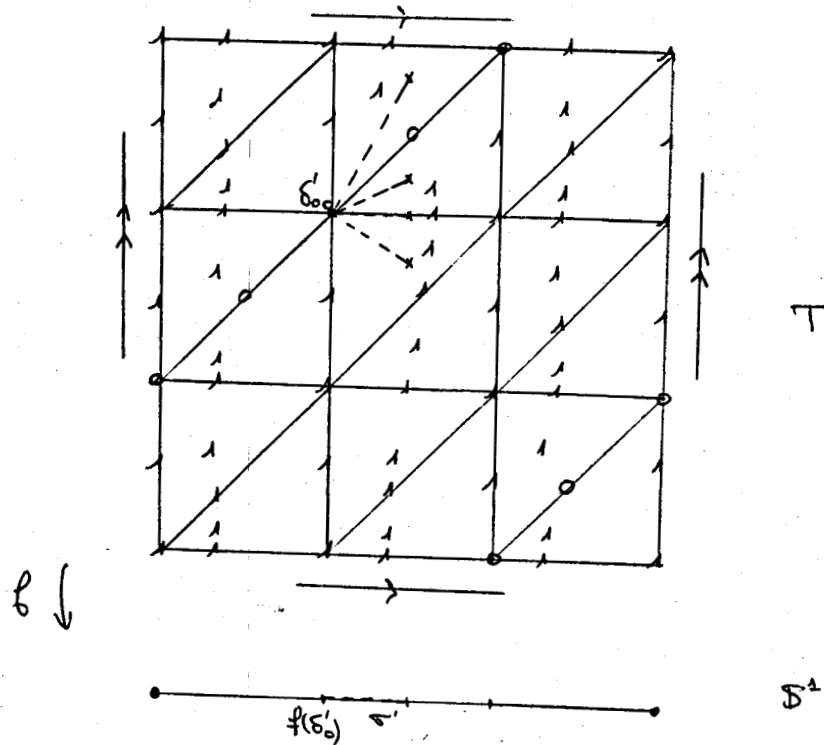
$$k^*([f^{-1}(Y' \cup \sigma) \cap X_i(\alpha) \rightarrow Y' \cup \sigma]) = [f_i^{-1}(y)]^\alpha$$

La démonstration est la même que pour les i -circuits (Démonstration de la proposition II.3.4).

III.1.9. Remarque. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application P.L, si $\alpha = 1$ est élément de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$ alors $f_i : X_i(\alpha) \rightarrow Y$ est une application i -circuit. Mais, contrairement à ce qu'affirment W. Fulton et R. Mac Pherson ([5]), si α est un élément quelconque de $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$, on ne peut pas affirmer que $f_i : X_i(\alpha) \rightarrow Y$ est une application i -circuit, ceci on le voit dans l'exemple suivant :

Soit f la projection canonique du tore T sur le cercle S^1 et α -définie ci-dessous sur le schéma :

Le tore T et le cercle S^1 sont triangularisés de la manière suivante :



$$\alpha \in \mathbb{F}(T \xrightarrow{f} S^1),$$

si $i = 0$:

$$T_0(\alpha) = \{\delta' \mid \dim_f \delta' = 0 \text{ et } \alpha(\delta_0^0) = 1\}$$

$f_0 : T_0(\alpha) \rightarrow S^1$ n'est pas un 0-circuit car :

$$\delta_0^0 \in T_0(\alpha) \text{ et } \dim_f \delta_0^0 = 0$$

$f(\delta_0^0) < \sigma'$ et il existe un nombre pair (= 4) de simplexes δ' (en pointillés) tels que :

$$\delta_0^0 < \delta', \quad \dim_f \delta' = 0, \quad \alpha(\delta_0^0) = 1 \quad \text{et} \quad f(\delta') = \sigma'.$$

Démonstration de la proposition III.1.5. Soient (K_0) et (K_1) deux triangulations de X , (L_0) et (L_1) deux triangulations de Y telles que $f : (K_j) \rightarrow (L_j)$ $j = 0, 1$ soit simpliciale et (K_j) soit α -adaptée ($j=0, 1$)

et soient $\omega_i(\alpha)$ et $\omega_i^!(\alpha)$ les classes dans $H^{-i}(X \rightarrow Y)$ associées respectivement à (K_0, L_0) et (K_1, L_1) . On cherche à montrer que $\omega_i(\alpha) = \omega_i^!(\alpha)$.

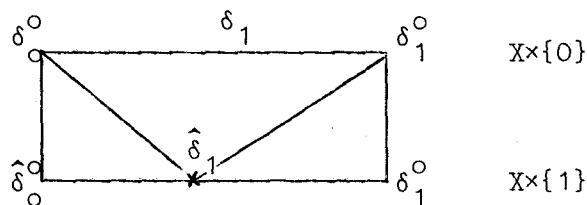
On le fait en deux étapes :

① Cas où K_1 est une première subdivision barycentrique de (K_0) et L_1 est une première subdivision barycentrique de (L_0) :

On considère l'espace $X \times I$, on munit $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ des deux triangulations (K_0) et (K_1) respectivement, et on va prolonger ces deux triangulations à $X \times I$ de la manière suivante : on raisonne par ordre croissant des simplexes δ de (K_0) , si δ est un sommet de (K_0) , $\hat{\delta}$ est un sommet de (K_1) , on joint alors δ à $\hat{\delta}$.

Si δ est un p -simplexe de (K_0) , on joint alors les sommets de δ au sommet $\hat{\delta}$ de (K_1) (après avoir effectué le même raisonnement pour toutes les faces de δ).

Exemple.



On considère alors la triangulation (K) de $X \times I$ dont les simplexes sont :

- les simplexes de (K_0)
- les simplexes de (K_1)
- Les simplexes de la forme $\langle a_{i_0}, \dots, a_{i_p}, \hat{\delta}_{j_0}, \dots, \hat{\delta}_{j_p} \rangle$ où a_{i_0}, \dots, a_{i_p} sont des sommets du simplexe δ_{j_0} , et $\delta_{j_0} < \dots < \delta_{j_p}$.

On a ainsi une triangulation (K) de $X \times I$ dont la restriction à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ donne respectivement les triangulations (K_0) et (K_1) .

De la même manière, on peut construire une triangulation (L) de $Y \times I$, qui se restreint sur $Y \times \{0\}$ et $Y \times \{1\}$ à (L_0) et (L_1) respectivement. D'autre part, on note α' l'application de $X \times I \rightarrow \mathbb{Z}_2$ définie par $\alpha'(x,t) = \alpha(x)$ pour tout (x,t) de $X \times I$. On va montrer que : $\alpha' \in \mathbb{F}(X \times I \rightarrow Y \times I)$. En effet :

a) $\alpha'^{-1}(1) = \alpha^{-1}(1) \times I$ est un sous-ensemble constructible de $X \times I$ (car $\alpha^{-1}(1)$ est un sous-ensemble constructible de X).

Donc α' est une fonction constructible de $X \times I$.

b) On montre que α' vérifie la condition d'Euler locale en tout point (x,t) de $X \times I$.

Soit (x,t) un élément de $X \times I$. On veut montrer que (Lemme I.2.5)

$$\alpha'(x,t) = \chi(B(x,t) \cap (f \times \text{id})^{-1}(y,t) ; \alpha')$$

avec pour $B(x,t)$ un voisinage suffisamment petit de (x,t) et (y,t) est dans $\overset{\circ}{B}(f(x),t)$. On peut choisir $B(x,t)$ de la forme $B(x) \times I'$ où $B(x)$ est un voisinage assez petit de x et I' un voisinage assez petit de t dans I .

D'où tout revient à montrer que :

$$\alpha'(x,t) = \chi((B(x) \times I') \cap (f \times \text{id})^{-1}(y,t) ; \alpha')$$

c'est-à-dire :

$$\alpha'(x,t) = \chi((B(x) \cap f^{-1}(\{y\})) \times \{t\} ; \alpha')$$

autrement dit :

$$\alpha(x) = \chi(B(x) \cap f^{-1}(\{y\}) ; \alpha).$$

Ce qui n'est autre que la condition d'Euler locale écrite pour α en x . On a donc $\alpha' \in \mathbb{F}(X \times I \xrightarrow{(f \times \text{id})} Y \times I)$.

Maintenant, soit le carré fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p'_k} & X \times I \\ f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow (f, \text{id}) \\ Y & \xrightarrow{p_k} & Y \times I \end{array} \quad k = 0 \text{ ou } 1.$$

où $p'_k(x) = (x, k)$ pour $k = 0$ ou 1

$p_k(y) = (y, k)$ pour $k = 0$ ou 1 .

Puisque $X \times \{0\}$ et $Y \times \{0\}$ sont triangularisés respectivement par (K_0) et (L_0) , et de même, $X \times \{1\}$ et $Y \times \{1\}$ triangularisés par (K_1) et (L_1) , il vient :

$$p_k^*(\alpha') = \alpha \quad \text{pour } k = 0 \text{ ou } 1$$

$$p_0^*(\omega_i(\alpha')) = \omega_i(\alpha)$$

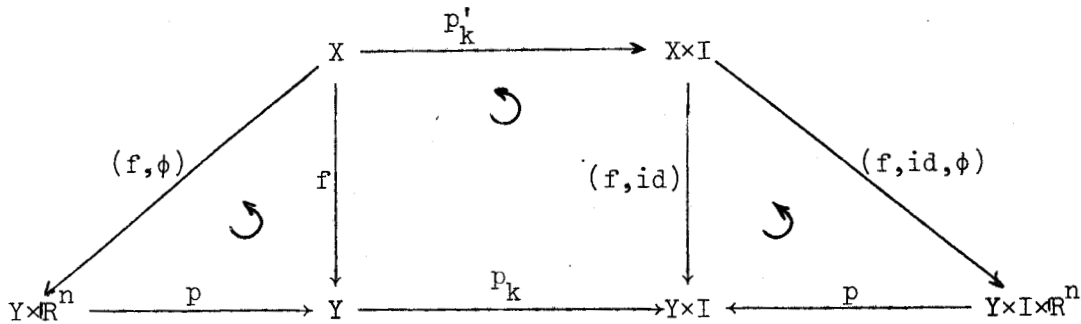
et

$$p_1^*(\omega_i(\alpha')) = \omega_i(\alpha).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que

$$p_0^* = p_1^*$$

Pour cela, on considère $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue qui factorise f , et le diagramme :



avec $\phi'(x,t) = \phi(x)$ pour tout (x,t) de $X \times I$.

Les applications qui donnent p_0^* et p_1^* :

$$(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - f_\phi(X)) \xrightarrow{(p_k \times id)} (Y \times I \times \mathbb{R}^n, Y \times I \times \mathbb{R}^n - (f \times id)_\phi, (X \times I)) \quad k = 0 \text{ ou } 1$$

à savoir $(p_0 \times id)$ et $(p_1 \times id)$ sont donc homotopes. (L'homotopie est réalisée par l'application :

$$\begin{aligned}
 (Y \times \mathbb{R}^n) \times I &\rightarrow Y \times I \times \mathbb{R}^n \\
 (y, t, s) &\mapsto (y, s, t)
 \end{aligned}$$

On en déduit : $p_0^* = p_1^*$.

② Dans le cas général, considérons $(K_j)_{j=0,1}$ et $(L_j)_{j=0,1}$ deux triangulations quelconques de X et Y respectivement telles que $f : (K_j) \rightarrow (L_j)$ ($j = 0$ ou 1) soit simpliciale et que (K_j) soit α -adaptée ($j = 0, 1$).

Il existe deux subdivisions barycentriques itérées communes (K) et (L) de (K_j) et (L_j) ($j = 0$ ou 1) respectivement, on en déduit le résultat d'après ①.

III.2. Démonstration de la proposition III.1.6.

On pose
$$\omega(\alpha) = \sum_{i=0}^{\dim X} \omega_i(\alpha).$$

On va montrer que ω satisfait les conditions du théorème, à savoir :

III.2.1. Si X est une variété sans bord, on a :

$$\omega(1_X) = W(TX) \cdot [X]$$
 classe homologique de Stiefel Whitney (mod 2).

III.2.2. Unicité de ω

III.2.3. Préservation des trois opérations : produit, image directe et image réciproque.

Démonstration :

III.2.1. Si X est une variété sans bord alors :

$$\omega_i(1_X) = \left[\sum_{\dim \delta' = i} \delta' \right]$$

et on a alors

$$\omega(1_X) = \left[\sum_i \sum_{\dim \delta' = i} \delta' \right] = \left[\sum_{\delta' < (K')} \delta' \right]$$

qui est la classe homologique de Stiefel-Whitney (mod 2) ceci d'après S. Halperin et D. Toledo ([7]).

III.2.2. Unicité de $\omega_i(\alpha)$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application P.L et $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$. On note $[f_i^{-1}(y)]^\alpha$ la classe de $f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) \xrightarrow{f_i} \{y\}$ dans

$H^{-i}(f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) \rightarrow \{y\})$, elle est représentée par

$$\left(\sum_{\substack{\delta' \mid f(\delta') = \sigma' \\ y \in \sigma' \\ \dim_f \delta' = i}} \alpha(\delta') \cdot \delta' \cap f^{-1}(y) \right)$$

et pour $f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) \xrightarrow{k_2} f^{-1}(y)$.

On note :

$$[f^{-1}(y)]_i^\alpha = k_{2*} ([f_i^{-1}(y)]^\alpha).$$

Lemme. Il existe une et une seule classe $\gamma_i(\alpha)$ dans $H^{-i}(X \rightarrow Y)$ qui pour tout point y de Y se restreint à $[f^{-1}(y)]_i^\alpha$ par le carré fibré

Preuve : 1) Existence : On montre que $\gamma_i(\alpha) = \omega_i(\alpha)$.

Pour cela, on montre que :

$$g^* \omega_i(\alpha) = [f^{-1}(y)]_i^\alpha$$

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(y) \cap X_i(\alpha) & \xrightarrow{\quad} & X_i(\alpha) \\
 \downarrow k_2 & \curvearrowright & \downarrow k_1 \\
 f^{-1}(y) & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f \\
 y & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

Soit $[f_i]^\alpha$ la classe de $X_i(\alpha) \xrightarrow{f_i} Y$ dans $H^{-i}(X_i(\alpha) \rightarrow Y)$; on a alors :

$$g_* k_{1*} ([f_i]^\alpha) = k_{2*} g^* ([f_i]^\alpha)$$

avec $k_{1*} ([f_i]^\alpha) = \omega_i(\alpha)$ et

$$\begin{aligned}
 k_{2*} g^* ([f_i]^\alpha) &= k_{2*} ([f_i^{-1}(y)]^\alpha) \text{ d'après la proposition III.1.3} \\
 &= [f^{-1}(y)]_i^\alpha \qquad \qquad \qquad \text{C.Q.F.D.}
 \end{aligned}$$

2) L'unicité provient du fait de l'unicité de $[f_i]^\alpha$ (III.1.3)

et de ce que la restriction de $\gamma_i(\alpha)$ dans $H^{-1}(f^{-1}(y) \rightarrow \{y\})$ donne

$$[f^{-1}(y)]_i^\alpha = k_{2*} ([f_i]^\alpha) \text{ pour tout point } y \text{ de } Y.$$

III.2.3. Corollaire. Soit $y \in Y$ et soit (K_α) une triangulation

de X dont $f^{-1}(y)$ soit un sous polyèdre, on note (K_y) la restriction

à $f^{-1}(y)$ de la triangulation (K_α) et (K'_y) sa 1ère subdivision

barycentrique. Alors $\sum_{\substack{\delta' \mid f(\delta')=y \\ \delta' \in (K'_y) \\ \dim \delta' = i}} \alpha(\delta') \delta'$ définit un cycle dans

$H^{-i}(f^{-1}(y) \rightarrow y)$ de classe $[f^{-1}(y)]_i^\alpha$.

Preuve : Si (K) est la triangulation de X telle que précédemment, alors $g^* \omega_i(\alpha) = [f^{-1}(y)]_i^\alpha$.

D'autre part pour la triangulation (K_0) de X on a :

$$g^* \omega_i(\alpha) = \left[\sum_{\substack{\delta' \in (K'_y) \\ f(\delta')=y \\ \dim \delta'=i}} \alpha(\delta') \cdot \delta' \right]$$

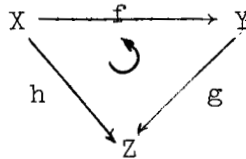
Or d'après la proposition III.1.4, $\omega_i(\alpha) = \omega_i(\alpha)$. Donc

$$[f^{-1}(y)]_i^\alpha = \left[\sum_{\substack{\delta' \in K'_y \\ f(\delta')=y \\ \dim \delta'=i}} \alpha(\delta') \cdot \delta' \right].$$

III.3.3. Préservation des 3 opérations.

On montre que la transformation $\omega : \mathbb{F} \rightarrow H$ préserve les trois opérations : produit, image directe et image réciproque.

1. Préservation du produit. Soit un diagramme commutatif



$$h = g \circ f$$

On a alors $\omega(\alpha) \in H(X \xrightarrow{f} Y)$, $\omega(\beta) \in H(Y \xrightarrow{g} Z)$ et $\omega(\alpha\beta) \in H(X \xrightarrow{h} Z)$.

On veut montrer que $\omega(\alpha\beta) = \omega(\alpha) \cdot \omega(\beta)$ c'est-à-dire

$$\sum_n \omega_n(\alpha\beta) = \left(\sum_i \omega_i(\alpha) \right) \cdot \left(\sum_j \omega_j(\beta) \right)$$

ou encore

$$\omega_n(\alpha\beta) = \sum_{i+j=n} \omega_i(\alpha) \cdot \omega_j(\beta).$$

D'après l'unicité de $\omega_n(\alpha\beta)$ (III.2.2), il suffit de montrer que pour tout point z de Z , on a

$$k^* \left(\sum_{i+j=n} \omega_i(\alpha) \cdot \omega_j(\beta) \right) = [(g \circ f)^{-1}(z)]$$

par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (g \circ f)^{-1}(z) & \xrightarrow{\quad} & X \\ \text{gof} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow h=\text{gof} \\ \{z\} & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

D'après le corollaire III.2.3, on peut prendre z comme sommet d'une triangulation (M) de Z . Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (g \circ f)^{-1}(z) & \xrightarrow{\quad} & X \\ f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f \\ g^{-1}(z) & \xrightarrow{k'} & Y \\ g \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g \\ \{z\} & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} k^* \left(\sum_{i+j=n} \omega_i(\alpha) \cdot \omega_j(\beta) \right) &= \sum_{i+j=n} k'^* \omega_i(\alpha) \cdot k^* \omega_j(\beta) \\ &= \sum_{i+j=n} \left[\sum_{\substack{(gof)(\delta')=z \\ \dim_f \delta'=i \\ \alpha(\delta')=1}} \delta' \right] \cdot \left[\sum_{\substack{g(\sigma')=z \\ \dim_g \sigma'=j \\ \beta(\sigma')=1}} \sigma' \right] \end{aligned}$$

Donc tout revient à montrer que :

$$\sum_{i+j=n} \left[\sum_{\substack{(\text{gof})(\delta')=z \\ \dim_f \delta'=i \\ \alpha(\overset{\circ}{\delta'})=1}} \delta' \right] \cdot \left[\sum_{\substack{g(\sigma')=z \\ \dim_g \sigma'=j \\ \beta(\overset{\circ}{\sigma'})=1}} \sigma' \right] = \left[\sum_{\substack{\text{gof}(\delta')=z \\ \dim_{\text{gof}} \delta'=n \\ (\alpha\beta)(\overset{\circ}{\delta'})=1}} \delta' \right]$$

Dans le produit intervient les simplexes δ' de $(\text{gof})^{-1}(z)$ tels que : $\dim_f \delta' = i$, $\alpha(\overset{\circ}{\delta'}) = 1$, $\dim_g f(\delta') = j$ et $\beta(\overset{\circ}{f(\delta')}) = 1$ donc $\dim_{\text{gof}} \delta' = i+j = n$ et $(\alpha\beta)(\overset{\circ}{\delta'}) = 1$.

De même pour tout δ' de $(\text{gof})^{-1}(z)$ tel que $\dim_{\text{gof}} \delta' = n$ et $(\alpha\beta)(\overset{\circ}{\delta'}) = 1$, il existe i et j tels que $i+j = n$, $\dim_f \delta' = i$, $\dim_g f(\delta') = j$, $\alpha(\overset{\circ}{\delta'}) = 1$ et $\beta(\overset{\circ}{f(\delta')}) = 1$ (il suffit de prendre $i = \dim_f \delta'$ et $j = n-i$).

C.Q.F.D.

Préservation de l'image directe.

Première réduction : Soit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \swarrow g \\ & & Z \end{array}$$

$h = g \circ f$

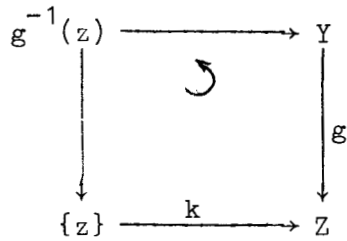
où f est une application propre et soit $\alpha \in \mathbb{F}(X \xrightarrow{h} Z)$, on a alors $\omega_i(\alpha) \in H^{-i}(X \xrightarrow{h} Z)$; $(f_*\alpha) \in \mathbb{F}(Y \rightarrow Z)$ et $\omega_i(f_*\alpha) \in H^{-i}(Y \rightarrow Z)$.

On cherche à montrer que pour tout i :

$$f_* (\omega_i(\alpha)) = \omega_i(f_*\alpha).$$

D'après l'unicité de $\omega_i(f_*\alpha)$ (III.2.2), il suffit de montrer que pour tout point z de Z , $f_* (\omega_i(\alpha))$ se restreint à $[g^{-1}(z)]_i^{f_*\alpha}$.

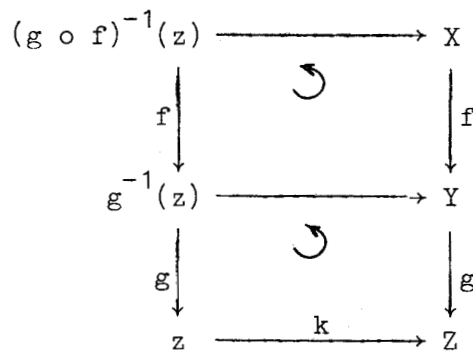
par le carré fibré



Autrement dit :

$$k^*(f_*(\omega_i(\alpha))) = [g^{-1}(z)]_i^{f_*\alpha} \quad (1)$$

Deuxième réduction : On fixe z , et soit le diagramme :



On a $k^*(f_*(\omega_i(\alpha))) = f_*(k^*\omega_i(\alpha))$, et puisque

$$k^*(\omega_i(\alpha)) = [(g \circ f)^{-1}(z)]_i^\alpha \quad (\text{III.2.2}) \text{ alors :}$$

$$k^*(f_*(\omega_i(\alpha))) = f_*([(g \circ f)^{-1}(z)]_i^\alpha).$$

D'où montrer que (1) est vrai revient à montrer que pour tout z de Z

on a :

$$f_*([(g \circ f)^{-1}(z)]_i^\alpha) = [g^{-1}(z)]_i^{f_*\alpha} \quad (2)$$

On considère (K), (L) et (M) trois triangulations respectivement de X, Y et Z telles que f, g et h soient simpliciales, (K) soit α -adaptée et que (L) soit $f_*\alpha$ -adaptée.

(K'), (L') et (M') des première subdivisions barycentriques qui vérifient les mêmes conditions que (K), (L) et (M).

Troisième réduction : si τ' un simplexe de (M') tel que $z \in \overset{\circ}{\tau}$, l'égalité (2) à démontrer devient :

$$\begin{aligned}
 & f_* \left[\sum_{\substack{\delta' \triangleleft (K') \\ \dim_{\text{gof}} \delta' = i \\ \text{gof}(\delta') = \tau' \\ \alpha(\overset{\circ}{\delta}') = 1}} \alpha(\overset{\circ}{\delta}') \cdot \delta' \cap (\text{gof})^{-1}(z) \right] \\
 &= \left[\sum_{\substack{\sigma' \triangleleft (L') \\ \dim_g \sigma' = i \\ g(\sigma') = \tau' \\ f_* \alpha(\overset{\circ}{\sigma}') = 1}} f_* \alpha(\overset{\circ}{\sigma}') \cdot \sigma' \cap g^{-1}(z) \right]
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\left[\sum_{\substack{\delta' \triangleleft (K') \\ \dim_{\text{gof}} \delta' = i \\ \text{gof}(\delta') = \tau' \\ \alpha(\overset{\circ}{\delta}') = 1 \\ \dim_g f(\delta') = i}} \alpha(\overset{\circ}{\delta}') \cdot (f(\delta') \cap g^{-1}(z)) \right]$$

(3)

$$= \left[\sum_{\substack{\sigma' \triangleleft (L') \\ \dim_g \sigma' = i ; g(\sigma') = \tau' \\ \text{et } f_* \alpha(\overset{\circ}{\sigma}') = 1}} f_* \alpha(\overset{\circ}{\sigma}') \cdot (\sigma' \cap g^{-1}(z)) \right]$$

On remarque que si δ' est dans la 1ère sommation on a :

$$\dim \delta' = \dim f(\delta').$$

Montrons que l'égalité (3) est vraie.

Posons :

$$A = \{\delta' < (K') \mid \dim_{\text{gof}} \delta' = i, \text{gof}(\delta') = \tau', \alpha(\delta') = 1 \\ \text{et } \dim f(\delta') = \dim \delta'\}$$

$$B = \{\sigma' < (L') \mid \dim_g \sigma' = i, g(\sigma') = \tau' \text{ et } f_* \alpha(\sigma') = 1\}.$$

Il s'agit de montrer que :

1) si $\delta'_0 \in A$ tel qu'il existe un nombre impair de simplexes δ' de A qui vérifient $f(\delta') = f(\delta'_0)$ (c'est-à-dire $f(\delta') \cap g^{-1}(z)$ figure dans la 1ère sommation de (3)) alors $f(\delta'_0) \in B$.

2) Réciproquement, si σ'_0 est dans B , il lui correspond un nombre impair de simplexes δ' de A vérifiant $f(\delta') = \sigma'_0$.

En effet :

1) soit $\delta'_0 \in A$, donc $\dim_g f(\delta'_0) = i$ et $gf(\delta'_0) = \sigma'_0$.

Il suffit de montrer que : $(f_* \alpha)(f(\delta'_0)) = 1$ (*).

On note :

$$\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_0}^0, \dots, \hat{\delta}_1^p, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$$

$$f(\delta'_0) = \langle \hat{\sigma}_0^0, \dots, \hat{\sigma}_{i_0}^0, \dots, \hat{\sigma}_1^p, \dots, \hat{\sigma}_{i_p}^p \rangle$$

et $\tau' = \langle \hat{\tau}_0, \dots, \hat{\tau}_p \rangle$

avec $f(\delta_\beta^\alpha) = \sigma_\beta^\alpha$ et $(gof)(\delta_*^\alpha) = \tau_\alpha$. D'autre part, on a :

$$f_*\alpha(f(\delta'_0)) = f_*\alpha(f(\delta_{i_p}^{op})) = f_*\alpha(\sigma_{i_p}^{oo})$$

et

$$f_*\alpha(\sigma_{i_p}^{op}) = \sum_{\substack{\delta < (K) \\ f(\delta) = \sigma_{i_p}^{op} \\ \alpha(\delta) = 1}} \alpha(\delta) \quad (4)$$

(par définition de $f_*\alpha$).

Posons : $C = \{\delta < (K) \mid f(\delta) = \sigma_{i_p}^{op} \text{ et } \alpha(\delta) = 1\}$

(*) sera vérifié si on montre que :

(i) pour $\delta \in C$ si $K(\delta)$ est l'ensemble des simplexes δ' de (K') dont le dernier sommet est $\hat{\delta}$ et tels que : $\dim \delta' = \dim f(\delta')$ $f(\delta') = f(\delta_0)$ alors $\text{card } K(\delta)$ est impair.

$$(ii) \alpha(\delta) = \sum_{\delta' < K(\delta)} \alpha(\delta') \quad \text{pour tout } \delta \text{ de } C$$

$$(iii) \sum_{\delta \in C} \sum_{\delta' < K(\delta)} \alpha(\delta') = \sum_{\substack{\delta' \in A \\ f(\delta') = f(\delta_0)}} \alpha(\delta')$$

$$(iv) \{\delta' < K(\delta), \delta \in C\} = \{\delta' \in A \mid f(\delta') = f(\delta_0)\}$$

(ii), (iii) et (iv) sont évidents, reste à montrer (i).

En effet, posons :

$$\sigma_{i_p}^p = \langle a_1^o, \dots, a_{j_0}^o, a_{j_0+1}^o, \dots, a_{j_1}^o, \dots, a_{j_{i_p-1}}^o, \dots, a_{i_0}^o, \dots, a_1^p, \dots, a_{j_1}^p, \dots, \dots, a_{j_{i_p-1}+r}^p, \dots, a_{j_{i_p}}^p \rangle$$

$$\text{avec } \sigma_\beta^\alpha = \langle a_1^o, \dots, a_{j_\beta}^\alpha \rangle.$$

Pour δ appartenant à C , on note :

$$\delta = \langle b_1^{0,0}, \dots, b_{s_0}^{0,0}, b_1^{0,1}, \dots, b_1^{0,1} ; \dots, b_{s_1}^{0,i_0}, \dots, b_1^{0,i_0}, \dots, b_{s_{i_0}}^{0,i_0}, \dots, \dots, b_1^{p,j_{i_1}^p}, \dots, b_p^{p,j_{i_1}^p} \rangle$$

avec $f(b_*^{\alpha,\beta}) = a_\beta^\alpha$.

On a alors, il existe un nombre impair $(= (2^{s_0-1}) \times \dots \times (2^{s_{i_0}-1}))$ de simplexes ∂_0^0 de (K) tels que $\partial_0^0 < \delta$ et $f(\partial_0^0) = \sigma_0^0$.

De même, il existe un nombre impair de simplexes t_1^0 de (K) tels que $t_1^0 < \delta$ et $f(t_1^0) = \langle e_{j_0+1}^0, \dots, e_{j_1}^0 \rangle$, donc il existe un nombre impair de couple $(\partial_0^0, \partial_1^0)$ tels que :

$$\partial_0^0 < \partial_1^0 < \delta, \quad f(\partial_0^0) = \sigma_0^0 \quad \text{et} \quad f(\partial_1^0) = \sigma_1^0$$



(il suffit de prendre pour ∂_1^0 le joint $\partial_0^0 * t_1^0$).

On réitère le raisonnement, on obtient : il existe un nombre impair de i_p -uples $(\partial_0^0, \dots, \partial_{i_p-1}^p)$ tel que $\partial_0^0 < \dots < \partial_{i_p-1}^p < \delta$ et $f(\partial_\beta^\alpha) = \sigma_\beta^\alpha$, donc il existe un nombre impair de simplexes δ' de (K') de la forme $\langle \hat{\partial}_0^0, \dots, \hat{\partial}_{i_p-1}^p, \hat{\delta} \rangle$ tels que $f(\delta') = f(\delta'_0)$, $\dim \delta' = \dim f(\delta')$ et $\alpha(\delta') = \alpha(\delta) = 1$, c'est-à-dire $\text{card } K(\delta)$ est impair.

2) Réciproquement, soit σ' un simplexe tel que $\sigma' \in B$: on a $\dim_g \sigma' = i$, $g(\sigma') = \tau'$ et $f_* \alpha(\sigma') = 1$. Or

$$(f_* \alpha)(\sigma') = \sum_{\substack{\delta' < (K') \\ f(\delta') = \sigma' \\ \alpha(\delta') = 1}} \alpha(\delta') \quad \text{par définition de } f_* \alpha.$$

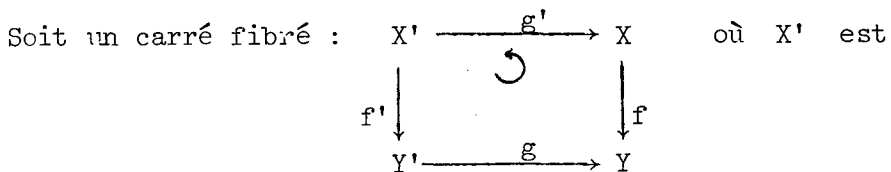
On pose $\sigma' = \langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p \rangle$ et puisque $(f_* \alpha)(\sigma') = 1$, alors il existe au moins un simplexe δ'_1 de (K') tel que $f(\delta'_1) = \sigma'$ et $\alpha(\delta'_1) = 1$.
 δ'_1 est de la forme : $\langle \hat{\delta}_0^0, \dots, \hat{\delta}_{i_0}^0, \dots, \hat{\delta}_1^p, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$ avec $f(\delta'_\beta) = \sigma_\alpha$ pour tout $\alpha = 0, \dots, p$. Soit $\delta'_0 = \langle \hat{\delta}_{i_0}^0, \dots, \hat{\delta}_{i_p}^p \rangle$. Il est facile de voir que $\delta'_0 \in A$ et $f(\delta'_0) = \sigma'$, on a alors les 4 assertions (i), (ii), (iii) et (iv) ci-dessus.

Donc

$$1 = f_* \alpha(\sigma') = \sum_{\substack{\delta' \in A \\ f(\delta') = \sigma'}} \alpha(\delta')$$

il existe donc un nombre impair de simplexes δ' de A tels que $f(\delta') = \sigma'$, ce qui implique que $f(\delta'_0) = \sigma'$ figure aussi dans la 1ère sommation de (3).

3) Préservation de l'image réciproque.



homéomorphe à $\{(x, y') \in X \times Y' \mid f(x) = g(y')\}$.

Soit α dans $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} Y)$, d'où l'élément $\omega(\alpha) \in H(X \xrightarrow{f} Y)$.

On cherche à montrer que $g'^*(\omega\alpha) = \omega(g^*\alpha)$ dans $H(X' \xrightarrow{f'} Y')$.

D'après l'unicité (III.2.2), il suffit de montrer que pour tout y' de Y' et pour tout i : on a

$$k'^*(g'^* \omega_i(\alpha)) = k'^*(\omega_i(g^* \alpha))$$

où

$$\begin{array}{ccc}
 f'^{-1}(y') & \xrightarrow{\quad} & X' \\
 \downarrow f' & \curvearrowright & \downarrow f' \\
 \{y'\} & \xleftarrow{k'} & Y'
 \end{array}$$

On triangularise tous les espaces du carré de telle façon à avoir des applications simpliciales et que la triangulation de X soit α -adaptée.

D'après le corollaire (III.2.3), on peut supposer que y' est un sommet de la triangulation de Y' , $y = g(y')$ est donc un sommet de la triangulation de Y .

On considère les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 f'^{-1}(y') & \xrightarrow{g'} & f^{-1}(y) & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow f' & \curvearrowright & \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow f \\
 \{y'\} & \xleftarrow{g} & \{y\} & \xleftarrow{k} & Y
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 f'^{-1}(y') & \xrightarrow{\quad} & X' & \xrightarrow{g'} & X \\
 \downarrow f' & \curvearrowright & \downarrow f' & \curvearrowright & \downarrow f \\
 \{y'\} & \xleftarrow{k'} & Y' & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

Puisque $g' : f'^{-1}(y') \rightarrow f^{-1}(y)$ est un homéomorphisme et $g^* \alpha(x') = \alpha(g'(x'))$ pour tout x' de $f'^{-1}(y')$ (D'après la définition de $g^* \alpha$), on a : pour tout i :

$$g^*([f^{-1}(y)]_i^\alpha) = ([f'^{-1}(y')]_i^{g^*\alpha})$$

ou d'après (III.2.2) : $g^*(k^*\omega_i(\alpha)) = k'^*(\omega_i(g^*\alpha))$ ou encore :

$$(kog)^*(\omega_i(\alpha)) = k'^*(\omega_i(g^*\alpha))$$

d'où $(gok')^*(\omega_i(\alpha)) = k'^*(\omega_i(g^*\alpha))$ car $kog = gok'$.

On en déduit que $k'^*(g^*\omega_i(\alpha)) = k'^*(\omega_i(g^*\alpha))$, d'où le résultat.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] Astérisque 82-83 : Caractéristiques d'Euler Poincaré. Séminaire E.N.S 1978-1979.
- [2] E. AKIN : Stiefel Whitney homology classes and bordism. Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 341-299.
- [3] J.P. BRASSELET : Définition combinatoire des homomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom pour une pseudovariété. Séminaire E.N.S (1978-1979) exposé 5.
- [4] J.P. BRASSELET : Existence des classes de Chern en théorie bivariante. ERA au CNRS n°07590.
- [5] W. FULTON and R. MAC PHERSON : Categorical frame work for the study of singular spaces. Memoirs of the A.M.S, May 1981, Vol. 33, n°243.
- [6] S. HALPERIN and D. TOLEDO : The product formula for Stiefel Whitney classes. Proc. AMS, 48 (1975) 239-244.
- [7] S. HALPERIN and D. TOLEDO : Stiefel-Whitney homology classes. Ann of Math 96 (1972) 511-525.
- [8] F. HUDSON : Piecewise linear topology. Benjamin 1969.
- [9] R. MAC PHERSON : Chern classes for singular algebraic varieties. Ann. of Math (1974) Vol 100, n°2, 423-432.
- [10] ROURKE-SANDERSON : Introduction to piecewise linear topology. Cambridge University Press 1976.
- [11] E. SPANIER : Algebraic topology. Mac Graw-Hill (in press).



RÉSUMÉ

W. Fulton et R. Mac Pherson ont défini deux théories bivariantes :

- a) la théorie bivariante H construite à partir de la théorie classique de cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z}_2 .
- b) La théorie bivariante \mathbb{F} construite à partir des fonctions constructibles sur X satisfaisant la condition d'Euler locale.

Dans chacune de ces théories sont définies trois opérations : produit, image directe, image réciproque (nous en donnons ici une démonstration complète). W. Fulton et R. Mac Pherson démontrent le théorème fondamental suivant :

Théorème : Il existe une transformation naturelle et une seule :

$$\omega : \mathbb{F} \longrightarrow H$$

qui préserve les trois opérations et telle que si X est une variété sans bord :

$$\omega(1_X) = W(TX) \cdot [X]$$

où 1_X est la fonction constante 1 sur X , $W(TX)$ est la classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent à X et $[X]$ est la classe fondamentale de X .

Dans leur démonstration, Fulton et Mac Pherson utilisent le fait que certaines applications f_i , définies pour toute application $f : X \rightarrow Y$ et $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$, sont des i -circuits. Nous donnons un contre exemple de ce fait et nous donnons une démonstration du théorème fondamental.

MOTS CLÉS : WHITNEY CLASSE CARACTERISTIQUE
STIEFEL CLASSE CARACTERISTIQUE
EULER CARACTERISTIQUE
THEORIE BIVARIANTE
GROTHENDIECK TRANSFORMATION
EULER CONDITION LOCALE
CONDITION PARITE LOCALE