N° d'ordre : 1119

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

ARROUD Abdelmajid

PLONGEMENT DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES DE DIMENSION INFINIE

Membres du Jury : PARREAU M., Président
COEURÉ G., Rapporteur
ANTOINE Ph., Examinateurs
HECQUET G., Examinateurs

Soutenue le 9 Décembre 1983

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ qui m'a proposé le sujet de cette thèse et qui a su m'initier aux techniques et méthodes de l'Analyse Complexe en me conseillant et me corrigeant durant la préparation de ce travail.

Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Michel PARREAU qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Messieurs les Professeurs Philippe ANTOINE et Gérard HECQUET qui ont accepté de faire partie du jury.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail et, particulièrement, Madame Raymonde BÉRAT qui en a assuré la frappe avec soin, rapidité et compétence.

P L A N

INTRODUCTION

On sait d'après Remmert [18] et Narasimhan [14] que toute variété de Stein de dimension n admet un plongement holomorphe propre dans $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Dans ce travail, on s'intéresse aux plongements des variétés analytiques de dimension infinie.

Nishihara [15] a étudié le plongement holomorphe des variétés hilbertiennes. Dans le chapitre I, on s'inspire de son article pour montrer qu'une variété banachique dénombrable à l'infini, qui possède suffisamment de fonctions holomorphes, peut être plongée dans $\ell^p_J(E) \times E$ où E est l'espace modelant et J un ensemble convenable. En particulier, on démontre qu'une variété pseudo-convexe étalée sur un espace de Banach E à base de Schauder se plonge dans $E \times E$.

Dans le chapitre II, on étudie la possibilité de trouver un plongement holomorphe propre. On résout ce problème dans le cas d'une variété pseudo-convexe, étalée sur un espace de Banach E à base de Schauder et à fibres finies ; on montre qu'elle possède un plongement holomorphe propre dans $E \times H(0)$ où $H(0)$ est l'espace des germes des fonctions holomorphes à l'origine de E.

Pour une variété pseudo-convexe étalée sur $\mathbb{C}^I$ (I ensemble infini) on exhibe un plongement holomorphe propre dans $\mathbb{C}^I$.

Le chapitre III est consacré à l'étude de la structure analytique sur les espaces $C(K,\Omega)$.

Si K est une variété analytique différentiable compacte de classe C^r et Ω une variété différentiable de classe C^{r+s+2}, Palais [17] munit l'espace $C^r(K,\Omega)$ d'une structure différentiable de classe C^s telle que si X et Y sont deux variétés différentiables compactes de classe C^r et Ω une variété différentiable de classe C^{r+s+2}, l'application $\alpha_f : g \to g\circ f$ de $C^r(Y,\Omega)$ dans $C^r(X,\Omega)$ est de classe C^s pour tout $f \in C^r(X,Y)$ et tout s, $0 < s < r$. Cette structure est construite à l'aide de l'exponentielle associée à un champ isochrone sur Ω.

Dans le cas d'une variété analytique complexe, cette exponentielle n'est pas en général holomorphe ; si Ω est une variété infinitésimalement homogène, en utilisant un relèvement du fibré tangent holomorphe sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$ introduit par Hirschowitz [11] on munit l'espace $C(K,\Omega)$, où K est un espace compact quelconque, d'une structure analytique pour laquelle l'application α_f ci-dessus est analytique si f est analytique.

Lorsque Ω est de Stein, on démontre que $C(K,\Omega)$ muni de cette structure analytique admet un plongement propre dans $C(K,\mathbb{C}^{2n+1})$. A la fin du chapitre III, on étudie l'enveloppe d'holomorphie de $C(K,\Omega)$ lorsque Ω est étalée sur $\mathbb{C}^n$. On démontre dans un cas particulier la conjecture : $\tilde{\Omega}$ enveloppe d'holomorphie de Ω entraîne $C(K,\tilde{\Omega})$ enveloppe d'holomorphie de $C(K,\Omega)$.

CHAPITRE I

PLONGEMENT HOLOMORPHE DES VARIETES ANALYTIQUES BANACHIQUES.

----

1. *Plongement holomorphe des variétés banachiques.*

Soit X une variété analytique complexe modelée sur un espace Banach E de dimension infinie.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts. Si F est un espace de Banach, on note par $A_{\mathcal{U}}(F)$ l'espace des fonctions holomorphes de X dans F bornées sur chaque $\omega \in \mathcal{U}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur ces ω. Pour cette topologie $A_{\mathcal{U}}(F)$ est un espace localement convexe séparé complet (de Frechet si $\mathcal{U}$ est dénombrable).

Soit J un ensemble et p un réel $\geqslant 1$.
On note par $\ell_J^p(E)$ le sous-espace de E^J formé des familles $(x_j)_{j\in J}$ telles que :

$$\sum_{j\in J} ||x||_E^p < +\infty.$$

$\ell_J^p(E)$ muni de la norme : $||x||_p = (\sum_{j\in J} ||x_j||_E^p)^{\frac{1}{p}}$ est un espace de Banach ; lorsque J est dénombrable ou fini et E est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $<\cdot>_E$. L'espace $\ell_J^2(E)$ est un Hilbert pour le produit scalaire :

$$<x/y> = \sum_{j\in J} <x_j/y_j>_E \qquad x \in \ell_J^2(E), y \in \ell_J^2(E).$$

Lemme 1.1.- Soit F un espace vectoriel normé de dimension infinie, il existe une suite e_n dans F et une suite L_n dans F' (dual de F) vérifiant :

$||e_i|| = 1$, $L_j(e_i) = \delta_{ij}$ $\forall\, i,j \in \mathbb{N}$ ($\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker).

Preuve :

On fait un raisonnement par récurrence.

Soit $e_1 \in F$ tel que $||e_1|| = 1$, il existe $L_1 \in F'$ vérifiant $L_1(e_1) = 1$.

L'espace F s'écrit alors $F = \mathbb{C}\, e_1 \oplus G_1$ où :

$$G_1 = \mathrm{Ker}\, L_1 = \{x \in F / L_1(x) = 0\}.$$

Supposons construits $e_1,\dots,e_n$; $L_1,\dots,L_n$ et G_n vérifiant :

$$(P_n) \quad \begin{cases} L_i/G_n = 0 \quad ; \quad ||e_i|| = 1. \\ L_j(e_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i,j \leqslant n\ . \\ F = \mathbb{C}\, e_1 \oplus \mathbb{C}\, e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\, e_n \oplus G_n \qquad (*) \end{cases}$$

Soit $e_{n+1} \in G_n$ tel que $||e_{n+1}|| = 1$ et $\ell_{n+1} \in G'_n$ tel que $\ell_{n+1}(e_{n+1}) = 1$. Posons $L_{n+1} = \ell_{n+1} \circ p_{G_n}$ où p_{G_n} est la projection canonique de F sur G_n dans la décomposition (*). Alors si on pose $G_{n+1} = \mathrm{Ker}\, \ell_{n+1}$, P_{n+1} est vérifiée. Le lemme est démontré en prenant les suites ainsi construites e_i et L_j.

Théorème 1.1.- Soit X une variété analytique complexe modelée sur un espace de Banach E de dimension infinie. Supposons que X est à base dénombrable d'ouverts. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace de Banach H de dimension infinie et un plongement holomorphe ψ de X dans H dont la différentielle $d\psi_x$

est un monomorphisme direct en tout point $x \in X$ est que X vérifie la propriété suivante :

$$(P)\quad \begin{cases} \text{il existe un recouvrement dénombrable } \mathcal{U} \text{ de } X \text{ par des} \\ \text{ouverts tel que :} \\ (1)\quad A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}) \text{ sépare les points de } X \ ; \\ (2)\quad \text{pour tout } \omega \in \mathcal{U}, \text{ il existe } f_\omega \in A_{\mathcal{U}}(E) \text{ tel que le} \\ \qquad \text{couple } (\omega, f_\omega) \text{ forme une carte locale.} \end{cases}$$

Preuve :

a) *Condition nécessaire.*

Soit $x \in X$, on note E_x l'image de l'espace tangent T_xX à X au point x par l'application $d\psi_x$.

Soit p_x une projection de H sur E_x (application linéaire continue surjective vérifiant $p_x^2 = p_x$. Elle existe car $d\psi_x$ est un monomorphisme direct).

On pose $g^x = p_x \circ \psi$. L'application g^x est analytique et :

$$(dg^x)_x = p_x \circ d\psi_x = d\psi_x .$$

Ainsi $(dg^x)_x$ est un morphisme bijectif de T_xX sur E_x ; c'est donc un isomorphisme (Théorème de Banach).

Le théorème des fonctions implicites entraîne l'existence d'un voisinage $V(x)$ de x tel que l'application g^x soit un isomorphisme de $V(x)$ sur $g^x(V(x))$. Soit (x_i) une suite de X et $\mathcal{U} = (\omega_i)$ un recouvrement dénombrable de X par des ouverts tel que :

$$\left.\begin{array}{l} x_i \in \omega_i \subset V(x_i) \\ \|\psi\|_{\omega_i} < +\infty \end{array}\right\} \quad \forall\, i \in \mathbb{N} .$$

E_x étant isomorphe à E, on peut trouver des applications analytiques g_i de X dans E vérifiant :

$$\left.\begin{array}{l}(g_i,\omega_i) \text{ est une carte locale} \\ \\ ||g_i||_{\omega_i} < +\infty\end{array}\right\} \quad \forall i \in \mathbb{N} .$$

Pour cela on peut prendre $g_i = \Psi_i \circ g^{x_i}$ où Ψ_i est un isomorphisme de E_{x_i} sur E. Par suite $g_i \in A_{\mathcal{U}}(E)$ et la condition (2) de (P) est vérifiée. La condition (1) est aussi vérifiée : soient x et y deux points distincts de X, on a $\psi(\bar{x}) \neq \psi(y)$ car ψ est injective. Il existe alors $\xi \in H'$ tel que $\xi \circ \psi(x) \neq \xi \circ \psi(y)$, ainsi l'application $\xi \circ \psi$ sépare x et y et $\xi \circ \psi \in A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ (car $||\xi \circ \psi||_{\omega_i} \leqslant ||\xi||\ ||\psi||_{\omega_i} < +\infty$).

b) *Condition suffisante* :

On suppose que X satisfait la propriété (P).

Pour tout $\omega \in \mathcal{U}$ soit $f_\omega \in A_{\mathcal{U}}(E)$ tel que (ω, f_ω) soit une carte locale. On note par J l'ensemble des applications f_ω quand ω décrit $\mathcal{U}$. On suppose que $\mathcal{U} = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Si J est fini, on le prolonge en une famille infinie dénombrable par une suite d'applications nulles. Notons $J = (f_1, f_2, \ldots)$ et posons :

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n}\left(1 + \sup_{x\in B(n)} ||f_n(x)||^p\right)^{-\frac{1}{p}} \quad \text{où} \quad B(n) = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i .$$

La suite $\alpha_n f_n$ définit une application $f \in A_{\mathcal{U}}(\ell_J^p(E))$:

$$f(x) = (\alpha_n f_n(x))_{n\geqslant 1}$$

il suffit de remarquer que la série $\sum \alpha_n^p ||f_n(x)||^p$ converge normalement sur chaque $\omega_k \in \mathcal{U}$, en effet :

$$\sup_{x\in\omega_k} \left(\sum_{n\geq 1} \alpha_n^p ||f_n(x)||^p \right) \leq \sup_{x\in\omega_k} \left(\sum_{n\leq k} \alpha_n^p ||f_n(x)||^p \right) + \sum_{n>k} \frac{1}{2^{np}} < +\infty .$$

Soit F un espace de Banach de dimension infinie, nous allons construire une application g de X dans F qui appartient à $A_{\mathcal{U}}(F)$. Soit $(z,u) \in X \times X - (\bigcup_k \omega_k \times \omega_k)$, il résulte de la condition (1) de la propriété (P) et de la continuité que pour tout $(z,u) \in X \times X - (\bigcup_k \omega_k \times \omega_k)$ il existe un voisinage $V(z,u)$ de (z,u) et une fonction $g_{(z,u)} \in A_{\mathcal{U}}(C)$ tels que :

$$g_{(z,u)}(\zeta) \neq g_{(z,u)}(\xi) \qquad \forall(\zeta,\xi) \in V(z,u).$$

D'autre part, X étant à base dénombrable d'ouverts il existe une suite (z_i,u_i) telle que : $\bigcup_i V(z_i,u_i) \supset X \times X - (\bigcup_k \omega_k \times \omega_k)$.

On écrira dans la suite g_i, V_i au lieu de $g_{(z_i,u_i)}$ et $V(z_i,u_i)$.

On pose $\beta_n = \frac{1}{2^n} (1 + \sup_{\zeta\in B(n)} |g_n(\zeta)|)^{-1}$.

Soient e_i et L_i deux suites de F et F' respectivement selon le lemme 1.1. On définit $g(x) = \sum_n \beta_n g_n(x) e_n$.

Le même raisonnement que pour f permet de montrer que $g \in A_{\mathcal{U}}(F)$. Posons $\psi = (f,g)$ alors $\psi \in A_{\mathcal{U}}(\ell_J^p(E) \times F)$ et ψ répond aux conditions voulues en prenant $H = \ell_J^p(E) \times F$.

a) ψ <u>est injective</u>.

Par construction de f et g, on a :

- S'il existe $\omega_n \in \mathcal{U}$ tel que $(x,y) \in \omega_n \times \omega_n$ alors $x \neq y$ entraîne $f(x) \neq f(y)$;

- Sinon il existe i tel que $(x,y) \in V_i$ et donc $g(x) \neq g(y)$ (car $g(x) = g(y)$ entraîne $L_i og(x) = L_i og(y)$ soit $g_i(x) = g_i(y)$).

b) $d\psi_x$ est un monomorphisme direct pour tout $x \in X$.

Soit $\omega_k \in \mathcal{U}$ tel que $x \in \omega_k$. Soit $f_n \in J$ tel que $(\omega_k, f_n/\omega_k)$ soit une carte locale.

$$d(\psi \circ f^{-1}_{n/\omega_k})_{f_n(x)} = \left[d(f o f^{-1}_{n/\omega_k})_{f_n(x)}\,,\ d(g o f^{-1}_{n/\omega_k})_{f_n(x)}\right]$$

$$= \left[(\ldots, \alpha_n d(f_n o f^{-1}_{n/\omega_k})_{f_n(x)}, \ldots), (\text{---})\right]$$

$$= \left[(\ldots, \alpha_n \mathrm{id}_E, \ldots), (\text{---})\right].$$

Soit $p_n : \ell^p_J(E) \times F \to E$ l'application qui à (ξ, ζ) fait correspondre la $n^{\text{ème}}$ composante ξ_n de ξ. On a :

$$p_n o d(\psi o\ f^{-1}_{n/\omega_k})_{f_n(x)} = \alpha_n \mathrm{id}_E.$$

il en résulte que $d\psi_x$ est un monomrophisme direct et, par suite, ψ est une immersion directe au point x d'après [3].

2. *Cas des variétés étalées.*

Proposition 1.1.- Soit (X,p) une variété étalée sur un espace de Banach E de dimension infinie. Supposons que X est à base dénombrable d'ouverts et qu'il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts tel que $A_{\mathcal{U}}(C)$ sépare les points de X.

Alors il existe un plongement holomorphe de X dans $E \times E$ (de X dans E si on suppose de plus que E est un Hilbert séparable).

Preuve :

En prenant un recouvrement $\mathcal{U}'$ dénombrable et plus fin que $\mathcal{U}$ de sorte que $(\omega, p/\omega)$ soit une carte locale pour tout $\omega \in \mathcal{U}'$ et que $p \in A_{\mathcal{U}'}(E)$, on peut prendre $J = \{p\}$ (et par suite $\ell^p_J(E) = E$) et appliquer le théorème 1.1. à $\mathcal{U}'$.

Si E est un espace de Hilbert séparable, $E \times E$ est isomorphe à E d'où la proposition.

Nous étudions maintenant l'existence du recouvrement $\mathcal{U}$ vérifiant la propriété de la proposition précédente. on suppose dans la suite que la variété étalée est connexe.

Définition 1.1.- Soit (X,p) une variété étalée sur E. Etant donnés une partie T de X et un voisinage V de l'origine dans E. On écrit $T + V \subset X$ si pour tout $x \in T$, p est un homéomorphisme d'un voisinage de x sur $p(x) + V$. On pose alors dans ce cas :

$$T + V = \bigcup_{x \in T} p_x^{-1}(p(x) + V) .$$

(p_x^{-1} désigne l'inverse de p défini sur $p(x) + V$ par l'égalité : $p_x^{-1} \circ p$ = identité , à valeurs dans un voisinage de x).

Définition 1.2.- Un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts est dit admissible si pour tout $\omega \in \mathcal{U}$ il existe un voisinage V équilibré de l'origine dans E et un ouvert $\omega' \in \mathcal{U}$ tels que :

$$\omega + V \subset \omega'.$$

Proposition 1.2.- Pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts il existe un recouvrement admissible $\mathcal{U}'$ de X par des ouverts plus fin que $\mathcal{U}$. De plus $\mathcal{U}'$ peut être choisi dénombrable si $\mathcal{U}$ est dénombrable.

Preuve :

Soit $\omega \in \mathcal{U}$ et $B_n = \{x \in E,\ n||x||_E < 1\}. n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\omega(n) = \{x \in \omega / \exists\, r(x) \in \mathbb{R}, r(x) > 1$ et $x + r(x)B_n \subset \omega\}$.

On vérifie facilement que $\omega(n)$ est un ouvert et que :

$$\omega(n) + B_{2n} \subset \omega(2n).$$

Ainsi si on pose $\mathcal{U}' = \{\omega(n)\}_{\omega\in\mathcal{U}, n\in\mathbb{N}^*}$, $\mathcal{U}'$ est un recouvrement admissible de X plus fin que $\mathcal{U}$ qui est dénombrable si $\mathcal{U}$ est dénombrable.

Définition 1.3. (*Enveloppe d'holomorphie*).-

a) Soient (X,p) et (X',p') deux variétés étalées sur E. Un morphisme u de (X,p) dans (X',p') est une application continue vérifiant $p' \circ u = p$.

b) Soit $A \subset \mathcal{O}(X)$ (l'espace des fonctions holomorphes sur X). Une variété (X',p') connexe étalée sur E est dite un domaine de prolongement analytique de A s'il existe un morphisme u de X dans X' tel que pour tout $f \in A$ il existe $f' \in \mathcal{O}(X')$ vérifiant :

$f = f' \circ u$ (f' est unique, unicité du prolongement analytique).

c) Un domaine de prolongement analytique $(\tilde{X},\tilde{p},u)$ est une enveloppe d'holomorphie de A s'il est maximal ; c'est-à-dire : pour tout domaine de prolongement analytique (X',p',u') de A il existe un morphisme w de X' dans $\tilde{X}$ vérifiant :

$$w \circ u' = u.$$

Proposition 1.3.- (cf. [1], [20]).

i) Pour toute partie A de $\mathcal{O}(X)$ il existe une enveloppe d'holomorphie.

ii) Deux enveloppes d'holomorphie de A sont isomorphes.

Considérons un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts et soit $(\tilde{X},\tilde{p},u)$ l'enveloppe d'holomorphie de $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$.

On pose $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}) = \{g \in \mathcal{O}(\tilde{X}) / g \circ u \in \mathcal{O}(X)\}$.

On munit $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ de la topologie définie par la famille de semi-normes q_ω, $\omega \in \mathcal{U}$.

$$q_\omega(g) = ||g \circ u||_\omega = \sup_{x\in\omega} |g(u(x))|.$$

Muni de cette topologie $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ est un e.ℓ.c. isomorphe à $A_{\mathcal{U}}(C)$ par l'isomorphisme $g \mapsto g \circ u$.

Etant donné f dans $\mathcal{O}(X)$, on désigne par $f^{(n)}(x;a)$ le polynôme homogène de degré n en a dans le développement taylorien de $f \circ p_x^{-1}$ au point $p(x)$; l'application $x \mapsto f^{(n)}(x;a)$ est noté $f^{(n)}(a)$.

Théorème 1.2.- Soit (X,p) une variété étalée sur un espace de Banach E. On suppose que X est à base dénombrable d'ouverts et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement admissible dénombrable de X par des ouverts tel que $p \in A_{\mathcal{U}}(E)$ et $(\omega,p/\omega)$ soit une carte locale pour tout $\omega \in \mathcal{U}$. Soit $(\tilde{X},\tilde{p},u)$ l'enveloppe d'holomorphie de $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$. On a les propriétés suivantes.

a) Pour tout $f \in A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ et tout $a \in E$, $f^{(n)}(a) \in A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ et la famille des applications $(a.f) \mapsto f^{(n)}(a)$ est équicontinue de $E \times A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ dans $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$.

b) Pour tout $f \in A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$, soit $\tilde{f}$ l'unique élément de $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ vérifiant $\tilde{f} \circ u = f$; alors on a :

$$\tilde{f}^{(n)}(a) = \widetilde{[f^{(n)}(a)]}.$$

c) $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ sépare les points de $\tilde{X}$.

d) $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ est un espace de Frechet dont la topologie est plus forte que la topologie de la convergence compacte.

e) il existe un recouvrement dénombrable $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\tilde{X}$ par des ouverts tel que $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ soit contenu dans $A_{\tilde{\mathcal{U}}}(\mathbb{C})$.

Preuve :

On suppose que $\mathcal{U} = (\omega_i)_{i \geq 1}$.

a) On considère $\omega_i \in \mathcal{U}$, on doit montrer que pour tout $f \in A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ et tout $a \in E$:

$$\sup_{x \in \omega_i} |f^{(n)}(a).x| < +\infty \tag{1}$$

Puisque $\mathcal{U}$ est admissible il existe $\omega_j \in \mathcal{U}$ et une boule B_r (centrée à l'origine de E et de rayon $r > 0$) tels que :

$$\omega_i + B_r \subset \omega_j .$$

Pour $a \in B_r$ et $x \in \omega_i$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(a).x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \circ p_x^{-1}(p(x)+ae^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta$$

d'où :

$$\sup_{x \in \omega_i} |f^{(n)}(a).x| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{x \in \omega_i} |f \circ p_x^{-1}(p(x)+ae^{i\theta})| d\theta$$

$$\leqslant ||f||_{\omega_j} < +\infty$$

ce qui prouve (1) pour $a \in B_r$ et que les applications $(a,f) \to f^{(n)}(a)$ sont équicontinues. On obtient (1) pour tout $a \in E$ par homogénéité des $f^{(n)}$.

b) Pour a assez petit dans E, on a :

$$\tilde{f}^{(n)}(a) \circ u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f} \circ \tilde{p}^{-1}_{u(x)}\left[\tilde{p}(u(x))+ae^{i\theta}\right]e^{-in\theta}d\theta \quad ,$$

or $\tilde{p} \circ u = p$ il en résulte que $\tilde{p}^{-1}_{u(x)} = u \circ p_x^{-1}$ dans un voisinage $p(x) + B_r$ de $p(x)$. Par suite, pour $a \in B_r$, on a :

$$\tilde{f}^{(n)}(a).x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f} \circ u \circ p_x^{-1}\left[p(x)+ae^{i\theta}\right]e^{-in\theta}d\theta$$

$$= f^{(n)}(a).x \quad .$$

On obtient l'égalité $\tilde{f}^{(n)}(a) \circ u = f^{(n)}(a)$ pour a quelconque dans E par homogénéité. Ce qui prouve b).

c) On définit sur $\tilde{X}$ la relation d'équivalence R par :

$$x \; R \; y \iff f(x) = f(y) \qquad \forall f \in \tilde{A}_U(\mathbb{C}).$$

On note $\bar{x}$ la classe de x.

Soit Y l'espace quotient de $\tilde{X}$ par R. En remarquant que les points d'une même classe ont la même image par $\tilde{p}$ on peut définir un homéomorphisme local $\bar{x} \to q(\bar{x}) = \tilde{p}(x)$ de Y dans E et un morphisme $x \mapsto v(x) = \overline{u(x)}$ de X dans Y.

On vérifie facilement que (Y,q,v) est un domaine de prolongement analytique de $A_U(\mathbb{C})$ (on écrira d.p.a en abrégé). Il est maximal, en effet soit π la projection canonique de $\tilde{X}$ sur Y.

Soit (X',p',u') un d.p.a de $A_U(\mathbb{C})$, il existe un morphisme w_1 de X' dans $\tilde{X}$ tel que : $w_1 \circ u' = u$.

On définit alors le morphisme w de X' dans Y : $w = \pi \circ w_1$.
Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dd, "w"'] \arrow[rrd, "w_1"] & & \\
& X \arrow[lu, "u'"'] \arrow[r, "u"] \arrow[ld, "v"] & \tilde{X} \arrow[lld, "\pi"] \\
Y & &
\end{tikzcd}$$

on a : $\quad w \circ u' = \pi \circ w_1 \circ u' = \pi \circ u = v.$ $\qquad$ (2)

Ceci montre que (Y,q,v) est un d.p.a maximal et donc X et Y sont isomorphes. Plus précisément π est un isomorphisme.

En effet, $\tilde{X}$ étant un d.p.a maximal de $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$, il existe un morphisme s de Y dans $\tilde{X}$ tel que $s \circ v = u$ $\qquad$ (3)
on a les égalités

$$\left.\begin{array}{l} s \circ \pi \circ u = u \\ \\ \pi \circ s \circ v = v \end{array}\right\} \text{ d'après (2) et (3)}$$

ce qui entraîne que $s \circ \pi = id_{\tilde{X}}$ et $\pi \circ s = id_Y$ (unicité du prolongement analytique).

Soient x et y deux points de $\tilde{X}$, $x \neq y$ entraîne $\pi(x) \neq \pi(y)$ ce qui veut dire (d'après la définition de R) qu'il existe $f \in \tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ tel que $f(x) \neq f(y)$ d'où c).

d) $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ étant isomorphe à $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})'$ et $\mathcal{U}$ étant dénombrable, $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ est un espace de Frechet.

Montrons que pour tout $x \in \tilde{X}$ l'application $\hat{x}$ définie de $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$

dans $\mathbb{C}$ par : $\hat{x}(g) = g(x)$, est continue.

On pose $W = \{x \in \tilde{X} | \hat{x}$ est continue$\}$.

W est ouvert : soit $x \in W$, il existe une semi-norme π_1 sur $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ telle que :

$$|g(x)| \leqslant \pi_1(g \circ u) \quad \forall\, g \in \tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}) \quad \text{(d'après la continuité de } \hat{x}).$$

D'après a) il existe une semi-norme π_2 sur $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$, une boule B_r de rayon r centrée à l'origine de E telles que :

$$\pi_1(f^{(n)}(a)) \leqslant \pi_2(f) \qquad \forall\, a \in B_r \;, \quad \forall\, f \in A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}), \quad \forall\, n .$$

On choisit r assez petit tel que : $x + B_r \subset \tilde{X}$.

Pour $a \in B_{r/2}$, on a :

$$\begin{aligned}
|g(x+a)| &= \lim_{N\to+\infty} \Big| \sum_{n\leqslant N} g^{(n)}(a).x \Big| \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} |g^{(n)}(2a).x| \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} \pi_1(g^{(n)}(2a) \circ u) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} \pi_1((g \circ u)^{(n)}(2a)) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} \pi_2(g \circ u) = 2\pi_2(g \circ u)
\end{aligned}$$

donc $x + B_{r/2} \subset W$.

W est fermé : Soit $(x_n) \subset W$ une suite telle que x_n converge vers un élément x de $\tilde{X}$.

On pose $V = \{g \in \tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}) / |g(x_n)| \leq 1 \quad \forall n\}$.

V est convexe, équilibré et absorbant. Il est fermé d'après l'hypothèse $(x_n) \subset W$. V est donc un tonneau et, par suite, un voisinage de l'origine puisque $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ est un espace de Frechet. Ce qui entraîne que $x = \lim x_n$ appartient à W.

W étant ouvert et fermé, on a : $W = \tilde{X}$.

Pour prouver d), il suffit de montrer que l'application $g \to ||g||_K$ est continue de $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$ pour tout compact K de $\tilde{X}$. Or, d'après la continuité de $\hat{x}$ pour tout $x \in \tilde{X}$, l'ensemble $\{f / ||f||_K \leq 1\}$ est fermé dans $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$; d'autre part, il est équilibré, absorbant et convexe par suite c'est un tonneau et donc un voisinage de l'origine dans $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$, ce qui montre la continuité de l'application $g \mapsto ||g||_K$.

e) Posons $q_n(f) = \sup\{|f(x)|, x \in \omega_1 \cup \ldots \cup \omega_n\}$. La famille de semi-normes q_n définit la topologie de $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ par $q'_n(g) = q_n(g \circ u)$.

On considère les sous-ensembles $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis par :

$$Y_n = \{x \in \tilde{X} \ / \ |g(x)| \leq n \, q'_n(g) \quad \forall g \in \tilde{A}_{\mathcal{U}}(C)\}.$$

Montrons que $\bigcup \overset{\circ}{Y}_n = \tilde{X}$ ce qui prouvera e) en prenant $\mathcal{U} = (\overset{\circ}{Y}_n)_n$.

Supposons $\bigcup \overset{\circ}{Y}_n \neq \tilde{X}$, soit $x \in \tilde{X} \cap (\bigcap_n \overline{\complement Y_n})$ et soit x_n une suite qui converge dans $\tilde{X}$ vers x et telle que $x_n \in \tilde{X} - Y_n$ pour tout n. Il existe $g_n \in \tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ avec :

$$|g_n(x_n)| > n\ q'_n(g_n).$$

Ceci entraîne en particulier que $g_n \neq 0$ et $q'_n(g_n) \neq 0$ (les semi-normes q_n sont en fait des normes d'après l'unicité du prolongement analytique). Posons $h_n = \frac{g_n}{q'_n(g_n)}$. On a :

$$|h_n(x_n)| > n \quad \text{et} \quad q'_n(h_n) = 1 \qquad \forall\, n.$$

Par suite, h_n est une suite bornée de $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ non bornée sur le sous-ensemble relativement compact $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Contradiction.

Corollaire 1.1.- Soit (X,p) une variété étalée sur E. On suppose que X est à base dénombrable d'ouverts et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement dénombrable de X par des ouverts tel que $p \in A_{\mathcal{U}}(E)$ et $(\omega, p/\omega)$ est une carte locale pour tout $\omega \in \mathcal{U}$. Soit $\tilde{X}$ l'enveloppe d'holomorphie de $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$. Alors il existe un plongement holomorphe de $\tilde{X}$ dans $E \times E$.

Preuve :

D'après le théorème 1.2. e), on peut trouver un recouvrement $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\tilde{X}$ tel que $\tilde{A}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ soit contenu dans $A_{\tilde{\mathcal{U}}}(\mathbb{C})$; ce qui entraîne que $A_{\tilde{\mathcal{U}}}(\mathbb{C})$ sépare les points de $\tilde{X}$. Dès lors on applique la proposition 1.1.

Définition 1.4.- Une variété (X,p) étalée sur un espace localement convexe séparé E est pseudoconvexe si $p^{-1}(H)$ est une variété de Stein pour tout sous-espace vectoriel H de dimension finie dans E.

On sait [2 , 6] que X, étalée sur un espace de Banach à base de Schauder, est pseudoconvexe si et seulement si X est l'enveloppe d'holomorphie d'une famille $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$ où $\mathcal{U}$ est un recouvrement admissible et dénombrable de X.

Théorème 1.3.- Soit (X,p) une variété pseudoconvexe étalée sur un espace de Banach E à base dénombrable de Schauder. Il existe un plongement holomorphe de X dans $E \times E$ (de X dans E si E est un espace de Hilbert séparable).

Preuve :

D'après un résultat de Gruman-Kiselman [6] et Hervier [8] toute variété pseudoconvexe étalée sur un espace de Banach à base dénombrable est le domaine d'existence d'une fonction holomorphe. Comme E est séparable, X est à base dénombrable d'ouverts ; soit $f \in \mathcal{O}(X)$ dont X est le domaine d'existence. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement dénombrable de X par des ouverts tel que $f \in A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$, $p \in A_{\mathcal{U}}(E)$ et $(\omega, p/\omega)$ soit une carte locale pour tout $\omega \in \mathcal{U}$. Alors X est l'enveloppe d'holomorphie de $A_{\mathcal{U}}(\mathbb{C})$; il suffit d'appliquer le corollaire 1.1. pour conclure.

CHAPITRE II

PROPRETE DES PLONGEMENTS HOLOMORPHES DES VARIETES ETALEES DE DIMENSION INFINIE.

----

1. *Variétés étalées banachiques.*

Dans le chapitre 1, nous avons établi que les enveloppes d'holomorphie banachiques à base de Schauder pouvaient être plongées holomorphiquement dans les espaces de Banach. Nous montrons maintenant que si l'on suppose de plus les fibres finies on peut construire un plongement holomorphe propre dans certains espaces localement convexes.

Soit E un espace de Banach, on note $H(B_n)$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes bornées sur la boule B_n de E centrée à l'origine et de rayon $\frac{1}{n}$, muni de la norme $||\cdot||_n$ de la convergence uniforme ($||f||_n = \sup_{x\in B_n} |f(x)|$).

On note $H(0)$ l'espace des germes de fonctions holomorphes à l'origine de E, muni de la topologie limite inductive des $H(B_n)$.

Proposition 2.1.- Soit α_k une suite de nombres réels positifs telle que $\alpha_k^{1/k}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{k}$, alors $q(f) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k ||f^{(k)}(0)||$ définit une semi-norme continue sur $H(0)$.

Preuve :

Soit $f \in H(0)$, il existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \in H(B_{n_o})$.
A l'aide de l'inégalité de Cauchy on obtient :

(1) $$||f^{(n)}(0)|| \leqslant (n_o)^n ||f||_{n_o} .$$

Pour n_o fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $k > N$ entraîne $\alpha_k^{1/k} \leqslant \frac{1}{2^{n_o}}$.

On en déduit à l'aide de l'inégalité (1) que pour tout $f \in H(B_{n_o})$, on a :

$$\sum_k \alpha_k ||f^{(k)}(0)|| \leqslant \sum_k \alpha_k (n_o)^k ||f||_{n_o}$$

$$= \sum_k (\alpha_k^{1/k}.n_o)^k ||f||_{n_o}$$

$$\leqslant \sum_{k \leqslant N} (\alpha_k^{1/k}.n_o)^k ||f||_{n_o}) + (\sum_{n>N} \frac{1}{2^k}) ||f||_{n_o} .$$

On peut donc trouver une constante M positive telle que :

$$\forall f \in H(B_{n_o}) \quad : \quad q(f) \leqslant M||f||_{n_o} .$$

Ceci montre que q est continue sur $H(B_{n_o})$. Or n_o est pris arbitrairement d'où la continuité de q sur $H(0)$.

Proposition 2.2. [9].- Tout borné de $H(0)$ est contenu et borné dans l'un des espaces $H(B_n)$.

Preuve :

Il s'agit d'établir les deux assertions suivantes :

α) Si une suite (f_n) n'est contenue dans aucun des espaces $H(B_n)$ elle n'est pas bornée dans $H(0)$.

β) Si une suite (f_n) contenue dans $H(B_{n_o})$ n'est bornée dans aucun des espaces $H(B_m)$ (pour $m > n_o$) elle n'est pas bornée dans $H(0)$.

Preuve de α :

En extrayant éventuellement une sous-suite et en changeant les indices, on peut supposer que pour tout n, $f_n \notin H(B_n)$.

Ecrivons la série de Taylor de f_n en zéro :

$$f_n = \sum_{k \geqslant n} f_n^{(k)}(0).$$

L'hypothèse $f_n \notin H(B_n)$ entraîne que la série $\sum \frac{1}{n^k} \| f_n^{(k)}(0) \|$ diverge.

Par suite, on peut trouver une fonction $\psi(m,n)$ telle que :

$$\sum_{k=m+1}^{\psi(m,n)} \frac{1}{n^k} \| f_n^{(k)}(0) \| \geqslant n.$$

On définit $k_o = -1$, $k_n = \psi(k_{n-1}, n)$, la suite k_n ainsi définie est strictement croissante.

Pour k tel que $k_{n-1} \leqslant k \leqslant k_n$, on pose $\alpha_k = (\frac{1}{n})^k$.

Soit q la semi-norme correspondant aux α_k ainsi définis par la proposition 2.1. On a : $q(f_n) \geqslant n$, $\forall\, n$.

Ce qui prouve que (f_n) n'est pas bornée dans $H(0)$.

Preuve de β :

En extrayant éventuellement des sous-suites, on se ramène au cas où il existe une suite x_n dans E telle que $\|x_n\|$ tende vers 0 en décroissant et telle que $|f_n(x_n)|$ tende vers l'infini.

On choisit α_k de la forme $\alpha_k = \|x_{\psi(k)}\|^k$ où ψ est croissante surjective et tendant vers l'infini. Si ψ croit suffisamment lentement, on obtient :

$$q(f_{\psi(k)}) \geqslant \frac{1}{2} |f_{\psi(k)}(x_{\psi(k)})| \qquad (2)$$

En effet, on peut définir ψ de la façon suivante :

Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||x_o||^n||f_o^{(n)}(0) \leqslant 2(\sum_{n=0}^{n_1} ||x_o||^n||f_o^{(n)}(0)||)$$

on pose $\psi(0) = \ldots = \psi(n_1) = 0$.

Soit $n_2 > n_1$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||x_1||^n||f_1^{(n)}(0)|| \leqslant 2(\sum_{n=0}^{n_2} ||x_1||^n||f_1^{(n)}(0)||)$$

on pose $\psi(n_1+1) = \ldots = \psi(n_2) = 1$,

et ainsi de suite, la fonction ψ ainsi définie est surjective croissante et tend vers l'infini et l'égalité (2) est vérifiée d'où β.

Soit (X,p) une variété étalée sur un espace de Banach E.

Soit f une fonction holomorphe sur X.

Pour tout $x \in X$, posons : $f_x(v) = f(x+v)$ où $x+v = p_x^{-1}(p(x)+v)$ et v assez petit dans E.

Ceci définit une application $\tilde{f} : (x \to f_x)$ de X dans $H(0)$.

Proposition 2.3. [9].- L'application $\tilde{f}$ est analytique de X dans $H(0)$.

Preuve :

a) $\tilde{f}$ *est continue*.

Soit $x_o \in X$, supposons que f est bornée sur $x_o+3B_{n_o}$ et que p est un homéomorphisme de $x_o+3B_{n_o}$ sur $p(x_o)+3B_{n_o}$. On note $g = fop_{x_o}^{-1}$.

Pour u et v dans B_{n_o}, on a :

$$f(x_o+u) - f(x_o+v) = g(p(x_o)+u) - g(p(x_o)+v)$$

$$= \int_o^1 g'(p(x_o) + t(u-v))(u-v)dt.$$

La formule de Cauchy donne :

(3) $$||g'(\zeta)|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} ||g||_{\zeta+\varepsilon B} \qquad \varepsilon > 0$$

où B est la boule unité de E.

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{n_o}$ et $\zeta = p(x_o) + t(u-v)$ dans l'inégalité (3), on obtient :

$$||g'(\zeta)|| \leqslant n_o||g||_{p(x_o)+t(u-v)+\frac{1}{n_o}B}$$

$$\leqslant n_o||g||_{p(x_o)+3B_{n_o}} = n_o||f||_{x_o+3B_{n_o}}.$$

Par suite : $|f(x_o+u) - f(x_o+v)| \leqslant n_o||f||_{x_o+3Bn_o} \times ||u-v||.$

Ce qui montre que $\tilde{f}$ est uniformément continue dans $x_o+B_{n_o}$ et que f est continue dans un voisinage de x_o.

b) $\tilde{f}$ *est* G-*analytique*.

D'après a), on peut trouver un voisinage x_o+B_m sur lequel f est continue et à valeurs dans $H(B_m)$.

Il suffit de montrer que l'intégrale vectorielle [19] de $h(z) = \tilde{f} \circ p_{x_o}^{-1}(p(x_o)+za)$ est nulle pour toute courbe γ homotope à zéro dans $\mathbb{C}$ et tout $a \in E$, tels que $p(x_o)+\gamma a \subset x_o+B_m$.

Pour γ ainsi pris, $h(\gamma)$ est contenu dans $H(B_m)$ et il en est de même pour l'intégrale $\int_\gamma h(z)dz$.

Soit δ_v la masse de Dirac en un point $v \in B_m$. On a :

$$\begin{aligned}(\int_\gamma h(z)dz)(v) &= <\delta_v, \int_\gamma h(z)dz> \\ &= \int_\gamma h(z)(v)dz \\ &= \int_\gamma fop_{x_o}^{-1}(p(x_o)+za+v)dz = 0\end{aligned}$$

car l'application $z \to fop_{x_o}^{-1}(p(x_o)+za+v)$ est holomorphe.

Définition 2.1.-

i) Soit (X,p) une variété étalée sur un espace E. On dit que (X,p) est à fibres finies si pour tout $a \in E$, $p^{-1}(a)$ est un ensemble fini de X.

ii) Pour tout $x \in X$, on pose :

$d(x) = \sup\{r / \exists V_r \ni x, \; V_r$ homéomorphe par p à $B(p(x),r)\}$.

Théorème 2.1.- Soit (X,p) une variété étalée sur un espace de Banach E de dimension infinie à base dénombrable de Schauder. Supposons que X est pseudoconvexe à base dénombrable d'ouverts et à fibres finies. Alors il existe un plongement holomorphe propre de X dans $E \times E \times H(O)$ (de X dans $E \times H(O)$ si E est de plus un espace de Hilbert séparable).

Preuve :

D'après les démonstrations du théorème 1.1. et du corollaire 1.1. on peut trouver une application g de X dans E telle que le couple (p,g) soit une application analytique injective de X dans $E \times E$.

D'autre part, un résultat de Gruman-Kiselman [6] et Hervier [8] montre l'existence d'une fonction holomorphe f admettant X pour domaine d'existence. Cette fonction f vérifie alors :

$$rf(x) \leqslant d(x)$$

($rf(x)$ désigne le rayon de convergence normale du développement au point $p(x)$ de fop_x^{-1} en polynômes homogènes).

On définit l'application ψ de X dans $E \times E \times H(0)$ par :

$$\psi(x) = (p(x), g(x), \tilde{f}(x)).$$

Il est clair que ψ est injective analytique. Montrons que ψ est propre, pour cela il suffit de montrer que l'application $(p,\tilde{f})$ de X dans $E \times H(0)$ est propre.

Soient K_1 et K_2 deux compacts de E et $H(0)$ respectivement, montrons que $(p,\tilde{f})^{-1}(K_1 \times K_2)$ est un compact de X.

K_2 étant borné dans $H(0)$, d'après la proposition 2.2, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que K_2 soit contenu et borné dans $H(B_n)$; par suite, on a :

$$rf(x) \geqslant \frac{1}{n} \quad , \qquad \forall\, x \in \tilde{f}^{-1}(K_2)$$

$$(p,\tilde{f})^{-1}(K_1 \times K_2) \subset p^{-1}(K_1) \cap X_{1/n}$$

avec

$$X_{1/n} = \{x \in X,\ d(x) \geqslant \frac{1}{n}\}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $p^{-1}(K_1) \cap X_{1/n}$ est un compact de X.

Soit x_m une suite de $p^{-1}(K_1) \cap X_{1/n}$, il existe une sous-suite $p(x_{m_k})$ de $p(x_m)$ qui converge vers un point $a \in E$.

a appartient à $p(X)$ car $d(x_m) \geqslant \frac{1}{m}$ pour tout m. $p^{-1}(a)$ étant fini, il existe au plus un nombre fini s de points $y_1,\dots,y_s$ dans $p^{-1}(a)$ au voisinage desquels p réalise un homéomorphisme sur un voisinage de a. Par suite, on peut trouver y_{i_o} parmi les y_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ et une suite x_{m_j} qui converge vers y_{i_o}. Pour achever la preuve du théorème, nous montrons maintenant que ψ est une immersion directe.

Soit ω un voisinage de $x \in X$, tel que $(\omega, p/\omega)$ soit une carte locale. On définit sur $p(\omega) \times E \times H(0)$ les applications A et A' comme suit :

$$A(a,b,c) = (a, b - gop_x^{-1}(a), c - \tilde{f}op_x^{-1}(a))$$

$$A'(a,b,c) = (a, b + gop_x^{-1}(a), c + \tilde{f}op_x^{-1}(a)).$$

A et A' sont des automorphismes inverses de $p(\omega) \times E \times H(0)$ et on vérifie que $A \circ \psi \circ p_x^{-1}(a) = (a,0,0)$. Ce qui montre que ψ est une immersion directe au point x. D'où le théorème.

2. *Variétés étalées sur un produit de droites.*

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que les domaines pseudo-convexes étalés sur $\mathbb{C}^I$ (I ensemble infini) admettent un plongement holomorphe propre dans $\mathbb{C}^I$. Pour cela, on va utiliser le résultat valable dans le cas fini qui assure que toute variété de Stein de dimension n admet un plongement holomorphe propre dans $\mathbb{C}^{2n+1}$ (voir [14] , [18]).

Soit Δ le disque unité de $\mathbb{C}$. Etant donné une variété (X,p) étalée sur un espace vectoriel topologique séparé E, pour tout $a \in E$ avec $a \neq 0$, on définit la distance d_a^X sur X dans la direction a par :

$$\forall x \in X \qquad d_a^X(x) = \sup\{r > 0, \quad x+ra\Delta \subset X\}.$$

(l'inclusion $x+ra\Delta \subset X$ étant prise dans le sens de la définition 1.1).

$x+r\Delta a$ est alors la composante connexe contenant x de $p^{-1}(p(x)+r\Delta a)$.

On sait [1, 16] que X est pseudoconvexe si et seulement si $-\operatorname{Log} d_a^X$ est plurisousharmonique quel que soit a.

<u>*Théorème*</u> *2.2.* [2, 10].- Soit (X,p) une variété connexe étalée sur $\mathbb{C}^I$ (I ensemble infini quelconque). On suppose X pseudoconvexe.

Alors il existe $J_o \subset I$, J_o fini, il existe une variété de Stein M étalée sur $\mathbb{C}^{J_o}$ tels que X soit isomorphe à $M \times \mathbb{C}^{I-J_o}$.

<u>*Preuve*</u> :

On note π_J la projection de $\mathbb{C}^I$ sur $\mathbb{C}^J$ pour $J \subset I$. On identifie $\mathbb{C}^J$ avec le sous-espace de $\mathbb{C}^I$ défini par les familles $(z_i)_{i\in I}$, $z_i = 0 \quad \forall\, i \in I-J$.

Nous voulons trouver J_o fini, $J_o \subset I$, tel que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage Ω_x de x dans X et un voisinage V_x de $\pi_{J_o} \circ p(x)$ dans $\mathbb{C}^{J_o}$ avec p un homéomorphisme de Ω_x sur $V_x + \mathbb{C}^{I-J_o}$.

Cette propriété est vraie pour x_o donné avec un J_o convenable, il suffit de remarquer que les ouverts élémentaires de la forme $\prod_{i\in I} O_i$ ($O_i = \mathbb{C}$ pour tout i sauf pour un nombre fini de i) forment une base d'ouverts dans $\mathbb{C}^I$. On va montrer que ce J_o convient pour tout $x \in X$. On rappelle que si un ouvert connexe ω d'une variété étalée (X,p) est homéomorphe par p à $p(\omega)$, alors ω est une composante connexe de $p^{-1}(p(\omega))$. Cette propriété servira plusieurs fois dans la suite.

Soit H un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}^I$ contenant un élément $a \neq 0$ de $\mathbb{C}^{I-J_o}$ et tel que x et x_o soient dans une composante connexe X' de $p^{-1}(H)$.

X' est une variété étalée sur H et $d_a^X = +\infty$ sur $\Omega_{x_o} \cap X'$; aussi $-\mathrm{Log}\, d_a^{X'}$ est $-\infty$ et p est un homéomorphisme sur la composante connexe $x + \mathbb{C}a$ de $p^{-1}(p(x)+\mathbb{C}a)$ contenant x. Sur la variété $\bigcup_{a \in \mathbb{C}^{I-J_o}} (x+\mathbb{C}a)$ étalée sur $\mathbb{C}^{I-J_o}$, p est injectif car si $p(y') = p(y'')$ alors y' et y'' sont dans $x+\mathbb{C}b$ sur lequel p est injectif. Ainsi p est un homéomorphisme sur la composante connexe $x+\mathbb{C}^{I-J_o}$ de $p^{-1}(p(x)+\mathbb{C}^{I-J_o})$ contenant x.

Soit V un voisinage de x homéomorphe par p à un voisinage convexe de $p(x)$. Montrons que sur $\tilde{V} = \bigcup_{x \in V} (x+\mathbb{C}^{I-J_o})$ p est injectif.

Si $p(y') = p(y'')$ avec $y' \in x' + \mathbb{C}^{I-J_o}$, $y'' \in x'' + \mathbb{C}^{I-J_o}$, x' et x'' dans V alors :

- $x'' \in x' + \mathbb{C}^{I-J_o}$ car $p(x'') \in p(x') + \mathbb{C}^{I-J_o}$ et $x' + \mathbb{C}^{I-J_o}$ contient $V \cap p^{-1}(p(x') + \mathbb{C}^{I-J_o})$ qui est homéomorphe par p au convexe $p(V) \cap \left[p(x') + \mathbb{C}^{I-J_o}\right]$.

- Comme $y'' \in x'' + \mathbb{C}^{I-J_o}$, y'' appartient donc à $x' + \mathbb{C}^{I-J_o}$ ainsi que y', or p est injectif sur $x' + \mathbb{C}^{I-J_o}$ d'où $y' = y''$.

  Ainsi $\tilde{V} = V + \mathbb{C}^{I-J_o}$, composante connexe contenant x de $p^{-1}(p(V) + \mathbb{C}^{I-J_o})$ est un ouvert homéomorphe par p à $p(V) + \mathbb{C}^{I-J_o}$.

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie sur X par :

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff y \in x + \mathbb{C}^{I-J_o} .$$

$\mathcal{R}$ est ouverte : En effet, les ouverts $\tilde{V}$, construits ci-dessus, forment une base des saturés des ouverts.

$\mathcal{R}$ est fermée : Soit (x_o,y_o) appartenant à l'adhérence du graphe de $\mathcal{R}$, alors $p(x_o),p(y_o))$ appartient à l'adhérence du graphe de la relation "$p(y) - p(x) \in \mathbb{C}^{I-J_o}$". Comme le sous-espace $\mathbb{C}^{I-J_o}$ est fermé, $p(y_o) - p(x_o)$ est dans $\mathbb{C}^{I-J_o}$.

Soient $\tilde{V}_{x_o}$ et $\tilde{V}_{y_o}$ deux voisinages de x_o et y_o respectivement construits ci-dessus, alors $W = (p(\tilde{V}_{x_o})+\mathbb{C}^{I-J_o}) \cap (p(\tilde{V}_{y_o})+\mathbb{C}^{I-J_o})$ est un voisinage commun à $p(x_o)$ et $p(y_o)$; les composantes connexes de $p^{-1}(W)$ contenant respectivement x_o et y_o sont deux voisinages $\tilde{W}_{x_o}$ et $\tilde{W}_{y_o}$ de x_o et y_o. Il existe donc $x \in \tilde{W}_{x_o}$ et $y \in \tilde{W}_{y_o}$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$; ainsi x et y sont dans une même composante connexe de $p^{-1}(W)$, ce qui entraîne $\tilde{W}_{x_o} = \tilde{W}_{y_o}$ et, par conséquent, $x_o \mathcal{R} y_o$.

On introduit maintenant $M = X_{/R}$, muni de la topologie quotient ; c'est un espace séparé.

L'application $\pi_{J_o} \circ p$ se factorise à travers M et l'application canonique s de X dans M par une application notée π :

$$\pi(s(x)) = \pi_{J_o} \circ p(x) \qquad \forall x \in X$$

(M,π) est une variété étalée sur $\mathbb{C}^{J_o}$ et π est un homéomorphisme sur $s(\tilde{V})$ où les $\tilde{V}$ sont construits plus haut.

L'application $u = (s,\pi_{I-J_o} \circ p)$ est un morphisme injectif de variétés étalées : $X \to M \times \mathbb{C}^{I-J_o}$; par conséquent, X est isomorphe par u à $M \times \mathbb{C}^{I-J_o}$.

M est une variété de Stein : $M \times \mathbb{C}^{I-J_o}$ étant isomorphe à X est pseudoconvexe et M est l'image réciproque de $\mathbb{C}^{J_o}$ par l'application d'étalement de $M \times \mathbb{C}^{I-J_o}$ sur $\mathbb{C}^{J_o} \times \mathbb{C}^{I-J_o}$. Par suite, M est pseudoconvexe.

Corollaire 2.1.- Soit X une variété connexe étalée sur $\mathbb{C}^I$ et pseudoconvexe (I ensemble infini quelconque). Il existe un plongement holomorphe propre de X dans $\mathbb{C}^I$.

Preuve :

D'après le théorème de Remmert et Narasimhan [14], [18], il existe un plongement holomorphe propre de la variété de Stein M du théorème précédent dans $\mathbb{C}^{2(\text{card } J_o+1)}$.

Il existe donc un plongement holomorphe propre de $M \times \mathbb{C}^{I-J_o}$ dans $\mathbb{C}^{2\text{card } J_o+1} \times \mathbb{C}^{I-J_o}$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}^I$. Puisque X étant isomorphe à $M \times \mathbb{C}^{I-J_o}$, on en déduit le corollaire.

CHAPITRE III

ETUDE DE LA STRUCTURE ANALYTIQUE DES ESPACES $C(K,\Omega)$.

Introduction.

Etant données deux variétés différentiables compactes X et Y de classe C^r et une variété différentiable Z de classe C^{r+s+2}, Palais [17] construit une structure de variété différentiable de classe C^s sur l'espace $C^r(X,Z)$ pour laquelle l'application $\alpha_f : C^r(Y,Z) \to C^r(X,Z)$ qui à g fait correspondre $\alpha_f(g) = g \circ f$ est de classe C^s pour tout $f \in C^r(X,Y)$ et $0 < s < r$. Cette construction se fait au moyen de l'application exponentielle associée à un champ isochrone [4].

Lorsque les variétés sont munies de structures analytiques complexes, l'exponentielle n'est pas en général holomorphe et le procédé précédent tombe.

On peut, pour les variétés infinitésimalement homogènes, utiliser un substitut introduit par Hirschowitz [11] qui nous permet de mener une étude analogue. En particulier, étant donnée une variété de Stein Ω de dimension n et un espace topologique compact K, on obtient en fin d'étude un plongement holomorphe propre de $C(K,\Omega)$ dans $C(K,\mathbb{C}^{2n+1})$ concrétisant dans ce cadre le théorème de plongement abstrait obtenu au chapitre I.

1. *Variétés infinitésimalement homogènes.*

Soit Ω une variété analytique complexe de dimension n dénombrable à l'infini.

Définition 3.1.- On dit que la variété Ω est infinitésimalement homogène si les sections holomorphes globales de son fibré tangent engendrent l'espace tangent en tout point.

Exemples :

1.- Toute variété analytiquement parallélisable est infinitésimalement homogène, en effet une variété Ω de dimension n est analytiquement parallélisable s'il existe n champs de vecteurs holomorphes $Z_1,\ldots,Z_n$ qui sont linéairement indépendants en tout point $x \in \Omega$. Par suite $Z_1,\ldots,Z_n$ engendrent $T_x(\Omega)$ en tout point $x \in \Omega$.

En particulier, les groupes de Lie complexes sont des variétés infinitésimalement homogènes.

2.- Toute variété Ω de Stein est infinitésimalement homogène. En effet, soit T le faisceau formé par les champs de vecteurs holomorphes sur Ω. C'est un faisceau cohérent car il est localement engendré par un nombre fini de sections dans un voisinage convenable d'un point et son faisceau des relations est lui-même localement finiment engendré d'après le théorème d'OKA (cf. [12], th. 6.4.1).

Ω étant de Stein, d'après le théorème A de Cartan [12] $T_x(\Omega)$ est engendré par les sections holomorphes globales.

3.- Soit (Ω,p) une variété étalée sur une variété V infinitésimalement homogène, alors il en est de même pour Ω, car si $X_1,\ldots,X_N$ sont des champs holomorphes sur V qui engendrent $T_x(V)$ en tout point de V, si on définit les champs de vecteurs $Y_1,\dots,Y_N$ sur Ω par : $Y_a(f) = X_{p(a)}(f \circ p_a^{-1})$ pour $f \in C^\infty(a)$ alors les champs de vecteurs $Y_1,\dots,Y_n$ engendrent $T_a(\Omega)$ pour tout $a \in \Omega$.

Proposition 3.1. [11].- Si Ω est une variété infinitésimalement homogène il existe un entier N et une application σ analytique surjective de $\Omega \times \mathbb{C}^N$ dans $T(\Omega)$ telle que pour tout $x \in \Omega$ l'application σ_x définie sur $\mathbb{C}^N$ par :

$$\sigma_x(\lambda) = \sigma(x,\lambda)$$

soit un homomorphisme surjectif de $\mathbb{C}^N$ sur $T_x(\Omega)$.

Preuve : On suppose que Ω est connexe de dimension n. On va montrer qu'il existe un nombre fini de champs de vecteurs holomorphes sur Ω, $X_1,X_2,\dots,X_N$ tels que pour tout $x \in \Omega$ il existe n champs parmi les X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ qui engendrent $T_x(\Omega)$.

On fait un raisonnement par récurrence finie.

Pour $r = 1,2,\dots,n$ et $s = 0,\dots,n+1$, l'hypothèse de récurrence est :

$H_{r,s}$: il existe un sous-ensemble analytique $A_{r,s}$ de codimension au moins s dans Ω et un ensemble fini $F_{r,s}$ de champs holomorphes sur Ω qui soit de rang au moins $r-1$ en tout point de Ω et de rang au moins r sur $\Omega - A_{r,s}$.

$H_{1,0}$ est vraie et $H_{r,n+1}$ est équivalente à $H_{r+1,0}$; il suffit donc de montrer que $H_{r,s-1}$ implique $H_{r,s}$.

Soit x_p une suite de points telle que toute composante irréductible de $A_{r,s-1}$ contienne l'un des x_p.

Ω étant dénombrable à l'infini, $T(\Omega)$ muni de la convergence uniforme sur tout compact, est un espace de Frechet.

D'autre part, Ω étant infinitésimalement homogène, l'ensemble des champs t tels que $F_{r,s-1} \cup \{t\}$ soit de rang supérieur ou égal à r en x_p est un ouvert partout dense. D'après le théorème de Baire, on peut trouver t tel que $F_{r,s-1} \cup \{t\}$ soit de rang supérieur ou égal à r en chacun des points x_p.

On pose $F_{r,s} = F_{r,s-1} \cup \{t\}$.

L'ensemble des points où $F_{r,s}$ n'est pas de rang supérieur ou égal à r est un sous-ensemble analytique de $A_{r,s-1}$ de codimension au moins s car sinon il contiendrait l'une des composantes irréductibles de $A_{r,s-1}$. Ce qui finit la récurrence. Ainsi l'ensemble $F_{n,n+1}$ est un ensemble fini de champs holomorphes qui engendre $T_x(\Omega)$ en tout point $x \in \Omega$.

On note $F_{n,n+1} = \{X_1,\ldots,X_N\}$ où $N = \text{Card } F_{n,n+1}$.

On définit l'application σ de $X \times \mathbb{C}^N$ dans $T(\Omega)$ comme suit :

si $(x,\lambda) \in \Omega \times \mathbb{C}^N$ avec $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$;

$$\text{on pose } \sigma(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i X_i(x) \in T_x(\Omega).$$

σ est analytique et pour tout $x \in \Omega$, σ_x est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{C}^N$ sur $T_x(\Omega)$.

Proposition 3.2. [11].- Il existe un voisinage W de $\Omega \times 0_{\mathbb{C}^N}$ et une application analytique e_σ de W dans Ω telle que :

$$e_\sigma(x,0) = x \qquad \forall\, x \in \Omega$$

$$\frac{d}{d\lambda} e_\sigma(x,\lambda z) = \sigma(e_\sigma(x,\lambda z),z) \quad \left.\right\} \begin{array}{l} \forall\, x \in \Omega\,,\quad \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^N \\ \text{tels que } (x,\lambda z) \in W. \end{array}$$

Preuve : Soit $v(t,x,z)$ la courbe holomorphe tangente au champ de vecteurs $\sigma(.,z)$ telle que : $v(0,x,z) = x$.

On a donc :

$$(1) \qquad \begin{cases} v(0,x,z) = x \\ \dfrac{d}{dt} v(t,x,z) = \sigma(v(t,x,z),z). \end{cases}$$

Pour tout $|t| < \tau(x,z)$: rayon du disque maximal où v est holomorphe en t.

Posons $W_1 = \{(x,t,z) \in \Omega \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \ / \ |t| < \tau(x,z)\}$.

Le théorème sur les solutions d'une équation différentielle dépendant analytiquement d'un paramètre (ici z) assure que τ est semi-continu supérieurement, que W_1 est un ouvert et que v est holomorphe sur W_1.

De la linéarité de σ en z, il résulte :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v(\lambda t,x,z) = \sigma(v(\lambda t,x,z),\lambda z) \\ \forall \ |t| < \dfrac{1}{|\lambda|} \tau(x,z). \end{cases}$$

L'unicité de la solution dans (1) entraîne donc :

$$v(\lambda t,x,z) = v(t,x,\lambda z)$$

et $$\tau(x,\lambda z) = \frac{1}{|\lambda|} \tau(x,z).$$

Soit $W = \{(x,z) \in \Omega \times \mathbb{C}^N \ / \ \tau(x,z) > 1\}$. W est un ouvert de $\Omega \times \mathbb{C}^N$ contenant $\Omega \times 0_{\mathbb{C}^N}$. On pose :

$$e_\sigma(x,z) = v(1,x,z).$$

L'application e_σ est donc holomorphe de W dans Ω et vérifie :

$$\left.\begin{array}{l} e_\sigma(x,0) = x \\ \frac{d}{d\lambda} e_\sigma(x,\lambda z) = \sigma(e_\sigma(x,\lambda z),z) \end{array}\right\} \forall \lambda \quad |\lambda| < \tau(x,z) .$$

Proposition 3.3.- Soit $x \in \Omega$, il existe un voisinage $V_1(x)$ et une base $\varepsilon_x(y)$ de l'orthogonal du noyau de σ_y tels que l'application $y \to \varepsilon_x(y)$ soit analytique sur $V_1(x)$.

Preuve :

Considérons l'application $\sigma : \Omega \times \mathbb{C}^N \to T(\Omega)$.
A l'aide d'une carte locale sur un voisinage U de x, on peut considérer σ_y comme une application de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^n$ pour tout $y \in U$ et donc σ_y est une matrice $N \times n$.

$$\sigma_y = (a_{ij}(y)) \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{array}$$

les a_{ij} étant des fonctions holomorphes sur U.

D'autre part, σ_y étant surjective pour tout y, on peut supposer que la matrice d'ordre n $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice régulière pour tout y appartenant à un voisinage $V_1(x)$ de x. Il existe donc des fonctions holomorphes b_{ij} sur $V_1(x)$ telles que si $(z_1,\dots,z_N) \in \mathbb{C}^N$ alors :

$$\sigma_y(z) = 0 \text{ équivaut à } \left\{\begin{array}{l} z_1 = b_{11}(y)z_{n+1} + \dots + b_{1,N-n}(y)z_N \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_i = b_{i1}(y)z_{n+1} + \dots + b_{i,N-n}(y)z_N \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = b_{n1}(y)z_{n+1} + \dots + b_{n,N-n}(z)z_N \end{array}\right.$$

Une base du noyau Ker σ_y de σ_y est donc le système $\{A_1(y),\dots,A_{N-n}(y)\}$ défini par :

$$A_i(y) = (b_{1i}(y), b_{2i}(y),\dots,b_{ni}(y),0,0,\dots,0,\underbrace{1,0,\dots,0)}_{n+i^{\text{ème}}\ \text{place}}$$

et une base de $(\mathrm{Ker}\ \sigma_y)^{\perp}$ est le système $(B_1(y),\dots,B_n(y))$ défini par :

$$B_j(y) = (0,\dots,0,\underbrace{1,0,\dots,0,-b_{j1}(y),\dots,-b_{j,N-n}(y))}_{j^{\text{ème}}\ \text{place}}\ .$$

On pose $\varepsilon_x(y) = (B_1(y),\dots,B_n(y))$ d'où la proposition.

Théorème 3.1.- Soit Δ la diagonale de Ω. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\Delta \times 0_{\mathbb{C}^N}$ tel que :

- e_σ soit analytique sur la projection de $\mathcal{V}$ sur $\Omega \times \mathbb{C}^N$.
- L'équation en z :

(2) $$e_\sigma(x,z) = v$$

admet une solution unique $\psi(x,v)$ vérifiant :

$$(x,v,\psi(x,v)) \in \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \psi(x,v) \in (\mathrm{Ker}\ \sigma_x)^{\perp}.$$

- L'application $(x,v) \to \psi(x,v)$ soit analytique sur la projection de $\mathcal{V}$ sur $\Omega \times \Omega$.

Preuve :

L'application $(y,\lambda) \mapsto e_\sigma(y,\lambda.\varepsilon_x(y))$ analytique dans un voisinage de $(x,0_{\mathbb{C}^n})$ satisfait d'après la proposition 3.2 à :

$$\begin{cases} e_\sigma(x,0) = x. \\ D_{\lambda=0}e\ (x,\lambda.\varepsilon_x(x))(z) = \sigma(x,z.\varepsilon_x(x)). \end{cases}$$

Le choix de la base $\varepsilon_x(x)$ dans $(\mathrm{Ker}\ \sigma_x)^{\perp}$ entraîne que $D_{\lambda=0}e_\sigma(x,\lambda.\varepsilon_x(x))$ est un isomorphsime de $\mathbb{C}^n$ sur $T_x(\Omega)$. Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un voisinage relativement compact $V(x)$ de x et d'un polydisque $W_x(r)$ de rayon r centré à l'origine dans $\mathbb{C}^n$ tels que :

- Dans un voisinage de $\overline{V(x)} \times \overline{W_x(r)}$ l'application $(y,\lambda) \mapsto e_\sigma(y,\lambda.\varepsilon_x(y))$ est analytique.

(3)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{- Pour tout } (y,v) \in V(x) \times V(x) \text{ l'équation en } \lambda \\ \qquad e_\sigma(y,\lambda.\varepsilon_x(y)) = v \\ \text{admet une solution unique } \lambda(y,v) \text{ appartenant à } W_x(r) \text{ et} \\ \text{l'application } (y,v) \to \lambda(y,v) \text{ est analytique sur } V(x) \times V(x). \end{array}\right.$$

Posons $m = \inf\{||\lambda.\varepsilon_x(y)||,\ |\lambda| \leqslant 1 \text{ et } y \in \overline{V(x)}\}$. Puisque $\varepsilon_x(y)$ est une base, un argument de compacité et de continuité implique $m > 0$, et l'on a :

$$||\lambda.\varepsilon_x(y)|| \geqslant m|\lambda| \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{C}^n,\ \forall\ y \in V(x).$$

On note $B_x(\rho.m)$ le polydisque de rayon $\rho.m$ centré à l'origine dans $\mathbb{C}^N$. Pour tout $\rho > 0$ et pour tout $y \in V(x)$, on a :

(4)
$$B_x(\rho.m) \cap (\mathrm{Ker}\ \sigma_y)^{\perp} \subset W_x(\rho).\varepsilon_x(y).$$

Posons $B_x = B_x(\rho.m)$ où ρ est choisi inférieur à r et assez petit pour que e_σ soit analytique sur $V(x) \times B_x$.

Puisque $\lambda(x,x) = 0$, on peut diminuer le voisinage $V(x)$ s'il le faut et assurer que $\lambda(y,v).\varepsilon_x(y)$ appartient à B_x pour tout $(y,v) \in V(x) \times V(x)$.

Posons maintenant $\psi_x(y,v) = \lambda(y,v).\varepsilon_x(y)$. Dans ces conditions, on a :

$$(5) \begin{cases} - \psi_x \text{ est analytique sur } V(x) \times V(x). \\ - \text{D'après (3) et (4), } \psi_x(y,v) \text{ est l'unique solution dans} \\ \quad B_x \cap (\mathrm{Ker}\ \sigma_y)^{\perp} \text{ de l'équation (2) pour tout } (y,v) \in V(x) \times V(x). \end{cases}$$

Considérons $\mathcal{V} = \bigcup_{x\in\Omega} V(x) \times V(x) \times B_x$. Ce voisinage de $\Delta \times 0_{\mathbb{C}^N}$ répond aux conditions du théorème

- La projection de $\mathcal{V}$ sur $\Omega \times \mathbb{C}^N$ est l'ouvert $\bigcup_{x\in\Omega} V(x) \times B_x$ sur lequel e_σ est analytique.

- Etant donné (x,v) dans $\bigcup_{x\in\Omega} V(x) \times V(x)$, il existe $x_1 \in \Omega$ tel que $(x,v) \in V(x_1) \times V(x_1)$. $\psi_{x_1}(x,v)$ est solution de l'équation : $e_\sigma(x,z) = v$ et c'est l'unique solution qui appartient à $B_{x_1} \cap \mathrm{Ker}\ \sigma_x^{\perp}$.

- Si z_2 est une solution de l'équation $e_\sigma(x,z) = v$ avec $(x,v,z_2) \in \mathcal{V}$ et $z_2 \in (\mathrm{Ker}\ \sigma_x)^{\perp}$, soit $x_2 \in \Omega$ tel que $(x,v,z_2) \in V(x_2) \times V(x_2) \times B_{x_2}$.

Alors l'équation $e(x,z) = v$ admet dans la plus grande des deux boules B_{x_1} et B_{x_2} (soit B_{x_i}) les solutions z_2 et $\psi_{x_1}(x,v)$ toutes deux dans $(\mathrm{Ker}\ \sigma_x)^{\perp}$. D'après (5) appliqué à B_{x_i} et $V(x_i)$ les deux solutions sont identiques.

On a donc $\psi_{x_1}(x,v) = \psi_{x_2}(x,v)$ si $(x,v) \in V(x_1) \times V(x_1)$ et $(x,v) \in V(x_2) \times V(x_2)$ ce qui permet de définir une application ψ :

$$\psi(x,y) = \psi_{x_1}(x,v), \quad \forall (x,v) \in V(x_1) \times V(x_1).$$

D'après (5) l'application ψ est analytique sur $\bigcup_{x\in\Omega} V(x) \times V(x)$ projection de ν sur $\Omega \times \Omega$.

2. *Structure analytique sur l'espace* $C(K.\Omega)$.

K est un espace topologique, Ω est une variété analytique complexe infinitésimalement homogène.

$C(K,\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Pour simplifier, on pose $N_a = (\mathrm{Ker}\ \sigma_a)^{\perp} \quad \forall\, a \in \Omega$.

On désigne par U la projection sur $\Omega \times \Omega$ du voisinage ν défini dans le théorème 3.1.

Soit $x \in C(K,\Omega)$, on introduit :

- E_x : le sous-espace vectoriel fermé de $C(K,\Omega)$ défini par :

$$E_x = \{z \in C(K,\Omega) \ ; \ z(t) \in N_{x(t)}, \quad \forall\, t \in K\}.$$

- W_x : le voisinage de x défini par :

$$W_x = \{u \in C(K,\Omega) \quad (x(t),u(t)) \in U \quad \forall\, t \in K\}.$$

- U_x : le voisinage de l'origine dans E_x défini par :

$$U_x = \{z \in E_x \ ; \ (x(t),e_\sigma(x(t),z(t)),\ z(t)) \in \nu, \quad \forall\, t \in K\}.$$

Le théorème 3.1. permet de définir :

- $\Psi_x(u)$ dans $C(K,\mathbb{C}^N)$ par : $\Psi_x(u)(t) = \psi(x(t),u(t))$ pour tout $u \in W_x$.
- $\Phi_x(z)$ dans $C(K,\Omega)$ par $\Phi_x(z)(t) = e_\sigma(x(t),z(t))$ pour tout z dans U_x.

$\vartheta(x(t),u(t))$ est l'unique solution de l'équation : $e_\sigma(x(t),z(t)) = u(t)$, qui soit dans $N_{x(t)}$ et tel que $(x(t),u(t),\vartheta(x(t),u(t)) \in \mathcal{V}$. Ainsi, Ψ_x est à valeurs dans U_x et $\Phi_x \circ \Psi_x = id_{W_x}$.

Pour tout $z \in U_x$, posons $u(t) = e_\sigma(x(t),z(t))$; puisque $(x(t),u(t),z(t)) \in \mathcal{V}$, on a : $z(t) = \vartheta(x(t),u(t))$.

Ainsi Φ_x est à valeurs dans W_x et $\Psi_x \circ \Phi_x = id_{U_x}$.

Il est clair que Φ_x et Ψ_x sont continus ; ainsi Ψ_x est un homéomorphsime de W_x sur U_x.

On a donc construit un système de cartes (W_x,Ψ_x) sur $C(K,\Omega)$. Montrons maintenant que les applications de transition sont analytiques. On aura ainsi défini une structure de variété banachique complexe sur $C(K,\Omega)$.

Soient x_1 et x_2 dans $C(K,\Omega)$ tels que $W_{x_1} \cap W_{x_2} \neq \emptyset$. Il s'agit de vérifier l'analyticité de l'application $\Psi_{x_2} \circ \Psi_{x_1}^{-1}$ dont la source est l'ouvert $\Psi_{x_1}(W_{x_1} \cap W_{x_2})$ de l'espace de Banach E_{x_1} et le but est l'espace de Banach E_{x_2}. Comme cette application est continue, il suffit d'après [7] de vérifier qu'elle est faiblement analytique ; c'est-à-dire, pour tout z dans $\Psi_{x_1}(W_{x_1} \cap W_{x_2})$, pour tout $a \neq 0$ dans E_{x_1}, pour tout μ dans $(E_{x_2})'$ il s'agit de vérifier l'analyticité de l'application suivante :

$$\lambda \mapsto \mu \circ \Psi_{x_2} \circ \Psi_{x_1}^{-1}(z+\lambda a), \text{ pour } \lambda \text{ voisin de } 0 \text{ dans } \mathbb{C}.$$

Or, d'après le théorème de Hahn-Banach, le dual de E_{x_2} est formé par les mesures de Radon sur K à valeurs dans $\mathbb{C}^N$. On est amené à constater l'holomorphie de la fonction

$$F(\lambda) = \int_K \varphi[x_2(t), e_\sigma(x_1(t), z(t) + \lambda a(t))] d\mu(t).$$

Ceci résulte trivialement de l'analyticité de φ et e_σ.

Dans la suite, on supposera que les espaces $C(K,\Omega)$ seront munis de la structure de variété banachique modelée sur les espaces E_x, qui vient d'être construite.

Théorème 3.2.- Soient Ω_1 et Ω_2 deux variétés analytiques infinitésimalement homogènes et f une application analytique de Ω_1 dans Ω_2. Pour tout u dans $C(K,\Omega)$, *on note :* $\tilde{f}(u) = f \circ u$.

a) $\tilde{f}$ est une application analytique de $C(K,\Omega_1)$ dans $C(K,\Omega_2)$;

b) si f est un plongement de Ω_1 dans Ω_2, alors $\tilde{f}$ est un plongement direct de $C(K,\Omega_1)$ dans $C(K,\Omega_2)$;

c) si f est injective et propre, $\tilde{f}$ est propre.

Preuve :

a) Comme $\tilde{f}$ est manifestement continue, étant données deux cartes locales (Ψ,W_1) et (Ψ_2,W_2) respectivement aux points u et $f \circ u$, il suffit de vérifier l'analyticité faible de $\Psi_2 \circ \tilde{f} \circ \Psi_1^{-1}$ sur $\Psi_1(W_1)$.

Soit N l'entier naturel attaché à la variété Ω_2 par la proposition 3.1., comme on l'a remarqué lors de la construction de la structure analytique de $C(K,\Omega)$, il s'agit de constater l'analyticité au sens de Gâteau sur $\Psi_1(W_1)$ de $\mu \circ \Psi_2 \circ f \circ \Psi_1^{-1}$ pour toute mesure de Radon sur K à valeur dans C^N.

Désignons par e_i , φ_i et σ_i les applications attachées aux deux variétés Ω_i $(i = 1,2)$ par la proposition 3.2 et le théorème 3.1 L'application $\Psi_2 \circ \tilde{f} \circ \Psi_1^{-1}$ s'exprime sous la forme :

$$\Psi_2 \circ \tilde{f} \circ \Psi_1^{-1}(z) = \mathcal{V}_2[f \circ u, f \circ e_1(u,z)].$$

La G-analyticité de $\mu \circ \Psi_2 \circ f \circ \Psi_1^{-1}$ s'exprime donc par l'holomorphie de la fonction :

$$F(\lambda) = \int_K \mathcal{V}_2[f \circ u(t), f \circ e_1(u(t), z(t) + \lambda a(t))] d\mu(t) .$$

Pour tout $z \in \Psi_1(W_1)$ et tout $a \neq 0$ dans E_1, λ assez voisin de 0 dans $\mathbb{C}$.

Cette holomorphie est alors conséquence immédiate de l'analyticité des applications $\mathcal{V}_2$, f et e_1.

b) On note E_1 (resp. E_2) l'espace de Banach sur lequel est modelé $C(K,\Omega_1)$ (resp. $C(K,\Omega_2)$) au point u (resp. $f \circ u$).

Commençons par déterminer la différentielle de l'application f en l'exprimant dans les cartes (Ψ_1, W_1) et (Ψ_2, W_2) de u et $f \circ u$ respectivement.

Soit $g = \Psi_2 \circ \tilde{f} \circ \Psi_1^{-1}$. On calcule dg à l'origine de E_1 qui s'exprime par l'intégrale vectorielle à valeurs dans E_2.

$$dg(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi.z)}{\xi^2} d\xi \qquad (\xi \in \mathbb{C}).$$

Soit $t \in K$ et δ_t la mesure de Dirac en t.

$$dg(z)(t) = \langle \delta_t , \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi.z)}{\xi^2} d\xi \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \langle \delta_t , \frac{g(\xi.z)}{\xi^2} \rangle \, d\xi.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi.z)}{\xi^2} (t) d\xi$$

(d'après les propriétés de l'intégrale vectorielle).

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \psi_2[f \circ u(t), f \circ e_1(u(t), \xi z(t))] \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= d\theta_o(z(t))$$

où $d\theta_o$ est la différentielle au point 0 de l'application θ définie par :

$$\theta(x) = \psi_2[f \circ u(t), f \circ e_1(u(t), x)].$$

Or, d'après la proposition 3.2., l'application $e_1(u(t),.)$ a pour différentielle $\sigma_1(u(t),.)$ au point 0 ; d'après le théorème 3.1. $e_2(f \circ u(t),.) \circ \psi_2(f \circ u(t),.)$ est l'identité au voisinage de $f \circ u(t)$. Par conséquent la différentielle de $\psi_2(f \circ u(t),.)$ au point $f \circ u(t)$ est l'application $\sigma_2^{-1}(f \circ u(t),.)$. Par composition, on obtient donc :

$$d\theta_{x=0}(z(t)) = \sigma_2^{-1}(f \circ u(t),.) \circ df_{u(t)} \circ \sigma_1(u(t), z(t)).$$

En résumé :

$$\tilde{df}_u = \sigma_2^{-1}(f \circ u,.) \circ df_u \circ \sigma_1(u,.).$$

Pour tout $x \in \Omega_1$, posons :

$N_x^1 = (\text{Ker } \sigma_1(x,.))^{\perp}$, $N_x^2 = (\text{Ker } \sigma_2(f(x),.))^{\perp}$

M_x : l'image de N_x^1 dans N_x^2 par l'application :

$$\sigma_2^{-1}(f(x),.) \circ df_x \circ \sigma_1(x,.).$$

p_x : la projection orthogonale de $\mathbb{C}^N$ sur M_x.

$$A_u = \{z \in C(K, \mathbb{C}^N) \; ; \; z(t) \in M_{u(t)} \quad \forall t \in K\}.$$

A_u est un sous-espace fermé de E_2 ; montrons que A_u en est un facteur direct et pour cela que l'application :

$$p_u : z \mapsto p_u(z) = \{t \mapsto p_{u(t)}(z(t))\}$$

est un projecteur continu de $C(K,\mathbb{C}^N)$ dont l'image est A_u.

Comme $||p(z)||_\infty \leq ||z||_\infty$ et $p_u^2 = p_u$, seule l'appartenance à $C(K,\mathbb{C}^N)$ de $p_u(z)$ est à vérifier. Or, on a :

$$|p_u(z)(t) - p_u(z)(t')| \leq ||p_{u(t)} - p_{u(t')}|| \times ||z||_\infty + |z(t)-z(t')|.$$

L'appartenance de $p_u(z)$ à $C(K,\mathbb{C}^N)$ est donc ramenée à la continuité de l'application $x \mapsto p_x$ de Ω_1 dans $L(\mathbb{C}^N)$.

A cette fin, utilisons la base $\varepsilon_x^1(y)$ de N_y^1 dépendant analytiquement de y dans un voisinage convenable de x. Comme f est une immersion, $\varepsilon_2^{-1}(f(y),.) \circ df_y \circ \sigma_1(y,\varepsilon_x(y))$ forme une base de M_y dépendant analytiquement de y. Au moyen du procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on peut donc construire une base orthonormée de M_y dépendant continuement de y dans un voisinage convenable de x.

En exprimant $p_y(a)$ sur cette base, on constate la continuité de l'application $y \mapsto p_y$ dans $L(\mathbb{C}^N)$.

On aura démontré que $\tilde{f}$ est une immersion directe en vérifiant que l'image de $d\tilde{f}_u$ est A_u.

L'inclusion $\operatorname{Im} d\tilde{f}_u \subset A_u$ est évidente.

Réciproquement soit $z \in A_u$, alors pour tout $t \in K$ il existe $z'(t)$ unique dans $N^1_{u(t)}$ tel que
$z(t) = \sigma_2^{-1}(f \circ u(t),.) \circ df_{u(t)} \circ \sigma_1(u(t),z'(t))$. Il s'agit de vérifier la continuité de z' sur K. Or comme il a été vu précédemment on peut, au voisinage d'un élément $t_o \in K$, construire une base de $N^1_{u(t)}$ dépendant continuement de t. Soit $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t),\dots,\varepsilon_n(t))$ une telle base. On obtient une base $\alpha(t) = (\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t))$ de $M_{u(t)}$ image de $\varepsilon(t)$

par l'application $\sigma_2^{-1}(f \circ u(t),.) \circ df_{u(t)} \circ \sigma_1(u(t),.)$.

Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on peut construire une base orthonormée $\alpha'(t)$ de $M_{u(t)}$:

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = \lambda_{11}(t)\alpha_1(t) \\ \text{------------------} \\ \alpha_k'(t) = \lambda_{k1}(t)\alpha_1(t) + \ldots + \lambda_{kk}(t)\alpha_k(t) \\ \text{------------------} \end{cases}$$

où les λ_{ij} sont des fonctions continues dans un voisinage de t_o.

Soit $\varepsilon'(t)$ la base de $N^1_{u(t)}$ image réciproque de $\alpha'(t)$ par l'application $\sigma_2^{-1}(f \circ u(t),.) \circ df_{u(t)} \circ \sigma_1(u(t),.)$. Les composantes de $z'(t)$ dans cette base sont les fonctions continues $a_i(t) = \langle z(t),\alpha_1'(t)\rangle$. En remarquant que $\varepsilon'(t)$ est défini par :

$$\varepsilon_k'(t) = \lambda_{k1}(t)\varepsilon_1(t) + \ldots + \lambda_{kk}(t)\varepsilon_k(t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

on obtient la continuité de z'.

c) Soit H un compact de $C(K,\Omega_2)$ et $Q = \tilde{f}^{-1}(H)$.

Comme Q est fermé, pour montrer que Q est compact il suffit d'après le théorème d'Ascoli de vérifier que Q est équicontinu et que $Q_t = \{u(t), f \circ u \in H\}$ est relativement compact.

Comme Ω_1 et Ω_2 sont dénombrables à l'infini, on peut supposer que leurs topologies sont définies par des distances d_1 et d_2.

Posons $H_t = \{v(t), v \in H\}$, H_t est relativement compact d'après le théorème d'Ascoli, Q_t est contenu dans $f^{-1}(H_t)$, et comme f est propre Q_t est relativement compact. D'autre part, il existe $\alpha > 0$ tel que $H^\alpha_{t_o} = \{x \in \Omega_2 / \exists y \in H_{t_o}\ d(x,y) \leqslant \alpha\}$ soit relativement compact. Dans ces conditions $C_{t_o} = f^{-1}(\bar{H}^{\alpha}_{t_o})$ est compact car f est propre. Puisque f est injective, f est un homéomorphisme de C_{t_o} sur $f(C_{t_o})$ et il existe $\eta > 0$ tel que :

$$d_1(x,x') \leqslant \eta\, d_2(f(x),f(x')) \qquad \forall\ (x,x') \in C_{t_o} \times C_{t_o}.$$

Soit $0 < \varepsilon < \alpha$, H étant équicontinu il existe V_{t_o} voisinage de t_o tel que :

$$t \in V_{t_o} \quad \text{entraîne} \quad \begin{cases} d_2(f \circ u(t), f \circ u(t_o)) < \varepsilon \\ \forall\ u \in Q. \end{cases}$$

or, $d_2(f \circ u(t), f \circ u(t_o)) < \varepsilon < \alpha$ entraîne que $f \circ u(t) \in H^{\alpha}_{t_o}$, il en résulte que $u(t)$ et $u(t_o)$ appartiennent à C_{t_o} d'où :

$$d_1(u(t),u(t_o)) \leqslant \eta\, d_2(f \circ u(t), f \circ u(t_o)) < \eta\varepsilon.$$

Finalement, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_{t_o} de t_o tel que : $t \in V_{t_o}$ entraîne $\begin{cases} d_1(u(t),u(t_o)) < \eta\varepsilon. \\ \forall\ u \in Q \end{cases}$

Ce qui montre que Q est équicontinu.

Corollaire.- Soit Ω une variété de Stein de dimension n. Il existe un plongement holomorphe propre de $C(K,\Omega)$ dans $C(K,\mathbb{C}^{2n+1})$.

Preuve :

D'après Remmert et Narasimhan [14], [18], il existe un plongement holomorphe propre de Ω dans $\mathbb{C}^{2n+1}$. Puisque Ω est infinitésimalement homogène on applique le théorème 3.2.

3. *Enveloppe d'holomorphie de* $C(K,\Omega)$ (Ω *variété étalée*).

Dans le cas d'une variété étalée (Ω,p) sur $\mathbb{C}^n$. Les applications σ, e_σ et ψ (définies aux propositions 3.1 et 3.2 et au théorème 3.1) se définissent de la façon suivante :

$$\sigma : \Omega \times \mathbb{C}^n \to T(\Omega)$$

$$\sigma(x,z) = z_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_x + \ldots + z_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_x \in T_x(\Omega)$$

$$e_\sigma(x,z) = p_x^{-1}(p(x) + z)$$

$$\psi(x,v) = p(v) - p(x).$$

L'application Ψ_x qui définit une carte locale d'un élément $x \in C(K,\Omega)$ est :

$$\Psi_x(u) = p \circ x - p \circ u \qquad u \in W_x.$$

On remarque donc que la structure analytique définie sur $C(K,\Omega)$ au paragraphe 2 chap. III, est une structure de variété étalée ; le morphisme d'étalement étant l'application $\tilde{p} : C(K,\Omega) \to C(K,\mathbb{C}^n)$ définie par :

$$\tilde{p}(u) = p \circ u .$$

Soit $\tilde{\Omega}$ l'enveloppe d'holomorphie de Ω et soit $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ son morphisme de prolongement. On sait, théorème 3.2, que l'application $\tilde{f} : C(K,\Omega) \to C(K,\tilde{\Omega})$ est une application analytique. Un problème se pose de savoir si, en supposant que $C(K,\Omega)$ est connexe et, en posant $\Gamma(K,\Omega)$ la composante connexe de $\tilde{f}(C(K,\Omega))$ dans $C(K,\tilde{\Omega})$, le couple $(\Gamma,\tilde{f})$ est un domaine de prolongement analytique maximal de $C(K,\Omega)$.

Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et A un compact de Ω tel que Ω-A soit connexe, on sait [12] que Ω est un domaine de prolongement analytique de Ω-A. Greenfield démontre [5] que $C(K,\mathbb{C}^2)$ est un domaine de prolongement analytique de $C(K,\mathbb{C}^2-\{0\})$. La proposition suivante généralise ce résultat. Le problème général reste ouvert.

Proposition 3.4.- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$, soit A un compact de $\mathbb{C} \times \Omega$ et K un espace topologique compact quelconque. Supposons que $C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$ et $C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$ soient connexes.

Alors $C(K,C \times \Omega)$ est un domaine de prolongement analytique de $C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$.

Preuve :

Soit $x \in C(K,\mathbb{C}^n)$, on écrit $x = (x_1,x_2), x_1 \in C(K,\mathbb{C})$ et $x_2 \in C(K,\mathbb{C}^{n-1})$.

Soit $t_o \in K$, on pose $E' = \{x \in C(K,\mathbb{C}^n)/x_1(t_o) = 0\}$.

On a : $C(K,\mathbb{C}^n) = E' \oplus \mathbb{C}\, e_1$ où $e_1 = (1,0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

On note par x_u l'élément de $C(K,\mathbb{C}^n)$ de la forme $x_u = x' + u\, e_1$ avec $x' \in E'$ et $u \in \mathbb{C}$.

Soit $x \in C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$ et $||x||_K = \sup\limits_{t \in K} |x(t)|$.

L'application $u \mapsto x_u = x' + u\, e_1$ est holomorphe sur l'ensemble ouvert de $\mathbb{C}$: $\{u/|u| > ||x||_K\}$ et à valeurs dans $C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$.

Soit f une fonction holomorphe sur $C(K(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$.

Soit $x \in C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$ et $z \in \mathbb{C}$. Si γ est un cercle centré à l'origine de $\mathbb{C}$ et de rayon r vérifiant :

$$r > ||x||_K \quad \text{et} \quad r > |z|. \qquad (*)$$

On pose

$$\tilde{f}(x_z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(x_u)}{u-z}\, du \ .$$

A l'aide du théorème de Cauchy, on vérifie que $\tilde{f}(x_z)$ ne dépend pas de γ (γ vérifiant (*)).

On définit donc une fonction holomorphe $x_z \mapsto \tilde{f}(x_z)$ sur $C(K, \mathbb{C} \times \Omega)$.

Montrons que : $\tilde{f}_{/C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)} = f$.

Soit $\alpha \in \Omega - \mathrm{proj}_{\mathbb{C}^{n-1}} A$.

Soit y l'élément de $C(K, \Omega \setminus A)$ tel que : $y(t) = \alpha, \ \forall t \in K$.
Alors, on a : $\forall z \in \mathbb{C}, \ y_z = \alpha + z e_1 \in C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$ et la fonction $z \to f(y_z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

En appliquant le théorème de Cauchy avec un cercle γ de rayon convenable, on obtient :

$$\tilde{f}(y_z) = f(y_z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

D'autre part, soit $V(y)$ un voisinage de y dans $C(K, \Omega \setminus \mathrm{proj}_{\mathbb{C}^{n-1}} A)$ tel que :

$$x_z \in C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A) \qquad \forall x \in V(y), \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

On a :

$$\tilde{f}(x_z) = f(x_z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

L'égalité $\tilde{f} = f$ est donc vérifié sur l'ouvert $\mathbb{C} \times V(y)$ de $C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$ qui est connexe d'où l'égalité :

$$\tilde{f}_{/C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)} = f.$$

<u>*Remarque*</u> : Si K est contractile et Ω connexe alors $C(K,\Omega)$ est connexe. En effet, soient φ une contraction de K sur a, x

et y dans $C(K,\Omega)$, γ un chemin continu joignant $x(a)$ et $y(a)$ dans Ω, alors le chemin : $x \circ \psi \to \hat{\gamma} \to y \circ \psi^{-1}$ (ψ^{-1} désignant la conctraction opposée à ψ, $\hat{\gamma}$ désignant l'application constante sur K associée à chaque point de γ) joint continuement x à y.

Ainsi, lorsque K est contractile, Ω et $(\mathbb{C} \times \Omega) - A$ connexes, A compact dans $\mathbb{C} \times \Omega$, l'espace $C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$ est un domaine de prolongement analytique de $C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$.

Proposition 3.5.- Sous les hypothèses de la proposition 3.4, si Ω est de plus pseudoconvexe alors $C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$ est une enveloppe d'holomorphie de $C(K,(\mathbb{C} \times \Omega) - A)$.

Preuve :

Supposons que (Y,p,u) soit un domaine de prolongement analytique non trivial de $C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$.

Soit y un élément de la frontière $u[C(K,\mathbb{C} \times \Omega)]^*$ de $u[C(K,\mathbb{C} \times \Omega)]$ dans Y. Il existe une suite $y_n = u(x_n), x_n \in C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$, convergeant vers y.

En remarquant que $p \circ u = id_{C(K,\mathbb{C}\times\Omega)}$ (cf. déf. 1.1), on a :

$$\begin{cases} p(y_n) = p \circ u(x_n) = x_n \\ \text{et } p(y_n) \text{ converge vers } p(y). \end{cases}$$

Par suite, $p(y)$ appartient à l'adhérence de $C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$ dans $C(K,\mathbb{C}^n)$, donc $p(y) \in C(K,\overline{\mathbb{C} \times \Omega})$. De plus, il existe $t_o \in K$ tel que $p(y)(t_o) \in (\mathbb{C} \times \Omega)^*$ (frontière de $\mathbb{C} \times \Omega$ dans $\mathbb{C}^n$). En effet, si $p(y)(t) \in \mathbb{C} \times \Omega$, $\forall\, t \in K$, il existe un ouvert V contenant $p(y)$ et inclus dans $C(K,\mathbb{C} \times \Omega)$. Son image $u(V)$ par u est un ouvert qui contient $u \circ p(y) = y$, ce qui contredit le fait que $y \in u(C(K,\mathbb{C} \times \Omega))^*$.

La suite $x_n(t_o)$ converge vers $p(y)(t_o) \in (\mathbb{C} \times \Omega)^*$. D'après le théorème de Cartan-Thullen [1], il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \times \Omega)$ tel que

$$\sup_n |f(x_n(t_o))| = + \infty.$$

Soit ψ l'élément de $\mathcal{O}(C(K,\mathbb{C} \times \Omega))$ défini par :

$$\psi(x) = f(x(t_o)) \quad \forall\, x \in C(K,\mathbb{C} \times \Omega).$$

On a : $\sup_n |\psi(x_n)| = + \infty$, ce qui est absurde puisque $\psi(x_n)$ devrait tendre vers $\tilde{\psi}(y)$ où $\tilde{\psi}$ est le prolongement analytique de ψ à Y.

B I B L I O G R A P H I E

---

[1] G. COEURÉ - *Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques.*
Ann. Inst. Fourier 20 (1), 1970, p. 361-432.

[2] G. COEURÉ - *Analytic functions and manifolds in infinite dimensional spaces.*
North Holland, Studies, 11, 1974.

[3] A. DOUADY - *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné.*
Ann. Inst. Fourier, 16, 1, 1966, p. 1-95.

[4] J. DIEUDONNÉ - *Eléments d'Analyse.*
Tome 4 - Gauthier-Villars.

[5] S.J. GREENFIELD - *Holomorphic Extension in Spaces of Continuous Functions.*
An. Acad. Brasil, Ciênc. (1973), 45 (2).

[6] L. GRUMAN et C.O. KILSEMAN - *Le problème de Levi dans les espaces de Banach à base.*
C.R.A.Sc. Paris, 274, 1972, p. 1296-1299.

[7] M. HERVÉ - *Analytic and plurisubharmonic functions in finite and infinite dimensions.*
Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 198, 1971.

[8] Y. HERVIER - *Sur le problème de Levi pour les espaces étalés banachiques.*
C.R.A.Sc. Paris, 275, 1972, p. 821-824.

[9] A. HIRSCHOWITZ - *Bornologie des espaces de fonctions analytiques en dimension infinie.*
Séminaire P. Lelong 1969-70. Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 205, 1970, p. 21-33.

[10] A. HIRSCHOWITZ - *Remarques sur les ouverts d'holomorphie d'un produit dénombrable de droites.*
Ann. Inst. Fourier 19, 1, 1969, p. 219-229.

[11] A. HIRSCHOWITZ - *Pseudoconvexité au-dessus d'espaces plus ou moins homogènes.*
Inventiones math. 26, 303-322, 1974.

[12] L. HÖRMANDER - *An introduction to complex analysis in several variables.* Van Nostrand, 1966.

[13] P. LELONG - *Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques.* Séminaire P. Lelong, 1967/68, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 71, 1968, p. 167-189.

[14] R. NARASIMHAN - *Imbedding of holomorphically complete complex spaces.* Am. J. Math. 82 (1960), 917-934.

[15] M. NISHIHARA - *On injective analytic mappings of infinite dimensional complex manifolds.* Memoirs of the Faculty of Science. Kyushu University Ser. A, Vol. 33, N° 1, 1979.

[16] Ph. NOVERRAZ - *Pseudo-convexité - Convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie.* North Holland Math. Studies, 3, 1973.

[17] R.S. PALAIS - *Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds.* Mathematics 322, Brandreis University, 1964-65.

[18] R. REMMERT - *Einbettung Steinsher Mannigfaltigkeiten und holomorphvolständiger Komplex Räume.* Habilitationsschrift, Münster, 1957.

[19] W. RUDIN - *Real and Complex Analysis.* Mc Graw Hill, 1966.

[20] M. SCHOTTENLOHER - *Uber Analytische Fortsetzung in Banachräumen,* Math. Ann. 199 (1972), 313-336.

RÉSUMÉ

On étudie la possibilité d'un plongement direct d'une variété analytique complexe de dimension infinie dans un e.v.t. - Le critère suivant est obtenu dans le cas banachique : X est plongeable analytiquement dans un espace de Banach s'il existe suffisamment de fonctions holomorphes localement bornées dans leur ensemble pour séparer X et fournir des cartes locales. Ce critère est satisfait par une vaste classe d'enveloppe d'holomorphie ; en particulier, les variétés pseudo-convexes étalées sur un espace à base de Schauder ; lorsque X est de plus à fibres finies, on trouve un plongement propre et lorsque X est étalée sur $\mathbb{C}^I$ (car $I = \infty$), on trouve un plongement propre sur $\mathbb{C}^I$.

Dans la troisième partie, étant donnés un espace compact et une variété infinitésimalement homogène, on munit l'espace $C(K,\Omega)$ d'une structure de variété banachique complexe telle que la composition des applications est un morphisme. Lorsque Ω est de Stein, on peut trouver un plongement propre de $C(K,\Omega)$ dans $C(K,\mathbb{C}^{2n+1})$ $(n = \dim \Omega)$. Dans un cas particulier, on détermine l'enveloppe d'holomorphie de $C(K,\Omega)$.

MOTS CLÉS : PLONGEMENT

VARIETES ANALYTIQUES COMPLEXES

DIMENSION INFINIE