

50376  
1983  
205

50376  
1983  
205

## REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Jean-Marie FLAMME m'a initié à l'étude des problèmes de dynamique des solides, je le remercie pour l'attention qu'il a portée et les conseils qu'il m'a donnés lors de l'élaboration de ce travail et qu'il soit remercié également de sa participation à la présidence du jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur Fernand PARSY d'avoir accepté de rapporter ce travail et des conseils qu'il m'a prodigués tout au long de l'étude.

Monsieur le Professeur A. LEROY a accepté de juger mon travail, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Monsieur Bernard LEMOINE m'a accueilli à l'Ecole Nationale Supérieure des Techniques Industrielles et des Mines de DOUAI, qu'il accepte l'expression de ma reconnaissance.

Madame Françoise LALOUX a dactylographié ce document avec soin et minutie, je l'en remercie vivement ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques de LILLE I.



## BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION . . . . .	p. 1
<u>CHAPITRE I : COURBES DE L'ESPACE EUCLIDIEN <math>\varepsilon_3</math></u> . . . . .	p. 3
I.1 - DEFINITION PARAMETRIQUE D'UNE COURBE : . . . . .	p. 3
I.1.1. - POSITION DU PROBLEME . . . . .	p. 3
I.1.2. - APPROXIMATION DE COURBES DONT ON CONNAIT UN CERTAIN NOMBRE D'ELEMENTS PAR DES FONCTIONS POLYNOMIALES . . . . .	p. 4
I.1.2.1. - Courbes connues par la position et les dérivées d'un certain nombre de ses points. . . . .	p. 4
I.1.2.11. - Méthode . . . . .	p. 4
I.1.2.12. - Remarque . . . . .	p. 5
I.1.2.2. - Courbes connues par la seule position d'un certain nombre de ses points. . . . .	p. 5
I.1.2.21. - Méthode . . . . .	p. 5
I.1.2.22. - Détermination de la valeur minimale de $m^* : m_{\min}^*$ . . . . .	p. 5
I.1.2.23. - Remarques . . . . .	p. 6
I.1.2.24. - Choix des valeurs du paramètre $r$ . . . . .	p. 6
I.1.3. - CHOIX DES FONCTIONS $f_k$ . . . . .	p. 7
I.2 - METHODE DE FERGISSON . . . . .	p. 8
I.2.1. - DEFINITION DES FONCTIONS $f_k$ . . . . .	p. 8
I.2.2. - CONTINUITÉ DE LA COURBURE . . . . .	p. 9
I.2.3. - CONTINUITÉ DE LA TORSION . . . . .	p.10
I.2.4. - PROPRIÉTÉ . . . . .	p.11
I.3 - METHODE DE BEZIER : (SYSTÈME U.N.I.S.U.R.F.) . . . . .	p.12
I.3.1. - DEFINITION DES FONCTIONS $f_k$ . . . . .	p.12
I.3.2. - DEGRÉ DES FONCTIONS $f_k$ . . . . .	p.12

I.3.3. - CONTINUITÉ DE LA DÉRIVÉE PREMIÈRE . . . . .	p. 14
I.3.4. - CONTINUITÉ DES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR . . . . .	p. 14
I.3.5. - COMPARAISON ENTRE LES MÉTHODES . . . . .	p. 14
I.4 - VÉRIFICATION DE LA MÉTHODE DE BEZIER-FERGUSSON . . . . .	p. 15
I.4.1. - MÉTHODOLOGIE . . . . .	p. 15
I.4.2. - DÉFINITION PARAMÉTRIQUE DE LA COURBE ANALYTIQUE . . . . .	p. 15
I.4.3. - ESTIMATIONS DU PARAMÈTRE $r$ . . . . .	p. 17
I.4.3.1. - Estimation à partir des distances . . . . .	p. 17
I.4.3.2. - Estimation par une progression arithmétique . . . . .	p. 17
I.4.4. - CALCUL ET MOYENNE DES DÉRIVÉES . . . . .	p. 17
I.4.4.1. - Calcul des dérivées . . . . .	p. 17
I.4.4.11 - Calcul des coefficients $a_k^*$ en nombre $2p + 2$ ( $m^* = 2p + 1$ ) et calcul des coefficients $a_k$ en nombre $2p + 2$ ( $m = 2p + 1$ ) . . . . .	p. 17
I.4.4.12 - Calcul des coefficients $a_k^*$ en nombre $p + 2$ ( $m^* = p + 1$ ) et calcul des coefficients $a_k$ en nombre $2p + 2$ ( $m = 2p + 1$ ) . . . . .	p. 18
I.4.4.2. - Moyenne des dérivées . . . . .	p. 19
I.4.4.21 - Moyenne arithmétique . . . . .	p. 20
I.4.4.22 - Moyenne barycentrique . . . . .	p. 20
I.4.4.23 - Moyennes des vecteurs unitaires et des modules . . . . .	p. 20
I.4.5. - CALCUL DES COEFFICIENTS $a_k$ . . . . .	p. 21
I.4.6. - CALCUL DES ERREURS . . . . .	p. 21
I.4.7. - ALGORITHMES UTILISÉS POUR VÉRIFIER LA MÉTHODOLOGIE INTRODUITE EN I.4.1 . . . . .	p. 21
I.4.7.1. - Calcul des coefficients $a_k^*$ en nombre $2p+2$ ( $m^* = 2p + 1$ ) et calcul des coefficients $a_k$ en nombre $2p+2$ ( $m = 2p + 1$ ) . . . . .	p. 21
1.4.7.11 - Cas I . . . . .	p. 22
1.4.7.12 - Cas II . . . . .	p. 22
1.4.7.13 - Cas III . . . . .	p. 22
I.4.7.2. - Calcul des coefficients $a_k^*$ en nombre $p + 2$ ( $m^* = p + 1$ ) et calcul des coefficients $a_k$ en nombre $2p+2$ ( $m = 2p + 1$ ) . . . . .	p. 22
I.4.7.21 - Cas I . . . . .	p. 22
I.4.7.22 - Cas II . . . . .	p. 22
I.4.7.23 - Cas III . . . . .	p. 22
I.4.8. - RESULTATS . . . . .	p. 23
I.4.8.1. - Calcul des coefficients $a_k^*$ en nombre $2p+2$ ( $m^*=2p+1$ ) et calcul des coefficients $a_k$ en nombre $2p+2$ ( $m=2p+1$ ) . . . . .	p. 23
I.4.8.2. - Calcul des coefficients $a_k^*$ en nombre $p + 2$ ( $m^*=p+1$ ) et calcul des coefficients $a_k$ en nombre $2p+2$ ( $m=2p+1$ ) . . . . .	p. 23

I.5 - CONCLUSION DU CHAPITRE I . . . . .	p.2
TABLEAUX RELATIFS AU CHAPITRE I . . . . .	p.3
<u>CHAPITRE II : RACCORDEMENT DE DEUX ARCS DE COURBES</u> . . . . .	p.3
II.1 - INTRODUCTION . . . . .	p.3
II.2 - DEFINITION D'UN ARC DE RACCORDEMENT PAR PROJECTION STEREOGRA- PHIQUE D'UNE COURBE TRACEE SUR UNE SPHERE . . . . .	p.3
II.2.1. - FORMULATION EN COORDONNEES CARTESIENNES . . . . .	p.3
II.2.2. - FORMULATION EN COORDONNEES SPHERIQUES . . . . .	p.4
II.2.3. - EXPRESSION DE L'EQUATION DE LA COURBE PROJETEE DANS LE PLAN $z = R$ . . . . .	p.4
II.2.4. - CONCLUSION . . . . .	p.4
II.3 - RACCORDEMENT DE DEUX ARCS DE COURBES A L'AIDE DE L'ABSCISSE CURVILIGNE . . . . .	p.4
II.3.1. - DESCRIPTION DE LA METHODE . . . . .	p.4
II.3.2. - APPLICATION A L'APPROXIMATION D'ARCS DE CERCLE ET D'EL- LIPSE . . . . .	p.5
II.4 - CONCLUSION DU CHAPITRE II . . . . .	p.5
<u>CHAPITRE III : APPLICATIONS DU PROBLEME DU RACCORDEMENT DE DEUX COURBES</u> <u>A LA DEFINITION DE LA COURBE STATORIQUE D'UNE MACHINE VO-</u> <u>LUMETRIQUE A PALETTES</u> . . . . .	p.5
III.1 - DESCRIPTION D'UNE MACHINE VOLUMETRIQUE A PALETTES . . . . .	p.5
III.2 - CARACTERISTIQUES DE LA COURBE STATORIQUE . . . . .	p.5
III.3 - ACCELERATION DU POINT DE CONTACT PALETTE-STATOR . . . . .	p.5
III.4 - DEFINITION DE LA COURBE STATORIQUE . . . . .	p.6
III.4.1. - DEFINITION PAR UN ARC . . . . .	p.6
III.4.2. - DEFINITION PAR DEUX ARCS . . . . .	p.6
III.4.3. - CAS ETUDIES . . . . .	p.6
III.4.3.1. - Définition par un arc . . . . .	p.6
III.4.3.2. - Définition par deux arcs . . . . .	p.6

III.4.4. - APPLICATION DE LA DEFINITION D'UN ARC DE RACCORDEMENT PAR PROJECTION STEREOGRAPHIQUE D'UNE COURBE TRACEE SUR UNE SPHERE A LA DEFINITION DE LA COURBE STATORIQUE. . . . .	p.65
III.4.4.1. - Rayon polaire et rayon de courbure de l'arc de rac- cordement . . . . .	p.65
III.4.4.11. - Rayon polaire de la courbe projetée relativement à B (origine du plan de projection)	
III.4.4.12. - Rayon de courbure de la courbe projetée . . . . .	p.67
III.4.4.2. - Résultats relatifs à l'arc $A_1$ . . . . .	p.70
III.4.4.21. - Présentation . . . . .	p.70
III.4.4.22. - Influence de la dérivée première de $\theta$ pour $r = 0$ et $r = 1$ et influence du rayon de courbure $R_{c_1}$ . . . . .	p.73
III.4.4.22.1. - Rayon polaire de l'arc . . . . .	p.73
III.4.4.22.2. - Rayon de courbure de l'arc . . . . .	p.73
III.4.4.22.3. - Influence du rayon de courbure $R_{c_1}$ . . . . .	p.74
III.4.4.22.4. - Accélération normale le long de l'arc . . . . .	p.74
III.4.4.23. - Influence du rayon de sphère R (tableaux III.3 et III.6 à III.8) . . . . .	p.76
III.4.4.24. - Influence des dérivées secondes de l'angle polaire par rapport à r en $r = 0$ et $r = 1$ (tableaux III.9) . . . . .	p.77
III.4.4.3. - Conclusion . . . . .	p.79
III.4.5. - APPLICATION DU RACCORDEMENT DE DEUX ARCS DE COURBE A L'AIDE DE L'ABSCISSE CURVILIGNE . . . . .	p.79
III.4.5.1. - Rayon polaire et rayon de courbure de la courbe statorique . .	p.80
III.4.5.2. - Résultats . . . . .	p.81
III.4.5.21. - Définition par un arc . . . . .	p.81
III.4.5.22. - Définition par deux arcs . . . . .	p.82
III.4.5.22.1. - Présentation . . . . .	p.82
III.4.5.22.2. - Rayon polaire (tableaux III.12 à 16) . . . . .	p.82
III.4.5.22.3. - Rayon de courbure (tableaux III.12 à 16) . . . . .	p.82
III.4.5.22.4. - Influence du rayon de courbure en $r = 1$ (tableaux III.12 à 16) . . . . .	p.8
III.4.5.22.5. - Influence des dérivées secondes de l'abscisse curvili- gne par rapport à r en $r = 0$ et $r = 1$ . . . . .	p.8
III.4.6. - CONCLUSION DU CHAPITRE III . . . . .	p.8
TABLEAUX DU CHAPITRE III . . . . .	p.8

CHAPITRE IV - SURFACES DE L'ESPACE EUCLIDIEN . . . . . p.10

IV.1 - DEFINITION PARAMETRIQUE D'UNE SURFACE . . . . . p.10

IV.1.1. - POSITION DU PROBLEME . . . . . p.10

IV.1.2. - APPROXIMATION DE SURFACES DONT ON CONNAIT UN CERTAIN NOMBRE D'ELEMENTS PAR DES FONCTIONS POLYNOMIALES . . . . .	p.10
IV.1.2.1. - Surfaces connues par la position et les dérivées d'un certain nombre de points . . . . .	p.10
IV.1.2.2. - Surfaces connues par la seule position de certains points . . . . .	p.10
IV.1.2.21 - Méthode . . . . .	p.10
IV.1.2.22 - Détermination de la valeur minimale de $m^* = m^*_{\min}$ . . . . .	p.10
IV.1.2.23 - Choix des valeurs des paramètres $r$ et $s$ . . . . .	p.10
IV.1.3. - DIFFERENTES METHODES . . . . .	p.110
 IV.2 - DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME COONS . . . . .	 p.11
IV.2.1. - DEFINITION ANALYTIQUE D'UN CARREAU . . . . .	p.11
IV.2.2. - DEFINITION DES FONCTIONS $F_0$ et $F_1$ jusque l'ordre 1 (continuité de la tangente) $^{\circ}$ . . . . .	p.11
IV.2.3. - DEFINITION DES FONCTIONS $F_0$ et $F_1$ jusque l'ordre 2 (continuité de la courbure) $^{\circ}$ . . . . .	p.11
IV.2.4. - REMARQUE . . . . .	p.11
IV.2.5. - RESULTATS OBTENUS SUR LA SPHERE . . . . .	p.11
IV.2.6. - APPLICATION DU SYSTEME COONS AUX SURFACES REGLEES . . . . .	p.12
 IV.3 - DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME U.N.I.S.U.R.F. . . . .	 p.12
IV.3.1. - DEFINITION ANALYTIQUE D'UN CARREAU . . . . .	p.12
IV.3.2. - RESULTATS OBTENUS SUR LA SPHERE AVEC $p = 1$ et $p = 2$ . . . . .	p.12
 IV.4 - ETUDE COMPARATIVE DES DIFFERENTES METHODES DE DEFINITION DE SUR- FACE . . . . .	 p.13
IV.4.1. - ETUDE COMPARATIVE DES RESULTATS OBTENUS SUR UNE POR- TION DE SPHERE . . . . .	p.13
IV.4.2. - ETUDE COMPARATIVE DES RESULTATS OBTENUS SUR UNE POR- TION D'HYPERBOLOIDE . . . . .	p.13
IV.4.2.1. - Définition de la portion d'hyperboloïde . . . . .	p.13
IV.4.2.2. - Résultats obtenus sur l'hyperboloïde de révolution . . . . .	p.13
 IV.5 - CONCLUSION DU CHAPITRE IV . . . . .	 p.13
 CONCLUSION . . . . .	 p.13
 ANNEXES . . . . .	 p.13

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] David F. ROGERS - J. Alan ADAMS : *Mathematical Elements For Computer Graphics*. Mc Graw-Hill Book Compagny
  
- [ 2 ] P. BEZIER : *Essai de définition numérique des Courbes et des Surfaces expérimentales.*  
(Contribution à l'étude des propriétés de courbes et des surfaces polynomiales à coefficients vectoriels). Thèse de Doctorat d'Etat - PARIS VI  
23 février 1977
  
- [ 3 ] G. CAGNAC - E. RAMIS - J. COMMEAU : *Applications de l'Analyse à la Géométrie*. Masson et Cie
  
- [ 4 ] J. BASS : *Cours de Mathématiques. Tome I* - Masson et Cie
  
- [ 5 ] S. LAROZE : *Résistance des Matériaux et Structures. Tome I*. Eyrolles - Masson et Cie
  
- [ 6 ] G. CHILON : *Analyse Mathématique - Fonctions de plusieurs variables réelles 1e et 2e parties*. Editions de MOSCOU

## ERRATA

- p 48 -  $\frac{dq}{dr} = \frac{dq}{ds} \frac{ds}{dr}$  (II.12)

$$\frac{d^2q}{dr^2} = \frac{d^2q}{ds^2} \left( \frac{ds}{dr} \right)^2 + \overset{\rightarrow}{t} \frac{d^2s}{dr^2}$$

- p 49 - Le rayon de courbure en  $r = 0$  et  $s = 1$   
ne dépend pas de  $\frac{ds}{dr}$  et  $\frac{d^2s}{dr^2}$

- p 52 - on peut prendre  $\frac{dt}{dr} = \frac{\Delta t}{\Delta r} = \frac{\pi}{2}$

- p 82 - La définition par un arc est peu commode car elle ne permet pas de contrôler simultanément le rayon polaire minimal et le rayon polaire maximal

- p 106 - au moins une fonction  $f_{ij}$  de classe  $C^p$

## INTRODUCTION

Une étude du comportement dynamique d'une palette de machine volumétrique à stator de section droite (courbe statorique) hypertrochoïdale, menée dans le cadre de notre diplôme d'études approfondies, nous a conduit aux conclusions suivantes :

Pour qu'une telle machine fonctionne correctement, il faut satisfaire notamment à :

- la condition de non décollement de la palette et à
- la condition d'étanchéité entre rotor et stator.

La première condition dépend notamment de la composante normale de l'accélération du centre de gravité de la palette qui est elle-même fonction du rayon de courbure de la trajectoire du point de contact palette-stator. L'équilibre des forces en présence (particulièrement et notamment l'influence dans cet équilibre des forces de pression en bout de palette) conduise à rendre l'accélération normale du point de contact palette-stator maximale au voisinage de la zone à rayon polaire minimal (les forces de pression y sont en effet maximales) ; et il conduit par conséquent à rendre maximale la courbure au voisinage de cette zone à rayon polaire minimal.

La seconde condition conduit à choisir le rayon de courbure de la courbe statorique égal au rayon polaire minimal là où cette courbe est tangente au cercle de rayon polaire minimal (rayon du rotor à la tolérance près).

Les courbes mathématiques usuelles telles que l'ellipse ou l'hypertrochoïde ne permettent pas d'assurer ces deux conditions. Il nous a donc paru nécessaire de définir d'autres courbes qui satisfont à ces conditions et nous nous sommes orientés, pour atteindre cet objectif, vers les méthodes de définition et de lissage de courbes.

Le travail effectué par P. BEZIER à propos de ces méthodes a été le point de départ de notre étude.

Le chapitre I consiste en l'étude de la précision de la méthode U.N.I.S.U.R.F. et de la méthode de J. FERGUSSON. Ces méthodes définissent une courbe par arcs successifs en utilisant des polynômes à coefficients vectoriels du paramètre  $r$  qui assurent la continuité d'ordre  $p$ . L'étude de la précision nous a permis de mettre en évidence la difficulté de choisir les valeurs du paramètre  $r$  lorsque la courbe n'est connue que par la seule position de points.

Pour éviter cette difficulté, nous nous proposons deux définitions de courbes par la connaissance de la position de points et de certaines conditions en ces points, comme par exemple : la tangente, le vecteur normal, le rayon de courbure ... La courbe à obtenir ne pouvant présenter aucune instabilité de forme, nous avons pensé que la projection stéréographique d'une courbe tracée sur une sphère éviterait ce problème. Ceci constitue la première définition. La seconde est plus générale puisqu'elle peut être appliquée en vue de la création de courbes gauches. Ces deux définitions sont exposées au chapitre II.

Le chapitre III est l'application de ces deux définitions au cas particulier de la recherche de courbes statoriques de machine volumétrique à palettes.

Le chapitre IV est une brève étude de la précision des méthodes de S.A. COONS et P. BEZIER (système U.N.I.S.U.R.F.) relatives à la définition de surfaces. Nous proposons une définition inspirée de celle de S.A. COONS en vue de son application aux surfaces réglées.

# CHAPITRE I

## COURBES DE L'ESPACE EUCLIDIEN $E_3$

### I.1. - DEFINITION PARAMETRIQUE D'UNE COURBE :

#### 1.1.1. - POSITION DU PROBLÈME

Beaucoup de courbes et surfaces utilisées en technique ne sont pas définies analytiquement. Pour matérialiser ou traiter de telles courbes, on peut utiliser une représentation définie par une fonction polynomiale à coefficients vectoriels d'une variable réelle  $r$  ; les coefficients de ces fonctions étant déterminés pour satisfaire à :

- des conditions de passage en certains points
- des conditions de continuité jusqu'à l'ordre  $p$  (cf. Annexe I)
- d'éventuelles conditions supplémentaires en des points de passage.

Bien que le recours à une fonction polynomiale ne soit pas impératif, on préfère souvent utiliser ce type de fonction dans un souci de simplicité et d'efficacité de traitement numérique, et c'est ce point de vue que nous adopterons par la suite.

Le degré des fonctions polynomiales choisies doit être suffisant pour assurer globalement la continuité d'ordre  $p$  souhaitée, et localement les conditions de passage en certains points ainsi que les éventuelles conditions supplémentaires.

Il est également évident que pour résoudre facilement les systèmes d'équations auxquels on est conduit et pour éviter entre les points de passage des instabilités de forme, les fonctions polynomiales ne doivent pas comporter trop de paramètres.

On est dès lors amené à prendre une définition segmentée des courbes en plusieurs arcs successifs.

Chaque arc est à définition paramétrée minimale : il ne peut par conséquent satisfaire qu'un nombre restreint de conditions locales ; en outre, il doit se raccorder avec les arcs adjacents avec une continuité jusqu'à l'ordre  $p$  pour assurer cette continuité globalement sur l'ensemble de la courbe.

Sur chaque arc arbitrairement orienté, on définit le vecteur position d'un point M courant par :

$$q(r) = \sum_{k=0}^m a_k \cdot f_k(r) \quad (I.1) \quad (*)$$

où :

m : entier positif

r : paramètre réel variant de 0 pour le point de départ, à 1 pour le point d'arrivée de l'arc considéré

$\{f_k(r), k = 0, m\}$  : ensemble de fonctions réelles du paramètre r à définition unique pour l'ensemble des arcs

$a_k$  : coefficients vectoriels caractéristiques de chaque arc.

Pour que la représentation analytique q(r) assure la continuité jusqu'à l'ordre p, il faut :

- retenir pour chaque arc au moins une fonction  $f_k$  de classe  $C^p$ ,
- assurer aux extrémités de chaque arc (en  $r = 0$  et  $r = 1$ ) la continuité d'ordre p, ce qui impose  $2(p + 1)$  conditions.

Les conditions précédentes s'expriment sous forme d'équations d'un système linéaire à (m + 1) inconnues.

Pour obtenir une solution unique, il faut par conséquent satisfaire à la condition

$$m = 2p + 1 \quad (I.2)$$

### I.1.2. - APPROXIMATION DE COURBES DONT ON CONNAIT UN CERTAIN NOMBRE D'ÉLÉMENTS PAR DES FONCTIONS POLYNOMIALES.

#### 1.12.1. - COURBES CONNUES PAR LA POSITION ET LES DERIVEES D'UN CERTAIN NOMBRE DE SES POINTS.

1.12.11 - Méthode : On ordonne les points connus. A ces deux points successifs

\*) on notera  $q^{(i)} = \frac{d^i q}{dr^i}$  la ième dérivée de q par rapport à r

on associe un arc. Les conditions de continuité entre deux arcs successifs se traduisent par un système de  $2(p + 1)$  équations linéaires dont les termes indépendants sont connus et dont les inconnues vectorielles en nombre  $m = 2(p + 1)$  sont les coefficients  $a_k$  repris dans les formules du type (I.1).

I.12.12. - *Remarque* : Le cas qui est ici envisagé est rencontré peu fréquemment lorsque les courbes que l'on veut représenter analytiquement sont obtenues par un relevé expérimental de points ; en effet, dans ce cas, il est très difficile de mesurer les grandeurs physiques liées aux dérivées.

I.12.2. - COURBES CONNUES PAR LA SEULE POSITION D'UN CERTAIN NOMBRE DE SES POINTS.

I.12.21. - Méthode :

- On ordonne les points connus
- On fixe le nombre de points appartenant à un même arc
- On calcule les coefficients  $a_k^*$  de chaque arc à partir des conditions de passage par les points de l'arc
- On calcule les dérivées jusqu'à l'ordre  $p$  aux extrémités de chaque arc
- On calcule la moyenne des dérivées obtenues en chaque point commun à deux arcs successifs
- On calcule de nouveaux coefficients  $a_k$  à partir de ces valeurs moyennes de dérivées et des points de passage communs à deux arcs

*Remarque* : Les trois premières étapes de cette méthode conduisent à une définition paramétrée de chaque arc selon la formule suivante analogue à celle numérotée I.1

$$q^*(r) = \sum_{k=0}^{m^*} a_k^* f_k(r) \quad (I.3)$$

I.1.2.2.2. - Détermination de la valeur minimale de  $m^*$  :  $m_{\min}^*$

En vue d'assurer la continuité globale d'ordre  $p$ ,  $q^*$  doit vérifier la continuité d'ordre  $p$  sur chacun des arcs. La dérivée  $p^{\text{ième}}$  de  $q^*$  doit être déterminée en  $r = 0$  et  $r = 1$ , et elle doit par conséquent s'exprimer par un polynôme de degré minimal égal à  $1$ , dès lors le degré minimal de la fonction vectorielle  $q^*$  est égal à  $p + 1$ ,

d'où il résulte :

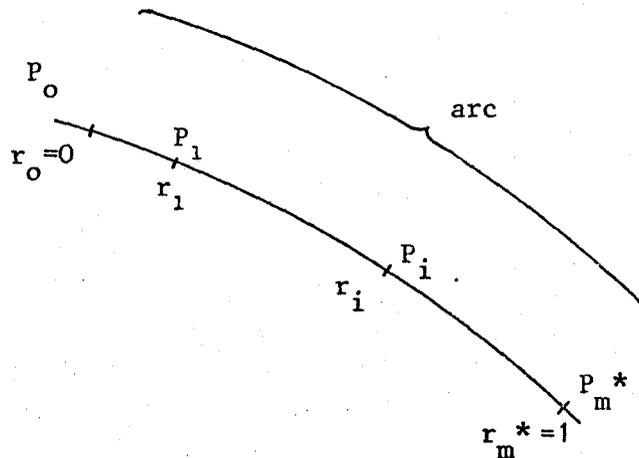
$$m_{\min}^* = p + 1 \quad (I.4)$$

I.12.23 - Remarques :

- $m_{\min}^*$  est différent de  $m$  sauf lorsque  $p$  est nul ; dans ce cas, peu intéressant, qui correspond à une succession de segments de droite,  $m = m_{\min}^* = 1$ .
- Si  $m^* = m_{\min}^*$ , le nombre de points nécessaires à la définition de chaque arc est *minimal* mais entraîne pour la courbe un nombre maximal d'arcs, de conditions de passage et de coefficients  $a_k$ .
- Si  $m^* > m_{\min}^*$ , le nombre de points nécessaires à la définition de chaque arc *augmente* et entraîne un nombre moins élevé d'arcs, de conditions de passage, et de coefficients  $a_k$ .

I.12.24 - Choix des valeurs du paramètre  $r$  :

La définition analytique de l'arc selon (I.3) nécessite la connaissance d'au moins  $m_{\min}^* + 1$  points de passage par arc (d'après I.4). Dans le système d'équations relatif aux conditions de passage par ces points, et qui permet de trouver les coefficients  $a_k^*$ , le paramètre  $r$  en chacun des points, sauf aux extrémités de l'arc, est indéterminé.



Soient  $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots, P_m^*$  les points de passage de l'arc à définir et  $r_0, r_1, \dots, r_i, \dots, r_m^*$  les valeurs correspondantes du paramètre  $r$ .

Ces valeurs peuvent être choisies arbitrairement comme suit si les points de passage sont de disposition quelconque les uns par rapport aux autres :

$$- r_i = \frac{\sum_{l=1}^i \overrightarrow{||P_{l-1} P_l||}}{\sum_{l=1}^{m^*} \overrightarrow{||P_{l-1} P_l||}} \quad \text{pour } 0 < i \leq m^*$$

$$- r_0 = 0 \tag{I.5}$$

Si les points sont sensiblement régulièrement espacés, on peut choisir plus simplement :

$$r_i = \frac{i}{m^*} \quad 0 \leq i \leq m^* \tag{I.6}$$

### 1.1.5. - CHOIX DES FONCTIONS $f_k$

De ce qui précède, il reste à définir les fonctions  $f_k$  intervenant dans (I.1) et (I.3). Il existe deux méthodes classiques de définition de ces fonctions qui sont :

- la méthode de FERGUSON [1]
- et la méthode de BEZIER [2].

I.2.1. - DÉFINITION DE FONCTIONS  $f_k$

FERGUSSON impose deux conditions de passage aux points extrêmes de l'arc et deux conditions sur les dérivées premières en ces mêmes points, ce qui conduit à :

$p = 1$ , et  
 $m = 3$ .

Les fonctions  $f_k$  sont de la forme :

$f_k(r) = r^k \quad 0 \leq k \leq 3.$  (I.7)

Les conditions s'écrivent, d'après (I.1) :

- pour le vecteur position :

$q_0 = a_0$   
 $q_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3,$

- pour le vecteur dérivée première :

$q'_0 = a_1$   
 $q'_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$

On en déduit :

$a_0 = q_0$   
 $a_1 = q'_0$   
 $a_2 = -q'_1 - 2q'_0 + 3q_1 - 3q_0$  (I.8)  
 $a_3 = q'_1 + q'_0 - 2q_1 - 2q_0.$

On peut naturellement généraliser la méthode de FERGUSSON à un ordre  $p$  quelconque, les fonctions  $f_k$  s'écrivent dans ce cas :

$f_k(r) = r^k \quad 0 \leq k \leq m$  (I.9)

Examinons les cas correspondant à  $p = 2$  et à  $p = 3$  qui assurent respectivement la continuité de courbure et la continuité de torsion.

I.2.2. - CONTINUITÉ DE LA COURBURE :

$p = 2$  dans ce cas, et  $m = 5$

Les conditions aux points extrêmes de l'arc s'écrivent :

- pour le vecteur position :

$$q_0 = a_0$$

$$q_1 = \sum_{k=0}^5 a_k,$$

- pour le vecteur dérivée première :

$$q'_0 = a_1$$

$$q'_1 = \sum_{k=1}^m k a_k,$$

- pour le vecteur dérivée seconde :

$$q''_0 = 2 a_2$$

$$q''_1 = \sum_{k=2}^m k(k-1) a_k.$$

On obtient dès lors :

$$a_0 = q_0$$

$$a_1 = q'_0$$

$$a_2 = q''_0/2 \tag{I.10}$$

$$a_3 = 10 (q_1 - q_0) - 4 q'_1 - 6 q'_0 + q''_1/2 - 3/2 q''_0$$

$$a_4 = - 15 (q_1 - q_0) + 7q'_1 + 8 q'_0 - q''_1 + 3/2 q''_0$$

$$a_5 = 6 (q_1 - q_0) - 3q'_1 - 3 q'_0 + q''_1/2 - q''_0/2.$$

### I.2.3. - CONTINUITÉ DE LA TORSION

$p = 3$  dans ce cas, et  $m = 7$ .

Les conditions aux points extrêmes de l'arc s'écrivent :

- pour le vecteur position :

$$q_0 = a_0$$

$$q = \sum_{k=0}^7 a_k,$$

- pour la dérivée première :

$$q'_0 = a_1$$

$$q' = \sum_{k=1}^7 k a_k,$$

- pour le vecteur dérivée seconde :

$$q''_0 = 2 a_2$$

$$q''_1 = \sum_{k=2}^7 k (k-1) a_k,$$

- pour le vecteur dérivée troisième :

$$q'''_0 = 6 a_3$$

$$q'''_1 = \sum_{k=3}^7 k (k-1) (k-2) a_k.$$

On obtient à partir de ces expressions :

$$a_0 = q_0$$

$$a_1 = q_1$$

$$a_2 = q''_0 / 2$$

$$a_3 = q'''_0 / 6$$

(I.11)

$$a_4 = 35 (q_1 - q_0) - 15 q'_1 - 20 q'_0 + 5/2 q''_1 - 5 q''_0 - q'''_1/6 - 2/3 q'''_0$$

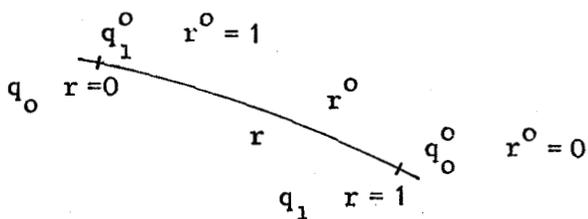
$$a_5 = -84 (q_1 - q_0) + 39 q'_1 + 45 q'_0 - 7 q''_1 + 10 q''_0 + q'''_1/2 + q'''_0$$

$$a_6 = +70 (q_1 - q_0) - 34 q'_1 - 36 q'_0 + 13/2 q''_1 - 15/2 q''_0 - q'''_1/2 + 2/3 q'''_0$$

$$a_7 = -20 (q_1 - q_0) + 10 q'_1 + 10 q'_0 - 2 q''_1 + 2 q''_0 + q'''_1/6 + q'''_0/6$$

#### 1.2.4. - PROPRIÉTÉ

En changeant le sens de parcours sur l'arc, c'est-à-dire en définissant  $q^0 (1 - r^0) = q (r)$ , on ne modifie pas la courbe.



### I.3. - METHODE DE BEZIER : (SYSTEME U.N.I.S.U.R.F.)

#### I.3.1. - DÉFINITION DE FONCTIONS $f_k$

P. BEZIER définit les fonctions  $f_k$  selon une base de BERNSTEIN [2]

$$- f_0(r) = 1$$

$$- f_k(r) = \frac{(-r)^k}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}} \phi_m \quad 1 \leq k \leq m$$

$$\text{avec } \phi_m = \frac{(1-r)^m - 1}{r} \quad (\text{I.12})$$

#### I.3.2. - DEGRÉ DES FONCTIONS $f_k$

La fonction polynomiale  $\phi_m$  est de degré  $m-1$ , les fonctions dérivées  $(k-1)$  ième de  $\phi_m$  sont de degré  $m-k$  et les fonctions  $f_k$  sont de degré  $m$ .

En développant les fonctions  $f_k$  et en ordonnant (I.1) selon les puissances de  $r$ , on obtient une formulation identique à celle de FERGUSSON.

#### I.3.3. - CONTINUITÉ DE LA DÉRIVÉE PREMIÈRE

$p = 1, m = 3$  cf. (I.2)

La fonction  $\phi_m$  s'écrit d'après (I.12) :

$$\phi_3 = \frac{(1-r)^3 - 1}{r}$$

ou encore :

$$\phi_3 = -r^2 + 3r - 3.$$

On en déduit les fonctions  $f_k$  :

$$f_1(r) = r^3 - 3r^2 + 3r$$

$$f_2(r) = -2r^3 + 3r^2$$

$$f_3(r) = r^3.$$

Les dérivées premières :

$$f'_1(r) = 3r^2 - 6r + 3$$

$$f'_2(r) = -6r^2 + 6r$$

$$f'_3(r) = 3r^2.$$

Les conditions aux points  $r = 0$  et  $r = 1$  s'énoncent :

$$q_0 = a_0$$

$$q_1 = a_0 + a_1 \cdot f_1(1) + a_2 \cdot f_2(1) + a_3 \cdot f_3(1)$$

$$q'_0 = a_1 \cdot f'_1(0) + a_2 \cdot f'_2(0) + a_3 \cdot f'_3(0)$$

$$q'_1 = a_1 \cdot f'_1(1) + a_2 \cdot f'_2(1) + a_3 \cdot f'_3(1),$$

ou encore :

$$q_0 = a_0$$

$$q_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$q'_0 = 3 \cdot a_1$$

$$q'_1 = 3 \cdot a_3.$$

On en déduit les coefficients  $a_k$  :

$$a_0 = q_0$$

$$a_1 = q'_0 / 3$$

$$a_2 = q_1 - q_0 - q'_0 / 3 - q'_1 \quad (3)$$

$$a_3 = q'_1 / 3.$$



I.3.4. - CONTINUITÉ DES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

On peut généraliser la méthode développée au paragraphe I.3.3. pour des conditions de continuité d'ordre supérieur à 1.

Dans ce cas, les dérivées  $j^{\text{ème}}$  des fonctions  $f_k(r)$  aux points  $r = 0$  et  $r = 1$  s'écrivent :

$$\frac{d^j}{dr^j} f_k(0) \neq 0 \quad \begin{matrix} j = 1, p \\ k = 1, j \end{matrix}$$

$$\frac{d^j}{dr^j} f_k(0) = 0 \quad \begin{matrix} j = 1, p \\ k = j + 1, m \end{matrix}$$

(I.13)

$$\frac{d^j}{dr^j} f_k(1) = 0 \quad \begin{matrix} j = 1, p \\ k = j + 1, m \end{matrix}$$

$$\frac{d^j}{dr^j} f_k(1) \neq 0 \quad \begin{matrix} j = 1, p \\ k = j + 1, m \end{matrix}$$

et les expressions des conditions imposées aux points extrêmes de l'arc s'en déduisent aisément.

Dans la suite de ce travail, on utilisera de préférence la formulation de FERGUSON, ceci sans nuire à la généralité puisque les deux méthodes sont équivalentes.

I.3.5. - COMPARAISON ENTRE LES MÉTHODES

Un avantage (système U.N.I.S.U.R.F.) est de permettre le calcul aisé des coefficients  $a_k$ , puisque ceux-ci sont proportionnels aux vecteurs dérivées sauf pour celui d'indice  $p + 1$  (combinaison linéaire des vecteurs positions et des dérivées jusqu'à l'ordre  $p$ ).

Il importe de remarquer que les fonctions  $f_k$  sont analytiquement plus complexes dans la méthode UNISURF que dans la méthode de FERGUSON, par contre les coefficients  $a_k$  sont plus faciles à déterminer et à interpréter.

## I.4. - VERIFICATION DE LA METHODE DE BEZIER-FERGUSSON

### I.4.1. - MÉTHODOLOGIE

Elle est basée sur celle exposée au § I.12.21

La méthode peut être vérifiée en comparant une courbe quelconque définie analytiquement et la courbe obtenue numériquement par cette méthode en imposant de passer par un certain nombre de points de la courbe analytique. Ceci a été effectué en assurant la continuité de courbure ( $p = 2$ ) et la continuité de torsion ( $p = 3$ ) dans les cas particuliers suivants:

a) Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $2p + 2$  ( $m^* = 2p + 1$ )

et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ )

b) Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $p + 2$  ( $m^* = p + 1$ )

et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ )

Dans le cas (b), on déterminera les coefficients  $a_k^*$  à l'aide de la méthode des moindres carrés.

### I.4.2. - DÉFINITION PARAMÉTRIQUE DE LA COURBE ANALYTIQUE :

La courbe analytique choisie a priori est définie dans un repère  $O X Y Z$  par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \\ z &= e^{2t} \end{aligned} \quad (I.14)$$

en fonction du paramètre  $r$  réel.

La courbe analytique est divisée en un certain nombre d'arcs sur lesquels sont choisis comme suit les  $m + 1$  points de passage (d'indice  $i$  variant de 0 à  $m$ ) de la courbe numérique :

- le point d'origine de l'arc  $j$  est défini par la valeur

$$t = (j - 1) t^*,$$

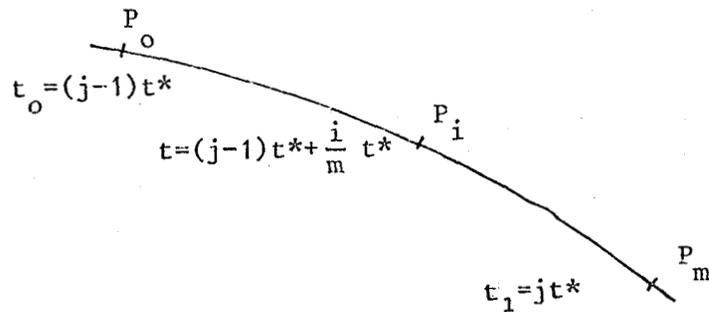
- le point extrêmité de l'arc  $j$  est défini par la valeur

$$t = j t^*$$

- le  $i^{\text{ème}}$  point de l'arc  $j$  est défini par la valeur

$$t = (j - 1)t^* + \frac{i}{m} t^* \tag{I.15}$$

le pas  $t^*$  étant choisi arbitrairement.



Dans les applications numériques, nous ferons varier  $t^*$  de 2°5 à 12°5 pour 9 arcs successifs.

Remarques :

- l'expression (I.15) est valable pour tous les points de l'arc  $j$
- deux points successifs quelconques de la courbe sont à distance variable.

1.4.3. - ESTIMATIONS DU PARAMÈTRE r

Pour un arc donné, les points sont ordonnés et sont affectés d'un indice variant de 0 à m.

1.4.3.1. ESTIMATION A PARTIR DES DISTANCES :

$$\begin{aligned}
 - r_0 &= 0 \\
 - r_i &= \frac{\sum_{j=1}^i \overrightarrow{||P_{j-1} P_j||}}{\sum_{j=1}^m \overrightarrow{||P_{j-1} P_j||}} \quad (I.16)
 \end{aligned}$$

1.4.3.2. ESTIMATION PAR UNE PROGRESSION ARITHMETIQUE :

On affecte arbitrairement au  $i^{\text{ème}}$  point de l'arc la valeur :

$$r_i = \frac{i}{m} \quad 0 \leq i \leq m \quad (I.17)$$

1.4.4. - CALCUL ET MOYENNE DES DÉRIVÉES

1.4.4.1. Calcul des dérivées.

Les deux cas a) et b) évoqués au § I.4.1. diffèrent par le nombre des coefficients  $a_k^*$ . Dans les deux cas, on calcule ces coefficients par la connaissance de  $2p + 2$  points par arcs.

1.4.4.11. Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $2p + 2$  ( $m^* = 2p + 1$ ) et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ )

L'estimation de r étant faite, les  $2p + 2$  conditions de passage par les points conduisent à un système linéaire de  $2p + 2$  équations indépendantes à  $2p + 2$  inconnues  $a_k^*$  qu'il est facile de résoudre.

I.4.4.12. Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $p + 2$  ( $m^* = p + 1$ )  
 et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ )

L'estimation de  $r$  étant faite, les  $2p + 2$  conditions de passage relatives aux différents  $q_i$  (cf. I.4.2) conduisent à un système de  $2p + 2$  équations à  $p + 2$  inconnues  $a_k^*$ . Le nombre d'équations étant supérieur au nombre d'inconnues, on applique la méthode des moindres carrés pour, réduire le nombre d'équations.

La définition préalable de l'arc est donnée par l'expression (I.3) utilisant les fonctions de FERGUSSON :

$$q^*(r_i) = \sum_{k=0}^{m^*} a_k^* r_i^k$$

Les coefficients  $a_k^*$  sont tels que l'on doit minimiser la quantité  $Q_\alpha$  par rapport à la  $\alpha$ ième composante de  $a_k^*$ , notée  $a_{k\alpha}^*$ , et définie comme suit :

$$Q_\alpha = Q_\alpha (a_{k\alpha}^* ; k = 0, m^*)$$

$$Q_\alpha = \sum_{i=0}^m [q_{i\alpha} - q_\alpha^*(r_i)]^2 \quad (I.18)$$

où :

$q_{i\alpha}$  est la  $\alpha$ ième composante de  $q_i$

et  $q_\alpha^*(r_i)$  la  $\alpha$ ième composante de  $q^*(r_i)$

Les conditions de passage aux points extrêmes sont :

$$q_0 = a_0$$

(I.19)

$$q_m = \sum_{k=0}^{m^*} a_k^*$$

La minimisation de  $Q_\alpha$  par rapport à  $a^*_{l\alpha}$ ,  $l = 1, m^*-1$  conduit à  $m^*-1$  conditions :

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial a^*_{l\alpha}} = 0$$

qui s'écrivent encore :

$$\sum_{i=1}^{m-1} [q_{i\alpha} - q_\alpha^*(r_i)] r_i^1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} [q_{i\alpha} - \sum_{k=0}^{m^*} a^*_{k\alpha} r_i^k] r_i^1 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m^*} a^*_{k\alpha} \left( \sum_{i=1}^{m-1} r_i^{k+1} \right) = \sum_{i=1}^{m-1} (q_{i\alpha} - q_{o\alpha}) r_i^1 \quad (I.20)$$

Le système d'équations (I.19) et (I.20) permet de calculer les coefficients  $a^*_k$ ,  $k = 0, m^*$

I.4.4.2. - Moyenne des dérivées :

Trois variantes ont été exécutées pour le calcul des moyennes respectives des dérivées premières, secondes et troisièmes nécessaires pour assurer les continuités respectives de courbure et de torsion.

Pour deux arcs successifs d'indices  $j$  et  $j + 1$ , on désigne par :

-  $\frac{d^i}{dr^i} q_j(1)$ , la dérivée  $i^{\text{ème}}$  de  $q_j$  par rapport à  $r$  en  $r = 1$

pour l'arc  $j$ ,

-  $\frac{d^i}{dr^i} q_{j+1}(0)$ , la dérivée  $i^{\text{ème}}$  de  $q_{j+1}$  par rapport à  $r$  en  $r = 0$

pour l'arc  $j + 1$ .

I.4.4.2.1- Moyenne arithmétique

On remplace  $\frac{d^i}{dr^i} q_j (1)$  et  $\frac{d^i}{dr^i} q_{j+1} (0)$  par la valeur :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d^i}{dr^i} q_j (1) + \frac{d^i}{dr^i} q_{j+1} (0) \right) \quad (I.21)$$

I.4.4.2.2.- Moyenne barycentrique

On affecte à chacune des dérivées un coefficient qui n'est autre que la longueur de la corde à l'arc sur lequel la dérivée est déterminée.

On remplace les dérivées au point commun de deux arcs successifs par :

$$\frac{\|q_j (1) - q_j (0)\| \cdot \frac{d^i}{dr^i} q_j (1) + \|q_{j+1} (1) - q_{j+1} (0)\| \cdot \frac{d^i}{dr^i} q_{j+1} (0)}{\|q_j (1) - q_j (0)\| + \|q_{j+1} (1) - q_{j+1} (0)\|}$$

$$\|q_j (1) - q_j (0)\| + \|q_{j+1} (1) - q_{j+1} (0)\|$$

(I.22)

I.4.4.2.3. - Moyennes des vecteurs unitaires et des modules

Pour chacune des dérivées, on détermine le vecteur unitaire et le module du vecteur représentatif de la dérivée ... La dérivée  $i^{\text{ème}}$  du vecteur position par rapport à  $r$  en  $r = 1$  relative à l'arc  $j$  s'écrit :

$$\frac{d^i}{dr^i} q_j (1) = \underbrace{\| \frac{d^i}{dr^i} q_j (1) \|}_{\text{module}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{d^i}{dr^i} q_j (1)}{\| \frac{d^i}{dr^i} q_j (1) \|}}_{\text{vecteur unitaire}}$$

Par conséquent, on remplace  $\frac{d^i}{dr^i} q_j (1)$  et  $\frac{d^i}{dr^i} q_{j+1} (0)$  par :

$$\left[ \| \frac{d^i}{dr^i} q_j (1) \| + \| \frac{d^i}{dr^i} q_{j+1} (0) \| \right] \left[ \frac{\frac{d^i}{dr^i} q_j (1)}{\| \frac{d^i}{dr^i} q_j (1) \|} + \frac{\frac{d^i}{dr^i} q_{j+1} (0)}{\| \frac{d^i}{dr^i} q_{j+1} (0) \|} \right] \quad (I.23)$$

I.4.5. - CALCUL DES COEFFICIENTS  $a_k$  :

Les expressions (I.10) et (I.11) correspondant respectivement aux conditions de continuité de courbure et de torsion permettent de calculer les coefficients  $a_k$  de l'expression (I.1) relative à la définition globale.

I.4.6. - CALCUL DES ERREURS :

De l'expression (I.1), on calcule le vecteur position, le rayon de courbure et le rayon de torsion (au sens de SERRET - FRENET) pour les valeurs du paramètre définies par (I.16) ou (I.17).

On peut alors obtenir :

- l'erreur relative sur le vecteur position par le module de la différence entre le vecteur position calculé selon (I.1) et le vecteur position déterminé selon (I.14) rapporté au module de ce dernier vecteur ;
- l'erreur relative sur le rayon de courbure (respectivement de torsion) par la valeur absolue de la différence entre le rayon de courbure (respectivement de torsion) calculé selon (I.1) et le rayon de courbure (respectivement de torsion) déterminé selon (I.14) rapporté à ce dernier rayon de courbure (respectivement de torsion).

I.4.7. - ALGORITHMES UTILISÉS POUR VÉRIFIER LA MÉTHODOLOGIE INTRODUITE EN I.4.1.

Ces algorithmes sont représentés au tableau I.1.

I.4.7.1. - Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $2p + 2$  ( $m^* = 2p + 1$ ) et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ ) : (cf. I.4.1 a)

On peut distinguer trois cas particuliers correspondants à des définitions différentes des paramètres  $r$  affectés à chaque point de passage.

I.4.7.1.1. - CAS I :

Pour la définition préalable (calcul des coefficients  $a_k^*$ ), on affecte aux points les valeurs du paramètre  $r_i = i/m$  (I.17).

Pour le calcul des points, avec la définition globale (de coefficients  $a_k$ ), on conserve les mêmes valeurs de  $r_i$ .

I.4.7.1.2. - CAS II :

Pour la définition préalable, on affecte aux points les valeurs du paramètre  $r_i$  par (I.16).

Pour le calcul des points, avec la définition globale, on conserve les mêmes valeurs de  $r_i$ .

I.4.7.1.3. - CAS III :

Pour la définition préalable, on conserve  $r_i$  par (I.16) mais, pour le calcul des points, on prend  $r_i$  par (I.17).

I.4.7.2. - Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $p + 2$  ( $m^* = p + 1$ ) et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ ) : (cf. I.4.1. b)

Les trois cas évoqués précédemment à propos de la définition du paramètre  $r$  sont repris dans le calcul des coefficients  $a_k^*$  et  $a_k$ .

I.4.7.2.1. - CAS I.

I.4.7.2.2. - CAS II.

I.4.7.2.3. - CAS III.

### I.4.8. - RÉSULTATS :

Les algorithmes ont été programmés en FORTRAN sur ordinateur MINI 6 en double précision. Ils figurent à l'annexe III.

Analyse des résultats pour la courbe analytique définie en I.14.

1.4.8.1. - Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $2p + 2$  ( $m^* = 2p + 1$ ) et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ ).

Les erreurs relatives maximales sur 9 arcs successifs sont récapitulés dans les tableaux I.2 et I.3.

Le cas I donne de loin les meilleurs résultats. Ceci était prévisible puisque le paramètre  $r$  défini par (I.16) est lié au paramètre  $t$  de l'expression (I.15)

$$(I.15) \rightarrow t_i = (j - 1) t^* + \frac{i}{m} t^*$$

$$(I.16) \rightarrow r_i = \frac{i}{m}$$

d'où :

$$t_i = (j - 1) t^* + r_i t^*$$

( $j$  : caractérise l'arc et  $t^*$  le pas)

- Le mode de calcul des moyennes des dérivées (cf. I.4.4.2) au point commun de deux arcs successifs n'a que peu d'importance. On peut dès lors dans un souci de simplicité ne considérer que la moyenne arithmétique.
- Le choix du pas  $t^*$  semble avoir quelque influence sur la précision selon que l'on utilise des fonctions  $f_k$  de degré 5 ou des fonctions  $f_k$  de degré 7.

Ainsi par un pas  $t^*$  suffisamment faible (inférieur à  $3^\circ$  environ), les fonctions de degré 5, bien que n'imposant le passage par 6 points contrairement aux fonctions de degré 7 qui imposent le passage par 8 points, conduisent à de meilleurs résultats en ce qui concerne la trajectoire et sa courbure.

- Un moyen d'obtenir des résultats plus satisfaisants que ceux obtenus par l'estimation selon (I.16) consiste à faire tendre les valeurs  $r_i$  ;  $i = 1, m$  relatives à cette estimation vers les valeurs  $r_i = i/m$  selon (I.17). Les erreurs ainsi obtenues sont récapitulées dans le tableau I.4 (lignes 2 à 6)

. ligne 2 : relative à l'estimation selon (I.16) ; le paramètre  $r_i$  varie avec l'arc considéré :

$r_1$  varie de 0,1941 pour l'arc 1 à 0,1937 pour l'arc 9

$r_2$  varie de 0,3912 pour l'arc 1 à 0,3904 pour l'arc 9

$r_3$  varie de 0,5911 pour l'arc 1 à 0,5904 pour l'arc 9

$r_4$  varie de 0,7941 pour l'arc 1 à 0,7936 pour l'arc 9

. ligne 3 : on fait appel à des valeurs  $r_i$  communes à l'ensemble des arcs, voisines de celles calculées précédemment.

. ligne 4 : on ajoute 0,003 aux valeurs précédentes.

. ligne 5 : on ajoute 0,001 aux valeurs précédentes de  $r_1$  et  $r_4$  et 0,002 à celles de  $r_2$  et  $r_3$ .

. ligne 6 : on ajoute 0,001 aux valeurs précédentes.

Les résultats des lignes 4 à 6 sont plus satisfaisants que ceux obtenus lors de l'estimation selon (I.16) sauf éventuellement pour le rayon de torsion. Les résultats de la ligne 5 sont cependant meilleurs que ceux obtenus à la ligne 6 alors que les valeurs  $r_i$  sont plus voisines de  $i/m$  ; ceci nous conduit à prendre des écarts constants avec les valeurs  $r_i = i/m$  ce qui correspond aux lignes 7 à 10.

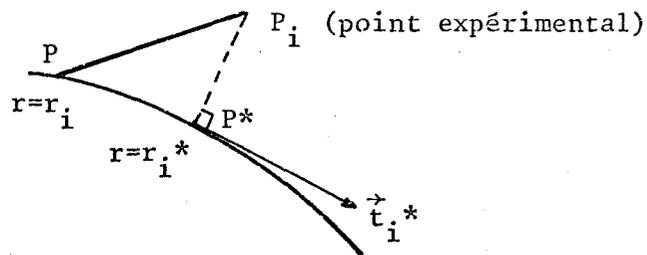
On constate que les erreurs maximales diminuent avec l'écart. Il est possible d'approcher la solution  $r_i = i/m$  à condition que les différences entre les valeurs arbitraires choisies selon (I.16) et  $r_i = i/m$  soient constantes.

- Les cas II et III conduisent à la même définition globale, seules changent les valeurs du paramètre  $r$  affectées aux points pour le calcul des erreurs.

Le cas III donne des erreurs sensiblement moindres. Le rayon de courbure et le rayon de torsion, variant peu lorsque  $r_i$  est estimé par (I.16) et  $r_i$  estimé par (I.17), les erreurs sont pratiquement identiques.

- On remarque que, pour l'arc initial ( $j = 1$ ) et pour l'arc final ( $j = 9$ ) de la courbe numérique, que les lois de variation de la courbure et de la torsion sont différentes alors que les valeurs de la courbure sont très bonnes pour les points de départ ( $r_0 = 0$ ) et pour le point d'arrivée ( $r_m = 1$ ).

- Un moyen de faire évoluer les valeurs  $r_i$  du paramètre  $r$  vers la solution est de rechercher les valeurs  $r_i$  pour lesquelles la distance de chacun des points expérimentaux  $P_i$  à la courbe numérique est minimale.



La condition de distance minimale implique l'orthogonalité du vecteur  $\overrightarrow{P^* P_i}$  et du vecteur tangent  $\vec{t}_i^*$  à la courbe numérique :

$$\overrightarrow{P^* P_i} \cdot \vec{t}_i^* = 0 \quad (I.24)$$

Cette équation est polynomiale en  $r$ , de degré  $4p + 1$ . Il existe une valeur  $r_i^*$  voisine de  $r_i$  qui vérifie (I.24). La méthode de NEWTON permet de trouver rapidement  $r_i^*$ .

En affectant respectivement  $r_i^*$  à  $r_i$ , on peut calculer de la même façon que dans le cas II de nouveaux coefficients  $a_k^*$ . On obtient pour un pas  $t^*$  égal à  $2^\circ 5$ , comparativement au cas II :

- une erreur maximale sur le module du vecteur position :  
 $0.14355 \times 10^{-5}$  au lieu de  $0,85485 \times 10^{-3}$

- une erreur maximale sur le rayon de courbure :  
 $0,34152 \times 10^{-1}$  au lieu de  $0,34458 \times 10^{-1}$
- une erreur maximale sur le rayon de torsion :  
0,26783 identique.

I.4.8.2. - Calcul des coefficients  $a_k^*$  en nombre  $p + 2$  ( $m^* = p + 1$ )  
et calcul des coefficients  $a_k$  en nombre  $2p + 2$  ( $m = 2p + 1$ )

Les erreurs relatives maximales sur 9 arcs successifs sont récapitulés dans les tableaux I.5 et I.6.

D'une manière générale, les erreurs obtenues dans le cas I sont très supérieures à celles obtenues précédemment pour le cas I du paragraphe I.4.8.1.

Par exemple, pour  $t^* = 2.5$  et  $p = 2$ , on obtient :

- une erreur maximale sur le module du vecteur position de  $0,10491 \times 10^{-6}$  au lieu de  $0,474 \times 10^{-11}$
- une erreur maximale sur le rayon de courbure de :  
 $0,11585 \times 10^{-2}$  au lieu de  $0,60924 \times 10^{-5}$
- une erreur maximale sur le rayon torsion de :  
 $0,11577$  au lieu de  $0,28619 \times 10^{-4}$

Pour les cas II et III, les erreurs maximales obtenues sont du même ordre que précédemment sauf pour le rayon de torsion pour lequel les erreurs sont plus importantes.

En conclusion, le fait de diminuer le degré du polynome caractéristique de la définition analytique préalable pouvant laisser présager la réduction des instabilités de forme ne conduit pas nécessairement à l'amélioration des résultats obtenus au paragraphe I.4.8.1.

## I.5. - CONCLUSION DU CHAPITRE I

La définition analytique de courbes par une fonction polynomiale à coefficients vectoriels a montré que :

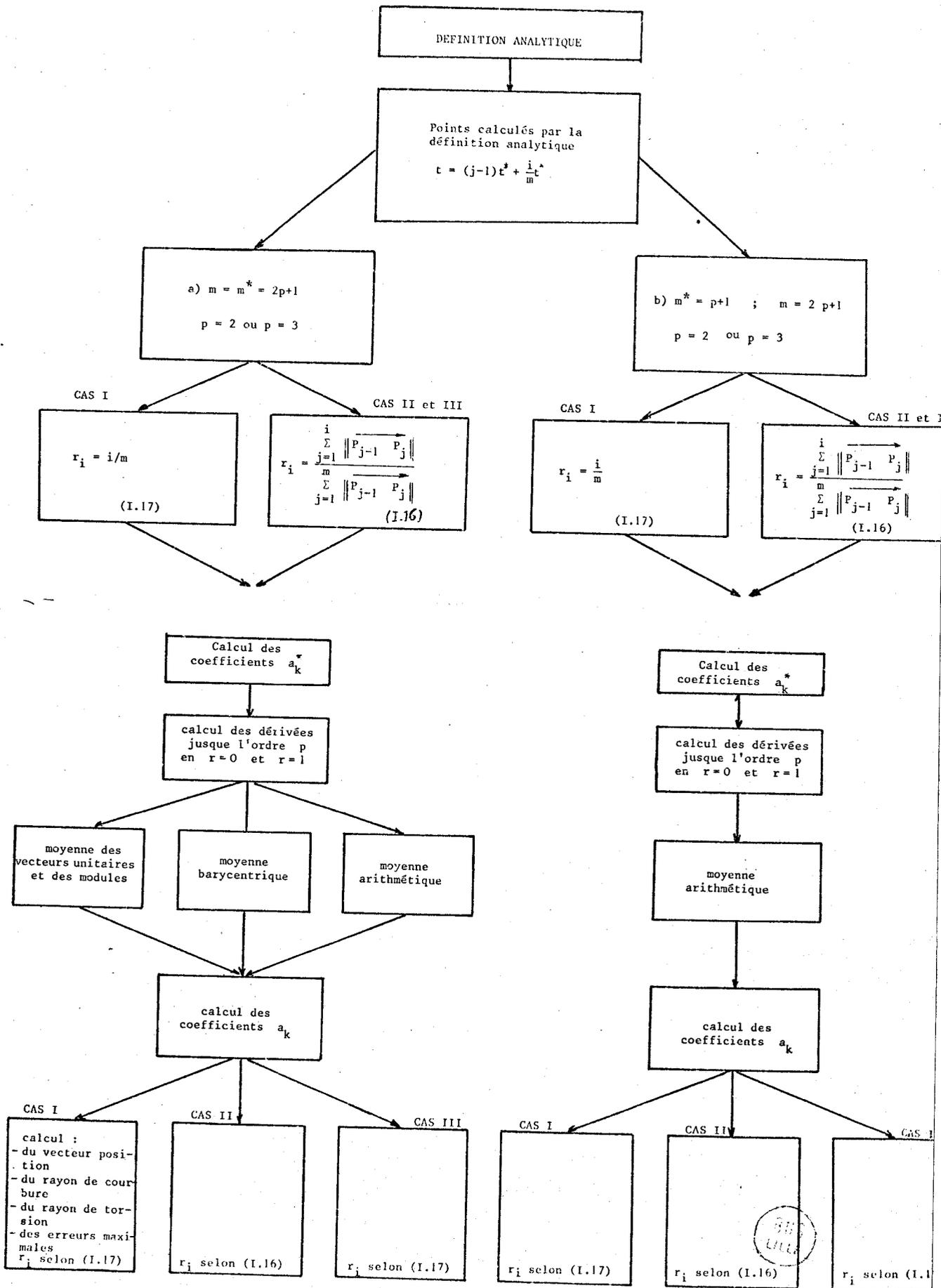
- les fonctions  $f_k$  proposée par J. FERGUSSON et celles proposées par P. BEZIER conduisent à deux formulations identiques. Le choix des fonctions  $f_k$  sera régi par l'efficacité et la simplicité de l'élaboration informatique du problème posé.
- le calcul des dérivées est influencé par le degré du polynôme caractéristique de la représentation analytique préalable. En effet, il est préférable de choisir, pour la représentation analytique préalable (de coefficients  $a_k^*$ ) et pour la représentation analytique globale (de coefficients  $a_k$ ), le nombre  $(m^* + 1)$  de coefficients  $a_k^*$  et le nombre  $(m + 1)$  de coefficients  $a_k$  en fonction de l'ordre  $p$  de continuité globale à réaliser, de sorte que :

$$m^* = m = 2p + 1$$

- il n'est pas aisé de trouver pour l'ensemble des points les valeurs du paramètre  $r$  conduisant à une représentation analytique optimale. Cependant, la définition analytique globale résultant des cas II et III (cf. I.4.8.1.) permet de chercher pour chaque point expérimental (défini par l'expression I.14) le point le plus proche de la courbe numérique auquel correspond une valeur particulière du paramètre  $r$ .

En affectant à l'ensemble des points expérimentaux les valeurs particulières respectives du paramètre  $r$ , on peut ainsi, en suivant une démarche analogue au cas II ou au cas III améliorer très sensiblement les résultats à propos du vecteur position.

Tableau I.1



PAS PAR ARC	POSITION		COURBURE		TORSION		
	m=5	m=7	m=5	m=7	m=5	m=7	
2°,5	I	$0,474 \times 10^{-11}$	$0,138 \times 10^{-10}$	$0,609 \times 10^{-7}$	$0,112 \times 10^{-6}$	$0,286 \times 10^{-4}$	$0,306 \times 10^{-5}$
	II	$0,854 \times 10^{-3}$	$0,958 \times 10^{-3}$	$0,344 \times 10^{-1}$	$0,411 \times 10^{-1}$	0,26783	$0,528 \times 10^{-1}$
	III	$0,397 \times 10^{-3}$	$0,467 \times 10^{-3}$	$0,348 \times 10^{-1}$	$0,413 \times 10^{-1}$	0,26783	$0,516 \times 10^{-1}$
5°	I	$0,375 \times 10^{-9}$	$0,132 \times 10^{-9}$	$0,105 \times 10^{-5}$	$0,202 \times 10^{-6}$	$0,233 \times 10^{-3}$	$0,238 \times 10^{-5}$
	II	$0,391 \times 10^{-2}$	$0,438 \times 10^{-2}$	$0,732 \times 10^{-1}$	$0,875 \times 10^{-1}$	0,69128	0 11501
	III	$0,184 \times 10^{-2}$	$0,212 \times 10^{-2}$	$0,759 \times 10^{-1}$	$0,893 \times 10^{-1}$	0,6918	0,11056
7°,5	I	$0,496 \times 10^{-8}$	$0,473 \times 10^{-9}$	$0,555 \times 10^{-5}$	$0,269 \times 10^{-6}$	$0,803 \times 10^{-3}$	$0,182 \times 10^{-5}$
	II	$0,963 \times 10^{-2}$	$0,107 \times 10^{-1}$	0,11384	0,13624	$0,145 \times 10^{-1}$	0,19536
	III	$0,456 \times 10^{-2}$	$0,514 \times 10^{-2}$	0,12025	0,14210	$0,145 \times 10^{-1}$	0,17394
10°	I	$0,310 \times 10^{-7}$	$0,110 \times 10^{-8}$	$0,180 \times 10^{-4}$	$0,314 \times 10^{-6}$	$0,194 \times 10^{-2}$	$0,142 \times 10^{-5}$
	II	$0,181 \times 10^{-1}$	$0,201 \times 10^{-1}$	0,16060	0,18789	$0,318 \times 10^{-1}$	0,30681
	III	$0,862 \times 10^{-2}$	$0,947 \times 10^{-2}$	0,16854	0,13861	$0,318 \times 10^{-1}$	0,24121
12°,5	I	$0,129 \times 10^{-6}$	$0,206 \times 10^{-8}$	$0,448 \times 10^{-4}$	$0,339 \times 10^{-6}$	$0,386 \times 10^{-2}$	$0,455 \times 10^{-5}$
	II	$0,293 \times 10^{-1}$	$0,324 \times 10^{-1}$	0,21177	0,24606	$0,129 \times 10^{-3}$	0,44895
	III	$0,140 \times 10^{-1}$	$0,150 \times 10^{-1}$	0,22008	0,25868	$0,129 \times 10^{-3}$	0,34285



Tableau I.2

ERREURS RELATIVES MAXIMALES

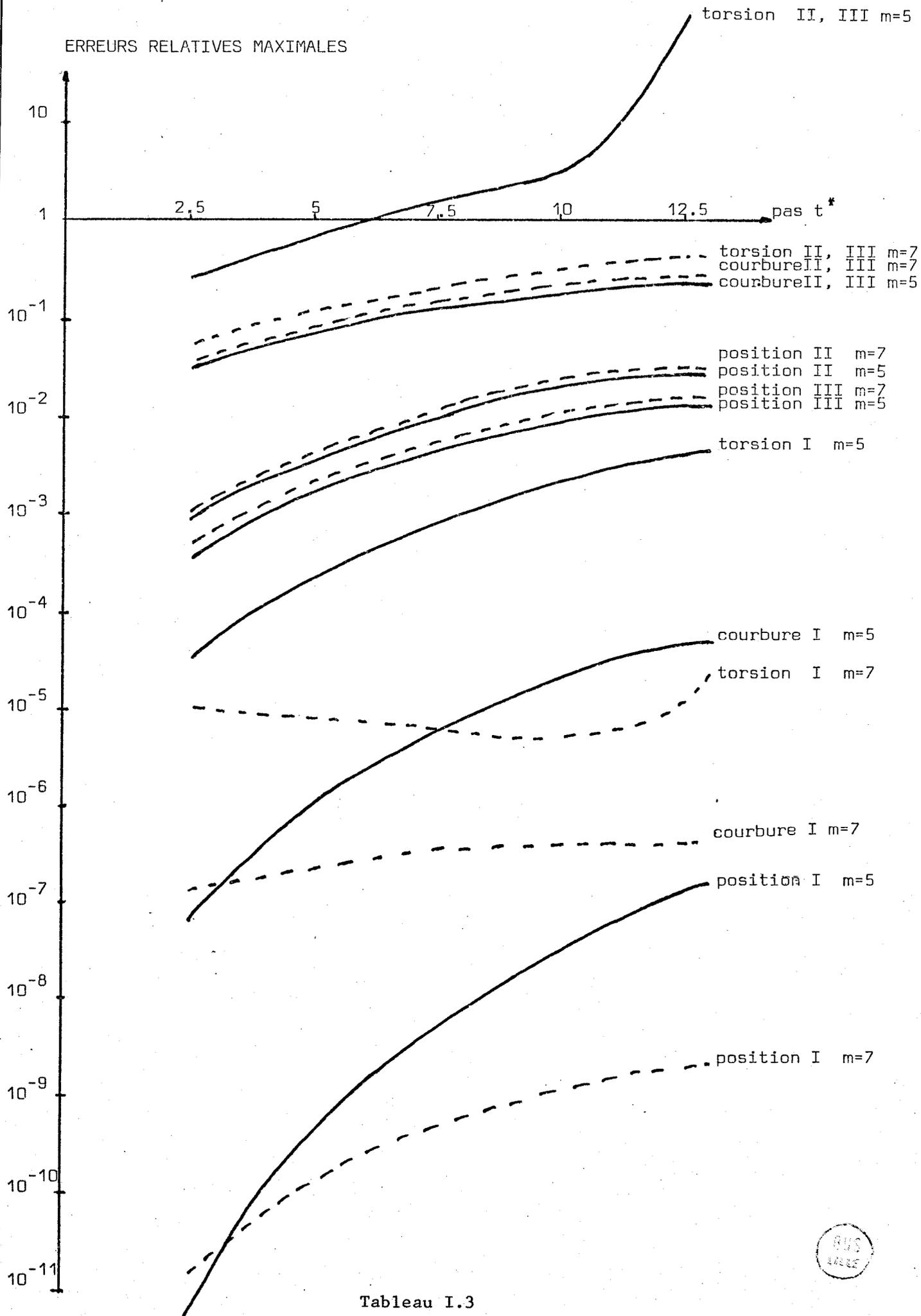


Tableau I.3



TABLEAU I.4 Continuité jusque l'ordre 2 (m=5)

Ligne	Valeurs du paramètre r (t = 2°5)	Erreur maximum sur le module du vecteur position	Erreur maximum sur le rayon de courbure	Erreur maximum sur le rayon de torsion
1	$r_i = i/m \quad i=0, m$	$0,47430 \times 10^{-11}$	$0,60924 \times 10^{-7}$	$0,28619 \times 10^{-4}$
2	$r_0 = 0$ $i \neq 0 : r_i = \sum_{j=1}^i \frac{\ P_{j-1} - P_j\ }{\sum_{j=1}^m \ P_{j-1} - P_j\ }$	$0,85485 \times 10^{-3}$	$0,34458 \times 10^{-1}$	$0,26783$
3	$r_0 = 0 \quad r_1 = 0,194 \quad r_2 = 0,391$ $r_3 = 0,591 \quad r_4 = 0,794 \quad r_5 = 1$	$0,81978 \times 10^{-3}$	$0,34704 \times 10^{-1}$	$0,28131$
4	$r_0 = 0 \quad r_1 = 0,197 \quad r_2 = 0,394$ $r_3 = 0,594 \quad r_4 = 0,797 \quad r_5 = 1$	$0,13919 \times 10^{-3}$	$0,82467 \times 10^{-2}$	$0,33879$
5	$r_0 = 0 \quad r_1 = 0,198 \quad r_2 = 0,396$ $r_3 = 0,596 \quad r_4 = 0,798 \quad r_5 = 1$	$0,91630 \times 10^{-4}$	$0,47097 \times 10^{-1}$	$0,25461$
6	$r_0 = 0 \quad r_1 = 0,199 \quad r_2 = 0,397$ $r_3 = 0,597 \quad r_4 = 0,799 \quad r_5 = 1$	$0,13975 \times 10^{-3}$	$0,72820 \times 10^{-2}$	$0,33356$
7	$r_0 = 0 \quad r_5 = 1$ $r_i = i/m - 1 \cdot 10^{-5} \quad i=1, m-1$	$0,22501 \times 10^{-5}$	$0,93542 \times 10^{-4}$	$0,19605 \times 10^{-2}$
8	$r_0 = 0 \quad r_5 = 1$ $r_i = i/m + 1 \cdot 10^{-5} \quad i=1, m-1$	$0,22501 \times 10^{-5}$	$0,93989 \times 10^{-4}$	$0,19984 \times 10^{-2}$
9	$r_0 = 0 \quad r_5 = 1$ $r_i = i/m - 1 \cdot 10^{-4} \quad i=1, m-1$	$0,22462 \times 10^{-4}$	$0,93814 \times 10^{-3}$	$0,20062 \times 10^{-1}$
10	$r_0 = 0 \quad r_5 = 1$ $r_i = i/m + 1 \cdot 10^{-3} \quad i=1, m-1$	$0,22517 \times 10^{-3}$	$0,94459 \times 10^{-2}$	$0,23120$



PAS PAR ARC t	POSITION	COURBURE	TORSION	
2°,5	I	$0,10491 \times 10^{-6}$	$0,11585 \times 10^{-2}$	0,11577
	II	$0,85484 \times 10^{-3}$	$0,34199 \times 10^{-1}$	0,3682
	III	$0,39739 \times 10^{-3}$	$0,34192 \times 10^{-1}$	0,3682
5°	I	$0,22159 \times 10^{-5}$	$0,48389 \times 10^{-2}$	0,20966
	II	$0,39181 \times 10^{-2}$	$0,74226 \times 10^{-1}$	1,4044
	III	$0,18401 \times 10^{-2}$	$0,72288 \times 10^{-1}$	1,4044
7°,5	I	$0,13343 \times 10^{-4}$	$0,1139 \times 10^{-1}$	0,28875
	II	$0,96385 \times 10^{-2}$	0,12037	11,377
	III	$0,45673 \times 10^{-2}$	0,11236	11,377
10°	I	$0,47245 \times 10^{-4}$	$0,21227 \times 10^{-1}$	0,40525
	II	$0,18122 \times 10^{-1}$	0,1727	23,922
	III	$0,86284 \times 10^{-2}$	0,15359	23,922
12°,5	I	$0,12514 \times 10^{-3}$	$0,34838 \times 10^{-1}$	0,60162
	II	$0,29337 \times 10^{-1}$	0,23104	49,615
	III	$0,14023 \times 10^{-1}$	0,19599	49,615



TABLEAU I.5

ERREURS RELATIVES MAXIMALES

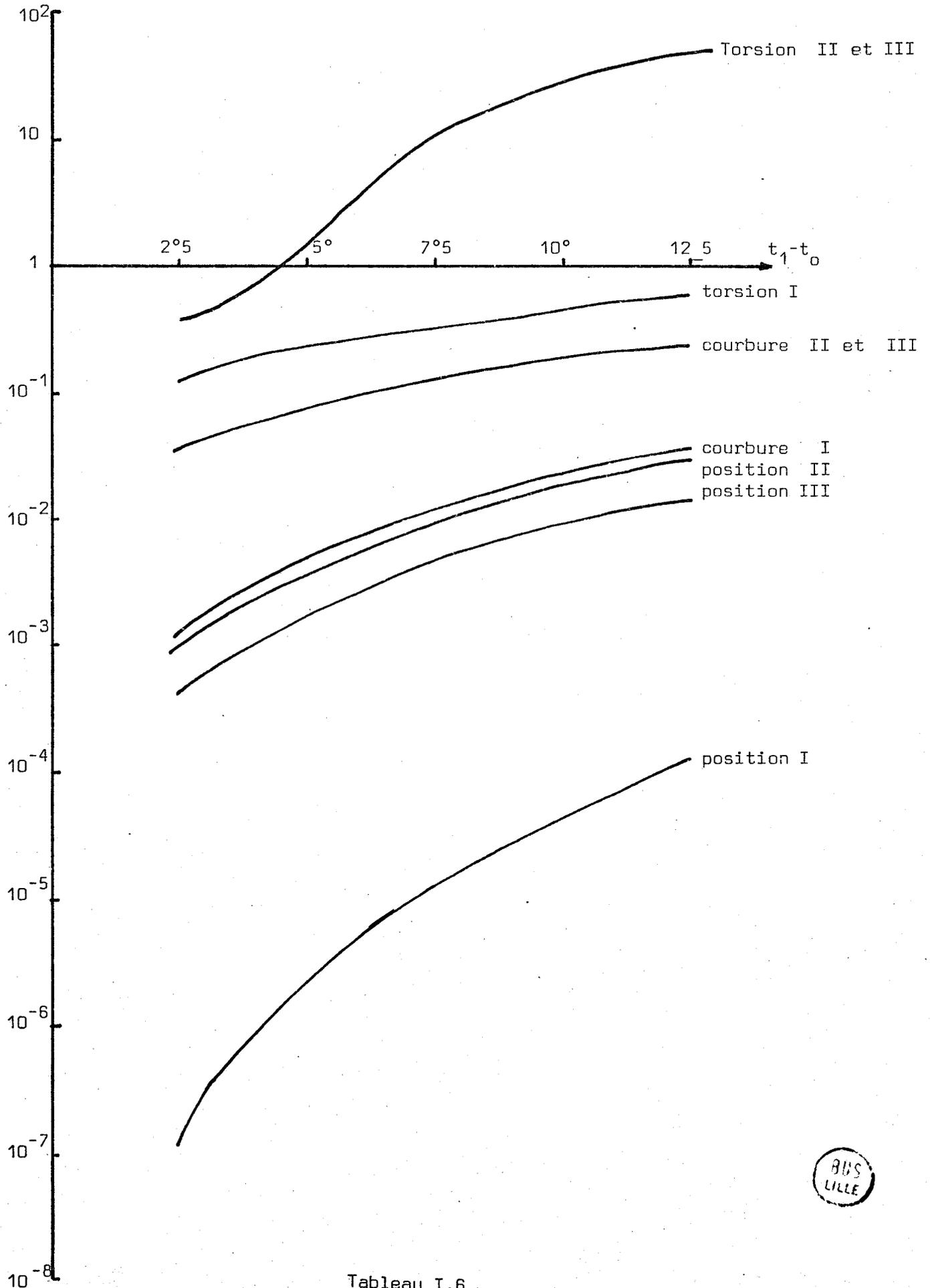


Tableau I.6

## CHAPITRE II

### RACCORDEMENT DE DEUX ARCS DE COURBE

#### II.1. - INTRODUCTION :

L'objet de ce chapitre est de définir numériquement un arc de courbe servant au raccordement entre deux autres arcs de courbe dont on connaît aux extrémités les vecteurs position, les trièdres de SERRET-FRENET, les rayons de courbure et éventuellement d'autres grandeurs.

Cette définition d'arcs de raccordement peut notamment être utilisée en vue de créer une courbe par arcs successifs.

Pour apprécier l'efficacité des définitions proposées dans ce chapitre, on s'attachera à l'évolution du module du vecteur position et à celle du rayon de courbure en tous points des courbes créées.

En principe, il est possible d'obtenir de cette manière des courbes gauches ou planes. Nous traiterons ici deux cas :

- un cas plan où l'arc de raccordement obtenu est la projection stéréographique d'un arc sphérique précisé numériquement ;
- un cas plus général où la définition de l'arc de raccordement est obtenue à partir de l'abscisse curviligne d'une famille d'arcs de courbe convergents vers la définition à obtenir.

Ces deux cas sont traités successivement aux paragraphes II.2 et II.3.

## II.2. DEFINITION D'UN ARC DE RACCORDEMENT PAR PROJECTION STEREOGRAPHIQUE D'UNE COURBE TRACEE SUR UNE SPHERE.

La courbe tracée sur la sphère sera représentative du raccordement de deux arcs de sphère. Pour cela, il faudra se donner pour le point de départ (relatif à l'arc de départ) et le point d'arrivée (relatif à l'arc d'arrivée) du raccordement les vecteurs dérivées premières et secondes (définissant l'orientation, le vecteur tangent, le vecteur normal, le rayon de courbure) et, éventuellement d'autres caractéristiques.

Le raccordement des deux arcs se fera de deux façons :

- formulation en coordonnées cartésiennes ;
  
- formulation en coordonnées sphériques.

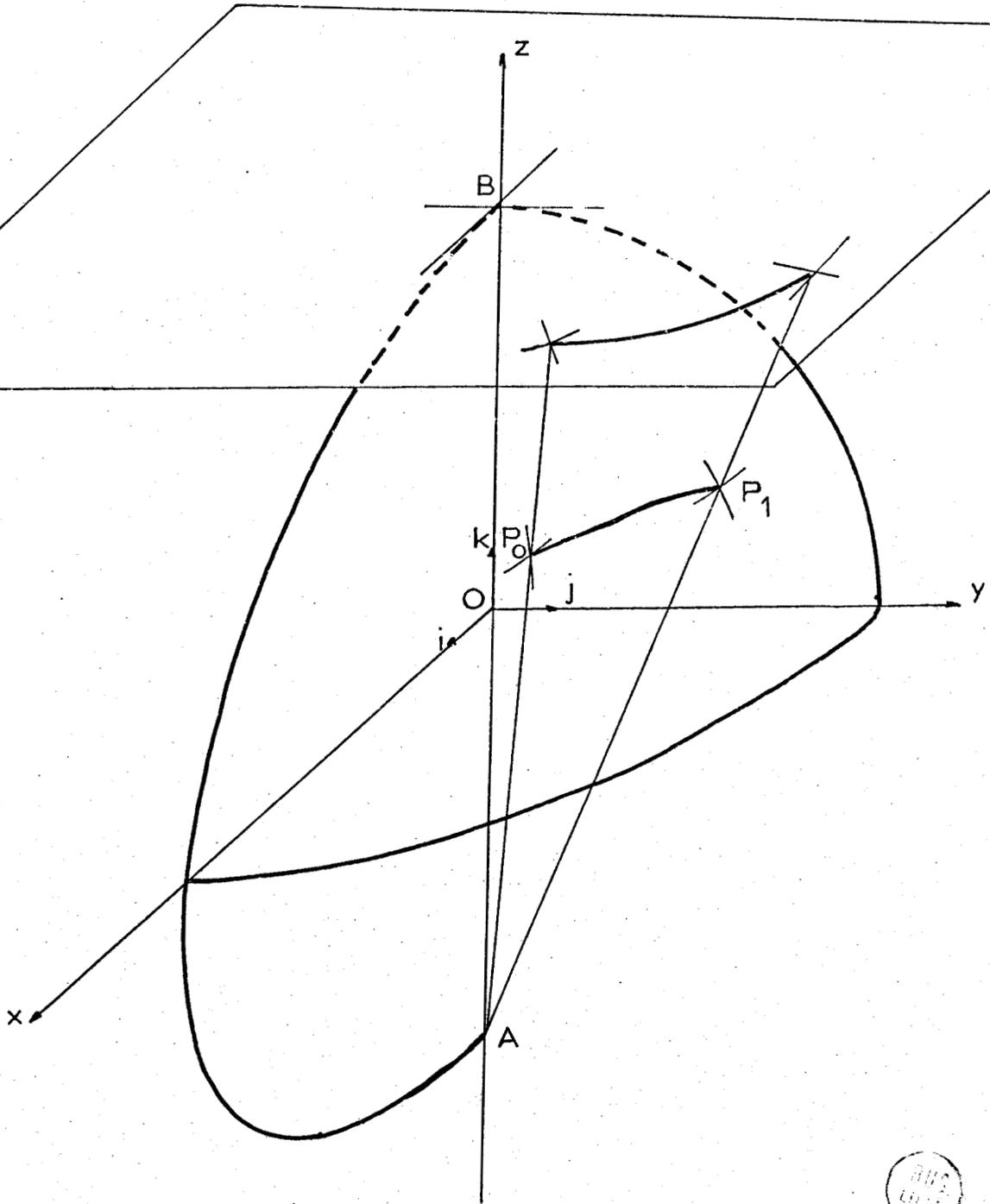


figure II.1

II.2.1. - FORMULATION EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES :

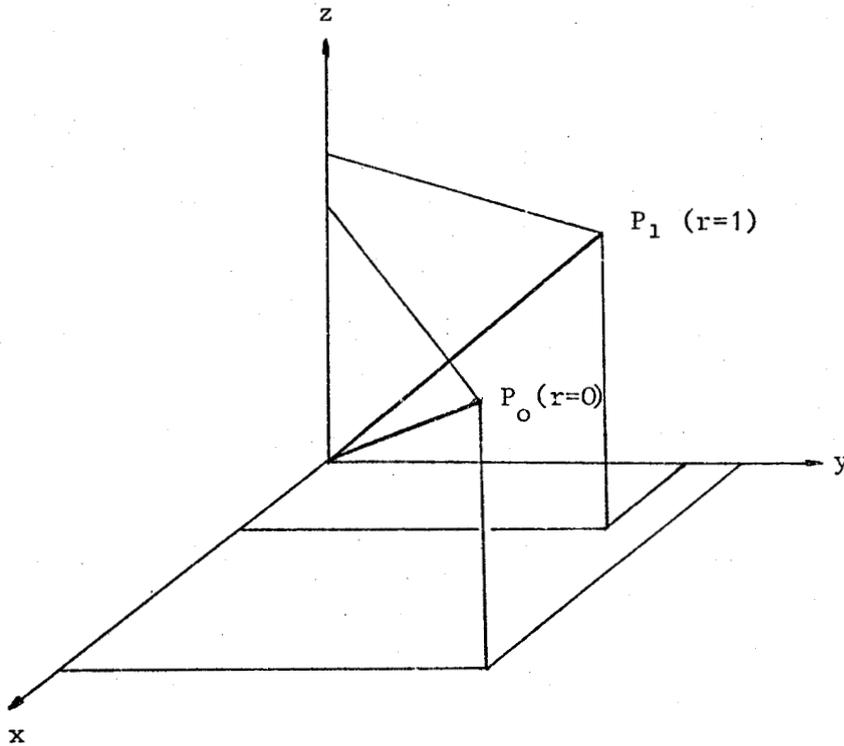


figure II.2

Considérons un repère orthonormé  $o x y z$  muni d'une base  $j, k, l$  (vecteurs unitaires).

Un point  $M$  de la sphère de centre  $0$  et de rayon  $R$  est tel que son affixe  $q$  soit :

$$q = R \epsilon_x j + R \epsilon_y k + R \epsilon_z l \tag{II.1}$$

avec  $\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1$

Soit  $P_0 P_1$  un arc tel que  $P_0$  et  $P_1$  appartiennent à la sphère, les dérivées premières et secondes de  $q$  soient caractéristiques d'un arc de cercle de la sphère.

On paramètre l'arc  $P_0 P_1$  par  $r$  tel que :

$$r = 0 \quad \text{pour } P_0$$

et  $r = 1$  pour  $P_1$

pour  $r = 0$ , on a :

$$q_0 = q(r = 0) = R (\epsilon x_0 j + \epsilon y_0 k + \epsilon z_0 l)$$

avec  $\epsilon x_0^2 + \epsilon y_0^2 + \epsilon z_0^2 = 1.$

de même pour  $r = 1$  :

$$q_1 = q(r = 1) = R (\epsilon x_1 j + \epsilon y_1 k + \epsilon z_1 l)$$

avec  $\epsilon x_1^2 + \epsilon y_1^2 + \epsilon z_1^2 = 1.$

Pour un point de la sphère, on a :

$$q' = \frac{dq}{dr} = \frac{dR}{dr} (\epsilon x j + \epsilon y k + \epsilon z l) + R \left( \frac{d\epsilon x}{dr} j + \frac{d\epsilon y}{dr} k + \frac{d\epsilon z}{dr} l \right)$$

or  $\frac{dR}{dr} = 0$

$$q' = R (\epsilon x' j + \epsilon y' k + \epsilon z' l)$$

De même pour les dérivées successives :

$$q^{(i)} = \frac{d^i q}{dr^i} = R (\epsilon_x^{(i)} j + \epsilon_y^{(i)} k + \epsilon_z^{(i)} l) \quad (II.2)$$

Pour raccorder les deux points ainsi que leurs dérivées jus-  
que l'ordre  $p$ , on définit  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  par

$$\epsilon_x = \sum_{i=0}^{2p+1} \epsilon_{x_i} r^i$$

$$\epsilon_y = \sum_{i=0}^{2p+1} \epsilon_{y_i} r^i \quad (II.3)$$

$$\epsilon_z = \sum_{i=0}^{2p+1} \epsilon_{z_i} r^i$$

Seulement, pour  $r \neq 0$  et  $r \neq 1$   $\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2$  n'est pas forcément égal à 1 ; par conséquent,  $R$  ne représente pas le rayon polaire et l'arc ainsi généré n'appartient pas à la sphère.

*Remarque* : Il est néanmoins possible d'obtenir un arc appartenant à la sphère en rendant le vecteur de coordonnées  $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$  unitaire.

### II.2.2. FORMULATION EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES.

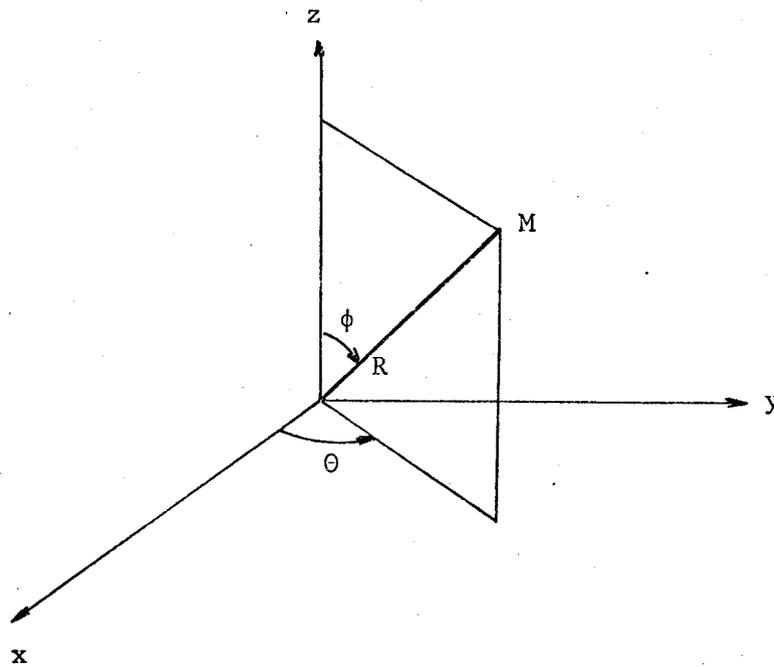


figure II.3

Considérons un repère orthonormé  $o x y z$  muni d'une base  $(j, k, l)$ . Un point  $M$  de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  est tel que son affixe  $p$  soit :

$$q = R (\sin \phi \cos \theta j + \sin \phi \sin \theta k + \cos \phi l) \quad (\text{II.4})$$

Exprimons la dérivée de  $q$  par rapport à  $r$

$$\begin{aligned} q' = \frac{dq}{dr} = R [ & (\cos \phi \cos \theta \frac{d\phi}{dr} - \sin \phi \sin \theta \frac{d\theta}{dr}) j \\ & + (\cos \phi \sin \theta \frac{d\phi}{dr} + \sin \phi \cos \theta \frac{d\theta}{dr}) k \\ & - \sin \phi \frac{d\phi}{dr} l] \end{aligned}$$

De même pour les dérivées successives :

$$q^{(i)} = \frac{d^i q}{dr^i} = R \left( \frac{d^i}{dr^i} (\sin \phi \cos \theta) j + \frac{d^i}{dr^i} (\sin \phi \sin \theta) k + \right.$$

$$\left. \frac{d^i}{dr^i} (\cos \phi) l \right) \quad (II.5)$$

Pour raccorder les deux arcs de la sphère ainsi que leurs dérivées jusque l'ordre  $p$ , on définit  $\theta$  et  $\phi$  par :

$$\theta = \sum_{i=0}^{2p+1} \theta_i r^i$$

(II.6)

et 
$$\phi = \sum_{i=0}^{2p+1} \phi_i r^i$$

le paramètre  $r$  variant de 0 pour le point de départ  $P_0$  à 1 pour le point d'arrivée  $P_1$ . Quel que soit  $r$ , le vecteur  $q$  reste de norme  $R$  contrairement à ce que l'on a obtenu par la formulation en coordonnées cartésiennes.

Cette formulation en coordonnées sphériques est par conséquent préférable et c'est celle que nous utiliserons par la suite.

### II.2.3. - EXPRESSION DE L'ÉQUATION DE LA COURBE PROJETÉE DANS LE PLAN $z = R$

Soit  $P$  un point de la courbe tracée sur la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  représenté par un affixe  $q$ .

Soit  $M$  le point projeté de  $P$  dans le plan  $z = R$  et représenté par son affixe  $q$  dans le repère  $(B, j, k)$  avec  $B = (0, 0, R)$  dans le repère  $(0, j, k, l)$

$M$  est tel que :

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$$

Soit  $A$  le point de coordonnées  $(0, 0, -R)$

$\vec{PM}$ ,  $\vec{AP}$  et  $\vec{AM}$  sont colinéaires

$$\vec{OM} = \vec{OP} + K \cdot \vec{AP} \quad K \text{ réel.}$$

Posons  $q^* = X j + Y k + Z l$ .

$$q = x j + y k + z l.$$

d'où  $X = (K + 1) x$

$$Y = (K + 1) y$$

$$Z = z (K + 1) + K R$$

or  $Z = R$ .

On en déduit  $K$ .

$$K = \frac{R - z}{z + R} \text{ avec } z \neq -R \quad (\text{II.7})$$

d'où

$$q^* = \frac{2R}{z + R} (x_j + y_k) + R \cdot 1. \quad (\text{II.8})$$

Exprimons les vecteurs dérivées première et seconde de  $q^*$  en fonction de celles de  $q$ .

$$q'^* = \frac{2R}{z + R} (x'_j + y'_k) - \frac{2z'R}{(z + R)^2} (x_j + y_k) \quad (\text{II.9})$$

de même :

$$q''^* = \frac{2R}{z + R} (x''_j + y''_k) - \frac{4z'R}{(z + R)^2} (x'_j + y'_k) + \frac{2R}{(z + R)^2} \left( \frac{2z'^2}{z + R} - z'' \right) (x_j + y_k) \quad (\text{II.10})$$

#### II.2.4. - CONCLUSION

L'arc de raccordement obtenu par projection stéréographique d'un arc sphérique doit être tel que :

- la formulation de l'arc sphérique soit faite en coordonnées sphériques notées  $R, \theta, \phi$  où :

$R$  : le rayon de la sphère

$\theta$  et  $\phi$  : polynôme de degré  $2p + 1$  en vue d'obtenir la continuité

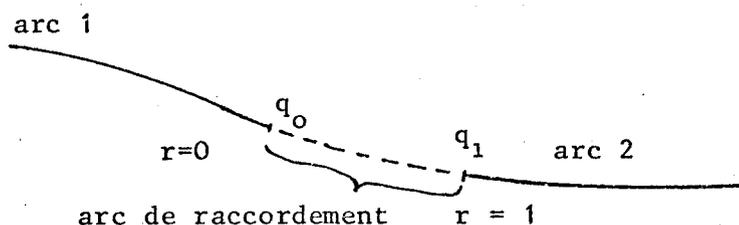
d'ordre  $p$ .

- les fonctions  $\theta$  et  $\phi$  du paramètre  $r$  répondent aux conditions imposées aux points projetés de  $P_0$  et  $P_1$ . Nous verrons dans le chapitre III la façon de déterminer ces conditions lorsque l'ordre  $p$  de continuité est égal à 2.

## II. 3. - RACCORDEMENT DE DEUX ARCS DE COURBES A L'AIDE DE L'ABSCISSE CURVILIGNE

### II. 3. 1. - DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

Soit  $q$  l'affixe du vecteur position représentatif d'un point de l'arc raccordant deux arcs orientés de l'espace.



Posons 
$$q = \sum_{i=0}^m a_i r^i \tag{II.11}$$

où les  $a_i$  sont des coefficients vectoriels.

On se propose de raccorder les arcs 1 et 2 jusque l'ordre 2 non pas par les connaissances des dérivées successives par rapport à  $r$  en  $r = 0$  et en  $r = 1$  mais par celle du vecteur tangent, du vecteur normal et du rayon de courbure en  $r = 0$  et  $r = 1$ .

Soit  $s$  l'abscisse curviligne.

Exprimons les dérivées successives du vecteur position par rapport à  $r$  en fonctions des dérivées successives de ce même vecteur par rapport à l'abscisse curviligne :

$$q = q(r) \tag{II.12}$$

$$\frac{dq}{dr} = \frac{dq}{ds} \frac{ds}{dt} \tag{II.13}$$

Par définition :

$$\frac{dq}{ds} = \vec{t} \quad \vec{t} \text{ vecteur tangent unitaire} \tag{II.14}$$

d'où :

$$\frac{dq}{dr} = \vec{t} \frac{ds}{dr}$$

$$\frac{d^2q}{dr^2} = \frac{d^2q}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{t} \cdot \frac{d^2s}{dr^2}$$

par définition

$$\frac{d^2q}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{R_c} \quad \vec{n} \text{ vecteur normal unitaire} \\ R_c \text{ rayon de courbure.}$$

$$\frac{d^2q}{dr^2} = \frac{\vec{n}}{R_c} \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + \vec{t} \frac{d^2s}{dr^2} \quad (\text{II.15})$$

Calculons  $\frac{dq}{dr} \wedge \frac{d^2q}{dr^2}$

$$\frac{dq}{dr} \wedge \frac{d^2q}{dr^2} = \frac{\vec{t} \wedge \vec{n}}{R_c} \left(\frac{ds}{dr}\right)^3$$

or  $\vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{b}$   $\vec{b}$  : binormale (unitaire)

$$\text{d'où } \frac{\vec{b}}{R_c} = \frac{\left(\frac{dq}{dr} \wedge \frac{d^2q}{dr^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dr}\right)^3}$$

$$\text{d'où } R_c = \frac{\left\| \frac{dq}{dr} \right\|^3}{\left\| \frac{dq}{dr} \wedge \frac{d^2q}{dr^2} \right\|} \quad (\text{II.16})$$

Le rayon de courbure en  $r = 0$  et  $r = 1$  ne dépend pas de  $\frac{ds}{dt}$  et de  $\frac{d^2s}{dt^2}$ .

Ceci nous permet de fixer respectivement en  $r = 0$  et  $r = 1$  : le vecteur position,  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  (c'est à dire le trièdre de SERRET FRENET) et le rayon de courbure. Un polynome de degré  $m = 5$  au moins est nécessaire à la définition de l'arc de raccordement. Les valeurs de  $\frac{ds}{dr}$  et  $\frac{d^2s}{dr^2}$  en  $r = 0$  et  $r = 1$  respectivement constituent un 4- uple qui caractérisent

les variations du vecteur tangent, du vecteur normal et du rayon de courbure entre  $r = 0$  et  $r = 1$ .

Les conditions à satisfaire sont :

$$q(0) = q_0$$

$$q(1) = q_1$$

$$\frac{d}{dr} q(0) = \vec{t}_0 \frac{ds}{dr}(0)$$

(II.17)

$$\frac{d}{dr} q(1) = \vec{t}_1 \frac{ds}{dr}(1)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} q(0) = \frac{\vec{n}_0}{R_{c0}} \left[ \frac{ds}{dr}(0) \right]^2 + \vec{t}_0 \frac{d^2s}{dr^2}(0)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} q(1) = \frac{\vec{n}_1}{R_{c1}} \left[ \frac{ds}{dr}(1) \right]^2 + \vec{t}_1 \frac{d^2s}{dr^2}(1)$$

$p$  étant l'ordre de continuité à assurer, ici égal à deux, le degré du polynôme utilisé doit satisfaire la relation :

$$m = 2p + 1$$

c'est à dire 5.

Les conditions précédentes permettent de calculer les coefficients  $a_i$  du polynôme utilisé pour exprimer le raccordement.

### II.3.2. - APPLICATION À L'APPROXIMATION D'ARCS DE CERCLE ET D'ELLIPSE

Soit un repère plan  $O X Y$ .

L'équation paramétrique de l'ellipse est :

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \tag{II.18}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= - a \sin t \\ \frac{dq}{dt} &= a \cos t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= - a \cos t \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= - b \sin t \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{ds}{dt} = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}$$

et le rayon de courbure

$$R_c = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{a b} \tag{II.19}$$

On se propose de déterminer un arc de raccordement entre deux points de l'ellipse et de comparer cet arc avec l'arc d'ellipse correspondant. Soit  $t = 0$  et  $t = \pi/2$  les valeurs respectives du paramètre  $t$  de ces deux points. On obtient :

$$q_0 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_1 \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{t}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = b \quad \frac{ds}{dt}(1) = a$$

$$R_{c_0} = \frac{b^2}{a} \quad R_{c_1} = \frac{a^2}{b}$$

Il reste à évaluer  $\frac{ds}{dr}$  en  $r = 0$  et  $r = 1$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dr}$$

On peut prendre  $\frac{dt}{dr} = \frac{\Delta t}{\Delta r} = \frac{1}{2}$

d'où  $\frac{ds}{dr}(0) = \frac{b}{2} \pi$        $\frac{ds}{dr}(1) = a \frac{\pi}{2}$ .

A partir des quantités  $q_0, q_1, \vec{t}_0, \vec{t}_1, \frac{\vec{n}}{R_0}, \frac{\vec{n}_1}{R_{c_1}}$ , il est aisé de

calculer les coefficients  $a_i, i = 1, 5$ .

Pour l'ellipse caractérisée par  $a = 1$  et  $b = \frac{1}{2}$ , l'erreur maximale de position est  $3,195 \times 10^{-4}$ , l'erreur maximale sur le rayon de courbure est  $2,5748 \times 10^{-3}$ .

Dans le cas particulier du demi-cercle caractérisé par :

$a = b = 1$  et en choisissant arbitrairement :

$$\frac{ds}{dr}(0) = \frac{ds}{dr}(1) = \frac{\Delta t}{\Delta r} = T$$

on obtient :

- une erreur maximale de position de 1,8% ; et,
- une erreur maximale sur le rayon de courbure de 4,16%.

En choisissant :

$$\frac{ds}{dr}(0) = \frac{ds}{dr}(1) = 3.2$$

on obtient respectivement :

0,09%

0,751%

Les erreurs ainsi obtenues sont inférieures à celles obtenues précédemment.

Le cas particulier du cercle montre qu'il existe un certain arbitraire dans le choix des dérivées de l'abscisse curviligne par rapport au paramètre  $r$ .

#### II.4. - CONCLUSION DU CHAPITRE II

Dans les deux cas de définition numérique d'un arc de courbe décrits dans ce chapitre, il importe d'établir certaines orientations dans le choix des dérivées successives de la ou des coordonnées par rapport au paramètre  $r$ .

Nous verrons, dans le chapitre suivant, que certaines de ces dérivées sont dépendantes des conditions aux extrémités (vecteur position, trièdre de SERRET FRENET et courbure) et que d'autres sont choisies arbitrairement. Nous étudierons l'influence de ces dérivées arbitraires dans le cas particulier de la définition de la courbe statorique d'une machine volumétrique à palettes.

### CHAPITRE III

#### APPLICATIONS DU PROBLEME DE RACCORDEMENT DE DEUX COURBES A LA DEFINITION DE LA COURBE STATORIQUE D'UNE MACHINE VOLUMETRIQUE A PALETTES.

##### III.1. - DESCRIPTION D'UNE MACHINE VOLUMETRIQUE A PALETTES.

Une machine volumétrique à palettes est constituée d'un rotor, d'un stator et d'un ensemble de palettes liées au rotor qui délimite entre le rotor et le stator des chambres dont le volume évolue lors du mouvement de l'ensemble rotor-palettes par rapport au stator.

De l'évolution du volume de la chambre dépend celle de la pression instantanée, du fluide contenu dans cette même chambre. Pour assurer un bon fonctionnement de la machine, il est nécessaire d'établir à chaque instant le contact entre chacune des palettes et le stator, la réaction à ce même contact doit être si possible minimale durant un cycle car de celle-ci dépend en partie le rendement mécanique. Cette réaction au contact est naturellement dépendante de l'accélération du mouvement de la palette, elle-même tributaire du rayon de courbure.

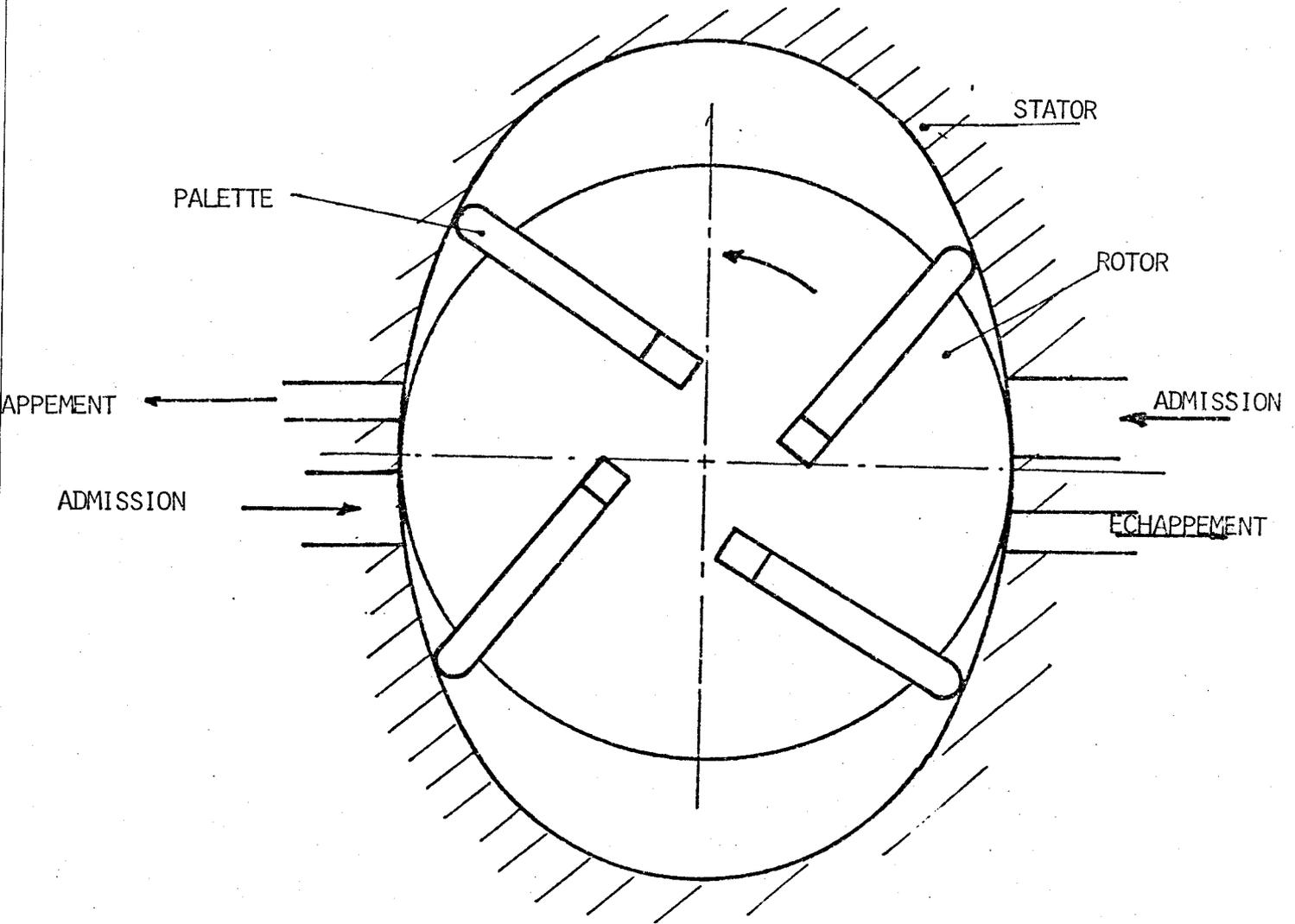


figure III.1 : Machine volumétrique à palettes de symétrie 2



### III.2. - CARACTERISTIQUES DE LA COURBE STATORIQUE

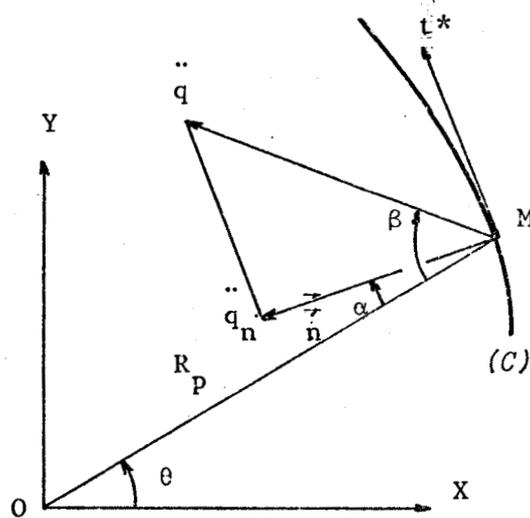
La courbe statorique est généralement plane. Considérons un repère plan dont l'origine appartient à l'axe commun du rotor et du stator.

La courbe statorique doit être telle que, lorsque l'angle polaire décrit un cycle :

- le rayon polaire soit minimum, égal au rayon du rotor (circulaire), le rayon de courbure étant égal au rayon polaire, ceci afin d'assurer l'étanchéité entre le rotor et le stator.
  
- le rayon polaire croît jusqu'à un maximum : il définit avec le rayon polaire minimum la courbe de la palette.
  
- le rayon polaire décroît ensuite jusqu'au minimum et cela se reproduit  $n$ . fois sur l'entièreté de la courbe ( $n$  désignant l'ordre de symétrie de cette courbe)

### III.3. - ACCELERATION DU POINT DE CONTACT PALETTE-STATOR

L'accélération du centre de gravité dépend de celle du point de contact palette-stator et de la géométrie de la palette. Nous n'étudierons donc que l'accélération de ce point de contact.



Soient :

- (C) la courbe statorique
- M le point de contact de la palette et du stator d'affixe  $q$   
( $q$  est une fonction à coefficients vectoriels  $a_i$  d'un paramètre  $r$ )
- O X Y Z est un repère direct, O X Y définit le plan contenant la courbe plane (C)

- $\theta$  et  $R_p$  l'argument et le module du vecteur position  $\vec{OM}$
- $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  vecteur tangent et le vecteur normal au sens de SERRET-FRENET.
- $\alpha$  l'argument de la normale par rapport à la direction radiale  $\vec{MO}$
- $\ddot{q}$  l'accélération absolue du point M parcourant la trajectoire ( ) à vitesse angulaire  $\frac{d\theta}{dt}$  constant (t désigne le temps)
- $\ddot{q}_n$  la composante de l'accélération  $\ddot{q}$  sur la normale  $\vec{n}$ . De celle-ci dépend, notamment, la réaction au contact palette stator
- $\beta$  l'argument de l'accélération absolue par rapport à la direction radiale  $\vec{MO}$
- $\wedge$  le symbole du produit vectoriel
- $|$  le symbole du produit scalaire
- $\|A\|$  la norme du vecteur A
- s l'abscisse curviligne.

L'affixe q d'un point M de la coube s'écrit :

$$q = R_p e^{i\theta} \quad (\text{III.1})$$

i étant le nombre imaginaire unité

ou encore :

$$q = x + iy.$$

Calculons la vitesse et l'accélération du point M :

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\dot{q} = \vec{t} \frac{ds}{dt} \quad (\text{III.2})$$

$$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{\vec{n}}{R_c} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{t} \frac{d^2s}{dt^2} \quad (\text{III.3})$$

dans cette expression  $R_c$  est le rayon de courbure au sens de FRENET.

Cette expression s'écrit aussi :

$$\ddot{q} = \frac{\vec{n}}{R_c} \left( \frac{ds}{d\theta} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \vec{t} \left( \frac{d^2s}{d\theta^2} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{ds}{d\theta} \ddot{\theta}$$

or  $\ddot{\theta} = 0$  vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  constante.

$$\ddot{q} = \left( \frac{\vec{n}}{R_c} \left( \frac{ds}{d\theta} \right)^2 + \vec{t} \frac{d^2s}{d\theta^2} \right) \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.4})$$

- Calcul pratique de la vitesse et de l'accélération  $q$  paramétrée par  $r$

. Vitesse :

$$\dot{q} = \frac{dq}{dr} \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \quad (\text{III.5})$$

. Accélération :

$$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = \left[ \frac{d^2q}{dr^2} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{dq}{dr} \frac{d^2r}{d\theta^2} \right] \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.6})$$

Posons  $\chi' = \frac{d\chi}{dr}$

$$\text{tg } \theta = y/x \quad \text{pour } x \neq 0$$

$$\text{d'où} \quad (1 + \text{tg}^2 \theta) d\theta = \frac{x y' - y x'}{x^2} dr$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{||q||^2}{(q \wedge q')|z} \quad (\text{III.7})$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \left[ \frac{2(q|q')}{(q \wedge q')|z} - ||q||^2 \frac{(q' \wedge q'')|z}{(q' \wedge q'')^2} \right] \frac{dr}{d\theta} \quad (\text{III.8})$$

Remarque : l'accélération absolue est proportionnelle à  $\dot{\theta}^2$

- L'accélération normale  $\ddot{q}_n$  s'exprime selon :

$$\ddot{q}_n = \ddot{q}|\vec{n} = \frac{1}{R_c} \left( \frac{ds}{d\theta} \right)^2 \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.9})$$

L'objectif à atteindre est d'obtenir une courbe :

- dont le rayon polaire  $R_p$  est compris entre le rayon  $R_{p_0}$  et  $R_{p_1}$  ;  
 $R_{p_0}$  étant le rayon polaire minimal,  $R_{p_1}$  le rayon polaire maximal.
- ne présentant pas de point d'inflexion (changement de signe du rayon de courbure géodésique)
- pour laquelle l'accélération normale n'est pas excessive le long d'un cycle.

Nous allons examiner les conditions qu'il faut imposer aux extrémités du ou des arcs définissant la courbe statorique.

### III.4. - DEFINITION DE LA COURBE STATORIQUE.

Le nombre de chambres détermine l'amplitude angulaire  $\delta_c$  relative à un cycle élémentaire.

On peut définir la courbe statorique relative à ce cycle par un ou deux arcs.

#### III.4.1. - DÉFINITION PAR UN ARC.

La courbe relative à un cycle est composée d'un seul arc qui, à ses extrémités, se raccorde avec un cercle de rayon  $R_r$  égal à celui du rotor à un ordre de continuité égal à 2

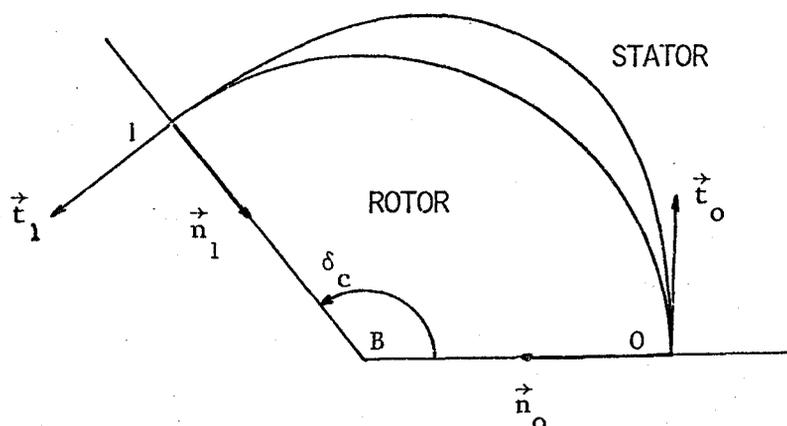


fig. III.2 : Courbe statorique définie par un arc

-  $R_{p0} = R_{p1} = R_r$

- la tangente en 0 et 1 est confondue à celle du cercle de centre B et de rayon  $R_r$

- les rayons de courbure  $R_{c0}$  en 0 et  $R_{c1}$  en 1 sont égaux à  $R_r$

L'arc sera paramétré par le paramètre  $r$  variant de 0 (pour le point 0) à 1 (pour le point 1)



On impose au point 1

- angle polaire :  $\delta_1$
- rayon polaire :  $R_{p1} > R_r$
- rayon de courbure :  $R_{c1}$
- la tangente en 1 est perpendiculaire à la direction radiale correspondante.

Les arcs  $A_1$  et  $A_2$  seront respectivement paramétrés par le paramètre  $r$  tel que :

- pour l'arc  $A_1$ ,  $r$  varie de 0 (pour le point 0) à 1 (pour le point 1) ;
- pour l'arc  $A_2$ ,  $r$  varie de 0 (pour le point 1) à 1 (pour le point 2).

Nous allons préciser dans le paragraphe suivant les caractéristiques dimensionnelles de la courbe statorique.

### III.4.3 - CAS ÉTUDIÉS

#### III.4.3.1. Définition par un arc

- Rayon polaire en 0 :  $R_{po} = 1$
- Rayon polaire en 1 :  $R_{p1} = 1$
- Rayon de courbure en 0 :  $R_{co} = 1$
- Rayon de courbure en 1 :  $R_{c1} = 1$
- Variation angulaire :  $\delta_c = \delta = \pi$

#### III.4.3.2. Définition par deux arcs

- Rayon polaire en 0 :  $R_{po} = 1$
- Rayon polaire en 1 :  $R_{p1} = 1.3$
- Rayon polaire en 2 :  $R_{p2} = 1$
- Rayon de courbure en 0 :  $R_{co} = 1$
- Rayon de courbure en 1 :  $R_{c1} = 0,5$  (resp. 0.6, 0.7, 0.8, 0.9)
- Rayon de courbure en 2 :  $R_{c2} = 1$
- Variation angulaire :  $\delta_c = \delta_1 + \delta_2 = \pi$

Dans les deux cas, on calculera en 41 points de l'arc le rayon polaire, le rayon de courbure et l'accélération normale sachant que la vitesse angulaire  $\frac{d\theta}{dt}$  vaut 1.

Quelle que soit la définition du ou des arcs (arc de raccordement défini par projection stéréographique au raccordement à l'aide de l'abscisse curviligne) et quelle que soit le cas étudié (un ou deux arcs), le vecteur position est défini par les polynômes de degré 5 ( $p = 2$ ), c'est à dire par :

- les expressions II.6 pour la première définition,
- l'expression II.16 pour la seconde.

#### III.4.4. - APPLICATION DE LA DÉFINITION D'UN ARC DE RACCORDEMENT PAR PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE D'UNE COURBE TRACÉE SUR UNE SPHÈRE À LA DÉFINITION DE LA COURBE STATORIQUE :

On se place dans le cas de la formulation en coordonnées sphériques. Nous allons établir les expressions caractérisant le rayon polaire et le rayon de courbure de l'arc de raccordement.

##### I.4.4.1. Rayon polaire et rayon de courbure de l'arc de raccordement :

Rappelons les expressions du vecteur position ainsi que celles des dérivées première et seconde ; R étant le rayon de la sphère sur laquelle est tracée la courbe (cf. § II,2.2.)

- pour la courbe tracée sur la sphère :

. vecteur position :

$$q = x j + y k + z l$$

$$q = R \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.a})$$

. vecteur dérivée première :

$$q' = x'j + y'k + z'l$$

$$q' = R \sin \phi \frac{d\theta}{dr} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + R \frac{d\phi}{dr} \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \quad (\text{III.10.b})$$

. vecteur dérivée seconde :

$$q'' = x''j + y''k + z''l$$

$$\begin{aligned} q'' = & R \sin \phi \left[ \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 \right] \begin{pmatrix} + \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + R \sin \phi \frac{d^2\theta}{dr^2} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + R \frac{d^2\phi}{dr^2} \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \end{pmatrix} + 2 R \cos \phi \frac{d\theta}{dr} \frac{d\phi}{dr} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + R \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.10.c})$$

- pour la projection stéréographique (arc de raccordement) :

. vecteur position :

$$q'' = \frac{2R}{R+z} (x j + y.k) + Rl \quad (\text{III.11.a})$$

. vecteur dérivée première :

$$q'^* = \frac{2R}{R+z} (x'j + y'k) - \frac{2z'R}{(R+z)^2} (xj + yk) \quad (\text{III.11.b})$$

. vecteur dérivée seconde :

$$q''^* = \frac{2R}{R+z} (x''j + y''k) - \frac{4R}{(R+z)^2} z' (x'j + y'k) + \frac{2R}{(R+z)^2} \left( \frac{2z'^2}{R+z} - z'' \right) (xj + yk) \quad (\text{III.11.c})$$

III.4.4.1.1. Rayon polaire de la courbe projetée relativement à B (origine du plan de projection)

Le vecteur position de la courbe projetée dans le repère (B, j, k) s'écrit :

$$q^* = \frac{2R}{R+z} (R \sin \phi \cos \theta y + R \sin \phi \sin \theta k)$$

et le rayon polaire correspondant :

$$R_p = \frac{2R}{R+z} R \sin \phi \quad 0 < \phi < \pi \quad (\text{III.12})$$

$$R_p = 2R \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \quad (\text{III.12})$$

Le rayon polaire d'un point de l'arc de raccordement ne dépend que du rayon de la sphère et de  $\phi$ .

III.4.4.1.2. Rayon de courbure de la courbe projetée

Que la définition de la courbe statorique soit faite par un ou deux arcs, on impose, aux points extrêmes du ou des arcs, à la tangente d'être

perpendiculaire à la direction radiale ; c'est à dire :

$$q^* | q'^* = 0$$

$$\rightarrow z' = 0$$

$$\rightarrow R \frac{d\phi}{dr} \sin \phi = 0$$

puisque  $\phi \neq 0$  (rayon polaire nul), il vient :

$$\frac{d\phi}{dr} = 0$$

Calculons le rayon de courbure  $R_c$  de la courbe aux extrêmités de l'arc lorsque  $\frac{d\phi}{dr} = 0$  :

$$R_c = \frac{||q'^*||^3}{||q' \wedge q''^*||}$$

Remarque :  $q'^*$  et  $q''^*$  sont des vecteurs du plan B j k donc  $q'^* q''^*$  est porté par  $l$  ; un changement de signe de  $(q' \wedge q'') | l$  implique un point d'inflexion. Dans les calculs et pour l'orientation de la courbe choisie, le rayon de courbure géodésique est du signe de  $(q' \wedge q'') | l$  (voir figure III.2 et III.3).

$$R_c = \frac{2R}{R+z} R \sin \phi \frac{1}{1 - \frac{\frac{d^2\phi}{dr^2}}{\sin \phi \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2}}$$

or  $\frac{2R}{R+z} R \sin \phi$  n'est autre que le rayon polaire de la courbe projetée.

$$R_c = R_p \cdot \frac{1}{1 - \frac{\frac{d^2\phi}{dr^2}}{\sin \phi \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}} \quad (\text{III.13})$$

une valeur de  $\frac{d\theta}{dr}$  infinie présentant peu d'intérêt, on peut conclure :

Pour que le rayon de courbure au point extrême soit égal au rayon polaire et que la tangente et la direction radiale en ce point soient perpendiculaires, il faut que :

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\phi}{dr^2} = 0 \quad (\text{III.14})$$

Pour le point 1 de la définition par deux arcs (voir figure III.3), on impose la tangente et la direction radiale perpendiculaires ( $\frac{d\phi}{dr} = 0$ ) et le rayon de courbure  $R_c$  ; on en déduit  $\frac{d^2\phi}{dr^2}$  par la relation :

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \left(1 - \frac{R_p}{R_c}\right) \sin \phi \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \quad (\text{III.15})$$

La définition de la courbe statorique par un arc selon l'expression II.6 doit satisfaire aux points extrêmes de l'arc aux conditions :

$$- \phi(0) = \phi(1) = 2 \text{ Arc tg } \left(\frac{R_p}{2R}\right) \quad \text{d'après} \quad (\text{III.12})$$

$$- \frac{d\phi}{dr}(0) = \frac{d\phi}{dr}(1) = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{d\phi}{dr}} \right\} \quad \text{d'après} \quad (\text{III.14})$$

$$- \frac{d^2\phi}{dr^2}(0) = \frac{d^2\phi}{dr^2}(1) = 0$$

La définition de  $\phi$  selon II.6 conduit à :

$$\phi(r) = 2 \text{ Arc tg } \left( \frac{r}{2R} \right) = C^{te}$$

L'arc de courbe ainsi défini est un arc de parallèle, sa projection est un arc de cercle. La définition par un arc de raccordement défini par projection stéréographique n'est donc pas possible. La définition par deux arcs s'avère nécessaire et elle seule sera utilisée par la suite dans le cadre du paragraphe III.4.4.

Pour la définition par deux arcs, il est possible de faire varier  $\frac{d\theta}{dr}$  et  $\frac{d^2\theta}{dr^2}$  aux points extrêmes de l'arc auxquels correspondent les valeurs 0 et 1 du paramètre r. Nous n'étudierons que l'arc  $A_1$  et choisissons  $\delta_1 = \delta_2 = \delta = \frac{\pi}{2}$  (cf. III.4.3),

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dr} (r = 0) &= K_0 \cdot \delta & \frac{d^2\theta}{dr^2} (r = 0) &= L_0 \cdot \delta \\ \frac{d\theta}{dr} (r = 1) &= K_1 \cdot \delta & \frac{d^2\theta}{dr^2} (r = 1) &= L_1 \cdot \delta \end{aligned} \tag{III.17}$$

### III.4.4.2 - Résultats relatifs à l'arc $A_1$

#### III.4.4.2.1. Présentation

De ce qui précède, nous avons établi qu'il est possible de faire varier :

- le rayon de la sphère R
- le rayon de courbure au point  $l = R_{c1}$  (cf. III.4.3.2.)
- $\frac{d\theta}{dr} (r = 0)$  et  $\frac{d\theta}{dr} (r = 1)$ ,
- $\frac{d^2\theta}{dr^2} (r = 0)$  et  $\frac{d^2\theta}{dr^2} (r = 1)$ .

par ailleurs, la rayon polaire  $R_{po}$  au point 0 et le rayon polaire  $R_{p1}$  en 1 et le rayon de courbure  $R_{co}$  au point 0 sont constants dans la suite du travail (cf. III.4.3.2.).

Dans un premier temps, nous poserons :

- le rayon de sphère  $R$  égal à 1,
- $\frac{d^2\theta}{dr^2}(0)$  et  $\frac{d^2\theta}{dr^2}(1)$  nuls ;

pour différentes valeurs de rayon de courbure  $R_c$  au point 1, nous récapitulerons les résultats dans les tableaux III 1 à III 5 en fonction de  $\frac{d\theta}{dr}(0)$  et  $\frac{d\theta}{dr}(1)$  ( $K_0$  et  $K_1$ ).

Dans un second temps, nous choisirons le rayon de courbure  $R_{c1}$  en 1 au vu des résultats précédents et conservons :

- $\frac{d^2\theta}{dr}(0)$  et  $\frac{d^2\theta}{dr^2}(1)$  nuls ;

pour différentes valeurs de rayon de sphère, nous récapitulerons les résultats dans les tableaux III.6 à III.8 en fonction de  $\frac{d\theta}{dr}(0)$  et  $\frac{d\theta}{dr}(1)$ .

Dans un troisième temps, nous poserons :

- le rayon de sphère  $R$ ,
- le rayon de courbure  $R_{c1}$  en 1,
- $\frac{d\theta}{dr}(0)$  et  $\frac{d\theta}{dr}(1)$  égaux à  $\delta$  ;

et obtenons les résultats du tableau III.9 en fonction de  $\frac{d^2\theta}{dr^2}$  (0) et  $\frac{d^2\theta}{dr^2}$  (1).

D'une manière générale, les tableaux ci-dessus cités comportent plusieurs zones :

- les traits continus définissent les zones relatives au rayon polaire de l'arc :

- . rayon polaire minimal, noté  $R_{p_{\min}}$ , inférieur à  $R_{p_0}$  ;
- . rayon polaire minimal égal à  $R_{p_0}$ .

- les traits interrompus définissent les zones relatives au rayon de courbure géodésique minimal de l'arc :

- . rayon de courbure minimal, noté  $R_{c_{\min}}$ , négatif,
- . rayon de courbure minimal égal à  $R_{c_1}$ ,
- . rayon de courbure minimal supérieur à  $R_{c_1}$ .

- à chaque couple de valeurs  $(K_0, K_1)$  (tableaux III.1 à III.8) ou à chaque couple de valeurs  $(L_0, L_1)$  (tableau III.9) correspondent deux valeurs :

- . l'accélération normale minimale,
- . l'accélération normale maximale

du point de contact palette-stator. Ces deux valeurs ne seront indiquées que dans les cas favorables à la définition de la courbe statorique.

III.4.4.2.2. Influence de la dérivée première de  $\theta$  pour  $r = 0$  et  $r = 1$  et influence du rayon de courbure  $R_{c1}$  (tableaux III.1 à III.5) :

Dans un premier temps, nous posons donc :

- le rayon de sphère  $R$  égal à 1,
- $\frac{d^2\theta}{dr^2}(0)$  et  $\frac{d^2\theta}{dr^2}(1)$  nuls.

Les valeurs obtenues dans les tableaux III.1 à III.5 permettent d'établir les premières constatations sur le rayon polaire, le rayon de courbure et l'accélération normale le long de l'arc  $A_1$ .

III.4.4.2.2.1. Rayon polaire de l'arc :

Quelles que soient les valeurs positives de  $K_0$  et  $K_1$ , le rayon polaire maximal est toujours inférieur à  $R_{p1}$  ( $\theta$  est une fonction croissante sur l'intervalle  $[0,1]$ , en particulier aux points 0 et 1). Au delà d'une certaine valeur de  $K_1$ , le rayon polaire minimal est inférieur à  $R_{p0}$ .

III.4.4.2.2.2. Rayon de courbure de l'arc :

Le rayon de courbure (géodésique) permet de distinguer trois zones en fonction de  $K_0$  et  $K_1$  :

- le rayon de courbure minimal est négatif pour  $K_0 + K_1$  assez petit.
- le rayon de courbure minimal est égal au rayon de courbure  $R_{c1}$  au point 1 lorsque  $K_0$  et  $K_1$  de l'ordre de 1.

On note de plus que l'accélération normale est maximale au point 1 et proportionnelle à  $(R_{p1})^2/R_{c1}$

- le rayon de courbure minimal est positif mais inférieur à  $R_{c1}$  pour des valeurs de  $K_1$  assez faibles.

Les remarques faites précédemment sont modulées par le rayon de courbure  $R_{c1}$ .

III.4.4.2.2.3. Influence du rayon de courbure  $R_{c1}$  :

Au fur et à mesure que la rayon de courbure augmente :

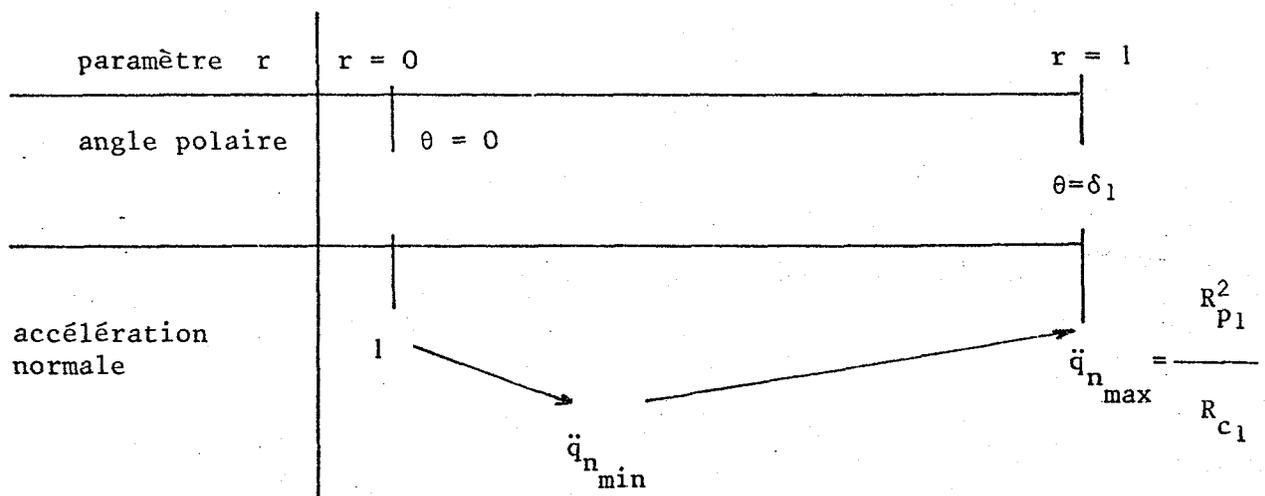
- le nombre de couples  $(K_0, K_1)$  pour lesquels  $R_{c_{min}} = R_{c1}$  diminue et devient nul au delà d'une certaine valeur de  $R_{c1}$  ( $\approx 1$ ) ;
- la valeur maximale de  $K_1$  pour laquelle le rayon polaire minimal est le rayon polaire  $R_{p0}$ , augmente avec le rayon de courbure en 1 ;
- à un couple  $(K_0, K_1)$  donné, l'accélération normale minimale et l'accélération normale maximale diminuent.

III.4.4.2.2.4. Accélération normale le long de l'arc :

Les lois de variation de l'accélération normale le long d'un cycle sont en nombre deux lorsque l'arc a son rayon polaire compris entre  $R_{p0}$  et  $R_{p1}$  et ne présente pas de point d'inflexion :

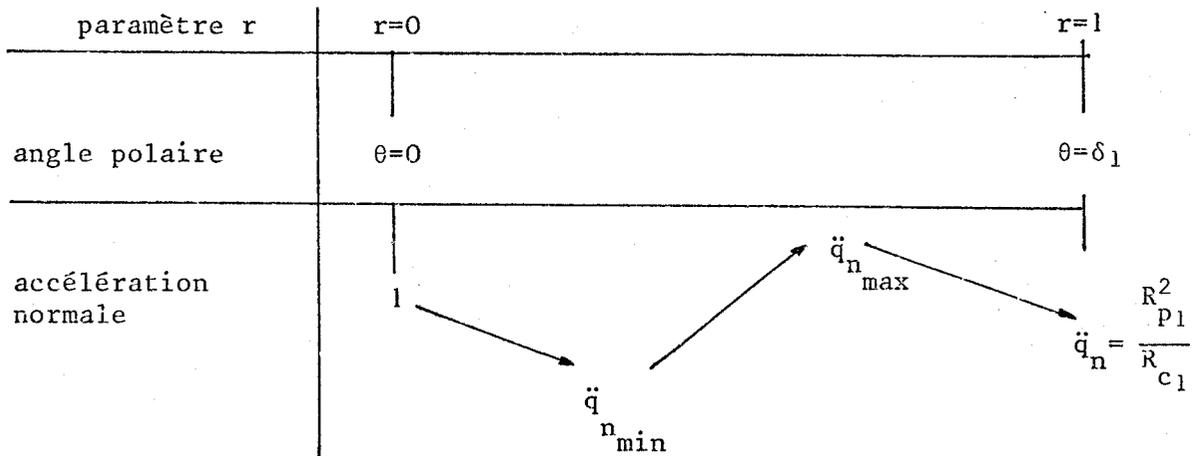
- le rayon de courbure minimal est  $R_{c1}$  :

L'accélération normale est régie par la loi de variation suivante en fonction de l'angle polaire.



- le rayon de courbure minimal est inférieur à  $R_{c1}$  :

L'accélération normale est régie par la loi de variation :



Calculons l'accélération absolue aux points extrêmes des arcs

$A_1$  et  $A_2$  :

Aux points 0,1 et 2 (v. fig. III.3), la condition de perpendicularité de la tangente et de la direction radiale implique  $\frac{d\phi}{dr} = 0$  ; si, de plus,  $\frac{d^2\theta}{dr^2}$  est nul en ces points, alors la dérivée seconde de  $q$  en ces points est radiale (cf. III.10.c et III.11.c) ; ceci montre que l'accélération absolue en ces points est égale à l'accélération normale, elle est de module  $\frac{(R_p)^2}{R_c}$  (le rayon de courbure géodésique  $R_c$  est positif).

L'accélération normale est de module :

- 1 : pour les points 0 et 2
- $\frac{(R_{p1})^2}{R_{c1}}$  : pour le point 1.

Le contact palette-stator dépend de l'accélération normale et des forces de pression appliquées à la palette. Si la machine volumétrique est motrice alors les forces de pressions maximales sont exercées au voisinage du point 0, si la machine est réceptrice alors les forces de pression sont

maximales au voisinage du point 2. Dans les deux cas, la courbe statorique relative à un cycle doit être définie de façon à assurer une accélération normale la plus élevée possible dans un des deux voisinages du rayon polaire minimal ; or, dans ce voisinage, l'accélération maximale varie de 1 à  $\ddot{q}_{n \min}$ . A un couple  $(K_0, K_1)$  donné, pour augmenter le minimum de l'accélération, il faut diminuer le rayon de courbure  $R_{c1}$  mais ceci entraîne un accroissement de l'accélération normale maximale. Il convient alors de faire le choix du rayon de courbure  $R_{c1}$  arbitraire. Dans la suite, nous affecterons à  $R_{c1}$  la valeur 0.7 qui conduit au point 1 à une accélération normale de 2.41 environ.

Compte tenu de ces valeurs, nous allons étudier, dans le second temps, l'influence du rayon de la sphère  $R$  et, dans le troisième, l'influence de la dérivée seconde de l'angle polaire aux points 0 et 1.

#### III.4.4.2.3. Influence du rayon de sphère $R$ (tableaux III.3 et III.6 à III.8)

Rappelons les conditions aux extrémités de l'arc  $A_1$  :

- amplitude angulaire :  $\delta_1 : \frac{\pi}{2}$
- rayon polaire :  $R_{p0} = 1, R_{p1} = 1.3$
- rayon de courbure :  $R_{c0} = 1., R_{c1} = 0.7$
- dérivée seconde de l'angle polaire :  $\frac{d^2\theta}{dr^2}(0) = \frac{d^2\theta}{dr^2}(1) = 0$

Pour l'ensemble des couples  $(K_0, K_1)$ , une diminution du rayon de sphère a pour effet d'accroître les valeurs minimales et les valeurs maximales de l'accélération normale. Lorsque  $R_{c \min}$  vaut  $R_{c1}$  on obtient,

quelque soit le rayon de sphère, la valeur la plus élevée d'accélération normale minimale pour  $\frac{d\theta}{dr}(0) = \frac{d\theta}{dr}(1) = \delta$  c'est à dire :

R	$\ddot{q}_{n \min}$	$\ddot{q}_{n \max}$
0.2	0.571	2.41
0.5	0.558	
1.	0.546	
5.	0.538	

figure III.4

Le rayon de sphère R modifie peu le nombre de couples ( $K_0, K_1$ ) donnant des résultats intéressants.

III.4.4.2.4. Influence des dérivées secondes de l'angle polaire par rapport à r en r = 0 et r = 1 (Tableau III.9) :

Etudions, dans le troisième temps, l'influence des dérivées secondes de l'angle polaire dans le cas particulier :

- rayon de sphère : 1
- amplitude angulaire :  $\delta_1 = \frac{\pi}{2}$
- rayon polaire :  $R_{p0} = 1, R_{p1} = 1.3$
- rayon de courbure :  $R_{c0} = 1, R_{c1} = 0.7$
- dérivée première de l'angle polaire :  $\frac{d\theta}{dr}(0) = \frac{d\theta}{dr}(1) = \delta_1$

On distingue, en fonction  $L_0$  et  $L_1$  ( $\frac{d^2\theta}{dr^2}(0)$  et  $\frac{d^2\theta}{dr^2}(1)$ ),

trois zones :

- si  $L_1 \leq -L_0 - 7$  ou  $L_0$  petit ou  $L_1$  petit : apparition d'un point d'inflexion dû au sens de variation de l'angle polaire ( $\theta$  devient décroissante).
- si  $L_1 > 0$  : le rayon de courbure minimal est positif mais inférieur à  $R_{c1}$ .
- si  $L_1 \leq 0$  : le rayon de courbure minimal est égal à  $R_{c1}$ .

A  $L_0$  donné et pour  $L_1$  croissant :

- l'accélération normale minimale croît puis décroît ;
- l'accélération normale maximale est constante ( $R_{c_{min}} = R_{c1}$ ) puis croît ( $0 < R_{c_{min}} < R_{c1}$ ).

A  $L_1$  donné et pour  $L_0$  croissant :

- l'accélération normale minimale croît puis décroît ;
- l'accélération normale maximale est :
  - . constante ( $R_{c_{min}} = R_{c1}$ ) pour  $L_1 < 0$ ,
  - . croissante ( $0 < R_{c_{min}} < R_{c1}$ ) pour  $L_1 \geq 0$ .

Le résultat le plus intéressant est obtenu pour  $L_0$  compris entre 1 et 2, et,  $L_1 = 0$  ( $K_0 = K_1 = 1$ ), l'accélération normale minimale vaut alors :

- 0.568 (Rayon de sphère  $R = 1$ )
- 0.584 avec un rayon de sphère  $R = 0.2$ ,

$$K_0 = K_1 = 1, \text{ et } L_0 = L_1 = 1$$

Notons, de plus, que pour des valeurs de rayon de courbure minimal légèrement inférieures les résultats précédents peuvent être sensiblement améliorés pour l'accélération normale minimale sans augmenter de façon considérable l'accélération normale maximale.

#### III.4.4.3. CONCLUSION

*Les conditions imposées à la courbe statorique ne permettent pas de définir celle-ci par un seul arc.*

*La définition par deux arcs s'avère nécessaire. L'étude d'un des deux arcs conduit aux conclusions suivantes :*

- *la dérivée première de l'angle polaire par rapport au paramètre  $r$  en  $r = 0$  et  $r = 1$  doit avoir une valeur voisine de l'amplitude angulaire de l'arc.*
- *le rayon de courbure de la courbure au point de rayon polaire maximal détermine le niveau d'accélération normale maximale.*
- *le rayon de sphère  $R$  doit être suffisamment petit devant le rayon polaire de l'arc projeté.*
- *la dérivée seconde de l'angle polaire par rapport au paramètre  $r$  en  $r = 0$  et  $r = 1$  doit avoir une valeur voisine de l'amplitude angulaire de l'arc.*

#### III.4.5. - APPLICATION DU RACCORDEMENT DE DEUX ARCS DE COURBE À L'AIDE DE L'ABSCISSE CURVILIGNE

On définit la courbe statorique dans un plan.

Rappelons les conditions à satisfaire : (II.17)

$$q(0) = q_0$$

$$q(1) = q_1$$

$$\frac{dq}{dr} (0) = t_0 \cdot \frac{ds}{dr} (0)$$

$$\frac{dq}{dr} (1) = t_1 \cdot \frac{ds}{dr} (1)$$

$$\frac{d^2q}{dr^2} (0) = \frac{n_0}{R_{c0}} \left[ \frac{ds}{dr} (0) \right]^2 + t_0 \frac{d^2s}{dr^2} (0)$$

$$\frac{d^2q}{dr^2} (1) = \frac{n_1}{R_{c1}} \left[ \frac{ds}{dr} (1) \right]^2 + t_1 \frac{d^2s}{dr^2} (1)$$

III.4.5.1. RAYON POLAIRE ET RAYON DE COURBURE DE LA COURBE STATORIQUE :

Le rayon polaire au point 0 et au point 1 est le module de  $q_0$  et  $q_1$  respectivement. Les rayons de courbure respectifs en  $r = 0$  et en  $r = 1$  sont  $R_{c0}$  et  $R_{c1}$ .

Les 6 coefficients  $a_i$  selon (II.11), compte tenu des conditions (II.17) dépendent de  $\frac{ds}{dr} (0)$ ,  $\frac{ds}{dr} (1)$ ,  $\frac{d^2s}{dr^2} (0)$  et  $\frac{d^2s}{dr^2} (1)$

Posons :

- pour la définition par un arc (cf III.4.3.1.) :

$$\frac{ds}{dr} (0) = K_0 \cdot \delta \cdot R_{p0} \quad \frac{d^2s}{dr^2} (0) = L_0 \cdot \delta \cdot R_{p0} \quad (III.19)$$

$$\frac{ds}{dr} (1) = K_1 \cdot \delta \cdot R_{p0} \quad \frac{d^2s}{dr^2} (1) = L_1 \cdot \delta \cdot R_{p0}$$

avec  $\delta = \pi$ .

- pour la définition par deux arcs (cf. III.4.3.2.) :

On n'étudiera que l'arc 1.

$$\frac{ds}{dr} (0) = K_0 \cdot \delta \cdot R_{p_0} \quad \frac{d^2}{dr^2} (0) = L_0 \cdot \delta \cdot R_{p_0} \quad (III.20)$$

$$\frac{ds}{dr} (1) = K_1 \delta \cdot R_{p_0} \quad \frac{d^2}{dr^2} (1) = L_1 \cdot \delta \cdot R_{p_0}$$

avec  $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \frac{\pi}{2}$

### III.4.5.2. RESULTATS

#### III.4.5.2.1. Définition par un arc :

Les conditions aux extrémités (cf. III.4.3.1.) satisfaites, il est possible de faire varier  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $L_0$  et  $L_1$ .

Nous choisirons  $L_0 = L_1 = 0$ .

Nous obtenons, en fonctions de  $K_0$  et  $K_1$  :

- le tableau III.10 : à chaque couple  $(K_0, K_1)$  sont associées la valeur minimale et la valeur maximale du rayon polaire.
- le tableau III.11 : à chaque couple  $(K_0, K_1)$  sont associées la valeur minimale et la valeur maximale du rayon de courbure.

Le rayon polaire permet de distinguer trois zones :

- pour  $(K_0 \leq 1 \text{ et } K_1 \leq 1)$  ou  $(K_0 = 0.4 \text{ et } K_1 \leq 1.2)$  ou  $(K_0 = 1.2 \text{ et } K_1 \leq 0.4)$ , le rayon polaire maximal est égal à  $R_{p_0}$ .

- pour  $K_1 \geq -K_0 + 2.2$ , le rayon polaire minimal est égal à  $R_{po}$ .

- pour les autres valeurs, le rayon polaire minimal est inférieur à  $R_{po}$  et le rayon polaire maximal est supérieur à  $R_{po}$ .

Le rayon de courbure géodésique change de signe lorsque  $K_0$  ou  $K_1$  est supérieur à 2.2.

La définition par un arc est peu commode car elle ne permet pas de contrôler simultanément le rayon polaire en 0 et le rayon polaire en 1.

III.4.5.2.2. Définition par deux arcs :

Il est ici possible de faire varier le rayon de courbure au point 1 (v. fig. III.3).

III.4.5.2.2.1. Présentation :

Dans un premier temps, nous poserons :

$$\frac{d^2s}{dr^2}(0) = \frac{d^2s}{dr^2}(1) = 0 ;$$

pour différentes valeurs de rayon de courbure  $R_{c1}$  au point 1, les résultats seront récapitulés dans les tableaux III.12 à III.16 en fonction de  $\frac{ds}{dr}(0)$  et  $\frac{ds}{dr}(1)$  ( $K_0$  et  $K_1$ ).

Dans un second temps, nous choisirons le rayon de courbure  $R_{c1}$  et les dérivées premières de l'abscisse curviligne ; les tableaux III.17 et III.18 récapitulent les résultats en fonction des dérivées seconde de l'abscisse curviligne pour deux couples de valeurs ( $K_0, K_1$ ).

Les conventions concernant les tableaux sont identiques à celles énoncées au § III.4.4.2.1.

III.4.5.2.2.2. Rayon polaire (Tableaux III.12 à 16).

On distingue en fonction de  $K_0$  et  $K_1$  trois zones caractérisant le rayon polaire :

- $R_{p_{\min}} < R_{p_0}$  : pour  $K_0$  et  $K_1$  assez petits. Cette zone ne satisfait pas toutes les conditions exposées au § III.2.
- $R_{p_{\max}} > R_{p_1}$  : pour  $K_0$  assez grand. Cette zone n'est pas intéressante parce qu'elle ne satisfait pas la course que l'on impose ( $R_{p_1} - R_{p_0}$ )
- $R_{p_0} \leq R_p \leq R_{p_1}$ . Cette zone est celle qui nous intéresse.

III.4.5.2.2.3. Rayon de courbure (Tableaux III.12 à 16)

On distingue également trois zones en fonction de  $K_0$  et  $K_1$

- $R_{c_{\min}} < 0$  pour  $K_0$  ou  $K_1$  assez grand.
- $R_{c_{\min}} = R_{c_1}$  pour  $K_0$  et  $K_1$  de l'ordre de 1.4 ( $R_{c_1} = 0.5$ ) pour  $K_0 = 0.6$  et  $K_1 = 1.6$  ( $R_{c_1} = 0.9$ )
- $0 < R_{c_{\min}} < R_{c_1}$  pour les valeurs non encore citées.

III.4.5.2.2.4. Influence du rayon de courbure en  $r = 1$  (tableaux III.12 à III.16) :

On peut faire les mêmes remarques qu'au paragraphe III.4.4.2.2.3.

On choisira de même  $R_{c1} = 0.7$ .

III.4.5.2.2.5. Influence des dérivées secondes de l'abscisse curviligne par rapport à  $r$  en  $r = 0$  et  $r = 1$  :

On choisit  $R_{c1} = 0.7$  et :

$$-\frac{ds}{dr}(0) = \frac{ds}{dr}(1) = 1.2 \delta :$$

On distingue (tableau III.17) :

- en fonction du rayon polaire :

. une zone où  $R_{p_{min}} < R_{p0}$  pour  $L_1 > \frac{9}{5} L_0 + 5$

. une zone où  $R_{p_{max}} > R_{p1}$  pour  $L_1 < \frac{2}{3} L_0 - \frac{19}{3}$

. une zone où  $R_{p0} \leq R_p \leq R_{p1}$  pour

$$\frac{2}{3} L_0 - \frac{19}{3} < L_1 < \frac{9}{5} L_0 + 5.$$

Cette dernière répond à tous les critères imposés.

- en fonction du rayon de courbure :

. une zone où  $R_{c_{min}} < 0$  pour  $L_1 > L_0 + 9$  ou pour  $L_0$  petit et  $L_1$  grand.

. une zone où  $R_{c_{min}} = R_{c1}$  pour  $\frac{7}{8} L_0 - \frac{19}{8} < L_1 < \frac{2}{5} L_0 + 1$

. une zone où  $0 < R_{c_{min}} < R_{c1}$  pour les autres valeurs.

-  $\frac{ds}{dr}(0) = 1.6 \delta$  et  $\frac{ds}{dr}(1) = 0.8 \delta$

On distingue de même (III.18) :

- en fonction du rayon polaire :

- . une zone où  $R_{p_{\min}} < R_{p_0}$  pour  $L_1 > \frac{9}{4} L_0 + \frac{29}{4}$
- . une zone où  $R_{p_{\max}} > R_{p_1}$  pour  $L_1 > 4$  et pour  $L_1 < L_0 - 5$
- . une zone où  $R_{p_0} \leq R_p \leq R_{p_1}$  pour  $L_0 < 4$  et  $L_1 > L_0 - 5$   
ou pour  $L_1 < \frac{9}{4} L_0 + \frac{29}{4}$

- en fonction du rayon de courbure :

- . une zone où  $R_{c_{\min}} < 0$  pour  $L_1 > L_0 + 9$
- . une zone où  $R_{c_{\min}} = R_{c_1}$  pour  $\frac{5}{6} L_0 - \frac{5}{2} < L_1 < \frac{3}{4} L_0 + \frac{3}{4}$   
avec  $L_0 < 4$ .
- . une zone où  $0 < R_{c_{\min}} < R_{c_1}$  pour les autres valeurs.

Dans les deux cas, l'accélération normale minimale croît puis décroît lorsque  $L_0$  et  $L_1$  augmentent respectivement alors que l'accélération normale maximale décroît (jusque 2.41) puis croît.

Pour une accélération normale maximale de 2.41 ( $R_{c_{\min}} = R_{c_1}$ ), on obtient pour l'accélération normale minimale :

- 0.583 avec  $\frac{ds}{dr}(0) = \frac{ds}{dr}(1) = 1.2 \delta$

et  $\frac{d^2s}{dr^2}(0) = 0$  ,  $\frac{d^2s}{dr^2}(1) = \delta$

$$- 0,595 \text{ avec } \frac{ds}{dr} (0) = 1.6 \delta \quad , \quad \frac{ds}{dr} (1) = 0.8 \delta$$

$$\text{et } \frac{d^2s}{dr^2} (0) = \frac{d^2s}{dr^2} (1) = 0.$$

### III.4.6. - CONCLUSION DU CHAPITRE III

De l'examen des résultats, il résulte que la définition par le raccordement de deux arcs de courbe à l'aide de l'abscisse curviligne donne des valeurs extrêmes de l'accélération normale les plus voisines de 1 (0.595 et 2.41), contrairement à la définition par projection stéréographique (0.584). D'autre part, la définition à l'aide de l'abscisse curviligne utilise des coefficients vectoriels à deux composantes alors que la définition par projection stéréographique nécessite des coefficients vectoriels à trois composantes. De plus, les conditions de position, de tangente et de courbure sont plus faibles à introduire dans la définition à l'aide de l'abscisse curviligne.

Ceci nous conduit à retenir comme méthode en vue de la création d'une courbe statorique la méthode de l'abscisse curviligne.

Il importe de remarquer accessoirement que pour rendre les définitions précédentes indépendantes du repère choisi, il convient de lier les variations de la coordonnée sphérique (définition par projection stéréographique) et les variations de l'abscisse curviligne (définition à l'aide de l'abscisse curviligne) à celles du trièdre de SERRET FRENET.

Valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction de  $K_0$  et  $K_1$

avec  $L_0=L_1=0, \theta_0=0, \theta_1=\delta, R_{p_0}=1, R_{p_1}=1.3, R_{c_0}=1., R_{c_1}=0.5$   $R_{sphère}=1.$

$K_1$ $K_0$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0,4					0,138	0,491					
					3,38						
0,6	0,267	0,254	0,287	0,350	0,478	0,633					
	140	6,41	3,84		3,38						
0,8	0,501	0,486	0,5	0,536	0,603	0,648					
	168	6,74	3,87								
1	0,622	0,605	0,608	0,625	0,647	0,59					
	204	7,15	3,97		3,38						
1,2	0,69	0,673	0,664	0,66	0,63	0,475					
	251	7,6	4,1	3,4	3,38						
1,4	0,731	0,71	0,689	0,651	0,541	0,291					
	315	8,1	4,23	3,42	3,38						
1,6	0,753	0,722	0,674	0,57	0,363						
	402	8,65	4,46	3,45	3,38						
1,8	0,353	0,691	0,572	0,375	0,0513						
	525	9,63	4,82	3,6	3,38						
2		0,468	0,302								
		11,1	5,51								
2,2											
2,4											
2,6											
2,8											



Tableau III,1

Valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction de  $K_0$  et  $K_1$

$K_1$  avec  $L_0=L_1=0, \theta_0=0, \theta_1=\delta, R_{P_0}=1, R_{P_1}=1.3, R_{C_0}=1., R_{C_1}=0.6, R_{sphère}=1.$

$K_0$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	
0.4	$R_{C_{min}} < \bar{\sigma}$					0,178	0,473	$R_{C_{min}} > \bar{\sigma}$				
						2,82						
0.6	0,267	0,248	0,261	0,292	0,366	0,475	0,577	$R_{C_{min}} < \bar{\sigma}$				
	140	6,24	3,52	2,92	$R_{C_{min}} = R_{C_1}$							
0.8	0,501	0,482	0,483	0,496	0,532	0,577	0,556					
	168	6,6	3,62	2,91	2,82							
1	0,622	0,602	0,596	0,597	0,602	0,587	0,466					
	204	6,99	3,72	2,95	2,82							
1.2	0,69	0,67	0,655	0,644	0,612	0,524	0,317					
	251	7,42	3,83	3								
1.4	0,731	0,708	0,682	0,642	0,557	0,386	0,074					
	3,5	7,9	4,02	3,06								
1.6	0,753	0,721	0,672	0,579	0,414	0,319						
	402	8,42	4,28	3,2	2,82							
1.8	0,359	0,691	0,581	0,408	0,145							
	525	9,52	4,71	3,49	2,99							
2	0,478		0,326	0,06								
	10,9		5,45	4,11								
2.2												
2.4												
2.6												
2.8												



Tableau III 2

Valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction de  $K_0$  et  $K_1$

$K_1$  avec  $L_0=L_1=0, \theta_0=0, \theta_1=\delta, R_{p0}=1, R_{p1}=1.3, R_{c0}=1., R_{c1}=0.7$   $R_{sphère}=1.$

$K_0$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	
0,4	$R_{cmin} \ 0$						0,134	0,37				
							2,41					
0,6	0,267 140	0,244 6,16	0,243 3,36	0,25 2,65	0,285 2,43	0,345	0,425	0,464	$R_{cmin} \ 0$			
0,8	0,501 168	0,479 6,5	0,471 3,45	0,468 2,69	0,481 2,44	0,498	0,503	0,423				
1	0,622 204	0,6 6,88	0,588 3,54	0,576 2,74	0,568 2,45	0,546	0,477	0,304				
1,2	0,69 251	0,669 7,3	0,648 3,7	0,626 2,81	0,591 2,46	0,519	0,371	0,099				
1,4	0,731 315	0,707 2,76	0,677 3,91	0,633 2,91	0,554 2,51	0,412	0,171					
1,6	0,753 402	0,72 8,31	0,669 4,19	0,582 3,12	0,434 2,66	0,201						
1,8	0,36 525	0,692 9,44	0,586 4,63	0,492 3,47	0,589 3,02							
2	0,484 10,8		0,344 5,42	0,102 4,15								
2,2	$R_{cmin} \ 0$						$R_{pmin} \ R_{p0}$					
2,4												
2,6												
2,8												



Valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction de  $K_0$  et  $K_1$

$K_1$  avec  $L_0=L_1=0, \theta_0=0, \theta_1=\delta, R_{P_0}=1, R_{P_1}=1.3, R_{C_0}=1., R_{C_1}=0.8, R_{sphère}=1.$

$K_0$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	
0,4	$R_{C_{min}} < 0$								0,159	0,137		
	2,11											
0,6	0,267 140	0,241 6,09	0,23 3,24	0,218 2,5	0,224 2,22	0,248	0,281	0,306	0,274	0,083		
	$R_{C_{min}} = R_{C_1}$											
0,8	0,501 168	0,477 6,43	0,461 3,32	0,447 2,55	0,443 2,24	0,436 2,11	0,419	0,365	0,222			
	2,11											
1	0,622 204	0,599 6,8	0,581 3,45	0,56 2,63	0,539 2,28	0,505 2,12	0,439	0,305	0,058			
	2,11											
1,2	0,69 251	0,668 7,2	0,644 3,63	0,615 2,71	0,573 2,34	0,5 2,13	0,37	0,149				
	2,11											
1,4	0,731 315	0,706 7,65	0,673 3,83	0,626 2,86	0,548 2,45	0,416 2,23	0,204					
	2,21											
1,6	0,753 402	0,719 8,27	0,667 4,15	0,581 3,08	0,444 2,67	0,23 2,49						
	$R_{C_{min}} < 0$											
1,8	0,36 525	0,692 9,37	0,59 4,62	0,439 3,48	0,22 3,08							
2	0,49 10,8		0,357 5,43	0,127 4,2								
2,2												
2,4												
2,6												
2,8												

$R_{P_0}$



Tableau III 4

avec  $L_0=L_1=0$ ,  $\theta_0=0$ ,  $\theta_1=\delta$ ,  $R_{p_0}=1$ ,  $R_{p_1}=1.3$ ,  $R_{c_0}=1.$ ,  $R_{c_1}=0.9$   $R_{sphère}=1.$

$K_0 \backslash K_1$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0,4	$R_{cmin} < 0$										
0,6	0,267 140	0,238 6,04	0,219 3,15	0,194 2,42	0,177 2,11	0,173 1,95	0,16 1,86	0,142 1,88	$R_{cmin}=R_{c1}$		
0,8	0,501 1,68	0,475 6,37	0,454 3,24	0,431 2,48	0,411 2,15	0,383 1,97	0,345 1,88	0,272 1,88	0,135		
1	0,622 204	0,598 6,73	0,576 3,4	0,548 2,55	0,516 2,21	0,471 2,01	0,394 1,9	0,263 1,88	0,033 1,88		
1,2	0,69 251	0,667 7,13	0,64 3,57	0,606 2,67	0,557 2,29	0,479 2,09	0,352 1,99	0,141 1,95			
1,4	0,731 315	0,705 7,56	0,67 3,77	0,62 2,83	0,54 2,44	0,412 2,26	0,211 2,2				
1,6	0,753 402	0,719 8,23	0,666 4,11	0,581 3,08	0,446 2,69	0,244 2,56					
1,8	0,36 525	0,692 9,33	0,592 4,6	0,446 3,5	0,234 3,14						
2		0,493 10,7	0,367 5,43	0,16 4,24							
2,2											
2,4											
2,6											
2,8											



Tableau III.5

Valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction de  $K_0$  et  $K_1$

avec  $L_0 = L_1 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = \delta$ ,  $R_{p_0} = 1.$ ,  $R_{p_1} = 1.3$ ,  $R_{c_0} = 1.$ ,  $R_{c_1} = 0.7$ ,  $R_{sphère} = 0.2$

$K_1$   
 $K_0$

$K_0$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	
0,4	$R_{cmin} < 0$					0,017	0,135	0,297	0,415			
						2,41						
0,6	0,379 164	0,358 6,99	0,352 3,65	0,347 2,97	0,363 2,48	0,394	0,437	0,471	0,407			
						$R_{cmin} = R_{c1}$						
0,8	0,575 197	0,556 7,39	0,545 3,75	0,535 2,94	0,534 2,49	0,535	0,523	0,463	0,302	$R_{cmin} < 0$		
						2,41						
1	0,679 240	0,675 7,83	0,74 3,85	0,625 2,9	0,605 2,52	0,571	0,5	0,362	0,118			
						2,41						
1,2	0,732 296	0,712 8,31	0,688 4,07	0,658 3	0,61 2,56	0,527	0,39	0,171				
1,4	0,763 371	0,736 8,85	0,698 4,31	0,638 3,14	0,542 2,64	0,4	0,19					
1,6	0,566 473	0,723 9,51	0,645 4,64	0,537 3,36	0,384 2,8	0,168						
						2,5						
1,8		0,579 10,8	0,481 5,14	0,323 3,74	0,09 3,15							
						$R_{pmin} < R_0$						
2		0,233 12,4	0,146 6,01									
2,2												
2,4												
2,6												
2,8												



Tableau III 6

Valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction de  $K_0$  et  $K_1$   
 avec  $L_0 = L_1 = 0, \theta_0 = 0, \theta_1 = \delta, R_{p_0} = 1., R_{p_1} = 1.3, R_{c_0} = 1., R_{c_1} = 0.7, R_{sphère} = 0.5$

$K_0$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	
0,4	$R_{c_{min}} < 0$						0,127	0,33	0,411		
							2,41				
0,6	0,324 152	0,302 6,56	0,298 3,5	0,298 2,76	0,323 2,45	0,367	0,427	0,468	0,37		
							$R_{c_{min}} = R_{c_1}$				
0,8	0,539 182	0,518 6,93	0,508 3,59	0,501 2,76	0,507 2,46	0,515	0,512	0,446	0,251		
							2,41		$R_{c_{min}} < 0$		
1	0,649 221	0,629 7,34	0,614 3,69	0,601 2,81	0,586 2,48	0,558	0,489	0,339	0,048		
							2,41		$R_{p_{min}} < R_0$		
1,2	0,711 273	0,691 7,79	0,669 3,88	0,643 2,9	0,602 2,51	0,523	0,383	0,141			
							2,41				
1,4	0,747 342	0,722 8,28	0,689 4,1	0,639 3,03	0,55 2,57	0,408	0,184				
1,6	0,725 436	0,726 8,89	0,664 4,41	0,564 3,23	0,414 2,73	0,187					
							2,46				
1,8	0,141 569	0,651 10,1	0,541 4,88	0,38 3,6	0,146 3,08						
2		0,369 11,6	0,254 5,7	0,016 4,27							
2,4											
2,6											
2,8											



Tableau III.7

	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0,4							0,152	0,404			
			$R_{C_{\min}} < 0$					2,41			
0,6	0,223	0,2	0,201	0,214	0,258	0,332	0,429	0,458			
	1,21	5,88	3,26				2,41				$R_{C_{\min}} < 0$
0,8	0,472	0,449	0,442	0,444	0,463	0,488	0,498	0,4			
	158	6,2	3,35	2,64	2,42		2,41				
1	0,601	0,579	0,567	0,558	0,554	0,538	0,468	0,27			
	192	6,56	3,44	2,69	2,43		$R_{C_{\min}} = R_C$				
1,2	0,675	0,652	0,633	0,613	0,582	0,14	0,359	0,057			
	236	6,96	3,58	2,75	2,44		2,41				
1,4	0,718	0,695	0,667	0,628	0,554	0,412	0,158				
	296	7,39	3,78	2,85	2,47		2,41				
1,6	0,743	0,713	0,669	0,59	0,448	0,909					
	378	7,91	4,04	3,04	2,62	2,44					
1,8	0,508	0,702	0,611	0,457	0,219						
	494	8,97	4,46	3,38	2,98						$R_{P_{\min}} < 0$
2		0,558	0,406	0,156							
		10,3	5,23	4,05							
2,2											
2,4											
2,6											
2,8											



Fableau III.8

$R_{\text{sphère}} = 1$

$\delta = \frac{\pi}{2}$

$R_{P_0} = 1$

$R_{C_0} = 1$

$\frac{d\theta}{dr}(0) = \delta$

$R_{P_1} = 1.3$

$R_{C_1} = 0,7$

$\frac{d\theta}{dr}(1) = \delta$

$L_0$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5						0,0867	0,161	0,233	0,296	0,352	0,391
			$R_{C_{\min}} < 0$			2,41		2,48	2,62	2,79	3,06
-4			0,0566	0,155	0,24	0,307	0,361	0,41	0,453	0,49	
				$R_{C_{\min}} = R_{C_1}$			2,49	2,64	2,83	3,12	
-3			0,1	0,204	0,287	0,353	0,411	0,46	0,498	0,532	0,564
				2,41				2,5	2,66	2,88	3,19
-2		0,106	0,219	0,308	0,38	0,442	0,49	0,531	0,568	0,596	0,62
			2,41				2,42	2,52	2,67	2,93	3,25
-1	0,069	0,195	0,299	0,38	0,447	0,504	0,549	0,588	0,618	0,646	0,668
			2,41				2,42	2,53	2,72	2,98	3,33
0	0,13	0,25	0,348	0,427	0,491	0,546	0,59	0,628	0,658	0,683	0,704
			2,41				2,43	2,55	2,76	3,04	3,45
1	0,158	0,274	0,37	0,449	0,514	0,568	0,614	0,653	0,685	0,712	0,733
			2,41				2,43	2,58	2,81	3,14	3,59
2	0,157	0,273	0,358	0,416	0,512	0,568	0,616	0,656	0,692	0,721	0,7
			2,41				2,44	2,62	2,89	3,25	3,73
3	0,129	0,247	0,343	0,423	0,49	0,544	0,591	0,628	0,653	0,653	0,598
			2,41				2,46	2,68	2,97	3,37	3,94
4	0,076	0,195	0,294	0,377	0,441	0,496	0,537	0,566	0,576	0,55	0,46
			2,41				2,51	2,76	3,1	3,56	4,21
5		0,117	0,219	0,305	0,367	0,421	0,457	0,475	0,465	0,413	0,283
	$R_{C_{\min}} < 0$		2,41				2,61	2,88	3,26	3,77	4,51

Tableau III.9



rayons polaires extrêmes en fonction de  $\frac{d^2s}{dr^2}(0)$  et  $\frac{d^2s}{dr^2}(1)$  - 96 -  
 avec  $\frac{d^2s}{dr^2}(0 \text{ et } 1) = 0$  et  $\theta_0 = 0, \theta_1 = \pi, R_{p_0} = 1, R_{c_0} = 1, R_{c_1} = 1$

$K_0 \backslash K_1$	0,01	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
0,4	0,203	0,295	0,393	0,492	0,594	0,695	0,805	0,906	0,978	0,999	1
				1				1,02	1,1	1,22	1,363
0,6	0,304	0,396	0,492	0,589	0,689	0,79	0,893	0,978	0,999		1
			1				1,001	1,05	1,159	1,286	1,427
0,8	0,410	0,499	0,534	0,689	0,785	0,885	0,976		1		
			1				1,014	1,111	1,229	1,355	1,492
1	0,512	0,606	0,698	0,790	0,885	0,982			1		
			1				1,084	1,191	1,306	1,429	1,561
1,2	0,629	0,715	0,805	0,893	0,976				1		
		1		1,001	1,014	1,084	1,178	1,279	1,388	1,505	1,631
1,4	0,743	0,825	0,906	0,975					1		
	1,004	1,007	1,019	1,05	1,111	1,191	1,279	1,374	1,476	1,586	1,705
1,6	0,854	0,923	0,978	0,999					1		
	1,037	1,06	1,1	1,159	1,229	1,306	1,388	1,476	1,571	1,672	1,784
1,8	0,948	0,986	0,999						1		
	1,122	1,166	1,222	1,286	1,355	1,429	1,505	1,586	1,672	1,767	1,869
2	0,995								1		
	1,248	1,301	1,363	1,427	1,492	1,561	1,631	1,705	1,784	1,869	1,963
2,2						1					
	1,398	1,455	1,515	1,578	1,639	1,703	1,768	1,834	1,906	1,983	2,066
2,4											
	1,564	1,621	1,68	1,74	1,798	1,856	1,916	1,976	2,039	2,107	2,182
2,6											
	1,741	1,8	1,858	1,914	1,968	2,021	2,075	2,13	2,186	2,244	2,309
2,8											
	1,937	1,99	2,047	2,1	2,151	2,199	2,246	2,295	2,345	2,396	2,45



Valeurs extrémales de l'accélération normale en fonction de  $\frac{ds}{dr}$  (0) et  $\frac{ds}{dr}$  (1) - 97 -

avec  $\frac{d^2s}{dr^2}$  (0 et 1) = 0 et  $\theta_0 = 0, \theta_1 = \pi, R_{p0}=1, R_{c0}=1, R_{c1}=1, R_{p1}=1.$

$K_0$	0,01	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
0,4											0,345 3,05
0,6										0,505 2,59	0,261 3,73
0,8								0,503 1,54	0,626 2,24	0,429 3,27	0,221 4,75
1						0,857 1,37	0,714 2	0,552 2,93	0,383 4,27	0,203 6,23	
1,2					0,857 1,37	0,748 1,92	0,627 2,74	0,499 3,96	0,359 5,76	0,197 8,42	
1,4				0,803 1,54	0,714 2	0,627 2,74	0,572 3,86	0,468 5,52	0,352 7,99	0,203 11,7	
1,6				0,626 2,24	0,552 2,93	0,499 3,96	0,468 5,52	0,452 7,9	0,356 11,5	0,214 17,2	
1,8			0,505 2,59	0,429 3,27	0,383 4,27	0,359 5,76	0,352 7,99	0,356 11,5	0,366 17,3	0,237 2,67	
2	0,503 2,6	0,345 3,05	0,261 3,73	0,221 4,74	0,203 6,23	0,197 8,42	0,203 11,7	0,214 17,2	0,237 26,7	0,271 44,2	
2,2				0,008 6,8	0,006 9,02						
2,4											
2,6											
2,8											

$R_{p_{min}} < R_0$

$R_{c_{min}} < 0$

avec  $L_0 = L_1 = 0$        $\theta_0 = 0$        $R_{P0} = 1$        $R_{C0} = 1$   
 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$        $R_{P1} = 1.3$        $R_{C1} = 0,5$

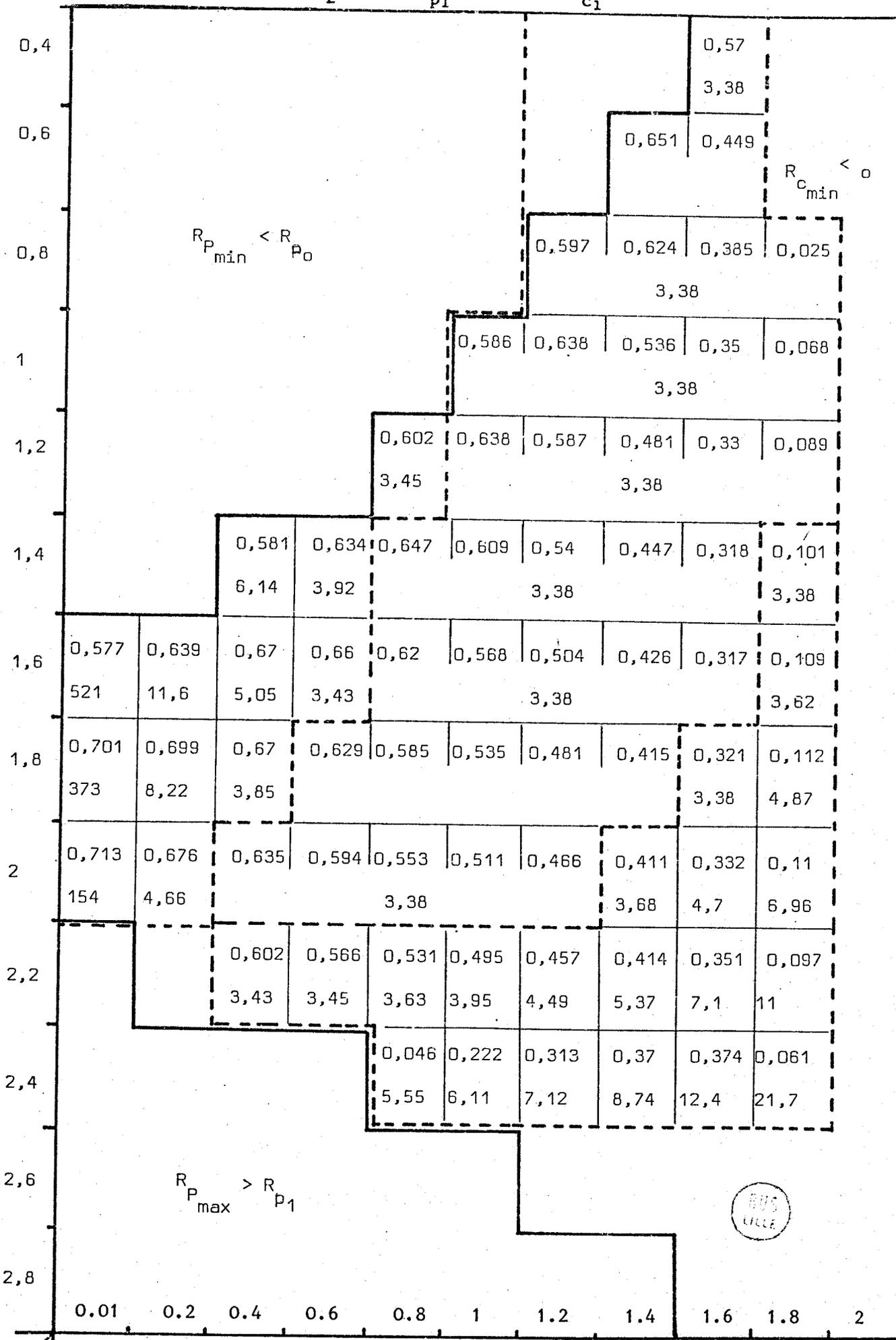
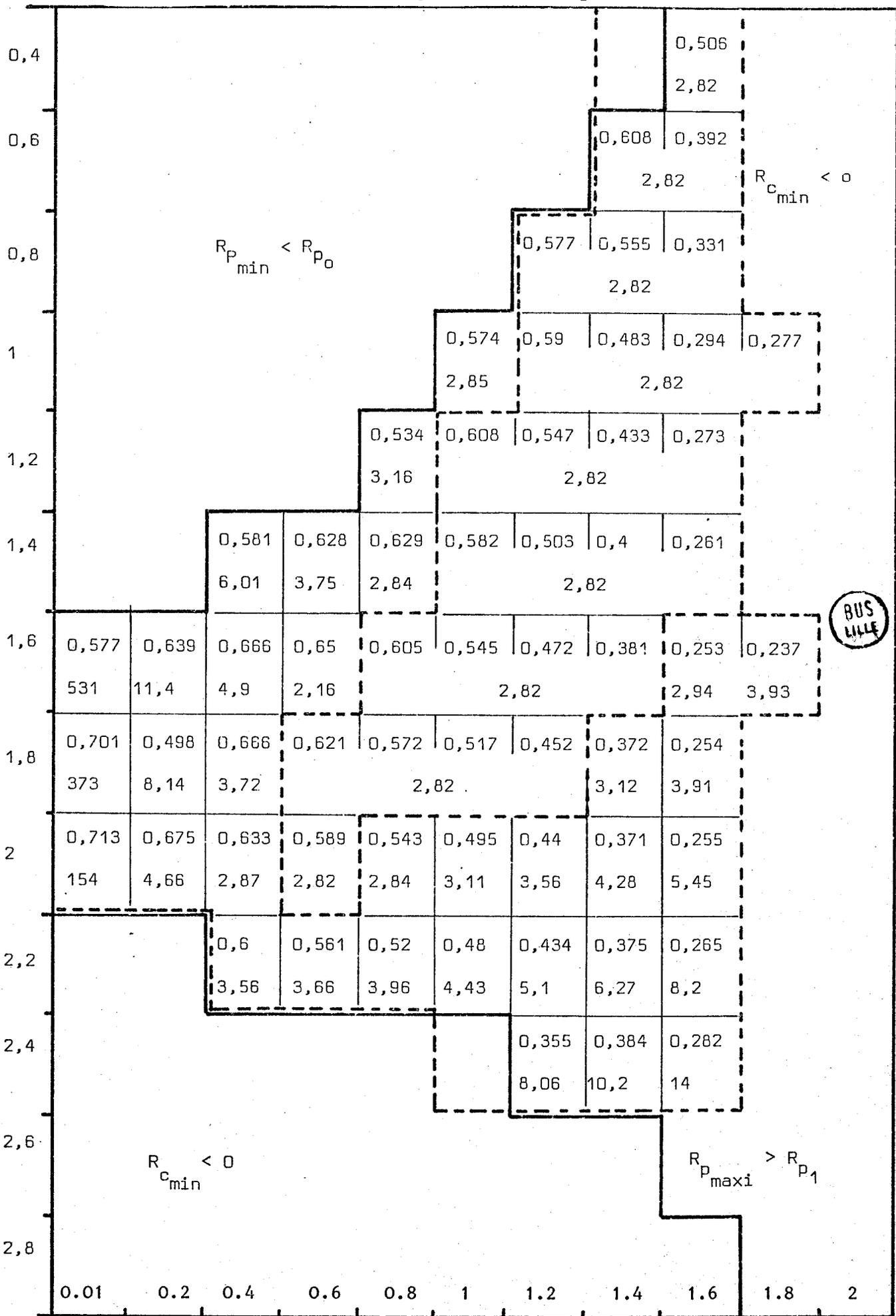


Tableau III 12



avec  $L_0 = L_1 = 0$        $\theta_0 = 0$        $R_{P0} = 1$        $R_{C0} = 1$   
 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$        $R_{P1} = 1.3$        $R_{C1} = 0.6$



$\theta_0 = 0$

$R_{p0} = 1$

$R_{c0} = 1$

avec  $L_0 = L_1 = 0$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

$R_{p1} = 1.3$

$R_{c1} = 0.7$

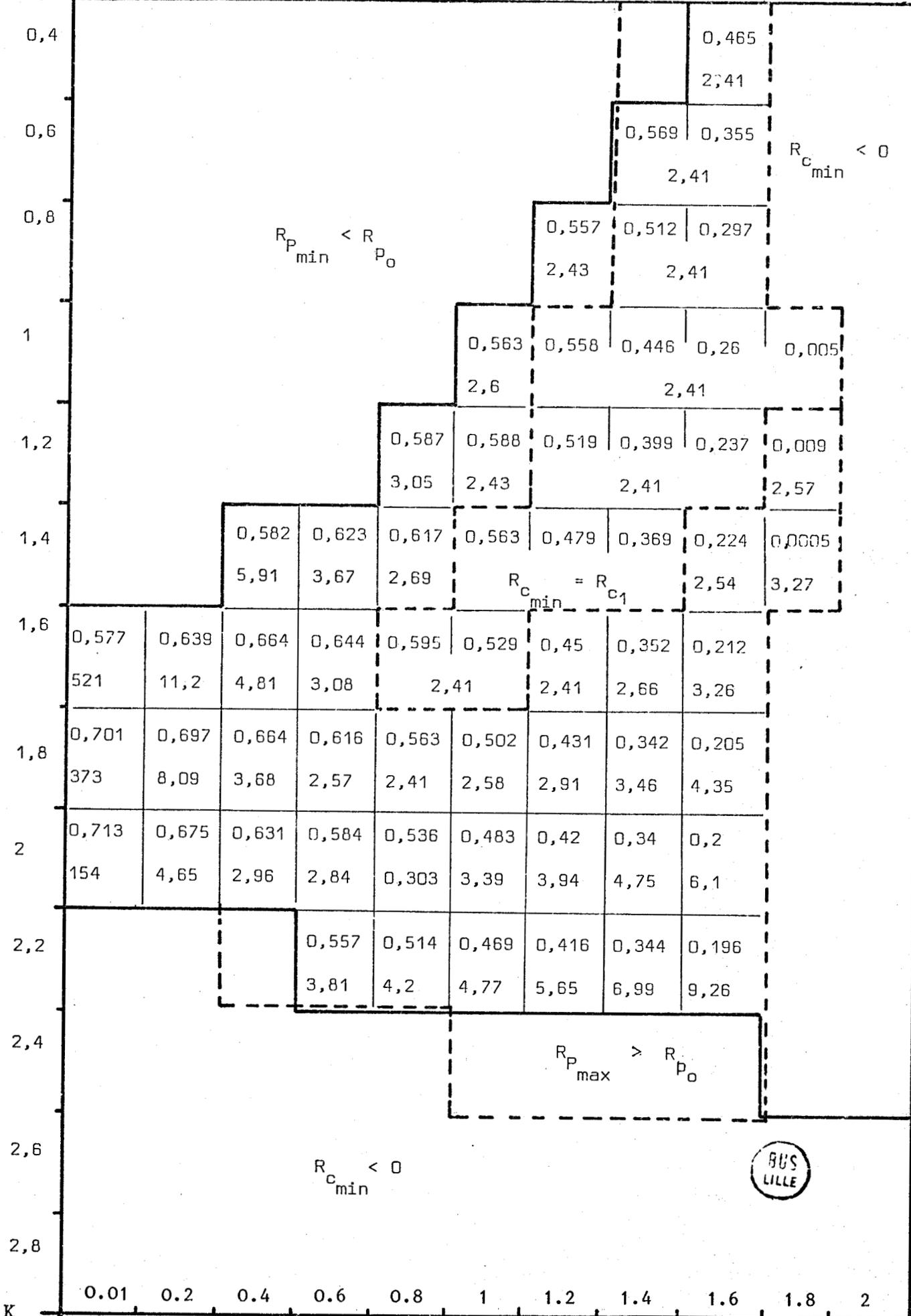


Tableau III 14

Valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction de  $K_0$  et  $K_1$

$\theta_0 = 0$        $R_{p0} = 1$        $R_{c0} = 1$

avec  $L_0 = L_1 = 0$        $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$        $R_{p1} = 1.3$        $R_{c1} = 0.8$

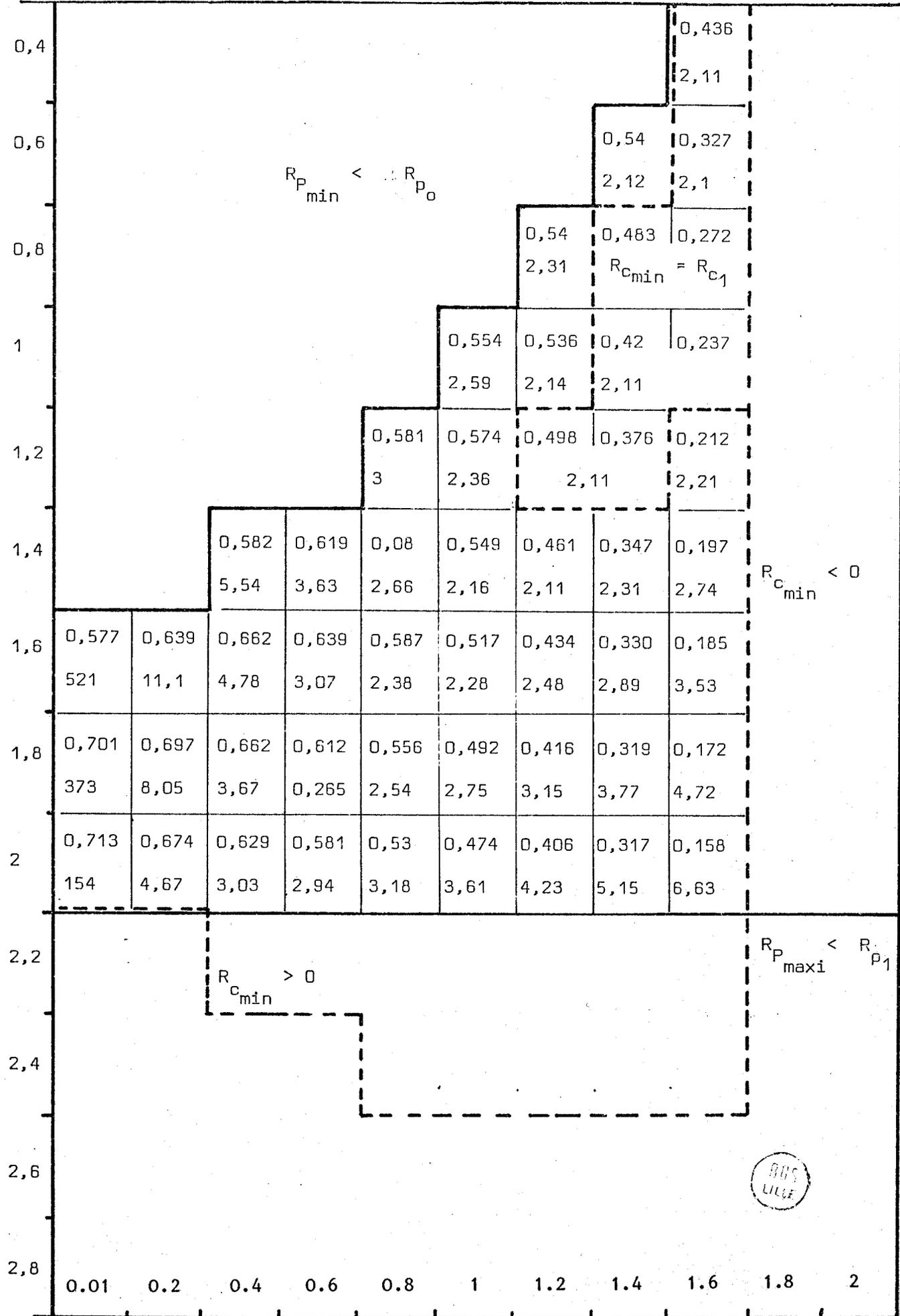
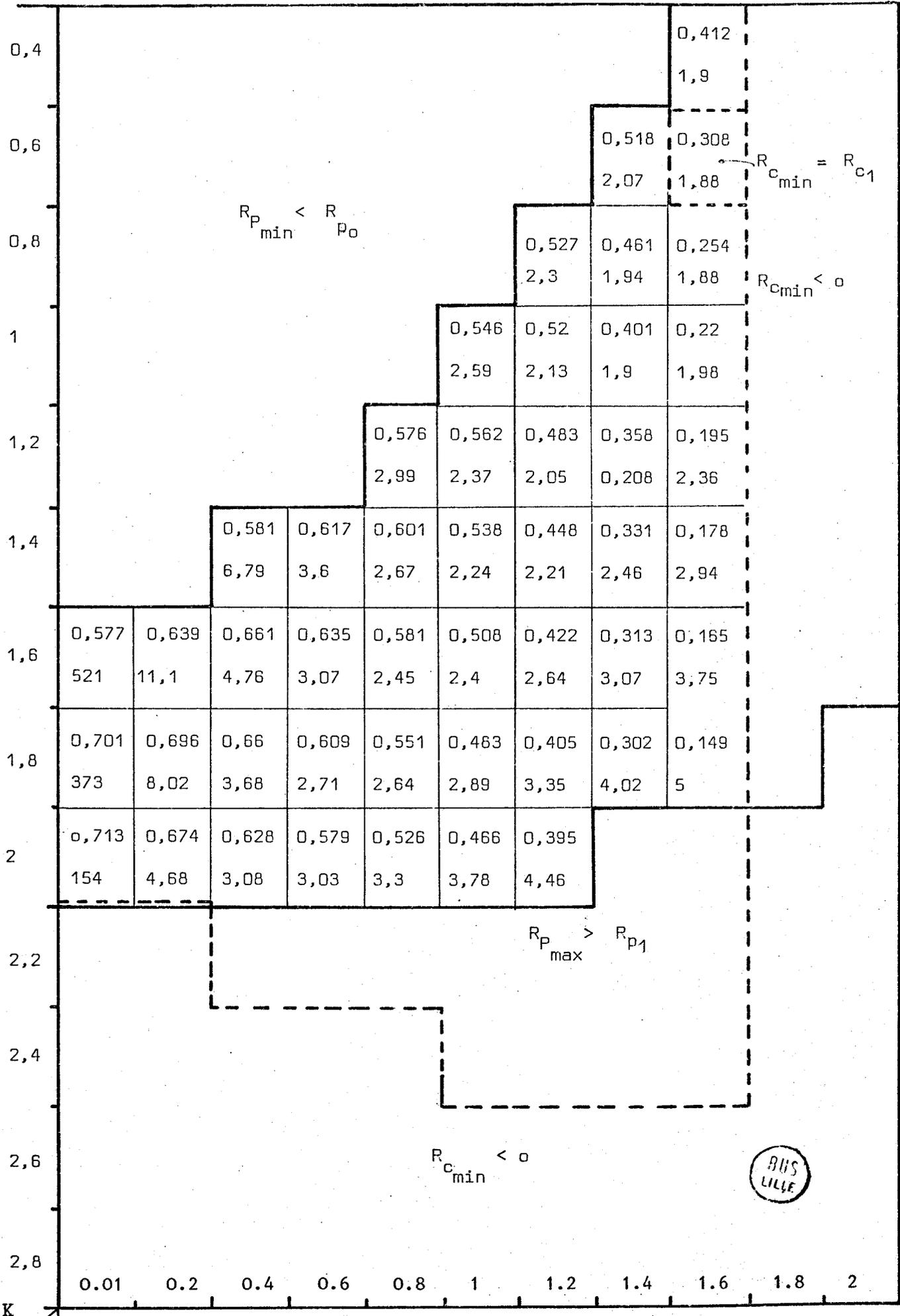


Tableau III 15

avec  $L_0 = L_1 = 0$        $\theta_0 = 0$        $R_{P0} = 1$        $R_{C0} = 1$   
 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$        $R_{P1} = 1.3$        $R_{C1} = 0.9$



Evolution des valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction des dérivées secondes de s par rapport à r

$\delta = \frac{\pi}{2}$        $R_{p_0} = 1$        $R_{c_0} = 1$   
 $R_{p_1} = 1,3$        $R_{c_1} = 0,7$        $\frac{ds}{dr}(0) = 1.2.\delta$        $\frac{ds}{dr}(1) = 1.2.\delta$

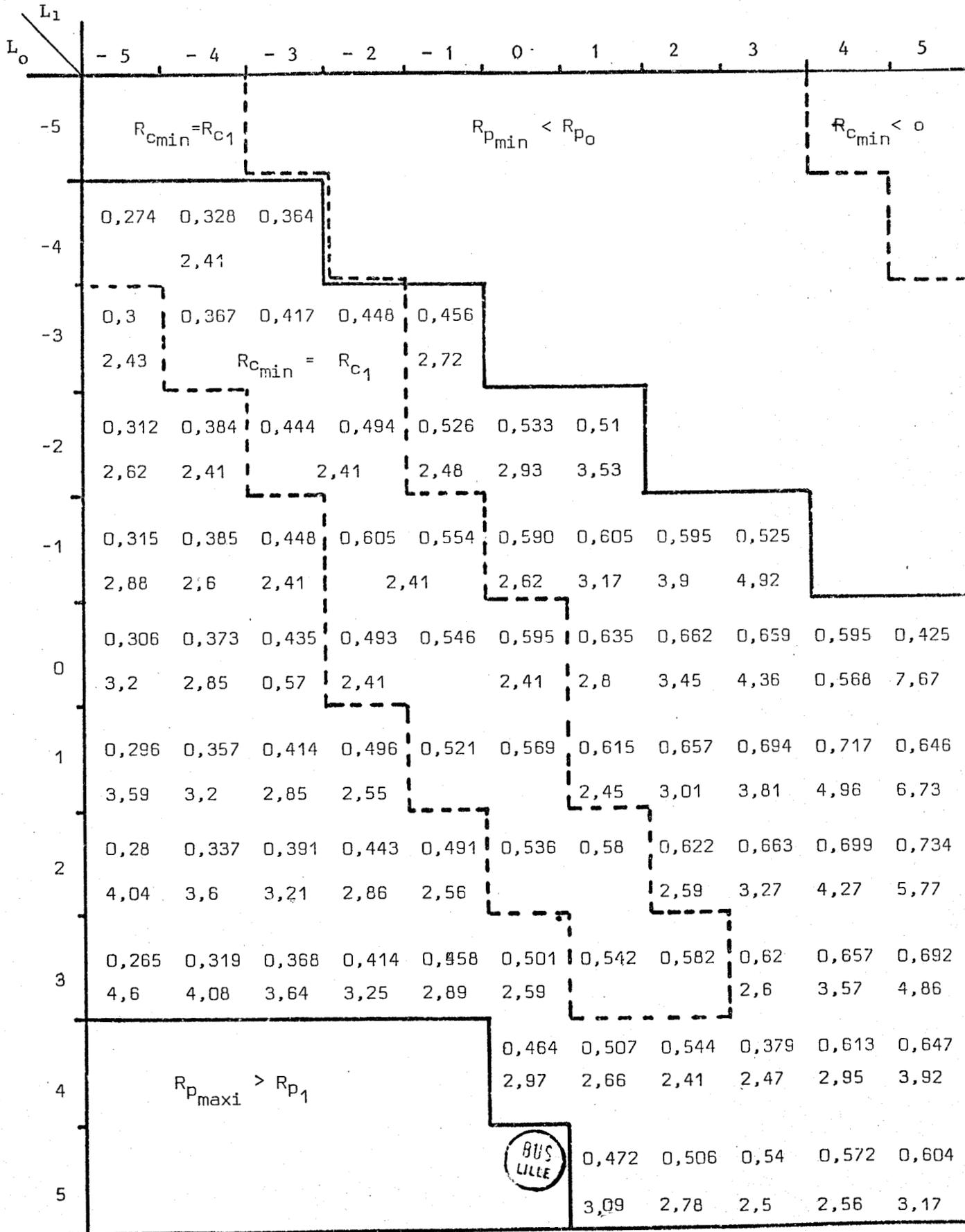
$L_0 \backslash L_1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	$R_{c_{min}} < 0$	$R_{c_{min}} = R_{c_1}$					$R_{c_{min}} < 0$				
-4		0,12	0,235	2,41							
-3	0,0015	0,141	0,255	0,347	0,4						
-2		$R_{c_{min}} = R_{c_1}$			$R_{p_{min}} < R_{p_0}$						
-1	0,0154	0,145	0,264	0,363	0,44	0,475					
0	2,41			2,41							
1	0,025	0,145	0,257	0,261	0,45	0,518	0,543	0,509			
2	2,65	2,41	2,41				2,48	2,82			
3	0,032	0,143	0,247	0,345	0,435	0,519	0,583	0,606	0,555	0,453	
4	2,95	2,59	2,41	2,41				2,66	3,07	3,6	
5	0,034	0,134	0,23	0,321	0,408	0,49	0,567	0,633	0,667	0,592	0,457
6	3,3	2,89	2,53	2,41				2,52	2,88	3,38	4,01
7		0,126	0,214	0,298	0,379	0,455	0,527	0,596	0,661	0,716	0,606
8		3,25	2,83	2,47	2,41			2,43	2,71	3,15	3,75
9		0,118	0,2	0,275	0,346	0,415	0,482	0,547	0,609	0,669	0,726
10		3,65	3,2	2,79	2,42	2,41			2,56	2,94	3,49
11			0,184	0,252	0,318	0,381	0,443	0,501	0,558	0,613	0,667
12			3,62	3,17	2,76	2,41	2,41		2,46	2,75	3,22
13				0,232	0,293	0,351	0,405	0,458	0,51	0,561	0,61
14	$R_{p_{maxi}} > R_{p_1}$		3,6	3,15	2,74	2,41	2,41			2,6	2,99



Tableau III.17

Evolution des valeurs extrêmes de l'accélération normale en fonction des dérivées secondes de s par rapport à r

$\delta = \frac{\pi}{2}$        $R_{P_0} = 1$        $R_{C_0} = 1$   
 $R_{P_1} = 1,3$        $R_{C_1} = 0,7$        $\frac{ds}{dr}(0) = 1,6 \delta$        $\frac{ds}{dr}(1) = 0,8 \delta$



## CHAPITRE IV

### SURFACES DE L'ESPACE EUCLIDIEN

#### IV.1. - DEFINITION PARAMETRIQUE D'UNE SURFACE.

##### IV.1.1. - POSITION DU PROBLÈME

En technique, certaines surfaces ne sont pas définies analytiquement. On peut néanmoins, pour les matérialiser ou les traiter numériquement en donner une représentation définie par une fonction polynomiale à coefficients vectoriels de deux variables réelles  $r$  et  $s$ . Les coefficients vectoriels sont déterminés pour satisfaire :

- des conditions de passage en certains points,
- des conditions de continuité jusque l'ordre  $p$  (cf. annexe II)
- d'éventuelles conditions supplémentaires en les points de passage.

Le degré de cette fonction doit être choisi de façon à assurer *globalement* la continuité d'ordre  $p$  et *localement* les conditions en certains points.

De même que pour les courbes, la fonction polynomiale ne peut comporter trop de paramètres pour faciliter le traitement numérique du système d'équations régissant la surface et éviter les instabilités de forme. Il est donc nécessaire de découper la surface en carreaux successifs délimités par deux familles de courbes tracées sur cette surface appelées génératrices et directrices.

Sur chaque carreau, on définit le vecteur position d'un point  $M$  courant par :

$$q(r, s) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} f_{ij}(r, s) \tag{IV.1}$$

où :

$m, n$  : entiers positifs.

$r, s$  : paramètres réels variant de 0 à 1.

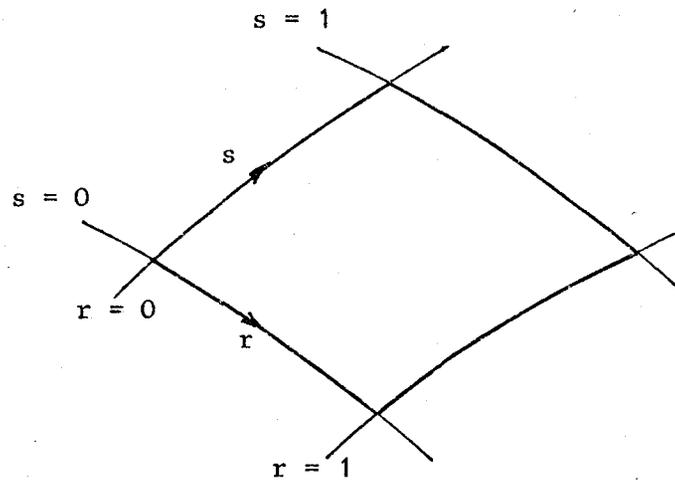


fig. IV.1

$\{ f_{ij}(r, s), i = 0, m, j = 0, n \}$  : ensemble de fonctions des paramètres  $r$  et  $s$  à définition unique pour l'ensemble des carreaux.

$a_{ij}$  coefficients vectoriels caractéristiques de chaque carreau.

Pour que la représentation analytique  $q(r, s)$  assure la continuité jusqu'à l'ordre  $p$ , il faut :

- retenir au moins une fonction  $f_{ij}$  de classe  $C^k$ ,
- assurer aux arcs délimitant le carreau, c'est à dire  $r = 0, r = 1,$

$s = 0$  et  $s = 1$ , la continuité d'ordre  $p$  ; ce qui impose  $[2(p + 1)]^2$  conditions.

Les conditions précédentes s'expriment sous la forme d'un système linéaire à  $(m + 1)(n + 1)$  inconnues. Pour ne pas particulariser une des coordonnées curvilignes  $r$  ou  $s$ , on convient de prendre  $m$  et  $n$  égaux, et, pour obtenir une solution unique, il faut par conséquent satisfaire à la condition :

$$m = n = 2p + 1$$

IV.2

#### IV.1.2. APPROXIMATION DE SURFACE DONT ON CONNAIT UN CERTAIN NOMBRE D'ÉLÉMENTS PAR DES FONCTIONS POLYNOMIALES :

##### IV.1.2.1. SURFACES CONNUES PAR LA POSITION ET LES DERIVEES D'UN CERTAIN NOMBRE DE POINTS.

On ordonne les points de façon à obtenir une famille de génératrices et une famille de directrices. En chacun des points, il ne doit passer qu'une et une seule courbe de chaque famille (biunivocité entre chacun des points et le couple de paramètres  $(r, s)$ ). Un carreau est délimité par deux génératrices successives et deux directrices successives. Les conditions de continuité entre chaque carreau et les carreaux adjacents se traduisent par un système de  $4(p + 1)^2$  équations linéaires dont les termes indépendants sont connus et dont les inconnues vectorielles sont les coefficients  $a_{ij}$ .

En fait, ce cas est peu fréquent car il est difficile de relever expérimentalement les grandeurs physiques liées aux dérivées.

##### IV.1.2.2. SURFACES CONNUES PAR LA SEULE POSITION DE CERTAINS POINTS

###### IV.1.2.2.1. Méthode

- on ordonne les points connus selon deux directions
- on fixe le nombre de points appartenant à un même carreau

- on calcule les coefficients  $a_{ij}^*$  de chaque carreau à partir des conditions de passage par les points du carreau,
- on calcule la moyenne des dérivées obtenues en chaque "coin" commun à deux ou plusieurs carreaux,
- on calcule de nouveaux coefficients  $a_{ij}$  à partir de ces valeurs moyennes de dérivées et des points de passage aux "coins" du carreau.

*Remarque : Les trois premières étapes de cette méthode conduisent à une définition paramétrée de chaque carreau selon la formule suivante analogue à celle numérotée IV.1 :*

$$q^*(r, s) = \sum_{i=0}^{m^*} \sum_{j=0}^{m^*} a_{ij}^* f_{ij}(r, s) \quad (\text{IV.3})$$

#### IV.1.2.2.2. Détermination de la valeur minimale de $m^* : m_{\min}^*$

En vue d'assurer la continuité globale d'ordre  $p$ ,  $q^*$  doit vérifier la continuité d'ordre  $p$  sur chacun des carreaux.

$$m_{\min}^* = p + 1 \quad (\text{IV.4})$$

#### IV.1.2.2.3. Choix des valeurs des paramètres $r$ et $s$ :

La définition analytique du carreau selon (IV.3) nécessite la connaissance d'au moins  $(m_{\min}^* + 1)^2$  points de passage par carreau (d'après (IV.4)). Dans le système d'équations relatifs aux conditions de passage par ces points, et qui permet de calculer les coefficients  $a_{ij}$ , le couple des valeurs  $(r, s)$  en chacun des points est indéterminé sauf aux quatre "coins" du carreau.

Soient  $P_{ij}$  ;  $i, j = 0, m^*$  les points de passage du carreau à définir et  $(r_i, s_j)$  les couples des valeurs correspondantes  $r$  et  $s$  (v. fig. IV.2).

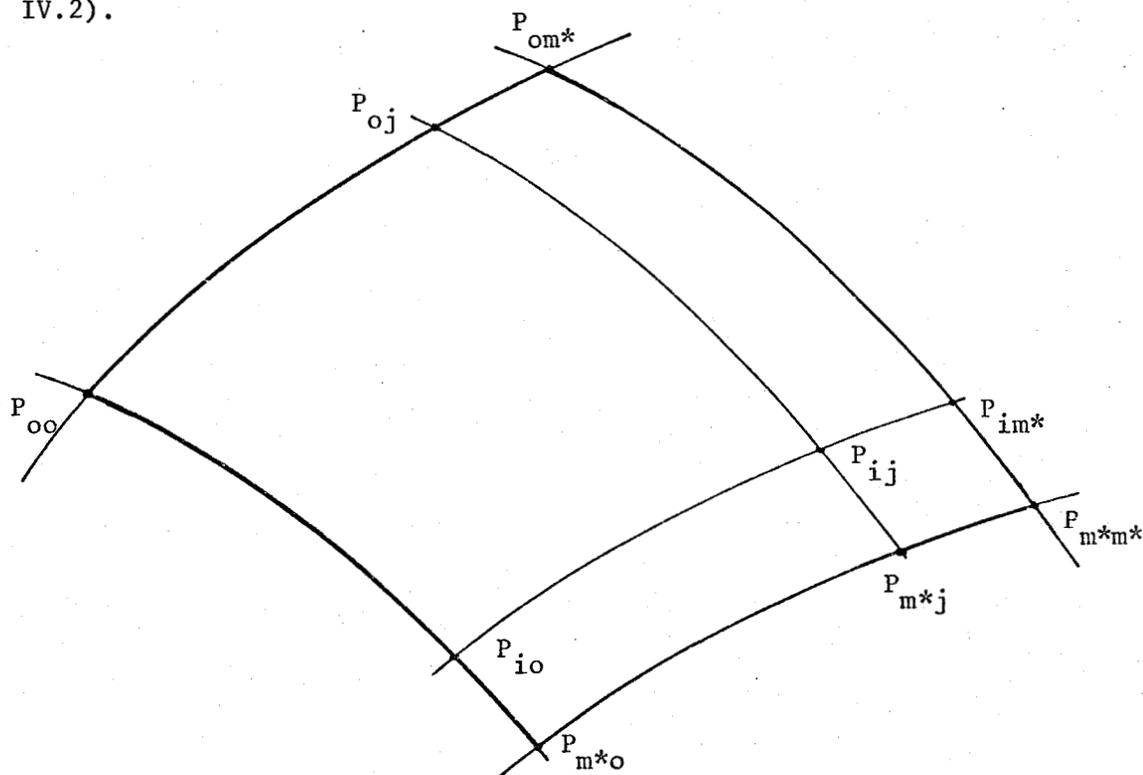


fig. IV.2

Ces couples de valeurs peuvent être choisis arbitrairement comme suit :

$$- (r_i, s_j) = \left( \frac{\sum_{k=1}^i ||\overrightarrow{P_{k-1 j} P_{kj}}||}{m^*}, \frac{\sum_{l=1}^j ||\overrightarrow{P_{i l-1} P_{i l}}||}{m^*} \right)$$

pour  $0 \leq i, j \leq m^*$  et  $(i, j) \neq (0, 0)$

$$- (r_0, s_0) = (0, 0) \quad (IV.5)$$

Si les points sont régulièrement espacés, on peut choisir :

$$(r_i, s_i) = \left( \frac{i}{m^*}, \frac{j}{m^*} \right) \quad (IV.6)$$

#### IV.1.3. - DIFFÉRENTES MÉTHODES :

Dans les expressions (IV.1) et (IV.3), il reste à définir les fonctions  $f_{ij}$ . J. FERGUSSON et P. BEZIER [2] généralisent la définition des fonctions  $f_k$  relatives aux expressions (I.1) et (I.3) de la variable  $r$  aux fonctions  $f_{ij}$  des variables  $r$  et  $s$ .

Comme nous l'avons vu pour les courbes, les fonctions  $f_{ij}$  proposées par J. FERGUSSON et P. BEZIER conduisent à des définitions du carreau équivalentes, les fonctions de J. FERGUSSON sont encore d'un emploi plus aisé et ont pour forme :

$$f_{ij} = r^i s^j \quad (IV.7)$$

Les définitions (I.1) et (I.3) constituent le fondement du système U.N.I.S.U.R.F. qui sera étudié après le système COONS, et qui est une méthode de définition du carreau non plus par la connaissance de points du carreau mais par la seule définition des quatre arcs définissant les limites du carreau.

## IV.2. - DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME COONS :

La méthode permet de définir un carreau par la connaissance de ses quatre limites et de réaliser avec les carreaux voisins le raccordement jusqu'à l'ordre  $p$ .

### IV.2.1. - DÉFINITION ANALYTIQUE D'UN CARREAU :

Soit un carreau limité par les arcs de directrices  $L_1$  et  $L_2$  et les arcs de génératrices  $L_3$  et  $L_4$  (v. fig. IV.3).

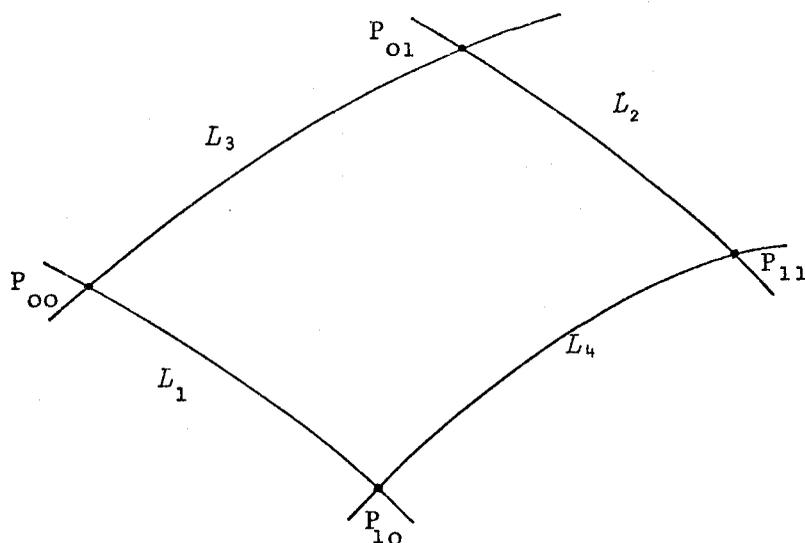


fig. IV.3

L'arc de directrice  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) est défini par un point courant  $M$  d'affixe  $q$  fonction du paramètre  $r$  variant de 0 pour le point  $P_{00}$  (resp.  $P_{01}$ ) à 1 pour le point  $P_{10}$  (resp.  $P_{11}$ ).

L'arc de génératrice  $L_3$  (resp.  $L_4$ ) est défini par un point courant  $M$  d'affixe  $q$  fonction du paramètre  $s$  variant de 0 pour le point  $P_{00}$  (resp.  $P_{10}$ ) à 1 pour le point  $P_{10}$  (resp.  $P_{11}$ ).

En notant  $q(r, s)$  l'affixe d'un point  $M$  courant du carreau, les limites  $L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$  ne dépendent que d'un des paramètres et sont définies comme suit :

$$- L_1 : q(r, s) = q(r, 0) ,$$

$$- L_2 : q(r, s) = q(r, 1) ,$$

$$- L_3 : q(r, s) = q(0, s) ,$$

$$- L_4 : q(r, s) = q(1, s) .$$

S.A. COONS définit un point du carreau par l'expression :

$$\begin{aligned} q(r, s) = & q(r, 0) F_0(s) + q(r, 1) F_1(s) \\ & + q(0, s) F_0(r) + q(1, s) F_1(r) \\ & - q(0, 0) F_0(r) F_0(s) - q(0, 1) F_0(r) F_1(s) \\ & - q(1, 0) F_1(r) F_0(s) - q(1, 1) F_1(r) F_1(s) \quad (\text{IV.8}) \end{aligned}$$

dans laquelle  $F_0$  et  $F_1$  sont deux fonctions réelles de  $r$  ou  $s$ .

Pour obtenir la limite  $L_1$  on a  $s = 0$ , l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} q(r, 0) = & q(r, 0) F_0(0) + q(r, 1) F_1(0) \\ & + q(0, 0) F_0(r) [1 - F_0(0)] \\ & + q(1, 0) F_1(r) [1 - F_0(0)] \\ & - q(0, 1) F_0(r) F_1(0) \\ & - q(1, 1) F_1(r) F_1(0) \end{aligned}$$

Les fonctions  $F_0$  et  $F_1$  doivent donc être telles que :

$$F_0(0) = 1$$

$$F_1(0) = 0$$

De même pour la limite  $L_2$  on a  $s = 1$ , l'expression (IV.8) devient :

$$\begin{aligned} q(r, 1) = & q(r, 0) F_0(1) + q(r, 1) F_1(1) \\ & + q(0, 1) F_0(r) [1 - F_1(1)] \\ & + q(1, 1) F_1(r) [1 - F_1(1)] \\ & - q(0, 0) F_0(r) F_0(1) \\ & - q(1, 0) F_1(r) F_0(1) \end{aligned}$$

Les fonctions  $F_0$  et  $F_1$  doivent de plus vérifier :

$$F_0(1) = 0$$

$$F_1(1) = 1$$

Exprimons le vecteur dérivée première de  $q(r, s)$  par rapport à  $r$ . En dérivant l'expression IV.8 par rapport à  $r$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} q(0, s) &= \frac{\partial}{\partial r} q(0, 0) F_0(s) + \frac{\partial}{\partial r} q(0, 1) F_1(s) \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} F_0(0) [q(0, s) - q(0, 0) F_0(s) - q(0, 1) F_1(s)] \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} F_1(0) [q(1, s) - q(1, 0) F_0(s) - q(1, 1) F_1(s)] \end{aligned}$$

Pour satisfaire l'égalité précédente, S.A. COONS imposé de plus :

$$\frac{\partial}{\partial r} F_0(0) = \frac{\partial}{\partial r} F_1(0) = 0$$

Sur l'arc de génératrice  $L_3$ , le vecteur tangent suivant la direction  $r$  ne dépend que des vecteurs tangents aux extrémités de cet arc. Les mêmes considérations sur les autres arcs conduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial r} F_0(1) = \frac{\partial}{\partial r} F_1(1) = 0$$

On peut généraliser la propriété précédente au vecteur dérivée d'ordre  $p$ .

Les fonctions  $F_0$  et  $F_1$  de la variable  $t$  sont choisies, en vue d'assurer la continuité d'ordre  $p$ , telles que

$$- \quad F_0(t) + F_1(t) = 1 \quad t \in [0, 1]$$

$$- \quad \frac{\partial^i}{\partial t^i} F_0(0) = \frac{\partial^i}{\partial t^i} F_0(1) = \frac{\partial^i}{\partial t^i} F_1(0) = \frac{\partial^i}{\partial t^i} F_1(1) = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

Les fonctions  $F_0$  et  $F_1$  peuvent être polynomiales en  $t$ . Définissons ces fonctions pour  $p = 1$  (continuité de la tangente, et  $p = 2$  (continuité de la courbure).

IV.2.2. - DÉFINITION DES FONCTIONS  $F_0$  et  $F_1$  JUSQUE L'ORDRE 1 (CONTINUITÉ DE LA TANGENTE)

$F_0$  doit être telle que les quatre conditions suivantes soient vérifiées :

$$F_0(0) = 1$$

$$F_0(1) = 0$$

$$\frac{d}{dt} F_0(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt} F_0(1) = 0$$

Si  $F_0$  est une fonction polynomiale du 3e degré :

$$F_0(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

alors, sa dérivée s'écrit :

$$\frac{d}{dt} F_0(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

$$F_0(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$\frac{d}{dt} F_0(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$F_0(1) = 0 \Rightarrow a_3 + a_2 = -1$$

$$\frac{d}{dt} F_0(1) = 0 \Rightarrow 3a_3 + 2a_2 = 0$$

donc  $a_2 = -3$   $a_3 = 2$

Les expressions des fonctions  $F_0$  et  $F_1$  assurant la continuité de la tangente sont donc :

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

#### IV.2.3. - DÉFINITION DES FONCTIONS $F_0$ et $F_1$ JUSQUE L'ORDRE 2 (CONTINUITÉ DE LA COURBURE)

$$F_0(0) = 1$$

$$F_0(1) = 0$$

$$\frac{d}{dt} F_0(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt} F_0(1) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F_0(0) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F_0(1) = 0$$

Si  $F_0(t)$  est un polynôme de degré 5 :

$$F_0(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

il vient :

$$\frac{d}{dt} F_o(t) = 5 a_5 t^4 + 4 a_4 t^3 + 3 a_3 t^2 + 2 a_2 t + a_1$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F_o(t) = 20 a_5 t^3 + 12 a_4 t^2 + 6 a_3 t + 2 a_2$$

$$F_o(0) = 1 \quad \text{d'où il résulte} \quad a_0 = 1$$

$$\frac{d}{dt} F_o(0) = 0 \quad \text{ce qui conduit à} \quad a_1 = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F_o(0) = 0 \quad \text{d'où il résulte} \quad a_2 = 0$$

De plus :

$$F_o(1) = 0 \quad \text{conduit à} \quad a_5 + a_4 + a_3 = -1$$

$$\frac{d}{dt} F_o(1) = 0 \quad \text{conduit à} \quad 5 a_5 + 4 a_4 + 3 a_3 = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F_o(1) = 0 \quad \text{conduit à} \quad 20 a_5 + 12 a_4 + 6 a_3 = 0$$

$$\text{d'où} \quad a_5 = -6 ; a_4 = 15 ; a_3 = -10$$



Les expressions des fonctions  $F_0$  et  $F_1$  assurant la continuité de courbure sont donc :

$$F_0(t) = -6t^5 + 15t^4 - 10t^3 + 1$$

$$F_1(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$$

#### IV.2.4. - REMARQUE :

La structure des fonctions  $F_0$  et  $F_1$  montre que la définition de S.A. COONS (voir expression IV.8) conduit à une dérivée mixte  $\frac{dq}{dr ds}$  nulle pour les couples  $(r, s)$  respectivement égaux à  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ . Pour ces couples, la seconde forme quadratique de la surface prend la forme (cf. annexe II) :

$$\rho_n = \frac{L dr^2 + N ds^2}{E dr^2 + 2F dr ds + G ds^2} \quad \text{IV.10}$$

#### IV.2.5. - RÉSULTATS OBTENUS SUR LA SPHÈRE :

On se propose d'appliquer la méthode de S.A. COONS à une portion de sphère composée de 12 carreaux limités par 16 arcs de directrices et 15 arcs de génératrices (v. fig. IV.4).

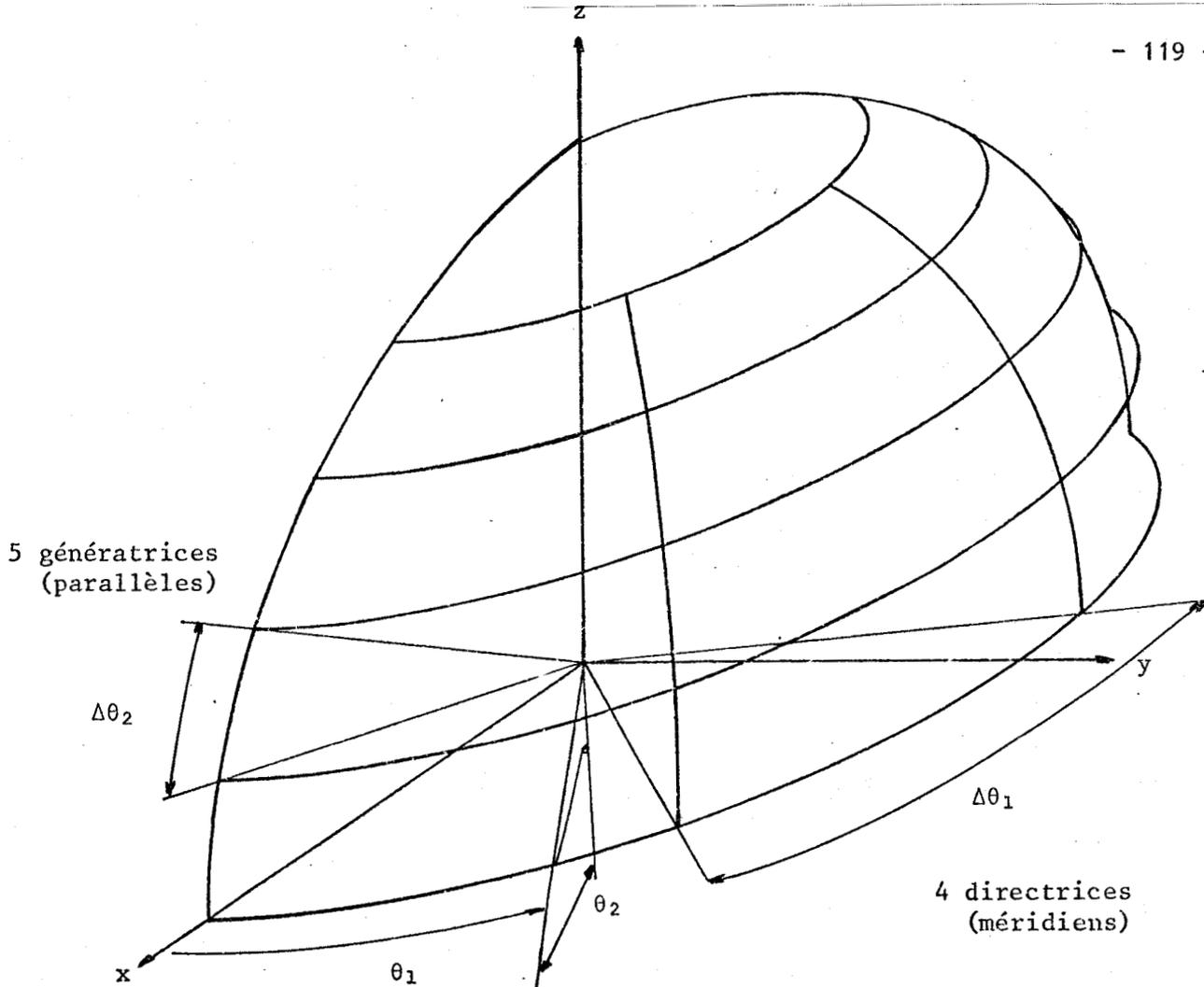


fig. IV.4

Chaque carreau est défini par deux arcs de directrices et deux arcs de génératrices. Les arcs sont respectivement déterminés par des polynômes de degré 5 ( $p = 2$ ) et des polynômes de degré 7 ( $p = 3$ ) dont les coefficients sont déterminés par  $2p + 2$  conditions de passage en des points de la sphère, deux arcs de directrices successifs ou deux arcs de génératrices étant tels que la continuité d'ordre  $p$  soit assurée selon une méthode analogue à celle vue au § I.4.4.1.

Sur chaque directrice ou sur chaque génératrice, deux points de passages successifs sont équidistants, de sorte que l'estimation du paramètre  $r$  (relatif à un arc de directrice) ou du paramètre  $s$  (relatif à un arc de génératrice) selon des expressions (I.16) et (I.17) conduisent à des valeurs égales du paramètre considéré.

Pour chaque carreau, on calcule le vecteur position, le rayon de courbure des directrices et le rayon de courbure des génératrices par la définition du type IV.8 en  $(2p + 2)^2$  couples de valeurs  $(r_i, s_j)$  tels que :

$$r_i = \frac{i}{2p + 1} \quad i = 0, 2p + 1 \quad (IV.11)$$

$$s_j = \frac{j}{2p + 1} \quad j = 0, 2p + 1$$

A chaque couple  $(r_i, s_j)$ , on associe le point  $P_{ij}$  (v. fig. IV. 5) ; les points  $P_{oo}, P_{om}, P_{mo}, P_{mm}$  sont les quatre coins du carreau considéré.

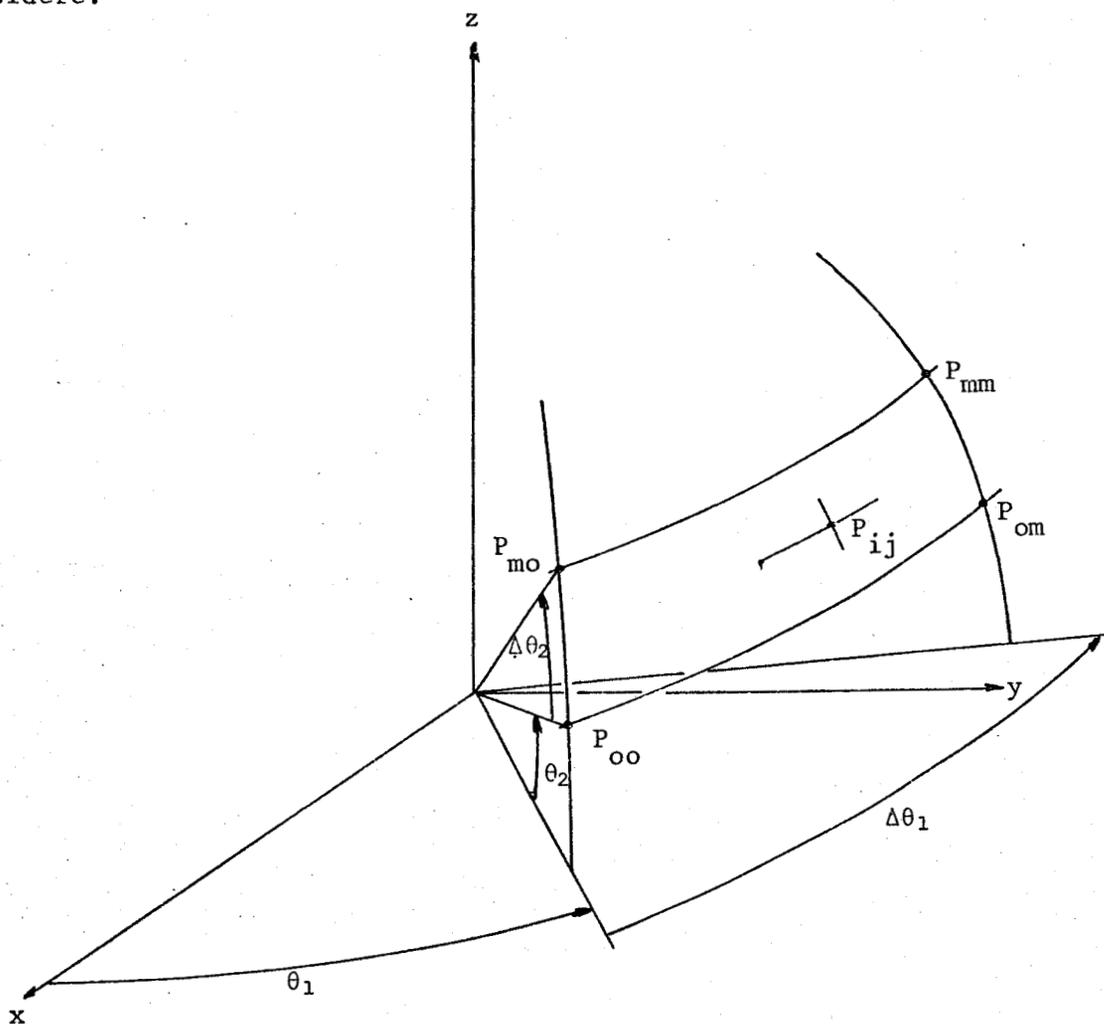


fig. IV.5

On calcule les erreurs relatives maximales en comparant le vecteur position du point  $P_{ij}$ , le rayon de courbure de la directrice et le rayon de courbure de la génératrice passant par  $P_{ij}$  et le vecteur position du point  $P_{ij}$  de la sphère, le rayon de courbure de la directrice  $i$  (méridien) et le rayon de courbure de la génératrice  $j$  (parallèle) (v. fig. IV.6).

La génératrice  $j$  est définie par  $\theta_i = C^{te}$

La directrice  $i$  est définie par  $\theta_j = C^{te}$

Le point  $P_{ij}$  car l'intersection de la génératrice  $j$  et de la directrice  $i$  telles que :

$$\theta_i = \theta_1 + \frac{i}{2p+1} \Delta\theta_1 \tag{IV.12}$$

et 
$$\theta_j = \theta_2 + \frac{j}{2p+1} \Delta\theta_2$$

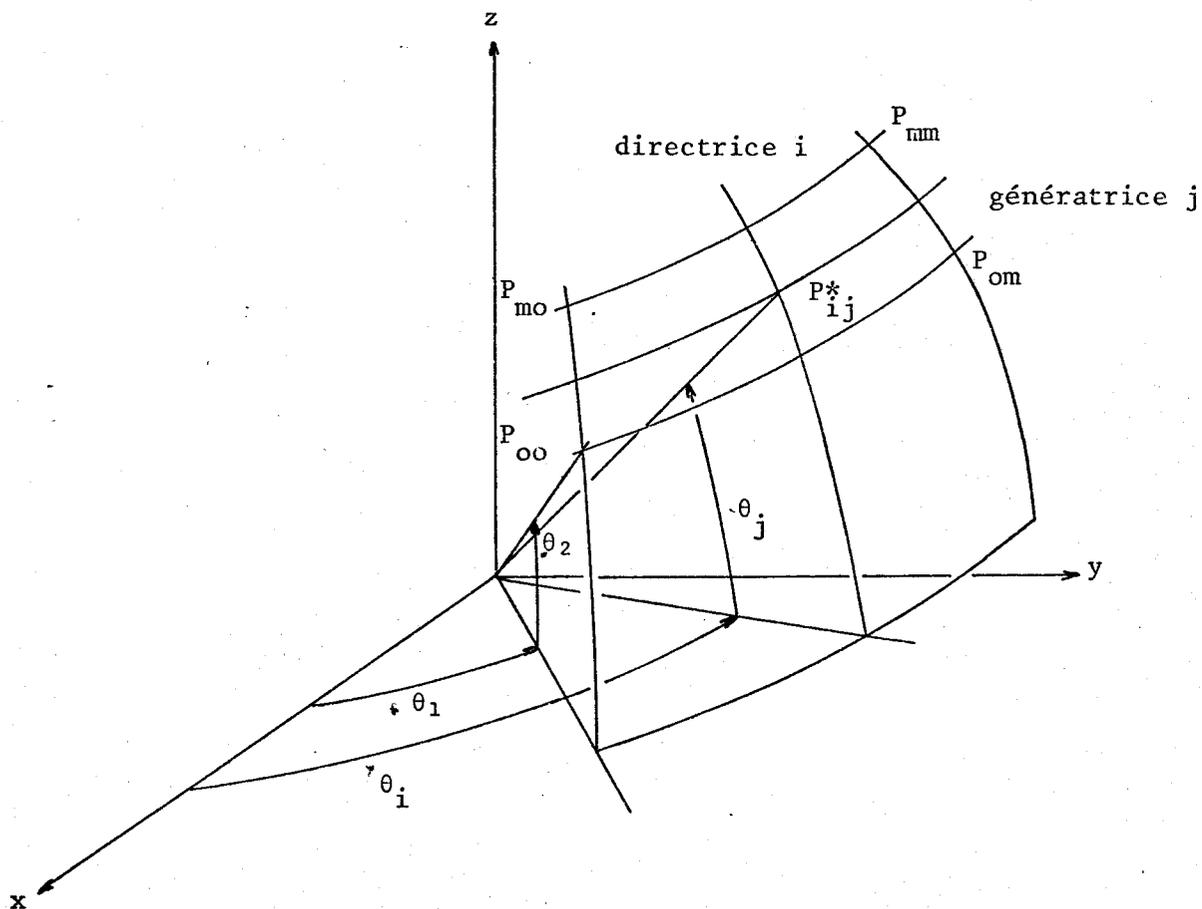


fig. IV.6

Le calcul des erreurs a été programmé en FORTRAN IV simple précision sur ordinateur MINI 6. Le programme de calcul figure en annexe IV, les fonctions et sous programmes ni figurant pas sont identiques aux fonctions et sous-programmes portés en annexe III, seule la nature des arguments change.

Exemple : En annexe III, la fonction DYMOD (Q, L) calcule le module du vecteur Q de dimension L dont les coordonnées sont des réels double précision. La fonction YMOD (Q, L) utilisée est identique à la précédente mais les coordonnées de Q sont des réels simple précision.

Les erreurs relatives maximales obtenues en assurant la continuité d'ordre 2 (polynome de degré 5) ou la continuité d'ordre 3 (polynome de degré 7) des arcs de directrices et des arcs de génératrices figurent dans le tableau suivant :

Erreurs relatives maximales	degré du polynome	
	degré 5	degré 7
Module du vecteur position	0,16653 %	0,22248 %
Rayons de courbure des directrices et des génératrices	60,115 %	73,43 %

Tableau IV.1

Les erreurs obtenues sont assez élevées notamment pour la courbure. La continuité d'ordre 3 ne diminue pas ces erreurs.

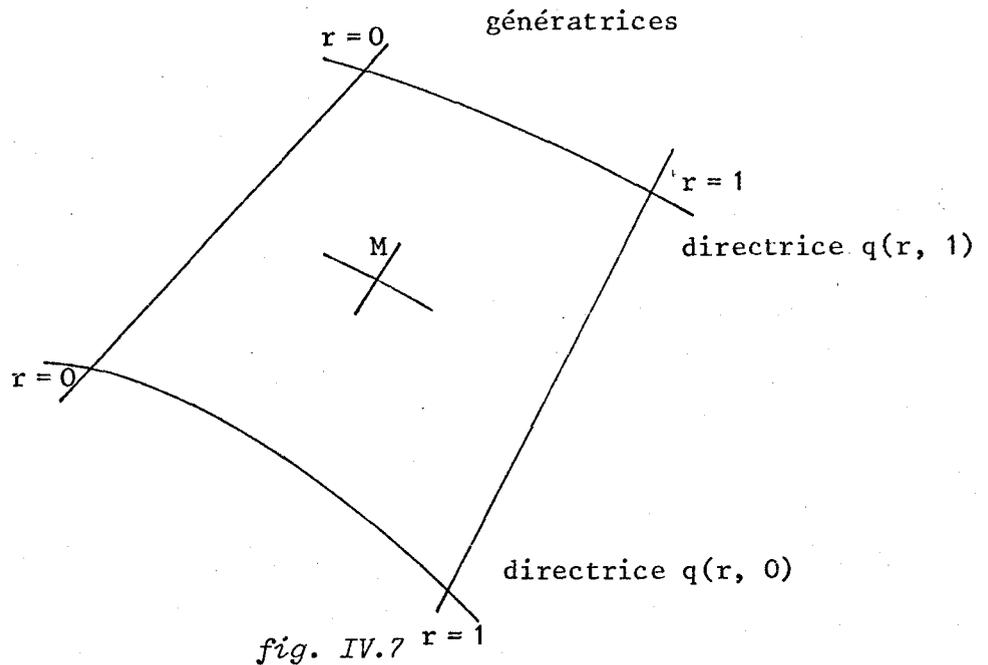
Ceci provient de la non-prise en compte de points à l'intérieur du carreau et de la forme particulière de la seconde forme quadratique.

La formulation de S.A. COONS ne tient compte que des arcs limitant le carreau ; elle ne peut dans le cas général être appliquée de façon satisfaisante. Cependant, dans le cas particulier de surfaces réglées, une formulation plus simple peut être donnée. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

IV.2.6. - APPLICATION DU SYSTÈME COONS AUX SURFACES RÉGLÉES.

Dans le cas de surfaces réglées, la connaissance de deux directrices permet celle des directrices intermédiaires.

Considérons deux arcs de directrices tels que les points de départ et d'arrivée respectifs appartiennent à la même génératrice.



Ecrivons l'affixe q d'un point M du carreau sous la forme :

$$q(r, s) = q(r, 0) \cdot F_0(s) + q(r, 1) \cdot F_1(s)$$

On en déduit la dérivée  $i^{\text{ème}}$  de  $q(r, s)$  par rapport à  $r$  :

$$\frac{d^i}{dr^i} q(r, s) = \frac{d^i}{dr^i} q(r, 0) \cdot F_0(s) + \frac{d^i}{dr^i} q(r, 1) \cdot F_1(s)$$

Les fonctions  $F_0$  et  $F_1$  doivent répondre aux conditions :

$$F_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad F_0(1) = 0$$

$$F_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_1(1) = 1$$

On peut noter que la dérivée  $i^{\text{ème}}$  de  $q(r, s)$  par rapport à  $r$  ne dépend pas des fonctions de pondération par leurs dérivées.

Ecrivons la dérivée  $j^{\text{ème}}$  de  $q(r, s)$  par rapport à  $s$  :

$$\frac{d^j}{ds^j} q(r, s) = \frac{d^j}{ds^j} F_0(s) \cdot q(r, 0) + \frac{d^j}{ds^j} F_1(s) \cdot q(r, 1)$$

Puisque les génératrices sont des droites :

$$\frac{d}{ds} q(r, s) = q(r, 1) - q(r, 0)$$

$$\frac{d^j}{ds^j} q(r, s) = 0 \quad \forall j > 1$$

donc

$$\frac{d}{ds} F_0(s) = -1$$

$$\frac{d}{ds} F_1(s) = 1$$

Posons  $F_0(s) = -s + s_0$

et  $F_1(s) = s + s_1$

or  $F_0(0) = 1$  donc  $s_0 = 1$  (vérifie  $F_0(1) = 0$ )

$F_1(0) = 0$  donc  $s_1 = 0$  (vérifie  $F_1(1) = 1$ )

$F_0(s) = -s + 1$

$F_1(s) = s$

Exprimons la dérivée mixte de  $q(r,s)$  par rapport à  $r$  et  $s$  :

$$\frac{d^2}{dr ds} q(r,s) = \frac{d}{dr} q(r, 0) \cdot \frac{d}{ds} F_0(s) + \frac{d}{dr} q(r, 1) \cdot F_1(s)$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q(r,s) = \frac{d}{dr} q(r, 1) - \frac{d}{dr} q(r, 0)$$

Elle est indépendante de  $s$ .

Les résultats obtenus en appliquant cette méthode à un hyperboloïde de révolution sont examinés au paragraphe IV.4

### IV.3. - DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME U.N.I.S.U.R.F. :

#### IV.3.1. - DÉFINITION ANALYTIQUE D'UN CARREAU :

La définition analytique du carreau est celle exposée au paragraphe IV.1.1. La continuité d'ordre  $p$  de la représentation sera étudiée dans les cas particuliers suivants :

- continuité de la tangente :  $p = 1$  d'où  $m = n = 3$
- continuité de la courbure :  $p = 2$  d'où  $m = n = 5$

d'après la formule IV.2.

Les fonctions  $f_{ij}$  des paramètres  $r$  et  $s$  sont celles de J. FERGUSSON exprimées par IV.7.

On se propose de définir la surface pour laquelle on ne connaît que la position de certains points (cf. IV.1.2.2.)

La définition analytique  $q$  selon l'expression IV.3 avec  $m = 2p + 1$  et le choix des paramètres par l'estimation IV.5 est déterminée dès que l'on connaît sur le carreau la position de  $(2p + 2)^2$  points distincts. Cette définition sur chacun des carreaux de la surface permet d'établir la définition  $q$  de la surface selon l'expression IV.1. Les coefficients  $a_{ij}$  sont exprimés en fonction des dérivées aux quatre coins et sont évalués en :

- annexe V
- et en - annexe VI,

respectivement lorsqu'on assure la continuité des tangentes et des courbures.

IV.3.2. - RÉSULTATS OBTENUS SUR LA SPÈRE AVEC  $p = 1$  et  $p = 2$  :

La portion de surface à définir est celle qui a été précisée au paragraphe IV.2.5. (v. fig. IV.4).

Chaque carreau est défini selon l'expression IV.3 par la connaissance de la position de  $(2p + 2)^2$  points  $P_{ij}^*$  intersection de  $2p + 2$  directrices  $i$  et de  $2p + 2$  génératrices  $j$  définies par l'expression IV.1.2. où  $i$  et  $j$  varient de 0 à  $2p + 1$ .

La définition selon IV.3 et les conditions de continuité conduisent à une définition selon l'expression IV.1.

On calcule les erreurs relatives maximales en comparant le vecteur position  $P_{ij}$ , le rayon de courbure de la directrice et le rayon de courbure de la génératrice au point  $P_{ij}$  et les mêmes quantités au point  $P_{ij}^*$ . (v. fig. IV.6)

Le calcul des erreurs a été programmé en FORTRAN IV simple précision sur ordinateurs PHILIPS P880 et MINI 6. Les programmes figurent en annexe VII.

Les résultats sont récapitulés dans le tableau IV.2, ceux relatifs au MINI 6 sont écrits entre parenthèses.

Erreurs relatives maximales	$q(r,s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} \cdot r^i \cdot s^j$ $p = 1$	$q(r,s) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 a_{ij} \cdot r^i \cdot s^j$ $P + 2$
Module du vecteur position	0,10187 % (0,22693 %)	0,0003716 % (0,0043923 %)
Rayon de courbure des directrices	7,1152 %	0,064116 %
Rayon de courbure des génératrices	(9,6691 %)	(0,30347 %)
	0,8016 %	0,041762 %

Tableau IV.2

L'argument maximal entre la normale à la surface et la normale à la sphère est de 0,0086°.

Les résultats obtenus par le système U.N.I.S.U.R.F. sont très satisfaisants même lorsque seule la continuité de la tangente est assurée.

Les résultats sont différents sur les deux ordinateurs, ceci provient du nombre de mots exprimant un réel simple précision :

- sur MINI 6, il occupe 2 octets (6 chiffres significatifs)
- sur P 880, il occupe 3 octets (10 chiffres significatifs).

TABEAU RÉCAPITULATIF DES ERREURS OBTENUES PAR DIFFÉRENTES MÉTHODES DE DÉFINITION DE SURFACE

(Vérification sur la sphère)

	<u>UNISURF (2)</u>		<u>COONS (1)</u>	
			génératrices et directrices définies à partir de polynome de degré	
Erreurs relatives maximum	$q(r,s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} \cdot r^i \cdot s^j$	$q(r,s) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 a_{ij} \cdot r^i \cdot s^j$	5	7
Module du vecteur position	0.10187 % (0,22693 %)	0.0003716 % (0,0043923 %)	0.16653 % (0.16680 %)	0.22248 % (0.22254 %)
Rayon de courbure des directrices	7.1152 %	0.064116 %	60.115 %	73.431 %
Rayon de courbure des génératrices	9,6691 % 0.8016 %	(0,30347 %) 0.041762 %	(60.116 %)	(73.44 %)

(1) v. définition de surface selon le système COONS (IV.2)

$\Delta \theta_1 = 50^\circ$  et  $\Delta \theta_2 = 15^\circ$

(2)  $q(r,s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} r^i s^j$  m = 3 continuité de la tangente  
m = 5 continuité de la courbure

v. définition de surface par le système UNISURF (IV.3)

PROGRAMMES DE CALCUL ETABLIS EN SIMPLE PRECISION  
SUR ORDINATEUR PHILIPS P 880.

LES NOMBRES ENTRE PARENTHESES SONT OBTENUS SUR OR-  
DINATEUR MINI 6.

Tableau IV.3



#### IV.4. - ETUDE COMPARATIVE DES DIFFERENTES METHODES DE DEFINITION DE SURFACE :

La méthode de S.A. COONS et le système U.N.I.S.U.R.F. appliqué à une portion de sphère conduisent à une étude comparative.

##### IV.4.1. - ÉTUDE COMPARATIVE DES RÉSULTATS OBTENUS SUR UNE PORTION DE SPHÈRE :

Les résultats obtenus précédemment figurent dans le tableau IV.3. Ils montrent que le système U.N.I.S.U.R.F. est la définition qui donne les résultats les plus satisfaisants ; ceci provient des faits suivants :

- la définition de S.A. COONS donne en chaque coin du carreau une forme particulière de la seconde forme quadratique,
- elle ne tient pas compte de points situés à l'intérieur du carreau.

Il convient donc de préférer le système U.N.I.S.U.R.F. à la définition de S.A. COONS dans le cas où les surfaces sont quelconques.

IV.4.2. - ÉTUDE COMPARATIVE DES RÉSULTATS OBTENUS SUR UNE PORTION D'HYPÉROBOÏDE :

IV.4.2.1. - DEFINITION DE LA PORTION D'HYPÉROBOÏDE :

La portion d'hyperboloïde est composée de 12 carreaux limités par 15 arcs de directrices et 16 arcs de génératrices (voir fig. IV 8)

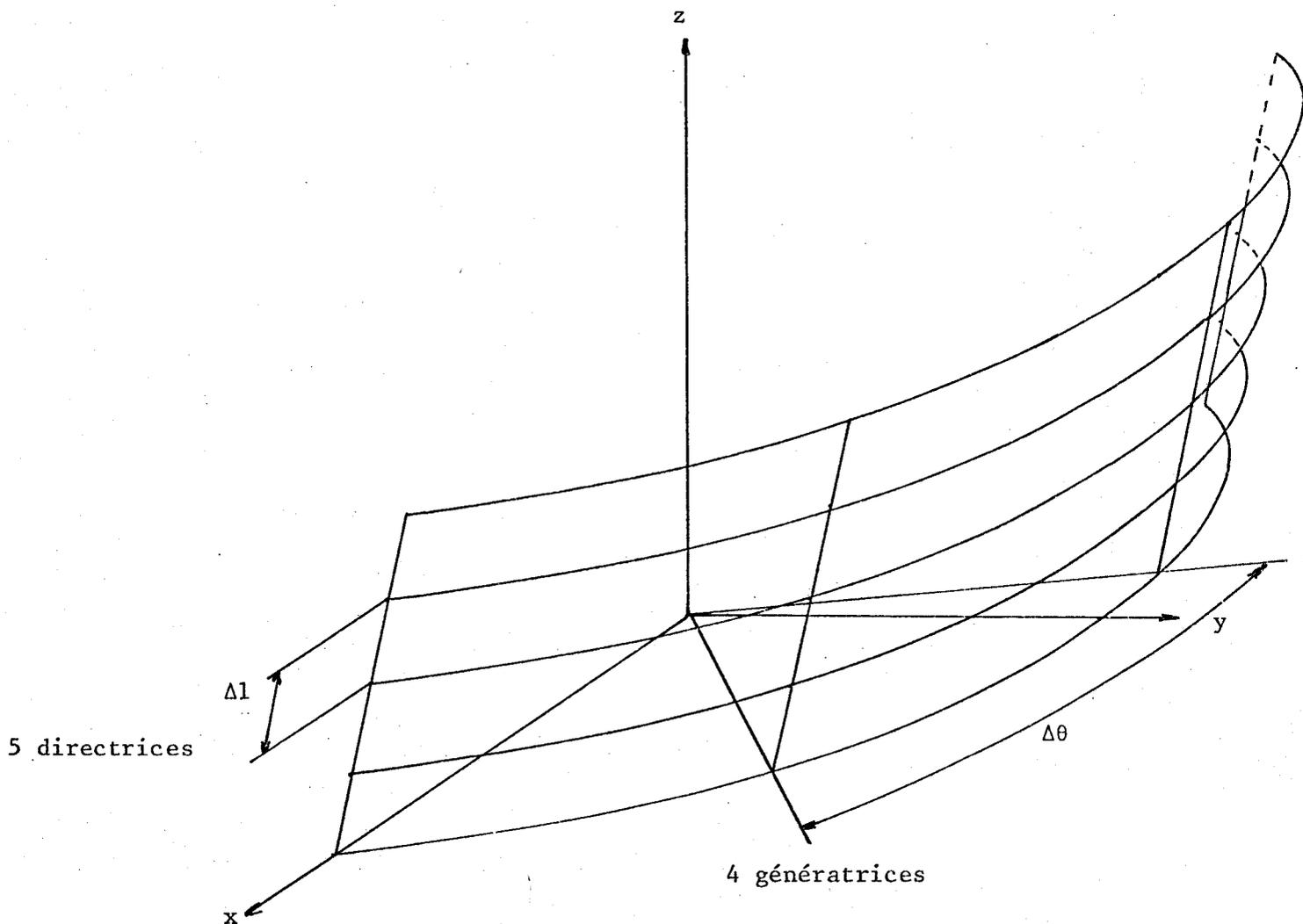


figure IV.8

Un point P de l'hyperboloïde (voir figure IV.9) est tel que :

$$\begin{aligned}
 x &= (R - \phi \sin \beta) \cos \theta - \phi \cos \beta \cos \alpha \sin \theta \\
 y &= (R - \phi \sin \beta) \sin \theta - \phi \cos \beta \cos \alpha \cos \theta \\
 z &= \phi \cos \beta \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Un carreau est délimité par deux arcs de directrices et deux arcs de génératrices et tel que  $\theta$  varie  $\Delta\theta$  et  $l$  varie de  $\Delta l$ .

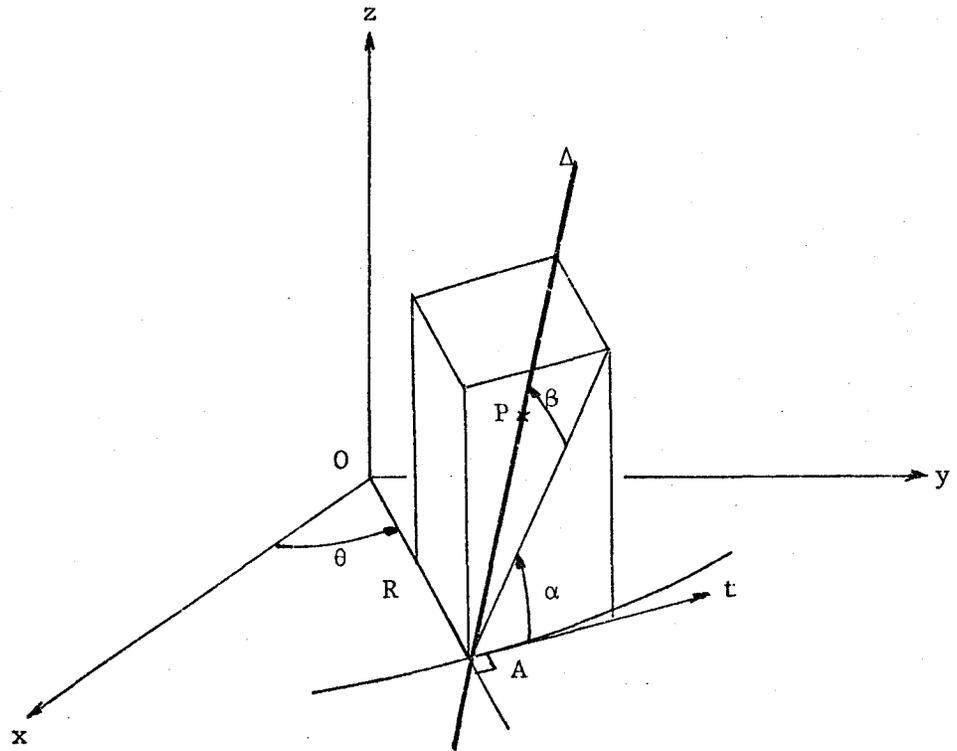


figure IV.9

IV.4.2.2. - RESULTATS OBTENUS SUR L'HYPERBOLOIDE DE REVOLUTION :

Des démarches analogues à celles utilisées pour la sphère conduisent aux résultats du tableau IV.4. Nous ne calculerons pas le rayon de courbure des génératrices (droites).

Les remarques énoncées pour la sphère sont encore valables pour l'hyperboloïde.

L'application du système COONS aux surfaces réglées donne des résultats du même ordre que ceux obtenus par U.N.I.S.U.R.F. lorsque les directrices sont continues d'ordre 2 ( $m=5$ ), les résultats sont améliorés lorsque les directrices sont continues d'ordre 3 ( $m=7$ ).

L'application du système COONS aux surfaces réglées est donc préférable, chaque carreau étant défini par  $2(m+1)$  coefficients. Le système U.N.I.S.U.R.F. définit un carreau par  $(m+1)^2$  coefficients, les coefficients relatifs aux termes de degré supérieur ou égal à 2 en  $s$  sont théoriquement nuls. Il est possible de plus avec le système COONS, dans le cas particulier de surfaces réglées, de définir la surface par la donnée de deux directrices uniquement.

#### IV.5. - CONCLUSION DU CHAPITRE IV

Le système U.N.I.S.U.R.F. appliqué aux surfaces quelconques donne une précision de position et de courbure satisfaisantes.

L'application de la définition de S.A. COONS aux surfaces réglées est préférable au système U.N.I.S.U.R.F. parce qu'elle n'implique qu'un nombre restreint de coefficients.

Une démarche de création de surface analogue à celle exposée au chapitre II pour les courbes (II.3) pourrait être abordée. Il conviendrait alors de définir la surface par le système U.N.I.S.U.R.F. non pas à partir de la seule position de points mais à partir de la connaissance de deux familles de courbes connues par la position, le trièdre de SERRET-FRENET, la courbure ... d'un certain nombre de points.

## CONCLUSION

La définition de courbe statorique d'une machine volumétrique à palette a nécessité au préalable l'étude du système U.N.I.S.U.R.F. tel qu'il a été développé au chapitre I.

Le système U.N.I.S.U.R.F. définit les courbes gauches de l'espace euclidien  $\epsilon_3$  à l'aide de polynômes à coefficients vectoriels d'un paramètre réel selon (I.1). Le choix des fonctions  $f_k$  du paramètre  $r$  est déterminé par la facilité de traitement numérique que peut apporter chacune des définitions :

- les fonctions  $f_k$  proposées par P. BEZIER d'expression assez complexes rendent plus simple le calcul des coefficients  $a_k$  ;
- les fonctions  $f_k$  proposées par FERGUSSON sont celles plus simples à exprimer mais conduisent à des coefficients  $a_k$  plus compliqués.

La définition de la courbe par la connaissance de la position de certains de ses points conduit invariablement à des instabilités de forme dues d'une part, à la difficulté de relever de façon précise la position de ses points, ce qui entraîne des erreurs dans le calcul des dérivées successives, et d'autre part à la difficulté de choisir la valeur du paramètre à affecter à chacun de ces points.

Dans le cadre de la définition de courbes statoriques, il nous semble donc plus aisé de définir la courbe par la connaissance du vecteur position, du vecteur tangent, du vecteur normal et du rayon de courbure en un certain nombre de points.

Nous avons proposé dans le chapitre II, les deux définitions

suivantes :

- une définition de courbe plane obtenue par projection stéréographique d'une courbe tracée sur une sphère,
- une définition de courbe gauche à l'aide de l'abscisse curviligne inspirée de la définition du système U.N.I.S.U.R.F.

L'étude de courbes adaptées à la définition de la courbe statorique d'une machine volumétrique à palettes est développée au chapitre III. Elle montre que la définition à l'aide de l'abscisse curviligne nécessite un nombre minimal de composantes des coefficients  $a_k$ . Cette étude est basée sur trois critères :

- un critère relatif au rayon polaire,
- un critère relatif au rayon de courbure,
- un critère relatif à l'accélération normale.

Elle conduit à rendre les variations de l'accélération normale les plus faibles possibles.

Le chapitre IV consiste en une étude brève du système U.N.I.S.U.R.F. et du système proposé par S.A. COONS appliqué aux surfaces de l'espace euclidien  $\epsilon_3$ . Il apparaît, dans le cas de surfaces quelconques, que le choix du système U.N.I.S.U.R.F. par sa formulation plus générale est préférable au système proposé par S.A. COONS. Dans le cas de surfaces réglées, le choix du système U.N.I.S.U.R.F. est encore préférable au système COONS ; cependant, l'application du système COONS aux surfaces réglées que nous avons proposé convient le mieux à ce type de surface, il faut noter de plus que cette formulation conduit à un nombre minimal de coefficients utiles à la définition globale de la surface.

Dans le cas de création de courbes ou de surfaces (deux familles de courbes) par la connaissance en certains points du vecteur position, du trièdre de SERRET-FRENET, de la ou des courbures ..., il conviendrait de lier les variations de la ou des abscisses curvilignes à celles du trièdre de SERRET-FRENET.

### ANNEXE I

#### RAPPELS DE LA THEORIE DES COURBES [3] [4]

Soit  $C$  une courbe de l'espace euclidien  $\epsilon_3$  rapporté à un repère  $(o, i, j, k)$  muni d'une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  orthonormée.

Un point courant  $M$  de la courbe est défini par ses coordonnées  $(x, y, z)$  en fonction d'un paramètre réel  $t$  :

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \vec{OM} = q(t) = x(t) \vec{e}_1 + y(t) \vec{e}_2 + z(t) \vec{e}_3$$

Soit  $s$  l'abscisse curviligne du point  $M$  par rapport à une origine de la courbe.

Le vecteur tangent unitaire  $\vec{t}$  est défini par :

$$\vec{t} = \frac{dq}{ds} \tag{A.I.1}$$

$\vec{t}$  étant unitaire :

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = 1$$

d'où en dérivant par rapport à  $s$  :

$$\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

$\frac{d\vec{t}}{ds}$  est orthogonal à  $\vec{t}$ . On pose :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \quad (\text{A.I.2})$$

expression dans laquelle :

- $\vec{n}$  : vecteur normal principal (unitaire)
- $R$  : rayon de courbure
- $\rho$  : courbure

On introduit le vecteur  $\vec{b}$  tel que :

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} \quad \vec{b} \text{ est unitaire.}$$

$\vec{b}$  est appelé le vecteur binormal.

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  définit le trièdre de SERRET-FRENET.

Les vecteurs de ce trièdre pris deux à deux définissent trois plans :

- le plan  $\vec{t}, \vec{n}$  est le plan oscillateur

- le plan  $\vec{n}, \vec{b}$  est le plan normal.
- le plan  $\vec{b}, \vec{t}$  est le plan rectifiant ou tangent.

Calculons  $\frac{d\vec{n}}{ds}$ .

Soit  $a_1, a_2, a_3$  les coordonnées de  $\frac{d\vec{n}}{ds}$  dans la base  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = a_1 \vec{t} + a_2 \vec{n} + a_3 \vec{b}$$

or :  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$  d'où :

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = 0 \quad \text{or} \quad \vec{n} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = a_2 \quad a_2 = 0$$

d'autre part :

$$\vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{d'où} :$$

$$\vec{n} \frac{d\vec{t}}{ds} + \frac{d\vec{n}}{ds} \vec{t} = 0$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \vec{n} \quad \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} = -\rho \vec{n} \cdot \vec{n} = -\rho$$

or  $\frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} = a_1 = -\rho$

On pose :  $a_3 = \tau = \frac{1}{T}$

$\tau$  : torsion

$T$  : rayon de torsion

d'où

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\rho \vec{t} + \tau \vec{b} \quad (\text{A I.3})$$

Calculons  $\frac{d\vec{b}}{ds}$

$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$  d'où :

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = \rho \vec{n} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge (-\rho \vec{t} + \tau \vec{b}) = \rho \vec{n} \wedge \vec{n} - \rho \vec{t} \wedge \vec{t} + \tau \vec{t} \wedge \vec{b}$$

or  $\vec{n} \wedge \vec{n} = \vec{0}$  et  $\vec{t} \wedge \vec{t} = \vec{0}$

d'où :

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \quad (\text{A I.4})$$

On a donc les trois formules de SERRET-FRENET :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \vec{n} \quad (\text{A I.5.a})$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\rho \vec{t} + \tau \vec{b} \quad (\text{A I.5.b})$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \quad (\text{A I.5.c})$$

Calcul de la courbure et de la torsion :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{M}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{M}}{ds^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^3\vec{M}}{dt^3} = \frac{d^3\vec{M}}{ds^3} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2\vec{M}}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{M}}{ds} \frac{d^3s}{dt^3}$$

Calculons  $\frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d\vec{M}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}$$

$$= \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \vec{t} \wedge \rho \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \rho \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \vec{b}$$

or

$$\frac{ds}{dt} = \left( \frac{dM}{dt} \right)$$

d'où

$$\rho = \frac{\left| \frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|^3}$$



(A I.6)

Calculons  $\frac{d^3\vec{M}}{dt^3}$  puis le produit mixte de  $\frac{d\vec{M}}{dt}$ ,  $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$  et  $\frac{d^3\vec{M}}{dt^3}$

$$\frac{d^3\vec{M}}{dt^3} = \left( \frac{dp}{ds} \vec{n} + \rho (-\rho \vec{t} + \tau \vec{b}) \right) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 3\rho \vec{n} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \vec{t} \frac{d^3s}{dt^3}$$

$$\left( \frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{M}}{dt^3} \right) = \rho^2 \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^6$$

d'où :

$$\tau = \frac{\left( \frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{M}}{dt^3} \right)}{\left( \frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \right)^2} \quad (\text{A I.7})$$

Nous définissons la continuité d'ordre  $p$  d'une courbe en un point par la continuité de la fonction représentant analytiquement cette courbe ainsi que celles de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $p$ . La continuité d'ordre 0 est la continuité de position ; celle d'ordre 1, la continuité des tangentes (d'après la formule (A.I.1)) ; celle d'ordre 2, la continuité de la courbure et des normales (d'après la formule (A.I.2)) ; celle d'ordre 3, la continuité de la torsion (d'après la formule (A.I.3)).

Remarques :

- le rayon de torsion est une quantité algébrique.
- le sens dans lequel  $M$  décrit la courbe avec l'abscisse curviligne croissante est le sens positif.  $\vec{t}$  a donc une direction bien déterminée.
- le rayon de courbure étant positif,  $\vec{n}$  est dirigé vers la concavité de la courbe. On définit alors le centre de courbure  $I$  par :

$$\vec{MI} = \rho \vec{n}$$

- dans le cas d'une courbe plane, on peut imposer le sens du vecteur normal par rapport à celui du vecteur tangent. Le rayon de courbure devient alors une quantité algébrique.

Considérons un point  $M$  de la courbe et le repère de SERRET-FRENET associé. Le développement de l'accroissement  $\Delta\vec{M}$  de  $\vec{M}$  selon les puissances de  $s$  (compté à partir de  $M$ ) s'écrit :

$$\Delta\vec{M} = s \frac{d\vec{M}}{ds} + \frac{s^2}{2} \frac{d^2\vec{M}}{ds^2} + \frac{s^3}{3} \frac{d^3\vec{M}}{ds^3} + \dots \quad (\text{A.I.8})$$

or :

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{t}$$

$$\frac{d^2\vec{M}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \vec{n}$$

en dérivant par rapport à  $s$  et compte tenu de (A.I.5.b) on a :

$$\frac{d^3M}{ds^3} = \frac{d\rho}{ds} \vec{n} + \rho (-\rho \vec{t} + \tau \vec{b})$$

En remplaçant dans (A.I.8), on obtient les coordonnées de l'accroissement  $\Delta\vec{M}$  dans le repère de SERRET-FRENET :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{M} &= \left( s - \frac{1}{6} \rho^2 s^3 + \dots \right) \vec{t} \\ &+ \left( \frac{\rho s^2}{2} + \frac{1}{6} \frac{d\rho}{ds} + \dots \right) \vec{n} \\ &+ \left( \frac{\rho \tau s^3}{6} + \dots \right) \vec{b} \end{aligned}$$

Construisons la courbe au voisinage du point  $M$ . Pour cela, examinons les projections de la courbe dans les plans  $(\vec{t}, \vec{n})$ ,  $(\vec{t}, \vec{b})$  et  $(\vec{n}, \vec{b})$ .

Posons :

$$x_{\Delta} = s - \frac{1}{6} \rho^2 s^3 + \dots$$

$$y_{\Delta} = \frac{\rho s^2}{2} + \frac{1}{6} \frac{d\rho}{ds} + \dots$$

$$z_{\Delta} = \frac{\rho \tau}{6} s^3 + \dots$$

les composantes de  $\vec{\Delta M}$

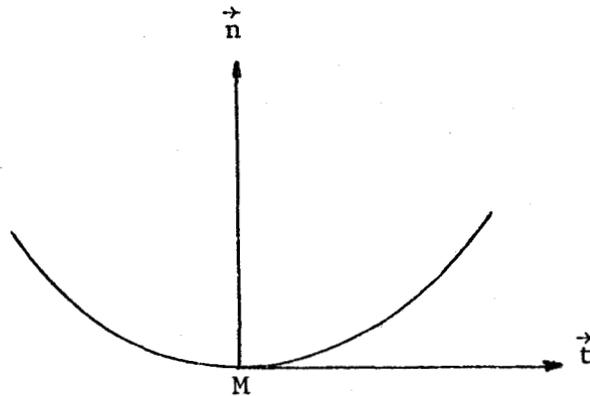
- projection dans le plan osculateur  $(\vec{t}, \vec{n})$  :

au troisième ordre près, la projection a pour équation :

$$x = s$$

$$y = \frac{\rho}{2} \frac{s^2}{2} = \frac{\rho}{2} \frac{x^2}{2}$$

La projection a localement la forme du parabole :

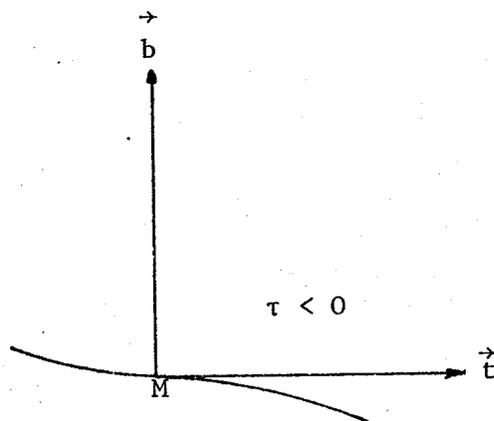
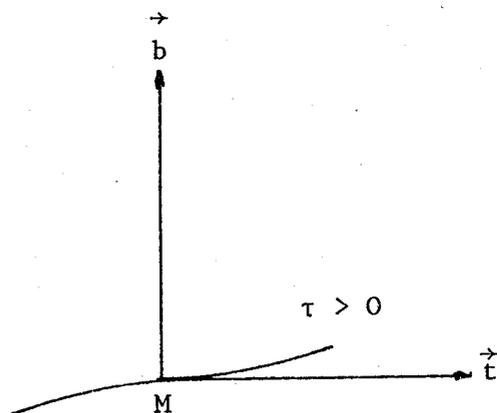


- projection dans le plan tangent  $(\vec{t}, \vec{b})$  :

$$x = s$$

$$z = \frac{\rho \tau}{6} s^3 = \frac{\rho \tau}{6} x^3$$

La projection de la courbe traverse le plan osculateur dans un sens qui dépend du signe de la torsion ( $\rho$  toujours positive).

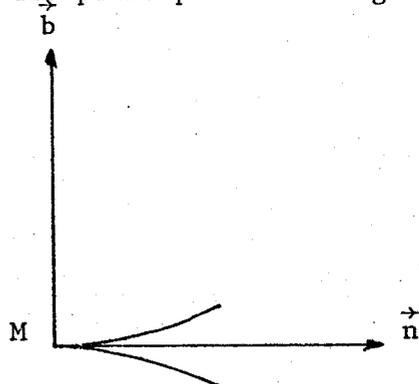


- projection dans le plan normal  $(\vec{n}, \vec{b})$  :

$$y = \frac{\rho s^2}{2}$$

$$z = \frac{\rho \tau}{6} s^3$$

La normale principale est tangente à la courbe projetée.



Le sens de parcours de la projection dépend du signe de la torsion.

Les remarques faites ci-dessus s'appliquent au cas de points ordinaires de

## ANNEXE II

### RAPPELS DE LA THEORIE DES SURFACES [4] [5] [6]

On appelle surface  $S$  un ensemble de points de l'espace euclidien  $\epsilon_3$  rapporté au repère  $(o, i, j, k)$  muni d'une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  dont les coordonnées  $x, y, z$  sont des fonctions continues des paramètres  $u$  et  $v$ .

Un point  $M$  de la surface  $S$  est tel que ses coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient :

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u_1, u_2) \\ y = y(u_1, u_2) \\ z = z(u_1, u_2) \end{array} \right\} \text{ou } \vec{OM} = q(u) = x(u) \vec{e}_1 + y(u) \vec{e}_2 + z(u) \vec{e}_3$$

avec  $u = (u_1, u_2)$  (A.II.1)

On suppose :

- la biunivocité entre  $M$  et  $(u_1, u_2)$
- la continuité des fonctions vectorielles  $\frac{\partial q}{\partial u_1}$  et  $\frac{\partial q}{\partial u_2}$
- les vecteurs  $\frac{\partial q}{\partial u_1}$  et  $\frac{\partial q}{\partial u_2}$  non nuls et indépendants

paramétriques :

$$u_1 = u_1(t)$$

$$\text{ou encore } \phi(u_1, u_2) = 0 \quad (\text{A.II.2})$$

$$u_2 = u_2(t)$$

Les fonctions  $u(t)$  et  $v(t)$  sont supposées dérivables d'où :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial q}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} \quad (\text{A.II.3})$$

On notera de même :  $q(t) = \frac{dq}{dt}$ .

## 2. LIGNES COORDONNEES. COORDONNES CURVILIGNES.

De ce qui précède, si  $\phi(u_1, u_2)$  ne dépend que de  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) c'est à dire  $u_2 = C^{te}$  (resp.  $u_1 = C^{te}$ ) alors la courbe ainsi définie s'appelle *ligne coordonnée*.

L'ensemble de ces courbes  $u_2 = C^{te}$  (resp.  $u_1 = C^{te}$ ) constitue la première (resp. la seconde) famille de lignes coordonnées.  $u_1$  et  $u_2$  s'appellent *coordonnées curvilignes*.

## 3. PREMIERE FORME QUADRATIQUE FONDAMENTALE.

Considérons une courbe  $C$  tracée sur la surface  $S$  par  $\phi(u_1, u_2) = 0$ . (cf. § 1.).

L'expression (A.II.3) donne les composantes de  $\frac{dq}{dt}$  dans la base  $(q'_{u_1}, q'_{u_2})$  au point  $M$ , on en tire la différentielle  $dq$  du

vecteur  $q(t)$  :

$$dq = \frac{\partial q}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial q}{\partial u_2} du_2 \quad (\text{A.II.4})$$

La longueur de la courbe  $C$  entre deux points de la courbe correspondant à ces valeurs  $t = a$  et  $t = \tau$  du paramètre est donnée par l'intégrale :

$$s(\tau) = \int_a^\tau |q'(t)| dt$$

Par conséquent :

$$ds(t) = |q'(t)| dt = |dq(t)| \quad (\text{A.II.5})$$

$|a|$  désignant le module du vecteur  $a$ .

En tenant compte de (A.II.4), on en déduit :

$$ds^2 = |dq|^2 = \left( \sum_{\alpha=1}^2 q'_{u\alpha} du_\alpha \mid \sum_{\beta=1}^2 q'_{u\beta} du_\beta \right) \quad (\text{A.II.6.a})$$

$(a|b)$  désignant le produit scalaire des vecteurs  $a$  et  $b$ .

Souvent on pose :

$$g_{\alpha\beta} = (q'_{u\alpha} | q'_{u\beta})$$

d'où :

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta \quad (\text{A.II.6.b})$$

or  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

On écrit l'expression précédente sous la forme :

$$ds^2 = E du_1^2 + 2 F du_1 du_2 + G du_2^2 \quad (\text{A.II.6.c})$$

avec :  $E = (q'_{u_1} | q'_{u_1})$  ;  $F = (q'_{u_1} | q'_{u_2})$  ;  $G = (q'_{u_2} | q'_{u_2})$

Les expressions (A.II.6) portent le nom de *première forme quadratique fondamentale* de la surface. On la notera  $A(u, du)$

$$A(u, du) = E du_1^2 + 2 F du_1 du_2 + G du_2^2 \quad (\text{A.II.6.d})$$

Si deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  tracées sur la surface  $S$  définies par  $u_\alpha = u_\alpha^{(1)}(t)$  et  $u_\beta = u_\beta^{(2)}(t)$  se coupent au point  $M$ , on peut trouver l'angle  $\omega$  qu'elles font, à partir de la première forme fondamentale, par :

$$\cos \omega = \frac{(q'_{u_\alpha}^{(1)} | q'_{u_\beta}^{(2)})}{|q'_{u_\alpha}^{(1)}| \cdot |q'_{u_\alpha}^{(2)}|} \quad (\text{A.II.7})$$

#### 4. DEUXIEME FORME QUADRATIQUE FONDAMENTALE :

On se place dans les mêmes conditions que dans les paragraphes précédents ; de plus,  $q(u)$  est une fonction vectorielle deux fois continûment dérivables.

On peut exprimer cette dernière hypothèse par :

- le rang du Jacobien :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2)} \text{ doit être égal à } 2.$$

On notera :

$$q'_{u_1} = \frac{\partial q}{\partial u_1} \quad \text{et} \quad q'_{u_2} = \frac{\partial q}{\partial u_2} .$$

M est dit ordinaire dans le cas où le Jacobien est de rang 2, si le rang est inférieur à 2, il est dit singulier.

En étudiant la surface  $S$  dans un voisinage  $V$  de variation de  $u$  et  $v$ , nous adoptons une étude locale, c'est-à-dire, la surface n'est considérée qu'au voisinage d'un point fixe ; cela est généralement suffisant pour établir les premiers théorèmes de la Théorie des surfaces dans  $\epsilon_3$ .

Le rang du Jacobien égal à 2 au point  $M$  entraîne l'existence du plan tangent à la surface  $S$ .

### 1. COURBE TRACEE SUR UNE SURFACE.

On définit une courbe  $C$  sur la surface  $S$  par les équations

On définit le vecteur normal  $N$  à la surface  $S$  en un point  $M$  par le produit vectoriel des deux vecteurs  $q'_{u_1}$  et  $q'_{u_2}$  définissant le plan tangent :

$$N = q'_{u_1} \wedge q'_{u_2}$$

et le vecteur unitaire  $\vec{h}$  associé (vecteur normal géodésique) :

$$\vec{h} = \frac{q'_{u_1} \wedge q'_{u_2}}{|q'_{u_1} \wedge q'_{u_2}|} \quad (\text{A.II.8})$$

défini au facteur  $\pm 1$  près. Dans un voisinage de  $M$ ,  $\vec{h}$  est supposé continu.

Considérons une courbe  $C$  de la surface  $S$  par l'équation :

$$q = q(u_1(t), u_2(t))$$

où les fonctions  $u_\alpha(t)$  sont de classe  $C^2$

Dans ce qui suit, nous allons étudier la courbure de cette courbe  $C$  en un point  $M$ .

#### 4.1. Courbure d'une ligne tracée sur une surface

Soit  $s$  l'abscisse curviligne sur la courbe  $C$  compté positivement à partir d'un point fixe  $A$  appartenant à  $C$ .

On a vu (cf. annexe I) que :

- le vecteur tangent en M est :

$$\vec{t} = \frac{d\vec{M}}{ds}$$

- le vecteur normal principal  $\vec{n}$  et la courbure  $\rho$  sont tels que :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{q}}{ds^2} = \rho \vec{n}$$

La courbe  $C$  appartenant à la surface, on peut écrire :

$$\frac{d^2\vec{q}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \sum_{\alpha=1}^2 q'_{u\alpha} \frac{du_{\alpha}}{ds} \right)$$

$$\frac{d^2\vec{q}}{ds^2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left( \frac{\partial^2\vec{q}}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} \right) \cdot \frac{du_{\alpha}}{ds} \cdot \frac{du_{\beta}}{ds} + \sum_{\alpha=1}^2 q'_{u\alpha} \frac{d^2u_{\alpha}}{ds^2} \quad (\text{A.II.9})$$

Multiplions scalairement par le vecteur  $\vec{h}$  et multiplions par  $ds$  on obtient la deuxième forme quadratique fondamentale de la surface.

$$\left( \frac{d^2\vec{q}}{ds^2} \mid \vec{h} \right) ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_{\alpha} du_{\beta} \quad (\text{A.II.10.a})$$

avec 
$$b_{\alpha\beta} = \left( \frac{\partial^2\vec{q}}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} \mid \vec{h} \right)$$

On notera la deuxième forme quadratique fondamentale  $B(u, du)$  :

$$B(u, du) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_{\alpha} du_{\beta} \quad (\text{A.II.10.b})$$

Souvent on pose  $L = b_{11}$  ;  $M = b_{12}$  ;  $N = b_{22}$  d'où :

$$B(u, du) = L du_1^2 + 2M du_1 du_2 + N du_2^2 \quad (\text{A.II.10.c})$$

Des expressions (A.II.6.b.), (A.II.10.a.) et (A.II.10.b), on déduit la formule :

$$\left( \frac{d^2q}{ds^2} \mid \vec{h} \right) = \frac{B(u, du)}{A(u, du)} = \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_{\alpha} du_{\beta}}{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_{\alpha} du_{\beta}} \quad (\text{A.II.11})$$

appelée aussi *formule de MEUSNIER*.

Nous allons maintenant définir un second trièdre en un point  $M$  lié, d'une part, à la surface  $S$  et, d'autre part, à la courbe  $C$  tracée sur cette surface .

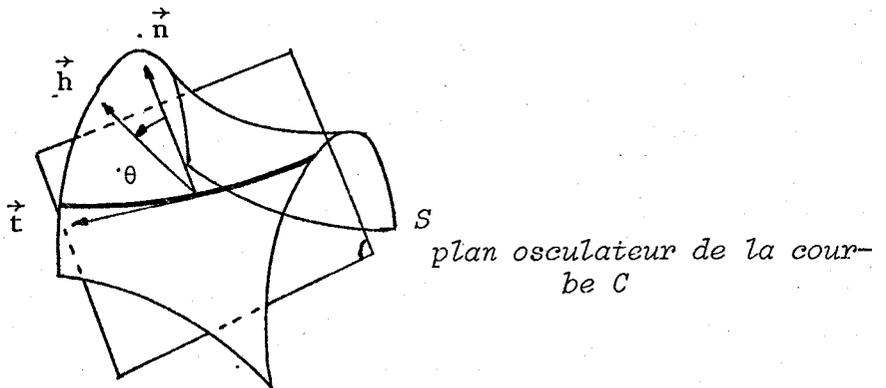
#### 4.2. Trièdre de Darboux-Ribaucour

En un point  $M$  de la courbe  $C$  tracée sur la surface  $S$  , on

définit le *trièdre de DARBOUX-RIBAUCCOUR* tel que :

- le premier vecteur du trièdre soit le vecteur tangent  $\vec{t}$ . ( $\vec{t}$  appartient au plan tangent à la surface. cf l'expression (II.3)).
- le troisième vecteur du trièdre soit le vecteur normal  $\vec{h}$  à la surface.
- le second vecteur  $\vec{g}$  est tel que le trièdre  $(\vec{t}, \vec{g}, \vec{h})$  soit direct.  $\vec{g}$  appartient au plan tangent puisqu'il est orthogonal à  $\vec{h}$ .  $\vec{g}$  est appelé vecteur géodésique.

Soit  $\theta$  l'angle  $(\vec{n}, \vec{h})$  orienté selon  $\vec{t}$



On a :

$$\vec{h} = \cos \theta \vec{n} + \sin \theta \vec{b}$$

(A.II.12)

$$\vec{g} = \sin \theta \vec{n} - \cos \theta \vec{b}$$

d'où :

$$\vec{n} = \cos \theta \vec{h} + \sin \theta \vec{g}$$

(A.II.13)

$$\vec{b} = \sin \theta \vec{h} - \cos \theta \vec{g}$$

Calculons  $\frac{d\vec{t}}{ds}$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \vec{n} = \rho \cos \theta \vec{h} + \rho \sin \theta \vec{g}$$

or  $\frac{d\vec{t}}{ds}$  n'est autre que  $\frac{d^2q}{ds^2}$

Multiplions scalairement l'expression précédente par le vecteur  $\vec{h}$ , on obtient l'expression :

$$\left( \frac{d^2q}{ds^2} \mid h \right) = \rho \cos \theta \quad (\text{A.II.14})$$

qui est aussi la deuxième forme quadratique fondamentale. On pose :

$$- \rho_n = \rho \cos \theta$$

$\rho_n$  est appelée courbure normale

$$- \rho_g = \rho \sin \theta$$

$\rho_g$  est appelée courbure géodésique

calculons  $\frac{d\vec{g}}{ds}$

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = \sin \theta \frac{d\vec{n}}{ds} - \cos \theta \frac{d\vec{b}}{ds} + \frac{d\theta}{ds} (\cos \theta \vec{n} + \sin \theta \vec{b})$$

D'après les expressions de  $\frac{d\vec{n}}{ds}$  et  $\frac{d\vec{b}}{ds}$  (cf annexe I, (A.I.3), (A.I.4)) et l'expression (A.II.12) :

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = \sin \theta (-\rho \vec{t} + \tau \vec{b}) - \cos \theta (-\tau \vec{n}) + \frac{d\theta}{ds} \vec{h}$$

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = -\rho \sin \theta \vec{t} + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) \vec{h}$$

On pose :

$$\tau_g = \tau + \frac{d\theta}{ds}$$

appelée *torsion géodésique*

calculons  $\frac{d\vec{h}}{ds}$

$$\frac{d\vec{h}}{ds} = \cos \theta \frac{d\vec{n}}{ds} + \sin \theta \frac{d\vec{b}}{ds} + \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta \vec{n} + \cos \theta \vec{b})$$

$$\frac{d\vec{h}}{ds} = -\rho \cos \theta \vec{t} - \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) \vec{g}$$

On obtient les *trois formules de DARBOUX* :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \rho_n \vec{h} + \rho_g \vec{g} \quad (\text{A.II.15.a})$$

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = -\rho_g \vec{t} + \tau_g \vec{h} \quad (\text{A.II.15.b})$$

$$\frac{d\vec{h}}{ds} = -\rho_n \vec{t} - \tau_g \vec{g} \quad (\text{A.II.15.c})$$

4.3. Etude locale des courbes tracées sur la surface. Théorèmes de Meusnier.

Les expressions (A.II.11) et (A.II.14) permettent d'écrire la courbure normale sous la forme :

$$\rho_n = \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta}{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta} = \frac{L du_1^2 + 2M du_1 du_2 + N du_2^2}{E du_1^2 + 2F du_1 du_2 + G du_2^2} \quad (\text{A.II.16.a})$$

ou encore :

$$\rho_n = L \left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + 2M \frac{du_1}{ds} \frac{du_2}{ds} + N \left(\frac{du_2}{ds}\right)^2 \quad (\text{A.II.16.b})$$

Considérons deux courbes tracées sur la surface passant par M et ayant même tangente ; en divisant l'expression (A.II.4) par ds, on obtient ::

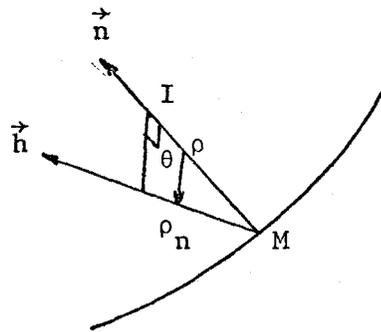
$$\frac{dq}{ds} = \vec{t} = \frac{\partial q}{\partial u_1} \frac{du_1}{ds} + \frac{\partial q}{\partial u_2} \frac{du_2}{ds}$$

$\frac{\partial q}{\partial u_1}$  et  $\frac{\partial q}{\partial u_2}$  ne dépendent que de la surface,  $\frac{du_1}{ds}$  et  $\frac{du_2}{ds}$  sont donc les mêmes pour deux courbes tangentes en M. Elles ont donc même courbure normale. Nous supposons que cette courbure normale n'est pas nulle.

Si de plus, ces deux courbes ont même plan osculateur en  $M$ , c'est à dire même angle  $\theta$ , elles ont même centre de courbure. Ceci est le premier théorème de MEUSNIER.

Si, en particulier, l'une des courbes est la courbe  $C$  considérée précédemment, le centre de courbure  $I$  est le même que le centre de courbure de la section définie par le plan osculateur de  $C$  en  $M$  ce qui est exprimé par :

$$\rho_n = \rho \cos \theta$$



D'où le second théorème de MEUSNIER :

Le centre de courbure en  $M$  d'une courbe  $C$  tracée sur la surface  $S$  est la projection sur le plan osculateur à cette courbe du centre de courbure en  $M$  de la section plane normale ayant même tangente que  $C$ .

4.4. Interprétation géométrique de la deuxième forme quadratique fondamentale.

Soit un point  $M(u)$  de la surface  $S$ , considérons un point  $M'(u + du)$ . L'accroissement :

$$\Delta q = q(u + du) - q(u)$$

donne par la formule de Taylor aux infiniments petits du troisième ordre près :

$$\Delta q = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial q}{\partial u_{\alpha}} du_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial^2 q}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} du_{\alpha} du_{\beta} + \dots$$

En multipliant scalairement par  $\vec{h}$  (le premier terme du second membre définit le plan tangent) :

$$(\Delta q | \vec{h}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} | \vec{h} \right) du_{\alpha} du_{\beta} + \dots$$

$$(\Delta q | \vec{h}) = \frac{1}{2} B(u, du) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} (L du_1^2 + 2 M du_1 du_2 + N du_2^2) + \dots \quad (\text{A.II.17})$$

$(\Delta q | \vec{h})$  représente l'écart local de la surface  $S$  de son plan tangent au point  $M$ .

D'après l'expression précédente (A.II.17) si  $B(u, du)$  dans un voisinage de  $M$  :

- est de signe défini, alors la surface  $S$  au point est disposée d'un côté du plan tangent. Le point  $M$  est dit *elliptique*.
- n'est pas de signe défini, alors la surface  $S$  est située de part et d'autre du plan tangent. Le point  $A$  est dit *hyperbolique*.
- est dégénérée, le point  $M$  est *parabolique*.
- est identiquement nulle, le point  $M$  est dit *méplat*.

#### 4.5. Indicatrice de DUPIN

L'expression ((A.II.17)) est l'équation de la surface  $S$  au voisinage du point  $M$  relativement à un repère lié au plan tangent.

Considérons l'intersection de la surface et d'un plan parallèle au plan tangent de côte  $k$  selon  $\vec{h}$  a pour équation au 3e ordre près

$$2k = B(u, du)$$

où encore :

$$2k = L du_1^2 + 2M du_1 du_2 - N du_2^2 \quad (\text{A.II.18})$$

C'est une conique appelée *indicatrice de DUPIN*.

L'étude de cette conique permet, comme précédemment, de définir le point  $M$  :

- si la conique est une ellipse,  $M$  est dit elliptique

- si la conique est un couple d'hyperboles, M est dit hyperbolique
- si la conique est une parabole ou un couple de deux droites parallèles, M est dit parabolique.

4.6. Dépendance de la courbure des sections normales et de la direction sur le plan tangent.

La courbure d'une section normale est donnée par : (A.II.16a)  
c'est à dire :

$$\rho_n = \frac{B(u, du)}{G(u, du)}$$

Trouvons dans le plan tangent une base orthonormée  $(\vec{t}_1, \vec{g}_1)$   
dans laquelle  $B(u, du)$  prenne sa forme canonique.

$$B(u, du) = \rho_1 \epsilon_1^2 + \rho_2 \epsilon_2^2$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont, dans la base  $(\vec{t}_1, \vec{g}_1)$  les coordonnées de  $dq = \sum_{\alpha} \frac{\partial q}{\partial u_{\alpha}} du_{\alpha}$

Or :

$$G(u, du) = (dq|dq)$$

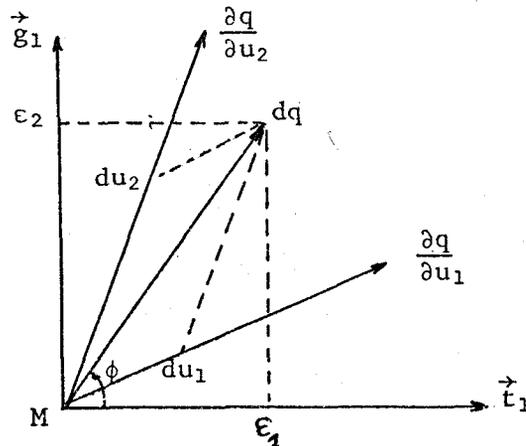
d'où

$$G(u, du) = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2$$

L'expression (A.II.16.a) s'écrit dans ce cas (*formule d'EULER*) :

$$\rho_n = \rho_1 \cos^2 \phi + \rho_2 \sin^2 \phi \quad (\text{A.II.19})$$

où  $\phi$  désigne l'angle que fait  $dq$  avec le vecteur de base  $\vec{t}_1$ .



Les directions  $\vec{t}_1$  et  $\vec{g}_1$  sont appelées *directions principales* de la surface au point M.

Les quantités  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont appelées *courbures principales*.

On appelle *courbure totale* de la surface au point M le nombre K tel que :

$$K = \rho_1 \rho_2 \quad (\text{A.II.20})$$

et *courbure moyenne* de la surface au point M le nombre de C tel que :

$$C = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) \quad (\text{A.II.21})$$

Le signe de  $K$  permet, comme nous l'avons fait dans le paragraphe 4.4, de déterminer le signe de  $B(u, du)$  et position de la surface par rapport à son plan tangent.

4.7. Recherche des courbures principales et des directions principales.

La courbure normale dans la direction  $(du_1, du_2)$  a pour expression (A.II.16.a).

Posons  $\lambda = \frac{du_2}{du_1}$

La courbure normale devient :

$$\rho_n = \frac{L + 2 M \lambda + N \lambda^2}{E + 2 F \lambda + G \lambda^2}$$

et est extrémale pour :

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda} = 0$$

c'est à dire :

$$(M + N\lambda) (E + 2 F\lambda + G\lambda^2) - (F + G\lambda) (L + 2 M\lambda + N\lambda^2) = 0$$

ou encore :

$$\frac{L + 2 M\lambda + N\lambda^2}{E + 2 F\lambda + G\lambda^2} = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} = \rho \quad (\text{A.II.22})$$

d'où l'équation aux directions principales :

$$(NF - GM) \lambda^2 + (NE - GL) \lambda + (ME - FL) = 0 \quad (\text{A.II.23})$$

et, en éliminant  $\lambda$ , l'équation aux courbures principales.

$$(EG - F^2) \rho^2 + 2 (FM - EN - GL) \rho + LN - M^2 = 0 \quad (\text{A.II.24})$$

Cette dernière expression permet de tirer la courbure totale et la courbure moyenne :

$$K = \rho_1 \rho_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\text{A.II.25})$$

$$C = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) = \frac{EN + GL - 2 FM}{2 (EG - F^2)}$$

```

1 C
2 C Definition de courbe
3 C  $x = \exp(t) * \cos(t)$ 
4 C  $y = \exp(t) * \sin(t)$ 
5 C  $z = \exp(2*t)$ 
6 C
7 C Calcul des coefficients Ak* en nombre 2p+2
8 C Calcul des coefficients Ak en nombre 2p+2
9 C
10 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,0-Z)
11 IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
12 DOUBLE PRECISION NF(3)
13 DIMENSION TF(3),BF(3),F1(8,8),B(8),X(8),IJ(5)
14 DIMENSION Q0(3,7,12),Q2(3,7,12),R0(7,12),IBUF(392),P(3),P1(3),
15 SQ1(3,7,12),TD(7,12),Q3(3,7,12),TD(7,12),P2(3),P3(3),RD(7,12)
16 COMMON/BLOC1/QD(3,7,12)
17 COMMON/BLOC2/R(8,12),F(8,8),AK(3,12,8)
18 COMMON/BLOC3/JJ
19 DATA IJ/2,2,2,2,2/
20 IW=4
21 IR=5
22 WRITE(6,*)' ENTRER LE CAS CHOISI'
23 WRITE(6,*)' 1: CAS I r selon I.17'
24 WRITE(6,*)' 2: CAS II r selon I.16'
25 WRITE(6,*)' 3: CAS III r selon I.16 puis I.17'
26 READ (IR,*) ICAS
27 PI=DBLE(ATAN(1.)/45.)
28 C
29 C JJ: caracterise le type de moyenne des derivees
30 C JJ=1 moyenne arithmetique
31 C JJ=2 moyenne barycentrique
32 C JJ=3 moyenne des vecteurs unitaires et des modules
33 C
34 WRITE(6,*)' JJ=1 moyenne arithmetique'
35 WRITE(6,*)' JJ=2 moyenne barycentrique'
36 WRITE(6,*)' JJ=3 moyenne des vecteurs unitaires et des modules'
37 WRITE(6,*)' ENTRER JJ'
38 READ (5,*)JJ
39 PSMAX=0.D00
40 TEMAX=0.D00
41 PHMAX=0.D00
42 C
43 C L: Dimension de l espace euclidien
44 C N-1: Nombre d arcs
45 C
46 L=3
47 N=10
48 N1=N+1
49 N2=N-1
50 PAS2D=2.5D+00
51 WRITE(6,*)' PAS2D= ',PAS2D
52 C
53 C Definition de 5 courbes pour t* variant de 2.5 a 12.5 degre
54 C
55 DO 2000 IIP=1,5
56 PAS1=PAS2D*IIP*PI
57 PAS1D=PAS2D*IIP
58 112 FORMAT (1H,'PAS PAR ARC ',D10.3,' DEGRE POLYNOME DE DEGRE ',I3)
59 113 FORMAT (1H,'ERREURS MAXIMUM POSITION ',D12.3,' COURBURE ',D12.5
60 S,' TORSION ',E12.5)

```

```

61 C
62 C attention m=5 ou m=7 (r=2 , r=3)
63 C
64     DO 2000 M=5,7,2
65     WRITE (IW,112) PAS1D,M
66     PAS=PAS1/M
67 C
68 C verification du dimensionnement des tableaux
69 C
70     IF ((L.LE.3).AND.(M.LE.7).AND.(N.LE.12)) GOTO 10
71     WRITE (IW,*) ' DIMENSION DE L ESPACE TROP GRANDE'
72     S,' OU NOMBRE D ARCS TROP IMPORTANT'
73     STOP 1
74 10  T=0.
75     M1=M+1
76     M2=M-1
77     M3=M-2
78     M4=(M+1)/2
79 C
80 C Definition de la courbe analytique par
81 C -la position de chacun des points QD(I1,I2,I3) et QO(I1,I2,I3)
82 C   QO est inchangé dans le programme (calcul d erreur de position)
83 C   QD et QO a 3 dimensions
84 C   I1: coordonnee de l espace euclidien
85 C   I2: indice du point de l arc I3
86 C   (i=0)<=(I2-1)<=(m-1)
87 C   I3: caracterise l arc
88 C -le rayon de courbure R0(I2,I3)
89 C -le rayon de torsion T0(I2,I3)
90 C en chaque point
91 C
92     DO 20 I3=1,N
93     DO 20 I2=1,M
94     QD(1,I2,I3)=DBLE(EXP(T))*COS(T)
95     QD(2,I2,I3)=DBLE(EXP(T))*SIN(T)
96     QD(3,I2,I3)=DBLE(EXP(2.*I1))
97     R0(I2,I3)=DSQRT(2.000)*DEXP(I)*(1.+2.*DEXP(2.*T))**1.5
98     S/DSQRT(4.*DEXP(2.*T)+1.)
99     T0(I2,I3)=2.*DEXP(2.*T)+0.3
100    DO 19 I=1,L
101 19  QO(I,I2,I3)=QD(I,I2,I3)
102 20  T=T+PAS
103    IF(ICAS.EQ.1) GOTO 58
104 C
105 C Initialisation de r selon l'expression I.16
106 C
107     DO 21 I3=1,N2
108     R(1,I3)=0.
109     DO 22 I2=2,M
110     DO 24 I1=1,L
111 24  P(I1)=QD(I1,I2,I3)-QD(I1,I2-1,I3)
112 22  R(I2,I3)=R(I2-1,I3)+DYM0D(P,L)
113     DO 25 I1=1,L
114 25  P(I1)=QD(I1,1,I3+1)-QD(I1,M,I3)
115     S=R(M,I3)+DYM0D(P,L)
116     R(M1,I3)=S
117     DO 21 I2=2,M1
118 21  R(I2,I3)=R(I2,I3)/S
119     GOTO 57
120 C
121 C Initialisation de r selon l'expression I.17

```

```

122 C
123 58 DO 59 I3=1,N2
124 DO 59 I2=1,M1
125 59 K(I2,I3)=DBLE(FLOAT(I2)-1.)/M
126 104 FORMAT(1H,6(D14.5,2X))
127 C Calcul des coefficients Ak*
128 C Moyenne des derivees
129 C Calcul des coefficients Ak
130 C
131 57 CALL DLISCO(L,M,N)
132 36 T=0.
133 C
134 C Reinitialisation eventuelle de r
135 C
136 IF(ICAS.NE.3) GOTO 55
137 DO 54 K=1,N2
138 DO 54 J=1,M1
139 54 R(J,K)=DBLE(FLOAT(J-1))/M
140 55 DO 60 K=1,N2
141 DO 60 J=1,M
142 DO 61 I=1,L
143 Q0(I,J,K)=0.
144 Q1(I,J,K)=0.
145 Q2(I,J,K)=0.
146 Q3(I,J,K)=0.
147 DO 61 K1=1,M1
148 K2=K1-1
149 Q0(I,J,K)=Q0(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(0,K2,R(J,K))
150 Q1(I,J,K)=Q1(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(1,K2,R(J,K))
151 Q2(I,J,K)=Q2(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(2,K2,R(J,K))
152 Q3(I,J,K)=Q3(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(3,K2,R(J,K))
153 61 CONTINUE
154 C
155 C Determination du rayon de courbure calcule
156 C RD: rayon de courbure calcule
157 C TF: vecteur tangent
158 C NF: vecteur normal
159 C BF: vecteur binormal
160 C TD: rayon de torsion calcule
161 C
162 DO 80 I=1,L
163 P1(I)=Q1(I,J,K)
164 80 P2(I)=Q2(I,J,K)
165 CALL DVECT(P,P1,P2,L)
166 RD(J,K)=DYM0D(P,L)
167 DO 40 I=1,L
168 TF(I)=P1(I)/DYM0D(P1,L)
169 40 BF(I)=P(I)/RD(J,K)
170 CALL DVECT(NF,BF,TF,L)
171 IF (RD(J,K).EQ.0.) GOTO 63
172 RD(J,K)=(DYM0D(P1,L)**3)/DYM0D(P,L)
173 63 CONTINUE
174 C
175 C Determination du rayon de torsion calcule
176 C TD: rayon de torsion calcule
177 C
178 TD(J,K)=DYM0D(P,L)**2.
179 DO 81 I=1,L
180 P1(I)=Q2(I,J,K)
181 81 P2(I)=Q3(I,J,K)
182 CALL DVECT(P,P1,P2,L)

```



```

183      DO 82 I=1,L
184      82      P1(I)=Q1(I,J,K)
185             CALL DSCAL(S,P1,P,L)
186      83      TD(J,K)=TD(J,K)/S
187      C
188      C Determination du triedre de SERRET-FRENET
189      C et de ses angles d'EULER de la definition analytique
190      C
191             P1(1)=DEXP(T)*(DCOS(T)-DSIN(T))
192             P1(2)=DEXP(T)*(DSIN(T)+DCOS(T))
193             P1(3)=2.*DEXP(2.*T)
194             P2(1)=-2.*DEXP(T)*DSIN(T)
195             P2(2)=2.*DEXP(T)*DCOS(T)
196             P2(3)=4.*DEXP(2.*T)
197             CALL DVECT(P,P1,P2,L)
198             C=DYMOD(P1,L)
199             S=DYMOD(P,L)
200             DO 41 I=1,L
201             P(I)=P(I)/S
202      41      P1(I)=P1(I)/C
203             CALL DVECT(P2,P,P1,L)
204             CALL DEULER(P1,P2,P,PSR,TER,PHR)
205      C
206      C Determination du triedre de SERRET-FRENET
207      C et de ses angles d'EULER de la definition calculee
208      C
209             DO 42 I=1,L
210             P1(I)=Q1(I,J,K)
211      42      P2(I)=Q2(I,J,K)
212             CALL DVECT(P,P1,P2,L)
213             C=DYMOD(P1,L)
214             S=DYMOD(P,L)
215             DO 43 I=1,L
216             P(I)=P(I)/S
217      43      P1(I)=P1(I)/C
218             CALL DVECT(P2,P,P1,L)
219             CALL DEULER(P1,P2,P,PSC,TEC,PHC)
220      C
221      C Calcul de l'erreur sur les angles d'EULER
222      C relatifs au triedre de SERRET-FRENET
223      C
224             ERPS=DABS(PSR-PSC)
225             ERTE=DABS(TER-TEC)
226             ERPH=DABS(PHR-PHC)
227             PSMAX=DMAX1(PSMAX,ERPS)
228             TEMAX=DMAX1(TEMAX,ERTE)
229             PHMAX=DMAX1(PHMAX,ERPH)
230             T=T+PAS
231      60      CONTINUE
232      C
233      C Calcul des erreurs relatives maximales:
234      C ERMODM: sur le module du vecteur position
235      C EKCMAX: sur le rayon de courbure
236      C ERTMAX: sur le rayon de torsion
237      C
238             ERMODM=0.
239             ERKCMAX=0.
240             ERTMAX=0.
241             DO 64 K=1,N2
242             DO 64 J=1,M
243             ERMOD=DZMOD3(Q0,L,M,N,J,K)

```



```
244   ERMOD=DABS((DZMOD3(QD,L,M,N,J,K)-ERMOD)/ERMOD)
245   ERC=DABS((RD(J,K)-RO(J,K))/RO(J,K))
246   ERT=DABS((TD(J,K)-TO(J,K))/TO(J,K))
247   ERMODM=DMAX1(ERMODM,ERMOD)
248   ERCMAX=DMAX1(ERCMAX,ERC)
249   ERTMAX=DMAX1(ERTMAX,ERT)
250   91  CONTINUE
251   64  CONTINUE
252   WRITE (IW,113) ERMODM,ERCMAX,ERTMAX
253   WRITE(IW,*) ' ERREURS MAXIMALES SUR LES ANGLES D EULER '
254   S, 'RELATIFS AU TRIEDRE DE SERRET-FRENET'
255   WRITE(IW,101) PSMAX,TEMAX,PHMAX
256   WRITE(6,*)
257   2000 CONTINUE
258   STOP
259   END
```



```

1 C
2 C Sous programme de calcul des coefficients Ak* et Ak
3 C lorsque m=mx=2p+1
4 C
5 SUBROUTINE DLISCO(L,M,N)
6 IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
7 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
8 DIMENSION QI(3,8),X(8),B(8),F1(8,8),AKI(8,3),Q(3),Q1(3),SS(8)
9 COMMON/BLOC1/QD(3,7,12)
10 COMMON/BLOC2/R(8,12),F(8,8),AK(3,12,8)
11 COMMON/BLOC3/JJ
12 M1=M+1
13 N2=N-1
14 M4=(M+1)/2
15 DO 500 K=1,N2
16 KI=K+1
17 C
18 C Initialisation de Q1 tableau de calcul
19 C
20 DO 22 J=1,M
21 DO 22 I=1,L
22 QI(I,J)=QD(I,J,K)
23 DO 23 I=1,L
24 QI(1,M1)=QD(1,1,KI)
25 102 FORMAT(4H , 'TABLEAU DE CALCUL QI')
26 C
27 C Transfert de QI dans B
28 C B tableau intermediaire pour le sousprogramme DSYSLI
29 C
30 DO 31 I=1,L
31 DO 24 J1=1,M1
32 DO 24 J4=1,M1
33 F(I1,J1)=DFK(0,J1-1,R(I1,K))
34 DO 32 J=1,M1
35 B(J)=QI(I,J)
36 DO11 I1=1,M1
37 DO11 J1=1,M1
38 F1(I1,J1)=F(I1,J1)
39 C
40 C Resolution du systeme lineaire
41 C
42 CALL DSYSLI(F1,B,X,M1,8)
43 DO 31 J=1,M1
44 AKI(J,I)=X(J)
45 C
46 C Calcul des derivees jusqu a l ordre p
47 C
48 DO 25 I=1,L
49 DO 28 J=2,M
50 QD(1,J,K)=0.D00
51 DO 25 K1=1,M1
52 K2=K1-1
53 DO 25 J=2,M4
54 QD(1,J,K)=QD(1,J,K)+AKI(K1,I)*DFK(J-1,K2,0.D00)
55 QD(I,M+2-J,K)=QD(I,M+2-J,K)+AKI(K1,I)*DFK(J-1,K2,1.D00)
56 CONTINUE
57 500 CONTINUE
58 C
59 C Moyenne des derivees jusqu a l ordre p
60 C

```



```

61      IF (JJ.EQ.3) GOTO 1001
62      C
63      C Moyenne barycentrique ou moyenne arithmetique
64      C
65      1000 CALL DBARY(L,M,N)
66      GOTO 1002
67      C
68      C Moyenne des vecteurs unitaires et des modules
69      C
70      1001 CALL DVUNIT(L,M,N)
71      1002 CONTINUE
72      C
73      C Calcul des coefficients Ak
74      C
75      DO 51 K=1,N2
76      K1=K+1
77      DO 52 I=1,L
78      IF (M.EQ.5) GOTO 10
79      C Calcul des coefficients Ak pour m=7
80      AK(I,K,1)=QD(I,1,K)
81      AK(I,K,2)=QD(I,2,K)
82      AK(I,K,3)=QD(I,3,K)/2.
83      DQ1Q0=QD(I,1,K1)-QD(I,1,K)
84      AK(I,K,4)=QD(I,4,K)/6.
85      AK(I,K,5)=-QD(I,5,K)/6-4./6.*QD(I,4,K)+2.5*QD(I,6,K)-5.*QD(I,3,K)
86      S-15.*QD(I,7,K)-20.*QD(I,2,K)+35.*DQ1Q0
87      AK(I,K,6)=QD(I,5,K)/2.+QD(I,4,K)-7*QD(I,6,K)+10*QD(I,3,K)
88      S+39.*QD(I,7,K)+45.*QD(I,2,K)- 84.*DQ1Q0
89      AK(I,K,7)=- (6.*QD(I,5,K))/12.-2./3*QD(I,4,K)+6.5*QD(I,6,K)-7.5*
90      SQD(I,3,K)-34.*QD(I,7,K)-36.*QD(I,2,K)+70.*DQ1Q0
91      AK(I,K,8)=QD(I,5,K)/6.+QD(I,4,K)/6.-2.*QD(I,6,K)+2.*QD(I,3,K)+10.
92      S*QD(I,7,K)+10.*QD(I,2,K)-20.*DQ1Q0
93      GOTO 20
94      C Calcul des coefficients Ak pour m=5
95      10  DQ1Q0=QD(I,1,K1)-QD(I,1,K)
96      AK(I,K,1)=QD(I,1,K)
97      AK(I,K,2)=QD(I,2,K)
98      AK(I,K,3)=QD(I,3,K)/2
99      AK(I,K,4)=10*DQ1Q0-4*QD(I,5,K)-6*QD(I,2,K)+QD(I,4,K)/2-3*QD(I,3,K)
100     S/2
101     AK(I,K,5)=-15*DQ1Q0+7*QD(I,5,K)+8*QD(I,2,K)-QD(I,4,K)+3*QD(I,3,K)/
102     S2
103     AK(I,K,6)=6*DQ1Q0-3*QD(I,5,K)-3*QD(I,2,K)+QD(I,4,K)/2-QD(I,3,K)/2
104     20  CONTINUE
105     51  CONTINUE
106     RETURN
107     END

```



```
1 C
2 C DZMOD3 est le module du vecteur contenue dans QD
3 C dans lequel:
4 C L: dimension de l'espace euclidien
5 C M-1: nombre de points par arc
6 C N-1: nombre d'arcs
7 C J: indice du point
8 C K: indice de l'arc
9     FUNCTION DZMOD3(QD,L,M,N,J,K)
10    IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
11    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
12    DIMENSION QD(3,7,12)
13    DZMOD3=0.D0
14    DO 20 I=1,L
15        IF (QD(I,J,K).GT.1.D35) DZMOD3=QD(I,J,K)**2
16    CONTINUE
17    IF (DZMOD3.NE.0.D0) GOTO 30
18    DO 10 I=1,L
19        10 DZMOD3=DZMOD3+QD(I,J,K)**2
20    30 DZMOD3=DSQRT(DZMOD3)
21    RETURN
22    END
```

```

1 C
2 C Definition de courbe par la methode des moindres carres
3 C
4 C x=exp(t)*cos(t)
5 C y=exp(t)*sin(t)
6 C z=exp(2*t)
7 C
8 C Calcul des coefficients Ak* en nombre p+2
9 C Calcul des coefficients Ak en nombre 2p+2
10 C
11     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
12     IMPLICIT INTEGER *(I-N)
13     DOUBLE PRECISION NF(3)
14     DIMENSION TF(3),BF(3),F1(8,8),B(8),X(8),IJ(5)
15     DIMENSION Q0(3,7,12),Q2(3,7,12),R0(7,12),IBUF(392),P(3),P1(3),
16     SQ1(3,7,12),TD(7,12),Q3(3,7,12),T0(7,12),P2(3),P3(3),RD(7,12)
17     COMMON/BLOC1/Q0(3,7,12)
18     COMMON/BLOC2/R(8,12),F(8,8),AK(3,12,8)
19     COMMON/BLOC3/JJ
20     DATA IJ/2,2,2,2,2/
21     IW=4
22     IR=5
23     WRITE(6,*)' ENTRER LE CAS CHOISI'
24     WRITE(6,*)' 1: CAS I    r selon I.17'
25     WRITE(6,*)' 2: CAS II   r selon I.16'
26     WRITE(6,*)' 3: CAS III  r selon I.16 puis I.17'
27     READ (IK,*) ICAS
28     PI=DBLE(ATAN(1.)/45.)
29 C
30 C JJ: caracterise le type de moyenne des derivees
31 C JJ=1 moyenne arithmetique
32 C
33     JJ=1
34     PSMAX=0.000
35     TEMAX=0.000
36     PHMAX=0.000
37 C
38 C L: Dimension de l'espace euclidien
39 C N-1: Nombre d'arcs
40 C
41     L=3
42     N=10
43     N1=N+1
44     N2=N-1
45     PAS2D=2.5D+00
46     WRITE(6,*)' PAS2D= ',PAS2D
47 C
48 C Definition de 5 courbes pour t* variant de 2.5 a 12.5 degre
49 C
50     DO 2000 IIP=1,5
51     PAS1=PAS2D*IIP*PI
52     PAS1D=PAS2D*IIP
53     112 FORMAT (1H,'PAS PAR ARC ',D10.3,' DEGRE POLYNOME DE DEGRE ',I3)
54     113 FORMAT (1H,'ERREURS MAXIMUM POSITION ',D12.5,' COURBURE ',D12.5
55     S,' TORSION ',E12.5)
56 C
57 C attention m=5 uniquement (p=2)
58 C
59     N=5
60     WRITE (IW,112) PAS1D,N

```



```

61      PAS=PAS1/M
62      C
63      C verification du dimensionnement des tableaux
64      C
65      IF ((L.LE.3).AND.(M.LE.7).AND.(N.LE.12)) GOTO 10
66      WRITE (IW,*) ' DIMENSION DE L ESPACE TROP GRANDE'
67      S,' OU NOMBRE D ARCS TROP IMPORTANT'
68      STOP 1
69      10  T=0.
70      M1=M+1
71      M2=M-1
72      M3=M-2
73      M4=(M+1)/2
74      C
75      C Definition de la courbe analytique par
76      C -la position de chacun des points QD(I1,I2,I3) et QO(I1,I2,I3)
77      C QO est inchange dans le programme (calcul d erreur de position)
78      C QD et QO a 3 dimensions
79      C I1: coordonnee de l espace euclidien
80      C I2: indice du point de l arc I3
81      C (i=0)<=(I2-1)<=(m-1)
82      C I3: caracterise l arc
83      C -le rayon de courbure RO(I2,I3)
84      C -le rayon de torsion TO(I2,I3)
85      C en chaque point
86      C
87      DO 20 I3=1,N
88      DO 20 I2=1,M
89      QD(1,I2,I3)=DBLE(EXP(T)*COS(T))
90      QD(2,I2,I3)=DBLE(EXP(T)*SIN(T))
91      QD(3,I2,I3)=DBLE(EXP(2.*T))
92      RO(I2,I3)=DSQRT(2.D00)*DEXP(T)*(1.+2.*DEXP(2.*T))**1.5
93      S/DSQRT(4.*DEXP(2.*T)+1.)
94      TO(I2,I3)=2.*DEXP(2.*T)+0.5
95      DO 19 I=1,L
96      19  QO(I,I2,I3)=QD(I,I2,I3)
97      20  T=T+PAS1*IJ(I2)/10.
98      IF(ICAS.EQ.1) GOTO 58
99      C
100     C Initialisation de r selon l'expression I.16
101     C
102     DO 21 I3=1,N2
103     R(1,I3)=0.
104     DO 22 I2=2,M
105     DO 24 I1=1,L
106     24  P(I1)=QD(I1,I2,I3)-QD(I1,I2-1,I3)
107     22  R(I2,I3)=R(I2-1,I3)+DYM0D(P,L)
108     DO 25 I1=1,L
109     25  P(I1)=QD(I1,1,I3+1)-QD(I1,M,I3)
110     S=R(M,I3)+DYM0D(P,L)
111     R(M1,I3)=S
112     DO 21 I2=2,M1
113     21  R(I2,I3)=R(I2,I3)/S
114     GOTO 57
115     C
116     C Initialisation de r selon l'expression I.17
117     C
118     58  DO 59 I3=1,N2
119     DO 59 I2=1,M1
120     59  R(I2,I3)=DBLE(FLOAT(I2)-1.)/M
121     C

```



```

122 C Calcul des coefficients AK par la methode des moindres carres
123 C
124 C F tableau intermediaire pour le sous programme DSYSLI
125 C
126 57 DO 11 K=1,N2
127 F(1,1)=1.
128 F(1,2)=1.
129 F(1,3)=1.
130 DO 12 I=2,3
131 DO 12 J=1,3
132 F(I,J)=0.
133 DO 12 K1=1,4
134 12 F(I,J)=F(I,J)+DFK(0,I+J-1,R(K1+1,K))
135 DO 11 I=1,L
136 DO 14 I1=1,3
137 DO 14 I2=1,3
138 14 F1(I1,I2)=F(I1,I2)
139 B(1)=QD(I,1,K+1)-QD(I,1,K)
140 DO 16 J=2,3
141 B(J)=0.
142 DO 16 K1=1,4
143 16 B(J)=B(J)+DFK(0,J-1,R(K1+1,K))*(QD(I,K1+1,K)-QD(I,1,K))
144 C
145 C Resolution de systeme lineaire
146 C
147 CALL DSYSLI(F1,B,X,3,B)
148 AK(I,K,1)=QD(I,1,K)
149 DO 11 J=2,4
150 11 AK(I,K,J)=X(J-1)
151 37 DO 31 K=1,N2
152 DO 31 I=1,L
153 DO 32 J=2,M
154 32 QD(I,J,K)=0.D00
155 DO 31 K1=1,4
156 K2=K1-1
157 DO 31 J=2,N4
158 QD(I,J,K)=QD(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(J-1,K2,0.D00)
159 31 QD(I,M+2-J,K)=QD(I,M+2-J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(J-1,K2,1.D00)
160 C
161 C Moyenne des derivees jusque l'ordre p
162 C
163 CALL DBARY(L,M,N)
164 C
165 C Calcul des coefficients Ak
166 C
167 DO 35 K=1,N2
168 K1=K+1
169 DO 35 I=1,L
170 DQ100=QD(I,1,K1)-QD(I,1,K)
171 IF (M.EQ.5) GOTO 65
172 65 AK(I,K,1)=QD(I,1,K)
173 AK(I,K,2)=QD(I,2,K)
174 AK(I,K,3)=QD(I,3,K)/2
175 AK(I,K,4)=10*DQ100-4*QD(1,5,K)-6*QD(1,2,K)+QD(1,4,K)/2-3*QD(1,3,K)
176 S/2
177 AK(I,K,5)=-15*DQ100+7*QD(1,5,K)+8*QD(1,2,K)-QD(1,4,K)+3*QD(1,3,K)
178 S2
179 35 AK(I,K,6)=6*DQ100-3*QD(I,5,K)-3*QD(I,2,K)+QD(I,4,K)/2-QD(1,3,K)/2
180 36 T=0.
181 C
182 C Reinitialisation eventuelle de r

```

```

183 C
184 IF(ICAS.NE.3) GOTO 55
185 DO 54 K=1,N2
186 DO 54 J=1,M1
187 54 R(J,K)=DBLE(FLOAT(J-1))/M
188 55 DO 60 K=1,N2
189 DO 60 J=1,M
190 DO 61 I=1,L
191 Q0(I,J,K)=0.
192 Q1(I,J,K)=0.
193 Q2(I,J,K)=0.
194 Q3(I,J,K)=0.
195 DO 61 K1=1,M1
196 K2=K1-1
197 Q0(I,J,K)=Q0(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(0,K2,R(J,K))
198 Q1(I,J,K)=Q1(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(1,K2,R(J,K))
199 Q2(I,J,K)=Q2(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(2,K2,R(J,K))
200 Q3(I,J,K)=Q3(I,J,K)+AK(I,K,K1)*DFK(3,K2,R(J,K))
201 61 CONTINUE
202 C
203 C Determination du rayon de courbure calcule
204 C RD: rayon de courbure calcule
205 C TF: vecteur tangent
206 C NF: vecteur normal
207 C BF: vecteur binormal
208 C TD: rayon de torsion calcule
209 C
210 DO 80 I=1,L
211 P1(I)=Q1(I,J,K)
212 80 P2(I)=Q2(I,J,K)
213 CALL DVECT(P,P1,P2,L)
214 RD(J,K)=DYMOD(P,L)
215 DO 40 I=1,L
216 TF(I)=P1(I)/DYMOD(P1,L)
217 40 BF(I)=P(I)/RD(J,K)
218 CALL DVECT(NF,BF,TF,L)
219 IF (RD(J,K).EQ.0.) GOTO 63
220 RD(J,K)=(DYMOD(P1,L)**3)/DYMOD(P,L)
221 63 CONTINUE
222 C
223 C Determination du rayon de torsion calcule
224 C TD: rayon de torsion calcule
225 C
226 TD(J,K)=DYMOD(P,L)**2.
227 DO 81 I=1,L
228 P1(I)=Q2(I,J,K)
229 81 P2(I)=Q3(I,J,K)
230 CALL DVECT(P,P1,P2,L)
231 DO 82 I=1,L
232 82 P1(I)=Q1(I,J,K)
233 CALL DSCAL(S,P1,P,L)
234 83 TD(J,K)=TD(J,K)/S
235 C
236 C Determination du triedre de SERRET-FRENET
237 C et de ses angles d'EULER de la definition analytique
238 C
239 P1(1)=DEXP(T)*(DCOS(T)-DSIN(T))
240 P1(2)=DEXP(T)*(DSIN(T)+DCOS(T))
241 P1(3)=2.*DEXP(2.*T)
242 P2(1)=-2.*DEXP(T)*DSIN(T)
243 P2(2)=2.*DEXP(T)*DCOS(T)

```



```

244      P2(3)=4.*DEXP(2.*T)
245      CALL DVECT(P,P1,P2,L)
246      C=DYMOD(P1,L)
247      S=DYMOD(P,L)
248      DO 41 I=1,L
249      P(I)=P(I)/S
250 41    P1(I)=P1(I)/C
251      CALL DVECT(P2,P,P1,L)
252      CALL DEULER(P1,P2,P,PSR,TER,PHR)
253  C
254  C Determination du triedre de SERRET-FRENET
255  C et de ses angles d'EULER de la definition calculee
256  C
257      DO 42 I=1,L
258      P1(I)=Q1(I,J,K)
259 42    P2(I)=Q2(I,J,K)
260      CALL DVECT(P,P1,P2,L)
261      C=DYMOD(P1,L)
262      S=DYMOD(P,L)
263      DO 43 I=1,L
264      P(I)=P(I)/S
265 43    P1(I)=P1(I)/C
266      CALL DVECT(P2,P,P1,L)
267      CALL DEULER(P1,P2,P,PSC,TEC,PHC)
268  C
269  C Calcul de l'erreur sur les angles d'EULER
270  C relatifs au triedre de SERRET-FRENET
271  C
272      ERPS=DABS(PSR-PSC)
273      ERTE=DABS(TER-TEC)
274      ERPH=DABS(PHR-PHC)
275      PSMAX=DMAX1(PSMAX,ERPS)
276      TEMAX=DMAX1(TEMAX,ERTE)
277      PHMAX=DMAX1(PHMAX,ERPH)
278      I=T+PAS
279 60    CONTINUE
280  C
281  C Calcul des erreurs relatives maximales:
282  C ERMODM: sur le module du vecteur position
283  C ERCMAX: sur le rayon de courbure
284  C ERTMAX: sur le rayon de torsion
285  C
286      ERMODM=0.
287      ERCMAX=0.
288      ERTMAX=0.
289      DO 64 K=1,N2
290      DO 64 J=1,M
291      ERMOD=DZMOD3(Q0,L,M,N,J,K)
292      ERMOD=DABS((DZMOD3(Q0,L,M,N,J,K)-ERMOD)/ERMOD)
293      ERC=DABS((RD(J,K)-RO(J,K))/RO(J,K))
294      ERT=DABS((TD(J,K)-TO(J,K))/TO(J,K))
295      ERMODM=DMAX1(ERMODM,ERMOD)
296      ERCMAX=DMAX1(ERCMAX,ERC)
297      ERTMAX=DMAX1(ERTMAX,ERT)
298 91    CONTINUE
299 64    CONTINUE
300      WRITE (IW,113) ERMODM,ERCMAX,ERTMAX
301      WRITE(IW,*) ' ERREURS MAXIMALES SUR LES ANGLES D EULER '
302      S, 'RELATIFS AU TRIEDRE DE SERRET-FRENET'
303      WRITE(IW,101) PSMAX,TEMAX,PHMAX
304 101   FORMAT(1H ,6(D14.5,2X))

```

```
305     WRITE(6,*)  
306     2000 CONTINUE  
307     STOP  
308     END
```



```
1 C
2 C S est le produit scalaire des vecteurs P1 et P2 de dimension L
3 C S,P1,P2 en double precision
4 C
5     SUBROUTINE DSCAL(S,P1,P2,L)
6     DOUBLE PRECISION P1(L),P2(L),S
7     IMPLICIT INTEGER *2 (I-N)
8     S=0.
9     DO 10 I=1,L
10    10 S=S+P1(I)*P2(I)
11     RETURN
12     END
```



```
1 C
2 C DYM0D module du vecteur Q de dimension L
3 C
4     FUNCTION DYM0D(Q,L)
5     IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
6     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
7     DIMENSION Q(L)
8     DYM0D=0.D0
9     DO 20 I=1,L
10    IF (Q(I).GT.1.D+30) DYM0D=Q(I)**2
11    20 CONTINUE
12    IF (DYM0D.NE.0.D0) GO10 30
13    DO 10 I=1,L
14    10 DYM0D=DYM0D+Q(I)**2
15    30 DYM0D=DSQRT(DYM0D)
16    RETURN
17    END
```



```
1 C
2 C Q est le produit vectoriel des vecteurs Q1 et Q2
3 C les vecteurs sont de dimension L et exprimes en double precision
4 C
5     SUBROUTINE DVECT(Q,Q1,Q2,L)
6     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
7     IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
8     DIMENSION Q(L),Q1(L),Q2(L)
9     IW=6
10    A=1.D+30
11    DO 10 I=1,L
12    I1=I+1
13    I2=I+2
14    IF (I1.GT.L) I1=I1-L
15    IF (I2.GT.L) I2=I2-L
16    IF (Q1(I1).GT.A) Q1(I1)=A
17    IF (Q1(I2).GT.A) Q1(I2)=A
18    IF (Q2(I1).GT.A) Q2(I1)=A
19    IF (Q2(I2).GT.A) Q2(I2)=A
20 10  Q(I)=Q1(I1)*Q2(I2)-Q1(I2)*Q2(I1)
21    RETURN
22    END
```

```
1 C
2 C Moyenne arithmetique ou moyenne barycentrique
3 C
4     SUBROUTINE DBARY(L,M,N)
5     IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
6     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
7     DIMENSION P(3)
8     COMMON/BLOC1/QD(3,7,12)
9     COMMON/BLOC3/JJ
10    M4=(M+1)/2
11    N2=N-1
12    DO 40 K=2,N2
13    DO 10 I=1,L
14    10  P(I)=QD(I,1,K)-QD(I,1,K-1)
15        ARK1=DYMOD(P,L)
16        IF (JJ.EQ.1) ARK1=1.DO
17    DO 30 I=1,L
18    30  P(I)=QD(I,1,K+1)-QD(I,1,K)
19        ARK=DYMOD(P,L)
20        IF (JJ.EQ.1) ARK=1.DO
21    DO 40 J=2,M4
22    DO 40 I=1,L
23    QD(I,J,K)=(ARK1*QD(I,M+2-J,K-1)+ARK*QD(I,J,K))/(ARK1+ARK)
24    40  QD(I,M+2-J,K-1)=QD(I,J,K)
25    RETURN
26    END
```



```

1 C
2 C Determination des angles d'EULER du triedre de SERRET-FRENET
3 C PS,TE,PH angles d EULER en degre
4 C T,N,B vecteurs du triedre
5 C
6 SUBROUTINE DEULER(T,N,B,PS,TE,PH)
7 IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
8 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
9 DOUBLE PRECISION N(3)
10 DIMENSION T(3),B(3),U(3),V(3),VO(3)
11 PI=DATAN(1.D00)/45
12 IF ((B(1).NE.0.D00).OR.(B(2).NE.0.D00)) GOTO 79
13 PH=0.D00
14 IF (T(1).EQ.0.D00) GOTO 67
15 PS=DATAN(T(2)/T(1))/PI
16 IF (T(1).LT.0.D00) PS=PS+180.D00
17 GOTO 68
18 67 PS=DSIGN(90.D00,T(2))
19 68 IF (B(3).EQ.1.) TE=0.
20 IF (B(3).EQ.-1.) TE=180.
21 RETURN
22 79 U(1)=-B(2)/DSQRT(B(1)*B(1)+B(2)*B(2))
23 U(2)= B(1)/DSQRT(B(1)*B(1)+B(2)*B(2))
24 U(3)=0.
25 V(1)=-U(2)
26 V(2)=U(1)
27 U(3)=0.D00
28 IF (U(1).NE.0.D00) GOTO 160
29 PS=DSIGN(90.D00,U(2))
30 GOTO 170
31 160 PS=DATAN(U(2)/U(1))/PI
32 IF (U(1).LT.0.D00) PS=PS+180.D00
33 170 CALL DVECT(VO,B,U,3)
34 CALL DSCAL(C,VO,V,3)
35 IF (C.NE.0.D00) GOTO 240
36 TE=DSIGN(90.D00,VO(3))
37 GOTO 260
38 240 TE=DATAN(VO(3)/C)/PI
39 IF (C.LT.0.D00) TE=TE+180.D00
40 260 CALL DSCAL(C,T,U,3)
41 CALL DSCAL(S,T,VO,3)
42 IF (C.NE.0.D00) GOTO 300
43 PH=DSIGN(90.D00,S)
44 RETURN
45 300 PH=DATAN(S/C)/PI
46 IF (C.LT.0.D00) PH=PH+180.D00
47 RETURN
48 END

```



```
1 C
2 C DFK:Fonction Fk(r)=r**k
3 C I :ordre de derivation(=3)
4 C K1 :degre du polynome
5 C R :valeur du parametre r
6 C
7     FUNCTION DFK(I,K1,R)
8     IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
9     DOUBLE PRECISION K,DFK,R
10    IW=6
11    K=DBLE(FLOAT(K1))
12    IF ((I.NE.0).AND.(I.NE.1).AND.(I.NE.3).AND.(I.NE.2)) GOTO 10
13    IF (I.EQ.0) GOTO 20
14    IF (I.EQ.1) GOTO 30
15    IF (I.EQ.2) GOTO 80
16    IF (R.EQ.0.D00) GOTO 90
17    DFK=K*(K-1)*(K-2)*R**(K-3)
18    GOTO 1000
19    90  IF (K1.EQ.3) GOTO 82
20    GOTO 22
21    82  DFK=6.
22    GOTO 1000
23    80  IF (R.EQ.0.D00) GOTO 40
24    42  DFK=K*(K-1)*R**(K-2)
25    GOTO 1000
26    20  IF (R.EQ.0.D00) GOTO 50
27    21  DFK =R**K
28    GOTO 1000
29    50  IF (K1.EQ.0) GOTO 60
30    22  DFK=0.
31    GOTO 1000
32    60  DFK =1.
33    GOTO 1000
34    30  IF (R.EQ.0.D00) GOTO 70
35    31  DFK=K*R**(K-1)
36    GOTO 1000
37    70  IF (K1.EQ.1) GOTO 60
38    GOTO 22
39    40  IF (K1.EQ.2) GOTO 41
40    GOTO 22
41    41  DFK =2.
42    GOTO 1000
43    10  WRITE(IW,100) I
44    DFK=0.
45    100 FORMAT(1H , 'LA DERIVEE ',13,' IEME DE DFK N EST PAS DEFINIE')
46    1000 RETURN
47    END
```

```
1 C
2 C Moyenne des vecteurs unitaires et des tangentes
3 C
4     SUBROUTINE DVUNIT(L,M,N)
5     IMPLICIT INTEGER *2(I-N)
6     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
7     COMMON/BLOC1/QD(3,7,12)
8     M4=(M+1)/2
9     N2=N-1
10    DO 10 K=2,N2
11    DO 10 J=2,M4
12    X=DZMOD3(QD,L,M,N,M+2-J,K-1)
13    Y=DZMOD3(QD,L,M,N,J,K)
14    DO 30 I=1,L
15    30  QD(I,J,K)=QD(I,M+2-J,K-1)/X+QD(I,J,K)/Y
16    X=(X+Y)/DZMOD3(QD,L,M,N,J,K)/2
17    DO 10 I=1,L
18    QD(I,J,K)=QD(I,J,K)*X
19    10  QD(I,M+2-J,K-1)=QD(I,J,K)
20    RETURN
21    END
```



```
1 SUBROUTINE DSYSL1(A,B,X,N,NDA)
2 IMPLICIT INYEBER *2(I-N)
3 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
4 DIMENSION A(NDA,NDA)
5 DIMENSION B(NDA),X(NDA)
6 IW=6
7 *****
8 C****
9 C**** POUR LA RESOLUTION DE TOUT SYSTEME LINEAIRE
10 C****
11 *****
12 NM1=N-1
13 DO 1 K=1,NM1
14 I=K+1
15 M=K
16 2 IF (DABS(A(1,K))- DABS(A(M,K)))5,5,3
17 3 M=I
18 5 IF(I-N)4,6,6
19 4 I=I+1
20 GO TO 2
21 6 IF(A(M,K))8,7,8
22 8 IF(M-K)9, 11,9
23 9 DO 10 J=K,N
24 R=A(K,J)
25 A(K,J)=A(M,J)
26 10 A(M,J)=R
27 R=B(K)
28 B(K)=B(M)
29 B(M)=R
30 11 KP1=K+1
31 DO 12 I=KP1,N
32 K=A(I,K)/A(K,K)
33 A(I,K)=0.D00
34 DO 13 J=KP1,N
35 13 A(I,J)=A(I,J)-R*A(K,J)
36 12 B(I)=B(I)-R*B(K)
37 1 CONTINUE
38 X(N)=B(N)/A(N,N)
39 DO 14 IEIE=1,NM1
40 I=N-IEIE
41 TX=0.D00
42 IP1=1+1
43 DO 15 J=IP1,N
44 15 TX=TX-A(1,J)*X(J)
45 IF (A(1,I)) 14,7,14
46 14 X(I)=(B(1)+TX)/A(1,I)
47 DET=1.D00
48 DO 50 I=1,N
49 50 DET=DET*A(I,I)
50 51 FORMAT(' DET = ',D10.3)
51 RETURN
52 7 WRITE(IW,999)
53 333 FORMAT(1H0,' SYSTEME IMPOSSIBLE')
54 RETURN
55 END
```



```

1 C
2 C Programme de definition de surface par S.A.COONS
3 C
4     DIMENSION IBUF(392)
5     DIMENSION QG(3,7,10,5),QDI(3,7,5,10),S(8),Q(3),Q1(3),Q2(3),Q3(3)
6     S,P(3)
7     DIMENSION QGG(3)
8     COMMON/BLOC1/QD(3,7,12)
9     COMMON/BLOC2/R(8),F(8,8),AK(3,12,8)
10    COMMON/BLOC3/AG(3,10,8,5),AKD(3,10,8,5)
11    IW=4
12    PI=ATAN(1.)/45.
13 C
14 C RAY : rayon de sphere
15 C L   : dimension de l'espace
16 C NG-1: nombre de generatrice
17 C ND-1: nombre de directrice
18 C
19     RAY=1.
20     L=3
21     NG=5
22     ND=4
23     ND2=ND-1
24     NG2=NG-1
25 C
26 C Pour l'hyperboloide:
27 C     ALPHA=60.*PI
28 C     BETA=0.
29 C     CAB=COS(ALPHA)*COS(BETA)
30 C     CBSA=COS(BETA)*SIN(ALPHA)
31 C     SB=SIN(BETA)
32 C
33 C
34 C M:degre du polynome
35 C
36     WRITE (IW,*)'ENTRER M=5 OU 7'
37     READ(5,*)M
38     IF (M.NE.5.AND.M.NE.7) STOP
39     ERMODM=0.
40     ERCMAX=0.
41     M1=M+1
42     M2=M-1
43     M4=(M+1)/2
44 C
45 C PASG : pas sur l'arc de generatrice
46 C PASD : pas sur l'arc de directrice
47 C
48     PASG=10.*PI
49     PASD=3.*PI
50 C
51 C RAY : rayon de sphere
52 C     PASD=0.05
53 C
54     PASG=PASG*5/M
55     PASD=PASD*5/M
56 C
57 C Initialisation des generatrices
58 C
59     I2=0.
60     DO 10 IG=1,NG

```

```

61      T1=0.
62      DO 12 IN=1,ND
63      DO 30 IM=1,M
64  C
65  C Pour 1 hyperboloide:
66  C      QG(1,IM,IN,IG)=(RAY-SB*T2)*COS(T1)-T2*CAB*SIN(T1)
67  C      QG(2,IM,IN,IG)=(RAY-SB*T2)*SIN(T1)+T2*CAB*COS(T1)
68  C      QG(3,IM,IN,IG)=T2*CBSA
69  C      QG(1,IM,IN,IG)=RAY*COS(T2)*COS(T1)
70  C      QG(2,IM,IN,IG)=RAY*COS(T2)*SIN(T1)
71  C      QG(3,IM,IN,IG)=RAY*SIN(T2)
72      30  T1=T1+PASG
73      12  CONTINUE
74      10  T2=T2+PASD*M
75  C INITIALISATION DES DIRECTRICES
76      T1=0.
77      DO 20 ID=1,ND
78      T2=0.
79      DO 11 IN=1,NG
80      DO 40 IM=1,M
81  C
82  C Pour 1 hyperboloide:
83  C      QDI(1,IM,IN,IG)=(RAY-SB*T2)*COS(T1)-T2*CAB*SIN(T1)
84  C      QDI(2,IM,IN,IG)=(RAY-SB*T2)*SIN(T1)+T2*CAB*COS(T1)
85  C      QDI(3,IM,IN,IG)=T2*CBSA
86  C      QDI(1,IM,IN,ID)=RAY*COS(T2)*COS(T1)
87  C      QDI(2,IM,IN,ID)=RAY*COS(T2)*SIN(T1)
88  C      QDI(3,IM,IN,ID)=RAY*SIN(T2)
89      40  T2=T2+PASD
90      11  CONTINUE
91      100  FORMAT (1H ,13)
92      101  FORMAT(1H ,8(F12.8,2X))
93      20  T1=T1+PASG*M
94  C INITIALISATION DE R ET S
95      DO 21 I1=1,M1
96      R(I1)=(FLOAT(I1)-1.)/FLOAT(M)
97      21  S(I1)=R(I1)
98      DO 24 I=1,M1
99      DO 24 J=1,M1
100     24  F(I,J)=FK(0,J-1,R(I))
101  C
102  C AKG : coefficients vectoriels des arcs de generatrice
103  C AKD : coefficients vectoriels des arcs de directrice
104  C
105  C 1er indice : indice de coordonnee
106  C 2nd indice : indice de directrice
107  C 3me indice : indice du coefficient ak
108  C 4me indice : indice de generatrice
109  C
110  C Definition des seneratrices
111  C
112      DO 90 IG=1,NG
113      DO 91 I=1,L
114      DO 91 J=1,M
115      DO 91 K=1,ND
116      91  QD(I,J,K)=QG(I,J,K,IG)
117      CALL LISSAD(L,M,ND)
118      DO 92 J=1,ND
119      DO 92 I=1,L
120      DO 92 K=1,M1
121      92  AKG(I,J,K,IG)=AK(I,J,K)

```



```

122 90 CONTINUE
123 C
124 C Definition des directrices
125 C
126 DO 95 ID=1,ND
127 DO 96 I=1,L
128 DO 96 J=1,M
129 DO 96 K=1,NG
130 96 QD(1,J,K)=QD1(1,J,K,ID)
131 CALL LISSAG(L,M,NG)
132 DO 97 J=1,NG
133 103 FORMAT (1H )
134 DO 97 I=1,L
135 DO 97 K=1,M1
136 97 AKD(1,ID,K,J)=AK(1,J,K)
137 95 CONTINUE
138 T2=0.
139 DO 72 IG=1,NG2
140 105 FORMAT (1H , 'GENERATRICE ', I3)
141 DO 54 K=1,M
142 108 FORMAT(1H , 'GENERATRICE INTERMEDIAIRE ', I3)
143 T1=0.
144 DO 71 ID=1,ND2
145 WRITE(6,*) 'IG, ID', IG, ID
146 106 FORMAT(1H , 'ARC DE GENERATRICE ', I3)
147 DO 52 J=1,M
148 IP=1
149 C
150 C CARO : Sous programme de calcul de  $\alpha$  ou de sa derivee selon IV.8
151 C relatif au carreau IG, ID
152 C IG : arc de generatrice parametre par  $r=R(J)$ 
153 C ID : arc de directrice parametre par  $s=S(K)$ 
154 C
155 CALL CARO(Q,R(J),S(K),0,0,L,M,IG,ID)
156 CALL CARO(Q1,R(J),S(K),1,0,L,M,IG,ID)
157 CALL CARO(Q2,R(J),S(K),2,0,L,M,IG,ID)
158 IF (M.EQ.5) GOTO 61
159 CALL CARO(Q3,R(J),S(K),3,0,L,M,IG,ID)
160 51 CALL VECT(P,Q1,Q2,L)
161 RC=YMOD(P,L)
162 IF (RC.EQ.0.) GOTO 53
163 CALL VECT(P,Q2,Q3,L)
164 CALL SCAL(SC,Q1,P,L)
165 IF (SC.EQ.0.) GOTO 55
166 RT=RC*RC/SC
167 GOTO 56
168 55 RT=0.3E33
169 56 RC=YMOD(Q1,L)**3/RC
170 GOTO 57
171 53 RT=0.3E-33
172 RC=0.3E33
173 57 CONTINUE
174 102 FORMAT (1H ,3(F12.8,2X),2X,2(E12.5,2X))
175 IF (IP.NE.1) GOTO 58
176 C
177 C Calcul des rayons de courbure et de torsion de la generatrice (IP=1)
178 C ou de la directrice (IP=0)
179 C RC : rayon de courbure
180 C RT : rayon de torsion
181 C
182 QGG(1)=Q(1)

```



```

183 QGG(2)=Q(2)
184 QGG(3)=Q(3)
185 RCG=RC
186 IF=0
187 CALL CARO(Q ,R(J),S(K),0,0,L,M,IG,ID)
188 CALL CARO(Q1,R(J),S(K),0,1,L,M,IG,ID)
189 CALL CARO(Q2,R(J),S(K),0,2,L,M,IG,ID)
190 CALL CARO(Q3,R(J),S(K),0,3,L,M,IG,ID)
191 GOTO 51
192 61 CALL VECT (P,Q1,Q2,L)
193 RC=YMOD(P,L)
194 IF (RC.EQ.0) GOTO 63
195 KC=YMOD(Q1,L)**3/RC
196 GOTO 62
197 63 RC=0.3E33
198 62 CONTINUE
199 IF (IF.NE.1) GOTO 58
200 C
201 C Calcul du rayon de courbure de la directrice
202 C
203 QGG(1)=Q(1)
204 QGG(2)=Q(2)
205 QGG(3)=Q(3)
206 RCG=RC
207 IF=0
208 CALL CARO (Q ,R(J),S(K),0,0,L,M,IG,ID)
209 CALL CARO (Q1,R(J),S(K),0,1,L,M,IG,ID)
210 CALL CARO (Q2,R(J),S(K),0,2,L,M,IG,ID)
211 GOTO 61
212 58 Q1(1)=RAY*COS(I2)*COS(T1)
213 Q1(2)=RAY*COS(T2)*SIN(T1)
214 Q1(3)=RAY*SIN(I2)
215 IF(IG.EQ.4) WRITE(6,*)'Q',(Q(I),I=1,L)
216 IF(IG.EQ.4) WRITE(6,*)'Q1',(Q1(I),I=1,L)
217 C
218 C Pour 1 hyperboloide:
219 C Q1(1)=(RAY-SB*T2)*COS(T1)-I2*CAB*SIN(T1)
220 C Q1(2)=(RAY-SB*T2)*SIN(T1)+T2*CAB*COS(T1)
221 C Q1(3)=T2*CBSA
222 C
223 C RCG : rayon de courbure calcule de la generatrice
224 C RC : rayon de courbure de la directrice
225 C
226 C
227 C RAYR : rayon de courbure reel de la generatrice
228 C
229 RAYR=SQRT(Q1(1)*Q1(1)+Q1(2)*Q1(2))
230 ERMOD=YMOD(Q1,L)
231 ERMOD=AMAX1(ABS((YMOD(QGG,L)-ERMOD)/ERMOD),ABS((YMOD(Q,L)-ERMOD
232 S)/ERMOD))
233 ERC=ABS((RCG-RAYR)/RAYR)
234 ERC1=ABS(RC-RAY)/RAY
235 C
236 C Pour 1 hyperboloide:
237 C On ne calcule pas ERC1
238 C
239 104 FORMAT(1H , ' ERREUR MAXIMALE DE POSITION ET DE COURBURE '
240 S,2(E12.3,2X))
241 ERMODM=AMAX1(ERMODM,ERMOD)
242 ERCMAX=AMAX1(ERCMAX,ERC,ERC1)
243 C

```



244 C Pour 1 hyperboloïde:  
245 C ERCMAX=AMAX1(ERCMA,ERC)  
246 C  
247 C T1=T1+PASG  
248 C CONTINUE  
249 C T2=T2+PASD  
250 C CONTINUE  
251 C 1000 WRITE (1W,104) ERMODN,ERCMA  
252 C STOP  
253 C END



```
1 C
2 C Fonction utilisee par S.A.COONS appelee Fo
3 C assurant la continuite de courbure (m=5) ou de torsion (m=7)
4 C
5     FUNCTION GO(I,T,M)
6     IW=4
7     IF (M.EQ.7) GOTO 60
8     IF (M.NE.5) GOTO 70
9     IF (I.EQ.0) GOTO 10
10    IF (I.EQ.1) GOTO 20
11    IF (I.EQ.2) GOTO 30
12    40  WRITE (IW,100)I
13    100  FORMAT (' LA FONCTION G N EST PAS DEFINIE POUR LA DERIVEE D ORDRE '
14    S,13)
15    RETURN
16    10  GO=-6*I**5+15*T**4-10*T**3+1
17    RETURN
18    20  GO=-30*T**4+60*I**3-30*T*I
19    RETURN
20    30  GO=-120*T**3+180*T*T-60*T
21    RETURN
22    70  WRITE (IW,101) M
23    101  FORMAT(' LA FONCTION G N EST PAS DEFINIE POUR M= ',13)
24    RETURN
25    60  IF (I.GT.3) GOTO 40
26    IF (I.EQ.0)GOTO 80
27    GOTO (81,82,83),I
28    80  GO=20*T**7-70*T**6+84*T**5-35*(**4+1
29    RETURN
30    81  GO=140*T**6-420*T**5+420*T**4-140*T**3
31    RETURN
32    82  GO=840*T**5-2100*T**4+1680*I**3-420*T*I
33    RETURN
34    83  GO=4200*I**4-8400*T**3+5040*I*T-840*I
35    50  RETURN
36    END
```



```
1 C
2 C Fonction utilisee par S.A.COONS appelee F1
3 C assurant la continuite de courbure (m=5) ou de torsion (m=7)
4 C
5     FUNCTION G1(I,T,M)
6     IF(I.EQ.0) GOTO 10
7     G1=-G0(I,1,M)
8     RETURN
9     10 G1=1-G0(I,T,M)
10    RETURN
11    END
```

```
1 C
2 C Sous programme calculant le vecteur position ou ses derivees
3 C du point de generatrice ou de directrice
4 C
5     SUBROUTINE SUM(IGD,IO,R,Q,L,IG,ID,M1)
6 C
7 C IGD=2 caracterise une generatrice
8 C
9     DIMENSION Q(3)
10    COMMON/BLOC3/AKG(3,10,8,5),AKD(3,10,8,5)
11    DO 10 I=1,L
12    10  Q(I)=0.
13    IF (IGD.EQ.2) GOTO 30
14    DO 20 I=1,L
15    20  DO 20 K1=1,M1
16    20  Q(I)=Q(I)+AKG(I,ID,K1,IG)*FK(IO,K1-1,R)
17    GOTO 40
18    30  DO 50 I=1,L
19    50  DO 50 K1=1,M1
20    50  Q(I)=Q(I)+AKD(I,ID,K1,IG)*FK(IO,K1-1,R)
21    40  RETURN
22    END
```



```
1 C
2 C Sous programme de calcul de q ou de ses derivees
3 C par la definition de S.A.COONS
4 C
5     SUBROUTINE CARO(Q,R,S,I,J,L,M,IG,ID)
6     DIMENSION Q(3),Q1(3),Q2(3),Q3(3),
7     SQ4(3),Q5(3),Q6(3),Q7(3),Q8(3)
8     COMMON/BLOC3/AKG(3,10,8,5),AKD(3,10,8,5)
9     IG1=IG+1
10    ID1=ID+1
11    M1=M+1
12    IW=4
13    CALL SUM(1,I,R,Q1,L,IG,ID,M1)
14    CALL SUM(1,I,R,Q2,L,IG1,ID,M1)
15    CALL SUM(2,J,S,Q3,L,IG,ID,M1)
16    CALL SUM(2,J,S,Q4,L,IG,ID1,M1)
17    CALL SUM(1,0,0,Q5,L,IG,ID,M1)
18    CALL SUM(1,0,0,Q6,L,IG1,ID,M1)
19    CALL SUM(1,0,1,Q7,L,IG,ID,M1)
20    CALL SUM(1,0,1,Q8,L,IG1,ID,M1)
21    DO 20 I1=1,L
22    20   Q(I1)=Q1(I1)*GO(J,S,M)+Q2(I1)*G1(J,S,M)+
23    SQ3(I1)*GO(I,R,M)+Q4(I1)*G1(I,R,M)-
24    SQ5(I1)*GO(I,R,M)*GO(J,S,M)-Q6(I1)*GO(I,R,M)*G1(J,S,M)
25    S-Q7(I1)*G1(I,R,M)*GO(J,S,M)-Q8(I1)*G1(I,R,M)*G1(J,S,M)
26    RETURN
27    END
```

```

1 C
2 C Programme de definition de surface par le systeme UNISURF
3 C assurant la continuite de tangente (m=3) ou de courbure (m=5)
4 C
5 DIMENSION Q(3,26,21),AK(3,6,6,5,4),R(6),S(6),F(36,36),QC(3)
6 DIMENSION QR(3),Q1G(3),Q2G(3),Q1D(3),Q2D(3)
7 COMMON/BLOC1/Q
8 COMMON/BLOC2/R,S,F,AK
9 C
10 C Q(I1,I2,I3): tableau de points
11 C I1 : indice de coordonnee
12 C I2 : indice de generatrice
13 C I3 : indice de directrice
14 C
15 NG1=5
16 ND1=4
17 C
18 C NG1 : nombre de generatrice
19 C ND1 : nombre de directrice
20 C
21 L=3
22 IM=4
23 PI=AFAN(1.)/45.
24 PASG1=10.*PI
25 PASD1=3.*PI
26 ALPHA=60.*PI
27 BETA=0.
28 CAB=COS(ALPHA)*COS(BETA)
29 CBSA=COS(BETA)*SIN(ALPHA)
30 SB=SIN(BETA)
31 PASD1=0.05
32 WRITE(6,*) ' ENTRER N=3 OU 5',M
33 READ(5,*) M
34 IF (M.NE.3.AND.M.NE.5) STOP
35 WRITE (IM,500)
36 500
37 FORMAT (1H1)
38 PASG=PASG1*5./FLOAT(M)
39 PASD=PASD1*5./FLOAT(N)
40 ERDM=0.
41 ERGM=0.
42 EPM=0.
43 ERARGH=0.
44 C
45 C EPM : erreur maximale de position
46 C ERGM : erreur maximale de courbure des generatrices
47 C ERDM : erreur maximale de courbure des directrices
48 C ERARGH: erreur maximale sur l argument de la normale en degre
49 C
50 EKARG=0.
51 M1=M+1
52 NG=NG1*M+1
53 ND=ND1*M+1
54 NG2=NG-1
55 ND2=ND-1
56 C
57 C Initialisation de la surface
58 RAY=1.
59 T2=0.
60 DO 10 IG=1,NG

```



```

61      T1=0.
62  C
63  C Pour la sphere:
64  C      Q(1,IG,ID)=RAY*COS(T2)*COS(T1)
65  C      Q(2,IG,ID)=RAY*COS(T2)*SIN(T1)
66  C      Q(3,IG,ID)=RAY*SIN(T2)
67  C
68      DO 20 ID=1,ND
69      Q(1,IG,ID)=(RAY-SB*T2)*COS(T1)-T2*CAB*SIN(T1)
70      Q(2,IG,ID)=(RAY-SB*T2)*SIN(T1)+T2*CAB*COS(T1)
71      Q(3,IG,ID)=T2*CBSA
72  20  T1=T1+PASG
73  10  T2=T2+PASD
74  C
75  C Initialisation de r et s
76  C
77      DO 21 I=1,M1
78      R(I)=(FLOAT(I)-1.)/FLOAT(M)
79  21  S(I)=R(I)
80  C
81  C Initialisation de F(I,J)
82  C
83      I2=0
84      J2=0
85      DO 22 I=1,M1
86      DO 22 J=1,M1
87      I2=I2+1
88      DO 23 I1=0,M
89      DO 23 J1=0,M
90      J2=J2+1
91  23  F(I2,J2)=FK(0,I1,R(I))*FK(0,J1,S(J))
92  22  J2=0
93  C
94  C Calcul et moyenne des derivees
95  C Calcul des coefficients Aij
96  C
97      CALL LISBAL(L,M,NG,ND)
98  C
99  C Calcul des erreurs
100 C
101      IG1=0
102      T2=0.
103      DO 24 IG=1,NG2,M
104      IG1=IG1+1
105      DO 24 KS=1,M
106      T1=0.
107      IGI=IG+KS-1
108      ID1=0
109      DO 26 ID=1,ND2,M
110      ID1=ID1+1
111      DO 26 KR=1,M
112      RGC=SQRT((RAY-SB*T2)**2+(T2*CAB)**2)
113  C
114  C Pour la sphere:
115  C      RGC=RAY*COS(T2)
116  C
117      IDI=ID+KR-1
118      DO 28 I=1,L
119      Q(1,IGI,IDI)=0.
120      Q1G(I)=0.
121      Q2G(I)=0.

```



```

122 Q1D(I)=0.
123 Q2D(I)=0.
124 DO 28 KI=1,M1
125 DO 28 KJ=1,M1
126 Q1G(I)=Q1G(I)+AK(1,KI,KJ,IG1,ID1)*FK(1,KI-1,R(KR))*FK(0,KJ-1,S(KS
127 S))
128 Q2G(I)=Q2G(I)+AK(I,KI,KJ,IG1,ID1)*FK(2,KI-1,R(KR))*FK(0,KJ-1,S(KS
129 S))
130 Q1D(I)=Q1D(I)+AK(I,KI,KJ,IG1,ID1)*FK(0,KI-1,R(KR))*FK(1,KJ-1,S(KS
131 S))
132 Q2D(I)=Q2D(I)+AK(1,KI,KJ,IG1,ID1)*FK(0,KI-1,R(KR))*FK(2,KJ-1,S(KS
133 S))
134 28 Q(I,IG1,IDI)=Q(I,IG1,IDI)+AK(1,KI,KJ,IG1,ID1)*FK(0,KI-1,R(KR))*
135 SFK(0,KJ-1,S(KS))
136 C
137 C Vecteurs position et normal calcules
138 C
139 QC(1)=(RAY-SB*T2)*COS(T1)-T2*CAB*SIN(T1)
140 QC(2)=(RAY-SB*T2)*SIN(T1)+T2*CAB*COS(T1)
141 QC(3)=T2*CBSA
142 C
143 C Pour la sphere:
144 C QC(1)=RAY*COS(T2)*COS(T1)
145 C QC(2)=RAY*COS(T2)*SIN(T1)
146 C QC(3)=RAY*SIN(T2)
147 C
148 DO 11 I=1,L
149 11 QR(I)=Q(I,IG1,IDI)
150 EP=(YMOD(QR,L)-YMOD(QC,L))/YMOD(QC,L)
151 EP=ABS(EP)
152 C
153 C Pour la sphere:
154 C DO 29 I=1,L
155 C29 QR(I)=QC(I)
156 C
157 QR(1)=(RAY-SB*T2)*CBSA*COS(T1)-T2*CAB*CBSA*SIN(T1)
158 QR(2)=(RAY-SB*T2)*CBSA*SIN(T1)+T2*CAB*CBSA*COS(T1)
159 QR(3)=(RAY-SB*T2)*SB-T2*CAB*CAB
160 CALL VECT(QC,Q1G,Q1D,L)
161 CALL SCAL(SC,QR,QC,L)
162 SC=SC/YMOD(QC,L)/YMOD(QR,L)
163 ERARG=ATAN(1./SC/SC-1.)/PI
164 CALL RCOUR(RG,Q1G,Q2G,L)
165 CALL RCOUR(RD,Q1D,Q2D,L)
166 ERG=ABS(RG-RQC)/RQC
167 ERD=ABS(RD-RAY)/RAY
168 ERGM=AMAX1(ERG,ERGM)
169 ERDM=AMAX1(ERD,ERDM)
170 EPM=AMAX1(EP,EPM)
171 EKARGM=AMAX1(ERARG,ERARGM)
172 101 FORMAT(1H,'EP= ',E12.5,' ERG= ',E12.3,' ERD= ',E12.3,' ERARG=
173 S,E12.5)
174 26 T1=T1+PASG
175 24 T2=T2+PASD
176 WRITE(IW,101) EPM,ERGM,ERDM,ERARGM
177 STOP
178 END

```



```

1 C
2 C Sous programme de definition de surface UNISURF pour m=3 et n=5
3 C
4 SUBROUTINE LISBAL(L,M,NG,ND)
5 DIMENSION QI(36),F1(36,36),X(36)
6 DIMENSION ICOEF3(16,16),ICOEF5(36,36)
7 COMMON/BLOC1/Q(3,26,21)
8 COMMON/BLOC2/R(6),S(6),F(36,36),AK(3,6,6,5,4)
9 DATA ICOEF3/1,19*0,1,11*0,-3,3*0,-2,3*0,-1,3*0,3,3*0,
10 S2,3*0,1,3*0,1,3*0,-2,4*0,1,19*0,1,11*0,-3,3*0,-2,3*0,-1,3*0,3,3*0,
11 S2,3*0,1,3*0,1,3*0,-2,2*0,-3,-2,-1,3,15*0,-3,-2,-1,3,8*0,
12 S9,6,3,-9,6,4,2,-6,3,2,1,-3,-9,-6,-3,9,-6,-4,-2,6,-3,-2,-1,3,-3,-2
13 S,-1,3,6,4,2,-6,2,1,1,-2,16*0,2,1,1,-2,8*0,-6,-3,-3,6,-4,-2,-2,4,-3
14 S,-1,-1,2,6,3,3,-6,4,2,2,-4,2,1,1,-2,2,1,1,-2,-4,-2,-2,4/
15 DATA ICOEF5/4,41*0,4,41*0,2,23*0,-40,5*0,-24,5*0,-6,5*0,2,5*0,-16,
16 S5*0,40,5*0,60,5*0,32,5*0,6,5*0,-4,5*0,28,5*0,-60,5*0,-24,5*0,-12,5
17 S*0,-2,5*0,2,5*0,-12,5*0,24,5*0,0,4,41*0,4,41*0,2,23*
18 S0,-40,5*0,-24,5*0,-6,5*0,2,5*0,-16,5*0,40,5*0,60,5*0,32,5*0,6,5*0,
19 S-4,5*0,28,5*0,-60,5*0,-24,5*0,-12,5*0,-2,5*0,2,5*0,-12,5*0,24,6*0,
20 S2,41*0,2,41*0,1,23*0,-20,5*0,-12,5*0,-3,5*0,1,5*0,-8,5*0,20,5*0,30
21 S,5*0,16,5*0,3,5*0,-2,5*0,14,3*0,-30,5*0,-12,5*0,-6,5*0,1,5*0,40,
22 S0,-6,5*0,12,3*0,-40,-24,-6,2,-16,40,30*0,6*0,-40,-24,-6,2,-16,40,
23 S36*0,-20,-12,-3,1,-8,20,18*0,400,240,60,-20,160,-400,240,144,
24 S36,-12,96,-240,60,36,9,-3,24,-60,-20,-12,-3,1,-8,20,160,96,24,-8,
25 S64,-160,-400,-240,60,36,20,-160,400,-600,-360,-90,30,-240,600,-320,
26 S-192,-48,16,-128,320,-60,-36,-9,3,-24,60,40,24,6,-2,16,-40,-280,
27 S-168,-42,14,-112,280,600,360,90,-30,240,-600,240,144,36,-12,96,
28 S-240,120,72,18,-6,48,-120,20,12,3,-1,8,-20,-20,-12,-3,1,-8,20,
29 S120,72,18,-6,48,-120,-240,-144,-36,12,-96,240,60,32,6,-4,28,-60,
30 S36*0,60,32,6,-4,28,-60,36*0,30,16,3,-2,14,-30,18*0,-600,-320,-60,
31 S40,-280,600,-360,-192,-36,24,-168,360,-90,-48,-9,6,-42,90,30,16,
32 S3,-2,14,-30,-240,-128,-24,16,-112,240,600,320,60,-40,280,-600,900,
33 S480,90,-60,420,-900,480,236,48,-32,224,-480,90,48,9,-6,42,-90,-60,
34 S-32,-6,4,-28,60,420,224,42,-28,196,-420,-900,-480,-90,60,-420,900,
35 S-360,-192,-36,24,-168,360,-180,-96,-18,12,-84,180,-30,-16,-3,2,-14
36 S,30,30,16,3,-2,14,-30,-180,-96,-18,12,-84,180,360,192,36,-24,168,
37 S-360,
38 S-24,-12,-2,2,-12,24,36*0,-24,-12,-2,2,-12,24,24*0,12*0,-12,-6,-1,
39 S1,-6,12,18*0,240,120,20,-20,120,144,72,12,-12,72,-144,36,
40 S18,3,-3,18,-36,-12,-6,-1,1,-6,12,96,48,8,-8,48,-96,-240,-20,
41 S20,-120,240,-360,-180,-30,30,-180,360,-192,-96,-16,16,-96,
42 S192,-36,-18,-3,3,-18,36,24,12,2,-2,12,-24,-168,-84,-14,14,-84,
43 S168,360,180,30,-30,180,-360,144,72,12,-12,72,-144,72,36,6,-6,36,
44 S-72,12,6,1,-1,6,-12,-12,-6,-1,1,-6,12,72,36,6,-6,36,-72,-144,-72,
45 S-12,12,-72,144/
46 IW=6
47 IF ((M.NE.3).AND.(M.NE.5)) GOTO 11
48 M6=(M+1)/2
49 M1=M+1
50 M5=M4-1
51 MH=M1*M1
52 NG2=NG-M1
53 NG3=NG2+1
54 ND3=ND2+1
55 IG1=0
56 DO 10 IG=1,NG3,M
57 DO 10 IG1=1
58 DO 10 ID=1,ND3,M
59
60

```

385  
LINE

```

61      ID1=ID1+1
62      DO 10 K=1,L
63      J1=0
64      DO 20 J=0,M
65      DO 20 I=0,M
66      J1=J1+1
67  20   QI(J1)=Q(K,IG+I,ID+J)
68      DO 30 I1=1,MM
69      DO 30 J1=1,MM
70  30   F1(I1,J1)=F(I1,J1)
71      CALL SYSLIN(F1,QI,X,MM,36)
72      J1=1
73      DO 40 I=1,M1
74      DO 40 J=1,M1
75      AK(K,I,J,IG1,ID1)=X(J1)
76  40   J1=J1+1
77  10   CONTINUE
78  100  FORMAT (1H,6(E15.6,1X))
79  200  FORMAT (1H )
80  C
81  C  ON REMPLACE LES POINTS A L INTERIEUR DU CARREAU PAR LEUR DERIVEE
82  C
83      DO 50 I=1,L
84      DO 50 J=1,NG
85      DO 50 K=1,ND
86  50   Q(I,J,K)=0.
87      IG1=0
88      DO 60 IG=1,NG3,M
89      IG1=IG1+1
90      ID1=0
91      DO 60 ID=1,ND3,M
92      ID1=ID1+1
93      DO 60 KJ=0,M5
94      IDKJ=ID+KJ
95      IDMKJ=ID+M-KJ
96      DO 60 KI=0,M5
97      IGKI=IG+KI
98      IGMKI=IG+M-KI
99      DO 60 I=1,L
100     DO 60 K1=1,M1
101     DO 60 K2=1,M1
102     Q(I,IGKI,IDKJ)=Q(I,IGK1,IDKJ)+AK(1,K1,K2,IG1,ID1)*FK(KJ,K1-1,0.)
103     S*FK(KI,K2-1,0.)
104     Q(I,IGMKI,IDKJ)=Q(I,IGMK1,IDKJ)+AK(1,K1,K2,IG1,ID1)*FK(KJ,K1-1,0.)
105     S*FK(KI,K2-1,1.)
106     Q(I,IGKI,IDMKJ)=Q(I,IGK1,IDMKJ)+AK(1,K1,K2,IG1,ID1)*FK(KJ,K1-1,1.)
107     S*FK(KI,K2-1,0.)
108  60   Q(I,IGMK1,IDMKJ)=Q(I,IGMK1,IDMKJ)+AK(1,K1,K2,IG1,ID1)*FK(KJ,K1-1,
109     S1.)*FK(KI,K2-1,1.)
110     DO 13 ID2=M1,ND3,M
111     DO 13 IG2=1,NG3,M
112     DO 13 I=1,L
113  13   Q(I,IG, ID2)=Q(I,IG, ID2)/2
114     DO 14 IG2=M1,NG3,M
115     DO 14 ID=1,ND
116     DO 14 I=1,L
117  14   Q(I,IG2, ID)=Q(I,IG2, ID)/2
118  C
119  C  MOYENNE
120  C
121     DO 70 IG=M1,NG3,M

```



```

122 DO 70 ID=1,ND
123 DO 70 KJ=1,M5
124 IGP=IG+KJ
125 IGM=IG-KJ
126 DO 70 I=1,L
127 Q(I,IGP,ID)=(Q(I,IGP,ID)+Q(I,IGM,ID))/2
128 70 Q(I,IGM,ID)=Q(I,IGP,ID)
129 DO 80 ID=M1,ND3,M
130 DO 80 IG=1,NG
131 DO 80 KI=1,M5
132 IDP=ID+KI
133 IDM=ID-KI
134 DO 80 I=1,L
135 Q(I,IG,IDP)=(Q(I,IG,IDP)+Q(I,IG,IDM))/2
136 80 Q(I,IG,IDM)=Q(I,IG,IDP)
137 IG1=0
138 DO 21 IG=1,ND3,M
139 IG1=IG1+1
140 ID1=0
141 DO 21 ID=1,ND3,M
142 ID1=ID1+1
143 DO 21 J=1,MM
144 J1=(J-1)/M1+1
145 J2=J-M1*(J1-1)
146 DO 21 K=1,L
147 AK(K,J1,J2,IG1,ID1)=0.
148 DO 21 I=1,MM
149 I1=(I-1)/M1
150 I2=I-I1*M1-1
151 IF (M.EQ.5) GOTO 24
152 C
153 C Calcul des coefficients Aij pour m=3
154 C
155 AK(K,J1,J2,IG1,ID1)=AK(K,J1,J2,IG1,ID1)+ICOE3(I,J)*Q(K,IG+11,ID+
156 S2)
157 GOTO 25
158 C
159 C Calcul des coefficients Aij pour m=5
160 C
161 24 AK(K,J1,J2,IG1,ID1)=AK(K,J1,J2,IG1,ID1)+ICOE5(I,J)*Q(K,IG+11,ID+
162 S2)/4
163 25 CONTINUE
164 21 CONTINUE
165 RETURN
166 11 WRITE (IW,400) M
167 400 FORMAT (1H , 'LE PROGRAMME LISBAL N EST PAS DEFINI POUR M= ',I3)
168 RETURN
169 END

```



## ANNEXE V

## DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME U.N.I.S.U.R.F.

CONTINUITÉ DE LA TANGENTE

$$q = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} r^i s^j$$

$$\frac{dq}{dr} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 i \cdot a_{ij} r^{i-1} s^j$$

$$\frac{dq}{ds} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 j \cdot a_{ij} r^i s^{j-1}$$

$$\frac{d^2q}{dr ds} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 i \cdot j \cdot a_{ij} r^{i-1} s^{j-1}$$

Exprimons chacune de ces quantités pour :

$$r = 0, \quad s = 0$$

$$r = 1, \quad s = 0$$

$$r = 0, \quad s = 1$$

$$\text{et } r = 1, \quad s = 1.$$



On notera  $q_{rs} = q(r,s)$

$$q_{00} = a_{00}$$

$$q_{01} = \sum_{i=0}^3 a_{oi}$$

$$q_{10} = \sum_{i=0}^3 a_{io}$$

$$q_{11} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}$$

$$\frac{d}{dr} q_{00} = a_{10}$$

$$\frac{d}{dr} q_{01} = \sum_{i=0}^3 a_{1i}$$

$$\frac{d}{dr} q_{10} = \sum_{i=1}^3 i \cdot a_{i0}$$

$$\frac{d}{dr} q_{11} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 i a_{ij}$$

$$\frac{d}{ds} q_{00} = a_{01}$$

$$\frac{d}{ds} q_{01} = \sum_{i=1}^3 i a_{oi}$$



$$\frac{d}{ds} q_{10} = \sum_{i=0}^3 a_{i1}$$

$$\frac{d}{ds} q_{11} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 j a_{ij}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{00} = a_{11}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{01} = \sum_{i=1}^3 i a_{i1}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{10} = \sum_{i=1}^3 i a_{i1}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{11} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 i.j. a_{ij}$$

d'où l'on tire :

$$a_{00} = q_{00}$$

$$a_{01} = \frac{d}{ds} q_{00}$$

$$a_{02} = -3 q_{00} + 3 q_{01} + \frac{d}{ds} (-2 q_{00} - q_{01})$$

$$a_{03} = 2 q_{00} - 2 q_{01} + \frac{d}{ds} (q_{00} + q_{01})$$



$$a_{10} = \frac{d}{dr} q_{00}$$

$$a_{11} = \frac{d^2}{dr ds} q_{00}$$

$$a_{12} = \frac{d}{dr} (-3 q_{00} + 3 q_{01}) + \frac{d^2}{dr ds} (-2 q_{00} - q_{01})$$

$$a_{13} = \frac{d}{dr} (+ 2 q_{00} - 2 q_{01}) + \frac{d^2}{dr ds} (q_{00} + q_{01})$$

$$a_{20} = - 3 q_{00} + 3 q_{10} + \frac{d}{dr} (- 2 q_{00} - q_{10})$$

$$a_{21} = \frac{d}{ds} (-3 q_{00} + 3 q_{10}) + \frac{d^2}{dr ds} (-2 q_{00} - q_{10})$$

$$a_{22} = 9 q_{00} - 9 q_{01} - 9 q_{10} + 9 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (+ 6 q_{00} - 6 q_{01} + 3 q_{10} - 3 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (6 q_{00} + 3 q_{01} - 6 q_{01} + 3 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (4 q_{00} + 2 q_{01} + 2 q_{10} + q_{11})$$



$$a_{23} = -6 q_{00} + 6 q_{01} + 6 q_{10} - 6 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (-4 q_{00} + 4 q_{01} - 2 q_{10} + 2 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (-3 q_{00} - 3 q_{01} + 3 q_{10} + 3 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (-2 q_{00} - 2 q_{01} - q_{10} - q_{11})$$

## ANNEXE VI

### DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME U.N.I.S.U.R.F.

#### CONTINUITÉ DE LA COURBURE

$$q = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 a_{ij} \cdot r^i \cdot s^j$$

$$\frac{dq}{dr} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^5 i \cdot a_{ij} \cdot r^{i-1} \cdot s^j$$

$$\frac{d^2q}{ds^2} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=1}^5 j \cdot a_{ij} \cdot r^i \cdot s^{j-1}$$

$$\frac{d^2q}{dr ds} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 i \cdot j \cdot a_{ij} \cdot r^{i-1} \cdot s^{j-1}$$

$$\frac{d^2q}{dr^2} = \sum_{i=2}^5 \sum_{j=0}^5 i(i-1) \cdot a_{ij} \cdot r^{i-2} \cdot s^j$$

$$\frac{d^2q}{ds^2} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=2}^5 j(j-1) \cdot a_{ij} \cdot r^i \cdot s^{j-2}$$

$$\frac{d^3q}{dr^2 ds} = \sum_{i=2}^5 \sum_{i=1}^5 i(i-1) \cdot j \cdot a_{ij} \cdot r^{i-2} \cdot s^{j-1}$$

$$\frac{d^3q}{dr ds^2} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^5 i.j.(j-1).r^{i-1}.s^{j-2}$$

$$\frac{d^4q}{dr^2 ds^2} = \sum_{i=2}^5 \sum_{j=2}^5 i.(i-1)j.(j-1).r^{i-2}.s^{j-2}$$

Exprimons chacune de ces quantités pour :

$$r = 0 \quad , \quad s = 0$$

$$r = 1 \quad , \quad s = 0$$

$$r = 0 \quad , \quad s = 1$$

$$\text{et } r = 1 \quad , \quad s = 1$$

On notera  $q_{rs} = q(r, s)$ .

$$q_{00} = a_{00}$$

$$q_{10} = \sum_{i=0}^5 a_{i0}$$

$$q_{01} = \sum_{i=0}^5 a_{0i}$$

$$q_{11} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 a_{ij}$$

$$\frac{d}{dr} q_{00} = a_{10}$$



$$\frac{d}{dr} q_{10} = \sum_{i=1}^5 i \cdot a_{i0}$$

$$\frac{d}{dr} q_{01} = \sum_{i=0}^5 a_{1i}$$

$$\frac{d}{dr} q_{11} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^5 i \cdot a_{ij}$$

$$\frac{d}{ds} q_{00} = q_{01}$$

$$\frac{d}{ds} q_{10} = \sum_{i=0}^5 a_{i1}$$

$$\frac{d}{ds} q_{01} = \sum_{i=1}^5 i \cdot a_{0i}$$

$$\frac{d}{ds} q_{11} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=1}^5 j \cdot a_{ij}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} q_{00} = 2 a_{20}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} q_{10} = \sum_{i=2}^5 i(i-1) a_{i0}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} q_{01} = 2 \sum_{i=0}^5 a_{2i}$$



$$\frac{d^2}{dr^2} q_{11} = \sum_{i=2}^5 \sum_{j=0}^5 i \cdot (i - 1) a_{ij}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} q_{00} = 2 a_{02}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} q_{10} = 2 \sum_{i=0}^5 a_{i2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} q_{01} = \sum_{i=2}^5 i(i - 1) a_{oi}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} q_{11} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=2}^5 j(j - 1) a_{ij}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{00} = a_{11}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{10} = \sum_{i=1}^5 i a_{i1}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{01} = \sum_{i=1}^5 i a_{1i}$$

$$\frac{d^2}{dr ds} q_{11} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 i \cdot j \cdot a_{ij}$$

$$\frac{d^3}{dr^2 ds} q_{00} = 2a_{21}$$



$$\frac{d^3}{dr^2 ds} q_{10} = \sum_{i=2}^5 i(i-1) a_{i1}$$

$$\frac{d^3}{dr^2 ds} q_{01} = 2 \sum_{i=1}^5 i a_{2i}$$

$$\frac{d^3}{dr^2 ds} q_{11} = \sum_{i=2}^5 \sum_{j=1}^5 i(i-1)j a_{ij}$$

$$\frac{d^3}{dr ds} q_{00} = 2 a_{12}$$

$$\frac{d^3}{dr ds^2} q_{10} = 2 \sum_{i=1}^5 i a_{i2}$$

$$\frac{d^3}{dr ds^2} q_{01} = \sum_{i=2}^5 i(i-1) a_{1i}$$

$$\frac{d^3}{dr ds^2} q_{11} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^5 i.j.(j-1) a_{ij}$$

$$\frac{d^4}{dr^2 ds^2} q_{00} = 4 a_{22}$$

$$\frac{d^4}{dr^2 ds^2} q_{10} = 2 \sum_{i=2}^5 i(i-1) a_{i2}$$

$$\frac{d^4}{dr^2 ds^2} q_{01} = 2 \sum_{i=2}^5 i(i-1) a_{2i}$$



$$\frac{d^4}{dr^2 ds^2} q_{11} = \sum_{i=2}^5 \sum_{j=2}^5 i (i-1) \cdot j \cdot (j-1) a_{ij}$$

d'où l'on tire :

$$a_{00} = q_{00}$$

$$a_{01} = \frac{d}{ds} q_{00}$$

$$a_{02} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} q_{00}$$

$$a_{03} = -10 q_{00} + 10 q_{01} + \frac{d}{ds} (-6 q_{00} - 4 q_{01})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (-3/2 q_{00} + 1/2 q_{01})$$

$$a_{04} = 15 q_{00} - 15 q_{01} + \frac{d}{ds} (8 q_{00} + 7 q_{01})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (3/2 q_{00} - q_{01})$$

$$a_{05} = -6 q_{00} + 6 q_{01} + \frac{d}{ds} (-3 q_{00} - 3 q_{01}) + \frac{d^2}{ds^2} (-\frac{1}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{01})$$

$$a_{10} = \frac{d}{dr} q_{00}$$



$$a_{11} = \frac{d^2}{dr ds} q_{00}$$

$$a_{12} = 1/2 \frac{d^3}{dr ds^2} q_{00}$$

$$a_{13} = \frac{d}{dr} (-10 q_{00} + 10 q_{01}) + \frac{d^2}{dr ds} (-6 q_{00} - 4 q_{01}) + \frac{d^3}{dr ds^2} (-\frac{3}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{01})$$

$$a_{14} = \frac{d}{dr} (15 q_{00} - 15 q_{01}) + \frac{d^2}{dr ds} (8 q_{00} + 7 q_{01}) + \frac{d^3}{dr ds^2} (\frac{3}{2} q_{00} - q_{01})$$

$$a_{15} = \frac{d}{dr} (-6 q_{00} + 6 q_{01}) + \frac{d^2}{dr ds} (-3 q_{00} - 3 q_{01}) + \frac{d^3}{dr ds^2} (-\frac{1}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{01})$$

$$a_{20} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} q_{00}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} \frac{d^3}{dr^2 ds} q_{00}$$

$$a_{22} = \frac{1}{4} \frac{d^4}{dr^2 ds^2} q_{00}$$

$$a_{23} = \frac{d^2}{dr^2} (-5 q_{00} + 5 q_{01}) + \frac{d^3}{dr^2 ds} (-3 q_{00} - 2 q_{01}) + \frac{d^4}{dr^2 ds^2} (-\frac{3}{4} q_{00} + \frac{1}{4} q_{01})$$

$$a_{24} = \frac{d^2}{dr^2} (\frac{15}{2} q_{00} - \frac{15}{2} q_{01}) + \frac{d^3}{dr^2 ds} (4 q_{00} + \frac{7}{2} q_{01}) + \frac{d^4}{dr^2 ds^2} (\frac{3}{4} q_{00} - \frac{1}{2} q_{01})$$

$$a_{25} = \frac{d^2}{dr^2} (-3 q_{00} + 3 q_{01}) + \frac{d^3}{dr^2 ds} (-\frac{3}{2} q_{00} - \frac{3}{2} q_{01}) + \frac{d^4}{dr^2 ds^2} (-\frac{1}{4} q_{00} + \frac{1}{4} q_{01})$$

$$a_{30} = -10 q_{00} + 10 q_{10} + \frac{d}{dr} (-6 q_{00} - 4 q_{10}) + \frac{d^2}{dr^2} (-\frac{3}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{10})$$



$$a_{31} = \frac{d}{ds} (-10 q_{00} + 10 q_{10}) + \frac{d^2}{dr ds} (-6 q_{00} - 4 q_{10}) + \frac{d^3}{dr^2 ds} (-\frac{3}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{10})$$

$$a_{32} = \frac{d^2}{ds^2} (-5 q_{00} - 5 q_{10}) + \frac{d^3}{dr ds^2} (-3 q_{00} - 2 q_{10}) + \frac{d^4}{dr^2 ds^2} (-\frac{3}{4} q_{00} + \frac{1}{4} q_{10})$$

$$a_{33} = 100 q_{00} - 100 q_{10} - 100 q_{01} + 100 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (60 q_{00} + 40 q_{10} - 60 q_{01} - 40 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (60 q_{00} - 60 q_{10} + 40 q_{01} - 40 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} (15 q_{00} - 5 q_{10} - 15 q_{01} + 5 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (15 q_{00} - 15 q_{10} - 5 q_{01} + 5 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (36 q_{00} + 24 q_{10} + 24 q_{01} + 16 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr^2 ds} (9 q_{00} - 3 q_{10} + 6 q_{01} - 2 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} (9 q_{00} + 6 q_{10} - 3 q_{01} - 2 q_{11})$$

$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} (\frac{9}{4} q_{00} - \frac{3}{4} q_{10} - \frac{3}{4} q_{01} + \frac{1}{4} q_{11})$$



$$\begin{aligned}
a_{34} = & -150 q_{00} + 150 q_{10} + 150 q_{01} - 150 q_{11} \\
& + \frac{d}{dr} (-90 q_{00} - 60 q_{10} + 90 q_{01} + 60 q_{11}) \\
& + \frac{d}{ds} (-80 q_{00} + 80 q_{10} - 70 q_{01} + 70 q_{11}) \\
& + \frac{d^2}{dr^2} \left(-\frac{45}{2} q_{00} + \frac{15}{2} q_{10} + \frac{45}{2} q_{01} - \frac{15}{2} q_{11}\right) \\
& + \frac{d^2}{ds^2} (-15 q_{00} + 15 q_{10} + 10 q_{01} - 10 q_{11}) \\
& + \frac{d^2}{dr ds} (-48 q_{00} - 32 q_{10} - 42 q_{01} - 28 q_{11}) \\
& + \frac{d^3}{dr^2 ds} \left(-12 q_{00} + 4 q_{10} - \frac{21}{2} q_{01} + \frac{7}{2} q_{11}\right) \\
& + \frac{d^3}{dr ds^2} (-9 q_{00} - 6 q_{10} + 6 q_{01} + 4 q_{11}) \\
& + \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left(-\frac{9}{4} q_{00} + \frac{3}{4} q_{10} + \frac{3}{2} q_{01} - \frac{1}{2} q_{11}\right)
\end{aligned}$$

$$a_{35} = 60 q_{00} - 60 q_{10} - 60 q_{01} - 60 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (36 q_{00} + 24 q_{10} - 36 q_{01} - 24 q_{11})$$



$$+ \frac{d}{ds} (30 q_{00} - 30 q_{10} + 30 q_{01} - 30 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} (9 q_{00} - 3 q_{10} - 9 q_{01} + 3 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (5 q_{00} - 5 q_{10} - 5 q_{01} + 5 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (18 q_{00} + 12 q_{10} + 18 q_{01} + 12 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr^2 ds} \left( \frac{9}{2} q_{00} - \frac{3}{2} q_{10} + \frac{9}{2} q_{01} - \frac{3}{2} q_{11} \right)$$

$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} (3 q_{00} + 2 q_{10} - 3 q_{01} + 2 q_{11})$$

$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left( \frac{3}{4} q_{00} - \frac{1}{4} q_{10} - \frac{3}{4} q_{01} + \frac{1}{4} q_{11} \right)$$

$$a_{40} = 15 q_{00} - 15 q_{10} + \frac{d}{dr} (8 q_{00} + 7 q_{10}) + \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{3}{2} q_{00} - q_{10} \right)$$

$$a_{41} = \frac{d}{ds} (15 q_{00} - 15 q_{10}) + \frac{d^2}{dr ds} (8 q_{00} + 7 q_{10}) + \frac{d^3}{dr^2 ds} \left( \frac{3}{2} q_{00} - q_{10} \right)$$

$$a_{42} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{15}{2} q_{00} - \frac{15}{2} q_{10} \right) + \frac{d^3}{dr ds^2} \left( 4 q_{00} + \frac{7}{2} q_{10} \right) + \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left( \frac{3}{4} q_{00} - \frac{1}{2} q_{10} \right)$$

$$a_{43} = -150 q_{00} + 150 q_{10} + 150 q_{01} - 150 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (-80 q_{00} - 70 q_{10} + 80 q_{01} + 70 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (-90 q_{00} + 90 q_{10} - 60 q_{01} + 60 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} (-15 q_{00} + 10 q_{10} + 15 q_{01} - 10 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} \left(-\frac{45}{2} q_{00} + \frac{45}{2} q_{10} + \frac{15}{2} q_{01} - \frac{15}{2} q_{11}\right)$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (-48 q_{00} - 42 q_{10} - 32 q_{01} - 28 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr^2 ds} (-9 q_{00} + 6 q_{10} - 6 q_{01} + 4 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} \left(-12 q_{00} - \frac{21}{2} q_{10} + 4 q_{01} + \frac{7}{2} q_{11}\right)$$

$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left(-\frac{9}{4} q_{00} + \frac{3}{2} q_{10} + \frac{3}{4} q_{01} - \frac{1}{2} q_{11}\right)$$

$$a_{44} = 225 q_{00} - 225 q_{10} - 225 q_{01} + 225 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (120 q_{00} + 105 q_{10} - 120 q_{01} - 105 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (120 q_{00} - 120 q_{10} + 105 q_{01} - 105 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{42}{2} q_{00} - 15 q_{10} - \frac{45}{2} q_{01} + 15 q_{11}\right)$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{45}{2} q_{00} - \frac{45}{2} q_{10} - 15 q_{01} + 15 q_{11}\right)$$



$$+ \frac{d^2}{dr ds} (64 q_{00} + 56 q_{10} + 56 q_{01} + 49 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr^2 ds} (12 q_{00} - 8 q_{10} + \frac{21}{2} q_{01} - 7 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} (12 q_{00} + \frac{21}{2} q_{10} - 8 q_{01} - 7 q_{11})$$

$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} (\frac{9}{4} q_{00} - \frac{3}{2} q_{10} - \frac{3}{2} q_{01} + q_{11})$$

$$a_{45} = -90 q_{00} + 90 q_{10} + 90 q_{01} - 90 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (-48 q_{00} - 42 q_{10} + 48 q_{01} + 42 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (-45 q_{00} + 45 q_{10} - 45 q_{01} + 45 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} (-9 q_{00} + 6 q_{10} + 9 q_{01} - 6 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (-\frac{15}{2} q_{00} + \frac{15}{2} q_{10} + \frac{15}{2} q_{01} - \frac{15}{2} q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (-24 q_{00} - 21 q_{10} - 24 q_{01} - 21 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr^2 ds} (-\frac{9}{2} q_{00} + 3 q_{10} - \frac{9}{2} q_{01} + 3 q_{11})$$



$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} \left( -4 q_{00} - \frac{7}{2} q_{10} + 40 q_{01} + \frac{7}{2} q_{11} \right)$$

$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left( -\frac{3}{4} q_{00} + \frac{1}{2} q_{10} + \frac{3}{4} q_{01} - \frac{1}{2} q_{11} \right)$$

$$a_{50} = -6 q_{00} + 6 q_{10} + \frac{d}{dr} (-3 q_{00} - 3 q_{10}) + \frac{d^2}{dr^2} \left( -\frac{1}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{10} \right)$$

$$a_{51} = \frac{d}{ds} (-6 q_{00} + 6 q_{10}) + \frac{d^2}{dr ds} (-3 q_{00} - 3 q_{10}) + \frac{d^3}{dr^2 ds} \left( -\frac{1}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{10} \right)$$

$$a_{52} = \frac{d^2}{ds^2} (-3 q_{00} + 3 q_{10}) + \frac{d^3}{dr ds^2} \left( -\frac{3}{2} q_{00} - \frac{3}{2} q_{10} \right) + \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left( -\frac{1}{4} q_{00} + \frac{1}{4} q_{10} \right)$$

$$a_{53} = 60 q_{00} - 60 q_{10} - 60 q_{01} + 60 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (30 q_{00} + 30 q_{10} - 30 q_{01} - 30 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (36 q_{00} - 36 q_{10} + 24 q_{01} - 24 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} (5 q_{00} - 5 q_{10} - 5 q_{01} + 5 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (90 q_{00} - 9 q_{10} - 3 q_{01} + 3 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (18 q_{00} + 18 q_{10} + 12 q_{01} + 12 q_{11})$$



$$= \frac{d^3}{dr^2 ds} (3 q_{00} - 3 q_{10} + 2 q_{01} + 2 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} \left( \frac{9}{2} q_{00} + \frac{9}{2} q_{10} - \frac{3}{2} q_{01} - \frac{3}{2} q_{11} \right)$$

$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left( \frac{3}{4} q_{00} - \frac{3}{4} q_{10} - \frac{1}{4} q_{01} + \frac{1}{4} q_{11} \right)$$

$$a_{54} = -90 q_{00} - 90 q_{10} + 90 q_{01} - 90 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (-45 q_{00} - 45 q_{10} + 45 q_{01} + 45 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds} (-48 q_{00} + 48 q_{10} - 42 q_{01} + 42 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} \left( -\frac{15}{2} q_{00} + \frac{15}{2} q_{10} + \frac{15}{2} q_{01} - \frac{15}{2} q_{11} \right)$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (-9 q_{00} + 9 q_{10} + 6 q_{01} - 6 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (-24 q_{00} - 24 q_{10} - 21 q_{01} - 21 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr^2 ds} \left( -40 q_{00} + 4 q_{10} - \frac{7}{2} q_{01} + \frac{7}{2} q_{11} \right)$$

$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} \left( -\frac{9}{2} q_{00} - \frac{9}{2} q_{10} + 3 q_{01} + 3 q_{11} \right)$$



$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left( -\frac{3}{4} q_{00} + \frac{3}{4} q_{10} + \frac{1}{2} q_{01} - \frac{1}{2} q_{11} \right)$$

$$a_{55} = 36 q_{00} - 36 q_{10} - 36 q_{01} + 36 q_{11}$$

$$+ \frac{d}{dr} (18 q_{00} + 18 q_{10} - 18 q_{01} - 18 q_{11})$$

$$+ \frac{d}{ds^2} (18 q_{00} - 18 q_{10} + 18 q_{01} - 18 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr^2} (3 q_{00} - 3 q_{10} - 3 q_{01} + 3 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{ds^2} (3 q_{00} - 3 q_{10} - 3 q_{01} + 3 q_{11})$$

$$+ \frac{d^2}{dr ds} (9 q_{00} + 9 q_{10} + 9 q_{01} + 9 q_{11})$$

$$+ \frac{d^3}{dr^2 ds} \left( \frac{3}{2} q_{00} - \frac{3}{2} q_{10} + \frac{3}{2} q_{01} - \frac{3}{2} q_{11} \right)$$

$$+ \frac{d^3}{dr ds^2} \left( \frac{3}{2} q_{00} + \frac{3}{2} q_{10} - \frac{3}{2} q_{01} - \frac{3}{2} q_{11} \right)$$

$$+ \frac{d^4}{dr^2 ds^2} \left( \frac{1}{4} q_{00} - \frac{1}{4} q_{10} - \frac{1}{4} q_{01} + \frac{1}{4} q_{11} \right)$$



## ANNEXES

	PAGES
I - RAPPELS DE LA THEORIE DES COURBES .....	135
II - RAPPELS DE LA THEORIE DES SURFACES .....	148
III- PROGRAMMES DE DEFINITION DE COURBE : .....	167
- COEFFICIENTS $a_k^*$ EN NOMBRE $2p + 2$	
ET COEFFICIENTS $a_k$ EN NOMBRE $2p + 2$	
- COEFFICIENTS $a_k^*$ EN NOMBRE $p + 2$	
ET COEFFICIENTS $a_k$ EN NOMBRE $2p + 2$ (METHODE DES MOINDRES CARRES)	175
IV - PROGRAMMES DE DEFINITION DE SURFACE PAR S.A. COONS .....	139
DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME U.N.I.S.U.R.F.	
V - CALCUL DES COEFFICIENTS $a_{ij}$ ASSURANT LA CONTINUITE DE LA TANGENTE	203
VI - CALCUL DES COEFFICIENTS $a_{ij}$ ASSURANT LA CONTINUITE DE LA COURBURE	208
VII- PROGRAMME DE DEFINITION DE SURFACE PAR LE SYSTEME U.N.I.S.U.R.F.	
ASSURANT LA CONTINUITE DE LA TANGENTE ( $m = 3$ ) OU DE COURBURE ( $m = 5$ )	197

## TABLEAUX

	PAGES
CHAPITRE I	
I.1 - ALGORITHMES UTILISES POUR VERIFIER LA METHODE DE BEZIER-FERGUSSON	130
I.2 - ERREURS RELATIVES MAXIMALES SUR LE VECTEUR POSITION, LE RAYON DE COURBURE ET LE RAYON DE TORSION OBTENUES SUR LA COURBE ANALYTIQUE (I.14) AVEC $m^* = 2p + 1$ , et $m = 2p + 1$ :	
I.2 - VALEURS NUMERIQUES	31
I.3 - REPRESENTATION GRAPHIQUE	32
I.4 - INFLUENCE DU CHOIX DES VALEURS DU PARAMETRE $r$	33
ERREURS RELATIVES MAXIMALES SUR LE VECTEUR POSITION, LE RAYON DE COURBURE ET LE RAYON DE TORSION OBTENUES SUR LA COURBE ANALYTIQUE (I.14) AVEC $m^* = 2p + 1$ et $m = 2p + 1$ :	
I.5 - VALEURS NUMERIQUES	34
I.6 - REPRESENTATION GRAPHIQUE	35

## CHAPITRE III

APPLICATION DE LA DEFINITION D'UN ARC DE RACCORDEMENT PAR PROJECTION STEREOGRAPHIQUE D'UNE COURBE TRACEE SUR UNE SPHERE A LA DEFINITION DE LA COURBE STATORIQUE

VALEURS EXTREMALES DE L'ACCELERATION NORMALE EN FONCTION DE  $K_0$  ET  $K_1$

AVEC  $L_0 = L_1 = 0$

$\theta_0 = 0, \theta_1 = \delta$

$R_{P_0} = 1, R_{P_1} = 1.3$

$R_{\text{sphère}} = 1, R_{c_0} = 1$

ET :

III.1 -  $R_{c_1} = 0.5$

		PAGES
III.2 -	$R_{c_1} = 0.6$	88
III.3 -	$R_{c_1} = 0.7$	89
III.4 -	$R_{c_1} = 0.8$	90
III.5 -	$R_{c_1} = 0.9$	91

VALEURS EXTREMALES DE L'ACCELERATION NORMALE EN FONCTION DE  $K_0$  ET  $K_1$

AVEC  $L_0 = L_1 = 0$

$\theta_0 = 0, \theta_1 = \delta$

$R_{P_0} = 1, R_{P_1} = 1.3$

$R_{c_0} = 1, R_{c_1} = 0.7$

ET :

III.6 -	$R_{\text{sphère}} = 0.2$	92
III.7 -	$R_{\text{sphère}} = 0.5$	93
III.8 -	$R_{\text{sphère}} = 5$	94
III.9 -	EVOLUTION DE L'ACCELERATION MINIMALE ET DE L'ACCELERATION MAXIMALE EN FONCTION DES DERIVEES SECONDES DE $\theta$ PAR RAPPORT A $r$	95

— APPLICATION DU RACCORDEMENT DE DEUX ARCS DE COURBE A L'AIDE DE L'ABSCISSE CURVILIGNE

-DEFINITION PAR UN ARC

DEFINITION DE LA COURBE STATORIQUE PAR UN ARC

III.10 -	RAYONS POLAIRES EXTREMAUX EN FONCTION DE $\frac{ds}{dr}$ (0) ET $\frac{ds}{dr}$ (1)	96
III.11 -	VALEURS EXTREMALES DE L'ACCELERATION NORMALE EN FONCTION DE $\frac{ds}{dr}$ (0) $\frac{ds}{dr}$ (1)	97

## - DEFINITION PAR DEUX ARCS

VALEURS EXTREMALES DE L'ACCELERATION NORMALE EN FONCTION DE  $K_0$  ET  $K_1$ 

AVEC  $L_0 = L_1 = 0$

$\theta_0 = 0, \theta_1 = \delta$

$R_{P_0} = 1, R_{P_1} = 1.3$

$R_{C_0} = 1$

ET :

III.12 -	$R_{C_1} = 0.5$	98
III.13 -	$R_{C_1} = 0.6$	99
III.14 -	$R_{C_1} = 0.7$	100
III.15 -	$R_{C_1} = 0.8$	101
III.16 -	$R_{C_1} = 0.9$	102

EVOLUTION DES VALEURS EXTREMALES DE L'ACCELERATION NORMALE EN FONCTION  
DES DERIVEES SECONDES DE  $s$  PAR RAPPORT à  $r$

AVEC :  $\theta_0 = 1, \theta_1 = \delta$

$$R_{P_0} = 1, R_{P_1} = 1.3$$

$$R_{c_0} = 1, R_{c_1} = 0.7$$

ET :

$$\text{III.17} - \frac{ds}{dr}(0) = 1.2 \delta \quad , \quad \frac{ds}{dr}(1) = 1.2 \delta \quad 103$$

$$\text{III.18} - \frac{ds}{dr}(0) = 1.6 \delta \quad , \quad \frac{ds}{dr}(1) = 0.8 \delta \quad 104$$

## CHAPITRE IV

IV.1 - ERREURS RELATIVES MAXIMALES SUR LA SPHERE DEFINIE PAR LE SYSTEME COORDONNEES ASSURANT LA CONTINUITE D'ORDRE 2 POUR LA SURFACE, LES GENERATRICES ET DIRECTRICES SONT CONTINUES JUSQU'A L'ORDRE 2 OU L'ORDRE 3 122

IV.2 - ERREURS RELATIVES MAXIMALES SUR LA SPHERE DEFINIE PAR LE SYSTEME U.N.I.S.U.R.F. ASSURANT LA CONTINUITE D'ORDRE 1 OU 2. 127

TABLEAUX RECAPITULATIFS DES ERREURS OBTENUES PAR DIFFERENTES METHODES DE DEFINITION DE SURFACE

	PAGES
IV.3 - VERIFICATION SUR LA SPHERE	129
IV.4 - VERIFICATION SUR L'HYPÉRBOLÓIDE DE REVOLUTION	130

## R E S U M E

L'objet de cette thèse est la définition de courbes et surfaces en vue de leur utilisation en technologie mécanique, et notamment en vue de définir des surfaces statoriques de machines volumétriques à palettes. La nécessité d'optimiser la forme de ces surfaces et de les accorder à des surfaces à directrice circulaire dans la zone d'étanchéité entre rotor et stator justifie cet objet.

Après avoir analysé les méthodes classiques préconisées pour résoudre un tel problème (Méthodes de BEZIER et de FERGUSON), l'auteur propose trois définitions originales de courbes et surfaces réglées et évalue leur précision.

### Mots clés :

Courbes et surfaces

Technologie mécanique

Surfaces statoriques de machines volumétriques à palettes

Courbes et surfaces réglées

