N° d'ordre : 1022

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PAR

KANDRI RODY RACHID

UNE EXTENSION DE L'INÉGALITÉ DE KOMLÓS - MAJOR - TUSNÁDY AU CAS DE VARIABLES ALÉTOIRES INDÉPENDANTES NON IDENTIQUEMENT DISTRIBUÉES

MEMBRES DU JURY : P. POUZET, *PRÉSIDENT*
J. DELPORTE, *RAPPORTEUR*
D. BOSQ, P. JACOB, R. MOCHÉ, *EXAMINATEURS*

SOUTENUE LE 2 FÉVRIER 1983

A mon père,

A ma mère,

A Houriya,

A mes frères,

A la mémoire de Asmaâ,

A Ahmed Bouzoubaâ .

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur P. POUZET pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur J. DELPORTE m'a donné le goût de la recherche, m'a constamment guidé et m'a permis d'aboutir par sa rigueur, ses intuitions et ses conseils, son contrôle permanent. Il m'a aussi utilement conseillé pour la rédaction dans ses moindres détails. Je le remercie très vivement pour toute cette aide, le temps qu'il m'a consacré, ses encouragements incessants lors des moments difficiles et sa grande patience, sans lesquels ce travail n'aurait pas vu le jour. Aussi, je le prie de croire à ma profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur D. BOSQ est aussi à l'origine de ce travail ; s'informant régulièrement des résultats obtenus et me donnant de judicieux conseils, il n'a pas hésité à m'encourager fréquemment. Je le remercie tout spécialement de cette attention constante dont il donne une nouvelle preuve en acceptant de juger ce travail.

Monsieur le Professeur P. JACOB, en acceptant de faire partie du jury de ma thèse, témoigne de l'intérêt qu'il prend à ce travail ; je tiens à lui dire tous mes remerciements.

Monsieur Raymond MOCHÉ s'est fréquemment enquis du déroulement de ma recherche et n'a pas hésité à m'encourager ; il a accepté en outre de faire partie de mon jury, je le remercie tout particulièrement.

Monsieur le Professeur G. TUSNÁDY de l'Université de BUDAPEST m'a manifesté une attention bienveillante et m'a informé des derniers développements du problème. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements.

Je remercie également Monsieur E. BERGER de l'Université de FRIBOURG (R.F.A.) pour les idées échangées sur mon travail et les informations qu'il m'a communiquées sur les travaux de A. SAHANENKO.

Arlette LENGAIGNE et Raymonde BÉRAT ont donné tous leurs soins et leur compétence pour dactylographier cette thèse. Ce travail était particulièrement ingrat étant donné les formules mathématiques qui nécessitaient une mise en page très aérée et un soin tout particulier pour bien mettre en valeur l'ensemble du texte. Aussi, je tiens à leur redire combien j'ai été sensible à la gentillesse et la patience dont elles ont fait preuve à mon égard lors de la correction des épreuves et de la qualité toute particulière de leur travail ; je les en remercie très chaleureusement.

Je remercie également toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce travail.

P L A N .

INTRODUCTION.

PARTIE A : PRÉLIMINAIRES.

PARTIE B : DÉVELOPPEMENT EN VUE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME GÉNÉRALISÉ.

PARTIE C : CONCLUSION - APPLICATIONS.

INTRODUCTION.

Dans deux articles parus en 1975 et 1976 [11], J. KOMLÓS, P. MAJOR et G. TUSNÁDY ont établi dans le cas d'une suite de v.a. i.i.d., une inégalité qui permet de formuler un principe d'invariance ; ce résultat essentiel permet notamment d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que ceux découlant d'une technique classique de A.V. SKOROKHOD.

On se propose dans ce travail de généraliser les résultats obtenus par ces trois auteurs dans leur premier article au cas de v.a. indépendantes non nécessairement de même loi. On suppose en outre, comme dans l'article cité, que les lois des sommes partielles sont à densité à partir d'un certain rang.

Le début de la partie A sera consacré à rappeler les résultats obtenus par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY et la généralisation par V.V. PETROV des théorèmes locaux limites qu'ils ont utilisé dans le cas de v.a. i.i.d.. On établit ensuite la généralisation au cas de v.a. indépendantes, non identiquement distribuées, de leurs théorèmes des grandes déviations pour les densités et les fonctions de répartition conditionnelles.

On développera dans la partie B quelques résultats quantiles et dyadiques nécessaires à la preuve du théorème généralisé. La méthode de construction quantile y figurera notamment ainsi que la résolution d'un problème d'indépendance essentiel pour établir l'inégalité de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY généralisée.

On conclut dans la partie C à la preuve du résultat généralisé obtenu. On étudie alors quelques cas particuliers de suites de v.a. indépendantes, proches du cas identiquement distribué mais sans être confondus avec lui, pour prouver que la généralisation obtenue est bien effective.

PARTIE A

P R É L I M I N A I R E S.

Un bref historique sur l'inégalité de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY et sur son origine, ainsi qu'un rappel de leurs résultats établis dans le cas de v.a.i.i.d., constitueront les deux premiers paragraphes du 1^er^ chapitre. de cette première partie. Dans le 3^ème^ paragraphe, on exposera la généralisation étudiée de ces résultats au cas de v.a. indépendantes, non nécessairement identiquement distribuées ; on donnera alors le résultat obtenu. Une brève introduction sur les travaux de A. SAHANENKO et E. BERGER constituera le dernier sous-paragraphe de ce 1^er^ chapitre.

Le second chapitre est consacré à la théorie des grandes déviations pour les fonctions de répartition et densités des sommes de v.a.i.. On y trouve notamment un rappel du théorème de CRAMER qui fut à l'origine des travaux relatifs aux grandes déviations, la généralisation par PETROV de ce théorème ainsi que les résultats qu'il obtint pour les densités.

Dans le cas i.i.d.; KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY ont établi des théorèmes locaux limites pour les densités et les fonctions de répartition de lois conditionnelles, en vue de l'établissement de leur inégalité. La généralisation de ces théorèmes au cas de v.a. non identiquement distribuées fera l'objet du 3^ème^ chapitre. On en donnera une démonstration détaillée. Ces résultats nous serviront plus loin pour la preuve de l'inégalité de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY généralisée.

CHAPITRE A1

L'INEGALITE DE J. KOMLÔS - P. MAJOR ET G. TUSNÁDY.

LA GENERALISATION ENTREPRISE.

A.1.1. - ORIGINE DE L'INEGALITE DE KOMLÔS - MAJOR ET TUSNÁDY.-

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la somme d'une suite de v.a. indépendantes, identiquement distribuées ayant F comme fonction de répartition, centrées et de variance σ^2 finie et non nulle.

Soit $W(t)$ le processus de Wiener.

A.V. SKOROKHOD [20] a considéré une suite de v.a. $\{\tau_j \; ; \; j = 1,2,\dots\}$ indépendantes, telles que $E(\tau_1) = \sigma^2$ et de même loi définie sur le même espace de probabilité que $W(t)$. Il a prouvé que cette suite $\{\tau_j\}$ peut être construite de telle manière que la suite $W(\tau_1)$, $W(\tau_1 + \tau_2)$,... ait même loi de probabilité que S_1 , S_2 , ...

On pose alors par définition, pour tout n :

$$S_n = W(\tau_1 + \dots + \tau_n) \; ;$$

$T_n = W(n)$ étant distribuée comme la somme de n variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$ normales, indépendantes et réduites. Si l'on suppose en outre que $E\,X_1^4$ existe, on prouve alors que $E(\tau_1^2)$ existe et V. STRASSEN [22], utilisant cette construction, a démontré que :

$$|S_n - T_n| = O(n^{1/4} \,(\text{Log } n)^{1/2}\, (\text{Log Log } n)^{1/4}) \qquad \text{p.s.}$$

On s'est demandé si cette construction était la meilleure possible pour approximer une somme de v.a. indépendantes, identiquement distribuées par une somme de v.a. normales indépendantes et de même loi.

Cette question a reçu une réponse négative ; M. CSÖRGO et P. RÉVÉSZ [4] ont mis au point une nouvelle technique, utilisant la méthode des transformations quantiles, en imposant à la suite $\{X_n\}$ des conditions plus fortes.

Ils se donnent alors une sous-suite $\{n_k\}$ croissante et les fonctions de répartition F_k et F'_k des sommes respectives :

$$S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = X_{n_k+1} + \dots + X_{n_{k+1}}$$

et

$$T_{n_{k+1}} - T_{n_k} = Y_{n_k+1} + \dots + Y_{n_{k+1}}$$

où $\{Y_n\}$ est une suite de v.a. normales réduites.

Ils utilisent la fonction inverse de F_k définie par

$$G_k(t) = \sup\{x \ ; \ F_k(x) \leq t\} \ , \qquad t \in \left]0,1\right[$$

et définissent $S_{n_{k+1}} - S_{n_k}$ par :

$$S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = G_k \circ F'_k \left(T_{n_{k+1}} - T_{n_k}\right) .$$

En supposant que la loi commune de la suite $\{X_n\}$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$E\ X_1 = E\ X_1^3 = 0 \quad , \quad E\ X_1^2 = 1 \ , \quad E\ X_1^8 < \infty$$

et $\limsup_{|t| \to +\infty} |E(\exp\{itX_1\})| < 1$,

ils prouvent que :

$$|S_n - T_n| = o(n^{(1/6)+\varepsilon}) \quad , \quad \varepsilon > 0 \qquad \text{p.s.}$$

J. KOMLÓS, P. MAJOR et G. TUSNÁDY [11] ont repris cette même technique dans le cas de la suite $n_k = 2^k$ et ont introduit une transformation quantile conditionnelle qui leur a permis de scinder les blocs $S_{2^{k+1}} - S_{2^k}$ et de faire apparaître ainsi individuellement les variables aléatoires X_n.

Ils supposent que la loi commune de la suite $\{X_n\}$ à construire est telle que :

$$E\, X_1 = 0 \quad , \quad E\, X_1^2 = 1$$

et

$$E(\exp\{tX_1\}) = R(t) \quad \text{existe pour} \quad |t| < t_o \ .$$

Cette dernière hypothèse leur permet d'utiliser certaines formes du théorème central limite dûes à V.V. PETROV [12] et à W. RICHTER [17] et de démontrer que :

$$\forall x > 0 \quad : \quad P\{\sup_{1 \leq k \leq n} |S_k - T_k| > C \operatorname{Log} n + x\} \leq K \exp\{-\lambda x\}$$

où C, λ et K sont des constantes ne dépendant que de la loi de X_1 .

Ils en déduisent que :

$$|S_n - T_n| = O(\operatorname{Log} n) \qquad \text{p.s.}$$

ce qui est la meilleure borne possible de l'erreur compte tenu de certains résultats de P. BARTFAI (voir [1] et aussi M. CSÖRGÖ et P. RÉVÉSZ [5] (p. 95-101), spécialement le théorème 2.3.2., où les auteurs prouvent que si $S_n - T_n = o(\operatorname{Log} n)$ p.s. alors la suite $\{X_n\}$ est une suite de v.a. normales indépendantes réduites).

A.1.2. - EXPOSÉS DES RÉSULTATS OBTENUS PAR LES TROIS AUTEURS.-

Théorème A.1.1.- Soit F une fonction de répartition d'une v.a. réelle X telle que :

(A.1.1.) $$\int_{\mathbb{R}} x \, dF(x) = 0 \quad , \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 \, dF(x) = 1$$

(A.1.2.) $$\int_{\mathbb{R}} \exp\{tx\} \, dF(x) = R(t) \text{ est définie pour } |t| < t_o$$

(A.1.3.) pour un $p \geq 1$ et pour tout t tel que $|t| < t_o$

$$\int_{\mathbb{R}} |R(t+iu)|^p \, du < +\infty \quad .$$

Alors, il existe une suite de fonctions $f_n(y_1,\ldots,y_{2n})$ telle que, si $\{Y_n\}$ est une suite de v.a. normales indépendantes réduites, posant pour tout entier $n \geq 1$:

$$X_n = f_n(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{2n}) \ ,$$

les v.a. X_n sont indépendantes, de même loi définie par la fonction de répartition F.

De plus, pour tout entier n et $\forall x > 0$, il existe des constantes absolues positives C, K et λ ne dépendant que de F telles que :

(A.1.4.) $$P\{ \sup_{1 \leq k \leq n} |S_k - T_k| > C \operatorname{Log} n + x\} \leq K \exp\{-\lambda x\}$$

où $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ et $T_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$.

Les auteurs en déduisent le résultat suivant qui montre que leur méthode précise les résultats antérieurs.

Théorème A.1.2.- Avec les notations et les hypothèses du théorème ci-dessus, on a :

$$\text{(A.1.5.)} \qquad P\{\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - T_n|}{\operatorname{Log} n} \leq C\} = 1$$

C étant étant la même constante que dans le théorème A.1.1.. D'où résulte que, pour tout n entier positif :

$$\text{(A.1.6.)} \qquad |S_n - T_n| = O(\operatorname{Log} n) \quad \text{p.s.} \; .$$

Remarquons que si la condition (A.1.3.) est satisfaite pour $p = 1$, alors la densité $f(x) = \frac{dF}{dx}(x)$ existe. D'autre part, si $R(t) < \infty$ pour $|t| < t_o$ et $f(x)$ est bornée (ou de carré intégrable), alors la condition (A.1.3.) est vérifiée.

La preuve du théorème A.1.1. utilise implicitement les deux résultats suivants (voir [6]) :

Lemme A.1.1.- Soit Y une v.a. normale centrée, de variance σ^2. ϕ la fonction de répartition d'une v.a. normale réduite, F la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ et soit G sa fonction inverse définie par :

$$\forall t \in \left]0,1\right[: \qquad G(t) = \sup\{x \; ; \; F(x) \leq t\} \quad .$$

Alors $G\left[\phi(\frac{Y}{\sigma})\right]$ est une v.a. réelle de loi définie par la fonction de répartition F.

Nous généralisons ensuite une méthode quantile conditionnelle introduite par J. KOMLÓS, P. MAJOR et G. TUSNÁDY, pour construire deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes, de même loi, de variance égale à $\sigma^2 > 0$ à partir de deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 normale indépendantes, centrées, de variance σ^2.

Ces auteurs ont utilisé cette méthode conjointement au lemme A.1.1. pour construire leur suite $\{X_n\}$ à partir d'une suite $\{Y_n\}$ de v.a. normales indépendantes réduites ce qui leur a permis de prouver le théorème A.1.1. en utilisant certains résultats de V.V. PETROV et W. RICHTER que nous exposerons au chapitre A.2.. Nous nous proposons d'étendre leurs résultats au cas de v.a. indépendantes non identiquement distribuéesen généralisant leur méthode de construction.

Pour ceci, désignons par X_1 et X_2 les deux variables aléatoires indépendantes à construire, centrées, de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 non nulles, par F_1 et F_2 leurs fonctions de répartition et par F_3 la convolution de F_1 et F_2. Nous notons :

$$Y_1 = X_1 + X_2 \qquad \text{et} \qquad Y_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} X_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} X_2 ,$$

$$\hat{F}(x|y) = P\{Y_2 < x \mid Y_1 = y\} \ ; \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R} .$$

$$\hat{G}(t|y) = \sup\{x \ ; \hat{F}(x|y) \leq t\} \ ; \quad t \in \left]0,1\right[.$$

$$G_3(t) = \sup\{x \ ; F_3(x) \leq t\} \ ; \quad t \in \left]0,1\right[.$$

Désignons alors par Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires normales indépendantes réduites ; par

$$U_1 = \phi(Z_1) \qquad ; \qquad U_2 = G_3\{\phi(Z_2)\}$$

$$U_3 = \hat{G}\{U_1 | U_2\} .$$

$$V_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} U_2 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} U_3$$

et

$$V_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} U_2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} U_3 ;$$

V_1 et V_2 réalisent la construction effective de X_1 et X_2 à partir des variables aléatoires normales Z_1 et Z_2 car :

Lemme A.1.2.- Les variables aléatoires V_1 et V_2 sont indépendantes, de lois respectives définies par F_1 et F_2.

Preuve : Il suffit de prouver que $P_{(V_1,V_2)} = P_{(X_1,X_2)}$, ou équivalemment que $P_{(U_2,U_3)} = P_{(Y_1,Y_2)}$ du fait que $U_2 = V_1 + V_2$ et $U_3 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} V_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} V_2$ où $P_{(X,Y)}$ désigne la loi de probabilité du couple de variables aléatoires X et Y. Montrons tout d'abord que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : P\{U_2 < y \ , \ U_3 < x\} = \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(x|z) \cdot 1_{]-\infty,y[}(z) \ dF_3(z)$$

en effet, $U_3 = \hat{G}(U_1|U_2) < x \Longleftrightarrow U_1 < \hat{F}(x|U_2)$.

On en déduit l'identité :

$$\{U_2 < y \ , \ U_3 < x\} = \{U_1 < \hat{F}(x|U_2), \ U_2 < y\}$$

$$= \{(U_1,U_2) \in E\}$$

où $E = \{(u,v) \ , \ u < \hat{F}(x|v) \ , \ v < y\}$.

U_1 et U_2 étant indépendantes et U_1 étant uniformément répartie sur $]0,1[$:

$$P\{(U_1,U_2) \in E\} = \int_{\mathbb{R}} P_{U_1}(E_v) \ dP_{U_2}(v) \quad ;$$

or $P_{U_1}(E_v) = P_{U_1}\{]-\infty, \hat{F}(x|v)[\} \cdot 1_{]-\infty,y[}(v) = \hat{F}(x|v) \cdot 1_{]-\infty,y[}(v)$.

On conclut alors d'après le lemme d'égalité des mesures que :

$$P_{(U_2,U_3)} = P_{(Y_1,Y_2)} \ .$$

Dans ce qui suit, ce second lemme sera utilisé comme suit :

Z'_1 et Z'_2 désignant deux variables aléatoires normales indépendantes, centrées, de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 non nulles, on posera :

$$Z''_1 = Z'_1 + Z'_2 \quad \text{et} \quad Z''_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} Z'_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} Z'_2 \;;$$

Z''_1 et Z''_2 sont deux variables aléatoires normales indépendantes de même variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Posant $Z_1 = \frac{Z''_1}{\sigma}$ et $Z_2 = \frac{Z''_2}{\sigma}$, on construit ainsi U_1, U_2 et U_3 puis V_1 et V_2 .

En particulier, lorsque $\sigma_1 = \sigma_2$, cette construction se ramène à celle de J. KOMLÓS, P. MAJOR et G. TUSNÁDY .

A.1.3. - GÉNÉRALISATION DU RÉSULTAT DE KOMLÓS, MAJOR ET TUSNÁDY.-

A.1.3a. - *But du Travail.*

Comme indiqué ci-dessus, on se propose de généraliser le résultat de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY énoncé au théorème A.1.1. au cas d'une suite $\{X_n\}$ de v.a. indépendantes, centrées, non nécessairement identiquement distribuées.

On se limite dans ce travail au cas où, à partir d'un certain rang, les lois des sommes partielles sont à densité.

On sera conduit à faire des hypothèses voisines de celles des auteurs de manière à pouvoir utiliser les résultats établis par V.V. PETROV pour le cas de v.a. non identiquement distribuées.

A.1.3b. - *Notations.*

On se donne une suite $\{F_j\}$ de fonctions de répartition et la suite $\{R_j\}$ des transformées de Laplace associées.

On notera désormais :

$$F_{j,k} = F_{k2^j+1} * F_{k2^j+2} * \dots\dots * F_{(k+1)2^j}, \quad k \geq 0 \quad j \geq 0 .$$

$R_{j,k}$ la transformée de Laplace associée à $F_{j,k}$ définie par :

$$R_{j,k}(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{zx\}\, dF_{j,k}(x)$$

$$F_k = F_{o,k-1} \quad , \quad \tilde{F}_j = F_{j,1} \quad , \quad R_k = R_{o,k-1}$$

$$a_j = \sigma_j^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2\, dF_j(x) \quad , \quad A_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$$

$$B_j = A_{2^j} \quad , \quad \tilde{B}_j = B_{j+1} - B_j \quad , \quad j = 0,1,\dots$$

$$B_{j,k} = A_{(k+1)2^j} - A_{k2^j} = \sigma_{j,k}^2$$

$$\tilde{B}_{j,k} = B_{j-1,2k}^{1/2}\, B_{j-1,2k+1}^{1/2} \quad \text{et} \quad \hat{B}_{j,k} = B_{j-1,2k} - B_{j-1,2k+1} ,$$

$$j \geq 1 \quad , \quad k \geq 0$$

d'où, en particulier :

$$B_j = B_{j,o} \quad , \quad \tilde{B}_j = B_{j,1} \quad \text{et} \quad B_{o,k-1} = \sigma_k^2 \quad , \quad j \geq 0 \; , \; k \geq 1 \; .$$

On désignera également par $\{Y_j \; ; \; j = 1,2,\ldots\}$ une suite de v.a. réelles normales, centrées, indépendantes et de variances respectives σ_j^2 où σ_j prend les mêmes valeurs que ci-dessus et par T_n la somme :

$$\sum_1^n Y_j \; .$$

ϕ et φ désigneront, dans tout ce qui suit, respectivement la fonction de répartition et la densité d'une loi normale réduite.

A.1.3c. - *Hypothèses et leurs motivations.*

Comme l'ont fait les auteurs, on commence par supposer, pour chaque j, l'existence de $R_j(z)$ pour $|\mathrm{Re}z| < A$. Les conditions les plus générales des résultats de V.V. PETROV qui sont énoncées au chapitre A.2. étant trop peu maniables, on est amené à utiliser l'hypothèse plus maniable suivante, introduite antérieurement par PETROV :

$$\text{(A.1.7.)} \qquad \exists g > 0 \; : \; |L_j(z)| = |\mathrm{Log}\, R_j(z)| \leq g \; , \; \forall j$$

où le symbole Log désigne la valeur principale du logarithme telle que $L_j(0) = 0$; à laquelle on joint la condition :

$$\text{(A.1.8.)} \qquad \exists\, \delta_1 > 0 \; : \; \sigma_j^2 \geq \delta_1 \quad , \quad j = 1,2,\ldots$$

On a en outre par application de l'inégalité de Cauchy à (A.1.7.) sur un cercle de rayon $A_1 < A$, arbitrairement voisin de A, que

$$\exists\, \delta_2 > 0 \; : \; \sigma_j^2 \leq \delta_2 \quad , \quad j = 1,2,\ldots$$

On a aussi clairement d'après (A.1.8.) :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} > 0$$

ce qui est aussi l'une des conditions supposées par V.V. PETROV.

D'autre part, pour assurer l'existence des densités des sommes partielles à partir d'un certain rang, on doit introduire l'hypothèse d'approximation (A.1.15.) qui n'est autre que celle du théorème local limite de PETROV.

Enfin, les conditions de répartition (A.1.13a) et (A.1.14a) rapprochent d'une certaine manière les blocs entre eux ; leurs expressions équivalentes (A.1.13b) et (A.1.14b) m'ont été signalées par J. DELPORTE. La preuve de ces équivalences sera donnée au § B.1.2c.. Ces conditions s'évanouissent complètement dans le cas i.i.d.

A.1.3d. - *Enoncé du résultat obtenu.*

Théorème A.1.3.- Soit $\{F_j \; ; \; j = 1,2,\ldots\}$ une suite de fonctions de répartition telle que, pour chaque j et k :

(A.1.9.) $$\int_{\mathbb{R}} x \, dF_j(x) = 0$$

(A.1.10.) $$\exists A > 0 \; : \; \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{tx\} dF_j(x) < +\infty \quad \text{pour } t \text{ réel} , \; |t| < A$$

(A.1.11.) $$\exists g > 0 \; : \; |\mathrm{Log}\, R_j(z)| \leq g \quad , \quad z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < A$$

(A.1.12.) $$\exists \delta_1 > 0 \; : \; \sigma_j^2 \geq \delta_1$$

(A.1.13a.) $$\exists K_1 > 0 \; : \; \left| \sum_{k2^j+1}^{(2k+1)2^{j-1}} \sigma_i^2 - \sum_{(2k+1)2^{j-1}+1}^{(k+1)2^j} \sigma_i^2 \right| \leq K_1$$

ou équivalemment :

(A.1.13b.) $$\exists \sigma^2 > 0 \; , \; \exists K_1' > 0 \; : \; \left| \frac{1}{n} \sum_1^n \sigma_i^2 - \sigma^2 \right| \leq \frac{K_1'}{n} , \quad \forall n \geq 1$$

(A.1.14a.) $$\exists K_2 > 0 \; : \; \left| \frac{R'_{j-1,2k}(t)}{R_{j-1,2k}(t)} - \frac{R'_{j-1,2k+1}(t)}{R_{j-1,2k+1}(t)} \right| \leq K_2 \quad \text{pour } t \text{ réel} , \; |t| < A$$

ou équivalemment :

(A.1.14b.) $$\exists \ell(t) \; , \; \exists K_2' > 0 \; : \; \left| \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{R_i'(t)}{R_i(t)} - \ell(t) \right| \leq \frac{K_2'}{n} ,$$

$$\forall n \geq 1 \; , \text{ pour } t \text{ réel}, \; |t| \leq A' < A$$

(A.1.15.) $$\forall h \in \left[-\frac{A}{2} , \frac{A}{2}\right] , \quad \forall \varepsilon > 0 :$$

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{\nu=k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left| \frac{R_\nu(h+it)}{R_\nu(h)} \right| dt = O\left(\frac{1}{2^j}\right)$$

pour j assez grand, avec l'approximation $O(.)$ qui peut être indépendante de h.

Soit $\{Y_n\}$ une suite de variables aléatoires normales, indépendantes, centrées, Y_n ayant pour variance σ_n^2. Alors, il existe une construction d'une suite $\{X_n\}$ de v.a. indépendantes, X_n étant de loi définie par la fonction de répartition F_n, à partir de la suite de v.a. normales $\{Y_n\}$ telle que, si l'on désigne par S_n et T_n les sommes $\sum_1^n X_j$ et $\sum_1^n Y_j$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x > 0$, il existe des constantes absolues positives C, K et λ ne dépendant que de la loi de la suite $\{X_n\}$, telles que :

$$\text{(A.1.16.)} \quad P\{\sup_{1 \leq k \leq n} |S_k - T_k| > C.\mathrm{Log}\, n + x\} \leq K \exp\{-\lambda x\}.$$

A.1.3e. - *Quelques conséquences immédiates des hypothèses du théorème A.1.3.*

Du théorème A.1.3., on déduit les deux conséquences suivantes que nous utiliserons ultérieurement :

Proposition A.1.1.- Si la suite $\{F_j\}$ vérifie les hypothèses (A.1.9.), (A.1.10.), (A.1.11.) et (A.1.12.) du théorème A.1.3. alors :

1°) La suite $\{\sigma_j^2\}$ est uniformément bornée.

$$\text{(A.1.17.)} \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall j : \sigma_j^2 \leq \delta_2 .$$

2°) $\exists C' > 0$ telle que, pour tout j :

$$\text{(A.1.18.)} \quad \forall t , \ |t| \leq \frac{A}{2} \qquad |R_j(t)| \leq \exp\{C'\sigma_j^2 |t|^2\} .$$

Preuve : Prenant la détermination principale de $\log R_j(z)$ holomorphe pour $|z| < A$, on peut écrire :

$$\mathrm{Log}\, R_j(z) = \sum_2^\infty \frac{\gamma_{kj}}{k!} z^k$$

où les γ_{kj} sont les cumulants de R.A. FISHER de la loi F_j .

En particulier $\gamma_{2j} = \sigma_j^2$.

Par application de l'inégalité de Cauchy, on déduit de (A.1.11.) que :

$$\forall k \geq 2 \quad : \frac{|\gamma_{kj}|}{k!} \leq \frac{g}{A^k} \qquad \text{d'où} \quad (A.1.17.) .$$

De plus :

$$|\mathrm{Log}\, R_j(z)| \leq \frac{\sigma_j^2 \, |z|^2}{2!} + \sum_3^\infty g.|\frac{z}{A}|^k$$

$$\leq \frac{\sigma_j^2 \, |z|^2}{2} \{1 + \frac{2g}{\sigma_j^2 \, A^2} \frac{|\frac{z}{A}|}{(1 - |\frac{z}{A}|)}\} .$$

Des inégalités $|\frac{z}{A}| \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sigma_j^2} \leq \frac{1}{\delta_1}$, on déduit (A.1.18.) .

Remarque : Des hypothèses (A.1.12.) et (A.1.17.) résulte une double inégalité qui nous servira par la suite :

Il existe deux constantes positives δ_1 et δ_2 telles que :

$$\text{(A.1.19.)} \qquad 0 < \delta_1 \leq \frac{\sigma_{j,k}^2}{2^j} \leq \delta_2 \qquad \forall j,k \quad .$$

A.1.3f. - *Travaux de A. SAHANENKO et E. BERGER.*

Monsieur G. TUSNÁDY m'a communiqué les références des travaux en cours de A. SAHANENKO [18] et E. BERGER ; lesquels, à partir de méthodes différentes, non basées sur la technique de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, étudient le même problème de comparaison entre les sommes partielles d'une suite de v.a. réelles normales et d'une suite de v.a. réelles construite à partir de la première.

Monsieur E. BERGER m'a fait part brièvement des développements récents de ses travaux sur ce sujet, ainsi que de ceux de A. SAHANENKO. Ils espérent pouvoir notamment remplacer la condition (A.1.15.) par une autre plus maniable.

Il ne nous a pas été possible dans le cadre de ce travail, de comparer les résultats à ceux que nous avons obtenus et de nous étendre davantage sur ces travaux au sujet desquels nous ne disposions que d'une documentation très réduite, à savoir l'article de SAHANENKO précité qui ne donne que les résultats essentiels sans preuve ; les autres articles de cet auteur ne sont, par ailleurs, pas encore publiés, à ce jour, à notre connaissance.

CHAPITRE A2

RAPPEL DE RESULTATS DE V.V. PETROV.

A.2.1. - INTRODUCTION - RAPPEL DU THEOREME DE H. CRAMER.-

Considérons une suite $\{X_n\}$ de v.a. indépendantes, centrées, de fonctions de répartition $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ de variances $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2, \ldots$, telles que, dans un intervalle commun $]-A, +A[$, la transformée de Laplace $E(\exp\{tX_j\})$ existe pour chaque valeur de j.

On a étudié depuis longtemps le comportement de $F_n(x) = P\{\frac{S_n}{s_n} < x\}$ (où $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $s_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$) pour les grandes valeurs de x, problème dit "des grandes déviations".

Ce problème fût introduit pour la première fois en 1929 par A. YA. KHINTCHINE [10] et N.V. SMIRNOV [21] en étudiant le comportement de :

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \phi(x)} \quad \text{et} \quad \frac{F_n(-x)}{\phi(-x)} \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty \tag{A.2.1.}$$

dans le cas de variables aléatoires $X_n = X'_n - p$, identiquement distribuées, les variables X'_n suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

Si les v.a. X_n sont i.i.d. et si $x = O(1)$ lorsque $n \to +\infty$, on se ramène au théorème central limite classique étudié au début du siècle par LIAPOUNOFF et précisé sous sa forme moderne par LINDEBERG et Paul LEVY.

Pour chaque valeur réelle fixe x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\, dy \quad . \tag{A.2.2.}$$

En 1937, H. CRAMER a généralisé l'étude de KHINTCHINE et SMIRNOV en supposant x variable avec n, tendant vers $\pm\infty$ si $n \to +\infty$.

Il a d'abord noté que la relation (A.2.2.) ne donne que le résultat évident :

$F_n(x)$ et $\phi(x)$ ont même limite à l'infini .

Il s'est proposé ensuite d'étudier les rapports (A.2.1.) (qui tendent évidemment vers 1 si $n \to +\infty$ lorsque x est indépendant de n).

H. CRAMER [3], se basant sur un résultat classique de LIAPOUNOFF, a donné une estimation de ces rapports dans le cas où les v.a. X_n sont i.i.d., ayant R comme transformée de Laplace correspondante et de fonction de répartition V.

Sous la condition $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\text{Log } n})$, il a obtenu le résultat suivant :

Théorème A.2.1.- S'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$R(h) < +\infty \quad \text{pour} \quad |h| < A \ ,$$

alors pour $x > 1$ et $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\text{Log } n})$ quand $n \to +\infty$, on a :

$$\text{(A.2.3a.)} \qquad \frac{1 - F_n(x)}{1 - \phi(x)} = \exp\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\,\lambda(\frac{x}{\sqrt{n}})\}\ [1 + 0\ (\frac{x \text{ Log} n}{\sqrt{n}})]$$

$$\text{(A.2.3b.)} \qquad \frac{F_n(-x)}{\phi(-x)} = \exp\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\,\lambda(\frac{-x}{\sqrt{n}})\}\ [1 + 0(\frac{x \text{ Log} n}{\sqrt{n}})]$$

où $\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu . z^\nu$ est une série de puissances convergente pour toutes valeurs suffisamment petites de $|z|$ et dont les premiers coefficients s'écrivent :

$$c_o = \frac{\gamma_3}{6\,\sigma^3} \quad , \quad c_1 = \frac{\sigma^2\gamma_4 - 3\,\gamma_3^2}{24\,\sigma^6}$$

où les γ_ν sont les cumulants ou semi-invariants de R.A. FISHER définis par :

$$\gamma_1 = 0 \quad , \quad \gamma_2 = \sigma^2$$

et

$$\text{Log } R(h) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu!} h^\nu .$$

L'intérêt du travail de H. CRAMER est d'avoir mis en relief le rôle joué par la fonction $R(h)$ qui permet de construire de nouvelles variables aléatoires $\bar{X}_n$ de même fonction de répartition :

$$V(x,h) = \frac{1}{R(h)} \int_{-\infty}^{x} e^{hy}\, dV(y) .$$

L'application du théorème central limite à la nouvelle suite $\{\bar{X}_n\}$ permit, à CRAMER, sous l'hypothèse $x = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\text{Log } n}\right)$ d'obtenir les évaluations (A.2.3.).

Ce résultat fut partiellement généralisé par W. FELLER [8] au cas de v.a. indépendantes non identiquement distribuées.

La démonstration en 1945 par C. ESSÉEN d'un théorème que nous énoncerons ci-après, améliorant substantiellement l'inégalité de LIAPOUNOFF, a permis à V.V. PETROV de reprendre le problème posé par CRAMER dans le cas de variables aléatoires indépendantes, non nécessairement identiquement distribuées et d'obtenir des améliorations substantielles, valables évidemment dans le cas i.i.d., se traduisant dans les égalités (A.2.3a.) et (A.2.3b.) par la substitution de $\sqrt{n}$ au terme $\frac{\sqrt{n}}{\text{Log } n}$ là où cette expression figure.

L'intérêt de ces résultats pour notre étude découle du fait que J. KOMLÓS, P. MAJOR et G. TUSNÁDY ont utilisé les résultats de V.V. PETROV et certains résultats du même auteur et de W. RICHTER dans le cas à densité lorsque la suite de variables aléatoires indépendantes $\{X_n\}$ est identiquement distribuée ; il était donc logique de penser à utiliser les résultats plus généraux obtenus par ces auteurs dans le cas non i.i.d. pour tenter d'obtenir des résultats analogues à ceux de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY. Nous serons en particulier amenés à les utiliser aux chapitres A.3. et B.3. pour donner des expressions asymptotiques. Nous présentons donc ci-après une étude détaillée des résultats essentiels obtenus par V.V. PETROV et W. RICHTER car leurs méthodes et notations seront systématiquement utilisées ensuite.

A.2.2. - PRÉSENTATION DES ÉNONCÉS ET DÉMONSTRATIONS DES RÉSULTATS DE V.V. PETROV.-

Enonçons d'abord le théorème de C. ESSÉEN [7] qui généralise un résultat antérieur de BERRY [2].

Théorème A.2.2. - [Voir par exemple [12] p. 111].

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes telles que :

$$E(X_j) = 0 \quad , \quad E\,|X_j|^3 < \infty \qquad (j = 1,\dots,n) ,$$

soit $$\sigma_j^2 = E(X_j^2) > 0 \quad \text{et} \quad s_n^2 = \sum_1^n \sigma_j^2$$

$$F_n(x) = P\{\frac{X_1 + \dots + X_n}{s_n} < x\} \ , \quad L_n = \frac{\sum_1^n E|X_j|^3}{s_n^3} .$$

Alors pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sup_x |F_n(x) - \phi(x)| \leqslant A \,.\, L_n$$

où A est une constante absolue positive.

Comme indiqué ci-dessus, cette inégalité a permis à V.V. PETROV dans une suite d'articles qui vont de 1953 à 1968 d'améliorer substantiellement les résultats de H. CRAMER en remplaçant l'hypothèse $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\operatorname{Log} n})$ par $x = o(\sqrt{n})$ ce qui est la meilleure borne possible compte tenu d'une remarque de H. CRAMER [3].

Le dernier article de PETROV date de 1968 [13] ; les résultats qu'il obtient sont basés sur les hypothèses les moins strictes ; nous allons donc énoncer son théorème accompagné de sa démonstration.

On suppose dans ce qui suit qu'il existe un cercle centré à l'origine $z = 0$ de rayon $A > 0$ à l'intérieur duquel pour chaque j, la fonction $L_j(z) = \text{Log } R_j(z) = \text{Log } E(\exp\{zX_j\})$ est analytique,

Le symbole Log désigne la valeur principale du logarithme telle que :

$$L_j(0) = 0 \ , \quad \forall j \ .$$

A l'intérieur de ce cercle, $L_j(z)$ peut s'exprimer alors en une série de puissances convergente :

$$L_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_{kj}}{k!} z^k$$

où γ_{kj} est le cumulant de FISHER d'ordre k de X_j.

Vu les hypothèses, on a :

$$\gamma_{1j} = E(X_j) = 0 \quad , \quad \gamma_{2j} = \sigma_j^2 \qquad \forall j \ .$$

On notera dans ce qui suit :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \quad , \quad s_n^2 = B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

et

$$F_n(x) = P\{\frac{S_n}{s_n} < x\} \ .$$

Le théorème de V.V. PETROV s'énonce comme suit :

Théorème A.2.3.- Supposons qu'il existe des constantes positives $H, c_1 , c_2 , \ldots$ telles que :

(A.2.4.) $\quad |L_n(z)| \leq c_n$ dans le cercle $|z| < H$, $n = 1,2,\ldots$

(A.2.5.) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} c_j^{3/2} < +\infty$$

(A.2.6.) $$\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{n} > 0$$

Ceci étant, si $x \geqslant 0$, $x = o(\sqrt{n})$, alors :

(A.2.7a.) $$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \phi(x)} = \exp\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_n(\frac{x}{\sqrt{n}})\} \cdot \left[1 + O(\frac{x+1}{\sqrt{n}})\right]$$

(A.2.7b.) $$\frac{F_n(-x)}{\phi(-x)} = \exp\{- \frac{x^3}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_n(\frac{-x}{\sqrt{n}})\} \cdot \left[1 + O(\frac{x+1}{\sqrt{n}})\right]$$

où

(A.2.8.) $$\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \cdot t^k$$

est une série de puissances dite série de CRAMER généralisée, qui, pour n assez grand, est majorée pour une série de puissances à coefficients indépendants de n, convergente dans un cercle de rayon assez petit. Ainsi les séries $\lambda_n(t)$ convergent uniformément en n pour toutes valeurs assez petites de $|t|$.

Remarque : Les coefficients a_{kn} de la série $\lambda_n(t)$ peuvent s'exprimer, pour tout k, en fonction des cumulants de $X_1, \ldots, X_n$. En particulier, si on pose $\Gamma_{kn} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}$, on obtient :

$$a_{on} = \frac{\Gamma_{3n}}{6\,\Gamma_{2n}^{3/2}} \quad , \quad a_{1n} = \frac{\Gamma_{4n}\,\Gamma_{2n} - 3\,\Gamma_{3n}^2}{24\,\Gamma_{2n}^3}$$

$$a_{2n} = \frac{\Gamma_{5n}\,\Gamma_{2n}^2 - 10\,\Gamma_{4n}\,\Gamma_{3n}\,\Gamma_{2n} + 15\,\Gamma_{3n}^3}{120\,\Gamma_{2n}^{9/2}} .$$

A remarquer aussi que ce théorème entraîne clairement le théorème A.2.1. de H. CRAMER. Dans le cas où les v.a. sont de même loi, les séries $\lambda_n(t)$ coïncident toutes avec la série de CRAMER dont les coefficients sont alors indépendants de n.

Notons d'autre part une conséquence immédiate de ce théorème :

Corollaire A.2.1.- Supposons qu'il existe g, G, A et $\delta > 0$ tels que :

(A.2.9.) $$g \leqslant |R_n(z)| \leqslant G \quad \text{pour} \quad |z| < A \ , \ \forall n \geqslant 1$$

(A.2.10.) $$s_n^2 \geqslant n \, . \, \delta \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1 \, .$$

Alors les relations (A.2.7.) sont vérifiées pour $x \geqslant 0$, $x = o(\sqrt{n})$.

Ces hypothèses étant clairement vérifiées dans le cas envisagé par CRAMER, l'amélioration obtenue est évidente. La définition et les propriétés de $\lambda_n(t)$ dans ces relations restent les mêmes que celles du théorème A.2.3.

Dans une note antérieure [14], PETROV avait obtenu ce dernier résultat avec une hypothèse surabondante.

En 1957, V.V. PETROV [15] a étudié les grandes déviations dans le cas de v.a. à densités et donné le théorème limite local suivant :

Théorème A.2.4.- Soit une suite de v.a. X_1, X_2, ..., X_n, ..., centrées, indépendantes de fonctions de répartition $V_1(x)$, $V_2(x)$, ..., et de dispersions finies σ_1^2, σ_2^2, ... non nulles.

Posant :

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad , \quad s_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

$$F_n(x) = P\{\frac{S_n}{s_n} < x\} \quad \text{et} \quad R_j(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{hy\} dV_j(y) \, .$$

S'il existe des constantes A, K, k et δ positives telles que :

(A.2.11.) $\forall h$ réel tel que $|h| < A$: $k \leq |R_j(h)| \leq K$, $\forall j$

(A.2.12.) $\forall n \geq 1$: $s_n^2 \geq n \, . \, \delta$

(A.2.13.) $\forall h \in [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$, $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} R_j(h)} \, . \int_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |R_j(h+it)| dt = O(\frac{1}{n}) \quad (n \to \infty) \; ;$$

l'approximation $O(.)$ pouvant être choisie indépendante de h.

Alors, pour toutes les valeurs de n assez grandes, il existe une densité $p_n(x)$ continue de la v.a. $\frac{S_n}{s_n}$.

De plus, si $x = o(\sqrt{n})$ pour $n \to +\infty$, alors :

(A.2.14.) $$\frac{p_n(x)}{\varphi(x)} = \exp\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n(\frac{x}{\sqrt{n}})\} . [1 + O(\frac{|x|+1}{\sqrt{n}})]$$

où λ_n est la série de CRAMER généralisée introduite par V.V. PETROV, et φ la densité d'une loi normale réduite.

La démonstration de ce théorème utilise un lemme de PETROV antérieur suivant [12] :

Lemme A.2.1.- Soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots,$ une suite de v.a. indépendantes, centrées, pourvues de moments jusqu'à l'ordre 3.

S'il existe G et $g > 0$ tels que :

(A.2.15.) $\forall n \geq 1$: $B_n = \sum_{j=1}^{n} E(Y_j^2) \geq ng$ et $\sum_{j=1}^{n} E|X_j|^3 \leq nG$

et si de plus, $f_j(t)$ désignant la fonction caractéristique de Y_j , la suite $\{f_j\}$ vérifie :

(A.2.16.) $$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)| \, dt = O(\frac{1}{n}) \quad (n \to \infty)$$

pour ε fixé tel que $0 < \varepsilon < \frac{g}{24\ G}$;

alors, pour n assez grand, il existe une densité continue $q_n(x)$ de la v.a. $\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{\sqrt{B_n}}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$ et pour tout n grand, on a :

(A.2.17.) $$|q_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{C_o}{\sqrt{n}}$$

où C_o est une constante positive indépendante de x et n .

Preuve du théorème A.2.3.- De la même manière qu'avait procédé H. CRAMER dans le cas i.i.d., V.V. PETROV, se fixant z réel dans l'intervalle $]-H, H[$, commence par introduire une suite de v.a. $\{\bar{X}_j , j = 1,2,\ldots\}$ indépendantes, de fonctions de répartition définies par :

$$\bar{V}_j(x) = \frac{1}{R_j(z)} \int_{-\infty}^{x} \exp\{zy\} \, dV_j(y) .$$

Il pose successivement :

$$\bar{m}_j = E(\bar{X}_j) \ , \quad \bar{\sigma}_j^2 = Var(\bar{X}_j) \ , \quad \bar{M}_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{m}_j$$

$$\bar{B}_n = \bar{s}_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \bar{\sigma}_j^2 \quad \text{et} \quad \bar{F}_n(x) = P\{\frac{\bar{X}_1 + \ldots + \bar{X}_n - \bar{M}_n}{\sqrt{\bar{B}_n}} < x\} .$$

Il commence par établir une relation liant F_n et $\bar{F}_n$ pour appliquer ensuite à cette dernière fonction de répartition l'inégalité d'ESSÉEN énoncée au théorème A.2.2. Il utilise l'indépendance des v.a. $\bar{X}_j$ en passant par leurs fonctions caractéristiques et il obtient l'égalité :

$$\text{(A.2.18.)} \qquad F_n(x) = \exp\{-z\bar{M}_n\}.\prod_1^n R_j(z).\int_{-\infty}^{(xs_n-\bar{M}_n)/\bar{s}_n} \exp\{-z\bar{s}_n t\}\, d\bar{F}_n(t) .$$

D'autre part,

$$E(\exp\{h\bar{X}_j\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{hx\}\, d\bar{V}_j(x) = \exp\{-L_j(z)\}.\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{(h+z)x\}\, dV_j(x)$$

$$= \exp\{-L_j(z)\}.E(\exp\{(h+z)X_j\}) \;;$$

ainsi pour chaque j, la transformée de Laplace $\bar{L}_j(h)$ associée à $\bar{V}_j$ existe pour tout h suffisamment petit et vérifie :

$$\bar{L}_j(h) = -L_j(z) + L_j(h+z) .$$

Désignant par $\bar{\gamma}_{kj}$ le cumulant de FISHER d'ordre k de $\bar{X}_j$, on déduit l'égalité :

$$\bar{\gamma}_{kj} = \bar{L}_j^{(k)}(0) = L_j^{(k)}(z)$$

qui donne pour $k = 1$ et $k = 2$:

$$\text{(A.2.19.)} \qquad \bar{m}_j(z) = \frac{d}{dz} L_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_{kj}}{(k-1)!} z^{k-1}$$

$$\text{(A.2.20.)} \qquad \bar{\sigma}_j^2(z) = \frac{d^2 L_j(z)}{dz^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{kj}}{(k-2)!} z^{k-2} .$$

Ces séries convergent dans le cercle $|z| < H$; en effet, d'après l'inégalité de Cauchy :

$$\text{(A.2.21.)} \qquad |\gamma_{kj}| \leqslant \frac{k!\; c_j}{H^k} \qquad \text{pour chaque } j ,$$

d'où $|\bar{m}_j(z)| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\gamma_{kj}|}{(k-1)!} |z|^{k-1} \leqslant \frac{c_j}{H}.\sum_{k=2}^{\infty} k.\left|\frac{z}{H}\right|^{k-1}$;

soit $H_1 > 0$ et $H_1 < H$.

On a alors pour $|z| \leqslant H_1$:

(A.2.22.) $$|\bar{m}_j(z)| \leqslant c_j . G_1 .$$

La constante G_1 ne dépend seulement que de H et H_1. La condition (A.2.5.) et l'inégalité de Hölder impliquent :

(A.2.23.) $$\forall n \geqslant 1 \quad : \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \leqslant n^{1/3} . [\sum_{1}^{n} c_j^{3/2}]^{2/3} \leqslant G_2 . n$$

où G_2 est une constante positive.

L'application de (A.2.21.) pour $k = 2$ donne l'inégalité :

(A.2.24.) $$\sigma_j^2 \leqslant \frac{2.c_j}{H^2}$$

d'où l'on déduit la majoration suivante :

(A.2.25.) $$\forall n \geqslant 1 \quad : \quad B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \leqslant \frac{2}{H^2} \sum_{j=1}^{n} c_j \leqslant G_3 . n ,$$

où $G_3 = \dfrac{2\ G_2}{H^2}$.

On déduit alors de (A.2.22.) et (A.2.23.) que :

(A.2.26.) $$|\frac{\bar{M}_n}{n}| = \frac{1}{n} . |\sum_{j=1}^{n} \bar{m}_j| \leqslant \frac{G_1}{n} . \sum_{j=1}^{n} c_j \leqslant G_4 = G_1 . G_2 .$$

Cet inégalité étant valable à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant H_1$.
Ces calculs préalables étant faits, on considère alors l'équation fondamentale :

(A.2.27.) $$x = \frac{\bar{M}_n(z)}{s_n}$$

qui s'écrit en posant $t = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$,

(A.2.28.) $$t = \frac{\bar{M}_n(z)}{s_n \sqrt{n}} \qquad \text{pour } t \text{ fixé réel ,}$$

ou également :

(A.2.29.) $$\sqrt{\Gamma_{2n}}\ t = \frac{\bar{M}_n(z)}{n} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{kn}}{(k-1)!} z^{k-1} \quad .$$

En outre, la condition (A.2.6.) permet d'écrire :

(A.2.30.) $$\exists \delta > 0 \ : \ \Gamma_{2n} \geq \delta \quad \text{pour} \quad n \quad \text{assez grand} \ .$$

Dans un voisinage de 0, la fonction $z \to \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{kn}}{(k-1)!} z^{k-1}$, nulle à l'origine, est continue et est croissante. Il existe donc, pour $|t|$ assez petit, une solution z et une seule de l'équation (A.2.28.), de même signe que t et tendant vers 0 avec t.

Utilisant le théorème d'inversion des fonctions analytiques, on déduit des relations (A.2.26.) et (A.2.30.) qu'il existe un cercle, le même pour n assez grand, de centre $t = 0$, à l'intérieur duquel on peut écrire :

(A.2.31.) $$z = \frac{t}{\sqrt{\Gamma_{2n}}} - \frac{\Gamma_{3n}}{2\ \Gamma_{2n}^2} t^2 - \frac{\Gamma_{4n}\ \Gamma_{2n} - 3\ \Gamma_{3n}^2}{6\ \Gamma_{2n}^{7/2}} t^3 - \ldots$$

Les séries du membre de droite de (A.2.31.) étant convergentes, de somme majorée en valeur absolue par H_1 et constituant l'unique solution pour $|z| \leq H_1$ de l'équation (A.2.29.).

Appliquant l'inégalité de Cauchy aux coefficients de ces séries, on trouve que, pour n assez grand, ces séries elles-mêmes sont majorées par des séries à coefficients indépendants de n et de rayons de convergence non nuls.

L'égalité :

$$z\,\bar{m}_j - L_j(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)}{k!}\,\gamma_{kj}.z^k \quad , \quad j = 1,2,\ldots$$

donne alors :

$$\frac{1}{n}\,(z\,\bar{M}_n - \sum_{j=1}^{n} L_j(z)) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)}{k!}\Gamma_{kn}.z^k \;.$$

Choisissons maintenant pour z , la solution réelle unique de (A.2.29.) , on obtient un développement en série suivant les valeurs de t de la forme :

$$\frac{1}{n}\,(z\,\bar{M}_n - \sum_{j=1}^{n} L_j(z)) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!}\,\Gamma_{kn}.\left(\frac{t}{\sqrt{\Gamma_{2n}}} - \frac{\Gamma_{3n}}{2\,\Gamma_{2n}^2}\,t^2 - \ldots\right)^k$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\Gamma_{3n}}{\Gamma_{2n}^{3/2}}\,t^3 - \frac{\Gamma_{4n}.\Gamma_{2n} - 3\,\Gamma_{3n}^2}{24.\Gamma_{2n}^3}\,t^4 + \ldots ,$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$\text{(A.2.32a.)} \quad \frac{1}{n}\,\left(\frac{\bar{M}_n^2}{2\,B_n} - z.\bar{M}_n + \sum_{j=1}^{n} L_j(z)\right) = t^3.\lambda_n(t)$$

où

$$\text{(A.2.32b.)} \quad \lambda_n(t) = \frac{\Gamma_{3n}}{6\,\Gamma_{2n}^{3/2}} + \frac{\Gamma_{4n}.\Gamma_{2n} - 3\,\Gamma_{3n}^2}{24.\Gamma_{2n}^3}\,t + \frac{\Gamma_{5n}.\Gamma_{2n}^2 - 10\,\Gamma_{4n}.\Gamma_{3n}.\Gamma_{2n} + 15\,\Gamma_{3n}^3}{120\,\Gamma_{2n}^{9/2}}\,t^2 + \ldots .$$

Les séries $\lambda_n(t)$ sont ainsi obtenues en substituant dans une série une autre série ayant les mêmes propriétés, soit la propriété d'être majorée par une série ayant ses coefficients indépendants de n et convergente dans un cercle de rayon non nul.

Donc $\lambda_n(t)$ possède également cette propriété. Elle converge donc uniformément en n pour tout $|t|$ suffisamment petit.

On montre ensuite que :

$$\sup_x |\bar{F}_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } n \text{ assez grand },$$

C étant une constante indépendante de n et z grâce à l'inégalité d'ESSÉEN formulée dans le théorème A.2.2.. Il suffit pour cela de vérifier seulement qu'il existe des constantes β_1 , β_2 et H_2 positives, indépendantes de n et z telles que, pour $|z| < H_2$:

(A.2.33.) $$\bar{B}_n \geq n.\beta_1$$

et

(A.2.34.) $$\sum_{j=1}^{n} E\,|\bar{X}_j - \bar{m}_j|^3 \leq n.\beta_2 \quad .$$

Reproduisons seulement la preuve de la relation (A.2.33.) que nous utiliserons ultérieurement. D'après la définition même de $\bar{\sigma}_j^2$, on peut écrire :

$$\frac{\bar{B}_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \bar{\sigma}_j^{2} = \frac{B_n}{n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\Gamma_{kn}}{(k-2)!}.z^{k-2} \quad ;$$

cette série est majorée par une série à coefficients indépendants de n et de rayon de convergence non nul, d'après (A.2.30.) on a :

$$\frac{\bar{B}_n}{n} \geq \frac{B_n}{2n} \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{pour } |z| \text{ suffisamment petit et}$$

tout n suffisamment grand .

On déduit alors de (A.2.18.) que :

$$\int_0^\infty \exp\{-zy\sqrt{B_n}\}\, d\bar{F}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\frac{\bar{M}_n^2}{2\, B_n}\} \int_{\frac{\bar{M}_n}{\sqrt{B_n}}}^\infty \exp\{-\frac{t^2}{2}\}\, dt\ (1 + O(z))$$

et par suite, on aboutit à la relation suivante :

$$1 - F_n(x) = \exp\{\frac{x^2}{2} - z.\bar{M}_n + \sum_{j=1}^n L_j(z)\}.\left[1 - \phi(x)\right].\left[1 + O(z)\right]$$

ce qui, en passant par (A.2.32.), et en choisissant pour z la solution unique de (A.2.27.), donne l'égalité cherchée en remarquant que $z = O(x/\sqrt{n})$ d'après (A.2.31.).

Esquisse de la démonstration du théorème A.2.4..

Partant des relations établies ci-dessus de (A.2.18.) jusqu'à (A.2.34.) et remarquant que, si l'on désigne par $\bar{v}_j(t)$ la fonction caractéristique de $\bar{X}_j$, on obtient :

$$\bar{v}_j(t) = \frac{R_j(z+it)}{R_j(z)} \quad ;$$

d'après le lemme A.2.1. dû à V.V. PETROV, on obtient l'existence de $\frac{d\bar{F}_n(x)}{dx} = \bar{p}_n(x)$ comme dérivée continue telle que :

$$\text{(A.2.35.)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |\bar{p}_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{C_o}{\sqrt{n}}$$

où C_o est une constante indépendante de n, x et z .

On aboutit alors d'après (A.2.18.) à l'existence, pour n assez grand, de la densité $p_n(x)$ de $\frac{S_n}{s_n}$. De plus, on a :

$$\text{(A.2.36.)} \qquad p_n(x) = \exp\{-z\bar{M}_n\}.\prod_{j=1}^{n} R_j(z).\exp\{-z(xs_n-\bar{M}_n)\}.\frac{s_n}{\bar{s}_n}.\bar{p}_n\left(\frac{x.s_n-\bar{M}_n}{\bar{s}_n}\right),$$

d'où résulte l'égalité :

$$\frac{p_n(\bar{M}_n/s_n)}{\varphi(\bar{M}_n/s_n)} = \exp\{-z\bar{M}_n + \mathrm{Log}\prod_1^n R_j(z) + \bar{M}_n^2/2s_n^2\}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \quad ,$$

car $x = o(\sqrt{n})$ si $n \to +\infty$, donc $t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

De la relation (A.2.32.), on déduit l'égalité cherchée.

CHAPITRE A3

THEOREMES DES GRANDES DEVIATIONS POUR LES DENSITES ET LES FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES.

A.3.1. - INTRODUCTION.-

A.3.1a.

KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY ont établi deux théorèmes de grandes déviations comme suit : $\{X_n\}_{n\geq 1}$ désignant une suite de v.a. i.i.d., de moyenne 0 , de variance 1, de fonction génératrice $R(z) = E\{\exp\{zX_n\}\}$ définie pour $|\mathrm{Re}\, z| < A$, posant pour j et $k = 0, 1, \ldots$:

$$U_{j,k} = \sum_{k2^j+1}^{(k+1)2^j} X_n \quad \text{de fonction de répartition} \quad F_{j,k} = F_j ,$$

$$\tilde{U}_{j,k} = U_{j-1,2k} - U_{j-1,2k+1} \quad \text{où} \quad j \geq 1 \quad k \geq 0$$

de fonction de répartition conditionnelle, étant donné $U_{j,k} = y$:

$$F_{j,k}(x|y) \ ;$$

ils ont tout d'abord établi, en utilisant le théorème A.2.3. que, pour $0 \leq x \leq \varepsilon.2^{j/2}$:

$$\text{(A.3.1a.)} \qquad 1 - F_j\,(2^{j/2}x) = [1 - \phi(x)]\ \exp\{2^j(\tfrac{x}{2^{j/2}})^3.\lambda(\tfrac{x}{2^{j/2}})\}\ [1 + O(\tfrac{x+1}{2^{j/2}})]$$

$$\text{(A.3.1b.)} \qquad F_j\,(-2^{j/2}x) = \phi(-x)\ \exp\{-\ 2^j(\tfrac{x}{2^{j/2}})^3.\lambda(\tfrac{-x}{2^{j/2}})\}\ [1 + O(\tfrac{x+1}{2^{j/2}})]$$

résultat qui, on va le voir de suite, se transpose sans difficulté au cas de v.a. i. non identiquement distribuées.

Moyennant une hypothèse qui assure l'existence de la dérivée de la fonction de répartition conditionnelle pour j suffisamment grand, ils ont ensuite prouvé que pour : $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, $|y| \leqslant \varepsilon$:

$$\text{(A.3.2a.)} \quad [1 - F_j\,(2^j x|2^j y)] = [1 - \phi(2^{j/2}x)]\ \exp\{O(2^j x^3 + 2^j x^2|y| + |y| + \frac{1}{2^{j/2}})\}$$

$$\text{(A.3.2b.)} \quad F_j\,(-2^j x|2^j y) = \phi(-2^{j/2}x)\ \exp\{O(-2^j x^3 + 2^j x^2|y| + |y| + \frac{1}{2^{j/2}})\}\ .$$

Ce chapitre est essentiellement consacré à la généralisation de ces deux derniers résultats.

Au préalable, nous transposons comme suit les théorèmes A.2.3. et A.2.4. du chapitre précédent.

A.3.1b. - *Transposition des théorèmes de PETROV et RICHTER.*

On considère désormais une suite $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ de v.a. i, centrées ; $U_{j,k}$ a la même signification que ci-dessus et $F_{j,k}$ désigne sa fonction de répartition.

Le théorème A.2.3. se transpose pour les suites $\{U_{j,k}\}$ sous la forme :

Théorème A.3.1.- La suite $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ vérifiant les hypothèses :

(A.3.3.) $\exists A > 0$, $g > 0$ et $G > 0$ tels que

$\forall n \geqslant 1$: $R_n(z) = E\{\exp(zX_n)\}$ existe pour $|\mathrm{Re}z| < A$ et vérifie :

$$g \leqslant |R_n(z)| \leqslant G$$

(A.3.4.) $\forall n \geqslant 1 \qquad E(X_n^2) = \sigma_n^2 \geqslant \delta_1 > 0$

alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon . 2^{j/2}$:

$$\text{(A.3.5a.)} \qquad \frac{1 - F_{j,k}(\sigma_{j,k}x)}{1 - \phi(x)} = \exp\{\frac{x^3}{2^{j/2}} \lambda_{j,k}(\frac{x}{2^{j/2}})\} \left[1 + O(\frac{x+1}{2^{j/2}})\right]$$

$$\text{(A.3.5b.)} \qquad \frac{F_{j,k}(-\sigma_{j,k}x)}{\phi(-x)} = \exp\{\frac{-x^3}{2^{j/2}} \lambda_{j,k}(\frac{-x}{2^{j/2}})\} \left[1 + O(\frac{x+1}{2^{j/2}})\right]$$

où $\lambda_{j,k}$ est la série de CRAMER généralisée associée à $U_{j,k}$ et $\sigma^2_{j,k}$ désigne la variance de $U_{j,k}$.

De même, le théorème de PETROV - RICHTER relatif aux densités se transpose sous la forme :

<u>*Théorème*</u> *A.3.2.-* Sous les hypothèses du théorème précédent, si de plus :

$$\text{(A.3.6.)} \qquad \forall h \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right], \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{\nu=k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left|\frac{R_\nu(h+it)}{R_\nu(h)}\right| dt \leqslant \frac{C}{2^j}$$

où C est une constante indépendante de j,k et h ; alors pour $j \geqslant J_o$ (indépendant de k), la v.a. $\frac{U_{j,k}}{\sigma_{j,k}}$ est à densité $p_{j,k}$ continue et bornée ; de plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|x| \leqslant \varepsilon . 2^{j/2}$:

$$\text{(A.3.7.)} \qquad \frac{p_{j,k}(x)}{\varphi(x)} = \exp\{\frac{x^3}{2^{j/2}} \lambda_{j,k}(\frac{x}{2^{j/2}})\} \left[1 + O(\frac{|x|+1}{2^{j/2}})\right]$$

où $\lambda_{j,k}$ désigne la série de CRAMER généralisée associée à $U_{j,k}$.

A.3.1c. - La généralisation du premier résultat de KOMLÓS - MAJOR - TUSNÁDY étant clairement établie, on se propose d'étendre désormais le second comme suit.

Dans le second paragraphe, nous prouvons quelques résultats auxiliaires relatifs à la fonction d'erreur et à la série de CRAMER généralisée.

Dans le troisième paragraphe, nous rappelons succinctement la méthode de preuve utilisée par KOMLÓS - MAJOR et TUSNÁDY.

La généralisation de leur résultat est l'objet des trois derniers paragraphes.

A.3.2. - RESULTATS AUXILIAIRES.-

A.3.2a. - *Inégalités relatives à la fonction de répartition d'une v.a. normale réduite.*

Définition.- φ et ϕ désignant respectivement la densité et la fonction de répartition d'une v.a. normale réduite, les fonctions λ ("Mill's Ratio") et V sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

(A.3.8a.) $$\lambda(x) = \frac{1-\phi(x)}{\varphi(x)} \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{\lambda(x)} = -\frac{d}{dx}\left[\text{Log}(1-\phi(x))\right]$$

Le résultat suivant, relatif à V, sera utilisé à maintes reprises.

Lemme A.3.1.- V définit sur $\mathbb{R}$ une fonction positive, de classe C^{∞}, croissante et convexe, telle que :

(A.3.8b.) $$\forall x \geq 0 \quad : \quad x < V(x) \leq x + \inf\left\{\frac{1}{x}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right\}$$

Pour démontrer ce résultat, nous rappelons au préalable quelques propriétés élémentaires de la fonction λ.

Propriétés de λ :

(A.3.9.) $$\forall x \in \mathbb{R} : \lambda(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\}.\int_x^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \int_0^{\infty} \exp\left\{-tx - \frac{t^2}{2}\right\} dt .$$

(A.3.10a.) $$\forall n \geq 0 : \lambda^{(n)}(x) = (-1)^n.\int_0^{\infty} t^n.\exp\left\{-tx - \frac{t^2}{2}\right\} dt .$$

(A.3.10b.) $$\forall n \geq 0 : \lambda^{(n)}(x)\, \lambda^{(n+2)}(x) \geq \left[\lambda^{(n+1)}(x)\right]^2$$ (inégalité de Schwarz) .

(A.3.10c.) $$\forall x > 0 : \frac{x}{x^2+1} < \lambda(x) < \frac{x^2+2}{x(x^2+3)} .$$

(A.3.10d.) $$\forall x \quad : \lambda^{(1)}(x) = x.\lambda(x) - 1 .$$

Preuve du lemme : V est évidemment positive, de classe C^{∞} comme λ. De (A.3.10c.) découle que :

$$\forall x > 0 \quad : \quad x < V(x) < x + \frac{1}{x} \quad ;$$

et (A.3.10d.) montre que :

$$V^{(1)}(x) = - \frac{\lambda^{(1)}(x)}{\lambda^{2}(x)} = V(x).\left[V(x) - x\right] > 0 \quad .$$

On voit immédiatement que $\lim\limits_{x \to \infty} V^{(1)}(x) = 1$.

En outre $V^{(2)}(x) = \dfrac{1}{\lambda^{3}(x)} \left[2(\lambda^{(1)}(x))^{2} - \lambda(x).\lambda^{(2)}(x)\right]$

$$= \frac{1}{\lambda^{3}(x)} \left[\lambda^{(1)}(x).\lambda^{(3)}(x) - \left[\lambda^{(2)}(x)\right]^{2}\right]$$

d'après (A.3.10d.) et (A.3.10b.)

donc V et convexe et $V^{(1)}$ croissante, majorée strictement par 1.
Il en résulte que pour $x > 0$:

$$V(x) - V(0) = V(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} < x$$

ce qui achève la démonstration.

A.3.2b. - *Une représentation intégrale de la série de CRAMER généralisée.*

Nous utilisons les hypothèses et notations du théorème A.2.3., il vient pour tout t réel, tel que la série de CRAMER généralisée $\lambda_{n}(t)$ existe, la représentation intégrale suivante :

Lemme A.3.2.-

(A.3.11.) $$t^3.\lambda_n(t) = \int_0^t (u - \sqrt{\Gamma_{2n}}\; z_n(u)).du$$

où

$$\Gamma_{2n} = \frac{1}{n}.\sum_1^n E(X_j^2) ,$$

$$\bar{M}_n(z) = \frac{d}{dz}\sum_1^n \text{Log } E(\exp\{z\ X_j\}) ,$$

et $z_n(t)$ est l'unique racine de l'équation :

$$t.\sqrt{\Gamma_{2n}} = \frac{\bar{M}_n(z)}{n} .$$

Preuve : Par définition (voir A.2.32b.) :

$$t^3.\lambda_n(t) = \frac{t^2}{2} - z_n.\frac{\bar{M}_n(z_n)}{n} + \frac{1}{n}\text{Log } R_n(z_n)$$

et

$$\text{Log } R_n(z) = \text{Log } E(\exp\{z.\sum_1^n X_j\}) = \int_0^z \bar{M}_n(\theta).d\theta$$

donc

$$\text{Log } R_n(z_n(t)) = \int_0^{z_n(t)} \bar{M}_n(\theta)\ d\theta = \int_0^t \bar{M}_n(z_n(u)).\frac{dz_n}{du}.du$$

$$= \bar{M}_n(z_n(t))\ .\ z_n(t) - \int_0^t \frac{d\bar{M}_n(z_n(u))}{du}.z_n(u).du$$

$$= \bar{M}_n(z_n(t)).z_n(t) - n\ \sqrt{\Gamma_{2n}}\int_0^t z_n(u).du ,$$

d'où le résultat.

A.3.2c. - *Une inégalité découlant des hypothèses (A.1.13.) et (A.1.14.).*

notant $\bar{M}_{j,k}(z) = \frac{d}{dz} \text{Log } E\{\exp(z\, U_{j,k})\}$

$$\sigma^2_{j,k} = E(U^2_{j,k})$$

et $z_{j,k}(t)$ la racine unique de l'équation :

$$t \cdot \sigma_{j,k} = \frac{\bar{M}_{j,k}(z)}{2^{j/2}} \; .$$

Lemme A.3.3.- On a pour tout t appartenant à l'intervalle de définition commun aux $z_{j,k}$:

(A.3.12.) $$|z_{j,k}(t) - z_{j-1,2k+a}(t)| \leq \frac{C}{2^j} \quad , \quad a = 0 \text{ ou } 1$$

où C désigne une constante positive, indépendante du couple (j,k).

Preuve : Soit $\alpha = \sup\{|t| \; ; \forall (j,k) \;\; z_{j,k}(t)$ existe et est unique, majorée par $A\}$. On a par calculs élémentaires :

$$\frac{1}{2^{j-1}} \cdot [\bar{M}_{j-1,2k}(z_{j-1,2k}) - \bar{M}_{j-1,2k}(z_{j,k})]$$

$$= t\left(\frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sqrt{2^{j-1}}} - \frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}\right) - \frac{1}{2^j} \cdot [\bar{M}_{j-1,2k}(z_{j,k}) - \bar{M}_{j-1,2k+1}(z_{j,k})] \; .$$

D'après (A.1.14.), le second terme de droite est majoré par $\frac{K_2}{2^j}$; quant au premier, il résulte de (A.1.13.), qu'il peut être majoré par :

$$\frac{\alpha}{2^j} \cdot \frac{|\sigma^2_{j-1,2k} - \sigma^2_{j-1,2k+1}|}{\frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sqrt{2^{j-1}}} + \frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}} \leq \frac{K_1 \cdot \alpha}{\sqrt{\delta_1} \cdot 2^{j+1}}$$

compte tenu de l'hypothèse faite sur la suite des variances $\{\sigma^2_n\}$.

De plus le terme de gauche de l'égalité est, en valeur absolue, minoré par :

$$\beta_1 . |z_{j-1,2k}(t) - z_{j,k}(t)|$$

sachant que :

$$\bar{B}_{j,k}(z) = \frac{1}{2^j} \frac{d}{dz} \{\bar{M}_{j,k}(z)\}$$

vérifie, uniformément en (j,k), l'inégalité :

$$|\bar{B}_{j,k}(z)| \geq \beta_1 .$$

L'inégalité est donc bien établie pour $a = 0$; elle se prouve de la même manière pour $a = 1$.

A.3.3. - *SCHEMA DE LA METHODE DE PREUVE DE KOMLÓS, MAJOR ET TUSNÁDY.-*

A.3.3a. - Ces auteurs utilisent, relativement à leur suite $\{X_n\}$ de v.a. i.i.d., l'hypothèse suivante :

$\exists p \geq 1$ tel que $\forall x$ vérifiant $|x| < A$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(x+it)|^p \, dt < + \infty .$$

Cette hypothèse les assure que pour $j \geq J \geq 0$, la suite $U_{j,k}$ est à densité $f_{j,k} = f_j$ continue et bornée. On montre également qu'elle entraîne la condition de PETROV (A.3.6.) du théorème A.3.2. .

Dès lors, la loi conditionnelle de $\tilde{U}_{j,k}$, étant donné $U_{j,k} = y$, est à densité :

$$f_j(x|y) = \frac{1}{2} \left[f_{j-1}\left(\frac{x+y}{2}\right) f_{j-1}\left(\frac{y-x}{2}\right)\right] / f_j(y) .$$

A.3.3b. - De plus, utilisant les résultats du théorème A.3.2. on peut écrire pour $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$:

$$2^{j/2}.f_j(2^j x|2^j y) = \varphi(x2^{j/2}).\exp\{2^j.\mu_{j,k}(x,y) + O\left(\frac{|x|+|y|+1}{\sqrt{2^j}}\right)\}$$

où

$$\mu_{j,k}(x,y) = \mu(x,y) = \frac{1}{2}\{(x+y)^3.\lambda(x+y) + (y-x)^3.\lambda(y-x) - 2y^3.\lambda(y)\} .$$

Utilisant alors un développement de Taylor de λ à l'ordre deux au voisinage de y, les auteurs prouvent que :

$$2^j\mu(x,y) = O(2^j(|x|^3 + x^2|y|)) ,$$

d'où résulte que pour $|x| \leq \varepsilon$, $|y| \leq \varepsilon$,

posant $\quad A_j(x,y) = 2^j(|x|^3 + x^2|y|) + |y| + \dfrac{1}{\sqrt{2^j}}$:

$$\exp\{-K.A_j(x,y)\} \leqslant \frac{2^j.f_j(2^jx|2^jy)}{2^{j/2}.\varphi(2^{j/2}x)} \leqslant \exp\{K.A_j(x,y)\} \ .$$

A.3.3c. - Considérant alors pour $x \geqslant 0$ la fonction de répartition conditionnelle :

$$1 - F_j(2^jx|\,2^jy) = \int_x^\infty g(u,y).du$$

où
$$g(u,y) = 2^j.f_j(2^ju|2^jy) \quad ,$$

ils sont amenés à considérer les deux intégrales :

$$I_1 = \int_x^A g(u,y).du \quad , \quad I_2 = \int_A^\infty g(u,y).du \ .$$

Ils prouvent que $I_2 = o(I_1)$ si $j \to \infty$ et, par un encadrement de I_1 basé sur les inégalités du paragraphe précédent, prouvent que si $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, $|y| \leqslant \varepsilon$:

$$I_1 = [1 - \phi(2^{j/2}x)] \exp\{O(2^j(x^3 + x^2|y|) + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}$$

d'où résulte (A.3.2a.) ; (A.3.2b.) en découle immédiatement.

A.3.3d. - Dans ce qui suit, nous allons reprendre point par point leur méthode en l'adaptant.

Le paragraphe A.3.4. sera donc consacré à l'étude de la loi conditionnelle de $\tilde{U}_{j,k}$ étant donné $U_{j,k}$. Nous y donnons l'expression de la densité conditionnelle et grâce au théorème A.3.2. en donnons une première expression où intervient une quantité $\mu_{j,k}(x,y)$ analogue à celle vue au § A.3.3b. , sous cette réserve qu'apparaîtront trois fonctions λ différentes. Cette difficulté nous a amené à introduire les hypothèses (A.1.13.) et (A.1.14.) ce qui, grâce au lemme A.3.3., permet d'obtenir un double encadrement de la densité conditionnelle.

On introduit ensuite les intégrales I_1 et I_2 et on généralise les résultats obtenus dans le cas de v.a. i.i.d..

A.3.4. - *ETUDE DE LA DENSITE CONDITIONNELLE.-*

A.3.4a. - *Notations.*

$U_{j,k}$ étant définie comme en A.3.1., de variance $\sigma^2_{j,k}$, nous définissons de plus :

$$\tilde{U}_{j,k} = \frac{\sigma_{j-1,2k+1}}{\sigma_{j-1,2k}} U_{j-1,2k} - \frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sigma_{j-1,2k+1}} U_{j-1,2k+1} ,$$

et $$F_{j,k}(x|y) = P\{\tilde{U}_{j,k} < x \mid U_{j,k} = y\} .$$

Il résulte du théorème A.3.2. que pour $j \geq J_o$, $\forall k$: les lois des v.a.i. $U_{j-1,2k}$ et $U_{j-1,2k+1}$ sont à densités continues notées $f_{j-1,2k}$ et $f_{j-1,2k+1}$.

Nous donnons d'abord l'expression de la densité conditionnelle de $\tilde{U}_{j,k}$, étant donné $U_{j,k} = y$.

Posons :

$$B_{j,k} = E(U^2_{j,k}) = \sigma^2_{j,k}$$

$$\tilde{B}_{j,k} = \sigma_{j-1,2k} \cdot \sigma_{j-1,2k+1}$$

$$z_o = \sigma_{j-1,2k} y + \sigma_{j-1,2k+1} x$$

et $$z_1 = \sigma_{j-1,2k+1} y - \sigma_{j-1,2k} x .$$

A.3.4b. - *Expression de la densité conditionnelle.*

Lemme A.3.4.- Sous les hypothèses du théorème A.3.2., pour j suffisamment grand, la loi conditionnelle de $\tilde{U}_{j,k}$, étant donné $U_{j,k} = y$, est à densité $f_{j,k}(x|y)$ telle que, pour tout x et y :

$$(A.3.13.) \quad f_{j,k}(B_{j,k}x|B_{j,k}y) = \frac{\tilde{B}_{j,k}}{B_{j,k}} \cdot \frac{f_{j-1,2k}(\sigma_{j-1,2k} z_o) \, f_{j-1,2k+1}(\sigma_{j-1,2k+1} z_1)}{f_{j,k}(B_{j,k} y)} .$$

Preuve : L'égalité désirée découle immédiatement du changement de variables suivant :

soit $h : (x,y) \longrightarrow \left(\frac{\sigma_{j-1,2k+1}}{\sigma_{j-1,2k}} x - \frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sigma_{j-1,2k+1}} y \; , \; x + y\right)$

On a donc :

$$(\tilde{U}_{j,k} \; ; \; U_{j,k}) = h(U_{j-1,2k} \; ; \; U_{j-1,2k+1}) \; ;$$

$U_{j-1,2k}$ et $U_{j-1,2k+1}$ étant stochastiquement indépendantes, on déduit de la loi du couple $(U_{j-1,2k} \; ; \; U_{j-1,2k+1})$, celle de $(\tilde{U}_{j,k} \; ; \; U_{j,k})$; d'où résulte la densité de la loi conditionnelle de $\tilde{U}_{j,k}$ étant donné $U_{j,k}$.

A.3.4c. - *Approche de l'expression cherchée.*

Proposition A.3.1.- Sous les hypothèses du théorème A.3.2., on a pour $j \geq J_o$:

$$\sigma_{j,k} \cdot \frac{f_{j,k}(B_{j,k}x \mid B_{j,k}y)}{\varphi(\sigma_{j,k}x)} = \exp\{\mu_{j,k}(x,y) + O(|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\} \tag{A.3.14.}$$

où

$$\mu_{j,k}(x,y) = \frac{z_o^3}{\sqrt{2^{j-1}}} \cdot \lambda_{j-1,2k}\left(\frac{z_o}{\sqrt{2^{j-1}}}\right) + \frac{z_1^3}{\sqrt{2^{j-1}}} \cdot \lambda_{j-1,2k+1}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2^{j-1}}}\right) - \frac{\sigma_{j,k}^3 y^3}{\sqrt{2^j}} \cdot \lambda_{j,k}\left(\frac{\sigma_{j,k}y}{\sqrt{2^j}}\right) . \tag{A.3.15.}$$

Preuve : Par application du théorème A.3.2., on a clairement, pour j suffisamment grand et pour tout k, les égalités suivantes :

(A.3.16a.) $\sigma_{j-1,2k} \cdot f_{j-1,2k}(\sigma_{j-1,2k} x_o) =$

$$\psi(x_o) \cdot \exp\{\frac{x_o^3}{\sqrt{2^{j-1}}} \cdot \lambda_{j-1,2k}(\frac{x_o}{\sqrt{2^{j-1}}}) + 0(\frac{|x_o| + 1}{\sqrt{2^{j-1}}})\}$$

(A.3.16b.) $\sigma_{j-1,2k+1} \cdot f_{j-1,2k+1}(\sigma_{j-1,2k+1} x_1) =$

$$\psi(x_1) \cdot \exp\{\frac{x_1^3}{\sqrt{2^{j-1}}} \cdot \lambda_{j-1,2k+1}(\frac{x_1}{\sqrt{2^{j-1}}}) + 0(\frac{|x_1| + 1}{\sqrt{2^{j-1}}})\}$$

et

(A.3.16c.) $\sigma_{j,k} \cdot f_{j,k}(\sigma_{j,k} x_2) =$

$$\psi(x_2) \cdot \exp\{\frac{x_2^3}{\sqrt{2^j}} \cdot \lambda_{j,k}(\frac{x_2}{\sqrt{2^j}}) + 0(\frac{|x_2| + 1}{\sqrt{2^j}})\}$$

où $0 \leqslant |x_o|$ et $|x_1| \leqslant \varepsilon \, . \sqrt{2^{j-1}}$ et $0 \leqslant |x_2| \leqslant \varepsilon \, . \sqrt{2^j}$ pour tout ε strictement positif.

Choisissons un réel ε_1 tel que :

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2 . \sqrt{\delta_2}}$$

et posons :

$$x_o = z_o \quad , \quad x_1 = z_1 \quad \text{et} \quad x_2 = \sigma_{j,k} y \quad ;$$

on a alors, pour $|x| \leqslant \varepsilon_1$ et $|y| \leqslant \varepsilon_1$:

$$|z_o| \leqslant 2\,\varepsilon_1.\sqrt{\delta_2}.\sqrt{2^{j-1}} \leqslant \varepsilon.\sqrt{2^{j-1}}$$

de même $\quad |z_1| \leqslant \varepsilon.\sqrt{2^{j-1}}$

et $\quad |\sigma_{j,k}y| \leqslant \varepsilon_1.\sqrt{\delta_2}.\sqrt{2^j} \leqslant \varepsilon.\sqrt{2^j}$;

reprenant la relation (A.3.13.) en y remplaçant par les expressions (A.3.16.), on obtient alors l'égalité (A.3.14.) cherchée, en remarquant que :

$$\psi(z_o).\psi(z_1) = \psi(\sigma_{j,k}y).\psi(\sigma_{j,k}x) .$$

A.3.4d. - Etude de l'ordre de grandeur de $\mu_{j,k}(x,y)$.

Proposition A.3.2.- Sous les hypothèses allant de (A.1.9.) à (A.1.14.), et pour un réel ε_1 arbitrairement choisi, on a pour $|x| < \varepsilon_1$ et $|y| < \varepsilon_1$:

(A.3.17.) $$\mu_{j,k}(x,y) = O(2^j|x|^3 + 2^j x^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}}) .$$

Preuve : Pour simplifier les calculs, adoptons les notations suivantes :

$$\ell_{j,k}(t) = t^3\lambda_{j,k}(t) = \int_0^t (u - \frac{\sigma_{j,k}}{2^{j/2}}\, z_{j,k}(u))\, du$$

$$L_1(x,y) = \ell_{j-1,2k}(\frac{z_o}{\sqrt{2^{j-1}}}) - \ell_{j,k}(\frac{z_o}{\sqrt{2^{j-1}}})$$

$$L_2(x,y) = \ell_{j-1,2k+1}(\frac{z_1}{\sqrt{2^{j-1}}}) - \ell_{j,k}(\frac{z_1}{\sqrt{2^{j-1}}})$$

$$L_3(x,y) = \ell_{j,k}(\frac{z_o}{\sqrt{2^{j-1}}}) - \ell_{j,k}(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}(y+x))$$

$$L_4(x,y) = \ell_{j,k}(\frac{z_1}{\sqrt{2^{j-1}}}) - \ell_{j,k}(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}(y-x))$$

et $$L_5(x,y) = \ell_{j,k}(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}(y+x)) + \ell_{j,k}(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}(y-x)) - 2\,\ell_{j,k}(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}\,y) .$$

Ceci permet de réécrire $\mu_{j,k}(x,y)$ sous la forme :

$$\frac{\mu_{j,k}(x,y)}{2^{j-1}} = \ell_{j-1,2k}\left(\frac{z_o}{\sqrt{2^{j-1}}}\right) + \ell_{j-1,2k+1}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2^{j-1}}}\right) - 2\,\ell_{j,k}\left(\frac{\sigma_{j,k}y}{\sqrt{2^j}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} L_i(x,y) .$$

Il suffit alors de majorer chaque différence $2^{j-1}.L_i$; $i = 1,2,3,4$ et 5 par des expressions comprenant les termes du membre de droite de la relation à prouver (A.3.17.) ; ceci achèvera alors entièrement la preuve de la proposition A.3.2. .

1°) Majoration de L_1 *et* L_2.

La quantité L_1 peut s'écrire aussi :

$$L_1 = \int_0^{z_o/\sqrt{2^{j-1}}} \left[\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}\left(z_{j,k}(u) - z_{j-1,2k}(u)\right) + \left(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}} - \frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sqrt{2^{j-1}}}\right) z_{j-1,2k}(u)\right] du.$$

Sachant que $|z_{j-1,2k}| < A$ pour tout couple (j,k) , et que d'après les hypothèses (A.1.13.) et (A.1.19.) :

$$\text{(A.3.18.)}\qquad \left|\frac{\sigma_{j-1,2k+a}}{\sqrt{2^{j-1}}} - \frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}\right| \leq \frac{K_1}{2\sqrt{\delta_1}}\,\frac{1}{2^j} = \frac{C'}{2^j} \quad , \quad a = 0 \text{ ou } 1 ,$$

on obtient, compte tenu de l'inégalité (A.3.12.), la majoration de L_1 suivante :

$$|L_1| \leq \left|\frac{z_o}{\sqrt{2^{j-1}}}\right| . \left\{\sqrt{\delta_2}\,\frac{C}{2^j} + \frac{AC'}{2^j}\right\} \leq \frac{C_1}{2^j} . (|x| + |y|) .$$

Exactement de la même façon, on obtient aussi :

$$|L_2| \leq \frac{C_2}{2^j}\,(|x| + |y|) .$$

2°) *Majoration de* L_3 *et* L_4.

La solution $z_{j,k}(t)$ de l'équation $t.\sigma_{j,k} = \frac{\bar{M}_{j,k}(z)}{2^{j/2}}$ tend vers zéro, uniformément en (j,k), avec t ; d'où, pour ε_1 suffisamment petit :

$$|L_3| \leqslant \sup_u \left|u - \frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}} z_{j,k}(u)\right| . \left|\left(\frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sqrt{2^{j-1}}} - \frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}\right)y + \left(\frac{\sigma_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2^{j-1}}} - \frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}\right)x\right| ,$$

le sup étant considéré pour les u compris entre $\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}.(y+x)$ et $\frac{z_o}{\sqrt{2^{j-1}}}$.

D'où, compte tenu des inégalités (A.3.18.) :

$$|L_3| \leqslant \frac{C_3}{2^j}.(|x| + |y|) ;$$

de même :

$$|L_4| \leqslant \frac{C_4}{2^j}.(|x| + |y|) .$$

De l'inégalité élémentaire :

$$\forall p > 1 \quad , \quad \forall q > 1 \quad \text{tels que} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ :$$

(A.3.19.) $$|xy| \leqslant \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} ,$$

on déduit :

$$|x| \leqslant \frac{1}{3} n.|x|^3 + \frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt{n}} ;$$

ceci donne, pour $i = 1,2,3$ et 4 , les inégalités désirées :

$$|L_i| \leqslant \frac{C_i}{2^j}.\left(\frac{1}{3} 2^j .|x|^3 + |y| + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2^j}}\right) ,$$

chaque C_i est une constante absolue positive.

3°) *Majoration de* L_5.

En transposant la méthode utilisée par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, on effectue un développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions $\lambda_{j,k}(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}(y+x))$ et $\lambda_{j,k}(\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}(y-x))$ au point $\frac{\sigma_{j,k}}{\sqrt{2^j}}y$, les séries $\lambda_{j,k}(t)$ étant uniformément bornées par rapport à j et k pour tout t assez petit en valeur absolue, d'après V.V. PETROV (théorème A.3.1.), il existe des constantes $\delta > 0$, $\gamma > 0$ telles que, pour tout couple (j,k) :

$$|\lambda_{j,k}^{(r)}(t)| \leqslant \gamma \quad \text{pour} \quad |t| \leqslant \delta \quad , \quad r = 0,1,2 \ .$$

On déduit alors facilement l'inégalité :

$$2^{j-1}.|L_5| \leqslant C_5.\left[2^{j-1}(|x|^3 + x^2.|y|) + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}}\right] ,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition A.3.2..

A.3.4e. - *Théorème de grandes déviations pour la densité conditionnelle.*

Des propositions A.3.1. et A.3.2., il résulte que :

Théorème A.3.3.- Sous les hypothèses du théorème A.1.3., pour $|x| < \varepsilon_1$ et $|y| < \varepsilon_1$ où ε_1 est une constante convenablement choisie, on a l'égalité suivante :

$$\text{(A.3.20.)} \quad \sigma_{j,k}.\frac{f_{j,k}(B_{j,k}x|B_{j,k}y)}{\varphi(\sigma_{j,k}x)} = \exp\{O(2^j.|x|^3 + 2^j.x^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}.$$

A.3.5. - ETUDE DE LA FONCTION DE REPARTITION CONDITIONNELLE.-

A.3.5a. - *Principe de l'étude.*

Posons :

$$g_{j,k}(u,y) = B_{j,k} \cdot f_{j,k}(B_{j,k}u \mid B_{j,k}y)$$

et soient :

$$I_1 = \int_x^A g_{j,k}(u,y)\, du \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_A^{+\infty} g_{j,k}(u,y)\, du \,.$$

Il s'agit de trouver un encadrement de I_1 de façon que, pour $0 < x < \varepsilon_1$ et $|y| < \varepsilon_1$, on ait :

$$\exp\{- K(2^j x^3 + 2^j x^2 |y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\} \leq \frac{I_1}{1-\phi(\sigma_{j,k} x)} \leq \exp\{K(2^j x^3 + 2^j x^2 |y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\} \;;$$

ceci sera conséquence du théorème A.3.3. établi dans la première partie de ce chapitre.

Le second paragraphe sera réservé à rendre I_2 infiniment petit par rapport à I_1 quand $j \to \infty$.

En combinant ces 2 résultats, on donnera dans le dernier paragraphe un théorème de grandes déviations pour les fonctions de répartition conditionnelles.

A.3.5b. - *Etude de I_1.*

Lemme A.3.5.- Sous les hypothèses du théorème A.3.2. il existe une constante $A > 0$ et un nombre $\varepsilon_1 > 0$ convenablement choisi tels que, pour $0 < x < \varepsilon_1$ et $|y| < \varepsilon_1$:

$$\text{(A.3.21.)} \qquad I_1 = [1 - \phi(\sigma_{j,k} x)] . \exp\{O(2^j x^3 + 2^j x^2 |y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}.$$

La preuve de ce lemme résulte des deux paragraphes ci-après.

A.3.5.b1. - *Majoration de* I_1 .

Utilisant l'approximation (A.3.20.), on a la majoration suivante de I_1 , il existe une constante absolue positive K telle que :

$$I_1 \leqslant \int_x^A \sigma_{j,k}.\psi(\sigma_{j,k}t).\exp\{K(2^j t^3 + 2^j t^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}\ dt$$

qui peut s'écrire aussi, en notant $K_1 = \dfrac{K2^{j+1}}{B_{j,k}}$:

$$I_1 \leqslant \exp\{K(|y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}.\int_{\bar{x}}^{\bar{A}} \sigma_{j,k}.\psi(\sigma_{j,k}\ u).\frac{dt}{du}.du$$

où l'on a posé :

$$u^2(t) = t^2(1 - K_1|y| - K_1 t) \ , \quad u \geqslant 0 \ , \quad t \leqslant t_o = \frac{1 - K_1|y|}{K_1}$$

et $\qquad \bar{A} = u(A) \ , \quad \bar{x} = u(x)$.

Choisissons $A = \frac{1}{3}.t_o$; pour pouvoir appliquer (A.3.20.) sur $[x,A]$, il faut d'abord supposer que $\frac{t_o}{3} \leqslant \varepsilon_1$, ou équivalemment $\frac{1}{K_1} \leqslant 3.\varepsilon_1$, ce qui sera réalisé si $\frac{\delta_2}{2K} \leqslant 3.\varepsilon_1$; si tel n'est pas le cas, on accroît la valeur de K ce qui ne fait que renforcer les inégalités, puis on peut alors remplacer, s'il le faut, ε_1 par $\varepsilon_1' = \inf(\varepsilon_1, \frac{\delta_1}{4K})$ de manière à garantir que $t_o > 0$ et plus précisement $t_o \geqslant \frac{1}{2K_1}$; tout ceci nous assure d'un changement de variable univoque, la fonction $u \to t(u)$ étant continûment dérivable sur $[0,\bar{A}]$. On en déduit les dérivées première et seconde de $t \to t(u)$ et par calculs élémentaires :

$$\frac{d^2t}{du^2} \leqslant \frac{16K}{\delta_1}.B^4(y)$$

où $\qquad B(y) = (1 - \frac{2K}{\delta_1}.|y|)^{-1/2}$.

De plus,

$$\frac{dt}{du}\,(u = 0) = (1 - K_1|y|)^{-1/2} \leq B(y) \;,$$

d'où par utilisation du théorème des accroissements finis :

$$\frac{dt}{du} \leq B(y) + \frac{16K}{\delta_1}\,B^4(y).u \quad ;$$

on obtient alors la majoration :

$$I_1 \leq \exp\{K(|y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}.\Big[B(y).\int_{\bar{x}}^{+\infty} \sigma_{j,k}.\varphi(\sigma_{j,k}u).du$$

$$+ \frac{16K}{\delta_1}\,B^4(y)\;.\;\int_{\bar{x}}^{+\infty} \sigma_{j,k}u.\varphi(\sigma_{j,k}u).du\Big] \;.$$

Or, d'une part :

$$\int_{\bar{x}}^{+\infty} \sigma_{j,k}\,u\,.\varphi(\sigma_{j,k}u)\;du = \frac{1}{\sigma_{j,k}}.\varphi(\sigma_{j,k}\;\bar{x})$$

$$\leq \big[1 - \phi(\sigma_{j,k}\;\bar{x})\big].\{\bar{x} + \frac{1}{\sigma_{j,k}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\} \;;$$

d'autre part, grâce aux majorations élémentaires suivantes :

$$B(y) \leq 1 + \frac{2K}{\delta_1}\,|y| \quad \text{car} \quad |y| \leq \varepsilon_1 \leq \frac{\delta_1}{4K} \;,$$

$$\bar{x} \leq x(1 + \frac{2K}{\delta_1}\,|y| + \frac{2K}{\delta_1}\,x) \quad \text{car} \quad K_1(|y| + x) \leq \frac{4K}{\delta_1}.\varepsilon_1 \leq 1 \;,$$

et $\qquad B^4(y) \leq 4 \;;$

on obtient la majoration suivante de I_1 :

$$I_1 \leq \exp\{K(|y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}.\{1 - \phi(\sigma_{j,k}.\bar{x})\}.\exp\{\alpha_1.|y| + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2^j}} + \alpha_3.x + \alpha_4.x.|y|$$

$$+ \alpha_5.x^2\}$$

où les α_i , $i = 1,2,3,4$ et 5 sont des constantes absolues positives .

Par ailleurs, V désignant la fonction introduite en A.3.2a., on a :

$$\mathrm{Log}\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}.\bar{x})}{1-\phi(\sigma_{j,k}.x)}\} \leq \sigma_{j,k}(x-\bar{x}).V(\sigma_{j,k}.x)$$

$$\leq K_1(|y|+x).(\sigma_{j,k}^2.x^2+1)$$

$$\leq 2^{j+1}.K(x^2.|y|+x^3)+\frac{2K}{\delta_1}.(x+|y|) \ ;$$

de plus, pour $x \geq 0$:

$$x \leq \frac{1}{3}\, n.x^3 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$x^2 \leq \frac{2}{3}\, n.x^3 + \frac{1}{3.\sqrt{n}}$$

et $$x.|y| \leq \frac{1}{2}\,(n.x^2.|y| + |y|)\ .$$

Utilisant les majorations successives qui précèdent, on obtient finalement :

$$I_1 \leq \{1-\phi(\sigma_{j,k}.x)\}.\exp\{K'(2^j.x^3+2^j.x^2.|y|+|y|+\frac{1}{\sqrt{2^j}})\}$$

où K' est une constante convenablement choisie.

A.3.5.b2. - *Minoration de* I_1 .

Posons pour tout $t \geq 0$: $v(t) = t.\sqrt{1+K_1.|y|+K_1.t}$; il résulte de (A.3.20.) qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$I_1 > \sigma_{j,k}.\exp\{-K(|y|+\frac{1}{\sqrt{2^j}})\}\ .\int_x^A \exp\{-\frac{\sigma_{j,k}^2}{2}\, v^2(t)\}\, dt\ .$$

Reprenant la méthode précédente, notons de nouveau :

$$\bar{x} = v(x)$$

$$\bar{A} = v(A)\ ,$$

on obtient donc :

$$I_1 > \sigma_{j,k}.\exp\{-K(|y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\} . \int_{\bar{x}}^{\bar{A}} \varphi(\sigma_{j,k}.v).\frac{dt}{dv}.dv ,$$

on vérifie de plus, comme ci-dessus, qu'avec le même choix de ε_1 qu'au cours de la majoration de I_1 :

$$\frac{d^2t}{dv^2} \geq -3.K_1 ,$$

d'où :

$$\frac{dt}{dv} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + K_1 |y|}} - 3 K_1 v \geq 1 - K_1.|y| - 3 K_1.v .$$

D'autre part :

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{A}} \sigma_{j,k} v.\varphi(\sigma_{j,k} v).dv \leq \{1 - \phi(\sigma_{j,k} \bar{x})\}.\{\bar{x} + \frac{1}{\sigma_{j,k}}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\}$$

$$- \bar{A}\{1 - \phi(\sigma_{j,k}.\bar{A})\}.$$

On en déduit :

$$I_1 > \exp\{-K(|y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}\{1 - \phi(\sigma_{j,k}.\bar{x})\}\{1 - K_1.|y| - 3K_1\bar{x} - \frac{3K_1}{\sigma_{j,k}}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\}$$

en remarquant que : $3K_1\bar{A} \geq 1 - K_1.|y|$.

On suppose désormais ε_1 et n tels que :

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\delta_1}{48 K} = \varepsilon_o \leq \frac{1}{24 K_1} , \quad n \geq \frac{2}{\delta_1.\pi} \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \geq \frac{288}{15}\frac{K_1}{\sqrt{\delta 1}} ;$$

d'où $$K_1.|y| + 3K_1.\bar{x} + \frac{3K_1}{\sigma_{j,k}}.\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \frac{1}{3} ,$$

ce qui, compte tenu de l'inégalité élémentaire :

$$\exp\{-3x\} \leq 1 - x \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3},$$

donne :

$$1 - K_1.|y| - 3K_1.\bar{x} - \frac{3K_1}{\sigma_{j,k}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \geq \exp\{-3[K_1.|y| + 3K_1.\sqrt{\frac{13}{12}}\, x + \frac{3K_1}{\sqrt{\delta_1}.\sqrt{2^j}}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}]\}$$

$$\geq \exp\{-3[K_1\sqrt{\frac{13}{12}}\, 2^j.x^3 + K_1.|y| + (\frac{3.K_1}{\sqrt{\delta_1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} + K_1.\sqrt{\frac{13}{3}}).\frac{1}{\sqrt{2^j}}]\}.$$

D'un autre côté :

$$\mathrm{Log}\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}\,\bar{x})}{1-\phi(\sigma_{j,k}\,x)}\} \geq -\sigma_{j,k}(\bar{x}-x).V(\sigma_{j,k}\,\bar{x})$$

$$\geq -\sigma_{j,k}(\bar{x}-x).(\sigma_{j,k}\,\bar{x} + \frac{1}{\sigma_{j,k}.\bar{x}})$$

$$\geq -K_1(|y| + x)\,(1 + \sigma_{j,k}^2.x^2)$$

$$\geq -\frac{2K}{\delta_1}\{|y| + x\}.\{1 + \delta_2.2^j.x^2\} \quad ;$$

on obtient finalement la minoration désirée :

$$I_1 \geq \{1 - \phi(\sigma_{j,k}.x)\}.\exp\{-K'(2^j.x^3 + 2^j.x^2.|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\},$$

où K' est une constante convenablement choisie.

A.3.5c. - *Inégalités relatives aux densités de* $U_{j,k}$.

De la démonstration de V.V. PETROV du théorème A.3.2., on tire les inégalités suivantes qui nous serviront au cours du paragraphe A.3.5d.) consacré à la comparaison de I_1 et I_2.

Lemme A.3.6.- Sous les hypothèses du théorème A.3.2. on obtient :

(A.3.22.) Pour tout y et tout x tel que h est solution de l'équation $\sigma^2_{j,k}.x = \bar{M}_{j,k}(h)$, on a, pour j assez grand et tout entier k :

$$f_{j,k}(\sigma^2_{j,k}.y) \leq 3\ f_{j,k}(\sigma^2_{j,k}.x).\exp\{-\ h.\sigma^2_{j,k}(y-x)\}$$

(A.3.23.) Soit un entier a égal à 0 ou 1.

Pour tout y tel que $|y| < \varepsilon_1$, soit y_o un réel de même signe que y vérifiant l'équation : $\sigma^2_{j-1,2k+a}.y_o = \bar{M}_{j-1,2k+a}(h_o)$;

il existe une constante K telle que pour tout j et k :

$$\sigma_{j-1,2k+a}.f_{j-1,2k+a}(\sigma^2_{j-1,2k+a}.y_o)\ \exp\{-\ h_o.\sigma^2_{j-1,2k+a}.y\} \leq K\ \sigma_{j,k}.f_{j,k}(\sigma^2_{j,k}y)$$

La preuve de ce lemme est donnée dans les deux sous-paragraphes suivants.

A.3.5.c1. - *Preuve de* (A.3.22.).

En adaptant la relation (A.2.36.) à notre cas où interviennent les suites triangulaires d'indices (j,k) ; $j, k = 0,1,2,\dots$, on obtient pour tout y :

$$\text{(A.3.24.)}\quad p_{j,k}(\sigma_{j,k}.y) = \frac{\sigma_{j,k}}{\bar{\sigma}_{j,k}} R_{j,k}(h).\exp\{-\ h.\sigma^2_{j,k}.y\}.\bar{p}_{j,k}\left(\frac{\sigma^2_{j,k}.y - \bar{M}_{j,k}}{\bar{\sigma}_{j,k}}\right)$$

où $p_{j,k}(y)$ désigne la densité de la v.a. $\dfrac{U_{j,k}}{\sigma_{j,k}}$.

Ecrivant la même relation pour x défini par l'équation $\sigma^2_{j,k}.x = \bar{M}_{j,k}(h)$ et reportant dans l'égalité (A.3.24.), on obtient :

$$p_{j,k}(\sigma_{j,k}.y) = C_{j,k}(y).p_{j,k}(\sigma_{j,k}.x)\ \exp\{-\ h.\sigma^2_{j,k}(y - x)\}$$

où l'on a noté :

$$C_{j,k}(y) = \frac{\bar{p}_{j,k}\left(\dfrac{\sigma^2_{j,k}.y - \bar{M}_{j,k}}{\bar{\sigma}_{j,k}}\right)}{\bar{p}_{j,k}(0)} \quad ;$$

d'autre part, de la relation (A.2.35.), il découle que :

$$\forall j \ , \ \forall k \ , \ \forall x : |\bar{p}_{j,k}(x) - \varphi(x)| \leq \frac{K_1}{\sqrt{2^j}} \ ,$$

d'où la majoration suivante de $C_{j,k}$, pour $2^j \geq 8\pi.K_1^2$:

$$C_{j,k}(y) \leq \frac{\varphi\left(\dfrac{\sigma^2_{j,k}.y - \bar{M}_{j,k}}{\bar{\sigma}_{j,k}}\right) + \dfrac{K_1}{\sqrt{2^j}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - \dfrac{K_1}{\sqrt{2^j}}} \leq \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{K_1}{\sqrt{2^j}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - \dfrac{K_1}{\sqrt{2^j}}} \leq 3 \ ;$$

il en résulte alors la relation (A.3.22.) cherchée en passant aux densités des variables aléatoires $U_{j,k}$.

A.3.5.c2. - <u>*Preuve de*</u> (A.3.23.)

Choisissons y_o tel que $0 < c_1 \leq |y_o| \leq c_2$ et définissons h_o par l'équation $\sigma^2_{j-1,2k+a}.y_o = \bar{M}_{j-1,2k+a}(h_o)$; il existe alors deux constantes c'_1 et c'_2 telles que : $0 < c'_1 \leq |h_o| \leq c'_2$, h_o et y_o étant de même signe. On suppose que :

$$c_2 < \frac{\alpha A}{\delta_2} \ .$$

où

$$\alpha = \inf_{\substack{j \\ |h|<A}} \left\{\frac{d^2}{dh^2} \operatorname{Log} R_j(h)\right\} > 0 \quad ;$$

ceci assure que $|h_o| < A$.

Il s'agit de montrer que la quantité :

$$C^a_{j,k}(y) = \frac{\sigma_{j-1,2k+a} \cdot f_{j-1,2k+a}(\sigma^2_{j-1,2k+a} \cdot y_o) \exp\{-h_o \cdot \sigma^2_{j-1,2k+a} \cdot y\}}{\sigma_{j,k} \cdot f_{j,k}(\sigma^2_{j,k} \cdot y)}$$

est uniformément majorée par rapport à j,k et y.

On choisira $y_o \geqslant 0$ (respectivement $y_o < 0$) si $y \geqslant 0$ (respectivement $y < 0$).

En utilisant les développements de V.V. PETROV de $f_{j-1,2k+a}(\sigma^2_{j-1,2k+a} \cdot y_o)$ et $f_{j,k}(\sigma^2_{j,k} \cdot y)$, on obtient :

$$C^a_{j,k}(y) = \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j-1,2k+a}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2_{j-1,2k+a} \cdot y_o^2 + \frac{\sigma^3_{j-1,2k+a}}{\sqrt{2^{j-1}}} y_o^3 \cdot \lambda_{j-1,2k+a}\left(\frac{\sigma_{j-1,2k+a}\, y_o}{\sqrt{2^{j-1}}}\right)\right\}$$

$$\times \exp\left\{-h_o \cdot \sigma^2_{j-1,2k+a} \cdot y + \frac{1}{2}\sigma^2_{j,k} \cdot y^2 - \frac{\sigma^3_{j,k}}{\sqrt{2^j}} y^3 \cdot \lambda_{j,k}\left(\frac{\sigma_{j,k}\, y}{\sqrt{2^j}}\right)\right\}$$

$$\times \frac{1 + O\left[(\sigma_{j-1,2k+a} \cdot |y_o| + 1)/\sqrt{2^{j-1}}\right]}{1 + O\left(\frac{\sigma_{j,k} \cdot |y| + 1}{\sqrt{2^j}}\right)} \quad ;$$

sachant que pour $|y|$ assez petit, il existe une constante C, telle que pour tout j et k :

$$|\lambda_{j,k}(y)| \leqslant C ,$$

choisissons $|y_o| \leqslant \frac{1}{2C\delta_2^{1/2}}$ et ε_1 suffisamment petit afin que les quantités :

$$q_1(y_o) = 1 - 2C\delta_2^{1/2}.|y_o|$$

et

$$q_2(y) = 1 - \frac{\delta_2}{C_1'\delta_1}.|y| - \frac{2\delta_2^{3/2}C}{C_1'\delta_1}.|y|^2$$

soient positives ; on obtient alors la majoration suivante :

$$C_{j,k}^a(y) \leqslant C'\frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j-1,2k+a}}.\exp\{-\ 2^{j-1}.\frac{\delta_1}{2}.y_o^2.q_1(y_o) - 2^j.\frac{\delta_1\ C_1'}{2}.|y|.q_2(y)\}\ ,$$

d'où découle l'inégalité (A.3.23.) désirée.

A.3.5d. - Comparaison des quantités I_1 et I_2.

Lemme A.3.7.- Sous les hypothèses du théorème A.3.2., il existe un réel A positif et un nombre $\varepsilon_1 > 0$ convenablement choisi tels que, pour $0 < x < \varepsilon_1$ et $|y| < \varepsilon_1$, si j est suffisamment grand, la quantité :

$$I_2 = 1 - F_{j,k}\ (B_{j,k}.A \mid B_{j,k}.y)$$

est infiniment petite par rapport à la quantité :

$$I_1 = F_{j,k}(B_{j,k}.A \mid B_{j,k}.y) - F_{j,k}(B_{j,k}.x \mid B_{j,k}.y)\ ,$$

uniformément en k .

Preuve : Etablissons tout d'abord, pour la densité conditionnelle $f_{j,k}(B_{j,k}.x \mid B_{j,k}.y)$, une majoration de la forme $\exp\{-\ K.2^j.x\}$ pour $x > A$ et tout y tel que $|y| < \varepsilon_1$.

Posons : $$a = a(y) = 1_{]-\infty,0[}(y)$$

$$a' = 1 - a$$

et $$z_a = \sigma_{j-1,2k+a}.y + (1-2a).\sigma_{j-1,2k+a'}.x \ .$$

D'après le lemme A.2.1., on peut écrire :

$$|\sigma_{j-1,2k+a'}.f_{j-1,2k+a'}(\sigma_{j-1,2k+a'}.z_{a'}) - \varphi(z_{a'})| = O(\frac{1}{\sqrt{2}^{j-1}})$$

ou équivalemment, il existe $K > 0$ tel que :

$$\sigma_{j-1,2k+a'}.f_{j-1,2k+a'}(\sigma_{j-1,2k+a'}.z_{a'}) \leqslant \varphi(z_{a'}) + \frac{K}{\sqrt{2}^{j-1}}$$

$$\leqslant 1 \quad \text{pour } j \text{ assez grand} \ .$$

Ceci, joint à la relation (A.3.13.) du lemme A.3.4., donne :

$$f_{j,k}(B_{j,k}.x \mid B_{j,k}.y) \leqslant \frac{\sigma_{j-1,2k+a}}{\sigma_{j,k}^2} \frac{f_{j-1,2k+a}(\sigma_{j-1,2k+a}.z_a)}{f_{j,k}(\sigma_{j,k}^2.y)} \ .$$

D'autre part, soit y_o défini par le lemme A.3.6. tel que :

$$|y_o| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \inf_y A(y) \quad \text{et } y_o \text{ gardant le même signe que } y \ .$$

Des relations (A.3.22.) et (A.3.23.) découle, pour j suffisamment grand et pour tout k :

$$\sigma_{j-1,2k+a}.f_{j-1,2k+a}(\sigma_{j-1,2k+a}.z_a)$$

$$\leqslant 3\ \sigma_{j-1,2k+a}.f_{j-1,2k+a}(\sigma_{j-1,2k+a}^2.y_o) \times$$

$$\exp\{-\ h_o.\sigma_{j-1,2k+a}^2.(y + (1-2a)\ \frac{\sigma_{j-1,2k+a'}}{\sigma_{j-1,2k+a}}\ x - y_o)\}$$

$$\leqslant 3K.\sigma_{j,k}.f_{j,k}(\sigma_{j,k}^2.y) \times$$

$$\exp\{-\ h_o.\sigma_{j-1,2k+a}^2.\left[(1-2a)\ \frac{\sigma_{j-1,2k+a'}}{\sigma_{j-1,2k+a}}\ x - y_o\right]\} \ ;$$

on en déduit, en reprenant la dernière majoration de la densité conditionnelle, que :

$$B_{j,k}.f_{j,k}(B_{j,k}.x|B_{j,k}.y) \leq 3K.\sigma_{j,k}.\exp\{-|h_o|\sigma^2_{j-1,2k+a}(\frac{\sigma_{j-1,2k+a'}}{\sigma_{j-1,2k+a}}x - |y_o|)\}$$

$$\leq 3K.\sqrt{\delta_2}.\sqrt{2^j}\exp\{-c'_1.\delta_1.2^{j-2}.x\},$$

d'où :

$$\text{(A.3.25.)}\quad I_2 = \int_A^\infty B_{j,k}.f_{j,k}(B_{j,k}.x|B_{j,k}.y)\,dx \leq \frac{c_o}{\sqrt{2^j}}\exp\{-c''_1.2^j.A\}.$$

Reste à prouver maintenant que $I_2 = o(I_1)$ lorsque j tend vers $+\infty$; sachant que :

$$1-\phi(\sigma_{j,k}.x) \geq \frac{\varphi(\sigma_{j,k}.x)}{\sigma_{j,k}.x+1} \geq \frac{\varphi(\sqrt{\delta_2}.\sqrt{2^j}.x)}{\sqrt{\delta_2}\sqrt{2^j}\,x+1},$$

on obtient, par application des relations (A.3.21.) et (A.3.25.) :

$$\frac{I_2}{I_1} \leq C_o.\sqrt{2\pi}.(\sqrt{\delta_2}.x+\frac{1}{\sqrt{2^j}})\exp\{K'(|y|+\frac{1}{\sqrt{2^j}})\}\exp\{-2^j.\bar{K}(x,y)\}$$

où :

$$\bar{K}(x,y) = \frac{C''_1\,\delta_1}{6K} - \frac{C''_1}{3}|y| - \frac{\delta_2}{2}x^2 - K'(x^3+x^2|y|) ;$$

pour x et $|y|$ suffisamment petits, la quantité $\bar{K}(x,y)$ peut être rendue strictement positive et même supérieure ou égale à $\frac{C''_1\,\delta_1}{12\,K}$; ceci revient en fait à remplacer ε_1 par une autre valeur plus petite convenable ; d'où s'en déduit le résultat cherché :

$$\frac{I_2}{I_1} \leq C'_o\,.\exp\{-2^j.\frac{C''_1\,\delta_1}{12\,K}\}.$$

A.3.5e. - *Théorème de grandes déviations pour les fonctions de répartition conditionnelles.*

Théorème A.3.4.- Sous les hypothèses du théorème A.1.3. il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour $|y| < \varepsilon_1$:

(A.3.26a.) si $0 \leqslant x < \varepsilon_1$:

$$\frac{1 - F_{j,k}(B_{j,k}x|B_{j,k}y)}{1 - \phi(\sigma_{j,k}x)} = \exp\{O(2^j x^3 + 2^j x^2 |y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}$$

(A.3.26b.) si $-\varepsilon_1 < x < 0$:

$$\frac{F_{j,k}(B_{j,k}x|B_{j,k}y)}{\phi(\sigma_{j,k}x)} = \exp\{O(2^j |x|^3 + 2^j x^2 |y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2^j}})\}$$

$O(.)$ est uniforme pour $|x| < \varepsilon_1$, $|y| < \varepsilon_1$.

Preuve : Compte tenu des résultats précédents, la relation (A.3.26a.) se déduit clairement de la double inégalité :

$$I_1 \leqslant 1 - F_{j,k}(\sigma^2_{j,k}x|\sigma^2_{j,k}y) \leqslant (1+\varepsilon)I_1 \quad , \quad \forall\varepsilon > 0.$$

La relation (A.3.26b.) en résulte en remarquant que :

$$\phi(-\sigma_{j,k}x) = 1 - \phi(\sigma_{j,k}x)$$

et

$$F_{j,k}(-B_{j,k}x|B_{j,k}y) = 1 - F_{j,k}(B_{j,k}x|B_{j,k}y)$$

du fait que la fonction $t \to f_{j,k}(B_{j,k}t|B_{j,k}y)$ est paire.

Ceci achève la preuve du théorème A.3.4..

* * *

PARTIE B

DÉVELOPPEMENT EN VUE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE KOMLÓS, MAJOR ET TUSNÁDY GÉNÉRALISÉ.

Dans cette seconde partie, on va reprendre la méthode quantile et dyadique, utilisée par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY dans le cas i.i.d., pour la construction des variables aléatoires X_j en question dans le cas où celle-ci ne sont pas nécessairement identiquement distribuées ; Tel est le sujet auquel sera consacré le chapitre B.1, dans lequel on établira aussi quelques inégalités relatives aux sommes partielles aléatoires et à leurs variances ainsi qu'une inégalité résultant des formules d'interpolation, qui nous serviront pour la suite au chapitre B.4.

Le second chapitre de cette partie reprend successivement chacune des étapes de la méthode suivie par ces auteurs, en introduisant quatre sous-ensembles A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, dont la réunion contient l'ensemble de départ, à majorer en probabilité dans l'inégalité équivalente à (A.1.16) à établir ; ceci afin que cette inégalité elle-même se déduise des quatre majorations de $P(A_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, ayant chacune la même forme que la majoration dans l'inégalité équivalente à démontrer. Dans ce même chapitre seront établies immédiatement les majorations de $P(A_1)$ et $P(A_2)$.

Les chapitres B.3 et B.4 traiteront respectivement des deux majorations restantes ; ils seront alors réservés à quelques résultats intermédiaires pour établir les majorations de $P(A_3)$ et $P(A_4)$; celles-ci seront établies au début de la troisième partie.

Enfin, une technique de séparation en blocs de variables aléatoires indépendants, inspirée de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, indispensable pour établir la majoration de $P(A_4)$, fera l'objet du dernier chapitre B.5.

CHAPITRE B1

CONSTRUCTION DYADIQUE - METHODE QUANTILE

B.1.1. - INTRODUCTION.-

On va tout d'abord donner quelques propriétés de la construction dyadique d'une suite, méthode utilisée implicitement par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY et que nous utiliserons systématiquement.

On exposera ensuite le principe de la méthode de construction quantile qui n'est qu'une simple généralisation au cas de v.a. non identiquement distribuées.

B.1.2. - CONSTRUCTION DYADIQUE D'UNE SUITE.-

B.1.2a. - *Notations.*

On considère une suite $\{x_n\}$ de nombres réels et les sommes partielles :

$$s_o = 0 \qquad s_1 = x_1 , \ldots, \; s_n = x_1 + \ldots + x_n .$$

Introduisons les notations suivantes :

$$u_j = s_{2^j} \qquad , \quad \tilde{u}_j = u_{j+1} - u_j \qquad , \qquad j \geqslant 0$$

$$u_{j,k} = s_{(k+1)2^j} - s_{k2^j} \qquad , \qquad k \geqslant 0 \qquad j \geqslant 0$$

$$\hat{u}_{j,k} = u_{j-1,2k} - u_{j-1,2k+1} \quad , \quad k \geqslant 0 \qquad j \geqslant 1$$

et pour $2^j \leqslant n \leqslant 2^{j+1}$:

$$\tilde{s}_n = \frac{2^{j+1}-n}{2^j} s_{2^j} + \frac{n-2^j}{2^j} s_{2^{j+1}} \quad ,$$

$$s'_n = s_n - \tilde{s}_n .$$

B.1.2b. - *Principe de construction* - *Lemme.*

La donnée des quantités u_o , $\tilde{u}_j$ et $\hat{u}_{j,k}$ permet de reconstruire $\{s_n\}$, d'où la suite $\{x_n\}$.

Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme B.1.1.- Soit la fonction :

$$e_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$s \rightsquigarrow e_1(s) = 2\inf\{s,1-s\}.\mathbb{1}_{[0,1]}(s).$$

Pour $2^j \leqslant n \leqslant 2^{j+1}$ où n est un entier positif, posons :

$$i_n(q) = \left[\frac{n}{2^{j-q}}\right].$$

On a alors :

$$(B.1.1.) \qquad s'_n = \sum_{q=0}^{j-1} \frac{1}{2}\,\hat{u}_{j-q,i_n(q)} \cdot e_1\{\frac{n}{2^{j-q}} - i_n(q)\}.$$

Preuve :

Désignons, si $2^j \leqslant t \leqslant 2^{j+1}$, par $x(t)$ la ligne polygonale dont les 2^j+1 sommets ont pour coordonnées respectives (n,s_n), n désignant un entier compris entre 2^j et 2^{j+1}, et par $\tilde{x}(t)$ la droite d'équation :

$$\tilde{x}(t) = \frac{2^{j+1}-t}{2^j}\, s_{2^j} + \frac{t-2^j}{2^j}\, s_{2^{j+1}} .$$

Alors $x'(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ est la ligne polygonale dont les 2^j+1 sommets ont pour coordonnées respectives (n,s'_n).

Posons successivement :

$$t = 2^j(1+s) \quad , \quad s \in [0,1]$$

$$x(t) = y(s), \quad \tilde{x}(t) = \tilde{y}(s) \quad \text{et} \quad x'(t) = y'(s),$$

d'où $y'(0) = y'(1) = 0$ et $y'(s)$ est une ligne polygonale dont les 2^j+1 sommets ont pour coordonnées $(\frac{p}{2^j}, y'(\frac{p}{2^j}))$, $p = 0,1,\ldots,2^j$.

On a alors par utilisation du développement de Schauder [19] appliqué à la fonction continue y' :

$$y'(s) = \begin{cases} \sum_{q=0}^{j-1} \sum_{n=2^q}^{2^{q+1}-1} \eta_n . e_n(s) & \text{si } s \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $e_1(s) = 2\inf\{s,1-s\}.1_{[0,1]}(s)$,

et pour $n = 2^q+p$ où $0 \leqslant p < 2^q$, $q \geqslant 0$:

$$e_n(s) = e_1(2^q s - p) \qquad ;$$

la suite finie $\{\eta_n\}$ est définie par :

$$\eta_n = y'(\frac{2p+1}{2^{q+1}}) - \frac{1}{2}\{y'(\frac{p}{2^q}) + y'(\frac{p+1}{2^q})\}$$

$$= x'(\frac{(2n+1)2^j}{2^{q+1}}) - \frac{1}{2}\{x'(\frac{n2^j}{2^q}) + x'(\frac{(n+1)2^j}{2^q})\}$$

$$= x(\frac{(2n+1)2^j}{2^{q+1}}) - \frac{1}{2}\{x(\frac{n2^j}{2^q}) + x(\frac{(n+1)2^j}{2^q})\}$$

$$= s_{(2n+1)2^{j-q-1}} - \frac{1}{2}\{s_{n2^{j-q}} + s_{(n+1)2^{j-q}}\} \qquad ,$$

or, on a clairement l'égalité suivante :

$$\forall\, n,k \qquad \hat{u}_{n,k} = 2s_{(2k+1)2^{n-1}} - \{s_{(k+1)2^n} + s_{k2^n}\} \qquad ,$$

d'où :

$$\eta_n = \frac{1}{2}\,\hat{u}_{j-q,n} .$$

On a donc :

$$y'(s) = \sum_{q=0}^{j-1} \sum_{m=2^q}^{2^{q+1}-1} \frac{1}{2}\,\hat{u}_{j-q,m} . e_1\{ 2^q(1+s)-m\} . 1_{[0,1]}(s) ,$$

de plus,

$$y'(\frac{n}{2^j} - 1) = x'(n) = s'_n$$

et $$e_1(2^q . \frac{n}{2^j} - m) = 0 \quad \text{si} \quad m \neq \left[\frac{n}{2^{j-q}}\right] ,$$

d'où finalement l'expression de s'_n annoncée :

$$s'_n = \sum_{q=0}^{j-1} \frac{1}{2}\,\hat{u}_{j-q,i_n(q)} . e_1\{\frac{n}{2^{j-q}} - i_n(q)\} ,$$

où l'on a posé : $i_n(q) = \left[\frac{n}{2^{j-q}}\right]$ = partie entière de $\frac{n}{2^{j-q}}$.

Remarque :

La formule (B.1.1.) peut être précisée sous la forme :

$$\text{(B.1.2.)} \qquad s'_n = \sum_{q=0}^{q_n-1} \frac{1}{2}\,\hat{u}_{j-q,i_n(q)} . e_1\{\frac{n}{2^{j-q}} - i_n(q)\}$$

où $$q_n = \inf\{q \; ; \; \frac{n}{2^{j-q}} \; \text{entier}\} \; ;$$

en effet, on a :

$$n = 2^j + a_1 2^{j-1} + a_2 2^{j-2} + \ldots + a_j$$

où les coefficients $a_1, \ldots, a_j$ valent 0 ou 1 et $\sum_1^j a_i > 0$.

Soit r le dernier indice tel que :

$$a_r = 1 , \qquad a_i = 0 \text{ pour } i > r ,$$

d'où,

$$\frac{n}{2^{j-r}} = 2^r + a_1 2^{r-1} + \ldots + 2a_{r-1} + a_r$$

et $$\frac{n}{2^{j-r+1}} = 2^{r-1} + a_1 2^{r-2} + \ldots + a_{r-1} + \frac{1}{2} .$$

On en déduit que :

$$q_n = r = \inf\{q \; ; \; \frac{n}{2^{j-q}} \text{ entier}\}.$$

B.1.2c.- Applications.

B.1.2.c1.- Transposant les notations précédentes, on obtient le lemme suivant que l'on utilisera au paragraphe B.1.5.

Lemme B.1.2.- Soient M et k deux entiers positifs. Si $2^{M+k} \leqslant j2^M < 2^{M+k+1}$, posons :

(B.1.3.) $$j(q) = \left[\frac{j}{2^{k-q}}\right] , \qquad 0 \leqslant q \leqslant k ,$$

et

(B.1.4.) $$C_q(j) = \frac{1}{2} \inf \{\frac{j}{2^{k-q}} - j(q), 1+j(q) - \frac{j}{2^{k-q}}\} \; ;$$

alors, on a l'égalité suivante :

(B.1.5.) $$s'_{j2^M} = \sum_{q=0}^{k-1} C_q(j).\hat{u}_{M+k-q,j(q)}.$$

Preuve :

Pour $2^k \leqslant j \leqslant 2^{k+1}$, la suite s'_{j2^M} joue le même rôle que la suite s'_n pour $2^j \leqslant n \leqslant 2^{j+1}$.

On a alors d'après (B.1.2.) :

(B.1.9.) $$s'_{j2^M} = \sum_{q=0}^{q_j-1} \frac{1}{2}\, \hat{u}_{M+k-q,j(q)} . e_1\left\{\frac{j}{2^{k-q}} - j(q)\right\}$$

où $$q_j = \inf\left\{ q \;;\; \frac{j}{2^{k-q}} \text{ entier}\right\} \leqslant k$$

et $$j(q) = \left[\frac{j2^M}{2^{M+k-q}}\right] = \left[\frac{j}{2^{k-q}}\right].$$

En rajoutant à la somme (B.1.9.) les termes associés à l'indice j qu'on s'est donné et qui sont éventuellement nuls, on a la relation cherchée :

$$s'_{j2^M} = \sum_{q=0}^{k-1} C_q(j)\hat{u}_{M+k-q,j(q)}$$

où $C_q(j)$ est défini par la relation (B.1.4.).

B.1.2.c2.- Résultats sur les sommes partielles d'une suite d'un espace de Banach.

Soit une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans un espace de Banach X ; adoptons les mêmes notations qu'au § B.1.2a.

Théorème B.1.1.- La condition :

(B.1.6.) $$\exists C > 0 \quad : \quad \sup_{j,k} |\hat{u}_{j,k}| \leqslant C$$

équivaut aux deux conditions suivantes :

(B.1.7a) $\exists\; x \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = x$,

(B.1.7b) $\exists\; K > 0,\ \forall\, n \geq 1 \;:\; ||x - \frac{s_n}{n}|| \leq \frac{K}{n}$.

Preuve :

Remarquons tout d'abord que la condition (B.1.6.) implique que :

$\exists\; x \in X,\ \exists\; C > 0$ tel que :

$$\lim_{j\to\infty} \frac{u_j}{2^j} = x \quad \text{existe et} \quad \forall\, j \;:\; ||x - \frac{u_j}{2^j}|| \leq \frac{C}{2^j} \quad ;$$

en effet, de l'égalité :

$$\forall\, j \;:\; \frac{u_j}{2^j} = x_1 + \sum_{k=1}^{j} \frac{\hat{u}_{k,0}}{2^k} \;,$$

on déduit que $\frac{u_j}{2^j}$ est somme partielle d'une série normalement convergente dans X, donc $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{u_j}{2^j}$ existe dans X ; de plus :

$$||x - \frac{u_j}{2^j}|| \leq C \cdot \sum_{j+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{C}{2^j} \;.$$

Supposons maintenant que : $2^j < n < 2^{j+1}$;

d'après la relation (B.1.1.) établie au lemme B.1.1., on a :

$$s_n = s_{2^j} + (\frac{n}{2^j} - 1)(s_{2^{j+1}} - s_{2^j}) + \sum_{q=0}^{j-1} \frac{1}{2}\, \hat{u}_{j-q,i_n(q)} \cdot e_1\{\frac{n}{2^{j-q}} - i_n(q)\},$$

d'où, en écrivant :

$$nx = 2^j x + (\frac{n}{2^j} - 1).2^j x \quad , \text{ on obtient :}$$

$$||s_n-nx|| \leqslant ||s_{2^j}-2^jx|| + (\frac{n}{2^j}-1)||(s_{2^{j+1}}-s_{2^j}) - 2^jx||$$

$$+ \sum_{q=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-q}} \sup_{j,k}||\hat{u}_{j-q,i_n(q)}||.$$

Ceci, par utilisation de l'hypothèse (B.1.6.), en remarquant que :

$$||(s_{2^{j+1}}-s_{2^j}) - 2^jx|| \leqslant ||s_{2^{j+1}}-2^{j+1}x|| + ||s_{2^j}-2^jx|| \leqslant 2C,$$

donne :

$$||s_n-nx|| \leqslant C + (\frac{n}{2^j}-1)2C + C\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^j}\} \leqslant 2C.\frac{n}{2^j} \quad ;$$

d'où finalement :

$$||\frac{s_n}{n} - x|| \leqslant \frac{4C}{n} \quad .$$

Réciproquement, les conditions (B.1.7.) impliquent bien (B.1.6.) ; en effet, il suffit de remarquer pour cela que :

$$||\hat{u}_{j,k}|| \leqslant 2||s_{(2k+1)2^{j-1}} - (2k+1)2^{j-1}x||$$

$$+ ||s_{k2^j} - k2^jx|| + ||s_{(k+1)2^j} - (k+1)2^jx|| \leqslant 4C.$$

On va maintenant établir un lemme qui nous servira au § C.2.2.

Lemme B.1.3.- Chacune des conditions :

(B.1.8.) $$\sum_{j=1}^{\infty} ||x_j-x|| < +\infty$$

ou plus généralement :

(B.1.9.) $$\sum_{j=1}^{\infty} j||x_{j+1}-x_j|| < +\infty$$

est suffisante pour obtenir les conditions (B.1.7.).

Preuve :

L'hypothèse (B.1.8.) implique clairement que :

$$n \left\|\frac{s_n}{n} - x\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)\right\| \leqslant K = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x\| < +\infty$$

d'où (B.1.7b).

Si l'hypothèse (B.1.9.) est réalisée, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{j+1} - x_j\|$ converge d'où la suite :

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) \quad \text{converge fortement}$$

vers une limite x et :

$$\|x_n - x\| \leqslant \sum_{n}^{\infty} \|x_{j+1} - x_j\|.$$

Dès lors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \|x_{j+1} - x_j\| = \sum_{j=1}^{\infty} j \|x_{j+1} - x_j\| \quad ;$$

il en résulte que la condition (B.1.8.) est réalisée chaque fois que (B.1.9.) l'est.

L'exemple de la suite réelle $(x_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\begin{cases} x_n = 0 & \text{si} \quad n \neq 2^j \quad , \qquad j = 0,1,\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{(j+1)^2} & \text{si} \quad n = 2^j \end{cases}$$

prouve que (B.1.8.) peut être réalisée sans que (B.1.9.) le soit.

B.1.3. - *INEGALITES RELATIVES AUX SOMMES PARTIELLES ALEATOIRES ET A LEURS VARIANCES.-*

B.1.3a. - *Notations.*

Soit une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées. Adoptons les notations suivantes reprises pour l'essentiel de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, conformes à celles que nous avons utilisées ci-dessus pour les suites numériques :

$$\text{(B.1.10.)}\quad \begin{cases} S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad , \quad S_o = 0 \\ U_j = S_{2^j} \quad , \quad \tilde{U}_j = U_{j+1} - U_j \\ U_{j,k} = S_{(k+1)2^j} - S_{k2^j} \\ \hat{U}_{j,k} = U_{j-1,2k} - U_{j-1,2k+1} \quad ; \end{cases}$$

ceci pour tout j, k et n de $\mathbb{N}$.

B.1.3b. - *Lemme dyadique.*

En introduisant la suite de v.a. $\{X_j\}$ à la place de la suite réelle $\{x_j\}$, on a, d'après le lemme B.1.2., une identité analogue à celle obtenue pour les sommes partielles de $\{x_j\}$.

En notant, pour $2^{M+k} \leqslant j2^M \leqslant 2^{M+k+1} - 1$:

$$\text{(B.1.11.)}\qquad \tilde{S}_{j2^M} = \frac{2^{k+1}-j}{2^k} S_{2^{M+k}} + \frac{j-2^k}{2^k} S_{2^{M+k+1}}$$

et

$$\text{(B.1.12.)}\qquad S'_{j2^M} = S_{j2^M} - \tilde{S}_{j2^M} \quad ,$$

le lemme B.1.2. se transpose sous la forme :

Lemme B.1.4.- Soient M et k deux entiers positifs ;
si $2^{M+k} \leqslant j2^M < 2^{M+k+1}$,

alors :

(B.1.13.) $$S'_{j2^M} = \sum_{q=0}^{k-1} C_q(j).\hat{U}_{M+k-q,j(q)} \quad ,$$

où $j(q)$ et $C_q(j)$ sont définis respectivement par (B.1.3.) et (B.1.4.).

B.1.3c. - Inégalités relatives aux variances des sommes partielles.

Nous connaissons la suite $\{\sigma_n^2\}$ des variances et la suite $A_o = 0,\dots,A_n = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ des sommes partielles.

Réintroduisons les notations précédemment définies :

$$B_j = A_{2^j} \qquad , \qquad \tilde{B}_j = B_{j+1} - B_j$$

$$B_{j,k} = A_{(k+1)2^j} - A_{k2^j} = \sigma^2_{j,k}$$

$$\hat{B}_{j,k} = B_{j-1,2k} - B_{j-1,2k+1} ,$$

qui concordent avec celles que l'on vient d'introduire pour les suites.

Si $2^{M+k} \leqslant j2^M < 2^{M+k+1}$, on peut également poser selon le même principe :

(B.1.14.) $$A'_{j2^M} = A_{j2^M} - \left\{\frac{2^{k+1}-j}{2^k} A_{2^{M+k}} + \frac{j-2^k}{2^k} A_{2^{M+k+1}}\right\} .$$

Par simple application du lemme B.1.2. cette somme s'écrit :

(B.1.15.) $$A'_{j2^M} = \sum_{q=0}^{k-1} C_q(j).\hat{B}_{M+k-q,j(q)} ,$$

où le coefficient $C_q(j)$ est le même que précédemment.

Nous serons amené à considérer la somme partielle suivante, si $0 \leqslant r \leqslant k-1$:

(B.1.16.) $$A''_r = \sum_{q=0}^{r} C_q(j).\hat{B}_{M+k-q,j(q)} \quad ;$$

A''_{k-1} n'étant autre que A'_{j2^M} .

Relativement à ces sommes partielles, le lemme suivant permet d'établir une majoration que nous utiliserons au § B.1.5.

Lemme B.1.5.- Les sommes partielles $A''_o,\ldots,A''_r,\ldots,A''_{k-1}$ vérifient les inégalités suivantes :

(B.1.17.) $$|A''_{k-1} - A''_r| \leqslant B_{M+k-r-1,j(r+1)} + \frac{1}{2^{r+1}} \tilde{B}_{M+k}$$

(B.1.18.) $$|A''_{k-1}| \leqslant \tilde{B}_{M+k} .$$

Preuve :

D'après (B.1.14.), la quantité A''_{k-1} peut s'écrire sous la forme :

(B.1.19.) $$A''_{k-1} = E(S^2_{j2^M} - S^2_{2^{M+k}}) + \{\frac{j}{2^k} - 1\}\, E(S^2_{2^{M+k}} - S^2_{2^{M+k+1}}) .$$

On obtient une expression semblable pour A''_r en remplaçant simplement :

$$j2^M = 2^{k+M} + a_1 2^{k-1+M} + \ldots + a_k 2^M$$

par :

$$2^{k+M} + a_1 2^{k-1+M} + \ldots + a_r 2^{k+M-r} + a_{r+1} 2^{k+M-r-1}$$

$$= 2^{k+M-r-1}.(a_{r+1} + 2a_r + \ldots + 2^r a_1 + 2^{r+1})$$

$$= 2^{k+M-r-1}.\left[\frac{j}{2^{k-r-1}}\right] = j(r+1).\,2^{k+M-r-1},$$

d'où l'expression suivante de A''_r :

$$A''_r = E(S^2_{j(r+1)2^{k+M-r-1}} - S^2_{2^{k+M}}) - \{\frac{j(r+1)}{2^{r+1}} - 1\}\, E(S^2_{2^{k+M+1}} - S^2_{2^{k+M}}) \quad ;$$

on a alors :

$$(B.1.20.)\quad A''_{k-1} - A''_r = E(S^2_{j2^M} - S^2_{j(r+1)2^{k+M-r-1}}) - \{\frac{j}{2^k} - \frac{j(r+1)}{2^{r+1}}\}.E(S^2_{2^{k+M+1}} - S^2_{2^{k+M}}),$$

or $\frac{j(r+1)}{2^{r+1}} \leqslant \frac{j}{2^k} < \frac{j(r+1)+1}{2^{r+1}}$

donc $j(r+1)2^{k+M-r-1} \leqslant j2^M < (j(r+1)+1).\,2^{k+M-r-1}$,

ce qui permet la majoration suivante du fait que les variables aléatoires X_j sont centrées, indépendantes :

$$E(S^2_{j2^M} - S^2_{j(r+1)2^{k+M-r-1}}) \leqslant E(S^2_{(j(r+1)+1)2^{k+M-r-1}} - S^2_{j(r+1)2^{k+M-r-1}})$$

$$\leqslant B_{M+k-r-1,\, j(r+1)} \, .$$

On déduit alors de (B.1.19.) et (B.1.20.) respectivement, les majorations cherchées suivantes :

$$|A''_{k-1}| \leqslant E(S^2_{2^{M+k+1}} - S^2_{2^{M+k}})\{1 - (\frac{j}{2^k} - 1)\}$$

$$\leqslant B_{M+k,1}\{2 - [\frac{j}{2^k}]\} = B_{M+k,1} \quad ;$$

et :

$$|A''_{k-1} - A''_r| \leqslant B_{M+k-r-1,\, j(r+1)} + \frac{1}{2^{r+1}} B_{M+k,1} \, .$$

B.1.4. - METHODES QUANTILE ET QUANTILE CONDITIONNELLE.-

Nous allons maintenant utiliser les résultats des lemmes A.1.1. et A.1.2. démontrés dans la partie A. Ces lemmes vont nous permettre de transposer au cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes non identiquement distribuées la méthode de construction quantile introduite par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY lorsque les variables ont même loi.

B.1.4a. - *Introduction* - *Notations et remarques*.

On se donne donc une suite de variables aléatoires réelles normales indépendantes et centrées $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ de variances $\sigma_j^2 = E(Y_j^2)$, $j = 1,2,\dots$ et on se propose de construire, à partir de celle-ci, une suite de v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ indépendantes, centrées, ayant pour variances $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2, \dots$

Comme en (B.1.10.), on notera :

$$\text{(B.1.21.)}\quad \begin{cases} T_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad , \quad T_o = 0 & \\ V_j = T_{2^j} \quad , \quad \tilde{V}_j = V_{j+1} - V_j & j \text{ entier} \geq 0 \\ V_{j,k} = T_{(k+1)2^j} - T_{k2^j} & j \text{ entier} \geq 0 \\ \hat{V}_{j,k} = V_{j-1,2k} - V_{j-1,2k+1} & j \text{ entier} \geq 1 \;. \end{cases}$$

En remarquant, d'après l'hypothèse (A.1.12.), que :

$$\forall j,k \qquad \sigma_{j,k} > 0 \quad ,$$

on définit de nouvelles v.a. $\tilde{U}_{j,k}$ et $\tilde{V}_{j,k}$ par :

$$\text{(B.1.22a.)}\qquad \tilde{U}_{j,k} = \frac{\sigma_{j-1,2k+1}}{\sigma_{j-1,2k}} U_{j-1,2k} - \frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sigma_{j-1,2k+1}} U_{j-1,2k+1}$$

et

(B.1.22b.) $$\tilde{V}_{j,k} = \frac{\sigma_{j-1,2k+1}}{\sigma_{j-1,2k}} V_{j-1,2k} - \frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sigma_{j-1,2k+1}} V_{j-1,2k+1} \quad .$$

On notera aussi :

$$F_{j,k}(x) = P\{U_{j,k} < x\} ,$$

$$G_{j,k}(t) = \sup\{x ; F_{j,k}(x) \leqslant t\} \quad , \quad t \in]0,1[\quad ;$$

$$F_{j,k}(x|y) = P\{\tilde{U}_{j,k} < x | U_{j,k} = y\}$$

et

$$G_{j,k}(t|y) = \sup\{x \; ; \; F_{j,k}(x|y) \leqslant t\} \quad \text{pour} \quad t \in]0,1[.$$

Les v.a. $\tilde{U}_{j,k}$ et $\tilde{V}_{j,k}$ sont donc bien définies, et l'intérêt de leur introduction réside dans le fait que, les v.a. $V_{j,k}$ et $\tilde{V}_{j,k}$ sont normales, centrées, de même variance $\sigma^2_{j,k} = B_{j,k}$, et indépendantes du fait de leur orthogonalité.

En effet, la méthode employée par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY utilise le fait que les v.a. $\hat{V}_{j,k}$ et $V_{j,k}$ sont indépendantes, ce qui est réalisé dans le cas où les v.a. $\{Y_j\}$ sont identiquement distribuées. Le même principe de construction nécessite l'introduction des nouvelles v.a. $\tilde{V}_{j,k}$ et $\tilde{U}_{j,k}$ dans le cas où les v.a. $\{Y_j\}$ ne sont pas nécessairement de même loi.

La variable aléatoire $\tilde{V}_{j,k}$ est introduite de telle façon qu'elle soit indépendante de $V_{j,k}$ de manière à pouvoir utiliser la construction définie au lemme A.1.2.

Remarquons enfin que l'inégalité suivante est clairement vérifiée :

(B.1.23.) $$B_{j,k} = B_{j-1,2k} + B_{j-1,2k+1} \quad .$$

B.1.4b. - *Construction des v.a.* X_j *par la méthode quantile.*

On commence par la construction des v.a. $U_j = S_{2^j}$, puis on procède à celle des v.a. $U_{j,k}$, grâce à la transformation quantile conditionnelle introduite par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY ; d'où résultera celle des v.a. X_j du fait que :

$$\forall k \geq 1 \qquad X_k = U_{o,k-1} .$$

La construction des v.a. U_j est réalisée si l'on pose :

$$\text{(B.1.24)} \qquad \begin{cases} U_o = G_{o,o}\left[\phi(V_o/\sigma_1)\right] \\ \tilde{U}_o = G_{o,1}\left[\phi(\tilde{V}_o/\sigma_1)\right] \\ \vdots \\ \tilde{U}_j = G_{j,1}\left[\phi(\tilde{V}_j/\tilde{\sigma}_j)\right]. \end{cases}$$

Il est clair alors, du fait de l'indépendance des variables aléatoires normales $V_o, \tilde{V}_o,\ldots,\tilde{V}_j$; que les v.a. $U_o,\tilde{U}_o,\ldots,\tilde{U}_j$ sont indépendantes.

D'autre part, la loi de U_o est définie par la fonction de répartition $F_{o,o}$; en effet :

$$P(U_o < x) = P\{\phi(V_o/\sigma_1) < F_{o,o}(x)\} = F_{o,o}(x)$$

d'après le lemme A.1.1.
De même la loi de $\tilde{U}_j$ est définie par la fonction de répartition $F_{j,1}$ d'après ce même lemme.

Ceci permet ainsi de construire la suite $\{U_j\}$ d'après les égalités :

$$
\text{(B.1.25.)} \quad \begin{cases} U_1 = U_o + \tilde{U}_o \\ U_2 = U_o + \tilde{U}_o + \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ U_j = U_o + \tilde{U}_o + \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \ldots + \tilde{U}_{j-1} \ . \end{cases}
$$

Il nous faut maintenant individualiser les v.a. X_n qui ne figurent jusqu'à présent que par leurs sommes partielles U_j. L'emploi systématique du lemme A.1.2. va nous permettre de faire éclater ces sommes en deux sommes partielles de même taille, indépendantes et en réitérant le procédé, de faire apparaître les variables X_n. Ceci est réalisé en construisant les v.a. $U_{j,k}$.

Cette construction se fait par une récurrence dont le principe est défini comme suit :

Nous connaissons les v.a. $\tilde{U}_j = U_{j,1}$ pour chaque j ; nous allons d'abord construire les v.a. $\tilde{U}_{j,1}$, ce qui nous permettra de définir les v.a. $U_{j-1,2}$ et $U_{j-1,3}$; de même la construction de $\tilde{U}_{j-1,2}$ et $\tilde{U}_{j-1,3}$ permet de définir $U_{j-2,\ell}$, $\ell = 4,5,6$ et 7 ; et ainsi de suite, jusqu'à la $k^{\text{ème}}$ étape où, ayant construit les 2^k v.a. $U_{j-k,\ell}$ pour $\ell = 2^k,\ldots,2^{k+1}-1$, la connaissance des v.a. $\tilde{U}_{j-k,\ell}$ permettra de définir $U_{j-k-1,\ell}$ pour $\ell = 2^{k+1},\ldots,2^{k+2}-1$ grâce aux égalités suivantes :

$$
\text{(B.1.26.)} \quad \begin{cases} U_{j-k,\ell} = U_{j-k-1,2\ell} + U_{j-k-1,2\ell+1} \\ \tilde{U}_{j-k,\ell} = \dfrac{\sigma_{j-k-1,2\ell+1}}{\sigma_{j-k-1,2\ell}} U_{j-k-1,2\ell} - \dfrac{\sigma_{j-k-1,2\ell}}{\sigma_{j-k-1,2\ell+1}} U_{j-k-1,2\ell+1} . \end{cases}
$$

On vérifie alors à chaque étape que les v.a. $U_{j-k,\ell}$ sont indépendantes.

Supposons donc que pour $0 \leqslant k$ fixé $\leqslant j-1$, on ait construit les 2^k v.a. $U_{j-k,\ell}$ indépendantes et de loi définie par les fonctions répartition $F_{j-k,\ell}$, (ℓ variant de 2^k à $2^{k+1}-1$), connues a priori.

La donnée des v.a. normales indépendantes $V_{j-k,\ell}$ alors permet de construire les v.a. normales indépendantes $\tilde{V}_{j-k,\ell}$, $\ell = 2^k,\ldots,2^{k+1}-1$. De plus, $V_{j-k,\ell}$ et $\tilde{V}_{j-k,\ell}$ sont indépendantes entre elles car elles sont normales centrées et orthogonales ; elles ont de plus même variance. C'est pour cette raison qu'on a été amené à introduire la nouvelle définition des $\tilde{V}_{j,k}$, qui est une simple généralisation de celle introduite par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, par introduction des coefficients $\frac{\sigma_{j-1,2k+1}}{\sigma_{j-1,2k}}$ et $\frac{\sigma_{j-1,2k}}{\sigma_{j-1,2k+1}}$, égaux à 1 dans le cas des v.a.i.i.d..

Chacune des v.a. $\tilde{V}_{j-k,\ell}$ étant indépendante des v.a. $U_{j-k,\ell}$ construites à partir des $V_{j-k,\ell}$ seulement, on pose alors :

$$\tilde{U}_{j-k,\ell} = G_{j-k,\ell}\left[\phi(\tilde{V}_{j-k,\ell}/\sigma_{j-k,\ell})\,|\,U_{j-k,\ell}\right] \tag{B.1.27.}$$

et on définit les v.a. $U_{j-k-1,2\ell}$ et $U_{j-k-1,2\ell+1}$ par les égalités :

$$\left\{\begin{aligned} U_{j-k-1,2\ell} &= \frac{B_{j-k-1,2\ell}}{B_{j-k,\ell}}\,U_{j-k,\ell} + \frac{\tilde{B}_{j-k,\ell}}{B_{j-k,\ell}}\,\tilde{U}_{j-k,\ell} \quad , \\ U_{j-k-1,2\ell+1} &= \frac{B_{j-k-1,2\ell+1}}{B_{j-k,\ell}}\,U_{j-k,\ell} - \frac{\tilde{B}_{j-k,\ell}}{B_{j-k,\ell}}\,\tilde{U}_{j-k,\ell} \,. \end{aligned}\right. \tag{B.1.28.}$$

D'après le lemme quantile conditionnel A.1.2., les v.a. $U_{j-k-1,2\ell}$ et $U_{j-k-1,2\ell+1}$ possèdent bien les lois requises définies par les fonctions de répartition respectives $F_{j-k-1,2\ell}$ et $F_{j-k-1,2\ell+1}$;

elles sont indépendantes du fait de l'indépendance de $V_{j-k,\ell}$ et $\tilde{V}_{j-k,\ell}$ donc de $U_{j-k,\ell}$ et $\tilde{V}_{j-k,\ell}$.

De plus, lorsque ℓ varie, les couples $(U_{j-k,\ell};\tilde{V}_{j-k,\ell}/\sigma_{j-k,\ell})$ sont indépendants, il en est de même des couples $(U_{j-k-1,2\ell};U_{j-k-1,2\ell+1})$ et donc les v.a. $U_{j,k}$ sont bien toutes indépendantes pour différentes valeurs de j et k.

Finalement, à l'aide des v.a. normales indépendantes Y_n, on a construit d'abord les v.a. $\tilde{U}_j$ et progressivement on a abouti, par fractionnements successifs en sommes partielles indépendantes, à construire les v.a. X_n indépendantes, de lois définies a priori.

B.1.5. - UNE INEGALITE RESULTANT DES FORMULES D'INTERPOLATION.-

L'objectif du travail est de comparer les sommes partielles S_n et T_n. Comme on le verra plus loin, ceci sera réalisé de la manière suivante.

On introduira un entier M, $(0 \leqslant M \leqslant N)$, que l'on précisera ultérieurement, on étudiera alors successivement les différences :

$$S_n - S_{j2^M} \quad , \quad T_n - T_{j2^M} \quad , \qquad j2^M < n < (j+1)2^M$$

$$S_{2^{M+k}} - T_{2^{M+k}} \qquad , \qquad 0 \leqslant k \leqslant N - M \, .$$

Lorsque n est égal à $j2^M$, on introduit les formules d'interpolation déjà définies au paragraphe B.1.3. de ce chapitre :

$$\tilde{S}_{j2^M} = \frac{2^{k+1}-j}{2^k} S_{2^{M+k}} + \frac{j - 2^k}{2^k} S_{2^{M+k+1}}$$

et

$$\tilde{T}_{j2^M} = \frac{2^{k+1}-j}{2^k} T_{2^{M+k}} + \frac{j - 2^k}{2^k} T_{2^{M+k+1}}$$

et l'on posera :

$$S'_{j2^M} = S_{j2^M} - \tilde{S}_{j2^M}$$

et

$$T'_{j2^M} = T_{j2^M} - \tilde{T}_{j2^M} \, .$$

Dès lors, comparer $S_{j2^M} - T_{j2^M}$ s'opère comme suit : tout d'abord $|\tilde{S}_{j2^M} - \tilde{T}_{j2^M}|$ est majorée par :

$$\sup(|S_{2^{M+k}} - T_{2^{M+k}}|, |S_{2^{M+k+1}} - T_{2^{M+k+1}}|) \quad ;$$

il en découle logiquement qu'il nous faut donc trouver une majoration des quantités $S'_{j2^M} - T'_{j2^M}$; à cet effet nous introduisons les différences :

$$W_{j,k} = U_{j,k} - V_{j,k} \quad , \quad \tilde{W}_{j,k} = \tilde{U}_{j,k} - \tilde{V}_{j,k}$$

et $$\hat{W}_{j,k} = \hat{U}_{j,k} - \hat{V}_{j,k} .$$

Arrivé à ce point, la méthode quantile conditionnelle nous fournit les quantités $W_{j,k}$ et $\tilde{W}_{j,k}$; d'autre part, les formules d'interpolation du paragraphe B.1.3. utilisent les quantités $\hat{W}_{j,k}$ pour exprimer les sommes $S'_{j2^M} - T'_{j2^M}$.

Lorsque les v.a. X_j sont identiquement distribuées, les v.a. $\hat{W}_{j,k}$ et $\tilde{W}_{j,k}$ coïncident, la majoration est aisée. Ce n'est pas le cas ici et nous sommes confrontés à un problème supplémentaire.

Nous allons donc d'abord exprimer les quantités $\hat{W}_{M+k,j}$ en fonction des quantités $W_{M+k',\ell}$ et $\tilde{W}_{M+k',\ell}$; ce sera l'objet du lemme B.1.6.

Nous utiliserons alors notre hypothèse relative aux variances :

$$\forall j \geq 1 \qquad 0 < \delta_1 \leq \sigma_j^2 \leq \delta_2$$

et le lemme B.1.6. pour en déduire une majoration de $S'_{j2^M} - T'_{j2^M}$ qui ne fait intervenir que les quantités $W_{M+k,j}$ et $\tilde{W}_{M+k,j}$ effectivement construites.

B.1.5a.- <u>Lemme de calcul</u>.

Supposant :

$$2^{M+k} \leq j2^M \leq 2^{M+k+1}$$

et $q = 0,1,\ldots,k-1$; nous posons selon les notations du paragraphe B.1.2. :

$$j(q) = \left[\frac{j}{2^{k-q}}\right]$$

et posons, pour simplifier les notations dans le paragraphe qui suit :

$$\alpha_q = W_{M+k-q,j(q)} \quad , \quad \beta_q = \tilde{W}_{M+k-q,j(q)}$$

$$\gamma_q = B_{M+k-q,j(q)} \quad , \quad \theta_q = \tilde{B}_{M+k-q,j(q)}$$

et $\qquad \lambda_q = \hat{B}_{M+k-q,j(q)} \quad ;$

les symboles $B_{j,k}$, $\hat{B}_{j,k}$ et $\tilde{B}_{j,k}$ ayant été introduits au paragraphe A.1.3b.

Nous prouvons alors le lemme suivant :

Lemme B.1.6.- Avec les notations ci-dessus, on obtient l'égalité suivante :

$$\hat{W}_{M+k-q,j(q)} = \frac{\lambda_q}{\gamma_o} W_{M+k,1} + \frac{2\theta_q}{\gamma_q} \tilde{W}_{M+k-q,j(q)} + \sum_{r=0}^{q-1} (1-2a_{r+1}) \frac{\lambda_q \theta_r}{\gamma_{r+1}\gamma_r} \tilde{W}_{M+k-r,j(r)} \tag{B.1.29.}$$

où les a_i , valant chacun 0 ou 1 et $\sum_{i=1}^{k} a_i > 0$, sont définis par :

$$j = 2^k + a_1 2^{k-1} + \ldots + a_k \ .$$

Preuve :

Rappelons tout d'abord que :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{j,k} = U_{j-1,2k} + U_{j-1,2k+1} \\ \tilde{U}_{j,k} = \dfrac{\sigma_{j-1,2k+1}}{\sigma_{j-1,2k}} U_{j-1,2k} - \dfrac{\sigma_{j-1,2k}}{\sigma_{j-1,2k+1}} U_{j-1,2k+1} \ . \end{array} \right. \tag{B.1.30.}$$

Utilisant la relation (B.1.23.), on obtient les égalités suivantes :

$$
\text{(B.1.31.)} \quad \left\{ \begin{aligned} U_{j-1,2k} &= \frac{B_{j-1,2k}}{B_{j,k}} U_{j,k} + \frac{\tilde{B}_{j,k}}{B_{j,k}} \tilde{U}_{j,k} \\ U_{j-1,2k+1} &= \frac{B_{j-1,2k+1}}{B_{j,k}} U_{j,k} - \frac{\tilde{B}_{j,k}}{B_{j,k}} \tilde{U}_{j,k} \quad , \end{aligned} \right.
$$

de plus :

$$
\text{(B.1.32.)} \qquad \hat{U}_{j,k} = \frac{\hat{B}_{j,k}}{B_{j,k}} U_{j,k} + \frac{2\tilde{B}_{j,k}}{B_{j,k}} \tilde{U}_{j,k} \quad .
$$

Remarquons que le système (B.1.31.) peut s'écrire sous la forme condensée suivante, pour $a = 0$ ou 1 :

$$
\text{(B.1.33.)} \qquad U_{j-1,2k+a} = \frac{B_{j-1,2k+a}}{B_{j,k}} U_{j,k} + (1-2a) \frac{\tilde{B}_{j,k}}{B_{j,k}} \tilde{U}_{j,k} \quad ;
$$

en outre, si $j = 2^k + a_1 2^{k-1} + \ldots + a_k$, les a_i valant 0 ou 1 et $a_1 + \ldots + a_k > 0$, on a :

$$
\frac{j}{2^{k-q}} = 2^q + a_1 2^{q-1} + \ldots + a_q + \frac{a_{q+1}}{2} + \ldots + \frac{a_k}{2^{k-q}}
$$

et $\qquad j(q-1) = 2^{q-1} + a_1 2^{q-2} + \ldots + a_{q-1}$

d'où l'on déduit la relation suivante :

$$
\text{(B.1.34.)} \qquad j(q) = 2j(q-1) + a_q \quad .
$$

Les relations (B.1.30.), (B.1.31.), (B.1.32.) et (B.1.33.) s'écrivant de la même façon pour les v.a. normales $V_{j,k}$, on a alors, pour tout i compris entre 0 et q :

$$
\text{(B.1.35.)} \qquad \alpha_{q-i} = \frac{\gamma_{q-i}}{\gamma_{q-i-1}} \alpha_{q-i-1} + (1 - 2a_{q-i}) \frac{\theta_{q-i-1}}{\gamma_{q-i-1}} \beta_{q-i-1} \quad ,
$$

d'où, écrivant l'égalité (B.1.35.) pour $i = 0,1,2,\dots,r,\dots,q$; et substituant successivement, on obtient les égalités :

(B.1.36.) $$\alpha_q = \sum_{\ell=0}^{r-1} (1-2a_{q-\ell}) \frac{\gamma_q \theta_{q-\ell-1}}{\gamma_{q-\ell}\gamma_{q-\ell-1}} \beta_{q-\ell-1} + \frac{\gamma_q}{\gamma_{q-r}} \alpha_{q-r} \; ;$$

ce qui donne en posant $r = q$:

(B.1.37.) $$\alpha_q = \sum_{\ell=0}^{q-1} (1-2a_{q-\ell}) \frac{\gamma_q \theta_{q-\ell-1}}{\gamma_{q-\ell}\gamma_{q-\ell-1}} \beta_{q-\ell-1} + \frac{\gamma_q}{\gamma_o} \alpha_o \; ;$$

or la relation (B.1.32.) nous donne :

(B.1.38.) $$\hat{W}_{M+k-q,j(q)} = \frac{\lambda_q}{\gamma_q} \cdot \alpha_q + \frac{2\theta_q}{\gamma_q} \cdot \beta_q \, ,$$

d'où par report de l'égalité (B.1.37.), jointe à $j(0) = 1$,

$$\hat{W}_{M+k-q,j(q)} = \frac{\lambda_q}{\gamma_o} . \alpha_o + \frac{2\theta_q}{\gamma_q} . \beta_q + \sum_{\ell=0}^{q-1} (1-2a_{q-\ell}) . \frac{\lambda_q \theta_{q-\ell-1}}{\gamma_{q-\ell}\gamma_{q-\ell-1}} \beta_{q-\ell-1} \; ;$$

posant $q-\ell-1 = r$ qui varie de 0 à $q-1$, on aboutit à la relation cherchée (B.1.29.).

B.1.5b.- *L'inégalité obtenue.*

On va maintenant en déduire le théorème suivant :

Théorème B.1.2.- S'il existe deux constantes positives δ_1 et δ_2 telles que :

$$0 < \delta_1 \leqslant \frac{B_{j,k}}{2^j} \leqslant \delta_2 \; ,$$

on obtient la majoration suivante, si $2^{M+k} \leqslant j2^M \leqslant 2^{M+k+1}$:

$$(B.1.39.)\qquad |S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| \leqslant |\tilde{W}_{M+k}| + (1+\frac{\delta_2}{2\delta_1}).\sum_{q=0}^{k-1} |\tilde{W}_{M+k-q,j(q)}|.$$

Preuve :

La méthode d'interpolation du paragraphe B.1.3. permet d'écrire l'égalité :

$$(B.1.40.)\qquad S'_{j2^M} - T'_{j2^M} = \sum_{q=0}^{k-1} C_q(j).\hat{W}_{M+k-q,j(q)} \ .$$

Introduisant la valeur de $\hat{W}_{M+k-q,j(q)}$, établie dans le lemme B.1.6., dans l'égalité (B.1.40.), on obtient à l'aide des résultats du paragraphe B.1.3. :

$$(B.1.41.)\qquad S'_{j2^M} - T'_{j2^M} = \frac{A''_{k-1}}{B_{M+k,1}} W_{M+k,1} + \sum_{q=0}^{k-1} C_q(j) \frac{2\theta_q}{\gamma_q}.\beta_q + Z_k \ ,$$

où l'on a posé :

$$Z_k = \sum_{q=0}^{k-1} C_q(j).\sum_{r=0}^{q-1} (1-2a_{r+1}) \frac{\lambda_q\theta_r}{\gamma_{r+1}\gamma_r}.\beta_r \ ,$$

qui s'écrit aussi par interversion des signes sommes :

$$(B.1.42.)\qquad Z_k = \sum_{r=0}^{k-2} (1-2a_{r+1}) \frac{\theta_r}{\gamma_r\gamma_{r+1}}.\beta_r.\sum_{q=r+1}^{k-1} C_q(j).\lambda_q \ .$$

Remarquons maintenant qu'on a clairement les inégalités élémentaires suivantes :

$$0 \leqslant C_q(j) \leqslant \frac{1}{2} \ ,$$

$$\frac{2\tilde{B}_{M+k-q,j(q)}}{B_{M+k-q,j(q)}} \leqslant 1 \ ,$$

$$B_{M+k,1} \leqslant \delta_2.2^{M+k} \ ,$$

et

$$B_{M+k-q-1,j(q+1)} \geqslant \delta_1.2^{M+k-q-1} \ ;$$

en y associant les inégalités (B.1.17.) et (B.1.18.), il vient :

$$\frac{|A''_{k-1}|}{B_{M+k,1}} \leqslant 1 \quad ,$$

et
$$\frac{|A''_{k-1} - A''_r|}{B_{M+k-r-1,j(r+1)}} \leqslant 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad ;$$

d'où la majoration suivante de $S'_{j2^M} - T'_{j2^M}$ en valeur absolue, à partir de (B.1.41.), en remplaçant par (B.1.42.) :

$$|S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| \leqslant \frac{|A''_{k-1}|}{B_{M+k,1}} |W_{M+k,1}| + \sum_{q=0}^{k-1} |C_q(j)| \left|\frac{2\theta_q}{\gamma_q}\right| |\beta_q|$$

$$+ \sum_{r=0}^{k-2} |1-2a_{r+1}| \left|\frac{\theta_r}{\gamma_r}\right| \left|\frac{A''_{k-1}-A''_r}{\gamma_{r+1}}\right| |\beta_r|$$

$$\leqslant |W_{M+k,1}| + \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{k-1} |\beta_q| + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k-2} (1+\frac{\delta_2}{\delta_1})|\beta_r| \quad ;$$

qu'on écrit finalement sous la forme cherchée :

$$|S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| \leqslant |W_{M+k,1}| + \sum_{q=0}^{k-1} (1 + \frac{\delta_2}{2\delta_1}) |\tilde{W}_{M+k-q,j(q)}| \ .$$

CHAPITRE B2

TRANSFORMATIONS DE L'INEGALITE DE KOMLÓS, MAJOR ET TUSNÁDY.

Le présent chapitre reprend pas à pas la méthode suivie par ces auteurs.

Celle-ci consiste d'abord à montrer que l'on peut se ramener à étudier 2^N différences de sommes aléatoires ; c'est l'objet du premier paragraphe.

On décompose ensuite ces sommes en quatre parties ce qui revient à inclure l'événement dont on veut majorer la probabilité dans l'union de quatre événements ; ceci sera étudié au second paragraphe.

La majoration des probabilités des deux premiers événements n'offre pas de difficulté particulière ; elle est reprise aux paragraphes B.2.3. et B.2.4.

En revanche, la majoration des probabilités des deux autres événements pose des problèmes techniques plus ardus qui seront étudiés aux chapitres suivants.

B.2.1. - L'INEGALITE DE KOMLÓS, MAJOR ET TUSNÁDY GENERALISEE A ETABLIR ET SA TRANSFORMATION.-

B.2.1a. - *Forme équivalente de l'inégalité à établir.*

Comme l'avaient déjà remarqué KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, l'inégalité (A.1.16.) peut se mettre sous la forme plus commode suivante :

(B.2.1.) $$\forall x > 0 \qquad P\{\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^N} |S_k-T_k| > x\} \leqslant \gamma.\exp\{\alpha N-\beta x\}$$

où γ, α et β sont des constantes absolues positives.

En effet, la relation (A.1.16.) s'écrit pour $n = 2^N$ sous la forme :

$$\forall x > 0 \ : \ P\{\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^N} |S_k-T_k| > x\} \leqslant K \exp\{N\lambda C.\mathrm{Log}2 - \lambda x\} ,$$

ce qui n'est rien d'autre que (B.2.1.).

En sens inverse, supposons que $2^N \leqslant n < 2^{N+1}$ et écrivons la relation (B.2.1.) à l'ordre $N+1$:

$$P\{\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^{N+1}} |S_k-T_k| > x\} \leqslant \gamma.\exp\{\alpha(N+1) - \beta x\}$$

or :

$$\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k-T_k| > x\} \subset \{\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^{N+1}} |S_k-T_k| > x\}$$

donc $$P\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k-T_k| > x + C.\mathrm{Log}n\} \leqslant P\{\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^{N+1}} |S_k-T_k| > x + C.\mathrm{Log}2^N\}$$

$$\leqslant \gamma.\exp\{\alpha\}\exp\{\alpha N-\beta(x+CN.\mathrm{Log}2)\}$$

$$\leqslant K.\exp\{-\lambda x\}$$

en posant :

$$K = \gamma e^{\alpha} \,, \qquad \lambda = \beta \qquad \text{et} \quad C = \frac{\alpha}{\beta \ \mathrm{Log} 2} \,.$$

B.2.1b. - *Nécessité de procéder à partir d'un certain rang.*

Il faut donc établir (B.2.1.) pour chaque $x > 0$, les coefficients α, β et γ étant indépendants de x.

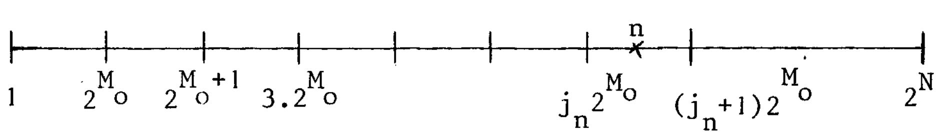
Aux chapitres B.3. et B.4., nous introduisons une quantité $\varepsilon > 0$ qui n'est autre que la quantité résultant des théorèmes de V.V. PETROV.

$x > 0$ étant fixé, nous définissons l'entier $M(x) = M \geq 1$ tel que $\frac{x}{8\varepsilon} < 2^M \leq \frac{x}{4\varepsilon}$; ceci nous amène donc à supposer $x \geq 8\varepsilon$. De plus, les inégalités relatives aux quantités $\tilde{U}_j$ et $\tilde{U}_{j,k}$, qui feront l'objet des chapitres B.3. et B.4., ne sont valides que pour $j \geq J$; j étant supposé $\geq M$; ceci impose en définitive que $x \geq x_1 > 0$.

Ceci n'est pas gênant car si $0 < x < x_1$, on peut toujours, dans l'inégalité (B.2.1.), effectuer la majoration par 1 ou $e^{\lambda x_1} . e^{-\lambda x}$, et en combinant avec le résultat obtenu pour $x \geq x_1$, on en déduit une inégalité valable pour tout $x > 0$.

B.2.1c. - *Inégalité élémentaire.*

Soit donc $1 \leq n \leq 2^N$ et $x \geq x_1 > 0$ fixé.
M étant déterminé comme indiqué ci-dessus, soit $M_o = \inf\{M,N\}$.
On découpe d'abord l'intervalle $[1,2^N]$ de $\mathbb{N}^*$ en sous-intervalles de la forme $\left[j2^{M_o}+1,(j+1)2^{M_o}\right]$, j variant de 0 à $2^{N-M_o} - 1$:



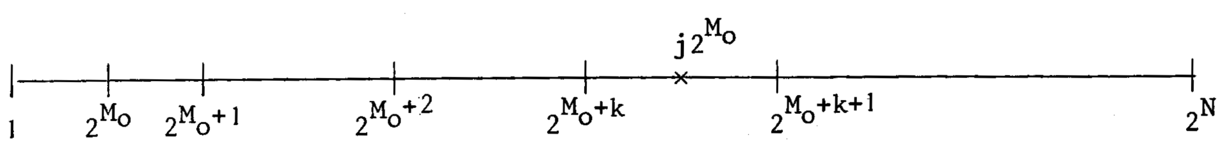
n s'écrit alors de la manière unique suivante :

$$n = j_n 2^{M_o} + k_n \quad \text{où} \quad 0 \leqslant j_n \leqslant 2^{N-M_o}-1 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant k_n \leqslant 2^{M_o} ,$$

d'où :

$$|S_n - T_n| \leqslant |S_{j_n 2^{M_o}+k_n} - S_{j_n 2^{M_o}}| + |T_{j_n 2^{M_o}+k_n} - T_{j_n 2^{M_o}}| + |S_{j_n 2^{M_o}} - T_{j_n 2^{M_o}}| .$$

Si $M_o = N$ le dernier terme est nul ; sinon on découpe de nouveau l'intervalle $[1,2^N]$ en sous-intervalles de la forme $[1,2^{M_o}], [2^{M_o},2^{M_o+1}]$ $\ldots, [2^{M_o+k},2^{M_o+k+1}], \ldots, [2^{N-1},2^N]$:



d'où $\forall\, j \geqslant 1 \quad \exists\, k, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-M_o-1$ tel que :

$$2^{M_o+k} \leqslant j2^{M_o} \leqslant 2^{M_o+k+1} .$$

On réalise alors l'interpolation linéaire $\tilde{S}_{j2^{M_o}}$ définie par (B.1.11.), en remplaçant M par M_o , soit :

$$\tilde{S}_{j2^{M_o}} = \frac{2^{k+1}-j}{2^k} S_{2^{M_o+k}} + \frac{j-2^k}{2^k} S_{2^{M_o+k+1}}$$

et de même :

$$\tilde{T}_{j2^{M_o}} = \frac{2^{k+1}-j}{2^k} T_{2^{M_o+k}} + \frac{j-2^k}{2^k} T_{2^{M_o+k+1}}$$

d'où :

$$|S_{j_n 2^{M_o}} - T_{j_n 2^{M_o}}| \leqslant |\tilde{S}_{j_n 2^{M_o}} - \tilde{T}_{j_n 2^{M_o}}| + |S'_{j_n 2^{M_o}} - T'_{j_n 2^{M_o}}|$$

où $S'_{j_n 2^{M_o}}$ et $T'_{j_n 2^{M_o}}$ étant définie, comme au § B.1.5., par :

$$S'_{j_n 2^{M_o}} = S_{j_n 2^{M_o}} - \tilde{S}_{j_n 2^{M_o}} ,$$

$$T'_{j_n 2^{M_o}} = T_{j_n 2^{M_o}} - \tilde{T}_{j_n 2^{M_o}} .$$

On obtient finalement :

$$|S_n - T_n| \leqslant |S_{j_n 2^{M_o+k_n}} - S_{j_n 2^{M_o}}| + |T_{j_n 2^{M_o+k_n}} - T_{j_n 2^{M_o}}|$$

$$+ |S'_{j_n 2^{M_o}} - T'_{j_n 2^{M_o}}| + \sup\{|S_{2^{M_o+k}} - T_{2^{M_o+k}}|, |S_{2^{M_o+k+1}} - T_{2^{M_o+k+1}}|\}.$$

Posons alors :

$$\Delta = \sup_{1\leqslant n\leqslant 2^N} |S_n - T_n| ,$$

$$\Delta_1 = \sup_{\substack{0\leqslant j\leqslant 2^{N-M_o-1} \\ 1\leqslant k\leqslant 2^{M_o}}} |S_{j2^{M_o+k}} - S_{j2^{M_o}}| ,$$

et $$\Delta_2 = \sup_{\substack{0\leqslant j\leqslant 2^{N-M_o-1} \\ 1\leqslant k\leqslant 2^{M_o}}} |T_{j2^{M_o+k}} - T_{j2^{M_o}}| ;$$

Δ_3 et Δ_4 sont nulles si $N = M_o$ et définies sinon par :

$$\Delta_3 = \sup_{M\leqslant j\leqslant N} |U_j - V_j| ,$$

et $\quad \Delta_4 = \sup\limits_{0<j<2^{N-M}} |S'_{j2^M} - T'_{j2^M}|$;

on a donc immédiatement avec ces notations :

(B.2.2.) $$\Delta \leqslant \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 \quad .$$

B.2.2. - LES INEGALITES $P(A_i)$, $i = 1,2,3,4$ A ETABLIR.-

Introduisons les événements :

$$B = \{\Delta > x\} , \qquad A = \{ \sup_{0\leqslant k<2^{N-M_o}} |U_{M_o,k}| \leqslant \varepsilon.2^M\}$$

$$A_1 = \{\Delta_1 > \varepsilon.2^M\} , \qquad A'_3 = \{\Delta_3 > \frac{x}{4}\}$$

$$A_2 = \{\Delta_2 > \varepsilon.2^M\} , \qquad A'_4 = \{\Delta_4 > \frac{x}{4}\} .$$

De l'inégalité évidente :

$$\sup_k |U_{M_o,k}| \leqslant \Delta_1 ,$$

on déduit :

$$A^c \subset A_1 ,$$

donc pour $i = 3, 4$:

$$A'_i = (A'_i \cap A) \cup (A'_i \cap A^c) \subset (A'_i \cap A) \cup A_1 \quad ;$$

en outre d'après (B.2.2.) et la définition de M, on a :

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{4} \{\Delta_i > \frac{x}{4}\} \subset A_1 \cup A_2 \cup A'_3 \cup A'_4 \quad ;$$

posons :

$$A_3 = A'_3 \cap A$$

et $$A_4 = A'_4 \cap A \quad ,$$

on obtient donc :

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{4} A_i \quad .$$

Pour prouver (B.2.1.), il suffit donc d'établir les inégalités suivantes, pour $i = 1,2,3,4$:

$$P(A_i) \leqslant \gamma_i \exp\{\alpha_i N - \beta_i x\}$$

où γ_i, α_i et β_i sont des constantes absolues positives.

Nous établissons les deux premières dans les paragraphes qui suivent, la démonstration des deux autres étant renvoyée aux chapitres suivants.

B.2.3. - *MAJORATION DE* $P(A_1)$.-

Nous reprenons pour l'essentiel la méthode de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY. Toutefois, les variables aléatoires étant non i.i.d., il n'est pas possible d'utiliser simplement la fonction de CHERNOFF.

Nous employons donc la majoration (A.1.18.) introduite au paragraphe A.1.3c.

De $A_1 = \{\sup_{j,k} |S_{j2^{M_o}+k} - S_{j2^{M_o}}| > \varepsilon.2^M \ ; \ 0 \leqslant j < 2^{N-M_o} \ , \ 1 \leqslant k \leqslant 2^{M_o}\}$

on déduit :

$$P(A_1) \leqslant 2^N.\sup_{j,k} P\{|S_{j2^{M_o}+k} - S_{j2^{M_o}}| > \varepsilon.2^M\}$$

$$\leqslant 2^N.\sup_{j,k}\{P\{X_{j2^{M_o}+1} + \ldots + X_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\}$$

$$+ P\{-(X_{j2^{M_o}+1} + \ldots + X_{j2^{M_o}+k}) > \varepsilon.2^M\}\}.$$

Or de l'existence des transformées de Laplace pour $|t| < A$, on déduit l'inégalité élémentaire pour $0 < t < A$:

$$P\{X_{j2^{M_o}+1} + \ldots + X_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\} \leqslant \exp\{-t\varepsilon 2^M\}E(\exp\{t(X_{j2^{M_o}+1} + \ldots + X_{j2^{M_o}+k})\})$$

$$\leqslant \exp\{-t\varepsilon 2^M\} \prod_{j2^{M_o}+1}^{j2^{M_o}+k} R_i(t) \leqslant \exp\{-t\varepsilon 2^M\} R_{M_o,j}(t)$$

en remarquant que $EX_i = 0$ entraîne $R_i(t) \geqslant 1$.

Choisissant $0 < t < \frac{A}{2}$, on peut alors écrire la majoration suivante, d'après (A.1.18.) :

$$P\{X_{j2^{M_o}+1} + \ldots + X_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\} \leqslant \exp\{C'\sigma^2_{M_o,j} t^2 - t\varepsilon 2^M\}, \text{ d'où :}$$

$$P\{X_{j2^{M_o}+1} + \ldots + X_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\} \leqslant \min_{t>0} \exp\{C'\sigma^2_{M,\left[j2^{M_o-M}\right]} t^2 - t\varepsilon 2^M\} \ ;$$

qu'on peut écrire aussi :

$$P\{X_{j2^{M_o}+1}+\ldots+X_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(2^M)^2}{4C'\sigma^2_{M,\left[j2^{M_o-M}\right]}}\right\}$$

$$\leqslant \exp\{-\frac{\varepsilon}{4C'}.(\varepsilon.2^M)\frac{2^M}{\sigma^2_{M,\left[j2^{M_o-M}\right]}}\} \leqslant \exp\{-\frac{\varepsilon}{32C'\delta_2}.x\}$$

d'après la relation (A.1.19.) et la définition de M.

De même d'après la parité du second membre de l'inégalité (A.1.18.), on obtient :

$$P\{-(X_{j2^{M_o}+1}+\ldots+X_{j2^{M_o}+k}) > \varepsilon.2^M\} \leqslant \exp\{-\frac{\varepsilon}{32C'\delta_2}\,x\}$$

d'où

$$P(A_1) \leqslant 2^{N+1}.\sup_{j,k}\exp\{-\frac{\varepsilon}{32C'\delta_2}\,x\} = 2^{N+1}.\exp\{-\frac{\varepsilon}{32C'\delta_2}\,x\} = \gamma_1.\exp\{\alpha_1 N-\beta_1 x\}\ .$$

Remarques :

1) D'une manière générale, le minimum de la fonction $t \to \exp\{at^2-bt\}$, $t > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, est atteint pour la valeur $t = \frac{b}{2a}$ au point $\exp\{-\frac{b^2}{4a}\}$.

2) On a choisi $t = \dfrac{\varepsilon.2^M}{2C'\sigma^2_{M,\left[j2^{M_o-M}\right]}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2C'\delta_1}$ dans cette preuve, ceci suppose $\frac{\varepsilon}{2C'\delta_1} < \frac{A}{2}$ ce qui est toujours possible en réduisant éventuellement la valeur de ε.

B.2.4. - *MAJORATION DE* $P(A_2)$.-

On peut reprendre la méthode du paragraphe précédent, d'ailleurs plus aisée.

De $A_2 = \{\sup_{j,k} |T_{j2^{M_o}+k} - T_{j2^{M_o}}| > \varepsilon.2^M, \quad 0 \leqslant j < 2^{N-M_o}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^{M_o}\}$

on déduit :

$$P(A_2) \leqslant 2^N \sup_{j,k} P\{|T_{j2^{M_o}+k} - T_{j2^{M_o}}| > \varepsilon.2^M\}$$

$$\leqslant 2^N \sup_{j,k}(P\{Y_{j2^{M_o}+1}+\ldots+Y_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\}+P\{-(Y_{j2^{M_o}+1}+\ldots+Y_{j2^{M_o}+k}) > \varepsilon.2^M\})$$

or, pour $t > 0$:

$$P\{Y_{j2^{M_o}+1}+\ldots+Y_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\} \leqslant \exp\{-t\varepsilon 2^M\} \prod_{j2^{M_o}+1}^{(j+1)2^{M_o}} E(\exp\{tY_i\})$$

$$\leq \exp\{-t\varepsilon 2^M\}.\prod_{j2^{M_o}+1}^{(j+1)2^{M_o}} \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma_i^2 t^2\} = \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma^2_{M_o,j} t^2 - t\varepsilon 2^M\}.$$

Exactement de la même manière que pour la majoration de $P(A_1)$, on obtient :

$$P\{Y_{j2^{M_o}+1} + \ldots + Y_{j2^{M_o}+k} > \varepsilon.2^M\} \leqslant \exp\{-\frac{\varepsilon}{16\delta_2}x\}$$

et $$P\{-(Y_{j2^{M_o}+1} + \ldots + Y_{j2^{M_o}+k}) > \varepsilon.2^M\} \leqslant \exp\{-\frac{\varepsilon}{16\delta_2}x\}$$

d'où la majoration cherchée :

$$P(A_2) \leqslant 2^{N+1}.\sup_{j,k} \exp\{-\frac{\varepsilon}{16\delta_2}x\} = 2^{N+1}.\exp\{-\frac{\varepsilon}{16\delta_2}.x\} = \gamma_2.\exp\{\alpha_2 N - \beta_2 x\}.$$

CHAPITRE B3

GENERALISATION D'UN LEMME DE KOMLÓS, MAJOR ET TUSNÁDY.

B.3.1. - INTRODUCTION.

Dans leur premier article, ces auteurs ont établi, dans le cas de v.a.i.i.d., une inégalité relative aux sommes partielles $\tilde{U}_j$ construites à partir des sommes partielles $\tilde{V}_j$. Nous nous proposons d'étendre cette inégalité dans le cas de v.a. non identiquement distribuées sous la forme énoncée au théorème B.3.1. du paragraphe B.3.3.. Pour sa preuve, on a besoin de 2 lemmes préliminaires sur les fonctions de répartition des v.a. $\tilde{U}_j$ et celles des v.a. normales. En utilisant le théorème A.3.1. de V.V. PETROV, on va énoncer, avec preuve, ces 2 lemmes dans le paragraphe qui suit.

B.3.2. - LEMMES PRELIMINAIRES - PROPOSITION.

Lemme B.3.1.- Sous les hypothèses du théorème A.3.1., il existe $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta_2}} > 0$ et des constantes α et $\beta > 0$ telles que, pour toute valeur de j, on ait :

a) si $0 \leq x < \varepsilon_1$:

(B.3.1a.)

$$-\alpha n \delta_2^{\frac{3}{2}} x^3 - \beta\{x\sqrt{\delta_2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\} \leq \mathrm{Log}\{\frac{1 - \tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x + 0)}{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x)}\}$$

$$\leq \mathrm{Log}\{\frac{1 - \tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x)}{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leq \alpha n \delta_2^{\frac{3}{2}} x^3 + \beta\{x\sqrt{\delta_2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\}$$

b) si $-\varepsilon_1 < x < 0$:

(B.3.1b.)

$$-\alpha\delta_2^{\frac{3}{2}} n|x|^3 - \beta\{|x|\sqrt{\delta_2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\} \leq \mathrm{Log}\{\frac{\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leq \mathrm{Log}\{\frac{\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x + 0)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\}$$

$$\leq \alpha\delta_2^{\frac{3}{2}} n|x|^3 + \beta\{|x|\sqrt{\delta_2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\}$$

où l'on a noté $n = 2^j$.

Preuve :

Toutes les hypothèses du théorème A.3.1. sont vérifiées ; on a donc, pour $x > 0$, $x = o(\sqrt{n})$:

$$\mathrm{Log}\{\frac{1 - \tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j x)}{1 - \phi(x)}\} = \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n(\frac{x}{\sqrt{n}}) + 0(\frac{x+1}{\sqrt{n}})$$

et

$$\mathrm{Log}\{\frac{\tilde{F}_j(-\tilde{\sigma}_j x)}{\phi(-x)}\} = -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n(-\frac{x}{\sqrt{n}}) + 0(\frac{x+1}{\sqrt{n}}) \quad .$$

Ces égalités s'écrivent aussi en remplaçant x par $\tilde{\sigma}_j x$,

pour $x > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $x < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta_2}} = \varepsilon_1$:

$$\mathrm{Log}\{\frac{1 - \tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x)}{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} = \tilde{\sigma}_j^3 \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n(\frac{\tilde{\sigma}_j x}{\sqrt{n}}) + O(\frac{\tilde{\sigma}_j |x|+1}{\sqrt{n}})$$

et

$$\mathrm{Log}\{\frac{\tilde{F}_j(-\tilde{\sigma}_j^2 x)}{\phi(-\tilde{\sigma}_j x)}\} = -\tilde{\sigma}_j^3 \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda_n(-\frac{\tilde{\sigma}_j x}{\sqrt{n}}) + O(\frac{\tilde{\sigma}_j |x|+1}{\sqrt{n}}) \quad .$$

Se servant alors de l'hypothèse (A.1.19.) et du fait que :

$$\exists \alpha > 0 \ , \quad \forall j \quad \forall x, \quad 0 < x \leqslant \varepsilon_1 \ : \quad |\lambda_n(\frac{\tilde{\sigma}_j x}{\sqrt{n}})| \leqslant \alpha,$$

d'après le théorème de V.V. PETROV A.3.1. cité ci-dessus, on retrouve les inégalités (B.3.1.) cherchées.

<u>*Lemme*</u> *B.3.2.-* Posons $u_j = \frac{C_1}{2^j} \tilde{\sigma}_j^3 x^2 + \frac{C_2}{\tilde{\sigma}_j}$, $n = 2^j$,

pour tout nombre réel $\beta > 0$, il existe 2 constantes positives C_1 et C_2 telles que, pour j suffisamment grand, on ait :

a) si $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$:

(B.3.2a.) $$\mathrm{Log}\{\frac{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x+u_j)}{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant -\alpha . \delta_2^{\frac{3}{2}} . nx^3 - \beta(\sqrt{\delta_2} x + \frac{1}{\sqrt{n}})$$

et

(B.3.2b.) $$\mathrm{Log}\{\frac{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x-u_j)}{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \geqslant \alpha . \delta_2^{\frac{3}{2}} . nx^3 + \beta(\sqrt{\delta_2} x + \frac{1}{\sqrt{n}}) \quad ;$$

b) si $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$:

(B.3.3a.) $$\mathrm{Log}\{\frac{\phi(\tilde{\sigma}_j x-u_j)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant -\alpha.\delta_2^{\frac{3}{2}}.n|x|^3 - \beta(\sqrt{\delta_2}|x| + \frac{1}{\sqrt{n}})$$

et

(B.3.3b.) $$\mathrm{Log}\{\frac{\phi(\tilde{\sigma}_j x+u_j)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \geqslant \alpha.\delta_2^{\frac{3}{2}}.n|x|^3 + \beta(\sqrt{\delta_2}|x| + \frac{1}{\sqrt{n}})$$

où α, δ_1 et δ_2 sont des constantes absolues positives.

Preuve :

Constatons tout d'abord que u_j peut être encadré comme suit, d'après (A.1.19.) :

(B.3.4.) $$u_1 \leqslant u_j \leqslant u_2$$

où :

$$u_1 = C_1\delta_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}\ x^2 + \frac{C_2}{\sqrt{\delta_2}}.\frac{1}{\sqrt{n}}$$

et $$u_2 = C_1\delta_2^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}\ x^2 + \frac{C_2}{\sqrt{\delta_1}}.\frac{1}{\sqrt{n}}$$

et que, d'autre part, puisque $V'(0) = \frac{2}{\pi} > \frac{1}{2}$, on a clairement la minoration suivante de la fonction $V(x)$ définie dans le § A.3.2a. pour tout $x > 0$:

(B.3.5.) $$V(x) \geqslant \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad .$$

Preuve de (B.3.2a.) :

En utilisant le théorème des accroissements finis, en se servant du lemme A.3.1. et des inégalités (B.3.4.) et (B.3.5.), on obtient :

$$\operatorname{Log}\left\{\frac{1-\phi(\tilde{\sigma}_j.x+u_j)}{1-\phi(\tilde{\sigma}_j.x)}\right\} = -u_j.V(\xi) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \tilde{\sigma}_j.x \leqslant \xi \leqslant \tilde{\sigma}_j.x + u_j$$

$$\leqslant -u_1.V(\tilde{\sigma}_j.x) \leqslant -u_1\left(\frac{\sqrt{\delta_1}}{2}\sqrt{n}\,x + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$$

$$\leqslant -\frac{C_1\delta_1^2}{2}\,n\,x^3 - \frac{C_2}{2}\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\,x - \frac{C_2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\delta_2}}.\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leqslant -\alpha\,\delta_2^{\frac{3}{2}}\,n\,x^3 - \beta\left(\sqrt{\delta_2}x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dès que $C_1 \geqslant 2\alpha.\dfrac{\delta_2^{\frac{3}{2}}}{\delta_1^2}$,

et

$$C_2 \geqslant 2\beta\sqrt{\delta_2}.\sup\left\{\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}, \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right\} .$$

Preuve de (B.3.2b.) :

On a, par les mêmes arguments que pour la preuve de l'inégalité (B.3.2a.) :

$$\operatorname{Log}\left\{\frac{1-\phi(\tilde{\sigma}_j.x-u_j)}{1-\phi(\tilde{\sigma}_j.x)}\right\} = u_j.V(\xi) \quad \text{où} \quad \tilde{\sigma}_j.x-u_j \leqslant \xi \leqslant \tilde{\sigma}_j.x$$

$$\geqslant u_1.V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\,x - u_2).$$

Cherchons alors une minoration de la fonction :

$$x \longrightarrow V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}x - u_2(x))$$

pour un choix convenable de ε.

Soit $\varepsilon_1'' = \dfrac{\delta_1}{2C_1\delta_2^{3/2}}$; en se servant des propriétés de croissance et de convexité de la fonction V, ainsi que de la croissance de sa fonction dérivée, on obtient, pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1''$:

$$V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\ x - u_2) = V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\ x - C_1\delta_2^{3/2}\sqrt{n}\ x^2 - \frac{C_2}{\sqrt{\delta_1}}\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$\geq V\left[\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\ x(1 - \frac{C_1\delta_2^{3/2}}{\sqrt{\delta_1}}\varepsilon_1'') - \frac{C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}}\right]$$

$$\geq V(\frac{\sqrt{\delta_1}}{2}\sqrt{n}\ x - \frac{C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}})$$

$$\geq V(\frac{-C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}}) + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2}\sqrt{n}\ x\ V'(\xi)$$

où $\quad -\dfrac{C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}} \leq \xi \leq \dfrac{\sqrt{\delta_1}}{2}\sqrt{n}\ x - \dfrac{C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}}$,

on a donc :

$$V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\ x - u_2) \geq V(\frac{-C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}}) + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2}\sqrt{n}\ x\ V'(\frac{-C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}}) \quad ;$$

or on peut choisir un entier positif N tel que, pour $n \geq N$, on ait :

$$V(\frac{-C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}}) \geq \frac{1}{2}V(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et $$V'(\frac{-C_2}{\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}}) \geq \frac{1}{2}V'(0) = \frac{1}{\pi} ,$$

d'où finalement, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1''$ et $n \geq N$:

$$V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\ x - u_2) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2\pi}\sqrt{n}\ x \quad .$$

On conclut donc aux minorations suivantes :

$$\mathrm{Log}\{\frac{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x - u_j)}{1 - \phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \geq u_1\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2\pi}\sqrt{n}\ x\}$$

$$\geqslant \frac{C_1\delta_1^2}{2\pi}\, n\, x^3 + \frac{C_2}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\, x + \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{\delta_2}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\geqslant \alpha\,\delta_2^{3/2}\, n\, x^3 + \beta\sqrt{\delta_2}\, x + \frac{\beta}{\sqrt{n}}$$

dès que $C_1 \geqslant \dfrac{2\pi\alpha\delta_2^{3/2}}{\delta_1^2}$ et $C_2 \geqslant \beta\ \mathrm{Sup}\{\dfrac{2\pi\delta_2}{\sqrt{\delta_1}}\ ,\ \sqrt{2\pi\,\delta_2}\ \}$

ce qui implique évidemment les conditions imposées pour la preuve de (B.3.2a.). Les inégalités (B.3.3.) se déduisent clairement des deux premières par changement de x en $-x$.

Proposition B.3.1.- Sous les hypothèses du théorème A.3.1., il existe un entier J positif tel que, pour un $\varepsilon_1 > 0$ convenablement choisi, on ait pour tout $j \geqslant J$, si $|x| < \varepsilon_1$:

(B.3.6.) $\quad \phi(\tilde{\sigma}_j x - u_j) \leqslant \tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x) \leqslant \tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x+0) \leqslant \phi(\tilde{\sigma}_j x + u_j).$

Preuve :

Prouver les inégalités (B.3.6.) équivaut à prouver que :

pour $0 \leqslant x < \varepsilon_1$:

$$\mathrm{Log}\{\frac{1-\phi(\tilde{\sigma}_j x+u_j)}{1-\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{1-\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x+0)}{1-\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{1-\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x)}{1-\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{1-\phi(\tilde{\sigma}_j x-u_j)}{1-\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\}$$

et pour $-\varepsilon_1 < x < 0$:

$$\mathrm{Log}\{\frac{\phi(\tilde{\sigma}_j x-u_j)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x+0)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{\phi(\tilde{\sigma}_j x+u_j)}{\phi(\tilde{\sigma}_j x)}\} \quad .$$

Ce système d'inégalités est clairement vérifié d'après les lemmes B.3.1. et B.3.2.

B.3.3. - ENONCE ET PREUVE DU RESULTAT GENERALISE.

Théorème B.3.1. - Soit $\{F_j ; j=1,2,\ldots\}$ une suite de fonctions de répartition vérifiant les hypothèses du théorème A.3.1.

Il existe des constantes positives C_1, C_2 et ε et un entier J positif tel que, pour $j \geqslant J$:

(B.3.7.) $$|\tilde{U}_j - \tilde{V}_j| \leqslant \frac{C_1}{2^j} \tilde{U}_j^2 + C_2 \qquad \text{si} \quad |\tilde{U}_j| < \varepsilon . 2^j$$

et

(B.3.8.) $$|U_j - V_j| \leqslant \frac{C_1}{2^j} U_j^2 + C_2 \qquad \text{si} \quad |U_j| < \varepsilon . 2^j .$$

Preuve :

On a, par construction même des v.a. $\tilde{U}_j$, la double inégalité suivante :

$$\tilde{\sigma}_j \phi^{-1} [\tilde{F}_j(\tilde{U}_j)] \leqslant \tilde{V}_j \leqslant \tilde{\sigma}_j \phi^{-1} [\tilde{F}_j(\tilde{U}_j+0)] .$$

La preuve de l'inégalité (B.3.7.) se réduit alors à celle des inégalités suivantes, pour $|\tilde{U}_j| < \varepsilon . 2^j$:

$$-\frac{C_1}{2^j} \tilde{U}_j^2 - C_2 \leqslant \tilde{U}_j - \tilde{\sigma}_j \phi^{-1} [\tilde{F}_j(\tilde{U}_j+0)] \leqslant \tilde{U}_j - \tilde{\sigma}_j \phi^{-1} [\tilde{F}_j(\tilde{U}_j)] \leqslant \frac{C_1}{2^j} \tilde{U}_j^2 + C_2 .$$

Posons $$\tilde{U}_j = \tilde{\sigma}_j^2 \, x$$
$$u_j = \frac{C_1}{2^j} \tilde{\sigma}_j^3 \, x^2 + \frac{C_2}{\tilde{\sigma}_j} .$$

Ces inégalités s'écrivent alors, pour $|x| < \varepsilon_1' = \dfrac{\varepsilon}{\delta_2}$:

$$\tilde{\sigma}_j x - u_j \leqslant \phi^{-1} [\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x)] \leqslant \phi^{-1} [\tilde{F}_j(\tilde{\sigma}_j^2 x+0)] \leqslant \tilde{\sigma}_j x + u_j .$$

Ceci achève la preuve de l'inégalité (B.3.7.) pour $|x| < \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_1')$ compte tenu de la relation (B.3.6.) établie dans la proposition B.3.1.. La même démonstration vaut évidemment pour les quantités U_j si $j \geqslant J$ et donc aussi pour l'inégalité (B.3.8.).

CHAPITRE B4

DEUXIEME GENERALISATION D'UN LEMME DE KOMLÓS, MAJOR ET TUSNÁDY DEDUITE DES RESULTATS DU CHAPITRE A.3.

B.4.1. - INTRODUCTION - ENONCE D'UN THEOREME.

Le but de ce chapitre est de généraliser, au cas de v.a. indépendantes non identiquement distribuées, une inégalité fondamentale établie par KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY dans le cas i.i.d.

Pour sa preuve, on utilise pratiquement les mêmes méthodes employées par ces auteurs, du fait des formes analogues des résultats généralisés au chapitre A.3. que nous utiliserons dans ce chapitre.

Enonçons alors la généralisation qu'on établira au § B.4.3.

Théorème B.4.1. - Soit $\{F_j ; j = 1,2,\ldots\}$ une suite de fonctions de répartition vérifiant les hypothèses du théorème A.1.3.

Il existe des constantes positives C_1, C_2 et ε telles que, pour j assez grand :

$$|\tilde{U}_{j,k} - \tilde{V}_{j,k}| \leqslant \frac{C_1}{2^j} (\tilde{U}^2_{j,k} + U^2_{j,k}) + C_2 \tag{B.4.1.}$$

$$\text{si} \qquad \sup\{|\tilde{U}_{j,k}|, |U_{j,k}|\} < \varepsilon . 2^j .$$

La démonstration de ce théorème nécessite, en plus des résultats des grandes déviations établis au chapitre A.3., quelques inégalités préliminaires auxquelles sera consacré le § suivant.

B.4.2. - *LEMMES D'INTRODUCTION.*

Posons :

$$u_j = C\left(\frac{\sigma_{j,k}^3}{2^j}x^2 + \frac{\sigma_{j,k}^3}{2^j}|xy| + \frac{\sigma_{j,k}}{2^{j/2}}|y| + \frac{1}{\sigma_{j,k}}\right) \tag{B.4.2a.}$$

où C est une constante positive.

On a clairement l'encadrement suivant de u_j :

$$u_1 \leqslant u_j \leqslant u_2 \tag{B.4.2b}$$

où $u_1 = C_1\left(\sqrt{n}\,x^2 + \sqrt{n}|xy| + \frac{|y|}{\delta_1} + \frac{1}{\sqrt{\delta_1^3\delta_2}\sqrt{n}}\right)$,

$$u_2 = C_2\left(\sqrt{n}\,x^2 + \sqrt{n}|xy| + \frac{|y|}{\delta_2} + \frac{1}{\sqrt{\delta_2^3\delta_1}\sqrt{n}}\right) ,$$

et $C_1 = C\sqrt{\delta_1^3}$, $C_2 = C\sqrt{\delta_2^3}$, $n = 2^j$.

Lemme B.4.1.- Pour tout nombre $k > 0$, il existe des constantes C_1 , C_2 et ε positives telles que, pour tout x et y, $|x| < \varepsilon_1$, $|y| < \varepsilon_1$, on ait :

si $x > 0$:

$$\operatorname{Log}\left\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}x+u_j)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\right\} \leqslant -k\left(2^jx^3 + 2^jx^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{B.4.3a.}$$

$$\operatorname{Log}\left\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\right\} \geqslant k\left(2^jx^3 + 2^jx^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{B.4.3b.}$$

et si $x < 0$:

$$\operatorname{Log}\left\{\frac{\phi(\sigma_{j,k}x+u_j)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\right\} \geqslant k\left(-2^jx^3 + 2^jx^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{B.4.4a.}$$

$$\operatorname{Log}\left\{\frac{\phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\right\} \leqslant -k\left(-2^jx^3 + 2^jx^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) . \tag{B.4.4b.}$$

Preuve :

La preuve de l'inégalité (B.4.3a.) se réduit à l'application du théorème des accroissements finis à la fonction $x \to \mathrm{Log}\left[1-\phi(\sigma_{j,k}x)\right]$, aux propriétés de la fonction V du paragraphe A.3.2a. ainsi qu'à l'inégalité (B.3.5.) ;

en effet,

$$\mathrm{Log}\left\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}x+u_j)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\right\} = -u_j.V(\xi) \quad \text{où} \quad \sigma_{j,k}x \leqslant \xi \leqslant \sigma_{j,k}x + u_j$$

$$\leqslant -u_1.V(\sigma_{j,k}x) \leqslant -u_1.\left[\frac{\sigma_{j,k}}{2}x + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$$

$$\leqslant -C_1\left[\sqrt{\frac{\delta_1}{2}}(2^jx^3+2^jx^2|y|)+\frac{1}{\delta_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}|y| + \sqrt{\frac{2}{\pi\delta_1^3\delta_2}}\frac{1}{\sqrt{2^j}}\right];$$

en choisissant :

$$C_1 \geqslant k \sup\left\{\sqrt{\frac{2}{\delta_1}}, \delta_1\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\delta_1^3\delta_2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\},$$

on aboutit à la relation cherchée (B.4.3a.).

Preuve de (*B.4.3b.*) :

De la même manière, on a :

$$\mathrm{Log}\left\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\right\} = u.V(\xi) \quad \text{où} \quad \sigma_{j,k}x-u_j \leqslant \xi \leqslant \sigma_{j,k}x$$

$$\geqslant u_1.V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\,x - u_2).$$

De façon analogue à celle utilisée pour la preuve de l'inégalité (B.3.2b.), en utilisant les propriétés de croissance et de convexité de la fonction $V(x)$, ainsi que de la croissance de sa fonction dérivée, on a, pour $|y| < \varepsilon_o$ et $n \geqslant N$:

$$V(-a_1|y| - a_2\frac{1}{\sqrt{n}}) \geqslant \frac{1}{2}V(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et $\qquad V'(-a_1|y| - a_2 \frac{1}{\sqrt{n}}) \geqslant \frac{1}{2} V'(0) = \frac{1}{\pi}$

où a_1 et a_2 sont 2 constantes positives.

On obtient alors, pour $\varepsilon \leqslant \inf(\varepsilon_o, \frac{\sqrt{\delta_1}}{4C_2})$ et $n \geqslant N$,

en prenant pour $a_1 = \frac{C_2}{\delta_2}$ et $a_2 = \frac{C_2}{\sqrt{\delta_2^3 \delta_1}}$, la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
V(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\, x - u_2) &= V\{(\sqrt{\delta_1}\sqrt{n}\, x - C_2\sqrt{n}\, x^2 - C_2\sqrt{n}\, x|y|) - a_1|y| - a_2 \frac{1}{\sqrt{n}}\} \\
&\geqslant V\{x\sqrt{n}(\sqrt{\delta_1} - 2C_2\varepsilon_1) - a_1|y| - a_2\frac{1}{\sqrt{n}}\} \\
&\geqslant V(\frac{\sqrt{\delta_1}}{2}\sqrt{n}\, x - a_1|y| - a_2\frac{1}{\sqrt{n}}) \\
&\geqslant V(-a_1|y| - a_2\frac{1}{\sqrt{n}}) + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2}\sqrt{n}\, x\, V'(-a_1|y| - a_2\frac{1}{\sqrt{n}}) \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2\pi}\sqrt{n}\, x \quad ;
\end{aligned}$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\} &\geqslant C_1(\sqrt{n}\, x^2 + \sqrt{n}\, x|y| + \frac{|y|}{\delta_1} + \frac{1}{\sqrt{\delta_1^3\delta_2}\sqrt{n}}) \\
&\quad \times \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2\pi}\sqrt{n}\, x\} \\
&\geqslant \frac{\sqrt{\delta_1}C_1}{2\pi} n\, x^3 + \frac{\sqrt{\delta_1}C_1}{2\pi} n\, x^2|y| + \frac{C_1}{\delta_1\sqrt{2\pi}}|y| + \frac{C_1}{\sqrt{2\pi\delta_1^3\delta_2}\cdot\sqrt{n}} \\
&\geqslant k(n\, x^3 + n\, x^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

dès que $C_1 \geqslant k \sup\{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta_1}}, \delta_1\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi\delta_1^3\delta_2}\}$.

Les inégalités (B.4.4.) se déduisent de celles qui viennent d'être prouvées en substituant $-x$ à x.

Proposition B.4.1.- Sous les hypothèses du théorème A.1.3., soit ε_1 un nombre positif convenablement choisi. Pour tout j suffisamment grand, on a, si $|x| < \varepsilon_1$ et $|y| < \varepsilon_1$, pour tout x et y :

$$\text{(B.4.5.)}\quad \phi(\sigma_{j,k}x-u_j) \leqslant F_{j,k}(\sigma^2_{j,k}x|\sigma^2_{j,k}y) \leqslant F_{j,k}(\sigma^2_{j,k}x+0|\sigma^2_{j,k}y) \leqslant \phi(\sigma_{j,k}x + u_j).$$

Preuve :

Ceci revient à prouver que, pour $|y| < \varepsilon_1$:

si $0 \leqslant x < \varepsilon_1$:

$$\text{(B.4.6a.)}\quad \mathrm{Log}\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}x+u_j)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{1-F_{j,k}(\sigma^2_{j,k}x+0|\sigma^2_{j,k}y)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\}$$

$$\leqslant \mathrm{Log}\{\frac{1-F_{j,k}(\sigma^2_{j,k}x|\sigma^2_{j,k}y)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\} \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{1-\phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{1-\phi(\sigma_{j,k}x)}\}$$

et si $-\varepsilon_1 < x < 0$:

$$\text{(B.4.6b.)}\quad \mathrm{Log}\{\frac{\phi(\sigma_{j,k}x+u_j)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\} \geqslant \mathrm{Log}\{\frac{F_{j,k}(\sigma^2_{j,k}x+0|\sigma^2_{j,k}y)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\}$$

$$\geqslant \mathrm{Log}\{\frac{F_{j,k}(\sigma^2_{j,k}x|\sigma^2_{j,k}y)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\} \geqslant \mathrm{Log}\{\frac{\phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\} \quad .$$

En utilisant maintenant les résultats de grandes déviations, du théorème A.3.4. du 3ème chapitre de la partie A, établis à cet effet, en remplaçant dans (B.4.6.) par les égalités (A.3.26.), on obtient, pour $|y| < \varepsilon_1$:

si $0 \leqslant x < \varepsilon_1$:

$$\mathrm{Log}\{\frac{1 - \phi(\sigma_{j,k}x+u_j)}{1 - \phi(\sigma_{j,k}x)}\} \leqslant k(n\ x^3 + n\ x^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{n}}) \leqslant \mathrm{Log}\{\frac{1 - \phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{1 - \phi(\sigma_{j,k}x)}\}$$

et si $-\varepsilon_1 < x < 0$:

$$\mathrm{Log}\{\frac{\phi(\sigma_{j,k}x+u_j)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\} \geqslant k(-n\ x^3 + n\ x^2|y| + |y| + \frac{1}{\sqrt{n}}) \geqslant \mathrm{Log}\{\frac{\phi(\sigma_{j,k}x-u_j)}{\phi(\sigma_{j,k}x)}\}$$

telles sont les inégalités qui ont fait l'objet du lemme B.4.1.

B.4.3. - PREUVE DU THEOREME B.4.1.

Comme l'ont fait KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, on va démontrer l'inégalité (B.4.7.) suivante qui entraîne clairement l'inégalité (B.4.1.) cherchée,

$$(B.4.7.) \qquad |\tilde{U}_{j,k} - \tilde{V}_{j,k}| \leqslant C\left(\frac{\tilde{U}^2_{j,k}}{2^j} + \frac{|\tilde{U}_{j,k}|\,|U_{j,k}|}{2^j} + \frac{|U_{j,k}|}{2^{j/2}} + 1\right)$$

$$\text{si} \quad \sup(|\tilde{U}_{j,k}|, |U_{j,k}|) < \varepsilon . 2^j ,$$

en utilisant les deux relations évidentes, pour tout x et y :

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad y \leqslant 1+y^2.$$

Par définition même des $\tilde{U}_{j,k}$, on a la double inégalité suivante :

$$(B.4.8.) \qquad \sigma_{j,k}\phi^{-1}\left[F_{j,k}(\tilde{U}_{j,k}|U_{j,k})\right] \leqslant \tilde{V}_{j,k} \leqslant \sigma_{j,k}\phi^{-1}\left[F_{j,k}(\tilde{U}_{j,k}+0|U_{j,k})\right].$$

Posons :

$$\tilde{U}_{j,k} = \sigma^2_{j,k}x \quad ; \quad U_{j,k} = \sigma^2_{j,k}y \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon \inf\{\frac{1}{\delta_2} , \frac{1}{2\sqrt{\delta_2}}\} .$$

La preuve de (B.4.7.) revient donc à celle des inégalités suivantes, en notant u_j la quantité définie par (B.4.2a.) :

$$- C\, \sigma_{j,k}.u_j \leqslant \sigma^2_{j,k}x - \sigma_{j,k}\phi^{-1}\left[F_{j,k}(\tilde{U}_{j,k}+0|U_{j,k})\right]$$

$$\leqslant \sigma^2_{j,k}x - \sigma_{j,k}\phi^{-1}\left[F_{j,k}(\tilde{U}_{j,k}|U_{j,k})\right] \leqslant C\, \sigma_{j,k}.u_j.$$

Compte tenu de la relation (B.4.5.) établie dans la proposition B.4.1., ceci achève la preuve du théorème B.4.1..

CHAPITRE B5

MISE EN EVIDENCE DE BLOCS DE VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTS.

B.5.1. - INTRODUCTION - ENONCE D'UN LEMME.

Dans le § B.2.2., nous avons introduit l'ensemble A_4 défini par :

$$A_4 = \{ \sup_{0<j<2^{N-M}} |S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| > \frac{x}{4} \; ; \quad \sup_{0\leqslant k\leqslant 2^{N-M}} |U_{M,k}| \leqslant \varepsilon . 2^M \} \; ;$$

la majoration de la probabilité de cet ensemble soulève un délicat problème d'indépendance que nous exposons ci-après, et que nous retrouverons au chapitre C1.

Le problème d'indépendance posé plus précisément est le suivant : compte tenu des résultats obtenus au chapitre B4, la condition $\sup_{0\leqslant k\leqslant 2^{N-M}} |U_{M,k}| \leqslant \varepsilon . 2^M$ figurant dans l'ensemble A_4 permet, si $2^k \leqslant j < 2^{k+1}$, de majorer la quantité $|S'_{j2^M} - T'_{j2^M}|$ par la somme :

$$C_1 \frac{\tilde{U}^2_{M+k}}{2^{M+k}} + C'_1 \sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+k-q}} (U^2_{M+k-q-1,2j(q)} + U^2_{M+k-q-1,2j(q)+1})$$

à une constante additive près dépendant de k, où $j(q) = \left[\frac{j}{2^{k-q}}\right]$.

Malheureusement, dans cette somme, les termes successifs obtenus en faisant varier q, ne sont pas indépendants. KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY ont résolu le même problème, d'une manière très élégante, dans le cas de v.a.i.i.d.. Selon un principe basé sur celui utilisé implicitement par ces auteurs, on va majorer cette somme par une autre somme composée de termes tous indépendants entre eux. Le résultat obtenu sera énoncé de suite dans le lemme B.5.1. ; le paragraphe suivant sera consacré à sa preuve.

Notons, pour tout $j \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ tel que $2^k \leqslant j < 2^{k+1}$, par A_q et C_j les sommes suivantes :

(B.5.1a.) $A_q = U^2_{M+k-q-1,2j(q)} + U^2_{M+k-q-1,2j(q)+1}$; $0 \leqslant q \leqslant k-1$

et

(B.5.1b.) $C_j = \sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+k-q}} A_q$,

où l'on a désigné par $j(q)$ la partie entière de $\frac{j}{2^{k-q}}$.

D'autre part, pour tout entier j tel que : $2^k < j < 2^{k+1}$, $k \geqslant 0$, on a l'écriture suivante :

$$j = 2^k + a_1 2^{k-1} + a_2 2^{k-2} + \ldots + 2a_{k-1} + a_k \quad ,$$

où chaque a_i vaut 0 ou 1 et $a_1 + \ldots + a_k > 0$;
on a alors une autre écriture de $j(q)$ par la formule de récurrence suivante :

(B.5.2a.)
$$\begin{cases} j(0) = 1 \\ j(q) = 2j(q-1) + a_q \quad , \quad q \geqslant 1. \end{cases}$$

On a besoin, pour la suite, d'une nouvelle suite $j'(q)$ définie par :

(B.5.2b.)
$$j'(q) = 2j(q-1) + 1 - a_q \quad , \quad q \geqslant 1.$$

Le résultat cherché s'énonce alors dans le lemme suivant :

Lemme B.5.1. - Les variables aléatoires $U^2_{M,j(k)}$; $U^2_{M+i,j'(k-i)}$, $i = 0,\dots,k-1$ sont stochastiquement indépendantes entre elles.

De plus, on a la majoration suivante de la quantité C_j , pour chaque j :

$$C_j \leqslant \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2} \left\{\frac{1}{2^M} U^2_{M,j(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+i}} U^2_{M+i,j'(k-i)}\right\} . \tag{B.5.3.}$$

B.5.2. - PREUVE.

Les termes A_q de la somme C_j sont composés de la somme de deux carrés de variables aléatoires indépendants $U^2_{M+k-q-1,2j(q)}$ et $U^2_{M+k-q-1,2j(q)+1}$ qui sont fonctions seulement de v.a.i. indexées (respectivement) par les entiers appartenant aux intervalles de $\mathbb{N}$:
$\left[j(q)2^{M+k-q}+1,(2j(q)+1)2^{M+k-q-1}\right]$ et $\left[(2j(q)+1)2^{M+k-q-1}+1,(j(q)+1)2^{M+k-q}\right]$
où $j(q)$ est défini, si $j = 2^k + a_1 2^{k-1} + \ldots + a_k$, chaque a_i valant 0 ou 1, par :

$$j(q) = 2^q + a_1 2^{q-1} + \ldots + 2a_{q-1} + a_q .$$

Suivant l'entier j qu'on s'est donné, 2^q cas possibles s'imposent alors pour obtenir la valeur de A_q.
Regardons pour commencer le cas de A_o, A_1 et A_2.
On a :

$$A_o = U^2_{M+k-1,2} + U^2_{M+k-1,3} \quad ;$$

cette somme est composée de deux carrés de v.a. indépendants, car ils ne font intervenir que les v.a. indépendantes indexées par les entiers appartenant aux intervalles respectifs $\left[2^{M+k}+1,3.2^{M+k-1}\right]$ et $\left[3.2^{M+k-1}+1,2^{M+k+1}\right]$.

A_o s'écrit encore $U^2_{M+k-1,j(1)} + U^2_{M+k-1,j'(1)}$ tandis que

$$A_1 = U^2_{M+k-2,2j(1)} + U^2_{M+k-2,2j(1)+1} = U^2_{M+k-2,j(2)} + U^2_{M+k-2,j'(2)} \quad ;$$

on voit de suite que :

$$U_{M+k-1,j(1)} = U_{M+k-2,j(2)} + U_{M+k-2,j'(2)} \quad ;$$

donc A_o et A_1 ne sont pas indépendants mais $U^2_{M+k-1,j'(1)}$ est indépendante de A_1.

Procédant de même sur A_1 , on voit que :

$$U_{M+k-2,j(2)} = U_{M+k-3,j(3)} + U_{M+k-3,j'(3)} \quad ;$$

les carrés de ces deux termes figurent dans l'expression de A_2 qui n'est donc pas indépendante de A_1 mais est indépendante de $U_{M+k-2,j'(2)}$ et $U_{M+k-1,j'(1)}$.

Par récurrence, on obtient donc à l'ordre q :

$$A_q = U^2_{M+k-q-1,j(q+1)} + U^2_{M+k-q-1,j'(q+1)}$$

et les v.a. $U_{M+k-r,j(r)}$ $(r = 1,2,\dots,q)$ s'écrivent :

$$U_{M+k-r,j(r)} = U_{M+k-r-1,j'(r+1)} + \dots + U_{M+k-q,j'(q)} + U_{M+k-q-1,j'(q+1)} + U_{M+k-q-1,j(q+1)} .$$

Le terme final est :

$$A_{k-1} = U^2_{M,j(k)} + U^2_{M,j'(k)}$$ somme de 2 termes indépendants.

D'où, en définitive, pour $q = 0,1,\dots,k-2$:

$$U_{M+k-q-1,j(q+1)} = U_{M+k-q-2,j'(q+2)} + U_{M+k-q-3,j'(q+3)} + \dots + U_{M+1,j'(k-1)} + U_{M,j'(k)} + U_{M,j(k)}$$

somme de termes, tous indépendants entre eux.

Selon une méthode inspirée de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY, posons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et :

$$U^2_{M+k-q-1,j(q+1)} = \left\{ \sum_{r=2}^{k-q} \frac{\alpha^{\frac{r-1}{2}}}{\alpha^{\frac{r-1}{2}}} U_{M+k-q-r,j'(q+r)} + \frac{\alpha^{\frac{k-q}{2}}}{\alpha^{\frac{k-q}{2}}} U_{M,j(k)} \right\}^2 .$$

Utilisant l'inégalité de Schwarz, il vient :

$$U^2_{M+k-q-1,j(q+1)} \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ \sum_{2}^{k-q} (\sqrt{2})^{r-1} U^2_{M+k-q-r,j'(q+r)} + 2^{\frac{k-q}{2}} . U^2_{M,j(k)} \right\}$$

d'où

$$\sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+k-q}} U^2_{M+k-q-1,j(q+1)} \quad \text{est majorée par :}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ \left(\sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+\frac{k-q}{2}}} \right) U^2_{M,j(k)} + \sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+k-q}} . \sum_{q+2}^{k} (\sqrt{2})^{s-q-1} U^2_{M+k-s,j'(s)} \right\} .$$

Le second terme peut être réécrit :

$$\sum_{s=2}^{k} U^2_{M+k-s,j'(s)} . \sum_{q=0}^{s-2} \frac{(\sqrt{2})^{s-q-1}}{2^{M+k-q}} \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{s=2}^{k} \frac{1}{2^{M+k-s}} U^2_{M+k-s,j'(s)}$$

d'où finalement,

$$C_j \leqslant \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2^M} U^2_{M,j(k)} + \left(1 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha\sqrt{2}}\right)^2\right) . \sum_{q=1}^{k} \frac{1}{2^{M+k-q}} U^2_{M+k-q,j'(q)} \right\} \quad ,$$

majoration qui donne clairement celle désirée.

* * *

PARTIE C

CONCLUSION - APPLICATIONS

On va conclure dans cette partie en établissant l'inégalité de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY généralisée au cas de variables aléatoires indépendantes, non nécessairement identiquement distribuées. Pour ceci, le premier chapitre sera consacré aux majorations de $P(A_3)$ et $P(A_4)$ restantes en utilisant les résultats précédemment établis. Un lemme de calcul sera donné dans le premier paragraphe de ce chapitre.

Quelques applications à diverses formes de la suite de v.a. $\{X_j\}$ achèveront dans un deuxième chapitre cette dernière partie.

CHAPITRE C1

PREUVE DE L'INEGALITE DE KOMLÓS, MAJOR *et* TUSNÁDY GENERALISEE.

C.1.1.- Introduction - Lemme.

On a besoin de quelques majorations des transformées de Laplace de variables aléatoires qui interviendront au cours des majorations de $P(A_3)$ et $P(A_4)$ du paragraphe suivant. Celles-ci constitueront le contenu du lemme suivant qui s'inspire directement d'une méthode de KOMLÓS-MAJOR-TUSNÁDY.

Lemme C.1.1. - Soient les variables aléatoires tronquées suivantes :

$$\bar{X}_M = \begin{cases} 2^{-M}.U_M^2 & \text{si } |U_M| \leqslant \varepsilon.2^M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.1.1.}$$

$$\tilde{X}_j = \begin{cases} 2^{-j}.\tilde{U}_j^2 & \text{si } |\tilde{U}_j| \leqslant \varepsilon.2^j \quad ; \quad j = M,\dots,N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.1.2.}$$

$$X_{j,k} = \begin{cases} 2^{-j}.U_{j,k}^2 & \text{si } |U_{j,k}| \leqslant \varepsilon.2^j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{C.1.3.}$$

Il existe une constante $\alpha = \frac{1}{4\delta_2 C'} > 0$ telle que, pour $0 < t < \alpha$:

$$\sup\left\{E(\exp\{t\bar{X}_M\}), E(\exp\{t\tilde{X}_j\}), E(\exp\{tX_{j,k}\})\right\} \leqslant \frac{\alpha+t}{\alpha-t} \ . \tag{C.1.4.}$$

Preuve :

En utilisant l'inégalité de Markov et l'indépendance des variables aléatoires X_j, on a d'après l'hypothèse (A.1.18.) les majorations suivantes :

$$\forall t > 0 \qquad P\{\tilde{U}_j \geq \sqrt{y2^j}\} \leq \exp\{-t\sqrt{y2^j}\}E(\exp\{t\tilde{U}_j\}) = \exp\{-t\sqrt{y2^j}\}\prod_{i=2^j+1}^{2^{j+1}} R_i(t)$$

$$\leq \exp\{C'\tilde{\sigma}_j^2 t^2 - t\sqrt{y2^j}\} ,$$

d'où

$$P\{\tilde{U}_j \geq \sqrt{y2^j}\} \leq \min_t(\exp\{C'\tilde{\sigma}_j^2 t^2 - t\sqrt{y2^j}\}) = \exp\{-\frac{y2^j}{4\tilde{\sigma}_j^2 C'}\} \leq \exp\{-\frac{y}{4\delta_2 C'}\}$$

ceci en choisissant $\sqrt{\varepsilon} < 2\delta_1 AC'$ qui assure que $t = t_o = \dfrac{\sqrt{y2^j}}{2\tilde{\sigma}_j^2 C'} < A$.

Compte tenu de la parité du second membre de l'inégalité (A.1.18.), on a de même :

$$P\{-\tilde{U}_j \geq \sqrt{y2^j}\} \leq \exp\{-\frac{y}{4\delta_2 C'}\}.$$

On a alors :

$$P\{\tilde{X}_j \geq y\} = P\{\{\tilde{U}_j^2 \geq y2^j\} \cap \{|\tilde{U}_j| \leq \varepsilon.2^j\}\}$$

$$\leq P\{\tilde{U}_j \geq \sqrt{y2^j}\} + P\{-\tilde{U}_j \geq \sqrt{y2^j}\}$$

$$\leq 2\exp\{-\frac{y}{4\delta_2 C'}\}$$

d'où résulte l'inégalité cherchée ; en effet,

$$E(\exp\{t\tilde{X}_j\}) = \int_0^{\varepsilon^2.2^j} \exp\{ty\}dP(\tilde{X}_j < y)$$

$$= 1 + \int_0^{\varepsilon^2.2^j} t.\exp\{ty\}P(\tilde{X}_j \geq y)dy ,$$

d'où $E(\exp\{t\tilde{X}_j\}) \leqslant 1 + 2t\int_0^{\infty} \exp\{y(t - \frac{1}{4\delta_2 C'})\}dy \leqslant \frac{\alpha+t}{\alpha-t}$ pour $t < \alpha$.

En procédant de la même façon, on obtient, pour $0 < t < \alpha$:

$$E(\exp\{t\bar{X}_M\}) \leqslant \frac{\alpha+t}{\alpha-t} \quad \text{et} \quad E(\exp\{tX_{j,k}\}) \leqslant \frac{\alpha+t}{\alpha-t} \ .$$

C.1.2. - MAJORATION DE $P(A_3)$.

On a :

$$A_3 = \{ \sup_{M \leqslant j \leqslant N} |S_{2^j} - T_{2^j}| > \frac{x}{4}\} \cap \{ \sup_{0 \leqslant k < 2^{N-M}} |U_{M,k}| \leqslant \varepsilon . 2^M\}.$$

On suppose $M_o = M < N$, sinon $P(A_3) = 0$.

De l'égalité :

$$S_{2^j} - T_{2^j} = U_M - V_M + \sum_M^{j-1} (\tilde{U}_k - \tilde{V}_k),$$

on déduit immédiatement, pour $M \leqslant j \leqslant N$:

$$|S_{2^j} - T_{2^j}| \leqslant |U_M - V_M| + \sum_M^{N-1} |\tilde{U}_k - \tilde{V}_k|.$$

En outre, la condition $|U_{M,k}| \leqslant \varepsilon . 2^M$ pour $0 \leqslant k < 2^{N-M}$ permet d'écrire les inégalités :

$$|U_M| \leqslant \varepsilon . 2^M$$

et $\quad |\tilde{U}_j| \leqslant \varepsilon . 2^j \quad ; \quad j = M, M+1, \ldots, N-1 \quad ;$

il en résulte alors l'inclusion :

$$A_3 \subset \{ |U_M - V_M| + \sum_M^{N-1} |\tilde{U}_k - \tilde{V}_k| > \frac{x}{4}\} \cap \{ |U_M| \leqslant \varepsilon . 2^M\} \cap \bigcap_{j=M}^{N-1} \{ |\tilde{U}_j| \leqslant \varepsilon . 2^j\}.$$

On peut donc en déduire, par application du théorème B.3.1. que pour $M \leqslant j \leqslant N$:

$$|S_{2^j} - T_{2^j}| \leqslant \frac{C_1}{2^M} U_M^2 + C_2 + \sum_M^{N-1} (\frac{C_1}{2^k} \tilde{U}_k^2 + C_2)$$

d'où :

$$A_3 \subset \{\frac{C_1}{2^M} U_M^2 + \sum_M^{N-1} \frac{C_1}{2^k} \tilde{U}_k^2 + (N-M+1) C_2 > \frac{x}{4}\} \cap \{ |U_M| \leqslant \varepsilon . 2^M\} \cap \bigcap_{j=M}^{N-1} \{ |\tilde{U}_j| \leqslant \varepsilon . 2^j\}.$$

On peut alors substituer les variables aléatoires indépendantes $\bar{X}_M$ et $\tilde{X}_j$ $(j = M,\dots,N-1)$, introduites au lemme C.1.1, dans le sous-ensemble de droite, d'où a fortiori l'inclusion :

$$A_3 \subset \{C_1\bar{X}_M + \sum_{M}^{N-1} C_1\tilde{X}_k + (N-M+1)C_2 > \frac{x}{4}\}$$

ou équivalemment,

$$\forall t > 0 \quad :$$

$$A_3 \subset \left\{ \exp\{t(C_1\bar{X}_M + \sum_{M}^{N-1} C_1\tilde{X}_k + (N-M+1)C_2 - \frac{x}{4})\} > 1 \right\}$$

ce qui donne par application de l'inégalité de Markov :

$$P(A_3) \leqslant \exp\{t\left[(N-M+1)C_2 - \frac{x}{4}\right]\}E(\exp\{tC_1\bar{X}_M\}) \prod_{M}^{N-1} E(\exp\{tC_1\tilde{X}_k\}).$$

Choisissons $t = t_o = \frac{\alpha}{2C_1}$; le lemme C.1.1. donne alors :

$$\sup\left\{E(\exp\{t_oC_1\bar{X}_M\}),E(\exp\{t_oC_1\tilde{X}_k\})\right\} \leqslant \frac{\alpha+t_oC_1}{\alpha-t_oC_1} = 3.$$

D'où finalement :

$$P(A_3) \leqslant \exp\{\frac{\alpha}{2C_1}\left[(N-M+1)C_2 - \frac{x}{4}\right]\}.3^{N-M+1}$$

$$\leqslant 3\exp\{\frac{C_2\alpha}{2C_1}\}.\exp\{(\frac{C_2\alpha}{2C_1} + \mathrm{Log}3)N - \frac{\alpha}{8C_1}x\}.$$

C.1.3. - MAJORATION DE $P(A_4)$.

On a :

$$A_4=\left\{ \sup_{0<j<2^{N-M}} |S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| > \frac{x}{4} \quad ; \quad \sup_{0\leqslant k<2^{N-M}} |U_{M,k}| \leqslant \varepsilon.2^M \right\}.$$

De même que pour A_3, on suppose $M_o = M < N$, sinon $P(A_4) = 0$.

Soit l'entier j tel que :

$$0 < j < 2^{N-M} .$$

On sait qu'il existe un k entier : $0 \leqslant k \leqslant N-M-1$ tel que :

$$2^{M+k} \leqslant j.2^M < 2^{M+k+1} .$$

En considérant la quantité $|S'_{j2^M} - T'_{j2^M}|$, on a la majoration suivante d'après la relation (B.1.39.) établie au théorème B.1.2. :

$$|S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| \leqslant |\tilde{U}_{M+k}-\tilde{V}_{M+k}| + \left(1 + \frac{\delta_2}{2\delta_1}\right) \sum_{q=0}^{k-1} |\tilde{U}_{M+k-q,j(q)} - \tilde{V}_{M+k-q,j(q)}|.$$

Dans la définition de l'ensemble A_4 intervient ici encore la condition :

$$\sup_{0\leqslant k<2^{N-M}} |U_{M,k}| < \varepsilon.2^M ;$$

elle implique les 3 inégalités suivantes :

$$|U_{M+i,j(k-i)}| = \left| \sum_{q=0}^{2^i-1} U_{M,2^i.j(k-i)+q} \right| \leqslant 2^i(\varepsilon.2^M) = \varepsilon.2^{M+i} ,$$

$$|\tilde{U}_{M+k}| = \left| \sum_{q=2^k+1}^{2^{k+1}} U_{M,q} \right| \leqslant (2^{k+1} - 2^k)\varepsilon.2^M = \varepsilon.2^{M+k},$$

et $\quad |\tilde{U}_{M+i,j(k-i)}| \leqslant \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \{|U_{M+i-1,2j(k-i)}| + |U_{M+i-1,2j(k-i)+1}|\}$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \{\varepsilon.2^{M+i-1} + \varepsilon.2^{M+i-1}\} = \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}\, \varepsilon.2^{M+i} .$$

En substituant donc à ε la nouvelle valeur $\varepsilon' = \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\,\varepsilon$, ce qui revient à modifier légèrement les coefficients obtenus pour $P(A_\nu)$, $\nu = 1,2,3$; on obtient : $\sup\{|\tilde{U}_{M+i,j(k-i)}|, |U_{M+i,j(k-i)}|\} \leqslant \varepsilon'.2^{M+i}$

$$\text{et} \quad |\tilde{U}_{M+k}| \leqslant \varepsilon'.2^{M+k}$$

dès que $\quad \sup_{0\leqslant k<2^{N-M}} |U_{M,k}| < \varepsilon'.2^M$.

On peut donc en déduire l'inégalité suivante, pour chaque point de A_4 , pour tout j tel que $2^k \leqslant j < 2^{k+1}$, $k = 0,1,\ldots,N-M-1$, d'après la relation (B.4.1.) établie dans le théorème B.4.1. :

$$|S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| \leqslant \frac{C_1}{2^{M+k}} \tilde{U}^2_{M+k} + C_2$$

$$+ \left(1 + \frac{\delta_2}{2\delta_1}\right) \sum_{q=0}^{k-1} \left[\frac{C_1}{2^{M+k-q}} (\tilde{U}^2_{M+k-q,j(q)} + U^2_{M+k-q,j(q)}) + C_2\right].$$

En outre, pour calcul élémentaire, on a :

$$\tilde{U}^2_{M+k-q,j(q)} + U^2_{M+k-q,j(q)} \leqslant \left(1+ \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)(U^2_{M+k-q-1,2j(q)} + U^2_{M+k-q-1,2j(q)+1}).$$

La relation (B.5.3.) établie au lemme B.5.1. nous permet alors la majoration suivante, en ne faisant intervenir sous le signe somme que des termes de v.a. indépendants :

$$|S'_{j2^M} - T'_{j2^M}| \leqslant \frac{C_1}{2^{M+k}} \tilde{U}^2_{M+k} + C_2 + kC'_2 + C'_1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2} \left[\frac{1}{2^M} U^2_{M,j(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+i}} U^2_{M+i,j'(k-i)} \right]$$

où l'on a posé :

$$C'_1 = C_1(1 + \frac{\delta_2}{2\delta_1})(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})$$

et $$C'_2 = C_2(1 + \frac{\delta_2}{2\delta_1}).$$

En introduisant maintenant les variables aléatoires $\tilde{X}_{M+k}$ et $X_{j,k}$ définies dans le lemme C.1.1., et en posant : $C''_1 = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2} . C'_1$, on obtient les inclusions suivantes :

$$A_4 \subset \left\{ \sup_{0<j<2^{N-M}} \left[\frac{C_1}{2^{M+k}} \tilde{U}^2_{M+k} + C_2 + kC'_2 + C''_1 \{ \frac{1}{2^M} U^2_{M,j(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^{M+i}} U^2_{M+i,j'(k-i)} \} \right] > \frac{x}{4} \right\} \cap \bigcap_{k=0}^{2^{N-M}} \left\{ |U_{M,k}| < \varepsilon'. 2^M \right\}$$

qu'on peut écrire alors :

$$A_4 \subset \left\{ \sup_{0<j<2^{N-M}} \left[C''_1 \tilde{X}_{M+k} + C''_1 X_{M,j(k)} + (k+1)C'_2 + C''_1 \sum_{i=0}^{k-1} X_{M+i,j'(k-i)} \right] > \frac{x}{4} \right\}$$

d'où, par application de l'inégalité de Markov :

$$\forall t > 0, \quad P(A_4) \leqslant 2^{N-M}. \sup_j \left\{ \exp\{ t\left[(k+1)C'_2 - \frac{x}{4}\right] \} \times E\left\{ \exp\{ tC''_1 \tilde{X}_{M+k} \} \exp\{ tC''_1 X_{M,j(k)} + tC''_1 \sum_{i=0}^{k-1} X_{M+i,j'(k-i)} \} \right\} \right\} .$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz et l'indépendance des variables aléatoires $X_{M,j(k)}$; $X_{M+i,j'(k-i)}$, $i = 0,\ldots,k-1$; on déduit la majoration suivante, pour tout $t > 0$:

$$P(A_4) \leqslant 2^N.\sup_j\Big\{\exp\{t\big[(k+1)C_2' - \frac{x}{4}\big]\} \times \big[E(\exp\{2tC_1''\tilde{X}_{M+k}\})\big]^{1/2}$$

$$\times \big[E(\exp\{2tC_1''X_{M,j(k)}\})\big]^{1/2} \times \Big[\prod_{i=0}^{k-1} E(\exp\{2tC_1''X_{M+i,j'(k-i)}\})\Big]^{1/2}\Big\} .$$

Pour le nombre α défini dans le lemme C.1.1., choisissons $t = \frac{\alpha}{4C_1''}$; la relation (C.1.4.), établie dans ce même lemme, donne alors :

$$\sup_{i=0,1,\ldots,k-1}\Big\{E(\exp\{2tC_1''\tilde{X}_{M+k}\}),E(\exp\{2tC_1''X_{M,j(k)}\}),E(\exp\{2tC_1''X_{M+i,j'(k-i)}\})\Big\}$$

$$\leqslant \frac{\alpha + \frac{\alpha}{2}}{\alpha - \frac{\alpha}{2}} = 3 \quad ;$$

d'où finalement l'inégalité cherchée, du fait que $k+1 \leqslant N$:

$$P(A_4) \leqslant 2^N.\sup_j\{\exp\{\frac{\alpha}{4C_1''}\big[NC_2' - \frac{x}{4}\big]\} \times (\sqrt{3})^{N+1}\} = (2\sqrt{3})^{N+1}.\exp\{\frac{\alpha}{4C_1''}\big[NC_2' - \frac{x}{4}\big]\}.$$

C.1.4. - UNE CONSEQUENCE DU THEOREME A.1.3.

On déduit du théorème A.1.3. le résultat suivant, généralisant, au cas de v.a. non identiquement distribuées, un corollaire de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY.

Corollaire C.1.1. -

Les sommes partielles S_k et T_k définies par le théorème A.1.3., vérifient :

(C.1.5.) $$P\{\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - T_n|}{\text{Log} n} \leq C'\} = 1.$$

En conséquence :

(C.1.6.) $$\forall n \geq 1, \quad |S_n - T_n| = O(\text{Log} n) \quad \text{p.s.}$$

Preuve :

De l'inégalité (A.1.16.) découle que, pour tout $n \geq 1$, et pour tout x positif :

$$P\{\frac{|S_n - T_n|}{\text{Log} n} > C + x\} \leq K \exp\{-\lambda x \text{ Log } n\}$$

d'où, pour $x > \frac{1}{\lambda}$ (condition qu'on peut toujours réaliser en augmentant éventuellement la valeur de C), la série de terme général $P\{\frac{|S_n - T_n|}{\text{Log} n} > C + x\}$ est convergente, ce qui, d'après le lemme de Cantelli, entraîne que, pour tout $x > \frac{1}{\lambda}$:

$$P\{\limsup_{n\to\infty} \{\frac{|S_n - T_n|}{\text{Log} n} > C + x\}\} = 0 \quad ;$$

par suite, x étant arbitraire, on obtient :

$$P\{\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - T_n|}{\text{Log} n} \leq C + \frac{1}{\lambda}\} = 1$$, d'où la relation (C.1.5.).

L'approximation (C.1.6.) en découle de suite.

CHAPITRE C2

APPLICATIONS

Les deux premiers paragraphes de ce chapitre traiteront des hypothèses fondamentales du théorème A.1.3. On donnera ainsi des expressions équivalentes à la condition de V.V. PETROV (A.1.15.). On fournira ensuite des conditions suffisantes pour vérifier (A.1.13.) et (A.1.14.). On introduira donc de nouvelles conditions, certes plus fortes, mais beaucoup plus maniables.

Dans le dernier paragraphe, nous étudierons quelques types de suites de variables aléatoires vérifiant le théorème fondamental A.1.3..

C.2.1. - *EXPRESSIONS EQUIVALENTES A LA CONDITION DE V.V. PETROV DANS LE CAS DE V.A.I.I.D.*

Dans le cas d'une suite de v.a.i.i.d., la condition de PETROV s'écrit encore, sur tout intervalle $[-A',A'] \subset]-A,+A[$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \int_{|t|>\varepsilon} \left|\frac{R(h+it)}{R(h)}\right|^n dt \leq \frac{K_{A'}}{n} .$$

KOMLÓS - MAJOR et TUSNÁDY présentent cette condition sous une forme légèrement différente :

$$\exists p \geq 1, \quad \forall h \in]-A,+A[\;:\; \int_{\mathbb{R}} |R(h+it)|^p dt < +\infty .$$

Le théorème ci-dessous prouvera, notamment, l'équivalence de ces deux conditions.

Théorème C.2.1.- Soit $\{X_j \,;\, j \geq 1\}$ une suite de v.a.i.i.d., centrées, ayant F comme fonction de répartition commune et R comme transformée de Laplace.

On notera, pour z complexe :

$$R(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{zx\} dF(x).$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(C.2.1.) $\exists\, n_o \geq 1$: $X_1 + \ldots + X_{n_o}$ soit à densité continue $p_{n_o}(x)$ vérifiant :

$\exists A > 0 \quad ; \quad \forall h, \quad 0 < h < A$:

$$p_{n_o}(x) = O\{\exp\{-h|x|\}\}$$

où l'approximation $O(.)$ est indépendante de h sur tout intervalle $[-A',A'] \subset]-A,+A[$.

(C.2.2.) $\forall h,\ |h| < A : R(h) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{hx\} dF(x) < +\infty$

et $\exists p \geq 1,\ \exists K > 0$, p et k indépendants de h :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(h+it)|^p dt \leq K, \qquad \forall h : |h| \leq A' < A.$$

(C.2.3.) $\forall h,\ |h| < A : R(h) < +\infty$

et $\exists\ p \geq 1$, p indépendant de h :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(h+it)|^p dt < +\infty\ , \quad \forall h : |h| < A.$$

(C.2.4.) $\forall h,\ |h| < A : R(h) < +\infty$

et

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \forall n \geq n_o : \int_{|t|>\varepsilon} \left|\frac{R(h+it)}{R(h)}\right|^n dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

uniformément en h, $\forall h : |h| \leq A' < A$.

Preuve :

1°) <u>(C.2.1.)</u> => <u>(C.2.2.)</u>.

On a clairement d'après (C.2.1.), pour tout r, $1 \leq r < +\infty$, $\forall\ h,\ |h| \leq A' < A : \exp\{hx\}.p_{n_o}(x) \in L^r$.

En effet, pour tout $h' > 0 : A' < h' < A$, on a :

$$\exp\{hx\}.p_{n_o}(x) \leq K_{A'}.\exp\{hx - h'|x|\} \quad ; \ \forall h,\ |h| \leq A' < A.$$

On en déduit, en particulier, pour $r = 1$, l'existence de $E(\exp\{h(X_1+\ldots+X_{n_o})\})$ pour tout h tel que $|h| \leq A'$; d'où l'existence de $R(h)$ d'après le théorème de Fubini.

D'autre part, d'après l'égalité de Plancherel, $R^{n_o}(h+it)$ étant la transformée de Fourier de $\exp\{hx\}.p_{n_o}(x)$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(h+it)|^{2n_o} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp\{hx\}.p_{n_o}(x)\right]^2 dx$$

$$\leqslant 2\pi K_{A'}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\{hx - h'|x|\}) dx.$$

Choisissons $h' = \frac{A'+A}{2}$; il en résulte que, pour tout h, $|h| \leqslant A'$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(h+it)|^{2n_o} dt \leqslant 2\pi K_{A'}^2 \frac{h'}{h'^2 - h^2} \leqslant 2\pi K_{A'}^2 \frac{1}{h' - |h|} \leqslant \frac{4\pi K_{A'}^2}{A - A'} .$$

2°) <u>(C.2.2.)</u> => <u>(C.2.1.)</u>.

Supposons donc que : $\exists p \geqslant 1$ tel que :

$$\sup_{|h| \leqslant A' < A} \int_{-\infty}^{+\infty} |R(h+it)|^p dt = K_{A'} < +\infty \quad ;$$

on peut supposer $p = n_o$ entier, sinon on prend $n_o = [p] + 1$, car $|R(h+it)| \leqslant R(h) \leqslant \sup\limits_{|h| \leqslant A'} R(h)$,

d'où la somme partielle $X_1 + \ldots + X_{n_o}$ est à densité continue et bornée p_{n_o} en prenant en particulier (C.2.2.) pour $h = 0$.

$R^{n_o}(h+it)$ étant la transformée de Fourier de $\exp\{hx\}.p_{n_o}(x)$, on déduit du théorème d'inversion que :

$$\forall h \in [-A', A'], \quad \forall x \in \mathbb{R} : \exp\{hx\}.p_{n_o}(x) \leqslant \frac{K_{A'}}{2\pi}$$

d'où (C.2.1.) du fait que $p_{n_o}(x)$ est bornée.

3°) <u>(C.2.2.)</u> => <u>(C.2.3.)</u> : évident.

4°) <u>(C.2.3.)</u> => <u>(C.2.1.)</u>.

On peut choisir ici encore $p = n_o$ entier sinon on prend $n_o = [p] + 1$; $R^{n_o}(it)$ étant intégrable, p_{n_o} existe, est continue et bornée.

$R^{n_o}(h+it)$ étant la transformée de Fourier de $\exp\{hx\}.p_{n_o}(x)$, on obtient, si $0 \leqslant h \leqslant A' < A$:

$$e^{h|x|}.p_{n_o}(x) \leqslant e^{aA'x}.p_{n_o}(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |R(aA'+it)|^{n_o}dt = K_{aA'} \quad , \quad a = \mathrm{sgn}(x) ,$$

d'où $\exp\{h|x|\}.p_{n_o}(x) \leqslant \sup\{K_{A'}, K_{-A'}\}$.

5°) <u>(C.2.4.)</u> => <u>(C.2.2.)</u>.

Elle provient immédiatement du fait que :

$\forall h,\quad |h| \leqslant A' < A$:

$$\int_{\mathbb{R}} |R(h+it)|^{n_o}dt \leqslant \sup_{|h|\leqslant A'} R^{n_o}(h).\{2\varepsilon + \frac{K_{A'}}{n_o}\} .$$

6°) <u>(C.2.2.)</u> => <u>(C.2.4.)</u>.

On suppose $p = n_o$ entier $\geqslant 1$.

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |R(h+it)|^{n_o}dt \leqslant K_{A'} \qquad \text{si} \quad |h| \leqslant A' < A.$$

En appliquant un théorème de TITCHMARCH [23] p. 125 ; on en déduit :

$$\sup_{|h|\leqslant A'} |R(h+it)| \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0.$$

Il en résulte la majoration :

$$\text{(C.2.5.)} \qquad \exists \alpha > 0 \; ; \; \forall h, \; |h| \leqslant A' : \sup_{|t|\geqslant\varepsilon} \left|\frac{R(h+it)}{R(h)}\right| \leqslant e^{-\alpha} \; ;$$

en effet, on sait qu'il existe un $t_o > 0$ tel que :

$$\text{pour} \quad |t| > t_o \; : \quad \sup_{|h| \leqslant A'} |R(h+it)| \leqslant \frac{1}{2} \; ;$$

donc si $\varepsilon \geqslant t_o$, (C.2.5.) est clairement vérifié ;

$$\text{si} \quad 0 < \varepsilon < t_o \, , \qquad \sup_{\substack{|h| \leqslant A' \\ \varepsilon \leqslant t \leqslant t_o}} \left|\frac{R(h+it)}{R(h)}\right| = \left|\frac{R(h_o+i\tau)}{R(h_o)}\right| = \beta \qquad ;$$

or la v.a. $\bar{X}_1$ définie par la fonction de répartition $\bar{F}$ telle que, pour tout h, $|h| < A$:

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{R(h)} \int_{-\infty}^{x} \exp\{hy\} dF(y),$$

a pour fonction caractéristique $\dfrac{R(h+it)}{R(h)}$;

donc si $\beta = 1$, on aurait la loi de $\bar{X}_1$ (donc celle de X_1 et de $X_1 + \ldots + X_{n_o}$) qui serait latticielle, ce qui contredirait l'existence de densité et par suite l'hypothèse (C.2.2.) ;

d'où, nécessairement, $\beta < 1$, et il vient alors la majoration cherchée :

$$\sup_{|t| \geqslant \varepsilon} \left|\frac{R(h+it)}{R(h)}\right| \leqslant e^{-\alpha} = \sup\{\tfrac{1}{2}, \beta\} < 1.$$

On en déduit finalement :

$$\forall n \geqslant n_o \; : \int_{|t| > \varepsilon} \left|\frac{R(h+it)}{R(h)}\right|^n dt \leqslant \exp\{-\alpha(n-n_o)\} \int_{\mathbb{R}} |R(h+it)|^{n_o} dt$$

$$\leqslant \frac{K_{A'} . \exp\{\alpha n_o\}}{e^{\alpha n}} \leqslant \frac{C_{A'}}{n} \, .$$

C.2.2. - *CONDITIONS SUFFISANTES POUR OBTENIR LES HYPOTHESES (A.1.13.) et (A.1.14.)*

Comme conséquence immédiate du lemme B.1.3., on obtient :

Corollaire C.2.1.- Les conditions (A.1.13.) et (A.1.14.) sont satisfaites (respectivement) dès que les deux suites : $\{\sigma_j^2 \; ; \; j = 1,2,\ldots\}$ des variances et $\{R_j \; ; \; j = 1,2,\ldots\}$ des transformées de Laplace, associées à la suite de v.a. $\{X_j \; ; \; j = 1,2,\ldots\}$, vérifient (respectivement) :

(C.2.4a.) $$\sum_1^{+\infty} j\,|\sigma_{j+1}^2 - \sigma_j^2| < +\infty$$

ou plus généralement :

(C.2.4b.) $$\exists\, \sigma^2 > 0 \; : \; \sum_1^{+\infty} |\sigma_j^2 - \sigma^2| < +\infty$$

et

(C.2.5a.) $$\sum_1^{+\infty} j \left\| \frac{R'_{j+1}(h)}{R_{j+1}(h)} - \frac{R'_j(h)}{R_j(h)} \right\| < +\infty$$

ou plus généralement :

(C.2.5b.) $$\exists\, \ell(h) \text{ définie sur }]-A,+A[\; : \; \sum_1^{+\infty} \left\| \frac{R'_j(h)}{R_j(h)} - \ell(h) \right\| < +\infty$$

où $\|\quad\|$ désigne la norme uniforme sur $[-A',A'] \subset]-A,+A[$.

On se servira de ce corollaire, dans le paragraphe suivant, pour étudier différentes formes de la suite $\{X_j \; ; \; j = 1,2,\ldots\}$ soumises aux hypothèses du théorème fondamental A.1.3.

C.2.3. - *ETUDE DE CAS PARTICULIERS.*

C.2.3a.- Cas où $X_j = \sigma_j Y_j$, $\{Y_j \; ; \; j = 1,2,\ldots\}$ *suite de v.a.i.i.d.*

Soit $\{Y_j \; ; \; j \geq 1\}$ une suite de v.a.i.i.d. centrées telle que :

$$EY_j^2 = 1,$$

(C.2.6.) $\quad \exists \; A > 0 : R(h) = E(\exp\{tY_j\}) < +\infty \quad$ pour $|h| < A$,

et

(C.2.7.) $\quad \exists \; p \geq 1$ tel que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |R(h+it)|^p dt < +\infty \quad$ pour $|h| < A$.

On définit une nouvelle suite de v.a. $\{X_j \; ; \; j \geq 1\}$ par :

$$X_j = \sigma_j Y_j$$

où : $\{\sigma_j \; ; \; j \geq 1\}$ est une suite de nombres réels positifs.

Corollaire C.2.2.- La suite $\{X_j \; ; \; j \geq 1\}$ satisfait les hypothèses du théorème fondamental A.1.3. dès que la suite $\{\sigma_j \; ; \; j \geq 1\}$ vérifie, en plus de :

(C.2.8.) $\quad \exists \; \delta_1 > 0 : \forall j \geq 1 \quad \sigma_j^2 \geq \delta_1$,

l'une des deux conditions suivantes :

(C.2.9a.) $\quad \displaystyle\sum_1^{+\infty} j|\sigma_{j+1} - \sigma_j| < +\infty$

ou plus généralement :

(C.2.9b.) $\quad \exists \; \sigma^2 > 0 \quad : \quad \displaystyle\sum_1^{+\infty} |\sigma_j^2 - \sigma^2| < +\infty$.

Preuve :

Les conditions posées sur la suite $\{\sigma_j^2\}$ impliquent que :

$$\exists \delta_2 > 0 \quad : \quad \sigma_j^2 \leq \delta_2 \quad ;$$

d'autre part, on a évidemment pour tout j :

$$EX_j = 0 \quad , \quad EX_j^2 = \sigma_j^2$$

et $R_j(t) = E(\exp\{tX_j\}) = R(\sigma_j t) < +\infty$ si $|t| < \frac{A}{\sqrt{\delta_2}}$.

De même pour tout z tel que $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant A' < A$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Log}\, R(z)|^2 &= \mathrm{Log}^2|R(z)| + \mathrm{Arg}^2 R(z) \\ &\leqslant \mathrm{Log}^2 R(h) + 4\pi^2 \\ &\leqslant \left[\sup\{\mathrm{Log}\, R(A'), \mathrm{Log}\, R(-A')\}\right]^2 + 4\pi^2. \end{aligned}$$

Il résulte du théorème C.2.1. que la condition (C.2.7.) implique que :

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \forall n \geqslant n_o \qquad \int_{|t|\geqslant\varepsilon} \left|\frac{R(h+it)}{R(h)}\right|^n dt = 0(\tfrac{1}{n})$$

uniformément en h si $|h| \leqslant A' < A$, A' arbitrairement voisin de A. Dès lors, on vérifie aisément la condition de PETROV (A.1.15.) en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \forall j,k \quad :$$

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left|\frac{R_\ell(h+it)}{R_\ell(h)}\right| dt \leqslant \prod_{k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left\{\int_{|t|>\varepsilon\sigma_\ell} \left|\frac{R(\sigma_\ell h+it)}{R(\sigma_\ell h)}\right|^{2^j} \frac{dt}{\sigma_\ell}\right\}^{\frac{1}{2^j}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} \prod_{k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left(\frac{K}{2^j}\right)^{\frac{1}{2^j}} = \frac{K}{\sqrt{\delta_1}\,2^j} \quad \text{pour} \quad |h| \leqslant \frac{A'}{\sqrt{\delta_2}} .$$

La condition (C.2.9a.) ou (C.2.9b.) implique clairement (C.2.4a.) et (C.2.5a.) ou (C.2.4b.) et (C.2.5b.) ; en effet :

$$\left|\left|\sigma_{j+1}\cdot\frac{R'(\sigma_{j+1}h)}{R(\sigma_{j+1}h)} - \sigma_j\cdot\frac{R'(\sigma_j h)}{R(\sigma_j h)}\right|\right| \leqslant |\sigma_{j+1} - \sigma_j|\{\left|\left|\frac{R'(\sigma_{j+1}h)}{R(\sigma_{j+1}h)} + \sigma_j \frac{d}{dh}\left(\frac{R'}{R}\right)(\xi)\right|\right|\}$$

où ξ est compris entre $\sigma_{j+1}h$ et $\sigma_j h$;

le résultat cherché s'en déduit, compte tenu de la propriété suivante de $\text{Log } R_j(h)$ sur $[-A',A'] \subset]-A,A[$:

$$\exists K > 0, \quad \forall \nu \geqslant 1 \quad \forall j \geqslant 1 \quad \left|\frac{d^\nu}{dh^\nu} \text{Log } R_j(h)\right| < K, \quad \forall h, \quad |h| \leqslant A' < A.$$

(C.2.5b.) se déduit de manière analogue de (C.2.9b.) en posant

$\ell(h) = \sigma \dfrac{R'(\sigma h)}{R(\sigma h)}$.

C.2.3b.- *Cas du mélange* : $L(X_j) = \varepsilon_j L(X) + (1-\varepsilon_j)L(Y)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires i.i.d. ayant F_X et F_Y pour fonctions de répartition respectives telles que :

$$EX = EY = 0, \quad EX^2 = \sigma_X^2 > 0, \quad EY^2 = \sigma_Y^2 > 0 \quad ;$$

et $\exists A > 0$: pour $|t| < A$: $R_X(t) = E(e^{tX}) < +\infty$ et $R_Y(t) = E(e^{tY}) < +\infty$.

On suppose de plus que :

(C.2.10a.) $\exists p \geqslant 1 \quad : \int_{\mathbb{R}} |R_X(h+it)|^p dt < +\infty$ pour $|h| < A$

et

(C.2.10b.) $\exists p' \geqslant 1 \quad : \int_{\mathbb{R}} |R_Y(h+it)|^{p'} dt < +\infty$ pour $|h| < A$,

on peut d'ailleurs choisir $p = p'$ pour simplifier.

Considérons la suite de v.a. indépendantes $\{X_j \; ; \; j \geqslant 1\}$ dont la suite de fonctions de répartition associées est définie, pour tout j, par :

$$F_j = \varepsilon_j . F_X + (1-\varepsilon_j) . F_Y$$

où $\{\varepsilon_j \; ; \; j \geqslant 1\}$ est une suite de nombres réels compris entre 0 et 1.

Corollaire C.2.3.-

La suite $\{X_j \; ; \; j \geqslant 1\}$ vérifie les conditions du théorème fondamental A.1.3. dès que la suite $\{\varepsilon_j \; ; \; j \geqslant 1\}$ remplit l'une des deux conditions suivantes :

(C.2.11a.) $$\sum_1^{+\infty} j |\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j| < +\infty$$

ou plus généralement :

(C.2.11b.) $$\exists \varepsilon > 0 \; : \; \sum_1^{+\infty} |\varepsilon_j - \varepsilon| < +\infty .$$

Preuve :

On a clairement, pour tout j :

$$EX_j = 0$$

et
$$R_j(t) = E(\exp\{tX_j\}) = \varepsilon_j R_X(t) + (1-\varepsilon_j) R_Y(t)$$
$$\leqslant \sup\{R_X(t), R_Y(t)\} < +\infty \quad \text{pour } |t| < A,$$

en outre,

$$\sigma_j^2 = EX_j^2 = \varepsilon_j \sigma_X^2 + (1-\varepsilon_j)\sigma_Y^2$$
$$\geqslant \inf\{\sigma_X^2, \sigma_Y^2\} > 0.$$

Afin de vérifier la condition de PETROV, posons :

$$H(t) = \sup\left\{ \left|\frac{R_X(h+it)}{R_X(h)}\right| , \left|\frac{R_Y(h+it)}{R_Y(h)}\right| \right\} .$$

D'après (C.2.10a.) et (C.2.10b.), les fonctions R_X et R_Y vérifiant la condition de Petrov sur tout intervalle $[-A',+A'] \subset]-A,+A[$, on obtient donc :

$$\forall j, \quad \left|\frac{R_j(h+it)}{R_j(h)}\right| = \left|\frac{\varepsilon_j R_X(h+it) + (1-\varepsilon_j)R_Y(h+it)}{\varepsilon_j R_X(h) + (1-\varepsilon_j)R_Y(h)}\right| \leqslant H(t)$$

d'où

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{\ell=k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left|\frac{R_\ell(h+it)}{R_\ell(h)}\right| dt \leqslant \int_{|t|>\varepsilon} H^{2^j}(t).dt$$

$$\leqslant \int_{|t|>\varepsilon} \left|\frac{R_X(h+it)}{R_X(h)}\right|^{2^j} dt + \int_{|t|>\varepsilon} \left|\frac{R_Y(h+it)}{R_Y(h)}\right|^{2^j} dt = O(\frac{1}{2^j}).$$

Les conditions (C.2.4a.) et (C.2.5a.) ou (C.2.4b.) et (C.2.5b.) découlent immédiatement des inégalités suivantes, pour tout j :

$$\sigma_{j+1}^2 - \sigma_j^2 = (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) \quad ,$$

et

$$\left|\frac{R'_{j+1}(h)}{R_{j+1}(h)} - \frac{R'_j(h)}{R_j(h)}\right| \leqslant |\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j| \{\frac{|R'_X(h)R_Y(h) - R_X(h)R'_Y(h)|}{R_{j+1}(h)R_j(h)}\}$$

$$\leqslant K|\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j| \qquad \text{pour} \quad |h| \leqslant A' < A.$$

Afin de vérifier les conditions (C.2.4b.) et (C.2.5b.), étant donné (C.2.11b.), il suffit de prendre :

$$\sigma^2 = \varepsilon\sigma_X^2 + (1-\varepsilon)\sigma_Y^2 \quad ,$$

$$\ell(h) = \frac{\varepsilon R'_X(h) + (1-\varepsilon)R'_Y(h)}{\varepsilon R_X(h) + (1-\varepsilon)R_Y(h)}$$

et de raisonner comme ci-dessus.

C.2.3c.- *Cas des p-suites.*

Soit $\{X_j \; ; \; j \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, dont la suite des fonctions de répartition est notée $\{F_j \; ; \; j \geqslant 1\}$, et celle des fonctions caractéristiques réelles notée $R_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{tx\} dF_j(x)$, définissant une p-suite, i.e. : le nombre de fonctions de répartition différentes parmi les F_j est égal à p (voir V.V. PETROV [16], p. 53).

Notons $\{W_\ell \; ; \; \ell = 1,\dots,p\}$ ces p fonctions de répartition distinctes.

Supposons, pour tout $\ell = 1,2,\dots,p$:

$$\int_{\mathbb{R}} x \, dW_\ell(x) = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2 \, dW_\ell(x) = \sigma_\ell^2 > 0$$

et

$$\exists A > 0 : S_\ell(h) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{hy\} dW_\ell(y) < +\infty \quad \text{pour} \quad |h| < A.$$

Supposons de plus que :

$$\text{(C.2.12.)} \quad \exists q \geqslant 1 : \forall \ell = 1,\dots,p \qquad \int_{\mathbb{R}} |S_\ell(h+it)|^q dt < +\infty \quad \text{si} \quad |h| < A$$

où $S_\ell(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} dW_\ell(x)$ existe pour $|\mathrm{Re}\,(z)| < A$,

et notons par :

$$n_\ell = \mathrm{card}\{j \; ; \; j \leqslant n : F_j = W_\ell\} ,$$

pour tout ℓ variant entre 1 et p.

Corollaire C.2.4.-

La p-suite $\{X_j \; ; \; j \geqslant 1\}$ ainsi définie répond aux exigences du théorème A.1.3. dès que la suite $\{n_\ell \; ; \; \ell = 1,\dots,p\}$ vérifie, pour tout ℓ compris entre 1 et p :

(C.2.13.) $\exists K > 0 \qquad \exists \alpha_\ell \geq 0$ indépendant de n tel que :

$$\forall n \geq 1 : \left|\frac{n_\ell}{n} - \alpha_\ell\right| \leq \frac{K}{n} .$$

<u>*Preuve*</u> :

D'après le résultat du lemme B.1.1., la condition (C.2.13.) est équivalente à :

(C.2.14.) $\forall \ell = 1,\dots,p \quad ; \qquad \exists K > 0 \qquad \forall j,k$

$$|n^{(\ell)}_{j-1,2k} - n^{(\ell)}_{j-1,2k+1}| \leq K$$

où

$$n^{(\ell)}_{j,k} = \mathrm{card}\{n \; ; \; k2^j < n \leq (k+1)2^j \; : \; F_n = W_\ell\}.$$

Les conditions (A.1.13.) et (A.1.14.) sont donc satisfaites dès que (C.2.14.) l'est ; en effet, ceci découle immédiatement des égalités suivantes :

$$\sigma^2_{j-1,2k} - \sigma^2_{j-1,2k+1} = \sum_{\ell=1}^{p} \sigma^2_\ell (n^{(\ell)}_{j-1,2k} - n^{(\ell)}_{j-1,2k+1})$$

et

$$\frac{R'_{j-1,2k}(h)}{R_{j-1,2k}(h)} - \frac{R'_{j-1,2k+1}(h)}{R_{j-1,2k+1}(h)} = \sum_{\ell=1}^{p} \frac{S'_\ell(h)}{S_\ell(h)} (n^{(\ell)}_{j-1,2k} - n^{(\ell)}_{j-1,2k+1}).$$

Reste à vérifier la condition de PETROV (A.1.15.) ; or, on a :

$$\prod_{\nu=k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left|\frac{R_\nu(h+it)}{R_\nu(h)}\right| = \prod_{r=1}^{p} \left|\frac{S_r(h+it)}{S_r(h)}\right|^{n^{(r)}_{j,k}}$$

$$= \prod_{\{r;n^{(r)}_{j,k}>0\}} \left|\frac{S_r(h+it)}{S_r(h)}\right|^{n^{(r)}_{j,k}} ,$$

d'où l'on déduit, d'après l'hypothèse (C.2.12.) et le théorème (C.2.1.), en appliquant l'inégalité de Hölder, que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout h tel que $|h| < A$:

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{k2^j+1}^{(k+1)2^j} \left|\frac{R_\nu(h+it)}{R_\nu(h)}\right| dt \leqslant \prod_{\{r;n_{j,k}^{(r)}>0\}} \left[\int_{|t|>\varepsilon} \left|\frac{S_r(h+it)}{S_r(h)}\right|^{2^j} .dt\right]^{\frac{n_{j,k}^{(r)}}{2^j}}$$

$$\leqslant \prod_{\{r;n_{j,k}^{(r)}>0\}} \left(\frac{K}{2^j}\right)^{\frac{n_{j,k}^{(r)}}{2^j}} = \frac{K}{2^j} \quad ;$$

ceci achève la preuve du corollaire C.2.4..

* * *

CONCLUSION.

J. KOMLÓS, P. MAJOR et G. TUSNÁDY dans un second article [11b] ont étendu leur inégalité au cas d'une suite quelconque de v.a. i.i.d., centrées, de variance 1, telle que :

$$E(e^{tX}) \quad \text{existe} \quad \text{pour} \quad |t| < A \ .$$

Le problème se pose ici aussi, mais il n'apparaît pas évident que les méthodes qu'ils ont employées dans ce second article puissent se transposer telles quelles.

En particulier, ils ont d'abord prouvé le résultat dans le cas d'une suite $\{X_n\}$ de loi $\mathcal{L}(X)$ telle que $P\{|X| \leq K\} = 1$ en utilisant notamment le fait que, pour tout n, la statistique d'ordre $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ est indépendante de la permutation aléatoire π qui permet de l'obtenir à partir de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Il est bien évident que cette méthode n'est pas transposable telle quelle et le problème demeure donc ouvert dans ce cas plus général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTFAI P. - Die Bestimmung der zu einem wiederkehrenden Prozess gehörenden Verteilungsfunktion aus den mit Fehlern behafteten Daten einer einzigen Relation. Studia Sci. Math. Hungar., 1, 161-168, 1966.

[2] BERRY A.C. - The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc., 49, n° 1, 122-136, (1941).

[3] CRAMER H. - Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. Actualités Sci. et Ind., Paris, 1938, n° 736.

[4] CSÖRGÖ M., RÉVÉSZ P. - A new method to prove Strassen type laws of invariance principle I - II. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 31. 255-259 and 261-269 (1975).

[5] CSÖRGÖ M., RÉVÉSZ P. - Strong approximations in probability and statistics. Academic Press. New York, San Francisco, London, 1981.

[6] DELPORTE J. - Inégalité de KOMLÓS, MAJOR et TUSNÁDY relatives aux sommes de variables aléatoires indépendantes indentiquement distribuées. Pub. IRMA Lille, 1980, Vol. 2, fasc. 6, n° 3.

[7] ESSÉEN C.G. - Fourier analysis of distributions functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta. Math., 77, 1-125, (1945).

[8] FELLER W. - Generalisation of a probability limit theorem of Cramer. Trans. Amer. Math. Soc. 54, n° 3, 361-372 (1943).

[9] FELLER W. - An introduction to probability theory and its applications. Vol. I - Wiley, 1968.

[10] KHINTCHINE A. - Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Annalen 101 (1929), p. 745.

[11] KOMLÓS J., MAJOR P., TUSNÁDY G. - An approximation of partial sums of independent R.V.'S and the sample D.F.

[11a] Part I, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 32, 111-331 (1975).

[11b] Part II, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 34, 33-58 (1976).

[12] PETROV V.V. - On sums of independent random variables.
Moskow Nauka, 1972.

[13] PETROV V.V. - Asymptotic behavior of probabilities of large deviations.
Theory of proba. Appl. Vol. XIII, n° 3 (1968).

[14] PETROV V.V. - A generalisation of Cramer's limit theorem.
Uspehi , Mat. Nauk, 9, 1954, 195-202 (In Russian).

[15] PETROV V.V. - On large deviations of sums of randoms variables (In Russian).
Vestnik Leningrad Univ. 16, 25-37 (1961).

[16] PETROV V.V. - Limit theorems for k-sequences of independent random variables.
Selected Transl. Math. Statist. and Prob. Vol. 9, 1970. pp. 53.

[17] RICHTER W. - Local limit theorems for large deviations.
Theory prob. appl. 1957, Vol. II, pp. 206.

[18] SAHANENKO A. - On unimprovable estimates of the rate of convergence in invariance principle.
Novosibirsk, USSR.

[19] SCHAUDER J. - Zur theorie stetiger Abbildungen in funktional Räumen.
Math. Z., t. 26, 1937, p. 47-65.

[20] SKOROKHOD A.V. - Studies in the theory of random processes.
Reading, Mass : Addison - Wesley, 1965.

[21] SMIRNOFF N. - Über Wahrscheinlichkeiten grosser Abweichungen.
Rec. Soc. Math. Moscou, 40, (1933), pp. 441.

[22] STRASSEN V. - Almost sure behavior of sums of independents randoms variables and martingales.
Proc. 5 th. Berkeley Sympos. Math. Stat. proba. (1965), Vol. II, (part 1), 315-343.

[23] TITCHMARSH E.C. - Introduction to the theory of Fourier integrals.
Oxford at the Clarendon press, 1937.