N° d'ordre : 1049

50376
1983
23

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

«Mathématiques Appliquées»

par

Mohammed Tariq GUERCH

LA CONTRACTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES

Thèse soutenue le 17 juin 1983 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président	C. BREZINSKI
Rapporteur	G. PLATEAU
Examinateurs	M. GUIGNARD-SPIELBERG
	D. FAYARD

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique
M.	DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques
M.	FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	GERVAIS Michel	S.E.S.
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HANGAN Théodore	Mathématiques
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M.	KREMBEL Jean	Biologie
M.	LAURENT François	I.E.E.A.
Mle	LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle	LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je tiens à remercier Monsieur Claude BREZINSKI, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur Gérard PLATEAU, qui m'a proposé ce travail, d'en avoir constamment suivi l'évolution ; je suis très heureux de pouvoir lui exprimer ici ma profonde gratitude pour ses nombreux conseils, qui m'ont beaucoup aidé.

Je suis très honoré de la présence de Madame Monique SPIELBERG-GUIGNARD, Professeur à l'Université de Philadelphie, et de Monsieur Didier FAYARD, Professeur à l'IUT d'Orsay, qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail.

Je tiens aussi à remercier Madame CARON et Madame DEBOCK qui avec gentillesse et rapidité ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse.

Table des Matières

* * *

INTRODUCTION

MATHEWS [23], en 1897, a démontré qu'il est possible de transformer un système d'équations diophantiennes à coefficients strictement positifs en une équation équivalente (possédant le même ensemble de solutions réalisables). ELMAGHRABY et WIG [12] ont appliqué ce procédé pour combiner un système de m équations (m quelconque) en une seule ; ceci a permis de transformer un problème d'optimisation à plusieurs contraintes en un problème équivalent avec une seule contrainte.

L'élaboration des méthodes performantes de résolution du problème du knapsack semble pouvoir accroître l'intérêt des résultats récents, généralisant et améliorant de façon sensible ceux de Mathews ; ceci comprend les travaux de ANTHONISSE J.M. [1], BRADLEY G.H. [3], GLOVER F. [18], GLOVER F - WOOLSEY R.E [19], KALISZEWSKI-LIBURA [20], KENDALL-ZIONTS [22], MEYER R.R. [24], PADBERG M.W. [25], ROSENBERG I.G. [28].

La première partie de cet exposé est consacrée à une étude théorique du problème de contraction :

Etant donné un ensemble de m applications f_i $i = 1, \ldots, m$ définies sur un ensemble arbitraire X, et à valeurs entières, le problème consiste à remplacer les m équations diophantiennes :

$$(1) \qquad \boxed{\begin{array}{l} f_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ x \in X \end{array}}$$

par une seule équation :

$$(2) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0 \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{Z}_* \quad i = 1, \ldots, m \\ x \in X \end{array}}$$

dont les solutions sont identiques à celles de (1).

Toutes les méthodes connues de recherche des coefficients entiers λ_i $i = 1,\ldots,m$ peuvent être classifiées comme suit :

i) La première classe regroupe les méthodes dites de 2-contraction, dont le principe est le suivant :

l'unique équation (2), équivalente au système (1), est construite par une cascade de combinaisons linéaires des m équations de (1) prises deux à deux.

Une étude géométrique a permis de faire une comparaison globale de ces méthodes (qui avaient été toutes traitées, jusqu'à présent, d'une manière algébrique) et d'améliorer les meilleures d'entre elles (chapitre II).

ii) La deuxième classe regroupe les méthodes, dites de G-contraction, pour lesquelles les entiers λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ sont déterminés globalement par la construction d'une matrice C de $\mathbb{Z}$ (m, m-1) qui satisfait les deux conditions suivantes :

* les colonnes de C forment une base de l'espace :

$$\{z \in \mathbb{Z}^m \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = 0\}$$

** l'ensemble :

$$\{(k, x) \in \mathbb{Z}_*^{m-1} \times X \mid f_i(x) = C_i.k \quad i = 1, \ldots, m\}$$

est vide.

De nouveaux types de matrices C sont proposés, permettant pour une certaine classe d'applications f_i $i = 1, \ldots, m$ d'aboutir à de meilleurs résultats que ceux obtenus par les deux types de matrices proposés dans la littérature (PADBERG M.W. [25] et KALISZEWSKI-LIBURA [20]). Une interprétation géométrique de ces méthodes permet de faire une comparaison théorique entre les méthodes de 2-contraction et G-contraction (chapitre III).

La seconde partie de cet exposé est consacrée aux études algorithmiques basées sur les résultats théoriques développés dans les trois premiers chapitres.

Dans le chapitre IV est proposé un algorithme énumératif de résolution du problème du knapsack à contrainte d'égalité ; cette méthode est une adaptation de l'algorithme proposé par FAYARD-PLATEAU [15],dans le cadre du knapsack à contrainte d'inégalité.

Une nouvelle méthode,basée sur les résultats des chapitres II, III et IV,est ensuite proposée pour la résolution des problèmes mathématiques en nombres entiers (chapitre V).

Enfin,de nombreuses expériences numériques développées sur l'ordinateur CII HB IRIS 80 du centre de calcul de Lille I sont répertoriées dans le chapitre VI. Elles concernent la résolution du problème du knapsack à contrainte d'égalité et la mise en oeuvre de certaines méthodes de contraction.

NOTATIONS

Les notations utilisées tout au long de l'exposé sont les suivantes :

$\lfloor \lambda \rfloor$: partie entière d'un réel λ

étant donné un ensemble J :

$[J]$: enveloppe convexe de J

$J \backslash U$: complémentaire d'un sous-ensemble U de J

étant donné A une matrice de Format $(I \times J)$ où I et J sont des ensembles finis :

a_{ij} : élément $(i, j) \in I \times J$ de A

A^j : colonne $j \in J$ de A

A_i : ligne $i \in I$ de A

y_j : élément $j \in J$ de y

étant donné un problème d'optimisation (P) :

$v(P)$: valeur optimale de (P)

$\bar{v}(P)$: (resp. $\underline{v}(P)$) majorant (resp. minorant) de $v(P)$

$F(P)$: domaine de (P)

$(P \mid x \in X)$: lorsque (P) est résolu avec les conditions supplémentaires $x \in X$

lorsque (P) est un problème à n variables bivalentes :

x^* : solution optimale de (P)

V $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0 \text{ ou } 1, j = 1, \ldots, n\}$

$(\bar{P})$: problème (P) dans lequel $[V]$ remplace V

$\bar{x}$: solution optimale de $(\bar{P})$

étant donné $x \in [V]$:

$[x]$: élément de V tel que $[x]_j = \lfloor x_j \rfloor$ $j = 1, \ldots, n$

CHAPITRE I

LE PROBLEME DE CONTRACTION

INTRODUCTION

Dans ce chapitre sera formulé le problème de contraction, puis nous donnerons le principe des méthodes de résolution, ce qui permettra de distinguer deux classes de méthodes. En fin de chapitre nous citerons quelques domaines d'applications de la contraction : une première application, introduite par EL MAGHRABY et WIG [12], à la programmation mathématique, une seconde application sera faite au niveau du calcul de la réduite d'Hermite.

I.1 - FORMULATION DU PROBLÈME DE CONTRACTION

Etant donnés m un entier naturel ($m \geq 2$) et f_i $i = 1, \dots, m$ des applications de l'ensemble X dans $\mathbb{Z}$, où X est un ensemble arbitraire de $\mathbb{R}^n$, considérons le système suivant formé de m équations diophantiennes :

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x) = 0 \\ x \in X \end{array}}$$

Notons S l'ensemble des solutions réalisables de ce système :

$$S = \{x \in X \mid f_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m\}$$

et posons $\hat{S} = \{x \in X \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, f_i(x) = 0\}$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des entiers relatifs non nuls.

Le problème de contraction consiste à déterminer une combinaison linéaire de toutes les équations du système qui n'admet pour solutions réalisables que celles du système dans l'ensemble X. Il se formule donc de la manière suivante :

$$(P) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \text{déterminer } (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}_*^m \text{ tel que :} \\ \qquad S = \hat{S} \end{array}}$$

Remarque :

Il est évident que l'ensemble S est inclus dans l'ensemble $\hat{S}$; le problème (P) consiste donc à déterminer des entiers non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que l'ensemble $\hat{S}$ soit inclus dans l'ensemble S.

∎

Définition 1 :

Etant donnés $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des entiers non nuls, on dira que $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ est un **multiplicateur admissible** *s'il est solution du problème* (P).

On notera A l'ensemble de ces multiplicateurs admissibles. Dans le cas général, la détermination d'un multiplicateur admissible n'est pas immédiate ; cependant nous pouvons citer deux propriétés pour lesquelles, sous certaines hypothèses, l'existence d'un multiplicateur est évidente :

Propriété 1 :

Supposons que $f_i(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$

alors $(\lambda_1^o, \lambda_2^o, \ldots, \lambda_m^o) = (1, 1, \ldots, 1) \in A$.

Démonstration :

Soit $x^o \in \hat{S}$, montrons que $x^o \in S$

$$\left.\begin{array}{r} x^o \in \hat{S} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^o\, f_i(x^o) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x^o) = 0 \\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}\ f_i(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_i(x^o) = 0 \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}$$

$$\Rightarrow \quad x^o \in S$$

∎

Remarque :

Etant données des applications g_i $i \in \{1, \ldots, m\}$, à valeurs entières dans l'ensemble X telles que $f_i(x) = (g_i(x))^2\ \forall\, x \in X\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$ alors les applications f_i $i \in \{1, \ldots, m\}$ vérifient les hypothèses de la propriété 1.

∎

Propriété 2 :

On suppose que $m = 2$ *et que la quantité* $\max_{x \in X} |f_1(x)|$ *existe.*

Alors $(1, \hat{\lambda}_2) \in A$

où $|\hat{\lambda}_2| \geq \max_{x \in X} |f_1(x)| + 1.$

Démonstration :

Soit $x^o \in \hat{S}$, montrons que $x^o \in S$.

$$x^o \in \hat{S} \iff f_1(x^o) + \hat{\lambda}_2 f_2(x^o) = 0$$

$$\iff f_1(x^o) = - \hat{\lambda}_2 f_2(x^o). \quad (*)$$

ou bien $\left.\begin{array}{l} f_2(x^o) = 0 \\ \\ (*) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x^o) = 0 \Rightarrow x^o \in S$

ou bien $\left.\begin{array}{l} f_2(x^o) \neq 0 \\ \\ (*) \end{array}\right\} \Rightarrow |f_1(x^o)| \geq |\hat{\lambda}_2|$

ce qui est impossible d'après le choix de $\hat{\lambda}_2$.

∎

Remarques :

1) Compte tenu de cette dernière propriété, l'ensemble A peut être infini, est infini s'il est non vide ou il peut être vide, comme le montre l'exemple suivant :

Considérons le système

$$f_1(x) = -1 + x_1$$

$$f_2(x) = -1 \qquad + x_2$$

$$f_3(x) = \qquad\qquad + x_3 - x_4$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4.$$

Supposons qu'il existe une solution $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$ qui appartient à l'ensemble A.

Soit $x^o = (1 + \hat{\lambda}_3, 1, 0, \hat{\lambda}_1)$, alors $x^o \in \hat{S}$ et x^o n'appartient pas à S.

2) L'exemple suivant montre qu'en général, un système formé d'inéquations ne peut être remplacé par une seule inéquation équivalente, c'est à dire qui n'admet pour solutions réalisables que celles du sytème :

$$\begin{cases} -4x_1 + 8x_2 \leq 5 \\ -6x_1 + 7x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Les seules solutions réalisables du système sont les points (0, 0) et (1, 1), or tout demi-espace qui contient ces deux points contiendra au moins un autre point à coordonnées bivalentes.

Il est à noter que CHVATAL V. et HAMMER P.L. [9] [10] ont établi dans le cas bivalent, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'inéquations soit transformé en une seule inéquation équivalente.

Il est donc impossible, en général, de déterminer une inéquation équivalente, même après transformation du système en équations (en ajoutant des variables d'écarts), puis combinaison du nouveau système, car on obtient une équation qui contient plus de points que toute inéquation, déterminée à partir d'une combinaison linéaire des inéquations du système initial.

I.2 - PRINCIPES DES MÉTHODES DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CONTRACTION

Il existe deux types de méthodes, pour résoudre le problème (P)

a) Le premier type de méthodes appelé 2-contraction, consiste à déterminer une équation équivalente aux deux premières et à réitérer le procédé jusqu'à l'obtention d'une seule équation équivalente à celles du système ; ce type de méthodes, qui comporte (m-1) étapes se schématise donc comme suit :

$$\left.\begin{matrix} f'_1(x)=f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \end{matrix}\right\rangle f'_2(x)=\mu_2 f_2(x)+\mu'_1 f'_1(x)=0 \qquad \left.\begin{matrix} f'_2(x)=0 \\ f_3(x)=0 \end{matrix}\right\rangle f'_3(x)=\mu_3 f_3(x)+\mu'_2 f'_2(x) = 0$$

$$\cdots \left.\begin{matrix} f'_{m-1}(x)=0 \\ f_m(x)=0 \end{matrix}\right\rangle f'_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = \mu_m f_m(x) + \mu'_{m-1} f'_{m-1}(x) = 0$$

où μ_{k+1}, μ'_k $(1 \leq k \leq m-1)$ sont solutions du problème :

$$\left[\begin{array}{l}\text{trouver } (\mu_{k+1}, \mu'_k) \in \mathbb{Z}_*^2 \text{ tel que :} \\ \{x \in X \mid f_{k+1}(x) = f'_k(x) = 0\} = \{x \in X \mid \mu_{k+1} f_{k+1}(x) + \mu'_k f'_k(x) = 0\}\end{array}\right.$$

qui consiste à déterminer une seule équation équivalente aux deux équations $f_{k+1}(x) = f'_k(x) = 0$.

b) Le second type de méthodes, appelé G-contraction, réalise une contraction globale : on part du principe inverse de la 2-contraction, en déterminant directement les points λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ pour lesquels l'équation $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0$ n'admet que $f_i(x) = 0$ comme solution, lorsque x parcourt l'ensemble X.

I.3 - APPLICATIONS

Avant de réaliser une étude approfondie de toutes ces méthodes, nous allons donner deux domaines d'applications le premier introduit par ELMAGHRABY et WIG [12] est relatif à la programmation mathématique, le second concerne l'optimisation du calcul de la réduite d'Hermite d'une matrice donnée.

I.3.1 - Application à la programmation mathématique

MATHEWS [23], a démontré qu'il est possible de transformer un système de deux équations diophantiennes à coefficients entiers tous strictement positifs, en une équation équivalente ; ELMAGHRABY et WIG [12] ont étendu cette idée, pour combiner un système de $m (m \geq 2)$ équations diophantiennes en une seule, dans le but de résoudre le problème du type suivant :

$$(P_o) \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{Opt. } c(x) \\ \text{s.c. } x \in S\end{array}}$$

où c est une application de l'ensemble X dans $\mathbb{R}$.

Etant donné $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m) \in A$, le problème (P_o) à plusieurs contraintes est équivalent au problème :

$$(P_1)\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Opt } c(x) \\ \\ x \in \hat{S} \end{array}}$$

qui ne possède qu'une seule contrainte.

Un intérêt de cette transformation est que pour le problème (P_1), la construction d'un algorithme de résolution est moins complexe que pour les problèmes à plusieurs contraintes (voir la résolution de (P_1) au chapitre IV). D'autre part, du point de vue informatique, la résolution du problème (P_1) permet de gagner de la place mémoire, puisqu'il est possible de ne stocker seulement que deux vecteurs à la fois, en mémoire centrale de l'ordinateur, aussi bien pour déterminer un multiplicateur admissible, que pour résoudre le problème (P_1), au lieu de (m+1) vecteurs pour résoudre le problème (P_o).

Tous les schémas de contraction présentent la même caractérisation : la plupart des coefficients de la contrainte résultante deviennent trop grands, pour que chacun d'entre eux puisse être stocké dans un seul mot machine, du fait que les λ_i (i = 1, ..., m) prennent des valeurs grandes. Il est possible de pallier à cet inconvénient en construisant un ensemble de sous-programmes, qui exécutent les opérations de base (addition, multiplication, etc ...) en manipulant des groupes de mots suffisamment grands pour contenir les coefficients de l'équation équivalente. Un tel programme serait particulièrement valable pour un utilisateur qui n'est pas limité par le temps de calcul (exemple : avec un mini-ordinateur).

I.3.2 - *Application au calcul de la réduite d'Hermite*

Etant donnée une matrice A de $\mathbb{Z}(m, n)$ et de rang, r, il existe deux matrices unimodulaires U et V (voir par exemple [16]) telles que :

$$U\,A\,V = \begin{pmatrix} L & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix} = H$$

où $L \in \mathbb{Z}(r, r)$ est de rang r et triangulaire inférieure.

H est dite **la réduite d'Hermite** de A qui est utilisée entre autres, d'une part dans la résolution des systèmes d'équations linéaires en nombres entiers (voir [16] et [7]), d'autre part dans la transformation de problèmes à contraintes en égalités en des problèmes équivalents et à contraintes en inégalités, voir [6].

L'algorithme proposé dans [16] et [7] pour calculer la matrice H consiste d'abord à déterminer deux matrices unimodulaires U_1 et V_1 telles que :

$$U_1 \, A \, V_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \ \ldots\ldots \ 0 \\ \alpha_2 & \\ \vdots & \begin{pmatrix} \ \ A_1 \ \ \end{pmatrix} \\ \alpha_m & \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in \mathbf{Z}\,(m-1,\ n-1)$ et $\alpha_i \in \mathbf{Z}$ $\quad i = 1, \ldots, m$

et d'itérer ce processus sur la matrice A_1.

Il faut noter que la matrice A_1 est obtenue à partir d'une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A et de ce fait, en général les coefficients des matrices de type A_1 deviennent grands au cours des itérations.

En se plaçant dans le contexte de la détermination de la réduite d'Hermite d'une matrice A du système d'équations où $b \in \mathbf{Z}^m$:

$$(*) \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \in X \subset \mathbf{Z}^n \end{cases}$$

où X est tel que la réduction de nombres d'équations par une méthode de contraction est possible (le système réduit équivalent n'étant pas nécessairement composé d'une équation unique), il peut s'avérer intéressant de déterminer la réduite d'Hermite de la matrice du système réduit plutôt que celle du système d'origine, puisque les complexités spatiale et temporelle dépendent du nombre d'équations ; ceci est confirmé par les expériences numériques résumées dans le tableau 1 :

m : nombres d'équations

n : nombres de variables

A : (a_{ij}) $a_{ij} \in [0,\ 10]$ $\forall\, i = 1, \ldots, m$ $\quad \forall\, j = 1, \ldots, n$

t_i : temps de calcul (en secondes sur CII.HB IRIS 80) de la réduite d'Hermite

- du système initial, pour i = 1
- du système réduit de moitié, pour i = 2;

m	6	10	10	10	10	10	10	16	16	16	16	16
n	10	15	30	40	50	60	70	20	30	40	50	90
t_1	<0,1	<0,1	0,4	0,9	1,3	1,8	2,4	0,4	*14	*13	*14	*12
t_2	<0,1	<0,1	0,2	0,6	0,8	1,1	1,5	0,2	0,6	1	1,5	* 6

* La réduite d'Hermite n'ayant pu être calculée par dépassement de la limite de représentation d'un entier sur ordinateur, le nombre indiqué est celui du numéro de l'itération au cours de laquelle la limite est dépassée. Il est à remarquer que pour m = 16 et n = 90, la réduction du système à six équations au lieu de huit a permis de déterminer la réduite d'Hermite, en 2,9 secondes.

CHAPITRE II

METHODES DE 2-CONTRACTION

INTRODUCTION

Etant données m applications f_i $i = 1, \ldots, m$, définies sur un ensemble arbitraire X de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs entières, une méthode de 2-contraction consiste à déterminer une équation équivalente au système, par une cascade de combinaisons linéaires de m équations prises deux à deux.

Dans une première partie, nous montrons que l'idée de base de ces méthodes est la suivante :

A chaque étape, étant données deux applications g et h, la contraction de $\{g(x) = h(x) = 0, x \in X\}$ est réalisée en déterminant deux entiers λ_1, λ_2 tels que : $\{(k, x) \in \mathbb{Z}_* \times X \mid h(x) = k\lambda_1, g(x) = -k\lambda_2\}$ est vide, pour obtenir l'équation équivalente $\lambda_1 g(x) + \lambda_2 h(x) = 0 \quad x \in X$.

Toutes ces méthodes, ayant été traitées d'une manière algébrique, une approche originale est faite en réalisant une étude géométrique systématique de toutes les méthodes connues, qui a permis de distinguer deux classes de méthodes, la première (appelée $S_1 \times S_2$-contraction) regroupe les travaux de ANTHONISSE [1], GLOVER-WOOLSEY [19] et KENDALL-ZIONTS [22], la deuxième (appelée S_{12}-contraction) regroupe ceux de MATHEWS [23], GLOVER [18] MEYER [24], ANTHONISSE [1], BRADLEY [3]. Elles seront étudiées, respectivement, dans la quatrième et la cinquième partie.

Après avoir montré que la méthode de BRADLEY est la plus performante des méthodes existantes, nous proposons finalement une amélioration de cette méthode.

II.1 - FORMULATION DU PROBLÈME

Etant donnés :

f_1 et f_2 deux applications à valeurs entières dans un ensemble X

l'ensemble :

$$S = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x) = 0\}$$

et l'ensemble :

$$\hat{S} = \{x \in X \mid \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0\} \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{Z}_* \quad i = 1, 2$$

chaque étape d'une méthode de 2-contraction,consiste à déterminer deux entiers non nuls,tels que tout élément x de X vérifiant l'équation $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$, appartient à l'ensemble S.

A chaque fois,le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{trouver } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}_*^2 \text{ tel que :} \\ \qquad S = \hat{S} \end{array}}$$

II.2 - RÉSULTATS THÉORIQUES

Avant de présenter le résultat de base de toutes les méthodes (excepté celle de Weinberg [32]),nous donnons deux résultats préliminaires.

Lemme 1 :

Etant donné :

$$R = \{v \in \mathbb{Q} \mid v = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \ x \in X^1\}$$

où $X^1 = \{x \in X \mid f_2(x) \neq 0\}$

Alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible si et seulement si le rapport* λ_2/λ_1 *n'appartient pas à* R.

Démonstration :

(<=) Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}_*^2$: $\lambda_2/\lambda_1 \notin R$.

et $x^o \in \hat{S}$, montrons que $x^o \in S$

Il y a deux cas :

$$\text{a)} \left.\begin{array}{l} f_2(x^o) = 0 \\ x^o \in \hat{S} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x^o) = 0 \Rightarrow x^o \in S$$

b) $\left.\begin{array}{l} f_2(x^o) \neq 0 \\ x^o \in \hat{S} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \dfrac{f_1(x^o)}{f_2(x^o)}$

ce qui contredit le fait que λ_2/λ_1 n'appartient pas à R.

(=>) Le raisonnement se fait par contradiction :

Supposons que $\lambda_2/\lambda_1 \in R$, ceci implique qu'il existe un $x^o \in X^1$ tel que : $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \dfrac{f_1(x^o)}{f_2(x^o)}$,c'est à dire que $x^o \in \hat{S}$; mais $x^o \in X^1$ implique que $x^o \notin S$ ($f_2(x^o) \neq 0$), ce qui permet de conclure que (λ_1, λ_2) ne peut être un multiplicateur admissible.

∎

Dans une partie ultérieure, nous développerons quelques conditions suffisantes, et nécessaires et suffisantes, pour caractériser les couples d'entiers (λ_1, λ_2), tels que le rapport λ_2/λ_1 n'appartient pas à l'ensemble R. Par contre, le lemme suivant a pour but de caractériser les éléments de R.

Lemme 2 :

Etant donnés λ_1, λ_2 *deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux , alors* $\lambda_2/\lambda_1 \in R$ *si et seulement s'il existe* $(k, x^o) \in \mathbb{Z}_* \times X^1$ *tel que :*

$$(*) \quad \left[\begin{array}{l} f_1(x^o) = k\lambda_2 \\ f_2(x^o) = -k\lambda_1 \end{array}\right.$$

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_2/\lambda_1 \in R \Leftrightarrow \exists\ x^o \in X^1 : - \dfrac{f_1(x^o)}{f_2(x^o)} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ \text{pgcd } (\lambda_1, \lambda_2) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ k \in \mathbb{Z}_* \text{ tel que :} \\ f_1(x^o) = k\lambda_2 \text{ et } f_2(x^o) = -k\lambda_1 \end{array}\right.$$

Inversement, s'il existe $(k, x^o) \in \mathbb{Z}_* \times X^1$ qui vérifie le système (*), ceci implique que $- \dfrac{f_1(x^o)}{f_2(x^o)} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, c'est à dire que $\lambda_2/\lambda_1 \in R$.

∎

Les deux résultats précédents permettent d'énoncer le théorème fondamental suivant :

Théorème 1 :

Etant donnés λ_1, λ_2 *deux entiers premiers entre eux et l'ensemble*

$$E = \{(k, x) \in \mathbb{Z}_* \times X^1 \mid f_1(x) = k\lambda_2,\ f_2(x) = -k\lambda_1\}.$$

alors :

E *est vide* <=> (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Démonstration :

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in A \underset{(\text{lemme } 1)}{\iff} \lambda_2/\lambda_1 \notin R$$

$$\underset{(\text{lemme } 2)}{\iff} \text{il n'existe pas } (k, x^o) \in \mathbb{Z}_* \times X^1 \text{ tel que}$$

$$f_1(x^o) = k\lambda_2 \text{ et } f_2(x^o) = -k\lambda_1$$

$$\iff E \text{ est vide.}$$

∎

Une autre condition suffisante, induite par le théorème 1, est énoncée dans le résultat ci-dessous :

Corollaire 1 :

Etant donnés λ_1, λ_2 *deux entiers premiers entre eux*

et $E' = \{(k, x, y) \in \mathbb{Z}_* \times (X^1)^2 \mid f_1(x) = k\lambda_2,\ f_2(y) = -k\lambda_2\}$

alors

E' *est vide* => (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Remarque :

La condition de vacuité de l'ensemble E' est suffisante, puisqu'elle implique que l'ensemble E est vide, mais elle n'est pas nécessaire, car il peut exister un multiplicateur admissible, sans que l'ensemble E' soit vide.

∎

Les méthodes proposées (à l'exception de celle de Weinberg [32]) consistent à imposer des conditions suffisantes, mais non nécessaires, pour que l'un des ensembles E ou E' soit vide.

II.3 - FORMALISME GÉOMÉTRIQUE DES MÉTHODES DE 2-CONTRACTION

A l'exception de celle de Weinberg [32], toutes les méthodes ont été traitées de manière algébrique ; les auteurs donnent tous, leurs propres conditions sur le couple (λ_1, λ_2) telles que pour tout entier k, ($|k|$ supérieur ou égal à un) le système (*) n'admet pas de solution dans l'ensemble X. Une étude algébrique comparative globale, de toutes les méthodes connues, est difficilement envisageable (jusqu'à présent, chaque auteur a comparé ses propres résultats obtenus avec ceux connus, uniquement sur quelques exemples numériques, toujours les mêmes ... (voir [2], [18])).

De la même façon que Weinberg [32], qui a interprété ses méthodes dans le plan $\mathbb{Z}^2$ (partie II.3.1) nous sommes parvenus à donner un formalisme géométrique général de toutes les méthodes, ce qui a permis de les comparer.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons les méthodes de Weinberg [32] ; après avoir donné quelques définitions, dans la seconde partie nous établissons quelques résultats permettant de distinguer deux classes de méthodes, qui feront l'objet d'une étude comparative détaillée dans les parties II.4 et II.5.

II.3.1 - Les méthodes de Weinberg [32] :

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'ensemble X est fini. L'auteur appelle **spectre** (relatif à X) d'une forme linéaire f_i (i = 1, 2) ou de deux formes linéaires (f_1, f_2) l'ensemble des valeurs prises respectivement par $f_i(x)$, i = 1, 2 et $(f_1(x), f_2(x))$ lorsque x parcourt l'ensemble X ; On les note respectivement S_i (i = 1, 2), S_{12}.

Remarques :

1) X étant un ensemble fini, les spectres S_i (i = 1, 2), S_{12} le sont également.

2) A l'évidence, le spectre S_{12} est inclus dans l'ensemble $S_1 \times S_2$.

∎

Les deux résultats suivants, sont à la base des deux méthodes proposées par Weinberg.

Théorème 2 [32] :

Une condition suffisante, pour que (λ_1, λ_2) soit un multiplicateur admissible est que l'ensemble :

$$\{(z_1, z_2) \in S_1 \times S_2 \mid \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0\}$$

se réduit à l'élément nul.

Démonstration :

L'inclusion $\hat{S} \subset S$ se déduit du raisonnement suivant :

notons $A = \{(z_1, z_2) \in S_1 \times S_2 \mid \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0\}$

$$\left.\begin{array}{r} x^o \in \hat{S} \Rightarrow z = (f_1(x^o), f_2(x^o)) \in A \\ A = \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x^o \in S$$

∎

Théorème 3 [32] :

Une condition nécessaire et suffisante pour que (λ_1, λ_2) soit un multiplicateur admissible est que l'ensemble :

$$\{(z_1, z_2) \in S_{12} \mid \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0\}$$

se réduit à l'élément nul.

Démonstration :

* Pour la condition suffisante, la démonstration est analogue à celle du théorème précédent, puisque le spectre S_{12} est inclus dans l'ensemble $S_1 \times S_2$.

* La condition est nécessaire :

Soit (λ_1, λ_2) un multiplicateur admissible, nous montrons que l'hypothèse $A' \neq \{0\}$ $(A' = \{(z_1, z_2) \in S_{12} \mid \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0\})$ aboutit à une contradiction :
$A' \neq \{0\}$ implique qu'il existe $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in S_{12}$ tel que $|\hat{z}_1| + |\hat{z}_2|$ soit strictement positif.

Soit alors $\hat{x} \in X$ tel que $(\hat{z}_1, \hat{z}_2) = (f_1(\hat{x}), f_2(\hat{x}))$, or par hypothèse $\lambda_1 f_1(\hat{x}) + \lambda_2 f_2(\hat{x}) = 0$ donc $\hat{x} \in \hat{S}$.
$\hat{x}$ n'appartient pas à l'ensemble S, car cela n'est vrai que si $f_i(\hat{x}) = 0$ $(i = 1, 2)$, or $\hat{x}$ appartient à $\hat{S}$ ce qui est absurde puisque $\hat{S} \subset S$.

∎

Corollaire 2 :

i) Une condition suffisante pour que (λ_1, λ_2) soit un multiplicateur admissible est que :

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \neq 0 \qquad \forall\, (z_1, z_2) \in S_1 \times S_2 \ : \ |z_1| + |z_2| > 0$$

ii) Une condition nécessaire et suffisante pour que (λ_1, λ_2) soit un multiplicateur admissible est que :

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \neq 0 \qquad \forall\, (z_1, z_2) \in S_{12} \ : \ |z_1| + |z_2| > 0.$$

La première méthode de Weinberg [32], consiste à déterminer les spectres S_1 et S_2, avant de construire (λ_1, λ_2) vérifiant la condition du théorème 2. A partir du spectre S_{12}, la deuxième méthode fournit des couples d'entiers (λ_1, λ_2) qui vérifient la condition du théorème 3.
Des algorithmes de détermination de spectres S_i $(i = 1, 2)$ et S_{12}, ainsi que les algorithmes associés de détermination des multiplicateurs admissibles sont proposés dans la partie annexe.

Nous allons illustrer ces deux méthodes par les exemples suivants :

Exemple

$f_1(x) = 7x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 15x_4 - 24$

$f_2(x) = 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 - 20$

$x_i = 0$ ou $1 \quad i = 1, \ldots, 4$

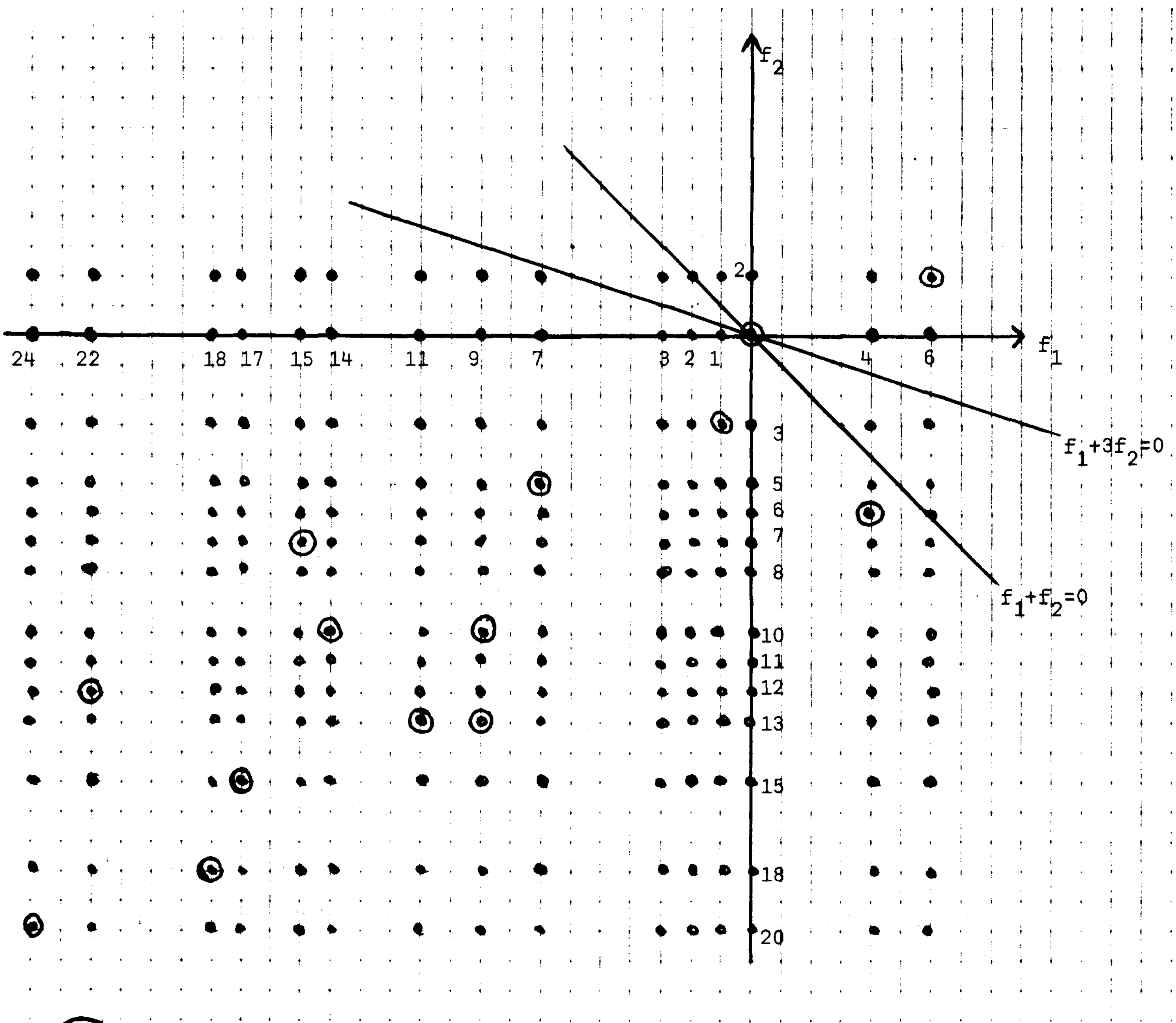


Figure 0

Le cardinal de $S_1 \times S_2$ est égal à 210, celui de S_{12} est nettement inférieur : 16. Les points de S_{12} sont représentés sur la figure 1 par : ⊙. La première méthode nous permet de déterminer la droite $f_1 + 3f_2 = 0$, la droite $f_1+f_2 = 0$ est déterminé par la 2ème méthode (nous remarquons que cette dernière droite ne pouvait pas être déterminée par la première méthode).

II.3.2 - Nouvelle formulation du problème (P) :

L'approche géométrique systématique réalisée dans ce paragraphe est inspirée des travaux de Weinberg [32]. Après avoir énoncé quelques définitions et propriétés, nous donnons une nouvelle formulation géométrique du problème (P), et un résultat fondamental, qui permet de distinguer les deux classes de méthodes et de dégager la démarche générale utilisée pour résoudre le problème (P).

Définition 2 :

On dira qu'un point v *de* $\mathbb{Z}^2$ *est fondamental si et seulement si ses composantes sont premières entre elles.*

Propriété 3 :

Etant donnés :

v *un point de* $\mathbb{Z}^2$, v_o *le point fondamental tel que* $v = \text{pgcd}(v_1, v_2).v_o$, *et* $D(v)$ *la droite passant par* 0 *et le point* v

alors $D(v) \cap \mathbb{Z}^2 = \{w \in \mathbb{Z}^2 \quad w = qv_o,\ q \in \mathbb{Z}\}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Notons } D^*(v) &= D(v) \cap \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \\
&= \{w \in \mathbb{Z}^2 \mid w = qv_o,\ q \in \mathbb{Z}_*\} \\
&= \{\ \ldots, -3v_o, -2v_o, v_o, 2v_o, 3v_o, \ldots\ \}
\end{aligned}
$$

Le problème (P) est équivalent au problème suivant :

$$
\boxed{\begin{array}{c}\text{trouver un point fondamental } v_o \text{ tel que} \\ S_{12} \cap D^*(v_o) = \emptyset\end{array}}
$$

Le problème consiste donc à déterminer un point fondamental v_o tel que l'ensemble $D^*(v_o)$ ne contient aucun point du spectre S_{12} :

Exemple [18] :

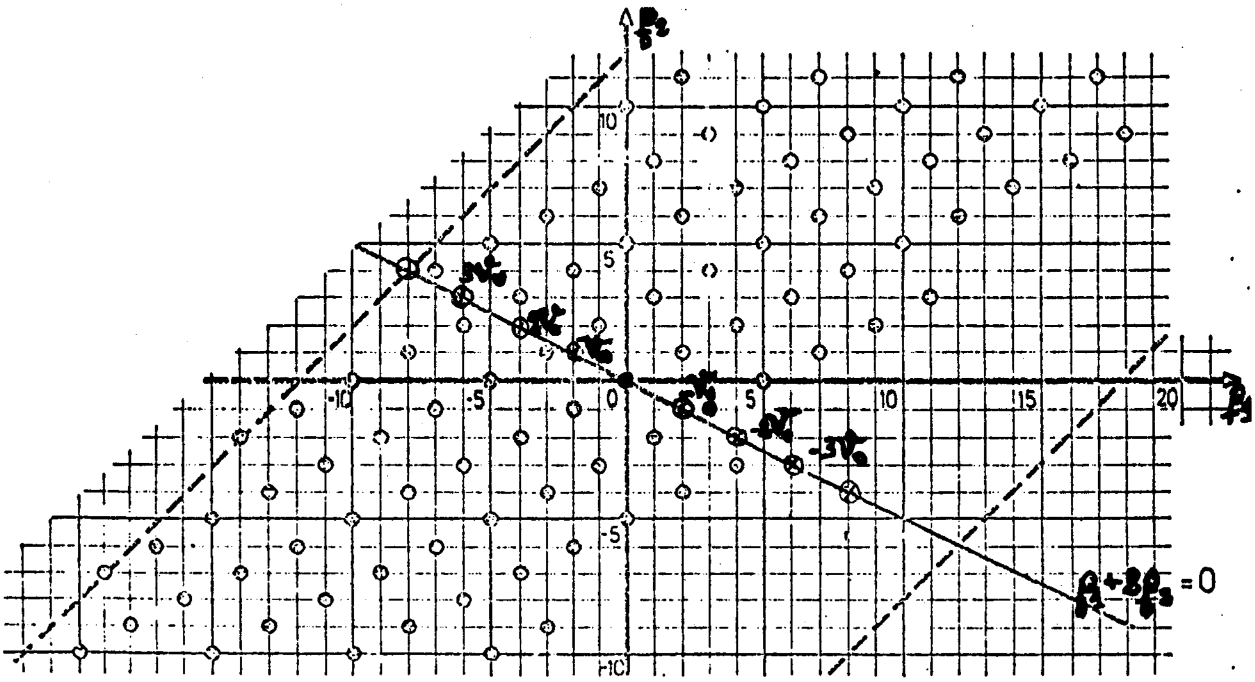
$f_1(x) = 7x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 84$

$f_2(x) = 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 72$

$0 \leq x_1 \leq 12 \quad x_1$ entier

$0 \leq x_2 \leq 9 \quad x_2$ entier

$0 \leq x_3 \leq 14 \quad x_3$ entier



La figure représente le spectre S_{12} de (f_1, f_2).

Définition 3 :

Etant donné un ensemble A *de* $\mathbb{Z}^2$, *on dira que* A *est* un ensemble borné dans une direction, *s'il existe un point fondamental* v_o *n'appartenant pas à* A, *tel que l'ensemble* $D^*(v_o)$ *ne contient aucun point de* A ; v_o *sera appelé point fondamental privilégié pour* A *(ou plus succintement "P.F.P. pour A").*

Propriété 4 :

Etant donnés :

$w_1, w_2 \in \mathbb{R}_*^2$; $\varepsilon \in \{-1, 1\}$;

L'ensemble $B_\varepsilon(w_1, w_2) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \varepsilon\, xy > 0 \Rightarrow |x| \leq w_1$ *ou* $|y| \leq w_2\}$

est borné dans au moins une direction.

Démonstration :

Supposons que : $\varepsilon = +1$ et $w_2 = \max(w_1, w_2)$, $w_2 \in \mathbb{N}$.

Le point fondamental v_o de coordonnées w_2, w_2+1 est un point fondamental privilégié pour $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ puisque à l'évidence, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_*$, $k\, v_o \notin B_\varepsilon(w_1, w_2)$.

∎

Remarques :

1) Compte tenu de la symétrie de $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ par rapport à l'origine, tout point fondamental n'appartenant pas à $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ est un P.F.P. pour $B_\varepsilon(w_1, w_2)$.

2) Tout ensemble B borné est un ensemble borné dans une infinité de directions, puisqu'il existe deux entiers naturels w_1, w_2 tels que B soit inclus dans $B\,(w_1, w_2)$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

∎

Théorème 4 :

Etant donnés :

un ensemble A *borné dans une direction, et* v_o *un* P.F.P. *pour* A

tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1) $A \supset S_1 \times S_2$

2) $A \supset S_{12}$

3) A *contient une partie de* $S_1 \times S_2$ *et* $k\, v_o \notin S_1 \times S_2 \setminus (A \cap S_1 \times S_2)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_*$

4) A *contient une partie de* S_{12} *et* $k\, v_o \notin S_{12} \setminus (A \cap S_{12})$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_*$

Alors $\quad S_{12} \cap D^*(v_o) = \emptyset$

<u>Démonstration</u> :

Nous démontrons ce théorème dans les cas 1) et 3) (les autres cas s'en déduisent facilement).

<u>cas 1)</u>

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $S_{12} \cap D^*(v_o)$ est non vide.

Ceci implique :

$$\left.\begin{array}{r} \exists\, v \in S_{12} \cap D^*(v_o) \;\Rightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z}_* \quad v = k\, v_o \\ v_o \text{ P.F.P. pour } A \end{array}\right\} \Rightarrow v \notin A \qquad (1)$$

$$v \in S_{12} \subset S_1 \times S_2 \subset A \;\Rightarrow\; v \in A \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) sont incompatibles.

<u>cas 3)</u>

Comme ci-dessus nous supposons qu'il existe $v \in S_{12} \cap D^*(v_o)$:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \text{i.e. } \exists\, k \in \mathbb{Z}_* : v = k\, v_o \\ v_o \text{ P.F.P. pour } A \end{array}\right\} \Rightarrow v \notin A \\ v = k\, v_o \notin S_1 \times S_2 \setminus (A \cap S_1 \times S_2) \end{array}\right\} \Rightarrow v \notin S_1 \times S_2 \qquad (3)$$

$$v \in S_{12} \subset S_1 \times S_2 \qquad (4)$$

(3) et (4) ne peuvent pas être réalisés simultanément.

∎

Les figures ci-dessous représentent les cas 2) et 4).

Les éléments du spectre S_{12} sont représentés par : x

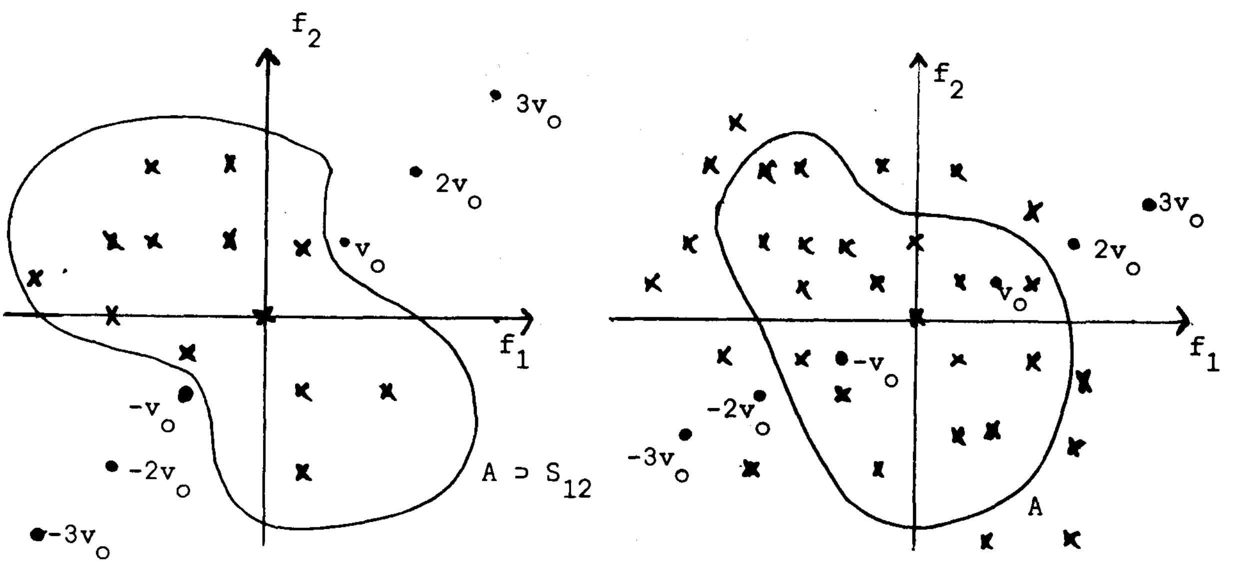


Figure 2

Définition 4 :

Les méthodes, pour lesquelles l'ensemble A vérifie la condition 1) ou la condition 3) du théorème 4, sont appelées méthodes de $S_1 \times S_2$-contraction, celles pour lesquelles A vérifie la condition 2) ou la condition 4) du théorème 4, sont appelées méthodes de S_{12}-contraction.

Il est à noter, que du point de vue taille des multiplicateurs, il est plus judicieux, lorsque cela est possible, de déterminer des ensembles A vérifiant la condition 3) (ou 4)) ; cela nous amène à la question suivante :

Etant donné un ensemble A, vérifiant la condition 1) (ou 2)), existe-t-il un ensemble A' (déduit de l'ensemble A) tel que la condition 3) (ou 4)) soit vérifiée ?

Le résultat suivant répond à la question lorsque l'ensemble A est de la forme d'un $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ défini dans la propriété 4.

Soient w_1, w_2 deux réels tels que $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ vérifie la condition 1) du théorème 4 (ou la condition 2)), alors le résultat suivant permet de déterminer deux réels w_1^*, w_2^*, tels que $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$ soit inclus dans $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ et vérifie la condition 3) (ou la condition 4)) du théorème 4.

Théorème 5 :

Etant donnés w_1, w_2 *deux réels positifs non nuls, tels que* $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ *vérifie la condition 2) du théorème 4* , q *un entier naturel* ($q \geq 2$)

et $w_i^* = \dfrac{w_i}{q}$ $i = 1, 2$

Une condition suffisante pour que $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$ *vérifie la condition 4) du théorème 4 est que :*

(*) $k\, v \notin S_{12} \setminus (B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \cap S_{12})$, $|k| = 1, \ldots, q-1$ *où* v P.F.P. *pour* $B_\varepsilon(w_1, w_2)$.

Démonstration :

Il faut montrer que $k\, v \notin S_{12} \setminus (B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \cap S_{12})$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}_*$; compte tenu de (*), il reste à vérifier que :

$$k\, v \notin S_{12} \setminus B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \cap S_{12} \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z} : |k| \geq q.$$

$$v(v_1, v_2) \notin B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \iff \begin{cases} q\,|v_1| > w_1 \text{ et } q\,|v_2| > w_2 \\ \varepsilon\, v_1\, v_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \left.\begin{array}{l} \text{si } k \geq q \Rightarrow k\, v \notin B_\varepsilon(w_1, w_2) \\ \text{si } k \leq -q \Rightarrow k\, v \notin B_\varepsilon(w_1, w_2) \\ B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \subset B_\varepsilon(w_1, w_2) \end{array}\right\} \Rightarrow k\, v \notin S_{12} \setminus (B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \cap S_{12})$$

∎

Corollaire 3 :

Etant donnés w_1, w_2 *deux réels positifs non nuls, tels que* $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ *vérifie la condition 1) du théorème 4,* q *un entier* ($q \geq 2$)

et $w_i^* = \dfrac{w_i}{q}$ $i = 1, 2$

Une condition suffisante pour que $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$ *vérifie la condition 3) du théorème 4 est que :*

$k\, v \notin S_1 \times S_2 \setminus (B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \cap S_1 \times S_2)$, $|k| = 1, \ldots, q-1$ *où* v P.F.P. *pour* $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$

La démonstration est immédiate en notant que $S_{12} \subset S_1 \times S_2$.

Remarque :

Etant donnés w_1, w_2 deux réels non nuls, tels que $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ vérifie la condition 2) du théorème 4.

Soient q, q' deux entiers ($q \geq 2$, $q' \geq 2$)

$$w_1^* = \frac{w_1}{q}, \quad w_2^* = \frac{w_2}{q'}$$

Alors $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$ vérifie la condition 4) du théorème 4 si :

$$k\,v \notin S_{12} \setminus (B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*) \cap S_{12}) \quad |k| = 1, 2, \ldots, \inf(q, q') - 1.$$

Dans la suite de ce chapitre, nous montrons que pour toute méthode connue, il existe un ensemble A, tel que l'une des conditions du théorème 4 soit vérifiée. Plus précisément nous donnons la démarche suivie :

. Cadre général des méthodes de 2-contraction :

phase 1 Détermination d'un ensemble A contenant l'ensemble S_{12} (ou $S_1 \times S_2$).

phase 2 Construction d'un ensemble de type $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ contenant A (il vérifie ainsi la condition 1) ou 2) du théorème 4).

phase 3 Utilisation des résultats du théorème 4, corollaire 3, pour générer à partir de (w_1, w_2) deux réels w_1^*, w_2^* tels que $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$ soit contenu dans $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ en excluant des points de S_{12} (ou de $S_1 \times S_2$) (vérifie ainsi la condition 3) ou 4) du théorème 4).

II.4 - LES MÉTHODES DE $S_1 \times S_2$-CONTRACTION

Dans cette partie, sont décrites les méthodes proposées par ANTHONISSE [1], GLOVER-WOOLSEY [19] et KENDALL-ZIONTS [22].

Le tableau, ci-dessous, résume les hypothèses utilisées :

auteurs	f_i	a_{ij}	X
[19]	linéaires	$\mathbb{N}_*$	$\mathbb{N}^n$
[1] et [22]	"	$\mathbb{Z}$	$0 \leq x \leq d$ entier

La première méthode d'ANTHONISSE consiste à déterminer un pavé A,qui contient l'ensemble $S_1 \times S_2$; la construction de l'ensemble de $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ qui contient A et qui satisfait la condition 1) du théorème 4 est réalisée à partir des coordonnées du pavé A.

La méthode de KENDALL-ZIONTS (qui est une généralisation de celle de GLOVER-WOOLSEY, en prenant en compte les a_{ij} de signes quelconques) permet de déterminer par une méthode plus complexe un ensemble du type $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$ (où $w_i^* = \frac{w_i}{2}$ $i = 1, 2$) de la phase 3 du cadre général des méthodes de 2-contraction.

Il est à noter, que les démonstrations des résultats de cette dernière partie sont détaillés dans le cadre plus général du troisième chapitre.

II.4.1 - La méthode d'ANTHONISSE [1] (1ère version)

Etant donnés :

$$\ell_i = \min_{x \in X} f_i(x)$$

$$u_i = \max_{x \in X} f_i(x) \qquad i = 1, 2$$

on considère le pavé $A = [\ell_1, u_1] \times [\ell_2, u_2]$ (qui contient à l'évidence l'ensemble $S_1 \times S_2$).

Remarque :

S'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que ℓ_i soit strictement positif ou u_i soit strictement négatif alors S est vide.

Théorème 6 [1] :

Etant donnés λ_1, λ_2 deux entiers naturels, premiers entre eux, vérifiant les deux conditions suivantes :

a) $(\lambda_2, -\lambda_1) \notin A$

b) $(-\lambda_2, \lambda_1) \notin A$

Alors (λ_1, λ_2) est un multiplicateur admissible.

Démonstration :

Soit $x^o \in \hat{S}$, montrons que $x^o \in S$.

$$\left.\begin{array}{l} x^o \in \hat{S} \Leftrightarrow \lambda_1 f_1(x^o) + \lambda_2 f_2(x^o) = 0 \\ \\ \qquad \text{pgcd}(\lambda_1, \lambda_2) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ \\ f_1(x^o) = k\lambda_2,\ f_2(x^o) = -k\lambda_1 \end{array}\right.$$

Si $k = 0 \Rightarrow f_1(x^o) = f_2(x^o) = 0 \Rightarrow x^o \in S$

Si $k \neq 0$ ou bien $k \geq 1$, d'après a) $(f_1(x^o), f_2(x^o)) \notin A$

ou bien $k \leq -1$, d'après b) $(f_1(x^o), f_2(x^o)) \notin A$

ce qui est contradictoire avec le fait que par définition $(f_1(x^o), f_2(x^o))$ appartient à $S_1 \times S_2$, puisque A contient $S_1 \times S_2$.

∎

Illustration géométrique des différents ensembles $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ déterminés par ANTHONISSE (où $\varepsilon = -1$) :

a $\left\{\begin{array}{l} w_1 = u_1 \\ w_2 = u_2 \end{array}\right.$

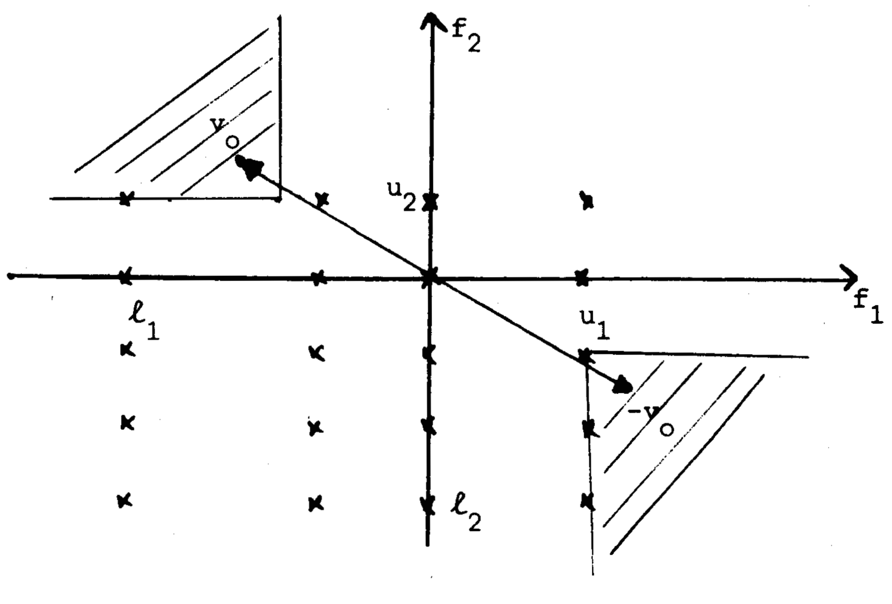
b $\left\{\begin{array}{l} w_1 = -\ell_1 \\ w_2 = -\ell_2 \end{array}\right.$

c $\left\{\begin{array}{l} w_1 = 1 \\ w_2 = \max(u_2, -\ell_2) \end{array}\right.$

d $\left\{\begin{array}{l} w_1 = \max(u_1, -\ell_1) \\ w_2 = 1 \end{array}\right.$

La figure suivante représente le cas a :

Les éléments de $S_1 \times S_2$ sont représentés par : ×



La partie hachurée représente le complémentaire de $B_\varepsilon(w_1, w_2)$.

Tout point fondamental de la partie hachurée est solution du problème (P).

Remarque :

L'auteur se place dans le cas linéaire, du fait que les quantités ℓ_i, u_i $i = 1, 2$ sont facilement calculables :

Etant données :

$$f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad i = 1, 2$$

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \le x_i \le d_i \quad i = 1, \ldots, n\} \text{ où } d \in \mathbb{N}^n$$

ℓ_i, u_i $(i = 1, 2)$ sont donnés par :

$$u_i = b_i - \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\, d_j$$

$$\ell_i = b_i - \sum_{a_{ij}>0} a_{ij}\, d_j$$

II.4.2 - Les méthodes de GLOVER-WOOLSEY [19] et KENDALL-ZIONTS [22] :

Dans ce paragraphe, nous rappelons les méthodes de GLOVER-WOOLSEY [19] et de KENDALL-ZIONTS [22], et définissons les ensembles de type $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ correspondants.

Nous montrons que la méthode de KENDALL-ZIONTS [22] (qui est une généralisation de celle de GLOVER-WOOLSEY [19]) consiste à déterminer un ensemble du type $B_{-1}(w_1^\star, w_2^\star)$ $(q = 2)$ à partir de l'ensemble $B_{-1}(w_1, w_2)$ $(w_1 = u_1 \;, w_2 = u_2)$ proposé par ANTHONISSE [1] , qui vérifie la condition du théorème 5.

Tous les résultats de ce paragraphe seront généralisés et démontrés dans le cadre de la G-contraction (chapitre III).

On suppose que :

$$f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad i = 1, 2$$

et $\quad X = \{x \in \mathbb{N}^n \mid 0 \le x_j \le d_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ où $d \in \mathbb{N}^n_\star$.

En outre, pour les résultats de GLOVER-WOOLSEY [19], les coefficients a_{ij} ($i = 1, 2$ et $j = 1, \ldots, n$) sont supposés positifs ou nuls.

Théorème 7 [19]:

Etant donnés λ_1, λ_2 *deux entiers naturels, premiers entre eux, vérifiant les conditions suivantes :*

i) λ_1 *ne divise pas* b_2 *et* λ_2 *ne divise pas* b_1

ii) $\lambda_1 > b_2 - a_2$ *et* $\lambda_2 > b_1 - a_1$ *où* $a_i = \min\limits_{a_{ij}>0} a_{ij} \quad i = 1, 2$

Alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

En remarquant que $b_i = u_i = \max\limits_{x\in X} f_i(x)$ $i = 1, 2$, le résultat suivant est analogue au précédent, sauf que l'on considère les quantités ℓ_i au lieu de u_i $i = 1, 2$

$$\ell_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, d_j \qquad i = 1, 2 :$$

Corollaire 4 :

Etant donnés, λ_1, λ_2 *deux entiers naturels, premiers entre eux, tels que :*

i') λ_1 *ne divise pas* $(b_2 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}\, d_j)$ *et* λ_2 *ne divise pas* $(b_1 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} d_j)$

ii') $\lambda_1 > \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}\, d_j - b_2 - a_2$ *et* $\lambda_2 > \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}\, d_j - b_1 - a_1$

Alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Le résultat suivant permet de réduire la taille des multiplicateurs λ_i $i = 1, 2$.

Théorème 8 [19] :

Etant donnés :

k_i $i = 1, 2$ *deux entiers naturels tels que* $k_i \geq \min\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}$
S'_i *spectre de l'application :* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$ $i=1,2$
$S''_i = \{y \in S'_i \mid y \leq k_i\}$ $i = 1, 2$

et λ_1, λ_2 *deux entiers naturels premiers entre eux, vérifiant les conditions suivantes :*

i) λ_1 *ne divise pas* b_2 *et* λ_2 *ne divise pas* b_1

ii) $\begin{cases} \lambda_1 > b_2 - k_2 \text{ et } \lambda_1 \text{ ne divise pas } b_2 - y \quad \forall\, y \in S''_2 \\ \lambda_2 > b_1 - k_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ ne divise pas } b_1 - y \quad \forall\, y \in S''_1 \end{cases}$

Alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Remarque :

Les ensembles S'_i ainsi que S''_i peuvent être déterminés, par l'algorithme proposé dans la partie annexe.

∎

Les deux résultats suivants, établis par KENDALL-ZIONTS [22], généralisent ceux de GLOVER-WOOLSEY [19], puisque aucune restriction sur le signe des coefficients a_{ij} n'est supposée.

Théorème 9 [22] :

Soient λ_1, λ_2 *deux entiers naturels, premiers entre eux, tels que :*

i) λ_1 *ne divise pas* $b_2 - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{2j}, 0)\, d_j$

λ_2 *ne divise pas* $b_1 - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{1j}, 0)\, d_j$

ii) $\lambda_1 > b_2 - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{2j}, 0)\, d_j - \min_{a_{ij} \neq 0} |a_{2j}|$

$\lambda_2 > b_1 - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{1j}, 0)\, d_j - \min_{a_{ij} \neq 0} |a_{1j}|$

Alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Remarques :

1) $b_2 - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{2j}, 0)\, d_j = u_2$ et $b_1 - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{1j}, 0)\, d_j = u_1$.

2) Dans le cas où $a_{ij} \geq 0$, on retrouve le résultat du théorème 7 puisque

$b_i - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{ij}, 0)\, d_j - \min_{a_{ij} \neq 0} |a_{ij}| = b_i - a_i \quad i = 1, 2.$

3) La quantité $b_i - \sum_{j=1}^{n} \min (a_{ij}, 0)\, d_j - \min |a_{ij}|$ est la valeur prise par $f_i(x)$ $(x \in X)$ immédiatement inférieure à u_i $i = 1, 2$.

∎

D'une manière analogue à celle de GLOVER-WOOLSEY [19], la construction des ensembles du type de S''_i, dans le cas où les coefficients a_{ij} sont de signes quelconques, permet de réduire les bornes inférieures imposées sur les λ_i ($i = 1, 2$) ; ces ensembles seront notés $K(f_i, k_i)$ $i = 1, 2$, et seront supposés être constitués des k_i (k_i entier naturel $i = 1, 2$) plus grandes valeurs de $f_i(x)$, $x \in X$ $i = 1, 2$.

Théorème 10 [22] :

Etant donnés λ_1, λ_2 deux entiers naturels, premiers entre eux, tels que :

i) $\lambda_1 \notin K(f_2, k_2)$ *et* $\lambda_2 \notin K(f_1, k_1)$

ii) $\lambda_1 > \max\left(\min\limits_{y \in K(f_2,k_2)} y, u_2/2\right)$, $\lambda_2 > \max\left(\min\limits_{y \in K(f_1,k_1)} y, u_1/2\right)$.

Alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Remarque :

On retrouve le résultat du théorème 9 en prenant $k_i = 2$ $i = 1, 2$

Propriété 5 :

Lorsque $\max\left(\min\limits_{y \in K(f_i,k_i)} y, u_i/2\right) = u_i/2$ $\quad i = 1, 2$

le résultat précédent rentre dans le cadre des résultats du corollaire 3, en prenant $q = 2$ *et* $\varepsilon = -1$.

Démonstration :

Soient :

$$w_i = u_i, \quad q = 2$$

$$w_i^* = \frac{w_i}{q} = u_i/2$$

et $v = (-\lambda_2, \lambda_1)$

d'après le corrolaire 3, v est un multiplicateur admissible si :

$$p\, v \notin S_1 \times S_2 \setminus (B_{-1}(u_i/2, u_i/2) \cap S_1 \times S_2) \;\forall\, |p| = 1, 2$$

ce n'est autre que les conditions i) et ii) du théorème 10.

∎

<u>Exemple de BALAS</u> [2] :

Nous illustrons ces résultats sur le problème suivant :

$$\begin{cases} \max \quad 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \\ \text{s.c.} \quad x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 - x_6 - 2 = 0 \\ \quad -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_7 = 0 \\ \quad -x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 - x_8 - 1 = 0 \\ \quad X = \{x \in \mathbb{N}^8 \mid x_j = 0, 1 \quad j = 1, \dots, 5\} \end{cases}$$

1) On remarque que :

$$u_1 = 5, \; u_2 = 8, \; u_1 - \min_{a_{1j} \neq o} |a_{1j}| = 4 \text{ et } u_2 - \min_{a_{2j} \neq o} |a_{2j}| = 7$$

Sous les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{pgcd } (\lambda_1, \lambda_2) = 1 \\ \lambda_2 > 4, \; \lambda_1 > 7 \\ 5/\lambda_2 \notin \mathbb{Z}, \; 8/\lambda_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le théorème 9 permet la contraction des deux premières contraintes avec le meilleur choix du multiplicateur admissible (9, 7).

Etant donné :

$$f'_2(x) = 9f_1(x) + 7f_2(x)$$

Le théorème 9 permet la contraction de $f'_2(x) = 0$ et $f_3(x) = 0$ par l'intermédiaire du multiplicateur : $(\lambda'_2, \lambda_3) = (2, 17)$ puisque :

$$u'_2 = \max_{x \in X} f'_2(x) = 21, \; u_3 = 1$$

$$u'_2 - \min_{a'_{2j}} |a'_{2j}| = 16 \text{ et } u_3 - \min_{a_{3j} \neq o} |a_{3j}| = 0$$

La contrainte résultante, équivalente au système initial est donc la suivante :

$$(*) \qquad -10x_1 + 13x_2 + 14x_3 - 27x_4 - 61x_5 - 18x_6 - 14x_7 - 17x_8 - 53 = 0$$

2) En notant que

$$K(f_1, 4) = \{5, 4, 3, 2\}$$

$$K(f_2, 4) = \{8, 7, 6, 5\}$$

Le choix optimal du multiplicateur? qui satisfait les conditions du théorème 10 est : $(\lambda_1, \lambda_2) = (9, 7)$

De la même manière, en remarquant que :

$$K(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, 6) = \{21, 16, 14, 12, 11, 9\}$$

$$K(f_3, 3) = \{1, 0, -1\}$$

Le théorème 10 aboutit au multiplicateur réalisant la contraction de $f'_2(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$ et $f_3(x) = 0$: $(\lambda'_2, \lambda_3) = (2, 13)$

La contrainte finale équivalente au système initial est donc :

$$-10x_1 + 17x_2 + 74x_3 - 23x_4 - 57x_5 - 18x_6 - 14x_7 - 13x_8 - 49 = 0$$

Les coefficients de cette dernière équation sont plus petits en valeur absolue, que ceux de l'équation (*) ; et l'on constate que la deuxième méthode n'est intéressante que si les ensembles $K(f'_i, k_i)$ et $K(f_{i+1}, k_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ sont composés d'éléments non consécutifs.

∎

II.5 - LES MÉTHODES DE S_{12}-CONTRACTION

Dans cette partie, sont décrites les méthodes proposées par MATHEWS [23], GLOVER [18], MEYER [24], ANTHONISSE [1] et BRADLEY [3].

Le tableau ci-dessous résume les hypothèses utilisées par les différents auteurs :

	[23]	[18]	[1]	[24] [3]
f_i	linéaires			quelconques
a_{ij}	$\mathbb{N}_*$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}_*$	$\mathbb{Z}$
b_i	$\mathbb{N}_*$	$\mathbb{Z}_*$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
X	$\mathbb{N}^n$		borné	

Le principe de toutes ces méthodes est le même que celui des méthodes de $S_1 \times S_2$ - contraction, l'ensemble $S_1 \times S_2$ est remplacé par S_{12} qui en général contient beaucoup moins de points que l'ensemble $S_1 \times S_2$:
Après avoir construit un ensemble A contenant l'ensemble S_{12}, un couple d'entiers w_1, w_2 est déterminé de sorte que l'ensemble du type $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ contient cet ensemble A, dans le but de sélectionner un point fondamental dans son complémentaire. Les méthodes diffèrent par la construction de cet ensemble A :

. La méthode de MEYER [24] (qui est une généralisation de celles de MATHEWS [23] et GLOVER [18], en prenant en compte les applications f_i $(i = 1, 2)$ non linéaires) consiste à déterminer deux applications croissantes γ_i $(i = 1, 2)$ telles que :

(*) $\quad S_{12} \subset \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x)\}$. (voir figure 3)

MEYER a présenté ses résultats avec $w_1 = 1$, nous montrons que w_1 peut être choisi de manière quelconque (ce qui permet un meilleur choix de multiplicateurs), et nous proposons d'autres applications $\gamma_i (i = 1, 2)$ vérifiant la condition (*) (partie II.5.1)

.. Par une méthode plus complexe, ANTHONISSE [1] détermine deux applications $\gamma_i (i = 1, 2)$ l'une convexe, l'autre concave, vérifiant la condition (*) (fig. 4), ce choix permet de mieux épouser la forme de l'ensemble S_{12}, et par conséquent doit aboutir à un meilleur choix de multiplicateurs (partie II.5.2).

... BRADLEY [3] propose une méthode permettant de déterminer deux orthans opposés par rapport à l'origine, et contenus dans le complémentaire de S_{12} (fig 5).
Après avoir montré que cette dernière méthode reste la plus performante (du point de vue taille de multiplicateurs), nous proposons une amélioration de cette méthode, qui consiste à déterminer un ensemble du type $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$ qui vérifie les conditions du théorème 5, excluant ainsi des éléments de S_{12}, (partie II.5.3).

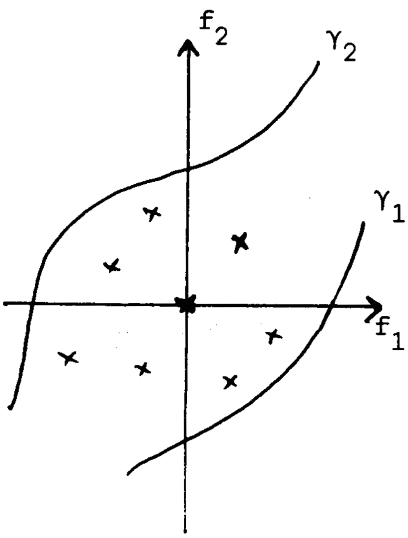


Figure 3

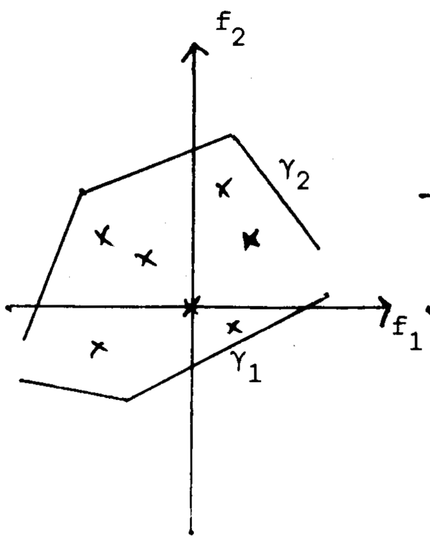


Figure 4

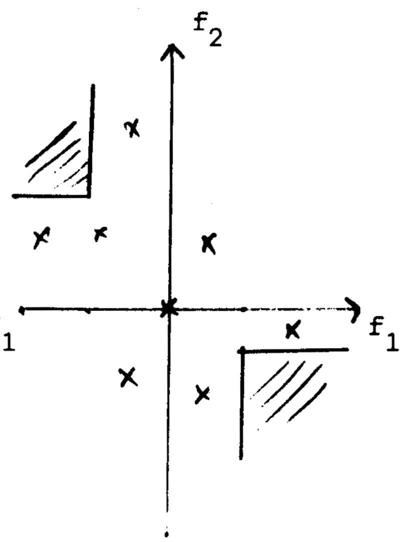


Figure 5

II.5.1 - Méthodes de MATHEWS [23], GLOVER [18] et MEYER [24] :

II.5.1.1 - Méthode de MATHEWS :

Le résultat suivant a été établi par MATHEWS [23] (rappelons que c'est le premier auteur à avoir posé le problème de contraction).

Théorème 11 [23] :

Etant donnés :

$$f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{N}_*$ $\quad j = 1, \ldots, n$ *et* $i = 1, 2$

et $X = \mathbb{N}^n$

a) *Si* S *est non vide alors il existe* $j_o \in \{1, \ldots, n\}$ *tel que :*

$$b_2\, a_{1j_o}/a_{2j_o} \geq b_1$$

b) *Etant donné* λ_2 *un entier positif tel que :*

$$\lambda_2 > b_2 \max_{j=1,\ldots,n} (a_{1j}/a_{2j})$$

Alors $(1, \lambda_2)$ *est un multiplicateur admissible.*

Démonstration :

1) Supposons que pour tout j appartenant à $\{1, \ldots, n\}$

$$b_2\, a_{1j}/a_{2j} < b_1 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{soit } x^o \in S \Rightarrow x^o \in X \\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_2 \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\, x_j^o < b_1 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o \\ x^o \in S \end{array}\right\} \Rightarrow b_2\, b_1 < b_1\, b_2$$

ce qui est absurde.

2) Soit $x^o \in \hat{S}$, montrons que $x^o \in S$:

$$x^o \in \hat{S} \Leftrightarrow f_1(x^o) + \lambda_2 f_2(x^o) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\, a_{1j}\, x_j^o + \lambda_2\, \Sigma\, a_{2j}\, x_j^o = b_1 + \lambda_2\, b_2 \qquad (2)$$

ou bien $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o = b_2$ ce qui implique que $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o = b_1$ et $x^o \in S$

ou bien $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o = b_2 + q \quad q \in \mathbb{Z}_*$ (3)

montrons que,d'après le choix de λ_2 ceci est impossible :

$$\left.\begin{array}{l} (2) \text{ et } (3) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o = b_1 - \lambda_2\, q \\ a_{1j} \in \mathbb{N}^*,\ x^o \in X \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 - \lambda_2\, q \geq 0$$

deux cas se présentent :

<u>1er cas</u> : $q \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - \lambda_2\, q \geq 0 \\ 1) \Rightarrow \lambda_2 > b_1 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 > q\, b_1 \Rightarrow q \leq 0 \quad \text{absurde}$$

<u>2ème cas</u> : $q \leq -1$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j = b_1 - \lambda_2\, q \\ q \leq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j \geq b_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_2 > b_2 \max\,(a_{1j}/a_{2j}) \Leftrightarrow \lambda_2\, a_{2j} > b_2\, a_{1j} \qquad (4) \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$$

multiplions (4) par x_j^o $(x_j^o \geq 0)$ et additionnons :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o > b_2 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o \\ b_1\, b_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o > b_2 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o - b_1 b_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o > b_1 + \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^o > \lambda_2 b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c'est à dire que } \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o > b_2 \\ \left.\begin{array}{l} \text{or } \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o = b_2 + q \\ q \leq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o < b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{contradiction}$$

∎

<u>Remarques</u> :

1) On montre que, pour tout α entier $(\alpha > 0)$ tel que pgcd $(\alpha, \lambda_2) = 1$ et $\lambda_2 > b_2 \max a_{1j}/a_{2j}$, (α, λ_2) est un multiplicateur admissible.

2) Le changement de variables suivant permet de se ramener au cas où les a_{ij} sont strictement positifs (voir [18]) puis
on considère la contraction des équations suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}+a_{2j})\, x_j = b_1+b_2 \\ \sum_{j=1}^{n} (2a_{1j}+a_{2j})\, x_j = 2b_1+b_2 \end{array}\right.$$

<u>exemple</u> :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_i = 0,1 \quad i = 1,2,3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \quad + \bar{x}_3 = 4 \\ 7x_1 + \quad + 3\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 = 9 \\ \bar{x}_i, x_i = 0,1 \quad i = 1,2,3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 8x_1 + 2x_2 + 3\bar{x}_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 4x_2 + 3\bar{x}_2 + 4x_3 = 17 \\ \bar{x}_i, x_i = 0,1 \quad i = 1,2,3 \end{array}\right.$$

3) Dans le cas de la contraction de m inéquations, dont tous les seconds membres sont identiques (de valeur $\bar{b}$), GLOVER [18] a montré que ce procédé génère rapidement des coefficients énormes, puisque le second membre de l'équation équivalente au système d'équations obtenu, en introduisant les variables d'écarts est supérieur à $2^{\alpha}\,\bar{b}^{\beta}$ où $\alpha = 3(2^{m-2})$ et $\beta = 2^{m-1}$.

II.5.1.2 - Méthode de GLOVER [18]

Comme il sera montré plus loin, le résultat suivant de GLOVER, généralise celui de MATHEWS (théorème 11).

Théorème 12 [18] :

Etant données :

$$f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad i = 1, 2$$

$$X = \mathbb{N}^n$$

avec $|b_1| + |b_2| > 0$

(λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible si :*

i) *pgcd* $(\lambda_1, \lambda_2) = 1$

ii) $\lambda_1\, a_{1j} + \lambda_2\, a_{2j} \geq |b_2\, a_{1j} - b_1\, a_{2j}| \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \qquad (1)$

iii) *a)* $\exists\, j \in I : \lambda_1\, a_{1j} + \lambda_2\, a_{2j} > |b_2\, a_{1j} - b_1\, a_{2j}|$, I *sous ensemble* $\{1,..,n\}$

b) $\forall\, x \in \hat{S} \quad \exists\, j \in I : x_j > 0$.

Démonstration

Soit $x^o \in \hat{S}$ montrons que $x^o \in S$.

$$x^o \in \hat{S} \iff \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o = \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{pgcd } (\lambda_1, \lambda_2) = 1 \\ \\ \qquad (*) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o = b_1 + k\,\lambda_2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o = b_2 - k\lambda_1 \end{array}\right. \qquad (**)$$

multiplions (1) par x_j^o et additionnons :

$$\lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 > |b_2 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j^o - b_1 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j^o|$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 > |k| \, (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$$

$$\Rightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow f_1(x^o) = f_2(x^o) = 0$$

$$\Rightarrow x^o \in S$$

∎

Remarques :

1) Les coefficients de la nouvelle équation sont tous positifs.

2) Si (λ_1, λ_2) existe, cela implique que les x_j sont bornés $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$ en effet :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j})\, x_j = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} \geq 0 \text{ et } x_j \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq x_j \leq \left\lfloor \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j}} \right\rfloor$$

3) Le résultat de GLOVER généralise celui de MATHEWS.

Supposons donc que les $a_{ij} \in \mathbb{N}_*$ $i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, n$

Soit λ_2 un entier naturel tel que : $\lambda_2 > b_2 a_{1j}/a_{2j}$

$$\left.\begin{array}{l} b_2 a_{1j} - b_1 a_{2j} < b_2 a_{1j} \\ \quad (b_1 a_{2j} > 0) \\ \lambda_2 > b_2 a_{1j}/a_{2j} \end{array}\right\} \Rightarrow b_2 a_{1j} - b_1 a_{2j} < \lambda_2 a_{2j} \leq \lambda_2 a_{2j} + a_{1j}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_2 > b_1 \Rightarrow b_2 a_{1j} - b_1 a_{2j} > b_2 a_{1j} - \lambda_2 a_{2j} \\ b_2 a_{1j} > -a_{1j} \end{array}\right\} \Rightarrow b_2 a_{1j} - b_1 a_{2j} > -\lambda_2 a_{2j} - a_{1j}$$

c'est à dire que

$$a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} \geq |b_2 a_{1j} - b_1 a_{2j}| \quad j = 1, \ldots, n$$

4) Le système (1) admet toujours une solution si les a_{ij} sont tous positifs, dans le cas contraire, il peut être incompatible comme le prouve l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ - x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \in \mathbb{N} \quad i = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

la condition ii) est équivalente à : $-\lambda_2 > 2$ et $\lambda_2 > 1$ ce qui est absurde.

∎

II.5.1.3 - Méthode de MEYER [24] :

Les hypothèses suivantes dues à MEYER?permettent de généraliser les résultats de GLOVER au cas des applications non linéaires.

Théorème 13 [24] :

Etant donnés :

γ_i (i = 1, 2) *deux applications croissantes de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$ *telles que :*

$\gamma_1(f_1(x)) \leq f_2(x) \leq \gamma_2(f_1(x)) \qquad \forall\, x \in X$

et λ_1 *un entier naturel non nul tel que :*

$\lambda_1 > \max\,(\gamma_2(-1),\ -\gamma_1(1))$

Alors $(\lambda_1, 1)$ *est un multiplicateur admissible.*

Ces hypothèses sont elles-mêmes généralisées au cas où $\lambda_2 \geq 1$ par le résultat suivant :

Théorème 14 :

Etant donnés :

γ_i (i = 1, 2) *deux applications croissantes telles que :*

(*) $\gamma_1\,(f_1(x)) \leq f_2(x) \leq \gamma_2(f_1(x)) \qquad \forall\, x \in X$

et λ_1, λ_2 *deux entiers naturels premiers entre eux tels que :*

$\lambda_1 > \max\,(\gamma_2(-\lambda_2),\ -\gamma_1(\lambda_2))$

alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

<u>Démonstration</u> :

$$\text{soit } x^o \in \hat{S} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_1 f_1(x^o) + \lambda_2 f_2(x^o) = 0 \\ \\ \text{pgcd } (\lambda_1, \lambda_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \\ \\ f_1(x^o) = k\, \lambda_2,\ f_2(x^o) = -k\, \lambda_1 \end{array}\right. \qquad (**)$$

raisonnons par l'absurde :

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} \text{si } k \geq 1 \\ (**) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x^o) \geq \lambda_2 \\
\gamma_1 \text{ croissante}
\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_1(f_1(x^o)) \geq \gamma_1(\lambda_2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} k \geq 1 \\ (**) \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(x^o) \leq -\lambda_1 \\
\gamma_1(f_1(x^o)) \leq f_2(x^o)
\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_1(f_1(x^o)) \leq -\lambda_1
\end{array}\right\} \lambda_1 \leq -\gamma_1(\lambda_2)$$

or $\lambda_1 > -\gamma(\lambda_2)$, donc k ne peut être strictement positif.

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} \text{si } k \leq -1 \\ (**) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x^o) \leq -\lambda_2 \\
\gamma_2 \text{croissante}
\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_2(f_1(x^o)) \leq \gamma_2(-\lambda_2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} k \leq -1 \\ (**) \end{array}\right\} = f_2(x^o) \geq \lambda_1 \\
\gamma_2(f_1(x^o)) \geq f_2(x^o)
\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 \leq \gamma_2(f_1(x^o))
\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 < \gamma_2(-\lambda_2)$$

or $\lambda_1 > \gamma_2(-\lambda_2)$.

donc $k = 0$ c'est à dire que $x^o \in S$.

∎

<u>Interprétation géométrique</u> :

La condition (*) est équivalente à la suivante :

$$\forall\, (z_1, z_2) \in S_{12},\ \gamma_1(z_1) \leq z_2 \leq \gamma_2(z_1)$$

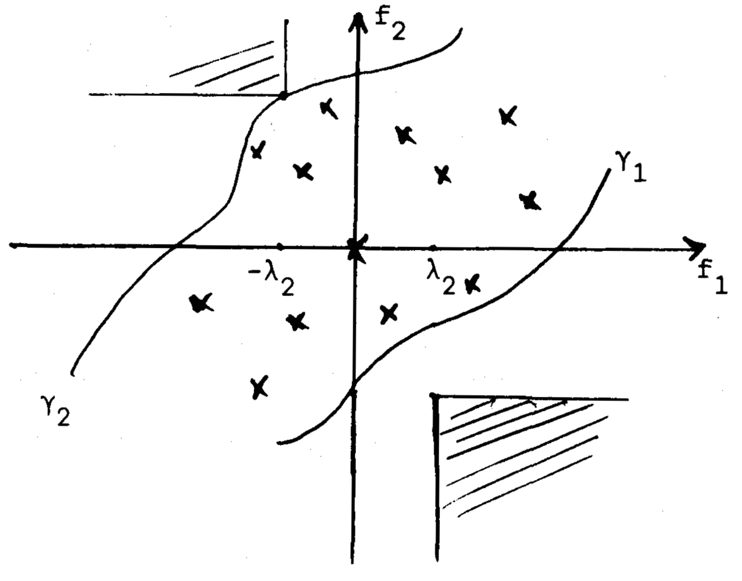


Figure 6

La partie hachurée représente le complémentaire de $B_{-1}(w_1, w_2)$ avec $w_1 = \lambda_2$ et $w_2 = \max(\gamma_2(-\lambda_2), -\gamma_1(\lambda_2))$.

Les seules applications γ_i (i = 1, 2) vérifiant la condition (*) proposées par MEYER sont $\gamma_1(y) = \inf\limits_{x \in X} f_2(x)$ et $\gamma_2(y) = \max\limits_{x \in X} f_2(x)$ $\forall\, y \in \mathbb{Z}$; ce qui est un choix très simple.

Dans la suite de ce paragraphe, nous montrons que la méthode de GLOVER (qui est une généralisation de celle de MATHEWS) est un cas particulier de celle de MEYER (les applications γ_i i = 1, 2 étant affines, voir ci-dessous); un deuxième type d'applications est ensuite proposé.

<u>1er type d'applications γ_i</u> :

Etant donnés :

$$f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{N}_* \quad i = 1, 2.$$

$$X = \mathbb{N}^n$$

Les deux applications croissantes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$:

$$\gamma_1(y) = b_2 + \bar{\gamma}_2(y - b_1)$$

$$\gamma_2(y) = b_2 + \bar{\gamma}_1(y - b_1)$$

$$\text{où } \bar{\gamma}_1 = \max_{j=1,\dots,n} \frac{a_{2j}}{a_{1j}} \text{ et } \bar{\gamma}_2 = \min_{j=1,\dots,n} \frac{a_{2j}}{a_{1j}}$$

vérifie à l'évidence : $\gamma_1(f_1(x)) \leq f_2(x) \leq \gamma_2(f_1(x)) \ \forall\ x \in X$.

Pour ce choix d'applications γ_i, le théorème 14 se traduit par le :

Corollaire 5 :

Etant donnés λ_1, λ_2 deux entiers naturels, premiers entre eux, tels que :

$$\lambda_1 > \max\,(b_2 + \bar{\gamma}_1(-\lambda_2 - b_1),\ -b_2 - \bar{\gamma}_2(\lambda_2 - b_1)).$$

Alors (λ_1, λ_2) est un multiplicateur admissible.

Remarque :

Ce résultat a été établi par MEYER dans le cas particulier où $\lambda_2 = 1$.

Deuxième type d'applications γ_i $i = 1, 2$:

Etant données les applications $f_i(x)$ $i = 1, 2$ supposées bornées dans X.

Les applications croissantes $\gamma_i (i = 1, 2)$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$:

$$\gamma_1(y) = \frac{1}{z_1}(z_2 y - s)$$

$$\gamma_2(y) = \frac{1}{z_1}(z_2 y - s)$$

où z_i $i = 1, 2 \in \mathbb{R}_*^+$ et $s = \max\limits_{x \in X} |z_2 f_1(x) - z_1 f_2(x)|$.

vérifient les hypothèses du théorème 14 qui se traduit par le :

Corollaire 6 :

Etant donnés λ_1, λ_2 deux entiers naturels, premiers entre eux, tels que :

$$\lambda_1 > \max\,\left(\frac{1}{z_1}(-\lambda_2 z_2 - s),\ -\frac{1}{z_1}(z_2\lambda_2 - s)\right)$$

Alors (λ_1, λ_2) est un multiplicateur admissible.

Remarque :

1) La condition du corollaire est équivalente à :

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 > \max_{x \in X} |z_1 f_2(x) - z_2 f_1(x)|$$

2) La quantité s est facile à déterminer lorsque le couple $(z_1 ; z_2)$ est donné, le problème réside donc, dans le meilleur choix du couple (z_1, z_2), c'est-à-dire résoudre le problème suivant :

$$\min_{z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2} \max_{x \in X} |z_2 f_1(x) - z_1 f_2(x)|$$

Géométriquement, cela revient à construire une bande symétrique à l'origine de support $-z_2 x + z_1 y = s$ ($s = \max_{x \in X} |z_2 f_1(x) - z_1 f_2(x)|$) qui contient l'ensemble S_{12} et dont le sens est donné par le couple (z_1, z_2).

Le meilleur choix du point (w_1, w_2), pour déterminer $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ est donné par la projection du point 0 sur la droite $z_1 y - z_2 x = s$.

$$w_1 = \frac{z_2 s}{(z_1^2 + z_2^2)} , \quad w_2 = \frac{z_1 s}{(z_1^2 + z_2^2)}$$

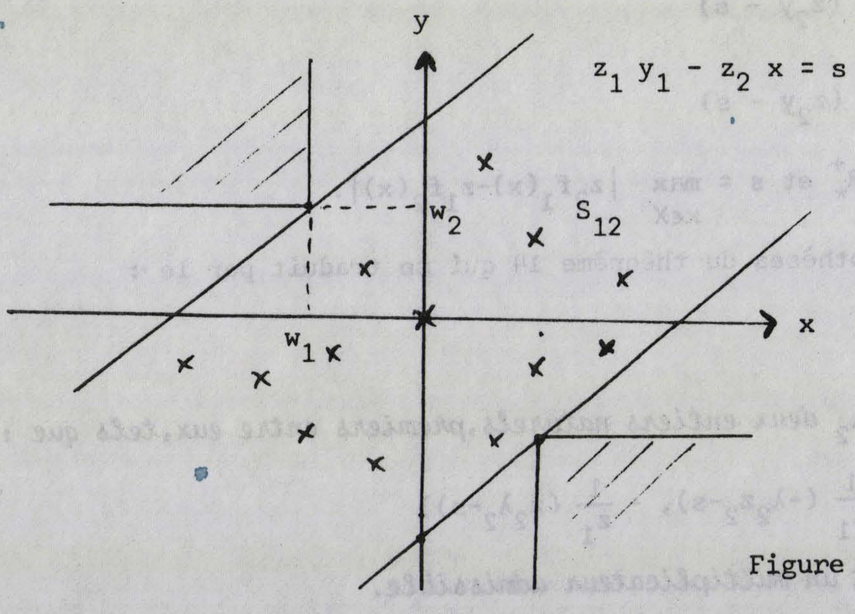


Figure 7

La partie hachurée représente le complémentaire de $B_{-1}(w_1, w_2)$.

II.5.2 - La méthode d'ANTHONISSE [1] (deuxième version)

Le principe de la deuxième méthode d'ANTHONISSE est de déterminer un ensemble convexe W contenant S_{12} et un point fondamental privilégié pour W vérifiant la condition 2) du théorème 4.

Etant donnés :

$$f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad i = 1, 2$$

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq d\} \text{ où } d \in \mathbb{N}^n$$

et t un entier tel que : $\ell_1 \leq t \leq u_1$.

On définit les applications :

$$w_1(t) = \min\, \{f_2(x) \mid f_1(x) = t,\ x \in [X]\}$$

$$w_2(t) = \max\, \{f_2(x) \mid f_1(x) = t,\ x \in [X]\}.$$

pour considérer l'ensemble :

$$W = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \ell_1 \leq \alpha_1 \leq u_1 \text{ et } w_1(\alpha_1) \leq \alpha_2 \leq w_2(\alpha_1)\}$$

Remarques :

1) w_1 est convexe et puisque w_2 est concave l'ensemble W est convexe et contient S_{12}.

2) D'autre part w_1 et w_2 sont des applications linéaires par morceaux dont les points critiques sont obtenus simplement, (complexité θ (n $\log_2$ n)) après rangement par ordre croissant (respectivement décroissant) des rapports a_{2j}/a_{1j} ($a_{ij} \in \mathbb{N}_*$) pour l'application w_2 (respectivement w_1) (voir [14]).

Théorème 15 [1] :

Etant donnés λ_1, λ_2 deux entiers premiers entre eux tels que :

$(\lambda_2, -\lambda_1)$ *et* $(-\lambda_2, \lambda_1)$ *n'appartiennent pas à* W (*)

Alors (λ_1, λ_2) est un multiplicateur admissible.

Remarque :

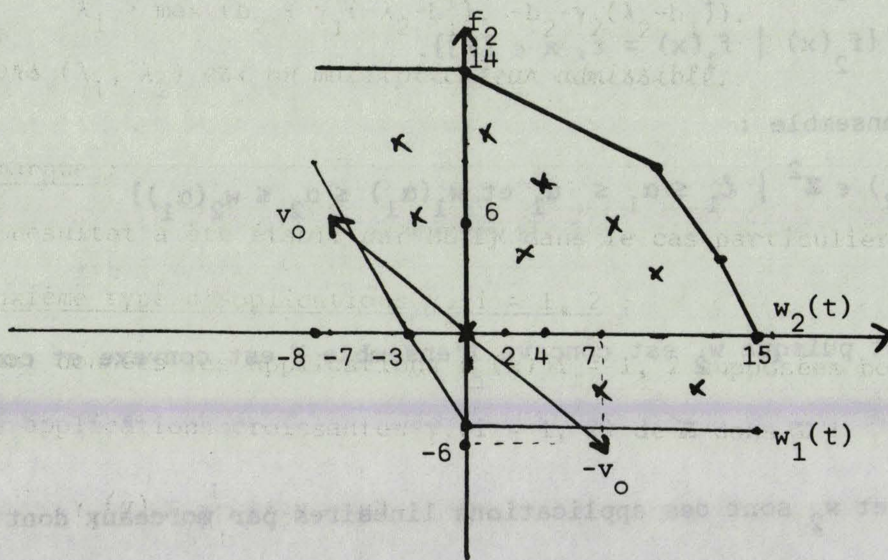
W étant un ensemble borné convexe, la condition du théorème 15 est une condition suffisante pour déterminer un P.F.P. pour W.

Illustration géométrique sur l'exemple suivant :

Etant donné le système :

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 - x_6 = 0 \\ f_2(x) = -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_7 = 0 \\ x_j = 0,\ 1 \quad j = 1, \ldots, 5 \quad x_j \in \mathbb{N} \quad j = 6,\ 7 \end{cases}$$

Les applications w_i $(i = 1, 2)$ sont :



$v_o = (-7, 6)$ vérifie la condition du théorème 15

II.5.3 - Méthode de BRADLEY et méthodes améliorées

La méthode de BRADLEY [3] permet de déterminer deux orthans opposés par rapport à l'origine qui ne contiennent aucun point de S_{12}, les entiers w_1, w_2 sont déterminés de façon que $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ vérifie la condition 2) du théorème 4. La méthode améliorée consiste à déterminer w_1^*, w_2^*, à partir des entiers w_i $i = 1, 2$ qui satisfait la condition 4) du théorème 4. La méthode initiale nécessite la résolution de deux problèmes, de type knapsack, le calcul des k meilleures solutions pour chaque problème précédent est à la base de l'amélioration de cette méthode.

II.5.3.1 - Méthode de BRADLEY [3] :

Nous définissons les problèmes suivants :

Définition 5

$$(SP_1)\quad \left[\begin{array}{l} \max \;\; f_2(x) \\ \text{s.c. } \operatorname{sgn}(\lambda_2)\, f_1(x) \le -|\lambda_2| \\ \quad\quad x \in X \end{array}\right.$$

$$(SP_2)\quad \left[\begin{array}{l} \max \;\; f_2(x) \\ \text{s.c. } \operatorname{sgn}(\lambda_2)\, f_1(x) \ge |\lambda_2| \\ \quad\quad x \in X \end{array}\right.$$

$$(SP_3)\quad \left[\begin{array}{l} \max \;\; f_1(x) \\ \text{s.c. } \operatorname{sgn}(\lambda_1)\, f_2(x) \ge |\lambda_1| \\ \quad\quad x \in X \end{array}\right.$$

$$(SP_4)\quad \left[\begin{array}{l} \max \;\; f_1(x) \\ \text{s.c. } \operatorname{sgn}(\lambda_1)\, f_2(x) \le -|\lambda_1| \\ \quad\quad x \in X \end{array}\right.$$

où $\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \ge 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$

Si l'un des problèmes (SP_i) n'admet pas de solution réalisable,ou si sa valeur optimale est inférieure à zéro,alors on posera $v(S\,P_i) = 0$.
De même,on définit les problèmes de minimisation $(I\,F_i)$ $i = 1, \ldots, 4$ en remplaçant,tout simplement,dans le problème $(S\,P_i)$ correspondant le max par min, si l'un des problèmes $(I\,F_i)$ n'admet pas de solution réalisable, ou si sa valeur optimale est positive,alors on posera $v(I\,F_i) = 0$.

Théorème 16 [3] :

Soient λ_1, λ_2 deux entiers relatifs,premiers entre eux.

$\alpha_1)\ \lambda_1 > v(SP_1)$ $\beta_1)\ -\lambda_1 > v(SP_2)$

$\alpha_2)\ \lambda_1 < v(IF_1)$ $\beta_2)\ -\lambda_1 < v(IF_2)$

$\alpha_3)\ -\lambda_2 > v(SP_3)$ $\beta_3)\ \lambda_2 > v(SP_4)$

$\alpha_4)\ -\lambda_2 < v(IF_3)$ $\beta_4)\ \lambda_2 < v(IF_4)$

Alors si l'une au moins des conditions α_i et l'une au moins des conditions β_j sont satisfaites cela implique que (λ_1, λ_2) est un multiplicateur admissible.

Démonstration :

Soit $x^o \in \hat{S} \iff \left.\begin{array}{r} \lambda_1 f_1(x^o) + \lambda_2 f_2(x^o) = 0 \\ \text{pgcd}\ (\lambda_1, \lambda_2) = 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \\ f_1(x^o) = k\,\lambda_2,\ f_2(x^o) = -k\lambda_1 \end{array}\right.$

montrons que la condition α_1 implique que $k \geq 0$,

raisonnons par l'absurde et supposons donc que $k \leq -1$

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x^o) = k\lambda_2 \iff \text{sgn}(\lambda_2) f_1(x^o) = k\ |\lambda_2| \\ k \leq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sgn}(\lambda_2) f_1(x^o) \leq -\ |\lambda_2|$$

c'est à dire que x^o est une solution réalisable de (SP_1), ceci implique :

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x^o) \leq v(SP_1) \\ v(SP_1) < \lambda_1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(x^o) < \lambda_1 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x) = -k\lambda_1 \\ k \leq -1 \end{array}\right\} \quad f_2(x^o) \geq \lambda_1 \qquad (**)$$

(*) et (**) sont contradictoires.

De la même façon, on montre que chaque condition α_i implique que $k \geq 0$, et que chaque condition β_j implique que $k \leq 0$, c'est à dire que $k = 0$, et $x^o \in S$.

∎

Remarques :

1) Il n'est pas nécessaire, de résoudre exactement les problèmes (SP_i) et (IF_i), les valeurs de toutes relaxations de tels problèmes fournissent des majorants pour les problèmes (SP_i) et des minorants pour les problèmes (IF_i), ce qui permet de trouver rapidement des multiplicateurs admissibles.

2) De la même manière que pour MEYER, l'exemple suivant (voir [3]) illustre le fait que les hypothèses de BRADLEY ne nécessitent pas l'intégralité des variables : Etant donné le problème :

$$\left[\begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} \quad [x_1]\, x_2^2 + 3x_3 + 2x_2^2x_3^2 = 15 \\ \qquad [x_1^4] + 3x_3^2x_2 = 9 \\ \qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad x_2, x_3 \text{ entier} \end{array}\right.$$

Le multiplicateur admissible $(\lambda_1, \lambda_2) = (11, 16)$ (théorème 16) aboutit au problème équivalent.

$$\left[\begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} \quad 11\, [x_1]\, x_2^2 + 33x_3 + 22x_2^2x_3^2 + 16[x_1^4] + 48x_3^2x_2 = 309 \\ \qquad x_i \geq 0 \quad x_2, x_3 \text{ entier} \end{array}\right.$$

dont la solution optimale est : $x_1 = 3^{1/4}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

3) En pratique, ce sont les conditions α_1 et β_2 qui sont retenues (ie pour λ_2 donné, on cherchera λ_1 tel que :

$$\lambda_1 > \max\,(v(SP_1), -v(IF_2))$$

puisque les codes de résolution du problème de knapsack concernent généralement les problèmes mis sous la forme :

$$\left[\begin{array}{l} \max\ cx \\ \text{s.c.}\ ax \leq b \\ \quad x \in X \end{array}\right.$$

4) Dans certains cas (suivant le choix de λ_1) l'un des problèmes (SP_1) ou (IF_2)

a un domaine vide, il suffit alors de ne calculer que la valeur d'un seul problème.

∎

Interprétation géométrique

Etant donné un entier naturel non nul λ_2, la résolution des deux problèmes (SP_1), (IF_2) permet de déterminer les deux orthans θ_1, θ_2 (figure 8) qui ne contiennent aucun point de S_{12}

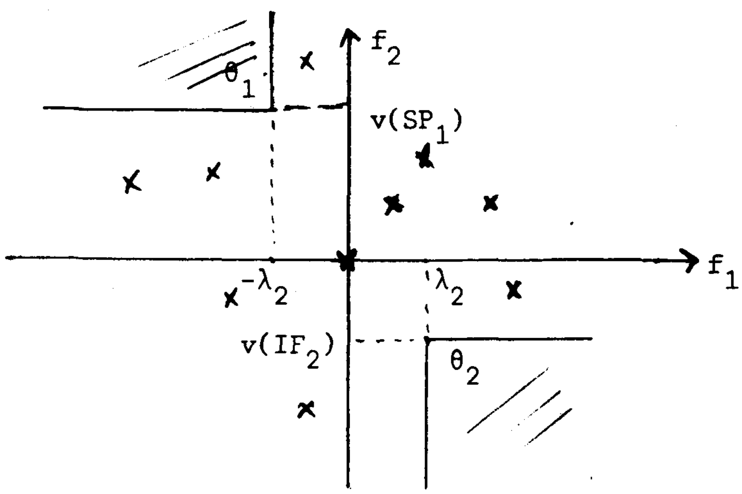


Figure 8

$$\text{Le complémentaire de } B_{-1}(w_1, w_2) = \begin{cases} (\theta_1) \cup (-\theta_1) & \text{si } v(SP_1) > -v(IF_2) \\ (\theta_2) \cup (-\theta_2) & \text{si } v(SP_1) \leq -v(IF_2) \end{cases}$$

ie $w_1 = \lambda_2 \quad w_2 = \max\ (v(SP_1), -v(IF_2))$.

II.5.3.2 - Etude comparative des méthodes de S_{12}-contraction

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons faire une étude comparative des méthodes de S_{12}-contraction, qui permettra de conclure que la méthode de BRADLEY [3] reste la plus performante (du point de vue taille des multiplicateurs) ou plus précisément, est telle que tout multiplicateur, déterminé respectivement par ANTHONISSE [1], MATHEWS [23], MEYER [24], vérifie l'un des couples de conditions du théorème 16.

a) Résultat relatif à ANTHONISSE :

Propriété 6 :

Etant donnés :

$$\ell_i = \inf_{x \in X} f_i(x) \quad i = 1, 2 \qquad (\ell_i \leq 0 \text{ ; } \textit{sinon } S = \emptyset)$$

et λ_1, λ_2 *deux entiers naturels tels que* :

$$\lambda_1 > -\ell_2 \qquad \lambda_2 > -\ell_1$$

alors (λ_1, λ_2) *satisfait aux conditions* α_1 *et* β_3

Démonstration :

Le domaine du problème :

$$(SP_1) : \left[\begin{array}{l} \max \ f_2(x) \\ \text{s.c. } f_1(x) \leq -\lambda_2 \\ \quad x \in X \end{array}\right.$$

est vide puisque $\lambda_2 > -\ell_1$, par définition $v(SP_1) = 0$ et $\lambda_1 > -\ell_2$ implique que la condition α_1 est satisfaite. De même, on montre que $v\ (SP_4) = 0$, d'où la conclusion.

∎

b) Résultat relatif à MATHEWS

Propriété 7 [3] :

Etant donnés

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j - b_i \qquad i = 1, 2 \textit{ où } a_{ij} \in \mathbb{N}_*$$

$$X = \mathbb{N}^n$$

et λ_1, λ_2 *deux entiers naturels tels que* :

$$\lambda_1 = 1 \textit{ et } \lambda_2 > b_2 \max_{j=1,..n} (a_{1j}/a_{2j})$$

alors λ_2 *satisfait les conditions* α_4 *et* β_3 *avec* $\lambda_1 = 1$.

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{l} v(IF_3) = \min \{f_1(x) \mid f_2(x) \geq 1,\ x \in X\} \\ \\ \qquad\qquad a_{ij} > 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \end{array}\right\} \Rightarrow v(IF_3) \geq -b_1$$

$$\left.\begin{array}{l} v(IF_3) \geq -b_1 \\ \\ b_2 \max a_{1j}/a_{2j} \geq b_1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(IF_3) > -b_2 \max a_{ij}/a_{ij} > -\lambda_2$$

ie $\quad -\lambda_2 < v(IF_3) \quad$ (condition α_4)

$$\begin{aligned} v(SP_4) &= \max \{f_1(x) \mid f_2(x) \leq -1,\ x \in X\} \\ &= \max \{\Sigma\, a_{1j}\, x_j \mid \sum_{j=1}^{n} a_{j}\, x_j \leq b_2-1,\ x \geq 0,\ x \text{ entier}\} - b_1 \\ &\leq \max \{\Sigma\, a_{1j}\, x_j \mid \sum_{j=1}^{n} a_{j}\, x_j \leq b_2-1,\ x \geq 0\} - b_1 \\ &\leq (b_2-1) \max \frac{a_{1j}}{a_{2j}} - b_1 \end{aligned}$$

or $\quad -b_1 + (b_2-1) \max a_{1j}/a_{2j} \leq b_2 \max a_{1j}/a_{2j}$

ceci implique que $v(SP_4) \leq b_2 \max a_{1j}/a_{2j} < \lambda_2$

ie $\quad \lambda_2$ vérifie la condition β_3.

∎

Remarque :

$$b_2 \max a_{1j}/a_{2j} \geq v(\bar{S}P_4) \geq v(SP_4)$$

∎

c) Résultat relatif à MEYER :

Propriété 8 :

Etant données deux fonctions croissantes γ_1, γ_2 *telles que :*

$$\gamma_1(f_1(x)) \leq f_2(x) \leq \gamma_2(f_1(x)) \qquad \forall\, x \in X$$

soient λ_1, λ_2 *deux entiers naturels tels que :*

$$\lambda_1 > \max\, (\gamma_2(-\lambda_2),\ -\gamma_1(\lambda_2))$$

Alors $v(SP_1) \leq \gamma_2(-\lambda_2)$ *et* $-v(IF_2) \leq -\gamma_1(\lambda_2)$

Démonstration

Posons $\gamma_2(F(SP_1)) = \{x \in X \mid \gamma_2(f_1(x)) \leq \gamma_2(-\lambda_2)\}$

du fait que γ_2 est une fonction croissante,ceci implique :

$$F(SP_1) \subset \gamma_2(F(SP_1))$$

$$\Rightarrow v(SP_1) \leq \max \{f_2(x) \mid x \in \gamma_2(F(SP_1))\} = f_2(x^*)$$

$$\left.\begin{array}{r} f_2(x) \leq \gamma_2(f_1(x)),\ \forall\, x \in X \Rightarrow f_2(x^*) \leq \gamma_2(f_1(x^*)) \\ \gamma_2(f_1(x^*)) \leq \gamma_2(-\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(x^*) \leq \gamma_2(-\lambda_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} v(SP_1) \leq f_2(x^*) \\ f_2(x^*) \leq \gamma_2(-\lambda_2) \end{array}\right\} v(SP_1) \leq \gamma_2(-\lambda_2).$$

de la même manière,on montre que $- v(IF_2) \leq -\gamma_1(\lambda_2)$.

C'est à dire que (λ_1, λ_2) vérifie les conditions α_1 et β_2.

∎

II.5.3.3 - Améliorations de la méthode de BRADLEY

Compte tenu des propriétés précédentes, il s'avère intéressant d'améliorer le résultat de BRADLEY [3] :

a) le premier type d'amélioration consiste à construire un ensemble de type $B_\varepsilon(w_1^*, w_2^*)$, à partir du $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ de BRADLEY qui vérifie les hypothèses du du théorème 5 (dans le cadre général des méthodes de 2-contraction (voir II.3.2), la phase 3 est ici mise en oeuvre).

Etant donnés deux entiers naturels k_1 et k_2.

Soient $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^{k_1}$ les solutions associées aux k_1 meilleures valeurs du problème (SP_1) ; et $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^{k_2}$ les solutions associées aux k_2 meilleures valeurs du problème (IF_2).

C'est à dire que l'on suppose que $f_2(\bar{x}^{k_1}) < f_2(\bar{x}^{k_1-1}) < \ldots < f_2(\bar{x}^1)$ et

$\forall\, x \in F(SP_1)$:

$$f_2(x) \notin \{f_2(\bar{x}^{k_1}), \ldots, f_2(\bar{x}^1)\} \Rightarrow f_2(x) < f_2(\bar{x}^{k_1})$$

de même pour (IF_2).

Théorème 17 :

Soient λ_1, λ_2 *deux entiers naturels, premiers entre eux tels que :*

i) $\lambda_1 > f_2(\bar{x}^{k_1})$ *et* λ_1 *ne divise pas* $f_2(\bar{x}^i)$ $i = 1, \ldots, k_1$

ii) $\lambda_1 > -f_2(\underline{x}^{k_2})$ *et* λ_1 *ne divise pas* $f_2(\underline{x}^i)$ $i = 1, \ldots, k_2$

Alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Démonstration :

Soit $x^o \in \hat{S}$, montrons que $x^o \in S$.

$$x^o \in \hat{S},\ \text{pgcd}\ (\lambda_1, \lambda_2) = 1 \iff \left\{\begin{array}{l} \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ \\ f_1(x^o) = k\lambda_2,\ f_2(x^o) = -k\lambda_1 \end{array}\right. \qquad (*)$$

raisonnons par l'absurde et supposons que k est non nul.

$$\left.\begin{array}{r} \text{premier cas : } k \le -1 \\ \\ (*) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x^o) \le -\lambda_2$$

et $x^o \in X$ impliquent que x^o est une solution réalisable du problème (SP_1),

or $f_2(x^o) = -k\lambda_1$, et λ_1 ne divise pas $f_2(\bar{x}^i)$ $i = 1, \ldots, k_1$ implique que $f_2(x^o) < f_2(\bar{x}^{k_1})$ $(**)$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} k \le -1 \\ \\ f_2(x^o) = -k\lambda_1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(x^o) \ge \lambda_1 \\ \\ \text{cdt i)} \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(x^o) \ge f_2(\bar{x}^{k_1}) \qquad (***)$$

Les relations $(**)$ et $(***)$ sont incompatibles.

second cas : $k \ge 1$

De la même manière, en utilisant (ii), on montre que k ne peut être strictement positif.

∎

Remarques :

1) Ce résultat nous permet de réduire les bornes w_i $(i = 1, 2)$, à condition que les ensembles $\{f_2(\bar{x}^{k_1}),\ldots, f_2(\bar{x}^1)\}$, $\{f_2(\underline{x}^{k_2}), \ldots, f_2(\underline{x}^1)\}$ ne contiennent pas que des éléments consécutifs.

2) Voir le chapitre d'expériences numériques pour une étude comparative pratique des méthodes.

∎

b) Le second type d'amélioration se situe au niveau de la phase 2 du cadre général en considérant les problèmes :

$$(SP'_1) \quad \left[\begin{array}{l} \max \ f_2(x) \\ \text{s.c. } f_1(x) = -k\lambda_2 \\ x \in X,\ k \geq 1,\ k \text{ entier} \end{array}\right.$$

$$(IF'_2) \quad \left[\begin{array}{l} \min \ f_2(x) \\ \text{s.c. } f_1(x) = -k\lambda_2 \\ x \in X,\ k \leq -1,\ k \text{ entier} \end{array}\right.$$

note :

A l'instar de BRADLEY :

on pose $v(SP'_1) = 0$ si $v(SP'_1) < 0$ ou $F(SP'_1) = \emptyset$

et $v(IF'_2) = 0$ si $v(IF'_2) > 0$ ou $F(IF'_2) = \emptyset$

Théorème 18 :

Etant donnés λ_1, λ_2 *deux entiers naturels, premiers entre eux, tels que :*

$$\lambda_1 > \max\ (v(SP'_1),\ -\ v(IF'_2))$$

alors (λ_1, λ_2) *est un multiplicateur admissible.*

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{r} \text{Soit } x^0 \in \hat{S} \iff \lambda_1 f_1(x^0) + \lambda_2 f_2(x^0) = 0 \\ \text{pgcd}\ (\lambda_1, \lambda_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ f_1(x^0) = -k\lambda_2,\ f_2(x^0) = k\lambda_1 \end{array}\right.$$

montrons que $k = 0$ (ie $x^o \in S$).

Raisonnons par l'absurde et supposons d'abord que $k \geq 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x^o) = k\lambda_1 \\ \\ \lambda_1 \in \mathbb{N}_* \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(x^o) \geq \lambda_1 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x^o) = -k\lambda_2 \\ \\ x^o \in X \end{array}\right\} \Rightarrow x^o \in F(SP'_1) \Rightarrow f_2(x^o) \leq v(SP'_1) < \lambda_1 \qquad (**)$$

(*) et (**) sont contradictoires.

De la même façon, on montre que k ne peut être strictement négatif.

∎

Remarques :

1) Contrairement aux hypothèses de BRADLEY, la valeur de λ_2 ne peut être modifiée après résolution des problèmes (SP'_1) et (IF'_2).

2) Géométriquement, cela revient à ne pas tenir compte des points $(z_1, z_2) \in S_{12}$ dans $\theta_1 \cup \theta_2$ (fig. 8) tels que :

$z_1 \neq -k\lambda_2$ ou $z_2 \neq k\lambda_2$, $k \in \mathbb{N}_*$.

3) $v(SP'_1) \leq v(SP_1)$ et $|v(IF'_2| \leq |v(IF_2)|$.

CHAPITRE III

METHODES DE G-CONTRACTION

INTRODUCTION

Etant données les applications f_i $i = 1, \ldots, m$, définies sur un ensemble arbitraire X de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs entières, une méthode de G-contraction consiste à déterminer, d'une manière globale, des entiers non nuls λ_i $i = 1, \ldots, m$ tels que :

$$\{x \in X \mid f_i(x) = 0 \quad i = 1,\ldots,m\} = \{x \in X \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0\}.$$

Pour cela on cherche une matrice C de $\mathbb{Z}$ (m, m-1), caractérisée par les deux propriétés suivantes :

a) C doit être, d'une part, une matrice dite **λ-fondamentale** dans le sens qu'il existe une application λ de $\mathbb{Z}^m$ dans $\mathbb{Z}$ telle que, son noyau coïncide avec l'image de l'application C de $\mathbb{Z}^{m-1}$ dans $\mathbb{Z}^m$.

b) D'autre part, une matrice dite **contractante**, c'est à dire que l'ensemble :

$$\{(k, x) \in \mathbb{Z}_*^{m-1} \times X \mid f_i(x) = C_i.k \quad i = 1, \ldots, m\}$$

doit être vide.

Cette dernière propriété est vérifiée en imposant des conditions suffisantes sur la matrice C.

Des résultats théoriques sont établis pour caractériser les matrices vérifiant la propriété a) (partie III.1)

Dans les parties III.2 et III.3, nous rappelons les deux types de matrices proposés par PADBERG,[25] KALISZEWSKI-LIBURA [20], puis nous donnons pour ce dernier type d'autres conditions de contraction.

De nouveaux types de matrices sont proposés pour lesquelles nous établissons des conditions suffisantes pour vérifier la propriété b) et celles qui permettent d'améliorer les résultats connus, suivant la structure des applications f_i $i = 1, \ldots, m$ (parties III.4 et III.5).

Nous terminons ce chapitre,par une étude géométrique des méthodes de G-contraction,qui nous permet de donner un formalisme général de celles-ci (partie III.6) puis nous comparons ces dernières à celles de la 2-contraction (partie III.7).

III.1 - RÉSULTATS THÉORIQUES PRÉLIMINAIRES

Avant d'exposer les différentes méthodes proposées, nous allons énoncer quelques définitions et résultats théoriques fondamentaux.

Définition 6 :

Etant donné $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *où* $\lambda_i \in \mathbb{Z}_*$, $\forall\, i = 1, \ldots, m$, *une matrice* C *de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$ *sera dite une matrice* **λ-fondamentale** *si elle vérifie la propriété suivante* :

$$\{z \in \mathbb{Z}^m \mid \lambda.z = 0\} = \{z \in \mathbb{Z}^m \mid z = C.k,\ k \in \mathbb{Z}^{m-1}\}.$$

Le résultat suivant, établi par SMITH H.J.S. [31], fournit une caractérisation des matrices λ-fondamentales de $\mathbb{Z}(m, m-1)$.

Théorème 19 [31] :

Etant donnés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *des entiers non nuls, toute matrice* C *de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$ *de rang* (m-1),*λ-fondamentale est caractérisée comme suit* :

(F)
Il existe un vecteur q *de* $\mathbb{Z}^m$ *tel que* :
i) (q, C) *est une matrice unimodulaire*
ii) $\lambda.q = \text{pgcd}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *et* $\lambda.C = 0$

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3 :

Etant donné C *une matrice de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$, *de rang* (m-1), *les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

a) Il existe q *de* $\mathbb{Z}^m$ *tel que* (q, C) *est unimodulaire.*

b) $\operatorname{pgcd}_{i=1,\dots,m} (D_i) = 1$

où D_i = dét $(C\backslash i^{\text{ème}}$ *ligne*) $\forall\, i = 1, \dots, m$.

<u>Démonstration</u> :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{pgcd}_{i=1,\dots,m} (D_i) = 1 \\ \text{identité de Bezout} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \exists\, (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) \in \mathbb{Z}^m \text{ tels que :} \\ \sum_{i=1}^{m} \nu_i D_i = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} q_i D_i = 1 \\ \text{où } q_i = (-1)^{i+1} \nu_i \quad i = 1, \dots, m \end{array}\right.$$

$$\iff \quad (q, C) \text{ est une matrice unimodulaire}$$

<u>Démonstration du théorème 19</u> :

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}_*$, $\forall\, i = 1, \dots, m$

a) Supposons que la condition (F) est vérifiée , il faut montrer que les ensembles :

$$N = \{z \in \mathbb{Z}^m \mid \lambda.z = 0\}$$

et $\quad I = \{z \in \mathbb{Z}^m \mid z = C.k,\ k \in \mathbb{Z}^{m-1}\}$ sont identiques

→ A l'évidence I est inclus dans N puisque :

$$\lambda.C = 0 \Rightarrow \lambda\, z = \lambda.C.k = 0.$$

→ Soit $z \in N$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda.z = 0 \\ (q,C) \text{ inversible} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda(q,C)(q,C)^{-1} z = 0 \\ \binom{t}{k} = (q,C)^{-1} z \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda.(q,C) \binom{t}{k} = 0 \qquad (*)$$

$$(q,C) \text{ unimodulaire} \Rightarrow t \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{Z}^{m-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda.q = d = \operatorname{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \lambda.C = 0 \text{ et } (*) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (d,\ 0) \binom{t}{k} = 0 \\ d \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} z = (q,C)\binom{t}{k} \\ \\ t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = C.k \Rightarrow Z \in I.$$

b) Soit C une matrice de $\mathbb{Z}(m, m-1)$ de rang m-1, λ-fondamentale.

A l'évidence :

définition 1 $\Rightarrow \lambda.C.k = 0,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}^{m-1} \Rightarrow \lambda.C = 0$ (**)

(**) est un système de (m-1) équations dont les solutions sont de la forme :

(***) $\lambda_j = \alpha(-1)^{j+1}\ D_j,\ j = 1, \ldots, m$ où $\alpha \in \mathbb{Z}_*$.

le choix $\alpha = d = \text{pgcd}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$:

$$\left.\begin{array}{c} \text{pgcd}\ (\frac{\lambda_1}{d}, \frac{\lambda_2}{d}, \ldots, \frac{\lambda_m}{d}) = 1 \\ \\ (***) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \underset{i=1,\ldots,m}{\text{pgcd}}\ (D_i) = 1 \\ \\ \text{lemme 3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots$$

$\ldots \Leftrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Z}^m$ tel que (q,C) soit unimodulaire.

∎

<u>Remarque</u> :

On suppose que $m \geq 3$.

Etant donné λ de $\mathbb{Z}^m$, l'ensemble :

$$F_\lambda = \{C \in \mathbb{Z}(m, m-1)\ |\ C \text{ est une matrice } \lambda\text{-fondamentale}\}$$

est infini.

En effet, chaque élément de F_λ génère une infinité d'autres éléments par post-multiplication par une matrice unimodulaire d'ordre (m-1).

∎

<u>*Définition 7*</u> :

Une matrice C *de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$ *sera dite contractante, si elle vérifie la condition suivante (appelée propriété de contraction) :*

$$\exists\ (k, x) \in \mathbb{Z}^{m-1} \times X : f_i(x) = C_i.k,\quad i = 1, \ldots, m \Rightarrow k = 0.$$

Toutes les méthodes proposées, sont basées sur le résultat ci-dessous, qui montre qu'il faut déterminer un couple (λ, C) de $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}(m, m-1)$ tel que la matrice C soit à la fois une matrice λ-fondamentale et contractante.

Théorème 20 :

Etant donnés

C *une matrice* λ*-fondamentale*

et $E = \{(k, x) \in \mathbb{Z}^{m-1} \times X \mid f_i(x) = C_i.k,\ i = 1, \ldots, m\}$.

les conditions suivantes sont équivalentes.

1) $E = \emptyset$

2) C *est une matrice contractante*

3) $\lambda \in A$

Démonstration :

1) <=> 2) par définition , montrons que la condition 2) est équivalente à la condition 3) :

C λ-fondamentale <=> $\{\ \forall\ x \in X : \lambda.f(x) = 0 \iff \exists\ k \in \mathbb{Z}^{m-1} \mid f_i(x) = C_i\ k\ i=1,..,m\}$

Soit $\lambda \in A \iff \{\forall\ x \in X,\ \lambda.f(x) = 0 \iff f(x) = 0\} \iff k = 0$

<=> C contractante

∎

Remarques :

1) La condition, C est une matrice λ-fondamentale, est indispensable pour exprimer, en fonction de la matrice C, les $f_i(x)$ $i = 1, \ldots, m$ vérifiant $\lambda.f(x) = 0$.

2) Si l'ensemble $C_\lambda = \{C \in F_\lambda \mid C \text{ est contractante}\}$, est non vide alors il est infini : Soit $C \in C_\lambda$, montrons que toute matrice C' de F_λ est une matrice contractante : supposons donc qu'il existe $(k^o, x^o) \in \mathbb{Z}^{m-1} \times X$ tel que :

$$\left.\begin{array}{l} f_i(x^o) = C'_i.k^o \quad i = 1, \dots, m \\ C' \in F_\lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda.f(x^o) = 0 \\ C \in F_\lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\dots \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \exists\, k \in \mathbf{Z}^{m-1} : f_i(x^o) = C_i.k \quad i = 1, \dots, m \\ C \text{ contractante} \end{array}\right\} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k^o = 0$$

∎

III.2 - MÉTHODE DE PADBERG [25] : (TYPE DE MATRICE C^1) :

Etant donnés $\lambda_i (i = 1, \dots, m)$ des entiers non nuls, SMITH [31] a proposé une matrice C^1 λ-fondamentale du type suivant :

$$C^1_{ij} = \begin{cases} d_{i-1}/d_i & i = j+1 \qquad j = \{1, \dots, m-1\} \\ r_{ij} & i \le j \le m-1 \qquad i = \{1, \dots, m-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est à dire de la forme :

$$C^1 = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{d_2} & & & \\ & \ddots & (r_{ij}) & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \frac{d_{m-1}}{d_m} \end{pmatrix}$$

où :

$$d_i = \text{pgcd}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i) \quad i = 1, \dots, m \qquad (*)$$

et $\quad r_{ij} = -\,\alpha_{i-1} \prod_{k=i}^{j-1} \mu_k (\lambda_{j+1}/d_{j+1})$

avec α_j, μ_k solutions de l'équation :

$$\alpha_j\, \lambda_{j+1} + \mu_j\, d_j = d_{j+1} \qquad j = \{1, \dots, m-1\} \qquad (**)$$

(par convention on pose : $\alpha_o = 1$ et $\prod_{k=i}^{i-1} \mu_k = 0$)

Etant donnée la structure de la matrice C^1, il faut construire un multiplicateur λ adéquat pour générer une structure de matrice du type C^1, pour laquelle il ne sera pas trop ardu de déterminer des conditions suffisantes pour vérifier la propriété de contraction.

Dans cet esprit, PADBERG a proposé le vecteur λ suivant :

$$\lambda_i = q^{m-i} \quad i = 1, \ldots, m \qquad \text{où } q \in \mathbb{N}_*$$

ce qui implique (d'après (*) et (**)) le système :

$$\alpha_j + \mu_j\, q = 1 \quad j = 1, \ldots, m-1$$

dont l'auteur choisira la solution la plus simple :

$$\alpha_j = 1-q \text{ et } \mu_j = 1 \qquad j = 1, \ldots, m-1$$

La matrice C^1 ainsi construite s'écrit finalement :

$$C^1_{ij} = \begin{cases} -1 & i = 1 & \forall\, j \in \{1, \ldots, m-1\} \\ q & i = j+1 & \forall\, i \in \{2, \ldots, m\ \} \\ q-1 & i \le j \le m-1 & \forall\, i \in \{2, \ldots, m-1\} \\ 0 & \text{ailleurs} & \end{cases}$$

Théorème 21 [25] :

Etant donné $q = \max\limits_{i=2,\ldots,m} \max\limits_{x \in X} (|f_i(x)|)+1 \quad (\mathrm{I})$

La matrice :

$$C^1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ q & \ddots & (q-1) & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & q \end{pmatrix}$$

est contractante

Démonstration :

Soit $(k^o, x^o) \in \mathbb{Z}^{m-1} \times X$ tel que :

$$f_i(x^o) = C^1_i.k^o \qquad i = 1, \ldots, m.$$

$$\Leftrightarrow f_i(x^o) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{m-1} k_j^o & i = 1 \\ q\, k_{i-1}^o + (q-1) \sum_{j=i}^{m-1} k_j^o & i = 2, \dots, m-1 \\ q\, k_{i-1}^o & i = m \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_m(x^o) = q\, k_{m-1}^o \\ \\ (I) \end{array}\right\} \Rightarrow k_{m-1}^o = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_{m-1}(x^o) = q\, k_{m-2}^o \\ \\ (I) \end{array}\right\} \Rightarrow k_{m-2}^o = 0$$

De la même manière, on montre que $k_i^o = 0 \quad i = m-3, \dots, 1.$

▮

III.3 - MÉTHODE DE KALISZEWSKI-LIBURA [20] (TYPE DE MATRICE C^2)

KALISZEWSKI et LIBURA ont adopté une démarche inverse à celle de PADBERG, pour construire une matrice de type noté C^2, vérifiant les deux propriétés caractéristiques du théorème 20. La structure de ce type de matrice est telle que, la propriété de contraction est satisfaite, sous des conditions relativement simples.

Ces conditions étant supposées remplies, les auteurs déterminent alors, l'unique multiplicateur λ pour lequel la matrice C^2 est λ-fondamentale.

Les bases théoriques de cette démarche entrent dans le cadre du paragraphe suivant.

III.3.1 - Résultats préliminaires :

Théorème 19 bis

Etant donnée C *une matrice de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$ *de rang* $(m-1)$ *, l'existence d'entiers* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$*, premiers entre eux pour lesquels* C *soit une* **matrice λ-fondamentale**, *est caractérisée par les conditions suivantes :*

Il existe q *de* $\mathbb{Z}^m$ *tel que :*

i) (q, C) *est une matrice unimodulaire*

ii) $\lambda.(q, C) = (1, 0, \ldots, 0)$.

Démonstration :

La condition est nécessaire, d'après le théorème de SMITH [31] ; la condition est suffisante :

de la condition ii) nous tirons :

$$\lambda\, C = 0$$

qui est un système de (m-1) équations à m inconnues et qui admet comme solutions :

$$\lambda_j = (-1)^{j+1}\, D_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

∎

Remarque :

Il est à rappeler que pour λ donné, l'ensemble des matrices λ-fondamentales est infini ; par contre C étant donnée, il est clair que le multiplicateur λ défini ci-dessus est unique.

∎

Etant donnée une matrice C de $\mathbb{Z}(m, m-1)$, la condition ii) permet de déterminer le λ (s'il existe), mais le plus délicat est de vérifier la condition i).

Les deux résultats suivants ont été établis par Rosenberg [28] ; le premier permet de caractériser les matrices vérifiant la condition i) du théorème 19 **bis**, le deuxième consiste à construire une matrice vérifiant cette condition i) à partir d'une matrice quelconque de $\mathbb{Z}(m, m-1)$ et de rang (m-1).

Théorème 22 [28] :

Etant donnée une matrice C *de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$ *de rang* (m-1).

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $q \in \mathbb{Z}^m$ *tel que* (q, C) *est unimodulaire*

ii) Il existe deux matrices unimodulaires : $P \in \mathbb{Z}(m, m)$, $Q \in \mathbb{Z}(m-1, m-1)$ *telles que :*

$$C = P\begin{pmatrix} I_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} Q$$

où I_{m-1} *est la matrice unité d'ordre* (m-1).

<u>Démonstration</u> :

Il est bien connu, que pour toute matrice C de $\mathbb{Z}(m, m-1)$ de rang (m-1), il existe deux matrices unimodulaires P, Q telles que :

C = P.S.Q où S est appelé réduite de Smith de C (voir [7])

La structure de S est la suivante :

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ & s_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & \\ & & & & s_{m-1} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où : s_i divise s_{i+1} $i = 1, \ldots, m-2$, $s_i \in \mathbb{N}^*$

$\prod_{i=1}^{m-1} s_i$ est égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants des sous-matrices d'ordre (m-1) de C noté d_c.

La condition i) et le lemme 3 $\Leftrightarrow d_c = 1$

$\Leftrightarrow s_i = 1 \quad i = 1, \ldots, m-1$

$\Leftrightarrow$ La condition ii).

∎

Pour toute matrice D de $\mathbb{Z}(m, m-1)$, de rang (m-1), ne vérifiant pas la condition i) du théorème 19 bis, le résultat suivant permet de déterminer une autre matrice, issue de D, vérifiant cette condition i).

<u>*Théorème 23*</u> [28] :

Etant donnée une matrice D *de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$, *de rang* (m-1), *il existe une matrice* L *de* $\mathbb{Q}$ (m-1, m-1) *telle que :*

$C = D.L$ *où* $C \in \mathbb{Z}(m, m-1)$, *et* C *vérifie la condition i) du théorème 19 bis.*

Démonstration :

On rappelle (voir démonstration du théorème 22) qu'il existe deux matrices unimodulaires P, Q telles que

$$C = P.S.Q$$

Soit B une matrice diagonale de $\mathbb{Q}(m-1, m-1)$ dont les éléments diagonaux de rang i sont égaux à $1/s_i$.

posons : $L = Q^{-1}.B.Q$

$$\Rightarrow C = D.L = P\binom{I}{0}_{m-1}\, Q$$

d'où le résultat d'après le théorème 22.

∎

Remarque :

En général, lorsque la matrice D est contractante, la matrice C, déterminée par le théorème 23, ne l'est pas forcément.

∎

La condition ii) du théorème 23 est un type de caractérisation coûtant relativement cher à mettre en oeuvre (par exemple BRADLEY propose dans [7] un algorithme de complexité polynomiale $\theta(n^3)$ pour les matrices d'ordre n).
La caractérisation qui sera utilisée, en fait, par la suite, sera celle du résultat rappelé ci-dessous :

Lemme 3 :

Etant donnée une matrice C *de* $\mathbb{Z}(m, m-1)$ *et de rang* $(m-1)$, *la condition i) du théorème 19 bis est vérifiée si et seulement si les* D_j $(j = 1, \ldots, m)$ *sont premiers entre eux.*

Ainsi la construction des matrices C, à la fois λ-fondamentales et contractantes, sera faite suivant le schéma suivant :

Phase 1 :

a) *Les quantités* (D_j) $(j = 1, \ldots, m)$ *sont facilement calculables.*

b) *La condition* $\underset{j=1,\ldots,m}{\text{pgcd}} (D_j) = 1$ *est simple à vérifier.*

Phase 2 :

Déterminer les coefficients de la matrice de sorte qu'elle soit contractante.

III.3.2 - Conditions de KALISZEWSKI-LIBURA [20] et généralisations

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons rappeler la structure de la matrice proposée par KALISZEWSKI-LIBURA, ainsi que les conditions imposées pour qu'elle soit à la fois λ-fondamentale et contractante (§ III.3.2.1).

Nous donnerons ensuite des conditions suffisantes plus faibles pour que cette structure de matrice vérifie la propriété de contraction (§ III.2.2).

Les auteurs considèrent la matrice de $\mathbb{Z}(m, m-1)$ de type suivant :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \alpha_{m-1} \\ -\alpha_m & & & -\alpha_m \end{pmatrix}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{N}_*$ $\quad i = 1, \ldots, m.$

III.3.2.1 - Conditions de KALISZEWSKI-LIBURA

Théorème 24 [20] :

Une condition suffisante pour que la matrice C^2 *soit λ-fondamentale est que :*

$$\text{pgcd}(\alpha_i, \alpha_j) = 1 \quad i \neq j \quad i, j \in \{1, \ldots, m\}$$

(λ *est défini comme suit :*

$$\lambda_i = (-1)^{m-1} \frac{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k}{\alpha_i} \qquad i = 1, \ldots, m) \qquad \text{(I .0)}$$

Démonstration :

$$D_j = (-1)^{m-j} \frac{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k}{\alpha_j} \qquad j = 1, \ldots, m$$

d'après le lemme 3 :

$$C^2 \ \lambda\text{-fondamentale} \iff \underset{j=1,\ldots,m}{\mathrm{pgcd}} \left(\frac{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k}{\alpha_j}\right) = 1$$

$$\iff \mathrm{pgcd}\,(\alpha_i, \alpha_j) = 1 \quad i \neq j \quad \forall\,(i, j) \in \{1,\ldots,m\}.$$

λ donné

$$\lambda_j = (-1)^{j+1} D_j = (-1)^{m-1} \frac{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k}{\alpha_j} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

∎

Remarque :

La condition du théorème 24 nécessite le calcul de (m-1) plus grands diviseurs communs de deux entiers.

∎

Lorsque les équations diophantiennes du système sont linéaires et à coefficients positifs, les auteurs ont fourni une condition suffisante pour que les matrices de type C^2 soient contractantes (théorème 25).

Théorème 25 [20] :

Etant donnés :

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - b_i \qquad i = 1,\ldots, m$$

$$X = \mathbb{N}^n \ \text{où} \ (b_i, a_{ij}) \in \mathbb{N}_* \times \mathbb{N} \qquad \forall i \quad \forall j$$

Une condition suffisante pour qu'une matrice de type C^2 *soit contractante est :*

$$\alpha_i > b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

Démonstration :

Soit $(k^o, x^o) \in \mathbb{Z}^{m-1} \times X$ tel que : $f(x^o) = C^2\, k^o$,

il faut montrer que k^o est nul

$$f(x^o) = C^2.k^o \iff \begin{cases} f_i(x^o) = \alpha_i k_i^o & i = 1, \ldots, m-1 \quad (*) \\ f_m(x^o) = -\alpha_m(\sum_{j=1}^{m-1} k_j^o) & (**) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (*) \text{ et } \alpha_i > b_i \Rightarrow k_i^o \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m-1 \\ (**) \text{ et } \alpha_m > b_m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} k_i^o \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_i^o = 0 \quad i = 1, \ldots, m-1$$

∎

III.3.2.2 - Généralisations

Les deux nouvelles conditions suivantes, concernent une classe de fonctions plus importante, celles des fonctions bornées supérieurement ou inférieurement dans l'ensemble X.

La première condition est une généralisation naturelle des résultats de KALISZEWSKI-LIBURA.

La deuxième de ces conditions (théorème 27) est une généralisation de celle de KENDALL-ZIONTS [22] dans le cadre de la G-contraction.

Théorème 26 :

Si les applications f_i (i = 1, ..., m) *sont bornées supérieurement (respectivement inférieurement) dans* X,

Une condition suffisante pour qu'une matrice de type C^2 *soit contractante est :*

(II) $\alpha_i > \max_{x \in X} f_i(x) \quad i = 1, \ldots, m$ (respectivement $\alpha_i > -\inf_{x \in X} f_i(x)$).

Démonstration

Soit $(k^o, x^o) \in \mathbb{Z} \times X$ vérifiant les conditions (*) et (**), il faut montrer que k^o est nul :

$$\left.\begin{array}{l} (*) \text{ et } \alpha_i > \max_{x \in X} f_i(x) \Rightarrow k_i^o \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m-1 \\ (**) \text{ et } \alpha_m > \max_{x \in X} f_m(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} k_i^o \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k^o = 0$$

∎

Remarque :

Lorsque $\alpha_i > -\inf_{x\in X} f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, on démontre, de la même façon que précédemment, que C^2 est une matrice contractante, on retrouve ainsi la condition de KALISZEWSKI-LIBURA (théorème 25) lorsque les applications f_i sont linéaires et à coefficients positifs.

∎

Puisque la taille des multiplicateurs admissibles dépend de celle des nombres α_i $(i = 1, \ldots, m)$ (voir(I.0)), les résultats sont améliorés en diminuant les bornes inférieures des α_i, imposées par la propriété de contraction. C'est l'objet du résultat suivant qui s'inspire de l'idée de KENDALL-ZIONTS [22].

On rappelle que :

Etant donnés k_i $(i = 1, \ldots, m)$ des entiers naturels

$K(f_i, k_i)$ est l'ensemble des k_i plus grandes valeurs des applications f_i

$i = 1, \ldots, m$

Théorème 27 :

Etant donné $k_i \in \mathbb{N}_*$ $i = 1, \ldots, m$

Une condition suffisante pour qu'une matrice de type C^2 *soit contractante est :*

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \alpha_i > \inf\limits_{y\in K(f_i,k_i)} y \\ ii)\ \alpha_i \text{ ne divise pas } y, \text{ pour tout } y \text{ de } K(f_i, k_i) \\ \qquad i = 1, \ldots, m \end{array}\right] \quad (III)$$

Démonstration :

Soit $(k^o, x^o) \in \mathbb{Z}^{m-1} \times X$ vérifiant les conditions (*) et (**);pour montrer que k^o est nul , on montre d'abord,que sous les hypothèses du théorème 27 et la condition (III),les entiers k_i^o $i = 1, \ldots, m$ sont négatifs ou nuls ; en effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $k_i^o \geq 1$,la relation (*) entraine :

$$\left.\begin{array}{ll} f_i(x^o) \geq \alpha_i & i = 1, \ldots, m \\ & \\ \quad (III) & \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots$$

... α_i ne divise pas $f_i(x^o)$, ce qui est en contradiction avec (*).

De la même manière que précédemment, on montre que $\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o$ est positif ou nul :

en effet

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m-1} k_i^o \leq -1 \\ \\ \quad (**) \end{array}\right\} \Rightarrow f_m(x^o) \geq \alpha_m \\ \\ \qquad\qquad (III) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_m \text{ de divise pas } f_m(x^o)$$

ce qui est incompatible avec (**).

Ce dernier résultat, associé au précédent, permet de conclure que k^o est nul.

∎

III.4 - Nouveaux types de matrices λ-fondamentales et contractantes

Toujours en se situant dans le cadre général, énoncé en fin de paragraphe III.3.1, deux nouveaux types de matrices sont proposés dans cette partie.

Le premier type de matrices (noté C^3) permet d'englober la classe de matrices proposée par KALISZEWSKI-LIBURA. Le deuxième type de matrices (noté C^4) résulte de la prise en compte, en priorité, de l'aspect calculabilité des sous déterminants de ces matrices. De plus, ce dernier type permet, sous certaines hypothèses, d'affaiblir les conditions générer par la structure des matrices de type C^3.

III.4.1 - Type de matrices C^3

Dans cette partie, nous proposons un nouveau type de matrices, générant une classe de matrices plus importante que celle proposée par KALISZEWSKI-LIBURA [20]. Nous établissons pour ces matrices, des conditions suffisantes pour qu'elles soient λ-fondamentales et contractantes.

Etant donnés :

$$\alpha_i \in \mathbb{N}_* \quad i = 1, \ldots, m \text{ et } \beta_i \in \mathbb{N}, \quad i = 2, \ldots, m-1$$

On considère les matrices de type C^3 de la forme suivante :

$$C^3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & & 0 & \\ \beta_3 & \beta_3 & \alpha_3 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \beta_{m-1} & \cdots & & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} & \\ -\alpha_m & \cdots & & & -\alpha_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

Toute matrice de type C^2 est de type C^3 puisqu'il suffit de poser $\beta_i = 0$ $i = 2, \ldots, m-1$.

III.4.1.1 - Condition suffisante pour que C^3 soit λ-fondamentale

Théorème 28

Une condition suffisante pour qu'une matrice de type C^3 soit λ-fondamentale est :

$$\begin{cases} \text{pgcd}\,(\alpha_i, \alpha_m) = 1 & i = 1, \ldots, m-1 \\ \text{pgcd}\,(\alpha_i, \alpha_j - \beta_j) = 1 & \forall\, i < j,\ j = 2, \ldots, m-1 \end{cases}$$

λ est donné par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (-1)^{m-1}\, (\alpha_2-\beta_2)(\alpha_3-\beta_3) \ldots (\alpha_{m-1}-\beta_{m-1})\, \alpha_m \\ \lambda_2 &= (-1)^{m-1}\, \alpha_1(\alpha_3-\beta_3)(\alpha_4-\beta_4) \ldots (\alpha_{m-1}-\beta_{m-1})\, \alpha_m \qquad \text{(I.1)} \\ &\vdots \\ \lambda_2 &= (-1)^{m-1}\, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{j-1}(\alpha_{j+1}-\beta_{j+1}) \ldots (\alpha_{m-1}-\beta_{m-1})\, \alpha_m \\ &\vdots \\ \lambda_m &= (-1)^{m-1}\, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1} \end{aligned}$$

Démonstration

Pour déterminer les quantités D_j $(j = 1, \ldots, m)$ nous utilisons la relation ci-dessous, qui peut être démontrée facilement par récurrence.

$$\text{dét}\begin{bmatrix} \beta_j & \alpha_j & & & & \\ \beta_{j+1} & \beta_{j+1} & \alpha_{j+1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ \beta_{m-1} & \cdots & & \cdots & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} \\ -\alpha_m & \cdots & & \cdots & -\alpha_m & -\alpha_m \end{bmatrix} = (-1)^{j+1}(\alpha_j-\beta_j)(\alpha_{j+1}-\beta_{j+1})\dots(\alpha_{m-1}-\beta_{m-1})\,\alpha_m$$

les D_j sont donnés par

$$D_j=(-1)^{m-j}\prod_{i=1}^{j-1}\alpha_i\prod_{i=j+1}^{m}(\alpha_i-\beta_i) \quad \text{où } \beta_m = 0,\ j = 1, \dots, m \qquad (*)$$

D'après le lemme 3, la matrice C^3 est λ-fondamentale si et seulement si les quantités D_j ($j = 1, \dots, m$) sont premières entre elles :

$$\operatorname{pgcd}_{j=1,\dots,m}(D_j) = 1 \qquad (**)$$

Nous développons la relation (**) en utilisant (*) :

$$\operatorname{pgcd}(D_1, D_2) = (\alpha_3-\beta_3)\dots(\alpha_{m-1}-\beta_{m-1})\,\alpha_m \operatorname{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2-\beta_2)$$

or $\operatorname{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2-\beta_2)$ divise $D_3, \dots, D_m$ (voir (*)), donc il doit être égal à un d'après (**).

$$\operatorname{pgcd}(D_1, D_2, D_3) = \operatorname{pgcd}(D_3, \operatorname{pgcd}(D_1, D_2))$$
$$= (\alpha_4-\beta_4)\dots(\alpha_{m-1}-\beta_{m-1})\,\alpha_m \operatorname{pgcd}(\alpha_1\alpha_2, \alpha_3-\beta_3)$$

pour les mêmes raisons que précédemment, on a $\operatorname{pgcd}(\alpha_1\alpha_2, \alpha_3-\beta_3) = 1$

ce qui est équivalent à : $\operatorname{pgcd}(\alpha_1, \alpha_3-\beta_3) = \operatorname{pgcd}(\alpha_2, \alpha_3-\beta_3) = 1$

ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne les conditions du théorème 28.

Pour déterminer les λ_j $j = 1, \dots, m$ il suffit d'utiliser la relation : $\lambda_j=(-1)^{j+1}D_j$.

∎

<u>Remarques</u> :

1) Les conditions de ce dernier résultat sont équivalentes à celles du théorème 24 lorsque les β_i sont nuls $i = 2, \dots, m-1$.

2) Les conditions du théorème 28 nécessitent au maximum le calcul de (m-1) plus grands diviseurs communs de deux entiers.

Lorsque

$$\alpha_i = \alpha \quad i = 1, \ldots, m-1 \quad \text{et } \beta_j = 1 \quad j = 2, \ldots, m-1$$

les conditions du théorème 28 se réduisent au calcul d'un plus grand diviseur commun :

$$\text{pgcd } (\alpha, \alpha_m) = 1$$

∎

III.4.1.2 - *Conditions suffisantes pour que C^3 soit contractante*

a) Première condition

Théorème 29

Une condition suffisante pour qu'une matrice de type C^3 soit contractante est que :

$$\text{(IV)} \quad \alpha_i - \beta_i > - \inf_{x \in X} f_i(x) \qquad i = 1, \ldots, m$$

(en posant $\beta_1 = \beta_m = 0$)

Démonstration :

Soit $(k^o, x^o) \in \mathbb{Z}^{m-1} \times X$ tel que $f(x^o) = C^3 k^o$, montrons que $k^o = 0$

$$f(x^o) = C^3.k^o \iff \begin{cases} f_1(x^o) = \alpha_1 k_1^o \\ f_2(x^o) = \beta_2 k_1^o + \alpha_2 k_2^o \\ \vdots \\ f_{m-1}(x^o) = \beta_{m-1}(\sum_{i=1}^{m-2} k_i^o) + \alpha_{m-1} k_{m-1}^o \\ f_m(x^o) = (-\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o)\, \alpha_m \end{cases} \qquad \text{(SE)}$$

Nous allons montrer,que si k_{m-1}^o est non nul, compte tenu des conditions (IV), nous arrivons à une absurdité, c'est à dire que k_{m-1}^o doit être nul, et nous recommençons le même travail sur le système (SE) en ne tenant pas compte de l'équation $f_{m-1}(x^o) = 0$ pour montrer que k_{m-2}^o est nul et ainsi de suite.

Supposons donc que k_{m-1}^o est non nul, montrons que $\sum_{i=1}^{m-2} k_i^o \leq -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_m > -\inf\limits_{x\in X} f_m(x) \\ f_m(x^o) = (-\sum\limits_{i=1}^{m-1} k_i^o)\ \alpha_m \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} k_i^o \leq 0 \qquad (*)$$

$\sum\limits_{i=1}^{m-2} k_i^o$ ne peut être nul, sinon du système (SE) on déduit :

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f_{m-1}(x^o) = \alpha_{m-1}\ k_{m-1}^o \\ f_m(x^o) \quad = -\alpha_m\ k_{m-1}^o \end{array}\right. \\ \alpha_m > -\inf\limits_{x\in X} f_m(x) \\ \alpha_{m-1} \geq \alpha_{m-1}-\beta_{m-1} > -\inf\limits_{x\in X} f_{m-1}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow k_{m-1}^o = 0$$

ce qui est absurde puisque k_{m-1}^o est non nul

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} k_{m-1}^o \neq 0,\ (*) \text{ et } \sum\limits_{i=1}^{m-2} k_i^o \neq 0 \\ f_{m-1}(x^o) = \beta_{m-1}(\sum\limits_{i=1}^{m-2} k_i^o) + \alpha_{m-1}\ k_{m-1}^o \end{array}\right\} \Rightarrow f_{m-1}(x^o) \leq (\beta_{m-1}-\alpha_{m-1}) \sum\limits_{i=1}^{m-2} k_i^o \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{m-1}-\beta_{m-1} > -\inf\limits_{x\in X} f_{m-1}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-2} k_i^o \leq -1$$

Soit $j_o \in \{1, \ldots, m-2\}$ tel que $k_{j_o}^o \neq 0$ et $k_j^o = 0$, $\forall\ j > j_o$ $j \in \{1, \ldots, m-2\}$

alors $\sum\limits_{i=1}^{j_o-1} k_i$ ne peut être nul :

$$\text{sinon } \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{j_o-1} k_i^o = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{m-2} k_i^o \leq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_{j_o}^o \leq -1 \\ \qquad\qquad\qquad f_{j_o}(x^o) = \alpha_{j_o}\ k_{j_o}^o \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{j_o} > -\inf\limits_{x\in X} f_{j_o}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f_{j_o}(x^o) < -\inf_{x\in X} f_{j_o}(x)$$

ce qui est absurde.

De la même manière que précédemment, on montre que $\sum\limits_{i=1}^{j_o-1} k_i^o$ est strictement négatif, on continue ce procédé pour montrer qu'il existe au moins un indice i_o tel que $k_{i_o}^o \leq -1$ et $k_i^o = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m-2\} \setminus \{i_o\}$ ce qui est impossible :

en effet

$$\left.\begin{array}{l} k^o_{i_o} \leq -1 \\ f_{i_o}(x^o) = \alpha_{i_o} k^o_{i_o} \\ \alpha_{i_o} > -\inf\limits_{x\in X} f_{i_o}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f_{i_o}(x^o) < -\inf\limits_{x\in X} f_{i_o}(x) \qquad \text{ce qui est absurde.}$$

∎

Remarques :

1) Compte tenu de la forme des multiplicateurs admissibles,dans le but de minimiser la taille des λ_i, il est intéressant de noter,que les équations diophantiennes doivent être considérées dans l'ordre décroissant des quantités

$-\inf\limits_{x\in X} f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$.

2) L'utilisation de ce type de matrice est intéressante lorsque l'écart

$|-\inf\limits_{x\in X} f_i(x) + \inf\limits_{x\in X} f_{i+1}(x)|$ n'est pas élevé.

∎

Exemple :

Le système de quatre équations

$$\begin{cases} f_i(x) = h_i(x) - 1 = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4 \\ x \in X \end{cases}$$

où $h_i(x)$ $i = 1, \ldots, 4$ sont des applications de X dans $\mathbb{N}$ aboutit aux résultats suivants :

$$(-\inf\limits_{x\in X} f_i(x) = 1 \qquad i = 1, \ldots, 4)$$

- Pour le deuxième type de matrices (théorème 25, théorème 26)

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

d'où l'équation équivalente :

$$105f_1(x) + 70f_2(x) + 42f_3(x) + 30f_4(x) = 0$$

- Pour ce nouveau type de matrices (théorème 28, théorème 29)

$$C^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où l'équation équivalente :

$$8f_1(x) + 12f_2(x) + 18f_3(x) + 27f_4(x) = 0$$

On remarque que les tailles des multiplicateurs admissibles, déterminés par ce nouveau type de matrices, sont nettement inférieures à celles des multiplicateurs issus de la matrice C^2 proposée par KALISZEWSKI-LIBURA.

∎

b) <u>Seconde condition</u>

Notons que jusqu'à présent, les conditions suffisantes, imposées pour qu'une matrice soit contractante, ne tenaient compte que des valeurs prises séparément par les $f_i(x)$ $\forall\ i = 1, \ldots, m$, $\forall\ x \in X$, sans se préoccuper de l'existence d'une même variable qui permet d'atteindre ces valeurs (voir théorème 25, 26, 27 et 29). Cela signifie que les matrices $C^j (j = 1, 2, 3)$ construite par les méthodes précédentes sont telles que :

$$\begin{cases} f_i(x^i) = C_i^j\ k \\ \\ x^i \in X,\ i = 1, \ldots, m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = 0$$

ce qui implique que :

$$\begin{cases} f_i(x) = C_i^j\ k \\ \\ x \in X,\ i = 1, \ldots, m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = 0$$

c'est à dire que C^j $(j = 1, 2, 3)$ sont contractantes.

Ce qui est proposé ici, est d'élaborer des conditions suffisantes de contraction, en optimisant chacune des applications f_i, en tenant compte des informations fournies par une autre contrainte (c'est à dire en résolvant des problèmes de type knapsack).

Etant donnés :

g et h deux applications de X dans $\mathbf{Z}$, et δ un entier naturel,

On définit les deux problèmes (type knapsack) suivants :

$$\text{MAX}(g, h, \delta) \quad \left[\begin{array}{ll} \max & g(x) \\ \text{s.c.} & h(x) \le \delta \\ & x \in X \end{array}\right.$$

$$\text{MIN}(g, h, \delta) \quad \left[\begin{array}{ll} \min & g(x) \\ \text{s.c.} & h(x) \ge -\delta \\ & x \in X \end{array}\right.$$

Remarque :

S'il existe $x^o \in X$ tel que : $g(x^o) = h(x^o) = 0$

alors : $v(\text{MAX}(g, h, \delta)) \ge 0$ et $v(\text{MIN}(g, h, \delta)) \le 0$.

∎

Théorème 30 :

Etant donnés :

$\alpha_i \in \mathbf{N}_*$ $i = 1, \ldots, m$ *et* $\beta_j \in \mathbf{N}$ $j = 1, \ldots, m$ *tels que :*

$$\alpha_{i+1}-\beta_{i+1} > \max\left(v(\text{MAX}(f_{i+1}, f_i, \alpha_i), - v(\text{MIN}(f_{i+1}, f_i, \alpha_i))\right) \qquad (V)$$

$i = 1, \ldots, m-1$ (*en posant* $\beta_1 = \beta_m = 0$)

Alors C^3 *est contractante.*

Démonstration :

Soit $(k^o, x^o) \in \mathbf{Z}^{m-1} \times X$ tel que la relation (SE) soit vérifiée.

Il faut montrer que k^o est nul.

La démonstration consiste à supposer que $\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o$ est non nul et de montrer que ceci n'est pas possible (compte tenu des hypothèses faites sur les α_i, β_i) ; c'est à dire que $\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o$ est nul.

Soit $i_o = \{i \in \{1, \ldots, m-1\} \mid k_{i_o}^o \neq 0 \text{ et } k_j^o = 0 \;\; \forall j > i_o\}$

le système (SE) se ramène :

$$(*) \quad \begin{cases} f_1(x^o) = k_1^o \alpha_1 \\ f_2(x^o) = k_1^o \beta_2 + k_2^o \alpha_2 \\ \vdots \\ f_{io}(x^o) = -(\alpha_{io} - \beta_{io}) \sum_{i=1}^{i_o} k_i^o \end{cases}$$

et on refait le même travail qui a été fait sur le système (SE) à nouveau sur le système (*) pour aboutir à $\sum_{i=1}^{i_o-1} k_i^o = 0$, ainsi de suite jusqu'à $k^o = 0$.

Supposons donc que $\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o \neq 0$, montrons les trois relations suivantes :

1) $\sum_{i=1}^{m-2} k_i^o$ est non nul.

2) <u>2.1</u> $\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-2} k_i^o < 0$

<u>2.2</u> $\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-2} k_i^o > 0$

3) <u>3.1</u> $\sum_{i=1}^{m-2} k_i^o < 0 \Rightarrow \exists\, j_o \in \{2, \ldots, m-2\} \mid f_{j_o}(x^o) \leq -(\alpha_{j_o} - \beta_{j_o})$

ou

$$f_1(x^o) \leq -\alpha_1$$

<u>3.2</u> $\sum_{i=1}^{m-2} k_i^o > 0 \Rightarrow \exists\, j_o \in \{2, \ldots, m-2\} \mid f_{j_o}(x^o) \geq -(\alpha_{j_o} - \beta_{j_o})$

ou

$$f_1(x^o) \geq -\alpha_1$$

preuve de 1) : supposons que $\sum_{i=1}^{m-2} k_i^o = 0$

dù système (S.E) on déduit : $\begin{cases} f_{m-1}(x^o) = \alpha_{m-1} k_{m-1}^o & (1) \\ f_m(x^o) = -\alpha_m k_{m-1}^o & (2) \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o \neq 0 \implies k_{m-1}^o \neq 0 \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} k_{m-1}^o \leq -1 \\ \\ (1) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} f_{m-1}(x^o) \leq -\alpha_{m-1} \leq \alpha_{m-1} \\ \\ (V) \end{array}\right\} \implies f_m(x^o) < \alpha_m$$

$$\left.\begin{array}{l} k_{m-1}^o \leq -1 \\ \\ (2) \end{array}\right\} \implies f_m(x^o) \geq \alpha_m$$

donc k_{m-1}^o ne peut être strictement négatif, de la même façon en utilisant une autre fois la condition (V),on montre que k_{m-1}^o ne peut pas être strictement positif ce qui contredit (3).

Preuve <u>2.1</u> : Supposons que $\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o < 0$

$k_{m-1}^o = 0 \implies \sum_{i=1}^{m-2} k_i < 0.$

sinon $k_{m-1}^o \neq 0$ et 1) et (SE) } $\implies$ (4) $f_{m-1}(x^o) \leq (\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}) \sum_{i=1}^{m-2} k_i^o$

raisonnons par l'absurde et supposons que $\sum_{i=}^{m-2} k_i^o \geq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m-2} k_i^o \geq 1 \\ \\ (4) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} f_{m-1}(x^o) \leq \alpha_{m-1} - \beta_{m-1} \leq \alpha_{m-1} \\ \\ (V) \end{array}\right\} \implies f_m(x^o) < \alpha_m$$

$$\left.\begin{array}{l} f_m(x^o) = -\alpha_m \left(\sum_{i=1}^{m-1} k_i^o\right) \\ \sum_{i=1}^{m-2} k_i^o < 0 \end{array}\right\} \implies f_m(x^o) \geq \alpha_m \quad \text{, ce qui est absurde.}$$

de la même manière on montre 2.2.

Preuve <u>3.1</u> : Supposons donc que $\sum_{i=1}^{m-2} k_i^o < 0$

Soit $i_o = \{i \in \{1, \ldots, m-2\} \mid k_{i_o}^o \neq 0$ et $k_j^o = 0 \;\forall\, j < i_o\}$ ou

$k_{i_o}^o \leq -1 \implies f_{i_o}(x^o) = \alpha_{i_o} k_{i_o}^o \leq -\alpha_{i_o} \leq -(\alpha_{i_o} - \beta_{i_o}).$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ou bien } k_{i_o} \geq 1,\ k^o_{i_o} + k^o_{i_o+1} \leq 0 \\ f_{i_o+1}(x^o) = \beta_{i_o} k^o_{i_o} + \alpha_{i_o+1} k^o_{i_o+1} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{i_o+1}(x^o) \leq -(\alpha_{i_o+1} - \beta_{i_o+1})$$

si $k^o_{i_o} + k^o_{i_o+1} \geq 1$ et $k^o_{i_o} + k^o_{i_o+1} + k^o_{i_o+2} \leq 0$ on montre, comme ci-dessus, que

$f_{i_o+2}(x^o) \leq -(\alpha_{i_o+2} - \beta_{i_o+2})$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Supposons donc que } \sum_{i=i_o}^{m-3} k^o_i \geq 1 \\ \text{or } \sum_{i=1}^{m-2} k^o_i < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{m-2}(x^o) \leq -(\alpha_{m-2} - \beta_{m-2})$$

de la même manière on montre <u>3.2</u>.

Si $\sum_{i=1}^{m-1} k^o_i$ est non nul, nous allons montrer que les conditions <u>2.1</u> et <u>3.1</u> ne peuvent avoir lieu ensemble ; si $\sum_{i=1}^{m-1} k^o_i \leq -1$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{soit } j_o \in \{1, \ldots, m-2\} : f_{j_o}(x^o) \leq -(\alpha_{j_o} - \beta_{j_o}) < \alpha_{j_o} \\ \qquad\qquad (V) \end{array}\right\} \Rightarrow f_m(x^o) < \alpha_m$$

$$\left.\begin{array}{l} f_m(x^o) = -\alpha_m \sum_{i=1}^{m-1} k^o_i \\ \sum_{i=1}^{m-1} k^o_i \leq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_m(x^o) \geq \alpha_m, \text{ ce qui est absurde}$$

de la même manière <u>2.2</u> et <u>3.2</u> ne peuvent pas se réaliser si $\sum_{i=1}^{m-1} k^o_i \geq 1$

∎

<u>Remarque</u> :

La détermination des multiplicateurs admissibles nécessite la résolution de 2(m-1) problèmes de type knapsack ; d'où la complexité en moyenne $\theta(mn)$ (voir [14]).

∎

II.4.2 - <u>Type de matrices C^4</u> :

Nous remarquons, que d'une manière générale, les multiplicateurs admissibles, générés par les C^j (j = 1, 2, 3), sont de grandes tailles, du fait que chaque

λ_i (i = 1, ..., m) est obtenu, à partir d'un produit de (m-1) nombres (voir (I.0), (I.1)) qui peuvent prendre de grandes valeurs. Le type de matrices noté C^4, proposé ici est, tel que les quantités D_j j = 1, ..., m permettent de générer des multiplicateurs de tailles plus faibles que précédemment dans certains cas.

Etant donnés α_i i = 1, ..., m des entiers naturels non nuls , on considère la matrice de la forme :

$$C^4 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ -\alpha_2 & 1 & & & & 0 & \\ 0 & -\alpha_3 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\alpha_{m-1} & 1 & \\ & & & & 0 & -\alpha_m \end{bmatrix}$$

pour laquelle les conditions suffisantes pour qu'elle soit λ-fondamentale et contractante sont les suivantes.

III.4.2.1 - Condition suffisante pour que C^4 soit λ-fondamentale

Théorème 31 :

Une condition suffisante pour qu'une matrice de type C^4 soit λ-fondamentale est :

$$\text{pgcd}\,(\alpha_i, \alpha_1) = 1 \quad i = 2, \dots, m$$

(λ est donné par :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= (-1)^{m-1}\,\alpha_1 \prod_{j=i+1}^{m} \alpha_j \qquad i = 2, \dots, m \\ \lambda_1 &= (-1)^{m-1} \prod_{j=2}^{m} \alpha_j \end{aligned}\right\}$$

Démonstration :

$$\lambda_i = (-1)^{i+1}\,D_i = (-1)^{m-1}\,\alpha_1 \prod_{j=i+1}^{m} \alpha_j \quad i = 2, \dots, m$$

$$\lambda_1 = (-1)^{m-1}\,\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_m$$

d'après le lemme 3 :

$$C^4 \ \lambda\text{-fondamentale} \iff \underset{j=1,\dots,m}{\text{pgcd}} (D_j) = 1$$

$$\iff \text{pgcd} \quad (\alpha_1, \alpha_j) = 1 \quad j = 2, \dots, m$$

∎

Remarque :

Les conditions du théorème 31 sont satisfaites en particulier lorsque $\alpha_1 = 1$.

∎

III.4.2.2 - Condition suffisante pour que C^4 soit contractante

Théorème 32

Une condition suffisante pour qu'une matrice de type C^4 soit contractante :

$$\alpha_i > \max\,(v(\text{MAX}(f_i, f_{i-1}, \alpha_{i-1})), -v(\text{MIN}(f_i, f_{i-1}, \alpha_{i-1}))) \quad i = 2,\dots,m \quad \text{(VI)}$$

Démonstration :

Soit $(k^o, x^o) \quad \mathbb{Z}^{m-1} \times X$ tel que $f(x^o) = C^4.k^o$, montrons que $k^o = 0$

$$f(x^o) = C^4.k^o \iff \begin{cases} f_1(x^o) = \alpha_1 k_1^o \\ f_2(x^o) = -\alpha_2 k_1^o + k_2^o \\ \vdots \\ f_{m-1}(x^o) = -\alpha_{m-1} k_{m-2}^o + k_{m-1}^o \\ f_m(x^o) = \qquad - \alpha_m k_{m-1}^o \end{cases}$$

Pour montrer que k^o est nul, nous montrons d'abord les deux relations suivantes :

$$k_1^o \le -1 \implies k_j^o \le -1 \quad j = 2, \dots, m-1 \quad (1)$$

et $$k_1^o \ge 1 \implies k_j^o \ge 1 \quad j = 2, \dots, m-1 \quad (2).$$

Vérifions la relation (1) (la relation (2) est vérifiée de la même façon, en utilisant les conditions (VI)) :

raisonnons par l'absurde et supposons que $k_2^o \ge 0$, ceci implique que :

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x^o) \ge -\alpha_2 k_1^o \\ \\ k_1^o \le -1 \text{ et } \alpha_2 > 0 \end{array}\right\} \implies f_2(x^o) \ge \alpha_2 \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x^o) = \alpha_1\, k_1^o \Rightarrow f_1(x^o) \leq -\alpha_1 < \alpha_1 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (VI) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_2 > f_2(x^o) \qquad (4)$$

les relations (3) et (4) sont incompatibles, c'est à dire que $k_2^o \leq -1$; de la même manière, on montre que $k_2^o \leq -1 \Rightarrow k_3^o \leq -1$ en utilisant encore une fois les conditions (VI), et ainsi de suite.

D'après (VI) (α_{m-1}, α_m) vérifie :

$$(f_{m-1}(x^o) \leq \alpha_{m-1} \Rightarrow f_m(x^o) < \alpha_m) \qquad (5)$$

et
$$(f_{m-1}(x^o) \leq -\alpha_{m-1} \Rightarrow f_m(x^o) < -\alpha_m) \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{supposons que } k_{m-1}^o \leq -1 \Rightarrow f_m(x^o) \geq \alpha_m \\ (VI) \text{ et } k_1^o \leq -1 \Rightarrow f_{m-1}(x^o) \leq \alpha_{m-1} \end{array}\right] \qquad (7)$$

les relations (7) et (5) ne peuvent être réalisées ensemble, c'est à dire que k_1^o ne peut être strictement négatif ; de la même façon, on montre que k_1^o ne peut être strictement positif, d'où $k_1^o = 0$; le même schéma peut être utilisé pour vérifier que $k_j^o = 0 \quad j = 2, \ldots, m-1$.

∎

III.5 - EXEMPLE NUMÉRIQUE COMPARATIF [28]

Soit le système

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = x_1 + 2x_2 + 100x_3 + 10x_4 - 103 \\ f_2(x) = 2x_1 + x_2 + 100x_3 + 5x_4 - 103 \\ f_3(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 \\ \qquad x \in V \end{array}\right.$$

Les types de matrices C^2, C^3, C^4 aboutissent aux multiplicateurs suivants :

- Pour les matrices de type C^2 :

  . utilisation des résultats des théorèmes 24 et 25.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

le multiplicateur associé : $\lambda^1 = (14, 22, 77)$

. utilisation des résultats du théorème 27 (généralisation de KALISZEWSKI-LIBURA) :

$K(f_1, 5) = \{10, 9, 8, 7, 0\}$

$K(f_2, 4) = \{5, 4, 3, 0\}$

$K(f_3, 2) = \{1, 0\}$

ce qui permet d'aboutir à la matrice suivante :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

et au multiplicateur associé : $\lambda^2 = (35, 30, 42)$

- Pour les matrices de types C^3 et C^4 :

il faut déterminer les quantités :

$\mathrm{MAX}\ (f_i, f_{i-1}, \alpha_{i-1})$ et $\mathrm{MIN}\ (f_i, f_{i-1}, \alpha_{i-1})$ $\quad i = 2, 3$

où $\alpha_1 = 1$.

On trouve :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{MAX}\ (f_2, f_1, 1) = 0 \\ \\ \mathrm{MIN}\ (f_2, f_1, 1) = -2 \end{array}\right\} \text{d'où } \alpha_2 = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{MAX}\ (f_3, f_2, 3) = 0 \\ \\ \mathrm{MIN}\ (f_3, f_2, 3) = -3 \end{array}\right\} \text{d'où } \alpha_3 = 4$$

. L'utilisation des résultats des théorèmes 28, 30 aboutit à la matrice :

$$C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad (\text{où } \beta_1 = 0)$$

et au multiplicateur associé : $\lambda^3 = (12, 4, 3)$

. l'utilisation des résultats des théorèmes 31, 32 aboutit à la matrice :

$$C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et au multiplicateur : $\lambda^4 = (12, 4, 1)$.

On note que :

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2 < \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^1$$

et $\qquad \lambda^4 < \lambda^3 << \lambda^2.$

III.6 - FORMALISME GÉOMÉTRIQUE DES MÉTHODES DE G-CONTRACTION

Cette partie est construite, dans le même esprit que celui de la partie II.3 ; les méthodes de Weinberg [32] sont généralisées, ainsi que le théorème fondamental (théorème 4), ce qui permet de donner un formalisme général de toutes les méthodes proposées, dans le cadre de la G-contraction.

III.6.1 - Généralisations des méthodes de Weinberg [32]

Etant données :

$f_i(x)$ ($i = 1, \ldots, m$) m formes linéaires , l'ensemble des valeurs prises par le m-uplet $(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ lorsque x parcourt l'ensemble X, supposé fini, sera appelé **spectre des m formes linéaires** et noté $S_{12\ldots m}$.

Remarques :

1) X étant un ensemble fini, le spectre $S_{12\ldots m}$ l'est également

2) A l'évidence, le spectre $S_{12\ldots m}$ est inclus dans le spectre $S_1 \times S_2 \times\ldots\times S_m$.

∎

Les deux résultats suivants sont à la base des deux méthodes proposées.

Théorème 33 :

Etant donnés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des entiers non nuls,
une condition suffisante pour que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ soit un multiplicateur admissible est que l'ensemble :

$$\{(z_1, z_2, \ldots, z_m) \in S_1 \times S_2 \times\ldots\times S_m \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = 0\}$$

se réduit à l'élément nul.

Démonstrations :

Notons $A = \{(z_1, z_2, \ldots, z_m) \in S_1 \times S_2 \times\ldots\times S_m \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = 0\}$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Soit } x^o \in \hat{S} \Rightarrow z = (f_1(x^o), \ldots, f_m(x^o)) \in A \\ A = \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x^o \in S$$

∎

Théorème 34 :

Etant donnés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des entiers non nuls,
une condition nécessaire et suffisante pour que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ soit un multiplicateur admissible est que l'ensemble :

$$\{(z_1, z_2, \ldots, z_m) \in S_{12\ldots m} \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = 0\}$$

se réduit à l'élément nul.

Démonstration :

* Pour la condition suffisante, la démonstration est analogue à celle du théorème 33 puisque $S_{12\ldots m} \subset S_1 \times S_2 \times\ldots\times S_m$.

* La condition est nécessaire :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ un multiplicateur admissible, nous montrons que l'hypothèse $A' \neq \{0\}$ $(A' = \{(z_1, \ldots, z_m) \in S_{12\ldots m} \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = 0\}$ aboutit à une contradiction : $A' \neq \{0\} \Rightarrow \exists\, \hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_m) \in S_{12\ldots m} : \sum_{i=1}^{m} |\hat{z}_i| > 0.$

Soit $\hat{x} \in X$ tel que : $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \ldots, \hat{z}_m) = (f_1(\hat{x}), f_2(\hat{x}), \ldots, f_m(\hat{x}))$

et $\quad \lambda_1 f_1(\hat{x}) + \lambda_2 f_2(\hat{x}) + \ldots + \lambda_m f_m(\hat{x}) = 0$

$\hat{x}$ n'appartient pas à S, puisque cela n'est vrai que si $f_i(\hat{x})$ $(i = 1, \ldots, m)$ sont nulles. Or $\hat{x}$ appartient à $\hat{S}$ ce qui contredit le fait que $\hat{S}$ est inclus dans S.

∎

Corollaire 7 :

Etant donnés $\lambda_i (i = 1, \ldots, m)$ des entiers non nuls,

i) Une condition **suffisante** *pour que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ soit un multiplicateur admissible est que :*

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i \neq 0 \quad \forall\, (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m : \sum_{i=1}^{m} |z_i| > 0$$

ii) Une condition **nécessaire et suffisante** *pour que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ soit un multiplicateur admissible est que :*

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i \neq 0 \quad \forall\, (z_1, \ldots, z_m) \in S_{12\ldots m} : \sum_{i=1}^{m} |z_i| > 0$$

A l'instar des méthodes de Weinberg [32], il est possible d'envisager deux types de méthodes, déterminant des entiers non nuls $(\lambda_i, i = 1, \ldots, m)$ qui vérifient respectivement les conditions (*) et (**).

Rappelons que ces méthodes ne sont applicables que si le cardinal de l'ensemble $S_{12\ldots m}$ (ou celui de $S_1 \times \ldots \times S_m$) n'est pas trop élevé. Des algorithmes, généralisant ceux de Weinberg, sont proposés dans la partie annexe, et destinés à construire le spectre $S_{12,\ldots,m}$.

III.6.2 - Nouvelle formulation du problème (P)

La nouvelle formulation du problème nécessite la donnée des définitions et des résultats suivants.

Définition 8 :

Etant donnés $V^j \in \mathbb{Z}^m (j = 1, \ldots, m-1)$

en notant :

$$D_j = \text{dét} \begin{pmatrix} V_1^1 & \cdots\cdots & V_1^{m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{j-1}^1 & \cdots\cdots & V_{j-1}^{m-1} \\ V_{j+1}^1 & \cdots\cdots & V_{j+1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ V_m^1 & \cdots\cdots & V_m^{m-1} \end{pmatrix} \quad j = 1, \ldots, m$$

On dira que V^j $(j = 1, \ldots, m-1)$ *sont des points fondamentaux de* $\mathbb{Z}^m$ *si et seulement si* : $\underset{j=1,\ldots,m}{\text{pgcd}} (D_j) = 1.$

Compte tenu des résultats précédents (théorème 19, théorème 19 bis), on déduit les relations entre les points du plan $H = \{z \in \mathbb{Z}^m \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = 0\}$ et les points fondamentaux de H.

Théorème 35 :

i) Il existe (m-1) *points fondamentaux, notés* V^j $j = 1, \ldots, m-1$ *tels que* :

$$H = H(V^1, V^2, \ldots, V^{m-1}) = \{z \in \mathbb{Z}^m \mid z = \sum_{j=1}^{m-1} k_j V^j, k_j \in \mathbb{Z}\}.$$

ii) Etant donné : $H^*(V^1, \ldots, V^{m-1}) = H(V^1, \ldots, V^{m-1}) \setminus \{0\}$

alors $H^*(V^1, \ldots, V^{m-1}) = \{z \in \mathbb{Z}^m \mid z = \sum_{j=1}^{m-1} k_j V^j, \sum_{j=1}^{m-1} |k_j| \neq 0, k_j \in \mathbb{Z}\}.$

Le problème (P) est alors équivalent à :

· *Trouver* (m-1) *points fondamentaux* V^j $j = 1, \ldots, m-1$ *tels que* :

$$S_{12\ldots m} \cap H^*(V^1, V^2, \ldots, V^{m-1}) = \emptyset$$

Définition 9 :

Etant donné un ensemble A *de* $\mathbb{Z}^m$, *on dira que* A *est un ensemble* **borné dans un plan,** *s'il existe* (m-1) *points fondamentaux* V^i $(i = 1, \ldots, m-1)$ *n'appartenant pas à* A *tels que l'ensemble* $H(V^1, V^2, \ldots, V^{m-1})$ *ne contient aucun point de* A, *les* V^i $(i = 1, \ldots, m-1)$ *seront appelés* **des points fondamentaux privilégiés** pour A (*ou plus succinctement* P.F.P. *pour* A).

Théorème 36 :

Etant donnés un ensemble A *borné dans un plan et* V^j $j=1,\ldots, m-1$ P.F.P. *pour* A. *Si l'une des conditions suivantes est vérifiée* :

i) $A \supset S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m$

ii) $A \supset S_{12\ldots m}$

iii) A *contient une partie de* $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m$ *tel que* :

$$\sum_{i=1}^{m-1} k_i V^i \notin S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m \setminus (A \cap S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m),$$
$$\forall k_i \in \mathbb{Z} : \sum_{i=1}^{m-1} |k_i| \neq 0$$

iv) A *contient une partie de* $S_{12\ldots m}$ *tel que* :

$$\sum_{i=1}^{m} k_i V^i \notin S_{12\ldots m} \setminus (A \cap S_{12\ldots m}) \quad \forall k_i \in \mathbb{Z} : \sum_{i=1}^{m-1} |k_i| \neq 0$$

Alors $S_{12\ldots m} \cap H^*(V^1, V^2, \ldots, V^{m-1}) = \emptyset$.

Démonstration :

Le théorème sera démontré dans les cas i) et iii)

(Les autres cas s'en déduisent facilement)

Cas i) :

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe

$$v \in S_{12\ldots m} \cap H^*(V^1, \ldots, V^{m-1})$$

cela implique qu'il existe $k_1, \ldots, k_{m-1}$ des entiers tels que

$$\sum_{i=1}^{m-1} |k_i| \neq 0 \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{m-1} k_i V^i \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} v \in S_{12\ldots m} \\ \\ S_{12\ldots m} \subset S_1 \times\ldots\times S_m \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow v \in A. \quad (2)$$

les relations (1) et (2) sont en contradiction avec le fait que A est un ensemble borné dans un plan.

Cas iii

Soit $v \in S_{12\ldots m} \cap H^*(V^1, \ldots, V^{m-1}) \Rightarrow v \in S_1 \times\ldots\times S_m$ (3)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (1) \\ \\ \text{et iii)} \end{array}\right\} \Rightarrow v \notin S_1 \times S_2 \times\ldots\times S_m \setminus (A \in S_1 \times S_2 \times\ldots\times S_m) \\ \\ \text{A ensemble borné dans un plan} \end{array}\right\} \Rightarrow v \notin S_1\times\ldots\times S_m$$

ce qui est absurde d'après (3).

∎

III.6.3 - Interprétation géométrique des méthodes de G-contraction

Rappelons qu'une méthode de G-contraction est basée sur la recherche d'une matrice C de $\mathbb{Z}(m, m-1)$,qui est à la fois λ-fondamentale et contractante.

Etant donnés :

$$\overset{i}{V}{}^j = (C^i)^j \quad j^{\text{ème}} \text{ colonne de } C^i \qquad i = 1, \ldots, 4 \qquad j = 1, \ldots, m-1$$

D'après la définition 8, théorème 19 et lemme 3, il est clair que toute matrice $C^i (i = 1, \ldots, 4)$ est λ-fondamentale si et seulement si $\overset{i}{V}{}^j$ $j = 1,\ldots,m$ et $i = 1, \ldots, 4$ sont des points fondamentaux.

Le résultat suivant montre, que chacune des conditions vues précédemment imposées sur les éléments de C^i $(i = 1, \ldots, 4)$ pour que C^i soit contractante entre dans cadre du théorème 36 :

Etant donnés :

$$\ell_i = \inf_{x\in X} f_i(x), \; u_i = \max_{x\in X} f_i(x) \qquad i = 1, \ldots, m$$

Considérons les ensembles

$A_1 = [-s, s]^m$ où $s = \max\limits_{i=1,\dots,m} (-\ell_i, u_i)$

$A_2 = [\ell_1, u_1] \times \dots \times [\ell_m, u_m]$

$A_3 = [\ell_1, u_1^*] \times \dots \times [\ell_m, u_m^*]$ où $u_i^* = \inf\limits_{y \in K(f_i, k_i)} y \quad i = 1, \dots, m$

A_4 l'ensemble représenté dans la figure (*).

Remarque :

A_i $(i = 1, \dots, 4)$ sont des ensembles bornés, donc bornés dans un plan.

Théorème 37 :

a) *La condition* *(I)* => $(A_1, \overset{11}{V}, \dots, \overset{1m-1}{V})$ *vérifie la condition i) du th. 36*

b) *b.1* *La condition* *(II)* => $(A_2, \overset{21}{V}, \dots, \overset{2m-1}{V})$ *vérifie la condition i) du th. 36*

b.2 *La condition* *(III)* => $(A_3, \overset{21}{V}, \dots, \overset{2m-1}{V})$ *vérifie la condition iii) du th. 36*

c) *c.1* *La condition* *(IV)* => $(A_2, \overset{31}{V}, \dots, \overset{3m-1}{V})$ *vérifie la condition ii) du th. 36*

c.2 *La condition* *(V)* => $(A_4, \overset{31}{V}, \dots, \overset{3m-1}{V})$ *vérifie la condition ii) du th. 36*

d) *La condition* *(VI)* => $(A_4, \overset{41}{V}, \dots, \overset{4m-1}{V})$ *vérifie la condition ii) du th. 36*

Démonstration :

La démonstration ne sera faite que pour les cas a) et b.1, les preuves des autres cas sont calquées sur les démonstrations présentées, dont la démarche est étroitement liée à celles des propriétés de contraction.

Cas a)

Soients : $\overset{11}{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{1i}{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ \left.\begin{matrix} q-1 \\ \vdots \\ q-1 \end{matrix}\right\} (i-1) \text{ fois} \\ q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $i = 2, \dots, m-2$ et $\overset{1m-1}{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ q-1 \\ \vdots \\ q-1 \\ q \end{pmatrix}$

où $q > s$ (1)

et $k \in \mathbf{Z}^{m-1}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{m-1} k_i \neq 0$ (2)

montrons que : $\sum_{i=1}^{m-1} k_i \overset{1}{V}{}^{i} \notin A_1$

raisonnons par l'absurde et supposons que $\sum_{i=1}^{m-1} k_i \overset{1}{V}{}^{i} \in A_1$

cela implique que : $\left.\begin{array}{l} k_{m-1}\, q \in [-s, s] \\ \\ (1) \text{ et } k_{m-1} \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow k_{m-1} = 0 .$

de la même manière, on montre que $k_i = 0$ $i = 2, \ldots, m-1$ ce qui est absurde d'après (2).

<u>Cas b.1</u> :

Soients : $\overset{2}{V}{}^{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ -\alpha_m \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ème}}$ place $\qquad j = 1, \ldots, m-1$

où $\alpha_i > u_i \quad i = 1, \ldots, m$

et $k \in \mathbb{Z}^{m-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{m-1} |k_i| \neq 0 \qquad (3)$

montrons que $\sum_{i=1}^{m-1} k_i \overset{2}{V}{}^{i} \notin A_2$.

raisonnons par l'absurde et supposons que $\sum_{j=1}^{m-1} k_j \overset{2}{V}{}^{j} \in A_2$

cela entraîne :

$$\left.\begin{array}{l} k_i \;\; \alpha_i \leq u_i \\ \\ \alpha_i > u_i \end{array}\right\} \Rightarrow k_i \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m-1 \qquad (4)$$

de même

$$\left.\begin{array}{l} (- \sum_{i=1}^{m-1} k_i)\; \alpha_m \leq u_m \\ \\ \alpha_m > u_m \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} k_i \geq 0 \qquad (5)$$

(4) et (5) ne peuvent pas avoir lieu ensemble d'après (3).

∎

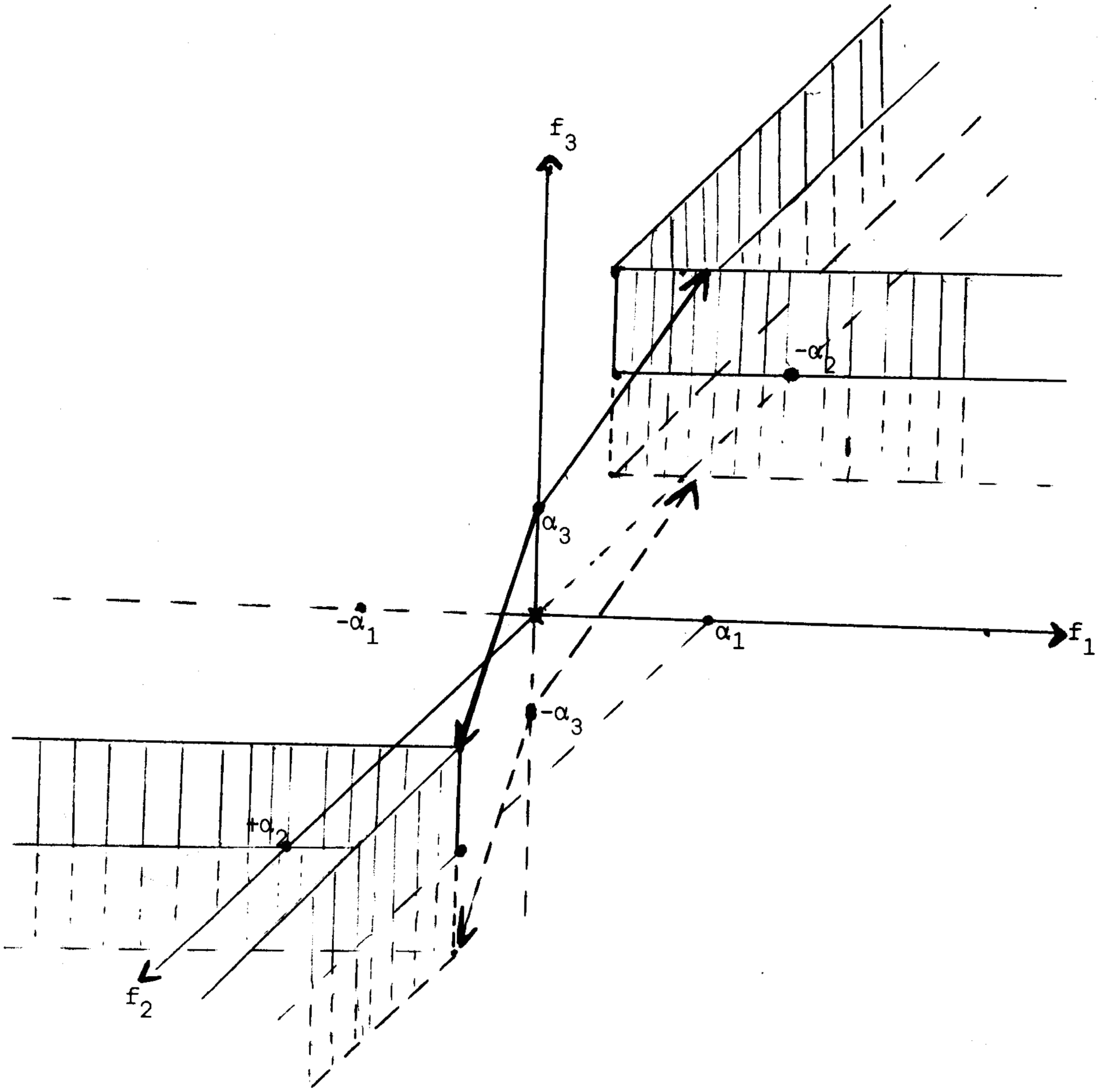


Figure (*)

Remarque :

Il est à noter, qu'il n'existe pas de type de matrices contractantes correspondant à la génération d'un ensemble de type A : $A \cap S_{12....m} \neq \emptyset$.

III.7 - COMPARAISON DE LA G-CONTRACTION ET DE LA 2-CONTRACTION

Ce paragraphe est consacré à une comparaison purement théorique des méthodes de 2-contraction et celles de G-contraction, avant de donner un aperçu des difficultés pratiques d'élaboration des meilleures méthodes.

Rappelons d'abord brièvement l'idée de base de ces deux types de méthodes.

Une méthode de 2-contraction consiste à déterminer un multiplicateur $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ d'une manière itérative (en m-1 étapes) caractérisé par :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\lambda_m f_m(x)+(\lambda_{m-1}f_{m-1}(x)+\ldots+\lambda_1 f_1(x))=0\\ x \in X\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_m(x) = 0 \\ \left.\begin{array}{l}\lambda_{m-1}f_{m-1}(x)+\ldots+\lambda_1 f_1(x)=0\\ x \in X\end{array}\right\} \Rightarrow \ldots\end{array} \\ \\ \ldots\ f_3(x) = 0 \\ \quad \left.\begin{array}{l}\lambda_2 f_2(x)+\lambda_1 f_1(x) = 0\\ x \in X\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_2(x) = 0 \\ (*)\ f_1(x) = 0 \\ x \in X\end{array}\right\}. \end{array}\right]$$

Une méthode de G-contraction, permet de déterminer un multiplicateur admissible, à partir d'une matrice vérifiant deux propriétés fondamentales (λ-fondamentale et contractante).

Théorème 38 :

Etant donné $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ un multiplicateur admissible, alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ vérifie la condition (E) si :

étant donnée une étape $k \geq 1$, *la combinaison de l'équation* $f_{k+1}(x) = 0$ *de l'équation équivalente aux* k *premières équations est réalisée sur l'ensemble suivant :*

$$\{x \in X \mid f_i(x) = 0, \forall i > k+1\}.$$

Démonstration :

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ un multiplicateur admissible :

$$\left.\begin{matrix} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0 \\ x \in X \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ x \in X \end{matrix}\right] \qquad (**)$$

La condition (*) ne sera vérifiée que si l'on considère l'ensemble $\{x \in X \mid f_i(x) = 0, \forall i > 2\}$ au lieu de X, d'après (**), de même la condition :

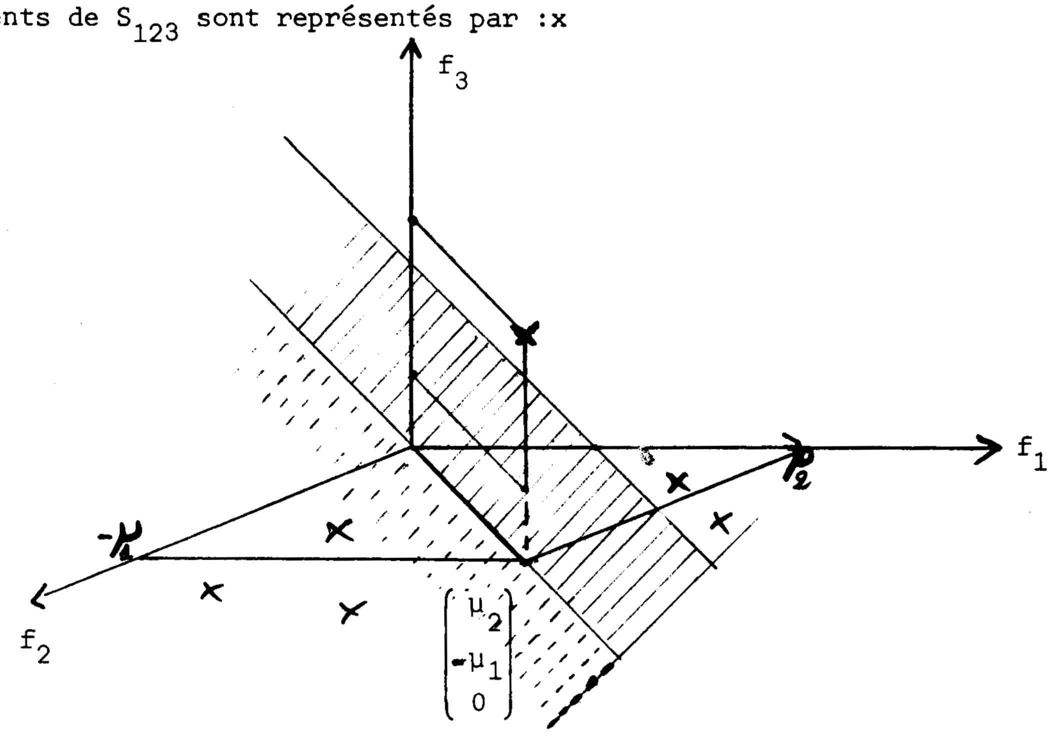
$$\left.\begin{matrix} \lambda_3 f_3(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_1 f_1(x) = 0 \\ x \in X \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_3(x) = 0 \\ \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \\ x \in X \end{matrix}\right\}$$

ne sera vérifiée que si l'on considère $\{x \in X \mid f_i(x) = 0 \ \forall i > 3\}$ et ainsi de suite, la condition (E) sera vérifiée sous les hypothèses du théorème 38.

∎

Ceci peut être illustré sur le schéma suivant : (avec m = 3)

les éléments de S_{123} sont représentés par :x



le multiplicateur (μ_1, μ_2) n'est pas admissible pour toute méthode de 2-contraction, si l'on considère uniquement S_{12}, et le sera pour l'ensemble $\{(z_1, z_2) \in S_{12} \mid f_3(x) = 0, \forall x \in X : z_1 = f_1(x)\}$.

Si l'on admet l'existence d'une méthode de G-contraction, pour tout multiplicateur admissible, alors l'ensemble des méthodes de G-contraction, contient celui de 2-contraction, la réciproque ne serait vraie que si tout multiplicateur admissible par une méthode de 2-contraction vérifie les conditions du théorème 38 ; ce qui va à l'encontre du principe de la 2-contraction.
La supériorité, toute théorique, des méthodes de G-contraction sur celles de 2-contraction ne se vérifie pas en pratique ; en effet, comme il sera vu dans la suite, il n'existe pas, en fait, de relation d'ordre total entre les méthodes de G-contraction et celles de 2-contraction ; l'efficacité de toutes les méthodes dépend des structures des équations à combiner.
Bien qu'aucune des méthodes de 2-contraction ne satisfait l'hypothèse du théorème 38, les expériences numériques permettent d'affirmer (en général), que les meilleures d'entre elles, conduisent à des multiplicateurs de tailles raisonnables.

D'autre part, on rappelle que l'utilisation d'une méthode de G-contraction admet comme difficulté majeure, la détermination d'un type de matrices vérifiant les deux propriétés fondamentales et telles que les quantités (D_j) $j = 1, \ldots, m$ soient de tailles raisonnables. Mais la détermination des P.F.P. pour A (A un ensemble donné) devient très compliquée dès que $m \geq 3$ (pour $m = 2$ il suffit de déterminer un point fondamental dans le complémentaire de $B_\varepsilon(w_1, w_2)$ qui contient A). La difficulté vient du fait qu'il n'est pas possible d'exhiber un ensemble B "équivalent" au $B_\varepsilon(w_1, w_2)$, c'est à dire pour lequel la détermination de points fondamentaux est équivalente à celle de P.F.P. pour B ; c'est à dire, lorsque $m \geq 3$, il faut montrer que toute combinaison dans $\mathbb{Z}^{m-1}$, de ces points fondamentaux appartient, au complémentaire de l'ensemble A (cette vérification est de complexité $\theta(3^{m-1} - 1)$).

CHAPITRE IV

ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROBLEME DE KNAPSACK EN EGALITE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme pour résoudre le problème du knapsack en égalité, cet algorithme est une adaptation de celui décrit par FAYARD-PLATEAU [15] correspondant au cas de l'inégalité.

Les quatre phases essentielles de cet algorithme sont les suivantes :

phase 1 : Résolution de la relaxation

phase 2 : Détermination d'une solution réalisable

phase 3 : Réduction de la taille du problème

phase 4 : Résolution du problème réduit par énumération implicite.

L'algorithme proposé résout le problème suivant :

$$(B)\begin{cases}\max cx \\ s\ c\ a\ x = b \\ \quad x \in V\end{cases}$$

dont les données sont telles que :

$$\begin{cases} c,\ a \in \mathbb{N}_*^n,\ b \in \mathbb{N}_* \\ \max\limits_{1\leq j\leq n} a_j \leq b < \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\ ,\ \exists\ J \subset \{1, \ldots, n\} : \sum\limits_{j\in J} a_j = b\end{cases}$$

Phase 1 : Résolution de $(\bar{B})$

La résolution de $(\bar{B})$ permet de déterminer un majorant du problème (B).

Il est bien connu que $\bar{x}$ solution optimale du problème :

$$\begin{cases}\max\ cx \\ s.c.\ ax \leq b \\ \quad x \in [V]\end{cases}$$

est telle que $a\bar{x} = b$.

$(\bar{B})$ sera donc résolu (comme dans [15]) en déterminant un sous-ensemble U de $\{1,\ldots, n\}$ tel que :

$$\begin{cases} \sum_{j\in U} a_j \leq b < \sum_{j\in U\cup\{i\}} a_j \\ \forall\, j \in U \quad c_j/a_j \geq c_p/a_p \quad \forall\, p \notin U \,;\, c_i/a_i = \max \{c_p/a_p \mid p \notin U\}. \end{cases}$$

Note : Cette détermination se fait par un algorithme de complexité linéaire en moyenne, $\bar{x}$ est définie comme suit :

$$\bar{x} = \begin{cases} \bar{x}_j = 1 & \forall\, j \in U \\ \bar{x}_i = (b - \sum_{j\in U} a_j)/a_i & \\ \bar{x}_j = 0 & \forall\, j \in L = \{1, \ldots, n\} \setminus \{U \cup \{i\}\}. \end{cases}$$

Lorsque $\bar{x}_i = 0$ la solution optimale de la relaxation de (B) coïncide avec celle de (B) ; dans l'autre cas, on applique
Phase 2 : détermination d'une solution réalisable
Il est aisé de déterminer une solution réalisable,dans le cas du knapsack en inégalité (voir [15]), par contre dans le cas d'une contraînte en égalité, cette solution doit être déterminée par une procédure dynamique ou énumérative, c'est cette dernière option inspirée de [29] qui a été adoptée.

La recherche d'une solution réalisable commence par un classement,dans l'ordre décroissant,des éléments a_j $j = 1, \ldots, n$, puis on fixe la première variable à un et on applique un ensemble de tests noté (T) à l'équation

(*) $\sum_{j=2}^{n} a_j x_j = b-a_1$, $x_j \in \{0, 1\}$ $j \geq 2$ qui aboutit au trois cas :

cas a) trouver une solution triviale

cas b) montrer que l'équation (*) n'admet pas de solution

cas c) fixer des variables x_j $(2 \leq j \leq t,\ t \in \{2, \ldots, m\})$ *à zéro.*

Dans ce dernier cas, on fixe x_{t+1} à un et on applique à nouveau les tests (T) à l'équation (*) dans laquelle on fixe x_j à zéro $j = 2, \ldots, t$ et x_{t+1} à un.

Lorsque les tests (T) aboutissent au cas b), on affecte à la dernière variable, mise à un, la valeur zéro, on applique à nouveau l'ensemble des tests (T) à la nouvelle équation obtenue.

Les tests (T), appliqués à chaque équation dont le second membre sera noté d, et les variables x_j $j = 1, \ldots, k-1$ ($k \in \{2, \ldots, n\}$) sont déjà fixés :

$$\sum_{j=k}^{n} a_j x_j = d$$

1 *Si* $d < 0$ *alors l'équation n'admet pas de solution* (*cas b)*)

2 *Si* $d = 0$ *alors* $x_j = 0$ $j = k, \ldots, n$ (*cas a)*)

3 *Si* $d > 0$

3.1 *S'il existe* $\ell \in \{k, \ldots, n\}$ *tel que* $a_\ell = d$ *alors* $x_\ell = 1$

et $x_j = 0$ $j \geq \ell+1$ (*cas a)*)

3.2 *Soit* t : $a_t = \min \{a_j | a_j > d\}$

Si $t = n$ *alors l'équation n'admet pas de solutions* (*cas b)*)

Si $t = n-1$ *et* $a_n \neq d$ *alors l'équation n'admet pas de solutions* (*cas b)*)

Si $t \leq n-2$ *alors* $x_j = 0$ $j = k, \ldots, t$ (*cas c)*)

Etant donnés ℓ; $k \in \{1, \ldots, n\}$, nous définissons :

$p(1) = 1$

$p(\ell) = k \iff x_{j_\ell} = 0$ $j = p(\ell-1) + 1,$

$d(\ell) = b - \sum_{j=1} a_{p(j)}$

Algorithme SR :

But : déterminer une solution x^o réalisable pour (B) ou prouver la vacuité de F(B).

0 $\ell \leftarrow 1$, $p(1) \leftarrow 1$, $x_1^o \leftarrow 1$ *et* $d(1) \leftarrow b-a_1$

1 *appliquer les tests* (T) *à* :

$$\sum_{j=p(\ell)+1}^{n} a_j\, x_j = d(\ell)$$

Si a) *est vérifié* *alors* *aller en* 6

Si c) *est vérifié* *alors* *aller en* 3

2 *Si* $x_{p(\ell)}^o = 1$ *alors* $x_{p(\ell)}^o \leftarrow 0$, $d(\ell) \leftarrow d(\ell) + a_{p(\ell)}$; *aller en* 1

3 *Si* $\ell = 1$ *alors* *l'équation n'admet pas de solution ; stop*

4 *Si* $x_{p(\ell-1)}^o$ *alors* $p(\ell) \leftarrow p(\ell) + t$; (t *variables fixées par* (T))

$x_{p(\ell)}^o \leftarrow 1$; *aller en* 1

5 $\ell \leftarrow \ell+1$; $p(\ell) \leftarrow p(\ell-1)+t$; $d(\ell) \leftarrow d(\ell-1) - a_{p(\ell)}$;

$x_{p(\ell)}^o \leftarrow 1$; *aller en* 1

6 $\underline{v}\,(B) \leftarrow c\, x^o$

Etant donné : $\bar{v}\,(B) = \lfloor v(\bar{B}) \rfloor$

Si $\underline{v}\,(B) = \bar{v}(B)$ alors $v(B) = \underline{v}(B)$ et $x^* = x^o$.

Remarque :

En pratique, pour sauvegarder le classement des rapports c_j/a_j, $j \in U$, on applique en premier lieu cette phase 2 à l'équation : $\sum_{j\in L} a_j\, x_j = b - \sum_{j\in U} a_j$.
Lorsque cette équation n'admet pas de solution, la remise en cause des valeurs des variables d'indice appartenant à U, se fait en annulant en priorité les variables du plus petit rapport c_j/a_j.

Phase 3 : Réduction de la taille de (B)

Cette phase consiste en l'élimination définitive de variables après attribution de valeurs bien définies ; elle permet de construire les ensembles suivants :

$X_o = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid x_j \overset{*}{\leftarrow} 0\}$ et $X_1 = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid x_j \overset{*}{\leftarrow} 1\}$

où la notation $x_j \overset{*}{\leftarrow} \varepsilon, \varepsilon \in \{0, 1\}$ signifie que x_j doit être fixé à la valeur ε dans le but d'améliorer $\underline{v}(B)$ le meilleur minorant de $v(B)$

Si $X_2 = \emptyset$ alors (où $X_2 = \{1,\ldots, n\} \backslash (X_0 \cup X_1)$) $V(B) \leftarrow \underline{V}(B)$ Stop.

Phase 4 : Résolution du problème réduit par énumération implicite

i) Hiérarchie des variables : les variables du problème réduit sont réindéxées de la manière suivante :

* Si n < 1000 : utilisation de la méthode Quicksort ([15]) pour classer par ordre croissant les valeurs absolues des coûts réduits à l'optimum de $(\bar{B})$ (c'est à dire $|c_j - \frac{c_i}{a_i} a_j|$, $\forall j \in X_2$).

* Si n ≥ 1000 : le classement est réalisé par la méthode de tri Quicksort avec seuil, dans laquelle les sous listes obtenues en cours d'algorithme de dimensions ne dépassant pas le seuil, sont laissées en état :

$$\text{par exemple, seuil} = \begin{cases} 8 \text{ si } n = 1000 \\ 10 \text{ si } n = 2000 \\ 35 \text{ si } n = 5000 \\ 60 \text{ si } n = 7500 \end{cases}$$

ii) Après renumérotation des variables de 1 à $m = |X_2|$ (des plus petites $|c_j - \frac{c_i}{a_i} a_j|$ aux plus grandes), l'énumération explicite de l'ensemble des vecteurs du cube unité de $\mathbb{R}^m$ est réalisée :

- En effectuant une exploration lexicographique du cube unité de $\mathbb{R}^{m-2}$ (associée au sous-ensemble d'indices $I = \{3, \ldots, m\}$) : à partir de x_I^1 définie par $x_j^1 = \lfloor \bar{x}_j \rfloor$, $\forall j \in I$, les $2^{m-2}-1$ autres sommets du cube unité sont générés dans l'ordre suivant :

$$x_I^2 = (1 - x_3^1,\quad x_4^1,\quad x_5^1,\ \ldots,\quad x_m^1)$$
$$x_I^3 = (\quad x_3^1,\ 1-x_4^1,\quad x_5^1,\ \ldots,\quad x_m^1)$$
$$\vdots$$
$$x_I^{2^{m-2}} = (1 - x_3^1,\ 1-x_4^1,\ 1-x_5^1,\ \ldots,\ 1-x_m^1)$$

- En résolvant le problème auxiliaire suivant pour chaque vecteur x_I^k $(k = 1, \ldots, 2^{m-2})$ de $\mathbb{R}^{m-2}$ considéré comme paramètre :

$$(P.A)\begin{cases} c_I\ x_I^k + \max\ c_1\ x_1 + c_2\ x_2 \\ \qquad a_1\ x_1 + a_2\ x_2 = b - a_I\ x_I^k \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\ 2. \end{cases}$$

iii) L'arborescence associée au schéma exploratoire des solutions est parcouru implicitement comme suit :

Etant donné un noeud de cette arborescence, i.e. une partition $(S_o,\ S_1,\ S_2)$ de X_2 où $S_o = \{j \mid x_j = 0\}$ et $S_1 = \{j \mid x_j = 1\}$,

les tests successifs suivants sont appliqués au sous-problème :

$$(P) \quad = \{B \mid x_j = 0 \quad \forall\ j \in X_o \cup S_o,\ x_j = 1 \quad \forall\ j \in X_1 \cup S_1\}$$

ie
$$\begin{cases} \sum_{j\in X_1 \cup S_1} c_j + \max \sum_{j\in S_2} c_j\ x_j \\ \qquad \text{s.c.} \sum_{j\in S_2} a_j\ x_j = b(P) = b - \sum_{j\in X_1\cup S_1} a_j \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad \forall\ j \in S_2 \end{cases}$$

Le majorant de $v(P)$ utilisé est la valeur de la relaxation lagrangienne de (B) associée à c_i/a_i

ie $\bar{v}(P) = c_i\ b/a_i + \max\ \{(c-c_i/a_i\ a)x \mid x_j = 0\ \forall\ j \in X_o \cup S_o\ ;$
$x_j = 1\ \forall\ j \in X_1 \cup S_1,\ x_j = 0 \text{ ou } 1\ \forall\ j \in S_2\}.$

L'algorithme détaillé, relatif à cette phase 4, reprend aux quelques modifications décrites ci-dessous, les étapes 13-0 à 13-13 de [15] :

les étapes 13.5 et 13.6 doivent être remplacées respectivement par :

13.5' Si $S_2 = \emptyset$ alors $F(P) = \emptyset$ aller en 13.13

13.6' Si $\sum_{j \in S_2} a_j < b(P)$ alors $F(P) = \emptyset$ aller en 13.13

Si $\sum_{j \in S_2} a_j = b(P)$ alors $x_j \leftarrow 1 \quad \forall\, j \in S_2$

$S_1 = S_1 \cup S_2 ; S_2 = \emptyset$

$Z \leftarrow v(P) = \sum_{j \in X_1 \in S_1} c_j$

aller en 13.10.

Remarque :

La technique utilisée, pour transformer un problème de partitionnement en un problème équivalent de recouvrement [30], permet de transformer le problème (B) en un problème équivalent avec une contrainte en inégalité.

Théorème 39

Il existe $\lambda_o \in \mathbb{R}^+$ *tel* : $\forall\, \lambda \geq \lambda_o$,

(B) *est équivalent à* :

$$(B') \left[\begin{array}{lll} \max & cx & -\lambda(b-ax) \\ s.c. & & ax \leq b \\ & & x \in X \end{array}\right.$$

Démonstration :

Soit $c'x = cx - \lambda(b - ax) \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$

Il est évident que :

$F(B') = F(B) \cup F$ où $F = \{x \in V \mid ax \leq b-1\}$

et $c'x = cx \quad \forall\, x \in F\,(B)$

Pour déterminer λ_o, il suffit donc de vérifier :

$c'x \leq cx^o \quad \forall\, x \in F$ où $x^o \in F(B) \qquad (*)$

$$\left.\begin{array}{l} c'x = cx - \lambda(b - ax) \\ \\ \quad x \in F \end{array}\right\} \Rightarrow c'x \le cx - \lambda$$

(*) est vérifié en particulier si :

$$\lambda > cx - cx^{o} \qquad \forall\, x \in F$$

Note :

1) En pratique, il suffit de choisir :

$$\lambda_{o} = \max \{\max \{cx \mid ax \le b-1 \; ; \; x \in [V]\} - cx^{o}, 0\}$$

2) Des expériences numériques comparant ces deux techniques sont répertoriées au chapitre VI.

Chapitre V

UNE METHODE DE RELAXATION-CONTRACTION

Dans ce chapitre, nous proposons de résoudre le problème :

$$(P)\quad \left[\begin{array}{lll} \text{Optimiser } c(x) & & \\ \text{s.c.} & f_i(x) = 0 & i = 1, \ldots, m \\ & x \in X & \end{array}\right]$$

où X est supposé borné

en résolvant une suite finie de problèmes de knapsack du type suivant :

$$(P(\lambda))\quad \left[\begin{array}{l} \text{Optimiser } c(x) \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0 \\ x \in X \end{array}\right]$$

où les multiplicateurs $\lambda \in \mathbb{Z}^m$ envisagés, évoluent d'itération en itération (en utilisant les résultats du chapitre II (méthodes de 2-contraction)) jusqu'à l'obtention d'un multiplicateur λ^* tel que :

$$v(P(\lambda^*)) = v(P)$$

Il est à noter, que $F(P(\lambda^*)) \supset F(P)$ puisque $(P(\lambda^*))$ est une relaxation de (P) mais que λ^* n'appartient pas nécessairement à l'ensemble :

$$A = \{\lambda \in \mathbb{Z}^m \mid F(P) = F(P(\lambda))\}.$$

L'intérêt de cette méthode, est d'arriver au résultat en un nombre d'itérations qui peut être bien inférieur à m-1, et par conséquent, d'aboutir à un multiplicateur λ^* dont les composantes peuvent être bien plus petites, que si ce multiplicateur avait été construit au préalable à toute optimisation, de sorte que :

$$F(P(\lambda^*)) = F(P).$$

<u>Principe de l'algorithme</u> :

<u>but</u> : déterminer un multiplicateur $\lambda^* \in \bar{A} = \{\lambda \in \mathbb{Z}^m \mid v(P) = v(P(\lambda))\}$

<u>0</u> Initialisation : $k = 0$, $\lambda^o = (1, 1, \ldots, 1, 1)$

<u>1</u> Soit x^k une solution optimale de $(P(\lambda^k))$.

<u>Si</u> $x^k \in F(P)$ <u>alors</u> $\lambda^* = \lambda^k$ stop.

2 Soit $i_k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $f_{i_k}(x^k) \neq 0$

Déterminer λ^{k+1} tel que :

$$\lambda^{k+1}.f(x) = 0, \; x \in X$$

soit équivalente au système :

$$\boxed{\begin{array}{ll} f_{i_k}(x) & = 0 \\ \lambda^k.f(x) & = 0 \\ x \in X & \end{array}}$$

3 k = k+1, aller en 1

Théorème 40 :

Le multiplicateur $\lambda^* \in \bar{A}$ est obtenu en un nombre fini d'itérations au plus égal à m-1.

Démonstration :

Il suffit de remarquer qu'à l'étape 2 de l'algorithme, la contrainte i_k $(k = 1, \ldots, m)$ sera vérifiée à toutes les itérations suivantes, et comme $\lambda^o = (1, 1, \ldots, 1)$, il existe au moins une contrainte qui sera toujours vérifiée, on peut conclure que i_k ne peut prendre finalement que m-1 valeurs.

∎

Remarques :

1) Il n'est pas nécessaire de choisir $\lambda^o = (1, 1, \ldots, 1)$, on peut prendre par exemple $\lambda^o = (\lambda_I, \lambda_{\bar{I}})$ I sous ensemble de $\{1, \ldots, m\}$ tel que :

$$\lambda_I.f_I(x) = 0 \iff f_I(x) = 0$$

c'est à dire que λ_I est un multiplicateur admissible relatif aux contraintes $f_i(x) = 0 \quad i \in I$.

2) L'exemple suivant montre que dans certains cas l'ensemble $\bar{A}$ contient strictement l'ensemble A.

∎

Reprenons l'exemple de BALAS [2] :

$$\left[\begin{array}{l} \max\ 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \\ \text{s.c.}\ \ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 - x_6 \qquad - 2 = 0 \\ \quad -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 \qquad - x_7 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \qquad - x_8 - 1 = 0 \\ \quad X = \{x \in \mathbb{N}^8 \mid x_j = 0, 1 \quad j = 1, \ldots, 5\} \end{array}\right]$$

En posant $\lambda^o = (1, 1, 1)$ la solution optimale de :

$$(P(\lambda^o)) \left[\begin{array}{l} \max\ 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \\ \text{s.c.}\ \ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = -3 \\ \quad x \in X \end{array}\right.$$

définie par $x^o = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ $(v(P(\lambda^o)) = 25)$, ne vérifiant pas la troisième équation, on considère le système suivant :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = -3 \\ \qquad x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \qquad + x_8 = -1 \\ \qquad x \in X \end{array}\right.$$

pour lequel le multiplicateur admissible (6, 1) est déterminé en utilisant les résultats du théorème 16.

Le nouveau problème envisagé est donc le suivant :

$$(P(\hat{\lambda})) \left[\begin{array}{l} \max\ 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \\ \text{s.c}\ \ 6x_1 - 11x_2 - 26x_3 + 13x_4 + 19x_5 + 6x_6 + 6x_7 + 6x_8 = -19 \\ \quad x \in X \end{array}\right.$$

dont la solution optimale : $x^1 = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ vérifie toutes les équations du sytème initial ;cette solution est donc optimale pour le problème (P) :

$$v(P(\lambda^*)) = v(P) = 22$$

Il est à noter,que $\lambda^1 = (6, 6, 7)$ n'est pas un multiplicateur admissible car la solution (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) appartient à $F(P(\lambda^1))$ et n'appartient pas à F(P), puisqu'elle ne satisfait pas la première équation.

On remarque, que la démarche suivie est à l'opposée de celle d'ELMAGHRABY-WIG et encore de BRADLEY qui montre qu'à tout problème, en nombres entiers bornés et à plusieurs contraintes, est associé un problème équivalent avec une seule contrainte dont le gradient est parallèle à celui de la fonction économique (qui est d'ailleurs un problème difficile à résoudre et nécessite l'utilisation de la programmation dynamique).

Théorème 41 [3] :

Il existe une application h *et deux entiers* θ_1, θ_2 *tels que le problème (P) soit équivalent au problème*

$$\left[\begin{array}{ll} \textit{optimiser} & h(x) \\ \text{s.c.} & \theta_1 \leq h(x) \leq \theta_2 \\ & x \in X \end{array}\right.$$

Démonstration :

X étant borné, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que le problème (P) soit équivalent au problème :

$$\left[\begin{array}{l} \text{opt} \quad c(x) \\ \text{s.c.} \quad g(x) = 0 \\ \qquad\quad x \in X \end{array}\right.$$

$$\text{où} \quad g(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Soient : $\theta_1 = \min_{x \in X} c(x)$ et $\theta_2 = \max_{x \in X} c(x)$

Le problème ci-dessus est équivalent à :

$$\left[\begin{array}{ll} \max & x_o \\ \text{s.c.} & c(x) = x_o \\ & g(x) = 0 \\ & x \in X,\ \theta_1 \leq x_o \leq \theta_2,\ x_o \text{ entier.} \end{array}\right.$$

D'après le théorème 16, il existe un multiplicateur admissible $(1, \hat{\lambda})$ tel que ce dernier problème soit équivalent :

$$\left[\begin{array}{l} \max \quad x_o \\ \text{s.c.} \quad (c+\hat{\lambda}g)\,(x) = x_o \\ \qquad x \in X,\ \theta_1 \leq x_o \leq \theta_2,\ x_o \text{ entier} \end{array}\right.$$

qui est identique à celui de l'énoncé du théorème en posant

$$h = c + \hat{\lambda}.g.$$

∎

CHAPITRE VI

EXPERIENCES NUMERIQUES

INTRODUCTION

Les différents algorithmes,présentés aux chapitres précédents,ont été mis en oeuvre sur CII.HB IRIS 80. Tous les temps de calcul des expériences numériques sont fournis en secondes.

VI.1 - PROBLÈME DU KNAPSACK EN ÉGALITÉ

L'algorithme,présenté dans le chapitre IV,a été mis en oeuvre, en considérant quelques changements dans le code de l'algorithme construit par FAYARD-PLATEAU [15] pour le cas de l'inégalité.

Ce nouveau code a été testé sur un lot de problèmes de 30, 90, 300, 400, 600, 900 variables,tirés au hasard suivant la loi uniforme :

avec $c_j \in [0,999]$, $a_j \in [0,99]$

et $b \in [\max_{j=1,\dots,n} a_j, \sum_{j=1}^{n} a_j[$

tel qu'il existe un sous ensemble J de $\{1, \dots, n\}$: $\sum_{j \in J} a_j = b$.

VI.1.1 - Résultats numériques

a)Il nous a semblé intéressant de faire une comparaison temporelle entre les codes cités ci-dessous (chacun des problèmes testés étant résolu respectivement avec la contrainte en égalité et en inégalité),ces temps de calcul (en secondes) sont répertoriés dans le tableau 2 :

Pour chaque série de problèmes la signification des paramètres est la suivante :

n : taille des problèmes

NP : nombre de problèmes

t_1 : le temps moyen (code en égalité)

t_2 : le temps moyen (code en inégalité)

N	NP	t_1	t_2
300	50	0,186	0,084
400	50	0,238	0,096
600	10	0,300	0,133
900	40	0,372	0,267

Tableau 2

On remarque d'après ce tableau que $t_1 \sim 3t_2$, ceci est due surtout à la phase initiale de détermination d'une solution réalisable.

Exemples :

Nous proposons deux séries de problèmes, de 30 et 90 variables :

i) les deux problèmes de la première série sont déduits de l'exemple suivant par le changement de second membre :

nombre de variables : 30

c =

360	83	59	130	431	67	230	52	93	125
670	892	600	38	48	147	78	256	63	17
120	164	432	35	92	110	22	42	50	326

a =

15	25	5	94	53	48	27	99	6	17
69	43	5	57	7	21	78	10	37	26
86	66	31	65	5	79	20	65	52	13

*1er second membre : 253

Code en égalité :

la solution optimale :

1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1

la valeur de l'heuristique : 4183

la valeur optimale : 4183

Code en inégalité :

la solution optimale :

1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1

la valeur de l'heuristique : 4010

la valeur optimale : 4183

*<u>2ème second membre</u> : 367

Code en égalité :

la solution optimale :

1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1

la valeur de l'heuristique : 4655

la valeur de l'heuristique : 4807

Code en inégalité :

la solution optimale

1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1

la valeur de l'heuristique : 4844

la valeur optimale : 4844

ii) Comme précédemment, les deux problèmes de la deuxième série se déduisent de l'exemple suivant par le changement de second membre :

nombre de variables : 90

c =

360	83	59	130	431	67	230	52	93	125
670	892	600	38	48	147	78	256	63	17
120	164	432	35	92	110	22	42	50	326
14	25	37	58	23	49	35	62	19	82
14	25	36	17	28	39	47	58	69	71
82	93	82	35	24	95	34	16	37	29
15	36	78	56	95	68	456	25	12	45
68	35	64	92	45	63	46	25	37	19
12	13	45	56	78	46	13	58	34	56

a =

7	5	30	22	80	94	11	81	70	64
59	18	9	36	3	8	15	42	9	7
42	47	52	32	26	48	55	6	29	84
12	13	15	16	25	34	19	24	15	34
86	66	31	65	5	79	20	65	52	13
48	14	5	72	14	39	46	27	11	91
15	25	5	94	53	48	27	99	6	17
69	43	5	57	7	21	78	10	37	26
20	8	1	43	17	25	36	60	84	40

*<u>1er second membre</u> : 756

<u>Code en égalité</u> :

la solution optimale :

1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0

la valeur de l'heuristique : 6516

la valeur optimale : 6516

<u>Code en inégalité</u> :

la solution optimale :

1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0

la valeur de l'heuristique : 6494

la valeur optimale : 6516

*<u>2ème second membre</u> : 480

<u>Code en égalité</u> :

la solution optimale :

1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1
0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0

la valeur de l'heuristique : 5537

la valeur optimale : 5603

<u>Code en inégalité</u> :

la solution optimale :

1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0

la valeur de l'heuristique : 5502

la valeur optimale : 5606

b) En fin de chapitre IV, nous avons établi un résultat qui permet de déterminer une constante λ_o (théorème 39) tel que le problème (B) soit équivalent à :

$$(B') \quad \left[\begin{array}{ll} \max & (c+\lambda a)x-\lambda b \\ \text{s.c.} & ax \leq b \\ & x \in V \end{array}\right.$$

pour tout $\lambda \geq \lambda_o$ où $\lambda_o \geq \lfloor V(\bar{B}) \rfloor - cx^o+1$ et $x^o \in F(B)$.

Dans le tableau suivant, sont donnés les temps moyens de calcul fournis par cette transformation en considérant les deux cas :

$\lambda_o = \lfloor V(\bar{B}) \rfloor+1$ et $\lambda_o = \lfloor V(\bar{B}) \rfloor-cx^o+1$ notés respectivement t'_1, t''_1.

<u>Remarque</u> :

L'indice de base et les coûts réduits (à une constante près) étant les mêmes pour les problèmes (B) et (B'), la phase 2 de l'algorithme du chapitre IV appliqué au problème (B') est en fait déjà réalisée dans la phase de détermination de λ_o.

N	NP	t'_1	t''_1	$\bar{t}_1$
300	9	0,9	0,14	0,19
400	9	0,1	0,2	0,24
600	9	0,2	0,32	0,30

tableau 3

Il est à noter, que pour les problèmes de 600 variables, deux d'entre eux n'ont pu être résolus avec $\lambda_o = \lfloor V(\bar{B}) \rfloor+1$ qui prenaient des valeurs trop grandes.

A l'examen du tableau 3, nous constatons que les temps de calculs t''_1, t_1 (de même pour t'_1, t_2) sont proches l'un de l'autre et le sont d'autant plus lorsque le nombre de variables augmente, ceci est dû certainement à la taille de λ_o ; ceci permet de conclure qu'il est plus intéressant, pour des problèmes dont la taille de $V(\bar{B})$ n'est pas grande (exemple : $n \leq 400$, a_j, $c_j \in [0,99]$ $j = 1, \ldots, n$), d'appliquer cette transformation plutôt que d'essayer de minimiser la quantité λ_o en déterminant une solution réalisable.

VI.2 - MÉTHODES DE CONTRACTION : ALGORITHMES ET EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

VI.2.1 - Algorithmes :

Dans cette partie, sont exposés les différents algorithmes, issus des méthodes proposées dans les chapitres II et III.

L'ensemble des tests est appliqué au système d'équations du type suivant :

$$\left[\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1, \ldots, m \\ \\ x \in V & \end{array}\right.$$

où les coefficients a_{ij}, b_i $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$ sont tirés au hasard comme dans la partie précédente.

Avant d'aborder ces méthodes, il est nécessaire de résoudre le problème suivant : Etant donnés w_1, w_2 deux entiers naturels, trouver les deux "plus petits" entiers λ_1, λ_2 premiers entre eux tels que :

$$\lambda_1 \geq w_1 \text{ et } \lambda_2 \geq w_2.$$

Notation :

Etant donné $w \in \mathbb{N}$, on utilise les notations suivantes

$w.P$: si w est pair

$w.I$: si w est impair

<u>Algorithme A_1</u> :

<u>But</u> : Etant donnés : $(w_1, w_2) \in \mathbb{N}_*^2$

détermination de deux entiers naturels, premiers entre eux,

tels que : $\lambda_1 \geq w_1$ et $\lambda_2 \geq w_2$

<u>0</u>	w_1, w_2 donnés $u_1 \leftarrow w_1$; $u_2 \leftarrow w_2$		
<u>1</u>	<u>si</u> $w_2.p$ et $w_1.p$	<u>alors</u> $w_1 \leftarrow w_1+1$;	aller en 8
<u>2</u>	<u>si</u> $w_2.p$ et $w_1.I$	<u>alors</u>	aller en 7
<u>3</u>	<u>si</u> $w_2.I$ et $w_1.p$	<u>alors</u>	aller en 8
<u>4</u>	<u>si</u> pgcd $(w_1, w_2) = 1$	<u>alors</u>	aller en 9
		<u>sinon</u>	$w_2 \leftarrow w_2+1$
<u>5</u>	<u>si</u> pgcd $(w_1, w_2) = 1$	<u>alors</u>	aller en 9
		<u>sinon</u>	$w_1 \leftarrow w_1+1$; $w_2 \leftarrow w_2+1$
<u>6</u>	<u>si</u> pgcd $(w_1, w_2) = 1$	<u>alors</u>	aller en 9
		<u>sinon</u>	$w_1 \leftarrow w_1+1$; $w_2 \leftarrow w_2+2$; aller en 4
<u>7</u>	<u>si</u> pgcd $(w_1, w_2) = 1$	<u>alors</u>	aller en 9
		<u>sinon</u>	$w_2 \leftarrow w_2+1$; aller en 4
<u>8</u>	<u>si</u> pgcd $(w_1, w_2) = 1$	<u>alors</u>	aller en 9
		<u>sinon</u>	$w_1 \leftarrow w_1+1$; aller en 4
<u>9</u>	$\lambda_1 \leftarrow w_1$ et $\lambda_2 \leftarrow w_2$; stop.		

<u>Remarques</u> :

1) Tous les couples de la forme (w_1+r+1, w_2+r) ; $r \in \mathbb{N}$ seront considérés, par conséquent, si l'on suppose que $w_1 < w_2$, w_1, w_2 impair, l'algorithme s'achevera nécessairement par la détermination d'un entier r tel que $r+w_2$ est un nombre premier.

2) Lorsque w_1 est très voisin de w_2 $(w_1 < w_2)$, il suffit de prendre le couple (w_2-1, w_2).

Dans la suite de cette partie, sont donnés les quatre algorithmes, justifiés par les théorème 10 (KENDALL-ZIONTS), théorème 17 (amélioration de la méthode de BRADLEY) énoncés au chapitre II, théorème 26 KALISZEWSKI-LIBURA et théorème 30 énoncés dans le chapitre III.

Nous terminons cette partie par une analyse des résultats numériques.

a) L'algorithme A_4 justifié par le théorème 10 (KENDALL-ZIONTS) nécessite l'utilisation des algorithmes A_2 et A_3 suivants :

<u>Algorithme A_2</u> :

<u>*But*</u> : p *étant donné*

recherche des p *plus petits éléments de la suite* (a_i) $i = 1,\dots,n$

(*complexité linéaire en moyenne lorsque* $2^p \leq n$).

<u>0</u> $IG \leftarrow 1$, $ID \leftarrow n$

<u>1</u> $h \leftarrow IG$; $k \leftarrow ID+1$; $r \leftarrow a_n$

<u>2</u> $k \leftarrow k-1$ <u>si</u> $h = k$ <u>alors</u> aller en 6

<u>3</u> <u>si</u> $a_k \geq r$ <u>alors</u> aller en 2

<u>sinon</u> $a_n = a_k$

<u>4</u> $h \leftarrow h+1$ <u>si</u> $h = k$ <u>alors</u> <u>aller</u> en 6

<u>5</u> <u>si</u> $a_h \leq r$ <u>alors</u> aller en 4

<u>sinon</u> $a_k \leftarrow a_h$; aller en 2

<u>6</u> $a_h \leftarrow r$ <u>si</u> $h = p$ <u>alors</u> aller en 9

<u>7</u> <u>si</u> $h = p+1$ <u>alors</u> aller en 9

<u>8</u> <u>si</u> $p > h$ <u>alors</u> $IG \leftarrow h+1$; aller en 1

<u>sinon</u> $ID \leftarrow h-1$; aller en 1

<u>9</u> a_i $i = 1, \dots, p$ sont les plus petits éléments.

Algorithme A_3

But : p *étant donné*

détermination de toutes les valeurs v_ℓ ($\ell = 1,\ldots,2^p$) *prises* *par* $f(x)$, $x \in V$ *dans l'intervalle* $[\max_{x\in V} f(x) - a'_{p+1}, \max_{x\in V} f(x)]$.

où $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j$

et $a'_{p+1} = \max_{i=1,\ldots,p+1} a_i$ ((a_i) $i=1,\ldots,p+1$ *les* $(p+1)$ *plus petits éléments des* (a_i))

0 $\ell \leftarrow 1$; $v_\ell \leftarrow s = \sum_{i=1}^{n} a_i$; $y(j) = 1$; $j = 1, \ldots, p$

1 $j \leftarrow 0$

2 $j \leftarrow j+1$; si $j > p$ alors stop

3 si $y(j) = 0$ alors $y(j) \leftarrow 1$; aller en 2

4 $s \leftarrow s-a_j$; $y(j) = 0$

5 si $j = 1$ alors aller en 7

6 $s \leftarrow s + \sum_{k=1}^{j-1} a_k$

7 $\ell \leftarrow \ell+1$; $v_\ell \leftarrow s$; aller en 1

Remarques :

1) $y(j) = 0 \Rightarrow$ toutes les solutions avec $y(j) = 0$ et $y_k = 1$ $k = j+1, \ldots, n$ ont déjà été explorées.

2) Cet algorithme permet aussi de construire les valeurs prises par $\sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j - b$.

<u>Algorithme A_4</u> : KENDALL-ZIONTS (théorème 10)

<u>*But*</u> : *Etant donnés* : $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$, $i = 1, 2$ $x \in V$

et $p \in \mathbb{N}$

détermination de $(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \in \mathbb{N}_*^2$ *vérifiant les conditions du théorème 10 tel que :*

$\{x \in V \mid f_1(x) = f_2(x) = 0\} = \{x \in V \mid \lambda_1^* f_1(x) + \lambda_2^* f_2(x) = 0\}$.

<u>0</u> Pour $i = 1, 2$, appliquer les algorithmes A_2 et A_3 pour déterminer toutes les valeurs $v_{i\ell}$ ($\ell = 1,\dots,2^p$) prises par $f_i(x)$, $x \in V$, dans l'intervalle $[\max_{x\in X} f_i(x) - a'_{i(p+1)}, \max_{x\in X} f_i(x)]$ ($p = 1$ dans le cas du théorème 9).

<u>1</u> Pour $i = 1, 2$:

<u>si</u> $\lfloor \max_{x\in X} f_i(x)/2 \rfloor < \max_{x\in V} f_i(x) - a'_{i(p+1)}$ <u>alors</u> $SP_i \leftarrow \max f(x) - a'_{i(p+1)}$; aller en 2

<u>sinon</u> $SP_i \leftarrow \lfloor \max_{x\in V} f_i(x)/2 \rfloor$

<u>2</u> $T_{i_\ell} \leftarrow v_{i_\ell} - SP_i$ $i = 1, 2$ $\ell = 1, \dots, 2^p$

<u>3</u> <u>si</u> $(T_{i_\ell} < 0)$ <u>alors</u> $T_{i_\ell} \leftarrow \max_{x\in V} f_i(x)$ $i = 1, 2$

<u>4</u> soit $IF_i = \inf_{\ell=1,\dots,2^p} T_{i_\ell}$; $u_i \leftarrow \ell$ $i = 1, 2$

<u>5</u> $w_1 \leftarrow SP_1 + IF_1 + 1$, $w_2 \leftarrow SP_2 + IF_2 + 1$

appliquer l'algorithme A_1 pour déterminer λ_1, λ_2

<u>6</u> <u>si</u> $\exists\, \ell \in \{1, \dots, 2^p\}$: λ_1 divise $v_{2\ell}$ <u>alors</u> $T_{1u_1} \leftarrow \max_{x\in X} f_2(x)$; aller en 2

<u>7</u> <u>si</u> $\exists\, \ell \in \{1, \dots, 2^p\}$: λ_2 divise $v_{1\ell}$ <u>alors</u> $T_{2u_2} \leftarrow \max_{x\in X} f_1(x)$; aller en 2

<u>8</u> $\lambda_1^* \leftarrow \lambda_1$, $\lambda_2^* \leftarrow \lambda_2$; stop

Algorithme A_5 :

But : *Recherche des* k (k *entier*) *meilleures valeurs* v^j ($v^j \leq v^{j+1}$) *du problème suivant* :

$$(B) \quad \left[\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & ax \leq b \\ & x \in V \end{array} \right.$$

tels que $v(B) - v^1 \leq$ ECART (ECART *entier donné*).

Les seules modifications, apportées au code construit par FAYARD-PLATEAU [15], concernent la gestion d'une liste de "meilleurs" minorants de v(B) au lieu de l'unique $\underline{v}(B)$ (meilleur minorant de v(B) connu au cours de l'algorithme).

A une itération donnée de l'algorithme, en notant cette liste

$$v^1(B),\ v^2(B),\ \ldots,\ v^k(B)$$

où $v^i(B) < v^{i+1}(B)$ $i = 1, \ldots, k-1$ et $v^k(B) = \underline{v}(B)$

La mise à jour de la liste est réalisée après chaque augmentation de $\underline{v}(B)$ de sorte que

$$\underline{v}(B) - v^1(B) \leq \text{ECART où ECART est un entier donné.}$$

La réduction de la taille du problème (B) est faite en utilisant la borne $(\underline{v}(B) - \text{ECART})$.

b) L'algorithme améliorant celui de BRADLEY est le suivant :

Algorithme A_6 :

But : *Etant données* $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ $i = 1, 2,$ $x \in V$

détermination de $(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \in \mathbb{N}_*^2$ *vérifiant les conditions du théorème 17 tel que :*

$\{x \in V \mid f_1(x) = f_2(x) = 0\} = \{x \in V \mid \lambda_1^* f_1(x) + \lambda_2^* f_2(x) = 0\}$

Soient : v_{1j} $j = 1, \ldots, k_1$ les k_1 meilleures valeurs de (SP_1)

v_{2j} $j = 1, \ldots, k_2$ les k_2 meilleures valeurs de (IF_2)

déterminées par l'algorithme A_5.

0 $j \leftarrow 1$

1 $z_1 \leftarrow v_{1k_1}$; $z_2 \leftarrow v_{2k_2}$

2 si $j < k_1$ alors $z_1 \leftarrow v_{1j}$

3 si $j < k_2$ alors $z_2 \leftarrow v_{2j}$

4 $w_1 \leftarrow \max(z_1, z_2) + 1$; $w_2 \leftarrow \lambda_2$

appliquer l'algorithme A_1 pour déterminer λ_1, λ_2

5 si $j+1 > k_2$ alors aller en 7

6 si $\exists\, i \in \{j+1, \ldots, k_2\}$: λ_1 divise v_{2i}

alors $j \leftarrow j+1$; aller en 1

7 si $j+1 > k_1$ alors aller en 9

8 si $\exists\, i \in \{j+1, \ldots, k_1\}$: λ_1 divise v_{1i}

alors $j \leftarrow j+1$; aller en 1

9 $\lambda_1^* \leftarrow \lambda_1$, $\lambda_2^* \leftarrow \lambda_2$; stop

Remarque :

On retrouve la méthode de BRADLEY (théorème 16) en posant

$k_i = 1$ $i = 1, 2.$

d) Les algorithmes, justifiés par les théorèmes 26 et 30 énoncés dans le chapitre III sont les suivants :

Algorithme A_7 : KALISZEWSKI-LIBURA

But : Etant données $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \quad i = 1, \ldots, m \quad x \in V$

détermination de $\lambda_i^* \in \mathbb{N}^*$ $i = 1, \ldots, m$ ***vérifiant les conditions*** *du théorème 26 tel que :*

$$\{x \in V \mid f_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, m\} = \{x \in V \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0\}$$

0 $\alpha_1 \leftarrow 1 \; ; \; k \leftarrow 1$

1 si $k \geq m$ alors aller en 4

2 $w_1 \leftarrow \max_{x \in V} f_{k+1}(x)+1 ; w_2 \leftarrow \prod_{i=1}^{k} \alpha_i$

soit $r \in \mathbb{N}$ tel que pgcd $(w_1 + r, w_2) = 1$

3 $k \leftarrow k+1, \; \alpha_k \leftarrow w_1 + r$; aller en 1

4 $\lambda_i^* \leftarrow \prod_{j=1}^{m} \alpha_j/\alpha_i \quad i = 1, \ldots, m$; stop

Remarque :

L'algorithme, justifié par le théorème 27 (chapitre III) qui est une connexion entre la méthode de KENDALL-ZIONTS et KALISZEWSKI-LIBURA, peut être déduit facilement des algorithmes A_4 et A_7.

∎

Algorithme A_8 : (théorème 30)

But : Etant données : $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - b_i \quad i = 1, 2 \quad x \in V.$

détermination de $\lambda_i^* \in \mathbb{N}_*$ $i = 1, \ldots, m$ *vérifiant les conditions du théorème 30 tel que :*

$$\{x \in V \mid f_i(x) = 0 \;\; i = 1, \ldots, m\} = \{x \in V \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) = 0\}$$

0 $\alpha_1 \leftarrow 1,\ k \leftarrow 1$

1 si $k \geq m$ alors aller en 3

2 $\alpha_{k+1} \leftarrow \max(v(MAX(f_{k+1}, f_k, \alpha_k)), - v(MIN(f_{k+1}, f_k, \alpha_k)))+1.$

$k \leftarrow k+1$; aller en 1

3 $\lambda_1^* \leftarrow \prod_{j=2}^{m} \alpha_j$; $\lambda_i^* \leftarrow \alpha_1 \prod_{j=i+1}^{m} \alpha_j \quad i = 2, \ldots, m,$ stop

VI.2.2 - Expériences numériques

Les problèmes testés proviennent des problèmes tirés au hasard, définis au début de cette partie.

Afin d'établir une comparaison entre la méthode d'ANTHONISSE (théorème 6) qui permet de déterminer des multiplicateurs admissibles d'une manière très rapide ; et celles de KENDALL-ZIONTS (théorème 10) BRADLEY (théorème 16) et l'algorithme A_6 avec $k_1 = k_2 = 10$ (théorème 17), nous avons considéré des problèmes de 10 à 90 variables à deux équations.

Dans le tableau 3 sont indiquées les diminutions en pourcentage de $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ sur les multiplicateurs classiques d'ANTHONISSE, pour chacune des méthodes citées ci-dessous.

	KENDALL-ZIONTS	BRADLEY	Algorithme A_6
%	10 %	30 %	35 %

tableau 3

Une analyse plus fine des résultats numériques permet d'aboutir aux diverses conclusions suivantes :

- D'après ce tableau on remarque que l'algorithme A_6 diminue le plus, la taille des multiplicateurs, donc il est naturel de considérer un grand nombre k de meilleures valeurs des problèmes (SP_1) et (IF_2) (nécessaire pour cette méthode).

Toutefois il est important de noter que :

- Les calculs supplémentaires nécessaires à l'obtention de ces k meilleures valeurs augment la durée globale du temps de calcul (environ 20 % par rapport à la méthode de BRADLEY pour n = 90, et k = 10).

- La méthode de KENDALL-ZIONTS reste la plus performante lorsque les quantités $\inf(-\min_{x \in V} f_i(x), \max_{x \in V} f_i(x))$ i = 1, 2 ne sont pas grandes (<10), et est moins coûteuse que les deux précédentes.

Ceci était prévisible théoriquement, puisque la recherche d'un ensemble, qui contient S_{12}, est plus difficile que celle d'un ensemble incluant $S_1 \times S_2$ et l'est encore plus lorsque la méthode cherche à exclure des points de S_{12}.
Cette dernière remarque reste vraie pour les méthodes de G-contraction, puisque la méthode de KALISZEWSKI-LIBURA (et les méthodes améliorantes thérorème 27, théorème 29) est plus performante que l'algorithme A_8 lorsque les quantités $\inf(-\min_{x \in V} f_i(x), \max_{x \in V} f_i(x))$ i = 1, ..., m sont faibles.

Comme nous l'avions indiqué, en fin du chapitre III, il est difficile de réaliser une étude comparative systèmatique des méthodes proposées aux chapitres II et III. Pour conclure cette étude numérique, nous nous sommes limités à une comparaison numérique entre les algorithmes A_i i = 4, 6, 7, 8, sur quelques exemples de 20 à 30 variables.

<u>Exemples</u> :

L'algorithme A_6 appliqué aux deux exemples ci-dessous, aboutit au résultats suivants :

a) <u>nombres de variables</u> : 20 (m = 4)

A_1 =

29	24	6	24	46	22	26	30	31	16
24	35	25	3	30	40	1	25	31	12

A_2 =

24	31	13	18	43	19	5	27	2	8
40	1	20	2	30	19	14	10	31	17

A_3 =

41	19	47	26	44	48	9	4	40	25
27	37	8	23	23	31	4	50	27	25

A_4 =

2	23	14	39	1	32	10	41	42	50
19	39	25	37	20	29	20	32	37	33

les seconds membres :

$b_1 = 254$, $b_2 = 190$, $b_3 = 303$ et $b_4 = 254$

L'algorithme A_5 permet de déterminer

- l'ensemble des k meilleures valeurs du problème (k = 10) :

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} \max\ (A_2x - b_2) \\ \text{s.c. } A_1x \leq b_1 - 1 \\ \quad x \in V \end{array}\right.$$

$E_1 = \{89, 90, 91, 92, 94, 95\}$

- l'ensemble des k (k = 10) meilleures valeurs du problème :

$$(2) \quad \left[\begin{array}{l} -\min(A_2x - b_2) \\ \text{s.c. } A_1x \geq b_1+1 \\ \quad x \in V \end{array}\right.$$

$F_1 = \{72, 73, 74, 75, 76, 78\}$

Ceci permet de déterminer le multiplicateur admissible relatif aux deux premières équations en appliquant l'algorithme A_6 : $(\mu_1, \mu_2) = (93, 1)$.

Pour contracter le système :

$$\begin{cases} (\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2)\, x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \\ A_3\, x = b_3 \\ x \in V \end{cases}$$

On détermine les ensembles (notés E_2, F_2) des k meilleures valeurs des problèmes (1) et (2) dans lesquels on remplace A_2x-b_2 par A_3x-b_3 et A_1x-b_1 par $(\mu_1A_1+\mu_2A_2)x-\mu_1b_1-\mu_2b_2$.

On trouve :

$E_2 = \{103, 104, 105, 107, 108, 109\}$

$F_2 = \{124, 125, 128, 129\}$

d'où le multiplicateur admissible : (126,1)

De même, on détermine E_3, F_3 pour contracter la nouvelle équation et la dernière du système :

$E_3 = \{167, 171, 173\}$

$F_3 = \{105, 109, 111\}$

le multiplicateur admissible : (168, 1)

d'où finalement les coefficients de l'équation

57605018	47906399	12094838	47632407	91474307	43720016	51291586
59630969	61076442	31671578	48098251	68929263	49640329	5952109
59697644	79152389	2265668	49435712	61688125	23987577	

second membre : 504103574

b) <u>nombre de variables</u> : 30 (m = 4)

A_1 =

29	24	6	24	46	22	26	30	31	16
24	35	25	3	30	40	1	25	31	12
24	31	13	18	43	19	5	27	2	8

A_2 =

40	1	10	2	30	19	14	10	31	17
41	19	47	26	44	48	9	4	40	25
27	37	8	23	23	31	4	50	27	25

A_3 =

2	23	14	39	1	32	10	41	42	50
19	39	25	37	20	29	20	32	37	33
37	22	38	27	29	26	20	26	31	14

A_4 =

40	5	47	23	48	34	15	22	19	16
24	27	49	7	49	31	14	44	31	22
23	43	3	14	15	41	18	44	3	48

les seconds membres :

$b_1 = 371$, $b_2 = 361$, $b_3 = 394$ et $b_4 = 425$.

Le même schéma, appliqué dans le cas a), permet de déterminer les ensembles

E_i, F_i $i = 1, 2, 3$ et les multiplicateurs admissibles associés :

$E_1 = \{229, 230, 234, 235\}$

$F_1 = \{129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136\}$

le multiplicateur admissible : (231, 1)

$E_2 = \{246, 247, 248, 249, 250, 252\}$

$F_2 = \{145, 146, 147, 148, 149, 151\}$

le multiplicateur admissible : (251, 1)

$E_3 = \{197, 200, 201, 203, 204\}$

$F_3 = \{154, 155, 156, 157, 160, 161\}$

le multiplicateur admissible : (198, 1)

d'où les coefficients de l'équation équivalente :

334915258	275579969	69878207	75632853	529582134	253515868
299183955	344912260	357436351	184538590	277567116	402760341
289346755	35740195	346597861	461600794	11931494	287211122
357882655	139011862	276874907	357730603	149648205	207792698
494799045	219670349	57603960	312456518	24308463	93087174

le second membre : 6116187703

les algorithmes $A_i (i=4,7,8)$ appliqués aux deux exemples précédents aboutissent à une équation dont les coefficients sont strictement supérieurs à $2^{31}-1$.

VI.3 - ALGORITHME DU CHAPITRE V ET EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

Le code Fortran de l'algorithme présenté dans le chapitre V a été testé sur un ensemble de huit problèmes de 15 variables et 15 contraintes issus de [33] de la forme :

$$\begin{cases} \max cx \\ \text{s.c } Ax = b \\ \quad x \in V \end{cases}$$

où $A = (a_{ij}), a_{ij} \in \{0, 1\}, (i, j) \in \{1, \dots, 15\}$.

Les huit exemples considérés différent par leur second membre b ; le vecteur fonction économique est une ligne dont toutes les composantes sont égales à 1. Les coefficients de la matrice A sont 0 ou 1 à raison de huit 1 par colonne :

Le tableau suivant fournit les coordonnées de ces éléments unités dans la matrice A.

Colonnes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
lignes i	3	4	1	1	2	1	2	3	4	5	11	12	13	14	15
	4	5	5	2	3	6	7	8	9	10	16	17	18	19	20
	7	6	7	8	6	13	14	11	11	12	23	24	21	21	22
	10	8	9	10	9	14	15	15	12	13	24	25	25	22	23
	21	22	23	24	25	17	16	17	18	16	27	26	27	28	26
	26	27	28	29	30	20	18	19	20	19	30	28	29	30	29
	31	32	33	34	35	31	32	33	34	35	31	32	33	34	35
	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

les huit seconds membres notés b^i $i = 1, \ldots, 8$ sont les suivants :

b^1 :	3	4	4	5	5	5	6	4	3	5	3	6	4	3	4
b^2 :	1	1	2	2	2	3	3	3	3	2	4	4	3	3	4
b^3 :	1	2	2	2	3	3	3	2	2	2	3	3	3	4	5
b^4 :	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	4
b^5 :	7	7	6	6	6	5	5	5	5	6	4	4	5	5	4
b^6 :	7	6	6	6	5	5	5	6	6	6	5	5	5	4	3
b^7 :	5	4	4	3	3	3	2	4	5	3	5	2	4	5	4
b^8 :	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4

Le tableau 4 donne pour chaque problème, le nombre total de contraintes (noté NC1) combinées par la méthode de BRADLEY (théorème 16) en fin d'exécution de l'algorithme proposé dans le chapitre V, et le nombre limite (noté NC2) au delà duquel il n'est plus possible de réaliser une combinaison sans mettre en jeu une procédure informatique spécifique ; ce nombre limite est dû à la représentation des entiers sur l'ordinateur CII HB IRIS 80 limités supérieurement par $2^{31}-1$.
Il est à noter que compte tenu des valeurs de la colonne NC2, aucune des méthodes classiques n'aurait abouti en se donnant comme contrainte de représenter des entiers sur un seul mot machine

Problème	NC1	NC2	Solution Optimale
1	6	9	1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0
2	2	10	1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
3	6	10	1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
4	4	9	0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
5	4	9	0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1
6	7	9	0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1
7	8	9	0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1
8	0	10	1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Tableau 4

NB :

Pour information les coefficients obtenus en fin d'algorithme sont les suivants pour les problèmes :

Pb5 :

a =

11	111	1322	14542	121	1332	14552	1432	14652	15863
1442	14662	15873	15973	15983					

b = 96022

Pb6 :

a =

14374835	14215135	1421116	1594147	159943	15795950	15649359	15636250	15809281
175674	1581058	1434467	14230886	14390808	15994			

b = 80488862

Pb7 :

a =

4303883	25343310	472465	29064885	29529258	3833057	25822245	25815774	3839692
29537349	29058432	479118	25351419	4312156	8292			

b = 135585421.

ANNEXE

Cette annexe est divisée en deux parties :

. La première partie est consacrée à un rappel des méthodes proposées par Weinberg, pour déterminer le spectre d'une et de deux formes linéaires, puis nous généralisons les résultats obtenus pour déterminer le spectre de m formes linéaires ($m \geq 3$).

. Les algorithmes, justifiés par les théorèmes 2, 3, 33, 34 sont proposés dans la dernière partie.

RAPPEL

Etant donnés :

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in X_j = \{x_j^1, \ldots, x_j^{n_j}\} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\text{où } n_j \in \mathbb{N}_* \quad (a_{ij}, x_j^k) \in \mathbb{Z}^2$$

Le spectre du m-uplet $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ noté $S_{12\ldots m}$ est l'image de l'ensemble X par l'application $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

I - CALCUL DU SPECTRE DE m FORMES LINÉAIRES

Les méthodes, proposées par Weinberg pour déterminer le spectre d'une et de deux formes linéaires, sont exposées dans les deux premiers paragraphes, une nouvelle méthode, déduite des précédentes pour déterminer le spectre de m formes linéaires ($m \geq 3$), est décrite dans le dernier paragraphe.

I.1 - Calcul du spectre d'une forme linéaire

Dans ce paragraphe, nous supposons que $m = 1$.

Le spectre de f_1, noté S_1, est déterminé de la façon suivante :

On considère le nombre ϕ composé de 1 et de 0 défini comme suit :

$$\text{la } k^{\text{ème}} \text{ place dans } \phi \text{ est égale à } 1 \iff k \in S_1$$

Le nombre ϕ est déterminé à partir des quantités Φ_j (j = 1, ..., n) données :

$$\phi_j = \begin{cases} 10^{a_{1j}x_j^1} + 10^{a_{1j}x_j^2} + \ldots + 10^{a_{1j}x_j^{n_j}} & \text{si } a_{1j} \neq 0 \\ 1 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$

et $\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_n$

où l'opération $\oplus$ est définie par :

si $\quad \alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_r \, 10^r$

$\quad \beta = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_r \, 10^r \qquad B_r, C_r \in \{0, 1\} \qquad \forall r$

alors $\alpha \oplus \beta = \sum_{-\infty}^{+\infty} \pi_k \, 10^k$

où $\quad \pi_k = \sigma_{-\infty}^{+\infty} B_{k-r} \, C_r \qquad$ (σ : sommation booléenne)

<u>Exemple</u> [32]

$f_1(x) = x_1 + 2x_2$

$X_1 = \{3, 0, -1\}$, $X_2 = \{1, 0, -2\}$

alors $\phi_1 = 1001{,}1$ et $\phi_2 = 101{,}0001$ et :

$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 = 1001{,}1 \ 0 \ 101{,}0001$$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ 1001\ 1 \\ 10011 \\ \hline 101111{,}10011 \end{array}$$

d'où $S_1 = \{5, 3, 2, 1, 0, -1, -4, -5\}$.

I.2 - Calcul du spectre de deux formes linéaires

Connaissant le spectre de f_1 et celui de f_2, le résultat suivant permet de déterminer le spectre de (f_1, f_2).

Théorème 42 [32] :

Etant donné :

$$s(x) = f_1(x) + \lambda\, f_2(x)$$

où $\lambda \geq \max_{x\in X} f_1(x) - \min_{x\in X} f_1(x) + 1,\ \lambda \in \mathbb{N}$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(z_1, z_2) \in S_{12}$ *est que :*

$z_i \in S_i$ $(i = 1, 2)$ *et* $z_1 + \lambda z_2 \in S$ *où* S *est le spectre de* s.

Le résultat suivant est meilleur que le précédent, puisqu'il suffit de connaître les extrémats de l'application f_1 et le spectre S de l'application définie dans le théorème 42, pour calculer le spectre S_{12}

Théorème 43 [32] :

Les deux conditions suivantes sont équivalentes

i) $z_i \in S_i$ $(i = 1, 2)$ *et* $z_1 + \lambda z_2 \in S$

ii) $\min_{x\in X} f_1(x) \leq z_1 \leq \max_{x\in X} f_1(x)$

$z_1 + \lambda z_2 \in S$, z_1, z_2 *entiers.*

Exemple [32] :

Etant donnés :

$$f_1(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$f_2(x) = x_1 - x_2 - x_4$$

$$X_1 = X_2 = \{0, 1\},\ X_3 = \{-1, 0, 1\} \text{ et } x_4 = \{-1, 0\}$$

$\max_{x\in X} f_1(x) = 3$

$\min_{x\in X} f_1(x) = -2$

d'où : $\lambda = 6$

$$s(x) = 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 6x_4$$

et $S = \{-5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

Soit $z = 5 \in S$, déterminons un entier z_2 tel que :

$$(z - \min_{x \in X} f_1(x))/\lambda - 1 < z_2 \leq (z - \min_{x \in X} f_1(x))/\lambda$$

i.e. $\quad 7/6 - 1 < z_2 \leq 7/6 \Rightarrow z_2 = 1$

d'après le théorème 43 : $(z_1, z_2) = (-1, 1) \in S_{12}$

où $\quad z_1 = z - 6z_2$.

I.3 - Calcul du spectre de m-formes linéaires ($m \geq 3$)

Dans ce paragraphe, nous donnons une généralisation des résultats établis par Weinberg (cas m quelconque) dans les deux paragraphes précédents.

Théorème 44 :

Etant donné :

$$s(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) + \lambda^2 f_3(x) + \ldots + \lambda^{m-1} f_m(x)$$

où $\quad \lambda \geq \max_{i=1,\ldots,m-1} (\max_{x \in X} f_i(x) - \min_{x \in X} f_i(x)) + 1, \ \lambda \in \mathbb{N}$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(z_1, z_2, \ldots, z_m) \in S_{12\ldots m}$ *est* :

$$z_i \in S_i \ (i = 1, \ldots, m) \text{ et } z_1 + \lambda z_2 + \ldots + \lambda^{m-1} z_m \in S$$

où S *est le spectre de* s.

Démonstration :

Soient $(z_1, z_2, \ldots, z_m) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m$ et $x^o \in X$ tels que :

(*) $\quad f_1(x^o) + \lambda f_2(x^o) + \ldots + \lambda^{m-1} f_m(x^o) = z_1 + z_2 + \ldots + \lambda^{m-1} z_m$.

Soient $y^i \in X$ ($i = 1, \ldots, m$) tels que :

$$f_i(y^i) = z_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

Pour prouver que $(z_1, z_2, \ldots, z_m) \in S_{12\ldots m}$, il suffit de montrer que $y^i = x^o$ $i = 1, \ldots, m$.

D'après la relation (*) :

$$|f_1(x^o)-f_1(y^1)|=\lambda|(f_2(y^2)-f_2(x^o))+\lambda(f_3(y^3)-f_3(x^o))+\ldots+\lambda^{m-2}(f_m(y^m)-f_m(x^o))|$$

Si le terme à droite est non nul cela implique que :

$$|f_1(x^o)-f_1(y^1)| \geq \lambda$$

ce qui est absurde d'après le choix de λ ; c'est à dire que : $f_1(y^1) = f_1(x^o)$, on répéte ce procédé pour aboutir au résultat.

∎

<u>Exemple</u> :

Etant donnés :

$$f_1(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$f_2(x) = x_1 - x_2 - x_4$$

$$f_3(x) = x_2 - x_3 + x_4$$

$$X_1 = X_2 = \{0, 1\},\ X_3 = \{-1, 0, 1\} \text{ et } X_4 = \{-1, 0\}$$

La méthode,proposée au premier paragraphe,permet de déterminer les spectres S_i (i = 1, 2, 3) on trouve :

$$S_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$S_2 = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$S_3 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

d'où : $\lambda = 6$

$$s(x) = 5x_1 + 32x_2 - 37x_3 + 30x_4.$$

$$S = \{-67, -62, -37, -35, -32, -30, -25, -5, 0, 2, 5, 7, 12, 32, 37, 39, 42, 44, 69, 74\}$$

alors (-2, -1, -2) n'appartient pas à S_{123} puisque $-80 \notin S$ par contre $(-1, 0, -1) \in S_{123}$ puisque $-37 \in S$.

Ce résultat n'est applicable que lorsque λ^{m-1} est de taille raisonnable, le résultat ci-dessous permet de remédier à ce problème.

<u>Théorème 45</u> :

Etant donnés :

$$h_1(x) = f_1(x) + \lambda_1 f_2(x) + \ldots + \lambda_i^{i_o-1} f_{i_o}(x)$$

$$h_2(x) = f_{i_o+1}(x) + \lambda_2 f_{i_o+2}(x) + \ldots + \lambda_2^{m-i_o-1} f_m(x)$$

où :

$$\lambda_1 \geq \max_{i=1,\ldots,i_o-1} (\max_{x\in X} f_i(x) - \min_{x\in X} f_i(x)) + 1, \ \lambda_1 \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_2 \geq \max_{i=i_o+1,\ldots,m-1} (\max_{x\in X} f_i(x) - \min_{x\in X} f_i(x)) + 1, \ \lambda_2 \in \mathbb{N}$$

S', S'' *spectre de* h_1, h_2 *respectivement et*

S *le spectre de* $s(x) = h_1(x) + \lambda_3 h_2(x)$, où $\lambda_3 \geq \max_{x\in X} h_1(x) - \min_{x\in X} h_1(x) + 1$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *appartienne à* $S_{12\ldots m}$ *est que :*

$$z_i \in S_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

$$t_1 = z_1 + \lambda_1 z_2 + \ldots + \lambda_1^{i_o-1} z_{i_o} \in S'$$

$$t_2 = z_{i_o+1} + \lambda_2 z_{i_o+2} + \ldots + \lambda_2^{m-i_o-1} z_m \in S''$$

et $\quad t_1 + \lambda_3 t_2 \in S.$

<u>Démonstration</u> :

La condition est nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

D'après le résultat précédent, on déduit que :

$$(z_1, z_2, \ldots, z_{i_o}) \in S_{12\ldots i_o}$$

et $\quad (z_{i_o+1}, \ldots, z_m) \in S_{(i_o+1)\ldots m}$

Soit donc $(y^1, y^2) \in X^2$ tel que :

$$z_i = f_i(y^1) \quad i = 1, \ldots, i_o$$

$$z_j = f_j(y^2) \quad j = (i_o+1), \ldots, m$$

$t_1 + \lambda_3 t_2 \in S \iff \exists\, y^3 \in X$ tel que :

$$f_1(y^1)+\lambda_1 f_2(y^1)+\ldots+\lambda_1^{i_o-1} f_{i_o}(y^1)+ {}_3(f_{i_o+1}(y^2)+\lambda_2 f_{i_o+2}(y^2)+\ldots+\lambda_2^{m-i_o-1} f_m(y^2)) =$$

$$f_1(y^3)+\lambda_1 f_2(y^3)+\ldots+\lambda_1^{i_o-1} f_{i_o}(y^3)+\lambda_3(f_{i_o}(y^3)+\lambda_2 f_{i_o+2}(y^3)+\ldots+\lambda_2^{m-i_o-1} f_m(y^3)$$

D'après le choix de λ_3 cette dernière équation s'écrit :

$$\begin{cases}(f_1(y^1)-f_1(y^3)+\lambda_1(f_2(y^1)-f_2(y^3))+\ldots+\lambda_1^{i_o-1}(f_{i_o}(y^1)-f_{i_o}(y^3)) = 0 \\ (f_{i_o+1}(y^1)-f_{i_o+1}(y^3))+\lambda_2(f_{i_o+2}(y^1)-f_{i_o+2}(y^3))+\ldots+\lambda_2^{m-i_o-1}(f_m(y^1)-f_m(y^3))=0\end{cases}$$

D'après le choix de λ_1, λ_2 et comme précédemment, on déduit des deux équations du système que :

$$f_i(y^1) = f_i(y^3) \qquad i = 1, \ldots, i_o$$

$$f_i(y^2) = f_i(y^3) \qquad i = i_o+1, \ldots, m$$

C'est à dire que finalement $(z_1, \ldots, z_m) \in S_{12\ldots m}$.

∎

Remarque :

Dans le dernier exemple, il fallait déterminer le spectre de $f_1+6f_2+36f_3$ en utilisant ce dernier résultat, on détermine le spectre de $f_1+6f_2+24f_3$.

II - DÉTERMINATION DES MULTIPLICATEURS ADMISSIBLES

L'algorithme suivant, justifié par les théorèmes 2, 3, 33, 34, permet de déterminer des multiplicateurs admissibles λ_i^* $i = 1, \ldots, m$.

L'ensemble S_o ci-dessous peut être $S_1 \times S_2 \times\ldots\times S_m$ ou $S_{12\ldots m}$.

Algorithme

0 Initialisation $k \leftarrow 1$ et $\lambda_1 \leftarrow 1$

1 Si $k > m$ alors aller en 4

Soit λ_k un entier non nul

Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i = 0 \iff z_i = 0 \quad i = 1,\ldots,k, \ \forall (z_1,\ldots,z_k,z_{k+1},\ldots,z_m) \in S_o$

alors aller en 3

2 Si il existe $i_o \in \{k+1,\ldots,m\}$: $z_{i_o} \neq 0$ alors aller en 3

sinon changer λ_k; aller en 1

3 $k \leftarrow k+1$ aller en 1

4 $\lambda_i^* \leftarrow \lambda_i$ $i = 1, \ldots, m$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANTHONISSE J.M. " *A note on equivalent systems of linear diophantine equations*", Operations Research 17 (1973) 167-177.

[2] BALAS E. "*An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables*", Operations Research 13 (4) (1965) 517-546.

[3] BRADLEY G.H. "*Transformation of integer programs to knapsack problems*" Discrete Mathematics 1 (1971) 29-45.

[4] BRADLEY G.H. "*Heuristic solution methods and transformed integer linear programming problems*" YALE Rept n° 43 March (1971)

[5] BRADLEY G.H. "*Equivalent integer programs and canonical problems*" Management Sciences 17 (1971) 354-366.

[6] BRADLEY G.H. et WAHI P.N. "*An algorithm for integer linear programming : a combined algebraic and enumeration approach*" Operations Research 21 (1973) 45-60.

[7] BRADLEY G.H. "*Algorithms for Hermite and Smith normal matrices and linear diophantine equations*" Math. Comp. 25 (1972) 897-908.

[8] BRADLEY G.H. , HAMMER P.L. et WOLSEY L. "*Coefficient reduction for inequalities in 0-1 variables*" Mathematical programming 7 (1974) 263-282.

[9] CHVATAL V. et HAMMER P.L. "*Aggregation of inequalities in integer programming*", Annals of Discrete Mathematics 1 (1977) 145-162.

[10] CHVATAL V. et HAMMER P.L. "*Set-packing problems and threshold graphs*" Departement of Combinatories and optimisation research report CORR 73-21 august (1973).

[11] DICKSON L.E. "*History of the theory of numbers*" Vol II Chelsea New-York (1952).

[12] ELMAGHRABY S.E. et WIG M.K. "*On the treatement of stock cutting problems as diophantine programs*" NORTH Carolina State University and Corning Glass Research Center Report n° 61 May 11 (1970)

[13] FAYARD D. et PLATEAU G. *"Résolution d'un problème d'affectation"* Bulletin de la Direction des Etudes de Recherches EDF Série C(1) (1973) 83-108.

[14] FAYARD D. et PLATEAU G. *"Contribution à la résolution des programmes mathématiques en nombres entiers"*, Thèse de doctorat d'état, Université des Sciences et Techniques de Lille I (1979).

[15] FAYARD D. et PLATEAU G. *"An algorithm for the solution of the 0-1 knapsack problem"*, Computing 28 (1982) 269-287.

[16] FIOROT J. Ch. *"Structure d'ensembles de points entiers"*, Thèse de Doctorat de Spécialité, Université des Sciences et Techniques de Lille I (1971).

[17] GARFINKEL R.S. - NEMHAUSER G.L. *"Integer programming"*, Wiley-Inter-Science Wiley I (Ed) New-York, London Sydney - Toronto (1972).

[18] GLOVER F. *"New results on equivalents integer programming formulations"* Mathematical Programming 8 (1975) 84-90.

[19] GLOVER F. et WOOLSEY R.E. *"Aggregation diophantine constraints"* Zeitschrift für Operations Research 16 (1972) 1-10.

[20] KALISZEWSKI I. et LIBURA M. *"Constraints aggregation in integer programming"* Report MPD 5-77, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Varsovie (Pologne) (1977).

[21] KANNAN R. *"Polynomial-time aggregation of integer programming problems"* I.A.C.M. 30, 1 (1983) 133-145.

[22] KENDALL K.E. et ZIONTS S. *"Solving integer programming problems by aggregation constraints"* Operations Research 25 (2) (1977) 346-351.

[23] MATHEWS G.B. *"On de partition of numbers"*, proceedings of the London Mathematical Society 28 (1896) 486-490.

[24] MEYER R.R. *"Equivalent constraints for discrete sets"*, Discrete applied mathematics Vol 1 n° 1, 2 (1979) 31-50.

[25] PADBERG M.W. "*Equivalent knapsack-type formulations of bounded integer linear programs : an alternative approach*", Naval Research Logistic Quarterly 19 (1972) 699-708.

[26] PAPADIMITRIOU C.H. "*On the complexity of integer programming*", I.A.C.M. 28 (4) (1981) 765-768.

[27] PIPER C.J. et ZOLTNER S.A.A. "*Some Easy postoptimality analysis for 0-1 programming*" "Management Science Vol 22 n° 7 (1976) 759-765.

[28] ROSENBERG I.G. "*Aggregation of equations in integer programming*" Discrete Mathematics 10 (1974) 325-341.

[29] SAATY T.L. "*Optimization in integer and related extremal problems*", Mc Graw Hill (1970)

[30] SALKIN H.M. "*Integer programming*" ADDISON-WESLEY Publishing Company (1975)

[31] SMITH H.J.S. "*On systems of linear indeterminate equations and congruences*" Philosophical Transactions CLI (1861) 293-326.

[32] WEINBERG F. "*A necessary and sufficient condition for aggregation of linear diophantine equations*" IFOR-Studienberichte Heft 4 (1976).

[33] WOOLSEY R.E. et TRAUTH J.R. "*Integer linear programming : a study in computational efficiency*" Management Sciences Vol 15 n° 9 (1969).

[34] ZIONTS S. "*Linear and integer programming*" Prentice Hall (1974).

RÉSUMÉ :

Etant données m fonctions f_i $i = 1,\dots,m$, définies sur un ensemble arbitraire X de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs entières, les méthodes qui consistent à remplacer les m équations diophantiennes $f_i(x) = 0 \quad i = 1,\dots,m,\ x \in X$ (1) par une seule équation $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}_*,\ x \in X$ (2) dont les solutions sont identiques à celles de (1) se divisent en deux classes (chapitre 1) :

a) Les méthodes de 2-contraction : l'équation (2) est construite par une cascade de combinaisons linéaires des m équations prises deux à deux. Une étude géométrique a permis de faire une comparaison globale de ces méthodes et d'améliorer les meilleures d'entres-elles (chapitre 2).

b) Les méthodes de G-contraction, pour lesquelles les entiers λ_i, $i = 1,\dots,m$, sont déterminés globalement par la construction d'une matrice C de $\mathbb{Z}(m,m-1)$ qui satisfait les deux conditions :

- les colonnes de C forment une base de l'espace $\{z \in \mathbb{Z}^m \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = 0\}$
- l'ensemble $\{(k,x) \in \mathbb{Z}_*^{m-1} \times X \mid f_i(x) = C_i k \quad i = 1, \dots, m\}$ est vide.

De nouveaux types de matrices C sont proposés, permettant d'améliorer les résultats obtenus dans la littérature (chapitre 3). Les chapitres 4, 5 et 6 sont consacrés aux études algorithmiques basées sur les résultats des chapitres précédents et aux différentes expériences numériques réalisées sur CII-HB IRIS 80.

MOTS CLES

Equations diophantiennes - Optimisation en nombres entiers - Knapsack à contrainte d'égalité -